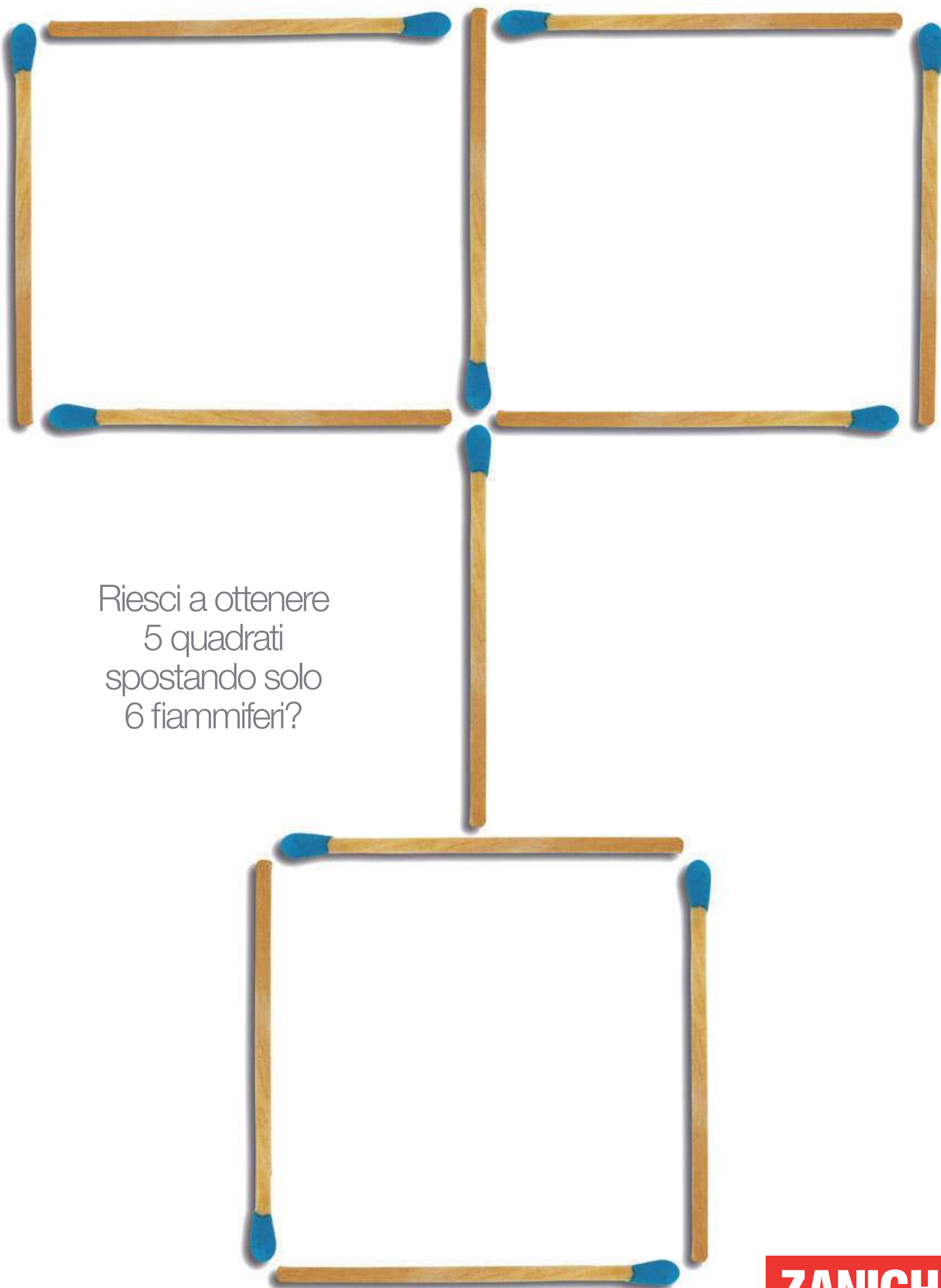
Massimo Bergamini
Anna Trifone   Graziella Barozzi

5 Matematica.blu 2.0



ZANICHELLI

INTEGRALI

Integrali immediati delle funzioni fondamentali

$\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \text{con } \alpha \neq -1$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$
$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x \rvert + c$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$
$\int e^x\,dx = e^x + c$	$\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c$
$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + c$
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$	$\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$

Integrali la cui primitiva è una funzione composta

$\int [f(x)]^{\alpha} f'(x)\,dx = \dfrac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \text{con } \alpha \neq -1$	$\int \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \operatorname{tg} f(x) + c$
$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x) \rvert + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}\,dx = -\operatorname{cotg} f(x) + c$
$\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} f(x) + c$
$\int f'(x)\,a^{f(x)}\,dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \operatorname{arctg} f(x) + c$
$\int f'(x)\operatorname{sen} f(x)\,dx = -\cos f(x) + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}\dfrac{f(x)}{\lvert a \rvert} + c, \quad \text{con } a \neq 0$
$\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \operatorname{sen} f(x) + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2}\,dx = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{f(x)}{a} + c, \quad \text{con } a \neq 0$

Massimo Bergamini
Anna Trifone Graziella Barozzi

Matematica.blu 2.0

5

con Maths in English

ZANICHELLI

Realizzazione editoriale:
– Coordinamento redazionale: Marinella Lombardi
– Redazione: Valentina Franceschi, Isabella Malacari, Elena Meucci
– Collaborazione redazionale: Massimo Armenzoni, Parma
– Segreteria di redazione: Deborah Lorenzini
– Progetto grafico: Byblos, Faenza
– Progetto grafico delle pagine XVI-XXIV: Roberto Marchetti
– Composizione e impaginazione: Litoincisa, Bologna
– Ricerca iconografica e realizzazione delle aperture di capitolo, di *Realtà e modelli* e di *Maths in English*: Byblos, Faenza
– Disegni: Graffito, Cusano Milanino
– Correzione di bozze: T2, Bologna

Contributi:
– *Idee per il tuo futuro*: Laura Mancuso (testi), Barbara di Gennaro (redazione), Miguel Sal & C., Bologna (progetto grafico e impaginazione), Sara Colaone (disegni)
– Stesura dei testi: Davide Neri (*Le geometrie e i fondamenti*), Rossana Tazzioli (*Le geometrie e i fondamenti*)
– Stesura delle aperture: Andrea Betti (*L'inflazione*), Daniela Cipolloni (*Il prezzo giusto*, *Un'onda anomala, La Torre Eiffel, Matematica al servizio della legge, I vettori dello "spazio colore", Il percorso più breve, Bloccare le e-mail di spam, Riconoscere se una dichiarazione dei redditi non è veritiera*), Daniele Gouthier (*Non può fare più freddo di così!*, *Scrivere 1 con infinite cifre*, *Una scatola in cartone, Il decadimento radioattivo, La mosca di Cartesio, La rete di Sant'Antonio*)
– Stesura delle schede di Esplorazione: Fulvia Baccarani (*Uno, cento, mille racconti*), Chiara Ballarotti (*Un limite da disastro, Arte al cubo*), Daniela Cipolloni (*L'iperspazio, Siamo soli nell'Universo?, Trasformazioni geometriche e tassellazioni*), Daniele Gouthier (*Logaritmi e decibel*, *I paradossi di Zenone*), Chiara Manzini (*La topologia dei nodi*, *Frattali*), Elisa Menozzi (*Chi è il padre del calcolo?*), Ilaria Pellati (*Archimede e gli integrali ante litteram, Prede e predatori*)
– Stesura dei testi e degli esercizi del *Laboratorio di matematica*: Antonio Rotteglia
– Stesura e revisione degli esercizi in lingua inglese: Andrea Betti
– Revisioni dei testi e degli esercizi: Chiara Ballarotti, Luca Malagoli, Elisa Menozzi, Monica Prandini
– Rilettura dei testi: Marco Giusiano, Emilia Liviotti, Luca Malagoli, Francesca Anna Riccio
– Risoluzione degli esercizi: Silvano Baggio, Francesco Benvenuti, Davide Bergamini, Angela Capucci, Elisa Capucci, Lisa Cecconi, Elisa Garagnani, Daniela Giorgi, Erika Giorgi, Cristina Imperato, Francesca Incensi, Chiara Lugli, Francesca Lugli, Elisa Menozzi, Monica Prandini, Francesca Anna Riccio, Elisa Targa, Ambra Tinti
– Stesura degli esercizi: Graziella Barozzi, Anna Maria Bartolucci, Davide Bergamini, Cristina Bignardi, Francesco Biondi, Lisa Cecconi, Chiara Cinti, Paolo Maurizio Dieghi, Daniela Favaretto, Rita Fortuzzi, Ilaria Fragni, Lorenzo Ghezzi, Chiara Lucchi, Mario Luciani, Chiara Lugli, Francesca Lugli, Armando Magnavacca, Elisa Menozzi, Luisa Morini, Monica Prandini, Tiziana Raparelli, Laura Recine, Daniele Ritelli, Antonio Rotteglia, Giuseppe Sturiale, Renata Tolino, Maria Angela Vitali, Alessandro Zagnoli, Alessandro Zago, Lorenzo Zordan
– Stesura dei problemi di *Realtà e modelli*: Daniela Boni, Maria Falivene, Nadia Moretti
– Revisione di *Maths in English* e stesura di *Maths Talk*: Anna Baccaglini-Frank
– Revisione didattica del testo (*Diary revision*): Eleonora Basile, Maria Alberta Bulgaro, Laura Caliccia, Anna Maria Logoteta, Alvisia Marcantonio, Lucia Nasoni, Mariapia Riva

L'intera opera è frutto del lavoro comune di Massimo Bergamini e Anna Trifone. Hanno collaborato alla realizzazione di questo volume Davide Bergamini, Enrico Bergamini, Lisa Cecconi.

Copertina:
– Progetto grafico: Miguel Sal & C., Bologna
– Realizzazione: Roberto Marchetti
– Immagine di copertina: Artwork Miguel Sal & C., Bologna

Prima edizione: febbraio 2012

L'impegno a mantenere invariato il contenuto di questo volume per un quinquennio (art. 5 legge n. 169/2008) è comunicato nel catalogo Zanichelli, disponibile anche online sul sito www.zanichelli.it, ai sensi del DM 41 dell'8 aprile 2009, All. 1/B.

File per diversamente abili
L'editore mette a disposizione degli studenti non vedenti, ipovedenti, disabili motori o con disturbi specifici di apprendimento i file pdf in cui sono memorizzate le pagine di questo libro. Il formato del file permette l'ingrandimento dei caratteri del testo e la lettura mediante software screen reader.
Le informazioni su come ottenere i file sono sul sito www.zanichelli.it/diversamenteabili

Suggerimenti e segnalazione degli errori
Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi. L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli. Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro scrivere al seguente indirizzo:

lineauno@zanichelli.it

Le correzioni di eventuali errori presenti nel testo sono pubblicate nel sito www.zanichelli.it/aggiornamenti

Zanichelli editore S.p.A. opera con sistema qualità certificato CertiCarGraf n. 477 secondo la norma UNI EN ISO 9001:2008

SOMMARIO

Chi stabilisce qual è il prezzo «giusto»?

▶ **La risposta a pag. 1366**

Perché il termometro non può scendere sotto lo zero assoluto?

▶ **La risposta a pag. 1435**

Come si stabilisce la potenza di un sisma?

▶ **La risposta a pag. 1508**

Quale significato ha la scrittura del numero 1 come numero periodico 0,9999…?

▶ **La risposta a pag. 1586**

Se l'inflazione diminuisce vuol dire che i prezzi calano?

▶ **La risposta a pag. 1649**

CAPITOLO 22
IL CALCOLO DEI LIMITI

CAPITOLO 23
LE SUCCESSIONI E LE SERIE

CAPITOLO 24
LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE

La decrescita dei sopravvissuti è costante o ha un comportamento molto diverso al variare dell'età?

▶ **La risposta a pag. 1732**

CAPITOLO 25
I TEOREMI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

Come bisogna tagliare un quadrato di cartone per avere il contenitore più capiente di tutti?

▶ **La risposta a pag. 1791**

CAPITOLO 26
I MASSIMI, I MINIMI E I FLESSI

Come si può determinare la funzione che esprime il tempo di percorrenza della luce da un punto A a un punto B situati in due mezzi diversi?

▶ **La risposta a pag. 1867**

CAPITOLO 27
LO STUDIO DELLE FUNZIONI

…come si possono ricavare le leggi del moto di caduta di un grave utilizzando l'integrazione indefinita?

▶ **La risposta a pag. 1955**

Perché l'ingegnere Gustave Eiffel diede alla sua opera più famosa proprio quella forma?

▶ **La risposta a pag. 2032**

Come si fa a stimare la vita di una scoria radioattiva?

▶ **La risposta a pag. 2098**

CAPITOLO 28
GLI INTEGRALI INDEFINITI

CAPITOLO 29
GLI INTEGRALI DEFINITI

CAPITOLO 30
LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Come si può riconoscere se una dichiarazione dei redditi non è veritiera?

▶ **La risposta a pag. σ31**

…ma esistono triangoli senza punta?

▶ **La risposta a pag. C68**

CAPITOLO σ1
LE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

CAPITOLO C3
COLLEGAMENTI

MATHS IN ENGLISH

FONTI DELLE ILLUSTRAZIONI

IX: Dmitriy_Shironosov/Shutterstock;
XII (a): Jean-luc/Shutterstock;
XII (b): Neo_Edmund/Shutterstock;
XIII: Joan Mirò, *Painting*, 1927. Parigi, Musée National d'Art Moderne;
XIV: Curva del Dragone, iterazione 16. Alexis Monnerot-Dumaine, 2006;
XV: www.paintermagazine.co.uk;
XVI (a): Sashkin/Shutterstock;
XVI (b): Giulia Laffi, 2004;
1353 (a), 1366 (a): Francesco Ridolfi /Shutterstock;
1353 (b), 1366 (b): Artem Samokhvalov /Shutterstock;
1365: Alex Nikada/iStockphoto;
1398 (a): Joat/Shutterstock;
1398 (b): André Klaassen/Shutterstock;
1403, 1435 (a): Le Loft 1911/Shutterstock;
1412: Mau Horng/Shutterstock;
1435 (b): Armin Rose/Shutterstock;
1475, 1508 (a): Carolina K. Smith, M.D. /Shutterstock, Christopher Waters/Shutterstock;
1504: Anton Bocaling, 2000;
1508 (b): A.S. Zain/Shutterstock;
1508 (c): *Charles Richter analizza un sismogramma a Los Angeles*, 1964, California. Los Angeles Times photographic archivi, UCLA Library. Copyright Regents of the University of California, UCLA Library;
1562 (a): H. Brauer/Shutterstock;
1562 (b): J and S Photography/Shutterstock;
1567, 1586 (a): Sony Ho/Shutterstock;
1585 (a): Maurits Cornelis Escher, *Salita e discesa*, 1970, Fondazione Escher;
1585 (b): Alexander Briel Perez/Shutterstock;
1611 (a): Arkady/Shutterstock;
1611 (b): Igor Terekhov/Shutterstock;
1617, 1649 (a): Zimmytws/Shutterstock, Tim Scott/Shutterstock;
1628 (a): Mircea Bezergheanu/Shutterstock;
1628 (b): Alexis Monnerot-Dumaine, 2007;
1711: Barrawel/Shutterstock;
1847, 1867 (a): Losevsky Pavel/Shutterstock;
1927: Yuriy Ponomarev/Shutterstock;
1767, 1791 (a): GoodMood Photo/Shutterstock;
1790: xoomer.virgilio.it;
1791 (b): Daniele Weber, 2007;
1791 (c): Jamazol/Shutterstock;
1841 (a): Alexander Raths/Shutterstock;
1841 (b): Gordana Sermek/Shutterstock;
1841 (c): Beneda Miroslav/Shutterstock;
1847, 1867 (a): Jan van der Hoeven/Shutterstock;
1927 (a): Yuriy Ponomarev/Shutterstock;
1937 (a), 1955 (a): NASA, http://science.ksc.nasa.gov/history/apollo/apollo-15;
1937 (b), 1955 (b): Potapov Alexander /Shutterstock;
1937 (c): Voronin76/Shutterstock;
1955 (c): Ritratto di Galileo Galilei, 1636. Justus Sustermans. Firenze, Galleria degli Uffizi;
1955 (d): Skaljac/Shutterstock;
2001, 2032: Jurie Maree/Shutterstock;
2079 (a): Cinnamon;
2079 (b): Sekulovski Emilijan /Shutterstock;
2087, 2098 (a): Natalia Lukiyanova/Shutterstock;
2092: Daniel Hebert/Shutterstock;
2098 (b): Rod Beverly/Shutterstock;
2118 (a): Maksymilian Skolik/Shutterstock;
2118 (b): Dudarev Mikhail/Shutterstock;
2118 (c): Danshutter/Shutterstock;
2118 (d): Joachim Wendler/Shutterstock;
σ1, σ31 (a): Marc Dietrich/Shutterstock, Xavier Gallego Morelli/Shutterstock;
C49, C68: Vasilij Kandinskij, *Swinging*, Londra, Tate Gallery;
E1: www.piper-verlag.de;
E2: earthobservatory.nasa.gov/;
E3: ap0976.blogspot.com/.

Idee per il tuo futuro

CHE COSA FARÒ DA GRANDE

www.ideeperiltuofuturo.it

Sei alla fine del tuo percorso scolastico. Che cosa fare adesso? Iscriversi a un corso universitario? Fare uno *stage* o un corso professionalizzante? Cercare di entrare subito nel mondo del lavoro? Studiare e al contempo lavorare?

Per aiutarti nella scelta ti proponiamo alcuni dati relativi al 2009-2011. È impossibile dire come saranno le cose tra qualche anno, i tempi recenti ci hanno abituati a cambiamenti anche repentini.

La laurea "paga". Una recente ricerca Isfol [1] ha mostrato che chi è laureato ha più possibilità di trovare un'occupazione e in media riceve uno stipendio più alto rispetto a chi possiede soltanto un diploma.

Dal momento che i diplomati entrano nel mondo del lavoro prima dei laureati, inizialmente il tasso di occupazione per i primi è superiore rispetto a quello dei secondi, ma già prima del compimento dei 30 anni chi possiede una laurea ha più possibilità di trovare lavoro, per arrivare nella fascia 34-44 anni, dove il tasso di occupazione dei laureati supera del 7% quello dei diplomati.

In media tra 25 e 64 anni è occupato il 73,1% dei diplomati e il 79,2% dei laureati.

Secondo uno studio OCSE del 2011 i giovani laureati subiscono di più gli effetti della recente crisi economica rispetto ai loro coetanei con istruzione secondaria inferiore[2].

Lo stipendio cambia se si è laureati?

www.ideeperiltuofuturo.it

Quali lauree valgono un lavoro? Le lauree "brevi" servono? Le lauree triennali si rivelano molto utili ai fini dell'occupazione: a un anno dal termine degli studi il 42,1% dei laureati triennali lavora, con picchi dell'81,7% per le professioni sanitarie. Tirocini e *stages* sono determinanti per formare e inserire questi laureati nel mondo del lavoro. I tassi di occupazione più alti si hanno tra i medici, seguiti dai laureati in chimica farmaceutica e ingegneria. In generale sono le discipline di tipo scientifico – sia a livello di diploma sia a livello di laurea – le più spendibili nel mondo del lavoro, mentre le discipline umanistiche condannano a una difficile collocazione sul mercato, anche a fronte di un eccesso di offerta di laureati in questi ambiti.

A Nord c'è più lavoro, ma... A livello nazionale il tasso di disoccupazione è 7,8%, che sale a 27,4% se si considerano solo i giovani (15-24 anni): più alto al Sud (39,2%), meno al Centro (25,3%), più basso al Nord (19,0%). La situazione per le ragazze è più critica: il tasso della disoccupazione femminile, nella fascia 15-24 anni, supera di circa 8 punti percentuali quello maschile (32,3% per le donne, 23,9% per gli uomini), forbice che si mantiene simile nelle diverse zone geografiche: al Nord il tasso è 22,7% per le donne e 16,4% per gli uomini; al Centro è 34,8% per le donne e 18,7% per gli uomini e a Sud è di 44,0% per le donne e 36,0% per gli uomini.

Tuttavia i dati della disoccupazione giovanile non devono scoraggiare chi cerca lavoro: se la disoccupazione giovanile è del 27,4%, vuol dire che una parte non piccola dei giovani che hanno cercato lavoro (il 72,6%) lo ha trovato[3]. Inoltre i dati variano molto da luogo a luogo e anche all'interno di una stessa regione può esservi una grande varietà di situazioni. L'Emilia-Romagna è tra le regioni in cui la disoccupazione giovanile incide meno, ma con grandi differenze tra le province: se Bologna nel 2010 raggiunge un tasso di disoccupazione di 29,2%, a Piacenza il valore è più che dimezzato (13,6%)[4].

1 Tutti i dati sono tratti da una ricerca Isfol con dati relativi al 2010, (l'Isfol, Istituto per lo Sviluppo della Formazione Professionale dei Lavoratori è un ente pubblico di ricerca), e ISTAT del II Trimestre 2011.

2 Rapporto OCSE *Education at a Glance* 2011.

3 Dati ISTAT del II Trimestre 2011.

4 Dati Confartigianato Imprese Emilia-Romagna, 2010.

COME FUNZIONA L'UNIVERSITÀ

POSSO ISCRIVERMI ALL'UNIVERSITÀ?

Per iscriversi all'Università è necessario il diploma di maturità quinquennale oppure quello quadriennale con un anno integrativo o, in alternativa, un obbligo formativo aggiuntivo da assolvere durante il primo anno di corso.

L'Università italiana offre corsi di studio organizzati in tre cicli:

- **laurea**, di durata triennale (180 crediti formativi in un massimo di 20 esami), al termine della quale si consegue il titolo di Dottore; ad esempio laurea in *Tecniche di radiologia medica* o in *Scienze del comportamento e delle relazioni sociali*.
- **Laurea magistrale**, di durata biennale (120 crediti in un massimo di 12 esami), al termine della quale si consegue il titolo di Dottore magistrale; ad esempio laurea in *Biotecnologie mediche* o in *Psicologia clinica*.
- **Dottorato di ricerca** e **Scuola di specializzazione**.

Esistono anche corsi di laurea magistrali a ciclo unico, della durata di 5 (300 crediti in un massimo di 30 esami) o 6 anni (360 crediti in un massimo di 36 esami); ad esempio *Medicina e Chirurgia*.

Per approfondire gli studi si può accedere a master di 1° e di 2° livello e ai corsi di alta formazione.

I crediti formativi universitari (CFU) misurano il carico di lavoro dello studente (1 CFU = 25 ore di impegno; 60 CFU = 1 anno di impegno universitario), compresi lo studio individuale ed eventuali esperienze di apprendistato[5]. Sono stati introdotti per facilitare il confronto tra i sistemi e i programmi di differenti corsi e Atenei italiani ed europei, e quindi il passaggio da un corso di studio a un altro, oppure da un'Università a un'altra, anche straniera: i CFU sono trasferibili in ECTS *(European Credit Transfer and Accumulation System)* e quindi riconosciuti nelle Università di tutta Europa.

Tramite i CFU è possibile valutare ai fini della laurea anche esperienze quali *stages* e tirocini. Infine i CFU permettono di semplificare la determinazione dei **piani di studio individuali** (PSI) che ciascuno studente può modulare su se stesso. In alcuni casi è possibile personalizzare il proprio percorso di studi, inserendo nel piano degli esami da sostenere alcuni corsi non previsti dal piano di studi istituzionale.

Quando si presenta il PSI bisogna rispettare il minimo di crediti obbligatori per ciascun ambito disciplinare previsti dal proprio corso di laurea.

Quanto costa l'Università. I costi variano a seconda dell'Ateneo, della zona geografica (il Nord è mediamente più caro del 28,3% rispetto al Sud) e della fascia di reddito dello studente. Ad esempio, se si ha un basso reddito (fino a 10 000 euro annui) le tasse oscillano tra i 290 euro di Bari e i 1005 di Parma.

Per una fascia di reddito fino a 30 000 euro le spese universitarie variano tra gli 847 euro della Sapienza di Roma e i 1548 del Politecnico di Torino. Esiste la possibilità di accedere a borse di studio ed esoneri parziali o totali per reddito o per merito, che in alcuni Atenei tengono conto anche del voto di maturità (esonero per chi si è diplomato con il massimo dei voti e la lode)[6].

5 Regolamento recante norme concernenti l'autonomia didattica degli atenei, Decreto Ministeriale 3 novembre 1999, n.509

6 Dati Federconsumatori Il Rapporto sui costi degli atenei italiani – 2011 aggiornato il 4/10/2011.

TEST DI AMMISSIONE

L'accesso ad alcuni corsi di laurea è filtrato da una prova di ammissione, per iscriversi alla quale occorre versare un contributo: sono Medicina e Chirurgia, Odontoiatria e Protesi Dentaria, Medicina Veterinaria, le lauree a ciclo unico finalizzate alla formazione in altre Professioni Sanitarie e in Architettura.

Le prove di ammissione comprendono 80 quesiti: una parte di cultura generale e ragionamento logico, una parte sulle materie caratterizzanti i diversi indirizzi universitari.

Ad esempio, per essere ammessi a Medicina bisogna rispondere a 40 quesiti di cultura generale e ragionamento logico, 18 di biologia, 11 di chimica e 11 di fisica e matematica.

Il tempo a disposizione è di 2 ore (15 minuti in più per Architettura); ogni risposta corretta fa guadagnare 1 punto, le risposte sbagliate fanno perdere 0,25 punti, mentre le risposte non date valgono 0.

Altre facoltà come Ingegneria, Economia e Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali hanno una prova d'ingresso che può essere orientativa («sono pronto ad affrontare questa facoltà?») o richiedere il superamento di un punteggio minimo; in alcuni casi, lo studente che non la superi può avere dei debiti formativi da recuperare entro il primo anno dall'immatricolazione.

Se in una sede universitaria il numero di posti disponibili è minore del numero degli iscritti, il test può diventare selettivo.

Nel caso del test d'ingresso a Ingegneria, circa un terzo dei quesiti a risposta chiusa è di matematica. Gli argomenti presenti sono: aritmetica, algebra, logica, probabilità e statistica, geometria euclidea, geometria analitica, funzioni, trigonometria. L'analisi non è prevista.

Esistono poi delle prove anticipate di verifica delle conoscenze per gli studenti degli ultimi anni delle superiori, che hanno così l'opportunità di avere dei crediti nel momento dell'accesso all'università nelle materie scientifiche.

Puoi metterti alla prova risolvendo i quesiti proposti.

Qui trovi tante informazioni in più e le prove assegnate negli ultimi anni

http://accessoprogrammato.miur.it

Qui trovi tante informazioni in più e degli esempi di test

www.cisiaonline.it

Per saperne di più

www.progettolaureescientifiche.eu

www.testingressoscienze.org

Medicina e Chirurgia

01 **Un soggetto abituato a bere un quarto di vino al giorno deve osservare una dieta che prevede al massimo un quinto di litro di vino al giorno. A quale quantità giornaliera minima di vino dovrà rinunciare?**

a 10 ml c 100 ml e 75 ml
b 25 ml d 50 ml

(Prova di ammissione 2010)

02 **In una famiglia ciascuno dei figli ha almeno 3 fratelli e 3 sorelle. Da quanti figli almeno è costituita la famiglia?**

a 8 d 9
b 6 e 10
c 7

(Prova di ammissione 2009)

03 **Il rapporto tra i volumi di due cubi è 4. Qual è il rapporto tra le loro superfici?**

a 2 b 4 c $4^{\frac{2}{3}}$ d $4^{\frac{1}{3}}$ e $2^{\frac{3}{2}}$

(Prova di ammissione 2010)

04 **Tredici persone si stringono la mano. Ciascuna stringe la mano a tutte le altre. Quante sono le strette di mano in totale?**

a 13 b 78 c 26 d 156 e 169

(Prova di ammissione 2009)

05 **Sia $f(x) = 5^x$. Allora $f(x+1) - f(x)$ è uguale a:**

a 1. b 5^x. c $5 \cdot 5^x$. d 5. e $4 \cdot 5^x$.

(Prova di ammissione 2009)

Ingegneria

06 **In un piano cartesiano, quale dei seguenti punti è interno al triangolo racchiuso tra le tre rette $r_1: y = 0$, $r_2: y = 2x$, $r_3: y = -x + 7$?**

a $P = (3;5)$
b $P = (4;4)$
c $P = (1; -3)$
d $P = (3;3)$
e $P = (-3;2)$

(Prova di ammissione 2007)

07 **A parità di tutte le altre condizioni (materiale, rugosità, stato di pulizia, etc.) serve meno quantità di pittura per tinteggiare:**

a un cono (circolare retto) di altezza 1 metro e base di raggio 1 metro.
b una sfera di raggio 1 metro.
c un cubo di lato 1 metro.
d una piramide avente tutte le facce che sono triangoli equilateri (tetraedro) di lato 1 metro.
e un cilindro (circolare retto) di raggio 1 metro e di altezza 1 metro.

(Prova di ammissione 2007)

08 **L'equazione $\operatorname{sen} x = -x$:**

a ammette infinite soluzioni.
b se $h > 0$ è una soluzione, allora anche $x = h + \pi$ lo è.
c non ammette soluzioni.
d ammette soltanto una soluzione.
e ammette esattamente due soluzioni.

(Prova di ammissione 2007)

09 **Mettere in ordine crescente i tre numeri 7, $\sqrt{47}$, $\sqrt{3} + \sqrt{27}$.**

a $\sqrt{3} + \sqrt{27} < \sqrt{47} < 7$
b $\sqrt{47} < \sqrt{3} + \sqrt{27} < 7$
c $7 < \sqrt{47} < \sqrt{3} + \sqrt{27}$
d $7 < \sqrt{3} + \sqrt{27} < \sqrt{47}$
e $\sqrt{47} < 7 < \sqrt{3} + \sqrt{27}$

(Prova di ammissione 2007)

10 **Il resto della divisione del polinomio $2x^3 - 3x + 2$ per il polinomio $x - 2$ è:**

a 8. b −1. c 12. d −8. e −12.

(Prova di ammissione 2007)

Economia

11 **Determinare per quale valore del parametro reale a l'equazione $(a + 3)x = 5$ è impossibile.**

a $a = 3$
b $a = 0$
c $a = -3$
d $a = 5$
e $a = -5$

(Prova di ammissione 2010)

12 **Quanti sono i punti d'intersezione tra il grafico della funzione $y = \frac{1}{x}$ e quello della funzione $y = 2^x - 1$?**

a 3 b 4 c 1 d 0 e 2

(Prova di ammissione 2010)

13 **La differenza tra la soluzione più grande e la più piccola dell'equazione**

$$x^2 - px + \frac{p^2 - 1}{4} = 0 \text{ è:}$$

a 2. b p. c $p + 1$. d 1. e 0.

(Prova di ammissione 2010)

14 **Solo una delle seguenti relazioni è vera per ogni coppia x, y di numeri reali e positivi. Quale?**

a $\sqrt{(x - y)^2} = x - y$
b $\sqrt{\sqrt{x}\,\sqrt{y}} = x\sqrt{y}$
c $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
d $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$
e $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

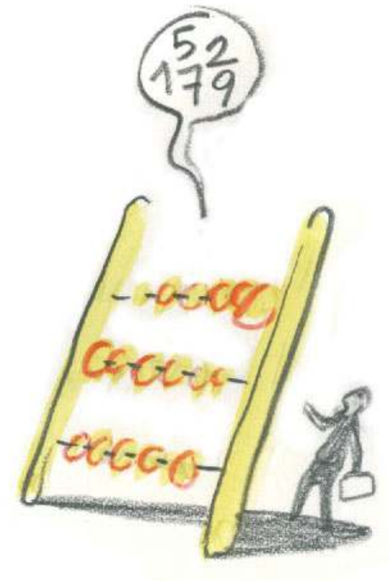
(Prova di ammissione 2010)

15 **Il prezzo p di un bene dipende dalla sua domanda d secondo la legge $p(d) = d - d^2 + 2$. Quanto vale $p(2d - 1)$?**

a $2d - 1 - (2d - 1)^2 + 2$
b $d - d^2 + 2$
c d
d $2(d - d^2 + 2) - 1$
e $(d - d^2 + 2)(2d - 1)$

(Prova di ammissione 2010)

DOVE SI STUDIA LA MATEMATICA



La matematica non si studia solo nel corso di laurea in Matematica, ma la puoi trovare anche a:

- Ingegneria,
- Economia,
- Scienze Statistiche,
- Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali (ad esempio nei corsi di Astronomia, Informatica, Scienze Biologiche),
- Chimica Industriale,
- Architettura,
- Farmacia,
- Agraria,
- Scienze della Formazione.

Puoi metterti alla prova risolvendo gli esercizi proposti.

01 Disegna il grafico della funzione definita da

$$y = 2\,\mathrm{sen}\left(2|x| - \frac{\pi}{6}\right).$$

(Esame di Matematica, Corso di laurea specialistica in Farmacia, Università Sapienza di Roma, 2007)

02 Un investimento mi ha fruttato il 5% di interessi. Decido di spendere il 30% di questi interessi per comprare un computer del valore di 300 euro. A quanto ammonta il mio investimento?

(Esame di Matematica, Corso di laurea in Scienze Biologiche, Università di Pisa, 2011)

[200 000 euro]

03 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \sqrt{1 + x^6 e^{-x}},$$

$$g(x) = -2x^4 + 3x\ln x,$$

$$h(x) = x^{\mathrm{sen}\,x}.$$

(Esame di Istituzioni di Matematica, Corso di laurea in Biologia, Università di Milano-Bicocca, 2003)

$$\left[f'(x) = \frac{x^5 e^{-x}(6 - x)}{2\sqrt{(1 + x^6)\,e^{-x}}};\right.$$

$$g'(x) = -8x^3 + 3\ln x + 3;$$

$$\left.h'(x) = x^{\mathrm{sen}\,x}\left(\cos x \ln x + \frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\right)\right]$$

04 Stabilire per quali valori di a e b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a\arctan\frac{1}{x} + b & \text{per } x < 0 \\ \mathrm{sen}\,2x & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

risulta:

(i) continua nell'origine;

(ii) derivabile nell'origine.

(Esame di Analisi Matematica 1, Corso di laurea in Matematica (e Fisica), Università di Milano-Bicocca, 2003)

$\left[\text{(i) } b = \frac{\pi}{2}a; \text{ (ii) } a = -2, b = -\pi\right]$

05 Dopo aver determinato il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \arctan(\sqrt{1 - x^2}),$$

trovarne massimi e minimi relativi e assoluti.

(Esame di Istituzioni di Matematica 1, Corso di laurea in Scienze Ambientali, Università di Bologna-Ravenna, 2004)

[$x = 0$ p.to max assoluto;
$x = -1$ e $x = 1$ p.ti min assoluti]

06 Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^t}\ln(e^{2t} - 1)\,dt$$

(si consiglia la sostituzione $x = e^t$).

(Esame di Istituzioni di Matematica 1, Corso di laurea in Scienze Ambientali, Università di Bologna-Ravenna, 2004)

$\left[\ln\left(\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)\right]$

STUDY ABROAD

La rete ENIC (European Network of Information Centres) è nata proprio per fornire notizie e consigli sul riconoscimento di diplomi, titoli e altre qualifiche universitarie o professionali straniere.

La rete NARIC (National Academic Recognition Information Centres) mira a informare sulle opportunità e le procedure di riconoscimento dei titoli di studio all'estero.

Vuoi studiare matematica a Oxford?

www.
ideeperiltuofuturo.it

Ti interessano i programmi di scambio universitari?

www.
ideeperiltuofuturo.it

Vorrei studiare in Europa. I cittadini dell'Unione europea (UE) possono studiare, dalla scuola primaria al dottorato di ricerca, in uno dei paesi UE.

Per facilitare questi scambi è stato creato Ploteus, il portale delle opportunità di apprendimento (**www.europa.eu/ploteus**): programmi di scambio, borse di studio, descrizioni dei sistemi di istruzione e apprendimento dei vari paesi europei, nonché indicazioni dei siti web degli istituti di istruzione superiore, i database dei corsi di formazione, le scuole... Attraverso Ploteus è possibile anche avere notizie pratiche, ad esempio su come raggiungere la località e dove alloggiare, sul costo della vita, le tasse, i servizi cui si può accedere.

Per sapere se il diploma conseguito in Italia sia o meno riconosciuto nei diversi sistemi di istruzione esteri è utile visitare il sito **www.enic-naric.net** che contiene una grande mole di informazioni sulle Università dei 55 paesi che aderiscono al network, oltre che i link ai siti per richiedere direttamente il riconoscimento del proprio titolo di studio e i dettagli sulle modalità, i tempi, i requisiti per fare domanda di iscrizione. Sul sito si trovano anche notizie sui diversi sistemi d'istruzione europei e sulle opportunità di studio all'estero, su prestiti e borse di studio, nonché su questioni pratiche collegate alla mobilità e all'equipollenza.

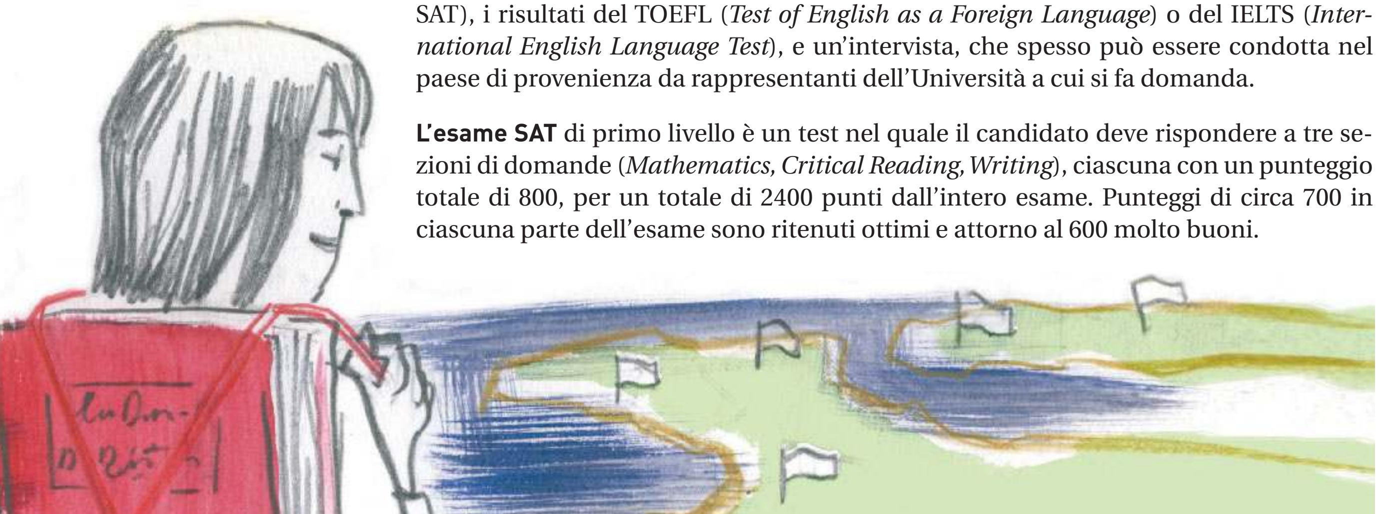
Vorrei studiare negli Stati Uniti. Se la meta sono gli USA è bene conoscere la differenza tra *colleges* e *universities*: i primi offrono solo *undergraduate degrees* (equivalenti alla laurea triennale), corsi di studi della durata di 4 anni, mentre le *universities* anche *graduate degrees* (corsi di formazione dopo la laurea: *master* e *PhD*, o *dottorato*).

Gli *undergraduate degrees* non sono dedicati a una materia: a seconda della sede presso cui si studia, questo diploma avrà più o meno prestigio. In base ai programmi di studio, al prestigio, ai costi si sceglie l'Università che fa al caso nostro.

Una volta scelta l'Università che si desidera frequentare bisogna fare domanda, essere ammessi, e poi dichiarare la materia del *major*, l'ambito disciplinare principale che lo studente sceglie. In ogni caso qualsiasi *undergraduate degree* prevede corsi obbligatori in più materie (sia letterarie sia scientifiche). Questa è una differenza significativa rispetto all'Università italiana.

Per gli Stati Uniti l'iscrizione per gli studenti stranieri può essere fatta presentando domanda ai vari *colleges* all'inizio dell'ultimo anno di scuola superiore. Occorre presentare: le pagelle degli anni precedenti tradotte ufficialmente *(ufficial translations of transcripts)*, i materiali e gli esami richiesti anche agli studenti americani (come i test SAT), i risultati del TOEFL (*Test of English as a Foreign Language*) o del IELTS (*International English Language Test*), e un'intervista, che spesso può essere condotta nel paese di provenienza da rappresentanti dell'Università a cui si fa domanda.

L'esame SAT di primo livello è un test nel quale il candidato deve rispondere a tre sezioni di domande (*Mathematics, Critical Reading, Writing*), ciascuna con un punteggio totale di 800, per un totale di 2400 punti dall'intero esame. Punteggi di circa 700 in ciascuna parte dell'esame sono ritenuti ottimi e attorno al 600 molto buoni.



VERSO IL LAVORO

Vorresti trovare lavoro? Sul sito **http://online.scuola.zanichelli.it/ideefuturo/** trovi tante informazioni utili per aiutarti nella tua ricerca: dai centri per l'impiego ai siti e ai giornali di riferimento, dai contratti a come si sostiene un colloquio di lavoro.

Quando si è alla ricerca di un lavoro, prima o poi arriva il momento di inviare (per posta ordinaria o per e-mail) il proprio *Curriculum Vitae* (CV) e una lettera di accompagnamento alle aziende per le quali si desidera lavorare, sperando di essere chiamati per un colloquio.

Il Curriculum Vitae è la carta di identità professionale del candidato e deve indicare l'iter formativo, le conoscenze e le competenze di chi si propone per ottenere un impiego.

Si comincia sempre dai dati anagrafici, per un'inquadratura iniziale, e dai contatti (indirizzo, numero di telefono, cellulare, e-mail...), per poi passare in rassegna le precedenti esperienze lavorative e le varie tappe della propria istruzione/formazione, dalla più recente alla più lontana nel tempo.

Altre informazioni indispensabili riguardano la padronanza di una o più lingue straniere e le competenze tecniche; conviene anche mettere in rilievo le capacità relazionali e organizzative, se si posseggono.

Per quanto riguarda altre informazioni personali, è meglio inserire solo quelle che possono essere apprezzate dalla specifica azienda cui è indirizzato il CV.

Infine, non bisogna mai dimenticare di autorizzare il trattamento dei dati personali, facendo riferimento al d. lg. 196/2003.

Un CV efficace sarà completo, chiaro e soprattutto breve (due pagine di solito sono sufficienti): bisogna tenere conto che chi lo legge è abituato a valutarne decine tutti i giorni e apprezzerà il fatto di trovare subito le informazioni che gli interessano.

Meglio selezionare solo le aziende che più si avvicinano al proprio profilo professionale e scrivere per ciascuna una lettera di accompagnamento mirata.

I portali che si occupano di selezione del personale solitamente danno la possibilità di compilare CV online, secondo modelli prestabiliti; oppure si può preparare da soli il CV e poi caricarlo sul sito su cui ci si vuole proporre.

La lettera di accompagnamento (o *cover letter*) va preparata con molta attenzione perché serve a convincere il selezionatore a prendere in considerazione l'offerta di lavoro e quindi a esaminare il CV.

La forma deve essere curata e corretta, per dimostrare un buon livello di istruzione.

La lettera di accompagnamento è una e-mail (o una lettera) dalla quale devono emergere in maniera sintetica (dieci righe al massimo) le motivazioni del candidato, le competenze, i titoli, le esperienze che rendono la persona adatta per quel posto di lavoro.

Scarica il CV Europass

www.europass-italia.it

Sintetici sì, ma non vaghi o generici: l'impegno nello scrivere la lettera sta proprio nel risultare sinceri, con le idee chiare ma anche aperti a varie possibilità.

La lettera deve far capire che si conosce, anche se dal di fuori, l'azienda e che se ne comprendono le necessità. Per avere queste informazioni è necessario visitarne il sito internet ma anche, ad esempio, cercare e, se si può, sperimentare i prodotti di quell'azienda. In questo modo sarà più facile mettersi dal punto di vista dell'azienda stessa, capire quali competenze potrebbero essere utili e puntare su quelle.

Le possibilità di essere valutati crescono se la busta che contiene lettera e CV, o l'e-mail, è indirizzata al direttore del settore nel quale vorremmo lavorare e non genericamente all'impresa o, ad esempio, all'ufficio delle risorse umane. In questo caso bisogna fare accurati controlli per essere certi di scrivere correttamente il nome, il titolo di studio, la posizione che ricopre la persona a cui indirizziamo la lettera ed essere sicuri che effettivamente lavori ancora lì.

Vuoi cercare lavoro in Italia o all'estero?

www.
ideeperiltuofuturo.it

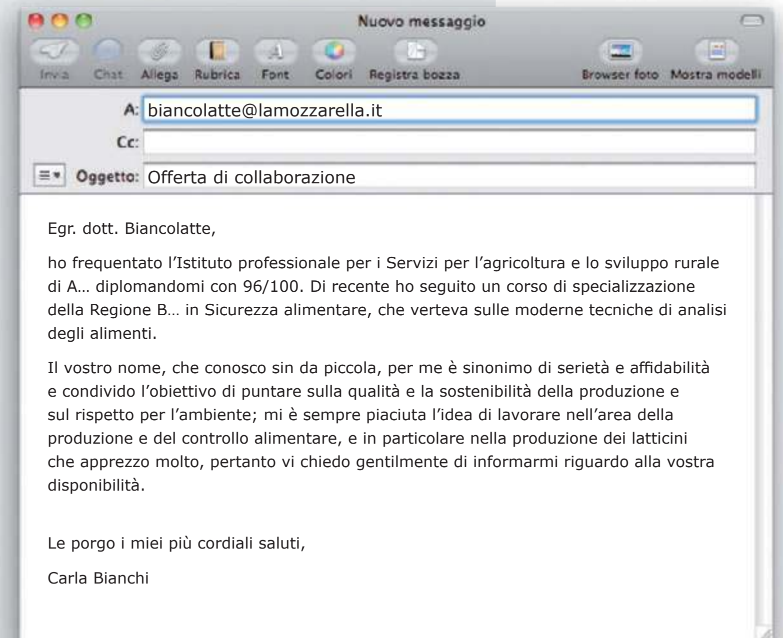
Una lettera di accompagnamento. Carla è diplomata in Servizi per l'agricoltura e lo sviluppo rurale. Ha sfruttato un periodo di lavoro *part-time* in un *call center* per avere il tempo di cercare un corso di formazione che faccia al caso suo. Dopo ha frequentato un corso della Regione di 180 ore in Sicurezza alimentare.

Nel frattempo visita i siti di varie aziende della zona in cui abita e ne individua alcune cui decide di inviare il CV.

La ditta dove vorrebbe lavorare è “La Mozzarella”, che produce latte e derivati. Nel sito si insiste sulla qualità dei prodotti unita al rispetto dell'ambiente.

A chi vuole lavorare per “La Mozzarella” è richiesta personalità, grinta e condivisione dei valori dell'azienda. Con una telefonata Carla verifica che il responsabile della sicurezza alimentare è il dott. Biancolatte.

Ecco la lettera di accompagnamento scritta da Carla.


Nuovo messaggio

Invia Chat Allega Rubrica Font Colori Registra bozza Browser foto Mostra modelli

A: biancolatte@lamozzarella.it

Cc:

Oggetto: Offerta di collaborazione

Egr. dott. Biancolatte,

ho frequentato l'Istituto professionale per i Servizi per l'agricoltura e lo sviluppo rurale di A… diplomandomi con 96/100. Di recente ho seguito un corso di specializzazione della Regione B… in Sicurezza alimentare, che verteva sulle moderne tecniche di analisi degli alimenti.

Il vostro nome, che conosco sin da piccola, per me è sinonimo di serietà e affidabilità e condivido l'obiettivo di puntare sulla qualità e la sostenibilità della produzione e sul rispetto per l'ambiente; mi è sempre piaciuta l'idea di lavorare nell'area della produzione e del controllo alimentare, e in particolare nella produzione dei latticini che apprezzo molto, pertanto vi chiedo gentilmente di informarmi riguardo alla vostra disponibilità.

Le porgo i miei più cordiali saluti,

Carla Bianchi

Modelli di crescita e caos

? Può una formula matematica nascondere una situazione caotica?

Quanti batteri?

Siamo in un laboratorio di biologia e stiamo coltivando una colonia di batteri. Come varia il numero di batteri al passare del tempo? Per costruire un modello che risponda alla domanda, facciamo l'ipotesi semplificatrice che il tasso netto di crescita della popolazione batterica sia costante e positivo. Un modello di questo tipo è detto **malthusiano**.
In tal caso, la variazione Δn del numero di batteri nel tempo Δt è direttamente proporzionale al numero n di batteri presenti, con costante di proporzionalità il tasso netto k di crescita:

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = kn, \text{con } k \text{ costante.}$$

Il tasso netto di crescita è la differenza tra il tasso di natalità e quello di mortalità.

Il tasso netto di crescita è la differenza tra il tasso di natalità e quello di mortalità.
Thomas Robert Malthus, demografo inglese vissuto fra il 1766 e il 1834, studiò l'evoluzione di una popolazione nell'ipotesi di un tasso di crescita costante.
È un'ipotesi in cui si pensa che la popolazione possa riprodursi senza influenza da parte dell'ambiente circostante: le risorse sono illimitate.

Fissato un intervallo di tempo Δt costante, determiniamo il numero di batteri dopo 1, 2, 3... intervalli Δt dall'istante iniziale. Possiamo così «contare» anche il tempo e il numero di batteri con i numeri naturali, cioè in modo discreto. Così nella formula precedente $\Delta t = 1$; chiamato n_t il numero di batteri all'istante t, abbiamo

$$n_{t+1} - n_t = kn_t \quad \rightarrow \quad n_{t+1} = n_t + kn_t \quad \rightarrow \quad n_{t+1} = (1 + k)\, n_t$$

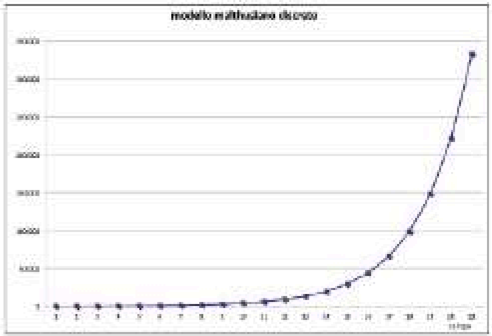
e, se conosciamo n_0, possiamo trovare la successione $n_1, n_2, n_3, \ldots$
La successione del numero dei batteri è ottenuta in modo ricorsivo, ossia fornendo il primo termine e la legge che dato un termine fornisce il suo successivo.

I valori che si ottengono con il modello malthusiano discreto sono i termini di una progressione geometrica. Malthus affermava che, mentre la popolazione mondiale tende ad aumentare in progressione geometrica, i suoi mezzi di sostentamento possono aumentare soltanto in progressione aritmetica, cioè con andamento lineare. Da ciò traeva conclusioni decisamente pessimistiche riguardo alla possibilità di sopravvivenza delle generazioni future.

Attività

Per studiare il modello malthusiano, in un foglio elettronico inserisci: nella cella A1 l'etichetta *tempo* e in B1 l'etichetta *popolazione*; in E2 il numero n_0 di batteri presenti all'istante iniziale; in F2 il valore di k; in A2 il numero 0 e in A3 la formula =A2+1, da copiare fino a A22; in B2 la formula =E2 e in B3 la formula =(1+$F$2)*B2, copiandola fino alla cella B42.

Rappresenta graficamente i dati relativi alle due colonne ottenute.



Per ottenere il grafico della figura, abbiamo considerato $n_0 = 1000$ e $k = 0{,}5$. La crescita è di tipo esponenziale: alla ventesima osservazione il numero di batteri ha già superato i 3 000 000. Modificando i parametri contenuti nelle celle E2 e F2 ottieni altre successioni e quindi simulazioni di crescita di diverse popolazioni.

Risorse limitate

L'ipotesi che è alla base del modello di crescita malthusiana può aver senso fin quando il numero di individui di una popolazione è piccolo rispetto alle risorse messe a disposizione dall'ambiente. Una popolazione di batteri può però raggiungere dimensioni tali da far sì che fattori limitanti, come per esempio la scarsità di sostanze nutritive nell'ambiente circostante, non possano essere più trascurate.

Modifichiamo allora il nostro modello, avanzando l'ipotesi, più realistica, che il sovraffollamento dia luogo a carenze di cibo e spazio vitali, tali da provocare un aumento delle morti proporzionale al numero di individui presenti. Detto m il tasso di mortalità e n il numero di individui presenti, abbiamo:

$$m = p \cdot n, \text{ con } p \text{ costante.}$$

Ricordando che k è la differenza tra il tasso di natalità (che indicheremo con r) e quello di mortalità $m = p \cdot n$, la legge di formazione di n_{t+1} diventa:

$$n_{t+1} = (1 + k)n_t \;\rightarrow\; n_{t+1} = (1 + r - p \cdot n_t)n_t \;\rightarrow\; n_{t+1} = (1 + r)n_t - p \cdot n_t^2$$

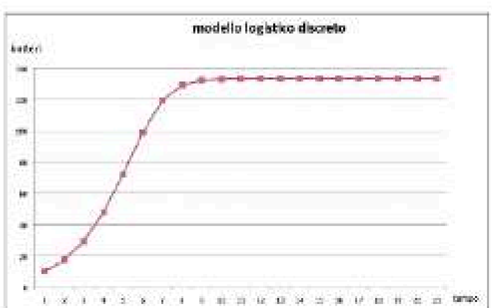
Il modello di crescita che si ottiene, detto di **crescita logistica**, fu proposto dal biologo e matematico belga Pierre Verhulst nel 1837.

Attività

Per studiare il modello logistico, costruisci un foglio elettronico analogo a quello dell'Attività precedente, ma in F2 inserisci il valore di r, in G2 quello di p e in B3 la formula =(1+$F$2)*B2-$G$2*B2^2.

Per ottenere il grafico della figura, abbiamo posto: $n_0 = 10$, $r = 0{,}8$, $p = 0{,}006$.

La curva ha un andamento «a S» e si stabilizza piuttosto velocemente sul valore di 133 individui.



Se il modello è continuo

Finora abbiamo ragionato pensando sia il tempo sia il numero di batteri come variabili discrete. Ma se il numero n_0 di batteri inizialmente presenti è molto grande, possiamo sostituire la variabile discreta n con la variabile continua x, scrivendo l'equazione differenziale:

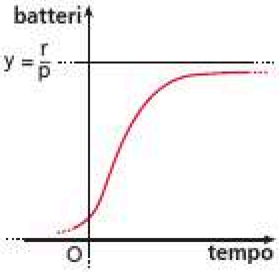
$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

in cui $\frac{dx}{dt}$ è la derivata della funzione $x = x(t)$. Se la condizione iniziale è $x(0) = n_0$ e k è costante, con gli strumenti che imparerai a usare in questo anno di studio sarai in grado di trovare la soluzione:

$$x(t) = n_0 \cdot e^{kt},$$

una funzione esponenziale il cui andamento ricalca pienamente quello del grafico che abbiamo ottenuto per il modello (discreto) malthusiano.
Se il modello è logistico, la funzione continua è più complessa e il suo andamento dipende dal rapporto $\frac{r}{p}$, legato alla potenzialità riproduttiva della popolazione e alle cause che ne determinano la mortalità all'aumentare del numero di individui.
Riportiamo il grafico nel caso in cui $\frac{r}{p} > 2n_0$. Puoi osservare che, all'aumentare del tempo, la curva tende a coincidere con la retta di equazione $y = \frac{r}{p}$.
Anche in questo caso, c'è corrispondenza con i risultati che abbiamo ottenuto nel modello discreto logistico. In particolare, 133 è proprio il numero naturale che meglio approssima il rapporto fra r e p: $\frac{r}{p} = \frac{0,8}{0,006} = 133,33...$

modello logistico continuo



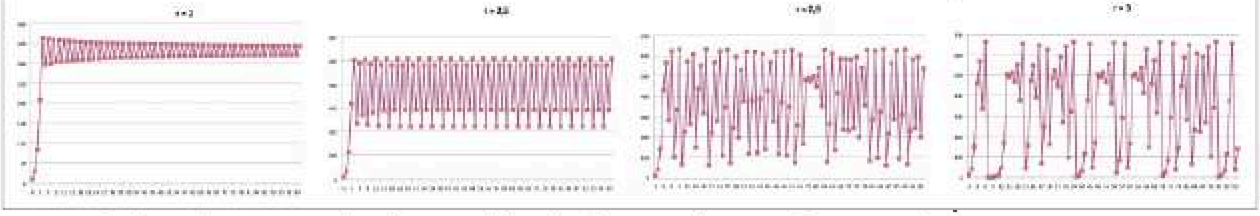
Si dice anche che la curva si avvicina asintoticamente alla retta

Piccole variazioni, strani cambiamenti

Se esaminassimo più a fondo il modello continuo di crescita logistica, potremmo osservare che l'evoluzione del numero di individui della popolazione sarebbe sempre caratterizzata da un valore asintotico ben preciso anche quando la condizione $\frac{r}{p} > 2n_0$ non è soddisfatta.
Ci aspetteremmo qualcosa di simile anche nel discreto, ma le cose non stanno così.

Attività

Nel foglio che hai costruito per il modello logistico discreto fai alcune prove facendo variare il valore di r tra 1 e 3, aumentando anche il numero di osservazioni, per esempio copiando le formule fino alle celle A102 e B102. Qui di seguito abbiamo riportato le figure che si ottengono rispettivamente per $r = 2$; $r = 2,5$; $r = 2,9$; $r = 3$.



Notiamo che fino a determinati valori di r è possibile individuare regolarità significative, ma al tendere di r a 3, l'evoluzione della popolazione è sempre più caotica.

Caos deterministico

Nell'attività precedente, abbiamo osservato che:

- per variazioni molto piccole di un parametro, si sono ottenuti cambiamenti molto grandi dei risultati;
- un'equazione, con caratteristiche di non linearità ma comunque ben determinata e non necessariamente complicata, può generare dei risultati con caratteristiche di disordine.

In casi simili si è soliti parlare di **caos deterministico**.
La ricerca matematica in questo campo si basa sull'ipotesi che se da un lato i comportamenti caotici di certi fenomeni pongono limitazioni evidenti alla loro prevedibilità, dall'altro fenomeni complessi e apparentemente disordinati, come l'andamento delle azioni in Borsa o il tempo meteorologico, potrebbero essere descritti da leggi deterministiche.

Farfalle e tornadi

Un sistema caotico è caratterizzato dalla proprietà di avere un'evoluzione particolarmente sensibile alla variazione dei valori dei suoi parametri significativi: due sistemi caotici che partono da condizioni iniziali che differiscono anche di pochissimo possono evolvere in modo completamente diverso. Il metereologo e matematico Edward Lorenz diede di questo fatto un'immagine suggestiva. Il titolo di una sua conferenza del 1972 suonava così: «Il battito di ali di una farfalla in Brasile può essere causa di un tornado in Texas?». Da allora, per i fenomeni caotici, si parla anche di *effetto farfalla* e la metafora è sfruttata nei giornali, nei libri e nei film.

Attività

Caos deterministico e modelli dinamici. Affronta questo tema con una breve presentazione multimediale.

Da leggere:

- Gian Italo Bischi e altri, *Sulle orme del caos*, Bruno Mondadori, Milano, 2004.
- Ian Stewart, *Dio gioca a dadi?*, Bollati Boringhieri, Torino, 2010.
- James Gleick, *Caos*, Rizzoli, Milano, 2000.
- Angelo Vulpiani, *Determinismo e caos*, Carocci, Roma, 2004.

@

Cerca nel Web:

caos deterministico, modelli dinamici discreti, effetto farfalla

Riflettere sui fondamenti

? Che cosa c'è nelle fondamenta del complesso edificio matematico?

Per incominciare... giocando

Il **gioco MU** è stato proposto da Douglas Hofstadter nel suo libro *Gödel, Escher, Bach*, Adelphi, 1984.
Riguarda un sistema formale, dove i teoremi sono stringhe, ossia sequenze, di lettere dell'alfabeto. Ha queste caratteristiche.

a) L'alfabeto è composto da tre soli **elementi**: M, I, U.
b) C'è un solo **assioma**: MI.
c) È caratterizzato da quattro **regole di inferenza**.
   R1. Se esiste un teorema che termina con una I, si può aggiungere una U alla fine.
   R2. Se esiste un teorema Mx, allora si può includere Mxx nella collezione dei teoremi.
   R3. Se in un teorema compare III, allora si può sostituire U a III.
   R4. Se all'interno di un teorema c'è UU, allora si può eliminare UU.

Dimostriamo, come esempio, il teorema MUI, facendo vedere che MUI si ottiene dall'assioma MI mediante le regole di inferenza. Da MI, per la regola R2, otteniamo MII. Da MII, ancora con R2, otteniamo $MIIII$. Con R3, da $MIIII$, passiamo a MUI: come volevasi dimostrare!
Dimostriamo ora $MUIIU$. Partiamo da MUI, già dimostrato, e applichiamo R1, ottenendo $MUIU$. Applicando poi R2 a $MUIU$, otteniamo $MUIUUIU$ a cui applichiamo R4, arrivando così a $MUIIU$.

Attività

- Dalla stringa MU si può ricavare $MIII$?
- Dimostra che $MIUIU$ è un teorema del sistema M, I, U.
- Spiega perché MU non può essere un teorema del sistema M, I, U.
- Dimostra che MUU si ottiene da MU. MUU è un teorema nel sistema M, I, U?

▲ Joan Mirò, *Painting*, 1927. Parigi, Musée National d'Art Moderne.

Nell'arte moderna spesso gli aspetti formali prevalgono su quelli di contenuto. Qualcosa di simile si ebbe quando David Hilbert propose di considerare la matematica in modo formale, stabilendo soltanto i simboli con cui operare, gli assiomi da cui partire e le regole di inferenza con cui passare da un enunciato a un altro. Attraverso questa formalizzazione egli voleva far diventare l'aritmetica un saldo fondamento dell'intero edificio matematico. Come vedremo, il suo tentativo incontrò un ostacolo inatteso.

Alcune divergenze

Intorno ai primi anni del secolo XX i matematici avvertirono la necessità di una profonda e sistematica riflessione sui fondamenti della propria disciplina. In queste pagine esaminiamo brevemente alcuni degli stimoli che furono alla base di tale necessità e i principali approcci seguiti.

Sono soltanto accenni che puoi cercare di approfondire, per esempio mediante le indicazioni che forniamo nell'attività finale o nel volumetto *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della matematica*, che abbiamo dedicato all'argomento.

La ricerca del rigore in analisi

I metodi di calcolo dell'analisi infinitesimale, fondati da Newton e Leibnitz, si erano dimostrati, fin dalla loro nascita, assai potenti, ma anche molto disinvolti. Per esempio, utilizzando la simbologia e la terminologia che adottiamo in questo libro, possiamo dire che nella derivazione della funzione $f(x) = x^2$ Newton calcolava il rapporto incrementale

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

dividendo i termini della frazione per h, poi trascurava l'incremento h affermando che si trattava di un infinitesimo e concludeva che la derivata di $f(x) = x^2$ è $f'(x) = 2x$.

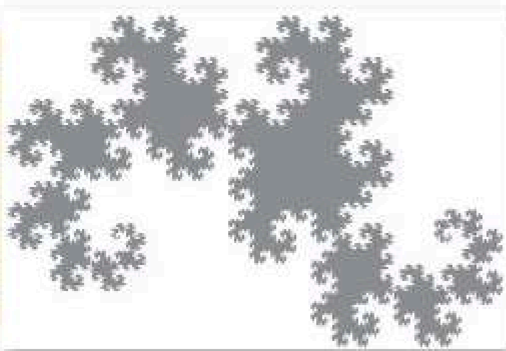
La critica del vescovo George Berkeley a questo modo di procedere era molto precisa: o h è uguale a 0, e allora non si può semplificare il rapporto incrementale, oppure è diverso da 0 e allora $2x + h$ è diverso da $2x$.

Per rispondere alle critiche come quella di Berkeley, i matematici avviarono un profondo lavoro di riflessione, che aprì la strada a un processo di aritmetizzazione dell'analisi, iniziato da Weierstrass e proseguito da Dedekind e Cantor, mediante il quale si cercava di ricondurre l'analisi all'aritmetica.

In questa ricerca si incontrarono oggetti apparentemente paradossali, come per esempio le curve ovunque continue e non derivabili in alcun punto, definite da alcuni matematici veri e propri mostri della ragione e dalle quali il matematico Hermite affermava di «ritrarsi con spavento e orrore».

Nel 1734, nella sua opera *The analyst*, Berkeley scriveva: «Non sono [gli infinitesimi] né quantità finite, né **quantità infinitamente** piccole e neppure nulle. Non potremmo forse chiamarle fantasmi di quantità estinte?».
Il calcolo delle derivate è uno degli argomenti fondamentali di questo libro. Vedrai come la critica di Berkeley sia stata superata efficacemente mediante l'introduzione del **concetto di limite**.

Questa figura è anche chiamata ***Jurassic dragon*** perché resa famosa dal libro ***Jurassic Park***, di Michael Crichton.
Si ottiene tramite la geometria frattale, che fornisce anche un esempio di curva **continua ma con infiniti punti angolosi**, punti nei quali la derivata di una funzione non esiste.



Le geometrie non euclidee

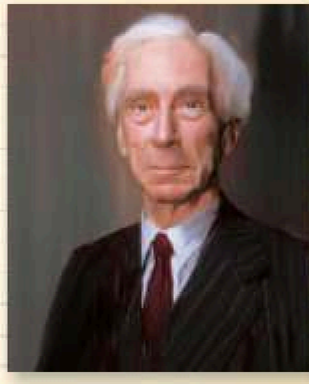
L'edificio euclideo aveva retto per più di duemila anni come esempio paradigmatico di rigore, bellezza e certezza del sapere matematico. Nella prima metà del secolo XIX si iniziò a pensare a sistemi assiomatici diversi da quello euclideo, che all'unicità della parallela per un punto a una retta data come postulato sostituivano l'esistenza di più parallele (geometria iperbolica) o nessuna (geometria sferica e geometria ellittica).

Le antinomie

Qui sotto riportiamo un esempio di antinomia, ossia di una contraddizione, di tipo logico.

LA FRASE ROSSA È VERA
LA FRASE BLU È FALSA

Ci troviamo di fronte a una situazione paradossale, in quanto ogni frase è vera soltanto se è falsa.
All'inizio del secolo XX, la nascita di diversi paradossi creò preoccupazione e sconcerto nei matematici. Nel 1925 David Hilbert affermava: «Per generale riconoscimento, la nostra posizione attuale di fronte ai paradossi è insostenibile. Ma ci pensate, le definizioni e i metodi deduttivi che tutti imparano, insegnano e usano in matematica, in questa pietra di paragone di ogni sicurezza e di ogni verità, portano a delle assurdità! Se non sono nel pensiero matematico, dove trovare verità e certezza?».



L'antinomia più famosa, relativa ai fondamenti della matematica, è quella di Bertrand Russell, di cui egli stesso diede questa versione scherzosa: «Il barbiere di un villaggio rade tutte le persone del posto che non si radono da sole. Il barbiere si rade o non si rade da solo?»

Diversi approcci

Il logicismo

La scuola logicista si ispirò al programma del logico tedesco Gottlob Frege. L'obiettivo di Frege era quello di ridurre i numeri e le loro leggi alla sola logica; secondo Frege nulla era più certo e sicuro delle leggi della logica per fondare gli oggetti matematici. Questa convinzione lo portò a formulare il principio di comprensione, secondo il quale il solo fatto di poter pensare una proprietà autorizza a dichiarare l'esistenza dell'insieme degli elementi che godono di quella proprietà. Poco prima che Frege mandasse alle stampe il suo *Grundgesetze der Arithmetik* (*Leggi fondamentali dell'aritmetica*), Russell gli comunicò l'antinomia che minava alla base l'edificio di Frege.
In seguito, tuttavia, fu proprio Russell che tentò di proseguire il programma di riduzione della matematica alla logica, cercando gli opportuni rimedi per evitare contraddizioni.

Con grande onestà intellettuale Frege pubblicò la lettera **del giovane Russell** aggiungendo un'appendice che inizia così: «A uno scrittore di scienza ben poco può giungere più sgradito del fatto che, dopo completato un lavoro, venga scosso uno dei fondamenti della sua costruzione. Sono stato messo in questa situazione da una lettera del signor Bertrand Russell, quando la stampa di questo volume stava per essere finita.»

L'intuizionismo

La posizione della scuola intuizionista, che ebbe in Luitzen Brouwer il suo maggior esponente, fu diametralmente opposta a quella logicista. Brouwer rifiutava ogni possibile fondazione della matematica su basi logiche, ritenendo gli enti di questa disciplina costruzioni mentali, accessibili solo attraverso l'introspezione. In particolare, la matematica intuizionista rifiuta il principio del terzo escluso e quindi le dimostrazioni *per assurdo*, con le quali si nega la tesi, si trova una contraddizione, si rifiuta allora la negazione della tesi e, infine, per il principio del terzo escluso, si afferma la tesi. La matematica intuizionista richiede, invece, per l'esistenza di un oggetto matematico, una sua costruzione diretta.

Il formalismo

Per Hilbert e per la scuola formalista la fondazione della matematica coincide con la formulazione di teorie di cui è necessario dimostrare la coerenza, cioè la non contraddittorietà. Ciò richiedeva, innanzitutto, non solo una profonda riflessione sui concetti di dimostrazione, assioma, teorema, ma anche una loro definizione precisa, non soggetta alle ambiguità della lingua naturale. Ecco il motivo della costruzione di linguaggi formali, specifici per parlare di oggetti matematici, senza alcuna interferenza con la polisemia della lingua naturale. Il secondo passo, altrettanto delicato, era la scelta delle regole logiche accettate per realizzare dimostrazioni: poiché il valore del risultato della coerenza di un sistema formale sarebbe dipeso dall'affidabilità delle regole inferenziali scelte, i formalisti optarono per regole accettate anche dai matematici intuizionisti e logicisti.
Dopo essere riuscito a dimostrare la coerenza relativa tra geometria e analisi (ossia che la geometria euclidea è coerente se e solo lo è l'analisi matematica), Hilbert tracciò esplicitamente il suo programma: dimostrare la coerenza assoluta dell'aritmetica formalizzata e poi, su tale risultato, dimostrare la coerenza assoluta di tutte le altre teorie matematiche.

Una svolta inaspettata

Il programma di Hilbert, nonostante le grandi speranze e il favore con cui venne accolto, era destinato a fallire.
Nel 1931 Kurt Gödel dimostrò che in ogni sistema formale per la teoria dei numeri esiste una proposizione indecidibile, cioè una proposizione che non è dimostrabile e la cui negazione non è dimostrabile. Da ciò egli ricavò poi che la coerenza di un sistema formale per la teoria dei numeri non può essere dimostrata entro il sistema stesso.

Disegno di Escher basato sulla geometria iperbolica.

Attività

La crisi dei fondamenti della matematica. Approfondisci questo tema e sintetizza i risultati delle tue ricerche in una presentazione multimediale.

Da leggere:

- Gabriele Lolli, *Da Euclide a Gödel*, Il Mulino, Bologna, 2010.
- Marco Borga, Dario Palladino, *Oltre il mito della crisi*, Editrice la Scuola, Brescia, 1997.
- Umberto Bottazzini, *Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino, 1990.

@ **Cerca nel Web:**

crisi fondamenti matematica, geometrie non euclidee, teorema incompletezza Gödel, paradosso Russell

CAPITOLO **20**

٢٠ [numerazione araba]

२० [numerazione devanagari]

二十 [numerazione cinese]

LE FUNZIONI E LE LORO PROPRIETÀ

IL PREZZO GIUSTO Ogni volta che acquistiamo un prodotto o un servizio, paghiamo in cambio una certa cifra di denaro.

Chi stabilisce qual è il prezzo «giusto»?

▶ **La risposta a pag. 1366**

1. LE FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Che cosa sono le funzioni

DEFINIZIONE

Funzione

Dati due insiemi A e B (non vuoti), una funzione f da A a B è una relazione che associa a *ogni* elemento di A *uno e un solo* elemento di B.

● A viene anche detto *insieme di partenza* e B *insieme di arrivo*.

Possiamo indicare una funzione con la seguente notazione:

$$f: A \to B.$$

● Si legge: «f è una funzione da A a B».

Se a $x \in A$ la funzione f associa $y \in B$, diciamo che y è **immagine** di x mediante f e x è **controimmagine** di y. Scriviamo:

$$f: x \mapsto y \qquad \text{oppure} \qquad y = f(x).$$

● $y = f(x)$ si legge «y uguale a f di x».

A viene detto **dominio** della funzione, e lo indicheremo anche con D, mentre il sottoinsieme C di B, formato dalle immagini degli elementi di A, è detto **codominio**.

Se A e B sono insiemi di numeri reali, la funzione viene detta **funzione reale di variabile reale**.

ESEMPIO

La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, descritta dalla legge matematica

$$x \mapsto -\frac{3}{2}x + 3 \qquad \text{oppure} \qquad y = -\frac{3}{2}x + 3,$$

associa a ogni valore di x uno e un solo valore di y. Per esempio, per $x = 4$ si ha

$$y = -\frac{3}{2} \cdot 4 + 3 = -3.$$

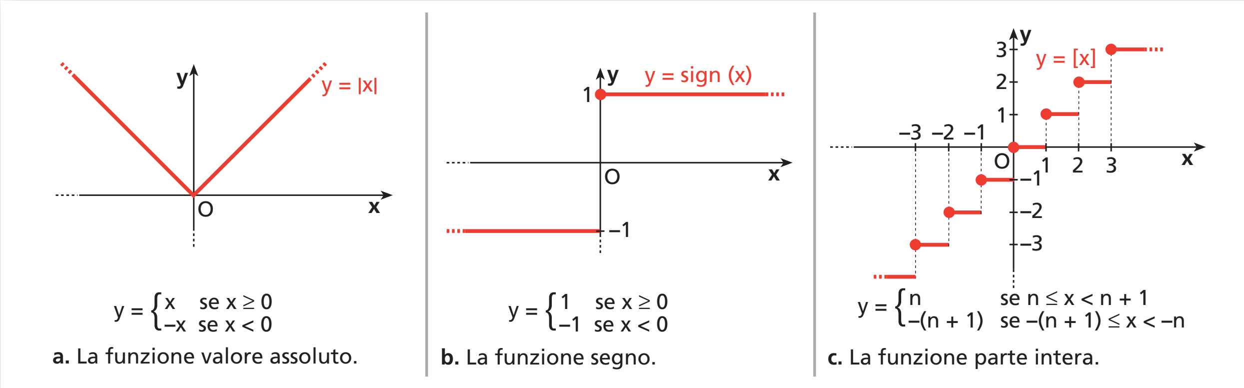
x è detta **variabile indipendente**, y **variabile dipendente**. Spesso, come nell'esempio, una funzione è assegnata mediante un'**espressione analitica**, ossia mediante una formula matematica.

Una funzione può essere anche indicata con un'espressione del tipo $f(x; y) = 0$, detta **forma implicita**, mentre $y = f(x)$ è detta **forma esplicita**. Per esempio, la funzione $3x + 2y - 6 = 0$ è la forma implicita di $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

Di una funzione f possiamo disegnare il **grafico**, cioè l'insieme dei punti $P(x; y)$ del piano cartesiano tali che y è immagine di x mediante f, ossia dei punti del tipo $P(x; f(x))$. Del grafico possiamo cercare le **intersezioni con gli assi**, che si determinano mettendo a sistema l'equazione della funzione con $y = 0$ (equazione dell'asse x) o con $x = 0$ (equazione dell'asse y).

Esistono funzioni, dette **funzioni definite per casi**, date da espressioni analitiche diverse a seconda dei valori attribuiti alla variabile indipendente.

● Queste funzioni vengono anche dette **funzioni definite a tratti.**



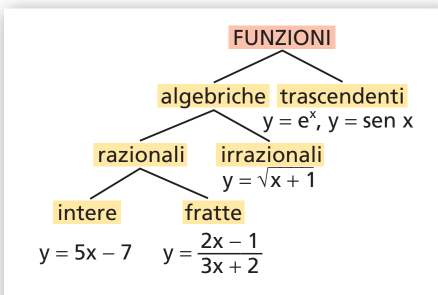
▲ **Figura 1** Alcuni esempi di funzioni definite per casi.

La classificazione delle funzioni

Una funzione è **algebrica** se l'espressione analitica $y = f(x)$ che la descrive contiene, nella variabile x, solo operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza o estrazione di radice. Una funzione algebrica è:

- **razionale intera** (o polinomiale) se è espressa mediante un polinomio; in particolare se il polinomio è di primo grado rispetto alla variabile x, la funzione si dice **lineare**; se il polinomio in x è di secondo grado, la funzione è detta **quadratica**;
- **razionale fratta** se è espressa mediante quozienti di polinomi;
- **irrazionale** se la variabile indipendente x compare sotto il segno di radice.

Se una funzione non è algebrica, si dice **trascendente**.



● Il grafico di una funzione lineare è una retta, mentre quello di una funzione quadratica è una parabola.

◀ **Figura 2** La classificazione delle funzioni reali di variabile reale della forma $y = f(x)$ e alcuni esempi.

Per una funzione algebrica viene definito il **grado** della funzione, che è il grado del polinomio $P(x; y)$, in x e y, che compare nell'espressione analitica in forma implicita della funzione $P(x; y) = 0$.

ESEMPIO

La funzione $y = \dfrac{x-1}{x^2}$ in forma implicita diventa

$$x^2 y - x + 1 = 0,$$

quindi il suo grado è 3.

Il dominio e il segno di una funzione

Spesso di una funzione si considera come dominio il sottoinsieme più ampio di $\mathbb{R}$ in cui la funzione può essere definita. In questo caso si parla di **dominio naturale** o **campo di esistenza** della funzione.

ESEMPIO

La funzione

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$

ha come dominio naturale l'insieme dei valori x per i quali il radicando dell'espressione a secondo membro è positivo o nullo, ossia $x \leq -2 \ \vee \ x \geq 2$. Scriviamo sinteticamente:

$$D: x \leq -2 \vee x \geq 2.$$

● Scrivendo per esteso, abbiamo $D: \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \vee x \geq 2\}$.

● Abitualmente il termine **dominio** viene usato come sinonimo di dominio naturale, in quanto è usuale considerare il dominio naturale come dominio per una funzione.

Domini delle principali funzioni

Funzione	Dominio
Funzioni razionali intere: $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$	$\mathbb{R}$
Funzioni razionali fratte: $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (P e Q polinomi)	$\mathbb{R}$ esclusi i valori che annullano $Q(x)$
Funzioni irrazionali: $y = \sqrt[n]{f(x)}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}$, se n è pari dominio di $f(x)$, se n è dispari
Funzioni logaritmiche: $y = \log_a f(x) \qquad a > 0, a \neq 1$	$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$
Funzioni esponenziali: $y = a^{f(x)} \qquad a > 0, a \neq 1$ $y = f(x)^{g(x)}$	dominio di $f(x)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \cap$ dominio di $g(x)$
Funzioni potenza $y = f(x)^\alpha$: α intero positivo α intero negativo α razionale α irrazionale positivo	dominio di $f(x)$ dominio di $f(x)$ ma con $f(x) \neq 0$ dominio delle funzioni irrazionali $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}$
Funzioni goniometriche: $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ $y = \operatorname{tg} x$ $y = \operatorname{cotg} x$ $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$ $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $\mathbb{R} - \{k\pi\}$ $[-1; 1]$ $\mathbb{R}$

● Esempi:
$y = (x-1)^7$, $D: \mathbb{R}$;
$y = (x-1)^{-7}$, $D: x \neq 1$;
$y = (x-1)^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{(x-1)^4}$, $D: \mathbb{R}$;
$y = (x-1)^\pi$, $D: x \geq 1$.

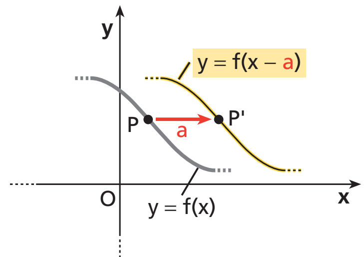
È possibile anche **studiare il segno** di una funzione $y = f(x)$, ossia cercare per quali valori di x appartenenti al dominio il valore di y è positivo, per quali è negativo, per quali è nullo.

● Per esempio, la funzione $y = \ln x$ risulta positiva per $x > 1$, nulla per $x = 1$, negativa per $0 < x < 1$.

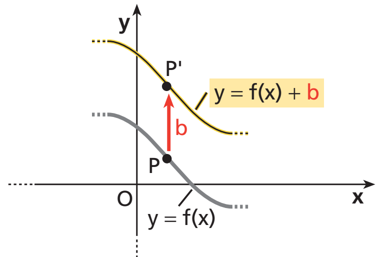
I grafici delle funzioni e le trasformazioni geometriche

IN PRATICA
▶ Videolezione 62

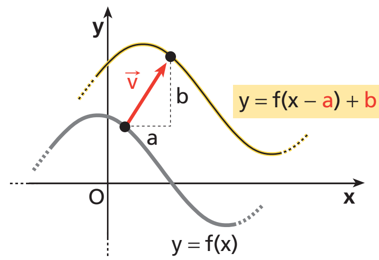
Le traslazioni



a. Traslazione di vettore $\vec{v}(a; 0)$ parallelo all'asse *x*.

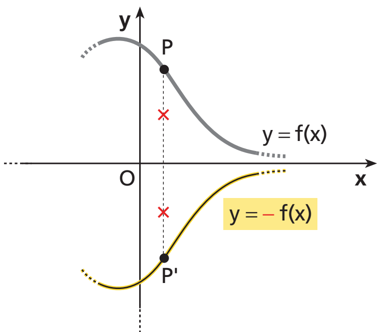


b. Traslazione di vettore $\vec{v}(0; b)$ parallelo all'asse *y*.

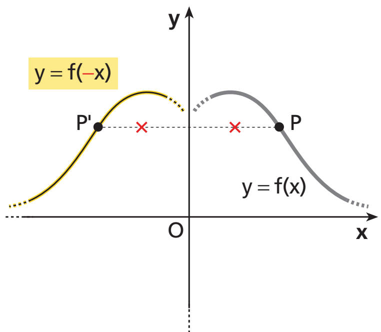


c. Traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$.

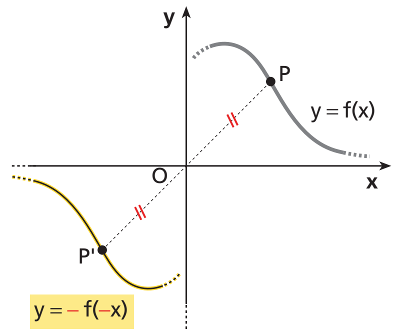
Le simmetrie



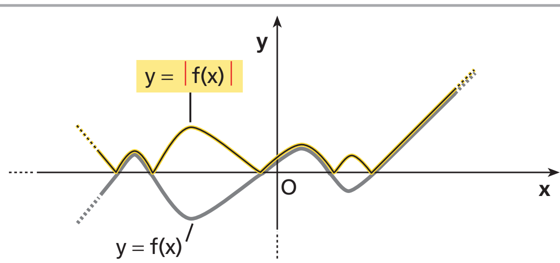
a. Simmetria rispetto all'asse *x*.



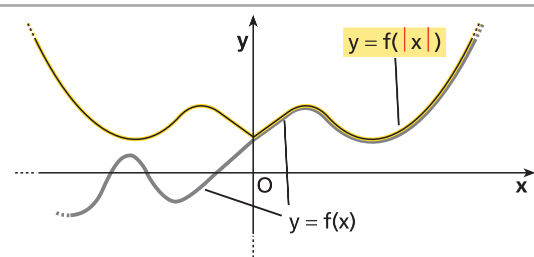
b. Simmetria rispetto all'asse *y*.



c. Simmetria centrale rispetto a *O*.

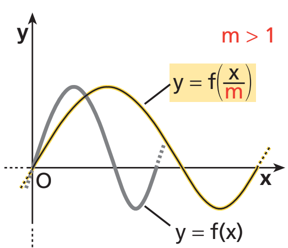


d. Il grafico di $|f(x)|$, se $f(x) \geq 0$, è lo stesso di $f(x)$; se $f(x) < 0$, è simmetrico rispetto all'asse *x* di quello di $f(x)$.

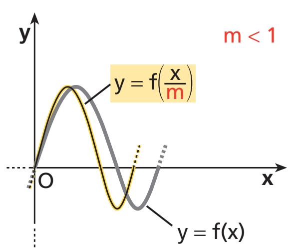


e. Per $x \geq 0$ il grafico è lo stesso di $y = f(x)$, per $x < 0$ il grafico è il simmetrico rispetto all'asse *y* di quello che $y = f(x)$ ha per $x > 0$.

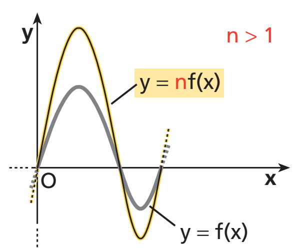
Le dilatazioni



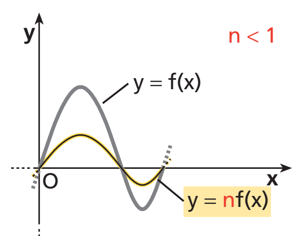
a. Dilatazione orizzontale.



b. Contrazione orizzontale.



c. Dilatazione verticale.

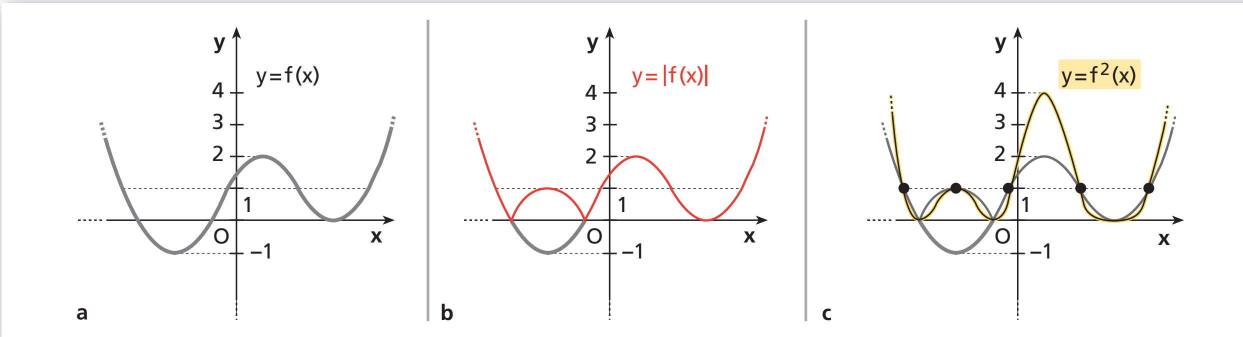


d. Contrazione verticale.

Il grafico di $y = f^2(x)$

Dato il grafico di $y = f(x)$, per tracciare l'andamento di quello di $y = f^2(x)$, teniamo conto che:

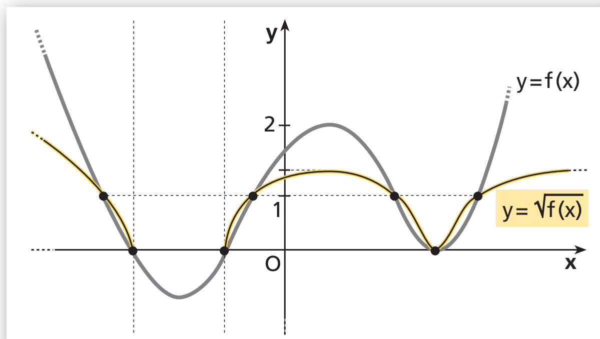
1. se $|f(x)| = 1$, $f^2(x) = 1$;
2. se $|f(x)| = 0$, $f^2(x) = 0$;
3. se $|f(x)| < 1$, $f^2(x) < |f(x)|$;
4. se $|f(x)| > 1$, $f^2(x) > |f(x)|$.



Il grafico di $y = \sqrt{f(x)}$

Dato il grafico di $y = f(x)$, per tracciare l'andamento di quello di $y = \sqrt{f(x)}$, osserviamo che:

1. se $f(x) < 0$, $\sqrt{f(x)}$ non esiste;
2. se $f(x) = 0$, $\sqrt{f(x)} = 0$;
3. se $f(x) = 1$, $\sqrt{f(x)} = 1$;
4. se $0 < f(x) < 1$, $f(x) < \sqrt{f(x)} < 1$;
5. se $f(x) > 1$, $1 < \sqrt{f(x)} < f(x)$.



Il grafico di $y = \dfrac{1}{f(x)}$

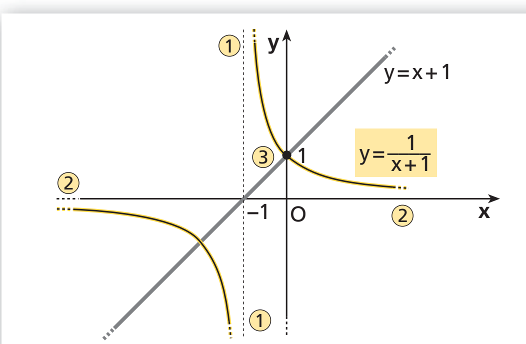
1. Se il grafico di $f(x)$ interseca l'asse x in x_0, per x che si avvicina a x_0:

- se $f(x) > 0$, $\dfrac{1}{f(x)}$ assume valori positivi sempre più grandi; diremo che $\dfrac{1}{f(x)}$ tende a $+\infty$;
- se $f(x) < 0$, $\dfrac{1}{f(x)}$ assume valori negativi, in valore assoluto sempre più grandi; diremo che $\dfrac{1}{f(x)}$ tende a $-\infty$.

La retta $y = x_0$ è asintoto verticale.

2. Se $f(x)$ tende a $+\infty$ o $-\infty$, $\dfrac{1}{f(x)}$ tende a 0.

3. Se $f(a) = 1$ o $f(a) = -1$, a è punto di intersezione fra i grafici di $f(x)$ e di $\dfrac{1}{f(x)}$.



① Se x tende a -1, $\dfrac{1}{x+1}$ tende a $-\infty$ o a $+\infty$.

② Se $x+1$ tende a $-\infty$ o a $+\infty$, $\dfrac{1}{x+1}$ tende a 0.

③ Il punto di ordinata 1, appartenente a $y=x+1$, appartiene anche a $y=\dfrac{1}{x+1}$.

2. LE PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI

Le funzioni iniettive, suriettive e biiettive

DEFINIZIONE

Funzione iniettiva, funzione suriettiva, funzione biiettiva (o biunivoca)

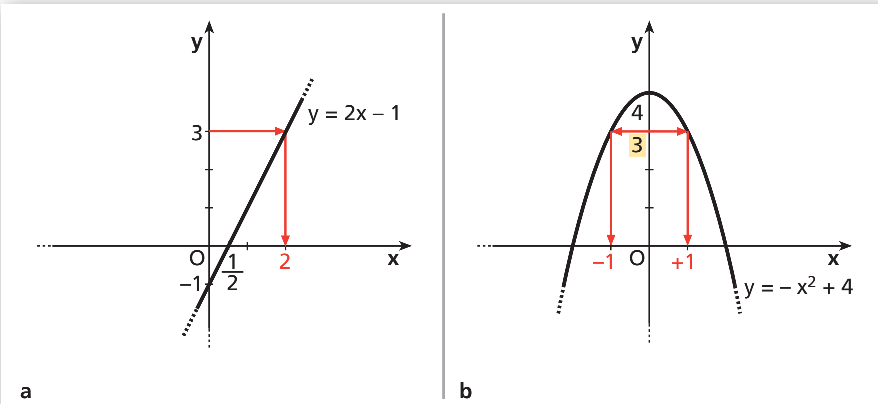
Una funzione da A a B si dice:

- iniettiva se ogni elemento di B è immagine di al più un elemento di A;
- suriettiva se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A;
- biiettiva (o biunivoca) se è sia iniettiva sia suriettiva.

In modo equivalente, possiamo dire che una funzione è *iniettiva* se a elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B, ossia, comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti ad A, si ha

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

ESEMPIO



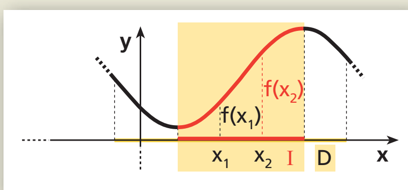
◀ Figura 3
a) La funzione $y = 2x - 1$ è sia iniettiva sia suriettiva perché a ogni valore scelto sull'asse y corrisponde *un* valore (suriettiva) e *un solo* (iniettiva) valore sull'asse x. La funzione è quindi biiettiva.
b) La funzione $y = -x^2 + 4$ è suriettiva se si considera come insieme B quello degli y tali che $y \leq 4$, ma *non* è iniettiva perché, scelto nel codominio un y diverso da 4, esso è l'immagine di **due** valori distinti di x.

Le funzioni crescenti, decrescenti, monotòne

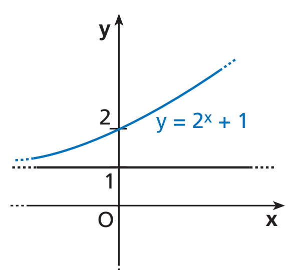
DEFINIZIONE

Funzione crescente

Una funzione $y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ si dice crescente in un intervallo I, sottoinsieme di D, se comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) < f(x_2)$.



Una funzione crescente viene detta anche **crescente in senso stretto**.



ESEMPIO La funzione $y = 2^x + 1$ è crescente in $\mathbb{R}$. Infatti:

$$x_1 < x_2 \rightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2} \rightarrow 2^{x_1} + 1 < 2^{x_2} + 1 \rightarrow y_1 < y_2.$$

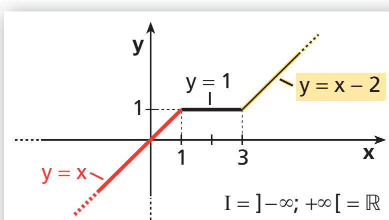
Se nella definizione precedente sostituiamo la relazione $f(x_1) < f(x_2)$ con $f(x_1) \leq f(x_2)$, otteniamo la definizione di funzione **crescente in senso lato**, o anche **non decrescente**.

Si può anche dire che la funzione è **debolmente crescente**.

ESEMPIO La funzione

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 3 \\ x - 2 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

è crescente in senso lato in $\mathbb{R}$ (figura 4).

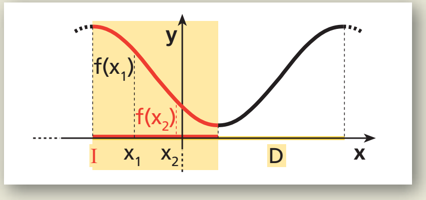


◀ Figura 4 Un esempio di funzione crescente in senso lato in $\mathbb{R}$.

DEFINIZIONE

Funzione decrescente

Una funzione $y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ si dice decrescente in un intervallo I, sottoinsieme di D, se comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) > f(x_2)$.



- Una funzione decrescente viene detta anche decrescente **in senso stretto**.

Se nella definizione precedente sostituiamo la relazione $f(x_1) > f(x_2)$ con $f(x_1) \geq f(x_2)$, otteniamo la definizione di funzione **decrescente in senso lato**, o anche **non crescente**.

- In questo caso la funzione si può anche dire **debolmente decrescente**.

Una funzione si dice **monotòna** in un intervallo I del suo dominio se in I è sempre crescente o decrescente.

- Una funzione può essere monotòna in senso stretto e in senso lato.

Una funzione f monotòna in senso stretto è sempre iniettiva. Infatti, se f è monotòna in senso stretto, allora per ogni $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$ oppure $f(x_1) > f(x_2)$; quindi risulta $f(x_1) \neq f(x_2)$, cioè f è iniettiva.

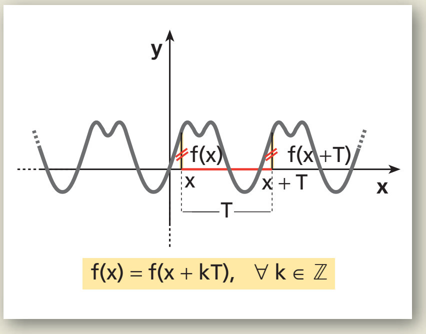
Le funzioni periodiche

DEFINIZIONE

Funzione periodica

Una funzione $y = f(x)$ si dice periodica di periodo T, con $T > 0$, se, per qualsiasi numero k intero, si ha:

$$f(x) = f(x + kT).$$



- Se f è periodica di periodo T, allora non è iniettiva, perché x e $x + kT$ hanno la stessa immagine.

In una funzione periodica il grafico si ripete di periodo in periodo.

- Se una funzione è periodica di periodo T, essa lo è anche di periodo $2T$, $3T$, $4T$, …
Il periodo minore è anche detto **periodo principale** ed è quello che di solito è considerato come periodo della funzione.
Per esempio, $y = \text{sen}\,4x$ ha come periodo principale
$T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

ESEMPIO

$y = \text{sen}\,x$ e $y = \cos x$ sono funzioni periodiche di periodo 2π.

$y = \text{tg}\,x$ e $y = \text{cotg}\,x$ sono funzioni periodiche di periodo π.

Le funzioni pari e le funzioni dispari

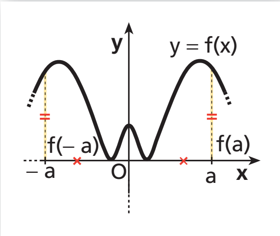
DEFINIZIONE

Funzione pari

Indichiamo con D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che, se $x \in D$, allora $-x \in D$. Una funzione $y = f(x)$ avente D come dominio si dice pari se $f(-x) = f(x)$ per qualunque x appartenente a D.

$f: D \to \mathbb{R}$ $\qquad D \subseteq \mathbb{R}$

$\forall\, x, -x \in D \quad \Rightarrow \quad f(-x) = f(x)$



▲ **Figura 5** Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse *y*.

ESEMPIO

La funzione $y = f(x) = 2x^4 - 1$ è pari perché, sostituendo a x il suo opposto $-x$, si ottiene ancora $f(x)$:

$$f(-x) = 2(-x)^4 - 1 = 2x^4 - 1 = f(x).$$

In generale, se una funzione ha espressione analitica $y = f(x)$ contenente soltanto potenze della x con *esponente pari*, allora è pari.

● Verifica invece che la funzione $y = f(x) = 2x^4 - x$ **non** è pari perché, sostituendo a x il suo opposto $-x$, si ha $f(-x) \neq f(x)$.

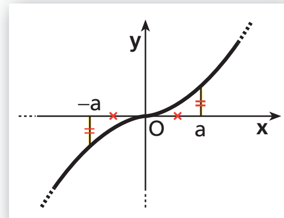
DEFINIZIONE

Funzione dispari

Indichiamo con D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che, se $x \in D$, anche $-x \in D$. Una funzione $y = f(x)$ avente D come dominio si dice dispari se $f(-x) = -f(x)$ per qualunque x appartenente a D.

$f\colon D \to \mathbb{R}$ $\quad D \subseteq \mathbb{R}$

$\forall\, x, -x \in D \quad \Rightarrow \quad f(-x) = -f(x)$



▲ **Figura 6** Il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine.

ESEMPIO

La funzione $y = f(x) = x^3 + x$ è dispari perché, sostituendo a x il suo opposto $-x$, si ottiene $-f(x)$:

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x).$$

Una funzione con espressione analitica $y = f(x)$ contenente solo potenze della x con *esponente dispari* è una funzione dispari.

● Verifica che la funzione $y = f(x) = x^3 + 1$ **non** è dispari perché, sostituendo a x il suo opposto $-x$, si ha $f(-x) \neq -f(x)$.

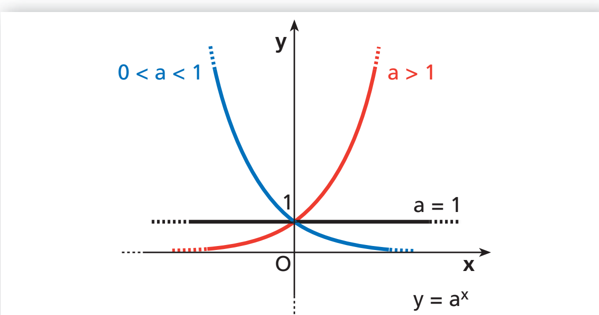
● Una funzione che non sia pari non è necessariamente dispari (e viceversa).
Per esempio, la funzione $y = f(x) = x^2 + x$ non è né pari né dispari. Infatti:

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq -f(x) \wedge \neq f(x).$$

● $-f(x) = -x^2 - x$.

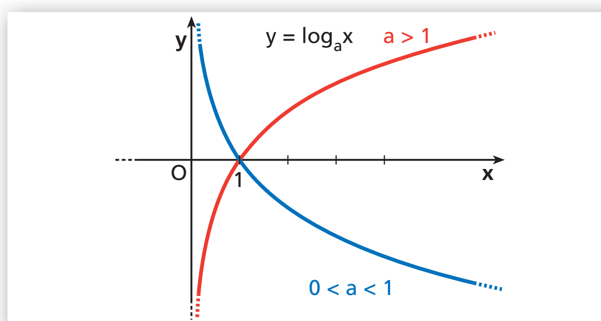
● **Le proprietà delle principali funzioni trascendenti**

La funzione esponenziale



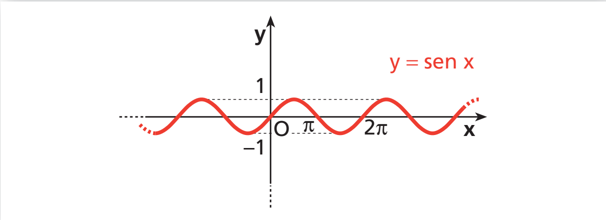
- Ha come **dominio** $\mathbb{R}$ e come **codominio**, se $a \neq 1$, $\mathbb{R}^+$, ossia il suo grafico sta tutto «sopra» l'asse x.
- Il grafico: **non interseca** l'asse x; **interseca** l'asse y in $(0; 1)$.
- Se $a > 1$, è una funzione **crescente**; se $0 < a < 1$, è **decrescente**; se $a = 1$, è **costante** e vale 1.

La funzione logaritmica



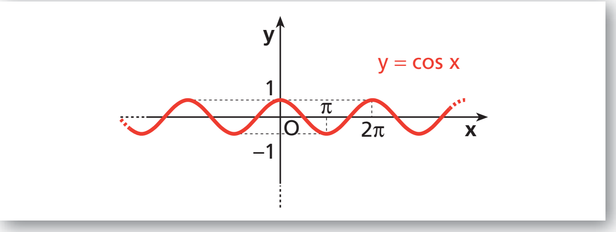
- Ha come **dominio** $\mathbb{R}^+$, come **codominio** $\mathbb{R}$.
- Il grafico: **interseca** l'asse x in $(1; 0)$; **non interseca** l'asse y.
- Se $a > 1$, è una funzione **crescente**; se $0 < a < 1$, è **decrescente**.

La funzione seno



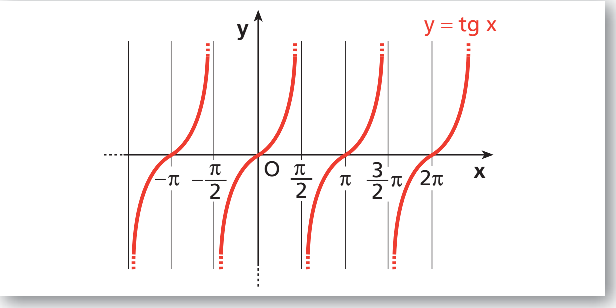
- Ha come **dominio** $\mathbb{R}$ e come **codominio** $[-1; 1]$.
- È una funzione **dispari**, in quanto $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.
- È una funzione periodica di **periodo** 2π:
  $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- È **crescente** in $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, è **decrescente** in $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$.

La funzione coseno



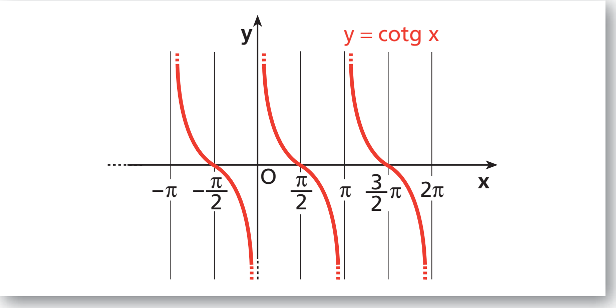
- Ha come **dominio** $\mathbb{R}$ e come **codominio** $[-1; 1]$.
- È una funzione **pari**, in quanto $\cos(-x) = \cos x$.
- È una funzione periodica di **periodo** 2π:
  $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- È **crescente** in $[-\pi; 0]$, è **decrescente** in $[0; \pi]$.

La funzione tangente



- Ha come **dominio** l'insieme $\mathbb{R}$ privato dei valori $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) e come **codominio** $\mathbb{R}$.
- È una funzione **dispari** in quanto $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.
- È una funzione periodica di **periodo** π:
  $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- È **crescente** in $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

La funzione cotangente



- Ha come **dominio** l'insieme $\mathbb{R}$ privato dei valori $k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) e come **codominio** $\mathbb{R}$.
- È una funzione **dispari** in quanto $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$.
- È una funzione periodica di **periodo** π:
  $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}(x + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- È **decrescente** in $]0; \pi[$.

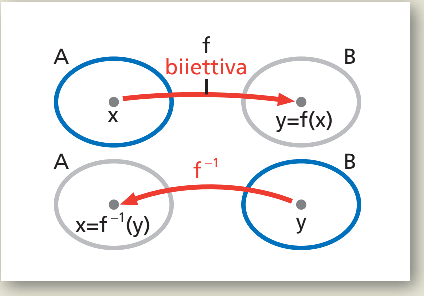
La funzione inversa

DEFINIZIONE

Funzione inversa

Data la funzione biiettiva f da A a B, la funzione inversa di f è la funzione biiettiva f^{-1} da B ad A che associa a ogni y di B il valore x di A tale che $y = f(x)$:

$$f^{-1}: y \to x.$$



Si ha quindi che $x = f^{-1}(y)$, dove y è la variabile indipendente e x la variabile dipendente, ma per poter rappresentare la funzione $x = f^{-1}(y)$ nello stesso piano cartesiano di $y = f(x)$ operiamo la sostituzione

$$x \to y \text{ e } y \to x$$

e otteniamo $y = f^{-1}(x)$.
Con la sostituzione indicata si ottiene il grafico simmetrico di $y = f(x)$ rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

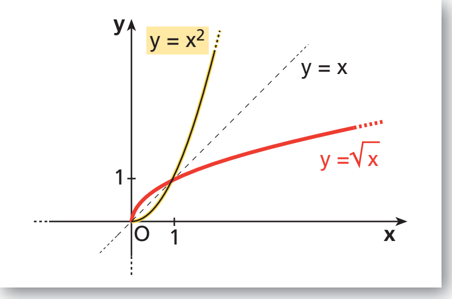
Se una funzione ammette inversa, si dice che è **invertibile**.

ESEMPIO

La funzione $y = f(x) = x^2$ ha come dominio $\mathbb{R}$, ma in $\mathbb{R}$ non è biiettiva. Per renderla biiettiva dobbiamo considerare come dominio un insieme più ristretto, per esempio quello dei numeri reali positivi o nulli. In casi come questo parliamo di **restrizione del dominio** per l'invertibilità della funzione. La sua funzione inversa è:

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

Per rappresentare la funzione f^{-1} insieme alla funzione f, scambiamo le variabili nell'espressione della funzione inversa, considerando: $y = \sqrt{x}$.



◀ **Figura 7** Il grafico della funzione $y = x^2$ e della sua inversa $y = \sqrt{x}$, per $x \geq 0$.

Il grafico di una funzione e della sua inversa sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

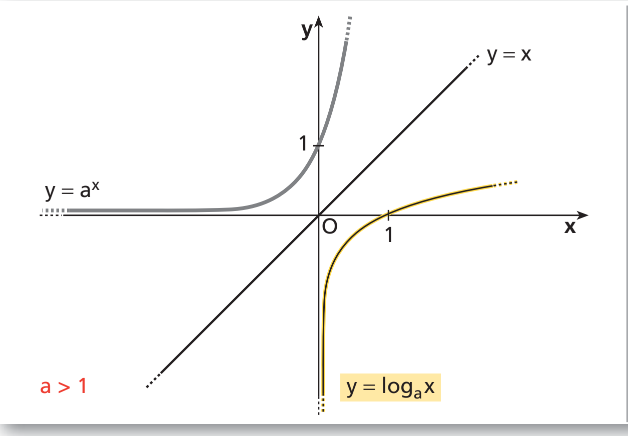
Sfruttando questa proprietà, conoscendo il grafico di una funzione possiamo disegnare il grafico della sua inversa.

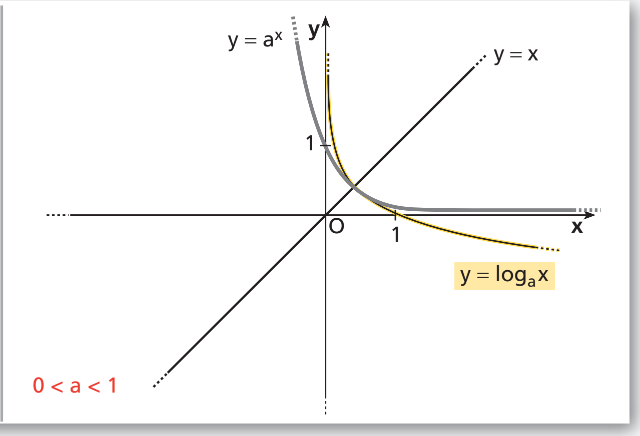
Le funzioni monotòne in senso stretto sono biiettive se si considera come insieme di arrivo il loro codominio. Quindi esse ammettono sempre la funzione inversa.

Il grafico delle funzioni inverse

La funzione esponenziale e la funzione logaritmica

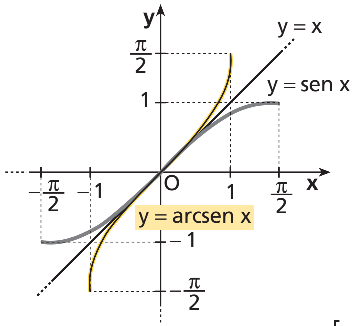
La funzione logaritmica è l'inversa della funzione esponenziale (e viceversa). Sono entrambe funzioni strettamente monotòne e quindi biiettive.



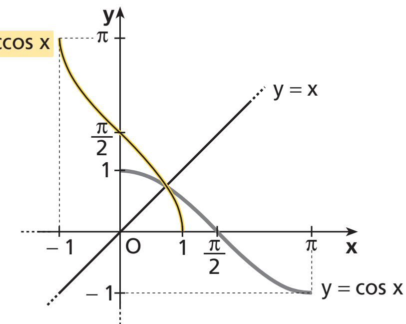


Le funzioni goniometriche e le loro inverse

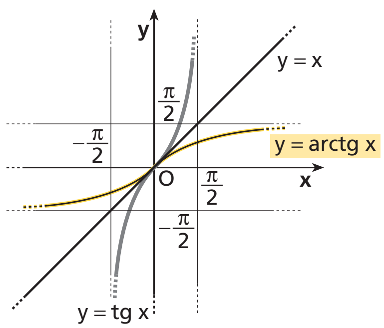
Poiché le funzioni goniometriche sono periodiche, e quindi non biiettive, è necessario effettuare una restrizione del dominio, in modo che risultino essere biiettive.



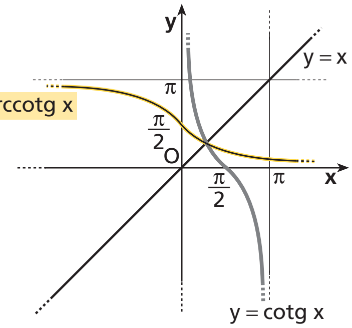
a. Considerata la funzione seno nel dominio $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, la **funzione arcoseno** ha dominio $D = [-1; 1]$ e codominio $C = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



b. Considerata la funzione coseno nel dominio $[0; \pi]$, la **funzione arcocoseno** ha dominio $D = [-1; 1]$ e codominio $C = [0; \pi]$.



c. Considerata la funzione tangente nel dominio $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, la **funzione arcotangente** ha dominio $D = \mathbb{R}$ e codominio $C = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.



d. Considerata la funzione cotangente nel dominio $]0; \pi[$, la **funzione arcocotangente** ha dominio $D = \mathbb{R}$ e codominio $C =]0; \pi[$.

Le funzioni composte

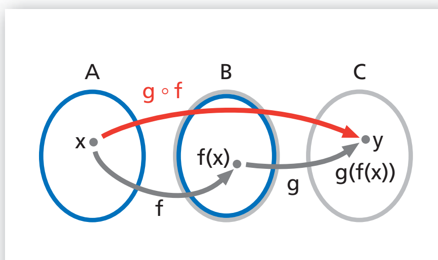
Date le funzioni

$$f\colon A \to B \text{ e } g\colon B \to C,$$

indichiamo con $g \circ f$ oppure con

$$y = g(f(x))$$

la funzione, detta **funzione composta**, da A a C che si ottiene associando a ogni x di A l'immagine mediante g dell'immagine di x mediante f.



▲ **Figura 8**

- $g \circ f$ si legge «g composto f». $g(f(x))$ si legge «g di f di x».
- $g \circ f$ è quindi definita se il codominio di f è contenuto nel dominio di g: $C_f \subseteq D_g$.

- Nella definizione, l'insieme di arrivo della prima funzione coincide con il dominio della seconda.

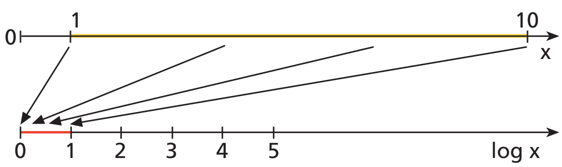
In generale si ha $g \circ f \neq f \circ g$, ossia la composizione delle funzioni **non** è commutativa.

ESPLORAZIONE

Logaritmi e decibel

Le scale logaritmiche

Sono utili per misurare grandezze che variano molto rapidamente, perché permettono di «comprimere» su un intervallo più piccolo i possibili valori di una grandezza (per esempio l'intensità di un suono), rendendoli più facili da trattare.



Inoltre, usando i logaritmi, riusciamo a trasformare una dipendenza non lineare in una lineare. Supponiamo che una grandezza y dipenda da una grandezza x secondo la legge

$$y = ax^2,$$

dove a è una costante positiva. Il grafico di questa legge è una parabola. Passando ai logaritmi e applicando le loro proprietà, otteniamo:

$$\log y = \log (ax^2) \quad \rightarrow \quad \log y = \log a + 2 \log x.$$

Il grafico di questa legge (se consideriamo $\log x$ e $\log y$ come nuove variabili) è una retta: le due quantità dipendono l'una dall'altra in modo lineare.

I decibel

Il timpano è una membrana che reagisce a variazioni di pressione. Il suono è un'onda che propagandosi nell'aria produce queste variazioni. L'**intensità effettiva** di un suono è l'energia associata all'onda sonora che attraversa un'unità di superficie nell'unità di tempo e si esprime in watt/metro^2 (W/m^2). Il **campo di udibilità** è un intervallo di intensità sonore il cui limite inferiore, o **soglia del silenzio**, vale 10^{-12} W/m^2 e corrisponde all'incirca al rumore provocato da una zanzara a 3 metri di distanza. La **soglia del dolore** è invece il limite superiore dell'intervallo. Vale 1 W/m^2 ed è la massima intensità sonora che siamo in grado di sopportare: andando oltre, al suono si sostituisce una sensazione di dolore.

Il campo di udibilità occupa 12 ordini di grandezza, quindi è comodo rappresentarlo con una scala logaritmica. In questa scala l'unità di misura è il **decibel** (dB). Il **livello di intensità percepita** I_{dB} misurato in dB è legato all'intensità effettiva I di un suono in W/m^2 da una relazione logaritmica:

$$I_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

dove I_0 è la soglia del silenzio (presa come riferimento) a cui corrisponde il valore di 0 dB. Questo implica che a una piccola differenza (per esempio 10 dB) tra il livello di intensità di due suoni percepiti, come il fruscio del vento tra le foglie e un mormorio, corrisponda una grande differenza (di un fattore 10) tra le intensità effettive.

Attività

- Fai una ricerca su altre applicazioni della funzione logaritmo.

Cerca nel Web:

logaritmi applicazioni, pH definizione, scala Richter, magnitudo

IL PREZZO GIUSTO

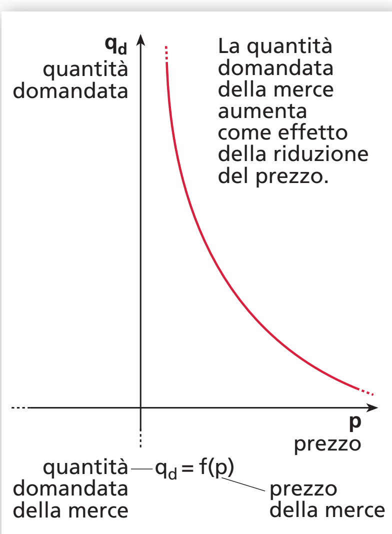
Chi stabilisce qual è il prezzo «giusto»?

▶ Il quesito completo a pag. 1353

Tutto quello che acquistiamo, un paio di scarpe, la benzina o un pacco di pasta al supermercato, ha un certo prezzo. Questo tende al prezzo «giusto» per acquirenti e venditori seguendo una legge di mercato.
Il prezzo di un bene sale o scende a seconda che esso sia più o meno richiesto (domanda) e più o meno presente (offerta) sul mercato. Vale anche il contrario: la domanda e l'offerta possono variare in funzione del prezzo.

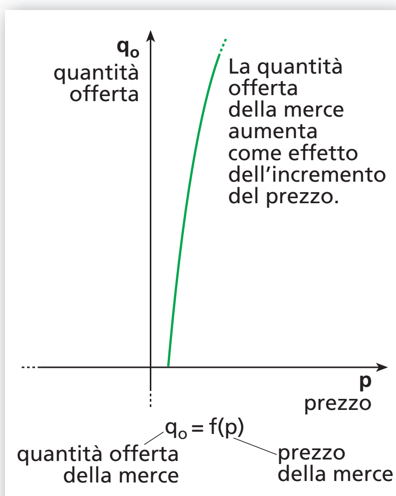
La curva di domanda

Più un bene o un servizio è economico, maggiore sarà la quantità richiesta dai consumatori. Più è caro, meno saranno quelli disposti a spendere una somma astronomica. Sotto questo aspetto la domanda è quindi una funzione continua e decrescente del prezzo della merce. Il grafico in figura mostra la curva di domanda in funzione del prezzo. Si tratta ovviamente di un modello semplificato. In un contesto reale, la domanda è funzione anche di altre variabili, come il tipo di bene, il reddito del consumatore o il prezzo di prodotti concorrenti.



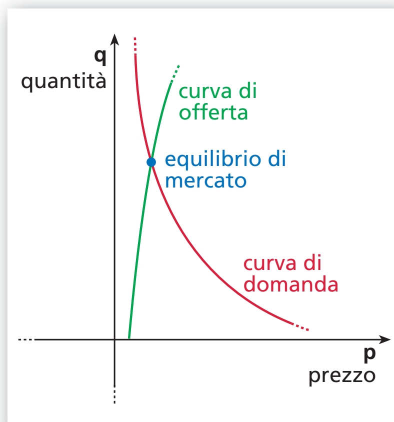
La curva di offerta

Anche l'offerta, la quantità di merce messa in vendita, è una funzione matematica per la quale assumiamo il prezzo come variabile indipendente e la sua quantità come variabile dipendente. L'offerta ha un andamento diverso dalla domanda: la correlazione tra la merce in vendita e il corrispettivo prezzo è opposta. Mettendosi nei panni del produttore, il cui fine è massimizzare il profitto, se una merce ha un prezzo più alto, il guadagno per lui sarà maggiore vendendone una quantità superiore. Viceversa, se il prezzo diminuisce, il produttore sarà disincentivato a vendere il prodotto e ne produrrà di meno.
L'offerta è quindi una funzione crescente del prezzo di vendita, come si può vedere nel grafico in figura.



Qual è il prezzo ideale per soddisfare le esigenze di consumatori e venditori?

Si dice che il mercato è in equilibrio quando, per un dato prezzo, la quantità domandata dai consumatori è uguale alla quantità offerta dalle imprese. Pertanto, non vi sono né eccedenze di merce nei negozi né richieste insoddisfatte da parte dei consumatori.
Graficamente, il punto di equilibrio corrisponde al punto in cui la curva di domanda incontra la curva di offerta. Il punto di intersezione delle due funzioni determina il prezzo giusto, né troppo alto né troppo basso, per mantenere il mercato in equilibrio.



Quando il prezzo di un bene si allontana dal prezzo di equilibrio, subisce oscillazioni che lo riportano al valore ideale. Infatti, un prezzo più elevato del prezzo di equilibrio farebbe arrivare sul mercato più merce di quanta i consumatori sono disposti ad acquistare, lasciando invenduta gran parte della produzione; pertanto, per incrementare le vendite, le imprese cercherebbero di abbassare i prezzi.
Al contrario, un prezzo più basso del prezzo di equilibrio porterebbe i consumatori ad acquistare più merce di quanta ne producono le imprese e queste ne approfitterebbero aumentando i loro prezzi.

LABORATORIO DI MATEMATICA
LE FUNZIONI E LE LORO PROPRIETÀ

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Wiris determiniamo le intersezioni con gli assi cartesiani della funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge $y = 12x^4 - 20x^3 - 231x^2 - 145x + 132$ e ne tracciamo il grafico, dove evidenziamo le intersezioni trovate.

- Entriamo in ambiente Wiris e inseriamo l'espressione della funzione $f(x)$ (figura 1).
- Troviamo le ascisse delle intersezioni con l'asse x: impostiamo l'equazione ottenuta uguagliando a 0 l'espressione di $f(x)$ e la risolviamo con un clic su *Calcola*.
- Troviamo, quindi, l'ordinata dell'intersezione con l'asse y valutando $f(0)$.

$f(x) := 12 \cdot x^4 - 20 \cdot x^3 - 231 \cdot x^2 - 145 \cdot x + 132;$

$\text{risolvere}(12 \cdot x^4 - 20 \cdot x^3 - 231 \cdot x^2 - 145 \cdot x + 132 = 0) \rightarrow \left\{\{x=-3\}, \left\{x=\frac{1}{2}\right\}, \left\{x=\frac{11}{2}\right\}, \left\{x=-\frac{4}{3}\right\}\right\}$

$f(0) \rightarrow 132$

▲ Figura 1

- Scriviamo le coordinate dei punti secondo la sintassi di Wiris (figura 2).
- Inquadriamo i punti salienti della $f(x)$ indicando al sistema, con l'istruzione tracciante, di mostrare la zona del piano cartesiano che abbia il centro nel punto $(1; -500)$ e dimensioni 12 per l'asse x e 4000 per l'asse y.
- Impostiamo quindi due istruzioni *tracciare* contenenti rispettivamente la funzione e i punti, sulle quali diamo *Calcola*, ottenendo il grafico di figura 3.

$A = \text{punto}(-3,0);$

$B = \text{punto}\left(-\frac{4}{3}, 0\right);$

$C = \text{punto}\left(\frac{1}{2}, 0\right);$

$D = \text{punto}\left(\frac{11}{2}, 0\right);$

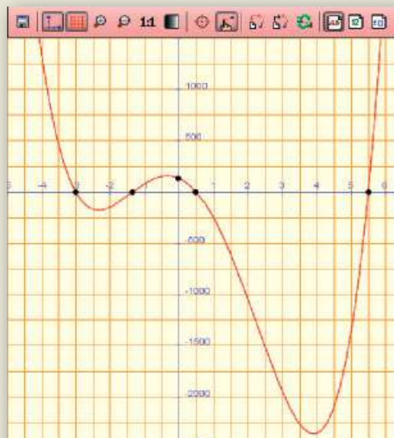
$E = \text{punto}(0, 132);$

tracciante(punto(1, −500), 12, 4000);

tracciare(f(x), {colore = rosso});

tracciare({A, B, C, D, E}, {dimensione_punto = 6});

◀ Figura 2



▲ Figura 3

Nel sito: ▶ 1 esercitazioni guidata ▶ 44 esercitazioni in più

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer determina il dominio, la positività e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani delle seguenti funzioni. Con gli strumenti grafici del tuo applicativo informatico traccia l'andamento delle funzioni ed evidenzia le intersezioni trovate.

1 $f(x) = 4 + \dfrac{1}{x-2}$

2 $g(x) = 2 - \ln(x-2)$

3 $h(x) = |2x^2 + 5x| - 3$

4 $s(x) = 2 - e^x$

5 $p(x) = 2 - \dfrac{1}{|2x+4|}$

6 $l(x) = \ln(-4-x)$

7 $m(x) = \dfrac{e^x - 4}{2}$

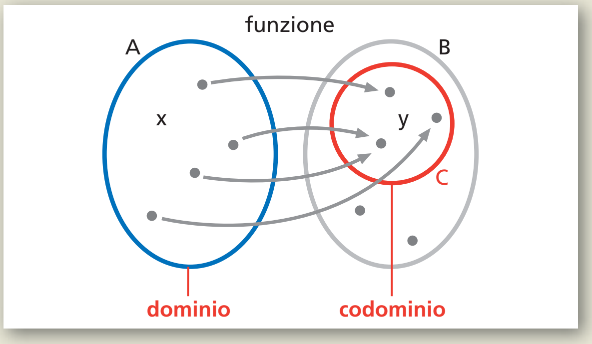
8 $r(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 - 3x}$

LA TEORIA IN SINTESI

LE FUNZIONI E LE LORO PROPRIETÀ

1. LE FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

- Dati due sottoinsiemi A e B (non vuoti) di $\mathbb{R}$, una **funzione** da A a B è una relazione che a *ogni* elemento di A associa *uno e un solo* elemento di B.
  Se $y \in B$ è associato a $x \in A$ dalla funzione, diciamo che y è l'**immagine** di x.
- Il **dominio** della funzione è l'insieme A, il **codominio** è il sottoinsieme di B costituito dalle immagini degli elementi di A.



- Data la funzione $y = f(x)$, y è detta **variabile dipendente** e x **variabile indipendente**.
- **Funzioni reali di variabile reale**: sono rappresentate in genere da un'**espressione analitica**, ossia una formula matematica.
- Il **grafico** di una funzione f è l'insieme dei punti $P(x; y)$ del piano cartesiano tali che $y = f(x)$.
- **Dominio naturale** o **campo di esistenza** di una funzione: è il più ampio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che può essere preso come dominio. Esso è costituito da tutti i valori per i quali esiste l'espressione analitica che definisce la funzione.
- Il **valore assoluto** è un esempio di **funzione definita per casi**:

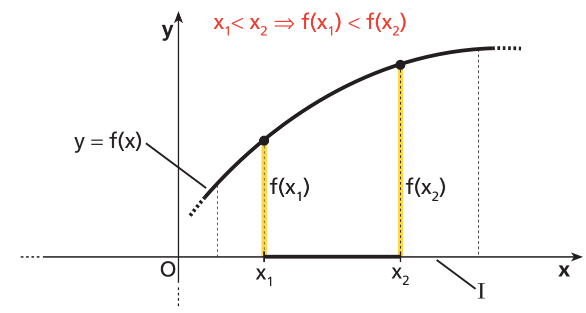
$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- Se l'espressione analitica che descrive una funzione contiene soltanto operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza o estrazione di radice, la funzione è **algebrica**.
  Una funzione algebrica può essere:
  - **razionale intera**, o **polinomiale**, se è espressa mediante un polinomio nella variabile indipendente;
  - **razionale fratta** se è espressa mediante quozienti di polinomi in x;
  - **irrazionale** se la variabile indipendente compare sotto il segno di radice.
- Il **grado** di una funzione algebrica è il grado del polinomio $P(x; y)$ della forma implicita $P(x; y) = 0$ della funzione.
- Se una funzione non è algebrica, si dice **trascendente**.

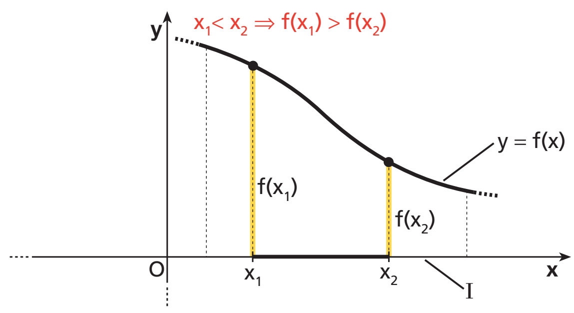
2. LE PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI

- Una funzione da A a B è:
  - **iniettiva** se due qualunque elementi *distinti* di A hanno immagini distinte in B;
  - **suriettiva** se *tutti* gli elementi di B sono immagini di almeno un elemento di A;
  - **biiettiva** (o biunivoca) se è iniettiva e suriettiva.

- Una funzione $y = f(x)$, di dominio D, si dice:
  - **crescente** in un intervallo $I \subseteq D$, se $\forall x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) < f(x_2)$;
  - **decrescente** in un intervallo $I \subseteq D$, se $\forall x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) > f(x_2)$.



a. Funzione crescente in I.



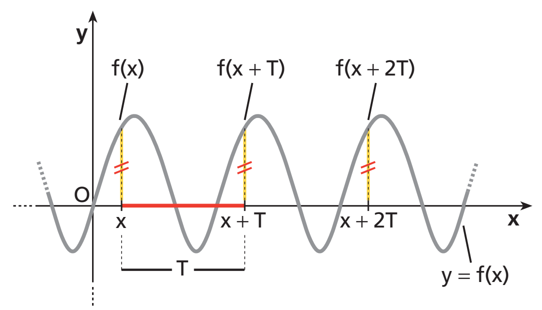
b. Funzione decrescente in I.

  - Se la funzione è crescente o decrescente **in senso lato**, le considerazioni sono analoghe, ma valgono rispettivamente le relazioni $f(x_1) \leq f(x_2)$ e $f(x_1) \geq f(x_2)$.

- **Funzione monotòna**
  Una funzione, di dominio D, si dice **monotòna** in un intervallo $I \subseteq D$ se in esso è sempre crescente o sempre decrescente.

- **Funzione periodica**
  Una funzione $y = f(x)$ si dice **periodica** di periodo T ($T > 0$) se:

$$f(x) = f(x + kT), \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$



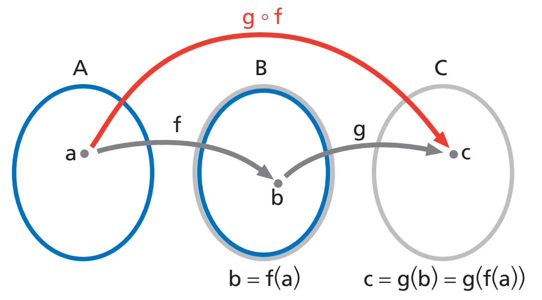
- Una funzione $y = f(x)$, definita in un certo dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, si dice:
  - **pari** se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$;
  - **dispari** se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$.

  ESEMPIO: $y = x^2$ è una funzione pari, $y = x^3$ è una funzione dispari.

- Una funzione ammette la **funzione inversa** se e solo se è biiettiva. Se indichiamo con f una funzione e con f^{-1} la sua inversa si ha:

$$a = f^{-1}(b) \quad \Leftrightarrow \quad b = f(a).$$

- Date le funzioni $f: A \to B$ e $g: B \to C$, si può definire la **funzione composta** $g \circ f: A \to C$, che associa a ogni elemento $a \in A$ un elemento $c \in C$ che è l'immagine mediante g dell'immagine di a mediante f.
  In generale, $g \circ f \neq f \circ g$.



Funzione composta

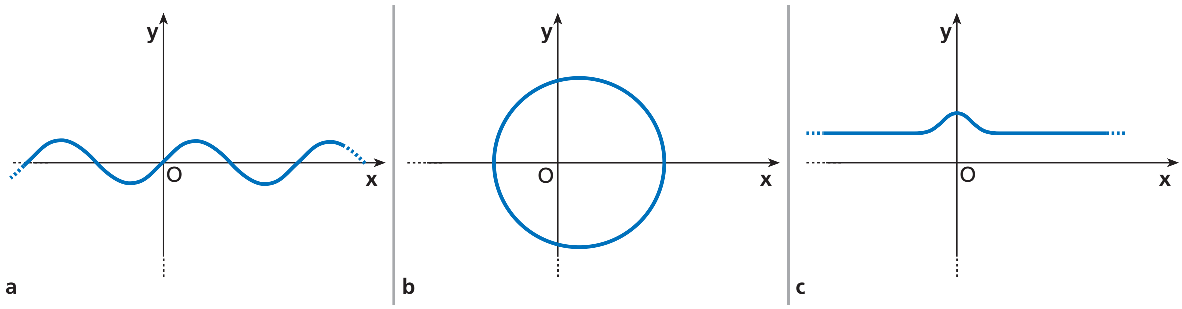
1. LE FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

▶ Teoria a pag. 1354

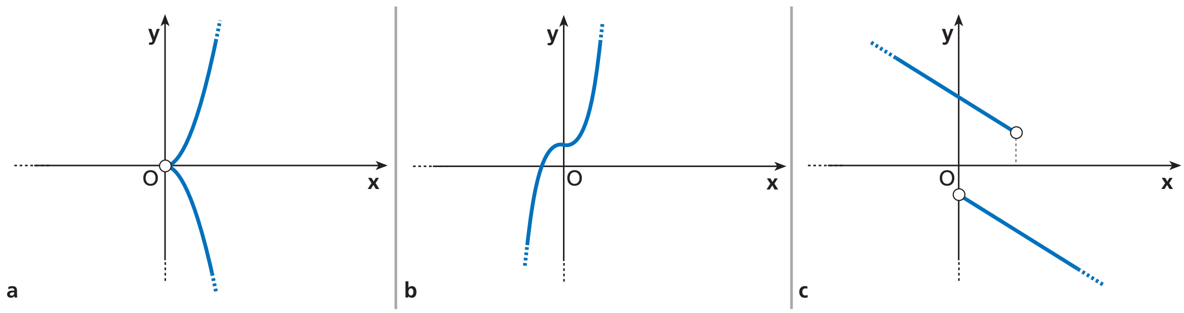
Che cosa sono le funzioni

Quali dei seguenti grafici rappresentano una funzione?

1



2



3 Indica il motivo per cui ciascuna delle seguenti scritture non può rappresentare una funzione (reale di variabile reale x).

a) $f(x) = 1 - \ln(-\sqrt{x})$;

b) $x^2 + y^2 = 9$;

c) $x^2 + 1 = 5$;

d) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

e) $2xy - 3 + y^2 = 0$;

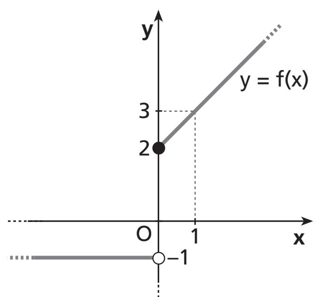
f) $8x - 3 = 0$;

g) $x + |y| = 0$;

h) $|y| = x^2 - 1$.

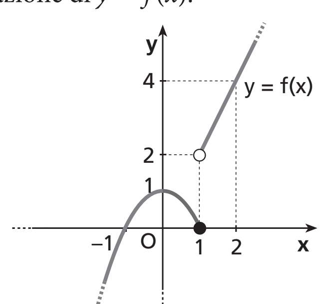
4 Osservando il grafico della figura trova:

a) il dominio e il codominio della funzione;
b) $f(-4)$, $f(0)$, $3 = f(\ldots)$, $-1 = f(\ldots)$;
c) l'equazione di $y = f(x)$.



5 Il grafico della figura, per $x \leq 1$, è un arco di parabola. Determina:

a) il dominio e il codominio della funzione;
b) $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $0 = f(\ldots)$, $1 = f(\ldots)$;
c) l'equazione di $y = f(x)$.



COMPLETA

6 $y = f(x) = \dfrac{3-4x}{x^2+1}$; $\ldots = f(-1)$, $4 = f(\ldots)$, $\ldots = f(0)$, $3 = f(\ldots)$.

7 $y = f(x) = 2^{x-1} + 2$; $\dfrac{5}{2} = f(\ldots)$, $3 = f(\ldots)$, $\ldots = f(3)$, $\ldots = f(-2)$.

8 $y = f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$; $\dfrac{1}{2} = f(\ldots)$, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = f(\ldots)$, $\cdots = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\cdots = f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

9 $y = f(x) = 2\ln x - 1$; $\ldots = f(1)$, $\ldots = f(e)$, $-3 = f(\ldots)$, $3 = f(\ldots)$.

10 $y = f(x) = \operatorname{arcsen}(x+1)$; $f(0) = \ldots$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \ldots$, $-\dfrac{\pi}{2} = f(\ldots)$, $0 = f(\ldots)$.

Per ogni funzione calcola, se esistono, i valori indicati a fianco.

11 $y = f(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}}$; $f(0),\ f(-1),\ f(4),\ f\left(\dfrac{1}{2}\right),\ f(1-x),\ f(x+a)$.

12 $y = f(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{\ln x}}$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right),\ f(1),\ f(e),\ f(x+4)$.

13 $y = f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$; $f(-x),\ f(3x),\ f(x^2),\ 3f(x),\ f^2(x)$.

14 $y = f(x) = \sqrt{x-1}$; $f(2),\ -f(-x),\ f(|x|),\ f(x+1),\ \sqrt{f^2(x)+1}$.

15 Scrivi le seguenti funzioni in forma esplicita.

a) $x^2 - 2yx + 1 = 0$; c) $y \operatorname{sen} x + y - 1 = 0$; e) $2^y + 1 - x = 0$;
b) $x + 2\ln y - 5 = 0$; d) $2xy + y - x - 1 = 0$; f) $xy^3 - 4 = 0$.

16 Scrivi le seguenti funzioni in forma implicita.

a) $y = \dfrac{x-1}{x+4}$; b) $y = \dfrac{\ln x - 1}{x}$; c) $y = \dfrac{e^x+1}{e^x}$.

Esplicita le seguenti equazioni rispetto alla variabile y e indica le condizioni di esistenza di y.

17 $2x^2 + y^2 - x - 2y + 6 = 0$

18 $3x^2 - 4y^2 + x - y = 0$

Determina il grado delle seguenti funzioni algebriche.

19 $y = \dfrac{x^2-4x}{x^2}$

20 $y = \dfrac{2x^2-3x+1}{x^3}$

21 $x^2y + x^2 - 1 = 0$

22 Traccia i grafici corrispondenti alle seguenti equazioni:

a) $y = x - 1$;
b) $x^2 + y^2 - 4x = 0$;
c) $y = x^2 - 2x$;
d) $x^2 - y^2 = 9$.

Quali di queste equazioni rappresentano una funzione?

23 Disegna il grafico della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se } x > 2 \\ x^2-4 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

Deduci dal grafico il codominio di $f(x)$ e calcola $f(-4)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$.

24 Disegna il grafico della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{se } x < -1 \\ 2^{x-1} & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

Indica il codominio di $f(x)$ e calcola $f(-5)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$. Trova poi per quali valori di x si ha $f(x) = 8$ e $f(x) = -4$.

25 Indica, tra le seguenti funzioni, quali sono razionali (intere o fratte), irrazionali, trascendenti.

$$y = \frac{\sqrt{x^2}}{x-1}, \qquad y = \operatorname{arcsen} x - 3, \qquad y = \frac{x^4+1}{x-3}, \qquad y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}, \qquad y = \frac{1}{x + \operatorname{sen} x}.$$

26 Disegna il grafico della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x < -2 \\ x^2 + 2x & \text{se } -2 \le x < 0 \\ 2 & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$$

Determina il codominio di $f(x)$ e calcola $f(-4)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$. Trova poi per quali valori di x si ha $f(x) = -1$.

27 Disegna il grafico della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} |\,x\,| + 1 & \text{se } -2 \le x < 1 \\ \log_{\frac{1}{2}} x & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

Trova il codominio di $f(x)$ e calcola $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$. Determina per quali valori di x si ha $f(x) = -3$ e $f(x) = 2$.

Il dominio di una funzione

28 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo il dominio delle seguenti funzioni:

a) $y = \dfrac{x^2-1}{x^3-9x}$; b) $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-6x+5}}$; c) $y = \dfrac{x}{\ln x - 1}$; d) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{2 \operatorname{sen} x - 1}$; e) $y = \operatorname{arcsen} \dfrac{x^2}{4}$.

a) L'espressione ha significato per ogni valore di x che rende non nullo il denominatore, ossia:

$x^3 - 9x \neq 0 \quad \to \quad x(x^2-9) \neq 0.$

Dominio: $x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 3 \ \wedge \ x \neq -3$.

b) L'indice della radice $\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-6x+5}}$ è pari, quindi l'espressione esiste soltanto se:

$$\frac{x+2}{x^2-6x+5} \ge 0.$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

$x + 2 > 0 \qquad$ per $\quad x > -2$;

$x^2 - 6x + 5 > 0 \qquad$ per $\quad x < 1 \vee x > 5$.

Compiliamo il quadro dei segni:

		-2		1		5	
Segno di N	−	0	+		+		+
Segno di D	+		+	0	−	0	+
Segno di $\frac{N}{D}$	−	0	+	∄	−	∄	+

Dominio: $-2 \le x < 1 \ \vee \ x > 5$.

c) Per l'esistenza di $\ln x$ deve essere $x > 0$. Per l'esistenza della frazione deve essere:

$$\ln x - 1 \neq 0 \quad \to \quad \ln x \neq \ln e \quad \to \quad x \neq e.$$

Quindi:

Dominio: $x > 0 \ \wedge \ x \neq e$.

d) Per l'esistenza di $\operatorname{tg} x$: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; per l'esistenza della frazione:

$$2 \operatorname{sen} x - 1 \neq 0 \quad \to \quad \operatorname{sen} x \neq \frac{1}{2} \quad \to$$

$$\to x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \wedge \ x \neq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi.$$

Quindi:

Dominio: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ \wedge$

$\wedge \ x \neq \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ \wedge \ x \neq \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi.$

e) Per l'esistenza di $\operatorname{arcsen} t$ deve essere $-1 \le t \le 1$, quindi:

$$-1 \le \frac{x^2}{4} \le 1 \quad \to \quad -4 \le x^2 \le 4.$$

Si ha $x^2 \ge -4 \ \forall x \in \mathbb{R}$, mentre è $x^2 \le 4$ per $-2 \le x \le 2$.

Dominio: $-2 \le x \le 2$.

29 Tra le seguenti coppie di equazioni indica quali rappresentano la stessa funzione.

a) $y = \ln\sqrt{x}$, $\quad y = \frac{1}{2}\ln x$;

b) $y = \ln(x-3)^2$, $\quad y = 2\ln(x-3)$;

c) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$, $\quad y = 1$;

d) $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} + 1$, $\quad y = 2$;

e) $y = \sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}$, $\quad y = \sqrt{x(2-x)}$;

f) $y = \frac{x^3}{x^2}$, $\quad y = x$.

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

30 $y = x^3 - 4x$; $\quad y = \frac{x-1}{x^2+3x}$. $\quad [\mathbb{R};\, x \neq 0 \wedge x \neq -3]$

31 $y = \frac{x^2-3x+1}{x^3-2x+4}$; $\quad y = \sqrt{x^2+4} + \frac{1}{x+3}$. $\quad [x \neq -2;\, x \neq -3]$

32 $y = \frac{x+2}{x^2-2x-8}$; $\quad y = \frac{1}{e^{x-1}-1}$. $\quad [x \neq -2 \wedge x \neq 4;\, x \neq 1]$

33 $y = \operatorname{tg} x + x^2 - 2x$; $\quad y = \frac{2-\sqrt{3}}{x}$. $\quad \left[x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\, x \neq 0\right]$

34 $y = \sqrt[3]{x^2-6x}$; $\quad y = \ln\frac{4-x^2}{6x}$. $\quad [\mathbb{R};\, x < -2 \vee 0 < x < 2]$

35 $y = \sqrt{\frac{-2x}{x^2+4x+4}}$; $\quad y = \sqrt{\frac{2x^2+x-1}{x-1}}$. $\quad \left[x \leq 0 \wedge x \neq -2;\, -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \vee x > 1\right]$

36 $y = \frac{x-1}{x^2-4x}$; $\quad y = \frac{x}{2x^2-5x-3}$. $\quad \left[x \neq 0 \wedge x \neq 4;\, x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq 3\right]$

37 $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$; $\quad y = \frac{1}{(2x^2-4x)(x+3)}$. $\quad [-1 \leq x < 0 \vee x \geq 1;\, x \neq 0 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -3]$

38 $y = \frac{\ln^2 x}{1-\ln x}$; $\quad y = \ln\ln x$. $\quad [x > 0 \wedge x \neq e;\, x > 1]$

39 $y = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x - 1}$; $\quad y = \ln\sqrt{x^2-4}$. $\quad [x \neq 2k\pi;\, x < -2 \vee x > 2]$

40 $y = (1-2x)\,e^{-2x}$; $\quad y = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-25}}$. $\quad [\mathbb{R};\, x > 5]$

41 $y = \frac{2x-1}{x^3+4x^2-2x-8}$; $\quad y = \sqrt{2x-1} + \sqrt{4-x}$. $\quad \left[x \neq \pm\sqrt{2} \wedge x \neq -4;\, \frac{1}{2} \leq x \leq 4\right]$

42 $y = \frac{1}{\ln x + 1}$; $\quad y = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$. $\quad \left[x > 0 \wedge x \neq \frac{1}{e};\, x < 0 \vee x \geq 1\right]$

43 $y = 2^{\sqrt{\frac{x}{x-3}}}$; $\quad y = 3^{\sqrt{x^2-4}} + \frac{1}{6+x}$. $\quad [x \leq 0 \vee x > 3;\, x \leq -2 \vee x \geq 2 \wedge x \neq -6]$

44 $y = \sqrt{4-|x|}$; $\quad y = \frac{1}{\ln\frac{1}{x} - 1}$. $\quad \left[-4 \leq x \leq 4;\, x > 0 \wedge x \neq \frac{1}{e}\right]$

45 $y = \sqrt{\ln(x+3)}$; $\quad y = \ln(|x|-4)$. $\quad [x \geq -2;\, x < -4 \vee x > 4]$

46 $y = \frac{1}{e^{x+2}-1}$; $\quad y = \frac{\sqrt{2^x-1}}{2x}$. $\quad [x \neq -2;\, x > 0]$

47 $y = \ln\ln(x-2)$; $\quad y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{sen} x}$. $\quad \left[x > 3;\, x \neq k\frac{\pi}{2}\right]$

48 $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\operatorname{tg} x}$; $\quad y = \sqrt{\ln x} + \sqrt{4-x}$. $\quad \left[k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi;\, 1 \leq x \leq 4\right]$

49 $y = \ln(2x - \sqrt{x})$; $\quad y = \frac{1}{\ln(x+1)}$. $\quad \left[x > \frac{1}{4};\, x > -1 \wedge x \neq 0\right]$

50 $y = \frac{\sqrt{x}}{4x^2 - 3x}$; $\quad y = \frac{2}{\sqrt{1-3x}} + \sqrt{1-x^2}$. $\quad \left[x > 0 \wedge x \neq \frac{3}{4}; -1 \leq x < \frac{1}{3}\right]$

51 $y = \sqrt{\frac{6+x}{9x - x^2}}$; $\quad y = \frac{\sqrt{x+6}}{x^2}$. $\quad [x \leq -6 \vee 0 < x < 9; x \geq -6 \wedge x \neq 0]$

52 $y = \frac{1}{2^{x+4} - 2}$; $\quad y = \frac{3^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x+1}}$. $\quad [x \neq -3; x > -1 \wedge x \neq 0]$

53 $y = \sqrt{-\ln x} + \sqrt{2x - 1}$; $\quad y = \frac{\ln(e^x - 1)}{|x-1|}$. $\quad \left[\frac{1}{2} \leq x \leq 1; x > 0 \wedge x \neq 1\right]$

54 $y = \frac{\ln(x-4)}{\ln x - 4}$; $\quad y = \sqrt{2^x - 4^x}$. $\quad [x > 4 \wedge x \neq e^4; x \leq 0]$

55 $y = \ln \frac{x+1}{x-3}$; $\quad y = \sqrt{\ln \frac{3-x}{1-x^2}}$. $\quad [x < -1 \vee x > 3; -1 < x < 1]$

56 $y = \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}$; $\quad y = \sqrt{\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 5x + 4}}$. $\quad [x \neq 0 \wedge x \neq 2; x \leq 0 \vee 1 < x < 4 \vee x > 4]$

57 $y = \sqrt{\ln(x^2 - 3)} + \ln x$; $\quad y = \frac{1}{\ln^2 x + 3\ln x + 2}$. $\quad \left[x \geq 2; x > 0 \wedge x \neq \frac{1}{e^2} \wedge x \neq \frac{1}{e}\right]$

58 $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - \cos x}$; $\quad y = \sqrt{\ln(2\operatorname{sen} x)}$. $\quad \left[x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

59 $y = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} + \frac{1}{2\cos x + 1}$; $y = \ln \operatorname{sen} x + \ln \operatorname{tg} x$.
$\left[2k\pi < x < \pi + 2k\pi \wedge x \neq \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

60 $y = \frac{2x}{x^2 - x^3 + 4x - 4}$; $\quad y = \frac{5}{\left(2 - \frac{1}{x}\right)(4 - x^2)}$. $\quad \left[x \neq \pm 2 \wedge x \neq 1; x \neq 0 \wedge x \neq \frac{1}{2} \wedge x \neq \pm 2\right]$

61 $y = \frac{x}{x^3 - 2x + 1}$; $\quad y = \frac{1 - 4x}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}$. $\quad \left[x \neq 1 \wedge x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; x \neq 2 \wedge x \neq \pm 3\right]$

62 $y = \frac{2+x}{x - |x|}$; $\quad y = \frac{x}{x^3 - 3x^2 + 2x - 6}$. $\quad [x < 0; x \neq 3]$

63 $y = \frac{x-3}{x^4 - 3x^2 + 2}$; $\quad y = \sqrt{|x-1| - 2} + \sqrt{|x| - 1}$. $\quad [x \neq \pm\sqrt{2} \wedge x \neq \pm 1; x \leq -1 \vee x \geq 3]$

64 $y = \frac{1}{3\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$; $\quad y = 2^{\sqrt{\operatorname{sen} x}} + 2^{\sqrt{\cos x}}$. $\quad \left[x \neq \pm\frac{\pi}{3} + k\pi; 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

65 $y = \sqrt{2\cos x - 1} + \sqrt{\operatorname{sen} x}$; $y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 3} + \operatorname{cotg} x$. $\quad \left[2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi; x \neq k\frac{\pi}{2} \wedge x \neq \pm\frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

66 $y = \frac{x-1}{x^2 - 4|x|}$; $\quad y = \frac{x+5}{x^3 + x^2 - 2x}$. $\quad [x \neq 0 \wedge x \neq \pm 4; x \neq -2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1]$

67 $y = \sqrt{|x^2 - 3| - 1}$; $\quad y = x \ln|x|$. $\quad [x \leq -2 \vee -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \vee x \geq 2; x \neq 0]$

68 $y = \frac{1}{|x-1| - 3}$; $\quad y = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$. $\quad \left[x \neq -2 \wedge x \neq 4; x \neq -1 \wedge x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq 0\right]$

69 $y = \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1} + \sqrt{\operatorname{sen} x}$; $\quad y = \ln(1 - 4\cos^2 x)$.
$\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + k\pi\right]$

70 $y = \sqrt{\dfrac{x-5}{3x^2-5x-2}}$; $y = \sqrt{x+7} - \sqrt{4x-3}$. $\left[-\frac{1}{3} < x < 2 \vee x \geq 5;\ x \geq \frac{3}{4}\right]$

71 $y = \sqrt{e^{\frac{x-1}{x}} - 1}$; $y = \dfrac{e^{\sqrt{1-x^2}}}{|x|}$. $[x < 0 \vee x \geq 1;\ -1 \leq x \leq 1 \wedge x \neq 0]$

72 $y = \dfrac{\ln(x+1)}{2^x - 1}$; $y = \dfrac{1}{2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2}$. $[x > -1 \wedge x \neq 0;\ x \neq \pm 1]$

73 $y = \dfrac{2}{x^3 - 25x} + \sqrt{|x| - 1}$; $y = \dfrac{x}{x^4 - 7x^2 + 12}$. $[x \leq -1 \vee x \geq 1 \wedge x \neq \pm 5;\ x \neq \pm 2 \wedge x \neq \pm\sqrt{3}]$

74 $y = \dfrac{4 - |x-1|}{\sqrt{x^2 - 2x}}$ $[x < 0 \vee x > 2]$

75 $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{tg} x}$ $\left[x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

76 $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^5}}{x^2 - x}$; $y = \sqrt{\dfrac{x^8 - 15x^4 - 16}{|x-6|}}$. $[x < 1 \wedge x \neq 0;\ x \leq -2 \vee x \geq 2 \wedge x \neq 6]$

77 $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{2x^3 - 5x^2 + 2x}}$; $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}$. $\left[x < 0 \vee \frac{1}{2} < x \leq 1 \vee x > 2;\ x \neq -3 \wedge x \neq \pm 2\right]$

78 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x^2 - 2}}$; $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{|x| - 2}} + \dfrac{2}{x-4}$. $[x \geq \sqrt{2} \wedge x \neq 2;\ x \neq \pm 2 \wedge x \neq 4]$

79 $y = \dfrac{1}{\ln(2^x - 1)}$; $y = \ln(x - \sqrt{4 - x^2})$. $[x > 0 \wedge x \neq 1;\ \sqrt{2} < x \leq 2]$

80 $y = (\operatorname{tg} x)^x$; $y = (\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$. $\left[k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi;\ 2k\pi < x < \pi + 2k\pi\right]$

81 $y = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{3-x}} & \text{se } x \leq 0 \\ 2^{\frac{1}{x-4}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$; $y = \ln \ln |x - 3|$. $[x \neq 4;\ x < 2 \vee x > 4]$

82 $y = \ln \dfrac{|x|}{|x-3| - 5}$; $y = \ln \dfrac{1}{x^2 - 4} + \ln(x^3 - x)$. $[x < -2 \vee x > 8;\ x > 2]$

83 $y = \dfrac{1}{e^{-x} \ln x}$; $y = \ln(x - \sqrt{1 - 2x})$. $\left[x > 0 \wedge x \neq 1;\ -1 + \sqrt{2} < x \leq \frac{1}{2}\right]$

84 $y = \dfrac{\sqrt{x^4(x+2)}}{|x+1| + x + 1}$; $y = \sqrt{\dfrac{|x|}{x-1}} + \sqrt{x^2 - 9}$. $[x > -1;\ x \geq 3]$

85 $y = \sqrt{\dfrac{2x^2 - x - 1}{6x + 3}}$; $y = \sqrt{|x^2 - 3x + 4| - 2}$. $[x \geq 1;\ x \leq 1 \vee x \geq 2]$

86 $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x (1 - 2\cos x)}$; $y = \sqrt{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\cos x} + \sqrt{\operatorname{tg} x}$. $\left[x \neq k\frac{\pi}{2} \wedge x \neq \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

87 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} + \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$; $y = \dfrac{\sqrt{x}}{|x-1| + |x^2 - x|}$. $[1 < x < 2 \vee x > 3;\ x \geq 0 \wedge x \neq 1]$

88 $y = \dfrac{\sqrt{\operatorname{sen} x + 1}}{2\cos^2 x + \operatorname{sen} 2x}$; $y = \dfrac{\ln|x|}{\operatorname{tg} x - 1}$. $\left[x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ x \neq 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

89 $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln(x^2 - 3)}$ $[x > \sqrt{3} \wedge x \neq 2]$

90 $y = \sqrt{2^{2x} - 2^x - 2} - \sqrt{2 - 2^x}$ $[x = 1]$

91 $y = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x} & \text{se } x \leq 1 \\ \operatorname{arctg} x & \text{se } x > 1 \end{cases}$; $y = \begin{cases} -\operatorname{arcsen} x & \text{se } x \leq 0 \\ \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$. $\left[x \neq 0;\ -1 \leq x \leq 0 \vee x > 0 \wedge x \neq \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

92 $y = \log_{\frac{1}{2}} \log_2 (4 - x^2)$; $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$. $\left[-\sqrt{3} < x < \sqrt{3};\, x \neq k\pi \wedge x \neq \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

93 $y = \sqrt{\ln x} + \sqrt{e^x}$; $y = \sqrt{\ln \sqrt{x}} + \sqrt{(x-2)\, e^x}$. $[x \geq 1;\, x \geq 2]$

94 $y = \dfrac{1}{9^{x^2} - 3}$; $y = \dfrac{\ln|x - 3|}{e^{\frac{x-2}{x}} - 1}$. $\left[x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2};\, x \neq 0 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 3\right]$

95 $y = \begin{cases} \log_2(x+2) & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$; $y = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{sen} x}}$.

$\left[x < -2 \vee x \geq 0;\, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \pi + 2k\pi < x \leq \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \vee \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\right]$

96 $y = \sqrt{\operatorname{sen} x - \cos x}$; $y = \ln \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - 2\cos x}$.

$\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi + 2k\pi;\, \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \vee \frac{5}{3}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\right]$

97 $y = \ln \operatorname{arcsen} x$; $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$. $\left[0 < x \leq 1;\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k\right]$

98 $y = \ln \cos x + \sqrt{2 \operatorname{sen} x - 1}$; $y = \dfrac{1}{2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1}$.

$\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\, x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge x \neq \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \wedge x \neq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right]$

99 $y = \sqrt{3^x + 3 \cdot 3^{-x} - 3}$; $y = \dfrac{1}{\log_3^2 x + 3\log_3 x}$. $\left[\mathbb{R};\, x > 0 \wedge x \neq \frac{1}{27} \wedge x \neq 1\right]$

100 $y = \operatorname{arcsen}(1 - 2x) + \ln 2x$; $y = \sqrt{\operatorname{arcsen}(x+1)}$. $[0 < x \leq 1;\, -1 \leq x \leq 0]$

101 $y = \operatorname{arcsen}\sqrt{1 - x}$; $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{1 - x^2}$. $[0 \leq x \leq 1;\, x \neq \pm 1]$

102 $y = \ln(x^2 - |x|)$; $y = \dfrac{\sqrt{x - 2}}{\ln \ln x}$. $[x < -1 \vee x > 1;\, x \geq 2 \wedge x \neq e]$

103 $y = \dfrac{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(1 - x)}}{\log_2(1 - x)}$; $y = \ln(\operatorname{sen} x - \cos x)$. $\left[0 < x < 1;\, \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right]$

104 $y = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x} + \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}$; $y = \dfrac{2}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x}$.

$\left[2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi;\, x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right]$

105 $y = \operatorname{arcsen}\dfrac{x - 1}{x}$; $y = \operatorname{arcsen} x + \arccos\dfrac{1}{x}$. $\left[x \geq \frac{1}{2};\, x = -1 \vee x = 1\right]$

106 $y = \sqrt{\left|\dfrac{x - 1}{1 + 2x}\right| - 1}$; $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2(x+1)}} + \dfrac{1}{\sqrt{|x - 1|}}$. $\left[-2 \leq x \leq 0 \wedge x \neq -\frac{1}{2};\, x > -1 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1\right]$

107 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x - 3}} + \sqrt{1 - \sqrt{x}}$; $y = \dfrac{\sqrt{x^4 - x^2 - 2}}{2x\sqrt{|x - 1|}}$. $[0 \leq x \leq 1;\, x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2}]$

108 $y = \sqrt{x + 3 - \sqrt{x^2 - 2x - 3}}$; $y = \sqrt{1 - \sqrt{|x + 2x^2|}}$. $\left[-\frac{3}{2} \leq x \leq -1 \vee x \geq 3;\, -1 \leq x \leq \frac{1}{2}\right]$

109 $y = \sqrt{\dfrac{\log_2 x + 4}{\log_{\frac{1}{2}}(x + 4)}}$; $y = \log_{\frac{1}{2}}(\operatorname{sen} x - \cos 2x)$. $\left[0 < x \leq \frac{1}{16};\, \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

110 $y = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos x(2\operatorname{sen} x - \sqrt{2})}}$ $\left[\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi \vee \pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi \wedge x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right]$

111 $y = \dfrac{1}{\ln(2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} 2x)}$ $\left[\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \pi + k\pi \wedge x \neq \dfrac{3}{8}\pi + k\dfrac{\pi}{2}\right]$

112 $y = \ln(\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x - 1)$ $\left[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{7}{6}\pi + 2k\pi\right]$

113 $y = \dfrac{1}{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1-x}}$; $y = \operatorname{arcsen}\ln x$. $[x \neq 0 \wedge x \neq 1; e^{-1} \leq x \leq e]$

114 $y = \arccos\dfrac{4 - x^2}{x^2}$; $y = \operatorname{arcsen} 3^x$. $[x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2}; x \leq 0]$

115 $y = \dfrac{1}{\operatorname{arcsen}\ln x}$; $y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\ln\ln x}$. $[e^{-1} \leq x \leq e \wedge x \neq 1; x \geq 2 \wedge x \neq e]$

116 $y = \sqrt{\operatorname{sen} 2x - \cos x}$; $y = \dfrac{1}{2|\operatorname{sen} x| - 1} + \sqrt{\cos x}$.

$\left[\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi; -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge x \neq \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

117 $y = (x^3 - 4x)^{\pi}$; $y = (x^2 - 1)^{\sqrt{x}}$. $[-2 \leq x \leq 0 \vee x \geq 2; x > 1]$

118 $y = \sqrt{\log_2\dfrac{x-1}{x-3} - 1}$ $[3 < x \leq 5]$

119 $y = \ln\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)$ $[x > 1]$

120 $y = \log_x(2x^2 - x)$ $\left[x > \dfrac{1}{2} \wedge x \neq 1\right]$

121 $y = \dfrac{\sqrt{\ln(2x - \sqrt{1-x})}}{\ln\left(x + \dfrac{1}{8}\right)}$ $\left[\dfrac{3}{4} \leq x \leq 1 \wedge x \neq \dfrac{7}{8}\right]$

122 $y = \ln\ln\ln|x - 1|$ $[x < 1 - e \vee x > 1 + e]$

123 $y = \operatorname{arcsen}\log_2\dfrac{x-1}{x}$ $[x \leq -1 \vee x \geq 2]$

124 $y = \arccos\left|\dfrac{2x-1}{x+1}\right| + \sqrt{\dfrac{x^2+1}{1-x}}$ $[0 \leq x < 1]$

125 $y = \sqrt{\operatorname{arcsen}\ln(x-1)}$ $[2 \leq x \leq e + 1]$

126 $y = (2 - \sqrt{x+1})^{\ln(x-2)}$ $[2 < x < 3]$

127 $y = (1 - \cos\ln x)^{\ln(1-\cos x)}$ $[x > 0 \wedge x \neq 2k\pi \wedge x \neq e^{2k\pi}, k \in \mathbb{N} - \{0\}]$

128 $y = \sqrt{\log_2|x^2 - x| - 1} + \sqrt{1 - \log_{\frac{1}{3}} x}$ $[x \geq 2]$

129 $y = \dfrac{\sqrt{-2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 1}}{\ln\cos x}$ $\left[\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

130 $y = \sqrt{2\log_2^2 x - 7\log_2 x - 4}$ $\left[0 < x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee x \geq 16\right]$

131 $y = \dfrac{\ln(4^x - 4\cdot 2^x - 32)}{\sqrt{4^x + 8} - \sqrt{32 - 2\cdot 2^x}}$ $[3 < x \leq 4]$

132 $y = \sqrt{\log_2(x-2) - \log_4 x} + \sqrt{3\log_8 x - 4}$ $[x \geq 16]$

133 $y = \log_2 \dfrac{3-2x}{\ln|x-2|}$ $\left[x < 1 \vee \dfrac{3}{2} < x < 3 \wedge x \neq 2\right]$

134 $y = \dfrac{\sqrt{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}}{3x^2 - x}$ $\left[-2 \leq x \leq 1 \vee x \geq 3 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \dfrac{1}{3}\right]$

135 $y = \dfrac{\sqrt{\ln(x-2) + \ln(x+5) - \ln(x^2 - 7x)}}{\sqrt{8} - 2^{x-6}}$ $\left[x > 7 \wedge x \neq \dfrac{15}{2}\right]$

136 $y = \dfrac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-1} + \ln\sqrt{x^2+1} - 2x}{\ln(4-x)}$ $[1 < x < 4 \;\wedge\; x \neq 3]$

137 $y = \left(\arccos\log_2\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}}\right)^{\sqrt{x}}$ $\left[x \geq \dfrac{5}{7}\right]$

138 $y = \left[\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\right]^{\sqrt{2|x|-7}}$ $\left[\dfrac{7}{2} \leq x < 4\right]$

Il dominio e i parametri

Determina il dominio delle seguenti funzioni al variare del parametro *k*.

139 $y = \sqrt{kx - 1}$ $\left[k < 0\colon x \leq \dfrac{1}{k}, k = 0\colon \nexists\, x \in \mathbb{R}, k > 0\colon x \geq \dfrac{1}{k}\right]$

140 $y = 2^{\frac{\sqrt{k-1}}{x}}$ $[k < 1\colon \nexists\, x \in \mathbb{R}, k = 1\colon \forall x \in \mathbb{R}, k > 1\colon x \neq 0]$

141 $y = \ln(x\sqrt{k+3})$ $[k \leq -3\colon \nexists\, x \in \mathbb{R}, k > -3\colon x > 0]$

142 $y = \dfrac{1}{x^2 - k}$ $[k < 0\colon \forall x \in \mathbb{R}, k = 0\colon x \neq 0, k > 0\colon x \neq \pm\sqrt{k}]$

143 $y = \sqrt{x^2 + 2k}$ $[k < 0\colon x \leq -\sqrt{-2k} \vee x \geq \sqrt{-2k}, k \geq 0\colon \forall x \in \mathbb{R}]$

Nelle seguenti funzioni determina i valori del parametro affinché il dominio sia quello indicato a fianco.

144 a) $y = \dfrac{2}{ax^2 + 2x + 5}$, $D\colon x \neq -5$; b) $y = \dfrac{1}{4x^2 - ax + a - 2}$, $D\colon \mathbb{R}$.
$\left[\text{a) } a = \dfrac{1}{5}; \text{ b) } 8 - 4\sqrt{2} < a < 8 + 4\sqrt{2}\right]$

145 a) $y = \ln(k - 3x)$, $D\colon x < -3$; b) $y = e^{\frac{2x}{x^2 - kx - k - 1}}$, $D\colon x \neq -1 \wedge x \neq 3$.
$[\text{a) } k = -9; \text{ b) } k = 2]$

Per le seguenti funzioni determina il valore di *a* e *b* affinché il loro grafico passi per il punto *P* e il dominio sia quello indicato a fianco.

146 $f(x) = \dfrac{ax^2 + 2x + a}{x - 2b}$, $P = (1; -1)$, $D\colon x \neq 2$. $\left[a = -\dfrac{1}{2}, b = 1\right]$

147 $f(x) = \dfrac{a - 5}{2^x - 2^{b-1}}$, $P = (0; 1)$, $D\colon x \neq 3$. $[a = -2, b = 4]$

148 $f(x) = \dfrac{a - x}{2\log_2 x - b}$, $P = (1; 0)$, $D\colon x > 0 \wedge x \neq 2$. $[a = 1, b = 2]$

La ricerca del codominio di una funzione

149 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo il dominio e il codominio delle seguenti funzioni:

a) $y = \dfrac{x^2 - 2}{x}$; b) $y = e^{-x} + 1$; c) $y = 2 \operatorname{sen} 3x - 2$.

a) La funzione $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x}$ è definita per $x \neq 0$.
Ricaviamo la variabile x in funzione della y:

$$x^2 - xy - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 8}}{2}.$$

I valori del codominio sono quei valori di y per i quali la x è definita e appartiene al dominio della funzione, cioè $x \neq 0$. Poiché l'espressione di x che abbiamo ottenuto è definita per ogni y reale ed è sempre diversa da 0, il codominio di $f(x)$ è l'insieme $C = \mathbb{R}$.

b) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Ricaviamo x in funzione di y:

$$e^{-x} = y - 1 \rightarrow -x = \ln(y - 1) \rightarrow$$
$$\rightarrow x = -\ln(y - 1).$$

Poiché, per l'esistenza di x, deve essere $y - 1 > 0$, ossia $y > 1$, il codominio è:

C: $y > 1$.

c) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Troviamo ora le condizioni per y. Si ha

$$\operatorname{sen} 3x = \frac{y + 2}{2},$$

e poiché è sempre $-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1$ scriviamo:

$$-1 \leq \frac{y + 2}{2} \leq 1 \rightarrow -2 \leq y + 2 \leq 2 \rightarrow$$
$$\rightarrow -4 \leq y \leq 0.$$

Quindi il codominio è:

C: $-4 \leq y \leq 0$.

Determina il dominio e il codominio delle seguenti funzioni.

150 $y = \sqrt{2 - x}$; $\quad y = 3 \operatorname{tg}(x + 1)$. $\quad \left[D\text{: } x \leq 2, C\text{: } y \geq 0; D\text{: } x \neq \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + k\pi, C\text{: } \mathbb{R}\right]$

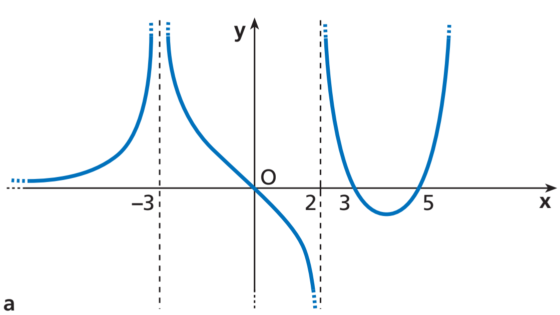
151 $y = x^2 - 2x$; $\quad y = \dfrac{2 - x}{x}$. $\quad [D\text{: } \mathbb{R}, C\text{: } y \geq -1; D\text{: } x \neq 0, C\text{: } y \neq -1]$

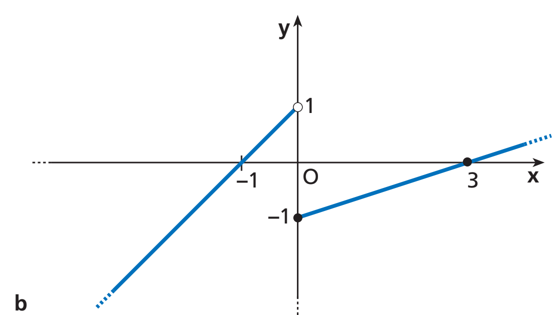
152 $y = 1 - \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$; $\quad y = \sqrt{1 - 4x^2}$. $\quad \left[D\text{: } x \neq 0, C\text{: } 0 \leq y \leq 2 \wedge y \neq 1; D\text{: } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, C\text{: } 0 \leq y \leq 1\right]$

153 $y = e^{\frac{1}{x}} - 1$; $\quad y = \ln(2 - x)$. $\quad [D\text{: } x \neq 0, C\text{: } y > -1 \wedge y \neq 0; D\text{: } x < 2, C\text{: } \mathbb{R}]$

Lo studio del segno di una funzione

154 Osservando il grafico della figura, indica il dominio e il codominio della funzione. Indica inoltre per quali valori di x la funzione è positiva e per quali è negativa.





Disegna il grafico delle seguenti funzioni e deduci da esso il dominio, il codominio e il segno.

155 $y = \sqrt{x-4}$

156 $y = \dfrac{x+3}{4-x}$

157 $y = \dfrac{|x|}{x} - |2x+1|$

158 $y = x^2 - 3|x| - 4$

159 $y = \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$

160 $y = \sqrt{3}\,\text{sen}\,x + \cos x$

161 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo il segno della seguente funzione nel suo dominio:

$$y = f(x) = \frac{\ln x - 1}{x\sqrt{x+1}}.$$

Determiniamo il dominio:

$$\begin{cases} x > 0 & \text{esistenza di } \ln x \\ x \neq 0 \\ x+1 \neq 0 & \text{esistenza della frazione} \\ x+1 \geq 0 & \text{esistenza del radicale} \end{cases}$$

Quindi $D{:}\, x > 0$.

Per studiare il segno della funzione analizziamo separatamente numeratore e denominatore.

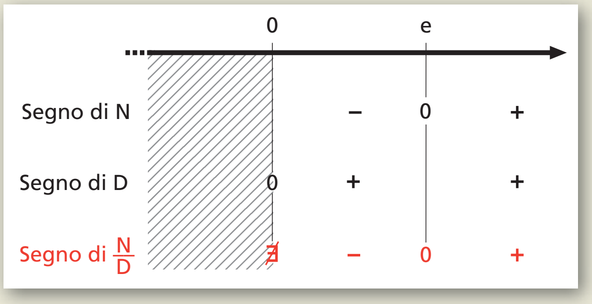
Numeratore:

$\ln x - 1 > 0 \rightarrow \ln x > 1 \rightarrow$
$\rightarrow \ln x > \ln e \rightarrow x > e.$

Denominatore:

$x\sqrt{x+1} > 0 \rightarrow x > 0$ (essendo il radicale sempre positivo).

Compiliamo il quadro dei segni:



La funzione $y = f(x)$ esiste soltanto per $x > 0$:

$f(x) > 0$ per $x > e$;
$f(x) < 0$ per $0 < x < e$;
$f(x) = 0$ per $x = e$.

Studia il segno delle seguenti funzioni nel loro dominio.

162 $y = \dfrac{2^x}{2^x - 2}$ $[D{:}\, x \neq 1;\ y > 0 \text{ per } x > 1]$

163 $y = \ln(2\,\text{sen}\,x)$ $\left[D{:}\, 2k\pi < x < \pi + 2k\pi;\ y > 0 \text{ per } \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

164 $y = \sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x^3}}$ $[D{:}\, x \geq 2;\ y > 0 \text{ per } x > 2]$

165 $y = \ln\dfrac{x-1}{x-4}$ $[D{:}\, x < 1 \vee x > 4;\ y > 0 \text{ per } x > 4]$

166 $y = \dfrac{2-|x|}{\sqrt{x-1}}$ $[D{:}\, x > 1;\ y > 0 \text{ per } 1 < x < 2]$

167 $y = \dfrac{x-4}{x(1-x)^2}$ $[D{:}\, x \neq 0 \wedge x \neq 1;\ y > 0 \text{ per } x < 0 \vee x > 4]$

168 $y = \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3x}$ $[D{:}\, x \neq 0 \wedge x \neq 3;\ y > 0 \text{ per } x < 0 \vee 1 < x < 3 \vee x > 4]$

169 $y = \dfrac{1-2\,\text{sen}\,x}{\cos^2 x}$ $\left[D{:}\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ y > 0 \text{ per } -\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

170 $y = \dfrac{\ln x}{|x| - |x-1|}$ $\left[D{:}\, x > 0 \wedge x \neq \frac{1}{2};\ y > 0 \text{ per } 0 < x < \frac{1}{2} \vee x > 1\right]$

171 $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{|x+3|\ln(x-2)}$ $[D: x > 2 \wedge x \neq 3;\ y > 0 \text{ per } x > 3]$

172 $y = \dfrac{e^{2x-1}-1}{e^x - 1}$ $\left[D: x \neq 0;\ y > 0 \text{ per } x < 0 \vee x > \dfrac{1}{2}\right]$

173 $y = \dfrac{x^2-4}{9x^2-x^3}$ $[D: x \neq 0 \wedge x \neq 9;\ y > 0 \text{ per } x < -2 \vee 2 < x < 9]$

174 $y = \dfrac{x+3}{(x^2-1)(-x^2+4)}$ $[D: x \neq \pm 1 \wedge x \neq \pm 2;\ y > 0 \text{ per } x < -3 \vee -2 < x < -1 \vee 1 < x < 2]$

175 $y = \dfrac{\sqrt{25-x^2}}{|x|+|x^2-4x|}$ $[D: -5 \leq x \leq 5 \wedge x \neq 0;\ y > 0 \text{ per } -5 < x < 5 \wedge x \neq 0]$

176 $y = \dfrac{\ln x}{\ln(x-1)}$ $[D: x > 1 \wedge x \neq 2;\ y > 0 \text{ per } x > 2]$

177 $y = \sqrt{\dfrac{1-4x^2}{\log_{\frac{1}{2}} x}}$ $\left[D: 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \vee x > 1;\ y > 0 \text{ per } 0 < x < \dfrac{1}{2} \vee x > 1\right]$

178 $y = \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-4x^2}}$ $\left[D: -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2};\ y > 0 \text{ per } 0 < x < \dfrac{1}{2}\right]$

179 $y = \dfrac{\sqrt{\log_2 x}}{1-\log_2 x}$ $[D: x \geq 1 \wedge x \neq 2;\ y > 0 \text{ per } 1 < x < 2]$

180 $y = \cos x + \operatorname{sen} 2x$ $\left[D: \mathbb{R};\ \text{in } [0; 2\pi]\ y > 0 \text{ per } 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2} \vee \dfrac{7}{6}\pi < x < \dfrac{3}{2}\pi \vee \dfrac{11}{6}\pi < x \leq 2\pi\right]$

181 $y = \dfrac{\log_{\frac{1}{2}}|x-3|}{\log_3(x-1)}$ $[D: x > 1 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 3;\ y > 0 \text{ per } 1 < x < 4 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 3]$

182 $y = \sqrt{2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 8} - \sqrt{2^{x+1} + 8}$ $[D: x \geq 1;\ y > 0 \text{ per } x > 2]$

183 $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}$ $\left[D: -\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ y > 0 \text{ per } 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi \vee \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi\right]$

---

184 Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}}$,

a) determina il dominio di $f(x)$;
b) studia il segno;
c) calcola, se possibile, i seguenti valori:

$$f(0),\ f(-1),\ f(4),\ f\left(\frac{1}{2}\right),\ f(1-x),\ f(x+a).$$

185 Data la funzione $f(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{\ln x}}$,

a) determina il dominio di $f(x)$;
b) studia il segno;
c) calcola, se possibile, i seguenti valori:

$$f\left(\frac{1}{2}\right),\ f(1),\ f(e),\ f(x+4).$$

I grafici delle funzioni e le trasformazioni geometriche

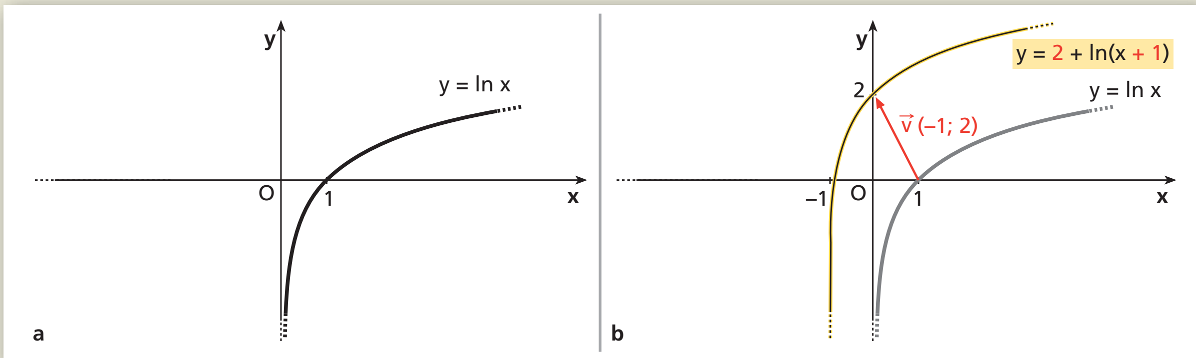
IN PRATICA
▶ Videolezione 62

186 **ESERCIZIO GUIDA**

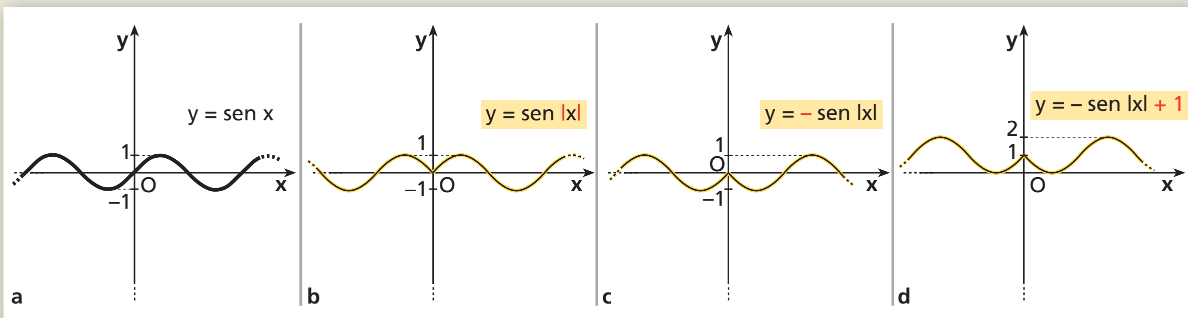
Disegniamo il grafico delle seguenti funzioni:

a) $y = 2 + \ln(x+1)$; **b)** $y = -\operatorname{sen}|x| + 1$; **c)** $y = -2\cos x$.

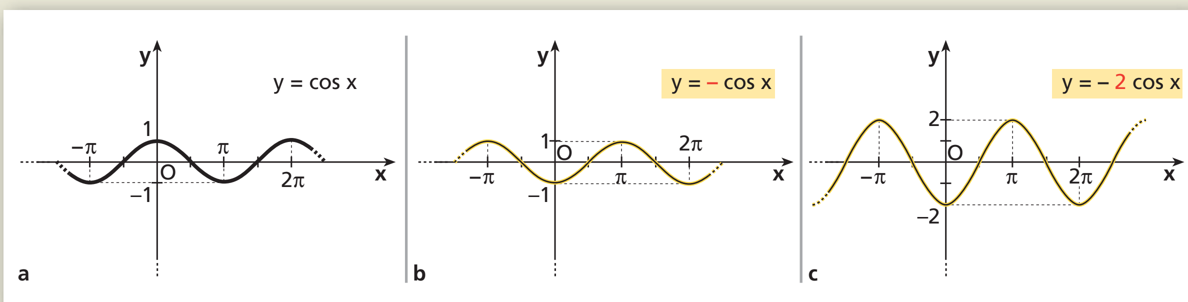
a) Tracciato il grafico di $y = f(x) = \ln x$ (figura *a*), otteniamo quello di $y = 2 + f(x+1) = 2 + \ln(x+1)$, con una traslazione di vettore $\vec{v}(-1; 2)$ (figura *b*).



b) Tracciato il grafico di $y = f(x) = \text{sen}\, x$ (figura *a*, sotto), otteniamo quello di $y = f(|x|) = \text{sen}\,|x|$ per $x < 0$ con una simmetria rispetto all'asse y del grafico di $y = f(x)$ che si ha per $x \geq 0$ e che rimane invariato (figura *b*, sotto).
Otteniamo poi il grafico di $y = -\text{sen}\,|x|$ con una simmetria rispetto all'asse x (figura *c*). Eseguiamo poi una traslazione di vettore $\vec{v}(0;1)$ per ottenere il grafico di $y = -\text{sen}\,|x| + 1$ (figura *d*).



c) Tracciato il grafico di $y = f(x) = \cos x$ (figura *a*, sotto), otteniamo quello di $y = -f(x) = -\cos x$ con una simmetria rispetto all'asse x del grafico di $y = f(x)$ (figura *b*, sotto).
Otteniamo poi il grafico di $y = -2\cos x$ con una dilatazione verticale con $n = 2$ (figura *c*, sotto).



Rappresenta le seguenti funzioni nello stesso piano cartesiano.

187 $y = \cos x$; $\quad y = \cos\dfrac{x}{2}$; $\quad y = \dfrac{\cos x}{2}$.

188 $y = \text{tg}\, x$; $\quad y = \text{tg}(x + 1)$; $\quad y = \text{tg}\, x + 1$.

189 $y = \text{cotg}\, x$; $\quad y = \text{cotg}\,|x|$; $\quad y = |\text{cotg}\, x|$.

190 $y = \ln x$; $\quad y = \ln(-x)$; $\quad y = -\ln(x)$.

191 Graph the function $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{if } x < 0 \\ e^{x} + 1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$.

(USA *Southern Illinois University Carbondale,* Final Exam, 2002)

Disegna i grafici delle seguenti funzioni.

192 $y = \cos|x| + 3$; $\quad y = -|\operatorname{sen} x|$.

193 $y = 2|x| - 1$; $\quad y = 2^{|x|} - 1$.

194 $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$; $\quad y = \frac{1}{2}\operatorname{cotg} x$.

195 $y = |2\operatorname{tg} x|$; $\quad y = \cos 2x - 1$.

196 $y = -e^{|x|}$; $\quad y = e^{x-1} + 4$.

197 $y = |-\cos x + 2|$; $\quad y = -\operatorname{tg} 2x$.

198 $y = |4 - x^2| + 2$; $\quad y = |2\operatorname{sen}(-x)|$.

199 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$; $\quad y = |\ln(x-2)|$.

200 $y = \operatorname{sen}\frac{x}{4} + 2$; $\quad y = \frac{1}{4}\operatorname{sen} x + 2$.

201 $y = -2\ln(-x)$; $\quad y = -|\ln x| + 1$.

202 $y = -3\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; $\quad y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

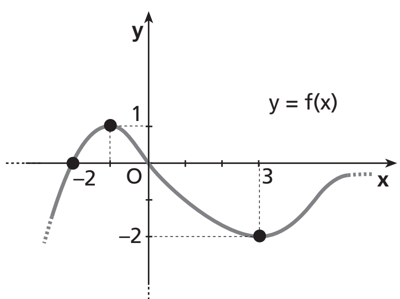
203 $y = \left|2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right|$; $\quad y = -\ln(x-2) + 1$.

204 Dopo aver disegnato il grafico di $y = f(x) = \operatorname{sen} x$, traccia i grafici di $y = |f(x)|$, $y = -f(x)$, $y = f(x) + 1$, $y = |f(|x|)|$.

205 Disegna il grafico della funzione $y = f(x) = \log_2 x$. Successivamente traccia i grafici di $y = -f(x)$, $y = f(x+2)$, $y = f(x) + 2$, $y = -|f(|x|)|$.

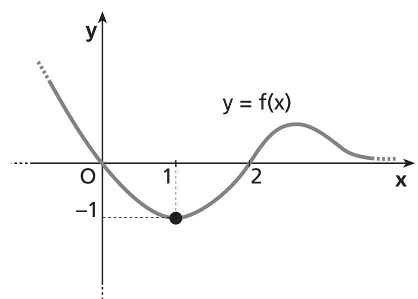
206 Data la funzione $y = f(x)$ rappresentata nel grafico della figura seguente, disegna i grafici delle funzioni:

$$y = |f(x)|,\ y = f(|x|),\ y = -f(x) - 2,\ y = f(-x).$$



207 In figura è rappresentato il grafico della funzione $y = f(x)$. Disegna i grafici delle funzioni:

$$y = f(x-1),\ y = \frac{f(x) + |f(x)|}{2},\ y = -|f(x)|.$$



208 Disegna il grafico di $f(x) = 2^{x-1}$ e dimostra che $f(-x) \cdot f(x) = f(-1)$.

209 Disegna il grafico di $f(x) = \ln x + 1$ e poi traccia i grafici di $-f(-x)$, $f(x-4)$, $f(x-1) - 1$.

210 Determina la funzione $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, il cui grafico passa per $A(-1; -1)$, per $B(-2; 0)$ e per l'origine O, e rappresentala graficamente. Disegna poi i grafici di $y = f(-x) + 1$, $y = -2f(-x)$, $y = |f(x)| - 2$.
$[y = x^2 + 2x]$

211 Disegna il grafico di $f(x) = -\cos x$ e poi quello delle funzioni $2f(2x)$, $-f(x) - 2$, $\frac{f(x)}{|f(x)|} - 2$.

212 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo il grafico delle seguenti funzioni:

a) $y = f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$;

b) $y = f^2(x)$;

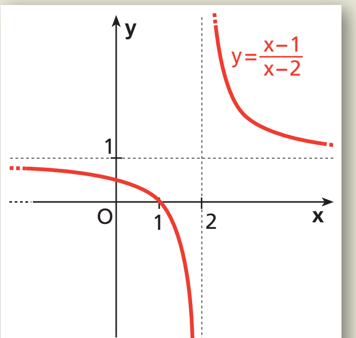
c) $y = \sqrt{f(x)}$;

d) $y = \dfrac{1}{f(x)}$.

---

a) La funzione $y = f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ ha come grafico una funzione omografica e cioè un'iperbole equilatera con asintoti $x = 2$ e $y = 1$ (figura *a*).

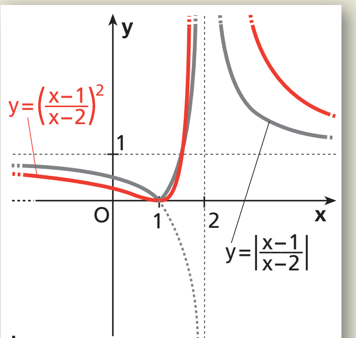
Ha il centro di simmetria in $(2; 1)$ e interseca gli assi cartesiani in $(1; 0)$ e $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.



a

b) Per il grafico di $y = f^2(x)$ (figura *b*) conviene disegnare subito il grafico di $|f(x)|$ e poi sfruttare le seguenti informazioni:

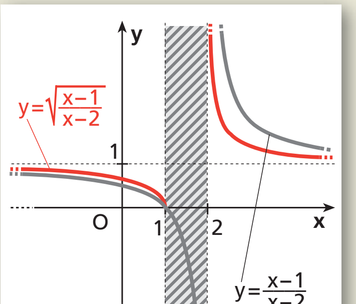
1. per $x = 0$ si ha $f(x) = \dfrac{1}{2}$, quindi $f^2(x) = \dfrac{1}{4}$;
2. nell'intervallo in cui $|f(x)| < 1$ si ha $f^2(x) < |f(x)|$;
3. negli intervalli in cui $|f(x)| > 1$ si ha $f^2(x) > |f(x)|$.



b

c) L'andamento del grafico di $y = \sqrt{f(x)}$ (figura *c*) si ottiene utilizzando le seguenti informazioni:

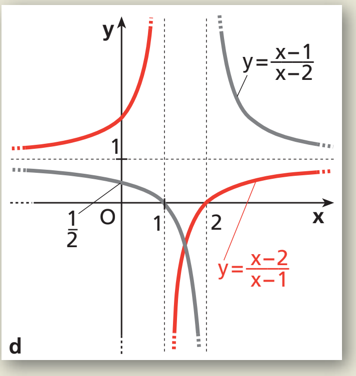
1. per $1 < x < 2$, $f(x) < 0$, quindi $\sqrt{f(x)}$ non esiste;
2. per $x = 1$, $f(x) = 0$, quindi $\sqrt{f(x)} = 0$;
3. per $x < 1$, $0 < f(x) < 1$, quindi $f(x) < \sqrt{f(x)} < 1$;
4. per $x > 2$, $f(x) > 1$, quindi $1 < \sqrt{f(x)} < f(x)$.



c

d) Le informazioni utili per disegnare il grafico di $y = \frac{1}{f(x)}$ (figura *d*) sono:

1. il valore di x per cui $f(x) = 0$, e cioè $x = 1$; per x che tende a 1: se $f(x) > 0$, $\frac{1}{f(x)}$ tende a $+\infty$; se $f(x) < 0$, $\frac{1}{f(x)}$ tende a $-\infty$;
2. il valore di x per cui $f(x)$ tende a $\pm\infty$, e cioè $x = 2$; per x che tende a 2, $f(x)$ tende a $\pm\infty$, quindi $\frac{1}{f(x)}$ tende a 0;
3. il valore di x per cui $f(x) = \pm 1$; poiché per x che tende a $-\infty$ e a $+\infty$, $f(x)$ tende a 1, anche $\frac{1}{f(x)}$ tende a 1.



Traccia il grafico della funzione $y = f(x)$ e poi quello della funzione indicata a fianco.

213 $y = f(x) = x^2 - 4x$, $\quad y = f^2(x)$.

214 $y = f(x) = \frac{1}{x-1}$, $\quad y = \sqrt{f(x)}$.

215 $y = f(x) = \operatorname{sen} x$, $\quad y = \frac{1}{f(x)}$.

216 $y = f(x) = -\ln(x-1)$, $\quad y = f^2(x)$.

217 $y = f(x) = e^{x+1} - 1$, $\quad y = \frac{1}{f(x)}$.

218 $y = f(x) = -\operatorname{tg} x$, $\quad y = \sqrt{f(x)}$.

Disegna i grafici delle seguenti funzioni, interpretandole come funzioni del tipo $f^2(x)$, $\sqrt{f(x)}$, $\frac{1}{f(x)}$.

219 $y = \sqrt{\frac{x-4}{x}}$

220 $y = (|x| - x^2)^2$

221 $y = \frac{1}{x^2 - 4x}$; $\quad y = \sqrt{\operatorname{sen} x} + 1$.

222 $y = (\ln x - 1)^2$; $\quad y = \frac{1}{e^{-x} - 1}$.

223 $y = \frac{1}{|x^2 + 2x|}$; $\quad y = \frac{1}{\sqrt{\ln x}}$.

224 $y = \operatorname{tg}^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; $\quad y = 2\cos^2 2x$.

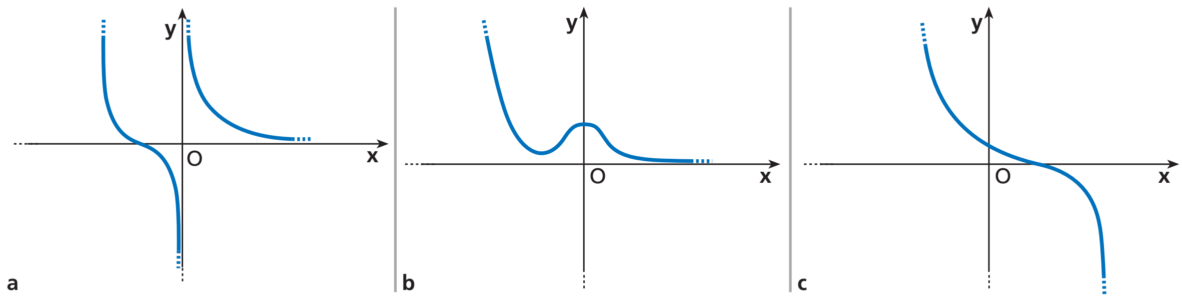
2. LE PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI

▶ Teoria a pag. 1359

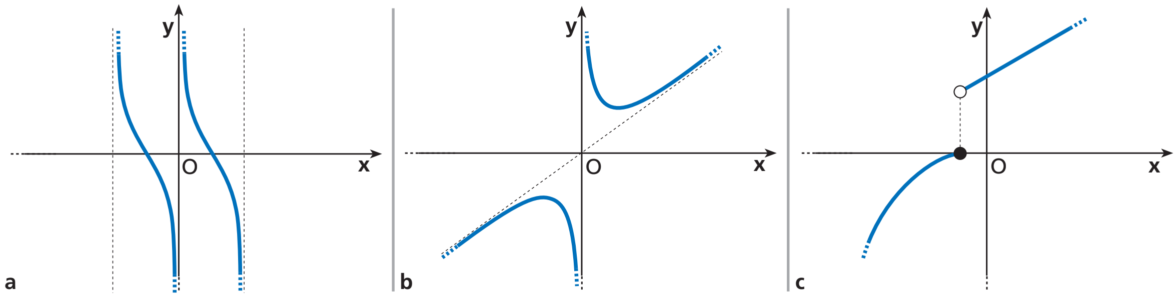
Le funzioni iniettive, suriettive e biiettive

Ogni grafico rappresenta una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Indica se è una funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva.

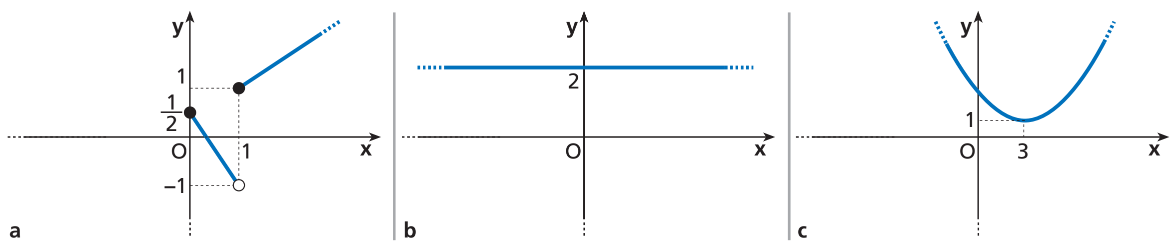
225



226



227 Per ognuna delle seguenti funzioni, indica quale sottoinsieme di $\mathbb{R}$ si deve prendere come insieme di arrivo se si vuole che la funzione sia suriettiva.



228 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } |x| < 1 \\ |x-2| & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

a) rappresenta il grafico di $f(x)$;

b) determina il dominio e il codominio;

c) studia il segno della funzione;

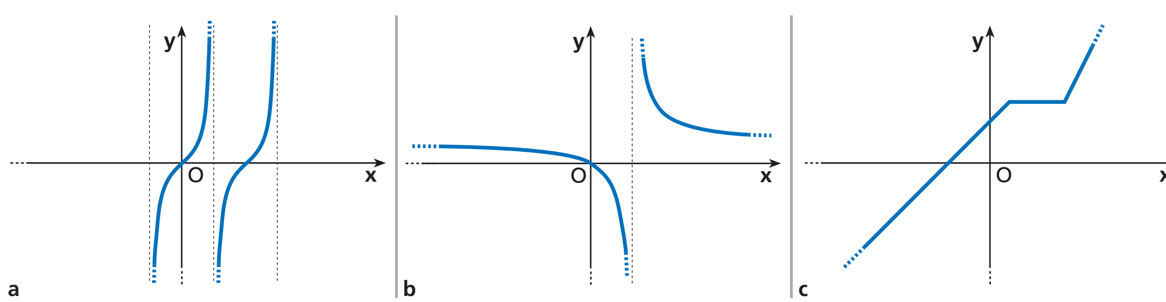
d) calcola $f(-1), f(3), f\left(\frac{1}{2}\right)$ e determina le controimmagini di 0 e $-\frac{2}{5}$;

e) $f(x)$ è una corrispondenza biunivoca?

[b) D: $\mathbb{R}$, C: $y > -1$; c) $f(x) > 0$ per $x < 0 \vee 1 \leq x < 2 \vee x > 2$; d) $3, 1, -\frac{1}{2}$; 0 e 2, $\frac{2}{5}$; e) no]

Le funzioni crescenti, decrescenti e monotòne

229 Indica quali tra i seguenti grafici rappresentano funzioni sempre crescenti o decrescenti, precisando se lo sono in senso stretto o in senso lato.



230 VERO O FALSO?

a) La funzione $y = \text{tg}\, x$ è crescente in $[0; \pi]$. V F

b) La funzione $y = \text{cotg}\, x$ è sempre decrescente. V F

c) Una funzione biunivoca è sempre monotòna. V F

d) Una funzione monotòna è sempre biunivoca. V F

e) La funzione $y = 3^{-x-1}$ è crescente. V F

Dopo aver rappresentato le seguenti funzioni, indica in quali intervalli sono crescenti e in quali decrescenti.

231 $y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \leq 2 \\ 7 - x^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ [cresc. per $x < 2$; decr. per $x > 2$]

232 $y = \begin{cases} \text{sen}\, x & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\text{tg}\, x & \text{se } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$ $\left[\text{cresc. per } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \text{ decr. per } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi\right]$

233 $y = 8 - x^2$ [cresc. per $x < 0$; decr. per $x > 0$]

234 $y = x^2 - 3x - 10$ $\left[\text{decr. per } x < \frac{3}{2}; \text{ cresc. per } x > \frac{3}{2}\right]$

235 $y = \begin{cases} 1 - 3x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{x-3}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ [cresc. per $x < 0 \vee x > 1$; decr. per $0 < x < 1$]

236 $y = \begin{cases} -\ln(x+1) & \text{se } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2^{x-1} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ [decr. per $-1 < x < 0$; cresc. in senso lato per $x \geq 0$]

237 $y = \begin{cases} x^2 + 5 & \text{se } x \leq 0 \\ 5 - \sqrt{x} & \text{se } 0 < x \leq 3 \\ 2x - 4 & \text{se } x > 3 \end{cases}$ [decr. per $x < 3$; cresc. per $x > 3$]

238 Dimostra, utilizzando il suo grafico, che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } 0 \leq x < 4 \\ -\dfrac{1}{2}x + 5 & \text{se } 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

è iniettiva ma non è monotòna.

239 ESERCIZIO GUIDA

Dimostriamo che la funzione $f(x) = \dfrac{1}{4^x + 8}$ è decrescente nel suo dominio.

Poiché il denominatore non si annulla mai, il dominio è D: $\mathbb{R}$.
Una funzione è decrescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Nel nostro caso si ha:

$$x_1 < x_2 \rightarrow 4^{x_1} < 4^{x_2} \rightarrow 4^{x_1} + 8 < 4^{x_2} + 8 \rightarrow \frac{1}{4^{x_1} + 8} > \frac{1}{4^{x_2} + 8}.$$

Quindi la funzione è decrescente.

Per le seguenti funzioni dimostra ciò che è indicato.

240 $y = 2x^3 - 3,$ crescente.

241 $y = \sqrt{x+2} - 1,$ crescente.

242 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 4,$ decrescente.

243 $y = \ln\left(\frac{4}{x-2}\right),$ decrescente.

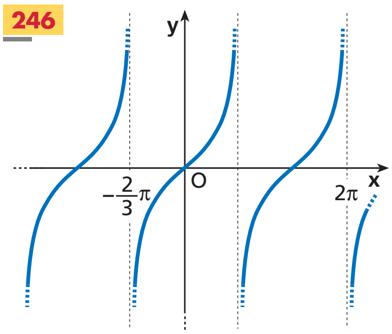
244 $y = 2 + e^{-x+1},$ decrescente.

245 $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} - 3,$ crescente.

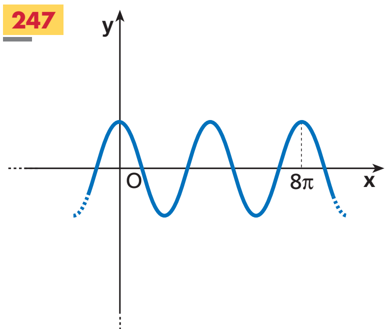
Le funzioni periodiche

Indica il periodo delle seguenti funzioni periodiche.

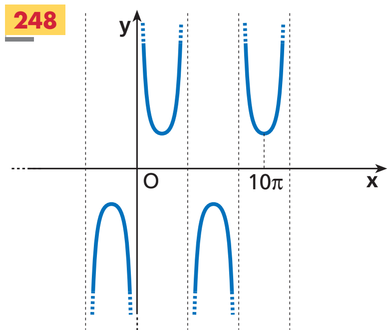
246



247

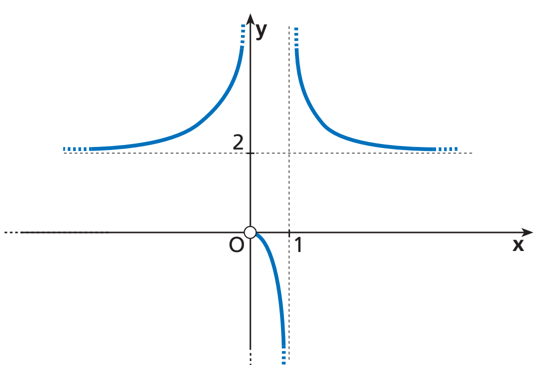


248

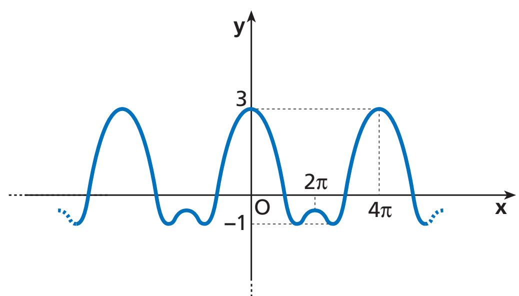


Per ognuna delle funzioni rappresentate nei seguenti grafici indica:
a) il dominio; b) il codominio; c) il periodo, se è periodica; d) se è monotòna.

249



250



Il periodo delle funzioni goniometriche

251 ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo il periodo delle seguenti funzioni:

a) $y = \cos\frac{2}{5}x;$ b) $y = \operatorname{tg} 4x + \operatorname{sen}\frac{3}{2}x.$

Se $f(x)$ è una funzione di periodo T_1 e $m > 0$, allora $f(mx)$ è periodica di periodo $T = \frac{T_1}{m}$.

a) Il periodo della funzione $y = \cos x$ è 2π, quindi il periodo cercato è $T = \frac{2\pi}{\frac{2}{5}} = 2\pi \cdot \frac{5}{2} = 5\pi$.

b) Il periodo della funzione si ottiene calcolando il m.c.m. dei periodi delle due funzioni tg $4x$ e sen $\frac{3}{2}x$.

Poiché il periodo di $y = \text{tg}\, x$ è π, il periodo di $y = \text{tg}\, 4x$ è $T_1 = \frac{\pi}{4}$, mentre il periodo di $y = \text{sen}\, \frac{3}{2}x$ è $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\pi$. Calcoliamo:

$$\text{m.c.m.}\left(\frac{\pi}{4}; \frac{4}{3}\pi\right) = \pi \cdot \text{m.c.m.}\left(\frac{1}{4}; \frac{4}{3}\right) = \pi \cdot \text{m.c.m.}\left(\frac{3}{12}; \frac{16}{12}\right) = \frac{\pi}{12} \cdot \text{m.c.m.}\,(3; 16) = \frac{\pi}{12} \cdot 48 = 4\pi.$$

Trova il periodo delle seguenti funzioni.

252 $y = \text{sen}\, \frac{2}{3}x$; $\quad y = \text{tg}\, 5x$. $\left[3\pi; \frac{\pi}{5}\right]$

253 $y = \text{sen}\, x + \cos \frac{x}{2}$; $\quad y = \text{tg}\, x + \text{sen}\, x$. $[4\pi; 2\pi]$

254 $y = 2\cos 2x + \text{sen}\, x$; $\quad y = \cos \frac{x}{3}$. $[2\pi; 6\pi]$

255 $y = \frac{1}{\cos 4x}$; $\quad y = 4\,\text{sen}\,(8x + 2)$. $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$

256 $y = \text{sen}\, 3x + 4\cos 5x - \text{tg}\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$; $\quad y = \text{tg}\, 2x + \text{cotg}\, \frac{1}{2}x$. $[2\pi; 2\pi]$

257 $y = 2\cos \frac{x}{4} - \text{tg}\, \frac{x}{6}$; $\quad y = \text{sen}\, 4x + \cos 6x$. $[24\pi; \pi]$

258 $y = 2\cos 4\pi x - \text{sen}\, 5\pi x$; $\quad y = \text{sen}^2 2x$. $\left[2; \frac{\pi}{2}\right]$

259 $y = \cos \frac{2}{3}x + \text{sen}\, 6x \cos 6x$; $\quad y = \cos^2 4x + \text{tg}\, 8x$. $\left[3\pi; \frac{\pi}{4}\right]$

Le funzioni pari e le funzioni dispari

260 **VERO O FALSO?**

a) Una funzione che non è dispari è pari. V F

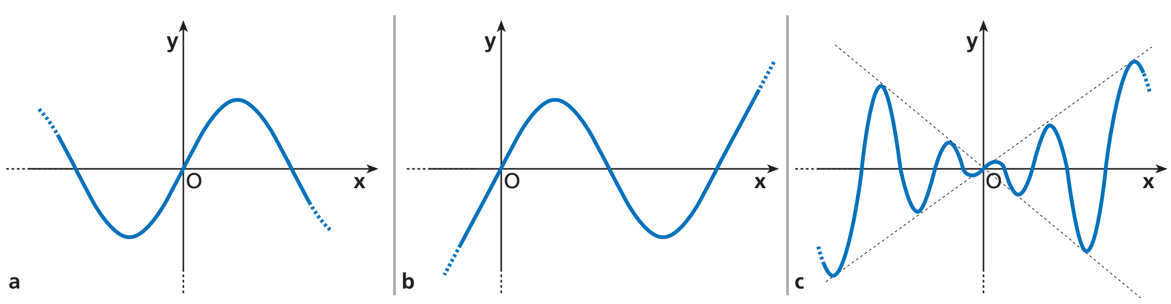
b) Una funzione pari è simmetrica rispetto all'asse x. V F

c) Una funzione dispari è simmetrica rispetto all'asse y. V F

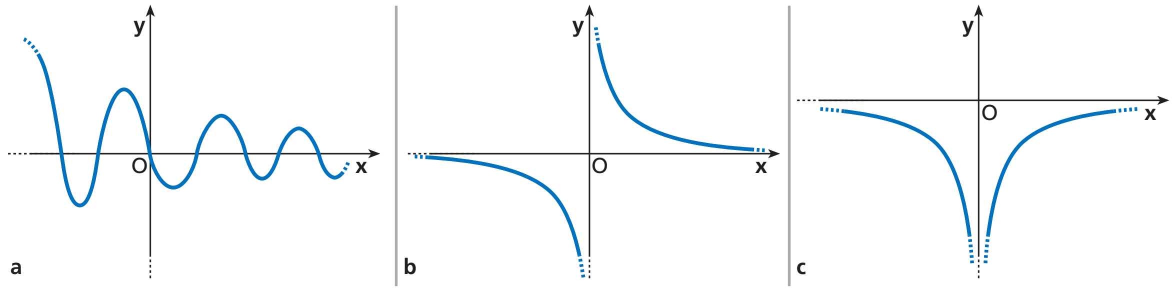
d) Date le due funzioni f e g, con f dispari e g dispari, allora è $f + g$ dispari e $f \cdot g$ pari. V F

Nei seguenti esercizi sono rappresentati i grafici di alcune funzioni. Indica quali di esse sono pari, quali dispari e quali né pari né dispari, motivando la risposta.

261



262



263 **ESERCIZIO GUIDA**

Stabiliamo se le seguenti funzioni sono pari o dispari:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{1 - 4x^2}$; b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{\sqrt[3]{x^2}}$.

a) Determiniamo il dominio. La funzione è fratta:

$$1 - 4x^2 \neq 0 \rightarrow 4x^2 \neq 1 \rightarrow x^2 \neq \frac{1}{4} \rightarrow D\colon x \neq \pm\frac{1}{2},$$

Preso un generico x del dominio, sostituiamo il suo opposto nella funzione:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - |-x|}{1 - 4(-x)^2} = \frac{x^2 - |x|}{1 - 4x^2} = f(x).$$

Quindi la funzione è pari.

b) Determiniamo il dominio. La funzione è fratta:

$$\sqrt[3]{x^2} \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 0 \rightarrow D\colon x \neq 0.$$

Preso un generico x del dominio, sostituiamo il suo opposto nella funzione:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{\sqrt[3]{(-x)^2}} = \frac{-x^3 + x}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-(x^3 - x)}{\sqrt[3]{x^2}} = -\frac{x^3 - x}{\sqrt[3]{x^2}} = -f(x).$$

La funzione è dunque dispari.

Verifica che le seguenti funzioni sono pari.

264 $y = \dfrac{1 + x^2}{4 - x^2}$; $y = \dfrac{x^2 - 2}{3x^4}$; $y = |5x| - 3x^2$.

265 $y = \left|\dfrac{3x}{x^2 - 1}\right|$; $y = \sqrt{x^2 + 9} - x^4$; $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3}}{2 - x^2}$.

Verifica che le seguenti funzioni sono dispari.

266 $y = \dfrac{3}{x^3} + 2x^3$; $y = 3x - \sqrt[3]{x}$; $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2}$.

267 $y = x\sqrt{5 - x^2}$; $y = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$; $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$.

268 Determine (algebraically) if each function is even, odd, or neither.

a) $y = |x + 2|$; b) $y = |x| + 2$; c) $y = x^2 + 3$; d) $y = x^2 + 3x$; e) $y = x^3 - 5x$; f) $y = x^3 - 5$.

(USA *Tacoma Community College*, Worksheet)

[a) neither; b) even; c) even; d) neither; e) odd; f) neither]

Fra le seguenti funzioni, indica quali sono pari, quali dispari e quali né pari né dispari, motivando la risposta.

269 $y = 3x^3 + 2x - 1$; $y = x^2 - |5x|$; $y = x \cdot \frac{|2x|}{3}$. [né pari né dispari; pari; dispari]

270 $y = \frac{\sqrt{7 - x^2}}{x}$; $y = \frac{x^3 - 1}{1 - x^2}$; $y = 2\sqrt{x+1} - x$. [dispari; né pari né dispari; né pari né dispari]

271 $y = \frac{|x|}{1 + \sqrt{x^2 - 1}}$; $y = \frac{2x}{2^x + 2^{-x}}$; $y = \frac{x^4 + 2}{x}$. [pari; dispari; dispari]

272 $y = \frac{3}{\sqrt{3 - x^2}}$; $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{5 + x^2}}$; $y = x\sqrt{x^2 - 1}$. [pari; pari; dispari]

273 $y = \ln|x| + 1$; $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; $y = \frac{e^x + e^{-x}}{x}$. [pari; pari; dispari]

274 $y = |\cos x|$; $y = (\operatorname{sen} x - \cos x)^2 - 1$; $y = \frac{|x| + x^2}{2x}$. [pari; dispari; dispari]

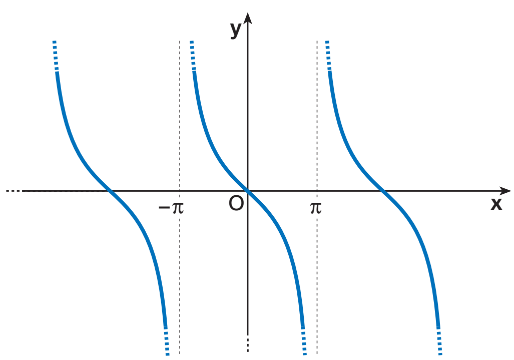
275 $y = \operatorname{arcsen} x + 2x^3$; $y = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{sen}|x|$; $y = \log_2 \frac{2 - x}{2 + x}$. [dispari; pari; dispari]

276 $y = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{2x} - e^{-2x}}$; $y = \ln(1 - x) + \ln(1 + x)$; $y = \frac{x^3 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$. [pari; pari; né pari né dispari]

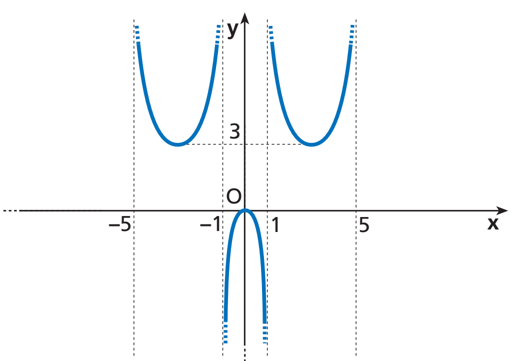
277 $y = 3x^2 - 2|x| + 3$; $y = \frac{x^3 - x}{x + 2}$; $y = \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{x^2 + 1}$. [pari; né pari né dispari; dispari]

Per ognuna delle funzioni rappresentate nei seguenti grafici indica:
a) il dominio; b) il codominio; c) se è pari o dispari; d) se è monotòna.

278



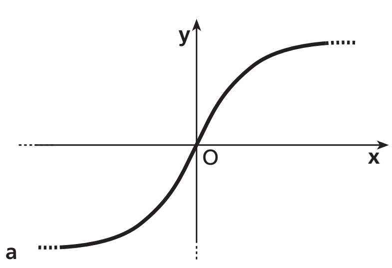
279

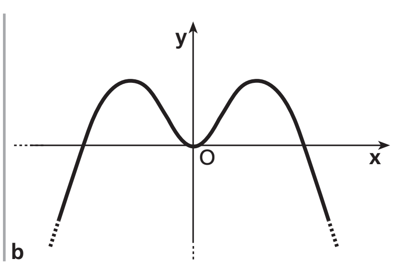


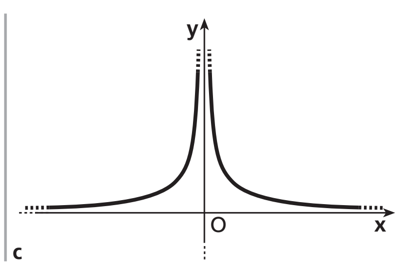
La funzione inversa

Per ognuna delle funzioni che hanno i seguenti grafici, considera un'eventuale restrizione del dominio e del codominio in modo che la funzione ammetta la funzione inversa e disegnane il grafico.

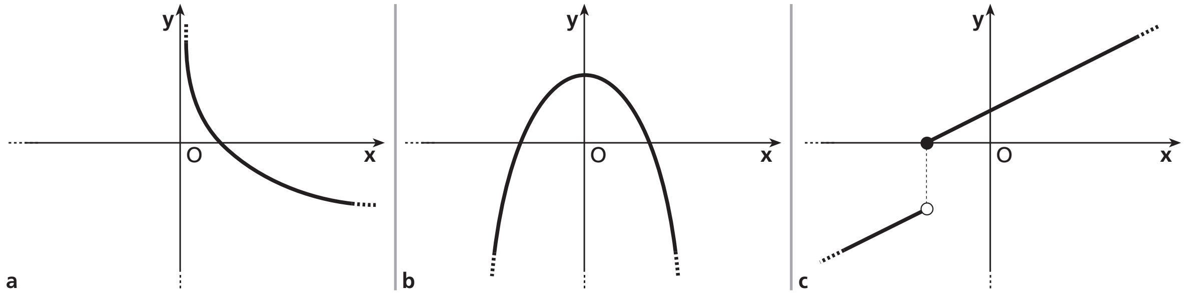
280







281



282 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'espressione della funzione inversa delle seguenti funzioni e il relativo dominio.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$; b) $f(x) = 1 + 2\,\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

---

a) La funzione $y = \dfrac{1}{1+e^x}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Determiniamo la relazione inversa ricavando x,

$$1 + e^x = \frac{1}{y} \;\rightarrow\; e^x = \frac{1}{y} - 1 \;\rightarrow\; x = \ln\left(\frac{1}{y} - 1\right),$$

e notiamo che è una funzione perché a ogni valore di y corrisponde un solo valore di x. Quindi scriviamo la funzione inversa scambiando x con y:

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

Il dominio di $f^{-1}(x)$, che coincide con il codominio di $f(x)$, si ottiene risolvendo la disequazione $\dfrac{1}{x} - 1 > 0$. Esso risulta essere l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 1\}$.

b) Anche la funzione $y = 1 + 2\,\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Ricaviamo la relazione inversa:

$$2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = y - 1 \;\rightarrow\; \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{y-1}{2}.$$

La funzione $y = \text{sen}\,\alpha$ è invertibile se $-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$.

Nel nostro caso deve essere $-\dfrac{\pi}{2} \le x - \dfrac{\pi}{4} \le \dfrac{\pi}{2}$, e cioè:

$$-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3}{4}\pi.$$

Scriviamo allora la funzione inversa:

$$x - \frac{\pi}{4} = \text{arcsen}\,\frac{y-1}{2} \;\rightarrow\; x = \text{arcsen}\,\frac{y-1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Scambiamo x con y e scriviamo:

$$f^{-1}(x) = \text{arcsen}\,\frac{x-1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Questa funzione è definita per quei valori di x tali che $-1 \le \dfrac{x-1}{2} \le 1$, cioè per $-1 \le x \le 3$.

Determina l'espressione della funzione inversa delle seguenti funzioni e il relativo dominio.

283 $f(x) = 2\,\text{arcsen}\,(1-x)$ $\left[f^{-1}(x) = 1 - \text{sen}\,\frac{x}{2};\, D\colon \mathbb{R}\right]$

284 $f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$ $\left[f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\ln x};\, D\colon x > 0 \wedge x \neq e\right]$

285 $f(x) = -\,\text{arctg}\,\frac{2}{x}$ $\left[f^{-1}(x) = -\frac{2}{\text{tg}\,x};\, D\colon -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \wedge x \neq 0\right]$

286 $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ $\left[f^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2};\, D\colon \mathbb{R}\right]$

287 $f(x) = 2 - \cos 2x$ $\left[y = \frac{\arccos(2-x)}{2};\, D\colon 1 \leq x \leq 3\right]$

288 $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$ $\left[y = e^{\frac{1}{x}+1};\, D\colon x \neq 0\right]$

In un diagramma cartesiano disegna le seguenti funzioni e le loro inverse, dopo aver considerato, se necessario, opportune restrizioni del dominio, tali che le funzioni siano biiettive. Scrivi l'espressione analitica della funzione inversa.

289 $y = -4x^2 + 8x$; $y = \ln x - 2$.

290 $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; $y = -2x - 2$.

291 $y = |\ln x|$; $y = \begin{cases} 4x+1 & \text{se } x \geq 0 \\ 2^x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

292 $y = |e^{-x} - 1|$; $y = x^2 - 6x + 5$.

293 $y = -\,\text{arctg}\,(x-3)$; $y = 1 - \text{arcsen}\,x$.

294 $y = \ln\frac{1}{x-3}$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 2$.

Rappresenta graficamente le funzioni indicando quale di esse ammette la funzione inversa.

295 $y = \text{arcsen}|x| + 1$; $y = |\text{arctg}\,x| - \frac{1}{2}$.

296 $y = -\left|\arccos x - \frac{\pi}{2}\right|$; $y = 2\,\text{arcsen}\,(x-2)$.

297 Dimostra che la funzione $f(x) = \frac{2x}{3x-1}$ è invertibile e determina la funzione inversa $f^{-1}(x)$. Disegna i grafici delle due funzioni $f(x)$ e $f^{-1}(x)$. $\left[f^{-1}(x) = \frac{x}{3x-2}\right]$

Le funzioni composte

298 **ESERCIZIO GUIDA**

Date le seguenti funzioni f e g, determiniamo $f \circ g$ e $g \circ f$:

$f(x) = \ln x, \quad g(x) = x^2 - 2x.$

- Possiamo effettuare la composizione $f \circ g$ solo se il codominio di g è contenuto nel dominio di f.
  La funzione f è definita per $x > 0$, per cui occorre che:

  $$g(x) = x^2 - 2x > 0, \text{ cioè } x < 0 \vee x > 2.$$

  Quindi $f \circ g$ è definita sull'insieme $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$.
  Per determinare la sua espressione, applichiamo alla variabile x la funzione g, per ottenere $z = g(x)$, e a z la funzione f, per ottenere $y = f(z)$:

  $$z = x^2 - 2x \text{ e } y = \ln z = \ln(x^2 - 2x).$$

  La funzione $f \circ g:]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\to \mathbb{R}$ è $y = \ln(x^2 - 2x)$.

- Poiché la funzione g è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, la funzione composta $g \circ f$ è sempre definita e il suo dominio coincide con quello di f, cioè $]0; +\infty[$. Per determinare $g \circ f$, applichiamo alla variabile x la funzione f, per ottenere $z = f(x)$, e a z la funzione g, per ottenere $y = g(z)$:

  $$z = \ln x \quad \text{e} \quad y = z^2 - 2z = \ln^2 x - 2\ln x.$$

  La funzione $g \circ f:]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ è $y = \ln^2 x - 2\ln x$.

Date le seguenti funzioni f e g, determina $f \circ g$ e $g \circ f$.

299 $f(x) = \operatorname{sen} 2x$; $\quad g(x) = \sqrt{x} - 1$. $\quad [(f \circ g)(x) = \operatorname{sen}(2\sqrt{x} - 2); (g \circ f)(x) = \sqrt{\operatorname{sen} 2x} - 1]$

300 $f(x) = \dfrac{1}{x - 3x^2}$; $\quad g(x) = e^{-x+2}$. $\quad \left[(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{e^{-x+2} - 3e^{-2x+4}}; (g \circ f)(x) = e^{-\frac{1}{x-3x^2}+2}\right]$

301 $f(x) = \cos\left(-x + \dfrac{\pi}{6}\right)$; $\quad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$. $\quad \left[(f \circ g)(x) = \cos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} + \dfrac{\pi}{6}\right); (g \circ f)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\cos\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) + 1}}\right]$

302 $f(x) = 2^{\sqrt{x}-4}$; $\quad g(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$. $\quad \left[(f \circ g)(x) = 2^{\sqrt[4]{\frac{x-2}{x+3}}-4}; (g \circ f)(x) = \sqrt{\dfrac{2^{\sqrt{x}-4} - 2}{2^{\sqrt{x}-4} + 3}}\right]$

303 Data la funzione $f(x) = \dfrac{2}{\ln x - 4}$, dimostra che è invertibile, trova la funzione inversa $f^{-1}(x)$ e verifica che $f(f^{-1}(x)) = x$. $\quad \left[f^{-1}(x) = e^{\frac{2}{x}+4}\right]$

304 Considera le funzioni $f(x) = \sqrt{x} + 3$ e $g(x) = \ln x + 1$. Verifica che $f \circ g \neq g \circ f$.
$[(f \circ g)(x) = \sqrt{\ln x + 1} + 3; (g \circ f)(x) = \ln(\sqrt{x} + 3) + 1]$

305 Date le funzioni $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 2x - 3$, trova $f(x+1)$ e $g(x-1)$ e risolvi l'equazione:

$$f(g(x)) = f(x+1) - g(x-1).$$

$[x = 3]$

306 Date le funzioni $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ e $g(x) = x^2$:

a) determina $h = f \circ g$;

b) risolvi la disequazione $h(x) \leq f(2x)$. $\quad \left[\text{a) } (f \circ g)(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}; \text{b) } x \geq 2\right]$

307 Consider the functions f, g, and h, where $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $g(x) = 2\sqrt{x}$, and $h(x) = \sqrt{4x+1}$. What are the natural domains of f, g, and h? Consider the composition $f \circ g$ of the functions f and g. What is its natural domain? What is the natural domain of $g \circ f$? Find expressions for $(f \circ g)(x)$ and $(g \circ f)(x)$.

(UK *University of Essex*, First Year Examination, 2002)

$[(f \circ g)(x) = \sqrt{4x+1}; (g \circ f)(x) = 2\sqrt[4]{x^2+1}]$

308 Find the inverse of the following function and then verify that $f(f^{-1}(x)) = x$.

$$f(x) = \frac{2}{6x-1}.$$

(USA *Southern Illinois University Carbondale,* Final Exam, 2002)

$\left[f^{-1}(x) = \frac{2+x}{6x}\right]$

ESERCIZI VARI Le funzioni e le loro proprietà

TEST

309 Se $f(x) = \frac{2x}{(3x+4)}$ e $f(g(x)) = x$, allora $g(x) =$

A $\frac{3x+4}{2x}$.

B $\frac{3x}{2x+4}$.

C $\frac{4x}{2-3x}$.

D $\frac{2x+4}{4}$.

E Nessuna delle precedenti.

(USA *Furman University Wylie Mathematics Tournament*, 1998)

310 Il più grande intervallo in cui la funzione $f(x) = \sqrt{|x+1| - |2x-1|}$ è invertibile:

A è $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

B è $\mathbb{R}$.

C f non è invertibile su nessun intervallo.

D è contenuto nell'intervallo $[-1; 1]$.

(*Politecnico di Torino, Test di autovalutazione*)

311 Se $f((x-1)^{-1}) = x^{-1}$, allora $f(x)$ è:

A $(x-1)^{-1}$.

B $\frac{x}{x+1}$.

C $\frac{x+1}{x}$.

D $\frac{1}{x} - x$.

E Nessuna delle precedenti.

(USA *Furman University Wylie Mathematics Tournament*, 1999)

312 Let $f(x) = \frac{x}{1+x}$ and let $g(x) = \frac{r \cdot x}{1-x}$.

Let S be the set of all real numbers r such that $f(g(x)) = g(f(x))$ for infinitely many real numbers x. The number of elements in set S is:

A 1.

B 2.

C 3.

D 5.

E more than 5.

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 1997)

313 Supponi che f e g siano funzioni tali che $f(g(x)) = x + 2$ e che $f(s) = \frac{4-s}{s+1}$.

Qual è $g(t)$?

A $g(t) = f(t) + 2$

B $g(t) = f(t) - 2$.

C $g(t) = \frac{t+3}{2-t}$

D $g(t) = \frac{2-t}{t+3}$

E Nessuna delle precedenti.

(USA *Furman University Wylie Mathematics Tournament*, 2004)

314 Sia $f(x) = 2x^3 - 7$. Se la funzione $g(x)$ soddisfa $(f \circ g)(x) = x$ e $(g \circ f)(x) = x$, allora $g(x)$ è:

A $\frac{1}{2x^3 - 7}$.

B $\frac{7}{2\sqrt[3]{x}}$.

C $\frac{\sqrt[3]{x} + 7}{2}$.

D $\sqrt[3]{\frac{x+7}{2}}$.

E non univocamente determinata.

(USA *Indiana University of Pennsylvania Annual High School Mathematics Competition*, 2003)

315 a) Determina il dominio della funzione $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{tg} x}$.

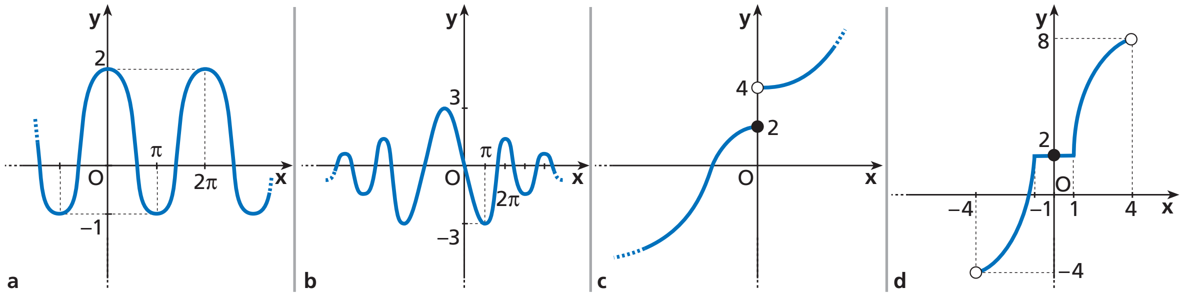
b) Studia il segno e determina le intersezioni con gli assi.

c) Stabilisci se è pari o dispari e se è periodica.

$\left[\text{a) } D: x \neq k\frac{\pi}{2}; \text{ b) } y > 0 \text{ per } \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi; \text{ c) né pari né dispari; } T = 2\pi\right]$

316 Per ognuna delle funzioni rappresentate nella figura seguente indica:

a) il dominio;
b) il codominio;
c) se è pari o dispari;
d) se è monotòna;
e) se è invertibile.



317 Disegnato il grafico della funzione $y = \sqrt{x}$, rappresenta graficamente le funzioni $y = \sqrt{|x|}$, $y = 1 - \sqrt{x}$ e $y = |\sqrt{x} - 2|$. Per ciascuna indica il dominio, il codominio e il segno. Quale di esse è pari? Quale è dispari? Quale ammette inversa?

318 **VERO O FALSO?**

a) Se $y = f(x)$ è una qualunque funzione, $y = f(x) + f(-x)$ è una funzione pari. V F

b) Se $y = f(x)$ è una funzione pari e $y = g(x)$ è dispari, allora $y = f(g(x))$ è pari. V F

c) Se $y = f(x)$ è una funzione dispari, allora $y = f^2(x)$ è dispari. V F

d) Se $y = f(x)$ è una funzione dispari, allora $y = f(x^2)$ è una funzione pari. V F

319 Data la funzione $f(x) = \dfrac{2-a}{1+\ln x}$,

a) trova per quale valore di a si ha $f(1) = 1$;
b) determina il dominio;
c) determina l'espressione e il dominio della funzione inversa $f^{-1}(x)$ per il valore di a trovato precedentemente.

$\left[\text{a) } a = 1; \text{ b) } D: x > 0 \wedge x \neq \frac{1}{e}; \text{ c) } f^{-1}(x) = e^{\frac{1-x}{x}}, D: x \neq 0\right]$

320 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} -x^2 - ax & \text{se } x \leq 2 \\ \ln(x-1) & \text{se } x > 2 \end{cases}$

a) trova il valore del parametro a affinché il grafico di $f(x)$ passi per il punto $P(2; 0)$;
b) determina il dominio e disegna il grafico di $f(x)$;
c) la funzione è invertibile?

[a) $a = -2$; b) D: $\mathbb{R}$; c) no]

321 a) Disegna il grafico della funzione $y = f(x) = 1 - \dfrac{1}{|x|}$ utilizzando le trasformazioni geometriche.

b) Trova gli insiemi in cui è crescente o decrescente.
c) $f(x)$ è biunivoca?

[b) cresc. per $x > 0$, decr. per $x < 0$; c) no]

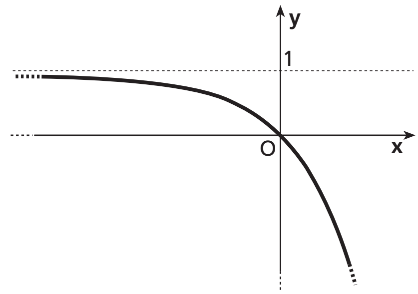
322 a) Trova il dominio, il codominio e disegna il grafico di $f(x) = |-x^2 + 4x| - 4$.

b) Determina il dominio, il codominio e disegna il grafico di $\dfrac{|f(x)|}{f(x)}$.

c) Trova il vettore $\vec{v}$ di una traslazione che rende $f(x)$ pari.

[a) D: $\mathbb{R}$, C: $y \geq -4$; b) D: $x \neq 2 \wedge x \neq 2 \pm 2\sqrt{2}$, C: $y = \pm 1$; c) $\vec{v} = (-2; 0)$]

323 Indica quale delle seguenti funzioni ha come grafico quello rappresentato nella figura a lato. Per ciascuna di esse determina il dominio, il codominio, il segno, stabilisci se è monotòna, pari o dispari, invertibile. Quando esiste, trova la funzione inversa.



a) $y = f(x) = e^{-x} - 1$;

b) $y = f(x) = -e^{x} - 1$;

c) $y = f(x) = e^{-x} + 1$;

d) $y = f(x) = -e^{x} + 1$.

[a) $f^{-1}(x) = -\ln(x+1)$; b) $f^{-1}(x) = \ln(-1-x)$; c) $f^{-1}(x) = -\ln(x-1)$; d) $f^{-1}(x) = \ln(1-x)$]

324 Rappresenta graficamente la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5 - |4 + 4x|}$. Trova il suo dominio e il codominio. Risolvi algebricamente e graficamente la disequazione $f(x) < x + 2$. $\left[D: \mathbb{R}, C: y \geq 0; x > -\frac{1}{2}\right]$

325 a) Date le funzioni $f(x) = |x+3| - 5$, $g(x) = x - 2$ e $h(x) = x^2 + 2x$, trova $f \circ g$, $g \circ h$, $f \circ h$, $g \circ g$.

b) Determina $(f \circ h) \circ g$.

c) Risolvi la disequazione $f(g(x)) > 2g(x)$. [a) $(f \circ g)(x) = |x+1| - 5$; $(g \circ h)(x) = x^2 + 2x - 2$; $(f \circ h)(x) = |x^2 + 2x + 3| - 5$; $(g \circ g)(x) = x - 4$; b) $((f \circ h) \circ g)(x) = |x^2 - 2x + 3| - 5$; c) $x < 0$]

326 a) Trova il dominio, il segno e le intersezioni con gli assi della funzione $f(x) = e^{-x+1} - 1$.

b) Disegna il grafico di $f(x)$ utilizzando le trasformazioni geometriche.

c) Disegna il grafico di $y = \frac{1}{f(x)}$, di $y = 2 + f(1-x)$ e di $y = \frac{f(x)}{|f(x)|} + 3$.

d) Determina la funzione inversa $f^{-1}(x)$ indicando il dominio, il codominio e tracciandone il grafico.

[a) $D: \mathbb{R}$, $y > 0$ per $x < 1$, $P(1; 0)$, $Q(0; e-1)$; d) $f^{-1}(x) = 1 - \ln(x+1)$, $D: x > -1$, $C: \mathbb{R}$]

327 a) Determina il dominio, studia il segno e rappresenta il grafico di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} - 1$.

b) Verifica se è una funzione crescente o decrescente e in caso affermativo trova $f^{-1}(x)$.

c) Traccia i grafici di $f(-x)$, $f(x+2)$ e $f^{-1}(x) - 2$.

$\left[\text{a) } D: x > 2,\ y > 0 \text{ per } 2 < x < 3; \text{ b) } f(x) \text{ decrescente, } f^{-1}(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + 2\right]$

328 Trova per quali valori di k la funzione $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - kx + k}}$ ha come dominio $\mathbb{R}$.

Rappresenta poi la funzione nel caso di $k = 4$. [$0 < k < 4$]

329 È data la funzione $f(x) = a \operatorname{sen} 2x + b \cos 2x$ che interseca l'asse y nel punto di ordinata 3 e tale che $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{3}$. Trova a e b, il periodo di $f(x)$ e disegna il suo grafico nell'intervallo $[-\pi; \pi]$.

[$a = \sqrt{3}$, $b = 3$, $T = \pi$]

330 Supponi che f sia una funzione che a ogni numero reale x associa un valore $f(x)$ e supponi che l'equazione

$$f(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) - 8$$

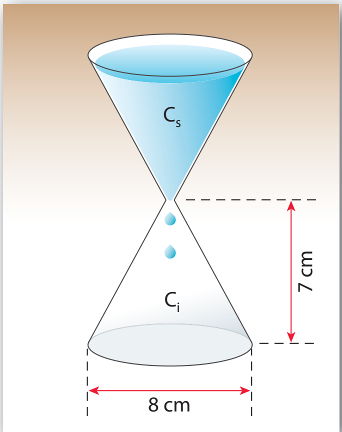
sia soddisfatta da tutti i numeri reali x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Quanto vale $f(0)$?

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*, 2004)

[2]

REALTÀ E MODELLI

1
La clessidra ad acqua



Ipotizziamo che la clessidra ad acqua mostrata in figura sia formata da due coni perfetti sovrapposti. La clessidra impiega 1,5 minuti per svuotarsi e supponiamo che il volume di acqua che passa da C_s a C_i in un secondo sia costante.

- Determina quanta acqua scorre in un secondo.
- Esprimi il volume V e l'altezza h dell'acqua scesa in C_i in funzione del tempo t, considerando come istante iniziale quello in cui C_s è pieno.
- Considera la funzione $V(t)$ trovata al punto precedente non per un solo passaggio di acqua, ma tenendo conto del fatto che, appena il cono superiore si è svuotato, la clessidra viene girata; in un sistema di riferimento cartesiano rappresenta il grafico di tale funzione e descrivine le caratteristiche.

2
L'orologio

Considera un orologio analogico (a lancette) e costruisci la seguente funzione: la variabile indipendente corrisponde all'ora (dall'ora 1 all'ora 24), la variabile dipendente è l'angolo (in gradi) che la lancetta delle ore forma con la posizione verticale delle 12.

- Rappresenta tale funzione in forma tabulare, in forma analitica e nel piano cartesiano, quindi analizza le sue caratteristiche.
- Se si collegano i punti del grafico con tratti lineari, che cosa cambia nelle caratteristiche della funzione?
- Costruisci una funzione analoga considerando la lancetta dei minuti nell'arco di un'ora; rappresentala analiticamente e nel piano cartesiano e analizza le sue caratteristiche.

3
La diffusione dell'influenza

Un modello matematico prevede che il virus dell'influenza si diffonda all'interno di una popolazione di P persone con una velocità (numero di nuovi casi giorno per giorno) che dipende in modo proporzionale sia dal numero di persone che già hanno contratto la malattia, sia da quelle che non sono state infettate.

- Mostra che (nell'ipotesi che la popolazione resti costante nel tempo) la velocità massima di diffusione si ha quando il numero di persone potenzialmente infette corrisponde alla metà della popolazione stessa.
- Calcola il valore della costante di proporzionalità nell'ipotesi che, su un campione di 100 000 persone, 1750 siano ammalate il giovedì e, il venerdì, ci siano 370 nuovi casi.
- Stima il numero di nuovi casi infetti il sabato.

4
Le montagne russe

In un luna park, un tratto delle rotaie delle montagne russe ha la traiettoria descritta dal grafico di $y = \operatorname{sen}(x^2)$, con $-\sqrt{\pi} \leq x \leq \sqrt{\pi}$. Disegna il grafico della funzione, quindi:

- stabilisci in quali tratti i vagoni salgono e in quali scendono (i vagoni si spostano, in riferimento al grafico, da sinistra verso destra);
- descrivi le proprietà della funzione rappresentata (dominio, codominio, pari o dispari).

VERSO L'ESAME DI STATO

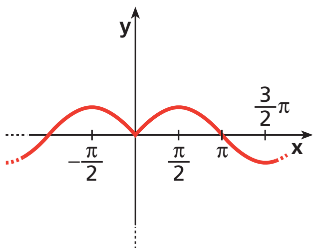
TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Soltanto una delle seguenti funzioni è dispari. Quale?

A $y = \ln|x| + 5$
B $y = x^3 + x^2$
C $y = \sqrt[3]{x}$
D $y = \operatorname{sen} 2x + x^2$
E $y = e^x + e^{-x}$

2 La seguente figura rappresenta il grafico di una funzione. Quale?



A $y = \operatorname{sen}|x|$
B $y = \cos|x|$
C $y = |\operatorname{sen} x|$
D $y = |\cos x|$
E $y = -\operatorname{sen} x$

3 Date le funzioni $f(x) = \sqrt{x} + 5$ e $g(x) = (x+2)^2$, quale fra le seguenti è la funzione composta $y = f(g(x))$?

A $y = x + \sqrt{7}$
B $y = x^2 + 7$
C $y = \sqrt{x} + 7$
D $y = |x+2| + 5$
E $y = (\sqrt{x} + 7)^2$

4 Il periodo della funzione $f(x) = 3 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ è:

A π.
B 2π.
C 3π.
D 4π.
E 6π.

5 Il grafico della funzione $y = \ln|x-1|$ ha come asse di simmetria la retta di equazione:

A $x = 0$.
B $x = 1$.
C $x = -1$.
D $x = 2$.
E $x = -2$.

6 Quale delle seguenti espressioni analitiche rappresenta la funzione inversa di $y = 2^{x+1}$?

A $y = \log_2 x - 1$
B $y = \log_2 (x-1)$
C $y = \log_2 (x+1)$
D $y = \log_2 x + 1$
E $y = \log_2 x$

7 La funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2| & \text{se } x \leq 0 \\ -x + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è crescente nell'intervallo:

A $]-\infty; -\sqrt{2}[$.
B $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$.
C $]-\sqrt{2}; 0[$.
D $]0; \sqrt{2}[$.
E $]-\sqrt{2}; +\infty[$.

8 Il codominio della funzione $f(x) = e^{\frac{x-2}{x}}$ è l'insieme:

A $\mathbb{R}$.
B $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$.
C $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \wedge y \neq e\}$.
D $\{y \in \mathbb{R} \mid y < 2 \vee y > 0\}$.
E $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

9 Il periodo della funzione
$y = \operatorname{sen} 4x \cos 4x + \cos 6x$ è:

A $\frac{\pi}{2}$.
B $\frac{\pi}{4}$.
C 2π.
D π.
E $\frac{\pi}{3}$.

QUESITI

10 **COMPLETA** la seguente tabella e motiva le tue risposte.

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)+g(x)$	$f(x)-g(x)$	$f(x)\cdot g(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$
pari	pari				
dispari	dispari				
pari	dispari				

11 Se $f(x) = 2^x$, mostrare che:

a) $f(x+3) - f(x-1) = \frac{15}{2}f(x)$; b) $\frac{f(x+3)}{f(x-1)} = f(4)$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 2)

12 Cosa si intende per «funzione periodica»? Qual è il *periodo* di $f(x) = -\operatorname{sen}\frac{\pi x}{3}$? Quale quello di sen $2x$?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 5)

13 Si determini il campo di esistenza della funzione $y = (x^2 - 3x)^{\frac{1}{|x-4|}}$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione straordinaria*, 2007, *quesito* 1)

14 Si determini il campo di esistenza della funzione $y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} x)$, con $0 \le x \le 2\pi$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2007, *quesito* 2)

15 Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione straordinaria*, 2004, *quesito* 3)

16 Fornisci la definizione di funzione iniettiva e dimostra che la composizione di due funzioni iniettive è ancora una funzione iniettiva. Utilizza questo risultato per dimostrare che $f(x) = \ln(4 - x^2)$, definita per $x \ge 0$, è iniettiva e trova la sua inversa. $[f^{-1}(x) = \sqrt{4 - e^x}]$

17 Dopo aver dato la definizione di funzione monotòna e di funzione biiettiva, stabilisci se una funzione monotòna è sempre biiettiva e viceversa. Fornisci alcuni esempi.

18 Dimostra che la funzione composta di una funzione pari e di una funzione dispari è pari indipendentemente dall'ordine di composizione. Fai un esempio.

PROBLEMI

19 Data la funzione $f(x) = -e^{|x|-x} - 2$:

a) trova il dominio, il codominio e il segno di $f(x)$;
b) disegna il grafico di $f(x)$ e di $|f(x)|$ usando le trasformazioni geometriche;
c) stabilisci se $f(x)$ è una funzione monotòna in senso lato;
d) restringi il dominio in modo che $f(x)$ sia invertibile e trova $f^{-1}(x)$ graficamente e algebricamente.

$\left[\text{a) } D\text{: } \mathbb{R}, C\text{: } y \le -3;\ y < 0, \forall x \in \mathbb{R};\ \text{c) sì; d) se } D\text{: } x < 0,\ f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}\ln(-2-x)\right]$

20 Data la funzione $f(x) = -\,e^{-x-1} + 2$:

a) determina il dominio, studia il segno e l'intersezione con gli assi e stabilisci se è pari o dispari;
b) disegna il grafico di $f(x)$ e quello di $\sqrt{f(x)}$;
c) determina $f(-x) - 2$ e $f(x) - |f(x)|$;
d) determina $f^{-1}(x)$ graficamente e algebricamente.

[a) D: $\mathbb{R}$; $y > 0$ per $x > -1 - \ln 2$; né pari né dispari; d) $f^{-1}(x) = -1 - \ln(2 - x)$]

21 Data la funzione $f(x) = -\ln(-x) - 1$:

a) determina il dominio, studia il segno e stabilisci se è pari o dispari;
b) disegna il grafico della funzione utilizzando le trasformazioni geometriche;
c) disegna il grafico di $y = |f(x) - 1|$, di $y = -f(-x)$ e di $y = f^2(x)$;
d) determina $f^{-1}(x)$ graficamente e algebricamente e indica il suo dominio.

$\left[\text{a) } D\text{: } x < 0;\ y > 0 \text{ per } -\frac{1}{e} < x < 0;\ \text{né pari né dispari; d) } f^{-1}(x) = -e^{-1-x},\ D\text{: } \mathbb{R}\right]$

22 a) Trova il dominio e il codominio della funzione $y = f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$.

b) Rappresenta graficamente $y = f(x)$ e $y = \dfrac{1}{f(x)}$.

c) Determina per quali valori di x si ha $y = 0$.

d) Risolvi l'equazione $2f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 4 = 0$.

$\left[\text{a) } D\text{: } \mathbb{R},\ C\text{: } -3 \leq y \leq 1;\ \text{c) } y = 0 \text{ per } x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{17}{12}\pi + 2k\pi;\right.$
$\left.\text{d) } x = \frac{19}{12}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi + 2k\pi\right]$

23 Sono date le funzioni $f(x) = \log_2\left(\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right| + \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1\right)$ e $g(x) = \dfrac{1}{2^{x-3}} - 1$.

a) Disegna i loro grafici precisando per ciascuna funzione il dominio, il codominio e le intersezioni con gli assi.
b) Verifica che solo la funzione $g(x)$ è biunivoca e determina $g^{-1}(x)$ algebricamente e graficamente.
c) Determina $f \circ g$ e $g \circ f$.
d) Disegna il grafico di $(g \circ f)^2$.

$\left[\text{a) } D_f = D_g = \mathbb{R},\ C_f\text{: } y \geq 1,\ C_g\text{: } y > -1;\ \text{b) } g^{-1}(x) = 3 - \log_2(x+1);\right.$
$\left.\text{c) } f(g(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 3 \\ 2 - 2^{3-x} & \text{se } x > 3 \end{cases},\ g(f(x)) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \geq 0 \\ 2^{2+x} - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}\right]$

24 Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + a & \text{se } x < 0 \\ x^2 - bx & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) trova a e b in modo che il suo grafico passi per i punti $\left(-4; \frac{17}{16}\right)$ e $(3; -3)$;
b) traccia il grafico di $f(x)$ e da esso deduci il codominio;
c) traccia il grafico di $y = |f(x)|$ e di $y = f(|x|)$;
d) risolvi le equazioni $f(|x|) = 5$ e $f(x) = \frac{3}{2}$.

$\left[\text{a) } a = 1,\ b = 4;\ \text{b) } C\text{: } y \geq -4;\ \text{d) } x = \pm 5;\ x = -1,\ x = \frac{4 + \sqrt{22}}{2}\right]$

25 Considera la funzione $y = f(x) = 2|\log_2 x| + \log_2 2x - 2$.

a) Trova il dominio, rappresenta il grafico di $f(x)$ e indica il codominio.
b) Studia il segno di $f(x)$.
c) La funzione è monotòna? È invertibile? Se non lo è in tutto il suo dominio, effettua una restrizione, trova $f^{-1}(x)$ e mostra che $f(f^{-1}(x)) = x$.
d) Disegna i grafici di $y = f(x) + 1$ e di $y = f(x + 1)$.

$\left[\text{a) } D: x > 0\ C: y \geq -1;\ \text{b) } f(x) > 0 \text{ per } 0 < x < \frac{1}{2} \vee x > \sqrt[3]{2};\ \text{c) per } x \geq 1,\ f^{-1}(x) = 2^{\frac{x+1}{3}}\right]$

26 Sono date le funzioni:

$$f(x) = \frac{8}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{se } x \neq -1 \\ 1 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

a) Determina il dominio, il codominio e disegna i grafici delle due funzioni.
b) Stabilisci se sono iniettive e, quando esistono, determina le espressioni delle funzioni inverse.
c) Traccia il grafico di $y = f(|x|)$ e trova i punti di intersezione tra il grafico di $y = f(|x|)$ e quello di $g(x)$.
d) Disegna il grafico di $y = \sqrt{g(x)}$ e calcola per quali valori di x si ha $\sqrt{g(x)} > 2$.

$\left[\text{a) } D_f: x \neq 0, C_f: y \neq 0; D_g: \mathbb{R}, C_g: y \neq 3;\ \text{b) } f^{-1}(x) = \frac{8}{x};\ \text{c) } (-2; 4);\ \text{d) } x < -2\right]$

27 Considera la funzione $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 + ax}$.

a) Trova a in modo che il grafico della funzione passi per $P\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{10}\right)$.
b) Determina il dominio di $f(x)$ per il valore di a trovato.
c) Verifica se la funzione è pari o dispari e studia il segno di $f(x)$ per $x > 0$.
d) Risolvi l'equazione $f(x) - x = 1$.

$[\text{a) } a = -4;\ \text{b) } D: x \neq \pm 2 \wedge x \neq 0;\ \text{c) dispari; } y > 0 \text{ per } 1 < x < \sqrt{2} \vee x > 2;\ \text{d) } -1, 1 \pm \sqrt{3}]$

28 È assegnata la funzione $f(x) = 2\,\text{sen}^2 x - 3$.

a) Trova il dominio, il codominio e il periodo.
b) Trasforma la funzione in modo che diventi una funzione goniometrica di primo grado.
c) Verifica se è pari o dispari e disegna il grafico di $f(x)$.
d) Trova il vettore di traslazione $\vec{v}(0; b)$ in modo che il codominio della funzione traslata diventi $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ e determina le intersezioni con l'asse x della curva traslata.

$\left[\text{a) } D: \mathbb{R}, C: -3 \leq y \leq -1, T = \pi;\ \text{b) } y = -\cos 2x - 2;\ \text{c) pari; d) } \vec{v}\left(0; \frac{5}{2}\right), x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

29 È data la funzione $f(x) = \sqrt{2}\,\text{sen}\,\frac{x}{2} - \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$.

a) Trova il periodo e rappresenta il suo grafico. (Utilizza il metodo dell'angolo aggiunto.)
b) Studia il segno di $f(x)$.
c) Stabilisci se è pari o dispari.
d) Opera un'opportuna restrizione del dominio in modo che esista la funzione inversa e scrivi la sua equazione.
e) Rappresenta $f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

$\left[\text{a) } 4\pi;\ \text{b) } y > 0 \text{ per } \frac{\pi}{2} + 4k\pi < x < \frac{5}{2}\pi + 4k\pi;\ \text{c) né pari né dispari; d) } f^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} + 2\,\text{arcsen}\,\frac{x}{2}\right]$

CAPITOLO 21

٢١ [numerazione araba]

२१ [numerazione devanagari]

二十一 [numerazione cinese]

I LIMITI DELLE FUNZIONI

NON PUÒ FARE PIÙ FREDDO DI COSÌ!
Non c'è limite al caldo, ma esiste un limite al freddo. La temperatura più bassa teoricamente raggiungibile nell'Universo si definisce «zero assoluto» ed è pari a –273,15 °C.

Perché il termometro non può scendere sotto lo zero assoluto?

La risposta a pag. 1435

1. LA TOPOLOGIA DELLA RETTA

Il termine **topologia** significa «studio del luogo» e deriva dalla parola greca *topos* che significa appunto «luogo».

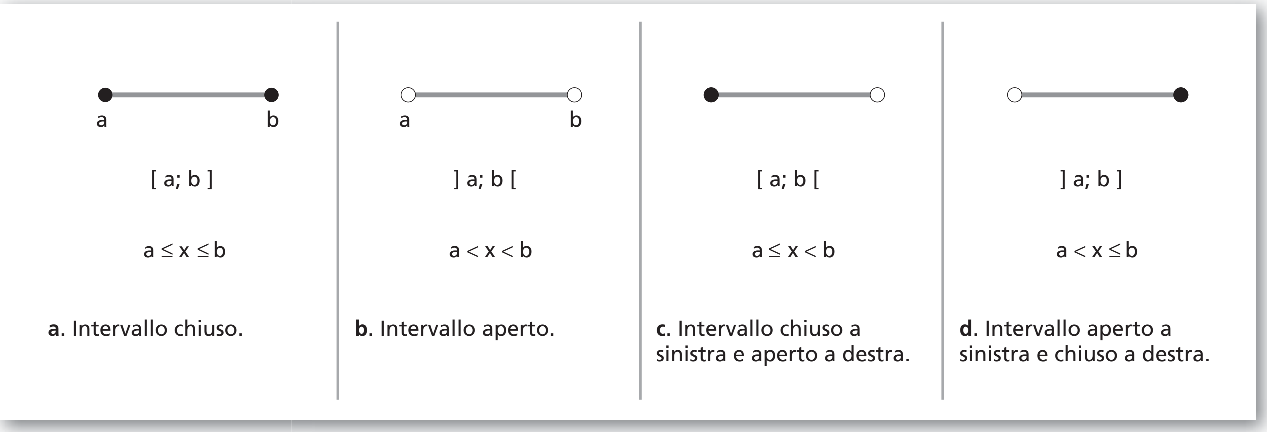
Esponiamo alcune nozioni fondamentali della topologia dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Poiché esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}$ e i punti di una retta orientata r, detta **retta reale**, possiamo identificare ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ (*insieme numerico*) con un *sottoinsieme di punti* della retta r e quindi parlare anche di topologia della retta.

Gli intervalli

Un **intervallo** è un sottoinsieme di numeri reali che corrisponde a una semiretta (intervallo **illimitato**) o a un segmento (intervallo **limitato**) della retta reale.
Un intervallo può essere **chiuso** o **aperto**, a seconda che gli estremi appartengano o meno all'intervallo.
Un intervallo può essere rappresentato in tre modi diversi, come puoi osservare nelle figure seguenti.

Intervalli limitati

▼ **Figura 1** Gli intervalli limitati di estremi *a* e *b*.



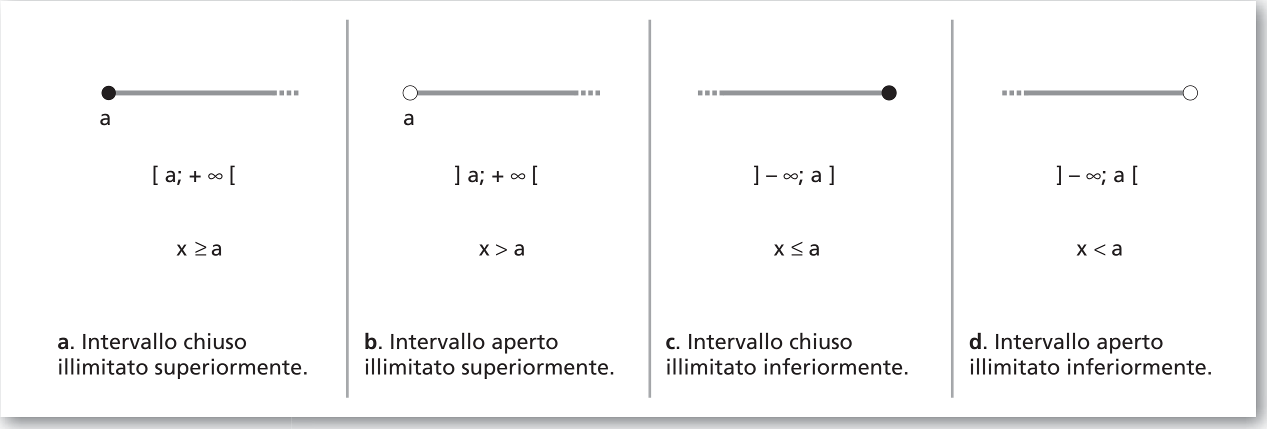
a. Intervallo chiuso. **b**. Intervallo aperto. **c**. Intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra. **d**. Intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra.

I simboli $-\infty$ e $+\infty$ non sono numeri reali e quindi sono sempre *esclusi* dall'intervallo.

Gli intervalli limitati corrispondono a segmenti della retta reale aventi **estremi** a e b e lunghezza $b - a$, che viene detta **ampiezza** dell'intervallo. I valori $\frac{b-a}{2}$ e $\frac{b+a}{2}$ sono rispettivamente il **raggio** e il **centro** dell'intervallo.

Intervalli illimitati

▼ **Figura 2** Gli intervalli illimitati corrispondono a semirette di origine *a*.



a. Intervallo chiuso illimitato superiormente. **b**. Intervallo aperto illimitato superiormente. **c**. Intervallo chiuso illimitato inferiormente. **d**. Intervallo aperto illimitato inferiormente.

Gli intorni di un punto

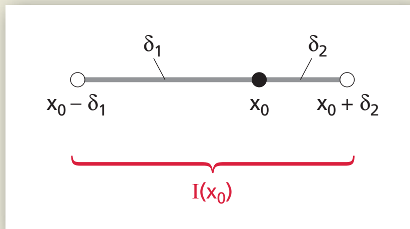
DEFINIZIONE

Intorno completo

Dato un numero reale x_0, si chiama intorno completo di x_0 un qualunque intervallo aperto $I(x_0)$ contenente x_0:

$$I(x_0) =]x_0 - \delta_1;\ x_0 + \delta_2[$$

con δ_1, δ_2 numeri reali positivi.



Parlando di *punto di un intervallo* intenderemo sia il numero reale, sia il punto del segmento che lo rappresenta.

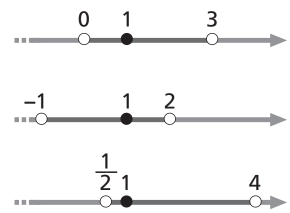
ESEMPIO

Se $x_0 = 1$, l'intervallo aperto $I =]0; 3[$ è un intorno completo di 1. In questo caso $\delta_1 = 1$ e $\delta_2 = 2$, perché possiamo scrivere:

$$I =]1 - 1; 1 + 2[.$$

Questo intorno ha ampiezza $(x_0 + \delta_2) - (x_0 - \delta_1) = \delta_1 + \delta_2 = 1 + 2 = 3$.

Anche $]-1;\ 2[$ e $\left]\frac{1}{2}; 4\right[$ sono intorni completi di 1.



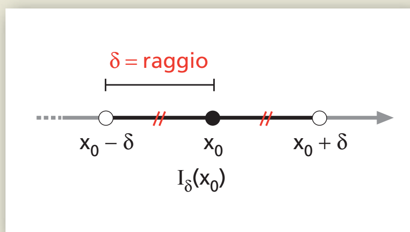
Quando $\delta_1 = \delta_2$, il punto x_0 è il punto medio dell'intervallo. In questo caso parliamo di *intorno circolare* di x_0.

DEFINIZIONE

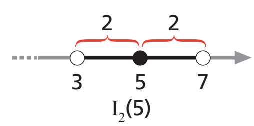
Intorno circolare

Dato un numero reale x_0 e un numero reale positivo δ, si chiama intorno circolare di x_0, di raggio δ, l'intervallo aperto $I_\delta(x_0)$ di centro x_0 e raggio δ:

$$I_\delta(x_0) =]\ x_0 - \delta; x_0 + \delta[.$$



L'intorno circolare del punto 5 di raggio 2 è $]5 - 2; 5 + 2[$, ossia $]3; 7[$.



Poiché l'intorno circolare di x_0 di raggio δ è l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,$$

cioè tali che $-\delta < x - x_0 < \delta$, possiamo anche scrivere:

$$I_\delta(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \left| x - x_0 \right| < \delta\right\}.$$

Ricorda che $|A(x)| < k$ è equivalente a

$$-k < A(x) < k$$

e viceversa.

Per gli intorni completi e circolari di un punto x_0 vale la seguente proprietà.

PROPRIETÀ

L'intersezione e l'unione di due o più intorni di x_0 sono ancora degli intorni di x_0.

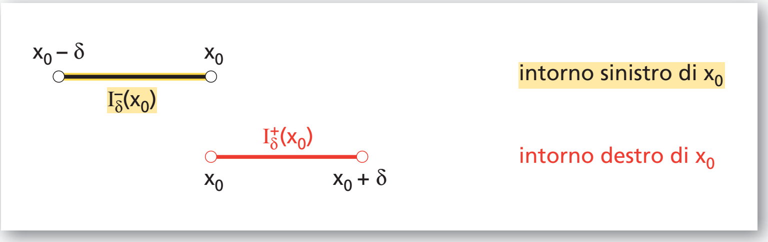
L'intorno destro e l'intorno sinistro di un punto

Dato un intorno di un punto x_0, talvolta interessa considerare soltanto la parte dell'intorno che sta a destra di x_0 oppure quella che sta a sinistra.

In generale, dato un numero $\delta \in \mathbb{R}^+$, chiamiamo:

- **intorno destro** di x_0 l'intervallo $I_\delta^+(x_0) =]x_0; x_0 + \delta[$;
- **intorno sinistro** di x_0 l'intervallo $I_\delta^-(x_0) =]x_0 - \delta; x_0[$.

▶ Figura 3



Per esempio, l'intervallo $]2; 2 + \delta[$ è un intorno destro di 2; l'intervallo $]-5; -3[$ è sia un intorno sinistro di -3, sia un intorno destro di -5.

Gli intorni di infinito

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, chiamiamo:

- **intorno di meno infinito** un qualsiasi intervallo aperto illimitato inferiormente:
$$I(-\infty) =]-\infty; a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\};$$
- **intorno di più infinito** un qualsiasi intervallo aperto illimitato superiormente:
$$I(+\infty) =]b; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > b\}.$$

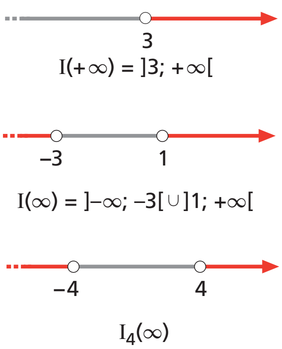
Si definisce inoltre **intorno di infinito** l'unione tra un intorno di $-\infty$ e un intorno di $+\infty$, cioè:

$$I(\infty) = I(-\infty) \cup I(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a \vee x > b\}.$$

La scrittura ∞, priva di segno, indica contemporaneamente sia $-\infty$ che $+\infty$. Quindi, se si vuole indicare solo $+\infty$, bisogna esplicitamente scrivere il segno $+$ davanti al simbolo ∞.

Analogamente al caso di un punto reale x_0, possiamo parlare di **intorno circolare di infinito**:

$$I_c(\infty) =]-\infty; -c[\cup]c; +\infty[\qquad (c \in \mathbb{R}^+).$$



ESEMPIO

1. Le soluzioni della disequazione lineare $3x - 9 > 0$ costituiscono un intorno di $+\infty$. Infatti sono tutti i numeri reali x tali che $x > 3$, cioè $I(+\infty) =]3; +\infty[$.

2. Le soluzioni della disequazione di secondo grado $x^2 + 2x - 3 > 0$ sono $x < -3 \vee x > 1$; quindi corrispondono all'intorno di infinito:
$$I(\infty) =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[.$$

3. L'insieme dei numeri reali x tali che $|x| > 4$ è un intorno circolare di ∞:
$$I_4(\infty) =]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[.$$

Gli insiemi limitati e illimitati

Esistono insiemi numerici che non sono intervalli.
La proprietà di essere limitato o illimitato non è attribuibile solo agli intervalli, ma anche a un qualunque insieme numerico.

Un insieme numerico $F \subset \mathbb{R}$ è detto:

- **superiormente limitato** se è possibile determinare un numero reale α, non necessariamente appartenente a F, tale che $x \leq \alpha \;\; \forall x \in F$; il numero α è detto un **maggiorante** di F;
- **inferiormente limitato** se è possibile determinare un numero reale β, non necessariamente appartenente a F, tale che $x \geq \beta \;\; \forall x \in F$; il numero β è detto un **minorante** di F;
- **limitato** se è limitato sia superiormente sia inferiormente, cioè se esiste un intervallo limitato che lo contiene.

● Osserviamo che un intervallo limitato non è un insieme *finito*, cioè non è costituito da un numero finito di elementi; invece un insieme numerico finito è sempre contenuto in un intervallo limitato.

● In modo equivalente possiamo dire che F è limitato se esiste un numero reale positivo k tale che $|x| \leq k \;\forall x \in F$.

ESEMPIO

1. Consideriamo l'insieme $A = \left\{ x \,\middle|\, x = \dfrac{2n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$. I suoi elementi sono i numeri:

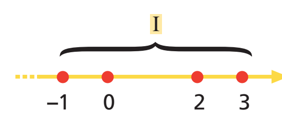
   $$0, 1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \ldots$$

   Si può dimostrare che tutti gli elementi di A sono minori di 2, quindi 2 è un maggiorante di A e tale insieme è superiormente limitato. Inoltre tutti gli elementi di A sono maggiori o uguali a 0, per cui A è anche inferiormente limitato perché 0 è un suo minorante.
   Allora possiamo dire che A è limitato, infatti esso è contenuto nell'intervallo limitato $[0; 2]$.

2. L'insieme $F = \{-1, 0, 2, 3\}$ è contenuto nell'intervallo chiuso $I = [-1; 3]$ e quindi è limitato. -1 è un minorante di F e 3 è un suo maggiorante.
   In generale, gli insiemi finiti sono sempre limitati perché, come abbiamo già osservato, essi sono sempre contenuti in qualche intervallo limitato.

● La disuguaglianza $\dfrac{2n}{n+1} < 2$ è verificata $\forall n \in \mathbb{N}$.

● A, pur essendo limitato, è un insieme infinito.



F ⊆ I

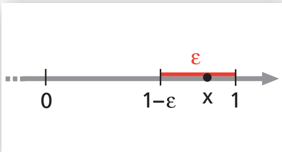
Esistono insiemi non limitati superiormente, per esempio l'insieme dei numeri pari. Tali insiemi si dicono **illimitati superiormente**.
Ci sono anche insiemi non limitati inferiormente, per esempio l'insieme dei numeri razionali minori di 3. Tali insiemi sono detti **illimitati inferiormente**.

In generale, un insieme numerico $F \subset \mathbb{R}$ è detto:

- **illimitato superiormente** se, scelto ad arbitrio un numero reale m, è possibile trovare qualche elemento di F maggiore di m, ossia $\forall m \in \mathbb{R} \;\; \exists x \in F$ tale che $x > m$;
- **illimitato inferiormente** se, scelto ad arbitrio un numero reale m, è possibile trovare qualche elemento di F minore di m, ossia $\forall m \in \mathbb{R} \;\; \exists x \in F$ tale che $x < m$;
- **illimitato** se è illimitato superiormente e inferiormente.

Gli estremi di un insieme

Consideriamo l'insieme $E = \left\{ x \,\middle|\, x = 1 - \dfrac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$, ossia l'insieme



▲ **Figura 4** Poiché ε può essere preso piccolo quanto vogliamo, se la condizione è verificata, siamo sicuri che «vicino» a 1 quanto si vuole c'è almeno un elemento x di E.

- Se $a > b > 0$, allora $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Per esempio: $100 > 10$ e $\frac{1}{100} < \frac{1}{10}$.

$E = \left\{0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \dots\right\}$. Confrontiamo gli elementi di E con il numero 1. Tutti i numeri di E sono minori di 1; quindi 1 è un maggiorante di E.

Ora scegliamo ad arbitrio un numero reale positivo ε e vediamo se ci sono elementi di E maggiori di $(1 - \varepsilon)$. Vogliamo cioè stabilire se la disequazione

$$x > 1 - \varepsilon, \qquad x \in E,$$

ammette soluzioni in E. Sostituiamo a x la sua espressione:

$$1 - \frac{1}{n^2} > 1 - \varepsilon \quad \to \quad -\frac{1}{n^2} > -\varepsilon \quad \to \quad \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Passiamo ai reciproci in entrambi i membri, cambiando anche il verso della disuguaglianza:

$$n^2 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Poiché n ed ε sono numeri positivi possiamo estrarre la radice quadrata e ricavare le soluzioni:

$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Dunque tutti gli elementi x di E calcolati scegliendo n maggiore di $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ risolvono la disequazione. Ciò vuol dire che ogni volta che scegliamo un numero positivo ε è possibile trovare numeri di E maggiori di $(1 - \varepsilon)$. 1 ha quindi una particolare proprietà che riassumiamo dicendo che 1 è **estremo superiore** di E.

DEFINIZIONE

Estremo superiore di un insieme

Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}$ *superiormente limitato*, si dice estremo superiore di E quel numero reale M tale che:

- $x \leq M, \qquad \forall x \in E$;
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in E$ tale che $x > (M - \varepsilon)$.

- M è un maggiorante di E.
- Qualunque sia ε (ε > 0), è possibile trovare almeno un elemento di E maggiore di $(M - \varepsilon)$: M è il più piccolo maggiorante di E.

Per indicare l'estremo superiore di un insieme E si usa la notazione sup_E.
L'estremo superiore può appartenere o non appartenere all'insieme; nel primo caso è detto anche **massimo** e si usa la notazione max_E.

Consideriamo ancora l'insieme E dell'esempio precedente. Possiamo osservare che tutti i numeri di E sono maggiori o uguali a 0; quindi 0 è un minorante di E.
Ora scegliamo ad arbitrio un numero reale positivo ε e vediamo se ci sono elementi di E minori di $(0 + \varepsilon)$. Per questo stabiliamo se la disequazione

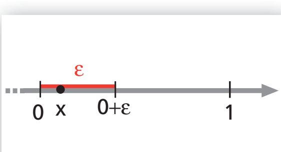
$$x < 0 + \varepsilon, \qquad x \in E,$$

ammette soluzioni in E.

Sostituendo a x la sua espressione, otteniamo:

$$1 - \frac{1}{n^2} < 0 + \varepsilon \quad \to \quad \frac{1}{n^2} > 1 - \varepsilon.$$

Vediamo quindi che, qualunque sia il valore di ε, c'è sempre la soluzione corrispondente a $n = 1$, ossia $x = 0$.



▲ **Figura 5** Se la condizione posta è verificata, «vicino» a 0 quanto si vuole c'è almeno un elemento di E non minore di 0.

Ciò significa che ogni volta che scegliamo un numero positivo ε troviamo almeno un numero di E minore di $(0 + \varepsilon)$. Per riassumere questa proprietà diciamo che 0 è **estremo inferiore** di E.

DEFINIZIONE

Estremo inferiore di un insieme

Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}$ non vuoto e *inferiormente limitato*, si dice estremo inferiore di E quel numero reale L tale che:

- $x \geq L, \quad \forall x \in E$;
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, x \in E$ tale che $x < (L + \varepsilon)$.

- L è un minorante di E.
- Qualunque sia ε $(\varepsilon > 0)$, è possibile trovare un elemento di E minore di $(L + \varepsilon)$: L è il più grande minorante di E.

Per indicare l'estremo inferiore di un insieme E si usa la notazione inf_E.
L'estremo inferiore può appartenere o non appartenere all'insieme; nel primo caso è detto anche **minimo** e si usa la notazione min_E.

Vale la seguente proprietà.

PROPRIETÀ

Esistenza e unicità degli estremi superiore o inferiore

L'estremo superiore di un insieme $E \subset \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato esiste sempre ed è unico.
L'estremo inferiore di un insieme $E \subset \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato esiste sempre ed è unico.
Se un insieme E è illimitato superiormente, si pone $sup_E = +\infty$; se è illimitato inferiormente, si pone $inf_E = -\infty$.
Con queste definizioni si può dire che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ ha sia estremo superiore sia estremo inferiore.

Gli estremi inferiore e superiore di una funzione

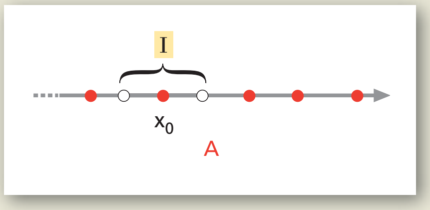
Parlando di una funzione $y = f(x)$, chiamiamo estremo inferiore ed estremo superiore di $f(x)$ l'estremo inferiore e quello superiore del codominio della funzione relativo al dominio considerato.
In modo analogo si parla di massimo e di minimo della funzione.
Diciamo poi che una funzione è limitata o illimitata superiormente o inferiormente se lo è il suo codominio.

I punti isolati

DEFINIZIONE

Punto isolato

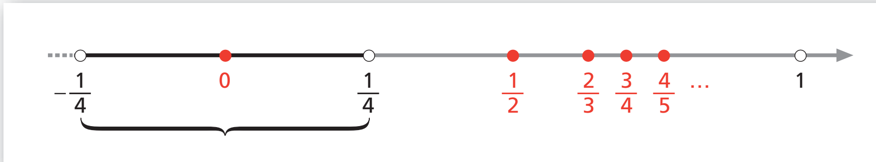
Sia x_0 un numero reale appartenente a un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$. Si dice che x_0 è un punto isolato di A se esiste almeno un intorno I di x_0 che non contiene altri elementi di A diversi da x_0.



ESEMPIO

Consideriamo l'insieme $A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots, \frac{n}{n+1}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Rappresentiamo l'insieme A sulla retta orientata e consideriamo il suo punto 0. Osserviamo che è possibile determinare un intorno di 0 che non contenga altri elementi di A, per esempio $\left]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right[$. Allora 0 è un punto isolato di A.



Nello stesso modo, è possibile dimostrare che tutti gli elementi dell'insieme A sono punti isolati.

- Per verificare che un punto di un insieme è isolato basta determinare **un solo** intorno di quel punto che non contenga altri punti dell'insieme stesso.

► Figura 6

- Per esempio, per $\frac{1}{2}$ si può prendere l'intorno circolare di raggio $\frac{1}{8}$.

- Se un insieme contiene un numero finito di punti, questi sono tutti punti isolati.

Per esempio, l'insieme $B = \left\{-2, 0, \frac{1}{2}, 4\right\}$ è formato da quattro punti tutti isolati.

- Anche un insieme di infiniti punti può essere costituito da punti tutti isolati.

Per esempio, l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ è un insieme infinito, ma tutti i suoi punti sono punti isolati: basta prendere per ciascun punto il suo intorno circolare di raggio $\frac{1}{2}$ e osservare che non contiene altri numeri naturali.

I punti di accumulazione

- Il termine *accumulazione* indica che i punti di A si accumulano, si addensano intorno al punto x_0.

DEFINIZIONE

Punto di accumulazione

Si dice che il numero reale x_0 è un punto di accumulazione di A, sottoinsieme di $\mathbb{R}$, se ogni intorno completo di x_0 contiene infiniti punti di A.

- Si dimostra che è equivalente alla definizione data dire che x_0 è punto di accumulazione di A se ogni intorno completo di x_0 contiene almeno un elemento di A distinto da x_0.

ESEMPIO

Consideriamo di nuovo l'insieme:

$$A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots, \frac{n}{n+1}\right\}, n \in \mathbb{N}.$$

All'aumentare di n, i corrispondenti valori di A si avvicinano al valore 1, come si può osservare nella tabella seguente.

n	10	100	1000	10 000	...
$\frac{n}{n+1}$	$\frac{10}{11} = 0,\overline{90}$	$\frac{100}{101} = 0,\overline{9900}$	$\frac{1000}{1001} = 0,\overline{999000}$	$\frac{10000}{10001} = 0,\overline{99990000}$	...

È possibile verificare che il punto 1 gode della seguente proprietà: comunque scegliamo un intorno completo di 1 (anche di raggio molto piccolo), questo contiene infiniti elementi di A. Quindi 1 è un punto di accumulazione di A. Per esempio, l'intorno $]0,9; 1,1[$ del punto 1 contiene infiniti punti di A:

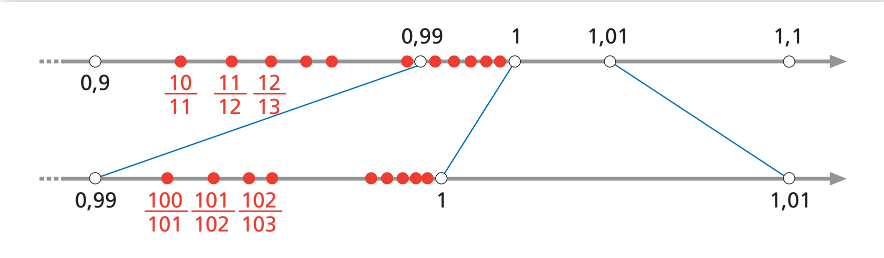
$$\frac{10}{11}, \frac{11}{12}, \frac{12}{13}, \ldots$$

L'intorno $]0,99; 1,01[$ contiene altri infiniti punti di A:

$$\frac{100}{101}, \frac{101}{102}, \frac{102}{103}, \ldots$$

E così via.

Osserva che il punto 1 è punto di accumulazione di A, ma non appartiene ad A.



◀ **Figura 7** Disegniamo alcuni punti dell'insieme A contenuti in $]0,9; 1,1[$. Ingrandiamo poi la figura e disegniamo alcuni punti di A, contenuti in $]0,99; 1,01[$. Questo procedimento può essere ripetuto considerando un intorno con raggio preso piccolo a piacere.

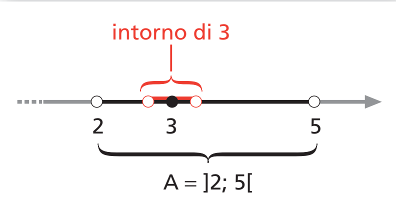
Ogni punto di un intervallo è di accumulazione per l'intervallo stesso. Anche gli estremi dell'intervallo sono suoi punti di accumulazione.

ESEMPIO

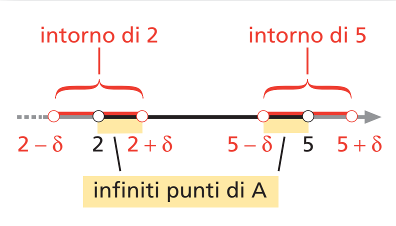
Sia A l'insieme dei numeri reali compresi fra 2 e 5, ossia $A =]2; 5[$.

Il punto 3 di A è di accumulazione per A perché ogni intorno di 3 contiene infiniti punti di A.

Anche i punti 2 e 5, che non appartengono ad A, sono di accumulazione per A.



◀ **Figura 8** Evidenziamo in rosso un intorno completo del punto 3. Tutti i suoi punti sono contenuti in $A =]2; 5[$ e sono infiniti: 3 è punto di accumulazione per A.



◀ **Figura 9** Gli estremi dell'intervallo, 2 e 5, che non appartengono all'intervallo, sono punti di accumulazione. Infatti gli intorni $]2 - \delta; 2 + \delta[$ e $]5 - \delta; 5 + \delta[$ contengono entrambi infiniti elementi dell'intervallo $]2; 5[$.

Gli esempi che abbiamo esaminato mostrano che un punto di accumulazione di un insieme può appartenere o non appartenere all'insieme stesso.

ESPLORAZIONE

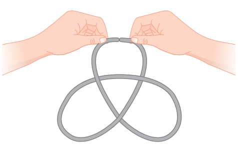
La topologia dei nodi

Che cos'è la topologia

Se proviamo a deformare un oggetto, ci sono delle proprietà geometriche che non possiamo cambiare, a meno di romperlo o strapparlo e poi incollarlo di nuovo. La *dimensione* è una di queste proprietà. Per esempio, non possiamo trasformare un solido in una figura in due dimensioni tramite una trasformazione *continua*.

La *topologia* è lo studio delle proprietà degli oggetti geometrici che si preservano quando li deformiamo in maniera continua, cioè senza romperli. Il primo a usare il termine «topologia» fu Johann Listing, allievo del famoso matematico Karl Friedrich Gauss, che nel 1847 pubblicò il primo libro sull'argomento, dedicato anche allo studio dei nodi.

Nodi matematici

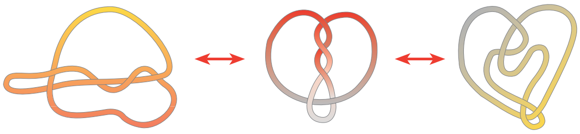


Prendiamo un pezzo di spago e annodiamolo, poi incolliamo le sue due estremità in modo che non si possa più aprire: questo è un nodo detto **nodo trifoglio**. Non possiamo più cambiarlo, se non tagliando lo spago.

In matematica un *nodo* è una curva chiusa immersa nello spazio.

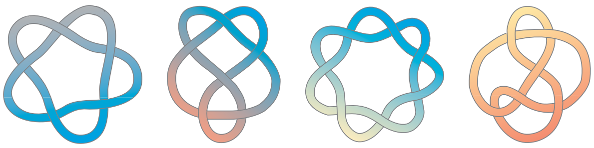
Le regole di equivalenza

Due nodi sono equivalenti quando possiamo trasformare l'uno nell'altro tramite una serie di movimenti continui, cioè senza rompere lo spago con cui li abbiamo fatti. Non possiamo quindi tagliare e incollare lo spago, ma possiamo pensare, per esempio, di allungare o accorciare il nodo, come se fosse un elastico.



▲ Il primo nodo e il terzo sono ottenuti da quello centrale tramite una serie di movimenti continui del filo (senza doverlo tagliare). I tre nodi sono quindi equivalenti.

Dati due nodi, a prima vista molto diversi, può esistere una serie di mosse che trasformano l'uno nell'altro. Ma come facciamo a sapere se questo è possibile? Abbiamo bisogno di criteri precisi per classificare i nodi, in modo da poter affermare con sicurezza che due nodi sono equivalenti. Numerosi studi matematici sulla teoria dei nodi sono dedicati alla ricerca di questi criteri. Esistono regole, dette **invarianti dei nodi**, che associano a ogni nodo un numero, il **linking number**, che risulta lo stesso per i nodi equivalenti. Nella figura trovi alcuni esempi di nodi equivalenti.



Attività

Nodi multipli e cravatte

- Fai una ricerca sul nodo borromeo, sulla sua storia e sulle sue applicazioni.
- La matematica può influire sulla moda? Scoprilo con il nodo Fink.

Cerca nel Web:

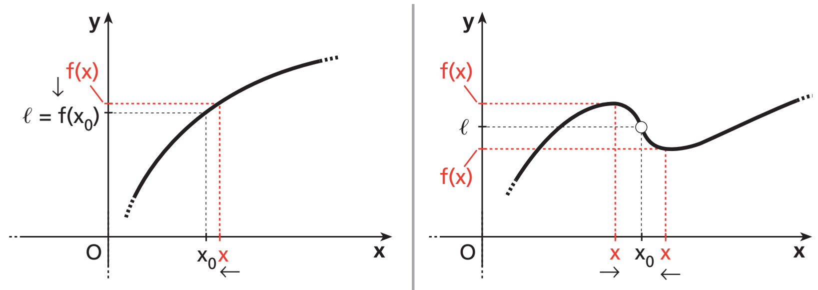
nodo borromeo, anelli borromei, borromean rings, nodo Fink, Fink knot

2. LA DEFINIZIONE DI $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Sia D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $f: D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ e supponiamo che il suo grafico sia quello rappresentato in figura.

IN PRATICA ▶ Videolezione 63

● Negli esempi che considereremo, D sarà spesso un intervallo o un'unione di intervalli.



a. Nel caso di una funzione f come quella disegnata in figura vediamo che, se x si avvicina a x_0, allora $f(x)$ si avvicina a $\ell = f(x_0)$.

b. Possiamo porci la stessa domanda anche nel caso in cui x_0 è punto di accumulazione per D, ma $x_0 \notin D$ e quindi l'espressione $f(x_0)$ non ha significato. A quale valore ℓ si avvicina $f(x)$ quando x si avvicina a x_0?

◀ **Figura 10** Quando x si avvicina a x_0, $f(x)$ si avvicina a ℓ?

Introduciamo uno strumento matematico che permetta di descrivere con precisione la proprietà che vediamo nella figura 10: **più scegliamo x vicino al valore x_0 e più la sua immagine $f(x)$ si avvicina a un certo valore l.**

● Vedremo che l può coincidere con $f(x_0)$, ma può anche essere diverso.

Consideriamo, per esempio, la funzione:

$$y = f(x) = \frac{2x^2 - 6x}{x - 3}$$

definita in $D = \mathbb{R} - \{3\}$. Vogliamo studiare il comportamento della funzione vicino al punto $x_0 = 3$.

Osserviamo che $f(x)$ non è definita in 3, quindi non ha senso considerare $f(3)$. Cerchiamo allora a quale valore l si avvicina la funzione quando x si approssima al valore 3.

Diamo alla variabile x dei valori che si avvicinano sempre più (per eccesso o per difetto) a 3 e calcoliamo le loro immagini $f(x)$, come indicato nella seguente tabella.

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	$\to 3 \leftarrow$	3,0001	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	5,8	5,98	5,998	5,9998		6,0002	6,002	6,02	6,2

Vediamo che quanto più x si avvicina a 3, tanto più $f(x)$ si avvicina al valore 6.

Più in generale, se prendiamo un qualunque valore di x in un intorno di 3 sempre più piccolo, allora $f(x)$ si trova sempre più vicino a 6, cioè si trova in un intorno di 6 sempre più piccolo. Per comodità, consideriamo degli intorni circolari.

Possiamo allora dire che, se consideriamo un qualunque intorno circolare di 6 di ampiezza ε, che indichiamo con $I_\varepsilon(6)$, esiste sempre un intorno di 3 i cui punti x (con $x \neq 3$) hanno immagine $f(x)$ contenuta in $I_\varepsilon(6)$.

Infatti i punti di tale intorno sono quei valori di x che soddisfano la disequazione

$$|f(x) - 6| < \varepsilon,$$

ossia:

$$\left|\frac{2x^2 - 6x}{x - 3} - 6\right| < \varepsilon.$$

Svolgendo i calcoli, otteniamo:

$$\left|\frac{2x^2 - 6x - 6x + 18}{x - 3}\right| < \varepsilon \rightarrow \left|\frac{2(x^2 - 6x + 9)}{x - 3}\right| < \varepsilon \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \cdot \left|\frac{(x-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-3}}\right| < \varepsilon \rightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2},$$

cioè $3 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 3 + \frac{\varepsilon}{2}$. Quindi le soluzioni della disequazione sono i punti dell'intorno $I(3) = \left]3 - \frac{\varepsilon}{2}; 3 + \frac{\varepsilon}{2}\right[$.

Riassumendo: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno $I(3)$, che dipende da ε, tale che per ogni $x \in I(3)$, con $x \neq 3$,

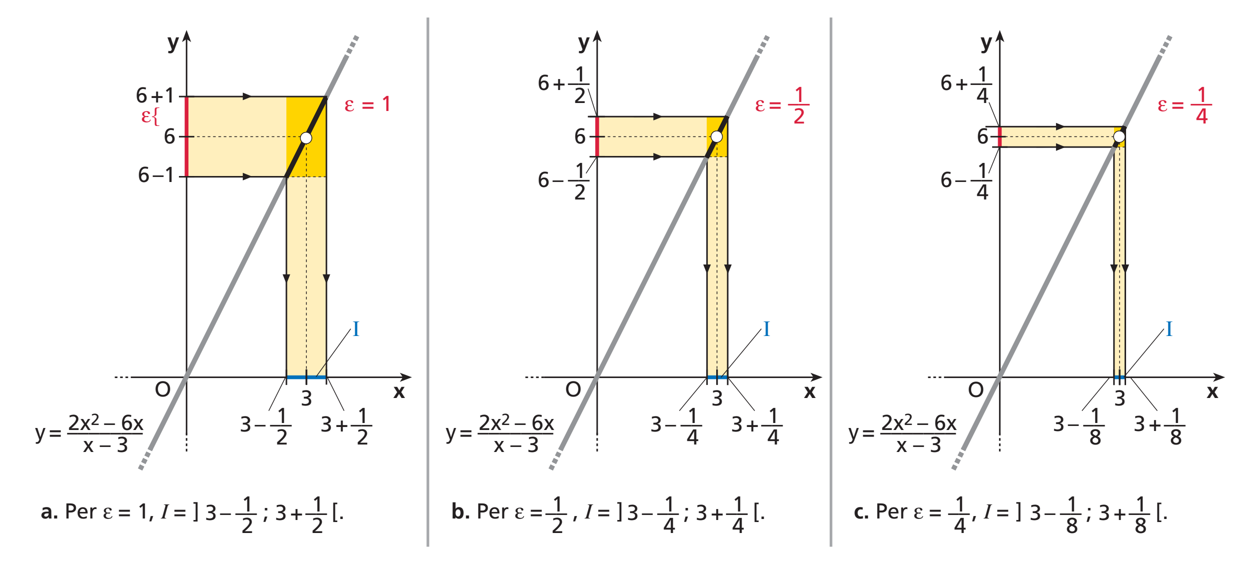
$$|f(x) - 6| < \varepsilon.$$

Possiamo osservare questa proprietà anche sul grafico della funzione, in figura 11.

● Ricordiamo che i punti di un intorno circolare $I_\varepsilon(x_0)$ sono i numeri reali x tali che $|x - x_0| < \varepsilon$.

● Stiamo studiando il comportamento di $f(x)$ in un intorno di 3, ma non in 3, quindi possiamo considerare $x \neq 3$ e semplificare.

● L'ampiezza dell'intorno di 3 dipende dalla scelta dell'intorno di 6.



▲ **Figura 11** **Sul grafico della funzione $y = \frac{2x^2 - 6x}{x - 3}$, osserviamo che in corrispondenza di un intorno circolare I_ε di 6 esiste un intorno circolare di 3 la cui immagine è contenuta in I_ε.**

Diciamo allora che «per x che tende a 3, $f(x)$ ha *limite* 6» e scriviamo:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6.$$

● Come abbiamo visto, non è necessario che il punto $x_0 = 3$ appartenga al dominio D della funzione, ma poiché dobbiamo considerare le immagini di punti sempre più vicini a x_0, occorre che la funzione sia definita in questi punti. Ciò significa che **x_0 deve essere un *punto di accumulazione* per D.**

In generale possiamo dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Limite finito per x che tende a x_0

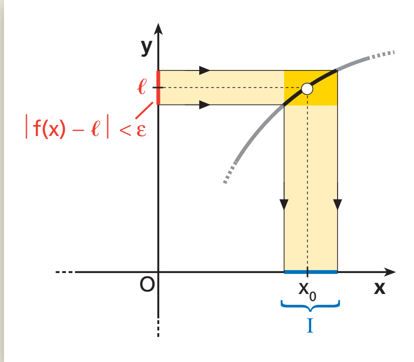
Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite il numero reale l per x che tende a x_0, e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l,$$

quando, comunque si scelga un numero reale positivo ε, si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che risulti

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

per ogni x appartenente a I, diverso (al più) da x_0.



In simboli la definizione si può formulare così:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists I(x_0) \,|\, |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x \in I(x_0), x \neq x_0.$$

- La validità della condizione $|f(x) - l| < \varepsilon$ presuppone che $f(x)$ sia definita in I (escluso al più x_0). Il punto x_0 è di accumulazione per il dominio della funzione. Non ci interessa il valore che la funzione $f(x)$ assume eventualmente in x_0.

- $\forall$ significa *comunque*, *per ogni*; $\exists$ significa *esiste*; $|$ significa *tale che*.

Il significato della definizione

Nella definizione appena data, considerando ε, pensiamo a valori *che diventano sempre più piccoli*.
Diremo che ε è preso «piccolo a piacere».

Inoltre, se esplicitiamo il valore assoluto nell'espressione $|f(x) - l| < \varepsilon$, otteniamo

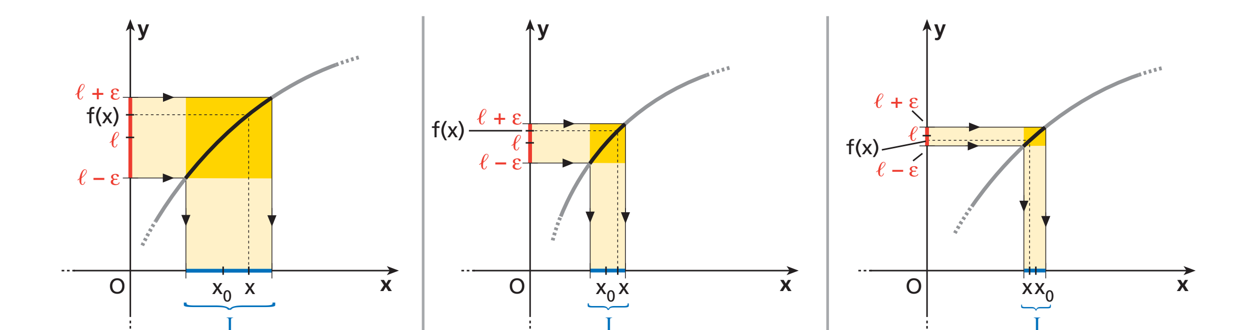
$$-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon \quad \rightarrow \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon,$$

ossia $f(x)$ *appartiene all'intorno* $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$.

Interpretiamo la definizione

La definizione dice che l è il limite di $f(x)$ se, fissato un ε qualsiasi, anche «molto piccolo», troviamo sempre un intorno di x_0 tale che, per ogni $x \neq x_0$ di quell'intorno, $f(x)$ appartiene a $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$, cioè $f(x)$ è «molto vicino» a l (figura 12).

▼ **Figura 12**



a. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Individuiamo un intorno I di x_0 tale che $f(x) \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$ per ogni $x \in I$.

b. Se riduciamo ε, troviamo un intorno di x_0 più piccolo.

c. Più piccolo scegliamo ε, più piccolo diventa, in genere, l'intorno I.

In simboli	A parole	Geometricamente
$\forall \varepsilon > 0 \ldots$	Per ogni ε positivo …	Per ogni fissata distanza ε presa piccola a piacere …
$\ldots \exists I(x_0)$ tale che $\forall x \in I(x_0),\ x \neq x_0 \ldots$	… troviamo sempre un intorno di x_0 tale che per ogni x dell'intorno diverso (al più) da x_0 …	… troviamo infiniti punti x *vicini* a x_0 per i quali si verifica che …
$\ldots \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$	… $f(x)$ appartiene all'intorno di l di ampiezza ε.	… $f(x)$ è vicino a l, a distanza minore di ε.

La verifica

Per eseguire la verifica del limite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, dobbiamo applicare la definizione.

ESEMPIO

Verifichiamo che $\lim\limits_{x \to 2}(2x - 1) = 3$.

Dobbiamo provare che, scelto $\varepsilon > 0$, esiste un intorno completo di 2 per ogni x del quale (escluso al più 2) si ha $\lvert (2x-1) - 3 \rvert < \varepsilon$, ossia:

$$\lvert 2x - 4 \rvert < \varepsilon \quad \rightarrow \quad -\varepsilon < 2x - 4 < \varepsilon \quad \rightarrow \quad 4 - \varepsilon < 2x < 4 + \varepsilon \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 2 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è quindi:

$$\left]2 - \frac{\varepsilon}{2}; 2 + \frac{\varepsilon}{2}\right[.$$

Abbiamo trovato un intorno circolare di 2 per cui è vera la condizione iniziale, quindi il limite è verificato.

● Il raggio δ dell'intorno trovato *dipende da* ε:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le funzioni continue

Abbiamo visto che una funzione può ammettere limite l in un punto x_0, anche se in x_0 non è definita. Quando invece x_0 appartiene al dominio di f, possiamo considerare la sua immagine $f(x_0)$. Se essa coincide con il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 allora si dice che f è **continua in x_0**.

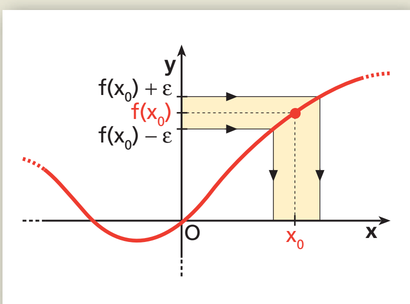
● Approfondiremo lo studio delle funzioni continue nel prossimo capitolo.

DEFINIZIONE

Funzione continua in un punto

Siano $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a; b]$ e x_0 un punto interno all'intervallo. La funzione $f(x)$ si dice continua nel punto x_0 quando esiste il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ e tale limite è uguale al valore $f(x_0)$ della funzione calcolata in x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$



● Applicando la definizione di limite, $f(x)$ è continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0$ esiste un intorno completo I di x_0 tale che

$$\lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon, \forall x \in I.$$

Diciamo poi che f è **continua nel suo dominio D** quando risulta continua in ogni punto di D.
Sono funzioni continue nel loro dominio quelle il cui grafico è una curva senza interruzioni; è il caso, per esempio, di una retta o di una parabola.

Elenchiamo le funzioni continue in $\mathbb{R}$ (o in intervalli di $\mathbb{R}$) più utilizzate, senza dimostrare la loro continuità.

La funzione costante
La funzione $f(x) = k$ è continua in tutto $\mathbb{R}$. Infatti, in ogni punto x_0 di $\mathbb{R}$ si ha $\lim\limits_{x \to x_0} k = k$.

La funzione $f(x) = x$
La funzione $f(x) = x$ è continua in tutto $\mathbb{R}$, cioè per un qualunque punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0,$$

infatti $\forall \varepsilon > 0$ risulta $|x - x_0| < \varepsilon$ per ogni $x \in]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$.

La funzione polinomiale
Ogni **funzione polinomiale**, ossia ogni funzione del tipo

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

è continua in $\mathbb{R}$.
In particolare, sono continue in $\mathbb{R}$ le funzioni espresse dalle potenze di x:

$$x, x^2, x^3, \ldots, x^n.$$

● Per esempio, puoi verificare che $f(x) = x^2 - 2x$ è continua in $x_0 = 1$, e cioè che $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 2x) = -1$.

La funzione radice quadrata
La funzione, definita in $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$,

$$y = \sqrt{x}$$

è continua per ogni x reale positivo o nullo. Per esempio $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$.
Più in generale, sono continue le funzioni potenza con esponente reale, definite in $\mathbb{R}^+$:

$$y = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

● Per esempio,
$\lim\limits_{x \to 2} x^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$.

Le funzioni goniometriche
Sono continue in $\mathbb{R}$ le funzioni sen x e cos x.
Per esempio, $\lim\limits_{x \to \pi} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \pi = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$.

È continua anche la funzione tangente in $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Per esempio, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

● La funzione tg x non è definita per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

La funzione cotangente è continua in $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
Per esempio, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$.

● La funzione cotg x non è definita per $x = k\pi$.

Infine, si può dimostrare che le funzioni secante, cosecante, arcoseno, arcocoseno, arcotangente, arcocotangente sono continue nel loro dominio.

La funzione esponenziale
La funzione esponenziale, definita in $\mathbb{R}$, $y = a^x$, con $a > 0$, è continua in $\mathbb{R}$.

● Per esempio, $\lim\limits_{x \to 2} 3^x = 9$.

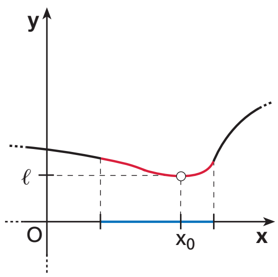
Per esempio, $\lim_{x \to 9} \log_3 x = \log_3 9 = 2$.

La funzione logaritmica

La funzione logaritmica, definita in $\mathbb{R}^+$, $y = \log_a x$, con $a > 0$, $a \neq 1$, è continua in $\mathbb{R}^+$.

Il limite per eccesso e il limite per difetto

Il limite per eccesso



DEFINIZIONE

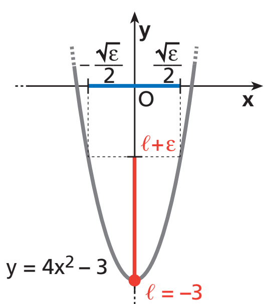
Se $f(x)$ è una funzione che ha limite finito l per x che tende a x_0 e inoltre, in un intorno di x_0, con al più $x \neq x_0$, assume sempre valori maggiori di l, si dice che $f(x)$ **tende a l per eccesso** e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l^+.$$

Pertanto, la definizione di limite per eccesso si ottiene da quella più generale di limite, che abbiamo già visto, aggiungendo la condizione che $f(x) > l$ in un intorno di x_0. Poiché

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \wedge \quad f(x) > l \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x) - l < \varepsilon,$$

per verificare che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l^+$, basta provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno I di x_0 tale che per ogni $x \in I$, con al più $x \neq x_0$, si ha $0 < f(x) - l < \varepsilon$, ossia $l < f(x) < l + \varepsilon$.



ESEMPIO

Verifichiamo che $\lim_{x \to 0} (4x^2 - 3) = -3^+$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e risolviamo la disequazione:

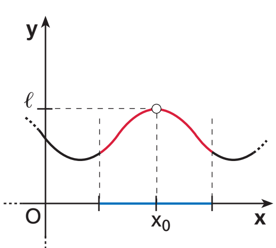
$$0 < (4x^2 - 3) - (-3) < \varepsilon, \qquad \text{ossia} \qquad 0 < 4x^2 < \varepsilon.$$

La prima disuguaglianza è sempre vera perché x^2 è sempre positivo per ogni x diverso da 0; dalla seconda disuguaglianza invece otteniamo:

$$x^2 < \frac{\varepsilon}{4} \ \rightarrow \ -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} < x < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}.$$

Quindi è verificata la condizione $-3 < f(x) < -3 + \varepsilon$, per ogni x, diverso da 0, appartenente all'intorno $\left]-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}; \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\right[$ del punto 0.

Il limite per difetto



DEFINIZIONE

Si dice che $f(x)$ **tende a l per difetto** e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l^-$$

se $f(x)$ è una funzione con limite finito l per x che tende a x_0 e assume sempre valori minori di l in un intorno di x_0, con al più $x \neq x_0$.

La definizione di limite per difetto si ottiene, quindi, aggiungendo alla definizione generale di limite la condizione che $f(x) < l$ in un intorno di x_0, ossia ponendo:

$$-\varepsilon < f(x) - l < 0.$$

Allora, per verificare che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l^-$, basta provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno I di x_0 tale che per ogni $x \in I$, con al più $x \neq x_0$, si ha $-\varepsilon < f(x) - l < 0$, ossia $l - \varepsilon < f(x) < l$.

Il limite destro e il limite sinistro

Il limite destro

Il limite destro di una funzione viene indicato con il simbolo:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l.$$

La definizione del limite destro è analoga a quella già data di limite, con la sola differenza che la disuguaglianza $|f(x) - l| < \varepsilon$ deve essere verificata per ogni x appartenente a un intorno *destro* di x_0, ossia a un intorno del tipo $]x_0; x_0 + \delta[$.

● La scrittura $x \to x_0^+$ si legge «x tende a x_0 da destra». Significa che x si avvicina a x_0 restando però sempre maggiore di x_0.

Il limite sinistro

Il limite sinistro di una funzione viene indicato con il simbolo:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$

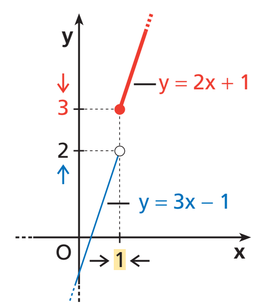
Anche per il limite sinistro valgono le stesse considerazioni fatte per il limite destro, con la sola differenza che $|f(x) - l| < \varepsilon$ deve essere verificata per ogni x appartenente a un intorno *sinistro* di x_0, ossia un intorno del tipo $]x_0 - \delta; x_0[$.

● La scrittura $x \to x_0^-$ si legge «x tende a x_0 da sinistra». Significa che x si avvicina a x_0 restando però sempre minore di x_0.

ESEMPIO

Consideriamo la funzione il cui grafico è illustrato nella figura a lato.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



Verifichiamo che $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$.

Fissato $\varepsilon > 0$, risolviamo la disequazione:

$$|(2x + 1) - 3| < \varepsilon.$$

Si ha:

$$|2x - 2| < \varepsilon \quad \to \quad -\varepsilon < 2x - 2 < \varepsilon \quad \to$$

$$\to \quad 2 - \varepsilon < 2x < 2 + \varepsilon \quad \to \quad 1 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

La disequazione è verificata in particolare per $1 < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, che è un intorno destro di 1.

● Poiché stiamo verificando un limite destro, usiamo per $f(x)$ l'espressione che vale se $x \geq 1$.

● Puoi verificare in modo analogo che $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$, utilizzando per $f(x)$ l'espressione che vale se $x < 1$.

Il $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ esiste se e solo se esistono entrambi i limiti destro e sinistro e coincidono:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, la disuguaglianza $|f(x) - l| < \varepsilon$ è verificata in un intorno completo I di x_0, con al più $x \neq x_0$, se e solo se è verificata sia in un intorno destro di x_0 sia in un intorno sinistro di x_0.

● I limiti per eccesso e per difetto sono definiti anche per $x \to x_0^+$ oppure $x \to x_0^-$. In questi casi si considerano rispettivamente solo intorni destri o sinistri di x_0.

IN PRATICA
▶ Videolezione 64

3. LA DEFINIZIONE DI $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Il limite è $+\infty$

Se per valori di x che si avvicinano a un certo x_0 i valori di una funzione crescono sempre più, diciamo che per x che tende a x_0 la funzione tende a $+\infty$.

DEFINIZIONE

Limite $+\infty$ per x che tende a x_0

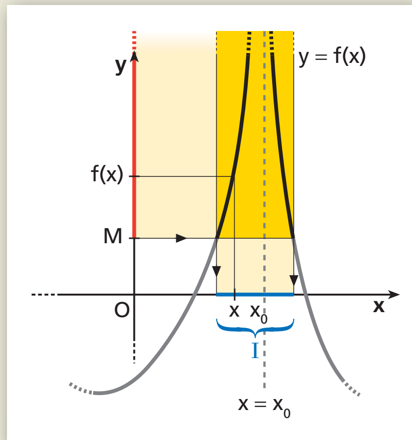
Sia $f(x)$ una funzione non definita in x_0.
Si dice che $f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende a x_0 e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che risulti

$$f(x) > M$$

per ogni x appartenente a I e diverso da x_0.



● La funzione è definita in tutti i punti di un intorno completo I tranne che in x_0.

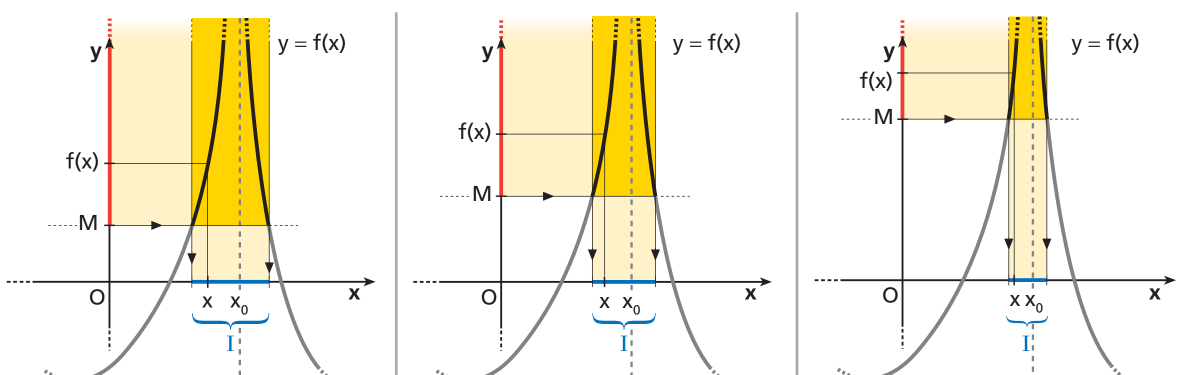
● Nella definizione, quando diciamo «per ogni numero reale positivo M», pensiamo a valori di M che diventano *sempre più grandi*. Diremo allora che M è preso *grande a piacere*.

Sinteticamente possiamo dire che $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se:

$$\forall M > 0 \quad \exists I(x_0) \,\big|\, f(x) > M, \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}.$$

Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si dice anche che **la funzione f diverge positivamente**.

▼ **Figura 13** Anche se attribuiamo a M valori sempre più grandi, possiamo trovare un intorno I di x_0 i cui elementi x abbiano immagine $f(x)$ che supera M, a patto di prendere l'intorno I *abbastanza piccolo*.



a. Fissiamo $M \in \mathbb{R}^+$. Individuiamo un intorno di x_0 tale che $f(x) > M$ $\forall x \in$ $- \{x_0\}$.

b. Se prendiamo M più grande, esiste ancora e risulta, in genere, più piccolo.

c. Scegliamo un valore di M ancora più grande. Se è abbastanza piccolo, ossia se x è abbastanza vicino a x_0, allora $f(x)$ supera M.

In simboli	A parole	Geometricamente
$\forall M > 0 \ldots$	Per ogni M positivo …	Per ogni ordinata fissata M presa grande a piacere …
$\ldots \exists I(x_0)$ tale che $\forall x \in I(x_0),\ x \neq x_0 \ldots$	… troviamo sempre un intorno di x_0 tale che per ogni x dell'intorno diverso da x_0 …	… troviamo infiniti punti x *vicini* a x_0 per i quali si verifica che …
$\ldots f(x) > M.$	… $f(x)$ supera il valore M.	… $f(x)$ è maggiore di M: si *avvicina* a $+\infty$.

La verifica

ESEMPIO

Verifichiamo che $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

Fissato ad arbitrio un M reale positivo, risolviamo la disequazione:

$$\frac{1}{(x-1)^2} > M.$$

Passiamo ai reciproci e cambiamo il verso della disuguaglianza:

$$(x-1)^2 < \frac{1}{M}.$$

Applichiamo la radice quadrata a entrambi i membri:

$$|x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

● Ricorda che $\sqrt{x^2} = |x|$.

Esplicitiamo il valore assoluto:

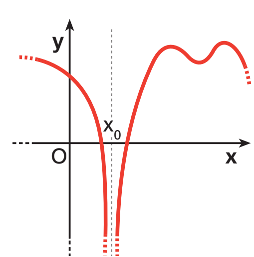
$$1 - \frac{1}{\sqrt{M}} < x < 1 + \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Tenendo conto del dominio, otteniamo come insieme delle soluzioni della disequazione l'intorno di 1 dato da $\left]1 - \frac{1}{\sqrt{M}}; 1 + \frac{1}{\sqrt{M}}\right[$ privato del punto 1.
Fissato un generico M, esiste quindi un intorno di 1 in cui i punti verificano la condizione $f(x) > M$, con $x \neq 1$.

● L'intorno ha il raggio che dipende da M: più M è grande, più il raggio è piccolo.

Il limite è $-\infty$

Ci sono anche funzioni che decrescono sempre di più in prossimità di un certo punto x_0, ossia che tendono a $-\infty$ per x che tende a x_0, come per esempio la funzione disegnata nella figura a lato. In questo caso diciamo che la funzione ha limite $-\infty$ per x che tende a x_0. In generale vale la seguente definizione.



DEFINIZIONE

Limite $-\infty$ per x che tende a x_0

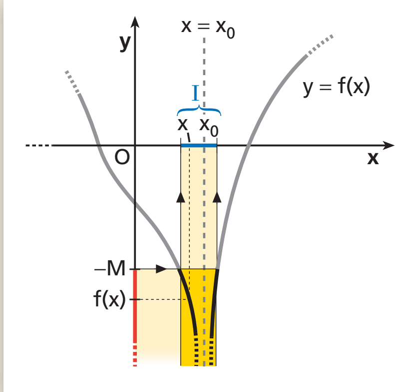
Sia $f(x)$ una funzione non definita in x_0. Si dice che $f(x)$ tende a $-\infty$ per x che tende a x_0 e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che risulti:

$$f(x) < -M$$

per ogni x appartenente a I e diverso da x_0.



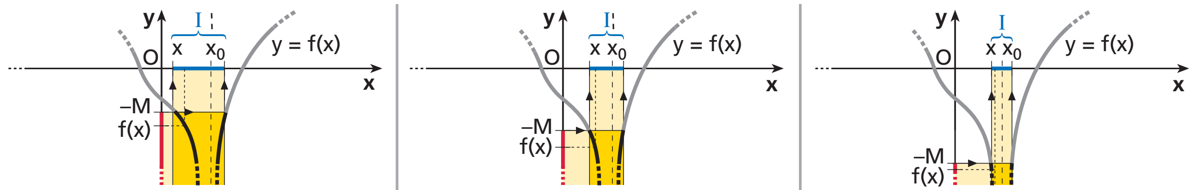
In simboli, diciamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se:

$$\forall M > 0 \ \exists I(x_0) \,|\, f(x) < -M, \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}.$$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, si dice anche che **la funzione f diverge negativamente**.

L'interpretazione della definizione è analoga a quella data per funzioni che divergono positivamente (figura 14). Negli esercizi vedremo un esempio di verifica.

▼ **Figura 14** Se attribuiamo a M valori sempre più grandi (a $-M$ valori sempre minori), possiamo trovare sempre un intorno I di x_0 i cui valori x abbiano $f(x) < -M$, a patto di prendere I abbastanza piccolo.



a. Fissiamo $M \in \mathbb{R}^+$. Individuiamo un intorno I di x_0 tale che $f(x) < -M$ $\forall\, x \in I - \{x_0\}$.

b. Se prendiamo M più grande, ossia $-M$ minore, I esiste ancora e risulta, in genere, più piccolo.

c. Scegliamo un valore di M ancora più grande ($-M$ ancora minore). Se I è abbastanza piccolo, ossia se x è abbastanza vicino a x_0, allora $f(x)$ è minore di $-M$.

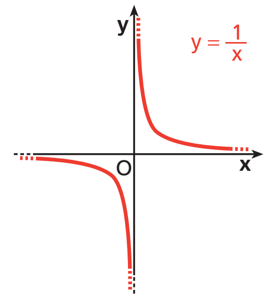
I limiti destro e sinistro infiniti

Anche per i limiti infiniti si possono distinguere limiti destri e sinistri.

Se...	la disequazione...	è soddisfatta per $x \neq x_0$, in un...
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$	$f(x) > M$	intorno *destro* di x_0
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$	$f(x) > M$	intorno *sinistro* di x_0
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$	$f(x) < -M$	intorno *destro* di x_0
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$	$f(x) < -M$	intorno *sinistro* di x_0

ESEMPIO

Consideriamo la funzione $y = \frac{1}{x}$ (figura a lato). Mediante la definizione e la tabella precedente, puoi verificare che $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.



Le scritture $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ si possono riassumere in una sola,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty,$$

cioè scrivendo «infinito» senza segni + o − e lo 0 senza specificare se da destra o da sinistra.
Quando scriviamo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ intendiamo dire che f diverge, ma non importa specificare se positivamente o negativamente.

La definizione di $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ è analoga alle precedenti, ma con la seguente variazione:

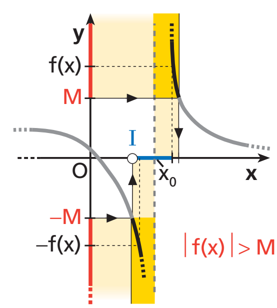
per ogni $M > 0$, è possibile trovare un intorno I di x_0 tale che $|f(x)| > M$, per ogni $x \in I$ nel dominio di f, con $x \neq x_0$.

La disequazione $|f(x)| > M$ si può scrivere in modo equivalente come

$$f(x) > M \quad \vee \quad f(x) < -M,$$

● Questa scrittura significa che $f(x)$ appartiene a un intorno circolare di ∞.

e quindi le sue soluzioni sono l'unione delle soluzioni delle singole disequazioni.



ESEMPIO

Nel nostro esempio $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$, le soluzioni di $\left|\frac{1}{x}\right| > M$ sono $\left]0; \frac{1}{M}\right[\cup \left]-\frac{1}{M}; 0\right[$, che possiamo anche scrivere $\left]-\frac{1}{M}; \frac{1}{M}\right[- \{0\}$.
Abbiamo così trovato un intorno di 0, privato dello 0 stesso, come richiesto dalla definizione.

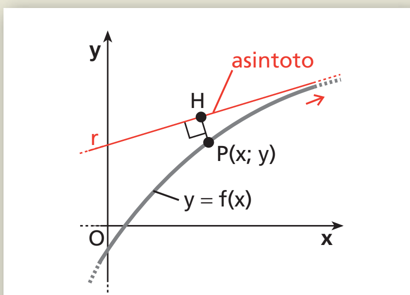
Gli asintoti verticali

Può capitare che il grafico di una funzione si avvicini sempre più a quello di una retta. In tal caso la retta è un *asintoto* della funzione.

DEFINIZIONE

Asintoto

Una retta è detta asintoto del grafico di una funzione se la distanza di un generico punto del grafico da tale retta tende a 0 quando l'ascissa o l'ordinata del punto tendono a ∞.



Per $x \to +\infty$, $\overline{PH} \to 0$

Studiamo ora gli *asintoti verticali*.

DEFINIZIONE

Asintoto verticale

Data la funzione $y = f(x)$, se si verifica che

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty,$$

si dice che la retta $x = c$ è asintoto verticale per il grafico della funzione.

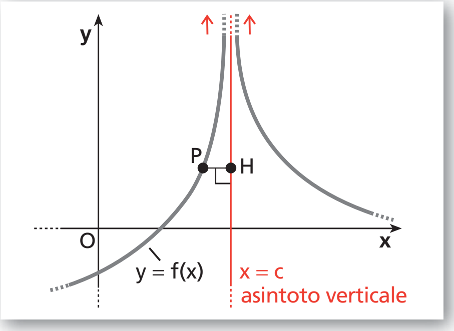
In particolare, può accadere che

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$$

oppure

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty.$$

La distanza di un generico punto del grafico di una funzione da un suo asintoto verticale, di equazione $x = c$, tende a 0 quando $x \to c$ (figura 15).
Infatti, essendo $P(x; y)$ il generico punto del grafico, si ha:

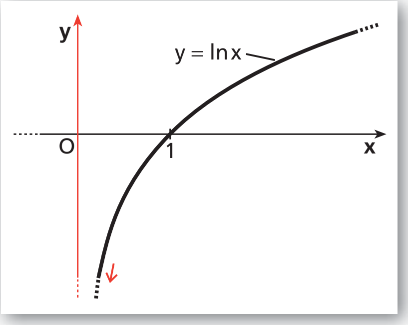


$$\lim_{x \to c} \overline{PH} = \lim_{x \to c} |x - c| = 0.$$

La definizione di asintoto verticale è ancora valida se consideriamo il limite destro $(x \to x_0^+)$ e il limite sinistro $(x \to x_0^-)$ e i due limiti sono entrambi infiniti, ma con segno opposto, oppure solo uno dei due limiti è infinito.

◀ **Figura 15**

ESEMPIO



▶ **Figura 16** Il grafico della funzione $y = \ln x$ ha come asintoto verticale l'asse y, cioè $x = 0$.

Prendiamo in esame la funzione logaritmo

$$y = \ln x,$$

per la quale:

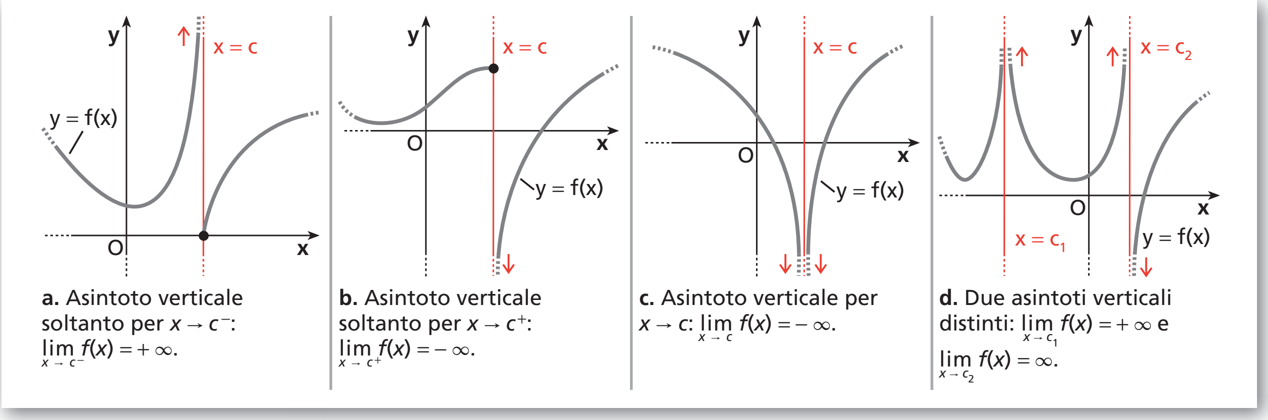
$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$

La retta $x = 0$ è asintoto verticale del grafico della funzione.

Il grafico di una funzione può avere più asintoti verticali, anche infiniti, come nel caso di $y = \operatorname{tg} x$.

Esaminiamo alcuni esempi di funzioni i cui grafici presentano asintoti verticali.

▼ **Figura 17** Esempi di funzioni i cui grafici hanno asintoti verticali.



a. Asintoto verticale soltanto per $x \to c^-$: $\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty$.

b. Asintoto verticale soltanto per $x \to c^+$: $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$.

c. Asintoto verticale per $x \to c$: $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$.

d. Due asintoti verticali distinti: $\lim_{x \to c_1} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to c_2} f(x) = \infty$.

4. LA DEFINIZIONE DI $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$

x tende a $+\infty$

Dicendo «x tende a $+\infty$» intendiamo dire che consideriamo valori di x sempre più grandi e tali da superare qualsiasi numero reale positivo c fissato.

DEFINIZIONE

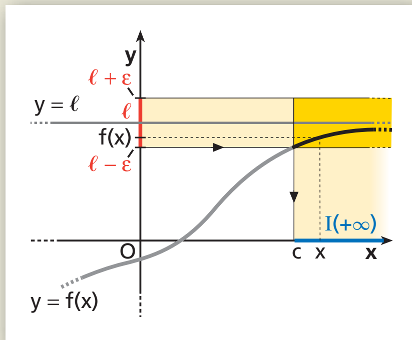
Limite finito di una funzione per x che tende a $+\infty$

Si dice che una funzione $f(x)$ tende al numero reale l per x che tende a $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

quando, comunque si scelga un numero reale positivo ε, si può determinare un intorno I di $+\infty$ tale che:

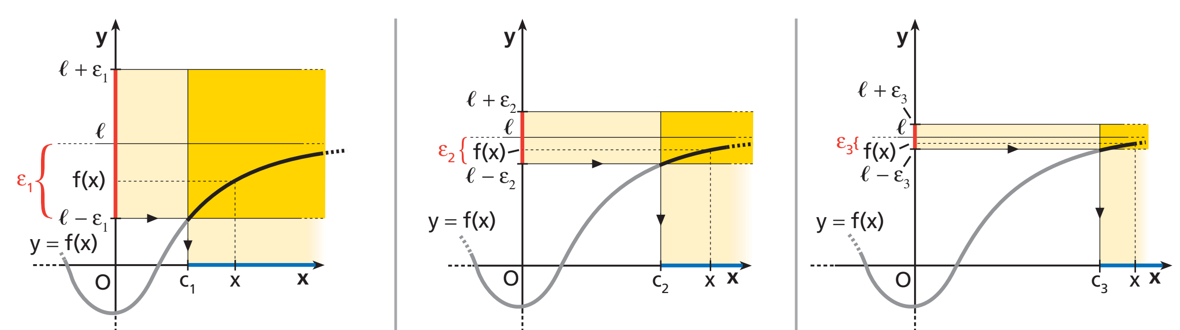
$$|f(x) - l| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in I.$$



Considerato che un intorno di $+\infty$ è costituito da tutti gli x maggiori di un numero c, possiamo dire che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c > 0 \,\big|\, |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x > c.$$

L'interpretazione della definizione è data nella figura 18.



a. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Individuiamo $c_1 > 0$ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ per ogni $x > c_1$, ossia per ogni punto dell'intorno di $+\infty$: $]c_1; +\infty[$.

b. Se ε diventa più piccolo, la disuguaglianza $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ è ancora vera, purché scegliamo valori di x più grandi di $c_2 > c_1$.

c. Scegliamo ε ancora più piccolo. In genere, perché $f(x)$ sia distante da ℓ meno di ε, dovremo prendere c_3 ancora più grande.

▲ **Figura 18**

Ciò significa che, al crescere dei valori di x, $f(x)$ si avvicina al valore l.

x tende a $-\infty$

Il caso in cui «x tende a $-\infty$» è analogo al precedente.

● Esempi di verifica di questo tipo di limite e di quello precedente si trovano negli esercizi guida.

DEFINIZIONE

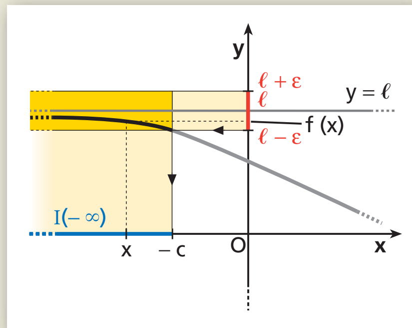
Limite finito di una funzione per x che tende a $-\infty$

Si dice che una funzione $f(x)$ ha limite reale l per x che tende a $-\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ fissato è possibile trovare un intorno I di $-\infty$ tale che risulti:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in I.$$



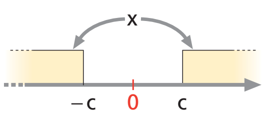
● Un intorno di $-\infty$ può essere determinato considerando gli x per i quali $x < -c$, con $c > 0$, ossia $x \in]-\infty; -c[$.

In simboli, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c > 0 \,|\, |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x < -c.$$

x tende a ∞

● $|x| > c$ è un intorno circolare di ∞.



I due casi precedenti possono essere riassunti in uno solo se si considera un intorno di ∞ determinato dagli x per i quali

$$|x| > c, \text{ ossia } x < -c \ \vee \ x > c,$$

o anche $x \in]-\infty; -c[\cup]c; +\infty[$, dove c è un numero reale positivo grande a piacere. Diciamo allora che ***x* tende a ∞** omettendo il segno + o −.
Si dice che $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ quando **per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un intorno *I* di ∞ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in I$.**

● **I limiti per eccesso e per difetto**
Anche per $x \to -\infty$ o $x \to +\infty$ possiamo parlare di limite per eccesso e limite per difetto. In questi casi vale ancora la definizione data in precedenza per $x \to x_0$, ma, ovviamente, occorre considerare intorni rispettivamente di $-\infty$ e di $+\infty$ anziché intorni di x_0.

ESEMPIO

Consideriamo la funzione $y = \dfrac{4x + 5}{x}$, definita in $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

Verifichiamo che:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x + 5}{x} = 4.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, risolviamo la disequazione:

$$\left| \frac{4x + 5}{x} - 4 \right| < \varepsilon.$$

Svolgendo i calcoli si ha $|x| > \dfrac{5}{\varepsilon}$, ossia $x < -\dfrac{5}{\varepsilon} \vee x > \dfrac{5}{\varepsilon}$, intorno di ∞.

Abbiamo trovato un intorno di ∞ per cui è vera la condizione iniziale, quindi il limite è verificato.

Gli asintoti orizzontali

● Se il limite esiste finito soltanto per $x \to +\infty$ (o $x \to -\infty$), abbiamo un asintoto orizzontale destro (o sinistro). Se sono valide entrambe le condizioni, possiamo anche scrivere:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = q.$$

DEFINIZIONE

Asintoto orizzontale

Data la funzione $y = f(x)$, se si verifica una delle condizioni

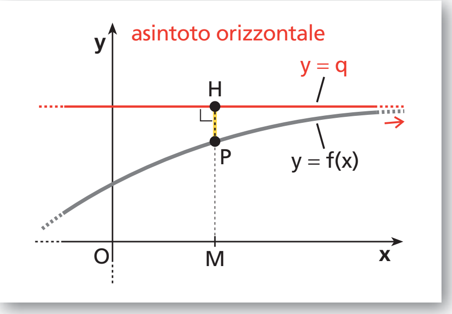
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = q \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = q \quad \text{o} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = q,$$

si dice che la retta $y = q$ è asintoto orizzontale per il grafico della funzione.

La distanza di un generico punto P del grafico di una funzione da un suo asintoto orizzontale, di equazione $y = q$, tende a 0 quando x tende a $+\infty$.
Detto $P\,(x; f(x))$ il punto, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \overline{PH} = \lim_{x\to+\infty} |f(x) - q| = 0.$$

Considerazioni analoghe si hanno per $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.



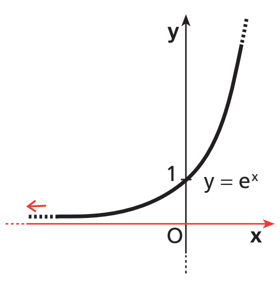
◀ Figura 19

ESEMPIO

Prendiamo in esame una funzione nota, la funzione esponenziale

$y = e^x$,

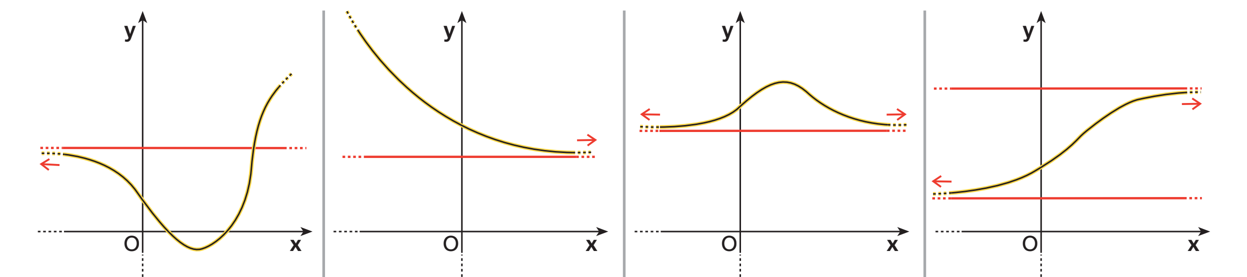
il cui grafico è rappresentato nella figura 20. Sappiamo che $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, quindi la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale sinistro.



▲ **Figura 20** Il grafico della funzione $y = e^x$ ha come asintoto orizzontale sinistro l'asse x, cioè $y = 0$.

Il grafico di una funzione $f(x)$ può ammettere un solo asintoto orizzontale, come nell'esempio precedente, ma può anche ammettere due asintoti. Ciò accade quando i limiti della funzione per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ sono entrambi finiti, ma diversi fra loro, ossia:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = q_1 \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x) = q_2, \text{ con } q_1 \neq q_2.$$



a. Asintoto orizzontale soltanto per $x \to -\infty$.

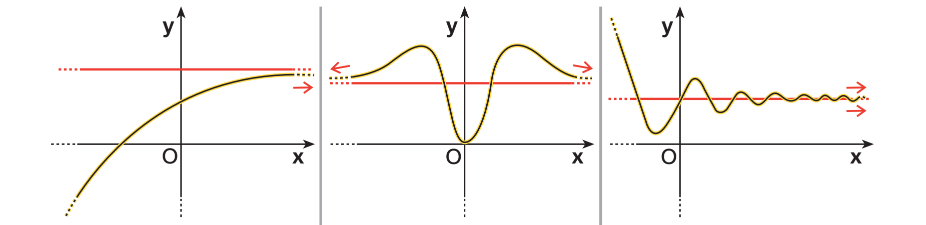
b. Asintoto orizzontale soltanto per $x \to +\infty$.

c. Asintoto orizzontale unico per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

d. Due asintoti orizzontali diversi per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

▲ **Figura 21** Esempi di funzioni i cui grafici hanno asintoti orizzontali.

Rispetto all'asintoto orizzontale, il grafico della funzione può stare tutto «al di sopra» della retta o tutto «al di sotto», ma può anche intersecare l'asintoto stesso in un punto, due punti, …, infiniti punti.



a. Il grafico non interseca l'asintoto.

b. Il grafico interseca l'asintoto in due punti.

c. Il grafico interseca l'asintoto in infiniti punti.

◀ **Figura 22** Diverse posizioni di grafici rispetto all'asintoto orizzontale.

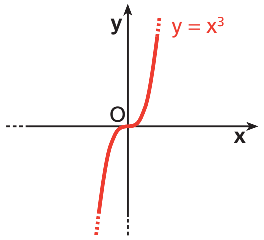
5. LA DEFINIZIONE DI $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Il limite è $+\infty$ quando x tende a $+\infty$ o a $-\infty$

In questo caso si può anche dire che **la funzione diverge positivamente**.

Studiamo i due casi:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$



Consideriamo la funzione $y = x^3$, il cui grafico è nella figura a lato.

Se attribuiamo a x valori positivi crescenti, per esempio 1, 2, 3, 4, …, i corrispondenti valori x^3, ossia 1, 8, 27, 64, …, aumentano sempre più.
Diciamo che quando x tende a $+\infty$ i valori della funzione tendono a $+\infty$ e scriviamo $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

DEFINIZIONE

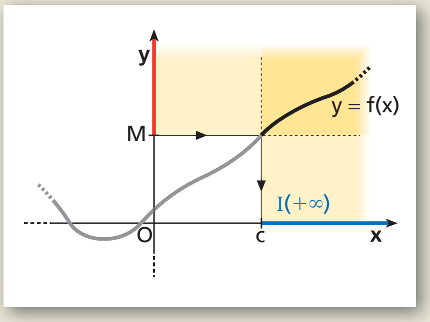
Limite $+\infty$ di una funzione per x che tende a $+\infty$

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $+\infty$ per x che tende a $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $+\infty$ tale che risulti:

$f(x) > M$ per ogni $x \in I$.



In simboli, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se:

$$\boldsymbol{\forall M > 0 \quad \exists c > 0 \,|\, f(x) > M, \forall x > c.}$$

ESEMPIO

Verifichiamo che $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, applicando la definizione.

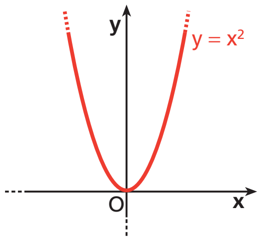
Scelto $M > 0$, dobbiamo determinare un intorno di $+\infty$ tale che risulti:

$x^3 > M$ per ogni x dell'intorno.

Applichiamo la radice cubica a entrambi i membri:

$x > \sqrt[3]{M}$.

L'insieme delle soluzioni è $]\sqrt[3]{M}; +\infty[$, che è l'intorno cercato.



Consideriamo ora la funzione $y = x^2$, il cui grafico è nella figura a lato.
Se attribuiamo a x valori negativi decrescenti, per esempio $-1, -2, -3, -4, \ldots$, i corrispondenti valori x^2, ossia 1, 4, 9, 16, …, aumentano sempre più. Diciamo che quando x tende a $-\infty$ i valori della funzione tendono a $+\infty$ e scriviamo $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

DEFINIZIONE

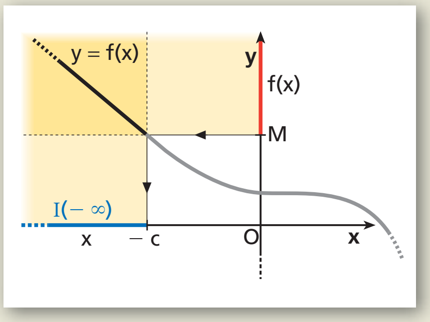
Limite $+\infty$ di una funzione per x che tende a $-\infty$

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $+\infty$ per x che tende a $-\infty$ e si scrive

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $-\infty$ tale che risulti:

$f(x) > M$ per ogni $x \in I$.



In simboli, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ se:

$$\forall M > 0 \quad \exists c > 0 \,|\, f(x) > M, \forall x < -c.$$

ESEMPIO

Verifichiamo il limite precedente, $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, applicando la definizione.

Scelto $M > 0$, dobbiamo determinare un intorno di $-\infty$ tale che risulti:

$x^2 > M$ per ogni x dell'intorno.

Questa disequazione di secondo grado è verificata per valori esterni alle radici $x = \pm\sqrt{M}$, ossia ha per soluzioni $x < -\sqrt{M} \vee x > +\sqrt{M}$.
In particolare, se $x < -\sqrt{M}$, che rappresenta un intorno di $-\infty$, la disuguaglianza è vera, quindi il limite è verificato.

Il limite è $-\infty$ quando x tende a $+\infty$ o a $-\infty$

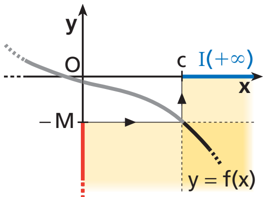
In questo caso si può anche dire che **la funzione diverge negativamente**.
Studiamo i due casi:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

DEFINIZIONE

Limite $-\infty$ di una funzione per x che tende a $+\infty$

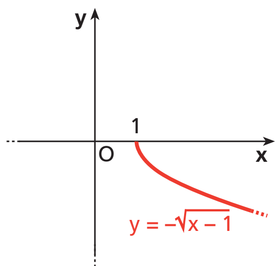
Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $-\infty$ per x che tende a $+\infty$ e si scrive $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $+\infty$ tale che risulti $f(x) < -M$ per ogni $x \in I$.



$\forall M > 0\ \exists c > 0 \,|$
$f(x) < -M,\ \forall x > c$

In simboli, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ se:

$$\forall M > 0 \quad \exists c > 0 \,|\, f(x) < -M, \forall x > c.$$



ESEMPIO

Verifichiamo il limite $\lim_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{x-1}\right)=-\infty$, applicando la definizione.

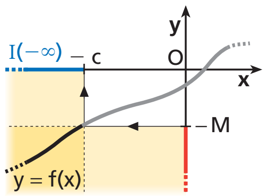
La funzione è definita in $D=[1;+\infty[$. Scelto un numero $M>0$, dobbiamo determinare un intorno di $+\infty$ tale che risulti:

$$-\sqrt{x-1}<-M \quad \text{per ogni } x \text{ dell'intorno.}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per -1 ed eleviamoli al quadrato:

$$\sqrt{x-1}>M \quad \to \quad x-1>M^2 \quad \to \quad x>1+M^2.$$

Le soluzioni sono date da $x>1+M^2$, che rappresenta un intorno di $+\infty$, quindi il limite è verificato.



$\forall M>0\ \exists c>0 \mid$
$f(x)<-M,\ \forall x<-c$

DEFINIZIONE

Limite $-\infty$ di una funzione per x che tende a $-\infty$

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $-\infty$ per x che tende a $-\infty$ e si scrive $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $-\infty$ tale che risulti $f(x)<-M$ per ogni $x\in I$.

In simboli, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ se:

$$\boldsymbol{\forall M>0 \quad \exists c>0 \mid f(x)<-M, \forall x<-c.}$$

Un esempio di verifica di questo limite si trova negli esercizi, dove esaminiamo anche il caso di $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

In generale possiamo dare la seguente **definizione topologica di limite**.

DEFINIZIONE

Sia $y=f(x)$ una funzione con dominio D e sia x_0 un punto di accumulazione di D: si dice che l è il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 se per ogni intorno $I(l)$ di l esiste, in corrispondenza, un intorno $I(x_0)$ di x_0 tale che $\forall x\in D\cap I(x_0)$, escluso al più x_0, si ha $f(x)\in I(l)$.

Questa definizione coincide con quelle date finora anche nei casi in cui x_0 o l sono uguali a $-\infty$ o a $+\infty$.

6. PRIMI TEOREMI SUI LIMITI

I teoremi e le proprietà che enunceremo in questo paragrafo sono validi per funzioni definite in un qualsiasi dominio $D\subseteq\mathbb{R}$ e per punti x_0 (in cui calcoliamo il limite) di accumulazione del dominio D. Valgono inoltre per $x\to+\infty$ oppure $x\to-\infty$.
Tuttavia, per semplicità, penseremo sempre a particolari domini D, ossia a intervalli di $\mathbb{R}$ o a unioni di intervalli, e a x_0 come punto di D o estremo di uno degli intervalli che costituiscono D.
I teoremi valgono anche se invece di l abbiamo $+\infty$, $-\infty$ o ∞. Valgono inoltre nei casi di limite destro o limite sinistro.

Il teorema di unicità del limite

TEOREMA

Se per x che tende a x_0 la funzione $f(x)$ ha per limite il numero reale l, allora tale limite è unico.

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo la tesi per assurdo.

Supponiamo che la tesi sia falsa e cioè che l non sia unico. In tal caso dovrebbe esistere un numero reale l' diverso da l tale che risulti:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l',\ l' \neq l.$$

Possiamo supporre $l < l'$ e, poiché nella definizione di limite possiamo scegliere ε arbitrariamente purché sia positivo, consideriamo:

$$\varepsilon < \frac{l' - l}{2}.$$

Applichiamo la definizione di limite in entrambi i casi. Dovrebbero esistere due intorni I e I' di x_0 tali che:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in I,$$

$$|f(x) - l'| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in I'.$$

Osserviamo che anche $I \cap I'$ è un intorno di x_0. In $I \cap I'$ devono valere contemporaneamente le due disequazioni, ossia:

$$\begin{cases} |f(x) - l| < \varepsilon \\ |f(x) - l'| < \varepsilon \qquad \forall x \in I \cap I' \end{cases}$$

Possiamo anche scrivere:

$$\begin{cases} l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \\ l' - \varepsilon < f(x) < l' + \varepsilon \end{cases}$$

Dal confronto delle disuguaglianze, ricordando che $l < l'$, risulta che

$$l' - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon,$$

da cui segue:

$$l' - \varepsilon < l + \varepsilon.$$

Ricavando ε otteniamo

$$-\varepsilon - \varepsilon < l - l' \quad \to \quad -2\varepsilon < l - l' \quad \to \quad 2\varepsilon > l' - l,$$

da cui $\varepsilon > \dfrac{l' - l}{2}$, contro l'ipotesi di $\varepsilon < \dfrac{l' - l}{2}$.

La supposizione che ci siano due limiti è falsa. Pertanto, se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, il limite l è unico.

- Il teorema vale anche per i limiti con $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.

- Nelle dimostrazioni per assurdo si procede così: si suppone falsa la tesi; se con questa supposizione, dopo opportuni passaggi, l'ipotesi viene negata, significa che è sbagliato supporre falsa la tesi, ossia la tesi è vera.

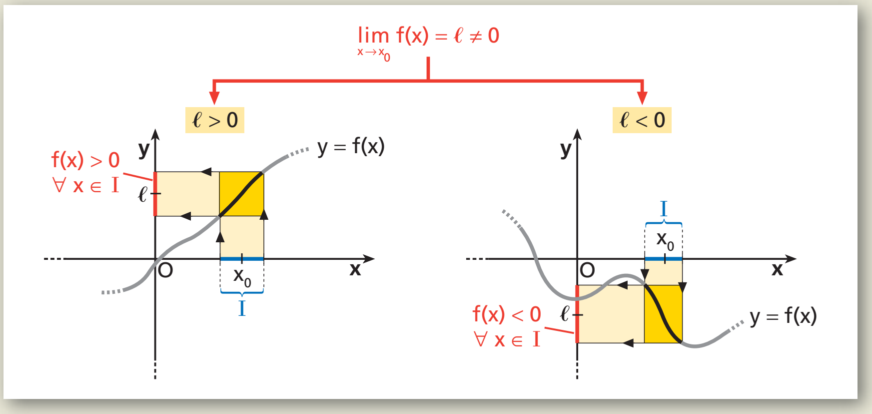
Il teorema della permanenza del segno

Il teorema afferma che in un intorno di x_0 la funzione $f(x)$ ha lo stesso segno di l.

Il teorema vale anche per i limiti con $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.

TEOREMA

Se il limite di una funzione per x che tende a x_0 è un numero l diverso da 0, allora esiste un intorno I di x_0 (escluso al più x_0) in cui $f(x)$ e l sono entrambi positivi oppure entrambi negativi.



DIMOSTRAZIONE

Dalla definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, scelto ε arbitrariamente positivo, deve essere:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \to \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon.$$

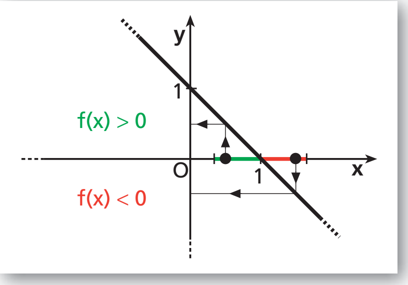
Posto allora $\varepsilon = |l|$, si ha:

$$l - |l| < f(x) < l + |l|.$$

Se $l > 0$, allora $\underline{0 < f(x)} < 2l \quad \to \quad f(x) > 0.$

Se $l < 0$, allora $2l < \underline{f(x) < 0} \quad \to \quad f(x) < 0.$

Il teorema non è valido nel caso in cui il limite l sia uguale a 0.
Per esempio, consideriamo $\lim_{x\to 1}(1-x) = 0$: in un qualunque intorno completo del punto 1, i valori assunti dalla funzione $y = 1 - x$ sono in parte positivi e in parte negativi.



▶ **Figura 23** La funzione $f(x)$ è positiva in ogni intorno sinistro di 1 e negativa in ogni intorno destro. Il teorema non si applica.

Il teorema della permanenza del segno si può opportunamente invertire: vale il seguente teorema.

TEOREMA

Se una funzione $f(x)$ ammette limite finito l per x che tende a x_0 e in un intorno $I(x_0)$ di x_0, escluso al più x_0, è:

- positiva o nulla, allora $l \geq 0$;
- negativa o nulla, allora $l \leq 0$.

Questo teorema si estende anche al caso in cui il limite è infinito:
- se $f(x) \geq 0$, si ha $l = +\infty$;
- se $f(x) \leq 0$, si ha $l = -\infty$.

Bergamini, Trifone, Barozzi MATEMATICA.BLU - Vol.5 © Zanichelli 2012 con Maths in English

Dimostriamo la prima parte del teorema.

DIMOSTRAZIONE

Ragioniamo per assurdo e supponiamo che $l < 0$. Allora, per il teorema precedente, esiste un intorno $I'(x_0)$ di x_0 tale che $f(x) < 0$ per ogni $x \in I'(x_0)$, con $x \neq x_0$. Ma, per l'ipotesi che $f(x)$ è positiva o nulla in $I(x_0)$, ciò implica che per i punti x dell'intorno $I(x_0) \cap I'(x_0)$ la funzione assume valori sia positivi che negativi. Abbiamo quindi ottenuto una contraddizione, pertanto deve essere $l \geq 0$.

● Analogamente puoi dimostrare la seconda parte.

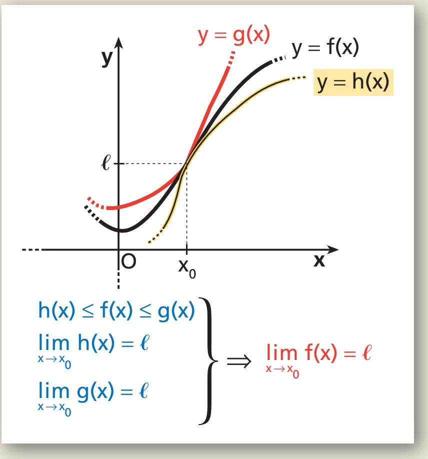
Il teorema del confronto

TEOREMA

Siano $h(x)$, $f(x)$ e $g(x)$ tre funzioni definite nello stesso dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, escluso al più un punto x_0. Se in ogni punto diverso da x_0 del dominio risulta

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

e il limite delle due funzioni $h(x)$ e $g(x)$, per x che tende a x_0, è uno stesso numero l, allora anche il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 è uguale a l.



● Il teorema vale anche per i limiti con $x \to \infty$.

● Poiché la funzione f viene «costretta», da h e da g, a tendere a l, il teorema viene anche detto *teorema dei due carabinieri*.

DIMOSTRAZIONE

Fissiamo $\varepsilon > 0$ a piacere. È vero che:

$$|h(x) - l| < \varepsilon, \text{ per ogni } x \in I_1 \cap D, \text{ perché } h(x) \to l \text{ per } x \to x_0;$$

$$|g(x) - l| < \varepsilon, \text{ per ogni } x \in I_2 \cap D, \text{ perché } g(x) \to l \text{ per } x \to x_0.$$

Le disuguaglianze valgono entrambe per ogni x del dominio appartenente all'intorno $I = I_1 \cap I_2$, escluso al più x_0. Quindi, per ogni $x \in I$, abbiamo:

$$l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon, \qquad l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon.$$

● I_1 e I_2 sono due intorni di x_0 che, in generale, dipendono da ε.

Tenendo conto della relazione fra le funzioni, abbiamo

$$l - \varepsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < l + \varepsilon,$$

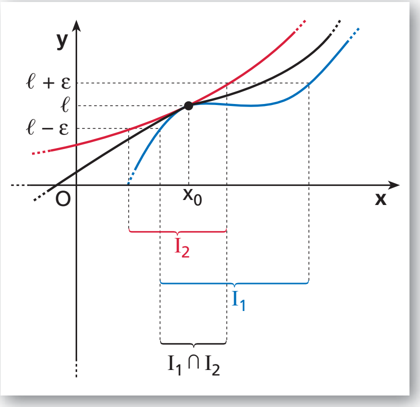
per ogni $x \in I$, che implica

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon,$$

per ogni $x \in I$, ossia:

$$|f(x) - l| < \varepsilon, \forall x \in I.$$

Quest'ultima relazione significa proprio che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.



◄ **Figura 24**

ESEMPIO

Sono date le funzioni

$$h(x) = -x^2 + 4x - 2, \qquad f(x) = 2x - 1, \qquad g(x) = x^2,$$

rappresentate nella figura 25*a*.

Noto che:

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} (-x^2 + 4x - 2) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} x^2 = 1,$$

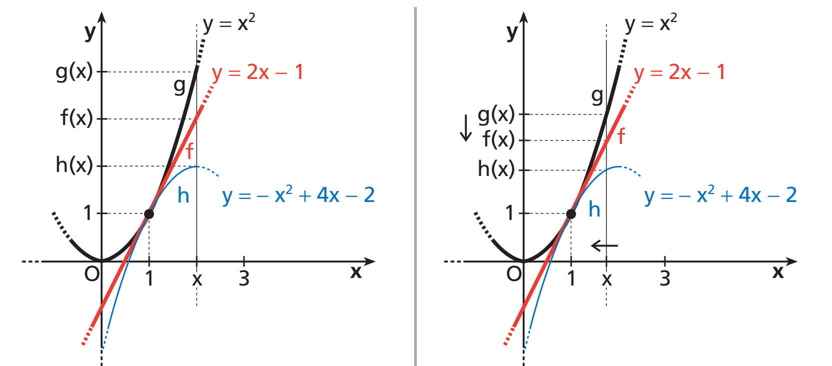
calcoliamo $\lim_{x \to 1} f(x)$.

● $h(x)$ e $g(x)$ sono funzioni polinomiali e quindi continue:

$$\lim_{x \to 1} h(x) = h(1),$$
$$\lim_{x \to 1} g(x) = g(1).$$

Possiamo osservare che per ogni valore x appartenente all'intervallo $]0; 3[$, i rispettivi valori delle tre funzioni h, f e g sono, nell'ordine, uno minore o uguale all'altro, ossia $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

▶ Figura 25



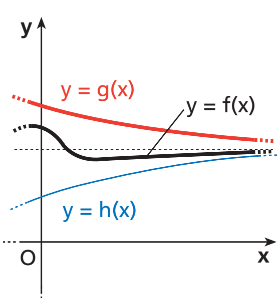
a. Consideriamo un valore x e i corrispondenti valori $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

b. Se x tende a 1, $h(x)$ e $g(x)$ tendono a 1. Anche $f(x)$, essendo compreso fra $h(x)$ e $g(x)$, deve tendere a 1.

Il teorema permette di affermare che è anche vero:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x - 1) = 1.$$

● Il teorema vale anche per i limiti con $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.
Un esempio grafico nel caso $x \to +\infty$ è illustrato nella figura sotto.



Casi particolari

Si possono dimostrare i seguenti teoremi.

- Date le funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite in uno stesso intorno I di x_0, escluso al più x_0, se per ogni $x \neq x_0$ di I è

  $$|f(x)| \leq |g(x)| \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0,$$

  allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

- Date le funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite in uno stesso intorno I di x_0, escluso al più x_0, se per ogni $x \neq x_0$ di I è:

  $$|f(x)| \geq |g(x)| \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty,$$

  allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

NON PUÒ FARE PIÙ FREDDO DI COSÌ!

Perché il termometro non può scendere sotto lo zero assoluto?

▶ Il quesito completo a pag. 1403

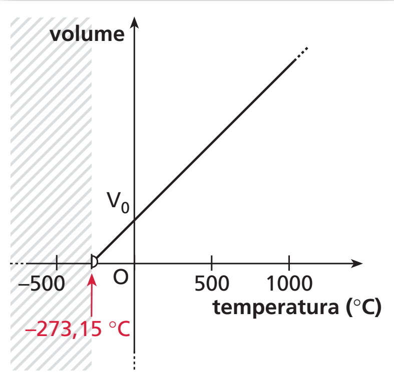
All'interno delle stelle si possono raggiungere temperature elevatissime di milioni e milioni di gradi.
All'estremo opposto, il luogo più freddo dell'Universo finora conosciuto è una nebulosa a 5000 anni luce dalla Terra che ha una temperatura di 272 °C sotto zero. In alcuni laboratori di ricerca gli scienziati sono riusciti a oltrepassare questo record cosmico, arrivando quasi a sfiorare lo zero assoluto.

Impossibile spingersi oltre

Lo zero assoluto, che coincide con il valore 0 della scala Kelvin, è il limite inferiore della temperatura: una soglia teorica alla quale ci si può avvicinare, ma che è impossibile raggiungere in pratica.
Come mai? Per comprenderlo bisogna ricordare che la temperatura è una misura dell'agitazione delle molecole di un corpo. Più un oggetto è caldo, maggiore è l'energia cinetica (l'energia di movimento) delle particelle che lo compongono. Più si raffredda, più le molecole rallentano. Immaginiamo di avvicinarci allo zero assoluto: in questa condizione estrema tutte le molecole si fermano. Ma vediamo come si ricava il valore teorico di $-273{,}15$ °C e perché abbiamo detto che è un limite insuperabile in qualsivoglia esperimento o luogo dell'Universo.

Un esempio per capire

Un gas ideale, o perfetto, è un gas molto rarefatto in cui le molecole possono interagire soltanto urtandosi in modo elastico: quando si scontrano, rimbalzano come palle da biliardo. Per questi gas le grandezze fondamentali (volume V, pressione P e temperatura T) sono legate dall'equazione di stato: $PV = NkT$, dove k è la costante di Boltzmann e N è il numero di molecole del gas.
Da questa formula è facile ricavare una relazione che lega il cambiamento del volume di un gas al variare della temperatura, ipotizzando che la pressione resti costante. La legge che regola questa trasformazione, detta prima legge di Gay-Lussac, afferma che le variazioni del volume sono direttamente proporzionali alle variazioni della temperatura. Matematicamente, $V = V_0(1 + \alpha T)$, dove α è un coefficiente identico per tutti i gas perfetti. Vuol dire che più un gas si raffredda, più il suo volume si riduce. La rappresentazione grafica corrisponde a una retta. Il punto in cui la retta incontra l'asse delle ascisse corrisponde allo zero assoluto. Fisicamente, questo punto è irraggiungibile, perché man mano che la temperatura scende, il volume del gas si contrae, ma, per quanto piccole e concentrate siano le particelle, questo volume non potrà mai essere nullo.



Quello che succede è che per T che tende a $-273{,}15$ °C (da destra), il volume tende a 0.

Il luogo più freddo della Terra

La Stazione Vostok, base russa in Antartide, è la zona in cui si è registrata la più bassa temperatura terrestre. Gli scienziati giunti nel 1974 misurarono temperature intorno ai -89 °C, mai registrate prima di allora. Da quel momento Vostok ha catalizzato le attenzioni di molti ricercatori. Nel 1996 fu accertata l'esistenza di un lago sotterraneo, il lago Vostok appunto, in grado di mantenere le sue acque allo stato liquido anche a temperature di qualche grado sotto lo zero. È un lago grande come la Corsica, profondo 700 metri, nascosto sotto circa 4000 metri di ghiaccio e che risale probabilmente a milioni di anni fa.

LABORATORIO DI MATEMATICA

I LIMITI DELLE FUNZIONI

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di Derive stabiliamo il dominio, troviamo gli asintoti e abbozziamo il grafico della funzione $f(x) = \log_2 \dfrac{4x^2 - 16}{x^2 - 8x + 16}$.

Per risolvere il problema facciamo svolgere i calcoli a Derive e diamo un significato ai suoi risultati.

- Immettiamo la funzione nell'etichetta #1 (figura 1).
- Trattandosi di una funzione logaritmica, per stabilirne il dominio, impostiamo il comando *Solve* sulla disequazione formata dall'argomento del logaritmo posto maggiore di 0 in senso stretto.
- Con *Semplifica_Base* lo facciamo operare, ricavando dal risultato che il dominio è dato da: $(x < -2) \lor (x > 2 \land x \neq 4)$.
- Con *Calcola_Limite* calcoliamo i limiti della funzione per x tendente a $-\infty$ e a $+\infty$, dalla lettura dei risultati deduciamo che la retta $y = 2$ è asintoto orizzontale per la $f(x)$.
- Svolgiamo poi il calcolo dei limiti per x tendente a -2 da sinistra, a 2 da destra e a 4, da destra e da sinistra, deducendo dai risultati dei limiti che le rette $x = -2$, $x = 2$ e $x = 4$ sono asintoti verticali della $f(x)$.
- Con le istruzioni di Derive tracciamo infine i grafici della $f(x)$ in rosso e quelli degli asintoti in verde (figura 2).

#1: $f(x) := \mathrm{LOG}\left(\dfrac{4\cdot x^2 - 16}{x^2 - 8\cdot x + 16}, 2\right)$

#2: $\mathrm{SOLVE}\left(\dfrac{4\cdot x^2 - 16}{x^2 - 8\cdot x + 16} > 0, x\right)$

#3: $(x \neq 4 \land x > 2) \lor x < -2$

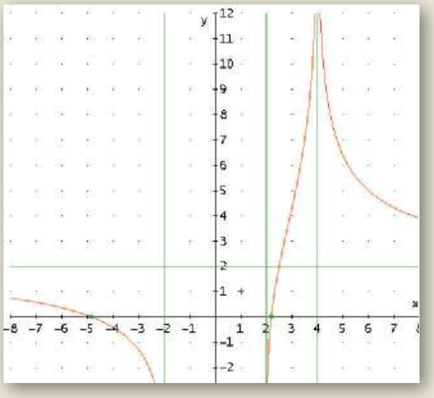
#4: $\left[\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right]$

#5: $[2, 2]$

#6: $\left[\lim\limits_{x\to-2^-} f(x), \lim\limits_{x\to2^+} f(x), \lim\limits_{x\to4} f(x)\right]$

#7: $[-\infty, -\infty, \infty]$

▲ Figura 1



▲ Figura 2

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 20 esercitazioni in più

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer determina il dominio, gli asintoti orizzontali e verticali e le intersezioni con gli assi cartesiani delle seguenti funzioni. Con strumenti grafici traccia l'andamento della $f(x)$ e dei suoi asintoti ed evidenzia le intersezioni con gli assi cartesiani.

1 $f(x) = \dfrac{3x^2 + 6x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ $[D: \mathbb{R} - \{-1, 3\}; x = 3, y = 3; (0; 1)]$

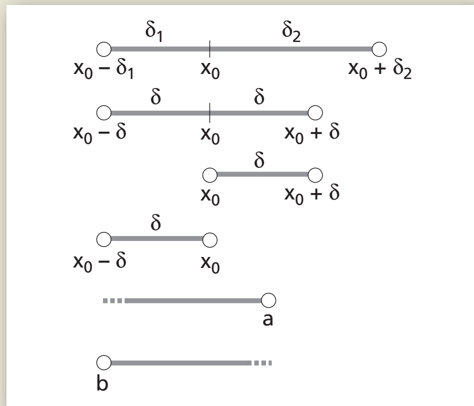
2 $f(x) = \dfrac{4x^2 - 10x - 6}{2x^3 - x^2 + 2x - 1}$ $\left[D: \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}; x = \dfrac{1}{2}, y = 0; \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right), (3; 0), (0; 6)\right]$

3 $f(x) = \dfrac{3(x^3 + x^2 - 9x - 9)}{\sqrt{x^2 - 1}\,(x - 4)^2}$ $[D: (x < -1 \lor x > 1) \land x \neq 4; x = 1, x = 4, y = 3, y = -3; (-3; 0), (3; 0)]$

LA TEORIA IN SINTESI
I LIMITI DELLE FUNZIONI

1. LA TOPOLOGIA DELLA RETTA

- **Intorni**
  - **Intorno completo** di x_0: $I(x_0) =]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2[,\ \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$.
  - **Intorno circolare** di x_0: $I_\delta(x_0) =]x_0 - \delta; x_0 + \delta[,\ \delta \in \mathbb{R}^+$.
  - **Intorno destro** di x_0: $I_\delta^+(x_0) =]x_0; x_0 + \delta[,\ \delta \in \mathbb{R}^+$.
  - **Intorno sinistro** di x_0: $I_\delta^-(x_0) =]x_0 - \delta; x_0[,\ \delta \in \mathbb{R}^+$.
  - **Intorno di** $-\infty$: $I(-\infty) =]-\infty; a[,\ a \in \mathbb{R}$.
  - **Intorno di** $+\infty$: $I(+\infty) =]b; +\infty[,\ b \in \mathbb{R}$.



- Un insieme numerico $F \subset \mathbb{R}$ è detto:
  - **superiormente limitato** se è possibile determinare un numero reale α tale che $x \leq \alpha\ \forall x \in F$; α è detto **maggiorante** di F; inoltre, se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in F$ tale che $x > \alpha - \varepsilon$, allora α è **estremo superiore** di F;
  - **inferiormente limitato** se è possibile determinare un numero reale β tale che $x \geq \beta\ \forall x \in F$; β è detto **minorante** di F; inoltre, se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in F$ tale che $x < \beta + \varepsilon$, allora β è **estremo inferiore** di F;
  - **limitato** se è limitato sia superiormente sia inferiormente.

- Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$:
  - $x_0 \in A$ è un **punto isolato** di A se esiste un intorno di x_0 che non contiene elementi di A diversi da x_0;
  - $x_0 \in \mathbb{R}$ è un **punto di accumulazione** per A se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di A.

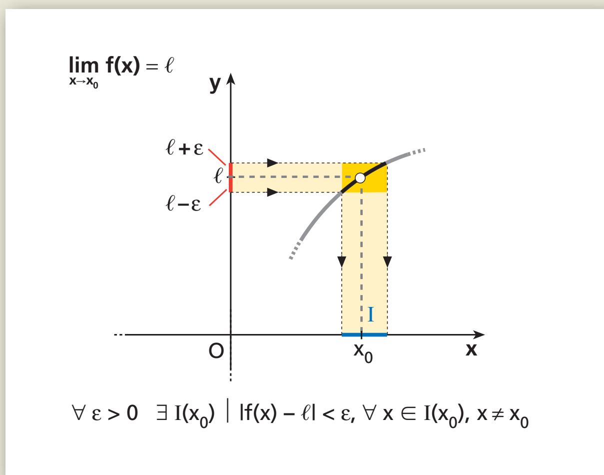
2. LA DEFINIZIONE DI $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno I di x_0 tale che:
  $$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in I,\ x \neq x_0.$$

- Una funzione si dice **continua in un punto** x_0 del suo dominio se:
  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- **Limite per eccesso**: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l^+$ se
  - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$,
  - $f(x) > l$ in un intorno di x_0 (con al più $x \neq x_0$).

- **Limite per difetto**: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l^-$ se
  - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$,
  - $f(x) < l$ in un intorno di x_0 (con al più $x \neq x_0$).



Bergamini, Trifone, Barozzi MATEMATICA.BLU - Vol.5 © Zanichelli 2012 con Maths in English

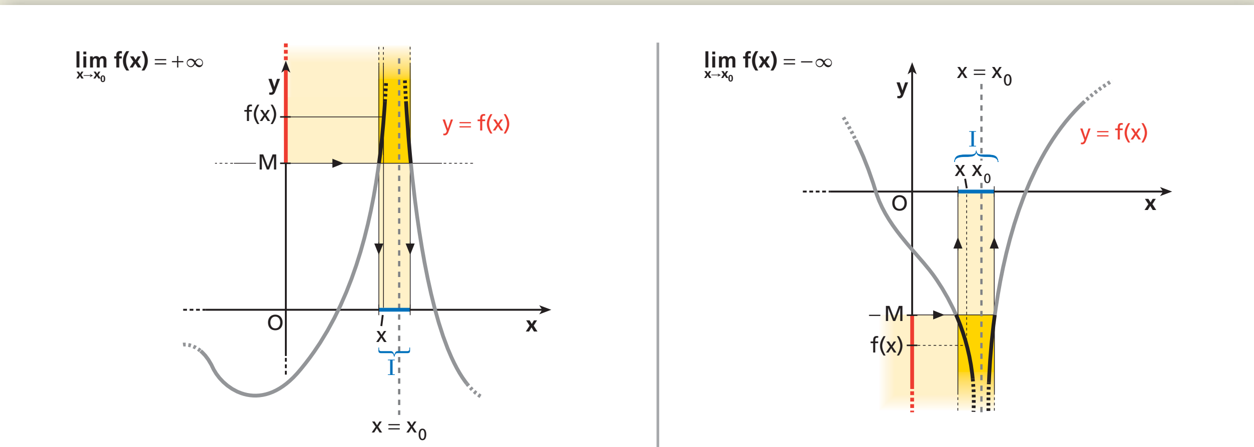
- **Limite destro**: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno **destro** di x_0, $I^+(x_0)$, tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in I^+(x_0)$, $x \neq x_0$.

- **Limite sinistro**: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno **sinistro** di x_0, $I^-(x_0)$, tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in I^-(x_0)$, $x \neq x_0$.

- Esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se e solo se esistono entrambi $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e sono entrambi uguali a l.

3. LA DEFINIZIONE DI $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

- • $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un intorno I di x_0 tale che $f(x) > M$ per ogni $x \in I$, $x \neq x_0$.
  • $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un intorno I di x_0 tale che $f(x) < -M$ per ogni $x \in I$, $x \neq x_0$.
  • $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un intorno I di x_0 tale che $|f(x)| > M$ per ogni $x \in I$, $x \neq x_0$.



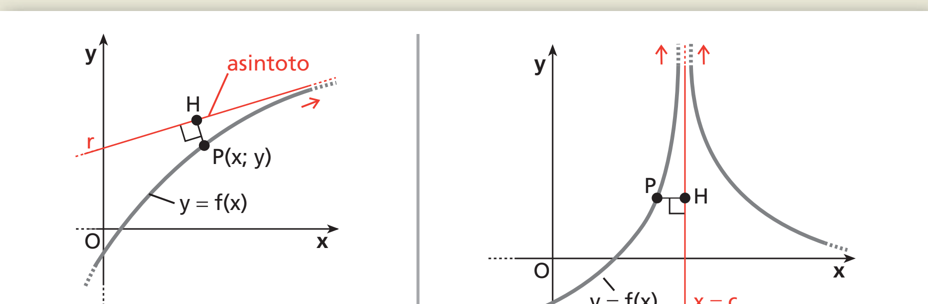
a $\forall M > 0 \ \exists I(x_0) \mid f(x) > M, \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$

b $\forall M > 0 \ \exists I(x_0) \mid f(x) < -M, \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$

Le definizioni si possono enunciare anche per limite destro e sinistro, ossia per $x \to x_0^+$ o $x \to x_0^-$.

- **Asintoto** del grafico di una funzione: è una retta tale che la distanza di un generico punto P del grafico dalla retta tende a 0 quando l'ascissa o l'ordinata di P tendono a ∞.

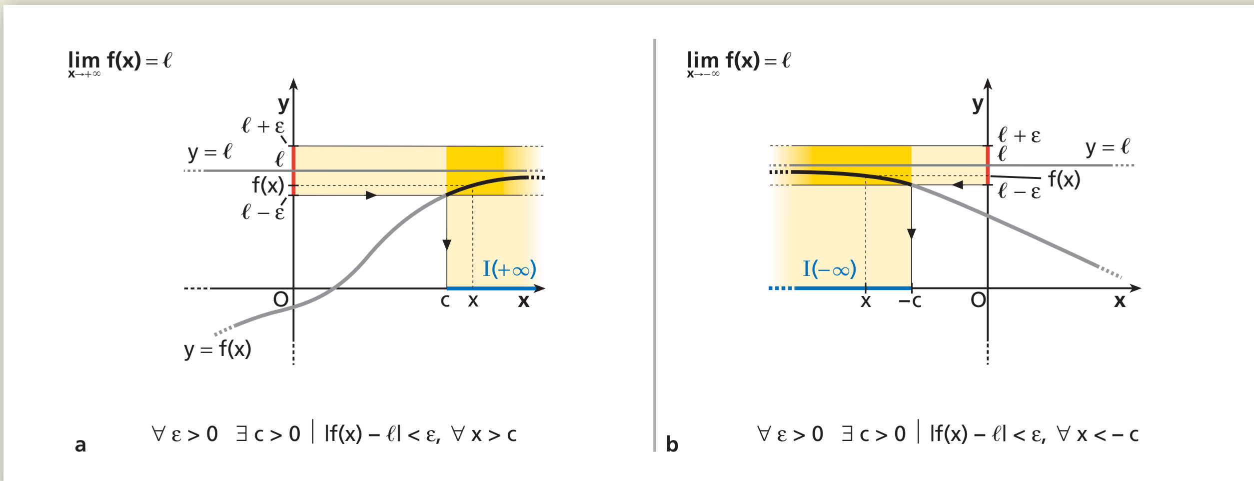
- Data $y = f(x)$, se $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$, la retta $x = c$ è **asintoto verticale** per il grafico di f.



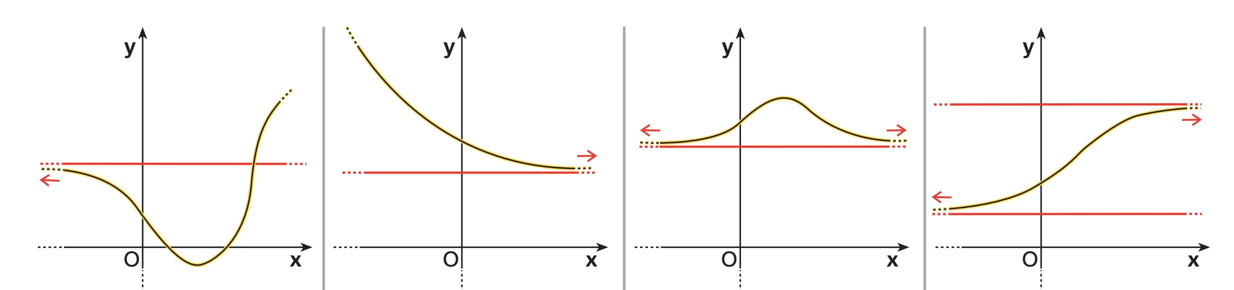
Per $x \to +\infty$, $\overline{PH} \to 0$

4. LA DEFINIZIONE DI $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno I di $+\infty$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in I$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno I di $-\infty$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in I$.
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno I di ∞ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in I$.



Data $y = f(x)$, se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = q$ o $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = q$ o $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = q$, la retta $y = q$ è **asintoto orizzontale** per il grafico di f.



a. Asintoto orizzontale soltanto per $x \to -\infty$.

b. Asintoto orizzontale soltanto per $x \to +\infty$.

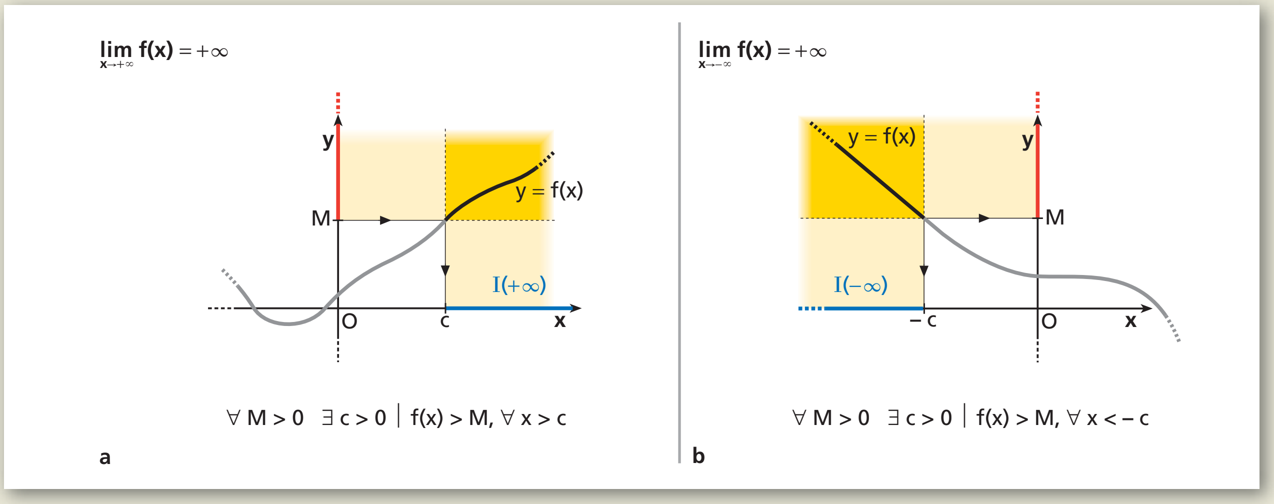
c. Asintoto orizzontale unico per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

d. Due asintoti orizzontali diversi per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

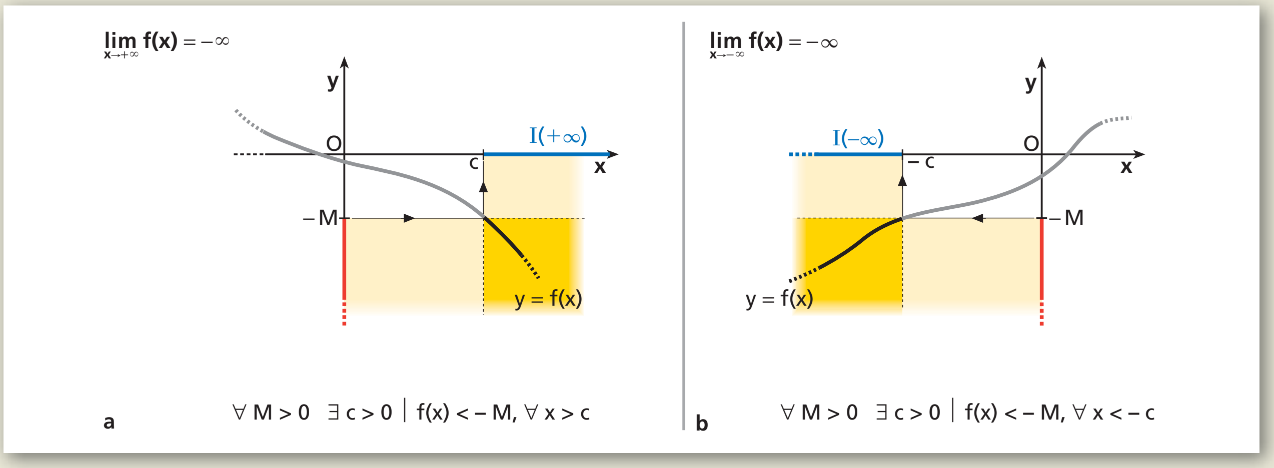
5. LA DEFINIZIONE DI $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un intorno I di $+\infty$ tale che $f(x) > M$ per ogni $x \in I$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un intorno I di $-\infty$ tale che $f(x) > M$ per ogni $x \in I$.

In entrambi i casi si dice che la funzione f **diverge positivamente** (per x che tende a $+\infty$ o a $-\infty$).



- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un intorno I di $+\infty$ tale che $f(x) < -M$ per ogni $x \in I$.
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un intorno I di $-\infty$ tale che $f(x) < -M$ per ogni $x \in I$.



In entrambi i casi si dice che la funzione f **diverge negativamente** (per x che tende a $+\infty$ o a $-\infty$).

6. PRIMI TEOREMI SUI LIMITI

- **Teorema di unicità del limite**
  Se per x che tende a x_0 la funzione f ha limite l, allora tale limite è unico.

- **Teorema della permanenza del segno**
  Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, con $l \neq 0$, allora esiste un intorno I di x_0 tale che:
  - $f(x) > 0 \ \forall x \in I, x \neq x_0$, quando $l > 0$;
  - $f(x) < 0 \ \forall x \in I, x \neq x_0$, quando $l < 0$.

- **Teorema del confronto**
  Se le funzioni $h(x), f(x), g(x)$ sono definite tutte in $D \subseteq \mathbb{R}$, e $h(x) \le f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in D$ e inoltre
  $$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l,$$
  allora anche:
  $$\lim_{x\to x_0} f(x) = l.$$

1. LA TOPOLOGIA DELLA RETTA

▶ Teoria a pag. 1404

Gli intervalli

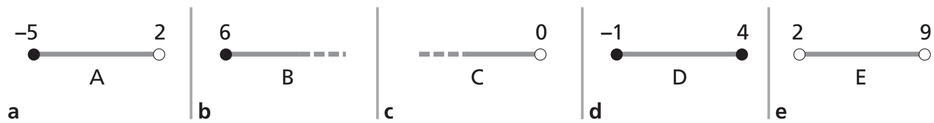
1 Rappresenta i seguenti intervalli sulla retta reale.

a) $A =]-\infty; 1]$; $B =]1; 4]$; $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq x < 5\}$.

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 4\}$; $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, -\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\}$.

2 Fai un esempio di intervallo chiuso illimitato inferiormente e uno di intervallo aperto illimitato superiormente.

3 Indica gli intervalli rappresentati in figura utilizzando entrambe le forme dell'esercizio 1.



4 **VERO O FALSO?**

a) $]-\infty; 9]$ è equivalente a $x < 9$. V F

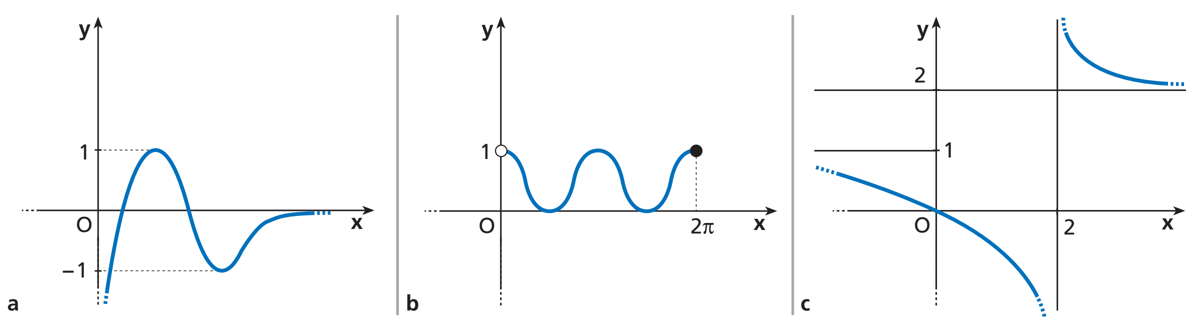
b) $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ equivale a $x^2 - 4 > 0$. V F

c) $[-3; 16[$ equivale a $x < -3 \vee x > 16$. V F

d) $]-\infty; 5] \cup]5; +\infty[$ equivale a $x \neq 5$. V F

e) $]-\infty; +\infty[$ equivale all'insieme $\mathbb{R}$. V F

5 Dai grafici seguenti deduci il dominio e il codominio delle funzioni rappresentate, indica se sono intervalli limitati o illimitati e rappresentali nelle tre forme possibili.



[a) D: $x > 0$, C: $y \leq 1$; b) D: $0 < x \leq 2\pi$, C: $0 \leq y \leq 1$; c) D: $x \neq 2$, C: $y < 1 \vee y > 2$]

6 L'insieme $I = \left\{4, \frac{11}{2}, 9\right\}$ è un intervallo limitato?

7 L'insieme $I = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 4 < x < 9\}$ è un intervallo limitato? È chiuso?

8 VERO O FALSO?

a) L'insieme $I = \{1, 2\}$ è un intervallo. V F

b) L'insieme $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$ è un intervallo. V F

c) Un intervallo limitato è un insieme formato da un numero finito di elementi. V F

d) Un insieme con infiniti elementi è un intervallo. V F

e) L'insieme dei numeri naturali dispari è un intervallo limitato inferiormente. V F

f) Un intervallo chiuso è limitato. V F

g) Un intervallo limitato è chiuso. V F

9 L'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tali che $\sqrt{1-x} < 1$ è un intervallo limitato o illimitato inferiormente? Motiva la risposta.

Trova il dominio e il codominio delle seguenti funzioni e stabilisci se sono intervalli limitati o illimitati.

10 a) $y = 1 + \sqrt{x-1}$; b) $y = 2 \operatorname{arcsen} x$; c) $y = \ln x - 1$.

[a) D: $x \geq 1$, C: $y \geq 1$; b) D: $-1 \leq x \leq 1$, C: $-\pi \leq y \leq \pi$; c) D: $x > 0$, C: $\mathbb{R}$]

11 a) $y = \frac{2}{x}$; b) $y = 2x^2 - 1$; c) $y = e^{x-1}$.

[a) D: $\mathbb{R} - \{0\}$, C: $\mathbb{R} - \{0\}$; b) D: $\mathbb{R}$, C: $y \geq -1$; c) D: $\mathbb{R}$, C: $y > 0$,]

12 Date le funzioni $f(x) = \ln(1-x)$ e $g(x) = \sqrt{x-3}$, trova il dominio di $f(x)$, $g(x)$, $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ e indica se sono intervalli limitati o illimitati, chiusi o aperti. [$x < 1$; $x \geq 3$; $3 \leq x < 4$; $x \leq 1 - e^3$]

Gli intorni di un punto

Stabilisci se i seguenti intervalli sono intorni del punto x_0. In caso affermativo indica se sono intorni circolari.

13 $x_0 = 2$; $]3; 8[$; $]-3; 8[$; $]1; 3[$.

14 $x_0 = -1$; $]-3; 1[$; $]0; 3[$; $]-4; 8[$.

Per ciascuno dei seguenti punti indica un intorno destro e un intorno sinistro.

15 2; 8; -3.

16 $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{2}$; 0.

Per ciascuno dei punti seguenti determina almeno due intorni, di cui uno sia l'intorno circolare di raggio assegnato a fianco.

17 $x_0 = 1$ e $\delta = 9$.

18 $x_0 = -3$ e $\delta = 0,5$.

19 $x_0 = 12$ e $\delta = \frac{1}{2}$.

20 Dei seguenti intorni trova il centro e l'ampiezza.
$]-1; 2[$, $]4; 9[$, $]4,3; 4,6[$, $]-8; -3[$.

21 Scrivi un intorno circolare di $-\frac{1}{2}$ con raggio δ.

22 **VERO O FALSO?** Nei seguenti quesiti considera $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

a) $|x-3| < \delta$ è un intorno circolare di 3. V F

b) $|-x-4| < \delta$ è un intorno circolare di -4 di raggio δ. V F

c) $-5-2\delta < x < -5+2\delta$ è un intorno circolare di -5 di raggio δ. V F

d) $x > 2$ è un intorno di 3. V F

e) $-\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+1} < x < 2\varepsilon$ è un intorno di 0. V F

23 L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x+5| < \delta\}$, con $\delta \in \mathbb{R}^+$, è un intervallo? È un intorno completo di un solo punto? È un intorno circolare di 5?

Indica se i seguenti intervalli sono intorni completi, destri o sinistri del punto assegnato.

24 $x_0 = \dfrac{1}{2}$; $\quad \left]0; \dfrac{1}{2}\right[$; $\quad]0; 1[$; $\quad \left]\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{2}\right[$.

25 $x_0 = -3$; $\quad]-4; -3[$; $\quad]10; -1[$; $\quad]-3; 4[$.

26 **TEST** Quale di questi insiemi non rappresenta un intorno di ∞?

A $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| > 2\}$

B $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 2x - 3 > 0\}$

C $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 7 \vee x < 2\}$

D $D = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \dfrac{1-x}{x} \geq 0\right\}$

E $E = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \ln|x| \geq 0\}$

Gli estremi di un insieme

27 **ESERCIZIO GUIDA**

a) Dato l'insieme

$$E = \left\{x \,\middle|\, x = \frac{2n+1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\},$$

verifichiamo che 2 e 3 sono rispettivamente l'estremo inferiore e quello superiore dell'insieme, indicando anche se sono il minimo e il massimo.

b) Dato l'insieme

$$E = \left\{x \,\middle|\, x = \frac{n^2-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\},$$

verifichiamo che è illimitato superiormente, ossia che il suo estremo superiore è $+\infty$.

---

a) Verifichiamo che l'estremo inferiore di E è 2.

1. $\forall x \in E$ deve essere $x \geq 2$, ossia:

$$\frac{2n+1}{n} \geq 2 \quad \to \quad \frac{\cancel{2n}+1-\cancel{2n}}{n} \geq 0 \quad \to \quad \frac{1}{n} \geq 0 \text{ vera } \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

2. 2 non appartiene all'insieme. Infatti l'equazione

$$\frac{2n+1}{n} = 2 \quad \to \quad \frac{2n+1-2n}{n} = 0 \quad \to \quad \frac{1}{n} = 0$$

è impossibile.

Perché 2 sia l'estremo inferiore, $\forall \varepsilon > 0$ la disequazione $x < 2 + \varepsilon$ deve ammettere almeno una soluzione in E, ossia deve esistere almeno un $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tale che

$$\frac{2n+1}{n} < 2 + \varepsilon \quad \rightarrow \quad \frac{2n+1-2n-\varepsilon n}{n} < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1-\varepsilon n}{n} < 0,$$

ed essendo $n > 0$ si ha:

$$1 - \varepsilon n < 0 \quad \rightarrow \quad -\varepsilon n < -1 \quad \rightarrow \quad \varepsilon n > 1 \quad \rightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Per qualsiasi valore di n maggiore di $\frac{1}{\varepsilon}$ la disequazione è verificata.

Le condizioni dei punti 1 e 2 sono entrambre verificate, quindi 2 è l'estremo inferiore di E.

Consideriamo ora il valore 3.

1. $\forall x \in E$ deve essere $x \leq 3$, ossia:

$$\frac{2n+1}{n} \leq 3 \quad \rightarrow \quad \frac{2n+1-3n}{n} \leq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-n+1}{n} \leq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{n-1}{n} \geq 0.$$

La disequazione è verificata per $n \geq 1$.
È quindi vero che $x \leq 3 \; \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

2. $3 \in E$ perché:

$$\frac{2n+1}{n} = 3 \quad \rightarrow \quad \frac{2n+1-3n}{n} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-n+1}{n} = 0 \quad \rightarrow \quad n = 1.$$

Per $n = 1$ si ha che $x = 3$.

Verificate le due condizioni precedenti, possiamo concludere che $x = 3$ è il massimo di E.

b) Perché l'insieme sia superiormente illimitato, $\forall k > 0$ deve esistere almeno un elemento dell'insieme che superi k, ossia la disequazione $\frac{n^2-1}{n} > k$ deve essere verificata almeno per un valore di n.

Risolviamo la disequazione:

$$\frac{n^2-1}{n} > k \quad \rightarrow \quad \frac{n^2-1-nk}{n} > 0.$$

Essendo $n > 0$, anche il numeratore deve essere positivo:

$$n^2 - nk - 1 > 0 \text{ vera per } n < \frac{k - \sqrt{k^2+4}}{2} \vee n > \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}.$$

Poiché $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, consideriamo solo le soluzioni positive: per ogni $n > \frac{k+\sqrt{k^2+1}}{2}$ il corrispondente elemento dell'insieme è maggiore del k fissato, quindi l'insieme ha per estremo superiore $+\infty$.

Dati i seguenti insiemi, verifica che gli estremi inferiori e superiori sono quelli indicati a fianco, indicando anche se sono minimo e massimo.

28 $A = \{x \mid x = n^2, n \in \mathbb{N}\}, 0, +\infty.$

29 $B = \{x \mid x = 2n + 2, n \in \mathbb{N}\}, 2, +\infty.$

30 $D = \left\{x \mid x = \frac{1+n}{2}, n \in \mathbb{N}\right\}, \frac{1}{2}, +\infty.$

31 $A = \left\{x \mid x = \frac{n+3}{4n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}, \frac{1}{4}, 1.$

32 $B = \left\{x \mid x = \frac{n-1}{n^2-1}, n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}\right\}, 0, \frac{1}{3}.$

33 $C = \left\{x \mid x = \frac{2n^2+5}{2}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}, \frac{7}{2}, +\infty.$

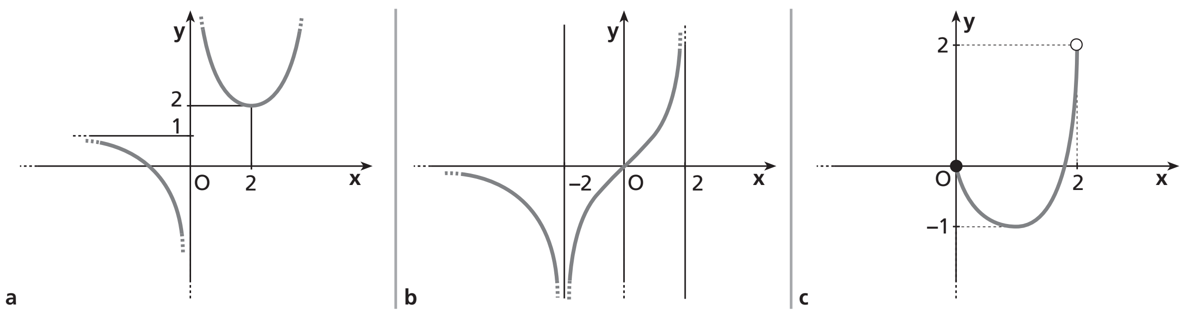
Trova, se esistono, l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo dei seguenti insiemi.

34 $A =]1; 3[$; $B =]-\infty; 1]$; $C = \{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$.

35 $A = \{0, 1, 3\}$; $B =]0; 4] \cup]6; 10[$; $C = [2; +\infty[$.

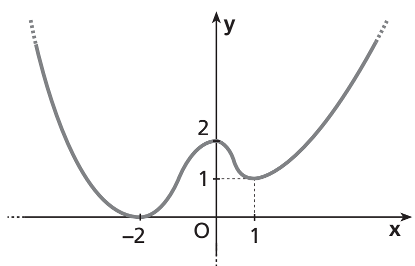
36 $A = \{2, 3, 4, 5, 20\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 9 > 0\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\}$.

37 Stabilisci se le seguenti funzioni hanno dominio e codominio limitati o illimitati e determina l'estremo superiore e l'estremo inferiore di $f(x)$ indicando anche se sono il massimo e il minimo.

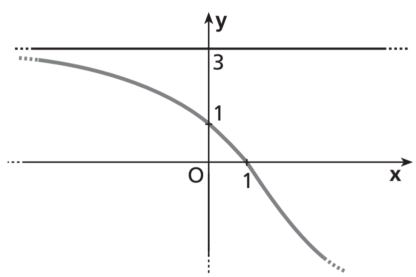


Per ciascuna delle funzioni descritte dai seguenti grafici, determina il dominio e il codominio, l'estremo inferiore e l'estremo superiore, indicando anche se sono il massimo e il minimo.

38



39



40 Rappresenta la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

È limitata inferiormente? E superiormente? Ha minimo?

41 Disegna il grafico della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} |x + 1| & \text{se } x \leq 0 \\ \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Indica se ha estremo superiore o inferiore, se ha massimo e minimo.

42 Data la funzione $y = \sqrt{\dfrac{2}{|x|}}$:

a) trova il dominio;
b) verifica che ha per estremo superiore $+\infty$.

43 Data la funzione $y = \dfrac{1}{|x| + 2x^2}$:

a) trova il dominio;
b) stabilisci se la funzione è pari o dispari;
c) verifica che ha per estremo inferiore $L = 0$.

44 Trova il dominio della funzione $y = \sqrt{\ln x - 1}$ e stabilisci se si tratta di un intervallo limitato o illimitato. Verifica che ha per estremo inferiore $L = 0$.

45 Date le funzioni $f(x) = \ln(1 - x)$ e $g(x) = \sqrt{x - 3}$:

a) trova il dominio di $f(x)$, di $g(x)$, di $(f \circ g)(x)$ e di $(g \circ f)(x)$;
b) di ciascun dominio trova l'estremo superiore e inferiore.

[a) $x < 1$; $x \geq 3$; $3 \leq x < 4$; $x \leq 1 - e^3$;
b) $1, -\infty$; $+\infty$, 3; $4, 3$; $1 - e^3, -\infty$]

I punti isolati

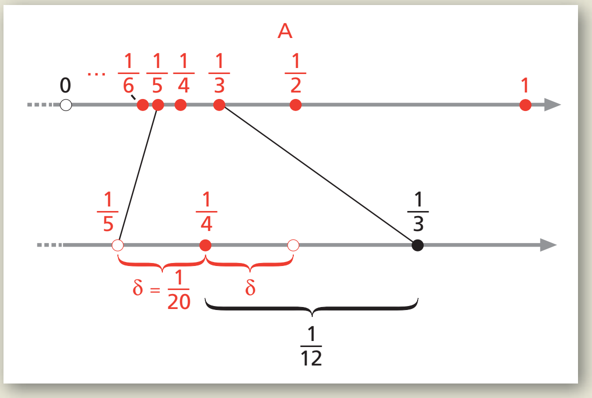
46 **ESERCIZIO GUIDA**

Dato l'insieme $A = \left\{x \middle| x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$, dopo averne rappresentato alcuni elementi, ne scegliamo uno a caso e verifichiamo che è un punto isolato.

Determiniamo alcuni elementi di A costruendo la seguente tabella.

n	x
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$
5	$\frac{1}{5}$
6	$\frac{1}{6}$

Rappresentiamo sulla retta orientata gli elementi di A trovati.



Verifichiamo, per esempio, che $\frac{1}{4}$ è un punto isolato. Dobbiamo trovare un intorno $\left]\frac{1}{4} - \delta; \frac{1}{4} + \delta\right[$ che non contenga altri elementi di A. Dalla figura possiamo osservare che l'elemento di A più vicino a $\frac{1}{4}$ è $\frac{1}{5}$. Infatti la distanza di $\frac{1}{4}$ da $\frac{1}{5}$ è $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$, mentre la distanza di $\frac{1}{4}$ da $\frac{1}{3}$ è $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.
Se poniamo $\delta = \frac{1}{20}$, otteniamo l'intervallo $\left]\frac{1}{4} - \frac{1}{20}; \frac{1}{4} + \frac{1}{20}\right[= \left]\frac{1}{5}; \frac{3}{10}\right[$ che è un intorno di $\frac{1}{4}$ e non contiene altri punti di A, dunque $\frac{1}{4}$ è un punto isolato di A.

Determina alcuni elementi di ciascuno dei seguenti insiemi e rappresentali sulla retta orientata. Scegli uno o più punti dell'insieme e verifica che sono punti isolati.

47 $A = \{x \mid x = \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}\}$

48 $A = \left\{x \mid x = \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$

49 $B = \left\{x \mid x = \frac{2}{n^2}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$

50 $C = \left\{x \mid x = \frac{n^2 - 1}{n^2}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$

51 $D = \left\{x \mid x = \frac{n-3}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$

52 $A = \{x \mid x = (-1)^n \cdot n, n \in \mathbb{N}\}$

I punti di accumulazione

53 **ESERCIZIO GUIDA**

Dato l'insieme $A = \left\{x \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$, verifichiamo che 0 è un punto di accumulazione per A.

Prendiamo un qualunque intorno di 0, di generica apertura δ: $]-\delta; \delta[$. Mostriamo che esistono infiniti valori di A che appartengono a tale intorno.

Affinché un punto di A appartenga a $]-\delta; \delta[$, deve valere:

$$-\delta < \frac{1}{n} < \delta.$$

Poiché $\frac{1}{n} > 0$, è anche $\frac{1}{n} > -\delta$, quindi basta considerare:

$$\frac{1}{n} < \delta.$$

Passiamo alla disuguaglianza fra i reciproci (essendo n e δ numeri positivi):

$$n > \frac{1}{\delta}.$$

Tutti gli elementi di A con $n > \frac{1}{\delta}$ appartengono a $]-\delta; \delta[$.

Per esempio, scegliendo $\delta = 0{,}1$, i valori di n che rendono vera $n > \frac{1}{\delta} = \frac{1}{0{,}1} = 10$ sono: 11, 12, 13, … e quindi all'intervallo $]-0{,}1; 0{,}1[$ appartengono i seguenti elementi di A: $\frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \ldots$

Scegliendo un qualsiasi altro valore per δ, esistono sempre infiniti numeri naturali maggiori di $\frac{1}{\delta}$, quindi 0 è un punto di accumulazione per A.

Verifica che il punto x_0 scritto a fianco all'insieme dato è un punto di accumulazione per l'insieme.

54 $A = \left\{x \mid x = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}, x_0 = 0.$

55 $A = \left\{x \mid x = 2 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}, x_0 = 2.$

56 $A = \left\{x \mid x = \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}, x_0 = \frac{1}{2}.$

57 $A = \left\{x \mid x = \frac{3n+4}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}, x_0 = 3.$

58 $B = \left\{x \mid x = \frac{n+2}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}, x_0 = 1.$

59 $C = \left\{x \mid x = \frac{4n-5}{n-1}, n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}\right\}, x_0 = 4.$

Trova, se esistono, i punti di accumulazione dei seguenti insiemi.

60 $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{4}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$

61 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 8\}$

62 $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 < x < 50\}$

63 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$

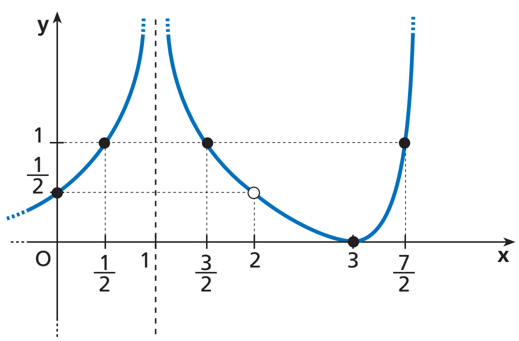
2. LA DEFINIZIONE DI $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

▶ Teoria a pag. 1413

IN PRATICA ▶ Videolezione 63

COMPLETA osservando i grafici di $y = f(x)$.

64



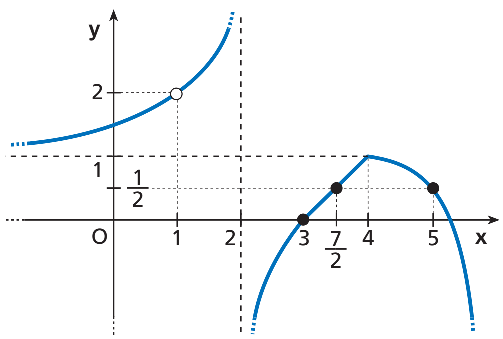
a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ldots\ldots$;

b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \ldots\ldots$;

c) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \ldots\ldots$;

d) $\lim\limits_{x \to \ldots} f(x) = 1$.

65



a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \ldots\ldots$;

b) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \ldots\ldots$;

c) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \ldots\ldots$;

d) $\lim\limits_{x \to \ldots} f(x) = \frac{1}{2}$.

Scrivi in forma simbolica il significato dei seguenti limiti e rappresentali graficamente utilizzando una funzione $f(x)$ scelta a piacere.

66 $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$

67 $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 4$

Che cosa significano le seguenti scritture per la funzione $y = f(x)$?

68 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid \forall x \text{ con } |x| < \delta, x \neq 0, |f(x) - 3| < \varepsilon$.

69 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I(-2) \mid \forall x \in I(-2), x \neq -2, -\varepsilon < f(x) < \varepsilon$.

La verifica di $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

70 **ESERCIZIO GUIDA**

Applicando la definizione di limite, verifichiamo $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+3}{x} = 2$.

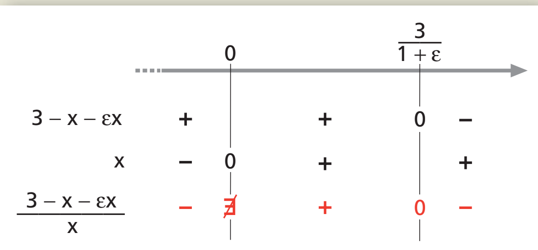
Dobbiamo verificare che, scelto $\varepsilon > 0$, esiste un intorno completo di 3 per ogni x del quale (escluso al più 3) si ha $\left|\dfrac{x+3}{x} - 2\right| < \varepsilon$. Risolviamo la disequazione:

$$\left|\frac{x+3}{x} - 2\right| < \varepsilon \ \rightarrow \ \left|\frac{3-x}{x}\right| < \varepsilon \ \rightarrow \ \begin{cases} \dfrac{3-x}{x} < \varepsilon \\ \dfrac{3-x}{x} > -\varepsilon \end{cases} \ \rightarrow \ \begin{cases} \dfrac{3-x-\varepsilon x}{x} < 0 \\ \dfrac{3-x+\varepsilon x}{x} > 0 \end{cases}$$

Prima disequazione

Numeratore: $3 - x - \varepsilon x > 0 \to -x(1+\varepsilon) > -3 \to$
$\to x(1+\varepsilon) < 3 \to x < \dfrac{3}{1+\varepsilon}$.

Denominatore: $x > 0$.



La prima disequazione ha per soluzioni:

$$x < 0 \vee x > \frac{3}{1+\varepsilon}.$$

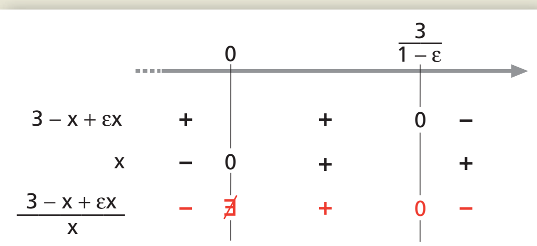
Seconda disequazione

Numeratore: $3 - x + \varepsilon x > 0 \to -x(1-\varepsilon) > -3 \to$
$\to x(1-\varepsilon) < 3$.

Per risolvere questa disequazione occorre dividere entrambi i membri per $1 - \varepsilon$. Poiché ε è arbitrariamente piccolo possiamo supporre $\varepsilon < 1$, ossia $1 - \varepsilon > 0$.

Quindi $x < \dfrac{3}{1-\varepsilon}$.

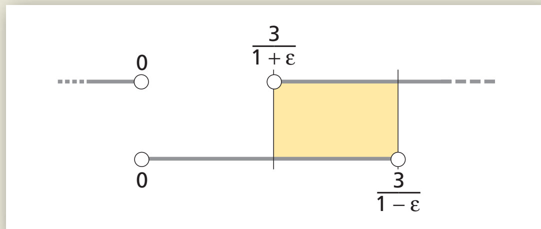
Denominatore: $x > 0$.



La seconda disequazione ha per soluzioni:

$$0 < x < \frac{3}{1-\varepsilon}.$$

Il quadro delle soluzioni del sistema è il seguente:



Le soluzioni sono: $\dfrac{3}{1+\varepsilon} < x < \dfrac{3}{1-\varepsilon}$.

Verifichiamo che l'intervallo trovato è un intorno di 3. Per farlo, controlliamo che per ogni $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere risulti:

$$\frac{3}{1+\varepsilon} < 3 < \frac{3}{1-\varepsilon}.$$

- $\dfrac{3}{1+\varepsilon} < 3 \Leftrightarrow 3 < 3 + 3\varepsilon$

  sempre vera;

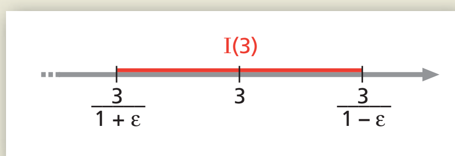
- $3 < \dfrac{3}{1-\varepsilon} \Leftrightarrow 3 - 3\varepsilon < 3$

  sempre vera nell'ipotesi fatta, $\varepsilon < 1$.

Possiamo quindi dire che entrambe le disuguaglianze sono vere per ogni $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere.

Poiché l'intervallo $\left]\dfrac{3}{1+\varepsilon}; \dfrac{3}{1-\varepsilon}\right[$ rappresenta un intorno completo di 3, il limite è verificato.

Graficamente otteniamo:



Utilizzando la definizione, verifica i seguenti limiti.

71 $\lim_{x \to 1} (2 - 3x) = -1$

72 $\lim_{x \to -3} (x + 5) = 2$

73 $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (4x - 1) = 1$

74 $\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5$

75 $\lim_{x \to -2} (4 - x^2) = 0$

76 $\lim_{x \to 0} (x^2 - 3x) = 0$

77 $\lim_{x \to 0} (x^2 - 2x + 1) = 1$

78 $\lim_{x \to 0} (x^3 - 1) = -1$

79 $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

80 $\lim_{x \to 16} \sqrt{x} = 4$

81 $\lim_{x \to 8} \left(\sqrt[3]{x} - 2\right) = 0$

82 $\lim_{x \to -2} \dfrac{x+4}{x} = -1$

83 $\lim_{x \to -2} \dfrac{x}{x+1} = 2$

84 $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2+4}{x} = 4$

85 $\lim_{x \to 8} \sqrt{x+1} = 3$

86 $\lim_{x \to -2} \sqrt{2-x} = 2$

87 $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - 3x + 3}{1 - x} = 2$

88 $\lim_{x \to \frac{2}{3}} [2 + \ln(3x-1)] = 2$

89 $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = 3$

90 $\lim_{x \to 2} \log_{\frac{1}{3}} (3 - x) = 0$

91 $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x} - 1} = 2$

92 $\lim_{x \to 3} \ln(x-2) = 0$

93 $\lim_{x \to 0} e^{-x} = 1$

94 $\lim_{x \to -1} [1 - \log_2(1-x)] = 0$

95 $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{2}} (x+1) = 1$

96 $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x} + x - 3\right) = -1$

97 $\lim_{x \to 3} (4^{-x+3} + 1) = 2$

98 $\lim_{x \to -1} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+x} = 1$

99 $\lim_{x \to 9} 2(\log_3 \sqrt{x} - 5) = -8$

100 $\lim_{x \to 2} \dfrac{1}{\log_2 x} = 1$

101 $\lim_{x \to 0} f(x) = 1, \quad \text{con } f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{se } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

102 $\lim_{x \to 1} \left(1 - 2^{-\frac{1}{x}}\right) = \dfrac{1}{2}$

103 $\lim_{x \to 1} \sqrt{x^2+1} = \sqrt{2}$

104 $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{4x}}{4} = \dfrac{1}{4}$

105 $\lim_{x \to 1} (x^2 + 3x - 1) = 3$

106 $\lim_{x \to 2} \dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{4}$

107 $\lim_{x \to 1} \dfrac{x+3}{x+1} = 2$

108 $\lim_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{2-x}{x}} = 1$

109 State the $\varepsilon - \delta$ definition of the limit, L, of a function, $f(x)$, as x approaches a number, a. Use this definition to prove that:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x+1}{3x-1} = 1.$$

(CAN *University of New Brunswick*, Final Exam, 1997)

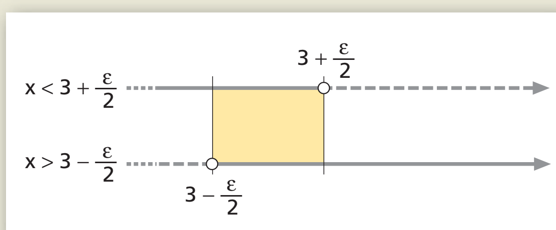
110 **ESERCIZIO GUIDA**

Applicando la definizione di limite verifichiamo che *non* vale $\lim_{x \to 4} (2x+1) = 7$.

Scelto un $\varepsilon > 0$, risolviamo la disequazione $|(2x+1) - 7| < \varepsilon$.
La disequazione data è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 2x - 6 < \varepsilon \\ 2x - 6 > -\varepsilon \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x < 6 + \varepsilon \\ 2x > 6 - \varepsilon \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{6+\varepsilon}{2} \\ x > \dfrac{6-\varepsilon}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 3 + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ x > 3 - \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$



L'intervallo $\left]3 - \dfrac{\varepsilon}{2}; 3 + \dfrac{\varepsilon}{2}\right[$, può non rappresentare un intorno completo di 4 per *qualsiasi* valore di ε.

Per esempio se $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, l'intervallo $\left]3 - \dfrac{1}{4}; 3 + \dfrac{1}{4}\right[$ non è un intorno di 4. Quindi l'uguaglianza $\lim_{x \to 4} (2x+1) = 7$ è falsa. L'intervallo $\left]3 - \dfrac{\varepsilon}{2}; 3 + \dfrac{\varepsilon}{2}\right[$ è invece *sempre* un intorno completo di 3 di raggio $\dfrac{\varepsilon}{2}$, pertanto il limite corretto è $\lim_{x \to 3} (2x+1) = 7$.

Verifica, applicando la definizione, che i seguenti limiti sono *errati*.

111 $\lim\limits_{x \to 0} (2 - 3x) = -7$

112 $\lim\limits_{x \to 0} (2x + 1) = 9$

113 $\lim\limits_{x \to -1} \ln(-x) = 1$

114 $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x} = 0$

115 $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 1) = 1$

116 $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 - 1) = 3$

117 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4 - x^2}{x + 2} = 2$

118 $\lim\limits_{x \to 1} (1 - \ln x) = -1$

119 $\lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{1}{x} - 5\right) = -4$

120 $\lim\limits_{x \to 1} 2^{2-2x} = 2$

Le funzioni continue

121 **ESERCIZIO GUIDA**

Verifichiamo che la funzione $f(x) = 3x - 5$ è continua nel punto $x_0 = 2$.

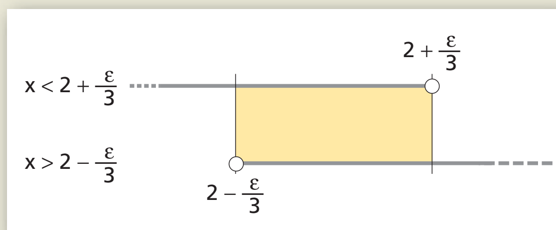
Mostriamo che vale $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$, ossia $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 5) = 1$.

Scelto $\varepsilon > 0$ risolviamo la disequazione $|(3x - 5) - 1| < \varepsilon$ e verifichiamo che fra le sue soluzioni vi sia un intorno di 2:

$$|3x - 6| < \varepsilon \to \begin{cases} 3x - 6 < \varepsilon \\ 3x - 6 > -\varepsilon \end{cases} \to \begin{cases} 3x < 6 + \varepsilon \\ 3x > 6 - \varepsilon \end{cases} \to \begin{cases} x < \dfrac{6 + \varepsilon}{3} \\ x > \dfrac{6 - \varepsilon}{3} \end{cases} \to \begin{cases} x < 2 + \dfrac{\varepsilon}{3} \\ x > 2 - \dfrac{\varepsilon}{3} \end{cases}$$

Le soluzioni sono: $2 - \dfrac{\varepsilon}{3} < x < 2 + \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Poiché l'intervallo $\left]2 - \dfrac{\varepsilon}{3}; 2 + \dfrac{\varepsilon}{3}\right[$ rappresenta un intorno completo di 2, il limite è verificato e quindi la funzione data è continua nel punto considerato.



Verifica, applicando la definizione, che le seguenti funzioni sono continue nel punto indicato a fianco.

122 $f(x) = -4x + 1, \quad x_0 = -1.$

123 $f(x) = x^2 - 2x, \quad x_0 = 1.$

124 $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4.$

125 $f(x) = x^3 + 1, \quad x_0 = 1.$

126 $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 2, \quad x_0 = -1.$

127 $f(x) = 4^x, \quad x_0 = 0.$

128 $f(x) = \log_2 x, \quad x_0 = 4.$

129 $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, \quad x_0 = -2.$

130 $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = 2.$

131 $f(x) = \dfrac{x}{2x - 1}, \quad x_0 = 1.$

132 Verifica con la definizione che la funzione

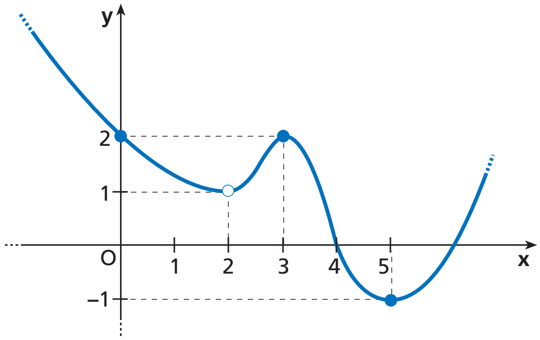
$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

non è continua in $x_0 = 2$.

Il limite per eccesso e il limite per difetto

133 **VERO O FALSO?**

Data la funzione $f(x)$ rappresentata in figura, puoi dire che:



a) $\lim_{x \to 3} f(x) = 2^-$. V F

b) $\lim_{x \to 2} f(x) = 1^+$. V F

c) $\lim_{x \to 0} f(x) = 2^+$. V F

d) $\lim_{x \to 5} f(x) = -1^-$. V F

134 Rappresenta graficamente una funzione $y = f(x)$ per la quale siano veri i seguenti limiti.

$\lim_{x \to -2} f(x) = -\frac{1}{2}^+$; $\lim_{x \to 1} f(x) = 1^+$;

$\lim_{x \to 0} f(x) = 3^-$; $\lim_{x \to 2} f(x) = -2^+$.

Scrivi in forma simbolica il significato dei seguenti limiti.

135 $\lim_{x \to 1} f(x) = 2^-$; $\lim_{x \to -2} f(x) = -1^+$.

136 $\lim_{x \to 0} f(x) = -1^-$; $\lim_{x \to 4} f(x) = 2^+$.

La verifica

137 **ESERCIZIO GUIDA**

Applicando la definizione di limite, verifichiamo che $\lim_{x \to 0} (-x^2 + 4) = 4^-$.

Dobbiamo verificare che, scelto $\varepsilon > 0$, esiste un intorno di 0 per ogni $x \neq 0$ del quale si ha:

$$4 - \varepsilon < -x^2 + 4 < 4.$$

Risolviamo:

$$-\varepsilon < -x^2 < 0 \quad \rightarrow \quad 0 < x^2 < \varepsilon \quad \rightarrow \quad -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon}.$$

La disequazione è verificata in un intorno completo di 0, pertanto il limite è verificato.

Applicando la definizione, verifica i seguenti limiti.

138 $\lim_{x \to 1} (-x^2 + 2x) = 1^-$

139 $\lim_{x \to 3} (-x^2 + 6x - 9) = 0^-$

140 $\lim_{x \to 0} (|x| + 3) = 3^+$

141 $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 + 1} = 1^+$

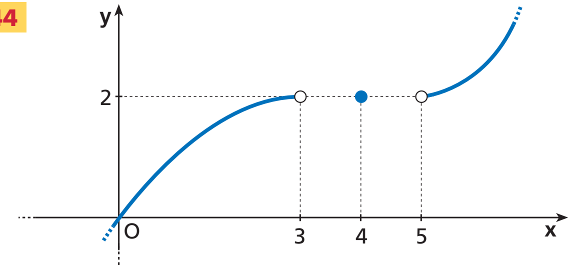
142 $\lim_{x \to 3} (x^2 - 6x + 7) = -2^+$

143 $\lim_{x \to 0} (\sqrt{|x|} + 1) = 1^+$

Il limite destro e il limite sinistro

COMPLETA **Dal grafico della funzione $y = f(x)$ deduci i limiti indicati, quando esistono.**

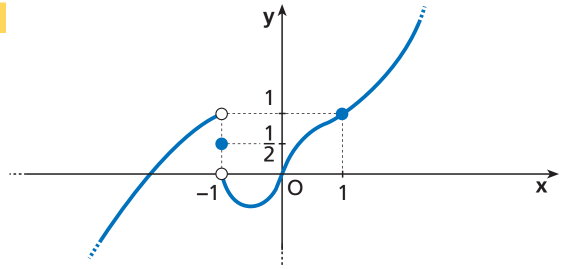
144



a) $\lim_{x \to 4} f(x) = \ldots\ldots$; c) $\lim_{x \to 3} f(x) = \ldots\ldots$;

b) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \ldots\ldots$; d) $\lim_{x \to 5^-} f(x) = \ldots\ldots$.

145



a) $\lim_{x \to -1} f(x) = \ldots\ldots$; c) $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \ldots\ldots$;

b) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \ldots\ldots$; d) $\lim_{x \to 1} f(x) = \ldots\ldots$.

Rappresenta graficamente una funzione $y = f(x)$ per la quale siano veri i seguenti limiti.

146 $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$; $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$.

147 $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$.

Scrivi in forma simbolica il significato dei seguenti limiti.

148 $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -4$; $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 1$.

149 $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \to 5^-} f(x) = 2$.

Che cosa significano le seguenti scritture per la funzione $y = f(x)$?

150 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \,|\, \forall x \text{ con } 1 < x < 1 + \delta, |2 - f(x)| < \varepsilon$.

151 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \,|\, \forall x \text{ con } -2 - \delta < x < -2, x \neq -2, |f(x) + 5| < \varepsilon$.

152 Data la funzione $y = f(x)$, il cui dominio è $D = \{1, 2\} \cup [7; 10[$, indica se è possibile calcolare:
a) $\lim_{x \to 2} f(x)$; b) $\lim_{x \to 7^+} f(x)$; c) $\lim_{x \to 10^-} f(x)$.
Motiva le risposte.

La verifica di $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$

153 **ESERCIZIO GUIDA**

Applicando la definizione di limite, verifichiamo che $\lim_{x \to 2^-} (3^x - 1) = 8$.

Dobbiamo verificare che, scelto $\varepsilon > 0$, esiste un intorno sinistro di 2 per ogni x del quale si ha $|(3^x - 1) - 8| < \varepsilon$. Risolviamo la disequazione:

$$|(3^x - 1) - 8| < \varepsilon \quad \to \quad -\varepsilon < 3^x - 9 < \varepsilon \quad \to \quad 9 - \varepsilon < 3^x < 9 + \varepsilon.$$

Poiché la funzione logaritmo in base 3 è strettamente crescente, possiamo applicarla a tutti i membri della disequazione e conservare il verso della disuguaglianza

$$\log_3 (9 - \varepsilon) < \log_3 3^x < \log_3 (9 + \varepsilon).$$

Poiché pensiamo a valori di ε scelti piccoli a piacere, è lecito considerare $\varepsilon < 9$, in modo che sia definito $\log_3(9 - \varepsilon)$.

Per la definizione di logaritmo si ha $\log_3 3^x = x$, quindi otteniamo:

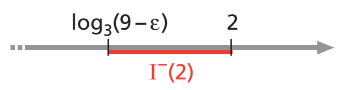
$$\log_3(9 - \varepsilon) < x < \log_3(9 + \varepsilon).$$

Osserviamo che:

$$\log_3(9 - \varepsilon) < \log_3 9 \quad \rightarrow \quad \log_3(9 - \varepsilon) < 2$$

$$\log_3(9 + \varepsilon) > \log_3 9 \quad \rightarrow \quad \log_3(9 + \varepsilon) > 2.$$

Quindi la disequazione è verificata in un intorno completo di 2. In particolare, è verificata in un suo sottoinsieme, ossia l'intorno sinistro di 2: $]\log_3(9 - \varepsilon); 2[$. Pertanto il limite è verificato.



Applicando la definizione, verifica i seguenti limiti.

154 $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

155 $\lim\limits_{x \to -1^-} (2x + 3) = 1$

156 $\lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{2 - x} = 0$

157 $\lim\limits_{x \to 2^-} (1 - 2x) = -3$

158 $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x} = 0$

159 $\lim\limits_{x \to 0^+} (x + \sqrt{x}) = 0^+$

160 $\lim\limits_{x \to 3^+} e^{\frac{2}{3-x}} = 0^+$

161 $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} = -1$

162 $\lim\limits_{x \to 3^+} (2 - 3x) = -7$

163 $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{se } x \geq 1 \\ 2 - x & \text{se } x < 1 \end{cases}$, $\quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -2$, $\quad \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$.

164 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$, $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$, $\quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$.

165 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 4 \\ x - 2 & \text{se } x < 4 \end{cases}$, $\quad \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 2$, $\quad \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 2$.

166 $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 2x}{|x|} = -2$

167 $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5$

168 $\lim\limits_{x \to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 0^+$

169 $\lim\limits_{x \to 0^-} (2 - \sqrt{-x}) = 2$

170 $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 - 2x}{|x|} = 2$

171 $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x} = 0^+$

172 Verifica che $\lim\limits_{x \to 0^+} (\sqrt{x} - 1) = 1$ è *errato*.

Rappresenta le seguenti funzioni utilizzando le trasformazioni geometriche. Deduci poi dal grafico i limiti indicati a fianco e verificali mediante la relativa definizione.

173 $f(x) = \dfrac{|x|(x - 1)}{x} + 1$, $\quad \lim\limits_{x \to 0^\pm} f(x)$.

174 $f(x) = -\ln(x + 1)$, $\quad \lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

175 $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 2x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$, $\quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

176 $f(x) = |\sqrt{x} - 1|$, $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\quad \lim\limits_{x \to 1^\pm} f(x)$.

Verifica che le seguenti funzioni sono continue nei punti segnati a fianco, utilizzando la definizione di funzione continua.

177 $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -2x + 2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$, $\quad x_0 = 1.$

178 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x & \text{se } x > 0 \end{cases}$, $\quad x_0 = 0.$

179 $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{x - 1} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, $\quad x_0 = 2.$

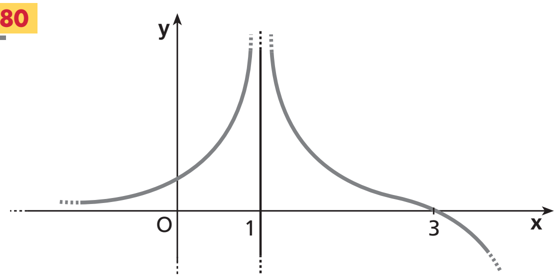
3. LA DEFINIZIONE DI $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

▶ Teoria a pag. 1420

IN PRATICA
▶ Videolezione 64

COMPLETA **Dal grafico della funzione $y = f(x)$ deduci i limiti indicati.**

180

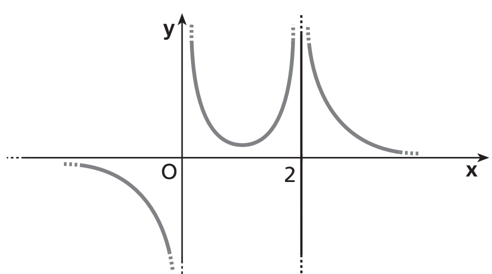


a) $\lim_{x \to 1} f(x) = \ldots$;

b) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \ldots$;

c) $\lim_{x \to 3} f(x) = \ldots$.

181



a) $\lim_{x \to 0} f(x) = \ldots$;

b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \ldots$;

c) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \ldots$;

d) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ldots$;

e) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \ldots$.

Rappresenta graficamente una funzione $y = f(x)$ per la quale siano veri i seguenti limiti.

182 $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty.$

183 $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1^-.$

Scrivi in forma simbolica il significato dei seguenti limiti.

184 $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty.$

185 $\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \infty.$

Che cosa significa la seguente scrittura, per la funzione $y = f(x)$?

186 $\forall M > 0\ \exists I(-4) | \forall x \in I(-4), x \neq -4, f(x) < -M.$

187 $\forall M > 0\ \exists I(0) | \forall x \in I(0), x \neq 0, |f(x)| > M.$

188 $\forall M > 0\ \exists \delta > 0 | \forall x \text{ con } 1 < x < 1 + \delta, f(x) > M.$

La verifica di $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

189 **ESERCIZIO GUIDA**

Applicando la definizione, verifichiamo che $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{(x-4)^2} = +\infty$.

Dobbiamo verificare che, scelto $M > 0$, arbitrariamente grande, esiste un intorno completo di 4 per ogni x del quale, con l'esclusione al più di 4, si ha:

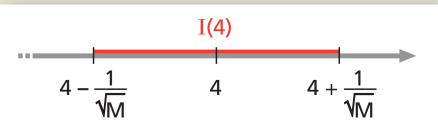
$$\frac{1}{(x-4)^2} > M.$$

Poiché $(x-4)^2 > 0$ per ogni $x \neq 4$, possiamo passare ai reciproci invertendo il verso della disuguaglianza:

$$(x-4)^2 < \frac{1}{M} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{M}} < x - 4 < \frac{1}{\sqrt{M}} \quad \rightarrow \quad 4 - \frac{1}{\sqrt{M}} < x < 4 + \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Escluso $x = 4$, l'intervallo $\left]4 - \dfrac{1}{\sqrt{M}}; 4 + \dfrac{1}{\sqrt{M}}\right[$ è un intorno completo di 4 in cui il valore della funzione è maggiore di M, quindi il limite è verificato.

L'intorno è circolare e ha raggio $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$.



Verifica i seguenti limiti, applicando la definizione.

190 $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\dfrac{1}{x}} = +\infty$

191 $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{1}{(x-7)^2} = +\infty$

192 $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{2}{x}} = +\infty$

193 $\lim\limits_{x \to 0^+} (-\ln x) = +\infty$

194 $\lim\limits_{x \to 0} \ln \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

195 $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{1}{(2x-1)^2} = +\infty$

196 $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x^2 - 4} = +\infty$

197 $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{\sqrt{2-x}} = +\infty$

198 $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{5}{(x-5)^4} = +\infty$

199 $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2}{(x+3)^2} = +\infty$

200 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{(x-1)^2} = +\infty$

201 $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{1}{x-2} + 1\right) = +\infty$

202 $\lim\limits_{x \to 0} 2^{\frac{1}{|x|}} = +\infty$

203 $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x}{4-x} = +\infty$

204 $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{4 - x^2} = +\infty$

205 $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{5+2x}{-x} = +\infty$

206 $\lim\limits_{x \to 1^+} \log_3 \dfrac{1}{x^2 - 1} = +\infty$

207 $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2-x}} = +\infty$

208 $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\sqrt{\frac{1}{x}}} = +\infty$

209 $\lim\limits_{x \to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$

210 $\lim\limits_{x \to -1^+} \log\left(\dfrac{2}{x+1}\right) = +\infty$

La verifica di $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

211 **ESERCIZIO GUIDA**

Verifichiamo che $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-2}{|x-2|} = -\infty$, mediante la definizione.

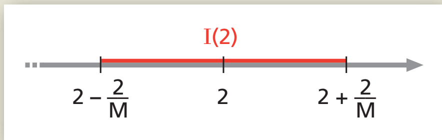
Dobbiamo verificare che, scelto $M > 0$, arbitrariamente grande, esiste un intorno completo di 2 per ogni x del quale, escluso al più 2, si ha $\frac{-2}{|x-2|} < -M$:

$$\frac{-2}{|x-2|} < -M \quad \to \quad \frac{2}{|x-2|} > M.$$

Poiché $|x-2| > 0$ per $x \neq 2$, possiamo passare ai reciproci invertendo il verso della disuguaglianza:

$$\frac{|x-2|}{2} < \frac{1}{M} \quad \to \quad -\frac{2}{M} < x-2 < \frac{2}{M} \quad \to \quad 2-\frac{2}{M} < x < 2+\frac{2}{M}.$$

Per ogni x, escluso $x = 2$, dell'intorno completo $\left]2-\frac{2}{M}; 2+\frac{2}{M}\right[$ di 2, il valore della funzione è minore di $-M$, quindi il limite è verificato. L'intorno è circolare e ha raggio $\delta = \frac{2}{M}$.



Verifica i seguenti limiti, applicando la definizione.

212 $\lim\limits_{x \to 0} -\frac{1}{3x^4} = -\infty$

213 $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^-} \frac{1}{4x^2-9} = -\infty$

214 $\lim\limits_{x \to -1} \frac{-1}{x^2+2x+1} = -\infty$

215 $\lim\limits_{x \to 1^-} \log_2(1-x) = -\infty$

216 $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$

217 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{|x|} = -\infty$

218 $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x}-1} = -\infty$

219 $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln(1-x^2) = -\infty$

220 $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$

221 $\lim\limits_{x \to 4} \log_2|x-4| = -\infty$

222 $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln\sqrt{1-x} = -\infty$

223 $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{2-2^x} = -\infty$

224 $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x}-1} = -\infty$

225 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2}{1-x^3} = \infty$

226 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{\ln x} = \infty$

227 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{4^x-4} = \infty$

228 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1-e^{2x}} = \infty$

229 $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{2-x} = -\infty$

230 $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-2}{x^3} = -\infty$

231 $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2+1}{1-x^2} = -\infty$

232 $\lim\limits_{x \to 1^+} \log(x-1) = -\infty$

Verifica *che* sono *errati* i seguenti limiti.

233 $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x}{x^2+2x} = +\infty$

234 $\lim\limits_{x \to 4^+} \frac{-2}{\sqrt{x-4}} = +\infty$

235 $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln\frac{1}{x} = -\infty$

Controlla, mediante il procedimento di verifica, *se* i seguenti limiti sono *errati*.

236 $\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{3}{x-4} = +\infty$

237 $\lim\limits_{x \to -2} \frac{1}{(2-x)^2} = -\infty$

238 $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty$

239 $\lim\limits_{x \to 2} \frac{-x}{2-x} = -\infty$

240 $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{2}{x}} = +\infty$

241 $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni, deduci dai grafici i limiti nei punti indicati a fianco ed esegui la verifica.

242 $y = \ln x - 1$, in $x = 0$, limite destro.

243 $y = \frac{2}{x-1}$, in $x = 1$.

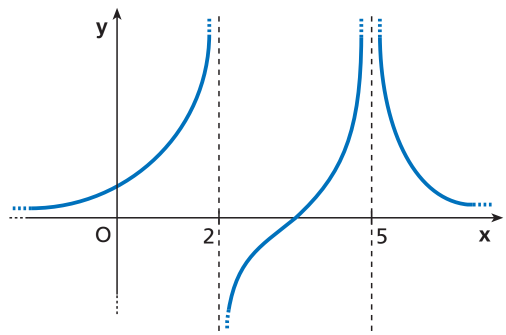
244 $y = \frac{1}{|x|}$, in $x = 0$.

245 $y = \left|\frac{x-1}{x}\right|$, in $x = 0$, limite destro.

Gli asintoti verticali

246 Utilizzando il linguaggio dei limiti, scrivi che la funzione $y = f(x)$ ha un asintoto verticale di equazione $x = -1$.

247 La funzione rappresentata dal grafico della figura ha due asintoti verticali. Scrivi le loro equazioni e i limiti che li esprimono.



248 **ESERCIZIO GUIDA**

Verifichiamo che la funzione $f(x) = \dfrac{1}{\ln \dfrac{1}{x}}$ ha un asintoto verticale in $x = 1$.

Deve essere $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\ln \dfrac{1}{x}} = \infty$ (eventualmente anche soltanto il limite destro o il limite sinistro).

Verifichiamo che, scelto $M > 0$, arbitrariamente grande, esiste un intorno di 1 per ogni x del quale, escluso 1, si ha:

$$\left|\frac{1}{\ln \frac{1}{x}}\right| > M, \text{ cioè } \left|\ln \frac{1}{x}\right| < \frac{1}{M}.$$

Poiché $\left|\ln \dfrac{1}{x}\right| = |\ln x^{-1}| = |-\ln x| = |\ln x|$, si ha:

$$|\ln x| < \frac{1}{M} \to -\frac{1}{M} < \ln x < \frac{1}{M} \to$$

$$\to \ln e^{-\frac{1}{M}} < \ln x < \ln e^{\frac{1}{M}} \to e^{-\frac{1}{M}} < x < e^{\frac{1}{M}}.$$

Essendo $1 = e^0$, possiamo affermare che l'intervallo delle soluzioni è un intorno completo di 1, quindi $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\ln \dfrac{1}{x}} = \infty$ e $x = 1$ è asintoto verticale della funzione.

In alternativa possiamo risolvere separatamente le disequazioni

$$\frac{1}{\ln \frac{1}{x}} > M \quad \text{e} \quad \frac{1}{\ln \frac{1}{x}} < -M,$$

ottenendo come soluzioni rispettivamente un intorno sinistro e un intorno destro di 1, e verificando così che $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.

Verifica che le seguenti funzioni hanno un asintoto verticale nei punti indicati a fianco.

249 $y = \dfrac{2}{(x-1)^2}$, in $x = 1$.

250 $y = \dfrac{1}{\ln x}$, in $x = 1$.

251 $y = \dfrac{2}{\sqrt{x} - 2}$, in $x = 4$.

252 $y = \dfrac{x-3}{x^2 - x}$, in $x = 0$.

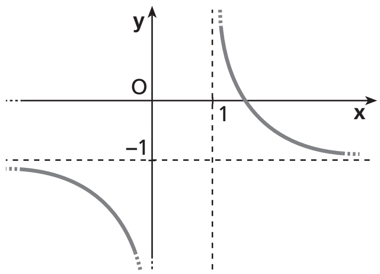
253 $y = 1 + e^{\frac{1}{x}}$, in $x = 0$, asintoto destro.

4. LA DEFINIZIONE DI $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$

▶ Teoria a pag. 1425

COMPLETA osservando il grafico della funzione $y = f(x)$.

254

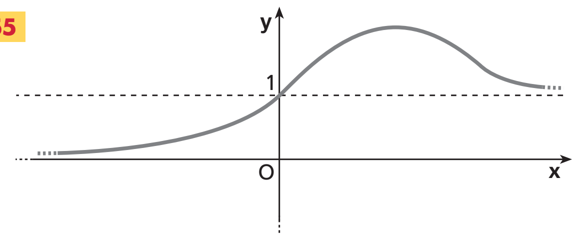


a) $\lim\limits_{x \to \ldots} f(x) = -1^-$;

b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ldots$;

c) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \ldots$.

255



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ldots$;

c) $\lim\limits_{x \to \ldots} f(x) = 1$.

256 In ognuno dei seguenti casi rappresenta graficamente una funzione $y = f(x)$ per la quale siano veri il limite o i limiti indicati.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3^-$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1^+$; c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2^+$; d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1^-$.

257 Scrivi in forma simbolica il significato dei seguenti limiti.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$; c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -2$.

Che cosa significa la seguente scrittura, per la funzione $y = f(x)$?

258 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists c > 0 \mid \forall x > c, |f(x) - 2| < \varepsilon$.

259 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists c > 0 \mid \forall x < -c, |f(x) + 1| < \varepsilon$.

260 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists c > 0 \mid \forall x \text{ con } |x| > c, |f(x)| < \varepsilon$.

261 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists c > 0 \mid \forall x > c, |f(x)| < \varepsilon$.

262 Spiega perché non è possibile calcolare i seguenti limiti.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4 - x^2}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 - x)$.

La verifica di $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

263 **ESERCIZIO GUIDA**

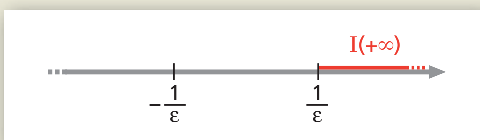
Applicando la definizione di limite, verifichiamo che $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + 1}{x} = 3$.

Scelto $\varepsilon > 0$, dobbiamo verificare che esiste un intorno di $+\infty$ per ogni x del quale si ha: $\left| \dfrac{3x + 1}{x} - 3 \right| < \varepsilon$.

Risolviamo la disequazione, con $x \neq 0$:

$$\left| \frac{3x + 1 - 3x}{x} \right| < \varepsilon \rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \rightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow$$

$$\rightarrow x < -\frac{1}{\varepsilon} \vee x > \frac{1}{\varepsilon}.$$



La disequazione è verificata in particolare per $x > \dfrac{1}{\varepsilon}$, cioè per ogni x dell'intorno $\left] \dfrac{1}{\varepsilon}; +\infty \right[$ di $+\infty$: il limite è verificato.

Mediante la definizione, verifica i seguenti limiti.

264 $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x+10} = 0$

265 $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x-1}{2x+1} = 2$

266 $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{x}} = 0$

267 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = 1$

268 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$

269 $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x-1}{2^x} = 1$

270 $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{|x|+1} = -3$

271 $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = 0$

272 $\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x}{x-1} = 0$

273 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$

274 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = 0$

275 $\lim_{x\to+\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 1\right] = 1$

La verifica di $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$

276 **ESERCIZIO GUIDA**

Mediante la definizione, verifichiamo che $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$.

Dobbiamo verificare che, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un intorno di $-\infty$ per ogni x del quale si ha $|e^{2x} - 0| < \varepsilon$. Risolviamo la disequazione:

$$|e^{2x}| < \varepsilon.$$

Poiché $e^{2x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, possiamo togliere il valore assoluto:

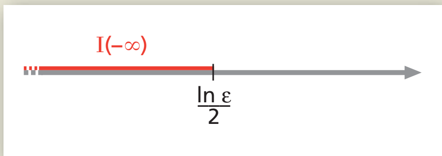
$$e^{2x} < \varepsilon.$$

Applichiamo il logaritmo in base e a entrambi i membri. Poiché la base è $e > 1$, se $a < b$ allora $\ln a < \ln b$, quindi:

$$\ln e^{2x} < \ln\varepsilon.$$

Per la definizione di logaritmo si ha che $\ln e^{2x} = 2x$, quindi:

$$2x < \ln\varepsilon \quad \to \quad x < \frac{\ln\varepsilon}{2}.$$



La disequazione è vera per ogni x dell'intervallo $\left]-\infty; \frac{\ln\varepsilon}{2}\right[$, che è un intorno di $-\infty$; quindi il limite è verificato.

Mediante la definizione, verifica i seguenti limiti.

277 $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{2x+1} = 0$

278 $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{2x^3} = \frac{1}{2}$

279 $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{1-2x} = -\frac{3}{2}$

280 $\lim_{x\to-\infty} e^{-2+x} = 0$

281 $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$

282 $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\ln(-x)} = 0$

283 $\lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{e^{|x|}} = 0$

284 $\lim_{x\to-\infty} 2e^{-4x^2} = 0$

285 $\lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = 0$

Verifica i seguenti limiti mediante le relative definizioni.

286 $\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x} = 1$

287 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+$

288 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) = -1$

289 $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1$

290 $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

291 $\lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{x} = 1$

292 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$

293 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_2 x + 1}{\log_2 x} = 1$

294 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|+1} = 1$

295 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\log_2 x} = 0$

296 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^2-2x}{x^2+x-1} = -2$

297 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{e^{x-2}}\right) = 2$

298 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{3^{x^2}} = 0$

299 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\sqrt{|x|}} = 0^+$

300 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$

301 $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{\frac{1}{x-1}} = 1$

302 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\log_3 |x|}\right) = 1$

303 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + e^{\frac{1}{|x|}}\right) = 2$

304 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^3-1} = 0$

305 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1,$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+1} & \text{se } x<0 \\ \dfrac{2x}{x+1} & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$$

Verifica che i seguenti limiti sono *errati*.

306 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2^x} = 1$

307 $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x) = 0$

308 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2|x|-3} = 2$

Gli asintoti orizzontali

309 ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo che la funzione $y = \frac{1}{\ln(x-1)}$ ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.

Dobbiamo verificare che tende a 0 il limite della funzione per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$ (o per entrambi). Poiché il dominio della funzione è $]1; 2[\cup]2; +\infty[$, la verifica si restringe al caso in cui $x \to +\infty$.

Fissato $\varepsilon > 0$, cerchiamo un intorno di $+\infty$ per ogni x del quale si abbia $\left|\frac{1}{\ln(x-1)} - 0\right| < \varepsilon$. Risolviamo la disequazione:

$$\left|\frac{1}{\ln(x-1)}\right| < \varepsilon \quad \to \quad |\ln(x-1)| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Preso $x > 2$, possiamo eliminare il valore assoluto, essendo $\ln(x-1) > 0$:

$$\ln(x-1) > \frac{1}{\varepsilon} \quad \to \quad \ln(x-1) > \ln e^{\frac{1}{\varepsilon}} \quad \to \quad x-1 > e^{\frac{1}{\varepsilon}} \quad \to \quad x > 1 + e^{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

$\left]1 + e^{\frac{1}{\varepsilon}}; +\infty\right[$ è l'intorno di $+\infty$ cercato, quindi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x-1)} = 0$ e $y = 0$ è asintoto orizzontale della funzione.

310 Rappresenta la funzione $y = \frac{x}{1-x}$. Verifica, mediante la definizione di limite, che la funzione ha un asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$, sia per $x \to -\infty$.

311 Verifica che la funzione $y = \ln\left(1 + \frac{1}{|x|}\right)$ ha come asintoto orizzontale la retta di equazione $y = 0$ sia per $x \to +\infty$, sia per $x \to -\infty$.

312 Verifica che la funzione $y = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ ha come asintoto orizzontale la retta di equazione $y = 2$, per $x \to +\infty$.

313 Verifica che la funzione $y = \frac{2|x|-1}{x}$ ha come asintoto orizzontale la retta di equazione $y = 2$. La funzione ha altri asintoti orizzontali? [sì, $y = -2$]

Stabilisci *se* le seguenti funzioni ammettono come asintoti orizzontali le rette le cui equazioni sono indicate a fianco.

314 $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, $y = 1$ per $x \to +\infty$. [sì]

315 $y = \dfrac{x}{1+x} - \dfrac{1}{1-x}$, $y = 1$ per $x \to \pm\infty$. [sì]

316 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x}$, $y = 0$ per $x \to +\infty$. [no]

317 $y = \dfrac{1}{x-3}$, $y = 0$ per $x \to \pm\infty$. [sì]

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni e verifica l'esistenza di un asintoto orizzontale mediante la definizione di limite.

318 $y = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

319 $y = \dfrac{2}{x-1}$

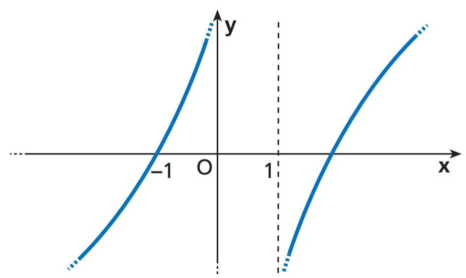
320 $y = \dfrac{1}{|x|-1}$

5. LA DEFINIZIONE DI $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Teoria a pag. 1428

COMPLETA osservando il grafico della funzione $y = f(x)$.

321

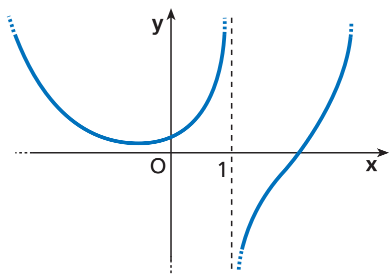


a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ldots$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots$;

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \ldots$.

322



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ldots$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots$;

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \ldots$.

Scrivi in forma simbolica il significato dei seguenti limiti.

323 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

324 $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} \ln|1-x| = +\infty$.

Che cosa significa la seguente scrittura, per la funzione $f(x)$?

325 $\forall M > 0 \ \exists c > 0 \,|\, \forall x$ con $x > c$, $f(x) < -M$.

326 $\forall M > 0 \ \exists c > 0 \,|\, \forall x < -c$, $f(x) > M$.

Bergamini, Trifone, Barozzi MATEMATICA.BLU - Vol.5 © Zanichelli 2012 con Maths in English

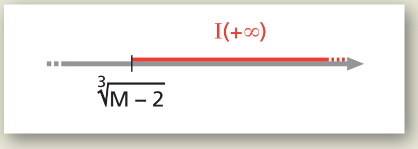
La verifica

327 **ESERCIZIO GUIDA**

Verifichiamo i limiti: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 2) = +\infty$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 + 2x^2}{x} = -\infty$; c) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 + 1) = +\infty$.

a) Dobbiamo verificare che, scelto $M > 0$, esiste un intorno di $+\infty$ per ogni x del quale si ha $x^3 + 2 > M$. Risolviamo la disequazione:

$$x^3 + 2 > M \quad \rightarrow \quad x^3 > M - 2 \quad \rightarrow \quad x > \sqrt[3]{M - 2}.$$



L'insieme delle soluzioni è l'intorno di $+\infty$, $]\sqrt[3]{M-2}; +\infty[$, quindi il limite è verificato.

b) Scelto $M > 0$, dobbiamo determinare un intorno di $-\infty$ per ogni x del quale si abbia $\dfrac{1 + 2x^2}{x} < -M$. Risolviamo la disequazione:

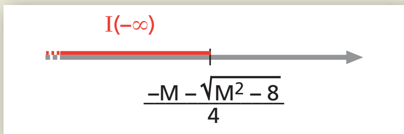
$$\frac{1 + 2x^2}{x} < -M \quad \rightarrow \quad \frac{1 + 2x^2}{x} + M < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1 + 2x^2 + Mx}{x} < 0.$$

Poiché $x \rightarrow -\infty$, supponiamo $x < 0$; quindi, per verificare la disequazione, basta che sia positivo il numeratore:

$$2x^2 + Mx + 1 > 0.$$

Nell'equazione associata, poiché M è scelto arbitrariamente grande, supponiamo $M^2 > 8$ e quindi $M^2 - 8 > 0$. Si ottiene quindi:

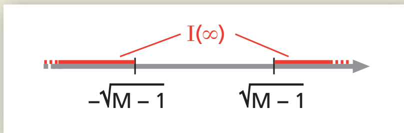
$$x < \frac{-M - \sqrt{M^2 - 8}}{4} \quad \vee \quad x > \frac{-M + \sqrt{M^2 - 8}}{4}.$$



Considerato $x < 0$, abbiamo che per ogni x dell'intervallo $\left]-\infty; \dfrac{-M - \sqrt{M^2 - 8}}{4}\right[$, che è un intorno di $-\infty$, è vera la condizione iniziale, quindi il limite è verificato.

c) Scelto $M > 0$, cerchiamo un intorno di ∞, per ogni x del quale si abbia $x^2 + 1 > M$. Risolviamo la disequazione, per la quale, supponendo $M > 1$, otteniamo:

$$x^2 + 1 > M \quad \rightarrow \quad x^2 > M - 1 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad x < -\sqrt{M - 1} \vee x > \sqrt{M - 1}.$$



Per ogni x dell'intorno $]-\infty; -\sqrt{M-1}[\, \cup \,]\sqrt{M-1}; +\infty[$ di ∞ è vera la condizione $x^2 + 1 > M$, quindi il limite è verificato.

Verifica i seguenti limiti mediante le relative definizioni.

328 $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 3) = +\infty$

329 $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$

330 $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3) = -\infty$

331 $\lim\limits_{x \to \infty} \ln \dfrac{|x|}{2} = +\infty$

332 $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{2 + x^2} = +\infty$

333 $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$

334 $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 1) = +\infty$

335 $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{x-4} = +\infty$

336 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2} = +\infty$

337 $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^3-1} = +\infty$

338 $\lim_{x\to+\infty} (\log_2 x - 2) = +\infty$

339 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{3} = +\infty$

340 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x} = +\infty$

341 $\lim_{x\to-\infty} (x^2+3) = +\infty$

342 $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2-x} = +\infty$

343 $\lim_{x\to-\infty} (x-x^2) = -\infty$

344 $\lim_{x\to-\infty} (-\log_2 x^2) = -\infty$

345 $\lim_{x\to+\infty} (2+2^{2x}) = +\infty$

346 $\lim_{x\to+\infty} (4-2|x|) = -\infty$

347 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{x} = -\infty$

348 $\lim_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{3}}(x+4) = -\infty$

349 $\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{2}{x-1} = -\infty$

350 $\lim_{x\to\infty} [1-\ln(1+x^2)] = -\infty$

351 $y = \begin{cases} 2x^3-1 & \text{se } x \le 1 \\ \ln(x-1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$, $\lim_{x\to\pm\infty} y = \pm\infty$

352 $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-2x^2}{3x} = +\infty$

353 $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2} = +\infty$

354 $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+2}+x) = +\infty$

355 $\lim_{x\to-\infty} (x-\sqrt{-x}) = -\infty$

356 $\lim_{x\to+\infty} \log\frac{1}{x} = -\infty$

Verifica che i seguenti limiti sono *errati*.

357 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = -\infty$

358 $\lim_{x\to-\infty} 2^{x-4} = -\infty$

359 $\lim_{x\to-\infty} [\ln(-x)+1] = -\infty$

Controlla, mediante il procedimento di verifica, *se* i seguenti limiti sono *errati*.

360 $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-4} = +\infty$

361 $\lim_{x\to-\infty} (x-x^2) = +\infty$

362 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{e^x}+1\right) = -\infty$

363 $\lim_{x\to-\infty} \ln\frac{1}{1-x} = -\infty$

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni, deduci dai grafici i limiti indicati a fianco ed esegui la verifica.

364 $y = \sqrt{x-1}$, $\quad \lim_{x\to+\infty} y$.

365 $y = -\ln(x+2)$, $\quad \lim_{x\to+\infty} y$.

366 $y = \begin{cases} x^2-1 & \text{se } x > 0 \\ -e^{-x} & \text{se } x \le 0 \end{cases}$, $\quad \lim_{x\to-\infty} y$, $\lim_{x\to+\infty} y$.

ESERCIZI VARI La definizione di limite

TEST

367 Se $\forall M > 10^{20}$ esiste un intorno di $x = 2$ tale che $f(x) - 3 + M < 0$, allora:

A $\lim_{x\to 3} [f(x)-2] = -\infty$.

B $\lim_{x\to 2} [f(x)-3] = +\infty$.

C $\lim_{x\to 2} [f(x)-3] = -\infty$.

D $\lim_{x\to 3} [2-f(x)] = -\infty$.

E $\lim_{x\to 2} [3-f(x)] = -\infty$.

368 Se $\forall a > 0$ la disequazione $|f(x)+5| < a$ è verificata per $x > 1 + \frac{3}{a}$, allora:

A $\lim_{x\to+\infty} [f(x)+5] = 0$.

B $\lim_{x\to 5} f(x) = 1$.

C $\lim_{x\to 1} [f(x)+5] = +\infty$.

D $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -5$.

E $\lim_{x\to 1^+} [f(x)+5] = +\infty$.

369 Risolvendo la disequazione $(x+1)^2 < \varepsilon$, puoi verificare *uno solo* fra i seguenti limiti. Quale?

A $\lim_{x \to -1} (x^2 + 2x) = -1$

B $\lim_{x \to 0} (x^2 + 2x + 1) = 1$

C $\lim_{x \to 1} (x^2 + 2x) = 3$

D $\lim_{x \to 0} (x^2 + 2x) = 0$

E Nessuno dei precedenti.

370 Se $\forall \varepsilon > 0$ la disequazione $|f(x) - 2| < \varepsilon$ è verificata per $x < 3 - \frac{1}{\varepsilon}$, allora:

A $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3.$

B $\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty.$

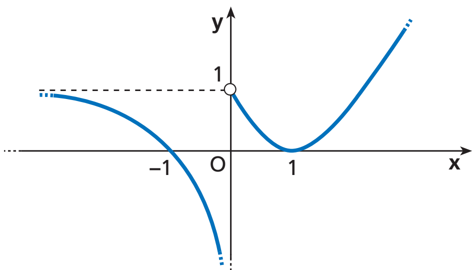
C $\lim_{x \to +\infty} [f(x) + 2] = 0.$

D $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - 2] = 0.$

E $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2.$

Dal grafico della funzione $y = f(x)$ deduci, se esistono, i limiti indicati.

371



a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$;

b) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$;

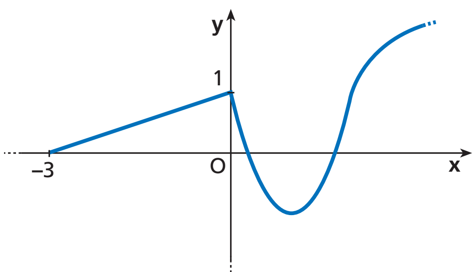
c) $\lim_{x \to 1} f(x)$;

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$;

e) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

Esprimi mediante la definizione i casi a), b), d).

372



a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$;

b) $\lim_{x \to -3^-} f(x)$;

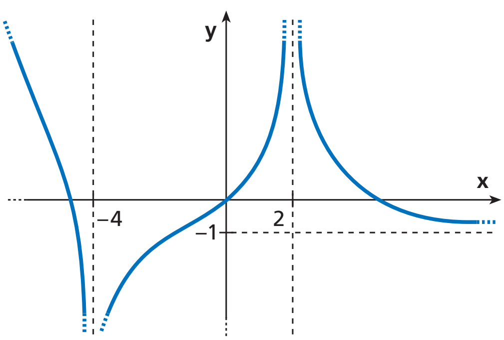
c) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$;

d) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$;

e) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

Esprimi mediante la definizione i casi d), e).

373



a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$;

b) $\lim_{x \to -4} f(x)$;

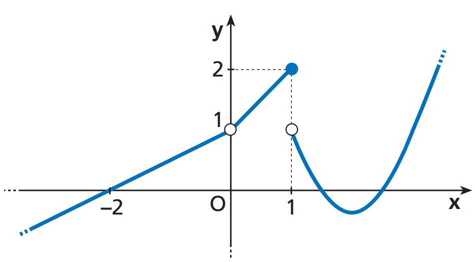
c) $\lim_{x \to 0} f(x)$;

d) $\lim_{x \to 2} f(x)$;

e) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Esprimi mediante la definizione i casi b), d).

374



a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$;

b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$;

c) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$;

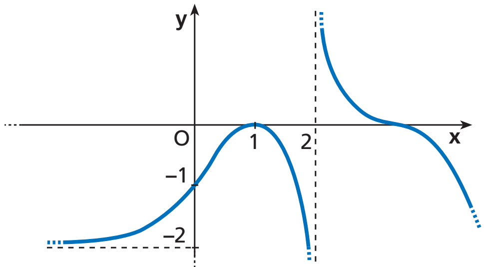
d) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$;

e) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$;

f) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$.

Esprimi mediante la definizione i casi a), f).

375



a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$;

b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$;

c) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$;

d) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$;

e) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$;

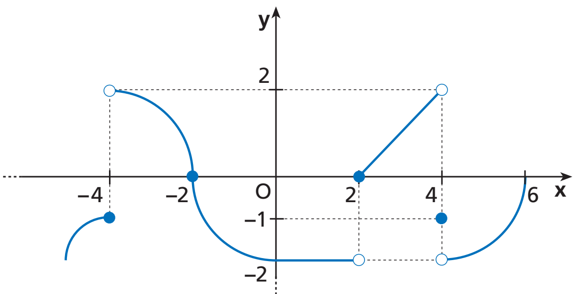
f) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$;

g) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$;

h) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.

Esprimi mediante la definizione i casi a), d), e).

376 Suppose that the graph of $y = f(x)$ is as given below.



Find the following limits, if they exist:

a) $\lim_{x \to -4} f(x)$;

b) $\lim_{x \to -2} f(x)$;

c) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$;

d) $\lim_{x \to -4^+} f(x)$;

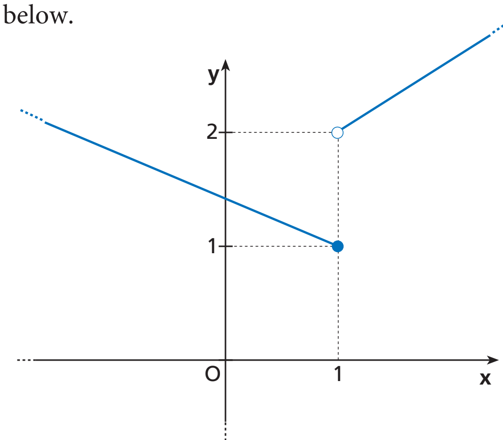
e) $\lim_{x \to 4^+} f(x)$;

f) $\lim_{x \to 4^-} f(x)$.

(USA *Southern Illinois University Carbondale,* Final Exam, Fall 2003)

[a) doesn't exist; b) 0; c) 0; d) 2; e) – 2; f) 2]

377 Suppose the graph of $y = f(x)$ is given below.



a) What is $\lim_{x \to 1^-} f(x)$?

b) What is $\lim_{x \to 1^+} f(x)$?

c) What is $\lim_{x \to 1} f(x)$?

(USA *Southern Illinois University Carbondale,* Final Exam, Fall 2002)

[a) 1; b) 2; c) doesn't exist]

Disegna il grafico di una funzione $y = f(x)$ che soddisfi le seguenti condizioni.

378 $D = \mathbb{R}$; $f(-2) = 0$; $f(-1) = 0$; $y > 0$ per $x < -2 \vee x > -1$;
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

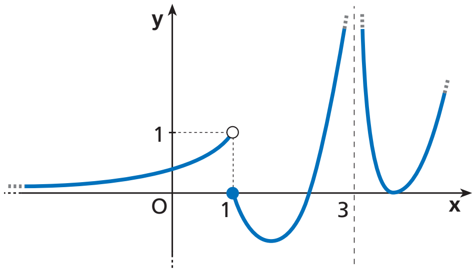
379 $D = \mathbb{R} - \{0, 2\}$; $y > 0$ per $-1 < x < 0 \vee x > 2$;
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$.

380 $D =]-1; 1[\cup]1; +\infty[$; $y > 0$ per $-1 < x < 1 \vee x > 2$;
$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1^-$.

381 $D = \mathbb{R} - \{0\}$; $f(-2) = 0$; $y < 0$ per $x < -2$;
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2^+$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0^+$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

382 $D = \mathbb{R} - \{2\}$; $f(0) = 0$; $y > 0$ per $-3 < x < 0 \vee x > \frac{3}{2}$;
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$.

383 Dal grafico della funzione $y = f(x)$ deduci, se esistono, i limiti indicati.



a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$;
b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$;
c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$;
d) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$;
e) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$;
f) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$.

Esprimi mediante la definizione i casi a), b), c).

384 a) Traduci la seguente scrittura con il linguaggio dei limiti:

$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x \in]1 - \delta; 1[, \ \frac{1}{x-1} < -M.$$

b) Esegui la verifica.

c) Rappresenta graficamente la funzione evidenziando nel grafico il limite precedente.

d) Dal grafico deduci il limite per $x \to +\infty$ e verificalo con la definizione.

385 Data la funzione $y = -\ln(x-2)$:

a) rappresentala graficamente, utilizzando le trasformazioni geometriche;

b) dal grafico deduci i valori di $\lim_{x \to 2^+} y$ e $\lim_{x \to +\infty} y$;

c) verifica i limiti del punto precedente mediante le relative definizioni.

386 Come nell'esercizio precedente, con la funzione $y = 1 - \ln|x|$, con $\lim_{x \to 0} y$ e con $\lim_{x \to 1} y$.

387 È data la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{se } x < 0 \\ e^{-x} - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

a) Traccia il suo grafico.

b) Verifica l'esistenza di due asintoti orizzontali mediante le definizioni di limite.

388 Data la funzione $y = \left| \dfrac{1}{x-4} \right|$:

a) rappresentala graficamente;

b) verifica l'esistenza di un asintoto verticale e di uno orizzontale, mediante le definizioni di limite;

c) deduci dal grafico il valore di $\lim_{x \to 2} y$ ed esegui la verifica mediante la relativa definizione di limite.

389 a) Rappresenta graficamente la funzione $y = \dfrac{-2}{2-x}$.

b) Verifica l'esistenza di un asintoto verticale e di uno orizzontale.

c) Trova la funzione inversa, giustificando la sua esistenza e rappresentala graficamente. Quali sono i suoi asintoti?

390 a) Traduci le seguenti scritture con il linguaggio dei limiti:

1. $\forall a > 0\ \exists c > 0 \mid \forall x$ con $|x+2| < c$, $0 \leq 4 - f(x) < a$;

2. $\forall k > 0\ \exists c > 0 \mid \forall x$ con $1 - c < x < 1$, $\dfrac{1}{x^2 - 1} < -k$.

b) Esegui la verifica del limite del precedente punto 2.

c) Posto $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 2$, verifica il limite del punto 1.

d) Verifica che $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

$\left[\text{a) } \lim_{x \to -2} f(x) = 4^-, \ \lim_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x^2-1} = -\infty\right]$

391 Determina il dominio della funzione:

$$f(x) = \sqrt{x^4 - x^2}.$$

Verificato che $f(0) = 0$, dimostra che non esiste il limite:

$$\lim_{x \to 0} f(x).$$

[D: $]-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [1; +\infty[$; non esiste il limite perché 0 è punto isolato]

392 Data la funzione $y = a + b\log_2 x$:

a) determina a e b, sapendo che il suo grafico passa per $(1; 4)$ ed è intersecato dalla retta di equazione $y = 7$ nel punto di ascissa $\frac{1}{8}$;

b) rappresenta graficamente la funzione;

c) disegna il grafico di $g(x) = \frac{1}{f(x)} - 1$;

d) dimostra mediante il procedimento di verifica dei limiti che la funzione $g(x)$ presenta un asintoto orizzontale e uno verticale;

e) determina l'espressione analitica e rappresenta graficamente la funzione $g^{-1}(x)$.

$\left[\text{a) } a = 4, b = -1; \text{ c) } g(x) = \frac{1}{4 - \log_2 x} - 1; \text{ d) } x = 16, y = -1; \text{ e) } y = 2^{\frac{4x+3}{x+1}}\right]$

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni, mediante le trasformazioni geometriche, e deduci dal grafico i limiti indicati a fianco, se esistono.

393 $y = -|\operatorname{sen} x|$; a) $\lim_{x \to +\infty} y$; b) $\lim_{x \to -\infty} y$; c) $\lim_{x \to 0} y$; d) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} y$.

394 $y = -\sqrt{x-1} + 1$; a) $\lim_{x \to 1^+} y$; b) $\lim_{x \to +\infty} y$; c) $\lim_{x \to 2} y$.

395 $y = \begin{cases} \ln x & \text{se } x > 1 \\ e^x - 1 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$; a) $\lim_{x \to +\infty} y$; b) $\lim_{x \to -\infty} y$; c) $\lim_{x \to 0} y$; d) $\lim_{x \to 1^+} y$; e) $\lim_{x \to 1^-} y$.

396 $y = \begin{cases} -(x+1)^2 & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$; a) $\lim_{x \to +\infty} y$; b) $\lim_{x \to -\infty} y$; c) $\lim_{x \to 0^+} y$; d) $\lim_{x \to 0^-} y$; e) $\lim_{x \to -1} y$.

Che cosa significano le seguenti scritture?

397 $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \,|\, \forall x \text{ con } |x - 2| < \delta, x \neq 2, |f(x) - 1| < \varepsilon.$

398 $\forall M > 0 \; \exists h \,|\, \forall x < h, x^2 - 1 > M.$

399 $\forall h > 0 \; \exists \delta > 0 \,|\, \forall x \text{ con } 3 < x < 3 + \delta, x \neq 2, |f(x) + 2| < h.$

400 $\forall M > 0 \; \exists I(2) \,|\, \forall x \in I(2), x \neq 2, f(x) < -M.$

401 **TEST** Sia $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora l'espressione «$\forall a > 0, \exists b > 0$ tale che $0 < |x - 5| < b$ implica $g(x) > a$» è la definizione di:

A $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 5.$

B $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 5.$

C $\lim_{x \to 5} g(x) = +\infty.$

D $\lim_{x \to 5} g(x) = -\infty.$

(*Università di Trento, Facoltà di Matematica, Test di Analisi*, 2003)

402 Dimostra che $\lim_{x \to 2}(4x - 10) = -2$, trovando un $\delta > 0$ tale che $|(4x - 10) - (-2)| < \varepsilon$ ogniqualvolta $0 < |x - 2| < \delta$.

(USA *Stanford University*, 2002)

403 Trova un numero $\delta > 0$ tale che $|\sqrt{5x+1} - 4| < 0{,}5$ se $0 < |x - 3| < \delta$.

(USA *University of Central Arkansas Regional Math Contest*, 2006)

$[\delta < 0{,}75]$

6. PRIMI TEOREMI SUI LIMITI

Teoria a pag. 1430

Il teorema della permanenza del segno

404 Sapendo che $\lim_{x \to -1}(4 - 9x^2) = -5$, verifica il teorema della permanenza del segno determinando un intorno di -1 nel quale la funzione $f(x) = 4 - 9x^2$ abbia lo stesso segno del limite.

405 Dopo aver verificato che $\lim_{x \to 0}(1 - x^2) = 1$, individua l'intorno dell'origine di raggio massimo per cui vale il teorema della permanenza del segno.

Per ciascuno dei seguenti limiti verifica il teorema della permanenza del segno.

406 $\lim_{x \to 1}(2x + 3) = 5$

407 $\lim_{x \to 1}(2x^2 - 8) = -6$

408 $\lim_{x \to 2}\dfrac{x + 4}{x + 1} = 2$

409 $\lim_{x \to 2}\dfrac{x}{x + 1} = \dfrac{2}{3}$

410 $\lim_{x \to 1}\dfrac{x^2}{x + 1} = \dfrac{1}{2}$

411 $\lim_{x \to 4}(x - \sqrt{2x + 1}) = 1$

Il teorema del confronto

412 **ESERCIZIO GUIDA**

Date le funzioni

$$h(x) = -x^2 + 4x - 3, \quad f(x) = 2x - 2, \quad g(x) = x^2 - 1,$$

e sapendo che

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = 0,$$

calcoliamo $\lim_{x \to 1} f(x)$ usando il teorema del confronto.

Per applicare il teorema del confronto dobbiamo verificare le sue ipotesi, ossia che si abbia $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ in un intorno di 1:

$$-x^2 + 4x - 3 \leq 2x - 2 \leq x^2 - 1 \to$$

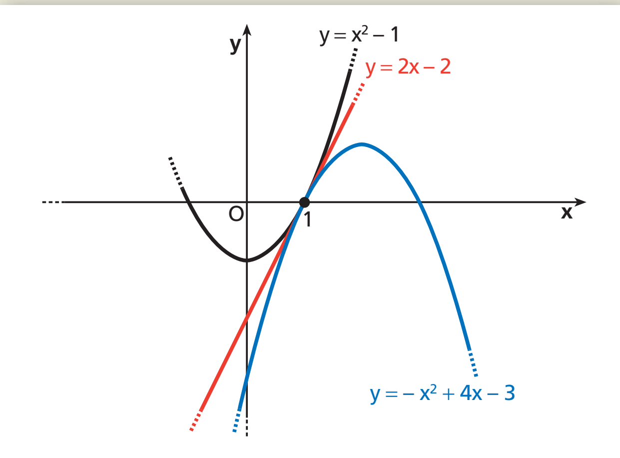
$$\to \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 \leq 2x - 2 \\ 2x - 2 \leq x^2 - 1 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} -x^2 + 2x - 1 \leq 0 \\ -x^2 + 2x - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Poiché le disequazioni del sistema sono verificate $\forall x \in \mathbb{R}$, allora è verificata anche la disuguaglianza:

$$h(x) \le f(x) \le g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Possiamo applicare il teorema del confronto e affermare che $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.



In ciascuno dei seguenti esercizi sono date tre funzioni, di cui due aventi lo stesso limite in un punto. Controlla se sono soddisfatte le ipotesi del teorema del confronto e in tal caso applicalo per calcolare il limite della terza funzione.

413 $h(x) = -x^2 + 8x - 14$; $f(x) = 2x - 5$; $g(x) = x^2 - 4x + 4$; $\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3} g(x) = 1$.

414 $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = 2x^2 + 1$; $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 1$.

415 $h(x) = -x^2 - 4x - 4$; $f(x) = x^2 + 4x + 4$; $g(x) = \sqrt{|x + 2|}$; $\lim_{x\to -2} h(x) = \lim_{x\to -2} g(x) = 0$.

416 $h(x) = \dfrac{-2x + 4}{x - 1}$; $f(x) = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$; $g(x) = -x^2 + 2x$; $\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2} g(x) = 0$.

Applicando il teorema del confronto, verifica i seguenti limiti.

417 $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x = 0$ (Suggerimento. Ricorda che se un angolo $x > 0$ è espresso in radianti, si ha $\operatorname{sen} x < x$.)

418 $\lim_{x\to +\infty} \left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right| = 0$ $\left(\text{Suggerimento. Confronta } \left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \text{ con } 0 \text{ e con } \dfrac{1}{x}.\right)$

419 $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$ (Suggerimento. Ricorda che $-1 \le \cos x \le 1$.)

420 Dimostra che, date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite nello stesso dominio, tali che $|f(x)| \le |g(x)|$ e $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, allora $\lim_{x\to c} f(x) = 0$. Applica il risultato per dimostrare che $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.

421 Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite nello stesso dominio, tali che $|f(x)| \ge |g(x)|$ e $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$, dimostra che $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$.

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Sia $f(x)$ una funzione definita in $A = [2; 9]$. Se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k > 0 \,|\, \forall x \in A$, con $4 < x < 4 + k$, $|f(x) - 1| < \varepsilon$, è vero che:

A $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 1$.

B $\lim_{x \to 4^-} f(x) = -1$.

C $\lim_{x \to 4} f(x) = 1$.

D $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 1^+$.

E $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 1^-$.

2 Data la funzione $y = f(x)$, se

$$\forall k > 0 \ \exists m > 0 \,|\, \forall x,$$

con $2 - m < x < 2$, $f(x) > k$, è vero che:

A $\lim_{x \to k} f(x) = +\infty$.

B $\lim_{x \to m} f(x) = \infty$.

C $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$.

D $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$.

E $\lim_{x \to 2^+} f(x) = m$.

3 Data la funzione $f(x) = 4 - x^4$, l'espressione «Per ogni numero reale positivo m si può sempre determinare un numero reale positivo c_m tale che risulti $4 - x^4 < -m$ per ogni $x > c_m$» è la definizione di:

A $\lim_{x \to -\infty} (4 - x^4) = +\infty$.

B $\lim_{x \to +\infty} (4 - x^4) = 1$.

C $\lim_{x \to +\infty} (4 - x^4) = +\infty$.

D $\lim_{x \to +\infty} (4 - x^4) = -\infty$.

E $\lim_{x \to -\infty} (4 - x^4) = -\infty$.

4 Se $\forall \varepsilon > 0$ esiste un intorno destro di -2 tale che $4 - \varepsilon < f(x) \leq 4$, allora:

A $\lim_{x \to -2} f(x) = -4$.

B $\lim_{x \to 4} f(x) = -2$.

C $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 4^-$.

D $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 4^+$.

E $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 4^-$.

5 Scrivere $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 6$ significa che:

A $f(x)$ si avvicina sempre più a 6 per valori di x non negativi.

B la differenza in valore assoluto tra $f(x)$ e 6 è maggiore di un numero positivo piccolo a piacere al diminuire di x.

C la differenza in valore assoluto tra $f(x)$ e 6 è minore di un numero positivo piccolo a piacere all'aumentare di x.

D $f(x)$ si avvicina sempre più a 6 per valori di x non positivi.

E la differenza in valore assoluto tra $f(x)$ e 6 è minore di un numero positivo piccolo a piacere al diminuire di x.

6 Se $\forall a > 0$ la disequazione $\operatorname{sen} x - f(x) > a$ è vera per $\pi - \frac{3}{a} \leq x \leq \pi + \frac{3}{a}$, allora:

A $\lim_{x \to \pi} [\operatorname{sen} x - f(x)] = +\infty$.

B $\lim_{x \to +\infty} [\operatorname{sen} x - f(x)] = \pi$.

C $\lim_{x \to -\infty} [\operatorname{sen} x - f(x)] = \pi$.

D $\lim_{x \to 0} [f(x) - \operatorname{sen} x] = \pi$.

E $\lim_{x \to a} [\operatorname{sen} x - f(x)] = +\infty$.

7 Risolvendo la disequazione $|x - 4| > \frac{4}{\varepsilon}$, con $\varepsilon > 0$, puoi verificare *uno solo* dei seguenti limiti. Quale?

A $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x - 4} = 1$

B $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{4x - 4} = \frac{1}{4}$

C $\lim_{x \to \infty} \frac{4x - 4}{x} = 4$

D $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x - 4} = -1$

E $\lim_{x \to -\infty} (x - 4) = +\infty$

8 Se $\lim_{x \to 1} (x^2 - 3) = -2$, allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon$ tale che per $|x - 1| < \delta_\varepsilon$ si ha:

A $-\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon}$.

B $-\sqrt{\varepsilon} - 1 < x < \sqrt{\varepsilon} + 1$.

C $\sqrt{1 - \varepsilon} < x < \sqrt{1 + \varepsilon}$.

D $-\sqrt{1 + \varepsilon} < x < -\sqrt{1 - \varepsilon}$.

E $-\sqrt{\varepsilon} + 1 < x < \sqrt{\varepsilon} + 1$.

9 Se $\forall m > 0$ esiste un $c > 0$ tale che $e^{x^2+1} > m$ se $|x| > c$, allora è vero che:

A $\lim_{x \to \pm\infty} e^{x^2+1} = +\infty$.

B $\lim_{x \to -\infty} e^{x^2+1} = 0$.

C $\lim_{x \to c} e^{x^2+1} = +\infty$.

D $\lim_{x \to +\infty} e^{x^2+1} = -\infty$.

E $\lim_{x \to +\infty} e^{x^2+1} = m$.

10 Risolvendo la disequazione $x - 1 > -2^{-M}$, possiamo verificare la validità di *uno solo* dei seguenti limiti. Quale?

A $\lim_{x \to 0} \log_2(1 - x) = +\infty$.

B $\lim_{x \to 1^-} \log_2(1 - x) = +\infty$.

C $\lim_{x \to 1^-} \log_2(1 - x) = -\infty$.

D $\lim_{x \to 1} 2^{\frac{1}{1-x}} = +\infty$.

E $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x - 1} = +\infty$.

QUESITI

11 **VERO O FALSO?** Dopo aver scritto la definizione di punto di accumulazione per un insieme A di numeri reali, indica se sono vere o false le seguenti proposizioni, motivando le risposte.
Se x_0 è un punto di accumulazione per l'insieme A:

a) A è un insieme infinito. V F

b) A può essere un insieme limitato. V F

c) x_0 deve appartenere ad A. V F

d) ogni intorno di x_0 deve contenere almeno un punto di A. V F

12 Il punto $(2; 6)$ appartiene al grafico di una funzione $y = f(x)$, con dominio $\mathbb{R}$.
Puoi dedurre da ciò che $\lim_{x \to 2} f(x) = 6$? Viceversa, se $\lim_{x \to 2} f(x) = 6$, puoi affermare che $f(2) = 6$?

13 La funzione $y = f(x)$ ha come dominio $D = [0; 5]$. Può avere un asintoto orizzontale? E verticale?

14 Scrivi, utilizzando il linguaggio dei limiti, che una funzione $y = f(x)$ ha un asintoto verticale di equazione $x = -2$ e un asintoto orizzontale di equazione $y = 4$.

15 Una funzione periodica può avere un asintoto orizzontale? E verticale?

16 Dimostra che, se $\lim_{x \to c} f(x) = l$, allora $\lim_{x \to c} [-f(x)] = -l$.

17 Dimostra che, se $\lim_{x \to c} f(x) = l$, allora $\lim_{x \to c} [f(x) - k] = l - k$.

18 Dimostra che, se $\lim_{x \to c} f(x) = l$, allora $\lim_{x \to c} |f(x)| = |l|$.
(Suggerimento. Ricorda la proprietà $||a| - |b|| \le |a - b|$.)

19 Enuncia e dimostra il teorema del confronto. Utilizzalo poi per dimostrare il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x} = 0.$$

20 Dopo aver definito il limite destro e il limite sinistro di una funzione in un punto, ricorrere a tali definizioni per verificare che risulta:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x+\frac{x}{|x|}\right)=-1,\quad \lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{x}{|x|}\right)=1.$$

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione straordinaria*, 2002, *quesito* 4)

21 Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x)$, affermare che $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ significa che per ogni numero reale M, esiste un numero reale N tale che, per ogni x, se $x>N$ allora $f(x)>M$.
È vero o è falso? Accompagnare la risposta con un'interpretazione grafica.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2006, *quesito* 7)

PROBLEMI

22 Dato l'insieme $A=\left\{x\,|\,x=3+\frac{2}{n}, n\in\mathbb{N}-\{0\}\right\}$:

a) verifica che $x_0=3$ è punto di accumulazione per A;

b) verifica che $x_1=\frac{11}{3}$ è un punto isolato;

c) trova l'estremo superiore e l'estremo inferiore di A;

d) A è un insieme limitato? È chiuso? È finito?

23 È data la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-e^x} & \text{se } x\le 0\\ \dfrac{1}{\ln\frac{1}{x}} & \text{se } x>0\end{cases}$$

a) Trova il dominio, studia il segno di $f(x)$ e calcola le intersezioni con gli assi cartesiani.

b) Verifica che $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2^-$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0^-$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0^+$ e $\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$.

c) Rappresenta il grafico probabile di $f(x)$ utilizzando le informazioni ottenute in a) e b).

[a) D: $x\neq 1$; $y>0$ per $x<1$; $(0;\sqrt{3})$]

24 Data la funzione

$$y=\frac{1}{e^{x-1}-1}:$$

a) trova il suo dominio;

b) studia il segno e determina le intersezioni con gli assi cartesiani;

c) verifica che $\lim_{x\to+\infty} y=0$ e che $\lim_{x\to 1} y=\infty$;

d) disegna il grafico probabile di y utilizzando i dati ottenuti in a), b), c), sapendo che la funzione ha un asintoto orizzontale di equazione $y=-1$.

[a) D: $x\neq 1$; b) $y>0$ per $x>1$]

25 Dato l'insieme

$$A = \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{2}{10}, \frac{3}{14}, \frac{4}{18}, \frac{5}{22}, \dots\right\},$$

a) sapendo che i suoi elementi si ottengono da una funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}^+$, scrivi l'espressione analitica della funzione;

b) dimostra che $x_0 = \frac{1}{4}$ è un punto di accumulazione per l'insieme A;

c) scelto un punto a piacere di A, verifica che è un punto isolato;

d) A è un insieme limitato? È chiuso? È finito?

$\left[\text{a) } y = \frac{n}{4n+2}, n \in \mathbb{N}\right]$

26 Data la funzione

$$y = \frac{1}{2^{\frac{a}{x}} - 2}:$$

a) determina a, sapendo che il grafico della funzione passa per $\left(-1; -\frac{4}{7}\right)$;

b) trova il dominio e studia il segno;

c) verifica che $\lim\limits_{x \to 0^+} y = 0^+$.

[a) $a = 2$; b) D: $x \neq 0 \wedge x \neq 2$; $y > 0$ per $0 < x < 2$]

27 È assegnata la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-1} & \text{se } x \leq -1 \\ 2^x - 1 & \text{se } -1 < x \leq 2 \\ \ln(x-2) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

a) Rappresenta il suo grafico utilizzando le trasformazioni geometriche.

b) Osservando il grafico, deduci i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to -1^{\pm}} f(x), \quad \lim_{x \to 2^{\pm}} f(x), \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x).$$

c) Verifica, usando le definizioni, i limiti:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x), \quad \lim_{x \to 2^+} f(x).$$

$\left[\text{b) } -\frac{1}{2}, 0; -\infty, 3; +\infty\right]$

28 Considera la funzione:

$$y = \frac{1}{1 - \log_2(x-1)}.$$

a) Trova il suo dominio e studia il segno.

b) Rappresenta il grafico della funzione mediante le trasformazioni geometriche; osservando il grafico, conferma i risultati del punto a) e deduci i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 1^+} y, \quad \lim_{x \to 3^{\pm}} y, \quad \lim_{x \to +\infty} y.$$

c) Esegui la verifica, mediante le definizioni, dei limiti dedotti nel punto b).

[a) D: $x > 1 \wedge x \neq 3$; $y > 0$ per $1 < x < 3$; b) 0^+; $\mp\infty$; 0^-]

CAPITOLO

22

٢٢

[numerazione araba]

२२

[numerazione devanagari]

二十二

[numerazione cinese]

IL CALCOLO DEI LIMITI

UN'ONDA ANOMALA Il 26 dicembre 2004 un violentissimo tsunami devastò l'Indonesia e investì l'intero bacino dell'Oceano Pacifico, provocando oltre 220 mila morti. A scatenare il cataclisma fu un terremoto al largo della costa nord di Sumatra.

Come si stabilisce la potenza di un sisma?

La risposta a pag. 1508

1. LE OPERAZIONI CON I LIMITI

Nel capitolo precedente abbiamo definito e analizzato il concetto di limite. Ora è necessario imparare a calcolarlo.
Abbiamo visto che il calcolo di $\lim_{x \to x_0} f(x)$ è rapido e semplice quando $f(x)$ è una funzione continua, perché basta sostituire x_0 in $f(x)$. Sono poi utili alcuni teoremi relativi alle operazioni sui limiti che ora illustreremo.

- Una funzione $f(x)$ è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

I teoremi che enunceremo sono validi sia nel caso di limite per x che tende a un valore finito, sia nel caso di limite per x che tende a $+\infty$ o $-\infty$.
Perciò, quando non sarà importante distinguere, indicheremo con «$x \to \alpha$» una qualsiasi delle seguenti scritture:

$$x \to x_0; \;\; x \to x_0^+; \;\; x \to x_0^-; \;\; x \to +\infty; \;\; x \to -\infty.$$

Il limite della somma algebrica di due funzioni

Le funzioni hanno limite finito

In generale, si può dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA

Se $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$ e $\lim_{x \to \alpha} g(x) = m$, dove $l, m \in \mathbb{R}$, allora:

$$\lim_{x \to \alpha} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to \alpha} f(x) + \lim_{x \to \alpha} g(x) = l + m.$$

- **Con le parole**: il limite della somma di due funzioni è uguale alla somma dei loro limiti.

DIMOSTRAZIONE

Siccome $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$, dalla definizione segue che in corrispondenza di ogni valore positivo $\frac{\varepsilon}{2}$, arbitrariamente piccolo, esiste un intorno I_1 di α tale che:

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < l + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall x \in I_1 \text{ con } x \neq \alpha.$$

- Se scegliamo ε piccolo a piacere, anche $\frac{\varepsilon}{2}$ è arbitrariamente piccolo.

Analogamente, poiché $\lim_{x \to \alpha} g(x) = m$, in corrispondenza dello stesso $\frac{\varepsilon}{2}$ esiste un intorno I_2 di α tale che:

$$m - \frac{\varepsilon}{2} < g(x) < m + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall x \in I_2 \text{ con } x \neq \alpha.$$

Per i punti x dell'intorno $I = I_1 \cap I_2$ diversi da α, valgono entrambe le disuguaglianze precedenti e quindi, sommando membro a membro, otteniamo

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(m - \frac{\varepsilon}{2}\right) < f(x) + g(x) < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(m + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

ossia:

$$(l + m) - \varepsilon < f(x) + g(x) < (l + m) + \varepsilon, \qquad \forall x \in I \text{ con } x \neq \alpha.$$

Abbiamo pertanto verificato che in corrispondenza di ogni arbitrario $\varepsilon > 0$ esiste un intorno di α tale che per ogni suo punto $x \neq \alpha$ si ha $|f(x) + g(x) - (l + m)| < \varepsilon$, cioè:

$$\lim_{x \to \alpha} [f(x) + g(x)] = l + m.$$

In particolare, questo teorema dice che per ogni x_0 tale che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ si ha $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = f(x_0) + g(x_0)$.
Questo significa che ***la somma algebrica di due funzioni continue è una funzione continua***.

ESEMPIO

Consideriamo le due funzioni $f(x) = 2x - 6$ e $g(x) = x + 3$ e i loro limiti per $x \to 4$:

$$\lim_{x \to 4} (2x - 6) = 2 \text{ e } \lim_{x \to 4} (x + 3) = 7.$$

La funzione somma $s(x) = f(x) + g(x)$ è:

$$s(x) = (2x - 6) + (x + 3) = 3x - 3.$$

Il limite di $s(x)$ per x che tende a 4 è:

$$\lim_{x \to 4} (3x - 3) = 9.$$

Osserviamo che $9 = 2 + 7$, ossia il limite della funzione $s(x)$ è uguale alla somma dei limiti di $f(x)$ e di $g(x)$.

Le funzioni non hanno entrambe limite finito

Cosa succede quando una delle due funzioni ha limite infinito? E quando entrambe hanno limite infinito?
Con i simboli $+\infty$ e $-\infty$ non si possono eseguire operazioni ragionando come se si trattasse di numeri reali. Per esempio, si può dimostrare che se $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$ e $\lim_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \to \alpha} [f(x) + g(x)] = +\infty$, che è come dire:

$$l + (+\infty) = +\infty.$$

Una relazione simile per i numeri reali $a + b = b$ è vera solo se $a = 0$.

Riassumiamo nella tabella i vari casi che si possono presentare nei calcoli dei limiti della somma di due funzioni.

$f(x)$ ⊕ $g(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
m	$m + l$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**?**
$-\infty$	$-\infty$	**?**	$-\infty$

In questa tabella, come nelle successive, nella prima colonna mettiamo i valori a cui tende $f(x)$, nella prima riga quelli a cui tende $g(x)$ e all'incrocio tra riga e colonna quelli a cui tende la funzione indicata dall'operatore. Con **?** indichiamo le forme indeterminate.

Nella tabella si può notare che i casi in cui si sommano $+\infty$ e $-\infty$ non hanno come risultato 0, come ci si potrebbe erroneamente aspettare. Questa è una **forma di indecisione** o **forma indeterminata**.
Consideriamo, per esempio, la funzione $f(x) = 2x$ e le tre funzioni:

$$g_1(x) = -2x + 1; \;\; g_2(x) = -x; \;\; g_3(x) = -3x.$$

Per $x \to +\infty$, il limite di $f(x)$ è $+\infty$, mentre i limiti di $g_1(x)$, $g_2(x)$ e $g_3(x)$ sono $-\infty$.

Calcoliamo le funzioni somma:

$$s_1(x) = f(x) + g_1(x) = 2x - 2x + 1 = 1;$$

$$s_2(x) = f(x) + g_2(x) = 2x - x = x;$$

$$s_3(x) = f(x) + g_3(x) = 2x - 3x = -x.$$

Calcoliamo il limite per $x \to +\infty$ di tali funzioni:

$$\lim_{x\to+\infty} s_1(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1;$$

$$\lim_{x\to+\infty} s_2(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} s_3(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty.$$

Abbiamo ottenuto tre risultati diversi: non può quindi esistere una regola che permetta di ottenere in generale il limite della funzione somma $f(x) + g(x)$ quando i limiti delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$.
Per questo motivo diciamo che siamo in presenza della **forma indeterminata** $+\infty - \infty$.

Quando, nel prossimo paragrafo, calcoleremo limiti che si presentano in forma indeterminata $+\infty - \infty$, cercheremo di scrivere la funzione somma in modo diverso da quello iniziale, per eliminare l'indeterminazione.

Il limite del prodotto di due funzioni

Le funzioni hanno limite finito

TEOREMA

Limite del prodotto di una costante (diversa da 0) per una funzione
Sia k un numero reale diverso da 0 e $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\lim_{x\to\alpha} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x\to\alpha} f(x) = k \cdot l.$$

DIMOSTRAZIONE

Distinguiamo due casi.

1. $\boldsymbol{k > 0}$. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo; poiché $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$, in corrispondenza di $\frac{\varepsilon}{k} > 0$ esiste un intorno I di α tale che:

   $$l - \frac{\varepsilon}{k} < f(x) < l + \frac{\varepsilon}{k}, \qquad \forall x \in I \text{ con } x \neq \alpha.$$

   Allora, moltiplicando tutti i membri delle disequazioni per k, otteniamo

   $$k \cdot l - \varepsilon < k \cdot f(x) < k \cdot l + \varepsilon, \qquad \forall x \in I \text{ con } x \neq \alpha,$$

   cioè:

   $$\lim_{x\to\alpha} [k \cdot f(x)] = k \cdot l = k \cdot \lim_{x\to\alpha} f(x).$$

2. $\boldsymbol{k < 0}$. In questo caso si ha $-k > 0$ e quindi, per quanto è appena stato dimostrato:

   $$\lim_{x\to\alpha} [-k \cdot f(x)] = -k \cdot l.$$

Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno I di α tale che:

$$-k \cdot l - \varepsilon < -k \cdot f(x) < -k \cdot l + \varepsilon, \qquad \forall x \in I \text{ con } x \neq \alpha.$$

Moltiplicando tutti i membri delle disequazioni per -1, si invertono i versi delle disuguaglianze e si cambia segno:

$$k \cdot l + \varepsilon > k \cdot f(x) > k \cdot l - \varepsilon, \qquad \forall x \in I \text{ con } x \neq \alpha.$$

Riotteniamo quindi $\lim_{x \to \alpha} [k \cdot f(x)] = k \cdot l = k \cdot \lim_{x \to \alpha} f(x)$.

ESEMPIO

Se $\lim_{x \to 2} (3x - 1) = 5$, allora $\lim_{x \to 2} 4 \cdot (3x - 1) = 4 \cdot 5 = 20$.

TEOREMA

Se $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$ e $\lim_{x \to \alpha} g(x) = m$ con $l, m \in \mathbb{R}$, allora:

$$\lim_{x \to \alpha} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to \alpha} f(x) \cdot \lim_{x \to \alpha} g(x) = l \cdot m.$$

● **Con le parole**: il limite del prodotto di due funzioni è uguale al prodotto dei loro limiti.

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo inizialmente il caso in cui $l = m = 0$.
Applichiamo la definizione di limite: per le ipotesi fatte possiamo dire che, preso $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo (possiamo assumere che $\varepsilon < 1$), esistono due intorni I_1 e I_2 di α tali che:

$$|f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in I_1 \text{ con } x \neq \alpha$$

e

$$|g(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in I_2 \text{ con } x \neq \alpha.$$

Allora nell'intorno $I = I_1 \cap I_2$ sono verificate entrambe le disuguaglianze e quindi, moltiplicando tra loro entrambi i membri, abbiamo:

$$|f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon^2 < \varepsilon, \qquad \forall x \in I \text{ con } x \neq \alpha.$$

● Se $\varepsilon < 1$, allora $\varepsilon^2 < \varepsilon$.

Ciò significa che:

$$\lim_{x \to \alpha} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

Sfruttiamo ora questo risultato per dimostrare il caso più generale. Osserviamo che

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = l \quad \to \quad \lim_{x \to \alpha} [f(x) - l] = 0;$$

$$\lim_{x \to \alpha} g(x) = m \quad \to \quad \lim_{x \to \alpha} [g(x) - m] = 0;$$

allora:

$$\lim_{x \to \alpha} [f(x) - l][g(x) - m] = 0.$$

Poiché

$$[f(x) - l][g(x) - m] = f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot m - l \cdot g(x) + l \cdot m \quad \to$$

$$\to \quad f(x) \cdot g(x) = [f(x) - l][g(x) - m] + f(x) \cdot m + l \cdot g(x) - l \cdot m,$$

passando al limite in entrambi i membri, risulta:

$$\lim_{x \to \alpha} [f(x) \cdot g(x)] = 0 + l \cdot m + l \cdot m - l \cdot m = l \cdot m.$$

● Applichiamo il teorema della somma dei limiti e quello del prodotto nei casi particolari di limiti entrambi nulli e di prodotto di una costante per una funzione.

ESEMPIO

Essendo $\lim_{x\to 1} 3x = 3$ e $\lim_{x\to 1}(x+1) = 2$, allora $\lim_{x\to 1} 3x(x+1) = 3\cdot 2 = 6$.

Infatti, la funzione prodotto è $p(x) = 3x(x+1) = 3x^2 + 3x$, e il limite per x che tende a 1 di tale funzione è proprio uguale a 6.

Analogamente a quanto visto per la somma di due funzioni, questi ultimi due teoremi permettono di affermare che ***il prodotto di due funzioni continue*** (in particolare ***il prodotto di una costante per una funzione continua***) ***è una funzione continua***.

Le funzioni non hanno entrambe limite finito

Se le funzioni non hanno entrambe limite finito, per il limite del prodotto si possono presentare diversi casi che riassumiamo nella tabella, osservando che anche quando si usano i simboli $+\infty$ e $-\infty$ vale ancora la regola dei segni.

$f(x)$ ⊙ $g(x)$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$m \cdot l$	$m \cdot l$	0	$+\infty$	$-\infty$
$m < 0$	$m \cdot l$	$m \cdot l$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

ESEMPIO

Supponiamo noti $\lim_{x\to 1}(-4x) = -4$ e $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$. Allora:

$$\lim_{x\to 1}(-4x)\cdot\frac{1}{(x-1)^2} = -\infty.$$

Utilizziamo la forma abbreviata $\infty \cdot 0$ per indicare $+\infty \cdot 0$ e $-\infty \cdot 0$.

Notiamo che anche nella tabella precedente compare una forma indeterminata, o **forma di indecisione**: $\infty \cdot \mathbf{0}$.

Una funzione ha limite 0 e l'altra ha limite infinito

Consideriamo, per esempio, la funzione $f(x) = 3x^2$ e le funzioni $g_1(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g_2(x) = \frac{1}{x^4}$.

Quando $x \to 0$, il limite di $f(x)$ è uguale a 0, mentre i limiti di $g_1(x)$ e $g_2(x)$ sono entrambi $+\infty$.

Calcoliamo le funzioni prodotto:

$$p_1(x) = f(x)\cdot g_1(x) = 3x^2\cdot\frac{1}{x^2} = 3;$$

$$p_2(x) = f(x)\cdot g_2(x) = 3x^2\cdot\frac{1}{x^4} = \frac{3}{x^2}.$$

Si verifica che:

$$\lim_{x \to 0} p_1(x) = 3; \ \lim_{x \to 0} p_2(x) = +\infty.$$

L'esempio mostra che non esiste una regola generale. Ecco perché $0 \cdot \infty$ è una forma indeterminata.

Vedremo nel prossimo paragrafo che in alcuni casi, riscrivendo la funzione prodotto in modo opportuno, possiamo liberarci della forma indeterminata e calcolare il limite.

Il limite della potenza

TEOREMA

Se $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$, allora:

$$\lim_{x \to \alpha} [f(x)]^n = [\lim_{x \to \alpha} f(x)]^n = l^n.$$

Il teorema può essere dimostrato pensando che la potenza n-esima di una funzione è il prodotto di tale funzione per se stessa n volte, e quindi si possono applicare i teoremi sul prodotto di funzioni.

In particolare, per $f(x) = x$ abbiamo:

$$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n, \quad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}.$$

Inoltre, combinando questo risultato con il teorema sul limite del prodotto di una funzione per una costante e sul limite della somma di due funzioni, possiamo determinare il limite di un polinomio $P(x)$ per x che tende a un valore finito x_0:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Si ha allora, per esempio,

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 4x) = 2^3 - 4 \cdot 2 = 0.$$

Quindi possiamo dire che ***i polinomi sono funzioni continue in*** $\mathbb{R}$.

Possiamo poi estendere il teorema anche al caso di esponente reale a diverso da 0.

La funzione ha limite $+\infty$

Abbiamo la tabella a fianco.

$f(x)$	a	$[f(x)]^a$
$+\infty$	$a > 0$	$(+\infty)^a = +\infty$
$+\infty$	$a < 0$	$(+\infty)^a = 0^+$

Il caso di $f(x)$ che tende a $-\infty$ non si può presentare perché nella potenza $[f(x)]^a$ deve essere $f(x) > 0$. Per lo stesso motivo, $f(x)$ può tendere a 0 solamente per eccesso, e non può essere $\lim f(x) = 0^-$.

L'esponente è una funzione

Il teorema della potenza si può estendere al caso $[f(x)]^{g(x)}$.

$f(x)$ \ $g(x)$ — $[f(x)]^{g(x)}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	0^+
0^+	?	0^+	$+\infty$
1	1	?	?
$0 < \ell < 1$	1	0^+	$+\infty$
$\ell > 1$	1	$+\infty$	0^+

Ricorda che ci sono due tipi di funzione esponenziale: uno con la base compresa fra 0 e 1 e l'altro con la base maggiore di 1.

Nella tabella precedente troviamo altre tre **forme indeterminate**: ∞^0, 0^0, 1^∞.

Utilizziamo le forme abbreviate: ∞^0 per indicare $(+\infty)^0$, 0^0 per indicare $(0^+)^0$, 1^∞ per $1^{+\infty}$ e $1^{-\infty}$.

Il limite della radice *n*-esima di una funzione

TEOREMA

Se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l, l \in \mathbb{R}$ e $l > 0$, allora:

$$\lim_{x\to\alpha} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to\alpha} f(x)} = \sqrt[n]{l}\,.$$

Se n è dispari, questo risultato vale anche per $l \leq 0$.

Questo teorema è una conseguenza del teorema sul limite della potenza n-esima di una funzione; infatti, ponendo $\varphi(x) = \sqrt[n]{f(x)}$, si ha $f(x) = [\varphi(x)]^n$ e quindi, passando al limite in entrambi i membri dell'uguaglianza, risulta $l = [\lim_{x\to\alpha}\varphi(x)]^n$, cioè $\lim_{x\to\alpha}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$.

ESEMPIO

Essendo $\lim_{x\to 1}(5x-1) = 4$, allora $\lim_{x\to 1}\sqrt{5x-1} = 2$.

Il limite della funzione reciproca

TEOREMA

Consideriamo una funzione $f(x)$ e la sua reciproca $\dfrac{1}{f(x)}$:

- se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l \in \mathbb{R}, l \neq 0$, allora $\lim_{x\to\alpha}\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lim_{x\to\alpha} f(x)} = \dfrac{1}{l}$;
- se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$, o $\lim_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to\alpha}\dfrac{1}{f(x)} = 0$;

quando esiste un intorno di α in cui $f(x) \neq 0$:

- se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0^+$, allora $\lim_{x\to\alpha}\dfrac{1}{f(x)} = +\infty$;
- se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0^-$, allora $\lim_{x\to\alpha}\dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

Esempi.
Se $\lim_{x\to 2} 3x = 6$, allora $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{3x} = \dfrac{1}{6}$.
Se $\lim_{x\to 5}(x-5) = 0$, allora $\lim_{x\to 5}\dfrac{1}{x-5} = \infty$.
Se $\lim_{x\to\infty} 2x = \infty$, allora $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x} = 0$.
Scrivendo ∞ intendiamo dire che il risultato può essere $+\infty$ o $-\infty$.

Il limite del quoziente di due funzioni

Le funzioni hanno limite finito, di cui almeno uno diverso da 0

TEOREMA

Se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$ e $\lim_{x\to\alpha} g(x) = m$, e $m \neq 0$, allora:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\alpha} f(x)}{\lim_{x\to\alpha} g(x)} = \frac{l}{m}\,.$$

Osserviamo che, per il teorema della permanenza del segno, se $m \neq 0$, allora $g(x) \neq 0$ in tutto un intorno di α.

DIMOSTRAZIONE

Siccome possiamo scrivere $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$, per il teorema del limite della funzione reciproca e del limite del prodotto di due funzioni, abbiamo:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} f(x)\cdot\lim_{x\to\alpha}\frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} f(x)\cdot\frac{1}{\lim_{x\to\alpha} g(x)} = \frac{l}{m}\,.$$

ESEMPIO

1. Essendo $\lim_{x\to 3}(x-1) = 2$ e $\lim_{x\to 3}(2x+1) = 7$, allora $\lim_{x\to 3}\dfrac{x-1}{2x+1} = \dfrac{2}{7}$.
2. Essendo $\lim_{x\to 3}(x-3) = 0$ e $\lim_{x\to 3}(2x+1) = 7$, allora $\lim_{x\to 3}\dfrac{x-3}{2x+1} = \dfrac{0}{7} = 0$.

Questo teorema permette di affermare che ***il quoziente*** $\frac{f(x)}{g(x)}$ ***di due funzioni continue in un punto*** x_0 ***è una funzione continua se*** $g(x_0) \neq 0$.

In particolare, il quoziente di due polinomi $\frac{P(x)}{Q(x)}$, cioè ***una funzione razionale fratta, è una funzione continua in tutti i punti che non annullano il denominatore*** $Q(x)$.

Le funzioni non hanno entrambe limite finito

Si possono presentare i casi riassunti nella tabella.

$f(x)$ \ $g(x)$; $\frac{f(x)}{g(x)}$	$m \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \neq 0$	$\frac{l}{m}$	∞	0	0
0	0	?	0	0
$+\infty$	∞	∞	?	?
$-\infty$	∞	∞	?	?

Abbiamo le **forme di indecisione**:

$$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}, \frac{\infty}{\infty}.$$

Il limite delle funzioni composte

Consideriamo due funzioni, $y = f(z)$ e $z = g(x)$, per le quali possiamo fare la composizione $f(g(x))$, cioè tali che $g(x)$ appartiene al dominio di f per ogni x appartenente al dominio di g.

TEOREMA

Siano $y = f(z)$ e $z = g(x)$ tali che $f(z)$ è continua in z_0 e $\lim_{x \to \alpha} g(x) = z_0$.
Allora:

$$\lim_{x \to \alpha} f(g(x)) = f(\lim_{x \to \alpha} g(x)) = f(z_0).$$

In particolare, se $g(x)$ è continua in x_0 e $f(z)$ è continua in $z_0 = g(x_0)$, allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(g(x_0)),$$

cioè la funzione composta $f(g(x))$ è *continua* in x_0.

ESEMPIO

La funzione $y = \text{sen}\, 4x$ è la funzione composta da $z = g(x) = 4x$, continua in $\mathbb{R}$, e da $y = f(z) = \text{sen}\, z$, continua in $\mathbb{R}$ e quindi in ogni punto dell'immagine di g.

La funzione composta $f \circ g$ è $f(g(x)) = \text{sen}\, 4x$, continua in $\mathbb{R}$.

Per esempio, $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \text{sen}\, 4x = \text{sen}\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\, \pi = 0$.

Per poter comporre due funzioni è necessario che il codominio della prima funzione sia contenuto nel dominio della seconda funzione. In questo caso i due insiemi coincidono con $\mathbb{R}$.

Continuità della funzione inversa

Ricordiamo che funzioni sempre crescenti o sempre decrescenti sono esempi di funzioni biettive.

Se $y = f(x)$ è una funzione biettiva in un intervallo D, allora esiste la funzione inversa f^{-1} definita nel codominio di f. Per essa si può dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA

Se $y = f(x)$ è una funzione biettiva e continua in D, allora la funzione inversa f^{-1} è continua nel codominio di f.

La funzione $\arccos x$ è l'inversa della restrizione di $\cos x$ all'intervallo $[0; \pi]$.

ESEMPIO

Calcoliamo $\lim\limits_{x \to 0} (\arccos x + 4x)$.

La funzione $\cos x$ è continua in $\mathbb{R}$ e quindi la funzione $\arccos x$ è continua per tutti i valori di $[-1; 1]$, in particolare per $x = 0$. Quindi:

$$\lim_{x \to 0} (\arccos x + 4x) = \lim_{x \to 0} \arccos x + \lim_{x \to 0} 4x = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

IN PRATICA
▶ Videolezione 65

2. LE FORME INDETERMINATE

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, le forme indeterminate che possiamo incontrare nel calcolo dei limiti sono sette:

$$+\infty - \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Non esistono regole generali per il calcolo delle forme indeterminate, che vanno quindi risolte caso per caso.

Esaminiamo ora, attraverso alcuni esempi, come calcolare i limiti che si presentano in forma indeterminata.

La forma indeterminata $+\infty - \infty$

ESEMPIO

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$ si presenta in forma indeterminata $+\infty - \infty$, perché:

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} (-\sqrt{x^2+1}) = -\infty.$$

Per calcolare questo limite possiamo riscrivere la funzione data in modo che nell'argomento del limite scompaia la differenza $x - \sqrt{x^2+1}$ e appaia invece la somma $x + \sqrt{x^2+1}$. Per far ciò, moltiplichiamo e dividiamo la funzione per $x + \sqrt{x^2+1}$:

$$x - \sqrt{x^2+1} = (x - \sqrt{x^2+1}) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2 - (x^2+1)}{x + \sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}}.$$

Abbiamo usato il prodotto notevole $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, con $a = x$ e $b = \sqrt{x^2+1}$. Nota che $x + \sqrt{x^2+1}$ è sicuramente diverso da 0.

Quando $x \to +\infty$, il denominatore della frazione $x + \sqrt{x^2+1}$ tende a $+\infty$, quindi, per il teorema del limite della funzione reciproca, la frazione tende a 0, ossia:

$$\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2+1}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}} = 0.$$

2. $\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 3x^2 + 1)$ si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$.

Raccogliendo il fattore x^4, il limite diventa:

$$\lim_{x \to +\infty} x^4\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right).$$

Poiché $\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{3}{x^2}\right) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$, risulta $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = 1$.

Inoltre, $\lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$, quindi, per il teorema del limite del prodotto, trovandoci nel caso di un limite finito (diverso da 0) e uno infinito, risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} x^4\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = +\infty.$$

Il procedimento utilizzato nell'esempio 2 si generalizza come segue.

Il limite di una funzione polinomiale

In generale, per calcolare il limite di una funzione polinomiale per $x \to +\infty$ (o per $x \to -\infty$),

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n),$$

procediamo così:

- raccogliamo a fattor comune x^n:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right);$$

- poiché, per x che tende a $+\infty$ o $-\infty$, il limite di $\frac{a_1}{x}, \frac{a_2}{x^2}, \ldots, \frac{a_n}{x^n}$ vale 0, risulta

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right) = a_0$$

e quindi:

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} a_0 x^n.}$$

Tale limite vale $+\infty$ o $-\infty$. Il segno si determina applicando la regola dei segni al prodotto $a_0 x^n$.

Questo procedimento è necessario se nel limite del polinomio compare la forma indeterminata $+\infty - \infty$. Esempio:

$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2x)$;

$\lim_{x \to -\infty} (x^3 + x^2)$.

n è il grado del polinomio.

ESEMPIO

$$\lim_{x \to -\infty} (6x^3 + 4x^2 - 5) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \cdot \left(6 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^3}\right) = \lim_{x \to -\infty} 6x^3 = -\infty.$$

La forma indeterminata $0 \cdot \infty$

ESEMPIO

Calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (1 - \operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{tg} x.$$

Con il calcolo diretto otteniamo la forma indeterminata $0 \cdot \infty$, perché:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (1 - \operatorname{sen} x) = 0,$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

● Per x vicino a $\frac{\pi}{2}$, si ha $1 + \operatorname{sen} x \neq 0$.

Ricordiamo che $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e moltiplichiamo e dividiamo la funzione data per $(1 + \operatorname{sen} x)$:

● Poiché x si avvicina a $\frac{\pi}{2}$, abbiamo $\cos x \neq 0$ e quindi possiamo semplificare per $\cos x$.

$$(1 - \operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{tg} x \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = \frac{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)}{1 + \operatorname{sen} x} \cdot \operatorname{tg} x =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos^{\cancel{2}} x}{1 + \operatorname{sen} x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cancel{\cos x}} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}.$$

Quando $x \to \frac{\pi}{2}^-$, il numeratore $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$ tende a 0, mentre il denominatore $1 + \operatorname{sen} x$ tende a 2, quindi, per il teorema del limite del quoziente di due funzioni, la frazione tende a $\frac{0}{2}$, ossia a 0:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (1 - \operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{tg} x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = 0.$$

● Analogamente calcoliamo $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (1 - \operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{tg} x = 0$ e quindi abbiamo: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 - \operatorname{sen} x) \operatorname{tg} x = 0$.

La forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

Il limite di una funzione razionale fratta per $x \to \infty$

Dato il limite

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m},$$

● n e m sono rispettivamente il grado del numeratore e quello del denominatore. Si ha la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ se $n \geq 1$ e $m \geq 1$.

quando almeno un coefficiente delle potenze di x è diverso da 0 sia a numeratore sia a denominatore, questo limite si presenta nella forma $\frac{\infty}{\infty}$, perché il numeratore e il denominatore tendono a ∞ quando x tende a ∞.

Forniamo tre esempi di calcolo di limite con $n > m$, $n = m$, $n < m$.

Il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore

ESEMPIO

Calcoliamo il limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 1}{3x^2 - 2x + 6}$.

Raccogliamo a fattor comune x^5 al numeratore e x^2 al denominatore:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 \cdot \left(1 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^5}\right)}{x^2 \cdot \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\boxed{x^3}}_{\text{tende a } +\infty} \cdot \frac{\overbrace{\boxed{\left(1 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^5}\right)}}^{\text{tende a } 1}}{\underbrace{\boxed{\left(3 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}}_{\text{tende a } 3}}.$$

Si ha quindi:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 1}{3x^2 - 2x + 6} = +\infty.$$

Semplifichiamo x^5 con x^2; possiamo supporre $x \neq 0$ perché x tende a $+\infty$ (lo stesso accadrebbe se x tendesse a $-\infty$).

Il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore

ESEMPIO

Calcoliamo il limite $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{1 - 2x^2}{3x^2 + 2x - 5}$.

Raccogliamo a fattor comune x^2 sia al numeratore sia al denominatore:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{x^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} - 2\right)}{x^2 \cdot \left(3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{\overbrace{\boxed{\left(\frac{1}{x^2} - 2\right)}}^{\text{tende a } -2}}{\underbrace{\boxed{\left(3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}\right)}}_{\text{tende a } 3}}.$$

Per il teorema del quoziente dei limiti, la frazione tende a $-\frac{2}{3}$, pertanto:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{1 - 2x^2}{3x^2 + 2x - 5} = -\frac{2}{3}.$$

Osserviamo che $-\frac{2}{3}$ è il rapporto fra i coefficienti dei termini di grado massimo, ossia dei termini con x^2, del numeratore e del denominatore.

Semplifichiamo x^2 (certamente diverso da 0, visto che cerchiamo il limite per x tendente a ∞).

Il grado del numeratore è minore del grado del denominatore

ESEMPIO

Calcoliamo il limite $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 1}{x^3 + 2x}$.

Raccogliamo x al numeratore e x^3 al denominatore:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x \cdot \left(2 - \frac{1}{x}\right)}{x^3 \cdot \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\boxed{\frac{1}{x^2}}}_{\text{tende a } 0} \cdot \frac{\overbrace{\boxed{\left(2 - \frac{1}{x}\right)}}^{\text{tende a } 2}}{\underbrace{\boxed{\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}}_{\text{tende a } 1}}.$$

Quindi:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 1}{x^3 + 2x} = 0.$$

Semplifichiamo x con x^3 ($x \neq 0$ perché $x \to -\infty$).

In generale, data una funzione razionale fratta

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m},$$

con il numeratore di grado n e il denominatore di grado m, abbiamo:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } n > m \\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$$

Il segno da attribuire a ∞ nel caso $n > m$ è dato dal prodotto dei segni di:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} x^{n-m} \quad \text{e} \quad \frac{a_0}{b_0}.$$

La forma indeterminata $\frac{0}{0}$

ESEMPIO

Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to3} \frac{x^2-2x-3}{2x^2-9x+9},$$

che si presenta in forma indeterminata $\frac{0}{0}$, perché:

$$\lim_{x\to3}(x^2-2x-3) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to3}(2x^2-9x+9) = 0.$$

Poiché il valore 3 annulla sia il numeratore sia il denominatore, scomponiamo in fattori entrambi:

$$x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$$
$$2x^2-9x+9 = (x-3)(2x-3)$$
$$\lim_{x\to3} \frac{x^2-2x-3}{2x^2-9x+9} = \lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(2x-3)} = \lim_{x\to3}\frac{x+1}{2x-3} = \frac{4}{3}.$$

La tecnica utilizzata in questo esempio si applica, più in generale, al caso di due polinomi $f(x)$ e $g(x)$, di grado qualunque, che si annullino entrambi per $x \to x_0$.

Per $x \to 3$, possiamo supporre $x - 3 \neq 0$.

Le forme indeterminate 0^0, ∞^0, 1^∞

Le forme indeterminate 0^0, ∞^0, 1^∞ si incontrano nei calcoli di limite del tipo

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)^{g(x)}, \quad \text{con } f(x) > 0.$$

Ricorrendo all'identità $a = e^{\ln a}$ possiamo scrivere:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Allora se, per esempio, $g(x) \to 0$ e $f(x) \to 0^+$, nella funzione $e^{g(x)\ln f(x)}$ all'esponente compare la forma indeterminata $0 \cdot \infty$.

ESEMPIO

Calcoliamo $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\ln x}}$.

Poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$, si ha la forma indeterminata ∞^0.

Scriviamo: $x^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{\ln x}}} = e^{\frac{1}{\cancel{\ln x}}\cdot\cancel{\ln x}} = e$. Il limite vale allora e.

3. I LIMITI NOTEVOLI

IN PRATICA
▶ Videolezione 66

Illustriamo due limiti particolari, detti *notevoli* perché sono fondamentali nelle applicazioni dell'analisi.

Un primo limite notevole

Consideriamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \text{ con } x \text{ espresso in radianti.}$$

Poiché $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$ e $\lim_{x \to 0} x = 0$, siamo in presenza della forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Dimostriamo che

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.}$$

Osserviamo che la funzione $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è pari, poiché

$$\frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

● Una funzione $f(x)$ è pari se $f(-x) = f(x)$.

e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Possiamo allora affermare che

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

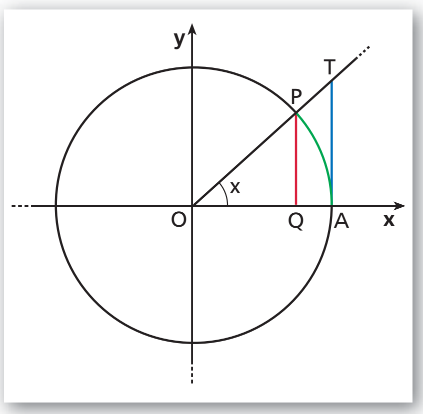
e quindi nella dimostrazione ci limitiamo al caso $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Consideriamo il cerchio trigonometrico e un angolo positivo di ampiezza x. Se x è in radianti, la sua misura coincide con quella di $\overset{\frown}{AP}$, mentre la misura di PQ è sen x e quella di TA è tg x. Essendo

$$\overline{PQ} < \overset{\frown}{AP} < \overline{TA},$$

abbiamo che

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$



◀ Figura 1

● Poiché $x \to 0^+$, si può supporre che $x < \frac{\pi}{2}$.

Dividiamo i termini della disuguaglianza per sen x,

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x},$$

● Dividendo per sen x, la disuguaglianza conserva il suo verso perché sen $x > 0$, in quanto $x > 0$.

e passiamo ai reciproci, ottenendo: $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$.

La funzione $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è compresa fra la funzione cos x e la funzione costante 1. Possiamo applicare il teorema del confronto: essendo $\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$, la funzione $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è compresa fra due funzioni che per $x \to 0^+$ tendono entrambe a 1, quindi anch'essa tende a 1.

Se l'angolo è espresso in gradi invece che in radianti, si può dimostrare che:
$\lim_{x^\circ \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^\circ}{x^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$.

Essendo $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, concludiamo che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Da questo limite notevole si deducono i seguenti limiti, che si presentano anch'essi nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

1. $\mathbf{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0}$

DIMOSTRAZIONE

Moltiplicando numeratore e denominatore di $\frac{1 - \cos x}{x}$ per $1 + \cos x$, otteniamo

$$\frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{1 + \cos x},$$

e quindi, per il teorema del prodotto dei limiti, risulta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

2. $\mathbf{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$

DIMOSTRAZIONE

Applicando il ragionamento precedente, possiamo scrivere:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Un secondo limite notevole

Consideriamo:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Poiché $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, siamo in presenza della forma indeterminata 1^∞.

Si può dimostrare che

$$\mathbf{\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

Ricordiamo che e rappresenta il numero di Nepero, che è un numero irrazionale di valore compreso fra 2 e 3.

Anche da questo limite notevole possiamo dedurne altri, che sono nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

DIMOSTRAZIONE

Applicando le proprietà dei logaritmi, possiamo scrivere

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\ln(1+x)=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

e quindi, per il teorema di continuità della funzione composta:

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right].$$

Poniamo ora $y=\frac{1}{x}$, allora $x=\frac{1}{y}$ e per $x\to 0$ abbiamo $y\to\pm\infty$.

Effettuando la sostituzione di variabile nel limite precedente, otteniamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln\left[\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]=\ln e=1.$$

Più in generale, si dimostra che, se $a>0$ e $a\neq 1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e.$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

DIMOSTRAZIONE

Poniamo $y=e^x-1$, allora $e^x=1+y$ e $x=\ln(1+y)$. Inoltre, per $x\to 0$ risulta $y\to 0$; quindi, sostituendo la variabile x, otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{1}=1,$$

per il teorema del limite della funzione reciproca.

Più in generale, si dimostra che, se $a>0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$

Poiché e^x è continua,

$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}(e^x-1)=$
$=1-1=0.$

I limiti notevoli si applicano anche quando al posto della variabile x compare una funzione $y=f(x)$ il cui limite è uguale al valore a cui tende x nel limite notevole. Per esempio:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}=1.$$

Infatti, se poniamo $y=3x$, per $x\to 0$ anche $y\to 0$ e il limite risulta nella sua forma standard:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}=1.$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k$$

DIMOSTRAZIONE

Scriviamo $(1+x)^k=e^{\ln(1+x)^k}=e^{k\ln(1+x)}$.

Sostituiamo e moltiplichiamo numeratore e denominatore per $k\ln(1+x)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{k\ln(1+x)}-1}{x}\cdot\frac{k\ln(1+x)}{k\ln(1+x)}.$$

Applichiamo i due limiti notevoli precedenti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{k\ln(1+x)}-1}{k\ln(1+x)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot k=1\cdot 1\cdot k=k.$$

4. GLI INFINITESIMI, GLI INFINITI E IL LORO CONFRONTO

Gli infinitesimi

DEFINIZIONE

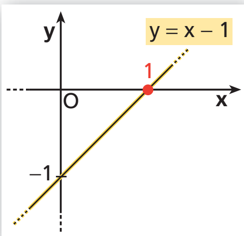
Infinitesimo per $x \to \alpha$

Si dice che una funzione $f(x)$ è un infinitesimo per $x \to \alpha$ quando il limite di $f(x)$ per $x \to \alpha$ è uguale a 0.

α può essere finito o $+\infty$ o $-\infty$.

ESEMPIO

1. La funzione $f(x) = x - 1$ è un infinitesimo per $x \to 1$ perché $\lim_{x \to 1}(x-1) = 0$.



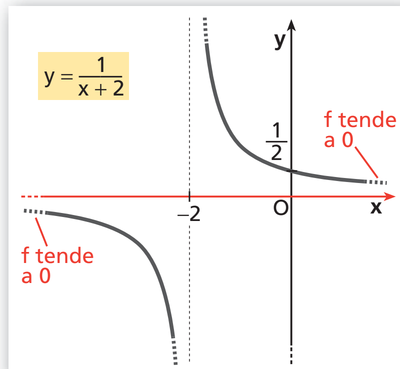
▲ **Figura 2** La funzione $y = x - 1$ è un infinitesimo per x che tende a 1. Nel punto di ascissa 1 la funzione interseca l'asse delle x.

2. La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ è un infinitesimo per $x \to +\infty$, perché

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+2} = 0,$$

e per $x \to -\infty$, perché

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x+2} = 0.$$



▶ **Figura 3** La funzione $y = \dfrac{1}{x+2}$ è un infinitesimo per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

Funzioni del tipo $\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^2}, \dfrac{1}{x^3}, \ldots$ e $\dfrac{1}{\sqrt{x}}, \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, \ldots$ sono tutte infinitesimi per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ (da quest'ultimo caso sono esclusi i reciproci delle radici di indice pari).

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambi degli infinitesimi per $x \to \alpha$, si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infinitesimi simultanei**.

In questo caso è interessante vedere quale dei due infinitesimi tende a 0 «più rapidamente»; possiamo stabilire ciò determinando il limite (se esiste) del loro rapporto per $x \to \alpha$.

Se f e g sono infinitesimi per $x \to \alpha$, allora $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$.

Siano dunque $f(x)$ e $g(x)$ due infinitesimi simultanei per $x \to \alpha$ e supponiamo che esista un intorno I di α tale che $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$, con $x \neq \alpha$.

- Se $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ (l finito), si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infinitesimi dello stesso ordine** (essenzialmente questo vuol dire che tendono a 0 con la stessa rapidità).
- Se $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, si dice che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine superiore** a $g(x)$ (cioè f tende a 0 più rapidamente di g).
- Se $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, si dice che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine inferiore** a $g(x)$ (cioè f tende a 0 meno rapidamente di g).
- Se *non esiste* il $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, si dice che **gli infinitesimi** $f(x)$ e $g(x)$ **non sono confrontabili**.

ESEMPIO

1. Gli infinitesimi $f(x) = \ln(1+x)$ e $g(x) = x$, per $x \to 0$, sono dello stesso ordine perché $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \neq 0$.
2. $f(x) = (x-3)^2$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x) = x - 3$, per $x \to 3$, perché:
$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)^2}{x-3} = \lim_{x \to 3} (x-3) = 0.$$
3. $f(x) = e^x - 1$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $g(x) = x^3$, per $x \to 0$, perché:
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty.$$
4. Gli infinitesimi $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $g(x) = x$, per $x \to 0$, non sono confrontabili, perché
$$\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{y \to \infty} \operatorname{sen} y$$
non esiste.

- Puoi dimostrare che $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ è un infinitesimo per $x \to 0$ con il teorema del confronto.
- Abbiamo eseguito il cambiamento di variabile $y = \frac{1}{x}$.

DEFINIZIONE

Ordine di un infinitesimo

Dati due infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$, per $x \to \alpha$, si dice che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine γ $(\gamma > 0)$ rispetto a $g(x)$, quando $f(x)$ è dello stesso ordine di $[g(x)]^{\gamma}$, cioè se:
$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{[g(x)]^{\gamma}} = l \neq 0.$$

Diciamo inoltre che $g(x)$ è preso come **infinitesimo campione**. In generale, come infinitesimo campione, si prende:

$$g(x) = x - x_0, \qquad \text{se } x \to x_0;$$
$$g(x) = \frac{1}{x}, \qquad \text{se } x \to \pm\infty.$$

- Quando non è specificato, l'ordine di infinitesimo è riferito a questi campioni standard.

ESEMPIO

L'infinitesimo $f(x) = \frac{x-4}{x^5+1}$, per $x \to +\infty$, è di ordine 4 $\left(\text{rispetto al campione } \frac{1}{x}\right)$, infatti:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x-4}{x^5+1}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 - 4x^4}{x^5+1} = 1 \neq 0.$$

DEFINIZIONE

Infinitesimi equivalenti

Dati due infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$, per $x \to \alpha$, essi si dicono equivalenti se:
$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$
e si scrive $f \sim g$.

- Due infinitesimi equivalenti si dicono anche **asintoticamente uguali** e il simbolo $\sim$ è detto di *uguaglianza asintotica*.
Per la definizione, due infinitesimi equivalenti hanno lo stesso ordine.

Inoltre uno dei due si dice **parte principale** dell'altro.

Esempi di infinitesimi equivalenti, per $x \to 0$, sono:

$$\operatorname{sen} x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x,$$

che abbiamo visto come limiti notevoli.

● Infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

TEOREMA

Principio di sostituzione degli infinitesimi

Se esiste il limite del rapporto di due infinitesimi simultanei $f(x)$ e $g(x)$, allora esso resta invariato se si sostituisce ciascun infinitesimo con la sua parte principale (cioè con un infinitesimo a esso equivalente):

$$f \sim f_1,\ g \sim g_1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f_1(x)}{f(x)} \cdot \lim_{x\to\alpha} \frac{g(x)}{g_1(x)} \cdot \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

● Possiamo scrivere:

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(x)}{f(x)} \cdot \frac{g(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Per la definizione di infinitesimi equivalenti:

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{\operatorname{sen} 2x}$.

Poiché $\ln(1+5x) \sim 5x$ e $\operatorname{sen} 2x \sim 2x$, abbiamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}.$$

Gli infiniti

DEFINIZIONE

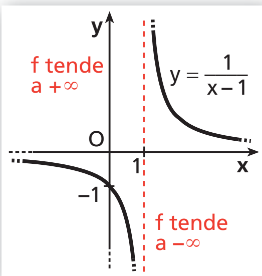
Infinito per $x \to \alpha$

Una funzione $f(x)$ si dice un infinito per $x \to \alpha$ quando il limite di $f(x)$ per $x \to \alpha$ vale $+\infty$, $-\infty$ o ∞.

● α può essere finito o $+\infty$ o $-\infty$.

ESEMPIO

La funzione $f(x) = \frac{1}{x-1}$ è un infinito per $x \to 1$ perché $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.



▲ **Figura 4** La funzione $y = \frac{1}{x-1}$ è un infinito per $x \to 1^+$ e per $x \to 1^-$.

● Le funzioni del tipo $x, x^2, x^3, \ldots$ e anche $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \ldots$ sono infiniti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ (da quest'ultimo caso sono escluse le radici di indice pari).

Per gli infiniti possiamo introdurre dei concetti analoghi a quelli visti per gli infinitesimi.

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambi infiniti per $x \to \alpha$, si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infiniti simultanei**.

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due infiniti simultanei per $x \to \alpha$.

- Se $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ (l finito), si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infiniti dello stesso ordine** (essenzialmente questo vuol dire che tendono a ∞ con la stessa rapidità).
- Se $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, si dice che $f(x)$ è un **infinito di ordine inferiore** a $g(x)$ (cioè f tende a ∞ meno rapidamente di g).
- Se $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, si dice che $f(x)$ è un **infinito di ordine superiore** a $g(x)$ (cioè f tende a ∞ più rapidamente di g).
- Se *non esiste* il $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$, si dice che **gli infiniti** $f(x)$ e $g(x)$ **non sono confrontabili**.

● In questo caso sicuramente $g(x) \neq 0$ in un intorno di α perché tende a $\pm\infty$.

● Se f e g sono infiniti per $x \to \alpha$, allora $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

ESEMPIO

1. Gli infiniti $f(x) = x^5$ e $g(x) = 3x^5 + 2$, per $x \to +\infty$, sono dello stesso ordine perché

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5}{3x^5 + 2} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

2. $f(x) = (x-1)^2$ è un infinito di ordine superiore a $g(x) = x + 1$, per $x \to +\infty$, perché

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)^2}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} = +\infty.$$

3. $f(x) = \frac{1}{x}$ è un infinito di ordine inferiore a $g(x) = \frac{1}{x^4}$, per $x \to 0$, perché

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x \to 0} x^3 = 0.$$

4. Gli infiniti $f(x) = x^3(\cos x + 2)$ e $g(x) = x^3$, per $x \to +\infty$, non sono confrontabili perché

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3(\cos x + 2)}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} (\cos x + 2)$$

non esiste.

● Puoi dimostrare che $x^3(\cos x + 2)$ è un infinito per $x \to +\infty$ mediante il teorema del confronto.

DEFINIZIONE

Ordine di un infinito

Dati due infiniti $f(x)$ e $g(x)$, per $x \to \alpha$, si dice che $f(x)$ è un infinito di ordine γ ($\gamma > 0$) rispetto a $g(x)$, quando $f(x)$ è dello stesso ordine di $[g(x)]^\gamma$, cioè se:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{[g(x)]^\gamma} = l \neq 0.$$

Diciamo inoltre che $g(x)$ è preso come **infinito campione**. In generale, si considera come infinito campione:

$$g(x) = \frac{1}{x - x_0}, \qquad \text{se } x \to x_0;$$
$$g(x) = x, \qquad \text{se } x \to \pm\infty.$$

Quando non è specificato, l'ordine di infinito è riferito a questi campioni standard.

ESEMPIO

L'infinito $f(x) = \dfrac{x+2}{2x^3 - 5x^2}$, per $x \to 0$, è di ordine 2 $\left(\text{rispetto al campione } \dfrac{1}{x}\right)$, infatti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x+2}{2x^3 - 5x^2}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 2x^2}{2x^3 - 5x^2} = -\frac{2}{5} \neq 0.$$

DEFINIZIONE

Infiniti equivalenti

Dati due infiniti $f(x)$ e $g(x)$, per $x \to \alpha$, essi si dicono equivalenti se:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

e si scrive $f \sim g$.

Due infiniti equivalenti si dicono anche **asintoticamente uguali**. Per la definizione, due infiniti equivalenti hanno lo stesso ordine.

Inoltre, uno dei due si dice **parte principale** dell'altro.

ESEMPIO

La funzione $f(x) = 3x^6 + 4x^3 + 2x - 1$ è un infinito, per $x \to +\infty$, equivalente a $g(x) = 3x^6$, allora $3x^6$ è la parte principale di $f(x)$.

TEOREMA

Principio di sostituzione degli infiniti

Se esiste il limite del rapporto di due infiniti simultanei $f(x)$ e $g(x)$, allora esso resta invariato se si sostituisce ciascun infinito con la sua parte principale (cioè con un infinito a esso equivalente):

$$f \sim f_1,\ g \sim g_1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Si dimostra come il principio di sostituzione degli infinitesimi.

Gerarchia degli infiniti

Se si deve calcolare il limite del rapporto di due infiniti, spesso non è facile valutare l'ordine di infinito delle due funzioni. Per esempio, anche con l'aiuto di limiti notevoli, non possiamo calcolare $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

Il seguente teorema dice che, per $x \to +\infty$, le funzioni logaritmiche (con base $a > 1$) tendono a infinito meno rapidamente delle potenze, le quali a loro volta tendono a infinito meno rapidamente delle funzioni esponenziali (con base $b > 1$).

TEOREMA

Gerarchia degli infiniti

Date le tre famiglie di funzioni

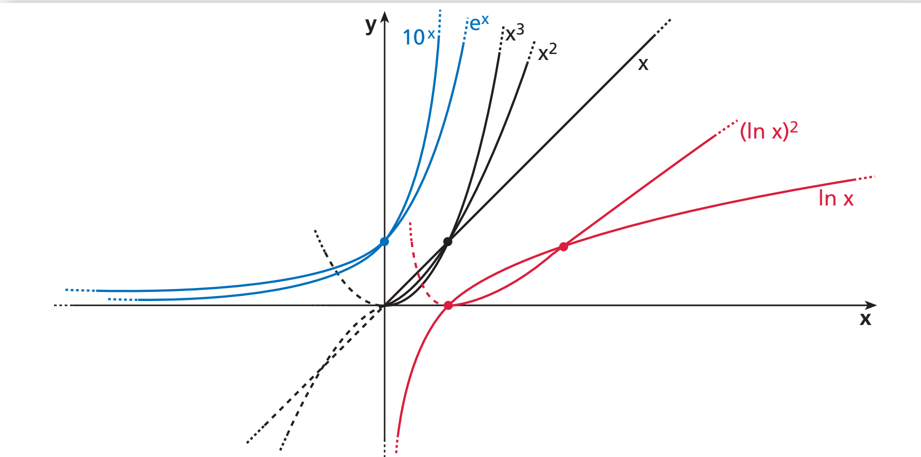
$$(\log_a x)^\alpha, \quad x^\beta, \quad b^x, \quad \text{con } \alpha, \beta > 0 \text{ e } a, b > 1,$$

allora, per $x \to +\infty$, ognuna è un infinito di ordine inferiore rispetto a quella che si trova a destra nell'elenco, cioè:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0.$$

Sinteticamente, possiamo scrivere, riferendoci agli ordini di infinito:

$$(\log_a x)^\alpha < x^\beta < b^x.$$



◀ **Figura 5** Graficamente vediamo che $\ln x$, $(\ln x)^2$, … tendono a $+\infty$ più lentamente di x, x^2, x^3, …, che a loro volta tendono a $+\infty$ più lentamente di e^x, 10^x, …

Come casi particolari si hanno i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\beta} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\beta} = +\infty.$$

ESEMPIO

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2^x} = 0.$$

● Mediante la gerarchia degli infiniti, il calcolo di limiti di questo tipo diventa rapido.

5. LE FUNZIONI CONTINUE

Approfondiamo ora il concetto di funzione continua.
Ricordiamo la definizione: una funzione $f(x)$, definita in un intorno di un punto x_0, si dice **continua in x_0** se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

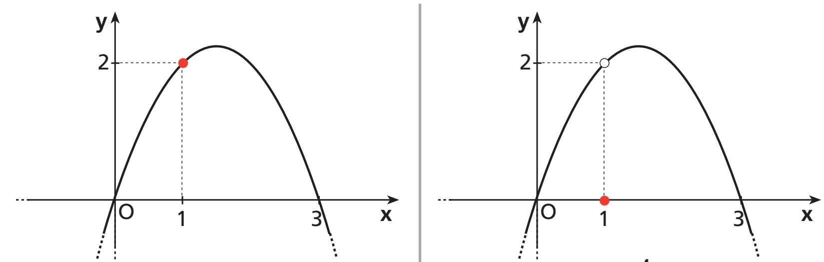
Una funzione $f(x)$ è quindi continua in x_0 se:

- è definita in x_0, cioè esiste $f(x_0)$;
- esiste finito $\lim_{x \to x_0} f(x)$;
- il valore del limite è uguale a $f(x_0)$.

● Se esiste finito $\lim_{x \to x_0} f(x)$, significa che $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$.

Consideriamo le funzioni i cui grafici sono illustrati in figura 6.

▶ **Figura 6**



a. La funzione $f(x) = -x^2 + 3x$ è definita in $\mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$.

b. La funzione $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ ha limite $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 \neq f(1)$.

Esse hanno lo stesso limite per x che tende a 1; nel caso a tale limite coincide con il valore $f(1)$ della funzione nel punto 1, mentre nel caso b questo non accade. Nel primo caso la funzione è *continua in* $x = 1$, mentre nel secondo la funzione è *discontinua in* $x = 1$.

Abbiamo già visto che, se una funzione è continua in un punto, il calcolo del limite in quel punto risulta semplice, perché basta calcolare il valore della funzione in quel punto. Per esempio, sapendo che la funzione $f(x) = 2x$ è continua nel punto 7, risulta $\lim\limits_{x \to 7} 2x = 2 \cdot 7 = 14$.

La definizione di funzione continua in x_0 può essere anche espressa in modo equivalente:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

Infatti, posto $x_0 + h = x$, se $h \to 0$ si ha che $x \to x_0$, dunque $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Se consideriamo solo il limite destro o sinistro di una funzione $f(x)$, possiamo dare le seguenti definizioni:

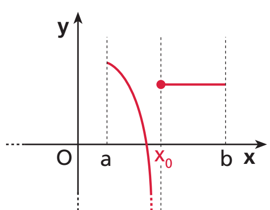
- $f(x)$ è **continua a destra** in x_0 se $f(x_0)$ coincide con il limite destro di $f(x)$ per x che tende a x_0:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0);$$

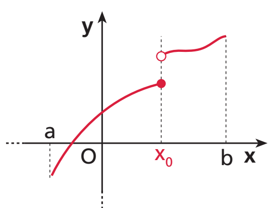
- $f(x)$ è **continua a sinistra** in x_0 se $f(x_0)$ coincide con il limite sinistro di $f(x)$ per x che tende a x_0:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

È possibile allora parlare di continuità anche per punti che sono estremi dell'intervallo $[a; b]$ in cui la funzione è definita; nel punto a si parla di continuità a destra, mentre nel punto b si parla di continuità a sinistra.



a. La funzione è continua a destra in x_0.



b. La funzione è continua a sinistra in x_0.

● Intuitivamente, dire che una funzione è continua in un intervallo è come dire che nel disegnare il suo grafico non stacchiamo mai la penna dal foglio.

DEFINIZIONE

Funzione continua in un intervallo

Una funzione definita in $[a; b]$ si dice continua nell'intervallo $[a; b]$ se è continua in ogni punto dell'intervallo.

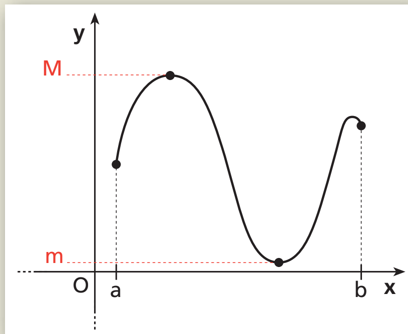
I teoremi sulle funzioni continue

Enunciamo, senza dimostrare, alcuni teoremi che esprimono proprietà importanti delle funzioni continue e ne illustriamo graficamente le conseguenze.

TEOREMA

Teorema di Weierstrass

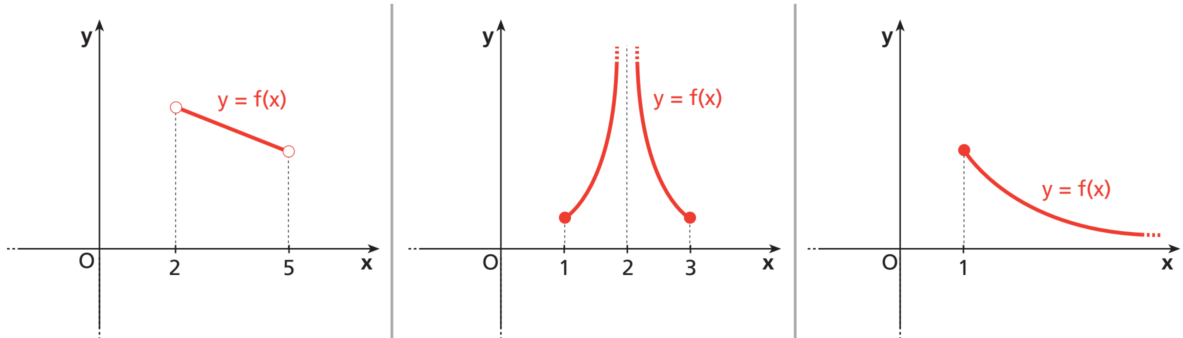
Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$, allora essa assume, in tale intervallo, il massimo assoluto e il minimo assoluto.



Data la funzione $y = f(x)$ definita nell'intervallo I, chiamiamo:

- **massimo assoluto** di $f(x)$, se esiste, il massimo M dei valori assunti dalla funzione in I;
- **minimo assoluto** di $f(x)$, se esiste, il minimo m dei valori assunti dalla funzione in I.

Se alcune ipotesi del teorema non sono verificate, il risultato non è più vero come mostrano i seguenti controesempi.



a. La funzione è continua nell'intervallo limitato aperto $]2; 5[$. Essa è priva di massimo e minimo in questo intervallo, in quanto gli estremi non appartengono all'intervallo.

b. La funzione non è continua nel punto $x = 2$. Nell'intervallo $[1; 3]$ essa assume minimo, ma è priva di massimo.

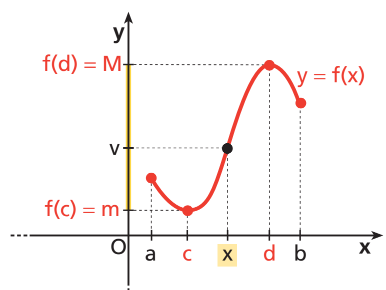
c. La funzione è continua nell'intervallo illimitato $[1; +\infty[$. Non vale il teorema di Weierstrass e la funzione è priva di minimo assoluto.

▲ **Figura 7**

TEOREMA

Teorema dei valori intermedi

Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$, allora essa assume, almeno una volta, tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.



f continua in $[a; b] \Rightarrow$

$\forall\, v \mid m \le v \le M$

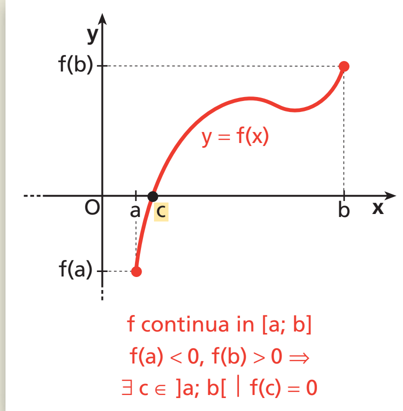
$\exists\, x \in [a; b] \mid f(x) = v$

● Ciò che afferma il teorema equivale a dire che, nelle ipotesi indicate, l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione in $]a; b[$.

TEOREMA

Teorema di esistenza degli zeri

Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$ e negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto c, interno all'intervallo, in cui f si annulla.



ESEMPIO

Consideriamo la funzione $f(x) = x + \log_2 x$ nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

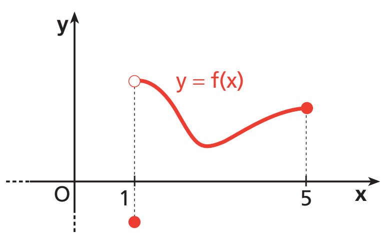
Poiché il dominio di $f(x)$ è D: $x > 0$, la funzione è continua in $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Inoltre si ha:

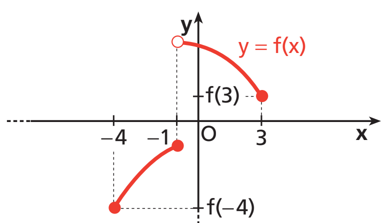
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \log_2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0 \text{ e } f(1) = 1 + \log_2 1 = 1 > 0.$$

Sono verificate le ipotesi del teorema degli zeri, quindi è possibile affermare che l'equazione $f(x) = 0$, e cioè $x + \log_2 x = 0$, ha almeno una soluzione nell'intervallo $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$.

▶ **Figura 8** Alcuni controesempi.



a. La funzione è continua nell'intervallo $]1; 5]$, $f(1) < 0$ e $f(5) > 0$, ma non esiste alcun punto dell'intervallo in cui essa si annulla.



b. La funzione non è continua in $x = -1$; $f(-4) < 0$ e $f(3) > 0$. Non esiste alcun punto dell'intervallo $[-4; 3]$ in cui essa si annulla.

6. I PUNTI DI DISCONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE

● Un punto di discontinuità viene anche chiamato **punto singolare**.

Un punto x_0 di un intervallo $[a; b]$ si dice **punto di discontinuità** per una funzione $f(x)$ se la funzione non è continua in x_0.

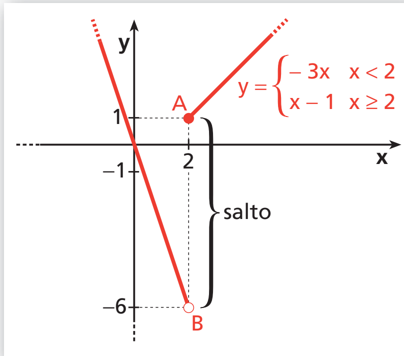
I punti di discontinuità di prima specie

Consideriamo la seguente funzione definita per casi:

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{se } x < 2 \\ x - 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Se calcoliamo il limite per x che tende a 2 da destra, dobbiamo considerare la funzione $y = x - 1$; per x che tende a 2 da sinistra, dobbiamo considerare la funzione $y = -3x$:

$$\lim_{x \to 2^+} (x - 1) = 1 \text{ e } \lim_{x \to 2^-} (-3x) = -6.$$



◀ Figura 9

Il punto 2 è un *punto di discontinuità di prima specie*. La distanza fra i punti A e B in figura 9 viene chiamata **salto** della funzione nel punto 2 e vale: $1 - (-6) = 7$.

● È possibile classificare i punti di discontinuità di una funzione in tre categorie: di prima specie, di seconda specie e di terza specie. Il criterio usato per tale classificazione si basa sullo studio di $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

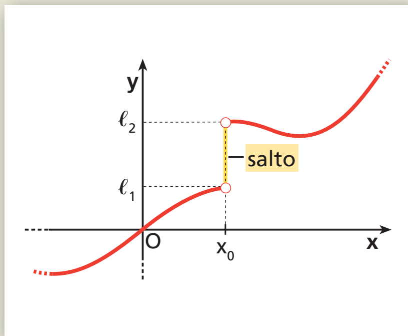
DEFINIZIONE

Punto di discontinuità di prima specie

Un punto x_0 si dice punto di discontinuità di prima specie per la funzione $f(x)$ quando, per $x \to x_0$, il limite destro e il limite sinistro di $f(x)$ sono entrambi finiti ma diversi fra loro.

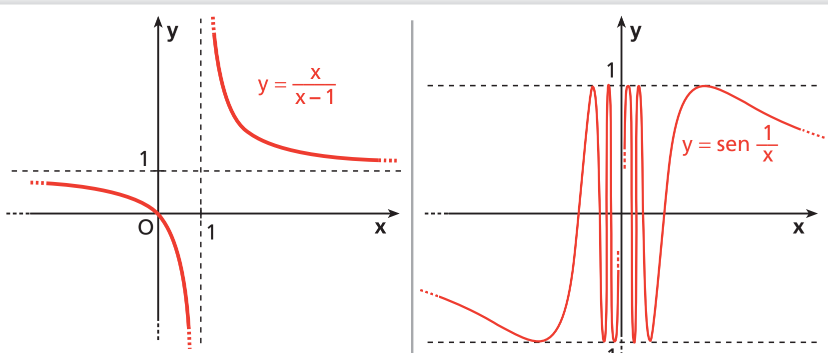
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2.$$

La differenza $|l_2 - l_1|$ si dice **salto** della funzione.



I punti di discontinuità di seconda specie

Consideriamo gli esempi in figura 10.



a. La funzione $y = \frac{x}{x-1}$ non è definita nel punto $x_0 = 1$ e $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, mentre $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

b. La funzione $y = \text{sen}\,\frac{1}{x}$ non è definita in $x_0 = 0$ e per $x \to 0$ non ammette né limite destro né limite sinistro: infatti $t = \frac{1}{x}$ tende all'infinito e sen t continua a oscillare tra -1 e 1.

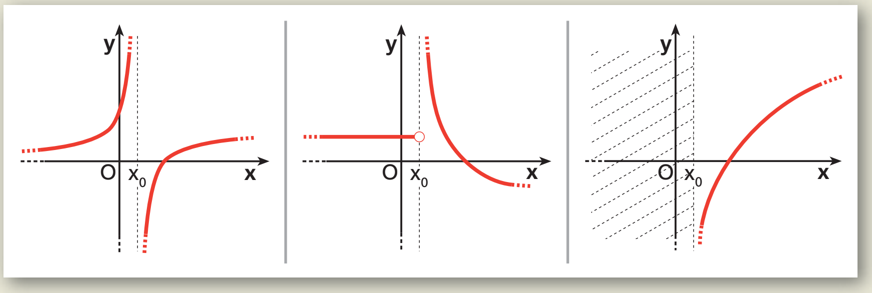
◀ Figura 10

In entrambi i casi il punto x_0 è un *punto di discontinuità di seconda specie*.

DEFINIZIONE

Punto di discontinuità di seconda specie

Un punto x_0 si dice punto di discontinuità di seconda specie per la funzione $f(x)$ quando per $x \to x_0$ almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, di $f(x)$ è infinito oppure non esiste.



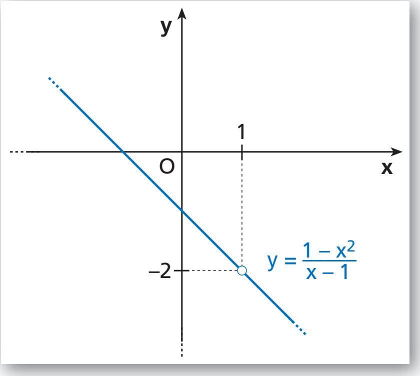
I punti di discontinuità di terza specie (o eliminabile)

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x-1}.$$

Il dominio è $\mathbb{R} - \{1\}$.
La funzione è discontinua in $x_0 = 1$ perché $f(1)$ non esiste.
Calcoliamo il limite per $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1-x^2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(1-x)}(1+x)}{-\cancel{(1-x)}} =$$
$$= \lim_{x \to 1} -(1+x) = -2.$$



▶ **Figura 11** La funzione $y = \frac{1-x^2}{x-1}$ coincide con la funzione $y = -1-x$ nell'insieme $\mathbb{R} - \{1\}$.

Per la definizione di limite, possiamo dire che, scelto un intorno completo di $x_0 = 1$ sempre più ristretto, la funzione assume valori sempre più vicini a -2, e quindi possiamo dire che $f(x)$ è *quasi continua*, perché rimane escluso il solo punto $x_0 = 1$, come si può osservare nel grafico.
Il punto 1 si chiama *punto di discontinuità di terza specie* per la funzione

$$y = \frac{1-x^2}{x-1}.$$

Il punto 1 viene anche detto punto di **discontinuità eliminabile**, perché la funzione può essere modificata nel punto 1 in modo da renderla continua, rimanendo invariata nel suo dominio naturale:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ -2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Tale funzione è continua in $x = 1$, infatti $\lim_{x \to 1} f(x) = -2 = f(1)$.

● Per semplicità, indichiamo anche la funzione modificata con la scrittura $f(x)$.

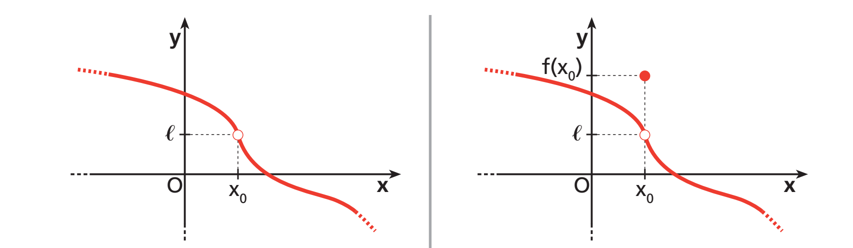
DEFINIZIONE

Punto di discontinuità di terza specie (o eliminabile)

Un punto x_0 si dice punto di discontinuità di terza specie per la funzione $f(x)$ quando:

1. esiste ed è finito il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$, ossia $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$;

2. f non è definita in x_0, oppure, se lo è, risulta $f(x_0) \neq l$.

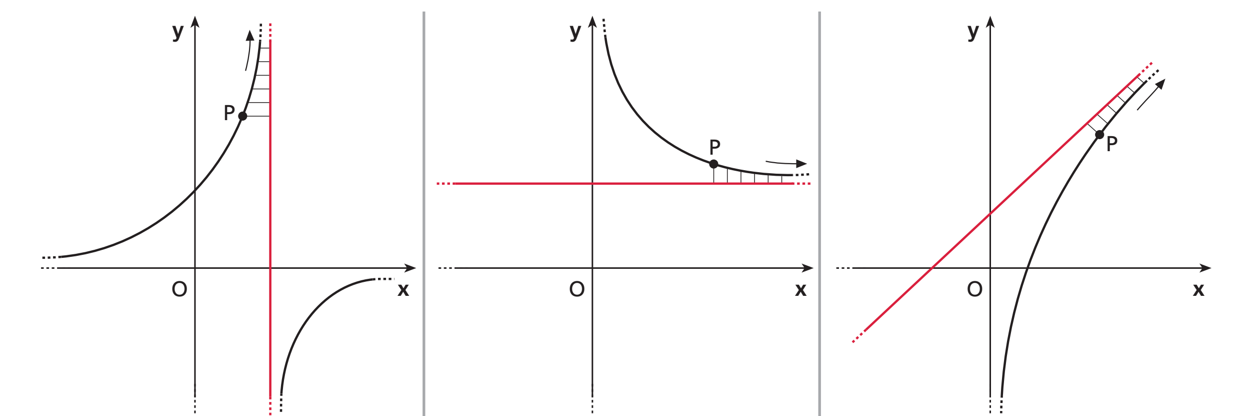


a. f non è definita in x_0.

b. f è definita in x_0, ma $f(x_0) \neq \ell$.

7. LA RICERCA DEGLI ASINTOTI

Sappiamo che un asintoto di una funzione $f(x)$ è una retta la cui distanza dal grafico di $f(x)$ tende a 0 man mano che un generico punto P sul grafico si allontana all'infinito.



a. Asintoto verticale.

b. Asintoto orizzontale.

c. Asintoto obliquo.

▲ Figura 12

La ricerca degli asintoti orizzontali e verticali

Nel capitolo precedente abbiamo dato le definizioni relative agli asintoti orizzontali e verticali. Ora riprendiamo l'argomento per indicare come si effettua la loro ricerca.

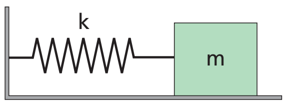
Per vedere se una funzione $f(x)$ possiede degli asintoti occorre esaminare il suo dominio D. Se D è illimitato, gli asintoti orizzontali si determinano calcolando $\lim_{x \to \infty} f(x)$. Gli asintoti verticali invece si cercano calcolando $\lim_{x \to x_0} f(x)$, dove x_0 è un punto escluso dal dominio, ovvero un punto in cui la funzione è discontinua.

ESPLORAZIONE

Un limite da disastro

L'oscillatore armonico semplice

I fenomeni di vibrazione, come una scossa di terremoto, vengono studiati ricorrendo a modelli basati sull'**oscillatore armonico semplice**, che è costituito da una massa m attaccata a una molla. Se la molla viene deformata e successivamente rilasciata,

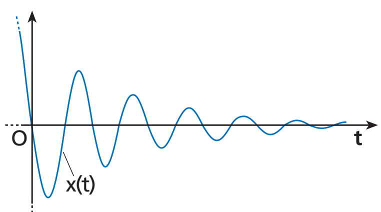


la massa, sottoposta all'azione di una forza di richiamo elastica $\vec{F} = -k\vec{x}$, compie un moto oscillatorio orizzontale detto *armonico semplice*. L'equazione che lo descrive è del tipo $x(t) = A\cos\omega_0 t$, dove x è lo spostamento rispetto alla posizione di riposo e A l'**ampiezza**, ossia il massimo spostamento nell'oscillazione.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f$ è una costante detta **pulsazione** ed è caratteristica dell'oscillatore; f è la **frequenza**, cioè il numero di oscillazioni nell'unità di tempo.

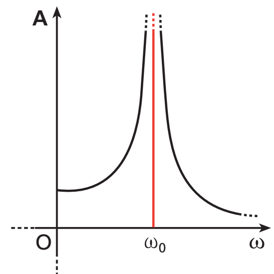
Oscillatore smorzato e forzato

Nel caso in cui la massa m, oltre che alla forza elastica di richiamo, sia sottoposta anche a una



forza dissipativa (come la forza di attrito), il moto è **smorzato**. L'ampiezza delle oscillazioni diventa progressivamente più piccola con il passare del tempo, mentre la pulsazione ω_0 resta costante.

Supponiamo ora che su m agiscano una forza elastica di richiamo, una forza dissipativa e una **forza eccitatrice**, la cui intensità varia nel tempo secondo la legge $F(t) = F_0 \operatorname{sen}\omega t$. Una forza di questo tipo compensa le perdite di energia dovute alla forza dissipativa e tende ad amplificare le oscillazioni. L'ampiezza delle oscillazioni varia al variare di ω e, come si vede nel grafico, diventa particolarmente grande quando F ha una pulsazione vicina a quella propria dell'oscillatore,



ovvero quando $\omega \simeq \omega_0$. Se la forza dissipativa è trascurabile, abbiamo che $\lim_{\omega \to \omega_0} A(\omega) = +\infty$. Il fenomeno è detto **risonanza** e la pulsazione propria ω_0 è detta anche *pulsazione di risonanza del sistema*.

Le strutture architettoniche possono essere considerate degli oscillatori: hanno una frequenza propria determinata dalla loro rigidità, dalla massa e dalle caratteristiche della loro costruzione. Una forza eccitatrice che agisce su questi oscillatori può essere generata, per esempio, dal vento o da un terremoto.

◀ Gli angoli delle Petronas Towers a Kuala Lumpur sono smussati. Nei grattacieli è necessario adottare forme aerodinamiche per evitare l'impatto con il vento, che potrebbe provocare un fenomeno di risonanza.

Se la frequenza di oscillazione del suolo durante un terremoto è vicina alla frequenza propria della costruzione, le vibrazioni risonanti della costruzione possono amplificarsi raggiungendo ampiezze tali da danneggiarla o addirittura distruggerla.

Attività

Risonanza distruttiva

- Cerca in Internet filmati ed esempi riguardanti la risonanza distruttiva.

Cerca nel Web:

Tacoma Bridge, risonanza, ponti, soldati

ESEMPIO
Data la funzione $y = \dfrac{4x^2+3}{x^2-1}$, cerchiamo le equazioni dei suoi asintoti orizzontali e verticali. Il dominio della funzione è $D = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.
Asintoti orizzontali:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+3}{x^2-1} = 4.$$

La retta di equazione $y = 4$ è asintoto orizzontale per il grafico della funzione.
Asintoti verticali:

$$\lim_{x\to+1} \frac{4x^2+3}{x^2-1} = \lim_{x\to-1} \frac{4x^2+3}{x^2-1} = \infty.$$

Le rette di equazioni $x = 1$ e $x = -1$ sono gli asintoti verticali.

- Un asintoto orizzontale di equazione $y = c$ si ha quando:
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c.$$
- Un asintoto verticale di equazione $x = x_0$ si ha quando:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

Gli asintoti obliqui

DEFINIZIONE
Asintoto obliquo
Data la funzione $y = f(x)$, se si verifica che

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx+q)] = 0,$$

si dice che la retta di equazione $y = mx + q$ è asintoto obliquo per il grafico della funzione.

- Da
$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx+q)] = 0$$
ricaviamo
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (mx+q),$$
da cui:
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$
condizione necessaria (ma non sufficiente) per l'esistenza dell'asintoto obliquo.

Analoga definizione si ha se si sostituiscono $+\infty$ o $-\infty$ a ∞.

- Per $x \to +\infty$ parliamo di asintoto obliquo destro, per $x \to -\infty$ di asintoto obliquo sinistro.

Dimostriamo che la distanza di un generico punto del grafico di una funzione da un suo asintoto obliquo, di equazione $y = mx + q$, tende a 0 quando x tende a ∞ (figura a lato).

Infatti, per la definizione di asintoto,

$$\lim_{x\to\infty} \overline{PQ} = \lim_{x\to\infty} |f(x) - (mx+q)| = 0,$$

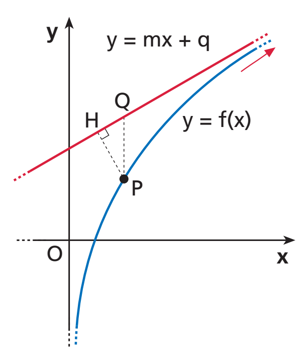
ma, poiché PQ e HP sono rispettivamente l'ipotenusa e un cateto del triangolo rettangolo QHP, si ha:

$$\overline{PQ} > \overline{PH} > 0.$$

Per il teorema del confronto:

$$\lim_{x\to\infty} \overline{PH} = 0.$$

Considerazioni analoghe valgono per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.



La ricerca degli asintoti obliqui

TEOREMA
Se il grafico della funzione $y = f(x)$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$, con $m \neq 0$, allora m e q sono dati dai seguenti limiti:

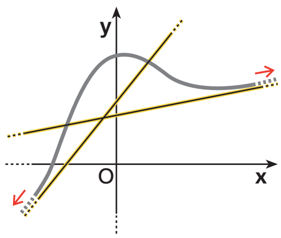
$$\boldsymbol{m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}};$$

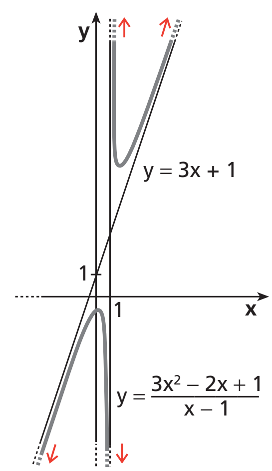
$$\boldsymbol{q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]}.$$

- Una funzione può avere un asintoto obliquo solo se
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$
o uno dei limiti analoghi con $+\infty$ o $-\infty$.

- Il teorema è valido anche se al posto di ∞ mettiamo $+\infty$ o $-\infty$.

- Un asintoto obliquo si può avere sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$, oppure in uno solo dei due casi. Per esempio, la funzione rappresentata qui sotto ha due asintoti obliqui diversi per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.





- Ricorda che
$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$
, e quindi
$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, da cui:
$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}.$$

DIMOSTRAZIONE

Se esiste un asintoto obliquo, è vero che

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx+q)] = 0,$$

e quindi, dividendo per $x \neq 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - (mx+q)}{x} = 0 \to \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x}\right] = 0,$$

e, poiché $\lim_{x\to\infty} m = m$ e $\lim_{x\to\infty} \frac{q}{x} = 0$, deve essere:

$$\boxed{m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}}\,.$$

Se m è diverso da 0, per calcolare q consideriamo nuovamente:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx+q)] = 0 \to \lim_{x\to\infty} [(f(x) - mx) - q] = 0 \to$$

$$\to \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] - q = 0 \to \boxed{q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx].}$$

Viceversa, si può dimostrare che, se $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ed esistono finiti i limiti $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$, con $m \neq 0$, allora il grafico della funzione $y = f(x)$ presenta un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$.

ESEMPIO

Determiniamo, se esiste, l'asintoto obliquo della funzione:

$$y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1}.$$

Essendo $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, la curva può avere un asintoto obliquo. Calcoliamo m:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} = 3.$$

Calcoliamo q, sostituendo nella formula il valore 3 al posto di m:

$$q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1} - 3x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 3x}{x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 1}{x - 1} = 1.$$

I calcoli svolti sono validi sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$; quindi, in entrambi i casi, il grafico della funzione ha un asintoto obliquo di equazione:

$$y = 3x + 1.$$

Un caso particolare

Sia $f(x)$ una *funzione razionale fratta*

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$$

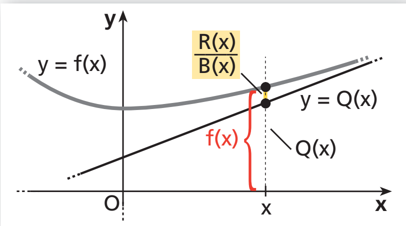
tale che $A(x)$ sia un polinomio di grado n e $B(x)$ un polinomio di grado $n - 1$. Allora, effettuando la divisione tra i due polinomi, possiamo scrivere:

$$f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)},$$

dove $Q(x)$ è il quoziente, che è un polinomio di primo grado, e $R(x)$ è il resto, che è un polinomio di grado inferiore a $B(x)$. Quindi:

$$Q(x) = mx + q \text{ e } \lim_{x\to\infty} \frac{R(x)}{B(x)} = 0.$$

Essendo $f(x) = mx + q + \dfrac{R(x)}{B(x)}$, si ha che $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ e $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = q$.



◀ **Figura 13** Per $x \to \infty$, la differenza $f(x) - Q(x) = \dfrac{R(x)}{B(x)}$ tende a 0 e quindi il grafico di $f(x)$ si avvicina sempre più alla retta $y = Q(x)$.

Allora, la retta di equazione $y = mx + q$, determinata dal quoziente tra $A(x)$ e $B(x)$, è un asintoto obliquo per il grafico di $f(x)$.

ESEMPIO

Consideriamo la funzione razionale fratta:

$$f(x) = \frac{2x^4 - 2x + 1}{x^3 - 1}.$$

Osserviamo che il grado del numeratore supera di una unità quello del denominatore, quindi la funzione ammette un asintoto obliquo, che troviamo eseguendo la divisione tra $A(x) = 2x^4 - 2x + 1$ e $B(x) = x^3 - 1$.
Otteniamo come quoziente $Q(x) = 2x$ e come resto $R(x) = 1$, quindi possiamo scrivere

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x^3 - 1}$$

e la retta di equazione $y = 2x$ è un asintoto obliquo per $f(x)$.

8. IL GRAFICO PROBABILE DI UNA FUNZIONE

Data una funzione $y = f(x)$, poiché siamo in grado di determinare molte sue caratteristiche, possiamo tracciare il suo grafico anche se solo in modo approssimato. Lo chiameremo **grafico probabile**.
Per rappresentare il grafico probabile di una funzione occorre:

1. determinare il dominio;
2. studiare eventuali simmetrie;
3. determinare le intersezioni con gli assi cartesiani;
4. studiare il segno;
5. calcolare i limiti agli estremi del dominio e studiare i punti di discontinuità;
6. determinare gli asintoti.

Negli esercizi viene proposto di tracciare il grafico probabile di diverse funzioni.

UN'ONDA ANOMALA

Come si stabilisce la potenza di un sisma?

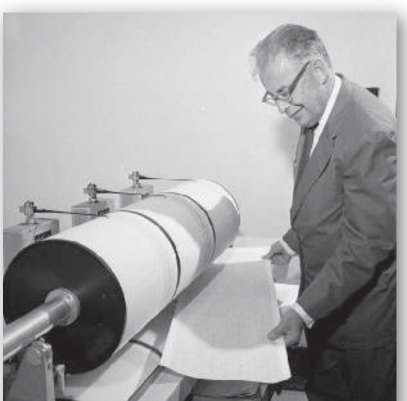
▶ Il quesito completo a pag. 1475

Il terremoto che sollevò la terribile onda anomala nel Pacifico il 26 dicembre del 2004 è stato uno dei più forti degli ultimi 40 anni. I sismografi registrarono una magnitudo 9 della scala Richter.
La scala Richter misura la magnitudo, cioè l'energia liberata dal terremoto all'epicentro. È una scala logaritmica e, anziché basarsi, come la scala Mercalli, sulle conseguenze empiriche provocate dal sisma, mette in relazione la grandezza di un terremoto con un valore numerico, ovvero l'ampiezza massima della traccia registrata sul sismografo. Fu ideata nel 1935 dal sismologo americano Charles Richter.

Terremoti e logaritmi
La funzione continua che quantifica la magnitudo M è il logaritmo in base 10 del rapporto tra l'ampiezza massima A del terremoto e l'ampiezza massima A_0 di una scossa campione:

$$M = \log\frac{A}{A_0} = \log A - \log A_0.$$

L'ampiezza A_0, scelta come standard, corrisponde all'oscillazione massima, pari a 0,001 mm, prodotta su un sismografo posto a 100 km dall'epicentro del terremoto di riferimento.



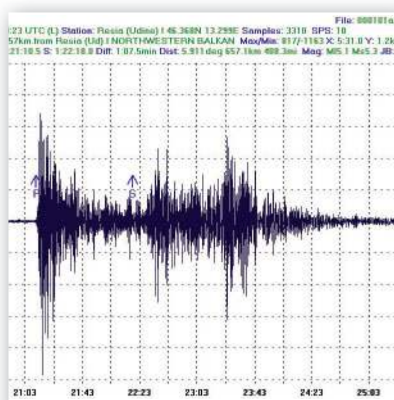
▲ Charles Richter analizza la traccia di un sismografo. Los Angeles, 1964.

La scala logaritmica offre il vantaggio di rappresentare la forza di terremoti molto violenti con valori relativamente piccoli di magnitudo. Infatti, le ampiezze di un forte sisma possono essere anche milioni di volte maggiori rispetto a quelle di un terremoto debole.

I terremoti più piccoli, appena percettibili dall'uomo, hanno una magnitudo intorno a 2,5, mentre quelli che possono provocare danni alle abitazioni e vittime hanno generalmente una magnitudo superiore a 5,5. Un terremoto, passato alla storia per la sua magnitudo superiore a 7, fu quello del 1906 a San Francisco.

Un po' di calcoli...
Usando una scala logaritmica, l'aumento di una unità di magnitudo corrisponde all'aumento di un fattore 10 nell'ampiezza del movimento della Terra e a un rilascio di energia circa 30 volte superiore. Per esempio, un terremoto di magnitudo 4 sprigiona un'energia che provoca oscillazioni 10 volte più grandi di un terremoto di magnitudo 3 e 100 volte più grandi (non il doppio!) di un terremoto di magnitudo 2.

La scala Richter va da 0 a 9, ma teoricamente la magnitudo non è limitata superiormente (il logaritmo dell'ampiezza tende a $+\infty$ quando l'ampiezza tende a $+\infty$). Nell'ultimo secolo la massima magnitudo registrata è stata circa 9,5. Partendo dalle regioni centrali del Cile la scossa fu avvertita in molte zone del Pianeta; provocò l'eruzione del vulcano Puyehue e uno tsunami che investì le Hawaii e il Giappone. Per avere un termine di paragone, un sisma di magnitudo 12 avrebbe energia sufficiente per spaccare la Terra a metà.



▲ Traccia di un sismografo. Stazione di Resia (Udine), 2000.

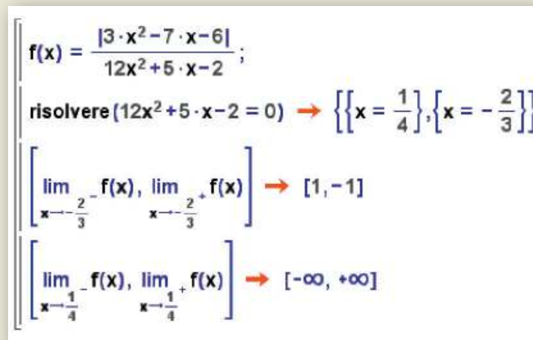
LABORATORIO DI MATEMATICA
LE FUNZIONI CONTINUE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Wiris classifichiamo i punti di discontinuità della funzione $f(x) = \dfrac{|3x^2 - 7x - 6|}{12x^2 + 5x - 2}$.

La $f(x)$ è una funzione razionale fratta e i suoi punti di discontinuità sono quelli che annullano il denominatore. Per stabilirne poi la specie dobbiamo calcolare i limiti di $f(x)$ per x tendente a ognuno di essi.

- Entriamo, pertanto, in ambiente Wiris e digitiamo la funzione data (figura 1).
- Dal menu *Operazioni* importiamo il comando *risolvere*, dentro al quale con *Copia* e *Incolla* inseriamo il denominatore dall'espressione di $f(x)$.
- Con un clic su *Calcola* otteniamo $\dfrac{1}{4}$ e $-\dfrac{2}{3}$.
- Dal menu *Analisi* importiamo i modelli del limite destro e del limite sinistro, inseriamo nei campi vuoti dei modelli la $f(x)$ e x tendente al punto $-\dfrac{2}{3}$ e facciamo clic su *Calcola*. Il sistema mostra che il limite sinistro è 1 e il limite destro è -1, numeri finiti e diversi; pertanto il punto è di discontinuità di prima specie.



▲ Figura 1

- Operiamo similmente per il punto $\dfrac{1}{4}$ e il sistema ci dice che il limite sinistro è $-\infty$ e quello destro è $+\infty$, quindi il punto è di discontinuità di seconda specie.

Nel sito: ▶ **1 esercitazione guidata** ▶ **16 esercitazioni in più**

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer determina il dominio, classifica i punti di discontinuità e trova le equazioni degli asintoti delle seguenti funzioni. Tracciane poi il grafico con i rispettivi asintoti.

1 $f(x) = \dfrac{x+1}{|x^2 - 4| - 3}$

2 $f(x) = \dfrac{|x^2 - 3x|(x-1)^2}{|x^2 - 4x + 3|(x^2 + x - 2)}$

3 $f(x) = \dfrac{15x^3 - 17x^2 - 6x + 8}{(3x^2 + 5x + 2)|5x - 4|}$

4 $f(x) = \dfrac{4x - 2}{(x^2+1)\,e^{\frac{1}{5x-2}}}$

5 $f(x) = \dfrac{(2x-1)\ln(x-1)}{(3x-6)(x-3)}$

6 $f(x) = \dfrac{\sqrt{8x^3 + 10x^2 - 11x + 2}}{4x^3 + 12x^2 - 9x - 27}$

7 $f(x) = \dfrac{(2x-1)\,e^{\frac{-1}{(x-3)^2}}}{x^2 - 2x - 3}$

8 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}\operatorname{arctg}\dfrac{|x|}{x-1}$

LA TEORIA IN SINTESI

IL CALCOLO DEI LIMITI

1. LE OPERAZIONI CON I LIMITI

Indichiamo con α un valore che può essere $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0^+, x_0^-, $+\infty$, $-\infty$.

- Per i **limiti della somma, del prodotto e del quoziente** di due funzioni si ha la seguente tabella.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} [f(x)+g(x)]$	$\lim\limits_{x\to\alpha} [f(x)\cdot g(x)]$	$\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$
$l \in \mathbb{R}$	$m \in \mathbb{R}$ $m \neq 0$	$l + m$	$l \cdot m$	$\frac{l}{m}$
$l \in \mathbb{R}$ $l \neq 0$	0	l	0	$+\infty$, se $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ per $x \to \alpha$ $-\infty$, se $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ per $x \to \alpha$
0	0	0	0	forma indeterminata $\frac{0}{0}$
$l \in \mathbb{R}$ $l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$, se $l > 0$ $-\infty$, se $l < 0$	0
$l \in \mathbb{R}$ $l \neq 0$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$, se $l < 0$ $-\infty$, se $l > 0$	0
$+\infty$	$m \in \mathbb{R}$ $m \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$, se $m > 0$ $-\infty$, se $m < 0$	$+\infty$, se $m > 0$ $-\infty$, se $m < 0$
$-\infty$	$m \in \mathbb{R}$ $m \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$, se $m < 0$ $-\infty$, se $m > 0$	$+\infty$, se $m < 0$ $-\infty$, se $m > 0$
$+\infty$ $-\infty$	0	$+\infty$ $-\infty$	forma indeterminata $0 \cdot \infty$	$+\infty$, se $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ per $x \to \alpha$ $-\infty$, se $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ per $x \to \alpha$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$
$+\infty$	$-\infty$	forma indeterminata $+\infty - \infty$	$-\infty$	forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$
$-\infty$	$+\infty$	forma indeterminata $+\infty - \infty$	$-\infty$	forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

- **Limite della potenza**: se $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$, allora $\lim_{x \to \alpha} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to \alpha} f(x)\right]^n = l^n$.
- Per $\lim_{x \to \alpha} [f(x)]^{g(x)}$ abbiamo la seguente tabella.

$f(x)$ \ $g(x)$ — $[f(x)]^{g(x)}$	**0**	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	forma indeterminata ∞^0	$+\infty$	0^+
0^+	forma indeterminata 0^0	0^+	$+\infty$
1	1	forma indeterminata $1^{+\infty}$	forma indeterminata $1^{-\infty}$
$0 < \ell < 1$	1	0^+	$+\infty$
$\ell > 1$	1	$+\infty$	0^+

2. LE FORME INDETERMINATE

- **Forme indeterminate**: $+\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

  Si risolvono caso per caso.

- **Forma indeterminata $+\infty - \infty$ di funzioni razionali intere**

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} a_0 x^n = \infty,$$ secondo la regola dei segni del prodotto $a_0 x^n$.

- **Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ di funzioni razionali fratte**

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } n > m \\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$$

  Il segno di $\pm\infty$ nel caso $n > m$ è dato dal prodotto dei segni di $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} x^{n-m}$ e $\frac{a_0}{b_0}$.

3. I LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$;
- $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, dove $e \simeq 2{,}7182\ldots$;
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$;
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$;
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$;
- $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$.

4. GLI INFINITESIMI, GLI INFINITI E IL LORO CONFRONTO

- Una funzione $f(x)$ è un:
  - **infinitesimo**, per $x \to \alpha$, se $\lim_{x \to \alpha} f(x) = 0$;
  - **infinito**, per $x \to \alpha$, se $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \pm\infty$.

$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} =$

- $\ell \neq 0$ → infinitesimi dello stesso ordine
- 0 → f(x) è infinitesimo di ordine superiore a g(x)
- $\pm\infty$ → f(x) è infinitesimo di ordine inferiore a g(x)
- non esiste → non sono confrontabili

a. Confronto di infinitesimi simultanei.

$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} =$

- $\ell \neq 0$ → infiniti dello stesso ordine
- 0 → f(x) è infinito di ordine inferiore a g(x)
- $\pm\infty$ → f(x) è infinito di ordine superiore a g(x)
- non esiste → non sono confrontabili

b. Confronto di infiniti simultanei.

- Dati due infinitesimi (infiniti) $f(x)$ e $\varphi(x)$, per $x \to \alpha$ (cioè **simultanei**), si dice che $f(x)$ è un infinitesimo (infinito) di **ordine** γ $(\gamma > 0)$ rispetto all'infinitesimo (infinito) **campione** $\varphi(x)$, se:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{|\varphi(x)|^{\gamma}} = l \neq 0.$$

Inoltre scriviamo $f \sim \varphi$ se $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$ (diciamo che f e φ sono **equivalenti**).

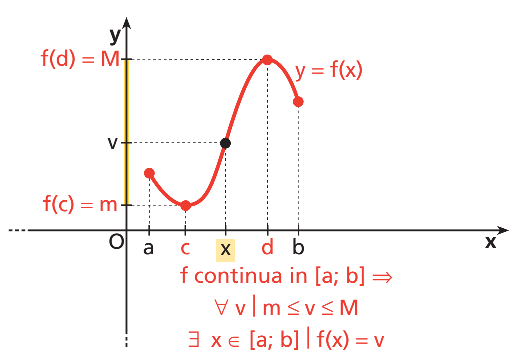
- **Principio di sostituzione degli infinitesimi (infiniti)**
Se il limite del rapporto di due infinitesimi (infiniti) simultanei $f(x)$ e $g(x)$ esiste, allora:

$$f \sim f_1,\ g \sim g_1 \Rightarrow \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

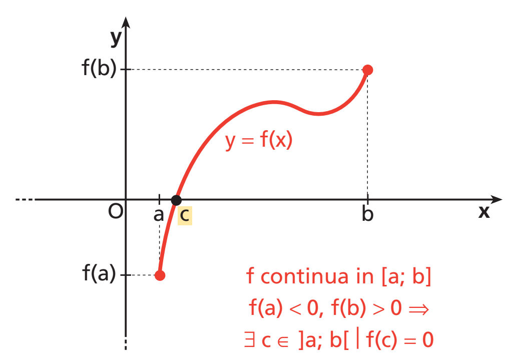
- **Gerarchia degli infiniti**: $(\log_a x)^{\alpha} < x^{\beta} < b^{x}$, con $\alpha, \beta > 0$ e $a, b > 1$.

5. LE FUNZIONI CONTINUE

- **$f(x)$ continua in x_0**: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- **$f(x)$ continua in $[a; b]$**: f è continua in ogni punto dell'intervallo.
- **I teoremi sulle funzioni continue**



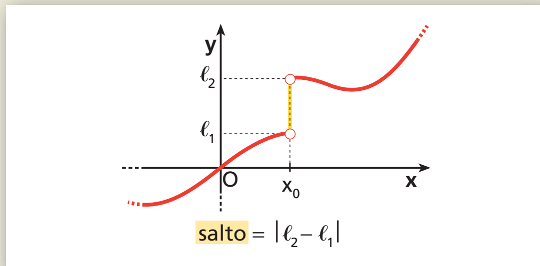
a. Il teorema dei valori intermedi e il teorema di Weierstrass (esistenza massimo e minimo assoluti).



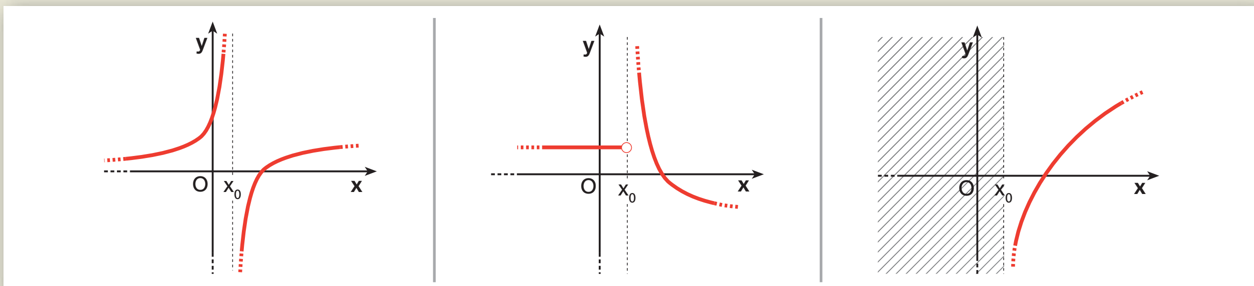
b. Il teorema di esistenza degli zeri.

6. I PUNTI DI DISCONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE

- Sia $f(x)$ una funzione definita su $[a; b]$.
  - **x_0 punto di discontinuità** (**punto singolare**): se $x_0 \in [a; b]$, con $f(x)$ non continua in x_0.
  - **x_0 punto di discontinuità di prima specie**: se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$.



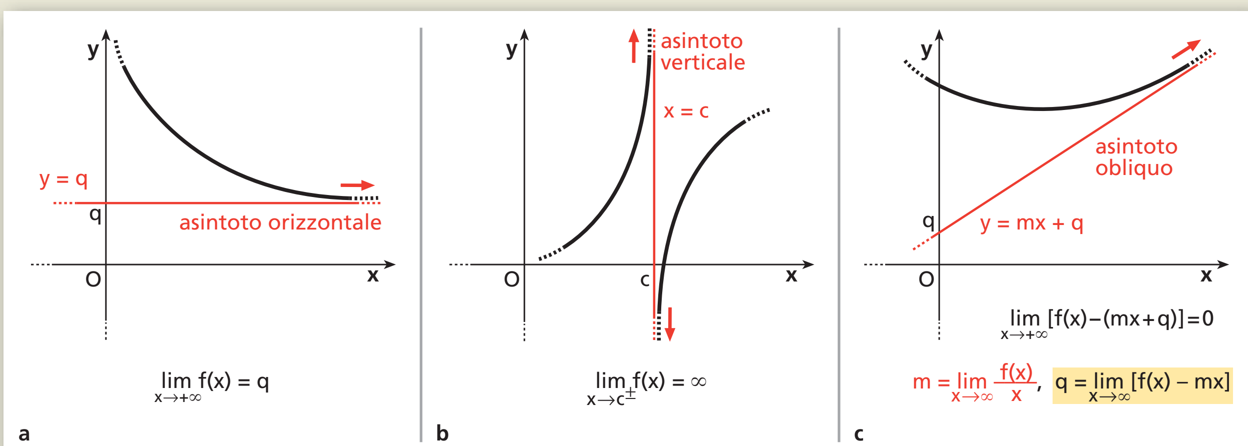
  - **x_0 punto di discontinuità di seconda specie**: se per $x \to x_0$ almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, di $f(x)$ è infinito oppure non esiste.



  - **x_0 punto di discontinuità di terza specie**:

    1. se esiste ed è finito $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$; **2.** se f non è definita in x_0 oppure, se lo è, risulta $f(x_0) \neq l$.

7. LA RICERCA DEGLI ASINTOTI



8. IL GRAFICO PROBABILE DI UNA FUNZIONE

- **Grafico probabile**: è il grafico di $f(x)$ tracciato in modo approssimativo dopo averne determinato il dominio, le eventuali simmetrie, le intersezioni con gli assi cartesiani, il segno, i limiti agli estremi del dominio con lo studio dei punti di discontinuità, gli asintoti.

1. LE OPERAZIONI CON I LIMITI

Teoria a pag. 1476

VERO O FALSO?

1 Sapendo che $\lim_{x\to c} f(x) = -1$ e $\lim_{x\to c} g(x) = 5$, si ha:

a) $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = 4$. V F

b) $\lim_{x\to c}[-f(x)-2g(x)] = 9$. V F

c) $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{4}\cdot g(x) = -\frac{5}{4}$. V F

d) $\lim_{x\to c} -[-f(x)]^4 = 1$. V F

2 Sapendo che $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to c} g(x) = -2$, si ha:

a) $\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = -\infty$. V F

b) $\lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = -\infty$. V F

c) $\lim_{x\to c} -[f(x)]^2 = -\infty$. V F

d) $\lim_{x\to c}\{2f(x)-[g(x)]^3\} = -\infty$. V F

3 Se $\lim_{x\to c} f(x) = -1$ e $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$, allora:

a) $\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = -\infty$. V F

b) $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = -1$. V F

c) $\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$. V F

d) $\lim_{x\to c}\{-f(x)-[g(x)]^2\} = -\infty$. V F

4 Supponendo che $\lim_{x\to c} f(x)=0$ e $\lim_{x\to c} g(x)=-\infty$, possiamo scrivere:

a) $\lim_{x\to c}\left[\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}\right] = \infty$. V F

b) $\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)} = 0$. V F

c) $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$. V F

d) $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}[1-g(x)] = \infty$. V F

5

a) Se la funzione $y = f(x)$ tende a zero per $x \to c$, allora anche la funzione prodotto $p(x) = f(x)\cdot g(x)$ tende a zero per $x \to c$, per una qualunque funzione $g(x)$. V F

b) Se la funzione prodotto $p(x) = f(x)\cdot g(x)$ ha limite per $x \to c$, allora anche $f(x)$ e $g(x)$ ammettono limite per $x \to c$. V F

c) Se la funzione somma $s(x) = f(x)+g(x)$ ha limite per $x \to c$, allora anche $f(x)$ e $g(x)$ ammettono limite per $x \to c$. V F

d) La funzione prodotto $p(x)$ ammette limite per $x \to c$ solo se $f(x)$ e $g(x)$ ammettono limite per $x \to c$. V F

TEST

6 Se $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$, quanto vale il $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{-e^{x-1}}$?

A 0
B $+\infty$
C $-\infty$
D 1
E e

7 Il limite per x che tende a $\frac{\pi}{4}$ della funzione $y = f(x)\cdot\cos x$ vale 2. Quanto vale il limite per x che tende a $\frac{\pi}{4}$ di $f(x)$?

A $2\sqrt{2}$
B 2
C 1
D $\frac{\sqrt{2}}{2}$
E 0

8 Quale fra le seguenti affermazioni è *falsa*?
Se esistono finiti $\lim_{x\to c} f(x)$ e $\lim_{x\to c} g(x)$, allora esiste finito il limite:

A $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$.

B $\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]$.

C $\lim_{x\to c}\{\ln[(g(x))^2+1]+f(x)\}$.

D $\lim_{x\to c}[e^{f(x)}-g(x)]$.

E $\lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)]$.

9 Sapendo che $\lim_{x\to 0}[f(x)+\operatorname{sen}x]=-\infty$, quanto vale $\lim_{x\to 0}[-f(x)]$?

A 1 C $+\infty$ E -1

B 0 D $-\infty$

10 Date le funzioni $g(x)=\frac{3x-1}{x^2}$ e $f(x)=\sqrt{x+2}$, $\lim_{x\to -2^+}(g\circ f)(x)$ vale:

A $\frac{1}{2}$. C 0. E 2.

B $-\infty$. D $+\infty$.

11 Date le funzioni $f(x)=2x$ e $g(x)=1-x^2$, allora:

A $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$.

B $\lim_{x\to -2}[f(x)\cdot g(x)]=-20$.

C $\lim_{x\to 0^+}(g\circ f)(x)=2$.

D $\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)}{f(x)}=+\infty$.

E $\lim_{x\to 1}[f(x)-g(x)]=0$.

12 Date le due funzioni

$$f(x)=4x+4 \quad \text{e} \quad g(x)=2+2x,$$

calcola i loro limiti per $x\to 3$ e per $x\to -\infty$.
Determina poi, verificando i rispettivi teoremi:

a) il limite della funzione somma

$$s(x)=f(x)+g(x)$$

b) il limite della funzione prodotto

$$p(x)=f(x)\cdot g(x).$$

Il calcolo dei limiti

13 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo i limiti: a) $\lim_{x\to 1}\left[x+\frac{1}{(x-1)^2}\right]$; b) $\lim_{x\to -\infty}(x^2-2x)$.

a) La funzione $s(x)=x+\frac{1}{(x-1)^2}$ è la somma delle funzioni $g(x)=x$ e $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$.

$\lim_{x\to 1}x=1$ per la continuità di $y=x$.

Per la continuità della funzione polinomiale $y=x-1$ e il teorema del limite della potenza,

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2=0,$$

quindi, per il teorema del limite della funzione reciproca:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty.$$

La somma di un limite finito con uno infinito è infinito, quindi $\lim_{x\to 1}\left[x+\frac{1}{(x-1)^2}\right]=+\infty$.

b) La funzione $s(x)=x^2-2x$ è la somma delle funzioni $g(x)=x^2$ e $f(x)=-2x$.
Abbiamo

$$\lim_{x\to -\infty}x^2=+\infty \text{ e } \lim_{x\to -\infty}(-2x)=+\infty,$$

quindi:

$$\lim_{x\to -\infty}(x^2-2x)=+\infty.$$

14 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo i limiti: a) $\lim_{x\to +\infty}x\cdot\frac{e^x}{2}$; b) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\log x$.

a) Abbiamo:

$$\lim_{x\to +\infty}x=+\infty; \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

Il segno dei due limiti è concorde, pertanto:

$$\lim_{x\to +\infty}x\cdot\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

b) Abbiamo:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+}\log x=-\infty.$$

Il segno dei due limiti è discorde, quindi:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\log x=-\infty.$$

15 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo i limiti:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{6x+1}{x+2}$; c) $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{6x+1}{x+2}$.

a) $h(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$ è il quoziente delle funzioni $f(x)=x^2+3x-1$ e $g(x)=x-1$:

$$\lim_{x\to 2}(x^2+3x-1)=9; \qquad \lim_{x\to 2}(x-1)=1.$$

Il limite dato è uguale al quoziente dei limiti, perciò $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-1}{x-1}=\dfrac{9}{1}=9$.

b) $h(x)=\dfrac{6x+1}{x+2}$ è il quoziente delle funzioni $f(x)=6x+1$ e $g(x)=x+2$:

$$\lim_{x\to -2^+}(6x+1)=-11; \qquad \lim_{x\to -2^+}(x+2)=0^+.$$

Il numeratore tende a un numero negativo, mentre il denominatore tende a 0^+ (cioè resta sempre positivo); i limiti hanno segno discorde, pertanto:

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{6x+1}{x+2}=-\infty.$$

c) Calcoliamo ora i limiti di numeratore e denominatore per $x\to -2^-$:

$$\lim_{x\to -2^-}(6x+1)=-11; \qquad \lim_{x\to -2^-}(x+2)=0^-.$$

I limiti hanno segno concorde, quindi:

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{6x+1}{x+2}=+\infty.$$

Tenendo presenti i teoremi sulle operazioni con i limiti e la continuità delle funzioni elementari, calcola i seguenti limiti.

16 $\lim\limits_{x\to 2}5e^3$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{\ln e^2}$. [$5e^3$; 1]

17 $\lim\limits_{x\to -1}(x^4-x^3-4)$ [-2]

18 $\lim\limits_{x\to -1}(\sqrt{2x+6}-x)$ [3]

19 $\lim\limits_{x\to e}(3-\ln x)$ [2]

20 $\lim\limits_{x\to -4}e^{\frac{-4}{x}}$ [e]

21 $\lim\limits_{x\to -3}\log_3(24-x)$ [3]

22 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2+\ln x}{1-\ln x}$ [2]

23 $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x+\dfrac{5}{x}\right)$ [$-\infty$]

24 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^2}\right)$ [$+\infty$]

25 $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)$ [0]

26 $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^2+x)$ [$-\infty$]

27 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{2}(x^2+7)$ [$-\infty$]

28 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2-x}{3}\cdot(x^3-1)$ [$-\infty$]

29 $\lim\limits_{x\to +\infty}(2-x)\log x$ [$-\infty$]

30 $\lim\limits_{x\to +\infty}(1-x^2)\,e^x$ [$-\infty$]

31 $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x+1}$ [$+\infty$]

32 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x-2}$ [0]

33 $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\ln(3-x)}{3-x}$ [$-\infty$]

34 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{6-3x}$ [0]

35 $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{3x-9}$ [$+\infty$]

36 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x-1}{2}$ [-1]

37 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-5}{(x+1)^2}$ [$-\infty$]

38 $\lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{x+1}{x+2}$ $[-\infty; +\infty]$

39 $\lim_{x\to 1^{+}} \frac{3x+2}{x-1}$ $[+\infty]$

40 $\lim_{x\to -4} \frac{2-x}{x+1}$ $[-2]$

41 $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x+2}{x^2}$ $[+\infty]$

42 $\lim_{x\to \frac{3}{2}} \frac{x-2}{(2x-3)^2}$ $[-\infty]$

43 $\lim_{x\to -2^{-}} \frac{4x+3}{x^2-4}$ $[-\infty]$

44 $\lim_{x\to 0^{+}} \left(\frac{2x^2+x}{2x+5}+\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$ $[+\infty]$

45 $\lim_{x\to -3^{-}} \frac{x^2-1}{x+3}$ $[-\infty]$

46 $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-2x+1}$ $[+\infty]$

47 $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-2x+1}$ $[0]$

48 $\lim_{x\to 4} \frac{x+\sqrt{x}}{x^2-13}$ $[2]$

49 $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+4}}{x+1}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

50 $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2-4\sqrt{x}+2}$ $[-1]$

51 $\lim_{x\to 64} \left(x^{\frac{1}{6}}-x^{\frac{2}{3}}+3\right)$ $[-11]$

52 $\lim_{x\to 8} \frac{x+x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x}+2}$ $[3]$

53 $\lim_{x\to 1} \left(x^{\frac{7}{8}}-\sqrt{x}+3\right)$ $[3]$

54 $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x+2^x}{\sqrt{x^2+4}}$ $[1]$

55 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{2x}$ $\left[\frac{1}{\pi}\right]$

56 $\lim_{x\to 0^{-}} \frac{2x+1}{\operatorname{sen} x}$ $[-\infty]$

57 $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x-2}{3^x-2}$ $[1]$

58 $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-x+1}{2^{2x}-2^x+2}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

59 $\lim_{x\to 2} \frac{3^x-2^x}{4^{2x}-4^x-20}$ $\left[\frac{1}{44}\right]$

60 $\lim_{x\to 0^{+}} \frac{2x+3}{5^x-1}$ $[+\infty]$

61 $\lim_{x\to 4^{+}} \frac{\log_2 x+1}{3\log_4 x-3}$ $[+\infty]$

62 $\lim_{x\to 3} \cos\left(\frac{\log_3 x-1}{x+3}\right)$ $[1]$

63 $\lim_{x\to 2} \frac{\log(x^2+x-5)}{2^x-1}$ $[0]$

64 $\lim_{x\to \pi} \frac{e^{\cos x}+\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$ $\left[\frac{1}{e}\right]$

65 $\lim_{x\to 1} \frac{2x-2+2^x}{\sqrt{1+\log x}}$ $[2]$

66 $\lim_{x\to 1} \log(1-\log x)$ $[0]$

67 $\lim_{x\to 3} \frac{\log_3 x+\log_3 \frac{3}{x}}{x-2}$ $[1]$

68 $\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x}$ $[0]$

69 $\lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{\log x-3}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$ $[-\infty]$

70 $\lim_{x\to 0^{+}} \frac{3^x \ln x}{2+x}$ $[-\infty]$

71 $\lim_{x\to +\infty} (-x3^x \ln x)^2$ $[+\infty]$

72 $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln x}{e^{-x}}+\frac{2}{x}\right)$ $[+\infty]$

73 $\lim_{x\to 1^{-}} \left(\frac{2^x}{\ln x}+\frac{1}{x-1}\right)$ $[-\infty]$

74 $\lim_{x\to +\infty} \left(\log_{\frac{1}{3}} x-xe^x\right)$ $[-\infty]$

75 $\lim_{x\to 0^{+}} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\ln x}+\frac{1}{\cos x}\right)$ $[1]$

76 $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x+2x}{\cos x}$ $[0]$

77 $\lim_{x\to 0^{+}} \frac{\log_2 x}{-x}$ $[+\infty]$

78 $\lim_{x \to 1^-} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x-1}$ $[-\infty]$

79 $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pm}} e^{\frac{1}{\cos x}}$ $[0^+; +\infty]$

80 $\lim_{x \to 1^-} \ln \arccos x$ $[-\infty]$

81 $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{arctg} \ln x$ $\left[-\frac{\pi}{2}\right]$

82 $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$ $[0^+]$

83 $\lim_{x \to +\infty} (\ln x)^x$ $[+\infty]$

84 $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ $[0^+]$

85 $\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{x-3}$ $[0^+]$

86 $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)^{-\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ $[0^+]$

87 $\lim_{x \to 0^+} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{e^{\frac{1}{x}}}$ $[+\infty]$

88 $\lim_{x \to -\infty} (x^2+1)^{x^2}$ $[+\infty]$

89 $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2^x - 1) + \log_2(x+2)}{\cos(x+\pi)}$ $[-1]$

90 $\lim_{x \to 4} \left[\operatorname{arc}\operatorname{sen}\sqrt{x-3} + \arccos\left(-\frac{2}{x}\right)\right]$ $\left[\frac{7}{6}\pi\right]$

91 $\lim_{x \to 1^+} \frac{\ln \operatorname{arctg}(x-1)}{x^2 - 2x}$ $[+\infty]$

92 $\lim_{x \to 1^+} \left[\frac{1+\cos(x-1)}{4}\right]^{\frac{1}{1-x}}$ $[+\infty]$

93 $\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{\operatorname{tg} \ln(x+2)}$ $[+\infty]$

94 $\lim_{x \to -\infty} \frac{\operatorname{arctg}(e^{2x} + e^x)}{e^{-x+2}}$ $[0]$

95 $\lim_{x \to 3^+} \left[\frac{\ln(x-3)}{\sqrt[3]{3-x}} - \frac{1}{3-x}\right]$ $[+\infty]$

96 $\lim_{x \to +\infty} (2^x - 2)^{\operatorname{arctg}(2-x)}$ $[0]$

97 $\lim_{x \to 3^+} \left(\frac{x}{2x-1}\right)^{\frac{1}{\ln(x-2)}}$ $[0]$

98 $\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(e^{2x}+1)}{\ln(1-x)}$ $[0]$

99 $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)^{x-2}$ $[0]$

100 $\lim_{x \to -\infty} \frac{2^x}{(x^2-x)\ln(1-x)}$ $[0]$

101 $\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{x-2}{e^{x-2}}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ $[0^+]$

102 $\lim_{x \to -1} \frac{x + \operatorname{sen}(3^{x+1}-1)}{\operatorname{arcsen}(x+1)^2}$ $[-\infty]$

Applicazione del teorema del confronto

103 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\lim_{x \to +\infty} \frac{3+\cos x}{x}$.

Il numeratore della funzione $\frac{3+\cos x}{x}$, se $x \to +\infty$, non ammette limite, quindi non possiamo applicare i teoremi sul calcolo del limiti.

Poiché $-1 \leq \cos x \leq 1$, allora $2 \leq 3 + \cos x \leq 4$ e quindi, per $x > 0$:

$$\frac{2}{x} \leq \frac{3+\cos x}{x} \leq \frac{4}{x}.$$

Poiché $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$, per il teorema del confronto:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3+\cos x}{x} = 0.$$

Utilizzando il teorema del confronto, calcola i seguenti limiti.

104 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ [0]

105 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x}$ [0]

106 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3(\cos x + 2)$ [$+\infty$]

107 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{3 + \operatorname{sen} x}$ [$+\infty$]

108 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} \operatorname{sen} x$ [0]

109 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1 + \operatorname{sen} x \cos x}$ [$+\infty$]

110 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + \cos x}{x^2}$ [0]

111 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x}{\operatorname{sen} x + \cos x + 2}$ [$+\infty$]

112 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(\operatorname{sen} x + 4)$ [$+\infty$]

113 $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ [0]

114 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x^2}$ [0]

115 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} \cos x$ [0]

116 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\operatorname{sen} x + 3)x$ [$+\infty$]

117 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2 + \operatorname{sen} x}$ [$+\infty$]

118 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\operatorname{sen} x - 3x)$ [$-\infty$]

119 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{1 + e^x}$ [0]

120 $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + 3\cos x)$ [$+\infty$]

121 $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos \dfrac{1}{x}$ [0]

2. LE FORME INDETERMINATE

Teoria a pag. 1484

IN PRATICA
Videolezione 65

La forma indeterminata $+\infty - \infty$

122 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+7} - \sqrt{x-5}\right)$.

Poiché $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+7} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-5} = +\infty$, abbiamo la forma indeterminata $+\infty - \infty$.

Scriviamo la funzione $f(x) = \sqrt{x+7} - \sqrt{x-5}$ in modo che compaia la somma delle radici anziché la differenza, moltiplicando e dividendo $f(x)$ per $\left(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5}\right)$:

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{x-5} = \left(\sqrt{x+7} - \sqrt{x-5}\right) \cdot \frac{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5}}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5}} = \frac{(x+7)-(x-5)}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5}} =$$

$$= \frac{12}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5}}.$$

Quando $x \to +\infty$, il denominatore $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5}$ della frazione tende a $+\infty$, mentre il numeratore tende a 12, e quindi: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+7} - \sqrt{x-5}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{12}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5}} = 0.$

123 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 + 2x^2 - 3)$.

Poiché $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^2 - 3) = +\infty$, abbiamo la forma indeterminata $-\infty + \infty$.

Per calcolare il limite raccogliamo a fattor comune x elevato al massimo esponente, cioè x^3:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-3)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^3\cdot\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^3}\right)\right].$$

Dal momento che $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^3}=0$, allora $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^3}\right)=1$.

Poiché $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$, otteniamo:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-3)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^3\cdot\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^3}\right)\right]=-\infty.$$

Possiamo ottenere il risultato applicando anche la regola:

$$\lim_{x\to\infty}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)=\lim_{x\to\infty}a_0x^n.$$

Nel nostro caso si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-3)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty.$$

Calcola i seguenti limiti.

124 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)$ $[0]$

125 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4}\right)$ $[0]$

126 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-x^2-9)$ $[+\infty]$

127 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x+2}}$ $[-\infty]$

128 $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^5+3x^2-x+3)$ $[+\infty]$

129 $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^4+x^3-2x^2)$ $[-\infty]$

130 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-2x}-\sqrt{3-2x}\right)$ $[0]$

131 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x}}{3x}$ $[0]$

132 $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3+2x^2-x)$ $[+\infty]$

133 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{-x}}{-2x^4+4x+1}$ $[0]$

134 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}\right)$ $[+\infty]$

135 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x+\sqrt{16x^2-1}\right)$ $[0]$

136 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x\right)$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

Utilizza: $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$.

137 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

138 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x}}{x}$ $[0]$

139 Find $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$.

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*, 2004) $\left[\frac{2}{3}\right]$

La forma indeterminata $0\cdot\infty$

140 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\lim\limits_{x\to0^+}(\text{sen }2x\cdot\text{cotg }x)$.

Poiché $\lim\limits_{x\to0^+}\text{sen }2x=0$ e $\lim\limits_{x\to0^+}\text{cotg }x=+\infty$, abbiamo la forma indeterminata $0\cdot\infty$.

Utilizzando le formule goniometriche, trasformiamo sen $2x$ e cotg x in modo da semplificare l'argomento del limite:

$$\text{sen }2x\cdot\text{cotg }x=2\,\text{sen }x\cos x\cdot\frac{\cos x}{\text{sen }x}=2\cos^2x.$$

Quindi:

$$\lim_{x\to0^+}(\text{sen }2x\cdot\text{cotg }x)=\lim_{x\to0^+}(2\cos^2x)=2\cdot1=2.$$

Calcola i seguenti limiti.

141 $\lim_{x \to 0} [(1 - \cos 2x) \cdot \operatorname{cotg} x]$ $[0]$

142 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [(1 + \operatorname{tg} x) \cdot \operatorname{cotg} x]$ $[1]$

143 $\lim_{x \to 0^-} (\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cotg}^2 x)$ $[-\infty]$

144 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x)$ $[0]$

145 $\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} [(1 + \operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{tg}^2 x]$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

146 $\lim_{x \to 0} [(2 - \operatorname{cotg} x) \cdot \operatorname{tg} x]$ $[-1]$

147 $\lim_{x \to 1} \frac{2x^2}{3 - 3x^2} \cdot (\sqrt{2 - x} - 1)$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

148 $\lim_{x \to 3^-} (x^2 - 9)\sqrt{\frac{2x^3}{3 - x}}$ $[0]$

149 $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3 + x - 2}\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 1}{4}}$ $[0]$

150 $\lim_{x \to 1} (\sqrt{2 + x} - \sqrt{3})\frac{\sqrt{2x + 7}}{(x - 1)^2}$ $[\infty]$

La forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

151 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo: a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 3x^4 + x^2}{2x^2 - 2}$; b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 5x^2 + 6x^3}{x^3 - 2x^2 - 1}$; c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x^2}{x^3 + x^2 - 2}$.

a) Riscriviamo l'argomento del limite ordinando il numeratore e il denominatore secondo il grado:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^4 + x^2 + 2x}{2x^2 - 2}.$$

Raccogliamo a fattor comune i monomi di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4\left(-3 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^2 \cdot \left(2 - \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\boxed{x^2}}_{\text{tende a } +\infty} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{-3 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{2 - \frac{2}{x^2}}}}_{\text{tende a } -\frac{3}{2}} = -\infty.$$

b) Riscriviamo il limite ordinando il numeratore e il denominatore secondo il grado decrescente:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{6x^3 - 5x^2 + x}{x^3 - 2x^2 - 1}.$$

Raccogliamo a fattor comune i monomi di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 \cdot \left(6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{6}{1} = 6.$$

c) Riscriviamo il limite ordinando il numeratore e il denominatore secondo il grado decrescente:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2 + 2x}{x^3 + x^2 - 2}.$$

Raccogliamo a fattor comune i monomi di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \cdot \left(-1 + \frac{2}{x}\right)}{x^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{\text{tende a } 0} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{-1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}}}}_{\text{tende a } -1} = 0 \cdot (-1) = 0.$$

Calcola i seguenti limiti.

152 $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^6-3x^4}{2x^2-2x+1}$ $[+\infty]$

153 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-2x+1+x^5}{3x^2-2x+1}$ $[+\infty]$

154 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3-4x^2+6}{3x^2-2x+x^3}$ $[3]$

155 $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-6x^4+3x^6}{7x^5+4x^3-2x}$ $[-\infty]$

156 $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3x^4-27}{7+4x^3+x}$ $[+\infty]$

157 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x-6x^3+x^2}{x^2-3x^3}$ $[2]$

158 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x+3x^3}{2x^4-x^2}$ $[0]$

159 $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x-2x^3+3x^2}{x^2-2-x^4}$ $[0]$

160 $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+x+4x^3}{x^5-x^2}$ $[0]$

161 $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^5-x^3+x^4}{x^5-6x^2}$ $[2]$

162 $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-2x^6+4}{2x^6-7-x^3}$ $[-1]$

163 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x^4}{2x^2-x+4x^4}$ $\left[-\dfrac{3}{4}\right]$

164 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x^4}{x^2-x+x^6}$ $[0]$

165 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2}{x^3-2x+1}$ $[0]$

166 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1}$.

Osserviamo che per x che tende a $-\infty$ il numeratore tende a $+\infty$, mentre il denominatore tende a $-\infty$ e quindi il limite è nella forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Raccogliamo a fattor comune i termini di grado massimo all'interno della radice e al denominatore:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}.$$

Poiché x tende a $-\infty$, possiamo supporre $x<0$, quindi abbiamo $|x|=-x$. Il limite perciò diventa:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Calcola i seguenti limiti.

167 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2+8}}{2x+1}$ $[1]$

168 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3x-1}}{x^2+x-1}$ $[0]$

169 $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2-x+1}}$ $[-3]$

170 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+8}}{x+1}$ $[1]$

171 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+x+2}{\sqrt{2x^2+1}}$ $[+\infty]$

172 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-3}}{x+1}$ $[2]$

173 $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+2x-4}-x)$ $[1]$

174 $\lim_{x\to-\infty} \left(\dfrac{6x^3-x}{3x+1}-2x^2\right)$ $[+\infty]$

175 $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+4x+1}-\sqrt{x^2-2x-3})$ $[3]$

176 $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+2x^2-1}{\sqrt{x^6+3x^2+2}}$ $[-1]$

177 $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^4+5x^2+x}}{(x+2)^2}$ [3]

178 $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-1}{4+x^2}\sqrt{\frac{2-3x}{1-12x}}$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

La forma indeterminata $\frac{0}{0}$

179 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo: a) $\lim_{x\to2} \frac{2x^3-x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}$ **; b)** $\lim_{x\to0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x^2-x}$.

a) Calcolando il limite del numeratore e del denominatore, otteniamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Poiché 2 è radice sia per il numeratore sia per il denominatore, possiamo scomporre in fattori numeratore e denominatore. Per il numeratore usiamo la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -1 & -5 & -2 \\ 2 & & 4 & 6 & 2 \\ \hline & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad 2x^3-x^2-5x-2=(x-2)(2x^2+3x+1).$$

Scomponendo il denominatore si ha:

$$2x^2-5x+2=(x-2)(2x-1).$$

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x\to2} \frac{2x^3-x^2-5x-2}{2x^2-5x+2} = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(2x^2+3x+1)}{(x-2)(2x-1)} = \lim_{x\to2} \frac{2x^2+3x+1}{2x-1} = 5.$$

b) Calcolando il limite, si ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Razionalizziamo il numeratore e scomponiamo il denominatore in fattori. Si ha:

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x(x-1)} \cdot \frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to0} \frac{\cancel{1}-\cancel{x}-\cancel{1}}{\cancel{x}(x-1)(1+\sqrt{x+1})} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{-1}{(x-1)(1+\sqrt{x+1})} = \frac{1}{2}.$$

Calcola i seguenti limiti.

180 $\lim_{x\to-5} \frac{x^2+3x-10}{x^2-25}$ $\left[\frac{7}{10}\right]$

181 $\lim_{x\to-2} \frac{3x^2+x-10}{x^2-5x-14}$ $\left[\frac{11}{9}\right]$

182 $\lim_{x\to-1} \frac{-x^3+3x^2+9x+5}{x^2-7-6x}$ [0]

183 $\lim_{x\to1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

184 $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{2x^2+9x-5}{4x^2-4x+1}$ $[+\infty]$

185 $\lim_{x\to2} \frac{x^3+2x^2-8x}{x^3-2x^2+2x-4}$ [2]

186 $\lim_{x\to-1} \frac{x^4+2x^3-2x-1}{x^2+2x+1}$ [0]

187 $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^4-2x^3+2x-1}$ $[+\infty]$

188 $\lim_{x\to-3^-} \frac{x^2+x-6}{x^3+6x^2+9x}$ $[-\infty]$

189 $\lim_{x\to-2} \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}$ [0]

190 $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{3x}$ $\left[\frac{1}{12}\right]$

191 $\lim_{x\to9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

192 $\lim_{x\to-2} \frac{2x^3+5x^2-x-6}{2x^2+3x-2}$ $\left[-\frac{3}{5}\right]$

193 $\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^3+1}}{2x-x^2}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

194 $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 9} - 3}{x^3 - x^2 - x - 2}$ $\left[\frac{1}{21}\right]$

195 $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{3 - \sqrt{8 - x^3}}$ $[-1]$

196 $\lim_{x \to 0} \frac{3 - \sqrt{9 - x^2}}{2\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{4 + x^2}}$ $\left[\frac{2}{9}\right]$

197 $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 + x - 2}\right)^{\frac{1}{1-x}}$ $[+\infty]$

Le forme indeterminate 0^0, ∞^0, 1^∞

198 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$.

Per $x \to 0^+$ si ha $\ln x \to -\infty$, quindi $\frac{1}{\ln x} \to 0^-$, perciò abbiamo la forma indeterminata 0^0.

Poiché $e^{\ln a} = a$ (con $a > 0$), scriviamo il limite nella forma

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln x^{\frac{1}{\ln x}}},$$

e, applicando la proprietà dei logaritmi $\ln a^b = b \ln a$, otteniamo:

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{\cancel{\ln x}} \cdot \cancel{\ln x}} = \lim_{x \to 0^+} e^1 = e.$$

Osservazione. Anche forme indeterminate dei tipi ∞^0 e 1^∞ possono essere risolte utilizzando la proprietà $e^{\ln a} = a$, con $a > 0$.

Calcola i seguenti limiti.

199 $\lim_{x \to 0^+} (2x)^{\frac{2}{\ln 2x}}$ $[e^2]$

200 $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{-3}{\ln x}}$ $\left[\frac{1}{e^3}\right]$

201 $\lim_{x \to 0^+} x^{-\frac{1}{\ln x^2}}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$

202 $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ $\left[\frac{1}{e}\right]$

203 $\lim_{x \to +\infty} (x + 1)^{\frac{1}{\ln x}}$ $[e]$

ESERCIZI VARI Le forme indeterminate

TEST

204 Considera le funzioni:

$$f(x) = 2x^2;\ g(x) = \frac{1}{x};\ h(x) = -x.$$

Quale, fra i seguenti limiti, *non* è una forma indeterminata?

A $\lim_{x \to \infty} [f(x) \cdot g(x)]$

B $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{h(x)}$

C $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - h(x)]$

D $\lim_{x \to 0} [g(x) \cdot h(x)]$

E $\lim_{x \to 0} \frac{h(x)}{f(x)}$

205 Fra i seguenti limiti, solo uno è una forma indeterminata. Quale?

A $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$

B $\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^3}$

C $\lim_{x \to 0} \frac{2x + 1}{3}$

D $\lim_{x \to 0} (x^2 - 3x^3)$

E $\lim_{x \to -\infty} (2x^2 + x^3)$

206 Quale, fra i seguenti limiti, si presenta in forma indeterminata?

A $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} x \cdot \operatorname{tg} x$

B $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x}$

C $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+1}$

D $\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \operatorname{sen} x$

E $\lim_{x \to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

207 Per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to 1} \frac{-3x^2 + a^2x + 2a}{x^2 - 1}$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e vale $-\frac{5}{2}$?

A -3 B 1 C 0 D $-\frac{5}{2}$ E 2

208 Se $n > 3$, allora puoi affermare che:

A $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+1}{x^n-1} = 1$.

B $\lim_{x \to -\infty} \frac{x+3}{nx+1} = 0$.

C $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n+1}{2x-3x^2} = +\infty$.

D $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+5x-1}{2x^n+1} = 0$.

E $\lim_{x \to -\infty} \frac{nx+1}{x} = +\infty$.

209 Per quale valore di k si ha:

$\lim_{x \to -\infty} \frac{6x^{2k-1} - 4x + 8}{-2x^{k+1} - 3} = -3$?

A -2 B 2 C 0 D 1 E 3

Calcola i seguenti limiti.

210 $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+7}}$ $[-\infty]$

211 $\lim_{x \to -\infty} (x + \sqrt{x^2+2})$ $[0]$

212 $\lim_{x \to -2^+} \frac{x^3+8}{x^3+2x^2-4x-8}$ $[-\infty]$

213 $\lim_{x \to -\infty} \frac{-x+\sqrt{x^2-8}}{6x+7}$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

214 $\lim_{x \to -3^+} \frac{x+3}{x^3+8x^2+21x+18}$ $[-\infty]$

215 $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x - \sqrt{3+4x^2}}$ $[-\infty]$

216 $\lim_{x \to 4^+} \frac{x-4}{x^2-8x+16}$ $[+\infty]$

217 $\lim_{x \to -\infty} \frac{x-5x^3+x^2}{2x^3+4x^2-x}$ $\left[-\frac{5}{2}\right]$

218 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-x+2}{x+\sqrt[3]{x^3+2x-1}}$ $[+\infty]$

219 $\lim_{x \to +\infty} (3x - \sqrt{9x^2+1})$ $[0]$

220 $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-2x^3+x^4}{x^5+x^3-2x}$ $[0]$

221 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2x^3+x}{4x^2-2x^5+1}$ $[0]$

222 $\lim_{x \to +\infty} (x^5 - x^2 - x - 1000)$ $[+\infty]$

223 $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$ $[+\infty]$

224 $\lim_{x \to -\infty} \frac{8x+2}{x-\sqrt{x^2-3}}$ $[4]$

225 $\lim_{x \to -1^-} \frac{4}{-3x^2-2x+1}$ $[-\infty]$

226 $\lim_{x \to +\infty} (-4x^7 + x^2 - 4) \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ $[-\infty]$

227 $\lim_{x \to +\infty} \left[\log_2(2x^3 - x^2 + x) - \log_2 \frac{x^3}{4}\right]$ $[3]$

228 $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3+1}{x+2}\right)^{x^3+4x^2}$ $[0^+]$

229 $\lim_{x \to 5^-} \frac{x^2-10x+25}{x^3-9x^2+15x+25}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

230 $\lim_{x \to 0} \log_2 \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{x}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

231 $\lim_{x \to +\infty} [\log_2(x^2+1) - 2\log_2 x]$ $[0]$

232 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+\sqrt{3+x^4}}$ $[0]$

233 $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-2x^3+5}{2x^2-3x^3+1}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

234 $\lim_{x \to -3^-} \frac{x+3}{x^3+8x^2+21x+18}$ $[+\infty]$

235 $\lim_{x \to -\infty} \frac{x-2x^3+x^5+x^7}{x^2-2x^4+10x^6}$ $[-\infty]$

236 $\lim_{x \to 0^-} \frac{x-1}{8x^2+7x}$ $[+\infty]$

237 $\lim_{x \to 3^+} \frac{x-3}{x^2-6x+9}$ $[+\infty]$

238 $\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2+4x+4}{x^3+6x^2+12x+8}$ $[+\infty]$

239 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-2x^3+x^4}{2x^3-x}$ $[+\infty]$

240 $\lim_{x \to -2} e^{\frac{x^2-4}{x+2}}$ $[e^{-4}]$

241 $\lim_{x \to 0} \left[\frac{\text{tg}^2\, x}{\text{sen}\, x} - \ln(\text{sen}^2 x)\right]$ $[+\infty]$

242 $\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$ $[2]$

243 $\lim_{x \to +\infty} \left(2^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{x-1}{x+1}}\right)$ $[-1]$

244 $\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$ $\left[\frac{1}{12}\right]$

245 $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-4x}{x^3-2x^2+x-2}$ $\left[\frac{8}{5}\right]$

246 $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{\pi} \cdot (1-x)$ $[-\infty]$

247 $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\text{arcsen}\, 2^x}{2^{-x}} + \ln\frac{2+x}{x}\right)$ $[0]$

248 $\lim_{x \to +\infty} \left(\log_{\frac{1}{3}} x - x \cdot 3^{x+2}\right)$ $[-\infty]$

249 $\lim_{x \to -\infty} \ln \text{arctg}\, \frac{x-2}{1-x^2}$ $[-\infty]$

250 $\lim_{x \to -\infty} \ln \frac{2^x+3}{2^{3-x}}$ $[-\infty]$

251 $\lim_{x \to -\infty} \frac{(x+2)^2}{(3x-1)^2}$ $\left[\frac{1}{9}\right]$

252 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(3x-1)-\ln 3x}{3x-1}$ $[0]$

253 $\lim_{x \to 0^+} \frac{2\ln x - 3}{12 - \ln x}$ $[-2]$

254 $\lim_{x \to +\infty} \text{arcsen}\, \frac{1-e^x}{2e^x+1}$ $\left[-\frac{\pi}{6}\right]$

255 $\lim_{x \to 3^-} \frac{\ln(3-x)}{x^3-x^2-6x}$ $[+\infty]$

256 $\lim_{x \to +\infty} \log_2\left(\frac{x^2-8x^3}{1-x^3}\right)^{\frac{1+2x}{x}}$ $[6]$

257 $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x-1}{1+4x}\right)^{-x^2+3x}$ $[+\infty]$

258 $\lim_{x \to 2} \log_2 \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{3x^2-4x-4}$ $[-1]$

259 $\lim_{x \to -1} \log_9 \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

260 $\lim_{x \to \infty} \frac{2x-\sqrt{x^2-1}}{4x-1}$

$\left[\text{se } x \to +\infty\text{: } \frac{1}{4}\text{; se } x \to -\infty\text{: } \frac{3}{4}\right]$

261 $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x^2-x}{x+1}\right)^{x^2}$ $[+\infty]$

262 $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x}\right)^{-\ln x}$ $[0^+]$

263 $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}$ $[\sqrt{2}]$

264 $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x-2}{x+1}\right)^{\frac{x-1}{2x}}$ $[\sqrt{3}]$

265 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [(1-\text{sen}\, x) \cdot \sec x]$ $[0]$

266 $\lim_{x \to \pi} [(\cos x + 1) \cdot \text{cosec}\, x]$ $[0]$

267 $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x^2-2}{-2x+1}}$ $[0^+]$

268 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2 x + 2\ln x}{\ln x + 1}$ $[+\infty]$

269 $\lim_{x \to 2} \left(\sqrt{\log_{10} 5x} - \frac{x^2-4}{x-2}\right)$ $[-3]$

270 $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{2-2^{\frac{x-1}{x}}}$ $[+\infty]$

271 $\lim_{x \to \infty} \text{arcsen}\, \frac{1+x^2}{2x^2}$ $\left[\frac{\pi}{6}\right]$

272 $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{2x-3}\right)^{x-1}$ $[0^+]$

3. I LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Teoria a pag. 1489

IN PRATICA
Videolezione 66

273 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x + 3x}{x + \text{sen } x}$.

Il limite presenta la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Sostituiamo $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x + 3x}{x + \text{sen } x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\text{sen } x}{\cos x} + 3x}{x + \text{sen } x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\text{sen } x + 3x \cos x}{\cos x}}{x + \text{sen } x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x + 3x \cos x}{\cos x (x + \text{sen } x)}.$$

Raccogliamo x al numeratore e al denominatore, semplifichiamo e calcoliamo il limite tenendo conto che $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\left(\frac{\text{sen } x}{x} + 3 \cos x\right)}{x \cos x \left(1 + \frac{\text{sen } x}{x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\text{sen } x}{x} + 3 \cos x}{\cos x \left(1 + \frac{\text{sen } x}{x}\right)} = \frac{1 + 3 \cdot 1}{1 (1 + 1)} = 2.$$

Calcola i seguenti limiti, tenendo conto che $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$, $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

274 $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{x}$ [5]

275 $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } kx}{x}$ [k]

276 $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 2x}{x^2}$ [4]

277 $\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{2x}$ [0]

278 $\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x}{x}$ [1]

279 $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 6x}{7x}$ [$\frac{6}{7}$]

280 $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^n x}{\text{sen } x^n}$ [1]

281 $\lim_{x \to 0} \frac{2\text{tg } x + x}{x}$ [3]

282 $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{2x + \text{sen } x}$ [$\frac{1}{3}$]

283 $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{1 - \cos x}$ [4]

284 $\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } 3x}{\text{sen } x}$ [3]

285 $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{2 - \cos x} - 1}$ [2]

286 $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x + 5x}{x + 2 \text{sen } x}$ [2]

287 $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\text{tg } x \text{ sen } x}$ [$\frac{1}{2}$]

288 $\lim_{x \to 0} \frac{2x \text{ sen } x}{\text{tg}^2 x}$ [2]

289 $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x + 2x \cos x}{x \cos x + 2 \text{sen } x}$ [1]

290 $\lim_{x \to 0} \frac{2 \text{sen } x + 5x}{3 \text{sen } x - x}$ [$\frac{7}{2}$]

291 $\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x} - \text{sen } \sqrt{x}}{x}$ [$-\infty$]

292 $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 2x}{x \text{tg } x}$ [4]

293 $\lim_{x \to 0} \frac{x - x \cos x}{\text{sen}^2 x} \cdot \frac{\text{tg } 2x}{x}$ [0]

294 $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x + x}{x + \operatorname{sen} x}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

295 $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x + 2x}{5x + \operatorname{sen} 3x}$ $\left[\frac{5}{8}\right]$

296 $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{6} + 4x}{x}$ $\left[\frac{25}{6}\right]$

297 $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

298 $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x}$ $[0]$

299 $\lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos(x + \pi)}{\operatorname{sen} 3x}$ $[0]$

300 $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}}$ $[0^+]$

301 $\lim_{x \to 0} \operatorname{arctg}\left(2 \cdot \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)$ $\left[-\frac{\pi}{4}\right]$

302 $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos x}{2 - 2\cos x}$ $[1]$

303 $\lim_{x \to 0^+} [\ln(\operatorname{tg} x) - \ln(2x)]$ $\left[\ln \frac{1}{2}\right]$

304 $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 4x}{\sqrt{4 + \operatorname{sen} x} - \sqrt{4 - \operatorname{sen} x}}$ $[8]$

305 $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x}$ $[-6]$

306 $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}{6x^3}$ $\left[-\frac{1}{12}\right]$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e il cambiamento di variabile

307 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$.

Il limite presenta la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Ci riconduciamo al limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ con un cambiamento di variabile, ossia ponendo

$$y = x - \frac{\pi}{2}, \text{ da cui } x = y + \frac{\pi}{2}.$$

Osserviamo che per $x \to \frac{\pi}{2}$, $y \to 0$ e quindi il limite dato, utilizzando le formule degli archi associati, diventa:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{y \to 0} \frac{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{-\operatorname{sen} y}{y} = -1.$$

Calcola i seguenti limiti mediante cambiamenti di variabile (in alcuni casi scritti a fianco).

308 $\lim_{x \to \infty} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$, $\quad y = \frac{1}{x}$. $[1]$

309 $\lim_{x \to 3} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 3x)}{(x - 3)(x - 1)}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

310 $\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{1 - \cos(1 - x)}}{2x^2 - x - 1}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{6}\right]$

311 $\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi} \frac{\cos x}{2x - 3\pi}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

312 $\lim_{x \to -4} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{2x + 8}$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

313 $\lim_{x \to +\infty} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x + 2}$ $[2]$

314 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(2x - \pi)\cos x}{x(1 - \operatorname{sen} x)}$ $\left[-\frac{8}{\pi}\right]$

315 $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}$ $[1]$

316 $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ $[1]$

317 $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x + \operatorname{arctg} 3x}{\operatorname{sen} x + 3x}$ $[1]$

318 $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x}{3x+\operatorname{arctg}x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

319 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x\right]$, $y=x-\frac{\pi}{2}$. $[-1]$

320 $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\operatorname{sen}(\pi x)}$, $y=\pi(x-2)$. $\left[\frac{1}{\pi}\right]$

321 $\lim_{x\to -1}\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x+1}$, $y=\pi(x+1)$. $[-\pi]$

322 $\lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{\cos(x-2)}}{x^2-4x+4}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

323 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5+x}{x}\right)^x$.

Per $x\to+\infty$ si ha la forma indeterminata 1^∞.

«Spezziamo» la frazione tra parentesi dividendo ciascun addendo del numeratore per x e semplificando:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5+x}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{x}+1\right)^x.$$

Per ricondurci al limite fondamentale poniamo $y=\frac{x}{5}$, cioè $x=5y$. Osserviamo che, per $x\to+\infty$, $y\to+\infty$.

Il limite dato diventa:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{x}+1\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{5}{5y}+1\right)^{5y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}+1\right)^{5y}=\lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^5=e^5.$$

Calcola i limiti tenendo conto che $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k$.

324 $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-7}{x}\right)^x$ $[e^{-7}]$

325 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{2x^2}$ $[e^2]$

326 $\lim_{x\to+\infty}\{x[\ln(x+1)-\ln x]\}$ $[1]$

327 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$ $[3]$

328 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1}{x}$ $[-2]$

329 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+5)-\ln 5}{x}$ $\left[\frac{1}{5}\right]$

330 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^x$ $[\sqrt[4]{e}]$

331 $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sqrt{4x}}-1}{\sqrt{x}}$ $[2]$

332 $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x$ $[e]$

333 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $[e]$

334 $\lim_{x\to\infty}x\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)$ $[-1]$

335 $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$ $[e^6]$

336 $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$ $[e^{-2}]$

337 $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ $[e^2]$

338 $\lim_{x\to -2}\frac{e^{2x+4}-1}{x+2}$ $[2]$

339 $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$ $[e^3]$

340 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-4x)}{x}$ $[-4]$

341 $\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{x+2}{x}\right)$ $[2]$

342 $\lim_{x\to 0}\frac{9\ln(1+2x)}{\operatorname{sen}3x}$ $[6]$

343 $\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{2x-2}$ $\left[\frac{e}{2}\right]$

344 $\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{3x+1}{3x}\right)$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

345 $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{\operatorname{sen}x}$ $[-2]$

346 $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\ln(1+x)-1}{2x}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

347 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{8x}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

348 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{e^{x^2}-1}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

349 $\lim_{x\to+\infty}x[\ln(x^2+4)-2\ln x]$ $[0]$

350 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

351 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2+x^2}-e^2}{1-\cos^2 x}$ $[e^2]$

352 $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{e^{\operatorname{sen}x}-\cos x}$ $[1]$

353 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{2x^2+1}\right)^x$ $[\sqrt{e}]$

354 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x}{2}}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$

355 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen}4x}-1}{\ln(1+\operatorname{tg}x)}$ $[4]$

356 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1-\cos x)^{\operatorname{tg}x}$ $\left[\frac{1}{e}\right]$

357 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^6-1}{2x}$ $[3]$

358 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}$ $\left[\frac{1}{5}\right]$

359 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^5-1}{5x}$ $[2]$

360 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{1-x}-1}{e^{2x}-1}$ $\left[\frac{1}{12}\right]$

361 $\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{\sqrt[7]{1+\operatorname{sen}x}-1}{\cos x-1}$ $\left[-\frac{2}{7}\right]$

362 $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x(1-\cos x)}{x^2(\sqrt[7]{1+3x}-1)}$ $\left[\frac{7}{6}\right]$

363 Prove that the following limit exists and determine its value: $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 2x-x}{5e^{2x}-5}$.

(UK *Manchester Metropolitan University, Centre for Mathematics Education*, Bank of Questions)

$\left[\frac{1}{2}\right]$

ESERCIZI VARI Il calcolo dei limiti

TEST

364 Quale dei seguenti limiti *non* si presenta in forma indeterminata?

A $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3+2x-3}$

B $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}$

C $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}$

D $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$

E $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

365 Dato $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}[f(x)]}=\frac{1}{2}$, quale delle seguenti $f(x)$ verifica tale limite?

A $f(x)=6x$

B $f(x)=\frac{2}{3}x$

C $f(x)=\frac{3}{2}x$

D $f(x)=2x$

E $f(x)=9x$

366 Quale dei seguenti limiti *non* vale e^2?

A $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

B $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{3x}}$

C $\lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-x}$

D $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$

E $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{3x}$

367 Quale fra i seguenti limiti dà la forma indeterminata ∞^0?

A $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-\operatorname{sen}3x}\right)^{\cos x}$

B $\lim_{x\to +\infty}\left[\ln\left(1-\frac{3x^4-1}{3x-4x^5}\right)\right]^{\frac{1}{x}}$

C $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2-3x+1}\right)^{x}$

D $\lim_{x\to -1}\left(1-\frac{x-3}{x^2-2x-3}\right)^{\sqrt[3]{-x^2}+1}$

E $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\left[\frac{1}{(3\operatorname{tg}x-\sqrt{3})^2}\right]^{\frac{2\cos x-1}{\operatorname{sen}x-1}}$

368 Sapendo che $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$, quanto vale il $\lim_{x\to 0^-}\frac{x\cdot f(x)}{\operatorname{sen}x}$?

A $+\infty$ B 0 C 1 D $-\infty$ E -1

369 $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x}$ vale:

A $\sqrt{e}$. B $\frac{3}{2}e$. C $\sqrt{e^3}$. D $\sqrt[3]{e^2}$. E $\frac{e^3}{2}$.

370 Data la funzione continua $y=f(x)$ tale che $f(-1)=1$, quanto vale $\lim_{x\to -1} f(x)(x+2)^{\frac{1}{x+1}}$?

A 1 B -1 C e D $-e$ E e^{-1}

371 Sia $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$ se $x\neq 0$, $f(0)=a$:

A f è discontinua in $x=0$ per ogni $a\in\mathbb{R}$.

B f è continua su $\mathbb{R}$ se e solo se $a=2$.

C se $a=0$, f è dispari.

D f è continua su $\mathbb{R}$ per ogni $a\in\mathbb{R}$.

(*Università di Modena, Corso di laurea in Matematica, Test propedeutico,* 2001)

372 Trova $\lim_{x\to 0}\frac{-1+\cos x}{3x^2+4x^3}$. $\left[-\frac{1}{6}\right]$

(USA *Rice University Mathematics Tournament*, 2007)

373 TEST $\lim_{x\to 0^+}\operatorname{tg}\left[\frac{\operatorname{sen}(2\pi x)}{6x}\right]=$

A $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

B 1.

C $\sqrt{3}$.

D $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

E Il limite non esiste.

(USA *University of Houston Mathematics Contest*, 2009)

374 Find the following limits. You must show all your work.

a) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}$;

b) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x}$;

c) $\lim_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x+3}\right)$;

d) $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$.

(USA *Southern Illinois University Carbondale,* Final Exam, Fall 2002)

$\left[\text{a) }\frac{7}{5};\text{ b) }\frac{2}{3};\text{ c) }1;\text{ d) }-\infty\right]$

Calcola i seguenti limiti.

375 $\lim_{x\to 9}\frac{2x-\sqrt{x}}{x^2-x+3}$ $\left[\frac{1}{5}\right]$

376 $\lim_{x\to 81}\left(x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{2}}-x\right)$ $[-63]$

377 $\lim_{x\to 216}\frac{x^{\frac{2}{3}}-34}{\sqrt[3]{x}-4}$ $[1]$

378 $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\operatorname{sen}x+\cos x}$ $[0]$

379 $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(4\operatorname{sen}x-2\cos x)$ $[\sqrt{2}]$

380 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{x}{\operatorname{sen}x}$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

381 $\lim_{x\to 2}\frac{\log_2 x}{2^{2x}-2^x-2}$ $\left[\frac{1}{10}\right]$

382 $\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{\cos x+\operatorname{sen}x+1}}{x}$ $\left[\frac{4}{3\pi}\right]$

383 $\lim_{x\to 3}\frac{\log(x^2-2x-2)}{x^2+x-1}$ $[0]$

384 $\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{\log x-\cos(\pi x)}{2\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}+2^x}}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

385 $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{3+2x}\right)$ $[0]$

386 $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+5}}$ $[-\infty]$

387 $\lim_{x \to +\infty} (-x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x)$ $[-\infty]$

388 $\lim_{x \to -\infty} (-5x^3 + 2x^2 + 5)$ $[+\infty]$

389 $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \left[\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{tg}\, x\right]$ $[-1]$

390 $\lim_{x \to 0} [(3 + \text{cotg}\, x) \cdot \text{sen}\, x]$ $[1]$

391 $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{1-x}$ $[-2]$

392 $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - x^3 + x^2}{-x^2 + x^3 - 2x}$ $[-\infty]$

393 $\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{|x| - 1}$ $[-1]$

394 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{|x| + 1}$ $[1]$

395 $\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^3 + x^2 + 1}{3x^2 + 4x^3 - 2x}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

396 $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 + 7}{x^3 - 2x + 6}$ $[2]$

397 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{1 - 2x}$ $[-\infty]$

398 $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + 7x^2}{x^4 - 2x^3 + 6}$ $[0]$

399 $\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+2}}$ $[-\infty]$

400 $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{3+2x} - \sqrt{2+x})$ $[+\infty]$

401 $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{3+x^2})$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

402 $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{1+4x^2} - \sqrt{3+x^2})$ $[+\infty]$

403 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2x^3}$ $[0]$

404 $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 3x + 4x^2}{x^4 - 2x^3}$ $[-\infty]$

405 $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ $[0]$

406 $\lim_{x \to -4} \frac{2x^2 + 7x - 4}{3x^2 + 10x - 8}$ $\left[\frac{9}{14}\right]$

407 $\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^3 + x^2 - 4x + 3}{2x^2 - x - 1}$ $[+\infty]$

408 $\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 - x - 6}{2x^2 + 8x + 8}$ $[-\infty]$

409 $\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x-1}$ $[-\infty]$

410 $\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2}{x+2}$ $[+\infty]$

411 $\lim_{x \to -3^-} \frac{x^2 - x - 12}{x^3 + 6x^2 + 9x}$ $[-\infty]$

412 $\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^3 - 8x^2 - 5x - 1}$ $[0]$

413 $\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 8}}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$ $[-\sqrt[3]{3}]$

414 $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$ $\left[\frac{1}{32}\right]$

415 $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{\text{tg}\, x}$ $[1]$

416 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{cotg}\, x}{\cos x}$ $[1]$

417 $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \text{cotg}\, x}{\text{tg}\, x - 1}$ $[1]$

418 $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + e^x + 1}{x^2 + x\,\text{sen}\, x}$ $[1]$

419 $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2}{x + 1}$ $[\infty]$

420 $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x^2} - x + \frac{1}{x}\right)$ $[-\infty]$

421 $\lim_{x \to +\infty} [(1-x)(x^2+2)]$ $[-\infty]$

422 $\lim_{x \to -\infty} (-2x^4 - x^3 + 10x^2)$ $[-\infty]$

423 $\lim_{x \to -\infty} \frac{5 - 2x + 3x^2}{1 + x^2 - x^3 - x^4}$ $[0]$

424 $\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^3 + 3x^2 - 4}$ $[+\infty]$

425 $\lim_{x \to -\infty} \frac{6x^2 + x + 3}{2x^2 - 2x + 1}$ $[3]$

426 $\lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos x}{x\,\text{sen}\, x}$ $[1]$

427 $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x - \cos x}{x^2}$ $[-\infty]$

428 $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 5}{e^x + e^{-x}}$ $\left[-\frac{5}{2}\right]$

429 $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sqrt{x^2 + x}}{\cos x}$ $[0]$

430 $\lim_{x \to +\infty} [\log_2(x^2 + 2x) - \log_2(2x^2 + 3)]$ $[-1]$

431 $\lim_{x\to+\infty} \log\frac{1}{x+2}$ $[-\infty]$

432 $\lim_{x\to0^+} [\log \operatorname{sen}^2 x - \log(x^2+4x)]$ $[-\infty]$

433 $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+2x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

434 $\lim_{x\to0} \frac{2\operatorname{sen} x - 3x}{x}$ $[-1]$

435 $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x - 2x}{\operatorname{sen} x + x}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

436 $\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen}(x-\pi)}{2x-2\pi}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

437 $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x+2}{x-1}}$ $[e]$

438 $\lim_{x\to1^+} e^{\frac{x+2}{x-1}}$ $[+\infty]$

439 $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{4}{x}\right)^x$ $[e^4]$

440 $\lim_{x\to-\infty} \left(1-\frac{9}{x}\right)^x$ $[e^{-9}]$

441 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-x}$ $[e]$

442 $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x+4}{x+2}\right)^x$ $[e^2]$

443 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(1+\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)^{\operatorname{tg} x}$ $[e]$

444 $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1-2x)}{x}$ $[-2]$

445 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+4}{2x+1}\right)^x$ $[0]$

446 $\lim_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

447 $\lim_{x\to+\infty} \{x[\log(2x-1) - \log(x+2)]\}$ $[+\infty]$

448 $\lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}$ $[-\infty]$

449 $\lim_{x\to+\infty} xe^x \ln x$ $[+\infty]$

450 $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x}\cdot\frac{1}{\ln(x^2+x)}$ $[0]$

451 $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{3x}+2}{e^{2x}-1}$ $[-2]$

452 $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+2}{e^{2x}-1}$ $[+\infty]$

453 $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+2e^x}{e^{4x}-e^x}$ $[0]$

454 $\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{e^{3x}+e^{2x}-e^x}$ $[2]$

455 $\lim_{x\to-\infty} (x^4)^{e^{-3x}}$ $[+\infty]$

456 $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 6x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

457 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{e^3}}{\ln(2\pi)}$ $\left[\frac{\sqrt{e^3}}{\ln(2\pi)}\right]$

458 $\lim_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x^2}$ $[-\infty]$

459 $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{3}-\sqrt{2})^x$ $[0^+]$

460 $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^{\sqrt{5}}}{e^{-x}}$ $[+\infty]$

461 $\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$ $[0; +\infty]$

462 $\lim_{x\to0} \frac{2^{3x}-1}{2x}$ $\left[\frac{3}{2}\ln 2\right]$

463 $\lim_{x\to1} \frac{4\operatorname{sen} \ln x}{2^x \ln x}$ $[2]$

464 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+3}}{3}$ $[0]$

465 $\lim_{x\to0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\cos x - 1}$ $[3]$

466 $\lim_{x\to1^\pm} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ $[0; 1]$

467 $\lim_{x\to1} \frac{x^3-2x+1}{x^3-1}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

468 $\lim_{x\to0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{3x^2}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

469 $\lim_{x\to0} e^{\frac{2x^2}{x}}$ $[1]$

470 $\lim_{x\to0} (1-4x)^{\frac{1}{x}}$ $\left[\frac{1}{e^4}\right]$

471 $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x + 2x}{\operatorname{sen} x - x^2}$ $[3]$

472 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+10}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$ $[e^5]$

473 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \log_2\left(\frac{\cos x + 2\operatorname{sen} x}{\operatorname{cotg} x + 1}\right)$ $[1]$

474 $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+4}$ $[e]$

475 $\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2}-2+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

476 $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)^2}{\operatorname{sen}^2 x}$ $[2]$

477 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(6x^2+5x+1)}{x}$ $[5]$

478 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-\ln[e(x+1)]}{x}$ $[4]$

479 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)^{e^x}}{x}$ $[1]$

480 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3e^2\operatorname{sen}(x-2)}{4e^x-(2e)^2}$ $\left[\dfrac{3}{4}\right]$

481 $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\cos 2x}$ $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

482 $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{(x-4)^2}}$ $[0]$

483 $\lim\limits_{x\to 2^+}\ln 3^{\frac{-x}{x-2}}$ $[-\infty]$

484 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{sen}(1-e^x)}{e^x-1}$ $[-2]$

485 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^{\pm}}\operatorname{arctg}\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen}x}$ $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

486 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{sen}x-\cos x}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{x}{2}\right)}$ $[-2\sqrt{2}]$

487 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-1)}{2(1-x)}$ $\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

488 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{sen}x}{\ln(1+x)^4}$ $\left[\dfrac{3}{4}\right]$

489 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{2|x|}{x^2}}$ $[+\infty]$

490 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{-2x}{x^2}}$ [se $x\to 0^+$, 0^+; se $x\to 0^-$, $+\infty$]

491 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^x}{\operatorname{sen}x}$ $[-1]$

492 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $\left(\text{poni } \dfrac{1}{x}=y\right)$ $\left[\dfrac{1}{e}\right]$

493 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1+x^2}{x+x^2}\right)^{2x}$ $\left[\dfrac{1}{e^2}\right]$

494 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(x+2)}$ $[1]$

495 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2\operatorname{sen}^2x}{\ln(1+4x^4)}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

496 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{sen}\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)-\ln\left(1+2x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{x-\dfrac{\pi}{4}}$ $[0]$

497 $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\dfrac{x+e^{4x}-\ln[e(5x+1)]}{1-\cos x}$ $[0]$

498 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\operatorname{sen}x}$ $[4]$

499 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)^{4x^2-1}$ $[e^{-8}]$

500 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-4}\right)^{\frac{x}{3}}$ $[\sqrt[6]{e^5}]$

501 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{8}}\dfrac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{8}}{x-\dfrac{\pi}{8}}$ $\left[\cos\dfrac{\pi}{8}\right]$

502 $\lim\limits_{x\to -1}(x+2)^{\frac{2}{x+1}}$ $[e^2]$

503 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{4}{x^2}}$ $\left[\dfrac{1}{e^2}\right]$

504 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\operatorname{sen}x)^{\frac{\cos x}{x}}$ $[e^{-1}]$

505 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x-1}{x}}}$ (con $x_0=0,1,\infty$)

$\left[\text{se } x\to 0^+\text{: } 1\text{, se } x\to 0^-\text{: } 0\text{; } \infty\text{; } \dfrac{1}{1-e}\right]$

506 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\cos(x-1)}{x^2-1}$ $[0]$

507 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}-\operatorname{sen}x\right)}{x^3}$ $\left[\dfrac{1}{8}\right]$

508 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{10x^3+5x^2-5x}{2x^2-7x+3}$ $\left[-\dfrac{3}{2}\right]$

509 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3x^3-2x^2+5}}{2x+\sqrt{x^2-1}}$ $[\sqrt[3]{3}]$

510 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2x)^{\frac{1}{x\ln(x+1)}}$ $[e]$

511 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{\ln 4x}}$ $[e]$

512 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(1-x)^{2x}}{(1+x^2)^x}$ $\left[\dfrac{1}{e^2}\right]$

513 $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x^2-2}{x-e}$ $\left[\dfrac{2}{e}\right]$

514 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{sen}x-1}{\cos x\left(\cos\dfrac{x}{2}-\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right)}$ $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

515 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}+\operatorname{sen}x-\cos x}{x}$ $[0]$

516 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^3}-1}{x^3-x^4}$ $\left[\dfrac{1}{4}\right]$

517 $\lim_{x\to 5}\log_{10}\frac{x-5}{\sqrt{x+20}-5}$ $[1]$

518 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen}2x}-e^{\operatorname{sen}x}}{\operatorname{tg}x}$ $[1]$

519 $\lim_{x\to +\infty}2^{-x}\left(2+\frac{3}{x}\right)^x$ $[\sqrt{e^3}]$

520 $\lim_{x\to +\infty}x[\ln(2x+1)-\ln x-\ln 2]$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

521 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$ $[2]$

522 $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{18x^3-3x^2-4x+1}{2x^2+27x+13}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

523 $\lim_{x\to +\infty}\frac{2+\cos x}{2x+\operatorname{sen}x}$ $[0]$

524 $\lim_{x\to +\infty}\frac{2^x+\left(\frac{27}{10}\right)^x}{x+e^x}$ $[0]$

525 $\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}x(e^x-1)}{\ln(1+x)(1-\cos x)}$ $[2]$

526 $\lim_{x\to 0^+}e^{-\frac{1}{x}}(e+2x)^{\frac{1}{x}}$ $[e^{\frac{2}{e}}]$

527 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}4x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ [se $x\to 0^+$: $+\infty$, se $x\to 0^-$: 0^+]

528 $\lim_{x\to +\infty}(e^x-x^x)$ $[-\infty]$
(Suggerimento. Trasforma x^x con l'identità $a=e^{\ln a}$: $x^x=e^{\cdots}$, poi raccogli e^x.)

529 Data la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sen}5x}{2\operatorname{sen}2x} & \text{se } x<0\\ \frac{5}{4}+x\ln(1+x) & \text{se } x\geq 0\end{cases}$$

calcola, se esiste, il $\lim_{x\to 0}f(x)$. $\left[\frac{5}{4}\right]$

530 Data la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{2} & \text{se } x\leq 0\\ \frac{\pi}{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) & \text{se } x>0\end{cases}$$

calcola, se esiste, il $\lim_{x\to 0}f(x)$. $\left[\frac{\pi}{6}\right]$

COMPLETA

531 $\lim_{x\to \ldots}\frac{x-1}{x^2-5x+6}=\infty$ $[2;3]$

532 $\lim_{x\to \ldots}2^{\frac{-x^2}{x-2}}=0$ $[2^+;+\infty]$

533 $\lim_{x\to \ldots}\ln\frac{2x+1}{x^2-x}=-\infty$ $\left[-\frac{1}{2}^+;+\infty\right]$

534 $\lim_{x\to \ldots}\frac{x-5x^2}{2x-x^2}=\infty$ $[2]$

535 $\lim_{x\to \ldots}\ln\frac{2x+1}{x^2-x}=+\infty$ $[0^-;1^+]$

536 $\lim_{x\to \ldots}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|=\pm\infty$ $[0;2]$

537 $\lim_{x\to \ldots}\ln\frac{x+1}{x^2}=\pm\infty$ $[-1^+;0;+\infty]$

538 $\lim_{x\to \ldots}3^{\frac{x^3}{x^2-4}}=+\infty$ $[-2^+;2^+;+\infty]$

539 $\lim_{x\to \ldots}\ln\frac{x^2-x}{x+1}=-\infty$ $[0^+;1^+]$

540 Data la funzione $f(x)$ tale che

$$\frac{x}{x^2+1}\leq f(x)\leq\frac{2}{\ln x+1},$$

quanto vale $\lim_{x\to +\infty}f(x)$? $[0]$

541 Trova per quale valore di a la funzione

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-ax+1 & \text{se } x\leq -1\\ \frac{ax-1}{x+2} & \text{se } x>-1\end{cases}$$

ammette limite nel punto $x=-1$. $[a=-2]$

542 Calcola $\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ nel punto indicato a fianco di ciascuna delle seguenti funzioni.

a) $f(x)=\sqrt{x}$; $c=3$.

b) $f(x)=5x^2$; $c=1$.

c) $f(x)=e^{3x}$; $c=1$.

d) $f(x)=\operatorname{sen}x$; $c=\frac{\pi}{6}$.

$\left[\text{a) }\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{; b) 10; c) }3e^3\text{; d) }\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

---

543 Data la funzione $f(x)=\frac{ax^2+2x+b}{cx-1}$, trova a, b, c, sapendo che $\lim_{x\to 0}f(x)=2$ e che per $x\to -1$ si ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. $[a=4;\ b=-2;\ c=-1]$

544 Data la funzione $f(x)=\frac{x-1}{2a-x^2}$, determina per quale valore di a si ha $\lim_{x\to -1}f(x)=\infty$. $\left[a=\frac{1}{2}\right]$

545 Calcola per quale valore di a si ha $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} ax}{5x}=-4$. $[a=-20]$

546 Data la funzione $f(x)=\frac{3ax^2+1}{bx-x^2}$, trova per quali valori di a e b si ha:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-1$ e $\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$. $\left[a=\frac{1}{3}; b=1\right]$

547 Data la funzione $f(x)=\frac{ax^2-4}{bx^2-x}$, trova a e b, sapendo che $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{2}{3}$ e $\lim_{x\to 2} f(x)=0$. $\left[a=1; b=\frac{3}{2}\right]$

548 Quali valori devono assumere i parametri a e b affinché sia $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+a}{(a+b)x+bx^2}=-2$? $[a=-2; b=0]$

549 Determina a e b tali che la funzione $f(x)=2^{\frac{ax}{x+2b}}$ abbia $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)=0$. $\left[a=-1; b=-\frac{1}{2}\right]$

550 Trova per quale valore di k si ha $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{8x}=+3$. $[k=24]$

Discuti al variare di k il risultato dei seguenti limiti.

551 $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^k+x+1}{x^2-1}$, $k\in\mathbb{N}$. [se $0\leq k<2$: 0; se $k=2$: 2; se $k>2$: $+\infty$]

552 $\lim_{x\to 3}\left(2^{\frac{k}{x-3}}+x\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.
[se $k=0$: 4; per $x\to 3^+$, se $k>0$: $+\infty$, se $k<0$: 3; per $x\to 3^-$, se $k>0$: 3; se $k<0$: $+\infty$]

553 $\lim_{x\to-\infty}\frac{2kx^2-1}{x+4}$, $k\in\mathbb{R}$. [se $k=0$: 0; se $k>0$: $-\infty$; se $k<0$: $+\infty$]

554 $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} kx}{x(2-k)}$, $k\in\mathbb{R}$. $\left[\text{se } k=0\text{: 0; se } k=2\text{: impossibile; se } k\neq 0\wedge k\neq 2\text{: }\frac{k}{2-k}\right]$

555 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(k+x)}{x}$ $\left[\text{se } k<0\text{: impossibile; se } k=0\text{: si ha solo } \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty\text{; se } k=1\text{: 1; se } k>0\wedge k\neq 1\text{: }\infty\right]$

556 Verifica che la funzione $f(x)=\frac{\cos x}{x}$ ha come asintoto orizzontale la retta $y=0$.

557 Verifica che la funzione $f(x)=\frac{e^{-x}+2e^x}{e^{-x}+3e^x}$ ha come asintoto orizzontale la retta $y=\frac{2}{3}$. Esistono altri asintoti per $f(x)$? [sì: $y=1$]

I problemi con i limiti

I problemi di geometria piana

558 Nel triangolo ABC si ha: $\overline{AB}=b$, $B\widehat{A}C=3A\widehat{B}C$. Conduci una semiretta r avente origine in A, che incontri il lato BC in P e tale che risulti: $B\widehat{A}P\cong P\widehat{B}A$.

a) Calcola il limite del rapporto $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}$ quando l'angolo $P\widehat{B}A$ tende a 0 e quando tende a $\frac{\pi}{4}$.

b) Indica con H la proiezione di B sulla remiretta r e calcola i limiti del rapporto $\frac{\overline{BH}}{\overline{PB}}$ quando l'angolo $P\widehat{B}A$ tende a 0 e quando tende a $\frac{\pi}{4}$. [a) 2; 0; b) 0; 1]

559 In un trapezio rettangolo $ABCD$ la base maggiore AB e il lato obliquo CB misurano $4a$ e la base minore DC misura $2a$.
Dopo aver determinato gli elementi incogniti del trapezio, traccia la semicirconferenza di diametro CB che incontra la base maggiore nel punto H. Considera un punto P appartenente all'arco CH e, posto $P\widehat{B}H = x$, calcola $\lim_{P \to H} \frac{\overline{PH}^2}{\overline{AP}^2 - \overline{PB}^2}$. [0]

560 È dato un quadrante di cerchio OAB di raggio $\overline{OA} = r$. Considera sull'arco AB due punti C e D tali che $A\widehat{O}D = 2A\widehat{O}C$ e indica con C' e D' le proiezioni di C e D su OA. Calcola i limiti:

$$\lim_{D \to A} \frac{\overline{D'A}}{\overline{C'A}}, \lim_{D \to A} \frac{\overline{D'C'}}{\overline{C'A}}.$$ [4; 3]

561 È data una semicirconferenza di centro O con diametro $\overline{AB} = 2r$. Conduci dal punto A due corde AC e AD in modo che $C\widehat{O}D = \frac{\pi}{3}$ e, sempre dal punto A, la semiretta tangente in A alla semicirconferenza.
Detta P la proiezione di C sulla tangente, esprimi in funzione dell'angolo $P\widehat{A}C$ il rapporto $\frac{\overline{AP} \cdot \overline{CD}}{\mathscr{A}(ACD)}$, dove $\mathscr{A}(ACD)$ rappresenta l'area del triangolo ACD, e calcola il limite di tale rapporto al tendere di C ad A. [4]

562 È dato il settore circolare AOB di centro O, raggio r e angolo al centro $\frac{\pi}{4}$. Considera un punto Q sull'arco AB e sia QH la distanza di Q dalla tangente in A all'arco AB. Dal punto Q traccia la parallela a OB che incontra in R il raggio OA. Calcola:

$$\lim_{Q \to A} \frac{\overline{QH}}{\overline{QR}} \text{ e } \lim_{Q \to A} \frac{\overline{QH}}{\overline{QR}^2}.$$ $\left[0; \frac{1}{4r}\right]$

563 Data una circonferenza di raggio r e una sua corda AB a distanza $\frac{r}{2}$ dal centro O, indica con M il punto medio del maggiore dei due archi AB e con P un generico punto dell'arco minore. Il segmento MP interseca la corda AB in Q.
Calcola $\lim_{P \to A} \frac{\overline{PA}}{\overline{AQ}}$. [1]

564 In un quarto di circonferenza di estremi A, B e raggio $r = 1$, traccia la tangente t passante per B e la corda AB. Considera un punto M appartenente all'arco AB e, dette T e C le sue proiezioni ortogonali sulla tangente t e sulla corda AB, calcola il limite:

$$\lim_{M \to B} \frac{\overline{MT}}{\overline{MC}}.$$ [0]

565 Nel parallelogramma $ABCD$ le misure dei lati AB e BC sono rispettivamente a e b e l'angolo in B misura 120°. Dal generico punto F appartenente al lato BC conduci la parallela al lato AB che incontri in G la diagonale AC e in E il lato AD. Calcola il limite del rapporto fra l'area del triangolo CFG e quella del trapezio $CDEG$ al tendere di F a C. [0]

566 Dato il settore circolare AOB di centro O, raggio 1 e angolo al centro $\frac{\pi}{4}$, considera un punto P sull'arco AB e la sua proiezione H su OA. Traccia la circonferenza con centro in H passante per P e sia Q il suo punto di intersezione zione con OA. Determina $\lim_{P \to B} \frac{\overline{OQ}}{\overline{BP}}$. $[\sqrt{2}]$

567 Considera la semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$, traccia la semiretta t tangente in A e la semiretta s di origine O che interseca la semicirconferenza in P e la semiretta t in Q. Calcola $\lim_{P \to A} \frac{\overline{PQ} + \overline{AQ}}{\overline{PA}}$. [1]

I problemi di geometria analitica

568 Studia il fascio di parabole di equazione $y = -x^2 + kx$, verificando che ha come punto base l'origine O degli assi. Dopo aver scritto l'equazione della tangente in O alla generica parabola del fascio, considera il punto di intersezione C tra tale tangente e la retta $x = k$ e il punto H, proiezione di C sull'asse x.
Calcola $\lim_{k \to 0} \frac{\overline{OC} - \overline{OH}}{\overline{CH} \cdot \overline{OH}}$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

569 Siano date l'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 4$ e la retta r di equazione $y = 2x - 4$ e siano A e B i loro punti di intersezione (A di ascissa minore). Sull'arco di iperbole AB considera un punto P e calcola:

$$\lim_{P \to A} \frac{\overline{PK}}{\overline{PH}},$$

dove $\overline{PK}$ è la distanza di P dalla retta r e $\overline{PH}$ è la distanza di P dall'asse x. $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right]$

570 In una circonferenza con centro nell'origine degli assi e raggio r indica con B il suo punto di intersezione con la parte positiva dell'asse y. Considera il punto P sull'arco di circonferenza che si trova nel primo quadrante, la sua proiezione K sulla tangente alla circonferenza in B e calcola:

$$\lim_{P \to B} \frac{\overline{PK}}{\overline{BK}} \text{ e } \lim_{P \to B} \frac{\overline{PK}}{\overline{BK}^2}. \qquad \left[0; \frac{1}{2r}\right]$$

571 Considera l'ellisse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ e la retta r di equazione $3x + 2y - 6 = 0$. Siano A e B i loro punti di intersezione (A di ascissa maggiore). Sull'arco di ellisse AB prendi un punto P e calcola:

$$\lim_{P \to A} \frac{\overline{PK}}{\overline{PH}},$$

dove $\overline{PK}$ è la distanza di P dalla retta r e $\overline{PH}$ è la distanza dalla tangente all'ellisse in A. $[+\infty]$

572 Sono date le iperboli equilatere di equazioni:

$$y = \frac{1-2x}{x+1}, \; y = \frac{3x}{x+1}.$$

Considera la retta $x = h$ $(h < -1)$ e i punti Q e R di intersezione con le iperboli. Calcola:

$$\lim_{h \to -\infty} \frac{\text{area}(AOQ)}{\text{area}(AOR)},$$

essendo $A(-2; 0)$ e O l'origine del sistema di assi cartesiani. $\left[\frac{2}{3}\right]$

573 Considera la parabola γ con l'asse coincidente con l'asse y, avente come vertice il punto $V(0; -4)$ e passante per $A(4; 0)$. Traccia la retta t tangente in A, considera un punto P sull'arco AV di γ e, indicata con Q la sua proiezione su t, calcola:

$$\lim_{P \to A} \frac{\overline{PQ}}{\overline{PA}}. \qquad [0]$$

574 a) Nel fascio di parabole

$$y = kx^2 - 2x + 3,$$

determina il punto base B e la tangente comune alle parabole in B.

b) Sia Q il punto di intersezione della retta con l'asse x. Considera il vertice V della generica parabola del fascio e calcola:

$$\lim_{k \to 0} \frac{\overline{BV}}{\overline{QV}}, \; \lim_{k \to \infty} \frac{\overline{BV}}{\overline{QV}}.$$

[a) $B(0; 3)$, $y + 2x - 3 = 0$; b) 1, 0]

575 Considera il fascio di circonferenze:

$$x^2 + y^2 + kx - 2(k-3)y + 4k - 16 = 0.$$

a) Determina l'asse radicale e i punti base A e B (A è quello di ascissa minore).

b) Sia C il centro della generica circonferenza e O l'origine degli assi. Calcola:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\overline{CO}}{\overline{CB}}, \; \lim_{k \to 0} \frac{\overline{CO}}{\overline{CB}}.$$

$\left[\text{a) } x - 2y + 4 = 0,\ A(-4; 0),\ B(0; 2);\ \text{b) } 1; \frac{3}{5}\right]$

4. GLI INFINITESIMI, GLI INFINITI E IL LORO CONFRONTO

Teoria a pag. 1492

Gli infinitesimi

Verifica che le seguenti funzioni sono infinitesimi.

576 a) $f(x) = \frac{x - \text{sen}\, x}{\text{sen}\, x}$, per $x \to 0$; b) $f(x) = \frac{\text{tg}\, x}{x} - \cos x$, per $x \to 0$.

577 a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$, per $x \to 1$; b) $f(x) = \frac{1}{x-3}$, per $x \to +\infty$.

578 **ESERCIZIO GUIDA**

Confrontiamo fra loro gli infinitesimi:

$$f(x) = \ln(2x^2 + 1), \quad g(x) = e^{-x} - 1, \quad \text{per } x \to 0.$$

Le due funzioni sono infinitesimi perché:

$$\lim_{x\to 0} \ln(2x^2+1) = \lim_{x\to 0}(e^{-x}-1) = 0.$$

Consideriamo il rapporto fra i due infinitesimi e calcoliamo il limite per $x \to 0$. Tenendo conto che $x \neq 0$, moltiplichiamo e dividiamo sia per $2x^2$, sia per $-x$, in modo da poter utilizzare i limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2x^2+1)}{e^{-x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(2x^2+1)}{2x^2} \cdot \frac{2x^2}{-x} \cdot \frac{-x}{e^{-x}-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(2x^2+1)}{2x^2} \cdot \lim_{x\to 0}(-2x) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{-x}{e^{-x}-1} = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

Poiché $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$.

Confronta fra loro gli infinitesimi seguenti.

579 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x+6}$, per $x \to \infty$. [$f(x)$ ord. sup. a $g(x)$]

580 $f(x) = e^{2x} - 1$, $g(x) = \operatorname{sen} x$, per $x \to 0$. [$f(x)$ stesso ordine rispetto a $g(x)$]

581 $f(x) = \ln(1-2x)$, $g(x) = x(1-e^{3x})$, per $x \to 0$. [$f(x)$ ord. inf. a $g(x)$]

582 $f(x) = x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $g(x) = x$, per $x \to 0$. [non confrontabili]

583 $f(x) = 1 - \cos 4x$, $g(x) = \operatorname{sen} 2x$, per $x \to 0$. [$f(x)$ ord. sup. a $g(x)$]

Confronta gli infinitesimi seguenti con i relativi infinitesimi campione.

584 $f(x) = 2 - \sqrt{x+4}$, per $x \to 0$. [$f(x)$ stesso ordine rispetto a x]

585 $f(x) = \frac{-3}{x^4 + 2x^2 - 1}$, per $x \to \infty$. $\left[f(x) \text{ ord. sup. rispetto a } \frac{1}{x}\right]$

586 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$, per $x \to 1$. [$f(x)$ stesso ordine rispetto a $x - 1$]

587 $f(x) = \ln^2(1+2x)$, per $x \to 0$. [$f(x)$ ord. sup. rispetto a x]

588 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'ordine dell'infinitesimo $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$, per $x \to \infty$.

Confrontiamo $f(x)$ con l'infinitesimo $\left(\frac{1}{x}\right)^k$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2-2x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2-2x} \cdot x^k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}.$$

Il limite è finito e diverso da 0 (vale 1) per $k = 2$, quindi l'infinitesimo è di ordine 2.

Determina l'ordine dei seguenti infinitesimi.

589 $f(x) = \operatorname{sen} x$, per $x \to 0$. [1]

590 $f(x) = \frac{1}{x+3}$, per $x \to \infty$. [1]

591 $f(x) = 1 - \cos x$, per $x \to 0$. [2]

592 $f(x) = \operatorname{tg} x$, per $x \to 0$. [1]

593 $f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x}$, per $x \to \infty$. [3]

594 $f(x) = \ln(1 + 2x)$, per $x \to 0$. [1]

595 $f(x) = \operatorname{sen} x (e^{2x} - 1)$, per $x \to 0$. [2]

596 $f(x) = 1 - 4x^2$, per $x \to \frac{1}{2}$. [1]

597 **ESERCIZIO GUIDA**

Con il principio di sostituzione degli infinitesimi calcoliamo $\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)\operatorname{sen} 4x}{\ln(1 + 8x)}$.

Poiché, per $x \to 0$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\operatorname{sen} 4x \sim 4x$ e $\ln(1 + 8x) \sim 8x$, abbiamo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)\operatorname{sen} 4x}{\ln(1 + 8x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} \cdot 4\cancel{x}}{8\cancel{x}} = 0.$$

Utilizzando il principio di sostituzione degli infinitesimi, calcola i seguenti limiti.

598 $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\ln(1 + 4x)}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

599 $\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)\operatorname{sen} 3x}{\ln^2(1 - x)}$ [3]

600 $\lim_{x \to 0} \frac{(e^{x^2} - 1)(1 - \cos x)}{\operatorname{sen}^4 x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

601 $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\operatorname{sen} 6x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

602 $\lim_{x \to 1} \frac{e^{x^2 - 1} - 1}{\operatorname{sen}(x - 1)}$ [2]

603 $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + \operatorname{sen} x}{5x + x^4 \cos x}$ $\left[\frac{1}{5}\right]$

604 $\lim_{x \to 0} \frac{2x + \operatorname{sen} 2x + 1 - \cos 4x}{-2x^4 + \operatorname{sen}^2 x}$ $[\infty]$

605 $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x + 3x^2 + \ln(1 + x)}{\operatorname{sen}^3 x + 6x}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

606 Dimostra che le misure della superficie e del volume della sfera sono entrambe infinitesimi quando la misura del raggio tende a 0 e confronta gli infinitesimi.

607 È possibile, per qualche valore particolare del parametro k, che le funzioni $f(x) = kx - k$ e $g(x) = x^2 + kx - 2$ siano infinitesime per $x \to x_0$, con x_0 valore comune? In caso affermativo calcola il valore di x_0 e confronta gli infinitesimi.

608 **TEST** Per $x \to 0$ le funzioni $1 - \cos x$ e $\operatorname{sen} x$:

- **A** sono infinitesime dello stesso ordine.
- **B** $1 - \cos x$ è infinitesima di ordine inferiore.
- **C** $1 - \cos x$ è infinitesima di ordine superiore.
- **D** sono equivalenti.

(*Politecnico di Torino, Test di autovalutazione*)

Gli infiniti

Controlla se le seguenti funzioni sono infiniti.

609 a) $f(x) = \frac{x - 3}{x^3 + 2}$, per $x \to \infty$;

b) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{2x}$, per $x \to \infty$.

[a) no; b) sì]

610 a) $f(x) = \frac{x}{\cos x}$, per $x \to \frac{\pi}{2}$;

b) $f(x) = \ln(1 + x)$, per $x \to -1^+$.

[a) sì; b) sì]

611 **ESERCIZIO GUIDA**

Confrontiamo fra loro gli infiniti:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{(x^3 + x)(x^2 - 2x)}, \quad \text{per } x \to 0.$$

Le due funzioni sono infiniti, in quanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x^3+x)(x^2-2x)}=\infty.$$

Calcoliamo il limite del rapporto tra i due infiniti, tenendo conto che $x\neq 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{(x^3+x)(x^2-2x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cancel{x^2}}\cdot\frac{\cancel{x^2}(x^2+1)(x-2)}{1}=\lim_{x\to 0}(x^2+1)(x-2)=-2.$$

Poiché il limite è finito e diverso da 0, i due infiniti sono dello stesso ordine.

Confronta fra loro i seguenti infiniti.

612 $f(x)=x^4+3x^2-2x$, $g(x)=-3x^3+x+1$, per $x\to\infty$. [$f(x)$ ord. sup. a $g(x)$]

613 $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$, $g(x)=\frac{1}{(x^3-x)(2x-2)}$, per $x\to 1$. [stesso ordine]

614 $f(x)=\frac{1}{x\cos\frac{1}{x}}$, $g(x)=\frac{1}{x}$, per $x\to 0$. [non confrontabili]

615 $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-1$, $g(x)=x^2+x$, per $x\to\infty$. [$f(x)$ ord. inf. a $g(x)$]

Confronta gli infiniti seguenti con i relativi infiniti campione.

616 $f(x)=\frac{1}{x^3+x^2-2x}$, per $x\to 1$. $\left[f(x)\text{ stesso ordine rispetto a }\frac{1}{x-1}\right]$

617 $f(x)=\sqrt{x^2+2x}+x$, per $x\to+\infty$. [$f(x)$ stesso ordine rispetto a x]

618 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+3x^2)}$, per $x\to 0$. $\left[f(x)\text{ ord. sup. rispetto a }\frac{1}{x}\right]$

619 $f(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}^2x}$, per $x\to 0$. $\left[f(x)\text{ stesso ordine rispetto a }\frac{1}{x}\right]$

Determina l'ordine dei seguenti infiniti.

620 $f(x)=\frac{2x-1}{x}$, per $x\to 0$. [1]

621 $f(x)=x^4+2x^2+x$, per $x\to\infty$. [4]

622 $f(x)=\frac{1}{x^3-4x}$, per $x\to 2$. [1]

623 $f(x)=\frac{x^4+x}{x-1}$, per $x\to\infty$. [3]

624 $f(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 2x}$, per $x\to 0$. [2]

625 $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$, per $x\to 3$. [2]

626 $f(x)=-x^4-1$, per $x\to\infty$. [4]

627 $f(x)=\frac{x^2+4x+1}{x^2}$, per $x\to 0$. [2]

La gerarchia degli infiniti

628 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il seguente limite utilizzando la gerarchia degli infiniti:

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3x^3}}.$$

Utilizziamo la definizione di logaritmo, da cui $a = e^{\ln a} (a > 0)$:

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{3x^3}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{3x^3}}}.$$

Sfruttiamo una proprietà dei logaritmi:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{3x^3} \ln x} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{3} \cdot \frac{\ln x}{x^3}}.$$

Per la gerarchia degli infiniti $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0$, quindi il limite cercato vale $e^0 = 1$. In conclusione:

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{3x^3}} = 1.$$

Calcola i seguenti limiti utilizzando la gerarchia degli infiniti.

629 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ [0]

630 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^2}{e^x}$ [0]

631 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{\ln x}$ [$+\infty$]

632 $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x^4}$ [$+\infty$]

633 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{\ln^2 x}$ [$+\infty$]

634 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{4 \ln x}$ [$+\infty$]

635 $\lim_{x \to +\infty} \ln x^{\frac{1}{x}}$ [0]

636 $\lim_{x \to 0^+} x^x$ [1]

637 $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ [1]

638 $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{4x}}$ [0]

639 $\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ [1]

640 $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$ [1]

641 $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$ [0]

642 $\lim_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$ [1]

643 $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3 - \ln x + 1}$ [$+\infty$]

644 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2 x + 2e^x}{x^2}$ [$+\infty$]

645 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^4 - 4x^2 + 6}$ [0]

646 $\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x}$ [0]

647 $\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} \ln 2x$ [0]

648 $\lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x + x^8}{x^2 - e^x}$ [-2]

5. LE FUNZIONI CONTINUE

▶ Teoria a pag. 1497

649 Se $f(x)$ è una funzione definita nell'intervallo $[a; b]$, c un punto interno a tale intervallo e se vale il limite $\lim_{x \to c} f(x) = l$, possiamo affermare che la funzione $f(x)$ è continua in c? Motiva la risposta.

650 **TEST** Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(2x - 1) & \text{se } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Una delle seguenti affermazioni è *vera*. Quale?

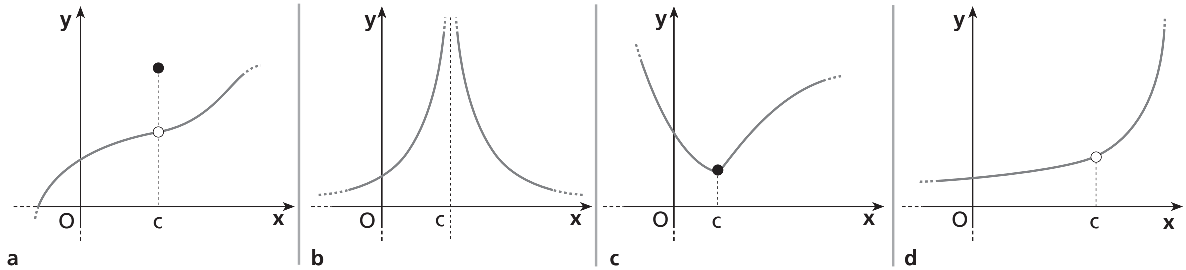
- A $f(x)$ è continua soltanto in $x = 1$.
- B $f(x)$ presenta una discontinuità in $x = 1$.
- C $f(x)$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.
- D $f(x)$ non è definita in $x = 1$.
- E Nessuna delle affermazioni precedenti è vera.

651 **TEST** Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{x^2}$ se $x \neq 0$, $f(0) = a$:

- A f è periodica.
- B f è discontinua in $x = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- C f è continua su $\mathbb{R}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- D f è continua su $\mathbb{R}$ se e solo se $a = +\infty$.

(*Università di Modena, Corso di laurea in Matematica, Test propedeutico*, 2001)

652 Quali delle funzioni rappresentate dai seguenti grafici non sono continue in c e perché?



[a; b; d]

Rappresenta le seguenti funzioni e trova eventuali punti in cui non sono continue.

653 $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ 2x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ [$f(x)$ continua $\forall x \in \mathbb{R}$]

654 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{se } x \leq 1 \\ 2x-2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ [$f(x)$ continua $\forall x \in \mathbb{R}$]

655 $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{se } x < 1 \\ \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ [$f(x)$ discontinua in $x = 1$]

656 $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ [$f(x)$ discontinua in $x = 0$]

Disegna il grafico delle seguenti funzioni, verificando che sono continue nei punti segnati a fianco.

657 $f(x) = 4x+3, \qquad x_0 = -4.$

658 $f(x) = 1-3x, \qquad x_0 = 0.$

659 $f(x) = x^2-6, \qquad x_0 = -1.$

660 $f(x) = 2-3x^2, \qquad x_0 = 1.$

661 $f(x) = \sqrt{4x+5}, \qquad x_0 = 5.$

662 $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ -2x+2 & \text{se } x < 1 \end{cases}, \qquad x_0 = 1.$

663 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x & \text{se } x > 0 \end{cases}, \qquad x_0 = 0.$

664 $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}, \qquad x_0 = 1.$

665 Verifica graficamente che la seguente funzione è continua a destra in $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ 2x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

666 Verifica graficamente che la funzione

$$y = \frac{x^2-4}{x-2}$$

non è continua in $x_0 = 2$.

667 Verifica che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua in tutto il suo dominio.

668 Considera la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} bx & \text{se } x < 1 \\ a-2 & \text{se } x = 1 \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Quali valori devono assumere i parametri a e b affinché la funzione sia continua in tutto il suo dominio? [$a = 3$; $b = 1$]

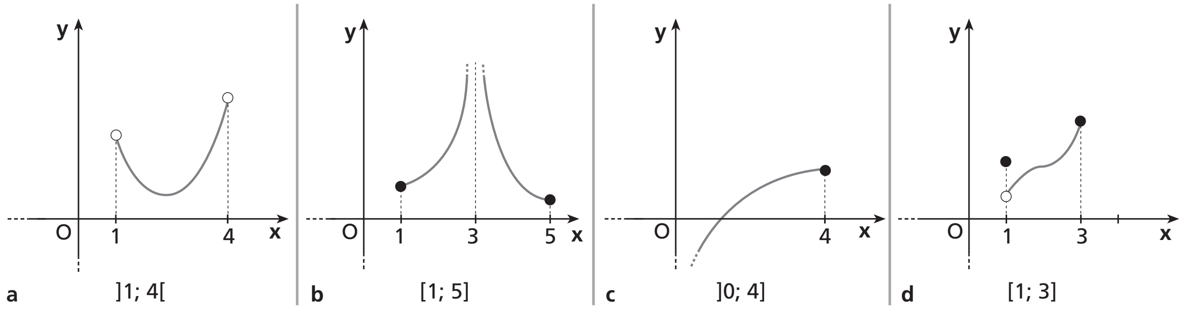
669 Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{\ln(ax+1)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

trova per quale valore di a nel punto $x = 0$ ammette limite.
Per il valore trovato di a la funzione risulta continua in $x = 0$? [$a = -2$; no]

I teoremi sulle funzioni continue

670 Spiega perché, per le funzioni rappresentate nei seguenti grafici, non è possibile applicare il teorema di Weierstrass negli intervalli indicati.



671 **ESERCIZIO GUIDA**

Stabiliamo *se* vale il teorema di Weierstrass per la seguente funzione, nell'intervallo indicato:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+4 & \text{se } x \le 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}, \quad \text{in } [-1; 3].$$

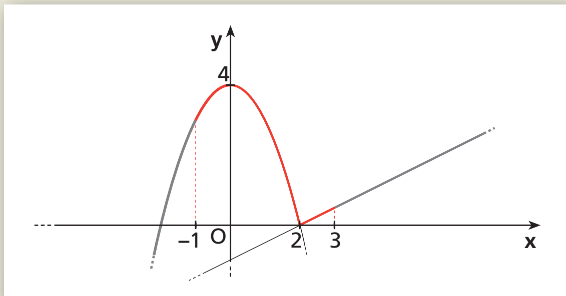
Dobbiamo verificare l'ipotesi del teorema, ossia che la funzione è continua nell'intervallo $[-1; 3]$.

Per ogni $x \in [-1; 3]$ e $x \neq 2$, la funzione è continua perché sono continue le funzioni $y = -x^2 + 4$ e $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Per $x = 2$ si ha $f(2) = 0$ e $\lim_{x \to 2^-} (-x^2 + 4) = \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 0$, quindi anche in 2 la funzione è continua.

Concludiamo che vale il teorema di Weierstrass.

Osservazione. Dal grafico della funzione possiamo dedurre che nell'intervallo $[-1; 3]$ il punto di massimo è $(0; 4)$ e quello di minimo è $(2; 0)$. Il massimo M della funzione è $M = 4$ e il minimo m è $m = 0$.



Stabilisci *se*, per le seguenti funzioni, vale il teorema di Weierstrass, nell'intervallo indicato a fianco.

672 $f(x) = \dfrac{1}{2^x - 1}$, in $[-1; 2]$. [no]

673 $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$, in $[1; 2]$. [no]

674 $f(x) = \ln(x+1)$, in $[1; 3]$. [sì]

675 $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 1}$, in $[2; 7]$. [sì]

676 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ x+1 & \text{se } 1 < x \le 3 \end{cases}$, in $[0; 3]$. [no]

677 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{2\cos x - 1}$, in $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. [no]

678 $f(x) = \ln\dfrac{2x}{x+3}$, in $[0; 5]$. [no]

Disegna i grafici delle seguenti funzioni nell'intervallo indicato a fianco, controlla le ipotesi del teorema di Weierstrass e, quando è possibile, determina il massimo M e il minimo m della funzione.

679 $f(x) = x^2 - 4x$, in $[0; 3]$. [sì, $M = 0$, $m = -4$]

680 $f(x) = 1 + \ln x$, in $[1; 3]$. [sì, $M = 1 + \ln 3$, $m = 1$]

681 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, in $[0; 3]$. [no]

682 $f(x) = -x^2 + 3x$, in $[-1; 0]$. [sì, $M = 0$, $m = -4$]

683 $f(x) = \begin{cases} -2^x + 1 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } 1 \le x \le 4 \end{cases}$, in $[0; 4]$. [no]

684 Controlla graficamente che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \le 0 \\ 2x + 4 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

non verifica il teorema dei valori intermedi nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$.

685 Una funzione $f(x)$ considerata in un intervallo $[a; b]$ può assumere tutti i valori compresi tra il minimo e massimo senza essere continua? Motiva la risposta. [sì]

686 **ESERCIZIO GUIDA**

Stabiliamo *se* vale il teorema di esistenza degli zeri per la seguente funzione, nell'intervallo indicato:

$$f(x) = \frac{x}{2x^2 - 1}, \quad \text{in } \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

La funzione è discontinua per i punti in cui $2x^2 - 1 = 0 \to x^2 = \frac{1}{2}$, ossia per $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Poiché tali punti non appartengono all'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, la funzione è continua nell'intervallo.

Inoltre:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 > 0 \text{ e } f\left(\frac{1}{2}\right) = -1 < 0.$$

Sono quindi verificate le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri, pertanto esiste almeno un punto c interno a $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ in cui $f(x) = 0$. Nel nostro caso è $c = 0$.

Stabilisci *se* valgono le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri per le seguenti funzioni, negli intervalli indicati.

687 $f(x) = -\ln|x|$, in $\left[\frac{1}{e}; e\right]$. [sì]

688 $f(x) = 2x^5 + x^2 + 1$, in $[0; 2]$. [no]

689 $f(x) = 1 - x - \ln x$, in $[1; 2]$. [no]

690 $f(x) = 1 - e^{x-1}$, in $[0; 2]$. [sì]

Stabilisci *se* il teorema di esistenza degli zeri permette di affermare che le seguenti equazioni ammettono soluzioni nell'intervallo indicato.

691 $-1 + x + \operatorname{sen} x = 0$, in $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. [sì]

692 $x^3 + x + 1 = 0$, in $[-2; 4]$. [sì]

693 $-2 + x + \ln(1 + x) = 0$, in $[0; 3]$. [sì]

694 $4 \operatorname{arctg} \dfrac{x + 1}{x^2 + 1} + x - 1 = 0$, in $[-1; 0]$. [sì]

695 $\ln x + x = 0$, in $\left[\dfrac{1}{e}; e\right]$. [sì]

696 $x^2 + \dfrac{1}{x + 3} = 0$, in $[-1; 2]$ e in $[-4; 0]$. [no, no]

697 **ESERCIZIO GUIDA**

Stabiliamo che la seguente equazione ammette soluzioni nell'intervallo indicato e verifichiamo graficamente il risultato ottenuto:

$$e^x - |\ln x| = 0, \quad \text{in } [0; 1].$$

Poiché $\ln x$ non esiste per $x = 0$, invece dell'intervallo dato ne consideriamo uno meno ampio, con il primo estremo di poco maggiore di 0. Per esempio [0,1; 1].

In [0,1; 1] la funzione $f(x) = e^x - |\ln x|$ è continua. Inoltre

$$f(0,1) \simeq -1,197 < 0; \quad f(1) = e > 0;$$

quindi agli estremi dell'intervallo la funzione assume valori di segno opposto. Sono vere le ipotesi del teorema degli zeri, perciò $e^x - |\ln x| = 0$ in almeno un punto dell'intervallo: l'equazione ammette soluzione in [0,1; 1] e, a maggior ragione, anche in [0; 1].

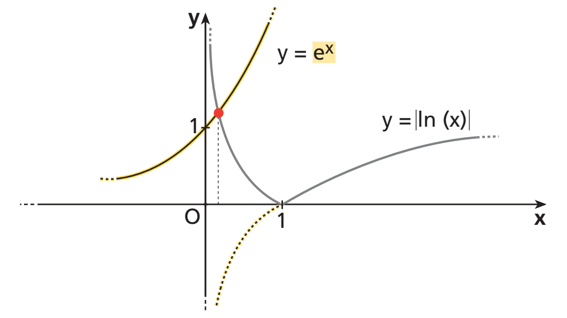
Per verificare graficamente la nostra affermazione tracciamo i grafici delle funzioni:

$$y = e^x \text{ e } y = |\ln x|.$$

I due grafici si intersecano in un punto che ha ascissa appartenente all'intervallo [0; 1].

In tale punto si ha:

$$e^x = |\ln x| \to e^x - |\ln x| = 0.$$



Mediante il teorema di esistenza degli zeri, verifica che le seguenti equazioni ammettono soluzioni nell'intervallo indicato e conferma graficamente il risultato.

698 $\ln x - |\operatorname{sen} x| = 0$, in $\left[\dfrac{1}{e}; 2\pi\right]$.

699 $(x - 1)e^x - x = 0$, in $[0; 5]$.

700 $e^x + x^2 + 2x - 1 = 0$, in $[-3; -1]$.

701 $x \ln x - 1 = 0$, in $\left[\dfrac{1}{e}; e\right]$.

702 Data la funzione $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 6} - 5$:

a) determina il suo dominio;
b) ci sono punti interni all'intervallo $[-1; 5]$ in cui la funzione si annulla?
c) il teorema di esistenza degli zeri permette di affermare che nell'intervallo [4; 5] non ci sono zeri della funzione?

[a) D: $x \geq -1$; b) sì, perché…; c) no, perché…]

ESERCIZI VARI I teoremi sulle funzioni continue

703 **TEST** Se la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $]a; b[$, allora:

A $f(x)$ ammette massimo e minimo in ogni intervallo $[\alpha; \beta] \subset]a; b[$.

B esiste, ed è finito, il limite $\lim_{x \to a^+} f(x)$.

C esiste almeno un punto $c \in]a; b[$ tale che $f(c) = 0$.

D il codominio di $f(x)$ è un intervallo limitato.

E il codominio di $f(x)$ è un intervallo illimitato.

704 Considera le funzioni:

$$f(x) = \begin{cases} -2e^{x-1} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -x-1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Dimostra che nell'intervallo $[0; 2]$:

a) le funzioni f e g non soddisfano le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri;
b) la funzione $h(x) = f(x) + g(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri.

705 Enuncia il teorema di Weierstrass. Considera poi la funzione $f(x) = \frac{e^x}{x-c}$, dove c è un parametro reale.
Determina per quali valori di c la funzione soddisfa le ipotesi del teorema $\forall x \in [-1; 1]$.

$[c < -1 \vee c > 1]$

706 **TEST** Sulla funzione $f(x) = \frac{x}{x+5}$ possiamo affermare che:

A assume massimo e minimo assoluto nell'intervallo $[-10; 0]$.

B per $x \in [-6; 4]$ la funzione assume tutti i valori compresi fra $f(-6)$ e $f(4)$.

C poiché $f(-6) = 6 > 0$ e $f(-4) = -4 < 0$, per il teorema di esistenza degli zeri esiste almeno un punto $x_0 \in [-6; -4]$ in cui $f(x_0) = 0$.

D è continua in tutti i punti del suo dominio e quindi verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass.

E è priva di massimo assoluto nell'intervallo $[-6; -5[$.

707 **TEST** Considera la funzione $f(x)$ definita sull'intervallo $[0; 1]$ con tutte le seguenti proprietà:

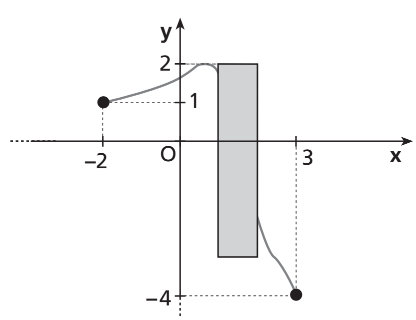
a) $f(x)$ è continua in $[0; 1]$.
b) $f(x)$ è decrescente sull'intero intervallo $[0; 1]$.
c) $f(0{,}1) = 1$, $f(0{,}3) = 0{,}5$, $f(0{,}7) = -0{,}1$ e $f(0{,}9) = -0{,}5$.

In accordo con il teorema dei valori intermedi, quale dei seguenti valori può risolvere $f(x) = 0$?

A $x = 0{,}2$
B $x = 0{,}3$
C $x = 0{,}5$
D $x = 0{,}8$
E Nessuno di questi.

(USA *Wolsborn-Drazovich State Math Contest*, 2007)

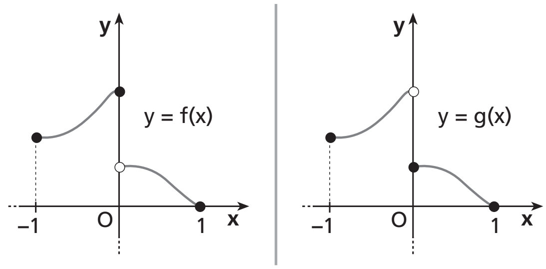
708 Una funzione $f(x)$ ha il grafico della figura. Una parte del grafico è stata coperta, ma è noto che, in quella parte, la funzione è definita e continua in tutti i valori di x e non ci sono discontinuità sul confine della zona nascosta.



a) Ci sono valori di x, nell'intervallo $[-2; 3]$, in cui la funzione si annulla? In caso affermativo, puoi dire quanti sono tali valori?
b) Puoi utilizzare in tale intervallo il teorema di Weierstrass?
c) La funzione assume in $[0; 3]$ il valore $-0{,}317$? Se la risposta è sì, puoi dire quante volte?

709 Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno i grafici della figura.

a) Ciascuna funzione ha, nell'intervallo $[-1; 1]$, massimo e minimo assoluti?
b) Per ognuna delle funzioni, è possibile utilizzare il teorema di Weierstrass in $[-1; 1]$?
c) Per ognuna delle funzioni, indica un intervallo di ampiezza 1 dove le ipotesi del teorema valgono.



710 Data la funzione $f(x) = \dfrac{2x-3}{4x+8}$:

a) $f(x)$ è continua nell'intervallo $[1; 3]$? E nell'intervallo $[-3; 3]$?
b) Calcola $f(-3)$, $f(1)$ e $f(3)$. Puoi affermare, senza risolvere un'equazione, che esiste uno zero di $f(x)$ in ciascuno degli intervalli $[-3; 3]$, $[-3; 1]$, $[1; 3]$? Motiva la risposta.

711 Considera le funzioni:

1. $y = \dfrac{1}{x^2-1}$, **3.** $y = \dfrac{3x+1}{x-4}$, **5.** $y = \dfrac{1}{x}$, **7.** $y = \operatorname{sen} x$, **9.** $y = \operatorname{tg} 2x$,

2. $y = \arcsin x$, **4.** $y = \log_2 x$, **6.** $y = 2^x$, **8.** $y = |x|$, **10.** $y = \dfrac{x^2}{4x^2-1}$.

a) Quali di queste funzioni verificano, nell'intervallo $[-1; 1]$, le ipotesi del teorema di Weierstrass?
b) Quali di esse verificano le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri, nello stesso intervallo?
c) Alcune delle funzioni si annullano in un punto interno a $[-1; 1]$ pur non essendo verificate le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri. Quali sono? Perché non c'è contraddizione?

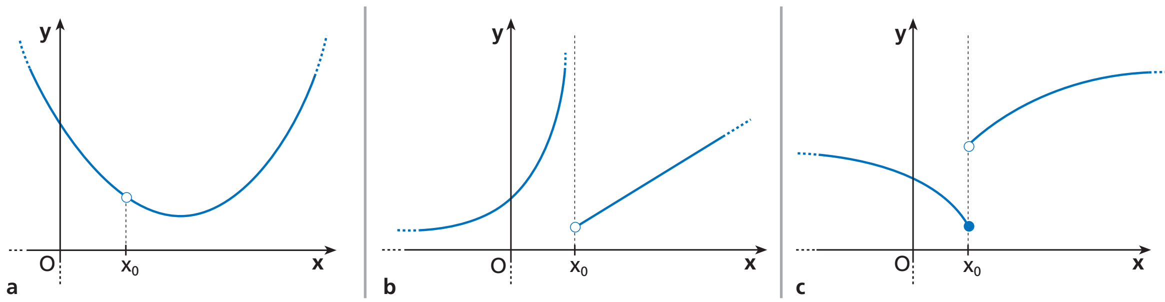
[a) 2, 4, 6, 8, 9; b) 2, 4, 6; c) 5, 9, 10]

6. I PUNTI DI DISCONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE

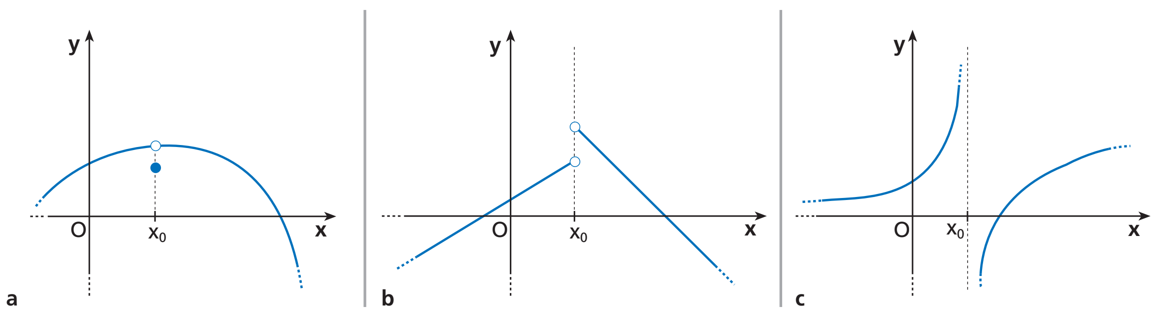
▶ Teoria a pag. 1500

Assegnati i grafici delle seguenti funzioni, classifica le discontinuità nei punti x_0.

712



713



714 Disegna una funzione che in $x = 0$ abbia una discontinuità di terza specie e in $x = 2$ una di seconda specie.

715 Disegna una funzione che abbia in $x = -1$ una discontinuità di prima specie con salto uguale a 2.

716 **VERO O FALSO?**

a) La funzione $y = \frac{\text{sen}\, x}{x}$ ha in $x = 0$ una discontinuità eliminabile. V F

b) La funzione $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ha in $x = 1$ una discontinuità di seconda specie. V F

c) La funzione $y = \frac{x}{x(x + 2)}$ ha nel punto $x = 0$ una discontinuità eliminabile e nel punto $x = -2$ una discontinuità di seconda specie. V F

d) La funzione $y = \frac{1 - \cos x}{x}$ ha una discontinuità di seconda specie in $x = 0$. V F

e) Una funzione razionale fratta presenta sempre una discontinuità di seconda specie. V F

Disegna il grafico delle seguenti funzioni, classifica i loro punti di discontinuità e, in caso di discontinuità di prima specie, calcola il salto.

717 $f(x) = \frac{x}{x - 1}$ [$x = 1$: II specie]

718 $f(x) = \frac{\text{sen}\, x}{\text{sen}\, 2x}$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi\text{: II specie; } x = k\pi\text{: III specie}\right]$

719 $f(x) = \frac{x^2 - x}{2x - 2}$ [$x = 1$: III specie]

720 $f(x) = \frac{2|x|}{x} - 3$ [$x = 0$: I specie, salto = 4]

721 $f(x) = \frac{|x - 3|}{x - 3} + 1$ [$x = 3$: I specie, salto = 2]

722 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x + 2|}$ [$x = -2$: I specie, salto = 8]

723 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x & \text{se } x > 0 \end{cases}$ [$x = 0$: I specie, salto = 1]

724 $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1 \\ \ln(x - 1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$ [$x = 1$: II specie]

725 $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 0 \\ \text{tg}\, x & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}\text{: II specie; } x = 0\text{: I specie, salto} = 2\right]$

726 **ESERCIZIO GUIDA**

Cerchiamo, se esistono, i punti di discontinuità della funzione $f(x) = \frac{x + 3}{|x^2 - 9|}$ e classifichiamoli.

Poiché la funzione è il quoziente di due funzioni continue, $g(x) = x + 3$ e $h(x) = |x^2 - 9|$, i suoi punti di discontinuità sono i punti dove si annulla il denominatore.
I punti $x_1 = +3$ e $x_2 = -3$ sono perciò punti di discontinuità della funzione.
Stabiliamo il tipo di discontinuità.
Poiché $x^2 - 9 > 0$, per $x < -3 \vee x > 3$, e $x^2 - 9 < 0$, per $-3 < x < 3$, allora riscriviamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + 3}{x^2 - 9} = \frac{x + 3}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{1}{x - 3} & \text{se } x < -3 \vee x > 3 \\ \frac{x + 3}{9 - x^2} = \frac{x + 3}{(3 - x)(3 + x)} = \frac{1}{3 - x} & \text{se } -3 < x < 3 \end{cases}$$

Calcoliamo il limite destro e il limite sinistro della funzione per $x \to -3$:

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x+3}{|x^2-9|} = \lim_{x \to -3^-} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{6},$$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x+3}{|x^2-9|} = \lim_{x \to -3^+} \frac{1}{3-x} = \frac{1}{6}.$$

Poiché il limite destro e quello sinistro sono diversi e sono entrambi finiti, $x = -3$ è un punto di discontinuità di prima specie. Il salto della funzione per $x \to -3$ vale: $\lim_{x \to -3^+} f(x) - \lim_{x \to -3^-} f(x) = \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$.

Calcoliamo il limite destro e il limite sinistro della funzione per $x \to 3$ e otteniamo:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{|x^2-9|} = \lim_{x \to 3^-} \frac{1}{3-x} = \lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty.$$

Poiché la funzione ha limite infinito per x che tende a 3, $x = 3$ è un punto di discontinuità di seconda specie.

Date le seguenti funzioni, individua i loro punti di discontinuità e la relativa specie.

727 $f(x) = \dfrac{|x^2-16|}{x-4}$ [$x = 4$: I specie]

728 $f(x) = \dfrac{x^2-x}{|x|}$ [$x = 0$: I specie]

729 $f(x) = \dfrac{x^2+2x+4}{x-2}$ [$x = 2$: II specie]

730 $f(x) = \dfrac{1}{4-2^{\frac{1}{x}}}$ $\left[x = 0\text{: I specie; } x = \frac{1}{2}\text{: II specie}\right]$

731 $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}$ [$x = 2$: II specie; $x = 1$: III specie]

732 $f(x) = 3 + \log|x|$ [$x = 0$: II specie]

733 $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ [$x = 0$: II specie]

734 $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,\pi x}{6x}$ [$x = 0$: III specie]

735 $f(x) = \dfrac{x^2+5x+6}{x^3+2x^2+4x+8}$ [$x = -2$: III specie]

736 $f(x) = \dfrac{1}{1-e^{\frac{2x}{x+2}}}$ [$x = -2$: I specie; $x = 0$: II specie]

737 $f(x) = \begin{cases} -2-2^x & \text{se } x \leq 1 \\ 2+2^x & \text{se } x > 1 \end{cases}$ [$x = 1$: I specie]

738 $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{se } x < 0 \\ 1-\sqrt{x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ [$x = 0$: I specie]

739 $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{3x} + \dfrac{x^2-x}{3|1-x|}$ [$x = 0$: III specie; $x = 1$: I specie]

740 $f(x) = \cos\dfrac{x}{x+2}$ [$x = -2$: II specie]

741 $f(x) = \dfrac{4x^2}{1-\cos x}$ [$x = 0$: III specie; $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z} - \{0\}$): II specie]

742 $f(x) = \dfrac{x}{\text{sen}\,x}$ [$x = 0$: III specie; $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z} - \{0\}$): II specie]

743 $f(x) = \ln\left|\dfrac{2x-1}{x-4}\right|$ $\left[x = \frac{1}{2} \text{ e } x = 4\text{: II specie}\right]$

744 $f(x) = \dfrac{x+1}{|x+1|} + \dfrac{2}{x}$ [$x = 0$: II specie; $x = -1$: I specie]

745 $f(x) = \dfrac{|x|}{x} \cdot 2^{\frac{1}{x-1}}$ [$x = 0$: I specie; $x = 1$: II specie]

746 $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2^{\frac{x-1}{x}}}$ [$x = 1$: II specie; $x = 0$: I specie]

747 $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq -1 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{-2x} & \text{se } x > -1 \end{cases}$ [$x = -1$: II specie; $x = 0$: III specie]

748 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4}$ [$x = 2$: III specie; $x = -2$: II specie]

749 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ [$x = -1$: II specie]

750 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{2x}}{3x} & \text{se } x < 0 \\ -\dfrac{2}{3} & \text{se } x = 0 \\ (1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ [$x = 0$: I specie]

751 $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+4} - 2}{x - 4}$ [$x = 4$: III specie]

752 $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2}{x-3}$ [$x = 3$: I specie]

753 $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{|x|}$ $\left[x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\text{: II specie; } x = 0\text{: I specie}\right]$

754 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\left|x + \dfrac{\pi}{2}\right| - \dfrac{\pi}{2}}$ [$x = 0$ e $x = -\pi$: III specie]

755 Classifica le discontinuità delle funzioni:

$$y = 4^{\frac{x^2}{|x|}};\quad y = 4^{-\frac{x^2}{x}};\quad y = 4^{-\frac{|x|}{x}}.$$

Rappresenta le funzioni graficamente ed evidenzia le discontinuità precedentemente ottenute.
[$x = 0$: III specie; $x = 0$: III specie; $x = 0$: I specie]

Funzioni continue e parametri

756 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo per quali valori di a e b la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - b & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ -x^2 + a & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

è continua in tutto $\mathbb{R}$.

La funzione $f(x)$ è continua negli intervalli $]-\infty; 1[$, $]1; 3[$ e $]3; +\infty[$. Dobbiamo scegliere il valore dei parametri a e b affinché risulti continua anche in $x = 1$ e in $x = 3$.

Dovrà perciò valere:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \quad \Leftrightarrow \quad -1 = 2 - b,$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = f(3) \quad \Leftrightarrow \quad 6 - b = -9 + a.$$

Determiniamo a e b risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} -1 = 2 - b \\ 6 - b = -9 + a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a + b = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 3 \end{cases}$$

Determina i valori dei parametri affinché le seguenti funzioni siano continue in tutto $\mathbb{R}$.

757 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & \text{se } x \leq -3 \\ ax + b & \text{se } -3 < x \leq 2 \\ x^3 + a & \text{se } x > 2 \end{cases}$ $[a = 2, b = 6]$

758 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2b & \text{se } x < -1 \\ 2x - b & \text{se } -1 \leq x < 3 \\ \sqrt{2x + a} & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$ $[a = 3, b = 3]$

759 $f(x) = \begin{cases} \log(x^3 - 28a) - \log 2 - \log 10 & \text{se } x < 6 \\ \log(x + a) & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$ $[a = 2]$

760 $f(x) = \begin{cases} 2^{3x} - a^5 - 29 & \text{se } x < 2 \\ 3^{x-1} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ $[a = 2]$

761 $f(x) = \begin{cases} 2\cos x - 1 & \text{se } x \leq \frac{\pi}{6} \\ a \operatorname{tg} x + b & \text{se } \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{sen} 2x + 1 & \text{se } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$ $[a = 3, b = -1]$

762 $f(x) = \begin{cases} b - 2\cos x & \text{se } x \leq -\pi \\ 2b & \text{se } -\pi < x < \frac{3\pi}{2} \\ 2\operatorname{sen} x + a & \text{se } x \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ $[a = 6, b = 2]$

763 $f(x) = \begin{cases} 2\operatorname{sen} x + b\cos x & \text{se } x < \frac{\pi}{2} \\ a + b\operatorname{cotg} x & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{2}{3}\pi \\ a - \frac{2}{3}\operatorname{sen} x & \text{se } x \geq \frac{2}{3}\pi \end{cases}$ $[a = 2, b = 1]$

764 $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} ax}{x} & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 2a + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ $[a = -1]$

765 $f(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{x-2} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1 - \cos ax}{x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $[a = \pm 2]$

766 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) - 2a & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{\cos x - e^x}{2ax} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ $\left[a = \pm\dfrac{1}{2}\right]$

767 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} + ax + b & \text{se } x < 0 \\ x - a & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{2b}{\log_2(3-x)} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $[a = -5, b = 3]$

---

768 Determina per quale valore del parametro a la seguente funzione ha discontinuità eliminabile in $x = 3$:

$$f(x) = \frac{x^2 + ax}{x^2 - 2x - 3}.$$

Classifica le altre discontinuità della funzione.
$[a = -3; x = -1\text{: II specie}]$

769 Determina per quale valore di a la funzione

$$f(x) = \ln\left|\frac{ax^2 - 1}{x - 1}\right|$$

ha una discontinuità di seconda specie in $x = \frac{1}{2}$.
Classifica le altre discontinuità della funzione per il valore di a trovato.
Se $a = 1$, che discontinuità presenta $f(x)$?
$\left[a = 4, x = -\frac{1}{2}, x = 1\text{: II specie}; x = -1\text{: II specie}, x = 1\text{: III specie}\right]$

770 Trova per quali valori di a la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 - a & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

ammette una discontinuità di prima specie con salto uguale a 3 in $x = 0$.
Rappresenta la funzione ottenuta.
$[a = 1, a = -5]$

771 Determina per quale valore di a si ha, per la funzione

$$f(x) = \frac{-x^2 + ax}{2x + 1},$$

a) una discontinuità di terza specie in $x = -\frac{1}{2}$;
b) una discontinuità di seconda specie in $x = -\frac{1}{2}$.
$\left[\text{a) } a = -\frac{1}{2}; \text{ b) } a \neq -\frac{1}{2}\right]$

772 Trova per quale valore di a si ha per la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2 + ax}},$$

a) in $x = -1$ una discontinuità di seconda specie;
b) in $x = 1$ una discontinuità di terza specie.
[a) $a = 1$; b) $a = -1$]

Discuti al variare del parametro k la continuità della funzione.

773 $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{x^k}$, in $x = 0$. [se $k \leq 1$, III specie; se $k > 1$, II specie]

774 $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^k}$, in $x = 0$. [se $k \leq 2$, III specie; se $k > 2$, II specie]

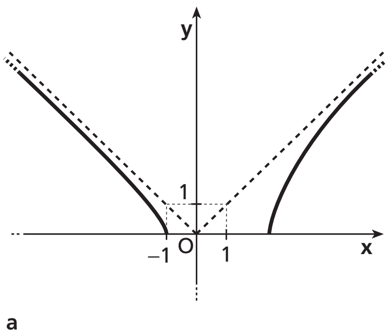
775 $f(x) = \dfrac{x\, \text{sen}^2 x}{x^k}$, in $x = 0$. [se $k \leq 3$, III specie; se $k > 3$, II specie]

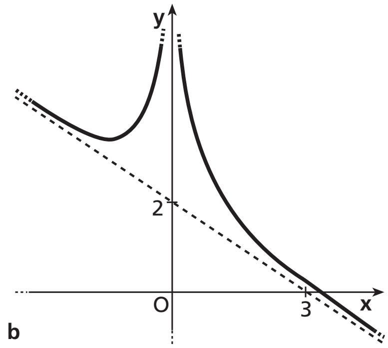
776 $f(x) = \dfrac{kx + 4}{x + k}$, in $x = -k$. [se $k \neq \pm 2$, II specie; se $k = \pm 2$, III specie]

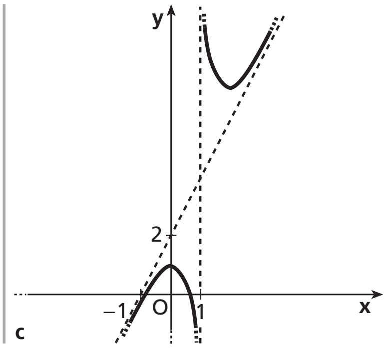
7. LA RICERCA DEGLI ASINTOTI

Teoria a pag. 1503

777 Scrivi le equazioni degli asintoti delle funzioni rappresentate dai seguenti grafici.







778 **VERO O FALSO?**

a) Se una funzione $f(x)$ ha un asintoto verticale di equazione $x = 2$, si ha $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$. V F

b) Se una funzione $f(x)$ ha un asintoto obliquo, si ha che $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. V F

c) Se una funzione $f(x)$ ha $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, allora ha un asintoto obliquo. V F

d) Una funzione può avere infiniti asintoti verticali. V F

e) Una funzione $f(x)$ può avere due asintoti orizzontali diversi. V F

f) Una funzione può avere più di un asintoto obliquo. V F

g) Una funzione razionale fratta ha sempre un asintoto verticale. V F

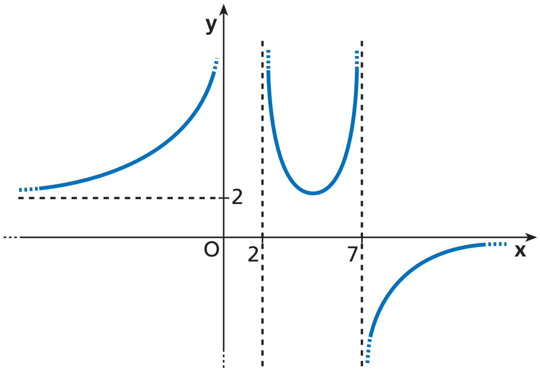
h) Una funzione periodica non può avere asintoti obliqui o asintoti orizzontali. V F

779 Verifica se nel grafico della figura si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2, \ \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 7} f(x) = +\infty, \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Scrivi le equazioni degli asintoti.



780 Disegna un grafico possibile per una funzione e traccia i suoi asintoti, sapendo che:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1^+, \quad \lim_{x\to 0^\pm} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+.$$

781 Come nell'esercizio precedente, sapendo che:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-, \quad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2^-.$$

La ricerca degli asintoti orizzontali e verticali

782 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo le equazioni degli eventuali asintoti orizzontali e verticali delle seguenti funzioni:

a) $y = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1}$; b) $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x - 1}$.

a) La funzione data è una funzione razionale fratta, il cui dominio è $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$, ossia D: $x \neq \pm 1$.

La ricerca degli asintoti viene effettuata esaminando i limiti nei punti esclusi dal dominio e per $x \to \infty$ se il dominio è illimitato. Ricordiamo che se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$, allora la retta $y = l$ è asintoto orizzontale, mentre se $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$, la retta $x = c$ è asintoto verticale.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} = 3 \quad \to \quad \text{la retta } y = 3 \text{ è asintoto orizzontale.}$$

$$\lim_{x \to -1^{\pm}} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} = \mp\infty \quad \to \quad \text{la retta } x = -1 \text{ è asintoto verticale.}$$

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} = \pm\infty \quad \to \quad \text{la retta } x = 1 \text{ è asintoto verticale.}$$

Osservazione. Possiamo giungere più rapidamente al risultato se notiamo che la funzione è pari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Quindi basta calcolare i limiti per $x \to +\infty$ e $x \to 1^{\pm}$.

b) La funzione data è una funzione goniometrica fratta, periodica di periodo 2π. Limitiamoci a considerare il suo dominio nell'intervallo $[0; 2\pi]$, che è D: $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Essendo la funzione periodica, non esistono asintoti orizzontali.

Consideriamo il valore $\frac{\pi}{2}$ in cui la funzione non esiste perché si annulla il denominatore. Poiché

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{\pm}} \frac{1}{\operatorname{sen} x - 1} = -\infty,$$

la retta $x = \frac{\pi}{2}$ è asintoto verticale in D.

Considerando poi la funzione nel suo dominio naturale, poiché essa è periodica di periodo 2π, i suoi asintoti hanno equazioni:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Determina le equazioni degli eventuali asintoti orizzontali e verticali delle seguenti funzioni.
(Qui e in seguito, nei risultati, in caso di funzioni periodiche, per brevità indichiamo soltanto gli asintoti relativi a un periodo.)

783 $y = \frac{2x^2 - 1}{x - 3}$ $[x = 3]$

784 $y = \frac{2x^3 + 9}{x^3 - 1}$ $[x = 1, y = 2]$

785 $y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ $[x = -2, y = 1]$

786 $y = \frac{2x + 1}{x^2 - 9}$ $[x = \pm 3, y = 0]$

787 $y = \sqrt{\frac{x - 4}{x}}$ $[x = 0, y = 1]$

788 $y = \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x^2 - x}}$ $[x = 0]$

789 $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$ $\left[x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi\right]$

790 $y = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ $\left[x = \frac{3}{4}\pi, x = \frac{7}{4}\pi\right]$

791 $y = \dfrac{\cos 2x}{1 + \text{sen}\, x}$ $\left[x = \dfrac{3}{2}\pi\right]$

792 $y = \dfrac{2e^{-x}}{x}$ $[x = 0, y = 0]$

793 $y = \dfrac{1}{\ln x}$ $[y = 0, x = 1]$

794 $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$ $[x = 0, y = 0, y = -1]$

Per quali valori del parametro k le seguenti funzioni hanno asintoti orizzontali? Calcola le equazioni degli asintoti.

795 $f(x) = \dfrac{kx^2 + 1}{kx^2 + kx + 2}$ $\left[\text{per } k = 0, y = \dfrac{1}{2}; \text{per } k \neq 0, y = 1\right]$

796 $f(x) = kx\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ $[\forall k \in \mathbb{R}, y = k]$

797 $f(x) = ke^x + (k+1)e^{-x}$ $[\text{per } k = 0, y = 0; \text{per } k = -1, y = 0]$

798 $f(x) = \sqrt{kx} - \sqrt{x+1} + k$ $[\text{per } k = 1, y = 1]$

La ricerca degli asintoti obliqui

799 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la funzione $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x + 3}$, determiniamo le equazioni degli eventuali asintoti obliqui.

Ricordiamo che, quando $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, esiste un asintoto obliquo se esistono finiti i limiti

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx],$$

e in questo caso l'equazione dell'asintoto è $y = mx + q$.
Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + 3} = \infty.$$

Essendo verificata la prima ipotesi, calcoliamo i limiti:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x \cdot (x + 3)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 3x} = 1,$$

$$q = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x + 3} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x + 1 - x^2 - 3x}{x + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{-4x + 1}{x + 3} = -4.$$

L'asintoto obliquo della funzione data è la retta di equazione:

$$y = x - 4.$$

Determina le equazioni degli eventuali asintoti obliqui delle seguenti funzioni.

800 $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 1}$ $[y = 2x - 2]$

801 $y = \dfrac{4 - x^3}{2x^2 - 1}$ $\left[y = -\dfrac{1}{2}x\right]$

802 $y = \dfrac{5x^2 - 3x + 2}{2x + 4}$ $\left[y = \dfrac{5}{2}x - \dfrac{13}{2}\right]$

803 $y = \sqrt{x^2 - 1}$ $[y = \pm x]$

804 $y = \sqrt{2x^2 - 3x}$ $\left[y = \pm\sqrt{2}\, x \mp \dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right]$

805 $y = \dfrac{9x^2 - 4}{3x - 1}$ $[y = 3x + 1]$

806 $y = \dfrac{x^3 - 2x}{4 - x^2}$ $[y = -x]$

807 $y = \dfrac{2x^4 - 3}{x^3}$ $[y = 2x]$

808 $y = \sqrt{\dfrac{x^3 - 1}{x}}$ $[y = \pm x]$

809 $y = \sqrt{4x^2 - 3x + 2}$ $\left[y = \pm 2x \mp \dfrac{3}{4}\right]$

810 $y = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}x$ $\left[y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{2}\right]$

811 $y = 2x \cdot \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ $[y = 2x + 2]$

ESERCIZI VARI La ricerca degli asintoti

812 **VERO O FALSO?** La funzione $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x}$:

a) ha due asintoti verticali. V F
b) ha un asintoto obliquo. V F
c) non ha asintoti. V F
d) ha due asintoti. V F
e) ha un asintoto orizzontale. V F

TEST

813 Se la funzione $y = f(x)$ non è definita per casi, quale fra le seguenti affermazioni è sicuramente *falsa*?

A Può ammettere 3 asintoti verticali e uno orizzontale.
B Può ammettere 2 asintoti orizzontali.
C Può ammettere un asintoto orizzontale e uno obliquo.
D Può intersecare un suo asintoto orizzontale.
E Può avere un punto in comune con un suo asintoto verticale.

814 Per quale valore reale di n la funzione

$$y = \frac{x^{n^2} + 3}{nx^2 + 1}$$

ammette un asintoto obliquo e due verticali?

A $\sqrt{3}$ B $-\sqrt{3}$ C 3 D 1 E 0

815 Affinché la funzione $y = \dfrac{kx^2 + hx}{2x + 3}$ abbia come asintoto obliquo la retta $y = x + \dfrac{3}{2}$, i valori dei parametri k e h devono essere rispettivamente:

A $2; \dfrac{1}{3}$.
B $2; 6$.
C $0; \forall h$.
D $2; \dfrac{9}{2}$.
E $\forall k; \dfrac{3}{2}$.

816 La funzione $f(x) = 4 - \dfrac{1}{1 - x}$:

A non possiede alcun asintoto.
B ha come asintoti $x = 1$ e $y = 4x$.
C ha come asintoti $x = 1$ e $y = 4$.
D ha come asintoti $x = 1$ e $y = 4x + 1$.
E ha come asintoti $x = 1$ e $y = 3$.

Determina le equazioni degli eventuali asintoti delle seguenti funzioni.

817 $y = \dfrac{4x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$ $[x = -1, x = 1, y = 4]$

818 $y = \dfrac{4x^3 - 1}{x^2 - 4}$ $[x = -2, x = 2, y = 4x]$

819 $y = \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 4}$ $[x = -2, y = 0]$

820 $y = \dfrac{x^4}{1 - x^3}$ $[x = 1, y = -x]$

821 $y = \sqrt{x^2 + 1}$ $[y = \pm x]$

822 $y = \dfrac{\cos x}{1 - 2 \operatorname{sen} x}$ $\left[x = \dfrac{\pi}{6}, x = \dfrac{5}{6}\pi\right]$

823 $y = \frac{\text{sen } x + \cos x}{\text{sen } 2x}$ $\left[x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi, x = \frac{3}{2}\pi, x = 2\pi\right]$

824 $y = \sqrt{\frac{x+3}{x}}$ $[x = 0, y = 1]$

825 $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{2x}$ $\left[x = 0, y = \frac{1}{2}x - 2\right]$

826 $y = \frac{1}{1 - x^2}$ $[x = \pm 1, y = 0]$

827 $y = \frac{x+2}{|x| - 2}$ $[x = 2, y = \pm 1]$

828 $y = \frac{4x}{1 - \sqrt{x}}$ $[x = 1]$

829 $y = \ln \frac{x+1}{x-2}$ $[x = -1, x = 2, y = 0]$

830 $y = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}$ $[x = 0, y = \pm 1]$

831 $y = \left|\frac{x+2}{x-1}\right|$ $[x = 1, y = 1]$

832 $y = \frac{\text{sen } x}{x}$ $[y = 0]$

833 $y = x - \sqrt{x^2 - 1}$ $[y = 0, y = 2x]$

834 $y = e^{\frac{x^2+1}{x^2-3x}}$ $[y = e, x = 0, x = 3]$

835 $y = \frac{2e^x}{x+4}$ $[x = -4, y = 0]$

836 $y = \frac{3 - 2\ln x}{\ln x - 1}$ $[y = -2, x = e]$

837 $y = \frac{1 - x^4}{8x^3 - 1}$ $\left[x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{8}x\right]$

838 $y = \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - 4x}$ $\left[x = 2, y = \frac{1}{2}x + 1\right]$

839 $y = \frac{x^4 + 2}{8 - x^3}$ $[x = 2, y = -x]$

840 $y = \frac{x^2 + 4x}{x^4 + 5x^2 + 1}$ $[y = 0]$

841 $y = \frac{x^2 - 2}{4 - x^2}$ $[x = \pm 2, y = -1]$

842 $y = \frac{x - 3}{|x| - 1}$ $[x = \pm 1, y = \pm 1]$

843 $y = xe^{x+1}$ $[y = 0]$

844 $y = \text{arctg}\,(1 + x^2)$ $\left[y = \frac{\pi}{2}\right]$

845 $y = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ $\left[y = x - \frac{1}{3}\right]$

846 $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x}$ $[y = x]$

847 $y = 2xe^{\frac{1}{x}}$ $[x = 0, y = 2x + 2]$

848 $y = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 9}}$ $[x = \pm 3, y = 1]$

849 $y = \ln \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 5x + 4}$ $[y = 0, x = \pm 4, x = -1, x = 0]$

850 $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 4}}{x}$ $[y = \pm 2]$

851 $y = \frac{e^x + 3}{e^x - 1}$ $[y = -3, y = 1, x = 0]$

---

852 Data la funzione $y = \frac{ax^3 + bx^2 + 4}{x^2 - 1}$, trova a e b in modo che il suo grafico abbia un asintoto di equazione $y = 2x - 1$. $[a = 2, b = -1]$

853 Il grafico della funzione $y = \frac{ax^2 + bx}{cx - 1}$ ha come asintoti le rette di equazione $y = x$ e $x = \frac{1}{4}$. Trova a, b e c. $[a = c = 4, b = -1]$

854 Determina a, b e c nella funzione $y = \frac{ax^3 + bx^2 + x}{x^2 - c}$, sapendo che il suo grafico ha come asintoti le rette $x = \pm 3$ e $y = 2$. $[a = 0, b = 2, c = 9]$

855 Date le funzioni $y = \frac{2x^2 - 1}{x - 4}$ e $y = \frac{ax^3 + bx^2 + 1}{x^2 + 1}$, trova a e b in modo che i loro grafici abbiano un asintoto in comune. $[a = 2, b = 8]$

856 Nella funzione $y = \frac{a \ln x - 1}{(a+1)\ln x + b - 2}$ trova a e b in modo che il suo grafico abbia per asintoto orizzontale la retta $y = \frac{1}{2}$ e per asintoto verticale la retta $x = 1$. $[a = 1, b = 2]$

857 Il grafico della funzione $y = \frac{\operatorname{tg}(x+a)}{2 \operatorname{sen} x}$ presenta nell'intervallo $[0; 2\pi]$ cinque asintoti verticali e uno di questi ha equazione $x = \frac{\pi}{3}$. Trova a e le equazioni degli altri quattro asintoti.
$\left[a = \frac{\pi}{6}, a = \frac{7}{6}\pi, x = 0, x = \pi, x = \frac{4}{3}\pi, x = 2\pi\right]$

858 Verifica che la funzione $f(x) = \frac{e^{-x} + 2e^x}{e^{-x} + 3e^x}$ ha come asintoto orizzontale la retta $y = \frac{2}{3}$. Esistono altri asintoti per $f(x)$? [sì: $y = 1$]

859 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{ax+2} & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + 2x + b & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

trova per quali valori di a e b la funzione è continua in $x = 0$ e presenta un asintoto verticale in $x = -4$. Rappresenta poi la funzione ottenuta. $\left[a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}\right]$

860 Per ognuna delle funzioni che seguono trova il dominio, disegna il grafico (aiutandoti con le trasformazioni geometriche, quando è necessario), cerca e classifica eventuali punti di discontinuità, determina il codominio ed eventuali asintoti:

a) $y = \sqrt{x^2 - |x|}$.
b) $y = 1 - \operatorname{arctg}(|x| + 1)$.
c) $y = |e^{-x+2} - 1|$.

[a) D: $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\cup \{0\}$; ...; b) D: $\mathbb{R}$; ...; c) D: $\mathbb{R}$; ...]

861 Dimostra che gli asintoti dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hanno equazioni $y = \pm \frac{b}{a} x$.

862 Sia $y = f(x)$ una funzione tale che:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (o casi analoghi).

a) Dimostra che condizione necessaria affinché la funzione ammetta l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è che l'ordine di infinito sia uguale a 1.

Successivamente:

b) utilizza la funzione $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ per provare che la condizione indicata non è sufficiente;

c) applica la proprietà dimostrata in a per provare che la funzione $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$ non ha asintoti obliqui.

8. IL GRAFICO PROBABILE DI UNA FUNZIONE

▶ Teoria a pag. 1507

863 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione $y = \frac{x^2 - 1}{x}$.

1. Determiniamo il dominio della funzione. Si tratta di una funzione razionale fratta il cui denominatore deve essere non nullo. Quindi:

D: $\mathbb{R} - \{0\}$.

2. Cerchiamo eventuali simmetrie.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = -\frac{x^2-1}{x} = -f(x).$$

Poiché $f(-x) = -f(x)$, la funzione è dispari. Il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi.
Asse y: nessuna intersezione, essendo $x = 0$ escluso dal dominio.
Asse x:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2-1}{x} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

I punti di intersezione con l'asse x sono:

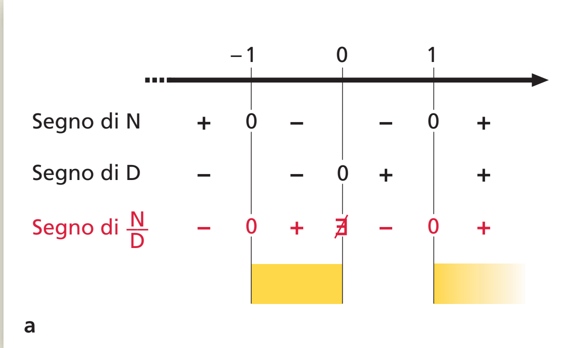
$A(-1; 0)$, $B(1; 0)$.

4. Studiamo il segno della funzione.

$$\frac{x^2-1}{x} > 0 \qquad N > 0 \text{ per } x < -1 \vee x > 1,$$

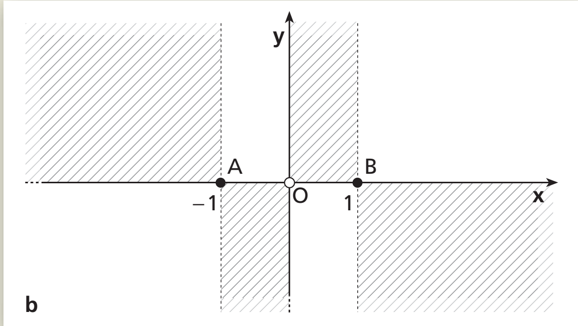
$$D > 0 \text{ per } x > 0.$$

Compiliamo il quadro dei segni (figura a).



a

Rappresentiamo questi risultati nel piano cartesiano (figura b), tratteggiando le zone del piano in cui non ci sono punti della funzione.



b

5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2-1}{x} = \pm\infty$; poiché il grado del numeratore supera di 1 quello del denominatore, esiste un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1,$$

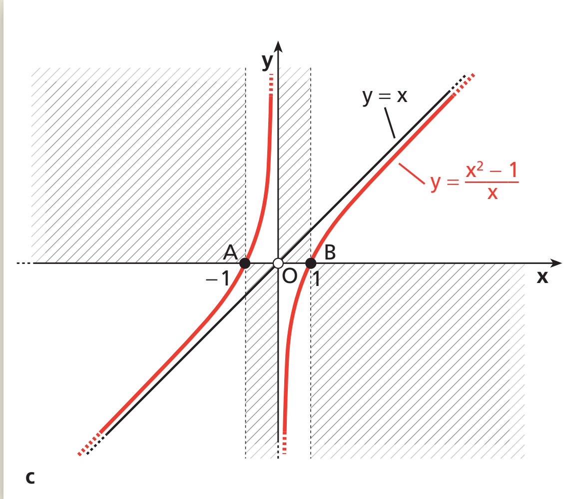
$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2-1}{x} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0.$$

L'asintoto obliquo ha equazione $y = x$.

- $\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \dfrac{x^2-1}{x} = \mp\infty \rightarrow x = 0$ è un asintoto verticale.

Tracciamo il grafico probabile della funzione (figura c).



c

Traccia il grafico probabile delle seguenti funzioni.

864 $y = -x^3 + 4x$

865 $y = x^3 - x^2 - 2x$

866 $y = \frac{2x}{x^2 - 9}$

867 $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x}$

868 $y = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$

869 $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 7x + 6}$

870 $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

871 $y = \frac{2}{x^2 - 6x}$

872 $y = \frac{2x^4}{x^3 - 8}$

873 $y = \frac{|x|}{x^2 - 4}$

874 $y = \frac{x + 1}{x^3 - 4x^2}$

875 $y = \frac{2x}{(x - 1)^2}$

876 $y = \sqrt{x^2 - 16}$

877 $y = x + \frac{4}{x} + 4$

878 $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$

879 $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x}$

880 $y = \frac{x^3 - 4x + 3}{x^2 + 3x}$

881 $y = \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 2}$

882 $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x}$

883 $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 4}}$

884 $y = \log_2 \frac{x - 1}{x - 4}$

885 $y = \ln \frac{x}{x + 3}$

886 $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 6x}$

887 $y = \frac{x^3 - x}{x^3 + 1}$

888 $y = 2^{\frac{x - 1}{x + 2}}$

889 $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 4}$

890 $y = \frac{x^3 - 2x^2 - 8x}{x^2 + 1}$

891 $y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 3}$

892 $y = \sqrt{x^2 - 1} - x$

893 $y = \frac{\log_3 x}{1 - \log_3 x}$

894 $y = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$

895 Determina i valori dei parametri reali p e q in modo che la funzione

$$y = \frac{x^3 + p}{(x + q)^2}, \quad p, q \in \mathbb{R},$$

passi per il punto $(1; 0)$ e abbia come asintoto la retta $x = -2$. Ricerca quindi gli ulteriori asintoti e disegna il grafico probabile.

$[p = -1, q = 2; y = x - 4]$

896 Data la funzione

$$y = \frac{\log_{\frac{1}{2}} x - 2}{1 - \log_{\frac{1}{2}} x}:$$

a) determina il dominio e studia il segno;
b) studia il comportamento agli estremi del dominio classificando eventuali punti di discontinuità;
c) traccia il grafico probabile.

$\left[\text{a) } D: x > 0 \wedge x \neq \frac{1}{2}; y > 0 \text{ per } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right]$

REALTÀ E MODELLI

1 **La funzione a dente di sega**

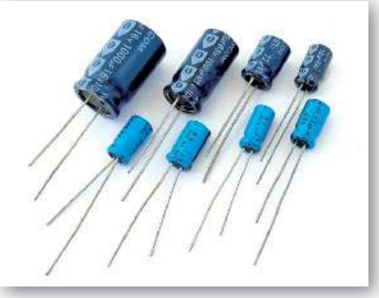
La funzione a «dente di sega» rappresenta una forma d'onda non sinusoidale; il suo andamento è lineare crescente per un certo intervallo di tempo, dopodiché scende repentinamente per poi tornare a salire. Tale onda è fondamentale nel campo dell'elettronica e dell'acustica, per esempio per riprodurre i suoni degli strumenti ad arco nei sintetizzatori analogici. Considera la seguente funzione:

$f(x) = 0{,}5x - k \quad \text{per} \quad 2k < x \leq 2k + 2,\ k \in \mathbb{N}.$

- ▶ Rappresenta il grafico della funzione.
- ▶ Stabilisci se è periodica e indicane il periodo.
- ▶ Determina il dominio, il codominio e studiane il segno.
- ▶ Analizza la sua continuità.

2 **La carica di un condensatore**

Il condensatore è un dispositivo in grado di accumulare cariche elettriche quando è sottoposto a una differenza di potenziale. Sapendo che la legge fisica che descrive la quantità di carica Q accumulata da un condensatore in funzione del tempo è espressa dalla formula:



$Q(t) = C \cdot E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$:

- ▶ scrivi la funzione relativa a un condensatore con capacità $C = 8{,}5 \cdot 10^{-4}$ F sottoposto a una differenza di potenziale $E = 12{,}0$ V, inserito in un circuito con resistenza complessiva $R = 300\ \Omega$;
- ▶ calcola la quantità di carica massima che il condensatore può accumulare;
- ▶ stabilisci dopo quanto tempo il condensatore si è caricato al 90% del suo massimo.

3 **Il rally**

Durante una gara di rally, una macchina percorre un tratto di strada la cui traiettoria può essere descritta dalla funzione $y = \dfrac{3 - x^2}{x + 1}$, con $x < -\sqrt{3}$.

- ▶ Disegna il grafico approssimativo della funzione.
- ▶ Quale inclinazione massima (rispetto all'asse x) dovrebbe avere un muro di protezione rettilineo che costeggia la strada affinché non si verifichi un'uscita di strada?
- ▶ Studia la continuità della funzione che rappresenta la traiettoria nel suo dominio naturale.
- ▶ Determina eventuali asintoti.

4 **IRPEF: imposta sul reddito delle persone fisiche**

L'IRPEF è la tassa che ogni anno devono pagare tutti i cittadini italiani che hanno un reddito. La percentuale di tassa da pagare aumenta in base al reddito secondo la seguente tabella.

Scaglioni reddito 2010	Aliquota	Irpef lordo 2010
da 0 a 15 000 euro	23%	23% del reddito
da 15 000,01 a 28 000 euro	27%	3450 + 27% sulla parte eccedente i 15 000 euro
da 28 000,01 a 55 000 euro	38%	6960 + 38% sulla parte eccedente i 28 000 euro
da 55 000,01 a 75 000 euro	41%	17 220 + 41% sulla parte eccedente i 55 000 euro
oltre 75 000 euro	43%	25 420 + 43% sulla parte eccedente i 75 000 euro

- ▶ Scrivi l'espressione analitica della funzione che fornisce la tassa in base al reddito. Si tratta di una funzione continua?

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Quale dei seguenti limiti è *errato*?

A $\lim_{x \to 1^+} \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = -\infty$

B $\lim_{x \to +\infty} \log_2(x+3) = +\infty$

C $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg}^2 x = +\infty$

D $\lim_{x \to -\infty} e^{3x} = 0$

E $\lim_{x \to +\infty} 2^{x+1} = +\infty$

2 Soltanto uno dei seguenti limiti è *corretto*. Quale?

A $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x-3}{4-x^2} = 1$

B $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x+3}{x^2}} = 1$

C $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{4+x} = +\infty$

D $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 1$

E $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^x = \sqrt[3]{e}$

3 Quale di queste funzioni soddisfa le condizioni $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$?

A $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$

B $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

C $f(x) = \frac{2x^2+1}{x+2}$

D $f(x) = \frac{2x^2-10}{x^2-4}$

E $f(x) = \frac{-2x}{-x+2}$

4 Fra i seguenti limiti, non è uguale a 0:

A $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3}\right)^2$.

B $\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{\operatorname{sen}^3 x}$.

C $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3-x^4+2}{x^3}$.

D $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-1}{x^4+1}$.

E $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+k}}{k}$.

5 La funzione $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$:

A è continua in tutto $\mathbb{R}$.

B è continua in ± 2.

C non è continua in nessun punto di $\mathbb{R}$.

D è continua in tutti i punti del suo dominio.

E è continua in tutti i punti del suo dominio escluso -1, dove si annulla.

6 $f(x) = \begin{cases} k - x^2 & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

è continua in tutto $\mathbb{R}$ per:

A $k = 1$.

B $k = 0$.

C $k = -1$.

D nessun valore reale di k.

E $k = 2$.

7 $f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{x-2} & \text{se } x > 2 \\ x^2 + \frac{1}{3} & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$

presenta nel punto $x = 2$ una discontinuità:

A di prima specie.

B di seconda specie.

C di terza specie.

D eliminabile.

E non classificabile, perché la funzione è definita per casi.

8 La funzione $y = \frac{3x-1}{6-x^2}$:

A non ha asintoti verticali e ha un solo asintoto orizzontale di equazione $y = \frac{1}{2}$.

B ha due asintoti verticali di equazioni $x = \pm\sqrt{6}$ e un asintoto orizzontale di equazione $y = -3$.

C non ha asintoti orizzontali e ha due asintoti verticali di equazioni $x = \pm\sqrt{6}$.

D non ha asintoti verticali e ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.

E ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ e due asintoti verticali di equazioni $x = \sqrt{6}$ e $x = -\sqrt{6}$.

9 Si considerino le funzioni:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ e } g(x) = \frac{1}{2x^3}.$$

Al tendere di $x \to 0$:

A sono due infinitesimi.
B $f(x)$ è un infinito di ordine superiore a $g(x)$.
C sono infiniti dello stesso ordine.
D $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$.
E $f(x)$ è un infinito di ordine inferiore a $g(x)$.

10 Sia data una generica funzione:

$$f\colon [a; b] \to \mathbb{R}.$$

Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora:

A $f(x)$ ammette almeno uno zero in $]a; b[$.
B $f(x)$ ammette soltanto uno zero in $]a; b[$.
C $f(x)$ non ammette zeri in $]a; b[$.
D non è possibile stabilire a priori l'esistenza di zeri in $]a; b[$.
E nessuna delle affermazioni precedenti è vera.

QUESITI

11 Dopo aver dato la definizione corretta di $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$, dimostrare che $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{\cos x - 1} = 2$.

(*Maturità scientifica*, *Sessione suppletiva*, 1982, *quesito* 1)

12 Indicata con $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, si sa che $f(x) \to l$ per $x \to a$ con l e a numeri reali; dire se ciò è sufficiente per concludere che $f(a) = l$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Sessione ordinaria*, 2001, *quesito* 1)

13 **VERO O FALSO?** Per ognuna delle seguenti proposizioni indica se è vera o falsa e motiva la risposta.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x) - 1}{e^{-x}}:$$

a) non si può calcolare perché non esiste il logaritmo di un numero negativo. V F
b) si può calcolare e il limite vale $+\infty$ perché il numeratore tende a ∞ e il denominatore tende a 0, quindi la frazione tende a ∞. V F
c) si può calcolare e il limite vale 0 perché e^{-x} è un infinito di ordine superiore rispetto al numeratore. V F

14 Sia $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, una generica funzione tale che $f(-1) = 2$. Possiamo affermare che è valido il limite:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 2?$$

Se la funzione $f(x)$ è così definita:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x+1}} & \text{se } x \neq -1 \\ 2 & \text{se } x = -1 \end{cases},$$

che cosa possiamo dire del limite precedente?
In entrambi i casi dai una spiegazione esauriente della risposta.

$\left[\text{no, se la funzione non è continua; } \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty\right]$

15 Sia $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x-1|}$; esiste $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2008, *quesito* 9)

16 Si determinino le equazioni degli asintoti della curva $f(x) = -x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2008, *quesito* 3)

17 Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}.$$

Se ne studi la continuità nel punto $x = 0$.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione straordinaria*, 2007, *quesito* 6)

18 Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = \dfrac{ax^2 + 6}{bx + 3}$ perché la curva rappresentativa ammetta un asintoto obliquo d'equazione $y = x + 3$.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione straordinaria*, 2007, *quesito* 8)

19 Si consideri la seguente equazione in x:

$(k - 2)x^2 - (2k - 1)x + (k + 1) = 0$, dove k è un parametro reale diverso da 2.

Indicate con x' e x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x' + x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2005, *quesito* 4)

20 **TEST** Il limite della funzione $\dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x}$, quando $x \to +\infty$:

A è uguale a 0.

B è uguale a 1.

C è un valore diverso dai due precedenti.

D non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Sessione ordinaria*, 2001, *quesito* 9)

PROBLEMI

21 Data una circonferenza γ di raggio unitario e centro O, tracciare una semiretta s uscente da O e intersecante γ in un punto Q. Indicato con P un generico punto di s esterno alla circonferenza γ, tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano A e B i punti di tangenza. Indicata con x la lunghezza del segmento PQ, trovare il limite per x tendente a infinito del rapporto

$$k = \frac{\overline{AQ} + \overline{QB}}{\overline{AB}}.$$

(*Maturità scientifica*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 1992)

22 In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ inscrivere il triangolo ABD, retto in D. Tracciare la bisettrice dell'angolo $D\widehat{A}B$: tale bisettrice intersechi il segmento BD in E. Indicato con x l'angolo $B\widehat{A}E$, determinare il rapporto y tra la lunghezza del segmento BE e la lunghezza del segmento BD:

$$y = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}.$$

Calcolare il rapporto y per x che tende a zero.

(*Maturità scientifica*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 1992)

23 Data la funzione $y = \dfrac{\ln(1-x)}{x}$:

a) determina il dominio e studia il segno;
b) ricerca e classifica i punti di discontinuità;
c) trova eventuali asintoti;
d) cerca eventuali intersezioni con la curva di equazione $y = \dfrac{1}{x}$;
e) traccia il grafico probabile.

[a) D: $x < 1 \wedge x \neq 0$; $y < 0 \, \forall x \in D$; b) $x = 0$: III specie; c) $y = 0$ asint. orizz.; $x = 1$ asint. vert.; d) $x = 1 - e$]

24 Considerata la funzione

$$f(x) = \frac{px-2}{3x-p} \quad (p \in \mathbb{R}):$$

a) classifica i punti di discontinuità al variare del parametro p;
b) nel caso che sia $p = 5$ puoi stabilire, utilizzando il teorema degli zeri, se l'equazione $f(x) = 0$ ammette radici in ciascuno dei seguenti intervalli?

$[-1; 1], [0; 6]$;

c) con $p = 3$, utilizzando la definizione, verifica il limite:

$$\lim_{x \to \frac{2}{3}} f(x) = 0.$$

$\left[\text{a) se } p = \pm\sqrt{6} \text{ disc. di III sp. in } x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3};\right.$
$\left.\text{se } p \neq \pm\sqrt{6} \text{ disc. di II sp. in } x = \dfrac{p}{3}; \text{ b) sì, no}\right]$

25 Considerata la funzione

$$f(x) = \frac{\ln(|2x+1|-2)}{x-4}:$$

a) determina il dominio;
b) studia il comportamento agli estremi del dominio;
c) dimostra che negli intervalli $\left[-3; -\dfrac{7}{4}\right]$ e $\left[\dfrac{3}{4}; 3\right]$ si annulla almeno una volta;
d) calcola le soluzioni di $f(x) = 0$;
e) traccia il grafico possibile.

$\left[\text{a) } D: \mathbb{R} - \left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{2}\right] - \{4\};\right.$
b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}^-} f(x) = +\infty$,
$\left.\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x \to 4^\mp} f(x) = \mp\infty; \text{ d) } x_1 = -2, x_2 = 1\right]$

26 Disegna il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} |x^2+3x| & \text{se } -4 \leq x < 0 \\ -\sqrt{4x-x^2} & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ \dfrac{-3x+12}{x-2} & \text{se } 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

a) Utilizzando i teoremi sulle funzioni continue dimostra che la funzione:
- ha per codominio un intervallo;
- ammette minimo e massimo;
- ha almeno uno zero.

b) Deduci poi dal grafico:
- il codominio;
- i punti di minimo e massimo;
- gli zeri.

[b) C: $[-2; 4]$; $(2; -2)$, $(-4; 4)$; $x = -3$, $x = 0$, $x = 4$]

27 Dopo aver trovato per quali valori del parametro reale k la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} kx}{x} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x^2-k+1}{x-2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

presenta una discontinuità di prima specie con salto $l = 1$ in $x = 0$,

a) determina il dominio;
b) classifica eventuali altri punti di discontinuità;
c) ricerca gli asintoti.

[$k = -3$, $k = 1$; a) D: $x \neq 2$; b) $x = 2$: II specie; c) $y = 0$; $x = 2$, $y = x + 2$]

28 Data la funzione

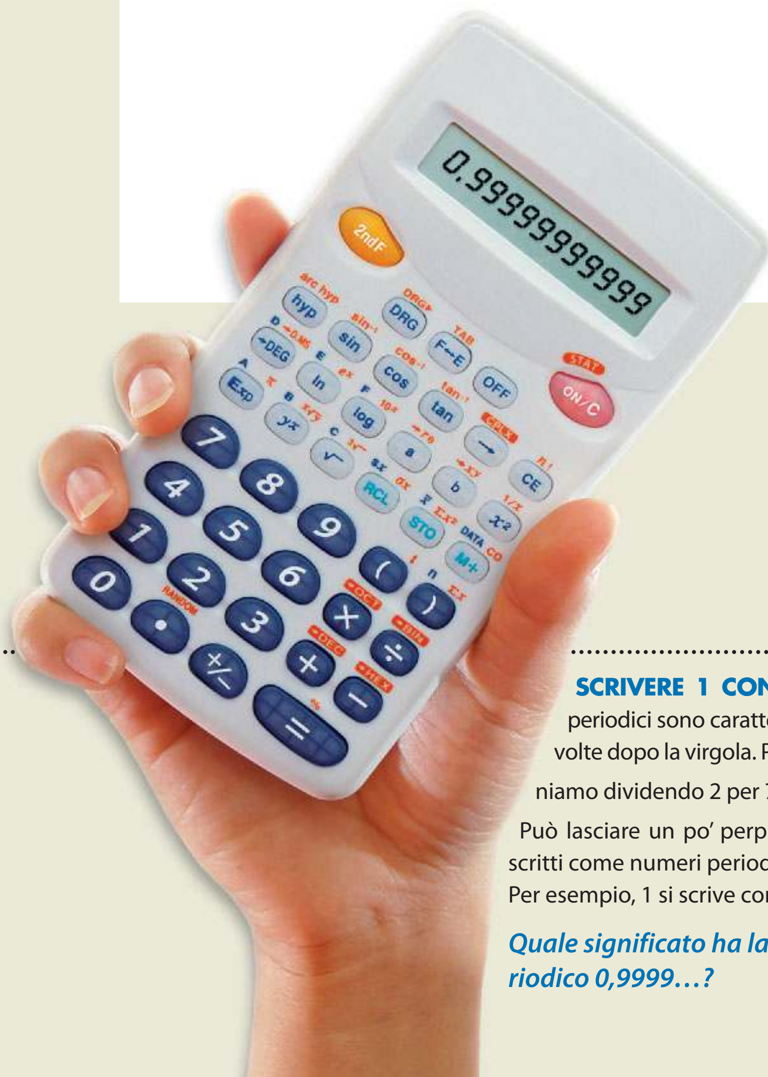
$$f(x) = ax + b + \frac{1-x^2}{x-2}:$$

a) trova per quali valori di a e b si ha $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$;
b) rappresenta la funzione per i valori trovati;
c) detto A il punto in cui il grafico di $f(x)$ incontra l'asse y, determina la retta tangente t in A e considera il punto P appartenente all'arco di $f(x)$, con $x < 2$. Determina $\lim\limits_{P \to A} \dfrac{\overline{PH}^2}{\overline{PA}^2}$, essendo H il punto in cui la parallela all'asse y passante per P interseca la retta t.

$\left[\text{a) } a = 1, b = 1; \text{ b) } f(x) = \dfrac{-x-1}{x-2}; \text{ c) } 0\right]$

CAPITOLO **23** ٢٣ [numerazione araba] २३ [numerazione devanagari] 二十三 [numerazione cinese]

LE SUCCESSIONI E LE SERIE



SCRIVERE 1 CON INFINITE CIFRE I numeri razionali decimali periodici sono caratterizzati da un gruppo di cifre che si ripete infinite volte dopo la virgola. Per esempio 0,285714285714285714…, che otteniamo dividendo 2 per 7, è un modo diverso per scrivere la frazione $\frac{2}{7}$.

Può lasciare un po' perplessi che anche i numeri interi possano essere scritti come numeri periodici.

Per esempio, 1 si scrive come 0,999999999999999999…

Quale significato ha la scrittura del numero 1 come numero periodico 0,9999…?

▶ **La risposta a pag. 1586**

1. LE SUCCESSIONI

DEFINIZIONE

Successione numerica

Una successione numerica f è una funzione che associa a ogni numero naturale n un numero reale a_n:

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a_n.$$

n è la variabile indipendente e si dice **indice della successione**. a_n è la variabile dipendente e si dice **termine della successione**.

Quando non si specifica il numero n, a_n si chiama **termine generico**.

Una successione è dunque costituita da un insieme di numeri ordinato e infinito:

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

ESEMPIO

La successione costituita da tutti i quadrati dei numeri naturali è una funzione f che associa a ogni numero naturale il suo quadrato.

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$0 \mapsto a_0 = 0$$
$$1 \mapsto a_1 = 1$$
$$2 \mapsto a_2 = 4$$
$$3 \mapsto a_3 = 9$$
$$\ldots$$

L'insieme immagine di questa successione, cioè il codominio, è proprio l'insieme dei quadrati dei numeri naturali.

La rappresentazione di una successione

Per rappresentare una successione, a volte si possono indicare i primi cinque o sei termini seguiti dai puntini di sospensione, sottintendendo che l'indice equivale alla posizione. Questo tipo di rappresentazione prende il nome di **rappresentazione per enumerazione**.

Questa rappresentazione è consigliabile soltanto se, leggendo i primi termini, si possono dedurre gli altri senza ambiguità.

ESEMPIO

$$0, \quad 10, \quad 20, \quad 30, \quad 40, \quad 50, \quad 60, \quad \ldots$$

è la successione dei multipli di 10.

Il modo più comune di rappresentare una successione numerica (per non dare luogo ad ambiguità) consiste nello scrivere esplicitamente la relazione che lega l'indice n e il termine a_n. Questo tipo di rappresentazione si chiama **rappresentazione mediante espressione analitica**.

ESEMPIO

Consideriamo la successione:

$$a_n = \frac{2n+1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

Sostituendo a n i valori 1, 2, 3, 4, …, si ottengono i termini:

n	1	2	3	4	…
$a_n = \frac{2n+1}{n}$	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{4}$	…

Una successione può essere rappresentata anche mediante una **formula ricorsiva**. Essa viene definita indicando il primo termine della successione, a_0 (o a_1), e la relazione che lega il termine successivo, a_{n+1}, con quello precedente, a_n:

$$\begin{cases} a_0 \\ a_{n+1} = f(a_n) \quad (\text{per } n \geq 0) \end{cases}$$

Quindi, per determinare l'n-esimo termine della successione occorre aver determinato tutti i termini precedenti.

A volte, nella rappresentazione, vengono dati i primi k termini e una relazione che lega il termine generico a uno o più termini precedenti.

ESEMPIO

Una particolare successione definita per ricorsione è la cosiddetta *successione di Fibonacci*:

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

i cui elementi, detti *numeri di Fibonacci*, sono:

$a_0 = 1,$

$a_1 = 1,$

$a_2 = a_0 + a_1 = 2,$

$a_3 = a_1 + a_2 = 3,$

$a_4 = a_2 + a_3 = 5,$

$a_5 = a_3 + a_4 = 8,$

…

Una stessa successione può essere rappresentata in forma sia analitica sia ricorsiva.

ESEMPIO

La successione dei numeri dispari è definita dall'espressione analitica

$$a_n = 2n + 1,$$

ma anche in modo ricorsivo:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$$

● Qui il primo termine della successione è $a_1 = 3$. A volte il primo termine non si indica con a_0 ma con a_1, oppure con a_k, se la successione non è definita per numeri minori di k. Per esempio, consideriamo la successione:

$$a_n = \frac{n+1}{n-1}, n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}.$$

Questa successione non è definita per $n = 0$ e $n = 1$: i termini della successione partono da a_2.

● Non sempre è facile passare da un tipo di rappresentazione all'altra. Comunque, quando è possibile, conviene utilizzare la definizione analitica perché permette di calcolare il termine n-esimo direttamente da n.

2. ALCUNI TIPI DI SUCCESSIONI

IN PRATICA
▶ Videolezione 7

Le successioni monotòne

Una successione si dice:

- **crescente** se ogni termine è maggiore del suo precedente, ossia:
  $a_n < a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- **decrescente** se ogni termine è minore del suo precedente, ossia:
  $a_n > a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- **non decrescente** (o **crescente in senso lato**) se: $a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- **non crescente** (o **decrescente in senso lato**) se: $a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- **costante** se ogni termine è uguale al suo precedente, ossia:
  $a_n = a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

In generale, una successione per cui vale una di queste proprietà si dice **monotòna**.

ESEMPIO

1. La successione 0, 3, 6, 9, 12, … è monotòna crescente.
2. La successione 20, 12, 4, -4, -12, -20, -28, … è monotòna decrescente.
3. La successione 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, … è monotòna non decrescente.
4. La successione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots$ è monotòna non crescente.
5. La successione 5, 5, 5, 5, 5, 5, … è costante.

Le successioni limitate e illimitate

Una successione si dice **limitata superiormente** se tutti i suoi termini risultano minori o uguali di un numero reale M, ossia $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ESEMPIO

La successione

$$2,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{2}{5},\ \ldots,\ \frac{2}{n+1},\ \ldots$$

è limitata superiormente, perché tutti i suoi termini sono minori o uguali a 2.

Una successione si dice **limitata inferiormente** se tutti i suoi termini risultano maggiori o uguali a un numero reale m, ossia $a_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ESEMPIO

La successione $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$, con $n \neq 0$, i cui termini sono

$$2,\ \frac{5}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{17}{4},\ \frac{26}{5},\ \ldots,\ \frac{n^2+1}{n},\ \ldots,$$

è limitata inferiormente, perché tutti i suoi termini risultano maggiori o uguali a 2.

Una successione si dice **limitata** quando è limitata sia superiormente sia inferiormente, ossia quando esistono due numeri reali m e M tali che $m \leq a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

● Una successione è limitata superiormente/inferiormente o limitata se tale è il suo codominio.

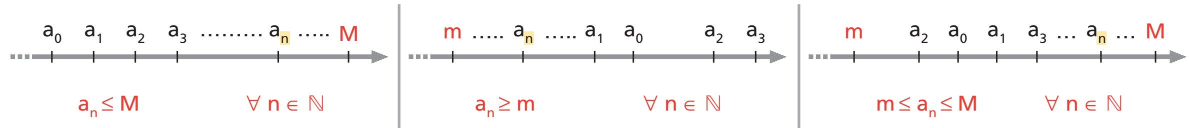
ESEMPIO

La successione $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, i cui termini sono

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7},\ \dots,\ \frac{n}{n+1},\ \dots,$$

è una successione limitata inferiormente, perché tutti i suoi termini risultano maggiori o uguali a 0 ed è anche limitata superiormente perché la frazione $\dfrac{n}{n+1}$ è una frazione propria, pertanto minore di 1. Tutti i termini della successione risultano minori di 1, anche se 1 non fa parte di essi.
La successione data è una successione limitata.

▼ Figura 1



a. Successione limitata superiormente. **b.** Successione limitata inferiormente. **c.** Successione limitata.

Una successione non limitata si dice **illimitata**.

ESEMPIO

La successione $a_n = 2n + 1$ dei numeri dispari

$$1,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\quad 9,\quad 11,\quad \dots,\quad 2n+1,\quad \dots$$

è una successione illimitata (superiormente).

● Se la successione non è limitata superiormente, allora si dice che è **illimitata superiormente**; se la successione non è limitata inferiormente, allora si dice che è **illimitata inferiormente**.

3. IL LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

Il concetto di limite di una successione è simile a quello di limite di una funzione. Tuttavia, nel caso delle successioni osserviamo che il dominio è l'insieme dei numeri naturali e non un intervallo. Poiché $\mathbb{N}$ non ammette punti di accumulazione, la variabile indipendente n non può tendere a un valore finito, ma solo a $+\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

DEFINIZIONE

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Data la successione di termine generale a_n, si dice che per n tendente a $+\infty$ la successione ha per limite $+\infty$ quando, fissato ad arbitrio un numero M positivo, è possibile determinare un corrispondente numero p_M positivo tale che risulti:

$$a_n > M \quad \text{per ogni } n > p_M.$$

In questo caso la successione si dice **divergente positivamente**.

● Dire che M è un numero positivo fissato ad arbitrio equivale a dire che quanto enunciato vale *per ogni* $M > 0$.

● Questo vuol dire che, fissato ad arbitrio $M > 0$, da un certo indice in poi tutti i termini che seguono sono maggiori di M.

ESEMPIO

Verifichiamo che la successione dei numeri naturali multipli di 3 è divergente positivamente, ossia che:

$$\lim_{n \to +\infty} 3n = +\infty.$$

Fissato un numero positivo M, dobbiamo trovare un corrispondente numero positivo p_M per cui risulti:

$$3n > M \quad \forall n > p_M.$$

Dividendo entrambi i membri per 3 otteniamo la disequazione equivalente:

$$n > \frac{M}{3}.$$

Se poniamo $p_M = \dfrac{M}{3}$, abbiamo trovato che $\forall n > p_M$ risulta $3n > M$, ossia tutti i termini con indice $n > \dfrac{M}{3}$ sono maggiori di M.

$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

DEFINIZIONE

$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

Data la successione di termine generale a_n, si dice che per n tendente a più infinito la successione ha per limite $-\infty$ quando, fissato ad arbitrio un numero M positivo, è possibile determinare un corrispondente numero p_M positivo tale che risulti:

$$a_n < -M \quad \text{per ogni } n > p_M.$$

Quindi, fissato ad arbitrio un numero $M > 0$, da un certo indice in poi tutti i termini della successione sono minori di $-M$.

In questo caso la successione è detta **divergente negativamente**.

ESEMPIO

Verifichiamo che $\lim_{n \to +\infty} (1 - n^2) = -\infty$.

Fissato un numero positivo M, dobbiamo trovare un corrispondente numero positivo p_M per cui risulti:

$$1 - n^2 < -M, \quad \forall n > p_M.$$

Risolviamo la disequazione:

$$n^2 - 1 > M \;\rightarrow\; n^2 > M + 1 \;\rightarrow\; n > \sqrt{M+1}.$$

Se poniamo $p_M = \sqrt{M+1}$, abbiamo trovato che $\forall n > p_M$ risulta:

$$1 - n^2 < -M.$$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$

DEFINIZIONE

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$

Data la successione di termine generale a_n, si dice che per n tendente a $+\infty$ la successione ha per limite il numero l quando, fissato ad arbitrio un numero ε positivo, è possibile determinare un corrispondente numero p_ε positivo tale che risulti:

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n > p_\varepsilon.$$

Una successione di questo tipo si dice **convergente**.

ESEMPIO

Verifichiamo che $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} = 0$.

Fissato un numero positivo ε, dobbiamo trovare in corrispondenza un numero positivo p_ε per cui risulti:

$$\left|\frac{1}{2n} - 0\right| < \varepsilon \quad \rightarrow \quad \left|\frac{1}{2n}\right| < \varepsilon, \quad \forall n > p_\varepsilon.$$

Poiché $n > 0$, possiamo togliere il valore assoluto:

$$\frac{1}{2n} < \varepsilon.$$

Passiamo alla disuguaglianza tra i reciproci dei due membri, cambiando anche il verso della disuguaglianza, e dividiamo poi per 2:

$$2n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad n > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Se poniamo $p_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}$, abbiamo trovato che $\forall n > p_\varepsilon$ risulta:

$$\left|\frac{1}{2n} - 0\right| < \varepsilon.$$

$\lim_{n \to +\infty} a_n$ non esiste

Può capitare che una successione non sia né divergente (positivamente o negativamente) né convergente: in questi casi si dice che **non esiste il limite**, oppure che la successione è **indeterminata**.

ESEMPIO

Nella successione

$$a_n = (-1)^n, \qquad \text{con } n \in \mathbb{N},$$

tutti i termini hanno come valore $+1$ o -1:

$$a_n = \begin{cases} +1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Anche considerando indici molto grandi, la successione oscilla tra $+1$ e -1, pertanto non è possibile determinare un unico valore a cui si avvicina, quindi il limite non esiste.

4. I TEOREMI SUI LIMITI DELLE SUCCESSIONI

I teoremi fondamentali

I teoremi che abbiamo dimostrato per i limiti delle funzioni sono validi, come casi particolari, anche per le successioni.

Ricordiamo in particolare il **teorema del confronto**:

- date le successioni a_n, b_n, c_n tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l$, allora esiste anche il limite di b_n per n tendente a $+\infty$ ed è uguale a l;
- date le successioni a_n, b_n tali che $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, anche b_n tende a $+\infty$ per n tendente a $+\infty$ e, analogamente, se $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$, anche a_n tende a $-\infty$ per n tendente a $+\infty$.

Le sottosuccessioni

Consideriamo la successione $a_n = \frac{n-1}{n+2}$, con $n \in \mathbb{N}$, e prendiamo i termini che hanno come indice i multipli di 3 non nulli (cioè $a_3, a_6, a_9, \ldots$):

$$\frac{2}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{11}, \ldots, \frac{3n-1}{3n+2}, \ldots$$

Abbiamo ottenuto un'altra successione detta **sottosuccessione** o **successione estratta** da quella data.
Da una successione possiamo ricavare infinite sottosuccessioni. Diamo altri due esempi di sottosuccessioni della successione appena considerata:

$$\alpha_n = \frac{2n-1}{2n+2}, \qquad \beta_n = \frac{5n-1}{5n+2}.$$

● Prova a scrivere i primi dieci termini di queste sottosuccessioni e confrontali con quelli della successione di partenza.

Applicando la definizione di limite alla successione data possiamo verificare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$. In modo analogo è possibile verificare che le tre sottosuccessioni tendono tutte a 1 per n tendente a $+\infty$. Questa è una proprietà generale delle successioni non indeterminate; infatti è possibile dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA

Limite delle sottosuccessioni

Se una successione a_n ammette limite $l \in \mathbb{R}$, oppure $+\infty$ o $-\infty$, per n tendente a $+\infty$, allora ogni successione estratta ammette lo stesso limite per n tendente a $+\infty$.

● Per esempio, la successione indeterminata
$1, -1, 1, -1, \ldots$
ha per sottosuccessione
$1, 1, 1, 1, \ldots,$
che è convergente a 1.

● Se una successione è indeterminata, non è detto che anche le sue sottosuccessioni lo siano. Inoltre, se da una successione è possibile estrarre una sottosuccessione convergente, non possiamo dedurre che anche la successione di partenza sia convergente.

I limiti delle successioni monotòne

Per le successioni monotòne vale il seguente teorema.

TEOREMA

Limite di una successione monotòna

- Se una successione *crescente* è limitata superiormente, allora è convergente; se è illimitata superiormente, allora diverge positivamente.
- Se una successione *decrescente* è limitata inferiormente, allora è convergente; se è illimitata inferiormente, allora diverge negativamente.

Dal teorema si deduce che *una successione monotòna non è mai indeterminata.*

ESEMPIO

1. La successione $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, ossia

$$0,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \dots,$$

è crescente e limitata, quindi è convergente.

2. La successione dei numeri pari è crescente e illimitata, quindi è divergente.

Puoi verificare che ogni termine è minore del suo successivo e che ogni termine è minore di 1.

Le operazioni con le successioni

È possibile definire anche con le successioni le quattro operazioni.
Date le successioni

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots \qquad \text{e} \qquad b_0,\ b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n,\ \dots,$$

definiamo le seguenti operazioni.

Addizione
Si chiama somma delle due successioni la successione:

$$a_0 + b_0,\quad a_1 + b_1,\quad a_2 + b_2,\quad \dots,\quad a_n + b_n,\quad \dots$$

Per esempio, se $a_n = 2n$ e $b_n = n^2 - 3n$,
$a_n + b_n =$
$= 2n + n^2 - 3n =$
$= n^2 - n$.

Sottrazione
Si chiama differenza delle due successioni la successione:

$$a_0 - b_0,\quad a_1 - b_1,\quad a_2 - b_2,\quad \dots,\quad a_n - b_n,\quad \dots$$

Moltiplicazione
Si chiama prodotto delle due successioni la successione:

$$a_0 \cdot b_0,\quad a_1 \cdot b_1,\quad a_2 \cdot b_2,\quad \dots,\quad a_n \cdot b_n,\quad \dots$$

Per esempio, se $a_n = n - 1$ e $b_n = \dfrac{1}{n}$,

$$a_n \cdot b_n = \frac{n-1}{n}.$$

Divisione
Se $b_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, si chiama quoziente delle due successioni la successione:

$$\frac{a_0}{b_0},\ \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \dots,\ \frac{a_n}{b_n},\ \dots$$

I teoremi sulle operazioni con i limiti

Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = l'$, allora sono validi i seguenti teoremi.

- Teorema della **somma dei limiti**: $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = l + l'$.
- Teorema della **differenza dei limiti**: $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = l - l'$.

Per esempio:
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{n-1}{n}\right) =$
$= 0 + 1 = 1$ perché
$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ e
$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n-1}{n} = 1$.

- Teorema del **prodotto dei limiti**: $\lim_{n \to +\infty} (a_n \cdot b_n) = l \cdot l'$.
- Teorema del **quoziente dei limiti**: se $b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $l' \neq 0$, allora $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{l'}$.

Questi teoremi sono analoghi a quelli studiati per le funzioni per $x \to +\infty$. Analoghi sono anche i teoremi validi quando si presentano una o più successioni divergenti. Per esempio, se $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ e $\lim_{n \to +\infty} b_n = -\infty$, allora $\lim_{n \to +\infty} (a_n + b_n) = -\infty$.

Anche per le successioni si dimostrano alcuni limiti fondamentali. Per esempio si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

I teoremi sui limiti delle successioni sono alla base del calcolo dei limiti, analogamente a quanto avviene per le funzioni. Affronteremo il calcolo dei limiti negli esercizi.

5. I LIMITI DELLE PROGRESSIONI

Le progressioni aritmetiche

DEFINIZIONE

Progressione aritmetica

Una successione numerica si dice progressione aritmetica quando la differenza fra ogni termine e il suo precedente è costante.

In questo paragrafo definiremo le successioni in $\mathbb{N} - \{0\}$.

La differenza costante fra un termine e il suo precedente viene chiamata **ragione** della progressione e viene indicata con d.

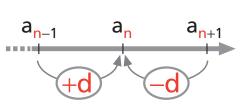
Molto spesso capita di considerare un numero finito di termini consecutivi della progressione. In tal caso il primo e l'ultimo termine di questo insieme ordinato sono detti **estremi** della progressione.

ESEMPIO

Consideriamo la successione:

$$10, \quad 15, \quad 20, \quad 25, \quad 30, \quad 35, \quad 40, \quad \ldots$$

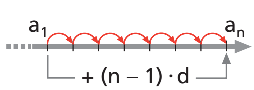
È una progressione aritmetica di ragione 5. Consideriamo i primi cinque termini: avremo un insieme i cui estremi sono 10 e 30.



In una progressione aritmetica di ragione d è possibile calcolare un termine qualunque a_n conoscendo il termine precedente a_{n-1} e aggiungendo la ragione, oppure il termine successivo a_{n+1} e sottraendo la ragione.

Se $d > 0$, allora $a_{n+1} > a_n$ e quindi la progressione è crescente; se invece $d < 0$, allora $a_{n+1} < a_n$ e quindi la progressione è decrescente.

In generale, è possibile calcolare un qualsiasi termine a_n se è noto il termine a_{n+p}.



a_1
$a_2 = a_1 + 1d$
$a_3 = a_1 + 2d$
$a_4 = a_1 + 3d$
$\vdots$
$a_n = a_1 + (n - 1)d$

Le formule relative al termine generico e alla somma di una progressione aritmetica sono fornite dai seguenti teoremi.

TEOREMA

Calcolo del termine a_n di una progressione aritmetica

In una progressione aritmetica, il termine a_n è uguale alla somma del primo termine a_1 con il prodotto della ragione d per $(n - 1)$:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d}, \text{ con } n \text{ intero positivo.}$$

TEOREMA

Somma dei primi n termini di una progressione aritmetica

La somma S_n dei primi n termini di una progressione aritmetica è uguale al prodotto di n per la semisomma dei due termini estremi a_1 e a_n:

$$\boldsymbol{S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo la somma dei primi 10 termini della progressione aritmetica di primo termine 1 e ragione $d = 2$:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, …

Poiché $n = 10$, $a_1 = 1$, risulta $a_{10} = 1 + (10 - 1) \cdot 2 = 19$ e quindi:

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{1 + 19}{2} = 10 \cdot 10 = 10^2.$$

La somma

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

si può anche indicare con

$\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Il limite di una progressione aritmetica

Poiché il termine generico a_n di una progressione aritmetica di ragione d è dato dall'espressione

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d,$$

vediamo che:

1. se $d = 0$, cioè $a_n = a_1\ \forall n > 1$, allora la successione è costante e $\lim_{n \to +\infty} a_n = a_1$;

2. se $d \neq 0$, allora:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} [a_1 + (n - 1) \cdot d] = \begin{cases} +\infty & \text{se } d > 0 \\ -\infty & \text{se } d < 0 \end{cases}.$$

Pertanto vale la seguente proprietà.

PROPRIETÀ

Una progressione aritmetica di ragione $d \neq 0$ è sempre divergente.

Le progressioni geometriche

DEFINIZIONE

Progressione geometrica

Una successione numerica si dice progressione geometrica quando il quoziente fra ogni termine e il suo precedente è costante.

Il quoziente costante fra un termine e il suo precedente è detto **ragione** della progressione geometrica e viene indicato con q.

La ragione q non può essere mai uguale a 0.

Se consideriamo un numero finito di termini consecutivi di una progressione geometrica, il primo e l'ultimo termine sono detti **estremi** della progressione.

Nessun termine di una progressione geometrica può essere uguale a 0, perché non ha significato una divisione del tipo $\frac{n}{0}$.

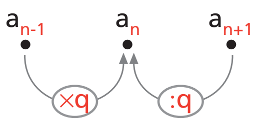
ESEMPIO

La successione

$7, \quad 21, \quad 63, \quad 189, \quad 567, \quad \dots$

è una progressione geometrica di ragione 3. Gli estremi dei primi 4 termini sono 7 e 189.

Le progressioni geometriche hanno proprietà simili a quelle delle progressioni aritmetiche. Per esempio, in una progressione geometrica di ragione q è possibile calcolare un termine qualunque a_n conoscendo il termine precedente a_{n-1} oppure il termine successivo a_{n+1}.



Se conosciamo il termine precedente, lo moltiplichiamo per la ragione:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q.$$

Se conosciamo il termine successivo, lo dividiamo per la ragione:

$$a_n = \frac{a_{n+1}}{q}.$$

Possiamo dedurre da queste proprietà che in una progressione geometrica:

- se $\boldsymbol{q > 0}$, i termini sono tutti o **positivi** o **negativi**;
- se $\boldsymbol{q < 0}$, i termini sono **alternativamente** di **segno opposto**.

- Se $a_1 > 0$ e $q < 0$,
  $a_2 = a_1 \cdot q < 0$,
  $a_3 = a_2 \cdot q > 0$...
  Se $a_1 > 0$ e $q > 0$,
  $a_2 = a_1 \cdot q > 0$,
  $a_3 = a_2 \cdot q > 0$...

TEOREMA

Calcolo del termine a_n di una progressione geometrica

In una progressione geometrica il termine a_n è uguale al prodotto del primo termine a_1 per la potenza della ragione con esponente $(n - 1)$:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}} \text{ con } n \text{ intero positivo.}$$

- a_1
  $a_2 = a_1 \cdot q^1$
  $a_3 = a_1 \cdot q^2$
  $a_4 = a_1 \cdot q^3$
  $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$
  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

ESEMPIO

Nella progressione geometrica di ragione 2, determiniamo il sesto termine sapendo che il primo termine è uguale a 3.

Poiché $a_1 = 3$, $q = 2$, il sesto termine è:

$$a_6 = 3 \cdot 2^{6-1} = 3 \cdot 2^5 = 96.$$

La progressione geometrica è 3, 6, 12, 24, 48, 96, …

TEOREMA

Somma dei primi n termini di una progressione geometrica

La somma S_n dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione q diversa da 1 è espressa dalla formula:

$$\boldsymbol{S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}.$$

- Se $q = 1$, il denominatore si annulla.
- Abbiamo considerato come primo termine a_1. Se invece consideriamo a_0, l'n-esimo termine è a_{n-1} e la somma risulta
  $$S_n = a_0 \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo la somma dei primi 5 termini della progressione geometrica:

$2, \quad 8, \quad 32, \quad 128, \quad 512, \quad \dots$

Poiché $q = 4$, $a_1 = 2$, calcoliamo S_5:

$$S_5 = 2 \cdot \frac{4^5 - 1}{4 - 1} = 2 \cdot \frac{1024 - 1}{3} = 682.$$

Il limite di una progressione geometrica

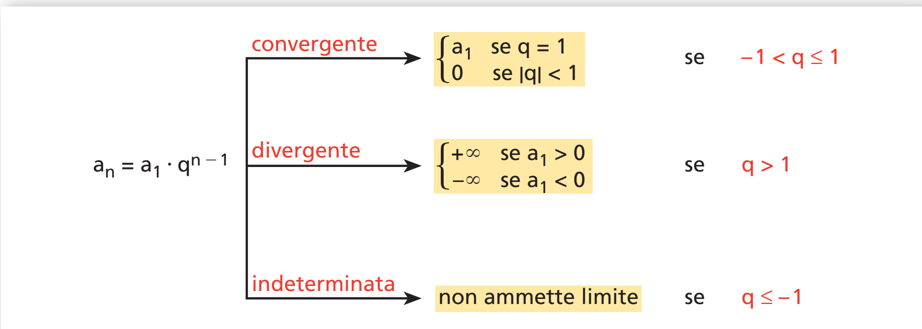
Poiché il termine generico a_n di una progressione geometrica di ragione q è dato da

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

vediamo che:

- se $q \leq -1$, allora a_n cambia alternativamente segno al crescere di n e il suo valore assoluto tende a $+\infty$ per n tendente a $+\infty$; quindi *non esiste il limite* $\lim_{n \to +\infty} a_n$;
- se $-1 < q < 1$, cioè $|q| < 1$, allora $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$ e quindi:
  $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} a_1 q^{n-1} = 0$;
- se $q = 1$, allora la progressione geometrica è costante e quindi $\lim_{n \to +\infty} a_n = a_1$;
- se $q > 1$, allora:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} a_1 q^{n-1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_1 > 0 \\ -\infty & \text{se } a_1 < 0 \end{cases}$$



◀ **Figura 2** Il comportamento della progressione geometrica, al variare della ragione *q*.

6. CHE COS'È UNA SERIE NUMERICA

Abbiamo già visto che un numero decimale finito può essere scritto come somma di numeri interi e/o di numeri frazionari.
Per esempio:

$$2,491 = 2 + \frac{4}{10} + \frac{9}{100} + \frac{1}{1000}.$$

Possiamo eseguire l'addizione perché è formata da un numero finito di addendi.
Consideriamo ora un numero decimale illimitato periodico. Per esempio, se scriviamo

$$3,\overline{5} = 3,5555\ldots = 3 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10\,000} + \ldots,$$

che significato diamo a questa addizione di infiniti addendi?

Per rispondere, consideriamo la successione 3, $\frac{5}{10}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{5}{1000}$, $\frac{5}{10\,000}$, … e costruiamone un'altra mediante *somme parziali* dei suoi termini:

$$s_1 = 3,$$

$$s_2 = 3 + \frac{5}{10} = 3{,}5,$$

$$s_3 = 3 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100} = 3{,}55,$$

$$s_4 = 3 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} = 3{,}555,$$

$$s_5 = 3 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10\,000} = 3{,}5555,$$

$$\ldots$$

Quando scriviamo la precedente uguaglianza tra il numero $3{,}\overline{5}$ e la somma di infiniti termini, in realtà affermiamo che la successione di somme parziali che abbiamo costruito ha per limite il numero $3{,}\overline{5}$.
In generale, il procedimento che abbiamo esaminato porta ai concetti di *serie* e di *somma di una serie* e serve per studiare l'addizione di infiniti addendi.

DEFINIZIONE

Serie numerica

Data una successione di numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, si chiama serie numerica la successione:

$$s_1 = a_1,$$
$$s_2 = a_1 + a_2,$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\ldots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$
$$\ldots$$

I numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots$ si chiamano **termini** della serie; a_n si chiama **termine generale**; le somme $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$ si dicono **somme parziali** o **ridotte** della serie. s_n si chiama **ridotta *n*-esima** o **ridotta di ordine *n***.

È possibile indicare una serie con $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Il simbolo $\sum_{n=1}^{+\infty}$ si chiama *sommatoria* e si legge «sommatoria in n da 1 a più infinito». Si ha quindi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

ESEMPIO

Le ridotte della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (2n - 1)$ sono:

$$s_1 = 1,\ s_2 = 1 + 3 = 4,\ s_3 = 1 + 3 + 5 = 9,\ s_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16,$$

$$s_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25, \ldots$$

È possibile che il valore iniziale di n non sia 1 ma un altro numero naturale. Per esempio,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n-1} =$$
$$= 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots$$

Tuttavia, le ridotte continuano a essere ordinate con indici 1, 2, 3, …
Nell'esempio abbiamo:

$$s_1 = 2,$$
$$s_2 = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2},$$
$$s_3 = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} = \frac{29}{6},$$
$$\ldots$$

Utilizzando il simbolo di sommatoria, la ridotta n-esima può essere scritta come:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

ESEMPIO

Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n}$.

I suoi termini sono:

$$a_1 = 2,\ a_2 = \frac{2^2}{2} = 2,\ a_3 = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3},\ a_4 = \frac{2^4}{4} = 4,\ \ldots,\ a_n = \frac{2^n}{n},\ \ldots$$

Le ridotte sono:

$$s_1 = 2,\ s_2 = 2 + 2 = 4,\ s_3 = 2 + 2 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3},\ \ldots,\ s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k},\ \ldots$$

Se $n = 1$, per convenzione, si ha: $s_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$.

7. SERIE CONVERGENTI, DIVERGENTI, INDETERMINATE

La definizione di serie è stata introdotta per dare significato all'addizione di un numero infinito di termini. Alcune volte tale addizione dà per risultato un numero, altre volte non dà risultato. A seconda del comportamento, una serie può essere *convergente*, *divergente*, *indeterminata*.
Il comportamento di una serie viene chiamato **carattere** della serie.

Serie convergente

DEFINIZIONE

Serie convergente

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente se la successione delle sue ridotte ha un limite finito, cioè se $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$, $s \in \mathbb{R}$.

Il numero s si chiama **somma** o **valore** della serie e si scrive anche:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s.$$

ESEMPIO

Consideriamo la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

Il suo termine generale, $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, può essere scritto come somma algebrica di due frazioni più semplici:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ è detta **serie di Mengoli**, dal nome del matematico bolognese Pietro Mengoli (1626-1686). Gli studi di Mengoli sui limiti furono approfonditi e vennero sfruttati da Newton e Leibniz.

Infatti: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$.

Quindi, la ridotta n-esima s_n è:

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \\ + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Eliminiamo le parentesi e semplifichiamo; restano soltanto il primo e l'ultimo addendo:

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$, otteniamo:

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = 1.$$

Pertanto, la serie ha per somma 1: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Serie divergente

DEFINIZIONE

Serie divergente

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è:

- divergente positivamente se la successione delle sue ridotte ha limite $+\infty$:

  $$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty;$$

- divergente negativamente se la successione delle sue ridotte ha limite $-\infty$:

  $$\lim_{n \to +\infty} s_n = -\infty.$$

In questo caso si dice che la **somma** della serie è $+\infty$ (oppure $-\infty$) e si scrive anche:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \qquad \left(\text{oppure } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty\right).$$

ESEMPIO

Esaminiamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 2n$. I suoi termini sono: 2, 4, 6, ..., $2n$ ...

Essi costituiscono la progressione aritmetica dei numeri pari, cioè la progressione di ragione $d = 2$, che ha come primo elemento $a_1 = 2$. Calcoliamo la ridotta n-esima utilizzando la formula della somma dei primi n elementi di una progressione aritmetica:

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2 + 2n}{2} n = (n+1)n = n^2 + n.$$

Dato che $\lim_{n \to +\infty} (n^2 + n) = +\infty$, la serie diverge positivamente e scriviamo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2n = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n + \ldots = +\infty.$$

In una progressione aritmetica di ragione d, la somma dei primi n termini è:

$$s_n = n \cdot \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right).$$

- Una serie i cui termini sono uguali a una costante diversa da 0 è sempre divergente.

Infatti, data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c$, la generica ridotta è $s_n = \sum_{k=1}^{n} c = c + c + \ldots + c = nc$, quindi:

$$\lim_{n \to +\infty} nc = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} \quad \to \quad \sum_{n=1}^{+\infty} c = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Serie indeterminata

DEFINIZIONE

Serie indeterminata

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è indeterminata se la successione delle sue ridotte è indeterminata, cioè se non è né convergente né divergente.

- Una serie indeterminata si dice anche **oscillante**.

ESEMPIO

Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ e scriviamo i suoi termini:

$$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 1, \ldots, a_n = (-1)^n, \ldots$$

La successione delle ridotte è:

$$s_1 = -1, s_2 = 0, s_3 = -1, s_4 = 0, s_5 = -1, \ldots, s_{2n} = 0, s_{2n+1} = -1, \ldots$$

Le ridotte hanno alternativamente valori -1 e 0, pertanto la loro successione è indeterminata. La serie data è quindi indeterminata.

La serie geometrica

DEFINIZIONE

Serie geometrica

Si chiama serie geometrica di ragione q la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \boldsymbol{q^n} = \mathbf{1} + \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q^2} + \boldsymbol{q^3} + \ldots + \boldsymbol{q^n} + \ldots$$

- Nella serie geometrica l'indice n parte da 0 (e non da 1).

I suoi termini sono quelli della progressione geometrica che ha la stessa ragione q e come primo elemento 1.

ESEMPIO

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \ldots$$

è la serie geometrica di ragione $\frac{1}{5}$.

Studiamo il comportamento della serie geometrica.

Se $\boldsymbol{q} = \mathbf{1}$, la somma parziale s_n è data dalla somma di n addendi tutti uguali a 1, cioè:

$$s_n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n.$$

Dunque s_n, e quindi anche la serie, *diverge positivamente*.

Se $q \neq 1$, calcoliamo s_n scrivendo la somma dei primi n termini di una progressione geometrica con ragione q e primo termine uguale a 1:

$$s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

● La somma s_n dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione $q \neq 1$ e con primo elemento a_1 è:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Si possono presentare tre casi.

- $\boldsymbol{q > 1}$: $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$, quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = +\infty.$$

La serie *diverge positivamente*.

- $\boldsymbol{|q| < 1}$: $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$, quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

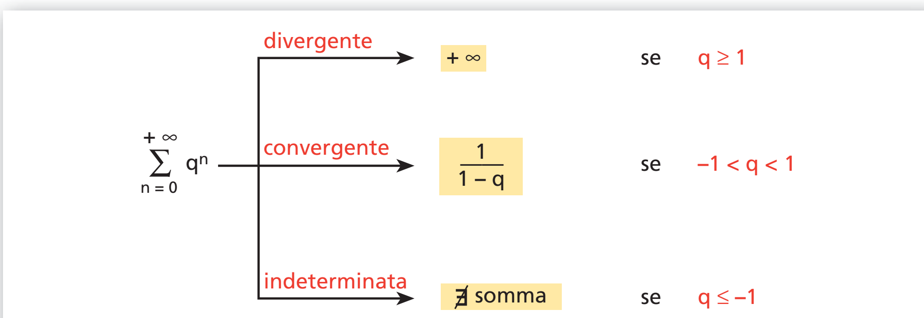
La serie *converge*.

- $\boldsymbol{q \leq -1}$: $\lim_{n \to +\infty} q^n$ non esiste perché q^n cambia alternativamente di segno all'aumentare di n e il suo valore assoluto tende a $+\infty$, quindi anche

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{non esiste.}$$

La serie è *indeterminata*.

In sintesi, abbiamo il seguente schema.



▶ **Figura 3** Il comportamento della serie geometrica di ragione q è diverso a seconda del valore di q.

● Le proprietà delle serie

Per le serie valgono queste proprietà.

Proprietà distributiva

Se c è un numero reale diverso da 0, le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n$ hanno lo stesso carattere.

Se sono convergenti, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n = c \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Proprietà associativa

Data una serie convergente oppure divergente, se associamo i suoi termini in gruppi contenenti un numero finito di addendi consecutivi, otteniamo una serie che ha la stessa somma (finita o infinita).

Non vale invece la proprietà commutativa:

se modifichiamo l'ordine dei termini di una serie, in generale ne otteniamo un'altra che ha una somma diversa o un diverso carattere.

ESPLORAZIONE

I paradossi di Zenone

Zenone di Elea, filosofo greco del V secolo a.C., usava il paradosso come strumento retorico per dimostrare «a rigor di logica» le idee del suo maestro Parmenide, spesso in contraddizione col senso comune e l'esperienza. Se Parmenide voleva dimostrare che l'«Essere» è unico e immutabile, Zenone costruiva giochi logici per negare addirittura il movimento.

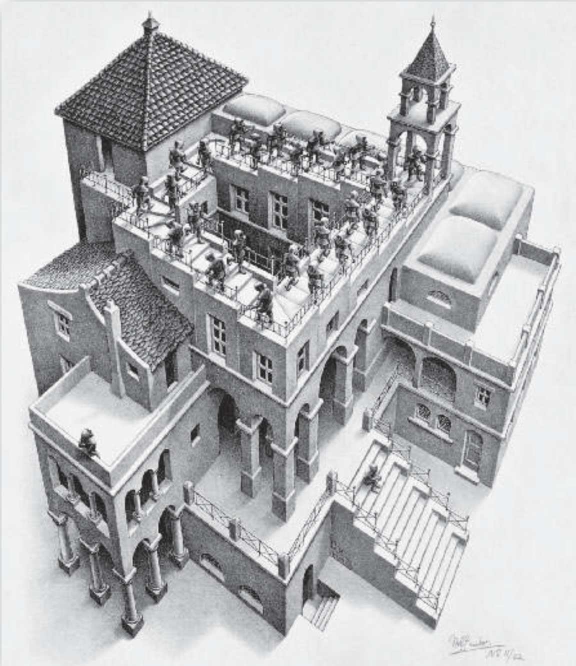
Nelle ipotesi di uno dei suoi paradossi diceva che per attraversare l'intera lunghezza di uno stadio bisogna prima percorrerne la metà, prima ancora un quarto, ancora prima un ottavo e così via. Zenone rappresentava quindi una distanza come una somma infinita di frazioni, o meglio, come la serie numerica formata dalle potenze di $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Il paradosso di Zenone continuava sostenendo che era quindi impossibile percorrere in un tempo finito una quantità infinita di parti di spazio: ne sarebbe sempre e comunque rimasta una davanti a chi si fosse cimentato nell'impresa, qualunque fosse stata la distanza in oggetto.

A parole il ragionamento fila, ma, tenendo conto del passaggio al limite e della formula che ci permette di calcolare la somma della serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$, la serie che descrive gli infiniti spazi percorsi nello stadio ha per somma:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1.$$



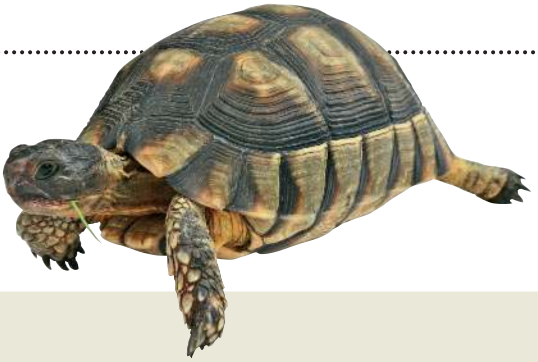
▲ Nei suoi paradossi visivi, come *Salita e discesa*, Maurits C. Escher elabora, da artista, il concetto di infinito.

Il paradosso è quindi svelato. La distanza è finita anche «a rigor di logica» e quindi percorribile in un tempo finito, nonostante sia rappresentabile come somma di infiniti termini. Oltre al paradosso dello stadio, anche il paradosso di Achille e quello della freccia speculano sull'infinita divisibilità dello spazio; l'attenzione su questo tema è il motivo per cui molti matematici si sono interessati a Zenone di Elea.

Attività

Achille e la tartaruga

- Interpreta mediante le serie numeriche il paradosso di Achille e la tartaruga e spiegalo. Se non ne conosci l'enunciato, cercalo online.



@ **Cerca nel Web:**

Achille tartaruga, paradosso Zenone, Zeno's paradox

SCRIVERE 1 CON INFINITE CIFRE

Quale significato ha la scrittura del numero 1 come numero periodico 0,9999…?

▶ Il quesito completo a pag. 1567

Una somma infinita

Cerchiamo di capire che cosa significa 0,9999…

Raccogliamo un 9 e otteniamo

$$0{,}9999\ldots = 9 \cdot 0{,}1111\ldots =$$

ora moltiplichiamo e dividiamo per 10 il numero con la virgola e otteniamo

$$= \frac{9}{10} \cdot 1{,}11111\ldots$$

Il numero 1,1111… può essere visto come somma di una serie geometrica. Infatti:

$$1{,}1111\ldots = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} +$$

$$+ \frac{1}{1000} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

Quindi:

$$0{,}9999\ldots = \frac{9}{10} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

Sappiamo che la serie geometrica trovata, con ragione $\frac{1}{10}$, minore di 1, converge a

$$\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

Perciò:

$$0{,}9999\ldots = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1.$$

Questo dovrebbe spazzare via ogni perplessità.

Se cambiamo base

Abbiamo mostrato che, quando scriviamo i numeri in base 10, la scrittura 0,9999… è una scrittura alternativa per rappresentare il numero 1.

Proviamo adesso a cambiare base e consideriamo, in base 3, il numero 0,2222…

Raccogliamo un 2 (che è analogo al 9 di prima, perché è il numero intero che precede la base 3, ossia $(2)_3 = (10)_3 - (1)_3$) e otteniamo

$$0{,}2222\ldots = 2 \cdot 0{,}1111\ldots =$$

se ora moltiplichiamo e dividiamo il numero con la virgola per 3, ossia $(10)_3$, otteniamo, in base 3,

$$= \frac{2}{10} \cdot 1{,}1111\ldots$$

e quindi:

$$0{,}2222\ldots = \frac{2}{10} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

Anche qui il valore della serie è

$$\frac{1}{1-\frac{1}{10}},$$

ma adesso, per fare le sottrazioni, dobbiamo ricordare che in base 3 abbiamo $10 - 1 = 2$, e così troviamo il risultato

$$\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{10-1}{10}} = \frac{1}{\frac{2}{10}} = \frac{10}{2}.$$

Quindi:

$$0{,}2222\ldots = \frac{2}{10} \cdot \frac{10}{2} = 1.$$

Anche in base 3, se prendiamo il numero decimale costituito da 0 seguito dal periodo uguale a 2 (il numero che precede $(10)_3$) otteniamo l'unità.

Pi greco e le somme infinite

Ci sono parecchie formule che mettono in relazione il numero π con delle serie numeriche e che possono servire per calcolare le sue cifre.

La prima, attribuita al matematico scozzese James Gregory, ma pubblicata dal matematico e filosofo tedesco Gottfried W. Leibniz nel 1674, è:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Questa formula è molto semplice, ma la convergenza della serie a $\frac{\pi}{4}$ è molto lenta e bisogna sommare più di 600 termini prima di ottenere stabilmente la seconda cifra decimale di π, cioè 4.

Un'altra formula semplice è quella di Eulero, grande matematico svizzero del Settecento:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

ma anch'essa ha una convergenza molto lenta.

Esistono formule con una convergenza molto più rapida, ma molto più complesse.

Per esempio, la formula dell'indiano Srinivasa A. Ramanujan, uno dei più grandi matematici del Novecento, dà:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}.$$

Già per $n = 2$ si ricavano più di venti cifre decimali di π corrette e per ogni termine aggiunto nella serie si ottengono otto cifre corrette in più.

Nel 1996 i matematici David H. Bailey, Peter Borwein e Simon Plouffe pubblicarono, sulla rivista scientifica *Mathematics of Computation*, la «miracolosa» formula

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right),$$

dalla quale si ricava l'algoritmo per calcolare una qualsiasi cifra decimale di π, senza dover calcolare le precedenti.

LABORATORIO DI MATEMATICA
LE SUCCESSIONI

ESERCITAZIONE GUIDATA

Per controllare che $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n+11}{2n+7}=2$, costruiamo un foglio di Excel che, letto un $\varepsilon>0$, permetta la ricerca dell'indice p_ε, tale che $\forall\, n>p_\varepsilon$ valga la disuguaglianza $\left|\dfrac{4n+11}{2n+7}-2\right|<\varepsilon$.

Per trovare l'indice p_ε costruiamo un foglio che realizzi un procedimento numerico che:
- richieda l'inserimento di un coefficiente intero positivo casuale;
- abbini al coefficiente scelto un certo numero di indici consecutivi della successione ottenuti, per esempio, moltiplicando per 10 il coefficiente casuale e scrivendo i dieci indici seguenti;
- ponga a fianco di ognuno di essi un'istruzione condizionale per cui se la disuguaglianza:
  – non è soddisfatta, mostri l'indicatore =;
  – è soddisfatta per la prima volta, mostri l'indicatore <−−;
  – è soddisfatta per le volte successive, mostri l'indicatore ==.

La costruzione del foglio
- Attiviamo Excel e scriviamo le didascalie come in figura 1.
- Per mostrare gli indici e i termini della successione, digitiamo = D4*10 in A7, = A7 + 1 in A8 e la copiamo sino alla A17. Quindi digitiamo = (4*A7 + 11)/(2*A7 + 7) in B7 e la copiamo sino alla B17.
- Per verificare la disuguaglianza digitiamo = SE(ASS(B8 − $C$2) >= $D$3; "="; SE(E(ASS(B8 − $C$2) < $D$3; C7 = "="); "<−−"; "==")) in C8 e la copiamo sino alla C17.
- Per mostrare l'indice p_ε, quando la ricerca ha successo, digitiamo = SE(C7 = "<−−"; A7; "") in D7 e la copiamo sino alla D17, e la formula = SOMMA(D7:D17) in D19.
- In figura 1 osserviamo la conclusione di una ricerca che, dopo aver posto $\varepsilon = 0{,}001$, è pervenuta a $p_\varepsilon = 1497$.

▼ Figura 1

	A	B	C	D
1	La successione (4n+ 11) / (2n+7)			
2	ha limite		2	
3	Inserisci il valore di ε			0,001
4	e il coefficiente di ricerca			149
5				
6	n	a_n		p_ε
7	1490	1,998995647807		
8	1491	1,998996319839	=	
9	1492	1,998996990973	=	
10	1493	1,998997661209	=	
11	1494	1,998998330551	=	
12	1495	1,998998998999	=	
13	1496	1,998999666556	=	
14	1497	1,999000333222	<--	1497
15	1498	1,999000999001	==	
16	1499	1,999001663894	==	
17	1500	1,999002327902	==	
18				
19	Il valore di p_ε è			1497

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 18 esercitazioni in più

Esercitazioni

Calcola il limite sul quaderno con procedimento analitico. Usa il valore trovato per verificare nel foglio elettronico la corrispondente definizione di limite, come nell'esercitazione guidata.

1 $a_n=\dfrac{1+2n}{4n}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

2 $a_n=\dfrac{n^2+3n^3}{(n+1)^3}$ $[3]$

3 $a_n=\dfrac{n^4-2n^3-3n^2-5n-8}{n^3+1}$ $[+\infty]$

4 $a_n=\dfrac{n^2-3n+2}{(n-1)^3}$ $[0]$

5 $a_n=n\ln\left(\dfrac{n-2}{n}\right)$ $[-2]$

6 $a_n=n\left(e^{\frac{4}{n}}-1\right)$ $[4]$

7 $a_n=n\,\mathrm{sen}\dfrac{1}{n}$ $[1]$

8 $a_n=n^2\left[\cos\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right]$ $[-2]$

9 $a_n=4n\left(\sqrt{1-\dfrac{5}{n}}-1\right)$ $[-10]$

LA TEORIA IN SINTESI
LE SUCCESSIONI E LE SERIE

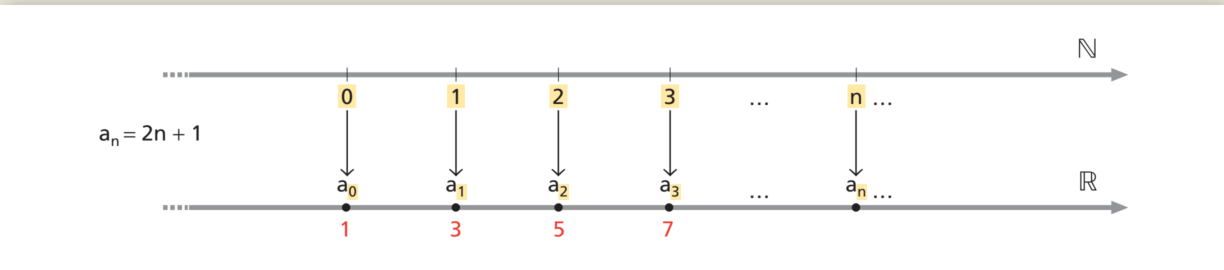
1. LE SUCCESSIONI

- **Successione numerica**: è una funzione f che associa a ogni numero naturale un numero reale:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n.$$

n si chiama **indice della successione** e a_n **termine della successione**.

ESEMPIO:



- Una successione può essere rappresentata:
  - per **enumerazione**: $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$;
  - mediante **espressione analitica**: $a_n = f(n)$;
  - mediante **formula ricorsiva** indicando a_0 e la relazione $a_{n+1} = f(a_n)$ che lega il termine successivo a_{n+1} al suo precedente a_n.

2. ALCUNI TIPI DI SUCCESSIONI

- Una successione è detta:
  - **crescente** se $a_n < a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
  - **crescente in senso lato** (o **non decrescente**) se $a_n \leq a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
  - **decrescente** se $a_n > a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
  - **decrescente in senso lato** (o **non crescente**) se $a_n \geq a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
  - **costante** se $a_n = a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

  Ogni successione di questo tipo si dice **monotòna**.

- Una successione è:
  - **limitata superiormente** se tutti i termini risultano minori o uguali di un numero reale M: $a_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
  - **limitata inferiormente** se tutti i termini risultano maggiori o uguali di un numero reale m: $a_n \geq m, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
  - **limitata** quando è limitata sia superiormente sia inferiormente;
  - **illimitata** quando non è limitata.

ESEMPIO: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ è una successione limitata;

$1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots, 2n + 1, \ldots$ è una successione illimitata (superiormente).

3. IL LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

- $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ se, fissato ad arbitrio un numero M positivo, è possibile determinare un corrispondente numero p_M positivo tale che $a_n > M$, $\forall n > p_M$. La successione si dice **divergente positivamente**.
- $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ se, fissato ad arbitrio un numero M positivo, è possibile determinare un corrispondente numero p_M positivo tale che $a_n < -M$, $\forall n > p_M$. La successione si dice **divergente negativamente**.
- $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ se, fissato ad arbitrio un numero ε positivo, è possibile determinare un corrispondente numero p_ε positivo tale che risulti: $|a_n - l| < \varepsilon$, per ogni $n > p_\varepsilon$. La successione si dice **convergente**.
- $\lim_{n \to +\infty} a_n$ **non esiste** se a_n è non divergente e non convergente. La successione si dice **indeterminata**.

4. I TEOREMI SUI LIMITI DELLE SUCCESSIONI

I teoremi relativi ai limiti di funzioni sono validi anche per le successioni. In particolare vale il **teorema del confronto**.

- **Teorema del limite di una sottosuccessione**
  Se una successione a_n ammette limite $l \in \mathbb{R}$, oppure $+\infty$ o $-\infty$, per n tendente a $+\infty$, allora ogni successione estratta ammette lo stesso limite per n tendente a $+\infty$.
- **Teorema del limite delle successioni monotòne**

Se una successione	è	allora è
crescente	limitata superiormente	convergente
crescente	illimitata superiormente	divergente positivamente
decrescente	limitata inferiormente	convergente
decrescente	illimitata inferiormente	divergente negativamente

- Date le successioni $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ e $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ diciamo:
  - **somma** delle successioni la successione $a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots$;
  - **differenza** delle successioni la successione $a_0 - b_0, a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n, \dots$;
  - **prodotto** delle successioni la successione $a_0 \cdot b_0, a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n, \dots$;
  - se $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, **quoziente** delle successioni la successione $\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$
- Per le successioni con limite finito $\left(\lim_{n \to +\infty} a_n = l \text{ e } \lim_{n \to +\infty} b_n = l'\right)$, valgono i teoremi sulle operazioni con i limiti, come per le funzioni.

5. I LIMITI DELLE PROGRESSIONI

- **Progressione aritmetica di ragione *d***: è una successione $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tale che:

  $a_{n+1} - a_n = d$ per ogni n;

  per essa valgono i seguenti risultati:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$S_n = a_1 + \dots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } d > 0 \\ -\infty & \text{se } d < 0 \\ a_1 & \text{se } d = 0 \end{cases}$$

- **Progressione geometrica di ragione q**: è una successione $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tale che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \text{per ogni } n;$$

per essa valgono i seguenti risultati:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \begin{cases} a_1 & \text{se } q = 1 \\ 0 & \text{se } |q| < 1 \\ \pm\infty & \text{se } q > 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

6. CHE COS'È UNA SERIE NUMERICA

- Data una successione di numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, si chiama **serie numerica** la successione dei numeri

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, \quad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \ldots$$

Si indica con $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ oppure $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ sono i **termini** della serie e $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$ sono le **somme parziali** o **ridotte**.

ESEMPIO: La serie $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1) + \ldots$, con $n \in \mathbb{N}$, ossia la serie che otteniamo dalla successione dei numeri dispari, ha come ridotte 1, 4, 9, 16, …

7. SERIE CONVERGENTI, DIVERGENTI, INDETERMINATE

- **Carattere di una serie**: è il comportamento della serie, ossia se è convergente, divergente o indeterminata.
- Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è:
  - **convergente** se $\lim_{n \to +\infty} s_n = s$, con $s \in \mathbb{R}$, e si scrive $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$; s è la **somma** della serie;
  - **divergente**
    - positivamente se $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$ e si scrive $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$;
    - negativamente se $\lim_{n \to +\infty} s_n = -\infty$ e si scrive $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty$;
  - **indeterminata** se non è né convergente né divergente.

ESEMPIO: La **serie di Mengoli** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ è convergente. Abbiamo calcolato che la sua somma è 1.

- **Serie geometrica di ragione q**: è la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots$

Poiché $s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$, la serie è:

- divergente se $q \geq 1$;
- convergente se $-1 < q < 1$, con somma $s = \frac{1}{1-q}$;
- indeterminata se $q \leq -1$.

1. LE SUCCESSIONI

Teoria a pag. 1568

La rappresentazione di una successione

La rappresentazione mediante espressione analitica
Scrivi i primi cinque termini delle seguenti successioni.

1 $a_n = 5n + 1, n \in \mathbb{N}$; $a_n = 3n + 5, n \in \mathbb{N}$; $a_n = 5n + 5, n \in \mathbb{N}$.

2 $a_n = 2^n, n \in \mathbb{N}$; $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$; $a_n = n \cdot (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

3 $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}$; $a_n = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$; $a_n = \frac{n+1}{n+2}, n \in \mathbb{N}$.

4 $a_n = 2\,\text{sen}\left(\frac{n}{2}\pi\right), n \in \mathbb{N}$; $a_n = \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right), n \in \mathbb{N}$; $a_n = n^{-\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

5 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, n \in \mathbb{N}$; $a_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n+1} \cdot n, n \in \mathbb{N}$; $a_n = n\,\text{sen}\left(n\frac{\pi}{4}\right), n \in \mathbb{N}$.

6 **ESERCIZIO GUIDA**

Rappresentiamo mediante una possibile espressione analitica la seguente successione:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{10}, \quad \frac{4}{17}, \quad \frac{5}{26}, \quad \dots$$

Possiamo notare che in ogni frazione al numeratore troviamo i numeri naturali a partire da 1, mentre il denominatore si ottiene aggiungendo 1 al quadrato di ogni numero naturale diverso da 0, cioè $n^2 + 1$, infatti:

$$2 = 1^2 + 1; \quad 5 = 2^2 + 1; \quad 10 = 3^2 + 1; \quad 17 = 4^2 + 1; \quad \dots$$

Dunque il termine generico della successione è:

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

Rappresenta mediante espressione analitica le seguenti successioni.

7 $0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, \dots$ $[a_n = 3n, n \in \mathbb{N}]$

8 $-1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \dots$ $[a_n = 2n - 1, n \in \mathbb{N}]$

9 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \dots$ $\left[a_n = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right]$

10 $1, \sqrt{2} - 1, \sqrt{3} - 2, -1, \sqrt{5} - 4, \sqrt{6} - 5, \dots$ $[a_n = \sqrt{n+1} - n, n \in \mathbb{N}]$

11 $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ $\left[a_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right]$

12 $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \dots$ $\left[a_n = \frac{1}{n(n+1)}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right]$

13 $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \dots$ $\left[a_n = \frac{n-1}{n^2}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right]$

14 $2, \quad 2\sqrt{2}, \quad 3\sqrt[3]{2}, \quad 4\sqrt[4]{2}, \quad 5\sqrt[5]{2}, \quad \ldots$ $\left[a_n = n \cdot 2^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right]$

15 $4, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{6}{3}, \quad \frac{7}{4}, \quad \frac{8}{5}, \quad \frac{9}{6}, \quad \frac{10}{7}, \quad \ldots$ $\left[a_n = \frac{n+3}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right]$

16 $-1, \quad \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{5}, \quad \ldots$ $\left[a_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right]$

Scrivi i primi cinque termini delle seguenti successioni definite ricorsivamente.

17 $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n \end{cases}$ $\left[1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}\right]$

18 $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 1 - 2a_n \end{cases}$ $[2, -3, 7, -13, 27]$

19 $\begin{cases} a_0 = -1 \\ a_{n+1} = 4a_n + 1 \end{cases}$ $[-1, -3, -11, -43, -171]$

20 $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 + 1 \end{cases}$ $[1, 2, 5, 26, 677]$

21 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + a_n^2 \end{cases}$ $[2, 6, 42, 1806, 3263442]$

22 $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + 3) \end{cases}$ $\left[1, 2, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{23}{8}\right]$

23 $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = 3a_{n+1} + 2 \end{cases}$ $\left[2, 0, -\frac{2}{3}, -\frac{8}{9}, -\frac{26}{27}\right]$

Scrivi in forma analitica le seguenti successioni espresse ricorsivamente.

24 $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}; \qquad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + 4 \end{cases}.$ $[a_n = 2(n+1), n \in \mathbb{N}; a_n = 4n, n \in \mathbb{N}]$

25 $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n \end{cases}; \qquad \begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = -2a_n \end{cases}.$ $\left[a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n, n \in \mathbb{N}; a_n = (-1)^n \cdot 2^{n+1}, n \in \mathbb{N}\right]$

26 Data la successione: $\begin{cases} a_2 = -1 \\ a_n = \frac{5}{2} a_{n-1} \end{cases}$

a) trova a_0, a_1, a_3, a_4;

b) scrivi la successione in forma analitica. $\left[\text{a)} -\frac{4}{25}; -\frac{2}{5}; -\frac{5}{2}; -\frac{25}{4}; \text{b)}\ a_n = -\left(\frac{5}{2}\right)^{n-2}, n \in \mathbb{N}\right]$

Scrivi in forma ricorsiva le seguenti successioni espresse in forma analitica.

27 $a_n = 3n, n \in \mathbb{N}; \qquad a_n = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}.$ $\left[\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}; \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \end{cases}\right]$

28 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}; \qquad a_n = (-1)^n \cdot 3^n, n \in \mathbb{N}.$ $\left[\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = -\frac{1}{2} a_n \end{cases}; \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = -3a_n \end{cases}\right]$

29 A sequence is defined by $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ for $n \geq 4$. Suppose $a_4 = 20$, $a_5 = 36$, $a_7 = 121$. What is the value of a_1?

(USA *Lehigh University: High School Math Contest*, 2005)

[4]

2. ALCUNI TIPI DI SUCCESSIONI

Teoria a pag. 1570

IN PRATICA
Videolezione 7

Le successioni monotòne

Per ogni successione scrivi i primi dieci termini, rappresentali su una retta orientata e stabilisci se si tratta di una successione crescente, decrescente o costante, oppure crescente in senso lato o decrescente in senso lato.

30 $a_n = 2n$; $\quad a_n = -2n$; $\quad a_n = 2n - 1$.

31 $a_n = 2n + 1$; $\quad a_n = 1 - 2n$; $\quad a_n = (+1)^n$.

32 $a_n = \dfrac{2}{3n}, n > 0$; $\quad a_n = -\dfrac{1}{n}, n > 0$; $\quad a_n = (-1)^{2n}$.

33 **ESERCIZIO GUIDA**

Dimostriamo che la successione $a_n = \dfrac{2n-3}{n}$ è crescente.

Dobbiamo dimostrare che $a_n < a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Risolviamo la disequazione:

$$\frac{2n-3}{n} < \frac{2(n+1)-3}{n+1}.$$

Si ha:

$$\frac{2n-3}{n} < \frac{2n-1}{n+1} \quad \to \quad \frac{2n^2+2n-3n-3}{n(n+1)} < \frac{2n^2-n}{n(n+1)}.$$

Essendo $n > 0$, possiamo eliminare il denominatore e semplificare:

$$2n^2 - n - 3 < 2n^2 - n \quad \to \quad -3 < 0.$$

La disequazione è dunque verificata $\forall n > 0$, pertanto la successione è crescente.

Dimostra che le successioni seguenti sono monotòne.

34 $a_n = \dfrac{n-2}{2n}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

35 $a_n = 2 \cdot 3^n$

36 $a_n = \dfrac{3n+1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

37 $a_n = n - n^2$

38 $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$

39 $a_n = \log_2(1 + 8n)$

40 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

41 $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

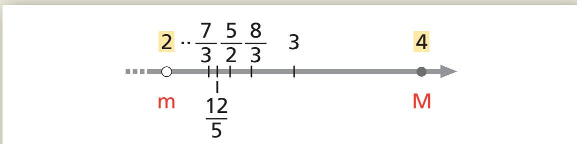
Le successioni limitate e illimitate

42 **ESERCIZIO GUIDA**

Stabiliamo se la successione $a_n = \dfrac{2n}{n-1}$, con $n > 1$, è limitata superiormente, limitata inferiormente, limitata o illimitata.

Scriviamo alcuni elementi della successione e li rappresentiamo su una retta orientata.

$$4, 3, \frac{8}{3}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{7}{3}, \ldots, \frac{2n}{n-1}, \ldots$$



La successione è limitata superiormente, perché tutti i suoi termini risultano minori o uguali a 4. Infatti, la disuguaglianza

$$\frac{2n}{n-1} \leq 4 \quad \rightarrow \quad \frac{2n-4(n-1)}{n-1} \leq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-2n+4}{n-1} \leq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{n-2}{n-1} \geq 0$$

è sempre verificata, essendo $n > 1$.

Essa è anche limitata inferiormente, perché tutti i suoi termini risultano maggiori di 2. Infatti la frazione $\frac{2n}{n-1}$ può essere scritta come $2 \cdot \frac{n}{n-1}$; poiché $\frac{n}{n-1}$ è una frazione impropria, essa è maggiore di 1, quindi risulta $\frac{2n}{n-1} > 2$. Tutti i termini della successione sono maggiori di 2, anche se 2 non fa parte di essi.

Pertanto la successione data è una successione limitata.

Per ogni successione scrivi i primi dieci termini e stabilisci se si tratta di una successione limitata superiormente, limitata inferiormente, limitata o illimitata.

43 $a_n = \frac{3n}{n-1}, \quad n > 1;$ $\quad a_n = \frac{1}{n}, \quad n > 0;$ $\quad a_n = -\frac{1}{n}, \quad n > 0.$

44 $a_n = \frac{2n^2}{n+1};$ $\quad a_n = \frac{n+1}{n^2}, \quad n > 0;$ $\quad a_n = -2n-1.$

45 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n;$ $\quad a_n = 2^n;$ $\quad a_n = 3^n + (-1)^n.$

46 $a_n = \frac{5n}{n+1};$ $\quad a_n = \frac{5n^2}{n+1};$ $\quad a_n = \frac{5n}{n^2+1}.$

47 $a_n = -n^2;$ $\quad a_n = 1 + 2n^2;$ $\quad a_n = \frac{1}{n^3}, \quad n > 0.$

48 $a_n = \sqrt{n};$ $\quad a_n = (-1)^n \cdot \sqrt{n};$ $\quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n > 0.$

49 Dimostra che la successione $a_n = \frac{2^n}{n!}$ è monotòna per $n > 1$ ed è limitata.
(Suggerimento. $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.)

3. IL LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

▶ Teoria a pag. 1571

50 VERO O FALSO?

a) La successione s_n, per la quale $\forall k > 0$, $\exists n_k$ tale che $\forall n > n_k$ si ha $s_n > k$, è convergente. V F

b) La successione s_n, per la quale $\forall k > 0$, $\exists n_k$ tale che $\forall n > n_k$ si ha $|s_n| < k$, è divergente. V F

c) La successione s_n, per la quale $\forall k > 0$, $\exists n_k$ tale che $\forall n > n_k$ si ha $|s_n| > k$, è convergente. V F

d) Una successione limitata è formata da un numero finito di termini. V F

e) Una successione crescente non può essere limitata. V F

$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

51 **ESERCIZIO GUIDA**

Verifichiamo che la successione $a_n = n^2 - 1$ diverge positivamente.

Dobbiamo verificare che $\lim_{n \to +\infty} (n^2 - 1) = +\infty$.

Fissato ad arbitrio un numero $M > 0$, dobbiamo trovare un corrispondente numero $p_M > 0$ per cui risulti:

$$n^2 - 1 > M, \quad \forall n > p_M.$$

Risolviamo la disequazione:

$$n^2 > M + 1.$$

Poiché i due membri sono positivi, possiamo estrarre la radice quadrata:

$$n > \sqrt{M+1}.$$

Se poniamo $p_M = \sqrt{M+1}$, abbiamo trovato che $\forall n > p_M$ risulta $n^2 - 1 > M$, pertanto la successione data diverge positivamente.

Verifica che le seguenti successioni divergono positivamente.

52 $a_n = 3n - 1, \; n \in \mathbb{N}.$

53 $a_n = \frac{n-3}{2}, \; n \in \mathbb{N}.$

54 $a_n = \sqrt{n} + 1, \; n \in \mathbb{N}.$

55 $a_n = 2n^2 - 3, \; n \in \mathbb{N}.$

56 $a_n = 8n^3 - 2, \; n \in \mathbb{N}.$

57 $a_n = 16n^4 + 6, \; n \in \mathbb{N}.$

58 $a_n = 2^{n+1}, \; n \in \mathbb{N}.$

59 $a_n = \frac{n^2 - 1}{n}, \; n \in \mathbb{N} - \{0\}.$

60 $a_n = \frac{1 + n^2}{1 + n}, \; n \in \mathbb{N}.$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

61 **ESERCIZIO GUIDA**

Verifichiamo che la successione $a_n = 3 - n$ diverge negativamente.

Occorre verificare che $\lim_{n \to +\infty} (3 - n) = -\infty$.

Fissato un numero $M > 0$, dobbiamo trovare un corrispondente numero $p_M > 0$ per cui risulti:

$$3 - n < -M, \quad \forall n > p_M.$$

Risolviamo la disequazione:

$$-3 + n > M \quad \rightarrow \quad n > M + 3.$$

Se poniamo $p_M = M + 3$, abbiamo trovato che $\forall n > p_M$ risulta $3 - n < -M$, pertanto la successione data diverge negativamente.

Verifica che le seguenti successioni divergono negativamente.

62 $a_n = 1 - 4n,\ n \in \mathbb{N}.$

63 $a_n = \log_{\frac{1}{2}}(n+2),\ n \in \mathbb{N}.$

64 $a_n = -\frac{1}{2} - 3n,\ n \in \mathbb{N}.$

65 $a_n = 1 - \sqrt{2n+1},\ n \in \mathbb{N}.$

66 $a_n = 1 - 2n^2,\ n \in \mathbb{N}.$

67 $a_n = 2 - 3^n,\ n \in \mathbb{N}.$

68 $a_n = 1 - (5n)^4,\ n \in \mathbb{N}.$

69 $a_n = -\frac{n^2}{2n+1},\ n \in \mathbb{N}.$

70 $a_n = \frac{2-n^2}{1+n},\ n \in \mathbb{N}.$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$

71 **ESERCIZIO GUIDA**

Verifichiamo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{n} = 2.$

Fissato arbitrariamente un numero $\varepsilon > 0$, cerchiamo un corrispondente numero $p_\varepsilon > 0$ per cui risulti:

$$\left|\frac{2n-1}{n} - 2\right| < \varepsilon,\quad \forall n > p_\varepsilon \quad \to \quad \left|\frac{2n-1-2n}{n}\right| < \varepsilon \quad \to \quad \left|-\frac{1}{n}\right| < \varepsilon.$$

Essendo $n > 0$, $\left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$, quindi la disequazione è equivalente a: $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Passiamo ai reciproci in entrambi i membri, cambiando il verso della disuguaglianza: $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Se poniamo $p_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$, abbiamo verificato che $\forall n > p_\varepsilon$ risulta $\left|\frac{2n-1}{n} - 2\right| < \varepsilon$.

Verifica i seguenti limiti.

72 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} + 3\right) = 3$

73 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n} = 1$

74 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$

75 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3n^2+10} = 0$

76 $\lim_{n\to+\infty} 4^{1-n^2} = 0$

77 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right) = 1$

78 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\log_2 n} = 0$

79 $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{3n-1} = \frac{2}{3}$

80 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n^2+1} = 0$

$\lim_{n\to+\infty} a_n$ non esiste

Spiega perché le seguenti successioni non ammettono limite.

81 $a_n = 10 - 2\cdot(-1)^n,\qquad n \in \mathbb{N}.$

82 $a_n = \frac{1}{2} + 4\cdot(-1)^n,\qquad n \in \mathbb{N}.$

83 $a_n = \frac{n^2-1}{n^2}(-1)^n,\qquad n \in \mathbb{N} - \{0\}.$

84 $a_n = \frac{n-1}{n+1}(-1)^n,\qquad n \in \mathbb{N}.$

85 $a_n = \frac{1-n^2}{2n+1}(-1)^n,\qquad n \in \mathbb{N}.$

86 $a_n = 3^n(-1)^{3n},\qquad n \in \mathbb{N}.$

4. I TEOREMI SUI LIMITI DELLE SUCCESSIONI

▶ Teoria a pag. 1574

Il calcolo dei limiti di successioni

87 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\lim_{n\to+\infty}\frac{1-n^2}{2n^2}$.

Poiché stiamo calcolando il limite per $n\to+\infty$, possiamo considerare $n\neq 0$; quindi, raccogliendo n^2 al numeratore, abbiamo:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-n^2}{2n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n^2}\left(\frac{1}{n^2}-1\right)}{2\cancel{n^2}}=-\frac{1}{2}.$$

Osservazione. In analogia a quanto visto per il calcolo del limite per $x\to+\infty$ delle funzioni fratte, si ricava la seguente regola di calcolo del limite per $n\to+\infty$ del rapporto di due polinomi in n.

Detti g_N e g_D i gradi del numeratore e del denominatore:

- se $g_N > g_D$, il limite è più o meno infinito, con segno concorde con il segno del rapporto fra i coefficienti dei termini di grado massimo del numeratore e del denominatore;
- se $g_N < g_D$, il limite è uguale a 0;
- se $g_N = g_D$, il limite è uguale al rapporto fra i coefficienti dei termini di grado massimo del numeratore e del denominatore.

Calcola i seguenti limiti.

88 $\lim_{n\to+\infty}(1+n)$ $[+\infty]$

89 $\lim_{n\to+\infty}(2-3n)$ $[-\infty]$

90 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2+n^2}$ $[+\infty]$

91 $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+4}-4)$ $[+\infty]$

92 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1-n}{n^2}$ $[0]$

93 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{1-n}$ $[-\infty]$

94 $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\cdot\sqrt{n}$ [non esiste]

95 $\lim_{n\to+\infty}\frac{3-n^3}{3n^3}$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

96 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1-2n^2}{n^2+1}$ $[-2]$

97 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{2n-3}{3n+2}}$ $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$

98 $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+5}{3n}$ $[+\infty]$

99 $\lim_{n\to+\infty}(-2)^n$ [non esiste]

100 $\lim_{n\to+\infty}\frac{5-n^3}{1+n}$ $[-\infty]$

101 $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})$ $[0]$

102 $\lim_{n\to+\infty}(n-\sqrt{n})$ $[+\infty]$

103 $\lim_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-n\right)$ $[-\infty]$

104 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^5+3}{9+n^2+2n^5}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

105 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2n+1}$ $[+\infty]$

106 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-2n}{3n^3}$ $[0]$

107 $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{3n^2+1}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

108 $\lim_{n\to+\infty}(2^n+5)$ $[+\infty]$

109 $\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{3}{4}\right]$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

110 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos n}{n}$ $[0]$

111 $\lim_{n\to+\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{n}$ $[0]$

112 $\lim_{n\to+\infty}\log_{10}\left(\frac{n^4+3}{2+n^4}\right)$ $[0]$

113 $\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{n^2+5}{4-n^2}}$ $[e^{-1}]$

114 $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\cdot n$ [non esiste]

115 $\lim_{n\to+\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi n^3-1}{4+4n^3}$ $[1]$

116 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2n+1} \cdot (-1)^n$ [non esiste]

117 $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{4n^3-2}{5n+n^3}}$ [2]

118 $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^3}{n^4+1}$ [0]

119 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2n-1} \cdot (-1)^n$ [non esiste]

120 $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$ $[e]$

121 $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n-3}\right)^{2n}$ $[e^8]$

122 $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n}$ [1]

123 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2+1}{n+1} \cos\frac{1}{n}$ $[+\infty]$

124 $\lim\limits_{n \to +\infty} \log_2\left(\frac{n^2+4}{n^3}\right)$ $[-\infty]$

125 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{4n^2+1}-2n}{\sqrt{n^2-1}-n}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

126 $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^n$ $\left[\frac{1}{e^2}\right]$

127 $\lim\limits_{n \to +\infty} n \operatorname{sen} \frac{5n+2}{n^2}$ [5]

128 $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln^2\left(\frac{n+1}{n}\right)$ [0]

129 $\lim\limits_{n \to +\infty} (3n+2)\left(\sqrt[n^2]{e^{n-1}}-1\right)$ [3]

130 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{(n-1)!} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n!}$ $[-1]$

131 $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3n}{4n^3-5n}-\frac{7n^2-n}{8n^2+9}\right)$ $\left[-\frac{7}{8}\right]$

132 $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n-6n^2}{11n-3n^2}}$ $[\sqrt{2}]$

133 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n n^2}{4-3n^2}$ [non esiste]

134 $\lim\limits_{n \to +\infty} (\pi a_n + \sqrt{2}\, b_n)$; $a_n = \frac{6n-4}{3n}$, $b_n = \ln\frac{8n^3-5n^2}{4n^3}$. $[2\pi + \sqrt{2}\ln 2]$

135 $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n + b_n)$; $a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$, $b_n = (-1)^n$. [non esiste]

ESERCIZI VARI I limiti delle successioni

TEST

136 La successione $a_n = (-1)^n + n$:

- A non ha limite.
- B è divergente.
- C è oscillante.
- D assume valori positivi e negativi.

(*Università di Trento, Facoltà di Ingegneria, Test di autovalutazione*, 1998)

137 La successione $a_n = \left(\frac{n}{1+n}\right)^n$:

- A tende a 1.
- B tende a e^{-1}.
- C è divergente.
- D tende a $-e$.

(*Università di Trento, Facoltà di Ingegneria, Test di autovalutazione*, 1998)

138 La successione $a_n = \frac{3^n-5n}{2^n-n^2}$:

- A è infinitesima.
- B tende a $+\infty$.
- C tende a $-\infty$.
- D non esiste il limite per n che tende a $+\infty$.

(*Università di Trento, Facoltà di Ingegneria, Test di autovalutazione*, 1998)

139 Considerata la successione $a_n = \frac{n!}{10^{2n}}$, allora:

- A $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.
- B $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{e}{10}$.
- C non esiste $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.
- D $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

(*Università di Trento, Facoltà di Architettura, Test di Analisi*, 2005)

140 $\lim_{n \to +\infty} \frac{n \sin(n\pi)}{n+1}$

A $= -1$.

B non esiste.

C $= 0$.

D $= 1$.

(*Università di Trento, Facoltà di Ingegneria, Test di Analisi*, 1999)

141 Considera la successione $a_n = \frac{3 - 2^{n+1}}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Calcola a_0, a_1, a_2.

b) Dimostra che la successione è decrescente.

c) Calcola $\lim_{n \to +\infty} a_n$.

$\left[\text{a) } \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}; \text{ c) } -\infty\right]$

142 Data la successione il cui termine generale è

$$a_n = \frac{2-3n}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}:$$

a) dimostra che è monotòna decrescente;

b) calcola il $\lim_{n \to +\infty} a_n$;

c) verifica il limite mediante la definizione.

[b) -3]

143 Enuncia il teorema del limite di una successione monotòna e applicalo per stabilire se la successione $a_n = \frac{n+1}{n} + \left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^n, n \in \mathbb{N} - \{0\}$, è convergente, divergente o indeterminata.

144 a) Calcola le lunghezze l_n e L_n del lato del generico poligono regolare di n lati inscritto e circoscritto in una circonferenza di raggio r.

b) Verifica che il limite per $n \to +\infty$ dei perimetri è la lunghezza della circonferenza e che quello delle aree è la superficie del cerchio.

$\left[\text{a) } l_n = 2r \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}; L_n = 2r \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right]$

145 **TEST** Sia a_n una successione di numeri reali. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?

A Se $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to L$, allora $L > 0$.

B Se $\{a_n\}$ non è limitata inferiormente, allora diverge.

C Se $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to L$, allora $L \geq 0$.

D Se $\{a_n\}$ è non decrescente e non limitata superiormente, allora converge.

(USA *University of Houston Mathematics Contest*, 2009)

Limiti e parametri

Discuti il valore del limite al variare del parametro k.

146 $\lim_{n \to +\infty} \frac{(k-4)n^4 + n + 2}{2n - (k+2)n^3}$ [se $k = 4$, 0; se $k \leq -2 \vee k > 4$, $-\infty$; se $-2 < k < 4$, $+\infty$]

147 $\lim_{n \to +\infty} \frac{kn^2 + n}{-2n^2 + 3}$ $\left[\forall k \in \mathbb{R}: -\frac{k}{2}\right]$

148 $\lim_{n \to +\infty} \frac{(k-1)n^3 + 2n^2}{4n^2 + 3}$ $\left[\text{se } k = 1, \frac{1}{2}; \text{ se } k > 1, +\infty; \text{ se } k < 1, -\infty\right]$

149 $\lim_{n \to +\infty} \frac{kn^3 - 3n}{5 + (2k-1)n^2}$ $\left[\text{se } k = 0, 0; \text{ se } k < 0 \vee k \geq \frac{1}{2}, +\infty; \text{ se } 0 < k < \frac{1}{2}, -\infty\right]$

150 $\lim_{n \to +\infty} \frac{(k+2)n^3 + 2n^2}{kn^2 - 1}$ [se $k = -2$, -1; se $k < -2 \vee k > 0$, $+\infty$; se $-2 < k \leq 0$, $-\infty$]

151 $\lim_{n \to +\infty} 2^{\frac{kn}{2+kn^2}}$ [$\forall k \in \mathbb{R}$, 1]

152 $\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{kn^2}{kn-1}}$ [se $k = 0$, 1; se $k \neq 0$, $+\infty$]

Calcola il limite delle seguenti successioni nei casi indicati.

153 $a_n = 5^n(\log_{10} k)^n$:

a) $k = \sqrt{3}$; b) $k = \frac{4}{5}$; c) $k = 10^{-\frac{1}{5}}$. [a) $+\infty$; b) 0; c) non esiste]

154 $a_n = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{k^n}{1+e^n}$:

a) $k = -3$; b) $k = -2$; c) $k = e$. [a) non esiste; b) 0; c) 1]

155 Calcola per $k = 1, 2, 3$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2-n^2}{4n-(3-k)n^k},$$

spiegando le regole che utilizzi. [$-\infty$; 1; $-\infty$]

5. I LIMITI DELLE PROGRESSIONI

Teoria a pag. 1576

Le progressioni aritmetiche e le progressioni geometriche

156 **ESERCIZIO GUIDA**

Stabiliamo se le seguenti successioni, definite per $n \in \mathbb{N}$, sono progressioni aritmetiche o geometriche:

$$a_n = 3n - 2, \quad b_n = 4^{2n+3}, \quad c_n = n^3.$$

- a_n è una progressione aritmetica, perché:

$$a_n - a_{n-1} = (3n-2) - [3(n-1) - 2] = 3,$$

ossia la differenza fra un termine qualsiasi e il suo precedente è costante. La ragione è $d = 3$.

- b è una progressione geometrica, perché:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{4^{2n+3}}{4^{2(n-1)+3}} = \frac{4^{2n+3}}{4^{2n+1}} = 4^{(2n+3)-(2n+1)} = 4^2,$$

ossia il quoziente fra un termine qualsiasi e il suo precedente è costante. La ragione è $q = 4^2$.

- c_n non è né una progressione aritmetica né una geometrica, perché:

$$c_n - c_{n+1} = n^3 - (n-1)^3 = \cancel{n^3} - \cancel{n^3} + 3n^2 - 3n + 1 \quad \text{e} \quad \frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{n^3}{(n-1)^3} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^3,$$

ossia sia la differenza, sia il quoziente fra un termine e il suo precedente dipendono da n.

Stabilisci se le seguenti successioni, definite per $n \in \mathbb{N}$, sono progressioni aritmetiche o geometriche e indica la ragione.

157 $a_n = 6n + 1$ [arit., $d = 6$]

158 $a_n = (-8)^{-n}$ $\left[\text{geom.}, q = -\frac{1}{8}\right]$

159 $a_n = \frac{n}{n+1}$ [non è una progr.]

160 $a_n = \frac{-2n+3}{5}$ $\left[\text{arit.}, d = \frac{4}{5}\right]$

161 $a_n = 1 + \log_2 3^{n+1}$ [arit., $d = \log_2 3$]

162 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \cdot 3^{-n+1}$ $\left[\text{geom.}, q = \frac{1}{12}\right]$

163 $a_n = 2^{n-3} + 5^n$ [non è una progr.]

164 $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ [non è una progr.]

Determina se le seguenti successioni sono progressioni aritmetiche o geometriche e, nel caso lo siano, calcola la ragione.

165 13, 16, 19, 22, 25, 28, … [progressione aritmetica, $d = 3$]

166 3, 12, 48, 192, 768, … [progressione geometrica, $q = 4$]

167 3, 7, 11, 16, 21, 26, … [non è una progressione]

168 100, 50, 25, 12,5, 6,25, 3,125, … [progressione geometrica, $q = 0{,}5$]

169 20, 18, 16, 14, 12, 10, … [progressione aritmetica, $d = -2$]

Il calcolo dei termini di una progressione

170 **ESERCIZIO GUIDA**

a) Calcoliamo il sesto termine, a_6, di una progressione aritmetica di ragione $d = 4$ il cui primo termine è $a_1 = 5$.

b) Calcoliamo il sesto termine, a_6, di una progressione geometrica di ragione $q = 2$ il cui primo termine è $a_1 = 5$.

a) Utilizziamo la formula:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d.$$

Essendo $n = 6$, $a_1 = 5$ e $d = 4$, otteniamo:

$$a_6 = 5 + (6-1)\cdot 4 = 25.$$

La progressione è la seguente:

5, 9, 13, 17, 21, 25, …

b) Utilizziamo la formula:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Essendo $n = 6$, $a_1 = 5$ e $q = 2$, otteniamo:

$$a_6 = 5 \cdot 2^{6-1} = 5 \cdot 32 = 160.$$

La progressione è la seguente:

5, 10, 20, 40, 80, 160, …

Date le seguenti informazioni relative a progressioni, in cui la ragione è indicata con d se la progressione è aritmetica o con q se è geometrica, determina ciò che è richiesto.

171 $a_1 = 0$ e $d = 5$, calcola a_8. [35]

172 $a_1 = 256$ e $q = \frac{1}{2}$, calcola a_8. [2]

173 $a_1 = \frac{31}{2}$ e $d = -\frac{1}{2}$, calcola a_5. $\left[\frac{27}{2}\right]$

174 $a_1 = -9$ e $q = -\frac{1}{2}$, calcola a_5. $\left[-\frac{9}{16}\right]$

175 $a_5 = -8$ e $a_1 = 28$, calcola d. [-9]

176 $a_6 = \frac{5}{243}$ e $a_1 = 5$, calcola q. $\left[\frac{1}{3}\right]$

177 $a_4 = -192$ e $q = 2$, calcola a_1. [-24]

178 $a_1 = -10$, $a_n = -43$ e $d = -11$, calcola n. [4]

179 $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_n = \frac{1}{36}$ e $q = \frac{1}{3}$, calcola n. [4]

La somma dei termini consecutivi di una progressione

180 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo la somma:

a) dei primi sei multipli di 5 diversi da 0; b) delle prime sei potenze di 3 con esponente diverso da 0.

a) I numeri di cui vogliamo conoscere la somma sono i primi sei termini della progressione aritmetica di primo termine 5 e ragione 5: 5, 10, 15, 20, 25, 30.

Applichiamo la formula $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$. Sostituendo i dati, $n = 6$, $a_1 = 5$, $a_6 = 30$, otteniamo:

$S_6 = 6 \cdot \frac{5 + 30}{2} = 105.$

b) I numeri di cui vogliamo calcolare la somma sono i primi sei termini della progressione geometrica di ragione 3 e primo termine 3:

3, 9, 27, 81, 243, 729.

Usiamo la formula $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Sostituendo $n = 6$, $a_1 = 3$, $q = 3$, otteniamo:

$S_6 = 3 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 3 \cdot \frac{729 - 1}{2} = 3 \cdot \frac{728}{2} = 1092.$

181 Calcola la somma dei primi dieci termini di una progressione aritmetica di ragione $d = 3$, il cui primo estremo è $a_1 = 5$. [185]

182 Calcola la somma dei primi otto multipli di 4 diversi da 0. [144]

183 Calcola la somma dei primi cento numeri naturali diversi da 0. Quanto vale la somma dei primi n numeri naturali diversi da 0? $\left[5050; \frac{n \cdot (n+1)}{2}\right]$

184 Calcola la somma dei primi dieci numeri pari diversi da 0. Quanto vale la somma dei primi n numeri pari diversi da 0? $[110; n \cdot (n + 1)]$

185 Calcola la somma delle prime dieci potenze di 2 con esponente diverso da 0. [2046]

186 Determina la somma dei primi sei termini di una progressione geometrica, di ragione $q = -\frac{1}{2}$, il cui primo termine è $a_1 = \frac{3}{4}$. $\left[\frac{63}{128}\right]$

187 Determina il primo termine di una progressione geometrica di ragione $q = 3$, sapendo che la somma dei primi sei termini è 91. $\left[\frac{1}{4}\right]$

188 Calcola quanti sono i termini di una progressione geometrica di ragione $q = 2$, sapendo che la loro somma è 51 e che il primo termine è $\frac{1}{5}$. [8]

189 Trova quattro numeri in progressione geometrica crescente, sapendo che la loro somma è 160 e che la somma tra i primi due è 16. [4; 12; 36; 108]

I limiti delle progressioni

Stabilisci se le seguenti successioni, definite per $n \in \mathbb{N}$, sono progressioni aritmetiche o geometriche e calcolane i limiti.

190 $a_n = 3^n$ [geometrica, $+\infty$]

191 $a_n = 2n + 1$ [aritmetica, $+\infty$]

192 $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ [geometrica, 0]

193 $a_n = \frac{4 - 3n}{7}$ [aritmetica, $-\infty$]

194 $a_n = 3^{1-n} \cdot 5^n$ [geometrica, $+\infty$]

195 $a_n = 2 - \log_3 2^{n-1}$ [aritmetica, $-\infty$]

Stabilisci quali di queste successioni sono progressioni aritmetiche e quali geometriche. Trova la ragione e scrivi il termine generale a_n in funzione di n. Definisci poi le successioni in modo ricorsivo e calcolane il limite.

196 $2, \quad 0, \quad -2, \quad -4, \quad -6, \ \ldots$ $\left[\text{arit.}, d=-2, a_n = 4-2n, \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \end{cases}, -\infty\right]$

197 $\frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{4}, \quad \frac{9}{8}, \quad -\frac{27}{16}, \quad \frac{81}{32}, \ \ldots$ $\left[\text{geom.}, q=-\frac{3}{2}, a_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}, \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = -\frac{3}{2}a_n \end{cases}, \nexists\right]$

198 $2a, \quad a, \quad \frac{a}{2}, \quad \frac{a}{4}, \ \ldots$ (con $a \in \mathbb{R}$) $\left[\text{geom.}, q=\frac{1}{2}, a_n = 2a\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \begin{cases} a_1 = 2a \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \end{cases}, 0\right]$

199 $2^x, \quad 2^{x-3}, \quad 2^{x-6}, \ \ldots$ (con $x \in \mathbb{R}$) $\left[\text{geom.}, q=2^{-3}, a_n = 2^{-3n+x+3}, \begin{cases} a_1 = 2^x \\ a_{n+1} = \frac{1}{8}a_n \end{cases}, 0\right]$

200 $\sqrt{2}, \quad -2, \quad 2\sqrt{2}, \quad -4, \ \ldots$ $\left[\text{geom.}, q=-\sqrt{2}, a_n = (-1)^{n-1}\cdot\sqrt{2^n}, \begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = -\sqrt{2}\,a_n \end{cases}, \nexists\right]$

201 $\log_2 5, \quad \log_2 15, \quad \log_2 45, \ \ldots$ $\left[\text{arit.}, d=\log_2 3, a_n = \log_2(5\cdot 3^{n-1}), \begin{cases} a_1 = \log_2 5 \\ a_{n+1} = a_n + \log_2 3 \end{cases}, +\infty\right]$

ESERCIZI VARI Le progressioni

202 Data la progressione geometrica con $a_1 = 2$ e ragione $\frac{3}{2}$, determina a_n e calcola il limite per $n \to +\infty$. $\left[a_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}, +\infty\right]$

203 È data la successione definita da:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{5}a_n \end{cases}$$

Verifica che è una progressione geometrica, determina il termine a_n in funzione di n e calcola il limite per $n \to +\infty$. $\left[a_n = 2\left(\frac{9}{5}\right)^{n-1}, +\infty\right]$

204 Stabilisci se è vero o falso che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = 0. \quad \left[\text{falso}; \frac{1}{2}\right]$$

Calcola i seguenti limiti.

205 $$\lim_{n\to+\infty} \frac{2+4+6+\ldots+2n}{4n^2} \quad \left[\frac{1}{4}\right]$$

206 $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}}{1+\frac{1}{12}+\frac{1}{144}+\ldots+\frac{1}{12^n}} \quad \left[\frac{11}{9}\right]$$

207 If $S_n = \frac{1}{n}\sqrt{1+2+3+\ldots+n}$, find $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

(IR *Leaving Certificate Examination*, Higher Level, 1995) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

208 Sono date:

- una progressione geometrica in cui $a_1 = -128$ e $a_4 = 16$;
- una progressione aritmetica in cui $a_1 = 3$ e $a_6 = \frac{27}{2}$.

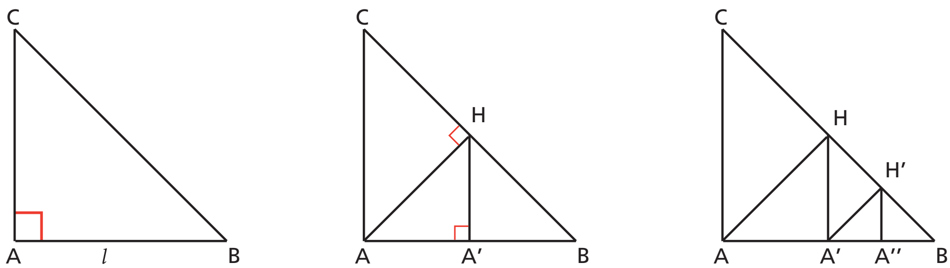
Per ognuna determina:

a) la ragione e il termine a_n;

b) il limite per $n \to +\infty$.

$\left[\text{a) } q = -\frac{1}{2}, a_n = -128\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1};\right.$ $\left. d = \frac{21}{10}, a_n = \frac{21n+9}{10}; \text{ b) } 0; +\infty\right]$

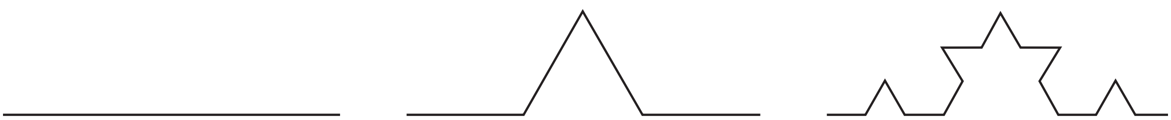
209 In un triangolo ABC, rettangolo in A e isoscele, di cateto l, traccia l'altezza AH relativa all'ipotenusa. Da H manda la perpendicolare al cateto AB fino a incontrarlo in A'. Ottieni il triangolo rettangolo e isoscele $A'HB$. Ripeti il procedimento.



a) Determina la successione delle misure delle altezze relative alle ipotenuse dei triangoli.
b) Trova il termine a_n della successione e calcola $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

$$\left[\text{b) } a_n = \frac{\sqrt{2}}{2} l \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}; 0\right]$$

210 Dato un segmento di misura a, dividi il segmento in tre parti congruenti e sostituisci quella centrale con due segmenti in modo che questi ultimi formino con il segmento eliminato un triangolo equilatero. Ottieni così una spezzata di quattro segmenti consecutivi: a ognuno di questi applica lo stesso procedimento e così via.



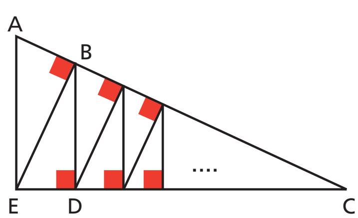
a) Esprimi la successione delle misure delle spezzate indicando se si tratta di una progressione aritmetica o geometrica.

b) Calcola la misura della somma delle lunghezze delle prime cinque spezzate.

$$\left[\text{a) } a_n = a\left(\frac{4}{3}\right)^n, n \in \mathbb{N}; \text{ b) } \frac{781}{81}a\right]$$

211 In una successione di infiniti segmenti ciascuno è doppio del successivo. Se la lunghezza del primo segmento in una arbitraria unità è l, quanto vale la somma delle lunghezze di tutti i segmenti? [$2l$]

212 An infinite series of similar right triangles converges to point C. If $\overline{AE} = 16$, and $\overline{ED} = 8$, what is the sum of all the vertical segments ($\overline{AE} + \overline{BD} + \ldots$)?



(USA *Rice University Mathematics Tournament*, 2005)

[32]

213 A geometric sequence is one where the ratio between each two consecutive terms is constant (for example, 3, 6, 12, 24, ...). The fifth term of a geometric series is 5!, and the sixth term is 6!. What is the fourth term? (Suggestion. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.)

(USA *Rice University Mathematics Tournament*, General Test, 2006)

[20]

6. CHE COS'È UNA SERIE NUMERICA

Teoria a pag. 1579

214 Fra le seguenti scritture, indica quelle che rappresentano delle serie.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \cos n$; b) $\sum_{n=2}^{23} \frac{3n^2}{n-1}$; c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{1-n^2}$; d) $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n}$.

215 Spiega perché le seguenti scritture non rappresentano serie numeriche.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\sqrt{\cos n}$; b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n-1}$; c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-n)$; d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arcsen} n$.

Per ogni serie scrivi la ridotta di ordine 3.

216 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{n+1}$; $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2n+1}$.

217 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+2}$; $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n!}$.

218 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$; $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}$.

219 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{3^{n-1}}$; $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n+1}$.

220 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo la seguente serie utilizzando il simbolo di sommatoria:

$$2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}+\ldots$$

Procediamo in due tappe:

a) cerchiamo l'espressione di un termine qualsiasi della somma in funzione dell'indice n;
b) determiniamo il valore iniziale di n.

a) I termini della serie sono frazioni i cui denominatori rappresentano la successione dei numeri naturali, mentre ogni numeratore è sempre il successivo del denominatore. Possiamo pertanto scrivere:

$$a_n = \frac{n+1}{n}.$$

b) Il primo termine della serie è 2, che si ottiene assegnando a n in a_n il valore 1.

La scrittura cercata è pertanto $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n}$.

Osservazione. Tale scrittura non è univocamente determinata. Infatti, si può anche notare che i numeratori costituiscono la successione dei numeri naturali a partire da 2, mentre ogni denominatore è il precedente del numeratore.

Si può quindi scrivere: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n-1}$.

Scrivi le seguenti serie utilizzando il simbolo di sommatoria.

221 $1+\frac{2}{2}+\frac{4}{3}+\frac{8}{4}+\frac{16}{5}+\frac{32}{6}+\ldots$ $\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n+1}\right]$

222 $2+\frac{2}{2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots$ $\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n!}\right]$

223 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots$ $\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$

224 $-1+2-3+4-5+6+\ldots$ $\left[\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n\right]$

225 $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\frac{5}{11}+\frac{6}{13}+\dots$ $\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2n+1}\right]$

226 $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\frac{7}{36}+\frac{8}{49}+\dots$ $\left[\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n+1}{n^2}\right]$

227 $1+\frac{2}{4}+\frac{5}{7}+\frac{10}{10}+\frac{17}{13}+\frac{26}{16}+\dots$ $\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+1}{3n+1}\right]$

228 $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{9}+\frac{4}{27}+\frac{5}{81}+\frac{6}{243}+\dots$ $\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}\right]$

229 $\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{6}}+\frac{5}{\sqrt{9}}+\frac{6}{\sqrt{12}}+\frac{7}{\sqrt{15}}+\frac{8}{\sqrt{18}}+\dots$ $\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{\sqrt{3n}}\right]$

230 $2+\frac{16}{3}+\frac{36}{4}+\frac{64}{5}+\frac{100}{6}+\frac{144}{7}+\dots$ $\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)^2}{n+1}\right]$

Per ogni coppia, indica se le seguenti scritture rappresentano la stessa serie.

231 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3(n+1)}{n^2+1};\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n}{n^2-2n+2}.$ [V]

232 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n}{(n+1)^2};\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{5n}{-2n+1}.$ [F]

233 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{n^2-1};\ \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)\sqrt{n}}{n(n-2)}.$ [V]

234 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{n^2+n};\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n+1}-\frac{1}{n}\right).$ [V]

235 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n+1};\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3^{n+1}}{n+2}.$ [F]

236 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3n^2+1}{n^2+1};\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3(n+1)^2}{n^2}.$ [F]

COMPLETA **le seguenti uguaglianze.**

237 $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n+1}{n-2}=\sum_{n=\dots}^{+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)$

238 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n-1}+n\right)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\dots\dots\dots}{2n-3}$

239 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n-1}}{\dots\dots\dots}$

La ridotta di una serie e il principio di induzione

240 **ESERCIZIO GUIDA**

Dimostriamo, applicando il principio di induzione, che:

$$\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=3+7+11+15+\dots+(4n-1)=n(2n+1),\quad n\in\mathbb{N}-\{0\}.$$

Per $n=1$ la proposizione è vera. Infatti, il primo membro è 3 e il secondo membro è $1\cdot(2+1)=3$.

Supponiamo ora che la proposizione sia vera per n, dimostriamo allora che è vera anche per $n+1$.

Il primo membro per $n+1$ diventa:

$$3+7+11+15+\dots+(4n-1)+[4(n+1)-1]=$$

$$=n(2n+1)+[4n+4-1]=2n^2+n+4n+3=2n^2+5n+3.$$

Il secondo membro per $n+1$ è:

$$(n+1)[2(n+1)+1]=(n+1)(2n+3)=2n^2+5n+3.$$

La proposizione è quindi vera per $n+1$.

Attraverso il principio di induzione dimostra che $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ sono vere le seguenti uguaglianze.

241 $4 + 8 + 12 + \ldots + 4n = 2n(n+1)$

242 $7 + 12 + 17 + \ldots + (5n+2) = \dfrac{n(5n+9)}{2}$

243 $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

244 $1 + 3 + 9 + \ldots + 3^{n-1} = \dfrac{3^n - 1}{2}$

245 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{4^n - 1}{3\cdot 4^n}$

246 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (4+3k) = \frac{n}{2}(3n+11)$

247 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$

7. SERIE CONVERGENTI, DIVERGENTI, INDETERMINATE

Teoria a pag. 1581

Le serie convergenti

248 **ESERCIZIO GUIDA**

Applicando la definizione, verifichiamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - n}$ è convergente e ne determiniamo la somma.

Dobbiamo verificare che il limite della successione s_n delle ridotte per $n \to +\infty$ è un numero finito, ossia che $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$.

Riscriviamo il termine generale $a_n = \dfrac{1}{n^2 - n} = \dfrac{1}{n(n-1)}$ e calcoliamo s_n:

$$s_n = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \ldots + a_n = \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 4} + \frac{1}{6\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)}.$$

Poiché non siamo in grado di calcolare il limite di questa espressione, cerchiamo di scrivere il termine generico a_n come somma algebrica di due frazioni, ovvero cerchiamo due numeri A e B tali che:

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1}.$$

Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} = \frac{A(n-1) + Bn}{n(n-1)} = \frac{(A+B)n - A}{n(n-1)}.$$

Per il principio di identità dei polinomi, deve essere:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A = 1 \end{cases} \quad \to \quad A = -1, \quad B = 1.$$

Riscriviamo a_n e la serie assegnata:

$$a_n = \frac{-1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad \to \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

La ridotta s_n assume la forma:

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Siamo in grado ora di calcolare il limite di s_n per $n \to +\infty$, ossia $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1$.

Concludiamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - n}$ è convergente e la sua somma vale 1.

Osservazione. Una serie del tipo $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_n - a_{n+1}) + \ldots$ è detta **telescopica**. Per essa vale: $s_n = a_1 - a_{n+1}$ e $\lim_{n\to+\infty} s_n = a_1 - \lim_{n\to+\infty} a_{n+1}$.

Applicando la definizione, verifica che le seguenti serie convergono e determina la somma.

249 $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2-4n+4}-\frac{1}{n^2-2n+1}\right)$ [1]

250 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ [1]

251 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2+4n}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

252 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

253 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ [1]

254 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(2^{\frac{1}{n-1}}-2^{\frac{1}{n}}\right)$ [1]

255 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6n+3}{n^2(n+1)^2}$ [3]

256 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n+1}{n^3-n}$ [1]

257 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\operatorname{sen} n\pi$ [0]

258 Show that $\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}=\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$.

Hence show that $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(r+2)(r+3)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}$ and find the sum to infinity of this series.

(UK *Manchester Metropolitan University: Centre for Mathematics Education*, Question Bank)

$\left[\frac{1}{3}\right]$

Le serie divergenti

259 **ESERCIZIO GUIDA**

Applicando la definizione, verifichiamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{12n+25}{20}$ è divergente.

Scriviamo la serie in forma estesa:

$$\frac{37}{20}+\frac{49}{20}+\frac{61}{20}+\frac{73}{20}+\ldots+\frac{12n+25}{20}+\ldots$$

Osserviamo che da ogni termine possiamo ottenere il successivo sommando $\frac{12}{20}$, ovvero $\frac{3}{5}$.

Gli addendi della serie formano una progressione aritmetica di ragione $\frac{3}{5}$, aventi come primo elemento $\frac{37}{20}$.

Pertanto, possiamo calcolare la ridotta s_n ricordando che, se a_n è una progressione aritmetica, vale:

$$s_n = n\frac{a_1+a_n}{2}.$$

Poiché $a_1 = \frac{37}{20}$ e $a_n = \frac{12n+25}{20}$, otteniamo:

$$s_n = \frac{n}{2}\left(\frac{37}{20}+\frac{12n+25}{20}\right)=\frac{n}{2}\left(\frac{31}{10}+\frac{3}{5}n\right)=\frac{31}{20}n+\frac{3}{10}n^2.$$

Calcolando infine $\lim_{n\to+\infty} s_n$, possiamo stabilire il carattere della serie.

Poiché $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{31}{20}n+\frac{3}{10}n^2\right)=+\infty$, la serie diverge positivamente.

Applicando la definizione, verifica che le seguenti serie sono divergenti.

260 $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-n)$

261 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{5}$

262 $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(5n-\frac{3}{2}\pi\right)$

263 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2+n}{2}$

264 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5n^2+n}{n^2}-\frac{1}{n}\right)$

265 $\sum_{n=0}^{+\infty}\cos^2(n\pi)$

266 $\sum_{n=1}^{+\infty}[(n+1)^2-n(n+2)]$

267 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1-2n^2}{1+\sqrt{2}\,n}$

268 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

Le serie indeterminate

269 ESERCIZIO GUIDA

Applicando la definizione, verifichiamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{sen}\left(\pi\cdot\frac{2n+1}{2}\right)$ è indeterminata.

Riscriviamo la serie nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{sen}\left(\pi\cdot\frac{2n+1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=$$

$$=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+3\pi\right)+\ldots=-1+1-1+\ldots,$$

da cui $s_1=-1$, $s_2=0$, $s_3=-1$, $s_4=0,\ldots$

Le ridotte assumono valore -1 o 0 a seconda che n sia dispari o pari.
Pertanto, $\lim_{n\to+\infty}s_n$ non esiste e la serie è indeterminata.

Applicando la definizione, verifica che le seguenti serie sono indeterminate.

270 $\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(n\pi)$

271 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3}$

272 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\cos^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right]$

273 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cos(2n\pi)$

Stabilisci se le seguenti serie sono convergenti, divergenti oppure indeterminate. Se sono convergenti, determina la loro somma.

274 $\sum_{n=1}^{+\infty}n\cos\frac{\pi}{3}$ [divergente]

275 $\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ [indeterminata]

276 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$ $\left[\text{convergente; }\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

277 $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{4}{3}\right)^n$ [divergente]

278 $\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{tg}(n\pi)$ [convergente; 0]

279 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{14+3n}{6}$ [divergente]

Le serie geometriche

280 ESERCIZIO GUIDA

Studiamo la seguente serie geometrica. Se la serie è convergente, calcoliamo la sua somma.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n.$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = \frac{3}{7}$. Poiché $-1 < q < 1$, la serie converge.

Calcoliamo la somma $s = \frac{1}{1-q}$:

$$s = \frac{1}{1-\frac{3}{7}} = \frac{7}{4}.$$

Studia le seguenti serie, verificando che si tratta di serie geometriche. Se la serie è convergente, calcola la sua somma.

281 $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ $\left[\text{convergente; } \frac{5}{2}\right]$

282 $\sum_{n=0}^{+\infty} 10^{-n}$ $\left[\text{convergente; } \frac{10}{9}\right]$

283 $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^{2n}$ $\left[\text{convergente; } \frac{49}{45}\right]$

284 $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{8}{5}\right)^n$ [divergente]

285 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}}{3^n}$ [divergente]

286 $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)^4$ $\left[\text{convergente; } \frac{16}{15}\right]$

287 $\sum_{n=0}^{+\infty}(3-\sqrt{8})^n$ $\left[\text{convergente; } \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right]$

288 $\sum_{n=0}^{+\infty}(4-\sqrt{8})^n$ [divergente]

289 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-10)^n}{6^n}$ [indeterminata]

290 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-3)^{3n}}{2^{2n}}$ [indeterminata]

291 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo per quali valori reali di x la serie geometrica $\sum_{n=1}^{+\infty}(x^2-3x+1)^n$ converge.

La ragione q è $x^2 - 3x + 1$ e, per la convergenza, deve essere $-1 < q < 1$. Quindi risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x^2-3x+1>-1 \\ x^2-3x+1<1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x^2-3x<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2)>0 \\ x(x-3)<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<1 \vee x>2 \\ 0<x<3 \end{cases} \rightarrow 0<x<1 \vee 2<x<3.$$

Perciò la serie converge se $0 < x < 1 \vee 2 < x < 3$.

Determina per quali valori reali di x le seguenti serie geometriche sono convergenti.

292 $\sum_{n=1}^{+\infty}(x+6)^n$ $[-7<x<-5]$

293 $\sum_{n=1}^{+\infty}(5x-9)^n$ $\left[\frac{8}{5}<x<2\right]$

294 $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$ $[x \neq 0]$

295 $\sum_{n=1}^{+\infty}(2x^2)^n$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

296 $\sum_{n=0}^{+\infty}(x^2+3x+3)^n$ $[-2<x<-1]$

297 $\sum_{n=0}^{+\infty}(x^2-x+4)^n$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

298 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n$ (per $x \neq 1$) $[x<0]$

299 $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{\frac{2n}{x}}$ $[x<0]$

300 $\sum_{n=0}^{+\infty} 10^{-nx}$ $[x>0]$

301 $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2x+1}{x-4}\right)^n$ $[-5<x<1]$

302 $\sum_{n=0}^{+\infty}(2\ln x-1)^n$ $[1<x<e]$

303 $\sum_{n=0}^{+\infty}(3^{2x}-2)^n$ $\left[0<x<\frac{1}{2}\right]$

304 $\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{\operatorname{sen} x})^n$ $\left[2k\pi \leq x \leq \pi+2k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$

305 $\sum_{n=1}^{+\infty}[\ln(x^4+1)]^n$ $\left[-\sqrt[4]{e-1}<x<\sqrt[4]{e-1}\right]$

REALTÀ E MODELLI

1 **La rendita finanziaria**

Un risparmiatore, alla fine di ogni anno, versa una rata R di € 6000 a una banca che la capitalizza a un tasso d'interesse annuo i del 3,5%. Il montante M_n maturato alla fine dell'anno n, cioè l'ammontare che il risparmiatore potrebbe prelevare alla fine dell'anno n, è dato da:

$$M_n = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

(l'anno 1 è l'anno in cui si effettua il primo versamento).

- ▶ Determina l'espressione ricorsiva del montante M_n.
- ▶ Alla fine del 5° anno quanto hanno fruttato in tutto le rate versate dal commerciante?
- ▶ A quanto tende il montante se il numero di anni dei versamenti aumenta sempre di più?

2 **Poligoni inscritti e circoscritti**

Data una circonferenza C di raggio r, per ogni numero naturale n si possono costruire i poligoni regolari P e Q di n lati, rispettivamente inscritto e circoscritto alla circonferenza. La lunghezza della circonferenza è ovviamente compresa tra i perimetri dei due poligoni.

- ▶ Esprimi in funzione di r e n il perimetro dei poligoni, e calcola il limite delle successioni ottenute, con n che tende all'infinito.

3 **Le soluzioni**

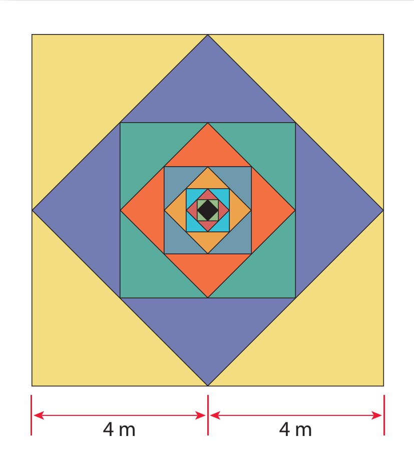
La concentrazione di una sostanza A in una soluzione S può essere espressa dal rapporto tra il volume di soluto A contenuto in una determinata quantità di soluzione S e il volume della soluzione stessa. Per esempio, se 10 ml della sostanza A sono mescolati con 90 ml di un solvente, la concentrazione di A nella soluzione ottenuta S_1 è 10 ml / (10 + 90) ml = 1/10 della concentrazione iniziale di A.

- ▶ Se si mescolano 10 ml della soluzione S_1 precedentemente ottenuta con altri 90 ml di solvente, qual è la concentrazione di sostanza A nel campione di soluzione ottenuto S_2?
- ▶ Come si può modellizzare la concentrazione di sostanza A nel campione se vengono fatte in sequenza n diluizioni mantenendo costanti le proporzioni e prendendo ogni volta come campione da diluire la miscela ottenuta nell'operazione precedente?
- ▶ Qual è la concentrazione di A nel campione dopo 7 operazioni di diluizione successive?

4 **Il tappeto geometrico**

Un designer organizza un'area quadrata di lato 8 m destinata a bambini piccoli all'interno di un giardino pubblico. L'area è suddivisa in quadrati concentrici, ognuno dei quali è individuato dai punti medi dei lati del quadrato a esso esterno.

- ▶ Ipotizziamo che la successione dei quadrati prosegua all'infinito (anche se nella realtà ciò ovviamente è impossibile). Qual è il termine generale della successione l_n che esprime la lunghezza del lato dei quadrati?
- ▶ Trova, in funzione di n, la somma dei primi n termini della successione l_n.



Bergamini, Trifone, Barozzi MATEMATICA.BLU - Vol.5 © Zanichelli 2012 con Maths in English

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 La somma dei primi n termini di una progressione aritmetica di ragione d è uguale a:

A $a_1 + (n-1)d$.
B $a_1 + nd$.
C nd.
D $\frac{a_n + a_1}{2}n$.
E $\frac{a_n + a_1}{2}d$.

2 Della successione $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$, puoi dire che:

A è convergente perché è monotòna.
B è divergente perché è monotòna.
C è convergente perché il suo codominio è limitato.
D è indeterminata perché è monotòna.
E non è indeterminata perché è monotòna.

3 Considera la successione: 5, 8, 11, 14, …
La somma dei primi 100 termini è:

A 15350.
B 300.
C 305.
D 302.
E 14850.

4 Il limite $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{2n+1})$:

A è uguale a -1.
B è uguale a $+\infty$.
C è uguale a 0.
D è uguale a $-\infty$.
E non esiste.

5 Considera la successione:

$$3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$$

La somma dei primi 8 termini è:

A $-\frac{255}{128}$.
B $\frac{255}{128}$.
C $\frac{127}{64}$.
D $\frac{129}{64}$.
E $\frac{257}{128}$.

6 La successione $a_n = (-3)^{-n}$:

A è una progressione aritmetica con ragione negativa.
B è una progressione geometrica perché è decrescente.
C è una progressione geometrica perché il rapporto fra due termini consecutivi è costante.
D non è una progressione geometrica perché i termini hanno segno alterno.
E è una progressione aritmetica perché i termini hanno segno alterno.

7 La successione $a_n = n - (-1)^n n$:

A converge a 0 per n tendente a $+\infty$.
B tende a $+\infty$ per n tendente a $+\infty$.
C tende a $-\infty$ per n tendente a $+\infty$.
D è indeterminata.
E nessuna delle affermazioni precedenti è vera.

8 Le successioni $a_n = \left(\text{tg}\frac{\pi}{3}\right)^n$, $b_n = \left(\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)^n$ sono:

A entrambe non monotòne.
B a_n monotòna, b_n non monotòna.
C entrambe crescenti.
D entrambe non crescenti.
E a_n crescente, b_n decrescente.

9 Data la successione $a_n = \frac{(-1)^n n}{2n-1}$, puoi affermare che:

A $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$.
B è indeterminata.
C $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\frac{1}{2}$.
D $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
E $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

10 La successione $a_n = \frac{n-2}{n+2}\cdot(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, è:

A una progressione geometrica di ragione $q = -1$.
B indeterminata.
C convergente.
D divergente negativamente.
E divergente positivamente.

11 Uno dei seguenti limiti è *sbagliato*. Quale?

A $\lim_{n\to+\infty}(2n-\sqrt{n^2-1})=+\infty$

B $\lim_{n\to+\infty}(2n-\sqrt{5n^2+n})=-\infty$

C $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n-\sqrt{4n^2+8}}{2n}=\frac{1}{2}$

D $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-\sqrt{n^2-9}}{n}=2$

E $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+5}}{n}=2$

12 Le serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^{1-n}}{2^n}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\ln\frac{3}{4}\right)^n$ sono:

A entrambe divergenti.

B entrambe indeterminate.

C entrambe convergenti.

D la prima convergente, la seconda divergente.

E la prima divergente, la seconda convergente.

QUESITI

13 Calcolare:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{n!}.$$

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 4)

[0]

(Suggerimento. $n! = n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1, \ldots$)

14 Dopo aver dato la definizione di limite di una successione numerica, fornisci un esempio per ciascun tipo di successione: convergente, divergente e indeterminata. Calcola poi il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n-5}\right)^{n-2}.$$

[e^6]

15 Considerata la successione di termine generale: $a_n = 1+2+4\ldots+(2\cdot 2^{n-1})+(2\cdot 2^n)$, calcolare il limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{2^{2n}}.$$

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale, Sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 7)

[0]

16 S_n rappresenta la somma di n numeri in progressione geometrica di ragione $\frac{3}{7}$ e primo termine $\frac{7}{3}$. Calcolare $\lim_{n\to\infty} S_n$.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero (America Latina)*, *Sessione ordinaria*, 2001, *quesito* 1)

$\left[\frac{49}{12}\right]$

17 Indicata con S_n la somma di n termini in progressione geometrica di primo termine $\frac{1}{2}$ e ragione $\frac{1}{2}$, si calcoli il $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Scuole italiane all'estero*, *Sessione ordinaria*, 2005, *quesito* 1)

[0]

18 È assegnato un triangolo equilatero di lato lungo L. Si costruisce un secondo triangolo, avente per vertici i punti medi dei lati del primo e, così proseguendo, un n-esimo triangolo avente per vertici i punti medi dei lati del triangolo $(n-1)$-esimo. Calcolare il limite cui tende la somma delle aree degli n triangoli quando n tende a ∞.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2006, *quesito* 8)

$\left[\frac{\sqrt{3}}{3}L^2\right]$

19 Determinare il più grande valore dell'intero n per cui l'espressione $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ non supera 10 000.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione straordinaria*, 2005, *quesito* 5)

$[n = 8]$

20 Enunciare il principio d'induzione matematica e applicarlo alla dimostrazione della seguente relazione:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2,$$

la quale esprime una proprietà dei numeri naturali conosciuta come «*teorema di Nicomaco*» (da Nicomaco di Gerasa, filosofo e matematico ellenico, vissuto intorno all'anno 100 d.C.).

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione straordinaria*, 2005, *quesito* 5)

PROBLEMI

21 Data la successione così definita:

$$\begin{cases} a_4 = -2 \\ 2a_n = -\dfrac{1}{3}a_{n-1} + a_{n-1} \end{cases}$$

a) calcola a_1, a_2, a_3, a_5, a_6;
b) verifica se si tratta di una progressione aritmetica o geometrica e trova la ragione;
c) calcola la somma dei primi 10 termini;
d) trova la forma analitica della successione e calcola il limite per $n \to +\infty$.

$\left[\text{a)} -54, -18, -6, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{9};\ \text{b) geometrica, } q = \dfrac{1}{3};\ \text{c) } S_{10} = 81\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10} - 1\right];\ \text{d) } a_n = -54\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}, 0\right]$

22 È data la successione $a_n = (\ln x)^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Trova l'insieme dei valori di x per i quali esiste la successione e stabilisci il tipo di successione.
b) Determina per quali valori di x è crescente e per quali è decrescente.
c) Studia il carattere della successione in funzione di x.

[a) $(x > 0 \wedge x \neq 1)$, pr. geom. $q = (\ln x)^{-1}$; b) cresc. se $1 < x < e$, decr. se $x > e$;
c) indeter. se $e^{-1} \leq x < 1$, div. a $+\infty$ se $1 < x < e$, costante se $x = e$, conv. a 0 se $(0 < x < e^{-1} \vee x > e)$]

23 È data la successione $g_n = (1 - \operatorname{sen} x)^n$, $n > 0$.

a) Determina l'insieme dei valori di x per i quali esiste la successione; verifica che per ogni prefissato x la successione è una progressione geometrica.
b) Considerati i primi nove termini della successione, trova per quali valori di x il prodotto dei termini equidistanti dagli estremi è uguale a 1024.
c) Studia, al variare di x, il carattere della successione S_n, dove $S_n = g_1 + g_2 + \ldots + g_n$.

$\left[\text{a) } \mathbb{R}, q = 1 - \operatorname{sen} x;\ \text{b) } x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi;\right.$
$\left.\text{c) conv. a } \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - 1 \text{ se } 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, \text{ div. a } +\infty \text{ se } (2k+1)\pi \leq x \leq 2(k+1)\pi\right]$

24 Su una semiretta di origine P_0 è dato il segmento P_0P_1 che misura 2. Considera i segmenti adiacenti P_1P_2, P_2P_3, …, $P_{n-1}P_n$, … tali che il rapporto tra un segmento e il suo precedente sia $\dfrac{5}{4}$. Dopo aver costruito su ogni segmento un quadrato che abbia per lato il segmento stesso:

a) dimostra che le misure delle aree dei quadrati sono i termini di una progressione geometrica e calcolane la ragione;
b) esprimi il termine generico l_n della progressione in funzione di n e calcola il limite per $n \to +\infty$;
c) calcola il perimetro e l'area dell'ottavo quadrato.

$\left[\text{a) } q = \dfrac{25}{16};\ \text{b) } l_n = 4\left(\dfrac{25}{16}\right)^n, n \in \mathbb{N}; +\infty;\ \text{c) } 8\left(\dfrac{5}{4}\right)^7, 4\left(\dfrac{25}{16}\right)^7\right]$

25 In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è dato il punto $A_0(1; 0)$. Si costruisca il triangolo rettangolo $OA_0\,A_1$ avente il vertice A_1 sull'asse delle ordinate e sia α l'angolo $O\widehat{A_0}A_1$. Si conduca per A_1 la perpendicolare alla retta $A_0\,A_1$ che incontra l'asse delle ascisse in A_2; si conduca per A_2 la perpendicolare alla retta A_1A_2 che incontra l'asse delle ordinate in A_3 e così via, ottenendo una spezzata $A_0\,A_1\,A_2\,A_3 \ldots A_{n-1}\,A_n$ i cui vertici di indice dispari appartengono all'asse delle ordinate e quelli di indice pari all'asse delle ascisse.
Il candidato:

a) dimostri che le lunghezze dei lati della spezzata sono in progressione geometrica e calcoli la lunghezza l_n della spezzata $\left(\text{la somma dei primi } n \text{ termini di una progressione geometrica di primo termine } a_0 \text{ e ragione } q \text{ è } S_n = a_0 \dfrac{1-q^n}{1-q}\right)$;

b) determini il limite di l_n al tendere di n all'infinito distinguendo i due casi:

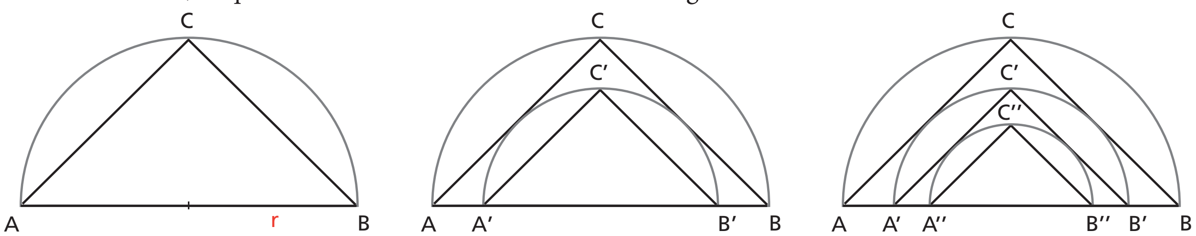
1. $\alpha < \dfrac{\pi}{4}$, **2.** $\alpha \geq \dfrac{\pi}{4}$

e verificando che nel caso 1 detto limite assume valore finito $l(\alpha)$.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 1995, *quesito* 1)

$$\left[\text{a) } l_n = \begin{cases} \dfrac{1-(\text{tg}\,\alpha)^n}{\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha} & \text{se } \alpha \neq \dfrac{\pi}{4} \\ n\sqrt{2} & \text{se } \alpha = \dfrac{\pi}{4} \end{cases};\ \text{b) } \dfrac{1}{\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha} \text{ se } 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}, +\infty \text{ se } \dfrac{\pi}{4} \leq \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right]$$

26 Dato il triangolo isoscele inscritto in una semicirconferenza di raggio r, inscrivi in tale triangolo una semicirconferenza; in questa semicirconferenza inscrivi un triangolo isoscele e così via.

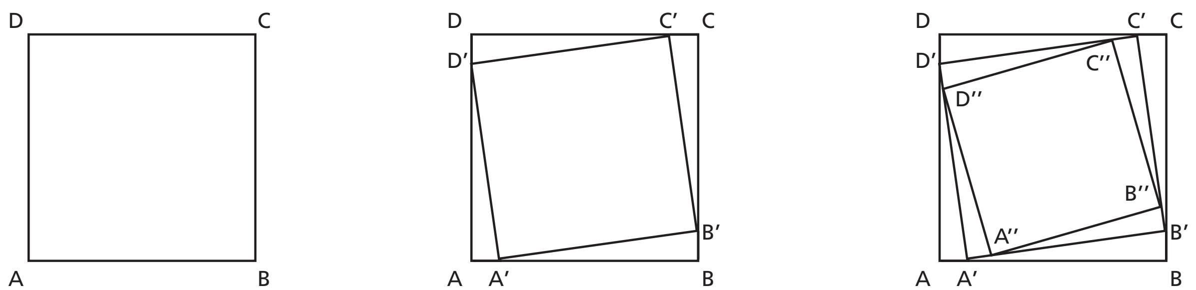


a) Scrivi in funzione di r la successione delle misure dei perimetri e quella delle misure delle aree dei triangoli.

b) Scrivi il termine generico di ciascuna successione e calcola i loro limiti per $n \to +\infty$.

$$\left[\text{b) } a_n = 2r(1+\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n;\ b_n = r^2\left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}; 0; 0\right]$$

27 Nel quadrato $ABCD$ di lato l, sui quattro lati prendi A', B', C', D' tali che $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = \frac{1}{8}l$; congiungi i punti in modo da ottenere un nuovo quadrato, su cui ripeti lo stesso procedimento.



a) Determina la successione delle misure dei perimetri e quella delle misure delle aree e stabilisci se sono progressioni geometriche o aritmetiche.

b) Trova il termine generico di ciascuna successione e calcola i loro limiti per $n \to +\infty$.

$$\left[\text{a) geometriche; b) } a_n = 4l\left(\frac{5}{8}\sqrt{2}\right)^n;\ b_n = l^2\left(\frac{25}{32}\right)^n, n \in \mathbb{N}; 0; 0\right]$$

28 Disegna il generico arco di parabola di equazione $y = ax^2$ $(a > 0)$ con ascisse comprese nell'intervallo $[0; p]$. Suddiviso tale intervallo in n sottointervalli uguali di ampiezza $\Delta x = \frac{p}{n}$, costruisci i rettangoli di uguale base Δx e aventi come altezza il valore massimo assunto da y in ciascun sottointervallo. Calcola il limite della somma delle aree degli n rettangoli al tendere di n a $+\infty$.
(Suggerimento. Devi utilizzare la formula

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

che puoi anche dimostrare mediante il principio di induzione.) $\left[\frac{1}{3}ap^3\right]$

29 In un quadrato $ABCD$ di lato l inscrivi il quadrato $A_1B_1C_1D_1$, che ha per vertici i punti medi dei lati di $ABCD$; in $A_1B_1C_1D_1$ inscrivi il quadrato i cui vertici A_2, B_2, C_2, D_2 sono i punti medi dei lati di $A_1B_1C_1D_1$.
Ripeti il procedimento indefinitamente.

a) Dimostra che le lunghezze dei lati dei quadrati formano una successione i cui termini l_n sono legati dalla relazione $l_{n+1} = \frac{l_n}{\sqrt{2}}$.

b) Dimostra che la somma delle aree di tutti gli infiniti quadrati è doppia rispetto a quella di $ABCD$.

c) Dimostra che la somma dei perimetri di tutti gli infiniti quadrati è $4l(2 + \sqrt{2})$.

30 È data la successione così definita: $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{5}{3}a_n \\ a_2 = 3 \end{cases}$

a) Calcola a_0, a_1, a_3.

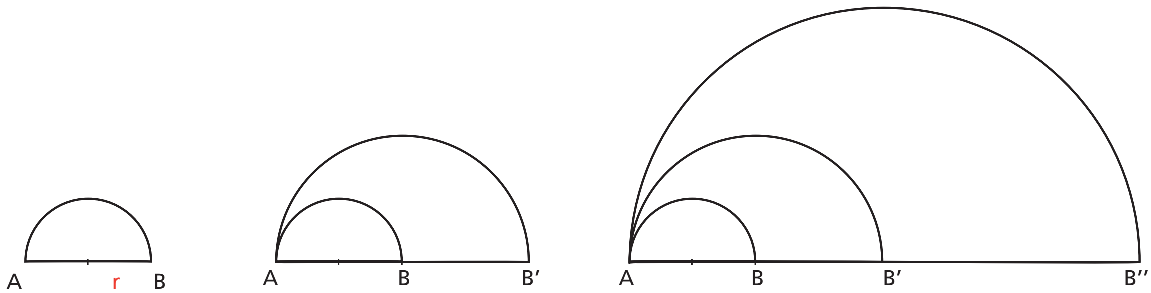
b) Dimostra che è una progressione geometrica e trova la ragione.

c) Dimostra che è monotòna.

d) Determina il termine a_n in funzione di n e calcola il limite per $n \to +\infty$.

$\left[\text{a) } \frac{27}{25}, \frac{9}{5}, 5; \text{ b) } \frac{5}{3}; \text{ d) } a_n = \frac{9}{5}\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}, +\infty\right]$

31 Dato un semicerchio di raggio r e diametro AB, costruisci un nuovo semicerchio con centro B, raggio AB e diametro AB' e così via.



a) Scrivi in funzione di r la successione delle misure delle aree dei semicerchi e quella delle misure delle semicirconferenze.

b) Calcola i loro limiti per $n \to +\infty$.

$\left[\text{a) } a_n = \frac{\pi r^2}{2}4^n; \ b_n = \pi r \cdot 2^n, n \in \mathbb{N}; \text{ b) } +\infty; +\infty\right]$

CAPITOLO **24** ٢٤ २४ 二十四

[numerazione araba] [numerazione devanagari] [numerazione cinese]

LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE

L'INFLAZIONE La variazione dei prezzi dei principali beni di consumo è uno degli aspetti dell'economia che interessa più da vicino la nostra vita quotidiana e i nostri risparmi. Spesso si parla di inflazione, ma non sempre si conosce bene il significato di questa parola e ciò può far coltivare speranze illusorie…

Se l'inflazione diminuisce vuol dire che i prezzi calano?

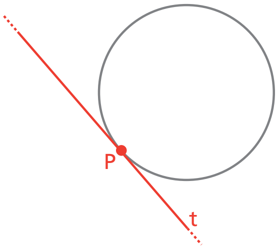
▶ La risposta a pag. 1649

1. LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE

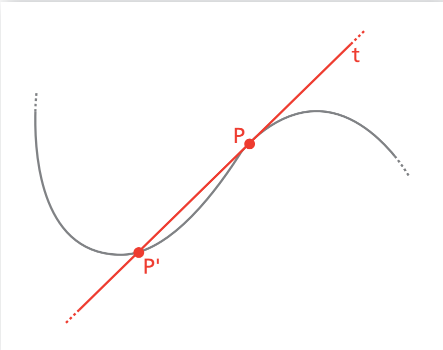
Il problema della tangente

Uno dei problemi classici che portarono al concetto di derivata è quello della determinazione della retta tangente a una curva in un punto.

Per ogni circonferenza, e in generale per ogni conica, la tangente in un punto P è quella retta che interseca la conica stessa soltanto in P.
Potremmo pensare di definire la tangente a una qualunque curva mediante tale proprietà. Tuttavia la definizione non sarebbe sempre corretta. Un esempio è dato nella figura 1.



● Ci sono anche rette che intersecano una curva in un solo punto, ma non sono tangenti alla curva. Per esempio, l'asse di una parabola la interseca solo nel vertice, ma non è tangente.



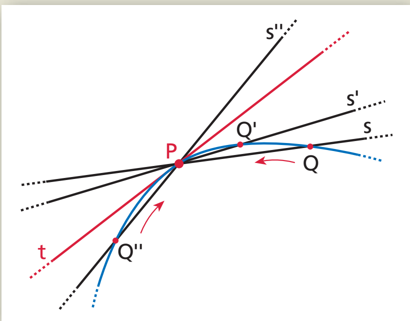
◀ **Figura 1** La retta t è tangente alla curva nel punto P, ma la interseca anche nel punto P'.

Per ottenere allora una definizione valida in generale, ci si richiama al concetto di limite, pensando al procedimento secondo il quale si può approssimare la tangente mediante rette secanti che le si avvicinano sempre di più.

DEFINIZIONE

Retta tangente a una curva

La retta tangente t a una curva in un punto P è la posizione limite, se esiste, della secante PQ al tendere (sia da destra sia da sinistra) di Q a P.



Consideriamo una funzione $y = f(x)$ e troviamo l'equazione della tangente in un suo punto applicando la definizione appena data. Dobbiamo innanzitutto considerare il *rapporto incrementale*.

● **Incrementale** deriva da *incremento*, che significa «aumento».

Il rapporto incrementale

Dati una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, e un punto del suo grafico $A(c; f(c))$, incrementiamo l'ascissa di A di una quantità h e così otteniamo il punto B di coordinate:

$$x_B = c + h; \ y_B = f(x_B) = f(c + h),$$

ossia, $B(c + h; f(c + h))$.

● Sia c sia $c + h$ devono appartenere all'intervallo $]a; b[$, ossia essere **interni** all'intervallo $[a; b]$. h può essere positivo o negativo.

Consideriamo gli incrementi:

$$\Delta x = x_B - x_A = h \quad \text{e} \quad \Delta y = y_B - y_A = f(c+h) - f(c).$$

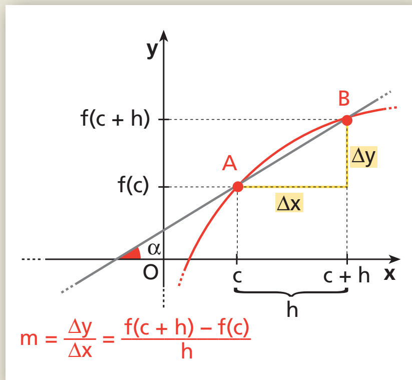
Il rapporto dei due incrementi è $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

DEFINIZIONE

Rapporto incrementale

Dati una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, e due diversi numeri reali c e $c + h$ interni all'intervallo, si chiama rapporto incrementale di f (relativo a c) il numero:

$$\frac{\boldsymbol{\Delta y}}{\boldsymbol{\Delta x}} = \frac{\boldsymbol{f(c+h) - f(c)}}{\boldsymbol{h}}.$$



Considerati i punti $A(c; f(c))$ e $B(c + h; f(c + h))$ del grafico di f, *il rapporto incrementale di f relativo a c è* **il coefficiente angolare della retta passante per *A* e *B*.**

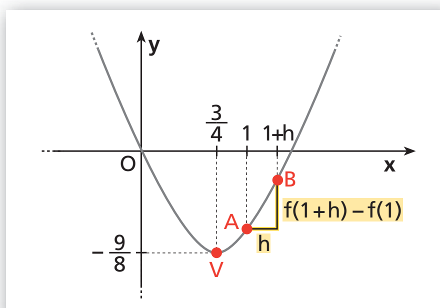
ESEMPIO

Calcoliamo il rapporto incrementale della funzione $y = f(x) = 2x^2 - 3x$ relativo al suo punto A di ascissa 1 e a un generico incremento h.
Applicando la formula, troviamo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

Determiniamo $f(1 + h)$ sostituendo alla x della funzione l'espressione $1 + h$:

$$f(1+h) = 2(1+h)^2 - 3(1+h) =$$
$$= 2(1 + 2h + h^2) - 3 - 3h =$$
$$= -1 + h + 2h^2.$$



Determiniamo $f(1)$ sostituendo alla x della funzione il numero 1:

$$f(1) = -1.$$

Sostituiamo le due espressioni trovate nella formula del rapporto incrementale:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\cancel{-1} + h + 2h^2 \cancel{-(-1)}}{h} = \frac{\cancel{h}(2h+1)}{\cancel{h}} = 2h + 1.$$

L'espressione trovata rappresenta, al variare di h, il coefficiente angolare di una generica retta secante passante per A.

- In generale, la scrittura Δt si chiama **incremento della variabile** t e indica la differenza tra due valori t_2 e t_1 di una grandezza t:
$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

- Nella figura abbiamo preso $h > 0$. Si può anche prendere $h < 0$, ma non $h = 0$.

- Ricordiamo che il coefficiente angolare di una retta è $m = \text{tg}\,\alpha$, dove α è l'angolo che la retta forma con la direzione positiva dell'asse x. Nella figura a lato notiamo che il rapporto incrementale è il coefficiente angolare della retta secante AB.

◀ Figura 2 **La funzione $y = 2x^2 - 3x$ è rappresentata da una parabola di vertice con coordinate:**

$$x_V = \frac{3}{4} \text{ e } y_V = -\frac{9}{8}.$$

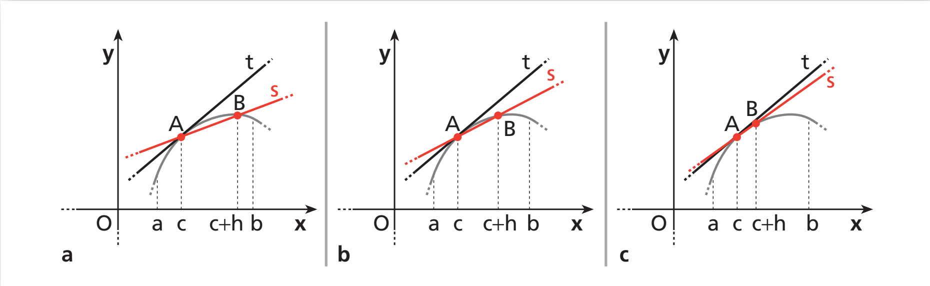
In generale, il valore del rapporto incrementale dipende dal valore di h. Nell'esempio precedente, se $h = 0{,}2$, il rapporto incrementale vale $2(0{,}2) + 1 = 1{,}4$; se $h = 0{,}1$, vale $2(0{,}1) + 1 = 1{,}2$ e così via.

La derivata di una funzione

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a; b]$. Del grafico della funzione consideriamo i punti $A(c; f(c))$ e $B(c + h; f(c + h))$, con c e $c + h$ appartenenti all'intervallo.

● Il punto A è fissato, il punto B varia al variare di h.

Tracciamo la retta AB, secante il grafico, per diversi valori di h. Disegniamo inoltre la retta t tangente al grafico in A.



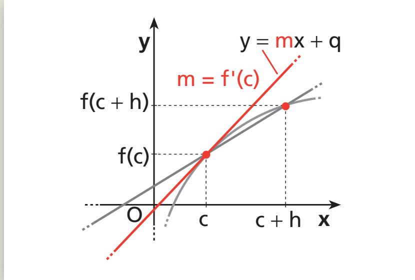
▶ Figura 3 Se $h \to 0$, il punto B tende a coincidere con A e la secante s con la tangente t in A.

Attribuendo a h valori sempre più piccoli, il punto B si avvicina sempre di più al punto A. Quando $h \to 0$, il punto B tende a sovrapporsi al punto A e la retta AB tende a diventare la retta tangente alla curva in A. Il coefficiente angolare della secante AB, ossia il rapporto incrementale, tende al coefficiente angolare della tangente, che viene chiamato *derivata* della funzione nel punto c.

DEFINIZIONE

Derivata di una funzione

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, si chiama derivata della funzione nel punto c interno all'intervallo, e si indica con $f'(c)$, il limite, se esiste ed è *finito*, per h che tende a 0, del rapporto incrementale di f relativo a c:



$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}.$$

● Il limite è considerato sia per h positivo, sia per h negativo.

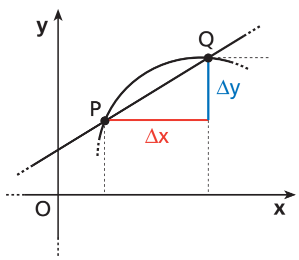
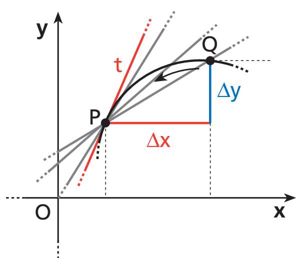
La derivata di una funzione in un punto c rappresenta **il coefficiente angolare della retta tangente** al grafico della funzione nel suo punto di ascissa c.

Una funzione si dice **derivabile** in un punto c se esiste la derivata $f'(c)$. Affinché una funzione sia derivabile in c occorre quindi che siano verificate le seguenti condizioni:

1. la funzione è definita in un intorno del punto c;
2. esiste il limite del rapporto incrementale, relativo a c, per h che tende a 0, cioè esistono il limite destro e il limite sinistro di tale rapporto e tali limiti coincidono;
3. questo limite è un numero finito.

Se il limite per h che tende a 0 del rapporto incrementale di una funzione in un punto *non esiste o è infinito*, si dice che la funzione **non è derivabile** in quel punto.
Con la seguente tabella riassumiamo e mettiamo a confronto i concetti introdotti.

Rapporto incrementale e derivata di una funzione

Concetto	Figura	Definizione	Significato geometrico
Rapporto incrementale		$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	Coefficiente angolare della **secante** al grafico della funzione nei punti P e Q
Derivata		$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$	Coefficiente angolare della **tangente** al grafico della funzione nel punto P

Il calcolo della derivata

Calcoliamo la derivata della funzione $y = x^2 - x$ in $c = 3$.

Chiamata f la funzione, applichiamo la definizione:

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}.$$

Calcoliamo i valori che assume la funzione nei punti di ascissa 3 e $3 + h$:

$$f(3) = 6; \qquad f(3+h) = (3+h)^2 - (3+h) = 6 + 5h + h^2.$$

Sostituendo nel rapporto incrementale i valori trovati e semplificando, abbiamo:

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{6 + 5h + h^2 - 6}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(5+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (5 + h) = 5.$$

Quindi $f'(3) = 5$.

Possiamo calcolare la derivata di una funzione anche in un punto generico. In questo caso il valore $f'(x)$ che otteniamo è funzione di x e, per questo, parliamo anche di **funzione derivata**.

● La derivata $f'(3)$ è un numero reale ed è il coefficiente angolare della tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(3; f(3))$.

La derivata di una funzione $y = f(x)$ in un punto generico x si indica con uno dei simboli seguenti:

$$f'(x); \quad \mathrm{D}\, f(x); \quad y'; \quad \frac{dy}{dx}.$$

- Nel paragrafo 10 vedremo come mai si usa il simbolo $\frac{dy}{dx}$.

La funzione derivata, al variare di x, fornisce il coefficiente angolare di tutte le rette tangenti alla funzione data.

ESEMPIO

Calcoliamo la derivata della funzione $f(x) = 4x^2$ in un generico punto x:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h)^2 - 4x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h(h+2x)}{h} = \lim_{h \to 0} 4(h+2x) = 8x.$$

- $\frac{4(x+h)^2 - 4x^2}{h} = \frac{\cancel{4x^2} + 4h^2 + 8hx - \cancel{4x^2}}{h} = \frac{4\cancel{h}(h+2x)}{\cancel{h}}.$

La derivata

$$f'(x) = 8x$$

è una funzione di x.

La derivata sinistra e la derivata destra

Poiché la derivata è il limite del rapporto incrementale, in analogia a quanto abbiamo detto per i limiti, possiamo definire la *derivata sinistra* e la *derivata destra* di una funzione.

- Nella teoria dei limiti è stato introdotto il concetto di limite sinistro e limite destro mediante un intorno sinistro e un intorno destro del punto.

DEFINIZIONE

Derivata sinistra e derivata destra

La derivata sinistra di una funzione in un punto c è:

$$\boldsymbol{f'_-(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}}.$$

La derivata destra di una funzione in un punto c è:

$$\boldsymbol{f'_+(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}}.$$

Una funzione è **derivabile** in un punto c se esistono *finite* e *uguali* tra loro la derivata sinistra e la derivata destra.

ESEMPIO

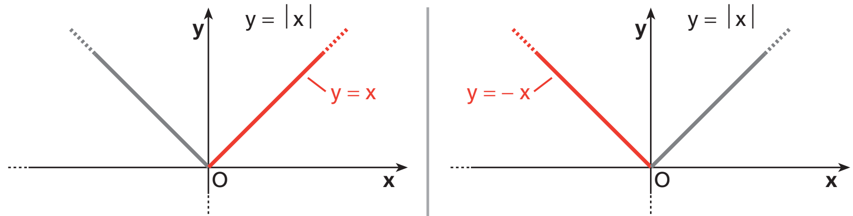
Consideriamo la funzione $f(x) = y = |x|$. Nel punto $x = 0$ abbiamo:

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h-0}{h} = -1;$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h-0}{h} = 1.$$

- Se $h \to 0^-$, h è un valore negativo, quindi, per la definizione di valore assoluto, $f(h) = -h$. Se invece $h \to 0^+$, è un valore positivo, quindi $f(h) = h$.

La derivata destra e quella sinistra esistono ma sono diverse, quindi nel punto $x = 0$ **non** esiste la derivata della funzione $y = |x|$.



a. Se consideriamo la funzione a destra di $x = 0$, il suo grafico coincide con la retta $y = x$. Anche la tangente coincide con la retta e il suo coefficiente angolare è 1, quindi $f'_+(0) = 1$.

b. Se consideriamo la funzione a sinistra di $x = 0$, il suo grafico (e quello della tangente) coincide con la retta $y = -x$. Il coefficiente angolare è – 1, quindi $f'_-(0) = -1$.

◀ **Figura 4** La funzione $f(x) = |x|$ ha $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

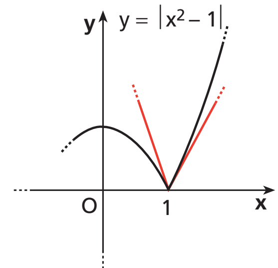
Se, per la stessa funzione, consideriamo il punto $x = 2$, troviamo che:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 + h - 2}{h} = 1.$$

Le derivate destra e sinistra coincidono e sono uguali alla derivata nel punto.

Esaminiamo graficamente un altro esempio.



Nel punto $x = 1$, il grafico ha due tangenti diverse: la derivata sinistra e la derivata destra non coincidono.

DEFINIZIONE

Funzione derivabile in un intervallo

Una funzione $y = f(x)$ è derivabile in un intervallo chiuso $[a; b]$ se è derivabile in tutti i punti interni di $[a; b]$ e se esistono e sono finite la derivata destra in a e la derivata sinistra in b.

ESEMPIO

La funzione $y = |x|$ è derivabile nell'intervallo $[0; 2]$. Infatti:

- si può dimostrare che è derivabile in tutti i punti interni dell'intervallo;
- nell'esempio precedente abbiamo visto che esistono la derivata destra in 0 e la derivata sinistra in 2.

2. LA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Determiniamo l'equazione della retta tangente alla curva di equazione

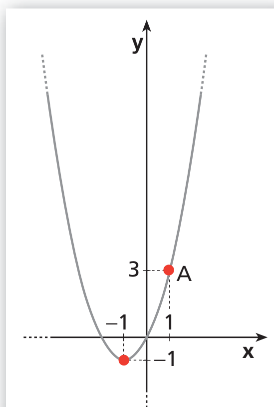
$$y = x^2 + 2x$$

nel suo punto $A(1; 3)$.
Ricordiamo che l'equazione del fascio di rette di centro $A(x_A; y_A)$ è:

$$y - y_A = m(x - x_A).$$

Consideriamo, nel nostro caso, il fascio di rette con centro in $(1; 3)$, cioè:

$$y - 3 = m(x - 1).$$



▲ **Figura 5** La curva rappresentata dalla funzione $y = x^2 + 2x$ è una parabola di vertice $(-1; -1)$.

Per individuare nel fascio la retta tangente, calcoliamo il suo coefficiente angolare m applicando la definizione di derivata. Chiamata f la funzione, poiché sappiamo che $m = f'(1)$, calcoliamo il valore di $f'(1)$:

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

Calcoliamo $f(1+h)$ e $f(1)$:

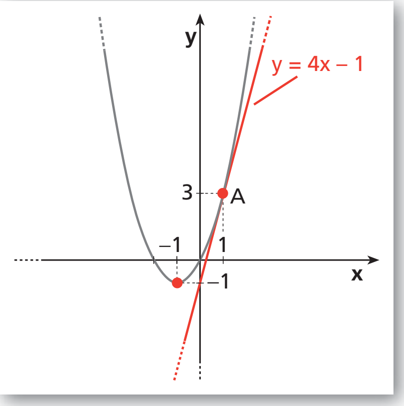
$$f(1+h) = (1+h)^2 + 2(1+h) = h^2 + 4h + 3,$$
$$f(1) = 3.$$

Sostituiamo nel rapporto incrementale:

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h + 3 - 3}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h+4)}{h} = \lim_{h \to 0} (h+4) = 4.$$

Pertanto l'equazione della retta tangente è:

$$y - 3 = 4(x-1) \quad \rightarrow \quad y = 4x - 1.$$



► **Figura 6** La retta tangente alla parabola nel suo punto $A(1; 3)$ ha equazione $y = 4x - 1$. Il coefficiente angolare 4 è il valore della derivata della funzione $y = x^2 + 2x$ calcolata nel suo punto di ascissa 1.

In generale, data la funzione $y = f(x)$, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0; y_0)$, se tale retta esiste e non è parallela all'asse y, è:

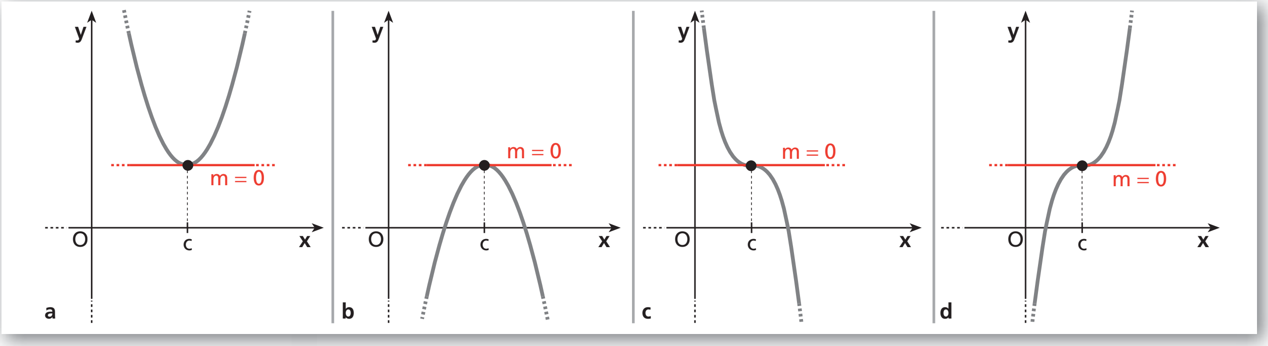
$$\boldsymbol{y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).}$$

● Esamineremo fra poco il caso di punti con tangente parallela all'asse y.

I punti stazionari

Nella figura 7 vediamo alcuni casi in cui la retta tangente al grafico della funzione in un suo punto c è parallela all'asse x. Ciò capita quando l'equazione della tangente è del tipo $y = k$, ossia il suo coefficiente angolare è 0. Ciò significa che, in quel punto, la derivata è uguale a 0.

▼ **Figura 7**



DEFINIZIONE

Punto stazionario

Dati la funzione $y = f(x)$ e un suo punto $x = c$, se $f'(c) = 0$, allora $x = c$ si dice punto stazionario o punto a tangente orizzontale.

Punti di non derivabilità

I flessi a tangente verticale

Osserviamo il grafico della figura 8*a*.

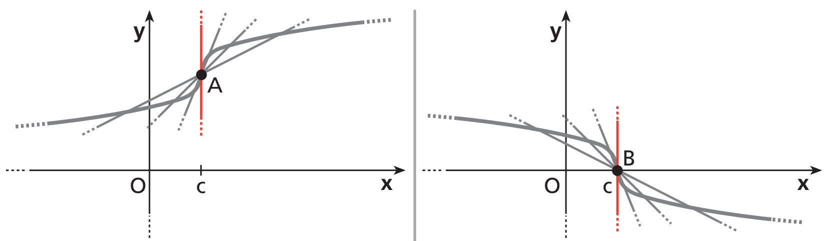
Le rette secanti passanti per A tendono alla retta parallela all'asse y, man mano che gli ulteriori punti di intersezione si avvicinano ad A. Il coefficiente angolare delle secanti, ossia il rapporto incrementale della funzione, per $x \to c$ sia da destra sia da sinistra, tende a $+\infty$. Poiché, per la definizione di derivata, il limite del rapporto incrementale $f'(c)$ dovrebbe essere un valore finito, la funzione non è derivabile in $x = c$. Per esprimere questo concetto possiamo anche scrivere:

$$f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty.$$

Analogamente si ragiona con la funzione della figura 8*b*.

● Tutti i casi considerati in questo sottoparagrafo sono esempi di funzioni con un punto in cui la funzione è continua ma **non** è derivabile.

◀ **Figura 8**



a. Nel punto di ascissa c la tangente al grafico esiste ed è una retta parallela all'asse y, di equazione $x = c$. In questo caso $f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty$.

b. Nel punto di ascissa c la tangente al grafico è ancora una retta parallela all'asse y, di equazione $x = c$, ma in questo caso $f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty$.

Entrambe le funzioni hanno la proprietà che nel punto considerato sono continue e il limite del rapporto incrementale, pur non essendo finito, ha *la stessa tendenza sia da destra sia da sinistra* (o sempre a $+\infty$ o sempre a $-\infty$).

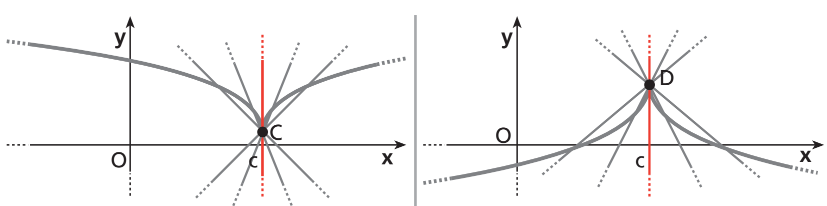
I punti come A e B dei grafici della figura 8 si chiamano punti di **flesso a tangente parallela all'asse y** o **a tangente verticale**.

● Come vedremo in seguito esistono altri tipi di flesso.

Le cuspidi

Osserviamo ora i grafici della figura 9.

◀ **Figura 9**



a. Nel punto di ascissa c la tangente al grafico della funzione è ancora una retta parallela all'asse y, di equazione $x = c$, ma $f'_-(c) = -\infty$, mentre $f'_+(c) = +\infty$, quindi $f'_-(c) \neq f'_+(c)$.

b. In questo caso $f'_-(c) = +\infty$, mentre $f'_+(c) = -\infty$; quindi abbiamo ancora: $f'_-(c) \neq f'_+(c)$.

● C è una cuspide rivolta verso il basso e D è una cuspide rivolta verso l'alto.

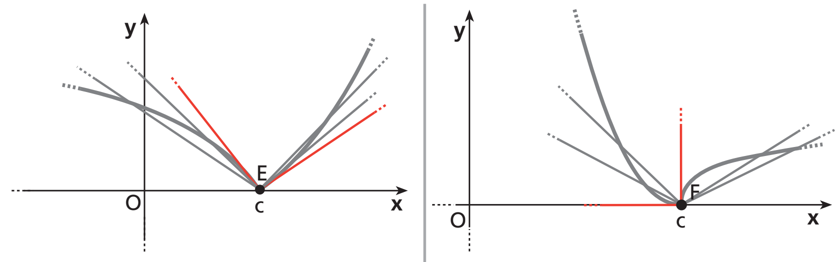
● *Cuspide* deriva dal latino *cuspis*, che significa «punta della lancia».

I punti come C e D dei grafici della figura 9 si chiamano **cuspidi**.

I punti angolosi

Consideriamo i grafici della figura 10.

▶ **Figura 10**



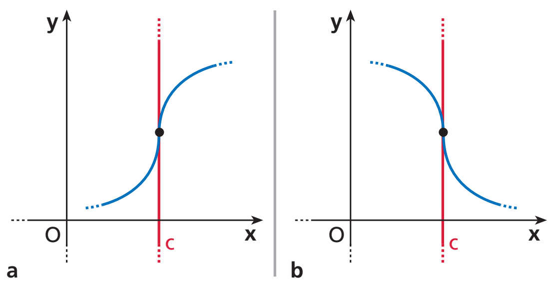
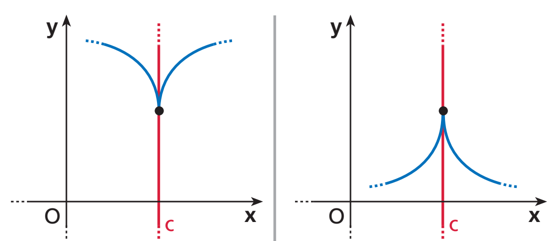
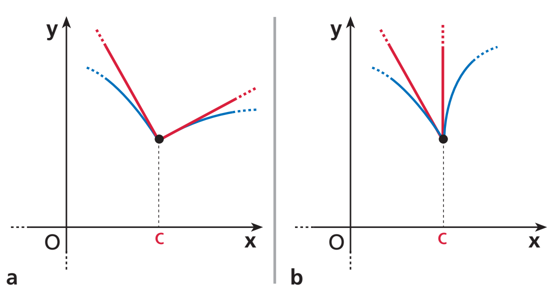
a. La derivata sinistra e la derivata destra nel punto c sono finite ma diverse fra loro: $f'_-(c) \neq f'_+(c)$.

b. Nel punto c la derivata sinistra è finita (uguale a 0), mentre $f'_+(c) = +\infty$.

● Così come si parla di derivata destra e derivata sinistra, possiamo parlare di tangente destra e tangente sinistra. Nel caso dei punti angolosi esistono due tangenti al grafico nello stesso punto e diverse tra loro.

I punti come E e F dei grafici della figura 10 si chiamano **punti angolosi**.

In sintesi

Punti di non derivabilità	Grafico	Derivata
Flesso a tangente verticale		a) $f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty$
Cuspide	 **a.** Verso il basso. **b.** Verso l'alto.	a) $f'_-(c) = -\infty, \quad f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = +\infty, \quad f'_+(c) = -\infty$
Punto angoloso		$f'_-(c) \neq f'_+(c)$ a) entrambe finite b) una finita, l'altra infinita

3. LA CONTINUITÀ E LA DERIVABILITÀ

IN PRATICA
▶ Videolezione 67

Ci sono dei punti in cui una funzione è continua ma non è derivabile.

ESEMPIO

1. La funzione $y = |x|$ è continua in $x = 0$, perché

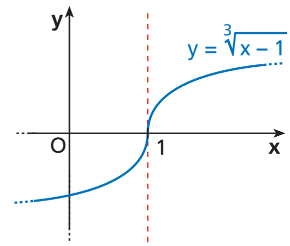
$$\lim_{x\to 0} |x| = f(0) = |0| = 0;$$

tuttavia essa non è derivabile in $x = 0$. Abbiamo già visto infatti che:

$$f'_-(0) \neq f'_+(0).$$

Nel punto di ascissa $x = 0$ la derivata sinistra è diversa dalla derivata destra.

2. La funzione $y = \sqrt[3]{x-1}$ è continua in $x = 1$, ma non è derivabile in questo punto perché il limite del rapporto incrementale non è finito, infatti:



$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cancel{1} + h - \cancel{1}} - \sqrt[3]{1-1}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{h}{h^3}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty.$$

Ci sono anche punti in cui una funzione è derivabile ma non è continua? Il teorema seguente lo esclude.

TEOREMA

Se una funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0, in quel punto la funzione è anche continua.

DIMOSTRAZIONE

Scriviamo la relazione

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h,$$

che, svolti i calcoli, risulta essere un'identità.
Calcoliamo il limite per $h \to 0$ di entrambi i membri, ricordando che il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = \underline{\lim_{h\to 0} f(x_0)} + \underline{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h}.$$

Nel secondo membro, poiché il limite di una costante è la costante stessa, abbiamo:

$$\underline{\lim_{h\to 0} f(x_0) = f(x_0)}.$$

ESPLORAZIONE

Frattali

Una curva senza rotondità

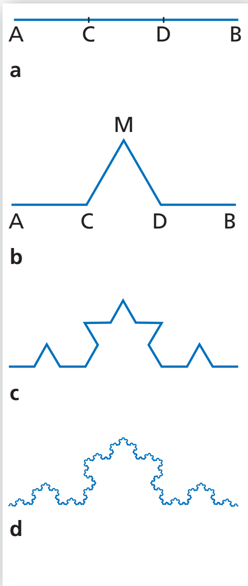
Se pensiamo a una curva continua, viene subito in mente qualcosa di tondeggiante. Tuttavia, abbiamo visto che il grafico di una funzione continua può ammettere punti angolosi, nei quali non esiste la derivata e quindi nemmeno la tangente.
Il matematico svedese Helge von Koch, nel 1904, inventò una curva continua che non ha tangente in alcun punto. Il modo migliore per darne un'idea è descrivere la sua costruzione.

Dato il segmento AB, dividiamolo in tre segmenti congruenti: $AC \cong CD \cong DB$.

Costruiamo il triangolo equilatero CDM e consideriamo la spezzata $ACMDB$.

Ripetiamo sui lati della spezzata l'operazione eseguita su AB.

Possiamo immaginare di ripetere la stessa operazione all'infinito: la curva limite a cui tende la spezzata è la **curva di von Koch**. Una curva fatta tutta di spigoli.



Immagini ripetitive, immagini della natura

La curva di von Koch è un esempio di **frattale**, cioè di figura **autosimile**, che presenta lo stesso motivo a qualunque scala. Ingrandendo un particolare di un frattale, otteniamo un'immagine che ha la stessa forma della figura di origine.
Il termine «frattale» (dal latino *fractus*, frammentato) è stato introdotto da Benoît Mandelbrot, un matematico francese di origine polacca.
Uno degli aspetti più affascinanti dei frattali è che riescono a riprodurre in maniera soddisfacente molti fenomeni e oggetti presenti in natura, dalle coste marittime alle catene montuose, ai cavolfiori.

Attività

La bellezza dei frattali

Le immagini generate con il computer, applicando le teorie matematiche relative ai frattali, sono così intriganti da far nascere vere e proprie opere d'arte o paesaggi insoliti e surreali come quello in figura.

- Cerca su Internet informazioni e immagini sull'«arte frattale» e sui software in grado di generare immagini frattali.

@ **Cerca nel Web:**
arte frattale, software frattali

Inoltre, essendo il limite di un prodotto uguale al prodotto dei limiti e ricordando l'ipotesi:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Quindi, sostituendo nel secondo membro, il limite iniziale diventa:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0$$

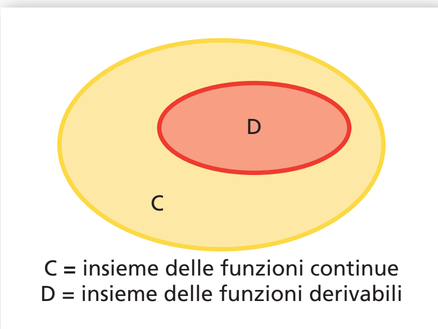
$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0).$$

Posto $x_0 + h = x$, se $h \to 0$, si ha che $x \to x_0$. Sostituendo nella relazione precedente, concludiamo che la funzione $f(x)$ è continua in x_0, in quanto:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Nella dimostrazione del teorema abbiamo visto che la scrittura $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ è equivalente a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Possiamo quindi assumerla come definizione di funzione continua: una funzione è **continua** se $\boldsymbol{\lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)}$.

Per quanto abbiamo detto, possiamo affermare che l'insieme delle funzioni derivabili è un sottoinsieme proprio di quello delle funzioni continue.



◀ **Figura 11** Esistono funzioni continue ma non derivabili, mentre le funzioni derivabili sono sempre continue: $D \subset C$.

- Per ipotesi, $f'(x_0)$ esiste ed è un numero finito.
- Il teorema afferma che la derivabilità di una funzione implica la continuità, e poiché il viceversa non è vero si può allora concludere che la **continuità è una condizione necessaria, ma non è sufficiente per la derivabilità**.

4. LE DERIVATE FONDAMENTALI

Determiniamo ora le formule di derivazione delle funzioni più usate.

TEOREMA

La derivata di una funzione costante è 0:

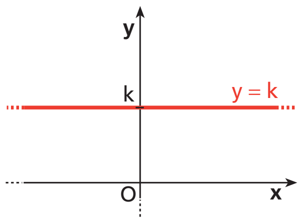
$$\mathbf{D}\, \boldsymbol{k} = \mathbf{0}.$$

DIMOSTRAZIONE

Ricordando che, se $f(x) = k$ anche $f(x+h) = k$, calcoliamo:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = 0.$$

- Queste formule permettono di calcolare le derivate delle funzioni senza dover applicare la definizione.
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{k-k}{h}$ non è una forma indeterminata perché il numeratore è costante e vale 0 prima ancora di calcolare il limite.



Interpretazione grafica

Dal grafico della funzione $y = k$ (figura a lato) è intuitivo notare che la tangente al grafico in ogni suo punto è rappresentata da una retta parallela all'asse x, quindi con coefficiente angolare $m = f'(x) = 0$.

TEOREMA

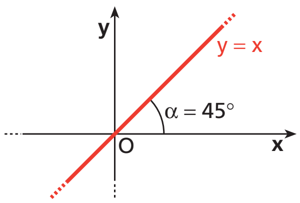
La derivata della funzione $f(x) = x$ è $f'(x) = 1$:

$$\mathbf{D}\, x = 1.$$

DIMOSTRAZIONE

Se $f(x) = x$, risulta che $f(x+h) = x + h$. Calcoliamo $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$$



Interpretazione grafica

Dal grafico della funzione $y = x$ (figura a lato), che è la bisettrice del primo e terzo quadrante, si nota che la tangente al grafico in ogni suo punto è la retta stessa; quindi il suo coefficiente angolare è $m = \operatorname{tg} 45° = f'(x) = 1$.

TEOREMA

La derivata della funzione $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, è $f'(x) = nx^{n-1}$:

$$\mathbf{D}\, x^n = nx^{n-1}.$$

DIMOSTRAZIONE

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

Ricordiamo lo sviluppo della potenza di un binomio:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n\right] - x^n}{h} =$$

Semplifichiamo x^n e raccogliamo h:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right]}{\cancel{h}}.$$

Calcoliamo il limite per $h \to 0$ e otteniamo:

$$\mathrm{D}\, x^n = nx^{n-1}.$$

ESEMPIO

1. La derivata di $y = x^2$ è $y' = 2x$.
2. La derivata di $y = x^7$ è $y' = 7x^6$.

Si può estendere la regola al caso di esponente α reale.

TEOREMA

La derivata della funzione $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, è $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$:

$$\mathbf{D}\, x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

● Se α è intero, oppure $\alpha = \frac{m}{n}$ con n dispari, la regola vale anche con $x < 0$.

DIMOSTRAZIONE

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h}.$$

Raccogliamo x^α al numeratore:

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^\alpha \left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h \to 0} x^\alpha \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{h} =$$

Poiché $x^\alpha = x^{\alpha-1} \cdot x = \dfrac{x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x}}$:

$$= \lim_{h \to 0} x^{\alpha-1} \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} =$$

Ricordando il limite notevole $\lim_{f(x) \to 0} \dfrac{[1 + f(x)]^k - 1}{f(x)} = k$, si ha:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} = \alpha.$$

Concludiamo che:

$$\mathrm{D}\, x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

ESEMPIO

1. La funzione $y = \sqrt[4]{x^3}$ si può scrivere $y = x^{\frac{3}{4}}$, quindi la sua derivata è:

$$y' = \frac{3}{4} x^{\frac{3}{4} - 1} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}}, \text{ con } x > 0.$$

2. La funzione $y = \dfrac{1}{x^4}$ si può scrivere $y = x^{-4}$, quindi la sua derivata è:

$$y' = -4x^{-5} = \frac{-4}{x^5}, \text{ con } x \neq 0.$$

3. La funzione $y = \sqrt[3]{x^5}$ si può scrivere $y = x^{\frac{5}{3}}$, quindi la sua derivata è:

$$y' = \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3} - 1} = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2}, \text{ con } x \in \mathbb{R}.$$

● Prova a calcolare la derivata di

$y = x^\pi$

e di

$y = x^{\sqrt{2}}$.

Caso particolare

Se $\alpha = \frac{1}{2}$, $\mathrm{D}\, x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, con $x > 0$.

Quindi:

$$\mathbf{D} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

● Per $x = 0$ esiste la funzione $\sqrt{x}$, ma non la derivata.

TEOREMA

La derivata della funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$, con x espresso in radianti, è $f'(x) = \cos x$:

$$\mathbf{D} \operatorname{sen} x = \cos x.$$

DIMOSTRAZIONE

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}x\cos h + \cos x \operatorname{sen}h - \operatorname{sen}x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}x(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen}h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\operatorname{sen}x\cdot\frac{(\cos h-1)}{h} + \cos x\cdot\frac{\operatorname{sen}h}{h}\right]$$

e, ricordando i limiti notevoli,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0,$$

si ha:

$$f'(x) = \operatorname{sen}x\cdot 0 + \cos x\cdot 1 = \cos x.$$

- Applichiamo la formula di addizione: $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) =$ $= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$.
- Se x è misurato in gradi: $D \operatorname{sen} x° = \frac{\pi}{180°}\cdot\cos x°$.

In modo del tutto analogo si può dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA

La derivata della funzione $f(x) = \cos x$, con x espresso in radianti, è $f'(x) = -\operatorname{sen} x$:

$$\mathbf{D}\cos x = -\operatorname{sen} x.$$

- Se x è misurato in gradi: $D\cos x° = -\frac{\pi}{180°}\cdot\operatorname{sen}x°$.

TEOREMA

La derivata della funzione $f(x) = a^x$ è $f'(x) = a^x\ln a$:

$$\mathbf{D}\, a^x = a^x \ln a.$$

- $a \in \mathbb{R}^+$.

DIMOSTRAZIONE

Applicando la definizione di derivata alla funzione $f(x) = a^x$, otteniamo:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h} = \lim_{h\to 0}a^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = a^x\ln a.$$

- Ricordiamo che vale il limite notevole: $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$.

In particolare:

$$\mathbf{D}\, e^x = e^x.$$

- Infatti, quando $a = e$, $\ln e = 1$.

TEOREMA

La derivata della funzione $f(x) = \log_a x$ è $f'(x) = \frac{1}{x}\cdot\log_a e$:

$$\mathbf{D}\log_a x = \frac{1}{x}\cdot\log_a e.$$

- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$; $x \in \mathbb{R}^+$.

DIMOSTRAZIONE

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}.$$

Utilizziamo la proprietà dei logaritmi $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ e scriviamo:

$$\log_a(x+h) - \log_a x = \log_a \frac{x+h}{x} = \log_a\left(1+\frac{h}{x}\right),$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Moltiplichiamo e dividiamo il denominatore h per x, cioè scriviamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \log_a e \cdot \frac{1}{x},$$

e quindi:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e.$$

Ricordiamo il limite notevole:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

In particolare, per $a = e$ si ha:

$$\mathbf{D} \ln x = \frac{1}{x}.$$

Infatti se $a = e$, $\ln e = 1$, e sostituendo nella formula precedente si ottiene:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}.$$

5. I TEOREMI SUL CALCOLO DELLE DERIVATE

La derivata del prodotto di una costante per una funzione

TEOREMA

La derivata del prodotto di una costante k per una funzione derivabile $f(x)$ è uguale al prodotto della costante per la derivata della funzione:

$$\mathbf{D}[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x).$$

DIMOSTRAZIONE

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h}.$$

Essendo k una costante e ricordando la definizione di derivata, si può scrivere:

$$y' = k \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \cdot f'(x).$$

ESEMPIO

Calcoliamo le derivate delle seguenti funzioni.

1. $y = -3 \cdot \ln x$; $y' = -3 \cdot \frac{1}{x} = -\frac{3}{x}$.
2. $y = \frac{2}{3} \cdot \cos x$; $y' = \frac{2}{3} \cdot (-\operatorname{sen} x) = -\frac{2}{3} \operatorname{sen} x$.

La derivata della somma di funzioni

TEOREMA

La derivata della somma algebrica di due o più funzioni derivabili è uguale alla somma algebrica delle derivate delle singole funzioni:

$$\mathbf{D}\,[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x).$$

Dimostriamo il teorema per due funzioni. Per più funzioni la dimostrazione è analoga.

DIMOSTRAZIONE

Calcoliamo il limite del rapporto incrementale di $f(x) + g(x)$:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h}.$$

Ricordando che il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti e l'ipotesi di derivabilità delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, possiamo scrivere:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

ESEMPIO

Calcoliamo le derivate delle seguenti funzioni.

1. $y = x + 2 \cdot \operatorname{sen} x$; $\quad y' = 1 + 2 \cdot \cos x$.
2. $y = 2 \cdot e^x - 3 \cdot \cos x + 1$; $\quad y' = 2 \cdot e^x + 3 \cdot \operatorname{sen} x$.

La derivata del prodotto di funzioni

TEOREMA

La derivata del prodotto di due funzioni derivabili è uguale alla somma della derivata della prima funzione moltiplicata per la seconda non derivata e della derivata della seconda funzione moltiplicata per la prima non derivata:

$$\mathbf{D}\,[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

DIMOSTRAZIONE

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}.$$

Al primo termine del numeratore sottraiamo e sommiamo il prodotto $g(x + h) \cdot f(x)$:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - g(x+h) \cdot f(x) + g(x+h) \cdot f(x) - f(x) \cdot g(x)}{h}.$$

Raccogliamo $g(x + h)$ fra i primi due termini e $f(x)$ tra gli ultimi due:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) \cdot [f(x+h) - f(x)] + f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h}.$$

Il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti, per cui:

$$y' = \lim_{h \to 0} \left[g(x+h) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] + \lim_{h \to 0} \left[f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right].$$

Il limite di un prodotto è uguale al prodotto dei limiti:

$$y' = \lim_{h\to 0} g(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Poiché per ipotesi $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili, e quindi anche continue, abbiamo:

$$y' = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

● Se $g(x)$ è continua, allora $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$.
Inoltre, $\lim_{h\to 0} f(x) = f(x)$ perché $f(x)$ è una costante rispetto a h.

ESEMPIO

Calcoliamo la derivata della funzione $y = x \cdot \operatorname{sen} x$:

$$y' = 1 \cdot \operatorname{sen} x + x \cdot \cos x.$$

Estendendo il teorema al prodotto di più funzioni, si può dimostrare che, per esempio, data la funzione $y = f(x) \cdot g(x) \cdot z(x)$, la sua derivata prima è:

$$y' = f'(x) \cdot g(x) \cdot z(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot z(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot z'(x).$$

● In generale la derivata del prodotto di più funzioni derivabili è la somma dei prodotti della derivata di ognuna delle funzioni per le altre funzioni non derivate.

ESEMPIO

Calcoliamo la derivata della funzione $y = x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$.

Applichiamo la regola di derivazione del prodotto,

$$\begin{aligned} y' &= \mathrm{D}(x) \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x + x \cdot \mathrm{D}(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x + x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \mathrm{D}(\cos x) = \\ &= 1 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x + x \cdot \cos x \cdot \cos x + x \cdot \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x) = \\ &= \operatorname{sen} x \cdot \cos x + x \cdot \cos^2 x - x \cdot \operatorname{sen}^2 x = \\ &= \operatorname{sen} x \cdot \cos x + x \cdot (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x), \end{aligned}$$

quindi:

$$y' = \operatorname{sen} x \cdot \cos x + x \cdot \cos 2x.$$

La derivata del reciproco di una funzione

TEOREMA

La derivata del reciproco di una funzione derivabile non nulla è uguale a una frazione in cui:

- il numeratore è l'opposto della derivata della funzione;
- il denominatore è il quadrato della funzione.

$$\mathbf{D}\,\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}, \qquad \textbf{con } f(x) \neq 0.$$

● Il valore della funzione deve essere diverso da 0 nei punti in cui calcoliamo la derivata.

DIMOSTRAZIONE

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x)-f(x+h)}{f(x)f(x+h)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[-\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \frac{1}{f(x)f(x+h)} \right] =$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{f(x)f(x+h)}.$$

- Se $f(x)$ è continua, allora $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$.

Essendo $f(x)$ derivabile (e quindi anche continua), si ha:

$$y' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

ESEMPIO

1. Deriviamo la funzione $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$: $\quad y' = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

2. La derivata di $y = \frac{5}{x^3 - 2}$ è: $\quad y' = 5 \cdot \frac{(-3x^2)}{(x^3-2)^2} = -\frac{15x^2}{(x^3-2)^2}$.

La derivata del quoziente di due funzioni

- Il valore della funzione divisore deve essere diverso da 0 nei punti in cui calcoliamo la derivata.

TEOREMA

La derivata del quoziente di due funzioni derivabili (con funzione divisore non nulla) è uguale a una frazione che ha:
- per numeratore la differenza fra la derivata del dividendo moltiplicata per il divisore non derivato e il dividendo non derivato moltiplicato per la derivata del divisore;
- per denominatore il quadrato del divisore.

$$\mathbf{D}\,\frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{g(x)}} = \frac{\boldsymbol{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}}{\boldsymbol{g^2(x)}}, \qquad \textbf{con } \boldsymbol{g(x) \neq 0}.$$

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo la funzione quoziente come prodotto di due funzioni:

$$y = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}.$$

Applichiamo la regola della derivata di un prodotto:

$$\mathrm{D}\,\frac{f(x)}{g(x)} = \mathrm{D}\left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right] = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \mathrm{D}\,\frac{1}{g(x)}.$$

Applichiamo la regola della derivata del reciproco di una funzione:

$$\mathrm{D}\,\frac{f(x)}{g(x)} = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{-g'(x)}{g^2(x)}.$$

Riduciamo allo stesso denominatore e concludiamo:

$$\mathrm{D}\,\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo la derivata della funzione $y = \frac{3x^2 - 1}{x^2 + x}$:

$$y' = \frac{3 \cdot 2x \cdot (x^2 + x) - (2x+1) \cdot (3x^2 - 1)}{(x^2+x)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{6x^3} + 6x^2 - \cancel{6x^3} + 2x - 3x^2 + 1}{(x^2+x)^2} = \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x^2+x)^2}.$$

Dal teorema precedente, come casi particolari, si ricavano le derivate della funzione tangente e della funzione cotangente.

La derivata della funzione tangente

Si può scrivere $y = \operatorname{tg} x$ come $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e, applicando la formula di derivazione di un quoziente, si ha:

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}.$$

- Sappiamo che: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Tale risultato può anche essere scritto nei due seguenti modi:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{oppure} \quad y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Quindi:

$$\mathbf{D} \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{D} \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

La derivata della funzione cotangente

Analogamente, poiché si può scrivere $y = \operatorname{cotg} x$ come $y = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, si può ricavare che:

$$y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \quad \text{oppure} \quad y' = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x).$$

Quindi:

$$\mathbf{D} \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{D} \operatorname{cotg} x = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x).$$

6. LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

IN PRATICA
▶ Videolezione 68

Richiamiamo il concetto di funzione composta, spiegando quali simboli utilizzeremo per il calcolo della sua derivata.
Consideriamo per esempio la funzione:

$$y = \ln(x^2 + 2).$$

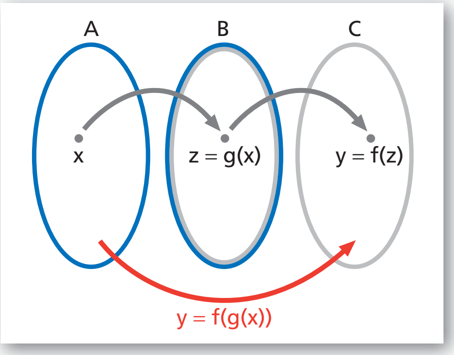
Essa rappresenta il logaritmo del polinomio $x^2 + 2$, che a sua volta è una funzione di x.

Se poniamo $z = x^2 + 2$, otteniamo $y = \ln z$. In questo modo mettiamo in evidenza che l'argomento della funzione logaritmo non è la variabile indipendente x, ma è a sua volta un'altra funzione, cioè $z(x) = x^2 + 2$.
Più in generale, sia $z = g(x)$ una funzione della variabile x, dal dominio A al codominio B, e sia $y = f(z)$ una funzione della variabile z, dal dominio B al codominio C.

La funzione $y = f(g(x))$ è una funzione composta (o funzione di funzione) perché y è funzione di z, che a sua volta è funzione di x.

Le due funzioni $z = g(x)$ e $y = f(z)$ sono dette *componenti* della funzione composta.

◀ Figura 12



Vale il seguente teorema.

TEOREMA

Se la funzione g è derivabile nel punto x e la funzione f è derivabile nel punto $z = g(x)$, allora la funzione composta $y = f(g(x))$ è derivabile in x e la sua derivata è il prodotto delle derivate di f rispetto a z e di g rispetto a x:

$$\mathbf{D}\,[f(g(x))] = f'(z) \cdot g'(x), \quad \textbf{con } z = g(x).$$

DIMOSTRAZIONE

$$\mathrm{D}\left[f(g(x))\right] = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}.$$

Poiché $z = g(x)$, allora

$$g(x+h) - g(x) = \Delta z,$$

da cui:

$$g(x+h) = g(x) + \Delta z = z + \Delta z.$$

Sostituendo nel limite si ha:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{h}.$$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore per Δz:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{h}.$$

Poiché la funzione $z = g(x)$ è derivabile per ipotesi e quindi continua, si ha:

$$\lim_{h \to 0} \Delta z = \lim_{h \to 0} [g(x+h) - g(x)] = 0.$$

Essendo $g(x)$ continua: $\lim_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$.

Calcoliamo allora:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(z) \cdot g'(x).$$

Concludiamo che:

$$\mathrm{D}\,[f(g(x))] = f'(z) \cdot g'(x).$$

ESEMPIO

Calcoliamo la derivata della funzione composta

$$y = (2x^3 - 3x^2 + x - 1)^4,$$

in cui consideriamo:

$$z = g(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1 \text{ e } y = f(z) = z^4.$$

Per la formula di derivazione della funzione composta, otteniamo:

$$y' = 4z^3 \cdot z', \quad \text{dove} \quad z' = 6x^2 - 6x + 1.$$

Sostituendo:

$$y' = 4 \cdot (2x^3 - 3x^2 + x - 1)^3 \cdot (6x^2 - 6x + 1).$$

Si può anche calcolare la derivata di una funzione composta direttamente, senza effettuare sostituzioni.

ESEMPIO

Calcoliamo la derivata della funzione dell'esempio iniziale,

$$y = \ln(x^2 + 2),$$

senza utilizzare le sostituzioni:

$$y' = \underbrace{\left(\frac{1}{x^2+2}\right)}_{\text{derivata della funzione logaritmica}} \cdot \underbrace{(2x)}_{\text{derivata della funzione della variabile } x\text{, argomento del logaritmo}}$$

Il teorema precedente può essere esteso alla derivata di una funzione y dipendente dalla variabile x attraverso un numero qualunque di funzioni componenti.

Per esempio, nel caso di tre funzioni, essendo

$$y = f(g(z(x))),$$

posto

$$t = z(x), \quad u = g(t), \quad y = f(u),$$

la formula relativa alla derivata della funzione composta si può scrivere:

$$\boldsymbol{\mathrm{D}\, f(g(z(x))) = f'(u) \cdot g'(t) \cdot z'(x).}$$

7. LA DERIVATA DI $[f(x)]^{g(x)}$

Utilizzando le formule relative alla derivata di una funzione composta e alla derivata di un prodotto, possiamo studiare un metodo per calcolare la derivata della funzione $y = [f(x)]^{g(x)}$, in cui $f(x) > 0$ e $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni derivabili.
Data la funzione

$$y = [f(x)]^{g(x)},$$

essendo $f(x) > 0$, è anche $f(x)^{g(x)} > 0$, quindi possiamo calcolare i logaritmi dei due membri:

$$\ln y = \ln[f(x)]^{g(x)}.$$

Applicando la proprietà relativa al logaritmo di una potenza, abbiamo:

$$\ln y = g(x) \cdot \ln[f(x)].$$

- $\log_a b^c = c \log_a b$, con $b > 0$.

Se ora applichiamo ai due membri dell'uguaglianza i teoremi per la derivazione delle funzioni composte e del prodotto di due funzioni, otteniamo

$$\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \cdot \ln[f(x)] + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x),$$

- La y è una funzione composta, perciò: $\mathrm{D}[\ln y] = \frac{1}{y} \cdot y'$.

da cui, essendo y diverso da 0:

$$y' = y \cdot \left[g'(x) \cdot \ln[f(x)] + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)}\right].$$

Poiché $y = [f(x)]^{g(x)}$, possiamo scrivere:

$$y' = [f(x)]^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln [f(x)] + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)} \right].$$

Concludendo possiamo evidenziare la seguente formula per la derivazione della funzione $y = [f(x)]^{g(x)}$:

$$\mathbf{D}\,[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln [f(x)] + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)} \right].$$

ESEMPIO

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$y = (x+2)^{x-1}.$$

La funzione è definita per $x > -2$ perché la base di una funzione esponenziale deve essere positiva.

Poiché la formula vista in precedenza è difficile da ricordare, procediamo ripetendo i passaggi.

Applichiamo il logaritmo a entrambi i membri:

$$\ln y = \ln (x+2)^{x-1}$$

$$\ln y = (x-1) \cdot \ln (x+2).$$

Calcoliamo le derivate di entrambi i membri:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln (x+2) + (x-1) \cdot \frac{1}{(x+2)} \cdot 1$$

$$y' = y \cdot \left[\ln (x+2) + \frac{x-1}{x+2} \right]$$

$$y' = (x+2)^{x-1} \cdot \left[\ln (x+2) + \frac{x-1}{x+2} \right].$$

Se nella funzione $[f(x)]^{g(x)}$ prendiamo $g(x) = a$, con $a \in \mathbb{R}$, e applichiamo la regola precedente, otteniamo:

$$\mathbf{D}\,[f(x)]^{a} = [f(x)]^{a} \cdot \frac{a \cdot f'(x)}{f(x)} = a \cdot [f(x)]^{a-1} \cdot f'(x).$$

In particolare, se $x > 0$ e $a \in \mathbb{R}$, ritroviamo la regola:

$$\mathbf{D}\, x^{a} = a \cdot x^{a-1}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo la derivata di $y = (\ln x)^{\pi}$.

Deve essere: $\ln x > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1$.

Si ha:

$$y' = \pi (\ln x)^{\pi - 1} \cdot \frac{1}{x}.$$

8. LA DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

TEOREMA

Consideriamo la funzione $y = f(x)$ definita e invertibile nell'intervallo I e la sua funzione inversa $x = f^{-1}(y)$. Se $f(x)$ è derivabile con derivata diversa da 0 in ogni punto di I, allora anche $f^{-1}(y)$ è derivabile e vale la relazione:

$$\mathbf{D}[f^{-1}(y)] = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{con } x = f^{-1}(y).$$

IN PRATICA
▶ Videolezione 69

Supponendo che esistano le due derivate, per giustificare la relazione che intercorre fra loro, ricordiamo che:

$$f^{-1}[f(x)] = x.$$

Derivando entrambi i membri di questa uguaglianza, abbiamo

$$\mathrm{D}\left[f^{-1}(y)\right] \cdot f'(x) = 1,$$

da cui otteniamo:

$$\mathrm{D}\left[f^{-1}(y)\right] = \frac{1}{f'(x)}.$$

Di particolare interesse è l'applicazione del teorema nel calcolo delle derivate delle funzioni goniometriche inverse.

La funzione $y = \operatorname{arcsen} x$, definita per $x \in [-1; 1]$, è l'inversa di $x = \operatorname{sen} y$, con $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Inoltre, la funzione seno è derivabile in $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ con derivata non nulla.

Per il teorema precedente la funzione $\operatorname{arcsen} x$ è derivabile in $]-1; 1[$ e si ha:

$$\mathrm{D} \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\mathrm{D} \operatorname{sen} y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\mathbf{D} \operatorname{\mathbf{arcsen}} \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^2}}.$$

In modo analogo si possono ottenere le seguenti formule:

$$\mathbf{D} \operatorname{\mathbf{arccos}} \boldsymbol{x} = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^2}},$$

$$\mathbf{D} \operatorname{\mathbf{arctg}} \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{x}^2},$$

$$\mathbf{D} \operatorname{\mathbf{arccotg}} \boldsymbol{x} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{x}^2}.$$

- Una funzione f è invertibile se è biunivoca.
- La composizione fra una funzione f e la sua inversa f^{-1} dà come risultato la funzione identità.
- Applichiamo la regola di derivazione di una funzione composta.
- Se $y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, si ha:
  $\cos y > 0.$

9. LE DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO

Consideriamo la funzione:

$$y = f(x) = x^3 - 2x + 1, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}.$$

La sua derivata,

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 2,$$

è, a sua volta, una funzione della variabile x, definita sempre per $x \in \mathbb{R}$. Anche di tale funzione possiamo calcolare la derivata:

$$\mathrm{D}\, y' = 6x.$$

Tale derivata prende il nome di **derivata seconda** della funzione $f(x)$ e si indica con il simbolo:

$$y'' \quad \text{oppure} \quad f''(x).$$

Per analogia, la derivata $y' = f'(x)$ è anche detta **derivata prima**.

Anche la derivata seconda ottenuta è una funzione che possiamo derivare; derivando quest'ultima, si ottiene la **derivata terza**:

$$y''' = 6.$$

In generale, data una funzione $y = f(x)$, con il procedimento esaminato si possono ottenere la derivata seconda, terza, quarta, … Esse si dicono **derivate di ordine superiore** della funzione data.

Per indicare la derivata prima, seconda e terza della funzione $y = f(x)$ si usano, di solito, gli apici: y', y'', y'''.
Dalla derivata quarta in poi si usa il numero fra parentesi: $y^{(4)}$, $y^{(5)}$, $y^{(6)}$, …

In generale, la derivata di ordine n di una funzione $y = f(x)$ è anch'essa una funzione della variabile x e si indica con il simbolo $y^{(n)}$.

ESEMPIO

Calcoliamo le derivate prima, seconda, terza e quarta della funzione $y = \operatorname{sen} x$:

$$y = \operatorname{sen} x,$$

$$y' = \cos x,$$

$$y'' = -\operatorname{sen} x,$$

$$y''' = -\cos x,$$

$$y^{(4)} = \operatorname{sen} x.$$

Per una funzione polinomiale $y = f(x)$ di grado m, si ha $y^{(m)} =$ costante e $y^{(n)} = 0$ se $n > m$.

10. IL DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE

Sia $f(x)$ una funzione derivabile, e quindi continua, in un intervallo e siano x e $(x + \Delta x)$ due punti di tale intervallo.

DEFINIZIONE

Differenziale

Si chiama differenziale di una funzione $f(x)$, relativo al punto x e all'incremento Δx, il prodotto della derivata della funzione, calcolata in x, per l'incremento Δx. Il differenziale viene indicato con $df(x)$ oppure dy:

$$\boldsymbol{dy = f'(x) \cdot \Delta x}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo i seguenti differenziali:

$$d \cos x = - \operatorname{sen} x \cdot \Delta x,$$

$$d \ln x = \frac{1}{x} \cdot \Delta x.$$

Notiamo che il differenziale dipende da due elementi: il punto x in cui calcoliamo il differenziale e l'incremento Δx che consideriamo.

ESEMPIO

Il differenziale della funzione

$$y = 2x^3 + 3$$

è

$$dy = 6x^2 \cdot \Delta x,$$

che per $x = 1$ e $\Delta x = 0{,}3$ vale

$$dy = 6 \cdot (1)^2 \cdot 0{,}3 = 1{,}8,$$

mentre per $x = 2$ e $\Delta x = 0{,}2$ vale

$$dy = 6 \cdot (2)^2 \cdot 0{,}2 = 24 \cdot 0{,}2 = 4{,}8.$$

Consideriamo la funzione

$$y = x$$

e calcoliamone il differenziale:

$$dy = dx = 1 \cdot \Delta x.$$

Quindi:

$$\boldsymbol{dx = \Delta x}.$$

Ciò significa che *il differenziale della variabile indipendente x è uguale all'incremento della variabile stessa*.

Sostituendo nella definizione di differenziale, possiamo scrivere

$$dy = f'(x) \cdot dx,$$

cioè *il differenziale di una funzione è uguale al prodotto della sua derivata per il differenziale della variabile indipendente.*

Da quest'ultima relazione, ricavando $f'(x)$, abbiamo:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

La derivata prima di una funzione è dunque il rapporto fra il differenziale della funzione e quello della variabile indipendente.

La scrittura $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ è utile anche nelle applicazioni relative a funzioni per le quali, nell'espressione relativa, oltre alla variabile indipendente, sono presenti dei parametri.

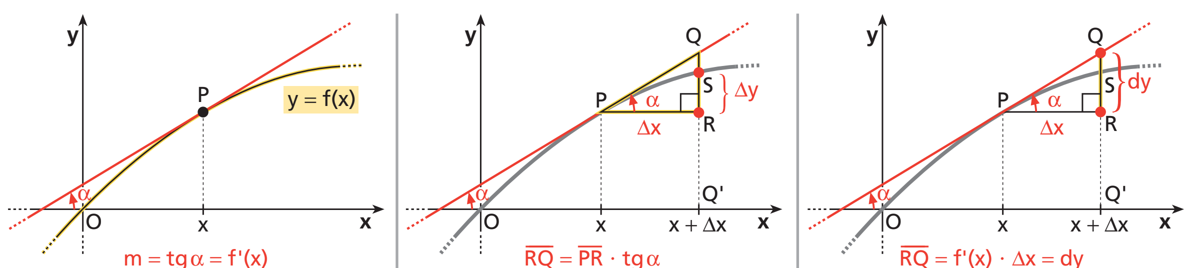
Consideriamo per esempio $y = \frac{1}{2}at^2 + kt$, dove t è la variabile indipendente e a e k sono parametri, allora la derivata è:

$$\frac{dy}{dt} = at + k.$$

I parametri sono costanti rispetto alla variabile t.

Interpretazione geometrica del differenziale

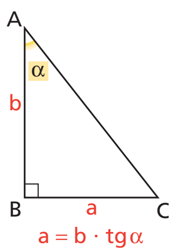
▼ Figura 13



a. Consideriamo il grafico della funzione $y = f(x)$ e la retta tangente nel punto P, di ascissa x.

b. In corrispondenza del punto Q' di ascissa $x + \Delta x$, tracciamo i punti R, S e Q. Il triangolo PRQ è rettangolo in R. Per il teorema dei triangoli rettangoli si ha: $\overline{RQ} = \overline{PR} \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

c. Poiché $\overline{PR} = \Delta x$ e $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$, risulta $\overline{RQ} = dy$.



Consideriamo il triangolo rettangolo PRQ (figura 13b). Applicando a esso il teorema dei triangoli rettangoli della trigonometria si ha:

$$\overline{RQ} = \overline{PR} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Ma $\overline{PR} = \Delta x$ e $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$.

Sostituendo, otteniamo:

$$\overline{RQ} = f'(x) \cdot \Delta x = dy.$$

Ciò significa che il differenziale dy è la variazione che subisce l'ordinata della retta tangente alla curva quando si passa dal punto di ascissa x al punto di ascissa $(x + \Delta x)$.

L'incremento Δy della funzione relativo al punto x e al punto $(x + \Delta x)$ è la variazione che subisce l'ordinata della curva, cioè $\overline{RS}$:

$$\overline{RS} = \overline{Q'S} - \overline{Q'R} = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y.$$

Da quanto detto possiamo concludere che sostituire all'incremento Δy della funzione il suo differenziale da un punto di vista geometrico significa sostituire al grafico della funzione la sua tangente.

Il differenziale costituisce quindi un'approssimazione dell'incremento della funzione, ossia:

$$dy \simeq \Delta y.$$

Nella figura 13c possiamo notare che l'errore commesso nel compiere tale approssimazione è $\overline{QS}$. Più grande viene preso Δx, più tale errore aumenta.
In alcuni casi, tuttavia, è preferibile calcolare dy invece di Δy perché i calcoli sono più semplici.

Vediamo infatti con il seguente esempio un'applicazione.

ESEMPIO

Calcoliamo il valore approssimato di $\sqrt{9{,}12}$.
Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{x}$; scegliendo $x = 9$ e $\Delta x = 0{,}12$, possiamo scrivere:

$$\sqrt{9{,}12} = \sqrt{9 + 0{,}12} = f(x + \Delta x).$$

Calcoliamo:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{9 + 0{,}12} - \sqrt{9},$$

$$dy = f'(x) \cdot dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \Delta x \quad \to \quad dy = \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0{,}12.$$

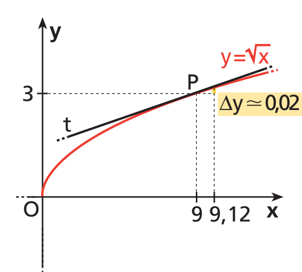
Poiché sappiamo che $\Delta y \simeq dy$, otteniamo:

$$\sqrt{9 + 0{,}12} - \sqrt{9} \simeq \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0{,}12.$$

Quindi:

$$\sqrt{9{,}12} \simeq \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0{,}12 = 3 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}12 = 3 + 0{,}02.$$

Dunque $\sqrt{9{,}12} \simeq 3{,}02$.



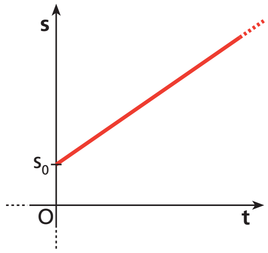
In generale si può calcolare $f(x + \Delta x)$ in modo approssimato, generalizzando il ragionamento fatto nell'esempio precedente:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y \simeq f(x) + dy,$$

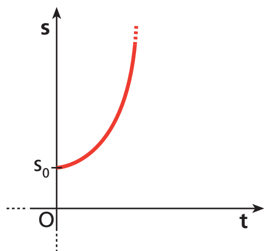
$$\boldsymbol{f(x + \Delta x) \simeq f(x) + f'(x) \cdot \Delta x}.$$

La formula evidenziata fornisce per valori vicini a x una **approssimazione lineare** della funzione.

11. LE APPLICAZIONI DELLE DERIVATE ALLA FISICA



Moto uniforme



Moto uniformemente accelerato

La velocità

In fisica per lo studio di un moto rettilineo si scrive la **legge oraria**

$$s = f(t),$$

ossia una funzione in cui la posizione s è la variabile dipendente e il tempo t è la variabile indipendente.

ESEMPIO

1. Nel moto rettilineo uniforme la legge oraria è:

$$s = vt + s_0,$$

dove v è la velocità costante e s_0 la posizione al tempo $t = 0$.

2. Nel moto rettilineo uniformemente accelerato la legge oraria è:

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0,$$

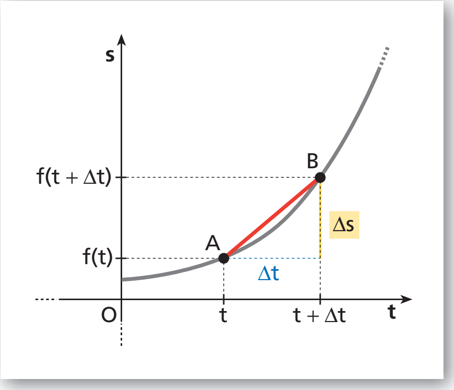
dove a è l'accelerazione costante, v_0 e s_0 sono la velocità e la posizione al tempo $t = 0$.

● Lo spazio percorso è la differenza tra la posizione finale e la posizione iniziale, cioè l'incremento Δs della posizione.

La grandezza *velocità media* è definita dal rapporto fra lo spazio percorso Δs e il tempo Δt impiegato a percorrerlo, ossia:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Quindi v_m rappresenta il rapporto incrementale della legge oraria $s = f(t)$.



◀ Figura 14

La *velocità istantanea* all'istante t si ottiene considerando il limite della velocità media v_m per $\Delta t \to 0$, ossia il limite del rapporto incrementale $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:

$$v_{ist} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).$$

Quindi la velocità istantanea è la derivata della funzione che rappresenta la legge oraria calcolata nell'istante preso in considerazione.

ESEMPIO

Data la legge oraria $s(t) = 2t + 6t^2$, con s misurato in metri e t in secondi, calcoliamo la velocità istantanea all'istante $t = 3$ s.

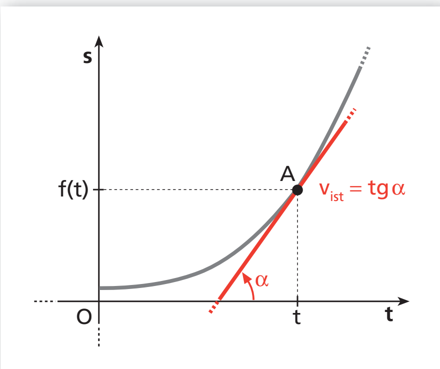
$$s'(t) = 2 + 12t,$$

pertanto:

$$v_{ist} = s'(3) = 2 + 36 = 38 \rightarrow v_{ist} = 38 \text{ m/s}.$$

Con m/s indichiamo l'unità di misura della velocità: metri al secondo.

Nella figura 15 si mostra come ricavare informazioni sulla velocità dal grafico della legge oraria $s = f(t)$, sfruttando il significato geometrico della derivata.
La velocità istantanea indica la «rapidità» con cui varia lo spazio al variare del tempo e coincide con il coefficiente angolare della retta tangente nel punto considerato. Se il grafico della legge oraria ha un andamento come quello della figura 15, puoi verificare, tracciando in più punti la tangente, che la velocità aumenta all'aumentare del tempo.



◄ **Figura 15**

L'accelerazione

Data la legge oraria $s = f(t)$, abbiamo visto che la velocità istantanea è data dalla relazione: $v_{ist} = f'(t)$.

La grandezza *accelerazione media* è definita dal rapporto

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

fra la variazione della velocità istantanea e il tempo nel quale è avvenuta tale variazione, cioè l'accelerazione media è il rapporto incrementale della funzione $v(t)$.

Passando al limite del rapporto incrementale, al tendere a 0 dell'incremento Δt, questo limite, se esiste, rappresenta l'accelerazione istantanea che possiede il punto materiale all'istante t:

$$a_{ist} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = f''(t).$$

L'accelerazione istantanea è quindi la derivata prima della funzione velocità rispetto al tempo, ossia la derivata seconda della posizione rispetto al tempo.

ESEMPIO

Data la legge oraria $s(t) = 5t + 2t^2$, calcoliamo l'accelerazione all'istante $t = 2$ s. Misuriamo la posizione in metri (m) e il tempo in secondi (s). L'unità di misura della velocità è metri al secondo (m/s) e quella dell'accelerazione metri al secondo al quadrato (m/s^2).

Poiché

$$s'(t) = 5 + 4t \text{ e } s''(t) = 4,$$

possiamo affermare che:

$$a_{ist} = 4 \text{ m/s}^2.$$

L'accelerazione risulta costante e uguale a 4 m/s^2, anche al tempo $t = 2$ s; infatti, la legge del moto assegnata è quella di un moto uniformemente accelerato.

L'intensità di corrente

Si definisce *intensità di corrente* la quantità di carica che attraversa una certa sezione di un conduttore nell'unità di tempo. Se conosciamo la funzione $q(t)$ che lega la quantità di carica al tempo, per ottenere l'intensità di corrente media relativa a una quantità di carica Δq passata in un intervallo di tempo Δt, calcoliamo:

$$i_m = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}.$$

i_m è il rapporto incrementale della quantità di carica considerata come funzione del tempo.

Passando al limite del rapporto incrementale al tendere a 0 dell'incremento Δt, ossia calcolando la derivata della funzione $q(t)$, otteniamo, se il limite esiste, l'intensità della corrente che circola nel conduttore all'istante t:

$$i_{ist} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} = q'(t).$$

ESEMPIO

La quantità di carica, misurata in coulomb, che attraversa un certo conduttore, segue la legge:

$$q = 3t^2 - 2t + 4.$$

Determiniamo l'intensità di corrente all'istante $t = 3$ s:

$$i_{ist} = q'(t) = 6t - 2$$

$$i_{ist}(3) = 18 - 2 = 16.$$

L'intensità di corrente cercata è di 16 A, dove con A indichiamo l'ampere, unità di misura dell'intensità di corrente.

L'INFLAZIONE

Se l'inflazione diminuisce vuol dire che i prezzi calano?

Il quesito completo a pag. 1617

Il tasso di inflazione

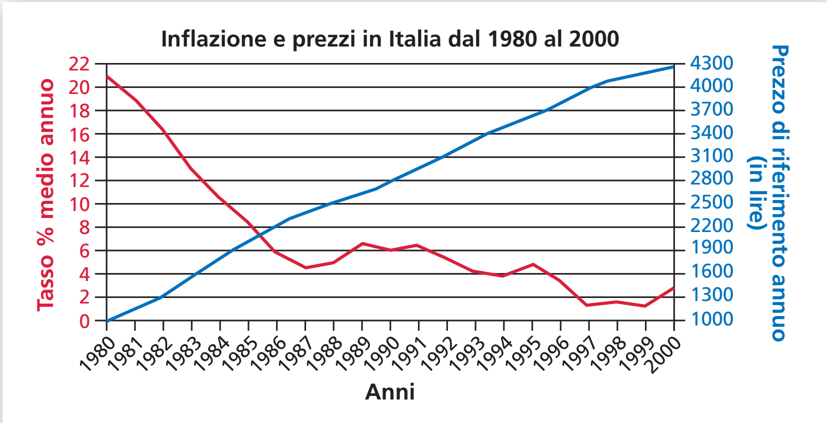
Indica la variazione nel tempo, in percentuale, del prezzo medio di un certo insieme di beni e servizi, detto *paniere*, che rappresenta i consumi delle famiglie.
Del paniere fanno parte, per esempio, pane, latte, abiti, mobili, medicinali e altri generi di prima necessità, ma anche alcolici, sigarette, cinema, articoli sportivi, discoteche.
In Italia, l'Istituto Nazionale di Statistica (ISTAT) provvede ad aggiornare l'indice nazionale dei prezzi al consumo, fornendo una *media ponderata* dei prezzi di beni e servizi. Questa è calcolata attribuendo a ogni prodotto un grado di importanza, un *peso*, all'interno del paniere.
Se indichiamo con $P(t)$ l'andamento nel tempo del prezzo medio del paniere e assumiamo, per esempio, un intervallo temporale di un mese ($\Delta t = 1$ mese), il tasso d'inflazione mensile è il rapporto

$$\frac{\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}}{P(t)}.$$

Il numeratore è il rapporto incrementale della funzione $P(t)$. Se l'intervallo di tempo è piccolo, il tasso d'inflazione può quindi essere considerato proporzionale alla derivata della funzione prezzo medio, o, più precisamente, alla derivata del logaritmo naturale di $P(t)$. Infatti:

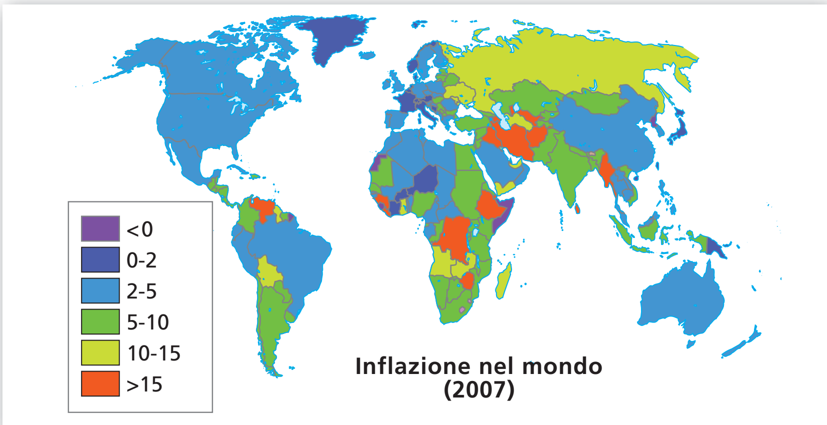
$$D[\ln P(t)] = \frac{1}{P(t)} \cdot P'(t).$$

Il tasso di inflazione rappresenta dunque una sorta di velocità di crescita dei prezzi al consumo. Che cosa succede se diminuisce? Calano i prezzi?
Se dicessimo, per esempio, che a fine ottobre il tasso mensile di inflazione era dello 0,20% e ora, a fine novembre, il tasso di inflazione mensile è dello 0,18%, il calo andrebbe interpretato come una «decelerazione», cioè una diminuzione della velocità della crescita dei prezzi, e non certo come una diminuzione dei prezzi stessi.
In termini matematici, in una situazione come questa è la *derivata seconda* di $P(t)$ a essere negativa. È proprio sulla base della derivata seconda dei prezzi in funzione del tempo che di solito agisce la Banca Centrale di un Paese per rallentare o accelerare la crescita dei prezzi.
Nel grafico in alto puoi osservare l'andamento in Italia del tasso di inflazione annuo dal 1980 al 2000.
Nel periodo 1980-1987 c'è stata una forte diminuzione, ma, come vedi, i prezzi sono aumentati. Ciò che costava 1000 lire nel 1980, costava circa 2500 lire nel 1987.



La deflazione

Poiché una funzione derivabile è decrescente se la sua derivata è negativa, i prezzi al consumo diminuiscono se il tasso di inflazione è negativo: situazione che gli economisti indicano col termine *deflazione*.
Nonostante i consumatori giudichino positiva una diminuzione dei prezzi, in economia un periodo di deflazione viene considerato negativamente, come sintomo di depressione.
Una deflazione abbastanza duratura si è avuta in Giappone dal 2000 al 2006.



LABORATORIO DI MATEMATICA
LE DERIVATE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con GeoGebra costruiamo un disegno che ci permetta di determinare l'equazione della tangente al grafico della funzione $f(x) = 10(x-1)^2 e^{-x}$ nel suo punto T. Proviamo con $x_T = 2{,}50$.

- Entriamo in ambiente GeoGebra e attiviamo una *slider* alla quale diamo il nome x_T.
- Per immettere, sia nella finestra algebrica (figura 1) sia nella zona del disegno (figura 2), gli altri elementi necessari alla soluzione del problema, nella riga di inserimento:

digitiamo:	per dare
$f(x)$=10*$(x-1)^{2*}e$^$(-x)$	la funzione $f(x)$
$T = (xT, f(xT))$	il punto T
Derivata $[f(x)]$	la derivata di $f(x)$
$m = g(xT)$	il coefficiente m
t: $y = m$*$(x-xT)+f(xT)$	la tangente t in T

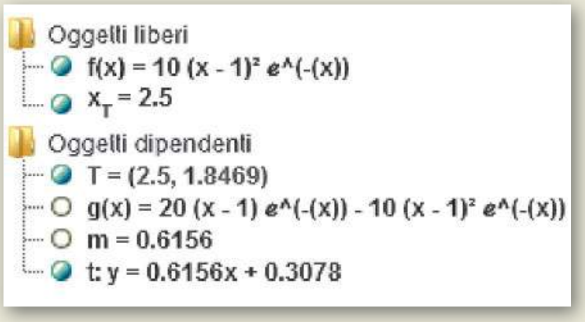
seguiti ogni volta dal tasto INVIO.

Teniamo conto che:

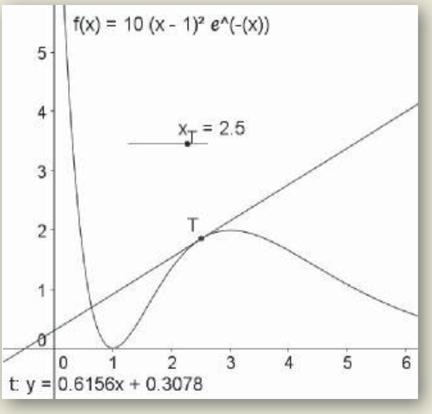
– selezioniamo il simbolo e, il numero di Nepero, dalla tendina dei caratteri speciali con un clic su di esso e l'operatore *Derivata* da quella dei comandi;

– il sistema dà il nome $g(x)$ alla derivata.

- Poi facciamo clic sul corsoio della *slider* e lo spostiamo con il tasto freccia opportuno sino a raggiungere il valore 2,5 (quello proposto dal problema), in modo da leggere l'equazione della tangente. Se spostiamo ulteriormente il corsoio della *slider*, appaiono altre tangenti della curva.



▲ Figura 1



▶ Figura 2

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 17 esercitazioni in più

Esercitazioni

Per ognuna delle seguenti funzioni costruisci un foglio per ricavare le equazioni delle eventuali tangenti e per tracciarne il grafico. Prova il foglio con i punti indicati. Sul quaderno determina le equazioni delle tangenti che esistono e confrontale con i risultati ottenuti al computer.

1 $h(x) = \ln x;$ $x_T = -1, 1, e.$

2 $f(x) = -\dfrac{1}{x};$ $x_T = 0, 1, \dfrac{5}{2}.$

3 $g(x) = \dfrac{2x+3}{x+1};$ $x_T = -2, -1, 0.$

4 $t(x) = \dfrac{4x+2}{x^3+x};$ $x_T = -2, -1, \dfrac{1}{2}.$

5 $r(x) = \sqrt{1-x};$ $x_T = -3, 0, 1.$

6 $s(x) = \operatorname{sen} x;$ $x_T = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}.$

LA TEORIA IN SINTESI
LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE

1. LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE

Sia $y = f(x)$ una funzione definita nell'intervallo $[a; b]$ e siano c e $c + h$ due numeri reali interni all'intervallo.

- **Il rapporto incrementale** relativo a c è il numero:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

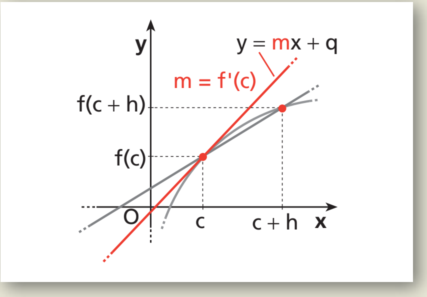
- **Interpretazione geometrica**: considerati nel piano cartesiano i punti $A(c; f(c))$ e $B(c + h; f(c + h))$, il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

è **il coefficiente angolare della retta passante per *A* e per *B***.

- **La derivata** della funzione f nel punto c interno all'intervallo: è il limite, se esiste ed è finito, per h che tende a 0, del rapporto incrementale relativo a c e si indica con $f'(c)$:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$



- **Interpretazione geometrica**: la derivata di una funzione in un punto c rappresenta il **coefficiente angolare** della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa c.

ESEMPIO: Il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $y = x^2$, nel punto $x = 2$, è:

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \to 0} (4 + h) = 4.$$

- In un punto c,
  - la **derivata sinistra** di una funzione è: $f'_-(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$;
  - la **derivata destra** è: $f'_+(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$.

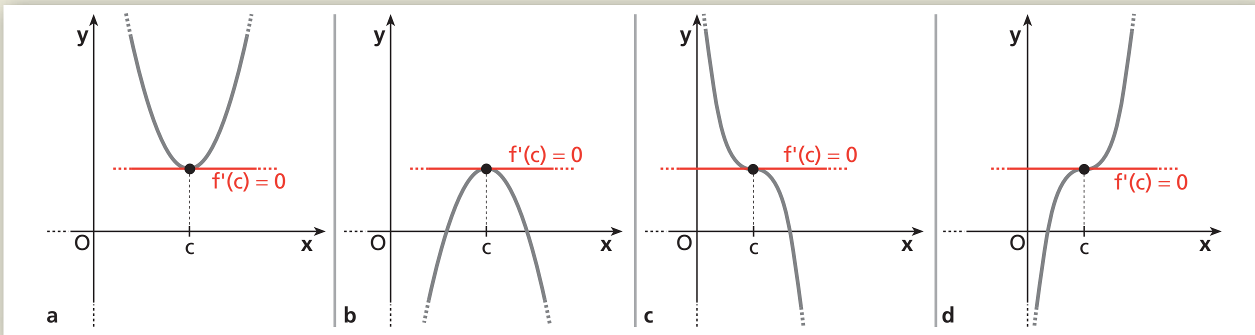
- Una funzione $y = f(x)$ **è derivabile in un punto** c se esistono finite e sono uguali tra loro la derivata sinistra e la derivata destra.

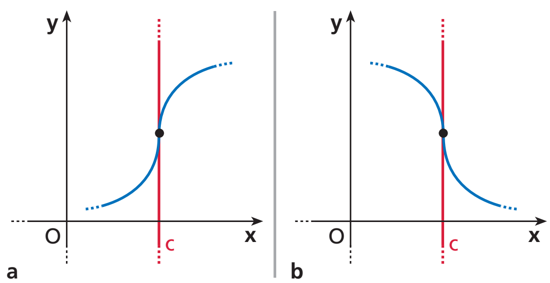
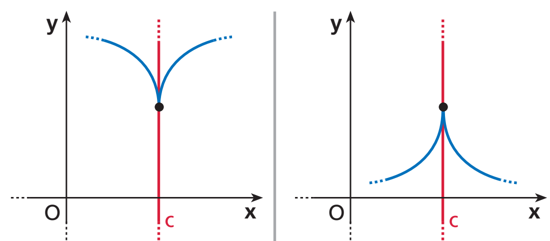
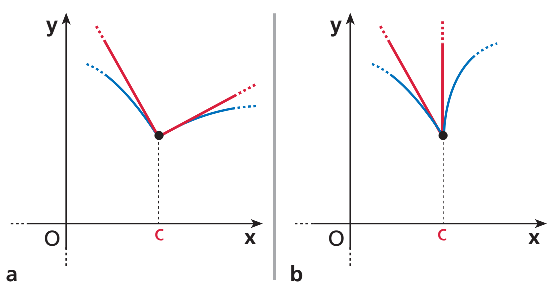
- Una funzione $y = f(x)$ **è derivabile in un intervallo chiuso [*a*; *b*]** se è derivabile in tutti i punti interni di $[a; b]$ e se esistono e sono finite in a la derivata destra e in b la derivata sinistra.

2. LA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

- Data la funzione $y = f(x)$, l'**equazione della tangente** al grafico di f nel punto $(x_0; y_0)$, quando la tangente esiste e non è parallela all'asse y, è $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

- Un punto $x = c$ si dice **stazionario** se $f'(c) = 0$.
  La tangente nel punto stazionario $(c; f(c))$ ha coefficiente angolare $m = 0$.



Punti di non derivabilità	Grafico	Derivata
Flesso a tangente verticale		a) $f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty$
Cuspide	 a. Verso il basso. b. Verso l'alto.	a) $f'_-(c) = -\infty, \quad f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = +\infty, \quad f'_+(c) = -\infty$
Punto angoloso		$f'_-(c) \neq f'_+(c)$ a) entrambe finite b) una finita, l'altra infinita

3. LA CONTINUITÀ E LA DERIVABILITÀ

- Se una funzione $f(x)$ è **derivabile** nel punto x_0, in quel punto la funzione è anche **continua**. Non è vero l'inverso: non è detto che se una funzione è continua in un punto x_0, allora in quel punto sia anche derivabile.

4. LE DERIVATE FONDAMENTALI

Le derivate	
Potenze di *x*	**Funzioni goniometriche**
$D\, k = 0$	$D \text{ sen } x = \cos x$
$D\, x = 1$	$D \cos x = - \text{sen } x$
$D\, x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1}$ se $\alpha \in \mathbb{N} - \{0\}, x \in \mathbb{R}$; se $\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$	$D \text{ tg } x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x$
$D \sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$	$D \text{ cotg } x = -\dfrac{1}{\text{sen}^2 x} = -(1 + \text{cotg}^2 x)$
Funzioni logaritmiche ed esponenziali	**Inverse delle funzioni goniometriche**
$D\, a^x = a^x \ln a, \quad a > 0$	$D \text{ arctg } x = \dfrac{1}{1 + x^2}$
$D\, e^x = e^x$	$D \text{ arccotg } x = -\dfrac{1}{1 + x^2}$
$D \log_a x = \dfrac{1}{x} \log_a e, \quad x > 0, \quad a > 0 \wedge a \neq 1$	$D \text{ arcsen } x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$D \ln x = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$	$D \arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

5. 6. 7. 8. LE REGOLE DI DERIVAZIONE

Le regole di derivazione
$D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$
$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$D \dfrac{1}{f(x)} = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$
$D \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$D[f(g(x))] = f'(z) \cdot g'(x), \quad \text{con } z = g(x)$
$D[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + \dfrac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)} \right]$
$D[f^{-1}(y)] = \dfrac{1}{f'(x)}, \quad \text{con } x = f^{-1}(y)$

9. LE DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO

- Data la funzione $y = f(x)$, la **derivata seconda** $y'' = f''(x)$ è la derivata della derivata prima. In modo analogo si definisce la **derivata terza**, che è la derivata della derivata seconda e così via.

  ESEMPIO: Considerato un polinomio di grado n, le sue derivate di ordine superiore all'ordine n-esimo sono tutte nulle.

10. IL DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE

- Il **differenziale** di una funzione $f(x)$, relativo al punto x e all'incremento Δx, è il prodotto della derivata della funzione, calcolata in x, per l'incremento Δx. Lo indichiamo con $\boldsymbol{df(x)}$ oppure $\boldsymbol{dy}$:

  $$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

- Il **differenziale della variabile indipendente** $\boldsymbol{x}$ è uguale all'incremento della variabile stessa:

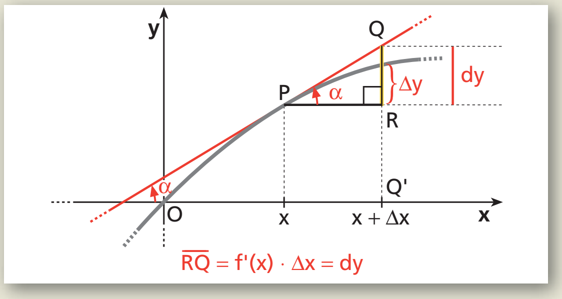
  $$dx = \Delta x.$$

- $dy = f'(x) \cdot dx$, quindi

  $$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

  la derivata prima di una funzione è il rapporto fra il differenziale della funzione e quello della variabile indipendente.

- **Interpretazione geometrica.** Il differenziale dy è la variazione che subisce l'ordinata della tangente alla curva quando si passa dal punto della curva di ascissa x, cioè P, al punto della tangente di ascissa $(x + \Delta x)$, cioè Q.
  Sostituire all'incremento Δy della funzione il suo differenziale, da un punto di vista geometrico, significa sostituire al grafico della funzione la sua tangente.



- Si può calcolare $f(x + \Delta x)$ in modo approssimato utilizzando la formula:

  $$\boldsymbol{f(x + \Delta x) \simeq f(x) + f'(x) \cdot \Delta x}.$$

11. LE APPLICAZIONI DELLE DERIVATE ALLA FISICA

- Data la **legge oraria** $s = f(t)$, ossia la funzione che lega la posizione s al tempo t,
  - $v_{ist} = f'(t)$ è la **velocità istantanea** all'istante t;
  - $a_{ist} = v'(t) = f''(t)$ è l'**accelerazione istantanea** all'istante t.

- Se $q(t)$ è la funzione che lega la quantità di carica, che passa in una sezione di un conduttore, al tempo t,

  $$i_{ist} = q'(t)$$

  è l'**intensità di corrente istantanea** all'istante t.

1. LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE

▶ Teoria a pag. 1618

Il rapporto incrementale

Nei seguenti esercizi, data la funzione $f(x)$, calcola i valori indicati a fianco.

1 $f(x) = (x-1)^2$, $\quad f(1),\ f(-2),\ f(a+1)$. $\quad [0; 9; a^2]$

2 $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - x + 1}$, $\quad f(2),\ f(2x),\ f(-x),\ f(3) - f(1)$. $\quad \left[\dfrac{4}{3}; \dfrac{4x}{4x^2 - 2x + 1}; \dfrac{-2x}{x^2 + x + 1}; -\dfrac{8}{7}\right]$

3 $f(x) = -\ln x + 1$, $\quad f(1),\ 2f(x),\ f(2x), f(1+h) - f(1)$. $\quad [1; -2\ln x + 2; -\ln 2x + 1; -\ln(1+h)]$

4 $f(x) = 2x - 1$, $\quad f(4),\ f(c),\ f(c+h), f(c+h) - f(c)$. $\quad [7; 2c - 1; 2(c+h) - 1; 2h]$

Esprimi l'incremento Δy delle seguenti funzioni nel punto c indicato, quando x ha un incremento h.

5 $y = \sqrt{x+1}$, $\quad c = 2$.

6 $y = \cos x$, $\quad c = \dfrac{\pi}{3}$.

7 $y = e^{-2x}$, $\quad c = 0$.

8 Data la funzione $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$, considera $c = 2$ e $h = 0{,}1$ e determina Δx e Δy.

Calcola il rapporto incrementale delle seguenti funzioni nel punto c, per l'incremento h indicato a fianco.

9 $f(x) = x - 1$, $\quad c = 3$, $\quad h = 0{,}5$. $\quad [1]$

10 $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$, $\quad c = -1$, $\quad h = 0{,}25$. $\quad \left[-\dfrac{4}{3}\right]$

11 $f(x) = -x^2 - 2$, $\quad c = -3$, $\quad h = 0{,}4$. $\quad \left[\dfrac{28}{5}\right]$

12 $f(x) = \dfrac{-4x^2}{x+1}$, $\quad c = -2$, $\quad h = 0{,}1$. $\quad \left[\dfrac{4}{9}\right]$

13 $f(x) = 2\log_3 x + 3$, $\quad c = 1$, $\quad h = 2$. $\quad [1]$

14 $f(x) = \operatorname{sen} x - 1$, $\quad c = \dfrac{\pi}{6}$, $\quad h = \dfrac{\pi}{3}$. $\quad \left[\dfrac{3}{2\pi}\right]$

15 $f(x) = 2e^{-\frac{1}{x}}$, $\quad c = 1$, $\quad h = \dfrac{1}{2}$. $\quad \left[4\left(e^{-\frac{2}{3}} - e^{-1}\right)\right]$

Determina il rapporto incrementale delle seguenti funzioni quando x varia nel modo indicato.

16 $f(x) = x^4 - 3x^2$, $\quad x$ varia da 0 a 2. $\quad [2]$

17 $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$, $\quad x$ varia da 1 a 3. $\quad \left[\dfrac{1}{9}\right]$

18 $f(x) = 2x - 3$, $\quad x$ varia da -3 a -1. $\quad [2]$

Il rapporto incrementale per particolari valori del punto e per un incremento generico

19 ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo il rapporto incrementale della funzione $f(x) = \frac{-x^2+1}{2x}$ nel punto $c = -2$ e con un incremento h generico.

Per determinare il rapporto incrementale $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$, calcoliamo prima $f(c+h)$ e $f(c)$, sostituendo a c il valore dato e lasciando indicato h:

$$f(c+h) = f(-2+h) = \frac{-(-2+h)^2+1}{2(-2+h)} = \frac{-4-h^2+4h+1}{2(-2+h)} = \frac{-h^2+4h-3}{2(-2+h)};$$

$$f(c) = f(-2) = \frac{-(-2)^2+1}{2(-2)} = \frac{3}{4};$$

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \frac{\frac{-h^2+4h-3}{2(-2+h)} - \frac{3}{4}}{h} = \frac{\frac{-2h^2+8h-6-3(-2+h)}{4(-2+h)}}{h} =$$

$$= \frac{-2h^2+5h}{4(-2+h)h} = \frac{-2h+5}{4(-2+h)}.$$

Il rapporto incrementale cercato è:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \frac{-2h+5}{4(-2+h)}.$$

Determina il rapporto incrementale delle seguenti funzioni nel punto c indicato a fianco e per un incremento h generico.

20 $f(x) = \frac{x-5}{x}$, $c = 4$. $\left[\frac{5}{4(h+4)}\right]$

21 $f(x) = x^2 - 4x + 8$, $c = -3$. $[h - 10]$

22 $f(x) = 1 - \frac{\cos 2x}{2}$, $c = \frac{\pi}{4}$. $\left[\frac{\operatorname{sen} 2h}{2h}\right]$

23 $f(x) = 2 - \ln(x+1)$, $c = 0$. $\left[-\frac{\ln(1+h)}{h}\right]$

24 $f(x) = e^{2x-1}$, $c = \frac{1}{2}$. $\left[\frac{e^{2h}-1}{h}\right]$

25 $f(x) = \frac{3x^2-1}{x}$, $c = 1$. $\left[\frac{3h+4}{1+h}\right]$

26 TEST Il rapporto incrementale della funzione

$$f(x) = -x^2 + 2x - 3$$

relativo al punto $x_0 = 2$ è:

A -6.

B $\frac{-(2+h)^2+2+h-3}{h}$.

C $-h-2$.

D $\frac{h-2}{h}$.

E $-h$.

27 TEST Il rapporto incrementale della funzione $f(x) = -\frac{2}{x}$ relativo al punto $x_0 = 2$ è:

A -1.

B $\frac{1}{h+2}$.

C $-\frac{h}{h+2}$.

D $\frac{h+2}{h}$.

E $-\frac{1}{h+2}$.

Il rapporto incrementale per un punto generico e un incremento generico

Determina il rapporto incrementale delle seguenti funzioni nel punto generico c, per un incremento h generico.

28 $y = \sqrt{x}$; $y = \frac{2x-1}{x}$. $\left[\frac{\sqrt{c+h}-\sqrt{c}}{h}; \frac{1}{c(c+h)}\right]$

29 $y = x^2 - 4x$; $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$. $\left[h + 2c - 4; \frac{\operatorname{sen} c - \operatorname{sen}(c+h)}{h \operatorname{sen} c \operatorname{sen}(c+h)}\right]$

30 $y = 2^{-x}$; $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x}$. $\left[\dfrac{2^{-c}(2^{-h}-1)}{h}; \dfrac{-h-2c+4}{(c^2-4c)[(c+h)^2-4(c+h)]}\right]$

31 $y = \dfrac{2}{x} + 1$; $y = -\dfrac{1}{2}\ln x$. $\left[-\dfrac{2}{c(c+h)}; -\dfrac{1}{2h}\ln\dfrac{c+h}{c}\right]$

La derivata di una funzione

Il calcolo della derivata in un punto particolare

32 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x + 1}$ nel punto $c = -2$, applicando la definizione di derivata.

Per la definizione di derivata sappiamo che:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Calcoliamo prima il rapporto incrementale nel punto $c = -2$:

$$f(-2+h) = \frac{(-2+h)^2 - 2}{-2+h+1} = \frac{h^2 - 4h + 2}{h - 1};$$

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 - 2}{-2+1} = -2;$$

$$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{\dfrac{h^2 - 4h + 2}{h-1} + 2}{h} = \frac{\dfrac{h^2 - 4h + \cancel{2} + 2h - \cancel{2}}{h-1}}{h} = \frac{h^2 - 2h}{h-1} \cdot \frac{1}{h} = \frac{h-2}{h-1}.$$

Calcoliamo poi il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{h-2}{h-1} = 2.$$

Concludiamo che:

$$f'(-2) = 2.$$

Calcola la derivata delle seguenti funzioni nel punto c indicato a fianco, applicando la definizione di derivata.

33 $f(x) = x^3 + 4x + 1$, $c = 1$; $f(x) = -\dfrac{5}{x}$, $c = 2$. $\left[7; \dfrac{5}{4}\right]$

34 $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, $c = 4$; $f(x) = 2x^3 - x$, $c = 0$. $\left[\dfrac{1}{4}; -1\right]$

35 $f(x) = x^2 - 1$, $c = 3$; $f(x) = \dfrac{x+3}{x-4}$, $c = -1$. $\left[6; -\dfrac{7}{25}\right]$

36 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2 - x}$, $c = 1$; $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x$, $c = -3$. $[2; -5]$

37 $f(x) = 2x - 1$, $c = 6$; $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$, $c = 4$. $\left[2; -\dfrac{1}{3}\right]$

38 $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$, $c = -2$; $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, $c = 5$. $\left[-\dfrac{4}{9}; -\dfrac{1}{16}\right]$

39 $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$, $c = 2$; $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{1 - x^2}$, $c = 0$. $\left[\dfrac{1}{4}; 0\right]$

40 $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $c = 9$; $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 - 2x + 2}$, $c = -2$. $\left[\dfrac{1}{54}; \dfrac{2}{5}\right]$

41 $f(x) = -2\ln x$, $c = 1$; $f(x) = e^{x-1}$, $c = 1$. $[-2; 1]$

42 $f(x) = \operatorname{tg} x$, $c = 0$; $f(x) = 2^{-2x}$, $c = 0$. $[1; -2\ln 2]$

Dimostra che non è possibile calcolare la derivata delle seguenti funzioni nel punto *c* indicato.

43 $y = \sqrt{x-1}$, $c = 1$.

44 $y = \frac{1}{x}$, $c = 0$.

45 $y = \sqrt[3]{x}$, $c = 0$.

46 $y = \frac{1}{x-2}$, $c = 2$.

Il calcolo della derivata in un punto generico

47 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la funzione $f(x) = \sqrt{x+2}$, calcoliamo la sua derivata in un generico punto *c*.

Applicando la definizione di derivata, otteniamo:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{c+h+2} - \sqrt{c+2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{c+h+2} - \sqrt{c+2})}{h} \cdot \frac{(\sqrt{c+h+2} + \sqrt{c+2})}{(\sqrt{c+h+2} + \sqrt{c+2})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{c} + h + \cancel{2} - \cancel{c} - \cancel{2}}{h(\sqrt{c+h+2} + \sqrt{c+2})} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{c+h+2} + \sqrt{c+2})} = \frac{1}{2\sqrt{c+2}}.$$

Calcola la derivata delle seguenti funzioni in un generico punto *c*.

48 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x$ $[c - 4]$

49 $f(x) = \frac{2}{x}$ $\left[-\frac{2}{c^2}\right]$

50 $f(x) = \frac{1}{x^3}$ $\left[-\frac{3}{c^4}\right]$

51 $f(x) = 4x - 9$ $[4]$

52 $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ $\left[\frac{1}{4\sqrt{c}}\right]$

53 $f(x) = 2x^3 - x$ $[6c^2 - 1]$

54 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ $\left[-\frac{2c}{(c^2-1)^2}\right]$

55 $f(x) = -x^2 + 4x$ $[-2c + 4]$

56 $f(x) = \frac{x+1}{x}$ $\left[-\frac{1}{c^2}\right]$

57 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ $\left[-\frac{1}{2(c+2)\sqrt{c+2}}\right]$

58 $f(x) = \operatorname{sen}(-x)$ $[-\cos(-c)]$

59 $f(x) = -e^{1+x}$ $[-e^{1+c}]$

60 $f(x) = \sqrt{3x}$ $\left[\frac{3}{2\sqrt{3c}}\right]$

61 $f(x) = 3\ln x$ $\left[\frac{3}{c}\right]$

62 $f(x) = x^2 - 8x$ $[2c - 8]$

63 $f(x) = 2\sqrt{x}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{c}}\right]$

64 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$ $\left[\frac{1}{4c - 2c\sqrt{c} - 2\sqrt{c}}\right]$

65 $f(x) = \sqrt{x} - 2$ $\left[\frac{1}{2\sqrt{c}}\right]$

66 $f(x) = \frac{x}{x-5}$ $\left[\frac{-5}{(c-5)^2}\right]$

67 $f(x) = \frac{9-x}{x^2-1}$ $\left[\frac{c^2 - 18c + 1}{(c^2-1)^2}\right]$

68 $f(x) = x\cos x$ $[\cos c - c \operatorname{sen} c]$

69 $f(x) = (x-1)e^x$ $[ce^c]$

70 Sia $f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$. Trova una formula per $f'(x)$ utilizzando la definizione di derivata come limite. Mostra i passaggi del tuo calcolo.

(USA *Stanford University*, 2006)

$\left[\dfrac{6}{(x+3)^2}\right]$

71 Calculate from first principles

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\left[\frac{1}{(x+h)^3} - \frac{1}{x^3}\right]\right\},$$

where $x \neq 0$. Deduce an expression for $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ from the result you have just found.

(UK *University of Essex*, First Year Examination, 2003)

$\left[\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^3}\right) = -\dfrac{3}{x^4}\right]$

72 **TEST** Sia $f(x) = x^2 - 1 + \dfrac{1}{x}$. Allora la derivata della funzione nel generico punto c vale:

A 1.

B $2c - \dfrac{1}{c}$.

C $2(c+h) - \dfrac{1}{(c+h)^2}$.

D non esiste.

E $2c - \dfrac{1}{c^2}$.

73 **TEST** Sia $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$. Allora $f'(c)$ vale:

A 0.

B $\dfrac{3}{(c+1)^2}$.

C $\dfrac{3}{c+1}$.

D $\dfrac{3c}{(c+1)^2}$.

E $\dfrac{-1}{(c+1)^2}$.

La derivata destra e la derivata sinistra

74 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo la derivata destra e la derivata sinistra della funzione $y = |x^2 - 4|$, in $x = 2$.

Poiché $x^2 - 4 \geq 0 \ \rightarrow \ x \leq -2 \ \vee \ x \geq 2$, la funzione può anche essere scritta nella forma

$$y = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -x^2 + 4 & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$$

dalla quale notiamo che a sinistra e a destra di 2 la funzione ha due espressioni analitiche diverse, che utilizziamo per il calcolo del rapporto incrementale.

A sinistra di 2, cioè per $h < 0$:

$$f(2+h) = -(2+h)^2 + 4 = -\cancel{4} - h^2 - 4h + \cancel{4} = -h^2 - 4h.$$

A destra di 2, cioè per $h > 0$:

$$f(2+h) = (2+h)^2 - 4 = h^2 + \cancel{4} + 4h - \cancel{4} = h^2 + 4h.$$

Inoltre:

$$f(2) = (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0.$$

Calcoliamo le due derivate, sostituendo nei rapporti incrementali i valori trovati:

$$f'_-(2) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2 - 4h - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-}(-h-4) = -4;$$

$$f'_+(2) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h^2 + 4h - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+}(h+4) = 4.$$

Abbiamo ottenuto:

$$f'_-(2) = -4, \qquad f'_+(2) = 4.$$

Essendo $f'_-(2) \neq f'_+(2)$, nel punto $x = 2$ la funzione non è derivabile.

Calcola la derivata destra e la derivata sinistra delle seguenti funzioni nei punti indicati.

75 $f(x) = |x - 1|$, $\quad c = 1$. $\quad [f'_-(1) = -1; f'_+(1) = 1]$

76 $f(x) = |2x| - 1$, $\quad c = 0$. $\quad [f'_-(0) = -2; \ f'_+(0) = 2]$

77 $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \leq 3 \\ x^2 - 9 & \text{se } x > 3 \end{cases}$, $\quad c = 3$. $\quad [f'_-(3) = 1; \ f'_+(3) = 6]$

78 $f(x) = x^3 - x + 2$, $\quad c = 1$. $\quad [f'_-(1) = f'_+(1) = 2]$

79 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \leq 2 \\ \sqrt{x - 2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$, $\quad c = 2$. $\quad [f'_-(2) = 2; \ f'_+(2) = +\infty]$

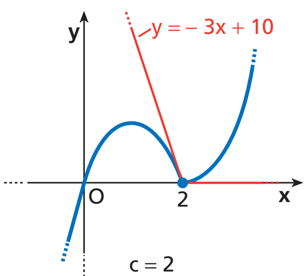
80 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \\ x^2 + x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, $\quad c = 0$. $\quad [f'_-(0) = 1; \ f'_+(0) = +\infty]$

81 $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $\quad c = 0$. $\quad [f'_-(0) = -\infty; \ f'_+(0) = +\infty]$

82 $f(x) = |-x^2 + 2x|$, $\quad c = 2$. $\quad [f'_-(2) = -2; \ f'_+(2) = 2]$

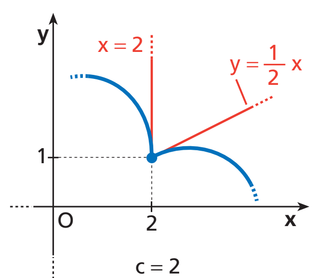
Esamina i seguenti grafici e ricava il valore delle derivate, sinistra e destra, nel punto indicato, utilizzando il significato geometrico di derivata.

83



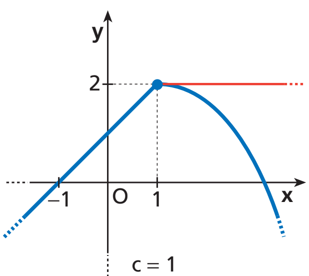
$[f'_-(2) = -3; \ f'_+(2) = 0]$

86



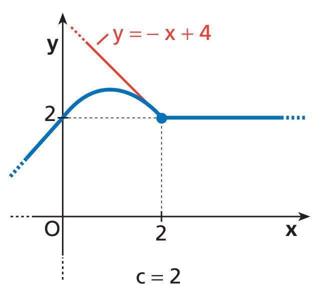
$\left[f'_-(2) = -\infty; \ f'_+(2) = \frac{1}{2}\right]$

84



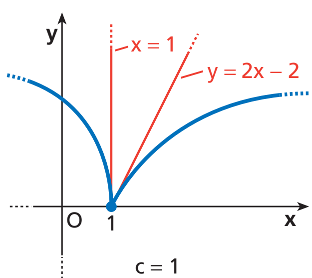
$[f'_-(1) = 1; \ f'_+(1) = 0]$

87



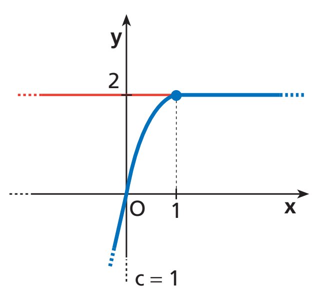
$[f'_-(2) = -1; \ f'_+(2) = 0]$

85



$[f'_-(1) = -\infty; \ f'_+(1) = 2]$

88

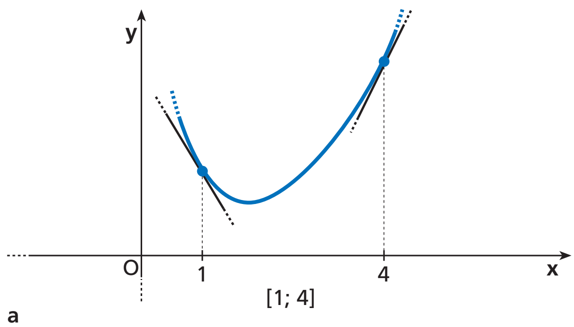


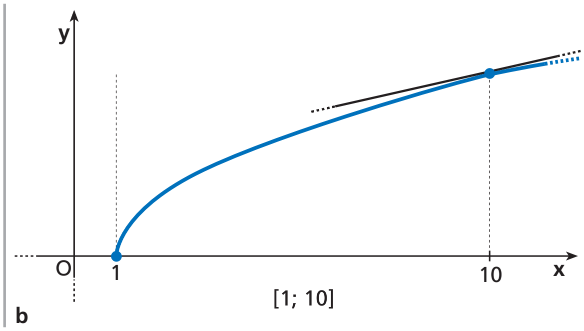
$[f'_-(1) = 0; \ f'_+(1) = 0]$

Le funzioni derivabili in un intervallo

Esaminando i grafici e utilizzando il significato geometrico di derivata, deduci se le seguenti funzioni sono derivabili negli intervalli indicati.

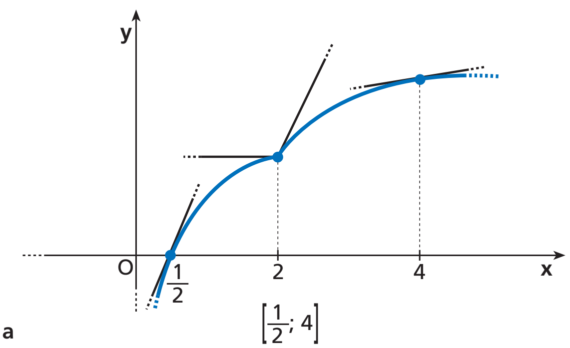
89

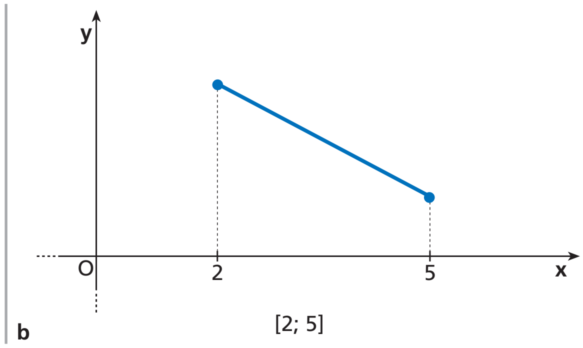




[a) sì; b) no, perché non esiste la derivata destra in 1]

90





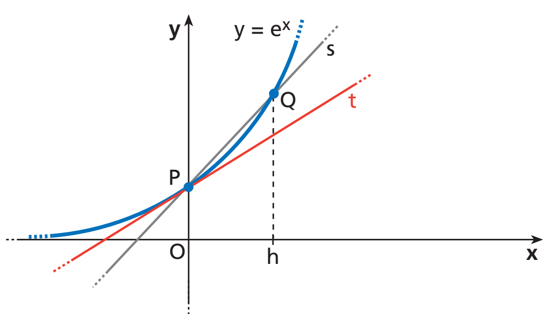
[a) no, perché $f'_-(2) \neq f'_+(2)$; b) sì]

2. LA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Teoria a pag. 1623

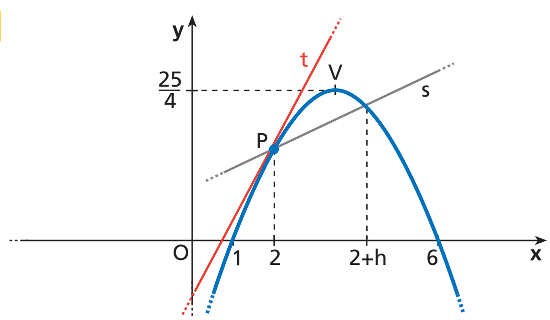
COMPLETA osservando il grafico della funzione $y = f(x)$.

91



a) Le coordinate dei punti P e Q sono ......
b) Il coefficiente angolare della secante s è ......
c) Il coefficiente angolare della tangente t è ......
d) L'equazione della retta tangente t è ......

92



a) L'equazione della parabola è $f(x) =$ ......
b) $f(2) =$ ... e $f(2 + h) =$ ......
c) $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} =$ ...... rappresenta per la retta s il ......
d) L'equazione della retta tangente t è ......

93 VERO O FALSO?

Se per una funzione $y = f(x)$ si ha che:

a) la tangente nel punto $x = 1$ è la retta di equazione $4x - 2y + 1 = 0$, allora $f'(1) = 2$. V F

b) $f'(1) = 0$, allora la tangente in $c = 1$ è parallela all'asse x. V F

c) nel punto $c = 2$ la tangente è parallela all'asse y, allora la derivata in c è nulla. V F

d) il suo grafico passa per l'origine e $f'(0) = \frac{1}{2}$, allora la tangente in $c = 0$ ha equazione $x - 2y = 0$. V F

94 ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = f(x) = x^3 + x$, nel suo punto P di ascissa 1.

Determiniamo l'ordinata di P sostituendo $x = 1$ nell'espressione della funzione

$$y_P = 2,$$

quindi $P(1; 2)$.
La retta generica (non parallela all'asse y) che passa per P ha equazione:

$$y - y_P = m(x - x_P) \quad \rightarrow \quad y - 2 = m(x - 1).$$

Troviamo il coefficiente angolare $m = f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$.

$$f(1+h) = (1+h)^3 + (1+h) = 1 + h^3 + 3h + 3h^2 + 1 + h = 2 + h^3 + 4h + 3h^2;$$

$$f(1) = 2;$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2} + h^3 + 4h + 3h^2 - \cancel{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h^2 + 4 + 3h)}{\cancel{h}} = 4.$$

Sostituendo nell'equazione precedente, otteniamo l'equazione della retta tangente:

$$y - 2 = 4(x - 1) \quad \rightarrow \quad y = 2 + 4x - 4 \quad \rightarrow \quad y = 4x - 2.$$

Determina l'equazione della retta tangente al grafico della seguente funzione, nel punto indicato a fianco.

95 $y = -\frac{1}{3x}$, $c = 1$. $\left[y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right]$

96 $y = x^2 - 2x$, $c = -2$. $[y = -6x - 4]$

97 $y = 2\sqrt{x}$, $c = 4$. $\left[y = \frac{1}{2}x + 2\right]$

98 $y = \frac{x}{x-1}$, $c = 0$. $[y = -x]$

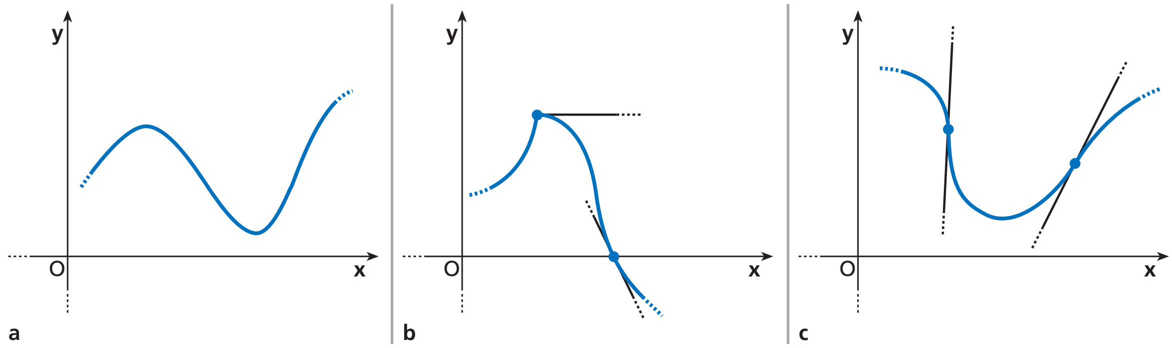
99 $y = \frac{1}{4\sqrt{x}}$, $c = 1$. $\left[y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}\right]$

100 $y = 1 - \frac{2}{x}$, $c = -1$. $[y = 2x + 5]$

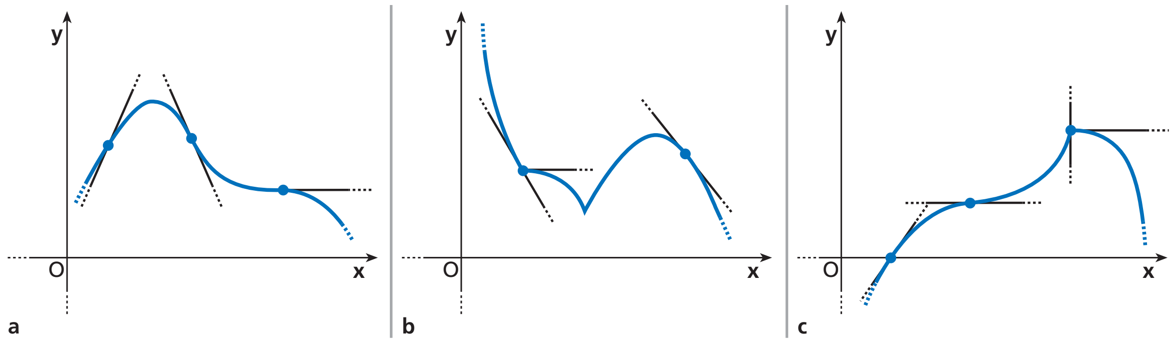
I punti stazionari

In ognuno dei seguenti casi segna sul grafico i punti stazionari (se esistono).

101

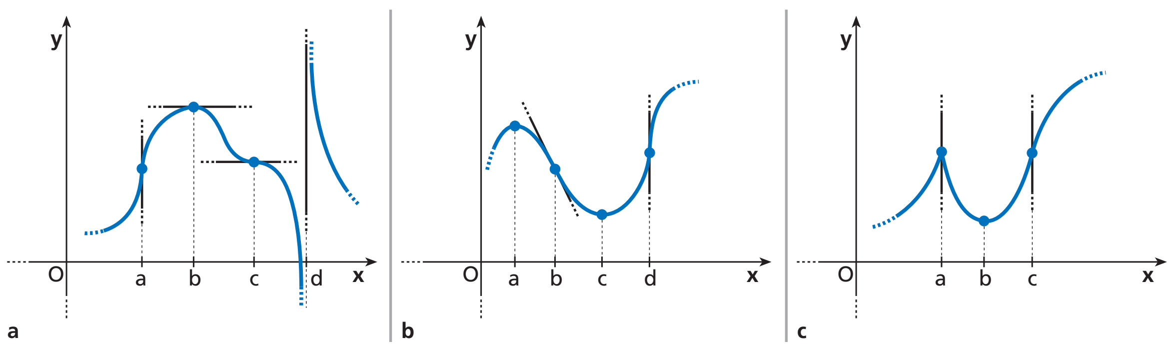


102

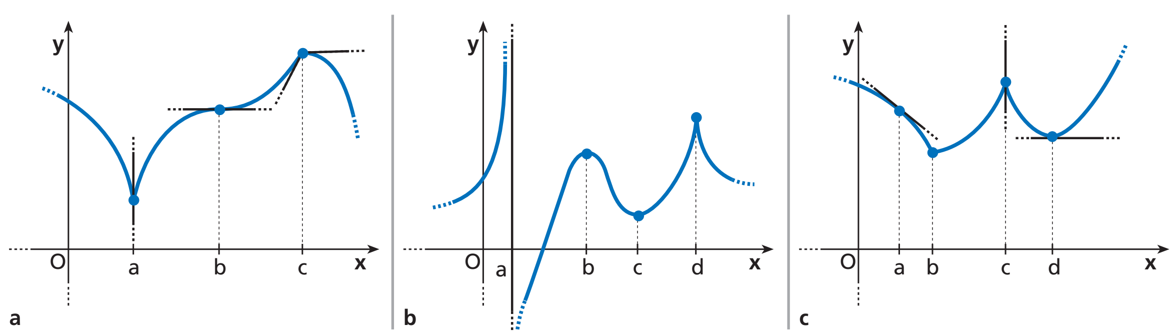


I punti di non derivabilità

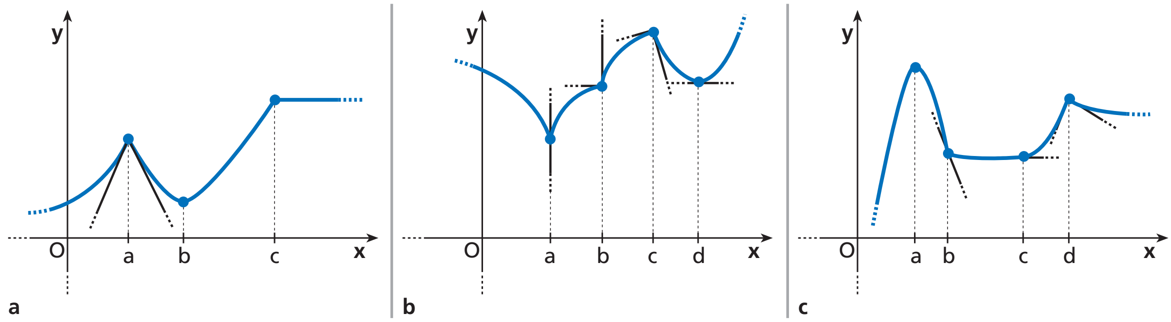
103 In ognuno dei seguenti grafici indica i **punti di flesso** a tangente parallela all'asse *y*.



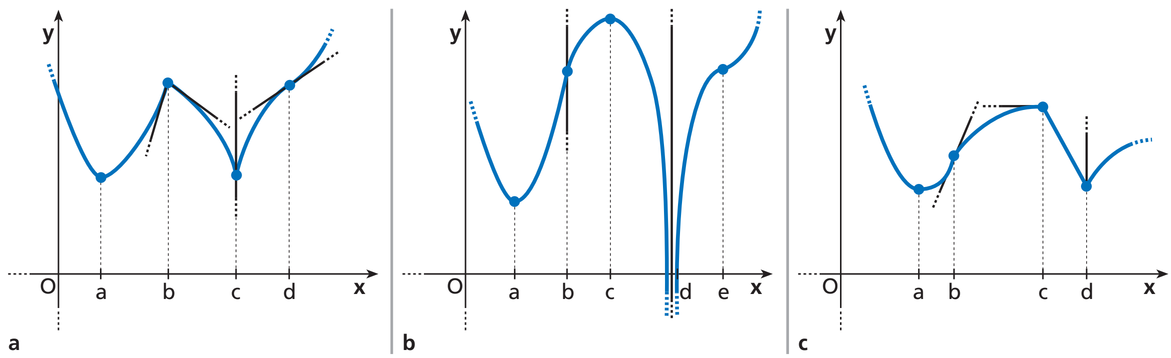
104 Individua i **punti di cuspide** in ogni grafico.



105 In ognuno dei seguenti grafici indica i **punti angolosi**.



106 Individua in ognuno dei seguenti grafici i punti di flesso a tangente verticale, di cuspide e angolosi.



107 **VERO O FALSO?**

a) Se una funzione ha una cuspide rivolta verso l'alto in x_0, allora $f'_-(x_0) = +\infty$, oppure $f'_+(x_0) = -\infty$. V F

b) Se una funzione, nel punto x_0, è tale che $f'_-(x_0) = -\infty$ e $f'_+(x_0) = -\infty$, allora presenta in x_0 un flesso a tangente verticale. V F

c) Se una funzione $y = f(x)$ non è derivabile in un punto x_0, allora non esiste la tangente alla funzione in x_0. V F

d) Se nel punto x_0 esiste una sola retta tangente, allora la funzione è derivabile in x_0. V F

Disegna il grafico delle seguenti funzioni, utilizzando le trasformazioni geometriche, e per ciascuna indica i punti del dominio nei quali esse non sono derivabili, specificando il tipo di punto.

108 $y = |\ln(x-1)|$ [$x = 2$, punto angoloso]

109 $y = -\sqrt{|x|}$ [$x = 0$, cuspide]

110 $y = \left|\dfrac{x}{x-2}\right|$ [$x = 0$, punto angoloso]

111 $y = |e^{x-1} - 1|$ [$x = 1$, punto angoloso]

112 $y = e^{|x|}$ [$x = 0$, punto angoloso]

113 $y = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ [$x = 3$, punto angoloso]

Traccia il grafico possibile di una funzione $y = f(x)$, date le seguenti informazioni.

114 a) Il dominio di $f(x)$ è $\mathbb{R}$.
b) $f(x)$ è positiva per $x < -2$.
c) Il grafico di $f(x)$ ha un flesso a tangente verticale nel punto $(-2; 0)$ e una cuspide nel punto $(0; 0)$.

115 a) Il dominio di $f(x)$ è $\mathbb{R} - \{1\}$.
b) $x_0 = 1$ è un punto di discontinuità di II specie.
c) $f(x)$ non è derivabile soltanto in un punto.
d) $f(x)$ è positiva per $x > 1$ e interseca l'asse x in $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$.
e) Il punto $(3; 0)$ è angoloso con tangente sinistra di equazione $y = 0$ e tangente destra di equazione $x = 3$.

116 a) Il dominio di $f(x)$ è $\mathbb{R}$.
b) $f(x)$ è positiva per $x < -1 \vee x > 2$.
c) Il punto $(-1; 0)$ è angoloso con tangente sinistra di equazione $y = -x - 1$ e tangente destra di equazione $y = 0$.
d) Il grafico di $f(x)$ ha un flesso a tangente parallela all'asse y nel punto $(0; -1)$.

117 a) Il dominio di $f(x)$ è $\mathbb{R} - \{2\}$.
b) $f(x)$ è positiva per $x \geq 0$.
c) $x_0 = 2$ è un punto di discontinuità di II specie.
d) I punti $(0; 0)$ e $(4; 1)$ sono stazionari.

118 a) Il dominio di $f(x)$ è $\mathbb{R}$.
b) $f(x)$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$.
c) $x_0 = 1$ è un punto di discontinuità di I specie con salto 2 e $f(1) = 1$.
d) Il grafico di $f(x)$ ha un flesso a tangente parallela all'asse y nel punto $(2; 2)$, una cuspide nel punto $(-1; 0)$ e un punto stazionario in $(3; 0)$.

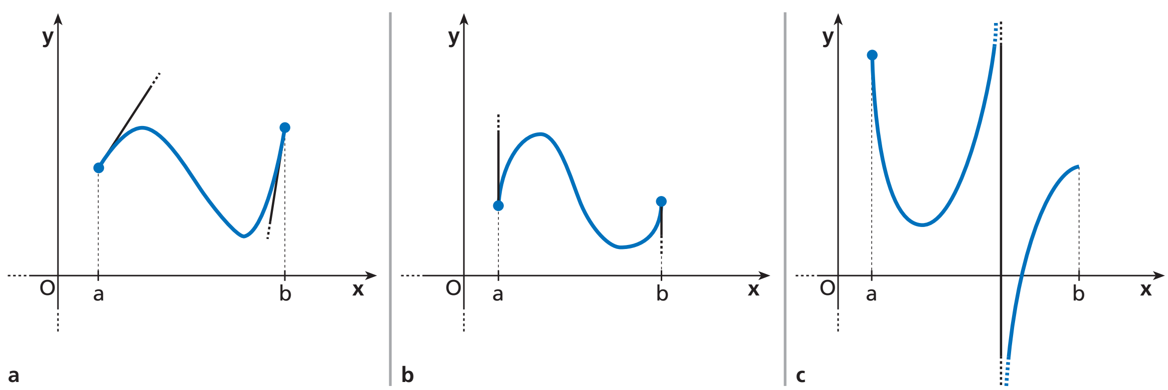
3. LA CONTINUITÀ E LA DERIVABILITÀ

▶ Teoria a pag. 1627

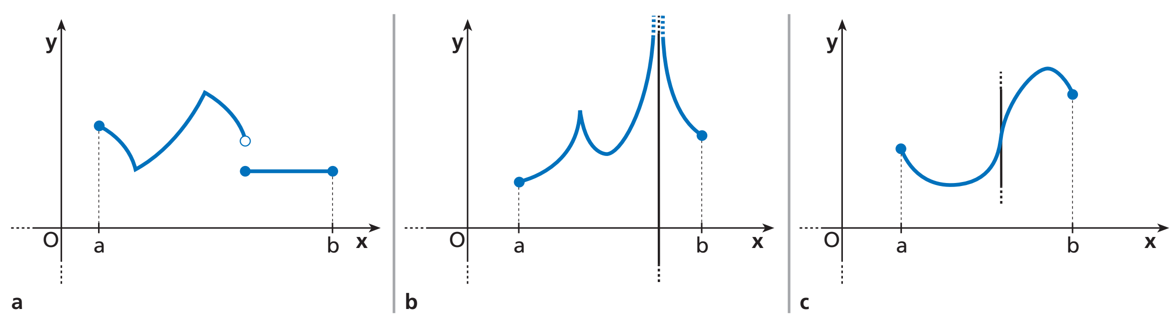
IN PRATICA
▶ Videolezione 67

Indica se i seguenti grafici rappresentano funzioni: a) continue in $[a; b]$; b) derivabili in $[a; b]$. In caso negativo, giustifica le tue risposte.

119



120



121 VERO O FALSO?

a) Se una funzione $f(x)$ è derivabile in un intervallo $[a; b]$, allora esiste $f'(c)$ per ogni $c \in\,]a; b[$ e $f(x)$ può non essere derivabile in uno degli estremi a e b. V F

b) Una funzione derivabile in $[a; b]$ è sempre continua in $[a; b]$ e viceversa. V F

c) Se una funzione $f(x)$ continua e derivabile in $\mathbb{R}$ è tale che $f(0) = f'(0) = 0$, allora presenta nell'origine un punto a tangente orizzontale. V F

d) Se in un punto c il grafico di una funzione $f(x)$ ha per tangente una retta parallela all'asse x, allora $f'(c) = 0$. V F

122 VERO O FALSO?

a) Se esistono $f'_+(c)$ e $f'_-(c)$, allora $f(x)$ è sempre derivabile nel punto c. V F

b) Se $f'_+(c) = +\infty$, allora $f(x)$ non è derivabile nel punto c. V F

c) Se $f'_+(c) \neq f'_-(c)$, allora $f(x)$ non è derivabile in c e nel punto c si hanno due tangenti distinte. V F

d) Se in un punto c il grafico di una funzione $f(x)$ ha una tangente parallela all'asse y, allora la funzione è derivabile in c. V F

123 ESERCIZIO GUIDA

Studiamo la continuità e la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x} - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

nel punto $x = 0$.

- Per studiare la continuità calcoliamo:

$$\lim_{x \to 0^-} (x^2 - 1) = -1, \ \lim_{x \to 0^+} (\sqrt{x} - 1) = -1, \ f(0) = -1.$$

La funzione è quindi continua in $x = 0$.

- Studiamo la derivabilità.
Calcoliamo la derivata sinistra e la derivata destra in $x = 0$.

Si ha:

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{[(0+h)^2 - 1] - (-1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 - 1 + 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} h = 0.$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{[\sqrt{0+h} - 1] - (-1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

La derivata sinistra è diversa dalla derivata destra, quindi $f(x)$ non è derivabile in $x = 0$. Poiché una derivata è finita e l'altra è infinita, il punto di non derivabilità è un punto angoloso.

Studia la continuità e la derivabilità delle seguenti funzioni nel punto indicato a fianco.

124 $y = \sqrt{4 - |x| + 3x}$, $\quad x = 0$. [continua; non derivabile: punto angoloso]

125 $y = |2x - 4| + |x|$, $\quad x = 2$. [continua; non derivabile: punto angoloso]

126 $y = x|x-4|$, $x = 4$. [continua; non derivabile: punto angoloso]

127 $y = \begin{cases} \sqrt{x} - 2 & \text{se } x < 1 \\ x^2 - x - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$, $x = 1$. [continua; non derivabile: punto angoloso]

128 $y = \begin{cases} \dfrac{x+2}{|x|} & \text{se } x < -1 \\ x + 2 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$, $x = -1$. [continua; non derivabile: punto angoloso]

129 $y = \begin{cases} 2|x|(x-1) & \text{se } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$, $x = 1$. [continua; non derivabile: punto angoloso]

130 Dimostra che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $x = 0$.

Trova, se possibile, *a* e *b* in modo che le seguenti funzioni siano derivabili nel punto indicato a fianco.

131 $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, $x = 2$. $[a = 4; b = -8]$

132 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} - 1 & \text{se } x \leq -1 \\ ax + b & \text{se } x > -1 \end{cases}$, $x = -1$. $\left[a = -\dfrac{1}{2}; b = -\dfrac{1}{2}\right]$

Dimostra che le seguenti funzioni non sono derivabili nel punto x_0 indicato.

133 $f(x) = |x-3| + 1$, $x_0 = 3$.

134 $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, $x_0 = 1$.

135 $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 0$.

Negli esercizi che seguono è data una funzione.
a) Rappresentala nell'intervallo indicato.
b) La funzione è continua in tale intervallo?
c) La funzione è derivabile in tale intervallo?

136 $y = |\cos x|$ in $[0; 2\pi]$. [b) sì; c) no, perché...]

137 $y = |\ln x - 1|$ in $]0; +\infty[$. [b) sì; c) no, perché...]

138 $y = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ in $\mathbb{R}$. [b) no, perché...; c) no, perché...]

139 $y = \begin{cases} x^2 + x & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ in $\mathbb{R}$. [b) sì; c) no, perché...]

Rappresenta la funzione assegnata e determina gli intervalli in cui $f(x)$ è continua e quelli in cui è derivabile.

140 $f(x) = 2|x| - 1$

141 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

142 $f(x) = 1 - |x| + |1 + x|$

143 $f(x) = \dfrac{2|x|}{x}$

4. LE DERIVATE FONDAMENTALI

▶ Teoria a pag. 1629

144 **CACCIA ALL'ERRORE** Ognuna delle seguenti derivate contiene un errore. Trovalo e correggilo.

$D\,2^x = 2^x$ $\qquad D\cos x = \operatorname{sen} x$ $\qquad D\operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi = \cos\frac{3}{4}\pi$

$D\operatorname{sen} x = -\cos x$ $\qquad D\,e^3 = e^3$ $\qquad D\log_3 x = \frac{1}{x}$

Calcola le derivate delle seguenti funzioni utilizzando le formule delle derivate fondamentali.

145 $y = \pi$; $\quad y = \ln x$; $\quad y = \frac{3}{2}$; $\quad y = \cos x$; $\quad y = \frac{3^x}{4^x}$.

146 $y = \log_2 x$; $\quad y = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$; $\quad y = 4^x$; $\quad y = x$; $\quad y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

147 $y = e$; $\quad y = \cos\frac{\pi}{2}$; $\quad y = \log_{10} x$; $\quad y = \operatorname{sen} x$; $\quad y = \sqrt{15}$.

148 $y = x^6$ $\qquad [y' = 6x^5]$

149 $y = x^9$ $\qquad [y' = 9x^8]$

150 $y = \frac{1}{x^3}$ $\qquad \left[y' = -\frac{3}{x^4}\right]$

151 $y = \sqrt[7]{x^2}$ $\qquad \left[y' = \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt[7]{x^5}}\right]$

152 $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ $\qquad \left[y' = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\right]$

153 $y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$ $\qquad \left[y' = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}\right]$

154 $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ $\qquad \left[y' = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}\right]$

155 $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$ $\qquad \left[y' = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right]$

156 $y = \frac{1}{x}$ $\qquad \left[y' = -\frac{1}{x^2}\right]$

157 $y = \frac{x^2}{\sqrt[5]{x^3}}$ $\qquad \left[y' = \frac{7}{5}\cdot\sqrt[5]{x^2}\right]$

158 $y = x^\pi$ $\qquad [y' = \pi x^{\pi-1}]$

159 $y = x^{\sqrt{2}+1}$ $\qquad [y' = (\sqrt{2}+1)x^{\sqrt{2}}]$

160 $y = \pi^x$ $\qquad [y' = \pi^x \ln\pi]$

161 $y = (\sqrt{2})^x$ $\qquad [y' = \sqrt{2}^{\,x}\ln\sqrt{2}]$

162 $y = x^e$ $\qquad [y' = ex^{e-1}]$

163 $y = \frac{1}{5^x}$ $\qquad \left[y' = -\frac{1}{5^x}\ln 5\right]$

164 $y = x^2\sqrt{x}$ $\qquad \left[y' = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}\right]$

165 $y = \sqrt[3]{x}\,\sqrt[6]{x^5}$ $\qquad \left[y' = \frac{7}{6}\sqrt[6]{x}\right]$

Negli esercizi che seguono, sono dati una funzione e un punto, indicato a fianco.
a) Rappresenta la funzione.
b) Calcola la sua derivata.
c) La funzione è continua nel punto?
d) La funzione è derivabile nel punto?

166 $y = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{se } x < 0 \end{cases}$, $\quad x = 0$. $\qquad \left[\text{b) } y' = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ \cos x & \text{se } x < 0 \end{cases}\text{; c) sì; d) sì}\right]$

167 $y = \begin{cases} \ln x & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$, $\quad x = 1$. $\qquad \left[\text{b) } y' = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \\ 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}\text{; c) no; d) no}\right]$

168 $y = \begin{cases} e^x & \text{se } x \geq 0 \\ \cos x & \text{se } x < 0 \end{cases}$, $\quad x = 0$. $\left[\text{b) } y' = \begin{cases} e^x & \text{se } x > 0 \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } x < 0 \end{cases}; \text{ c) sì; d) no}\right]$

169 $y = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$, $\quad x = 1$. $\left[\text{b) } y' = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}; \text{ c) sì; d) no}\right]$

170 $y = \sqrt[3]{x}$, $\quad x = 0$. $\left[\text{b) } y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}; \text{ c) sì; d) no}\right]$

171 Data la funzione

$$y = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

calcola la sua derivata in $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$. $[1; 1; e; e^2]$

Determina le equazioni delle tangenti ai grafici delle seguenti funzioni, nei punti indicati a fianco.

172 $y = \operatorname{sen} x$, $\quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. $[y = 1]$

173 $y = \ln x$, $\quad x_0 = 1$. $[y = x - 1]$

174 $y = e^x$, $\quad x_0 = -1$. $\left[y = \dfrac{1}{e}x + \dfrac{2}{e}\right]$

5. I TEOREMI SUL CALCOLO DELLE DERIVATE

▶ Teoria a pag. 1633

La derivata del prodotto di una costante per una funzione

$y = k \cdot f(x)$, $\quad y' = k \cdot f'(x)$.

Calcola la derivata delle seguenti funzioni.

175 $y = 5x$; $\quad y = 2e^x$; $\quad y = 5 \ln x$. $\left[y' = 5; y' = 2e^x; y' = \dfrac{5}{x}\right]$

176 $y = 2 \operatorname{sen} x$; $\quad y = -3 \cos x$; $\quad y = 4 \log_a x$. $\left[y' = 2\cos x; y' = 3\operatorname{sen} x; y' = \dfrac{4}{x}\log_a e\right]$

177 $y = -\dfrac{3}{4}x$; $\quad y = 3 \cdot 5^x$; $\quad y = \dfrac{1}{6}\ln x$. $\left[y' = -\dfrac{3}{4}; y' = 3 \cdot 5^x \cdot \ln 5; y' = \dfrac{1}{6x}\right]$

178 $y = \dfrac{3}{x^4}$; $\quad y = \dfrac{2}{3}x$; $\quad y = -5x^2$. $\left[y' = -\dfrac{12}{x^5}; y' = \dfrac{2}{3}; y' = -10x\right]$

179 $y = \dfrac{x^\pi}{\pi}$ $\quad [y' = x^{\pi - 1}]$

180 $y = \dfrac{1}{4x}$ $\quad \left[y' = -\dfrac{1}{4x^2}\right]$

181 $y = \sqrt{3}\,x^5$ $\quad [y' = 5\sqrt{3}\,x^4]$

182 $y = 3x\sqrt{x}$ $\quad \left[y' = \dfrac{9}{2}\sqrt{x}\right]$

183 $y = \dfrac{9}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad \left[y' = -\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^4}}\right]$

184 $y = 4\sqrt{x}$ $\quad \left[y' = \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right]$

La derivata della somma di funzioni

$y = f(x) + g(x), \quad y' = f'(x) + g'(x).$

185 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo la derivata delle seguenti funzioni:

a) $y = 3x^5 - 2x^4 + 4x$; **b)** $y = \dfrac{3x^4 + 2}{x^2}$; **c)** $y = 2\ln\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

---

a) La funzione $y = 3x^5 - 2x^4 + 4x$ è la somma di tre funzioni che a loro volta sono il prodotto di una costante per una potenza di x. Utilizziamo quindi le corrispondenti regole di derivazione:

$$y = k \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = k \cdot f'(x),$$
$$y = f(x) + g(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) + g'(x),$$
$$y = x^a \quad \Rightarrow \quad y' = a \cdot x^{a-1}.$$

Otteniamo:

$$y' = 3 \cdot 5x^{5-1} - 2 \cdot 4x^{4-1} + 4 = 15x^4 - 8x^3 + 4.$$

b) Dividiamo il numeratore per il denominatore (essendo il dominio: $x \neq 0$),

$$y = \frac{3x^4 + 2}{x^2} = 3x^2 + \frac{2}{x^2},$$

e utilizziamo le potenze con esponente negativo. Otteniamo:

$$y = 3x^2 + 2x^{-2}.$$

Applichiamo la formula di derivazione della potenza di x:

$$y' = 3 \cdot 2x + 2(-2)x^{-3},$$
$$y' = 6x - \frac{4}{x^3} = \frac{6x^4 - 4}{x^3}.$$

c) La funzione può essere scritta come segue:

$$y = 2\ln x^{-1} - x^{-\frac{1}{3}} = -2\ln x - x^{-\frac{1}{3}}.$$

Deriviamo e otteniamo:

$$y' = -\frac{2}{x} + \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} \quad \to \quad y' = -\frac{2}{x} + \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} \quad \to \quad y' = -\frac{2}{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}.$$

186 **TEST** Le seguenti funzioni hanno la stessa derivata, *tranne* una. Quale?

- **A** $y = \sqrt{x} + 1$
- **B** $y = \sqrt{x} - 1$
- **C** $y = \sqrt{x} + 2x$
- **D** $y = \sqrt{x} + 2$
- **E** $y = \sqrt{x}$

187 **TEST** La derivata della funzione $y = x - \dfrac{1}{x}$ è:

- **A** $y' = 1 - \ln x$.
- **B** $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.
- **C** $y' = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$.
- **D** $y' = 0$.
- **E** $y' = \dfrac{-x^2 - 1}{x^2}$.

Calcola la derivata delle seguenti somme di funzioni.

188 $y = 2x^2 + 3;$ $y = 6x^3 + 1;$ $y = x^3 + x^2.$ $[y' = 4x; y' = 18x^2; y' = 3x^2 + 2x]$

189 $y = -x^2 + 4x - 12;$ $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2.$ $[y' = -2x + 4; y' = x^2 + x]$

190 $y = 2x^2 - 3x + 4;$ $y = 2x^5 - 3x^3 + 2x - 4.$ $[y' = 4x - 3; y' = 10x^4 - 9x^2 + 2]$

191 $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 2x - 4$ $[y' = 2 \cdot (x^3 - x^2 - 5x + 1)]$

192 $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 2$ $\left[y' = x^4 + x^2 + \frac{1}{2}x\right]$

193 $y = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2};$ $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$ $\left[y' = x + \frac{4}{x^3}; y' = -\frac{x^2 + 2x + 3}{x^4}\right]$

194 $y = \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} - 1;$ $y = \frac{x^2 - 1}{x}.$ $\left[y' = x^5 - x^4; y' = 1 + \frac{1}{x^2}\right]$

195 $y = \frac{2}{x^4} - \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^2};$ $y = \frac{1 + 8x^2}{2x^3}.$ $\left[y' = -\frac{8}{x^5} + \frac{9}{x^4} + \frac{2}{x^3}; y' = -\frac{8x^2 + 3}{2x^4}\right]$

196 $y = 2x^{\frac{3}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{2}{3}}$ $\left[y' = 3x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{3}}\right]$

197 $y = \sqrt[5]{x} - 3x^3;$ $y = \sqrt[4]{x^3} + 3x - 2.$ $\left[y' = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} - 9x^2; y' = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + 3\right]$

198 $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x};$ $y = \frac{4\sqrt{x}}{x} + \frac{6}{\sqrt{x}}.$ $\left[y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}; y' = -\frac{5}{\sqrt{x^3}}\right]$

199 $y = \frac{1}{4}x^8 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3} - 3\sqrt[3]{x}$ $\left[y' = 2x^7 + \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{3}{x^4} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right]$

200 $y = \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{5}{2}x^6 + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ $\left[y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 15x^5 - \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}\right]$

201 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$ $\left[y' = x - x^3 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right]$

202 $y = x^3 + \frac{1}{2x^2} + 2\frac{\sqrt[3]{x}}{x}$ $\left[y' = 3x^2 - \frac{1}{x^3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right]$

203 $y = \operatorname{sen} x - 2\cos x + 1;$ $y = 5x - 3\operatorname{sen} x.$ $[y' = \cos x + 2\operatorname{sen} x; y' = 5 - 3\cos x]$

204 $y = 5\operatorname{sen} x + 3\cos x - 2;$ $y = 2x - \frac{1}{2} + 2^x.$ $[y' = 5\cos x - 3\operatorname{sen} x; y' = 2 + 2^x \ln 2]$

205 $y = 3x - 2\ln x;$ $y = 4x^2 + 2\ln x - 3.$ $\left[y' = 3 - \frac{2}{x}; y' = 2 \cdot \left(4x + \frac{1}{x}\right)\right]$

206 $y = e^x - 3\ln x;$ $y = 4^x + 3^x - 2.$ $\left[y' = e^x - \frac{3}{x}; y' = 4^x \ln 4 + 3^x \ln 3\right]$

207 $y = 2^x + \log_3 x;$ $y = \sqrt[4]{x} + \ln x.$ $\left[y' = 2^x \ln 2 + \frac{1}{x}\log_3 e; y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{x}\right]$

208 $y = 4x + 3\operatorname{sen} x - 1;$ $y = 5e^x + \operatorname{sen} x.$ $[y' = 4 + 3\cos x; y' = 5e^x + \cos x]$

209 $y = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2;$ $y = x^4 - 3x^2 - 4.$ $[y' = 20x^3 - 9x^2 + 4x; y' = 2x \cdot (2x^2 - 3)]$

210 $y = 3e^x - 4;$ $y = \sqrt[5]{x^3} - 2.$ $\left[y' = 3e^x; y' = \frac{3}{5 \cdot \sqrt[5]{x^2}}\right]$

211 $y = x^5 + 5^x + \log_5 x$ $\left[y' = 5x^4 + 5^x \ln 5 + \frac{1}{x}\log_5 e\right]$

212 $y = \sqrt{\sqrt{x}} - \ln\frac{1}{x^2} + e^4$ $\left[y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{2}{x}\right]$

213 $y = x^3 - 2\cos x + \frac{\pi}{2}$ $[y' = 3x^2 + 2\,\text{sen}\,x]$

214 $y = x^2 \ln 4 - x\sqrt{x} + 4\,\text{sen}\,x$ $\left[y' = 2x\ln 4 - \frac{3}{2}\sqrt{x} + 4\cos x\right]$

215 $y = -\frac{\sqrt[3]{x^2} + 4x}{\sqrt{x}}$ $\left[y' = \frac{-(12\sqrt[3]{x} + 1)}{6\sqrt[6]{x^5}}\right]$

216 $y = \frac{6\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}}$ $\left[y' = -\frac{1}{\sqrt[6]{x^7}} + \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right]$

La derivata del prodotto di funzioni

217 **TEST** La derivata di $y = e^x \cos x$ è:

- **A** $y' = e^x(\cos x + \text{sen}\,x)$.
- **B** $y' = e^x(\cos 2x)$.
- **C** $y' = \cos x(e^x - \text{sen}\,x)$.
- **D** $y' = \text{sen}\,x(e^x - \cos x)$.
- **E** $y' = e^x(\cos x - \text{sen}\,x)$.

218 **TEST** La funzione $y = \ln x + 1\,(x > 0)$ è la derivata di tutte le seguenti funzioni, *tranne* una. Quale?

- **A** $y = x \cdot \ln x$
- **B** $y = x \cdot \ln x + 2$
- **C** $y = x \cdot \ln x - 2$
- **D** $y = x \cdot \ln x + 2x$
- **E** $y = x \cdot \ln x + 1$

La funzione è il prodotto di due funzioni

$$y = f(x) \cdot g(x), \quad y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

219 $y = 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x$; $y = x \cdot e^x$. $[y' = 2\cos 2x;\ y' = e^x \cdot (1 + x)]$

220 $y = 5e^x \cdot \text{sen}\,x$; $y = 3x \cdot \ln x$. $[y' = 5e^x \cdot (\text{sen}\,x + \cos x);\ y' = 3 \cdot (\ln x + 1)]$

221 $y = x \cdot \ln x - \text{sen}\,x$; $y = (e^x + 3) \cdot \ln x$. $\left[y' = \ln x + 1 - \cos x;\ y' = e^x \cdot \ln x + \frac{1}{x}(e^x + 3)\right]$

222 $y = (\ln x - 3) \cdot \ln x$; $y = e^x \cdot \ln x$. $\left[y' = \frac{1}{x} \cdot (2\ln x - 3);\ y' = e^x \cdot \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)\right]$

223 $y = e^x \cdot (\text{sen}\,x + x)$; $y = e^x(x + 3)$. $[y' = e^x \cdot (\text{sen}\,x + \cos x + x + 1);\ y' = e^x(x + 4)]$

224 $y = (x + 2\ln x) \cdot \cos x$ $\left[y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) \cdot \cos x - (x + 2\ln x) \cdot \text{sen}\,x\right]$

225 $y = (\cos x - \text{sen}\,x)(-\text{sen}\,x - \cos x)$ $[y' = 4\,\text{sen}\,x\cos x]$

226 $y = 2xe^x + (x - 2)e^x$ $[y' = e^x(3x + 1)]$

227 $y = \frac{2}{3}(x + \ln x) + x\ln x$ $\left[y' = \frac{5}{3} + \frac{2}{3x} + \ln x\right]$

228 $y = x\,\text{sen}\,x - (2x - 1)\cos x$ $[y' = x\cos x + 2x\,\text{sen}\,x - 2\cos x]$

229 $y = x^4\,\text{sen}\,x + (x^2 - 1)\cos x$ $[y' = \text{sen}\,x(4x^3 - x^2 + 1) + \cos x(x^4 + 2x)]$

230 $y = (\sqrt{x} + x)(x^2 - x + 1)$ $\left[y' = 3x^2 + \frac{5}{2}\sqrt{x^3} - 2x - \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right]$

231 $y = 2\sqrt{2}\,x^2 \ln x - \sqrt{2}\,x^2$ $[y' = 4\sqrt{2}\,x \ln x]$

232 $y = 2(\operatorname{sen} x - x\cos x)\operatorname{sen} x$ $[y' = -2x\cos 2x + \operatorname{sen} 2x]$

233 $y = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) - e^x \cos x$ $[y' = e^x \operatorname{sen} x]$

234 $y = (x\ln x + 1)(x^2 - 1) + x\left(1 - \frac{x^2}{3}\right)$ $[y' = (3x^2 - 1)\ln x + 2x]$

La funzione è il prodotto di più di due funzioni

$$y = f(x) \cdot g(x) \cdot z(x), \quad y' = f'(x) \cdot g(x) \cdot z(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot z(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot z'(x).$$

235 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo la derivata della seguente funzione:

$y = 2x \cdot e^x \cdot \cos x.$

Poniamo $f(x) = 2x$, $g(x) = e^x$, $z(x) = \cos x$ e utilizziamo la regola di derivazione relativa al prodotto di più funzioni, ricordando che la derivata di x è 1, la derivata di e^x è e^x e la derivata di $\cos x$ è $-\operatorname{sen} x$. Otteniamo:

$$y' = \underbrace{2 \cdot (1)}_{f'(x)} \cdot e^x \cdot \cos x + 2x \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)} \cdot \cos x + 2x \cdot e^x \cdot \underbrace{(-\operatorname{sen} x)}_{z'(x)} = 2e^x \cdot (\cos x + x \cdot \cos x - x \cdot \operatorname{sen} x).$$

Calcola la derivata delle seguenti funzioni.

236 $y = x \cdot e^x \cdot \ln x$ $[y' = e^x \cdot (\ln x + x \cdot \ln x + 1)]$

237 $y = x \cdot \operatorname{sen} x \cdot (3x + 2)$ $[y' = 6x \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x + 3x^2 \cos x + 2x \cos x]$

238 $y = 2x \cdot \ln x \cdot \operatorname{sen} x$ $[y' = 2 \cdot (\ln x \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x + x \cdot \ln x \cdot \cos x)]$

239 $y = x^2(x - 1)(x^3 + 2x^2)$ $[y' = x^3(6x^2 + 5x - 8)]$

240 $y = x \operatorname{sen} x \cos x$ $[y' = \operatorname{sen} x \cos x + x\cos^2 x - x\operatorname{sen}^2 x]$

241 $y = 2x(x - 6)(2x - 1) + 14x^2$ $[y' = 12(x - 1)^2]$

La derivata del quoziente di due funzioni

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

242 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$y = \frac{3x - 2}{x^2 - 4}.$$

Se poniamo $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = x^2 - 4$, le loro derivate sono: $f'(x) = 3$ e $g'(x) = 2x$.

Utilizzando la regola di derivazione relativa al quoziente di due funzioni, si ha:

$$y' = \frac{3 \cdot (x^2-4) - (3x-2) \cdot (2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^2 - 12 - 6x^2 + 4x}{(x^2-4)^2} = \frac{-3x^2+4x-12}{(x^2-4)^2}.$$

Calcola la derivata delle seguenti funzioni.

243 $y = \frac{x^2}{2-x^3}$ $\left[y' = \frac{x \cdot (x^3+4)}{(2-x^3)^2}\right]$

244 $y = \frac{5}{x^3+1}$ $\left[y' = \frac{-15x^2}{(x^3+1)^2}\right]$

245 $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ $\left[y' = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}\right]$

246 $y = \frac{\ln x - 2}{x}$ $\left[y' = \frac{3-\ln x}{x^2}\right]$

247 $y = \frac{2x+3}{x-2}$ $\left[y' = -\frac{7}{(x-2)^2}\right]$

248 $y = \frac{x^2-3x+5}{x^2-1}$ $\left[y' = \frac{3 \cdot (x^2-4x+1)}{(x^2-1)^2}\right]$

249 $y = \frac{x^4}{3x+2}$ $\left[y' = \frac{x^3 \cdot (9x+8)}{(3x+2)^2}\right]$

250 $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ $\left[y' = \frac{x^2 \cdot (x^2-3)}{(x^2-1)^2}\right]$

251 $y = \frac{3x^2-2}{e^x}$ $\left[y' = \frac{-3x^2+6x+2}{e^x}\right]$

252 $y = \frac{x^2}{\ln x}$ $\left[y' = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}\right]$

253 $y = \frac{3x^2-2x+1}{3x-2}$ $\left[y' = \frac{9x^2-12x+1}{(3x-2)^2}\right]$

254 $y = \frac{2\ln x}{x^2}$ $\left[y' = \frac{2 \cdot (1-2\ln x)}{x^3}\right]$

255 $y = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ $\left[y' = \frac{2}{1+\operatorname{sen} 2x}\right]$

256 $y = \frac{x^2+\cos x}{\operatorname{sen} x}$ $\left[y' = \frac{2x\operatorname{sen} x - 1 - x^2\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\right]$

---

257 $y = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{x^2}$ $\left[y' = \frac{\cos x \cdot (x-2) - \operatorname{sen} x \cdot (x+2)}{x^3}\right]$

258 $y = \frac{x\operatorname{sen} x}{e^x}$ $\left[y' = \frac{(1-x)\operatorname{sen} x + x\cos x}{e^x}\right]$

259 $y = \frac{x^3-\ln x}{x}$ $\left[y' = \frac{2x^3-1+\ln x}{x^2}\right]$

260 $y = \frac{1-3\operatorname{sen} x}{x^2}$ $\left[y' = \frac{-3x \cdot \cos x + 6\operatorname{sen} x - 2}{x^3}\right]$

261 $y = \frac{x+\cos x}{\operatorname{sen} x}$ $\left[y' = \frac{\operatorname{sen} x - x \cdot \cos x - 1}{\operatorname{sen}^2 x}\right]$

262 $y = \frac{(x-1)e^x}{x}$ $\left[y' = \frac{e^x(x^2-x+1)}{x^2}\right]$

263 $y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$ $\left[y' = -\frac{2}{x(1+\ln x)^2}\right]$

264 $y = \frac{x^2-4x}{x\ln x}$ $\left[y' = \frac{x\ln x - x + 4}{x\ln^2 x}\right]$

265 $y = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2\operatorname{sen} x\cos x}$ $\left[y' = \frac{\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x}{2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}\right]$

266 $y = \frac{2x}{x^3-x^2-1}$ $\left[y' = -2\frac{2x^3-x^2+1}{(x^3-x^2-1)^2}\right]$

267 $y = 2 + \frac{x}{6+2x} - \frac{x^2-1}{x+3}$ $\left[y' = \frac{1-2x^2-12x}{2(x+3)^2}\right]$

268 $y = \frac{x(\ln x - 1)}{x^2-4}$ $\left[y' = \frac{2x^2 - x^2\ln x - 4\ln x}{(x^2-4)^2}\right]$

269 $y = \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$ $\left[y' = \dfrac{1 - 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^3 x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2}\right]$

270 $y = \dfrac{4 \operatorname{sen} x}{3 \cos x - 1}$ $\left[y' = \dfrac{4(3 - \cos x)}{(3 \cos x - 1)^2}\right]$

271 $y = \dfrac{4 + x^2}{4 - x^2}$ $\left[y' = \dfrac{16x}{(4 - x^2)^2}\right]$

272 $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x}$ $\left[y' = \dfrac{4x^2 - 6x - 6}{x^4 + 4x^3 + 4x^2}\right]$

273 $y = \dfrac{1 + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$ $\left[y' = \dfrac{\cos x(-\operatorname{sen}^2 x - 2)}{\operatorname{sen}^2 x}\right]$

274 $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ $\left[y' = \dfrac{2e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1}\right]$

275 $y = x - \dfrac{x \ln x}{1 + \ln x}$ $\left[y' = \dfrac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}\right]$

La derivata della funzione tangente e della funzione cotangente

Calcola la derivata delle seguenti funzioni.

276 $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$ $\left[y' = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}\right]$

277 $y = (2x^2 - 3) \cdot \operatorname{cotg} x$ $\left[y' = -\dfrac{2x^2 - 3}{\operatorname{sen}^2 x} + 4x \operatorname{cotg} x\right]$

278 $y = e^x \cdot \operatorname{cotg} x$ $\left[y' = e^x \left(\dfrac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x - 1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)\right]$

279 $y = 3x \cdot \operatorname{tg} x$ $\left[y' = 3 \cdot \left(\dfrac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x + x}{\cos^2 x}\right)\right]$

280 $y = \dfrac{2 \ln x \cdot \operatorname{tg} x + x}{2}$ $\left[y' = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} + \dfrac{\ln x}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{2}\right]$

281 $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ $\left[y' = \dfrac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{x^2 \cos^2 x}\right]$

282 $y = 2x^3 \cdot \operatorname{cotg} x$ $\left[y' = 2x^2 \cdot \left(3 \operatorname{cotg} x - \dfrac{x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)\right]$

283 $y = \dfrac{\operatorname{cotg} x}{e^x}$ $\left[y' = -\dfrac{1 + \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{e^x \operatorname{sen}^2 x}\right]$

284 $y = \dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} - \dfrac{1}{\cos x}$ $[y' = 0]$

285 $y = \dfrac{2(\operatorname{tg} x - 1)}{\cos x - \operatorname{sen} x}$ $\left[y' = -\dfrac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\right]$

286 $y = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$ $\left[y' = -\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right]$

6. LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

▶ Teoria a pag. 1637

IN PRATICA ▶ Videolezione 68

$y = f[g(x)], \quad y' = f'[g(x)]\,g'(x).$

287 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo la derivata delle seguenti funzioni composte:

a) $y = \ln \operatorname{sen}(x^4 - 2)$; b) $y = \cos^8 2x$; c) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x - 1}}$.

a) La funzione presenta tre funzioni componenti che sono:

$f(x) = \ln g(x), \quad g(x) = \operatorname{sen} z(x), \quad \text{e} \quad z(x) = x^4 - 2.$

Utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte, si ottiene:

$$y = \ln \operatorname{sen}(x^4 - 2)$$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{sen}(x^4 - 2)} \cdot \cos(x^4 - 2) \cdot 4x^3.$$

derivata del logaritmo — derivata del seno — derivata del polinomio

b) La funzione presenta tre funzioni componenti:

$f(x) = (g(x))^8, \qquad g(x) = \cos z(x), \qquad z(x) = 2x.$

Applichiamo la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$y = (\cos 2x)^8$$

$$y' = 8(\cos 2x)^7 \cdot (-\operatorname{sen} 2x) \cdot (2).$$

derivata della potenza — derivata del coseno — derivata di $2x$

Si ha quindi:

$$y' = -16 \operatorname{sen} 2x \cos^7 2x.$$

c) La funzione presenta due funzioni componenti:

$f(x) = \sqrt{g(x)}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x-1}.$

Deriviamo:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)^2}.$$

derivata della radice — derivata del quoziente

288 **TEST** La derivata della funzione $y = \ln 2x^3 + 4$, $x > 0$, è:

A $y' = \dfrac{1}{2x^3 + 4}$.

B $y' = \dfrac{2}{2x^3 + 4}$.

C $y' = \dfrac{6x^2}{2x^3 + 4}$.

D $y' = \dfrac{3}{x}$.

E $y' = \dfrac{3}{x^3}$.

289 **TEST** Considera la funzione $y = 5\cos 5x - 6x$. Essa è la derivata di tutte le seguenti funzioni, *tranne* una. Quale?

A $y = \operatorname{sen} 5x - 3x^2 + 1$

B $y = \operatorname{sen} 5x - 3x^2 + 2$

C $y = \operatorname{sen} 5x - 3x^2 + x$

D $y = \operatorname{sen} 5x - 3x^2 - 1$

E $y = \operatorname{sen} 5x - 3x^2$

Calcola la derivata delle seguenti funzioni.

290 $y = 2 \operatorname{sen} 5x$ $\quad [y' = 10 \cos 5x]$

291 $y = \frac{1}{2} e^{4x}$ $\quad [y' = 2e^{4x}]$

292 $y = \ln(2x^2 - x - 1)$ $\quad \left[y' = \frac{4x-1}{2x^2 - x - 1}\right]$

293 $y = e^{\frac{2x}{x-1}}$ $\quad \left[y' = -\frac{2e^{\frac{2x}{x-1}}}{(x-1)^2}\right]$

294 $y = 2 \cos x^3$ $\quad [y' = -6x^2 \operatorname{sen} x^3]$

295 $y = (x^2 + 1)^8$ $\quad [y' = 16x(x^2 + 1)^7]$

296 $y = e^{x^2 - 3x + 2}$ $\quad [y' = e^{x^2 - 3x + 2}(2x - 3)]$

297 $y = e^{2x} + 2e^{-x}$ $\quad [y' = 2(e^{2x} - e^{-x})]$

298 $y = \operatorname{sen} \ln 2x$ $\quad \left[y' = \frac{\cos \ln 2x}{x}\right]$

299 $y = 3 \cos 4x$ $\quad [y' = -12 \operatorname{sen} 4x]$

300 $y = e^{-x}$ $\quad [y' = -e^{-x}]$

301 $y = \frac{1}{4} \operatorname{tg} 4x^4$ $\quad \left[y' = \frac{4x^3}{\cos^2 4x^4}\right]$

302 $y = 5 \ln(x^2 + 3)$ $\quad \left[y' = \frac{10x}{x^2 + 3}\right]$

303 $y = \operatorname{cotg} 5x$ $\quad \left[y' = -\frac{5}{\operatorname{sen}^2 5x}\right]$

304 $y = (2 + 3x^3)^4$ $\quad [y' = 36x^2(2 + 3x^3)^3]$

305 $y = \operatorname{tg}(3x^2 - 2)$ $\quad \left[y' = \frac{6x}{\cos^2(3x^2 - 2)}\right]$

306 $y = 4 \ln 3x + \ln x$ $\quad \left[y' = \frac{5}{x}\right]$

307 $y = \ln \operatorname{sen} 3x$ $\quad [y' = 3 \operatorname{cotg} 3x]$

308 $y = \ln^2(x^2 - 1)$ $\quad \left[y' = \frac{4x \ln(x^2 - 1)}{x^2 - 1}\right]$

309 $y = \ln \operatorname{sen}^2 x$ $\quad [y' = 2 \operatorname{cotg} x]$

310 $y = e^{\ln^2 x}$ $\quad \left[y' = \frac{2 \ln x \cdot e^{\ln^2 x}}{x}\right]$

311 $y = 2 \operatorname{tg}^2(x^3 + 1)$ $\quad \left[y' = \frac{12x^2 \cdot \operatorname{tg}(x^3 + 1)}{\cos^2(x^3 + 1)}\right]$

312 $y = 3 \operatorname{sen}^4 x$ $\quad [y' = 12 \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x]$

313 $y = \ln(x^2 - 1) + 5$ $\quad \left[y' = \frac{2x}{x^2 - 1}\right]$

314 $y = e^{x^2 - 2}$ $\quad [y' = 2x \cdot e^{x^2 - 2}]$

315 $y = (3x^2 - 4)^3$ $\quad [y' = 18x \cdot (3x^2 - 4)^2]$

316 $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ $\quad \left[y' = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}\right]$

317 $y = (2 + \operatorname{sen} x)^4$ $\quad [y' = 4(2 + \operatorname{sen} x)^3 \cos x]$

318 $y = \cos^3 x$ $\quad [y' = -3 \cos^2 x \operatorname{sen} x]$

319 $y = \sqrt{6x - 5}$ $\quad \left[y' = \frac{3}{\sqrt{6x - 5}}\right]$

320 $y = 4x^2 + \cos^2 x$ $\quad [y' = 8x - \operatorname{sen} 2x]$

321 $y = x \ln^2 x$ $\quad [y' = \ln x(\ln x + 2)]$

322 $y = \frac{x^2 - 1}{x} + \ln^2 x$ $\quad \left[y' = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2 \ln x}{x}\right]$

323 $y = \sqrt{e^x}$ $\quad \left[y' = \frac{1}{2}\sqrt{e^x}\right]$

324 $y = 2 \operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}$ $\quad \left[y' = \frac{4 \cos x(\operatorname{sen}^6 x - 1)}{\operatorname{sen}^5 x}\right]$

325 $y = (2x^2 - 3x + 1)^2$ $\quad [y' = 2 \cdot (2x^2 - 3x + 1) \cdot (4x - 3)]$

326 $y = \frac{3}{(2x - 1)^2}$ $\quad \left[y' = -\frac{12}{(2x - 1)^3}\right]$

327 $y = (\ln x + 1)^8$ $\quad \left[y' = \frac{8(\ln x + 1)^7}{x}\right]$

328 $y = 5 + \ln^2 x$ $\quad \left[y' = \frac{2 \ln x}{x}\right]$

329 $y = \sqrt[3]{3x + 1}$ $\quad \left[y' = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x + 1)^2}}\right]$

330 $y = \ln x \cdot \operatorname{sen}^2 x$ $\quad \left[y' = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} + \operatorname{sen} 2x \ln x\right]$

331 $y = \frac{1}{x^2} + 3 \operatorname{sen}^4 x$ $\quad \left[y' = -\frac{2}{x^3} + 12 \operatorname{sen}^3 x \cos x\right]$

332 $y = \frac{1}{\ln^2 x}$ $\quad \left[y' = -\frac{2}{x \ln^3 x}\right]$

333 $y = \sqrt[3]{\cos x}$ $\quad \left[y' = -\frac{\operatorname{sen} x}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}}\right]$

334 $y = x\sqrt{\ln^3 x} + 4$ $\quad \left[y' = \sqrt{\ln x}\left(\ln x + \frac{3}{2}\right)\right]$

335 $y = \operatorname{sen}^3(x^2+1)$ $\quad [y' = 6x \cdot \operatorname{sen}^2(x^2+1) \cdot \cos(x^2+1)]$

336 $y = \ln^3 \operatorname{sen}(x^2+1)$ $\quad [y' = 6x \cdot \operatorname{cotg}(x^2+1) \cdot \ln^2 \operatorname{sen}(x^2+1)]$

337 $y = (3x^3 - 5x^2 + 1)^3$ $\quad [y' = 3x \cdot (3x^3 - 5x^2 + 1)^2 \cdot (9x - 10)]$

338 $y = (5x^2 - 3x + 2) \cdot (x^2 - 4)^3$ $\quad [y' = (x^2-4)^2 \cdot (40x^3 - 21x^2 - 28x + 12)]$

339 $y = \operatorname{sen}^8 x \cdot \ln^5 x$ $\quad \left[y' = \operatorname{sen}^7 x \ln^4 x\left(8\cos x \ln x + \frac{5}{x}\operatorname{sen} x\right)\right]$

340 $y = (2x-1)^5 + \frac{1}{2}\cos^2 x$ $\quad [y' = 10(2x-1)^4 - \cos x \operatorname{sen} x]$

341 $y = \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{cotg} x$ $\quad [y' = 2\cos^2 x - 1]$

342 $y = (x^3 + 3x + 1)^3$ $\quad [y' = 9(x^2+1)(x^3+3x+1)^2]$

343 $y = 5 \operatorname{sen} x^4$ $\quad [y' = 20x^3 \cos x^4]$

344 $y = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{tg}(x^2 - 1)$ $\quad \left[y' = \operatorname{sen} 2x - \frac{2x}{\cos^2(x^2-1)}\right]$

345 $y = 4 \operatorname{sen} \ln \frac{x}{2}$ $\quad \left[y' = \frac{4\cos \ln \frac{x}{2}}{x}\right]$

346 $y = \ln(x^4 - 3x^2)$ $\quad \left[y' = \frac{4x^2-6}{x^3-3x}\right]$

347 $y = \operatorname{sen}^4(2x+1)$ $\quad [y' = 8\operatorname{sen}^3(2x+1) \cdot \cos(2x+1)]$

348 $y = x^2 \cdot \ln(3x^2+4)$ $\quad \left[y' = 2x\left[\ln(3x^2+4) + \frac{3x^2}{3x^2+4}\right]\right]$

349 $y = \frac{2}{(x^3+2)^2}$ $\quad \left[y' = -\frac{12x^2}{(x^3+2)^3}\right]$

350 $y = \frac{1}{(\operatorname{sen} 3x - 1)^3}$ $\quad \left[y' = -\frac{9\cos 3x}{(\operatorname{sen} 3x - 1)^4}\right]$

351 $y = \frac{(x+1)^3}{(x^2-2)^2}$ $\quad \left[y' = -\frac{(x+1)^2(x^2+4x+6)}{(x^2-2)^3}\right]$

352 $y = \operatorname{cotg}^2 x$ $\quad \left[y' = \frac{-2\operatorname{cotg} x}{\operatorname{sen}^2 x}\right]$

353 $y = 3\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$ $\quad \left[y' = \frac{9\operatorname{tg}^2 x + 1}{\cos^2 x}\right]$

354 $y = \operatorname{cotg}(x^3+1)$ $\quad \left[y' = -\frac{3x^2}{\operatorname{sen}^2(x^3+1)}\right]$

355 $y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ $\quad \left[y' = \frac{2}{x^2-1}\right]$

356 $y = \ln\left(\frac{x^2-1}{2x+3}\right)$ $\quad \left[y' = \frac{2(x^2+3x+1)}{(x^2-1)(2x+3)}\right]$

357 $y = \cos^2 5^x$ $\quad [y' = -5^x \ln 5 \cdot \operatorname{sen}[2(5^x)]]$

358 $y = \frac{2\ln(1-x^2)}{x}$ $\quad \left[y' = \frac{-2[2x^2 + (1-x^2)\cdot\ln(1-x^2)]}{x^2\cdot(1-x^2)}\right]$

359 $y = x \cdot \cos^3 5x$ $\quad [y' = \cos^2 5x(\cos 5x - 15x \operatorname{sen} 5x)]$

360 $y = \ln\dfrac{3x^2-1}{x}$ $\quad \left[y' = \dfrac{3x^2+1}{x(3x^2-1)}\right]$

361 $y = 2\operatorname{tg}^2 5x - 3\operatorname{cotg} 2x$ $\quad \left[y' = \dfrac{20\operatorname{tg} 5x}{\cos^2 5x} + \dfrac{6}{\operatorname{sen}^2 2x}\right]$

362 $y = \sqrt[3]{x^2-3}$ $\quad \left[y' = \dfrac{2x}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2-3)^2}}\right]$

363 $y = \sqrt{3x+2}$ $\quad \left[y' = \dfrac{3}{2\cdot\sqrt{3x+2}}\right]$

364 $y = (3\sqrt[3]{x}-2)^4$ $\quad \left[y' = \dfrac{4(3\sqrt[3]{x}-2)^3}{\sqrt[3]{x^2}}\right]$

365 $y = \sqrt[3]{x^3-3x}$ $\quad \left[y' = \dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3-3x)^2}}\right]$

366 $y = \dfrac{x^3}{(x^2-1)^2}$ $\quad \left[y' = -\dfrac{x^2\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3}\right]$

367 $y = \dfrac{x^2+5}{(x+1)^2}$ $\quad \left[y' = \dfrac{2(x-5)}{(x+1)^3}\right]$

368 $y = \dfrac{(2x+1)^2}{(x-2)^3}$ $\quad \left[y' = \dfrac{(2x+1)(-2x-11)}{(x-2)^4}\right]$

369 $y = \sqrt[4]{2x^3-3x^2+1}$ $\quad \left[y' = \dfrac{3x\cdot(x-1)}{2\cdot\sqrt[4]{(2x^3-3x^2+1)^3}}\right]$

370 $y = \sqrt{x-1}\cdot\operatorname{sen}^2 x$ $\quad \left[y' = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2\sqrt{x-1}} + \operatorname{sen} 2x\sqrt{x-1}\right]$

371 $y = 2\ln x - \sqrt[4]{\ln^3 x}$ $\quad \left[y' = \dfrac{1}{x}\left(2 - \dfrac{3}{4\sqrt[4]{\ln x}}\right)\right]$

372 $y = \sqrt{\operatorname{tg}^3 x} + \operatorname{tg}^2 x$ $\quad \left[y' = \dfrac{3\sqrt{\operatorname{tg} x} + 4\operatorname{tg} x}{2\cos^2 x}\right]$

373 $y = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ $\quad \left[y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen} 2x\sqrt{\operatorname{tg} x}}\right]$

374 $y = (e^x)^4 + \dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$ $\quad \left[y' = \dfrac{8\sqrt{e^{9x}}-1}{2\sqrt{e^x}}\right]$

375 $y = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$ $\quad \left[y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}\cdot\cos^2 x}\right]$

376 $y = \operatorname{tg}^2\sqrt{x}$ $\quad \left[y' = \dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}\right]$

377 $y = \sqrt{e^x}\ln x$ $\quad \left[y' = \sqrt{e^x}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{x}\right)\right]$

378 $y = e^{\sqrt{x}} + \ln\sqrt{x}$ $\quad \left[y' = \dfrac{\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}+1}{2x}\right]$

379 $y = \sqrt{\operatorname{tg} 4x^2}$ $\quad \left[y' = \dfrac{4x}{\cos^2 4x^2\cdot\sqrt{\operatorname{tg} 4x^2}}\right]$

380 $y = \sqrt{\ln(x^2+2x-1)}$ $\quad \left[y' = \dfrac{x+1}{(x^2+2x-1)\cdot\sqrt{\ln(x^2+2x-1)}}\right]$

381 $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{e^{x^2}}$ $\left[y' = \dfrac{1-6x^2}{3e^{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^2}}\right]$

382 $y = \sqrt[3]{x}\cdot\ln^2 x$ $\left[y' = \dfrac{\ln x\cdot(\ln x + 6)}{3\sqrt[3]{x^2}}\right]$

383 $y = \dfrac{x\ln x}{\sqrt{x}}$ $\left[y' = \dfrac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}\right]$

384 $y = \sqrt{x}\cdot\cos^2 x$ $\left[y' = \dfrac{\sqrt{x}\cos x}{2x}(\cos x - 4x\,\mathrm{sen}\,x)\right]$

385 $y = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}$ $[y' = \cos x]$

386 $y = \mathrm{sen}^2(3x^2+1)^2$ $[y' = 12x(3x^2+1)\cdot\mathrm{sen}\,[2(3x^2+1)^2]]$

387 $y = \dfrac{\ln(x^2-1)^3}{x^2-1}$ $\left[y' = \dfrac{2x}{(x^2-1)^2}[3-\ln(x^2-1)^3]\right]$

388 $y = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$ $[y' = -2\,\mathrm{sen}\,2x]$

389 $y = (\mathrm{sen}\sqrt{x}+2)^2$ $\left[y' = \dfrac{\cos\sqrt{x}\,(\mathrm{sen}\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}}\right]$

390 $y = \sqrt[4]{\ln x^3}$ $\left[y' = \dfrac{3}{4x\sqrt[4]{\ln^3 x^3}}\right]$

391 $y = \ln\sqrt{x^2+2x+4}$ $\left[y' = \dfrac{x+1}{x^2+2x+4}\right]$

392 $y = \sqrt[4]{\mathrm{sen}^3(x^2-3)}$ $\left[y' = \dfrac{3x\cdot\cos(x^2-3)}{2\sqrt[4]{\mathrm{sen}(x^2-3)}}\right]$

393 $y = \sqrt[3]{(e^{x^2+1}-2)^2}$ $\left[y' = \dfrac{4x\cdot e^{x^2+1}}{3\sqrt[3]{e^{x^2+1}-2}}\right]$

394 $y = \ln^2\sqrt{x^2+4}$ $\left[y' = \dfrac{2x\cdot\ln\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}\right]$

395 $y = \ln(\cos\sqrt{x^2+1})$ $\left[y' = -x\cdot\dfrac{\mathrm{tg}\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

396 $y = \sqrt[3]{\mathrm{cotg}\,4x}$ $\left[y' = -\dfrac{4}{3\,\mathrm{sen}^2 4x\cdot\sqrt[3]{\mathrm{cotg}^2 4x}}\right]$

397 $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln^4 x$ $\left[y' = \dfrac{\ln^3 x}{4x\sqrt{x}}(8-\ln x)\right]$

398 $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2^x}$ $\left[y' = \dfrac{-(x^2+1)\cdot\ln 2 + x}{2^x\cdot\sqrt{x^2+1}}\right]$

399 $y = \ln(x+\sqrt{x^2-4}) + \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-4}$ $\left[y' = \dfrac{2+x}{2\sqrt{x^2-4}}\right]$

400 $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}}$ $\left[y' = \dfrac{2\cos x}{\mathrm{sen}\,x(1+\cos^2 x)}\right]$

401 $y = \ln\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{\mathrm{sen}\,x}$ $\left[y' = \dfrac{\mathrm{sen}\,x + \cos x}{\mathrm{sen}^2 x}\right]$

7. LA DERIVATA DI $[f(x)]^{g(x)}$

Teoria a pag. 1639

402 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo le derivate delle seguenti funzioni:

a) $y = x^x$; **b)** $y = (\operatorname{sen} x)^{\sqrt{2}}$.

a) Il dominio della funzione è $x > 0$, quindi è anche $x^x > 0$. Possiamo allora calcolare i logaritmi dei due membri,

$$\ln y = \ln x^x,$$

da cui, ricordando la proprietà $\log_a b^c = c \log_a b$, abbiamo:

$$\ln y = x \cdot \ln x.$$

Deriviamo entrambi i membri, osservando che al primo membro abbiamo y funzione composta, mentre al secondo membro abbiamo un prodotto di due funzioni:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}.$$

Isoliamo y':

$$y' = y \cdot (\ln x + 1).$$

Ricordando che $y = x^x$, otteniamo:

$$y' = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

b) Poiché l'esponente $g(x)$ è una costante reale, posto $\operatorname{sen} x > 0$, applichiamo la regola della derivata di una potenza:

$$y' = \sqrt{2}\,(\operatorname{sen} x)^{\sqrt{2}-1} \cos x.$$

Calcola la derivata delle seguenti funzioni.

403 $y = x^{2x+1}$ $\left[y' = x^{2x+1} \cdot \left(2\ln x + \frac{1}{x} + 2\right)\right]$

404 $y = x^{\cos x}$ $\left[y' = x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \operatorname{sen} x \ln x\right)\right]$

405 $y = x^{\frac{2}{x}}$ $\left[y' = x^{\frac{2}{x}} \cdot \left[\frac{2}{x^2}(1 - \ln x)\right]\right]$

406 $y = x^{\sqrt{x}}$ $\left[y' = x^{\sqrt{x}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2} + 1\right)\right]\right]$

407 $y = x^{\ln x}$ $\left[y' = 2x^{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x}\right]$

408 $y = (x^2 - 1)^{x^2}$ $\left[y' = 2(x^2 - 1)^{x^2} \cdot x\left[\ln(x^2 - 1) + \frac{x^2}{x^2 - 1}\right]\right]$

409 $y = (\operatorname{tg} x)^{2x}$ $\left[y' = 2(\operatorname{tg} x)^{2x} \cdot \left(\frac{x}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} + \ln \operatorname{tg} x\right)\right]$

410 $y = x^{\pi}$ $[y' = \pi x^{\pi - 1}]$

411 $y = 2x^{1+\pi}$ $[y' = 2(1 + \pi)x^{\pi}]$

412 $y = (\operatorname{sen} x)^x$ $[y' = (\operatorname{sen} x)^x(\ln \operatorname{sen} x + x \operatorname{cotg} x)]$

413 $y = 2e^x + x^{2e}$ $\quad [y' = 2e^x + 2e\, x^{2e-1}]$

414 $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$ $\quad \left[y' = (\operatorname{sen} x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln \operatorname{sen} x}{x} + \ln x \cdot \operatorname{cotg} x\right)\right]$

415 $y = x^{e^x}$ $\quad \left[y' = x^{e^x} e^x \cdot \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)\right]$

416 $y = \pi^x + x^\pi$ $\quad [y' = \pi^x \ln \pi + \pi\, x^{\pi-1}]$

417 $y = 2(\sqrt{x})^\pi$ $\quad [y' = \pi(\sqrt{x})^{\pi-2}]$

418 $y = x^4 + 4^x + x^{\sqrt{2}}$ $\quad [y' = 4x^3 + 4^x \ln 4 + \sqrt{2}\, x^{\sqrt{2}-1}]$

8. LA DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

▶ Teoria a pag. 1641

IN PRATICA ▶ Videolezione 69

419 **ESERCIZIO GUIDA**

Per calcolare la derivata di $y = e^{3x}$, determiniamo prima la sua funzione inversa e poi utilizziamo la regola di derivazione della funzione inversa.

Troviamo la funzione inversa ricavando x in funzione di y.

Applichiamo il logaritmo a entrambi i membri di $y = e^{3x}$:

$$\ln y = \ln e^{3x} \;\rightarrow\; \ln y = 3x \ln e \;\rightarrow\; \ln y = 3x \;\rightarrow\; x = \frac{\ln y}{3}.$$

Applichiamo la regola di derivazione della funzione inversa:

$$\mathrm{D}e^{3x} = \frac{1}{\mathrm{D}\left(\frac{\ln y}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{3y}} = 3y.$$

Sostituendo:

$$\mathrm{D}e^{3x} = 3e^{3x}.$$

Calcola la derivata delle seguenti funzioni, determinando prima la loro funzione inversa e poi applicando la regola di derivazione della funzione inversa. Verifica i risultati con le regole di derivazione che già conosci.

420 $y = \sqrt{x}$; $\quad y = 5x$; $\quad y = x - 2$.

421 $y = 4\ln x$; $\quad y = 2e^{4x}$; $\quad y = \frac{x}{3} + 1$.

422 $y = x^2$; $\quad y = x^3$; $\quad y = \sqrt[3]{x}$.

La derivata della funzione inversa in un punto

423 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la funzione $f(x) = 2e^{2x}$, calcoliamo la derivata della funzione inversa $x = g(y)$ nel punto $y_0 = 2$.

Determiniamo il punto x_0 tale che $f(x_0) = y_0$:

$$2e^{2x} = 2 \quad \rightarrow \quad e^{2x} = 1 \quad \rightarrow \quad 2x = 0.$$

Quindi $x_0 = 0$. Poiché

$$f'(x) = 4e^{2x},$$

applicando la regola di derivazione della funzione inversa, otteniamo:

$$g'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4e^{2\cdot 0}} = \frac{1}{4}.$$

Data la funzione $y = f(x)$, detta $g(y)$ la sua funzione inversa, calcola $g'(y)$ nel punto y_0 indicato a fianco.

424 $f(x) = 4x + \ln x$, $y_0 = 4$. $\left[g'(4) = \frac{1}{5}\right]$

425 $f(x) = x + 1 + \operatorname{arctg} x$, $y_0 = 1$. $\left[g'(1) = \frac{1}{2}\right]$

426 $f(x) = e^{-4x} - 4$, $y_0 = -3$. $\left[g'(-3) = -\frac{1}{4}\right]$

427 $f(x) = e^{x-1} + x$, $y_0 = 2$. $\left[g'(2) = \frac{1}{2}\right]$

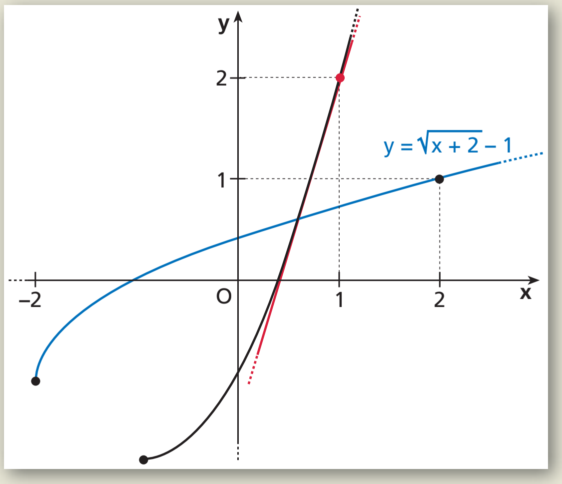
428 $f(x) = 2\ln(x-2) + x$, $y_0 = 3$. $\left[g'(3) = \frac{1}{3}\right]$

429 $f(x) = \operatorname{arctg} 2x + e^x$, $y_0 = 1$. $\left[g'(1) = \frac{1}{3}\right]$

430 **ESERCIZIO GUIDA**

Verifichiamo graficamente che la funzione $f(x) = \sqrt{x+2} - 1$ è invertibile, calcoliamo $\mathrm{D}\, f^{-1}(1)$ e interpretiamo geometricamente il risultato.

Tracciamo il grafico di $f(x)$ a partire da $y = \sqrt{x}$ con una traslazione di vettore $\vec{v}(-2; -1)$. È un arco di parabola crescente, perciò è invertibile.



Per calcolare $\mathrm{D}\, f^{-1}(1)$ applichiamo il teorema della derivata della funzione inversa, e cioè:

$$\mathrm{D}\, f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ con } x_0 = f^{-1}(y_0).$$

Nel nostro caso, essendo $y_0 = 1$, calcoliamo x_0 sostituendo nell'equazione di $f(x)$:

$$1 = \sqrt{x_0 + 2} - 1 \quad \rightarrow \quad \sqrt{x_0 + 2} = 2 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad x_0 + 2 = 4 \quad \rightarrow \quad x_0 = 2.$$

Calcoliamo anche $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$, quindi:

$$\mathrm{D}\, f^{-1}(1) = \frac{1}{\dfrac{1}{2\sqrt{2+2}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{4}} = 4.$$

Il valore trovato è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione inversa nel punto $(1; 2)$.

Traccia il grafico della funzione $f(x)$ verificando che è invertibile nel suo dominio e calcola $\mathrm{D}\, f^{-1}(y_0)$ nel punto indicato.

431 $f(x) = x^3 + 4$, $y_0 = 5$. $\left[\mathrm{D}\, f^{-1}(5) = \frac{1}{3}\right]$

432 $f(x) = \frac{1}{2}x - 3,\qquad y_0 = -6.$ $\left[D f^{-1}(-6) = 2\right]$

433 $f(x) = \frac{8}{x+1},\qquad y_0 = -4.$ $\left[D f^{-1}(-4) = -\frac{1}{2}\right]$

434 $f(x) = \sqrt{25-4x},\qquad y_0 = 3.$ $\left[D f^{-1}(3) = -\frac{2}{3}\right]$

435 $f(x) = \frac{1}{e^x - 1},\qquad y_0 = 1.$ $\left[D f^{-1}(1) = -\frac{1}{2}\right]$

436 $f(x) = -\ln(x-1),\qquad y_0 = 0.$ $\left[D f^{-1}(0) = -1\right]$

La derivata delle funzioni inverse delle funzioni goniometriche

$y = \operatorname{arcsen} x,\quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\qquad y = \operatorname{arctg} x,\quad y' = \frac{1}{1+x^2}.$

$y = \arccos x,\quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\qquad y = \operatorname{arccotg} x,\quad y' = -\frac{1}{1+x^2}.$

437 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo la derivata della funzione:

$y = \operatorname{arcsen}(5x+3).$

La funzione data è una funzione composta.
Chiamando $g(x) = 5x + 3$, la funzione data si può scrivere:

$$y = \operatorname{arcsen} g(x),$$

la cui derivata è $y' = \frac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}} \cdot g'(x)$.

Poiché $g'(x) = 5$, sostituendo si ottiene:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(5x+3)^2}} \cdot 5 = \frac{5}{\sqrt{1-(5x+3)^2}}.$$

Calcola la derivata delle seguenti funzioni.

438 $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + x$ $\left[y' = \frac{2x^2+3}{2(1+x^2)}\right]$

439 $y = \operatorname{arctg}(x+1)$ $\left[y' = \frac{1}{x^2+2x+2}\right]$

440 $y = \operatorname{arctg} e^x$ $\left[y' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}\right]$

441 $y = (\operatorname{arctg} x)^4$ $\left[y' = \frac{4(\operatorname{arctg} x)^3}{1+x^2}\right]$

442 $y = 2\arccos x$ $\left[y' = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

443 $y = \operatorname{arcsen} 2x + \sqrt{1-4x^2}$ $\left[y' = \frac{2(1-2x)}{\sqrt{1-4x^2}}\right]$

444 $y = 2\operatorname{arcsen}\sqrt{x}$ $\left[y' = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\right]$

445 $y = \arccos\frac{1}{x}$ $\left[y' = \frac{1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}}\right]$

446 $y = \ln(\operatorname{arcsen} x)$ $\left[y' = \frac{1}{\operatorname{arcsen} x \cdot \sqrt{1-x^2}}\right]$

447 $y = \operatorname{arccotg}(\ln x)$ $\left[y' = -\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\right]$

448 $y = \operatorname{arcsen}^2 x$ $\left[y' = \frac{2\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

449 $y = \ln(\operatorname{arctg} x)$ $\left[y' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x \cdot (1+x^2)}\right]$

450 $y = \operatorname{arccotg}(e^x + 1)$ $\left[y' = \frac{-e^x}{1+(e^x+1)^2}\right]$

451 $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}$ $\left[y' = \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}\right]$

452 $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ $\left[y' = \frac{x-(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{x^2\cdot(1+x^2)}\right]$

453 $y = 4\operatorname{arccotg}\frac{x}{2}$ $\left[y' = -\frac{8}{x^2+4}\right]$

454 $y = x\cdot\operatorname{arctg} 2x$ $\left[y' = \operatorname{arctg} 2x + \frac{2x}{1+4x^2}\right]$

455 $y = \arccos(\cos x)$ $\left[y' = \frac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|}\right]$

456 $y = \operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)$ $\left[y' = \frac{1}{2}\right]$

457 $y = \sqrt{\operatorname{arcsen} x}$ $\left[y' = \frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)(\operatorname{arcsen} x)}}\right]$

458 $y = \operatorname{arcsen} x\cdot\arccos x$ $\left[y' = \frac{\arccos x - \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

459 $y = \frac{\arccos x}{\operatorname{arcsen} x}$ $\left[y' = -\frac{\operatorname{arcsen} x + \arccos x}{\sqrt{1-x^2}\,(\operatorname{arcsen} x)^2}\right]$

460 $y = \arccos(1-x^2)$ $\left[y' = \frac{2|x|}{x\sqrt{2-x^2}}\right]$

461 $y = 2\operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}$ $\left[y' = -\frac{2|x|}{x\sqrt{1-x^2}}\right]$

462 $y = 2\operatorname{arccotg}\frac{x^2-1}{x^2+1}$ $\left[y' = -\frac{4x}{x^4+1}\right]$

463 $y = \arccos\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left[y' = -\frac{1}{\sqrt{1-2x^2}\,(1-x^2)}\right]$

464 $y = \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1} + \operatorname{arctg} x$ $\left[y' = \frac{2}{1+x^2}\right]$

ESERCIZI VARI Le derivate

465 **TEST** La funzione $y = 1 + \ln x$, con $x > 0$, è la derivata di una sola delle seguenti funzioni. Quale?

A $y = x + \frac{1}{x}$

B $y = x - \frac{1}{x}$

C $y = x + \ln x$

D $y = x - \ln x$

E $y = x\cdot\ln x$

466 **TEST** La funzione $y = \frac{1-\ln x}{x^2}$ è la derivata di tutte le seguenti funzioni, *tranne* una. Quale?

A $y = \frac{\ln x + 2x}{x}$

B $y = 1 + \frac{\ln x}{x}$

C $y = \frac{\ln x}{x}$

D $y = x + \frac{\ln x}{x}$

E $y = \frac{\ln x - x}{x}$

CACCIA ALL'ERRORE **Ognuna delle seguenti derivate contiene un errore. Trovalo e correggilo.**

467 $y = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, $\quad y' = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}$.

468 $y = \sqrt{e}$, $\quad y' = \frac{1}{2\sqrt{e}}$.

469 $y = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$, $\quad y' = \frac{1}{2\operatorname{sen} x\cos x}$.

470 $y = \operatorname{sen}(\ln x)$, $\quad y' = \cos\frac{1}{x}$.

471 $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$, $\quad y' = \frac{\cos x}{2x}$.

472 $y = \log_x x^2$, $\quad y' = \frac{2}{x}$.

473 $y = \operatorname{sen}^2(\ln x)$, $\quad y' = 2\operatorname{sen}(\ln x)$.

474 $y = \frac{2x^2+x}{x^2-6x}$, $\quad y' = \frac{4x+1}{2x-6}$.

COMPLETA

475 $y = 5e^{-x} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{\ldots 5}{e^x}.$

476 $y = \mathrm{tg}(1 + x^4) \quad \rightarrow \quad y' = \frac{\ldots}{\cos^{\cdots}(1 + x^4)}.$

477 $y = \cos^4 x \quad \rightarrow \quad y' = \ldots\ldots\ldots \operatorname{sen} x.$

478 $y = \operatorname{arctg} \cos x \quad \rightarrow \quad y' = \frac{\ldots}{1 + \cos^2 x}.$

479 $y = \sqrt[3]{2x^2 - 1} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{4}{3} x \ldots.$

480 $y = \frac{4}{e^{\sqrt{x}}} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{-2}{\ldots e^{\sqrt{x}}}.$

481 $y = \ln|\ln x^2| \quad \rightarrow \quad y' = \frac{\ldots}{\ldots \ln x^2}.$

482 $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{\ldots}{\ldots \sqrt{1 - x^2}}.$

Calcola la derivata delle seguenti funzioni.

483 $y = e^{x^2}$ $\quad [y' = 2xe^{x^2}]$

484 $y = (e^x)^2$ $\quad [y' = 2e^{2x}]$

485 $y = e^{x^2 - 2}$ $\quad [y' = e^{x^2-2} \cdot 2x]$

486 $y = \ln \sqrt{\operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi}$ $\quad [y' = 0]$

487 $y = \frac{x^3}{1 - x^4}$ $\quad \left[y' = \frac{x^6 + 3x^2}{(1 - x^4)^2}\right]$

488 $y = \frac{3x^2 + 4x}{x^2 - 2x}$ $\quad \left[y' = \frac{-10}{(x - 2)^2}\right]$

489 $y = \sqrt{\frac{1 - x}{x + 3}}$ $\quad \left[y' = \frac{-2}{(x + 3)^2}\sqrt{\frac{x + 3}{1 - x}}\right]$

490 $y = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{2x}$ $\quad \left[y' = \frac{-1}{2x^2\sqrt{1 + x^2}}\right]$

491 $y = \mathrm{tg}^3 x$ $\quad [y' = 3\,\mathrm{tg}^2 x(1 + \mathrm{tg}^2 x)]$

492 $y = \mathrm{tg}\, x^3$ $\quad \left[y' = \frac{3x^2}{\cos^2 x^3}\right]$

493 $y = e^{e^{x+1}}$ $\quad [y' = e^{e^{x+1} + x + 1}]$

494 $y = x - \frac{1}{2}\ln \cos x^2$ $\quad [y' = 1 + x\,\mathrm{tg}\, x^2]$

495 $y = \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x}$ $\quad [y' = 3x^2 - 3]$

496 $y = 2xe^{-x} + 1$ $\quad [y' = 2e^{-x}(1 - x)]$

497 $y = x\sqrt{4 - x^2}$ $\quad \left[y' = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\right]$

498 $y = \ln \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ $\quad \left[y' = \frac{1}{\sqrt{x}(1 - x)}\right]$

499 $y = (x - 1)e^{3 - x}$ $\quad [y' = e^{3 - x}(2 - x)]$

500 $y = \ln^2 x - 4\ln x + 3$ $\quad \left[y' = \frac{2}{x}(\ln x - 2)\right]$

501 $y = \frac{3x^4 - 2x^2 + 4}{x^3}$ $\quad \left[y' = \frac{3x^4 + 2x^2 - 12}{x^4}\right]$

502 $y = \frac{xe^x + x^2 - 3}{x}$ $\quad \left[y' = \frac{x^2 + x^2e^x + 3}{x^2}\right]$

503 $y = \frac{(3x - 2)^2}{(x - 1)^3}$ $\quad \left[y' = \frac{3x(2 - 3x)}{(x - 1)^4}\right]$

504 $y = \frac{8x + 2}{\sqrt[4]{4x + 1}}$ $\quad \left[y' = \frac{6}{\sqrt[4]{4x + 1}}\right]$

505 $y = 7 - 2\log_x 2$ $\quad \left[y' = \frac{2\ln 2}{x\ln^2 x}\right]$

506 $y = 1 - \frac{1}{4}\left(\log_x 4 + \frac{1}{\log_4 x}\right)$ $\quad \left[y' = \frac{\ln 2}{x\ln^2 x}\right]$

507 $y = \ln(3x - 1)^2 - \frac{4}{3x - 1}$ $\quad \left[y' = \frac{6(3x + 1)}{(3x - 1)^2}\right]$

508 $y = 2x^4 \ln x$ $\quad [y' = 2x^3(4\ln x + 1)]$

509 $y = \frac{1}{(1 - 2x)^3}$ $\quad \left[y' = \frac{6}{(1 - 2x)^4}\right]$

510 $y = x^2e^{x^2} + 2$ $\quad [y' = 2xe^{x^2}(1 + x^2)]$

511 $y = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1 + x^2}$ $\quad \left[y' = \frac{2}{(1 + x^2)^2}\right]$

512 $y = \ln\ln x + \frac{1}{\ln x}$ $\quad \left[y' = \frac{\ln x - 1}{x\ln^2 x}\right]$

513 $y = \frac{2e^x}{e^x - 2}$ $\quad \left[y' = \frac{-4e^x}{(e^x - 2)^2}\right]$

514 $y = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2e^x}$ $\quad \left[y' = -\frac{\operatorname{sen} x}{e^x}\right]$

515 $y = x^3(4 - x^2)^2$ $\quad [y' = -x^2(4 - x^2)(7x^2 - 12)]$

516 $y = \frac{\ln(x + 2)}{x}$ $\quad \left[y' = \frac{x - (x + 2)\ln(x + 2)}{x^2(x + 2)}\right]$

517 $y = \ln x^2 + \dfrac{x-1}{x}$ $\left[y' = \dfrac{2x+1}{x^2}\right]$

518 $y = 3 + \ln \operatorname{tg}\left(\pi - \dfrac{x}{2}\right)$ $\left[y' = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right]$

519 $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ $\left[y' = \dfrac{3x-2}{3\sqrt[3]{x(x-1)^2}}\right]$

520 $y = \dfrac{(x-1)^2}{x} - \ln x^3$ $\left[y' = \dfrac{x^2-3x-1}{x^2}\right]$

521 $y = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} + \dfrac{4}{x-1}$ $\left[y' = \dfrac{2(3-2x)}{(x-1)^3}\right]$

522 $y = 2\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x$ $[y' = -2(2\operatorname{sen}^2 x - 1)]$

523 $y = \dfrac{6x - x^2}{(3-x)^2} + \dfrac{1}{x-3}$ $\left[y' = \dfrac{x+15}{(3-x)^3}\right]$

524 $y = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(1+x)^2}$ $\left[y' = \dfrac{4(3x-1)}{(1+x)^3}\right]$

525 $y = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\operatorname{sen} x$ $\left[y' = 2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

526 $y = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - x\operatorname{arctg} x$ $[y' = -\operatorname{arctg} x]$

527 $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x$ $[y' = -\cos^3 x]$

528 $y = \dfrac{(x^2-4)^3}{x^2-1}$ $\left[y' = \dfrac{2x \cdot (x^2-4)^2 \cdot (2x^2+1)}{(x^2-1)^2}\right]$

529 $y = \dfrac{-\operatorname{sen} x - 1}{2\operatorname{sen} x - 1}$ $\left[y' = \dfrac{3\cos x}{(2\operatorname{sen} x - 1)^2}\right]$

530 $y = \operatorname{tg} x \cdot \ln\cos x + \operatorname{tg} x - x$ $\left[y' = \dfrac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\right]$

531 $y = -\dfrac{1}{4}\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$ $\left[y' = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 4x}\right]$

532 $y = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left[y' = \dfrac{2x^3-3x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\right]$

533 $y = \dfrac{3}{x} \cdot \sqrt[3]{(1-x)^2}$ $\left[y' = \dfrac{3-x}{x^2\sqrt[3]{x-1}}\right]$

534 $y = 4\arcsin\dfrac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2}$ $\left[y' = 2\sqrt{4-x^2}\right]$

535 $y = \ln^2 \operatorname{tg}^2 x^2$ $\left[y' = \dfrac{16x\ln\operatorname{tg}^2 x^2}{\operatorname{sen} 2x^2}\right]$

536 $y = \sqrt{1-x^2} - x\arccos x$ $[y' = -\arccos x]$

---

537 $y = \dfrac{4(x-1)}{x} + \ln(x^2-4x)^4$ $\left[y' = \dfrac{4(2x^2-3x-4)}{x^2(x-4)}\right]$

538 $y = x^3 \operatorname{sen} x - \dfrac{1}{4}x^4$ $[y' = x^2(3\operatorname{sen} x + x\cos x - x)]$

539 $y = (x^2-1)(2x-1) - (x^4-1)(x+4)$ $[y' = -5x^4 - 16x^3 + 6x^2 - 2x - 1]$

540 $y = \sqrt[5]{x^3} - 2\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[12]{x}} + 4\sqrt[3]{x^2}$ $\left[y' = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} + \dfrac{4}{3\sqrt[3]{x}}\right]$

541 $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ $\left[y' = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2(x-1)}\right]$

542 $y = (3x^2-2)^2(2x+1)$ $[y' = 2(3x^2-2)(15x^2+6x-2)]$

543 $y = \dfrac{x^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2}{x}$ $\left[y' = \dfrac{x^2 \cdot \operatorname{sen} x + x^3 \cdot \cos x - 2}{x^2}\right]$

544 $y = (x^3-1)^2 \cdot (x+2)$ $[y' = (x^3-1) \cdot (7x^3+12x^2-1)]$

545 $y = x^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$ $[y' = x \cdot (\operatorname{sen} 2x + x \cdot \cos 2x)]$

546 $y = \dfrac{1}{\cos x} + \operatorname{sen} x(1 - \operatorname{tg} x)$ $[y' = \cos x - \operatorname{sen} x]$

547 $y = (\operatorname{sen}\sqrt{x} + 2)^2$ $\left[y' = \dfrac{\cos\sqrt{x}(\operatorname{sen}\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x}}\right]$

548 $y=\sqrt{1-x^4}-\operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^4}$ $\left[y'=\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right]$

549 $y = 2 + (2x)^{2x}$ $[y' = 2(2x)^{2x}(1 + \ln 2x)]$

550 $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{x} - \ln\dfrac{x^2+4}{x^2}$ $\left[y' = \dfrac{2(4-x)}{x(x^2+4)}\right]$

551 $y = \sqrt{4-x^2} + 2\operatorname{arcsen}\dfrac{x}{2}$ $\left[y' = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2+x}\right]$

552 $y = \ln x^{\operatorname{sen} x}$ $\left[y' = \cos x \ln x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right]$

553 $y = 2^{2x+3} - 8\cdot 4^x$ $[y' = 0]$

554 $y = e^{3x+1}(3x-2)^2$ $[y' = 9xe^{3x+1}(3x-2)]$

555 $y = (2^x)^{x^2}$ $[y' = 3\cdot 2^{x^3}x^2\ln 2]$

556 $y = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$ $[y' = -\operatorname{sen} x]$

557 $y = \sqrt{\operatorname{tg} 3x^2}$ $\left[y' = \dfrac{3x}{\cos^2 3x^2\cdot\sqrt{\operatorname{tg} 3x^2}}\right]$

558 $y = \dfrac{\ln(x+1)^2}{2e^x}$ $\left[y' = \dfrac{1-(x+1)\ln(x+1)}{e^x(x+1)}\right]$

559 $y = x^{\ln x}$ $\left[y' = x^{\ln x}\cdot\dfrac{2\ln x}{x}\right]$

560 $y = \dfrac{x^3-2x^2+1}{(x-1)^2} + 2\ln(x-1)$ $\left[y' = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}\right]$

561 $y = (\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x)^2$ $[y' = -4\operatorname{sen} x\cos^3 x]$

562 $y = e^{\cos\frac{1}{x}}$ $\left[y' = \dfrac{1}{x^2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\cdot e^{\cos\frac{1}{x}}\right]$

563 $y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$ $\left[y' = -\left(\dfrac{1}{x}\right)^x(\ln x + 1)\right]$

564 $y = \ln\dfrac{1-e^x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x-1}$ $\left[y' = \dfrac{-1}{(e^x-1)^2}\right]$

565 $y = x^{\operatorname{arctg} x}$ $\left[y' = x^{\operatorname{arctg} x}\cdot\left(\dfrac{\ln x}{1+x^2} + \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)\right]$

566 $y = 4\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $\left[y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

567 $y = (\ln x)^{\ln x}$ $\left[y' = \dfrac{1}{x}(\ln x)^{\ln x}\cdot(\ln\ln x + 1)\right]$

568 $y = \dfrac{x^{\ln x}}{e^x}$ $\left[y' = \dfrac{x^{\ln x}}{e^x}\cdot\left(2\dfrac{\ln x}{x} - 1\right)\right]$

569 $y = 2\operatorname{arctg} x - \operatorname{arcsen}\dfrac{2x}{1+x^2}$ $[y' = 0]$

570 $y = \operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+2}$ $[y' = 0]$

571 $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ $\left[y' = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right]$

572 $y = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}}$ $\left[y' = -\dfrac{\cos x}{|\cos x|(1+\operatorname{sen} x)}\right]$

573 $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-2x^2}{x^3-2x}$ $\left[y' = \dfrac{2x^4+x^2+2}{x^6+1}\right]$

574 $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^3-x}{1+x^4} + \operatorname{arctg} x$ $\left[y' = \dfrac{3x^2}{x^6+1}\right]$

575 $y = \dfrac{x\ln x - x + 1}{1 - x\ln x}$ $\left[y' = \dfrac{2\ln x - x + 1}{(1-x\ln x)^2}\right]$

576 $y = \ln\dfrac{2-x^2}{2+x^2} + \ln(12-3x^4)$ $\left[y' = \dfrac{4x}{x^2-2}\right]$

577 $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x + \operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{3}$ $[y' = \operatorname{tg}^3 x]$

578 $y = \operatorname{arcsen}\dfrac{x-1}{x+1} - 2\arccos\dfrac{x-1}{x+1}$ $\left[y' = \dfrac{3}{(x+1)\sqrt{x}}\right]$

579 $y = \ln(x^2-6x+10) + \operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{x+3}$ $\left[y' = \dfrac{2x^3-3x^2-24}{(x^2-6x+10)(x^2+9)}\right]$

580 $y = \dfrac{3\operatorname{sen} 2x}{2\cos x(1+\operatorname{sen}^2 x)}$ $\left[y' = \dfrac{3\cos^3 x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)^2}\right]$

581 $y = \dfrac{x e^{4x^2}}{x-1}$ $\left[y' = \dfrac{e^{4x^2}(8x^3-8x^2-1)}{(x-1)^2}\right]$

582 $y = x\cos\left(\ln x - \dfrac{3}{4}\pi\right)$ $[y' = \sqrt{2}\operatorname{sen}\ln x]$

583 $y = \ln\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}$ $\left[y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

584 $y = \ln\operatorname{tg}\sqrt{e^{5x}}$ $\left[y' = \dfrac{5\sqrt{e^{5x}}}{\operatorname{sen} 2\sqrt{e^{5x}}}\right]$

585 $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}$ $\left[y' = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

586 $y = \sqrt[3]{(\operatorname{arcsen} 3x)^2}$ $\left[y' = \dfrac{2}{\sqrt[3]{\operatorname{arcsen} 3x}\cdot\sqrt{1-9x^2}}\right]$

587 $y = \operatorname{sen} x\cdot e^{\cos x}$ $[y' = e^{\cos x}\cdot(\cos^2 x + \cos x - 1)]$

588 $y = \sqrt{\operatorname{arctg}\sqrt{3x}}$ $\left[y' = \dfrac{3}{4(1+3x)\sqrt{3x\operatorname{arctg}\sqrt{3x}}}\right]$

589 $y = \text{arctg}\,[\ln(x^2 - 1)]$ $\left[y' = \dfrac{2x}{(x^2-1)[1+\ln^2(x^2-1)]}\right]$

590 $y = \dfrac{9}{4}x(\text{sen}\ln 2x - \cos\ln 2x)$ $\left[y' = \dfrac{9}{2}\text{sen}\ln 2x\right]$

591 $y = \ln^2[x \cdot (x^2+3)]$ $\left[y' = \dfrac{6(x^2+1)}{x(x^2+3)}\ln x(x^2+3)\right]$

592 $y = (\text{sen}\,x)^{\cos x}$ $[y' = (\text{sen}\,x)^{\cos x} \cdot (\text{cotg}\,x\cos x - \text{sen}\,x\ln\text{sen}\,x)]$

593 $y = (\text{sen}\,x)^x$ $[y' = (\text{sen}\,x)^x \cdot (\ln\text{sen}\,x + x\,\text{cotg}\,x)]$

594 $y = \ln\dfrac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x} + 2\,\text{arctg}\sqrt{x}$ $\left[y' = \dfrac{2}{\sqrt{x}(1-x^2)}\right]$

595 $y = 4x\sqrt{4+x^2} - 8\ln(x+\sqrt{4+x^2}) + \ln 4$ $\left[y' = \dfrac{8(x^2+1)}{\sqrt{4+x^2}}\right]$

596 $y = \ln(9-x) - \ln\dfrac{3-\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$ $\left[y' = \dfrac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(9-x)}\right]$

597 $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} + \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ $\left[y' = \dfrac{-2\sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)^2}\right]$

598 $y = (\ln x)^{\text{sen}\,x}$ $\left[y' = (\ln x)^{\text{sen}\,x}\left[\cos x\ln\ln x + \dfrac{\text{sen}\,x}{x\ln x}\right]\right]$

599 **TEST** Sia $h(x)$ una funzione derivabile. Qual è la derivata di $\log(h^2(x)+1)$?

A $\dfrac{-4h(x)h'(x)}{(h^2(x)+1)^3}$ **B** $\dfrac{-2h(x)h'(x)}{(h^2(x)+1)}$ **C** $\dfrac{2h(x)h'(x)}{(h^2(x)+1)}$ **D** $\dfrac{-2h(x)h'(x)}{(h^2(x)+1)^2}$

[Nota: con log è indicato il logaritmo naturale.]

(*Università di Trento, Test di Analisi,* 2004)

600 Calcola, applicando la definizione, la derivata di $y = \text{sen}^3 x$ e conferma il risultato con le regole di derivazione.

601 Utilizzando la definizione, calcola la derivata di $y = 2xe^{x-1}$ nel punto $x = 2$ e conferma il risultato con le regole di derivazione.

La derivata di una funzione definita per casi o contenente valori assoluti

Deriva le seguenti funzioni.

602 $f(x) = |\ln\sqrt{x}|$ $\left[f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{2x} & \text{se } x > 1 \end{cases}\right]$

603 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-x^2} & \text{se } -1 \le x < 0 \\ \sqrt{4x-x^2} & \text{se } 0 \le x \le 4 \end{cases}$ $\left[f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1-2x}{2\sqrt{-x-x^2}} & \text{se } -1 < x < 0 \\ \dfrac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}} & \text{se } 0 < x < 4 \end{cases}\right]$

604 $y = |x^2 - 6x|$ $\left[y' = \begin{cases} 2x-6 & \text{se } x < 0 \vee x > 6 \\ -2x+6 & \text{se } 0 < x < 6 \end{cases}\right]$

605 $y = xe^{|x|}$ $\left[y' = \begin{cases} e^x(1+x) & \text{se } x \ge 0 \\ e^{-x}(1-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}\right]$

606 $y = \dfrac{x|x| - 1}{(x+2)^2}$ $\left[y' = \begin{cases} \dfrac{2(2x+1)}{(x+2)^3} & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{2(1-2x)}{(x+2)^3} & \text{se } x < 0, x \neq -2 \end{cases} \right]$

607 $y = \ln(|x-1| - 1)$ $\left[y' = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{se } x > 2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases} \right]$

608 $f(x) = \begin{cases} \ln(-x+1) & \text{se } x < 0 \\ \operatorname{arcsen} 4x & \text{se } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{4} \end{cases}$ $\left[f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}} & \text{se } 0 < x < \dfrac{1}{4} \end{cases} \right]$

Calcola la derivata delle seguenti funzioni nel punto x_0 indicato.

609 $y = \left| \dfrac{1}{x-3} \right|$, $x_0 = 0$. $\left[y'(0) = \dfrac{1}{9} \right]$

610 $y = \dfrac{|x| - 1}{x^2 + 1}$, $x_0 = -1$. $\left[y'(-1) = -\dfrac{1}{2} \right]$

611 Siano f e g funzioni derivabili con alcuni valori delle funzioni e delle loro derivate dati nella tabella a fianco. Qual è la derivata di $f(g(x))$ in $x = 2$?

(USA *Texas A&M University Math Contest*, 2003)

[16]

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	4	3	1
$f'(x)$	4	3	2	1
$g(x)$	3	1	4	2
$g'(x)$	2	4	1	3

612 TEST Data la funzione $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sin x}$, si ha:

A $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}$.
B $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{\pi}$.
C $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
D non esiste $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(*Università di Modena, Corso di laurea in Matematica, Test propedeutico,* 2002)

613 TEST Sia $f(x) = (1+x^2)^2(x + \sin(\pi x))$. Allora $f'(1) =$

A $\dfrac{3+2\pi}{\sqrt{2}}$.
B $\dfrac{3-2\pi}{\sqrt{2}}$.
C $12 - 4\pi$.
D $-\dfrac{\pi}{2}$.

(*Università di Torino, Test di Analisi,* 2004)

614 a) Verifica, applicando la definizione di derivata, che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\ln x - 2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ x^2 - 3x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

è derivabile in $x = 1$.

b) Disegna il grafico di $f(x)$.

c) Trova eventuali punti che hanno la tangente parallela all'asse x e scrivi le equazioni di tali tangenti.

$\left[\text{c) } P\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{9}{4}\right); y = -\dfrac{9}{4} \right]$

615 Given that $x = e^{\vartheta} \cos\vartheta$ and $y = e^{\vartheta} \sin\vartheta$, where $-\dfrac{3\pi}{4} < \vartheta < \dfrac{\pi}{4}$, show that:

a) $\left(\dfrac{dx}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\vartheta}\right)^2 = 2e^{2\vartheta}$;

b) $\dfrac{dy}{dx} = \tan\left(\vartheta + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

(IR *Leaving Certificate Examination,* Higher Level, 1994)

La derivata di una funzione con più variabili

616 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la funzione $y = x + \text{sen}\,\omega t$, deriviamola rispetto a ognuna delle variabili, considerando le altre come costanti.

- Deriviamo rispetto a x. Poiché consideriamo costanti ω e t, anche sen ωt è costante, quindi:

  $$D\,\text{sen}\,\omega t = 0.$$

  Pertanto:

  $$y'_x = 1.$$

- Deriviamo rispetto a ω (x e t costanti):

  $$y'_\omega = t\cos\omega t.$$

- Deriviamo rispetto a t (x e ω costanti):

  $$y'_t = \omega\cos\omega t.$$

Date le seguenti funzioni, derivale rispetto a ognuna delle variabili (o alle variabili indicate), considerando le altre come costanti.

617 $y = 4ax^2 + x^4$ $\quad [y'_x = 8ax + 4x^3;\ y'_a = 4x^2]$

618 $y = 5x^2 + ax + b$ $\quad [y'_x = 10x + a;\ y'_a = x;\ y'_b = 1]$

619 $y = 5\,\text{sen}\,\omega t + \cos t$ $\quad [y'_t = 5\omega\cos\omega t - \text{sen}\,t;\ y'_\omega = 5t\cos\omega t]$

620 $y = \frac{1}{2}at^2 + vt$ $\quad \left[y'_t = at + v;\ y'_v = t;\ y'_a = \frac{1}{2}t^2\right]$

621 $F = k\frac{Mm}{r^2}$ (rispetto a m e a r) $\quad \left[F'_m = \frac{kM}{r^2};\ F'_r = -\frac{2kMm}{r^3}\right]$

622 $y = 2\sqrt{x^2 - 1}\cdot a$ $\quad \left[y'_x = \frac{2ax}{\sqrt{x^2 - 1}};\ y'_a = 2\sqrt{x^2 - 1}\right]$

623 $y = a\,\text{sen}(\omega t + b)$ (rispetto a t e a ω) $\quad [y'_t = a\omega\cos(\omega t + b);\ y'_\omega = at\cos(\omega t + b)]$

624 $y = e^{-t}\cos\omega t$ $\quad [y'_t = -e^{-t}(\cos\omega t + \omega\,\text{sen}\,\omega t);\ y'_\omega = -t\,e^{-t}\,\text{sen}\,\omega t]$

625 $s = t\,\text{sen}^2\,at$ $\quad [s'_t = \text{sen}^2\,at + at\,\text{sen}\,2at;\ s'_a = t^2\,\text{sen}\,2at]$

626 $y = x^2 t + 5\cos t$ $\quad [y'_x = 2xt;\ y'_t = x^2 - 5\,\text{sen}\,t]$

627 $y = x\cos\omega t + \omega^2 t$ (rispetto a ω e a t) $\quad [y'_\omega = -xt\,\text{sen}\,\omega t + t^2;\ y'_t = -x\omega\,\text{sen}\,\omega t + 2\omega t]$

628 $y = x^2t^2 + 2\,\text{sen}\,t$ (rispetto a x e a t) $\quad [y'_x = 2xt^2;\ y'_t = 2x^2t + 2\cos t]$

629 $y = x\,\text{sen}\,\omega t + \omega^2 t$ (rispetto a ω e a t) $\quad [y'_\omega = xt\cos\omega t + 2\omega t;\ y'_t = x\omega\cos\omega t + \omega^2]$

630 TEST Data $x^2 + 3xy + y^2 = 5$, ricava $\frac{dy}{dx}$ nel punto $(1; -4)$.

A -2. B 1. C 0. D 3. E $(1; -4)$ non è un punto del grafico.

(USA *Southwest Virginia Community College Math Contest*, 2006)

APPLICAZIONI DELLE DERIVATE ALLA GEOMETRIA ANALITICA

La retta tangente al grafico di una funzione

631 ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = f(x) = x^4 - x^2 + 1$ nel suo punto di ascissa $x_0 = -1$.

Ricordiamo che la retta passante per il punto $P(x_0; y_0)$ ha equazione $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.

Quindi, per poter scrivere questa equazione, dobbiamo conoscere le coordinate del punto per il quale passa la retta tangente richiesta e il valore del suo coefficiente angolare m, che sappiamo essere uguale a $f'(x_0)$:

$$\text{per } x_0 = -1, \quad y_0 = f(x_0) = 1 \quad \rightarrow \quad P(-1; 1)$$

$$f'(x) = 4x^3 - 2x, \quad m = f'(x_0) = -2.$$

La retta tangente ha equazione $y - 1 = -2 \cdot (x + 1)$, cioè $2x + y + 1 = 0$.

Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico delle seguenti funzioni nei punti di ascissa x_0 segnati a fianco.

632 $y = 5x^2 - 4x + 1,\ x_0 = 1;$ $\quad y = x^3 + 2x^2,\ x_0 = 1.$ $\quad [6x - y - 4 = 0; 7x - y - 4 = 0]$

633 $y = x^3 + 2x + 3,\ x_0 = -1;$ $\quad y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1,\ x_0 = 2.$ $\quad [5x - y + 5 = 0; 6x - y - 9 = 0]$

634 $y = -\frac{3}{x},\ x_0 = \frac{3}{2};$ $\quad y = \frac{x^2 - 4}{x},\ x_0 = 2.$ $\quad [4x - 3y - 12 = 0; 2x - y - 4 = 0]$

635 $y = \operatorname{sen} x + \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{2};$ $\quad y = 5x + 2 \operatorname{sen} x,\ x_0 = \pi.$ $\quad [2x + 2y - 2 - \pi = 0; 3x - y + 2\pi = 0]$

636 $y = 3 - 2 \operatorname{tg} x,\ x_0 = \frac{\pi}{4};$ $\quad y = x^2 \cdot \ln x,\ x_0 = 1.$ $\quad [4x + y - (\pi + 1) = 0; x - y - 1 = 0]$

637 $y = \ln(2 - e^x),\ x_0 = 0;$ $\quad y = 3 \operatorname{sen} 5x,\ x_0 = \pi.$ $\quad [x + y = 0; 15x + y - 15\pi = 0]$

638 $y = x + \ln x,\ x_0 = 1;$ $\quad y = 3x + e^x,\ x_0 = 0.$ $\quad [2x - y - 1 = 0; 4x - y + 1 = 0]$

639 $y = x + \sqrt{x},\ x_0 = 4;$ $\quad y = \operatorname{sen} \pi e^x,\ x_0 = 0.$ $\quad [5x - 4y + 4 = 0; \pi x + y = 0]$

640 $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3},\ x_0 = 2;$ $\quad y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1},\ x_0 = 0.$ $\quad [x + y - 2 = 0; x + y + 1 = 0]$

641 $y = \operatorname{arctg}(x - 1),\ x_0 = 0;$ $\quad y = e^{2x} - 1,\ x_0 = 0.$ $\quad [2x - 4y - \pi = 0; 2x - y = 0]$

642 $y = \sqrt{5x^2 - 1},\ x_0 = 1;$ $\quad y = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2},\ x_0 = 1.$ $\quad [5x - 2y - 1 = 0; x + 2\sqrt{3}y - 4 = 0]$

Determina le tangenti, eventualmente destra e sinistra, al grafico delle seguenti curve nei punti di ascissa x_0 segnati a fianco.

643 $y = e^{|x|} - 1, \; x_0 = 0.$ $[y = \pm x]$

644 $y = |\ln x|, \; x_0 = 1.$ $[y = \pm(x-1)]$

645 $y = x^2 - |x|, \; x_0 = 0.$ $[y = \pm x]$

646 $y = -x^2 + 2|x-4|, \; x_0 = 2.$ $[y = -6x + 12]$

647 $y^2 - x + 1 = 0, \; x_0 = 2.$ $\left[y = \pm \frac{1}{2}x\right]$

648 $x^2 + y^2 - 2x = 0, \; x_0 = \frac{1}{2}.$ $\left[y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)\right]$

649 Determina l'equazione della retta tangente alla curva $y = e^{\frac{x}{x-1}}$ nel suo punto di intersezione con l'asse y. $[y = -x + 1]$

650 Data la curva di equazione $y = \sqrt{x-1} - 1$, trova le coordinate del suo punto Q di intersezione con l'asse x e determina l'equazione della retta tangente a essa nel punto Q. $\left[Q(2; 0); \; y = \frac{1}{2}x - 1\right]$

651 Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla curva $y = -e^{-x} - 4e^x$, nei suoi punti di ordinata -5. $[y = -3x - 5; \; y = 3x - 5 + 6\ln 2]$

652 ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo le coordinate dei punti nei quali la retta tangente al grafico della funzione

$$y = f(x) = x^3 + 2x + 3$$

ha il coefficiente angolare $m = 5$.

Il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto di ascissa x_0 è uguale al valore che la derivata prima della funzione assume per $x = x_0$, cioè $m = f'(x_0)$, per cui calcoliamo $f'(x)$ e poi la poniamo uguale al valore di m dato:

$$f'(x) = 3x^2 + 2; \quad 3x^2 + 2 = 5 \;\rightarrow\; 3x^2 = 3 \;\rightarrow\; x^2 = 1 \;\rightarrow\; x = \pm 1.$$

Calcoliamo ora le ordinate dei punti di cui abbiamo trovato l'ascissa:

per $x = +1$, si ha $y = 6$, $P_1(1; 6)$;

per $x = -1$, si ha $y = 0$, $P_2(-1; 0)$.

Determina le coordinate dei punti nei quali le rette tangenti ai grafici delle seguenti funzioni hanno il coefficiente angolare indicato a fianco.

653 $y = \frac{x^2 - 1}{x}$, $m = 2.$ $[P_1(-1; 0); P_2(1; 0)]$

654 $y = 2 \operatorname{sen} x$, $m = -1.$ $\left[P_1\left(\frac{2}{3}\pi; \sqrt{3}\right); P_2\left(\frac{4}{3}\pi; -\sqrt{3}\right)\right]$

655 $y = \ln(x^2 + 1)$, $m = 1.$ $[P(1; \ln 2)]$

656 $y = \sqrt{1 - x^2}$, $m = 2.$ $\left[P\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right]$

Utilizzando le derivate, individua il punto di tangenza tra la curva e la retta indicata a fianco.

657 $y = 4x^2 - 2x + 1, \; y = 2x.$ $\left[P\left(\frac{1}{2}; 1\right)\right]$

658 $y = x^3 + 3x + 1, \; y = 6x + 3.$ $[P(-1; -3)]$

659 $y = \frac{4}{x^2}$, $y = x + 3.$ $[P(-2; 1)]$

660 $y = 2\sqrt{x+2}$, $y = x + 3.$ $[P(-1; 2)]$

661 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione di equazione $y = 2x^3 - 2x$ e passante per il punto $A(0; -4)$.

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$y' = 6x^2 - 2.$$

Un punto generico della curva ha coordinate $P(c; 2c^3 - 2c)$ e il coefficiente angolare della retta tangente in P è

$$m = y'(c) = 6c^2 - 2,$$

perciò l'equazione della retta tangente alla curva nel punto P è:

$$y - (2c^3 - 2c) = (6c^2 - 2)(x - c).$$

Imponiamo il passaggio della retta per $A(0; -4)$:

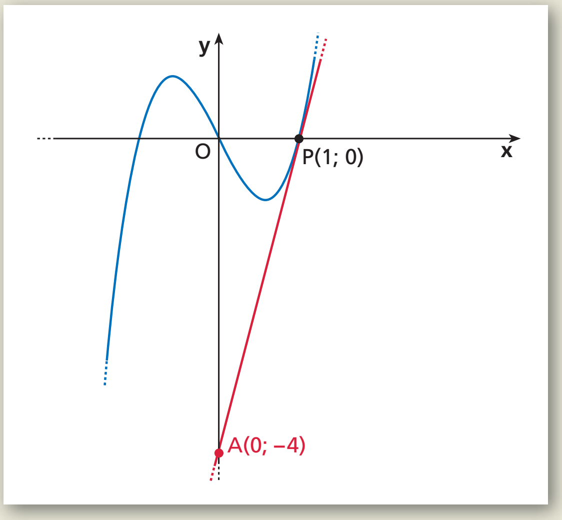
$$-4 - (2c^3 - 2c) = (6c^2 - 2)(-c) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; -4 - 2c^3 + 2c = -6c^3 + 2c \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 4c^3 - 4 = 0 \;\rightarrow\; c^3 = 1 \;\rightarrow\; c = 1.$$

Sostituiamo nell'equazione della retta e otteniamo:

$$y = 4(x - 1).$$



Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico delle seguenti funzioni condotte dal punto indicato a fianco.

662 $y = x^2 + x - 2$, $(0; -6)$. $[y = 5x - 6;\ y = -3x - 6]$

663 $y = e^{x-1}$, $(1; 0)$. $[y = ex - e]$

664 $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, $(-1; -1)$. $\left[y = \dfrac{1}{2}(x - 1)\right]$

665 $y = \dfrac{2x^2 + 1}{x}$, $(-1; 1)$. $[y = x + 2;\ y = -7x - 6]$

666 $y = x^3 - 3$, $(-1; -8)$. $[y = 3x - 5]$

667 What is the equation of the tangent line to the graph of the function

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

at the point $\left(4; \dfrac{1}{2}\right)$?

(USA *Southern Illinois University Carbondale*, Final Exam, 2003)

$\left[y = -\dfrac{1}{16}x + \dfrac{3}{4}\right]$

L'angolo formato da due curve

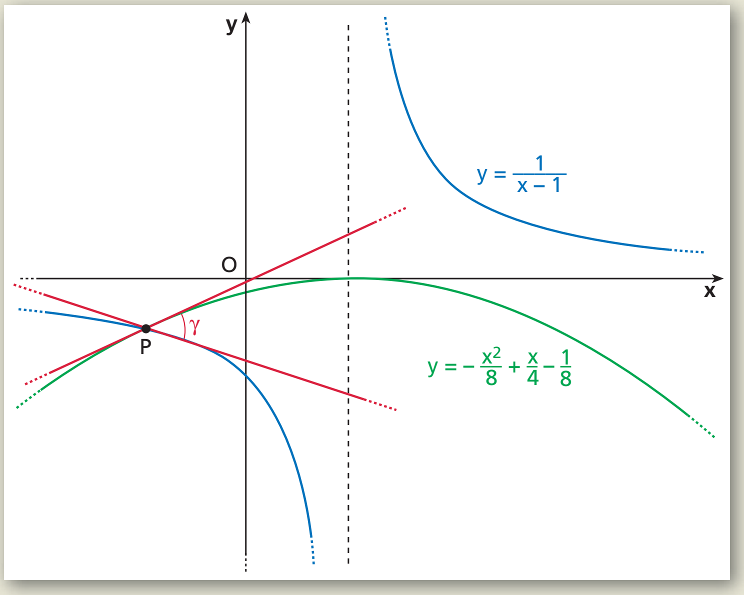
668 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'angolo formato dalle due curve di equazioni $y = \frac{1}{x-1}$ **e** $y = -\frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} - \frac{1}{8}$.

L'angolo formato da due curve è l'angolo formato dalle rette tangenti alle due curve nel loro punto di intersezione.

Se sono noti i coefficienti angolari m_1 e m_2 delle due rette, si può calcolare la tangente dell'angolo acuto da esse formato con la formula:

$$\operatorname{tg}\gamma = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|.$$



Troviamo il punto P di intersezione delle due curve con il sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x-1} \\ y = -\frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x-1} \\ \frac{1}{x-1} = -\frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \end{cases}$$

Risolviamo la seconda equazione:

$$8 = -x^2(x-1) + 2x(x-1) - x + 1, \quad \text{con } x \neq 1,$$

$$8 = -x^3 + x^2 + 2x^2 - 2x - x + 1 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = 0.$$

Applicando la regola di Ruffini si ottiene l'unica soluzione $x = -1$ e sostituendo nella prima equazione si ottiene $y = -\frac{1}{2}$. Il punto di intersezione ha dunque coordinate $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

Calcoliamo ora le derivate delle due funzioni:

$$y' = -\frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{e} \quad y' = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}.$$

Determiniamo i coefficienti angolari delle due rette tangenti nel punto di ascissa $x = -1$:

$$m_1 = y'(-1) = -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad m_2 = \frac{1}{2}.$$

Calcoliamo infine:

$$\operatorname{tg}\gamma = \left|\frac{-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2}}\right| = \left|\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{7}{8}}\right| = \left|-\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{7}\right| = \frac{6}{7}.$$

Ricaviamo γ:

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{6}{7}.$$

669 Trova l'angolo formato dalle due curve di equazioni $y = \frac{x}{x+1}$ e $y = -2x^2 + \frac{5}{2}$. $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

670 Determina gli angoli formati dalle due parabole di equazioni $y = -x^2 + 4$ e $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ nei loro punti di intersezione. $\left[\operatorname{arctg} 3; \operatorname{arctg} \frac{3}{5}\right]$

671 Rappresenta graficamente le curve di equazioni $y = \ln(x-1)$ e $y = \ln(-3+2x)$ e trova l'angolo da esse formato. $\left[\operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right]$

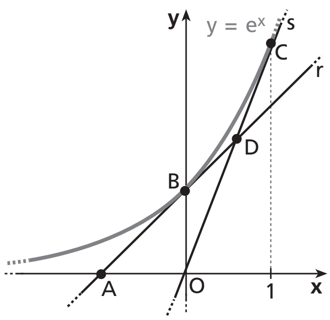
672 Determina l'angolo formato dalle due curve di equazioni $y = e^{x^2 - x}$ e $y = e^{1-x^2}$ nel loro punto di intersezione di ascissa maggiore. $[\operatorname{arctg} 3]$

673 Calcola l'angolo formato dalle due curve di equazioni $y = \sqrt{2x}$ e $y = x^2 - 2$ dopo averle rappresentate graficamente. $\left[\operatorname{arctg} \frac{7}{6}\right]$

674 Trova per quale valore di a e b le curve di equazioni $y = ax^2 + bx - \frac{4}{3}$ e $y = 2\ln x$ formano, incontrandosi nel punto di ascissa 1, un angolo di 45°. $\left[\left(a = -1, b = \frac{7}{3}\right) \vee \left(a = -\frac{13}{3}, b = \frac{17}{3}\right)\right]$

675 Determina i valori di a e b in modo che le curve di equazioni $y = ae^{1-x} + b$ e $y = -\frac{8}{3}x^2 + \frac{17}{3}x$, incontrandosi nel punto di ascissa 1, formino un angolo di 45°. $\left[(a = -2, b = 5) \vee \left(a = \frac{1}{2}, b = \frac{5}{2}\right)\right]$

TEST **Le prossime domande sono tutte riferite alla seguente figura, in cui sono rappresentate la funzione $y = e^x$ e due rette tangenti a essa nei suoi punti B e C.**



676 L'equazione della retta tangente al grafico nel punto B è:

A $y = x - 1$.
B $y = x + 1$.
C $y = -x + 1$.
D $y = -x - e$.
E $y = x + e$.

677 La lunghezza del segmento AB vale:

A 2.
B $2\sqrt{2}$.
C $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
D $\sqrt{2}$.
E 1.

678 La retta tangente al grafico in C ha equazione:

A $y = ex - e$.
B $y = ex + e$.
C $y = e^x$.
D $y = ex$.
E $y = x^e$.

679 Le coordinate del punto D, intersezione delle due tangenti r e s, sono:

A $\left(\frac{1}{e-1}; \frac{e}{e-1}\right)$.
B $\left(\frac{1}{1-e}; \frac{e}{1-e}\right)$.
C $(ex - 1; e^2x^2 - 1)$.
D $\left(\frac{e}{1-e}; \frac{1}{1-e}\right)$.
E $\left(\frac{e}{e-1}; \frac{1}{e-1}\right)$.

680 L'area del triangolo AOD vale:

A $e - 1$.
B $\frac{e}{e-1}$.
C $\frac{2e}{e-1}$.
D $2e - 2$.
E $\frac{e}{2e-2}$.

681 Scrivi l'equazione della retta che passa per l'origine ed è tangente alla curva di equazione $y = -\ln 2x$.
$\left[y = -\frac{2}{e}x\right]$

682 Una retta passante per l'origine è tangente a $y = x^3 + 3x + 1$ nel punto $(a; b)$. Quanto vale a?
(USA *Rice University Mathematics Tournament*, 2007)
$\left[\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right]$

683 Una corda della parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2$ congiunge i punti di ascissa $x = -1$ e $x = 3$. Trova l'equazione della retta tangente alla parabola parallela a questa corda.
$\left[y = -\frac{3}{2}(x - 1)\right]$

684 Date le due curve di equazioni $y = \frac{4x - 4}{x}$ e $y = \ln 4(x - 1)$, determina gli eventuali punti con la stessa ascissa in cui le tangenti sono parallele.
$[(2; 2); (2; \ln 4)]$

685 Determina i punti del grafico della funzione $y = \frac{3 - x}{(x + 1)^2}$ in cui la tangente è parallela all'asse x.
$\left[\left(7; -\frac{1}{16}\right)\right]$

686 Individua i punti in cui la tangente al grafico della funzione $y = \frac{x^3 - 8}{x^2}$ è parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.
$[(-2; -4)]$

687 Trova in quali punti della curva di equazione $y = x(x + 2)^2$ la retta tangente è perpendicolare alla retta di equazione $3y + 4x = 0$.
$\left[\left(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{8}\right); \left(-\frac{13}{6}; -\frac{13}{216}\right)\right]$

688 Scrivi l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{3}{2}x$ di coefficiente angolare $-\frac{1}{2}$.
$\left[y = -\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}\right]$

689 Scrivi l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = \frac{x - 1}{x - 4}$ nel suo punto di ascissa 3 e determina gli altri eventuali punti in cui la tangente è parallela alla precedente.
$[y = -3x + 7; (5; 4)]$

690 Determina l'angolo acuto formato dalle rette tangenti alla parabola di equazione $y = 2x^2 - x + 1$ nei suoi punti di ordinata 4.
$\left[\gamma = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}\right]$

691 Dimostra che $x = 0$ è un punto angoloso per la funzione $y = \left|\frac{x}{x + 2}\right|$ e determina l'angolo formato dalle due tangenti.
$\left[\gamma = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right]$

692 Calcola l'area del triangolo definito dall'asse x e dalle due tangenti alla curva $y = \ln\sqrt{2x^2 - 1}$ nei suoi punti di intersezione con l'asse x.
$[2]$

693 Date le due curve di equazioni

$$f(x) = x^2 + 4x + 5 \quad \text{e} \quad g(x) = (x + 1)^4 + 4,$$

individua i punti, se esistono, nei quali esse risultano tra loro tangenti.
$[P(0; 5)]$

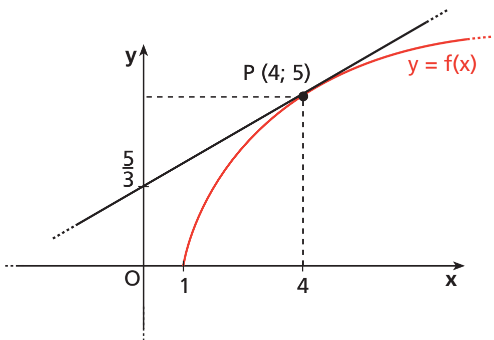
694 La tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto di ascissa $x = 0$ è la retta $y = -x + 2$. Scrivi l'equazione della tangente al grafico della funzione $f\left(\frac{x}{2}\right)$ nel punto di ascissa 0. $\left[y = -\frac{1}{2}x + 2\right]$

695 Verifica che due tra le tangenti condotte alla curva di equazione $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1$ dal punto $\left(0; \frac{5}{4}\right)$ sono perpendicolari tra loro.

696 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = (x+1)^4$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$. $[y = 32x - 16]$

697 Determina le coordinate dei punti del grafico della funzione $y = \frac{x+1}{2x}$ in cui la retta tangente ha coefficiente angolare $m = -\frac{1}{2}$. $[P_1(-1; 0); P_2(1; 1)]$

698



Utilizzando il grafico:
a) determina $f(4)$, $f'(4)$;
b) supponendo che $f(x)$ rappresenti un arco di parabola di vertice $V(1; 0)$, trova l'equazione di $f(x)$ e la tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa 2;
c) nel punto $P(1; 0)$ la funzione è derivabile?
$\left[\text{a) } 5, \frac{5}{6}; \text{ b) } y = 5\sqrt{\frac{x-1}{3}}, y = \frac{5\sqrt{3}}{6}x; \text{ c) no}\right]$

699 Date le funzioni $f(x) = -1 - 4x^2$ e $g(x) = \sqrt{x-2}$:
a) dimostra che $f(x)$ è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$ e $g(x)$ non è derivabile in $x = 2$;
b) trova $f \circ g$ e dimostra che la funzione è derivabile nel suo dominio;
c) disegna il grafico di $g(x)$ e determina il punto P di intersezione tra la tangente al grafico nel punto di ascissa 2 e la tangente di coefficiente angolare $\frac{1}{2}$. $\left[\text{b) } f(g(x)) = -4x + 7, \text{ con } x \geq 2; \text{ c) } P\left(2; \frac{1}{2}\right)\right]$

700 È data la funzione $f(x)$ nella variabile reale x definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{2x} & \text{se } x < 2, x \neq 0 \\ x \ln(x-1) & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Studia la continuità e la derivabilità di $f(x)$ in $x = 2$.
b) Studia la continuità e la derivabilità di $f(x)$ nel suo dominio.
c) Scrivi le equazioni delle tangenti nei punti $x = -1$ e $x = 2$.
[a) continua, non derivabile; b) continua per $x \neq 0$, derivabile per $x \neq 0 \wedge x \neq 2$;
c) $y = \frac{5}{2}x + 4$; $y = x - 2$; $y = 2(x-2)$]

701 a) Scrivi le equazioni delle rette r e s che risultano tangenti a entrambe le parabole di equazioni:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 \qquad \text{e} \qquad y = x^2 + 8x + 12.$$

b) Rappresenta graficamente le parabole e le rette trovate e determina i punti di tangenza.
c) Considera la retta t parallela all'asse x passante per il punto di intersezione di r e s e verifica che le corde intercettate da t sulle due parabole sono una doppia dell'altra.
[a) $y = 2x + 3$; $y = 6x + 11$; b) $A(-3; -3)$, $B(-1; 5)$, $C(0; 3)$, $D(-4; -13)$]

Problemi in cui la funzione dipende da parametri

702 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la funzione di equazione $y = f(x) = x^3 + 2kx + k - 1$, determiniamo il parametro k in modo che la tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$ formi un angolo di 135° con l'asse x.

Il coefficiente angolare m della retta tangente a una curva in un suo punto è uguale al valore che la derivata prima assume in quel punto, cioè $m = f'(x_0)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 2k \quad \to \quad m = f'(1) = 3 + 2k.$$

Ricordando che il coefficiente angolare m di una retta è uguale alla tangente dell'angolo che la retta forma con l'asse delle x, cioè $m = \operatorname{tg} \alpha$, possiamo scrivere, per la retta tangente nel punto $x_0 = 1$:

$$m = \operatorname{tg} 135° = -1.$$

Essendo $m = f'(1) = -1$, otteniamo:

$$3 + 2k = -1 \quad \to \quad 2k = -4 \quad \to \quad k = -2.$$

Per $k = -2$, la retta tangente alla curva nel punto $x_0 = 1$ forma un angolo di 135° con l'asse x.

703 Data la parabola $y = kx^2 - 2kx + 1$, determina il parametro k in modo che la tangente nel suo punto di ascissa $x = 2$ formi un angolo di $\frac{\pi}{4}$ radianti con l'asse x. $\left[k = \frac{1}{2}\right]$

704 Considera la parabola $y = x^2 - (k - 1)x + k$. Determina il valore di k in modo che la tangente nel suo punto di ascissa $x = -1$ sia parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante. $[k = -2]$

705 È data la curva di equazione $y = \frac{2 + k}{x^2}$. Calcola il valore di k in modo che la tangente al suo grafico nel punto di ascissa $x = 1$ sia parallela alla retta $x + 2y - 1 = 0$. $\left[k = -\frac{7}{4}\right]$

706 Data l'equazione della parabola $y = (2 + k)x^2 - 5kx + 7 - 3k$, individua il parametro k in modo che la retta a essa tangente nel punto $x = 1$ sia perpendicolare alla retta passante per i punti $A(4; -2)$ e $B(1; 4)$. $\left[k = \frac{7}{6}\right]$

707 Determina per quale valore del parametro k la normale (retta perpendicolare alla tangente nel punto di tangenza) al grafico della funzione $y = 4x^3 - kx^2 + 1$ nel suo punto di ascissa $x = -1$ forma un angolo di 150° con l'asse delle ascisse. $\left[k = \frac{\sqrt{3} - 12}{2}\right]$

708 Per quale valore del parametro k la tangente al grafico della funzione $y = \frac{kx}{x^2 - 1}$ nel suo punto di ascissa $x = -2$ è perpendicolare alla retta $2x - y = 1$? $\left[k = \frac{9}{10}\right]$

709 Data la funzione $y = kx^2 - (k - 1)x - k + 3$, scrivi l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa $x = 3$ e determina k in modo che la retta tangente passi per il punto $P(1; 2)$. $\left[k = \frac{2}{5}\right]$

710 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la funzione $y = ax^3 + bx$, individuiamo i parametri a e b in modo che il suo grafico abbia nel punto $P(1; 2)$ una tangente di coefficiente angolare $m = 1$.

La funzione dipende da due parametri, a e b, quindi abbiamo bisogno di due condizioni che ci permettano di impostare un sistema di due equazioni nelle due incognite a e b.

In questo caso le condizioni sono:

1. il passaggio per il punto $P(1; 2)$ che otteniamo sostituendo nell'equazione della curva le coordinate del punto stesso;

2. l'uguaglianza fra il valore dato per il coefficiente angolare della tangente nel punto P e il valore che assume la derivata prima nel punto stesso.

Calcoliamo: $f'(x) = 3ax^2 + b$.

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} 2 = a + b & \leftarrow \quad \text{dalla condizione } \mathbf{1} \\ 3a + b = 1 & \leftarrow \quad \text{dalla condizione } \mathbf{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

La funzione richiesta è $y = -\dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{5}{2}x$.

711 Determina i parametri a e b in modo che il grafico della funzione $y = \dfrac{ax + b}{x}$ abbia nel punto $P(1; 1)$ una retta tangente parallela a quella passante per i punti $A(0; 2)$ e $B(4; -1)$. $\left[a = \dfrac{1}{4}; b = \dfrac{3}{4}\right]$

712 Data la parabola di equazione $y = 2ax^2 - (3a - b)x - 4b$, determina a e b in modo che la retta a essa tangente nel suo punto di ascissa $x = 1$ sia parallela alla retta passante per i punti $A(3; 5)$ e $B(1; 1)$ e passi per il punto $P(-1; 2)$. $\left[a = \dfrac{6}{5}; b = \dfrac{4}{5}\right]$

713 Considera la funzione $y = ax^3 + 2x^2 - bx + 1$. Calcola il valore di a e di b in modo che il grafico della funzione sia tangente alla retta $2x - y + 5 = 0$ nel punto $A(2; 1)$. $\left[a = -\dfrac{1}{4}; b = 3\right]$

714 Determina i coefficienti a e b in modo che il grafico della funzione $y = a \operatorname{sen} x + b \cos x$ abbia nel punto $A\left(\dfrac{\pi}{4}; \sqrt{2}\right)$ tangente parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante. $\left[a = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}; b = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}\right]$

715 Calcola i coefficienti a, b, c della funzione $y = ax^3 + x^2 + bx + c$ in modo che il suo grafico passi per il punto $A(0; 2)$ e che nel punto $B(1; 3)$ abbia la tangente inclinata di 120° rispetto all'asse x.
$\left[a = -\dfrac{\sqrt{3} + 2}{2}; b = \dfrac{\sqrt{3} + 2}{2}; c = 2\right]$

716 Date le due funzioni $y = 2ax^3 - 2ax + 1$ e $y = x^2 - ax + 5$, individua per quale valore di a la retta tangente al grafico della prima nel suo punto di ascissa $x = 0$ e la retta tangente al grafico della seconda nel suo punto di ascissa $x = 2$ coincidono. $[a = -4]$

717 Determina i parametri a, b, c, d in modo che il grafico della funzione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ passi per l'origine degli assi cartesiani, in cui la tangente sia parallela alla retta $y = x + 5$ e passi per il punto $A(2; 0)$, nel quale la tangente sia perpendicolare alla retta $x + 2y = 1$. $\left[a = \dfrac{3}{4}; b = -2; c = 1; d = 0\right]$

718 Data la parabola $y = (a - 1)x^2 - x + b$:

a) determina a e b in modo che il grafico passi per $A(0; 3)$ e la tangente nel suo punto di ascissa $x = 1$ sia parallela all'asse x;

b) calcola in quale punto del grafico determinato la tangente è inclinata di 225° rispetto all'asse x.
$\left[\text{a) } y = \dfrac{1}{2}x^2 - x + 3; \text{ b) } P(2; 3)\right]$

719 Determina i coefficienti dell'equazione $y = \frac{ax^2 + bx + c}{4x + d}$, sapendo che il grafico corrispondente passa per il punto $\left(1; -\frac{1}{3}\right)$, nell'origine ha per tangente la retta $y = 2x$ e inoltre si ha $\lim_{x \to \frac{1}{4}} y = \infty$.

[$a = 1; b = -2; c = 0; d = -1$]

720 Trova i coefficienti della funzione $y = \frac{ax + b}{cx^2 + 1}$, sapendo che il suo grafico ha un punto con tangente orizzontale di ascissa -2 e nel punto $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ ha per tangente la retta $y = x + \frac{1}{2}$. $\left[a = 1; b = \frac{1}{2}; c = \frac{1}{2}\right]$

721 Trova i coefficienti a, b, c nell'equazione $y = a\cos^2 x + b \operatorname{sen} x + c$ in modo che il grafico relativo passi per i punti $(0; 1)$ e $\left(\frac{\pi}{2}; 2\right)$ e abbia nel primo punto per tangente la retta di equazione $y = 3x + 1$.

[$a = 2; b = 3; c = -1$]

Determina il valore di a affinché la retta r sia tangente alla curva di equazione $y = f(x)$.

722 $f(x) = \frac{1 - x}{x + 3}$, $\quad r\colon\ y = -4x + a$. [$a = -21, a = -5$]

723 $f(x) = \ln(x - 1) + a$, $\quad r\colon\ y - 2x = 0$. [$a = 3 + \ln 2$]

724 $f(x) = ax^2 + (a - 1)x$, $\quad r\colon\ x - y - 1 = 0$. [$a = 4 \pm 2\sqrt{3}$]

725 Trova i valori di a e b in modo che le due curve di equazioni

$$y = \frac{1}{x} + x^2 + 1 \qquad \text{e} \qquad y = a\ln(2x - 1) + b$$

siano tangenti nel punto $P(1; 3)$. (Suggerimento. Due curve sono tangenti in un punto se in esso hanno la stessa retta tangente.)

$\left[a = \frac{1}{2}; b = 3\right]$

726 Data la funzione $y = \frac{ax^2 + bx - 1}{x - c}$, trova a, b, c sapendo che, nel punto $(0; 1)$, il grafico ha per tangente una retta parallela alla retta $x - 2y + 8 = 0$ e che ha per asintoto obliquo una retta parallela alla retta $4x - y = 0$. Traccia il grafico probabile della funzione.

$\left[a = 4; b = \frac{1}{2}; c = 1\right]$

9. LE DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO

▶ Teoria a pag. 1642

727 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo la derivata prima, seconda e terza della funzione $y = x^2 \cdot \ln x$.

Questa funzione è il prodotto di due funzioni. Utilizziamo quindi la relativa regola di derivazione:

$$\mathrm{D}\,[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \text{ ricordando che } \mathrm{D}\,x^n = n \cdot x^{n-1} \text{ e } \mathrm{D}\ln x = \frac{1}{x}.$$

Derivata prima

$$y' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x = x \cdot (2\ln x + 1).$$

Derivata seconda. Abbiamo di nuovo un prodotto e ci comportiamo come in precedenza:

$$y'' = 1 \cdot (2\ln x + 1) + x \cdot \left(\frac{2}{x}\right) = 2\ln x + 1 + 2 = 2\ln x + 3.$$

Derivata terza

$$y''' = \frac{2}{x}.$$

Calcola la derivata prima e seconda delle seguenti funzioni.

728 $y = x^4 - 2x^2 - 1;\quad y = -\frac{2}{x}.$ $\left[y' = 4x^3 - 4x,\ y'' = 4(3x^2 - 1);\ y' = \frac{2}{x^2},\ y'' = -\frac{4}{x^3}\right]$

729 $y = e^{2x} + \ln x;\quad y = \operatorname{sen} x + \cos x.$ $\left[y' = 2e^{2x} + \frac{1}{x},\ y'' = 4e^{2x} - \frac{1}{x^2};\ y' = \cos x - \operatorname{sen} x,\ y'' = -(\operatorname{sen} x + \cos x)\right]$

730 $y = \frac{3}{x+1};\quad y = (x^2 - 4)^3.$ $\left[y' = -\frac{3}{(x+1)^2},\ y'' = \frac{6}{(x+1)^3};\ y' = 6x(x^2-4)^2,\ y'' = 6(x^2-4)(5x^2-4)\right]$

731 $y = 2x \cdot \ln x;\quad y = x \cdot \operatorname{sen} x.$ $\left[y' = 2(\ln x + 1),\ y'' = \frac{2}{x};\ y' = \operatorname{sen} x + x\cos x,\ y'' = 2\cos x - x\operatorname{sen} x\right]$

732 $y = e^{x^3};\quad y = \operatorname{sen} 2x.$ $[y' = 3x^2 \cdot e^{x^3},\ y'' = 3x \cdot e^{x^3} \cdot (3x^3 + 2);\ y' = 2\cos 2x,\ y'' = -4\operatorname{sen} 2x]$

733 $y = x^3 \cdot (x-2)^2;\quad y = e^x + x^2.$ $[y' = x^2(x-2)(5x-6),\ y'' = 4x(5x^2 - 12x + 6);\ y' = e^x + 2x,\ y'' = e^x + 2]$

734 $y = 3\ln x;\quad y = \ln(x^2 - 5x).$ $\left[y' = \frac{3}{x},\ y'' = -\frac{3}{x^2};\ y' = \frac{2x-5}{x^2-5x},\ y'' = -\frac{2x^2 - 10x + 25}{(x^2-5x)^2}\right]$

735 $y = \cos^2 x;\quad y = \operatorname{tg} x.$ $\left[y' = -\operatorname{sen} 2x,\ y'' = -2\cos 2x;\ y' = \frac{1}{\cos^2 x},\ y'' = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\right]$

736 $y = 2x \cdot e^x;\quad y = \sqrt{x+3}.$ $\left[y' = 2e^x(1+x),\ y'' = 2e^x(2+x);\ y' = \frac{1}{2\sqrt{x+3}},\ y'' = -\frac{1}{4\sqrt{(x+3)^3}}\right]$

737 $y = \operatorname{sen} x \cdot \ln x;\quad y = \ln(\operatorname{sen} x).$ $\left[y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x},\ y'' = \frac{-x^2 \operatorname{sen} x \ln x + 2x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2};\ y' = \operatorname{cotg} x,\ y'' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right]$

738 **TEST** Trova la derivata seconda della funzione $h(t) = 2t^5 + 6t^4 - t^3 + 4t - 1$.

A $10t^4 + 24t^3 - 3t^2 + 4$.

B $40t^3 + 72t^2 - 6t$.

C $2t^3 + 6t^2 - t$.

D $\frac{t^6}{3} + \frac{6t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + 2t^2 + c$.

E $40t^3 + 27t - 6$.

(USA *Montana Council of Teachers of Mathematics, Math Contest*, 2006)

Calcola la derivata prima, seconda e terza delle seguenti funzioni.

739 $y = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2$ $[y' = 8x^3 - 9x^2 + 4x;\ y'' = 2 \cdot (12x^2 - 9x + 2);\ y''' = 6 \cdot (8x - 3)]$

740 $y = e^x + x^3$ $[y' = e^x + 3x^2;\ y'' = e^x + 6x;\ y''' = e^x + 6]$

741 $y = x - \ln x$ $\left[y' = 1 - \frac{1}{x};\ y'' = \frac{1}{x^2};\ y''' = -\frac{2}{x^3}\right]$

742 $y = \ln(\cos x)$ $\left[y' = -\operatorname{tg} x;\ y'' = -\frac{1}{\cos^2 x};\ y''' = -\frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\right]$

743 $y = \ln(\operatorname{sen}^2 2x)$ $\left[y' = 4 \operatorname{cotg} 2x;\ y'' = -\frac{8}{\operatorname{sen}^2 2x};\ y''' = \frac{32 \cos 2x}{\operatorname{sen}^3 2x}\right]$

744 $y = \sqrt{2x + 1}$ $\left[y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}};\ y'' = -\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}};\ y''' = \frac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}\right]$

745 $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - 1$ $[y' = x^2 + 2x - 1;\ y'' = 2x + 2;\ y''' = 2]$

746 $y = 2 \operatorname{sen} x + \cos x$ $[y' = 2\cos x - \operatorname{sen} x;\ y'' = -2\operatorname{sen} x - \cos x;\ y''' = -2\cos x + \operatorname{sen} x]$

747 Calcola la derivata prima, seconda e terza della funzione $y = xe^{2x}$.
$[y' = e^{2x}(1 + 2x);\ y'' = 4e^{2x}(1 + x);\ y''' = 4e^{2x}(3 + 2x)]$

748 Data la funzione $y = \sqrt{4x^2 + 1}$, calcola la derivata seconda nel punto $x_0 = 0$. $[y''(0) = 4]$

749 Considera la funzione $y = 2x \ln 2x$. Trova il dominio e calcola le derivate seconda e terza in $x_0 = 2$.
$\left[D\colon x > 0;\ y''(2) = 1;\ y'''(2) = -\frac{1}{2}\right]$

750 Determina il dominio della funzione $y = \frac{x^2 - 1}{x + 3}$, individua gli eventuali punti di discontinuità e calcola le derivate prima e seconda nei punti di intersezione del grafico di y con l'asse x.
$\left[D\colon x \neq -3;\ x = -3 \text{ punto di discontinuità di II specie};\ y'(-1) = -1;\ y''(-1) = 2;\ y'(1) = \frac{1}{2};\ y''(1) = \frac{1}{4}\right]$

751 Data la funzione $y = \cos x + \operatorname{sen} x + 2$, verifica che $y'' + y = 2$.

752 Considera la funzione $y = xe^x$. Verifica che $x(y' - y'') + y = 0$.

753 Data la funzione $y = ax^4 + bx^2 + cx$, trova a, b, c, sapendo che $y''' = 4x$, $y'' = 0$ per $x = 1$ e $y'(3) = 13$.
$\left[a = \frac{1}{6};\ b = -1;\ c = 1\right]$

754 Calcola le derivate y', y'', y''', $y^{(4)}$ della funzione $y = \frac{1}{x+1}$ e poi dimostra con il principio di induzione che la derivata di ordine n è:

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

755 Trova una formula per la derivata di ordine n della funzione $y = \operatorname{sen} x$. $\left[y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right]$

10. IL DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE

Teoria a pag. 1643

756 VERO O FALSO?

a) Data la funzione $y = x \ln x$, si ha $dy = (1 + \ln x)dx$. V F

b) Calcolare il differenziale dy di una funzione in un punto x_0 significa trovare un valore approssimato della funzione nel punto x_0. V F

c) Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, se il differenziale relativo al punto $x = 0$ vale $-0{,}2$, allora Δx vale 2. V F

757 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo il differenziale dy della funzione

$$y = f(x) = \frac{x-1}{e^x}.$$

Essendo $dy = f'(x) \cdot dx$, per calcolare il differenziale della funzione basta calcolare la sua derivata prima e moltiplicarla per dx.
La funzione è il quoziente di due funzioni. Utilizzando la corrispondente regola di derivazione, otteniamo:

$$f'(x) = \frac{e^x - (x-1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1 - x + 1)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x},$$

$$dy = \frac{2-x}{e^x}dx.$$

Calcola il differenziale dy delle seguenti funzioni.

758 $y = x^2 + \operatorname{sen} x$; $\quad y = \cos x \cdot \ln x$. $\quad \left[dy = (2x + \cos x)\,dx;\ dy = \left(\dfrac{\cos x}{x} - \operatorname{sen} x \ln x\right)dx\right]$

759 $y = \ln^3 x$; $\quad y = \sqrt{\cos 5x}$. $\quad \left[dy = \dfrac{3\ln^2 x}{x}dx;\ dy = -\dfrac{5\operatorname{sen} 5x}{2\sqrt{\cos 5x}}dx\right]$

760 $y = \operatorname{tg} x \cdot e^x$; $\quad y = \operatorname{sen}(4x^2 - 1)$. $\quad \left[dy = \dfrac{e^x}{\cos^2 x} \cdot (1 + \operatorname{sen} x \cdot \cos x)\,dx;\ dy = 8x \cdot \cos(4x^2 - 1)\,dx\right]$

761 $y = \ln\dfrac{x+5}{x-2}$; $\quad y = \operatorname{arctg}(x^3 - 1)$. $\quad \left[dy = \dfrac{-7}{x^2 + 3x - 10}dx;\ dy = \dfrac{3x^2}{x^6 - 2x^3 + 2}dx\right]$

L'incremento di una funzione

762 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo l'incremento Δy della funzione

$$y = x^3 - 2x^2$$

quando $x_0 = 1$ viene incrementato di $\Delta x = 0{,}023$.

Calcoliamo Δy direttamente, cioè valutiamo la funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ nei punti 1,023 e 1 e ne calcoliamo la differenza:

$$\Delta y = f(1{,}023) - f(1) = (1{,}023)^3 - 2 \cdot (1{,}023)^2 - (1 - 2) \simeq -0{,}02246.$$

Utilizzando il differenziale di $f(x)$, possiamo approssimare lo stesso risultato con calcoli più semplici:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \simeq f'(x_0) \cdot \Delta x = (3x_0^2 - 4x_0) \cdot \Delta x = (3 - 4) \cdot 0{,}023 = -0{,}023.$$

Calcola, sia direttamente sia con il differenziale, l'incremento Δy delle seguenti funzioni nei punti e per gli incrementi Δx indicati a fianco.

763 $y = 2x^4 - 2x^3$, $x = 2$, $\Delta x = 10^{-3}$; $y = (2x^2 - 1)^4$, $x = -1$, $\Delta x = 10^{-4}$. [$\Delta y \simeq 0{,}04$; $\Delta y \simeq -0{,}0016$]

764 $y = \ln(x^2 + 1)$, $x = 3$, $\Delta x = 0{,}01$; $y = \cos^2 x$, $x = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = 0{,}1$. [$\Delta y \simeq 0{,}006$; $\Delta y \simeq -0{,}0866$]

765 $y = x^3 \cdot e^x$, $x = 1$, $\Delta x = 0{,}05$; $y = \frac{e^x}{x}$, $x = 2$, $\Delta x = 0{,}002$. [$\Delta y \simeq 0{,}5437$; $\Delta y \simeq 0{,}0037$]

766 $y = \frac{5}{x^2 - 1}$, $x = -2$, $\Delta x = 0{,}05$; $y = \operatorname{sen}^3 4x$, $x = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = 0{,}01$. [$\Delta y \simeq 0{,}1$; $\Delta y \simeq -0{,}045$]

Il valore approssimato di una funzione in un punto

767 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo il valore approssimato di ln (1,34).

Osserviamo che $\ln(1{,}34) = \ln(1 + 0{,}34)$. Allora possiamo calcolare il valore approssimato applicando la formula

$$f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + dy = f(x_0) + \Delta x f'(x_0)$$

alla funzione $f(x) = \ln x$, con $x_0 = 1$ e $\Delta x = 0{,}34$.
Poiché

$$f'(x_0) = \frac{1}{x_0} = 1,$$

otteniamo:

$$\ln(1 + 0{,}34) \simeq \ln(1) + 0{,}34 \cdot 1 = 0{,}34.$$

Utilizza il differenziale per calcolare il valore approssimato dei seguenti numeri.

768 $\sqrt{4{,}005}$; $(2{,}039)^2$. [2,00125; 4,156]

769 $(1{,}028)^3$; $\sqrt[3]{8{,}012}$. [1,084; 2,001]

770 $\ln(1{,}03)$; $e^{0{,}09}$. [0,03; 1,09]

Risoluzione di problemi con il differenziale

771 Utilizzando il differenziale, calcola di quanto aumenta l'area di un cerchio se il raggio, lungo 4 m, aumenta di 2 mm. [0,050265 m^2]

772 Un cilindro ha la base di area 4π m^2 e l'altezza lunga 8 m. Di quanto aumenta il volume se si aumenta il raggio di base di 3 cm? [3,015929 m^3]

773 Un cubo ha il lato di 5 m. Di quanto aumenta il suo volume se si aumenta il lato di 4 cm? [3 m^3]

774 Di quanto varia la forza gravitazionale tra due masse di 1 kg poste alla distanza di 10 km se si allontanano di 10 m? $\left(\right.$Ricorda che la forza di attrazione tra due masse m_1 e m_2 a una distanza r è $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, con $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.$\left.\right)$ [diminuisce di $1{,}334 \cdot 10^{-21}$ N]

775 Generalizza il problema precedente: di quanto varia la forza gravitazionale tra due masse m_1 e m_2 poste a distanza r che vengono allontanate di Δr? $\left[G m_1 m_2\left(-\frac{2}{r^3}\right)\Delta r\right]$

11. LE APPLICAZIONI DELLE DERIVATE ALLA FISICA

▶ Teoria a pag. 1646

776 **ESERCIZIO GUIDA**

Un corpo si muove su una traiettoria rettilinea seguendo la legge oraria $s = 4\ln t - 2t^2$. Determiniamo la velocità e l'accelerazione in funzione del tempo e calcoliamo in quale istante risulta $v = 0$ m/s e in quale $a = -20$ m/s^2.

La velocità è la derivata della posizione rispetto al tempo, quindi: $v = \frac{4}{t} - 4t$.

L'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo, quindi: $a = -\frac{4}{t^2} - 4$.

$$v = 0 \quad \text{per} \quad \frac{4}{t} - 4t = 0 \quad \to \quad 4 - 4t^2 = 0 \quad \to \quad t = \pm 1.$$

Considerando il valore positivo, otteniamo che la velocità è nulla per $t = 1$ s.

$$a = -20 \quad \text{per} \quad -\frac{4}{t^2} - 4 = -20 \quad \to \quad \frac{4}{t^2} + 4 = 20 \quad \to \quad \frac{1}{t^2} = 4 \quad \to \quad t^2 = \frac{1}{4} \quad \to \quad t = \pm\frac{1}{2}.$$

Considerando il valore positivo, otteniamo che l'accelerazione vale -20 m/s^2 quando $t = 0{,}5$ s.

Determina la velocità e l'accelerazione in funzione del tempo nei moti rettilinei che hanno le seguenti leggi orarie.

777 $s = t^3 + t^2$ $[v = 3t^2 + 2t; a = 6t + 2]$

778 $s = -4t^2 + 2$ $[v = -8t; a = -8]$

779 $s = 1 - \ln t$ $\left[v = -\frac{1}{t}; a = \frac{1}{t^2}\right]$

780 $s = 2\,\text{sen}^2\, t$ $[v = 2\,\text{sen}\, 2t; a = 4\cos 2t]$

781 $s = \text{sen}\, 3t + \cos^2 t$ $[v = 3\cos 3t - \text{sen}\, 2t; a = -9\,\text{sen}\, 3t - 2\cos 2t]$

782 $s = \frac{2t+1}{t+2}$ $\left[v = \frac{3}{(t+2)^2}; a = \frac{-6}{(t+2)^3}\right]$

783 $s = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$ $\left[v = \frac{-1}{2(t+1)\sqrt{t+1}}; a = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(t+1)^2\sqrt{t+1}}\right]$

784 Una palla viene lanciata da terra verticalmente verso l'alto. Determina la velocità dopo 1 secondo sapendo che la sua distanza da terra, in metri, dopo t secondi è $s = 20t - 4{,}9t^2$. [$v = 10{,}2$ m/s]

785 Il moto di un corpo su un percorso rettilineo segue la legge oraria $s = 4t^2 + 2t$. Calcola la velocità all'istante $t = 2$ s, sapendo che la posizione è misurata in metri. [18 m/s]

786 Una particella si muove lungo l'asse x in modo tale che la sua velocità nella posizione x è data dalla formula $v(x) = 2 + 2\sin x$. Qual è la sua accelerazione in $x = \frac{\pi}{6}$?

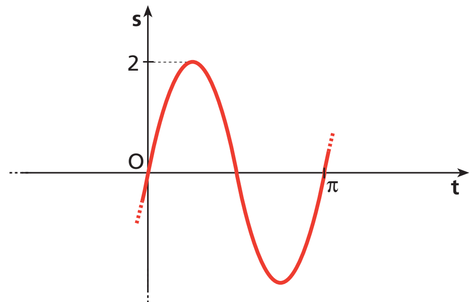
(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*, 2003)

$\left[\frac{5\sqrt{3}}{4}\right]$

787 Un corpo si muove in linea retta seguendo la legge oraria $s = 4t^2 + t + 1$. Determina la velocità e l'accelerazione del corpo al variare del tempo e trova in quale istante la velocità è 17 m/s. [$v = 8t + 1$; $a = 8$; $t = 2$ s]

788 Un oggetto si muove in linea retta secondo la legge oraria $s = t^3 - 6t^2 + 12t - 1$.
a) Calcola in quali istanti la velocità è 3 m/s.
b) Determina l'istante in cui l'accelerazione è nulla. [a) $t = 1$ s, $t = 3$ s; b) $t = 2$ s]

789 Il grafico della figura rappresenta la legge oraria di un moto armonico.
a) Trova la legge oraria del moto.
b) Determina la velocità in funzione del tempo e disegna il relativo grafico. [a) $s = 2$ sen $2t$; b) $v = 4$ cos $2t$]



790 Due corpi si muovono seguendo le leggi orarie $s_1 = 2t^2 - t$ e $s_2 = -\frac{1}{2}t^2 + 9t$.
Calcola in quale istante il primo ha velocità doppia rispetto al secondo. $\left[t = \frac{19}{6} s\right]$

791 Un'automobile si muove su una strada rettilinea seguendo la legge oraria $s = -t\sqrt{t} + t$ fino a fermarsi. Trova la distanza percorsa dall'istante iniziale (il tempo in ore, lo spazio in kilometri). $\left[\frac{4}{27}\text{km}\right]$

792 Un moto oscillatorio smorzato è descritto dalla legge oraria $s = e^{-t}$ sen ωt. Determina la velocità e l'accelerazione in funzione del tempo. [$v = e^{-t}(-\text{sen}\ \omega t + \omega \cos \omega t)$; $a = e^{-t}(\text{sen}\ \omega t - \omega^2 \text{sen}\ \omega t - 2\omega \cos \omega t)$]

793 **CACCIA ALL'ERRORE.** In ognuna delle seguenti affermazioni c'è un errore. Trovalo e correggilo.

a) Se la legge oraria di un moto rettilineo è $s = -t^2 + 2t$, allora l'accelerazione è $a = -1$.

b) Se la legge oraria di un moto rettilineo è $s = 3\,\text{sen}\frac{3}{2}t$, si ha $a = 3\,\text{m/s}^2$ per $t = \frac{\pi}{2}$ s.

c) Nel moto armonico con legge oraria $s = A \cos \omega t$ la velocità è $v = A$ sen ωt.

d) Nel moto che segue la legge oraria $s = 3t^3 + 4t$ l'accelerazione è $a = 18t + 4$.

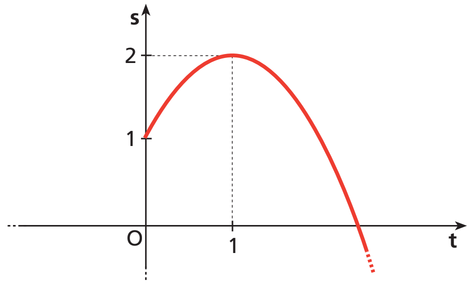
e) In un moto la legge della velocità è $v = 8\sqrt{t} - 3$. L'accelerazione segue allora la legge $a = \frac{8}{\sqrt{t}}$.

794 La carica elettrica che attraversa la sezione di un conduttore al variare del tempo segue la legge $q = 3e^{-t} \cos t$. Determina l'intensità della corrente in funzione del tempo. [$i = -3e^{-t}(\cos t + \text{sen}\ t)$]

795 Una corrente alternata attraversa la sezione di un conduttore. La carica q al variare del tempo segue la legge $q = 2\cos(2\pi t + 1)$. Calcola l'intensità della corrente in funzione del tempo. [$i = -4\pi\,\text{sen}(2\pi t + 1)$]

796 Un oggetto si muove seguendo la legge oraria rappresentata dall'arco di parabola della figura.

a) Determina la legge oraria.
b) Trova la velocità agli istanti $t = 0$ e $t = 1$ (s in metri, t in secondi).
c) Nel grafico, interpreta geometricamente i risultati ottenuti nel quesito b).
d) Osservando il grafico, indica per quali valori di t la velocità è positiva e per quali negativa.



[a) $s = -t^2 + 2t + 1$; b) $v(0) = 2$ m/s, $v(1) = 0$ m/s; c) le rette tangenti…; d) $v > 0$ per $t < 1$, $v < 0$ per $t > 1$]

797 Un carrello scende lungo un piano, inclinato di un angolo α rispetto al piano orizzontale, seguendo la legge

$$s = \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \alpha t^2.$$

a) Se α è costante, trova la velocità e l'accelerazione in funzione del tempo.
b) Se l'accelerazione è di 4,9 m/s^2, calcola la lunghezza del piano, sapendo che il carrello lasciato cadere dal punto più alto del piano arriva a terra con velocità di 19,6 m/s.

[a) $v = g \operatorname{sen} \alpha t$, $a = g \operatorname{sen} \alpha$; b) $s = 39{,}2$ m]

Problemi relativi al moto nel piano

798 **ESERCIZIO GUIDA**

Un corpo si muove in un piano xOy seguendo la legge:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{3} & \text{nella direzione } x \\ y(t) = \dfrac{2}{9}t^2 - \dfrac{4}{3}t + 2 & \text{nella direzione } y \end{cases}$$

dove t è il tempo misurato in secondi e lo spazio è misurato in metri.

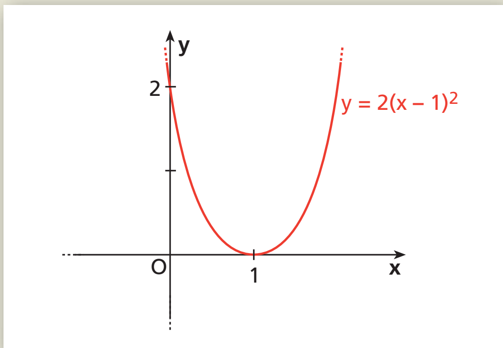
a) Determiniamo l'equazione cartesiana della traiettoria e rappresentiamola graficamente.
b) Troviamo le componenti lungo gli assi cartesiani della velocità e il modulo del vettore velocità al variare del tempo t.
c) Calcoliamo il modulo e la direzione della velocità per $t = \dfrac{15}{4}$ s.
d) Troviamo le componenti, il modulo e la direzione del vettore accelerazione al variare del tempo.

a) Dalla prima equazione ricaviamo la variabile t e la sostituiamo nella seconda determinando così l'equazione cartesiana della traiettoria:

$$\begin{cases} t = 3x \\ y = \dfrac{2}{9} \cdot (3x)^2 - \dfrac{4}{3} \cdot (3x) + 2 \end{cases}$$

$$y = 2x^2 - 4x + 2.$$

La traiettoria del corpo è una parabola con concavità rivolta verso l'alto e vertice $V(1; 0)$.



b) Le componenti del vettore velocità sono date dalle derivate delle componenti della posizione:

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} x'(t) = \dfrac{1}{3} \\ y'(t) = \dfrac{4}{9}t - \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Il modulo del vettore velocità è: $\left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \left(\frac{4}{9}t - \frac{4}{3}\right)^2}$.

c) Per $t = \frac{15}{4}$, otteniamo: $\left|\vec{v}\left(\frac{15}{4}\right)\right| = \sqrt{\frac{1}{9} + \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{15}{4} - \frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$ m/s;

la direzione del vettore $\vec{v}\left(\frac{15}{4}\right)$ forma con l'asse x un angolo α tale che: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y'\left(\frac{15}{4}\right)}{x'\left(\frac{15}{4}\right)} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$.

Quindi $\alpha = 45°$.

d) Le componenti del vettore accelerazione sono date dalle derivate seconde delle componenti della posizione:

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} x''(t) = 0 \\ y''(t) = \frac{4}{9} \end{cases}$$

L'accelerazione è costante, di modulo $a = \frac{4}{9}$ m/s^2 e diretta lungo l'asse y.

799 La traiettoria descritta da un oggetto in un piano xOy ha le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = \dfrac{1}{2 + t^2} \end{cases}$$

dove t rappresenta il tempo in secondi e x e y sono espressi in metri. Scrivi l'equazione cartesiana della traiettoria e il modulo della velocità all'istante $t = 2$ s.

$\left[y = \dfrac{16}{x^2 + 32}; v(2) = \dfrac{\sqrt{1297}}{9}\ \text{m/s}\right]$

800 Le leggi orarie di un moto nel piano sono:

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^2 \end{cases}$$

Trova modulo e direzione del vettore velocità al tempo $t = 4$ s, sapendo che x e y sono espressi in metri.

$[v(4) = 2\sqrt{17}\ \text{m/s}; \alpha \simeq 76°]$

801 Una pallina si muove su un piano xOy. Le leggi orarie del moto sono:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t^2 \end{cases}$$

dove t rappresenta il tempo (in secondi) e x, y la posizione (in metri).

a) Trova l'equazione cartesiana della traiettoria.
b) Determina il modulo della velocità della pallina nell'istante iniziale e dopo 5 s.
c) Dimostra che l'accelerazione della pallina è costante al variare del tempo.

[a) $y = 2(x-1)^2$; b) $v(0) = 1$ m/s; $v(5) = 20{,}02$ m/s; c) $a = 4$ m/s^2]

802 Un corpo si muove in un piano secondo le seguenti leggi orarie:

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen} t - 1 \\ y = \cos^2 t \end{cases}$$

dove t rappresenta il tempo (in secondi) e x, y la posizione (in metri).

a) Scrivi l'equazione cartesiana della traiettoria.
b) Calcola il modulo della velocità e dell'accelerazione all'istante $t = 0$.

[a) $x^2 + y + 2x = 0$; b) $v(0) = 1$ m/s; $a(0) = 2$ m/s^2]

803 The path of a football is given by the equation

$$y = x - \frac{x^2}{40}, \quad x \geq 0.$$

If $\frac{dx}{dt} = 10\sqrt{2}$ for all t, find $\frac{dy}{dt}$ when $x = 10$.

(IR *Leaving Certificate Examination*, Higher Level, 1994)

$[5\sqrt{2}]$

804 Le leggi orarie del moto di un punto P in un piano sono:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$$

a) Dimostra che la traiettoria descritta da P è un'ellisse.
b) Calcola il modulo della velocità al generico istante t e il valore per $t = \frac{\pi}{4}$.
c) Trova il modulo dell'accelerazione al variare di t.

$\left[\text{b) } |\vec{v}(t)| = \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2 t + b^2\cos^2 t};\ v\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}};\ \text{c) } |\vec{a}(t)| = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\,\mathrm{sen}^2 t}\right]$

805 Un corpo si muove in un piano seguendo le leggi orarie:

$$\begin{cases} x = 2\,\mathrm{sen}\,2t \\ y = 2\cos 2t \end{cases}$$

a) Dimostra che la traiettoria è una circonferenza.
b) Dimostra che la velocità è costante.
c) Verifica che l'accelerazione è sempre centripeta ovvero che in ogni istante il vettore accelerazione giace su una retta che passa per il centro della circonferenza.

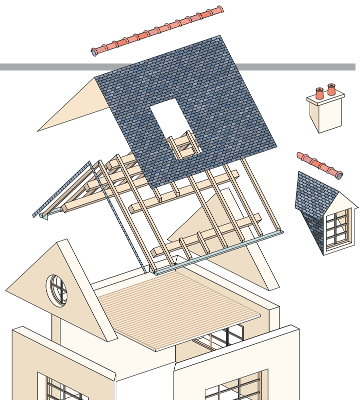
806 Nel piano cartesiano xOy considera un punto P che si muove. Le sue coordinate in funzione del tempo $t \in [0; \pi]$, con t misurato in secondi e x e y in metri, sono:

$$\begin{cases} x = 2\,\mathrm{sen}\,t \\ y = \cos^2 t - 2\cos 2t \end{cases}$$

a) Individua la traiettoria descritta da P.
b) Calcola le componenti del vettore velocità di P al tempo t.
c) Trova il modulo della velocità di P nell'istante $t = \frac{\pi}{6}$.
d) Scrivi l'equazione della tangente alla traiettoria nel punto A, posizione di P all'istante $t = \frac{\pi}{3}$.
e) Calcola in quali istanti P si trova nel punto di coordinate $\left(1; -\frac{1}{4}\right)$.

$\left[\text{a) } y = \frac{3}{4}x^2 - 1, 0 \leq x \leq 2;\ \text{b) } \vec{v} = (2\cos t; 3\,\mathrm{sen}\,2t);\ \text{c) } \frac{\sqrt{39}}{2}\ \text{m/s};\right.$
$\left.\text{d) } y = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,x - \frac{13}{4};\ \text{e) } t_1 = \frac{\pi}{6}, t_2 = \frac{5}{6}\pi\right]$

REALTÀ E MODELLI



1 **La mansarda**

Per ultimare l'edificazione di una villetta occorre costruire il tetto a due spioventi sopra la mansarda. Come dato di progetto è noto quanto segue: considerata una parabola nel piano cartesiano con la concavità rivolta verso il basso, di vertice $V(7; 2)$ e passante per $C(2; 0)$, i due spioventi poggiano sui punti della parabola di ascissa 5 e 9 e risultano tangenti alla parabola nei punti di contatto.

- ▶ Determina l'altezza massima del tetto e l'angolo formato dai due spioventi.

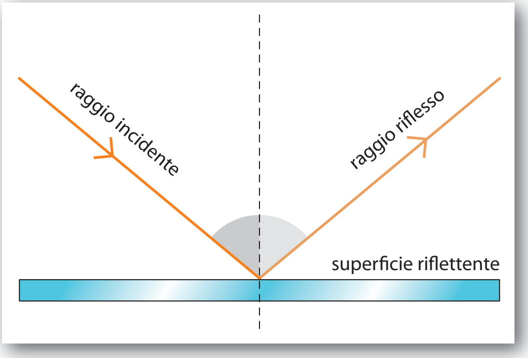
2 **Il profitto marginale**

Un laboratorio artigianale produce sciarpe di qualità. Ogni mese ne vende 100 a un commerciante a € 35 l'una e generalmente riesce a vendere le altre a € 45 l'una. L'azienda sostiene un costo fisso mensile di € 1600, ogni sciarpa prodotta costa € 14 e in più c'è un costo variabile, che si può pensare proporzionale al cubo del numero di sciarpe prodotte, con costante di proporzionalità pari a € 0,0001.

- ▶ Esprimi il profitto mensile in funzione del numero di sciarpe prodotte, nell'ipotesi che vengano realizzati e venduti almeno 100 pezzi.
- ▶ Calcola la derivata di tale funzione, che viene chiamata *profitto marginale*.
- ▶ Utilizzando la definizione di derivata, interpreta il significato del profitto marginale.

3 **La riflessione della luce**

L'esperienza mostra che, quando un raggio luminoso incide su una superficie piana riflettente, il raggio riflesso forma con la normale al piano nel punto di incidenza un angolo uguale a quello di incidenza. Questa legge deriva dalla proprietà caratteristica della luce di seguire il percorso più breve possibile all'interno di uno stesso mezzo.



Nel piano cartesiano rappresentiamo uno specchio piano, visto in sezione, come una linea coincidente con l'asse x. Consideriamo i punti $S(0; 1)$, sorgente luminosa, e i punti $N(x; 0)$, con $0 < x < 5$, e $R(5; 2)$.

- ▶ Esprimi, in funzione di x, la lunghezza del percorso individuato dai segmenti SN e NR.
- ▶ Calcola la derivata di tale funzione lunghezza.
- ▶ Trova il punto stazionario della funzione lunghezza.
- ▶ Verifica che in corrispondenza del punto stazionario i segmenti SN e NR individuano il percorso effettivo del raggio luminoso.

4 **La crociera**

Un'agenzia organizza una crociera nel Mediterraneo. La nave è in grado di percorrere le 1200 miglia della crociera a una velocità massima di circa 22 nodi (1 miglio nautico = 1,852 km, 1 nodo = 1,852 km/h). Il consumo di combustibile, espresso in tonnellate per miglia nautiche, è proporzionale al quadrato della velocità, con il coefficiente di proporzionalità $k = 0{,}001$. Il costo minimo, per una tonnellata di combustibile, è circa di € 407 e la spesa oraria complessiva per il personale di bordo è circa di € 4050.

- ▶ Determina la funzione che esprime il costo totale della crociera, dovuto al carburante e al personale, in funzione della velocità v di navigazione.
- ▶ Individua il punto stazionario di tale funzione.
- ▶ Sulla base di un grafico approssimato della funzione costo totale, stabilisci se in corrispondenza del punto stazionario trovato il costo è inferiore o superiore a quello che si avrebbe per altre velocità di crociera.

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 La derivata di una funzione in un punto, se esiste, è:

A un numero.
B una funzione.
C un angolo.
D la retta tangente alla funzione in quel punto.
E il rapporto fra l'ordinata e l'ascissa del punto.

2 La derivata della funzione $y = \cos(\ln x)$ è:

A $y' = -\operatorname{sen}\frac{1}{x}$.
B $y' = \cos\frac{1}{x}$.
C $y' = -\operatorname{sen}(\ln x)$.
D $y' = -\frac{1}{x}\operatorname{sen}(\ln x)$.
E $y' = -\frac{1}{x}\operatorname{sen} x$.

3 La derivata, se esiste, di una funzione $f(x)$ in un punto c del suo dominio è:

A l'angolo che la tangente al grafico della funzione in quel punto forma con l'asse delle ascisse.
B il valore della funzione in quel punto.
C il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione in quel punto.
D il rapporto incrementale $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ con $h = 1$.
E il rapporto incrementale $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ con h qualsiasi.

4 Quale funzione ha derivata diversa dalle altre? (Considera $x > 0$.)

A $y = \ln\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \ln x^2$
B $y = 2\ln x + e^{\sqrt{2}}$
C $y = 2\ln 2x + \ln\frac{1}{2}$
D $y = \frac{1}{2}\ln 2x^2 + 2$
E $y = 4\ln\sqrt{x}$

5 L'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = (1-2x)e^{-2x}$ nel punto $x_0 = 0$ è:

A $y = -4x - 1$.
B $y = -4x + 1$.
C $y = 0$.
D $y = -2x + 1$.
E nessuna delle precedenti.

6 Fra le seguenti funzioni, solo due *non* sono derivabili in $x_0 = 2$. Quali?

A $y = x - 2$; $\quad y = x^2 - 2$.
B $y = \sqrt{x+2}$; $\quad y = \frac{1}{x+2}$.
C $y = \sqrt{x-2}$; $\quad y = \frac{1}{x-2}$.
D $y = \frac{2}{x+2}$; $\quad y = \frac{1}{2+\sqrt{x}}$.
E $y = \sqrt{2x-2}$; $\quad y = \frac{1}{2x-2}$.

7 La funzione

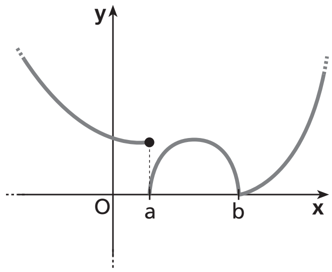
$$y = |x^3|:$$

A è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$.
B è continua in $\mathbb{R}$ ma non derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
C è dispari.
D non è né pari né dispari.
E presenta un punto angoloso in $x = 0$.

8 Date le funzioni $f(x) = \ln x$, $g(x) = \cos x$ e $h = f \circ g$, $k = g \circ f$, possiamo dire che:

A $h'(x) = \frac{1}{\cos x}$ e $k'(1) = 0$.
B $h'(0) = 1$ e $k'(1) = 0$.
C $h'(x) = \operatorname{tg} x$ e $k'(x) = -\operatorname{sen}(\ln x)$.
D $h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ e $k'(x) = -\frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}$.
E $h'(\pi) = 0$ e $k'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}$.

9 È dato il seguente grafico di funzione.



Possiamo affermare che la funzione:

A è continua ma non derivabile in $[0; b]$.
B è continua ma non derivabile in b.
C ha una cuspide in a.
D ha una cuspide in b.
E ha un punto stazionario in a.

10 Data la funzione $f(x) = \frac{x+3}{3-x}$, quale delle seguenti uguaglianze è *falsa*?

A $f(-3) = 0$
B $f(3) = 0$
C $f'(-3) = \frac{1}{6}$
D $f''(-3) = \frac{1}{18}$
E $f'(2) = 6$

11 La funzione $y = 2e^x + \frac{|x-1|}{x-1}$ ha:

A derivata $y' = 2e^x + 1$, per $x \neq 1$.
B due punti con tangente parallela alla bisettrice del I e del III quadrante.
C per tangente nel punto $x_0 = 0$ la retta di equazione $y = 2x - 3$.
D un punto angoloso in $x_0 = 1$.
E derivata $y' = y''$.

12 È data la funzione:

$$y = (x^3 - 2x)^{\frac{5}{7}}.$$

Una delle seguenti proposizioni è *falsa*. Quale?

A y è continua su tutto $\mathbb{R}$.
B $y'(0) = 0$.
C Esistono punti in cui y non è derivabile.
D $y'(-1) = \frac{5}{7}$.
E $y'(1) = \frac{5}{7}$.

QUESITI

13 Sia f una funzione derivabile in un intorno di $x_0 = 2$, $f(2) = 5$ e $f'(2) = 10$.
Quali sono le derivate delle funzioni $g(x) = \sqrt{f(x) - 1}$ e $h(x) = \ln f(x)$ in $x_0 = 2$?

$\left[g'(2) = \frac{5}{2}; h'(2) = 2\right]$

14 Verificate che le due funzioni

$$f(x) = 3\log x \text{ e } g(x) = \log(2x)^3$$

hanno la stessa derivata.
Quale giustificazione ne date?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria,* 2004, *quesito* 6)

15 La continuità di una funzione è una condizione necessaria, necessaria e sufficiente oppure solo sufficiente per la derivabilità? Fornisci la risposta illustrandola con degli esempi.

16 Per quale o quali valori di k la curva d'equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria,* 2009, *quesito* 3)

17 Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria,* 2008, *quesito* 8)

18 Mostrare che le tangenti alla curva $y = \frac{\pi \operatorname{sen} x}{x}$ in $x = \pi$ e $x = -\pi$ si intersecano ad angolo retto.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria,* 2004, *quesito* 3)

19 a) Calcola la derivata di $y = 2 - \sqrt{1 - x^2}$ mediante la definizione e conferma il risultato con le regole di derivazione.
b) Individua i punti in cui il grafico della funzione ha tangente parallela alla bisettrice del I quadrante.
c) Nei punti $x = \pm 1$ la funzione è derivabile? Esiste la tangente in tali punti?

$\left[\text{a) } y' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}; \text{ b) } x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ c) no; sì}\right]$

20 **VERO O FALSO?**

a) La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x + 3}$ non è derivabile in $x = 3$, quindi non esiste la tangente al grafico di $f(x)$ in $x = 3$. V F

b) Il grafico della funzione $y = \sqrt{4 - x^2}$ è una semicirconferenza di centro O e raggio 2 e ha nel punto $x = 2$ per tangente la retta $x - 2 = 0$, allora la funzione è derivabile e la derivata in $x = 2$ è $y' = 2$. V F

c) Se $g(x) = e^{2f(x)}$, allora $g'(x) = 2e^{2f(x)} \cdot f'(x)$. V F

d) Se $g(x) = \ln[2f(x)]$, allora $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. V F

21 a) Considera le funzioni $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{2x}$ e $g(x) = 2x^6 - x^4$ e verifica se sono pari o dispari.
b) Calcola le derivate di $f(x)$ e di $g(x)$ e verifica se sono pari o dispari.
c) Si può generalizzare il risultato del punto b)? Cioè: la derivata di una funzione pari è dispari? La derivata di una funzione dispari è pari?

22 Dimostra, con l'utilizzo delle derivate, che la tangente a una circonferenza è perpendicolare al raggio nel punto di tangenza.

23 Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen} x}$$

nel punto P di ascissa $x = \frac{\pi}{2}$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva,* 2008, *quesito* 9)

24 Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x = e^t + 2$ e $y = e^{-t} + 3$ nel suo punto di coordinate (3; 4).

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione ordinaria,* 2005, *quesito* 8)

25 Si dimostri che la curva $y = x \operatorname{sen} x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $\operatorname{sen} x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $\operatorname{sen} x = -1$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria,* 2005, *quesito* 3)

26 Si calcoli, in base alla definizione di derivata, la derivata della funzione $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ nel punto $x = -1$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione straordinaria,* 2007, *quesito* 3)

27 Si determinino le costanti a, b, c in modo che le curve di equazioni $f(x) = x^2 + ax + b$ e $g(x) = x^3 + c$ siano tangenti nel punto $A(1; 0)$. Si determini l'equazione della tangente comune.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria,* 2008, *quesito* 6)

28 Per quale valore del parametro k nella funzione $f(x) = \dfrac{kx^2 - 2x}{3x - 2}$ si ha $\lim_{x \to \infty} f'(x) = -2$?
Che significato geometrico assume tale limite?

$[k = -6]$

PROBLEMI

29 Sapendo che per la funzione $f(x) = a \ln(x + b) + c$ si ha $f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = -1$:

a) trova a, b, c e rappresenta la funzione;

b) traccia le tangenti al grafico di $f(x)$ nei suoi punti di intersezione con gli assi cartesiani;

c) calcola l'area del triangolo formato dalle tangenti e dall'asse x;

d) rappresenta il grafico di $f'(x)$ e determina l'angolo formato dalle tangenti al grafico di $f(x)$ e di $f'(x)$ nel loro punto comune.

$\left[\text{a) } a = 1, b = 1, c = 1; \text{ b) } y = ex - 1 + e, y = x + 1; \text{ c) } \dfrac{1}{2e(e-1)}; \text{ d) } \dfrac{\pi}{2}\right]$

30 Sono date le funzioni $f(x) = x \ln \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = [f(x)]^2 + 2f(x)$:

a) giustifica che $f(x)$ è una funzione derivabile in $\mathbb{R}^+$ e trova la sua derivata prima;

b) giustifica che $g(x)$ è una funzione derivabile in $\mathbb{R}^+$ e che risulta $g'(x) = 2f'(x) \cdot [f(x) + 1]$;

c) dimostra che le tangenti ai grafici di $f(x)$ e $g(x)$ nel punto di ascissa $x = \dfrac{1}{e}$ sono parallele e che esiste solo un altro punto in cui i due grafici hanno la tangente parallela.

31 a) Determina i valori di a, b, c per la funzione

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2},$$

sapendo che il grafico di $f(x)$ ha per asintoto orizzontale la retta $y = 2$ e che nel punto $P(1; -1)$ ha per tangente una retta che forma con gli assi cartesiani un triangolo la cui area è uguale a $\dfrac{9}{4}$. (Tra i valori trovati considera il valore di c intero.)

b) Traccia il grafico probabile della funzione.

c) Individua il punto con tangente orizzontale.

$\left[\text{a) } a = 2, b = -4, c = 1; \text{ c) } \left(\dfrac{1}{2}; -2\right)\right]$

32 a) Determina i coefficienti dell'espressione analitica della funzione $y = ax^5 + bx^2 + cx + d$ sapendo che la derivata quarta è $y^{(4)} = 24x$, la derivata seconda y'' si annulla per $x = -1$ e che il grafico ha nel punto $P\left(1; \dfrac{6}{5}\right)$ una tangente di equazione $5y - 20x + 14 = 0$.

b) Applicando la definizione di derivata alla funzione $y''(x)$, verifica che $y'''(x) = 12x^2$.

c) Trova l'equazione della retta tangente alla funzione y nel punto di ascissa -1.

$\left[\text{a) } \dfrac{1}{5}x^5 + 2x^2 - x; \text{ c) } 5y + 20x + 6 = 0\right]$

33 Della parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$ si hanno le seguenti informazioni, tutte localizzate nel punto $x = 0$: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$.

a) Determinata la parabola, si scrivano le equazioni delle tangenti a essa condotte per il punto P dell'asse y di modo che valga 60° l'angolo $A\widehat{P}B$, essendo A e B i rispettivi punti di tangenza.

b) Accertato che il punto P ha ordinata $\frac{1}{4}$, si scriva l'equazione della circonferenza passante per A, B e P.

(*Esempio 2 di prova del Nuovo Esame di Stato di Liceo Scientifico proposto dal M.P.I. per corsi tradizionali*)

$\left[\text{a) } y = x^2 + 1;\ y = \pm\sqrt{3}\,x + \frac{1}{4};\ \text{b) } x^2 + y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{9}{16} = 0\right]$

34 Sia $f(x) = x - x^3$ sull'intervallo $[-2, 2]$.

1. Trovare m e n tali che la retta r d'equazione $y = mx + n$ sia tangente al grafico di f nel punto $(-1, 0)$.

2. Una seconda retta s passante per $(-1, 0)$ è tangente al grafico di f in un punto (a, b). Determinare a e b.

3. Dare una valutazione dell'angolo compreso tra le due rette r ed s.

[…]

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero (calendario australe), Sessione suppletiva,* 2006, *problema* 2)

$\left[\mathbf{1.}\ m = -2;\ n = -2;\ \mathbf{2.}\ a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{8};\ \mathbf{3.} \simeq 77°\right]$

35 Sia $ABCD$ un quadrato di lato 1, P un punto di AB e γ la circonferenza di centro P e raggio AP. Si prenda sul lato BC un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per C e tangente esternamente a γ.

1. Se $AP = x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

2. Riferito il piano ad un sistema di coordinate Oxy, si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, qual è il grafico della sua inversa?

3. Sia $g(x) = \frac{|1-x|}{|1+x|}$, $x \in \mathbb{R}$; qual è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R(0, 1)$?
E nel punto $S(1, 0)$? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S?

[…]

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria,* 2010, *problema* 1)

[**2.** sì; coincidente con quello di $f(x)$; **3.** $y = -2x + 1$; $\nexists$]

36 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione $y = f(x)$, dove è:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2}.$$

a) Determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano $y > 0$ e per quali nel semipiano $y < 0$.

b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1.
(*N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari.*)

c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.

d) Determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria,* 2002, *problema* 1 (tranne punto *e*))

$\left[\text{a) } y > 0 \text{ se } x > -\sqrt[3]{2},\ y < 0 \text{ se } x < -\sqrt[3]{2};\ \text{b) } y = -\frac{34}{11}x^2 - \frac{67}{11}x;\ \text{c) no; d) due punti}\right]$

CAPITOLO **25** ٢٥ [numerazione araba] २५ [numerazione devanagari] 二十五 [numerazione cinese]

I TEOREMI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

IL TASSO ISTANTANEO DI VARIAZIONE E LE TAVOLE DI SOPRAVVIVENZA Le tavole di sopravvivenza, pubblicate periodicamente dall'ISTAT, forniscono, per ogni anno di età compreso tra 0 e un valore maggiore di 100, il numero medio di sopravvissuti in una popolazione iniziale di 100 000 neonati. Se si studia l'andamento della funzione $y = f(x)$ dei sopravvissuti y al variare dell'età x, non è difficile convincersi che essa è sempre decrescente. Ma altre informazioni ci vengono date dalla sua derivata $f'(x)$ e ancor di più dal suo tasso istantaneo di variazione $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

La decrescita dei sopravvissuti è costante o ha un comportamento molto diverso al variare dell'età?

▶ **La risposta a pag. 1732**

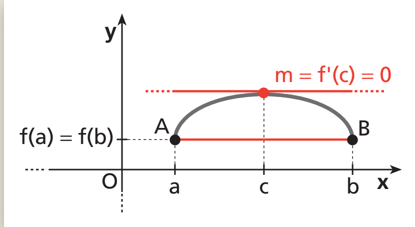
1. IL TEOREMA DI ROLLE

Michel Rolle (1652-1719), matematico francese, dal 1685 lavorò all'Accademia di Parigi. Il suo lavoro più famoso è *Trattato d'Algebra* del 1690.

TEOREMA

Teorema di Rolle

Data una funzione $f(x)$ definita in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$ con le seguenti proprietà:



- $f(x)$ è continua in $[a; b]$,
- $f(x)$ è derivabile in $]a; b[$,
- $f(a) = f(b)$,

allora esiste almeno un punto c, interno all'intervallo, per il quale risulta $f'(c) = 0$.

Teorema di Weierstrass: se $f(x)$ è continua in un intervallo $[a; b]$, allora assume massimo assoluto e minimo assoluto in $[a; b]$.

DIMOSTRAZIONE

Poiché $f(x)$ per ipotesi è continua nell'intervallo chiuso $[a; b]$, per il teorema di Weierstrass, essa ammette massimo M e minimo m in tale intervallo, cioè esistono $c, d \in [a; b]$ tali che:

$$m = f(c) \leq f(x) \leq f(d) = M \qquad \forall x \in [a; b].$$

- **Primo caso:** $m = M$. Allora:

  $$m = f(c) = f(x) = f(d) = M \qquad \forall x \in [a; b],$$

  e quindi f è costante. Pertanto la sua derivata è nulla per ogni $x \in [a; b]$.

- **Secondo caso:** $m < M$. La funzione non è costante, e poiché $f(a) = f(b)$ per ipotesi, almeno uno dei punti c e d deve essere interno all'intervallo $[a; b]$. Per esempio, supponiamo che $c \in]a; b[$.
  Essendo $f(c)$ il valore minimo, per ogni incremento h (positivo o negativo) tale che $c + h \in]a; b[$ si ha:

  $$f(c + h) \geq f(c), \quad \text{cioè} \quad f(c + h) - f(c) \geq 0.$$

  Allora, considerando i rapporti incrementali relativi al punto c, risulta:

  $$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0, \qquad \text{per } h > 0;$$

  $$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0, \qquad \text{per } h < 0.$$

  Ne consegue che, per l'inverso del teorema della permanenza del segno:

  $$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

  I due limiti rappresentano rispettivamente la derivata destra e sinistra di $f(x)$ in c e, poiché $f(x)$ è derivabile, devono essere finiti e coincidere, pertanto:

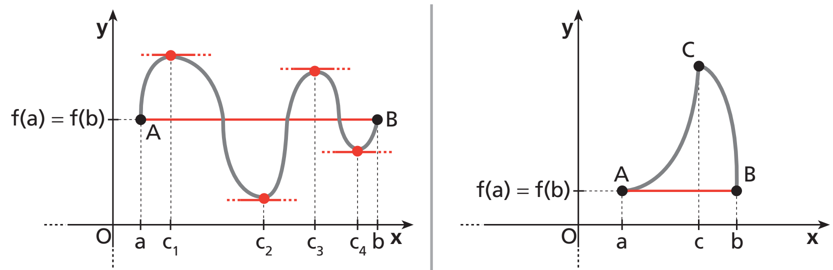
  $$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0.$$

  Il teorema si dimostra analogamente nel caso in cui d, anziché c, sia interno all'intervallo $[a; b]$.

L'*inverso del teorema della permanenza del segno* afferma che se esiste un intorno del punto x_0 in cui $f(x) \geq 0$ ed esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, allora $l \geq 0$.

Poiché $c \in]a; b[$, per ipotesi $f(x)$ è derivabile in c.

Il teorema afferma che esiste *almeno* un punto $c \in \,]a; b[$ in cui la derivata $f'(x)$ si annulla, ma nulla vieta che i punti siano più di uno, come si vede nella figura 1*a*. Se una delle ipotesi non è soddisfatta, il teorema può non essere verificato, come si vede nella figura 1*b*.



a. Il grafico di questa funzione presenta più punti in cui la tangente è parallela alla retta *AB* e all'asse *x*. In questi punti $f'(x) = 0$.

b. Nel punto *c* la funzione non è derivabile. Il suo grafico è privo di punti in cui la tangente è parallela alla retta *AB* e all'asse *x*.

◄ **Figura 1**

Da un punto di vista geometrico, il teorema di Rolle dice che, quando sono verificate le sue ipotesi, esiste sempre un punto *stazionario* e cioè esiste sempre un punto *c* in cui la tangente al grafico è parallela alla retta *AB* e quindi all'asse *x*.

ESEMPIO

Consideriamo, nell'intervallo $[-1; 1]$, la funzione:

$$f(x) = x^4 - 2x^2.$$

$f(x)$ è continua e derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$, e ha derivata:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x.$$

Inoltre $f(-1) = -1 = f(1)$. Quindi sono verificate le ipotesi del teorema di Rolle.
In questo caso, esistono tre punti in $[-1; 1]$ per i quali la derivata si annulla, infatti:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

In particolare, $x_2 \in \,]-1; 1[$ e quindi il teorema è verificato.

2. IL TEOREMA DI LAGRANGE

IN PRATICA
▶ **Videolezione 70**

TEOREMA

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Se una funzione $f(x)$ è:

- continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$,
- derivabile in ogni punto interno a esso,

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo per cui vale la relazione:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Giuseppe Lagrange (1736-1813), matematico italiano, si è dedicato alla risoluzione delle equazioni algebriche e alla teoria delle funzioni analitiche. Fu, a soli 19 anni, docente nelle Regie Scuole Matematiche d'Artiglieria di Torino, poi a Berlino e infine a Parigi, dove morì.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo la funzione:

$$F(x) = f(x) - kx, \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

- $F(x)$ è continua in $[a; b]$, perché somma di funzioni continue in $[a; b]$;
- $F(x)$ è derivabile in $]a; b[$, perché somma di funzioni derivabili in $]a; b[$.

Determiniamo k in modo che $F(x)$ soddisfi la terza ipotesi del teorema di Rolle, e cioè si abbia $F(a) = F(b)$.
Deve essere:

$$f(a) - ka = f(b) - kb \quad \rightarrow \quad k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Sostituiamo nella funzione:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\, x.$$

Poiché $F(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, esiste almeno un punto $c \in\,]a; b[$ tale che $F'(c) = 0$. Calcoliamo la derivata di $F(x)$,

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

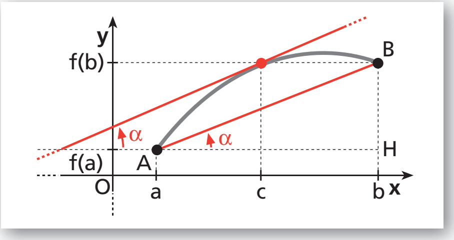
da cui:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Otteniamo quindi la tesi:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Diamo un'interpretazione geometrica del teorema, aiutandoci con la figura 2.



► **Figura 2** La retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa c è parallela alla retta AB e ha quindi lo stesso coefficiente angolare, ossia: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Essendo $y = f(x)$ derivabile nell'intervallo aperto $]a; b[$, in tutti i suoi punti il suo grafico è dotato di retta tangente. Il teorema afferma che deve esserci almeno un punto c per il quale questa retta tangente è parallela ad AB.
Per capirlo, consideriamo il triangolo rettangolo ABH, dove si ha:

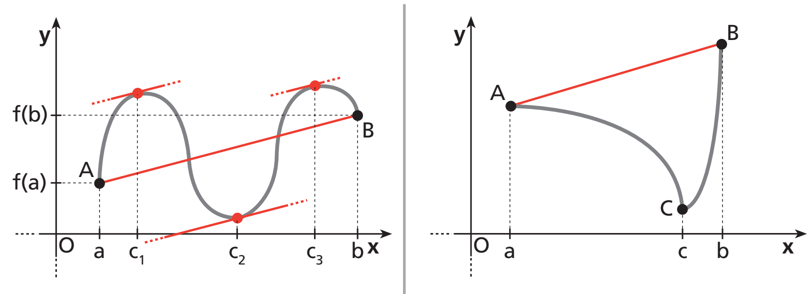
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{HB}}{\overline{AH}}.$$

Ma $\overline{HB} = f(b) - f(a)$ e $\overline{AH} = b - a$.
Se la retta tangente in c alla curva è parallela ad AB, deve avere il medesimo coefficiente angolare, perciò $\operatorname{tg}\alpha = f'(c)$.
Sostituendo nella relazione precedente, si ha:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

● Nel triangolo rettangolo ABH si applica il teorema dei triangoli rettangoli, secondo il quale la misura di un cateto è uguale a quella dell'altro cateto moltiplicata per la tangente dell'angolo opposto, cioè $\overline{HB} = \overline{AH} \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Anche per il teorema di Lagrange valgono osservazioni analoghe a quelle del teorema di Rolle (figura 3).



a. Il grafico di questa funzione ha più punti in cui la tangente è parallela alla retta *AB*.

b. Nel punto *c* la funzione non è derivabile. Il suo grafico non ha punti in cui la tangente è parallela alla retta *AB*.

◀ **Figura 3**
a) I punti che verificano il teorema di Lagrange possono essere più di uno.
b) Esaminiamo un esempio in cui una delle ipotesi non è verificata e quindi non troviamo la proprietà caratteristica del teorema.

ESEMPIO

Consideriamo, nell'intervallo $[1; 2]$, la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}.$$

Questa funzione è continua e derivabile per ogni $x \neq 0$. Quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange.
Verifichiamo se esiste un punto $c \in \,]1; 2[$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$.
Poiché

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - 1 \cdot (x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

e

$$f(1) = 2,\ f(2) = \frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2},$$

deve essere:

$$1 - \frac{1}{c^2} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{c^2} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad c^2 = 2 \quad \rightarrow \quad c = \pm\sqrt{2}.$$

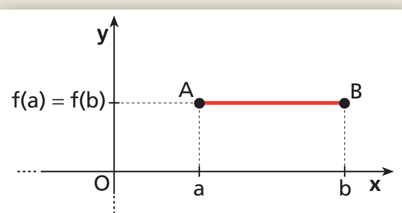
Quindi, per $c_1 = \sqrt{2} \in \,]1; 2[$, il teorema di Lagrange è verificato.

3. LE CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI LAGRANGE

Dal teorema di Lagrange discendono i seguenti teoremi.

TEOREMA

Se una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a;b]$, derivabile in $]a;b[$ e tale che $f'(x)$ è nulla in ogni punto interno dell'intervallo, allora $f(x)$ è costante in tutto $[a;b]$.



DIMOSTRAZIONE

Applichiamo il teorema di Lagrange all'intervallo $[a; x]$, dove x è un punto qualsiasi di $[a;b]$ diverso da a; esiste un punto $c \in]a; x[$ per cui si ha:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c) = 0 \rightarrow f(x)-f(a) = 0 \rightarrow f(x) = f(a).$$

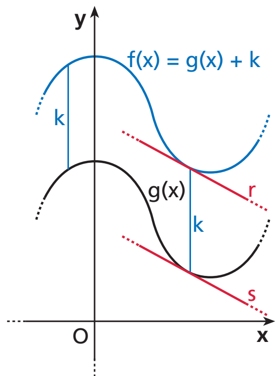
Quindi f è costante in tutto $[a;b]$.

- $f'(c) = 0$ per ipotesi.

TEOREMA

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue nell'intervallo $[a;b]$, derivabili in $]a;b[$ e tali che $f'(x) = g'(x)$ per ogni $x \in]a; b[$, allora esse differiscono per una costante.

Significato geometrico



Se $f'(x) = g'(x)$, r e s sono parallele.

DIMOSTRAZIONE

Chiamiamo $z(x)$ la loro differenza, ossia $z(x) = f(x) - g(x)$; si ha:

$$z'(x) = f'(x) - g'(x).$$

Per ipotesi $f'(x) = g'(x)$, quindi $z'(x) = 0$, per ogni x in $]a;b[$.
Per il teorema precedente, $z(x) = k$ in tutto $[a; b]$ e quindi $f(x) - g(x) = k$.

Criterio di derivabilità

TEOREMA

Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a; b]$, derivabile in $]a; b[$ a eccezione al più di un punto $x_0 \in]a; b[$ e se

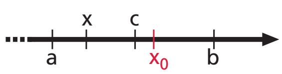
$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = l,$$

allora la funzione è derivabile in x_0 e risulta:

$$f'(x_0) = l.$$

- Il criterio è utile per esaminare la derivabilità di una funzione in un punto senza ricorrere al calcolo del limite del rapporto incrementale.

DIMOSTRAZIONE



Se consideriamo un punto $x < x_0$, allora nell'intervallo $[x; x_0]$ è applicabile il teorema di Lagrange, perché $f(x)$ è continua e derivabile nei punti interni, quindi deve esistere almeno un punto $c \in]x; x_0[$ per il quale si ha:

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} = f'(c).$$

- Questo è vero $\forall x \in]a; x_0[$.

Calcoliamo i limiti dei due membri per $x \to x_0^-$. Al primo membro, per definizione di derivata sinistra, si ha:

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} = f'_-(x_0).$$

Al secondo membro, se $x \to x_0^-$ anche $c \to x_0^-$, quindi per ipotesi si ha:

$$\lim_{c\to x_0^-} f'(c) = l.$$

Dunque si ottiene:

$$f'_-(x_0) = l.$$

Si procede in modo analogo se si considera $x > x_0$, ottenendo:

$$f'_+(x_0) = l.$$

Si conclude allora che:

$$f'(x_0) = l.$$

- Il teorema esprime una **condizione sufficiente** ma non necessaria per la derivabilità. Quindi, anche se non sono verificate le ipotesi del teorema, la funzione può essere derivabile.

ESEMPIO

Verifichiamo se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 - 1} & \text{se } x \le 0 \\ -\sqrt{x^2 + 1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è derivabile in $x = 0$.

La funzione è continua perché $\lim_{x \to 0^-} \sqrt[3]{x^3 - 1} = \lim_{x \to 0^+} -\sqrt{x^2 + 1} = -1$.

Calcoliamo $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$:

$$f'_-(x) = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}x^2}{\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}},$$

$$f'_+(x) = -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

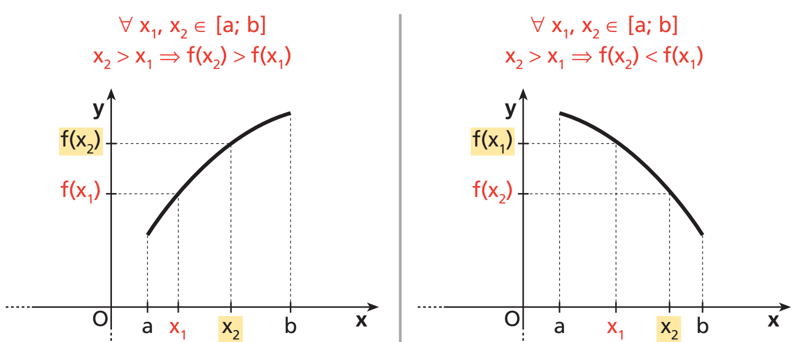
Poiché $\lim_{x \to 0^-} f'_-(x) = \lim_{x \to 0^+} f'_+(x) = 0$, la funzione è derivabile in $x = 0$.

Le funzioni crescenti e decrescenti

Nella figura 4 forniamo due esempi per richiamare le definizioni relative alle funzioni crescenti e decrescenti.

Ricordiamo che quando parliamo di funzione crescente (o decrescente), senza precisare altro, intendiamo considerare la funzione crescente (o decrescente) in senso stretto.

● «In senso stretto» ci dice che dobbiamo considerare la relazione $>$ (o $<$) e non $\ge$ (o $\le$).



a. Se una funzione $y = f(x)$ è crescente in un intervallo, incrementando la variabile x si ottiene un incremento anche della y.

b. Se una funzione $y = f(x)$ è decrescente in un intervallo, incrementando la variabile x si ottiene un decremento della y.

◄ **Figura 4**

Per le funzioni crescenti e decrescenti vale il seguente teorema.

TEOREMA

Data una funzione $y = f(x)$, continua in un intervallo I e derivabile nei punti interni di I, essa è:

1. crescente in I, se in ogni punto interno di I la sua derivata prima è positiva;
2. decrescente in I, se in ogni punto interno di I la sua derivata prima è negativa.

● L'intervallo I può essere sia limitato sia illimitato.

● Questo teorema è una **condizione sufficiente** per affermare che una funzione è crescente o decrescente in un intervallo.

DIMOSTRAZIONE

1. Siano x_1 e $x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$.
Per il teorema di Lagrange, applicato a $f(x)$ nell'intervallo $[x_1; x_2]$, si ha:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad \text{con } c \in \left]x_1; x_2\right[.$$

Essendo $x_2 - x_1 > 0$ e per ipotesi $f'(c) > 0$, anche $f(x_2) - f(x_1) > 0$, da cui:

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Poiché x_1 e x_2 sono punti qualsiasi di I, la funzione è crescente in I.

2. Procedendo in modo analogo al caso precedente si ottiene:

$$f(x_2) - f(x_1) < 0.$$

Infatti $x_2 - x_1 > 0$ e per ipotesi $f'(c) < 0$, quindi $f(x_2) < f(x_1)$.
Pertanto la funzione è decrescente in I.

- Il teorema di Lagrange vale perché la funzione è continua in $[x_1; x_2]$ e derivabile in $]x_1; x_2[$.
- Se una frazione è positiva e lo è anche il suo denominatore, deve esserlo anche il numeratore.

Possiamo applicare questo teorema per determinare gli intervalli in cui una funzione è crescente o decrescente, studiando il segno della sua derivata prima.

ESEMPIO

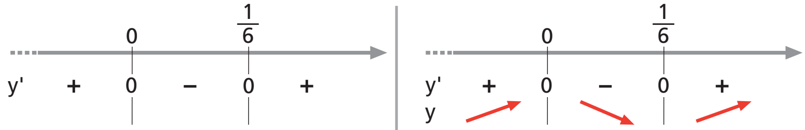
Determiniamo in quali intervalli la funzione $y = 4x^3 - x^2 + 1$, definita per ogni x reale, è crescente e in quali intervalli è decrescente.
Calcoliamo la derivata prima: $y' = 12x^2 - 2x$.
Studiamo il segno di y' e compiliamo il quadro dei segni (figura 5*a*).

$$12x^2 - 2x > 0 \rightarrow 2x(6x-1) > 0 \rightarrow x < 0 \vee x > \frac{1}{6}.$$

Applicando il teorema precedente (figura 5*b*), concludiamo che:

- per $x < 0$ $\quad f(x)$ è crescente;
- per $0 < x < \frac{1}{6}$ $\quad f(x)$ è decrescente;
- per $x > \frac{1}{6}$ $\quad f(x)$ è crescente.

▶ Figura 5



a. Il quadro dei segni di *y'*.

b. Negli intervalli con segno positivo, la freccia rivolta verso l'alto dice che la funzione *y* è crescente; in quelli con segno negativo, la freccia rivolta verso il basso indica che la funzione è decrescente.

Si può invertire il teorema precedente nel seguente modo.

TEOREMA

Data una funzione $y = f(x)$, continua in un intervallo I e derivabile nei punti interni di I:

1. se $f(x)$ è crescente in I, allora $f'(x) \geq 0$ per ogni x interno a I;
2. se $f(x)$ è decrescente in I, allora $f'(x) \leq 0$ per ogni x interno a I.

- Per esempio, la funzione $f(x) = x^3$ è crescente in $\mathbb{R}$, e si ha $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

ESPLORAZIONE

La matematica delle multe

SICVE e Autovelox

Il SICVE, noto anche come «Safety Tutor», è un acronimo che sta per «Sistema Informativo per il Controllo della Velocità».
È stato introdotto in alcuni tratti della rete autostradale italiana a partire dal 2004.

▲ Figura 1

▲ Figura 2

Il funzionamento del Safety Tutor è leggermente diverso da quello dell'Autovelox.
Quest'ultimo, infatti, rileva la velocità dell'autoveicolo che possiamo definire istantanea, perché riferita a un tratto di strada molto breve (figura 3).

◄ Figura 3

Invece il Safety Tutor misura la velocità media di un autoveicolo su un tragitto relativamente lungo, in genere dell'ordine della decina di kilometri.

Che cosa fa il Safety Tutor

Una fotocamera digitale fotografa le targhe delle autovetture che transitano su un «punto di controllo» iniziale (il passaggio degli autoveicoli è rilevato mediante un dispositivo inserito nell'asfalto). I dati sono inviati a un elaboratore elettronico che li memorizza fino a quando i veicoli osservati giungono a un «punto di controllo» finale, dove il passaggio dei veicoli viene nuovamente rilevato e fotografato. Il computer calcola la velocità media di ciascun autoveicolo e scarta le foto di quei veicoli che hanno tenuto una velocità media non superiore al limite di velocità consentito.
Le foto che rimangono sono quelle delle auto che hanno viaggiato a una media superiore al limite di velocità.

Il teorema e la multa

Il teorema di Lagrange consente di affermare che tali auto hanno superato, almeno una volta, il limite.
Infatti, possiamo dare un'interpretazione cinematica della figura 2 di pagina 1720. Se x rappresenta il tempo e $f(x)$ indica la distanza percorsa dall'auto, il rapporto

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ fornisce la velocità media dell'autovettura nell'intervallo temporale $]a; b[$. Invece, per la relazione che esiste tra velocità istantanea e derivata, $f'(c)$ rappresenta la velocità dell'autovettura nell'istante c. Il teorema di Lagrange afferma quindi che esiste almeno un istante dell'intervallo $]a; b[$ in cui la velocità istantanea dell'autovettura è uguale alla velocità media tenuta nello stesso intervallo. Un teorema matematico è perciò alla base del sistema di rilevazione delle infrazioni dei limiti di velocità sulle nostre autostrade.

Attività

Autovelox o Safety Tutor?

- Cerca in Internet notizie riguardanti il funzionamento del sistema Safety Tutor e dell'Autovelox; cerca inoltre informazioni relative alla loro efficacia nel ridurre il numero di incidenti dovuti all'alta velocità.

Cerca nel Web:
Safety Tutor Autovelox funzionamento, teorema Lagrange

Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matematico francese, è considerato uno dei fondatori dell'analisi moderna per il rigoroso metodo critico che introdusse nei fondamenti del calcolo infinitesimale.

4. IL TEOREMA DI CAUCHY

TEOREMA

Teorema di Cauchy

Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono:

- continue nell'intervallo limitato e chiuso $[a; b]$,
- derivabili in ogni punto interno a questo intervallo,
- $g'(x) \neq 0$ per ogni x interno ad $[a; b]$,

allora esiste almeno un punto c interno ad $[a; b]$ in cui si ha:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

cioè il rapporto fra gli incrementi delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ nell'intervallo $[a; b]$ è uguale al rapporto fra le rispettive derivate calcolate in un particolare punto c interno all'intervallo.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo la funzione:

$$F(x) = f(x) - kg(x), \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

Per ipotesi, $F(x)$ è continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$, perché differenza di funzioni continue e derivabili in tali intervalli.

Determiniamo k in modo che $F(x)$ soddisfi la terza ipotesi del teorema di Rolle e cioè $F(a) = F(b)$.

Deve essere:

$$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \quad \to \quad k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

La funzione $F(x)$ diventa allora:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g(x).$$

$F(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, perciò esiste almeno un punto $c \in \,]a; b[$ tale che $F'(c) = 0$.

Si ha

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(x),$$

da cui:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(c) = 0.$$

Si ottiene così:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

ESEMPIO

Consideriamo, nell'intervallo $[1; 3]$, le funzioni:

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 1 \qquad \text{e} \qquad g(x) = 2x^2.$$

Queste funzioni sono continue e derivabili per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Inoltre $g'(x) = 4x \neq 0 \quad \forall x \in \,]1; 3[$.
Quindi le ipotesi del teorema di Cauchy sono soddisfatte. Verifichiamo se esiste $c \in \,]1; 3[$ tale che:

$$\frac{f(3) - f(1)}{g(3) - g(1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Poiché $f(1) = -1$, $f(3) = 13$, $g(1) = 2$, $g(3) = 18$, si ha:

$$\frac{f(3) - f(1)}{g(3) - g(1)} = \frac{13 + 1}{18 - 2} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}.$$

Inoltre:

$$f'(x) = 6x - 5,\ g'(x) = 4x \quad \rightarrow \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{6c - 5}{4c}.$$

Allora:

$$\frac{6c - 5}{4c} = \frac{7}{8} \quad \rightarrow \quad \frac{12c - 10}{8c} = \frac{7c}{8c} \quad \rightarrow \quad 5c = 10 \quad \rightarrow \quad c = 2.$$

Poiché $c = 2 \in \,]1; 3[$, il teorema di Cauchy è verificato.

5. IL TEOREMA DI DE L'HOSPITAL

IN PRATICA
▶ Videolezione 71

Il calcolo delle derivate e i teoremi studiati finora sono utili anche per il calcolo di alcuni limiti che si presentano sotto la forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$. Ciò è possibile in base al seguente teorema, che è noto anche come *regola di De L'Hospital*.

● Guillaume-François-Antoine de L'Hospital (1661-1704), matematico francese, fu uno dei massimi promotori del calcolo infinitesimale. Il suo maggior merito fu quello di aver dato un assetto sistematico a tutte le conoscenze e a tutti i risultati conseguiti fino a quel momento nell'ambito dell'analisi.

TEOREMA

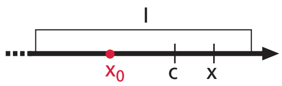
Teorema di De L'Hospital

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite nell'intorno I di un punto x_0, se:

- $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0 e $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
- $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $I - \{x_0\}$,
- $g'(x) \neq 0$ in $I - \{x_0\}$,
- esiste $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

allora esiste anche $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e risulta:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$



DIMOSTRAZIONE

Se consideriamo un punto qualsiasi x dell'intorno I diverso da x_0, possiamo applicare il teorema di Cauchy alle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ nell'intervallo $[x_0; x]$. Esiste allora un punto $c \in]x_0; x[$ per cui:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Poiché per ipotesi è $f(x_0) = g(x_0) = 0$, scriviamo:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Se $x \to x_0$ anche $c \to x_0$, quindi possiamo scrivere:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

ma poiché è $\lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora concludiamo che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo $\lim_{x \to 1} \frac{4x^2-4}{\ln x}$.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Le due funzioni $f(x) = 4x^2 - 4$ e $g(x) = \ln x$ verificano in un intorno di 1 le ipotesi del teorema di De L'Hospital, quindi possiamo scrivere che:

$$\lim_{x \to 1} \frac{4x^2-4}{\ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{8x}{\frac{1}{x}} = 8.$$

Si può dimostrare che il teorema è valido anche quando le due funzioni non sono definite in x_0, ma la prima ipotesi viene sostituita da

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0,$$

oppure:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty.$$

Il teorema è vero anche se I è un intorno *destro* o *sinistro* di x_0, in tal caso ovviamente si considerano i limiti per $x \to x_0^+$ o per $x \to x_0^-$.

Il teorema si estende anche al caso di limite per $x \to +\infty$ (o $-\infty$). In questo caso le condizioni del teorema non devono essere vere per un intorno di un punto, bensì deve esistere un valore $M > 0$ tale che esse siano soddisfatte $\forall x > M$ (o $x < -M$). Si ha allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

e la relazione è analoga per $x \to -\infty$.

Per $x \to \infty$, il teorema si dimostra effettuando il cambiamento di variabile $z = \frac{1}{x}$.

ESEMPIO

Calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\ln x}{2x+1}.$$

Tale limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, ed essendo rispettate le altre ipotesi del teorema di De L'Hospital, possiamo scrivere:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\ln x}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{2} = \frac{3}{2}.$$

● Osserva che per applicare la regola di De L'Hospital calcoliamo il rapporto delle derivate e **non** la derivata del quoziente.

Nel caso in cui il limite del rapporto delle derivate si presenti anch'esso come una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$ e le funzioni $f'(x)$ e $g'(x)$ soddisfino le ipotesi del teorema, si può passare al limite del quoziente delle derivate seconde, e così via per le derivate successive.

ESEMPIO

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{2x^3}.$$

Tale limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Applicando il teorema di De L'Hospital, essendo verificate le sue ipotesi, possiamo scrivere:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{6x^2}.$$

Anche questo limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.
Applichiamo ancora il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{6x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{12x} = -\frac{1}{12}.$$

● Abbiamo utilizzato il limite fondamentale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Pertanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{2x^3} = -\frac{1}{12}.$$

● Se non esiste $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, non è detto che non possa esistere $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Per esempio, consideriamo $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\operatorname{sen} x}{7x-\operatorname{sen} x}$. Abbiamo la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ e possiamo provare ad applicare il teorema di De L'Hospital ottenendo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+\cos x}{7-\cos x},$$

che non esiste, mentre, per il limite iniziale, dividendo numeratore e denominatore per x, otteniamo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\operatorname{sen} x}{7x-\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{7-\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{2}{7}.$$

Applicazioni ad altre forme indeterminate

Forma indeterminata $0 \cdot \infty$

Se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty,$$

per calcolare il limite del prodotto $f(x) \cdot g(x)$ possiamo osservare che:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

Quindi ci siamo ricondotti alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per la quale possiamo applicare il teorema di De L'Hospital.

Analogamente, trasformando il prodotto nella forma

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

ci riconduciamo alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

ESEMPIO

Calcoliamo:

$$\lim_{x \to +\infty} 3x \cdot e^{-4x}.$$

Questo limite si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$.

Applicando il ragionamento precedente, abbiamo:

$$\lim_{x \to +\infty} 3x \cdot e^{-4x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{e^{4x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{4e^{4x}} = 0.$$

Forma indeterminata $+\infty - \infty$

Quando si deve calcolare il limite della differenza di due funzioni che tendono entrambe a $+\infty$ o a $-\infty$, si cerca di scrivere la differenza come prodotto o quoziente di funzioni in modo da ricondursi a una delle forme precedenti.

ESEMPIO

Calcoliamo:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{3}{x} \right).$$

Il limite è nella forma indeterminata $+\infty - \infty$.
Ma poiché

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{3}{x} = \frac{x - 3 \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x},$$

e la seconda espressione tende a $\frac{0}{0}$, possiamo applicare il teorema di De l'Hospital a quest'ultima:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{3}{x} \right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 3 \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - 3 \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = -\infty.$$

Forme indeterminate 0^0, 1^∞, ∞^0

Queste forme indeterminate si presentano quando si deve calcolare il limite

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} \quad (\text{con } f(x) > 0),$$

in uno dei seguenti casi:

a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0;$

b) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty;$

c) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$

Ma poiché

$$[f(x)]^{g(x)} = [e^{\ln f(x)}]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)},$$

si ha:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \to x_0} [g(x) \ln f(x)]}.$$

Quindi basta calcolare $\lim_{x \to x_0} [g(x) \cdot \ln f(x)]$, che è della forma $0 \cdot \infty$.

ESEMPIO

Calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0^+} (e^x - 1)^{2x}.$$

Questo limite è nella forma indeterminata 0^0. Allora dobbiamo calcolare:

$$\lim_{x \to 0^+} [2x \cdot \ln(e^x - 1)] = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{e^x}{e^x - 1}}{-\frac{1}{2x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} e^x \cdot \frac{-2x^2}{e^x - 1} = 1 \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{-2x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-4x}{e^x} = 0.$$

Abbiamo applicato il teorema di De L'Hospital due volte consecutive.

Pertanto:

$$\lim_{x \to 0^+} (e^x - 1)^{2x} = e^{\lim_{x \to 0^+} [2x \cdot \ln(e^x - 1)]} = e^0 = 1.$$

Vedremo negli esercizi esempi dei casi 1^∞ e ∞^0.

Il confronto di infiniti

Applicando il teorema di De L'Hospital, ritroviamo i risultati ottenuti con la gerarchia degli infiniti, nel confronto tra le funzioni $\ln x$, x^α (con $\alpha > 0$), e^x per $x \to +\infty$.

I limiti $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ si presentano nelle forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ e le funzioni considerate verificano le ipotesi del teorema di De L'Hospital, per cui:

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\alpha x^{\alpha - 1}} = \ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = +\infty;$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$

IL TASSO ISTANTANEO DI VARIAZIONE E LE TAVOLE DI SOPRAVVIVENZA

La decrescita dei sopravvissuti è costante o ha un comportamento molto diverso al variare dell'età?

▶ Il quesito completo a pag. 1717

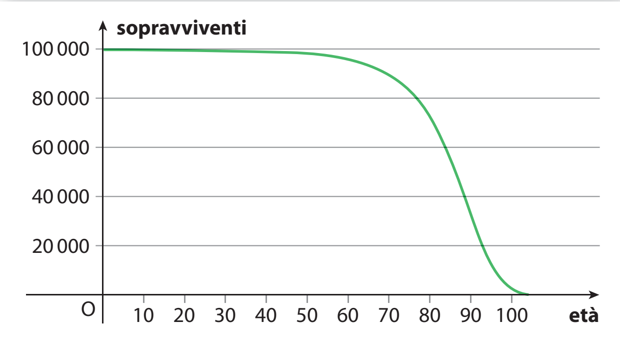
Sul sito dell'ISTAT, alla pagina http://demo.istat.it/unitav/, è possibile trovare diversi dati riferiti alle tavole di sopravvivenza (o mortalità). Noi abbiamo preso in considerazione la tavola di sopravvivenza del 2005 della popolazione italiana femminile, di cui riportiamo qui di seguito un estratto relativamente alle età 33-52.

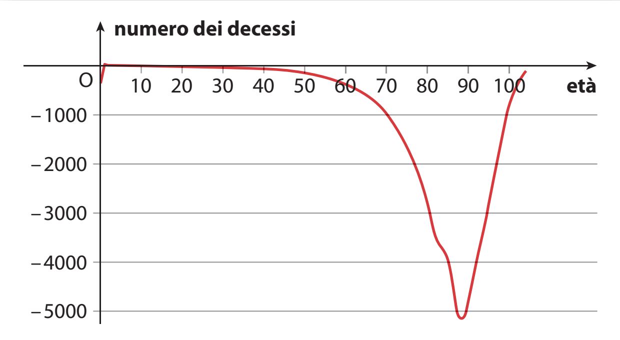
Età	Sopravviventi	Età	Sopravviventi	Età	Sopravviventi	Età	Sopravviventi	Età	Sopravviventi
33	99 095	37	98 932	41	98 699	45	98 356	49	97 853
34	99 060	38	98 881	42	98 626	46	98 249	50	97 695
35	99 021	39	98 826	43	98 544	47	98 129	51	97 521
36	98 979	40	98 766	44	98 455	48	97 996	52	97 335

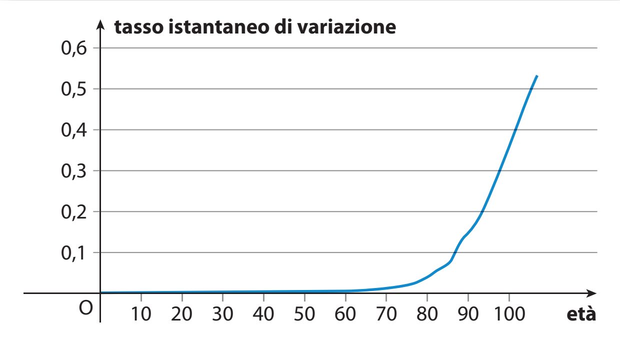
Il grafico 1 riporta l'andamento del numero dei sopravviventi y (in una popolazione di 100 000 femmine neonate) in funzione dell'età x. Naturalmente si tratta di una funzione decrescente, ma la decrescita non è costante: fin verso i 50-60 anni, il grafico sembra quello di una funzione costante o quasi, quindi la decrescita è trascurabile. Dopo quell'età la funzione decresce molto rapidamente, per poi rallentare intorno ai 90 anni, arrivando a 0 dopo i 100 anni.

Per studiare meglio quanto osservato, tracciamo il grafico 2, che riporta le variazioni della popolazione, ossia le differenze tra i successivi valori dei sopravviventi al variare dell'età. In altri termini, i valori assoluti delle ordinate forniscono il numero medio dei decessi.
Se si utilizza un modello continuo per rappresentare i dati, il grafico 2 rappresenta la derivata y' della funzione y del grafico 1, ossia la sua velocità di decrescita. La funzione $y = f(x)$ è decrescente e la sua derivata è negativa per ogni x. La velocità di decrescita y' ha un minimo, e quindi la variazione è massima in valore assoluto, tra gli 80 e i 90 anni; dopo i 90 anni la variazione tende rapidamente a 0, com'è ovvio, dato che i sopravvissuti sono talmente pochi che la variazione diventa nulla o quasi.

Più significativo ancora è considerare il tasso assoluto istantaneo di variazione, $\frac{|f'(x)|}{f(x)}$, che, per ogni età x, fornisce la velocità di variazione in relazione al valore assunto dalla fuzione f, ossia in rapporto al numero di sopravviventi all'età x. Si ottiene il grafico 3, in cui si può osservare che la mortalità è pressoché nulla fino a circa 60 anni, per poi crescere sempre più rapidamente.

1


2


3


LABORATORIO DI MATEMATICA
I TEOREMI SULLE DERIVATE

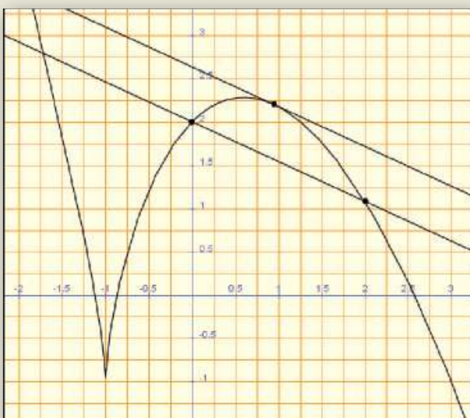
ESERCITAZIONE GUIDATA

Data la funzione $g(x) = (3-x)\sqrt[3]{(x+1)^2} - 1$, continua in $\mathbb{R}$ e derivabile in $\mathbb{R} - \{-1\}$, con Wiris cerchiamo un punto $T \in [0; 2]$ che soddisfi il teorema di Lagrange e verifichiamo che la tangente t in T è parallela alla retta r passante per i punti $A(0; g(0))$ e $B(2; g(2))$.

- Attiviamo Wiris, digitiamo la funzione data $g(x)$ e assegniamo ai parametri a e b i valori degli estremi dell'intervallo.
- Stabiliamo le coordinate di A e di B.
- Determiniamo l'equazione della retta r.
- Applichiamo il teorema di Lagrange e troviamo l'ascissa di un punto T che lo soddisfa.

```
g(x) = (3−x)·∛((x+1)²) −1;
a = 0;
b = 2;
A = punto(a·1.0, g(a)) → (0., 2.)
B = punto(b·1.0, g(b)) → (2., 1.0801)
r = retta(A, B) → y=−0.45996·x+2.
p = risolvere(g(x)' = (g(b)−g(a)) / (b−a));
T=punto(p₁(x), g(p₁(x))) → (0.94446, 2.2023)
m = sostituire(g(x)', x, p₁(x)) → −0.45996
t = retta(T, m) → y = −0.45996·x+2.6367
tracciare({g(x), A, B, r, T, t}) → tracciante1
```

▲ **Figura 1**



▲ **Figura 2**

- Ricaviamo m, il coefficiente angolare della t, sostituendo l'ascissa di T nella derivata di $g(x)$. Notiamo qui che m corrisponde al coefficiente angolare della r, cioè che t è parallela a r.
- Determiniamo l'equazione della tangente in T alla $g(x)$.
- Impostiamo ed eseguiamo l'istruzione per tracciare i grafici di g, di t, di r e dei punti A, B e T come vediamo in figura 2.

Nel sito: ▶ **1 esercitazione guidata** ▶ **13 esercitazioni in più**

Esercitazioni

Date le seguenti funzioni, con l'aiuto del computer verifica *se* negli intervalli segnati a fianco valgono le ipotesi del teorema indicato. In caso affermativo, trova gli eventuali punti la cui esistenza è assicurata dal teorema. Illustra quanto trovato con un grafico.

Teorema di Lagrange

1 $f(x) = 5 - |x^2 + 4x|$, $[-2; 1], [-4; -1]$. $\left[\nexists; -\frac{5}{2}\right]$

Teorema di Rolle

2 $f(x) = -x^2 + 3x$, $[1; 2], [2; 3]$. $\left[\frac{3}{2}; \nexists\right]$

Teorema di Cauchy

3 $f(x) = x^3 - x^2, g(x) = 2x^2$, $[2; 4]$. $\left[\frac{28}{9}\right]$

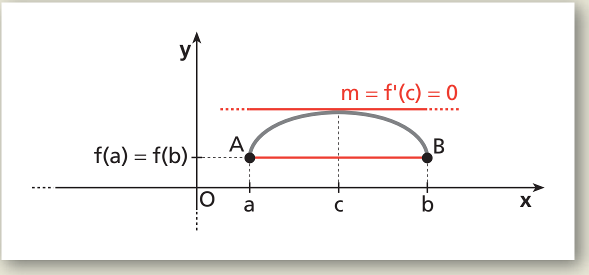
LA TEORIA IN SINTESI
I TEOREMI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

1. IL TEOREMA DI ROLLE

Teorema di Rolle
Data una funzione $f(x)$ definita in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$ con le seguenti proprietà:

- $f(x)$ è continua in $[a; b]$,
- $f(x)$ è derivabile in $]a; b[$,
- $f(a) = f(b)$,

allora esiste almeno un punto c, interno all'intervallo, per il quale risulta $f'(c) = 0$.



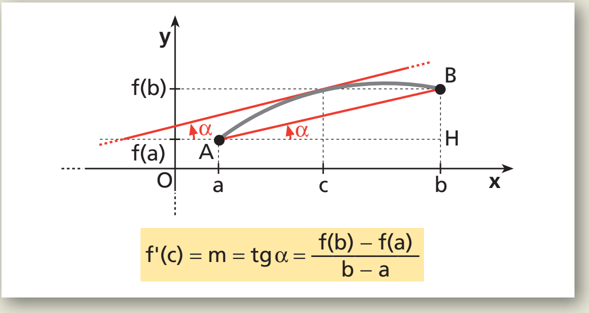
2. IL TEOREMA DI LAGRANGE

Teorema di Lagrange
Se una funzione $f(x)$ è:

- continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$,
- derivabile in ogni punto interno a esso,

allora esiste almeno un punto c, interno all'intervallo, per cui vale la relazione:

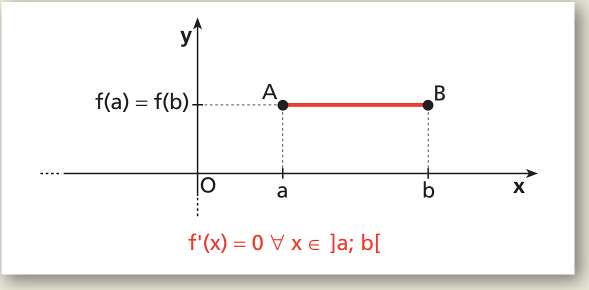
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$



3. LE CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI LAGRANGE

Se $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a; b]$ e $f'(x)$ è nulla in ogni punto interno dell'intervallo, allora **$f(x)$ è costante** in tutto $[a; b]$.

Se in tutto l'intervallo $[a; b]$ due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono continue, derivabili nei punti interni e le derivate prime sono uguali, esse **differiscono per una costante**.



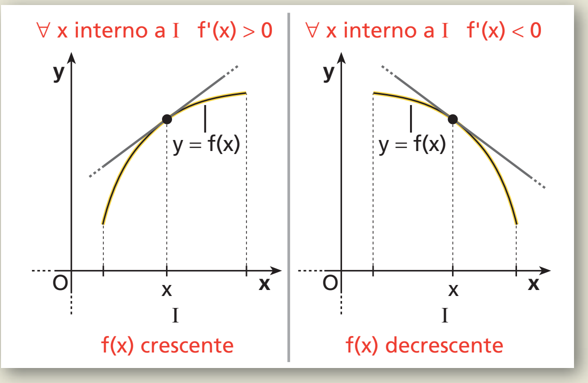
Criterio di derivabilità
Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a; b]$, derivabile in $]a; b[$ a eccezione al più di un punto $x_0 \in \,]a; b[$ e se

$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = l$, allora la funzione è derivabile in x_0 e risulta:

$f'(x_0) = l$.

- **Le funzioni crescenti e decrescenti**
Una funzione $y = f(x)$ in un intervallo I:
  - è **crescente** se $\forall x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, si ha che $f(x_1) < f(x_2)$;
  - è **decrescente** se $\forall x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, si ha che $f(x_1) > f(x_2)$.

- Data una funzione $y = f(x)$, continua in un intervallo I e derivabile nei suoi punti interni:
  - se $f'(x) > 0$, allora $f(x)$ è crescente in I;
  - se $f'(x) < 0$, allora $f(x)$ è decrescente in I.



4. IL TEOREMA DI CAUCHY

- **Teorema di Cauchy**
Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono continue nell'intervallo limitato e chiuso $[a; b]$ e derivabili in ogni punto interno a questo intervallo e inoltre in $]a; b[$ è sempre $g'(x) \neq 0$, allora esiste almeno un punto c interno ad $[a; b]$ in cui:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

5. IL TEOREMA DI DE L'HOSPITAL

- **Teorema di De L'Hospital**
Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite in un intorno I di un punto x_0 (escluso al più x_0), sono derivabili in tale intorno con $g'(x) \neq 0$, e inoltre le due funzioni per $x \to x_0$ tendono entrambe a 0 o a $+\infty$ ($-\infty$), e se esiste, per $x \to x_0$, il limite del rapporto $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ delle derivate delle funzioni date, allora esiste anche il limite del rapporto delle funzioni ed è:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- Il teorema si estende anche al caso di limite per $x \to +\infty$ (o $x \to -\infty$), dove le condizioni del teorema non devono essere vere per un intorno di un punto, bensì deve esistere un valore $M > 0$ tale che esse siano soddisfatte $\forall x > M$ (o $x < -M$).

In questo caso:

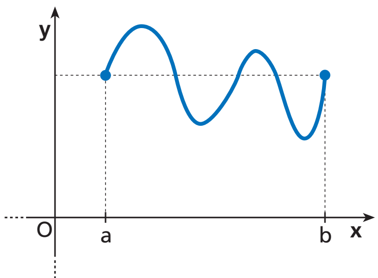
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1. IL TEOREMA DI ROLLE

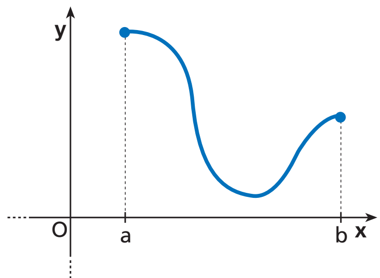
▶ Teoria a pag. 1718

Indica quale delle seguenti funzioni verifica il teorema di Rolle nell'intervallo $[a; b]$ e perché. Segna nel grafico il punto (o i punti) in cui vale la relazione del teorema.

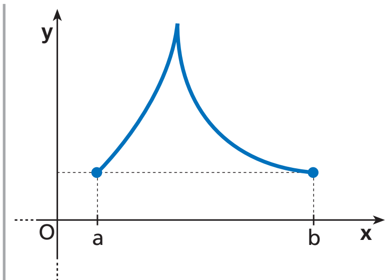
1



a ....

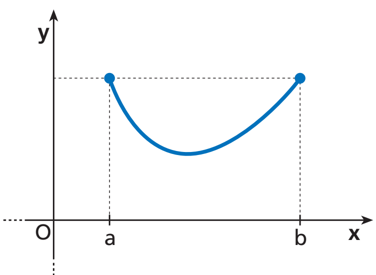


b ....

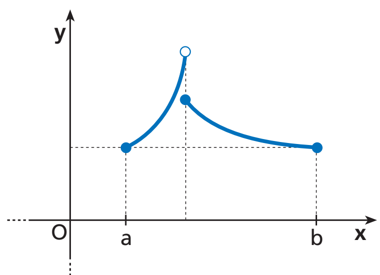


c .... [sì; no; no]

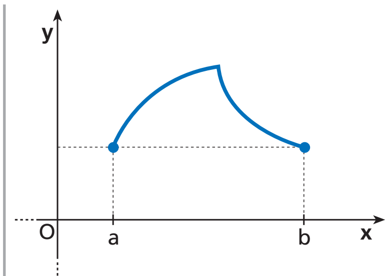
2



a ....



b ....



c .... [sì; no; no]

3 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la funzione $f(x) = -x^3 + 3x$, verifichiamo che nell'intervallo $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ valgono le ipotesi del teorema di Rolle e troviamo i punti la cui esistenza è assicurata dal teorema.

Si devono verificare tre condizioni:

- $f(x)$ è continua in $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$;
- $f(x)$ è derivabile in $]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$;
- $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3})$.

Le tre condizioni sono vere perché:

- la funzione è polinomiale, quindi continua in $\mathbb{R}$;
- la sua derivata $f'(x) = -3x^2 + 3$ esiste in $\mathbb{R}$;
- essendo:

$$f(-\sqrt{3}) = +3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0,$$

$$f(\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 0,$$

si ha $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3})$.

Deve esistere almeno un punto c nel quale:

$$f'(c) = 0.$$

La derivata nel punto c è:

$$f'(c) = -3c^2 + 3.$$

Sostituiamo nella precedente relazione:

$$-3c^2 + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad c^2 = 1 \quad \rightarrow \quad c = \pm 1.$$

Entrambi i valori $c = 1$ e $c = -1$ sono accettabili perché interni all'intervallo $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

Date le seguenti funzioni, verifica se nell'intervallo indicato a fianco valgono le ipotesi del teorema di Rolle e trova il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema.

4 $f(x) = -x^2 + 3x$, $\quad [1; 2]$. $\quad \left[c = \frac{3}{2}\right]$

5 $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $\quad [-3; 1]$. $\quad [c = -1]$

6 $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$, $[-3; 3]$. $[c_1 = -1; c_2 = 0; c_3 = 1]$

7 $f(x) = 2\cos x$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7}{4}\pi\right]$. $[c = \pi]$

8 $f(x) = \sqrt[5]{(x-1)^2}$, $[0; 1]$. $[f(0) \neq f(1)]$

9 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-2x} & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$, $[-2; 1]$. [$f(x)$ non è derivabile in $x = 0$]

10 $f(x) = 3x^3 - x$, $[0; 2]$. $[f(0) \neq f(2)]$

11 $f(x) = 4x^2 - 2x$, $[-1; 3]$. $[f(-1) \neq f(3)]$

12 $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$. [$f(x)$ non è continua in $x = 1$]

13 $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$, $[-1; 1]$. [$f(x)$ non è derivabile in $x = 0$]

14 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } x \leq 1 \\ -2x^2 + 8x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$, $[-3; 3]$. $[c_1 = -1; c_2 = 2]$

15 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{se } x < 1 \\ -x^3 + 5 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$, $[0; 2]$. [$f(x)$ non è derivabile in $x = 1$]

16 $f(x) = \ln(-x^2 + 9)$, $[-2; 2]$. $[c = 0]$

17 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $[-1; 1]$. $[c = 0]$

18 $f(x) = |-2x + 1|$, $[0; 1]$. $\left[f(x) \text{ non è derivabile in } x = \frac{1}{2}\right]$

19 Data la funzione $f(x) = ax^3 + (a-1)x$, trova per quale valore di a essa verifica le ipotesi del teorema di Rolle in $[-1; 2]$. $\left[a = \frac{1}{4}\right]$

Applicazioni del teorema di Rolle

20 **ESERCIZIO GUIDA**

Dimostriamo che l'equazione $x^3 + 3x - 2 = 0$ ha una sola soluzione reale.

Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 + 3x - 2$. Poiché la funzione è continua in $\mathbb{R}$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il suo grafico interseca l'asse x almeno in un punto, ossia l'equazione ha *almeno* una soluzione. Supponiamo ora per assurdo che la funzione si annulli in due punti distinti x_1 e x_2 (cioè supponiamo che l'equazione corrispondente abbia due soluzioni).
Poiché $f(x)$ è polinomiale, la funzione è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Inoltre $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Quindi $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[x_1; x_2]$. Allora esiste un punto $c \in]x_1; x_2[$ tale che $f'(c) = 0$. Ma:

$$f'(x) = 3x^2 + 3 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La derivata di $f(x)$ è sempre strettamente positiva, quindi non si annulla mai. Abbiamo pertanto raggiunto un assurdo.
Dunque $f(x)$ non si può annullare in due punti distinti, cioè l'equazione data non ammette più di una soluzione.

21 Dimostra che il grafico della funzione $y = x^5 + x^3 + 1$ interseca l'asse x in un solo punto.

22 Dimostra che l'equazione $6x^3 + 2x^2 + x + 4 = 0$ ammette una sola soluzione reale.

23 Data la funzione $f(x) = 3x^3 + x + 9$, verifica che l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione x_0 e dimostra che $x_0 \in [-2; 1]$.

24 Stabilisci se l'equazione $\ln x + 2x = 0$ ammette una sola soluzione nell'intervallo $\left[\frac{1}{8}; 1\right]$.

25 Se $f(x)$ è una funzione che ammette derivata prima e seconda in $[a; b]$ ed è tale che $f(a) = f(b) = f(c)$, con $c \in \,]a; b[$, dimostra che esiste un punto $d \in \,]a; b[$ tale che $f''(d) = 0$.

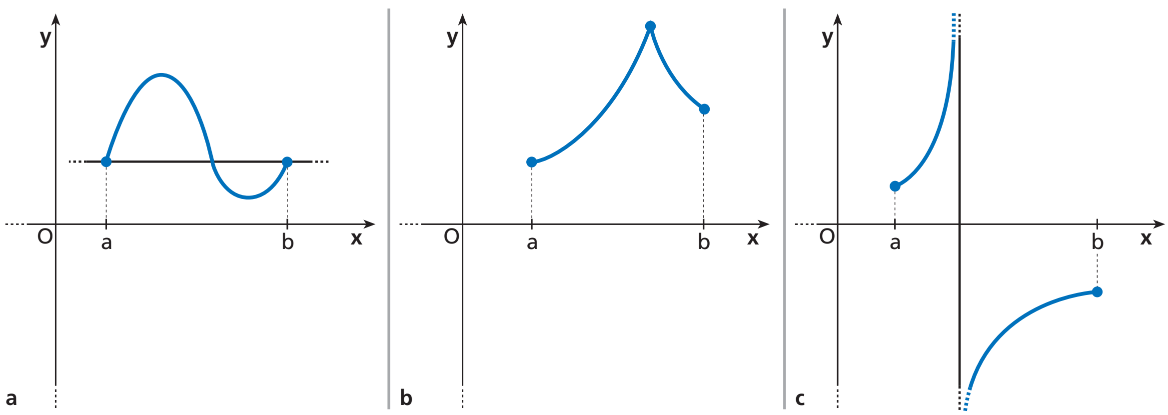
2. IL TEOREMA DI LAGRANGE

Teoria a pag. 1719

IN PRATICA
Videolezione 70

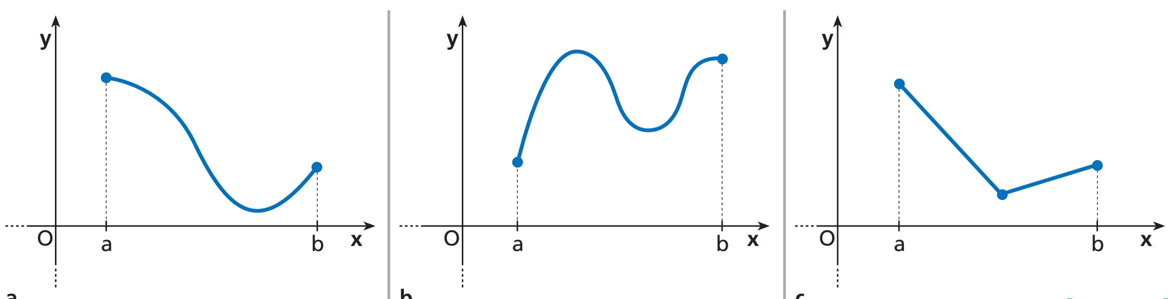
Indica quale delle seguenti funzioni verifica il teorea di Lagrange nell'intervallo $[a; b]$ e spiegane il motivo. Segna nel grafico il punto (o i punti) in cui vale la relazione del teorema.

26



.... [sì; no; no]

27



.... [sì; sì; no]

28 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la funzione $f(x) = x^3 - 2x$, verifichiamo che nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ valgono le ipotesi del teorema di Lagrange e troviamo i punti la cui esistenza è assicurata dal teorema.

La funzione $f(x)$ è continua in $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ e derivabile in $\left]-\frac{1}{2}; 2\right[$ perché è una funzione polinomiale.

Poiché sono verificate le ipotesi del teorema di Lagrange, deve esistere almeno un punto c nel quale:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f\left(-\frac{1}{2}\right)}{2 + \frac{1}{2}}.$$

Si ha:

$$f'(c) = 3c^2 - 2; \qquad f(2) = 4; \qquad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}.$$

Sostituiamo nella relazione precedente:

$$3c^2 - 2 = \frac{4 - \frac{7}{8}}{\frac{5}{2}} \quad \to \quad 3c^2 = 2 + \frac{\frac{25}{8}}{\frac{5}{2}} \quad \to \quad 3c^2 = \frac{5}{4} + 2 \quad \to \quad c^2 = \frac{13}{12} \quad \to \quad c = \pm\sqrt{\frac{13}{12}}.$$

Dei due valori, solo $\sqrt{\frac{13}{12}}$ è accettabile, perché appartiene all'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$.

Date le seguenti funzioni, stabilisci se nell'intervallo indicato a fianco valgono le ipotesi del teorema di Lagrange e trova il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema.

29 $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - x}$, $\quad \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$. $\quad$ [$f(x)$ è discontinua in $x = 0$ e in $x = 1$]

30 $f(x) = \ln(x + 1)$, $\quad [-1; 0]$. $\quad$ [$f(x)$ è discontinua in $x = -1$]

31 $f(x) = |x|$, $\quad [-2; 4]$. $\quad$ [$f(x)$ non è derivabile in $x = 0$]

32 $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x$, $\quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. $\quad$ $\left[f(x) \text{ è discontinua in } x = \frac{\pi}{2}\right]$

33 $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, $\quad [-1; 2]$. $\quad$ [$f(x)$ non è derivabile in $x = 0$]

34 $f(x) = 2x^2 + x + 1$, $\quad [-2; 3]$. $\quad$ $\left[c = \frac{1}{2}\right]$

35 $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$, $\quad [-2; 1]$. $\quad$ [$f(x)$ non è derivabile in $x = 0$]

36 $f(x) = |x^2 - 1|$, $\quad [2; 3]$. $\quad$ $\left[c = \frac{5}{2}\right]$

37 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$, $\quad [0; 2]$. $\quad$ $\left[c = \frac{-3 + \sqrt{39}}{3}\right]$

38 $f(x) = -\dfrac{1}{x} + 1$, $\quad [1; 2]$. $\quad$ $[c = \sqrt{2}]$

39 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x < 0 \\ 3x^2 + 2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, $\quad [-1; 2]$. $\quad$ [$f(x)$ non è derivabile in $x = 0$]

40 $f(x) = 2|-x + 2|$, $\quad [1; 3]$. $\quad$ [$f(x)$ non è derivabile in $x = 2$]

41 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & \text{se } x \leq 2 \\ x & \text{se } x > 2 \end{cases}$, $\quad [0; 3]$. $\quad$ [$f(x)$ non è continua in $x = 2$]

42 $f(x) = \ln x - x$, $\quad [1; e]$. $\quad$ $[c = e - 1]$

43 $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $\quad [-1; 1]$. $\quad$ [$f(x)$ non è derivabile in $x = 0$]

44 $f(x) = -x^2 + 3x$, $\quad [1; 2]$. $\quad$ $\left[c = \frac{3}{2}\right]$

45 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $\quad [0; 27]$. $\quad$ $[c = \sqrt{27}]$

46 $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$, $\quad [4; 9]$. $\quad$ $[c = \sqrt[3]{225}]$

47 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la funzione $y = f(x) = (x-1)^2$, troviamo (se esiste) il punto P del suo grafico, compreso fra $A(0; 1)$ e $B(3; 4)$, che verifica il teorema di Lagrange. Interpretiamo poi graficamente il risultato ottenuto.

Il grafico di $y = (x-1)^2$ è una parabola di vertice $V(1; 0)$.

La funzione è continua in $[0; 3]$ e derivabile in $]0; 3[$, con:

$$f'(x) = 2(x-1).$$

Pertanto vale il teorema di Lagrange ed esiste c tale che:

$$f'(c) = \frac{f(3)-f(0)}{3-0};$$

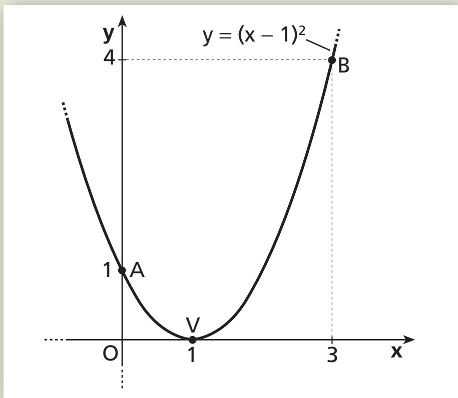
$$f'(c) = 2(c-1); \quad f(3) = 4; \quad f(0) = 1.$$

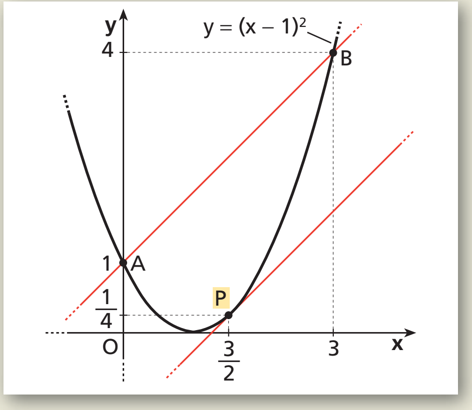
Sostituendo nella relazione precedente:

$$2c - 2 = \frac{4-1}{3} \rightarrow 2c = 1 + 2 \rightarrow c = \frac{3}{2}.$$

L'ascissa di P è $\frac{3}{2}$. Poiché $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$, il punto P ha coordinate $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

In $x = \frac{3}{2}$ si ha $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 1$ e il coefficiente angolare di AB è 1, quindi nel grafico P è il punto della parabola in cui la tangente è parallela alla retta passante per A e per B, estremi dell'intervallo considerato.





Date le seguenti funzioni, trova (se esiste) il punto P del grafico che verifica il teorema di Lagrange nell'intervallo individuato dai punti indicati a fianco. Interpreta poi graficamente i risultati ottenuti.

48 $f(x) = |x| + 1$, $A(-1; 2)$, $B(2; 3)$. [P non esiste]

49 $f(x) = -x^3 + 1$, $A(-2; 9)$, $B(1; 0)$. $[P(-1; 2)]$

50 $f(x) = -x^2 + 1$, $A(-1; 0)$, $B(2; -3)$. $\left[P\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)\right]$

51 $f(x) = \operatorname{sen} x$, $A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B\left(\frac{3}{4}\pi; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. $\left[P\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)\right]$

3. LE CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI LAGRANGE

▶ Teoria a pag. 1721

52 Verifica che le funzioni $y = -\operatorname{arcsen}(x-1)$ e $y = \arccos(x-1)$ differiscono per una costante e individuala. $\left[-\frac{\pi}{2}\right]$

53 Dimostra che la funzione $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ è costante in $\mathbb{R}^-$ e $\mathbb{R}^+$ e trova il valore di y. $\left[y = -\frac{\pi}{2} \text{ per } x < 0,\ y = \frac{\pi}{2} \text{ per } x > 0\right]$

Criterio di derivabilità

54 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo la continuità e la derivabilità della funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3}{x} & \text{se } x\le 1\\ 4x^2 & \text{se } x>1\end{cases}$$

- Studiamo la continuità.
  Per $x \le 1$ la funzione è razionale fratta e il denominatore si annulla per $x = 0$, quindi $f(x)$ è continua per $x \neq 0$; per $x > 1$ la funzione è continua.
  Calcoliamo:
  $$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+3}{x}=4 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^+}4x^2=4.$$
  Poiché i due limiti sono uguali a $f(1) = 4$, $f(x)$ è continua in $x = 1$.
  Si ha allora che $f(x)$ è continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- Studiamo la derivabilità.
  Calcoliamo la derivata di $f(x)$:
  $$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-(x^2+3)}{x^2} & \text{se } x<1\\ 8x & \text{se } x>1\end{cases} \quad \to \quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3}{x^2} & \text{se } x<1\\ 8x & \text{se } x>1\end{cases}$$
  Per $x < 1 \vee x > 1$ è derivabile, a eccezione del punto $x = 0$ in cui non è continua. Per stabilire se la funzione è derivabile in $x = 1$, applichiamo il criterio di derivabilità calcolando i limiti destro e sinistro di $f'(x)$ per $x \to 1$:
  $$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3}{x^2}=-2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^+}8x=8.$$
  Poiché i due limiti sono diversi, la funzione non è derivabile in $x = 1$.
  In $x = 1$ la funzione ha un punto angoloso.

Verifica che le seguenti funzioni sono continue e derivabili in $x_0 = 0$.

55 $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & \text{se } x<0\\ \dfrac{1}{x+1} & \text{se } x\ge 0\end{cases}$

56 $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1) & \text{se } -1<x\le 0\\ |\operatorname{sen} x| & \text{se } x>0\end{cases}$

Verifica che le seguenti funzioni sono continue ma non derivabili nel punto indicato.

57 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & \text{se } |x|\le 1\\ x^2-5x+4 & \text{se } x>1\end{cases}, \quad x_0=1.$

58 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x^2) & \text{se } x\le 0\\ x^3+2|x| & \text{se } x>0\end{cases}, \quad x_0=0.$

Studia la continuità e la derivabilità delle seguenti funzioni.

59 $y=\dfrac{x}{|x|-1}$ [continua e derivabile per $x \neq \pm 1$]

60 $y=\sqrt{1-x}$ [continua per $x \le 1$, derivabile per $x < 1$]

61 $y=|x|-2x^2$ [continua $\forall x \in \mathbb{R}$, derivabile per $x \neq 0$]

62 $y=\sqrt{2-|x|}$ [continua per $-2 \le x \le 2$, derivabile per $-2 < x < 2 \wedge x \neq 0$]

63 $y=\dfrac{|x^2-4|}{x-2}+2x^2$ [continua per $x \neq 2$, derivabile per $x \neq \pm 2$]

Determina i punti di discontinuità e di non derivabilità delle seguenti funzioni e indicane il tipo.

64 $y = \sqrt[3]{e^{-x} + 1}$ [derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$]

65 $y = x + \ln|x + 1|$ [$x = -1$ punto di discontinuità di II specie]

66 $y = \sqrt{x^3 + 1}$ [$x = -1$ punto di non derivabilità]

67 $y = \begin{cases} -2x + 1 & \text{se } x < 0 \\ 2x^2 + x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ [$x = 0$ punto angoloso]

68 $y = \begin{cases} 2\,\text{sen}\,x & \text{se } x < 0 \\ \cos x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ [$x = 0$ punto angoloso]

69 $y = \begin{cases} 4 & \text{se } x \leq 0 \\ 4(x^2 - 1) & \text{se } 0 < x < 1 \\ \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ [$x = 0$ punto di discontinuità di I specie, $x = 1$ punto angoloso]

70 $y = \begin{cases} e^{|x|} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{1 - x}{x - 2} & \text{se } x \geq 1 \wedge x \neq 2 \end{cases}$ [$x = 1$ punto di discontinuità di I specie, $x = 0$ punto angoloso, $x = 2$ punto di discontinuità di II specie]

71 $y = \begin{cases} x \ln x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ [$x = 0$ flesso a tangente verticale]

72 $y = \begin{cases} \dfrac{x}{x - 1} & \text{se } x \leq 2 \wedge x \neq 1 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$
[$x = 1$ punto di discontinuità di II specie, $x = 2$ punto di discontinuità di I specie, $x = 3$ punto di non derivabilità]

73 $y = e^x \sqrt[3]{(x - 1)^2}$ [$x = 1$ cuspide]

74 $y = \dfrac{\sqrt[3]{1 - x}}{3x}$ [$x = 0$ punto di discontinuità di II specie, $x = 1$ flesso a tangente verticale]

75 $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$ [$x = 0$ cuspide, $x = 1$ flesso a tangente verticale]

76 **TEST** In $x = 0$ la funzione $f(x) = \sin x\,|\cos x|$:

A è continua ma non derivabile.
B è derivabile.
C non è né continua né derivabile.
D ha un punto angoloso.

(*Politecnico di Torino, Test di autovalutazione*)

77 Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

a) dimostra che è continua in $x = 0$;
b) calcola $f'(x)$ per $x \neq 0$ e dimostra che non esiste $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$;
c) calcola $f'(0)$ applicando la definizione di derivata;
d) cosa puoi dedurre dal confronto dei risultati ottenuti in b) e c)?

$\left[\text{b) } f'(x) = 2x\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x};\ \text{c) } 0\right]$

La derivabilità e i parametri

78 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo per quali valori dei parametri a e b la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{2-x} & \text{se } -1\leq x<1\\ 2ax^2-bx-4 & \text{se } 1\leq x\leq 4\end{cases}$$

è derivabile nell'intervallo $[-1;4]$.

- È necessario che innanzitutto la funzione sia continua:
  per $-1\leq x<1$, la funzione è razionale fratta e il denominatore non si annulla mai, per cui $f(x)$ è continua in $[-1;1[$;
  per $1\leq x\leq 4$, la funzione è polinomiale, quindi è continua in $]1;4]$;
  affinché $f(x)$ sia continua in tutto l'intervallo $[-1;4]$ occorre però che sia continua anche in $x=1$ e quindi che $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$:

  $$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{a}{2-x}=a;$$

  $$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2ax^2-bx-4)=2a-b-4.$$

  Allora otteniamo la seguente condizione sui parametri:

  $$a=2a-b-4\ \rightarrow\ a=b+4.$$

- Verifichiamo la derivabilità:

  per $-1<x<1$, $\quad f'(x)=\dfrac{a}{(2-x)^2}$;

  per $1<x<4$, $\quad f'(x)=4ax-b$.

  $f(x)$ è derivabile in $x=1$ se $\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^+} f'(x)$:

  $$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{a}{(2-x)^2}=a,\qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}(4ax-b)=4a-b.$$

  $$a=4a-b\ \rightarrow\ b=3a.$$

  Otteniamo quindi un sistema di due equazioni nelle due incognite a e b:

  $$\begin{cases}a=b+4\\ b=3a\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=3a+4\\ b=3a\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-2a=4\\ b=3a\end{cases}\rightarrow$$

  $$\rightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=-6\end{cases}$$

  La funzione è derivabile quando $a=-2$ e $b=-6$.

79 Calcola a e b in modo che la funzione

$$f(x)=\begin{cases}x^3+ax & \text{se } x\leq 1\\ a\sqrt{x}+b & \text{se } x>1\end{cases}$$

sia derivabile nel punto $x=1$. Scrivi la derivata di $f(x)$.

$\left[a=-6,\ b=1;\ f'(x)=\begin{cases}3x^2-6 & \text{se } x\leq 1\\ -\dfrac{3}{\sqrt{x}} & \text{se } x>1\end{cases}\right]$

80 Trova a e b in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2a\,e^x & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x+a}{b-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

sia derivabile nel punto $x = 0$. $\left[a = -1; b = \frac{1}{2}\right]$

Determina il valore di a e di b in modo che la funzione $f(x)$ risulti continua e derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$.

81 $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - a & \text{se } x \leq 0 \\ x - 2b & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $[a = 2; b = 1]$

82 $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax - b & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ $[a = -1; b = -1]$

83 $f(x) = \begin{cases} -2ax^2 + bx & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x^2+1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $\left[a = \frac{1}{2}; b = \frac{3}{2}\right]$

84 $f(x) = \begin{cases} ae^x + b & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2e^x - 1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $[a = -2; b = 3]$

85 $f(x) = \begin{cases} a\cos^2 x + b\,\text{sen}\,x & \text{se } x < 0 \\ -\dfrac{2}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ $[a = -2; b = 2]$

86 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 - 1}{x+b} & \text{se } x \leq 1 \\ \ln x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $[a = 0; b = -2]$

87 $f(x) = \begin{cases} 1 + a\,\text{sen}\,\dfrac{x}{2} + b & \text{se } x < 0 \\ \text{sen}\,2x + a & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ $[a = 4; b = 3]$

88 $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x^2+3} & \text{se } x \leq 1 \\ b\ln x + (2a+1)x & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $\left[a = 1; b = -\frac{5}{2}\right]$

89 a) Determina a e b in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x-a} & \text{se } x \leq 2 \\ -\dfrac{b}{x-4} - 3 & \text{se } x > 2 \wedge x \neq 4 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $x = 2$.

b) Rappresenta graficamente $f(x)$ e scrivi l'equazione della tangente nel punto P di ascissa 2.

c) Verifica se esistono altri punti in cui la retta tangente è parallela alla retta tangente in P.

[a) $a = 4$, $b = 8$; b) $y = 2x - 3$; c) $Q(6; -7)$]

90 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \text{arctg}\,(x-2) & \text{se } x \leq 2 \\ a\ln(x-1) + b - 2a & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

trova a e b in modo che risulti continua e derivabile in $x = 2$.
Trova poi le equazioni delle tangenti nei punti di ascissa 2 e 3.

$\left[a = 1, b = 2; y = x - 2, y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \ln 2\right]$

91 **TEST** Per quale valore del parametro β la funzione $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2\beta x & \text{se } x < 0 \\ \log(1-x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è derivabile nel punto $x_0 = 0$?

A $\frac{1}{2}$ B 2 C -3 D $-\frac{1}{2}$

(*Università di Trento, Test di Analisi*, 2004)

92 Determinare per quali valori del parametro $a > 0$ la seguente funzione risulta ovunque continua e derivabile.

$$f(x) = \begin{cases} \log(4 + ax^5) & x \geq 0 \\ 3a + \cos\left(\frac{a}{3}x\right) & x < 0 \end{cases}$$

(*Università di Torino, Test di Analisi I*, 2002)

$\left[\frac{\log 4 - 1}{3}\right]$

93 **TEST** La funzione $y = \sqrt[3]{x^2 - x}$:

A non è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

B è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$.

C non è derivabile solo in $x = 0$.

D ha due cuspidi.

E ha due flessi a tangente verticale.

94 **TEST** La funzione $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$:

A ha una cuspide in $x = 0$ e un flesso a tangente verticale in $x = 1$.

B ha due cuspidi in $x = 0$ e $x = 1$.

C è derivabile $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

D non ha punti stazionari.

E ha punti stazionari in $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$.

Le funzioni crescenti e decrescenti

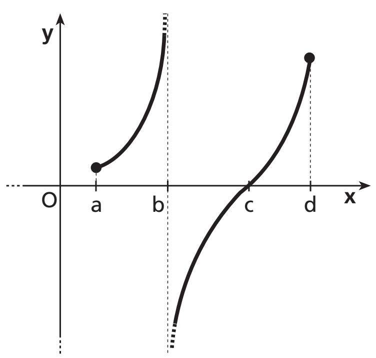
95 Con riferimento alla funzione rappresentata nella figura, indica se la funzione è crescente nei seguenti intervalli e spiegane il motivo.

a) $[a; b]$.

b) $[a; c]$.

c) $]b; d[$.

d) $[a; d[$.



96 **VERO O FALSO?**

In un intervallo $[a; b]$:

a) se una funzione $f(x)$ è continua e derivabile, allora è certamente crescente. V F

b) se una funzione $f(x)$ è discontinua, non può essere crescente. V F

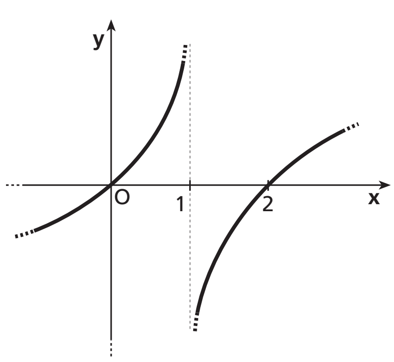
c) se $f'(x) > 0$, allora $f(x)$ è crescente. V F

d) se una funzione $f(x)$ è crescente, allora è derivabile con $f'(x) > 0$. V F

Con riferimento alla funzione $f(x)$ rappresentata nella figura è corretto scrivere:

e) «$f(x)$ crescente $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1$». V F

f) «$f(x)$ crescente in $[0; 1[$ e in $]1; 2]$». V F



97 Una funzione f è derivabile nell'intervallo $]a; b[$. Quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere?

a) Se f è non decrescente in $]a; b[$, allora $f'(x) \geq 0$, per ogni $x \in]a; b[$.
b) Se f è crescente in $]a; b[$, allora $f'(x) > 0$, per ogni $x \in]a; b[$.
c) Se f è crescente in $]a; b[$, allora $f'(x) > 0$, per almeno un $x \in]a; b[$.
d) Se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in]a; b[$, allora f è crescente in $]a; b[$.

(USA *University of Houston Mathematics Contest*, 2006)

[a); c)]

98 **TEST** Se $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, allora f è crescente nell'intervallo:

A $x < 1$. **B** $1 < x < 3$. **C** $x < 1$ e $x > 3$. **D** $x > 3$. **E** Nessuno di questi.

(USA *University of Central Arkansas Regional Math Contest*, 2008)

99 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo gli intervalli in cui le seguenti funzioni sono crescenti e quelli in cui sono decrescenti.

a) $y = \dfrac{4x^2+1}{2x}$; b) $y = \ln\dfrac{x-1}{x+2}$.

a) La funzione è razionale fratta, quindi è definita per $2x \neq 0$, ovvero D: $x \neq 0$. Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = \frac{8x(2x) - 2(4x^2+1)}{(2x)^2} = \frac{16x^2 - 8x^2 - 2}{4x^2} = \frac{8x^2-2}{4x^2} = \frac{4x^2-1}{2x^2}.$$

Studiamo il segno di y':

$$\frac{4x^2-1}{2x^2} > 0$$

$4x^2 - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}$

$2x^2 > 0 \quad \rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Compiliamo il quadro dei segni (a lato).
Per la condizione sufficiente sulle funzioni crescenti:

		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$	
$4x^2-1$	+	0	−		−	0	+
$2x^2$	+		+	0	+		+
f'(x)	+	0	−	∄	−	0	+
f(x)	↗		↘		↘		↗

per $x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}$ $\qquad f(x)$ è crescente;

per $-\frac{1}{2} < x < 0 \vee 0 < x < \frac{1}{2}$ $\qquad f(x)$ è decrescente.

b) La funzione $y = \ln\dfrac{x-1}{x+2}$ è trascendente logaritmica, quindi è definita per $\dfrac{x-1}{x+2} > 0$:

$x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1$;

$x + 2 > 0 \quad \rightarrow \quad x > -2$.

Compiliamo il quadro dei segni (a lato).
Il dominio della funzione è:

		−2		1	
x − 1	−		−	0	+
x + 2	−	0	+		+
$\frac{x-1}{x+2}$	+	∄	−	0	+

D: $]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$.

Calcoliamo ora la derivata prima:

$$y' = \frac{1}{\dfrac{x-1}{x+2}} \cdot \frac{1(x+2) - 1(x-1)}{(x+2)^2} = \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{\cancel{x} + 2 - \cancel{x} + 1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x-1)(x+2)}.$$

Studiamo il segno di y'. Poiché il numeratore è sempre positivo, y' ha lo stesso segno del denominatore:

$y' > 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)(x+2) > 0 \quad$ per $x < -2 \vee x > 1$.

Applicando la condizione sufficiente per le funzioni crescenti, si ha che $f(x)$ è crescente per $x < -2 \vee x > 1$. Poiché questo intervallo coincide con il dominio, la funzione non è mai decrescente.

Trova gli intervalli in cui le seguenti funzioni sono crescenti e quelli in cui sono decrescenti.

100 $y = 2x^3 + x^2 - 4x + 10$ $\left[\text{cresc. per } x < -1 \vee x > \frac{2}{3}; \text{decresc. per } -1 < x < \frac{2}{3}\right]$

101 $y = x^3 + 2x^2 + 10x + 1$ $[\text{cresc. } \forall x \in \mathbb{R}]$

102 $y = 4x^5 - 10x^2 + 9$ $[\text{cresc. per } x < 0 \vee x > 1; \text{decresc. per } 0 < x < 1]$

103 $y = 2x^4 - 16x^2 + 1$ $[\text{cresc. per } -2 < x < 0 \vee x > 2; \text{decresc. per } x < -2 \vee 0 < x < 2]$

104 $y = \dfrac{x-6}{2x+1}$ $\left[\text{cresc. per } x \neq -\frac{1}{2}\right]$

105 $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$ $[\text{cresc. per } x \neq -3]$

106 $y = \dfrac{2}{x^2-9}$ $[\text{cresc. per } x < 0 \wedge x \neq -3; \text{decresc. per } x > 0 \wedge x \neq 3]$

107 $y = \dfrac{1}{-x^2+x}$ $\left[\text{cresc. per } x > \frac{1}{2} \wedge x \neq 1; \text{decresc. per } x < \frac{1}{2} \wedge x \neq 0\right]$

108 $y = \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-2}$ $\left[\text{cresc. per } x < \frac{2}{3} \vee x > 3, x \neq -\sqrt{2}; \text{decresc. per } \frac{2}{3} < x < 3, x \neq \sqrt{2}\right]$

109 $y = \dfrac{2x^2-8x+8}{x^2-1}$ $\left[\text{cresc. per } x < \frac{1}{2} \vee x > 2, x \neq -1; \text{decresc. per } \frac{1}{2} < x < 2, x \neq 1\right]$

110 $y = \dfrac{x^2-4x+2}{x^2}$ $[\text{cresc. per } x < 0 \vee x > 1; \text{decresc. per } 0 < x < 1]$

111 $y = \sqrt{x-1}$ $[\text{cresc. per } x > 1]$

112 $y = \sqrt{9-x^2}$ $[\text{cresc. per } -3 < x < 0; \text{decresc. per } 0 < x < 3]$

113 $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x}}$ $[\text{cresc. per } x < 0 \vee x > 2]$

114 $y = \sqrt{4x-x^2}$ $[\text{cresc. per } 0 < x < 2; \text{decresc. per } 2 < x < 4]$

115 $y = \sqrt[3]{x^2}$ $[\text{cresc. per } x > 0; \text{decresc. per } x < 0]$

116 $y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x}$ $[\text{cresc. per } 2 < x < 4; \text{decresc. per } x > 4]$

117 $y = e^{-2x^2}$ $[\text{cresc. per } x < 0; \text{decresc. per } x > 0]$

118 $y = x^2 e^{-x}$ $[\text{cresc. per } 0 < x < 2; \text{decresc. per } x < 0 \vee x > 2]$

119 $y = 4\,\text{sen}^2 x$ $\left[\text{cresc. per } k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi; \text{decresc. per } \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi\right]$

120 $y = \cos^2 x - \cos x$ $\left[\text{cresc. per } \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \vee \frac{5}{3}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi;\right.$
$\left.\text{decresc. per } 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \pi + 2k\pi < x < \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right]$

121 $y = -2\cos^2 x - 2x + 1$ $\left[\text{cresc. per } \frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5}{12}\pi + k\pi; \text{ decresc. per } \frac{5}{12}\pi + k\pi < x < \frac{13}{12}\pi + k\pi\right]$

122 $y = \sqrt[3]{x+1}$ $[\text{cresc. per } x \neq -1]$

123 $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x - 1$ $[\text{cresc. per } x \neq -2]$

124 $y = 3\,\mathrm{tg}\,x - 1$ $\left[\text{cresc. per } -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

125 $y = x + 2\ln x$ $[\text{cresc. per } x > 0]$

126 $y = x^3 - 3x^2$ $[\text{cresc. per } x < 0 \vee x > 2; \text{ decresc. per } 0 < x < 2]$

127 $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ $[\text{decresc. per } x > 0]$

128 $y = x\ln x$ $\left[\text{cresc. per } x > \frac{1}{e}; \text{ decresc. per } 0 < x < \frac{1}{e}\right]$

129 $y = 4x^4 - x^2$ $\left[\text{cresc. per } -\frac{\sqrt{2}}{4} < x < 0 \vee x > \frac{\sqrt{2}}{4}; \text{ decresc. per } x < -\frac{\sqrt{2}}{4} \vee 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

130 $y = \sqrt{2x^2 - 1}$ $\left[\text{cresc. per } x > \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ decresc. per } x < -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

131 $y = \ln\frac{x+3}{x-5}$ $[\text{decresc. per } x < -3 \vee x > 5]$

132 $y = \ln(x^2 - 5x + 6)$ $[\text{cresc. per } x > 3; \text{ decresc. per } x < 2]$

133 $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$ $[\text{decresc. per } x \neq \pm 1]$

134 $y = 2\sqrt{x} - x$ $[\text{cresc. per } 0 < x < 1; \text{ decresc. per } x > 1]$

135 $y = \sqrt{3}\,x + 2\cos x$ $\left[\text{cresc. per } 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi; \text{ decresc. per } \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$

136 $y = x + 2\,\mathrm{sen}\,x$ $\left[\text{cresc. per } 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \vee \frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi; \text{ decresc. per } \frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right]$

137 $y = \frac{4x^2}{(x-1)^3}$ $[\text{cresc. per } -2 < x < 0; \text{ decresc. per } x < -2 \vee x > 0, x \neq 1]$

138 $y = \frac{x^2 - 2x}{4x^2 + x}$ $\left[\text{cresc. per } x \neq 0 \wedge x \neq -\frac{1}{4}\right]$

139 $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 1}$ $[\text{cresc. per } x \neq \pm 1]$

140 $y = \frac{x}{x^3 - 2}$ $[\text{cresc. per } x < -1; \text{ decresc. per } x > -1, x \neq \sqrt[3]{2}]$

141 $y = x^2(x-4)^2$ $[\text{cresc. per } 0 < x < 2 \vee x > 4; \text{ decresc. per } x < 0 \vee 2 < x < 4]$

142 $y = xe^x$ $[\text{cresc. per } x > -1; \text{ decresc. per } x < -1]$

143 $y = 4\cos x\,\mathrm{sen}\,x$ $\left[\text{cresc. per } -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi; \text{ decresc. per } \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

144 $y = |x|e^x$ $[\text{cresc. per } x < -1 \vee x > 0; \text{ decresc. per } -1 < x < 0]$

145 $y = x(x-2)^3$ $\left[\text{cresc. per } x > \frac{1}{2}; \text{ decresc. per } x < \frac{1}{2}\right]$

146 $y = 2\ln x + \ln^2 x$ $\left[\text{cresc. per } x > \frac{1}{e}; \text{ decresc. per } 0 < x < \frac{1}{e}\right]$

147 $y = \ln\sqrt{1-x^2}$ $[\text{cresc. per } -1 < x < 0; \text{ decresc. per } 0 < x < 1]$

148 $y = \ln\frac{4x^2-16}{x^2+4}$ $[\text{decresc. per } x < -2, \text{ cresc. per } x > 2]$

149 $y = \ln\frac{e^x-1}{e^x+1}$ $[\text{cresc. per } x > 0]$

150 $y = \cos^4 x - \cos^2 x + 2$ $\left[\text{decresc. per } k\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \text{ cresc. per } \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\right]$

151 $y = e^{\sqrt{\frac{x-2}{3-x}}}$ $[\text{cresc. per } 2 < x < 3]$

152 $y = \frac{(x-3)^2}{x^2-3x+2}$ $\left[\text{cresc. per } x < \frac{5}{3} \ \vee \ x > 3, x \neq 1; \text{ decresc. per } \frac{5}{3} < x < 3, x \neq 2\right]$

153 $y = e^{\sqrt{x^2+3}+x}$ $[\text{cresc. } \forall x \in \mathbb{R}]$

154 $y = 2x - |7x^2 - 3x|$ $\left[\text{cresc. per } x < 0 \vee \frac{1}{14} < x < \frac{3}{7}; \text{ decresc. per } 0 < x < \frac{1}{14} \vee x > \frac{3}{7}\right]$

155 $y = \left|\frac{x^2-3x}{x+2}\right|$ $[\text{cresc. per } -2-\sqrt{10} < x < -2 \vee 0 < x < -2+\sqrt{10} \vee x > 3;$
$\text{decresc. per } x < -2-\sqrt{10} \vee -2 < x < 0 \vee -2+\sqrt{10} < x < 3]$

156 $y = e^{-3x}\ln(x+1)$ $\left[\text{cresc. per } -1 < x < x_0; \text{ decresc. per } x > x_0; \text{ con } 3\ln(x_0+1) = \frac{1}{x_0+1}\right]$

157 $y = (x-3)\log(x-1)$ $\left[\text{cresc. per } x > x_0; \text{ decresc. per } 1 < x < x_0; \text{ con } \ln(x_0-1) = -\frac{x_0-3}{x_0-1}\right]$

158 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo per quali valori di k la condizione sufficiente per le funzioni crescenti e decrescenti permette di affermare che la funzione

$$f(x) = kx^3 - 3kx^2 + x + 8, \quad \text{con } k \in \mathbb{R},$$

è sempre crescente in $\mathbb{R}$.

Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$:

$$f'(x) = 3kx^2 - 6kx + 1.$$

Se $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, la funzione è sempre crescente in $\mathbb{R}$. Poniamo quindi:

$$3kx^2 - 6kx + 1 > 0.$$

La disequazione risulta sempre verificata se è $\Delta < 0 \wedge 3k > 0$. Utilizziamo $\frac{\Delta}{4}$:

$$\frac{\Delta}{4} = (3k)^2 - 3k = 9k^2 - 3k.$$

Poniamo $\frac{\Delta}{4} < 0$:

$$9k^2 - 3k < 0.$$

La disequazione è verificata per $0 < k < \frac{1}{3}$.

La funzione assegnata è sempre crescente in $\mathbb{R}$ per:

$$0 < k < \frac{1}{3}.$$

159 Trova per quali valori di a la funzione $y = a\ln x + 1$ è sempre crescente nel suo dominio. $[a > 0]$

160 Come nell'esercizio precedente, ma per $y = \frac{ax - 1}{x}$ sempre crescente in $\mathbb{R}^+$. $[\forall a \in \mathbb{R}]$

161 Determina per quali valori di k la funzione $y = x^3 + 2x^2 - 2kx$ risulta sempre crescente in $\mathbb{R}$. $\left[k < -\frac{2}{3}\right]$

162 Per quali valori di k la funzione $y = -x^3 + (2k - 1)x$ è sempre decrescente in $\mathbb{R}$? $\left[k < \frac{1}{2}\right]$

163 **TEST** È dato il seguente grafico di una funzione $f(x)$. Fra le seguenti affermazioni solo una è *falsa*. Quale?

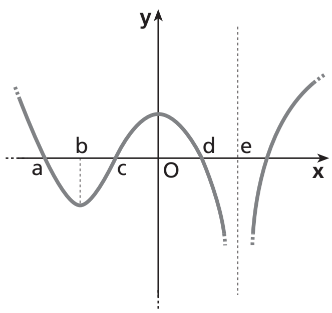
A $f(x)$ è decrescente in $[a; b]$.

B $f(x)$ è decrescente in $[0; d]$.

C $f'(x) > 0$ in $[c; 0[$.

D $f'(x) < 0$ in $]-\infty; b[$.

E $f(x)$ è crescente in $[e; +\infty[$.



164 Sia $f(x)$ la funzione simmetrica di $y = \log\frac{3 - x}{x + 1}$ nella simmetria centrale di centro $C(2; -1)$. Determina gli intervalli di crescenza e decrescenza di $y = f(x)$.
$\left[f(x) = -2 + \log\frac{5 - x}{x - 1}; \text{decresc. per } 1 < x < 5\right]$

165 Determina per quali valori di k la funzione $f(x) = \frac{2x^2 + kx + 2k + 2}{2x + k}$ è sempre crescente nel suo dominio.
$[k < -1]$

166 Data la funzione $y = \ln\frac{ae + 2x}{e - x}$, determina $a \in \mathbb{R}$ tale che il grafico della funzione passi per il punto di ordinata 1 sull'asse y. Determina poi gli intervalli in cui la funzione è crescente e quelli in cui è decrescente.
$\left[a = e; \text{cresc. per } -\frac{e^2}{2} < x < e\right]$

167 Sia r una retta parallela alla bisettrice del II e IV quadrante passante per il punto $A(3; -2)$ e t una retta perpendicolare a r passante per $B(-6; 3)$. Determina gli intervalli in cui la funzione $y = \left|\frac{4 - ax}{2x}\right|$, $a \in \mathbb{R}^+$, è crescente, sapendo che il suo grafico passa per il punto C di intersezione tra le rette r e t.
$\left[C(-4; 5); a = 9; \text{cresc. per } x < 0 \vee x > \frac{4}{9}\right]$

Le funzioni invertibili

168 Dimostra che la funzione $y = 1 + \sqrt{8 - x}$ è invertibile nel suo dominio e trova la funzione inversa.
$[y = -x^2 + 2x + 7 \text{ per } x \geq 1]$

169 Verifica che la funzione $y = -2\cos^2 x + 2x + 1$ è invertibile in tutto $\mathbb{R}$. Calcola poi la derivata della funzione inversa nel punto y_0 che corrisponde a $x_0 = \pi$.
$\left[\frac{1}{2}\right]$

170 Verifica che la funzione $y = x^3 + 2e^x$ è invertibile $\forall x \in \mathbb{R}$ e calcola la derivata della funzione inversa nel punto $y_0 = 2$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

171 Determina il dominio della funzione $y = \ln\frac{x}{x-6}$ e dimostra che è monotòna per $x < 0 \vee x > 6$. Trova la sua funzione inversa e rappresenta graficamente la funzione data e la sua inversa. $\left[y = \frac{6e^x}{e^x - 1}\right]$

172 Dimostra che la funzione $y = 4x + e^x$ è invertibile in tutto $\mathbb{R}$. Detta $g(y)$ la funzione inversa, calcola $g(1)$ e $g'(1)$. $\left[g(1) = 0;\ g'(1) = \frac{1}{5}\right]$

173 Dimostra che la funzione $f(x) = \ln x + 2x^5$ è invertibile per $x > 0$. Calcola $f^{-1}(2)$ e determina la derivata della funzione inversa nel punto $y_0 = 2$. $\left[f^{-1}(2) = 1;\ \frac{1}{11}\right]$

174 Considera la funzione $y = \operatorname{arcsen}\frac{1-x}{1+x}$. Determina il suo dominio, dimostra che è invertibile e determina l'equazione della sua funzione inversa. $\left[y = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}\right]$

4. IL TEOREMA DI CAUCHY

Teoria a pag. 1726

175 **ESERCIZIO GUIDA**

Date le funzioni $f(x) = x^2 - 2x + 4$ e $g(x) = 4x^2 + 2x$, verifichiamo che nell'intervallo [1; 3] valgono le ipotesi del teorema di Cauchy e troviamo i punti la cui esistenza è assicurata dal teorema.

Sono verificate le tre condizioni:

- $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in $[1; 3]$ perché sono funzioni polinomiali;
- $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $]1; 3[$ con $f'(x) = 2x - 2$ e $g'(x) = 8x + 2$;
- $g'(x) \neq 0$ in $]1; 3[$. Infatti $g'(x) = 8x + 2 \neq 0$ per $x \neq -\frac{1}{4}$.

Pertanto vale il teorema e deve esistere almeno un punto c nel quale:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(3) - f(1)}{g(3) - g(1)}.$$

Si ha:

$$\frac{2c-2}{8c+2} = \frac{7-3}{42-6} \rightarrow \frac{c-1}{4c+1} = \frac{1}{9} \rightarrow 9(c-1) = 4c+1 \ \left(c \neq -\frac{1}{4}\right) \rightarrow c = 2.$$

Il punto cercato è $c = 2$.

Date le seguenti funzioni, verifica che nell'intervallo indicato a fianco valgono le ipotesi del teorema di Cauchy e trova il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema.

176 $f(x) = x^3 + 1$, $\quad g(x) = x^2 - 4x$, $\quad [-2; -1]$. $\left[c = \frac{-1-\sqrt{13}}{3}\right]$

177 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $\quad g(x) = \frac{x+1}{x}$, $\quad [1; 2]$. $\left[c = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$

178 $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$, $g(x) = \cos x - 1$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. $\left[c = \frac{\pi}{4}\right]$

179 $f(x) = \ln^2 x - 4\ln x$, $g(x) = 2\ln x + 4$, $[1; e]$. $[c = \sqrt{e}]$

180 $f(x) = 5\cos^2 x - 2\cos x$, $g(x) = \cos x + 3$, $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. $\left[c = \frac{2}{3}\pi\right]$

181 $f(x) = 2\ln x - 1$, $g(x) = 5(x + 1)$, $[1; e]$. $[c = e - 1]$

182 $f(x) = \frac{x - 2}{x + 1}$, $g(x) = 3x + 1$, $[0; 2]$. $[c = \sqrt{3} - 1]$

183 $f(x) = -x^3 + 4x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$, $[-1; 3]$. $\left[c = \frac{13}{6}\right]$

184 $f(x) = \sqrt{1 + x}$, $g(x) = 2x + 1$, $[0; 3]$. $\left[c = \frac{5}{4}\right]$

185 $f(x) = -x^2 + 3x$, $g(x) = 2x^2$, $[1; 4]$. $\left[c = \frac{5}{2}\right]$

186 $f(x) = 3 + e^x$, $g(x) = 2x + 1$, $[0; 1]$. $[c = \ln(e - 1)]$

187 $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$, $g(x) = 2x - 1$, $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. $\left[c = 1 - \frac{1}{2\ln 2}\right]$

Per le seguenti coppie di funzioni non vale il teorema di Cauchy nell'intervallo indicato a fianco. Indica le condizioni che non sono verificate.

188 $f(x) = \frac{1}{x + 3}$, $g(x) = 2x^2 - 2x + 1$, $[-2; 1]$. $\left[g'(x) = 0 \text{ in } x = \frac{1}{2}\right]$

189 $f(x) = x^3 + 3$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $[-1; 1]$. $[g'(x) = 0 \text{ in } x = 0]$

190 $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$, $g(x) = \ln x$, $[1; 4]$. $[f(x) \text{ non derivabile in } x = 2]$

191 $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $[-1; 2]$. $[g(x) \text{ discontinua in } x = 0]$

ESERCIZI VARI I teoremi di Rolle, Lagrange, Cauchy

192 **VERO O FALSO?**

a) Se una funzione verifica il teorema di Lagrange, non può verificare il teorema di Rolle. V F

b) Se una funzione verifica il teorema di Rolle, non verifica il teorema di Lagrange. V F

c) Se due funzioni hanno la stessa derivata, allora sono uguali. V F

d) Una funzione derivabile in un intervallo $[a; b]$ verifica il teorema di Lagrange in $[a; b]$. V F

193 **TEST** Sia f definita su $[0; 1]$, continua e derivabile su $]0; 1[$, e tale che $f(0) = f(1)$. Allora:

A esiste un punto $c \in]0; 1[$ tale che $f'(c) = 0$.

B a f si può applicare il teorema di Lagrange nell'intervallo $\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$.

C f è continua nell'intervallo $[0; 1]$.

D a f si può applicare il teorema di Rolle nell'intervallo $\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$.

(*Politecnico di Torino, Test di autovalutazione*)

194 **TEST** Solo a una delle seguenti funzioni è possibile applicare il teorema di Lagrange nell'intervallo $[-2; 2]$. Quale?

A $y = |x|$ B $y = 1 - |x|^2$ C $y = |x| - 1$ D $y = |x^2 - 1|$ E $y = |x^2 - 2x|$

195 Enuncia il teorema di Rolle. Fai un esempio di funzione definita in un intervallo che non soddisfa tutte le ipotesi del teorema ma la cui derivata prima si annulla in un punto interno.

196 Verifica quale delle due funzioni

$$f(x)=|x^2-2x| \text{ e } g(x)=\frac{2-x}{x+4}, \text{ con } x\in[1;3],$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange. Trova quindi i punti previsti dal teorema.

197 L'equazione

$$\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}=0$$

ha nell'intervallo $[2; 3]$ una sola soluzione. Spiegane il motivo utilizzando i teoremi a te noti.

198 Considera la funzione $y = x - 4|x|$ nell'intervallo $[-3; 3]$.

a) Sono verificate le ipotesi del teorema di Rolle?
b) Esistono dei punti interni all'intervallo $[-3; 3]$ in cui $f'(x) = 0$?
c) Le ipotesi del teorema sono una condizione necessaria e sufficiente, solo necessaria, o solo sufficiente per l'esistenza dei punti che verificano il teorema?

199 a) Verify that $f(x)=2x^3+x^2-x-1$ satisfies the hypotheses of the Mean Value Theorem on the interval $[0, 2]$.

b) Find all numbers c that satisfy the conclusion of the Mean Value Theorem.

(USA *University of Wisconsin*, Final Exam, 1997)

200 Determina per quali valori dei parametri a e b la funzione

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2 & \text{se } 0\le x<2 \\ \dfrac{16}{x+2} & \text{se } 2\le x\le 6 \end{cases}$$

verifica il teorema di Rolle nell'intervallo $[0; 6]$.

$[a=-1, b=3]$

201 Stabilisci se vale il teorema di Lagrange per la funzione $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ nell'intervallo $[2; 4]$ e, in caso affermativo, scrivi l'equazione della tangente la cui esistenza è garantita dal teorema.

$[y=\sqrt{2}\,x-\sqrt{2}-1]$

202 Considera il grafico della funzione $f(x) = x^3 + -4x + a$, $a \in \mathbb{R}$, passante per il punto $A(1; 3)$. Dimostra, mediante il teorema di Lagrange, che esiste almeno una retta tangente alla curva data in un punto D di ascissa x_0 interno all'intervallo $[-2; 1]$, parallela alla congiungente i punti B e C della curva, di ascissa rispettivamente -2 e 1. Determina l'area del triangolo BCD.

$[a=6;\ y=-x+8;\ 6]$

203 Dimostra che se $f(x)$ è una funzione derivabile con $f'(x)\ge k$ per ogni $x>0$ e $f(0)=0$, allora $f(x)\ge kx$ per $x\ge 0$.

(CAN *University of Windsor, Problem Solving*, 2008)

204 Date le funzioni

$$f_1(x)=\sqrt{2-|x|}, \qquad f_2(x)=\sqrt[3]{x-2},$$

una delle due non soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-2; 2]$. Indica quale. Per l'altra funzione determina il punto la cui esistenza è assicurata dal teorema.

$\left[f_1 \text{ non è derivabile in } x=0;\ x_0=2-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\right]$

205 Suppose $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ is differentiable and $f'(x)\ge M$ for all $x\in[a,b]$. Prove that

$$f(b)\ge f(a)+M(b-a).$$

(USA *University of Illinois at Chicago*, Analysis I Midterm Exam, 2003)

206 Utilizzando il teorema di Lagrange, dimostra che è valida la seguente relazione:

$$|\operatorname{tg} b-\operatorname{tg} a|\ge|b-a| \quad \forall\,[a;b]\subset\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[.$$

Spiega poi perché non è valida nell'intervallo $[0; \pi]$.

207 Dimostra che $\forall\, x\in\mathbb{R}$ si ha $\operatorname{sen}^2 x\le 2|x|$.

(USA *Texas A&M University*, 2005)

208 Determine whether the following statement is true or false. If true supply a proof, and if false a counterexample.
«Suppose f is continuous on the closed interval $[a, b]$ and differentiable on the open interval (a, b), and there is a point $\xi\in(a, b)$ such that $f'(\xi)=0$. Then the Mean Value Theorem tells us that we must have $f(a)=f(b)$.»

(USA *Texas A&M University*, Final Exam, 2005)

209 Determina i valori di a e b affinché la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x+1} & \text{se } -8 \leq x < 0 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

verifichi le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-8; 1]$. Trova poi i punti la cui esistenza è garantita dal teorema.

$\left[a = \frac{5}{2}, b = -\frac{1}{2}; x_0 = \frac{1}{10}\right]$

210 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{3x^2} & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ a + b\sqrt{4-x} & \text{se } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

determina per quali valori dei parametri a e b le ipotesi del teorema di Lagrange sono verficate in $[0; 4]$.

$\left[a = \frac{13}{3}, b = -\frac{4}{3}\right]$

211 Stabilisci per quali valori dei parametri a e b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-2a}{x+b} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ e^{x-1} & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0; 2]$.

$\left[a = \frac{1}{2}, b = 1\right]$

212 Determina i valori di a e b tali che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 3x + \dfrac{b}{x+1} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange in $[-1; 1]$. Trova poi il punto la cui esistenza è garantita dal teorema.

$\left[a = 2, b = 1; x_0 = -\frac{1}{8}\right]$

213 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2ax & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ -x^2 - ax + 3b & \text{se } 0 < x \leq 4 \end{cases}$$

determina per quali valori dei parametri a e b essa verifica le ipotesi del teorema di Lagrange in $[-2; 4]$. Trova poi le coordinate dei punti la cui esistenza è garantita dal teorema e determina l'equazione della retta perpendicolare alla congiungente tali punti e passante per l'origine degli assi.

$\left[a = 0, b = 0; A\left(-\frac{7}{9}; \frac{49}{27}\right), B\left(\frac{7}{3}; -\frac{49}{9}\right); y = \frac{3}{7}x\right]$

214 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ke^{x-1} & \text{se } x < 1 \\ k(x^2 - x) + k & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

a) dimostra che $f(x)$ è continua e derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$;
b) trova il valore di k in modo che la tangente al grafico della funzione nel suo punto di ascissa 1 abbia coefficiente angolare uguale a -1 e rappresenta graficamente $f(x)$;
c) applica il teorema di Lagrange agli intervalli $[1; 4]$ e $[0; 2]$ nelle ipotesi del punto b).

$\left[\text{b) } k = -1; \text{c) } c_1 = \frac{5}{2}; c_2 = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{e}\right)\right]$

5. IL TEOREMA DI DE L'HOSPITAL

Teoria a pag. 1727

IN PRATICA
Videolezione 71

La forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$

215 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-4} - 1}{x^2 - 25}.$$

Per $x \to 5$, $f(x) = \sqrt{x-4} - 1$ e $g(x) = x^2 - 25$ tendono entrambe a 0, pertanto il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. La funzione $f(x)$ è definita per $x \geq 4$. Quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in un intorno di 5.

Le derivate sono:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-4}} \quad \text{e} \quad g'(x) = 2x \neq 0 \text{ per } x \neq 0.$$

Poiché esiste il limite

$$\lim_{x\to 5}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 5}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-4}}}{2x} = \frac{\frac{1}{2}}{10} = \frac{1}{20},$$

tutte le ipotesi del teorema di De l'Hospital sono verificate, quindi:

$$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 5}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{20}.$$

Calcola i seguenti limiti.

216 $\lim_{x\to 0^+}\frac{2\,\text{sen}\,x-4x}{x^2}$ $[-\infty]$

217 $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$ $[1]$

218 $\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x-2}$ $[e^2]$

219 $\lim_{x\to 0}\frac{x+\text{sen}\,x}{x+x^2}$ $[2]$

220 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$ $[2]$

221 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3x+1)}{x}$ $[3]$

222 $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x^2-1)}{x^3-1}$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

223 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x^2-3x}$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

224 $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

225 $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

226 $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,10x}{\text{sen}\,5x}$ $[2]$

227 $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x+x^2}$ $[1]$

228 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

229 $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-8x^2+19x-12}{x^4-3x^3-x+3}$ $\left[-\frac{1}{13}\right]$

230 $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-2x}}{x}$ $[2]$

231 $\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}\,2x}{\text{tg}\,4x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

232 $\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}\,x-x^2}{\text{sen}\,x}$ $[1]$

233 $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x-x}{x^3}$ $\left[-\frac{1}{6}\right]$

234 $\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}\,3x}{5x}$ $\left[\frac{3}{5}\right]$

235 $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x+x}{x+\text{tg}\,x}$ $[1]$

236 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\text{sen}^3 x}{\text{cotg}\,x}$ $[0]$

237 $\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-9x+6}{5x^5+2x^4-33x+26}$ $\left[\frac{9}{62}\right]$

238 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{e^x-2+e^{-x}}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

239 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{1-\cos x}$ $[0]$

240 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\text{sen}\,x-1}{\cos^2 x}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

241 $\lim_{x\to 0}\frac{2x+\text{sen}\,3x}{x+\text{tg}\,5x}$ $\left[\frac{5}{6}\right]$

242 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x^3-x^2}$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$

243 $\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2x}-2}{(x-2)^2}$ $[+\infty]$

La forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

244 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il limite $\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{2x}}{x^2-2x}$.

Per $x \to +\infty$, $f(x) = e^{2x}$ e $g(x) = x^2-2x$ tendono entrambe a $+\infty$.

$f(x)$ e $g(x)$ sono continue e derivabili per ogni $x \in \mathbb{R}$ e hanno per derivate:

$$f'(x) = 2e^{2x} \quad \text{e} \quad g'(x) = 2x - 2 \neq 0 \text{ per } x \neq 1.$$

Consideriamo il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{2x-2}.$$

Poiché si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, deriviamo ulteriormente,

$$f''(x) = 4e^{2x} \quad \text{e} \quad g''(x) = 2 \neq 0,$$

e calcoliamo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4e^{2x}}{2} = +\infty.$$

Tutte le ipotesi del teorema di De L'Hospital sono verificate, quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)},$$

ossia:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^2-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{1} = +\infty.$$

Calcola i seguenti limiti.

245 $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{2x^2}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

246 $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{e^x}$ $[0]$

247 $\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{x}$ $[+\infty]$

248 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^4}$ $[0]$

249 $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-x}{2x}$ $[-\infty]$

250 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x}$ $[0]$

251 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x}$ $[+\infty]$

252 $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3-2x^2+4}{1-2x^3}$ $\left[-\frac{5}{2}\right]$

253 $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x+2}{1-x^3}$ $[0]$

254 $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+5x}{x^2-3x}$ $[+\infty]$

255 $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln x^2}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

256 $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\ln x}{7x-2}$ $\left[\frac{3}{7}\right]$

257 $\lim_{x\to\pi^+} \frac{\ln(x-\pi)}{\operatorname{cotg} 2x}$ $[0]$

258 $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}-e^x}{x^3-1}$ $[-\infty]$

259 $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln 3x}{5e^{\frac{1}{x}}}$ $[0]$

260 $\lim_{x\to3^+} \frac{\ln(x-3)}{\ln(x^2-9)}$ $[1]$

261 $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x^3}{\operatorname{cotg} x}$ $[0]$

262 $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} x}$ $[0]$

263 $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln \operatorname{tg} x}$ $[1]$

264 $\lim_{x\to1^+} \frac{\ln(e^x-e)}{\ln(x-1)}$ $[1]$

265 $\lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{2}{x}}}{2\ln x}$ $[-\infty]$

266 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1+e^{2x}}{2x+4+e^x}$ $[+\infty]$

267 $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln \operatorname{cotg} x}{\ln 2x^3}$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

268 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{e^{-\frac{1}{\cos x}}}{\operatorname{tg} x}$ $[-\infty]$

La forma indeterminata $+\infty - \infty$

269 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x \right).$$

Il limite è nella forma indeterminata $+\infty - \infty$. Per poter applicare il teorema di De L'Hospital, cerchiamo di scriverlo nella forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Trasformiamo la funzione ricordando che $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x \operatorname{sen} x}.$$

Il limite ottenuto è nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e, poiché sono soddisfatte tutte le altre ipotesi del teorema di De L'Hospital, possiamo calcolare:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{D(\operatorname{sen} x - x \cos x)}{D(x \operatorname{sen} x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{\cos x} - \cancel{\cos x} + x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x \cos x}.$$

Il limite ottenuto è ancora nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Calcoliamo:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{D(x \operatorname{sen} x)}{D(\operatorname{sen} x + x \cos x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{2 \cos x - x \operatorname{sen} x} = 0.$$

Il limite assegnato vale:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x \right) = 0.$$

Calcola i seguenti limiti.

270 $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2 + x} - \frac{1}{x} \right)$ $[-1]$

271 $\lim_{x \to 3^+} [\ln(x^2 - 4x + 3) - \ln(x - 3)]$ $[\ln 2]$

272 $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x^2 - 1} \right)$ $[+\infty]$

273 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \right)$ $[0]$

274 $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{cotg} x \right)$ $[0]$

275 $\lim_{x \to 0} \left(\operatorname{cotg}^2 x - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \right)$ $[-1]$

276 $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2}{\operatorname{sen} x} - \frac{2}{x} \right)$ $[0]$

277 $\lim_{x \to -\infty} (x + \sqrt{1 - x^3})$ $[+\infty]$

La forma indeterminata $0 \cdot \infty$

278 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo: $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x$.

Il limite è nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Trasformiamo la funzione:

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Il limite ottenuto è nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Calcoliamo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{D(\ln x)}{D\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot(-x^2) = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Per il teorema di De L'Hospital si ha: $\lim_{x\to 0^+} x\cdot \ln x = 0$.

Calcola i seguenti limiti.

279 $\lim_{x\to -\infty} x\cdot e^x$ $[0]$

280 $\lim_{x\to 0^+} x^2\cdot \ln x$ $[0]$

281 $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x^2\right)x^3$ $[-\infty]$

282 $\lim_{x\to -\infty} x^3\cdot e^{3x}$ $[0]$

283 $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)^{-1}\cdot \ln(e^x + x)$ $[2]$

284 $\lim_{x\to 0} 3x\cdot \operatorname{cotg} 4x$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

285 $\lim_{x\to 0^+} 2x\cdot \ln 5x$ $[0]$

286 $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x\cdot \ln \operatorname{sen} 2x$ $[0]$

287 $\lim_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}}$ $[+\infty]$

288 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (2x-\pi)^2\cdot \operatorname{tg}^2 x$ $[4]$

289 $\lim_{x\to 0} 2x\cdot \operatorname{cotg} x$ $[2]$

290 $\lim_{x\to 0^+} \ln x\cdot \operatorname{tg} x$ $[0]$

Le forme indeterminate 0^0, ∞^0, 1^∞

291 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo i limiti: a) $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{tg} x}$; b) $\lim_{x\to\infty}(x^2-8x)^{\frac{1}{x}}$; c) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$.

a) Il limite si presenta nella forma indeterminata 0^0.

Ricordando l'identità $A = e^{\ln A}$, se $A = x^{\operatorname{tg} x}$ si può scrivere: $\underbrace{\boxed{x^{\operatorname{tg} x}}}_{A} = e^{\ln \underbrace{\boxed{x^{\operatorname{tg} x}}}_{A}}$

Per la proprietà dei logaritmi si ha $e^{\ln x^{\operatorname{tg} x}} = e^{\operatorname{tg} x \ln x}$.

Calcoliamo allora:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{tg} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \ln x}.$$

Occorre quindi calcolare $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \ln x$:

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}.$$

Il limite ottenuto è nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

Applichiamo il teorema di De L'Hospital, poiché tutte le ipotesi sono verificate:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{D\ln x}{D\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(-\operatorname{sen}^2 x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}(-\operatorname{sen} x) = 0.$$

Si ha allora:

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{tg} x \ln x = 0.$$

Pertanto, in sintesi:

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \to 0^+} e^{\operatorname{tg} x \ln x} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{tg} x \ln x} = e^0 = 1.$$

b) Il limite è nella forma indeterminata ∞^0.

Ragionando come nella parte a), possiamo scrivere:

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - 8x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} e^{\ln (x^2 - 8x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{\ln (x^2 - 8x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln (x^2 - 8x)}{x}}.$$

Quindi basta calcolare

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln (x^2 - 8x)}{x},$$

che si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

Poiché sono verificate le ipotesi, applichiamo il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln (x^2 - 8x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x - 8}{x^2 - 8x}}{1} = 0.$$

Quindi:

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - 8x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln (x^2 - 8x)}{x}} = e^0 = 1.$$

c) Il limite è nella forma indeterminata 1^∞. Abbiamo

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \ln (1 - x) \right] = \lim_{x \to 0} \frac{\ln (1 - x)}{x} = -\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - x} = -1,$$

per cui:

$$\lim_{x \to 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \ln (1 - x) \right]} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Calcola i seguenti limiti.

292 $\lim\limits_{x \to 2} [\ln (x - 1)]^{x - 2}$ $[1]$

293 $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ $[e^2]$

294 $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^2 + x - 1)^{\frac{1}{x^2}}$ $[1]$

295 $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$ $[1]$

296 $\lim\limits_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{2x}$ $[1]$

297 $\lim\limits_{x \to 3^+} \left(\frac{1}{x - 3} \right)^{x - 3}$ $[1]$

298 $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + x^2)^{\frac{1}{x^3}}$ $[+\infty]$

299 $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{cotg} x}$ $[e]$

300 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\pi - 2x}$ $[1]$

301 $\lim\limits_{x \to 1^-} (1 - x)^{1 - x}$ $[1]$

302 $\lim\limits_{x \to 0^-} (-2x)^x$ $[1]$

303 $\lim\limits_{x \to 0^+} (\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{tg} x}$ $[1]$

ESERCIZI VARI Il teorema di De L'Hospital

TEST

304 Solo uno dei seguenti limiti vale 0. Quale?

A $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x}{e^{3x}}$

B $\lim_{x\to 0^+} e^{\text{tg}\,x\ln x}$

C $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-4}$

D $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{\text{sen}\,x}$

E $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{1-x^2+x^3}$

305 I seguenti limiti sono tutti uguali a 2, *tranne* uno. Quale?

A $\lim_{x\to\infty}\frac{1-2x^2}{4-x^2}$

B $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}$

C $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2}{x^3-x^4}$

D $\lim_{x\to 0^+} 2e^{\text{tg}\,x\ln x}$

E $\lim_{x\to\infty} 2(x^2-8x)^{\frac{1}{x}}$

306 Il $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+3x-3}{x^2-1}$ vale:

A 0.

B 1.

C 2.

D 3.

E -1.

307 Fra i seguenti limiti, solo uno *non* è uguale a 0. Quale?

A $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \text{tg}\,x\cdot(1-\text{sen}\,x)$

B $\lim_{x\to 0^+} x^2\cdot\ln x$

C $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\text{sen}\,x}-\text{cotg}\,x\right)$

D $\lim_{x\to 0} x\cdot\text{cotg}\,x$

E $\lim_{x\to 4^+}(x-4)\cdot\ln(x^2-16)$

CACCIA ALL'ERRORE

Ognuno dei seguenti limiti contiene un errore. Trovalo e correggilo.

308 $\lim_{x\to 1}\frac{4x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4}{2x}=2$

309 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)-x}{(x-1)^2}$

310 $\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}(\ln x+1)=-\infty$

311 $\lim_{x\to 0^+}(x^2)^{2x}=\lim_{x\to 0}(2x)^2=0$

In quale di questi limiti è possibile applicare la regola di De L'Hospital e perché?

312 a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\text{sen}\,x}{x-3\,\text{sen}\,x}$; b) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$; c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{e^{\text{tg}\,x}-1}{\text{tg}\,x+2}$.

313 a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{arctg}\,x}{x}$; b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\text{tg}^2 x-1}{\frac{\pi}{2}-x}$; c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+x}\right)$.

Calcola i seguenti limiti applicando i limiti notevoli e poi conferma il risultato con la regola di De L'Hospital.

314 $\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}^2 x}{\cos x-1}$ $[-2]$

315 $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^4 x}{\text{sen}\,4x}$ $[0]$

316 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{e^x-1+\text{sen}\,4x}$ $\left[\frac{2}{5}\right]$

Calcola i seguenti limiti.

317 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+e^x}{4-x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{x+\text{sen}\,x}{x^2+2x}$. $[-\infty; 1]$

318 $\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$; $\lim_{x\to 0^+} x\ln\text{sen}\,x$. $[e; 0]$

319 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x + \ln x}$; $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln 2x}{x^2}$. $\quad [+\infty; 0]$

320 $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 2x^2}{x^5 - x^2}$; $\quad \lim_{x \to +\infty} x \cdot e^{-x}$ $\quad [-2; 0]$

321 $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 7x - 6}{x^3 + 2x^2 - 14x - 3}$; $\quad \lim_{x \to a} \frac{x - a}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}$. $\quad \left[\frac{4}{5}; 3\sqrt[3]{a^2}\right]$

322 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2 x}{2x}$ $\quad [0]$

323 $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\operatorname{tg}^2 x} - 1}{\cos x - 1}$ $\quad [-2]$

324 $\lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} 3x}{7x}$ $\quad \left[\frac{6}{7}\right]$

325 $\lim_{x \to 3^+} (x - 3) \cdot \ln(e^x - e^3)$ $\quad [0]$

326 $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x}$ $\quad \left[\frac{5}{3}\right]$

327 $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x^2}\right)$ $\quad [-\infty]$

328 $\lim_{x \to 0^+} 2x^3 \cdot \ln x$ $\quad [0]$

329 $\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x^2 - 4}\right)$ $\quad [+\infty]$

330 $\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{3x}}{\operatorname{sen} 2x}$ $\quad \left[-\frac{3}{2}\right]$

331 $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3 + x}\right)$ $\quad [-\infty]$

332 $\lim_{x \to 2^+} (x - 2)^{x - 2}$ $\quad [1]$

333 $\lim_{x \to +\infty} e^x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ $\quad [+\infty]$

334 $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$ $\quad [+\infty]$

335 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 + 1}$ $\quad [0]$

336 $\lim_{x \to e} \frac{\ln(x + 1 - e)}{\ln x - \cos(x - e)}$ $\quad [e]$

337 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\operatorname{tg} x}$ $\quad [e]$

338 $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^3} - \cos x}{x \operatorname{sen} x}$ $\quad \left[\frac{1}{2}\right]$

339 $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{2x}\right)$ $\quad [+\infty]$

340 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x - 1}$ $\quad [+\infty]$

341 $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\ln(\cos x - 1)}$ $\quad \left[\frac{1}{2}\right]$

342 $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x^2 - 1}\right)$ $\quad [+\infty]$

343 $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{e^{\frac{1}{x}}}$ $\quad [0]$

344 $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\ln \cos 6x}{\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x - \sqrt{3}}$ $\quad [0]$

345 $\lim_{x \to 1} \frac{\cos^2(x - 1) - \cos(x - 1)}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4}$ $\quad \left[\frac{1}{6}\right]$

346 $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{5}{\ln x} - \frac{3}{x - 1}\right)$ $\quad [+\infty]$

347 $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$ $\quad [+\infty]$

348 $\lim_{x \to 0^+} x^2 \cdot \ln x$ $\quad [0]$

349 $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)$ $\quad [0]$

350 $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x - 1} \cdot e^{\frac{1}{x - 1}}$ $\quad [+\infty]$

351 $\lim_{x \to 0^+} 2 \ln(x + 1) \cdot \ln x$ $\quad [0]$

352 $\lim_{x \to 0} (e^{2x} - 1) \cdot \operatorname{cotg} 3x$ $\quad \left[\frac{2}{3}\right]$

353 $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{5x} + 2 \ln x\right)$ $\quad [+\infty]$

354 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x)$ $\quad [0]$

355 $\lim_{x \to 2^+} \left[\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{\ln(x - 1)}\right]$ $\quad \left[-\frac{1}{2}\right]$

356 $\lim_{x \to 1^+} (x - 1)^{\ln x}$ $\quad [1]$

357 $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} 5x \cdot \operatorname{cotg} 3x$ $\quad \left[\frac{5}{3}\right]$

358 $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) \ln(x + 1)$ $\quad [1]$

359 $\lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x + 1)}\right]$ $\quad \left[-\frac{1}{2}\right]$

360 $\lim_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$ $\quad [1]$

361 $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{tg} x^{\operatorname{sen} x}$ $\quad [\operatorname{tg} 1]$

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 La funzione $y = |x|e^{|x|}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle in $[-1; 1]$?

A No, perché non è continua in $x = 0$.
B Sì.
C No, perché non è derivabile in $x = 0$.
D No, perché $f(-1) \neq f(1)$.
E No, perché non è derivabile negli estremi dell'intervallo.

2 Il limite $\lim_{x \to 0^+} x^k \ln x$, con $k > 0$, vale:

A $-\infty$.
B non esiste.
C 0.
D 1.
E $+\infty$.

3 Il limite $\lim_{x \to 0} \frac{(x+4)^{x+1} - 4}{x}$ vale:

A $4\ln 4 - 1$.
B 0.
C $8\ln 2 + 1$.
D $4\ln 4 + 4$.
E $\ln 4 + \frac{1}{4}$.

4 Fra i seguenti limiti, solo uno *non* è uguale a 2. Quale?

A $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 2x^3}{x^2 - x^3 + 2}$

B $\lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{2\ln|\cos x|}$

C $\lim_{x \to 0} \frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{x}$

D $\lim_{x \to +\infty} \frac{2(x^2 + \ln x)}{x^2}$

E $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \mathrm{sen}\, x}$

5 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{se } x \leq 1 \\ -2x^2 + bx - 4 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

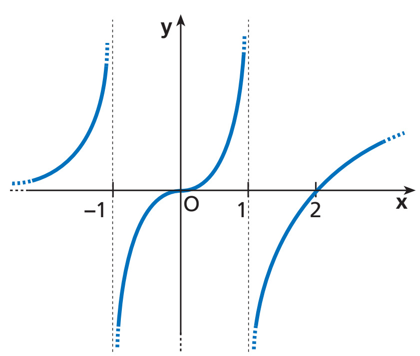
i valori di a e b per cui $f(x)$ verifica il teorema di Rolle nell'intervallo $[-1; 3]$ sono:

A $a = -2, \quad b = 4$.
B $a = 2, \quad b = -8$.
C $a = 1, \quad b = 8$.
D $a = -2, \quad b = -8$.
E $a = 2, \quad b = 8$.

6 La funzione $y = 2x^3 - 3x^2 + 6$ è:

A decrescente se $x > 0$.
B crescente se $x < 0 \lor x > 1$.
C costante se $0 < x < \frac{1}{2}$.
D non crescente se $0 < x < 2$.
E monotòna $\forall x \in \mathbb{R}$.

7 La funzione del grafico:



A è sempre crescente in $\mathbb{R}$.
B ha $y' > 0 \quad \forall x \neq \pm 1$.
C verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-1; 1]$.
D è continua ma non è derivabile in $x = 0$.
E ha un punto stazionario in $x = 2$.

8 Una sola delle seguenti funzioni non verifica le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1; 1]$. Quale?

A $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

B $y = \sqrt{1 - x^2}$

C $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$

D $y = (x^2 - 1)^4$

E $y = e^{\sqrt{1-x^2}}$

9 La funzione $y = x^3 - (a+2)x - 1$ è crescente $\forall x \in \mathbb{R}$ se:

A $a > -2$.

B $a \in \mathbb{R}$.

C $a < -2$.

D $a \geq -2$.

E $a \leq -2$.

QUESITI

10 La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[1; 3]$ e derivabile nell'intervallo aperto $]1; 3[$. Si sa che $f(1) = 1$ e inoltre $0 \leq f'(x) \leq 2$ per ogni x dell'intervallo $]1; 3[$. Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1 \leq f(3) \leq 5$.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 8)

11 Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema del valor medio o di Lagrange, se è vero che: «se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la velocità media è 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 km/h».

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2001, *quesito* 10)

12 Dopo aver enunciato le ipotesi del teorema di Lagrange, rappresenta il grafico di una funzione $y = f(x)$ che non sia continua in un punto interno all'intervallo $[0; 4]$ ma che presenti un punto con tangente parallela alla retta congiungente i punti $(0; f(0))$ e $(4; f(4))$.

13 Dimostrate, senza risolverla, che l'equazione $2x^3 + 3x^2 + 6x + 12 = 0$ ammette una e una sola radice reale.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Scuole italiane all'estero (Europa)*, *Sessione ordinaria*, 2003, *quesito* 3)

14 Sia α tale che la funzione $f(x) = \alpha x - \dfrac{x^3}{1+x^2}$ risulti crescente. Provare che $\alpha \geq \dfrac{9}{8}$.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Scuole italiane all'estero (Americhe)*, *Sessione ordinaria*, 2004, *quesito* 2)

15 Si enunci il teorema di Rolle e si mostri, con opportuni esempi, che se una qualsiasi delle tre condizioni previste non è soddisfatta, il teorema non è valido.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2009, *quesito* 10)

16 Mostra con un esempio che una funzione invertibile non è sempre monotòna in senso stretto.

17 Si determinino le costanti a e b in modo tale che la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{per } x \leq 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

risulti continua e derivabile nel punto $x = 0$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione suppletiva*, 2008, *quesito* 1)

18 Data la funzione $y = x^3 + kx^2 - kx + 3$, nell'intervallo chiuso $[1; 2]$, si determini il valore di k per il quale sia ad essa applicabile il teorema di Rolle e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione suppletiva*, 2007, *quesito* 3)

19 Si calcoli il limite della funzione $y = \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x(1 - \cos x)}$, quando x tende a 0.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione suppletiva*, 2007, *quesito* 8)

20 Dimostrare, utilizzando il teorema di Rolle, che se l'equazione:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1 = 0.$$

(*Esempio 2 di prova del Nuovo Esame di Stato di Liceo Scientifico proposto dal M.P.I. per corsi tradizionali*)

21 Calcola la derivata della funzione:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}.$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione suppletiva*, 2001, *quesito* 2)

$$\left[f'(x) = 0;\ f(x) = \frac{\pi}{4} \text{ se } x > -1;\ f(x) = -\frac{3}{4}\pi \text{ se } x < -1 \right]$$

22 Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Si dica se essa è continua e derivabile nel punto di ascissa 0.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2007, *quesito* 7)

23 Il dominio della funzione $f(x) = 3 \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$ è l'unione di tre intervalli. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione è costante in ciascuno di essi; indi si calcoli il valore di tale costante.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria*, 2006, *quesito* 8)

24 Mediante il teorema di Lagrange, dimostra che $\forall a, b \in \mathbb{R}$ vale la disuguaglianza:

$$|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|.$$

PROBLEMI

25 Data la funzione $y = f(x) = e^x + \text{arctg}\, 2x$:

a) dimostra che $f(x)$ è invertibile nel dominio $\mathbb{R}$;
b) detta $g(y)$ la funzione inversa di $f(x)$, calcola $g(1)$;
c) calcola $g'(1)$;
d) scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $x = 0$ e quella della retta tangente al grafico di $g(y)$ nel punto corrispondente e verifica che le due rette si intersecano in un punto della bisettrice del primo e terzo quadrante.

$\left[\text{b) } 0; \text{ c) } \frac{1}{3}; \text{ d) } y = 3x + 1, \ y = \frac{1}{3}(x - 1)\right]$

26 Una pallina si muove sull'asse x seguendo la legge oraria $x(t) = 2\cos(\omega t + a)$, dove t rappresenta il tempo e ω e a sono costanti (con $-\pi < a < 0, 0 < \omega < \pi$).
a) Trova a e ω sapendo che all'istante $t = 0$ la pallina si trova in $x = 1$ e all'istante $t = 1$ si trova in $x = 2$.
b) Descrivi il moto della pallina precisandone il periodo e indicando gli intervalli del primo periodo in cui la velocità è positiva e quelli in cui è negativa.
c) Calcola in quali istanti la velocità e l'accelerazione della pallina sono nulle.

$\left[\text{a) } a = -\frac{\pi}{3}; \ \omega = \frac{\pi}{3}; \text{ b) } T = 6; \ v \text{ positiva per } 0 \le t < 1 \vee 4 < t \le 6, \ v \text{ negativa per } 1 < t < 4\right.$
$\left.\text{c) } v = 0 \text{ per } t = 1 \vee t = 4; \ a = 0 \text{ per } t = \frac{5}{2} \vee t = \frac{11}{2}\right]$

27 Sia A il punto di intersezione tra la retta $y = -10x$ e la retta tangente alla parabola $y = 3x^2 - 2x + 1$ nel suo punto di ascissa -1.

a) Considerata la funzione

$$f(x) = -12 + \left|\frac{mx}{x - 2}\right| \quad (m \in \mathbb{R}^+),$$

trova il valore di m sapendo che il grafico di $f(x)$ passa per A e determina gli intervalli in cui $f(x)$ è crescente e decrescente.
b) Traccia il grafico di $f(x)$.
c) Spiega perché la funzione non è invertibile se ha per dominio $\mathbb{R} - \{2\}$, mentre lo è se ha per dominio l'intervallo $]0; 2[$. Determina in quest'ultimo caso la funzione inversa $y = f^{-1}(x)$.

$\left[\text{a) } m = 2; \ f(x) \text{ cresc. per } 0 < x < 2, \text{ decresc. per } x < 0 \vee x > 2; \text{ c) } y = \frac{24 + 2x}{x + 14}\right]$

28 Considera la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + 1 & \text{se} -2 \le x \le 0 \\ b\,\text{tg}\, x + c & \text{se } 0 < x \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

a) Trova a, b, c in modo che $f(x)$ soddisfi le ipotesi del teorema di Rolle in $\left[-2; \frac{\pi}{4}\right]$ e determina il punto x_0 che verifica il teorema.
b) Rappresenta graficamente $f(x)$.
c) Determina, se esiste nell'intervallo in cui è definita $f(x)$, un punto P in cui la tangente è parallela alla retta di equazione $4x - 3y - 12 = 0$.

$\left[\text{a) } a = \frac{3}{4}; \ b = 1; \ c = 1; \ x_0 = -\frac{2}{3}; \text{ c) } P\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)\right]$

29 Data la funzione $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$, con a e b parametri reali:

a) determina a e b in modo che la funzione sia crescente per $x < 1$ e $x > 3$;
b) con i valori di a e b trovati, verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[2; 2 + \sqrt{3}]$ e trova le coordinate del punto P che soddisfa il teorema;
c) dimostra che il grafico della funzione interseca l'asse x una volta sola nell'intervallo $[-1; 0]$.

$[\text{a) } a = -6; \ b = 9; \text{ b) } P(3; 4)]$

30 È data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x & \text{se } x \le 2 \\ \dfrac{bx+4}{x-1} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

a) Trova a e b in modo che nell'intervallo $[0; 3]$ siano verificate le ipotesi del teorema di Lagrange e determina le coordinate del punto P che soddisfa il teorema.
b) Traccia il grafico di $f(x)$.
c) Disegna il grafico di $|f(x)|$ e studia i suoi punti di non derivabilità indicando per ciascuno di essi l'equazione della tangente destra e sinistra.

$\left[\text{a) } a = -1;\ b = -2;\ P\left(\frac{7}{6}; \frac{35}{36}\right);\ \text{c) } (0; 0); (2; 0);\ y = \pm 2x;\ y = \pm 2x \mp 4\right]$

31 È data la funzione $f(x) = \dfrac{2x + \cos x}{x}$.

a) Determina il suo dominio e calcola $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
b) Dimostra che tale limite non può essere calcolato con la regola di De L'Hospital; quale ipotesi viene a mancare?
c) Scrivi l'equazione della tangente al grafico della funzione nel suo punto di ascissa $\frac{\pi}{2}$.

$\left[\text{a) } D\text{: } x \neq 0; 2;\ \text{c) } y = -\frac{2}{\pi}x + 3\right]$

32 Data la funzione $f(x) = 2x\, e^{2-x} + 2$:

a) determina il suo dominio, calcola i limiti per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ e indica gli intervalli in cui è crescente e decrescente;
b) considera la funzione $g(x) = e^{2-x}$ e verifica se è possibile applicare il teorema di Cauchy per le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ nell'intervallo $[0; 2]$, determinando il punto c che soddisfa il teorema;
c) calcola $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{g^2(x)}$.

$\left[\text{a) } D\text{: } \mathbb{R};\ -\infty; 2;\ \text{cresc. per } x < 1;\ \text{decresc. per } x > 1;\ \text{b) } c = \frac{e^2 - 3}{e^2 - 1};\ \text{c) } 0\right]$

33 a) Determina il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 - 2\ln x}$ e calcola i limiti per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$.
b) Dimostra che la funzione è invertibile nel suo dominio e scrivi l'equazione della funzione inversa. Perché la funzione è invertibile pur non essendo crescente?
c) Considera $|f(x)|$ e verifica che assume lo stesso valore agli estremi dell'intervallo $[\sqrt[3]{e}; e]$. Si può affermare che vale il teorema di Rolle nell'intervallo $[\sqrt[3]{e}; e]$?
d) Studia la continuità e la derivabilità di $|f(x)|$.

$\left[\text{a) } D\text{: } x > 0 \land x \neq \sqrt{e};\ -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ \text{b) } y = e^{\frac{x}{2x+1}};\right.$
$\left.\text{d) } |f(x)| \text{ continua per } x > 0 \land x \neq \sqrt{e};\ |f(x)| \text{ derivabile per } x > 0 \land x \neq 1 \land x \neq \sqrt{e}\right]$

34 a) Dimostra che la funzione $f(x) = 2x + 4 \operatorname{sen} x$ non è periodica.
b) Determina gli intervalli nei quali è invertibile.
c) Verificato che nell'intervallo $\left[-\frac{2}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi\right]$ è monotòna crescente e nell'intervallo $\left[\frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi\right]$ è monotòna decrescente, trova le corrispondenti immagini.
d) Detta g l'inversa di f nel primo intervallo e h l'inversa di f nel secondo, calcola $g'(0)$ e $h'(2\pi)$.

$\left[\text{b) } \left[-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right], \left[\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right];\right.$
$\left.\text{c) } \left[-\frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}; \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}\right], \left[\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}; \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}\right];\ \text{d) } g'(0) = \frac{1}{6}, h'(2\pi) = -\frac{1}{2}\right]$

CAPITOLO 26 ٢٦ २६ 二十六

[numerazione araba] [numerazione devanagari] [numerazione cinese]

I MASSIMI, I MINIMI E I FLESSI

UNA SCATOLA IN CARTONE Ti trovi con un quadrato di cartone di dimensioni un metro per un metro e devi ricavarne un contenitore. Va benissimo che sia aperto sopra: non ti serve avere un coperchio. Però vuoi che sia il più grande possibile. Per realizzarlo, decidi di tagliare via i quattro angoli e di piegare il cartone per formare le facce laterali.

Come bisogna tagliare un quadrato di cartone per avere il contenitore più capiente di tutti?

La risposta a pag. 1791

1. LE DEFINIZIONI

I massimi e i minimi assoluti

DEFINIZIONE

Massimo assoluto, minimo assoluto
Data la funzione $y = f(x)$, definita nell'intervallo I, chiamiamo:

- massimo assoluto di $f(x)$, se esiste, il massimo M dei valori assunti dalla funzione in I, cioè $M = f(x_0)$, $x_0 \in I \quad \wedge \quad M \geq f(x)$, $\forall x \in I$;
- minimo assoluto di $f(x)$, se esiste, il minimo m dei valori assunti dalla funzione in I, cioè $m = f(x_1)$, $x_1 \in I \quad \wedge \quad m \leq f(x)$, $\forall x \in I$.

M e m, se esistono, sono unici.
Un punto x_0 di I tale che $f(x_0) = M$ è detto **punto di massimo assoluto**.
Un punto x_0 di I tale che $f(x_0) = m$ è detto **punto di minimo assoluto**.

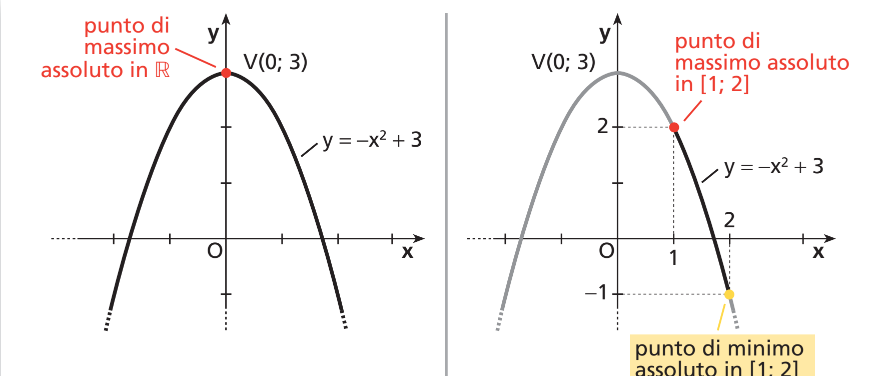
Se ci riferiamo al *grafico* della funzione, chiamiamo *punto di massimo assoluto* quello di coordinate $(x_0; M)$, dove $M = f(x_0)$. Analoghe considerazioni valgono per il punto di minimo assoluto.

L'esistenza del minimo o del massimo assoluti di una funzione non dipende solo dalla sua espressione, ma anche dal suo insieme di definizione.

Ricordiamo che, per il **teorema di Weierstrass**, se una funzione è continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$, allora essa assume, in tale intervallo, il massimo assoluto e il minimo assoluto.

ESEMPIO

Consideriamo la funzione $y = -x^2 + 3$, definita $\forall x \in \mathbb{R}$, il cui grafico è una parabola con la concavità rivolta verso il basso. Il vertice $V(0; 3)$ è il punto di massimo assoluto (figura 1*a*). 3 è il massimo assoluto della funzione in $\mathbb{R}$: $3 \geq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Non esiste invece il minimo assoluto.
Consideriamo la stessa funzione definita in $[1; 2]$ (figura 1*b*). In questo intervallo, poiché la funzione è decrescente, il massimo assoluto si ha nel primo estremo, $M = f(1) = 2$, mentre il minimo assoluto si ha nel secondo estremo, $m = f(2) = -1$.



a. Il massimo assoluto della funzione $y = -x^2 + 3$, con dominio $\mathbb{R}$, è 3 (l'ordinata del vertice). Non esiste il minimo.

b. Se per la stessa funzione consideriamo come dominio $[1; 2]$, il massimo assoluto è $2 = f(1)$ e il minimo assoluto è $-1 = f(2)$.

▶ Figura 1

I massimi e i minimi relativi

Nelle prossime definizioni di massimo e minimo *relativi*, l'intorno del punto x_0 deve avere le seguenti caratteristiche:

- se x_0 è interno all'intervallo $[a; b]$, l'intorno considerato di x_0 deve essere completo;
- se x_0 coincide con a, l'intorno di x_0 è destro;
- se x_0 coincide con b, l'intorno di x_0 è sinistro.

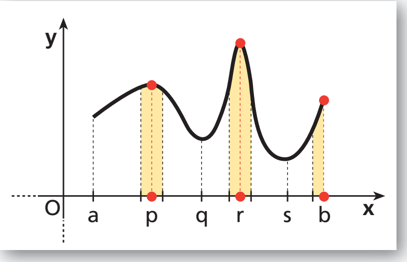
DEFINIZIONE

Massimo relativo

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo I, il punto x_0 di I si dice di massimo relativo se esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che $f(x_0)$ è maggiore o uguale al valore della funzione per ogni x dell'intorno I_{x_0}.
$f(x_0)$ si dice massimo relativo della funzione in I.

> $y = f(x)$ definita in I
> x_0 punto di massimo relativo se
> $\exists\, I_{x_0}$: $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall\, x \in I_{x_0}$
> $f(x_0)$ massimo relativo

ESEMPIO



◀ **Figura 2** *p*, *r* e *b* sono punti di massimo relativo nell'intervallo [*a*; *b*]. Il punto *r* è anche di massimo assoluto.

Osservando il grafico della figura 2, possiamo dire che p è un punto di massimo relativo perché esiste un intorno di p tale che, per tutti gli x che gli appartengono, vale la relazione $f(p) \geq f(x)$. Anche r è un punto di massimo relativo. Fra gli estremi dell'intervallo, b è un punto di massimo relativo; inoltre, r è anche il punto di massimo assoluto.

Dalla definizione e dall'esempio comprendiamo che un punto di massimo assoluto è anche punto di massimo relativo, mentre non è detto che sia vero l'inverso.

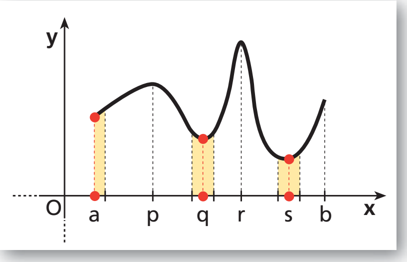
DEFINIZIONE

Minimo relativo

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo I, il punto x_0 di I si dice di minimo relativo se esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che $f(x_0)$ è minore o uguale al valore della funzione per ogni x dell'intorno I_{x_0}.
$f(x_0)$ si dice minimo relativo della funzione in I.

> $y = f(x)$ definita in I
> x_0 punto di minimo relativo se
> $\exists\, I_{x_0}$: $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall\, x \in I_{x_0}$
> $f(x_0)$ minimo relativo

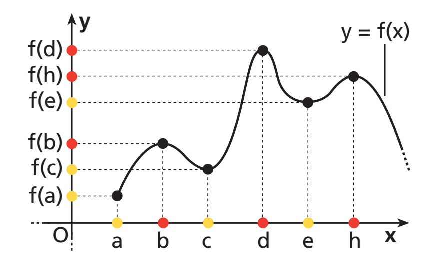
ESEMPIO



◀ **Figura 3** Nell'intervallo [*a*; *b*], *a*, *q* e *s* sono punti di minimo relativo. Il punto *s* è anche di minimo assoluto.

● Un punto di minimo assoluto è anche punto di minimo relativo, mentre non è detto che sia vero il viceversa.

Un punto di un intervallo che sia di massimo relativo viene anche detto **massimante**; un punto di minimo relativo è detto **minimante**. Un punto di un intervallo è detto **estremante** se è massimante o minimante. Il corrispondente valore della funzione è detto **estremo relativo**.



◄ **Figura 4** I punti a, b, c, d, e, h sono estremanti, mentre $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$, $f(e)$, $f(h)$ sono estremi relativi della funzione. Notiamo che un minimo relativo può essere maggiore di un massimo relativo. Per esempio, $f(e) > f(b)$. Osserviamo inoltre che la funzione ha dei minimi relativi ma non ha il minimo assoluto, in quanto è definita in un intervallo aperto.

La concavità

● Poiché $f(x)$ è derivabile in I, la retta tangente esiste in ogni punto.

Siano date la funzione $y = f(x)$, definita e derivabile nell'intervallo I, e la retta di equazione $y = t(x)$, tangente al grafico di $f(x)$ nel suo punto di ascissa x_0, interno all'intervallo I.

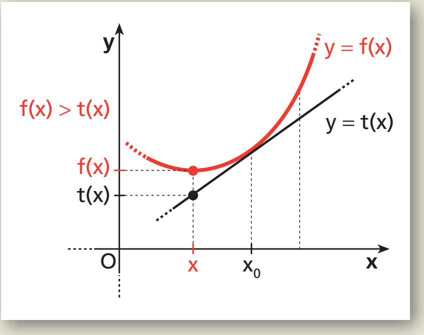
● Una funzione il cui grafico rivolge la concavità verso l'alto si dice anche **convessa**.

DEFINIZIONE

Concavità verso l'alto

Si dice che in x_0 il grafico della funzione $f(x)$ ha la concavità rivolta verso il semiasse positivo delle y (verso l'alto) se esiste un intorno completo I_{x_0} di x_0 tale che, per ogni x appartenente all'intorno e diverso da x_0, l'ordinata del punto di ascissa x appartenente al grafico è maggiore di quella del punto appartenente alla tangente t e avente la stessa ascissa, ossia:

$$f(x) > t(x) \quad \forall x \in I_{x_0} \ \wedge \ x \neq x_0.$$



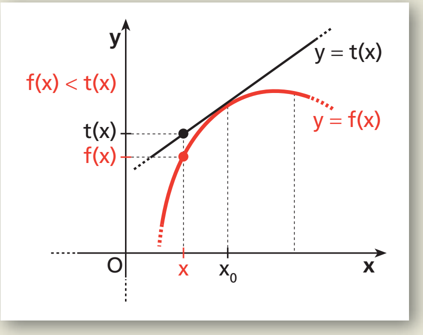
● Una funzione il cui grafico rivolge la concavità verso il basso si dice anche **concava**.

DEFINIZIONE

Concavità verso il basso

Si dice che in x_0 il grafico della funzione $f(x)$ ha la concavità rivolta verso il semiasse negativo delle y (verso il basso) se esiste un intorno completo I_{x_0} di x_0 tale che, per ogni x appartenente all'intorno e diverso da x_0, l'ordinata del punto di ascissa x appartenente al grafico è minore di quella del punto appartenente alla tangente t e avente la stessa ascissa, ossia:

$$f(x) < t(x) \quad \forall x \in I_{x_0} \ \wedge \ x \neq x_0.$$

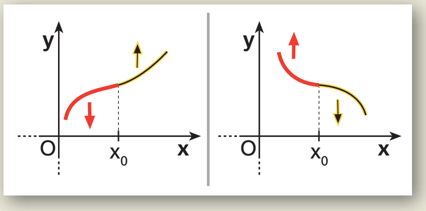


Dato un intervallo I, diciamo che il grafico ha la concavità verso l'alto (oppure verso il basso) **nell'intervallo**, se ha la concavità verso l'alto (o verso il basso) in ogni punto interno dell'intervallo.

I flessi

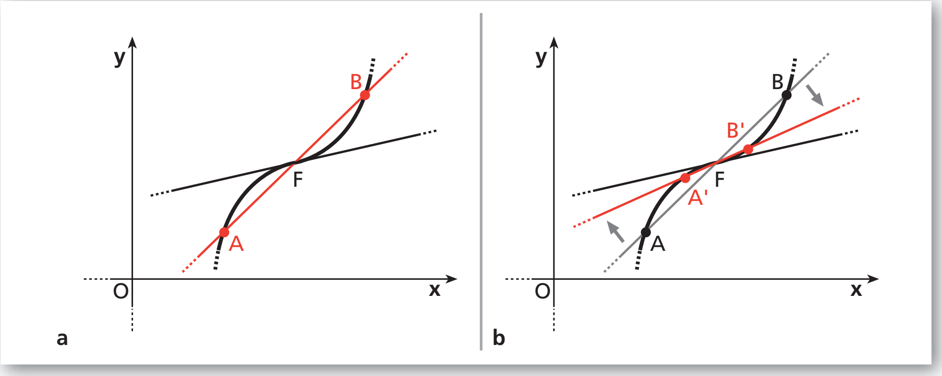
DEFINIZIONE

Data la funzione $y = f(x)$ definita e continua nell'intervallo I, e derivabile in I (escluso al più x_0), si dice che presenta in x_0, interno a I, un punto di flesso se in tale punto il grafico di $f(x)$ cambia concavità.



Se la funzione è derivabile nel punto di flesso, esiste la tangente alla curva in tale punto ed è obliqua o parallela all'asse x; se la derivata è infinita, la tangente è parallela all'asse y. La retta tangente ha la caratteristica di attraversare la curva. Inoltre, il punto di tangenza è un «punto triplo», come si nota nella figura 5.

La tangente in un punto di flesso viene anche detta **tangente inflessionale**.



◀ **Figura 5** Facendo tendere la secante *AB* passante per *F* alla posizione della tangente, i punti *A* e *B* si avvicinano sempre più al punto *F*. Il punto *F* può quindi essere considerato come un punto in cui la tangente ha tre intersezioni coincidenti con la curva.

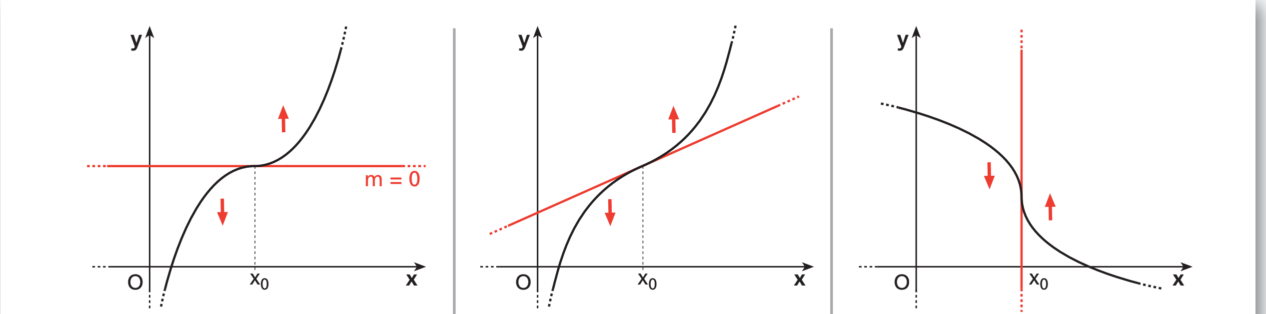
Se in un punto di flesso esiste la retta tangente, il flesso viene detto:

- **orizzontale** se la tangente nel punto di flesso è parallela all'asse x;
- **verticale** se la tangente è parallela all'asse y;
- **obliquo** se la tangente non è parallela a uno degli assi.

Se esiste un intorno del punto di flesso in cui il grafico della funzione ha:

- concavità verso il basso a sinistra del punto di flesso e verso l'alto a destra, il flesso è **ascendente**;
- concavità verso l'alto a sinistra del punto di flesso e verso il basso a destra, il flesso è **discendente**.

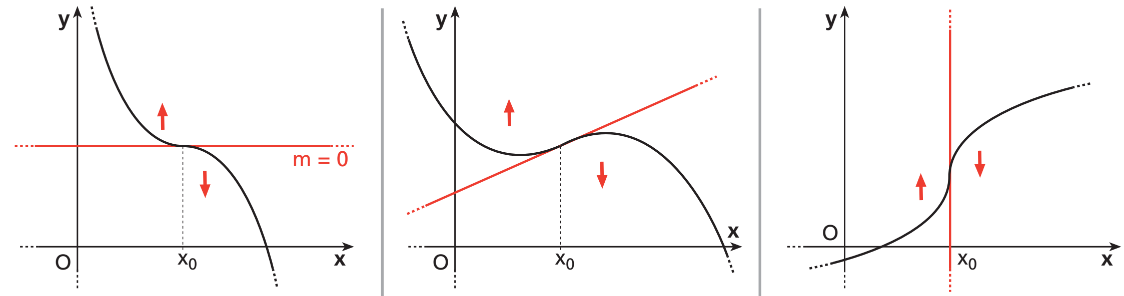
▼ **Figura 6** Diversi tipi di flesso ascendente.



a. x_0 è punto di flesso orizzontale ascendente.

b. x_0 è punto di flesso obliquo ascendente.

c. x_0 è punto di flesso verticale ascendente.



a. x_0 è punto di flesso orizzontale discendente.

b. x_0 è punto di flesso obliquo discendente.

c. x_0 è punto di flesso verticale discendente.

▲ **Figura 7** Diversi tipi di flesso discendente.

2. MASSIMI, MINIMI, FLESSI ORIZZONTALI E DERIVATA PRIMA

I punti di massimo o di minimo relativo

● Il teorema afferma che i punti di massimo e minimo relativi di una funzione derivabile, interni all'intervallo di definizione, sono punti stazionari.
Un punto $x = c$ è **stazionario** per una funzione derivabile $f(x)$ se $f'(c) = 0$.

TEOREMA

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$, se $f(x)$ ha un massimo o un minimo relativo nel punto x_0, *interno* ad $[a; b]$, la derivata della funzione in quel punto si annulla, cioè: $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$.

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo. Allora, per definizione, esiste un intorno completo I_{x_0} di x_0 tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I_{x_0},$$

ossia:

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0) \quad \forall h \in \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad x_0 + h \in I_{x_0}.$$

Quindi si ha:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0, \quad \text{per } h > 0;$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0, \quad \text{per } h < 0.$$

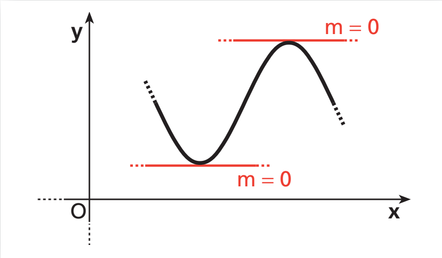
Per l'inverso del teorema della permanenza del segno, risulta:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Poiché $f(x)$ è derivabile in x_0, entrambi i limiti coincidono con $f'(x_0)$. Quindi:

$$f'(x_0) \leq 0 \quad \text{e} \quad f'(x_0) \geq 0 \quad \rightarrow \quad f'(x_0) = 0.$$

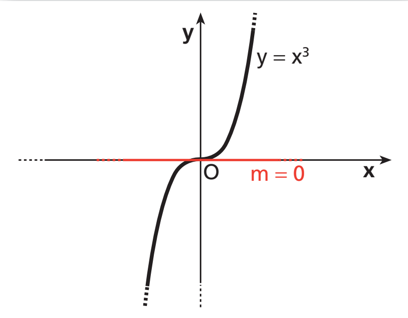
Con un ragionamento analogo si dimostra il caso in cui x_0 è un punto di minimo relativo.



Per il significato geometrico della derivata, dal teorema precedente si deduce che la tangente in un punto del grafico di massimo o minimo relativo (se la tangente esiste e il punto non è un estremo dell'intervallo) è parallela all'asse x (figura 8).

◀ **Figura 8** In un punto di massimo o di minimo la tangente al grafico della funzione è parallela all'asse x (ossia, il coefficiente angolare m è uguale a 0).

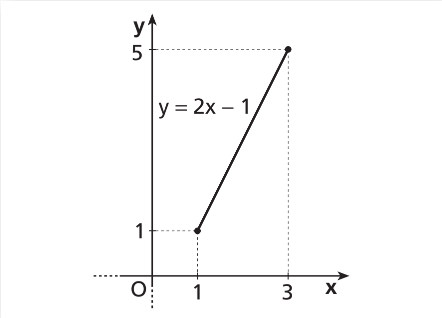
● Il teorema precedente fornisce una *condizione necessaria* per l'esistenza di un massimo o di un minimo relativo in un punto interno ad $[a; b]$, ma tale condizione *non* è *sufficiente*.
Può infatti accadere che in un punto la retta tangente al grafico della funzione sia parallela all'asse x, ma che in quel punto non ci sia né un massimo né un minimo.
Per esempio, consideriamo la funzione $y = x^3$ e il suo grafico (figura 9). Calcoliamo la derivata della funzione: $y' = 3x^2$.



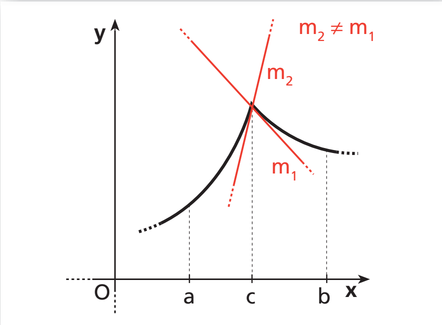
La derivata prima si annulla per $x = 0$. D'altra parte, poiché la derivata è positiva (ossia la funzione è crescente) sia a destra sia a sinistra di 0, in tale punto non può esserci né un massimo né un minimo.

◀ **Figura 9** Il grafico della funzione $y = x^3$.

● Il teorema parla dei punti *interni* all'intervallo di definizione. Come si vede nell'esempio della figura 10, per un estremo dell'intervallo la condizione del teorema può non essere neppure necessaria, ossia un estremo può essere un punto di massimo o minimo con $f'(x) \neq 0$ e quindi con tangente non parallela all'asse x.

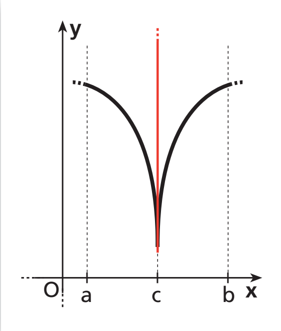


◀ **Figura 10** La funzione $y = 2x - 1$ è rappresentata da una retta con coefficiente angolare 2. La tangente al grafico coincide con la retta stessa in ogni suo punto e, in particolare, in $x = 1$ e in $x = 3$, estremi dell'intervallo considerato. In 1 c'è un minimo e in 3 un massimo, ma la tangente non è orizzontale.



Anche quando viene a mancare l'ipotesi della derivabilità in tutti i punti interni dell'intervallo, la condizione può non essere necessaria (figure 11 e 12).

◀ **Figura 11** In $[a; b]$ il punto c è punto di massimo della funzione $y = f(x)$. Le tangenti alla curva, considerando intorni destri e sinistri di c, sono diverse e quindi $f'_+(c) \neq f'_-(c)$. Nel punto c la derivata non esiste, quindi non può essere $f'(c) = 0$.



▲ **Figura 12** In questo caso c è un punto di minimo relativo, ma la tangente è parallela all'asse y e la derivata non esiste.

Possiamo concludere che, data una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a; b]$, i possibili estremanti vanno ricercati tra:

- i punti in cui $f'(x) = 0$;
- gli estremi dell'intervallo;
- i punti in cui la funzione è continua ma non derivabile.

La ricerca dei massimi e minimi relativi con la derivata prima

Esaminiamo ora una condizione sufficiente per l'esistenza di un massimo o minimo relativo in un punto interno a un intervallo.

TEOREMA

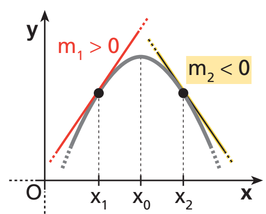
La funzione $y = f(x)$ sia definita e continua in un intorno completo I_{x_0} del punto x_0 e derivabile nello stesso intorno per ogni $x \neq x_0$.

a) Se per ogni x dell'intorno si ha $f'(x) > 0$ quando $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ quando $x > x_0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo.

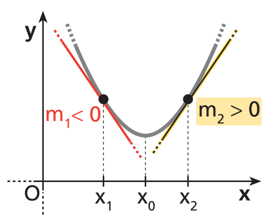
b) Se per ogni x dell'intorno si ha $f'(x) < 0$ quando $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ quando $x > x_0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo.

c) Se il segno della derivata prima è lo stesso per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno, allora x_0 non è un punto estremante.

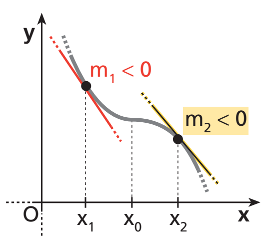
● Un punto è estremante se è di massimo o di minimo relativo.



a



b



c

DIMOSTRAZIONE

a) Per $x < x_0$ si ha $f'(x) > 0$, quindi $f(x)$ è crescente (per il teorema delle funzioni crescenti e decrescenti); pertanto, se $x < x_0$, $f(x) < f(x_0)$.
Per $x > x_0$ si ha $f'(x) < 0$, quindi $f(x)$ è decrescente; pertanto, se $x > x_0$, $f(x) < f(x_0)$.
Per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno si ha $f(x) < f(x_0)$, quindi x_0 è punto di massimo relativo (figura *a* a lato).

b) Analogamente al caso precedente: per $x < x_0$ si ha $f'(x) < 0$, quindi $f(x)$ è decrescente, ossia, se $x < x_0$, $f(x) > f(x_0)$; per $x > x_0$ si ha $f'(x) > 0$, quindi $f(x)$ è crescente, ossia, se $x > x_0$, $f(x) > f(x_0)$. Per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno si ha $f(x) > f(x_0)$, quindi x_0 è punto di minimo relativo (figura *b* a lato).

c) Supponiamo che per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno si abbia $f'(x) < 0$ (dimostrazione analoga si ha se $f'(x) > 0$). La funzione è decrescente sia per $x < x_0$ sia per $x > x_0$. Pertanto se $x < x_0$, $f(x) > f(x_0)$, mentre se $x > x_0$, $f(x) < f(x_0)$. Concludiamo che x_0 non è né punto di massimo né punto di minimo (figura *c* a lato).

ESEMPIO

Consideriamo la funzione:

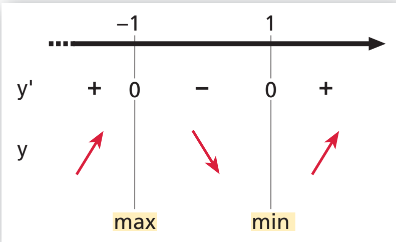
$$y = f(x) = x^3 - 3x.$$

La funzione è continua $\forall x \in \mathbb{R}$. La sua derivata è:

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$3x^2 - 3 > 0 \rightarrow 3(x^2 - 1) > 0 \rightarrow x^2 - 1 > 0 \rightarrow x < -1 \vee x > 1.$$

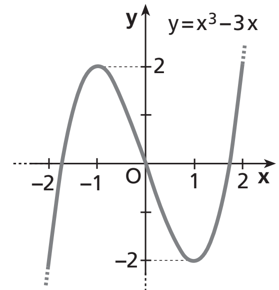


◀ **Figura 13 Il quadro relativo al segno della derivata prima $y' = 3x^2 - 3$, con gli intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente. Indichiamo con min il punto di minimo relativo, con max quello di massimo relativo.**

La condizione sufficiente permette di affermare che $x = -1$ è un punto di massimo relativo, mentre $x = 1$ è di minimo relativo. Poiché $f'(x) = 0$ per $x = -1$ e $x = 1$, allora *tali punti sono stazionari*, ovvero in corrispondenza di essi la tangente al grafico è orizzontale.
I corrispondenti valori della funzione sono:

$$M = f(-1) = 2 \quad \text{e} \quad m = f(1) = -2.$$

I punti $(-1; 2)$ e $(1; -2)$ sono, rispettivamente, un punto di massimo relativo e uno di minimo relativo del grafico della funzione.



● Nota che

$f'(-1) = f'(1) = 0.$

La condizione necessaria che abbiamo enunciato parlando di massimi e minimi come punti di stazionarietà afferma infatti che, se $f(x)$ è derivabile in un intervallo I e in un punto interno a I c'è un massimo o un minimo relativo, allora la derivata nel punto è nulla.

Osserviamo che il teorema non richiede che la funzione sia derivabile in $x = x_0$. Se ciò avviene, allora, per il teorema dei massimi e dei minimi relativi di funzioni derivabili, si ha $f'(x_0) = 0$, e quindi x_0 è un punto stazionario per $f(x)$.

Se invece la funzione non è derivabile in x_0, non abbiamo un punto stazionario anche in presenza di un massimo o di un minimo relativi.

ESEMPIO

1. Consideriamo la funzione $y = |x^2 - 1|$, ossia:

$$y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

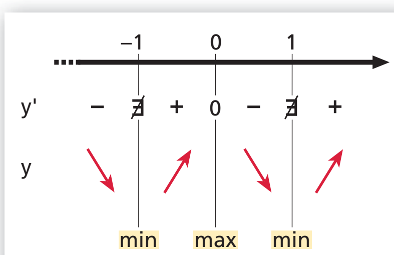
La funzione è continua $\forall x \in \mathbb{R}$. La sua derivata è

$$y' = \begin{cases} 2x & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \\ -2x & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

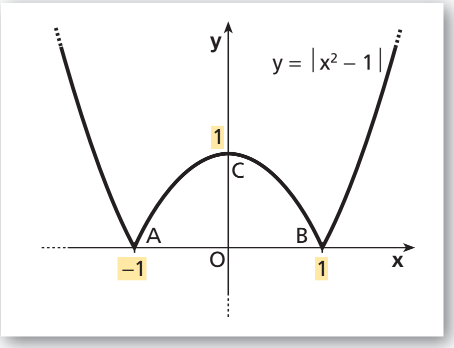
e non esiste per $x = \pm 1$. Poiché $2x > 0$ per $x > 0$ e $-2x > 0$ per $x < 0$, per lo studio del segno della derivata otteniamo il quadro raffigurato dalla figura 14.

● In $x = \pm 1$ esistono le derivate destra e sinistra, ma sono diverse. Per esempio, $f'_-(1) = -2$, mentre $f'_+(1) = 2$. I punti -1 e 1 sono *punti angolosi*.

La funzione ha due minimi relativi in -1 e 1, mentre ha un massimo relativo in 0. I corrispondenti punti del grafico sono $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$.



◀ **Figura 14 Il quadro del segno della derivata prima di $y = |x^2 - 1|$.**



◀ **Figura 15** Il grafico della funzione $y = |x^2 - 1|$. La derivata della funzione in $x = \pm 1$ non esiste, ma il teorema può essere applicato ugualmente.
I due punti A e B sono punti di minimo relativo e punti angolosi. Il punto C è punto di massimo relativo e punto stazionario.

2. Consideriamo la funzione:

$$y = \sqrt[3]{x^2}.$$

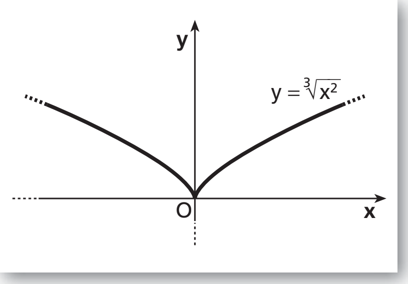
La funzione è continua $\forall x \in \mathbb{R}$. La sua derivata è

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}},$$

e non esiste per $x = 0$. Essa è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$, quindi nel punto $x = 0$ c'è un minimo relativo.
Poiché

$$\lim_{x \to 0^+} y' = +\infty \ \text{ e } \ \lim_{x \to 0^-} y' = -\infty,$$

in $x = 0$ c'è un punto a tangente verticale, che in questo caso è una *cuspide*.



● Essendo $y = x^{\frac{2}{3}}$, si ha $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

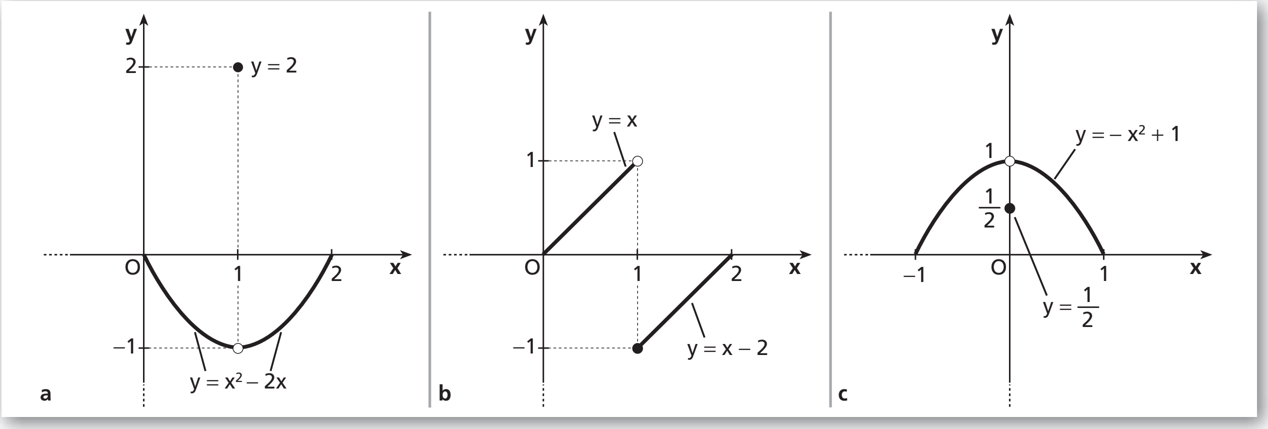
▶ **Figura 16** Il grafico della funzione $y = \sqrt[3]{x^2}$. In $x = 0$ la derivata non è finita (cuspide). Questo punto è punto di minimo relativo.

Se in x_0 la funzione non è continua, il verificarsi delle altre ipotesi del teorema non è sufficiente per poterlo applicare.

ESEMPIO

Analizziamo le situazioni proposte nella figura 17.

▼ **Figura 17**



● Consideriamo tre esempi in cui la funzione non è continua in un punto.

a) Nell'intervallo $[0; 2]$, la funzione

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

presenta nel punto 1 un massimo relativo, e non un minimo, pur essendo la derivata $y' = 2x - 2$ negativa prima di 1 e positiva dopo (figura 17*a*).

b) Nell'intervallo [0; 2], la funzione

$$y = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ x - 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

presenta nel punto 1 un minimo relativo, pur essendo la derivata $y' = 1$ positiva sia prima sia dopo 1 (figura 17*b*).

c) Nell'intervallo [−1; 1], la funzione

$$y = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

non presenta nel punto 0 un massimo relativo, pur essendo la derivata $y' = -2x$ positiva prima di 0 e negativa dopo (figura 17*c*).

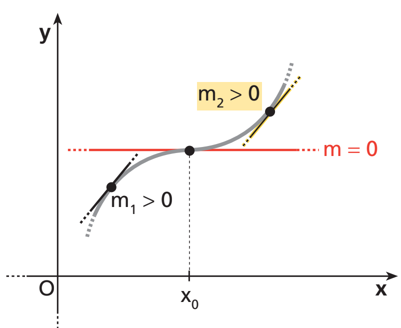
I punti stazionari di flesso orizzontale

TEOREMA

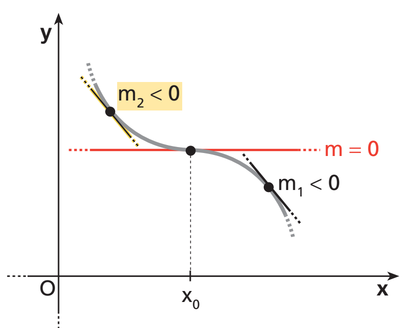
Data la funzione $y = f(x)$ definita e continua in un intorno completo I_{x_0} del punto x_0 e derivabile nello stesso intorno, x_0 è un punto di flesso orizzontale se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- $f'(x_0) = 0$;
- il segno della derivata prima è lo stesso per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno I_{x_0}.

I casi possibili sono illustrati nella figura 18.



a. Per ogni $x \neq x_0$, $f'(x) > 0$, quindi $f(x)$ è crescente. x_0 è un punto di flesso orizzontale.



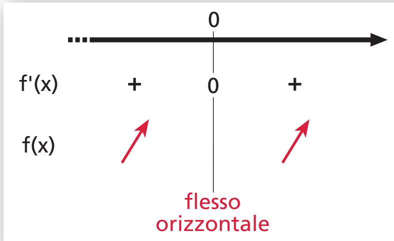
b. Per ogni $x \neq x_0$, $f'(x) < 0$, quindi $f(x)$ è decrescente. x_0 è un punto di flesso orizzontale.

◄ **Figura 18** I due tipi di flesso orizzontale.

ESEMPIO

Consideriamo la funzione $y = 3x^5 + 1$.
Calcoliamo la derivata prima e studiamo il segno:

$$f'(x) = 15x^4$$
$$15x^4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$
$$15x^4 > 0 \quad \rightarrow \quad \forall x \neq 0.$$



◀ **Figura 19** Sia per $x < 0$ sia per $x > 0$ si ha $f'(x) > 0$, quindi la funzione è crescente; per $x = 0$ si ha $f'(x) = 0$.

Compiliamo il quadro dei segni, osservando dove la funzione è crescente o decrescente (figura 19).

Concludiamo che $x = 0$ è un punto di flesso orizzontale.

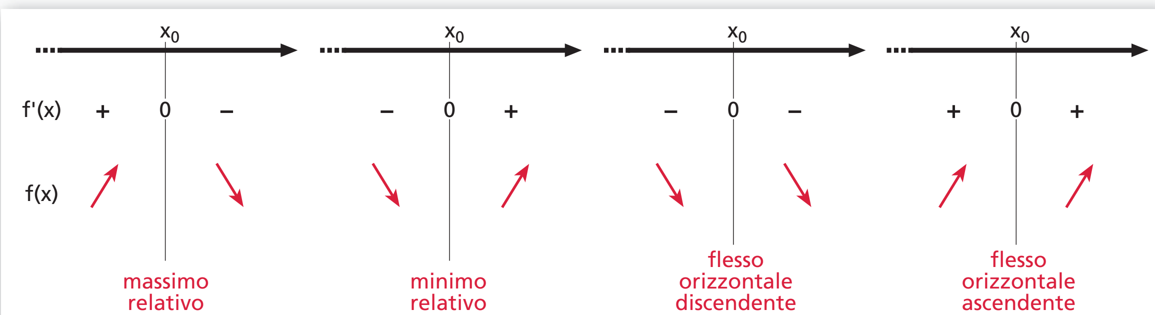
Riassumendo, per una funzione $f(x)$ continua lo studio del segno della derivata prima è fondamentale per la **ricerca dei massimi e dei minimi relativi e dei flessi orizzontali**. Si procede nel seguente modo:

- si calcola la derivata $f'(x)$ e si determina il suo dominio per trovare gli eventuali punti in cui la funzione non è derivabile (cuspidi, flessi verticali, punti angolosi);
- si risolve l'equazione

$$f'(x) = 0$$

  per trovare i punti stazionari;
- si studia il segno di $f'(x)$ per trovare massimi e minimi *relativi* (anche non stazionari) e i flessi a tangente orizzontale.

I casi possibili sono indicati nella figura 20.



▲ **Figura 20**

I teoremi enunciati valgono per i punti interni agli intervalli di definizione della funzione, pertanto occorre esaminare anche i valori che la funzione assume negli eventuali estremi di tali intervalli.
Se dobbiamo trovare **il massimo e il minimo *assoluti***:

- se la funzione $f(x)$ è continua e l'intervallo di definizione della funzione è chiuso e limitato, il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza di massimo e minimo assoluti; per determinarli si confrontano le ordinate dei punti di massimo e minimo relativi tra di loro e con i valori che $f(x)$ assume negli estremi dell'intervallo: il valore maggiore corrisponde al punto di massimo assoluto e quello minore corrisponde al punto di minimo assoluto;
- se l'intervallo non è chiuso e limitato, massimo e minimo assoluti potrebbero non esistere.

3. FLESSI E DERIVATA SECONDA

La concavità e il segno della derivata seconda

Un criterio per la concavità

Un criterio per stabilire la concavità del grafico di una funzione in un suo punto di ascissa x_0 è dato dal seguente teorema.

TEOREMA

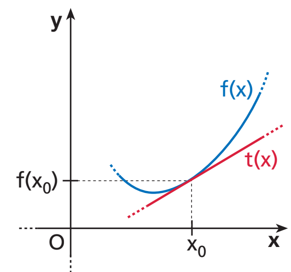
Sia $y = f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo I, insieme con le sue derivate prima e seconda, e sia x_0 un punto interno a questo intervallo. Se in x_0 è $f''(x_0) \neq 0$, il grafico della funzione volge in x_0:

- la concavità verso l'alto se $f''(x_0) > 0$;
- la concavità verso il basso se $f''(x_0) < 0$.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo l'equazione della retta tangente $y = t(x)$ al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0; f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \rightarrow \quad t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



La differenza tra le ordinate dei punti del grafico di $f(x)$ e della tangente $t(x)$, aventi la stessa ascissa x, è:

$$g(x) = f(x) - t(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)].$$

La funzione $g(x)$ è derivabile due volte perché differenza di due funzioni derivabili due volte, e si ha:

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0) \quad \text{e} \quad g''(x) = f''(x).$$

In particolare per $x = x_0$ si ha:

$$g(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad g'(x_0) = 0.$$

- Sia $f''(x_0) > 0$. Poiché $g''(x) = f''(x)$ è continua:

  $$\lim_{x \to x_0} g''(x) = g''(x_0) = f''(x_0) > 0.$$

  Allora, per il *teorema della permanenza del segno*, esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che $g''(x) > 0$ per ogni $x \in I_{x_0}$, e quindi, essendo $g''(x)$ la derivata prima di $g'(x)$, segue che $g'(x)$ è crescente in I_{x_0}. Pertanto:

  $$g'(x) < g'(x_0) = 0 \qquad \forall x \in I_{x_0}, \text{ con } x < x_0;$$
  $$g'(x) > g'(x_0) = 0 \qquad \forall x \in I_{x_0}, \text{ con } x > x_0.$$

  Quindi, per la condizione sufficiente per i massimi e i minimi relativi, x_0 è un punto di minimo relativo per $g(x)$, cioè:

  $$g(x) > g(x_0) = 0 \qquad \forall x \in I_{x_0}, \text{ con } x \neq x_0.$$

  Ossia, per ogni $x \in I_{x_0}$, con $x \neq x_0$:

  $$f(x) - t(x) > 0 \quad \rightarrow \quad f(x) > t(x).$$

  Per definizione, questo significa che la funzione $f(x)$ ha in x_0 la concavità rivolta verso l'alto.

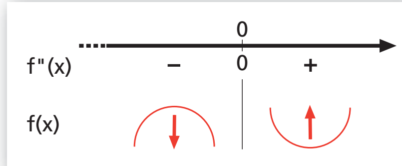
- Sia $f''(x_0) < 0$. Con ragionamento analogo al precedente, si dimostra che la funzione $f(x)$ ha in x_0 la concavità rivolta verso il basso.

Teorema della permanenza del segno: se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, con $l \neq 0$, allora esiste un intorno di x_0 in cui la funzione $f(x)$ ha lo stesso segno di l.

▶ **Figura 21** Il quadro relativo allo studio della derivata seconda.

ESEMPIO

Data la funzione $y = f(x) = 2x^3 - 5$, cerchiamo gli intervalli in cui il grafico della funzione volge la concavità verso l'alto o verso il basso.



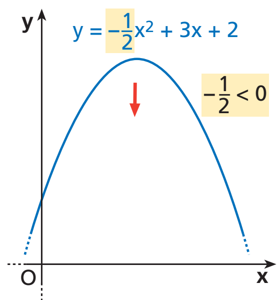
Calcoliamo le derivate prima e seconda:

$$f'(x) = 6x^2, \quad f''(x) = 12x.$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \quad \text{per } \; 12x > 0, \quad \text{quindi } \; \text{per } x > 0.$$

Per $x < 0$, la concavità è rivolta verso il basso.
Per $x > 0$, la concavità è rivolta verso l'alto.



● Una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ ha la concavità rivolta verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$. Ora possiamo comprenderne il motivo: infatti $f''(x) = 2a$, e quindi la concavità dipende dal segno di a. Per esempio, consideriamo la parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2$. La derivata seconda è $y'' = -1 < 0$: in ogni punto la concavità è verso il basso.

Una condizione necessaria per i flessi

● Ricordiamo che un punto di flesso è un punto in cui la funzione cambia concavità.

Per la ricerca dei flessi è utile il seguente teorema di cui ci limitiamo a fornire l'enunciato.

TEOREMA

Sia data una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a; b]$ e in tale intervallo esistano le sue derivate prima e seconda. Se $f(x)$ ha un flesso nel punto x_0, interno ad $[a; b]$, la derivata seconda della funzione in quel punto si annulla, cioè: $f''(x_0) = 0$.

Il teorema fornisce una *condizione necessaria* ma *non sufficiente* per l'esistenza di un flesso in un punto.

ESEMPIO

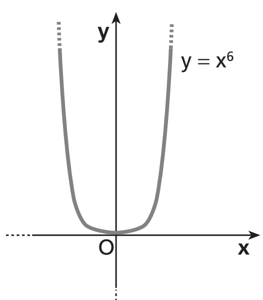
La funzione $y = x^6$ ha come derivate:

$$y' = 6x^5; \quad y'' = 30x^4.$$

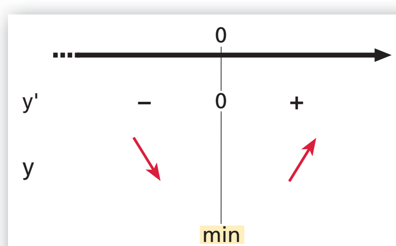
La derivata seconda è nulla in $x = 0$. Studiamo il segno della derivata prima:

$$6x^5 > 0 \quad \text{per} \quad x > 0.$$

Il quadro dei segni è quello della figura 22. La derivata seconda è nulla in 0, ma nel punto c'è un minimo relativo e non un flesso.



▼ **Figura 22** In 0 si ha un punto di stazionarietà, prima di 0 la funzione è decrescente, dopo 0 è crescente. 0 è un punto di minimo e non di flesso, anche se $y'' = 0$ in $x = 0$.



Se nel punto x_0 la funzione non è derivabile, non è possibile applicare il teorema precedente, ma nel punto può esserci ugualmente un flesso.

ESEMPIO

La funzione

$$y = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \leq -1 \\ 2x^2 + 4x + 1 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

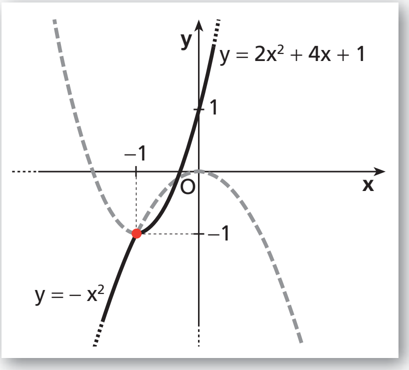
è continua in $\mathbb{R}$, ma non è derivabile in $x = -1$, in quanto:

per $x < -1 \quad y' = -2x \quad \to \quad y'_-(-1) = 2;$

per $x > -1 \quad y' = 4x + 4 \quad \to \quad y'_+(-1) = -4 + 4 = 0.$

Il punto $x = -1$ è un punto angoloso.

Poiché il grafico della funzione è costituito da due rami di parabola, il primo con concavità verso il basso e il secondo con concavità verso l'alto, esso ha per definizione un flesso in $x = -1$ (figura 23).

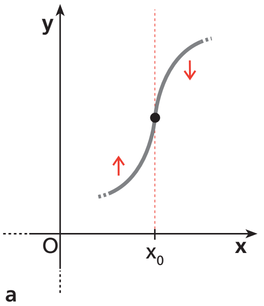


◀ **Figura 23** La funzione in $x = -1$ ha un flesso anche se la derivata prima non esiste.

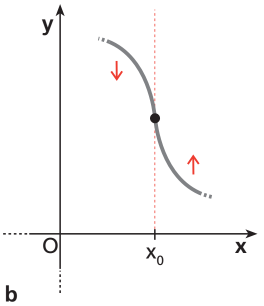
In particolare, se

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to x_0} f'(x) = -\infty,$$

nel punto x_0 c'è un flesso verticale rispettivamente discendente (figura *a* a lato) oppure ascendente (figura *b* a lato).



a



b

Flessi e studio del segno della derivata seconda

Per trovare i punti di flesso possiamo studiare il segno della derivata seconda. Vale infatti il seguente teorema.

TEOREMA

Sia data la funzione $y = f(x)$ definita e continua in un intorno completo I_{x_0} del punto x_0 e in tale intorno esistano le sue derivate prima e seconda per ogni $x \neq x_0$.
Se per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno si ha

- $f''(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f''(x) < 0$ per $x > x_0$, oppure
- $f''(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f''(x) > 0$ per $x > x_0$,

allora x_0 è un punto di flesso.

La dimostrazione del teorema è immediata, in quanto, nei due casi considerati, prima e dopo x_0 la derivata seconda cambia segno, quindi in x_0 la concavità della curva cambia.

ESEMPIO

La funzione

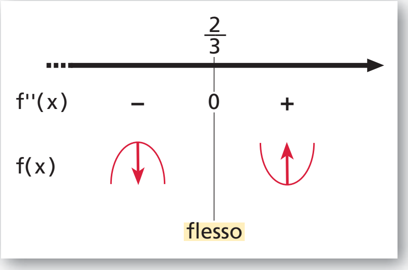
$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

è continua $\forall x \in \mathbb{R}$; calcoliamo $f'(x)$ e $f''(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1; \quad f''(x) = 6x - 4.$$

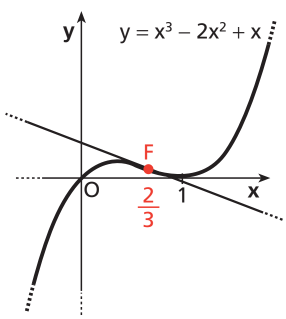
Studiamo il segno di $f''(x)$:

$$6x - 4 > 0 \text{ per } x > \frac{2}{3}.$$



Per $x < \frac{2}{3}$ la concavità è verso il basso, mentre per $x > \frac{2}{3}$ la concavità è verso l'alto. In $x = \frac{2}{3}$ la funzione ha un punto di flesso. In particolare, si tratta di un flesso ascendente.

▶ Figura 24



Se, oltre alle ipotesi del teorema precedente, è vero che in x_0 la derivata seconda è continua, allora necessariamente $f''(x_0) = 0$. Quindi, i punti di flesso delle funzioni che hanno derivate prima e seconda continue vanno cercati fra le soluzioni dell'equazione $f''(x) = 0$. Inoltre, nei punti x_0 di flesso, se $f'(x_0) \neq 0$ il flesso è obliquo, se $f'(x_0) = 0$ il flesso è orizzontale.

Nell'esempio precedente, poiché $f''(x)$ è una funzione continua, possiamo cercare i punti di flesso risolvendo l'equazione $f''(x) = 0$, ossia:

$$6x - 4 = 0 \to x = \frac{2}{3}.$$

Lo studio del segno di $f''(x)$ completa la ricerca, e inoltre, poiché

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3} \neq 0,$$

il flesso è obliquo.

Esaminiamo ora un esempio in cui una funzione $f(x)$ presenta anche un flesso a tangente verticale.

ESEMPIO

La funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{8 - x^3}$$

è continua $\forall x \in \mathbb{R}$; calcoliamo la derivata prima e seconda:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{-3x^2}{\sqrt[3]{(8 - x^3)^2}} = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(8 - x^3)^2}};$$

$$f''(x) = \frac{-2x\sqrt[3]{(8 - x^3)^2} + x^2 \cdot \dfrac{-2x^2}{\sqrt[3]{8 - x^3}}}{(8 - x^3) \cdot \sqrt[3]{8 - x^3}} = \frac{-2x \cdot (8 - x^3) - 2x^4}{(8 - x^3) \cdot \sqrt[3]{(8 - x^3)^2}} =$$

$$= \frac{-16x}{(8 - x^3) \cdot \sqrt[3]{(8 - x^3)^2}}.$$

$f'(x)$ e $f''(x)$ hanno come dominio $\mathbb{R} - \{2\}$.

Studiamo il segno di $f''(x)$:
il numeratore è positivo per $x < 0$; il denominatore è positivo se $8 - x^3 > 0$, cioè per $x < 2$.

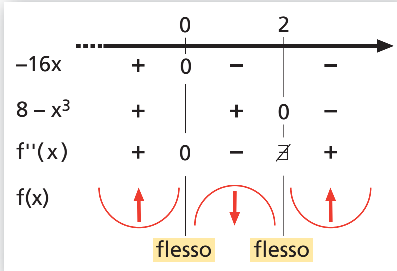
Quindi, per $x < 0$ e $x > 2$ la concavità è rivolta verso l'alto, mentre per $0 < x < 2$ la concavità è rivolta verso il basso.

In $x = 0$, la funzione ha un flesso discendente; inoltre:

$$f'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{il punto } F_1(0; 2) \text{ è un flesso discendente orizzontale.}$$

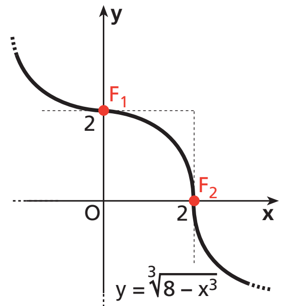
In $x = 2$, la funzione ha un flesso ascendente; inoltre:

$$\lim_{x \to 2} f'(x) = -\infty \quad \rightarrow \quad \text{il punto } F_2(2; 0) \text{ è un flesso ascendente verticale.}$$



▲ **Figura 25** Quadro dei segni.

● $\sqrt[3]{(8 - x^3)^2}$ è sempre positiva.



Riassumendo, data una funzione $f(x)$, continua e derivabile, per la **ricerca dei flessi** si procede così:

- si calcola la derivata seconda $f''(x)$ e si determina il suo dominio;
- si studia il segno di $f''(x)$ e si cercano i punti in cui la concavità cambia, ossia i punti di flesso;
- se x_0 è un punto di flesso e:

  $f'(x_0) = 0$, il flesso è **orizzontale**;

  $f'(x_0) \neq 0$, il flesso è **obliquo**.

Se la funzione $f(x)$ non è derivabile in un punto x_0 in cui $f''(x)$ cambia segno, allora, quando

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to x_0} f'(x) = -\infty,$$

in x_0 c'è un flesso **verticale**.

4. MASSIMI, MINIMI, FLESSI E DERIVATE SUCCESSIVE

I massimi, i minimi, i flessi orizzontali e le derivate successive

Esaminiamo un'altra condizione sufficiente che, come vedremo negli esercizi, è utile per la ricerca di massimi, minimi e flessi orizzontali nei casi in cui non è facile studiare il segno della derivata prima o se non si vogliono risolvere disequazioni. In questi casi utilizziamo le *derivate successive* alla prima. Per indicare le derivate successive alla terza utilizziamo indici che ne precisano l'**ordine**. Per esempio,

$$f^{(5)}(x),\ f^{(8)}(x),\ f^{(n)}(x)$$

indicano rispettivamente la derivata quinta, la derivata ottava e la generica derivata n-esima di $f(x)$. Diremo che la derivata è di **ordine pari** se l'indice è pari, è **dispari** se l'indice è dispari.

● $f^{(5)}(x)$ è di ordine dispari, $f^{(8)}(x)$ è di ordine pari.

x_0 è un punto stazionario, cioè $f'(x_0) = 0$. In x_0 le derivate sono nulle fino all'ordine $n - 1$. La prima derivata non nulla è la derivata n-esima, con $n \geq 2$.

Vale il seguente teorema.

TEOREMA

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a; b]$ tale che nei punti interni dell'intervallo esistano le sue derivate fino alla n-esima, continue in $]a; b[$. Sia x_0 un punto interno all'intervallo in cui:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \;\text{ e }\; f^{(n)}(x_0) \neq 0, \text{ con } n \geq 2.$$

Se la derivata n-esima diversa da 0 è di ordine pari, allora in x_0 si ha:

a) un massimo relativo se $f^{(n)}(x_0) < 0$;
b) un minimo relativo se $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Se la derivata n-esima diversa da 0 è di ordine dispari, allora in x_0 si ha un flesso orizzontale che è:

c) un flesso discendente se $f^{(n)}(x_0) < 0$;
d) un flesso ascendente se $f^{(n)}(x_0) > 0$.

DIMOSTRAZIONE

Per semplicità, dimostriamo i casi a) e b) per $n = 2$ e i casi c) e d) per $n = 3$.

a) Sia $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$. Poiché la derivata seconda è continua in x_0, si ha

$$\lim_{x \to x_0} f''(x) = f''(x_0) < 0,$$

e quindi, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno completo I di x_0 tale che:

$$f''(x_0) < 0 \qquad \forall x \in I.$$

Essendo $f''(x)$ la derivata prima di $f'(x)$, segue che $f'(x)$ è decrescente in I, e poiché $f'(x_0) = 0$:

$$f'(x) > 0, \qquad \text{per } x < x_0 \text{ e } x \in I;$$

$$f'(x) < 0, \qquad \text{per } x > x_0 \text{ e } x \in I.$$

Questo significa che nell'intorno I:

$$f(x) \text{ è crescente per } x < x_0 \quad \rightarrow \quad f(x) < f(x_0) \text{ per } x < x_0;$$

$$f(x) \text{ è decrescente per } x > x_0 \quad \rightarrow \quad f(x) < f(x_0) \text{ per } x > x_0.$$

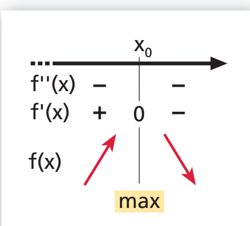
Dunque x_0 è un punto di massimo relativo (figura 26).

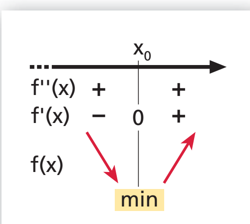
b) Sia $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$. Con un ragionamento analogo al precedente si dimostra che x_0 è un punto di minimo relativo (figura 27).

c) Sia $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) < 0$. La funzione $f'(x)$ soddisfa le ipotesi del risultato a) di questo teorema perché la derivata prima di $f'(x)$, cioè $f''(x)$, si annulla in x_0 e la derivata seconda di $f'(x)$, cioè $f'''(x)$, è negativa in x_0, per ipotesi. Quindi possiamo dire che x_0 è un punto di massimo relativo per $f'(x)$.
Allora esiste un intorno completo I di x_0 in cui:

$$f'(x) < f'(x_0) = 0 \qquad \text{per } x \neq x_0.$$

▼ **Figura 26** Caso in cui $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$.





▲ **Figura 27** Caso in cui $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$.

Quindi, per il teorema sui punti stazionari di flesso orizzontale, x_0 è un punto di flesso orizzontale. Inoltre, essendo $f'(x) < 0$, sappiamo che $f(x)$ è decrescente sia per $x < x_0$, sia per $x > x_0$. Pertanto a sinistra di x_0 la concavità di $f(x)$ è rivolta verso l'alto, mentre a destra di x_0 la concavità è rivolta verso il basso, cioè x_0 è un punto di flesso discendente.

d) Sia $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) > 0$. Con un ragionamento analogo al precedente si dimostra che x_0 è un punto di flesso orizzontale ascendente.

ESEMPIO

Consideriamo la funzione:

$$y = f(x) = 4x^3 - 3x + 1.$$

La sua derivata prima è

$$f'(x) = 12x^2 - 3,$$

e ponendola uguale a 0 si ottiene:

$$12x^2 - 3 = 0 \rightarrow 3(4x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}.$$

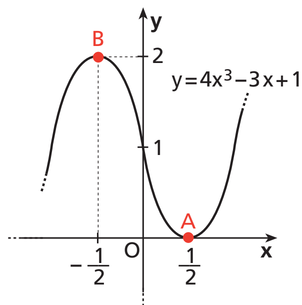
La derivata seconda di $f(x)$ è:

$$f''(x) = 24x.$$

Poiché

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 12 > 0 \text{ e } f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -12 < 0,$$

si può concludere che in $x = \frac{1}{2}$ si ha un minimo relativo, mentre in $x = -\frac{1}{2}$ si ha un massimo relativo.



I flessi e le derivate successive

TEOREMA

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a; b]$, tale che nei punti interni dell'intervallo esistano le sue derivate fino alla n-esima, continue in $]a; b[$. Sia x_0 un punto interno all'intervallo in cui:

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ e } f^{(n)}(x_0) \neq 0, \text{ con } n \geq 3.$$

Se la derivata n-esima diversa da 0 è di ordine dispari, allora in x_0 si ha un flesso che è:

- un flesso discendente se $f^{(n)}(x_0) < 0$;
- un flesso ascendente se $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Se la derivata n-esima diversa da 0 è di ordine pari, allora in x_0 la curva non ha flesso e volge la:

- concavità verso il basso se $f^{(n)}(x_0) < 0$;
- concavità verso l'alto se $f^{(n)}(x_0) > 0$.

In questo teorema, di cui omettiamo la dimostrazione, $f'(x_0)$ si suppone diversa da 0.
Se invece $f'(x_0) = 0$, si ricade nel teorema precedente e si ha un flesso orizzontale quando n è dispari.

ESEMPIO

Data la funzione $f(x) = -3x^4 + 4x^3$, continua $\forall x \in \mathbb{R}$, determiniamo le derivate prima e seconda:

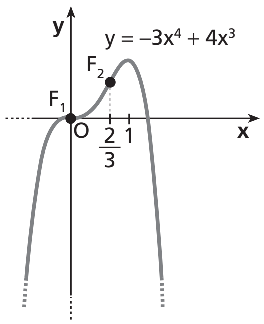
$$f'(x) = -12x^3 + 12x^2; \quad f''(x) = -36x^2 + 24x.$$

Calcoliamo gli zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \quad \to \quad 12x\,(-3x + 2) = 0 \quad \to \quad x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}.$$

La derivata terza di $f(x)$ è:

$$f'''(x) = -72x + 24.$$



Calcoliamo il segno che la derivata terza assume negli zeri di $f''(x)$:

$$f'''(0) = 24 > 0 \quad \to \quad \text{in } x = 0 \text{ si ha un flesso ascendente;}$$

$$f'''\left(\frac{2}{3}\right) = -24 < 0 \quad \to \quad \text{in } x = \frac{2}{3} \text{ si ha un flesso discendente.}$$

Poiché $f'(0) = 0$, 0 è punto di flesso orizzontale, mentre, poiché

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{9} \neq 0,$$

$\frac{2}{3}$ è un punto di flesso obliquo.

Riassumendo, **per determinare i massimi e i minimi relativi e i flessi**, con il metodo delle derivate successive, si procede in questo modo:

- si calcola la derivata prima $f'(x)$ e si trovano gli zeri $x_1, x_2, \ldots$ di questa funzione;
- per ogni x_i si calcolano i valori che assumono le derivate successive; se la prima derivata $f^{(n)}(x)$ che non si annulla in x_i è di ordine pari, allora x_i è un punto di massimo o di minimo relativo, mentre se è di ordine dispari in x_i si ha un flesso orizzontale;
- si cercano gli zeri $z_1, z_2, \ldots$ della derivata seconda $f''(x)$;
- per ogni z_i si calcolano i valori che assumono le derivate successive; se la prima derivata $f^{(n)}(x)$ che non si annulla in z_i è di ordine dispari, allora in z_i si ha un flesso obliquo.

IN PRATICA
▶ Videolezione 72
▶ Videolezione 73

5. I PROBLEMI DI MASSIMO E DI MINIMO

Esistono problemi di vario tipo che possono essere risolti mediante la ricerca del **massimo o del minimo assoluto** di una funzione in un intervallo.

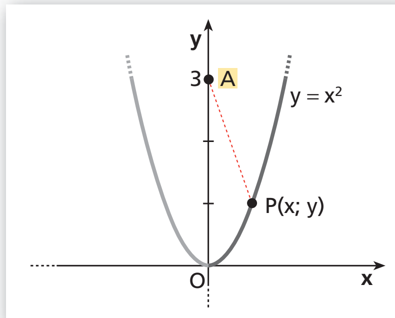
Esaminiamo due esempi, uno relativo alla geometria analitica, l'altro di carattere pratico.

● La funzione viene detta **funzione obiettivo**.

ESEMPIO

1. Data la parabola di equazione $y = x^2$, determiniamo fra i punti del suo grafico quello che appartiene al primo quadrante e ha la distanza minima dal punto $A(0; 3)$.

Rappresentiamo la parabola, che ha il vertice nell'origine degli assi, e il punto A, tracciando anche il segmento PA, con P punto generico della parabola (figura 28).



◀ **Figura 28** Il grafico della parabola $y = x^2$ e il punto A. P è un generico punto della parabola nel primo quadrante.

Il punto P ha coordinate $(x; x^2)$ e, poiché deve appartenere al primo quadrante, poniamo la condizione: $x \geq 0$.
Determiniamo la distanza $\overline{PA}$, utilizzando la formula della distanza fra due punti:

$$\overline{PA} = \sqrt{(x-0)^2 + (x^2-3)^2} = \sqrt{x^2 + x^4 + 9 - 6x^2} = \sqrt{x^4 - 5x^2 + 9}.$$

Poiché dobbiamo determinare il punto P in modo che la distanza $\overline{PA}$ sia minima, dobbiamo cercare il minimo della funzione:

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 5x^2 + 9}, \quad \text{con } x \geq 0.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^4 - 5x^2 + 9}} \cdot (4x^3 - 10x) = \frac{2x(2x^2-5)}{2\sqrt{x^4 - 5x^2 + 9}} =$$

$$= \frac{x(2x^2-5)}{\sqrt{x^4 - 5x^2 + 9}}.$$

La derivata esiste per qualsiasi valore di x in quanto il trinomio $x^4 - 5x^2 + 9$ è sempre positivo.

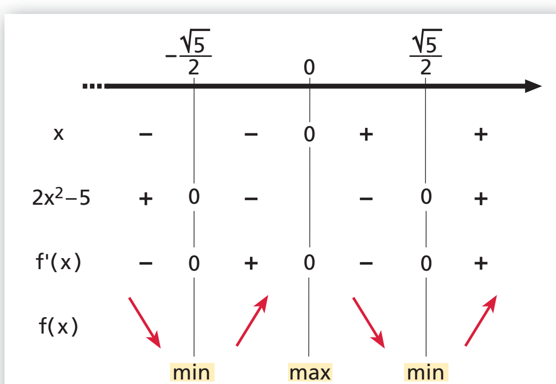
● Il trinomio è sempre positivo perché è stato ottenuto esprimendo algebricamente la distanza al quadrato fra A e P. Nota che non può essere nullo perché la parabola non passa per A.

Inoltre, essendo il denominatore sempre positivo, il segno della derivata è lo stesso di quello del numeratore. Studiamolo.

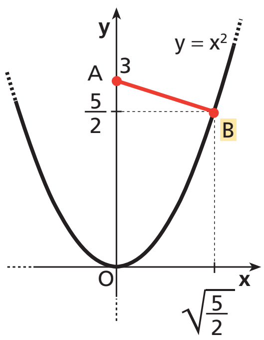
Primo fattore: positivo per $x > 0$.

Secondo fattore: $2x^2 - 5 > 0 \rightarrow x < -\sqrt{\frac{5}{2}} \vee x > \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Compiliamo il quadro dei segni.



◀ **Figura 29** Il quadro relativo al segno della derivata prima.



La funzione ha due minimi relativi:

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Poiché deve essere verificata la condizione $x \geq 0$, è accettabile soltanto il valore positivo, a cui nell'intervallo considerato corrisponde il minimo assoluto. Quindi la soluzione del problema è:

$$x = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Calcoliamo l'ordinata del punto:

$$y = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

Il punto della parabola cercato ha coordinate $B\left(\sqrt{\frac{5}{2}}; \frac{5}{2}\right)$.

2. Un fabbricante di pentole vuole costruire il tipo di pentola più economica fra tutte le pentole di acciaio di forma cilindrica aventi lo stesso volume V.

Possiamo pensare che il costo sia proporzionale alla superficie y ottenuta dalla somma della superficie laterale di un cilindro e di una sua base.

Indichiamo con x la misura del raggio di base del cilindro, con h quella della sua altezza, con V quella del volume (figura 30).

Dobbiamo esprimere y in funzione di una sola incognita (per esempio, x) e della costante V e determinare il minimo della funzione.

La misura della superficie di base è:

$$S_b = \pi x^2.$$

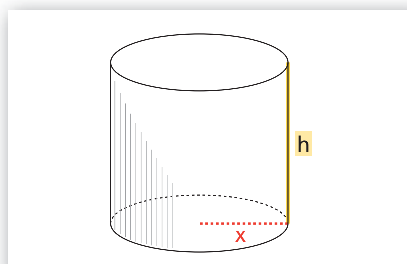
La misura della superficie laterale è:

$$S_{lat} = 2\pi x h.$$

Il volume vale:

$$V = \pi x^2 h.$$

▶ **Figura 30**



● Dividendo i due membri per x, otteniamo:

$$\frac{V}{x} = \pi x h.$$

Sostituiamo nell'espressione di S_{lat} al prodotto $\pi x h$ la frazione $\frac{V}{x}$ e otteniamo:

$$S_{lat} = \frac{2V}{x}.$$

La misura della superficie cercata è espressa dalla seguente funzione:

$$f(x) = S_b + S_{lat} = \pi x^2 + \frac{2V}{x}.$$

Essendo x la misura di una grandezza geometrica, dobbiamo porre la condizione:

$$x > 0.$$

● Non consideriamo il valore $x = 0$ (caso limite), perché in questo caso il cilindro degenera nel proprio asse e la sua altezza non avrebbe misura finita.

Per determinare il minimo di $f(x)$ calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 2\pi x + 2V \cdot \frac{-1}{x^2} = 2\left(\pi x - \frac{V}{x^2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi x^3 - V}{x^2}.$$

Si ha $f'(x) = 0$ se $\pi x^3 - V = 0$, ossia se $x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

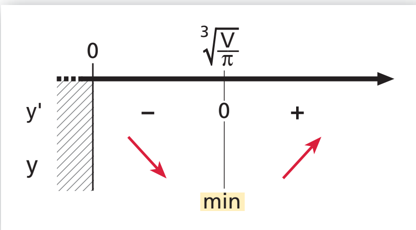
Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$\frac{\pi x^3 - V}{x^2} > 0.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo, è sufficiente studiare il segno del numeratore:

$$\pi x^3 - V > 0 \rightarrow x^3 > \frac{V}{\pi} \rightarrow x > \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Compiliamo il quadro dei segni.



◄ **Figura 31 Il quadro relativo allo studio del segno della derivata prima.**

Concludiamo che, se il raggio misura

$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},$$

la superficie è minima.

Se calcoliamo anche la misura della corrispondente altezza, troviamo:

$$h = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{\pi}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Fra tutte le pentole di acciaio aventi lo stesso volume, quella che ha la superficie minima ha la misura dell'altezza uguale a quella del raggio.

● Osserva che la condizione $x > 0$ è verificata.

In generale, per risolvere problemi di massimo o di minimo:

- si cerca la funzione da rendere massima o minima; tale funzione viene anche detta **funzione obiettivo**;
- si pongono le **condizioni** (o **vincoli**) relativi alla variabile indipendente;
- si determinano i massimi o i minimi della funzione;
- fra i valori trovati, si accettano soltanto quelli che soddisfano le condizioni poste.

Negli esercizi relativi a questo paragrafo ci sono diversi altri esempi di svolgimento di problemi di massimo e di minimo. In essi è presente anche in modo più approfondito la **discussione preliminare** dei casi limite.

ESPLORAZIONE

Bolle matematiche

Se non si trova la funzione...

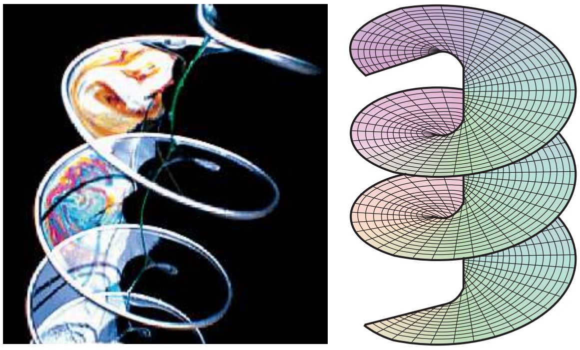
Lo studio di un problema di massimo o minimo per una data grandezza è relativamente semplice se si riesce a trovare una funzione che esprima la variazione di quella grandezza. In tal caso è sufficiente utilizzare gli strumenti del calcolo differenziale per trovare una risposta.
Spesso però è difficile, o addirittura impossibile, trovare una funzione che descriva esplicitamente la grandezza variabile o realizzare costruzioni geometriche elementari che consentano di risolvere il problema.
In questi casi ci si limita a dimostrare l'esistenza della soluzione (della configurazione di massimo o di minimo) in situazioni particolari e a studiarne poi le principali proprietà.

...ci aiuta la fisica

Talvolta, però, anche la dimostrazione di esistenza della soluzione può comportare difficoltà tali da suggerire di seguire una strada alternativa, molto vicina a quelle percorse dalle discipline sperimentali, come la fisica.
Si realizzano, allora, le condizioni matematiche del problema posto mediante sistemi fisici e poi si studia il comportamento di tali sistemi.

Il problema di Plateau

Questa strada fu seguita da alcuni matematici per studiare quello che è noto come *problema di Plateau*, dal nome del fisico belga Joseph-Antoine-Ferdinand Plateau (1801-1883): *determinare, fra tutte le superfici di contorno assegnato, quella di area minima*.
Il problema, per un contorno generico, non è elementare dal punto di vista matematico e soltanto verso la metà del Ventesimo secolo due matematici (J. Douglas e T. Radò) riuscirono a dimostrare l'esistenza della soluzione nel caso generale.
Plateau non si arrese di fronte alla difficoltà matematica del problema e realizzò esperimenti che consistevano nell'immergere un contorno chiuso costruito con fil di ferro in acqua saponata. A seconda del contorno, ottenne superfici diverse, come l'elicoide (figura 1).



▲ **Figura 1**

L'energia è minima

Il metodo di Plateau si fonda sulla proprietà fisica in base alla quale la lamina d'acqua saponata (ossia la superficie di liquido che si forma estraendo il filo di ferro dall'acqua saponata) tende a disporsi secondo la superficie di area minima fra tutte quelle che giacciono sul contorno assegnato (il filo di ferro).
Infatti, in tale configurazione l'energia potenziale dovuta alla tensione superficiale del liquido è minima.
Si può anche dimostrare che tale configurazione è di equilibrio stabile (si suppone di poter trascurare tutte le altre forze in gioco, tranne quelle dovute alla tensione superficiale).

Attività

Il sapone di Plateau

- Cerca in Internet esempi riguardanti gli esperimenti di Plateau e prova a compierne anche tu qualcuno dei più semplici.

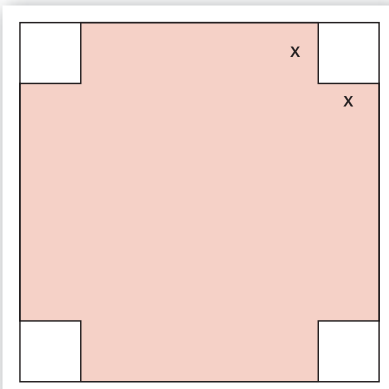
@ **Cerca nel Web:**
lamine saponate, esperimenti Plateau, superfici minime

UNA SCATOLA IN CARTONE

Come bisogna tagliare un quadrato di cartone per avere il contenitore più capiente di tutti?

▶ Il quesito completo a pag. 1767

Un normale foglio di cartone può essere utilizzato per creare oggetti di forme e dimensioni diverse, come quello della foto, o addirittura sedie e librerie… Anche un oggetto di cartone deve essere accuratamente progettato. Immaginiamo di avere un foglio di cartone, diciamo un quadrato di un metro per un metro, e di aver bisogno di farne un contenitore aperto, senza coperchio.
Ci interessa scoprire come dobbiamo tagliare i quattro angoli.



Naturalmente, dagli angoli devono essere tolti dei quadrati, tutti uguali tra loro, altrimenti la scatola non ha le facce di altezza uguale.
Se x è il lato dei quadrati che togliamo dagli angoli, la base della scatola sarà quadrata con il lato lungo $1 - 2x$, da cui si ricava il volume

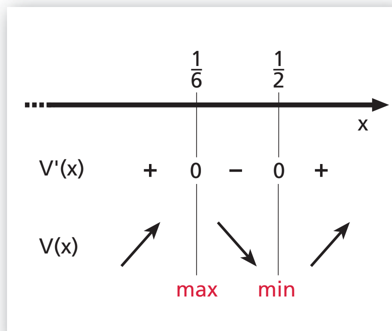
$$V(x) = x(1 - 2x)^2.$$

La domanda allora diventa: come dobbiamo scegliere x affinché il volume $V(x)$ sia massimo?

Per rispondere dobbiamo calcolare la derivata del volume

$$V'(x) = 1 - 8x + 12x^2$$

e trovare che si annulla in $x = \frac{1}{6}$ e in $x = \frac{1}{2}$.
Quale dei due è un massimo e quale un minimo?
Il segno della derivata è positivo a sinistra di $\frac{1}{6}$ e a destra di $\frac{1}{2}$ ed è negativo tra i due valori. Pertanto $\frac{1}{6}$ è un punto di massimo e $\frac{1}{2}$ è un punto di minimo.



Anche visualizzando il cartone, possiamo capire che $x = \frac{1}{2}$ porta a un minimo del volume: infatti, se tagliamo i quattro «angoli» a $\frac{1}{2}$ (mezzo metro nel nostro esempio), quello che stiamo facendo è dividere il quadrato in quattro, e non otteniamo nessun contenitore, poiché manca il fondo.

I pacchetti di Amazon

Per il Natale 2005, Amazon, il famoso portale che vende libri online, ha commissionato alla matematica portoghese Sara Isabel Santos, dell'Università di Manchester, uno studio per contenere i costi di confezionamento ed evitare lo spreco di carta, scotch e nastro. È un problema simile a quello della scatola.

LABORATORIO DI MATEMATICA

I PROBLEMI DI MASSIMO E DI MINIMO

ESERCITAZIONE GUIDATA

Dato il punto $Q(1; 2)$, determiniamo con l'aiuto di Derive le coordinate del punto P appartenente alla parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$ e avente da Q distanza minima.

- Attiviamo Derive e giungiamo alla soluzione del problema per mezzo di una sessione di lavoro commentata, come vediamo nelle figure 1 e 2. Abbiamo studiato la funzione distanza al quadrato perché essa ammette gli stessi estremanti della funzione distanza. Inoltre abbiamo tenuto conto del fatto che la funzione $dqPQ(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ e che tende a $+\infty$ per x tendente sia a $-\infty$ sia a $+\infty$. Lasciamo a te il compito di terminare la sessione di lavoro, calcolando quale dei due punti di minimo relativo è anche di minimo assoluto e le coordinate di P.

La parabola:

#1: $y = -x^2 + 4\cdot x$

La distanza al quadrato del punto Q
da un punto generico P(x, y):

#2: $(1 - x)^2 + (2 - y)^2$

La distanza al quadrato del punto Q
dai punti P(x, -x^2+4x) della parabola:

#3: $(1 - x)^2 + (2 - (-x^2 + 4\cdot x))^2$

La funzione distanza al quadrato di Q da P:

#4: $dqPQ(x) := x^4 - 8\cdot x^3 + 21\cdot x^2 - 18\cdot x + 5$

La derivata prima:

#5: $\dfrac{d}{dx}(x^4 - 8\cdot x^3 + 21\cdot x^2 - 18\cdot x + 5)$

#6: $4\cdot x^3 - 24\cdot x^2 + 42\cdot x - 18$

La derivata seconda:

#7: $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^2 (x^4 - 8\cdot x^3 + 21\cdot x^2 - 18\cdot x + 5)$

#8: $12\cdot x^2 - 48\cdot x + 42$

▲ **Figura 1**

Gli zeri della derivata prima:

#9: $\mathrm{SOLVE}(4\cdot x^3 - 24\cdot x^2 + 42\cdot x - 18,\ x)$

#10: $x = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \lor x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2} \lor x = 3$

La derivata seconda calcolata negli zeri
della derivata prima:

#11: $12\cdot\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 48\cdot\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + 42$

#12: $6\cdot\sqrt{3} + 6$

... è positiva: un minimo relativo per dqPQ(X)

#13: $12\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\right)^2 - 48\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\right) + 42$

#14: $6 - 6\cdot\sqrt{3}$

.. è negativa: un massimo relativo per dqPQ(X)

#15: $12\cdot 3^2 - 48\cdot 3 + 42$

#16: 6

... è positiva: un minimo relativo per dqPQ(X)

▲ **Figura 2**

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 15 esercitazioni in più

Esercitazioni

Analizza i seguenti problemi e risolvili con l'aiuto del computer. Per verifica, costruisci un grafico.

1 Determina k in modo che la funzione $f(x) = 2x^3 + kx^2 + 8x - 1$ ammetta un estremante di ascissa 4. [-13]

2 Trova h e k in modo che la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + hx + 5}{x^2 + 4x + k}$ abbia un punto di massimo in $M(-2; -1)$. [4, 3]

LA TEORIA IN SINTESI
I MASSIMI, I MINIMI E I FLESSI

1. LE DEFINIZIONI

- Data la funzione $y = f(x)$ definita nell'intervallo I:
  - M è **massimo assoluto** di $f(x)$ se $M = f(x_0)$, $x_0 \in I \wedge M \geq f(x)$, $\forall x \in I$;
  - m è **minimo assoluto** di $f(x)$ se $m = f(x_0)$, $x_0 \in I \wedge m \leq f(x)$, $\forall x \in I$;
  - $x_0 \in I$ con $f(x_0) = M$ si dice **punto di massimo assoluto**;
  - $x_0 \in I$ con $f(x_0) = m$ si dice **punto di minimo assoluto**.

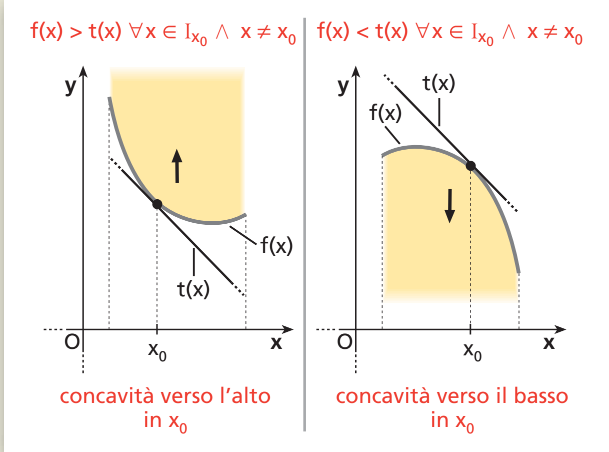
- Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, il punto x_0 di $[a; b]$ si dice di:
  - **massimo relativo** se esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che $f(x_0) \geq f(x) \ \ \forall x \in I_{x_0}$;
  - **minimo relativo** se esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che $f(x_0) \leq f(x) \ \ \forall x \in I_{x_0}$.

- Un punto di massimo relativo viene detto **massimante**.

- Un punto di minimo relativo viene detto **minimante**.

- Un punto è detto **estremante** se è massimante o minimante e il corrispondente valore della funzione (ossia il massimo o minimo relativo) è detto **estremo relativo**.

- Siano date la funzione $y = f(x)$, definita e derivabile nell'intervallo I, e la retta di equazione $y = t(x)$, tangente alla curva che rappresenta il grafico di $f(x)$ nel suo punto di ascissa x_0 interno all'intervallo.
  Se esiste un intorno completo I_{x_0} di x_0 tale che:
  - $f(x) > t(x) \, \forall x \in I_{x_0} \wedge x \neq x_0$, in x_0 la curva ha la **concavità** rivolta **verso l'alto**;
  - $f(x) < t(x) \, \forall x \in I_{x_0} \wedge x \neq x_0$, in x_0 la curva ha la **concavità** rivolta **verso il basso**.

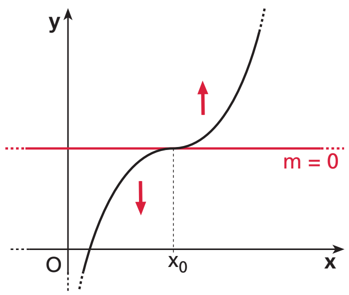


- Una curva ha la concavità verso l'alto (oppure verso il basso) **nell'intervallo *I*** se ha la concavità verso l'alto (o verso il basso) in ogni punto interno all'intervallo.

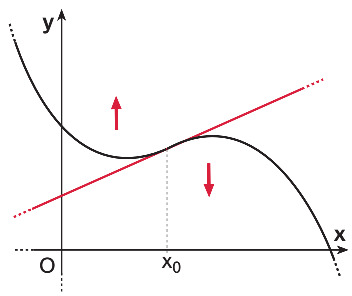
- La funzione $y = f(x)$, definita e continua nell'intervallo I, ha in x_0, interno a I, un punto di **flesso** se, in x_0, il grafico di $f(x)$ cambia concavità.

  Un flesso, in un punto in cui esiste la tangente, è:
  - **orizzontale** se la tangente nel punto è parallela all'asse x;
  - **verticale** se la tangente è parallela all'asse y;
  - **obliquo** se la tangente non è parallela a uno degli assi.

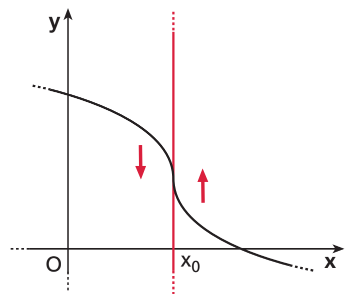
  Se il grafico in un punto volge la concavità:
  - verso il basso a sinistra e verso l'alto a destra del punto, il flesso è **ascendente**;
  - verso l'alto a sinistra e verso il basso a destra del punto, il flesso è **discendente**.



a. x_0 è punto di flesso orizzontale ascendente.



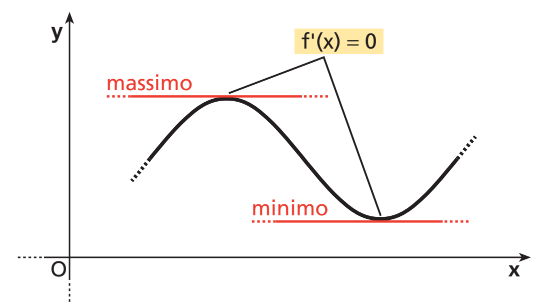
b. x_0 è punto di flesso obliquo discendente.



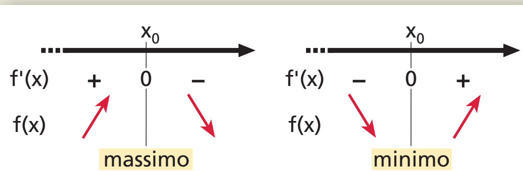
c. x_0 è punto di flesso verticale ascendente.

2. MASSIMI, MINIMI, FLESSI ORIZZONTALI E DERIVATA PRIMA

- **Condizione necessaria per i massimi e minimi relativi (funzioni derivabili, punti interni)**
  Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$, se $f(x)$ ha un massimo o un minimo relativo nel punto x_0, interno ad $[a; b]$, allora $f'(x_0) = 0$, cioè x_0 è un punto stazionario.

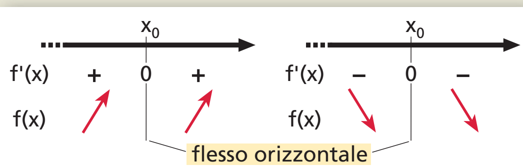


- **Condizione sufficiente per i massimi e minimi relativi**
  Data la funzione $y = f(x)$, definita e continua in un intorno completo I_{x_0} del punto x_0 e derivabile nello stesso intorno per ogni $x \neq x_0$, se per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno:
  - si ha $f'(x_0) > 0$ per $x < x_0$ e $f'(x_0) < 0$ per $x > x_0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo;
  - si ha $f'(x_0) < 0$ per $x < x_0$ e $f'(x_0) > 0$ per $x > x_0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo;
  - il segno della derivata prima è sempre lo stesso, allora x_0 non è un punto estremante.



- **Condizione sufficiente per i flessi orizzontali**
  Data la funzione $y = f(x)$ definita e continua in un intorno completo del punto x_0 e derivabile nello stesso intorno, se:
  - $f'(x_0) = 0$,
  - il segno della derivata prima è lo stesso per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno,

  allora x_0 è un punto di flesso orizzontale.



3. FLESSI E DERIVATA SECONDA

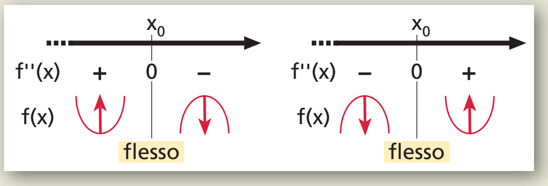
- **Condizione sufficiente per stabilire la concavità**
  Se $y = f(x)$ è una funzione definita e continua in un intervallo I, insieme con le sue derivate prima e seconda, in x_0, punto interno di I, il grafico della funzione volge:
  - la concavità verso l'alto se $f''(x_0) > 0$;
  - la concavità verso il basso se $f''(x_0) < 0$.

Bergamini, Trifone, Barozzi **MATEMATICA.BLU - Vol.5** © Zanichelli 2012 *con Maths in English*

- **Condizione necessaria per i flessi**
  Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a; b]$ e tale che esistano le sue derivate prima e seconda. Se $f(x)$ ha un flesso nel punto x_0, interno ad $[a; b]$, la derivata seconda della funzione in quel punto si annulla, cioè: $f''(x_0) = 0$.

- **Condizione sufficiente per i flessi**
  Sia data la funzione $y = f(x)$ definita e continua in un intorno completo I_{x_0} del punto x_0 e tale che esistano le sue derivate prima e seconda per ogni $x \in I_{x_0}$, $x \neq x_0$.
  Se per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno si ha:
  - $f''(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f''(x) < 0$ per $x > x_0$, oppure
  - $f''(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f''(x) > 0$ per $x > x_0$,

  allora x_0 è un punto di flesso.



4. MASSIMI, MINIMI, FLESSI E DERIVATE SUCCESSIVE

- **Condizione sufficiente per i massimi e minimi (derivate successive)**
  Sia $y = f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo $[a; b]$ e tale che nei punti interni dell'intervallo esistano e siano continue le sue derivate fino alla n-esima. Sia x_0 un punto interno dell'intervallo tale che:

  $$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \;\text{ e }\; f^{(n)}(x_0) \neq 0, \text{ con } n \geq 2.$$

  Se la derivata n-esima è di ordine pari, in x_0 si ha:
  - un massimo relativo se $f^{(n)}(x_0) < 0$;
  - un minimo relativo se $f^{(n)}(x_0) > 0$.

  Se la derivata n-esima è di ordine dispari, in x_0 si ha un flesso orizzontale che è:
  - un flesso discendente se $f^{(n)}(x_0) < 0$;
  - un flesso ascendente se $f^{(n)}(x_0) > 0$.

- **Condizione sufficiente per i flessi (derivate successive)**
  Sia $y = f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo $[a; b]$ e tale che nei punti interni dell'intervallo esistano e siano continue le sue derivate fino alla n-esima. Sia x_0 un punto interno dell'intervallo in cui:

  $$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ e } f^{(n)}(x_0) \neq 0, \text{ con } n \geq 3.$$

  Se la derivata n-esima è di ordine dispari, allora in x_0 si ha un flesso che è:
  - un flesso discendente se $f^{(n)}(x_0) < 0$;
  - un flesso ascendente se $f^{(n)}(x_0) > 0$.

  Se la derivata n-esima è di ordine pari, allora in x_0 la curva non ha flesso e volge la:
  - concavità verso il basso se $f^{(n)}(x_0) < 0$;
  - concavità verso l'alto se $f^{(n)}(x_0) > 0$.

5. I PROBLEMI DI MASSIMO E DI MINIMO

- Per risolvere un **problema di massimo o di minimo**:
  - si cerca la funzione da rendere massima o minima (**funzione obiettivo**);
  - si pongono le **condizioni** (o **vincoli**) relativi alla variabile indipendente;
  - si determinano i massimi o i minimi della funzione;
  - fra i valori trovati, si accettano soltanto quelli che soddisfano alle condizioni poste.

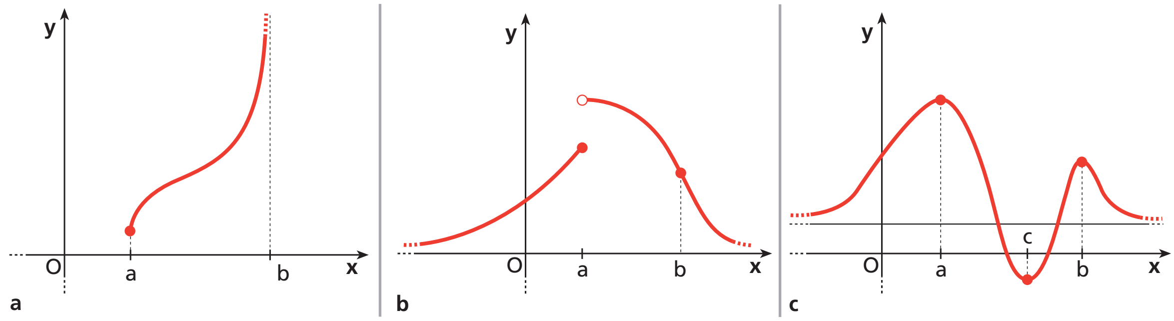
1. LE DEFINIZIONI

▶ Teoria a pag. 1768

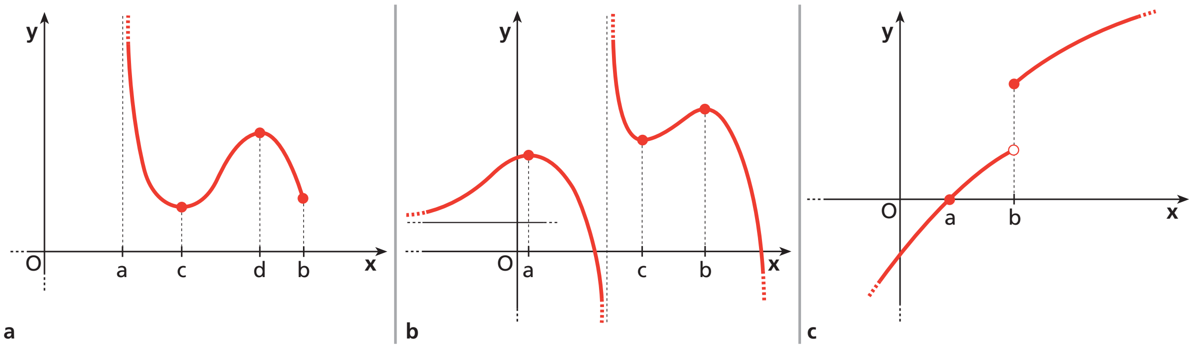
I massimi e i minimi

Indica i punti di massimo e di minimo nelle seguenti funzioni nell'intervallo [a; b], precisando se sono relativi o assoluti.

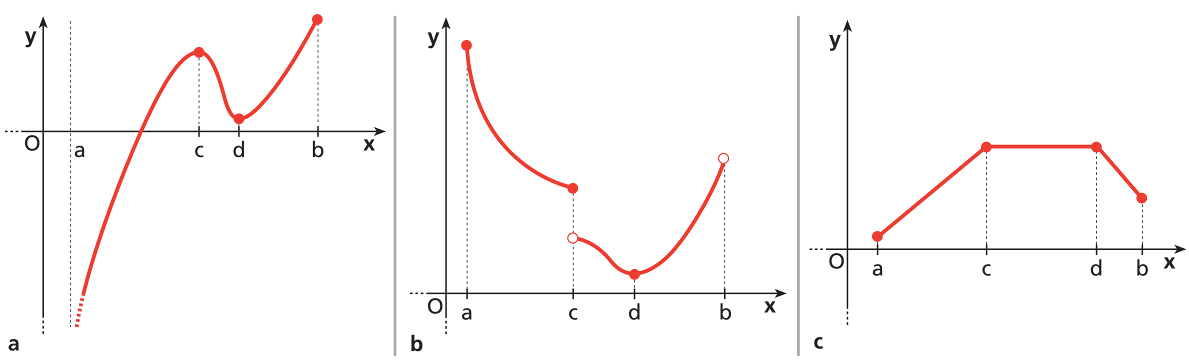
1



2

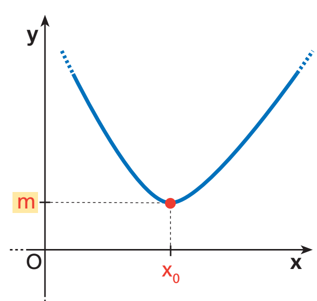


3

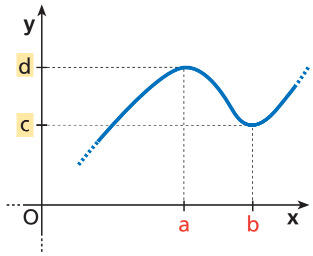


4 VERO O FALSO?

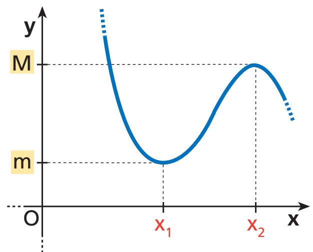
a)



Nel grafico, x_0 è detto minimo e m punto di minimo. V F

b) 

a e b sono estremi relativi, c e d sono estremanti. V F

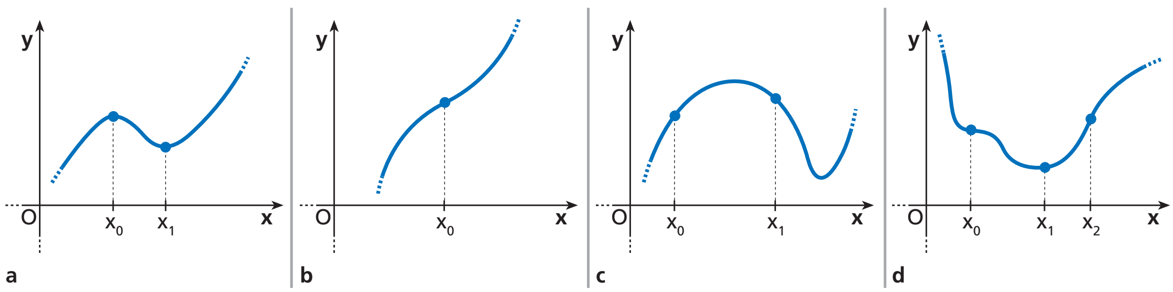
c) 

x_1 è minimante, M è massimo relativo e m è minimo assoluto e relativo. V F

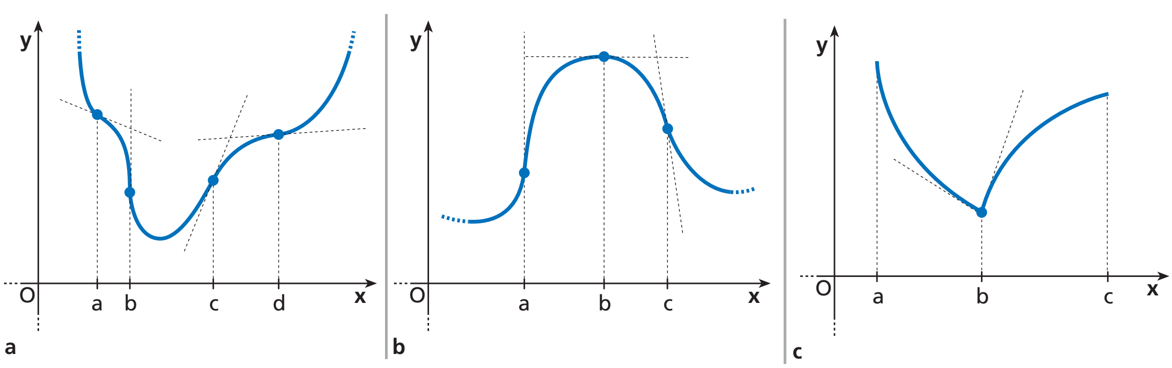
d) Per una funzione che ammette un punto di minimo, l'ascissa del punto si dice minimo, mentre l'ordinata minimante. V F

La concavità e i flessi

5 Indica per ognuna delle seguenti funzioni se nei punti indicati sull'asse x la curva rivolge la concavità verso l'alto o verso il basso, oppure se i punti evidenziati corrispondono a punti di flesso.



6 Nei seguenti grafici indica i punti di flesso, specificando se sono orizzontali, verticali o obliqui e se sono ascendenti o discendenti.



La verifica dei punti di massimo, di minimo e di flesso

7 **ESERCIZIO GUIDA**

Applicando le definizioni di massimo, minimo e flesso, verifichiamo quanto è indicato a fianco di ogni funzione:

a) $f(x) = x^3 - 12x + 2,$ $\qquad$ $x = -2$ **punto di massimo relativo;**

b) $g(x) = \dfrac{2x}{1-x^2},$ $\qquad$ $x = 0$ **punto di flesso obliquo ascendente.**

---

a) Per verificare che $x = -2$ è punto di massimo relativo è necessario trovare un suo intorno completo nel quale si abbia per ogni x:

$$f(x) \leq f(-2) \ \rightarrow \ x^3 - 12x + 2 \leq -8 + 24 + 2.$$

Risolviamo la disequazione:

$$x^3 - 12x + 2 \leq 18 \ \rightarrow \ x^3 - 12x - 16 \leq 0.$$

Scomponendo il trinomio in fattori, si ottiene:

$$(x+2)^2(x-4) \leq 0.$$

Poiché è $(x+2)^2 \geq 0$ per ogni x, la disequazione è verificata per $x \leq 4$ e quindi sicuramente in un intorno completo di -2, perciò -2 è punto di massimo relativo.

b) Per verificare che il punto x_0 è di flesso, occorre dimostrare che, in x_0, $g(x)$ cambia concavità, cioè $g(x) < t(x)$ per $x < x_0$ e $g(x) > t(x)$ per $x > x_0$ (o viceversa), essendo $y = t(x)$ l'equazione della tangente in $(x_0; g(x_0))$.

Per $x = 0$, si ha $g(0) = 0$. Essendo $g'(x) = \dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$, si ha $g'(0) = 2$. L'equazione della tangente nel punto $x = 0$ è:

$$y - 0 = 2(x - 0) \quad \rightarrow \quad t(x) = y = 2x.$$

Risolviamo la disequazione che si ottiene con $g(x) < t(x)$:

$$\frac{2x}{1-x^2} < 2x \quad \rightarrow \quad \frac{2x - 2x(1-x^2)}{1-x^2} < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2x^3}{1-x^2} < 0.$$

Studiamo il segno della frazione (figura a lato).

		-1		0		1	
$2x^3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$1-x^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$\dfrac{2x^3}{1-x^2}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

La disequazione è verificata in un intorno sinistro di 0, dove si ha quindi $g(x) < t(x)$, mentre in un intorno destro di 0 la frazione è positiva e quindi $g(x) > t(x)$. In 0 abbiamo quindi un flesso che è obliquo in quanto la tangente in $(0; 0)$ non è parallela a uno degli assi.

Il flesso è ascendente perché per $x < 0$ la concavità è rivolta verso il basso, essendo $g(x) < t(x)$, e per $x > 0$ la concavità è rivolta verso l'alto, essendo $g(x) > t(x)$.

Applicando le definizioni di massimo, di minimo e di flesso, verifica quanto è indicato a fianco di ogni funzione.

8 $y = |2 - x|$, $x = 2$ punto di minimo relativo e assoluto.

9 $y = 2x^4 + x^2 - 1$, $x = 0$ punto di minimo relativo e assoluto.

10 $y = \dfrac{x}{(x+3)^2}$, $x = 3$ punto di massimo relativo e assoluto.

11 $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x = 0$ punto di massimo relativo e assoluto, $x = \pm 2$ punti di minimo relativi e assoluti.

12 $y = \sqrt{8x - 4x^2}$, $x = 1$ punto di massimo relativo e assoluto, $x = 0$ e $x = 2$ punti di minimo relativi e assoluti.

13 $y = 2x^3 - 6x + 9$, $x = -1$ punto di massimo relativo, $x = 1$ punto di minimo relativo.

14 $y = x^3 - 4x$, $x = 0$ punto di flesso obliquo ascendente.

15 $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \cos x$ in $[0; 2\pi]$, $x = \dfrac{\pi}{6}$ punto di massimo relativo e assoluto, $x = \dfrac{5}{6}\pi$ punto di minimo relativo e assoluto, $x = \dfrac{3}{2}\pi$ punto di flesso orizzontale ascendente.

16 $y = \dfrac{2x^3}{x+2}$, $x = -3$ punto di minimo relativo, $x = 0$ punto di flesso orizzontale ascendente.

17 $y = x^3 e^{-x}$, $x = 0$ punto di flesso orizzontale ascendente.

18 $y = |x^2 - 4x|$, $x = 2$ punto di massimo relativo, $x = 0$ e $x = 4$ punti di minimo relativi e assoluti.

2. MASSIMI, MINIMI, FLESSI ORIZZONTALI E DERIVATA PRIMA

Teoria a pag. 1772

Massimi, minimi e flessi orizzontali di funzioni derivabili

19 **ESERCIZIO GUIDA**

Troviamo i punti di massimo e di minimo relativo e di flesso orizzontale della funzione:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2.$$

La funzione è definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$.

- Calcoliamo la derivata prima e determiniamo il suo dominio.

$$f'(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2.$$

$f'(x)$ esiste $\forall x \in \mathbb{R}$.

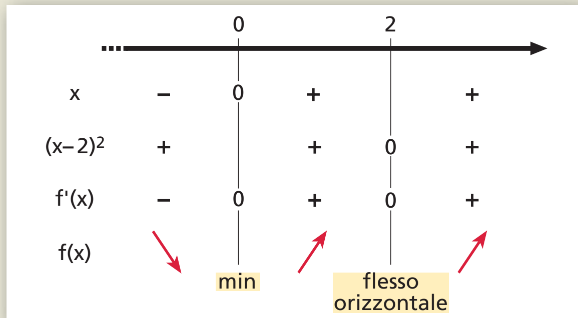
- Risolviamo l'equazione $f'(x) = 0$. Si ha $x(x-2)^2 = 0$ per $x = 0$ e $x = 2$. Quindi $x = 0$ e $x = 2$ sono punti stazionari.

- Studiamo il segno di $f'(x)$.

  $x(x-2)^2 > 0.$

  Il primo fattore è positivo per $x > 0$ e il secondo fattore $(x-2)^2 > 0 \ \forall x \neq 2$.

Compiliamo il quadro dei segni (figura a lato).



Dallo schema deduciamo che:

- per $x = 0$ si ha un punto di minimo relativo di coordinate $(0; 0)$, essendo $f(0) = 0$;
- per $x = 2$ si ha un flesso orizzontale perché il segno della derivata prima è lo stesso in un intorno di 2; tale punto ha coordinate $\left(2; \frac{4}{3}\right)$, essendo $f(2) = \frac{4}{3}$.

Trova i punti di massimo, di minimo relativo e di flesso orizzontale delle seguenti funzioni.
(Qui e in seguito nelle soluzioni indichiamo con max e min le ascisse dei punti di massimo e di minimo, con fl. quella dei punti di flesso.)

20 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ $[x = 0 \text{ max}; x = 2 \text{ min}]$

21 $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$ $[x = 1 \text{ fl. orizz.}]$

22 $y = \frac{x^3}{(1-x)^2}$ $[x = 0 \text{ fl. orizz.}; x = 3 \text{ min}]$

23 $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ $[x = 0 \text{ max}]$

24 $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - x + 1}$ $\left[x = \frac{1}{2} \text{ min}\right]$

25 $y = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3$ $[x = 0 \text{ fl. orizz.}; x = 2 \text{ min}]$

26 $y = \frac{1}{2}e^{-x^2}$ $[x = 0 \text{ max}]$

27 $y = 18\ln x - \frac{3}{4}x^2$ $[x = 2\sqrt{3} \text{ max}]$

28 $y = 2x\ln x - 5x$ $[x = e\sqrt{e} \text{ min}]$

29 $y = \text{arctg}\, x - x$ $[x = 0 \text{ fl. orizz.}]$

30 $y = e^{2x-1} + \frac{2}{3}e^{-3x} + 6$ $\left[x = -\frac{1}{5} \text{ min}\right]$

31 $y = x^4 + 2x$ $\left[x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ min}\right]$

32 $y = \frac{x^3}{3}e^{-x}$ $[x = 0 \text{ fl. orizz.}; x = 3 \text{ max}]$

33 $y = \frac{-2}{\sqrt{x^2 + 4}}$ $[x = 0 \text{ min}]$

34 $y = \frac{1}{\cos x}$ $[x = \pi + 2k\pi \text{ max}; x = 2k\pi \text{ min}]$

35 $y = \frac{2x^2}{x - 1}$ $[x = 0 \text{ max}; x = 2 \text{ min}]$

36 $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3$ $[x = 0 \text{ fl. orizz.}]$

37 $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ $\left[x = \frac{3}{2} \text{ max}\right]$

38 $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 3x + 1}$ $\left[x = 0 \text{ max}; x = \frac{2}{3} \text{ min}\right]$

39 $y = \frac{-x^2 + 3x}{2x - 8}$ $[x = 2 \text{ min}; x = 6 \text{ max}]$

40 $y = \frac{x^2 - 4}{4(x^2 - 1)}$ $[x = 0 \text{ min}]$

41 $y = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 1$ $[x = 0 \text{ fl. orizz.}; x = 6 \text{ min}]$

42 $y = \frac{x - 3}{(x-2)^3}$ $\left[x = \frac{7}{2} \text{ max}\right]$

43 $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$ $[x = 2 \text{ min}]$

44 $y = x^3 e^x - 4e^x + 2$ $[x = -2 \text{ fl. orizz.}; x = 1 \text{ min}]$

45 $y = 4\cos^2 x + 4\cos x - 1,$ in $[0; \pi]$. $\left[x = \frac{2}{3}\pi \text{ min}; x = 0, x = \pi \text{ max}\right]$

46 $y = \frac{x^4}{2} - x^3 + x + 8$ $\left[x = -\frac{1}{2} \text{ min}; x = 1 \text{ fl. orizz.}\right]$

47 $y = -\text{sen}\, 2x + 4\cos x + 3x,$ in $[0; 2\pi]$. $\left[x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5}{6}\pi \text{ fl. orizz.}\right]$

48 $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ $[x = 1 \text{ max}; x = 3 \text{ min}]$

49 $y = 6x^5 - 10x^3$ $[x = -1 \text{ max}; x = 0 \text{ fl. orizz.}; x = 1 \text{ min}]$

50 $y = 2\,\text{sen}\, x + \cos 2x + 6,$ in $[0; 2\pi]$. $\left[x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5}{6}\pi \text{ max}; x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3}{2}\pi \text{ min}\right]$

51 $y = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 - 1$ $[x = -2, x = 1 \text{ min}; x = 0 \text{ max}]$

I punti di massimo e minimo relativi di funzioni non ovunque derivabili

Funzioni con punti angolosi

52 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{se } x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

troviamo i suoi punti di massimo e di minimo relativo, distinguendo i punti stazionari da quelli angolosi.

La funzione è ovunque definita e continua in $\mathbb{R}$.

- Calcoliamo la derivata prima e determiniamo il suo dominio:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}} = \dfrac{-2}{(x-1)^3} & \text{se } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Per $x = 0$, $f'(x)$ non esiste in quanto $f'_-(0) = 2$ e $f'_+(0) = -2$.

- $f'(x) = 0$ soltanto se:

$2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1.$

Quindi $x = 1$ è l'unico punto stazionario.

- Studiamo il segno di $f'(x)$.

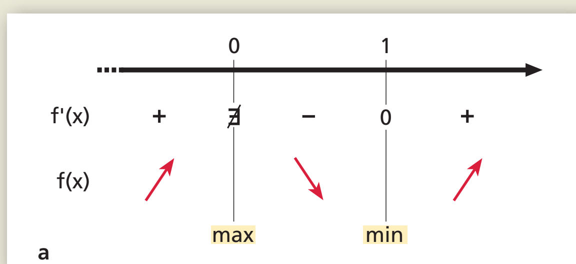
Per $x < 0$, $\frac{-2}{(x-1)^3} > 0$ se $x - 1 < 0$

ovvero $x < 1$; quindi:

$f'(x) > 0 \quad \forall x < 0.$

Per $x > 0$, $2x - 2 > 0$ se $x > 1$.

Tracciamo il quadro dei segni di $f'(x)$ e degli intervalli in cui $f(x)$ è crescente e decrescente (figura *a*).

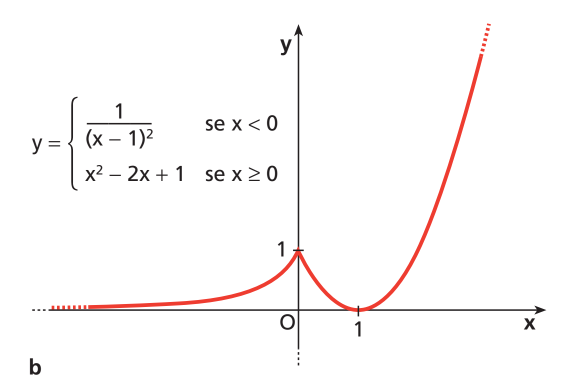


a

Dallo schema deduciamo che che $x = 0$ è un punto di massimo relativo e $x = 1$ è un punto di minimo relativo.
Essendo $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$, i corrispondenti punti del grafico sono $(0; 1)$ e $(1; 0)$.

Osservazione. Il punto $x = 0$ è un punto di massimo perché la funzione, pur non essendo derivabile, è continua e la derivata cambia segno nell'intorno di 0, come richiede la condizione sufficiente.

Nella figura *b* puoi osservare il grafico della funzione.



b

Trova i punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni, distinguendo i punti stazionari da quelli angolosi.

53 $y = |x^2 - 4x|$ $[x = 2 \text{ max (staz.)}; x = 0, x = 4 \text{ min}]$

54 $y = |x^2 - x| + 3$ $\left[x = \frac{1}{2} \text{ max (staz.)}; x = 0, x = 1 \text{ min}\right]$

55 $y = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^4 - 4x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $[x = 0 \text{ max}; x = 1 \text{ min (staz.)}]$

56 $y = \begin{cases} \dfrac{9}{x + 2} & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x} + 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ $[x = 1 \text{ min}]$

57 $y = \left|\dfrac{x - 1}{x + 2}\right|$ $[x = 1 \text{ min}]$

58 $y = \dfrac{|x^3|}{x^2 - 1}$ $[x = 0 \text{ max (staz.)}; x = \pm\sqrt{3} \text{ min (staz.)}]$

59 $y = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2^{2-x} + 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $[x = -1 \text{ min (staz.)}; x = 1 \text{ max}]$

Funzioni con punti di cuspide

60 **ESERCIZIO GUIDA**

Troviamo i punti di massimo e di minimo relativo della seguente funzione, specificando se sono punti di cuspide:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x - 3)^2}.$$

La funzione è continua in $\mathbb{R}$.

- Calcoliamo la derivata prima e determiniamo il suo dominio. Poiché si può scrivere $f(x) = (x - 3)^{\frac{2}{3}}$, si ha:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x - 3)^{\frac{2}{3} - 1} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x - 3}}.$$

La derivata non esiste per $x = 3$.

Bergamini, Trifone, Barozzi MATEMATICA.BLU - Vol.5 © Zanichelli 2012 con Maths in English

- Risolviamo $f'(x) = 0$. L'equazione

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x-3}} = 0$$

non ha soluzioni, quindi non ci sono punti stazionari.

- Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x-3}} > 0 \rightarrow x > 3.$$

Compiliamo il quadro dei segni (figura *a*).

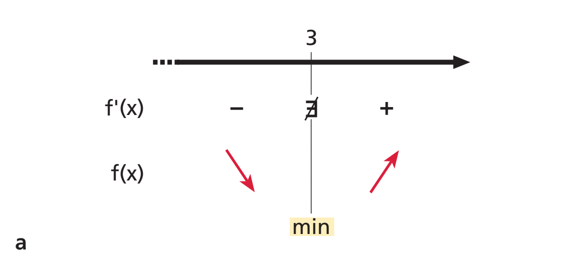
In $x = 3$ si ha un punto di minimo relativo, di coordinate $(3; 0)$.

Notiamo che nel punto $x = 3$ la derivata non esiste perché:

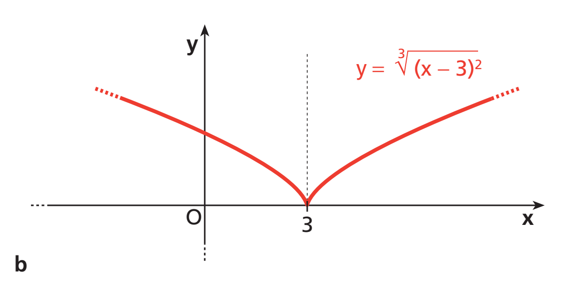
$$\lim_{x \to 3^-} f'(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to 3^+} f'(x) = +\infty.$$

Il punto $x = 3$ è una cuspide.

Nella figura *b* puoi osservare il grafico della funzione.



a



b

Determina i punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni, specificando quando si tratta di cuspidi.

61 $y = \sqrt[3]{x^2} - x$ $\left[x = 0 \text{ min (cuspide)}; x = \frac{8}{27} \text{ max}\right]$

62 $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ $\left[x = 0 \text{ max (cuspide)}; x = \frac{2}{3} \text{ min}\right]$

63 $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ $[x = 1 \text{ min (cuspide)}]$

64 $y = \sqrt[5]{x^2}$ $[x = 0 \text{ min (cuspide)}]$

65 $y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(1-2x)^2}$ $\left[x = \frac{1}{2} \text{ min (cuspide)}\right]$

66 $y = 1 - \sqrt[3]{x^3 + x^2}$ $\left[x = -\frac{2}{3} \text{ min}; x = 0 \text{ max (cuspide)}\right]$

ESERCIZI VARI Massimi e minimi relativi e flessi orizzontali

TEST

67 Sulla funzione

$$f(x) = \frac{x+2}{x-2}$$

possiamo affermare che:

A presenta un minimo per $x = 2$.

B presenta un massimo per $x = -2$.

C non presenta alcun minimo.

D presenta un minimo per $x = -1$.

E presenta un minimo per $x = 1$.

68 La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \leq -2 \\ 4 - x^2 & \text{se } -2 < x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

- A ha due punti di massimo relativo in $x = 2$ e $x = -2$.
- B ha un punto stazionario in $x = -2$ e una cuspide in $x = 2$.
- C è derivabile nel suo dominio.
- D ha due punti angolosi in $x = 2$ e in $x = -2$.
- E ha un punto angoloso in $x = 2$ e una cuspide in $x = -2$.

69 La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x^2 - |2x - 1|:$$

- A ha un punto di massimo relativo ed un punto di minimo relativo.
- B ha due punti di minimo relativo ed un punto di massimo relativo.
- C ha due punti di minimo relativo e nessun punto di massimo relativo.
- D nessuna delle altre risposte è corretta.

(*Università di Modena, Corso di laurea in Matematica, Test propedeutico,* 2002)

70 Sia f una funzione derivabile e con derivata prima strettamente positiva in tutti i punti interni al suo dominio. Allora:

- A f non ha punti di massimo o di minimo.
- B f è strettamente crescente nel suo dominio.
- C f è suriettiva.
- D f non ammette punti di flesso a tangente orizzontale.

(*Politecnico di Torino, Test di autovalutazione*)

71 **VERO O FALSO?**

a) Se $f'(x_0) = 0$, allora $f(x)$ ha in x_0 un punto di massimo o di minimo relativo. V F

b) In un punto di massimo o di minimo relativo la funzione deve essere derivabile con derivata prima uguale a 0. V F

c) Una funzione non derivabile in un punto x_0 non può avere un massimo o un minimo relativo nel punto. V F

d) Una funzione con una cuspide in x_0 non ha massimo o minimo in x_0. V F

72 **VERO O FALSO?**

a) In un punto angoloso x_0 la funzione non può mai avere massimo o minimo. V F

b) Se la derivata prima di una funzione esiste e non si annulla mai in un intervallo, la funzione non ha massimi o minimi relativi nell'intervallo. V F

c) In un punto x_0 di flesso orizzontale di una funzione $f(x)$ si ha $f'(x_0) = 0$. V F

d) Se $f'(x_0) = 0$, allora $f(x)$ nel punto x_0 ha un flesso orizzontale. V F

e) Se in un intorno completo del punto x_0 si hanno $f'(x) > 0$ e $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di flesso orizzontale. V F

Trova i punti di massimo e di minimo relativo e quelli di flesso orizzontale delle seguenti funzioni, evidenziando anche i punti angolosi e di cuspide.

73 $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 + 4$ [$x = 0$ min; $x = 2$ max; $x = 4$ min]

74 $y = x^4 - 2x^2 + 2$ [$x = -1$, $x = 1$ min; $x = 0$ max]

75 $y = x^3 - 3x^2 + 2$ $[x = 0 \text{ max}; x = 2 \text{ min}]$

76 $y = \dfrac{x^3}{3x+3}$ $\left[x = 0 \text{ fl. orizz.}; x = -\dfrac{3}{2} \text{ min}\right]$

77 $y = e^{\frac{2x^2}{x-1}}$ $[x = 0 \text{ max}; x = 2 \text{ min}]$

78 $y = 1 + \sqrt[3]{(x+3)^2}$ $[x = -3 \text{ min (cuspide)}]$

79 $y = \dfrac{3x^3+4}{x^2}$ $\left[x = \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}} \text{ min}\right]$

80 $y = e^x + e^{-x}$ $[x = 0 \text{ min}]$

81 $y = 3x - x^3$ $[x = -1 \text{ min}; x = 1 \text{ max}]$

82 $y = 2xe^{-x}$ $[x = 1 \text{ max}]$

83 $y = \dfrac{x^2-1}{2x-2}$ [né max, né min, né flessi]

84 $y = 3x^2e^x$ $[x = -2 \text{ max}; x = 0 \text{ min}]$

85 $y = \dfrac{5-x}{x^2-6x+9}$ $[x = 7 \text{ min}]$

86 $y = e^{8-2x^2} + 2x^2 - 1$ $[x = \pm 2 \text{ min}; x = 0 \text{ max}]$

87 $y = -2\sqrt{x+2} + x - 2$ $[x = -2 \text{ max (cuspide)}; x = -1 \text{ min}]$

88 $y = 2 - \sqrt{3x - x^2}$ $\left[x = 0, x = 3 \text{ max (cuspidi)}; x = \dfrac{3}{2} \text{ min}\right]$

89 $y = x - \dfrac{x-2}{x-1}$ $[x = 0 \text{ max}; x = 2 \text{ min}]$

90 $y = \dfrac{1}{x^2+6x+8}$ $[x = -3 \text{ max}]$

91 $y = \dfrac{\ln x}{x}$ $[x = e \text{ max}]$

92 $y = \dfrac{\ln x}{4x^2}$ $[x = \sqrt{e} \text{ max}]$

93 $y = \dfrac{1}{x^3 - x^2}$ $\left[x = \dfrac{2}{3} \text{ max}\right]$

94 $y = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-3)^2}$ $\left[x = \dfrac{7}{5} \text{ min}\right]$

95 $y = \dfrac{6x^4+2}{x^3}$ $[x = -1 \text{ max}; x = 1 \text{ min}]$

96 $y = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$ $[x = -1 \text{ min}; x = -1 \text{ max}]$

97 $y = \sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}}$ $[x = 0 \text{ max}]$

98 $y = 2\ln x - 8x$ $\left[x = \dfrac{1}{4} \text{ max}\right]$

99 $y = \dfrac{x^3}{x-3}$ $\left[x = 0 \text{ fl. orizz.}; x = \dfrac{9}{2} \text{ min}\right]$

100 $y = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x+4}}$ $[x = -4 + \sqrt{17} \text{ min}]$

101 $y = \ln \operatorname{sen} x - x$ $\left[x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ max}\right]$

102 $y = \dfrac{x^2-2x-2}{x^2}$ $[x = -2 \text{ max}]$

---

103 $y = |2\ln x| - 3$ $[x = 1 \text{ min (punto angoloso)}]$

104 $y = x^4 - \dfrac{8}{3}x^3 + 2x^2 + 3$ $[x = 0 \text{ min}; x = 1 \text{ fl. orizz.}]$

105 $y = \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{3\operatorname{sen} x}$ $\left[x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ min}; x = \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi \text{ max}\right]$

106 $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen} x + 1}$, in $[0; 2\pi]$. $\left[x = 0, x = \pi, x = 2\pi \text{ min}; x = \dfrac{\pi}{2}, x = \dfrac{3}{2}\pi \text{ max}\right]$

107 $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$, in $[0; 2\pi]$. $\left[x = \dfrac{3}{2}\pi \text{ min}\right]$

108 $y = \dfrac{1+\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$, in $[0; 2\pi]$. $[x = \pi \text{ min}]$

109 $y = x - 1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ $[x = -2 \text{ max}; x = 1 \text{ fl. orizz.}]$

110 $y = \dfrac{1-x^2}{x+2}$ $[x = -2 - \sqrt{3} \text{ min}; x = -2 + \sqrt{3} \text{ max}]$

111 $y = \sqrt{4x - x^2}$ $[x = 0, x = 4 \text{ min (cuspidi)}; x = 2 \text{ max}]$

112 $y = |-x^2 + 6x| - x + 3$ $\left[x = \frac{5}{2} \text{ max; } x = 6 \text{ min (punto angoloso); } x = 0 \text{ min (punto angoloso)}\right]$

113 $y = \dfrac{\sqrt{-x^2 + 5x - 6}}{x}$ $\left[x = \frac{12}{5} \text{ max}\right]$

114 $y = \sqrt[3]{3x^3 + 2x^2}$ $\left[x = -\frac{4}{9} \text{ max; } x = 0 \text{ min (cuspide)}\right]$

115 $y = 2\ln\cos x - \ln\cos^3 x$ $[x = 2k\pi \text{ min}]$

116 $y = |2x^2 - 4x|$ $[x = 0 \text{ min (punto angoloso); } x = 2 \text{ min (punto angoloso); } x = 1 \text{ max}]$

117 $y = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x} & \text{se } x \leq 1 \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $[x = 1 \text{ max (punto angoloso)}]$

118 $y = \sqrt[3]{(2-x)^2}$ $[x = 2 \text{ min (cuspide)}]$

119 $y = \text{arctg } 2x + \ln\sqrt{1 + 4x^2}$ $\left[x = -\frac{1}{2} \text{ min}\right]$

120 $y = \ln\dfrac{x^2 + 4}{x + 1}$ $[x = -1 + \sqrt{5} \text{ min}]$

121 $y = \dfrac{1}{\text{tg}^2 x} + \dfrac{2}{\text{tg}\, x}$, in $[0; \pi]$. $\left[x = \frac{3}{4}\pi \text{ max}\right]$

122 $y = \dfrac{2\cos x - 1}{\cos^2 x}$ $[x = k\pi \text{ max}]$

123 $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + x} + \dfrac{1}{x}$ $\left[x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \text{ max; } x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \text{ min}\right]$

124 $y = \begin{cases} \sqrt{5 - x^2} & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ \dfrac{8}{5 - x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ $[x = 0 \text{ max; } x = 1 \text{ min}]$

125 $y = \dfrac{\cos x}{1 + 2\cos^2 x}$, in $[0; 2\pi]$. $\left[x = \frac{\pi}{4}, x = \pi, x = \frac{7}{4}\pi \text{ max; } x = 0, x = \frac{3}{4}\pi, x = \frac{5}{4}\pi, x = 2\pi \text{ min}\right]$

126 $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x + \text{sen}\, x} - 2\cos x - x$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ min; } x = \pi + 2k\pi \text{ max}\right]$

La ricerca dei massimi e dei minimi assoluti

127 **ESERCIZIO GUIDA**

Troviamo i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1, \text{ nell'intervallo } -2 \leq x \leq 1.$$

La funzione è definita e continua $\forall x \in [-2; 1]$.

Per il teorema di Weierstrass esistono il minimo e il massimo assoluti nell'intervallo $[-2; 1]$.

Determiniamo i minimi e i massimi relativi.

- Calcoliamo la derivata prima e il suo dominio.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1).$$

$f'(x)$ esiste $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Risolviamo l'equazione $f'(x) = 0$:

  $4x(x^2 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = \pm 1.$

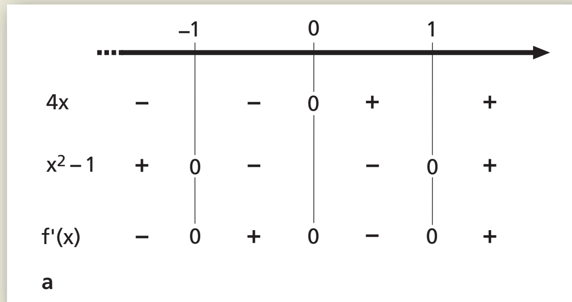
  Quindi $x = 0$ e $x = \pm 1$ sono punti stazionari.
- Studiamo il segno di $f'(x)$.

  $f'(x) > 0$ se $4x(x^2 - 1) > 0$.

  $4x > 0 \quad \rightarrow \quad x > 0.$

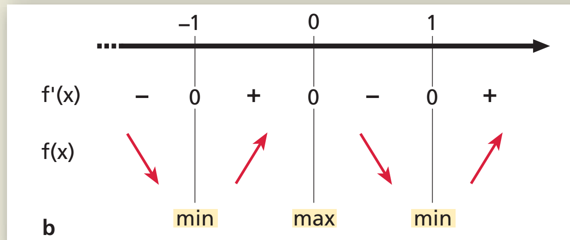
  $x^2 - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -1 \ \vee \ x > 1.$

  Compiliamo il quadro dei segni di $f'(x)$ (figura *a*).



a

  Analizziamo il quadro di confronto della derivata e della funzione (figura *b*).



b

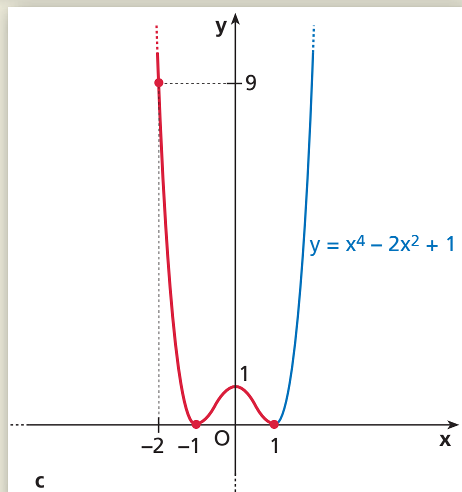
  In $x = \pm 1$ la funzione ha due minimi relativi di coordinate $(-1; 0)$ e $(1; 0)$, essendo $f(-1) = 0$ e $f(1) = 0$.

  In $x = 0$ la funzione ha un massimo relativo di coordinate $(0; 1)$, essendo $f(0) = 1$.

Per determinare ora i massimi e i minimi assoluti calcoliamo il valore della funzione agli estremi dell'intervallo assegnato:

$$f(-2) = 16 - 8 + 1 = 9, \ f(1) = 0.$$

Confrontando le ordinate dei punti considerati si può affermare che il minimo assoluto si ha in $x = -1$ e $x = 1$, mentre il massimo assoluto è in $x = -2$.
Per chiarire il risultato osserviamo il grafico della funzione (figura *c*). Il massimo relativo in $(0; 1)$ non è il massimo assoluto nell'intervallo.



c

Trova il massimo e il minimo assoluto delle seguenti funzioni negli intervalli indicati a fianco.

128 $y = \dfrac{x^3}{3} - 4x$, in $[0; 3]$. $[x = 0 \text{ max}; x = 2 \text{ min}]$

129 $y = 2e^x - 2x$, in $[-1; 4]$. $[x = 0 \text{ min}; x = 4 \text{ max}]$

130 $y = x^3 + 3x + 2$, in $[0; 3]$. $[x = 0 \text{ min}; x = 3 \text{ max}]$

131 $y = x + \dfrac{2}{x}$, in $[1; 4]$. $[x = \sqrt{2} \text{ min}; x = 4 \text{ max}]$

132 $y = x\sqrt{4 - x^2}$, in $[1; 2]$. $[x = \sqrt{2} \text{ max}; x = 2 \text{ min}]$

133 $y = x \ln x$, in $[1; e]$. $[x = 1 \text{ min}; x = e \text{ max}]$

134 $y = \dfrac{x^2 + 4}{4x}$, in $[-3; -1]$. $[x = -2 \text{ max}; x = -1 \text{ min}]$

135 $y = 1 + \cos x$, in $\left[\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$. $[x = \pi \text{ min}; x = 2\pi \text{ max}]$

136 $y=(x-2)^4$, in $[0;3]$. $[x=0 \text{ max}; x=2 \text{ min}]$

137 $y=\sqrt{x-2}$, in $[3;11]$. $[x=3 \text{ min}; x=11 \text{ max}]$

138 $y=\ln\dfrac{x-1}{x+3}$, in $[-6;-4]$. $[x=-6 \text{ min}; x=-4 \text{ max}]$

139 $y=\dfrac{x^2+2}{4x}$, in $[-5;-1]$. $[x=-5 \text{ min}; x=-\sqrt{2} \text{ max}]$

140 $y=\operatorname{sen}2x+2\cos x$, in $[0;\pi]$. $\left[x=\dfrac{\pi}{6} \text{ max}; x=\dfrac{5}{6}\pi \text{ min}\right]$

141 $y=e^{-x}+x$, in $[-1;1]$. $[x=-1 \text{ max}; x=0 \text{ min}]$

142 $y=x(x-2)^3$, in $[0;3]$. $\left[x=\dfrac{1}{2} \text{ min}; x=3 \text{ max}\right]$

3. FLESSI E DERIVATA SECONDA

► Teoria a pag. 1779

La concavità e il segno della derivata seconda

143 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la funzione $y=\dfrac{x}{x^2-1}$, troviamo gli intervalli in cui il suo grafico rivolge la concavità verso l'alto o verso il basso.

La funzione è definita per $x \neq \pm 1$. Calcoliamo le derivate prima e seconda:

$$y'=\frac{1\cdot(x^2-1)-x(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2};$$

$$y''=\frac{-2x(x^2-1)^2-(-x^2-1)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=\frac{-2x(x^2-1)^2+4x(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{2x\cancel{(x^2-1)}[-(x^2-1)+2(x^2+1)]}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Studiamo il segno della derivata seconda ponendo:

$$\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}>0.$$

Studiamo quando sono positivi i fattori N_1 e N_2 del numeratore e il denominatore D:

N_1: $x>0$;

N_2: $x^2+3>0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

D: $(x^2-1)^3>0 \quad$ se $\quad x^2-1>0 \rightarrow$

$\rightarrow x<-1 \vee x>1$.

Compiliamo il quadro dei segni.

		−1		0		1	
N_1	−		−	0	+		+
N_2	+		+		+		+
D	+	0	−		−	0	+
f''(x)	−	∄	+	0	−	∄	+
f(x)							

Per $x<-1 \;\vee\; 0<x<1$ la concavità è rivolta verso il basso; per $-1<x<0 \;\vee\; x>1$ la concavità è rivolta verso l'alto.

Per le seguenti funzioni, trova gli intervalli in cui i loro grafici volgono la concavità verso il basso o verso l'alto. (Nei risultati v.a. e v.b. stanno rispettivamente per «verso l'alto» e «verso il basso».)

144 $y = \frac{x-1}{x+3}$ [v.a. $x < -3$; v.b. $x > -3$]

145 $y = \sqrt{x-2} + 1$ [v.b. $\forall x > 2$]

146 $y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$ [v.a. $x < 0$; v.b. $x > 0$]

147 $y = \frac{x^2}{x-1}$ [v.a. $x > 1$; v.b. $x < 1$]

148 $y = -2(x-1)^3$ [v.a. $x < 1$; v.b. $x > 1$]

149 $y = x + \sqrt{x-4}$ [v.b. $\forall x > 4$]

150 $y = \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)$ [v.a. $x < 0$; v.b. $x > 2$]

151 $y = xe^x + x$ [v.a. $x > -2$; v.b. $x < -2$]

152 $y = \frac{x^4}{2} + \frac{2}{x^4}$ [v.a. $x \neq 0$]

153 $y = 2xe^{-\frac{1}{x}}$ [v.a. $x > 0$; v.b. $x < 0$]

154 $y = \ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$ [v.b. $x < -1 \lor x > 1$]

155 $y = \frac{5}{2}\operatorname{sen} x - 1$ [v.a. $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$; v.b. $\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$]

156 $y = \ln\cos x - 2x$ $\left[\text{v.b.} -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

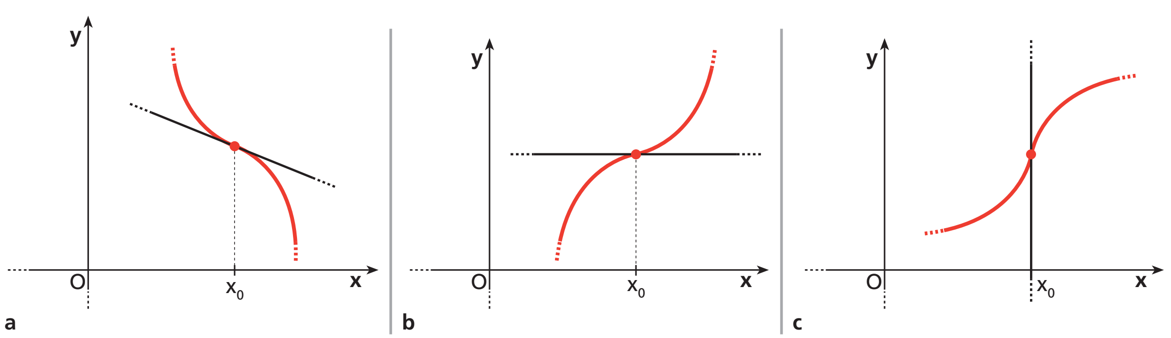
157 $y = x^4 - 8x^2 - 3$ $\left[\text{v.a. } x < -\frac{2}{3}\sqrt{3} \lor x > \frac{2}{3}\sqrt{3}\text{; v.b.} -\frac{2\sqrt{3}}{3} < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

158 $y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, in $[0; \pi]$. $\left[\text{v.a. } \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\text{; v.b. } \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[\right]$

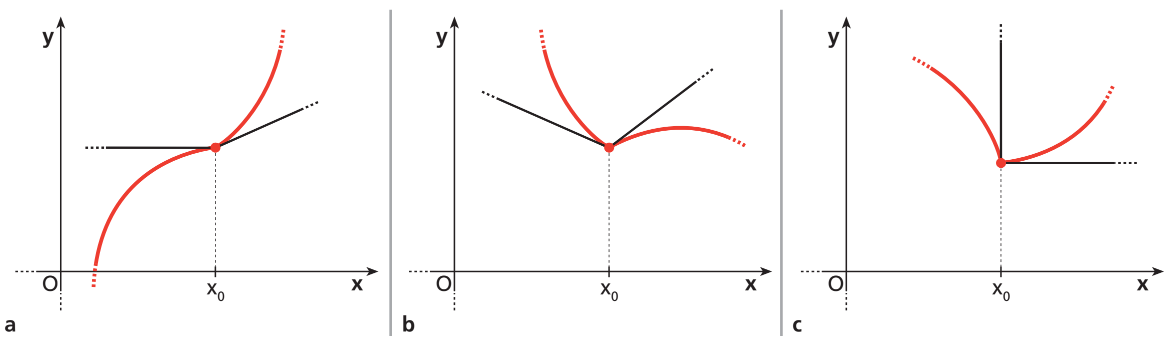
La ricerca dei flessi e la derivata seconda

Nei seguenti grafici indica le caratteristiche del flesso e se in x_0 le derivate prima e seconda si annullano.

159



160



161 **VERO O FALSO?**

a) In un punto di flesso una funzione $f(x)$ deve essere derivabile. V F

b) In un punto di flesso orizzontale le derivate prima e seconda si annullano sempre. V F

c) Se le derivate prima e seconda si annullano in un punto x_0 di una funzione, allora x_0 è un punto di flesso orizzontale. V F

d) Se $f''(x_0) = 0$, allora si ha un flesso obliquo. V F

e) In un flesso verticale la derivata prima non esiste. V F

f) Per determinare i flessi obliqui di una funzione $f(x)$ basta trovare le soluzioni dell'equazione $f''(x) = 0$. V F

162 **ESERCIZIO GUIDA**

Troviamo i punti di flesso delle funzioni: a) $f(x) = -x(x+1)^3$; b) $g(x) = 2\sqrt[3]{x+2}$.

a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda:

$$f'(x) = -(x+1)^3 - x \cdot 3 \cdot (x+1)^2 = (x+1)^2(-x-1-3x) = (x+1)^2(-4x-1);$$

$$f''(x) = 2(x+1)\cdot(-4x-1) + (x+1)^2(-4) = (x+1)[2(-4x-1) + (x+1)(-4)] =$$

$$= (x+1)(-8x-2-4x-4) = (x+1)(-12x-6) = -6(x+1)(2x+1).$$

La derivata seconda è una funzione continua, quindi possiamo cercare i punti di flesso $f''(x) = 0$:

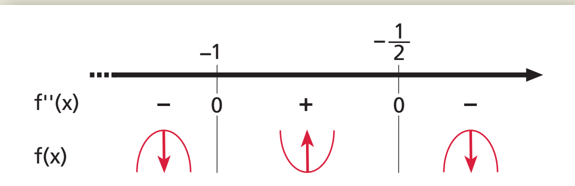
$$-6(x+1)(2x+1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1 \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Studiamo il segno di $f''(x)$:

$$f''(x) > 0 \quad \text{se} \quad -6(x+1)(2x+1) > 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad (x+1)(2x+1) < 0 \quad \rightarrow \quad -1 < x < -\frac{1}{2}.$$

Compiliamo il quadro di confronto della derivata seconda e della funzione.



Dal quadro si deduce che i punti $x_1 = -1$ e $x_2 = -\frac{1}{2}$ sono punti di flesso.

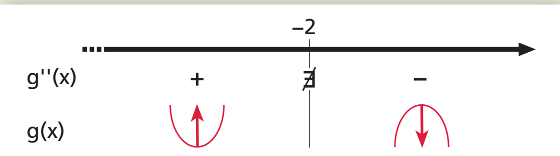
Essendo $f'(-1) = 0$ e $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \neq 0$, $x_1 = -1$ è un flesso orizzontale e $x_2 = -\frac{1}{2}$ è un flesso obliquo.

b) La funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Calcoliamo le derivate prima e seconda:

$$g'(x) = 2 \cdot \frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}; \qquad g''(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)(x+2)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^5}}.$$

La derivata seconda non esiste in $x = -2$ ed è positiva per $x < -2$ e negativa per $x > -2$.

Il punto $x = -2$ è di flesso.
Poiché in -2 la $g'(x)$ non esiste e $\lim_{x \to -2} g'(x) = +\infty$, il flesso è verticale.



Determina i punti di flesso delle seguenti funzioni.

163 $y = 2x^3 - 8x$ $[x = 0 \text{ fl. obliquo}]$

164 $y = 2x + \dfrac{1}{x}$ [nessun flesso]

165 $y = \sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$ $\left[x = \dfrac{3}{2} \text{ fl. obliquo}\right]$

166 $y = x\sqrt{9-x^2}$ $[x = 0 \text{ fl. obliquo}]$

167 $y = \ln(x^2 - 5x + 6)$ [nessun flesso]

168 $y = xe^{-x}$ $[x = 2 \text{ fl. obliquo}]$

169 $y = 2e^{-x^2} + 2$ $\left[x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ fl. obliqui}\right]$

170 $y = 1 + \operatorname{arcsen} x$ $[x = 0 \text{ fl. obliquo}]$

171 $y = \dfrac{10x}{1-x^2}$ $[x = 0 \text{ fl. obliquo}]$

172 $y = e^{\frac{1}{x-1}}$ $\left[x = \dfrac{1}{2} \text{ fl. obliquo}\right]$

173 $y = x\ln x - \dfrac{1}{x}$ $[x = \sqrt{2} \text{ fl. obliquo}]$

174 $y = \operatorname{arctg} x + x$ $[x = 0 \text{ fl. obliquo}]$

175 $y = -x(x-1)^2$ $\left[x = \dfrac{2}{3} \text{ fl. obliquo}\right]$

176 $y = \sqrt[3]{x-1}$ $[x = 1 \text{ fl. verticale}]$

177 $y = 2\sqrt[3]{x+3} + 1$ $[x = -3 \text{ fl. verticale}]$

178 $y = \dfrac{2x^2 - x + 2}{x^2 + 1}$ $[x = 0, x = \pm\sqrt{3} \text{ fl. obliqui}]$

179 $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2} + \ln x$ $[x = 1 \text{ fl. orizz.}]$

180 $y = -x^3(x+1)$ $\left[x = 0 \text{ fl. orizz.}; x = -\dfrac{1}{2} \text{ fl. obliquo}\right]$

181 $y = \dfrac{x^3}{4+x^2}$ $[x = 0 \text{ fl. orizz.}; x = \pm 2\sqrt{3} \text{ fl. obliqui}]$

182 $y = \operatorname{sen} 2x,$ in $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5}{4}\pi\right]$. $\left[x = \dfrac{\pi}{2} \text{ e } x = \pi \text{ fl. obliqui}\right]$

183 $y = x^4 - 3x^3 + 2$ $\left[x = 0 \text{ fl. orizz.}; x = \dfrac{3}{2} \text{ fl. obliquo}\right]$

184 $y = 2\operatorname{tg} x + 1,$ in $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. $[x = 0 \text{ fl. obliquo}]$

185 $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + 4\operatorname{sen} x,$ in $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3}{2}\pi\right]$. $[x = \pi \text{ fl. obliquo}]$

186 $y = \dfrac{3}{5}\sqrt[3]{(x-1)^5}$ $[x = 1 \text{ fl. orizz.}]$

187 $y = \sqrt[3]{2 - 2x^3}$ $[x = 0 \text{ fl. orizz.}; x = 1 \text{ fl. verticale}]$

188 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo le equazioni delle tangenti inflessionali nei punti di flesso $x_1 = -1$ e $x_2 = -\dfrac{1}{2}$ della funzione $f(x) = -x(x+1)^3$ dell'esercizio guida 162.

Abbiamo già visto che, essendo $f'(-1) = 0$, in $x_1 = -1$ c'è un flesso orizzontale.
Essendo $y_1 = f(-1) = 0$, la tangente inflessionale ha equazione $y = y_1$, ossia $y = 0$.

In $x_2 = -\dfrac{1}{2}$ c'è un flesso obliquo e $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} = m$ è il coefficente angolare della tangente inflessionale.

Poiché $y_2 = f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{16}$, l'equazione della tangente inflessionale è:

$$y - y_2 = m(x - x_2) \rightarrow y - \frac{1}{16} = \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}\right) \rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}.$$

Determina i punti di flesso e scrivi le equazioni delle tangenti inflessionali delle seguenti funzioni.

189 $y = x^3 + 4x - 1$ $[\text{fl.}\ (0; -1);\ y = 4x - 1]$

190 $y = \text{tg}\, x$, in $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$. $[\text{fl.}\ (\pi; 0);\ y = x - \pi]$

191 $y = x(x+3)^2$ $[\text{fl.}\ (-2; -2);\ y = -3x - 8]$

192 $y = \text{arcsen}\,(x-1)$ $[\text{fl.}\ (1; 0);\ y = x - 1]$

193 $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - x^2$ $\left[\text{fl.}\ \left(-1; -\frac{3}{4}\right);\ y = \frac{7}{6}x + \frac{5}{12};\ \text{fl.}\ (2; -4);\ y = -\frac{10}{3}x + \frac{8}{3}\right]$

194 $y = xe^x$ $\left[\text{fl.}\ \left(-2; -\frac{2}{e^2}\right);\ y = \frac{-x-4}{e^2}\right]$

195 $y = (x-2)^3$ $[\text{fl.}\ (2; 0);\ y = 0]$

196 $y = 3\,\text{sen}\, x$, in $[-\pi; \pi]$. $[\text{fl.}\ (0; 0);\ y = 3x]$

197 $y = x\sqrt{2 - x^2}$ $[\text{fl.}\ (0; 0);\ y = \sqrt{2}\,x]$

4. MASSIMI, MINIMI, FLESSI E DERIVATE SUCCESSIVE

Teoria a pag. 1783

I massimi, i minimi, i flessi orizzontali e le derivate successive

198 **ESERCIZIO GUIDA**

Troviamo i punti di massimo, di minimo e di flesso orizzontale delle seguenti funzioni con il metodo delle derivate successive:

a) $f(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2$; b) $f(x) = \text{sen}\, x + \cos x$.

a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

- Calcoliamo: $f'(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x = 4x(x^2 - 2x + 1) = 4x(x-1)^2$.
- Poniamo $f'(x) = 0$:

$$4x(x-1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

- Calcoliamo ora la derivata seconda:

$$f''(x) = 4(x-1)^2 + 4x \cdot 2(x-1) = 4(x-1)(x-1+2x) = 4(x-1)(3x-1).$$

- Calcoliamo il valore della derivata seconda in $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$.

Per $x = 0$ si ha: $f''(0) = 4(-1) \cdot (-1) = 4$.

Poiché $f'(0) = 0$ e $f''(0) > 0$, in $x_1 = 0$ si ha un minimo.

Per $x = 1$ si ha: $f''(1) = 4 \cdot (0) \cdot (2) = 0$.

Poiché $f''(1) = 0$ dobbiamo calcolare la derivata successiva $f'''(x)$:

$$f'''(x) = 4(3x - 1) + 4(x - 1) \cdot 3 = 12x - 4 + 12x - 12 = 24x - 16.$$

Calcoliamo ora il valore della derivata terza in $x_2 = 1$:

$$f'''(1) = 24 - 16 = 8.$$

Poiché $f'(1) = 0$, $f''(1) = 0$ e $f'''(1) \neq 0$, allora $x_2 = 1$ è un punto di flesso orizzontale.

b) La funzione $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è periodica di periodo 2π, quindi limitiamo il suo studio all'intervallo $[0; 2\pi]$.

- Calcoliamo: $f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$.
- Poniamo $f'(x) = 0$: $\cos x - \operatorname{sen} x = 0$.

Dividiamo per $\cos x$, con $x \neq \frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{3}{2}\pi$:

$$1 - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - \operatorname{tg} x = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg} x = 1 \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{5}{4}\pi.$$

- Calcoliamo la derivata seconda: $f''(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x$.
- Sostituiamo in $f''(x)$ i valori x_1 e x_2 appena trovati:

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}; \quad f''\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi - \cos\frac{5}{4}\pi = \sqrt{2}.$$

Essendo $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ e $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$ è un punto di massimo;

essendo $f'\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 0$ e $f''\left(\frac{5}{4}\pi\right) > 0$, $x_2 = \frac{5}{4}\pi$ è un punto di minimo.

Determina i punti di massimo, di minimo e di flesso orizzontale delle seguenti funzioni con il metodo delle derivate successive.

199 $y = \frac{3}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4$ $[x = 0 \text{ min}; x = -1 \text{ max}]$

200 $y = \frac{x^4}{4} - x^3 + 4x$ $[x = -1 \text{ min}; x = 2 \text{ fl. orizz.}]$

201 $y = \cos 2x + 2 \operatorname{sen} x$, in $[0; 2\pi]$. $\left[x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3}{2}\pi \text{ min}; x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5}{6}\pi \text{ max}\right]$

202 $y = x^3(x - 2)^2$ $\left[x = 2 \text{ min}; x = \frac{6}{5} \text{ max}; x = 0 \text{ fl. orizz.}\right]$

203 $y = x + \frac{1}{x}$ $[x = 1 \text{ min}; x = -1 \text{ max}]$

204 $y = \frac{1}{8}x^8 + \frac{7}{6}x^6$ $[x = 0 \text{ min}]$

205 $y = \cos^2 x - \cos x$, in $[0; 2\pi]$. $\left[x = 0, x = \pi, x = 2\pi \text{ max}; x = \frac{1}{3}, x = \frac{5\pi}{3} \text{ min}\right]$

206 $y = (x - 2)e^x$ $[x = 1 \text{ min}]$

207 $y = e^{x^2 - 1} - x^2$ $[x = \pm 1 \text{ min}; x = 0 \text{ max}]$

208 $y = \ln(x-1) - 2x$ $\left[x = \frac{3}{2} \text{ max}\right]$

209 $y = 8 \operatorname{arctg} x - 4x$ $[x = -1 \text{ min}; x = 1 \text{ max}]$

210 $y = \frac{x-2}{(x-1)^3}$ $\left[x = \frac{5}{2} \text{ max}\right]$

I flessi e le derivate successive

211 **ESERCIZIO GUIDA**

Troviamo i punti di flesso della funzione $f(x) = -2x^4 + 4x^3 + 3x + 1$ con il metodo delle derivate successive.

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Calcoliamo:

$$f'(x) = -8x^3 + 12x^2 + 3; \quad f''(x) = -24x^2 + 24x.$$

Troviamo gli zeri della derivata seconda ponendo $f''(x) = 0$:

$$-24x^2 + 24x = 0 \quad \to \quad 24x(-x+1) = 0 \quad \to \quad x_1 = 0, x_2 = 1.$$

Calcoliamo la derivata terza, $f'''(x) = -48x + 24$, e troviamo il segno che essa assume nei punti $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$:

$$f'''(0) = 24 > 0$$
$$f'''(1) = -48 + 24 = -24 < 0.$$

Il punto $x_1 = 0$ è di flesso ascendente, $x_2 = 1$ è di flesso discendente.

Trova i punti di flesso delle seguenti funzioni con il metodo delle derivate successive.

212 $y = \frac{1}{10}x^6 - x^4$ $[x = 2 \text{ fl. ascend.}; x = -2 \text{ fl. discend.}]$

213 $y = xe^x$ $[x = -2 \text{ fl. ascend.}]$

214 $y = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$, in $[\pi; 3\pi]$. $[x = 2\pi \text{ fl. ascend.}]$

215 $y = 4 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$, in $[-\pi; \pi]$. $\left[x = 0 \text{ fl. discend.}; x = \pm\frac{2\pi}{3} \text{ fl. ascend.}\right]$

216 $y = x^3(x-2)$ $[x = 0 \text{ fl. discend.}; x = 1 \text{ fl. ascend.}]$

217 $y = x^5 - 10x^3 + 25x$ $[x = 0 \text{ fl. discend.}; x = \pm\sqrt{3} \text{ fl. ascend.}]$

218 $y = x^2 \ln x$ $\left[x = \frac{1}{\sqrt{e^3}} \text{ fl. ascend.}\right]$

219 $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x$, in $[0; \pi]$. $\left[x = \frac{\pi}{4} \text{ fl. discend.}; x = \frac{3}{4}\pi \text{ fl. ascend.}\right]$

ESERCIZI VARI Massimi, minimi, flessi

TEST

220 Sia $f(x)$ una funzione derivabile quante volte si vuole. Quali condizioni devono essere verificate affinché la funzione $f'(x)$ abbia un minimo relativo in $x = x_0$?

A $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$.

B $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) > 0$.

C $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \leq 0$.

D $f''(x_0) > 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$.

E $f'(x_0) \neq 0$ e $f''(x_0) = 0$.

221 Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?

A Se f è due volte derivabile e $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, allora x_0 non è né massimo né minimo relativo.

B Se, per ogni x, $f(x) > 0$ e se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, allora f ha massimo in $\mathbb{R}$.

C Se f è due volte derivabile e x_0 è un punto di massimo relativo per f, allora $f''(x_0) < 0$.

D Se f è due volte derivabile e $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo.

(*Università di Trento*, 2004)

222 Osserva il grafico della funzione $f(x)$.
Le seguenti relazioni sono tutte corrette, *tranne una*. Quale?

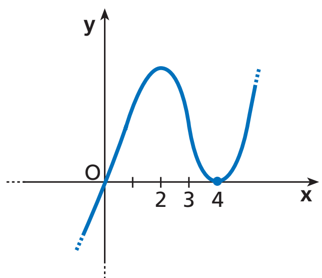
A $f(0) = 0$ e $f'(0) \neq 0$.

B $f'(2) = 0$ e $f''(2) < 0$.

C $f'(3) = 0$ e $f''(3) = 0$.

D $f'(4) = 0$ e $f''(4) > 0$.

E $f''(2) \neq 0$ e $f''(3) = 0$.



Trova i punti di massimo, minimo e flesso delle seguenti funzioni.

223 $y = \dfrac{x-3}{(x+1)^3}$ [$x = 5$ max; $x = 7$ fl. obl. asc.]

224 $y = \dfrac{2x^3}{x^2-4}$ [$x = -2\sqrt{3}$ max; $x = 2\sqrt{3}$ min; $x = 0$ fl. orizz. disc.]

225 $y = 2\ln x + \dfrac{1}{x}$ $\left[x = \dfrac{1}{2}\text{ min; } x = 1 \text{ fl. obl. disc.}\right]$

226 $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$, in $[0; 2\pi]$. [$x = \pi$ fl. obl. disc.]

227 $y = x - \operatorname{arcsen} 2x$ [$x = 0$ fl. obl. disc.]

228 $y = x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + 2$ $\left[x = \dfrac{1}{4}\text{ min; } x = 0 \text{ fl. orizz. disc.; } x = \dfrac{1}{6}\text{ fl. obl. asc.}\right]$

229 $y = e^{2x} - 2e^x$ $\left[x = 0 \text{ min; } x = \ln\dfrac{1}{2}\text{ fl. obl. asc.}\right]$

230 $y = 2x^2 \ln x$ $\left[x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}\text{ min; } x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{e^2}}\text{ fl. obl. asc.}\right]$

231 $y = 3x^7 - 7x^6 + 1$ $\left[x = 0 \text{ max; } x = 2 \text{ min; } x = \dfrac{5}{3}\text{ fl. obl. asc.}\right]$

232 $y = 2x\sqrt{x+1}$ $\left[x = -1 \text{ max};\ x = -\frac{2}{3} \text{ min}\right]$

233 $y = 2x^4 + 3x^3 + 4$ $\left[x = -\frac{9}{8} \text{ min};\ x = -\frac{3}{4} \text{ fl. obl. disc.};\ x = 0 \text{ fl. orizz. asc.}\right]$

234 $y = \frac{x^3}{x^2 + x - 1}$ $[x = 1 \text{ min};\ x = -3 \text{ max};\ x = 0 \text{ fl. orizz. asc.}]$

235 $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{(x-1)^2}$ $[x = 3 \text{ min};\ x = 4 \text{ fl. obl. disc.}]$

236 $y = 2x - \operatorname{arcsen} x$ $\left[x = -1 \text{ max};\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ min};\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ max};\ x = 1 \text{ min};\ x = 0 \text{ fl. obl. asc.}\right]$

237 $y = 2x^4 - 12x^2$ $[x = -\sqrt{3} \text{ min};\ x = 0 \text{ max};\ x = \sqrt{3} \text{ min};\ x = -1 \text{ fl. obl. disc.};\ x = 1 \text{ fl. obl.asc.}]$

238 $y = x + \operatorname{arctg}(x-1)$ $[x = 1 \text{ fl. obl. disc.}]$

239 $y = e^{\frac{x-1}{x+2}}$ $\left[x = -\frac{1}{2} \text{ fl. obl. disc.}\right]$

240 $y = x\ln(x-1) - 2$ $[x = 2 \text{ fl. obl. asc.}]$

241 $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - 2\cos x, \quad \text{in } [0; 2\pi].$ $\left[x = 0 \text{ max};\ x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \text{min};\right.$
$x = \pi - \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \text{max};\ x = 2\pi \text{ min};\ x = \frac{\pi}{6} \text{ fl. obl. disc.};\ x = \frac{\pi}{2} \text{fl. obl. asc;}$
$\left. x = \frac{5}{6}\pi \text{ fl. obl. disc.};\ x = \frac{3}{2}\pi \text{ fl. obl. asc.}\right]$

242 $y = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$ $[x = 0 \text{ min};\ x = 2 \text{ fl. obl. disc.}]$

243 $y = \sqrt[3]{4-x}$ $[x = 4 \text{ fl. obl. disc.}]$

244 $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{1 - |x-1|}$ $[x = -\sqrt{5} \text{ max};\ x = 1 \text{ min};\ x = 3 \text{ max}]$

245 $y = x\sqrt{1-x^2}$ $\left[x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ max};\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ min};\ x = 0 \text{ fl. obl. disc.}\right]$

246 Verify that the following function has stationary points at $x = -1, 0, 1$:

$f(x) = 5x^6 + 12x^5 - 20x^3 - 15x^2 + 1.$

Classify each of these three stationary points as a maximum, a minimum or a point of inflection.
Are there any other stationary points? If so, find them but do not attempt to classify them.

(UK *University of Essex*, First Year Examination, 2002)

$[\text{min } (-1; -1);\ \text{max } (0; 1);\ \text{min } (1; -17)]$

I massimi, i minimi e i flessi in funzioni con parametri

Funzioni con parametri e massimi e minimi

247 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la funzione $y = \frac{ax}{(bx-1)^2}$, con $a \neq 0$, determiniamo a e b in modo che il grafico che la rappresenta abbia un estremo relativo, cioè un minimo o un massimo, nel punto $\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$.

Per trovare i valori di a e b, servono due condizioni che, poste a sistema, forniranno i valori richiesti.

1. Il punto di coordinate $\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$ appartiene alla funzione, quindi sostituendo i valori -1 e $-\frac{1}{4}$ nell'espressione della funzione data si ha:

$$\frac{1}{4} = \frac{a}{(-b-1)^2} \quad \to \quad \frac{1}{4} = \frac{a}{(b+1)^2} \quad \to \quad (b+1)^2 = 4a, \quad \text{con } b \neq -1.$$

2. Poiché il punto $\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$ deve essere un estremo relativo e nel suo dominio la funzione data è derivabile, in $x = -1$ la derivata prima di y si deve annullare.

   Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = \frac{a(bx-1)^2 - ax \cdot 2 \cdot (bx-1) \cdot b}{(bx-1)^4} = \frac{a\cancel{(bx-1)}(bx-1-2bx)}{(bx-1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{a(-bx-1)}{(bx-1)^3}.$$

   Calcoliamo y' in $x = -1$ e poniamo il risultato uguale a 0, cioè $y'(-1) = 0$:

$$\frac{a \cdot (b-1)}{(-b-1)^3} = 0 \quad \to \quad a(b-1) = 0, \quad \text{con } b \neq -1.$$

Poniamo a sistema le due equazioni, con la condizione $b \neq -1$ e con $a \neq 0$ per ipotesi:

$$\begin{cases} (b+1)^2 = 4a \\ a(b-1) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} (b+1)^2 = 4a \\ b = 1 \end{cases} \to \begin{cases} 4 = 4a \\ b = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Sostituendo nella funzione data, abbiamo la funzione richiesta: $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$.

248 Calcola il valore di a in modo che il grafico della funzione $y = ax^3 + 2x^2 - 1$ abbia un massimo nel punto di ascissa $x = 2$. $\left[a = -\frac{2}{3}\right]$

249 Trova a e b in modo che il grafico della funzione $y = \dfrac{ax^2 - ax - 2}{x - b}$ abbia in $(0; 1)$ un punto di minimo. $[a = -1; b = 2]$

250 Determina a e b in modo che il grafico della funzione $y = -4x^2 + ax + b + 1$ abbia come valore massimo 2 nel punto $x = 1$. $[a = 8; b = -3]$

251 Dimostra che la funzione $y = x^3 + ax^2 - x + 1$ ammette per qualunque valore di a un punto di massimo e un punto di minimo relativo.

252 Per quali valori di a la funzione $y = x^3 + 2ax^2 + \frac{1}{3}x - a$ non presenta né massimi né minimi? $\left[-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}\right]$

253 Dimostra che per qualunque valore di $a \neq 0$ la funzione $y = -\frac{a}{3}x^3 + 4ax + 12$ possiede un massimo e un minimo di ascisse ± 2.

254 Trova per quali valori di a la funzione $y = x^3 - (a+1)x + a$ non presenta né massimi né minimi e per quali valori invece ha sempre un massimo e un minimo relativi. [né max né min per $a < -1$; $a > -1$]

255 Determina il coefficiente a della funzione $y = x^2 e^x + (a-1)x$, sapendo che il suo grafico è tangente all'asse x nell'origine. $[a = 1]$

256 Trova i coefficienti a, b, c della funzione $y = ax^3 + bx^2 + cx$, sapendo che il suo grafico ha un massimo in $(-1; 2)$ e che passa per il punto $(1; 0)$. $\left[a = \frac{3}{2}; b = 1; \ c = -\frac{5}{2}\right]$

257 Data la funzione $y = a \operatorname{sen} x + b \cos 2x$, calcola i valori di a e b, sapendo che il suo grafico ha un massimo in $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{3}{2}\right)$. $[a = 2; b = 1]$

258 Trova i coefficienti a e b della funzione $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1$ in modo che il suo grafico sia simmetrico rispetto all'asse y e abbia un minimo di coordinate $(1; 0)$. $[a = 1; b = 0; c = -2; d = 0]$

259 Determina per quali valori di a e b la funzione $y = ax^3 + 3x + b - 2$ ha un massimo coincidente con il minimo della funzione $y = x - \ln x$. $[a = -1; b = 1]$

260 Data la funzione $y = \dfrac{ax^2 + x + c}{bx}$, determina a, b e c in modo che il suo grafico abbia un massimo nel punto di ascissa $x = 1$ e passi per i punti di coordinate $\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$ e $\left(2; -\dfrac{7}{4}\right)$. $[a = 1; b = -2; c = 1]$

261 Data la funzione $y = \dfrac{ax^3 + bx^2 + cx}{x + 2}$, trova a, b, c in modo che il suo grafico abbia per tangente nel punto $(1; 2)$ la retta di equazione $y = 2x$ e abbia un minimo di ascissa -1. $\left[a = -\dfrac{1}{6}; b = \dfrac{7}{3}; c = \dfrac{23}{6}\right]$

Funzioni con parametri e flessi

262 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo i coefficienti a, b, c, d in modo che il grafico della funzione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ passi per $(0; 1)$ e abbia un flesso orizzontale in $(-1; 0)$.

Per determinare a, b, c, d servono quattro condizioni ricavabili da:

1. passaggio per $(0; 1)$;
2. passaggio per $(-1; 0)$;
3. punto di flesso: $y''(-1) = 0$;
4. tangente orizzontale nel punto di flesso: $y'(-1) = 0$.

Esprimiamo le condizioni analiticamente:

1. $1 = d$;
2. $0 = -a + b - c + d$;
3. calcoliamo la derivata prima e seconda: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y'' = 6ax + 2b$; imponiamo che sia $y''(-1) = 0$, sostituendo -1 a x nella derivata seconda: $-6a + 2b = 0$;
4. imponiamo che sia $y'(-1) = 0$, sostituendo -1 nella derivata prima: $3a - 2b + c = 0$.

Mettiamo ora a sistema le quattro condizioni e risolviamo:

$$\begin{cases} 1 = d \\ 0 = -a + b - c + d \\ -6a + 2b = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = d \\ 0 = -a + 3a - c + 1 \\ b = 3a \\ 3a - 6a + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ 2a - c + 1 = 0 \\ b = 3a \\ -3a + c = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} d = 1 \\ 2a - 3a + 1 = 0 \\ b = 3a \\ c = 3a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ -a + 1 = 0 \\ b = 3a \\ c = 3a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 3 \\ d = 1 \end{cases}$$

Sostituendo nella funzione iniziale, otteniamo quella cercata: $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

263 Determina a, b, c nella funzione $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$, in modo che il suo grafico abbia un punto di flesso in $A(1; 0)$ e un punto di minimo di ascissa 3. $\left[a = \dfrac{1}{11}; b = -\dfrac{3}{11}; c = -\dfrac{9}{11}\right]$

264 Trova a, b, c nella funzione $y = \frac{ax^3 + bx + c}{x}$, in modo che il suo grafico passi per $(1; 0)$ e abbia un flesso in $(-1; 4)$.
$[a = -2; b = 4; c = -2]$

265 Trova a, b nella funzione $y = e^{ax^2} + b$, in modo che il suo grafico abbia un flesso nel punto di ascissa -1 e passi per $(0; 2)$.
$\left[a = -\frac{1}{2}, b = 1\right]$

266 Determina a, b, c nella funzione $y = ax^3 + bx^2 + cx$, in modo che il suo grafico abbia in $F(1; 2)$ un flesso orizzontale.
$[a = 2; b = -6; c = 6]$

267 Determina a, b, c nella funzione $y = ax^3 + bx^2 + cx + a$, in modo che il suo grafico abbia un flesso in $(0; 8)$ e la tangente nel punto di flesso abbia coefficiente angolare -12.
Verifica che il punto di flesso è il punto medio del segmento che congiunge i punti di massimo e minimo.
$[a = 8; b = 0; c = -12]$

268 Trova per quali valori di a e b il grafico della funzione $y = a \operatorname{sen} x + (b-1)\cos x$:

a) ha un massimo in $\left(\frac{3}{2}\pi; 4\right)$; b) ha un flesso con tangente di coefficiente angolare 2 nel punto di ascissa $\frac{\pi}{6}$.
[a) $a = -4$ e $b = 1$; b) $a = \sqrt{3}$ e $b = 0$]

269 Nella cubica di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, trova a, b, c, d in modo che il grafico relativo passi per l'origine e abbia nel punto di ascissa -1 un flesso con tangente di equazione $y = 2x + 2$.
$[a = -2; b = -6; c = -4; d = 0]$

270 a) Studia al variare di k i massimi, i minimi e i flessi della funzione $y = \frac{1}{3}x^3 - kx$.

b) Considera i casi particolari $k = -3$, $k = 0$, $k = 3$ e trova i massimi, i minimi e i flessi. Rappresenta l'andamento delle tre funzioni dopo averne determinato il dominio, le intersezioni con gli assi e studiato il segno.

c) Determina per quale valore di k si ha una funzione con la distanza fra il massimo e il minimo uguale a $\frac{10}{3}\sqrt{2}$. Trova le coordinate dei due punti.

[a) $k > 0$ un max e un min, $k \leq 0$ nessun estremante, $\forall k$ un fl. (orizz. se $k = 0$); b) $x = 0$ fl. obl.; $x = 0$ fl. orizz.; $x = \sqrt{3}$ min, $x = -\sqrt{3}$ max, $x = 0$ fl. obl.; c) $k = 2$; $\left(\sqrt{2}; -\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}; \frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$]

271 Nelle funzioni di equazione

$$y = a^2x^3 - 3ax^2 + \frac{5}{a} \quad (a \neq 0):$$

a) studia al variare di a gli estremanti e i flessi e verifica che esiste un solo punto di flesso, che è sempre punto medio del segmento che congiunge i punti di massimo e di minimo;

b) determina il luogo λ descritto dai punti estremanti e il luogo λ' descritto dai punti di flesso al variare di a;

c) trova per quali valori di a si ha la funzione γ_1 che ha il minimo nel punto A di ordinata $\frac{1}{2}$ e la funzione γ_2 che ha il massimo in B di ordinata -1. Calcola la distanza tra A e B.

[a) se $a > 0$, $x = 0$ max, $x = \frac{2}{a}$ min; se $a < 0$, $x = \frac{2}{a}$ max, $x = 0$ min; b) λ: $x = 0 \vee x = 2y$ esclusa l'origine; λ': $y = 3x$ esclusa l'origine; c) γ_1: $a = 2$; γ_2: $a = -1$; $d = \frac{3}{2}\sqrt{5}$]

272 Trova i coefficienti a, b, c della funzione

$$y = \frac{x^3 + ax^2 - x + b}{x^2 + c}$$

in modo che il suo grafico abbia come asintoti le rette di equazione $x = 0$ e $y = x - 1$ e abbia un minimo di ascissa 1. $[a = -1; b = 1; c = 0]$

273 Data la funzione $y = (x + a)e^{b-x}$, calcola a e b sapendo che il suo grafico ha un flesso di ascissa 4 e un massimo di ordinata e. $[a = -2; b = 4]$

5. I PROBLEMI DI MASSIMO E DI MINIMO

▶ Teoria a pag. 1786

I problemi della geometria piana

IN PRATICA ▶ Videolezione 72

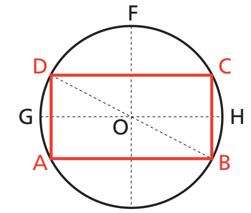
Un segmento come incognita

274 ESERCIZIO GUIDA

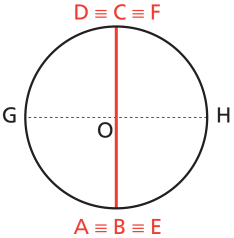
Fra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio che misura r, determiniamo quello di perimetro massimo.

Consideriamo un rettangolo qualsiasi $ABCD$ inscritto nella circonferenza. La diagonale del rettangolo coincide con il diametro (figura a). La misura y del perimetro è data da:

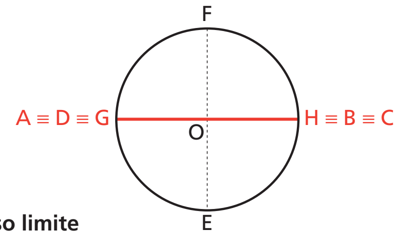
$$y = 2\overline{AB} + 2\overline{AD}.$$



a. Caso generale



b. Caso limite



c. Caso limite

Discussione preliminare
Tracciamo due diametri perpendicolari EF e GH.

La posizione del punto A può variare da E a G.

Quando $A \equiv E$ anche $B \equiv E$, mentre $D \equiv C \equiv F$ (figura b).
Il rettangolo degenera nel diametro EF e il suo perimetro misura:

$$y = 2\overline{AB} + 2\overline{AD} = 0 + 2 \cdot 2r = 4r.$$

Quando $A \equiv G$ anche $D \equiv G$, mentre $B \equiv C \equiv H$ (figura c).
Il rettangolo degenera nel diametro GH e il perimetro misura:

$$y = 2\overline{AB} + 2\overline{AD} = 2 \cdot 2r + 0 = 4r.$$

Poniamo $\overline{AB} = x$; quando $A \equiv E$, $x = 0$; quando $A \equiv G$, $x = 2r$, quindi:

$$0 \le x \le 2r.$$

Calcoliamo $\overline{AD}$ utilizzando il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo DAB:

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{DB}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{4r^2 - x^2}.$$

Ora possiamo scrivere la funzione che esprime il perimetro del rettangolo:

$$y = 2\overline{AB} + 2\overline{AD} = 2x + 2 \cdot \sqrt{4r^2 - x^2} = 2 \cdot (x + \sqrt{4r^2 - x^2}).$$

Calcoliamo la derivata prima: $y' = 2 \cdot \left(1 + \dfrac{-2x}{2 \cdot \sqrt{4r^2 - x^2}}\right) = 2\dfrac{\sqrt{4r^2 - x^2} - x}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$.

Studiamo il segno della derivata prima: $y' > 0$ se $2\dfrac{\sqrt{4r^2 - x^2} - x}{\sqrt{4r^2 - x^2}} > 0$.

Osserviamo che il denominatore è sempre positivo, quindi basta risolvere la disequazione irrazionale:

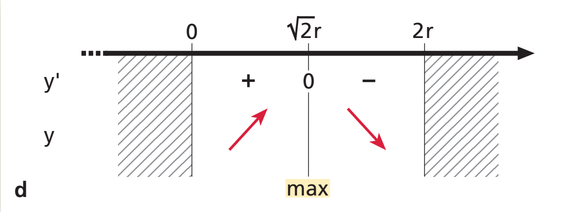
$$\sqrt{4r^2 - x^2} - x > 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{4r^2 - x^2} > x.$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri (senza porre altre condizioni, in quanto sono entrambi positivi):

$$4r^2 - x^2 > x^2 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 4r^2 < 0$$

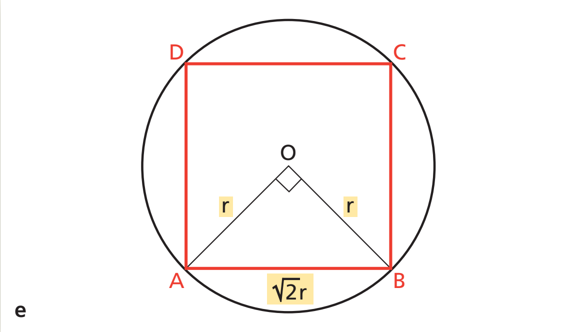
$$\rightarrow \quad -\sqrt{2}\,r < x < \sqrt{2}\,r.$$

Compiliamo il quadro dei segni soltanto nell'intervallo definito dalle limitazioni individuate nella discussione preliminare (figura d).



Il perimetro massimo si ha per $x = \sqrt{2}\,r$, valore accettabile in quanto rispetta le limitazioni poste $(0 \le x \le 2r)$.

Notiamo che per il valore trovato il rettangolo inscritto nel cerchio diventa un quadrato (figura e).



Risolvi i seguenti problemi di massimo e di minimo.

275 Fra tutti i rettangoli di data area, che misura a^2, determina quello la cui diagonale è minima.
[il rettangolo con base che misura a (è un quadrato)]

276 Fra tutti i rettangoli di dato perimetro, che misura $2p$, determina quello di area massima.
$\left[\text{il rettangolo con base che misura } \dfrac{1}{2}p \text{ (è un quadrato)}\right]$

277 Fra tutti i rettangoli di data diagonale, che misura d, determina quello di area massima.
$\left[\text{il rettangolo con base che misura } \dfrac{\sqrt{2}}{2}d \text{ (è un quadrato)}\right]$

278 Fra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, determina quello di area massima.
$\left[\text{il triangolo con altezza che misura } \dfrac{3}{2}r \text{ (è equilatero)}\right]$

279 Fra tutti i triangoli rettangoli la cui somma dei cateti misura b, determina quello di ipotenusa minima.
$\left[\text{il triangolo con i cateti che misurano } \dfrac{b}{2} \text{ (è isoscele)}\right]$

280 Il settore circolare OAB di una circonferenza di centro O ha perimetro 12. Determina il raggio della circonferenza che rende massima l'area del settore. (CAN *Canadian Open Mathematics Challenge*, 1999)

$[r = 3]$

281 Fra tutti i triangoli rettangoli nei quali la somma di un cateto e dell'ipotenusa misura $2b$, determina quello di area massima.

$\left[\text{il triangolo nel quale un cateto misura } \frac{2}{3}b\right]$

282 Fra tutti i triangoli isosceli che hanno per base una corda di una circonferenza di raggio r e il vertice nel centro della circonferenza stessa, determina quello di area massima.

$\left[\text{il triangolo la cui altezza misura } \frac{r}{2}\sqrt{2}\right]$

283 Nell'insieme dei triangoli rettangoli inscritti in una semicirconferenza di raggio che misura r, determina quello per il quale è massima la somma tra la proiezione di un cateto sull'ipotenusa e l'altezza relativa all'ipotenusa.

$\left[\text{il triangolo in cui la proiezione misura } \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)r\right]$

284 Nell'insieme dei triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, determina quello in cui la somma dell'altezza AH e della base BC è massima.

$\left[\text{il triangolo in cui } \overline{AH} = r \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right]$

285 Fra tutti i rombi circoscritti a una circonferenza di raggio r, determina quello:

a) di perimetro minimo; b) di area minima.

[a), b) il quadrato circoscritto]

286 Nell'insieme dei trapezi isosceli inscritti in una semicirconferenza di raggio che misura r, determina quello di perimetro massimo.

[il semiesagono inscritto]

287 Fra tutti i triangoli inscritti in una semicirconferenza, trova quello di area massima.

[il triangolo rettangolo isoscele]

288 Data una circonferenza di raggio r, inscrivi in essa un triangolo rettangolo isoscele ABC di ipotenusa AB. Determina un punto P, sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ non contenente C, tale che l'area del quadrilatero convesso $ACBP$ sia massima.

$[\overline{AP} = r\sqrt{2}]$

289 Fra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r, determina quello di area massima.

$[\text{il quadrato di lato } \sqrt{2}\,r]$

290 Data una circonferenza di centro O e raggio r, siano AB un suo diametro e t la retta tangente in B alla circonferenza. Determina un punto P di AB e un punto Q su t, con $\overline{PB} + \overline{QB} = 2r$, in modo che PQB abbia area massima.

$[P \equiv O]$

291 Sia $ABCD$ un quadrato di lato a e sia $MNRS$ il quadrato ottenuto da esso congiungendo i punti medi dei suoi lati, con M punto medio di AB. Determina un punto P su MN in modo che, detta $\overline{PH}$ la distanza di P dal lato CD, la somma $\overline{PH}^2 + \overline{PM}^2$ sia minima.

$\left[\overline{PM} = \frac{\sqrt{2}}{3}a\right]$

292 Tra tutti i rombi di perimetro a determina quello di area massima.

$\left[\text{il quadrato di diagonale } \frac{a}{2\sqrt{2}}\right]$

293 Sia dato un triangolo rettangolo ABC inscritto in una semicirconferenza di diametro a e sia detta AH l'altezza relativa all'ipotenusa. Sia poi M il punto medio di AH e sia Q l'intersezione tra la retta AC e la retta passante per M e parallela a BC. Determina il punto H tale che l'area del trapezio $MBCQ$ sia massima.

$\left[\overline{CH} = \frac{\sqrt{33} - 1}{8}a\right]$

294 Individua un trapezio rettangolo di area massima, con base minore e lato obliquo che misurano entrambi $\sqrt{2}$. [misura dell'altezza $= \sqrt[4]{3}$]

295 Sia $ABCD$ un trapezio isoscele di area s^2 e con gli angoli adiacenti alla base di 45°. Determina l'altezza del trapezio in modo che abbia perimetro minimo. $\left[\text{misura dell'altezza} = \frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right]$

296 Nel triangolo qualsiasi ABC manda la parallela al lato AB che interseca i lati AC e BC rispettivamente nei punti G e F. Indicate con D ed E le proiezioni ortogonali di G e F sulla retta del lato AB, determina il rettangolo $DEFG$ di area massima. [DG è metà dell'altezza del triangolo]

297 Sia $ABCD$ un rettangolo di base $\overline{AB} = 4$. La perpendicolare alla diagonale AC condotta da B interseca le rette AC e AD rispettivamente nei punti H ed E. Determina il valore di $\overline{BH}$ per cui è massima l'area del triangolo CEH. [$\overline{BH} = 2\sqrt{2}$]

298 Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, traccia la tangente t in A e, preso sulla semicirconferenza un punto P, indica con C la sua proiezione su t. Trova P in modo che la somma $\overline{PB} + \overline{PC}$ sia massima. [$\overline{AP} = r\sqrt{3}$]

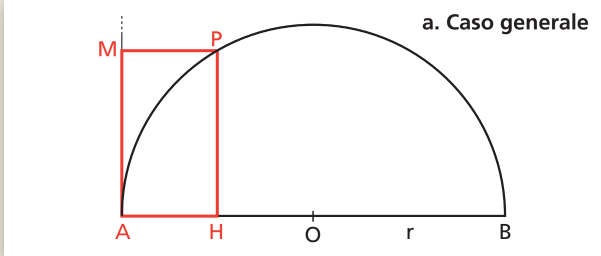
299 Considera un triangolo rettangolo isoscele e trova sull'ipotenusa un punto P in modo che la somma dei quadrati delle sue distanze dai punti medi dei cateti sia massima. [P coincidente con uno degli estremi dell'ipotenusa]

Un angolo come incognita

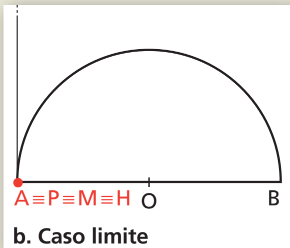
300 **ESERCIZIO GUIDA**

Su una semicirconferenza di diametro AB che misura $2r$, determiniamo un punto P tale che, dette M e H le sue proiezioni ortogonali rispettivamente sulla retta tangente in A alla semicirconferenza e sul diametro AB, sia massima l'area della superficie del rettangolo $AHPM$.

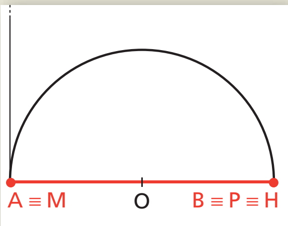
Il problema chiede di determinare quando è massima l'area del rettangolo $AHPM$, la cui misura y è: $y = \overline{AH} \cdot \overline{HP}$.



a. Caso generale



b. Caso limite



c. Caso limite

Discussione preliminare
La posizione del punto P può variare sulla semicirconferenza da A a B.
Quando $P \equiv A$, anche M e H coincidono con A (figura b) e il rettangolo degenera nel punto A. La misura dell'area è:

$$y = \overline{AH} \cdot \overline{HP} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Quando $P \equiv B$, anche H coincide con B, mentre M coincide con A (figura c) e il rettangolo degenera nel segmento AB. La misura dell'area è:

$$y = \overline{AH} \cdot \overline{HP} = 2r \cdot 0 = 0.$$

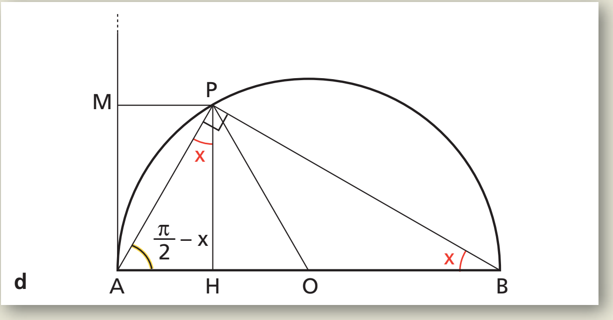
Indichiamo $A\widehat{B}P = x$ (figura *d*).

Osserviamo che il triangolo APB è rettangolo in P in quanto inscritto in una semicirconferenza.

Se $P \equiv A$, $x = 0$; se $P \equiv B$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Si ha allora:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$



Applicando il primo teorema dei triangoli rettangoli al triangolo APB, si ottiene:

$$\overline{AP} = 2r \cdot \operatorname{sen} x.$$

$A\widehat{P}H$ e $A\widehat{B}P$ sono congruenti perché complementari dello stesso angolo. Quindi $A\widehat{P}H = x$.
Applicando il primo teorema dei triangoli rettangoli al triangolo APH, si ottiene:

$$\overline{AH} = \overline{AP} \cdot \operatorname{sen} x = 2r \cdot \operatorname{sen}^2 x,$$

$$\overline{HP} = \overline{AP} \cdot \cos x = 2r \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x.$$

Scriviamo la funzione $y = \overline{AH} \cdot \overline{HP}$:

$$y = 2r \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot 2r \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 4r^2 \cdot \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x.$$

Calcoliamo la derivata prima,

$$y' = 4r^2 \cdot (3 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x - \operatorname{sen}^4 x),$$

e studiamo il suo segno ponendo:

$$4r^2 \cdot (3 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x - \operatorname{sen}^4 x) > 0 \rightarrow$$

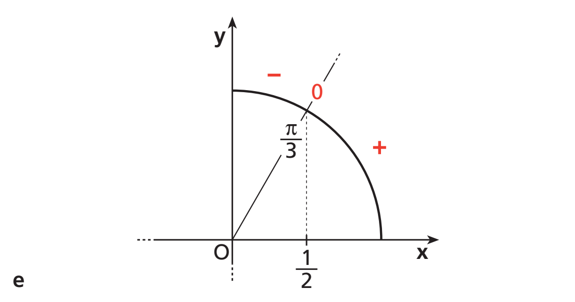
$$\rightarrow \quad 4r^2 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot (3 \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) > 0.$$

Tenendo conto che il prodotto $4 \cdot r^2 \cdot \operatorname{sen}^2 x$ è sempre positivo tranne che per $x = 0$, valore per cui si annulla, è sufficiente studiare:

$$3 \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x > 0 \quad \rightarrow \quad 3 \cos^2 x - 1 +$$

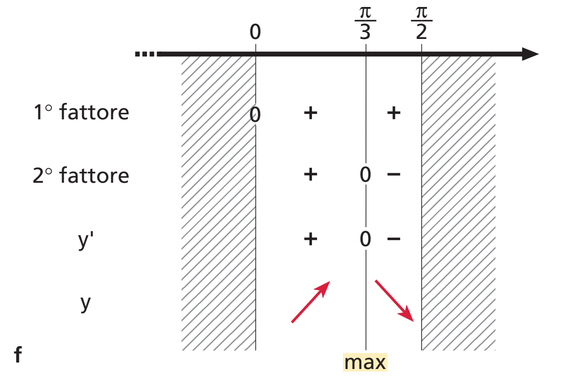
$$+ \cos^2 x > 0 \quad \rightarrow \quad 4 \cos^2 x - 1 > 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \cos x < -\frac{1}{2} \ \vee \ \cos x > \frac{1}{2}.$$



Consideriamo le limitazioni poste, la disequazione è verificata per $0 < x < \frac{\pi}{3}$ (figura *e*).

Compiliamo il quadro dei segni e lo schema relativo alla derivata prima e alla funzione (figura *f*).



Il valore massimo dell'area della superficie del rettangolo $AHPM$ si ha per $x = \frac{\pi}{3}$ e vale:

$$y = 4r^2 \cdot \operatorname{sen}^3 \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}.$$

Risolvi i seguenti problemi di massimo e di minimo.

301 Fra tutti i rettangoli inscritti in un cerchio di raggio che misura r, determina quello di perimetro massimo.

$\left[\text{indicando il rettangolo con } ABCD\text{, con } BD \text{ diametro, posto } B\widehat{D}C = x,\ x = \frac{\pi}{4}\text{; è il quadrato}\right]$

302 Nell'insieme dei triangoli isosceli inscritti in un cerchio di raggio che misura r, determina quello di area massima.

$\left[\text{indicando il triangolo isoscele con } ABC\text{, con } BC \text{ base e } AH \text{ altezza, posto } C\widehat{A}H = x,\ x = \frac{\pi}{6}\text{; è il triangolo equilatero}\right]$

303 Sulla semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, traccia la corda AC. Indica con P il suo punto medio e con K la proiezione ortogonale di P su AB. Determina l'angolo $B\widehat{A}C$ in modo che sia massimo il segmento PK.

$\left[\text{posto } B\widehat{A}C = x,\ x = \frac{\pi}{4}\right]$

304 In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, conduci una corda AD e sia C il punto medio dell'arco $\overset{\frown}{BD}$. Determina l'angolo $B\widehat{A}C$ in modo che l'area del quadrilatero $ABCD$ risulti massima.

$\left[\text{posto } B\widehat{A}C = x,\ x = \frac{\pi}{6}\right]$

305 Fra tutti i rombi circoscritti a un cerchio di raggio r, determina quello di perimetro minimo.

$\left[\text{posto } B\widehat{A}O = x,\ x = \frac{\pi}{4}\text{; è il quadrato}\right]$

306 Sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ di un settore circolare di raggio che misura r, centro O e ampiezza $\frac{\pi}{3}$, prendi un punto P in modo che, indicate rispettivamente con H e K le proiezioni di P su OA e OB, risulti massima la somma dei segmenti PH e PK.

$\left[\text{posto } A\widehat{O}P = x,\ x = \frac{\pi}{6}\right]$

307 Sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ di un settore circolare di raggio che misura r, centro O e ampiezza $\frac{2}{3}\pi$, prendi un punto P in modo che l'area del quadrilatero $AOBP$ sia massima.

$\left[\text{posto } A\widehat{O}P = x,\ x = \frac{\pi}{3}\right]$

308 Sia ABC un triangolo rettangolo con l'ipotenusa BC lunga 10 m e l'angolo $A\widehat{B}C$ di ampiezza $\frac{\pi}{3}$. Traccia una semiretta uscente da B e appartenente all'angolo $A\widehat{B}C$ in modo che, dette H e K le proiezioni ortogonali su di essa di A e di C, la somma delle misure dei segmenti AH e CK risulti massima.

$\left[\text{posto } x = H\widehat{B}C,\ x = \frac{\pi}{3}\right]$

309 Su una semicirconferenza di diametro AB lungo 1 m, individua un punto C, in modo che, se D è il punto medio dell'arco $\overset{\frown}{BC}$, risulti massima la somma $\overline{AC} + \overline{DB}$. Indica l'angolo $C\widehat{A}B$ con $2x$.

$\left[x = \text{arcsen}\frac{1}{4} \simeq 0{,}25\right]$

310 Dato un triangolo isoscele ABC che ha $\overline{AC} = 10$ e l'angolo al vertice A tale che $\cos\widehat{A} = -\frac{7}{25}$, sia D un punto della semicirconferenza di diametro BC esterna al triangolo. Determina l'angolo $B\widehat{C}D$ in modo che il perimetro del triangolo BCD sia massimo.

$\left[B\widehat{C}D = \frac{\pi}{4}\right]$

311 Sia AOB un settore circolare di ampiezza $\frac{\pi}{2}$. Determina un punto P dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ in modo che sia minima la somma $\overline{BP}^2 + \overline{PC}^2$, con C punto medio di AO.

$[P\widehat{O}A = \text{arctg } 2]$

312 Fra tutti i triangoli inscritti in una semicirconferenza trova quello di perimetro massimo.
[il triangolo rettangolo isoscele]

313 Sia data una circonferenza di raggio r e centro O. Fissati un suo diametro AB e un punto C su di essa, siano t la retta tangente alla circonferenza in C e s la retta per O e perpendicolare al diametro AB. Detto D il punto di intersezione tra le due rette, determina l'angolo $B\widehat{O}C$ in modo che la differenza tra l'area del triangolo AOD e la metà dell'area del triangolo COD sia minima.
$\left[B\widehat{O}C = \frac{\pi}{3}\right]$

314 Dato il settore circolare OBA, di centro O, con $A\widehat{O}B = \frac{\pi}{3}$, considera su $\overset{\frown}{AB}$ un punto P. Considera inoltre il punto Q intersezione fra OB e la parallela a OA condotta da P. Di Q e di P traccia le rispettive proiezioni R e S su OA. Trova P in modo che sia massimo il perimetro del rettangolo $PQRS$.
$\left[\text{posto } P\widehat{O}A = x, x = \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$

315 Due punti C e P sono presi su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, in modo tale che, detto α l'angolo $C\widehat{A}P$, sia $\cos\alpha = \frac{24}{25}$. Determina la posizione di P per cui è massima l'area di $ABPC$.
$\left[\text{posto } B\widehat{A}P = x, x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{24}{7}\right]$

316 Sia data una circonferenza di raggio r e una retta l tangente alla circonferenza in un suo punto P. Da un punto variabile R della circonferenza è mandata la perpendicolare RQ a l, con Q appartenente a l. Determina il valore massimo dell'area del triangolo PQR. (CAN *Canadian Mathematical Olympiad*, 1981)
$\left[\frac{3\sqrt{3}}{8}r^2\right]$

317 In una circonferenza di raggio r e centro O a distanza $\frac{r}{2}$ dal centro si traccia la secante s che la interseca nei punti M e N. Una seconda retta t passante per O incontra s in S ($\overline{NS} < \overline{MS}$) e la circonferenza nei punti A e B (B è il punto più vicino a S). Detto K il punto medio della corda MN, determina per quale valore dell'angolo $M\widehat{S}A = x$ risulta massimo il rapporto fra l'area del rettangolo di lati AS e KS e l'area del rettangolo di lati OS e OK.
$\left[x = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$

318 In un cerchio di raggio r considera la corda $\overline{AB} = r\sqrt{3}$. Trova un punto P sul maggiore dei due archi $\overset{\frown}{AB}$ in modo che l'area del triangolo PAB sia massima.
[il triangolo equilatero]

319 Nel piano cartesiano Oxy sia γ una circonferenza avente raggio 1 e come centro l'origine. Detto P un suo punto, siano Q l'intersezione dell'asse x con la tangente in P alla circonferenza e S l'intersezione tra la retta OP e la retta $y = 2$. Determina l'angolo $P\widehat{O}Q$ in modo che sia minimo il prodotto $\overline{PQ} \cdot \overline{PS}$.
$\left[P\widehat{O}Q = \frac{\pi}{6}\right]$

320 Sia AB una corda di una circonferenza di raggio r, a distanza $\frac{r}{2}$ dal centro O. Detto C un punto del minore dei due archi $\overset{\frown}{AB}$, determina l'angolo $C\widehat{A}B$ in modo che il perimetro di ABC sia massimo.
$\left[C\widehat{A}B = \frac{\pi}{6}\right]$

321 Data una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$, a partire da B considera nell'ordine i punti C e D della semicirconferenza tali che $D\widehat{O}C = 2 \cdot C\widehat{O}B$. Determina questi due punti in modo che la somma delle basi del trapezio $HCDK$ sia massima, essendo H e K proiezioni di C e D su AB.
$\left[C\widehat{O}B = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 35°\right]$

322 Una semicirconferenza ha diametro AB e centro O, e M è il punto medio di $\widehat{AB}$. Determina un punto P sull'arco $\widehat{MB}$ in modo tale che, detta H la sua proiezione su AB, sia minimo il valore di $\overline{MP}^2 + 2\overline{PH}^2$.

$\left[\text{posto } P\widehat{O}H = x,\ x = \frac{\pi}{6}\right]$

323 Una semicirconferenza di raggio r ha centro O e diametro AB. Considera il punto P su $\widehat{AB}$ e la sua proiezione R sulla tangente alla semicirconferenza in B. Dimostra che PB è bisettrice di $O\widehat{P}R$. Individua poi P in modo che sia massima l'area del quadrilatero $OPRB$.

$\left[\text{posto } O\widehat{P}B = x,\ x = \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$

I problemi della geometria solida

IN PRATICA
▶ Videolezione 73

324 **ESERCIZIO GUIDA**

Fra tutti i trapezi isosceli inscritti in una semicirconferenza di raggio che misura r, determiniamo quello per il quale è massimo il volume del solido generato da una rotazione completa intorno al diametro della semicirconferenza.

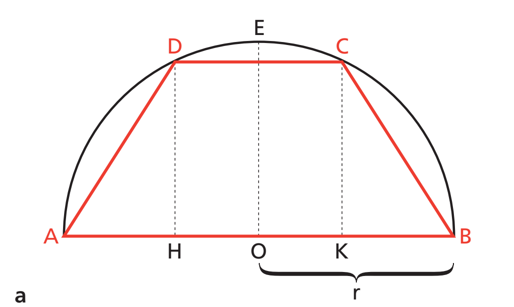
Disegniamo la figura piana (figura a) e poi costruiamo il solido di rotazione (figura b).

La rotazione completa intorno alla retta AB determina un solido costituito da un cilindro sulle cui basi sono appoggiati due coni congruenti fra loro.

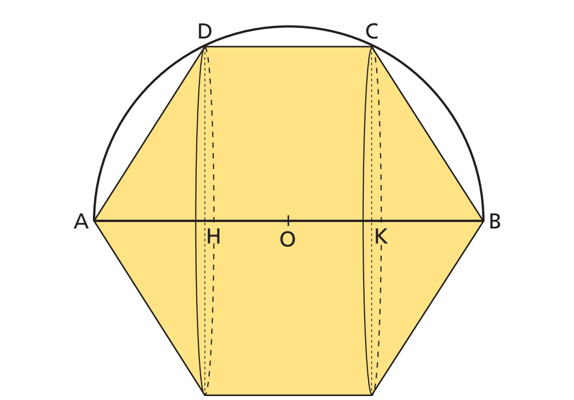
Ricordando le formule della geometria solida $V_{cil} = \pi \cdot r^2 \cdot h$ e $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$, la misura y del volume del solido è:

$$y = \pi \cdot \overline{DH}^2 \cdot \overline{HK} + \frac{2}{3}\pi \cdot \overline{DH}^2 \cdot \overline{AH},$$

$$y = \pi \cdot \overline{DH}^2 \cdot \left(\overline{HK} + \frac{2}{3}\overline{AH}\right).$$



a

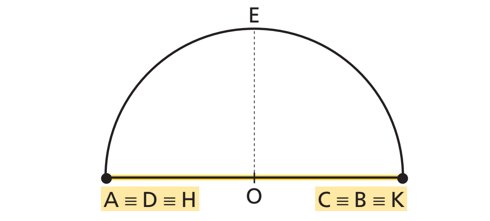


b. Caso generale

Discussione preliminare
Considerato il raggio OE perpendicolare ad AB, il punto D varia da A a E.

Quando $D \equiv A$ e $C \equiv B$ (figura c), il trapezio degenera nel diametro AB, insieme con il solido di rotazione. La misura del volume è:

$$y = 0.$$



c. Caso limite

Quando $D \equiv C \equiv E$, il trapezio degenera in un triangolo isoscele. Il solido di rotazione è un doppio cono (figura *d*), il cui volume misura:

$$y = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

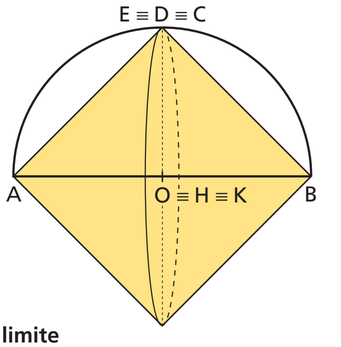
Poniamo $\overline{AH} = x$.

Quando $D \equiv A$ e $C \equiv B$, si ha $x = 0$. Quando $D \equiv E$, si ha $x = r$.

Quando $D \not\equiv A \wedge D \not\equiv E, \quad 0 < x < r$.

Tenendo conto dei casi limite, si ha:

$$0 \leq x \leq r.$$



d. Caso limite

Scriviamo il volume del solido in funzione di x. Per farlo esprimiamo in funzione di x ognuna delle misure della relazione:

$$y = \pi \cdot \overline{DH}^2 \cdot \left(\overline{HK} + \frac{2}{3}\overline{AH}\right).$$

Dalla figura ricaviamo che:

$$\overline{HK} = \overline{AB} - \overline{AH} - \overline{KB} = 2r - 2x = 2 \cdot (r - x).$$

Per esprimere $\overline{DH}^2$ applichiamo il secondo teorema di Euclide (in ogni triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa stessa) al triangolo rettangolo ABD:

$$\overline{DH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB} \quad \rightarrow \quad \overline{DH}^2 = x \cdot (2r - x).$$

Sostituendo nella funzione si ha:

$$y = \pi \cdot \overline{DH}^2 \cdot \left(\overline{HK} + \frac{2}{3}\overline{AH}\right) = \pi \cdot x \cdot (2r - x) \cdot \left[2(r - x) + \frac{2}{3}x\right] =$$
$$= \pi \cdot (2rx - x^2) \cdot \left(\frac{6r - 4x}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot (4x^3 - 14rx^2 + 12r^2x).$$

Calcoliamo la derivata prima,

$$y' = \frac{\pi}{3}(12x^2 - 28rx + 12r^2),$$

e studiamo il suo segno ponendo:

$$12x^2 - 28rx + 12r^2 > 0.$$

Risolviamo l'equazione associata: $x = \dfrac{14r \pm \sqrt{52r^2}}{12} = \dfrac{7r \pm r\sqrt{13}}{6} = \begin{cases} \dfrac{r}{6}(7 - \sqrt{13}) \\ \dfrac{r}{6}(7 + \sqrt{13}) \end{cases}$

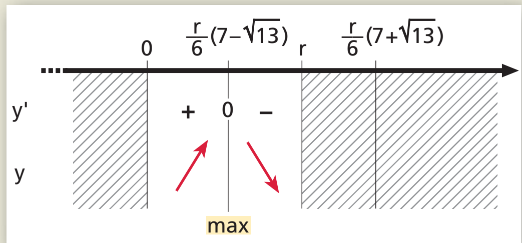
La disequazione è risolta per:

$$x < \frac{r}{6}(7 - \sqrt{13}) \quad \vee \quad x > \frac{r}{6}(7 + \sqrt{13}).$$

Compiliamo il quadro dei segni, tenendo presenti le limitazioni poste e che:

$$\frac{r}{6}(7-\sqrt{13}) \simeq 0,6r \quad \text{e} \quad \frac{r}{6}(7+\sqrt{13}) \simeq 1,8r.$$

Il volume massimo si ha per $x = \frac{r}{6}(7-\sqrt{13})$.



Risolvi i seguenti problemi di massimo e di minimo.

325 Fra tutti i cilindri inscrivibili in una sfera di raggio che misura r, determina quello di superficie laterale massima.

[il problema si presta a una risoluzione per via geometrica (se x = misura dell'altezza del cilindro, si ha il massimo per $x = r \cdot \sqrt{2}$) e per via trigonometrica (se x = misura dell'angolo formato dal diametro della sfera e dall'altezza del cilindro, si ha il massimo per $x = \frac{\pi}{4}$)]

326 Considera il rettangolo $DEFG$, inscritto nel triangolo equilatero ABC di base BC che misura l e altezza AH, con E su AB e F su AC. In una rotazione completa intorno all'altezza AH si formano un cono e un cilindro in esso inscritto. Posto $\overline{EB} = x$, determina per quale valore di x si ha il cilindro di volume massimo.

$\left[x = \frac{l}{3}\right]$

327 Fra tutti i triangoli rettangoli ABC di data ipotenusa $\overline{AB} = a$, determina quello che genera, in una rotazione completa intorno al cateto AC, un cono di volume massimo.

$\left[\text{posto } \overline{CB} = x,\ x = \frac{\sqrt{6}}{3}a\right]$

328 Fra tutti i triangoli rettangoli ABC, di data ipotenusa $\overline{AB} = a$, determina quello per il quale è massima la somma delle superfici laterali dei coni generati da una rotazione completa prima intorno a un cateto e poi intorno all'altro cateto.

[se x = misura di un cateto, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$; il triangolo è rettangolo iscoscele]

329 Dato il trapezio rettangolo $ABCD$ (con AB base maggiore e BC lato obliquo) circoscritto a un cerchio con raggio che misura r e centro O, determina l'angolo $B\widehat{O}H$ (dove H è il punto di tangenza del lato obliquo BC con la circonferenza) in modo che sia minima la superficie laterale del solido che si ottiene con una rotazione completa del trapezio rettangolo intorno alla sua base maggiore.

$\left[x = \frac{\pi}{3}\right]$

330 Fra tutti i coni inscritti in una sfera di raggio che misura r, determina quello per il quale è massimo il rapporto tra il suo volume e quello della sfera.

[posto x = misura dell'altezza del cono, $x = \frac{4}{3}r$]

331 Determina fra i triangoli inscritti in una semicirconferenza di diametro $\overline{BC} = 2r$ quelli per i quali è massima la differenza dei volumi dei due coni che si formano in una rotazione completa del triangolo intorno al diametro BC.

[posto x = misura della proiezione di un cateto del triangolo su BC, $x = \left(\frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}\right) \cdot r$]

332 Di tutti i parallelepipedi a base quadrata con diagonale di misura d, determina quello di volume massimo.

[posto x = misura dell'altezza del parallelepipedo, $x = \frac{d \cdot \sqrt{3}}{3}$]

333 Fra tutti i coni inscritti in una sfera di raggio assegnato r determina quello che ha:
a) area laterale massima;
b) area totale massima;
c) volume massimo.

[a) altezza: $\frac{4}{3}r$; b) angolo di apertura: $\alpha = \operatorname{arcsen}\frac{1+\sqrt{17}}{8}$; c) altezza: $\frac{4}{3}r$]

334 Sul diametro AB di una sfera di centro O e raggio che misura r fissa due punti C e D equidistanti da O e considera il cono avente come vertice D e come base il cerchio ottenuto sezionando la sfera con un piano passante per C e perpendicolare ad AB. Determina il cono avente la superficie laterale massima.

[posto $\overline{OC} = x$, $x = \frac{r\sqrt{3}}{3}$]

335 Una figura solida è formata da un parallelepipedo a base quadrata sormontato da una piramide retta con la base coincidente con la base del parallelepipedo e con l'altezza uguale a metà del lato di base. Stabilisci la misura l del lato della base in modo che il volume della figura solida misuri 63 m^3 e che la superficie laterale (formata dalle superfici laterali del parallelepipedo e della piramide) risulti minima.

[$l = 3\sqrt[3]{3\sqrt{2}+2} \simeq 5,52$ m]

336 Sia dato un cilindro equilatero di diametro $2r$. Detti O il centro di una sua base e AB una corda di questa base, determina l'angolo $A\widehat{B}O$ in modo che il volume del prisma di base ABO e altezza pari a quella del cilindro sia massimo.

[$A\widehat{B}O = \frac{\pi}{4}$]

337 Tra i parallelepipedi di base quadrata di lato a e volume 27, trova quello la cui sfera circoscritta abbia superficie minima.

[cubo di spigolo 3]

338 Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, sia CD una corda parallela ad AB e siano K e H le proiezioni di C e D sul diametro. Determina la posizione di DC in modo che il solido generato dalla rotazione di $CMDHK$ attorno all'asse di DC abbia volume massimo, con M punto medio dell'arco $\overset{\frown}{CD}$.

[$\overline{DH} = r\frac{\sqrt{13}-1}{6}$]

339 Sono dati un cono di vertice V, raggio r e altezza $4r$, e un piano parallelo alla base che interseca il cono. Nel cerchio intersezione è inscritto un triangolo ABC equilatero. A quale distanza da V si deve tracciare il piano affinché sia massimo il volume del prisma che ha per basi ABC e la sua proiezione sulla base del cono? Calcola il volume massimo.

[$\frac{8}{3}r$; $\frac{4}{9}\sqrt{3}\,r^3$]

340 Un cono è generato dalla rotazione completa di un triangolo isoscele ABC, di base AB, intorno alla sua altezza CH. Sapendo che $CH = 4$ cm, determina la base AB in modo che sia minimo il rapporto fra il volume del cono e quello della sfera, di centro O, inscritta nel cono.

[$\overline{OH} = x$, $x = 1$, $AB = 2\sqrt{2}$ cm]

341 Un settore circolare, di raggio 2 cm, è lo sviluppo della superficie laterale di un cono.
a) Determina l'ampiezza dell'angolo al centro del settore in modo che il cono abbia volume massimo.
b) Nel cono trovato inscrivi il cilindro di volume massimo e determina tale volume.

[a) $\frac{2}{3}\sqrt{6}\,\pi$; b) $r_{\text{cilindro}} = \frac{4}{9}\sqrt{6}$ cm, $V_{\text{cilindro}} = \frac{64}{243}\sqrt{3}\,\pi$ cm^3]

342 Una piramide regolare ha per base un quadrato di lato $2l$ e ha altezza $6l$. Calcola a quale distanza d dal vertice si deve tracciare un piano parallelo alla base affinché sia massimo il volume del cilindro che ha per basi il cerchio inscritto nel quadrato intersezione fra il piano secante e la piramide e la proiezione di tale cerchio sulla base della piramide. Determina inoltre il volume massimo. Il cilindro di volume massimo è anche quello che ha massima la superficie laterale?

$\left[d = 4l; \frac{8}{9}\pi l^3; \text{no: } d = 3l\right]$

343 Un cono di altezza h ha la base di centro O e raggio r. Considera il cono che ha per base la sezione del cono dato con un piano parallelo alla sua base e per vertice il punto O.
a) Determina il raggio di base di questo cono in modo che sia massimo il suo volume.
b) Calcola la superficie della sfera inscritta nel cono di volume massimo, quando $h = r$.

$\left[\text{a) } \frac{2}{3}r; \text{ b) } \frac{16\pi}{9}r^2(\sqrt{5} - 2)^2\right]$

344 Un solido, di volume 8 cm^3, è costituito da un cilindro e da due coni equilateri, esterni al cilindro e ognuno con una base in comune con il cilindro stesso. Trova il raggio di base in modo che sia minima la superficie del solido.

$\left[\sqrt[3]{\frac{3 + \sqrt{3}}{\pi}}\right]$

I problemi della geometria analitica

345 ESERCIZIO GUIDA

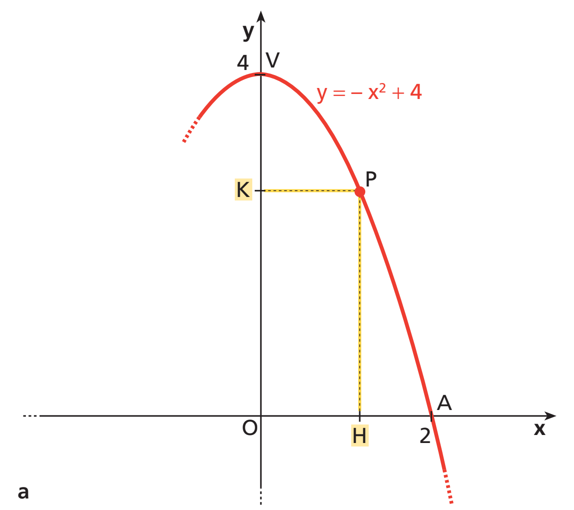
È data la parabola di equazione $y = -x^2 + 4$. Determiniamo su di essa un punto P interno al primo quadrante in modo che sia massima la somma delle distanze di P dagli assi cartesiani.

Rappresentiamo graficamente la parabola assegnata (figura *a*).

Il punto P ha generiche coordinate $(x; y)$ con $y = -x^2 + 4$, quindi:

$$P(x; -x^2 + 4).$$

Discussione preliminare
La posizione del punto P può variare da $V(0; 4)$ ad $A(2; 0)$. Poiché P deve essere *interno* al primo quadrante, sono esclusi i casi limite di $P \equiv V$ e $P \equiv A$. Pertanto: $0 < x < 2$.



a

Indichiamo con $\overline{PH}$ e $\overline{PK}$, ordinatamente, le distanze di P dall'asse x e dall'asse y.
La funzione che dobbiamo scrivere è

$$y = \overline{PH} + \overline{PK}.$$

Poiché $\overline{PH}$ è l'ordinata del punto P e $\overline{PK}$ la sua ascissa, possiamo scrivere:

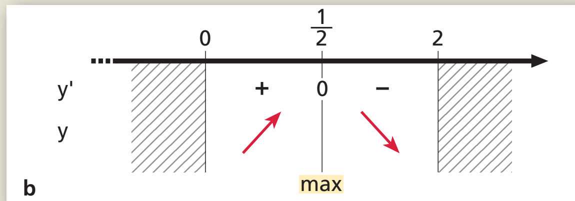
$$y = -x^2 + 4 + x = -x^2 + x + 4.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = -2x + 1.$$

Studiamo il suo segno (figura b):

$$-2x+1>0 \quad \rightarrow \quad 2x-1<0 \quad \rightarrow \quad x<\frac{1}{2}.$$



Il valore massimo della somma delle distanze di P dagli assi cartesiani si ha per $x=\frac{1}{2}$. In corrispondenza di questo valore otteniamo $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+4=\frac{15}{4}$, quindi il punto cercato è $P\left(\frac{1}{2};\frac{15}{4}\right)$.

Risolvi i seguenti problemi di massimo e di minimo.

346 Individua il punto della retta $2x+y-5=0$ per il quale è minima la distanza dall'origine degli assi cartesiani. $[P(2;1)]$

347 Determina il punto della retta $y=4x-1$ per il quale è minima la distanza dal punto $A(0;3)$. $\left[P\left(\frac{16}{17};\frac{47}{17}\right)\right]$

348 Data la parabola $y=-x^2+1$, determina su di essa un punto P di ordinata positiva in modo che sia minima la somma dei quadrati delle distanze di P dai punti di intersezione della parabola con l'asse x. $\left[x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

349 Data la parabola $y=-x^2+4x$, inscrivi un rettangolo di area massima nella parte di piano delimitata dalla parabola e dall'asse x. [indicando con $y=k$ una parallela all'asse x, si ha il massimo per $k=\frac{8}{3}$]

350 Data la parabola $y=-x^2+5$, indica con A e B i punti in cui interseca la retta di equazione $y=k$. Determina k in modo che sia massima l'area della superficie del triangolo OAB, in cui O è l'origine degli assi. $\left[k=\frac{10}{3}\right]$

351 È data la circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$. Determina su di essa un punto P in modo che sia massima la somma dei quadrati delle sue distanze dai punti $A(2;0)$ e $B(0;2)$. [se $P(x;\pm\sqrt{1-x^2})$ è il punto della circonferenza, si ha il massimo per $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$]

352 Data la parabola di equazione $y=4-x^2$, individua sull'arco $\widehat{VA}$ (dove V è il vertice della parabola e A l'intersezione della parabola con il semiasse positivo delle x) il punto P per il quale è minima la distanza dal punto $B(0;3)$. $\left[P\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{7}{2}\right)\right]$

353 Fra tutti i rettangoli inscritti nella circonferenza $x^2+y^2=4$, determina quello di area massima. [il quadrato di lato $2\sqrt{2}$]

354 Individua il punto della parabola $y=-x^2$ per il quale è minima la distanza dalla retta $y=x+3$. $\left[P\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)\right]$

355 Data la parabola $y=-x^2+8x-7$, inscrivi nella parte di piano limitata dalla parabola e dall'asse x un trapezio isoscele con la base maggiore sull'asse x e di area massima. [se $y=k$ è la retta della base minore, si ha il minimo per $k=8$]

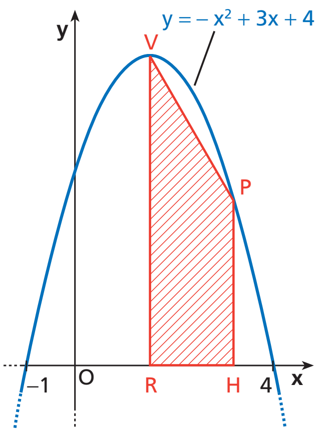
356 È data la parabola di equazione $y=-2x^2+x+1$, che interseca l'asse y nel punto C e l'asse x nei punti A e B (A è il punto di ascissa negativa). Considera un punto P variabile sull'arco $\widehat{CB}$ della parabola e trova rispettivamente le ascisse di P per le quali: a) è massima l'area del quadrilatero $OCPB$; b) è massima l'area del triangolo OPH, dove H è la proiezione di P sull'asse delle ascisse. $\left[\text{a) } x=\frac{1}{2};\text{ b) } x=\frac{1+\sqrt{7}}{6}\right]$

357 Determina le coordinate di un punto P, appartenente alla parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$, tale che la sua distanza dalla retta $y = -x + 8$ sia minima. Calcola la misura di tale distanza. $\left[P\left(\frac{5}{2}; \frac{15}{4}\right); d = \frac{7\sqrt{2}}{8}\right]$

358 Date la parabola di equazione $y = x^2$ e l'iperbole equilatera di equazione $y = -\frac{4}{x}$, considera sulle due curve due punti P e Q con la stessa ascissa $a > 0$. Trova per quale valore di a la distanza $\overline{PQ}$ è minima. $[a = \sqrt[3]{2}]$

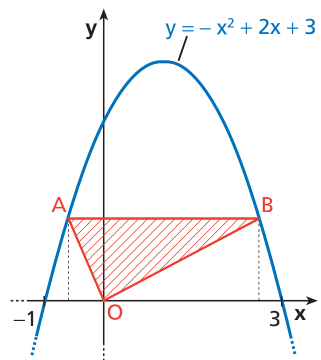
359 Sono date la parabola di equazione $y = -x^2 - 4x$ e la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$, conduci una retta parallela all'asse x in modo che la somma dei quadrati delle corde intercettate sulla retta dalle due curve sia massima. $\left[y = -\frac{1}{2}\right]$

360 Data la parabola di equazione $y = -x^2 + 3x + 4$, considera il trapezio $RHPV$ della figura sotto e trova la posizione del punto P della parabola in modo che l'area del trapezio sia massima.



$\left[x_P = \frac{9 + 5\sqrt{6}}{6}\right]$

361 Data la parabola di equazione $y = -x^2 + 2x + 3$, considera il triangolo OBA della figura sotto e trova la posizione di A e B in modo che abbia area massima.



$\left[y_A = y_B = \frac{8}{3}\right]$

362 Trova la minima distanza tra il punto $\left(0; \frac{5}{2}\right)$ e il grafico di $y = \frac{x^4}{8}$.

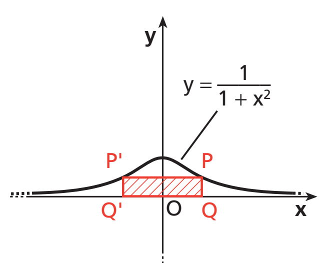
(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*, 2003)

$\left[\frac{\sqrt{17}}{2}\right]$

363 Nella figura è rappresentato il grafico della funzione $y = \frac{1}{1 + x^2}$.

La retta $x = a$ parallela all'asse y e la sua simmetrica $x = -a$ determinano un rettangolo $PP'Q'Q$. Trova per quale valore di a l'area di $PP'Q'Q$ è massima.

$[a = 1]$



364 Determina il parametro k in modo che sia massima la distanza fra i vertici delle due parabole:

$$y = -2x^2 + kx + 4 \quad \text{e} \quad y = 2x^2 + (4 - k)x + 2k.$$ $[k = 6]$

365 Data l'iperbole di equazione $xy = k$, $0 < k < 1$, sia A un suo punto di ascissa k e siano B e C i suoi vertici. Determina il valore di k che rende massima l'area del triangolo BAC. $\left[k = \frac{1}{3}\right]$

366 Tra le parabole di fuoco $F(0; 0)$ e asse parallelo all'asse delle ordinate, determina la parabola per cui sia minima la distanza tra il fuoco e il suo punto di ascissa 1. $\left[y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2};\ y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right]$

367 Tra le parabole di equazione $y = -x^2 + 2x + c$, determina la parabola avente il vertice sulla retta $y = 2x + 2$. Siano poi A il suo punto di ascissa nulla e B la sua intersezione con il semiasse positivo delle ascisse. Determina un punto P dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ tale che la differenza tra le distanze di P dagli assi sia massima. $\left[P\left(\frac{1}{2}; \frac{15}{4}\right)\right]$

368 Scrivi l'equazione della circonferenza che è tangente all'asse y in $A(0; 4)$ e che ha il centro sulla retta $y = 3x - 2$. Considerando poi una retta passante per l'origine che intersechi la circonferenza nei punti P e Q, determina il suo coefficiente angolare in modo che l'area del triangolo APQ sia massima. $\left[x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0;\ \frac{3 + \sqrt{21}}{6}\right]$

369 Inscrivi un rettangolo nella parte di piano compresa tra la parabola $y = -x^2 + 2$ e l'asse x in modo che sia massimo il volume del cilindro che si ottiene con una rotazione completa intorno all'asse y. [se $y = k$ è la retta parallela all'asse x, si ha il massimo per $k = 1$]

370 Nella parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = -x^2 + 12x - 20$ e dall'asse x inscrivi il rettangolo di perimetro massimo. $[A(5; 0), B(7; 0), C(7; 15), D(5; 15)]$

371 Trova un punto P sulla retta di equazione $y = -2$ in modo che la somma dei quadrati delle distanze dalle rette $x = 5$ e $2x - y - 1 = 0$ sia minima. $\left[P\left(\frac{23}{9}; 2\right)\right]$

372 Sul ramo dell'iperbole di equazione $y = \frac{2x + 3}{8x - 4}$ posto nel semipiano $x > \frac{1}{2}$ determina il punto per cui è minima la somma dell'ascissa con l'ordinata. $\left[\left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}; \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}\right)\right]$

373 What is the minimum vertical distance between the graphs of $2 + \sin(x)$ and $\cos(x)$?

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*, 2002)

$[2 - \sqrt{2}]$

374 Sia data l'iperbole di equazione

$$y = \frac{(c^2 + 3)x + b}{(c^2 + 3)x + c}$$

che interseca l'asse y nel punto $A(0; 4)$. Considera il punto B dell'iperbole simmetrico di A rispetto al centro dell'iperbole. Determina il parametro $c \in \mathbb{R}^+$ in modo che l'area del triangolo AOB sia massima. $[c = \sqrt{3}]$

375 Sono date l'ellisse di equazione $x^2 + 9y^2 = 9$ e la retta $y = t$ che interseca l'ellisse nei punti D ed E. Determina t in modo che sia minima l'area del triangolo isoscele formato dalle tangenti dell'ellisse in D e in E e dall'asse x. $\left[t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

376 Scrivi l'equazione dell'ellisse che ha vertice $V(-4; 0)$ e asse minore di lunghezza 2. Trova poi il coefficiente angolare della retta, appartenente al fascio di centro V, che intersechi l'ellisse nel punto A, del semipiano dei punti di ordinata $y \geq 0$, e formi il triangolo VAH di area massima, essendo H la proiezione di A sull'asse x.

$\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\right]$

377 Dopo aver determinato le coordinate dei punti base A e B del fascio di parabole di equazione

$$y(a+1) + 2ax^2 - x(11a+1) = 0,$$

scrivi l'equazione della parabola p del fascio che ha per asse la retta $x = 2$. Nel segmento parabolico delimitato da p e dalla retta AB inscrivi poi il triangolo ABQ di area massima.

$\left[A(0; 0),\ B(5; 5);\ p: y = x^2 - 4x;\ Q\left(\frac{5}{2}; -\frac{15}{4}\right)\right]$

378 Dopo aver scritto l'equazione della parabola che ha per asse di simmetria la retta $x = 1$ ed è tangente nell'origine alla curva di equazione $y = \frac{2x}{1-x}$, trova le coordinate del punto A che le due curve hanno in comune oltre all'origine O. Determina poi un punto P sull'arco di parabola $\overset{\frown}{OA}$ tale che l'area del triangolo OPA sia massima.

$\left[y = -x^2 + 2x;\ A(3; -3);\ x_P = \frac{3}{2}\right]$

379 Scrivi l'equazione della parabola, con l'asse parallelo all'asse y, che passa per i punti $(2; 0)$ e $(0; 2)$ e ha il vertice di ascissa maggiore di 2 e appartenente alla retta $x + 12y = 0$. Considera poi il punto Q di ordinata 8 e appartenente all'asse della parabola e trova i punti della parabola che hanno distanza minima da Q. Scrivi infine l'equazione della circonferenza che ha per centro Q e per raggio tale distanza.

$\left[y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 2;\ P_1(8; 6);\ P_2(-2; 6);\ x^2 + y^2 - 6x - 16y + 44 = 0\right]$

380 Data l'equazione $y = ax^4 + bx^2 + c$:

a) determina il valore dei coefficienti in modo che la curva α da essa rappresentata abbia un flesso nel punto $F(1; 1)$ con tangente parallela alla retta di equazione $y + 8x = 0$;

b) scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, di vertice $(0; 2)$ e tangente alla curva α;

c) nel segmento parabolico individuato dalla parabola e dall'asse x inscrivi il rettangolo di area massima.

[a) $a = 1, b = -6, c = 6$; b) $y = -2x^2 + 2$; c) rettangolo con un lato su $y = \frac{4}{3}$]

381 Sia $y = x + a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$.

a) Trova a, b, c in modo che il grafico abbia un punto di estremo relativo A in $x = 4$ e un flesso $B(-2; -4)$.

b) Il punto A è di massimo o di minimo? Quale tipo di flesso c'è in B? Motiva le risposte.

c) Considera il triangolo isoscele ABB' di base BB' parallela all'asse x e inscrivi in esso il rettangolo di area massima.

[a) $a = 2, b = 12, c = 8$; b) A min; B fl. orizz.; c) rettangolo con un lato su $y = \frac{11}{4}$]

382 Siano dati un sistema di riferimento cartesiano Oxy e l'iperbole di equazione $y = \frac{x}{x-2}$. Chiamato P il punto di intersezione, diverso da O, fra l'iperbole e una retta passante per l'origine, determina P in modo che sia minima la sua distanza dal punto C, centro di simmetria dell'iperbole.

$[P_1(2 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}),\ P_2(2 - \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})]$

383 Per quali valori di k l'equazione $(k+1)x^2 + 2ky^2 = k - 3$ rappresenta un'ellisse? Dopo aver trovato l'equazione dell'ellisse che ha un fuoco nel punto $\left(\sqrt{\frac{15}{2}}; 0\right)$, inscrivi in essa il rettangolo di perimetro massimo.

$\left[k < -1 \vee k > 3;\ \frac{x^2}{9} + \frac{2}{3}y^2 = 1;\ \text{altezza del rettangolo} = 2\sqrt{\frac{3}{14}}\right]$

384 Determina i punti A e B di intersezione della retta di equazione $2x + 2y + 5 = 0$ con la curva γ di equazione $xy = 1$. Considera un punto P di γ appartenente al primo quadrante e trova per quale posizione di P l'area del triangolo ABP è minima.
$\left[A\left(-2; -\frac{1}{2}\right), B\left(-\frac{1}{2}; -2\right); P(1; 1)\right]$

385 Data l'ellisse di equazione $9x^2 + 16y^2 = 144$, traccia una corda PQ parallela all'asse delle ascisse in modo che risulti massima l'area del trapezio avente come basi la corda stessa e l'asse maggiore. Generalizza il problema per un'ellisse qualsiasi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
$\left[y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}; y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}b\right]$

386 Considera le parabole di equazioni $y = 9x^2 - 8x$ e $y = -9x^2 + 10x$ e indica con P il loro punto comune diverso dall'origine. Nella regione finita delimitata dalle due parabole traccia la retta $x = a$ che interseca le parabole in Q e R. Trova per quale valore di a l'area del triangolo PQR è massima.
$\left[a = \frac{1}{3}\right]$

387 Scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, tangente all'asse x in $B(4; 0)$ e passante per $A(0; 16)$. Determina sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ di parabola un punto P in modo che la tangente alla parabola formi con gli assi cartesiani un triangolo di area massima.
$\left[y = x^2 - 8x + 16; \left(\frac{4}{3}; \frac{64}{9}\right)\right]$

388 a) Determina la circonferenza γ che ha centro nell'origine O degli assi e raggio 5 e la parabola di equazione $y = ax^2 + c$ che passa per $A\left(2; \frac{7}{3}\right)$ e tale che la tangente a essa in A passi per $\left(0; -\frac{1}{3}\right)$.

b) Sia B il punto di ascissa minore in cui la parabola interseca γ e siano C e D i punti di intersezione della retta di equazione $y = x - 5$ con γ.
Determina un punto P sulla corda CD in modo che la somma $\overline{PB}^2 + \overline{PA}^2$ sia minima.
$\left[\text{a) } x^2 + y^2 = 25; y = \frac{x^2}{3} + 1; \text{b) } B(-3; 4), C(0; -5), D(5; 0), P\left(\frac{23}{6}; -\frac{7}{6}\right)\right]$

389 Considera la retta r di equazione $y = -x + 3$ e il punto $A(0; 1)$. Per un punto B di r interno al primo quadrante traccia la perpendicolare alla retta AB che interseca l'asse x nel punto P.
Determina il punto B per cui è minima l'area del triangolo AOP.
$[B(\sqrt{3}; 3 - \sqrt{3})]$

390 Sia A vertice di ascissa minore dell'ellisse γ di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.
Determina l'equazione di una retta r parallela all'asse y in modo che, detti M e N i punti di intersezione tra r e γ, sia massimo il volume della piramide di base il triangolo AMN e altezza il segmento AP perpendicolare al piano della figura, sapendo che $\overline{AP}$ è pari alla distanza di r da A.
$\left[r\text{: } x = \frac{10}{3}\right]$

391 Determina le parabole γ_1 e γ_2 della famiglia di equazione $x = ay^2 - 1$, $a > 0$, sapendo che staccano sull'asse y un segmento di lunghezza 2 e 4, rispettivamente. Per il punto P comune a γ_1 e γ_2, traccia una retta r che interseca γ_1 in A e la perpendicolare a r che interseca γ_2 in B. Trova l'equazione della retta r che rende minima l'area del triangolo ABP.
$\left[\gamma_1\text{: } x = y^2 - 1, \gamma_2\text{: } x = \frac{y^2}{4} - 1; y = x + 1, y = -x + 1\right]$

392 Determina il punto P in cui la parabola di equazione $y = x^2 + 1$ ha distanza minima dal punto $A(5; 0)$.
Trova le equazioni della retta r passante per A e P e della tangente t in P alla parabola e spiega il significato geometrico della reciproca posizione.
$[P(1; 2); r\text{: } x + 2y - 5 = 0, t\text{: } y = 2x; r \perp t]$

393 Date le parabole di equazioni $y^2 = 4x$ e $x = -\frac{1}{16}y^2 + 4$, nella zona finita di piano delimitata dalle due parabole inscrivi un rettangolo con i lati paralleli agli assi. Calcola l'altezza del rettangolo in modo che abbia volume massimo il cilindro ottenuto dalla rotazione completa del rettangolo intorno all'asse x. $\left[8\sqrt{\frac{2}{5}}\right]$

Problemi di argomento vario

394 **ESERCIZIO GUIDA**

Si vuole costruire un aquilone a forma di settore circolare con un contorno lungo 3 m, in modo che la superficie sia massima. Determiniamo il raggio corrispondente e, inoltre, l'angolo e la superficie del settore.

Per risolvere il problema dobbiamo scrivere la superficie del settore in funzione della misura variabile del raggio. Dobbiamo, poi, cercare il massimo di tale funzione.

Discussione preliminare
Il settore circolare esiste quando l'angolo α varia da 0 a 2π. Troviamo la corrispondente variazione della misura del raggio r.
Se $\alpha = 0$, il settore circolare degenera in un segmento (figura *b*) e il suo perimetro è il doppio del raggio, quindi:

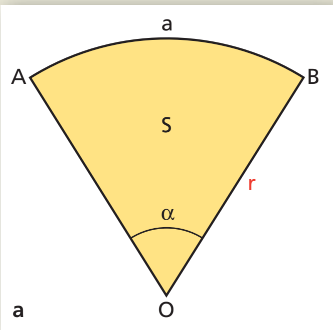
$$3 = 2r \quad \rightarrow \quad r = \frac{3}{2} = 1,5.$$

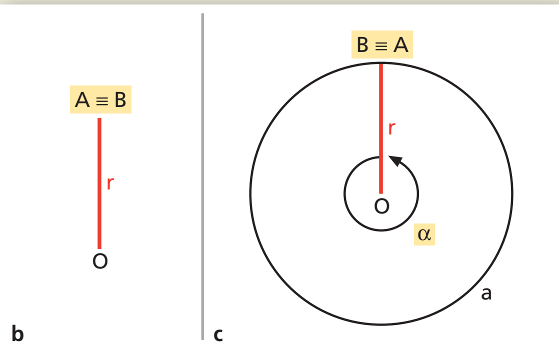
Se $\alpha = 2\pi$, il settore circolare è l'intero cerchio (figura *c*) e il suo perimetro è la somma del doppio del raggio con la circonferenza:

$$3 = 2r + 2\pi r \rightarrow r = \frac{3}{2(1+\pi)} \simeq 0,36.$$

Pertanto per la variazione di r poniamo le limitazioni:

$$\frac{3}{2(1+\pi)} \leq r \leq \frac{3}{2}.$$





Scriviamo la formula che dà l'area del settore circolare:

$$S = \frac{1}{2}ra,$$

dove a è la misura dell'arco e r quella del raggio.

Scriviamo la relazione del contorno (perimetro) del settore circolare,

$$2p = 2r + a,$$

nella quale sostituiamo il dato del problema:

$$3 = 2r + a.$$

Ricaviamo la misura dell'arco a,

$$a = 3 - 2r,$$

e la sostituiamo nella formula dell'area. Otteniamo la funzione che lega la misura del raggio a quella della superficie del settore:

$$S(r) = \frac{1}{2}(3 - 2r)r \quad \rightarrow \quad S(r) = \frac{3}{2}r - r^2.$$

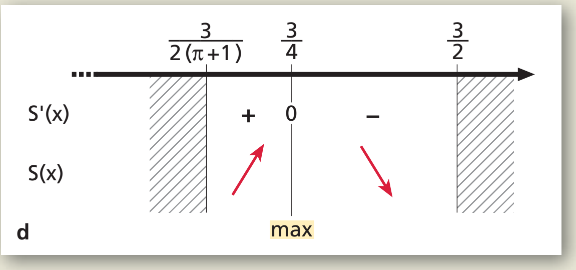
Calcoliamo la derivata della superficie rispetto a r:

$$S'(r) = \frac{3}{2} - 2r.$$

Studiamo il suo segno ponendo:

$$\frac{3}{2} - 2r > 0 \quad \rightarrow \quad r < \frac{3}{4}.$$

Compiliamo il quadro dei segni (figura *d*).



Per $r = \frac{3}{4}$ la funzione S ammette un massimo.

Calcoliamo la corrispondente misura della superficie:

$$S\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

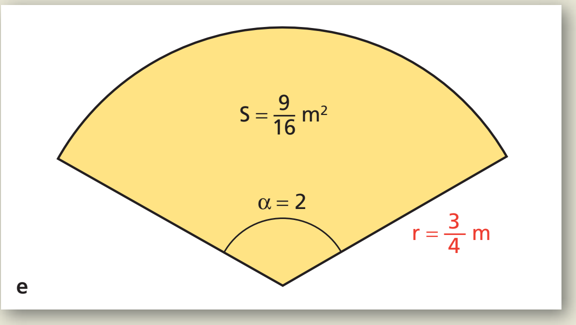
Calcoliamo inoltre l'angolo corrispondente alla massima superficie.

Per la definizione di angolo in radianti, abbiamo la formula $\alpha = \frac{a}{r}$, dove sostituiamo l'espressione dell'arco e otteniamo:

$$\alpha = \frac{3 - 2r}{r}.$$

Per $r = \frac{3}{4}$, $\alpha = \dfrac{3 - 2 \cdot \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = 2.$

Disegniamo la figura dell'aquilone di perimetro 3 m e di superficie massima (figura *e*).



Il raggio è lungo $\frac{3}{4}$ m, la superficie è $\frac{9}{16}$ m^2 e l'angolo è 2 radianti.

Risolvi i seguenti problemi di massimo e di minimo.

395 Si vuole costruire un aquilone a forma di settore circolare con una superficie che misura 8 m^2. Determina l'angolo α del settore in modo che il contorno dell'aquilone sia minimo. $[\alpha = 2]$

396 Con una speciale vernice si vuole tracciare sull'asfalto di una pista di un aeroporto una freccia formata da un rettangolo e da un triangolo equilatero aventi un lato in comune. Supponendo di avere a disposizione un quantitativo per dipingere una superficie di 33 m^2, determina le misure dei lati del rettangolo e del triangolo in modo che la figura abbia contorno minimo. $\left[h = \sqrt{54 - 24\sqrt{3}} \simeq 3{,}53 \text{ m}; l = 2\sqrt{\sqrt{3} + 6} \simeq 5{,}56 \text{ m}\right]$

397 Su un listello di legno, lungo 10 m, si appendono due cartelloni: uno ha la forma di un quadrato e viene appeso per un lato, l'altro ha la forma di un triangolo rettangolo e viene appeso per il cateto maggiore (il secondo cateto misura la metà di quello appeso). Sapendo che lato e cateto coprono esattamente il listello, trova le loro misure in modo che la somma delle superfici dei due cartelloni risulti minima. $[l = 2, c = 8]$

398 Una piscina ha la forma di un rettangolo con l'aggiunta di una semicirconferenza, avente il diametro coincidente con un suo lato. Determina le lunghezze dei lati del rettangolo in modo che la piscina abbia il perimetro esterno di 100 m e la superficie massima. $\left[b = \frac{200}{\pi + 4} \simeq 28 \text{ m}; h = \frac{100}{\pi + 4} \simeq 14 \text{ m}\right]$

399 Fra tutti i recipienti a forma cilindrica di uguale superficie S, determina quello di volume massimo. $\left[\text{posto } x = \text{raggio di base, } x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right]$

400 Per una scenografia teatrale si deve preparare una colonna costituita da un cilindro sormontato da una semisfera con la base coincidente con quella del cilindro. Quali devono essere le dimensioni della colonna se si sa che la sua superficie è di 147π dm^2 e che il volume deve essere il più grande possibile? $\left[\text{raggio di base} = \text{altezza} = \sqrt{\frac{147}{5}} \text{ dm}\right]$

401 Individua due numeri la cui somma è 20 e per i quali la somma dei quadrati è minima. [10, 10]

402 Verifica che, dati due numeri positivi che hanno per prodotto k, la somma dei loro cubi è minima quando i due numeri sono uguali.

403 Un falegname deve costruire una cassapanca a forma di parallelepipedo con il coperchio utilizzando la minima quantità di legno. Se uno spigolo deve essere di 15 dm e il volume di 630 dm^3, quanto misureranno gli altri due spigoli? [6,48 dm; 6,48 dm]

404 Su un cartoncino rettangolare si deve applicare una foto di 300 cm^2 con il margine superiore e inferiore di 3 cm e con i margini laterali di 4 cm. Che dimensioni deve avere il cartone di area minima che serve allo scopo? [28 cm; 21 cm]

405 **TEST** La Container Company sta disegnando una scatola rettangolare aperta superiormente, con base quadrata, che abbia una capacità di 108 cm^3. Calcola l'area minima che può avere la superficie della scatola.

A 120 cm^2.
B 108 cm^2.
C 102 cm^2.
D 96 cm^2.
E 92 cm^2.

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2004)

406 Si deve costruire un serbatoio di piombo senza coperchio a forma di parallelepipedo rettangolo a base quadrata della capacità di 64 m^3. Determina il lato di base x affinché sia minima la quantità di piombo utilizzata (trascurando lo spessore delle pareti). $\left[x = 4 \cdot \sqrt[3]{2}\right]$

407 Determina l'altezza massima che raggiunge un corpo lanciato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale $v_0 = 50$ m/s $\left(\text{legge oraria del moto: } s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right)$. $\left[h = \frac{1250}{g} \text{ m}\right]$

408 The concentration C of an antibiotic in the bloodstream after a time of t hours is given by:

$$C = \frac{5t}{1 + \left(\frac{t}{k}\right)^2} \text{ units,}$$

where $k > 0$. If the maximum concentration is reached at $t = 6$ hours, find the value of k.

(IR *Leaving Certificate Examination,* Higher Level, 1995)

$[k = 6 \text{ h}]$

409 Sammy the Owl wants to design a window that is a rectangle with a semicircle on top. If the total perimeter is constrained to be 24 feet, what dimensions should Sammy pick so that the window admits the greatest amount of light? Give the radius of the semicircular region and the height of the rectangular portion.

(USA *Rice University Mathematics Tournament,* 2005)

$\left[\frac{24}{4+\pi}; \frac{24}{4+\pi}\right]$

410 Silas non fa altro che dormire, bere caffè e dimostrare teoremi, e non fa mai più di una di queste cose alla volta. Impiega 5 minuti per bere una tazza di caffè. Quando fa matematica, Silas dimostra $s + \ln c$ teoremi ogni ora, dove c è il numero di tazze di caffè che beve quotidianamente e s è il numero di ore in cui dorme ogni giorno. Quante tazze di caffè deve bere Silas in un giorno per dimostrare il massimo numero di teoremi?

(USA *Rice University Mathematics Tournament,* 2007)

[12]

411 Un silo ha la forma di un cilindro con l'aggiunta di una semisfera con la base coincidente con quella del cilindro. Calcola la lunghezza del raggio di base, supponendo che il volume del silo sia 18 m^3 e la sua superficie laterale (formata dalla superficie della semisfera e dalla superficie laterale del cilindro) sia minima.

$\left[c = \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}} \simeq 2,05 \text{ m}\right]$

412 Un corpo compie uno spostamento x sottoposto a una forza costante di intensità $F(x) = e^{-x^2}$, che forma un angolo di 60° con lo spostamento; determina x in modo che sia massimo il lavoro compiuto dalla forza.

$\left[x = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,7\right]$

413 Determina l'angolo α formato con la linea di terra per cui la gittata di un proiettile, lanciato da terra verso l'alto, è massima.

$\left[\alpha = \frac{\pi}{4}\right]$

414 In una ditta i costi per la produzione sono suddivisi in costi fissi (1000 euro) e costi variabili secondo la quantità q di merce prodotta. I costi variabili seguono la legge $C(q) = 12q^2 - 960q$. Il ricavo rispetto alla merce venduta v è dato da $R(v) = 10v^2$.
Supponendo che la quantità di merce prodotta e la quantità di merce venduta siano uguali, trova il quantitativo di merce per il massimo guadagno. [240]

415 Una finestra ha la forma di un rettangolo, senza il lato superiore perché esso è sormontato da due archi uguali, a forma di semicirconferenze affiancate. I due diametri sono sovrapposti esattamente al lato del rettangolo.
Determina le sue dimensioni in modo che la luce della finestra sia di 10 m^2 e il contorno abbia la misura minima possibile.

$\left[b = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{3\pi+8}} \simeq 3,03 \text{ m};\ h = \frac{\sqrt{10}\,(\pi+4)}{2\sqrt{3\pi+8}} \simeq 2,72 \text{ m}\right]$

416 A piece of wire, of length 20 cm, is to be cut into two parts. One of the parts, of length x cm, is to be formed into a circle and the other part into a square. Show that the sum, A cm^2, of the areas of the circle and the square has a stationary value when $x = \frac{20\pi}{4+\pi}$.

(UK *Northern Examination Assessment Board, NEAB,* 1998)

REALTÀ E MODELLI

1 **La siepe**

Sul retro di una villetta deve essere realizzato un piccolo giardino rettangolare di 50 m^2, riparato da una siepe posta lungo il bordo.

- ▶ Dato che un lato del giardino è occupato dalla parete della casa, quali dimensioni deve avere il giardino per minimizzare la lunghezza e, di conseguenza, il costo della siepe?

2 **I pacchetti regalo**

Un'azienda produttrice di confezioni regalo deve produrre scatole a forma cilindrica in modo tale che, a parità di volume, sia minima la superficie totale della scatola e quindi la quantità di carta regalo da utilizzare per il suo confezionamento.

- ▶ Quali caratteristiche devono avere le dimensioni del cilindro?
- ▶ Nel caso in cui la carta da regalo costasse 0,90 euro/m^2, e il raggio del cilindro fosse di 6 cm, quanto costerebbe alla ditta confezionare 1000 scatole di superficie minima? (Considera che, a causa dei lembi di carta da sovrapporre, serve circa il 20% di carta in più rispetto all'effettiva superficie da coprire.)

3 **Il flacone di profumo**

Un'azienda produce una bottiglietta per profumo con la forma di una sfera sormontata da un cilindro. La bottiglietta deve contenere 70 ml di profumo e il foro di passaggio tra la sfera e il cilindro deve avere il raggio di 0,7 cm.

- ▶ Trova il raggio della sfera che rende minimo il peso della bottiglietta (lo spessore del cristallo è di circa 1 mm e il suo peso specifico è di 2,9 kg/dm^3; approssima la calotta sferica – che viene tolta a causa dell'innesto del cilindro – con la base del cilindro stesso; trascura il taglio della sfera nella parte inferiore della boccetta, necessario per creare la superficie di appoggio).
- ▶ Determina l'altezza totale e il peso della bottiglietta.

4 **L'uovo di cioccolato**

All'interno di un «uovo» di cioccolato di forma sferica si inserisce una scatola, di forma cilindrica, che contiene la sorpresa.

- ▶ Trova il volume massimo che può avere la scatola supponendo che l'uovo contenitore abbia raggio R.
- ▶ Calcola il rapporto tra il diametro di base e l'altezza del cilindro trovati al punto precedente.

5 **Il maratoneta**

Un atleta sta partecipando a una maratona; in un tratto il percorso segue una traiettoria di equazione $y^2 = 2x$ (con $x \geq 0$), rispetto a un opportuno sistema di assi. Nello stesso sistema, il suo allenatore si trova nel punto $A(1; 5)$ e gli deve lanciare una spugna bagnata per farlo idratare.

- ▶ In che punto del percorso il maratoneta si troverà più vicino al suo allenatore per ricevere la spugna?

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 La funzione $y = x^5 e^{-x}$:

- A ha un punto di minimo.
- B è sempre crescente.
- C è sempre decrescente.
- D ha due punti stazionari.
- E ha un punto di minimo e un punto di massimo.

2 Se $f(x)$ ha un massimo in $c = 1$, allora:

- A $f(x)$ può essere discontinua in c.
- B $f(x)$ deve essere derivabile.
- C il grafico di $f(x)$ ha nel punto c la tangente orizzontale.
- D $f'(1) = 0$.
- E $f(x)$ è continua ma non derivabile in c.

3 La funzione $f(x) = -x^5 + 2x^3$:

- A ha solo un flesso orizzontale.
- B ha un flesso orizzontale e due obliqui.
- C ha tre flessi orizzontali.
- D ha tre flessi obliqui.
- E non ha flessi.

4 La funzione $y = f(x)$ ha derivata nulla in $x = -2$. Quale delle seguenti affermazioni è *vera*? In $x = -2$, $f(x)$:

- A ha un punto di stazionarietà.
- B ha un flesso a tangente orizzontale.
- C ha un massimo relativo.
- D ha un minimo relativo.
- E si annulla.

5 La funzione $f(x) = \dfrac{3}{x+1} - \ln x$:

- A è crescente e volge la concavità verso l'alto.
- B ha un punto di minimo e un punto di flesso.
- C ha due punti stazionari.
- D è decrescente e volge la concavità verso l'alto.
- E è decrescente e ha un punto di flesso.

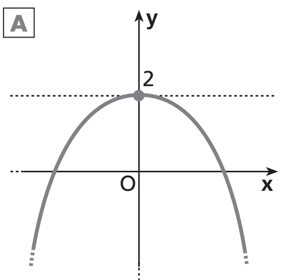
6 Il minimo della funzione $f(x) = \dfrac{1}{2} x \ln x$ è:

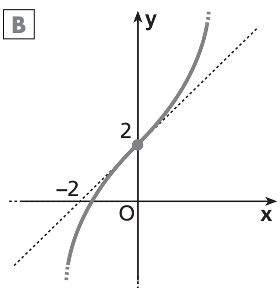
- A $-\dfrac{1}{2}$.
- B $-\dfrac{1}{2}e$.
- C $\dfrac{1}{e}$.
- D $-\dfrac{1}{2e}$.
- E 0.

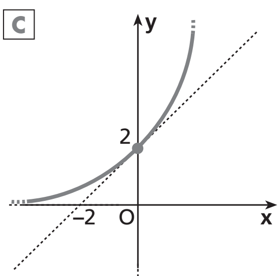
7 $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ ha un punto di minimo in:

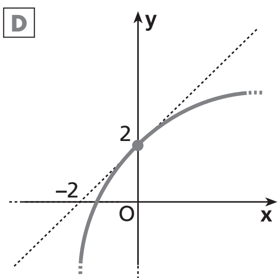
- A 0.
- B e.
- C 1.
- D $\dfrac{1}{e}$.
- E $2e$.

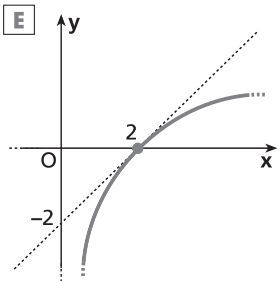
8 Se $f(0)=2$, $f'(0)=1$, $f''(0)=-2$, allora il grafico di $f(x)$ in un intorno di $x = 0$ può essere:

A


B


C


D


E


9 La funzione $f(x) = x^5 - 2x^3 + x - 2$:

- A ha due massimi e due minimi relativi.
- B è monotòna non decrescente.
- C è monotòna non crescente.
- D ha solo un massimo e un minimo relativo.
- E ha due massimi relativi e un minimo relativo.

Bergamini, Trifone, Barozzi **MATEMATICA.BLU - Vol.5** © Zanichelli 2012 *con Maths in English*

10 La funzione $f(x) = e^{x^2 - 4x + 4}$:

A ha un minimo assoluto per $x = 2$.

B ha un massimo relativo per $x = 0$.

C non presenta né massimo né minimo.

D ha un minimo relativo per $x = 0$.

E ha un massimo relativo per $x = 1$.

11 Considera la funzione $f(x)$ dispari, continua e derivabile nell'intervallo $I = [-2; 3]$. Sapendo che $f(-2) = -2$, $f'(1) = 0$ e $f'(x) \geq 0 \ \ \forall x \in I$, quale fra le seguenti affermazioni è *falsa*?

A Per $x = 3$, $f(x)$ ha un punto di massimo assoluto.

B Per $x = 1$, $f(x)$ ha un punto di flesso a tangente orizzontale.

C Per $x = -2$, $f(x)$ ha un punto di minimo assoluto.

D Per $x = 2$, $f(x)$ ha un massimo relativo.

E Per $x = 1$, $f(x)$ ha un punto stazionario.

QUESITI

12 Scrivi la condizione sufficiente per l'esistenza dei massimi e dei minimi delle funzioni derivabili due volte. Fai un esempio di funzione che non soddisfa la condizione anche se ha un punto di massimo o di minimo.

13 Dopo aver dato la definizione di flesso, indica come si determina un flesso a tangente verticale di una funzione derivabile nel suo dominio.

14 Una funzione polinomiale di terzo grado ammette sempre un punto di flesso. Spiega perché aiutandoti anche con un esempio.

15 Si consideri la funzione $f(x) = (2x - 1)^7(4 - 2x)^5$. Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 6)

16 Fra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2007, *quesito* 5)

17 Il candidato dimostri i seguenti enunciati.

a) Fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, quello isoscele ha l'area massima.

b) Fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una data sfera, quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\sqrt{2}$, se r è il raggio della sfera.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2000, *problema* 3)

18 In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani sono assegnati i punti $A(0, 1)$, $B(0, 4)$. Si determini sul semiasse positivo delle ascisse un punto C dal quale il segmento AB è visto con un angolo di massima ampiezza.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2008, *quesito* 8)

19 Trovare almeno tre funzioni polinomiali $f(x)$ di grado superiore al primo aventi andamenti diversi (per quanto riguarda la concavità o la convessità) in $x_0 = 0$ e tali che: $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 0$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2000, *quesito* 1c)

20 Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto x_0. Dire se la condizione $f'(x_0) = 0$ è: necessaria ma non sufficiente, sufficiente ma non necessaria, necessaria e sufficiente, per concludere che la funzione ha un estremo relativo nel punto x_0. Fornire un'esauriente dimostrazione della risposta.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 1999, *quesito* 1a)

21 Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Si sa che: $f(x)$ è derivabile su tutto l'asse reale; $f(x) = 0$ solo per $x = 0$; $f(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$; $f'(x) = 0$ soltanto per $x = -2$ e $x = 1$; $f(-2) = 1$ ed $f(1) = -2$. Dire, dandone esauriente spiegazione, se le informazioni suddette sono sufficienti per determinare gli intervalli in cui la funzione è definita, quelli in cui è continua, quelli in cui è positiva, quelli in cui è negativa, quelli in cui cresce, quelli in cui decresce. Si può dire qualcosa circa i flessi di $f(x)$?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2002, *quesito* 3)

22 Una piramide, avente area di base B e altezza h, viene secata con un piano parallelo alla base. Si calcoli a quale distanza dal vertice si deve condurre tale piano, affinché il prisma che ha per basi la sezione di cui sopra e la sua proiezione ortogonale sul piano di base della piramide abbia volume massimo.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2009, *quesito* 1)

23 Un trapezio rettangolo è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio r in modo che la base maggiore contenga il diametro. Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza x dell'angolo acuto del trapezio, affinché il solido da esso generato in una rotazione completa attorno alla base maggiore abbia volume minimo.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2008, *quesito* 2)

24 Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, 2010, *quesito* 5)

PROBLEMI

25 Sia $f(x) = kx^3 - (2k + 1)\,x + 2$.

a) Dimostra che al variare di $k \neq 0$ tutte le funzioni hanno un solo punto di flesso F che è centro di simmetria del grafico.
b) Individua la traslazione che porta F nell'origine e scrivi l'equazione della trasformata di $f(x)$.
c) Trova per quali valori di k la curva ha punti estremanti; determina per quale valore di k in F c'è un punto di flesso orizzontale.
d) Determina k in modo che la curva abbia un minimo di ascissa 1 e trova, in questo caso, l'ordinata del minimo e le coordinate del massimo.

$\left[\text{a) } F(0;2);\ \text{b) } \begin{cases} x' = x \\ y' = y - 2 \end{cases};\ y = kx^3 - (2k+1)x;\ \text{c) } k < -\frac{1}{2} \vee k > 0;\ k = -\frac{1}{2};\ \text{d) } k = 1;\ y_m = 0;\ M(-1;4)\right]$

26 a) La cubica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nel punto F di ascissa 2 ha un flesso con tangente inflessionale di equazione $y = -3x + 7$ e nel punto A di ascissa 1 ha per tangente la retta di equazione $y = 3$. Determina a, b, c, d.
b) Trovato il minimo B della cubica, scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera che ha B come centro di simmetria, asintoti paralleli agli assi cartesiani e passa per F.

$\left[\text{a) } a = 1, b = -6, c = 9, d = -1;\ \text{b) } B(3;-1),\ y = \frac{1-x}{x-3}\right]$

27 Data la curva γ di equazione $y = \dfrac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2}$:

a) determina a, b, c, d in modo che γ passi per $A(-1; 5)$ e abbia un punto di flesso F di ascissa 1 con tangente inflessionale di equazione $y = 2x - 1$;

b) scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, tangente alla curva γ nel punto B di ascissa $\dfrac{1}{2}$ e con il vertice sull'asse y;

c) verifica che la parabola e la curva γ hanno in comune solo il punto B.

$\left[\text{a) } a = 1, b = 2, c = -3, d = 1; \text{ b) } y = -3x^2 + \dfrac{5}{4}\right]$

28 Determina l'equazione della parabola con vertice in $V(0; 9)$ e passante per i fuochi dell'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Verifica poi che il vertice della sua simmetrica ottenuta mediante una simmetria centrale di centro $P(-1; 2)$ è un punto di minimo del grafico della funzione $y = -\sqrt{-\dfrac{25}{4}x^2 - 25x}$.

$[y = -x^2 + 9; V_1(-2; -5)]$

29 a) Studia la continuità e la derivabilità della funzione, definita nel dominio $D = \{x | x > -2\pi\}$:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \operatorname{sen} x & \text{se } -2\pi < x < 0 \\ \ln\sqrt{1 + x^2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Individua gli intervalli in cui la funzione è crescente e decrescente.

c) Scrivi le equazioni delle tangenti negli eventuali punti angolosi e nei punti di massimo e di minimo.

d) Trova i flessi della funzione.

e) Applica, se possibile, il teorema di Lagrange nell'intervallo $[-\pi; 1]$ e nell'intervallo $\left[-\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\left[\text{a) continua in } D\text{, derivabile in } D - \{0\}; \text{ b) decresc. per } -\dfrac{3}{2}\pi < x < -\dfrac{\pi}{2}, \text{ cresc. per } -2\pi < x < -\dfrac{3}{2}\pi \vee x > -\dfrac{\pi}{2};\right.$

$\left.\text{c) } y = 0, y = x, y = \dfrac{\pi}{4}, y = -\dfrac{\pi}{4}; \text{ d) } (1; \ln\sqrt{2}), (-\pi; 0); \text{ e) in } \left[-\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right] c = -\arccos(1 - \sqrt{3})\right]$

30 Date le curve di equazione $y = \dfrac{x^2 + kx + 2k}{x^2 - 1}$, con $k \in \mathbb{R}$,

a) verifica che tutte le curve passano per uno stesso punto A;

b) studia gli estremanti al variare di k;

c) considera i casi particolari di $k = -1$ e $k = -\dfrac{1}{3}$ e rappresenta le funzioni ottenute dopo aver riconosciuto che si tratta di iperboli equilatere;

d) traccia un grafico probabile della funzione ottenuta per $k = 0$, dopo aver studiato il suo dominio, eventuali simmetrie, segno, estremanti e flessi.

$\left[\text{a) } A\left(-2; \dfrac{4}{3}\right); \text{ b) 1 estr. per } k = 0; \text{ 2 estr. per } k < -1 \vee -\dfrac{1}{3} < k < 0 \vee k > 0;\right.$

$\left.\text{nessun estr. per } -1 \leq k \leq -\dfrac{1}{3}\right]$

31 Data la funzione $y = \sqrt[3]{(9 - x)x^2}$:

a) studia il suo dominio e il segno; calcola i limiti agli estremi del dominio;

b) determina i punti di massimo e minimo e i punti di flesso;

c) traccia il grafico della funzione utilizzando le informazioni precedenti;

d) scrivi l'equazione della semicirconferenza che si trova nel primo quadrante e che ha per diametro il segmento che congiunge il punto di minimo relativo con il flesso della funzione;

e) trova i punti di intersezione tra la funzione data e la semicirconferenza.

$\left[\text{a) } D: \mathbb{R}, y > 0 \text{ per } x < 9 \wedge x \neq 0, \lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \mp\infty; \text{ b) } (0; 0) \text{ min (cuspide)}, (6; 3\sqrt[3]{4}) \text{ max}, (9; 0) \text{ fl. vert.};\right.$

$\left.\text{d) } y = \sqrt{9x - x^2}; \text{ e) } (0; 0), (9; 0), \left(\dfrac{9}{2}; \dfrac{9}{2}\right)\right]$

32 Una piramide di vertice V, avente per base il trapezio rettangolo $ABCD$, è tale che:
- il trapezio di base è circoscritto ad un semicerchio avente come diametro il lato AB perpendicolare alle basi del trapezio;
- lo spigolo VA è perpendicolare al piano di base della piramide;
- la faccia VBC della piramide forma un angolo di 45° col piano della base.

a) Indicato con E il punto medio del segmento AB, dimostrare che il triangolo CED è rettangolo.
b) Sapendo che l'altezza della piramide è lunga $2a$, dove a è una lunghezza assegnata, e che $\overline{BC} = 2\overline{AD}$, calcolare l'area e il perimetro del trapezio $ABCD$.
c) Determinare quindi l'altezza del prisma retto avente volume massimo, inscritto nella piramide in modo che una sua base sia contenuta nella base $ABCD$ della piramide.
d) Stabilire se tale prisma ha anche la massima area laterale.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2002, *problema* 2)

$\left[\text{b) } \frac{3}{2}\sqrt{2}\,a^2, (2+3\sqrt{2})\,a; \text{ c) } \frac{2}{3}a; \text{ d) no, il prisma che ha massima area laterale è quello di altezza } a\right]$

33 L'oscillazione di una pallina fissata all'estremità di una molla e libera di muoversi su una retta è descritta dalla legge oraria: $x = ae^{-bt}\cos\omega t$ (a, b, ω costanti positive).

a) Trova il periodo dell'oscillazione e la posizione della pallina dopo due oscillazioni complete.
b) Posto $a = b = \omega = 1$, determina in quali istanti la pallina è ferma e in quali ha la massima velocità.

$\left[\text{a) } \frac{2\pi}{\omega}, x = ae^{-\frac{b}{\omega}4\pi}; \text{ b) } t = \frac{3}{4}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}^+, t = \pi + 2k\pi\right]$

34 Uno spicchio sferico di ampiezza 20° ha il volume, approssimato a meno di 10^{-2}, uguale a 169,65 cm^3.

1. Si determini il raggio della sfera cui lo spicchio appartiene.
2. Supposto che la sfera sia di ferro $\left(\text{peso specifico} = 7{,}8\frac{g}{cm^3}\right)$ e pesi 21,65 kg, si stabilisca se essa è piena o contiene al suo interno qualche cavità.
3. Si calcoli l'altezza del cono di volume minimo circoscritto alla sfera.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Scuole italiane all'estero*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2002, *problema* 2)

[**1.** $r = 9$; **2.** la sfera contiene al suo interno qualche cavità; **3.** 18 cm]

35 Una particella si muove in un piano e le sue coordinate in funzione del tempo sono:

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - 1 \\ y(t) = \operatorname{sen} t + 2 \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi[.$$

a) Verifica che la traiettoria è un'ellisse e calcola le componenti dei vettori velocità e accelerazione.
b) Verifica che la velocità non si annulla mai e calcola gli istanti in cui il suo modulo è massimo o minimo.
c) Ripeti per l'accelerazione le considerazioni del punto precedente.

$\left[\text{a) } v = (-2\operatorname{sen} t; \cos t), a = (-2\cos t; -\operatorname{sen} t); \text{ b) } v_{max} \text{ per } t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}; v_{min} \text{ per } t = 0, \pi;\right.$
$\left.\text{c) } a_{max} \text{ per } t = 0, \pi; a_{min} \text{ per } t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

36 Il trapezio $ABCD$ è isoscele e circoscritto ad un cerchio di raggio 1. Si ponga la base minore $\overline{CD} = 2x$.

1. Si provi che è: $\overline{AB} = \frac{2}{x}$.
2. Si dimostri che il volume del solido, ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base maggiore, assume un valore minimo per $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. In corrispondenza di tale valore di x, si calcoli l'area del quadrilatero avente per vertici i quattro punti in cui il trapezio è tangente al cerchio.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Scuole italiane all'estero*, *Sessione ordinaria*, 2008, *problema* 2)

$\left[\text{3. } \frac{4}{3}\sqrt{2}\right]$

CAPITOLO 27

٢٧ [numerazione araba]

२७ [numerazione devanagari]

二十七 [numerazione cinese]

LO STUDIO DELLE FUNZIONI

FERMAT E LA RIFRAZIONE DELLA LUCE La luce percorre, fra tutti i possibili cammini da un punto a un altro, quello che richiede il minor tempo. Questo principio, formulato da Pierre de Fermat nel 1662, riconduce la determinazione della legge della rifrazione alla ricerca di una funzione che rappresenti il tempo di percorrenza e alla sua successiva minimizzazione.

Come si può determinare la funzione che esprime il tempo di percorrenza della luce da un punto A a un punto B situati in due mezzi diversi?

La risposta a pag. 1867

1. LO STUDIO DI UNA FUNZIONE

Gli argomenti svolti finora permettono di studiare le principali proprietà di una funzione e di rappresentarla graficamente nel piano cartesiano.

In generale, per tracciare il grafico di una funzione $y = f(x)$ possiamo procedere esaminando i seguenti punti.

● $y = f(x)$ è *pari* in D, $D \subseteq \mathbb{R}$, se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$;

$y = f(x)$ è *dispari* in D se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$;

$y = f(x)$ è *periodica* di periodo T ($T > 0$), se $f(x) = f(x + kT)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

1. Il *dominio* della funzione.

2. Eventuali *simmetrie* e *periodicità*:

- se la funzione è *pari*, il grafico è simmetrico rispetto all'asse y;
- se è *dispari*, è simmetrico rispetto all'origine;
- se è *periodica* di periodo T, possiamo limitarci a studiare la funzione in un solo intervallo di ampiezza T.

3. Le coordinate degli eventuali *punti di intersezione* del grafico della funzione *con gli assi cartesiani*.

4. Il *segno della funzione*: stabiliamo gli intervalli in cui essa è positiva, ponendo $f(x) > 0$ e trovando, di conseguenza, anche dove è negativa.

● Asintoto verticale:

$x = x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Asintoto orizzontale:

$y = y_0$ se $\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0$.

Asintoto obliquo:

$y = mx + q$,

con $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ e

$q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - m \cdot x]$.

5. Il *comportamento* della funzione *agli estremi del dominio*: calcoliamo i relativi *limiti* e cerchiamo poi gli eventuali *asintoti* della funzione. Classifichiamo inoltre gli eventuali punti di *discontinuità,* specificando se sono di prima, di seconda o di terza specie.

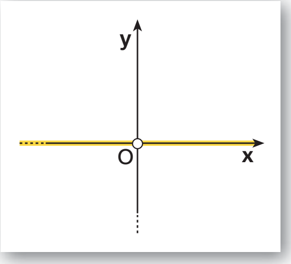
6. La *derivata prima* e il suo dominio. Dallo *studio del segno della derivata prima* determiniamo gli intervalli in cui la funzione è *crescente* ($f'(x) > 0$) e, di conseguenza, quelli in cui è *decrescente* ($f'(x) < 0$); cerchiamo gli eventuali punti di *massimo* o di *minimo relativo* e di *flesso orizzontale* e i punti di non derivabilità per $f(x)$ (*flessi verticali*, *cuspidi* e *punti angolosi*).

7. La *derivata seconda* e il suo dominio. Dallo *studio del segno della derivata seconda* determiniamo gli intervalli in cui il grafico volge la *concavità* verso l'alto ($f''(x) > 0$) o verso il basso ($f''(x) < 0$). Cerchiamo inoltre i *punti di flesso* a tangente obliqua ed eventualmente la tangente inflessionale.

ESEMPIO

Studiamo la funzione razionale fratta:

$$y = f(x) = 2x + \frac{5}{x} - 4.$$



► **Figura 1** Segniamo con un pallino vuoto il punto $x = 0$ dell'asse x (l'origine degli assi), perché per tale valore la funzione $y = 2x + \frac{5}{x} - 4$ non esiste.

1. Determiniamo il dominio della funzione. Essendo fratta, bisogna porre il denominatore diverso da 0:

D: $x \neq 0$.

Segniamo nel piano cartesiano il dominio (figura 1).

2. Cerchiamo eventuali simmetrie:

$$f(-x) = -2x - \frac{5}{x} - 4 \neq \pm f(x),$$

la funzione non è né pari né dispari. Notiamo inoltre che la funzione non è periodica.

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi. $x = 0$ non appartiene al dominio della funzione, quindi non ci sono intersezioni con l'asse y.

Vediamo se ci sono intersezioni con l'asse x:

$$\begin{cases} y = 2x + \dfrac{5}{x} - 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 4x + 5}{x} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\frac{\Delta}{4} = 4 - 10 = -6 < 0.$

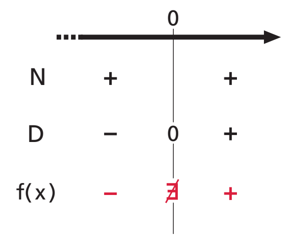
Essendo il discriminante negativo, non ci sono intersezioni con l'asse x.
Il grafico non interseca né l'asse x né l'asse y.

4. Studiamo il segno della funzione:

$$2x + \frac{5}{x} - 4 > 0 \rightarrow \frac{2x^2 - 4x + 5}{x} > 0.$$

$N > 0 \quad 2x^2 - 4x + 5 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

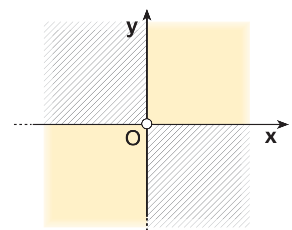
$D > 0 \quad x > 0.$



Dall'esame del quadro dei segni si ottiene:

$f(x) > 0 \quad$ per $x > 0$, $\qquad f(x) < 0 \quad$ per $x < 0$.

Riportiamo nel piano cartesiano queste informazioni (figura a lato).



5. Determiniamo il comportamento della funzione agli estremi del dominio, ossia in 0, a $-\infty$ e a $+\infty$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty,$$

pertanto $x = 0$ è un asintoto verticale.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

pertanto non ci sono asintoti orizzontali, ma possono esistere asintoti obliqui.

Calcoliamo:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x + \dfrac{5}{x} - 4}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + 5 - 4x}{x^2} = 2;$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\left(2x + \frac{5}{x} - 4\right) - 2x\right] =$$

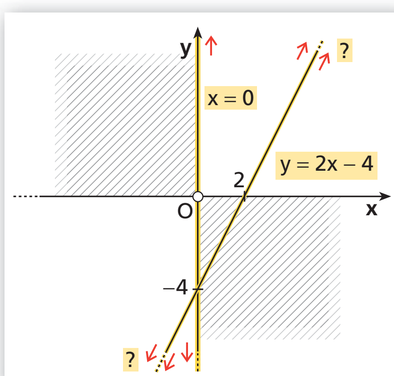
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{5}{x} - 4\right) = -4.$$

La retta di equazione

$$y = 2x - 4$$

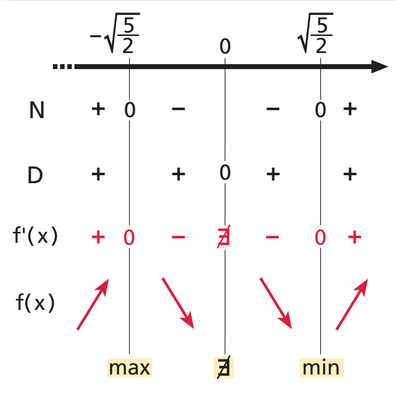
è asintoto obliquo sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$.

Tracciamo gli asintoti nel piano cartesiano (figura 2).



◄ Figura 2 Le rette di equazioni $x = 0$ e $y = 2x - 4$ sono asintoti del grafico della funzione. Abbiamo messo dei punti interrogativi dove non sappiamo in che modo il grafico si avvicina alla retta $y = 2x - 4$.

▶ **Figura 3** Il quadro relativo al segno della derivata prima.



6. Determiniamo la derivata prima e studiamo il suo segno:

$$f'(x) = 2 - \frac{5}{x^2} = \frac{2x^2 - 5}{x^2}.$$

Il dominio della derivata è D: $x \neq 0$.

Determiniamo gli intervalli in cui $f'(x) > 0$.

$N > 0$ se:

$$x < -\sqrt{\frac{5}{2}} \;\vee\; x > \sqrt{\frac{5}{2}},$$

$D > 0 \quad \forall x \neq 0$.

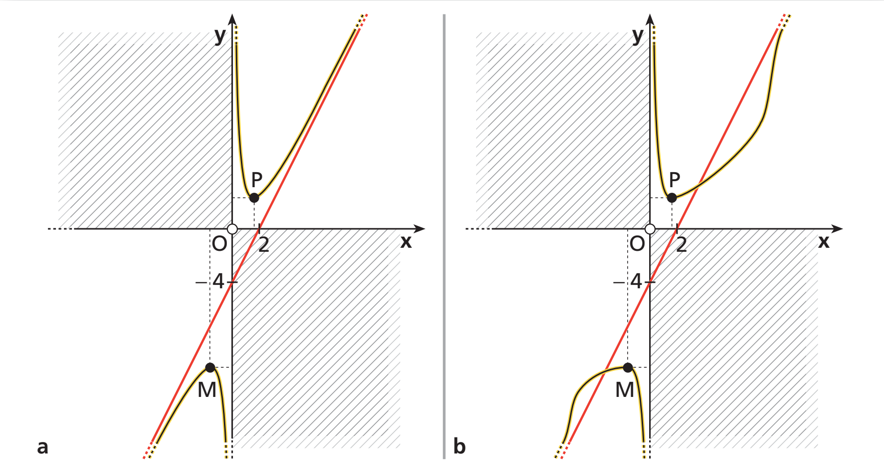
La funzione è crescente per $x < -\sqrt{\frac{5}{2}} \vee x > \sqrt{\frac{5}{2}}$; è decrescente per $-\sqrt{\frac{5}{2}} < x < \sqrt{\frac{5}{2}}$, con $x \neq 0$.

Il punto di ascissa $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ ha ordinata $f\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -2\sqrt{10} - 4$.

La funzione ha un massimo relativo in $M\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}; -2\sqrt{10} - 4\right)$, mentre in $P\left(\sqrt{\frac{5}{2}}; 2\sqrt{10} - 4\right)$ ha un minimo relativo.

Le informazioni finora ottenute non permettono ancora di disegnare l'andamento del grafico della funzione. Per capirlo possiamo confrontare i grafici delle figure 4*a* e 4*b*, che sono diversi pur avendo in comune tutte le caratteristiche finora trovate.

▶ **Figura 4** Entrambi i grafici hanno tutte le caratteristiche finora trovate, ma sono diversi fra loro. Nel primo non ci sono punti di flesso, nel secondo ci sono flessi.



● Nella figura puoi anche notare che in *a* non ci sono intersezioni del grafico della funzione con l'asintoto obliquo. Un modo alternativo per decidere fra *a* e *b* è quindi quello di studiare tali intersezioni.

7. Determiniamo la derivata seconda e studiamone il segno:

$$f''(x) = \frac{10}{x^3}; \qquad D: x \neq 0.$$

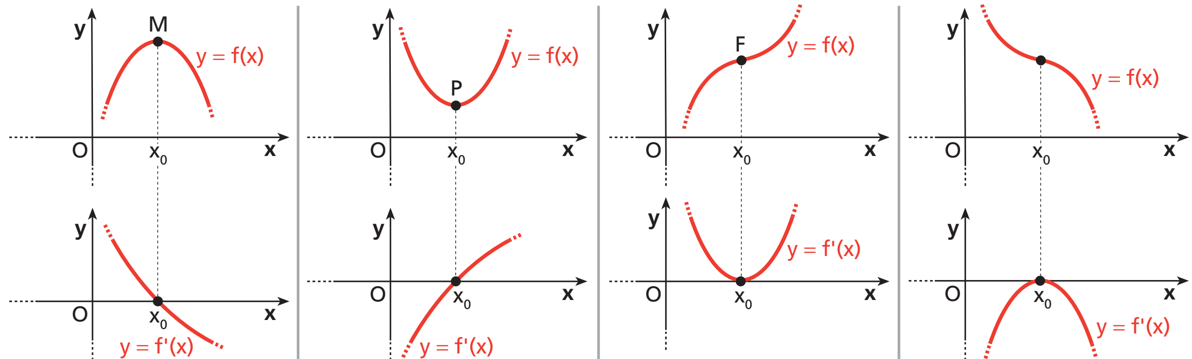
Se $x > 0$, $f''(x) > 0$, quindi la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto; mentre se $x < 0$, $f''(x) < 0$, quindi la funzione ha la concavità rivolta verso il basso. Non ci sono punti di flesso, perché $x = 0$ è stato escluso dal dominio.

Il risultato ottenuto permette ora di dire con sicurezza che il grafico della funzione data è quello della figura 4*a*.

2. I GRAFICI DI UNA FUNZIONE E DELLA SUA DERIVATA

Dato il grafico di una funzione $f(x)$, è possibile ricavare informazioni relative al grafico della funzione derivata $f'(x)$ e viceversa. In particolare, fra i due grafici esistono i collegamenti mostrati nella figura 5.

Supponiamo, per semplicità, che $f'(x)$ e $f''(x)$ esistano nel dominio di $f(x)$.



a. In x_0 la funzione $f(x)$ ha un massimo relativo. Nello stesso punto, la derivata $f'(x)$ è nulla e quindi il suo grafico interseca l'asse x in x_0. A sinistra di x_0 la derivata è positiva, a destra è negativa.

b. In x_0 la funzione $f(x)$ ha un minimo relativo: quindi $f'(x_0) = 0$. Il grafico della derivata interseca l'asse x in x_0; a sinistra di x_0 la derivata è negativa, a destra è positiva.

c. In x_0 $f(x)$ ha un flesso orizzontale ascendente, quindi $f'(x_0) = 0$. Il grafico della derivata interseca l'asse x in x_0, e $f'(x)$ è positiva sia a destra sia a sinistra di x_0. Pertanto in x_0 c'è un minimo per $f'(x)$.

d. In x_0 $f(x)$ ha un flesso orizzontale discendente: con considerazioni analoghe al caso precedente, per $x \neq x_0$ $f'(x)$ è negativa. Pertanto in x_0 c'è un massimo per $f'(x)$.

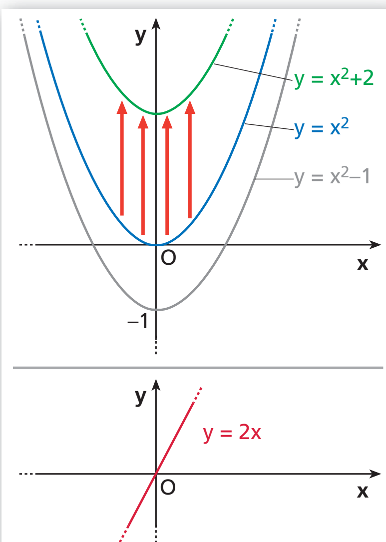
▲ **Figura 5**

Per passare dal grafico di una funzione a quello della sua derivata consideriamo che:

- nei punti di massimo o di minimo della funzione $f(x)$ si ha $f'(x) = 0$;
- negli intervalli in cui la funzione $f(x)$ è crescente si ha $f'(x) > 0$ e negli intervalli in cui la funzione è decrescente si ha $f'(x) < 0$;
- nei punti di flesso si ha $f''(x) = 0$ e quindi $f'(x)$ ha la tangente orizzontale e può avere un massimo o un minimo.

Dato il grafico di $f'(x)$, si possono ricavare informazioni sul grafico di $f(x)$, ma non è possibile disegnarlo univocamente. Infatti se $f'(x)$ è la derivata di $f(x)$, è anche la derivata di $f(x) + c$, dove c è una costante qualsiasi, in quanto la derivata di una costante è nulla. I grafici delle infinite funzioni che hanno come derivata $f'(x)$ sono traslati, l'uno rispetto all'altro, di un vettore parallelo all'asse y.

Per esempio, la funzione $y = 2x$ è la funzione derivata di $y = x^2$, ma anche di $y = x^2 + 2$, di $y = x^2 - 1$ e in generale di $y = x^2 + c$ con $c \in \mathbb{R}$.



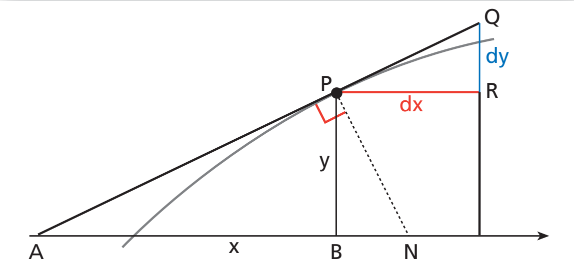
► **Figura 6**

ESPLORAZIONE

Chi è il padre del calcolo?

Leibniz o Newton?

Leibniz arrivò al concetto di derivata di una funzione attraverso quello di tangente in un punto. Egli capì l'importanza del *triangolo caratteristico*, che in figura indichiamo con PRQ, in cui $\overline{PR}$ e $\overline{QR}$ rappresentano le «differenze» dx e dy, e sfruttò la sua similitudine con i triangoli ABP e PBN.



Ricavò inoltre le principali regole di differenziazione, come quelle del prodotto e del quoziente, corrispondenti a quelle che abbiamo studiato per le derivate:

$$d(x \cdot y) = xdy + ydx \text{ e } d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Newton, riferendosi ai suoi studi di dinamica, chiamò *fluenti* le quantità «crescenti con gradualità e in modo indefinito» e *flussioni* «le velocità con cui le singole fluenti aumentano a causa del moto che le genera». Una fluente è quindi una funzione (continua) e una flussione una derivata. Newton calcola la flussione di una fluente attraverso quello che noi chiamiamo rapporto incrementale, considerando il valore da esso assunto quando numeratore e denominatore sono quantità «evanescenti», ovvero che tendono a 0.

La disputa

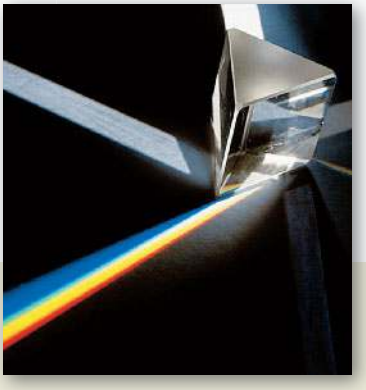
Il problema di determinare chi tra Newton e Leibniz fu il primo a ideare il calcolo infinitesimale è stato una delle questioni più controverse della storia della matematica.
Leibniz aveva iniziato i suoi studi dopo Newton, ma li aveva pubblicati prima, quindi parte della comunità scientifica riconosceva a lui la paternità del calcolo infinitesimale.
Alla Royal Society, società scientifica inglese presieduta dal 1703 da Newton, si ipotizzava che Leibniz potesse essere venuto a conoscenza degli studi di Newton durante un suo viaggio a Londra.
Leibniz replicò rivendicando il primato nella pubblicazione e rivolgendo una protesta alla Royal Society, di cui lui stesso era membro straniero. La società incaricò una commissione di occuparsi della questione e, influenzata da Newton, pubblicò nel 1712 un *Commercium epistolicum* in cui Leibniz era ancora accusato di plagio e si riconosceva Newton come inventore del calcolo.
Leibniz non accettò questo verdetto e rimase solo nella sua battaglia, abbandonato anche dal duca di Hannover, del quale era stato consigliere e che era diventato re d'Inghilterra.
Oggi non ha molto senso porsi il problema di chi sia il padre del calcolo infinitesimale. È ormai dimostrato che Leibniz e Newton non furono dei veri e propri inventori del calcolo, ma piuttosto riuscirono, indipendentemente l'uno dall'altro, a riordinare il lavoro e le idee di diversi matematici del Seicento, quali Cavalieri, Fermat, Pascal, Wallis, Torricelli, Barrow.

Attività

Ancora Newton, ancora Leibniz

Approfondisci i contributi allo sviluppo della fisica di Leibniz e di Newton.

- Sintetizza il contributo di Newton allo studio dell'ottica.
- Che cosa intendeva Leibniz con «forza viva»?



▶ Luce in un prisma.

Cerca nel Web:
teoria luce, prisma, Newton, Leibniz, forza viva

3. APPLICAZIONI DELLO STUDIO DI UNA FUNZIONE

IN PRATICA
▶ Videolezione 74

Possiamo applicare lo studio delle funzioni nella risoluzione delle **equazioni parametriche**, cioè equazioni nell'incognita x che dipendono da un parametro k, per le quali si vogliono determinare, al variare di k, le soluzioni che appartengono a un intervallo assegnato.

ESEMPIO

Discutiamo l'equazione parametrica

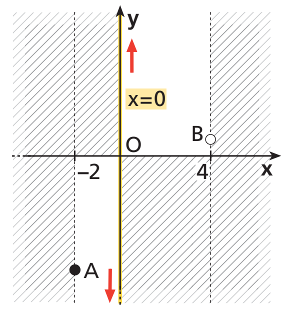
$$kx = \frac{1}{e^x}$$

nell'intervallo $-2 \leq x < 4$. Poiché $x = 0$ non è soluzione dell'equazione assegnata, dividiamo per x e otteniamo:

$$k = \frac{1}{xe^x}.$$

Posto $k = y$, abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{xe^x} \\ y = k \\ -2 \leq x < 4 \end{cases}$$



Dobbiamo trovare le intersezioni tra il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1}{xe^x}$ e le rette del fascio improprio $y = k$ che si trovano nell'intervallo $[-2; 4[$.
Studiamo la funzione $f(x)$ in questo intervallo.
Osserviamo che $f(x)$ non è definita per $x = 0$ e inoltre:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{xe^x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{xe^x} = +\infty.$$

Quindi l'asse y è un asintoto verticale.
La funzione non interseca gli assi cartesiani e il suo grafico è compreso tra i punti $A\left(-2; -\dfrac{e^2}{2}\right)$ e $B\left(4; \dfrac{1}{4e^4}\right)$. Il punto B non appartiene al grafico della funzione perché $x = 4$ non appartiene all'intervallo considerato.
Poiché e^x è sempre positiva, abbiamo:

$f(x) > 0$ per $x > 0$;

$f(x) < 0$ per $x < 0$.

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = -\frac{e^x + xe^x}{x^2 e^{2x}} = -\frac{1 + x}{x^2 e^x}.$$

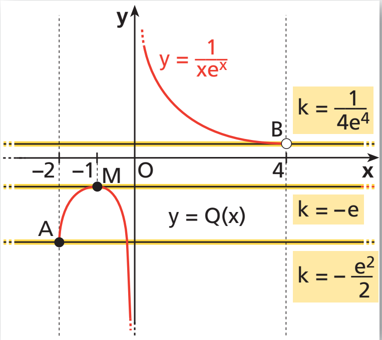
Il denominatore della derivata è sempre positivo per cui:

per $x < -1$, si ha $f'(x) > 0 \quad \to \quad f(x)$ è crescente;

per $x > -1$, si ha $f'(x) < 0 \quad \to \quad f(x)$ è decrescente.

Allora la funzione ha un punto di massimo relativo in $M(-1; -e)$.

▶ Figura 7



Possiamo dunque tracciare il grafico di $f(x)$ (figura 7).
Osservando la figura, vediamo che:

- per $k < -\frac{e^2}{2}$, le rette del fascio intersecano la curva $y = f(x)$ in un solo punto di ascissa x_1, con $-1 < x_1 < 0$;
- per $-\frac{e^2}{2} \leq k \leq -e$ le rette del fascio intersecano la curva in due punti di ascissa x_1 e x_2, con $-2 \leq x_1 \leq -1$ e $-1 < x_2 < 0$ (per $k = -e$, la retta è tangente alla curva nel punto M, che ha ascissa $x_1 = -1$);
- per $-e < k \leq \frac{1}{4e^4}$, le rette del fascio non intersecano la curva;
- per $k > \frac{1}{4e^4}$, le rette del fascio intersecano la curva in un solo punto di ascissa x_1, con $0 < x_1 < 4$.

Riassumendo, nell'intervallo $[-2; 4[$, l'equazione parametrica data:

- non ha soluzioni per $-e < k \leq \frac{1}{4e^4}$;
- ha una soluzione x_1 per $k < -\frac{e^2}{2}$ e per $k > \frac{1}{4e^4}$;
- ha due soluzioni x_1 e x_2 per $-\frac{e^2}{2} \leq k \leq -e$.

Per lo scopo che ci siamo prefissati non è importante procedere con lo studio della derivata seconda per stabilire la concavità e trovare i flessi.

In generale, per effettuare la discussione di un'equazione parametrica, si ricava il parametro k in funzione di x, cioè si riscrive l'equazione data nella forma $k = f(x)$. Risolvere questa equazione equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = k \end{cases}$$

È necessario, quindi, prima studiare la funzione $y = f(x)$ per poter disegnarne il grafico e poi ricercare le intersezioni tra questa curva e il fascio di rette $y = k$.
Le soluzioni dell'equazione sono le ascisse dei punti di intersezione.

Per discutere un'equazione parametrica si può anche riscrivere l'equazione in modo da risolvere un sistema equivalente costituito dall'equazione di una curva fissa e un fascio di curve o rette.
Nell'esempio precedente si potrebbe utilizzare il sistema:

$$\begin{cases} y = e^{-x} \\ y = kx \\ -2 \leq x < 4 \end{cases}$$

Lo studio delle funzioni ha diverse applicazioni, oltre alla risoluzione delle equazioni parametriche. Negli esercizi lo utilizzeremo per la **risoluzione grafica di equazioni e di disequazioni** e in **problemi con le funzioni**.

4. LA RISOLUZIONE APPROSSIMATA DI UN'EQUAZIONE

IN PRATICA
▶ Videolezione 75

La separazione delle radici

Quando è possibile trovare con un metodo algebrico le soluzioni di un'equazione, si dice anche che esiste un metodo di **risoluzione esatta** dell'equazione.

Per esempio, sappiamo che esiste la risoluzione esatta per le equazioni algebriche dal primo al quarto grado. Tuttavia, la risoluzione esatta di un'equazione non è sempre possibile. Per esempio, ci sono equazioni algebriche di grado superiore al quarto per le quali non esiste un procedimento di risoluzione esatta.

Anche per le equazioni trascendenti non esistono formule risolutive e soltanto alcune di esse si possono risolvere mediante un numero finito di operazioni elementari. È dunque importante lo studio dei procedimenti di **risoluzione approssimata**, o **numerica**.

Le equazioni trascendenti sono le esponenziali, le logaritmiche, le goniometriche e le miste.

Ogni equazione a una incognita può essere scritta nella forma:

$$f(x) = 0.$$

Trovare le radici, ossia le soluzioni, dell'equazione equivale a ricercare gli **zeri** della funzione $y = f(x)$, ossia le intersezioni del grafico con l'asse delle ascisse.

I metodi di risoluzione numerica di un'equazione si basano sulla costruzione di una successione di numeri reali che converga alla soluzione esatta. I termini della successione sono **valori approssimati** della soluzione e, mediante *iterazioni* successive, possiamo ottenere un valore approssimato vicino quanto vogliamo alla soluzione.

Un'**iterazione** è un procedimento che si ripete più volte.

La ricerca delle soluzioni approssimate è composta da due fasi:

1. la **separazione delle radici**, ossia la determinazione di intervalli che contengono *soltanto una* radice;
2. il **calcolo di un valore approssimato** con la **precisione** voluta.

Studieremo la risoluzione numerica soltanto per le equazioni in cui f ha per dominio un *intervallo* (limitato o illimitato), è *continua* ed è derivabile almeno due volte.
Quindi, salvo avviso contrario, in questo paragrafo supponiamo che le funzioni soddisfino queste condizioni.

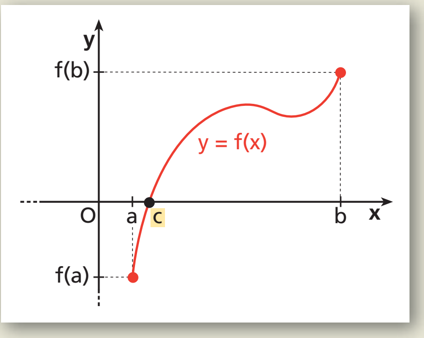
Per separare una radice dell'equazione $f(x) = 0$ dobbiamo essere certi che esista almeno un intervallo $[a; b]$ in cui la f abbia *soltanto uno* zero. A questo scopo richiamiamo alcune proprietà delle funzioni continue.

TEOREMA

Teorema di esistenza degli zeri

Se f è una funzione continua nell'intervallo $[a; b]$ limitato e chiuso e negli estremi assume valori di segno opposto, cioè se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste *almeno* un punto c interno ad $[a; b]$ in cui la funzione si annulla, ossia:

$$\exists\, c \in \,]a; b[\quad \text{tale che} \quad f(c) = 0.$$



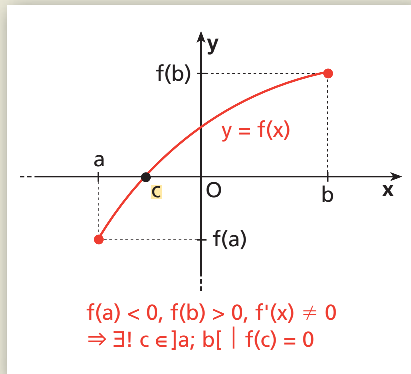
Questo teorema assicura l'esistenza di almeno una soluzione dell'equazione $f(x)= 0$ nell'intervallo $[a; b]$, ma non ne garantisce l'unicità. Vediamo allora due *condizioni sufficienti* per l'unicità della soluzione.

TEOREMA

Primo teorema di unicità dello zero

Se f è una funzione continua nell'intervallo $[a; b]$ limitato e chiuso, derivabile con derivata prima diversa da 0 nei suoi punti interni e, inoltre, $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste *un solo* punto c interno ad $[a; b]$ in cui la funzione si annulla, ossia:

$$\exists!\ c \in \,]a; b[\quad \text{tale che} \quad f(c) = 0.$$



● Il simbolo ∃! significa *esiste uno e un solo*.

DIMOSTRAZIONE

Per il teorema di esistenza degli zeri esiste almeno un punto $c \in \,]a; b[$ tale che $f(c) = 0$.
Supponiamo, per *assurdo*, che esista almeno un altro punto $c' \in \,]a; b[$, per esempio maggiore di c, in cui la funzione si annulla. Se applichiamo alla funzione il teorema di Rolle nell'intervallo $[c; c']$, deduciamo che esiste almeno un punto $m \in \,]c; c'[$ in cui:

$$f'(m) = 0.$$

Ma ciò è contrario alla seconda ipotesi dell'enunciato, quindi la funzione data ammette, nell'intervallo $[a; b]$, soltanto uno zero.

● Ricorda che, se $f'(x) > 0$, la funzione è crescente, se $f'(x) < 0$, la funzione è decrescente.

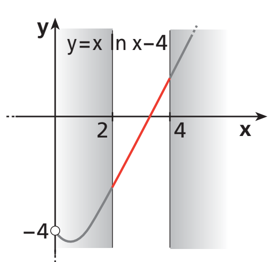
● In particolare, il teorema è valido se $f'(x) < 0$ oppure $f'(x) > 0$, quindi se la funzione è monotòna.

ESEMPIO

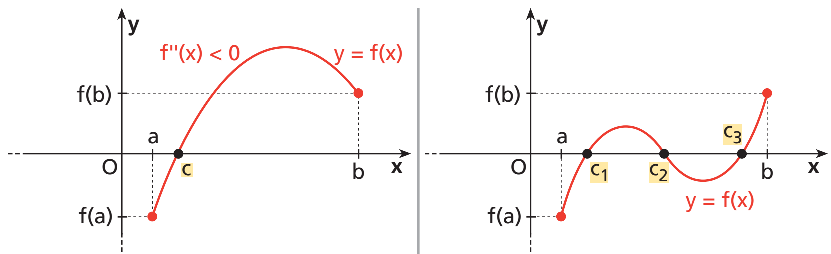
Consideriamo la funzione $f(x) = x \ln x - 4$ con $x \in [2; 4]$.
Essa è continua nell'intervallo considerato, perché è data dal prodotto di funzioni continue. La sua derivata prima è:

$$f'(x) = \ln x + 1 \neq 0 \text{ se } \ln x \neq -1 \to x \neq \frac{1}{e}, \text{ quindi } f'(x) \neq 0 \ \forall\, x \in \,]2; 4[.$$

Infine $f(2) = 2 \ln 2 - 4 < 0$ e $f(4) = 4 \ln 4 - 4 > 0$.
La funzione verifica tutte le ipotesi del teorema e quindi si annulla soltanto una volta in $[2; 4]$.



Se invece $f'(x) = 0$ in un punto di $]a; b[$, ossia $f(x)$ non è monotòna, l'equazione $f(x) = 0$ ammette ancora un'unica radice in $[a; b]$ se la concavità è rivolta verso l'alto in ogni punto di $[a; b]$, oppure rivolta verso il basso, ossia se $f''(x)$ ha segno costante in $[a; b]$.



a. Le condizioni $f(a) \cdot f(b) < 0$ e $f''(x) < 0$ $\forall x \in [a; b]$ assicurano l'esistenza di uno zero soltanto.

b. Se $f''(x)$ cambia di segno, la funzione può avere più di uno zero anche se $f(a) \cdot f(b) < 0$.

◀ **Figura 8**

TEOREMA

Secondo teorema di unicità dello zero

Se f è una funzione continua nell'intervallo $[a; b]$, derivabile due volte nei suoi punti interni, e se $f(a) \cdot f(b) < 0$ e $f''(x) > 0$, oppure $f''(x) < 0$, $\forall x \in]a; b[$, allora esiste *un solo* punto c interno ad $[a; b]$ in cui la funzione si annulla, ossia:

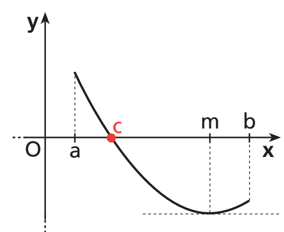
$$\exists!\, c \in]a; b[\quad \text{tale che} \quad f(c) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo il teorema supponendo $f(a) > 0, f(b) < 0, f''(x) > 0$. Negli altri casi la dimostrazione è simile.

Poiché la derivata seconda è positiva, la derivata prima è una funzione strettamente crescente nell'intervallo $]a; b[$. Si possono presentare tre casi.

1. $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in]a; b[$; f è allora crescente, ma questo va contro l'ipotesi $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$; questa possibilità è quindi da escludere.
2. $f'(x) < 0 \ \forall \ x \in]a; b[$; f è allora decrescente e per il primo teorema di unicità f ha soltanto una radice in $]a; b[$.
3. f' si annulla in un punto m interno all'intervallo. Poiché f' è crescente avremo $f'(x) < 0$ nei punti dell'intervallo $]a; m[$ e $f'(x) > 0$ nei punti dell'intervallo $]m; b[$. Pertanto la funzione data f è decrescente in $[a; m]$, crescente in $[m; b]$. Poiché $f(b) < 0$, sarà anche $f(m) < 0$, perciò, per il primo teorema di unicità, nell'intervallo aperto $]a; m[$, e quindi in $]a; b[$, esiste soltanto un punto c tale che $f(c) = 0$.



Sono verificate le ipotesi del primo teorema di unicità: $f(a) > 0, f(m) < 0$, $f(x)$ continua in $[a; m]$, $f(x)$ derivabile nei punti interni, con $f'(x) \neq 0$ in $]a; m[$.

ESEMPIO

Verifichiamo che, nell'intervallo $[0; 2]$, la funzione $y = x^5 - 3x - 1$ presenta soltanto uno zero.

La funzione è continua in tutto l'intervallo e ammette derivata prima e seconda in tutti i suoi punti:

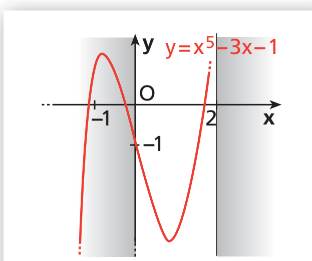
$$y' = 5x^4 - 3, \qquad y'' = 20x^3.$$

Inoltre risulta:

$$y'' > 0 \ \forall \ x \in]0; 2[,$$

$$y(0) = -1 < 0 \text{ e } y(2) = 25 > 0.$$

Per il secondo teorema di unicità la funzione y si annulla una sola volta nell'intervallo $[0; 2]$.



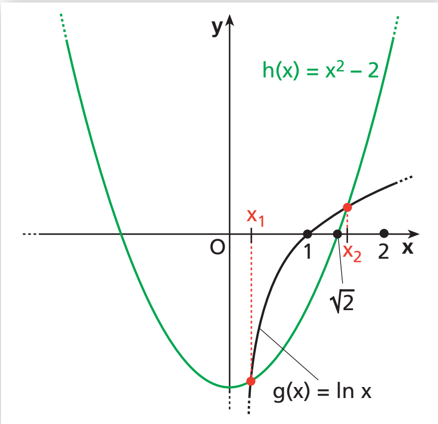
◀ **Figura 9** Il grafico della funzione $y = x^5 - 3x - 1$.

La separazione delle radici di una funzione può essere facilitata da uno studio grafico preventivo. Attraverso il grafico possiamo renderci conto del numero di radici contenute in un intervallo e quindi individuare gli intervalli in cui la funzione soddisfa uno dei teoremi di unicità.

ESEMPIO

Separiamo le radici dell'equazione $\ln x - x^2 + 2 = 0$.
Scriviamo l'equazione nella forma $\ln x = x^2 - 2$ e confrontiamo i grafici delle funzioni $g(x) = \ln x$ e $h(x) = x^2 - 2$.

Le intersezioni delle due curve rappresentano gli zeri della funzione $f(x) = \ln x - x^2 + 2$, cioè le soluzioni dell'equazione data. Dal grafico (figura 10) vediamo che g e h hanno due punti di intersezione, quindi l'equazione ha due soluzioni, x_1 e x_2. Possiamo notare che x_1 appartiene all'intervallo $[0; 1]$, mentre x_2 a $[\sqrt{2}; 2]$ e lo verifichiamo applicando i teoremi di esistenza e unicità.



▶ Figura 10

Osserviamo però che la funzione $f(x)$ non è definita in $x = 0$, quindi consideriamo l'intervallo $[0,1; 1]$.
In tale intervallo $f(x)$ è continua, negli estremi assume valori di segno opposto, cioè $f(0,1) \cdot f(1) < 0$, pertanto, per il teorema degli zeri, ammette almeno una soluzione.
Calcoliamo la derivata di $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2x = \frac{1 - 2x^2}{x}.$$

Tale derivata non si annulla mai nei punti interni di $[0,1; 1]$, quindi, per il primo teorema di unicità, la soluzione è unica.
In modo analogo si procede per x_2.

Il metodo di bisezione

Questo metodo si chiama anche **dicotomico** o **del dimezzamento**.

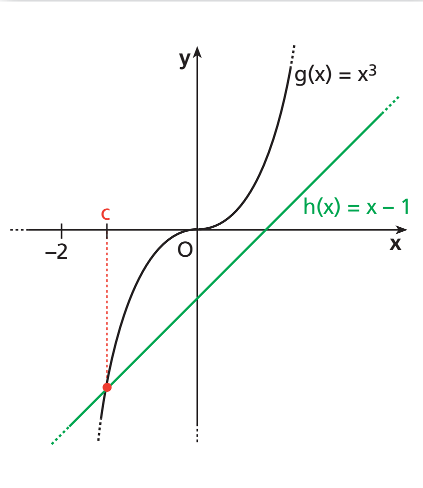
Vediamo ora in che modo calcolare un valore approssimato di una radice.
Consideriamo l'equazione

$$x^3 - x + 1 = 0.$$

Cerchiamo eventuali soluzioni con un'approssimazione inferiore a 0,3.
Separiamo le radici dell'equazione

$$x^3 - x + 1 = 0.$$

Scriviamo l'equazione nella forma $x^3 = x - 1$ e rappresentiamo i grafici di $g(x) = x^3$ e $h(x) = x - 1$.
Le due curve si intersecano in un solo punto di ascissa c, appartenente all'intervallo $[-2; 0]$, che rappresenta l'unica so-

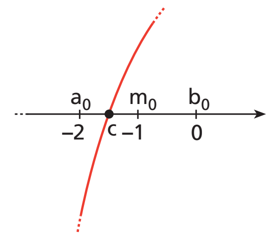


▶ Figura 11

luzione dell'equazione $x^3 - x + 1 = 0$, come si può confermare con i teoremi di esistenza e unicità. Infatti in $[-2; 0]$ la funzione $f(x) = x^3 - x + 1$ è continua e $f(-2)f(0) = (-5)(1) < 0$. È inoltre derivabile con $f''(x) = 6x < 0$, $\forall\, x \in [-2; 0[$.
Consideriamo l'intervallo

$$[a_0; b_0] = [-2; 0].$$

Il punto medio dell'intervallo è $m_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = -1$: esso è un valore approssimato della soluzione c.

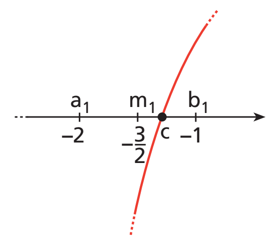


a

Il grado di approssimazione corrisponde alla quantità $|m_0 - c|$, che non possiamo determinare ma che è certamente minore di $\dfrac{b_0 - a_0}{2}$. Assumiamo il numero positivo $\varepsilon_0 = \dfrac{b_0 - a_0}{2}$ come stima del grado di approssimazione.

Poiché $\varepsilon_0 = 1 > 0{,}3$, ricerchiamo un'approssimazione migliore.

Dato che $f(-1) = 1 > 0$, per il teorema degli zeri la soluzione esatta è contenuta nell'intervallo $[a_1; b_1] = [-2; -1]$. Procedendo come prima otteniamo il seguente valore approssimato per la soluzione



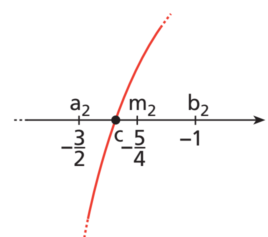
b

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = -\frac{3}{2} = -1{,}5,$$

a cui corrisponde un'approssimazione $\varepsilon_1 = \dfrac{b_1 - a_1}{2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5.$

Anche in questo caso $\varepsilon_1 > 0{,}3$, quindi proseguiamo la ricerca.

Poiché $f(-1{,}5) = -0{,}875 < 0$, la soluzione esatta è compresa nell'intervallo $[a_2; b_2] = [-1{,}5; -1]$. Ripetendo il procedimento, otteniamo il seguente valore approssimato:



c

$$m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = -\frac{5}{4} = -1{,}25, \quad \text{con} \quad \varepsilon_2 = \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

In questo caso $\varepsilon_2 < 0{,}3$, pertanto terminiamo il calcolo perché abbiamo ottenuto un'approssimazione inferiore a quella richiesta.
Diciamo che il valore approssimato della soluzione è $-1{,}25$ con un'approssimazione di 0,25.

Riassumiamo in modo più generale il procedimento appena illustrato.
Data l'equazione $f(x) = 0$, cerchiamo un intervallo $[a_0; b_0]$ tale che $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ (per esempio $f(a_0) < 0$ e $f(b_0) > 0$) e in cui la funzione f si annulla soltanto una volta.

Successivamente eseguiamo i seguenti passi.

1. Determiniamo il punto medio dell'intervallo $[a_0; b_0]$, $m_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$, poi calcoliamo $f(m_0)$.
2. Se $f(m_0) = 0$, allora m_0 è la soluzione cercata e il procedimento è concluso.
3. Se invece $f(m_0) \neq 0$, allora m_0 è un valore approssimato della soluzione a meno della quantità $\varepsilon_0 = \dfrac{b_0 - a_0}{2}$.
4. Se l'approssimazione ε_0 è minore o uguale a quella voluta, il calcolo è terminato; in caso contrario proseguiamo.

● Il caso in cui $f(a_0) > 0$ e $f(b_0) < 0$ si risolve in modo simile.

● Gli intervalli che si ottengono nelle iterazioni successive hanno ampiezza $\varepsilon_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$ e ognuno di essi contiene la soluzione esatta. Poiché $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$, la successione delle soluzioni approssimate tende alla soluzione esatta. ε_n è anche l'approssimazione raggiunta con l'n-esima iterazione.

5. Scegliamo il semintervallo contenente la radice ponendo:

$$a_1 = m_0, \quad b_1 = b_0 \quad \text{se } f(m_0) < 0;$$
$$a_1 = a_0, \quad b_1 = m_0 \quad \text{se } f(m_0) > 0.$$

6. Ritorniamo al punto 1 e ripetiamo il procedimento per l'intervallo $[a_1; b_1]$.

Il metodo delle secanti

Il metodo delle secanti che ora esamineremo è detto anche **di Lagrange** o **delle parti proporzionali**.

Consideriamo l'equazione:

$$f(x) = 0$$

e supponiamo che ammetta *una sola* radice c nell'intervallo $[a_0; b_0]$, quindi $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ (per esempio supponiamo $f(a_0) < 0$ e $f(b_0) > 0$).

Il caso in cui $f(a_0) > 0$ e $f(b_0) < 0$ si risolve in modo simile.

Determiniamo una successione di approssimazioni della soluzione c. Ogni approssimazione viene calcolata sostituendo al grafico di $f(x)$ una retta secante, di cui cerchiamo l'intersezione con l'asse x.

Siano A e B i punti del grafico della funzione $y = f(x)$ di ascissa a_0 e b_0.

Tracciamo la corda AB, indicando con x_1 il suo punto di intersezione con l'asse delle ascisse.

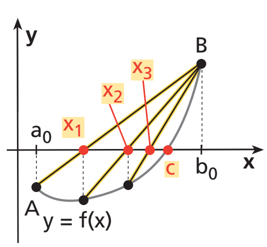
L'ascissa x_1 può essere considerata una prima approssimazione della soluzione c. Per calcolare x_1 determiniamo la retta AB utilizzando la formula della retta per due punti,

$$\frac{y - f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{x - a_0}{b_0 - a_0},$$

e calcoliamo la sua intersezione x_1 con l'asse x ponendo $y = 0$. Si ottiene:

$$x_1 = a_0 - \frac{(b_0 - a_0) f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}.$$

Ora eseguiamo i seguenti passi.



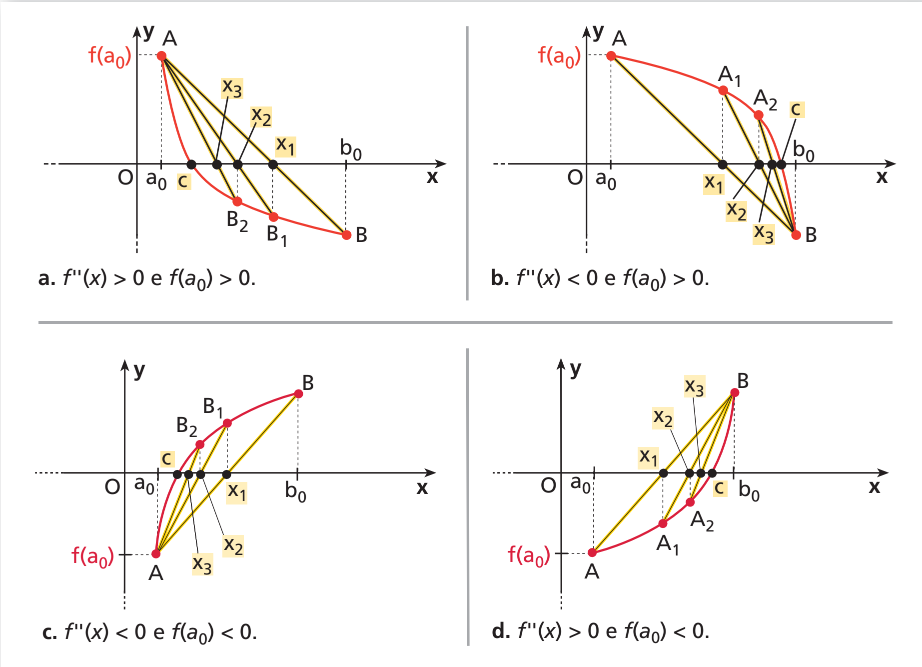
1. Calcoliamo $f(x_1)$.
2. Se $f(x_1) = 0$, allora x_1 è la soluzione esatta dell'equazione.
3. Se $f(x_1) \neq 0$, proseguiamo ponendo:

$$a_1 = x_1, \quad b_1 = b_0 \quad \text{se } f(x_1) < 0, \quad \text{perché } c \in\,]x_1; b_0[;$$
$$a_1 = a_0, \quad b_1 = x_1 \quad \text{se } f(x_1) > 0, \quad \text{perché } c \in\,]a_0; x_1[.$$

4. Tracciamo la retta che congiunge i punti $(a_1; f(a_1))$ e $(b_1; f(b_1))$. Indichiamo con x_2 il punto di intersezione con l'asse delle ascisse e ripetiamo il procedimento dall'inizio applicandolo all'intervallo $[a_1; b_1]$.

Otteniamo la successione $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, che contiene valori approssimati della soluzione c dell'equazione. Arresteremo la ricerca quando la differenza $|x_n - x_{n-1}|$ fra due soluzioni approssimate successive è minore della precisione ε che ci siamo prefissati.

Se la funzione $y = f(x)$ mantiene costante il segno della derivata seconda, cioè la concavità, il metodo diventa più semplice, perché la successione $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ è monotòna. Si possono presentare i casi della figura 12.



a. $f''(x) > 0$ e $f(a_0) > 0$.
b. $f''(x) < 0$ e $f(a_0) > 0$.
c. $f''(x) < 0$ e $f(a_0) < 0$.
d. $f''(x) > 0$ e $f(a_0) < 0$.

◀ **Figura 12**

Nel caso di funzioni la cui concavità non cambia, le secanti partono tutte dall'estremo la cui ordinata è concorde con il segno di f''.

Si dimostrano le seguenti **formule di ricorrenza**.

Se la concavità e il valore della funzione in a_0 sono concordi, ossia $f(a_0) \cdot f''(x) > 0$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_0 = b_0} \\ \boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \dfrac{a_0 - x_n}{f(a_0) - f(x_n)} \cdot f(x_n)} \end{cases}$$

Se la concavità e il valore della funzione in a_0 sono discordi, ossia $f(a_0) \cdot f''(x) < 0$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_0 = a_0} \\ \boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \dfrac{b_0 - x_n}{f(b_0) - f(x_n)} \cdot f(x_n)} \end{cases}$$

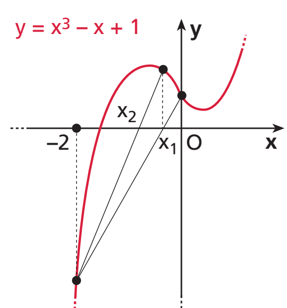
Queste formule di ricorrenza sono valide quando la concavità della funzione non cambia nell'intervallo $[a_0; b_0]$, cioè quando il segno di $f''(x)$ è costante su $[a_0; b_0]$.

Quando la successione $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ è decrescente, i suoi numeri sono approssimazioni per eccesso della radice c; quando invece è crescente, i suoi elementi sono valori approssimati per difetto.

ESEMPIO

Esaminiamo ancora l'equazione $x^3 - x + 1 = 0$ che ha la soluzione nell'intervallo $[a_0; b_0] = [-2; 0]$. Poniamo $f(x) = x^3 - x + 1$ e calcoliamo $f(-2) = -5$, $f(0) = 1$, $f'(x) = 3x^2 - 1$, $f''(x) = 6x$. Essendo $f''(x) < 0$ per ogni $x \in [-2; 0[$ possiamo applicare il metodo delle secanti e, poiché risulta $f(a_0) \cdot f''(x) = -5 \cdot 6x > 0$, per calcolare i valori approssimati della soluzione utilizziamo la prima formula di ricorrenza:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{-2 - x_n}{-5 - f(x_n)} \cdot f(x_n) = x_n - \dfrac{2 + x_n}{5 + f(x_n)} \cdot f(x_n) \end{cases}$$



Bergamini, Trifone, Barozzi MATEMATICA.BLU - Vol.5 © Zanichelli 2012 con Maths in English

Se $n = 0$, è $x_1 = x_0 - \dfrac{2 + x_0}{5 + f(x_0)} \cdot f(x_0)$ e quindi $x_1 = -0,3333$. Applichiamo di nuovo la formula, costruiamo la tabella e vediamo che i valori approssimati della soluzione sono decrescenti. Inoltre, dall'undicesimo in poi comincia a essere stabile la cifra dei millesimi. Pertanto la soluzione approssimata, a meno di 10^{-3}, è $-1,324$.

x_1	$-0,3333333$	x_5	$-1,2422589$	x_9	$-1,3218915$
x_2	$-0,6764706$	x_6	$-1,2885322$	x_{10}	$-1,3235181$
x_3	$-0,9606186$	x_7	$-1,3091422$	x_{11}	$-1,3242089$
x_4	$-1,1444253$	x_8	$-1,3180706$	x_{12}	$-1,3245021$

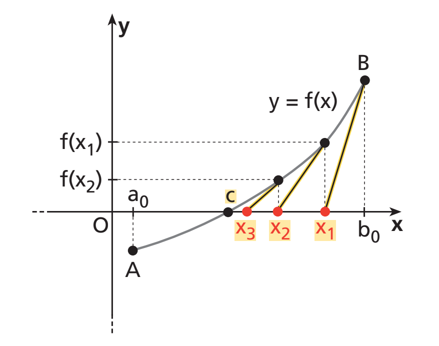
Mentre il metodo di bisezione è semplice e intuitivo, ma richiede numerose iterazioni per ottenere una buona precisione, con il metodo delle secanti, invece, possiamo ottenere una precisione migliore con un minor numero di iterazioni.

Il metodo delle tangenti

Il metodo delle tangenti che ora esamineremo si chiama anche metodo **di Newton-Raphson**.
Anche questo metodo si applica quando, in un intervallo $[a_0; b_0]$, la derivata seconda della funzione f è continua e mantiene costante il suo segno.

Cominciamo determinando la retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nell'estremo la cui ordinata è concorde con $f''(x)$.

▶ **Figura 13** La successione degli zeri approssimati di f dedotta con il metodo delle tangenti. Ogni approssimazione viene calcolata sostituendo al grafico di $f(x)$ una retta tangente, di cui cerchiamo l'intersezione con l'asse x.



Nell'esempio in figura abbiamo:

$$f''(x) > 0 \;\; \forall x \in [a_0; b_0] \;\text{ e }\; f(b_0) > 0.$$

L'equazione della tangente in B è:

$$y - f(b_0) = f'(b_0) \cdot (x - b_0).$$

Tale tangente interseca l'asse delle x nel punto di ascissa:

$$x_1 = b_0 - \frac{f(b_0)}{f'(b_0)}.$$

x_1 è un valore approssimato della radice c.

● x_1 non coincide con c perché sta sulla tangente e la concavità della curva non cambia.

Adesso calcoliamo $f(x_1)$ e determiniamo la tangente alla funzione nel punto $(x_1; f(x_1))$:

$$y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1).$$

Determiniamo nuovamente il punto di intersezione della tangente con l'asse delle x:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Reiterando il procedimento, otteniamo la seguente **formula di ricorrenza**:

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}.$$

La successione $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ è monotòna (in questo caso decrescente) e converge a c. I suoi termini sono valori approssimati (in questo caso per eccesso) di c. Il procedimento sarà arrestato quando la differenza $|x_n - x_{n-1}|$ è minore della precisione richiesta (in pratica, quando comincia a stabilizzarsi la cifra decimale da noi stabilita).
La formula di ricorrenza vale in generale e si applica quando $f''(x)$ è continua e ha segno costante in $[a_0; b_0]$ e il punto di partenza della successione approssimante è l'estremo dell'intervallo in cui la funzione ha lo stesso segno della derivata seconda.

● Se la successione $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ converge, allora $|x_n - x_{n-1}|$ tende a 0 per n tendente a $+\infty$.

ESEMPIO

Analizziamo di nuovo l'equazione $x^3 - x + 1 = 0$ nell'intervallo $[a_0; b_0] = [-2; 0]$.
Il punto di partenza è il primo estremo della curva, cioè $(-2; -5)$, perché:

$$f(-2) = -5 < 0 \quad \text{e} \quad f''(x) = 6x < 0, \quad \forall x \in [-2; 0[.$$

Utilizzando la formula di ricorrenza, compiliamo una tabella.

n	x_n	$f(x_n) = x_n^3 - x_n + 1$	$f'(x_n) = 3x_n^2 - 1$
0	-2	-5	11
1	$-1{,}545454545$	$-1{,}145755071$	6,165289256
2	$-1{,}359614916$	$-0{,}153704934$	4,545658159
3	$-1{,}325801345$	$-0{,}004624917$	4,273247619
4	$-1{,}324719049$	$-4{,}65772 \cdot 10^{-6}$	4,26464168
5	$-1{,}324717957$	$-4{,}74043 \cdot 10^{-12}$	4,264632999
6	$-1{,}324717957$	$-2{,}22044 \cdot 10^{-16}$	4,264632999

● Tutti i numeri della colonna «x_n», tranne il primo, sono calcolati con la formula di ricorrenza.

Osserviamo che i valori approssimati della soluzione sono crescenti.
Inoltre, dal sesto in poi sono stabili otto cifre decimali.
Avendo usato 9 cifre decimali, nulla si può dire sull'ultima cifra.
Pertanto, la soluzione approssimata a meno di 10^{-8} è $-1{,}32471795$.

Il metodo di Newton è molto efficiente se $f'(x_n)$ è grande (in valore assoluto); lo è poco se $f'(x_n)$ è piccola, cioè se f interseca l'asse delle ascisse con una pendenza piccola. In ogni caso, la convergenza è più rapida con il metodo delle tangenti che con il metodo delle secanti. Tuttavia, poiché richiede due valutazioni di funzione (una per la funzione f stessa e una per la sua derivata), il metodo delle tangenti «costa» il doppio del metodo delle secanti.

Uno svantaggio del metodo di Newton è quello di dover calcolare la derivata della funzione f. Quando f è definita da una formula semplice, questo non è un problema, ma nelle applicazioni reali può diventarlo. Il metodo delle secanti risolve questo problema. Le iterazioni del metodo delle secanti si ottengono, infatti, dalle iterazioni del metodo di Newton, in cui alla retta tangente sia stata sostituita la retta secante.

Si può dimostrare che, se il metodo delle secanti fornisce un valore della soluzione approssimato per difetto, il metodo delle tangenti ne fornisce uno per eccesso, e viceversa. Per questo l'uso congiunto dei due metodi permette di fare una valutazione sicura dell'errore. Per esempio, se a è un'approssimazione per difetto e b la è per eccesso, l'errore non supera $|b - a|$.

Il metodo iterativo o del punto unito

Si può dimostrare che un'equazione $f(x) = 0$ può essere trasformata in un'altra equivalente del tipo:

$$x = g(x).$$

Per esempio, l'equazione

$$\operatorname{sen} x - x \ln x = 0$$

si può scrivere:

$$x = \frac{\operatorname{sen} x}{\ln x}.$$

Se α è soluzione dell'equazione, allora $g(\alpha) = \alpha$. Il numero α è detto **punto unito** di g perché coincide con la propria immagine. Da qui il nome del metodo.

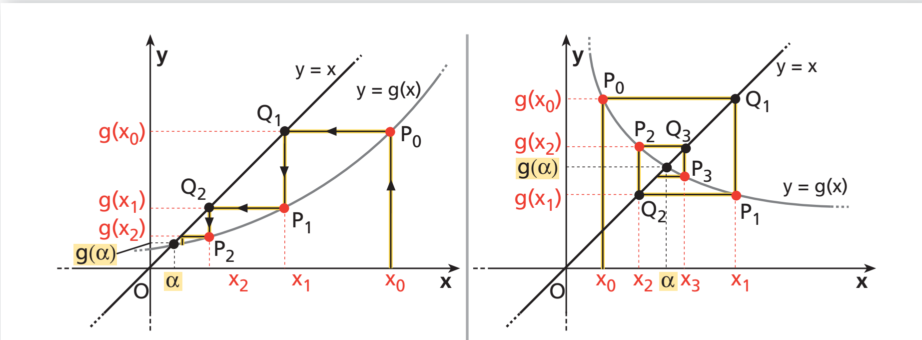
L'equazione $x = g(x)$ può essere trasformata nel sistema equivalente:

$$\begin{cases} y = x \\ y = g(x) \end{cases}$$

In questo modo la ricerca delle soluzioni dell'equazione data coincide con la determinazione dei punti di intersezione della funzione g con la bisettrice del primo e terzo quadrante del piano cartesiano.

L'idea su cui si basa questo metodo è quella di individuare un percorso a spezzata che si avvicini indefinitamente a uno di tali punti. Si procede nel seguente modo.

1. Scegliamo un'approssimazione iniziale x_0 sull'asse delle x.
2. Da qui mandiamo la retta parallela all'asse delle y, di equazione $x = x_0$, fino a incontrare il grafico della funzione $y = g(x)$ nel punto $P_0(x_0; g(x_0))$.
3. Da P_0 tracciamo la retta parallela all'asse delle x, di equazione $y = g(x_0)$, fino a intersecare la bisettrice nel punto $Q_1(x_1; g(x_0))$: poiché $x = y$, allora $x_1 = g(x_0)$.
4. Da Q_1 tracciamo la retta di equazione $x = x_1$ fino a intersecare la curva $y = g(x)$ nel punto $P_1(x_1; g(x_1))$.
5. Ritorniamo al punto 3 e ripetiamo il procedimento a partire da P_1.



a. La successione x_1, x_2, ..., x_n, ... è monotòna.

b. La successione x_1, x_2, ..., x_n, ... non è monotòna.

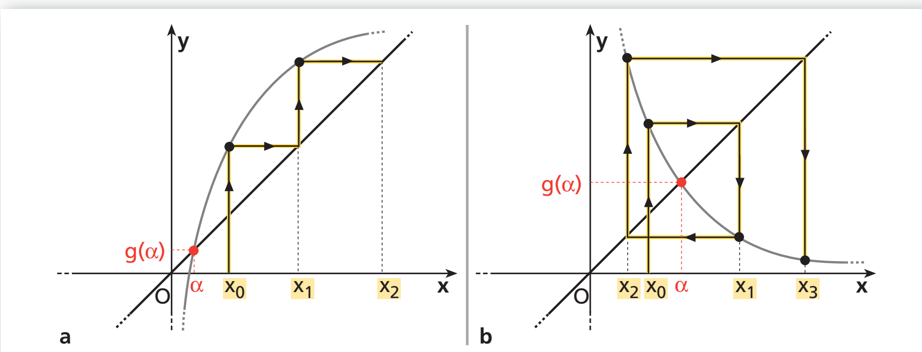
◀ **Figura 14** La rappresentazione grafica del metodo del punto unito.

Ripetendo le iterazioni otteniamo la seguente successione di numeri:

$$x_1 = g(x_0),\ \ x_2 = g(x_1),\ \ \dots,\ \ x_n = g(x_{n-1}),\ \ \dots$$

Se questa successione è convergente, il suo limite è soluzione dell'equazione data. A volte la successione è monotòna (figura 14*a*), a volte è oscillante attorno al limite (figura 14*b*).

● Nella figura 15 sono riportati due esempi di non convergenza. Se li confrontiamo con quelli precedenti, vediamo che la crescenza (caso *a*) o la decrescenza (caso *b*) della funzione *g* è più marcata.



◀ **Figura 15** La successione $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ non converge.

È possibile dimostrare la seguente **condizione sufficiente di convergenza**.

TEOREMA

Data un'equazione della forma $x = g(x)$, se è possibile determinare un intervallo $[a; b]$ in cui g è derivabile, ed esiste un numero m, con $0 < m < 1$, tale che $|g'(x)| \leq m \ \forall x \in [a; b]$, allora:

a) la successione $x_1 = g(x_0),\ x_2 = g(x_1),\ \dots,\ x_n = g(x_{n-1}),\ \dots$ converge qualunque sia il punto iniziale $x_0 \in [a; b]$;

b) il limite $\alpha = \lim_{n \to +\infty} x_n$ è l'unica soluzione dell'equazione data, nell'intervallo $[a; b]$.

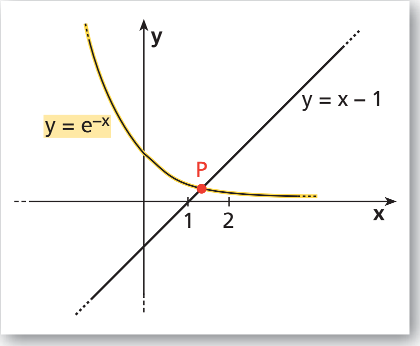
● La verifica delle condizioni di convergenza è laboriosa, mentre risulta più agevole l'applicazione del metodo. Per questo, in genere, non si controllano le condizioni, ma si applica il metodo, verificando empiricamente la convergenza.

ESEMPIO

Determiniamo un valore approssimato, a meno di 10^{-3}, della radice della seguente equazione:

$$e^{-x} - x + 1 = 0.$$

Per separare la radice scriviamo l'equazione nella forma $e^{-x} = x - 1$ e disegniamo i grafici delle funzioni $y = e^{-x}$ e $y = x - 1$.



▶ **Figura 16** I grafici delle funzioni $y = e^{-x}$ e $y = x - 1$ si intersecano in un unico punto P la cui ascissa è contenuta nell'intervallo [1; 2].

Per applicare il metodo del punto unito, scriviamo l'equazione nella forma:

$$x = e^{-x} + 1.$$

Osserviamo che la funzione $g(x) = e^{-x} + 1$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e inoltre $|g'(x)| = e^{-x} \leq \dfrac{1}{e} < 1, \forall x \in [1; 2]$; pertanto, nell'intervallo [1; 2], il procedimento di iterazione determina una successione convergente.

Scegliamo $x_0 = 1$ come primo valore approssimato e calcoliamo i successivi con la formula:

$$x_n = 1 + e^{-x_{n-1}}.$$

n	$1 + e^{-x_{n-1}}$	x_n
0		1
1	1,3679	1,3679
2	1,2546	1,2546
3	1,2852	1,2852
4	1,2766	1,2766
5	1,2790	1,2790
6	1,2783	1,2783
7	1,2785	1,2785

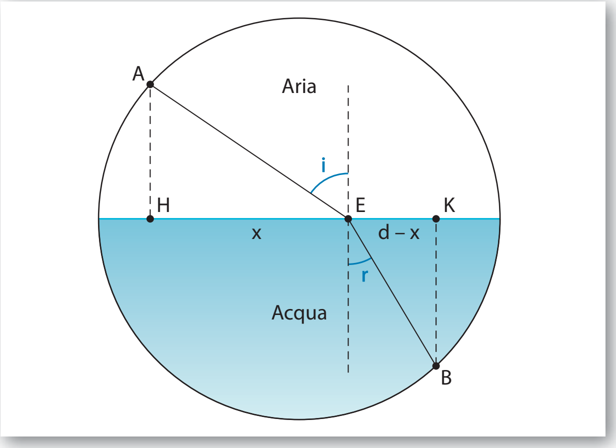
La tabella mostra che dalla sesta iterazione in poi i valori approssimati della soluzione differiscono meno di 10^{-3}. Dunque la soluzione approssimata, a meno di 10^{-3}, è 1,278.

FERMAT E LA RIFRAZIONE DELLA LUCE

Come si può determinare la funzione che esprime il tempo di percorrenza della luce da un punto *A* a un punto *B* situati in due mezzi diversi?

▶ **Il quesito completo a pag. 1847**

Possiamo schematizzare il cammino di un raggio di luce che subisce la rifrazione con una spezzata AEB come quella illustrata nella seguente figura.



Fermat si propone di ricavare la legge della rifrazione determinando il punto E che rende minimo il tempo di percorrenza della spezzata. Il tratto AE viene percorso in aria, mentre EB in acqua. È noto che la velocità della luce in un mezzo omogeneo è costante; supponendo che l'aria e l'acqua attraversati dal raggio siano due mezzi omogenei, chiamiamo v_1 la velocità della luce nell'aria e v_2 la velocità della luce nell'acqua.
L'obiettivo di Fermat può essere scomposto in due passi:

a) determinare la funzione «tempo di percorrenza della spezzata AEB»;

b) determinare il minimo di tale funzione.

Per quanto riguarda il primo obiettivo, dette a la misura della lunghezza di AH, b quella di BK, d quella di HK e indicata con x la misura della lunghezza di HE, applicando il teorema di Pitagora, si ha:

$$\overline{AE} = \sqrt{a^2 + x^2}; \qquad \overline{EB} = \sqrt{b^2 + (d - x)^2}.$$

Il tempo di percorrenza di AE è

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1},$$

mentre il tempo di percorrenza di BE è

$$t_2 = \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2}.$$

La funzione «tempo di percorrenza della spezzata AEB» è quindi espressa dall'equazione:

$$f(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2}.$$

Calcoliamo la sua derivata:

$$f'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{v_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}.$$

Per il principio di Fermat, il valore di x cercato deve rendere minima $f(x)$, quindi deve essere

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d - x}{v_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}},$$

ossia:

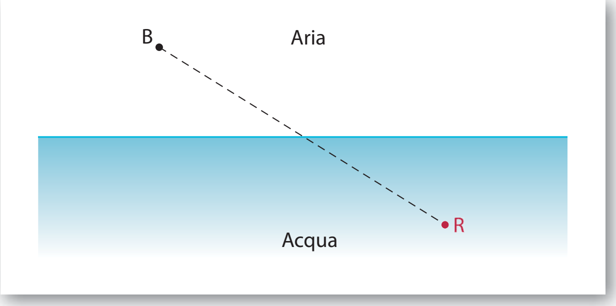
$$\frac{\dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{\dfrac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Il numeratore del primo membro è il coseno dell'angolo $A\widehat{E}H$, mentre il denominatore è il coseno dell'angolo $B\widehat{E}K$. Passando ai complementari degli angoli $A\widehat{E}H$ e $B\widehat{E}K$, ossia agli angoli di incidenza i e di rifrazione r formati dai raggi incidente e rifratto con la normale alla superficie di separazione dei due mezzi, otteniamo la legge di rifrazione:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Il bravo bagnino

Il principio di Fermat può essere compreso meglio studiando questo problema, attribuito a Richard Feynman.
Dalla spiaggia, il bagnino B vede il signor R che sta annegando in mare.
Perché, per salvarlo, non si muove in linea retta? Quale traiettoria deve seguire?



LABORATORIO DI MATEMATICA
LO STUDIO DELLE FUNZIONI

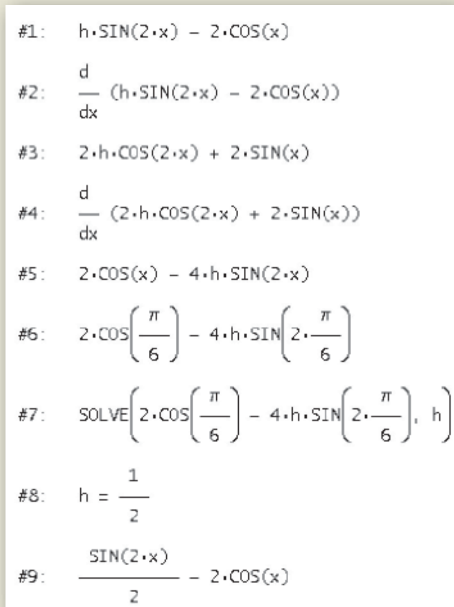
ESERCITAZIONE GUIDATA

Costruiamo una sessione di lavoro di Derive che, fra le funzioni della famiglia $f(x)=h\,\text{sen}\,(2x)-2\cos x$, con $h \in \mathbb{R}$, trovi quella che presenta un punto di flesso in corrispondenza di una data x.

Assegniamo alla x il valore $\frac{\pi}{6}$.

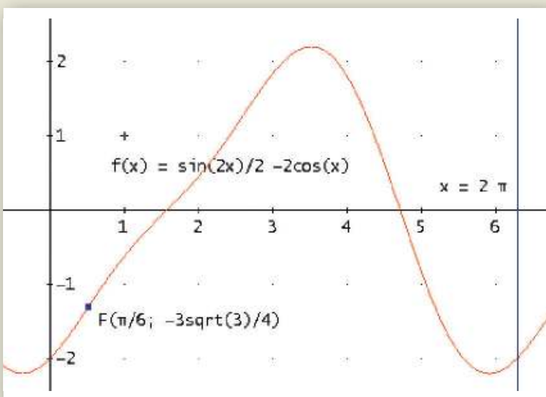
Abbozziamo il grafico della $f(x)$ trovata nel periodo $T = [0; 2\pi[$.

- Attiviamo Derive e inseriamo nella #1 l'espressione della famiglia di funzioni (figura 1).
- Con *Calcola_Derivata* applicata sulla #1 determiniamo la derivata prima di $f(x)$.
- Con *Calcola_Derivata* applicata sulla #3 determiniamo la derivata seconda di $f(x)$.
- Con *Semplifica_Sostituisci variabili* sostituiamo alla x della derivata seconda il valore di x proposto, ricavando un'espressione in h che, affinché il punto sia di flesso, deve risultare nulla.
- Con *Risolvi_Espressione* risolviamo l'equazione e troviamo il valore $h = \frac{1}{2}$.



▲ **Figura 1**

- Con *Semplifica_Sostituisci variabili* sostituiamo nella #1 il valore trovato di h, pervenendo in #9 alla funzione richiesta.
- Lasciamo al lettore l'applicazione degli strumenti grafici di Derive per costruire il disegno di figura 2.



▲ **Figura 2**

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 19 esercitazioni in più

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer, realizza una sessione di lavoro in cui, dopo aver ricevuto il valore del parametro k, si trovino le coordinate degli eventuali punti di massimo e di minimo relativi, per ognuna delle seguenti funzioni.

1 $f(x) = x^3 + kx^2 + 3x$

2 $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + k}$

3 $f(x) = kx + \dfrac{1}{x^2}$

LA TEORIA IN SINTESI
LO STUDIO DELLE FUNZIONI

1. LO STUDIO DI UNA FUNZIONE

■ Per tracciare il grafico di una funzione $y = f(x)$ possiamo procedere esaminando i seguenti punti.

- Il **dominio** della funzione.
- Eventuali **simmetrie** e **periodicità**:
  – se la funzione è *pari*, il grafico è simmetrico rispetto all'asse y;
  – se è *dispari*, il grafico è simmetrico rispetto all'origine;
  – se è *periodica* di periodo T, possiamo limitarci a studiare la funzione in un solo intervallo di ampiezza T.
- Le coordinate degli eventuali **punti di intersezione** del grafico della funzione con gli assi cartesiani.
- Il **segno della funzione**: stabiliamo gli intervalli in cui essa è positiva, ponendo $f(x) > 0$ e trovando, di conseguenza, anche gli intervalli in cui è negativa.
- Il comportamento della funzione agli estremi del dominio: calcoliamo i relativi limiti e cerchiamo poi gli eventuali **asintoti** della funzione. Classifichiamo inoltre gli eventuali punti di **discontinuità**, specificando se sono di prima, di seconda o di terza specie.
- La **derivata prima** e il suo dominio. Dallo studio del segno della derivata prima:
  – determiniamo gli intervalli in cui la funzione è *crescente* ($f'(x) > 0$) e, di conseguenza, quelli in cui è *decrescente* ($f'(x) < 0$);
  – cerchiamo gli eventuali punti di *massimo* o di *minimo relativo* e di *flesso orizzontale* e i punti di non derivabilità per $f(x)$ (*flessi verticali*, *cuspidi* e *punti angolosi*).
- La **derivata seconda** e il suo dominio. Dallo studio del segno della derivata seconda:
  – determiniamo gli intervalli in cui il grafico volge la *concavità* verso l'alto ($f''(x) > 0$) o verso il basso ($f''(x) < 0$);
  – cerchiamo i *punti di flesso* a tangente obliqua ed eventualmente la tangente inflessionale.

2. I GRAFICI DI UNA FUNZIONE E DELLA SUA DERIVATA

■ Dato il grafico di una funzione $f(x)$, è possibile ricavare informazioni relative al grafico della funzione derivata e viceversa. In particolare, se $f'(x)$ e $f''(x)$ esistono sempre, consideriamo che:

- nei punti di massimo o di minimo della funzione $f(x)$ si ha $f'(x) = 0$;
- negli intervalli in cui la funzione $f(x)$ è crescente si ha $f'(x) > 0$ e negli intervalli in cui la funzione è decrescente si ha $f'(x) < 0$;
- nei punti di flesso si ha $f''(x) = 0$ e quindi $f'(x)$ ha la tangente orizzontale e può avere un massimo o un minimo.

3. APPLICAZIONI DELLO STUDIO DI UNA FUNZIONE

■ Lo studio delle funzioni è utile, fra l'altro, per risolvere **equazioni parametriche**, cioè equazioni nella variabile x che dipendono da un parametro k.

4. LA RISOLUZIONE APPROSSIMATA DI UN'EQUAZIONE

- Data l'equazione $f(x) = 0$, la **risoluzione approssimata** è composta da due fasi:
  1. la **separazione delle radici** della funzione $y = f(x)$, ossia la determinazione di intervalli che contengono *soltanto una* radice;
  2. il calcolo di un valore approssimato con la **precisione** voluta.

- **Teorema di esistenza degli zeri**
  Se f è una funzione continua nell'intervallo $[a; b]$ limitato e chiuso e $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste *almeno* un punto c interno ad $[a; b]$ tale che $f(c) = 0$.

  Con le stesse ipotesi del teorema di esistenza degli zeri, valgono inoltre i seguenti teoremi.

- **Teoremi di unicità dello zero**
  Primo. Se la derivata $f'(x)$ è non nulla in ogni punto di $]a; b[$, la funzione ammette *soltanto uno* zero in $]a; b[$.
  Secondo. Se f è derivabile due volte e la derivata seconda $f''(x)$ ha segno costante in $]a; b[$, la funzione ammette *un unico* zero in $]a; b[$.

- **Il metodo di bisezione o dicotomico**
  Sia $[a_0; b_0]$ un intervallo in cui l'equazione $f(x) = 0$ ammette *una* radice, e quindi $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ (per esempio $f(a_0) < 0$ e $f(b_0) > 0$):
  1. calcoliamo il punto medio dell'intervallo $[a_0; b_0]$: $m_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$;
  2. calcoliamo $f(m_0)$; se $f(m_0) = 0$, allora m_0 è la soluzione esatta e il procedimento è concluso;
  3. se invece $f(m_0) \neq 0$, allora m_0 è un valore approssimato della soluzione a meno della quantità $\varepsilon_0 = \dfrac{b_0 - a_0}{2}$;
  4. se l'approssimazione ε_0 è quella voluta, il calcolo è terminato, in caso contrario proseguiamo;
  5. scegliamo il semintervallo contenente la radice confrontando $f(m_0)$ con $f(a_0)$ e $f(b_0)$ e poniamo:

  $$a_1 = m_0, \quad b_1 = b_0 \qquad \text{se } f(m_0) < 0,$$
  $$a_1 = a_0, \quad b_1 = m_0 \qquad \text{se } f(m_0) > 0;$$

  6. ritorniamo al punto 1 e ripetiamo il procedimento per l'intervallo $[a_1; b_1]$.

  Se l'ultimo intervallo è $[a_n; b_n]$, allora l'*approssimazione* con cui abbiamo determinato la soluzione è $\varepsilon_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$.

- **Il metodo delle secanti o di Lagrange**
  Sia $[a_0; b_0]$ un intervallo in cui l'equazione $f(x) = 0$ ammette *una* radice, e quindi $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ (per esempio $f(a_0) < 0$ e $f(b_0) > 0$):
  1. tracciamo la retta AB di equazione $\dfrac{y - f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = \dfrac{x - a_0}{b_0 - a_0}$: l'ascissa x_1 del punto di intersezione con l'asse delle ascisse fornisce un valore approssimato della soluzione;
  2. se $f(x_1) = 0$, allora x_1 è la soluzione esatta dell'equazione;
  3. se $f(x_1) \neq 0$, proseguiamo ponendo:

  $$a_1 = x_1, \quad b_1 = b_0 \qquad \text{se } f(x_1) < 0, \qquad \text{perché } c \in \,]x_1; b_0[,$$
  $$a_1 = a_0, \quad b_1 = x_1 \qquad \text{se } f(x_1) > 0, \qquad \text{perché } c \in \,]a_0; x_1[;$$

  4. tracciamo la retta che congiunge i punti $(a_1; f(a_1))$ e $(b_1; f(b_1))$: l'ascissa x_2 del punto di intersezione con l'asse delle ascisse fornisce un valore approssimato della soluzione;
  5. ritorniamo al punto 2 e ripetiamo il procedimento per il valore x_2 e l'intervallo $[a_1; b_1]$.

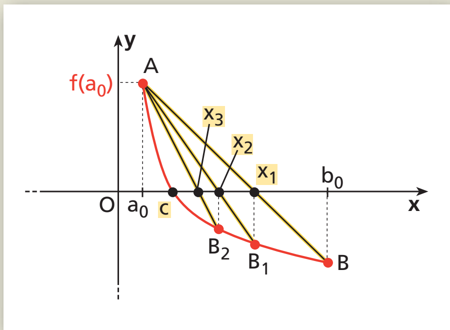
  Proseguiamo così finché non raggiungiamo la precisione voluta.

  L'*approssimazione* è data dalla quantità: $\varepsilon_n = |x_n - x_{n-1}|$ (x_n e x_{n-1} sono gli ultimi due valori approssimati che abbiamo calcolato).

  Quando $y = f(x)$ mantiene costante il segno della concavità, valgono le seguenti **formule di ricorrenza**.

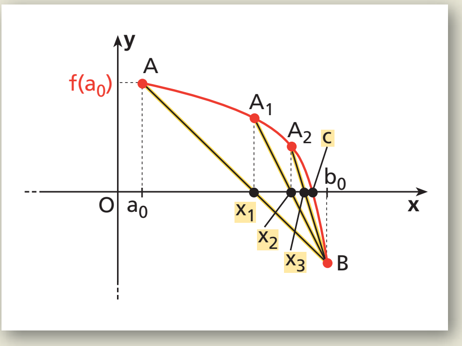
Se $f''(x)$ e $f(a_0)$ sono concordi, ossia $f(a_0) \cdot f''(x) > 0$, allora:

$$\boldsymbol{x_0 = b_0 \text{ e } x_{n+1} = x_n - \frac{a_0 - x_n}{f(a_0) - f(x_0)} \cdot f(x_n)}.$$



Se $f''(x)$ e $f(a_0)$ sono discordi, ossia $f(a_0) \cdot f''(x) < 0$, allora:

$$\boldsymbol{x_0 = a_0 \text{ e } x_{n+1} = x_n - \frac{b_0 - x_n}{f(b_0) - f(x_n)} \cdot f(x_n)}.$$



Il metodo delle tangenti (o di Newton-Raphson)

Si applica all'equazione $f(x) = 0$ se f'' è continua e ha segno costante nell'intervallo $[a; b]$.

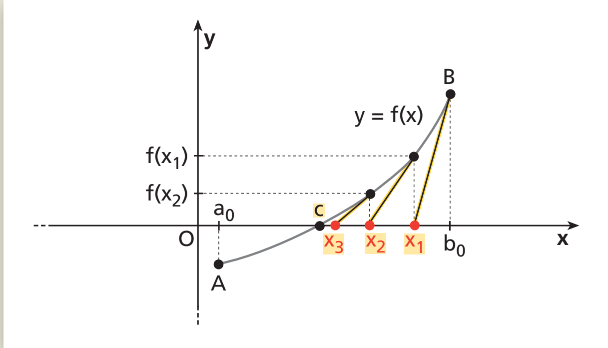
1. Tracciamo la tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nell'estremo $(x_0; f(x_0))$ la cui ordinata è concorde con $f''(x)$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

2. Tale retta interseca l'asse delle x nel punto di ascissa $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$: x_1 è un valore approssimato della soluzione cercata.

3. Ripetendo il procedimento per il punto $(x_1; f(x_1))$, otteniamo una successione di soluzioni approssimate definite dalla seguente formula di ricorrenza:

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}.$$



Arrestiamo il procedimento quando l'*approssimazione*, ossia la differenza $|x_n - x_{n-1}|$, è inferiore o uguale a quella richiesta.

Il metodo iterativo o del punto unito

Se scriviamo l'equazione $f(x) = 0$ nella forma $x = g(x)$, le soluzioni sono rappresentate dalle intersezioni fra la retta di equazione $y = x$ e il grafico della funzione $y = g(x)$.

1. Sull'asse x scegliamo un punto di ascissa x_0.
2. Tracciamo la retta di equazione $x = x_0$ fino a incontrare il grafico di g in $P_0(x_0; g(x_0))$.
3. Da P_0 tracciamo la retta $y = g(x_0)$ fino a incontrare la retta $y = x$ nel punto $Q_1(x_1; g(x_0))$.
4. Da Q_1 tracciamo la retta $x = x_1$ fino a intersecare la funzione g nel punto $P_1(x_1; g(x_1))$.
5. Ripetiamo il procedimento dal punto 3 per il punto P_1.

Otteniamo così la successione di numeri $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, …, $x_n = g(x_{n-1})$, …
Se tale successione è *convergente*, il suo limite è soluzione dell'equazione.

Condizione sufficiente di convergenza

Data un'equazione della forma $x = g(x)$, se è possibile determinare un intervallo $[a; b]$ in cui g è derivabile e $|g'(x)| \leq m \ \forall x \in [a; b]$, con $0 < m < 1$, allora la successione $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, …, $x_n = g(x_{n-1})$, … converge qualunque sia il punto iniziale $x_0 \in [a; b]$ e il limite $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ è l'unica soluzione dell'equazione data, nell'intervallo $[a; b]$.

1. LO STUDIO DI UNA FUNZIONE

Teoria a pag. 1848

Dalle caratteristiche di una funzione al suo grafico

Traccia il grafico probabile della funzione $y = f(x)$, sapendo che ha le seguenti caratteristiche.

1

1. Il dominio è $\mathbb{R} - \{-1\}$.
2. L'intersezione con gli assi è in $O(0; 0)$.
3. $f(x) > 0$ per $x < -1 \vee x > 0$, $f(x) < 0$ per $-1 < x < 0$.
4. Esistono un asintoto orizzontale $y = 1$ e un asintoto verticale $x = -1$ con $\lim_{x \to 1^\pm} f(x) = \mp\infty$.
5. Non ci sono massimi e minimi.
6. Il punto $O(0; 0)$ è un flesso orizzontale ascendente e $F\left(1; \frac{1}{2}\right)$ è un flesso obliquo discendente.

2

1. Il dominio è $\mathbb{R}$.
2. L'intersezione con gli assi è in $(0; 0)$.
3. $f(x) > 0$ in $\mathbb{R} - \{0\}$.
4. Esiste un asintoto orizzontale $y = 1$.
5. C'è un minimo in $(0; 0)$.
6. Vi sono due flessi obliqui $F_1\left(-2; \frac{1}{2}\right)$ e $F_2\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

3

1. Il dominio è $\mathbb{R} - \{1\}$.
2. Le intersezioni con gli assi sono in $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $(-1; 0)$ e in $(0; 1)$.
3. $f(x) > 0$ per $\left(x < \frac{1}{2} \wedge x \neq -1\right) \vee x > 1$, $f(x) < 0$ per $\frac{1}{2} < x < 1$.
4. Esistono un asintoto verticale $x = 1$ e un asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$, mentre si ha $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
5. Ci sono un minimo in $(-1; 0)$ e un massimo in $(0; 1)$.
6. C'è un flesso in $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

4

1. Il dominio è $\mathbb{R} - \{0\}$.
2. L'intersezione con l'asse x è in $(2; 0)$.
3. $f(x) > 0$ per $x < 2$, $f(x) < 0$ per $x > 2$.
4. Si ha $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e $x = 0$ è asintoto verticale.
5. Non sono presenti massimi e minimi.
6. Non ci sono flessi.

5

1. Il dominio è $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$.
2. L'intersezione con gli assi è nell'origine.
3. $f(x) > 0$ per $x < -1 \vee x > 1$, $f(x) < 0$ per $-1 < x < 1 \wedge x \neq 0$.
4. Esistono due asintoti verticali $x = \pm 1$ e un asintoto orizzontale $y = 0$.
5. C'è un massimo nell'origine.
6. Non vi sono flessi.

6

1. Il dominio è $\mathbb{R} - \{0\}$.
2. Non interseca gli assi cartesiani.
3. $f(x) > 0$ per $x > 0$, $f(x) < 0$ per $x < 0$.
4. Esistono un asintoto verticale $x = 0$, un asintoto obliquo a destra di equazione $y = x$ e un asintoto orizzontale a sinistra $y = -1$.
5. C'è un minimo nel punto $(1; 4)$.
6. Non vi sono flessi.

7

1. Il dominio è: $x \leq 0 \vee x \geq 1$.
2. Interseca gli assi in $(0; 0)$ e $(1; 0)$.
3. $f'(x) > 0$ per $x > 1 \wedge x \neq 2$ e $f'(x) < 0$ per $x < 0$.
4. $f''(x) > 0$ per $1 < x < 2$ e $f''(x) < 0$ per $x < 0 \vee x > 2$.
5. Nei punti $x = 0$ e $x = 2$, $f(x)$ non è derivabile.

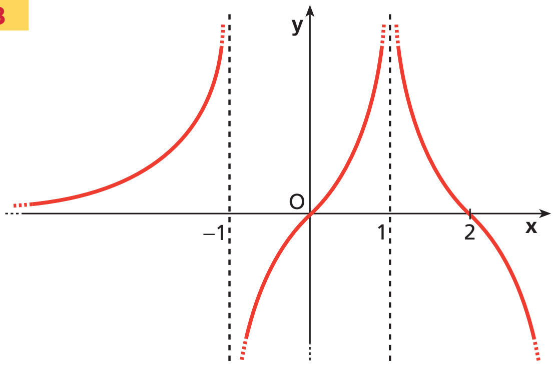
Dal grafico di una funzione alle sue caratteristiche

Dalla figura rappresentata in ogni grafico deduci:

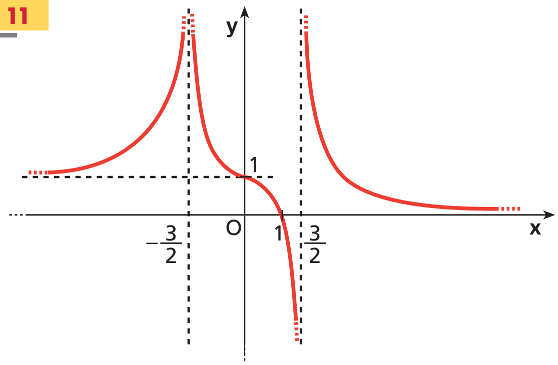
1. **il dominio della funzione rappresentata;**
2. **le intersezioni con gli assi;**
3. **gli intervalli in cui la funzione è positiva e negativa;**
4. **i limiti agli estremi del dominio e le equazioni degli asintoti;**
5. **i punti di massimo e minimo relativi;**
6. **i punti di flesso, evidenziando la concavità.**

Bergamini, Trifone, Barozzi MATEMATICA.BLU - Vol.5 © Zanichelli 2012 con Maths in English

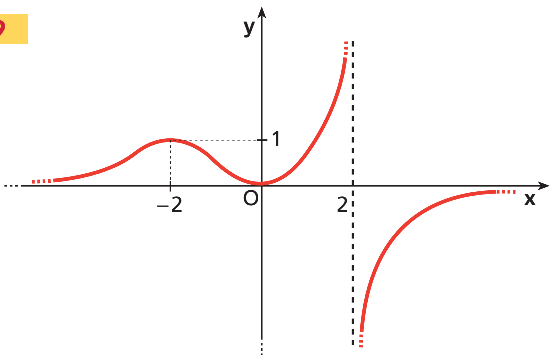
8



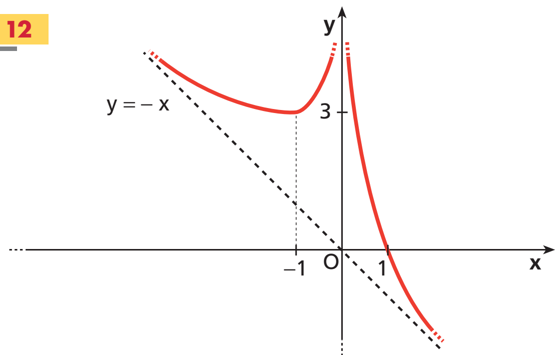
11



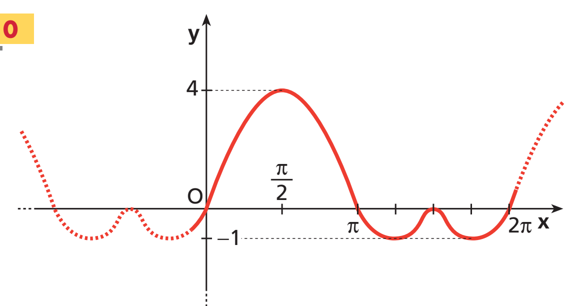
9



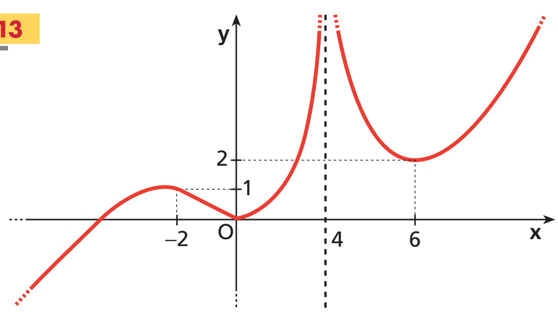
12



10



13



Dalle caratteristiche di una funzione alla sua espressione analitica

14 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo l'espressione analitica di una funzione $f(x)$ che presenta le seguenti caratteristiche:
1. il dominio è $\mathbb{R} - \{2\}$;
2. i punti di intersezione con gli assi sono $O(0; 0)$ e $A(3; 0)$;
3. $x = 2$ è asintoto verticale e $y = -2$ è asintoto orizzontale;
4. $f(x) > 0$ per $0 < x < 3$.

1. Consideriamo che il dominio è $\mathbb{R} - \{2\}$ e $x = 2$ è asintoto verticale. Possiamo scrivere, come funzione che ha queste caratteristiche, $f(x) = \dfrac{N(x)}{(x-2)^n}$, con n e $N(x)$ da precisare.

2. La funzione $f(x)$ passa per l'origine e per $A(3; 0)$, quindi $f(0) = 0$ e $f(3) = 0$, ossia $f(x) = 0$ per $x = 0$ e per $x = 3$, perciò una possibilità è:

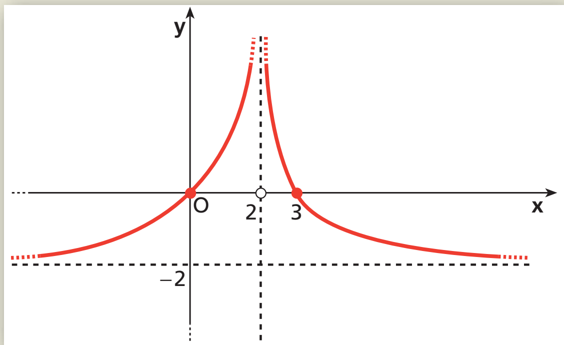
$f(x) = \dfrac{kx(x-3)}{(x-2)^n}$, con k e n da definire.

3. Siccome $y = -2$ è asintoto orizzontale, deve essere $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -2$, perciò il numeratore e il denominatore di $f(x)$ devono essere dello stesso grado, e il rapporto dei coefficienti di grado massimo deve essere -2; quindi:

$f(x) = \dfrac{-2x(x-3)}{(x-2)^2}$.

4. La funzione $f(x)$ trovata rispetta anche la condizione di essere positiva per $0 < x < 3$.

Il grafico della funzione potrebbe essere quello della figura.



15 Scrivi l'espressione analitica di una funzione $f(x)$ che:
1. ha come dominio $\mathbb{R}$;
2. non ha alcun asintoto;
3. passa per l'origine e interseca l'asse x nei punti $A(-2; 0)$ e $B(2; 0)$;
4. è dispari;
5. ha $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $[y = x^3 - 4x]$

16 Scrivi l'espressione analitica di una funzione $f(x)$ che:
1. ha come dominio $\mathbb{R}$;
2. ha l'asse x come asintoto orizzontale;
3. $f(x) \geq 0$ per $x \geq 1$;
4. interseca l'asse y nel punto $(0; -1)$. $\left[y = \dfrac{x-1}{x^2+1}\right]$

17 Scrivi l'espressione analitica di una funzione $f(x)$ che:
1. ha come dominio $\mathbb{R} - \{1, -1\}$;
2. passa per l'origine;
3. ha come asintoti verticali le rette $x = -1$ e $x = 1$;
4. ha $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. $\left[y = \dfrac{2x}{x^2-1}\right]$

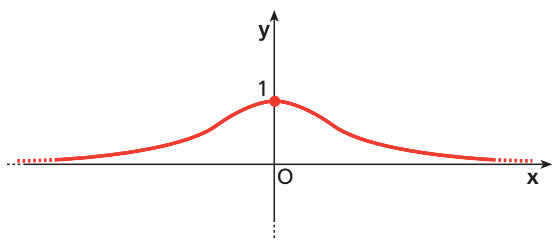
18 Scrivi l'espressione analitica di una funzione $f(x)$ che:
1. ha come dominio $x \geq -1$;
2. è sempre positiva nel suo dominio;
3. non ha asintoti;
4. interseca l'asse y in $(0; 2)$. $[y = 2\sqrt{x+1}]$

19 Scrivi l'espressione analitica di una funzione $f(x)$ che:
1. ha come dominio $\mathbb{R} - \{2, -2\}$;
2. interseca l'asse x nei punti $A(-5; 0)$ e $B(5; 0)$;
3. ha come asintoti verticali le rette $x = -2$ e $x = 2$;
4. ha come asintoto orizzontale la retta $y = 1$. $\left[y = \dfrac{x^2-25}{x^2-4}\right]$

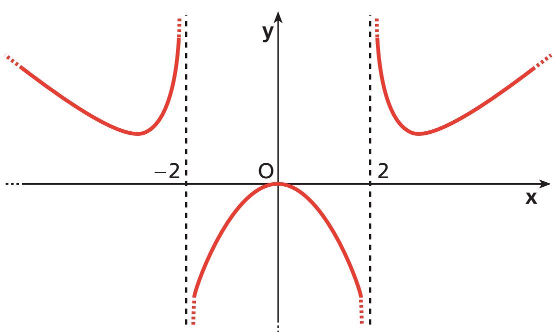
20 Scrivi l'espressione analitica di una funzione $f(x)$ che:
1. ha come dominio $\mathbb{R}$;
2. non ha asintoti;
3. è pari;
4. ha $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$;
5. interseca l'asse y in $(0; 3)$. $[y = -x^4 + x^2 + 3]$

TEST Quale delle seguenti funzioni è rappresentata dal grafico della figura?

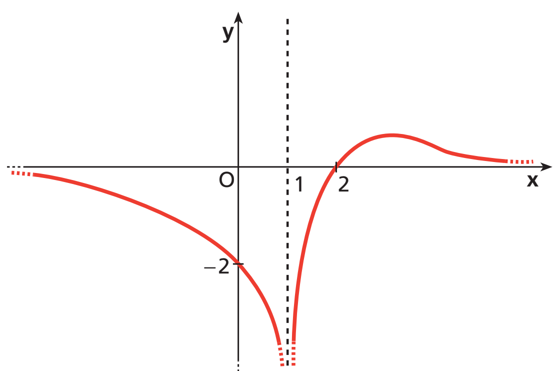
21
A $y = x^2 + 1$
B $y = \dfrac{1}{x+1}$
C $y = \dfrac{1}{x^2+1}$
D $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$
E $y = \dfrac{-1}{x^2-1}$



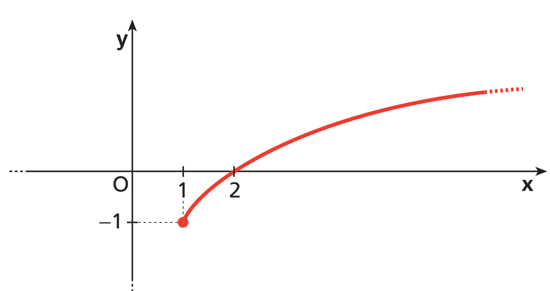
22
A $y = x(x^2 - 4)$
B $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$
C $y = \dfrac{x^4}{x^2-4}$
D $y = \dfrac{4x^2}{x^2-4}$
E $y = \dfrac{x^2-4}{x^4}$



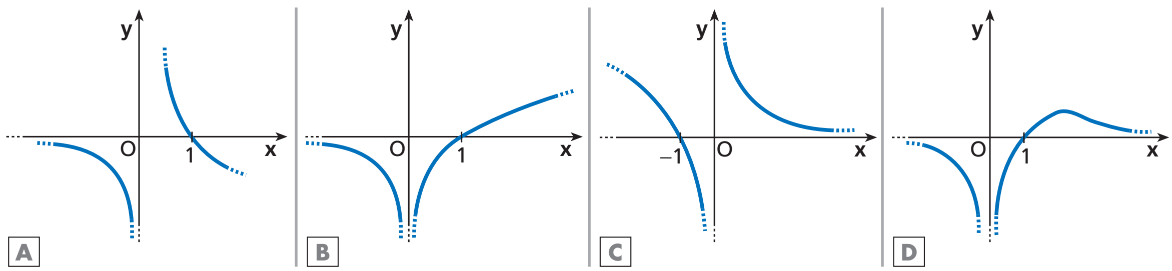
23
A $y = \dfrac{-x+2}{(x-1)^2}$
B $y = \dfrac{x-2}{(x-1)^3}$
C $y = \dfrac{x-2}{(x-1)^2}$
D $y = \dfrac{x-2}{x-1}$
E $y = \dfrac{x+2}{(x+1)^2}$



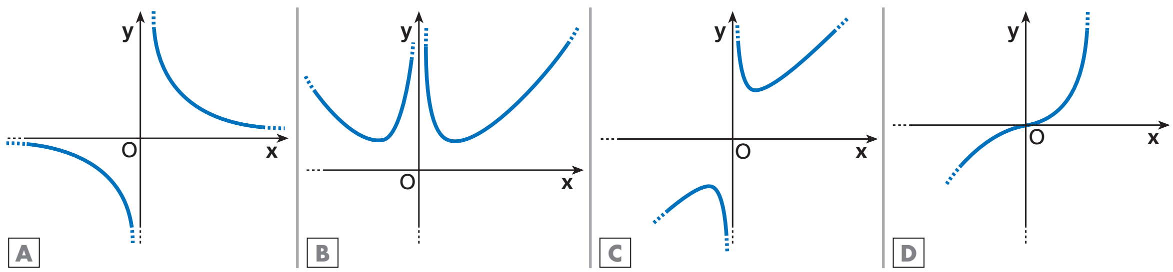
24
A $y = \sqrt{x-2}$
B $y = (x-2)^2 - 1$
C $y = \sqrt{x-2} + 1$
D $y = \sqrt{x-1} - 1$
E $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} - 1$



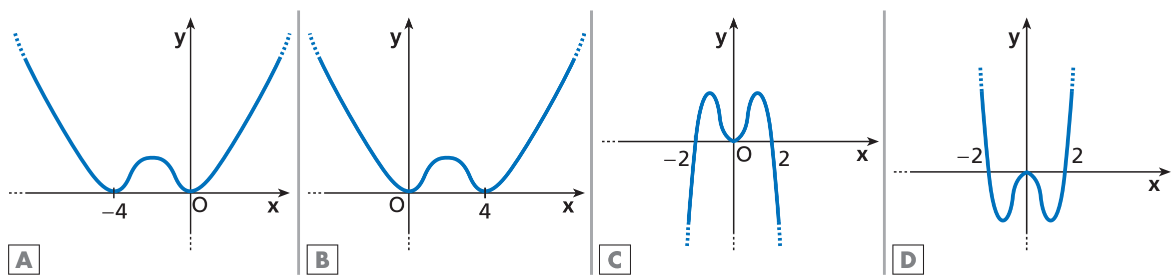
25 **TEST** Quale dei seguenti grafici rappresenta l'andamento della funzione $y = \dfrac{x-1}{x^2}$?



26 **TEST** Fra i seguenti grafici, quale rappresenta l'andamento della funzione $y = x + \dfrac{1}{x}$?



27 **TEST** A quale dei seguenti grafici corrisponde la funzione $y = x^4 - 4x^2$?



Le funzioni polinomiali

Le funzioni polinomiali,

$y = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, con $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$,

- hanno come dominio $\mathbb{R}$;
- non hanno punti di discontinuità;
- non hanno asintoti (escludendo le funzioni lineari, il cui grafico è una retta e quindi coincide con l'asintoto);
- non hanno cuspidi, flessi verticali o punti angolosi;
- se sono funzioni dispari (escludendo $y = x$), hanno un flesso in $O(0; 0)$.

28 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$y = x^4 - 3x^2 + 2.$

1. Determiniamo il dominio della funzione. Poiché non esistono limitazioni per x, si ha D: $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
2. Controlliamo se la funzione presenta delle simmetrie.
   Essendo $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 2 = x^4 - 3x^2 + 2 = f(x)$, la funzione è pari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

3. Intersezioni con gli assi.

Asse y:

$$\begin{cases} y = x^4 - 3x^2 + 2 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \text{ il punto di intersezione con l'asse } y \text{ è } A(0; 2).$$

Asse x:

$$\begin{cases} y = x^4 - 3x^2 + 2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^4 - 3x^2 + 2 = 0.$$

L'equazione ha per soluzioni:

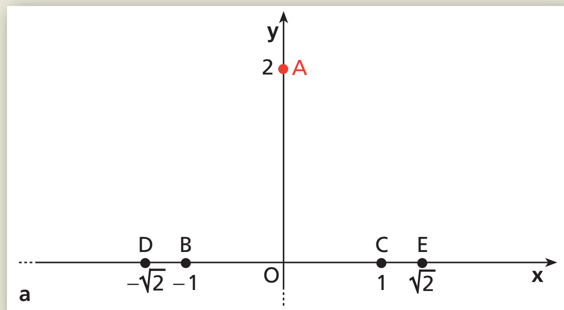
$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -\sqrt{2}, x_4 = \sqrt{2}$.

I punti di intersezione con l'asse x sono:

$B(-1; 0)$, $C(1; 0)$,

$D(-\sqrt{2}; 0)$, $E(\sqrt{2}; 0)$.

Tracciamo gli assi cartesiani per rappresentare le informazioni ottenute finora (figura *a*).



4. Studiamo il segno della funzione.

$x^4 - 3x^2 + 2 > 0$

$x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2)(x^2 - 1) > 0.$

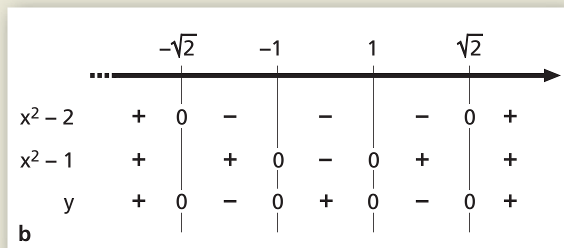
Primo fattore:

$x^2 - 2 > 0$ per $x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$.

Secondo fattore:

$x^2 - 1 > 0$ per $x < -1 \vee x > 1$.

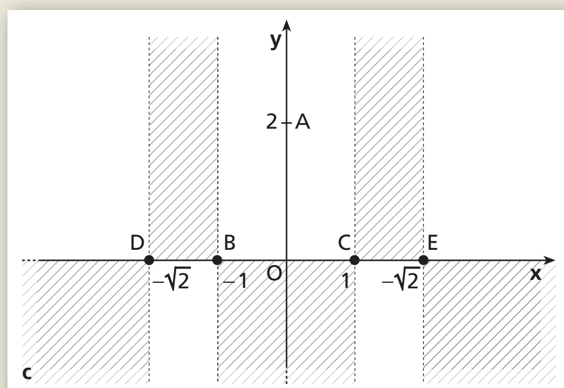
Compiliamo il quadro dei segni (figura *b*).



$f(x) > 0$,

per $x < -\sqrt{2} \vee -1 < x < 1 \vee x > \sqrt{2}$.

Rappresentiamo questi risultati nel riferimento cartesiano, tratteggiando le zone in cui **non** ci sono punti del grafico della funzione (figura *c*).



5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio: $\lim_{x \to \pm\infty} (x^4 - 3x^2 + 2) = +\infty$. Poiché la funzione è polinomiale, con grado maggiore di 1, **non** esiste un asintoto obliquo.

6. Calcoliamo la derivata prima e studiamo il suo segno (per la ricerca di eventuali massimi, minimi e flessi):

$y' = 4x^3 - 6x,$

$y' > 0 \quad \rightarrow \quad 2x \cdot (2x^2 - 3) > 0.$

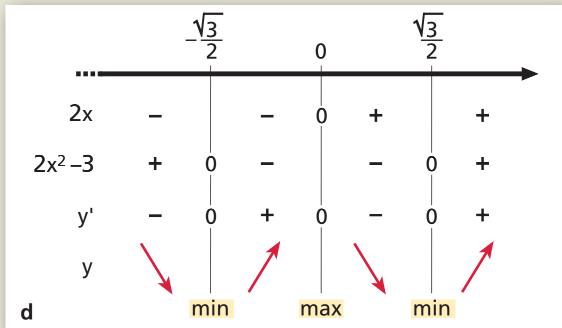
Primo fattore: $2x > 0$ per $x > 0$.

Secondo fattore: $2x^2 - 3 > 0$,

per $x < -\sqrt{\frac{3}{2}} \vee x > \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Compiliamo il quadro relativo al segno della derivata prima e segniamo gli intervalli in cui la funzione è crescente e quelli in cui è decrescente (figura *d*).

Per $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ si hanno due punti di minimo.



Calcoliamo le relative ordinate, sostituendo il valore delle ascisse nella funzione e otteniamo:

$G\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; -\frac{1}{4}\right)$, $H\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; -\frac{1}{4}\right)$.

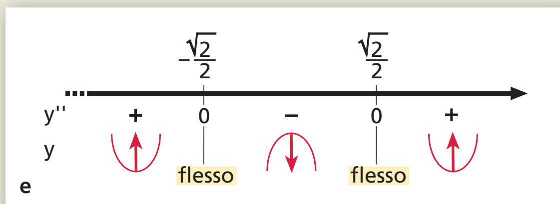
Per $x = 0$ si ha un massimo: $A(0; 2)$.

7. Studiamo la derivata seconda per la ricerca degli eventuali flessi:

$y'' = 12x^2 - 6 = 6 \cdot (2x^2 - 1)$,

$y'' > 0 \quad \rightarrow \quad 6 \cdot (2x^2 - 1) > 0 \quad \rightarrow \quad x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Compiliamo il quadro dei segni della derivata seconda e segniamo gli intervalli in cui il grafico della funzione ha concavità verso l'alto e quelli in cui l'ha verso il basso (figura *e*).



In $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ abbiamo due flessi di coordinate:

$F_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{4}\right)$ e $F_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

Per completezza, calcoliamo le equazioni delle tangenti inflessionali:

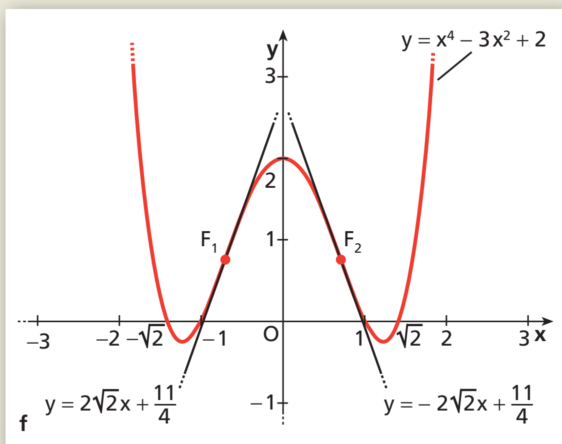
$m_1 = y'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$;

$m_2 = y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}$.

Usando la formula della retta passante per un punto e di coefficiente angolare m, $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$, si hanno le equazioni:

t_1: $y = 2\sqrt{2}\,x + \frac{11}{4}$ e t_2: $y = -2\sqrt{2}\,x + \frac{11}{4}$.

Disegniamo il grafico della funzione.



Studia e rappresenta graficamente le seguenti funzioni. (Qui e in seguito nelle soluzioni indichiamo con max i punti di massimo, con min quelli di minimo, con *F* quelli di flesso.)

29 $y = x^3 - 12x$ [funzione dispari; max$(-2; 16)$; min$(2; -16)$; $F(0; 0)$]

30 $y = x^2 - x^3$ $\left[\max\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{27}\right); \min(0; 0); F\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{27}\right)\right]$

31 $y = x^3 - 3x + 2$ $[\max(-1; 4); \min(1; 0); F(0; 2)]$

32 $y = x^4 - 16x^2$ $\left[\text{funzione pari}; \min_{1,2}(\pm 2\sqrt{2}; -64); \max(0; 0); F_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{8}{3}}; -\frac{320}{9}\right)\right]$

33 $y = x^4 - 5x^2 + 4$ $\left[\text{funzione pari}; \min_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}; -\frac{9}{4}\right); \max(0; 4); F_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{5}{6}}; \frac{19}{36}\right)\right]$

34 $y = \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{3}{2}x$ $\left[\max\left(1; \frac{2}{3}\right); \min(3; 0); F\left(2; \frac{1}{3}\right)\right]$

35 $y = x^2 - 4x^4$ $\left[\text{funzione pari}; \max_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{1}{8}}; \frac{1}{16}\right); \min(0; 0); F_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{1}{24}}; \frac{5}{144}\right)\right]$

36 $y = x - \frac{1}{5}x^5$ $\left[\text{funzione dispari}; \min\left(-1; -\frac{4}{5}\right); \max\left(1; \frac{4}{5}\right); F(0; 0)\right]$

37 $y = -x^4 - x^2$ $[\text{funzione pari}; \max(0; 0)]$

38 $y = x(x^2 - 4)$ $\left[\text{funzione dispari}; \max\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}; \frac{16}{9}\sqrt{3}\right); \min\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}; -\frac{16}{9}\sqrt{3}\right); F(0; 0)\right]$

39 $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ $\left[\max\left(\frac{1}{3}; -\frac{50}{27}\right); \min(1; -2); F\left(\frac{2}{3}; -\frac{52}{27}\right)\right]$

40 $y = x(x + 2)^2$ $\left[\max(-2; 0); \min\left(-\frac{2}{3}; -\frac{32}{27}\right); F\left(-\frac{4}{3}; -\frac{16}{27}\right)\right]$

41 $y = x^3 - 2x + 1$ $\left[\max \text{ in } x = -\sqrt{\frac{2}{3}}; \min \text{ in } x = \sqrt{\frac{2}{3}}; F(0; 1)\right]$

42 $y = 2x^3 - x^4$ $\left[\max\left(\frac{3}{2}; \frac{27}{16}\right); F_1(0; 0); F_2(1; 1)\right]$

43 $y = (x^2 - 2x)^2 + 1$ $\left[\max(1; 2); \min_1(0; 1); \min_2(2; 1); F_{1,2}\left(\frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}; \frac{13}{9}\right)\right]$

44 $y = x^4 - 2x^3 + 1$ $\left[\min\left(\frac{3}{2}; -\frac{11}{16}\right); F_1(0; 1); F_2(1; 0)\right]$

45 $y = 2x^2(x + 1)^3$ $\left[\max\left(-\frac{2}{5}; \frac{216}{3125}\right); \min(0; 0); F_1(-1; 0) \text{ flesso orizzontale, flessi in } x = \frac{-4 \pm \sqrt{6}}{10}\right]$

46 $y = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2$ $\left[\min_1(-1; -2), \min_2\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{16}\right); \max(0; 0); \text{flessi in } x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{6}\right]$

47 $y = \frac{7}{4}x^4 - \frac{14}{3}x^3$ $\left[\min\left(2; -\frac{28}{3}\right); F_1(0; 0) \text{ flesso orizzontale}, F_2\left(\frac{4}{3}; -\frac{448}{81}\right)\right]$

48 $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$ $\left[\min(-1; 0); F_1\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{27}\right), F_2(0; 1) \text{ flesso orizzontale}\right]$

49 $y = -x^3 + 5x^2 - 8x + 4$ $\left[\min\left(\frac{4}{3}; -\frac{4}{27}\right); \max(2; 0); F\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{27}\right)\right]$

Le funzioni razionali fratte

Le funzioni razionali fratte,

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0} = \frac{A(x)}{B(x)},$$

- hanno come dominio $\mathbb{R}$ con esclusione dei valori che annullano $B(x)$;
- possono avere asintoti verticali che vanno ricercati fra i valori che annullano $B(x)$;
- intersecano l'asse x nei punti in cui $A(x) = 0$;
- se $n = m$, hanno un asintoto orizzontale di equazione $y = \frac{a_n}{b_m}$;
- se $n < m$, hanno come asintoto orizzontale l'asse x;
- se $n > m$, con $n - m = 1$, hanno un asintoto obliquo.

50 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = \frac{(2-x)^3}{3(x-4)}.$$

---

1. Determiniamo il dominio della funzione. Il suo denominatore deve essere non nullo.

Quindi:

D: $x \neq 4$.

2. Cerchiamo eventuali simmetrie:

$$f(-x) = \frac{[2-(-x)]^3}{3(-x-4)} = \frac{(2+x)^3}{-3(x+4)}.$$

Poiché $f(-x) \neq -f(x)$ e $f(-x) \neq f(x)$, la funzione non è né dispari né pari.

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi.
Asse y:

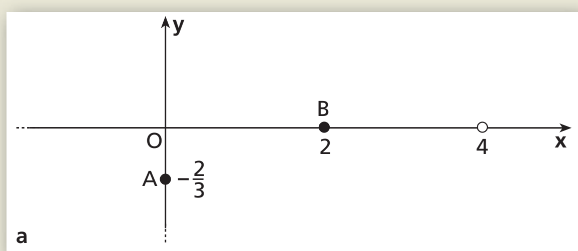
$$\begin{cases} y = \dfrac{(2-x)^3}{3(x-4)} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{8}{-12} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{2}{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

Il punto di intersezione con l'asse y è $A\left(0; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Asse x:

$$\begin{cases} y = \dfrac{(2-x)^3}{3(x-4)} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{(2-x)^3}{3(x-4)} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2-x)^3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2-x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il punto di intersezione con l'asse x è $B(2; 0)$.
Nel piano cartesiano rappresentiamo le informazioni ottenute (figura a).



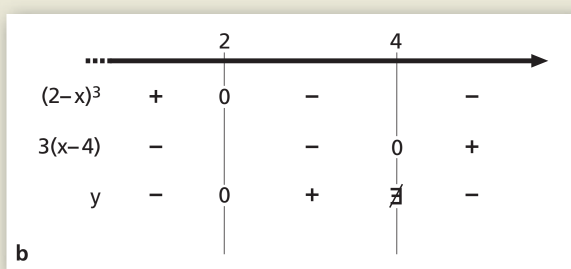
a

4. Studiamo il segno della funzione:

$$\frac{(2-x)^3}{3(x-4)} > 0 \qquad N > 0 \text{ per } x < 2$$
$$D > 0 \text{ per } x > 4.$$

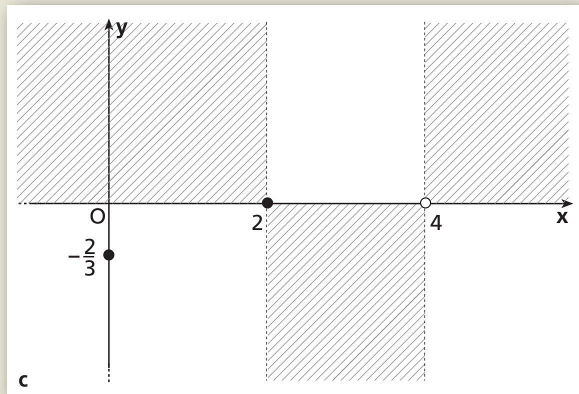
Compiliamo il quadro dei segni (figura b).

$f(x) > 0$ per $2 < x < 4$.



b

Rappresentiamo questi risultati nel piano cartesiano (figura *c*), tratteggiando le zone del piano in cui non ci sono punti della funzione.



5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

- $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(2-x)^3}{3(x-4)} = -\infty$;

  poiché la differenza fra il grado del numeratore e il grado del denominatore è 2, non esiste asintoto obliquo;

- $\lim_{x \to 4^{\pm}} \frac{(2-x)^3}{3(x-4)} = \mp\infty$;

  $x = 4$ è un asintoto verticale.

6. Determiniamo eventuali massimi, minimi e flessi della funzione. Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{-3(2-x)^2(x-4)-(2-x)^3}{(x-4)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2-x)^2(-2x+10)}{(x-4)^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(2-x)^2(5-x)}{(x-4)^2}.$$

Il dominio di y' è $x \neq 4$ e coincide con quello di y.

$y' = 0$ per $x = 2$ e $x = 5$, che sono quindi punti stazionari.

$$y' > 0 \quad \text{per } x < 5 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 4.$$

Quindi la funzione è crescente per $x < 5$ e decrescente per $x > 5$. Per $x = 2$ la funzione ammette un flesso orizzontale e per $x = 5$ presenta un punto di massimo relativo. Quindi: $M(5; -9)$, $F(2; 0)$.
Calcoliamo la derivata seconda:

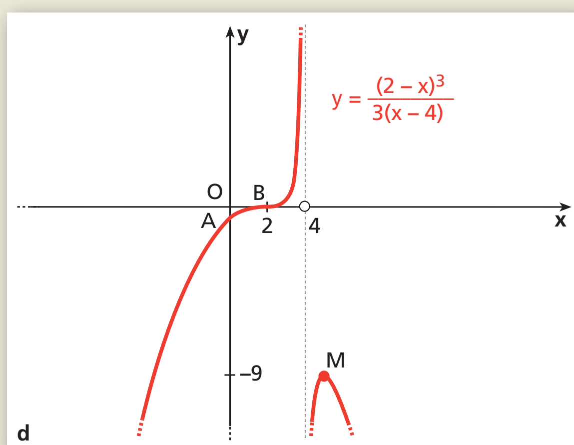
$$y'' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{(x-2)(x^2-10x+28)}{(x-4)^3};$$

$y'' < 0$ per $x < 2 \vee x > 4$ → il grafico ha la concavità verso il basso;

$y'' > 0$ per $2 < x < 4$ → il grafico ha la concavità verso l'alto.

In $x = 2$ c'è un punto di flesso (come già trovato con la derivata prima) e in $x = 4$ la funzione non è definita.

Tracciamo il grafico della funzione (figura *d*).



Studia e rappresenta graficamente le seguenti funzioni. (Nei risultati indichiamo con *a* le equazioni degli asintoti.)

51 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ $\quad$ [funzione dispari; a: $x = 0$, $y = x$]

52 $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$ $\quad$ [funzione pari; a: $x = \pm 1$, $y = 1$; min $(0; 4)$]

53 $y = \dfrac{x + 4}{x}$ $\quad$ [a: $x = 0$, $y = 1$]

54 $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ $\quad$ [discont. eliminabile per $x = 1$; a: $x = -1$, $y = 1$]

55 $y = \dfrac{3}{x^3 - 4x}$ $\quad$ $\left[\text{funzione dispari; } a\text{: } x = \pm 2,\ x = 0,\ y = 0;\ \min\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}; \dfrac{9\sqrt{3}}{16}\right); \max\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}; -\dfrac{9\sqrt{3}}{16}\right)\right]$

56 $y = \dfrac{1 - x^2}{x - 4}$ $\quad$ [a: $x = 4$, $y = -x - 4$; min in $x = 4 - \sqrt{15}$; max in $x = 4 + \sqrt{15}$]

57 $y = \dfrac{x^3 + 27}{x^3}$ $\quad$ [a: $x = 0$, $y = 1$]

58 $y = \dfrac{x^2 - 8}{2x - 1}$ $\quad$ $\left[a\text{: } x = \dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\right]$

59 $y = -x - \dfrac{4}{x} + 6$ $\quad$ [min $(-2; 10)$; max $(2; 2)$; a: $y = -x + 6$, $x = 0$]

60 $y = x + \dfrac{9}{x} - 1$ $\quad$ [max $(-3; -7)$; min $(3; 5)$; a: $y = x - 1$, $x = 0$]

61 $y = x + \dfrac{1}{x}$ $\quad$ [funzione dispari; max $(-1; -2)$; min $(1; 2)$; a: $y = x$, $x = 0$]

62 $y = \dfrac{x - 1}{x^2}$ $\quad$ $\left[\max\left(2; \dfrac{1}{4}\right); F\left(3; \dfrac{2}{9}\right); a\text{: } x = 0,\ y = 0\right]$

63 $y = \dfrac{-x^3}{x^3 - 1}$ $\quad$ $\left[F_1(0; 0)\text{ flesso orizzontale, } F_2\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}; -\dfrac{1}{3}\right)\text{ flesso obliquo; } a\text{: } y = -1,\ x = 1\right]$

64 $y = \dfrac{x}{x^2 + 4}$ $\quad$ $\left[a\text{: } y = 0;\ \min\left(-2; -\dfrac{1}{4}\right); \max\left(2; \dfrac{1}{4}\right); F_1(0; 0),\ F_2\left(-2\sqrt{3}; -\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right), F_3\left(2\sqrt{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)\right]$

65 $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ $\quad$ $\left[\text{funzione pari; } a\text{: } y = 1;\ \min(0; -1);\ F_1\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}; -\dfrac{1}{2}\right), F_2\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}; -\dfrac{1}{2}\right)\right]$

66 $y = \dfrac{x^3 - 8}{x^2}$ $\quad$ [a: $x = 0$, $y = x$; max $(\sqrt[3]{-16}; \sqrt[3]{-54})$]

67 $y = -\dfrac{(x + 1)^2}{x}$ $\quad$ [min $(-1; 0)$; max $(1; -4)$; a: $y = -x - 2$, $x = 0$]

68 $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ $\quad$ $\left[\text{funzione pari; } \min(0; 0);\ F_1\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{1}{4}\right), F_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{1}{4}\right); a\text{: } y = 1\right]$

69 $y = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$ $\quad$ $\left[a\text{: } x = 1,\ y = 0;\ \min\left(-2; -\dfrac{1}{3}\right); F\left(-\dfrac{7}{2}; -\dfrac{8}{27}\right)\right]$

70 $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 9}$ $\quad$ $\left[\text{funzione pari; } \max\left(0; -\dfrac{1}{9}\right); a\text{: } x = \pm 3,\ y = 1\right]$

71 $y = \dfrac{3}{x^2 + 4}$ $\quad$ $\left[\text{funzione pari; } \max\left(0; \dfrac{3}{4}\right); a\text{: } y = 0;\ F_{1,2}\left(\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}; \dfrac{9}{16}\right)\right]$

72 $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 6x + 9}$ $\quad$ $\left[a\text{: } x = 3,\ y = 1;\ \min\left(\dfrac{7}{5}; -\dfrac{9}{16}\right); F\left(\dfrac{3}{5}; -\dfrac{7}{18}\right)\right]$

73 $y = \dfrac{3 - x}{(x + 1)^2}$ $\quad$ $\left[\min\left(7; -\dfrac{1}{16}\right); F\left(11; -\dfrac{1}{18}\right); a\text{: } x = -1,\ y = 0\right]$

74 $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$ $\quad$ $\left[a\text{: } x = 1,\ y = x;\ \min\left(\sqrt[3]{4}; \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{4}\right); \max(0; 0);\ F\left(-\sqrt[3]{2}; -\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)\right]$

75 $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4}$ $\quad [a\colon x = \pm 2,\ y = 1;\ 0 < x_F < 2]$

76 $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^3}$ $\quad [\text{min in } x = 4 - \sqrt{7};\ \text{max in } x = 4 + \sqrt{7};\ \text{flessi in } x = 6 \pm 3\sqrt{2};\ a\colon x = 0,\ y = 0]$

77 $y = \dfrac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{x^2}$ $\quad \left[0{,}6 < x_{\min} < 0{,}7;\ F\left(\frac{3}{2};\ \frac{10}{9}\right);\ a\colon x = 0,\ y = 2x - 1\right]$

78 $y = \dfrac{1}{3x^5 - 5x^3}$ $\quad \left[\text{funz. dispari; } a\colon x = \frac{\pm\sqrt{15}}{3},\ x = 0,\ y = 0;\ \min\left(-1;\ \frac{1}{2}\right);\ \max\left(1;\ -\frac{1}{2}\right)\right]$

79 $y = \dfrac{(x^2-4)^2}{x^3}$ $\quad \left[\text{funz. dispari; } a\colon x=0,\ y=x;\ \max(-2;\ 0);\ \min(2;\ 0);\ F_1\left(-2\sqrt{3};\ -\frac{8}{9}\sqrt{3}\right),\ F_2\left(2\sqrt{3};\ \frac{8}{9}\sqrt{3}\right)\right]$

80 $y = \dfrac{2(3 - x)^3}{(x - 2)^2}$ $\quad \left[a\colon x = 2,\ y = -2x + 10;\ \min\left(0;\ \frac{27}{2}\right);\ F(3;\ 0) \text{ flesso orizzontale}\right]$

81 $y = \dfrac{9(x + 1)}{(x + 2)^3}$ $\quad \left[a\colon x = -2,\ y = 0;\ \max\left(-\frac{1}{2};\ \frac{4}{8}\right);\ F\left(0;\ \frac{9}{8}\right)\right]$

82 $y = \dfrac{2x^2 - 3}{x^2 - 2x + 2}$ $\quad \left[a\colon y = 2;\ \min\left(\frac{1}{2};\ -2\right);\ \max(3;\ 3);\ x_{F_1} < 0,\ 1 < x_{F_2} < 2,\ x_{F_3} > 4\right]$

83 $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$ $\quad [a\colon x = -1,\ x = -2,\ y = 1;\ \max(-\sqrt{2};\ -17 - 12\sqrt{2});\ \min(\sqrt{2};\ -17 + 12\sqrt{2});\ 2 < x_F < 3]$

84 $y = \dfrac{x - 2}{(x + 1)(x^2 - 4)}$ $\quad \left[\text{discont. eliminabile in } x = 2;\ \max\left(-\frac{3}{2};\ -4\right);\ a\colon x = -1,\ x = -2,\ y = 0\right]$

85 $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 2x}$ $\quad [a\colon x = 0,\ x = 2,\ y = x - 1;\ F(1;\ 0)]$

Le funzioni irrazionali

Le funzioni irrazionali:
- hanno come dominio $\mathbb{R}$, con esclusione dei valori che rendono negativi i radicandi di radici a indice pari.

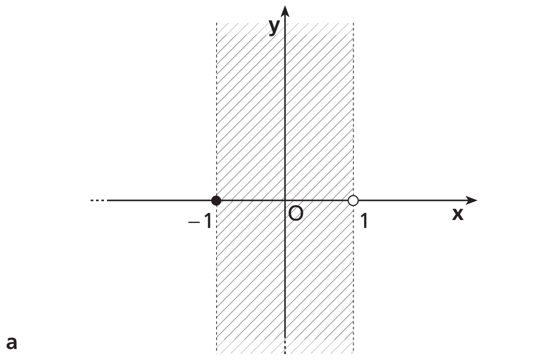
86 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}.$$

1. Determiniamo il dominio della funzione ponendo il radicando ≥ 0: $\dfrac{x+1}{x-1} \geq 0$ per $x \leq -1 \vee x > 1$.
   Il dominio della funzione è $x \leq -1 \ \vee \ x > 1$.

   Rappresentiamo i risultati ottenuti (figura *a*).



2. Cerchiamo eventuali simmetrie. Calcoliamo:

   $$f(-x) = \sqrt{\frac{-x + 1}{-x - 1}} = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}.$$

   Essendo

   $$f(-x) \neq \pm f(x),$$

   la funzione non è né pari né dispari.

3. Intersezioni con gli assi.
   Non esiste intersezione con l'asse y in quanto $x = 0$ è escluso dal dominio.

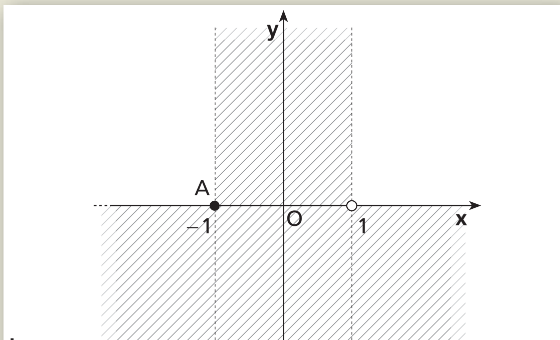
Calcoliamo l'intersezione con l'asse x:

$$\begin{cases} y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} \\ y = 0 \end{cases}$$

Il punto di intersezione con l'asse x è:

$A(-1; 0)$.

4. Studiamo il segno della funzione. $y \geq 0$ per ogni x del dominio, in quanto un radicale è sempre positivo o nullo. Rappresentiamo questo risultato (figura b).



b

5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

- $\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = 1 \quad \to \quad y = 1$ asintoto orizzontale;
- $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = +\infty \quad \to \quad x = 1$ asintoto verticale.

6. Determiniamo eventuali massimi, minimi e flessi della funzione. Calcoliamo:

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Partendo dal dominio della funzione otteniamo quello della derivata se scartiamo il valore -1, ossia $x < -1 \vee x > 1$. Per questi valori la derivata assume sempre valori negativi, quindi la funzione è decrescente sia per $x < -1$ che per $x > 1$ e non presenta punti di massimo, minimo o flessi orizzontali.
Studiamo l'andamento della derivata per $x \to -1$, punto in cui esiste la funzione, ma non la sua derivata:

$$\lim_{x \to -1^-} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left[-\frac{1}{(x-1)^2}\right] = -\infty.$$

Nel punto $x = -1$, la tangente al grafico della funzione è quindi verticale. In tal punto, la funzione ha un minimo assoluto.
Calcoliamo la derivata seconda a partire dalla derivata prima scritta nella seguente forma:

$$y' = -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} = -\sqrt{\frac{\cancel{x-1}}{(x+1)(x-1)^{\cancel{4}\,3}}} = -\sqrt{\frac{1}{(x+1)(x-1)^3}};$$

$$y'' = -\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{(x+1)(x-1)^3}}} \cdot \frac{-[(x-1)^3 + (x+1)\cdot 3 \cdot (x-1)^2]}{(x+1)^2(x-1)^6} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{\cancel{(x-1)^2}(x-1+3x+3)}{(x+1)^2(x-1)^{\cancel{6}\,4}} =$$

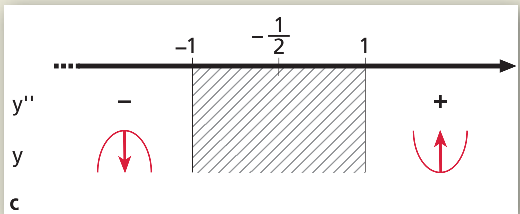
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{4x+2}{(x+1)^2(x-1)^4} = \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{\cancel{2}(2x+1)}{(x+1)^2(x-1)^4}.$$

Il segno della derivata seconda è positivo per $x > -\dfrac{1}{2}$.

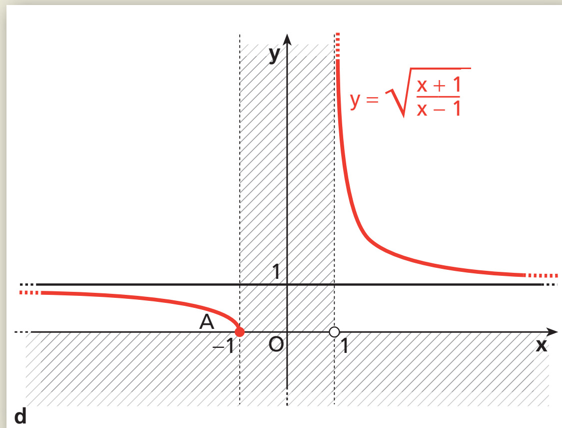
Tenuto conto delle condizioni di esistenza, compiliamo il quadro dei segni (figura *c*).

La concavità è rivolta verso il basso per $x < -1$, verso l'alto per $x > 1$.

Tracciamo il grafico della funzione (figura *d*).



c



d

Studia e rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

87 $y = \sqrt{\dfrac{2x-1}{x}}$ $\left[a\colon x = 0,\ y = \sqrt{2};\ \min\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)\right]$

88 $y = \sqrt{x^2 - 4}$ [funzione pari; $a\colon y = \pm x$; $\min_{1,2}(\pm 2; 0)$]

89 $y = x\sqrt{4 - x^2}$ [funzione dispari; $\min_1(-\sqrt{2}; -2)$, $\min_2(2; 0)$; $\max_1(-2; 0)$, $\max_2(\sqrt{2}; 2)$; $F(0; 0)$]

90 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ $[a\colon x = -3,\ y = 0]$

91 $y = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 - 1}}$ [funzione pari; $a\colon x = \pm 1,\ y = 0$]

92 $y = \sqrt{x^3 + 1}$ [$\min(-1; 0)$; $F(0; 1)$ flesso orizzontale]

93 $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x}$ $[a\colon y = \pm 1,\ x = 0;\ \min(2; 0)]$

94 $y = \sqrt{4x - x^2}$ $[\max(2; 2);\ \min_1(0; 0),\ \min_2(4; 0)]$

95 $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ $\left[a\colon x = 1,\ y = -1;\ \min(0; 1);\ F\left(\dfrac{1}{9}; 2\right)\right]$

96 $y = x - \sqrt{x^2 - 4}$ $[a\colon y = 0,\ y = 2x;\ \max_1(-2; -2),\ \max_2(2; 2)]$

97 $y = x - \sqrt{x^2 + 4x}$ $[a\colon y = -2,\ y = 2x + 2;\ \max_1(-4; -4),\ \max_2(0; 0)]$

98 $y = 1 - \sqrt{x - x^2}$ $\left[\min\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right);\ \max_1(0; 1),\ \max_2(1; 1)\right]$

99 $y = -\sqrt{x^2 - 4}$ [funzione pari; $a\colon y = \pm x$; $\max_1(-2; 0)$, $\max_2(2; 0)$]

100 $y = 2 + \sqrt{x + 6}$ $[\min(-6; 2)]$

101 $y = \sqrt{x^3 - 2x}$ $\left[\min_1(0; 0),\ \min_{2,3}(\pm\sqrt{2}; 0);\ \max \text{ in } x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}};\ 2 < x_F < 3\right]$

102 $y = \dfrac{2}{\sqrt{2 - x} - 1}$ $\left[a\colon x = 1,\ y = 0;\ \max(2; -2);\ F\left(\dfrac{17}{9}; -3\right)\right]$

103 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}}$ [funzione pari; $a\colon x = \pm 1,\ y = 1$; $\min_1(0; 2)$, $\min_{2,3}(\pm 2; 0)$]

104 $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)^3}{x}}$ $\left[a\colon x = 0;\ y = x - \dfrac{3}{2},\ y = -x + \dfrac{3}{2};\ \min_1\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right),\ \min_2(1; 0)\right]$

105 $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - x}}$ $[a\colon x = 0,\ x = 1,\ y = 1,\ y = -1]$

106 $y = \sqrt{\dfrac{2x-4}{x-4}} - 1$ $[a\colon x = 4,\ y = \sqrt{2} - 1;\ \min(2; -1)]$

107 $y = \sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x}$ $\left[a\colon y = 0;\ \min\left(\dfrac{1}{2}; -2\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right);\ F_1(0; -1),\ F_2(1; -1) \text{ flessi verticali}\right]$

108 $y = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$ $\left[a\colon y = -x + \dfrac{1}{3};\ \min(0; 0) \text{ con cuspide; } \max\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}\right);\ F(1; 0)\right]$

109 $y = \sqrt[3]{6x - x^2}$ $[\max(3; \sqrt[3]{9});\ F_1(0; 0),\ F_2(6; 0) \text{ flessi verticali}]$

110 $y = \sqrt[3]{(x-4)^2}$ $[\min(4; 0) \text{ con cuspide}]$

Le funzioni esponenziali

111 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = x^2 \cdot e^x.$$

1. Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$.

2. Cerchiamo eventuali simmetrie. Calcoliamo: $f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-x} = x^2 \cdot e^{-x}$.

   Poiché $f(-x) \neq \pm f(x)$, la funzione non è né pari né dispari.

3. Intersezioni con gli assi.

   Asse y:

   $$\begin{cases} y = x^2 \cdot e^x \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow$$ il punto di intersezione con l'asse y è $O(0; 0)$.

   Asse x:

   $$\begin{cases} y = x^2 \cdot e^x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot e^x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$$ il punto di intersezione con l'asse x è $O(0; 0)$.

4. Studiamo il segno della funzione:

   $$y > 0 \quad \rightarrow \quad x^2 \cdot e^x > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

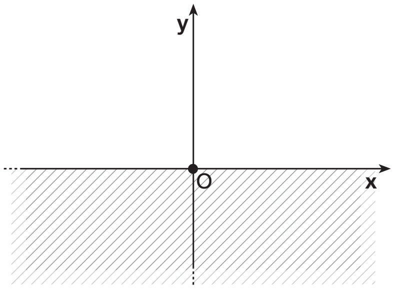
   Rappresentiamo i risultati finora ottenuti nel riferimento cartesiano (figura *a*).

5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio.

   - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^2 \cdot e^x$.

     Poiché per $x \rightarrow -\infty$ si ha che $x^2 \rightarrow +\infty$ ed $e^x \rightarrow 0$, siamo in presenza della forma indeterminata $\infty \cdot 0$. Scriviamo l'espressione in altra forma,

     $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}},$$



a

e applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0.$$

Quindi:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^x = 0 \quad \to \quad y = 0 \text{ asintoto orizzontale.}$$

Essendo:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^x = +\infty \quad \to \quad \text{potrebbe esistere un asintoto obliquo.}$$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \cdot e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} x \cdot e^x = +\infty \quad \to \quad \text{non esistono asintoti obliqui.}$$

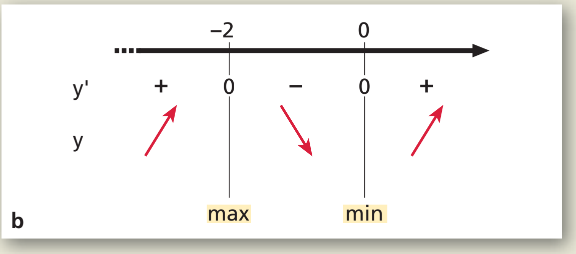
6. Determiniamo eventuali massimi, minimi e flessi della funzione:

$$y' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot (2x + x^2);$$

$$y' > 0 \quad \to \quad e^x \cdot (2x + x^2) > 0.$$

Il primo fattore, e^x, è sempre positivo, quindi il segno del prodotto è lo stesso di quello del secondo fattore: $2x + x^2 > 0$, per $x < -2 \lor x > 0$.

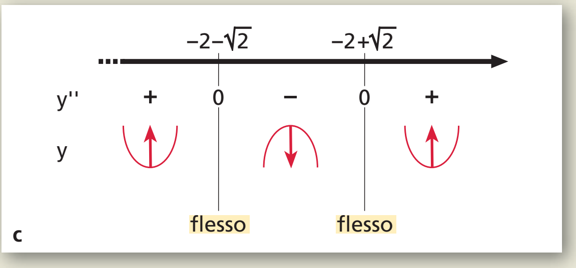
Compiliamo il quadro dei segni (figura *b*).



Per $x = 0$, si ha un punto di minimo: $O(0; 0)$.

Per $x = -2$, si ha un punto di massimo: $A\left(-2; \frac{4}{e^2}\right)$.

Calcoliamo la derivata seconda:



$$y'' = e^x \cdot (2x + x^2) + e^x \cdot (2 + 2x) = e^x \cdot (x^2 + 4x + 2);$$

$$y'' > 0 \quad \to \quad e^x \cdot (x^2 + 4x + 2) > 0.$$

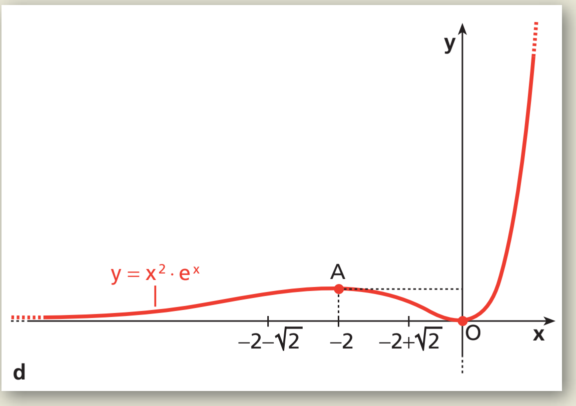
Come per la derivata prima, è sufficiente studiare il segno del secondo fattore:

$x^2 + 4x + 2 > 0$,

per $x < -2 - \sqrt{2} \lor x > -2 + \sqrt{2}$.

Compiliamo il quadro dei segni (figura *c*).

I punti di ascissa $-2 - \sqrt{2}$ e $-2 + \sqrt{2}$ sono di flesso per il grafico della funzione. Tracciamo il grafico della funzione (figura *d*).



Studia e rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

112 $y = \frac{e^x}{x^3}$ $\left[a: x = 0,\ y = 0;\ \min\left(3; \frac{e^3}{27}\right)\right]$

113 $y = \frac{1}{e^x \cdot x}$ $[a: x = 0,\ y = 0;\ \max(-1; -e)]$

114 $y = e^{2x} + e^x$ $[a: y = 0]$

115 $y = \dfrac{x^2}{e^{2x}}$ $\left[a: y = 0;\ \min(0; 0);\ \max\left(1; \dfrac{1}{e^2}\right);\ \text{flessi in } x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2}\right]$

116 $y = \dfrac{1}{e^{x^2}}$ $\left[\text{funzione pari; } a: y = 0;\ \max(0; 1);\ F_1\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right);\ F_2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)\right]$

117 $y = \dfrac{e^{2x}}{2^x}$ $[a: y = 0]$

118 $y = e^x(e^x - 1)$ $\left[a: y = 0;\ \min\left(-\ln 2; -\dfrac{1}{4}\right);\ F\left(-\ln 4; -\dfrac{3}{16}\right)\right]$

119 $y = (x - 1)e^{3-x}$ $[a: y = 0;\ \max(2; e);\ F(3; 2)]$

120 $y = \dfrac{2e^x + 4}{e^x - 1}$ $[a: y = 2,\ y = -4,\ x = 0]$

121 $y = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^{2x}}$ $[a: y = 1,\ y = 0,\ x = 0]$

122 $y = (x^2 - 1)e^x$ $[a: y = 0;\ \max \text{ in } x = -1 - \sqrt{2};\ \min \text{ in } x = -1 + \sqrt{2};\ \text{flessi in } x = -2 \pm \sqrt{3}]$

123 $y = e^{\frac{x-1}{2x}}$ $\left[a: y = \sqrt{e},\ x = 0;\ F\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{e\sqrt{e}}\right)\right]$

124 $y = (x + 2)^2 e^{-x}$ $[a: y = 0;\ \min(-2; 0);\ \max(0; 4);\ \text{flessi in } x = \pm\sqrt{2}]$

125 $y = \dfrac{2e^x}{(x + 1)^2}$ $\left[a: y = 0,\ x = -1;\ \min\left(1; \dfrac{e}{2}\right)\right]$

126 $y = \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$ $\left[a: y = 0;\ \min(0; 0);\ \max\left(\dfrac{1}{2}; \sqrt{\dfrac{1}{2e}}\right);\ \text{flesso in } x = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}\right]$

127 $y = xe^{-x^2}$ $\left[\text{funzione dispari; } a: y = 0;\ \min\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right);\ \max\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right);\ F_1(0; 0),\right.$
$\left. F_2\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}; -\sqrt{\dfrac{3}{2e^3}}\right),\ F_3\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}; \sqrt{\dfrac{3}{2e^3}}\right)\right]$

128 $y = \dfrac{x + 2}{e^{x+3}}$ $\left[a: y = 0;\ \max\left(-1; \dfrac{1}{e^2}\right);\ F\left(0; \dfrac{2}{e^3}\right)\right]$

129 $y = (x^2 + 4x + 4)e^{-x}$ $[a: y = 0;\ \min(-2; 0);\ \max(0; 4);\ \text{flessi in } x = \pm\sqrt{2}]$

130 $y = (4 - x)(e^x - 1)$ $[a: y = x - 4;\ 3 < x_{max} < 4;\ F(2; 2(e^2 - 1))]$

131 $y = \dfrac{e^x}{x^2 - 4}$ $[a: x = \pm 2,\ y = 0;\ \max \text{ in } x = 1 - \sqrt{5};\ \min \text{ in } x = 1 + \sqrt{5}]$

132 $y = e^{\frac{x^2-1}{2x}}$ $[a: y = 0,\ x = 0;\ F_1(1; 1),\ 0 < x_F < 1]$

133 $y = e^x\sqrt[3]{(x - 1)^2}$ $\left[a: y = 0;\ \max\left(\dfrac{1}{3}; \sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}\,e\right);\ \min(1; 0);\ \text{flessi in } x = \dfrac{1 \pm \sqrt{6}}{3}\right]$

134 $y = e^{\frac{2x+1}{x^2-2x+1}}$ (trascura y'') $\left[a: y = 1,\ x = 1;\ \min\left(-2; \sqrt[3]{\dfrac{1}{e}}\right)\right]$

135 $y = \dfrac{2(e^{2x} - 1)}{e^x}$ $[F(0; 0)]$

Le funzioni logaritmiche

Le funzioni logaritmiche:

- hanno come dominio l'insieme dei valori di $\mathbb{R}$ che rendono positivo l'argomento del logaritmo;
- se sono funzioni del tipo $y = \log \dfrac{A(x)}{B(x)}$, possono presentare asintoti verticali per i valori che annullano o $A(x)$ o $B(x)$.

136 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = x^2 \cdot \ln x.$$

1. Determiniamo il dominio della funzione.
Poiché l'argomento del logaritmo deve essere positivo, il dominio è:

$$D: x > 0.$$

2. La funzione non presenta simmetrie rispetto agli assi cartesiani in quanto il suo dominio riguarda solo le ascisse positive.

3. Calcoliamo l'intersezione soltanto con l'asse x, perché quella con l'asse y $(x = 0)$ è esclusa dal dominio.
Asse x:

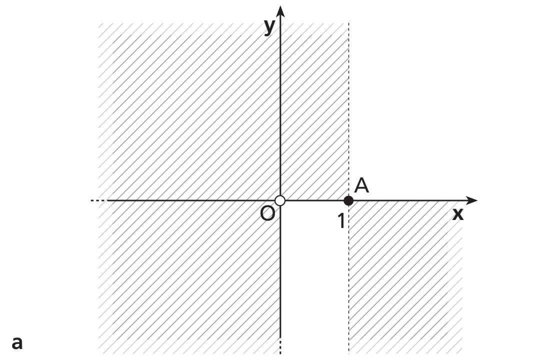
$$\begin{cases} y = x^2 \cdot \ln x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot \ln x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$$ il punto di intersezione con l'asse x è $A(1; 0)$.

4. Studiamo il segno della funzione:

$$x^2 \cdot \ln x > 0.$$

Primo fattore: $x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$.
Secondo fattore: $\ln x > 0$ per $x > 1$.
Si ha $y > 0$ per $x > 1$.

Rappresentiamo le informazioni finora ottenute nel riferimento cartesiano (figura *a*).



a

5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \cdot \ln x$.

  Tale limite presenta una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$ eliminabile riscrivendo l'espressione come quoziente e applicando la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \cdot \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2x}{x^4}} = \lim_{x \to 0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \cdot \ln x = +\infty$.

  Poiché

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty,$$

  non esiste un asintoto obliquo.

6. Determiniamo eventuali massimi, minimi e flessi della funzione:

$$y' = 2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x^2 = 2x \cdot \ln x + x = x \cdot (2 \ln x + 1).$$

$y' = 0$ se $x(2 \ln x + 1) = 0$. Si ha:

$x = 0$ non accettabile;

$$2 \ln x + 1 = 0 \rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

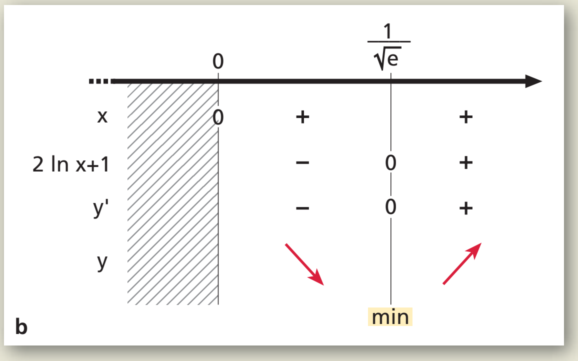
$x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ è l'unico punto stazionario.

$y' > 0 \quad \rightarrow \quad x \cdot (2\ln x + 1) > 0.$

Il primo fattore è positivo per $x > 0$.
Secondo fattore:

$2\ln x + 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > \frac{1}{\sqrt{e}}.$

Compiliamo il quadro relativo al segno della derivata prima (figura *b*).



b

Per $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ si ha un punto di minimo:

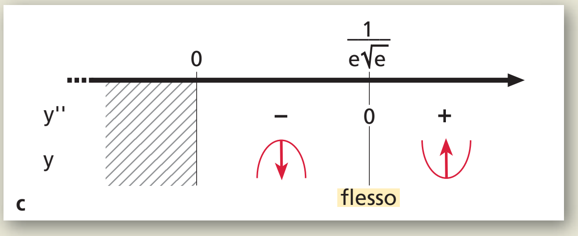
$B\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; -\frac{1}{2e}\right).$

Calcoliamo la derivata seconda:

$y'' = 2\ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln x + 3;$

$y'' > 0 \quad \rightarrow \quad 2\ln x + 3 > 0 \quad \rightarrow \quad \ln x > -\frac{3}{2} \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad x > e^{-\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad x > \frac{1}{e\sqrt{e}}.$



c

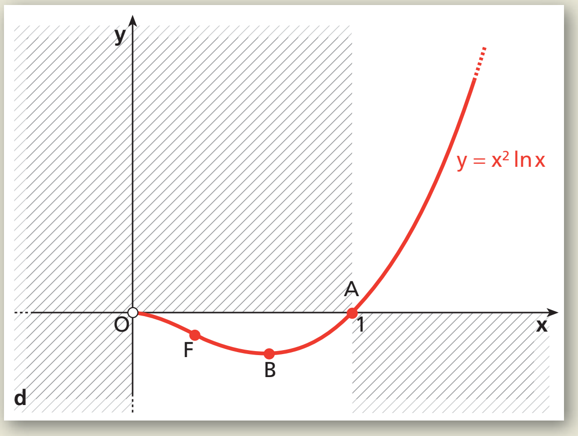
Compiliamo il quadro dei segni (figura *c*).

Essendo:

$f\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)^2 \ln \frac{1}{e\sqrt{e}} =$

$= \frac{1}{e^3} \ln \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{e^3}\left(-\frac{3}{2}\ln e\right) = -\frac{3}{2e^3},$

il punto di flesso è $F\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}; -\frac{3}{2e^3}\right)$.



d

Tracciamo il grafico della funzione (figura *d*).

Studia e rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

137 $y = \frac{x}{\ln x}$ $\left[a\text{: } x = 1; \text{ min } (e; e); F\left(e^2; \frac{e^2}{2}\right)\right]$

138 $y = \ln(x^2 - 1)$ [funzione pari; a: $x = \pm 1$]

139 $y = \ln \frac{x}{x+2}$ [a: $x = -2$, $x = 0$, $y = 0$]

140 $y = \frac{1}{\ln x}$ $\left[a\text{: } x = 1, y = 0; F\left(e^{-2}; -\frac{1}{2}\right)\right]$

141 $y = \frac{1 - \ln x}{\ln x}$ $\left[a\text{: } x = 1, y = -1; F\left(e^{-2}; -\frac{3}{2}\right)\right]$

142 $y = \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)$ [a: $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$]

143 $y = 1 + \ln(x-2) + \ln(x+2)$ $[a\colon x = 2]$

144 $y = \dfrac{\ln x}{4x^2}$ $\left[a\colon x = 0,\ y = 0;\ \max\left(\sqrt{e};\ \dfrac{1}{8e}\right);\ F\left(e^{\frac{5}{6}};\ \dfrac{5}{24e^{\frac{5}{3}}}\right)\right]$

145 $y = \ln^2 x - 4\ln x + 3$ $[a\colon x = 0;\ \min(e^2; -1);\ F(e^3; 0)]$

146 $y = \dfrac{\ln x}{\ln x - 1}$ $\left[a\colon y = 1,\ x = e;\ F\left(\dfrac{1}{e};\ \dfrac{1}{2}\right)\right]$

147 $y = 2\ln^2 x - \ln x^2$ $\left[a\colon x = 0;\ \min\left(\sqrt{e};\ -\dfrac{1}{2}\right);\ F\left(e^{\frac{3}{2}};\ \dfrac{3}{2}\right)\right]$

148 $y = \ln\dfrac{2x-8}{x-3}$ $[a\colon x = 3,\ x = 4,\ y = \ln 2]$

149 $y = \ln(x^2 - 6x + 5)$ $[a\colon x = 1,\ x = 5]$

150 $y = \dfrac{4\ln x - 2}{x^2}$ $\left[a\colon x = 0,\ y = 0;\ \max\left(e;\ \dfrac{2}{e^2}\right);\ F\left(e^{\frac{4}{3}};\ \dfrac{10}{3e^{\frac{8}{3}}}\right)\right]$

151 $y = \dfrac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$ $\left[a\colon x = \dfrac{1}{e},\ y = 1;\ F\left(\dfrac{1}{e^3};\ 2\right)\right]$

152 $y = \ln^2(x+3)$ $[a\colon x = -3;\ \min(-2; 0);\ F(e-3; 1)]$

153 $y = \ln(-x^3 + 2x)$ $\left[a\colon x = 0,\ x = \pm\sqrt{2};\ \max\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}};\ \ln\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\right]$

154 $y = \ln\dfrac{x^2-1}{x}$ $\left[a\colon x = 0,\ x = \pm 1;\ \text{flesso in } x = -\sqrt{\sqrt{5}-2}\right]$

155 $y = x\ln x^4$ $\left[\text{funzione dispari; discont. eliminabile in } x = 0;\ \max\left(-\dfrac{1}{e};\ \dfrac{4}{e}\right);\ \min\left(\dfrac{1}{e};\ -\dfrac{4}{e}\right)\right]$

156 $y = x\ln(x+2)$ $[a\colon x = -2;\ -1 < x_{\min} < 0]$

157 $y = \ln x + \dfrac{1}{\ln x}$ $\left[a\colon x = 0,\ x = 1;\ \max\left(\dfrac{1}{e};\ -2\right);\ \min(e; 2);\ 4 < x_F < 5\right]$

158 $y = \sqrt{x}\ln x$ $\left[\min\left(\dfrac{1}{e^2};\ -\dfrac{2}{e}\right);\ F(1; 0)\right]$

159 $y = \ln(e^x + 1)$ $[a\colon y = 0,\ y = x]$

160 $y = \dfrac{\ln(-x)}{2x}$ $\left[a\colon x = 0,\ y = 0;\ \min\left(-e;\ -\dfrac{1}{2e}\right);\ F\left(-e^{\frac{3}{2}};\ -\dfrac{3}{4e^{\frac{3}{2}}}\right)\right]$

Le funzioni goniometriche

Le funzioni goniometriche:

- sono quasi sempre periodiche, quindi basta studiarle in un periodo;
- se sono periodiche, non presentano asintoti orizzontali o obliqui; possono avere solo asintoti verticali.

161 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = \frac{2\,\text{sen}\,x - 1}{\cos^2 x - 1}, \quad \text{nell'intervallo } [0; 2\pi].$$

1. Determiniamo il dominio della funzione nell'intervallo indicato.

La funzione è fratta, quindi dobbiamo porre il denominatore diverso da 0:

$$\cos^2 x - 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \cos x \neq \pm 1 \quad \rightarrow \quad D: x \neq 0 \ \wedge \ x \neq \pi \ \wedge \ x \neq 2\pi.$$

2. Non studiamo se la funzione è pari o dispari, poiché ci limitiamo allo studio nell'intervallo $[0; 2\pi]$.

3. Cerchiamo soltanto le intersezioni con l'asse delle ascisse perché quella con l'asse delle ordinate $x = 0$ è esclusa dal dominio.
Asse x:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2\,\mathrm{sen}\,x - 1}{\cos^2 x - 1} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\,\mathrm{sen}\,x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{sen}\,x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6}, x = \dfrac{5}{6}\pi \\ y = 0 \end{cases}$$

I punti di intersezione con l'asse x sono:

$$A\left(\frac{\pi}{6}; 0\right), \quad B\left(\frac{5}{6}\pi; 0\right).$$

4. Studiamo il segno della funzione:

$$\frac{2\,\mathrm{sen}\,x - 1}{\cos^2 x - 1} > 0;$$

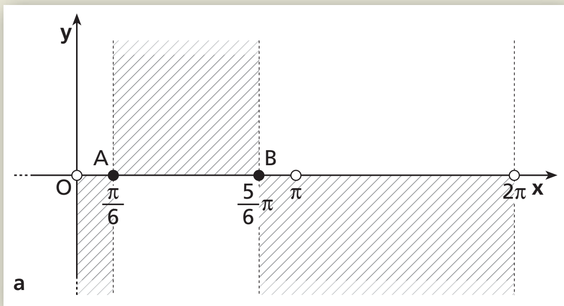
$$N > 0 \quad \rightarrow \quad 2\,\mathrm{sen}\,x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi;$$

$$D > 0 \quad \rightarrow \quad \cos^2 x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad \text{nessun valore di } x.$$

La funzione è positiva quando il numeratore è negativo, ossia per:

$$0 < x < \frac{\pi}{6} \ \vee \ \frac{5}{6}\pi < x < \pi \ \vee \ \pi < x < 2\pi.$$

Rappresentiamo nel piano cartesiano le informazioni finora ottenute (figura *a*).



5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2\,\mathrm{sen}\,x - 1}{\cos^2 x - 1} = +\infty, \ \lim_{x \to \pi^\pm} \frac{2\,\mathrm{sen}\,x - 1}{\cos^2 x - 1} = +\infty, \ \lim_{x \to 2\pi^-} \frac{2\,\mathrm{sen}\,x - 1}{\cos^2 x - 1} = +\infty.$$

Siamo in presenza di tre asintoti verticali: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

6. Determiniamo eventuali massimi, minimi e flessi della funzione:

$$y' = \frac{2\cos x \cdot (\cos^2 x - 1) + 2\cos x\,\mathrm{sen}\,x \cdot (2\,\mathrm{sen}\,x - 1)}{(\cos^2 x - 1)^2} = \frac{2\cos x \cdot (\cos^2 x - 1 + 2\,\mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}\,x)}{(\cos^2 x - 1)^2};$$

$$y' = \frac{2\cos x \cdot (\mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}\,x)}{(\cos^2 x - 1)^2};$$

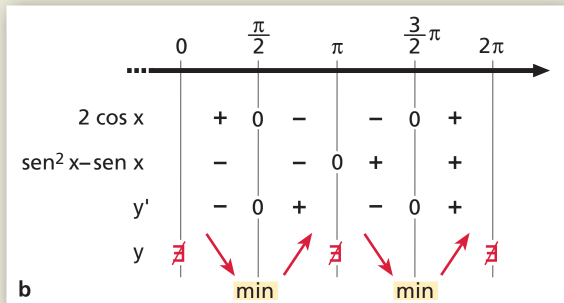
$$y' > 0 \quad \to \quad \frac{2\cos x \cdot (\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x)}{(\cos^2 x - 1)^2} > 0.$$

Poiché il denominatore è positivo per ogni valore del dominio, il segno della derivata prima è quello del numeratore.

Primo fattore: $2\cos x > 0 \quad \to \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$.

Secondo fattore: $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x > 0 \quad \to$
$\to \quad \operatorname{sen} x < 0 \quad \vee \quad \operatorname{sen} x > 1 \quad \to \quad \pi < x < 2\pi$.

Compiliamo il quadro relativo al segno della derivata prima (figura *b*).



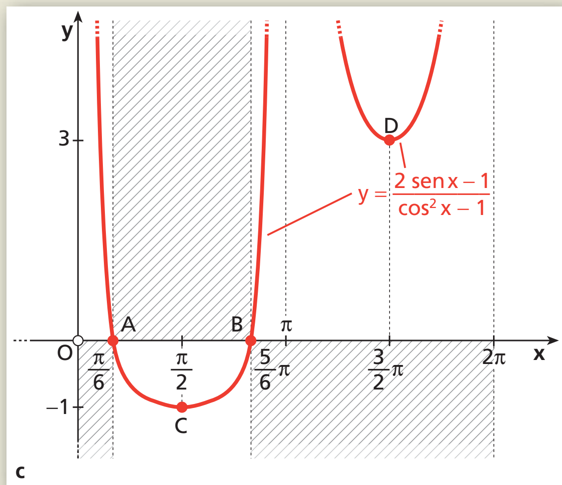
Per $x = \frac{\pi}{2}$ si ha un punto di minimo di coordinate:

$$C\left(\frac{\pi}{2}; -1\right).$$

Anche per $x = \frac{3}{2}\pi$ si ha un punto di minimo di coordinate:

$$D\left(\frac{3}{2}\pi; 3\right).$$

Il calcolo della derivata seconda si presenta piuttosto laborioso. Per questo cerchiamo di evitarlo, rappresentando il grafico possibile della funzione con le informazioni che abbiamo (figura *c*).



Studia e rappresenta graficamente le seguenti funzioni (indichiamo a fianco l'intervallo in cui studiare la funzione).

162 $y = 2\operatorname{sen} x \cos x - 1$, $\quad [0; \pi]$. $\quad \left[\max_1\left(\frac{\pi}{4}; 0\right), \max_2(\pi; -1); \min_1(0; -1), \min_2\left(\frac{3}{4}\pi; -2\right); F\left(\frac{\pi}{2}; -1\right)\right]$

163 $y = \operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x$, $\quad]0; 2\pi[$. $\quad \left[\max\left(\frac{\pi}{6}; 2\right); \min\left(\frac{7}{6}\pi; -2\right); F_1\left(\frac{2}{3}\pi; 0\right), F_2\left(\frac{5}{3}\pi; 0\right)\right]$

164 $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x$, $\quad [0; 2\pi]$. $\quad \left[a\colon x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3}{2}\pi; \min(0; 0); \max(2\pi; 0); F(\pi; 0)\right]$

165 $y = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}$, $\quad [0; 2\pi]$. $\quad \left[a\colon x = \frac{3}{2}\pi; \max(0; 1); \min_1\left(\frac{\pi}{2}; 0\right); \min_2(2\pi; 1)\right]$

166 $y = 4\operatorname{sen}^2 x - 3$, $\quad [0; 2\pi]$. $\quad \left[\min_1(0; -3); \min_2(\pi; -3); \max_1\left(\frac{\pi}{2}; 1\right); \max_2\left(\frac{3}{2}\pi; 1\right);\right.$
$\left.\min(2\pi; -3); F_1\left(\frac{\pi}{4}; -1\right), F_2\left(\frac{3}{4}\pi; -1\right), F_3\left(\frac{5}{4}\pi; -1\right), F_4\left(\frac{7}{4}\pi; -1\right)\right]$

167 $y = 2\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^2 x$, $\quad]0; 2\pi[$. $\quad \left[\max_1\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right); \min_1\left(\frac{\pi}{2}; 0\right); \max_2\left(\frac{5}{6}\pi; \frac{1}{2}\right); \min_2\left(\frac{3}{2}\pi; -4\right)\right]$

168 $y = \dfrac{\cos^2 x - 1}{1 + 2\cos x}$, $[0; 2\pi]$. (trascura y'') $\left[a: x = \dfrac{2}{3}\pi, x = \dfrac{4}{3}\pi; \max_1(0; 0), \max_2(2\pi; 0); \min(\pi; 0)\right]$

169 $y = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $[0; 2\pi]$. $\left[\max_1(0; 1), \max_2\left(\dfrac{2}{3}\pi; 1\right), \max_3\left(\dfrac{4}{3}\pi; 1\right), \max_4(2\pi; 1), \min_1\left(\dfrac{\pi}{3}; -1\right),\right.$ $\left.\min_2(\pi; -1), \min_3\left(\dfrac{5}{3}\pi; -1\right); F_1\left(\dfrac{\pi}{6}; 0\right); F_2\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right), F_3\left(\dfrac{5}{6}\pi; 0\right), F_4\left(\dfrac{7}{6}\pi; 0\right), F_5\left(\dfrac{3}{2}\pi; 0\right), F_6\left(\dfrac{11}{6}\pi; 0\right)\right]$

170 $y = \dfrac{2\,\mathrm{sen}\,x\cos x}{\mathrm{sen}\,x + 1}$, $]0; 2\pi[$. $\left[a: x = \dfrac{3}{2}\pi; \max \text{ in } \alpha = \operatorname{arcsen}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; \min \text{ in } \pi - \alpha; F\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right)\right]$

171 $y = \dfrac{\mathrm{sen}\,x + \cos x}{2\,\mathrm{sen}\,x\cos x}$, $]0; 2\pi[$. $\left[\max\left(\dfrac{5}{4}\pi; -\sqrt{2}\right); \min\left(\dfrac{\pi}{4}; \sqrt{2}\right); F_1\left(\dfrac{7}{4}\pi; 0\right), F_2\left(\dfrac{3}{4}\pi; 0\right);\right.$ $\left.a: x = 0, x = \dfrac{\pi}{2}, x = \pi, x = \dfrac{3}{2}\pi, x = 2\pi\right]$

172 $y = \dfrac{1 - 4\,\mathrm{sen}^2 x}{\cos x}$, $[0; 2\pi]$. $\left[a: x = \dfrac{\pi}{2}, x = \dfrac{3}{2}\pi; \max_1(0; 1); \min(\pi; -1); \max_2(2\pi; 1)\right]$

173 $y = \dfrac{3\cos x}{\mathrm{sen}^2 x - \cos^2 x}$, $[0; 2\pi]$. $\left[\max_1(0; -3); \max_2(2\pi; -3); \min(\pi; 3);\right.$ $\left.a: x = \dfrac{\pi}{4}, x = \dfrac{3}{4}\pi, x = \dfrac{5}{4}\pi, x = \dfrac{7}{4}\pi; F_1\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right), F_2\left(\dfrac{3}{2}\pi; 0\right)\right]$

174 $y = \sqrt{\mathrm{sen}\,x + 1}$, $[0; 2\pi]$. $\left[\min_1(0; 1); \min_2\left(\dfrac{3}{2}\pi; 0\right); \max_1\left(\dfrac{\pi}{2}; \sqrt{2}\right); \max_2(2\pi; 1)\right]$

175 $y = \dfrac{\cos x + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x}{\cos x - \mathrm{sen}\,x}$, $[0; 2\pi]$. $\left[a: x = \dfrac{\pi}{4}, x = \dfrac{5}{4}\pi; \min(0; 1); \max(2\pi; 1); F_1\left(\dfrac{3}{4}\pi; \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right),\right.$ $\left.F_2\left(\dfrac{7}{4}\pi; \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

176 $y = \dfrac{1 - \cos x}{\mathrm{sen}\,x + \cos x}$, $[0; 2\pi]$. $\left[a: x = \dfrac{3}{4}\pi, x = \dfrac{7}{4}\pi; \min_1(0; 0), \min_2(2\pi; 0), \max\left(\dfrac{3}{2}\pi; -1\right)\right]$

Le funzioni inverse delle funzioni goniometriche

177 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione: $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

1. Determiniamo il dominio della funzione. Poiché il denominatore $1 + x^2$ è non nullo per ogni x reale:

   D: $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Cerchiamo eventuali simmetrie:

   $$f(-x) = \operatorname{arctg}\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = f(x).$$

   Poiché $f(-x) = f(x)$, la funzione è pari. Il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi.

   Asse y:

   $$\begin{cases} x = 0 \\ y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = \operatorname{arctg}1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

   Asse x:

   $$\begin{cases} y = 0 \\ y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \end{cases} \to \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \pm 1 \end{cases}$$

Il punto di intersezione con l'asse y è $A\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$; i punti di intersezione con l'asse x sono $B(-1; 0)$ e $C(1; 0)$.

4. Studiamo il segno della funzione:

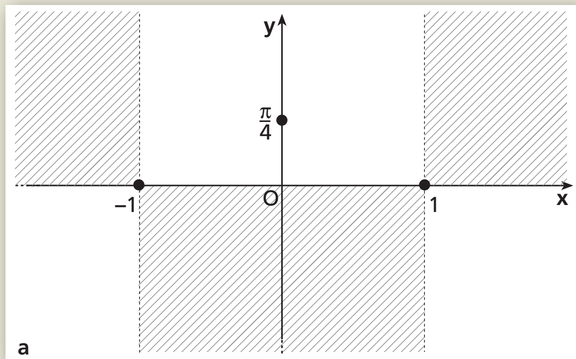
$$\text{arctg}\,\frac{1-x^2}{1+x^2} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1-x^2}{1+x^2} > 0$$

$$1 - x^2 > 0 \quad \text{per} \quad -1 < x < 1$$

$$1 + x^2 > 0 \quad \text{per} \quad \text{ogni } x.$$

La funzione ha quindi lo stesso segno di $1 - x^2$.

Rappresentiamo nel piano cartesiano le informazioni ottenute (figura *a*), tratteggiando le zone del piano in cui non ci sono punti della funzione.



a

5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \quad y = -\frac{\pi}{4} \text{ è un asintoto orizzontale.}$$

6. Determiniamo eventuali massimi, minimi e flessi:

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} \cdot \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2 + (1-x^2)^2} \cdot \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{-4x}{1 + x^4 + 2x^2 + 1 + x^4 - 2x^2} = \frac{-4x}{2x^4 + 2} = \frac{-2x}{x^4 + 1}.$$

Per $x < 0$ la funzione è crescente e per $x > 0$ la funzione è decrescente.

La funzione ammette un massimo in $M\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Calcoliamo la derivata seconda:

$$y'' = -2\frac{1(x^4+1) - x \cdot 4x^3}{(x^4+1)^2} = -2\frac{x^4 + 1 - 4x^4}{(x^4+1)^2} = -2\frac{-3x^4+1}{(x^4+1)^2} = \frac{6x^4 - 2}{(x^4+1)^2}.$$

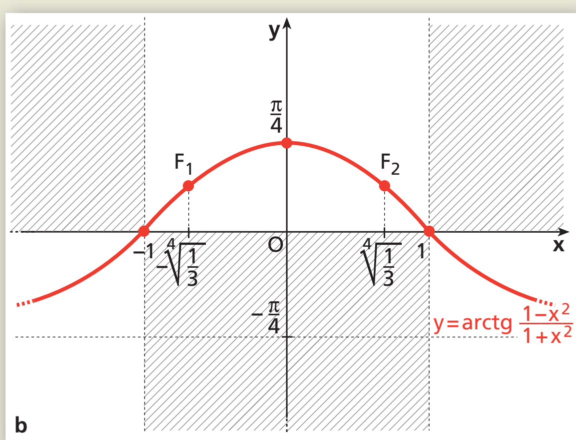
$$y'' > 0 \quad \text{per} \quad x < -\sqrt[4]{\frac{1}{3}} \lor x > \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

$$y'' < 0 \quad \text{per} \quad -\sqrt[4]{\frac{1}{3}} < x < \sqrt[4]{\frac{1}{3}}.$$

In $x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ ci sono due punti di flesso:

$$F_{1,2}\left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}; \frac{\pi}{12}\right).$$

Tracciamo il grafico della funzione (figura *b*).



b

Studia e rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

178 $y = \operatorname{arcsen}(x-2)$ $\left[\min\left(1; -\frac{\pi}{2}\right); \max\left(3; \frac{\pi}{2}\right); F(2; 0)\right]$

179 $y = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$ $\left[a: y = -\frac{\pi}{4}; F\left(0; \frac{\pi}{4}\right)\right]$

180 $y = \operatorname{arctg}\frac{2-x}{4-x}$ $\left[a: y = \frac{\pi}{4}; F\left(3; -\frac{\pi}{4}\right)\right]$

181 $y = \operatorname{arctg} x + x$ $\left[\text{funzione dispari; } a: y = x + \frac{\pi}{2}, y = x - \frac{\pi}{2}; F(0; 0)\right]$

182 $y = \operatorname{arcsen}\frac{2}{\sqrt{x}}$ $\left[a: y = 0; \max\left(4; \frac{\pi}{2}\right)\right]$

183 $y = \operatorname{arcsen} x^2$ $\left[\text{funzione pari; } \min(0; 0); \max_1\left(-1; \frac{\pi}{2}\right); \max_2\left(1; \frac{\pi}{2}\right)\right]$

184 $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$ $\left[a: y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \min(0; 0)\right]$

185 $y = \operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}$ $\left[\text{funzione pari; } \max\left(0; \frac{\pi}{2}\right); \min_1(-1; 0), \min_2(1; 0)\right]$

186 $y = \frac{x}{2} - \operatorname{arctg}(2x)$
$\left[\text{funzione dispari; } a: y = \frac{1}{2}x \pm \frac{\pi}{2}; \max\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}\right); \min\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}\right); F(0; 0)\right]$

187 $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{e^x - 1}$ $\left[a: y = 0, y = -\frac{\pi}{4}; F\left(\ln\sqrt{2}; \frac{3}{8}\pi\right)\right]$

188 $y = \sqrt{\operatorname{arctg}(1-2x)}$ $\left[a: y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \min\left(\frac{1}{2}; 0\right) \text{ con cuspide}\right]$

189 $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x} + \frac{2}{\pi}$ $\left[a: x = 0, y = 0, y = \frac{4}{\pi}\right]$

Le funzioni con valori assoluti

190 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = \frac{x^2 - 1}{|x-2| + 3x}.$$

Scriviamo la funzione come:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{4x-2} & \text{se } x \geq 2 \\ \dfrac{x^2-1}{2x+2} & \text{se } x < 2 \end{cases} \quad \to \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{4x-2} & \text{se } x \geq 2 \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{se } x < 2 \wedge x \neq -1 \end{cases}$$

Studiamo $f_1(x) = \frac{x^2-1}{4x-2}$ ed evidenziamo poi, nel grafico, l'arco che si ottiene per $x \geq 2$.

1. Determiniamo il dominio di $y = \frac{x^2-1}{4x-2}$. Il denominatore deve essere non nullo, quindi:

$$D: x \neq \frac{1}{2}.$$

2. Cerchiamo eventuali simmetrie:

$$f_1(-x) = \frac{x^2-1}{-4x-2} \neq \pm f_1(x) \quad \to \quad \text{la funzione non è né pari né dispari.}$$

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi.

Asse y: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ Asse x: $\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x^2-1}{4x-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \pm 1 \end{cases}$

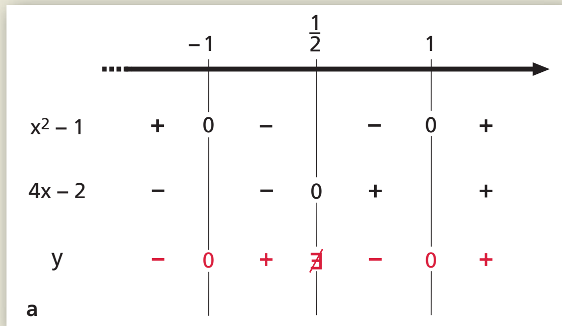
I punti di intersezione sono $A\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$, $B(-1; 0)$, $C(1; 0)$.

4. Studiamo il segno della funzione:

$$\frac{x^2-1}{4x-2} > 0 \quad \begin{matrix} x^2-1>0 \text{ per } x<-1 \vee x>1 \\ 4x-2>0 \text{ per } x>\dfrac{1}{2} \end{matrix}$$

Compiliamo il quadro dei segni (figura *a*).

Rappresentiamo questi risultati nel piano cartesiano (figura *b*), tratteggiando le zone del piano in cui non ci sono punti della funzione.



5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$;

  poiché il grado del numeratore supera di 1 quello del denominatore, esiste un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$.

  $$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{4},$$

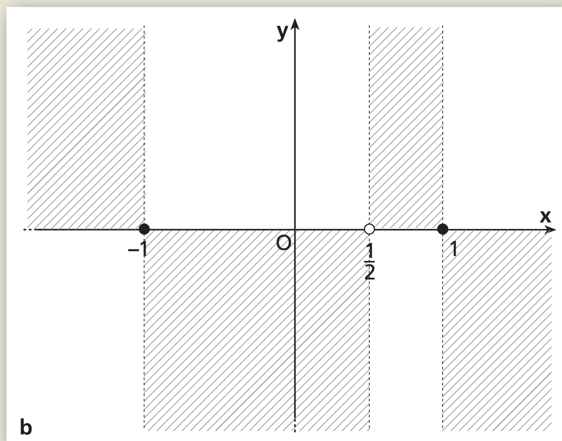
  $$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-1}{4x-2} - \frac{1}{4}x\right) =$$

  $$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-2-2x^2+x}{4(2x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-2}{4(2x-1)} = \frac{1}{8}.$$

  L'asintoto obliquo ha equazione:

  $$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}.$$

- $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^{\pm}} f(x) = \mp\infty \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{1}{2}$ è un asintoto verticale.



6. Determiniamo eventuali massimi, minimi e flessi. Calcoliamo:

$$y' = \frac{2x(4x-2) - 4(x^2-1)}{(4x-2)^2} = \frac{8x^2 - 4x - 4x^2 + 4}{4(2x-1)^2} = \frac{4(x^2 - x + 1)}{4(2x-1)^2} = \frac{x^2 - x + 1}{(2x-1)^2}.$$

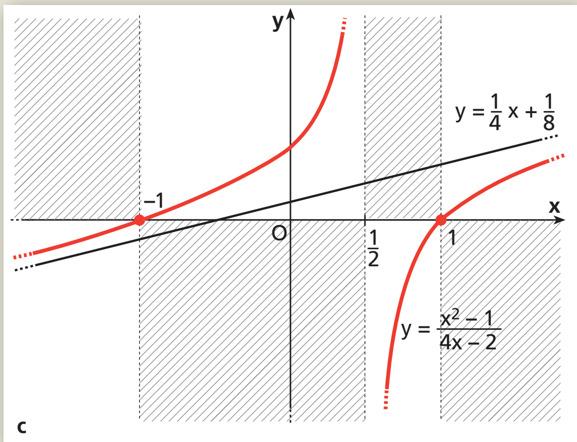
$y' > 0$ per ogni x del dominio, in quanto sia il numeratore che il denominatore sono sempre positivi. Quindi la funzione è sempre crescente in senso stretto e non presenta punti stazionari. Calcoliamo la derivata seconda:

$$y'' = \frac{(2x-1)(2x-1)^2 - (x^2 - x + 1)4(2x-1)}{(2x-1)^4} = \frac{(2x-1)^2 - 4(x^2-x+1)}{(2x-1)^3} = \frac{-3}{(2x-1)^3}.$$

$y'' > 0$ per $x < \frac{1}{2}$ concavità verso l'alto;

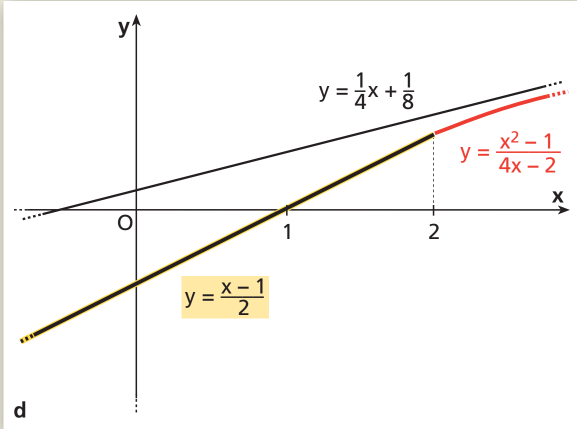
$y'' < 0$ per $x > \frac{1}{2}$ concavità verso il basso.

Tracciamo il grafico della funzione $y = \frac{x^2 - 1}{4x - 2}$ e del suo asintoto obliquo (figura *c*).



Tracciamo il grafico completo della funzione $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 2| + 3x}$, considerando il grafico della figura *c* per $x \geq 2$ e disegnando il grafico della retta $y = \frac{x - 1}{2}$ per $x < 2 \wedge x \neq -1$ (figura *d*).

Quindi, la retta è privata del punto $(-1; -1)$.



Studia e rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

191 $y = x^3 - 4|x|$ $\left[\text{max } (0; 0); \text{ min } \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{16\sqrt{3}}{9}\right)\right]$

192 $y = \frac{|x|}{x^2 - 4}$ [funzione pari; a: $y = 0$, $x = \pm 2$; max $(0; 0)$]

193 $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{3 - |3 - x|}$ [a: $x = 0$, $x = 6$, $y = x - 4$, $y = -x - 2$; $\max_{1,2}$ in $x = -\sqrt{5}$ e in $x = 6 + \sqrt{17}$; min in $x = \sqrt{5}$]

194 $y = e^x|1 - 2x|$ $\left[a: y = 0; \text{ min } \left(\frac{1}{2}; 0\right); \text{ max } \left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{\sqrt{e}}\right); F\left(-\frac{3}{2}; \frac{4}{\sqrt{e^3}}\right)\right]$

195 $y = \frac{|x^2 - 6x + 5|}{x^2}$ $\left[a: x = 0, y = 1; \text{ min}_1 (1; 0); \text{ max } \left(\frac{5}{3}; \frac{4}{5}\right); \text{ min}_2 (5; 0); F\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{5}\right)\right]$

196 $y = \ln\left|\frac{x - 1}{x + 2}\right|$ $\left[a: y = 0, x = -2, x = 1; F\left(-\frac{1}{2}; 0\right)\right]$

197 $y = \ln\sqrt{\left|\frac{x}{x - 1}\right|}$ $\left[a: y = 0, x = 0, x = 1; F\left(\frac{1}{2}; 0\right)\right]$

198 $y = |x|e^{-2x}$ $\left[a: y = 0; \text{ max } \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2e}\right); \text{ min } (0; 0); F\left(1; \frac{1}{e^2}\right)\right]$

199 $y = \sqrt{\frac{1 - |x|}{4 + |x|}}$ $\left[\text{funzione pari; max } \left(0; \frac{1}{2}\right); \text{ min}_{1,2} (\pm 1; 0)\right]$

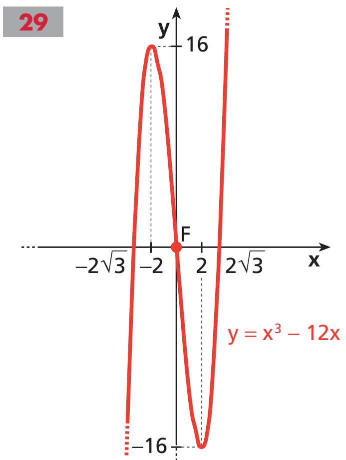
200 $y = x\ln|x|$ $\left[\text{funzione dispari; max } \left(-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right); \text{ min } \left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e}\right)\right]$

201 $y = e^{\frac{x^2}{|x| - 2}}$ (trascura y'') [funzione pari; a: $x = \pm 2$; $\min_{1,2}$ $(\pm 4; e^8)$; max $(0; 1)$]

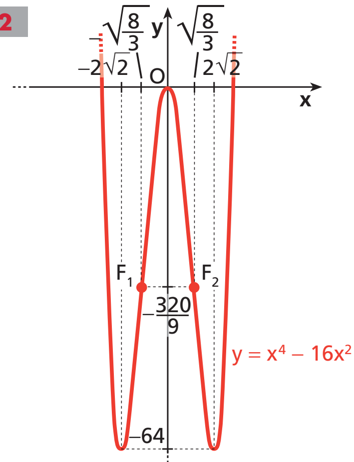
Bergamini, Trifone, Barozzi MATEMATICA.BLU - Vol.5 © Zanichelli 2012 con Maths in English

I grafici delle funzioni di alcuni degli esercizi precedenti

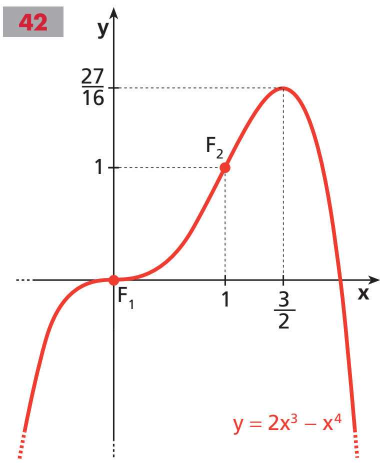
29



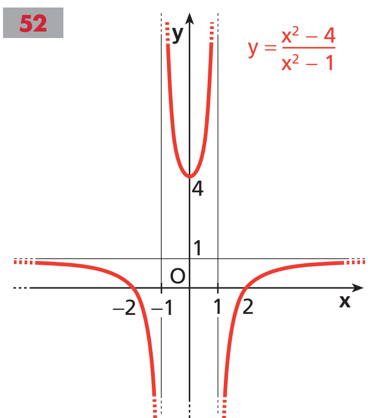
32



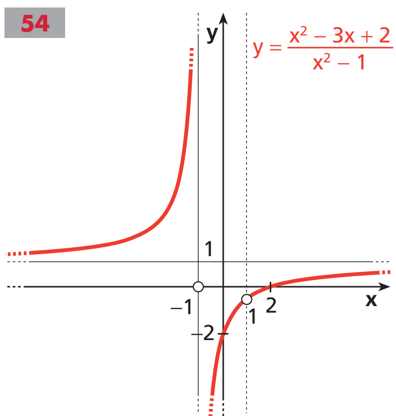
42



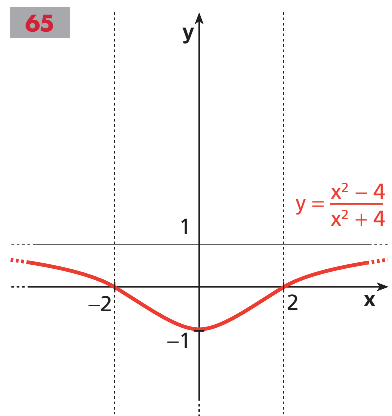
52



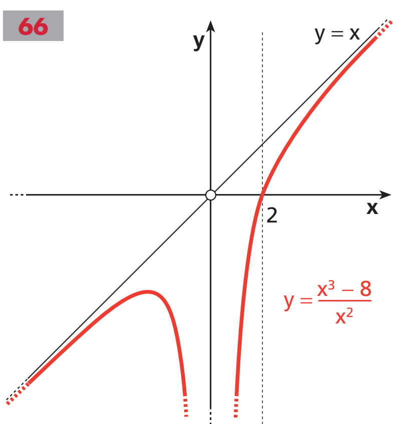
54



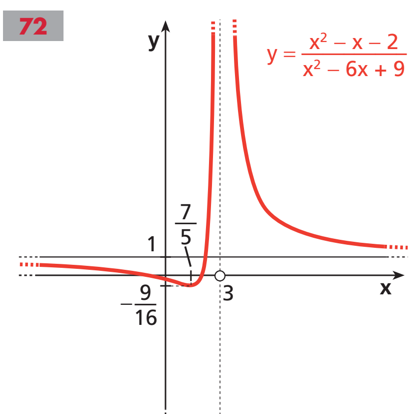
65



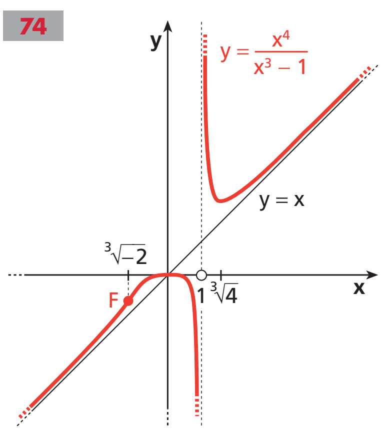
66



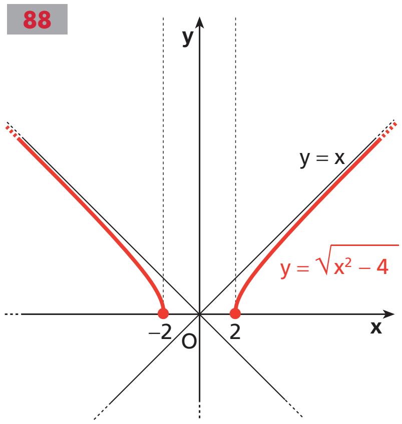
72



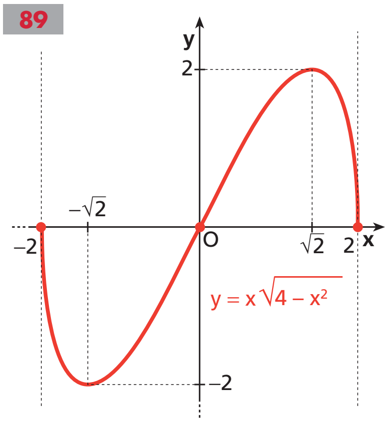
74



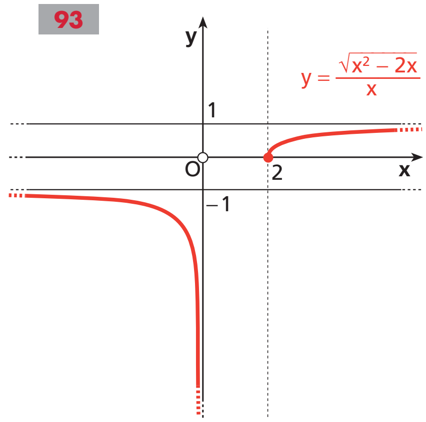
88



89



93



ESERCIZI VARI Lo studio di una funzione

TEST

202 Quale delle seguenti funzioni è rappresentata dal grafico della figura?

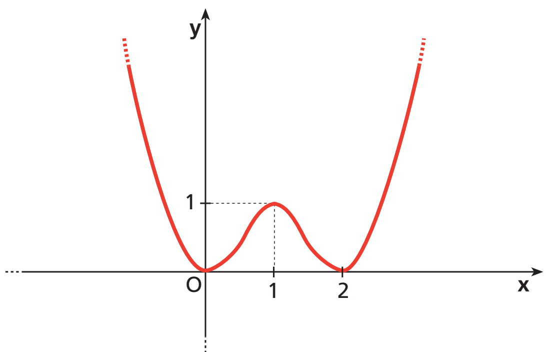
A $y = x(x-2)^2$

B $y = x^2(x-2)^2$

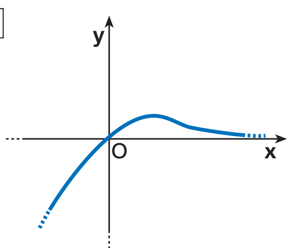
C $y = x(x-1)(x-2)$

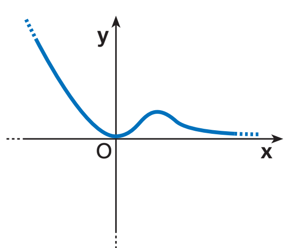
D $y = x(x+2)^2$

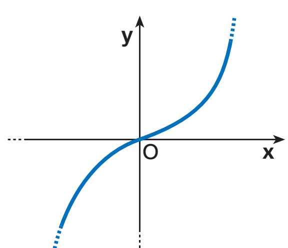
E $y = \dfrac{x-1}{x(x-2)}$

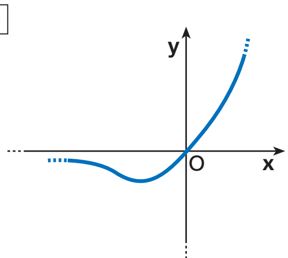


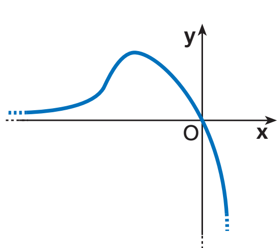
203 Quale dei seguenti grafici rappresenta l'andamento della funzione $y = xe^x$?

A


B


C


D


E


204 Fra le seguenti caratteristiche della funzione $y = x + \frac{1}{x}$, una è *sbagliata*. Quale?

A Ha asintoto verticale.

B Il dominio è $\mathbb{R} - \{0\}$.

C Ha asintoto obliquo.

D Ha un punto di minimo.

E Non ha simmetrie.

205 Data $f(x) = 4x^4 + 4x$, quale delle seguenti affermazioni è vera riguardo a $f(x)$?

A $x = -1$ è un punto stazionario di $f(x)$.

B $(0; 0)$ è un punto di flesso di $f(x)$.

C $f(x)$ è concava verso il basso per $x < 0$.

D $f(x)$ è concava verso il basso per $x > 0$.

E Nessuna delle precedenti.

(USA *Southwest Virginia Community College Math Contest*, 2006)

206 Fra le seguenti affermazioni sulla funzione $y = \frac{1}{|x| + x}$, una è *falsa*. Quale?

A Ha un punto angoloso in $x = 0$.

B Esiste solo per $x > 0$.

C Ha un asintoto verticale.

D Ha un asintoto orizzontale.

E È un ramo di iperbole.

207 Quanti punti di flesso ha $f(x) = x^8 - x^2$?

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

(USA *Southwest Virginia Community College Math Contest*, 2006)

208 Sia $f(x) = \frac{8}{3 + e^x}$.

a) Trova il dominio di f.

b) Trova, giustificandole in modo esauriente, le equazioni di tutti gli asintoti verticali di f, oppure spiega perché non ve ne siano.

c) Trova, giustificandole in modo esauriente, le equazioni di tutti gli asintoti orizzontali di f, oppure spiega perché non ve ne siano.

(USA *Stanford University*, 2006)

$\left[\text{a) } D\text{: } \mathbb{R}\text{; c) as. or.: } y = 0,\ y = \frac{8}{3}\right]$

209 **VERO O FALSO?**

a) Se il grafico di $y = f(x)$ ha un asintoto verticale in $x = 5$, allora il grafico di $y = f(2x + 1)$ deve avere un asintoto verticale in $x = 2$. V F

b) Se il grafico di $y = f(x)$ ha un asintoto orizzontale in $y = -3$, allora il grafico di $y = f(-x) - 1$ deve avere un asintoto orizzontale in $y = 2$. V F

c) Il grafico di $y = x^{2006}$ ha un flesso in $x = 0$. V F

(USA *Stanford University*, 2006)

Studia e rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

210 $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 7$ $[F(2; 15)]$

211 $y = (x^2 - 4x)^2$ $\left[\max(2; 16);\ \min_1(0; 0);\ \min_2(4; 0);\ \text{flessi in } x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3}\right]$

212 $y = (x - 2)(x + 1)(x - 3)$ $\left[\max \text{ in } x = \frac{4 - \sqrt{13}}{3};\ \min \text{ in } x = \frac{4 + \sqrt{13}}{3};\ F\left(\frac{4}{3}; \frac{70}{27}\right)\right]$

213 $y = (1 - x^2)^2$ $\left[\text{funzione pari; } \max(0; 1);\ \min_{1,2}(\pm 1; 0);\ F_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{4}{9}\right)\right]$

214 $y = \frac{x^3}{6} + \frac{6}{x^3}$ $\left[\text{funzione dispari; } a\text{: } x = 0;\ \max\left(-\sqrt[3]{6}; -2\right);\ \min\left(\sqrt[3]{6}; 2\right)\right]$

215 $y = \frac{-2x^3}{x^2 - 4}$ $\left[\text{funzione dispari; } \max(2\sqrt{3}; -6\sqrt{3});\ \min(-2\sqrt{3}; 6\sqrt{3});\ F(0; 0);\ a\text{: } x = \pm 2,\ y = -2x\right]$

216 $y = x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ $\left[\min(1; 0);\ F\left(3; \frac{16}{9}\right);\ a\text{: } x = 0,\ y = x - 1\right]$

217 $y = \dfrac{x^2-4}{x}$ $[\text{funzione dispari; } a\text{: } x = 0,\ y = x]$

218 $y = \sqrt{x^2-1} + x$ $[a\text{: } y = 2x,\ y = 0;\ \min_1(-1; -1);\ \min_2(1; 1)]$

219 $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$ $[a\text{: } y = \pm 1,\ x = -2,\ x = 0]$

220 $y = 1 - \sqrt{x^2-5x+6}$ $\left[a\text{: } y = x - \dfrac{3}{2},\ y = -x + \dfrac{7}{2};\ \max_1(2; 1),\ \max_2(3; 1)\right]$

221 $y = \ln \dfrac{x^2-3x+2}{x^2}$ (trascura y'') $[a\text{: } y = 0,\ x = 0,\ x = 1,\ x = 2]$

222 $y = 2x \ln x$ $\left[\min\left(\dfrac{1}{e}; -\dfrac{2}{e}\right)\right]$

223 $y = \ln \sqrt{x^2-1}$ $[\text{funzione pari; } a\text{: } x = 1,\ x = -1]$

224 $y = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} - 1$ $\left[a\text{: } x = 0;\ \min\left(\dfrac{1}{2}; \sqrt{2e} - 1\right)\right]$

225 $y = e^x \dfrac{x}{x+4}$ $[a\text{: } y = 0,\ x = -4;\ F(-2; -e^{-2})]$

226 $y = x^4 e^{-x}$ $[a\text{: } y = 0;\ \min(0; 0);\ \max \text{ in } x = 4;\ \text{flessi in } x = 2 \text{ e } x = 6]$

227 $y = \ln \dfrac{x^2-1}{x^2+4}$ $[\text{funzione pari; } a\text{: } x = \pm 1,\ y = 0]$

228 $y = \ln \operatorname{sen} x$, $]0; \pi[$. $\left[a\text{: } x = 0,\ x = \pi;\ \max\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right)\right]$

229 $y = e^{\operatorname{sen} x}$, $]0; 2\pi[$. $\left[\min\left(\dfrac{3}{2}\pi; \dfrac{1}{e}\right);\ \max\left(\dfrac{\pi}{2}; e\right);\ \text{flessi in } \alpha = \operatorname{arcsen}\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \pi - \alpha\right]$

230 $y = \sqrt{\operatorname{sen} x - \cos x}$, $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5}{4}\pi\right]$. $\left[\min_1\left(\dfrac{\pi}{4}; 0\right),\ \min_2\left(\dfrac{5}{4}\pi; 0\right);\ \max\left(\dfrac{3}{4}\pi; \sqrt[4]{2}\right)\right]$

231 $y = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} 2x}}$, $]0; 2\pi[$. $\left[a\text{: } x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2},\ x = \pi,\ x = \dfrac{3}{2}\pi;\ \min_1\left(\dfrac{\pi}{4}; 1\right),\ \min_2\left(\dfrac{5}{4}\pi; 1\right)\right]$

232 $y = (\ln x - 2)\ln x$ $[a\text{: } x = 0;\ \min(e; -1);\ F(e^2; 0)]$

233 $y = \dfrac{1}{\cos^4 x} - 1$, $[0; 2\pi]$. $\left[\text{funzione pari; } a\text{: } x = \dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{3}{2}\pi;\ \min_1(0; 0),\ \min_2(\pi; 0),\ \min_3(2\pi; 0)\right]$

234 $y = \dfrac{1}{(1-2x)^3}$ $\left[a\text{: } x = \dfrac{1}{2},\ y = 0\right]$

235 $y = 2x^3(2-x)^2$ $\left[\max\left(\dfrac{6}{5}; \dfrac{6912}{3125}\right);\ \min(2; 0);\ F_1(0; 0),\ \text{flessi in } x = \dfrac{6 \pm \sqrt{6}}{5}\right]$

236 $y = \operatorname{sen} 2x + 2\cos^2 x$, $[0; 2\pi]$.
$[\min(0; 2);\ \max(2\pi; 2);\ \max \text{ e } \min \text{ per } \operatorname{tg} x = -1 \pm \sqrt{2};\ \text{flessi per } \operatorname{tg} x = 1 \pm \sqrt{2}]$

237 $y = 2 \operatorname{arcsen} \dfrac{1+x}{1-x}$ $[a\text{: } y = -\pi;\ \max(0; \pi) \text{ con cuspide}]$

238 $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x-1}{2x-1}$ $\left[a\text{: } y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2};\ F\left(\dfrac{3}{5}; -\operatorname{arctg} 2\right)\right]$

239 $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2}$ $\left[a\text{: } x = 0,\ y = 1;\ \min\left(\dfrac{4}{3}; -\dfrac{1}{8}\right);\ \text{flesso in } x = 2\right]$

240 $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}$ $[a\text{: } x = 2;\ \min(3; 2);\ \text{flesso in } x = 5]$

241 $y = x \cdot \ln x^2$ $\left[\max\left(-\dfrac{1}{e}; \dfrac{2}{e}\right);\ \min\left(\dfrac{1}{e}; -\dfrac{2}{e}\right)\right]$

242 $y = \dfrac{\cos x}{1 + \cos x}$, $[0; 2\pi]$. $\left[a\colon x = \pi;\ \max_1\left(0; \dfrac{1}{2}\right),\ \max_2\left(2\pi; \dfrac{1}{2}\right)\right]$

243 $y = e^x \cdot (x^2 + 1)$ $[a\colon y = 0;$ flessi in $x = -3$ e $x = -1$ (orizzontale)$]$

244 $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{9}{4}x^2 + 2x + \dfrac{7}{3}$ $\left[\max\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{45}{16}\right);\ \min\left(4; -\dfrac{13}{3}\right);\ \text{flesso in } x = \dfrac{9}{4}\right]$

245 $y = \dfrac{x^3 - 2}{x^2}$ $\left[\max\left(-\sqrt[3]{4}; -\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}\right);\ a\colon x = 0,\ y = x\right]$

246 $y = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{x}$ $\left[\text{funzione dispari; } a\colon y = \pm\dfrac{\pi}{2},\ x = 0\right]$

247 $y = \sqrt{\ln(x + 3)}$ $[\min(-2; 0)]$

248 $y = \dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $[\text{funzione pari; } \min_{1,2}(\pm\sqrt{2}; -2)]$

249 $y = \dfrac{\ln(x^2 - 1)}{x^2 - 4}$ (trascura y'') $[\text{funzione pari; } a\colon x = \pm 1,\ x = \pm 2,\ y = 0]$

250 $y = \operatorname{arcsen}\sqrt{x - x^2}$ $\left[\max\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\pi}{6}\right);\ \min_1(0; 0),\ \min_2(1; 0)\right]$

251 $y = x + 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$, $[0; 2\pi]$. $\left[\min_1(0; 1),\ \min_{2,3} \text{ in } x = \dfrac{5}{12}\pi \text{ e } x = \dfrac{17}{12}\pi;\right.$
$\left.\max_{1,2} \text{ in } x = \dfrac{\pi}{12} \text{ e } x = \dfrac{13}{12}\pi,\ \max_3(2\pi; 2\pi + 1);\ \text{flessi in } x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\right]$

252 $y = x^2 \ln|x|$ $\left[\text{funzione pari: } \min_{1,2}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{e}}; -\dfrac{1}{2e}\right);\ F_{1,2}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}; -\dfrac{3}{2e^3}\right)\right]$

253 $y = \sqrt{\dfrac{1 + x^2}{1 + 2x^2}}$ $\left[\text{funzione pari; } a\colon y = \dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \max(0; 1);\ \text{flessi in } x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{10} - 2}{6}}\right]$

254 $y = \ln\dfrac{|x| - 1}{x}$ $\left[a\colon y = 0,\ x = \pm 1,\ x = 0;\ F\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)\right]$

255 $y = (x + 4)e^{-x^2}$ $\left[a\colon y = 0;\ \max \text{ in } x = \dfrac{-4 + \sqrt{18}}{2};\ \min \text{ in } x = \dfrac{-4 - \sqrt{18}}{2}\right]$

256 $y = \dfrac{|x|}{\ln|x|}$ $\left[\text{funzione pari; } a\colon x = \pm 1;\ \min(\pm e; e);\ F_{1,2}\left(\pm e^2; \dfrac{e^2}{2}\right)\right]$

257 $y = \ln\dfrac{x^2 - x}{|x| + 2}$ $[a\colon x = 0,\ x = 1]$

258 $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{x+2}}}$ (trascura y'') $[a\colon x = -2;\ \min(1; 1)]$

259 $y = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 - x}}{x} & \text{se } x < 0 \vee x \geq 1 \\ \dfrac{1 - x}{x} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$ $[a\colon x = 0,\ y = \pm 1;\ \min(1; 0)]$

260 $y = x^x$ $\left[\min\left(\dfrac{1}{e}; \sqrt[e]{\dfrac{1}{e}}\right)\right]$

261 $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$ $\left[\min(-1; 0);\ F\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

262 $y = 2\cos^2 x \operatorname{tg} x$ $\left[\text{funzione dispari; max in } x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ \text{min in } x = \dfrac{3}{4}\pi + k\pi;\ \text{flessi in } x = k\pi\right]$

263 $y = \sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}}$, $[0; 2\pi]$. $\left[a\colon x = \dfrac{3}{2}\pi;\ \min_1\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right),\ \min_2(2\pi; 1);\ \max(0; 1)\right]$

264 $y = \left|\ln\sqrt{x}\right|$ $[a\colon x=0;\ \min(1;0)]$

265 $y = 2\sqrt{\operatorname{arcsen} x}$ $[\min(0;0);\ \max(1;\sqrt{2\pi});\ 0 < x_F < 1]$

266 Determinare dominio, asintoti, intervalli di monotonia, massimi e minimi, e disegnare un grafico qualitativo delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4}$;

b) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$;

c) $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1}$.

(*Politecnico di Torino, Test di autovalutazione*)

267 Studiare la seguente funzione (dominio, limiti, massimi e minimi, derivata seconda):

$$y = \arctan\left(\frac{x^3}{4x^2 - 3}\right).$$

(*Università di Firenze, Facoltà di Ingegneria Industriale, Test di Analisi I*, 2003)

268 Studiare la funzione $f(x) = \log(x^2 - 2x - |2x - 3| + 4)$ (in particolare specificare: dominio, segno e zeri, limiti agli estremi del dominio, monotonia, concavità e convessità, eventuali massimi e minimi e flessi: tracciare un grafico qualitativo).

(*Università di Torino, Corso di laurea in Informatica, Prova di Analisi I*, 2009)

269 Let $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$, $x \neq 3$, and $x \in \mathbb{R}$.

a) Show that the curve $f(x)$ has no points of inflection.
b) Find the equations of the asymptotes of the curve $f(x)$.
c) Draw a sketch of the curve $f(x)$.
d) Find how x_1 and x_2 are related if the tangents at $(x_1; f(x_1))$ and $(x_2; f(x_2))$ are parallel.

(IR *Leaving Certificate Examination,* Higher Level, 1994)

$[\text{b) } x = 3,\ y = 1;\ \text{d) } x_1 = x_2 \vee x_1 + x_2 = 6]$

270 A curve C has equation $y = (x^2 + 1)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) i) Show that $\dfrac{dy}{dx} = -(x-1)^2 e^{-x}$.
ii) Hence find the coordinates of the stationary point on the curve C.
iii) Show that this stationary point is a point of inflection.

b) i) Show that $\dfrac{d^2y}{dx^2} = (x-a)(x-b)e^{-x}$, where a and b are constants to be determined.
ii) Deduce that the curve has another point of inflection.

c) Sketch the curve C, indicating the two points of inflection.

(UK *Northern Examination Assessment Board, NEAB*)

$\left[\text{a) } \left(1; \dfrac{2}{e}\right);\ \text{b) } a = 1, b = 3;\ \text{point of inflection } \left(3; \dfrac{10}{e^3}\right)\right]$

2. I GRAFICI DI UNA FUNZIONE E DELLA SUA DERIVATA

▶ Teoria a pag. 1851

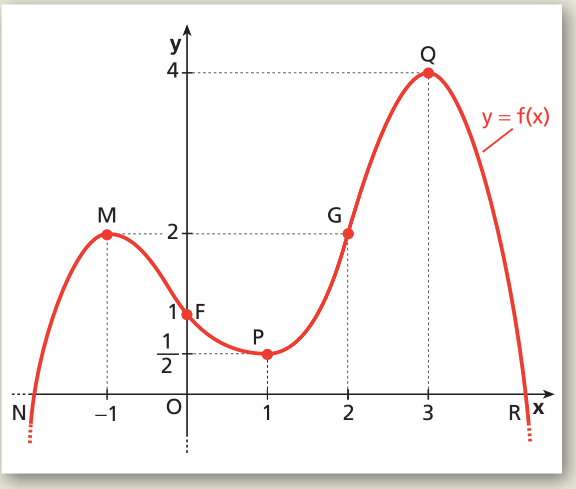
Dal grafico di una funzione a quello della sua derivata

Per passare dal grafico di una funzione $f(x)$ a quello della sua derivata, supponendo che $f'(x)$ e $f''(x)$ esistano sempre, consideriamo che:

- nei punti di massimo o di minimo della funzione $f(x)$ si ha $f'(x) = 0$;
- negli intervalli in cui la funzione $f(x)$ è crescente si ha $f'(x) > 0$ e negli intervalli in cui la funzione è decrescente si ha $f'(x) < 0$;
- nei punti di flesso si ha $f''(x) = 0$ e quindi $f'(x)$ ha la tangente orizzontale e può avere un massimo o un minimo.

271 ESERCIZIO GUIDA

Dato il grafico di $y = f(x)$ della figura a fianco, studiamo l'andamento del grafico della sua derivata $y = f'(x)$.

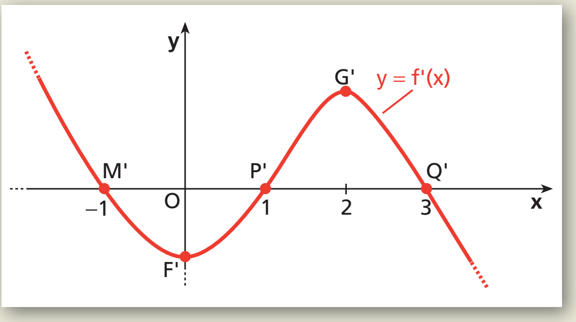


I punti M, P, Q, di ascisse rispettive -1, 1, 3, sono punti di massimo e minimo per $f(x)$, quindi $f'(x) = 0$ per $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$.

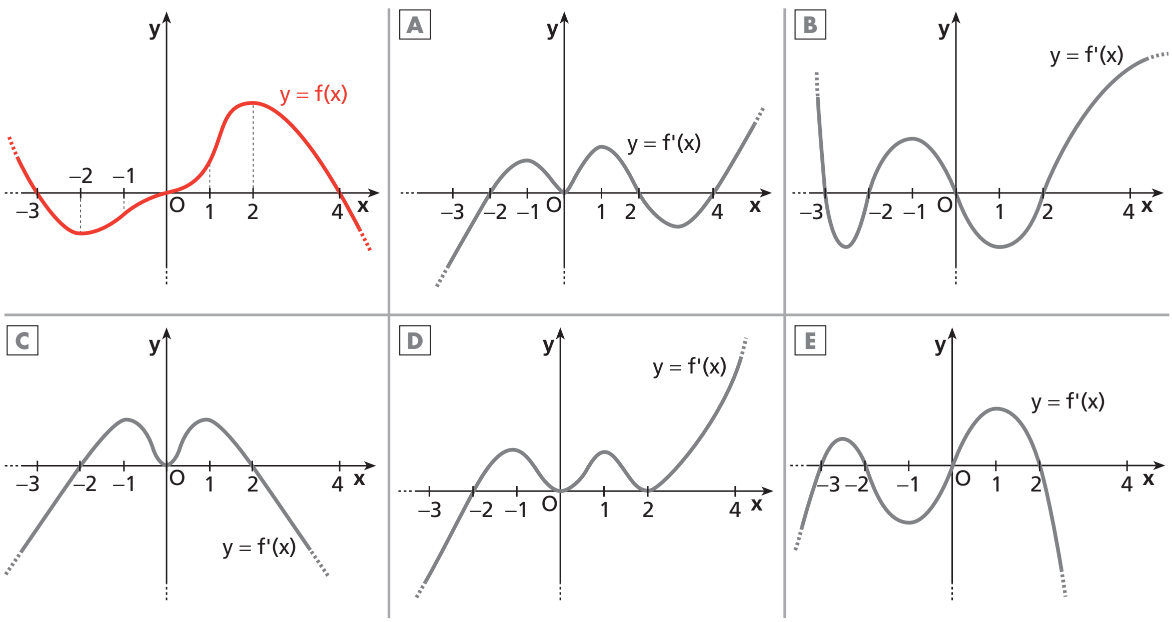
Nei tratti NM e PQ la funzione $f(x)$ è crescente, quindi $f'(x) > 0$, mentre nei tratti MP e QR $f(x)$ è decrescente, quindi $f'(x) < 0$.

Nei punti di flesso F e G di $f(x)$ si ha $f''(x) = 0$, quindi $f'(x)$ ha un minimo in $x = 0$ e un massimo in $x = 2$.

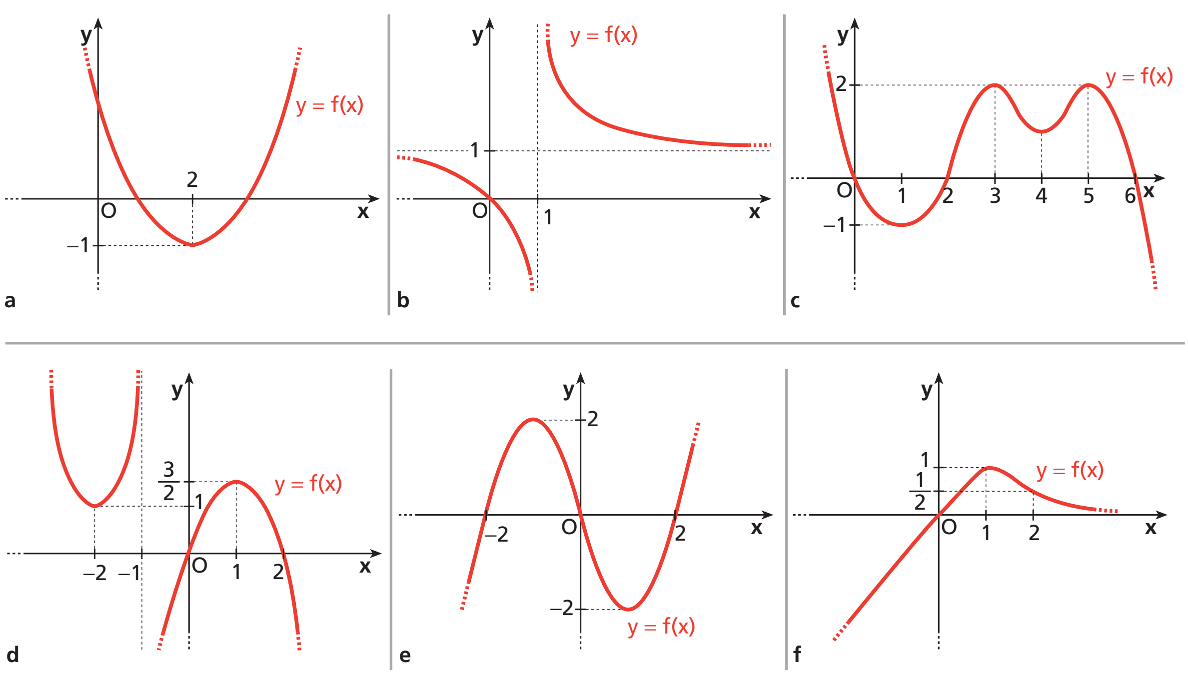
Rappresentiamo graficamente l'andamento di $f'(x)$.



272 **TEST** Dato il grafico di $y = f(x)$, individua l'andamento del grafico della sua derivata $y = f'(x)$.

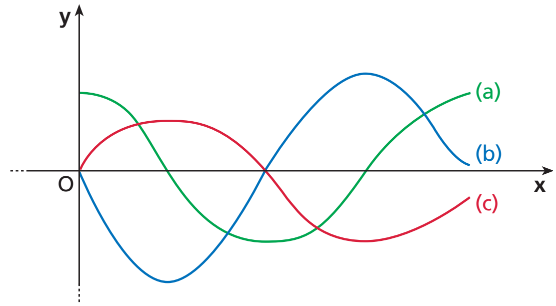


273 Dato il grafico della funzione $y = f(x)$, traccia l'andamento di quello della sua derivata nei seguenti casi.



274 Traccia nello stesso piano cartesiano il grafico della funzione $y = 2xe^{2x}$ e quello della sua derivata e poi trova le coordinate del loro punto di intersezione. $[P(-1; -2e^{-2})]$

275 È dato di seguito il grafico della funzione f, insieme ai grafici delle funzioni derivata prima e seconda, f' e f'', rispettivamente. Indica quale grafico appartiene a quale funzione e spiega il tuo ragionamento.

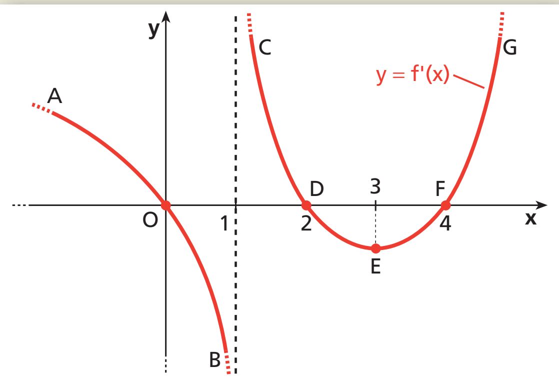


(USA *Stanford University*, 2006)

Dal grafico della derivata a quello della sua funzione

276 **ESERCIZIO GUIDA**

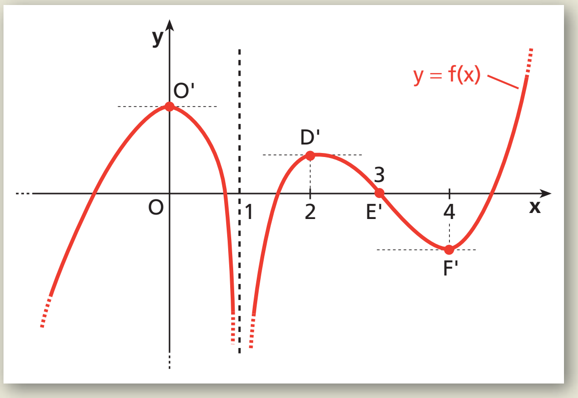
Dato il grafico della funzione $y = f'(x)$ della figura a lato, studiamo il possibile andamento del grafico di una funzione $f(x)$ che abbia $y = f'(x)$ come derivata.



Nei tratti AO, CD, FG in cui $f'(x)$ è positiva, la funzione $y = f(x)$ è crescente, mentre nei tratti OB e DEF in cui $f'(x)$ è negativa $y = f(x)$ è decrescente. In corrispondenza dei punti O, D, F in cui $f'(x) = 0$ si hanno punti del grafico di $f(x)$ a tangente orizzontale.

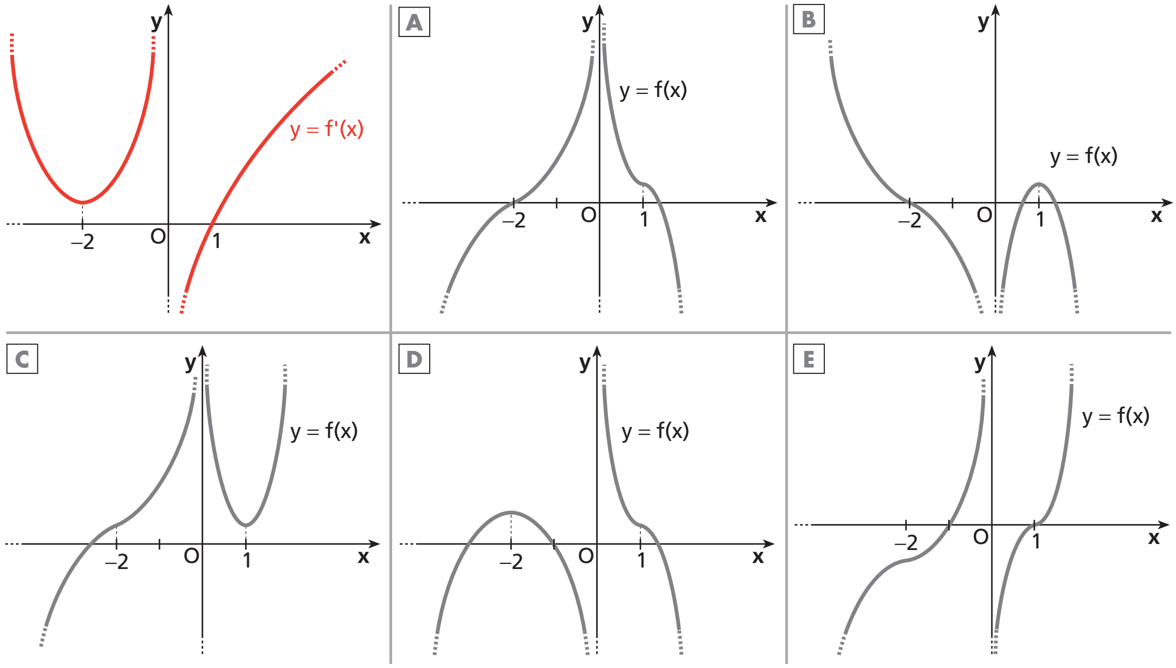
Tracciamo quindi un possibile andamento grafico della funzione $y = f(x)$.

Se si trasla il grafico di un vettore parallelo all'asse y, si ottiene ancora il grafico di un'altra funzione che ha per derivata $y = f'(x)$. Rispetto alla precedente la nuova funzione ha come equazione $y = f(x) + c$, con c costante.

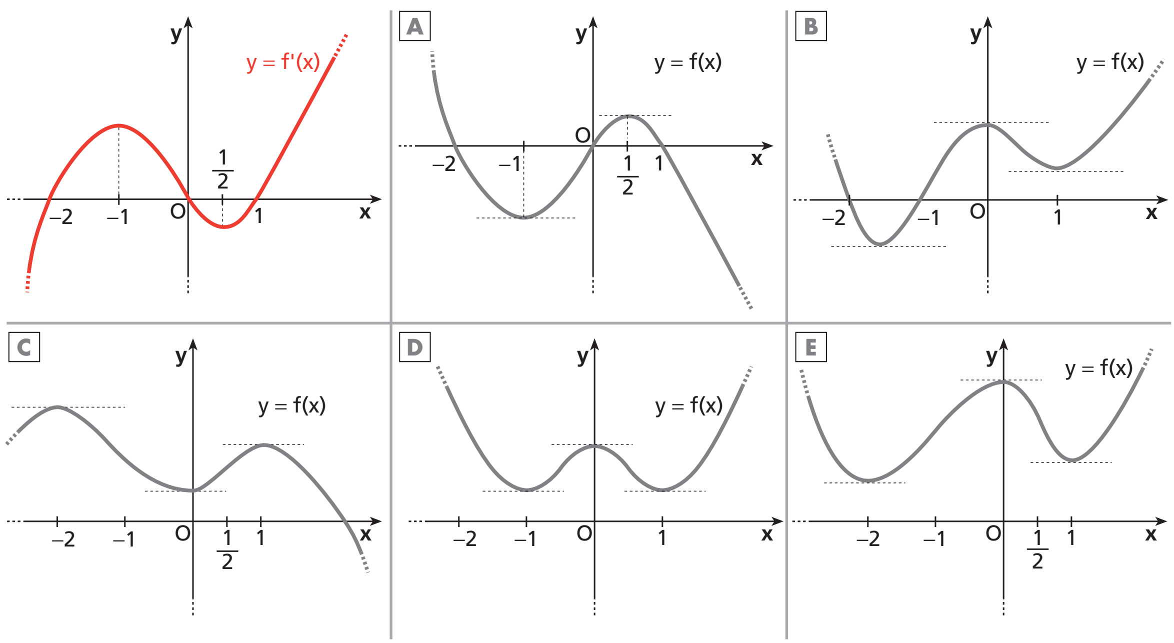


TEST Dato il grafico di $y = f'(x)$, individua un possibile andamento del grafico della funzione $y = f(x)$.

277

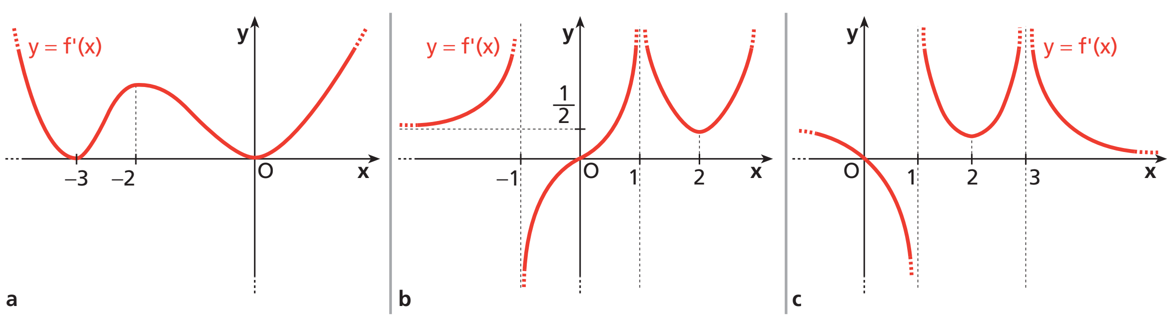


278

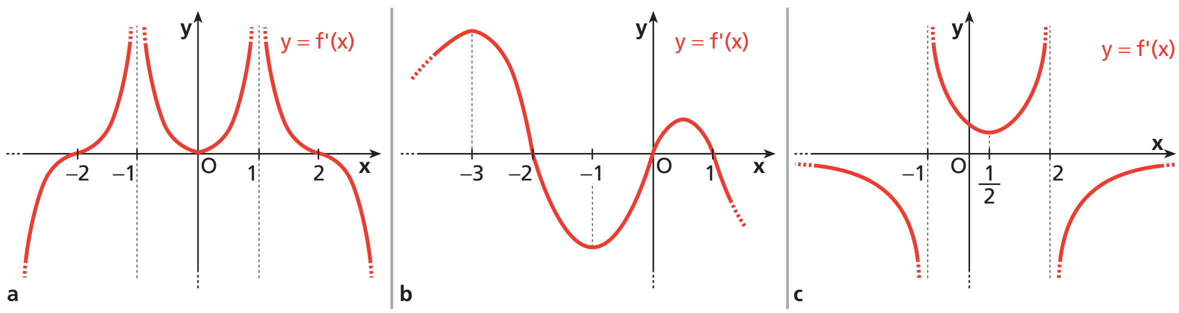


Dato il grafico della funzione $y = f'(x)$, traccia un possibile andamento della funzione $y = f(x)$ nei seguenti casi.

279



280



281 Una funzione $y = f(x)$ ha per derivata una funzione $f'(x)$ il cui diagramma è una parabola che ha per asse di simmetria la retta $x = 1$ e che nel suo punto di intersezione con l'asse x di ascissa 3 ha per tangente la retta di coefficiente angolare -2.
Disegna l'andamento del grafico della funzione $f(x)$, sapendo che passa per l'origine.

3. APPLICAZIONI DELLO STUDIO DI UNA FUNZIONE

▶ Teoria a pag. 1853

IN PRATICA
▶ Videolezione 74

282 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo il numero delle soluzioni reali della seguente equazione parametrica al variare di k in $\mathbb{R}$:

$$3x^4 - kx^3 + 1 = 0, \quad \text{con } -1 \leq x \leq 2.$$

1. Osserviamo che $x = 0$ non è soluzione dell'equazione parametrica, dunque ricaviamo k dividendo per x:

$$k = \frac{3x^4 + 1}{x^3}.$$

2. Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}.$$

a) Dominio D: $x \neq 0$.

b) La funzione è dispari perché: $f(-x) = -\dfrac{3x^4 + 1}{x^3} = -f(x)$.

c) Non ci sono intersezioni con gli assi.

d) Segno: $\dfrac{3x^4 + 1}{x^3} > 0$ per $x > 0$.

e) Limiti agli estremi del dominio:

- $\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$, $x = 0$ asintoto verticale;
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$;
- $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 3$,

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{3x^4 + 1}{x^3} - 3x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{3x^4} + 1 - \cancel{3x^4}}{x^3} = 0,$$

quindi $y = 3x$ è l'equazione dell'asintoto obliquo.

f) Massimi, minimi, flessi.

$$y' = \frac{12x^3 \cdot x^3 - 3x^2(3x^4+1)}{x^6} = \frac{12x^6 - 9x^6 - 3x^2}{x^6} = \frac{3x^6 - 3x^2}{x^6} = \frac{3x^2(x^4-1)}{x^6} = \frac{3(x^4-1)}{x^4}.$$

Si ha $y' > 0$ quando:

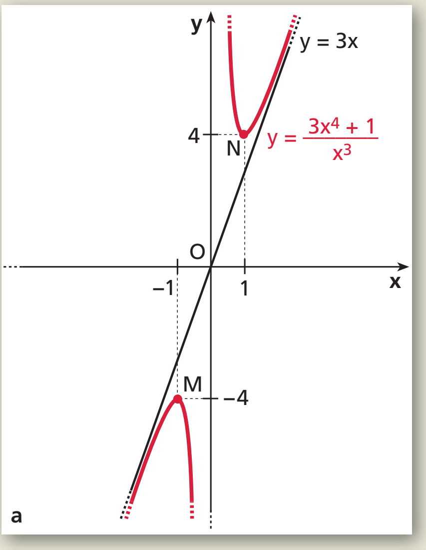
$x^4 - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -1 \vee x > 1.$

La funzione è crescente per $x < -1 \vee x > 1$, decrescente per $-1 < x < 1 \wedge x \neq 0$.

Per $x = -1$ si ha un massimo: $M(-1; -4)$.

Per $x = 1$ si ha un minimo: $N(1; 4)$.

Tralasciamo lo studio di y'' e tracciamo il grafico della funzione $f(x)$ (figura a).



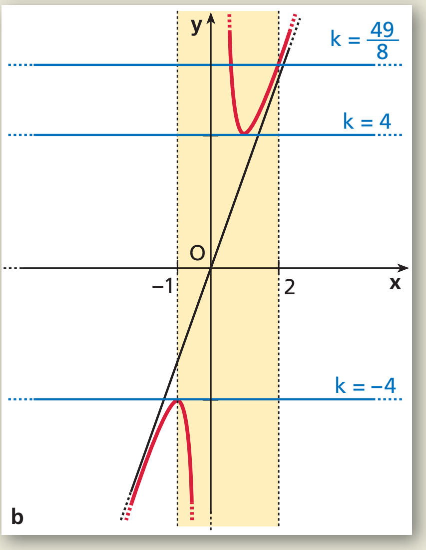
3. Consideriamo il grafico soltanto per $-1 \leq x \leq 2$ e lo intersechiamo con un fascio di rette di equazione $y = k$, con $k \in \mathbb{R}$ (figura b).

Abbiamo:

- per $k < -4$, una soluzione;
- per $k = -4 \vee k = 4$, due soluzioni coincidenti;
- per $4 < k < \frac{49}{8}$, due soluzioni distinte;
- per $k = \frac{49}{8}$, due soluzioni delle quali una limite;
- per $k > \frac{49}{8}$, una soluzione.

In sintesi:

- per $k = -4 \vee 4 \leq k \leq \frac{49}{8}$, due soluzioni;
- per $k < -4 \vee k > \frac{49}{8}$, una soluzione.



Determina il numero delle soluzioni delle seguenti equazioni parametriche, al variare di k, con le limitazioni indicate a fianco.

283 $(1+k)\cos x - 2 = 0, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x < \pi.$ $[k < -3$ una sol.; $k \geq 1$ due sol.$]$

284 $(k-2)\ln x + k = 0, \qquad 0 < x < e.$ $[k < 1 \vee k > 2$ una sol.$]$

285 $k\sqrt{x} - k - x = 0, \qquad 1 < x \leq 9.$ $\left[4 \leq k \leq \frac{9}{2}\right.$ due sol.; $\left.k > \frac{9}{2}\right.$ una sol.$]$

286 $x^6 - 8kx^3 - 64 = 0, \qquad -2 \leq x \leq 2.$ $[k = 0$ due sol.; $k \neq 0$ una sol.$]$

287 $e^x(1-k)+k+2=0, \quad -1<x\leq 3.$ $\left[k<\frac{1+2e}{1-e} \vee k\geq \frac{e^3+2}{e^3-1} \text{ una sol.}\right]$

288 $x^3-2x^2-k=0, \quad -1\leq x\leq 3.$ $\left[-3\leq k<-\frac{32}{27} \vee 0<k\leq 9 \text{ una sol.}; -\frac{32}{27}\leq k\leq 0 \text{ tre sol.}\right]$

289 $k\,\mathrm{sen}^2 x-\mathrm{tg}\, x=0, \quad \frac{\pi}{4}\leq x<\frac{5}{4}\pi.$ $[-2<k<2 \text{ una sol.}; k=2 \text{ due sol.}; k\leq -2 \vee k>2 \text{ tre sol.}]$

290 $k\,\mathrm{sen}\, x-2\cos x+1=0, \quad 0<x\leq \frac{5}{3}\pi.$ $[k\geq 0 \text{ due sol.}; k<0 \text{ una sol.}]$

291 $x^3-kx^2+4k-2=0, \quad 1\leq x\leq 3.$ $\left[k\leq \frac{1}{3} \vee k\geq 5 \text{ una sol.}\right]$

292 $x^4-2x^2-kx-k=0, \quad x\leq 0.$ $[k>0 \text{ una sol.}; k<0 \text{ due sol.}; k=0 \text{ tre sol.}]$

293 $x^4+2kx^3-4x^2+4=0$ $[k=0 \text{ quattro sol.}; k\neq 0 \text{ due sol.}]$

294 Discuti graficamente l'esistenza e il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$(k-2)x^2+2(1-3k)x+9k+4=0$$

al variare di $k\in\mathbb{R}$. $\left[k<-\frac{9}{8} \text{ nessuna sol.}; -\frac{9}{8}\leq k<2 \vee k>2 \text{ due sol.}; k=2 \text{ una sol.}\right]$

295 Stabilisci al variare di $k\in\mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione:

$$\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+k=0.$$

$\left[k<-\frac{1}{6} \vee k>0 \text{ una sol.}; -\frac{1}{6}\leq k\leq 0 \text{ tre sol.}\right]$

296 Discuti il numero delle soluzioni positive dell'equazione:

$$\frac{x^2-2x}{|x|-3}=k.$$

$[k\leq 0 \text{ una sol.}; 0<k\leq 4-2\sqrt{3} \vee k\geq 4+2\sqrt{3} \text{ due sol.}; 4-2\sqrt{3}<k<4+2\sqrt{3} \text{ nessuna sol.}]$

La risoluzione grafica delle equazioni e delle disequazioni

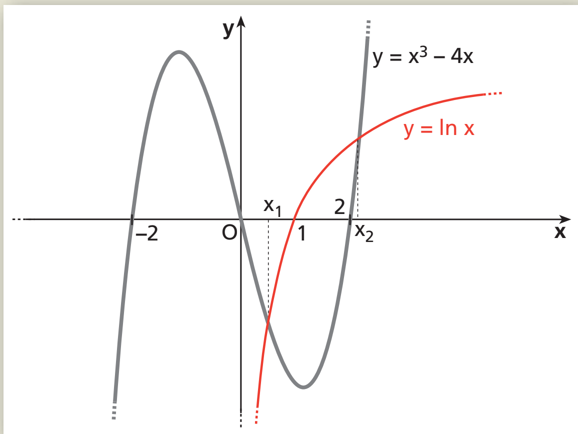
297 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo graficamente l'equazione $x^3-4x-\ln x=0$.

Scriviamo l'equazione nella forma:

$$x^3-4x=\ln x.$$

Osserviamo che l'equazione può ammettere soluzioni solo per $x>0$.
Disegniamo nello stesso piano cartesiano le funzioni $y=x^3-4x$ e $y=\ln x$.
Le ascisse dei loro punti di intersezione sono le soluzioni dell'equazione.



Dal grafico si osserva che $x_1<1$ e $x_2>2$. Per ottenere una migliore approssimazione è necessario ingrandire il grafico. Ciò si può ottenere in modo soddisfacente se si ha a disposizione un programma informatico come Derive che disegna il grafico delle funzioni.

In tal caso si osserva che $0{,}3<x_1<0{,}4$ e $2<x_2<2{,}1$.

Risolvi graficamente le seguenti equazioni.

298 $x + 1 + e^{2x} = 0$ $[-1,2 < x_1 < -1,1]$

299 $\cos x + x - 1 = 0$ $[x_1 = 0]$

300 $2x^3 - x^4 - e^{-x} = 0$ $[0,7 < x_1 < 0,8; 1,9 < x_2 < 2]$

301 $\dfrac{x-1}{x^2} + 2^x = 0$ $[0,5 < x_1 < 0,6]$

302 $\dfrac{|x|}{x^2 - 4} - \ln x = 0$ $[0,7 < x_1 < 0,8; 2,5 < x_2 < 2,7]$

303 $xe^x - \ln(x+4) = 0$ $[-3,5 < x_1 < -3; 0,7 < x_2 < 0,8]$

304 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo graficamente la disequazione $x^3 - 4x - \ln x \geq 0$.

Scritta la disequazione nella forma

$$x^3 - 4x \geq \ln x$$

e considerate le funzioni $y = x^3 - 4x$ e $y = \ln x$, osservando i loro grafici, disegnati nell'esercizio guida precedente, dobbiamo considerare gli intervalli in cui la prima funzione si «trova sopra» la seconda, quindi possiamo affermare che la disequazione ammette soluzioni per $0 < x \leq x_1 \vee x \geq x_2$.

Risolvi graficamente le seguenti disequazioni.

305 $\ln(-x) \leq x + 1$ $[-1 \leq x < 0]$

306 $\ln\sqrt{1 - x^2} - e^x \geq 0$ [nessuna soluzione]

307 $x^3 e^{-x^3} < 1 - x$ [$x < x_1$, con $0,7 < x_1 < 0,8$]

308 $\dfrac{(x-2)^2}{x} \geq x \ln x$ [$0 < x \leq x_1$, con $1,3 < x_1 < 1,4$]

309 Dimostra che la disuguaglianza $\dfrac{x}{1 + x^2} < \operatorname{arctg} x$ è valida $\forall x > 0$.

I problemi con le funzioni

310 Determina a, b, c, d in modo che la funzione $y = ax + b + \dfrac{c}{x} + \dfrac{d}{x^2}$ abbia come asintoto la retta di equazione $2y + x + 4 = 0$, in $x = -1$ un punto di minimo e nel punto $x = -2$ un flesso. Rappresenta il suo grafico.
$\left[a = -\dfrac{1}{2}, b = -2, c = \dfrac{3}{2}, d = 1\right]$

311 Data la funzione $y = \dfrac{ax^2 - 1}{x + 2}$:

a) trova a in modo che la funzione abbia un massimo nel punto di ascissa $x = 1$;
b) rappresenta graficamente la funzione ottenuta;
c) cerca un punto P nel grafico, con $-1 \leq x_P \leq 4$, in modo che la somma delle sue distanze dagli asintoti sia minima.
$\left[\text{a) } a = -\dfrac{1}{5}; \text{ c) } x_P = -2 + \dfrac{3}{\sqrt[4]{26}} \simeq -0,67\right]$

312 Determina a, b, c, d in modo che la funzione $y = \dfrac{ax^3 + b}{cx^2 + d}$ abbia per asintoti le rette di equazioni $y = 2x$ e $x = 1$ e un flesso in $x = 0$. Rappresenta poi la funzione ottenuta.
$\left[y = \dfrac{2x^3}{x^2 - 1}\right]$

313 Data la funzione $y = \ln\dfrac{ax^3}{bx^2 + c}$, con $a \neq 0$, trova a, b, c, sapendo che la funzione ha un minimo in $\left(3; \ln\dfrac{9}{2}\right)$ e un asintoto verticale in $x = \sqrt{3}$. Rappresenta graficamente la funzione ottenuta. $\left[y = \ln\dfrac{x^3}{x^2 - 3}\right]$

314 Un prisma di volume $8\,\text{cm}^3$ ha per base un triangolo equilatero. Esprimi l'area della superficie totale in funzione del lato del triangolo di base e poi rappresenta graficamente la funzione. $\left[y = \sqrt{3}\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{32}{x}\right)\right]$

315 Date le funzioni $y = -e^{-x}$ e $y = e^x - 2$, rappresentale nello stesso piano cartesiano e determina i loro punti di intersezione. Considera poi la retta $x = k$ che interseca i due grafici rispettivamente nei punti P e Q. Esprimi $\overline{PQ}$ in funzione di k e rappresenta graficamente la funzione ottenuta. $\left[(0; -1);\ y = \dfrac{(e^k - 1)^2}{e^k}\right]$

316 In un sistema di riferimento cartesiano Oxy considera la semicirconferenza di diametro OA, con $A(4; 0)$, e passante per $B(2; 2)$. Determina la misura dell'area di $OBPA$ al variare del punto P sull'arco $\overset{\frown}{BA}$. Studia la funzione. $\left[x_P = x\text{: } y = x + \sqrt{4x - x^2},\ 2 \leq x \leq 4\right]$

317 Disegna il grafico di $y = f(x) = e^{ax+3} - e^{2ax+6}$ $(a \in \mathbb{R})$ sapendo che la curva passa per $A(3; 0)$. Dal grafico deduci quello di $y = \dfrac{1}{f(x)}$. $[a = -1]$

318 Data la funzione $y = \sqrt{\dfrac{3 - ax}{6 + x}}$ $(a \in \mathbb{R})$, disegna il suo grafico sapendo che passa per il punto di minimo del grafico di $y = e^{\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2}}$. $[a = -2]$

319 Considera la circonferenza di diametro AB, che misura $2r$, e la retta t tangente a essa in A. Preso un punto P sulla circonferenza, da P traccia la parallela a t, fino a incontrare la circonferenza in P', e da P' la perpendicolare a t che intersechi t in C'. La perpendicolare da P a t interseca t in C. Studia la funzione espressa dal rapporto $y = \dfrac{\overline{CC'}}{\overline{PC}}$, con $x = \overline{PC}$. $\left[y = \dfrac{2\sqrt{x(2r - x)}}{x};\ \min(2r; 0);\ F\left(\dfrac{3}{2}r; 2\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right);\ a\text{: } x = 0\right]$

320 Su una semicirconferenza di centro O, diametro AB e raggio r prendi un punto P e traccia la sua proiezione H su AB. Esprimi $y = \dfrac{1}{\overline{PH}^2} + \dfrac{1}{\overline{AP}^2}$ in funzione di $\overline{AH} = x$. Studia la funzione per $r = 1$.

$\left[y = \dfrac{4r - x}{2rx(2r - x)};\ \max \text{ in } x = 4 + 2\sqrt{2};\ \min \text{ in } x = 4 - 2\sqrt{2};\ a\text{: } y = 0,\ x = 0,\ x = 2\right]$

321 Disegna un quarto di cerchio AOB di centro O e delimitato dai raggi AO e BO, di misura $\sqrt{2}$. Sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ considera un punto P e chiama T l'intersezione fra la retta OP e la tangente in A. Detto $x = P\widehat{O}A$, determina la funzione che a x associa la misura dell'area del triangolo PTA. Studia e rappresenta la funzione ottenuta. $\left[y = \dfrac{(1 - \cos x)\,\text{sen}\,x}{\cos x}\right]$

322 Dato un quarto di cerchio AOB, di centro O e delimitato dai raggi OA e OB di misura 2, siano P un punto dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ e C il punto in cui la parallela ad AO condotta per P interseca OB. Da P traccia una semiretta che incontri OA in D, in modo tale che $D\widehat{P}O \cong O\widehat{P}C$. Esprimi il rapporto $y = \dfrac{\overline{OD}}{\overline{OC}}$ in funzione di $\overline{CP} = x$. Studia la funzione e disegna il suo grafico. $\left[y = \dfrac{2}{x\sqrt{4 - x^2}}\right]$

323 Nel sistema di riferimento Oxy determina l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse x, passante per l'origine e con vertice $V(4; 2)$. Rappresentala graficamente. Considera poi la retta $x = a$ (con $a \geq 0$), che interseca in P e Q la parabola, e proietta P e Q sull'asse y in P' e Q'. Esprimi e studia la misura dell'area di $PP'QQ'$ al variare di a. $\left[x = -y^2 + 4y;\ A = 2a\sqrt{4 - a},\ 0 \leq a \leq 4\right]$

324 Preso un punto P su una semicirconferenza di diametro AB e raggio r considera la proiezione T di P sulla tangente alla semicirconferenza in B. Determina il volume del solido, ottenuto dalla rotazione completa di $APTB$ intorno al diametro, in funzione di $\overline{AC} = x$, essendo C la proiezione di P su AB.
Fissato $r = 1$, rappresenta graficamente la funzione senza tener conto delle limitazioni ed evidenzia il tratto relativo al problema.

$\left[y = \frac{2}{3}\pi x(2r - x)(3r - x), 0 \le x \le 2r\right]$

325 Data la funzione $y = e^{\frac{ax-b}{x+c}}$, trova a, b, c, sapendo che nel punto di ascissa 0 ha un flesso con tangente di equazione $y = \frac{2}{e}x + \frac{1}{e}$. Rappresenta la funzione ottenuta. $[a = 1, b = 1, c = 1]$

326 In un sistema di riferimento Oxy, verifica che tutte le parabole del fascio di equazione $y = x^2 - x(2 + k) + 2k$ passano per uno stesso punto P e trova la parabola γ del fascio che è tangente in P alla retta di equazione $y = -x + 2$.
Considerato poi un punto Q qualsiasi di γ, determina la misura dell'area A_{OPQ} del triangolo OPQ e studia la funzione $y = \frac{1}{A_{OPQ}}$.

$\left[P(2; 0); \gamma: y = x^2 - 5x + 6; y = \frac{1}{|x^2 - 5x + 6|}\right]$

327 Studia il fascio di parabole di equazione $y = kx^2 - 4kx + 2$, verificando che tutte le parabole passano per due punti A e B. Calcola le coordinate del loro vertice V. Considera poi il punto P di intersezione di una generica parabola del fascio con la retta di equazione $x = 1$. Determina la misura A_{OVP} dell'area del triangolo OVP, dove O è l'origine degli assi, e la misura di PV. Studia la funzione $y = \frac{A_{OVP}}{PV}$ al variare di k.

$\left[A(0; 2), B(4; 2), V(2; 2 - 4k); A_{OVP} = |k - 1|, \overline{PV} = \sqrt{1 + k^2}\right]$

328 Considera un punto P sulla semicirconferenza di diametro AB, che misura $2a$, e costruisci il triangolo equilatero PBC esternamente alla semicirconferenza. Esprimi il rapporto y tra le aree dei triangoli PBC e PAB al variare di P sulla semicirconferenza. Studia la funzione ottenuta ed evidenzia il tratto del suo grafico relativo al problema.

$\left[P\widehat{A}B = x: y = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg} x, 0 \le x < \frac{\pi}{2}\right]$

329 Data la semicirconferenza di diametro AB, con $\overline{AB} = 2r$, traccia una corda DC parallela ad AB e trova in funzione dell'angolo $C\widehat{A}B$ il volume V_1 del solido ottenuto dalla rotazione del trapezio $ABCD$ intorno al diametro AB e il volume V_2 del cilindro ottenuto dalla rotazione della corda DC intorno al diametro AB.
Studia la funzione $y = \frac{V_1}{V_2}$, disegna il suo grafico ed evidenzia il tratto relativo al problema.

$\left[V_1 = \frac{2}{3}\pi r^3 \operatorname{sen}^2 2x(1 + 2\cos 2x), V_2 = 2\pi r^3 \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x, y = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cos 2x} + \frac{2}{3}, 0 \le x < \frac{\pi}{2}\right]$

330 Considera la funzione, dipendente dal parametro p, $f_p(x) = \frac{px^2 + (p - 6)x + 7}{px - 2}$.

a) Determina p in modo che la corrispondente funzione ammetta estremi nei punti di ascissa 1 e 3; disegna il grafico; verifica che il punto $C(2; -1)$ è il centro di simmetria.

b) Per quali valori di p la funzione ammette estremi relativi? $\left[\text{a) } p = 1; \text{b) } p > \frac{8}{9}\right]$

331 Data la funzione $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + x}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$:

a) determina i parametri a, b, c in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $y = 1$ e la tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ sia parallela alla retta di equazione $x + 4y - 2 = 0$;

b) discuti graficamente le soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$.

[a) $a = 1, b = -1, c = 1$; b) una soluzione per $k = 1$; due soluzioni per $k \le -2\sqrt{3} - 3 \vee 2\sqrt{3} - 3 \le k < 1 \vee k > 1$]

332 La funzione

$$y = \log_3 \frac{3a + x}{-4 - x}$$

passa per il punto di intersezione tra la funzione omografica di centro $C(-2; 1)$ e passante per $O(0; 0)$ e la retta di equazione $y = -1$.

a) Determina il valore del parametro a.

b) Studia l'andamento della funzione e disegna il suo grafico. [a) $a = 0$]

333 Studia la funzione $f(x) = 2 - \ln(2x - 1) - \ln(2x + 1)$ e traccia il suo grafico.

a) Verifica che la funzione ammette inversa e deduci la legge nella forma $y = f^{-1}(x)$.

b) Rappresenta la funzione inversa nello stesso sistema di assi cartesiani.

c) Calcola il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel punto di intersezione con l'asse x; calcola quindi il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione inversa nel punto di intersezione con l'asse y. Commenta il risultato ottenuto e cita il teorema che lo giustifica.

$\left[\text{a) } y = \frac{\sqrt{e^{2-x} + 1}}{2}; \text{ c) } -\frac{4\sqrt{e^2 + 1}}{e^2}; -\frac{e^2}{4\sqrt{e^2 + 1}}\right]$

334 Giustifica il fatto che la funzione

$$y = x^2 + \frac{4}{x^2 - a^2}$$

ammette *almeno* tre punti estremanti per qualunque valore di $a \neq 0$.

a) Stabilisci per quali a il numero dei punti estremanti è superiore a 3, precisando anche se si tratta di punti di massimo o di minimo relativi.

b) Utilizzando le informazioni precedenti e le caratteristiche di simmetria della funzione, studia e rappresenta la funzione per $a = 2$ (trascura lo studio della derivata seconda).

c) Discuti il numero di soluzioni dell'equazione $x^2 + \frac{4}{x^2 - 4} = h$ al variare di h nell'insiene dei numeri reali.

[a) per $a < -\sqrt{2} \vee a > \sqrt{2}$ due punti di max e tre di min; c) per $h \geq 8 \vee -1 \leq h \leq 0$ quattro sol.; per $h < -1$ due sol.]

335 Sia data la funzione $y = f(x) = 3\,\text{sen}^2 x - \cos^2 x$.

a) Studia il suo andamento in $[-\pi; \pi]$.

b) Dopo aver posto $x = t$ (con $t \geq 0$) e $y = s$, interpreta l'equazione $s = f(t)$ come legge oraria del moto di un punto P su una retta e trova per quali valori di t interni all'intervallo $]-\pi; \pi[$ la velocità e l'accelerazione sono massime in valore assoluto.

$\left[\text{b) velocità max per } t = \frac{\pi}{4}, t = \frac{3}{4}\pi, \text{ accelerazione max per } t = \frac{\pi}{2}, t = 0\right]$

336 Rappresenta graficamente la funzione:

$$y = \begin{cases} \ln(-x^2 + 2x) & \text{se } 0 < x < 2 \\ \dfrac{x^3}{x - 1} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Dal grafico deduci quello di $\frac{1}{f(x)}$.

337 Disegna il grafico della funzione $y = \frac{1}{1 + x^4}$. Considera poi un generico punto P del grafico appartenente al primo quadrante e le sue proiezioni H e K rispettivamente sull'asse delle ascisse e su quello delle ordinate. Determina l'ascissa di P in modo che:

a) risulti massimo il volume del solido di rotazione generato dal triangolo OHP in una rotazione completa attorno all'asse x;

b) risulti massimo il volume del solido di rotazione generato dal triangolo OKP in una rotazione completa attorno all'asse y.

$\left[\text{a) } \sqrt[4]{\frac{1}{7}}; \text{ b) } 1\right]$

338 Determina a in modo che la funzione $y = (x + a)e^{\frac{x+1}{x}}$ abbia un punto di massimo in $x = -2$. Rappresenta poi la funzione che si ottiene. $[a = 6]$

339 Determina il punto P per il quale passano tutte le curve del fascio di equazione $y = \dfrac{2(x^2 + a)}{ax + 1}$, $a > 2$. Sia r la retta tangente in P alla generica curva del fascio e sia s la perpendicolare a r passante per P. Esprimi l'area $S(a)$ del triangolo individuato dalle rette r, s e dall'asse x al variare di a. Studia la funzione ottenuta ed evidenzia il tratto del suo grafico relativo al problema. $\left[P(1; 2);\, S(a) = \dfrac{5a^2 - 14a + 17}{a^2 - a - 2},\, a > 2\right]$

340 Trova a e b in modo che la funzione $y = ax^4 - bx^3$ abbia un massimo nel punto di flesso della funzione $y = -4x^3 - 6x^2 + x + \dfrac{25}{16}$ e rappresenta il suo grafico. $[a = -3, b = 2]$

341 La curva γ è definita implicitamente dall'equazione:

$$x^2 - \sqrt{3}\,xy + \sqrt{3}\,y = 0.$$

a) Ricava l'espressione analitica $y = f(x)$ di γ.
b) Studia e rappresenta graficamente la funzione $f(x)$.
c) Determina il centro di simmetria O'.
d) Determina l'equazione della curva γ nel sistema $O'XY$ di origine O' e ruotato di $\dfrac{\pi}{3}$ in senso antiorario rispetto al sistema originale.

$\left[\text{a) } y = \dfrac{x^2}{\sqrt{3}(x-1)}\text{; b) } a\text{: } x = 1,\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+1)\text{; max } O(0; 0)\text{; min}\left(2; \dfrac{4}{3}\sqrt{3}\right)\text{;}\right.$
$\left.\text{c) } O'\left(1; \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)\text{; d) } x^2 - 3y^2 = 2\text{, iperbole di semiassi } a = \sqrt{2} \text{ e } b = \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right]$

342 È data una funzione polinomiale $y = f(x)$ tale che:

a) $f(-1) = f(1) = f(2) = 0$;
b) $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}$;
c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

Determina il grado minimo del polinomio e scrivi una sua possibile espressione analitica. [4° grado]

343 a) Determina i coefficienti della curva γ_1 di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sapendo che il punto $F(1; 1)$ è un flesso a tangente orizzontale e nel punto di ascissa $x = 2$ la retta tangente ha coefficiente angolare 3.
b) Calcola i coefficienti della curva γ_2 di equazione $y = \dfrac{hx}{kx + q}$ sapendo che passa per il punto $\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$ e nel punto di ascissa $x = 0$ ha come tangente una retta parallela alla bisettrice del II e IV quadrante.
c) Rappresenta graficamente γ_1 e γ_2 e, presi nell'intervallo $[0; 2]$ i punti P e Q di uguale ascissa, rispettivamente su γ_1 e γ_2, trova l'area $S(x)$ del triangolo FPQ al variare di P e Q sulle rispettive curve. Studia e rappresenta graficamente $S(x)$.

$\left[\text{a) } y = x^3 - 3x^2 + 3x\text{; b) } y = \dfrac{x}{x-1}\text{; c) } S(x) = -\dfrac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x,\ x \neq 1\right]$

344 Considera il fascio di circonferenze di equazione:

$$x^2 + y^2 - 2kx - 2\left(k + \frac{1}{k-1}\right)y - 1 = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

a) Determina l'equazione del luogo γ descritto dal centro delle circonferenze al variare di k e rappresenta il suo grafico dopo uno studio completo.
b) Traccia la retta r parallela all'asintoto obliquo di γ passante per il punto $(0; 2)$ e determina il punto di intersezione con γ.
c) Considerati i punti R e S, con uguale ascissa, rispettivamente sulla retta r e su γ, determina la funzione $f(x) = \overline{RS}$. Studia e rappresenta il grafico di $f(x)$.

$\left[\text{a) } y = x + \dfrac{1}{x-1}\text{; b) } y = x + 2, \left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{7}{2}\right)\text{; c) } f(x) = \left|\dfrac{2x-3}{x-1}\right|\right]$

4. LA RISOLUZIONE APPROSSIMATA DI UN'EQUAZIONE

▶ Teoria a pag. 1855

IN PRATICA
▶ Videolezione 75

La separazione delle radici

345 VERO O FALSO?
Data una funzione $f(x)$ continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$:

a) se $f'(x) > 0 \ \forall x \in]a; b[$, allora $f(x) = 0$ ha una soluzione in $]a; b[$. V F

b) se $f(a) \cdot f(b) < 0$ e $f''(x) > 0$, allora $f(x) = 0$ non può avere una soluzione in $]a; b[$. V F

c) se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $f(x) = 0$ ha una sola soluzione nell'intervallo $]a; b[$. V F

Applicando il primo o il secondo teorema di unicità dello zero, dimostra che le equazioni seguenti hanno una sola soluzione nell'intervallo indicato a fianco.

346 $x^3 - 3x + 1 = 0$, $[0; 1]$.

347 $4x + \cos x = 0$, $[-1; 1]$.

348 $x^8 + 4x^2 - 1 = 0$, $[0; 2]$.

349 $x - 2 + \ln x = 0$, $[1; 4]$.

350 $e^x - 3 = x$, $\left[-\frac{1}{2}; 3\right]$.

351 $\operatorname{arcsen} x = 1 - 2x$, $[0; 1]$.

352 ESERCIZIO GUIDA

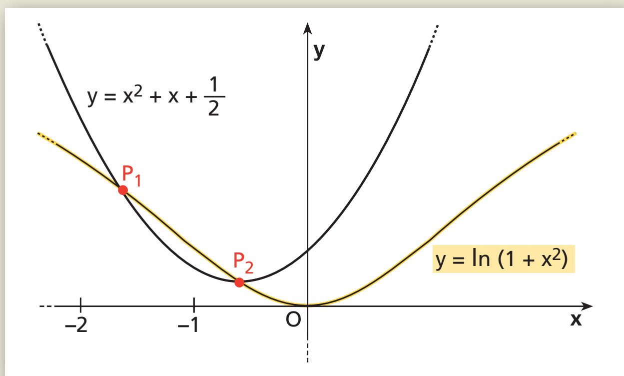
Data l'equazione $\ln(1 + x^2) - x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$, separiamo le sue radici.

Scriviamo l'equazione nella forma

$$\ln(1 + x^2) = x^2 + x + \frac{1}{2}$$

e confrontiamo i grafici delle funzioni:

$$g(x) = \ln(1 + x^2) \text{ e } h(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}.$$



Le ascisse delle intersezioni delle due curve sono gli zeri della funzione $f(x) = \ln(1 + x^2) - x^2 - x - \frac{1}{2}$, cioè le soluzioni dell'equazione data.

Dal grafico vediamo che g e h hanno due punti di intersezione, P_1 e P_2, quindi l'equazione ha due soluzioni, x_1 e x_2, che si trovano rispettivamente negli intervalli $[-2; -1]$ e $[-1; 0]$.

Lo confermiamo con i teoremi di esistenza e unicità. Nell'intervallo $[-1; 0]$ la funzione $f(x)$ è continua e si ha $f(-1) \cdot f(0) = \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$. È inoltre derivabile con derivata $f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} - 2x - 1$ che si annulla in -1, pertanto è diversa da 0 nei punti interni a $[-1; 0]$, come richiede il primo teorema di unicità. In modo analogo, si procede per l'intervallo $[-2; -1]$.

Aiutandoti con un grafico, determina il numero delle soluzioni reali delle seguenti equazioni.

353 $\ln(4 + x^2) + x^2 = 0$ [nessuna sol.]

354 $\sqrt{1 + x^2} = \ln x$ [nessuna sol.]

355 $\ln(x^2 - x + 1) = x + 1$ [una sol.]

356 $x^3 - 2x - \frac{1}{2} = 0$ [tre sol.]

357 $xe^x - 4 = 0$ [una sol.]

358 $2x \ln x - 1 = 0$ [una sol.]

359 $e^x + x = 0$ [una sol.]

360 $2x - \operatorname{sen} x = 0$ [una sol.]

361 $x^3 + x + 1 = 0$ [una sol.]

362 $x^4 + x - 2 = 0$ [due sol.]

363 $x^5 + x^3 - 1 = 0$ [una sol.]

Il metodo di bisezione

364 **ESERCIZIO GUIDA**

Con il metodo di bisezione determiniamo la radice dell'equazione dell'esercizio 352, localizzata nell'intervallo $[-2; -1]$ con un'approssimazione inferiore a $\varepsilon = 0{,}1$.

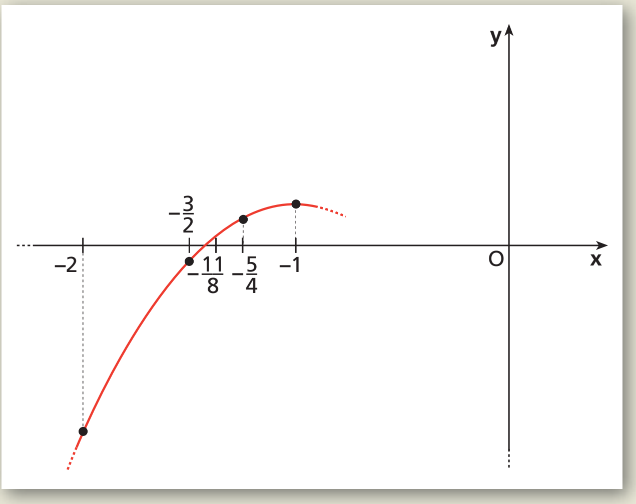
Sappiamo che l'equazione

$$\ln(1 + x^2) - x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$$

ha due radici che appartengono agli intervalli $[-2; -1]$ e $[-1; 0]$. Cerchiamo lo zero della funzione $f(x) = \ln(1 + x^2) + - x^2 - x - \frac{1}{2}$ in $[-2; -1]$:

$$f(-2) = \ln 5 - \frac{5}{2} < 0,$$

$$f(-1) = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0.$$



Il punto medio dell'intervallo è $m_0 = -\frac{3}{2}$, il grado di approssimazione corrisponde alla distanza di m_0 dagli estremi dell'intervallo:

$$\varepsilon_0 = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Non essendo soddisfatto il grado di approssimazione richiesto, cerchiamo un'approssimazione migliore.

Dato che $f(m_0) = \ln\frac{13}{4} - \frac{5}{4} < 0$, la soluzione dell'equazione è compresa nell'intervallo $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$.

Procediamo come prima e otteniamo le iterazioni riportate nella tabella con le relative approssimazioni.

n	a_n	b_n	$m_n=\frac{a_n+b_n}{2}$	$\varepsilon_n=\frac{b_n-a_n}{2}$
0	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	0,5
1	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{5}{4}$	0,25
2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{11}{8}$	0,125
3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{11}{8}$	$-\frac{23}{16}$	0,0625

Osservando la tabella, possiamo concludere che $-\frac{23}{16}$ è un valore approssimato della radice. L'errore commesso è minore di $\varepsilon_3 = 0{,}0625$.

Dopo aver verificato che in ciascuno degli intervalli indicati ognuna delle seguenti equazioni ammette una sola radice, cerca di approssimarla mediante il metodo di bisezione con $n = 4$ passi di iterazione. Indica l'ultimo intervallo ottenuto e determina l'errore.

365 $x^3 - 2x - \frac{1}{2} = 0$, $[1; 2]$. $\left[1,531; \left[\frac{3}{2}; \frac{25}{16}\right]; \varepsilon = \frac{1}{32}\right]$

366 $2x + e^x = 0$, $[-1; 0]$. $\left[-0,344; \left[-\frac{3}{8}; -\frac{5}{16}\right]; \varepsilon = \frac{1}{32}\right]$

367 $x^3 - x + 2 = 0$, $[-2; -1]$. $\left[-1,531; \left[-\frac{25}{16}; -\frac{3}{2}\right]; \varepsilon = \frac{1}{32}\right]$

368 $x - \operatorname{sen} x - \frac{3}{2} = 0$, $[2; 3]$. $\left[2,281; \left[\frac{9}{4}; \frac{37}{16}\right]; \varepsilon = \frac{1}{32}\right]$

369 $x^5 + x^3 - 1 = 0$, $[0; 1]$. $\left[0,844; \left[\frac{13}{16}; \frac{7}{8}\right]; \varepsilon = \frac{1}{32}\right]$

370 $\ln(x^2 - x + 1) - x - 1 = 0$, $[-1; 0]$. $\left[-0,469; \left[-\frac{1}{2}; -\frac{7}{16}\right]; \varepsilon = \frac{1}{32}\right]$

371 $(x^2 - 2x + 1)\, e^{-x} - 2 = 0$, $[-1; 0]$. $\left[-0,219; \left[-\frac{1}{4}; -\frac{3}{16}\right]; \varepsilon = \frac{1}{32}\right]$

372 $x - \operatorname{arctg} 2x - 1 = 0$, $[2; 3]$. $\left[2,344; \left[\frac{37}{16}; \frac{19}{8}\right]; \varepsilon = \frac{1}{32}\right]$

373 $\operatorname{sen} x - \ln 2x = 0$, $[1; 2]$. $\left[1,344; \left[\frac{21}{16}; \frac{11}{8}\right]; \varepsilon = \frac{1}{32}\right]$

374 Verifica graficamente che l'equazione

$$xe^x + 2x - 1 = 0$$

ha una sola soluzione e trova una sua approssimazione a meno di 0,01. [0,297]

375 Dimostra che

$$\sqrt{4 - x^2} - x^2 - 2x = 0$$

ha una sola soluzione nell'intervallo $[0; 1]$ e trova un valore approssimato a meno di 0,01. [0,703]

376 Considera la curva γ di equazione $y = ax^5 + bx^3 + c$.

a) Calcola i coefficienti a, b, c in modo che passi per il punto $(0; 2)$, abbia due estremi relativi per $x = \pm\sqrt{3}$ e la tangente nel punto di ascissa 2 sia parallela alla retta $20x - y = 0$.

b) Separa i suoi zeri determinandone il numero.

c) Col metodo di bisezione determina un valore approssimato della radice maggiore fermandoti alla terza iterazione.

[a) $a = 1, b = -5, c = 2$; b) $I_1 = [-3; -\sqrt{3}]$, $I_2 = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$, $I_3 = [\sqrt{3}; 3]$; c) $2,049\ldots < x < 2,207\ldots$]

377 Data la funzione $f(x) = \dfrac{3\cos x}{2+\cos x}$:

a) verifica che è periodica e pari, quindi disegna il grafico;

b) determina l'equazione della circonferenza γ passante per il punto M del grafico con ascissa 0 e con centro $(0; -1)$; dimostra che f e γ sono tangenti in M;

c) dimostra che f e γ hanno due soli altri punti in comune; calcola le loro ascisse approssimate utilizzando il metodo di bisezione (3 iterazioni).

[b) $x^2 + (y+1)^2 = 4$; tangente: $y = 1$; c) $1,9375 < |x| < 2$]

Il metodo delle secanti

378 **ESERCIZIO GUIDA**

Con il metodo delle secanti determiniamo le prime tre cifre decimali delle radici dell'equazione:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 9 = 0.$$

L'analisi dell'andamento della funzione $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 9$ mostra l'esistenza di un punto di massimo relativo in $x_M \simeq -2,57735$ e di un punto di minimo relativo in $x_m \simeq -1,42265$. Gli estremi relativi sono:

$$f(-2,57735) = 3,3849 \text{ (massimo)}, \qquad f(-1,42265) = 2,6151 \text{ (minimo)}.$$

Quindi f ha un solo zero, che si trova nel semiasse negativo.
Essendo $f(-4) = -3$ e $f(-3) = 3$, localizziamo la radice di f in $[a_0; b_0] = [-4; -3]$. Osserviamo poi che in tale intervallo la derivata seconda di f ha segno negativo. Pertanto, essendo verificata la condizione

$$f(a_0)\,f''(x) = f(-4)\,f''(x) > 0,$$

si utilizza la formula di ricorrenza,

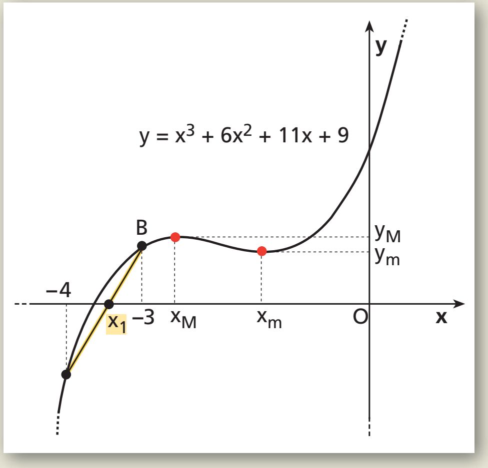
$$\begin{cases} x_0 = b_0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{a_0 - x_n}{f(a_0) - f(x_n)} \cdot f(x_n) \end{cases}$$

che nel nostro caso assume la forma:

$$x_0 = -3,$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{-4 - x_n}{-x_n^3 - 6x_n^2 - 11x_n - 12} \cdot (x_n^3 + 6x_n^2 + 11x_n + 9) =$$

$$= -\frac{4x_n^2 + 8x_n + 9}{x_n^2 + 2x_n + 3}.$$



n	x_n
0	-3
1	$-3,5$
2	$-3,63636$
3	$-3,66482$
4	$-3,67038$
5	$-3,67145$
6	$-3,67165$

Eseguiamo l'iterazione mettendo i risultati in tabella.

A partire da x_5, comincia a essere stabile la cifra dei millesimi.
Possiamo dire che la soluzione dell'equazione $x^3 + 6x^2 + 11x + 9 = 0$ è $x = -3,671$.
Osserviamo che $f(-3,671) = 0,00516529$, quindi $-3,671$ non è la radice dell'equazione, ma ne rappresenta soltanto un valore approssimato.

Risolvi in modo approssimato le seguenti equazioni determinando le prime tre cifre decimali delle soluzioni mediante il metodo delle secanti.

379 $x^3 + x^2 - 4 = 0$ $[-0{,}544;\ 1{,}159]$

380 $x^3 - 6x^2 + 11x - 3 = 0$ $[0{,}328]$

381 $x + \frac{1}{2} - \operatorname{sen} x = 0$ $[-1{,}497]$

382 $xe^x - 5 = 0$ $[1{,}326]$

383 $x^4 - x + \frac{1}{4} = 0$ $[0{,}254;\ 0{,}896]$

384 $e^x + 2x^2 - 5 = 0$ $[-1{,}547;\ 1{,}041]$

385 $e^x - \ln(x + 3) = 0$ $[-1{,}825;\ 0{,}132]$

386 $x \operatorname{arctg} x - 1 = 0$ $[-1{,}162;\ 1{,}162]$

387 $x^2 \operatorname{sen} x + 1 = 0, \qquad -4 \leq x \leq 4.$ $[-3{,}032;\ -1{,}068;\ 3{,}237]$

388 Dopo aver dimostrato che la funzione $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$ è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = -1$:

a) determina l'equazione della parabola γ che ha lo stesso asse di simmetria, passa per il punto $A(-3; 0)$ e ha l'ordinata del vertice uguale a -3;

b) disegna i grafici delle due curve e dimostra che hanno soltanto quattro punti di intersezione;

c) con il metodo delle secanti calcola un valore approssimato dell'ascissa della radice maggiore (arresta il procedimento alla quarta iterazione).

$\left[\text{a) } y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4};\ \text{b) } I_1 = [-4; -2],\ I_2 = \left[-2; -\frac{4}{3}\right],\ I_3 = \left[-\frac{2}{3}; 0\right],\ I_4 = [1; 2];\right.$
$\left.\text{c) se } [a_0; b_0] = \left[1; \frac{3}{2}\right],\ x = 1{,}250720\ldots\right]$

Il metodo delle tangenti

389 ESERCIZIO GUIDA

Utilizzando il metodo delle tangenti, determiniamo le prime otto cifre decimali delle radici dell'equazione:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 9 = 0.$$

La radice dell'equazione è già stata localizzata nell'esercizio 378 all'interno dell'intervallo $[-4; -3]$. In tale intervallo, la derivata prima di $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 9$ è $f'(x) = 3x^2 + 12x + 11$, mentre $f''(x) = 6x + 12$ è negativa in $[-4; -3]$. Inoltre, poiché $f(-4) < 0$ applichiamo il metodo di Newton-Raphson utilizzando come ascissa iniziale $x_0 = -4$. Dunque abbiamo:

$$\begin{cases} x_0 = -4 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^3 + 6x_n^2 + 11x_n + 9}{3x_n^2 + 12x_n + 11} = \dfrac{2x_n^3 + 6x_n^2 - 9}{3x_n^2 + 12x_n + 11} \end{cases}$$

n	x_n
0	-4
1	$-3{,}727272727$
2	$-3{,}673691174$
3	$-3{,}671702570$
4	$-3{,}671699882$
5	$-3{,}671699882$
6	$-3{,}671699882$

Riportiamo i passi dell'iterazione in una tabella.

A partire da x_3 comincia a essere stabile la cifra dei millesimi, mentre a partire da x_4 si stabilizzano le prime otto cifre decimali. Avendo utilizzato nove decimali nell'iterazione, non possiamo ottenere informazioni sulla stabilità dell'ultima cifra decimale.

Osserviamo infine che

$$f(-3{,}67169988) = 1{,}22360433 \cdot 10^{-8}.$$

Risolvi in modo approssimato le seguenti equazioni determinando le prime cinque cifre decimali delle soluzioni mediante il metodo delle tangenti.

390 $e^x + 4x - 5 = 0$ [0,73081]

391 $x + \frac{1}{2} - \cos x = 0$ [0,41508]

392 $x + \operatorname{sen} x - 2 = 0$ [1,10606]

393 $\ln x + 2x = 0$ [0,42630]

394 $x^3 + 12x^2 + 47x + 63 = 0$ [− 5,67170]

395 $x^4 - x^3 - \frac{1}{4} = 0$ [− 0,54493; 1,16011]

396 $xe^{2x} - 3 = 0$ [0,71620]

397 $e^x - \ln(x + 4) = 0$ [− 2,94604; 0,39187]

398 $x^2 + \operatorname{sen} x - 2 = 0$ [− 1,72846; 1,06155]

399 $x^2 + \operatorname{sen} x - \cos x = 0$ [− 1,14955; 0,56098]

400 Considera la funzione $f(x) = 4\cos x$ e la parabola di equazione $g(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$.

a) Rappresenta le due curve sul piano cartesiano.
b) Separa i punti di intersezione.
c) Col metodo delle tangenti iterato tre volte risolvi l'equazione $f(x) = g(x)$.

$\left[\text{b) due punti con } x_1 \in \left[\frac{\pi}{2}; 2\right], x_2 \in [2; \pi]; \text{ c) } x_1 = 1{,}82397\ldots, x_2 = 2{,}98533\ldots\right]$

Il metodo iterativo o del punto unito

401 **ESERCIZIO GUIDA**

Mediante il metodo del punto unito, cerchiamo una soluzione approssimata dell'equazione:

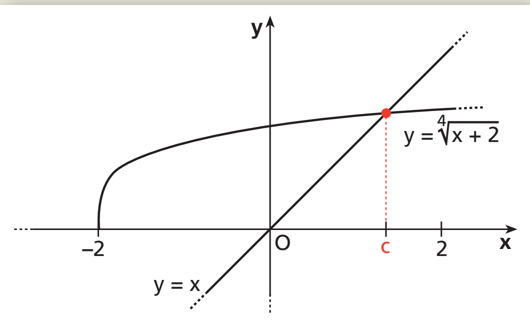
$$x = \sqrt[4]{x+2}.$$

Cominciamo separando le eventuali radici dell'equazione.

Tracciando il grafico delle funzioni

$$h(x) = x \text{ e } g(x) = \sqrt[4]{x+2},$$

si può osservare che l'equazione data ha una soluzione nell'intervallo [0; 2].



n	x_n
0	0
1	1,18921
2	1,33635
3	1,35151
4	1,35304
5	1,35319
6	1,35321
7	1,35321

Applicando i teoremi di esistenza e unicità, possiamo affermare che la radice dell'equazione è unica.
Essendo

$$|g'(x)| = g'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x+2)^3}},$$

possiamo concludere che $\forall x \in [0; 2]$ si ha
$|g'(x)| \leq g'(0) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{2^3}} < 1$. Allora possiamo applicare il metodo del punto unito, determinando le iterate $x_{n+1} = g(x_n)$ a partire da un qualsiasi punto dell'intervallo [0; 2]. Scegliamo, per esempio, $x_0 = 0$. Otteniamo la tabella di iterazione a fianco.

A partire dalla settima iterazione ($n = 6$), vediamo che le prime quattro cifre decimali degli iterati divengono stazionarie. Abbiamo così individuato le prime quattro cifre della soluzione cercata. Avendo utilizzato cinque cifre decimali, nulla si può dire sulla stabilità della quinta cifra.
Se avessimo scelto di cominciare l'iterazione in un altro punto di [0; 2], avremmo ottenuto lo stesso risultato. Per esempio, se fissiamo come punto iniziale $x_0 = 1$, abbiamo la tabella a lato.

n	x_n
0	1
1	1,31607
2	1,34945
3	1,35283
4	1,35317
5	1,35321
6	1,35321
7	1,35321

L'iterazione si stabilizza questa volta sulla quarta cifra decimale a partire da $n = 5$. La ragione della maggiore rapidità dipende dal fatto che il punto iniziale dell'iterazione è, in questo caso, più vicino alla radice effettiva. Quindi possiamo concludere che una buona localizzazione accelera il processo iterativo.

Con il metodo del punto unito cerca, negli intervalli assegnati, le radici approssimate delle seguenti equazioni, eseguendo almeno 5 iterazioni a partire dal punto iniziale indicato. Compila la tabella e valuta l'accuratezza delle cifre decimali ottenute.

402 $x - \dfrac{1}{8(x^2+1)} = 0;$ [0; 1]; $x_0 = 1.$ [0,12313]

403 $x - \dfrac{1}{2}\sqrt{1+x+x^2} = 0;$ [0; 1]; $x_0 = 0.$ [0,76]

404 $x - 3 + \ln x = 0;$ [2; 3]; $x_0 = 2.$ [2,2]

405 $x - \dfrac{1}{2(x^2+x+1)} = 0;$ [0; 1]; $x_0 = 0.$ [0,34]

406 $x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x - 1 = 0;$ [0; 1]; $x_0 = 1.$ [0,68]

407 $x - 2 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x = 0;$ $[2; 3];$ $x_0 = 3.$ [2,35]

408 $x - \ln(x + 4) = 0;$ $[1; 2];$ $x_0 = 2.$ [1,749]

409 $x \ln(x + 1) - 4\ln x = 0;$ $[3; 4];$ $x_0 = 4.$ [3,26]

410 $2x + x \operatorname{sen} x = 1;$ $[0; 1];$ $x_0 = 1.$ [0,41]

ESERCIZI VARI La risoluzione approssimata di un'equazione

411 **TEST** Riguardo alla funzione $y = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$, con $x \in [-1; 1]$, possiamo dire che:

A ha un *unico* zero.
B ammette *soltanto* tre zeri.
C ammette *soltanto* due zeri.
D non ammette zeri.
E nessuna delle affermazioni precedenti è vera.

412 **TEST** Data la funzione $f: [a; b] \to \mathbb{R}$, con $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, quale fra le seguenti affermazioni è *vera*?

A f ammette *più di uno* zero se è continua e crescente.
B f ammette sempre *almeno* uno zero indipendentemente dalla continuità.
C Se f ha qualche punto di discontinuità, allora non si annulla per alcun valore di x.
D Se f è continua e $f'(x) > 0$ in ogni punto di $]a; b[$, allora ammette un unico zero.
E Se f è continua, derivabile due volte e la derivata seconda è costantemente negativa, allora l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno due soluzioni.

413 **TEST** Una delle seguenti affermazioni è *vera*. Quale?

A L'equazione $x^x = 5$ ha un'unica radice e può essere determinata in modo esatto.
B La funzione $y = x^6 + x^3 - 2$ ammette zeri e non sono calcolabili in modo esatto.
C L'equazione $\ln x^x - \ln x = 0$ è risolubile in modo esatto.
D L'equazione $x^5 + x - 1 = 0$ ammette soluzioni e non si possono applicare i metodi numerici.
E L'equazione $x^x = 1$ ha una soluzione nulla.

414 **VERO O FALSO?**

a) Se f è continua e $f(a) \cdot f(b) > 0$, allora non ammette radici nell'intervallo $[a; b]$. V F

b) Se una funzione è continua in un intervallo con valori negativi agli estremi, derivabile due volte nei punti interni con derivata seconda costantemente negativa, può ammettere zeri. V F

c) Data una generica funzione $g: [a; b] \to \mathbb{R}$, se $g(a) < 0$ e $g(b) > 0$, allora esiste almeno un punto interno di $[a; b]$ in cui g si annulla. V F

d) La funzione $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ verifica le seguenti ipotesi: è continua in $[a; b]$ e $f(a) = f(b) \neq 0$, è derivabile in $]a; b[$, la derivata prima si annulla soltanto in un punto c di $]a; b[$ e $f(c) \neq 0$. Allora l'equazione $f(x) = 0$ o non ha soluzioni in $[a; b]$ o ne ha due. V F

Applicando due metodi diversi, determina eventuali radici delle seguenti equazioni, individuando tre cifre decimali corrette per ciascuna delle soluzioni approssimate. Compila le tabelle e individua quale fra gli algoritmi converge più rapidamente.

415 $e^x - x - 2 = 0$ [$-$ 1,841; 1,146]

416 $e^{2x} + x - 2 = 0;$ $x \in [0; 1].$ [0,273]

417 $2e^x - x - 3 = 0;$ $x \in [0; 1].$ [0,583]

418 $x = \cos 2x;$ $x \in [0; 1].$ [0,514]

419 $2 \operatorname{sen} x + x = 1;$ $x \in [0; 1].$ [0,337]

420 $x^3 + x^2 - x + 4 = 0$ [$-$ 2,241]

421 $x^5 - x + 3 = 0$ [$-$ 1,341]

422 $x^4 + x^3 - x^2 - 3 = 0$ [$-$ 1,932; 1,266]

423 $x^6 + x^5 - x - 2 = 0$ [$-$ 1,248; 1,081]

424 $x^3 + x + e^x = 2;$ $x \in [0; 1].$ [0,414]

425 $x^4 - x + e^x = 2;$ $x \in [0; 1].$ [0,846]

426 $x - \ln(2 - x + x^2) = 0;$ $x \in [0; 1].$ [0,561]

427 $x + 1 = \sqrt[5]{x + 5};$ $x \in [0; 1].$ [0,401]

428 $xe^{3x} - 1 - x = 0;$ $x \in [-2; -1].$ [$-$ 1,045]

429 $e^{3x} + e^x = 4;$ $x \in [0; 1].$ [0,321]

430 $\operatorname{sen}^2 x - x = 1;$ $x \in [-1; 0].$ [$-$ 0,641]

431 $x^2 + 5 \cos x - x = 0;$ $x \in [1; 2].$ [1,950]

432 $x - e^{\operatorname{sen} x} = 1;$ $x \in [2; 3].$ [2,630]

433 $\ln(2 + \operatorname{sen} x) = x;$ $x \in [1; 2].$ [1,054]

434 $\sqrt{2 + \operatorname{sen} x} = x;$ $x \in [1; 2].$ [1,728]

435 Considera le funzioni $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ e $g(x) = \ln \frac{x}{x - 1}$.

a) Disegna i grafici utilizzando il medesimo riferimento cartesiano ortogonale.

b) Per via grafica verifica, motivando, che per $x < 0$ f e g non hanno intersezioni, per $x > 0$ ne hanno infinite.

c) Dimostra che nell'intervallo $\left[\frac{4}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ hanno soltanto un'intersezione. Determina un valore approssimato della radice dell'equazione $f(x) - g(x) = 0$.

[c) 1,58209]

436 Data la famiglia di funzioni

$$f_k(x) = \text{arctg}\, x + kx^3, \text{ con } k \text{ parametro reale,}$$

a) dimostra che tutte hanno lo stesso dominio, sono dispari e, nell'origine, ammettono una tangente comune;

b) determina le funzioni che hanno due estremi relativi;

c) posto $k = -\frac{1}{3}$, dimostra che la corrispondente funzione ha due zeri oltre a quello nell'origine; con il metodo delle tangenti calcola un valore approssimato della radice positiva (tre iterazioni).

[a) tangente: $y = x$; b) $k < 0$; c) $x_3 = 1{,}422064\ldots$]

437 Dati il fascio di rette $y = mx$ e la funzione $f(x) = x^2 \ln x$:

a) esegui lo studio completo di f e traccia il suo grafico;

b) studia il numero delle intersezioni della generica retta con la funzione, al variare di m;

c) dimostra che l'equazione $f(x) = x$ ha soltanto una radice, quindi determina una sua approssimazione con il metodo delle tangenti iterato quattro volte.

[b) per $-e^{-1} \leq m < 0$ due intersezioni, per $m \geq 0$ un'intersezione; c) in [1; 2] risulta $x = 1{,}76322\ldots$]

438 X_n is the n-th approximation to the positive root of $x^2 - 2 = 0$, and x_{n+1} is the next approximation. Using the Newton-Raphson method, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, show that:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

If $x_0 = 1$, find x_2 correct to three places of decimals.

(IR *Leaving Certificate Examination*, Higher Level, 1995)

[$x_2 \simeq 1{,}417$]

439 Show that the graphs of $y = \tan^{-1} x$ and $xy = 1$ intersect at a point A with x-coordinate α such that $1.1 < \alpha < 1.2$.
Use linear interpolation to find an approximation for α, giving your answer to two decimal places.

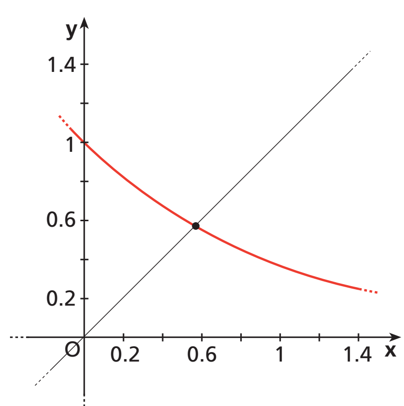
(UK *Northern Examination Assessment Board*, *NEAB*, 1998)

[$\alpha \simeq 1{,}16$]

440 Figure below shows sketches of the graphs of $y = e^{-x}$ and $y = x$, and their intersection at $x = \alpha$, where α is approximately 0.57.

a) Starting with $x_1 = 0.57$, carry out the iteration $x_{n+1} = e^{-x_n}$ up to and including x_5, recording each value of x_n to four decimal places as you proceed.

b) Write down an estimate of α to three decimal places.



(UK *Northern Examination Assessment Board*, *NEAB*, 1999)

[b) $\alpha \simeq 0.567$]

REALTÀ E MODELLI

1
Luci sul palco

La potenza elettrica P assorbita da ciascuna lampada utilizzata per illuminare un palcoscenico segue la seguente legge:

$$P(r) = \frac{V^2 R}{R^2 + 2Rr + r^2},$$

dove V indica la tensione (misurata in volt) e R la resistenza (misurata in ohm) di ciascuna lampada. r indica invece la resistenza interna al circuito. Abbiamo a disposizione lampade che funzionano a una tensione di 230 V e hanno una resistenza di 100 Ω.

- Studia l'andamento della potenza P di ciascuna lampada in funzione della resistenza interna r del circuito.
- Cosa succede se la resistenza interna al circuito diventa molto grande?
- La potenza P assume un valore massimo?

2
L'intensità luminosa

La «legge del quadrato della distanza» o *inverse square law* (ISL) afferma che l'intensità dell'illuminazione prodotta su una superficie (irradiamento) da una sorgente puntiforme è direttamente proporzionale alla potenza luminosa (flusso raggiante) p emessa dalla sorgente e inversamente proporzionale al quadrato della distanza x dalla sorgente stessa, secondo l'espressione $I(x) = \frac{p}{4\pi x^2}$.

- Calcola qual è l'intensità luminosa prodotta da due lampadine (di potenza luminosa 5 W e 7,5 W, collocate su pareti opposte di una stanza larga 10 m), in un punto posto sulla loro congiungente, e studia la funzione ottenuta.
- Descrivi cosa succede avvicinandosi a una fonte luminosa o all'altra.
- Qual è il punto, sulla congiungente, con la minima intensità luminosa?
- Qual è l'andamento grafico dell'intensità luminosa così determinata?

3
Salto triplo

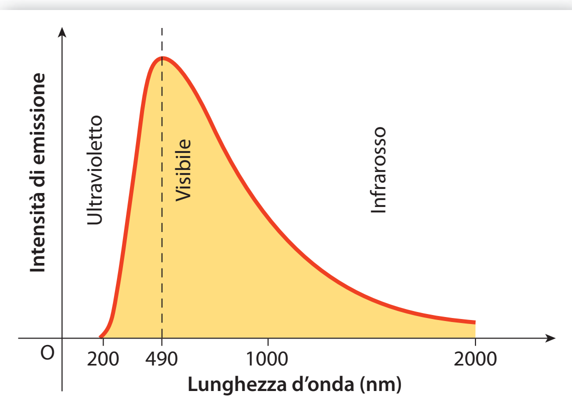
Nel salto triplo l'atleta, dopo una rincorsa, raggiunge la zona di battuta, da dove effettua tre balzi consecutivi. Il record del mondo appartiene al britannico Jonathan Edwards ed è di 18,29 m. Esaminando il salto, si osserva che nel primo balzo (hop) la velocità di stacco (tangente) ha un'inclinazione di 15° rispetto alla pedana, nel secondo (step) di 13° e nell'ultimo (jump) di 17°. Le misure parziali dei tre balzi sono rispettivamente di 5,7 m, 5,9 m, 6,69 m.

- Fissato il sistema di riferimento nel punto di stacco del primo balzo, determina le funzioni delle traiettorie nei tre salti parziali (approssima i calcoli) e studia l'andamento degli stessi.

4
Lo spettro solare

Il grafico rappresenta in modo approssimato lo spettro della luce solare che raggiunge la superficie terrestre. In ascissa è riportata la lunghezza d'onda, espressa in nanometri (10^{-9} m), e la curva rappresentata (densità spettrale) indica com'è distribuita, al variare della lunghezza d'onda, l'intensità della radiazione. L'area evidenziata in giallo corrisponde all'intensità complessiva.

- Chiamata $f(x)$ la funzione rappresentata nel grafico a fianco, disegna in modo approssimato il grafico della funzione derivata.

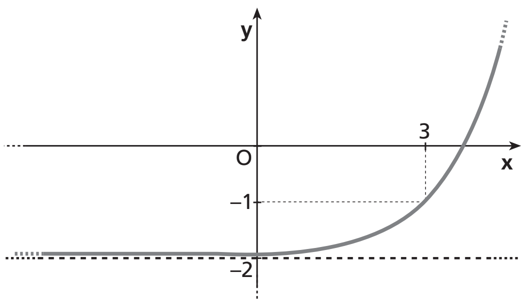


VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Quale delle seguenti funzioni è rappresentata dal grafico della figura?



A $y = e^{-x+3} - 2$

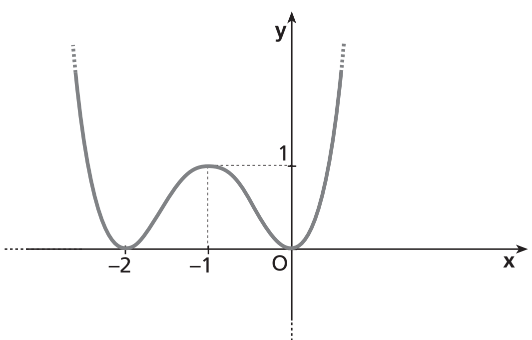
B $y = e^{x} - 2$

C $y = e^{x-3} - 2$

D $y = e^{x+3} - 2$

E $y = -e^{x-3} - 2$

2 Quale delle seguenti funzioni è rappresentata dal grafico della figura?



A $y = x^2(x+2)$

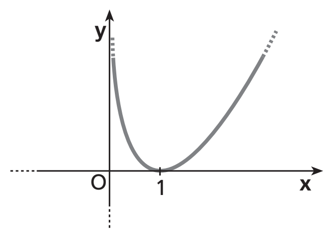
B $y = x(x+2)^2$

C $y = x(x+1)(x+2)$

D $y = x^2(x+2)^2$

E $y = x^4 + 2x^2$

3 Quale delle seguenti funzioni corrisponde al grafico della figura?



A $y = (x+1)\ln x$

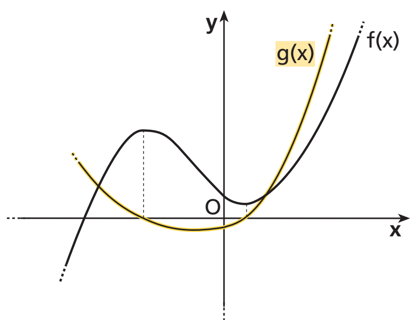
B $y = x\ln(x-1)$

C $y = x^2 \ln x$

D $y = \dfrac{\ln x}{x-1}$

E $y = (x-1)\ln x$

4 Osserva il grafico di $f(x)$ e $g(x)$. Quale relazione è corretta?



A $f(x) = g'(x)$

B $f(x) = g''(x)$

C $f'(x) = g(x)$

D $f''(x) = g(x)$

E $f'(x) = g'(x)$

5 Data una funzione $y = f(x)$ che
1. ha come dominio $\mathbb{R} - \{\pm 4\}$,
2. interseca l'asse x nei punti $A(-3; 0)$ e $B(3; 0)$,
3. ha come asintoti verticali le rette $x = 4$ e $x = -4$,
4. ha come asintoto orizzontale la retta $y = 2$,

la sua espressione può essere:

A $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$.

B $y = \dfrac{2x^2 - 18}{16 - x^2}$.

C $y = \dfrac{2(x^2 - 16)}{x^2 - 9}$.

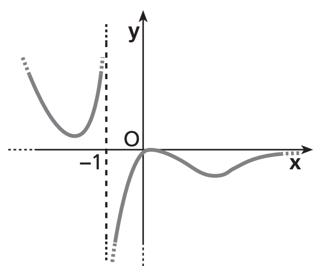
D $y = \dfrac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 16}$.

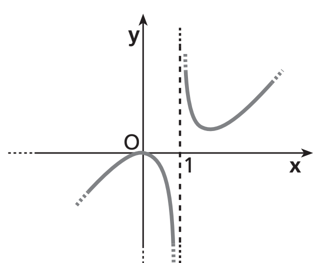
E $y = 2(x^2 - 16)(x^2 - 9)$.

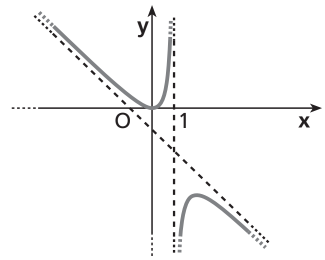
6 La funzione irrazionale $y = -\sqrt{25 - 4x^2}$ rappresenta la parte di una delle seguenti coniche:

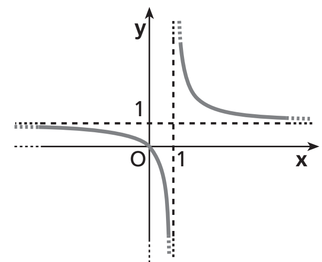
A circonferenza.
B parabola.
C ellisse.
D iperbole.
E nessuna delle precedenti.

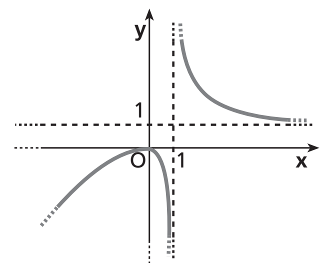
7 Quale dei seguenti grafici rappresenta l'andamento della funzione $y = \dfrac{x^2}{1 - x}$?

A


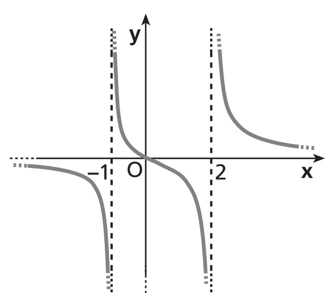
B


C


D


E


8 Quale delle seguenti funzioni è rappresentata dal grafico della figura?



A $y = \dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$

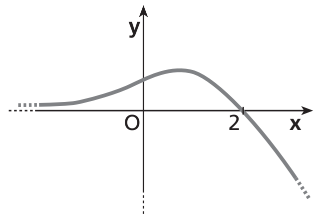
B $y = \dfrac{x^2}{(x+1)(x-2)}$

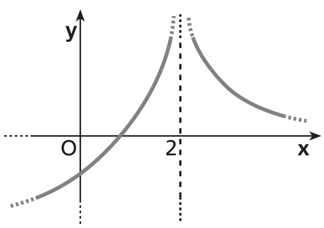
C $y = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x}$

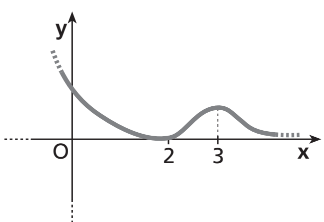
D $y = \dfrac{x}{(x+1)(x-2)}$

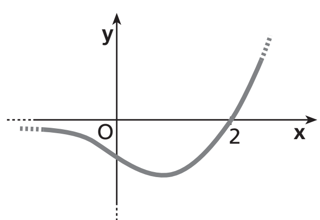
E $y = \dfrac{x^3}{(x+1)(x-2)}$

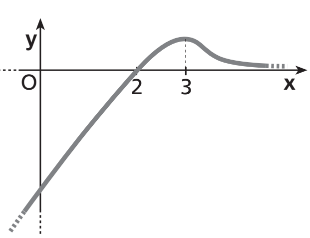
9 Quale dei seguenti grafici rappresenta l'andamento della funzione $y = (x - 2)e^{-x}$?

A


B


C


D


E


10 Data l'equazione $e^x - 2 = x$:

- A non ammette soluzioni reali.
- B ammette soltanto una soluzione reale.
- C ammette due soluzioni reali concordi.
- D ammette due soluzioni reali discordi.
- E non è possibile stabilire a priori il numero delle soluzioni.

11 La funzione

$f(x) = x^5 + x^3 - 2x + 1$:

- A ha un flesso obliquo ed è biiettiva.
- B non ha flessi, ha un massimo e un minimo.
- C ha tre intersezioni con l'asse x.
- D ha un massimo e un minimo relativi e ha soltanto un punto di contatto con l'asse x.
- E ha tre flessi.

12 Quale fra le seguenti equazioni è risolubile in modo esatto?

- A $x^5 + x^4 - 1 = 0$
- B $5^x = x^5$
- C $e^x = x^4 + 1$
- D $\operatorname{tg} x = 2x$
- E $\ln x = \log_x \pi$

13 Dell'equazione $4x^5 - 4x^2 + 1 = 0$ possiamo dire che:

- A ha 5 soluzioni.
- B ha soltanto 2 radici.
- C ha soltanto 3 zeri.
- D ha 4 soluzioni.
- E non ha soluzioni.

14 Data l'equazione $f(x) = 0$, $x \in [a; b]$, il metodo delle secanti si può applicare:

- A *soltanto* se f è monotòna.
- B *soltanto* se f' e f'' hanno segno costante e concorde.
- C *soltanto* se f' e f'' hanno segno costante e discorde.
- D se f'' ha segno costante e $f(a)$ e $f(b)$ sono discordi.
- E soltanto se f' ha segno costante e $f(a) \cdot f(b) < 0$.

QUESITI

15 Traccia il grafico di una funzione definita nell'intervallo $[2; 5]$ in modo che la funzione sia positiva in $[2; 4[$, nulla in 4 e negativa in $]4; 5]$ e che sia la sua derivata prima, sia la sua derivata seconda siano positive in tutto l'intervallo $[2; 5]$. Motiva la risposta.

16 Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$x^3 - 3x^2 + k = 0.$ (*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria,* 2008, *quesito* 7)

$[k < 0 \vee k > 4\text{: 1 sol. reale; } 0 \leq k \leq 4\text{: 3 sol. reali}]$

17 Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$x^3 - x^2 - k + 1 = 0.$ (*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria,* 2007, *quesito* 3)

$\left[k < \frac{23}{27} \vee k > 1\text{: 1 sol.; } \frac{23}{27} < k < 1\text{: 3 sol. distinte; } k = \frac{23}{27} \vee k = 1\text{: 3 sol. di cui 2 coincidenti}\right]$

18 Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Si sa che: $f(x)$ è derivabile su tutto l'asse reale; $f(x) = 0$ solo per $x = 0$; $f(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$; $f'(x) = 0$ soltanto per $x = -2$ e $x = 1$; $f(-2) = 1$ e $f(1) = -2$.
Dire, dandone esauriente spiegazione, se le informazioni suddette sono sufficienti per determinare gli intervalli in cui la funzione è definita, quelli in cui è continua, quelli in cui è positiva, quelli in cui è negativa, quelli in cui cresce, quelli in cui decresce. Si può dire qualcosa circa i flessi di $f(x)$?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva,* 2002, *quesito* 3)

[$f(x)$ ha almeno 3 flessi, ma non si può stabilire il numero esatto]

19 Dire qual è il dominio della funzione $f(x) = x^{\pi} - \pi^{x}$ e stabilire il segno della derivata prima e quello della derivata seconda di $f(x)$ nel punto $x = \pi$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione suppletiva,* 2001, *quesito* 3)

$[]0; +\infty[;\ f'(\pi) < 0;\ f''(\pi) < 0]$

20 Si calcoli con la precisione di due cifre decimali lo zero della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$. Come si può essere certi che esiste un unico zero?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione ordinaria,* 2010, *quesito* 4)

[0,56]

21 Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $\sin x = 0$, con punto iniziale $x_0 = 3$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione ordinaria,* 2009, *quesito* 6)

$[\pi]$

22 Si dimostri che l'equazione $(3 - x)e^x - 3 = 0$ per $x > 0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione suppletiva,* 2008, *quesito* 5)

[2,82]

23 Si dimostri che l'equazione $e^x - x^3 = 0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione suppletiva,* 2007, *quesito* 5)

[1,85]

24 Si dimostri che l'equazione $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione ordinaria,* 2007, *quesito* 9)

$[-0,67]$

25 Si dimostri che l'equazione $\operatorname{sen} x = x - 1$ ha una e una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare α con la precisione voluta.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione ordinaria*, 2006, *quesito* 4)

[1,935]

26 a) Esiste una funzione reale $y = f(x)$ che abbia per dominio tutto l'asse reale e sia tale che:
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$,
- la derivata prima di f sia sempre positiva,
- la derivata seconda di f sia sempre negativa?

b) Esiste una funzione reale $y = f(x)$ che abbia per dominio tutto l'asse reale e sia tale che:
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$,
- la derivata prima di f sia sempre positiva,
- la derivata seconda di f sia sempre positiva?

In caso di risposta negativa, spiegarne il motivo; in caso di risposta affermativa, tracciare il grafico di una funzione che soddisfa le richieste. (*U.M.I.*, *www.dm.unibo.it/umi*, *esempi di terze prove*)

PROBLEMI

27 Lo psicologo L.L. Thurstone nel 1916 elaborò un metodo per descrivere l'apprendimento L di una data abilità (imparare a leggere, a guidare un'auto, a risolvere problemi di matematica...) in funzione del grado di pratica x. L'equazione formulata è:

$$L(x) = \frac{x}{a + bx}, \qquad a, b \text{ parametri reali positivi, } x \text{ reale positivo.}$$

a) Valori diversi del parametro b si riferiscono a persone che imparano con diversa facilità: a chi attribuire i valori minori di b?
b) Quale significato assume in psicologia dell'apprendimento l'esistenza dell'asintoto orizzontale?
c) Quale significato assume la derivata prima della funzione $L(x)$?

(*U.M.I.*, *umi.dm.unibo.it/umi*, *esempi di terze prove*)

[a) persone che apprendono più facilmente; b) l'apprendimento si stabilizza all'aumentare della pratica; c) la velocità di apprendimento]

28 Data la funzione $y = e^{3x^2 - ax + b}$:
a) determina i valori dei parametri a e b, sapendo che il suo grafico ha un punto stazionario di ascissa 1 e passa per il centro della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$;
b) disegna il grafico della funzione;
c) dal grafico precedente deduci quello della derivata della funzione. [a) $a = 6$, $b = 0$]

29 Data la cubica

$$y = ax^3 + bx^2 - cx + d \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a \neq 0,$$

verifica che ammette sempre un punto di flesso.
a) Determina il valore dei parametri per cui la curva ha il punto di flesso nell'origine e il massimo nel punto (2; 8). Studia e rappresenta graficamente la funzione ottenuta.
b) Dopo aver trovato l'equazione della tangente t alla curva nell'origine, considera una retta passante per l'origine e compresa tra l'asse x e t. Determina la retta che rende massima l'area del triangolo APB, dove con P si è indicato il punto di intersezione tra la retta e la cubica nel primo quadrante e con A e B i punti di intersezione tra la cubica e l'asse x diversi dall'origine.

$\left[\text{a) } y = -\frac{1}{2}x^3 + 6x;\ \text{b) area max } 16\sqrt{3}, \text{ con la retta } y = 4x\right]$

30 Determina il polinomio $y = P(x)$ di quinto grado il cui grafico passa per l'origine, ha nell'origine un flesso con tangente di coefficiente angolare -2, altri due flessi nei punti di ascissa 1 e -1, coefficiente del termine di grado più alto uguale a 3. Studia e rappresenta graficamente la funzione ottenuta.
Scrivi le tangenti nei punti di flesso e determina la distanza tra le due tangenti parallele.

$$\left[y = 3x^5 - 10x^3 - 2x;\ y = -17x + 8;\ y = -17x - 8;\ \text{distanza} = \frac{16}{\sqrt{290}}\right]$$

31 Fra le funzioni del tipo $y = ax^4 + bx^2 + c$, determina quella che descrive la curva con un flesso nel punto $F(1; -1)$, dove la tangente t è parallela alla retta di equazione $y = -8x + 3$.
Studia la funzione indicando i punti di massimo relativo e di minimo relativo, il segno della funzione, delle sue derivate prima e seconda e i punti di flesso.

a) Determina la coordinate dell'ulteriore punto P di intersezione della tangente t con la curva.
b) Verifica che tutte le curve descritte dalle funzioni del tipo indicato hanno la tangente orizzontale nel punto A di ascissa zero.
c) In quali casi A è un punto di massimo relativo? In quali casi A è un punto di minimo relativo? Il punto A può essere in qualche caso un flesso orizzontale? (Suggerimento. Usa il metodo delle derivate successive per determinare massimi e minimi o flessi.) $[y = x^4 - 6x^2 + 4;\ \text{a) } P(-3; 31)]$

32 Considera le curve di equazione $y = \dfrac{kx^2 - k + 1}{x^2 + 1}$, con $k \in \mathbb{R}$.

a) Studia al variare di k in $\mathbb{R}$ l'andamento delle curve (dominio, simmetrie, massimi e minimi).
b) Dopo aver determinato k in modo che il grafico sia tangente alla curva di equazione $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ nel suo punto di minimo relativo, studia e rappresenta graficamente la funzione $f(x)$ ottenuta mettendone in evidenza anche i punti di flesso.
c) Considerato un punto P di ascissa positiva e appartenente al grafico di f, calcola, in funzione dell'ascissa del punto, l'area del triangolo PHA, dove H indica la proiezione di P sull'asintoto e A è il punto $(0; 1)$. Determina quindi il punto P per cui risulta massima l'area del triangolo.

$$\left[\text{b) } k = 1;\ \text{c) } P\left(1; \frac{1}{2}\right)\right]$$

33 In un riferimento cartesiano Oxy sono assegnate le curve di equazione:

$$y = (k-1)x^3 + (k+3)x^2 + (k-2)x + 1, \quad \text{con } k \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

a) Dimostra che le curve hanno in comune un punto e uno soltanto.
b) Determina per quali valori di k le curve sono funzioni biiettive.
c) Dimostra che la curva γ, avente $k = 0$, interseca soltanto una volta l'asse delle ascisse e ha un centro di simmetria; scrivi quindi l'equazione di γ nel riferimento traslato con l'origine in tale punto.
d) Disegna il grafico di γ.

$$\left[\text{a) } (0; 1);\ \text{b) } k \leq \frac{15 - \sqrt{249}}{4} \vee k \geq \frac{15 + \sqrt{249}}{4};\right.$$
$$\left.\text{c) } x_0 \in \left]2; 3\right[,\ C(1; 1),\ y = -x^3 + x\right]$$

34 Una particella si muove lungo una retta con la seguente equazione oraria: $s(t) = te^{-t}$, con $t \geq 0$.

a) Disegna il grafico di $s(t)$.
b) In quale istante la particella raggiunge la distanza massima dal punto di partenza? Quanto misura tale distanza?
c) Come varia il verso della velocità nel corso del tempo?
d) Calcola velocità e accelerazione negli istanti $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$.

[b) $t = 1$; distanza massima $= e^{-1}$; c) velocità positiva per $0 \leq t < 1$, nulla per $t = 1$, negativa per $t > 1$;
d) $v_1 = 0$, $a_1 = -e^{-1}$; $v_2 = -e^{-2}$, $a_2 = 0$]

35 Studia la funzione:

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 2}}.$$

a) Sia $h(x)$ la restrizione di $f(x)$ nell'intervallo $]\sqrt{2}; +\infty[$ e γ il suo grafico. Prova che $h(x)$ ammette la funzione inversa h^{-1}, di cui devi precisare dominio e segno. Determina $y = h^{-1}(x)$ e tracciane il grafico γ_1 nello stesso sistema di assi cartesiani.

b) Scrivi le equazioni delle tangenti a γ e a γ_1 nel punto di intersezione tra le due curve, richiamando le proprietà e i teoremi che riguardano il risultato ottenuto.

c) Verifica che γ_1 può essere vista come risultato di una trasformazione geometrica del tipo:

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases} \quad \text{sulla curva } \gamma.$$

Illustra brevemente le proprietà di tale trasformazione.

$\left[\text{a) } y = h^{-1}(x) = \frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x^2 - 1}}; \text{ b) } y = -2x + 3\sqrt{3},\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}; \text{ c) } a = \frac{1}{\sqrt{2}},\ b = \sqrt{2}\right]$

36 Studia e rappresenta la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{2} - \ln\frac{x + 1}{x - 1}.$$

Verifica che ammette due punti di intersezione con l'asse x e individua un valore approssimato a meno di $\frac{1}{2}$ di ciascuna radice. La funzione gode di particolari simmetrie?

a) Nello stesso sistema di assi cartesiani rappresenta la funzione $g(x) = \frac{x}{2} + \ln\frac{x + 1}{x - 1}$; verifica che per essa non ci sono intersezioni con l'asse x.

b) Considera una retta $x = h$ $(h > 1)$ e le sue intersezioni P e Q con le funzioni rappresentate. Siano P' e Q' le proiezioni di P e Q sulla retta di equazione $x = 1$. Considera l'area del rettangolo $PQQ'P'$ in funzione di h e calcola il limite dell'area quando $h \to +\infty$ e quando $h \to 1^+$. [b) 4; 0]

37 Nel piano riferito a un sistema di assi cartesiani xOy è assegnata la curva k di equazione:

$$y = \frac{x^2}{2} + \ln|x + 1|.$$

Disegnare un andamento approssimato dopo aver verificato fra l'altro che essa ha due flessi. Calcolare l'area del triangolo formato dalla retta congiungente tali flessi e dalle tangenti inflessionali.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria*, 1994)

$[F_1(0; 0),\ F_2(-2; 2); 2]$

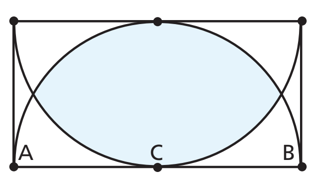
38 Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro $\overline{AB} = 2$, si affrontino le seguenti questioni.

a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1.

b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.

c) Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $P\widehat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH.

Si calcoli il rapporto $f(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)}$.



d) Si studi $f(x)$ e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria*, 2008, *problema* 2)

$\left[\text{a) } \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ c) } f(x) = \left|\frac{1 + \cos x}{\cos x}\right|,\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]\right]$

39 L'ellisse Σ ha equazione $x^2 + 4y^2 = 4$ e $P(a; b)$, con $b \geq 0$, è un suo punto.

1. Si determini l'equazione della tangente a Σ in P e se ne indichi con Q l'intersezione con l'asse y.

2. Si determini l'equazione cartesiana del luogo geometrico Ω descritto dal punto medio M del segmento PQ al variare di P.

3. Si studi e si rappresenti Ω avendo trovato che la sua equazione è: $y = \dfrac{(2-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria*, 2008, *problema* 1)

$\left[\mathbf{1.}\ y = -\dfrac{ax}{2\sqrt{4-a^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{4-a^2}};\ \mathbf{2.}\ y = \dfrac{(2-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}\right]$

40 Sono dati la funzione $f(x) = e^{\cos x}$ e il fascio Γ di circonferenze:

$$x^2 + y^2 + (k-4)y - ke - e^2 + 4e = 0.$$

a) Studia la funzione e disegna il grafico.

b) Studia la natura di Γ e determina la circonferenza δ con centro nell'origine.

c) Utilizza il metodo di bisezione per calcolare un valore approssimato dell'ascissa dei punti di intersezione fra tale circonferenza e la funzione (tre iterazioni).

[a) f è pari con periodo 2π; max per $x = 2k\pi$, min per $x = (2k+1)\pi$; b) circonferenze tangenti in $(0; e)$ alla retta $y - e = 0$; generatrici $x^2 + (y-2)^2 = (e-2)^2$, $y - e = 0$; $x^2 + y^2 = e^2$; c) $2{,}625 < |x| < 2{,}75$]

41 Considera la funzione

$$f(x) = \frac{5 \operatorname{sen} x}{3 + 2\operatorname{sen} x},\ \text{con } x \in [-\pi; \pi].$$

a) Traccia il grafico di $f(x)$ e determina la tangente t nell'origine.

b) Scrivi l'equazione del fascio di parabole tangenti a t nell'origine.

c) Verifica, aiutandoti anche con il grafico, che la parabola avente $a = \dfrac{-3}{5}$ (con a coefficiente di x^2) e il grafico della funzione f hanno un punto di intersezione nell'intervallo $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{6}\right]$. Utilizza il metodo di bisezione iterato tre volte per calcolare un valore approssimato dell'ascissa x_0 di tale punto.

$\left[\text{a) } t\text{: } y = \dfrac{5}{3}x;\ \text{b) } y = ax^2 + \dfrac{5}{3}x;\ \text{c) } 1{,}963\ldots < x_0 < 2{,}094\ldots\right]$

42 È data la famiglia di funzioni:

$$y_k = kx^4 - 2x + 1,\ \text{con } k \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

a) Determina per quali valori di k le curve y_k intersecano l'asse delle x. Utilizzando il metodo delle tangenti determina un valore approssimato della radice minore della funzione che si ottiene con $k = 1$ (tre iterazioni).

b) Scrivi l'equazione del fascio di parabole passanti per i punti $A(0; 1)$, $B(2; 1)$ e dimostra che esiste una parabola γ tangente a tutte le funzioni y_k nel punto A.

c) Determina algebricamente i punti di intersezione di y_1 con la parabola γ.

$\left[\text{a) per } k < 0 \vee 0 < k < \dfrac{27}{16} \text{ due intersezioni; per } k = \dfrac{27}{16} \text{ l'asse } x \text{ è tangente alla funzione; se } [a_0; b_0] = \left[\dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{4}\right]\ x = 0{,}543686;\ \text{b) } y = ax^2 - 2ax + 1,\ y = x^2 - 2x + 1;\ \text{c) } x = 0,\ x = \pm 1\right]$

43 Data la funzione $y = \operatorname{sen}^2 x - x + 2$:

a) disegna il grafico e dimostra che ammette soltanto uno zero;

b) verifica la condizione sufficiente di convergenza del metodo iterativo applicato alla risoluzione dell'equazione $\operatorname{sen}^2 x - x + 2 = 0$ e determina una soluzione approssimata (quattro iterazioni).

[b) se $x_0 = 2$, $x_4 = 2{,}14655\ldots$]

44 Considera la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

a) Disegna il grafico e dimostra che è simmetrico rispetto al punto $C(2; 0)$.

b) Scrivi l'equazione del fascio di circonferenze tangenti in C alla retta $x = 2$ e quindi determina la circonferenza γ passante per il punto $(6; 0)$.

c) Aiutandoti anche con il grafico dai una giustificazione del fatto che f e γ hanno soltanto due punti in comune. Con uno dei metodi studiati determina l'ascissa del secondo punto di intersezione fra f e γ (almeno tre iterazioni).

[a) se $P(x; y)$ appartiene al grafico, anche il simmetrico $P'(4 - x; - y)$ appartiene al grafico;
b) $x^2 + y^2 + ax - 2a - 4 = 0$; $(x - 4)^2 + y^2 = 4$; c) $x = 5{,}3306\dots$]

45 Data la funzione $y = xe^x$, rispondi ai seguenti quesiti.

a) Disegna il grafico.

b) Scrivi l'equazione del fascio di circonferenze con centro nel punto $C(-1; 0)$ e determina per quali valori del raggio tali circonferenze hanno punti in comune con il grafico della funzione.

c) Verifica che la circonferenza avente raggio $r = 1$ interseca la funzione nell'origine O e in un altro punto A. Individua un intervallo in cui sia verificata la condizione sufficiente per la convergenza del metodo del punto unito; mediante tre iterazioni determina un'approssimazione dell'ascissa di A.

[b) $(x + 1)^2 + y^2 = r^2$, $r \geq e^{-1}$; c) $x(xe^{2x} + x + 2) = 0$, $[-2; -1]$, per $x_0 = -2$, risulta $x_A = -1{,}96118\dots$]

46 Sia data la funzione $y = e^x + 2x^3 - 5$.

a) Esegui uno studio sommario e disegna il grafico.

b) Dimostra che la funzione ha soltanto uno zero. Dopo aver verificato che nell'intervallo $[1; 2]$ è valida la condizione per applicare le formule di ricorrenza, utilizza il metodo delle secanti per calcolare un'approssimazione di tale zero iterando 5 volte la formula.

c) Dimostra che la funzione ha un unico punto di flesso. Dimostra che esiste un intervallo in cui è valida la condizione sufficiente per la convergenza del metodo iterativo: impiegalo per determinare un valore approssimato dell'ascissa di tale punto (esegui 8 iterazioni).

[b) $x \simeq 1{,}030297$; c) $x_F \simeq -0{,}07714621$]

47 Considera la funzione $f(x) = \ln(x^2 - x + 2)$ e il fascio di rette con centro nell'origine.

a) Esegui lo studio di f dimostrando in particolare che ammette minimo assoluto; disegna il grafico.

b) Determina la retta del fascio passante per il punto di minimo e dimostra che non ha ulteriori intersezioni con f.

c) Dimostra che ogni retta del fascio, escluso l'asse delle ascisse, ha almeno un punto in comune con la funzione data.

$\left[\text{a) min. ass. } M\left(\frac{1}{2}; \ln\frac{7}{4}\right)\text{; b) } m = 2\ln\frac{7}{4}\right]$

CAPITOLO

28

٢٨ [numerazione araba]

२८ [numerazione devanagari]

二十八 [numerazione cinese]

GLI INTEGRALI INDEFINITI

IN CADUTA LIBERA Nel 1971, durante la missione dell'Apollo 15, l'astronauta David Scott, mentre si trovava sulla superficie lunare, lasciò cadere contemporaneamente un martello da geologo e una penna di falco, dedicando l'esperimento a Galileo. Il grande fisico e matematico fu infatti il primo a sostenere che in assenza di attrito tutti i corpi cadono con lo stesso moto. Ma andò oltre: affermò che il moto di caduta ha accelerazione costante e che in esso gli spazi percorsi sono proporzionali ai quadrati dei tempi impiegati. Quest'ultima legge si può dimostrare più facilmente se si hanno a disposizione gli strumenti dell'analisi…

…come si possono ricavare le leggi del moto di caduta di un grave utilizzando l'integrazione indefinita?

La risposta a pag. 1955

1. L'INTEGRALE INDEFINITO

Le primitive

Sappiamo che l'operazione di derivazione, quando è possibile, associa a una funzione un'altra funzione, la sua derivata, che è unica.

Vogliamo ora affrontare il problema inverso della derivazione: data una funzione, esiste una funzione la cui derivata sia uguale alla funzione data? Per esempio, data $f(x) = 2x$, ci chiediamo se esiste una funzione $F(x)$ la cui derivata è $2x$. Se consideriamo $F(x) = x^2$, si ha che $F'(x) = 2x$. Una funzione di questo tipo viene detta *primitiva* di $f(x)$.

DEFINIZIONE

Primitiva di una funzione

Una funzione $F(x)$ si dice primitiva della funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $[a; b]$ se $F(x)$ è derivabile in tutto $[a; b]$ e la sua derivata è $f(x)$:

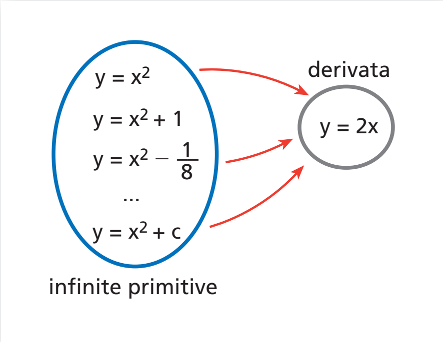
$$F'(x) = f(x).$$

ESEMPIO

Data la funzione $f(x) = 3 \operatorname{sen} x$, la funzione $F(x) = -3\cos x$ è una primitiva di $f(x)$ perché:

$$F'(x) = 3 \operatorname{sen} x = f(x).$$

La primitiva di una funzione, se esiste, non è unica. Poiché $F(x) = x^2$ ha come derivata $2x$, allora x^2 è una primitiva di $2x$. Osserviamo però che anche $x^2 + 1$, $x^2 - \frac{1}{8}$ e in generale $x^2 + c$ (con c costante reale) hanno come derivata $2x$, quindi esistono infinite primitive di $2x$.



◀ **Figura 1** Ogni funzione del tipo $y = x^2 + c$ ha per derivata $2x$, quindi è una primitiva di $y = 2x$.

In generale, se una funzione $f(x)$ ammette una primitiva $F(x)$, allora ammette infinite primitive del tipo $F(x) + c$, con c numero reale qualunque. Infatti, poiché la derivata di una costante è nulla:

$$D\,[F(x) + c] = F'(x) = f(x), \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Viceversa, se due funzioni $F(x)$ e $G(x)$ sono primitive della stessa funzione $f(x)$, allora le due funzioni differiscono per una costante,

$$D\,[F(x) - G(x)] = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

e perciò

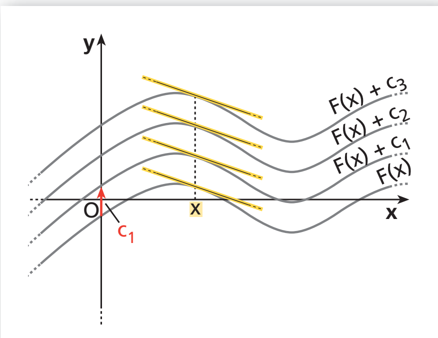
$$F(x) - G(x) = c.$$

Concludiamo quindi che:

se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora le funzioni $F(x) + c$, con c numero reale qualsiasi, sono **tutte** e **sole** le primitive di $f(x)$.

● Per un corollario del teorema di Lagrange, se una funzione ha come derivata 0 in un intervallo, allora, in tale intervallo, è costante.

● Poiché tutte le primitive di una funzione $f(x)$ sono funzioni del tipo $F(x) + c$, geometricamente sono rappresentate da infinite curve piane ottenute dal grafico di $F(x)$ mediante una traslazione verticale di vettore $\vec{v}\,(0; c)$; a ogni valore di c corrisponde una curva.



◄ **Figura 2** Funzioni i cui grafici sono traslati di un vettore del tipo (0; *c*). Tutte le funzioni hanno la stessa derivata perché nei punti con la stessa ascissa hanno tangente parallela.

L'integrale indefinito

Riprendiamo l'esempio della funzione $f(x) = 2x$. Diamo all'insieme delle sue primitive $x^2 + c$, con c numero reale qualunque, il nome di *integrale indefinito* di $f(x) = 2x$ e usiamo questa scrittura:

$$\int 2x\,dx = x^2 + c.$$

DEFINIZIONE

Integrale indefinito

Si chiama integrale indefinito della funzione $f(x)$, e si indica con $\int f(x)\,dx$, l'insieme di tutte le primitive $F(x) + c$ di $f(x)$, con c numero reale qualunque.

$$\int f(x)\,dx = \underline{F(x) + c}$$

D[F(x) + c] = f(x)

● Il simbolo $\int f(x)\,dx$ si legge «integrale indefinito di $f(x)$ in dx».

● La primitiva $F(x)$ che si ottiene per $c = 0$ si chiama **primitiva fondamentale**.

Nella scrittura $\int f(x)\,dx$ la funzione $f(x)$ è detta **funzione integranda** e la variabile x **variabile di integrazione**.

ESEMPIO

L'integrale indefinito di $\cos x$ è l'insieme delle primitive di $\cos x$, cioè $\operatorname{sen} x + c$. Scriviamo:

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c.$$

$$\int \cos x\,dx = \underline{\operatorname{sen} x + c}$$

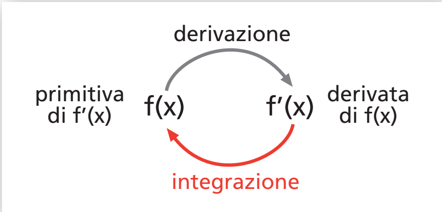
D[sen x + c] = cos x

◄ **Figura 3**

- Dalla definizione precedente, poiché

$DF(x) = f(x)$,

segue che $D\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$.
Questo significa che l'integrazione indefinita agisce come operazione inversa della derivazione.



▶ **Figura 4** L'integrazione di una funzione agisce come operazione inversa della derivazione.

Una funzione che ammette una primitiva (e quindi infinite primitive) si dice **integrabile**.
Quali sono le funzioni integrabili? Si può dimostrare che è valido il seguente teorema.

TEOREMA

Condizione sufficiente di integrabilità

Se una funzione è continua in $[a; b]$, allora ammette primitive nello stesso intervallo.

- Sappiamo invece che non sempre una funzione continua è derivabile. Per esempio, ci sono funzioni continue con punti angolosi, e in tali punti non sono derivabili.

Tuttavia, non è sempre facile determinare primitive anche di funzioni continue abbastanza semplici. Per esempio, l'integrale $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, con $x \neq 0$, non è calcolabile con i metodi che esamineremo in questo capitolo.

Le proprietà dell'integrale indefinito

PROPRIETÀ

Prima proprietà di linearità

L'integrale indefinito di una somma di funzioni integrabili è uguale alla somma degli integrali indefiniti delle singole funzioni:

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Infatti, se deriviamo entrambi i membri, otteniamo rispettivamente:

$$D\left[\int [f(x) + g(x)]\,dx\right] = f(x) + g(x);$$

$$D\left[\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right] = D\left[\int f(x)\,dx\right] + D\left[\int g(x)\,dx\right] = f(x) + g(x).$$

I due membri hanno la stessa derivata, quindi rappresentano le primitive della stessa funzione.

ESEMPIO

$$\int (3x^2 + \cos x)\,dx = \int 3x^2\,dx + \int \cos x\,dx = x^3 + c_1 + \operatorname{sen} x + c_2.$$

Si è soliti scrivere una sola costante $c = c_1 + c_2$, per non appesantire la notazione. Pertanto:

$$\int (3x^2 + \cos x)\,dx = x^3 + \operatorname{sen} x + c.$$

PROPRIETÀ

Seconda proprietà di linearità

L'integrale del prodotto di una costante per una funzione integrabile è uguale al prodotto della costante per l'integrale della funzione:

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx.$$

Infatti, se deriviamo entrambi i membri, otteniamo rispettivamente:

$$D\left[\int k \cdot f(x)\, dx\right] = k \cdot f(x); \quad D\left[k \cdot \int f(x)\, dx\right] = kD\left[\int f(x)\, dx\right] = k \cdot f(x).$$

I due membri hanno la stessa derivata, quindi rappresentano le primitive della stessa funzione.

ESEMPIO

$$\int 4\cos x\, dx = 4 \cdot \int \cos x\, dx = 4 \operatorname{sen} x + c.$$

Le proprietà di linearità si possono esprimere in un'unica formula:

$$\int [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\, dx = c_1 \int f(x)\, dx + c_2 \int g(x)\, dx.$$

Si dice anche che **l'integrale è un operatore lineare**.

Non esistono proprietà riguardanti l'integrale di un prodotto o di un quoziente di funzioni, quindi è necessario studiare per tali casi altri metodi risolutivi.

Per brevità, useremo spesso il termine «integrale» al posto di «integrale indefinito».

Occorre ricordare sempre che, in generale,

$$\int f(x) g(x)\, dx \neq$$
$$\neq \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx \text{ e}$$
$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x)\, dx}{\int g(x)\, dx}.$$

2. GLI INTEGRALI INDEFINITI IMMEDIATI

Dalle regole di derivazione delle funzioni elementari ricaviamo gli integrali indefiniti fondamentali.

L'integrale di x^α, con $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$

ESEMPIO

$\int x^2\, dx = \dfrac{x^3}{3} + c$. Infatti, derivando, abbiamo: $D\left[\dfrac{x^3}{3} + c\right] = \dfrac{3x^{3-1}}{3} = x^2$.

In generale:

$$\boldsymbol{\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \ \text{con} \ \alpha \neq -1.}$$

Infatti, derivando, abbiamo $D\left[\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\right] = \dfrac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1) x^{\alpha+1-1} = x^\alpha$.

Per $\alpha = -1$ la regola non può essere applicata, in quanto il denominatore della frazione sarebbe 0.

Casi particolari

- $\boldsymbol{\int dx = x + c}$; infatti $\int dx = \int 1\, dx = \int x^0\, dx = x + c$;
- $\boldsymbol{\int x\, dx = \dfrac{x^2}{2} + c}$;

- $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$;

  infatti $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c.$

Con la regola e le proprietà del paragrafo precedente possiamo calcolare gli integrali delle funzioni polinomiali o di potenze della x con qualsiasi esponente (purché diverso da -1).

ESEMPIO

1. Calcoliamo $\int (2x^5 - 4x + 3)\,dx$. Applichiamo la prima proprietà di linearità:

$$\int (2x^5 - 4x + 3)\,dx = \int 2x^5\,dx - \int 4x\,dx + \int 3\,dx.$$

Applichiamo la seconda proprietà di linearità:

$$\int 2x^5\,dx - \int 4x\,dx + \int 3\,dx = 2 \cdot \int x^5\,dx - 4 \cdot \int x\,dx + 3 \cdot \int dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^6}{6} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot x + c = \frac{x^6}{3} - 2x^2 + 3x + c.$$

2. Calcoliamo $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$. Scriviamo

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}},$$

quindi:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + c = 2 \cdot \sqrt{x} + c.$$

L'integrale di $\frac{1}{x}$

Consideriamo ora il caso in cui l'esponente di x sia -1, cioè $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Si ha:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c.$$

Infatti $D[\ln|x| + c] = \frac{1}{x}$ perché:

se $x > 0$, $D \ln|x| = D \ln x = \frac{1}{x}$;

se $x < 0$, $D \ln|x| = D \ln(-x) = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Nell'argomento del logaritmo utilizziamo il valore assoluto perché vogliamo avere una regola valida per tutto il dominio di $\frac{1}{x}$ e quindi anche per valori di x negativi.

ESEMPIO

Calcoliamo $\int \frac{3x^2 + 2}{x}\,dx$.

$$\int \frac{3x^2 + 2}{x}\,dx = \int \left(3x + \frac{2}{x}\right) dx =$$

$$= 3\int x\,dx + 2\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{3}{2}x^2 + 2\ln|x| + c.$$

L'integrale della funzione esponenziale

$\boldsymbol{\int e^x\, dx = e^x + c}$; infatti $D[e^x + c] = e^x$.

$\boldsymbol{\int a^x\, dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + c}$; infatti $D\left[\frac{1}{\ln a} \cdot a^x + c\right] = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a = a^x$.

Studieremo più avanti l'integrale del logaritmo di x, perché non è immediato.

ESEMPIO

Calcoliamo $\int (2e^x + 5^x)\, dx$.

Applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int (2e^x + 5^x)\, dx = 2\int e^x\, dx + \int 5^x\, dx = 2e^x + \frac{1}{\ln 5} \cdot 5^x + c.$$

L'integrale delle funzioni seno e coseno

$\boldsymbol{\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c}$; infatti $D[-\cos x + c] = -(-\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x$.

$\boldsymbol{\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c}$; infatti $D[\operatorname{sen} x + c] = \cos x$.

$\boldsymbol{\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + c}$; infatti $D[\operatorname{tg} x + c] = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$\boldsymbol{\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = -\operatorname{cotg} x + c}$; infatti $D[-\operatorname{cotg} x + c] = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Studieremo più avanti l'integrale della tangente e quello della cotangente di x, perché non sono immediati.

ESEMPIO

Calcoliamo $\int \left(3 \operatorname{sen} x - \frac{4}{\cos^2 x}\right) dx$.

Applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int \left(3 \operatorname{sen} x - \frac{4}{\cos^2 x}\right) dx = 3\int \operatorname{sen} x\, dx - 4\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$= 3 \cdot (-\cos x) - 4 \cdot \operatorname{tg} x + c = -3\cos x - 4 \operatorname{tg} x + c.$$

L'integrale delle funzioni le cui primitive sono le funzioni goniometriche inverse

Poiché $D[\operatorname{arcsen} x] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, si ha:

$\boldsymbol{\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} x + c}$.

Utilizzando invece l'arcocoseno:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx =$$
$$= -\int -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx =$$
$$= -\arccos x + c.$$

Poiché $D[\text{arctg}\, x] = \dfrac{1}{1+x^2}$, si ha:

$$\boldsymbol{\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \text{arctg}\, x + c.}$$

● Utilizzando invece l'arcocotangente:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = -\int -\frac{1}{1+x^2}\, dx = -\text{arccotg}\, x + c.$$

ESEMPIO

Calcoliamo $\displaystyle\int\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{7}{1+x^2}\right) dx$.

Applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{7}{1+x^2}\right) dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + 7\int \frac{1}{1+x^2}\, dx =$$

$$= 2\,\text{arcsen}\, x + 7\,\text{arctg}\, x + c.$$

L'integrale delle funzioni la cui primitiva è una funzione composta

Cerchiamo ora di applicare le formule precedenti nel caso di funzioni composte.

Per esempio, cerchiamo di calcolare $\int (\text{sen}\, x)^4\, dx$. Pensando alla regola $\int x^\alpha\, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, potremmo ipotizzare che il risultato sia $\dfrac{(\text{sen}\, x)^5}{5} + c$.

Derivando questa funzione dovremmo ottenere $(\text{sen}\, x)^4$. Abbiamo invece:

$$D\left[\frac{(\text{sen}\, x)^5}{5} + c\right] = \frac{\cancel{5}(\text{sen}\, x)^4}{\cancel{5}} \cdot \cos x = (\text{sen}\, x)^4 \cdot \cos x.$$

● Scriviamo la potenza del seno in questo modo, invece di scrivere $\text{sen}^4 x$, per evidenziare che è una funzione composta, in cui il seno è la funzione più «interna» e l'elevamento alla quarta è la più «esterna».

Quindi $\int (\text{sen}\, x)^4\, dx$ non può essere calcolato mediante la regola di $\int x^\alpha dx$.

Dalla precedente uguaglianza deduciamo invece la seguente:

$$\int (\text{sen}\, x)^4 \cdot \cos x\, dx = \frac{(\text{sen}\, x)^5}{5} + c.$$

Pertanto, per integrare la potenza di una funzione (che è una funzione composta) applicando la regola della potenza, è necessario che la funzione integranda sia moltiplicata per la derivata della funzione più «interna» nella composizione:

$$\boldsymbol{\int [f(x)]^\alpha f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \text{con } \alpha \neq -1.}$$

● $D\left[\dfrac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] = [f(x)]^\alpha \cdot f'(x)$.

Si procede analogamente anche per calcolare integrali di altre funzioni composte riconducibili a regole di integrazione diverse:

$$\boldsymbol{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c.}$$

● $D[\ln|f(x)|] = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

$$\boldsymbol{\int f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + c.}$$

● $D[e^{f(x)}] = f'(x)\, e^{f(x)}$.

$$\boldsymbol{\int f'(x)\, a^{f(x)}\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c.}$$

● $D\left[\dfrac{a^{f(x)}}{\ln a}\right] = f'(x)\, a^{f(x)}$.

$$\boldsymbol{\int f'(x)\, \text{sen}\, f(x)\, dx = -\cos f(x) + c.}$$

● $D[-\cos f(x)] = f'(x)\, \text{sen}\, f(x)$.

$$\boldsymbol{\int f'(x) \cos f(x)\, dx = \text{sen}\, f(x) + c.}$$

● $D[\text{sen}\, f(x)] = f'(x) \cos f(x)$.

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \operatorname{tg} f(x) + c.$$

$$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}\,dx = -\operatorname{cotg} f(x) + c.$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} f(x) + c.$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \operatorname{arctg} f(x) + c.$$

Le ultime due formule si possono generalizzare:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} \frac{f(x)}{|a|} + c.$$

$$\int \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} \frac{f(x)}{a} + c.$$

- $D[\operatorname{tg} f(x)] = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$.
- $D[-\operatorname{cotg} f(x)] = \dfrac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}$.
- $D[\operatorname{arcsen} f(x)] = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$.
- $D[\operatorname{arctg} f(x)] = \dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$.
- $D\left[\operatorname{arcsen} \dfrac{f(x)}{|a|}\right] = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}$.
- $D\left[\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg} \dfrac{f(x)}{a}\right] = \dfrac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2}$.

ESEMPIO

Calcoliamo i seguenti integrali.

1. $\int 3x^2(x^3+2)^2\,dx = \dfrac{(x^3+2)^3}{3} + c.$

2. $\int \operatorname{tg} x\,dx$; $\quad \int \operatorname{cotg} x\,dx$.

Scriviamo la tangente come rapporto fra seno e coseno e notiamo che, a meno del segno, il numeratore è la derivata del denominatore:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c.$$

Quindi $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + c$.

In modo simile si trova che: $\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + c$.

3. $\int x \operatorname{sen} x^2\,dx$.

Osserviamo che, a meno di una costante moltiplicativa, x è la derivata di x^2, argomento della funzione seno. Pertanto, moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$\int x \operatorname{sen} x^2\,dx = \frac{1}{2}\int 2x \operatorname{sen} x^2\,dx = -\frac{1}{2}\cos x^2 + c.$$

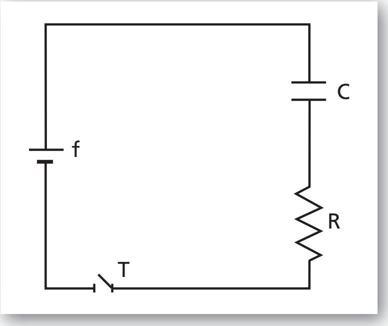
4. $\int 2e^x \cos e^x\,dx = 2\int e^x \cos e^x\,dx = 2\operatorname{sen} e^x + c.$

5. $\int \dfrac{1}{1+4x^2}\,dx = \int \dfrac{1}{1+(2x)^2}\,dx = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{2}{1+(2x)^2}\,dx = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + c.$

ESPLORAZIONE

Un modello per il condensatore

Costruire un modello matematico permette non solo di descrivere un fenomeno (fisico, biologico, economico, sociale, …), ma anche di prevederne l'evoluzione. Uno dei casi più semplici riguarda il fenomeno della carica di un condensatore.
Consideriamo il seguente circuito, in cui un generatore crea una differenza di potenziale costante f. Quando il circuito è aperto (figura 1), la carica sul condensatore C è nulla, così come la differenza di potenziale ai suoi capi.



◀ **Figura 1**

Chiudiamo ora il tasto T consentendo alla corrente di circolare nel circuito: come varia nel tempo la carica Q accumulata sul condensatore?
Per la legge di conservazione dell'energia, la somma algebrica delle differenze di potenziale presenti nel circuito deve essere uguale a 0.
Otteniamo quindi: $f - V(t) - I(t) \cdot R = 0$, dove $I(t)$ è l'intensità di corrente che circola nel circuito e R è la resistenza. Per la definizione di intensità di corrente, $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$, e per la relazione che lega la differenza di potenziale ai capi di un condensatore alla carica in esso immagazzinata, $V(t) = \frac{Q(t)}{C}$, essendo C la capacità del condensatore.
Sostituiamo nell'equazione $f - V(t) - I(t) \cdot R = 0$:

$$f - \frac{Q(t)}{C} - R\frac{dQ(t)}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{fC - Q(t)}{RC}.$$

Separiamo le variabili t e $Q(t)$, ottenendo:

$$\frac{dQ}{Cf - Q} = \frac{dt}{RC}.$$

La soluzione che stiamo cercando, ossia la funzione $Q(t)$ che esprime l'andamento della carica accumulata nel condensatore al variare del tempo, può essere trovata tramite l'integrazione indefinita.
Integriamo il primo membro rispetto alla variabile Q e il secondo membro rispetto alla variabile t:

$$-\ln(Cf - Q) + k_1 = \frac{t}{RC} + k_2,$$

essendo k_1 e k_2 costanti di integrazione.
Ponendo $k = k_1 - k_2$, otteniamo:

$$\ln(Cf - Q) = -\frac{t}{RC} + k.$$

Infine, applicando la funzione esponenziale in base e a entrambi i membri, otteniamo:

$$Cf - Q = e^{-\frac{t}{RC} + k} \quad \rightarrow \quad Q(t) = Cf - Ae^{-\frac{t}{RC}},$$

avendo posto $A = e^k$.
Per determinare la costante A, basta imporre le condizioni iniziali: $Q(0) = 0$, ossia $0 = Cf - A$ e, quindi, $A = Cf$.
La funzione che esprime l'andamento nel tempo della carica accumulata sul condensatore è:

$$Q(t) = Cf\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

Attività

La carica e la scarica

- Una volta caricato il condensatore, se il generatore viene scollegato dal circuito, in cui rimangono solo condensatore e resistenza, si ha la scarica del condensatore. Descrivi come varia nel tempo la quantità Q di carica nel condensatore sia durante la fase di carica, sia durante quella di scarica, disegnando anche il grafico delle due funzioni $Q(t)$ con l'aiuto del computer. Verifica i tuoi risultati mediante una ricerca in Internet.

@ **Cerca nel Web:**
carica, scarica, condensatore, modelli matematici

3. L'INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

IN PRATICA
▶ Videolezione 76

Quando l'integrale non è di risoluzione immediata può essere utile applicare il **metodo di sostituzione**, che consiste nell'effettuare un cambiamento di variabile che consenta di riscrivere l'integrale dato in una forma che sappiamo risolvere.

ESEMPIO

Calcoliamo $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

- Poniamo $\sqrt{x} = t$, ossia $x = t^2$.
- Calcoliamo il differenziale: $dx = 2t\,dt$.
- Sostituiamo nell'integrale dato e calcoliamo l'integrale rispetto a t:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\,2t\,dt = 2\int \frac{t}{1+t}\,dt = 2\int \frac{t+1-1}{1+t}\,dt =$$

$$= 2\int dt - 2\int \frac{1}{t+1}\,dt = 2t - 2\ln|t+1| + c.$$

- Utilizzando la posizione iniziale, scriviamo il risultato in funzione di x:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + c.$$

Aggiungiamo e togliamo 1 al numeratore e poi scomponiamo la frazione in: $\frac{t+1}{t+1} - \frac{1}{t+1}$.

Nella sostituzione abbiamo tolto il valore assoluto perché $\sqrt{x}+1$ ha valore sempre positivo.

Il metodo di sostituzione può essere utilizzato anche per calcolare l'integrale di una funzione composta nei casi già esaminati nel paragrafo precedente.

ESEMPIO

Calcoliamo $\int 2x\cos x^2\,dx$.

Essendo $\mathrm{D}x^2 = 2x$, possiamo utilizzare la regola vista nel paragrafo precedente:

$$\int 2x\cos x^2\,dx = \operatorname{sen} x^2 + c.$$

$\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \operatorname{sen} f(x) + c$.

In alternativa, applichiamo il metodo di sostituzione.

- Poniamo $t = x^2$.
- Calcoliamo il differenziale: $dt = 2x\,dx$.
- Sostituiamo nell'integrale e risolviamo:

$$\int 2x\cos x^2\,dx = \int \cos t\,dt = \operatorname{sen} t + c.$$

- Scriviamo il risultato in funzione di x:

$$\int 2x\cos x^2\,dx = \operatorname{sen} x^2 + c.$$

In generale, per calcolare $\int f(x)\,dx$ con il metodo di sostituzione:

- si pone $x = g(t)$, oppure $t = g^{-1}(x)$, dove $g(t)$ è invertibile con $g'(t)$ continua e diversa da 0;

- si calcola il differenziale dx, oppure dt;
- si sostituisce nell'integrale dato, in modo da ottenere un integrale nella variabile t, e si calcola, se possibile, l'integrale rispetto a t;
- si utilizza la posizione iniziale per scrivere il risultato in funzione di x.

Vedremo negli esercizi anche integrali del tipo:

$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$,

$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx$ e

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx$.

4. L'INTEGRAZIONE PER PARTI

IN PRATICA
▶ Videolezione 77

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ derivabili, con derivata continua, in un intervallo $[a; b]$, consideriamo la derivata del loro prodotto:

$$\mathrm{D}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Integriamo entrambi i membri:

$$\int \mathrm{D}[f(x) \cdot g(x)]\, dx = \int [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)]\, dx,$$

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x)\, dx + \int f(x) \cdot g'(x)\, dx.$$

Per semplicità di scrittura, in questa uguaglianza e nelle successive, trascuriamo le costanti relative alle primitive.

Isolando $\int f(x) g'(x)\, dx$, otteniamo:

$$\boldsymbol{\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx},$$

detta formula di **integrazione per parti**.

Sinteticamente possiamo indicare la formula così:

$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$.

La formula è utile nei casi in cui la funzione integranda si può pensare come *prodotto di due fattori*.

$f(x)$ viene chiamato **fattore finito** e $g'(x)\, dx$ **fattore differenziale**.

Nell'applicazione della formula, una delle due funzioni, quella del fattore finito, viene soltanto derivata, mentre l'altra, quella del fattore differenziale, viene solo integrata. È quindi importante scegliere opportunamente i due fattori.

ESEMPIO

$$\int \underset{g'}{\underset{\uparrow}{x}}\ \underset{f}{\underset{\uparrow}{\ln x}}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c =$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + c.$$

Abbiamo scelto $x\, dx$ come fattore differenziale in quanto sappiamo calcolare la primitiva di x. Del fattore finito $\ln x$ sappiamo calcolare la derivata, che si semplifica con la primitiva di x, in modo da ottenere un integrale semplice da calcolare.

Al secondo membro della formula compare un altro integrale, quindi questo metodo di integrazione risulta utile se riusciamo a passare da un integrale più difficile a uno più facile da calcolare.

ESEMPIO

Calcoliamo $\int x \operatorname{sen} x\, dx$.

Sappiamo calcolare sia la derivata sia la primitiva di entrambe le funzioni. La scelta migliore è quella di derivare x, perché l'integrale si semplifica:

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{x}\, \underset{\substack{\uparrow \\ g'}}{\operatorname{sen} x}\, dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\, dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + c.$$

Se scegliamo, invece, $\operatorname{sen} x$ come fattore finito, otteniamo:

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sen} x - \int \frac{x^2}{2}\cos x\, dx,$$

dove l'integrale a secondo membro è più complicato di quello di partenza.

● Scegliamo x come fattore finito, e $\operatorname{sen} x\, dx$ come fattore differenziale.

In generale, negli integrali del tipo

$$\int x^n \operatorname{sen} x\, dx, \qquad \int x^n \cos x\, dx, \qquad \int x^n e^x\, dx$$

x^n si considera come fattore finito, mentre negli integrali del tipo

$$\int x^n \ln x\, dx, \qquad \int x^n \operatorname{arctg} x\, dx, \qquad \int x^n \operatorname{arcsen} x\, dx$$

$x^n\, dx$ si considera come fattore differenziale.
In particolare, negli integrali

$$\int \ln x\, dx, \qquad \int \operatorname{arctg} x\, dx, \qquad \int \operatorname{arcsen} x\, dx$$

si considera come fattore differenziale $x^0\, dx$, ossia $1dx$.

● Vedremo negli esercizi anche integrali del tipo:
$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx.$$

ESEMPIO

$$\boldsymbol{\int \ln x\, dx} = \int 1 \ln x\, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = \boldsymbol{x \ln x - x + c}.$$

● Otteniamo così la regola di integrazione del logaritmo.

5. L'INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Affrontiamo in questo paragrafo il calcolo degli integrali di funzioni razionali fratte:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\, dx,$$

dove il numeratore $N(x)$ e il denominatore $D(x)$ sono dei polinomi.
Nelle nostre considerazioni supporremo che il grado del numeratore sia minore del grado del denominatore perché, se ciò non accade, è sempre possibile eseguire la divisione del polinomio $N(x)$ per il polinomio $D(x)$, ottenendo un polinomio quoziente $Q(x)$ e un polinomio resto $R(x)$ di grado minore di quello di $D(x)$, cioè:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \quad \text{da cui}$$

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\, dx = \int \left[Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}\right] dx = \int Q(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\, dx.$$

● Considerati la divisione, $N(x) : D(x)$, il suo quoziente $Q(x)$ e il resto $R(x)$, è vero che: $N(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$, da cui, dividendo per $D(x)$, otteniamo la relazione che utilizziamo.

Nell'addizione dei due integrali, il primo è calcolabile in quanto è l'integrale di un polinomio; il secondo è l'integrale di una funzione razionale fratta con numeratore di grado inferiore al grado del denominatore.

ESEMPIO

Calcoliamo $\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+1}\,dx$.

Il numeratore ha grado maggiore del denominatore.
Eseguiamo la divisione $(x^3+2x^2+x+1):(x^2+1)$:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +2x^2 & +x & +1 & x^2+1 \\ \cline{5-5} -x^3 & & -x & & x+2 \\ \cline{1-4} & 2x^2 & & +1 & \\ & -2x^2 & & -2 & \\ \cline{2-4} & & & -1 & \end{array}$$

Quindi:

$$Q(x)=x+2,\ R(x)=-1.$$

Il rapporto può essere scritto così:

$$\frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+1}=x+2+\frac{-1}{x^2+1}.$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+1}\,dx=\int\left(x+2+\frac{-1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\int x\,dx+2\int dx-\int\frac{1}{x^2+1}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x-\operatorname{arctg}x+c.$$

Studiamo quindi integrali del tipo $\int\frac{R(x)}{D(x)}\,dx$, con $R(x)$ polinomio di grado inferiore a quello di $D(x)$.

Il numeratore è la derivata del denominatore

Abbiamo già visto che

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+c,$$

ossia l'integrale indefinito di una funzione fratta in cui il numeratore è la derivata del denominatore è uguale al logaritmo del valore assoluto del denominatore.

ESEMPIO

Calcoliamo $\int\frac{6x-2}{3x^2-2x-1}\,dx$.

Osserviamo che $D[3x^2-2x-1]=6x-2$, quindi:

$$\int\frac{6x-2}{3x^2-2x-1}\,dx=\ln|3x^2-2x-1|+c.$$

Il denominatore è di primo grado: $\int \frac{1}{ax+b}\,dx$

Anche l'integrale $\int \frac{1}{ax+b}\,dx$, con $a \neq 0$, in cui la frazione algebrica ha il denominatore di primo grado, può essere ricondotto al caso in cui il numeratore è la derivata del denominatore.

Infatti, basta moltiplicare la frazione per $\frac{a}{a}$ e applicare la seconda proprietà di linearità:

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{a}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c.$$

● a è la derivata di $ax+b$.

ESEMPIO

Calcoliamo $\int \frac{1}{3x-2}\,dx$.

$$\int \frac{1}{3x-2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x-2}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x-2| + c.$$

● Moltiplichiamo per $\frac{3}{3}$ e applichiamo la seconda proprietà di linearità.

Il denominatore è di secondo grado: $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx$

Per calcolare l'integrale

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx, \quad \text{con } a \neq 0,$$

si utilizzano metodi risolutivi diversi a seconda del segno del discriminante del denominatore $\Delta = b^2 - 4ac$.

Il discriminante è positivo: $\Delta > 0$

ESEMPIO

Calcoliamo $\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx$.

Il discriminante del denominatore è: $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$.
Essendo il discriminante positivo, il denominatore può essere scomposto nel prodotto di due binomi di primo grado, cioè:

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2),$$

dove $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$ sono le soluzioni di $x^2 - x - 2 = 0$.

La frazione $\frac{5x-1}{x^2-x-2}$ può essere pensata come somma di due frazioni aventi per denominatori i fattori trovati, ossia:

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}, \quad \text{con } A \text{ e } B \text{ costanti da determinare.}$$

Calcoliamo la somma delle due frazioni:

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax - 2A + Bx + B}{x^2-x-2} = \frac{(A+B)x - 2A + B}{x^2-x-2}.$$

L'uguaglianza

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{(A+B)x - 2A + B}{x^2-x-2}$$

● Se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ammette le soluzioni $x = x_1$ e $x = x_2$, allora:

$$ax^2 + bx + c = \\ = a(x - x_1)(x - x_2).$$

è valida, per $x \neq -1 \wedge x \neq 2$, soltanto se i numeratori sono polinomi identici. Quindi scriviamo e risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ -2A + B = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B = 5 - A \\ -2A + 5 - A = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \end{cases}$$

Possiamo dunque scrivere:

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}, \text{ quindi:}$$

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx = \int\left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}\right)dx =$$

$$= 2\int \frac{1}{x+1}\,dx + 3\int \frac{1}{x-2}\,dx = 2\ln|x+1| + 3\ln|x-2| + c.$$

Il principio di identità dei polinomi afferma che se due polinomi nelle stesse variabili, non nulli e scritti in forma ridotta, assumono valori uguali per tutti i valori attribuiti alle variabili, allora sono identici.

In generale, se $\Delta > 0$:

- si scompone il denominatore: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- si scrive la frazione data come somma di frazioni con denominatore di primo grado:
$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}\right);$$
- si calcola la somma delle due frazioni al secondo membro;
- si determinano i valori di A e B risolvendo il sistema le cui equazioni si ottengono uguagliando fra loro rispettivamente i coefficienti della x e i termini noti;
- si risolve l'integrale $\frac{1}{a}\int\left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}\right)dx$.

Questo metodo vale anche se il numeratore è di grado zero, ossia $p = 0$.

Il discriminante è nullo: $\Delta = 0$

ESEMPIO

1. Calcoliamo $\int \frac{1}{9x^2+6x+1}\,dx$.

Il discriminante del denominatore è $\frac{\Delta}{4} = 9 - 9 = 0$, possiamo quindi scrivere: $9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2$. Si ha allora:

$$\int \frac{1}{9x^2+6x+1}\,dx = \int \frac{1}{(3x+1)^2}\,dx = \int (3x+1)^{-2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int 3(3x+1)^{-2}\,dx = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(3x+1)} + c.$$

2. Calcoliamo $\int \frac{x-3}{x^2-6x+9}\,dx$.

Essendo $D[x^2 - 6x + 9] = 2x - 6$, si ha:

$$\int \frac{x-3}{x^2-6x+9}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+9}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x-3)^2 + c =$$

$$= \ln|x-3| + c.$$

Si può risolvere l'integrale anche così:

$$\int \frac{x-3}{(x-3)^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{x-3}\,dx =$$

$$= \ln|x-3| + c.$$

3. Calcoliamo $\int \frac{2x-3}{x^2-4x+4}\,dx$.

Essendo $D[x^2 - 4x + 4] = 2x - 4$, togliamo e aggiungiamo 1 al numeratore per ottenere:

$$\int \frac{2x-3-1+1}{x^2-4x+4}dx = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+4}dx + \int \frac{1}{x^2-4x+4}dx =$$
$$= \ln(x-2)^2 + \int (x-2)^{-2}dx = 2\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + c.$$

In generale, se $\Delta = 0$:

- si scompone il denominatore $ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$;
- si scrive $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{a}\int \frac{px+q}{(x-x_1)^2}dx$;
- se $p = 0$ oppure $px+q$ è la derivata del denominatore, il calcolo dell'integrale è immediato;
- se non si verificano le condizioni precedenti, si cerca, con passaggi opportuni, di decomporre l'integrale in modo da ottenerle.

Il discriminante è negativo: $\Delta < 0$

Esaminiamo due casi.

1. Il numeratore è di grado zero, ossia l'integrale è del tipo:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx, \quad \text{con } a \neq 0.$$

ESEMPIO

Calcoliamo $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$.

Il discriminante del denominatore è $\Delta = -4 < 0$.

Cerchiamo di ricondurre l'integrale al modello:

$$\int \frac{f'(x)}{k^2+[f(x)]^2}dx = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{f(x)}{k} + c.$$

Scriviamo il denominatore nella forma $[f(x)]^2 + k^2$ con il metodo del completamento del quadrato:

$$x^2+2x+2 = x^2+2x+1-1+2 = (x+1)^2+1.$$

L'integrale dato diventa:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx.$$

Utilizzando il modello, abbiamo $f(x) = x+1$, $k = 1$ e $f'(x) = 1$, quindi:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{1}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{1} + c = \operatorname{arctg}(x+1) + c.$$

In generale, per calcolare $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ se $\Delta < 0$:

- si raccoglie il coefficiente di x^2: $\frac{1}{a}\int \frac{1}{x^2+mx+n}dx$;
- si scrive il denominatore nella forma: $(x+h)^2+k^2$;
- si calcola l'integrale $\frac{1}{a}\int \frac{1}{(x+h)^2+k^2}dx = \frac{1}{ak}\operatorname{arctg}\frac{x+h}{k} + c$.

2. Il numeratore è un polinomio di primo grado, cioè l'integrale è del tipo:

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx, \quad \text{con } a \neq 0 \text{ e } p \neq 0.$$

ESEMPIO

Calcoliamo $\int \frac{x+3}{x^2+x+1}\,dx$.

Il denominatore ha $\Delta = -3 < 0$.

Trasformiamo il numeratore in modo da farvi figurare la derivata del denominatore, ossia $2x+1$:

$$\int \frac{x+3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+3)}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+5}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{5}{x^2+x+1}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Calcoliamo separatamente i due integrali:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \ln|x^2+x+1| + c;$$

$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$, applicando lo stesso metodo dell'esempio precedente.

Quindi:

$$\int \frac{x+3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$.

- Non è necessario mettere il valore assoluto nell'argomento del logaritmo $\ln(x^2+x+1)$, perché il segno del trinomio è positivo per qualunque valore reale di x.

In generale, per calcolare $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx$, con $a \neq 0$, $p \neq 0$ e $\Delta < 0$:

- si opera sul numeratore per farvi figurare la derivata del denominatore;
- si scrive l'integrale come somma di due integrali:

$$r\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + s\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx;$$

- si calcola il primo integrale ricordando che $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$, quindi:

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln|ax^2+bx+c| + c_1;$$

- si calcola il secondo integrale con il metodo già visto;
- si sommano i risultati ottenuti.

Il denominatore è di grado superiore al secondo

Quando il denominatore è di grado superiore al secondo, occorre, se è possibile, scomporlo in fattori e scrivere la frazione algebrica come somma di frazioni con denominatori di primo e secondo grado, riconducendosi così al calcolo di integrali dei tipi descritti in precedenza.

- Negli esercizi vedremo come esempio lo svolgimento del seguente integrale:

$$\int \frac{x^2+5x-1}{x^3+x^2-2}\,dx.$$

IN CADUTA LIBERA

…come si possono ricavare le leggi del moto di caduta di un grave utilizzando l'integrazione indefinita?

▶ Il quesito completo a pag. 1937

In *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638), Galileo afferma che se un mobile scende, a partire dalla quiete, con moto uniformemente accelerato, gli spazi percorsi da esso in tempi qualsiasi stanno tra loro in *duplicata proporzione dei tempi*, ossia, diremmo noi, sono proporzionali ai quadrati dei tempi.
La dimostrazione fornita da Galileo è piuttosto complessa. Oggi possiamo darne una agevolmente utilizzando derivate e integrali.

▲ Galileo Galilei (1564-1642).

L'accelerazione
Per definizione, l'accelerazione in un istante t, cioè l'accelerazione istantanea, è:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t},$$

ossia la derivata della funzione velocità $v(t)$.

Il moto di un corpo in caduta libera
Quindi, indicata con g l'accelerazione costante di caduta di un grave, abbiamo

$$v'(t) = g,$$

da cui:

$$\int v'(t)\,dt = \int g dt \to v(t) = g \cdot t + c.$$

Il corpo parte dalla quiete, quindi la velocità iniziale $v(0)$ è nulla:

$$v(0) = g \cdot 0 + c = 0 \to c = 0.$$

La legge della velocità di un corpo in caduta libera è quindi:

$$v(t) = g \cdot t.$$

Poiché la velocità istantanea è definita come la derivata della posizione s nel tempo,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

abbiamo:

$$s'(t) = g \cdot t.$$

Integriamo ancora:

$$\int s'(t)\,dt = \int g \cdot t dt \to$$

$$\to s(t) = \frac{1}{2} g t^2 + d.$$

Scegliamo un sistema di riferimento la cui origine è fissata nella posizione iniziale del corpo che viene lasciato cadere, $s(0) = 0$, quindi

$$0 = \frac{1}{2} g \cdot 0 + d \to d = 0,$$

da cui:

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2.$$

In conclusione…
Abbiamo allora dimostrato, come direbbe Galileo, «gli spazii passati essere in duplicata proporzione dei tempi, ossia come i quadrati di essi tempi».

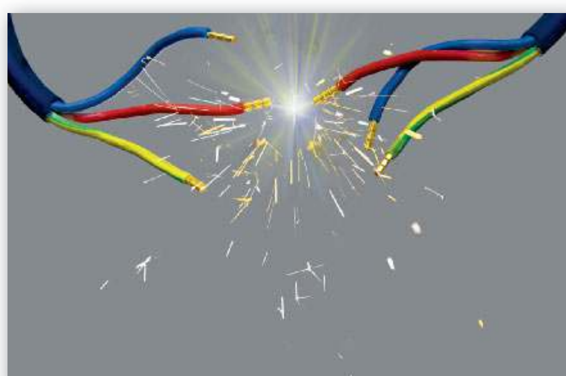
La quantità di carica

Gli integrali indefiniti trovano applicazione anche in elettromagnetismo.
L'intensità di una corrente elettrica è la quantità di carica che attraversa la sezione di un conduttore nell'unità di tempo. Per determinare l'intensità della corrente $i(t)$ che circola nel conduttore all'istante t, ossia l'intensità istantanea, si utilizza la derivata della funzione $q(t)$, che rappresenta la quantità di carica al tempo t:

$$i(t) = q'(t).$$

Ne deduciamo che la quantità di carica $q(t)$ è una primitiva dell'intensità di corrente $i(t)$:

$$q(t) = \int i(t)\,dt.$$



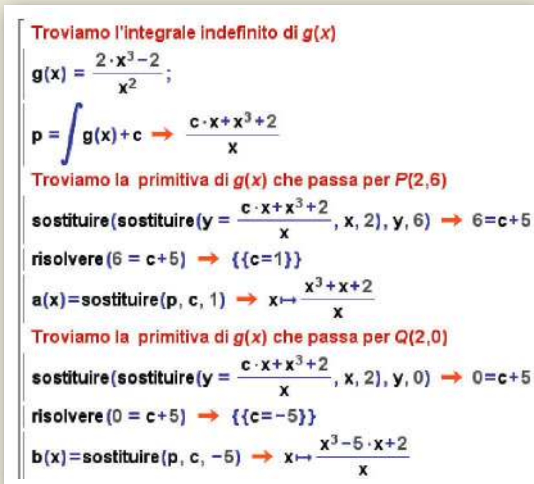
LABORATORIO DI MATEMATICA
GLI INTEGRALI INDEFINITI

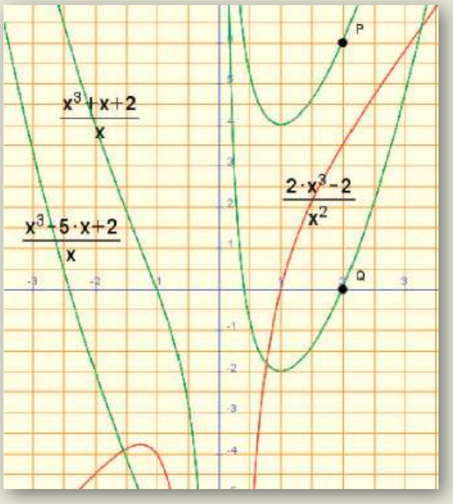
ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Wiris troviamo le primitive della funzione $g(x) = \dfrac{2x^3 - 2}{x^2}$ passanti rispettivamente per i punti $P(2; 6)$ e $Q(2; 0)$.
Tracciamo i grafici di $g(x)$ e delle due primitive, dove evidenziamo i punti assegnati.

- Attiviamo Wiris e immettiamo la funzione $g(x)$ (figura 1).
- Dal menu *Analisi* importiamo il modello dell'integrale, nel cui campo digitiamo $g(x)$ e a fianco la lettera c. Facciamo ciò per ottenere l'integrale indefinito (Wiris assegnerebbe il valore 0 alla costante indeterminata).

▼ Figura 1





▲ Figura 2

- Facciamo clic su *Calcola* in modo che appaia l'integrale indefinito di $g(x)$.
- Sostituiamo in esso le coordinate di P.
- Risolviamo l'equazione in c ottenuta.
- Sostituiamo il valore di c nell'integrale indefinito, individuando la primitiva passante per P.
- Operiamo similmente per trovare quella passante per Q.
- Con le istruzioni grafiche di Wiris realizziamo poi il grafico di figura 2.

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 17 esercitazioni in più

Esercitazioni

Per ognuno dei casi seguenti, con l'aiuto del computer, trova la primitiva $g(x)$ della funzione $f(x)$ che passi per il punto indicato. In un medesimo riferimento cartesiano traccia i grafici di $g(x)$, di $f(x)$ e di $f'(x)$, evidenziando alcune delle rispettive caratteristiche.

1 $f(x) = x^2 - 3x - 10, \quad P\left(2; -\dfrac{55}{3}\right).$ $[g(x) = 0,3333x^3 - 1,5x^2 - 10x + 5]$

2 $f(x) = \dfrac{2}{x+3}, \quad P(-2; 2).$ $[g(x) = 2\ln|x+3| + 2]$

3 $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}, \quad P(0; 1).$ $[g(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + 1)]$

LA TEORIA IN SINTESI
GLI INTEGRALI INDEFINITI

1. L'INTEGRALE INDEFINITO

- **Funzione primitiva**: $F(x)$ si dice primitiva di $f(x)$ nell'intervallo $[a; b]$ se $F(x)$ è derivabile in $[a; b]$ e $F'(x) = f(x)$.

  ESEMPIO: $F(x) = x$ è una primitiva di $f(x) = 1$ perché $D[x] = 1$.

  $$\int f(x)\,dx = F(x) + c \iff f(x) \underset{\text{derivata}}{\overset{\text{integrale}}{\rightleftarrows}} F(x) + c$$

  Se $f(x)$ ammette una primitiva $F(x)$, allora ammette infinite primitive del tipo $F(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

  Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora le funzioni $F(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$, sono tutte e sole le primitive di $f(x)$.

- **Integrale indefinito della funzione $f(x)$**: è l'insieme di tutte le primitive $F(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$. Si indica con $\int f(x)\,dx$. La funzione $f(x)$ è detta **funzione integranda** e x **variabile d'integrazione**.

  ESEMPIO: $\int 1\,dx = x + c$ perché $D[x + c] = 1$.

- **Condizione sufficiente di integrabilità**
  Se una funzione è continua in un intervallo, allora ammette primitive in tale intervallo.

- **Proprietà di linearità**
  Se f e g ammettono integrale indefinito, allora
  - $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ **prima proprietà**;
  - $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$ **seconda proprietà**.

  ESEMPIO: $\int (5x^4 + 4x^3)\,dx = \int 5x^4\,dx + \int 4x^3\,dx = x^5 + x^4 + c$; $\int 6e^x\,dx = 6\int e^x\,dx = 6e^x + c$.

2. GLI INTEGRALI INDEFINITI IMMEDIATI

Riportiamo nelle tabelle le primitive delle funzioni più usate.

Integrali immediati delle funzioni fondamentali	
$\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, con $\alpha \neq -1$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$
$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$
$\int e^x\,dx = e^x + c$	$\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c$
$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + c$
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$	$\int \dfrac{1}{1 + x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$

Integrali la cui primitiva è una funzione composta	
$\int [f(x)]^{\alpha} f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, con $\alpha \neq -1$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \operatorname{tg} f(x) + c$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$	$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}\,dx = -\operatorname{cotg} f(x) + c$
$\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} f(x) + c$
$\int f'(x)\,a^{f(x)}\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \operatorname{arctg} f(x) + c$
$\int f'(x)\operatorname{sen} f(x)\,dx = -\cos f(x) + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}\frac{f(x)}{\lvert a\rvert} + c$, con $a \neq 0$
$\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \operatorname{sen} f(x) + c$	$\int \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{f(x)}{a} + c$, con $a \neq 0$

ESEMPIO: $\int \cos x e^{\operatorname{sen} x}\,dx = e^{\operatorname{sen} x} + c$;

$$\int (5x+1)^3\,dx = \frac{1}{5}\int 5(5x+1)^3\,dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{(5x+1)^4}{4} + c = \frac{(5x+1)^4}{20} + c;$$

$$\int \frac{e^x}{\operatorname{sen}^2 e^x}\,dx = -\operatorname{cotg} e^x + c;$$

$$\int x^2\cos x^3\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\cos x^3\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen} x^3 + c;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4}{\sqrt{1-(4x)^2}}\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{arcsen} 4x + c.$$

3. L'INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Metodo di sostituzione

Per calcolare l'integrale $\int f(x)\,dx$:

- si pone $x = g(t)$, e quindi $t = g^{-1}(x)$, dove $g(t)$ è invertibile, con $g'(t)$ continua e diversa da 0;
- si calcola il differenziale dx, oppure dt;
- si sostituisce nell'integrale dato, in modo da ottenere un integrale nella variabile t;
- si calcola, se possibile, l'integrale rispetto a t;
- ritornando alla variabile x, si ha il risultato cercato.

ESEMPIO: Calcoliamo $\int (3x^2-4)\cdot 6x\,dx$.

- Poniamo: $t = 3x^2 - 4$.
- Calcoliamo il differenziale: $dt = 6x\,dx$.
- Sostituiamo nell'integrale dato: $\int t\,dt$.
- Calcoliamo l'integrale rispetto a t: $\int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c$.
- Sostituiamo $3x^2 - 4$ al posto di t nella soluzione:

$$\int (3x^2-4)\cdot 6x\,dx = \frac{(3x^2-4)^2}{2} + c.$$

4. L'INTEGRAZIONE PER PARTI

- **Formula di integrazione per parti**: $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$.

ESEMPIO: Calcoliamo $\int x \cdot \cos x\,dx$.
Scegliamo $g'(x) = \cos x$ e $f(x) = x$.

- $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$, quindi $g(x) = \operatorname{sen} x$.
- Calcoliamo $f'(x) = 1$.
- Applichiamo la formula: $\int x\cdot\cos x\,dx = x\cdot\operatorname{sen} x - \int 1\cdot(\operatorname{sen} x)\,dx = x\cdot\operatorname{sen} x + \cos x + c$.

ESEMPIO: $\int \ln x\,dx = \int 1 \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + c$.

5. L'INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

- **Primo caso**

Nell'integrale $\int \frac{N(x)}{D(x)}dx$ il grado del numeratore $N(x)$ è **minore** del grado del denominatore $D(x)$: ci si riconduce a uno dei modelli che seguono.

- **Il numeratore è la derivata del denominatore**: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$.
- **Il denominatore è di primo grado**: $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$.
- **Il denominatore è di secondo grado** (l'integrale è del tipo $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$) e:

a) $\boldsymbol{\Delta > 0}$, si trasforma la funzione integranda cercando i valori A e B che rendono vera l'identità:

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}\right), \text{ essendo } ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2);$$

b) $\boldsymbol{\Delta = 0}$, si trasforma la funzione integranda scrivendo:

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{px+q}{a(x-x_1)^2}, \text{ essendo } ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2;$$

c) $\boldsymbol{\Delta < 0}$, un integrale del tipo:

- $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ si trasforma in modo da utilizzare la formula:

$$\int \frac{f'(x)}{k^2+[f(x)]^2}dx = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{f(x)}{k} + c;$$

- $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$ si trasforma nella somma $r\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + s\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$,

dove gli integrali si risolvono con i metodi precedenti.

- **Il denominatore è di grado superiore al secondo**, occorre scomporlo in fattori irriducibili e riscrivere la frazione come somma di frazioni con denominatori di primo e di secondo grado.

- **Secondo caso**

Nell'integrale $\int \frac{N(x)}{D(x)}dx$ il grado del numeratore $N(x)$ è **maggiore o uguale** al grado del denominatore $D(x)$: si ritorna ai casi precedenti mediante la divisione $\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$, dove $R(x)$ è il resto della divisione e quindi ha grado minore di $D(x)$.

1. L'INTEGRALE INDEFINITO

Teoria a pag. 1938

Le primitive e l'integrale indefinito

1 **ESERCIZIO GUIDA**

Nella coppia di funzioni $y = x - x^2 - x^3$ e $y = 1 - 2x - 3x^2$, una delle due è una primitiva dell'altra. Determiniamo quale e scriviamo la relazione che lega le due funzioni mediante un integrale indefinito.

Calcoliamo la derivata delle due funzioni:

$$D[x - x^2 - x^3] = 1 - 2x - 3x^2,$$
$$D[1 - 2x - 3x^2] = -2 - 6x.$$

Osserviamo che la derivata della prima funzione è uguale alla seconda funzione: $y = x - x^2 - x^3$ è una primitiva di $y = 1 - 2x - 3x^2$. Scriviamo:

$$\int (1 - 2x - 3x^2)\,dx = x - x^2 - x^3 + c.$$

Nelle seguenti coppie di funzioni, una delle due funzioni è una primitiva dell'altra. Determina quale e scrivi, mediante un integrale indefinito, la relazione che lega le due funzioni.

2 $y = 3x^3 + x^2 - 3$; $\quad y = 9x^2 + 2x$.

3 $y = \sqrt{x^2 + 1}$; $\quad y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

4 $y = \operatorname{sen}^2 x + 2x + 3$; $\quad y = 2\operatorname{sen} x \cos x + 2$.

5 $y = 1 + \operatorname{tg}^2 x$; $\quad y = \operatorname{tg} x$.

6 $y = x^5 + x^4 - 2x^2 - 6x$; $\quad y = 5x^4 + 4x^3 - 4x - 6$.

7 $y = \dfrac{1}{x+1}$; $\quad y = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

8 $y = 2^x \ln 2$; $\quad y = 2^x$.

9 $y = -e^{-x}$; $\quad y = e^{-x}$.

10 $y = \operatorname{sen} x + \cos x$; $\quad y = \cos x - \operatorname{sen} x$.

11 $y = \cos^2 x$; $\quad y = -2\cos x \operatorname{sen} x$.

12 $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$; $\quad y = \ln(x^2 + 1)$.

13 $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; $\quad y = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

TEST

14 Data la funzione $f(x) = \dfrac{-3e^x}{(e^x+2)^2}$, la sua primitiva il cui grafico passa per il punto $(0; 1)$ è:

A $\dfrac{1}{e^x+2} + \dfrac{2}{3}$.

B $\dfrac{-3}{e^x+2} + 2$.

C $\dfrac{9}{(e^x+2)^2}$.

D $\dfrac{9}{(e^x+2)^2} - 1$.

E $\dfrac{3}{e^x+2}$.

15 Delle seguenti funzioni una è primitiva di $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{1+4x}$. Quale?

A $y = \operatorname{arctg} 2\sqrt{x}$

B $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 2\sqrt{x}$

C $y = \dfrac{1}{(1+4x)^2}$

D $y = \ln|1 + 4x|$

E $y = \sqrt{x}\ln|1 + 4x|$

16 Quale tra le seguenti funzioni ha per primitiva $y = \sqrt{2x^2 - 4x}$?

A $y = \dfrac{1}{2\sqrt{2x^2 - 4x}}$

B $y = \dfrac{1}{2x^2 - 4x}$

C $y = \dfrac{2(x-1)}{\sqrt{2x^2 - 4x}}$

D $y = \dfrac{4x - 4}{\sqrt{2x^2 - 4x}}$

E $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2 - 4x}}$

17 La funzione $F(x) = p\operatorname{sen} x + 2q\operatorname{sen}^3 x$ è una primitiva di $f(x) = 8\cos x - 6\cos^3 x$ se:

A $p = 1, q = 2$.

B $p = 2, q = -1$.

C $p = -2, q = 1$.

D $p = 2, q = 1$.

E non è possibile trovare i valori di p e q.

Sono date due funzioni, $f(x)$ e $F(x)$. Modifica $F(x)$ in modo che sia una primitiva di $f(x)$.

18 $f(x) = x^2$, $\quad F(x) = 3x^3 + 2$.

19 $f(x) = e^{-2x}$, $\quad F(x) = e^{-2x}$.

20 $f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$, $\quad F(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

21 $f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,2x$, $\quad F(x) = -\dfrac{1}{3}\mathrm{sen}^2 x + 4$.

22 $f(x) = \dfrac{-3x}{x^2+1}$, $\quad F(x) = \ln(x^2+1)$.

COMPLETA

23 $\displaystyle\int \ldots\,\mathrm{sen}\,5x^2\,dx = \cos 5x^2 + c$

24 $\displaystyle\int \frac{\ldots}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx = \sqrt{x^2-2x} + c$

25 $\displaystyle\int \frac{2}{e^x}\,dx = \frac{\ldots}{e^x} + c$

26 $\displaystyle\int \frac{1}{\ldots\ln x}\,dx = \ln|\ln x| + c$

27 $\displaystyle\int \frac{\ldots}{\cos^2(x^2-x)}\,dx = \mathrm{tg}(\ldots) + c$

28 $\displaystyle\int \ldots\ln^3 x\,dx = \ln^4 x + c$

29 $\displaystyle\int \frac{1}{1+x}\ldots\,dx = \mathrm{arctg}\,\sqrt{x} + c$

30 $\displaystyle\int \ldots(x^3+3x)^5\,dx = (x^3+3x)^6 + c$

31 VERO O FALSO?

a) Ogni funzione continua ammette primitive. V F

b) Ogni funzione derivabile è integrabile. V F

c) Ogni funzione integrabile è derivabile. V F

d) Se una funzione è integrabile e positiva, tutte le sue primitive sono crescenti. V F

32 VERO O FALSO?

a) La derivata di $\int(x^2+4x)\,dx$ è $2x+4$. V F

b) $\displaystyle\int(4x^3+7)\,dx = \frac{x^4}{4} + 7x + c$. V F

c) Una primitiva di $\int x\,dx$ è $\dfrac{x^3}{6} + 1$. V F

d) La derivata di $\int(\ln x + 4)\,dx$ è $\ln x$. V F

e) Una primitiva di $\mathrm{sen}\,x - \cos x$ è $-\cos x - \mathrm{sen}\,x - 6$. V F

33 VERO O FALSO?

a) $\mathrm{D}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x) + c$ V F

b) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{1}{x}\int x\,f(x)\,dx$ V F

c) $\displaystyle\int[3f(x) - g(x)]dx = 3\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$ V F

d) $\displaystyle\int k\,dx = kx$ V F

e) $\displaystyle\int f(x)\cdot g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$ V F

f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{2}\,dx = x + c$ V F

2. GLI INTEGRALI INDEFINITI IMMEDIATI

▶ Teoria a pag. 1941

L'integrale delle potenze di x

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \text{con } \alpha \neq -1; \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c.$$

34 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo gli integrali:

a) $\int\left(x^4 + 2x - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^2} + 3\right)dx$; b) $\int \frac{x^2 - 5\sqrt[3]{x} + 4}{x^3}\,dx$.

a) Applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int\left(x^4 + 2x - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^2} + 3\right)dx = \int x^4 dx + 2\int x\,dx - \int \sqrt[3]{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx + 3\int dx.$$

Scriviamo il reciproco come potenza di x a esponente negativo e la radice come potenza di x a esponente razionale:

$$\int x^4 dx + 2\int x\,dx - \int x^{\frac{2}{3}}\,dx + \int x^{-2} dx + 3\int dx =$$

Applichiamo la formula per l'integrazione delle potenze di x:

$$= \frac{x^{4+1}}{4+1} + 2\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 3x + c = \frac{x^5}{5} + x^2 - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - x^{-1} + 3x + c =$$

$$= \frac{x^5}{5} + x^2 - \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x} + 3x + c.$$

b) Poiché il denominatore della frazione è un monomio, scomponiamo la frazione in frazioni più semplici e applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int \frac{x^2 - 5\sqrt[3]{x} + 4}{x^3}\,dx = \int \frac{x^2}{x^3}\,dx - 5\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^3}\,dx + 4\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - 5\int x^{-\frac{8}{3}}\,dx + 4\int x^{-3} dx =$$

$$= \ln|x| - 5\frac{x^{-\frac{8}{3}+1}}{-\frac{8}{3}+1} + 4\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = \ln|x| + 3x^{-\frac{5}{3}} - 2x^{-2} + c =$$

$$= \ln|x| + \frac{3}{x\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^2} + c.$$

Calcola i seguenti integrali.

35 $\int 6\,dx$; $\int 2x^9\,dx$; $\int x^3\,dx$. $\left[6x + c;\ \frac{x^{10}}{5} + c;\ \frac{x^4}{4} + c\right]$

36 $\int \sqrt{x}\,dx$; $\int \sqrt[4]{x}\,dx$; $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx$. $\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c;\ \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + c;\ \frac{5}{7}\sqrt[5]{x^7} + c\right]$

37 $\int \frac{5}{4}\sqrt[4]{x}\,dx$; $\int \frac{x^{-3}}{3}\,dx$; $\int x^8\,dx$. $\left[x\sqrt[4]{x} + c;\ -\frac{1}{6x^2} + c;\ \frac{x^9}{9} + c\right]$

38 $\int \frac{1}{2x^3}\,dx$; $\int \frac{4}{x}\,dx$; $\int -\frac{2}{3}x^6\,dx$. $\left[-\frac{1}{4x^2} + c;\ 4\ln|x| + c;\ -\frac{2}{21}x^7 + c\right]$

39 $\int \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$; $\int 8\sqrt{x}\,dx$; $\int -\frac{1}{x^4}\,dx$. $\left[9\sqrt[3]{x} + c;\ \frac{16}{3}x\sqrt{x} + c;\ \frac{1}{3x^3} + c\right]$

40 $\int x^{-2}\,dx$; $\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx$; $\int \frac{7}{2x^5}\,dx$. $\left[-\frac{1}{x} + c;\ \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c;\ \frac{-7}{8x^4} + c\right]$

41 $\int (x-5)\,dx$; $\int \frac{3\sqrt[3]{x}}{x}\,dx$; $\int \frac{1}{4\sqrt{x}}\,dx$. $\left[\frac{x^2}{2} - 5x + c;\ 9\sqrt[3]{x} + c;\ \frac{\sqrt{x}}{2} + c\right]$

42 $\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx$; $\int \sqrt{2\sqrt{x}}\,dx$; $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}}\,dx$. $\left[\frac{2}{7}\sqrt{x^7} + c;\ \frac{4}{5}\sqrt{2}\ \sqrt[4]{x^5} + c;\ \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c\right]$

43 $\int(6x^2 - 2x + 3)\,dx$ $\quad [2x^3 - x^2 + 3x + c]$

44 $\int(-8x^2 + 12x - 1)\,dx$ $\quad \left[-\frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - x + c\right]$

45 $\int(x^2 + x + 10)\,dx$ $\quad \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 10x + c\right]$

46 $\int(x^3 - 3x^2 - 8)\,dx$ $\quad \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - 8x + c\right]$

47 $\int(4x^4 - 2x^2 + 5)\,dx$ $\quad \left[\frac{4x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + 5x + c\right]$

48 $\int\left(\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2}\right)dx$ $\quad \left[-\frac{1}{2x^2} - \frac{3}{x} + c\right]$

49 $\int\left(\frac{4}{x^4} - \frac{6}{x^2}\right)dx$ $\quad \left[-\frac{4}{3x^3} + \frac{6}{x} + c\right]$

50 $\int\left(\frac{5}{x^4} - \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^2}\right)dx$ $\quad \left[-\frac{5}{3x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} + c\right]$

51 $\int\left(x + \frac{1}{x} + 1\right)dx$ $\quad \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x| + x + c\right]$

52 $\int\left(3x^2 - 2x + \frac{3}{x}\right)dx$ $\quad [x^3 - x^2 + 3\ln|x| + c]$

53 $\int\left(\frac{2}{x^3} - x^2 - \frac{1}{x}\right)dx$ $\quad \left[-\frac{1}{x^2} - \frac{x^3}{3} - \ln|x| + c\right]$

54 $\int\left(\frac{1}{x^2} - \sqrt{x} + \frac{6}{x}\right)dx$ $\quad \left[-\frac{1}{x} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 6\ln|x| + c\right]$

55 $\int(3\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3})\,dx$ $\quad \left[2x\cdot\sqrt{x} + \frac{4}{7}x\cdot\sqrt[4]{x^3} + c\right]$

56 $\int(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x})\,dx$ $\quad \left[\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x} + \frac{3}{4}x\cdot\sqrt[3]{x} - \frac{4}{5}x\cdot\sqrt[4]{x} + c\right]$

57 $\int(2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - x)\,dx$ $\quad \left[\frac{4}{3}x\cdot\sqrt{x} + \frac{3}{4}x\cdot\sqrt[3]{x} - \frac{x^2}{2} + c\right]$

58 $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ $\quad \left[4\sqrt{x} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + c\right]$

59 $\int\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} - \frac{4}{\sqrt[5]{x}}\right)dx$ $\quad \left[\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - 5\sqrt[5]{x^4} + c\right]$

60 $\int\left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$ $\quad \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + c\right]$

61 $\int\frac{(2\sqrt{x} - 1)^2}{x^2}\,dx$ $\quad \left[4\ln x - \frac{1}{x} + \frac{8}{\sqrt{x}} + c\right]$

62 $\int\left(x + \frac{5x^2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}\right)dx$ $\quad \left[\frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x^5} + \frac{1}{x^2} + c\right]$

63 $\int(\sqrt{x} - 2)^2\,dx$ $\quad \left[\frac{x^2}{2} - \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + 4x + c\right]$

64 $\int\frac{2x - 1}{x^2}\,dx$ $\quad \left[2\ln|x| + \frac{1}{x} + c\right]$

65 $\int\frac{x^3 + \sqrt{x} - 2}{6x^3}\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{6}x - \frac{1}{9x\sqrt{x}} + \frac{1}{6x^2} + c\right]$

66 $\int\frac{3x^2 + 2 - 4x}{3x}\,dx$ $\quad \left[\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{4}{3}x + c\right]$

67 $\int\frac{x^2 + 4x + 1}{2x}\,dx$ $\quad \left[\frac{x^2}{4} + 2x + \frac{1}{2}\ln|x| + c\right]$

68 $\int\frac{x^2 + 2x}{x^2}\,dx$ $\quad [x + 2\ln|x| + c]$

69 $\int\frac{x^4 + 2x^2 - 1}{3x}\,dx$ $\quad \left[\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}\ln|x| + c\right]$

70 $\int\frac{x^4 + x^3 - 2x - 4}{x^3}\,dx$ $\quad \left[\frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + c\right]$

71 $\int\frac{3 - x^2}{x^4}\,dx$ $\quad \left[-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + c\right]$

72 $\int\frac{1 + x + 2x^2}{\sqrt{x}}\,dx$ $\quad \left[2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} + c\right]$

73 $\int\frac{(x - 1)(x + 2)}{x}\,dx$ $\quad \left[\frac{x^2}{2} + x - 2\ln|x| + c\right]$

74 $\int\frac{x^2 - 9}{x + 3}\,dx$ $\quad \left[\frac{x^2}{2} - 3x + c\right]$

75 $\int\frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{x - 1}\,dx$ $\quad \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + c\right]$

L'integrale della funzione esponenziale

$$\int e^x\,dx = e^x + c; \qquad \int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\cdot a^x + c.$$

76 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo gli integrali:

a) $\int(2e^x + 3\cdot 5^x)\,dx$; b) $\int\frac{10^{x-1}}{5^x}\,dx$.

a) Applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int(2e^x + 3\cdot 5^x)\,dx = 2\int e^x\,dx + 3\int 5^x\,dx.$$

Applichiamo le formule degli integrali delle funzioni esponenziali:

$$2\int e^x dx + 3\int 5^x dx = 2e^x + 3\frac{1}{\ln 5}\cdot 5^x + c = 2e^x + \frac{3}{\ln 5}\cdot 5^x + c.$$

b) In questo caso occorre semplificare la frazione integranda in modo da ricondurci a un unico esponenziale:

$$\int\frac{10^{x-1}}{5^x}dx = \int\frac{10^x}{5^x}\cdot 10^{-1}dx = \int\left(\frac{10}{5}\right)^x\cdot\frac{1}{10}dx = \frac{1}{10}\int 2^x dx = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{\ln 2}\cdot 2^x + c.$$

Calcola i seguenti integrali.

77 $\int(4e^x + 5\cdot 3^x)\,dx$ $\left[4e^x + \frac{5}{\ln 3}\cdot 3^x + c\right]$

78 $\int(2^x+2e^x+2\cdot 4^x)\,dx$ $\left[\frac{2^x}{\ln 2}+2e^x+\frac{1}{\ln 2}\cdot 4^x+c\right]$

79 $\int(x + 7\cdot 7^x)\,dx$ $\left[\frac{x^2}{2} + \frac{7}{\ln 7}\cdot 7^x + c\right]$

80 $\int\left(5e^x + \frac{1}{x}\right)dx$ $[5e^x + \ln|x| + c]$

81 $\int(2 - e^x - 5^x + \sqrt{x})\,dx$ $\left[2x - e^x - \frac{5^x}{\ln 5} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + c\right]$

82 $\int\frac{9^x}{7^x}dx$ $\left[\frac{1}{\ln 9 - \ln 7}\cdot\left(\frac{9}{7}\right)^x + c\right]$

83 $\int e^x(1 - 2xe^{-x})\,dx$ $[e^x - x^2 + c]$

84 $\int(2 - 3^x)^2\,dx$ $\left[4x - \frac{4}{\ln 3}3^x + \frac{1}{2\ln 3}3^{2x} + c\right]$

85 $\int\frac{2\cdot 3^x + 3\cdot 2^x}{6^x}dx$ $\left[-\frac{2}{\ln 2}2^{-x} - \frac{3}{\ln 3}3^{-x} + c\right]$

86 $\int 8^x\cdot 2^{-3x+4}dx$ $[16x + c]$

87 $\int(2^{2x} + 3^x)(2^{2x} - 3^x)\,dx$ $\left[\frac{1}{4\ln 2}2^{4x} - \frac{1}{2\ln 3}3^{2x} + c\right]$

88 $\int(2^{2x}\cdot 3^x + \sqrt{x})\,dx$ $\left[\frac{1}{\ln 12}\cdot 12^x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c\right]$

89 $\int 4^{x-1}\cdot 2^{-x+2}dx$ $\left[\frac{1}{\ln 2}2^x + c\right]$

90 $\int\left(\frac{2^{3x-1}}{3^{x-2}} + \frac{1}{3^x}\right)dx$ $\left[\frac{9}{2(\ln 8 - \ln 3)}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^x - \frac{1}{3^x\cdot\ln 3} + c\right]$

91 $\int(2^{2x} - 1)^2\cdot 4^x\,dx$ $\left[\frac{2^{6x}}{6\ln 2} - \frac{2^{4x}}{2\ln 2} + \frac{2^{2x}}{2\ln 2} + c\right]$

L'integrale delle funzioni seno e coseno

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c;\quad \int\cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c;\quad \int\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}dx = -\operatorname{cotg} x + c;\quad \int\frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + c.$$

92 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\int\left(1 + 2\operatorname{sen} x - \cos x - \frac{4}{\operatorname{sen}^2 x}\right)dx.$

Applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int\left(1 + 2\operatorname{sen} x - \cos x - \frac{4}{\operatorname{sen}^2 x}\right)dx = \int 1dx + 2\int\operatorname{sen} x\,dx - \int\cos x\,dx - 4\int\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}dx =$$

Applichiamo le formule degli integrali delle funzioni goniometriche:

$$= x + 2\cdot(-\cos x) - \operatorname{sen} x - 4(-\operatorname{cotg} x) + c = x - 2\cos x - \operatorname{sen} x + 4\operatorname{cotg} x + c.$$

Calcola i seguenti integrali.

93 $\int\left(\frac{\operatorname{sen} x}{3}-5\cos x\right)dx$ $\left[-\frac{\cos x}{3}-5\operatorname{sen} x+c\right]$

94 $\int\left(-\frac{2}{x^3}+\frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{3}\right)dx$ $\left[\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x+\operatorname{sen} x}{3}+c\right]$

95 $\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x}+3\operatorname{sen} x\right)dx$ $[\operatorname{tg} x+2\operatorname{cotg} x-3\cos x+c]$

96 $\int\left(\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x}+\frac{1}{x}-\operatorname{sen} x\right)dx$ $[-2\operatorname{cotg} x+\ln|x|+\cos x+c]$

97 $\int\frac{-2\operatorname{sen} 2x}{\cos x}dx$ $[4\cos x+c]$

98 $\int\frac{2\operatorname{sen}^2 x-4}{\operatorname{sen}^2 x}dx$ $[2x+4\operatorname{cotg} x+c]$

99 $\int\frac{5\operatorname{sen} x+2\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}dx$ $[5x+4\operatorname{sen} x+c]$

100 $\int\operatorname{tg}^2 x\,dx$ $[\operatorname{tg} x-x+c]$

101 $\int\frac{\cos 2x}{4\cos^2 x}dx$ $\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\operatorname{tg} x+c\right]$

102 $\int\frac{1-8\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$ $[\operatorname{tg} x-8\operatorname{sen} x+c]$

103 $\int(2\operatorname{cotg}^2 x-x)\,dx$ $\left[-2\operatorname{cotg} x-2x-\frac{x^2}{2}+c\right]$

104 $\int\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 2x}dx$ $\left[-\frac{1}{2\operatorname{sen} 2x}+c\right]$

105 $\int\frac{1}{\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x}dx$ $[\operatorname{tg} x-\operatorname{cotg} x+c]$

L'integrale delle funzioni le cui primitive sono le funzioni goniometriche inverse

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\operatorname{arcsen} x+c=-\arccos x+c;\qquad\int\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg} x+c=-\operatorname{arccotg} x+c.$$

106 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo gli integrali:

a) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{5}{1+x^2}\right)dx$; b) $\int\frac{6x^2}{1+x^2}dx$.

---

a) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{5}{1+x^2}\right)dx=2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+5\int\frac{1}{1+x^2}dx.$

Applichiamo le formule degli integrali delle funzioni goniometriche inverse:

$$2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+5\int\frac{1}{1+x^2}dx=2\operatorname{arcsen} x+5\operatorname{arctg} x+c.$$

b) $\int\frac{6x^2}{1+x^2}dx=6\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx.$

Ora possiamo spezzare la frazione integranda nella somma di due frazioni di cui l'integrale è noto:

$$6\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=6\int\frac{x^2+1}{1+x^2}dx-6\int\frac{1}{1+x^2}dx=6\int dx-6\operatorname{arctg} x+c=6(x-\operatorname{arctg} x)+c.$$

Calcola i seguenti integrali.

107 $\int\left(\frac{12}{1+x^2}-\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$ $[12\,\mathrm{arctg}\,x+4\arccos x+c]$

108 $\int\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$ $[x+\ln|x|+\mathrm{arctg}\,x+c]$

109 $\int\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ $[2\,\mathrm{arcsen}\,x+2\sqrt{x}+c]$

110 $\int\left(2^x-\frac{14}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$ $\left[\frac{2^x}{\ln 2}+14\arccos x+c\right]$

111 $\int\frac{-x^2}{1+x^2}dx$ $[-x+\mathrm{arctg}\,x+c]$

112 $\int\left(\frac{1}{4+4x^2}+\frac{2}{1+x^2}\right)dx$ $\left[\frac{9}{4}\mathrm{arctg}\,x+c\right]$

113 $\int\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\right)dx$ $[2\,\mathrm{arcsen}\,x+c]$

114 $\int\frac{1+2x^2}{1+x^2}dx$ $[2x-\mathrm{arctg}\,x+c]$

115 $\int\frac{4x^2-1}{2x^2+2}dx$ $\left[2x-\frac{5}{2}\mathrm{arctg}\,x+c\right]$

116 $\int\frac{x^4}{4+4x^2}dx$ $\left[-\frac{1}{4}x+\frac{x^3}{12}+\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,x+c\right]$

L'integrale delle funzioni la cui primitiva è una funzione composta

$$\int[f(x)]^\alpha f'(x)\,dx=\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,\ \text{con } \alpha\neq-1.$$

117 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\int 3x^2(x^3-2)^4dx$.

Osserviamo che $D[x^3-2]=3x^2$.

Possiamo applicare la formula $\int[f(x)]^\alpha f'(x)\,dx=\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$, ponendo $f(x)=x^3-2$ e $\alpha=4$:

$$\int(x^3-2)^4\cdot 3x^2dx=\frac{(x^3-2)^{4+1}}{4+1}+c=\frac{(x^3-2)^5}{5}+c.$$

Calcola i seguenti integrali.

118 $\int 2x(x^2-1)^3dx$ $\left[\frac{(x^2-1)^4}{4}+c\right]$

119 $\int(3x-2)^4dx$ $\left[\frac{(3x-2)^5}{15}+c\right]$

120 $\int 14(7x-5)^3dx$ $\left[\frac{(7x-5)^4}{2}+c\right]$

121 $\int x(4-3x^2)^5dx$ $\left[-\frac{(4-3x^2)^6}{36}+c\right]$

122 $\int(x^2+2x-1)^5(x+1)\,dx$ $\left[\frac{(x^2+2x-1)^6}{12}+c\right]$

123 $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ $\left[\frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3}+c\right]$

124 $\int\sqrt{4x+1}\,dx$ $\left[\frac{\sqrt{(4x+1)^3}}{6}+c\right]$

125 $\int e^{2x}\sqrt{5+e^{2x}}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\sqrt{(5+e^{2x})^3}+c\right]$

126 $\int\frac{x^2+1}{(x^3+3x)^3}dx$ $\left[-\frac{1}{6(x^3+3x)^2}+c\right]$

127 $\int\frac{3x}{(x^2+1)^3}dx$ $\left[-\frac{3}{4(x^2+1)^2}+c\right]$

128 $\int 6\cos x\,\mathrm{sen}^2x\,dx$ $[2\,\mathrm{sen}^3x+c]$

129 $\int\cos^2x\,\mathrm{sen}\,x$ $\left[-\frac{\cos^3x}{3}+c\right]$

130 $\int\frac{\ln^3x}{x}dx$ $\left[\frac{\ln^4x}{4}+c\right]$

131 $\int\frac{4x^3}{\sqrt[3]{(x^4+1)^2}}dx$ $[3\sqrt[3]{x^4+1}+c]$

132 $\int\frac{\cos 3x}{2\sqrt{\mathrm{sen}\,3x}}dx$ $\left[\frac{1}{3}\sqrt{\mathrm{sen}\,3x}+c\right]$

133 $\int\frac{6x+\mathrm{arcsen}^4x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\left[-6\sqrt{1-x^2}+\frac{\mathrm{arcsen}^5x}{5}+c\right]$

134 $\int\frac{x^2+\ln^2x}{x}dx$ $\left[\frac{x^2}{2}+\frac{\ln^3x}{3}+c\right]$

135 $\int\frac{\mathrm{sen}\,x-\mathrm{sen}^2x}{\cos^4x}dx$ $\left[\frac{1}{3\cos^3x}-\frac{\mathrm{tg}^3x}{3}+c\right]$

136 $\int \frac{8\cos x + \text{sen}^3 x}{\text{sen}^5 x}dx$ $\left[-\frac{2}{\text{sen}^4 x} - \text{cotg}\, x + c\right]$

137 $\int \frac{\text{arctg}\, x + 1}{1 + x^2}dx$ $\left[\frac{1}{2}\text{arctg}^2 x + \text{arctg}\, x + c\right]$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c.$$

138 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\int \frac{12x}{2x^2+1}dx$.

Osserviamo che il numeratore è un multiplo della derivata del denominatore:

$$D[2x^2+1] = 4x.$$

Applichiamo la seconda proprietà di linearità e la regola $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$:

$$\int \frac{12x}{2x^2+1}dx = 3\int \frac{4x}{2x^2+1}dx = 3\ln(2x^2+1) + c.$$

Calcola i seguenti integrali.

139 $\int \frac{1}{2x-5}dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln|2x-5| + c\right]$

140 $\int \frac{x^2}{x^3+2}dx$ $\left[\frac{1}{3}\ln|x^3+2| + c\right]$

141 $\int \frac{8x^3}{x^4+1}dx$ $[2\ln(x^4+1) + c]$

142 $\int \frac{x+1}{x^2+2x-3}dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln|x^2+2x-3| + c\right]$

143 $\int \frac{3x^2+4x+1}{x^3+2x^2+x}dx$ $[\ln|x^3+2x^2+x| + c]$

144 $\int \frac{\text{sen}\, x}{\cos x + 2}dx$ $[-\ln(\cos x + 2) + c]$

145 $\int \frac{2}{x\ln x}dx$ $[2\ln|\ln x| + c]$

146 $\int \frac{e^x}{4e^x+1}dx$ $\left[\frac{\ln(4e^x+1)}{4} + c\right]$

147 $\int \frac{\text{tg}\, x}{1 + \ln\cos x}dx$ $[-\ln|1 + \ln(\cos x)| + c]$

148 $\int \frac{7x + \text{arctg}^3 x}{1+x^2}dx$ $\left[\frac{7}{2}\ln(1+x^2) + \frac{\text{arctg}^4 x}{4} + c\right]$

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c; \qquad \int f'(x)a^{f(x)}dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c.$$

149 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\int e^{x^2-x}(4x-2)\,dx$.

Raccogliamo 2 e applichiamo la seconda proprietà di linearità:

$$\int e^{x^2-x}(4x-2)\,dx = 2\int e^{x^2-x}(2x-1)\,dx.$$

Applichiamo la regola $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$, essendo $D[x^2-x] = 2x-1$:

$$2\int e^{x^2-x}(2x-1)\,dx = 2e^{x^2-x} + c.$$

Calcola i seguenti integrali.

150 $\int (e^{-x} + 2x)\,dx$ $[-e^{-x} + x^2 + c]$

151 $\int e^{3x+1}dx$ $\left[\frac{1}{3}e^{3x+1} + c\right]$

152 $\int e^{x^2}\cdot x\,dx$ $\left[\frac{1}{2}e^{x^2} + c\right]$

153 $\int e^{\cos x}\,\text{sen}\, x\,dx$ $[-e^{\cos x} + c]$

154 $\int e^{x\,\text{sen}\, x}(\text{sen}\, x + x\cos x)\,dx$ $[e^{x\,\text{sen}\, x} + c]$

155 $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ $\left[-e^{\frac{1}{x}} + c\right]$

156 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ $\quad [2e^{\sqrt{x}} + c]$

157 $\int \frac{3^{\ln x}}{x}\,dx$ $\quad \left[\frac{3^{\ln x}}{\ln 3} + c\right]$

158 $\int e^x 5^{2e^x}\,dx$ $\quad \left[\frac{5^{2e^x}}{2\ln 5} + c\right]$

159 $\int 2^{x^3 - x^2}(6x^2 - 4x)\,dx$ $\quad \left[\frac{2^{x^3 - x^2 + 1}}{\ln 2} + c\right]$

$\int f'(x)\,\mathrm{sen}\,f(x)\,dx = -\cos f(x) + c;$ $\quad \int f'(x)\cos f(x)\,dx = \mathrm{sen}\,f(x) + c;$

$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \mathrm{tg}\,f(x) + c;$ $\quad \int \frac{f'(x)}{\mathrm{sen}^2 f(x)}\,dx = -\mathrm{cotg}\,f(x) + c.$

160 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\int \frac{\mathrm{sen}\ln x}{x}\,dx$.

Scriviamo l'integrale nella forma:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{sen}\ln x\,dx.$$

Il fattore $\frac{1}{x}$ è la derivata dell'argomento del seno, cioè di $\ln x$.

Applichiamo la regola $\int f'(x)\,\mathrm{sen}\,f(x)\,dx = -\cos f(x) + c$:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{sen}\ln x\,dx = -\cos\ln x + c.$$

Calcola i seguenti integrali.

161 $\int \mathrm{sen}\,4x\,dx$ $\quad \left[-\frac{\cos 4x}{4} + c\right]$

162 $\int \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)dx$ $\quad \left[\mathrm{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + c\right]$

163 $\int (\cos 4x - \mathrm{sen}\,2x)\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{4}\mathrm{sen}\,4x + \frac{1}{2}\cos 2x + c\right]$

164 $\int x\cos x^2\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,x^2 + c\right]$

165 $\int x^2\,\mathrm{sen}\,(x^3 - 1)\,dx$ $\quad \left[-\frac{1}{3}\cos(x^3 - 1) + c\right]$

166 $\int \frac{\cos\ln x}{x}\,dx$ $\quad [\mathrm{sen}\ln x + c]$

167 $\int \frac{\mathrm{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ $\quad [-2\cos\sqrt{x} + c]$

168 $\int (x + 2)\cos(x^2 + 4x)\,dx$ $\quad \left[\frac{\mathrm{sen}\,(x^2 + 4x)}{2} + c\right]$

169 $\int \frac{x + 2}{\cos^2(x^2 + 4x)}\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,(x^2 + 4x) + c\right]$

170 $\int \frac{4x + 1}{\mathrm{sen}^2(2x^2 + x + 3)}\,dx$ $\quad [-\mathrm{cotg}\,(2x^2 + x + 3) + c]$

171 $\int \frac{1}{x\cos^2(\ln x)}\,dx$ $\quad [\mathrm{tg}\,(\ln x) + c]$

172 $\int \frac{\mathrm{sen}\,e^{-x}}{e^x}\,dx$ $\quad [\cos e^{-x} + c]$

173 $\int \sec^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)dx$ $\quad \left[\frac{\mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}{2} + c\right]$

174 $\int \mathrm{sen}^2 x\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\mathrm{sen}\,2x + c\right]$

175 $\int \frac{x}{\cos^2 4x^2}\,dx$ $\quad \left[\frac{\mathrm{tg}\,4x^2}{8} + c\right]$

176 $\int \frac{1 + \mathrm{sen}^3 x}{\mathrm{sen}^2 2x}\,dx$ $\quad \left[-\frac{\mathrm{cotg}\,2x}{2} + \frac{1}{4\cos x} + c\right]$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}dx = \text{arcsen}\, f(x) + c; \qquad \int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = \text{arctg}\, f(x) + c.$$

177 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\int \frac{1}{x + x\ln^2 x}dx$.

Raccogliendo x al denominatore, l'integrale diventa: $\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\ln^2 x}dx$.

Essendo $D[\ln x] = \frac{1}{x}$, applichiamo la regola $\int f'(x)\frac{1}{1+f^2(x)}dx = \text{arctg} f(x) + c$:

$$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\ln^2 x}dx = \text{arctg} \ln x + c.$$

Calcola i seguenti integrali di funzioni composte la cui primitiva è una funzione goniometrica inversa.

178 $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ $[\text{arctg}\, e^x + c]$

179 $\int \frac{x}{1+x^4}dx$ $\left[\frac{1}{2}\text{arctg}\, x^2 + c\right]$

180 $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$ $[\text{arcsen}\, e^x + c]$

181 $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}dx$ $[2\,\text{arctg}\sqrt{x} + c]$

182 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$ $\left[\frac{\text{arcsen}\, x^3}{3} + c\right]$

183 $\int \frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}dx$ $\left[\frac{1}{5}\text{arcsen}\frac{5x}{3} + c\right]$

184 $\int \frac{2}{9+4x^2}dx$ $\left[\frac{1}{3}\text{arctg}\frac{2x}{3} + c\right]$

185 $\int \frac{\text{sen}\, x}{4+\cos^2 x}dx$ $\left[-\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{\cos x}{2} + c\right]$

ESERCIZI VARI Gli integrali indefiniti immediati

TEST

186 Affinché $\int \frac{dx}{x^2+8} = \frac{\sqrt{2}}{4}\text{arctg}[f(x)] + c$ occorre che $f(x)$ sia uguale a:

A $\frac{\sqrt{2}}{8}x$.

B $\frac{x}{2\sqrt{2}}$.

C $\frac{4}{\sqrt{2}\,x}$.

D $\frac{\sqrt{2}\,x}{2}$.

E $\frac{2}{\sqrt{2}\,x}$.

187 L'uguaglianza $\int \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}dx = \sqrt{f(x)} + c$ è generalmente falsa. Tuttavia vale per *una* delle seguenti funzioni. Quale?

A $f(x) = \text{sen}\, x$

B $f(x) = 3x$

C $f(x) = x + 28$

D $f(x) = e^x$

E $f(x) = x^2$

188 L'integrale $\int x^{2\alpha-3}dx$ è uguale a:

A $\frac{1}{2\alpha-3}x^{2\alpha-4} + c$, con $\alpha \neq \frac{3}{2}$.

B $\frac{1}{2(\alpha-1)}x^{2\alpha-2} + c$, con $\alpha \neq 1$.

C $\frac{1}{2\alpha-4}x^{2\alpha-4} + c$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

D $\frac{1}{2(\alpha+1)}x^{2\alpha-3} + c$, con $\alpha \neq -1$.

E $\frac{1}{2\alpha-4}x^{2\alpha-3} + c$, con $\alpha \neq 2$.

189 Considera $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^4}$. Fra le seguenti funzioni, *una sola* è una sua primitiva. Quale?

A $\frac{7}{3}x^{-\frac{7}{3}}$

B $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{x^{\frac{7}{3}}} + 5$

C $x^{-\frac{7}{3}} + c$

D $-\frac{3}{7}x^{\frac{3}{7}} + 2$

E $-\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{x^{\frac{7}{3}}} - \frac{7}{3}$

190 Sia $f(x)$ una funzione continua e derivabile, tale che $f'(x) = 3x$, allora si può scrivere:

A $\int x\, f(x)\, dx = f^2(x) + c$.

B $\int 3x\, f^2(x)\, dx = f^3(x) + c$.

C $\int 2x\, f(x)\, dx = 3f^2(x) + c$.

D $\int x\, f^2(x)\, dx = \frac{1}{9} f^3(x) + c$.

E $\int 6x\, f^5(x)\, dx = f^6(x) + c$.

191 Che valori devono assumere gli esponenti reali a e b affinché sia vera l'uguaglianza

$$\int \frac{3 + 2x^a - 6x^b}{x^2}\, dx = -\frac{3}{x} + x^2 - 2x^3 + c?$$

A $a = 4 \wedge b = 5$

B $a = 3 \wedge b = 5$

C $a = 2 \wedge b = 4$

D $a = 3 \wedge b = 4$

E Nessuna delle precedenti.

192 **ASSOCIA** alle seguenti funzioni $f(x)$ le corrispondenti primitive $F(x)$.

1) $f(x) = \frac{4x-6}{x^2-3x}$. 2) $f(x) = (2x-3)(x^2-3x)^2$. 3) $f(x) = \frac{4x-6}{(x^2-3x)^2}$.

a) $F(x) = \frac{1}{3}(x^2-3x)^3 + c$. b) $F(x) = \ln(x^2-3x)^2 + c$. c) $F(x) = \frac{2}{3x - x^2} + c$.

Calcola i seguenti integrali.

193 $\int \left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^2 dx$ $\left[\frac{4}{5}x^5 - \frac{1}{x} - 2x^2 + c\right]$

194 $\int (4x-1)\left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx$ $\left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{15}{4}x^2 - 2x + c\right]$

195 $\int \left(x + \frac{2}{x^2}\right)^2 dx$ $\left[\frac{x^3}{3} - \frac{4}{3x^3} + 4\ln|x| + c\right]$

196 $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 (x+1)\, dx$ $\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + \ln|x| + c\right]$

197 $\int \frac{(1+\sqrt{x})(1-x)}{2x} dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}x + \sqrt{x} - \frac{1}{3}x\sqrt{x} + c\right]$

198 $\int \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x - \cos x} dx$ $[\ln|\operatorname{sen} x - \cos x| + c]$

199 $\int \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}} dx$ $[\operatorname{arcsen} \ln x + c]$

200 $\int \frac{\cos\sqrt{2x}}{\sqrt{x}} dx$ $[\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2x} + c]$

201 $\int \frac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}} dx$ $[e^{\sqrt{2x+1}} + c]$

202 $\int \frac{\cos x}{1 + 4\operatorname{sen}^2 x} dx$ $\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{sen} x) + c\right]$

203 $\int \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} dx$ $[\ln|\operatorname{arctg} x| + c]$

204 $\int \frac{e^{x+1}}{3 + e^x} dx$ $[e \cdot \ln(3 + e^x) + c]$

205 $\int \frac{1-x^2}{1+x^2} dx$ $[2\operatorname{arctg} x - x + c]$

206 $\int \frac{9x-3}{x^2+1} dx$ $\left[\frac{9}{2}\ln(x^2+1) - 3\operatorname{arctg} x + c\right]$

207 $\int \frac{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}{\cos^2 x} dx$ $[\operatorname{tg} x + 2\ln|\cos x| + c]$

208 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$ $\left[\sqrt{x^2-9}+c\right]$

209 $\int \frac{3x-1}{x+4}\,dx$ $\left[3x-13\ln|x+4|+c\right]$

210 $\int (x^2+1)\,\mathrm{sen}\,(x^3+3x)\,dx$ $\left[\frac{-\cos(x^3+3x)}{3}+c\right]$

211 $\int \frac{\sqrt{x}+2x+1}{4x}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\ln|x|+c\right]$

212 $\int \frac{x+3}{1+9x^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{18}\ln(1+9x^2)+\mathrm{arctg}\,3x+c\right]$

213 $\int \frac{3x^2-2}{\sqrt{2x^3-4x}}\,dx$ $\left[\sqrt{2x^3-4x}+c\right]$

214 $\int \frac{4^{1+2x}}{8^x}\,dx$ $\left[\frac{4}{\ln 2}2^x+c\right]$

215 $\int \frac{4x+2}{x^2+x}\,dx$ $\left[2\ln|x^2+x|+c\right]$

216 $\int \cos 2x\cos x\,dx$ $\left[\mathrm{sen}\,x-\frac{2}{3}\mathrm{sen}^3x+c\right]$

217 $\int \frac{dx}{x(1+4\ln^2x)}$ $\left[\frac{\mathrm{arctg}\,(2\ln x)}{2}+c\right]$

218 $\int \frac{\ln x+1}{x\ln^2x}\,dx$ $\left[\ln|\ln x|-\frac{1}{\ln x}+c\right]$

219 $\int \frac{e^{1+\sqrt{6x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ $\left[\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot e^{1+\sqrt{6x}}+c\right]$

220 $\int \mathrm{sen}^5x\,dx$ $\left[-\cos x-\frac{\cos^5x}{5}+\frac{2\cos^3x}{3}+c\right]$

221 $\int \frac{4x+x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ $\left[2\,\mathrm{arcsen}\,x^2-\frac{1}{2}\sqrt{(1-x^4)}+c\right]$

222 $\int \frac{\mathrm{sen}\,2x}{4+4\,\mathrm{sen}^2x}\,dx$ $\left[\frac{\ln(\mathrm{sen}^2x+1)}{4}+c\right]$

223 $\int (\cos^2x+\cos 2x)\,dx$ $\left[\frac{1}{2}x+\frac{3\,\mathrm{sen}\,2x}{4}+c\right]$

224 $\int \frac{1}{5+e^x}\,dx$ $\left[\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}\ln(5+e^x)+c\right]$

225 $\int \frac{x^4-16}{1+x^2}\,dx$ $\left[\frac{x^3}{3}-x-15\,\mathrm{arctg}\,x+c\right]$

226 $\int (\mathrm{tg}\,x+1)^2\,dx$ $\left[\mathrm{tg}\,x-2\cdot\ln|\cos x|+c\right]$

227 $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\,dx$ $\left[-\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{2}+c\right]$

228 $\int \frac{1}{25+4x^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{10}\mathrm{arctg}\,\frac{2x}{5}+c\right]$

229 $\int \mathrm{sen}\,x\sec x\,dx$ $\left[-\ln|\cos x|+c\right]$

230 $\int \mathrm{cosec}^2(3x+1)\,dx$ $\left[-\frac{\mathrm{cotg}\,(3x+1)}{3}+c\right]$

231 $\int \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\mathrm{arcsen}\,\frac{3x}{4}+c\right]$

232 $\int 6^{2\operatorname{sen}x+1}\cos x\,dx$ $\left[\frac{3\cdot 6^{2\operatorname{sen}x}}{\ln 6}+c\right]$

233 $\int \frac{x}{x-10}dx$ $[x+10\ln|x-10|+c]$

234 $\int \frac{x+1}{x-3}dx$ $[x+4\ln|x-3|+c]$

235 $\int \frac{x^4-\sqrt{2}\,x^2+\ln x}{x}dx$ $\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{\ln^2 x}{2}+c\right]$

236 $\int \frac{3x\sqrt{4x^2-6}}{2}dx$ $\left[\frac{2x^2-3}{4}\sqrt{4x^2-6}+c\right]$

237 $\int \frac{1}{16+3x^2}dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4}x+c\right]$

238 $\int\left(\frac{16^x}{2^{3x+2}}+3x^2\right)dx$ $\left[\frac{1}{\ln 16}2^x+x^3+c\right]$

239 $\int \frac{4}{x^2-4x+4}dx$ $\left[-\frac{4}{x-2}+c\right]$

240 $\int \frac{dx}{(x-2)\ln(x-2)}$ $[\ln|\ln(x-2)|+c]$

241 $\int \frac{2x-4}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $[-4\arcsen x-2\sqrt{1-x^2}+c]$

242 $\int \frac{4\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 2x}dx$ $\left[\operatorname{tg}x-\frac{1}{4}\operatorname{cotg}x+c\right]$

---

243 $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}dx$ $\left[\frac{1}{5}\arcsen x^5+c\right]$

244 $\int \frac{e^x\operatorname{tg}e^x}{\cos^2 e^x}dx$ $\left[\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 e^x+c\right]$

245 $\int \frac{x}{1+4x^4}dx$ $\left[\frac{1}{4}\operatorname{arctg}2x^2+c\right]$

246 $\int \frac{x\arcsen 4x^2}{\sqrt{1-16x^4}}dx$ $\left[\frac{(\arcsen 4x^2)^2}{16}+c\right]$

247 $\int \frac{\ln^3\operatorname{arctg}2x}{(1+4x^2)\operatorname{arctg}2x}dx$ $\left[\frac{1}{8}\ln^4\operatorname{arctg}2x+c\right]$

248 $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 4x}{1+16x^2}dx$ $\left[\frac{1}{12}\operatorname{arctg}^3 4x+c\right]$

249 $\int \frac{\cos x\cdot e^{\sqrt{\operatorname{sen}x}}}{2\sqrt{\operatorname{sen}x}}dx$ $[e^{\sqrt{\operatorname{sen}x}}+c]$

250 $\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ $\left[-\frac{1}{2}(\sqrt{1-4x^2}+\arcsen 2x)+c\right]$

251 $\int \frac{1}{x}\cos\left(\ln\frac{1}{x^2}\right)dx$ $\left[-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\ln\frac{1}{x^2}\right)+c\right]$

252 $\int\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3\cdot\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}dx$ $\left[\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^4+c\right]$

253 $\int x\operatorname{tg}(4x^2-5)\,dx$ $\left[-\frac{1}{8}\ln|\cos(4x^2-5)|+c\right]$

254 $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x^3)}$ $\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(\ln x^3)+c\right]$

255 $\int \frac{1+\operatorname{cotg}^2(\operatorname{tg}3x)}{\cos^2 3x}dx$ $\left[-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}(\operatorname{tg}3x)+c\right]$

256 $\int(1+\operatorname{tg}^2 2x)\cdot 3^{\operatorname{tg}2x}dx$ $\left[\frac{3^{\operatorname{tg}2x}}{2\ln 3}+c\right]$

257 $\int \operatorname{tg}2x\cdot\ln\cos 2x\,dx$ $\left[-\frac{1}{4}\ln^2\cos 2x+c\right]$

258 $\int \frac{\operatorname{tg}4x}{\cos 4x}dx$ $\left[\frac{1}{4\cos 4x}+c\right]$

---

259 $\int \frac{\ln x\cdot\sqrt[3]{\ln^2 x-2}}{x}dx$ $\left[\frac{3}{8}(\ln^2 x-2)\cdot\sqrt[3]{\ln^2 x-2}+c\right]$

260 $\int \frac{1}{\operatorname{sen}x\cos x}dx$ (Suggerimento. Considera $1=\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x$.) $[\ln|\operatorname{tg}x|+c]$

261 $\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} dx$ (Suggerimento. Moltiplica e dividi per $1 - \operatorname{sen} x$.) $\left[\frac{\operatorname{sen} x - 1}{\cos x} + c\right]$

262 Determinare il seguente integrale indefinito: $\int e^{x^2+2x}(x+1)\,dx$.

(*Università di Milano, Facoltà di Biologia, Prova di Matematica Generale,* 2009)

$\left[\frac{1}{2} e^{x^2+2x} + c\right]$

263 Calcolare il seguente integrale: $\int \frac{x^2 + x + \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

(*Università di Perugia, Facoltà di Economia, Prova di Matematica Generale,* 2003)

$\left[e^{\sqrt{x}} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}(3x+5)}{15} + c\right]$

3. L'INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

▶ Teoria a pag. 1947

IN PRATICA ▶ Videolezione 76

264 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo per sostituzione l'integrale $\int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} dx$.

Poniamo $t = \sqrt{x}$, da cui $x = t^2$.

Calcoliamo il differenziale di x e sostituiamo:

$$dx = 2t\,dt \quad \to \quad \int \frac{1}{2t(1+t^2)} 2t\,dt = \int \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg} t + c.$$

Sostituiamo, nella primitiva trovata, $\sqrt{x}$ a t:

$$\operatorname{arctg} t + c = \operatorname{arctg}\sqrt{x} + c \quad \to \quad \int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} dx = \operatorname{arctg}\sqrt{x} + c.$$

Calcola i seguenti integrali per sostituzione, utilizzando il suggerimento scritto a fianco.

265 $\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ $(t = \sqrt{x})$ $[2(e^{\sqrt{x}} + \sqrt{x}) + c]$

266 $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos x}} dx$ $(t = 1 - \cos x)$ $[2\sqrt{1-\cos x} + c]$

267 $\int \cos x \sqrt{3 + 2\operatorname{sen} x}\, dx$ $(t = 3 + 2\operatorname{sen} x)$ $\left[\frac{1}{3}\sqrt{3+2\operatorname{sen} x}\,(3 + 2\operatorname{sen} x) + c\right]$

268 $\int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$ $(t = \sqrt{2x-1})$ $[2\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} + c]$

269 $\int \frac{2\operatorname{arctg} x + 1}{x^2+1} dx$ $(t = \operatorname{arctg} x)$ $[\operatorname{arctg}^2 x + \operatorname{arctg} x + c]$

Calcola i seguenti integrali per sostituzione.

270 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} dx$ $\left[-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1-x)^2} + c\right]$

271 $\int \frac{1}{x - \sqrt{x}} dx$ $[\ln(\sqrt{x} - 1)^2 + c]$

272 $\int \operatorname{sen} x \sqrt{2+\cos x}\, dx$ $\left[-\frac{2}{3}\sqrt{2+\cos x}\,(2+\cos x)+c\right]$

273 $\int \frac{x+3}{\sqrt{x+2}}\, dx$ $\left[\frac{2}{3}\sqrt{x+2}\,(x+5)+c\right]$

274 $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\, dx$ $\left[\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5}-\frac{\operatorname{sen}^7 x}{7}+c\right]$

275 $\int \frac{3x}{\sqrt{8-x}}\, dx$ $[-2\sqrt{8-x}\,(x+16)+c]$

276 $\int \frac{4\sqrt{x}}{1+x}\, dx$ $[8\sqrt{x}-8\operatorname{arctg}\sqrt{x}+c]$

L'integrazione per sostituzione con le formule parametriche

277 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\int \frac{2}{1+\operatorname{sen} x}\, dx$.

Poniamo $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$, con $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, da cui:

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \;\rightarrow\; x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Sostituiamo:

$$\int \frac{2}{1+\operatorname{sen} x}\, dx = \int \frac{2}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = 4\int \frac{\cancel{1+t^2}}{1+t^2+2t} \cdot \frac{1}{\cancel{1+t^2}}\, dt =$$

$$= 4\int \frac{1}{(t+1)^2}\, dt = 4\int (t+1)^{-2}\, dt = \frac{-4}{t+1}+c = \frac{-4}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}+c.$$

Osservazione. In tutti i casi come quello precedente, in cui *la funzione integranda contiene soltanto la funzione seno o la funzione coseno*, si ricorre alle formule parametriche:

$$\boldsymbol{\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{con } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.}$$

Calcola i seguenti integrali.

278 $\int \frac{2}{\operatorname{sen} x}\, dx$ $\left[2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c\right]$

279 $\int \frac{2\operatorname{sen}^2 x-1}{\operatorname{sen} x}\, dx$ $\left[-2\cos x-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c\right]$

280 $\int \left(\cos x+\frac{4}{3\operatorname{sen} x}\right) dx$ $\left[\operatorname{sen} x+\frac{4}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c\right]$

281 $\int \frac{3}{4+4\operatorname{sen} x}\, dx$ $\left[-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}+c\right]$

282 $\int \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x}\right) dx$ $\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+2\operatorname{cotg} x+c\right]$

283 $\int \frac{\operatorname{sen} x+3}{2\operatorname{sen} x}\, dx$ $\left[\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c\right]$

284 $\int \frac{1}{\cos x}\, dx$ $\left[\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+c\right]$

285 $\int \frac{8}{1-\cos x}\,dx$ $\left[-8\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+c\right]$

286 $\int \frac{1}{3+\operatorname{sen}x+3\cos x}\,dx$ $\left[\ln\left|3+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c\right]$

287 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo l'integrale $\int \frac{2\operatorname{tg}^3 x+2\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+5}\,dx$.

Poniamo $\operatorname{tg}x = z$ e utilizziamo in modo abbreviato il metodo della sostituzione calcolando i differenziali di ciascun membro senza ricavare la variabile x in funzione di z:

$$(1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx = dz.$$

Sostituiamo:

$$\int \frac{2\operatorname{tg}^3 x+2\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+5}\,dx = 2\int \frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+5}(\operatorname{tg}^2 x+1)\,dx = 2\int \frac{z}{z+5}\,dz = 2\int \frac{z+5-5}{z+5}\,dz =$$

$$= 2\int 1dz - 10\int \frac{1}{z+5}\,dz = 2z - 10\ln|z+5| + c = 2\operatorname{tg}x - 10\ln|\operatorname{tg}x+5| + c.$$

Calcola i seguenti integrali.

288 $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x dx \quad (t = \operatorname{sen}x)$ $\left[\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}-\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5}+c\right]$

289 $\int \frac{e^x\operatorname{sen}e^x}{\cos e^x}\,dx \qquad (t=\cos e^x)$ $[-\ln|\cos e^x|+c]$

290 $\int \frac{3}{2}\cos x\sqrt{8+\operatorname{sen}x}\,dx$ $[(8+\operatorname{sen}x)\sqrt{8+\operatorname{sen}x}+c]$

291 $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$ $\left[\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\cos x|+c\right]$

292 $\int \frac{\operatorname{sen}x}{4+\cos^2 x}\,dx$ $\left[-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{2}+c\right]$

293 $\int \frac{2e^{2x}}{1+e^x}\,dx$ $[2e^x - 2\ln(e^x+1)+c]$

294 $\int \frac{\operatorname{arctg}x-4}{1+x^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x - 4\operatorname{arctg}x + c\right]$

L'integrazione di particolari funzioni irrazionali

Gli integrali del tipo $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

295 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Poniamo $x = \operatorname{sen}t$, con $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ per l'invertibilità della funzione (il dominio di $\sqrt{1-x^2}$ è $[-1;1]$, cioè il codominio della funzione seno). Differenziando: $dx = \cos t\,dt$. Sostituiamo:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,dt = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt,$$

poiché $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, allora $\cos t \geq 0$, e quindi $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$.

Utilizziamo la formula di bisezione $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ per $\alpha = 2t$ ed eleviamo al quadrato:

$$\int \cos^2 t\, dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + c.$$

Usiamo la formula di duplicazione $\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$:

$$\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \cos t + c.$$

Essendo $x = \operatorname{sen} t$, si ha $t = \operatorname{arcsen} x$, quindi:

$$\boldsymbol{\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c.}$$

Osservazione. In generale si può ottenere, ripetendo lo stesso procedimento, ma ponendo $x = a \operatorname{sen} t$:

$$\boldsymbol{\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + c, \text{ con } a > 0.}$$

Calcola i seguenti integrali.

296 $\int \sqrt{9-x^2}\, dx$ $\left[\frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{3} + \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + c\right]$

297 $\int 2(\sqrt{16-x^2} + \sqrt{x})\, dx$ $\left[16 \operatorname{arcsen}\frac{x}{4} + x\sqrt{16-x^2} + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + c\right]$

298 $\int \sqrt{16-4x^2}\, dx$ $\left[4 \operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2} + c\right]$

299 $\int \sqrt{36-4x^2}\, dx$ $\left[9 \operatorname{arcsen}\frac{x}{3} + x\sqrt{9-x^2} + c\right]$

300 $\int (\sqrt{1-4x^2} + 2x)\, dx$ $\left[\frac{1}{4}\operatorname{arcsen} 2x + \frac{x}{2}\sqrt{1-4x^2} + x^2 + c\right]$

301 $\int \sqrt{1-x^2}\,(x+1)\, dx$ $\left[\left(-\frac{1}{3} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + c\right]$

Gli integrali del tipo $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$ e $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx$

302 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo l'integrale $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

Poniamo $t = x + \sqrt{x^2+1}$, da cui si ricava:

$$t - x = \sqrt{x^2+1} \rightarrow t^2 + \cancel{x^2} - 2tx = 1 + \cancel{x^2} \rightarrow 2tx = t^2 - 1 \rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t}.$$

Sostituiamo l'espressione di x:

$$\sqrt{x^2+1} = t - x \rightarrow \sqrt{x^2+1} = t - \frac{t^2-1}{2t} \rightarrow \sqrt{x^2+1} = \frac{t^2+1}{2t}.$$

Differenziamo l'espressione di x:

$$dx = \frac{2t \cdot 2t - 2(t^2-1)}{4t^2} dt \rightarrow dx = \frac{2t^2+2}{4t^2} dt \rightarrow dx = \frac{t^2+1}{2t^2} dt.$$

Bergamini, Trifone, Barozzi MATEMATICA.BLU - Vol.5 © Zanichelli 2012 con Maths in English

Sostituiamo nell'integrale:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{t^2+1}{2t}} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt = \int \frac{2t}{t^2+1} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|\,t\,| + c =$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c.$$

Osservazione. In generale, gli integrali dei seguenti tipi,

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2 \pm a^2}}}\,\boldsymbol{dx}, \quad \int \sqrt{\boldsymbol{x^2 \pm a^2}}\,\boldsymbol{dx},$$

si risolvono ponendo $\boldsymbol{t = x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

Calcola i seguenti integrali.

303 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$ $\quad\left[\ln\left|\,x + \sqrt{x^2-4}\,\right| + c\right]$

304 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+16}}\,dx$ $\quad\left[\ln\left|\,x + \sqrt{x^2+16}\,\right| + c\right]$

305 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ $\quad\left[\ln\left|\,x + \sqrt{x^2+2}\,\right| + c\right]$

306 $\int \sqrt{x^2+9}\,dx$ $\quad\left[\frac{1}{8}(x+\sqrt{x^2+9})^2 + \frac{9}{2}\ln\left|\,x+\sqrt{x^2+9}\,\right| - \frac{81}{8} \cdot \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+9})^2} + c\right]$

307 $\int \sqrt{x^2-25}\,dx$ $\quad\left[\frac{1}{8}(x+\sqrt{x^2-25})^2 - \frac{25}{2}\ln\left|\,x+\sqrt{x^2-25}\,\right| - \frac{625}{8} \cdot \frac{1}{(x+\sqrt{x^2-25})^2} + c\right]$

308 $\int \sqrt{x^2+3}\,dx$ $\quad\left[\frac{1}{8}(\sqrt{x^2+3}+x)^2 + \frac{3}{2}\ln\left|\,x+\sqrt{x^2+3}\,\right| - \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+3})^2} + c\right]$

309 $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$ $\quad\left[\frac{1}{8}(x+\sqrt{x^2-1})^2 - \frac{1}{2}\ln\left|\,x+\sqrt{x^2-1}\,\right| - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^2} + c\right]$

ESERCIZI VARI L'integrazione per sostituzione

TEST

310 A quale dei seguenti integrali è equivalente $\int 3\,f\left(\frac{x}{2}\right)dx$?

- A $\int 6\,f(x)\,dx$
- B $\int \frac{3}{2}\,f(x)\,dx$
- C $\int \frac{2}{3}\,f(x)\,dx$
- D $\int 3\,f(x)\,dx$
- E $\int 4\,f\left(\frac{x}{3}\right)dx$

311 Per risolvere $\int \sqrt{16-x^2}\,dx$ quale sostituzione si utilizza?

- A $x = 4 - \operatorname{sen} t$
- B $\sqrt{16-x^2} = t - x$
- C $x = 4 - \cos t$
- D $t^2 = 16 - x^2$
- E $x = 4 \operatorname{sen} t$

312 L'integrale $\int \frac{1}{\sqrt{x}-x}\,dx$ con la sostituzione $\sqrt{x} = t$ si trasforma in:

- A $\int \frac{t}{t-1}\,dt.$
- B $2\int \frac{t}{t-1}\,dt.$
- C $2\int \frac{dt}{1-t}.$
- D $\int \frac{dt}{1-t}.$
- E $\int \frac{2}{t-t^2}\,dt.$

313 Con l'opportuna sostituzione, l'integrale $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$ è uguale a:

- A $\ln(e^x + e^{-x}) + c.$
- B $\operatorname{arctg}(e^x) + c.$
- C $\ln(e^x + 1) + c.$
- D $\operatorname{arctg}(e^x + 1) + c.$
- E nessuno dei precedenti.

Calcola i seguenti integrali per sostituzione, utilizzando eventualmente il suggerimento scritto a fianco.

314 $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$ $\left[\operatorname{arcsen}\frac{x}{3}+c\right]$

315 $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}dx$ $\left[\frac{\sqrt{2}\operatorname{arcsen}\sqrt{2}\,x}{2}+c\right]$

316 $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x+7}{1+x^2}dx$ $\left[7\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}^4 x+c\right]$

317 $\int \frac{e^x}{e^x-e^{-x}}dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-1|+c\right]$

318 $\int \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}dx$ $\left[-\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x}-\ln|\operatorname{sen}x|+c\right]$

319 $\int \frac{3x+1}{\sqrt{2-x}}dx$ $[-14\sqrt{2-x}+2(2-x)\sqrt{2-x}+c]$

---

320 $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx$ $(t=\sqrt{x})$ $[2\operatorname{arcsen}\sqrt{x}+c]$

321 $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ $(x=2t)$ $\left[\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}+c\right]$

322 $\int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x\,dx$ $(t=\cos x)$ $\left[\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+c\right]$

323 $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+2}dx$ $(t=2+\operatorname{tg}x)$ $[\operatorname{tg}x-\ln(\operatorname{tg}x+2)^2+c]$

324 $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}dx$ $(x=t^3-1)$ $\left[\frac{6x-9}{10}\sqrt[3]{(x+1)^2}+c\right]$

325 $\int \sqrt{1-9x^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{6}\operatorname{arcsen}3x+\frac{x\sqrt{1-9x^2}}{2}+c\right]$

326 $\int \sqrt{8-x^2}\,dx$ $\left[4\operatorname{arcsen}\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{x\sqrt{8-x^2}}{2}+c\right]$

327 $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2-1}}dx$ $\left[\ln\sqrt[3]{|3x-\sqrt{9x^2-1}|}+c\right]$

328 $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-2}}dx$ $\left[\ln\sqrt{|\sqrt{2}\,x+\sqrt{2x^2-1}|}+c\right]$

329 $\int \frac{2}{\sqrt{16x^2+9}}dx$ $\left[\ln\sqrt{4x+\sqrt{16x^2+9}}+c\right]$

330 $\int \frac{3dx}{2\sqrt{x}+x\sqrt{x}}$ $\left[3\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x}}{2}+c\right]$

331 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3}$ $[2\sqrt{x}-6\ln(\sqrt{x}+3)+c]$

332 $\int 3x\sqrt[3]{3-x}\,dx$ $\left[-\frac{27}{4}(3-x)\sqrt[3]{3-x}+\frac{9}{7}(3-x)^2\sqrt[3]{3-x}+c\right]$

333 $\int \frac{1}{1+2\sqrt{x}}dx$ $\left[\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln(2\sqrt{x}+1)+c\right]$

334 $\int \frac{\sqrt{8-2x^2}}{\sqrt{2}}dx$ $\left[2\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+c\right]$

335 $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+3}}dx$ $[\sqrt{x^2+3}-2\ln(x+\sqrt{x^2+3})+c]$

336 $\int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}dx$ $[\operatorname{arcsen}x-\sqrt{1-x^2}+c]$

337 $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x}}dx$ $\left[-\frac{2}{3}\sqrt{1-x}(x+11)+c\right]$

338 $\int \sqrt{\frac{4-9x^2}{25}}dx$ $\left[\frac{2}{15}\operatorname{arcsen}\frac{3x}{2}+\frac{1}{10}x\sqrt{4-9x^2}+c\right]$

339 $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$ $\left[2\sqrt{x} - 2\sqrt{2}\,\text{arctg}\frac{\sqrt{2x}}{2} + c\right]$

340 $\int \frac{5dx}{3^{\frac{x}{4}+2}}$ $\left[-\frac{20}{\ln 3}\cdot\frac{1}{3^{\frac{x}{4}+2}} + c\right]$

341 $\int \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+8}}dx$ $\left[\sqrt{x^2+2} - \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+2}) + c\right]$

342 $\int \frac{\text{tg}\,x}{3+\cos^2 x}dx$ $(\text{tg}\,x = t)$ $\left[\frac{1}{6}\ln(4+3\,\text{tg}^2 x) + c\right]$

343 $\int \frac{\sqrt{9-36x^2}}{2}dx$ $\left[\frac{3}{8}\text{arcsen}\,2x + \frac{3}{4}x\sqrt{1-4x^2} + c\right]$

344 $\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}dx$ $(2x = \text{sen}\,t)$ $\left[-\frac{\sqrt{1-4x^2}}{x} - 2\,\text{arcsen}\,2x + c\right]$

345 a) By using substitution $u = 4 - \sin x$, or otherwise, find:

$$\int \frac{\cos x}{(4-\sin x)^2}\,dx.$$

b) Hence, or otherwise, find:

$$\int \frac{\cos 2x}{(4-\sin 2x)^2}\,dx.$$

(UK *Northern Examination Assessment Board, NEAB*)

$\left[\text{a)}\ \frac{1}{4-\text{sen}\,x} + c;\ \text{b)}\ \frac{1}{2(4-\text{sen}\,2x)} + c\right]$

4. L'INTEGRAZIONE PER PARTI

Teoria a pag. 1948

IN PRATICA
Videolezione 77

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx.$$

346 **TEST** Se applichiamo il metodo di integrazione per parti all'integrale $\int x\cos x\,dx$:

- A dobbiamo porre $f(x) = x$ e $g'(x) = \cos x$.
- B dobbiamo porre $f(x) = \cos x$ e $g'(x) = x$.
- C dobbiamo porre $f'(x) = x$ e $g'(x) = \cos x$.
- D dobbiamo porre $f(x) = x$ e $g(x) = \cos x$.
- E non riusciamo a risolvere l'integrale perché esso non si risolve in alcun modo per parti.

347 **TEST** Nell'uguaglianza

$$\int 2x\,e^{h(x)}\,dx = 2x\,e^{h(x)} - 2\int e^{h(x)}dx$$

è stato applicato il metodo di integrazione per parti. $h(x)$ è uguale a:

- A $2x$.
- B x.
- C $\frac{x}{2}$.
- D x^2.
- E $\frac{x}{4}$.

348 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo con l'integrazione per parti: a) $\int x^2\ln x\,dx$; b) $\int e^x \text{sen}\,x\,dx$.

a) Come funzione $g'(x)$ scegliamo $y = x^2$ perché sappiamo calcolarne l'integrale.

Sappiamo che $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$. Trascurando la costante c, $g(x) = \frac{x^3}{3}$. Applichiamo la formula:

$$\int x^2\ln x\,dx = \ln x\cdot\frac{x^3}{3} - \int\frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int\frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c.$$

b) Applichiamo la formula di integrazione per parti, ponendo: $g'(x) = e^x$ e $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Poiché $\int e^x dx = e^x + c$, allora $g(x) = e^x$ e $f'(x) = \cos x$. Pertanto:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Applichiamo a $\int e^x \cos x \, dx$ ancora l'integrazione per parti, con $g'(x) = e^x$ e $f(x) = \cos x$:

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x - \int -e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$$

Quindi:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$$

Portando a primo membro $-\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$ e sommando otteniamo:

$$2\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x + c_1 \;\rightarrow\; \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x}{2} + c, \text{ dove } c = \frac{c_1}{2}.$$

In conclusione: $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + c$.

Calcola i seguenti integrali applicando la formula di integrazione per parti.

349 $\int x \ln x \, dx$ $\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + c\right]$

350 $\int x \cos x \, dx$ $[x \operatorname{sen} x + \cos x + c]$

351 $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ $\left[-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + c\right]$

352 $\int \operatorname{arctg} x \, dx$ $\left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + c\right]$

353 $\int x \, 2^x \ln 2 \, dx$ $\left[2^x\left(x - \frac{1}{\ln 2}\right) + c\right]$

354 $\int \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$ $[\sqrt{x}(\ln x - 2) + c]$

355 $\int \frac{x + 2}{e^x} dx$ $\left[-\frac{x + 3}{e^x} + c\right]$

356 $\int (x + 2) \operatorname{sen} x \, dx$ $[-(x + 2)\cos x + \operatorname{sen} x + c]$

357 $\int \ln^2 x \, dx$ $[x(\ln^2 x - \ln x^2 + 2) + c]$

358 $\int \sqrt[3]{x} \ln 2x \, dx$ $\left[\frac{3}{4} x \sqrt[3]{x}\left(\ln 2x - \frac{3}{4}\right) + c\right]$

359 $\int \frac{x}{2\sqrt{x + 1}} dx$ $\left[\frac{1}{3}\sqrt{x + 1}(x - 2) + c\right]$

360 $\int 2x \, e^{2x} dx$ $\left[e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + c\right]$

361 $\int (x - 1)\cos(x + 1) \, dx$ $[(x - 1)\operatorname{sen}(x + 1) + \cos(x + 1) + c]$

362 $\int (2x + 1)\ln(x + 1) \, dx$ $\left[(x^2 + x)\ln(x + 1) - \frac{x^2}{2} + c\right]$

363 $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$ $[-x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + c]$

364 $\int x^2 e^x \, dx$ $[e^x(x^2 - 2x + 2) + c]$

365 $\int e^x \cos x \, dx$ $\left[\frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x) + c\right]$

366 $\int \cos^2 x \, dx$ $\left[\frac{x + \operatorname{sen} x \cos x}{2} + c\right]$

367 $\int \frac{\cos x}{e^{x+1}} dx$ $\left[\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2e^{x+1}} + c\right]$

368 $\int \cos(\ln x) \, dx$ $\left[\frac{x}{2}[\operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)] + c\right]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **MATEMATICA.BLU - Vol.5** © Zanichelli 2012 *con Maths in English*

369 $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$ $\left[\frac{x}{2}[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] + c\right]$

370 $\int e^{2x} \operatorname{sen} x\,dx$ $\left[\frac{e^{2x}}{5}(2\operatorname{sen} x - \cos x) + c\right]$

371 $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ $[x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + c]$

372 $\int 8x \operatorname{sen} x \cos x\,dx$ $[-2x\cos 2x + \operatorname{sen} 2x + c]$

373 $\int \operatorname{arcsen} x\,dx$ $[x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c]$

374 $\int \arccos x\,dx$ $[x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c]$

375 $\int \frac{\ln x^2}{x^2}\,dx$ $\left[-\frac{1}{x}(2 + \ln x^2) + c\right]$

376 $\int 2x \operatorname{arctg} x\,dx$ $[(x^2+1)\operatorname{arctg} x - x + c]$

377 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arcsen} x\,dx$ $[-\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x + x + c]$

378 $\int x \operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\,dx$ $\left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{|x|}{x}\sqrt{x^2-1} + c\right]$

379 $\int \frac{\operatorname{sen} x}{e^x}\,dx$ $\left[\frac{-(\operatorname{sen} x + \cos x)}{2e^x} + c\right]$

380 $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\,dx$ $[x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + c]$

381 $\int x \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\,dx$ $\left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} - \frac{x+2}{6}\sqrt{x-1} + c\right]$

382 $\int \left(x^2 \ln^2 x - \frac{2}{9}x^2\right)dx$ $\left[\frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{9}x^3 \ln x + c\right]$

383 $\int 2e^{\sqrt{x}}\,dx \quad (\sqrt{x} = t)$ $[4e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c]$

384 Let $I_n = \int x^n e^x\,dx$. Use integration by parts to establish the reduction formula $I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$. Hence find $\int x^3 e^x\,dx$.

(*University of Sidney*, *Math* 1003)

$[e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c]$

5. L'INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Teoria a pag. 1949

Il numeratore è la derivata del denominatore

Calcola i seguenti integrali.

385 $\int \frac{6x^2 + 8x - 8}{x^3 + 2x^2 - 4x + 3}\,dx$ $[\ln(x^3 + 2x^2 - 4x + 3)^2 + c]$

386 $\int \frac{3x^2 + 3x - 2}{2x^3 + 3x^2 - 4x - 1}\,dx$ $\left[\ln\sqrt{|2x^3 + 3x^2 - 4x - 1|} + c\right]$

387 $\int \frac{2x^9 + x^4 + 1}{x^{10} + x^5 + 5x}\,dx$ $\left[\ln\sqrt[5]{|x^{10} + x^5 + 5x|} + c\right]$

388 $\int \frac{3x^2+12x+12}{1+(x+2)^3}dx$ $\quad [\ln|x^3+6x^2+12x+9|+c]$

389 $\int \frac{2x+1}{(x-1)^2+(x+2)^2}dx$ $\quad [\ln\sqrt{2x^2+2x+5}+c]$

390 $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+2}dx$ $\quad \left[\frac{1}{4}\ln|x^4-4x+2|+c\right]$

391 $\int \frac{3x+3}{x^2+2x+9}dx$ $\quad \left[\frac{3}{2}\ln|x^2+2x+9|+c\right]$

392 $\int \frac{4-6x^2}{x^3-2x}dx$ $\quad [-2\ln|x^3-2x|+c]$

Il denominatore è di primo grado

393 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\int \frac{2x^2+5x+1}{2x+1}dx$.

Poiché il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore, dividiamo il polinomio $2x^2+5x+1$ per il polinomio $2x+1$:

$$\begin{array}{rr|l} & 2x^2+5x+1 & 2x+1 \\ \cline{3-3} - & 2x^2-x & x+2 \\ \cline{1-2} & 4x+1 & \\ & -4x-2 & \\ \cline{2-2} & -1 & \end{array}$$

Il quoziente della divisione è $Q(x)=x+2$ e il resto $R(x)=-1$, quindi:

$$\frac{2x^2+5x+1}{2x+1}=x+2+\frac{-1}{2x+1}.$$

L'integrale diventa:

$$\int\frac{2x^2+5x+1}{2x+1}dx=\int\left(x+2-\frac{1}{2x+1}\right)dx=\int(x+2)\,dx-\int\frac{1}{2x+1}dx=$$
$$=\int(x+2)\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{2}{2x+1}dx=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+c.$$

Calcola i seguenti integrali.

394 $\int \frac{5}{2x-3}dx$ $\quad \left[\frac{5}{2}\ln|2x-3|+c\right]$

395 $\int \frac{1}{1-4x}dx$ $\quad \left[-\frac{1}{4}\ln|-4x+1|+c\right]$

396 $\int \frac{x+5}{x+3}dx$ $\quad [x+\ln(x+3)^2+c]$

397 $\int \frac{2x+1}{x-2}dx$ $\quad [2x+\ln|x-2|^5+c]$

398 $\int \frac{x^2+1}{x+1}dx$ $\quad \left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)^2+c\right]$

399 $\int \frac{x^2+x+1}{x-4}dx$ $\quad \left[\frac{x^2}{2}+5x+21\ln|x-4|+c\right]$

400 $\int \frac{x^2-x+3}{3-x}dx$ $\quad \left[-\frac{x^2}{2}-2x-9\ln|3-x|+c\right]$

401 $\int \frac{2x^2-3x+4}{2x-3}dx$ $\quad \left[\frac{x^2}{2}+\ln(2x-3)^2+c\right]$

Il denominatore è di secondo grado

Il discriminante è positivo: $\Delta > 0$

402 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\int \frac{x-1}{x^2+5x+6}dx$.

Calcoliamo il discriminante del denominatore: $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$.

Le soluzioni dell'equazione associata al denominatore sono: $x_1 = -2$ e $x_2 = -3$.

Il denominatore si scompone nel prodotto di due binomi: $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$.

Scriviamo $\frac{x-1}{x^2+5x+6}$ come somma di due frazioni aventi come denominatori i fattori trovati:

$$\frac{x-1}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3},$$ dove A e B sono numeri reali.

Svolgiamo i calcoli a secondo membro:

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{Ax+3A+Bx+2B}{x^2+5x+6} = \frac{(A+B)x+3A+2B}{x^2+5x+6}.$$

Affinché l'uguaglianza

$$\frac{x-1}{x^2+5x+6} = \frac{(A+B)x+3A+2B}{x^2+5x+6}$$

sia un'identità, dobbiamo porre:

$$\begin{cases} A+B=1 & \text{uguaglianza dei coefficienti della } x \\ 3A+2B=-1 & \text{uguaglianza dei termini noti} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, otteniamo $A = -3$ e $B = 4$, per cui l'integrale diventa:

$$\int \frac{x-1}{x^2+5x+6}dx = \int\left(\frac{-3}{x+2} + \frac{4}{x+3}\right)dx = -3\int\frac{1}{x+2}dx + 4\int\frac{1}{x+3}dx =$$

$$= -3\ln|x+2| + 4\ln|x+3| + c.$$

Calcola i seguenti integrali.

403 $\int \frac{x-3}{x^2-x-2}dx$ $\left[\frac{4}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln|x-2| + c\right]$

404 $\int \frac{3x-5}{x^2-2x-3}dx$ $[2\ln|x+1| + \ln|x-3| + c]$

405 $\int \frac{4}{x^2-2x}dx$ $\left[2\ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + c\right]$

406 $\int \frac{1-x}{2x^2+5x+2}dx$ $\left[\ln\sqrt{|2x+1|} - \ln|x+2| + c\right]$

407 $\int \frac{-3}{3x^2-x-2}dx$ $\left[\frac{3}{5}\ln|3x+2| - \frac{3}{5}\ln|x-1| + c\right]$

408 $\int \frac{1-x}{9x^2-1}dx$ $\left[\frac{\ln|3x-1| - \ln(3x+1)^2}{9} + c\right]$

409 $\int \frac{x^4+3x}{x^2-1}dx$ $\left[\frac{x^3}{3} + x + 2\ln|x-1| + \ln|x+1| + c\right]$

410 $\int \frac{x^4+x^3+6}{x^2+x}dx$ $\left[\frac{x^3}{3} + 6\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + c\right]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **MATEMATICA.BLU - Vol.5** © Zanichelli 2012 *con Maths in English*

Il discriminante è nullo: $\Delta = 0$

411 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\int \frac{x+5}{x^2+6x+9}dx$.

Calcoliamo il discriminante del denominatore: $\frac{\Delta}{4} = 9 - 9 = 0$.

Riscriviamo il numeratore in modo che compaia la derivata del denominatore.

Essendo $D[x^2+6x+9] = 2x+6$, moltiplichiamo e dividiamo il numeratore per 2 e poi aggiungiamo e togliamo 6:

$$\int \frac{x+5}{x^2+6x+9}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+10+6-6}{x^2+6x+9}dx.$$

Possiamo così decomporre l'integrale nella somma:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+9}dx + \frac{1}{2}\int \frac{4}{x^2+6x+9}dx.$$

Nel primo integrale applichiamo la regola $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$, mentre nel secondo, essendo $\Delta = 0$, possiamo riscrivere il denominatore come quadrato di binomio. Otteniamo così:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+9}dx + 2\int (x+3)^{-2}dx = \frac{1}{2}\ln(x+3)^2 - \frac{2}{x+3} + c = \ln|x+3| - \frac{2}{x+3} + c.$$

Calcola i seguenti integrali.

412 $\int \frac{x}{x^2-4x+4}dx$ $\left[\ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + c\right]$

413 $\int \frac{2x-1}{x^2+2x+1}dx$ $\left[\ln(x+1)^2 + \frac{3}{x+1} + c\right]$

414 $\int \frac{4x+1}{4x^2+4x+1}dx$ $\left[\ln|2x+1| + \frac{1}{4x+2} + c\right]$

415 $\int \frac{2x+1}{4x^2-12x+9}dx$ $\left[\frac{\ln|2x-3|}{2} - \frac{2}{2x-3} + c\right]$

416 $\int \frac{x+2}{x^2+10x+25}dx$ $\left[\ln|x+5| + \frac{3}{x+5} + c\right]$

417 $\int \frac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}dx$ $\left[x + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c\right]$

418 $\int \frac{x^3-6x^2-7x}{x^2-6x+9}dx$ $\left[\frac{x^2}{2} - 16\ln|x-3| + \frac{48}{x-3} + c\right]$

Il discriminante è negativo, $\Delta < 0$, e il numeratore è di grado zero

419 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$.

Calcoliamo il discriminante del denominatore: $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$.

Cerchiamo di ricondurre l'integrale al modello: $\int \frac{f'(x)}{k^2 + [f(x)]^2}\, dx = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{f(x)}{k} + c$.

Per poter scrivere $x^2 + x + 1$ nella forma $[f(x)]^2 + k^2$, utilizziamo il metodo del completamento del quadrato. Possiamo pensare che x^2 e x siano, rispettivamente, il quadrato di x e il doppio prodotto di x per un altro numero, ossia:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + 1.$$

Il fattore $\frac{1}{2}$ ci conduce al binomio $x + \frac{1}{2}$, il cui quadrato è: $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$. Pertanto:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

quindi:

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1}\, dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\, dx.$$

Utilizzando il modello iniziale, abbiamo $f(x) = x + \frac{1}{2}$, $k = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $f'(x) = 1$, quindi:

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1}\, dx = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + c.$$

Calcola i seguenti integrali.

420 $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5}\, dx$ $\quad [\operatorname{arctg}(x + 2) + c]$

421 $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3}\, dx$ $\quad \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + c\right]$

422 $\int \frac{2}{9x^2 + 4}\, dx$ $\quad \left[\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{3x}{2} + c\right]$

423 $\int \frac{1}{9x^2 - 6x + 5}\, dx$ $\quad \left[\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3x - 1}{2} + c\right]$

Il discriminante è negativo, $\Delta < 0$, e il numeratore è di grado maggiore di zero

424 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\int \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 5}\, dx$.

Calcoliamo il discriminante del denominatore: $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$.

Trasformiamo il numeratore in modo da poter ottenere la derivata del denominatore:

$$D[x^2 - 4x + 5] = 2x - 4.$$

Moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$\frac{1}{2} \int \frac{2(x - 1)}{x^2 - 4x + 5}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 4x + 5}\, dx.$$

Aggiungiamo e togliamo 4 al numeratore e scriviamo la frazione come somma di due frazioni:

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 4x + 5}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 4 + 4 - 2}{x^2 - 4x + 5}\, dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5} + \frac{4 - 2}{x^2 - 4x + 5}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{2x-4}{x^2-4x+5} + \frac{2}{x^2-4x+5}\right)dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + \int\frac{1}{x^2-4x+5}dx.$$

Calcoliamo separatamente i due integrali; osserviamo che $x^2 - 4x + 5 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, poiché $\Delta < 0$.

$$\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx = \ln(x^2-4x+5) + c,$$

$$\int\frac{1}{x^2-4x+5}dx = \int\frac{1}{x^2-4x+4-4+5}dx = \int\frac{1}{(x-2)^2+1}dx = \operatorname{arctg}(x-2) + c.$$

Otteniamo:

$$\int\frac{x-1}{x^2-4x+5}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5) + \operatorname{arctg}(x-2) + c.$$

Calcola i seguenti integrali.

425 $\displaystyle\int\frac{2x-1}{x^2-2x+3}dx$ $\left[\ln(x^2-2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}} + c\right]$

426 $\displaystyle\int\frac{x+3}{x^2+4x+5}dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) + \operatorname{arctg}(x+2) + c\right]$

427 $\displaystyle\int\frac{x-2}{x^2-6x+13}dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right) + c\right]$

428 $\displaystyle\int\frac{8x-3}{4x^2-4x+5}dx$ $\left[\ln(4x^2-4x+5) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{2} + c\right]$

429 $\displaystyle\int\frac{x^2+x+2}{x^2+16}dx$ $\left[x + \frac{1}{2}\ln(x^2+16) - \frac{7}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + c\right]$

430 $\displaystyle\int\frac{x+2}{4x^2+9}dx$ $\left[\frac{1}{8}\ln(4x^2+9) + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + c\right]$

431 $\displaystyle\int\frac{x^3+4x+4}{x^2+4}dx$ $\left[\frac{x^2}{2} + 2\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c\right]$

Il denominatore è di grado superiore al secondo

432 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\displaystyle\int\frac{x^2+5x-1}{x^3+x^2-2}dx.$

Scomponiamo il denominatore $P(x)$ utilizzando la regola di Ruffini.
Poiché $P(1) = 0$, il polinomio $x - 1$ è divisore di $P(x)$.

Eseguiamo la divisione utilizzando la regola di Ruffini:

	1	1	0	−2
1		1	2	2
	1	2	2	0

Quindi $P(x) = (x-1)(x^2+2x+2)$.
Il trinomio $x^2 + 2x + 2$ ha discriminante $\Delta = -4 < 0$ ed è perciò irriducibile.

Scriviamo la frazione algebrica iniziale come somma di due frazioni algebriche con denominatori rispettivamente $x - 1$ e $x^2 + 2x + 2$, cioè:

$$\frac{x^2+5x-1}{x^3+x^2-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2},$$ dove A, B e C rappresentano numeri reali.

Determiniamo il valore delle costanti A, B e C. Sommiamo le frazioni al secondo membro:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} = \frac{A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{Ax^2+2Ax+2A+Bx^2+Cx-Bx-C}{x^3+x^2-2} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(2A-B+C)x+2A-C}{x^3+x^2-2}.$$

Affinché l'uguaglianza

$$\frac{x^2+5x-1}{x^3+x^2-2} = \frac{(A+B)x^2+(2A-B+C)x+2A-C}{x^3+x^2-2}$$

sia un'identità, dobbiamo porre:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B+C=5 \\ 2A-C=-1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, otteniamo $A = 1$, $B = 0$, $C = 3$.
In conclusione, vale l'uguaglianza

$$\frac{x^2+5x-1}{x^3+x^2-2} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x^2+2x+2},$$

che permette di calcolare l'integrale dato:

$$\int \frac{x^2+5x-1}{x^3+x^2-2}dx = \int\left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x^2+2x+2}\right)dx = \int\frac{1}{x-1}dx + 3\int\frac{1}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= \ln|x-1| + 3\int\frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \ln|x-1| + 3\,\mathrm{arctg}(x+1) + c.$$

Osservazione. Nella trasformazione della frazione algebrica iniziale nella somma di due o più frazioni si procede diversamente a seconda di come è scomposto il denominatore.

Vediamo tre esempi:

- $\dfrac{4x}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-3};$
- $\dfrac{2x+3}{(x-1)(x+2)^2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{(x+2)^2};$
- $\dfrac{6x-1}{(x-2)^3} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{(x-2)^2} + \dfrac{C}{(x-2)^3}.$

Calcola i seguenti integrali.

433 $\displaystyle\int\frac{x^2+2}{x^3-1}dx$ $\left[\ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c\right]$

434 $\displaystyle\int\frac{3x+2}{x^3+3x^2+2x}dx$ $\left[\ln|x| - \ln(x+2)^2 + \ln|x+1| + c\right]$

435 $\displaystyle\int\frac{x-3}{x^3-x^2-x+1}dx$ $\left[\ln|x-1| - \ln|x+1| + \frac{1}{x-1} + c\right]$

436 $\int \frac{1}{x^3+1}dx$ $\left[\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c\right]$

437 $\int \frac{x-3}{x^3-2x^2+x-2}dx$ $\left[-\frac{1}{5}\ln|x-2| + \frac{1}{10}\ln(x^2+1) + \frac{7}{5}\operatorname{arctg} x + c\right]$

438 $\int \frac{1}{x^3-2x^2-11x+12}dx$ $\left[-\frac{1}{12}\ln|x-1| + \frac{1}{28}\ln|x+3| + \frac{1}{21}\ln|x-4| + c\right]$

439 $\int \frac{x+1}{x^3+6x^2+12x+8}dx$ $\left[-\frac{1}{x+2} + \frac{1}{2(x+2)^2} + c\right]$

440 $\int \frac{1}{x^3+5x^2+7x+3}dx$ $\left[\frac{1}{4}\ln|x+3| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + c\right]$

ESERCIZI VARI L'integrazione di funzioni razionali fratte

Calcola i seguenti integrali.

441 $\int \frac{5}{x^2-4x+5}dx$ $[5\operatorname{arctg}(x-2) + c]$

442 $\int \frac{x^2+8x+18}{x^2+6x+9}dx$ $\left[x + \ln(x+3)^2 - \frac{3}{x+3} + c\right]$

443 $\int \frac{1}{x^2+6x+13}dx$ $\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + c\right]$

444 $\int \frac{9x^5+5x^3-x+1}{3x+2}dx$ $\left[\frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3}\ln|3x+2| + c\right]$

445 $\int \frac{2x^3+7x^2+2x-9}{x^2+3x}dx$ $[x^2 + x + \ln(x+3)^2 - \ln|x|^3 + c]$

446 $\int \frac{x^4-3x^3+5x-3}{x^2-4x+4}dx$ $\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + c\right]$

447 $\int \frac{x^2-3x}{x^2-6x+8}dx$ $[x + \ln|x-2| + \ln(x-4)^2 + c]$

448 $\int \frac{x^2+2}{x^3-3x^2+3x-1}dx$ $\left[\ln|x-1| - \frac{4x-1}{2(x-1)^2} + c\right]$

449 $\int \frac{2x^2+9x-3}{x^2+2x-3}dx$ $[2x + \ln(x-1)^2 + \ln|x+3|^3 + c]$

450 $\int \frac{2x^2+6x+11}{x^2+2x+10}dx$ $\left[2x + \ln(x^2+2x+10) - \frac{11}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + c\right]$

451 $\int \frac{x^3-2x^2+3x+4}{2x+1}dx$ $\left[\frac{x^3}{6} - \frac{5x^2-17x}{8} + \frac{15}{16}\ln|2x+1| + c\right]$

452 $\int \frac{2x^2+2}{x^3+x^2-x-1}dx$ $\left[\ln|x+1| + \ln|x-1| + \frac{2}{x+1} + c\right]$

453 $\int \frac{2x+3}{x^3+3x^2-4}dx$ $\left[\frac{5}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| - \frac{1}{3(x+2)} + c\right]$

454 Trova un polinomio di primo grado P tale che $P(0) = 1$ e $\int \frac{P(x)}{x^2(x-1)^2}dx$ sia una funzione razionale.

(USA *University of Houston Mathematics Contest*, 2006)

$[P = -2x + 1]$

ESERCIZI VARI Gli integrali indefiniti

TEST

455 Dato il polinomio $p(x) = 4x^3 + 2x^k - 4$, per quale valore di k una primitiva di $p(x)$ è

$$P(x) = x^4 + x^2 - 4x + c?$$

- A 0
- B 1
- C -1
- D 2
- E Nessuno dei precedenti.

456 Se nell'integrale $\int \frac{x + e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ utilizziamo il metodo di sostituzione, ponendo $t = \sqrt{x}$, otteniamo:

- A $\int \frac{t^2 + e^{2t}}{t}\,dt$.
- B $\int \frac{t^2 + e^{2t}}{t^2}\,dt$.
- C $\int (t^2 + e^{2t})\,dt$.
- D $\int 2(t^2 + e^{2t})\,dt$.
- E $\int \frac{t^2 + e^{2t}}{2}\,dt$.

457 Qual è il risultato dell'integrale $\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$?

- A $\ln|2x+1| + c$
- B $\ln|x^2+x| + c$
- C $\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| + c$
- D $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + c$
- E $\ln\left|\frac{2x+1}{x^2+x}\right| + c$

458 Dato l'integrale $\int \frac{1}{9 - 6x + x^2}\,dx$, il suo risultato è:

- A $-\frac{1}{(3-x)^3} + c$.
- B $\frac{1}{x-3} + c$.
- C $\frac{1}{2}\ln|9 - 6x + x^2| + c$.
- D $\frac{1}{3-x} + c$.
- E $(3-x)^3 + c$.

459 Data l'uguaglianza

$$\int f(x)\ln x\,dx = -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2}\,dx,$$

la $f(x)$ è uguale a:

- A $-\frac{1}{x^2}$.
- B $-x^2$.
- C $\frac{1}{x}$.
- D $\frac{1}{x^2}$.
- E $-\frac{1}{x}$.

460 Sia $f(x)$ una funzione continua, di cui $F(x)$ è una primitiva immediata. Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

- A $\int e^x f(x)\,dx = F(x)e^x + \int F(x)e^x\,dx$
- B $\int x^2 f(x)\,dx = x^2 F(x) - \int 2x f(x)\,dx$
- C $\int f(x)\cos x\,dx = F(x)\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,F(x)\,dx$
- D $\int \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{F(x)}{x} + \int \frac{F(x)}{x^2}\,dx$
- E $\int f(x)\cdot f(x)\,dx = F(x)f(x) - \int f(x)f'(x)\,dx$

461 **ASSOCIA** a ciascuna funzione $f(x)$ nella colonna A una sua primitiva $F(x)$ nella colonna B.

A	B
1) $f(x) = \sqrt{x} + 1$	a) $F(x) = x - x^2 + \sqrt{2}$
2) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$	b) $F(x) = x + \sqrt{x} + 1$
3) $f(x) = 1 - 2x$	c) $F(x) = x\left(\frac{2}{3}\sqrt{x} + 1\right) + \sqrt{3}$

462 **ASSOCIA** a ciascun integrale della colonna A il suo corrispondente risultato nella colonna B, senza effettuare calcoli.

A	B
1) $\int \frac{1}{x^2 + 8x + 16}\,dx$	a) $-\frac{1}{x+4} + c$
2) $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 2}$	b) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + c$
3) $\int \frac{1}{x^2 + 2x}\,dx$	c) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+1) + c$

Calcola i seguenti integrali.

463 $\int\left(\frac{5}{x^4}+\frac{x^2-x}{2}\right)dx$ $\left[-\frac{5}{3x^3}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+c\right]$

464 $\int\left(\frac{14}{x^8}+\frac{3}{x^7}-\frac{10}{x^6}+4\right)dx$ $\left[-\frac{2}{x^7}-\frac{1}{2x^6}+\frac{2}{x^5}+4x+c\right]$

465 $\int\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}-\frac{5}{6}\sqrt[6]{x}\right)dx$ $\left[\frac{3}{8}x\cdot\sqrt[3]{x}-\frac{5}{7}x\cdot\sqrt[6]{x}+c\right]$

466 $\int\left(3\sqrt{2x}+x-\frac{2}{x^3}\right)dx$ $\left[2x\sqrt{2x}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x^2}+c\right]$

467 $\int\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x^3}+\sqrt[4]{x^3}\right)dx$ $\left[3\ln|x|+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7}+c\right]$

468 $\int\left(\frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{2}{\sqrt[3]{x^4}}+\sqrt{x}+1\right)dx$ $\left[20\sqrt[4]{x}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+c\right]$

469 $\int(-2e^x+6\cdot 8^x)\,dx$ $\left[-2e^x+\frac{2}{\ln 2}\cdot 8^x+c\right]$

470 $\int\left(\frac{3}{x^2}+\operatorname{sen}x-6\cos x\right)dx$ $\left[-\frac{3}{x}-\cos x-6\operatorname{sen}x+c\right]$

471 $\int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$ $[\operatorname{arctg}\, x+\ln|x|+\operatorname{arcsen}\, x+c]$

472 $\int e^{x^2+3x+1}(2x+3)\,dx$ $[e^{x^2+3x+1}+c]$

473 $\int\frac{8x+2x^2-x^3}{2x}dx$ $\left[4x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+c\right]$

474 $\int\frac{6x^2+4}{x^3+2x+1}dx$ $[\ln(x^3+2x+1)^2+c]$

475 $\int\frac{1}{x\ln x}dx$ $[\ln|\ln x|+c]$

476 $\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ $[\operatorname{arctg}\, e^x+c]$

477 $\int(x^4-1)^2 4x^3dx$ $\left[\frac{(x^4-1)^3}{3}+c\right]$

478 $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}dx$ $[\operatorname{sen}(\ln x)+c]$

479 $\int\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}dx$ $\left[\frac{\operatorname{arcsen}3x}{3}+c\right]$

480 $\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$ $[\operatorname{arcsen}e^x+c]$

481 $\int xe^{2-x}dx$ $[-e^{2-x}(x+1)+c]$

482 $\int\cos x\, 3^{\operatorname{sen}x}dx$ $\left[\frac{3^{\operatorname{sen}x}}{\ln 3}+c\right]$

483 $\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$ $[\ln(e^x+e^{-x})+c]$

484 $\int\frac{1}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx$ $[2\operatorname{tg}\sqrt{x}+c]$

485 $\int\frac{1}{\sqrt[4]{2x+1}}dx$ $\left[\frac{2}{3}\sqrt[4]{(2x+1)^3}+c\right]$

486 $\int\frac{1}{x\operatorname{sen}^2(\ln 3x)}dx$ $[-\operatorname{cotg}(\ln 3x)+c]$

487 $\int\operatorname{sen}^3x\cos^4x\,dx$ $\left[\frac{\cos^7x}{7}-\frac{\cos^5x}{5}+c\right]$

488 $\int 4\operatorname{sen}^2x\,dx$ $[2(x-\operatorname{sen}x\cos x)+c]$

489 $\int\frac{2x^2-x+1}{x+3}dx$ $[x^2-7x+22\ln|x+3|+c]$

490 $\int\frac{5x-1}{5x^2-2x-2}dx$ $[\ln\sqrt{|5x^2-2x-2|}+c]$

491 $\int\frac{x-4}{x^2-14x+49}dx$ $\left[\ln|x-7|-\frac{3}{x-7}+c\right]$

492 $\int\ln(x-1)\,dx$ $[(x-1)\ln(x-1)-x+c]$

493 $\int\frac{15-x}{x^2+5x-6}dx$ $[\ln(x-1)^2-3\ln|x+6|+c]$

494 $\int\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+4}}dx$ $[2\sqrt{x^3+4}+c]$

495 $\int\left(-\frac{\cos x}{3-\operatorname{sen}x}\right)dx$ $[\ln(3-\operatorname{sen}x)+c]$

496 $\int\frac{1}{5+(3x+1)^2}dx$ $\left[\frac{1}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{5}}+c\right]$

497 $\int\frac{x^2}{1+x^6}dx$ $\left[\frac{\operatorname{arctg}x^3}{3}+c\right]$

498 $\int\frac{e^{-x}}{9+e^{-2x}}dx$ $\left[-\frac{\operatorname{arctg}\frac{e^{-x}}{3}}{3}+c\right]$

499 $\int\frac{3}{\sqrt{4-9x^2}}dx$ $\left[\operatorname{arcsen}\frac{3x}{2}+c\right]$

500 $\int\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos^2x}dx$ $[-\operatorname{arctg}(\cos x)+c]$

501 $\int \frac{(x-1)^4}{\operatorname{sen}^2(x-1)^5}dx$ $\left[-\frac{1}{5}\operatorname{cotg}(x-1)^5+c\right]$

502 $\int \frac{e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}dx$ $[e^{\operatorname{tg}x}+c]$

503 $\int \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}dx$ $\left[\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+c\right]$

504 $\int x^3 \ln x\, dx$ $\left[\frac{x^4}{4}\left(\ln x-\frac{1}{4}\right)+c\right]$

505 $\int \cos\sqrt{x}\, dx$ $[2(\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})+c]$

506 $\int \frac{1}{x^3}\operatorname{sen}\frac{1}{x}dx$ $\left[\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}-\operatorname{sen}\frac{1}{x}+c\right]$

507 $\int \frac{2x^2-3x+4}{x+4}dx$ $[x^2-11x+48\ln|x+4|+c]$

508 $\int x^2\cos x\, dx$ $[x^2\operatorname{sen}x+2x\cos x-2\operatorname{sen}x+c]$

509 $\int x\cdot 3^x dx$ $\left[\frac{3^x}{\ln 3}\left(x-\frac{1}{\ln 3}\right)+c\right]$

510 $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$ $[\operatorname{arctg}e^x+c]$

511 $\int \cos x\sqrt{3-2\operatorname{sen}x}\, dx$
$\left[-\frac{1}{3}\sqrt{3-2\operatorname{sen}x}\,(3-2\operatorname{sen}x)+c\right]$

512 $\int \frac{x^5-x^3-2x-3}{x^4}dx$
$\left[\frac{x^2}{2}-\ln|x|+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+c\right]$

513 $\int (x^3+x)e^{x^4+2x^2}dx$ $\left[\frac{e^{x^4+2x^2}}{4}+c\right]$

514 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx$ (poni $\sqrt[6]{x}=t$)
$[6(\sqrt[6]{x}-\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x})+c]$

515 $\int \frac{2}{x^2-6x+12}dx$ $\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{3}}+c\right]$

516 $\int \operatorname{sen}x\ln(1+\cos x)\, dx$
$[\cos x-(1+\cos x)\ln(1+\cos x)+c]$

517 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ $[2[\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)]+c]$

518 $\int \frac{1}{2(\sqrt{x}-2)}dx$ $[\sqrt{x}+2\ln|\sqrt{x}-2|+c]$

519 $\int \frac{x+1}{9x^2+16}dx$
$\left[\frac{1}{18}\ln(9x^2+16)+\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{3x}{4}+c\right]$

520 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$ $\left[-\frac{2}{3}\sqrt{1-x}\,(x+2)+c\right]$

521 $\int (x+2)\cos(x+\pi)\, dx$ $[-(x+2)\operatorname{sen}x-\cos x+c]$

522 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx$ $[\ln|x+\sqrt{x^2-4}|+c]$

523 $\int \sqrt{64+x^2}\, dx$
$\left[\frac{1}{8}(x+\sqrt{64+x^2})^2-\frac{512}{(x+\sqrt{64+x^2})^2}+\right.$
$\left.+32\ln|x+\sqrt{64+x^2}|+c\right]$

524 $\int \frac{x-4}{x^2+x-2}dx$ $[\ln(x+2)^2-\ln|x-1|+c]$

525 $\int \frac{x+1}{9x^2+6x+1}dx$ $\left[\frac{\ln|3x+1|}{9}-\frac{2}{27x+9}+c\right]$

526 $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}dx$
$[\ln(x^2+2x+2)+\operatorname{arctg}(x+1)+c]$

527 $\int \frac{x-2}{\sqrt{x+3}}dx$ $\left[\frac{2}{3}\sqrt{x+3}\,(x-12)+c\right]$

528 $\int \frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}dx$ $[-\ln|\cos x-\operatorname{sen}x|+c]$

529 $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-25}}dx$ $\left[\ln\sqrt{|2x+\sqrt{4x^2-25}|}+c\right]$

530 $\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}dx$ $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}}\right)+c\right]$

531 $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{2x+3}}$ $[2\operatorname{arctg}\sqrt{2x+3}+c]$

532 $\int \frac{\ln\sqrt{x+1}}{x+1}dx$ $[\ln^2\sqrt{x+1}+c]$

533 $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x}}$ $\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-2}{2}\right)+c\right]$

534 $\int \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+5}}dx$ $[4\sqrt{x^2+5}+\ln(x+\sqrt{x^2+5})+c]$

535 $\int (2\ln^2 x-5\ln x)\, dx$ $[2x\ln^2 x-9x\ln x+9x+c]$

536 $\int (\ln x-\ln^2 x)\, dx$ $[3x\ln x-x\ln^2 x-3x+c]$

537 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}dx$ $\left[\frac{1}{3}\left(-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x\right)+c\right]$

538 $\displaystyle\int (x-1)^2 e^{x+1}dx$ $[(x^2-4x+5)e^{x+1}+c]$

539 $\displaystyle\int (2x+1)\operatorname{arctg} x\,dx$ $\left[(x^2+x+1)\operatorname{arctg} x - x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c\right]$

540 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})}dx$ $(\sqrt[6]{x}=t)$ $[6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+c]$

541 $\displaystyle\int \frac{dx}{4e^{2x}+3}$ $\left[\frac{1}{6}\ln\left(\frac{e^{2x}}{4e^{2x}+3}\right)+c\right]$

542 $\displaystyle\int e^{3x}\ln(1+e^{3x})\,dx$ $\left[\frac{1}{3}(1+e^{3x})\ln(1+e^{3x})-\frac{1}{3}(1+e^{3x})+c\right]$

543 $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{x^2+4x+8}dx$ $\left[x-\ln(x^2+4x+8)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+c\right]$

544 $\displaystyle\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}dx$ $\left[\frac{3}{2}x^2+\ln(x-1)^2+\ln|x+1|+c\right]$

545 $\displaystyle\int \frac{4x\operatorname{arcsen} 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ $[-\sqrt{1-4x^2}\operatorname{arcsen} 2x+2x+c]$

546 $\displaystyle\int \frac{x^2}{e^x}dx$ $\left[-\frac{x^2+2x+2}{e^x}+c\right]$

547 $\displaystyle\int \frac{x-4}{x^2-14x+49}dx$ $\left[\ln|x-7|-\frac{3}{x-7}+c\right]$

548 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$ $\left[\frac{1}{3}\sqrt{2x+1}(x-1)+c\right]$

---

549 $\displaystyle\int \frac{4x^2-x}{(x+1)^7}dx$ $\left[\frac{9}{5(x+1)^5}-\frac{1}{(x+1)^4}-\frac{5}{6(x+1)^6}+c\right]$

550 $\displaystyle\int \frac{dx}{3+2\operatorname{sen} x}$ $\left[\frac{2\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\sqrt{5}}\right)+c\right]$

551 $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$ $\left[\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x+c\right]$

552 $\displaystyle\int 2x\arccos\frac{1}{x}dx$ $\left[x^2\arccos\frac{1}{x}-\frac{|x|}{x}\sqrt{x^2-1}+c\right]$

553 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{4-3x^2}{6}}dx$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}\,x}{2}+\frac{\sqrt{6}}{12}x\sqrt{4-3x^2}+c\right]$

554 $\displaystyle\int \frac{dx}{2+e^{3x}}$ $\left[\frac{1}{6}\ln\left(\frac{e^{3x}}{2+e^{3x}}\right)+c\right]$

555 $\displaystyle\int \frac{5x-9}{x^2-4x+3}dx$ $[\ln[(x-1)^2|x-3|^3]+c]$

556 $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$ $\left[-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+c\right]$

557 $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+9}dx$ $\left[x+\ln|x-3|+\frac{2}{x-3}+c\right]$

558 $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x+1)^3}dx$ $\left[\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}+c\right]$

559 $\displaystyle\int \sqrt{8-2x^2}\,dx$ $\left[2\sqrt{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{8-2x^2}}{2}+c\right]$

560 $\displaystyle\int x\cos^2 x\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\left(x^2+x\operatorname{sen} 2x+\frac{\cos 2x}{2}\right)+c\right]$

561 $\displaystyle\int \frac{4}{\sqrt{2x}+\sqrt[3]{2x}}dx$ $(2x=t^6)$ $[4\sqrt{2x}-6\sqrt[3]{2x}+12\sqrt[6]{2x}-12\ln|\sqrt[6]{2x}+1|+c]$

562 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$ $\left[\ln\frac{|x|}{(\sqrt{1-x}+1)^2}+c\right]$

563 $\int x \ln \sqrt{x+4}\, dx$ $\left[\frac{x^2}{2}\ln\sqrt{x+4} - \frac{1}{8}x^2 + x - 4\ln|x+4| + c\right]$

564 $\int \frac{dx}{x^2(x+1)^2}$ $\left[2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + c\right]$

565 $\int \ln(1+\sqrt{1+2x})\, dx$ $\left[x\ln(1+\sqrt{1+2x}) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{1+2x} + c\right]$

566 $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+4)}\, dx$ $\left[\ln|x+4| + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{2} + c\right]$

567 $\int \frac{dx}{1-\cos x - 2\,\mathrm{sen}\, x}$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right| + c\right]$

568 $\int \frac{1}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}\, dx$ $[16\ln(\sqrt[4]{x}+2) + 2\sqrt{x} - 8\sqrt[4]{x} + c]$

569 $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)e^{\sqrt{x}}\, dx$ $[e^{\sqrt{x}}(-2-2x+4\sqrt{x}) + c]$

570 $\int \frac{\mathrm{sen}^4 x}{\cos^6 x}\, dx$ $\left[\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + c\right]$

571 $\int \cos^3 x \sqrt[3]{\mathrm{sen}\, x}\, dx$ $\left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{\mathrm{sen}^4 x} - \frac{3}{10}\sqrt[3]{\mathrm{sen}^{10} x} + c\right]$

572 $\int \frac{x}{(2+x)^6}\, dx$ $\left[\frac{-5x-2}{20(x+2)^5} + c\right]$

573 $\int x \operatorname{arctg} 2x\, dx$ $\left[-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\operatorname{arctg} 2x + c\right]$

574 $\int x\frac{e^x + e^{-x}}{1+e^{2x}}\, dx$ $[e^{-x}(-x-1) + c]$

575 $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\, dx$ $\left[\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1} + c\right]$

576 $\int \mathrm{sen}\, 4x \cos 6x\, dx$ $\left[\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 10x}{20} + c\right]$

577 $\int (\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x)\, dx$ $\left[\ln|\cos x| - \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + x + c\right]$

578 $\int \frac{\cos x}{\cos^2 x - 4\,\mathrm{sen}\, x - 8}\, dx$ $(\mathrm{sen}\, x = t)$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, x}{3} + c\right]$

579 $\int \frac{1+\cos^2 x}{\mathrm{sen}\, 2x}\, dx$ $\left[\ln|\mathrm{sen}\, x| - \frac{1}{2}\ln|\cos x| + c\right]$

580 $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos x}\, dx$ $\left[\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + c\right]$

581 $\int x\sqrt{x-4}\, dx$ $\left[\frac{2}{5}\sqrt{x-4}(x-4)\left(x+\frac{8}{3}\right) + c\right]$

582 $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^4+4x^2+4}}\, dx$ $\left[\frac{\ln(x^2+2)}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right) + c\right]$

583 $\int x^3\ln(x-1)\, dx$ $\left[\ln|x-1|\left(\frac{x^4}{4}+1\right) - \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} - \frac{1}{4}x + c\right]$

584 $\int \frac{x}{x^4+2x^2+1}\, dx$ $\left[-\frac{1}{2(x^2+1)} + c\right]$

585 $\int \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x \cos 2x \, dx$ $\left[\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{24} + c\right]$

586 $\int \frac{\cos x}{a + b \operatorname{sen} x} dx \qquad (a^2 + b^2 \neq 0)$ $\left[\text{se } b = 0, \frac{1}{a} \operatorname{sen} x + c; \text{ se } b \neq 0, \frac{1}{b} \ln|a + b \operatorname{sen} x| + c\right]$

587 a) Si calcoli il seguente integrale: $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x-b}} dx$.

b) Si dia la formula dell'integrazione per parti.

(*Università di Bologna, Scienze di Internet, Prova di Matematica Generale*, 2009)

[a) xe^b]

588 Determina $\int \frac{1}{1 + e^x} dx$.

(USA *Youngstown State University, Calculus Competition*, 1992)

$[x - \ln(e^x + 1) + c]$

589 Determina l'integrale $\int (x^6 + x^3) \sqrt[3]{x^3 + 2} \, dx$.

(USA *University of Cincinnati, Calculus Contest*, 2006)

$\left[\frac{x^4 (x^3 + 2)^{\frac{4}{3}}}{8}\right]$

590 Determina l'integrale $\int x^3 \operatorname{sen} x^2 \, dx$.

(USA *University of Cincinnati, Calculus Contest*, 2007)

$\left[\frac{\operatorname{sen} x^2}{2} - \frac{x^2 \cos x^2}{2} + c\right]$

591 Determina $\int \frac{1}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx$.

(USA *Youngstown State University, Calculus Competition*, 2006)

$\left[\frac{1}{2}[\ln(e^x + 2) - \ln(e^{2x} + 2e^x + 1) + x] + c\right]$

Problemi con gli integrali indefiniti

592 Scrivi la primitiva $F(x)$ di $y = 2x - \frac{1}{x}$ il cui grafico passa per $(1; 3)$. $[F(x) = x^2 - \ln|x| + 2]$

593 Trova a e b in modo che la funzione $F(x) = a \ln x + bx$ sia una primitiva di $f(x) = \frac{-2 + x}{x} + \frac{1}{2}$.

$\left[a = -2, b = \frac{3}{2}\right]$

594 Fra tutte le primitive della funzione $y = xe^{-x}$, determina quella il cui grafico passa per il punto $(0; -1)$.

$[F(x) = -e^{-x}(x + 1)]$

595 Trova la funzione $f(x)$, sapendo che $f''(x) = \ln x + 3$, $f'(1) = 2$ e $f(1) = \frac{3}{4}$. $\left[f(x) = \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{3}{4} x^2\right]$

596 a) Tra le primitive della funzione $y = e^x \operatorname{sen} e^x$, individua quella il cui grafico passa per il punto $(\ln \pi; 1)$.

b) Studia gli estremi relativi della funzione trovata. [a) $y = -\cos e^x$; b) $(\ln k\pi; (-1)^{k+1})$, $k \in \mathbb{N}_0$]

597 a) Tra le primitive di $f(x) = \frac{1}{9 + 4x^2}$ individua la funzione $F(x)$ il cui grafico passa per il punto $A\left(\frac{3}{2}; \frac{\pi}{24}\right)$.

b) Rappresenta il grafico della funzione $F(x)$ e da esso deduci quello di $y = e^{F(x)}$. $\left[\text{a) } F(x) = \frac{1}{6} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3} x\right)\right]$

598 a) Tra le primitive di $f(x) = \dfrac{5x+7}{x-1}$ determina quella che passa per il punto $A(2; 10)$.

b) Trova l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per l'origine e avente vertice nel punto di intersezione tra la primitiva determinata nel punto a) e la retta $y = 5x$. (Scegli il punto di intersezione con ascissa maggiore.)

$\left[\text{a) } y = 5x + 12\ln|x-1|; \text{ b) } y = -\dfrac{5}{2}x^2 + 10x\right]$

599 a) Individua l'intersezione A con l'asse delle ascisse della curva di equazione $y = \dfrac{x-1}{(x^2-2x)^2}$.

b) Determina la primitiva $y = f(x)$ della funzione data passante per il punto di coordinate $\left(1; -\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Studia e rappresenta graficamente $y = f(x)$ e verifica, spiegandone i motivi, che il suo estremo relativo ha la stessa ascissa di A.

$\left[\text{a) } A(1; 0); \text{ b) } y = -\dfrac{1}{2(x^2-2x)} - 1\right]$

600 Data la funzione $f(x) = 3x^2 - x$, determina fra le sue primitive $F(x)$ quella che ha il punto di massimo di ordinata 2.

$\left[F(x) = x^3 - \dfrac{x^2}{2} + 2\right]$

601 Trova la primitiva della funzione $f(x) = x^2 - 2x + 1$ che ha un flesso di ordinata $\dfrac{4}{3}$.

$\left[F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x + 1\right]$

602 Determina fra le primitive della funzione $y = \dfrac{x^2+2x-2}{x^2+2x+1}$ quella che ha per asintoto obliquo la retta $y = x - 3$.

$\left[y = \dfrac{x^2-2x}{x+1}\right]$

603 a) Tra le primitive di $f(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$ individua quella il cui grafico passa per $A(0; -\ln 2)$.

b) Rappresenta graficamente la funzione trovata.

c) Determina l'equazione della retta tangente alla curva rappresentata nel suo punto di ascissa 0.

$\left[\text{a) } y = -\ln(1+e^{-x}); \text{ c) } y = \dfrac{1}{2}x - \ln 2\right]$

604 Data la funzione

$$y = x\ln x, \qquad \text{con } x > 0,$$

a) calcola il suo integrale indefinito;

b) determina la primitiva F passante per il punto $(2; 0)$;

c) dimostra che tutte le primitive hanno il minimo assoluto nel punto di ascissa $x = 1$;

d) determina le primitive aventi il minimo assoluto con ordinata negativa.

$\left[\text{a) } \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + c; \text{ b) } c = 1 - 2\ln 2; \text{ d) } c < \dfrac{1}{4}\right]$

605 Mediante gli integrali indefiniti:

a) verifica l'uguaglianza $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$;

b) utilizzando il metodo d'integrazione per parti calcola l'integrale indefinito $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx$;

c) con il metodo di sostituzione calcola l'integrale indefinito:

$$\int e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}}\,dx.$$

$\left[\text{b) } \dfrac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \dfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + c; \text{ c) } -\dfrac{1}{2}e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}} + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{e^{2x}+1}) + c\right]$

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Quale delle seguenti funzioni è primitiva della funzione $f(x) = 3x^2 - \operatorname{sen} x$?

A $F(x) = 6x - \cos x$

B $F(x) = 3x + \cos x$

C $F(x) = 6x^2 - \operatorname{sen} x$

D $F(x) = x^3 + \cos x$

E $F(x) = x^3 - \cos x$

2 Quale delle seguenti uguaglianze è *errata*?

A $\int x^{-n} dx = \frac{x^{1-n}}{1-n} + c \qquad (n \neq 1)$

B $\int a^x dx = \ln a \cdot a^x + c$

C $\int -\operatorname{sen} x \, dx = \cos x + c$

D $\int \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \operatorname{cotg} x + c$

E $\int \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \arccos x + c$

3 Quale delle seguenti uguaglianze è *errata*?

A $\int [f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n-1}}{n-1} + c \quad (n \neq 1)$

B $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

C $\int f'(x) \operatorname{sen} f(x) \, dx = -\cos f(x) + c$

D $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \operatorname{tg} f(x) + c$

E $\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$

4 Per applicare il metodo di integrazione per parti all'integrale

$$\int \sqrt[3]{x} \ln x \, dx:$$

A dobbiamo porre $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g'(x) = \ln x$.

B dobbiamo porre $f(x) = \ln x$ e $g'(x) = \sqrt[3]{x}$.

C dobbiamo porre $f'(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g'(x) = \ln x$.

D dobbiamo porre $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g(x) = \ln x$.

E non riusciamo a risolvere l'integrale perché esso non si risolve in alcun modo per parti.

5 Considera la funzione

$$f(x) = |\operatorname{sen} x|, \ x \in [0; 2\pi].$$

Una delle seguenti funzioni è primitiva di f nell'intervallo $[0; 2\pi]$. Quale?

A $F(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ \cos x + 2 & \text{se } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

B $F(x) = |\cos x|, \quad x \in [0; 2\pi]$

C $F(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ \cos x & \text{se } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

D $F(x) = -|\cos x|, \quad x \in [0; 2\pi]$

E $F(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ \cos x & \text{se } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

6 Quale dei seguenti integrali indefiniti ha come risultato

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c?$$

A $\int \frac{x}{2+x^2} dx$

B $\int \frac{1}{2+x^2} dx$

C $\int \frac{x}{4+x^2} dx$

D $\int \frac{1}{4+x^2} dx$

E $\int \frac{1}{4-x^2} dx$

7 L'uguaglianza

$$\int \frac{k}{x^2+9} dx = 3 \operatorname{arctg}[f(x)] + c$$

è vera per:

A $k = 3 \wedge f(x) = 3x.$

B $k = \frac{1}{3} \wedge f(x) = x.$

C $k = 9 \wedge f(x) = \frac{x}{3}.$

D $k = -9 \wedge f(x) = -\frac{x}{3}.$

E $k = \frac{1}{9} \wedge f(x) = \frac{x}{9}.$

8 Per calcolare l'integrale

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

possiamo procedere per sostituzione ponendo:

A $x = a \operatorname{sen} t$.

B $t = a \operatorname{sen} x$.

C $x = a^2 - t^2$.

D $t = a^2 - x^2$.

E $x^2 = a^2 - t^2$.

9 Quale fra le seguenti uguaglianze è *falsa*?

A $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x - \operatorname{sen} x}\,dx = \ln \frac{1}{|\cos x - \operatorname{sen} x|} + c$

B $\int \frac{e^{\frac{1}{x^4} - 3}}{x^5}\,dx = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{x^4}} + c$

C $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \operatorname{sen} \sqrt[3]{x^2}\,dx = -3 \cos \sqrt[3]{x^2} + c$

D $\int \frac{x-2}{\operatorname{sen}^2(x^2-4x)}\,dx = -\frac{1}{2} \operatorname{cotg}(x^2-4x) + c$

E $\int \frac{e^{4x-3} + \frac{1}{4}}{e^{4x-3} + x}\,dx = \ln \sqrt[4]{|e^{4x-3} + x|} + c$

10 A cosa è uguale l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx?$$

A $\operatorname{arcsen} x + c$

B $\sqrt{x^2+4} + c$

C $\ln \sqrt{x^2+4} + c$

D $\ln(x + \sqrt{x^2+4}) + c$

E $\ln(x + \sqrt{x^2+2}) + c$

11 Indica quale delle seguenti affermazioni è *falsa*:

A se una funzione è discontinua in qualche punto di un intervallo $[a; b]$, allora non è integrabile in $[a; b]$.

B se una funzione è continua in $[a; b]$, allora è integrabile in $[a; b]$.

C se una funzione è derivabile in $[a; b]$, allora è integrabile in $[a; b]$.

D le primitive di una funzione sono funzioni continue.

E se una funzione è sempre negativa in un intervallo $[a; b]$, allora ogni sua primitiva è una funzione decrescente in $[a; b]$.

12 Sia

$$F(x) = x \operatorname{sen}(\pi x)$$

una primitiva di una funzione $f(x)$ continua e derivabile in un intervallo $[a; b]$.
Se $2 \in [a; b]$, $f(2)$ vale:

A $\frac{\pi}{2}$.

B -2π.

C 2π.

D $\frac{3}{2}\pi$.

E non è possibile calcolare $f(2)$.

13 L'integrale indefinito

$$I = \int (x^2 \ln x + \cos x)\,dx$$

è dato da:

A $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + \operatorname{sen} x$.

B $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^3 + \operatorname{sen} x + c$.

C $\frac{1}{3}x^3 \ln x + \operatorname{sen} x - \frac{1}{9}x^3 + c$.

D $\frac{1}{3}x^3 \ln x + \operatorname{sen} x + c$.

E $x \ln x + x - \operatorname{sen} x + c$.

14 $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt[3]{f(x)}}\,dx = \frac{3}{2} \sqrt[3]{f^2(x)} + c$ se:

A $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

B $f(x) = \operatorname{tg} x$.

C $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$.

D $f(x) = \operatorname{tg} x^2$.

E $f(x) = \operatorname{tg} \frac{3x}{2}$.

15 Sapendo che la derivata della funzione $y = f(x)$ è il polinomio $P(x)$, quale delle seguenti uguaglianze è *falsa*?

A $\int \frac{P(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

B $\int 2P(x) f(x)\,dx = f^2(x) + c$

C $3\int P(x) f^2(x)\,dx = f^3(x) + c$

D $\int \frac{P(x)}{f^2(x)}\,dx = \frac{1}{f(x)} + c$

E $\int \frac{P(x)}{f^3(x)}\,dx = -\frac{1}{2f^2(x)} + c$

QUESITI

16 Scrivi la definizione di primitiva di una funzione e spiega la differenza che esiste fra primitiva e integrale indefinito di una funzione.

17 Dopo avere spiegato la non unicità del risultato nella ricerca della primitiva di una funzione, tra le primitive della funzione $y = 2\cos 2x$ individua quella il cui grafico nel punto di ascissa $\frac{\pi}{2}$ ammette per tangente la retta di equazione $y = -2x + \pi + 2$.
[$y = \operatorname{sen} 2x + 2$]

18 **TEST** Una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2x+4}$ è:

A $\ln \dfrac{x}{x+2}$.

B $\ln \dfrac{x+2}{x}$.

C $\ln \sqrt{x^2 + 2x}$.

D $\ln \sqrt{2x^2 + x}$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.
(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2002, *quesito* 7)

19 Trova l'equazione di una curva sapendo che il suo coefficiente angolare nel punto $(x; y)$ è $x\sqrt{1+x^2}$ e passa per il punto $(0; -2)$.
(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero (Europa), Sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 5)
$\left[y = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{3}\right]$

20 Fra le primitive di $y = 3\cos^3 x$ trovare quella il cui diagramma passa per $P(0; 5)$.
(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero (Europa), Sessione ordinaria*, 2003, *quesito* 7)
[$F(x) = 3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x + 5$]

21 Il coefficiente angolare della tangente al diagramma di $f(x)$ è, in ogni suo punto P, uguale al doppio dell'ascissa di P. Determinate $f(x)$ sapendo che $f(0) = 4$.
(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero (Europa), Sessione ordinaria*, 2003, *quesito* 8)
[$f(x) = x^2 + 4$]

22 $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive rispettivamente di $y = x^2$ e $y = x$.
Sapendo che è $G(0) - F(0) = 3$, quanto vale $G(1) - F(1)$?
(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero (Europa), Sessione suppletiva*, 2003, *quesito* 7)
$\left[\frac{19}{6}\right]$

23 Si determinino le costanti a e b in modo che la funzione

$$F(x) = a\operatorname{sen}^3 x + b\operatorname{sen} x + 2x$$

sia una primitiva della funzione $f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2$.
(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione straordinaria*, 2007, *quesito* 10)
$\left[a = -\frac{1}{3}, b = -2\right]$

24 Di una funzione $f(x)$ si sa che la sua derivata seconda è 2^x e si sa ancora che $f(0) = \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2$ e $f'(0) = 0$. Qual è $f(x)$?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2003, *quesito* 8)

$\left[f(x) = \frac{2^x}{(\ln 2)^2} - \frac{x}{\ln 2}\right]$

25 Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $\operatorname{sen} x$ e che $f'(0) = 1$. Quanto vale $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione ordinaria*, 2003, *quesito* 9)

$[\pi - 1]$

PROBLEMI

26 La derivata prima di una funzione $y = f(x)$ è $y' = 2 - \frac{1}{(x+2)^2}$.

a) Determina e rappresenta graficamente la funzione $f(x)$, sapendo che ha per asintoto obliquo la retta $y = 2x + 1$.
b) Determina e rappresenta graficamente la funzione $y = g(x)$, sapendo che $y' = g'(x) = f'(x)$ e che ha per asintoto la retta $y = 2x$.
c) Quale relazione esiste tra $y = f(x)$ e $y = g(x)$?

$\left[\text{a) } f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+2}; \text{ b) } g(x) = 2x + \frac{1}{x+2}; \text{ c) } f(x) = g(x) + 1\right]$

27 a) Dimostra che tutte le primitive della funzione $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ rivolgono la concavità verso l'alto.
b) Determina la primitiva $F(x)$ di $f(x)$ che passa per l'origine degli assi.
c) Rappresenta il grafico di $f(x)$.
d) Utilizzando il grafico di $f(x)$, rappresenta nello stesso piano cartesiano il grafico della sua derivata $f'(x)$ e quello della sua primitiva $F(x)$.

$\left[\text{b) } F(x) = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + 2\right]$

28 a) Determina la funzione $y = f(x)$, sapendo che $y'' = 2e^x \cos x$ e che il suo grafico ha come tangente nell'origine la bisettrice del I e III quadrante.
b) Verifica che la funzione $f(x)$ ammette massimo per $x = \frac{3}{4}\pi$.
c) Stabilisci se il punto $A(3; 0)$ appartiene al grafico di $f(x)$.

$[\text{a) } y = e^x \operatorname{sen} x; \text{ c) no}]$

29 a) Rappresenta graficamente in $[0; 2\pi]$ la funzione $y = f(x)$ che ammette nell'origine la retta tangente $y = -2x$, sapendo che $y'' = \operatorname{sen}\frac{x}{2}$.
b) Deduci dal grafico di $f(x)$ quello delle funzioni $y = |f(x)|$ e $y = -f(x)$.

$\left[\text{a) } y = -4 \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right]$

30 a) La funzione $f(x)$ ammette un minimo nel punto x_0 tale che $f(x_0) = -1$. Individua e rappresenta graficamente la curva di equazione $y = f(x)$, sapendo che la sua derivata prima è $y' = \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$.
b) Rappresenta graficamente la derivata prima $f'(x)$.

$\left[\text{a) } y = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 x - 1\right]$

31 a) Studia la funzione $f(x) = 2\cos x + \cos^3 x$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$ e rappresentala graficamente.
b) Determina i valori dei parametri reali a e b affinché $F(x) = (a+b)\operatorname{sen} x - 3a \operatorname{sen}^3 x$ sia una primitiva di $f(x)$.

$\left[\text{b) } a = \frac{1}{9}, b = \frac{26}{9}\right]$

32 a) Studia la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = e^x \cos x$ che passa per il punto di minimo di $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$.
b) Rappresenta graficamente $F(x)$.
c) Stabilisci se $F(x)$ è una funzione pari.

$\left[\text{a) } F(x) = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x + \cos x);\ \text{c) no}\right]$

33 a) Considera la funzione $g(x) = -(\cos 2x + \cos x)$ e, dopo averne individuato il periodo, studiane la positività.
b) Determina la funzione $f(x)$ che ha un estremo relativo nel punto $\left(\frac{3}{2}\pi; -\frac{7\pi+1}{4}\right)$ e ammette per derivata seconda la funzione di equazione $y = g(x)$.
c) Studia la concavità di $y = f(x)$, con $x \in [0; 2\pi]$, e indica gli eventuali punti di flesso.

$\left[\text{a) } T = 2\pi,\ y \geq 0 \text{ per } \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{3}\pi + 2k\pi;\ \text{b) } y = -x + \frac{1}{2}\cos^2 x + \cos x - \frac{\pi+1}{4};\right.$
$\left.\text{c) verso l'alto se } \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}\pi,\ F_1\left(\frac{\pi}{3}; -\frac{7}{12}\pi + \frac{3}{8}\right), F_2\left(\frac{5}{3}\pi; -\frac{23}{12}\pi + \frac{3}{8}\right)\right]$

34 Se il polinomio $f(x)$ si divide per $x^2 - 1$ si ottiene x come quoziente ed x come resto.
a) Determinare $f(x)$.
b) Studiare la funzione $y = \frac{f(x)}{x^2-1}$ e disegnare il grafico G in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, dopo aver trovato, in particolare, i suoi punti di massimo, minimo e flesso e i suoi asintoti.
c) Trovare l'equazione della retta t tangente a G nel suo punto di ascissa $\frac{1}{2}$.
d) Determinare le coordinate dei punti comuni alla retta t e alla curva G.
e) Dopo aver determinato i numeri a, b tali che sussista l'identità:

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1},$$

calcolare una primitiva della funzione $\frac{f(x)}{x^2-1}$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2002, *problema* 1)

$\left[\text{a) } f(x) = x^3;\ \text{b) max:}\left(-\sqrt{3}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \text{min:}\left(\sqrt{3}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \text{flesso: } (0; 0), \text{a.v.: } x = \pm 1, \text{a.ob.: } y = x;\right.$
$\left.\text{c) } y = -\frac{11}{9}x + \frac{4}{9};\ \text{d) } \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right), \left(-\frac{4}{5}; \frac{64}{45}\right);\ \text{e) } a = b = \frac{1}{2},\ F(x) = \frac{1}{2}(x^2 + \ln|x^2-1|)\right]$

35 a) Trova la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ che ha un flesso nel punto $A\left(2; \frac{2}{3}\right)$ ed è tangente all'asse x nel punto $B(3; 0)$.
b) Studia e rappresenta graficamente $F(x)$ nel piano Oxy.
c) Sull'arco $\widehat{OA}$ determina il punto P per il quale è massimo il prodotto delle distanze dagli assi cartesiani.

$\left[\text{a) } F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x;\ \text{c) } P\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{8}\right)\right]$

36 a) Determina la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = (ax+b)e^x$ che ha un minimo di ascissa -2 e che nel punto $A(0; 1)$ ha per tangente una retta di coefficiente angolare 2.
b) Rappresenta graficamente $F(x)$ e $f(x)$.
c) Trova il punto T di intersezione delle tangenti ai due grafici nel loro punto di ascissa nulla.

$[\text{a) } F(x) = (x+1)e^x;\ \text{c) } T(-1; -1)]$

CAPITOLO 29 ٢٩ २९ 二十九

[numerazione araba] [numerazione devanagari] [numerazione cinese]

GLI INTEGRALI DEFINITI

LA TORRE EIFFEL È il simbolo di Parigi, uno dei monumenti più romantici e conosciuti del mondo. Fu costruita per l'Esposizione universale del 1889 in commemorazione del centenario della Rivoluzione francese. La sua struttura in ferro forgiato è alta 312 metri e fino al 1930 è stata la costruzione più alta del mondo.

Perché l'ingegnere Gustave Eiffel diede alla sua opera più famosa proprio quella forma?

▶ **La risposta a pag. 2032**

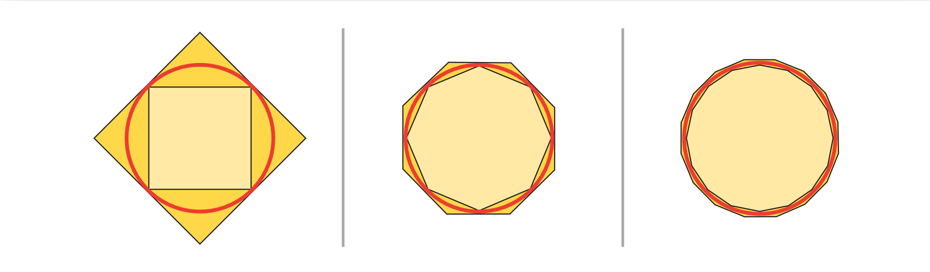
1. L'INTEGRALE DEFINITO

Il problema delle aree

L'introduzione del calcolo degli integrali definiti nasce dalla necessità di determinare le *aree* di figure piane aventi *contorno curvilineo*. Mentre per i poligoni il calcolo dell'area si riconduce a quella di un quadrato, per le figure il cui contorno è una curva qualsiasi il problema è più complesso.

● Ogni poligono è equivalente a un quadrato.

L'esempio più semplice è il cerchio, la cui area è stata determinata da Archimede di Siracusa (287-212 a.C.) mediante il *metodo di esaustione*. Se si considerano due successioni di poligoni regolari di n lati inscritti e circoscritti al cerchio, si può dimostrare che l'area del cerchio coincide con il limite comune delle due successioni costituite rispettivamente dalle aree dei poligoni regolari inscritti e circoscritti al cerchio.

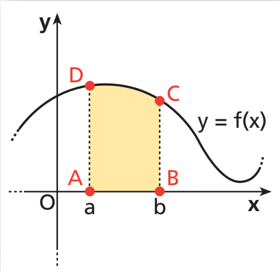


► **Figura 1** **Dal punto di vista intuitivo, le aree del poligono inscritto e del poligono circoscritto tendono a identificarsi con quella del cerchio man mano che il numero dei loro lati aumenta.**

Con un ragionamento analogo vedremo che è possibile determinare l'area di un particolare tipo di superficie a contorno curvilineo, che chiamiamo *trapezoide*. Questo procedimento ha portato al concetto più generale e astratto di *integrale definito* che si presta a determinare aree e volumi e a risolvere anche problemi di natura diversa.

La funzione è continua e positiva

Dati una funzione $y = f(x)$ e un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ nel quale la funzione è *continua* e *positiva* (o nulla), si chiama **trapezoide** la figura piana delimitata dall'asse x, dalle rette $x = a$ e $x = b$ e dal grafico di $f(x)$ (figura 2). Il trapezoide viene chiamato così perché somiglia a un trapezio con le basi parallele all'asse y.



▲ **Figura 2** **Il trapezoide.**

L'*area S di un trapezoide* non può essere calcolata in modo elementare, tuttavia possiamo approssimarla utilizzando il seguente procedimento:

- dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti uguali di ampiezza $h = \dfrac{b-a}{n}$ (per esempio, nella figura 3 abbiamo considerato $n = 6$);
- consideriamo gli n rettangoli aventi ciascuno per base un segmento di suddivisione e per altezza il segmento associato al minimo m_i che la funzione assume in tale intervallo;
- indichiamo con s_n la somma delle aree di tutti questi n rettangoli:

$$s_n = m_1 h + m_2 h + \ldots + m_n h = \sum_{i=1}^{n} m_i h.$$

● Poiché la funzione è continua, il teorema di Weierstrass garantisce che negli intervalli considerati esistono il minimo e il massimo assoluto.

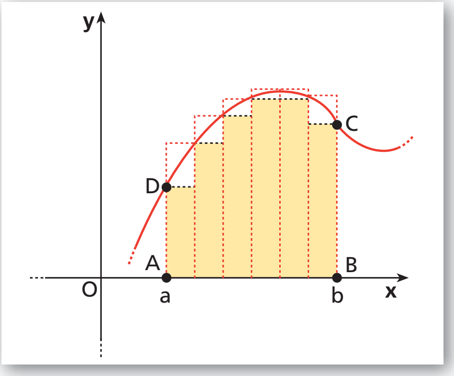
L'area del trapezoide viene così approssimata per difetto da s_n.

In maniera analoga, possiamo approssimare per eccesso l'area del trapezoide tramite la somma delle aree dei rettangoli associati a una scomposizione dell'intervallo $[a; b]$ in n parti uguali e aventi per altezza il segmento associato al massimo M_i della funzione nel corrispondente intervallo. Indichiamo la somma con S_n:

$$S_n = M_1h + M_2h + \ldots + M_nh = \sum_{i=1}^{n} M_ih.$$

s_n e S_n vengono chiamate rispettivamente **somma integrale inferiore** e **somma integrale superiore**. L'area S del trapezoide risulta compresa fra l'area per difetto e quella per eccesso, ossia possiamo scrivere:

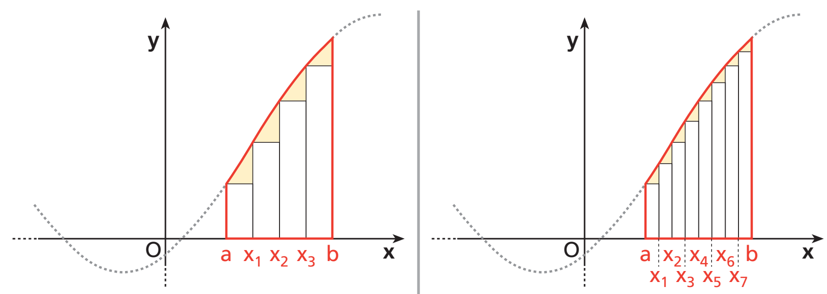
$$s_n \leq S \leq S_n.$$



▶ **Figura 3 L'area del trapezoide *ABCD* è compresa tra il plurirettangolo inscritto s_6 e il plurirettangolo circoscritto S_6.**

L'approssimazione delle due aree s_n e S_n risulta migliore man mano che si scelgono più piccoli gli intervalli di suddivisione di $[a; b]$.

◀ **Figura 4**



a. Per $n = 4$ l'intervallo è suddiviso in 4 parti. La somma delle aree dei 4 rettangoli approssima, per difetto, l'area del trapezoide.

b. Se $n = 8$, la somma delle aree degli 8 rettangoli approssima meglio della precedente, per difetto, l'area del trapezoide.

Per $n = 1, 2, 3, \ldots$ i valori di s_n e S_n formano le due successioni:

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$$

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

Si può dimostrare, utilizzando l'ipotesi della continuità della funzione $f(x)$ in $[a; b]$, che tali successioni convergono allo stesso limite ossia che:

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n.$$

Il limite delle due successioni si chiama **integrale definito** e viene indicato con il simbolo

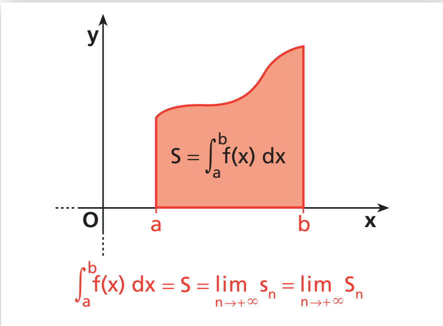
$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

che si legge «integrale da a a b di $f(x)$ in dx».

Il simbolo $\int$ rappresenta una S allungata per ricordare che, nella rappresentazione grafica, a un integrale corrisponde una somma di aree di rettangoli aventi altezza $f(x)$ e base dx.

Tale limite fornisce la misura dell'area S del trapezoide relativo a $f(x)$ e nell'intervallo $[a; b]$.

► Figura 5



La funzione è continua di segno qualsiasi

Il procedimento seguito per una funzione $f(x)$ positiva nell'intervallo $[a; b]$ può essere ripetuto anche per una funzione che cambia segno in $[a; b]$ e si dimostra il teorema seguente.

TEOREMA

Se una funzione $f(x)$ è continua in $[a; b]$ le successioni s_n e S_n per $n \to +\infty$ sono convergenti e ammettono lo stesso limite:

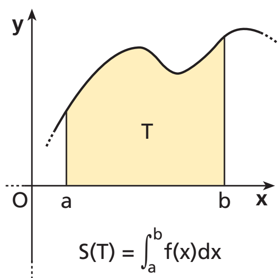
$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n.$$

DEFINIZIONE

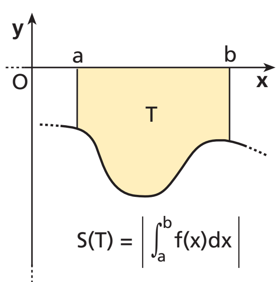
Integrale definito

Data una funzione $f(x)$ continua in $[a; b]$, si chiama integrale definito esteso all'intervallo $[a; b]$ il valore comune del limite per $n \to +\infty$ delle due successioni s_n, per difetto, e S_n, per eccesso. Tale valore viene indicato con la scrittura:

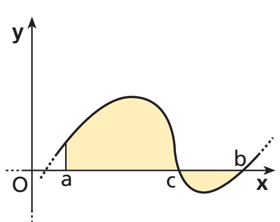
$$\int_a^b f(x)\, dx.$$



a



b



c

a e b sono gli **estremi di integrazione**: a è detto **estremo inferiore**, b **estremo superiore**. La funzione $f(x)$ è detta **funzione integranda**.

- Se $f(x) > 0$ in $[a; b]$, allora $\int_a^b f(x)\, dx > 0$ e il valore dell'integrale definito rappresenta l'area del trapezoide (figura *a*).
- Se $f(x) < 0$ in $[a; b]$, allora $\int_a^b f(x)\, dx < 0$. Per determinare l'area compresa tra il grafico di $f(x)$ e l'asse x (figura *b*) occorre calcolare il valore assoluto di $\int_a^b f(x)\, dx$.
- Se $f(x)$ cambia segno in $[a; b]$, allora $\int_a^b f(x)$ può essere positivo, negativo o nullo.

  Per calcolare l'area compresa tra il grafico di $f(x)$ e l'asse x occorre suddividere l'intervallo $[a; b]$ in sottointervalli in ognuno dei quali la funzione ha lo stesso segno (figura *c*). Riprenderemo l'argomento a pagina 2013.

A differenza dell'integrale indefinito, che è un insieme di funzioni, l'integrale definito è un numero e non dipende dalla variabile x.

La definizione generale di integrale definito

Nella definizione di integrale definito non è necessario, come abbiamo ipotizzato finora, considerare dei sottointervalli di $[a; b]$ tutti della stessa ampiezza e neppure prendere per $f(x)$ i valori minimi e massimi negli intervalli.
Consideriamo una funzione $y = f(x)$ continua in $[a; b]$ e dividiamo l'intervallo in n intervalli chiusi mediante i punti $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, con:

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n.$$

x_0 coincide con a; x_n coincide con b.
Le ampiezze degli intervalli possono essere diverse fra loro e sono date da:

$$\Delta x_1 = x_1 - a,$$
$$\Delta x_2 = x_2 - x_1,$$
$$\Delta x_3 = x_3 - x_2,$$
$$\ldots$$
$$\Delta x_n = b - x_{n-1}.$$

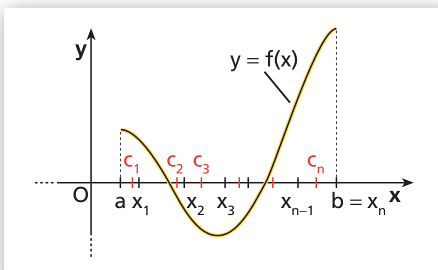
Il generico intervallo della suddivisione è $[x_{i-1}; x_i]$, con $i \in \mathbb{N}$ e $1 \le i \le n$.

Per ognuno degli intervalli fissiamo poi un qualsiasi punto dell'intervallo stesso (figura 6):

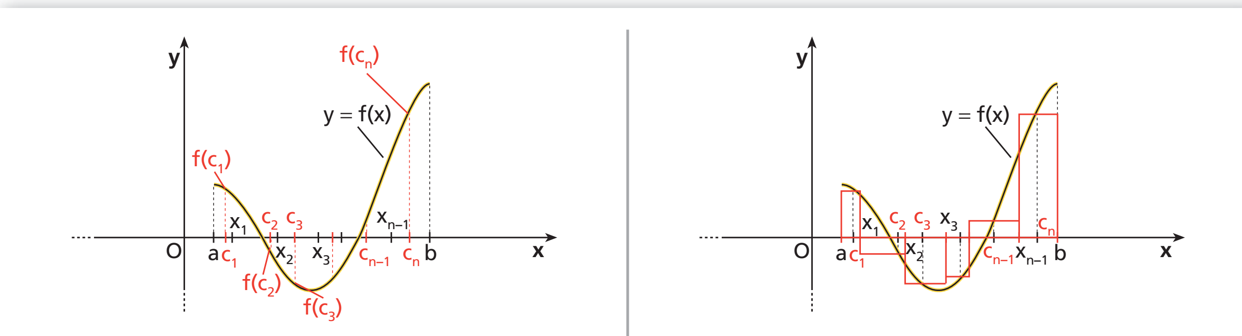
$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n.$$

Consideriamo i corrispondenti valori della funzione (figura 7a):

$$f(c_1), f(c_2), f(c_3), \ldots, f(c_n).$$



◄ **Figura 6** Dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti di ampiezza qualsiasi e scegliamo in ciascuna di esse un punto qualsiasi.



a. Consideriamo il valore della funzione per ognuno dei punti c_i scelti.

b. Per ciascun intervallo $[x_{i-1}; x_i]$ consideriamo il rettangolo di altezza $f(c_i)$.

▲ **Figura 7**

Scriviamo poi la somma $\overline{S}$ data da:

$$\overline{S} = f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + f(c_3) \cdot \Delta x_3 + \ldots + f(c_n) \cdot \Delta x_n.$$

La somma $\overline{S}$ dipende:

- dal numero di suddivisioni;

- dalle ampiezze Δx_n degli intervalli;
- dai punti c_n scelti all'interno dei diversi intervalli.

Fra le ampiezze degli intervalli indichiamo quella massima con Δx_{max}: se $\Delta x_{max} \to 0$, anche tutte le altre ampiezze tendono a 0.

Si può dimostrare che se Δx_{max} tende a 0, tutte le somme $\overline{S}$, ottenute scegliendo in qualsiasi modo la suddivisione dell'intervallo e i punti all'interno dei diversi intervalli, tendono a uno stesso valore S.

Diamo allora la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Integrale definito

Data una funzione $f(x)$, continua in $[a; b]$, si chiama integrale definito esteso all'intervallo $[a; b]$ il valore del limite per Δx_{max} che tende a 0 della somma $\overline{S}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_{max} \to 0} \overline{S}.$$

Poiché per calcolare il limite precedente si possono scegliere a piacere gli intervalli di suddivisione Δx_i e i valori $f(x_i)$, allora se suddividiamo l'intervallo $[a; b]$ in parti uguali e in ciascuna di queste consideriamo il valore minimo o massimo di $f(x)$, ritroviamo la definizione di integrale data nel sottoparagrafo precedente.

Per convenzione si pone:

DEFINIZIONE

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad$ se $a > b$.

Tutte le funzioni continue sono integrabili.

Se per una funzione esiste l'integrale definito in un intervallo $[a; b]$, si dice che la **funzione** è **integrabile in** $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$.

Enunciamo, senza dimostrarle, le seguenti proprietà.

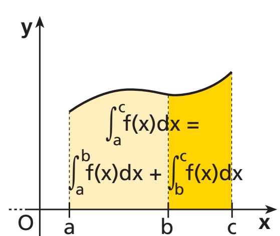
Le proprietà dell'integrale definito

PROPRIETÀ

Additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione

Se $f(x)$ è continua in un intervallo e a, b, c sono punti qualunque di tale intervallo, si ha:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$



Interpretazione geometrica nel caso che $f(x) > 0$ e $a < b < c$.

PROPRIETÀ

Integrale della somma di funzioni

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue in $[a; b]$, allora è continua anche la loro somma $f(x) + g(x)$, e risulta:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

PROPRIETÀ

Integrale del prodotto di una costante per una funzione

Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a; b]$, allora è continua anche la funzione $k \cdot f(x)$, con $k \in \mathbb{R}$, e risulta:

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

PROPRIETÀ

Confronto tra gli integrali di due funzioni

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue e tali che $f(x) \leq g(x)$ in ogni punto dell'intervallo $[a; b]$, allora l'integrale da a a b di $f(x)$ è minore o uguale all'integrale di $g(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

PROPRIETÀ

Integrale del valore assoluto di una funzione

Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[a; b]$, allora il valore assoluto dell'integrale da a a b della $f(x)$ è minore o uguale all'integrale del valore assoluto della $f(x)$:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

PROPRIETÀ

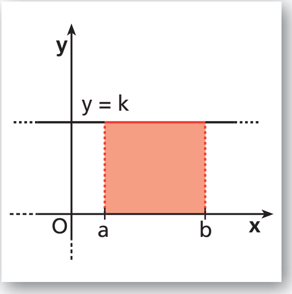
Integrale di una funzione costante

Se una funzione $f(x)$ è costante nell'intervallo $[a; b]$, cioè $f(x) = k$, allora l'integrale da a a b della $f(x)$ è uguale al prodotto di k per $(b - a)$:

$$\int_a^b k\,dx = k(b - a).$$

La proprietà dell'integrale di una funzione costante è valida per qualunque valore di k.

Se $k > 0$, il trapezoide è un rettangolo di base $b - a$ e altezza k.



▲ **Figura 8** Se $k > 0$, l'integrale $\int_a^b k dx$ rappresenta l'area del rettangolo, che è $k(b - a)$.

Il teorema della media

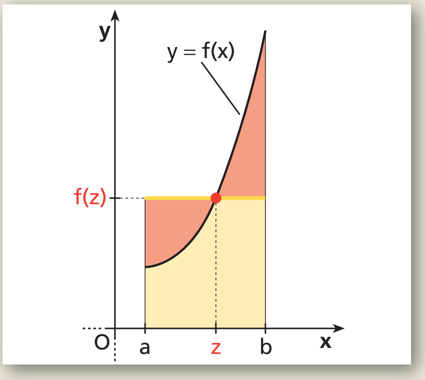
TEOREMA

Teorema della media

Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a; b]$, esiste almeno un punto z dell'intervallo tale che:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(z),$$

con $z \in [a; b]$.



DIMOSTRAZIONE

Poiché la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a; b]$, allora per il teorema di Weierstrass la funzione assume in $[a; b]$ il suo valore massimo M e il suo valore minimo m. Quindi, per ogni x appartenente ad $[a; b]$, deve valere la disuguaglianza:

$$m \le f(x) \le M.$$

Per le proprietà degli integrali, vale anche la disuguaglianza:

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx.$$

Applicando la proprietà dell'integrale di una funzione costante, possiamo scrivere:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Dividiamo tutti i membri della disuguaglianza per $(b-a)$:

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M.$$

Per il teorema dei valori intermedi, la funzione deve assumere almeno una volta tutti i valori compresi fra il suo massimo e il suo minimo, quindi deve esistere un punto z appartenente ad $[a; b]$ tale che:

$$f(z) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

Pertanto esiste almeno un punto z appartenente ad $[a; b]$ tale che:

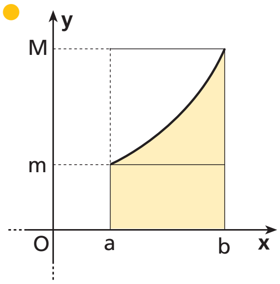
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(z)(b-a).$$

Il valore $\boldsymbol{f(z) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}}$ si chiama anche **valore medio** della funzione $f(x)$ in $[a; b]$.

● Geometricamente, se la funzione è positiva in $[a; b]$, il teorema della media esprime l'equivalenza fra un trapezoide, la cui area misura $\int_a^b f(x)\,dx$, e un rettangolo, aventi uguale base $b-a$. L'altezza del rettangolo è data dal valore di f in un particolare punto z dell'intervallo $[a; b]$:

$$f(z) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

●



L'area del trapezoide è compresa tra l'area del rettangolo minimo e l'area del rettangolo massimo di base $b-a$.

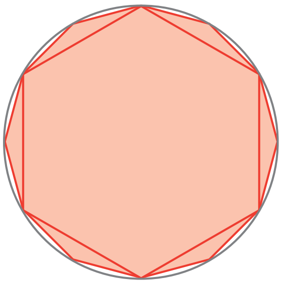
ESPLORAZIONE

Archimede e gli integrali ante litteram

Archimede di Siracusa, vissuto tra il 287 e il 212 a.C. circa, è stato una figura di riferimento per gli analisti del Seicento. Sfruttando il *metodo di esaustione*, già elaborato da Eudosso di Cnido (408-355 a.C. circa), egli determinò con buona approssimazione la misura della lunghezza della circonferenza, dell'area del cerchio, del segmento parabolico e di numerose altre superfici e volumi di rotazione.
Possiamo pensare il metodo di esaustione come una prima versione di calcolo integrale, perché si basava sull'idea di approssimare una superficie curva attraverso una sequenza di poligoni inscritti e circoscritti dal numero di lati via via crescente. Ai matematici greci però mancava il concetto di limite. Il metodo di esaustione non comprendeva alcun passaggio al limite e si arrivava a dimostrare la tesi, che doveva già essere nota a priori per altre vie, attraverso un ragionamento per assurdo.

L'area del cerchio…

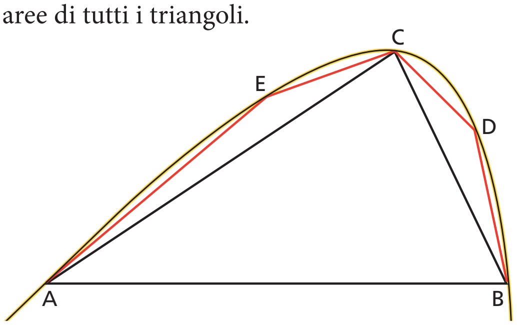
Per determinare l'area del cerchio, Archimede considerò una successione di poligoni inscritti e una successione di poligoni circoscritti, le cui aree rappresentavano rispettivamente una stima per difetto e una stima per eccesso dell'area del cerchio. Per esempio, all'aumentare del numero dei lati, l'area dei poligoni regolari inscritti approssima sempre meglio quella del cerchio. Ottenuta una buona stima dell'area del cerchio, sfruttò il principio di esaustione per la prova rigorosa.



In termini moderni noi diremmo che, comunque preso ε piccolo a piacere, esiste sempre un poligono inscritto tale che la differenza tra l'area A del cerchio e l'area del poligono è inferiore a ε (cioè è possibile avvicinarsi all'area del cerchio tanto quanto si vuole). La tesi si prova poi per assurdo: se si suppone che il cerchio abbia un'area A' inferiore ad A, allora esiste un poligono inscritto la cui area è maggiore di A', ma, essendo un poligono inscritto, la sua area non può superare quella del cerchio. Un ragionamento analogo vale per i poligoni circoscritti.

…e quella del segmento parabolico

Nel trattato *La quadratura della parabola* Archimede prova che l'area del segmento parabolico (la parte di piano compresa tra il segmento AB e la parabola) è uguale ai $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo costruito sulla base AB e avente la stessa altezza del segmento parabolico. Egli costruisce sulle corde AC e BC due triangoli aventi per base la corda e per altezza quella del segmento parabolico staccato dalla stessa. Procede poi costruendo triangoli sempre più piccoli sulle corde individuate dai triangoli precedenti e sommando le aree di tutti i triangoli.



Attività

L'ultimo problema di Archimede

Nel 212 a.C. Siracusa fu saccheggiata dai Romani. Plutarco narra che al soldato che gli ordinava di seguirlo, Archimede rispose di aspettare perché doveva finire di risolvere un problema geometrico. Il soldato si infuriò e lo uccise.
Per suo volere nella sua tomba vennero scolpite una sfera inscritta in un cilindro e la scritta «due terzi».

- Cerca notizie su Archimede, sulla sua tomba e sul suo contributo allo studio della sfera e del cilindro.

Cerca nel Web:
Archimede, Plutarco, Cicerone, sfera, cilindro

2. IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Il calcolo dell'integrale definito risulta molto laborioso se applichiamo la definizione.
In questo paragrafo faremo vedere che è possibile calcolare rapidamente l'integrale definito di una funzione utilizzando gli integrali indefiniti.

La funzione integrale

Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a; b]$. Consideriamo un punto qualsiasi x di $[a; b]$.

Definiamo **funzione integrale** di f in $[a; b]$ la funzione

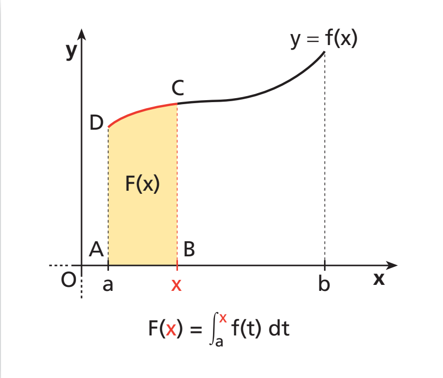
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

che associa a ogni $x \in [a;\ b]$ il numero reale $\int_a^x f(t)\,dt$, dove la variabile indipendente x coincide con l'estremo superiore di integrazione. Per non creare confusione fra variabili, la funzione integranda viene indicata con $f(t)$, dove t diventa la variabile di integrazione.

● Se la funzione $f(t)$ è positiva in $[a; b]$, la funzione integrale $F(x)$ rappresenta l'area del trapezoide $ABCD$ (figura 9). Tale area dipende dal valore di x, variabile nell'intervallo $[a; b]$. Dalla definizione di $F(x)$ otteniamo le seguenti relazioni:

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0, \quad F(b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

▶ Figura 9



● t si può sostituire con un'altra variabile, per esempio:

$$F(x) = \int_a^x f(z)\,dz = \int_a^x f(u)\,du \ldots$$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale

TEOREMA

Teorema fondamentale del calcolo integrale

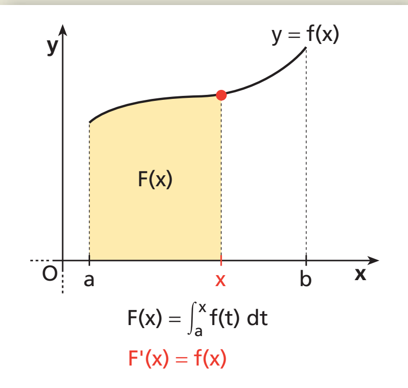
Se una funzione $f(x)$ è continua in $[a; b]$, allora esiste la derivata della sua funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

per ogni punto x dell'intervallo $[a; b]$ ed è uguale a $f(x)$, cioè:

$$F'(x) = f(x),$$

ovvero $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$.



● Questo teorema è anche chiamato di **Torricelli-Barrow**. La sua importanza è dovuta al fatto che collega il concetto di integrale definito a quello di integrale indefinito.

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che esiste la derivata di $F(x)$ e calcoliamo tale derivata applicando la definizione.

Incrementiamo la variabile x di un valore $h \neq 0$ tale che $a < x + h < b$ e calcoliamo la differenza $F(x+h) - F(x)$ utilizzando l'espressione della funzione integrale (figura *a*):

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt.$$

Applichiamo la proprietà di additività dell'integrale:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Per il teorema della media, il valore dell'integrale è uguale al prodotto dell'ampiezza h dell'intervallo di integrazione per il valore $f(z)$, dove z è un particolare punto dell'intervallo $[x; x+h]$, nel caso in cui sia $h > 0$, oppure dell'intervallo $[x+h; x]$, se $h < 0$; pertanto possiamo scrivere:

$$F(x+h) - F(x) = h \cdot f(z).$$

Dividiamo i due membri per h:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(z).$$

Analizziamo il comportamento di $f(z)$ al tendere a 0 di h. Sia $h > 0$; poiché z è compreso fra x e $x+h$ (figura *b*), se h tende a 0 (da destra), allora z tende a x (da destra) e $\lim_{h \to 0^+} f(z) = \lim_{z \to x^+} f(z) = f(x)$ perché f è continua per ipotesi. Con ragionamento analogo, se $h < 0$, si deduce che $\lim_{h \to 0^-} f(z) = \lim_{z \to x^-} f(z) = f(x)$. Dunque:

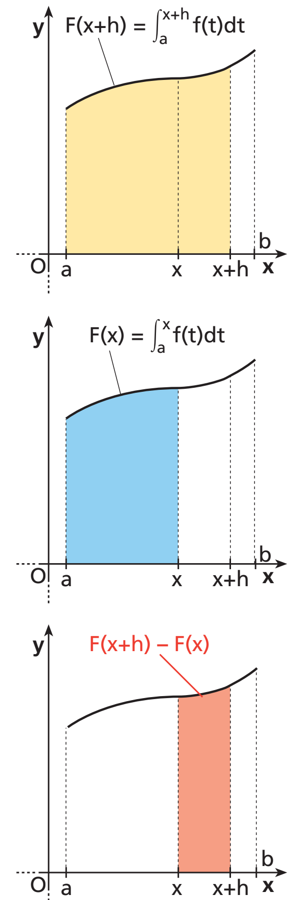
$$\lim_{h \to 0} f(z) = \lim_{z \to x} f(z) = f(x).$$

Possiamo pertanto concludere che esiste anche il limite, per h tendente a 0, dell'espressione al primo membro, cioè del rapporto incrementale della F nel punto x, e:

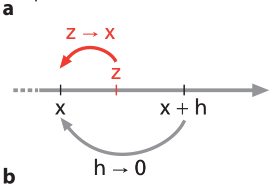
$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(z) = f(x).$$

La funzione F è quindi, per definizione, derivabile e risulta:

$$F'(x) = f(x).$$



a



b

- La funzione integrale $F(x)$, essendo derivabile, è continua.
- La derivata di $F(x)$ coincide con il valore che la funzione integranda $f(t)$ assume nell'estremo variabile x di integrazione, ossia
$$D\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Per il teorema ora dimostrato, una funzione f continua in $[a; b]$ ammette come primitiva fondamentale la funzione integrale $F(x)$, con x variabile nell'intervallo $[a; b]$. Pertanto, l'integrale indefinito di f, inteso come la totalità delle sue primitive, si esprime come:

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + c,$$

dove c è una qualunque costante reale.

Il calcolo dell'integrale definito

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale possiamo ottenere la formula del calcolo dell'integrale definito.

Sia $\varphi(x)$ una primitiva qualsiasi di $f(x)$.
Dal teorema fondamentale del calcolo integrale sappiamo che la funzione integrale $F(x)$ è una *particolare* primitiva della funzione f. Pertanto $\varphi(x)$ risulta della forma:

$$\varphi(x) = F(x) + c = \int_a^x f(t)\,dt + c,$$

dove c è una costante reale arbitraria.

- Calcoliamo $\varphi(a)$ (sostituiamo all'estremo di integrazione x il valore a):

$$\varphi(a) = \int_a^a f(t)\,dt + c = 0 + c = c.$$

- Calcoliamo $\varphi(b)$ (sostituiamo all'estremo di integrazione x il valore b):

$\varphi(b) = \int_a^b f(t)\,dt + c$. Poiché $\varphi(a) = c$, otteniamo:

$$\varphi(b) = \int_a^b f(t)\,dt + \varphi(a).$$

Portiamo al primo membro $\varphi(a)$,

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f(t)\,dt,$$

e scriviamo l'uguaglianza da destra a sinistra:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Poiché non ci sono più ambiguità di variabili, possiamo riutilizzare la variabile x e scrivere:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a).}$$

Abbiamo ottenuto la seguente regola.

L'integrale definito di una funzione continua $f(x)$ è uguale alla differenza tra i valori assunti da una qualunque primitiva $\varphi(x)$ di $f(x)$ rispettivamente nell'estremo superiore di integrazione e nell'estremo inferiore.

Si è soliti indicare la differenza $\varphi(b) - \varphi(a)$ con $[\varphi(x)]_a^b$.
La formula trovata permette di ricondurre il calcolo di un integrale definito a quello di un integrale indefinito. Si supera in tal modo la difficoltà del calcolo del limite della successione s_n, che, in generale, non è facile da determinare.

ESEMPIO

Calcoliamo $\int_2^3 2x\,dx$.

Utilizziamo l'integrale indefinito per determinare le primitive di $2x$:

$$\int 2x\,dx = x^2 + c.$$

Scegliamo la primitiva con $c = 0$, ossia x^2:

$$\int_2^3 2x\,dx = [x^2]_2^3.$$

Sostituiamo a x prima il valore 3 e poi il valore 2, ottenendo:

$$[x^2]_2^3 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5.$$

- Per definizione:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

- Questa formula è detta anche formula di **Leibniz-Newton**.

- Di solito nella totalità delle primitive si sceglie quella corrispondente al valore di $c = 0$.

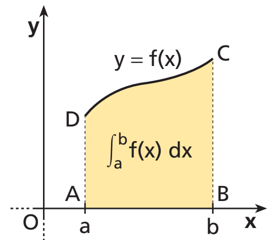
- Verifica che il risultato non cambia se scegliamo come primitiva, per esempio, $x^2 + 3$.

3. IL CALCOLO DELLE AREE DI SUPERFICI PIANE

IN PRATICA
▶ Videolezione 78

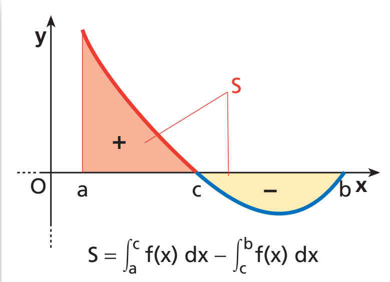
Area compresa tra una curva e l'asse x

Abbiamo visto che l'integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$, con $a < b$, se $f(x) > 0$, rappresenta l'area della regione di piano delimitata dal grafico di $f(x)$, dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$.



Se invece $f(x) < 0$, l'area è uguale a $-\int_a^b f(x)\,dx$.

Se $f(x)$ cambia segno nell'intervallo $[a; b]$, per determinare l'area compresa tra il suo grafico e l'asse x occorre suddividere l'intervallo $[a; b]$ in sottointervalli tali che in ciascuno di essi la funzione mantenga lo stesso segno. Si calcolano poi gli integrali nei diversi intervalli e si sommano algebricamente i risultati.



● Per calcolare l'area è sempre opportuno tracciare il grafico della funzione.

◀ Figura 10

ESEMPIO

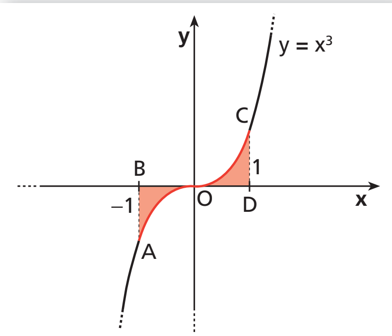
Calcoliamo l'area della superficie compresa tra il grafico della funzione $y = x^3$ e l'asse x nell'intervallo $[-1; 1]$.

Si ha:

$$S = -\int_{-1}^{0} x^3\,dx + \int_0^1 x^3\,dx =$$

$$= -\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= -\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$



● La funzione $y = x^3$ è dispari e ha grafico simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani. Le aree delle regioni ABO e ODC sono, di conseguenza, uguali. Se calcoliamo $\int_{-1}^{1} x^3\,dx$ otteniamo il valore 0.

◀ Figura 11

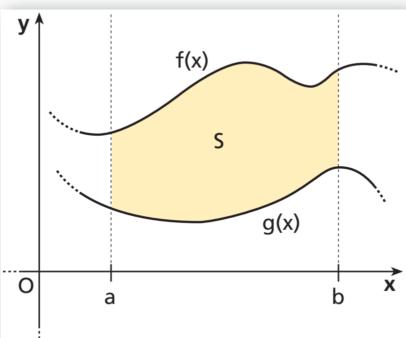
Area compresa tra due curve

Consideriamo due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ continue, entrambe positive e con $f(x) \geq g(x)$ nell'intervallo $[a; b]$. L'area S della superficie racchiusa dai loro grafici nell'intervallo $[a; b]$ si può ottenere facendo la differenza tra l'area del trapezoide individuato da $f(x)$ e l'area del trapezoide individuato da $g(x)$, cioè:

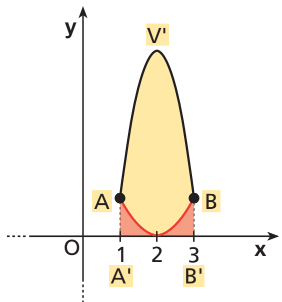
$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

Applicando la proprietà dell'integrale definito della somma di funzioni si ha:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$



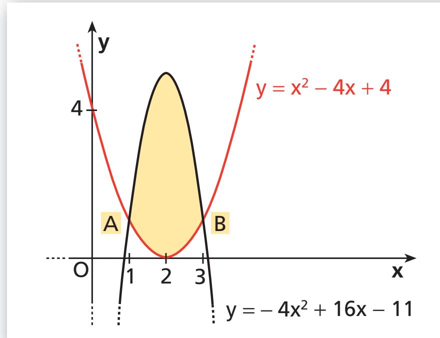
◀ Figura 12



ESEMPIO

Calcoliamo l'area della superficie racchiusa dalle due parabole di equazioni $y = x^2 - 4x + 4$ e $y = -4x^2 + 16x - 11$ (figura 13).

Le due parabole si intersecano nei punti $A(1; 1)$ e $B(3; 1)$.
L'area S cercata è quindi data dalla differenza fra l'area del trapezoide $A'AV'BB'$ e l'area del trapezoide $AA'B'B$ (figura a sinistra).



► **Figura 13**

$$S = \text{Area}(A'AV'BB') - \text{Area}(AA'B'B) =$$

$$= \int_1^3 (-4x^2 + 16x - 11)\,dx - \int_1^3 (x^2 - 4x + 4)\,dx.$$

Per la proprietà dell'integrale della somma di funzioni, scriviamo:

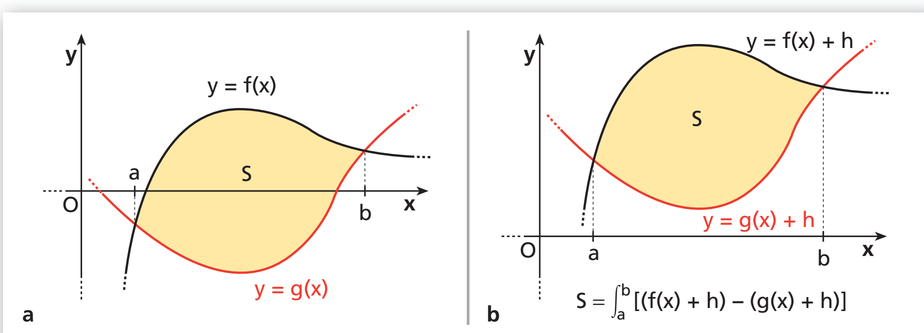
$$S = \int_1^3 (-4x^2 + 16x - 11 - x^2 + 4x - 4)\,dx =$$

$$= \int_1^3 (-5x^2 + 20x - 15)\,dx = \left[\frac{-5x^3}{3} + \frac{20x^2}{2} - 15x\right]_1^3 =$$

$$= -\cancel{45} + \cancel{90} - \cancel{45} + \frac{5}{3} - 10 + 15 = \frac{20}{3}.$$

Pertanto la misura dell'area racchiusa dalle due curve è $S = \dfrac{20}{3}$.

La formula resta valida anche se una o entrambe le funzioni sono negative. Infatti se la superficie non si trova tutta al di sopra dell'asse x, si può effettuare una traslazione in modo che essa sia tutta al di sopra dell'asse x.



► **Figura 14** L'area S della superficie delimitata dalle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ non cambia se trasliamo in verticale entrambe le funzioni di h. Prendiamo $h > 0$ in modo che i grafici di entrambe le funzioni traslate siano sopra all'asse x.

Allora:

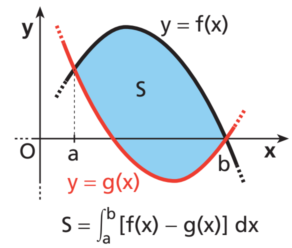
$$S = \int_a^b [(f(x) + h) - (g(x) + h)]\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

Quindi in generale vale la seguente regola.

REGOLA

Area della superficie delimitata da due funzioni

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue definite nello stesso intervallo $[a; b]$, con $f(x) \geq g(x)$, per ogni x in $[a; b]$, i cui grafici racchiudano una superficie; allora l'area S della superficie è data da: $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$.



Area del segmento parabolico

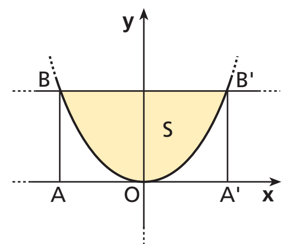
TEOREMA

Teorema di Archimede

L'area del segmento parabolico è uguale ai $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo a esso circoscritto.

Consideriamo per esempio la parabola di equazione $y = ax^2$, con $a > 0$. Il segmento parabolico è la zona colorata S della figura a lato.

Se i punti A e A' hanno rispettivamente ascisse $-k$ e k, allora i punti B e B' hanno ordinate ak^2 e il rettangolo $AA'B'B$ ha area $2k \cdot (ak^2) = 2ak^3$. Poiché la retta BB' ha equazione $y = ak^2$, l'area del segmento parabolico S si calcola con l'integrale:



$$\int_{-k}^{k} (ak^2 - ax^2)dx = \left[ak^2x - a\frac{x^3}{3}\right]_{-k}^{k} =$$

$$= ak^3 - a\frac{k^3}{3} - \left(-ak^3 + a\frac{k^3}{3}\right) = \frac{4}{3}ak^3 = \frac{2}{3}(2ak^3).$$

Dunque l'area del segmento parabolico è $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo $AA'B'B$.

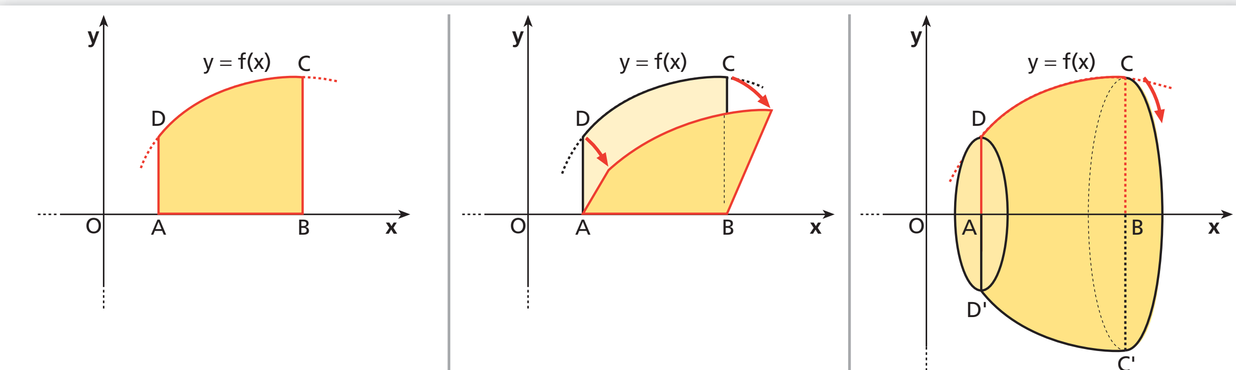
4. IL CALCOLO DEI VOLUMI

I volumi dei solidi di rotazione

Consideriamo la funzione $y = f(x)$, continua nell'intervallo $[a; b]$ e non negativa, e il trapezoide esteso all'intervallo $[a; b]$. Se facciamo ruotare il trapezoide attorno all'asse x di un giro completo (ossia di 360°), otteniamo un solido di rotazione.

IN PRATICA
▶ Videolezione 79

Si noti che ogni sezione del solido con un piano perpendicolare all'asse x è un cerchio. ▼ Figura 15



a. È dato il trapezoide *ABCD*.

b. Ruotiamo il trapezoide attorno all'asse *x* (il lato *AB* rimane fisso).

c. Abbiamo ottenuto il solido generato dalla rotazione di 360° del trapezoide attorno all'asse *x*.

Calcoliamo il volume di tale solido.

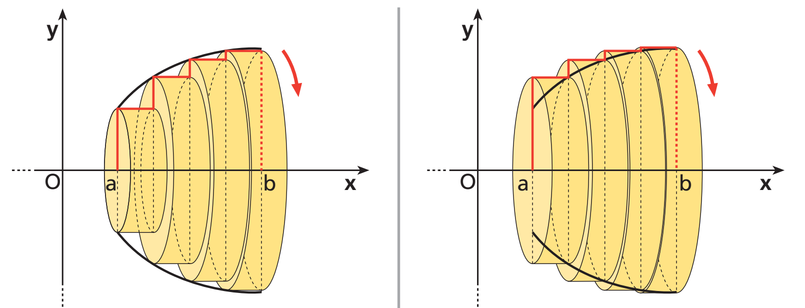
Dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti uguali, ognuna di lunghezza $h = \dfrac{b-a}{n}$.

In ogni intervallo consideriamo il minimo m_i e il massimo M_i di $f(x)$ e disegniamo i rettangoli inscritti e circoscritti al trapezoide di altezze m_i e M_i.

Nella rotazione completa intorno all'asse delle x ogni rettangolo descrive un cilindro circolare retto di altezza h e raggio di base m_i o M_i (figura 16).

● Ricordiamo che ogni rettangolo per difetto ha per base h e per altezza il valore minimo m_i che la funzione assume nell'intervallo; ogni rettangolo per eccesso ha per base h e per altezza il valore massimo M_i.

▶ Figura 16



a. Ogni cilindro per difetto ha per base un cerchio di raggio m_i e per altezza h.

b. Ogni cilindro per eccesso ha per base un cerchio di raggio M_i e per altezza h.

La somma dei volumi degli n cilindri con base il cerchio di raggio m_i approssima per difetto il volume del solido di rotazione iniziale, e la somma dei volumi degli n cilindri con base il cerchio di raggio M_i approssima per eccesso il volume dello stesso solido.

Poiché la formula del volume del cilindro circolare di raggio r e altezza h è $\pi r^2 h$, il volume v_n dei cilindri approssimanti il solido per difetto e il volume V_n dei cilindri approssimanti per eccesso sono:

$$v_n = \pi m_1^2 h + \pi m_2^2 h + \pi m_3^2 h + \ldots + \pi m_n^2 h;$$

$$V_n = \pi M_1^2 h + \pi M_2^2 h + \pi M_3^2 h + \ldots + \pi M_n^2 h.$$

Si può dimostrare che, quando $n \to +\infty$, le due successioni tendono allo stesso limite e tale limite è uguale al prodotto di π per l'integrale definito da a a b del quadrato di $f(x)$, ossia:

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} V_n = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

DEFINIZIONE

Volume di un solido di rotazione

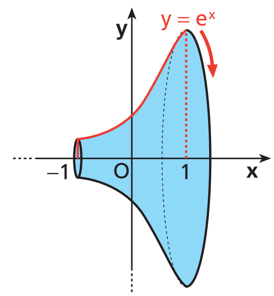
Dato il trapezoide esteso all'intervallo $[a; b]$, delimitato dal grafico della funzione $y = f(x)$ (positiva o nulla), dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$, si chiama volume del solido che si ottiene ruotando il trapezoide intorno all'asse x di un giro completo il numero espresso dal seguente integrale:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

ESEMPIO

1. Calcoliamo il volume V del solido ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse x della regione di piano delimitata dal grafico della funzione $y = e^x$, con x appartenente all'intervallo $[-1; 1]$.

$$V = \pi \cdot \int_{-1}^{1} (e^x)^2\, dx = \pi \cdot \int_{-1}^{1} e^{2x}\, dx = \pi \cdot \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-1}^{1} = \pi \cdot \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2}\right).$$

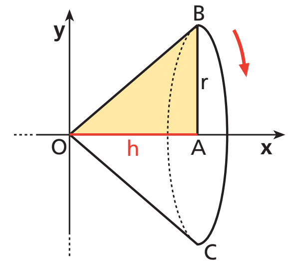


2. Volume del cono

Consideriamo il cono ottenuto dalla rotazione del triangolo OAB attorno a OA. Se r è il raggio della base e h è l'altezza del cono, allora i punti A e B hanno coordinate $A(h; 0)$ e $B(h; r)$.

Il triangolo OAB è il trapezoide delimitato dal grafico della retta OB che ha equazione $y = \frac{r}{h} \cdot x$. Allora, applicando la definizione, il volume del cono è dato da:

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \int_0^h x^2\, dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$



Nell'esempio 2 vediamo come con la formula generale del volume di un solido di rotazione si possono riottenere le regole per il calcolo dei volumi dei solidi rotondi studiati in geometria. Prova a ricavare il volume del cilindro.

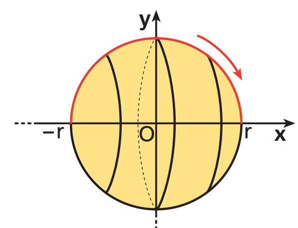
3. Volume della sfera

L'equazione della semicirconferenza segnata in rosso nella figura a lato è $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Quindi, il volume della sfera è:

$$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \cdot \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \cdot \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} =$$

$$= \pi \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$



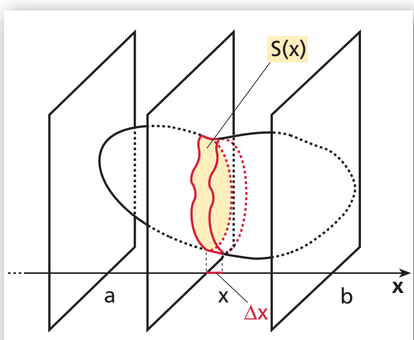
IN PRATICA
▶ Videolezione 80

I volumi dei solidi

Dato il solido T della figura, consideriamo due piani paralleli α e β che delimitano T, perpendicolari all'asse x e che lo intersecano in a e b.

Dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti uguali di lunghezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e per ognuno dei punti di suddivisione conduciamo un piano parallelo ad α e a β.

Ogni piano, intersecando il solido, determina una sezione di area generica.



◀ **Figura 17**

Con un procedimento simile a quello seguito per i solidi di rotazione possiamo dimostrare che il volume V del solido si ottiene con l'integrale:

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$

Per poter utilizzare questa formula nel calcolo di V, deve essere nota la funzione $S(x)$ che esprime l'area della generica sezione del solido al variare di x.

▶ Figura 18

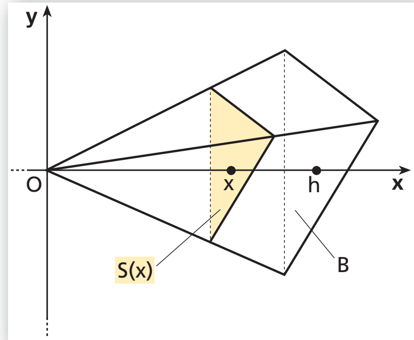
ESEMPIO

Volume della piramide

Calcoliamo il volume della piramide retta di altezza h e area di base B.

Detta $S(x)$ l'area di una generica sezione a distanza x dal vertice O e parallela alla base, vale la proporzione:

$$S(x) : x^2 = B : h^2 \to S(x) = \frac{B}{h^2}\, x^2.$$



Sostituiamo nella formula del volume:

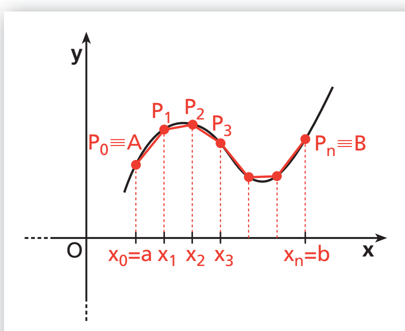
$$V = \int_0^h \frac{B}{h^2}\, x^2\, dx = \left[\frac{B}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{Bh}{3}.$$

Ritroviamo la formula già nota del volume della piramide.

5. LA LUNGHEZZA DI UN ARCO DI CURVA E L'AREA DI UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE

La lunghezza di un arco di curva

Consideriamo una funzione $f(x)$ derivabile con derivata continua nell'intervallo $[a; b]$ e disegniamo il suo grafico (figura 19).



◀ Figura 19

Consideriamo l'arco $\overset{\frown}{AB}$ della curva e la poligonale che ha per vertici i punti P_0, P_1, P_2, …, P_n, con P_0 coincidente con A e P_n coincidente con B. La lunghezza l_n della poligonale inscritta nella curva può essere calcolata sommando le distanze fra i punti P_0, P_1, P_2, …, P_n:

$$l_n = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \ldots + \overline{P_{n-1}P_n}.$$

Poiché i punti P_0, P_1, …, P_n hanno coordinate

$$P_0(x_0; f(x_0)),\ P_1(x_1; f(x_1)), \ldots, P_n(x_n; f(x_n)),$$

allora per ogni $i = 1, 2, 3, \dots, n$ la lunghezza del segmento $P_{i-1}P_i$ risulta:

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$

Essendo la funzione derivabile in $[a; b]$, applichiamo il teorema di Lagrange in ogni intervallo $[x_{i-1}; x_i]$ per $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\exists c_i \in]x_{i-1}; x_i[\text{ tale che } f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},$$

cioè

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Allora la lunghezza del segmento $P_{i-1}P_i$ risulta:

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)]^2(x_i - x_{i-1})^2} =$$

$$= (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}.$$

Se indichiamo con Δx_i l'espressione $x_i - x_{i-1}$, la lunghezza della poligonale è:

$$l_n = \Delta x_1\sqrt{1 + [f'(c_1)]^2} + \Delta x_2\sqrt{1 + [f'(c_2)]^2} + \dots + \Delta x_n\sqrt{1 + [f'(c_n)]^2}.$$

Essa dipende dal numero n di suddivisioni e dai punti scelti per la suddivisione. Tanto minore è l'ampiezza degli intervalli $[x_{i-1}; x_i]$, tanto meglio la poligonale approssima la curva.
Essendo per ipotesi $f'(x)$ continua, quando la massima ampiezza degli intervalli Δx_{max} tende a zero, tutte le lunghezze l_n, ottenute scegliendo in qualsiasi modo la suddivisione dell'intervallo $[a; b]$, tendono all'integrale definito della funzione $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ esteso all'intervallo $[a; b]$:

$$l = \lim_{\Delta x_{\text{max}} \to 0} l_n = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

● Applichiamo la formula della distanza fra due punti.

● Il teorema di Lagrange afferma che, se $f(x)$ è continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$, esiste almeno un punto interno c di $[a; b]$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

● Infatti è verificata la definizione generale di integrale definito per la funzione $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$.

DEFINIZIONE

Lunghezza di una curva

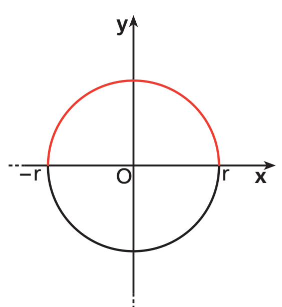
Data la funzione $y = f(x)$ derivabile con derivata continua nell'intervallo $[a; b]$, si chiama lunghezza della curva che rappresenta il grafico della funzione, limitata dalle rette di equazioni $x = a$ e $x = b$, il numero espresso dal seguente integrale:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

ESEMPIO

Calcoliamo la lunghezza della circonferenza di raggio r.
Poiché la semicirconferenza i cui punti hanno ordinata positiva ha equazione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, con x appartenente all'intervallo $[-r; r]$, la sua derivata è:

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$



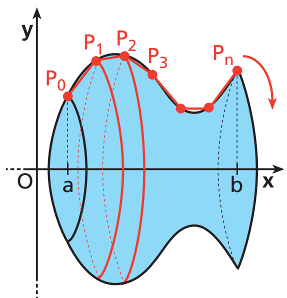
Allora, applicando la formula della lunghezza di una curva, otteniamo:

$$l=\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\int_{-r}^{r}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=r\int_{-r}^{r}\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}\,dx=$$

$$=r\cdot\left[\operatorname{arcsen}\frac{x}{r}\right]_{-r}^{r}=r\cdot\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right]=\pi r.$$

Ritroviamo dunque per la lunghezza della circonferenza il valore $2\pi r$.

L'area di una superficie di rotazione



Se la curva di equazione $y = f(x)$ viene fatta ruotare con una rotazione completa attorno all'asse x, si ottiene una superficie di rotazione.
Dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti e consideriamo la poligonale inscritta nella curva, che ha per vertici i punti $P_0, P_1, \ldots, P_n$ (come nella figura a lato). Nella rotazione completa attorno all'asse x, ogni segmento $P_{i-1}P_i$ della poligonale descrive un tronco di cono che ha come apotema $P_{i-1}P_i$ e come basi due cerchi rispettivamente di raggio $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$. La somma delle aree delle superfici laterali di questi tronchi di cono approssima l'area della superficie di rotazione.

Con procedimento analogo a quello adottato per la lunghezza di una curva si dimostra la seguente formula:

$$S = 2\pi\cdot\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

DEFINIZIONE

Area di una superficie di rotazione

Data la funzione $y = f(x)$ derivabile nell'intervallo $[a; b]$, si chiama area della superficie che si ottiene ruotando in una rotazione completa il grafico della funzione, limitato dalle rette di equazione $x = a$ e $x = b$, il numero espresso dal seguente integrale:

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

ESEMPIO

Calcoliamo l'area della superficie della sfera di raggio r, ottenuta dalla rotazione completa della semicirconferenza di equazione $y = \sqrt{r^2-x^2}$ attorno all'asse x.
Calcoliamo l'area della superficie sferica utilizzando la definizione:

$$S = 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx=$$

$$=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=$$

$$=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r}r\,dx=$$

$$=2\pi r\int_{-r}^{r}dx=2\pi r[x]_{-r}^{r}=4\pi r^2.$$

6. GLI INTEGRALI IMPROPRI

Nei precedenti paragrafi abbiamo calcolato gli integrali definiti di funzioni continue in intervalli limitati e chiusi $[a; b]$. In questo paragrafo vedremo come il concetto di integrale possa essere ampliato considerando funzioni con un numero finito di punti di discontinuità in un intervallo limitato oppure considerando intervalli illimitati.

L'integrale di una funzione con un numero finito di punti di discontinuità in [*a*; *b*]

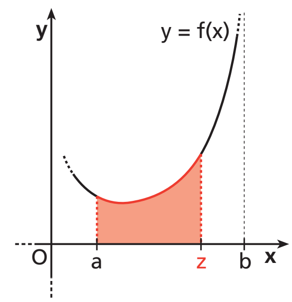
Consideriamo per primo il caso in cui la funzione $f(x)$ sia continua in tutti i punti dell'intervallo $[a; b[$ ma non in b.

Consideriamo un punto z interno all'intervallo $[a; b[$: la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a; z]$, quindi esiste l'integrale $\int_a^z f(x)\,dx$, il cui valore è un numero reale.

Questo vale per tutti i punti z dell'intervallo $[a; b[$, perciò possiamo costruire la funzione integrale

$$F(z) = \int_a^z f(x)\,dx,$$

definita in $[a; b[$.



Se esiste finito il limite di $F(z)$ quando z tende a b da sinistra, cioè se esiste

$$\lim_{z \to b^-} F(z),$$

allora si dice che la funzione $f(x)$ è **integrabile in senso improprio in [*a*; *b*]** e si definisce:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z \to b^-} \int_a^z f(x)\,dx.$$

L'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ è detto **integrale improprio** della funzione $f(x)$ in $[a; b]$ e si dice anche che tale integrale è **convergente**.

Se il limite considerato non esiste oppure è infinito, si dice che la funzione non è integrabile in senso improprio in $[a; b]$ o anche che l'integrale è rispettivamente **indeterminato** oppure **divergente**.

● Si dice anche che la funzione è **integrabile in senso generalizzato**.

● La definizione data è utile per calcolare l'integrale per tutti i casi di discontinuità in b.
Essa può anche essere applicata quando in b la funzione è continua. In questo caso si ottiene lo stesso risultato che si ha utilizzando la definizione già data di integrale definito.

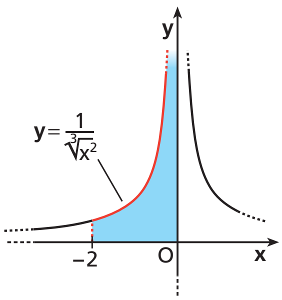
ESEMPIO

Calcoliamo, se possibile, l'integrale improprio della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ nell'intervallo $[-2; 0]$. Osserviamo che la funzione tende a $+\infty$ per $x \to 0^-$.

Determiniamo la funzione $F(z)$:

$$F(z) = \int_{-2}^{z} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \left[\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\right]_{-2}^{z} = \left[\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right]_{-2}^{z} = \left[3\sqrt[3]{x}\right]_{-2}^{z} =$$

$$= 3\sqrt[3]{z} + 3\sqrt[3]{2}.$$



La regione colorata non è limitata, ma la sua area è finita.

Calcoliamo $\lim_{z \to 0^-} F(z)$:

$$\lim_{z \to 0^-} (3\sqrt[3]{z} + 3\sqrt[3]{2}) = 3\sqrt[3]{2}.$$

La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $[-2; 0]$ e vale:

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = 3\sqrt[3]{2}.$$

Se la funzione $f(x)$ è continua in tutti i punti dell'intervallo $]a; b]$, ma non in a, possiamo definire l'integrale $\int_a^b f(x)\, dx$ in modo analogo.
Considerato $z \in\,]a; b]$, se esiste finito il limite della funzione $F(z) = \int_z^b f(x)\, dx$ quando z tende ad a da destra, cioè se esiste

$$\lim_{z \to a^+} F(z),$$

allora si dice che la funzione $f(x)$ è **integrabile in senso improprio in $[a; b]$** e si definisce:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{z \to a^+} \int_z^b f(x)\, dx.$$

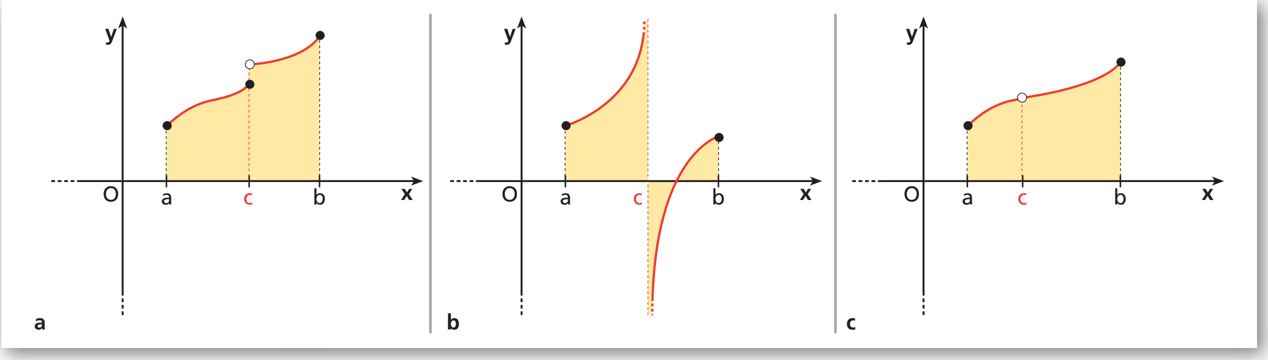
Prova a dimostrare che la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ non è integrabile in senso improprio in $[0; 1]$.

Se la funzione ha un punto di discontinuità in un punto c interno all'intervallo $[a; b]$, l'integrale $\int_a^b f(x)\, dx$ può essere definito, in senso improprio, come la somma degli integrali $\int_a^c f(x)\, dx$ e $\int_c^b f(x)\, dx$, se tali integrali esistono, in base alle definizioni precedenti:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)\, dx + \lim_{z \to c^+} \int_z^b f(x)\, dx.$$

▼ **Figura 20** $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$

L'integrale improprio può essere utilizzato con tutte le specie di discontinuità.



In modo analogo la definizione di integrale può essere estesa al caso di una funzione con un numero finito di punti di discontinuità.

L'integrale di una funzione in un intervallo illimitato

Consideriamo una funzione $f(x)$ continua in tutti i punti di $[a; +\infty[$.
Comunque si scelga un punto z interno all'intervallo $[a; +\infty[$, esiste l'integrale

$\int_a^z f(x)\,dx$ il cui valore è un numero reale, quindi possiamo costruire anche in questo caso la funzione integrale:

$$F(z) = \int_a^z f(x)\,dx,$$

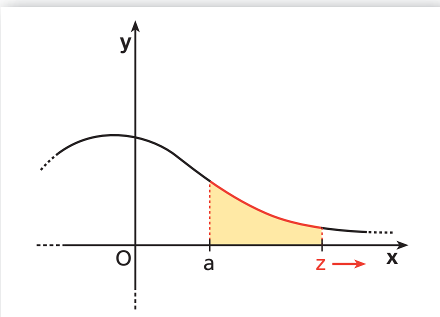
definita in $[a; +\infty[$.
Se esiste finito il limite della funzione $F(z)$ quando z tende a $+\infty$, cioè se esiste

$$\lim_{z \to +\infty} F(z),$$

allora si dice che la funzione $f(x)$ **è integrabile in senso improprio in** $[a; +\infty[$ e si definisce:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{z \to +\infty} \int_a^z f(x)\,dx.$$

Anche in questo caso si dice che l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è **convergente**.



◀ **Figura 21** Significato geometrico dell'integrale improprio nell'intervallo $[a; +\infty[$ nel caso di una funzione positiva. La regione compresa tra il grafico di $f(x)$ e l'asse x, tra a e $+\infty$, non è limitata, ma la sua area è finita.

● Se il limite considerato è infinito, si dice che l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è **divergente**. Se il limite non esiste, l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è **indeterminato**.
In entrambi i casi diciamo che la funzione $f(x)$ non è integrabile in senso improprio in $[a; +\infty[$.

In modo del tutto analogo, se una funzione è continua in $]-\infty; a]$ e se esiste finito il limite $\lim_{z \to -\infty} \int_z^a f(x)\,dx$, diciamo che la funzione $f(x)$ è integrabile in senso improprio in $]-\infty; a]$ e definiamo:

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{z \to -\infty} \int_z^a f(x)\,dx.$$

ESEMPIO

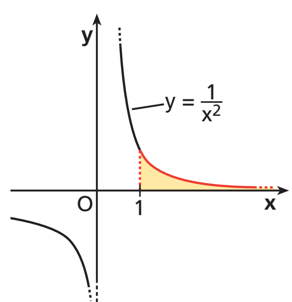
Calcoliamo, se esiste, l'integrale improprio della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nell'intervallo $[1; +\infty[$.
Determiniamo la funzione integrale $F(z)$, con z appartenente a $[1; +\infty[$:

$$F(z) = \int_1^z \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^z = -\frac{1}{z} + 1.$$

Calcoliamo $\lim_{z \to +\infty} F(z)$:

$$\lim_{z \to +\infty}\left(-\frac{1}{z} + 1\right) = 1.$$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ è integrabile in senso improprio in $[1; +\infty[$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$.



7. APPLICAZIONI DEGLI INTEGRALI ALLA FISICA

Gli integrali definiti non sono utilizzati solo in ambito geometrico, ma trovano larga applicazione anche in fisica. Vediamo un esempio.

Lo spazio e la velocità

In un moto rettilineo sappiamo che, se $s(t)$ è la posizione, cioè l'ascissa di un punto materiale all'istante t, allora la velocità e l'accelerazione del punto in quell'istante sono:

$$v(t) = s'(t) \qquad \text{velocità;}$$

$$a(t) = v'(t) = s''(t) \qquad \text{accelerazione.}$$

Quindi possiamo dedurre che la velocità $v(t)$ è una primitiva dell'accelerazione $a(t)$ e che la posizione $s(t)$ è una primitiva della velocità $v(t)$. Pertanto, nota l'accelerazione in funzione del tempo t, per determinare la velocità e la legge del moto, basta integrare successivamente $a(t)$ applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(z)\,dz \quad \rightarrow \quad v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(z)\,dz;$$

$$s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(z)\,dz \quad \rightarrow \quad s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(z)\,dz.$$

ESEMPIO

Determiniamo la legge del moto di un punto che si muove lungo una retta con accelerazione $a(t) = -3t^2 + 1$, sapendo che per $t = 2$ s la posizione è $s(2) = 4$ m e la velocità è $v(2) = 2$ m/s.

Possiamo applicare le formule precedenti prendendo $t_0 = 2$:

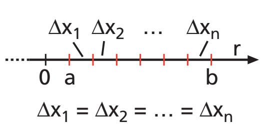
$$v(t) = v(2) + \int_{2}^{t} (-3z^2 + 1)\,dz = 2 + [-z^3 + z]_2^t = -t^3 + t + 8;$$

$$s(t) = s(2) + \int_{2}^{t} (-z^3 + z + 8)\,dz =$$

$$= 4 + \left[-\frac{z^4}{4} + \frac{z^2}{2} + 8z\right]_2^t = -\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + 8t - 10.$$

Il lavoro di una forza

Consideriamo una forza avente per direzione costante una retta r e intensità variabile al variare del punto di applicazione, per esempio la forza di richiamo di una molla oppure la forza gravitazionale tra due corpi. Supponiamo che il punto di applicazione si muova lungo la retta orientata r e indichiamo con x la sua ascissa. Esprimeremo perciò l'intensità della forza come funzione $F(x)$ dell'ascissa del punto di applicazione.



Per determinare in modo approssimato il lavoro compiuto dalla forza per uno spostamento da un punto di ascissa a a un punto di ascissa b, possiamo suddividere l'intervallo in n parti, $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, all'interno delle quali si possa ritenere l'intensità della forza approssimativamente costante, con valori $F(c_1)$, $F(c_2)$, … e calcolare il lavoro nel modo seguente:

$$L_n = \Delta x_1 F(c_1) + \Delta x_2 F(c_2) + \ldots + \Delta x_n F(c_n).$$

L_n è un valore che dipende dalla suddivisione e varia al variare di n; si ha quindi una successione. Facendo tendere n all'infinito, se la successione L_n ammette limite, tale limite è l'integrale da a a b di $F(x)$ e coincide con il lavoro della forza, ossia:

$$L = \int_a^b F(x)\, dx.$$

● Il lavoro di una forza costante di intensità F relativo a uno spostamento Δx nella direzione della forza stessa è dato da

$$L = F \cdot \Delta x.$$

ESEMPIO

Determiniamo il lavoro compiuto dalla forza elastica di una molla che sposta il suo punto di applicazione dal punto di ascissa $x_0 = 0$ al punto di ascissa $x_1 = 6$, sapendo che la forza varia con la legge $F(x) = -\frac{1}{4}x$.

Utilizzando la formula precedente, otteniamo:

$$L = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\, dx = \int_0^6 -\frac{1}{4}x\, dx = -\frac{1}{4}\int_0^6 x\, dx = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^6 = -\frac{9}{2}.$$

● In generale, una forza F, legata allo spostamento x dalla legge

$$F = -kx,$$

si dice *forza elastica*.

La quantità di carica

L'intensità di una corrente è la quantità di carica che attraversa la sezione di un conduttore nell'unità di tempo. Per esprimere l'intensità della corrente che circola nel conduttore all'istante t, ossia l'intensità istantanea, si utilizza la derivata della funzione $q(t)$, che lega la quantità di carica al tempo:

$$i(t) = q'(t).$$

Possiamo dedurre che la quantità di carica $q(t)$ è una primitiva dell'intensità di corrente $i(t)$. Se vogliamo determinare la quantità di carica che attraversa la sezione di un conduttore nell'intervallo di tempo che va da t_0 a t_1, basta allora calcolare il seguente integrale:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} i(t)\, dt.$$

ESEMPIO

Calcoliamo la quantità di carica che attraversa la sezione di un circuito nel primo secondo dopo la chiusura del circuito stesso, sapendo che l'intensità di corrente varia con la legge $i(t) = k(1 - e^{-ht})$, con k e h costanti.

Utilizzando la formula precedente, poniamo $t_0 = 0$ e $t_1 = 1$, quindi scriviamo:

$$Q = \int_0^1 k(1 - e^{-ht})\, dt = \int_0^1 k\, dt - k\int_0^1 e^{-ht}\, dt = k\int_0^1 dt + \frac{k}{h}\int_0^1 -he^{-ht}\, dt =$$

$$= k[t]_0^1 + \frac{k}{h}[e^{-ht}]_0^1 = k + \frac{k}{h}(e^{-h} - 1).$$

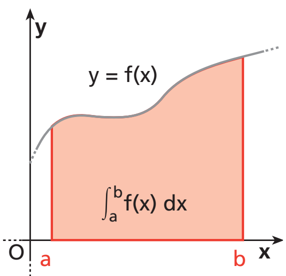
IN PRATICA
▶ Videolezione 81

8. L'INTEGRAZIONE NUMERICA

Introduzione

L'integrazione numerica di una funzione $f(x)$ è un modo approssimato per calcolare un integrale definito di f. Si utilizza nelle applicazioni sperimentali o nell'analisi statistica, in particolare quando:

- la funzione è nota soltanto per punti, ossia è assegnata mediante una tabella oppure attraverso una rilevazione sperimentale o statistica;
- è nota l'espressione analitica della funzione, ma essa non è integrabile con le regole di integrazione;
- l'applicazione delle regole di integrazione conduce a calcoli laboriosi.



Il calcolo numerico di un integrale definito si basa sul suo significato geometrico. Sappiamo che l'integrale definito di una funzione su un intervallo $[a; b]$ rappresenta, quando $f(x) \geq 0$ in $[a; b]$, la misura dell'area della superficie delimitata dal grafico della funzione, dall'asse delle ascisse e dalle rette di equazioni $x = a$ e $x = b$ (figura a lato).

● Il calcolo numerico di un integrale si chiama anche **quadratura numerica**; le formule che si impiegano nel calcolo sono dette **formule di quadratura**.

Ognuno dei metodi che studieremo non è altro che un modo approssimato di calcolare tale area.

Per semplicità, noi considereremo l'integrazione numerica soltanto nel caso di una funzione continua e derivabile in un intervallo limitato e chiuso.
La continuità è condizione sufficiente per l'esistenza dell'integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx;$$

se inoltre la f è derivabile più volte, è possibile anche la stima dell'errore commesso.

Il metodo dei rettangoli

Consideriamo una funzione f continua nell'intervallo $[a; b]$ e, per semplicità, sia $f(x) \geq 0$ in $[a; b]$. Dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti di uguale ampiezza $h = \dfrac{b-a}{n}$, mediante i punti di suddivisione:

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h,\ \dots,\ x_n = a + nh = b.$$

Ai punti di suddivisione corrispondono i seguenti valori della funzione:

$$y_0 = f(a),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ \dots,\ y_{n-1} = f(x_{n-1}),\ y_n = f(b).$$

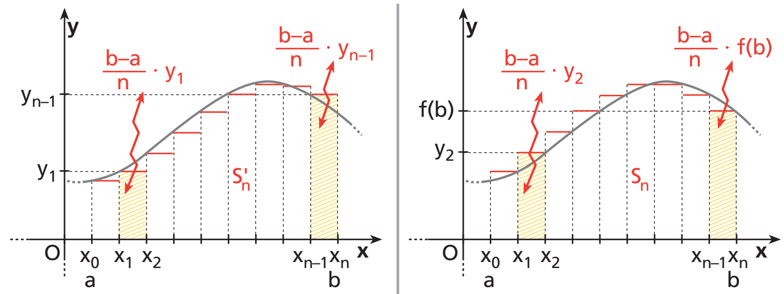
Sui segmenti di suddivisione disegniamo i rettangoli che hanno ciascuno:

- per base un intervallo di suddivisione;
- per altezza il segmento determinato dal valore di f calcolato nel primo estremo di tale intervallo oppure nel secondo.

Otteniamo così due figure costituite da n rettangoli la cui base è $h = \dfrac{b-a}{n}$.

x	y
$x_0=a$	$f(a)$
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
…	…
…	…
…	…
x_{n-2}	y_{n-2}
x_{n-1}	y_{n-1}
$x_n=b$	$f(b)$

a. Nella tabella sono riportati i valori della funzione che hanno per ascissa un punto della suddivisione.



b. I rettangoli hanno come misura dell'altezza l'ordinata della funzione calcolata nel primo estremo degli intervalli di suddivisione.

c. I rettangoli hanno come misura dell'altezza il valore della funzione calcolata nel secondo estremo degli intervalli di suddivisione.

▲ **Figura 22**

Se prendiamo sempre il primo estremo degli intervalli di suddivisione, l'area del plurirettangolo, cioè la somma delle aree dei rettangoli, è data dalla formula:

$$S'_n = \frac{b-a}{n}[f(a) + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}] = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

● Ciascuna di queste figure si chiama **plurirettangolo**.

Se invece prendiamo sempre il secondo estremo degli intervalli, l'area del plurirettangolo è:

$$S_n = \frac{b-a}{n}[y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + f(b)] = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Queste somme costituiscono due valori approssimati dell'integrale della funzione e sono dette **formule dei rettangoli**.

● Poiché la funzione è integrabile, queste somme convergono allo stesso limite per n tendente a ∞; quindi, la loro differenza si può rendere piccola a piacere aumentando opportunamente il numero degli intervalli di suddivisione.

● Se la funzione ammette derivata prima continua, si dimostra che l'errore E_n commesso è minore o uguale alla quantità:

$$\varepsilon_n = \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot M,$$ dove M è il massimo di $|f'(x)|$ in $[a; b]$.

ESEMPIO

Con le formule dei rettangoli calcoliamo due valori approssimati dell'integrale $\int_2^3 x^3\,dx$, valutiamo l'errore commesso e confrontiamo i risultati ottenuti con quello esatto.

Dividiamo l'intervallo in 10 intervalli di ampiezza $h = \frac{3-2}{10} = 0{,}1$ e quindi scriviamo i valori della funzione in una tabella.

x_i	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
$y_i = x_i^3$	8	9,261	10,648	12,167	13,824	15,625	17,576	19,683	21,952	24,389	27

Ora calcoliamo le due somme:

$$S'_n = 0{,}1 \cdot (8 + 9{,}261 + 10{,}648 + \ldots + 24{,}389) = 15{,}3125;$$

$$S_n = 0{,}1 \cdot (9{,}261 + 10{,}648 + \ldots + 24{,}389 + 27) = 17{,}2125.$$

I due valori approssimati dell'integrale sono pertanto:

$$\int_2^3 x^3\,dx \simeq 15{,}3125 \quad \text{e} \quad \int_2^3 x^3\,dx \simeq 17{,}2125.$$

Osserviamo che la derivata $f'(x) = 3x^2$ è continua nell'intervallo $[2; 3]$ e il suo massimo è $M = \max\limits_{[2;\,3]} |3x^2| = 27$; possiamo quindi valutare l'errore commesso mediante la relazione:

$$E_{10} \le \varepsilon_{10} = \frac{(3-2)^2}{2 \cdot 10} \cdot 27 = 1{,}35.$$

I due risultati hanno, pertanto, un'approssimazione minore o uguale a 1,35.
Calcolando l'integrale in modo esatto, otteniamo 16,25. Le differenze fra questo valore e quelli approssimati sono $|S'_n - 16{,}25| = 0{,}9375$ e $|S_n - 16{,}25| = 0{,}9625$, quindi entrambe minori di 1,35.

- Indichiamo con $\max\limits_{[2;\,3]} |3x^2|$ il massimo del valore assoluto della derivata prima nell'intervallo $[2; 3]$.

- $\int_2^3 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^3 = \frac{1}{4} \cdot (81 - 16) = 16{,}25.$

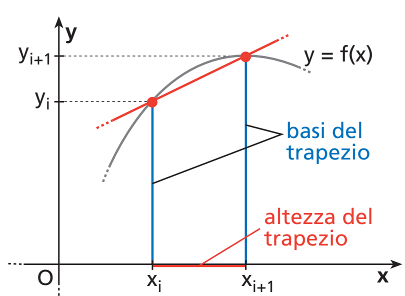
Il metodo dei trapezi

- Questo metodo è anche detto **di Bézout**.

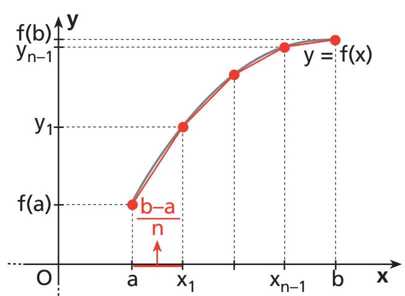
Consideriamo una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[a; b]$ e dividiamo $[a; b]$ in n parti di uguale ampiezza, $h = \frac{b-a}{n}$, mediante i punti di suddivisione $x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ \ldots,\ x_n = a + nh = b$.
Il metodo dei trapezi consiste nel sostituire, in ogni intervallo di suddivisione, il grafico della funzione $y = f(x)$ con la corda sottesa (cioè il segmento che congiunge i punti del grafico di $f(x)$ corrispondenti al primo e al secondo estremo dell'intervallo). Otteniamo così n trapezi rettangoli aventi tutti uguale altezza h.

- Mentre con il metodo dei rettangoli la funzione integranda viene sostituita con una *funzione costante a tratti*, con il metodo dei trapezi si utilizza una *funzione lineare a tratti*.

▶ Figura 23



a. Il trapezio che si ottiene per ogni intervallo ha come misure delle basi le ordinate corrispondenti al primo e secondo estremo e come misura dell'altezza l'ampiezza dell'intervallo.



b. Il trapezoide è costituito dalla somma di n trapezi rettangoli aventi altezza uguale a: $h = \frac{b-a}{n}$.

Possiamo così determinare un valore approssimato dell'integrale calcolando la somma delle aree dei trapezi. Tale area è espressa dalla seguente **formula dei trapezi**:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq h \cdot \frac{f(a) + y_1}{2} + h \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} + \ldots + h \cdot \frac{y_{n-1} + f(b)}{2} =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right].$$

Se la funzione ammette derivata seconda continua, si dimostra che l'errore E_n commesso è minore o uguale alla quantità:

$$\varepsilon_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M, \text{ dove } M \text{ è il massimo di } |f''(x)| \text{ in } [a; b].$$

ESEMPIO

Consideriamo nuovamente l'integrale dell'esempio precedente. Con la formula dei trapezi ripetiamo il calcolo approssimato dell'integrale $\int_2^3 x^3\,dx$, valutando l'errore commesso e confrontando il risultato ottenuto con quello esatto.

Dividiamo l'intervallo ancora in 10 parti uguali e utilizziamo la precedente tabella per calcolare la somma delle aree dei trapezi. Otteniamo così il seguente valore approssimato dell'integrale:

$$\int_2^3 x^3\,dx \simeq \frac{3-2}{10}\left(\frac{8+27}{2} + 9,261 + \ldots + 24,389\right) = 16,2625.$$

Osserviamo che la derivata seconda $f''(x) = 6x$ è continua nell'intervallo $[2; 3]$ e il suo massimo è $M = \max\limits_{[2;\,3]} |6x| = 18$; possiamo quindi valutare l'errore commesso mediante la relazione:

$$E_{10} \leq \varepsilon_{10} = \frac{(3-2)^3}{12 \cdot 10^2} \cdot 18 = 0,015.$$

Il risultato ottenuto ha dunque un'approssimazione minore o uguale a 0,015. Infatti, confrontandolo con il valore esatto dell'integrale, abbiamo:

$$|16,25 - 16,2625| = 0,0125 < 0,015.$$

Notiamo, infine, che con la formula dei trapezi abbiamo ottenuto un risultato più preciso rispetto a quello ottenuto con il metodo dei rettangoli.

Il metodo delle parabole

Questo metodo è anche detto **di Cavalieri-Simpson**.

Il **metodo delle parabole** consiste nell'approssimare il grafico della funzione con archi di parabola opportunamente scelti. Ciascun arco è individuato da tre punti del grafico e il valore approssimato dell'integrale si determina calcolando la somma delle aree dei trapezoidi delimitati da tali archi.

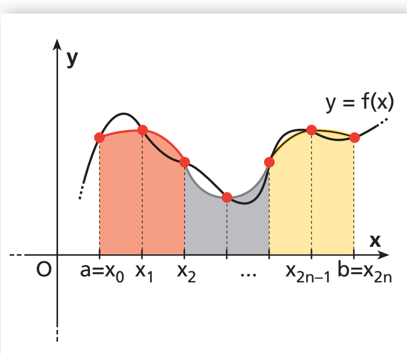
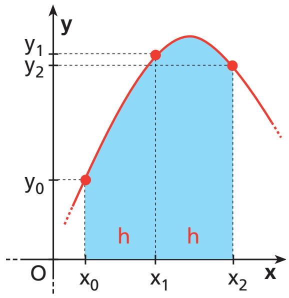


Figura 24 La somma delle aree dei trapezoidi delimitati dagli archi di parabola rappresenta un valore approssimato dell'integrale della funzione.



TEOREMA

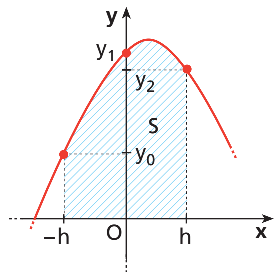
L'area S di un trapezoide avente come base l'intervallo $[x_0; x_2]$ e delimitato dal grafico di una parabola passante per i punti $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, dove

$$x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$$

è il punto medio dell'intervallo, è data dalla seguente formula:

$$S = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2),$$

dove $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$.



DIMOSTRAZIONE

Riferiamo la parabola a un sistema traslato che abbia l'asse y coincidente con la retta $x = x_1$. I corrispondenti dei punti $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ sono rispettivamente $(-h; y_0)$, $(0; y_1)$, $(h; y_2)$. Sia $y = Ax^2 + Bx + C$ l'equazione della parabola nel nuovo riferimento.

Determiniamo, per sostituzione, la relazione fra i coefficienti e le coordinate dei tre punti:

$$\begin{aligned}
(-h; y_0) &\rightarrow y_0 = Ah^2 - Bh + C;\\
(0; y_1) &\rightarrow y_1 = C;\\
(h; y_2) &\rightarrow y_2 = Ah^2 + Bh + C.
\end{aligned}$$

Esprimiamo $y_0 + 4y_1 + y_2$ in funzione di A, B e C:

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = (Ah^2 - Bh + C) + 4C + (Ah^2 + Bh + C) = 2Ah^2 + 6C.$$

Ora calcoliamo l'area S in funzione di A, B, C:

$$S = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} = \ldots = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$

Essendo $2Ah^2 + 6C = y_0 + 4y_1 + y_2$, otteniamo:

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

La formula è così dimostrata.

Per applicare il metodo delle parabole procediamo nel modo seguente:

- dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in $2n$ parti uguali di ampiezza $h = \frac{b-a}{2n}$, mediante i punti $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{2n} = b$;
- calcoliamo i corrispondenti valori della funzione: $f(a), y_1, y_2, \ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, f(b)$;
- consideriamo gli intervalli $[a; x_2], [x_2; x_4], \ldots, [x_{2n-4}; x_{2n-2}], [x_{2n-2}; b]$ e i corrispondenti centri $x_1, x_3, \ldots, x_{2n-3}, x_{2n-1}$;

● Il numero delle parti in cui si suddivide l'intervallo deve essere pari, perché si utilizza una parabola ogni due intervalli.

- applichiamo a ciascuno di essi la formula del teorema precedente, e calcoliamo così le aree delimitate dagli archi di parabola passanti per ciascuna terna di punti $(x_i; y_i)$, $(x_{i+1}; y_{i+1})$, $(x_{i+2}; y_{i+2})$:

$$\frac{h}{3}\cdot[f(a)+4y_1+y_2],$$
$$\frac{h}{3}\cdot(y_2+4y_3+y_4),$$
$$\ldots,$$
$$\frac{h}{3}\cdot[y_{2n-2}+4y_{2n-1}+f(b)];$$

- infine, determiniamo in modo approssimato l'integrale calcolando la somma delle aree precedenti:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\cdot[f(a)+f(b)+2\cdot(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})+$$
$$+4\cdot(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})].$$

Questa formula si chiama **formula di Cavalieri-Simpson**.

Se la funzione ammette derivata quarta continua, si dimostra che l'errore E_n commesso è minore o uguale alla quantità:

$$\varepsilon_n = \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\cdot M,$$ dove M è il massimo di $\left|f^{(4)}(x)\right|$ in $[a; b]$.

È possibile valutare l'errore commesso senza calcolare derivate, utilizzando il **metodo di Runge** o del **raddoppiamento del passo**, che vedremo negli esercizi.

ESEMPIO

Consideriamo ancora l'integrale $\int_2^3 x^3 dx$. Con la formula di Cavalieri-Simpson determiniamo un valore approssimato, valutiamo l'errore e confrontiamo il risultato ottenuto con quello esatto. Utilizziamo sempre la suddivisione in 10 parti uguali e riorganizziamo la tabella:

a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	b
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
$f(a)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	$f(b)$
8	9,261	10,648	12,167	13,824	15,625	17,576	19,683	21,952	24,389	27

Ora applichiamo la formula di Cavalieri-Simpson:

$$\int_2^3 x^3\,dx \simeq \frac{3-2}{3\cdot 10}\cdot[8+27+2\cdot(10,648+\ldots+21,952)+4\cdot(9,261+\ldots+$$
$$+24,389)] = 16,25.$$

Osserviamo che la derivata quarta $f^{(4)}(x)$ è nulla per ogni $x \in [2; 3]$ e quindi anche l'errore commesso è nullo. Il risultato ottenuto, infatti, coincide con il valore esatto dell'integrale trovato in precedenza. La formula di Cavalieri-Simpson ha dunque permesso di ottenere la migliore precisione.

La formula di Cavalieri-Simpson non fornisce sempre il valore esatto; tuttavia, tale formula fornisce in generale il valore più vicino a quello esatto.

LA TORRE EIFFEL

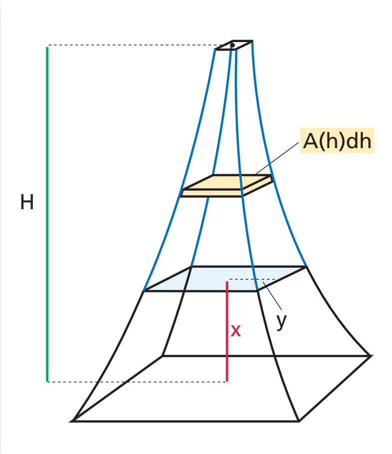
Perché l'ingegnere Gustave Eiffel diede alla sua opera più famosa proprio quella forma?

▶ Il quesito completo a pag. 2001

Chiunque sia salito in cima alla Torre Eiffel a Parigi ne è rimasto impressionato. A colpire non è solo la straordinaria visuale della Ville Lumière (o città delle luci) dall'alto, ma anche il sensibile ondeggiamento di tutta la struttura sotto la spinta del vento.

Viene da chiedersi come la Torre possa restare in piedi senza crollare
Era ciò che si domandava anche l'ingegnere Gustave Eiffel alla fine dell'Ottocento mentre progettava la Torre per l'Expo di Parigi.
A costo di togliere un po' di magia, il profilo del monumento è stato dettato, più che da ragioni estetiche, da considerazioni di fisica e di matematica.
La cosa sorprendente è che esiste un'equazione dalla quale si può ricavare la sagoma della Torre Eiffel. È stata trovata nel 2004 da due ricercatori statunitensi, Patrick Weidman e Iosif Pinelis, che dopo quasi 120 anni hanno svelato il segreto dell'eleganza e della perfezione di quest'opera architettonica.

Dimestichezza con i numeri
Anche i modelli di calcolo dell'ingegnere Eiffel si sono rivelati esatti: la Torre, nonostante sia alta più di 300 metri, è in grado di sopportare un vento che soffia fino a 800 km/h, una velocità irrealistica anche se un ciclone si abbattesse sulla capitale francese.
Il monumento ha una base quadrata di 125 metri di lato da cui si innalzano quattro pilastri che confluiscono in un'unica colonna, via via più sottile e concava al crescere dell'altezza.
Eiffel studiò la sagoma sezione dopo sezione, calcolando per ciascuna il peso che la struttura doveva reggere. Trascurando l'effetto del vento, per ogni sezione questo peso coincide con quello della porzione di edificio sovrastante la sezione stessa (in blu nella figura).



Se ρ è la densità del ferro e $A(h)$ l'area della sezione quadrata alla quota generica h, allora il volume infinitesimale di uno strato di altezza dh è $A(h)dh$ (in giallo nella figura).
Essendo g l'accelerazione di gravità, il peso della parte compresa fra x e l'altezza H della Torre è

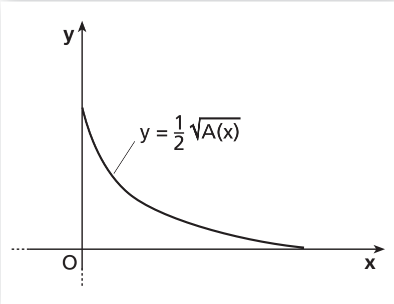
$$\int_x^H \rho \cdot g \cdot A(h)\,dh$$

e, considerato il peso massimo che la struttura sottostante può reggere, vale l'equazione

$$\int_x^H \rho \cdot g \cdot A(h)\,dh = P \cdot A(x),$$

dove P è la pressione massima che può essere sopportata. Risolvendo l'equazione, si ottiene $A(x)$, che è una funzione esponenziale.

$A(x)$ indica come varia la sezione orizzontale al variare dell'altezza e permette di ricavare il profilo della struttura, che può essere descritto dalla funzione del semilato y della sezione al variare della quota, ossia dalla funzione $y = \frac{1}{2}\sqrt{A(x)}$.



La sagoma della Torre Eiffel però non è esattamente esponenziale, anche se il suo profilo assomiglia a una curva esponenziale decrescente. Questo perché l'ingegnere Eiffel non trascurò la presenza del vento.

Una questione di equilibrio
La pressione che il vento esercita sulla Torre è un fattore molto importante per l'equilibrio del sistema.
Come hanno determinato i due matematici statunitensi, che hanno studiato a fondo gli schizzi originali di Eiffel depositati presso la Società francese di ingegneria civile, affinché la struttura della Torre resti in equilibrio è necessario che la pressione del vento sia controbilanciata dalla tensione tra gli elementi della costruzione. Questo si traduce in un'equazione integrale non lineare abbastanza complessa, le cui soluzioni forniscono precisamente la sagoma della struttura, esponenziale a tratti, con due differenti esponenti.
Lo studio, pubblicato sulla rivista dell'Accademia francese delle scienze *Comptes Rendus Mécanique*, ha spiegato anche perché la base della torre è così estesa: Eiffel non era proprio sicuro dei suoi calcoli (all'epoca non c'era l'aiuto dei computer) e preferì allargare la base esagerando un po', in modo da essere certo che, una volta eretta la Torre, il vento non l'avrebbe buttata giù.

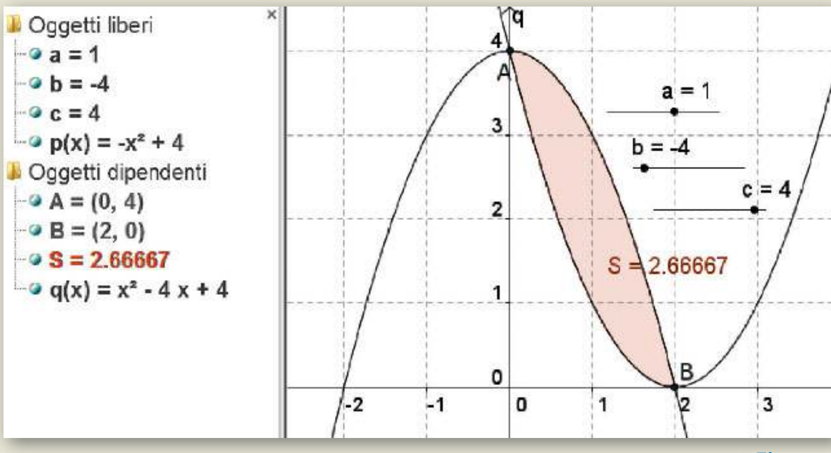
LABORATORIO DI MATEMATICA

GLI INTEGRALI DEFINITI

ESERCITAZIONE GUIDATA

Costruiamo un disegno di GeoGebra che permetta di assegnare un valore ai coefficienti a, b e c della parabola di equazione $q(x) = ax^2 + bx + c$ e che mostri, in corrispondenza, l'area dell'eventuale superficie finita di piano compresa fra le q e la parabola di equazione $p(x) = -x^2 + 4$. Proviamo il disegno con $q(x) = x^2 - 4x + 4$.

- Entriamo in ambiente GeoGebra e diamo a tre *slider* i nomi a, b e c (figura 1).
- Immettiamo la parabola fissa scrivendo nella riga di inserimento p(x) = − x^2 + 4 seguita dal tasto INVIO.
- Operiamo in modo simile per la parabola variabile: q(x) = a*x^2 + b*x + c.
- Con *Intersezione di due oggetti* applicato a p e a q troviamo e rendiamo noti al sistema gli eventuali punti A e B.



▲ Figura 1

- Digitiamo nella riga di inserimento Integrale[p, q, x(A), x(B)], il comando di GeoGebra per il calcolo dell'area compresa fra due curve.
- Con INVIO rendiamo attivo il comando, che mette in evidenza la superficie compresa fra le due curve e ne calcola l'area.
- Usiamo quindi le tre *slider* in modo da costruire la parabola proposta. GeoGebra mostrerà l'area sia nel disegno sia nella finestra algebrica (figura 1).

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 12 esercitazioni in più

Esercitazioni

Con lo strumento informatico a tua disposizione risolvi i seguenti problemi e poi traccia il grafico, corredato da didascalie, di tutti gli elementi coinvolti.

1 Determina i coefficienti delle parabole $y = ax^2 + bx + c$, sapendo che, incontrando la parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$ nei suoi punti di ascissa -2 e 2, formano con essa una superficie finita di piano di area 16.

$[y = -x^2 - x + 2;\ y = 2x^2 - x - 10]$

2 Determina il valore del parametro k in modo che la retta $y = k$ formi con la curva di equazione $f(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$ una superficie finita di piano di area $2(\pi - 2)$.

$[k = 2]$

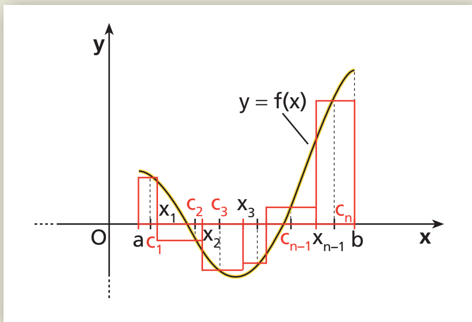
LA TEORIA IN SINTESI

GLI INTEGRALI DEFINITI

1. L'INTEGRALE DEFINITO

- Sia $f(x)$ una funzione continua su $[a; b]$; dividiamo $[a; b]$ in n intervalli chiusi di ampiezza arbitraria mediante i punti $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, con $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = b$; scegliamo i generici punti $c_1 \in [a; x_1]$, $c_2 \in [x_1; x_2]$, $c_3 \in [x_2; x_3]$, … e consideriamo la somma $\overline{S}$:

$$\overline{S} = f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + f(c_3) \cdot \Delta x_3 + \ldots + f(c_n) \cdot \Delta x_n, \text{ con}$$
$$\Delta x_1 = x_1 - a, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \Delta x_3 = x_3 - x_2, \ldots, \Delta x_n = b - x_{n-1}.$$



Si chiama **integrale definito** di f esteso all'intervallo $[a; b]$ il limite:

$$\lim_{\Delta x_{\max} \to 0} \overline{S} = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Si pone inoltre:

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx, \quad \text{se } a < b; \qquad \int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

- **Proprietà dell'integrale definito**
  - Se $a < b < c$, $\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$.
  - $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$.
  - $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$.
  - $\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$.
  - $\int_a^b k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx$.
  - $\int_a^b k\, dx = k(b - a)$.

- **Teorema della media**
Se f è una funzione continua nell'intervallo $[a; b]$, allora $\exists\, z \in [a; b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a) \cdot f(z).$$

2. IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

- **Funzione integrale**
Se f è una funzione continua in $[a; b]$, si dice funzione integrale di f in $[a; b]$ la funzione:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \ \forall x \in [a; b].$$

- **Teorema fondamentale del calcolo integrale**
Se f è continua in $[a; b]$, allora la sua funzione integrale $F(x)$ è derivabile in $[a; b]$ e

$$F'(x) = f(x), \ \forall x \in [a; b],$$

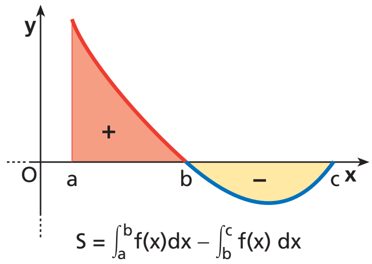
ovvero F è una particolare primitiva di f.

- **Calcolo dell'integrale definito**
Se $\varphi(x)$ è una primitiva qualunque di $f(x)$ nell'intervallo $[a; b]$, allora:

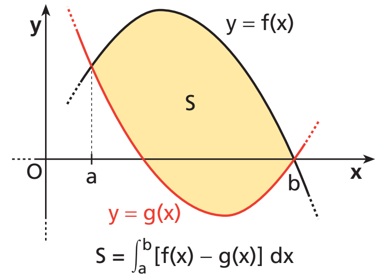
$$\int_a^b f(x)\, dx = [\varphi(x)]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a).$$

ESEMPIO: $\int_2^4 4x\, dx = \left[4 \frac{x^2}{2}\right]_2^4 = [2x^2]_2^4 = 2 \cdot 4^2 - 2 \cdot 2^2 = 32 - 8 = 24.$

3. IL CALCOLO DELLE AREE DI SUPERFICI PIANE



a. Area *S* della parte di piano compresa tra la funzione e l'asse *x*.

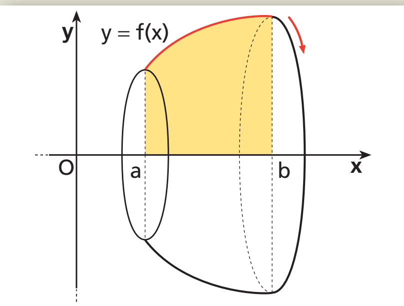


b. Area *S* della parte di piano compresa tra due funzioni *f*(*x*) e *g*(*x*), con *f*(*x*) ≥ *g*(*x*).

4. IL CALCOLO DEI VOLUMI

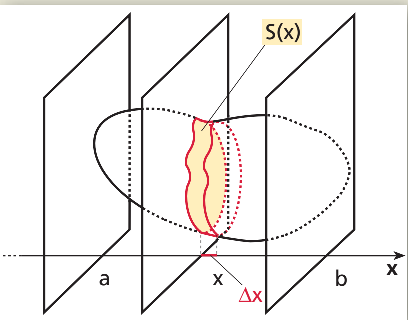
- **I solidi di rotazione**
  Dato il trapezoide della figura esteso all'intervallo $[a; b]$, delimitato dal grafico di $y = f(x)$ (positiva o nulla), dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$, il **volume del solido** che si ottiene ruotando il trapezoide intorno all'asse x di un giro completo è:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx.$$



- **I volumi dei solidi**
  Il volume del solido della figura si ottiene con:

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$

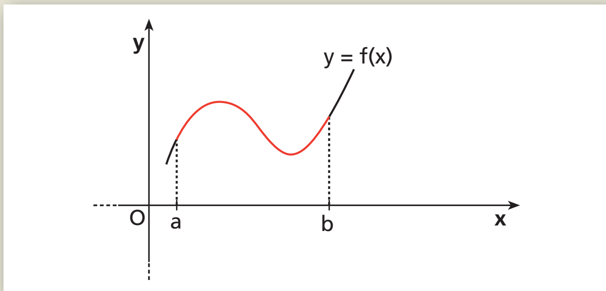


5. LA LUNGHEZZA DI UN ARCO DI CURVA E L'AREA DI UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE

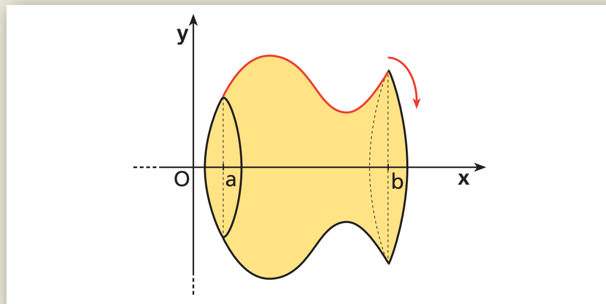
Sia $y = f(x)$ derivabile nell'intervallo $[a; b]$.

- **Lunghezza di un arco di curva**
  La lunghezza della curva che rappresenta il grafico della funzione, limitata dalle rette di equazioni $x = a$ e $x = b$, è:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$



- **Area di una superficie di rotazione**
  Se la curva viene fatta ruotare con una rotazione completa attorno all'asse x, l'area della superficie di rotazione che si ottiene è:
  $$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$



6. GLI INTEGRALI IMPROPRI

- **Discontinuità in un estremo di integrazione**

  Se $f(x)$ è continua in $[a; b[$: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z \to b^-} \int_a^z f(x)\,dx$.

  Se $f(x)$ è continua in $]a; b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z \to a^+} \int_z^b f(x)\,dx$.

- **Discontinuità in un punto interno all'intervallo di integrazione**

  Se $f(x)$ è continua in $[a; b]$ tranne che in $c \in [a; b]$ punto di discontinuità:
  $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z \to c^-} \int_a^z f(x)\,dx + \lim_{z \to c^+} \int_z^b f(x)\,dx.$$

- **Intervallo di integrazione illimitato**

  Se $f(x)$ è continua in $[a; +\infty[$: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{z \to +\infty} \int_a^z f(x)\,dx$.

  Se $f(x)$ è continua in $]-\infty; a]$: $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{z \to -\infty} \int_z^a f(x)\,dx$.

7. APPLICAZIONI DEGLI INTEGRALI ALLA FISICA

- **Posizione, velocità e accelerazione**
  - $s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^t v(z)\,dz$,
  - $v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(z)\,dz$,

  dove $s(t)$ è la posizione, $v(t)$ la velocità e $a(t)$ l'accelerazione in funzione del tempo.

- **Lavoro di una forza**
  - $L = \int_a^b f(x)\,dx$,

  dove $f(x)$ è la forza in funzione dello spostamento.

- **Quantità di carica e corrente elettrica**
  - $Q = \int_{t_0}^t i(t)\,dt$,

  dove Q è la quantità di carica e $i(t)$ la corrente in funzione del tempo.

8. L'INTEGRAZIONE NUMERICA

- Il calcolo numerico di un integrale definito si chiama anche **quadratura numerica** e le formule che si utilizzano sono dette **formule di quadratura**.
  Ognuno dei metodi di quadratura approssima l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante l'area di figure che approssimano il trapezoide limitato dal grafico di $y = f(x)$. Tali figure si ottengono suddividendo $[a; b]$ in n parti di ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$, mediante i punti di suddivisione $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, …, $x_n = a + nh = b$, e disegnando su ciascun intervallo una figura che dipende dal metodo scelto.

- **Metodo dei rettangoli**
  Sugli intervalli di suddivisione, disegniamo i rettangoli aventi per base l'intervallo stesso e per altezza il segmento determinato dal valore di f calcolato nel primo estremo di tale intervallo oppure nel secondo. Le aree dei due *plurirettangoli* così ottenuti determinano le **formule dei rettangoli**:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{n} \cdot [f(a) + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}];$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{n} \cdot [y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + f(b)].$$

  Se f ammette derivata prima continua, l'**errore** commesso è minore o uguale a $\varepsilon_n = \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot M$, dove M è il massimo di $|f'(x)|$ in $[a; b]$.

- **Metodo dei trapezi (o di Bézout)**
  Sugli intervalli di suddivisione, disegniamo i trapezi rettangoli aventi per altezza l'intervallo stesso e per basi i segmenti determinati dal valore di f calcolato nel primo estremo di tale intervallo e nel secondo. La somma delle aree dei trapezi così ottenuti è il valore approssimato dell'integrale ed è data dalla **formula dei trapezi**:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{n} \cdot \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right].$$

  Se f ammette derivata seconda continua, l'**errore** commesso è minore o uguale alla quantità $\varepsilon_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M$, dove M è il massimo di $|f''(x)|$ in $[a; b]$.

- **Metodo delle parabole (o di Cavalieri-Simpson)**
  Sugli intervalli di suddivisione, disegniamo i trapezoidi limitati da opportuni archi di parabola. Precisamente:
  - dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in un numero $2n$ di parti uguali di ampiezza $h = \frac{b-a}{2n}$, mediante i punti $x_0 = a$, x_1, x_2, …, $x_{2n} = b$;
  - calcoliamo i corrispondenti valori della funzione: $f(a)$, y_1, y_2, …, y_{2n-2}, y_{2n-1}, $f(b)$;
  - consideriamo gli intervalli $[a; x_2]$, $[x_2; x_4]$, …, $[x_{2n-4}; x_{2n-2}]$, $[x_{2n-2}; b]$ e i corrispondenti centri x_1, x_3, …, x_{2n-3}, x_{2n-1};
  - su ciascun intervallo disegniamo un trapezoide avente per base l'intervallo stesso $[x_i; x_{i+2}]$ e delimitato dal grafico della parabola passante per i punti $(x_i; y_i)$, $(x_{i+1}; y_{i+1})$, $(x_{i+2}; y_{i+2})$.

  La somma delle aree di questi trapezoidi fornisce il valore approssimato dell'integrale e si ottiene mediante la **formula di Cavalieri-Simpson**:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3} \cdot [f(a) + f(b) + 2 \cdot (y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4 \cdot (y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})].$$

  Se f ammette derivata quarta continua, l'**errore** commesso è minore o uguale a $\varepsilon_n = \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \cdot M$, dove M è il massimo di $|f^{(4)}(x)|$ in $[a; b]$.

1. L'INTEGRALE DEFINITO

▶ Teoria a pag. 2002

Il trapezoide

Disegna il trapezoide individuato dalla funzione nell'intervallo scritto a fianco.

1 $y = x^2 + 2$, $[-1; 4]$.

2 $y = \ln(x+1)$, $[0; e]$.

3 $y = \cos x$, $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

4 $y = \frac{x+1}{x+2}$, $[-1; 2]$.

Rappresenta graficamente il trapezoide descritto dall'insieme T.

5 $T = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, 0 \le x \le 4, 0 \le y \le -x^2 + 6x\}$

6 $T = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 2x + 1\}$

7 $T = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, -1 \le x \le 2, 0 \le y \le e^x\}$

Trova, utilizzando sei suddivisioni di uguale ampiezza, un valore approssimato per eccesso e uno per difetto dell'area del trapezoide individuato dal grafico della funzione $f(x)$ nell'intervallo indicato a fianco.

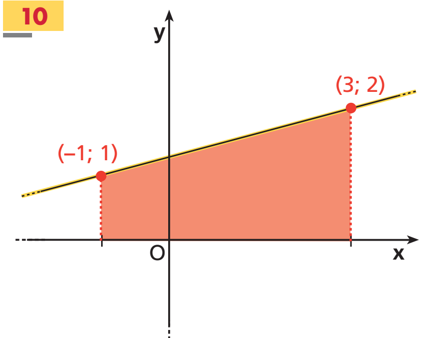
8 $f(x) = -x^2 + 8x$, $[2; 8]$.

9 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $[0; 4]$.

L'integrale definito

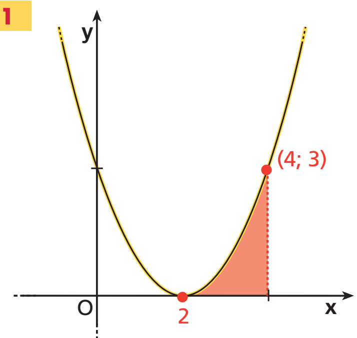
Scrivi l'integrale che calcola il valore dell'area della regione rappresentata in figura.

10



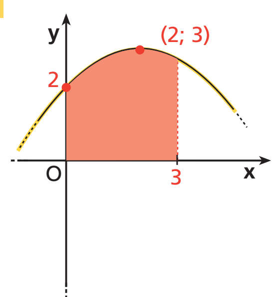
$\left[\frac{1}{4}\int_{-1}^{3}(x+5)\,dx\right]$

11



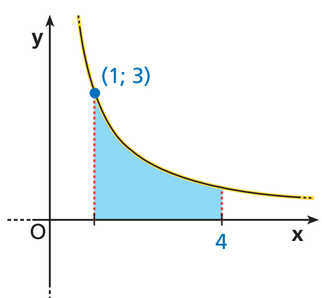
$\left[\frac{3}{4}\int_{2}^{4}(x-2)^2\,dx\right]$

12



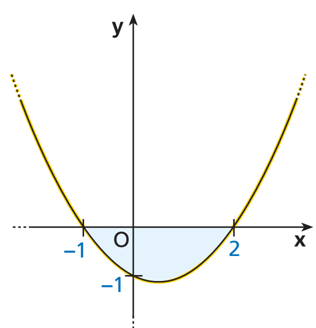
$\left[\int_{0}^{3}\left(-\frac{1}{4}x^2 + x + 2\right)dx\right]$

13



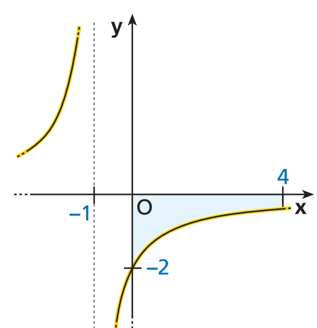
$\left[3\int_{1}^{4}\frac{1}{x}\,dx\right]$

14



$\left[-\int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1\right)dx\right]$

15



$\left[-\int_{0}^{4}\frac{-2}{x+1}\,dx\right]$

Rappresenta graficamente la regione la cui area è data dall'integrale.

16 a) $\int_1^3 2x^2\,dx$, b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$.

17 a) $\int_1^4 (-x^2+4x)\,dx$, b) $\int_{\frac{1}{2}}^1 (-\ln x)\,dx$.

Quali delle seguenti scritture non hanno significato? Motiva la risposta.

18 a) $\int_{-2}^1 \sqrt{x}\,dx$, b) $\int_0^4 \text{arcsen}\,x\,dx$. [a, b]

19 a) $\int_0^6 \sqrt{x+3}\,dx$, b) $\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx$. [b]

20 a) $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\,x\,dx$, b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$. [b]

Determina il segno dei seguenti integrali.

21 a) $\int_{-1}^2 (x^2+4)\,dx$, b) $\int_0^1 (x^2-1)\,dx$, c) $\int_1^8 x\ln x\,dx$. [a) pos.; b) neg.; c) pos.]

22 a) $\int_{-4}^{-1} (-x+3)\,dx$, b) $\int_{-1}^1 (x^3-1)\,dx$, c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \text{tg}\,x\,dx$. [a) pos.; b) neg.; c) neg.]

Le proprietà dell'integrale definito

23 **VERO O FALSO?**

a) $\int_1^2 f(x)\,dx = -\int_2^1 f(x)\,dx$ V F

b) $\int_4^4 \ln x\,dx = 0$ V F

c) $2\int_1^4 (x-1)\,dx = \int_1^4 (2x-2)\,dx$ V F

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^2 x\,dx = \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}\,x\,dx\right)^2$ V F

24 **VERO O FALSO?**

a) $\int_{-2}^6 (2x^2+4)\,dx = -2\int_6^{-2} (x^2+2)\,dx$ V F

b) $\int_1^4 3\,dx = 9$ V F

c) $\int_2^3 k\,dx = k$ V F

d) Se $f(x)$ è una funzione dispari, allora $\int_{-2}^4 f(x)\,dx = \int_2^4 f(x)\,dx$. V F

25 **VERO O FALSO?**

a) $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, se $f(x) = 0\ \forall x \in [a; b]$. V F

b) $\int_0^1 x^2\,dx \le \int_0^1 x^4\,dx$ V F

c) Se $\int_a^b f(x)\,dx < 0$, allora $f(x) < 0\ \forall x \in [a; b]$. V F

d) Se $f(x) > 0$ in $[a; b]$, allora $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$. V F

Calcola il valore dei seguenti integrali utilizzando i valori degli integrali definiti scritti a fianco e sfruttando le proprietà dell'integrale definito.

26 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x + 2\,\text{sen}\,x)\,dx$; $\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = 1$, $\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}\,x\,dx = 1$. [3]

27 $\int_0^1(2^x\ln 2 + 1)\,dx$; $\quad \int_0^1 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}$, $\quad \int_0^1 dx = 1$. [2]

28 $\int_0^3(x^2 + 6x)\,dx$; $\quad \int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}$, $\quad \int_2^3 x^2\,dx = \frac{19}{3}$, $\quad \int_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}$. [36]

29 $\int_1^3(4x^3 + 2)\,dx$; $\quad \int_1^2 x^3\,dx = \frac{15}{4}$, $\quad \int_2^3 x^3\,dx = \frac{65}{4}$, $\quad \int_1^3 2\,dx = 4$. [84]

30 $\int_1^9(1 + 2\sqrt{x})\,dx$; $\quad \int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{14}{3}$, $\quad \int_4^9 \sqrt{x}\,dx = \frac{38}{3}$, $\quad \int_1^9 dx = 8$. $\left[\frac{128}{3}\right]$

Il teorema della media

Indica quali delle seguenti funzioni rispettano le ipotesi del teorema della media nell'intervallo scritto a fianco.

31 $y = \frac{4}{x-1}$ $\quad [1; 4]$ [no]

32 $y = \sqrt{x}$ $\quad [0; 6]$ [sì]

33 $y = \ln(x+3)$ $\quad [-3; 0]$ [no]

34 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad [1; 3]$ [no]

35 $y = 6 + \frac{|x|}{x}$ $\quad [-1; 1]$ [no]

36 $y = \frac{x-2}{x^2-x-2}$ $\quad [0; 3]$ [no]

2. IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

▶ Teoria a pag. 2010

Il calcolo dell'integrale definito

37 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo l'integrale definito $\int_1^2(3x^2 + x)\,dx$.

Utilizziamo la formula fondamentale:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\varphi(x)]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a),$$

dove $\varphi(x)$ è una qualunque primitiva di $f(x)$.
Determiniamo le primitive $\varphi(x)$ di $3x^2 + x$:

$$\int(3x^2 + x)\,dx = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c.$$

Una primitiva è dunque $\varphi(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2$.

Pertanto si ha:

$$\int_1^2(3x^2 + x)\,dx = \left[x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_1^2.$$

Sostituiamo alla variabile x dentro la parentesi quadra prima 2 e poi 1 e calcoliamo la differenza:

$$\left[x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = (8+2) - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{17}{2}.$$

Quindi $\int_1^2(3x^2 + x)\,dx = \frac{17}{2}$.

38 ESERCIZIO GUIDA

Il metodo di sostituzione.

Calcoliamo l'integrale definito $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}\,dx$.

Calcoliamo l'integrale definito per sostituzione, cambiando anche gli estremi di integrazione.
Poniamo $t = 1 + \operatorname{sen} x$.
Calcoliamo il differenziale di t: $dt = D[1 + \operatorname{sen} x]\,dx = \cos x\,dx$.
Determiniamo il valore della variabile t in corrispondenza dei valori che la x assume negli estremi di integrazione:

$$x = 0 \quad \to \quad t = 1 + \operatorname{sen} 0 = 1; \qquad x = \frac{\pi}{2} \quad \to \quad t = 1 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2.$$

Riscriviamo opportunamente l'integrale dato e sostituiamo le espressioni ricavate in precedenza:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}} \cdot \cos x\,dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = [2\sqrt{t}\,]_1^2 = 2\sqrt{2} - 2.$$

Osservazione. In alternativa avremmo potuto calcolare per sostituzione l'integrale *indefinito*

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}\,dx = 2\sqrt{1+\operatorname{sen} x} + c$$

e poi utilizzare tale risultato per il calcolo dell'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}\,dx = [2\sqrt{1+\operatorname{sen} x}\,]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} - 2\sqrt{1+\operatorname{sen} 0} = 2\sqrt{2} - 2.$$

In questo modo si evita di calcolare gli estremi di integrazione per la variabile t.

Calcola i seguenti integrali definiti.

39 $\int_2^5 (x+1)\,dx$ $\left[\frac{27}{2}\right]$

40 $\int_0^1 (x^2 + x)\,dx$ $\left[\frac{5}{6}\right]$

41 $\int_{-2}^1 \frac{3x^2 + 2x - 1}{3}\,dx$ $[1]$

42 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + \cos x)\,dx$ $[2]$

43 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos x - 1)\,dx$ $\left[1 - \frac{\pi}{6}\right]$

44 $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)dx$ $\left[\frac{17}{6}\right]$

45 $\int_4^9 (3\sqrt{x} + 2x)\,dx$ $[103]$

46 $\int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x)\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

47 $\int_2^3 \left(2x + \frac{1}{x} + 1\right)dx$ $\left[6 + \ln\frac{3}{2}\right]$

48 $\int_{-2}^{-1} 2e^x\,dx$ $\left[\frac{2}{e}\left(\frac{e-1}{e}\right)\right]$

49 $\int_{-1}^4 (x + \ln 2 \cdot 2^x)\,dx$ $[23]$

50 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + 1}\,dx$ $[\ln 4 - \ln 3]$

51 $\int_0^1 4(x+1)^3\,dx$ $[15]$

52 $\int_{-3}^0 (2x^2 + 5)\,dx$ $[33]$

53 $\int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx$ $[2]$

54 $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 + 1)\,dx$ $[0]$

55 $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 2x\,dx$ $[0]$

56 $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx$ $[\ln(e+1) - \ln 2]$

57 $\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx$ $[e - 1]$

58 $\int_0^1 (2x-1)\,5^{x^2 - x}\,dx$ $[0]$

59 $\int_0^1 x^3(x^4+1)^5 dx$ $\left[\frac{21}{8}\right]$

60 $\int_0^2 x(x^2-1)^3 dx$ $[10]$

61 $\int_0^{\sqrt{8}} 6x\sqrt{x^2+1}\, dx$ $[52]$

62 $\int_0^2 e^x\sqrt{e^x+1}\, dx$ $\left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{(e^2+1)^3}-\sqrt{8}\right)\right]$

63 $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x^4+1} dx$ $\left[-\frac{1}{4}\ln 2\right]$

64 $\int_{\frac{1}{2}}^1 6\pi x \operatorname{sen}(\pi x^2)\, dx$ $\left[3+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$

65 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right) dx$ $[8]$

66 $\int_{-3}^{-1} \frac{x^2+2}{x^2} dx$ $\left[\frac{10}{3}\right]$

67 $\int_3^8 \frac{3\sqrt{x+1}}{2} dx$ $[19]$

68 $\int_1^3 \frac{-4}{(2x-1)^3} dx$ $\left[-\frac{24}{25}\right]$

69 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x+1)^2} dx$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

70 $\int_0^1 \frac{x}{(x^2-2)^4} dx$ $\left[\frac{7}{48}\right]$

71 $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx$ $\left[\frac{1}{3}\ln 2\right]$

72 $\int_1^3 \frac{4x+3}{2x^2+3x} dx$ $[\ln 27-\ln 5]$

73 $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$ $[\operatorname{arcsen} \ln 2]$

74 $\int_4^9 \frac{e^{2\sqrt{x}-4}}{2\sqrt{x}} dx$ $\left[\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right]$

75 $\int_2^{\sqrt{5}} 6x\sqrt{x^2-4}\, dx$ $[2]$

76 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\operatorname{tg} x\, dx$ $\left[-2\ln\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

77 $\int_{\frac{\pi^2}{36}}^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ $[\sqrt{3}-1]$

78 $\int_1^e (\ln x+x)\, dx$ $\left[\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}\right]$

79 $\int_3^6 \frac{3}{x^2-4x+4} dx$ $\left[\frac{9}{4}\right]$

80 $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{3+\cos x}} dx$ $[4-2\sqrt{2}]$

81 $\int_1^{10} \ln x\, dx$ $[10\cdot\ln 10-9]$

82 $\int_0^2 \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx$ $\left[\frac{e^2-1}{2(e^2+1)}\right]$

83 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx$ $[0]$

84 $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{x^4}-\frac{2}{x^2}\right) dx$ $[5]$

85 $\int_0^1 \frac{2}{x^2+6x+9} dx$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

86 $\int_{-1}^2 xe^x\, dx$ $\left[e^2+\frac{2}{e}\right]$

87 $\int_0^1 xe^{x-1}\, dx$ $\left[\frac{1}{e}\right]$

88 $\int_1^2 2x\ln x\, dx$ $\left[4\ln 2-\frac{3}{2}\right]$

89 $\int_2^4 \frac{2x^2+x+1}{2x-1} dx$ $[8+\ln 7-\ln 3]$

90 $\int_1^5 \left(3\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$ $[11\sqrt{5}-3]$

91 $\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \operatorname{tg} 2x\, dx$ $[0]$

92 $\int_{-2}^{-1} \frac{3x^2+2}{x^3+2x} dx$ $[-\ln 4]$

93 $\int_{-1}^1 (3x^5+3x^2-1)\, dx$ $[0]$

94 $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$ $\left[\operatorname{arctg} e-\frac{\pi}{4}\right]$

95 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} dx$ $[\ln 4]$

96 $\int_e^{e^3} \frac{1}{x\ln x} dx$ $[\ln 3]$

97 $\int_1^2 x\sqrt{x^2-1}\, dx$ $[\sqrt{3}]$

98 $\int_0^1 (2-e^x)(2x-e^x)^4\, dx$ $\left[\frac{(2-e)^5+1}{5}\right]$

99 $\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ $[-4]$

100 $\int_1^3 \frac{1}{x(1+x)} dx$ $\left[\ln\frac{3}{2}\right]$

101 $\int_8^{27} \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ $[3(e^3-e^2)]$

102 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx$ $[2]$

103 $\int_1^3 3x^2 \ln x\, dx$ $\left[27\ln 3 - \frac{26}{3}\right]$

104 $\int_{-1}^0 \frac{x-2}{x^2-8x+16}\, dx$ $\left[\frac{1}{10} + \ln\frac{4}{5}\right]$

105 $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\, dx$ $\left[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

106 $\int_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} + 3x^2 + 1\right) dx$ $[73]$

107 $\int_1^4 \left(5x\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right) dx$ $[62 - \ln 4]$

108 $\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{e+1}{3}} \frac{3}{3x-1}\, dx$ $[1]$

109 $\int_{-2}^{-1} \frac{x^2+1}{x}\, dx$ $\left[-\frac{3}{2} - \ln 2\right]$

110 $\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\, dx$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

111 $\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{6x}{(x^2+1)^2}\, dx$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

112 $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$ $[e^3 - e^2]$

113 $\int_{-2}^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\, dx$ $[\operatorname{arcsen} e^{-1} - \operatorname{arcsen} e^{-2}]$

114 $\int_3^4 \frac{1}{(x-1)\ln(x-1)}\, dx$ $[\ln\ln 3 - \ln\ln 2]$

115 $\int_0^{\ln\frac{1}{4}} \frac{e^x}{\cos^2(\pi e^x)}\, dx$ $\left[\frac{1}{\pi}\right]$

116 $\int_{-3}^0 \frac{1}{\sqrt{3x+25}}\, dx$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

117 $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{64-x^2}}\, dx$ $\left[\frac{\pi}{6}\right]$

118 $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{4x}{1+9x^4}\, dx$ $\left[\frac{\pi}{6}\right]$

119 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{\operatorname{sen} 2x}{4\operatorname{sen}^2 x}\, dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

120 $\int_e^{e^2} \frac{2}{x\ln^2 x}\, dx$ $[1]$

121 $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ $[2]$

122 $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$ $\left[\frac{\pi - \ln 4}{4}\right]$

123 $\int_0^1 \operatorname{arcsen} x\, dx$ $\left[\frac{\pi - 2}{2}\right]$

124 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{sen} x\, dx$ $[2]$

125 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x\cos x + 1)\, dx$ $\left[\frac{\pi+1}{2}\right]$

126 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

127 $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx$ $\left[\frac{\pi}{6}\right]$

128 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}}\, dx$ $[0]$

129 $\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}\sqrt{x}\, dx$ $[2\pi]$

130 $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\, dx$ $\left[\ln\frac{\sqrt{7}+2}{3}\right]$

131 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx$ $\left[\frac{3^{\frac{\sqrt{3}}{3}} - 1}{\ln 3}\right]$

132 $\int_0^1 \frac{3\operatorname{arctg}^2 x + \operatorname{arctg} x}{x^2+1}\, dx$ $\left[\frac{\pi^2(\pi+2)}{64}\right]$

133 $\int_0^1 x\cdot 3^x\, dx$ $\left[\frac{3\ln 3 - 2}{\ln^2 3}\right]$

134 $\int_0^{\frac{7}{8}} \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx$ $\left[\frac{4}{3} - \frac{23}{24\sqrt{2}}\right]$

135 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\, dx$ $\left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)\right]$

136 $\int_0^2 2\sqrt{4-x^2}\, dx$ $[2\pi]$

137 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2+4x+5}\, dx$ $\left[\frac{\pi}{16}\right]$

138 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^4 x\cos^3 x\, dx$ $\left[\frac{9}{280\sqrt{2}}\right]$

139 $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$ $[4]$

140 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ $\left[\frac{\pi-2}{8}\right]$

141 $\int_{-2}^0 \frac{3x+5}{x^2+2x-3}\, dx$ $[-\ln 3]$

142 $\int_{e^{\frac{\pi}{4}}}^{e^{\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{x\operatorname{sen}^2(\ln x)}\, dx$ $[1]$

143 $\int_0^1 x^2 e^x\, dx$ $[e-2]$

144 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\, dx$ $[2 - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}]$

145 $\int_0^1 \frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^2+2x+1}\, dx$ $[2]$

146 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 x\cos 2x\, dx$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

147 $\int_{-\frac{2}{3}}^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}(2+x)}\, dx$ $\left[\frac{\pi}{3}\right]$

148 $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$ $[4\pi]$

149 $\int_0^2 \frac{x+2}{e^{x-3}}\,dx$ $[3e^3-5e]$

150 $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$ $\left[\frac{2}{3}(5\sqrt{2}-4)\right]$

151 $\int_{-1}^1 x^2\cdot\sqrt{x+1}\,dx$ $\left[\frac{44}{105}\sqrt{2}\right]$

152 $\int_1^2 \frac{2x^2+5x+1}{x^2+x}\,dx$ $[2+\ln 9-\ln 2]$

153 $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ $\left[1-\frac{2}{e}\right]$

154 $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right]$

155 $\int_0^3 |x-1|\,dx$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

156 $\int_0^4 |3x^2-4x-4|\,dx$ $[32]$

157 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx$ $\left[\frac{2}{15}\right]$

158 $\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx$ $\left[\ln 2-2+\frac{\pi}{2}\right]$

159 $\int_1^2 x^3 e^x\,dx$ $[2e(e+1)]$

160 $\int_2^3 \ln(x^2-x)\,dx$ $[3\ln 6-3\ln 2-2]$

161 $\int_1^{e^\pi} \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$ $\left[\frac{e^\pi+1}{2}\right]$

162 $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt{x+2}}\,dx$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

163 $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ $\left[\frac{3}{35}(96\sqrt[3]{2}-17)\right]$

164 $\int_0^1 \frac{x^2+1}{e^x}\,dx$ $\left[3-\frac{6}{e}\right]$

165 $\int_6^{25} \frac{x}{\sqrt[3]{x+2}}\,dx$ $\left[\frac{558}{5}\right]$

166 $\int_{-1}^1 f(x)\,dx,\ \text{con } f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{se } -1\le x<0\\ \frac{1}{x+1} & \text{se } 0\le x\le 1\end{cases}$ $\left[\frac{3}{2}+\ln 2\right]$

167 Calcolare il seguente integrale definito: $\int_1^e x^3(\ln x)^2\,dx$. $\left[\frac{1}{32}(5e^4-1)\right]$

(*Università di Milano, Corso di laurea in Biologia, Prova di Matematica Generale,* 2009)

Trova per quale valore del parametro l'integrale assume il valore assegnato.

168 $\int_1^2 (-x^2+kx)\,dx=\frac{2}{3}$ $[2]$

169 $\int_1^3 (x+2a)^3\,dx=60$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

170 $\int_0^{e-1} \frac{1}{x+a}\,dx=1 \quad (a>0)$ $[1]$

171 $\int_0^{\frac{\pi}{8}} k\cos 4x\,dx=4$ $[16]$

Cambiare gli estremi di integrazione

172 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo l'integrale $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$, sapendo che $\int_0^1 f(x)\,dx=4$.

Poniamo $\frac{x}{2}=t$; allora: $x=2t \rightarrow dx=2dt$.

Per $x=0 \rightarrow t=0$; per $x=2 \rightarrow t=1$.

Sostituiamo e integriamo:

$$\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=\int_0^1 2f(t)\,dt=2\int_0^1 f(t)\,dt=2\cdot 4=8.$$

Essenzialmente abbiamo applicato la formula: $\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$.

Bergamini, Trifone, Barozzi **MATEMATICA.BLU - Vol.5** © Zanichelli 2012 *con Maths in English*

Calcola il valore dei seguenti integrali definiti, noto il valore dell'integrale indicato a fianco.

173 $\int_0^4 f(2x)\,dx$, $\int_0^8 f(x)\,dx = 10$. [5]

174 $\int_2^4 f\left(\frac{x}{4}\right)dx$, $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx = 6$. [24]

175 $\int_1^2 3f\left(\frac{x}{2}\right)dx$, $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx = 9$. [54]

176 $\int_0^8 2f(x)\,dx$, $\int_0^4 f(2x)\,dx = 10$. [40]

177 Calcola, se è possibile, i seguenti integrali, sapendo che $\int_1^2 f(x)\,dx = -4$ e che $\int_1^4 f(x)\,dx = 9$.

a) $\int_2^4 2f\left(\frac{x}{2}\right)dx$, b) $\int_4^8 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$, c) $\int_1^2 f(4x)\,dx$. [a) − 16; b) 26; c) impossibile]

178 **COMPLETA** L'integrale $\int_0^2 \frac{1}{e^{\sqrt{2x}}}\,dx$, con la sostituzione $\sqrt{2x} = t$, diventa $\int_{\dots}^{\dots} \frac{\dots}{e^t}\,dt$.

179 **COMPLETA** Se poniamo $\sqrt{x} = t$, l'integrale $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$ si scrive come $2\int_1^{\dots} \frac{dt}{1+\dots}$.

180 **VERO O FALSO?**

a) Se $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$, allora $F'(t) = f(t)$. V F

b) $\int_2^4 f(4x)\,dx = \int_1^2 f(2x)\,dx$. V F

c) Se $\int_{-4}^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 9$, allora $\int_{-2}^1 f(x)\,dx = \frac{9}{2}$. V F

d) Se $\int_{-2}^1 f(x)\,dx = 1$ e $\int_1^4 f(x)\,dx = 8$, allora $\int_{-4}^8 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 18$. V F

e) Se $\int_0^2 f(2x)\,dx = 4$ e $\int_2^5 f(2x)\,dx = 10$, allora $\int_0^{10} f(x)\,dx = 14$. V F

181 If $a, b > 0$ and $\int_0^b \frac{1}{1+x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{1}{1+x}\,dx$, express b in terms of a.

(IR *Leaving Certificate Examination,* Higher Level, 1994)

$[b = \sqrt{1+a} - 1]$

182 A continuous real function f satisfies the identity $f(2x) = 3f(x)$ for all x. If $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$, what is $\int_1^2 f(x)\,dx$?

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament, HMMT,* 2002)

[5]

Il valor medio di una funzione

183 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il valor medio della funzione $y = \sqrt{x}$ nell'intervallo [0; 9], calcoliamo inoltre il punto z in cui la funzione assume tale valore. Interpretiamo geometricamente il risultato.

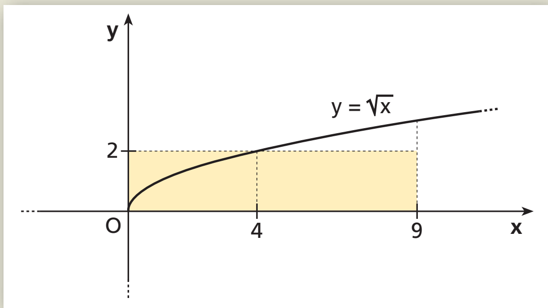
Verificato che la funzione è continua nell'intervallo dato, per calcolare il valor medio $f(z)$ della funzione utilizziamo il teorema della media:

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Quindi: $f(z) = \frac{1}{9-0}\int_0^9 \sqrt{x}\,dx$.

Eseguiamo il calcolo:

$$f(z) = \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^9 = \frac{1}{9}(18-0) = 2.$$



Poiché $f(z) = \sqrt{z} = 2$, possiamo ricavare il valore di z, punto in cui la funzione vale 2:

$z = 2^2 = 4$.

Riportiamo i risultati ottenuti in un diagramma cartesiano.
L'area del rettangolo giallo è uguale a quella del trapezoide relativo all'intervallo [0; 9].

Determina il valor medio delle seguenti funzioni nell'intervallo scritto a fianco. Calcola il punto z in cui la funzione assume tale valore. Interpreta geometricamente il risultato.

184 $y = x^3$ $[0; 2]$ $\left[f(z) = 2; z = \sqrt[3]{2}\right]$

185 $y = \frac{1}{x}$ $[1; 2]$ $\left[f(z) = \ln 2; z = \frac{1}{\ln 2}\right]$

186 $y = x^2 + 1$ $[0; 3]$ $\left[f(z) = 4; z = \sqrt{3}\right]$

187 $y = 4 - x^2$ $[1; 2]$ $\left[f(z) = \frac{5}{3}; z = \sqrt{\frac{7}{3}}\right]$

188 $y = \sqrt{x + 2}$ $[-1; 2]$ $\left[f(z) = \frac{14}{9}; z = \frac{34}{81}\right]$

189 $y = \frac{1}{1 + x^2}$ $[0; 1]$ $\left[f(z) = \frac{\pi}{4}; z = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}\right]$

190 $y = \frac{1}{(x-2)^2}$ $[3; 6]$ $\left[f(z) = \frac{1}{4}; z = 4\right]$

191 $y = \frac{x+2}{x-1}$ $[2; e + 1]$ $\left[f(z) = \frac{2+e}{e-1}; z = e\right]$

192 Considera la funzione $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x$. Dimostra che il valor medio in un periodo è nullo e determina il valor medio nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. $\left[\frac{1}{\pi}\right]$

193 Trova per quale valore di a la funzione $y = \frac{a}{\sqrt{x}}$ ha valor medio uguale a $\frac{12}{5}$ nell'intervallo [4; 9]. [6]

194 Studia e rappresenta graficamente la funzione $y = xe^x$ e determina poi l'altezza del rettangolo equivalente al trapezoide definito dal grafico nell'intervallo [0; 2]. $\left[\frac{e^2+1}{2}\right]$

195 Come nell'esercizio precedente, ma con la funzione $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ nell'intervallo $[0; 2\sqrt{2}]$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

La funzione integrale e la sua derivata

196 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo la derivata prima delle funzioni: a) $G(x) = \int_0^x \cos t \, dt$; b) $G(x) = \int_2^{x^2} \frac{\ln t}{t} dt$.

a) Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, se $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, allora $F'(x) = f(x)$.

Quindi se $G(x) = \int_0^x \cos t \, dt$, allora $G'(x) = \cos x$.

b) La funzione $G(x)$ si ottiene dalla composizione di due funzioni:

$$G(x) = F(x^2) = F(z), \qquad \text{con } F(z) = \int_2^z \frac{\ln t}{t}\,dt \text{ e } x^2 = z.$$

$F(z)$ è la funzione integrale della funzione $\frac{\ln t}{t}$ e quindi, per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$F'(z) = \frac{\ln z}{z}.$$

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte, otteniamo:

$$G'(x) = F'(x^2)\cdot 2x = \frac{\ln x^2}{x^2}\cdot 2x = 2\frac{\ln x^2}{x}.$$

Osservazione. In generale possiamo dire che la derivata della funzione

$$G(x) = \int_{x_0}^{f(x)} g(t)\,dt \qquad \text{è} \qquad G'(x) = g(f(x))\cdot f'(x).$$

Calcola la derivata prima delle seguenti funzioni.

197 $G(x) = \int_1^x \frac{t^2}{1+t}\,dt$ $\left[G'(x) = \frac{x^2}{1+x}\right]$

198 $G(x) = \int_x^2 \sqrt{t}\,dt$ $[G'(x) = -\sqrt{x}]$

199 $G(x) = \int_{-2}^{e^{x^2}} \ln^2 t\,dt$ $[G'(x) = 2x^5 e^{x^2}]$

200 $G(x) = \int_2^{x^4} \operatorname{arctg} t\,dt$ $[G'(x) = 4x^3 \operatorname{arctg} x^4]$

201 $G(x) = \int_{-3}^{2x^2} \sqrt{4+t^3}\,dt$ $[G'(x) = 8x\sqrt{1+2x^6}]$

202 $G(x) = \int_0^{\ln(1+x)} \frac{e^t - 1}{t}\,dt$ $\left[G'(x) = \frac{x}{(1+x)\ln(1+x)}\right]$

203 Trovare $f(4)$ sapendo che $\int_0^x f(t)\,dt = \pi\cos\pi x$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 9)

[0]

204 Trova i massimi e i minimi relativi della funzione integrale:

$F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$, in $[0; +\infty[$. [massimi: $x_n = (2n-1)\pi$, minimi: $x_n = 2n\pi$, con $n \in \mathbb{N} \wedge x \geq 1$]

205 Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x)$ tale che: $f(x) = \int_x^{x+1} \ln t\,dt$, con $x > 0$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria*, 2009, *quesito* 7)

$\left[f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]$

Calcola i seguenti limiti applicando, qualora sia possibile, il teorema di De l'Hospital.

206 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \ln(1+t)\,dt$ [0]

207 $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\ln(1+t^2)}{t}\,dt$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

208 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3} e^{t^2}\,dt}{6x^3}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

209 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}(\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t)\,dt}{x^5-x^3}$ [-1]

210 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt}{\sqrt{x^3}}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

211 $\lim_{x\to 2}\frac{\int_{e^2}^{e^x}\frac{t}{\ln t}\,dt}{x-2}$ $\left[\frac{e^4}{2}\right]$

212 $\lim_{x\to +\infty}\frac{\int_0^{x^2} t\,\operatorname{arctg} 2t\,dt}{x^4}$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

213 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{4}x^2}(1-\cos t)\,dt}{x^6}$ $\left[\frac{\pi^3}{384}\right]$

214 Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x\frac{t^2}{t^4+1}\,dt$. (*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione suppletiva*, 2002, *quesito* 5) $\left[\frac{1}{3}\right]$

215 Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3\,dt}{x^4}$. (*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione suppletiva*, 2002, *quesito* 4) $\left[\frac{1}{4}\right]$

216 Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo reale, tale che $f(0)=1$ ed $f'(0)=2$. Calcolare: $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt - x}{\cos 2x - 1}$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2001, *quesito* 4) $\left[-\frac{1}{2}\right]$

3. IL CALCOLO DELLE AREE DI SUPERFICI PIANE

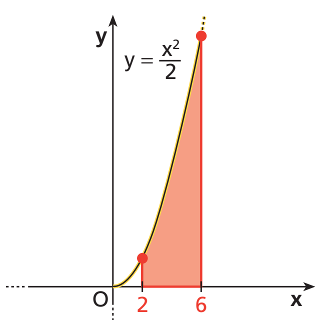
Teoria a pag. 2013

IN PRATICA
Videolezione 78

La funzione è positiva

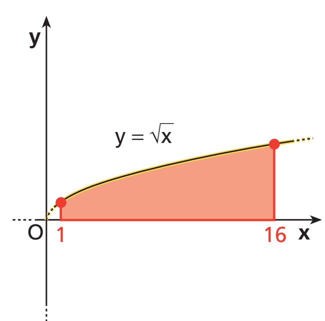
Calcola l'area del trapezoide rappresentato in ciascuna delle seguenti figure utilizzando gli integrali definiti.

217



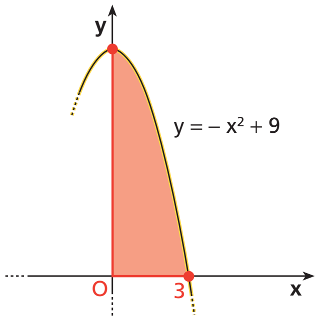
$\left[\frac{104}{3}\right]$

218



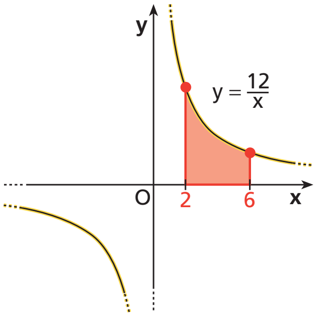
[42]

219



[18]

220



[12 ln 3]

Disegna i trapezoidi definiti dai grafici delle seguenti funzioni negli intervalli scritti a fianco e calcolane l'area utilizzando gli integrali definiti.

221 $y = 2x^2$, $[0; 3]$. $[18]$

222 $y = -x^2 + 16$, $[-4; 4]$. $\left[\frac{256}{3}\right]$

223 $y = -x^2 + 2x$, $[0; 2]$. $\left[\frac{4}{3}\right]$

224 $y = \sqrt{x+1}$, $[-1; 1]$. $\left[\frac{4}{3}\sqrt{2}\right]$

225 $y = \ln(x+1)$, $[0; 1]$. $[2\ln 2 - 1]$

226 $y = e^{-2x} + 1$, $[-1; 0]$. $\left[\frac{1}{2}(1 + e^2)\right]$

227 $y = 2\,\mathrm{tg}\, x$, $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. $\left[-2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

228 $y = 4\,\mathrm{sen}^2 x + 2$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. $[\pi + 1]$

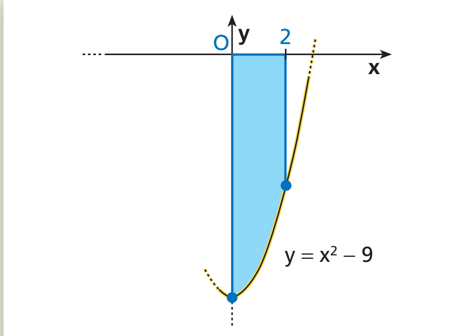
La funzione è negativa

229 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'area S della superficie delimitata dall'asse x e dal grafico della funzione $y = x^2 - 9$ definita sull'intervallo $[0; 2]$.

Osserviamo che il grafico della funzione è una parabola di vertice $V(0; -9)$ con la concavità rivolta verso l'alto e che incontra l'asse x nei punti di ascissa ± 3.

Disegniamo il grafico ed evidenziamo la superficie considerata.



Calcoliamo l'integrale definito esteso da 0 a 2:

$$\int_0^2 (x^2 - 9)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 18 - 0 = -\frac{46}{3}.$$

Poiché la funzione è negativa in tutto l'intervallo, allora per ottenere l'area S dobbiamo far precedere l'integrale definito da un segno meno, ossia:

$$S = -\int_0^2 (x^2 - 9)\,dx = -\left(-\frac{46}{3}\right) = \frac{46}{3}.$$

Dopo aver disegnato le superfici delimitate dall'asse x e dal grafico delle seguenti funzioni definite negli intervalli indicati, calcolane l'area.

230 $y = \mathrm{sen}\, x$, $[\pi; 2\pi]$. $[2]$

231 $y = x^3$, $[-2; 0]$. $[4]$

232 $y = -x^2 + 1$, $[1; 3]$. $\left[\frac{20}{3}\right]$

233 $y = x^2 - 6x + 5$, $[2; 4]$. $\left[\frac{22}{3}\right]$

234 $y = -\frac{3}{x}$, $[3; 6]$. $[3\ln 2]$

235 $y = -\sqrt{x}$, $[9; 16]$. $\left[\frac{74}{3}\right]$

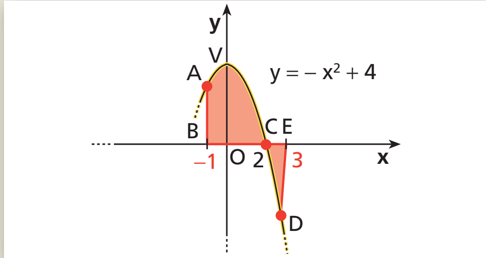
236 $y = \ln x$, $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. $\left[\frac{1}{2}(1 - \ln 2)\right]$

La funzione è in parte positiva o nulla e in parte negativa

237 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'area S della superficie delimitata dall'asse x e dal grafico della funzione $y = -x^2 + 4$ definita sull'intervallo $[-1; 3]$.

Il grafico della funzione è una parabola di vertice $V(0; 4)$ che ha la concavità rivolta verso il basso e incontra l'asse x nei punti di ascissa ± 2. Disegniamo tale grafico ed evidenziamo la superficie considerata.



Per calcolare l'area scomponiamo la superficie in due superfici: $ABCV$, delimitata dall'arco di curva CVA, in cui la funzione assume valori positivi, e CDE, delimitata dall'arco di curva CD, in cui la funzione assume valori negativi. Calcoliamo due integrali e cambiamo segno al secondo:

$$S = \int_{-1}^{2}(-x^2+4)\,dx - \int_{2}^{3}(-x^2+4)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-1}^{2} - \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{2}^{3} =$$

$$= \left(-\frac{8}{3}+8-\frac{1}{3}+4\right) - \left(-\frac{27}{3}+12+\frac{8}{3}-8\right) = -\frac{9}{3}+12+\frac{19}{3}-4 = \frac{34}{3}.$$

Dopo aver disegnato le superfici delimitate dall'asse x e dal grafico delle seguenti funzioni definite negli intervalli indicati, calcolane l'area.

238 $y = -x^3$, $[-1; 2]$. $\left[\frac{17}{4}\right]$

239 $y = x^2 - 3x$, $[-2; 1]$. $\left[\frac{59}{6}\right]$

240 $y = \cos x$, $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$. $\left[\frac{3}{2}\right]$

241 $y = e^x - 1$, $[-1; 1]$. $[e + e^{-1} - 2]$

242 $y = -x^2 + 6x - 8$, $[2; 5]$. $\left[\frac{8}{3}\right]$

243 $y = \sqrt{x} - 1$, $[0; 4]$. $[2]$

244 $y = \operatorname{tg} x$, $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$. $\left[\frac{3}{2}\ln 2\right]$

Due funzioni delimitano una superficie chiusa

245 **ESERCIZIO GUIDA**

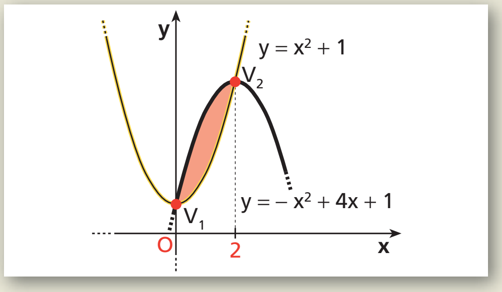
Determiniamo l'area della superficie racchiusa dalle parabole di equazioni:

$$y = x^2 + 1 \text{ e } y = -x^2 + 4x + 1.$$

Tracciamo le due parabole. La prima ha vertice nel punto $V_1(0; 1)$, asse di simmetria l'asse y e concavità rivolta verso l'alto. La seconda ha vertice nel punto $V_2(2; 5)$ e asse di simmetria la retta di equazione $x = 2$.

Le due parabole si intersecano nei punti $V_1(0; 1)$ e $V_2(2; 5)$, perciò gli estremi di integrazione sono 0 e 2.

Disegniamo le due parabole ed evidenziamo la superficie da esse racchiusa.



Sappiamo che l'area della superficie è data dall'integrale della differenza tra la funzione maggiore (la «più alta») e quella minore (la «più bassa»), perciò:

$$S = \int_{0}^{2}[(-x^2+4x+1)-(x^2+1)]dx = \int_{0}^{2}(-2x^2+4x)\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{2} = -\frac{16}{3}+8 = \frac{8}{3}.$$

246 Determina l'area della regione finita di piano individuata dalle parabole di equazioni: $y = x^2 - 1$ e $y = -x^2 - 3x - 1$. $\left[\frac{9}{8}\right]$

247 Calcola l'area della regione finita di piano individuata dalla retta di equazione $y = 3x - 1$ e dalla parabola di equazione $y = -x^2 + x + 2$. $\left[\frac{32}{3}\right]$

248 Determina l'area della regione finita di piano contenuta nel I quadrante e individuata dalla parabola di equazione $y = -x^2 + 2$ e dalla curva di equazione $y = x^3$. $\left[\frac{17}{12}\right]$

249 Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = -x^2 + 4$ e dalle tangenti condotte alla parabola nei suoi punti di intersezione con l'asse x. $\left[\frac{16}{3}\right]$

250 Dopo aver verificato che la parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ incontra la curva di equazione $y = 2^x$ nei punti $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ e $B(0; 1)$, determina l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve. $\left[\frac{5}{6} - \frac{1}{\ln 4}\right]$

251 È data la regione finita di piano individuata dall'iperbole di equazione $y = \frac{1}{x}$, dal ramo di parabola di equazione $y = \sqrt{x}$ e dalla retta di equazione $x = 9$. Calcola l'area. $\left[\frac{52}{3} - \ln 9\right]$

252 Determina l'area della regione finita di piano individuata dall'iperbole di equazione $y = \frac{4}{x}$ e dalla parabola di equazione $y = x^2 - 6x + 9$. $[8\ln 2 - 3]$

253 Calcola l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ e $g(x) = \frac{x^2}{2}$. $\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right]$

254 Calcola l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni $f(x) = \mathrm{tg}^2 x$ e $g(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. $\left[\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{2}\ln 2\right]$

255 Calcola le aree delle regioni di piano comprese tra le curve di equazioni $y = x^2$ e $y = \sqrt{|x|}$. $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$

256 Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola con asse parallelo all'asse x, avente vertice $V(-4; 0)$ e passante per il punto $A(0; 2)$, e dalla retta parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante passante per A. $\left[\frac{125}{6}\right]$

257 Determina l'area del triangolo ABC, dove A è il vertice della parabola $y = -x^2 + 4x$ e B e C sono i punti della parabola di ordinata -5. Trova inoltre l'area della regione finita di piano compresa fra la parte di parabola che contiene il triangolo e il triangolo stesso. $[S_1 = 27; S_2 = 9]$

258 Trova l'equazione della parabola, con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, che interseca la retta di equazione $y = 2x + 1$ nei punti di ascissa 0 e 5 delimitando con essa una regione di piano di area $\frac{125}{18}$.
$\left[y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 1; y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{11}{3}x + 1\right]$

259 Calcola le aree delle regioni di piano comprese tra le curve di equazioni $y = x^3$ e $y = \sqrt{2 - x^2}$ e l'asse delle ascisse. $\left[\frac{3\pi + 1}{4}; \frac{\pi - 1}{4}\right]$

260 Trova la retta passante per l'origine che divide il segmento parabolico individuato dalla parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$ e dall'asse x in due regioni di piano equivalenti. $[y = (4 - \sqrt[3]{32})x]$

ESERCIZI VARI Il calcolo delle aree di superfici piane

261 **TEST** L'area della regione piana delimitata dal grafico di $y = x^2 - 2x$, con $x \in [0; 3]$, e dall'asse x è data da:

A $\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx.$

B $\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx + \int_2^3 (2x - x^2)\,dx.$

C $\int_0^2 (2x - x^2)\,dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx.$

D $\int_0^3 (2x - x^2)\,dx.$

E $\int_0^3 (x^2 - 2x)\,dx.$

262 **COMPLETA** la seguente uguaglianza, che esprime l'area della parte di piano delimitata dalle parabole $y = -x^2 + 2x$ e $y = x^2 - 2x$:

$$S = \int_0^{\dots} (-x^2 + 2x)\,dx + \int_0^{\dots} (-x^2 + \dots)\,dx =$$
$$= \int_0^{\dots} (-2x^2 + \dots)\,dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \dots\right]_0^{\dots} = \dots$$

263 **TEST** L'area A compresa tra il grafico di $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + 2x^2}}$ e l'asse delle x, $x \in [-2; 0]$, vale:

A $A = -1.$

B $A = \int_0^{-2} \frac{x}{\sqrt{1 + 2x^2}}\,dx.$

C non è limitata.

D $A = 2.$

(*Politecnico di Torino, Test di Analisi I*)

264 **ASSOCIA** a ciascuna funzione $y = f(x)$ l'area della regione di piano da essa delimitata nell'intervallo scritto a fianco.

1) $f(x) = |x|$ in $[-2; 3]$ — a) $\frac{25}{4}$

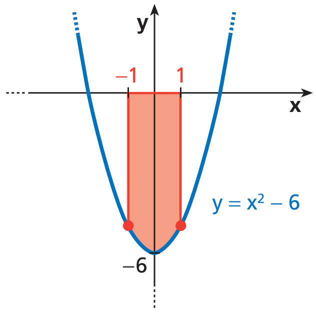
2) $f(x) = \frac{2}{3}\operatorname{sen} x$ in $[0; \pi]$ — b) $\frac{13}{2}$

3) $f(x) = \frac{1}{2}(4x^3 - 2x)$ in $[0; 2]$ — c) $\frac{4}{3}$

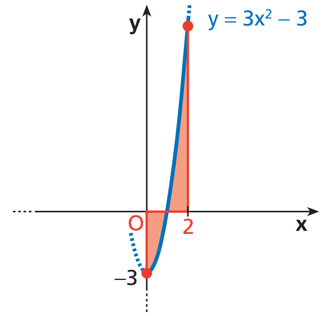
4) $f(x) = x^2 + 2|x|$ in $[-1; 1]$ — d) $\frac{8}{3}$

In ognuna delle seguenti figure sono evidenziate delle superfici: calcolane l'area mediante gli integrali.

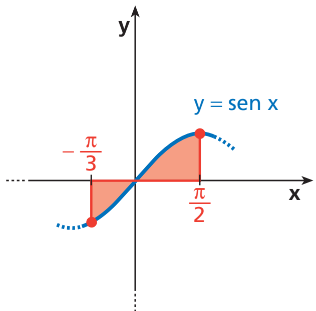
265



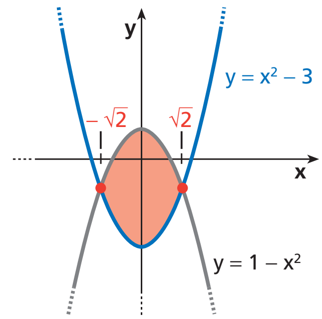
267



266



268



269 Calcolare l'area della regione di piano individuata dal grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$, dalle rette $x = 4$ e $x = 9$ e dall'asse delle x.

(*Politecnico di Torino, Test di Analisi I*)
$[2 + \ln 4]$

270 Trova l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, che ha il vertice di ordinata $-\dfrac{9}{4}$, passa per $A(0; 10)$ e ha la tangente in A di coefficiente angolare -7. Disegna la curva, considera la retta di equazione $y = -1$ e trova l'area della parte finita di piano delimitata dalla parabola e dalla retta.

$\left[y = x^2 - 7x + 10; \dfrac{5}{6}\sqrt{5}\right]$

271 Determine the area enclosed by the curve $y = x^2 + 1$ and the line $y = 5$.

(IR *Leaving Certificate Examination,* Higher Level, 1995)
$\left[\dfrac{32}{3}\right]$

272 La parabola di equazione $y = ax^2 + bx + 3$ passa per $A(-1; 0)$ e ha per tangente in questo punto la retta di equazione $y = 4x + 4$.
Trova a e b e disegna la curva. Considerata la retta di equazione $x + y = 3$, trova l'area della parte del piano delimitata dalla parabola e dalla retta.

$\left[a = -1, b = 2; \dfrac{9}{2}\right]$

273 Disegna le parabole di equazioni $y = x^2 - 4x - 5$ e $y = -x^2 + 6x + 7$.
Calcola poi l'area delle due zone delimitate dalle parabole e dal segmento che congiunge i loro punti di intersezione.

$\left[S_1 = S_2 = \dfrac{343}{6}\right]$

274 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, di vertice $V(1; 1)$ e passante per $A(4; 10)$. Trova l'area della regione delimitata dalla parabola, dagli assi cartesiani e dalla retta passante per A e di coefficiente angolare 5.

$\left[y = x^2 - 2x + 2; \dfrac{7}{2}\right]$

275 Calcola l'area della regione finita di piano individuata dalla parabola di equazione $y = -x^2 + 6x$ e dalla retta di coefficiente angolare 1 passante per il punto della parabola di ascissa 4. $\left[\frac{9}{2}\right]$

276 Trova l'area delle parti finite di piano racchiuse dalle due parabole di equazioni $y = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x$ e $x = y^2$. $\left[\frac{20}{3}; \frac{1}{12}\right]$

277 Considera la parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{7}{2}$ e trova le equazioni delle rette tangenti s e t nei suoi punti di ascissa 2 e 5.
Determina l'area della parte finita di piano delimitata dalle rette s, t e dal grafico della parabola. $\left[\frac{9}{8}\right]$

278 Rappresenta graficamente la funzione di equazione $y = 2 + \frac{4}{x-1}$.
Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva data, dalla tangente alla curva nel suo punto di ascissa 0 e dall'asse x. $\left[4\ln 2 - \frac{5}{2}\right]$

279 Find the area of the bounded region enclosed by the curve $y = \frac{2x}{x^2+1}$, the x-axis, the line $x = 1$, and the line $x = 2\sqrt{2}$.

(IR *Leaving Certificate Examination,* Higher Level, 1994) $\left[\ln\left(\frac{9}{2}\right)\right]$

280 Disegna le parabole di equazioni $y = x^2 - 7x + 10$ e $y = -x^2 + 8x - 12$.
Conduci una retta parallela all'asse y nella zona S racchiusa dalle due parabole in modo che la corda intercettata su di essa dalle parabole abbia lunghezza massima. Calcola poi l'area di S e delle due parti in cui S resta divisa dalla retta trovata. $\left[x = \frac{15}{4}; S = \frac{343}{24}; S_1 = S_2 = \frac{343}{48}\right]$

281 Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, con il vertice di ascissa $x = 4$ e passante per i punti $A(6; 0)$ e $B(0; 12)$. Considera la retta t tangente in A alla parabola e la retta r parallela all'asse x passante per B. Calcola l'area della regione delimitata dalla parabola e dalle rette r e t. $\left[y = x^2 - 8x + 12; \frac{14}{3}\right]$

282 Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione $y = \cos^2 x$ e dalle rette di equazioni $x = \frac{\pi}{4}$ e $y = -2x + 1$. $\left[\frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi^2}{16}\right]$

283 Traccia il grafico della parabola di equazione $x = y^2 - 2y$ e calcola l'area della regione finita di piano compresa tra la curva e l'asse y. $\left[\frac{4}{3}\right]$

284 Dopo aver disegnato il grafico della funzione $y = \frac{1}{x^2+4}$, determina l'area della regione finita delimitata dallo stesso grafico e dalla retta di equazione $y = \frac{1}{5}$. $\left[\text{arctg}\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right]$

285 Trova l'equazione della parabola che ha l'asse di equazione $y = \frac{5}{2}$, passa per il punto $(2; 1)$ e interseca l'asse x nel punto di ascissa 6.
Calcola l'area della regione di piano compresa tra la curva e l'asse delle ordinate. $\left[x = y^2 - 5y + 6; \frac{1}{6}\right]$

286 Determina l'area della regione di piano delimitata dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. $[12\pi]$

287 Calcola l'area della regione contenuta nel semipiano delle ordinate positive delimitata dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. $[4\pi]$

288 Data la parabola di equazione $y = ax^2 + 3x + 5$, con $a \in \mathbb{R}$, determina il valore di a in modo che l'area della regione finita di piano individuata dalla parabola e dalla retta di equazione $y = x + 5$ sia uguale a $\frac{1}{3}$. $[a = \pm 2]$

289 Dopo aver rappresentato graficamente la funzione $y = x^3 - x^2$, determina l'area della regione finita di piano compresa fra la curva, la retta a essa tangente nel suo punto di minimo e la retta a essa tangente nel suo punto di intersezione con l'asse x distinto dall'origine. $\left[\frac{13}{2916}\right]$

290 Rappresenta la funzione $y = \frac{x^3 - x^2}{x + 2}$ e calcola l'area della regione finita di piano compresa fra il grafico della funzione, l'asse x e la retta passante per il punto di ascissa 2 appartenente alla funzione e per $A(4; 0)$. $\left[\frac{29}{6} + 12 \ln \frac{3}{4}\right]$

291 Rappresenta graficamente la funzione $y = \frac{2x + 1}{x^2 - 4x + 4}$ e calcola l'area della regione finita di piano compresa fra l'asse x, la retta di equazione $x = 1$ e la retta parallela all'asse y passante per il punto di minimo della funzione. $\left[2 \ln \frac{4}{5} + 2\right]$

292 Rappresenta graficamente la funzione $y = \sqrt{\frac{x}{4 - x}}$ e determina l'area della regione finita di piano compresa fra la curva, l'asse y e la retta tangente alla curva nel suo punto di flesso. (Suggerimento. Per il calcolo dell'integrale poni $x = 4 \operatorname{sen}^2 t$.) $\left[\frac{11}{9}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi\right]$

293 Dopo aver disegnato il grafico della funzione $y = 1 - x\, e^{-x}$, calcola l'area della regione finita di piano delimitata dallo stesso grafico, dal suo asintoto, dall'asse y e dalla retta di equazione $x = 2$. $[1 - 3e^{-2}]$

294 Rappresenta la funzione $y = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ e determina l'area della regione finita delimitata dagli assi x e y, dal grafico della funzione e dalla retta parallela all'asse y passante per il punto di minimo relativo della funzione. $\left[\frac{5 - 4\sqrt{2}}{2} + \ln 2\right]$

295 Considera la funzione $y = 4 \cos^3 x + \cos x$ e rappresentala graficamente nell'intervallo $[-\pi; \pi]$. Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva data e dall'asse x, per $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. $\left[\frac{22}{3}\right]$

296 Calcola l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ e $g(x) = \frac{x^2}{2}$. $\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right]$

297 Rappresenta graficamente l'iperbole di equazione $xy = 6$ e determina le equazioni delle tangenti all'iperbole nel suo punto A di ascissa 3 e nel suo punto B di ascissa 1. Individua il punto C di intersezione delle due tangenti e calcola l'area del triangolo mistilineo ABC, avente il lato AB appartenente all'iperbole. $\left[2x + 3y - 12 = 0,\ 6x + y - 12 = 0; C\left(\frac{3}{2}; 3\right); 6(\ln 3 - 1)\right]$

298 Traccia il grafico della funzione $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$ e successivamente calcola l'area della regione finita di piano delimitata dallo stesso grafico, dal suo asintoto obliquo, dall'asse y e dalla retta di equazione $x = 2$.
$[\ln 3]$

299 Calcola l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni $f(x) = \mathrm{tg}^2 x$ e $g(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
$\left[\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{2}\ln 2\right]$

300 Trova per quale valore di t l'integrale $\int_t^1 2\sqrt{1-x}\,dx$ è uguale all'area della parte finita di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = x^2 - 2x$ e dall'asse x.
$[t = 0]$

301 Studia e rappresenta graficamente la funzione $y = \ln(-3x^2 + 2x + 1)$ e calcola il valore dell'area della regione limitata compresa tra il grafico della funzione e l'asse x.
$\left[\frac{4}{3}(\ln 3 - 1)\right]$

302 Trova l'area della parte di piano finita delimitata dalla parabola di equazione $y = \frac{3}{2}x^2 - 1$, dall'iperbole di equazione $y = \frac{x+3}{x-1}$ e dalla retta di equazione $3x - 8y + 1 = 0$.
$\left[8\ln 2 + \frac{1}{2}\right]$

303 Dato il fascio di parabole di equazione $y = -kx^2 + 2(k-1)x$, trova quale parabola (con $k > 1$) individua con l'asse x una regione finita di area uguale a $\frac{1}{3}$.
$[k = 2]$

304 Rappresenta graficamente la funzione $y = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}$ e calcola l'area della regione finita di piano compresa fra il grafico della funzione, l'asse x e la retta di equazione $x = \frac{1}{2}$.
$[2 - \sqrt{3}]$

305 Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y passante per $A(2; 3)$, $B(1; 1)$ e $C(-2; 0)$ e quella della funzione omografica di centro $D(1; 0)$ che interseca l'asse delle ordinate in -3. Trova poi l'area della regione finita di piano compresa tra le due coniche e la retta di equazione $x = 4$.
$\left[y = \frac{5}{12}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{6};\ y = \frac{3}{x-1};\ \frac{215}{18} - \ln 27\right]$

306 Dopo aver rappresentato graficamente il luogo dei centri delle iperboli di equazione $y = \frac{(m^2-3)x + 2}{(m+2)x + 4}$ (con $m \in \mathbb{R}$), determina l'area della regione finita di piano compresa fra il luogo geometrico, la retta a esso tangente nel punto di minimo e la retta di equazione $x = -2$.
$\left[4\ln 2 - \frac{5}{2}\right]$

307 Scrivi l'equazione della circonferenza con centro $C(2; -3)$ e raggio $r = 3\sqrt{2}$ e quella della parabola con asse parallelo all'asse y e tangente alla circonferenza nei punti A e B in cui quest'ultima interseca l'asse x. Calcola infine l'area della regione finita di piano racchiusa fra l'arco di circonferenza e quello di parabola. (Suggerimento. L'area compresa tra l'arco di circonferenza e l'asse x si ottiene come differenza fra l'area del corrispondente settore circolare e l'area del triangolo.)
$\left[15 - \frac{9}{2}\pi\right]$

308 Rappresenta graficamente la funzione $y = xe^{-a^2x^2}$, con $a > 0$, e determina l'area della regione finita di piano sottesa alla curva nell'intervallo $[0; a]$. Calcola il limite a cui tende l'area quando a tende a $+\infty$.
$\left[\frac{1}{2a^2}(1 - e^{-a^4});\ 0\right]$

309 Studia e rappresenta graficamente la funzione di equazione $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x}$. Determina l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione data, dall'asse x e dalla retta passante per l'origine e per il punto di flesso avente ascissa positiva.
$\left[\frac{1}{2}\left[\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{3}\right]\right]$

310 a) Considera la funzione $y = x^3 - 4x$ e rappresentala graficamente.
b) Traccia la tangente t alla curva nel suo punto di intersezione con il semiasse positivo delle ascisse.
c) Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva data, dalla retta t e dall'asse y.
[b) $y = 8x - 16$; c) 12]

311 Studia e rappresenta graficamente la funzione $f(x) = \frac{4x^2 + x + 2}{x^2 + 1}$.
Detto A il punto di intersezione del grafico con l'asintoto orizzontale, determina l'equazione della tangente t in A e calcola l'area della regione finita di piano delimitata dall'asse y, dalla retta t e dal grafico di $f(x)$.
$\left[2\,\mathrm{arctg}\,2 - \frac{\ln 5}{2} - \frac{2}{5}\right]$

312 Studia la funzione $f(x) = \frac{2x - 5}{(x-2)^3}$ e rappresentane il grafico γ.
Determina l'equazione della parabola che passa per i punti F, A, B, essendo F il flesso di γ, A l'ulteriore punto di intersezione di γ con la tangente inflessionale e B il punto di intersezione di γ con l'asse x. Calcola poi l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.
$\left[y = 2x^2 - 9x + 10; \frac{7}{24}\right]$

313 a) Determina per quale valore del parametro reale a ($a \geq 0$) l'area del trapezoide individuato dalla curva $y = \frac{a + x}{x^2 + 1}$ e dalle rette di equazioni $x = 0$ e $x = 1$ vale $\frac{\pi + \ln 4}{4}$.
b) Rappresenta graficamente la curva trovata.
c) Determina l'equazione della retta tangente alla curva nel suo punto di flesso di ascissa positiva.
$\left[\text{a) } a = 1; \text{ c) } y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right]$

314 a) Rappresenta graficamente la curva di equazione $y = xe^{-2x}$.
b) Determina l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva, dall'asse x e dalla retta $x = \ln 2$.
$\left[\text{b) } -\frac{1}{8}\ln 2 + \frac{3}{16}\right]$

315 a) Rappresenta graficamente la curva di equazione $y = \frac{1 - x^2}{1 - 4x^2}$.
b) Determina l'equazione della retta r a essa tangente nel suo punto di intersezione con l'asse x di ascissa positiva.
c) Trova per quale valore del parametro reale a ($a > 1$) l'area della regione finita di piano compresa tra la retta r, la curva e la retta di equazione $x = a$ vale $\frac{1}{12} + \frac{3}{8}\ln\frac{9}{5}$.
$\left[\text{b) } y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}; \text{ c) } a = 2\right]$

316 a) Scrivi le primitive della funzione $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{2 - x^2 + x^3}\ln(2 - x^2 + x^3)$.
b) Tra le primitive trovate rappresenta graficamente quella passante per $\left(2; \frac{1}{2}\ln^2 6\right)$, limitandoti allo studio della derivata prima.
c) Calcola l'area della regione finita di piano compresa tra le rette di equazioni $x = 1$ e $x = 2$, l'asse delle ascisse e il grafico della funzione $f(x)$.
$\left[\text{a) } F(x) = \frac{1}{2}\ln^2(2 - x^2 + x^3) + c; \text{ c) } \frac{1}{2}(\ln^2 6 - \ln^2 2)\right]$

317 Calcola l'area della regione finita di piano i cui punti hanno coordinate $(x; y)$ che soddisfano il seguente sistema di disequazioni nelle due variabili x e y:
$$\begin{cases} y \leq -x^2 + 6x - 5 \\ y - 3 \leq 0 \\ y \geq 3 - \sqrt{12 - 3x} \end{cases}$$
$\left[\frac{14}{3}\right]$

318 What is the area of the region bounded by the curves $y = x^{2003}$ and $y = x^{\frac{1}{2003}}$, and lying above the x-axis?

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament, HMMT*, 2003)

$\left[\frac{1001}{1002}\right]$

319 Trova l'area della regione del primo quadrante delimitata superiormente dal grafico di $y = \operatorname{arcsen} x$, inferiormente dal grafico di $y = \arccos x$.

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament, HMMT*, 2002)

$\left[\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\right]$

320 Determina il valore positivo di a tale che la parabola $y = x^2 + 1$ divida in due l'area del rettangolo con vertici $(0; 0)$, $(a; 0)$, $(0; a^2 + 1)$ e $(a; a^2 + 1)$.

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament, HMMT*, 2002)

$[\sqrt{3}]$

4. IL CALCOLO DEI VOLUMI

▶ Teoria a pag. 2015

I volumi dei solidi di rotazione

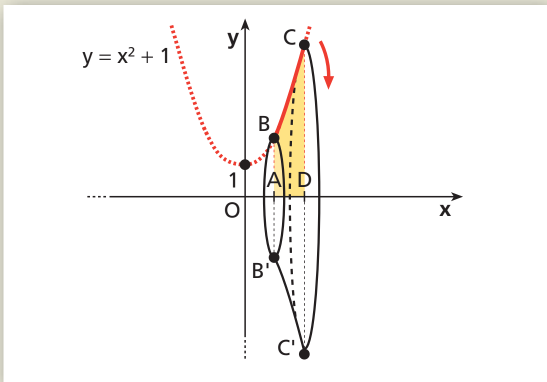
IN PRATICA
▶ Videolezione 79

321 **ESERCIZIO GUIDA**

Consideriamo la parabola di equazione $y = x^2 + 1$ e calcoliamo il volume del solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse x di un giro completo il trapezoide esteso all'intervallo [1; 2].

Disegniamo la parabola ed evidenziamo il trapezoide *ABCD*.

Rappresentiamo poi il solido generato dalla rotazione completa intorno all'asse x del trapezoide *ABCD*.



Calcoliamo il volume di tale solido, applicando la formula $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx$:

$$V = \pi \cdot \int_1^2 (x^2+1)^2 dx = \pi \cdot \int_1^2 (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx = \pi \cdot \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right]_1^2 =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{178}{15}\pi.$$

322 Calcola il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del trapezoide individuato dal grafico della funzione $y = x^3$ nell'intervallo [0; 1].

$\left[\frac{\pi}{7}\right]$

323 Calcola il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del trapezoide individuato dal grafico della funzione $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. $[\pi]$

324 Determina il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del trapezoide individuato dal grafico della funzione $y = x\sqrt{x}$ nell'intervallo $[1; 4]$. $\left[\frac{255}{4}\pi\right]$

325 Trova il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del trapezoide individuato dal grafico della funzione $y = \sqrt{x+4}$ nell'intervallo $[0; 5]$. $\left[\frac{65}{2}\pi\right]$

326 Disegna il solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del trapezoide individuato dal grafico della funzione $y = \sqrt{\operatorname{sen} x - \cos x}$ nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$. Calcolane il volume. $[\pi]$

327 Trova il volume del solido ottenuto ruotando di 360° attorno all'asse x il trapezoide definito dalla funzione $y = \frac{x}{2-x}$ nell'intervallo $[0; 1]$. $[\pi(3 - 4\ln 2)]$

328 Calcola il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del trapezoide individuato dal grafico della funzione $y = \frac{1}{\cos x}$ nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. $[\pi]$

329 Determina il volume del solido ottenuto ruotando di 360° attorno all'asse x il trapezoide definito dalla parabola di equazione $y = 9 - x^2$ nell'intervallo $[0; 2]$. $\left[\frac{602}{5}\pi\right]$

330 Rappresenta la funzione $y = 4 - 2x$ nell'intervallo $[0; 2]$. Che solido ottieni ruotando di 360° attorno all'asse x il grafico di tale funzione? Calcola il volume del solido ottenuto e verifica il risultato applicando la relativa formula geometrica. $\left[\text{cono}; \frac{32}{3}\pi\right]$

331 Disegna il grafico della funzione $y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$ e calcola il volume del solido ottenuto dalla rotazione di 360° attorno all'asse x di tale grafico. $[60\pi]$

332 Rappresenta la funzione $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$ nell'intervallo $[2; 4]$. Che solido ottieni ruotando di 360° attorno all'asse x il grafico di tale funzione? Calcola il volume del solido ottenuto e verifica il risultato applicando la relativa formula geometrica. $\left[\text{semisfera}; \frac{16}{3}\pi\right]$

333 Trova il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del trapezoide individuato dal grafico della funzione $y = \sqrt{\frac{x+4}{x}}$ nell'intervallo $[-5; -4]$. $\left[\left(1 - 4\ln\frac{5}{4}\right)\pi\right]$

334 Rappresenta graficamente la funzione $y = \sqrt{e^{3x}}$ e determina il volume del solido ottenuto mediante una rotazione completa attorno all'asse x, con $x \in [0; 1]$. $\left[\frac{\pi}{3}(e^3 - 1)\right]$

335 Determina il volume del solido che si ottiene dalla rotazione completa intorno all'asse y della superficie delimitata dalla curva di equazione $x = y^2 - 3y$ e dall'asse y. $\left[\frac{81}{10}\pi\right]$

336 Studia le funzioni

$$\gamma: y = 1 - \frac{1}{8}x^3 \qquad \text{e} \qquad \gamma': y = \sqrt{1 - \frac{1}{8}x^3}$$

e disegna i loro grafici nello stesso piano cartesiano Oxy. Calcola poi il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x della regione finita piana delimitata da γ e γ'. $\left[\frac{3}{14}\pi\right]$

337 Dopo aver rappresentato graficamente le parabole di equazioni $y = x^2$ e $x = y^2$, determina il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x della parte finita di piano delimitata dalle due parabole. $\left[\frac{3}{10}\pi\right]$

338 Rappresenta graficamente le curve di equazioni $y = 2\sqrt{x-1}$ e $y = \sqrt{x}$ e calcola il volume del solido ottenuto dalla rotazione di 360° intorno all'asse x della figura definita dai due grafici e dall'asse x. $\left[\frac{2}{3}\pi\right]$

339 Si disegni in un piano cartesiano ortogonale Oxy la curva C di equazione $y = \frac{\sqrt{2x^2-1}}{x}$ e si calcoli il volume del solido ottenuto facendo ruotare di un giro completo attorno all'asse delle ascisse la regione finita di piano compresa tra l'arco della curva C, i cui estremi sono i punti di ascissa $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e 1, e le rette tangenti a C negli estremi stessi.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 1991, *problema* 2)

$\left[\pi \cdot \left(\frac{23}{12}\sqrt{2} - \frac{8}{3}\right)\right]$

340 Data la curva di equazione $x = 4y^2$, rappresentala graficamente nel semipiano $y \geq 0$. Determina il volume V del solido generato in una rotazione di 360° attorno all'asse delle y del tratto di curva, con $x \in [0; 16]$. $\left[\frac{512}{5}\pi\right]$

341 Dopo aver studiato la funzione di equazione $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$, determina il volume del solido generato da una rotazione di 360° attorno all'asse x della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione e dalle rette di equazioni $x = 3$ e $x = 4$. $[\pi + 3\pi \ln 2]$

342 Data la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, trova i coefficienti a, b, c in modo che la parabola intersechi l'asse x nell'origine e in $A(1; 0)$ e in modo che l'arco $\overset{\frown}{OA}$ di parabola generi nella rotazione di 360° intorno all'asse x un solido di volume uguale a $\frac{49}{30}\pi$. $[a = \pm 7, b = \mp 7, c = 0]$

343 Trova il volume di una clessidra costruita per rotazione del grafico di $y = \operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{10}$ tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ intorno all'asse x.

(USA *Rice University Mathematics Tournament*, 2006)

$\left[\frac{97\pi^2}{200}\right]$

344 Data la funzione $y = -4x^3 + 5x$, determina il valore di a, con $0 < a < \frac{\sqrt{5}}{2}$, in modo che il volume del solido generato da una rotazione di 360° attorno all'asse x della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = a$ sia uguale a $\frac{55}{21}\pi a^3$. $[a = 1]$

345 Sia R la regione piana compresa tra le curve di equazioni $y = x - \frac{\pi}{4}x^2$ e $y = \frac{\pi}{4}x^2$. Determina il valore dell'altezza h che deve avere un cilindro retto di base R in modo che il suo volume coincida con quello del solido generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse x. $[h = 1]$

346 Sia R la regione piana limitata compresa tra il grafico della funzione $y = \sqrt{16x + 25}$, l'asse x e l'asse y. Determina il rapporto tra il volume del solido generato da una rotazione di 120° di R attorno all'asse x e il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse y. [1]

347 Studia la funzione $y = f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x$ e disegna il suo grafico. Calcola poi il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x della regione finita piana che si trova nel quadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$, delimitata dai grafici di $y = f(x)$ e di $y = x$. $\left[\frac{6439}{3780}\pi\right]$

348 Data la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 4$, determina il volume del solido che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse y la parte finita di piano che si trova nel I quadrante, delimitata dalla parabola e dagli assi cartesiani. $\left[\frac{8}{3}\pi\right]$

349 Dimostra con gli integrali che il volume di un tronco di cono di altezza h e raggi di base r e R è $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$.

350 Data la parabola di equazione $y = -4x^2 + 8x$, traccia le tangenti t_1 e t_2 nei suoi punti O e A di ascissa 0 e $\frac{3}{2}$. Detto B il punto di intersezione delle due rette, determina il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse x del triangolo mistilineo OBA. $\left[\frac{189}{20}\pi\right]$

351 Considera la parabola γ di equazione $y = -x^2 + 4x$ e la retta r di equazione $y = 3$. Trova il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa intorno a r della parte di piano delimitata da γ e da r. $\left[\frac{16}{15}\pi\right]$

352 Find the volume of the solid formed by the complete revolution about the x-axis of the area in common to the circles with equations $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ and $x^2 + y^2 = 3$.

(USA *Atlantic Provinces Council on the Sciences, APICS, Mathematics Contest*, 1999)

$\left[\pi\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)\right]$

I volumi dei solidi

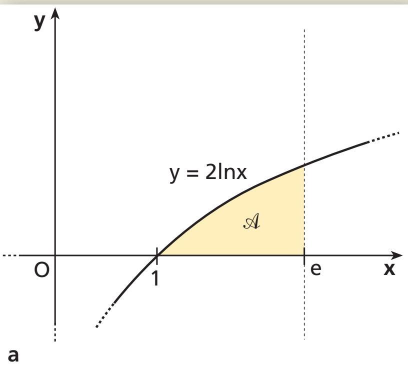
IN PRATICA
▶ Videolezione 80

353 **ESERCIZIO GUIDA**

Consideriamo la regione finita $\mathscr{A}$ di piano delimitata dalla curva di equazione $y = 2\ln x$, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = e$. Calcoliamo il volume del solido che ha come base $\mathscr{A}$ e le cui sezioni ottenute con piani perpendicolari all'asse x sono dei quadrati.

Tracciamo il grafico di $y = 2\ln x$ ed evidenziamo la regione $\mathscr{A}$ (figura *a*).
Costruiamo il solido che ha come base $\mathscr{A}$ e avente come sezioni perpendicolari all'asse x dei quadrati (figura *b*).
Il volume V del solido è l'integrale definito tra 1 ed e della funzione che rappresenta l'area di un quadrato di lato $2\ln x$, e cioè $4\ln^2 x$:

$$V = \int_1^e 4\ln^2 x \, dx.$$

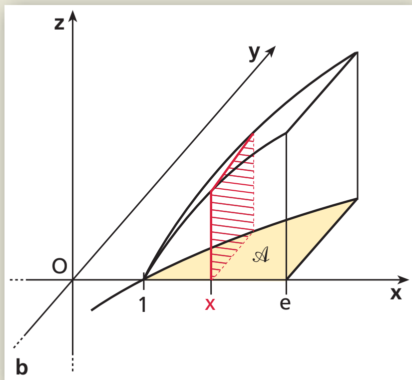


Calcoliamo per parti l'integrale $\int 4\ln^2 x\,dx$:

$$\int 4\ln^2 x\,dx = 4x\ln^2 x - 4\int 2x\frac{\ln x}{x}\,dx =$$
$$= 4x\ln^2 x - 8\left[x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right] =$$
$$= 4x\ln^2 x - 8x\ln x + 8x + c.$$

Allora il volume del solido è:

$$V = \left[4x\ln^2 x - 8x\ln x + 8x\right]_1^e =$$
$$= 4e - 8e + 8e - (0 - 0 + 8) = 4e - 8.$$



Calcola il volume dei solidi che hanno come base le regioni finite di piano delimitate dalle curve di equazioni assegnate e dall'asse x negli intervalli segnati a fianco e come sezioni perpendicolari all'asse x quelle indicate.

354 $y = e^{-x}$, [0; 1]; sezioni: rettangoli con altezza doppia sulla base. $[1 - e^{-2}]$

355 $y = -x^2 + 6x$, [1; 4]; sezioni: quadrati. $\left[\frac{978}{5}\right]$

356 $y = \sqrt{\frac{8}{x+1}}$, [1; 7]; sezioni: triangoli equilateri. $[4\sqrt{3}\ln 2]$

357 $y = 4\sqrt{x+1}$, [3; 8]; sezioni: triangoli equilateri. $[130\sqrt{3}]$

358 $y = x\sqrt{x}$, [1; 4]; sezioni: esagoni regolari. $\left[\frac{765}{8}\sqrt{3}\right]$

5. LA LUNGHEZZA DI UN ARCO DI CURVA E L'AREA DI UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE

▶ Teoria a pag. 2018

La lunghezza di un arco di curva

359 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo la lunghezza del ramo di curva di equazione $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ compreso fra i punti di ascissa $x = 2$ e $x = 4$.

Determiniamo la derivata della funzione data:

$$D\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}\right] = D\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x-1}.$$

Calcoliamo la lunghezza della curva utilizzando la formula $l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$, dove $a = 2$ e $b = 4$.

$$l = \int_2^4 \sqrt{1 + [\sqrt{x-1}]^2}\,dx = \int_2^4 \sqrt{1 + x - 1}\,dx = \int_2^4 \sqrt{x}\,dx = \int_2^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^4 = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_2^4 = \frac{16}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

Date le seguenti funzioni, determina la lunghezza della parte del loro grafico compresa fra i punti di ascissa scritta a fianco.

360 $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}$, $a = -2$, $b = -1$. $\left[\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right]$

361 $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3}$, $a = 2$, $b = 5$. $\left[\frac{14}{3}\right]$

362 $y = \sqrt{x^3}$, $a = 0$, $b = 1$. $\left[\frac{13}{27}\sqrt{13} - \frac{8}{27}\right]$

363 $y = \sqrt{4 - x^2}$, $a = -2$, $b = 2$. $[2\pi]$

364 $y = \sqrt{9 - x^2}$, $a = -3$, $b = 3$. $[3\pi]$

365 $y = x^2$, $a = 0$, $b = 2$. $\left[\sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln(4 + \sqrt{17})\right]$

L'area di una superficie di rotazione

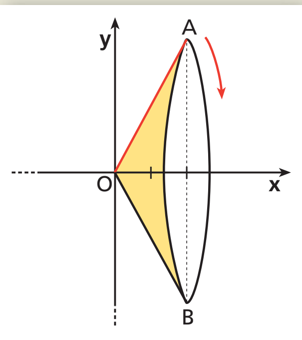
366 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x del segmento appartenente alla retta di equazione $y = 2x$ avente estremi di ascissa $x = 0$ e $x = 2$.

Disegniamo la superficie.

a) Tracciamo il grafico della retta nell'intervallo considerato e il suo simmetrico rispetto all'asse x.

b) Tracciamo, in prospettiva, la circonferenza di diametro AB. Si ottiene così la rappresentazione della superficie generata dalla rotazione completa intorno all'asse x del segmento OA.



Scriviamo la derivata della funzione data: $y' = 2$.

Calcoliamo l'area della superficie, applicando la formula

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx:$$

$$S = 2\pi\int_0^2 2x\cdot\sqrt{1+2^2}\,dx = 2\pi\int_0^2 2x\cdot\sqrt{5}\,dx = 2\pi[\sqrt{5}\,x^2]_0^2 = 8\pi\sqrt{5}.$$

367 Calcola l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x del segmento appartenente alla retta di equazione $y = 3x$ avente estremi di ascissa $x = 0$ e $x = 1$. $[3\pi\sqrt{10}]$

368 Determina l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x del segmento appartenente alla retta di equazione $y = -x + 2$ situato nel primo quadrante. $[4\pi\sqrt{2}]$

369 Trova l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x dell'arco di parabola di equazione $y = 2\sqrt{x}$ delimitato dalle rette di equazioni $x = 1$ e $x = 3$. $\left[\frac{16\pi}{3}(4 - \sqrt{2})\right]$

370 Calcola l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x dell'arco di parabola di equazione $y = 2\sqrt{x+1}$ contenuto nel secondo quadrante. $\left[\frac{8\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)\right]$

371 Determina l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x dell'arco di circonferenza che ha centro $C(1; 0)$ e raggio 2 contenuto nel primo quadrante. $[12\pi]$

6. GLI INTEGRALI IMPROPRI

▶ Teoria a pag. 2021

L'integrale di una funzione con un numero finito di punti di discontinuità nell'intervallo [*a*; *b*]

372 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo, se possibile, l'integrale della funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$ nell'intervallo [0; 3].

La funzione $f(x)$ è continua per $x \neq 2$, quindi è integrabile negli intervalli $[0; t]$, con $0 < t < 2$, e $[z; 3]$, con $2 < z < 3$.

Determiniamo una primitiva di $f(x)$:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx = \int (x-2)^{-\frac{2}{3}}\,dx = \frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{x-2} + c.$$

Allora:

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx = \lim_{t\to 2^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx + \lim_{z\to 2^+}\int_z^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to 2^-}\left[3\sqrt[3]{x-2}\right]_0^t + \lim_{z\to 2^+}\left[3\sqrt[3]{x-2}\right]_z^3 =$$

$$= \lim_{t\to 2^-}\left(3\sqrt[3]{t-2} - 3\sqrt[3]{-2}\right) + \lim_{z\to 2^+}\left(3\sqrt[3]{1} - 3\sqrt[3]{z-2}\right) = -3\sqrt[3]{-2} + 3 = 3\sqrt[3]{2} + 3.$$

La funzione è integrabile nell'intervallo [0; 3] e risulta: $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx = 3\left(\sqrt[3]{2} + 1\right)$.

Calcola, se possibile, l'integrale delle seguenti funzioni nell'intervallo indicato a fianco.

373 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $[0; 1]$. [diverge a $+\infty$]

374 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$, $[0; 1]$. $\left[\dfrac{5}{3}\right]$

375 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$, $[0; 4]$. $[4]$

376 $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^3}$, $[-2; -1]$. [diverge a $-\infty$]

377 $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$, $[0; 1]$. $\left[\dfrac{8}{3}\right]$

378 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $[0; 1]$. $\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

379 $f(x) = 2\ln x$, $[0; 1]$. $[-2]$

380 $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$, $[0; 1]$. [diverge a $-\infty$]

381 $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. [diverge a $+\infty$]

382 $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$, $[-1; 0]$. [diverge a $-\infty$]

383 $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$, $[0; 3]$. [diverge a $+\infty$]

384 $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$, $[-4; 0]$. $[4 - 2\ln 3]$

385 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{9-x}}$, $[0; 9]$. $[\pi]$

386 $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5x+6}$, $[0; 2]$. [diverge a $+\infty$]

L'integrale di una funzione in un intervallo illimitato

387 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+3)^2} dx$, se è convergente.

La funzione integranda è continua in tutti i punti dell'intervallo $[1; +\infty[$, perciò determiniamo la funzione integrale $F(z)$, con z appartenente a $[1; +\infty[$:

$$F(z) = \int_1^z \frac{1}{(x+3)^2} dx = \left[-\frac{1}{x+3}\right]_1^z = -\frac{1}{z+3} + \frac{1}{4}.$$

Calcoliamo $\lim_{z \to +\infty} F(z)$:

$$\lim_{z \to +\infty} \left(-\frac{1}{z+3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

L'integrale è convergente e vale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+3)^2} dx = \frac{1}{4}$.

Calcola i seguenti integrali, se sono convergenti.

388 $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$ $[1]$

389 $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4} dx$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

390 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

391 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3} dx$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

392 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2x+3} dx$ [diverge a $+\infty$]

393 $\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ [diverge a $+\infty$]

394 $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$ $[1]$

395 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$ [diverge a $+\infty$]

396 $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2} dx$ $\left[\frac{3\pi}{4}\right]$

397 $\int_0^{+\infty} \frac{-x}{x^2+2x+1} dx$ [diverge a $-\infty$]

398 $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

ESERCIZI VARI Gli integrali impropri

399 TEST La funzione $f(x)$ è continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ed è tale che $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Quale, fra i seguenti integrali, *non* è improprio?

A $\int_2^{+\infty} f(x)\, dx$

B $\int_{-\infty}^{-1} f(x)\, dx$

C $\int_0^3 f(x)\, dx$

D $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

E $\int_2^{100} f(x)\, dx$

400 TEST Quale, fra i seguenti integrali impropri, è convergente?

A $\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2} dx$

B $\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx$

C $\int_0^1 \frac{1}{x^4} dx$

D $\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^2} dx$

E $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Calcola i seguenti integrali, se sono convergenti.

401 $\int_{-\infty}^{0} 4x^2 e^{x^3} dx$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

402 $\int_{4}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x - 6}$ $\left[\frac{\ln 6}{5}\right]$

403 $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2 + 6x + 8}$ [diverge a $+\infty$]

404 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}} dx$ $[-2]$

405 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + 3x}{e^x} dx$ [diverge a $-\infty$]

406 $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1 - 4x^6}} dx$ $\left[\frac{\pi}{12}\right]$

407 $\int_{5}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$ $\left[\ln \frac{6}{5}\right]$

408 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$ $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\right]$

409 $\int_{0}^{1} 2\frac{\ln x}{x} dx$ [diverge a $-\infty$]

410 $\int_{0}^{1} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ $\left[\frac{1}{e}\right]$

411 $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx$ [diverge a $+\infty$]

412 $\int_{2}^{5} \frac{x}{(x-2)^2} dx$ [diverge a $+\infty$]

413 $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2 - 10x + 25} dx$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

414 $\int_{0}^{+\infty} \frac{4x}{1 + x^4} dx$ $[\pi]$

415 $\int_{3}^{+\infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2x} dx$ [diverge a $+\infty$]

416 $\int_{\pi}^{\frac{7}{6}\pi} \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}} dx$ $[-\sqrt{2}]$

417 $\int_{2}^{+\infty} \frac{x + 4}{2x + 3} dx$ [diverge a $+\infty$]

418 $\int_{0}^{8} \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ $[3(e^2 - 1)]$

419 $\int_{0}^{+\infty} \frac{e^x}{1 + 4e^{2x}} dx$ $\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2\right]$

420 $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1 + 9x^4} dx$ $\left[-\frac{\pi}{12}\right]$

421 $\int_{-\infty}^{-4} \frac{x}{9 - x^2} dx$ [diverge a $+\infty$]

422 $\int_{1}^{+\infty} e^{1-x} dx$ $[1]$

423 $\int_{-\infty}^{0} x e^{x^2} dx$ [diverge a $-\infty$]

424 $\int_{5}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$ $\left[\frac{\ln 5}{2}\right]$

425 $\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ $[\ln 3]$

426 $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|} dx$ $[4]$

427 $\int_{-\infty}^{0} e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$ $\left[-\frac{1}{5}\right]$

428 $\int_{-2}^{-1} \frac{x + 3}{\sqrt{x+2}} dx$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

429 $\int_{-\infty}^{2} \frac{2}{x^2 - 4x + 5} dx$ $[\pi]$

430 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(1 + \operatorname{sen} x)}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} dx$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

431 $\int_{-1}^{0} \ln \frac{1}{x+1} dx$ $[1]$

432 $\int_{0}^{1} 4x \ln x \, dx$ $[-1]$

433 $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 2x} dx$ $\left[\frac{1}{2\ln^2 4}\right]$

434 $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

435 $\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{|x - 1|}} dx$ $[4]$

436 $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2 - 3x} dx$ $\left[\frac{2}{3}\ln 2\right]$

437 $\int_{0}^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$ [diverge a $+\infty$]

438 $\int_{2}^{+\infty} \frac{2\ln x}{x^3} dx$ $\left[\ln\sqrt[4]{2} + \frac{1}{8}\right]$

439 $\int_{-1}^{1} \left(2 + \frac{x}{|x|}\right) dx$ $[4]$

440 $\int_{-1}^{\pi} f(x)\,dx$, con $f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{se } -1 \le x \le 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{se } 0 < x \le \pi \end{cases}$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

441 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, con $f(x) = \begin{cases} e^{-x+1} & \text{se } -1 \le x < 0 \\ \dfrac{2}{x^2+1} & \text{se } 0 \le x \le 1 \end{cases}$ $\left[e+\frac{\pi}{2}\right]$

442 Calcola $\int_0^{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}\,dx$.

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament, HMMT*, 2002)

[1]

443 Disegna la curva di equazione $y = e^{2x}$ e calcola l'area della regione compresa fra il grafico, l'asse x e l'asse y e con $x \le 0$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

444 Traccia il grafico della funzione $y = e^{-x} + 1$ e quello simmetrico rispetto al suo asintoto orizzontale. Calcola l'area delimitata nel primo quadrante dai due grafici e dalla retta di equazione $x = 1$. $\left[2-\frac{2}{e}\right]$

445 Calcola l'area della regione illimitata del quarto quadrante compresa fra il grafico della funzione $y = \ln x$ e l'asintoto verticale. [1]

446 Rappresenta il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$ e trova l'area della regione illimitata compresa tra il grafico di $f(x)$, l'asse x e la retta di equazione $x = 5$. $\left[\ln\frac{6}{5}\right]$

447 Calcola l'area della regione compresa fra l'asse x, la retta di equazione $x = -1$ e il grafico della funzione $y = \ln(x+1)$. [1]

448 Dopo aver disegnato il grafico della funzione $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, calcola l'area delimitata dal grafico della funzione, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = -1$ e $x = 1$. $[\pi]$

449 Dopo aver rappresentato graficamente la funzione $y = \frac{2x^2+1}{x^2}$, determina l'area della regione illimitata compresa fra il grafico e l'asintoto orizzontale della funzione, i cui punti hanno ascissa maggiore di 1. [1]

450 Rappresenta graficamente la funzione $y = x\,e^{-x^2}$ e calcola l'area della regione illimitata contenuta nel terzo quadrante e delimitata dall'asse x e dal grafico della funzione. $\left[\frac{1}{2}\right]$

451 Determina l'area della regione illimitata del primo quadrante compresa fra il grafico della funzione $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ e l'asintoto verticale. [1]

452 Rappresenta graficamente la funzione $y = \frac{1}{x^2+x+1}$ e trova l'area della regione illimitata compresa tra l'asse x e il grafico della funzione. $\left[\frac{8}{9}\sqrt{3}\,\pi\right]$

453 Dato l'integrale $\int_2^{+\infty} \frac{ax}{(x-1)^4}\,dx$, trova a in modo che il suo valore sia 5. $[a = 6]$

454 Data la funzione $y = \dfrac{1}{(ax+b)^2}$, determina a e b sapendo che la funzione ha un asintoto verticale di equazione $x = \dfrac{1}{2}$ e che l'area della regione del primo quadrante, con $x \geq 1$, compresa fra il suo grafico, la retta di equazione $x = 1$ e l'asse x, è uguale a $\dfrac{1}{2}$. $[a_1 = 2, b_1 = -1; a_2 = -2, b_2 = 1]$

455 a) Studia la funzione $y = x \operatorname{arctg} x$ e rappresentala graficamente.
b) Dimostra che la regione delimitata dal grafico della funzione e dai suoi asintoti ha area finita e calcolane il valore. $\left[\text{b) } \dfrac{\pi}{2}\right]$

7. APPLICAZIONI DEGLI INTEGRALI ALLA FISICA

▶ Teoria a pag. 2024

456 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo lo spostamento compiuto, nell'intervallo di tempo compreso fra gli istanti $t_0 = 2$ s e $t_1 = 5$ s, da un punto materiale che si muove su una retta con una velocità $v(t)$, espressa in m/s, che è funzione del tempo t ed è definita dalla legge $v(t) = 2t^2 + 1$.

Essendo $v = s'(t)$, lo spostamento di un punto materiale nell'intervallo di tempo dall'istante t_0 all'istante t_1 è dato da $s = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$. Sostituiamo i dati:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt = \int_2^5 (2t^2+1)\,dt = \left[\frac{2t^3}{3} + t\right]_2^5 = \frac{2 \cdot 125}{3} + 5 - \left(\frac{2 \cdot 8}{3} + 2\right) = \frac{265 - 22}{3} = \frac{243}{3} = 81.$$

Lo spostamento compiuto dal punto materiale è perciò 81 m.

457 Un punto materiale si muove su una retta, su cui è stato fissato un sistema di riferimento, con velocità $v(t) = \cos \pi t$. Sapendo che la posizione occupata dal corpo all'istante iniziale $t_0 = 0$ s è $s_0 = 1$, determina la legge oraria del moto del punto materiale. $\left[s(t) = \dfrac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi} + 1\right]$

458 Un punto materiale si muove su una retta, su cui è stato fissato un sistema di riferimento, sotto l'azione di una forza elastica F la cui intensità è legata all'ascissa del punto dalla legge $F(x) = -kx$.
Determina il lavoro L compiuto dalla forza quando il punto materiale si sposta dalla posizione $x_0 = 5$ alla posizione $x_1 = 1$. $[L = 12k]$

459 In un circuito l'intensità della corrente, misurata in A, all'istante t è data da $i(t) = 3t^2 + 4t$. Calcola la quantità di carica che attraversa una sezione del circuito nell'intervallo di tempo che va dall'istante $t_0 = 1$ s all'istante $t_1 = 5$ s. (Se $q(t)$ è la quantità di carica che attraversa una sezione del circuito all'istante t, allora $q'(t) = i(t)$.) [172 C]

460 In un moto rettilineo la velocità di un punto materiale in m/s è data dalla legge $v(t) = t^2 + t + 1$. Determina lo spostamento nell'intervallo di tempo compreso fra gli istanti $t_0 = 1$ s e $t_1 = 9$ s. $\left[\dfrac{872}{3}\text{ m}\right]$

461 Su un punto materiale P che si muove lungo una retta orientata, su cui è stato fissato un sistema di riferimento, agisce una forza F, misurata in N, che è legata all'ascissa di P dalla relazione $F(x) = x\sqrt{x^2+1}$. Determina il lavoro compiuto su P dalla forza F quando P si sposta dalla posizione $x_1 = 1$ m alla posizione $x_2 = 3$ m.
$\left[\frac{1}{3}(\sqrt{1000} - \sqrt{8})\,\mathrm{J}\right]$

462 In un moto rettilineo la velocità di un punto materiale in m/s è funzione del tempo ed è espressa dalla legge: $v(t) = \frac{t}{t^2+2}$. Determina la velocità media e lo spostamento nell'intervallo di tempo compreso fra gli istanti $t_0 = 2$ s e $t_1 = 8$ s.
$\left[v_m = \frac{1}{12}\ln 11\ \mathrm{m/s};\ s = \frac{1}{2}\ln 11\ \mathrm{m}\right]$

463 Un'automobile si muove su un rettilineo con accelerazione che varia nel tempo secondo la legge $a(t) = \frac{t^2}{81} + \frac{2}{\sqrt{t}}$, dove t è in secondi e $a(t)$ in m/s^2. Calcola la velocità dopo 9 secondi dall'istante iniziale $t = 0$ s in cui $v_0 = 3{,}6$ km/h.
[16 m/s]

464 Una forza misurata in N, variabile a seconda della posizione in cui viene applicata, induce un corpo a spostarsi di un certo tratto. Calcola il lavoro compiuto nello spostare il corpo dalla posizione $s_0 = 3$ m alla posizione $s_1 = 5$ m, se $F = 3s^2 - 4s + 2$.
[70 J]

465 Una pallina, collegata a una molla, oscilla di moto armonico con velocità $v(t) = 2 \operatorname{sen} 4t$ misurata in m/s. Determina la posizione e l'accelerazione in funzione del tempo, sapendo che nell'istante iniziale $s_0 = 2$ m. Rappresenta graficamente le tre leggi $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ durante un'oscillazione completa.
$\left[s(t) = -\frac{1}{2}\cos 4t + \frac{5}{2};\ a(t) = 8\cos 4t\right]$

466 Sia $a(t) = e^{2t} + 2$ la legge con cui varia nel tempo l'accelerazione in m/s^2 di un punto materiale P che si muove su una retta. Trova la legge oraria del moto, sapendo che $v_0 = 2$ m/s e $s_0 = 5$ m.
$\left[s(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{19}{4}\right]$

467 Sia $v(t) = t \operatorname{sen} t$ la legge con cui varia la velocità in m/s in un moto rettilineo. Determina:
a) la legge oraria, sapendo che al tempo $t = 0$ s la posizione è $s_0 = 3$ m;
b) la legge con cui varia l'accelerazione nel tempo. [a) $s(t) = 3 - t\cos t + \operatorname{sen} t$; b) $a(t) = \operatorname{sen} t + t\cos t$]

468 In un circuito l'intensità della corrente, misurata in A, all'istante t è data da $i(t) = -\frac{e^{-100t}}{100}$.
Calcola la quantità di carica che attraversa una sezione del circuito nell'intervallo di tempo che va dall'istante $t_0 = \frac{1}{1000}$ s all'istante $t_1 = \frac{1}{100}$ s.
$[-5{,}37 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{C}]$

469 In un circuito in moto rispetto a un campo magnetico B, la forza elettromotrice varia al variare del tempo secondo la legge $f = -3t^2 + 2t$, dove f è espressa in volt e t in secondi. Calcola il flusso del campo magnetico B all'istante $t = 4$ s, sapendo che all'istante $t = 0$ s il flusso vale $\phi = 0$ Wb. (Per la legge di Faraday-Neumann si ha $f(t) = -\phi'(t)$.)
[48 Wb]

470 In un moto su una retta orientata, la velocità in m/s di un punto materiale è data dalla legge $v(t) = t \cdot e^{-t}$. Trova la legge oraria del moto, sapendo che all'istante iniziale $t_0 = 0$ s il punto ha ascissa 1 m.
$[s(t) = 2 - (t+1)\cdot e^{-t}]$

471 Un punto si muove su una retta con velocità $v(t) = 2\ln(t+1)$ misurata in m/s.
a) Determina la legge oraria sapendo che per $t = 0$ s la posizione è $s_0 = 1$ m.
b) Trova la legge con cui varia l'accelerazione.
c) Rappresenta $v(t)$ e utilizza il grafico per rappresentare $s(t)$ e $a(t)$.
$\left[\text{a) } s(t) = 2(t+1)\ln(t+1) - 2t + 1;\ \text{b) } a(t) = \frac{2}{t+1}\right]$

472 Determina l'energia dispersa per effetto Joule in un circuito di resistenza $R = 10\ \Omega$, percorso da corrente alternata di intensità, misurata in A, $i(t) = 100 \operatorname{sen} 400\,\pi t$ nell'intervallo di tempo che va dall'istante $t_0 = 0$ s all'istante $t_1 = \frac{1}{200}$ s. (L'energia dissipata per effetto Joule, nell'intervallo di tempo che va dall'istante t_0 all'istante t_1, è data da $R\int_{t_0}^{t_1} i^2\,dt$.) [250 J]

473 Un punto materiale P si muove su un tratto rettilineo con accelerazione $a = a(t) = 6t + 2$, dove a è misurata in m/s^2 e t in secondi. Calcola lo spostamento tra l'istante $t_1 = 2$ s e $t_2 = 8$ s e la velocità al tempo t_2, sapendo che al tempo $t_3 = 1$ s la velocità è $v_3 = 1$ m/s e si trova a una distanza $s_3 = 1$ m dall'origine del sistema di riferimento scelto. [$s = 540$ m; $v(t_2) = 204$ m/s]

474 Un carrello inizia a muoversi su un binario rettilineo con accelerazione che varia nel tempo secondo la legge $a(t) = (2 - t)\,e^t$. In quale istante è massima la velocità? Che spazio ha percorso fino a quel momento? [$t = 2$; $s(2) = 2e^2 - 10$]

8. L'INTEGRAZIONE NUMERICA

▶ Teoria a pag. 2026

IN PRATICA ▶ Videolezione 81

Il metodo dei rettangoli

475 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo due valori approssimati dell'integrale $\int_0^2 \sqrt{1+x}\,dx$ utilizzando il metodo dei rettangoli, valutiamo l'errore commesso e confrontiamo i risultati ottenuti con l'integrale esatto.

Dividiamo l'intervallo in 10 intervalli di ampiezza $h = \frac{2-0}{10} = 0,2$. Compiliamo una tabella con i punti di suddivisione dell'intervallo [0; 2] e i corrispondenti valori della funzione integranda.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$\sqrt{1+x}$	1	1,095	1,183	1,265	1,342	1,414	1,483	1,549	1,612	1,673	1,732

Ora calcoliamo le somme:

$$S'_n = 0,2 \cdot (1 + 1,095 + 1,183 + \ldots + 1,612 + 1,673) = 2,7232;$$

$$S_n = 0,2 \cdot (1,095 + 1,183 + \ldots + 1,673 + 1,732) = 2,8696.$$

I valori approssimati dell'integrale sono:

$$\int_0^2 \sqrt{1+x}\,dx \simeq 2,7232 \quad \text{e} \quad \int_0^2 \sqrt{1+x}\,dx \simeq 2,8696.$$

Ricordiamo che, se la funzione ammette derivata prima continua, l'errore commesso E_n è minore o uguale alla quantità ε_n, ossia:

$$E_n \leq \varepsilon_n = \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot M, \quad \text{dove } M \text{ è il massimo di } |f'(x)| \text{ in } [a; b].$$

Poiché la derivata $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ è continua nell'intervallo [0; 2] e $M = \max\limits_{[0;\,2]}\left|\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right| = f'(0) =$ $= \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = 0,5$, possiamo valutare l'errore commesso:

$$E_{10} \leq \varepsilon_{10} = \frac{(2-0)^2}{2 \cdot 10} \cdot 0,5 = 0,1.$$

I due risultati hanno pertanto un'approssimazione minore o uguale a 0,1.
Calcolando l'integrale in modo esatto, otteniamo:

$$\int_0^2 \sqrt{1+x}\, dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}\right]_0^2 \simeq 2{,}797.$$

Le differenze fra questo valore e quelli approssimati sono $|S'_n - 2{,}797| = 0{,}0738$ e $|S_n - 2{,}797| = 0{,}0726$, entrambe minori di 0,1.

Utilizzando il metodo dei rettangoli, calcola due valori approssimati dei seguenti integrali e valuta, se possibile, l'errore commesso. (Suddividi l'intervallo nel numero *n* di parti indicato a fianco.)

476 $\int_1^3 (x^2+2)\, dx$, $n = 10$. [11,88; 13,48; 1,2]

477 $\int_{-4}^{-1} \frac{1}{x^2}\, dx$, $n = 12$. [0,643; 0,877; 0,75]

478 $\int_e^{e+1} \ln x\, dx$, $n = 10$. [1,149; 1,180; 0,018]

479 $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{x^2+1}\, dx$, $n = 5$. [1,446; 1,523; 0,087]

480 $\int_0^3 \sqrt{1+x^3}\, dx$, $n = 10$. [6,717; 8,004; 1,148]

481 $\int_2^3 \sqrt[3]{x-2}\, dx$, $n = 10$. [0,687; 0,787; imp.]

482 $\int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x + \cos x)\, dx$, $n = 6$. [2,478; 1,430; 1,163]

483 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx$, $n = 8$. [0,298; 0,396; 0,077]

Calcola due valori approssimati dei seguenti integrali, utilizzando il metodo dei rettangoli, e confronta i risultati ottenuti con il valore esatto dell'integrale.

484 $\int_2^4 (5x^2+3x^3)\, dx$, $n = 10$. [250,96; 296,56; 273,33]

485 $\int_1^5 x \ln x\, dx$, $n = 10$. [12,53; 15,75; 14,12]

486 $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 2x\, dx$, $n = 12$. [0; 0; 0]

487 Utilizzando il metodo dei rettangoli, calcola due valori approssimati dell'integrale della funzione definita dalla seguente tabella, nell'intervallo preso in considerazione.

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	1	1,123	1,125	1,236	1,254	2,256	2,321	1,254	1,287	2,125	3

[1,498; 1,698]

488 I valori della velocità di un punto materiale sono stati raccolti sperimentalmente nella seguente tabella. Determina un valore approssimato dello spostamento compiuto dal punto nell'intervallo di tempo preso in esame.

t (s)	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4
v (m/s)	0	10	12	13	11	9	8	10	11

[21,9 m; 25,2 m]

Il metodo dei trapezi

489 ESERCIZIO GUIDA

Utilizzando la formula dei trapezi, calcoliamo un valore approssimato di $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}dx$, valutiamo l'errore commesso e confrontiamo il risultato con quello del calcolo esatto.

Dividiamo l'intervallo in 10 intervalli di ampiezza $h = \frac{2-0}{10} = 0,2$. Compiliamo una tabella con i punti di suddivisione dell'intervallo [0; 2] e i corrispondenti valori della funzione integranda.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$\frac{1}{1+x^2}$	1	0,962	0,862	0,735	0,610	0,500	0,410	0,338	0,281	0,236	0,200

Applichiamo la formula dei trapezi:

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}dx \simeq \frac{2-0}{10}\left(\frac{1+0,2}{2} + 0,962 + 0,862 + \ldots + 0,281 + 0,236\right) \simeq 1,1068.$$

Ricordiamo che, se la funzione ammette derivata seconda continua, l'errore commesso E_n è minore o uguale alla quantità ε_n, ossia:

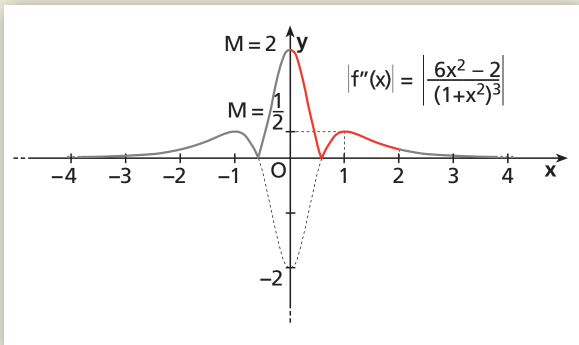
$$E_n \leq \varepsilon_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M, \quad \text{dove } M \text{ è il massimo di } |f''(x)| \text{ in } [a; b].$$

Poiché la derivata seconda $f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$ è continua nell'intervallo [0; 2] e, dal grafico, deduciamo che è

$$M = \max_{[0;\,2]}|f''(x)| = |f''(0)| = 2,$$

possiamo valutare l'errore:

$$E_{10} \leq \varepsilon_{10} = \frac{(2-0)^3}{12\cdot 100}\cdot 2 = 0,01333\ldots = 0,01\bar{3}.$$



Il risultato dell'integrale ha pertanto un'approssimazione minore o uguale a $0,01\bar{3}$.

Calcolando l'integrale in modo esatto, otteniamo :

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}dx = [\operatorname{arctg} x]_0^2 = \operatorname{arctg} 2 \simeq 1,107.$$

La differenza fra questo valore e quello approssimato è $|1,1068 - 1,107| = 0,0002$, minore di $0,01\bar{3}$.

Utilizzando la formula dei trapezi, calcola il valore approssimato dei seguenti integrali e valuta l'errore. (Suddividi l'intervallo nel numero n di parti indicato a fianco.)

490 $\int_e^{e+2}(1+2x)\,dx$, $n = 8$. [16,873; 0]

491 $\int_1^{\frac{3}{2}}\ln x\,dx$, $n = 5$. $[0,1079; 4,2\cdot 10^{-4}]$

492 $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{1+x}}\,dx$, $n = 5$. $[0,4497; 3,1\cdot 10^{-4}]$

493 $\int_0^3\sqrt{1+5x^2}\,dx$, $n = 10$. [10,772; 0,113]

494 $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{1+x^4}\,dx,\quad n = 8.$ $[0{,}0097;\, 2{,}7 \cdot 10^{-4}]$

495 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(\cos x + 2)\,dx,\quad n = 10.$ $[3{,}920;\, 0{,}21]$

496 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\text{sen}^2 x + 1}\,dx,\quad n = 6.$ $[3{,}820;\, 7{,}2 \cdot 10^{-2}]$

Utilizzando la formula dei trapezi, calcola il valore approssimato dei seguenti integrali e confronta il risultato con quello del calcolo esatto. (Suddividi l'intervallo nel numero *n* di parti indicato a fianco.)

497 $\displaystyle\int_1^5 (x^3 + 3x)\,dx,\quad n = 10.$ $[192{,}96;\, 192]$

498 $\displaystyle\int_{-1}^0 e^{x+1}\,dx,\quad n = 10.$ $[1{,}72;\, e - 1]$

499 $\displaystyle\int_2^3 \ln x\,dx,\quad n = 5.$ $\left[0{,}909;\, \ln\left(\frac{27}{4}\right) - 1\right]$

500 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\text{sen}\,x + 1}\,dx,\quad n = 6.$ $\left[0{,}535;\, \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\right]$

501 Utilizzando il metodo dei trapezi, calcola un valore approssimato dell'integrale della funzione definita dalla seguente tabella, nell'intervallo preso in considerazione.

x_i	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1
y_i	10	12	11	13	14	15	12	11

[26,25]

502 L'intensità di corrente *i* (misurata in ampere) che percorre un conduttore, al variare del tempo *t* (in secondi), è stata misurata sperimentalmente, e i dati sono stati raccolti nella seguente tabella. Utilizzando il metodo dei trapezi, calcola un valore approssimato della quantità di carica che passa attraverso una sezione del conduttore nell'intervallo di tempo tra 0 s e 0,5 s.

t (s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
i (A)	3	5	6	12	15	18

[4,85 C]

Il metodo delle parabole

503 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo un valore approssimato di $\displaystyle\int_1^2 (x^4 + 1)\,dx$, utilizzando la formula di Cavalieri-Simpson. Valutiamo l'errore e confrontiamo il risultato ottenuto con l'integrale esatto.

Utilizziamo la suddivisione in $2n = 10$ parti uguali e organizziamo la tabella:

$$h = \frac{2-1}{10} = 0{,}1.$$

a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	b
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(a)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	$f(b)$
2	2,46	3,07	3,86	4,84	6,06	7,55	9,35	11,50	14,03	17

Ora applichiamo la formula di Cavalieri-Simpson:

$$\int_1^2 (x^4+1)\,dx \simeq \frac{2-1}{30}[2+17+2(3{,}07+\ldots+11{,}50)+4(2{,}46+\ldots+14{,}03)] \simeq 7{,}20.$$

Ricordiamo che, se la funzione ammette derivata quarta continua, l'errore commesso E_n è minore o uguale alla quantità ε_n, ossia:

$$E_n \le \varepsilon_n = \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\cdot M, \quad \text{dove } M \text{ è il massimo di } \left| f^{(4)}(x) \right| \text{ in } [a;b].$$

$f^{(4)}(x) = 24$ per ogni $x \in [1;2]$, possiamo valutare l'errore:

$$E_{10} \le \varepsilon_{10} = \frac{(2-1)^5}{2880\cdot 5^4}\cdot 24 = 0{,}000013 = 1{,}3\cdot 10^{-5}.$$

Pertanto, il risultato dell'integrale ha un'approssimazione minore o uguale a $1{,}3\cdot 10^{-5}$. Calcolando l'integrale in modo esatto, otteniamo:

$$\int_1^2 (x^4+1)\,dx = \left[\frac{x^5}{5}+x\right]_1^2 = \frac{32}{5}+2-\frac{1}{5}-1 = \frac{36}{5} = 7{,}20.$$

Il risultato approssimato coincide con il valore esatto dell'integrale: la formula di Cavalieri-Simpson ha permesso di ottenere un'ottima precisione.

Utilizzando la formula di Cavalieri-Simpson, calcola il valore approssimato dei seguenti integrali e valuta l'errore. Confronta il risultato con quello del calcolo esatto quando richiesto. (Suddividi l'intervallo nel numero $2n$ di parti indicato a fianco.)

504 $\int_3^6 (3x^3+2x-3)\,dx$, $\quad 2n = 10$ (calcolo esatto). $\quad$ [929,25; 0]

505 $\int_1^3 e^{-x}\,dx$, $\quad 2n = 10$ (calcolo esatto). $\quad$ $[0{,}318095;\ 6{,}54\cdot 10^{-6}]$

506 $\int_1^4 \sqrt[5]{x}\,dx$, $\quad 2n = 6$ (calcolo esatto). $\quad$ $[3{,}5649;\ 8{,}4\cdot 10^{-4}]$

507 $\int_1^5 \ln x\,dx$, $\quad 2n = 10$ (calcolo esatto). $\quad$ $[4{,}047;\ 3{,}4\cdot 10^{-3}]$

508 $\int_4^6 \sqrt{x^2+2}\,dx$, $\quad 2n = 10$. $\quad$ $[10{,}3971548;\ 2{,}67\cdot 10^{-7}]$

509 $\int_0^3 \cos x^2\,dx$, $\quad 2n = 6$. $\quad$ $[0{,}870;\ 1{,}033]$

510 $\int_0^1 \text{arcsen}\, x\,dx$, $\quad 2n = 10$ (calcolo esatto). $\quad$ [0,574; impossibile]

Il metodo di Runge (o del raddoppiamento del passo)

511 ESERCIZIO GUIDA

Consideriamo l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,dx$. Per valutare l'errore commesso con la formula di Cavalieri-Simpson, utilizziamo il metodo di Runge.

Suddividiamo l'intervallo [0; 1] in 8 parti e compiliamo la tabella di calcolo.

x_i	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
y_i	1	0,87671	0,7619	0,65979	0,57143	0,49612	0,43243	0,3787	0,33333

Applicando la formula di Cavalieri-Simpson, otteniamo:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,dx \simeq 0,604588889 = N_1.$$

Per valutare l'errore utilizziamo il metodo di Runge, che non richiede il calcolo di derivate.
Dimezziamo il numero di intervalli raddoppiando il passo, ossia l'ampiezza di ciascun intervallo. La tabella risulta così modificata:

x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
y_i	1	0,7619	0,57143	0,43243	0,33333

Applicando nuovamente la formula di Cavalieri-Simpson, otteniamo il seguente risultato:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,dx \simeq 0,604459444 = N_2.$$

L'approssimazione dei due risultati è, ovviamente, diversa. Si può dimostrare che l'errore di N_1 è valutabile mediante la seguente formula:

$$E \simeq \frac{|N_1 - N_2|}{15} = \frac{|0,604588889 - 0,604459444|}{15} \simeq 0,000009.$$

Utilizzando la formula di Cavalieri-Simpson, calcola il valore approssimato dei seguenti integrali e valuta l'errore con il metodo di Runge. (Suddividi l'intervallo in 8 parti.)

512 $\int_2^4 \sqrt{x}\,dx$ $[3,447714; 1,1 \cdot 10^{-6}]$

513 $\int_1^2 (\ln x + x)\,dx$ $[1,886292; 2,16 \cdot 10^{-6}]$

514 $\int_0^1 e^{2x}\,dx$ $[3,1946; 6,7 \cdot 10^{-5}]$

515 $\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx$ $[0,6671; 2,9 \cdot 10^{-4}]$

516 $\int_{-2}^0 \frac{x+2}{x^3-1}\,dx$ $[-1,4564; 5,77 \cdot 10^{-4}]$

517 $\int_1^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$ $[1,83582; 8,55 \cdot 10^{-5}]$

518 $\int_0^4 \ln(x^2+1)\,dx$ $[5,985; 1,77 \cdot 10^{-3}]$

519 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$ $[0,238294; 6,25 \cdot 10^{-6}]$

520 Utilizzando il metodo delle parabole, calcola un valore approssimato dell'integrale della funzione definita dalla seguente tabella. Con il metodo di Runge valuta l'errore commesso.

x_i	10	10,2	10,4	10,6	10,8	11	11,2	11,4	11,6
y_i	3	5	7	9	8	6	4	2	1

$[8,667; 8,9 \cdot 10^{-3}]$

521 La seguente tabella raccoglie i dati inerenti alla forza F (misurata in newton) applicata a un corpo e alla posizione del corpo s (in metri). Utilizzando il metodo delle parabole, calcola il valore approssimato del lavoro compiuto dalla forza per spostare il corpo di 1 m. Valuta l'errore commesso.

s (m)	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
F (N)	0	0,05	0,15	0,42	0,70	1,18	1,70	2,30	2,68

$[0{,}9825\ \mathrm{J}; 1{,}72 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}]$

ESERCIZI VARI L'integrazione numerica

Calcola un valore approssimato dei seguenti integrali con l'approssimazione indicata a fianco. Utilizza i metodi che ritieni più opportuni e, di conseguenza, suddividi l'intervallo in un numero di parti adeguato.

522 $\int_2^4 \frac{x^2+1}{x}dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$. [6,6931]

523 $\int_4^8 \frac{x+1}{\ln x}dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$. [15,701]

524 $\int_1^2 \frac{e^x}{x+3}dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$. [1,0233]

525 $\int_5^6 \sqrt{\frac{x}{x+2}}\,dx$, $\varepsilon = 10^{-7}$. [0,8560964]

526 $\int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 1}dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$. [1,231]

527 $\int_1^2 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$, $\varepsilon = 10^{-5}$. [0,66004]

528 Utilizzando il metodo dei rettangoli, calcola un valore approssimato di $\int_1^3 x\sqrt{x^2+6}\,dx$, suddividendo l'intervallo in 8 parti. Confronta il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale. [12,086; 13,2]

529 Utilizzando il metodo dei rettangoli, calcola una coppia di valori approssimati di $\int_0^1 x\sqrt[3]{x^2+1}\,dx$, suddividendo l'intervallo in 8 parti. Confronta il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale. $\left[0{,}49208; 0{,}64957; \frac{3}{4}\sqrt[3]{2} - \frac{3}{8}\right]$

530 Calcola un valore approssimato di $\int_0^2 \frac{x}{1+x^5}dx$, scomponendo l'intervallo in 8 parti. Valuta l'errore con il metodo di Runge. [0,61992; 0,0002]

531 Calcola un valore approssimato di $\int_2^4 \frac{x^4+2x}{3x+1}dx$, scomponendo l'intervallo in 8 parti e utilizzando il metodo delle parabole. Valuta l'errore con il metodo di Runge. $[19{,}3217725; 7{,}9 \cdot 10^{-7}]$

532 Utilizza il metodo dei trapezi per calcolare un'approssimazione di $\int_0^1 \ln(x+e)\,dx$, valutando l'errore commesso nel considerare una suddivisione in 10 parti dell'intervallo dato. $[1{,}1647; 1{,}13 \cdot 10^{-4}]$

533 Calcola due valori approssimati di $\int_e^{e+2} x^2 \ln x\,dx$, utilizzando il metodo dei rettangoli e dei trapezi con una scomposizione dell'intervallo in 8 parti. Con quale precisione puoi dire di aver determinato il valore dell'integrale? [34,851; 38,245]

534 Utilizzando il metodo dei trapezi, calcola $\int_1^e \ln^3 x\,dx$ e confronta i risultati ottenuti suddividendo l'intervallo in 6, 8 e 10 parti. [0,571; 0,568; 0,566]

535 Calcola un'approssimazione dell'integrale $\int_1^3 \frac{1}{\ln x + 1}\,dx$, utilizzando il metodo dei trapezi e dividendo l'intervallo in 8 parti. [1,26757]

536 Dato l'integrale $\int_2^4 (x^4 + 3x^2 - 6)\,dx$, considera una scomposizione dell'intervallo in 16 parti e determina, utilizzando le formule per la valutazione dell'errore, con quale metodo di approssimazione, fra quelli che conosci, si ottiene il risultato più preciso. [metodo delle parabole: $6{,}5 \cdot 10^{-5}$]

537 Utilizzando le formule per la valutazione dell'errore, stabilisci se è più preciso calcolare $\int_1^3 \sqrt[5]{x^2}\,dx$ con il metodo dei trapezi, scomponendo l'intervallo in 20 parti, o con il metodo delle parabole, utilizzando una scomposizione dell'intervallo in 10 parti. [metodo delle parabole: $1{,}77 \cdot 10^{-5}$]

538 Utilizzando il metodo delle parabole, calcola un valore approssimato di $\int_{-1}^1 (x+2)\sqrt{x+3}\,dx$, con $2n = 8$. Valuta l'errore commesso con il metodo del raddoppiamento del passo. [7,089546; $2{,}89 \cdot 10^{-6}$]

539 Calcola $\int_0^2 x^3 \ln(x+5)\,dx$ con un'approssimazione di 10^{-2}. Suddividi l'intervallo in 8 parti. [7,54]

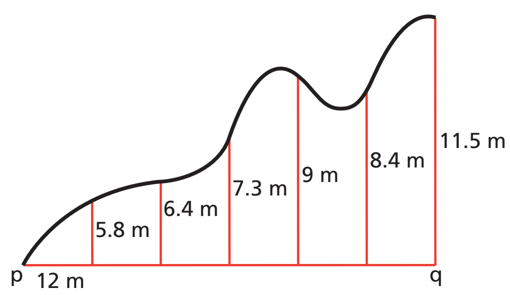
540 Per calcolare il volume di un recipiente di forma irregolare, alto 20 cm, vengono misurate le aree A di alcune sezioni, a varie altezze h. I dati sono riportati nella tabella qui sotto. Calcola un valore approssimato del volume, utilizzando il metodo dei trapezi.

h (cm)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
A (cm^2)	10	12	14	12	15	13	10	12	10	10

[216 cm^3]

541
a) Studia la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - 9}$ e disegna il grafico.
b) Con la formula di Cavalieri-Simpson calcola un valore approssimato dell'integrale $\int_{-\frac{8}{5}}^{\frac{8}{5}} f(x)\,dx$, dividendo l'intervallo in 8 parti.
c) Con il metodo di Runge valuta l'errore commesso. [b) $I = -6{,}256226\ldots$; c) $E = 0{,}0039\ldots$]

542 The outline of a plot of land is shown in the sketch below.
At intervals of 12 m along pq, perpendicular measurements 5.8 m, 6.4 m, 7.3 m, 9 m, 8.4 m, 11.5 m are made to the top boundary. Use Simpson's Rule to estimate the area of the plot, correct to the nearest square meter.
(IR *Leaving Certificate Examination*, Ordinary Level, 1994)
[$A \simeq 513$ m^2]



543 L'accelerazione di un punto materiale, che si muove su una linea retta, è espressa in m/s^2 da $a(t) = e^{-t^2} + 1$. Il moto dura 3 secondi. Suddividendo l'intervallo di tempo [0; 3] in 10 parti uguali, calcola un valore approssimato della velocità raggiunta dopo 3 secondi, utilizzando il metodo dei trapezi. Valuta l'errore commesso. [3,886 m/s; $4{,}5 \cdot 10^{-2}$]

544 Calcola due valori di $\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}(x^3 + 1)\,dx$, utilizzando il metodo delle parabole con $2n = 8$ e raddoppiando il passo. Con quale precisione riesci a determinare l'integrale? [0,83931; 10^{-5}]

545 Dato l'integrale $\int_0^1 \ln(x+5)\,dx$, determina con quale precisione è possibile approssimare il risultato utilizzando il metodo delle parabole con una scomposizione dell'intervallo in 6 parti uguali. In quante parti n occorre scomporre, come minimo, lo stesso intervallo per avere una maggior precisione, volendo utilizzare il metodo dei trapezi? $[4{,}1 \cdot 10^{-8};\ n = 285]$

546 Dato l'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\,dx$, considera una scomposizione dell'intervallo in 10 parti e determina, utilizzando le formule per la valutazione dell'errore, con quale precisione si ottiene un'approssimazione dell'integrale, nei tre metodi che conosci. $[0{,}12;\ 6{,}46 \cdot 10^{-3};\ 4{,}25 \cdot 10^{-5}]$

547
a) Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$, esegui lo studio e disegna il grafico.
b) Mediante la formula dei rettangoli determina un'approssimazione per difetto e una per eccesso dell'integrale $\int_0^2 f(x)\,dx$, dividendo l'intervallo in 8 parti.
c) Valuta l'errore commesso ε_8 e confronta le due approssimazioni con il risultato del calcolo esatto.

$\left[\text{b) } S'_8 = 0{,}6421514\ldots,\ S_8 = 0{,}6715632\ldots;\ \text{c) } \varepsilon_8 = \dfrac{1}{4};\ I = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 4 \simeq 0{,}6629088\ldots\right]$

548 Considera la funzione: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$
a) Dimostra che è continua in tutto il dominio, esegui lo studio e disegna il grafico. Verifica che esiste il minimo assoluto.
b) Con il metodo dei trapezi calcola in modo approssimato $\int_0^1 y\,dx$ dividendo l'intervallo in 6 parti.
c) Calcola il valore esatto dell'integrale precedente.

$\left[\text{a) min. ass.} \left(e^{-\frac{1}{2}}; -\dfrac{1}{2e}\right);\ \text{b) } I_6 = -0{,}1086574\ldots;\ \text{c) } I = -\dfrac{1}{9}\right]$

549 Sia data la funzione $y = \operatorname{sen} kx + \cos kx$, con k parametro reale positivo.
a) Determina il valore minimo di k per cui la funzione ha un estremo relativo in $x = \pi$ e verifica che si tratta di un massimo assoluto.
b) Col metodo dei rettangoli calcola un'approssimazione per difetto e una per eccesso dell'integrale $\int_0^{\pi} y\,dx$ utilizzando 8 intervalli.
c) Calcola l'integrale esatto e confrontalo con la media delle due approssimazioni trovate al punto precedente.

$\left[\text{a) } k = \dfrac{1}{4};\ \text{b) } S'_8 = 3{,}915456\ldots;\ S_8 = 4{,}078117\ldots;\ \text{c) } I = 4,\ S_m = 3{,}996780\ldots\right]$

550 È data la curva $f(x) = \dfrac{ax}{x^3+b}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
a) Dopo aver determinato i coefficienti a e b in modo che la curva passi per il punto $A(1; 1)$ e abbia come asintoto la retta $x = -1$, disegna il grafico.
b) Mediante il metodo di Cavalieri-Simpson dividi l'intervallo in 8 parti e calcola un valore approssimato dell'area della regione finita di piano che la curva e l'asse x delimitano nell'intervallo $[0; 2]$.
c) Con il metodo di Runge stima l'errore commesso al punto precedente.

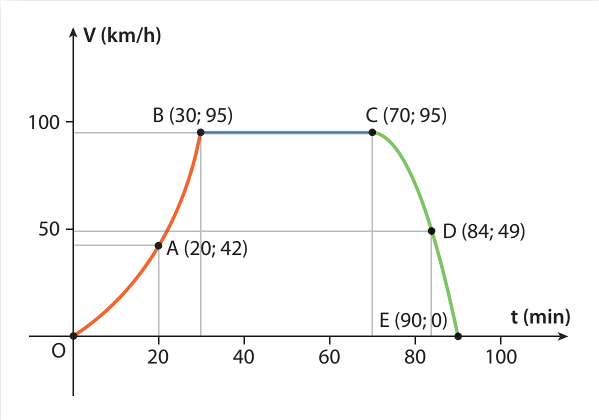
$[\text{a) } a = 2,\ b = 1;\ \text{b) } 1{,}447531\ldots;\ \text{c) } E = 0{,}00064\ldots]$

REALTÀ E MODELLI

1 **Il cronotachigrafo**

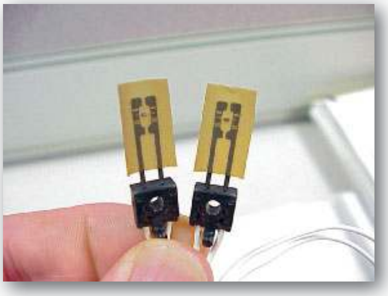
Il grafico a lato riporta la velocità in funzione del tempo mantenuta da un camionista durante un viaggio in autostrada attraverso un passo di montagna e registrata dal cronotachigrafo.
Il primo tratto è approssimabile da un arco di iperbole equilatera, il secondo tratto è rettilineo e il terzo tratto è individuato da un arco di parabola.

- Scrivi l'equazione della velocità in funzione del tempo (espresso in ore), approssimando i calcoli.
- Quanti kilometri ha percorso il camion in questo intervallo di tempo?



2 **I termistori**

Sappiamo che la resistenza elettrica dei materiali varia con la temperatura. Alcuni materiali come il silicio, detti *semiconduttori*, si comportano da isolanti a temperature molto basse, mentre a temperatura ambiente (circa 20 °C) diventano conduttori (altri elementi hanno il comportamento opposto).
La legge che descrive l'andamento della resistenza in funzione della temperatura per questi materiali è di tipo esponenziale: $R(T) = R_0 \cdot e^{\alpha T}$, con α positivo o negativo a seconda dei casi (la temperatura T è espressa in gradi centigradi, la resistenza in ohm). Questa proprietà viene sfruttata in dispositivi, come i *termistori*, in cui la resistenza, e quindi la corrente che circola, cambia a seconda della temperatura.

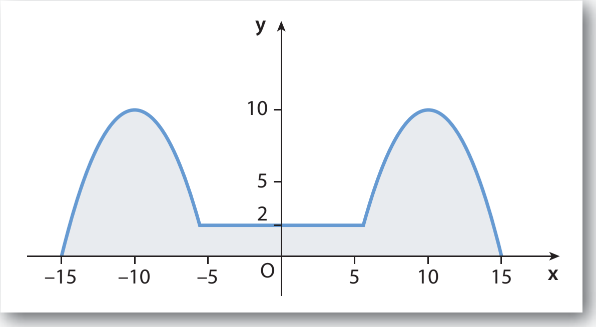


Un particolare dispositivo è caratterizzato dalla seguente legge:
$R(T) = 220 \cdot e^{-0{,}1514T}$.

- Rappresenta il grafico della funzione $R(T)$.
- Di quanto varia la sua resistenza tra 30 °C e −10 °C?
- In tale intervallo di temperatura, quale valore possiamo considerare come resistenza media?

3 **In palestra**

Claudio si iscrive in una palestra e l'istruttore gli assegna alcuni esercizi per le braccia da eseguire con pesi in plastica riempiti di sabbia.
Ciascun attrezzo può essere modellizzato con un solido ottenuto dalla rotazione intorno all'asse x del grafico della funzione rappresentata: si tratta di due archi di parabola e un segmento (misure in centimetri).



- Scrivi l'equazione della funzione rappresentata.
- Calcola il volume a disposizione per inserire la sabbia.
- Sapendo che il peso specifico della sabbia è 1,4 kg/dm^3, trova il peso degli attrezzi pieni.

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Quale delle seguenti uguaglianze è *errata*?

A $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

B $\int_a^a f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx$

C $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$, con $a < b < c$.

D $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_b^a [g(x) - f(x)]dx$

E $\int_{k\cdot a}^{k\cdot b} f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$

2 Quanto vale il valor medio della funzione $f(x) = x^3$ nell'intervallo $[0; 2]$?

A 2 B 16 C 32 D 64 E 128

3 Per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^2$ ha valor medio $\frac{4}{3}$ nell'intervallo $[0; a]$?

A 1 B 2 C 3 D 4 E 5

4 Quanto vale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x}\,dx$?

A -1 B $e - 1$ C $1 - e$ D e E 0

5 Calcoliamo l'integrale $\int_4^9 \frac{1}{x - \sqrt{x}}\,dx$ per sostituzione ponendo $t = \sqrt{x} - 1$. Otteniamo:

A $2\ln 2$.
B $\ln 2$.
C $\ln 9 - \ln 4$.
D $2\cdot(\ln 9 - \ln 4)$.
E $\ln 5$.

6 Quanto vale l'area del trapezoide in figura?

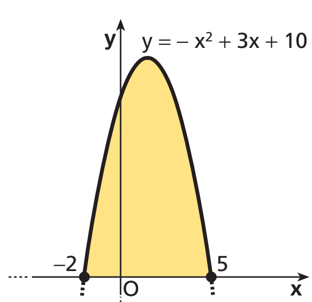
A $-\frac{45}{2}$

B $\frac{45}{2}$

C $\frac{343}{6}$

D $\frac{70}{3}$

E $-\frac{70}{3}$



7 Quanto vale l'area della superficie indicata in figura?

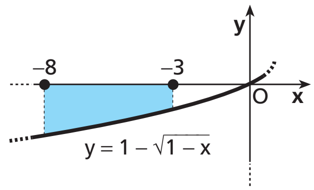
A -10

B 10

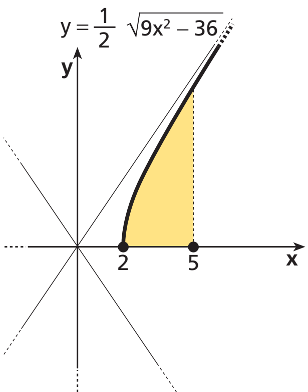
C $-\frac{23}{3}$

D $\frac{23}{3}$

E $\frac{7}{3}$



8 Quale dei seguenti integrali permette di calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse x della regione di piano della seguente figura?



A $\pi\cdot\int_2^5 \frac{1}{2}\sqrt{9x^2 - 36}\,dx$

B $\int_2^5 \frac{1}{2}\sqrt{9x^2 - 36}\,dx$

C $\pi\cdot\int_2^5 \frac{1}{2}(9x^2 - 36)\,dx$

D $\int_2^5 \frac{1}{4}(9x^2 - 36)\,dx$

E $\frac{\pi}{4}\cdot\int_2^5 (9x^2 - 36)\,dx$

9 Se $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, allora è necessario che:

A $a = b$.
B $f(x) = 0$.
C $a = -b$ e $f(x)$ sia dispari.
D $a = b = 0$.
E nessuna delle precedenti.

10 L'area del trapezoide delimitato dalla funzione $y = x^3$ in $[-1; 0]$ è uguale a:

A 3.
B $\frac{1}{4}$.
C $-\frac{1}{3}$.
D $-\frac{1}{4}$.
E $\frac{1}{3}$.

QUESITI

11 Fornisci degli esempi relativi alla seguente affermazione: se una funzione è continua in un intervallo $[a; b]$, allora è integrabile, mentre se una funzione è integrabile in $[a; b]$, non è detto che sia continua.

12 Data una funzione $f(x)$ dispari, definita e integrabile nell'intervallo $[-4; 4]$, quanto vale l'integrale esteso a tale intervallo? Quanto vale l'integrale esteso allo stesso intervallo della funzione $6 + f(x)$?

13 Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, dall'asse x e dalle rette $x = 1$, $x = \sqrt{3}$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2009, *quesito* 3)

$\left[\frac{\pi(12\sqrt{3} - 12 - \pi)}{12}\right]$

14 Sia $f(x)$ una funzione continua in $\mathbb{R}$ e sempre positiva. Dimostra che la funzione $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è crescente.

15 Sia $f(x)$ una funzione continua in $\mathbb{R}$ e $g(x) = \int_5^{x^2} f(t)\,dt$. Quanto vale $g'(0)$? $[0]$

16 È data la funzione $y = f(x)$ integrabile in ogni intervallo $[a; b] \subset \mathbb{R}$. Dimostra che:

a) se f è pari, allora $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$;

b) se f è dispari, allora $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

17 Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ nell'intervallo $0 \le x \le 1$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2008, *quesito* 5)

$[\log(1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})]$

18 La regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione $y = e^{\frac{x}{2}}(x+1)$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \le x \le 1$ è la base di un solido S le cui sezioni sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2008, *quesito* 7)

$\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}(2e-1)\right]$

19 Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione: $\int_1^{\sqrt{\ln x}} \frac{e^t}{t^2}\,dt$ nel punto P di ascissa $x = e$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione suppletiva*, 2008, *quesito* 9)

$\left[y = \frac{1}{2}(x-e)\right]$

20 Si determini un polinomio $P(x)$ di terzo grado tale che:

$$P(0) = P'(0) = 0, \quad P(1) = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 P(x)\,dx = \frac{1}{12}.$$

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria*, 2008, *quesito* 5)

$[y = x^2 - x^3]$

21 Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{6} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

si calcoli un'approssimazione di π, utilizzando uno dei metodi d'integrazione numerica studiati.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione suppletiva*, 2008, *quesito* 10)

22 Calcolare la derivata, rispetto ad x, della seguente funzione: $\int_{x}^{x+2} e^{-t}\,dt$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 6)
$[(e^{-2}-1)\,e^{-x}]$

23 È data $f(x)$ continua, come pure le sue derivate prima e seconda. È $\int_{0}^{x^2} f(t)\,dt = x^2(1+x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quanto vale $f(1)$?

$\left[\frac{5}{2}\right]$

24 La funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua per ogni x, è tale che:

$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = a$ e $\int_{0}^{6} f(x)\,dx = b$, dove a e b sono numeri reali.

Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta: $\int_{0}^{3} f(2x)\,dx = \ln 2$ e $\int_{1}^{3} f(2x)\,dx = \ln 4$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 10)
$[a = -\ln 4,\ b = \ln 4]$

25 Determinare il valore del parametro t che soddisfa l'equazione: $\int_{0}^{t} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int_{0}^{1} (3x^2 + 2x + 1)\,dx$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 4)
$[t = \ln(2e^3 - 1)]$

26 Una primitiva della funzione $f(x)$ è sen $2x$. Se è possibile, calcolare $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{x}{3}\right)dx$. Altrimenti spiegare perché il calcolo non è possibile.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione ordinaria*, 2001, *quesito* 4)
$\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

27 Calcolare il seguente limite: $\lim_{x \to 0} \frac{\int_{0}^{x} (1 - e^{-t})\,dt}{\operatorname{sen}^2 x}$, essendo e la base dei logaritmi naturali.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione straordinaria*, 2003, *quesito* 10)
$\left[\frac{1}{2}\right]$

28 Determinare il più grande valore del parametro reale m per cui il valore del seguente integrale:

$$\int_{0}^{m} \frac{2x - 3m}{x - 2m}\,dx$$

non supera 24. (*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione straordinaria*, 2004, *quesito* 6)
$\left[\frac{24}{2 - \ln 2}\right]$

29 Sia $f(x)$ una funzione continua per ogni x reale tale che $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 4$. Dei seguenti integrali:

$\int_{0}^{1} f(2x)\,dx$ e $\int_{0}^{1} f\left(\frac{x}{2}\right)dx$

se ne può calcolare uno solo in base alle informazioni fornite. Dire quale e spiegarne la ragione.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione straordinaria*, 2005, *quesito* 8)

30 Spiegare in maniera esauriente perché una funzione reale di variabile reale integrabile in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ non necessariamente ammette primitiva in $[a; b]$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione suppletiva*, 2005, *quesito* 7)

31 Si calcoli l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ è in accordo con il suo significato geometrico.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria*, 2007, *quesito* 9)

$\left[\dfrac{\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + c;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$

PROBLEMI

32 Sia data la funzione: $f(x) = \begin{cases} x(2-\ln x), & \text{per } x > 0, \\ 0, & \text{per } x = 0. \end{cases}$

1. Questa funzione è continua nel punto di ascissa 0? È derivabile in tale punto?
2. Si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
3. Si calcoli l'espressione, in funzione di t $(t > 0)$, dell'integrale

   $$I(t) = \int_t^{e^2} x(2-\ln x)\,dx.$$

4. Si faccia vedere che $I(t)$ tende verso un limite finito quando t tende a 0. Cosa rappresenta questo limite nel grafico precedente?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2009, *problema* 2)

$\left[\mathbf{1.}\ \text{sì, no; } \mathbf{3.}\ I(t) = \dfrac{e^4}{4} - \dfrac{t^2}{4}(5-2\ln t);\ \mathbf{4.}\ I = \dfrac{e^4}{4}\right]$

33 Si consideri la funzione: $f(x) = 2 + \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$.

1. Si determinino le costanti a e b in modo che risulti: $\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)\,dx = \dfrac{10}{3} - 6\ln\dfrac{5}{3}$.
2. Si studi la funzione così ottenuta e se ne tracci il grafico γ.
3. Si conduca la tangente a γ nel punto di ascissa $x = 0$ e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con i due asintoti.
4. La retta $y = k$ incontri γ in due punti di ascissa x_1 e x_2. Si esprimano, in funzione di k, la somma e il prodotto di tali ascisse. Si dimostri che la quantità

   $S = \dfrac{1}{x_1+1} + \dfrac{1}{x_2+1}$ è indipendente dal valore di k e se ne calcoli il valore.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione suppletiva*, 2009, *problema* 2)

$\left[\mathbf{1.}\ a = -6, b = 5; \mathbf{3.}\ S = \dfrac{9}{8}; \mathbf{4.}\ x_1 + x_2 = \dfrac{2k+1}{2-k}, x_1 \cdot x_2 = \dfrac{k-1}{k-2}, S = \dfrac{6}{5}\right]$

34 a) Rappresenta graficamente la curva di equazione: $y = \dfrac{3x^2 + 6\ln|x-1|}{2}$.

b) Determina l'equazione della retta r parallela all'asse y passante per il punto di flesso della curva di ascissa minore.

c) Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva, dall'asse delle ascisse, dalla retta di equazione $x = -1$ e dalla retta r.

$\left[\text{b) } x = 0; \text{ c) } -\dfrac{5}{2} + 6\ln 2\right]$

35 a) Studia la funzione $y = x \operatorname{arctg} x$ e rappresentala graficamente.

b) Dimostra che l'insieme limitato dal grafico della funzione e dai suoi asintoti ha area finita e calcolane il valore.

$\left[\text{b) } \dfrac{\pi}{2}\right]$

36 Traccia il grafico della funzione $y = \sqrt{16 - x^2}$, con $x \in [-4; 4]$. Utilizzando gli integrali definiti:
a) calcola la lunghezza del grafico nell'intervallo dato;
b) calcola l'area della superficie ottenuta in una rotazione completa del grafico attorno all'asse delle ascisse;
c) generalizza i risultati dei punti precedenti ricavando le formule che esprimono la lunghezza di una circonferenza di raggio R e l'area di una superficie sferica di raggio R. [a) 4π; b) 64π]

37 Considera la funzione $y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$, con $x \geq 0$, e il fascio improprio di rette di equazione $y = k$, con $0 \leq k \leq 1$.
a) Calcola il valor medio m della funzione nell'intervallo $[0; 1]$.
b) Dimostra che per $k = m$ la figura delimitata dall'asse y, dalla funzione e dalla retta $y = k$ risulta equivalente a quella individuata dalla funzione, dalla retta $x = 1$ e dalla retta $y = k$.
c) Verifica che la figura illimitata individuata dall'asse y, dalla funzione e dalla retta $y = -1$ ha area uguale a quella di un cerchio di raggio 1.
$\left[\text{a) } m = \frac{\pi}{2} - 1; \text{ c) area} = \pi\right]$

38 a) Considera la funzione $f(x) = x\sqrt{x^2 + 6}$. Verifica che $f(x)$ è dispari e traccia il suo grafico.
b) Calcola in modo esatto l'integrale $\int_0^2 f(x)\,dx$.
c) Suddividi l'intervallo $[0; 2]$ in 8 parti congruenti e calcola, con il metodo dei rettangoli, un valore approssimato dell'integrale precedente.
$\left[\text{b) } \frac{10\sqrt{10}}{3} - 2\sqrt{6} \simeq 5{,}6419\ldots; \text{ c) } S_8' = 4{,}862,\ S_8 = 6{,}443\right]$

39 a) Data la funzione $y = \frac{x^4 + 2x}{3x + 1}$, esegui lo studio e disegna il grafico.
b) Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dall'asse x, dal grafico di y, dalle rette di equazioni $x = 2$ e $x = 4$, utilizzando il metodo di Cavalieri-Simpson (dividi l'intervallo di integrazione in 8 parti).
c) Con il metodo di Runge valuta l'errore commesso al punto b). [b) $19{,}32177\ldots$; c) $E = 7{,}87 \cdot 10^{-7}$]

40 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola p di equazione:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1.$$

a) Determinare le equazioni della retta t tangente alla parabola nel suo punto C di ascissa 0 e la retta s perpendicolare alla retta t e tangente alla parabola medesima.
b) Dopo aver controllato che la retta s e la parabola si toccano nel punto $A(2; 1)$, trovare le equazioni delle circonferenze tangenti alla parabola nel punto A e tangenti alla retta t.
c) Indicata con k la circonferenza, tra quelle trovate, che non ha altri punti in comune con p, oltre ad A, e detto B il punto in cui questa circonferenza tocca la retta t, calcolare l'area della porzione finita di piano delimitata dal segmento BC, dal minore degli archi AB della circonferenza k e dall'arco AC della parabola p.
d) Chiamata r la retta tangente alla circonferenza k e strettamente parallela alla retta t e considerato il segmento parabolico che tale retta r individua sulla parabola p, calcolare il volume del solido da esso generato quando ruota di un giro completo attorno all'asse x.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria*, 2001, *problema* 1)

$\left[\text{a) } t\colon y = -x + 1,\ s\colon y = x - 1; \text{ b) } x^2 + y^2 - 6x + 7 = 0,\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0; \text{ c) } \frac{7}{3} - \frac{\pi}{2}; \text{ d) } \frac{1088}{15}\sqrt{2}\,\pi\right]$

41 Considera le curve espresse dalla seguente equazione: $y = kx^5 - 2kx^3 + x^2 - 3$, con $k \in \mathbb{R}$.

a) Verifica che $\forall\, k \in \mathbb{R}$ hanno in comune tre punti.

b) Posto $k = 2$, mediante il metodo dei trapezi, calcola un'approssimazione dell'integrale $\int_{-1}^{1} y\,dx$ (dividi l'intervallo in 6 parti).

c) Valuta l'errore commesso ε_6 e verifica che la differenza fra il valore approssimato dell'integrale e quello esatto è minore di ε_6.

$\left[\text{a) } (0; -3), (\pm\sqrt{2}; -1); \text{ b) } -5{,}296296; \text{ c) } \varepsilon_6 = 0{,}333\ldots, \text{ val. es.} = -\frac{16}{3}\right]$

42 Considera la funzione così definita: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ (\operatorname{arctg} x)\ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

a) Dimostra che è continua in tutti i punti del suo dominio, studia il segno della funzione e traccia un grafico possibile senza analizzare il segno della derivata prima.

b) Applica il metodo dei trapezi per calcolare un valore approssimato dell'integrale $\int_{1}^{3} f(x)\,dx$, dividendo l'intervallo in 6 parti.

c) Stima l'errore commesso se si ricalcola l'integrale dopo aver diviso l'intervallo in 5 parti.

[b) $I_6 = 1{,}474431\ldots$; c) $I_5 = 1{,}473348\ldots$, $\Delta = I_6 - I_5 \simeq 0{,}001$]

43 Prendi in esame la famiglia di funzioni: $f_k(x) = x^k e^{-x^2}$, con $k \in \mathbb{N}$.

a) Determina per quale valore di k si ha una funzione con un estremo relativo $x = 1$.

b) Esegui lo studio della funzione trovata e disegna il grafico.

c) Considera la funzione corrispondente a $k = 1$ e determina l'integrale $\int_{0}^{1} f_1(x)\,dx$. Confronta il risultato con il valore approssimato calcolato con il metodo delle parabole dividendo l'intervallo in 6 parti.

$\left[\text{a) } k = 2; \text{ c) per } k = 1, I = \frac{e-1}{2e}, I_6 = 0{,}3161031\ldots\right]$

44 È data la famiglia di funzioni: $y_k = x^3 + kx - k$, con k parametro reale.

a) Dimostra che l'integrale $\int_{0}^{2} y_k\,dx$, calcolato in modo esatto, è indipendente da k.

b) Verifica che i grafici di tutte le funzioni passano per uno stesso punto P.

c) Posto $k = 2$, calcola un valore approssimato dell'integrale $\int_{-1}^{1} y_2\,dx$ con il metodo delle parabole, dividendo l'intervallo in 6 parti. Confronta il risultato con quello dell'integrazione esatta.

$\left[\text{a) } \int_{0}^{2} y_k\,dx = 4; \text{ b) } P(1; 1); \text{ c) } I = I_6 = -4\right]$

45 Data la funzione $f(x) = \dfrac{ax^3 + 6x^2 + b}{cx^2}$, con $a, b \neq 0$:

a) determina i coefficienti a, b, c in modo che il punto $M(-2; 0)$ sia un massimo relativo e la retta $2x - 3y + 6 = 0$ sia asintoto obliquo;

b) esegui lo studio e disegna il grafico;

c) calcola l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico di f, dall'asse delle ascisse e dalla retta $x - 4 = 0$;

d) applicando uno dei metodi numerici studiati calcola un'approssimazione dell'area e confronta il risultato con il valore esatto.

[a) $a = 2$, $b = -8$, $c = 3$; c) 9]

46 Considera l'insieme di funzioni definito dalla seguente espressione: $f_k(x) = \dfrac{x^3}{|x+k|-k}$, con $k \in \mathbb{R}$.

a) Determina il dominio D e i punti di discontinuità al variare del parametro k.
b) Studia e disegna il grafico della funzione corrispondente a $k = -2$.
c) Con il metodo dei trapezi calcola un valore approssimato dell'integrale $\int_0^3 f_{-2}(x)\,dx$ dividendo l'intervallo di integrazione in 6 parti. Confronta il risultato con il valore esatto dell'integrale.

[a) per $k < 0$, $D = \mathbb{R}$, f_k continua; per $k = 0$, $D = \mathbb{R} - \{0\}$, $x = 0$ disc. di 3ª sp.; per $k > 0$, $D = \mathbb{R} - \{0, -2k\}$, $x = 0$ disc. di 3ª sp., $x = -2k$ disc. di 2ª sp.; c) $I_6 = 8{,}234523\ldots$; $I = 64\ln 2 - \dfrac{109}{3}$]

47 Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$:

a) esegui lo studio e disegna il grafico;
b) mediante la formula dei rettangoli determina un'approssimazione per difetto e una per eccesso dell'integrale $\int_0^2 f(x)\,dx$, dividendo l'intervallo in 8 parti;
c) valuta l'errore commesso ε_8 e confronta le due approssimazioni con il risultato del calcolo esatto.

[b) $S'_8 = 0{,}6421514\ldots$, $S_8 = 0{,}6715632\ldots$; c) $\varepsilon_8 = \dfrac{1}{4}$; $I = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,4 \simeq 0{,}6629088\ldots$]

48 È data la funzione $y = \mathrm{sen}\,x^2$, con $x \in [-\pi; \pi]$.

a) Trova i punti di massimo, di minimo e disegna il grafico probabile.
b) Mediante il metodo dei rettangoli deduci un'approssimazione per difetto e una per eccesso dell'integrale $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \mathrm{sen}\,x^2\,dx$, dividendo l'intervallo in 8 parti.
c) Determina il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse delle ordinate dal trapezoide delimitato dalla curva e dalle rette di equazioni $x = 0$ e $x = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

[b) $S'_8 = 0{,}470956\ldots$, $S_8 = 0{,}6276212$; c) π]

49 Sono date la funzione $f(x) = e^{-x^2+\frac{1}{2}}$ e la parabola di equazione $y = ax^2$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Determina il coefficiente a in modo che la parabola passi per i punti di flesso di f. Rappresenta le due curve sul piano cartesiano.
b) Mediante il metodo dei trapezi calcola un valore approssimato dell'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola e dal grafico della funzione (dividi l'intervallo di integrazione in 5 parti).
c) Stabilisci se il risultato ottenuto al punto precedente è un'approssimazione per eccesso o per difetto e stima l'errore commesso.

[a) $a = 2$; b) $I_5 = 1{,}466936\ldots$; c) appr. per difetto, $\varepsilon_5 = \dfrac{\sqrt{2}\,(\sqrt{e}+2)}{75} \simeq 0{,}0688\ldots$]

CAPITOLO 30

٣٠
[numerazione araba]

३०
[numerazione devanagari]

三十
[numerazione cinese]

LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

IL DECADIMENTO RADIOATTIVO Il problema più grande dell'energia nucleare è che le scorie prodotte rimangono radioattive per molto tempo. Per stimarlo bisogna conoscere il tempo di dimezzamento della sostanza radioattiva dispersa nell'ambiente. Si chiama anche *emivita* ed è il tempo che la sostanza impiega per dimezzare la quantità dei suoi nuclei instabili. Il tempo di dimezzamento dell'uranio 238 è di circa 4 miliardi e mezzo di anni. Per questo motivo, lasciare scorie vuol dire lasciare un problema in eredità alle generazioni future.

Come si fa a stimare la vita di una scoria radioattiva?

La risposta a pag. 2098

1. LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

Le equazioni differenziali

DEFINIZIONE

Equazione differenziale

Si chiama equazione differenziale un'equazione che ha per incognita una funzione $y = f(x)$ e che stabilisce una relazione fra la variabile indipendente x, la funzione y e almeno una delle sue derivate (y', y'', ...), cioè è un'equazione del tipo $F(x; y; y'; \ldots; y^{(n)}; \ldots) = 0$.

Ognuna delle funzioni che verifica un'equazione differenziale si chiama **soluzione** o **integrale** dell'equazione. Il grafico di una soluzione si chiama **curva integrale**. Risolvere un'equazione differenziale significa determinare tutte le sue soluzioni. Chiamiamo **integrale generale** l'insieme di tutte le funzioni che sono integrali dell'equazione.

ESEMPIO

L'equazione

$$y' - 4y = 0$$

è un'equazione differenziale che ha tra le soluzioni la funzione $y = e^{4x}$, che è un integrale particolare.
Ogni altra funzione del tipo ke^{4x} è soluzione. Infatti y e la sua derivata $y' = 4ke^{4x}$ verificano l'equazione.
Si può dimostrare che tutte le soluzioni sono del tipo $y = ke^{4x}$.
Dunque $y = ke^{4x}$ è l'integrale generale.

L'**ordine** di un'equazione differenziale è l'ordine massimo delle derivate che compaiono nell'equazione. Per esempio, $y''' - 2y' = 3xy$ è un'equazione differenziale del terzo ordine.
Noi studieremo alcuni tipi di equazioni differenziali del **primo ordine**, in cui compare solo la derivata prima della funzione, e del **secondo ordine**, in cui compaiono solo la derivata prima e la derivata seconda.

Le equazioni differenziali del primo ordine

Un'equazione differenziale del primo ordine è riconducibile alla forma:

$$\boldsymbol{F(x; y; y') = 0.}$$

L'equazione è in **forma normale** quando è scritta come

$$y' = G(x; y),$$

ossia è esplicitata rispetto alla derivata prima della funzione incognita y.
L'equazione $y' - 2x = 1$ è un'equazione differenziale del primo ordine. La riscriviamo come $y' = 2x + 1$. Una funzione $y = f(x)$ è soluzione dell'equazione se e solo se è una primitiva di $2x + 1$; l'integrale generale dell'equazione differenziale è quindi dato dall'integrale indefinito:

● L'equazione differenziale

$$2y + y' = 4x$$

può essere scritta nella forma normale

$$y' = 4x - 2y.$$

$$y = \int (2x + 1)\, dx = x^2 + x + c.$$

Allora l'integrale generale dell'equazione differenziale assegnata è $y = x^2 + x + c$, mentre una soluzione particolare è la funzione $y = x^2 + x + 2$, ottenuta per $c = 2$.

In generale, data un'equazione differenziale del primo ordine $F(x; y; y') = 0$, l'integrale generale è dato dalla famiglia di funzioni $y = f(x; c)$; le **soluzioni particolari** si ottengono attribuendo al parametro c determinati valori.

L'integrale generale di un'equazione differenziale del primo ordine è una funzione di due variabili, perché dipende da x e da c.

Spesso, in un'equazione differenziale del primo ordine, si cerca una soluzione particolare la cui curva integrale passa per un punto $(x_0; y_0)$ assegnato. In questo caso la risoluzione dell'equazione differenziale consiste nella determinazione di una funzione $y = f(x)$ che soddisfi le due condizioni:

$$\begin{cases} F(x; y; y') = 0 \\ y_0 = f(x_0) \end{cases}$$

Un problema di questo genere è detto **problema di Cauchy**.
La condizione $y_0 = f(x_0)$ è detta **condizione iniziale del problema di Cauchy**.

ESEMPIO

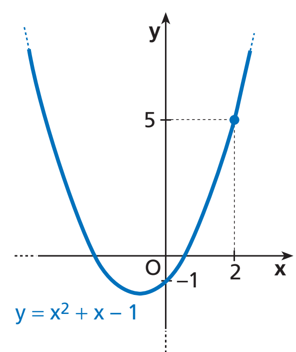
Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - 2x = 1 \\ 5 = f(2) \end{cases}$$

Essendo $y = x^2 + x + c$ l'integrale generale, poniamo:

$$(2)^2 + 2 + c = 5 \quad \rightarrow \quad c = -1.$$

La soluzione del problema è $y = x^2 + x - 1$. La parabola che rappresenta questa equazione passa per il punto di coordinate $(2; 5)$.



Fra le equazioni differenziali del primo ordine studieremo:

- le equazioni del tipo $y' = f(x)$;
- le equazioni **a variabili separabili** del tipo $y' = g(x)h(y)$, con $h(y) \neq 0$;
- le equazioni lineari del tipo $y' + a(x)y = b(x)$.

2. LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL TIPO $y' = f(x)$

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione differenziale $y' - 2 \cos x = 0$.

- Isoliamo y':

$$y' = 2 \cos x.$$

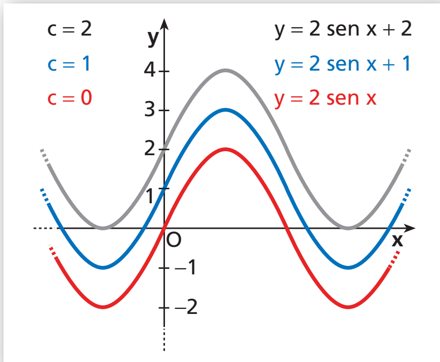
- Integriamo entrambi i membri rispetto alla variabile x:

$$\int y'\, dx = \int 2 \cos x\, dx, \text{ ossia}$$

$$y = \int 2\cos x\, dx = 2 \cdot \int \cos x\, dx = 2\,\mathrm{sen}\, x + c,\ \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Le soluzioni sono rappresentate dalle curve integrali di equazione:

$$y = 2\ \mathrm{sen}\ x + c.$$



◀ **Figura 1** Al variare di *c* otteniamo curve diverse. Ogni curva si può ottenere dall'altra mediante una traslazione.

In generale, per risolvere un'equazione differenziale del primo ordine, riconducibile al tipo $y' = f(x)$, si integrano entrambi i membri:

$$\int y'\, dx = \int f(x)\, dx.$$

Le primitive di $f(x)$ sono le soluzioni dell'equazione differenziale data.

IN PRATICA
▶ Videolezione 82

3. LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI

● In queste equazioni la derivata di y è uguale al prodotto di una funzione nella sola variabile x per un'altra nella sola variabile y.
Per esempio:

$$y' = 2x^2(y - 1).$$

DEFINIZIONE

Equazione differenziale a variabili separabili

Un'equazione differenziale del primo ordine è detta a variabili separabili quando può essere scritta nella forma $y' = g(x) \cdot h(y)$, con $g(x)$ e $h(y)$ funzioni continue.

$$y' = \underbrace{\boxed{g(x)}}_{\text{funzione di x}} \cdot \underbrace{\boxed{h(y)}}_{\text{funzione di y}}$$

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione differenziale $y' = 4xy^2$.

● In questo caso $g(x) = 4x$ e $h(y) = y^2$.

Poiché $y' = \dfrac{dy}{dx}$, riscriviamo l'equazione differenziale nel seguente modo:

$$\frac{dy}{dx} = 4xy^2.$$

Separiamo le variabili in modo da avere al primo membro la y e al secondo membro la x. Per ottenere ciò, moltiplichiamo entrambi i membri per la quantità $\dfrac{1}{y^2} \cdot dx$, supponendo che sia $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{\cancel{dx}} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \cancel{dx} = 4x\cancel{y^2} \cdot \frac{1}{\cancel{y^2}} \cdot dx \quad \to \quad \frac{dy}{y^2} = 4x\,dx.$$

Integriamo entrambi i membri:

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 4x\,dx,$$

$$-\frac{1}{y} = 4 \cdot \frac{x^2}{2} + c \quad \to \quad \frac{1}{y} = -(2x^2 + c).$$

Consideriamo i reciproci dei due membri e ricaviamo y:

$$y = -\frac{1}{2x^2 + c}.$$

Riprendiamo il caso precedentemente escluso di $y = 0$.

Per $y = 0$ abbiamo che $y' = 0$ e l'equazione data è soddisfatta.

La soluzione dell'equazione data è quindi:

$$y = -\frac{1}{2x^2 + c} \vee y = 0.$$

Osservazione. Ponendo $c = \frac{1}{k}$, con $k \neq 0$, si ottiene:

$$y = -\frac{1}{2x^2 + \frac{1}{k}} = -\frac{k}{2kx^2 + 1}.$$

Se estendiamo la validità di tale scrittura anche al caso di $k = 0$, otteniamo proprio $y = 0$. Quindi

$$y = -\frac{k}{2kx^2 + 1}, \quad \text{con } k \in \mathbb{R},$$

è un modo più sintetico di scrivere la soluzione.

$\int \frac{1}{y^2}dy = \int y^{-2}dy =$
$= \frac{y^{-1}}{-1} + k = -\frac{1}{y} + k.$

Qui e in seguito, se non diamo indicazioni diverse, sottintendiamo che $c \in \mathbb{R}$.

In generale, per risolvere un'equazione differenziale riconducibile alla forma

$$y' = g(x) \cdot h(y):$$

- si scrive $y' = \frac{dy}{dx}$ e quindi $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$;
- si separano le variabili, e cioè si moltiplicano entrambi i membri per $\frac{1}{h(y)} \cdot dx$, supponendo $h(y) \neq 0$:

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx;$$

- si integrano entrambi i membri, $\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx$, e si ricava y in funzione di x dall'uguaglianza fra le primitive trovate;
- si esaminano a parte i casi derivanti da $h(y) = 0$.

ESPLORAZIONE

Prede e predatori

Il modello preda-predatore è anche noto come modello Volterra-Lotka, perché i due matematici Vito Volterra e Alfred J. Lotka lo elaborarono contemporaneamente, ma senza sapere nulla l'uno del lavoro dell'altro.
Il modello semplificato che consideriamo è un sistema di due equazioni differenziali che descrive la coesistenza fra una specie di prede e una di predatori. Con la lettera n si indica l'istante considerato rispetto all'inizio dell'indagine, espresso, per esempio, in mesi; x_n indica il numero delle prede all'istante n (per esempio, all'inizio del mese n) e y_n quello dei predatori. Le variazioni del numero di prede e di predatori nel mese n dipendono sia da caratteristiche proprie della specie presa in considerazione, sia dai rapporti con l'altra specie, cioè dalla catena alimentare:

$$\underbrace{x_{n+1}-x_n}_{\text{variazione delle prede}} = \underset{\text{prede neonate}}{a_1x_n} - \underset{\text{prede mangiate}}{bx_ny_n} - \underset{\text{prede morte per cause naturali}}{a_2x_n}$$

$$\underbrace{y_{n+1}-y_n}_{\text{variazione dei predatori}} = \underset{\text{predatori neonati}}{dx_ny_n} - \underset{\text{predatori morti per cause naturali}}{cy_n}$$

dove a_1, a_2, b, c, d sono costanti di proporzionalità.
Se vogliamo esprimere la variazione di x e y in funzione del tempo, dobbiamo considerare le derivate delle due funzioni, quindi otteniamo le seguenti equazioni differenziali:

$$x'(t) = A\,x(t) + B\,x(t)\,y(t),$$
$$\text{con} \quad A = a_1 - a_2 + 1 > 0 \quad \text{e} \quad B = -b < 0;$$
$$y'(t) = C\,y(t) + D\,x(t)\,y(t),$$
$$\text{con} \quad C = 1 - c < 0 \quad \text{e} \quad D = d > 0.$$

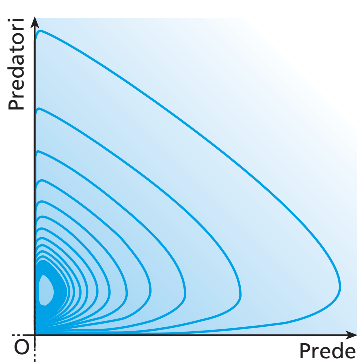
La contemporanea presenza di prede e predatori introduce termini non lineari rappresentati dal prodotto dei numeri delle due specie. Il termine con il prodotto $x(t)y(t)$ rappresenta la possibilità di incontro tra preda e predatore: per le prede si risolve in una diminuzione di numero ($B < 0$), mentre per la popolazione dei predatori in un aumento ($D > 0$).

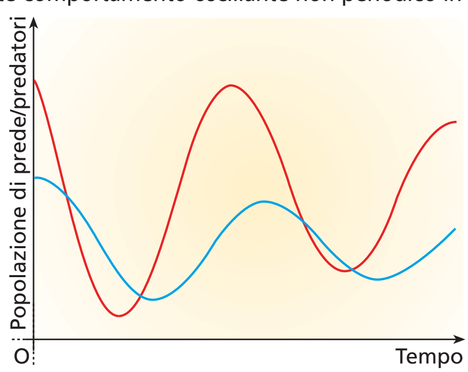
Attività

Regime preda-predatore

L'evoluzione del biosistema prede-predatori può produrre un interessante comportamento oscillante non periodico in funzione del tempo.

- Ricerca in Internet ulteriori informazioni e cerca di spiegare i grafici a lato.





▶ Regime di convivenza tra prede e predatori: una serie di situazioni «stabili» in cui le popolazioni, sia di prede sia di predatori, continuano a crescere.

▶ Evoluzione nel tempo della popolazione di prede (blu) e di predatori (rosso).

Cerca nel Web:
Vito Volterra, modello preda-predatore, equazioni di Volterra-Lotka

4. LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL PRIMO ORDINE

IN PRATICA
▶ Videolezione 83

DEFINIZIONE

Equazione differenziale lineare del primo ordine

Un'equazione differenziale del primo ordine si dice lineare quando può essere scritta nella forma

$$y' + a(x)y = b(x),$$

dove $a(x)$ e $b(x)$ rappresentano funzioni note e continue in un opportuno intervallo.

$$\underbrace{\boxed{y'}}_{\text{derivata prima}} + a(x) \cdot \underbrace{\boxed{y}}_{\text{funzione } y = f(x)} = b(x)$$

I grado

Se $b(x) = 0$, l'equazione è detta **omogenea**; se $b(x) \neq 0$, è detta **completa**.

● L'equazione differenziale $y' - 3xy - x^4 = 0$ è lineare; l'equazione differenziale $y' = 4xy^2$ **non** è lineare, perché y compare al quadrato.

L'equazione lineare è omogenea

Se $b(x) = 0$, risulta $y' + a(x)y = 0$.

L'equazione è a variabili separabili. Risolviamola.

Se $y \neq 0$:

$$y' = -a(x)y \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -a(x)y \;\rightarrow\; \frac{dy}{y} = -a(x)\,dx \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = \int -a(x)\,dx \;\rightarrow\; \ln|y| + c = -\int a(x)\,dx \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; \ln|y| = -c - \int a(x)\,dx \;\rightarrow\; |y| = e^{-c-\int a(x)\,dx} \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; y = \pm e^{-c-\int a(x)\,dx} \;\rightarrow\; y = \pm e^{-c} e^{-\int a(x)\,dx}, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

Poiché e^{-c} e $-e^{-c}$ sono costanti reali diverse da 0, possiamo indicarle genericamente con k e scrivere:

$$y = ke^{-\int a(x)\,dx}, \quad \text{con } k \neq 0.$$

Se $y = 0$, anche $y' = 0$ e l'equazione differenziale è verificata. Questa soluzione è compresa nella scrittura precedente se $k = 0$.
Quindi la soluzione dell'equazione è:

$$y = ke^{-\int a(x)\,dx}, \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

ESEMPIO

Risolviamo $y' = x^2 y$.
Tale equazione è lineare omogenea. Per determinare $a(x)$ scriviamo l'equazione nella forma $y' + a(x)y = 0$,

$$y' - x^2 y = 0,$$

da cui deduciamo $a(x) = -x^2$.
Utilizziamo la formula che fornisce direttamente la soluzione:

$$y = ke^{\int x^2\,dx} = ke^{\frac{x^3}{3}}.$$

L'equazione lineare è completa

Per trovare la soluzione dell'equazione lineare completa, e cioè di $y' + a(x)y = b(x)$, consideriamo la soluzione dell'equazione lineare omogenea associata $y = ke^{-\int a(x)dx}$ e prendiamo k non più costante, ma funzione di x.
Ipotizziamo quindi che la soluzione dell'equazione completa possa essere scritta nella forma:

$$y = k(x)e^{-\int a(x)dx}.$$

Questo procedimento è detto **metodo della variazione delle costanti** o **metodo di Lagrange**.
Per trovare la funzione $k(x)$, imponiamo dunque che la precedente funzione y sia soluzione dell'equazione differenziale $y' + a(x)y = b(x)$.
Calcoliamo la derivata y':

$$y' = k'(x)e^{-\int a(x)dx} - k(x)a(x)e^{-\int a(x)dx}.$$

● La derivata di $e^{-\int a(x)dx}$ è $e^{-\int a(x)dx} \cdot [-a(x)]$, per la regola di derivazione di una funzione composta.

Sostituiamo nell'equazione differenziale di partenza le espressioni di y e y',

$$k'(x)e^{-\int a(x)dx} - k(x)a(x)e^{-\int a(x)dx} + a(x)k(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x) \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad k'(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x) \quad \rightarrow \quad k'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx}.$$

● $k'(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x)$

$$k'(x) = \frac{b(x)}{e^{-\int a(x)dx}} =$$

$$= b(x)e^{\int a(x)dx}.$$

Abbiamo applicato la proprietà

$$\frac{1}{x^{-m}} = x^m.$$

Abbiamo ottenuto un'equazione differenziale, nell'incognita k, del tipo $y' = f(x)$, che risolviamo integrando, ossia:

$$k(x) = \int b(x)e^{\int a(x)\,dx}\,dx + c.$$

Sostituendo $k(x)$ nell'espressione iniziale di y, enunciamo il seguente teorema.

TEOREMA

L'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del primo ordine del tipo $y' + a(x)y = b(x)$ è dato da:

$$y = e^{-\int a(x)\,dx}\left[\int b(x)e^{\int a(x)\,dx}\,dx + c\right].$$

ESEMPIO

Risolviamo $y' + \dfrac{y}{x} = x$, con $x > 0$.

L'equazione lineare è completa. Scriviamola nella forma $y' + a(x)y = b(x)$, per individuare $a(x)$ e $b(x)$.

$$y' + \frac{1}{x}\cdot y = x \quad \rightarrow \quad a(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad b(x) = x.$$

Per facilitare l'applicazione della formula risolutiva, scomponiamola in varie parti, calcolando alcuni integrali che vi compaiono.

● In $\ln x$ non scriviamo x in valore assoluto perché per ipotesi è $x > 0$.

- $\int a(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x.$
- $e^{-\int a(x)\,dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad e^{\int a(x)\,dx} = e^{\ln x} = x.$
- $\int e^{\int a(x)\,dx}\cdot b(x)\,dx = \int x\cdot x\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}.$

Sostituendo nella formula, otteniamo:

$$y = \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{x^3}{3} + c \right] = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}.$$

5. LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

IN PRATICA
▶ Videolezione 84

Un'equazione differenziale del secondo ordine è riconducibile alla forma:

$$\boldsymbol{F(x; y; y'; y'') = 0}.$$

Si dice che è in **forma normale** quando è scritta come

$$y'' = G(x; y; y'),$$

ossia è esplicitata rispetto alla derivata seconda della funzione incognita y.

ESEMPIO

L'equazione differenziale $y' - y'' = xy$ è del secondo ordine, perché contiene anche la derivata seconda della funzione incognita. Scritta in forma normale è $y'' = y' - xy$.

Le soluzioni delle equazioni differenziali del secondo ordine sono funzioni della variabile x, contenenti *due* costanti arbitrarie, che indicheremo con c_1 e c_2.

● Sottintendiamo: $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

L'integrale generale di un'equazione differenziale del secondo ordine è dato quindi da una famiglia di funzioni nella variabile x, che dipendono anche dai valori delle costanti c_1 e c_2. Perciò l'integrale generale è del tipo $y = f(x; c_1; c_2)$. Le soluzioni particolari si ottengono attribuendo ai parametri c_1 e c_2 determinati valori.

Poiché l'integrale generale dipende da due parametri, occorre dare due condizioni se si vuol determinare una soluzione particolare.

Fra le equazioni differenziali del secondo ordine studieremo solo quelle **lineari con i coefficienti costanti**, ossia le equazioni del tipo

$$\boldsymbol{y'' + by' + cy = r(x)},$$

dove b e c sono numeri reali e $r(x)$ è una funzione continua in un opportuno intervallo. Tali equazioni si dicono:
- **omogenee**, se $r(x) = 0$ in tutti i punti dell'intervallo in cui è definita;
- **complete**, se $r(x) \neq 0$ in qualche punto dell'intervallo in cui è definita.

L'equazione è omogenea

Se $r(x) = 0$, l'equazione diventa:

$$y'' + by' + cy = 0, \qquad \text{con } b, c \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che la funzione esponenziale $y = e^{zx}$, dove z è un'opportuna costante, può essere una sua soluzione. Per verificare ciò calcoliamo le derivate prima e seconda, $y' = ze^{zx}$ e $y'' = z^2e^{zx}$, sostituiamo nell'equazione di partenza e poi dividiamo entrambi i membri per $e^{zx} \neq 0$:

$$z^2 \cdot e^{zx} + bz \cdot e^{zx} + c \cdot e^{zx} = 0 \quad \to \quad (z^2 + bz + c) \cdot e^{zx} = 0 \quad \to \quad z^2 + bz + c = 0.$$

La funzione $y = e^{zx}$ è soluzione dell'equazione differenziale data se z è soluzione dell'equazione

$$z^2 + bz + c = 0,$$

che si chiama **equazione caratteristica dell'equazione differenziale**. Risolvendo l'equazione caratteristica, quindi, si trovano soluzioni particolari dell'equazione differenziale con le quali è possibile costruire quella generale, che, si può dimostrare, si ottiene con una combinazione lineare delle due soluzioni particolari.

- L'equazione algebrica di secondo grado

  $z^2 + bz + c = 0$

  ha gli stessi coefficienti dell'equazione iniziale differenziale

  $y'' + by' + cy = 0.$

ESEMPIO

Risolviamo $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Scriviamo la sua equazione caratteristica: $z^2 - 5z + 6 = 0$.
Risolviamo tale equazione: $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0 \quad \rightarrow \quad z_1 = 2, z_2 = 3$.
Le funzioni $y_1 = e^{2x}$ e $y_2 = e^{3x}$ sono soluzioni particolari dell'equazione differenziale data.
La soluzione generale è: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- La funzione $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, è una combinazione lineare di y_1 e y_2.

Il tipo delle soluzioni particolari che si ottengono è determinato dalle radici dell'equazione caratteristica, che, a loro volta, dipendono dal valore del discriminante.

- A seconda del valore del discriminante, le radici di un'equazione algebrica di secondo grado possono essere *reali distinte*, *reali coincidenti* oppure *complesse coniugate*.

In generale, per risolvere un'equazione lineare omogenea del secondo ordine scritta nella forma

$$y'' + by' + cy = 0, \qquad \text{con } b, c \in \mathbb{R},$$

si applica il seguente procedimento, che illustriamo senza dimostrazione.

- Si scrive l'equazione caratteristica dell'equazione differenziale data e si calcola il suo discriminante:

  $$z^2 + bz + c = 0, \qquad \Delta = b^2 - 4c.$$

- Si distinguono tre casi:

1. $\Delta > 0$

– si determinano le due soluzioni reali e distinte z_1 e z_2;
– la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x}}, \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. $\Delta = 0$

– si determinano le due soluzioni reali coincidenti $z_1 = z_2$;
– la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y = c_1 e^{z_1 x} + c_2 x e^{z_1 x}, \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

ossia, raccogliendo $e^{z_1 x}$:

$$\boldsymbol{y = e^{z_1 x}(c_1 + c_2 x)}, \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. $\Delta < 0$

– si determinano le due soluzioni complesse coniugate $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$;

– la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

ossia, raccogliendo $e^{\alpha x}$:

$$\boldsymbol{y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)}, \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

ESEMPIO

1. Risolviamo $y'' - 2y' + y = 0$.

L'equazione caratteristica associata è $z^2 - 2z + 1 = 0$.

Si ha: $\Delta = 0$; $z_1 = z_2 = 1$.

La soluzione generale dell'equazione differenziale data è:

$$y = e^x(c_1 + c_2 x), \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Risolviamo $y'' - 4y' + 13y = 0$.
Scriviamo l'equazione caratteristica associata: $z^2 - 4z + 13 = 0$.

Calcoliamo: $\frac{\Delta}{4} = -9$; $z_{1,2} = 2 \pm 3i$.

La soluzione generale dell'equazione differenziale data è:

$$y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x), \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

L'equazione è completa

Per risolvere un'equazione lineare del secondo ordine completa e a coefficienti costanti, del tipo

$$y'' + by' + cy = r(x), \qquad \text{con } b, c \in \mathbb{R},$$

si utilizza il seguente teorema, di cui non forniamo la dimostrazione.

TEOREMA

La soluzione generale y dell'equazione $y'' + by' + cy = r(x)$ si ottiene addizionando a una sua soluzione particolare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $y'' + by' + cy = 0$.

Ci limitiamo a considerare il caso particolare in cui $\boldsymbol{c = 0}$ e $\boldsymbol{b = 0}$ e $r(x)$ è una qualsiasi funzione. L'equazione differenziale diventa della forma $y'' = r(x)$ e possiamo risolverla procedendo con due integrazioni successive.

● In generale, la soluzione si può determinare in base alla funzione $r(x)$.

ESEMPIO

Risolviamo $y'' = 12x^2 + 4$.
Determiniamo la derivata prima della funzione y integrando ciascun membro dell'equazione:

$$y' = \int (12x^2 + 4)\, dx = 4x^3 + 4x + c_1.$$

Determiniamo la funzione con un'ulteriore integrazione:

$$y = \int (4x^3 + 4x + c_1)\, dx = x^4 + 2x^2 + c_1 x + c_2.$$

IL DECADIMENTO RADIOATTIVO

Come si fa a stimare la vita di una scoria radioattiva?

Il quesito completo a pag. 2087

Cominciamo con un esempio leggermente meno drammatico di quello dell'uranio 238 e che ci permette di capire i tempi di decadimento. Il cesio 137 (^{137}Cs) è una sostanza radioattiva presente nel combustibile esaurito delle centrali nucleari. Decade riducendosi alla metà in circa 30 anni: il suo tempo di dimezzamento è perciò di 30 anni, contro i 4 miliardi e mezzo dell'uranio 238.

Una lunga attesa
Se vogliamo che il numero di nuclei di ^{137}Cs si riduca a circa un millesimo di quello iniziale, quanto tempo bisogna aspettare?
Due tempi di dimezzamento (60 anni) portano il cesio 137 a ridursi di 2^2 volte. Vale a dire che in 60 anni riduciamo il numero di nuclei a un quarto.
Un millesimo è leggermente più grande di 2^{-10}, ($2^{10} = 1024$). Quindi dopo 10 tempi di dimezzamento, cioè 300 anni, sarà rimasto poco meno di un millesimo dei nuclei di cesio 137 inizialmente presenti.
Da un punto di vista teorico, questo procedimento si può applicare a ogni elemento radioattivo, compreso l'uranio 238.

Dal particolare al generale con un'equazione differenziale
Per avere una risposta generale, che valga cioè per ogni sostanza radioattiva e per ogni numero di nuclei residui, dobbiamo cercare di scrivere delle equazioni.

Da quanto abbiamo detto, si vede che il numero di nuclei di un elemento radioattivo è una funzione del tempo: $y = y(t)$.
Il numero di nuclei ha queste proprietà:

- è decrescente;
- il suo decremento è proporzionale a quanti nuclei ci sono istante per istante;
- la costante di proporzionalità varia da sostanza a sostanza.

Possiamo allora descrivere il suo andamento con l'equazione differenziale:

$$y' = -\alpha y.$$

Infatti, poiché y è decrescente, la sua derivata deve essere negativa. Inoltre, per la seconda proprietà, la derivata y' è proporzionale alla funzione y.
Il coefficiente α invece è tipico della sostanza che studiamo.

La soluzione dell'equazione differenziale è la funzione:

$$y(t) = Ae^{-\alpha t},$$

la cui derivata è appunto $y'(t) = -\alpha A e^{-\alpha t}$. Il valore A rappresenta la quantità di sostanza radioattiva presente all'inizio: infatti $A = y(0)$.
La sostanza radioattiva diminuisce naturalmente nel tempo (la derivata è sempre negativa) e lo fa sempre allo stesso ritmo: dopo un tempo di dimezzamento si dimezza, indipendentemente da quanto sia il materiale presente. Chiamando il tempo di dimezzamento t_d, otteniamo:

$$y(t + t_d) = \frac{1}{2} y(t).$$

Da questa formula, tenendo conto della funzione trovata in precedenza, si ricava anche il legame tra il tempo di dimezzamento e la costante α.
Sostituiamo nella relazione e otteniamo

$$Ae^{-\alpha(t+t_d)} = \frac{1}{2} Ae^{-\alpha t},$$

da cui

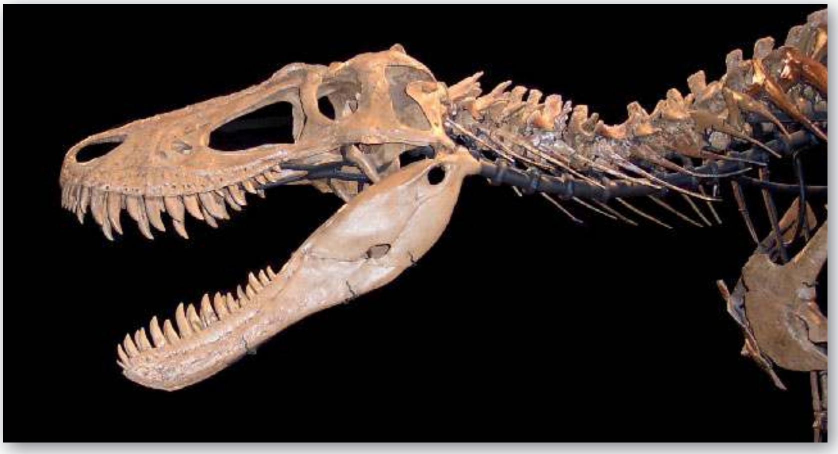
$$e^{-\alpha t_d} = \frac{1}{2} \rightarrow -\alpha t_d = -\ln 2$$

e quindi:

$$\alpha t_d = \ln 2.$$

La datazione radiometrica

Il carbonio 14, un elemento chimico radioattivo presente in tutte le sostanze organiche, viene utilizzato per datare gli oggetti di origine organica: resti umani o animali, legno, tessuti.
Si misura la quantità di carbonio 14 e, conoscendo il suo tempo di dimezzamento (5730 anni), si stima quando l'organismo è morto e quindi il carbonio 14 ha iniziato a decadere. In questo modo si scopre l'epoca alla quale risale il reperto in esame.



LABORATORIO DI MATEMATICA
LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI CON DERIVE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Determiniamo e tracciamo i grafici dei tre integrali dell'equazione differenziale:

$y' - \frac{1}{x}y = \frac{3}{x^3}$, soddisfacenti alle condizioni iniziali: $y(1) = -2$, $y(1) = -1$ e $y(1) = 0$.

#1: $\text{LINEAR1}\left(-\frac{1}{x}, \frac{3}{x^3}, x, y, 1, -2\right)$

#2: $y = -\frac{x^3 + 1}{x^2}$

#3: $\text{LINEAR1}\left(-\frac{1}{x}, \frac{3}{x^3}, x, y, 1, -1\right)$

#4: $y = -\frac{1}{x^2}$

#5: $\text{LINEAR1}\left(-\frac{1}{x}, \frac{3}{x^3}, x, y, 1, 0\right)$

#6: $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

▲ Figura 1

#7: $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

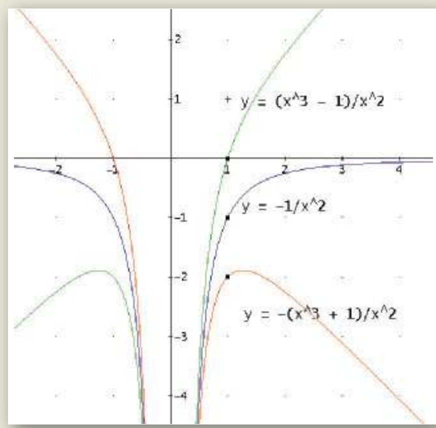
▲ Figura 2

- Attiviamo Derive e scriviamo il nome della funzione utile per risolvere le equazioni differenziali lineari del primo ordine, seguito dagli argomenti relativi al nostro primo caso:

Linear1(− 1/x, 3/x^3, x, y, 1, − 2)

(Per trovare le indicazioni d'uso di *Linear*1, facciamo clic sul menu ? (*Help*) e apriamo il capitolo *Equazioni differenziali* della *Guida in linea*.)
- Con INVIO la inseriamo nell'etichetta #1 (figura 1) e la facciamo operare con *Semplifica_Base* ottenendo in #2 il primo integrale.
- Operiamo allo stesso modo per gli altri due integrali.

- Inseriamo nella zona algebrica una matrice con le coordinate dei punti condizioni iniziali (figura 2).
- Passiamo, quindi, alcune volte dall'ambiente algebrico a quello grafico, dove tracciamo i grafici degli integrali particolari trovati, reppresentiamo i punti condizioni iniziali e scriviamo alcune didascalie (figura 3).



▲ Figura 3

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 14 esercitazioni in più

Esercitazione

1 Per la seguente equazione differenziale con il computer:
- determina i tre integrali particolari aventi le caratteristiche indicate;
- rappresentali in un grafico, dove evidenzierai le condizioni imposte.

$y' + y^2 = 0$,

a) passante per $P(2; 1)$;
b) avente come asintoto l'asse y;
c) formante con i semiassi cartesiani positivi e la retta di equazione $x = 2e - 2$ una superficie di area 1.

$\left[\text{a) } y = \frac{1}{x-1}; \text{ b) } y = \frac{1}{x}; \text{ c) } y = \frac{1}{x+2}\right]$

LA TEORIA IN SINTESI

LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1. LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

- **Equazione differenziale**: è un'equazione che ha per incognita una funzione $y = f(x)$ e che stabilisce una relazione fra la variabile indipendente x, la funzione y e almeno una delle sue derivate (y', y'', ...), cioè è un'equazione del tipo $F(x; y; y'; \ldots; y^{(n)}; \ldots) = 0$.
- **Soluzione** o **integrale**: ogni funzione che verifica l'equazione; il grafico della soluzione è detto **curva integrale**. Risolvere un'equazione differenziale significa determinare tutte le sue soluzioni.
- **Integrale generale**: l'insieme di tutte le soluzioni di un'equazione differenziale.
- **Ordine di un'equazione differenziale**: è l'ordine massimo delle derivate che compaiono nell'equazione.
- **Equazione differenziale del primo ordine**: è riconducibile alla forma $F(x; y; y') = 0$.
- **Forma normale**: forma che assume un'equazione differenziale del primo ordine se è esplicitata rispetto alla derivata prima della funzione incognita y.
- **Integrale generale di un'equazione del primo ordine**: è una famiglia di funzioni $f(x; c)$ con c parametro reale.
- **Integrale particolare**: ogni soluzione ottenuta attribuendo a c un valore.
- **Problema di Cauchy**: data l'equazione del primo ordine $F(x; y; y') = 0$, consiste nella ricerca di una soluzione particolare $y = f(x)$ il cui grafico passi per un punto assegnato $(x_0; y_0)$, cioè che risolva il sistema:

$$\begin{cases} F(x; y; y') = 0 \\ y_0 = f(x_0) \qquad \textbf{condizione al contorno } \text{o } \textbf{iniziale}. \end{cases}$$

2. LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL TIPO $y' = f(x)$

- **Procedimento risolutivo**
  - Si isola y'.
  - Si integrano entrambi i membri rispetto alla variabile x: $\int y'\,dx = \int f(x)\,dx$.
  - L'integrale indefinito $\int f(x)\,dx$ è la soluzione generale dell'equazione.

3. LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI

- Equazione differenziale del primo ordine **a variabili separabili**: può essere scritta nella forma $y' = g(x) \cdot h(y)$, con $g(x)$ e $h(y)$ funzioni continue.
- **Metodo risolutivo**
  - Essendo $y' = \frac{dy}{dx}$, si ottiene $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$.
  - Si separano le variabili, supponendo $h(y) \neq 0$: $\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$.
  - Si integrano entrambi i membri, $\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx$, e si ricava y in funzione di x dall'uguaglianza fra le primitive trovate.
  - Si esaminano a parte i casi derivanti da $h(y) = 0$.

4. LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL PRIMO ORDINE

- Un'equazione differenziale del **primo ordine** si dice **lineare** quando può essere scritta nella forma $y' + a(x) \cdot y = b(x)$, dove $a(x)$ e $b(x)$ rappresentano funzioni note e continue in un opportuno intervallo.

- **Equazione lineare omogenea**: equazione lineare in cui $b(x) = 0$; essa è quindi a variabili separabili. La soluzione è $y = ke^{-\int a(x)dx}$, dove k è una costante reale.

- **Equazione lineare completa**: in questo caso $b(x) \neq 0$. Con il *metodo di Lagrange* o *della variazione delle costanti* si dimostra che la soluzione dell'equazione data è:

$$y = e^{-\int a(x)dx}\left[\int b(x)\, e^{\int a(x)dx} dx + c\right].$$

5. LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

- **Equazione differenziale del secondo ordine**: è riconducibile alla forma $F(x; y; y'; y'') = 0$.

- L'**integrale generale** di un'equazione differenziale del secondo ordine è una famiglia di funzioni $y = f(x; c_1; c_2)$ nella variabile x, con c_1 e c_2 parametri reali.

  Una **soluzione particolare** si ottiene attribuendo a c_1 e c_2 determinati valori. Per trovare un integrale particolare occorre dare due condizioni.

- **Equazione differenziale lineare a coefficienti costanti**: è un'equazione differenziale del secondo ordine riducibile alla forma $y'' + by' + cy = r(x)$, dove b e c sono numeri reali e $r(x)$ una funzione continua in un opportuno intervallo.
  Un'equazione differenziale di questo tipo si dice: **omogenea** se $r(x) = 0$ in tutti i punti dell'intervallo in cui è definita; **completa** se $r(x) \neq 0$ in qualche punto dell'intervallo.

- **Risoluzione delle equazioni differenziali del secondo ordine lineari a coefficienti costanti**

  • **Equazioni omogenee**: $y'' + by' + cy = 0$.
  I) Si trovano le radici (reali o complesse) dell'equazione caratteristica $z^2 + bz + c = 0$.
  II) Si determina l'integrale generale dell'equazione differenziale secondo lo schema seguente.

Radici dell'equazione caratteristica		Integrale generale
$\Delta > 0 \rightarrow z_1 \neq z_2$	(reali distinte)	$y = c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x}$
$\Delta = 0 \rightarrow z_1 = z_2$	(reali coincidenti)	$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{z_1 x}$
$\Delta < 0 \rightarrow z_{1,2} = \alpha + i\beta$	(complesse coniugate)	$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$

  • **Equazioni complete**: $y'' + by' + cy = r(x)$.
  Si dimostra che l'integrale generale di un'equazione differenziale di questo tipo è:
  $y = y_1 + y_0$, dove $y_1 = f(x; c_1; c_2)$ è l'integrale *generale* dell'*omogenea* associata,
  $y_0 = g(x)$ è un integrale *particolare* dell'*equazione data*.

  Se $c = 0$ e $b = 0$ → si determina direttamente la *soluzione generale* mediante due integrazioni successive.

1. LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

Teoria a pag. 2088

1 Riconosci, fra le seguenti equazioni, quelle differenziali, indicandone l'ordine.

a) $y' = 3$; c) $y' = 2x + 3y - 1$; e) $x^2 + 3x + 2 = 0$; g) $x + y' - 2 = 0$;
b) $y - 3x^2 + 2 = y'$; d) $y' + e^x = -1$; f) $x^2 + y^2 = 1$; h) $y''' + y'' - y' = x$.

Verifica se le seguenti funzioni sono soluzioni delle equazioni differenziali scritte a fianco.

2 $y = 2x^2 - 3x + 1$, $\quad y' - 4x + 3 = 0$.

3 $y = x^4 - x^2 + 1$, $\quad y'' - 12x^2 + 2 = 0$.

4 $y = x^3 - x + 2$, $\quad y' + y + x - 1 = 0$.

5 $y = \cos x$, $\quad y'' + \cos x = 0$.

6 $y = x + \ln x$, $\quad y' \cdot x - x - 1 = 0$.

7 $y = x \cdot \ln x$, $\quad y' - y - 1 = 0$.

8 $y = \operatorname{sen} x - 2$, $\quad y' + y - (\cos x + \operatorname{sen} x) + 2 = 0$.

9 $y = x^2 - 1$, $\quad 3y' - y'' + y - x^2 + 3 - 6x = 0$.

10 Data la funzione $y = 6x^2 - 2x$, determina quale valore occorre assegnare a k affinché la funzione sia soluzione dell'equazione differenziale $y' - 2y'' + y - 6x^2 - 10x + k = 0$. $[k = 26]$

11 Given the equation $4y'' + 3y' - y = 0$ and its solution $y = e^{\lambda t}$, what are the values of λ?

(USA *Rice University Mathematics Tournament*, 2006)

12 Show that the function

$$y = ae^x + be^{-2x} + ce^{3x}$$

satisfies the (differential) equation

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

for all values of the constants a, b and c.

(CAN *University of New Brunswick*, Final Exam, 1997)

13 **TEST** Stabilisci quale delle seguenti funzioni è la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x+2}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

A $y = x + \ln x^2 + 2$.
B $y = x^2 + \ln|x| + 1$.
C $y = x + \ln|x| + 1$.
D $y = x + \ln x^2 + 1$.
E $y = x + \ln|x^2| + 1$.

14 **TEST** Determina quale delle seguenti funzioni è la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -y \operatorname{tg} x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

A $y = \operatorname{sen} x + 2$.
B $y = 2\cos x$.
C $y = \cos x + 1$.
D $y = 2 - \operatorname{sen} x$.
E $y = \cos x$.

15 **TEST** Il valore di A tale che $y = Axe^x$ soddisfi $\dfrac{dy}{dx} - y = 4e^x$ è:

A 1. B 2. C 4. D 5. E nessuno di questi.

(USA *University of Central Arkansas Regional Math Contest*, 2008)

2. LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL TIPO $y' = f(x)$

▶ Teoria a pag. 2089

16 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo l'equazione differenziale $2y' - \text{sen}\, x - 1 = 0$.

Isoliamo y':

$$2y' = \text{sen}\, x + 1 \rightarrow y' = \frac{\text{sen}\, x + 1}{2}.$$

Integriamo entrambi i membri rispetto alla variabile x:

$$\int y'\, dx = \int \frac{\text{sen}\, x + 1}{2} dx$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \int (\text{sen}\, x + 1)\, dx = \frac{1}{2}(-\cos x + x) + c = \frac{x - \cos x}{2} + c, \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è $y = \dfrac{x - \cos x}{2} + c$.

Risolvi le seguenti equazioni differenziali del tipo $y' = f(x)$.

17 $y' - 3x^2 - 2x + 1 = 0$ $\quad \left[y = x^3 + x^2 - x + c\right]$

18 $y' - x^2 + x - 2 = 0$ $\quad \left[y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + 2x + c\right]$

19 $y' - 4x + \cos x = 0$ $\quad \left[y = 2x^2 - \text{sen}\, x + c\right]$

20 $3y' - 2x^2 - 2\cos x = 0$ $\quad \left[y = \dfrac{2x^3}{9} + \dfrac{2\,\text{sen}\, x}{3} + c\right]$

21 $2y' + 1 = \dfrac{1}{x}$ $\quad \left[y = \ln\sqrt{|x|} - \dfrac{x}{2} + c\right]$

22 $\sqrt{x} + y' - x = 2$ $\quad \left[y = -\dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2} + 2x + c\right]$

23 $x = \dfrac{1}{x^2} + 4y'$ $\quad \left[y = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{1}{4x} + c\right]$

24 $(1 + x^2)y' = 1$ $\quad \left[y = \text{arctg}\, x + c\right]$

25 $\text{tg}^2 x - y' = 0$ $\quad \left[y = \text{tg}\, x - x + c\right]$

26 $x\,\text{sen}\, x + 1 - y' = 0$ $\quad \left[y = \text{sen}\, x - x\cos x + x + c\right]$

Cerchiamo un integrale particolare

27 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo la soluzione particolare dell'equazione differenziale $y' = \dfrac{x+1}{x}$, che soddisfa la condizione iniziale $y(1) = 2$.

- Risolviamo l'equazione differenziale data integrando entrambi i membri rispetto alla variabile x:

$$\int y'\, dx = \int \frac{x+1}{x} dx$$

$$y = \int \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right) dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = x + \ln|x| + c, \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

L'integrale generale è $y = x + \ln|x| + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

▶▶

- Imponiamo nell'integrale generale $y = x + \ln|x| + c$ la condizione $y(1) = 2$, sostituendo alla y il valore 2 e alla x il valore 1.

$$2 = 1 + \ln 1 + c \quad \rightarrow \quad 2 = 1 + c \quad \rightarrow \quad c = 1.$$

La soluzione particolare cercata è: $y = x + \ln|x| + 1$.

Determina la soluzione particolare di ognuna delle seguenti equazioni differenziali, verificanti la condizione iniziale posta a fianco di ciascuna.

28 $y' = x + \cos x - 1$, $\quad y(0) = 2$. $\left[y = \dfrac{x^2}{2} + \operatorname{sen} x - x + 2\right]$

29 $y' = (2x - 1)e^{x^2 - x} + 1$, $\quad y(1) = 0$. $\left[y = e^{x^2 - x} + x - 2\right]$

30 $y' - 3x^2 + 2x - 1 = 0$, $\quad y(0) = 3$. $\left[y = x^3 - x^2 + x + 3\right]$

31 $x^2y' - x + 1 = 0$, $\quad y(1) = 2$. $\left[y = \ln|x| + \dfrac{1}{x} + 1\right]$

32 $y' = -x \operatorname{sen} x + \cos x + 1$, $\quad y(0) = 1$. $\left[y = x\cos x + x + 1\right]$

33 $(x^2 + 1)y' = 2x$, $\quad y(0) = 3$. $\left[y = \ln(x^2 + 1) + 3\right]$

34 $(x + 1)y' = x + 2$, $\quad y(-2) = -1$. $\left[y = x + \ln|x + 1| + 1\right]$

35 $y' = \dfrac{2x + 3}{x^2 + 3x + 2}$, $\quad y(0) = \ln 2$. $\left[y = \ln|x^2 + 3x + 2|\right]$

36 $e^x y' - x = 0$, $\quad y(1) = \dfrac{1}{e}$. $\left[y = -\dfrac{x + 1}{e^x} + \dfrac{3}{e}\right]$

37 Determina la curva integrale dell'equazione differenziale $4y' = 12x^2 - 1$ che passa per il punto $P\left(1; \dfrac{3}{4}\right)$ e traccia il suo grafico. $\left[y = x^3 - \dfrac{1}{4}x\right]$

38 Traccia il grafico della curva integrale dell'equazione differenziale $(x - 1)y' = 2$ che passa per $P(2; 2)$. $\left[y = 2\ln|x - 1| + 2\right]$

39 **TEST** Trova la soluzione particolare dell'equazione $f'(x) = 4x^{-\frac{1}{2}}$ che soddisfi la condizione $f(1) = 12$.

A $8\sqrt{x} + c$. B $2\sqrt{x} + 10$. C $\dfrac{1}{2}\sqrt{4x} + 11$. D $8\sqrt{x} + 4$. E Nessuno di questi.

(USA *Arkansas Council of Teachers of Mathematics*, *State Mathematics Contest*, 2003)

3. LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI

Teoria a pag. 2090

IN PRATICA
Videolezione 82

Riconosci fra le seguenti equazioni differenziali quelle a variabili separabili.

40 a) $y' = 2y - 4x$; b) $xy' = 6x + y$; c) $e^x y' - x = xy$.

41 a) $y' = e^{x-y}$; b) $y' = \operatorname{sen} x - \cos y$; c) $y = 2y'(x - 1) + \dfrac{4}{y}$.

42 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo l'equazione differenziale $y' = (4x + 1)y$.

L'equazione è a variabili separabili; infatti essendo $y' = \frac{dy}{dx}$, otteniamo:

$$\frac{dy}{dx} = (4x+1)y \quad \rightarrow \quad dy = (4x+1)y\,dx.$$

- **Se $y \neq 0$**, dividiamo per y:

$$\frac{dy}{y} = (4x+1)\,dx.$$

Integriamo entrambi i membri:

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int (4x+1)\,dx \quad \rightarrow \quad \ln|y| = \frac{\cancelto{2}{4}x^2}{\cancel{2}} + x + c.$$

Ricaviamo y in funzione di x:

$$|y| = e^{2x^2+x+c} \quad \rightarrow \quad y = \pm e^{2x^2+x+c}.$$

- **Se $y = 0$**, anche $y' = 0$. Nell'equazione iniziale verifichiamo che $y = 0$ è una soluzione.
- **In sintesi**, le soluzioni dell'equazione data sono:

$$y = \pm e^{2x^2+x+c} \vee y = 0.$$

Per scrivere le soluzioni in forma più compatta, notiamo che, per la prima proprietà delle potenze:

$$y = \pm e^{2x^2+x+c} \quad \rightarrow \quad y = \pm e^{c} \cdot e^{2x^2+x}.$$

Posto $\pm e^c = k$, con $k \neq 0$, abbiamo:

$$y = ke^{2x^2+x}.$$

Notiamo che, anche per $k = 0$, la funzione ha significato ed è proprio la soluzione $y = 0$.
Quindi tutte le soluzioni dell'equazione data si ottengono da:

$$y = ke^{2x^2+x}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

Risolvi le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.

43 $3y^2y' = x + 1$ $\left[y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2} + x + c}\right]$

44 $yy' - 3x^2 = 2$ $\left[y = \pm\sqrt{2x^3 + 4x + c}\right]$

45 $\operatorname{sen} x + 3yy' - 2 = 0$ $\left[y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}(2x + \cos x) + c}\right]$

46 $\sqrt{x}\,yy' + \frac{1}{x} = 2$ $\left[y = \pm\sqrt{\frac{8x+4}{\sqrt{x}} + c}\right]$

47 $y' = \frac{y^3}{1 + x^2}$ $\left[y = \pm\frac{1}{\sqrt{c - 2\operatorname{arctg} x}} \vee y = 0\right]$

48 $\frac{y'}{x} = 1 + y^2$ $\left[y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)\right]$

49 $y' = \frac{1}{y^2(x^2 + 4)}$ $\left[y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c}\right]$

50 $y' = \frac{y}{x^2 - 2x + 1}$ $\left[y = ce^{\frac{-1}{x-1}}\right]$

51 $y' = \frac{1}{y\sqrt{1 - x^2}}$ $\left[y = \pm\sqrt{2\operatorname{arcsen} x + c}\right]$

52 $y' = \frac{\cos x}{\cos y}$ $[y = \operatorname{arcsen}(c + \operatorname{sen} x)]$

53 $y' + x\operatorname{tg} y = 0$ $\left[y = \operatorname{arcsen}\left(ce^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right]$

54 $y' + y\operatorname{tg} x = 0$ $[y = c\cos x]$

55 $y' - xy + 4x = 0$ $\left[y = ce^{\frac{x^2}{2}} + 4\right]$

56 $yx - x = 2y'$ $\left[y = 1 + c \cdot e^{\frac{x^2}{4}}\right]$

57 $2(1+x)yy' = 1$ $\quad\left[y = \pm\sqrt{\ln|1+x|+c}\right]$

58 $2yy' - y^2x - 2x = 0$ $\quad\left[y = \pm\sqrt{e^{\frac{x^2}{2}+c} - 2}\right]$

59 $3y' - (x-1)y = 0$ $\quad\left[y = c \cdot e^{\frac{x^2}{6} - \frac{x}{3}}\right]$

60 $yy' - e^{-y^2} x \cos x = 0$ $\quad\left[y = \pm\sqrt{\ln(2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + c)}\right]$

61 $(1+e^x)yy' = e^x$ $\quad\left[y = \pm\sqrt{\ln[(e^x+1)^2]+c}\right]$

62 $y' = \dfrac{y}{x^2-4}$ $\quad\left[y = c\sqrt[4]{\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|}\right]$

63 $y' = \dfrac{y \ln y}{x}$ $\quad[y = e^{cx}]$

64 $\sqrt{y+3} - y' = 0$ $\quad\left[y = -3 + \left(\dfrac{x+c}{2}\right)^2 \vee y = -3\right]$

65 $y' = e^{-x+y}$ $\quad\left[y = \ln\dfrac{e^x}{1+ce^x}\right]$

66 $y' \cos y = (x+1)\operatorname{sen} y$ $\quad\left[y = \operatorname{arcsen}\left(ce^{\frac{x^2}{2}+x}\right)\right]$

Cerchiamo un integrale particolare

67 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo la soluzione dell'equazione differenziale $y' - \dfrac{2x-1}{y} = 0$ relativa alla condizione $y(1) = 1$.

Troviamo le soluzioni dell'equazione differenziale. Isoliamo y':

$$y' = \frac{2x-1}{y}.$$

L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{y} \rightarrow y\,dy = (2x-1)\,dx \rightarrow \int y\,dy = \int(2x-1)\,dx \rightarrow \frac{y^2}{2} = x^2 - x + c' \rightarrow$$

$$\rightarrow y^2 = 2x^2 - 2x + c \rightarrow y = \pm\sqrt{2x^2 - 2x + c}.$$

Poiché la soluzione deve soddisfare la condizione $y(1) = 1$, la y deve essere positiva, quindi consideriamo soltanto:

$$y = \sqrt{2x^2 - 2x + c}.$$

Determiniamo c, ponendo nell'equazione trovata $x = 1$ e $y = 1$:

$$1 = \sqrt{2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + c} \rightarrow \sqrt{c} = 1 \rightarrow c = 1.$$

La soluzione particolare cercata è: $y = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$.

Determina la soluzione particolare di ognuna delle seguenti equazioni differenziali relativa alla condizione posta a fianco di ciascuna.

68 $y \cdot y' - \cos x + \operatorname{sen} x = 0, \quad y(\pi) = -2.$ $\quad\left[y = -\sqrt{2\operatorname{sen} x + 2\cos x + 6}\right]$

69 $e^x y^2 - y' = 0, \quad y(0) = -\dfrac{1}{3}.$ $\quad\left[y = -\dfrac{1}{e^x+2}\right]$

70 $y' = \dfrac{2x+1}{e^y}, \quad y(1) = 0.$ $\quad[y = \ln(x^2+x-1)]$

71 $y' = \dfrac{2x+1}{3y^2}, \quad y(0) = 1.$ $\quad\left[y = \sqrt[3]{x^2+x+1}\right]$

72 $y' = \dfrac{1}{2y(x^2+1)}$, $y(1) = 0$. $\left[y = \pm\sqrt{\operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{4}}\right]$

73 $y' = e^{x-y}$, $y(0) = 0$. $[y = x]$

74 $y' = \dfrac{x\cos x}{3y^2}$, $y(0) = 2$. $\left[y = \sqrt[3]{\cos x + x \operatorname{sen} x + 7}\right]$

75 $y' = \dfrac{y^2+1}{x^2}$, $y(-1) = 0$. $\left[y = -\operatorname{tg}\dfrac{x+1}{x}\right]$

76 $(x+1)\sqrt{y+1} - y' = 0$, $y(0) = 3$. $\left[y = \dfrac{x^4 + 4x^3 + 20x^2 + 32x + 48}{16}\right]$

77 Solve the initial value problem:

$$xy\frac{dy}{dx} = \ln x, \quad y(1) = 2.$$

(CAN *University of New Brunswick,* Final Exam, 2001)

78 Find $y(x)$ if $\dfrac{dy}{dx} = y + 2xy$ and $y(0) = 3$.

(CAN *University of New Brunswick,* Final Exam, 1998)

4. LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL PRIMO ORDINE

▶ Teoria a pag. 2093

IN PRATICA ▶ Videolezione 83

Le equazioni differenziali lineari

79 Riconosci fra le seguenti equazioni differenziali quelle lineari del primo ordine.

a) $y' + xy - 4 = 0$; c) $y' + x = y^2$; e) $y'x^2 + xy + 2 = 0$; g) $2x^3 + x^2y' + xy = 0$;
b) $y' + x^2 = y$; d) $y' + ye^x = y$; f) $yx^2 + (y')^2 = 1$; h) $y' + xy^2 - y = 0$.

80 ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione differenziale $y' + 2xy - 2x = 0$.

Osserviamo che l'equazione è lineare, perché possiamo scriverla nella forma $y' + a(x)\cdot y = b(x)$:

$$y' + 2xy = 2x.$$

Deduciamo che $a(x) = 2x$ e $b(x) = 2x$.

Utilizziamo la formula risolutiva $y = e^{-\int a(x)dx}\cdot\left[\int e^{\int a(x)dx}\cdot b(x)\,dx + c\right]$ in cui:

$$\int a(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2; \qquad e^{-\int a(x)dx} = e^{-x^2}; \qquad e^{\int a(x)dx} = e^{x^2}; \qquad \int e^{\int a(x)dx}\cdot b(x)\,dx = \int (e^{x^2}\cdot 2x)\,dx.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale per sostituzione ponendo $t = x^2$, da cui $dt = 2x\,dx$:

$$\int (e^{x^2}\cdot 2x)\,dx = \int e^t\,dt = e^t = e^{x^2} \quad\to\quad \int e^{\int a(x)dx}\cdot b(x)\,dx = e^{x^2}.$$

Sostituiamo nella formula e otteniamo le soluzioni dell'equazione:

$$y = e^{-x^2}\cdot(e^{x^2} + c) = 1 + \frac{c}{e^{x^2}} \quad\to\quad y = 1 + \frac{c}{e^{x^2}}.$$

Risolvi le seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine.

81 $y' + 3y - 1 = 0$ $\left[y = \frac{1}{3} + \frac{c}{e^{3x}}\right]$

82 $y' + 2y - x = 0$ $\left[y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{c}{e^{2x}}\right]$

83 $y' - y = 2x$ $\left[y = ce^x - 2(x+1)\right]$

84 $y' + \frac{y}{x} = 7x\sqrt{x}$ $\left[y = 2x^2\sqrt{x} + \frac{c}{x}\right]$

85 $y' + \frac{y}{x+1} = \sqrt{x}$ $\left[y = \frac{1}{x+1}\left(\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c\right)\right]$

86 $y' + xy - x = 0$ $\left[y = 1 + \frac{c}{e^{\frac{x^2}{2}}}\right]$

87 $y' + 3x^2y = x^2$ $\left[y = \frac{1}{3} + \frac{c}{e^{x^3}}\right]$

88 $y' + y = e^{-x}$ $\left[y = \frac{x+c}{e^x}\right]$

89 $xy' + y = x\ln x$ $\left[y = \frac{x}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + \frac{c}{x}\right]$

90 $y' + y\cos x = \cos x$ $\left[y = 1 + \frac{c}{e^{\operatorname{sen} x}}\right]$

91 $y' - e^{x^2} = 2xy$ $\left[y = e^{x^2}(x+c)\right]$

92 $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = x$ $\left[y = x\,\mathrm{tg}\,x + 1 + \frac{c}{\cos x}\right]$

93 $y' + \frac{2xy}{x^2+1} = 2x$ $\left[y = \frac{x^4 + 2x^2 + c}{2(x^2+1)}\right]$

94 $y' + \frac{2xy}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$ $\left[y = \frac{x^2+c}{2(x^2+1)}\right]$

95 $y' + 2xy = x^3$ $\left[y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + \frac{c}{e^{x^2}}\right]$

96 $xy' + y = x$ $\left[y = \frac{x^2+c}{2x}\right]$

97 $y' + \frac{2y + xy}{x} = e^x$ $\left[y = \frac{e^x(2x^2 - 2x + 1)}{4x^2} + \frac{ce^{-x}}{x^2}\right]$

98 $y' + \frac{y}{x} = \frac{x}{x^2+4}$ $\left[y = \frac{x - 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c}{x}\right]$

99 Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'(x) = \frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}}\,y(x)$.

(*Università di Firenze, Corso di laurea in Chimica, Prova di Matematica Generale*, 2008)

$\left[y(x) = c\sqrt[3]{1 + e^{3x}}\right]$

ESERCIZI VARI Le equazioni differenziali del primo ordine

100 **TEST** Se $y = y(x)$ è la soluzione del problema $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$, allora $y(1) =$

A $\sqrt{e}$.

B $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

C e^2.

D e^{-2}.

(*Università di Trento, Facoltà di Ingegneria, Test di analisi*, 2004)

101 **TEST** Le soluzioni di $2xy\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$ sono date da:

A $3y^2 = cx(3 + y^3)$.

B $1 + y^2 = cx$.

C $1 + y^2 = cx^2$.

D $3y^2 = cx(3 + x^3)$.

E nessuna delle precedenti.

(USA *University of Central Arkansas Regional Math Contest*, 2009)

Risolvi le seguenti equazioni differenziali.

102 $y' + x = e^x - 1$ $\left[y = e^x - \frac{x^2}{2} - x + c\right]$

103 $y' = \frac{2xy^2 + y^2}{x^2 + x}$ $\left[y = -\frac{1}{\ln|x^2 + x| + c} \vee y = 0\right]$

104 $x^3 y' - 2x - 1 = 0$ $\left[y = -\frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x} + c\right]$

105 $y' + \frac{2xy}{x^2 + 2} - 4x = 0$ $\left[y = \frac{x^4 + 4x^2 + c}{x^2 + 2}\right]$

106 $y' = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{y}$ $\left[y = \pm\sqrt{\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1 - x^2} + c}\right]$

107 $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^3 + x}$ $\left[y = \frac{\operatorname{arctg} x + c}{x}\right]$

Determina la soluzione particolare di ognuna delle seguenti equazioni differenziali, verificanti la condizione posta a fianco di ciascuna.

108 $y' + y - 3x = 0,$ $y(1) = 1.$ $[y = 3x - 3 + e^{1-x}]$

109 $y' + \frac{y}{x} = 1,$ $y(1) = 0.$ $\left[y = \frac{x^2 - 1}{2x}\right]$

110 $y' + xy - 2x = 0,$ $y(0) = -1.$ $\left[y = 2 - 3e^{-\frac{x^2}{2}}\right]$

111 $y' - \frac{y}{x} = 2x,$ $y(-1) = -1.$ $[y = 2x^2 + 3x]$

112 $y' - 2xy = e^{x^2},$ $y(0) = 2.$ $[y = (x + 2)e^{x^2}]$

113 $y' = x^2 y,$ $y(0) = 1.$ $\left[y = e^{\frac{x^3}{3}}\right]$

114 $y' + xy = xy^2,$ $y(0) = 1.$ $[y = 1]$

115 $xy' = y + 1,$ $y(1) = 1.$ $[y = 2x - 1]$

116 $y' - y\operatorname{tg} x = 1,$ $y(\pi) = 0.$ $[y = \operatorname{tg} x]$

117 $y' - 2y = e^{-2x},$ $y(0) = -\frac{1}{4}.$ $\left[y = -\frac{e^{-2x}}{4}\right]$

118 $y' - y = 2y^2,$ $y(0) = 1.$ $\left[y = \frac{1}{3e^{-x} - 2}\right]$

119 $y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2 + x},$ $y(1) = 1.$ $\left[y = e^{-x}\left(\ln\left|\frac{2x}{x + 1}\right| + e\right)\right]$

120 $y' + 2xy = \frac{x}{y},$ $y(0) = 1.$ $\left[y = \sqrt{\frac{1 + e^{-2x^2}}{2}}\right]$

121 $y' + x\ln x = 0,$ $y(1) = \frac{1}{2}.$ $\left[y = -\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\right]$

122 $y' \cos^2 x = y \ln y,$ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^e.$ $\left[y = e^{e^{\operatorname{tg} x}}\right]$

123 Data l'equazione differenziale $y'(x) = y(x) + \operatorname{sen} x$, determinare la soluzione generale e la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$.

(*Università di Firenze, Corso di laurea in Chimica, Prova di Matematica Generale*, 2007)

$\left[y = ce^x - \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x);\ c = \frac{3}{2}\right]$

124 Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t-1}{t}x(t) + 1 \\ x(-3) = -4 \end{cases}$$

(*Università di Torino, Facoltà di Ingegneria, Test di Analisi*, 2002)

$\left[x = -\frac{1}{t}e^t\left[(1+t)e^{-t} - 10e^3\right]\right]$

125 Supponi che y sia una funzione di x che soddisfa:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x^2}, \text{ e } y = 0 \text{ in } x = \frac{2}{\pi}.$$

Qual è il valore di y *in* $x = \frac{3}{\pi}$?

(USA *Youngstown State University*, *Calculus Competition*, 2007)

$\left[\frac{1}{2}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni differenziali e rappresenta le curve integrali assegnando alla costante il valore scritto a fianco.

126 $x^2y' - x^2 - 1 = 0, \quad c = 1.$ $\left[y = x - \frac{1}{x} + 1\right]$

127 $y' = \frac{x+1}{y}$, con $y > 0, \quad c = 0.$ $\left[y = \sqrt{x^2 + 2x}\right]$

Risolvi i seguenti problemi.

128 Determina e rappresenta la soluzione particolare dell'equazione differenziale $y' + y = -x^2$ che ha un massimo nel punto di ascissa $x = 1$. $[y = -x^2 + 2x - 2]$

129 Traccia il grafico della funzione che ha un massimo nel punto di ascissa $x = 0$ ed è soluzione dell'equazione differenziale $y' + y = e^{-x}$. $[y = (x+1)e^{-x}]$

130 Rappresenta la funzione che è soluzione dell'equazione differenziale $y' - \frac{y}{x} = 2x^2$ e il cui grafico ha per tangente nel punto di ascissa $x = 1$ la retta di equazione $y = 2x - 2$. $[y = x^3 - x]$

131 Rappresenta il grafico della funzione che ha un massimo nel punto di ascissa $x = -2$ ed è soluzione dell'equazione differenziale $xy' - y = x^3$. $\left[y = \frac{x^3}{2} - 6x\right]$

132 Determina l'equazione della curva integrale dell'equazione $y' = \frac{2xy}{x^2-1}$ che passa per il punto $(0; 2)$ e rappresentala graficamente. $[y = -2x^2 + 2]$

133 Come nell'esercizio precedente, ma con l'equazione $\frac{y'}{x+1} + 2y^2 = 0$ e il punto $(0; 1)$. $\left[y = \frac{1}{(x+1)^2}\right]$

134 Verifica che tutte le curve integrali dell'equazione $y'(x^2 - x - 6) = 5y$ passano per uno stesso punto. $[(3; 0)]$

135 Determina l'equazione della curva integrale dell'equazione $2xy' = y(y-4)$ che passa per il punto $\left(1; \frac{16}{3}\right)$.

$\left[y = \frac{16}{4 - x^2}\right]$

5. LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

▶ Teoria a pag. 2095

IN PRATICA
▶ Videolezione 84

136 Fra le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine, riconosci quelle lineari, omogenee e con i coefficienti costanti.

a) $y'' + y' - xy = 0$; c) $y' + 2x = y'' + y$; e) $y'' + y + 2y' = 0$; g) $1 - y' + y - y'' = 0$;
b) $y'' + 2y = y'$; d) $2y' + y'' = y^3$; f) $y' + y'' = 2y' - y$; h) $y' + xy - y'' = 0$.

Le equazioni differenziali del secondo ordine lineari omogenee a coefficienti costanti

Il caso $\Delta > 0$

137 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo l'equazione differenziale $y'' - 2y' - 3y = 0$.

L'equazione caratteristica dell'equazione differenziale è:

$$z^2 - 2z - 3 = 0. \qquad \frac{\Delta}{4} = 4 > 0. \qquad \text{Soluzioni reali distinte: } z_1 = -1,\ z_2 = 3.$$

Poiché le soluzioni di un'equazione differenziale del secondo ordine lineare omogenea a coefficienti costanti, nel caso di $\Delta > 0$, sono date da $y = c_1 \cdot e^{z_1 x} + c_2 \cdot e^{z_2 x}$, le soluzioni dell'equazione iniziale sono:

$$y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{3x}.$$

Risolvi le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine lineari omogenee a coefficienti costanti.

138 $y'' - 6y' + 5y = 0$ $\quad [y = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{5x}]$

139 $y'' - 4y = 0$ $\quad [y = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{2x}]$

140 $y'' - 25y = 0$ $\quad [y = c_1 \cdot e^{-5x} + c_2 \cdot e^{5x}]$

141 $y'' - 5y = 0$ $\quad [y = c_1 \cdot e^{-\sqrt{5}x} + c_2 \cdot e^{\sqrt{5}x}]$

142 $2y'' + 3y' - 2y = 0$ $\quad \left[y = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{\frac{x}{2}}\right]$

143 $y'' - 6y' = 0$ $\quad [y = c_1 + c_2 \cdot e^{6x}]$

144 $6y'' + y' - y = 0$ $\quad \left[y = c_1 \cdot e^{\frac{x}{3}} + c_2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}\right]$

Il caso $\Delta = 0$

145 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo l'equazione differenziale $y'' + 4y' + 4y = 0$.

L'equazione caratteristica dell'equazione differenziale è:

$$z^2 + 4z + 4 = 0. \qquad \frac{\Delta}{4} = 0. \qquad \text{Soluzioni reali coincidenti: } z_1 = z_2 = -2.$$

Poiché le soluzioni di un'equazione differenziale del secondo ordine lineare omogenea a coefficienti costanti, nel caso di $\Delta = 0$, sono date da $y = e^{z_1 x}(c_1 + c_2 x)$, le soluzioni dell'equazione iniziale sono:

$$y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x).$$

Risolvi le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine lineari omogenee a coefficienti costanti.

146 $y'' - 4y' + 4y = 0$ $[y = e^{2x}(c_1 + c_2 x)]$

147 $y'' + 6y' + 9y = 0$ $[y = e^{-3x}(c_1 + c_2 x)]$

148 $y'' + 8y' + 16y = 0$ $[y = e^{-4x}(c_1 + c_2 x)]$

149 $9y'' - 6y' + y = 0$ $\left[y = e^{\frac{x}{3}}(c_1 + c_2 x)\right]$

150 $25y'' - 20y' + 4y = 0$ $\left[y = e^{\frac{2}{5}x}(c_1 + c_2 x)\right]$

151 $24y' - 9y = 16y''$ $\left[y = e^{\frac{3}{4}x}(c_1 + c_2 x)\right]$

152 $4y'' - 4y' + y = 0$ $\left[y = e^{\frac{x}{2}}(c_1 + c_2 x)\right]$

Il caso $\Delta < 0$

153 ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione differenziale $y'' - 2y' + 5y = 0$.

L'equazione caratteristica dell'equazione differenziale è:

$$z^2 - 2z + 5 = 0. \qquad \frac{\Delta}{4} = -4. \qquad \text{Soluzioni complesse coniugate: } z_{1,2} = 1 \pm 2i.$$

Le soluzioni di un'equazione differenziale del secondo ordine lineare omogenea a coefficienti costanti, nel caso di $\Delta < 0$, sono date da $y = e^{\alpha x}(c_1 \cdot \cos \beta x + c_2 \cdot \operatorname{sen} \beta x)$, dove α e β sono la parte reale e la parte immaginaria di una soluzione dell'equazione caratteristica; poiché $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, le soluzioni dell'equazione iniziale sono:

$$y = e^x(c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \operatorname{sen} 2x).$$

Risolvi le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine lineari omogenee a coefficienti costanti.

154 $y'' + 2y' + 2y = 0$ $[y = e^{-x}(c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \operatorname{sen} x)]$

155 $y'' - 2y' + 10y = 0$ $[y = e^{x}(c_1 \cdot \cos 3x + c_2 \cdot \operatorname{sen} 3x)]$

156 $y'' - 4y' + 8y = 0$ $[y = e^{2x}(c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \operatorname{sen} 2x)]$

157 $y'' + 16y = 0$ $[y = c_1 \cdot \cos 4x + c_2 \cdot \operatorname{sen} 4x]$

158 $y'' + 25y = 0$ $[y = c_1 \cdot \cos 5x + c_2 \cdot \operatorname{sen} 5x]$

159 $4y'' + 4y' + 2y = 0$ $\left[y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cdot \cos \frac{x}{2} + c_2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)\right]$

160 $9y'' - 12y' + 8y = 0$ $\left[y = e^{\frac{2}{3}x}\left(c_1 \cdot \cos \frac{2x}{3} + c_2 \cdot \operatorname{sen} \frac{2x}{3}\right)\right]$

Le equazioni differenziali del secondo ordine lineari complete a coefficienti costanti

Le equazioni differenziali del tipo $y'' = r(x)$

161 ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione differenziale $y'' = 6x + \operatorname{sen} x$.

Poiché nell'equazione differenziale non compaiono né y' né y, procediamo con una doppia integrazione.

Determiniamo la derivata prima della funzione y integrando:

$$y' = \int (6x + \operatorname{sen} x)\, dx = 3x^2 - \cos x + c_1.$$

Determiniamo la funzione y con un'ulteriore integrazione:

$$y = \int (3x^2 - \cos x + c_1)\, dx = x^3 - \operatorname{sen} x + c_1 x + c_2.$$

Risolvi le seguenti equazioni differenziali.

162 $y'' = 1$ $\left[y = \dfrac{x^2}{2} + c_1 x + c_2\right]$

163 $y'' = 6x + 2$ $[y = x^3 + x^2 + c_1 x + c_2]$

164 $y'' = x + \sqrt{x}$ $\left[y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{4x^2\sqrt{x}}{15} + c_1 x + c_2\right]$

165 $y'' = \operatorname{sen} x + \cos x$ $[y = -\operatorname{sen} x - \cos x + c_1 x + c_2]$

166 $y'' = e^x$ $[y = e^x + c_1 x + c_2]$

167 $y'' = \dfrac{1}{x}$ $[y = x \ln|x| + c_1 x + c_2]$

168 $y'' = \dfrac{1}{x^2}$ $[y = -\ln|x| + c_1 x + c_2]$

169 $x^4 y'' = x + 1$ $\left[y = \dfrac{1}{6x^2} + \dfrac{1}{2x} + c_1 x + c_2\right]$

170 $y'' = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ $[y = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{x^2 + 1} + c_1 x + c_2]$

171 $e^x y'' = x + 1$ $[y = e^{-x}(x + 3) + c_1 x + c_2]$

Cerchiamo un integrale particolare

172 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' - 15y = 0$, che soddisfa le condizioni: $y(0) = 5$, $y'(0) = 9$.

Troviamo tutte le soluzioni dell'equazione differenziale. La sua equazione caratteristica è:

$$z^2 - 2z - 15 = 0. \qquad \frac{\Delta}{4} = 16 > 0. \qquad \text{Soluzioni reali e distinte: } z_1 = -3,\ z_2 = 5.$$

Le soluzioni dell'equazione data sono: $y = c_1 \cdot e^{-3x} + c_2 \cdot e^{5x}$.
Determiniamo i valori delle costanti c_1 e c_2. Calcoliamo y':

$$y' = c_1 e^{-3x}(-3) + c_2 e^{5x}(5) = -3c_1 e^{-3x} + 5c_2 e^{5x}.$$

Affinché siano soddisfatte le condizioni date, occorre che le uguaglianze trovate siano soddisfatte per $x = 0$, $y = 5$ e $y' = 9$.

Impostiamo un sistema con le due uguaglianze trovate:

$$\begin{cases} y = c_1 \cdot e^{-3x} + c_2 \cdot e^{5x} \\ y' = -3c_1 \cdot e^{-3x} + 5c_2 \cdot e^{5x} \end{cases}$$

Sostituiamo nel sistema i valori $x = 0$, $y = 5$ e $y' = 9$:

$$\begin{cases} 5 = c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0 \\ 9 = -3c_1 e^0 + 5c_2 e^0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 = c_1 + c_2 \\ 9 = -3c_1 + 5c_2 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema nelle due incognite c_1 e c_2 per sostituzione:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 5 \\ -3c_1 + 5c_2 = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 5 - c_2 \\ -3(5 - c_2) + 5c_2 = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 5 - c_2 \\ -15 + 3c_2 + 5c_2 = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 5 - c_2 \\ 8c_2 = 9 + 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

La soluzione particolare cercata è la seguente: $y = 2e^{-3x} + 3e^{5x}$.

Determina le soluzioni particolari delle seguenti equazioni differenziali, verificanti le condizioni poste a fianco di ciascuna.

173 $y'' - 2y' - 3y = 0,\quad y(0) = -1,\quad y'(0) = -7.$ $[y = e^{-x} - 2e^{3x}]$

174 $y'' - 36y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 12.$ $[y = -e^{-6x} + e^{6x}]$

175 $y'' + y' = 0,\quad y(0) = 2e,\quad y'(0) = -e.$ $[y = e + e^{1-x}]$

176 $2y'' + 5y' + 2y = 0,\quad y(0) = -2,\quad y'(0) = 4.$ $[y = -2e^{-2x}]$

177 $y'' + 4y' + 4y = 0,\quad y(-1) = -3e^2,\quad y'(-1) = 10e^2.$ $[y = e^{-2x}(1 + 4x)]$

178 $y'' - 6y' + 9y = 0,\quad y(1) = -e^3,\quad y'(1) = -6e^3.$ $[y = e^{3x}(2 - 3x)]$

ESERCIZI VARI Le equazioni differenziali del secondo ordine

Risolvi le seguenti equazioni differenziali.

179 $y'' + 7y' = 0$ $[y = c_1 + c_2 \cdot e^{-7x}]$

180 $25y'' + 10y' + y = 0$ $\left[y = e^{-\frac{x}{5}}(c_1 + c_2 x)\right]$

181 $y'' + 2y = 0$ $[y = c_1 \cdot \cos\sqrt{2}\,x + c_2 \cdot \operatorname{sen}\sqrt{2}\,x]$

182 $y'' + 2y' - 3y = 0$ $[y = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{-3x}]$

183 $y'' + 9y' - 10y = 0$ $[y = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{-10x}]$

184 $9y'' + 12y' + 4y = 0$ $\left[y = e^{-\frac{2}{3}x}(c_1 + c_2 x)\right]$

185 $9y'' - 24y' + 16y = 0$ $\left[y = e^{\frac{4}{3}x}(c_1 + c_2 x)\right]$

186 $y'' + y' - 4y = 0$ $\left[y = c_1 \cdot e^{-\frac{(1+\sqrt{17})x}{2}} + c_2 \cdot e^{\frac{(-1+\sqrt{17})x}{2}}\right]$

187 $y'' = x^2 - x + 1$ $\left[y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2\right]$

188 $y'' = e^x - \cos x$ $[y = e^x + \cos x + c_1 x + c_2]$

189 $y'' - 6y' - 7y = 0$ $[y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{7x}]$

190 $y'' - 10y = 0$ $[y = c_1 \cdot e^{-\sqrt{10}x} + c_2 \cdot e^{\sqrt{10}x}]$

191 $10y'' - 7y' + y = 0$ $\left[y = c_1 \cdot e^{\frac{x}{5}} + c_2 \cdot e^{\frac{x}{2}}\right]$

192 $y'' + 20y' + 100y = 0$ $[y = e^{-10x}(c_1 + c_2 x)]$

193 $y'' - 6y' + 10y = 0$ $[y = e^{3x}(c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \operatorname{sen} x)]$

194 $4y'' + 12y' + 9y = 0$ $\left[y = e^{-\frac{3}{2}x}(c_1 + c_2 x)\right]$

195 $y'' + 10y = 0$ $\left[y = c_1 \cdot \cos(\sqrt{10}\,x) + c_2 \cdot \operatorname{sen}(\sqrt{10}\,x)\right]$

196 $12y' - 36y - y'' = 0$ $\left[y = e^{6x}(c_1 + c_2 x)\right]$

197 $y'' + y' - 12y = 6$ $\left[y = -\frac{1}{2} + c_1 e^{-4x} + c_2 e^{3x}\right]$

198 $e^x y'' = e^x + 1$ $\left[y = e^{-x} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2\right]$

199 $y'' + 2y' + 6y = 0$ $\left[y = e^{-x}(c_1 \cdot \cos\sqrt{5}\,x + c_2 \cdot \operatorname{sen}\sqrt{5}\,x)\right]$

200 $16y'' - 8y' + y = -\frac{y}{9}$ $\left[y = e^{\frac{1}{4}x}\left(c_1 \cdot \cos\frac{x}{12} + c_2 \cdot \operatorname{sen}\frac{x}{12}\right)\right]$

201 $y'' + 2y' + 4y = 0$ $\left[y = e^{-x}(c_1 \cdot \cos\sqrt{3}\,x + c_2 \cdot \operatorname{sen}\sqrt{3}\,x)\right]$

Determina le soluzioni particolari delle seguenti equazioni differenziali, verificanti le condizioni poste a fianco di ciascuna.

202 $y'' - 2y' + y = 0,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 3.$ $\left[y = e^x + 2xe^x\right]$

203 $y'' = e^x + \operatorname{sen} x,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 2.$ $\left[y = e^x - \operatorname{sen} x + 2x\right]$

204 $y'' + 10y' + 25y = 0,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = -3.$ $\left[y = e^{-5x}(1 + 2x)\right]$

205 $y'' - 2y' + 2y = 0,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 2.$ $\left[y = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)\right]$

206 $y'' + 16y = 0,$ $y(\pi) = -3,$ $y'(\pi) = 20.$ $\left[y = -3\cos 4x + 5\operatorname{sen} 4x\right]$

207 $y'' = 2 + e^{-x},$ $y(0) = -1,$ $y'(0) = -2.$ $\left[y = x^2 - x - 2 + e^{-x}\right]$

208 $y'' + 6y' + 18y = 0,$ $y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2e^{\pi},$ $y'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 9e^{\pi}.$ $\left[y = e^{-3x}(2\cos 3x - \operatorname{sen} 3x)\right]$

Risolvi i seguenti problemi.

209 Calcola l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + y = 0$ e successivamente determina e rappresenta la soluzione particolare che ha per tangente nel punto di ascissa $x = 0$ la retta di equazione $y = 2x - 1$. $\left[y = (x - 1)\,e^{-x}\right]$

210 Calcola l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' + y = 0$ e successivamente determina e rappresenta la soluzione particolare che incontra l'asse x nei punti $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, e passa per il punto $P(0; 1)$. $\left[y = \cos x + \operatorname{sen} x\right]$

211 **TEST** Il valore della costante A tale che $y = A\operatorname{sen} 3t$ soddisfi $\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = 4\operatorname{sen} 3t$ è:

A $-\frac{4}{7}$. **B** $\frac{4}{7}$. **C** 4. **D** $\frac{3}{4}$. **E** nessuno di questi.

(USA *Arkansas Council of Teachers of Mathematics, State Mathematics Contest*, 2006)

APPLICAZIONI DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLA FISICA

212 **ESERCIZIO GUIDA**

Un punto si muove su una retta orientata con velocità $v(t) = 3x(t) + 2$, dove x è l'ascissa del punto ed è funzione del tempo t. Sapendo che la posizione iniziale del punto occupata al tempo $t = 0$ è $x_0 = 1$, calcoliamo come varia l'ascissa $x(t)$ del punto al variare del tempo t.

Poiché la velocità è definita $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = x'(t)$, allora l'uguaglianza iniziale diventa:

$$x'(t) = 3x(t) + 2.$$

Conosciamo la posizione iniziale, quindi dobbiamo determinare una soluzione particolare dell'equazione. Risolviamo l'equazione che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine, che scriviamo nella forma:

$$x' - 3x = 2 \quad \rightarrow \quad a(t) = -3 \text{ e } b(t) = 2.$$

Applichiamo la formula risolutiva, scomponendola in varie parti e calcolando alcuni integrali che vi compaiono, ossia calcoliamo:

$$\int a(t)\,dt = \int(-3)\,dt = -3t; \qquad e^{-\int a(t)\,dt} = e^{3t}; \qquad e^{\int a(t)\,dt} = e^{-3t};$$

$$\int e^{\int a(t)\,dt} \cdot b(t)\,dt = \int(e^{-3t} \cdot 2)\,dt = -\frac{2}{3}\int(-3e^{-3t})\,dt = -\frac{2}{3}e^{-3t}.$$

Completiamo la formula:

$$x = e^{3t}\left(-\frac{2}{3}e^{-3t} + c\right) = -\frac{2}{3} + ce^{3t}.$$

Determiniamo la costante c imponendo la condizione iniziale, ponendo cioè nell'equazione che abbiamo ottenuto $t = 0$ e $x = 1$:

$$1 = -\frac{2}{3} + ce^0 \rightarrow c - \frac{2}{3} = 1 \rightarrow c = 1 + \frac{2}{3} \rightarrow c = \frac{5}{3}.$$

La legge cercata è perciò: $x(t) = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{3}e^{3t} = \dfrac{5e^{3t} - 2}{3}$.

Risolvi i seguenti problemi.

213 Un punto materiale si muove su una retta orientata con velocità $v = 3 + x$, dove x è l'ascissa del punto. Sapendo che la posizione iniziale occupata al tempo $t = 0$ dal punto è $x_0 = 1$, calcola come varia l'ascissa x del punto al variare del tempo t. $[x = 4e^t - 3]$

214 La velocità di un punto materiale che si muove su una retta orientata è $v = 4 - 4x$, con x ascissa del punto. La posizione iniziale al tempo $t = 0$ è $x_0 = 2$. Determina come varia x al variare di t. $[x = e^{-4t} + 1]$

215 Un punto materiale si muove su una retta orientata con una velocità che varia in funzione del tempo secondo la legge: $v = 3t^2 + 1$. Sapendo che la posizione iniziale al tempo $t = 0$ è $x_0 = 1$, calcola come varia l'ascissa x del punto al variare del tempo t. $[x = t^3 + t + 1]$

216 L'accelerazione di un punto materiale che si muove su una retta orientata è $a = -4x$, dove x è l'ascissa del punto. La posizione e la velocità del punto al tempo $t = 0$ sono rispettivamente $x_0 = 4$ e $v_0 = 0$. Trova come varia x al variare di t. $[x = 4\cos 2t]$

217 Un punto materiale si muove su una retta orientata con un'accelerazione $a = -9x$, dove x è l'ascissa del punto. Sapendo che la posizione e la velocità del punto materiale al tempo $t = 0$ sono rispettivamente $x_0 = 0$ e $v_0 = 12$, calcola come varia x al variare di t. $[x = 4 \text{ sen } 3t]$

218 L'accelerazione di un punto materiale che si muove su una retta orientata è $a = -2v$, dove v è la velocità istantanea. La posizione e la velocità del punto al tempo $t = 0$ sono rispettivamente $x_0 = 1$ e $v_0 = 2$. Determina come varia x in funzione di t. $[x = 2 - e^{-2t}]$

219 Le armature di un condensatore di capacità $C = 10^{-4}$ F sono inizialmente cariche con una quantità di carica $q_0 = 10^{-2}$ C. Determina il valore della carica q presente sul condensatore al variare del tempo t, se si collegano le armature del condensatore con un conduttore di resistenza $R = 10\ \Omega$.
$\left(\text{Ricorda che vale } \dfrac{q}{C} = -R\dfrac{dq}{dt}.\right)$ $\left[q = \dfrac{e^{-10^3 t}}{100}\right]$

220 Un circuito costituito da una resistenza $R = 5\ \Omega$ e da un'induttanza $L = 10$ H disposti in serie viene collegato a un generatore di f.e.m. costante pari a $f = 50$ V. Determina l'intensità della corrente al variare del tempo. $\left(\text{Ricorda che vale } f - L\dfrac{di}{dt} = Ri.\right)$ $\left[i = 10\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)\right]$

221 Un corpo di massa $m = 1$ kg oscilla lungo una retta orizzontale a causa di una forza elastica $F = -kx$ dovuta a una molla di costante elastica $k = 4$ N/m a cui il corpo è agganciato. Sapendo che nell'istante iniziale il corpo si trova nella posizione di equilibrio $x = 0$ e ha velocità $v = 2$ m/s e che l'attrito è trascurabile, determina l'equazione oraria del moto. $[x = \text{sen } 2t]$

222 Un corpo di massa $m = 2$ kg è agganciato a una molla di costante elastica $k = 6$ N/m. Il corpo viene sottoposto a una forza che determina un allungamento della molla di 0,2 m e quindi viene rilasciato e inizia a oscillare. Trascurando l'attrito e ipotizzando che la velocità iniziale sia nulla, determina l'equazione oraria del moto (il sistema è appoggiato su un piano orizzontale). $[x = 0{,}2 \cos \sqrt{3}\, t]$

223 Se l'atmosfera fosse isoterma, si potrebbe dimostrare che la variazione di pressione seguirebbe la legge $dp = -g\dfrac{\rho_0}{p_0}p\,dy$, dove ρ_0 e p_0 rappresentano rispettivamente la densità dell'aria e la sua pressione a livello del mare. Determina la legge che esprime la pressione in funzione dell'altezza y dal livello del mare. $\left[p = p_0 e^{-g\frac{\rho_0}{p_0}y}\right]$

224 Un corpo di massa $m = 1{,}25$ kg è agganciato a una molla di costante elastica $k = 5$ N/m ed è inizialmente fermo a 0,5 m dalla posizione di equilibrio. Il corpo viene rilasciato e inizia a oscillare attorno alla posizione di equilibrio. Supponendo la presenza di una forza di attrito di modulo $F_a = hv$, con $h = 3$ kg/s e v velocità del corpo, determina la legge oraria del moto (il sistema è appoggiato su un piano orizzontale).
$\left[x = e^{-1{,}2t}[0{,}5 \cos(1{,}6t) + 0{,}375 \text{ sen } (1{,}6t)]\right]$

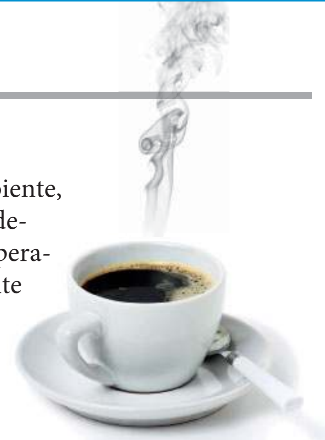
225 Un condensatore di capacità C, caricato con una carica q_m, viene collegato a una bobina di resistenza trascurabile e di induttanza L. Calcola come varia, in funzione del tempo, la carica presente sulle armature del condensatore, sapendo che la legge che regola il fenomeno è, trascurando le dissipazioni di energia, $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{q}{C} = 0$, che all'istante iniziale tutta la carica si trova sulle armature del condensatore e l'intensità della corrente nel circuito è nulla. $\left[q = q_m \cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right)\right]$

226 Un cono circolare retto con un'altezza di 12 pollici e un raggio di base di 3 pollici è riempito con acqua e sospeso con il vertice rivolto verso il basso. L'acqua esce da un foro praticato nel vertice a un ritmo in pollici cubici al secondo numericamente uguale all'altezza dell'acqua nel cono. (Per esempio, quando l'altezza dell'acqua nel cono è di 4 pollici, l'acqua esce a una velocità di 4 pollici cubici al secondo.)
Determina il tempo necessario affinché tutta l'acqua esca dal cono.

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*, 2003)

$\left[\dfrac{9\pi}{2} \text{ s}\right]$

REALTÀ E MODELLI



1 **La tazzina di caffè**

Nello scambio di calore tra un corpo, per esempio una tazzina di caffè, e l'ambiente, la temperatura del corpo cambia al variare del tempo, mentre possiamo considerare costante la temperatura dell'ambiente. La velocità di variazione della temperatura è proporzionale in ogni istante alla differenza di temperatura tra l'ambiente e il corpo.
La tazzina di caffè appena versato ha una temperatura di 67 °C, mentre l'ambiente di 20 °C; la costante di proporzionalità è 0,077 min^{-1}.

- ▶ Scrivi l'equazione differenziale che rappresenta la legge di raffreddamento.
- ▶ Trova la funzione che rappresenta la temperatura in funzione del tempo.
- ▶ Calcola in quanto tempo il caffè si raffredda, cioè raggiunge la temperatura ambiente.

2 **Il paracadute**

Nel momento in cui apre il paracadute, il paracadutista sta cadendo alla velocità di 180 km/h. Nella discesa a paracadute aperto si può ipotizzare che la resistenza dell'aria, cioè la forza che si oppone al moto di caduta, sia proporzionale al peso complessivo uomo-paracadute e al quadrato della velocità, con la costante di proporzionalità pari a $\frac{1}{36}\,\text{s}^2/\text{m}^2$. Il paracadutista ha una massa di 76 kg e il paracadute di 5 kg.

- ▶ Scrivi l'equazione differenziale modello della situazione descritta (supponi, per semplicità, che la velocità sia sempre maggiore di 6 m/s).
- ▶ Determina la velocità in funzione del tempo a partire dall'apertura del paracadute e rappresentane il grafico approssimato.
- ▶ Calcola il limite della funzione velocità per $t \to +\infty$.

3 **Quanto sale rimane?**

In un esperimento di chimica si versa attraverso un foro, in un contenitore cilindrico contenente 30 litri di acqua distillata, una soluzione salina al 35% (in ogni litro di soluzione sono disciolti 350 g di sale). La velocità di versamento è di 1,5 litri/min. La miscela così ottenuta, mantenuta uniforme mescolando per tutto il tempo, esce da un secondo foro posto all'estremità inferiore del contenitore, con la stessa velocità con qui viene versata la soluzione salina.

- ▶ Determina la quantità di sale nel recipiente dopo 5 minuti; 30 minuti; 1 ora.

4 **La forza d'interesse!**

I regimi finanziari possono essere descritti analizzando come cresce nel tempo il capitale investito. Per studiare questo andamento si considera l'«intensità istantanea d'interesse», o «forza d'interesse», $\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$. La forza d'interesse individua in modo univoco la legge di capitalizzazione utilizzata nell'investimento, in particolare individua il «fattore di montante» $f(t)$ associato alla legge: il montante maturato su un capitale C in un tempo t è dato da $C \cdot f(t)$.
Nel caso particolare della forza d'interesse $\delta(t) = \frac{3t^2}{2+t^3}$:

- ▶ determina il fattore di montante $f(t)$ associato (considera che $f(0) = 1$ e $f(s) > 0\ \forall\ s \geq 0$);
- ▶ calcola il montante dopo 3 anni di un capitale C di 500 euro con il regime $f(t)$ trovato al punto precedente.

Bergamini, Trifone, Barozzi **MATEMATICA.BLU - Vol.5** © Zanichelli 2012 *con Maths in English*

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Quale delle seguenti funzioni è soluzione di $y' + y = e^{-x}$?

A $y = \dfrac{x}{e^x}$

B $y = x \cdot e^x$

C $y = e^{2x}$

D $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

E $y = e^x$

2 È data l'equazione differenziale:

$$y' + y - 6x^2 - 10x + k = 0.$$

Della funzione $y=6x^2-2x$ possiamo dire che:

A $\forall k \in \mathbb{R}$ *non* è soluzione dell'equazione.

B è l'integrale generale.

C è un integrale particolare se $k = 0$.

D $\forall k \in \mathbb{R}$ è un integrale dell'equazione.

E è un integrale particolare se $k = 2$.

3 Quale delle seguenti equazioni differenziali *non* è a variabili separabili?

A $3y^2 \cdot y' = 2x + 1$

B $\sqrt{x} \cdot y \cdot y' + \dfrac{3}{x} = 0$

C $y' + xy - 2x^2 = 0$

D $y' = \dfrac{y^2}{1 + x^2}$

E $\dfrac{y'}{x^3} = 1 + y^2$

4 Quale fra le seguenti equazioni differenziali *non* è lineare del primo ordine?

A $xy' + 2y - x = 0$

B $y' + \dfrac{y}{x^2 + 1} = 1 - \sqrt{x}$

C $y' + 2xy = e^{-x}$

D $y' + 3x^2y^2 = x^2$

E $y' + y\cos x = \cos x$

5 Le seguenti equazioni differenziali sono:

A $y' + x - 3 = 0 \wedge (y')^2 + 1 - x = 0$ del primo ordine.

B $y'' + x^2 = y' \wedge (y')^2 - y = 0$ del secondo ordine.

C $y' - 5x = y^2 - 2 \wedge y' - x^2 \ln x = 0$ omogenee del primo ordine.

D $y'' + x^2 - 1 = 0 \wedge y' + e^x = 0$ del primo ordine.

E $y' - y'' - x = 0 \wedge y'' - y' + y = 0$ del secondo ordine, lineari, omogenee.

6 Quale delle seguenti funzioni *non* è soluzione di $4y'' + 12y' + 9y = 0$?

A $y = e^{-\frac{3}{2}x}$

B $y = xe^{-\frac{3}{2}x}$

C $y = e^{-\frac{3}{2}x}(1 - x)$

D $y = e^{-\frac{3}{2}x}(1 - x^2)$

E $y = e^{-\frac{3}{2}x}(2 + 4x)$

7 Data l'equazione differenziale $y''+2y'-15y=0$:

A $y = e^{-5x} + e^{3x}$ è la curva integrale passante per l'origine.

B $y = e^{-5x} + e^{3x} + c$ è l'integrale generale.

C $y = c_1xe^{-5x} + c_2e^{3x}$ è l'integrale generale.

D $y = e^{-5x} + e^{3x}$ è l'unica curva integrale avente un punto in cui la tangente è parallela alla retta $y = -2x$.

E nessuna delle proposizioni precedenti è vera.

8 Quale delle seguenti funzioni è la soluzione particolare di $y'' + 6y' + 5y = 0$ che soddisfa le condizioni $y(0) = 3$, $y'(0) = -11$?

A $y = e^{-x} + 2e^{-5x}$

B $y = 2e^{-x} + e^{-5x}$

C $y = e^{-x}(3 - 8x)$

D $y = e^{-5x}(3 + 4x)$

E $y = 3e^{-x} - 11e^{-5x}$

QUESITI

9 In quali casi un'equazione differenziale del primo ordine è detta lineare e in che modo si procede per risolverla?

10 In che modo può essere scritta un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti e in quale caso le sue soluzioni sono del tipo $y = e^{zx} \cdot (c_1 + c_2 x)$? Fai almeno un esempio.

PROBLEMI

11 Un punto materiale si muove su una retta orientata con un'accelerazione $a = 4x$, dove x è l'ascissa del punto. Sapendo che la posizione e la velocità del punto materiale al tempo $t = 0$ sono rispettivamente $x_0 = 0$ e $v_0 = 8$, calcola come varia l'ascissa x del punto al variare del tempo t. $[x = -2e^{-2t} + 2e^{2t}]$

12 Un circuito è costituito da una resistenza $R = 10\ \Omega$ e da un condensatore di capacità $C = 10^{-4}$ F, disposti in serie, ed è alimentato da una f.e.m. $f = 100$ V. Determina il valore della carica q presente sul condensatore al variare del tempo t, sapendo che nell'istante iniziale, cioè nell'istante di chiusura del circuito, $q_0 = 0$.

$\left(\text{Ricorda che } f = \frac{q}{C} + Ri, \text{ dove } i = \frac{dq}{dt}.\right)$ $\left[q = \frac{1 - e^{-10^3 t}}{100}\right]$

13 Find the solution of each differential equation:

a) $\frac{dy}{dx} = 3x^2(y^2 + 1)$; $\quad y(0) = 0$;

b) $\frac{dy}{dx} + y = 2e^{-x}$;

c) $y'' - 2y = 0$;

d) $2y'' - y' + y = 0$.

(CAN *University of New Brunswick*, Final Exam, 2005)

14 Un corpo di massa $m = 1$ kg è agganciato a una molla di costante elastica $k = 4$ N/m. Il sistema è appoggiato su un piano orizzontale. La molla viene allungata fino a 0,2 m dalla posizione di equilibrio. Se il corpo viene rilasciato e se su di esso agisce una forza di attrito di modulo $F = hv$, con v velocità del corpo, quale deve essere il valore minimo di h affinché non vi siano oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio? Determina in tal caso la legge oraria del moto. $[h = 4\ \text{kg/s}; x = e^{-2t}(0{,}4t + 0{,}2)]$

15 Determina l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' + y' = 0$ e successivamente calcola e rappresenta la soluzione particolare che ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$ e passa per il punto $P(0; 2)$. $[y = 1 + e^{-x}]$

16 Una famiglia di curve è definita dall'equazione differenziale $yy' = x - 2x^3$.

a) Dopo averla classificata trova l'equazione cartesiana di tutte le curve della famiglia.

b) Risolvi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} yy' = x - 2x^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e disegna il grafico della curva ottenuta.

c) Nella curva trovata al punto precedente determina gli insiemi dei valori assunti dalle variabili x e y e le rette tangenti alla curva nei punti di ascissa $\frac{1}{2}$.

$\left[\text{a) equazione del primo ordine a variabili separabili, } y^2 = x^2 - x^4 + c; \text{ b) } y^2 = x^2 - x^4;\right.$
$\left.\text{c) } x \in [-1; 1], y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]; y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x \pm \frac{\sqrt{3}}{12}\right]$

CAPITOLO σ1

١ [numerazione araba]

१ [numerazione devanagari]

一 [numerazione cinese]

LE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

LA MATEMATICA AL SERVIZIO DELLA LEGGE Nel 1992 il matematico statunitense Mark Nigrini propose un metodo, utilizzato ancora oggi, per stanare gli evasori fiscali.

Come si può riconoscere se una dichiarazione dei redditi non è veritiera?

La risposta a pag. σ31

1. LE VARIABILI CASUALI DISCRETE E LE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

Nel corso di un mese si è rilevato che il prezzo di un certo prodotto al kilogrammo ha assunto i seguenti valori per il numero dei giorni indicati:

Prezzo al kg in euro	4,70	5,25	4,98	4,80
Numero giorni	9	6	12	3

Il prezzo è una *grandezza* che ha assunto più valori nel corso del mese, risultando *variabile* in seguito a eventi *casuali* avvenuti nel mercato del prodotto. Diciamo allora che il prezzo è descritto da una **variabile casuale**.
Possiamo associare a ogni valore del prezzo la sua frequenza relativa:

Prezzo	4,70	5,25	4,98	4,80
Frequenza relativa	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

Abbiamo descritto una variabile casuale empirica che deriva da una rilevazione statistica. Essa assume valori, dovuti al caso, che hanno una determinata frequenza relativa. È **empirica** in quanto abbiamo rilevato i valori *dopo* che si sono verificati. Infatti non avremmo potuto sapere in precedenza il valore che il prezzo avrebbe assunto, né per quanti giorni si sarebbe mantenuto.

Consideriamo un'altra situazione.

Abbiamo un'urna contenente 6 palline verdi e 4 gialle. Estraiamo senza reimmissione 3 palline e valutiamo quante volte potrebbe uscire la pallina verde. Essa può non uscire mai, oppure una volta, o due, o tre volte. Il numero delle volte è una variabile casuale **teorica**, perché a ogni suo valore possiamo associare un valore di probabilità calcolato teoricamente.
Indichiamo con X la variabile e con $P(X)$ la successione delle probabilità corrispondenti ai valori di X:

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Gli eventi si escludono a vicenda e, fra i valori considerati, uno si deve sicuramente verificare, quindi la somma delle probabilità è 1. La successione delle probabilità viene detta *distribuzione di probabilità* della variabile X.

DEFINIZIONE

Variabile casuale (o aleatoria) discreta

Una variabile casuale discreta X è una variabile che può assumere i valori x_1, x_2, …, x_n corrispondenti a eventi aleatori E_1, E_2, …, E_n, non impossibili, che si escludono a vicenda e tali che sicuramente uno di essi si verifichi.

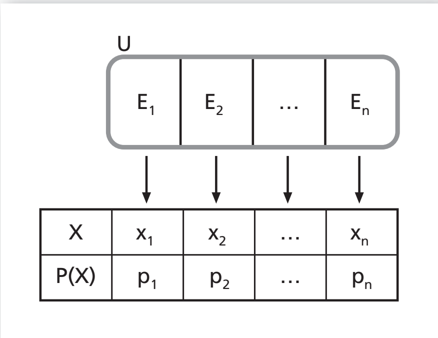
- *Grandezza* è la caratteristica di un fenomeno che può essere descritta con un numero.

- La *frequenza relativa* è il rapporto fra il numero delle volte in cui ogni valore si è presentato (frequenza assoluta) e il numero totale delle rilevazioni effettuate. Per esempio, la frequenza del prezzo 4,70 è
$$\frac{9}{9+6+12+3}=\frac{3}{10}.$$
La somma delle frequenze relative è 1.

- Le probabilità che la pallina verde esca 0, 1, 2 e 3 volte sono rispettivamente:
$$p_0=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{30};$$
$$p_1=3\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{10};$$
$$p_2=3\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{1}{2};$$
$$p_3=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{1}{6}.$$

- Sono esempi di variabili casuali:
a) il ricavo di un negozio dalla vendita, nei giorni della prossima settimana, di un certo numero di articoli di un bene;
b) il numero di pezzi difettosi all'interno di una certa quantità di merce prodotta;
c) il prezzo della benzina nei prossimi dodici mesi.

Ogni valore x_i, che una variabile casuale può assumere, è accompagnato dalla probabilità p_i dell'evento corrispondente E_i. Diciamo quindi che p_i *è la probabilità che la variabile X assuma il valore* x_i e la indichiamo anche con $P(X = x_i)$. Per esempio, nel caso precedente, $P(X = 3) = \frac{1}{6}$.



◀ **Figura 1** **A ogni evento E_i corrispondono un valore x_i della variabile casuale X e la probabilità p_i di verificarsi. Gli insiemi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sono disgiunti e la loro unione è U, quindi tali insiemi costituiscono una partizione di U.**

● La definizione precedente si può estendere al caso di un'*infinità numerabile* di valori $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$
Per esempio, se nel lancio di una moneta ci chiediamo qual è la probabilità che testa esca per n volte consecutive, la variabile casuale discreta ha gli infiniti valori:

$$1, 2, 3, \ldots$$

ai quali sono associate le probabilità:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

Abbiamo che:

$$0 \leq p_i \leq 1.$$

Gli eventi relativi a una variabile casuale costituiscono una partizione dell'universo U dei possibili esiti di un esperimento.

Poiché gli eventi sono incompatibili e la loro unione coincide con lo spazio dei campioni U, si ha:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

● Più eventi si dicono *incompatibili* se la loro intersezione è vuota.

DEFINIZIONE

Distribuzione di probabilità

Data una variabile casuale discreta X, con valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la successione delle probabilità $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a essi associate si chiama distribuzione di probabilità della variabile X.

Possiamo rappresentare la distribuzione di probabilità di una variabile casuale discreta per mezzo di un istogramma o di un diagramma cartesiano.

ESEMPIO

Abbiamo un'urna con tre palline numerate da 1 a 3. Estraiamo consecutivamente due palline, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna. Costruiamo la distribuzione di probabilità della variabile casuale X = «somma dei due numeri estratti».
Le possibili coppie di palline che si possono avere dall'estrazione sono:

	somma dei numeri estratti
(1, 1)	2
(1, 2); (2, 1)	3
(1, 3); (3, 1); (2, 2)	4
(2, 3); (3, 2)	5
(3, 3)	6

dove ogni coppia ha probabilità $\frac{1}{9}$.

Quindi la variabile casuale X può assumere i valori 2, 3, 4, 5, 6, a cui corrispondono le probabilità:

$$P(X=2)=P(X=6)=\frac{1}{9};$$

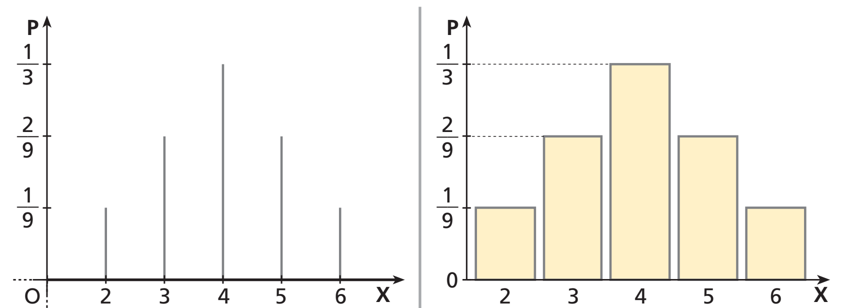
$$P(X=3)=P(X=5)=\frac{2}{9};$$

$$P(X=4)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

Abbiamo una variabile casuale X con la seguente distribuzione di probabilità:

X	2	3	4	5	6
$P(X)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

● La probabilità relativa al valore x è data dalla somma delle probabilità delle coppie di numeri la cui somma vale x.



a. Diagramma cartesiano della distribuzione di probabilità di X.

b. Istogramma della distribuzione di probabilità di X.

▶ **Figura 2** Rappresentazioni grafiche della distribuzione di probabilità della variabile X = «somma dei due numeri estratti da un'urna contenente tre palline numerate da 1 a 3».

La funzione di ripartizione

Riprendiamo il problema in cui estraiamo senza reimmissione 3 palline da un'urna contenente 6 palline verdi e 4 gialle e consideriamo la distribuzione di probabilità relativa all'uscita di palline verdi:

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Ci domandiamo qual è la probabilità che le palline verdi escano al massimo una volta, oppure al massimo due volte ecc.

Per il teorema della probabilità totale, a questa domanda possiamo rispondere associando a ciascun valore della variabile casuale la somma cumulativa delle probabilità, ossia la somma delle probabilità dei valori che lo precedono e della probabilità del valore stesso.

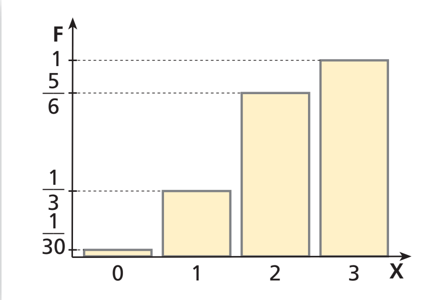
Per esempio, nella tabella a fianco,

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{30}+\frac{3}{10},\ \frac{5}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}.$$

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$F(X)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	1

● Con $F(X)$ indichiamo sinteticamente la successione dei valori corrispondenti a quelli di X.

La funzione che a ogni valore di X fa corrispondere la relativa somma cumulativa di probabilità è chiamata *funzione di ripartizione*.
A essa corrisponde la rappresentazione qui a fianco.



◀ **Figura 3** Utilizziamo un istogramma per rappresentare i valori di F corrispondenti ai quattro valori che assume X. È invece usuale utilizzare il diagramma cartesiano quando si definisce F in tutto $\mathbb{R}$ (figura 4).

DEFINIZIONE

Funzione di ripartizione

Si chiama funzione di ripartizione di una variabile casuale X la funzione $F(x)$ che fornisce la probabilità che X assuma un valore non superiore a un valore prefissato x:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = p_1 + p_2 + \ldots + p_i = \sum_{k=1}^{i} p_k.$$

X	x_1	x_2	$x_{\ldots}$	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	$p_{\ldots}$	p_n
$F(X)$	p_1	$p_1 + p_2$	$p_1 + p_2 + \ldots$	$p_1 + p_2 + \ldots + p_n$

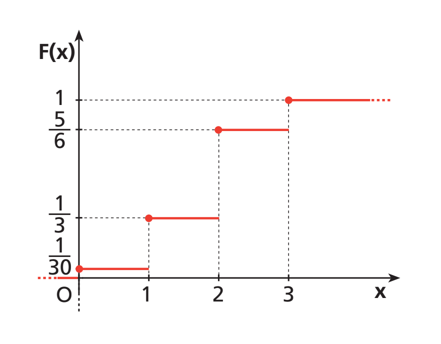
Possiamo utilizzare la funzione di ripartizione per calcolare, per esempio, la probabilità che le palline verdi si presentino più di una volta: la probabilità che sia estratta al più una pallina verde è $F(1) = P(X \leq 1) = \frac{1}{3}$; allora la probabilità cercata è quella dell'evento contrario, cioè:

$$1 - F(1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

● Invece dell'insieme dei valori di X, come dominio della funzione di ripartizione si può prendere tutto $\mathbb{R}$. In questo caso:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_1 \\ \sum_{k=1}^{i} p_k & \text{se } x_i \leq x < x_{i+1} \\ 1 & \text{se } x \geq x_n \end{cases}$$

● $F(x) = F(x_1)$ per $x_1 \leq x < x_2$, $F(x) = F(x_2)$ per $x_2 \leq x < x_3, \ldots$



◀ **Figura 4** L'andamento della funzione di ripartizione, con dominio $\mathbb{R}$, nel caso dell'esempio precedente.
La funzione è definita per casi:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ \frac{1}{30} & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{5}{6} & \text{se} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

● Abbiamo un andamento «a gradini» in quanto, per valori di x compresi fra due dei valori di X, la funzione ha lo stesso valore di quello che assume per il primo fra i due. Per esempio, per $x = 2{,}4$,

$$F(2{,}4) = F(2) = \frac{5}{6},$$

in quanto la probabilità che X assuma un valore non superiore a 2,4 si ottiene sommando le probabilità che assuma valori 0, 1 e 2.

Operazioni sulle variabili casuali

Operazioni tra una variabile e delle costanti

Un'urna contiene 12 palline, di cui una pallina con il numero 3, quattro palline con il 4, due con il 7 e cinque con il 9. Estraiamo una pallina.
Consideriamo la variabile casuale X = «numero della pallina estratta» e la sua distribuzione di probabilità:

Calcoliamo le probabilità applicando la definizione classica: è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili (12 palline).

X	3	4	7	9
$P(X)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$

Da questa variabile casuale possiamo ottenerne altre, i cui valori sono distribuiti con *le stesse probabilità* dei valori di X, moltiplicando e/o sommando delle costanti ai suoi valori.

Per esempio, se moltiplichiamo i valori di X per 5, otteniamo la variabile casuale, indicata con $5X$, avente distribuzione di probabilità:

$5X$	15	20	35	45
$P(5X)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$

Se invece ai valori della variabile X aggiungiamo 3, otteniamo la variabile casuale, indicata con $X + 3$, avente distribuzione di probabilità:

$X+3$	6	7	10	12
$P(X+3)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$

Combinando queste due operazioni possiamo ottenere altre variabili casuali. Vedremo qualche esempio negli esercizi guida.

In generale, date una **variabile casuale X** e una **costante h**, si denota con:

- hX la variabile casuale i cui valori sono dati dal prodotto di h per i valori della variabile X;
- $X + h$ la variabile casuale i cui valori sono dati dalla somma dei valori della variabile X con h.

Per entrambe queste variabili, i valori assunti hanno le **stesse probabilità dei corrispondenti valori di X**.

Somma di due variabili

I) Prendiamo ora anche una seconda urna. Questa contiene due palline con il numero 1 e tre con il 2. Estraiamo una pallina.
Consideriamo la variabile casuale Y = «numero della pallina estratta dalla seconda urna» e la sua distribuzione di probabilità:

Y	1	2
$P(Y)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

In generale, date due variabili casuali discrete X e Y, la loro **somma** è la variabile casuale $X + Y$ i cui valori sono dati dalla somma di ogni valore di X con ogni valore di Y.

Estraiamo una pallina dalla prima urna e una pallina dalla seconda. Consideriamo la variabile casuale «somma dei due numeri estratti». Indichiamo questa variabile con la notazione $X + Y$ e diciamo che è la **somma delle variabili casuali** X e Y.

Per determinare la distribuzione di probabilità di $X + Y$, costruiamo la tabella in cui le righe corrispondono ai valori della X e le colonne corrispondono a quelli della Y. All'interno della tabella, ogni casella contiene la probabilità di estrazione di due palline aventi rispettivamente il valore x_i e y_j, corrispondenti alla riga i e alla colonna j che individuano la casella. Tale probabilità è la **probabilità congiunta** del prodotto di due eventi **indipendenti**:

X \ Y	1	2
3	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$
4	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$
7	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$
9	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

$$A_i = \text{«estrazione del numero } x_i \text{ dalla prima urna»} \qquad i = 1, 2, 3, 4;$$

$$B_j = \text{«estrazione del numero } y_j \text{ dalla seconda urna»} \qquad j = 1, 2.$$

La variabile casuale $X + Y$ ha per valori le possibili somme tra i valori delle due variabili X e Y. La probabilità di ogni valore z_i di $Z = X + Y$ è uguale alla somma delle probabilità (contenute nella tabella) delle possibili coppie di numeri la cui somma è uguale a z_i; infatti tali coppie corrispondono a eventi incompatibili e z_i corrisponde al loro evento unione. Per esempio, la somma 5 si ottiene con (4 e 1) o (3 e 2), quindi:

$$P(Z = 5) = \frac{2}{15} + \frac{1}{20} = \frac{11}{60}.$$

$X + Y$	4	5	6	8	9	10	11
$P(X + Y)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

● Dati due eventi indipendenti A e B, si ha:
$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.
Per esempio, nella tabella, il valore $\frac{1}{20}$, relativo alla probabilità che escano 3 e 2, si ottiene con:
$\frac{1}{12} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{20}$.

● Dati due eventi incompatibili A e B, si ha:
$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

● Possiamo verificare l'indipendenza degli eventi in questo modo. Controlliamo che *le somme dei valori delle probabilità delle righe e delle colonne*, chiamate rispettivamente **probabilità marginali della X e della Y**, *coincidano con le probabilità delle singole variabili casuali*. Per esempio,

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{12}, \text{ che è } P(X = 3).$$

Notiamo poi che **le probabilità congiunte sono il prodotto di quelle marginali**.

X \ Y	1	2	$P(X)$
3	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{12}$
4	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$
7	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$
9	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$
$P(Y)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

● Quindi, le probabilità marginali della X sono le somme dei valori delle singole probabilità contenute in ogni riga e le probabilità marginali della Y sono le somme dei valori delle singole probabilità contenute in ogni colonna.

II) Consideriamo ancora l'urna contenente una pallina con il numero 3, quattro con il 4, due con il 7 e cinque palline con il 9 e la variabile casuale X = «numero della pallina estratta».

X	3	4	7	9
$P(X)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$

Estraiamo consecutivamente due numeri senza reimmissione.
Indichiamo con Y la variabile casuale relativa alla seconda estrazione.

Vogliamo determinare la distribuzione di probabilità della variabile casuale $X + Y$ = «somma dei due numeri estratti». I due eventi

A = «estrazione di un numero dall'urna»,

$B|A$ = «estrazione di un numero dall'urna essendosi verificato A»

sono **dipendenti**, quindi le *probabilità congiunte* sono calcolate moltiplicando la probabilità dell'estrazione del primo numero per quella del secondo nell'ipotesi che il primo numero sia uscito:

X \ Y	3	4	7	9
3	0	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{5}{132}$
4	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{33}$	$\frac{5}{33}$
7	$\frac{1}{66}$	$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{5}{66}$
9	$\frac{5}{132}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{5}{33}$

● Dati due eventi dipendenti A e B, si ha: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$. Per esempio, nella tabella, il valore $\frac{2}{33}$, relativo alla probabilità che esca prima 4 e poi 7, si ottiene con: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{11} = \frac{2}{33}$.

La distribuzione di probabilità della variabile casuale $X + Y$ si ottiene procedendo in modo analogo al caso precedente:

$X+Y$	7	8	10	11	12	13	14	16	18
$P(X+Y)$	$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{4}{33}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{10}{33}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{5}{33}$

● Le somme dei valori delle probabilità delle righe e delle colonne, cioè *le probabilità marginali della X e della Y, coincidono con le probabilità delle singole variabili casuali, ma* **le probabilità congiunte *non* sono il prodotto delle probabilità marginali**:

X \ Y	3	4	7	9	$P(X)$
3	0	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{5}{132}$	$\frac{1}{12}$
4	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{33}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{3}$
7	$\frac{1}{66}$	$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{1}{6}$
9	$\frac{5}{132}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{5}{12}$
$P(Y)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	1

● Se di due variabili casuali X e Y conosciamo le *probabilità congiunte*, possiamo ottenere addizionando righe e colonne le *probabilità marginali*. Se le probabilità congiunte non sono il prodotto delle probabilità marginali, allora le variabili casuali sono dipendenti.

2. I GIOCHI ALEATORI

Una persona decide di partecipare al seguente gioco. Viene lanciato un dado. Se esce il numero 1 essa riceve 7 euro, se esce un numero pari 4 euro, mentre in caso contrario deve pagare 2 euro.
Vengono effettuati 8 lanci e alla fine si rileva che il numero 1 è uscito una volta, un numero pari 2 volte e per 5 volte la persona ha dovuto effettuare il pagamento pattuito.

Calcoliamo se a questa persona è convenuto o meno partecipare al gioco:

$$€\,(7 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 5) = €\,5.$$

Il guadagno totale è stato positivo e il guadagno medio è stato di $\frac{5}{8} = 0{,}625$ euro.
Possiamo ottenere lo stesso valore scrivendo i calcoli nella forma

$$7 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{2}{8} - 2 \cdot \frac{5}{8} = 0{,}625,$$

cioè moltiplicando i guadagni positivi e negativi per le frequenze degli esiti favorevoli e sfavorevoli dei lanci del dado.

Se al posto delle frequenze empiriche (valori a posteriori) sostituiamo le probabilità (valori a priori), abbiamo:

$$7 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} = 2{,}5.$$

Il valore ottenuto rappresenta non la vincita media riscontrata, ma quella che il giocatore avrebbe potuto sperare di realizzare in media. Questo valore si chiama proprio *speranza matematica*.

I vari guadagni (positivi e negativi) rappresentano i valori di una variabile casuale avente, come distribuzione di probabilità, le probabilità di vincita o di perdita:

X	7	4	-2
***P*(*X*)**	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Consideriamo la distribuzione di probabilità di una variabile casuale X, i cui valori sono i guadagni (positivi e negativi) di un gioco d'azzardo:

X	S_1	S_2	$S_{\dots}$	S_n
***P*(*X*)**	p_1	p_2	$p_{\dots}$	p_n

DEFINIZIONE

Speranza matematica

Si chiama speranza matematica $M(X)$ di X la somma dei prodotti di ogni valore della variabile X per la rispettiva probabilità:

$$M(X) = S_1 \cdot p_1 + S_2 \cdot p_2 + \dots + S_n \cdot p_n.$$

In un gioco d'azzardo le somme che i giocatori pagano costituiscono le *poste*.
La posta di un giocatore, in caso di sua perdita al gioco, costituisce il *guadagno positivo* dell'altro o degli altri giocatori e per lui un *guadagno negativo*.
La somma di tutte le poste costituisce il *montepremi* o *piatto*.

Nel caso di due giocatori A e B, essendo S_A e S_B le somme che essi rispettivamente pagano in caso di vincita dell'avversario, la condizione di gioco equo è:

$$S_A \cdot p - S_B \cdot q = 0,$$

dove p è la probabilità di vincita di B e $q = 1 - p$ la sua probabilità di perdita (o di vincita di A).
Possiamo anche scrivere:

$$S_A \cdot p = S_B \cdot q,$$

cioè $S_A : S_B = q : p$.
Quindi *in un gioco equo le poste dei due giocatori sono proporzionali alla probabilità di vincita*.
Applicando la proprietà del comporre, si ha:

$$(S_A + S_B) : S_B = (q + p) : p;$$

essendo $(S_A + S_B) = V$, dove V è il piatto, cioè la somma delle poste, e $(p + q) = 1$, si ha:

$$V : S_B = 1 : p,$$

cioè $S_B = V \cdot p$.

Confronta i due diversi modi di organizzare il gioco. Nel primo si hanno dei guadagni in caso di vincita, mentre in caso di perdita si paga una posta.
Nel secondo ci sono soltanto vincite, ma ogni volta si paga la posta per partecipare al gioco.

Se $M(X) = 0$, si ha un **gioco equo**.

Se $M(X) > 0$, il **gioco è favorevole** (per il giocatore).

Se $M(X) < 0$, il **gioco è sfavorevole**.

Riprendiamo l'esempio precedente. La speranza matematica del giocatore è 2,5, quindi possiamo dire che il gioco gli è favorevole.

Calcoliamo quanto dovrebbe essere la somma P (cioè la posta) che il giocatore deve corrispondere affinché il gioco sia equo.
Impostiamo la relazione della speranza matematica come equazione con incognita P:

$$7 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{2} - P \cdot \frac{1}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad P = 9{,}5.$$

Consideriamo ora lo stesso gioco con un'altra «organizzazione».
Al giocatore viene chiesto un *prezzo* per partecipare al gioco gestito da un *banco*.
Questo prezzo non è altro che la posta da pagarsi prima che il gioco inizi.
In caso di esito favorevole il giocatore incasserà una vincita lorda di:

- 16,5 euro se esce la faccia 1;
- 13,5 euro se esce un numero pari.

La **posta** P che il giocatore deve pagare, affinché il gioco sia equo, è **la somma dei prodotti delle vincite lorde per le rispettive probabilità di vincita**:

$$P = 16{,}5 \cdot \frac{1}{6} + 13{,}5 \cdot \frac{1}{2} = 9{,}5.$$

Parliamo di vincita *lorda* perché, per ottenere il guadagno (ossia la vincita netta), alla somma vinta dobbiamo togliere la posta che viene pagata ogni volta che si gioca:

$$16{,}5 - 9{,}5 = 7,$$

$$13{,}5 - 9{,}5 = 4.$$

DEFINIZIONE

Speranza matematica di una somma

Si chiama speranza matematica di una somma S il prodotto dell'importo della somma per la probabilità p di ottenerla: $S \cdot p$.

In un gioco dove si conseguono le vincite lorde

$$V_1, V_2, \ldots, V_n,$$

con probabilità

$$p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

si ha equità se la posta P è la somma delle speranze matematiche delle vincite lorde:

$$P = V_1 \cdot p_1 + V_2 \cdot p_2 + \ldots + V_n \cdot p_n.$$

ESEMPIO

In un gioco con un mazzo di 40 carte si estraggono contemporaneamente 2 carte. Se sono due figure, si vincono 52 euro, e se è una sola figura, si vincono 26 euro. Per partecipare al gioco viene richiesta una posta di 20 euro.

Le probabilità di vincita sono $\frac{11}{130}$ e $\frac{28}{65}$.
Affiché il gioco sia equo, la posta dovrebbe essere la somma delle speranze matematiche delle vincite lorde:

$$P = 52 \cdot \frac{11}{130} + 26 \cdot \frac{28}{65} = 15{,}6.$$

Il gioco è sfavorevole essendo la posta richiesta superiore.

Possiamo anche verificare che la speranza matematica dei guadagni, in base alla posta richiesta di 20 euro, è negativa,

$$M(X) = (52 - 20) \cdot \frac{11}{130} + (26 - 20) \cdot \frac{28}{65} - 20 \cdot \frac{63}{130} = -4{,}4,$$

e il risultato è proprio la differenza fra la posta in caso di equità e la posta richiesta.

3. I VALORI CARATTERIZZANTI UNA VARIABILE CASUALE DISCRETA

Il valore medio

Consideriamo un'urna che contiene quattro palline con il numero 50, cinque palline con il 54, otto con il 58 e tre con il 62.
Effettuiamo 50 estrazioni di una pallina nelle stesse condizioni, cioè rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna. Otteniamo la seguente tabella che mostra per ogni valore delle palline il numero delle volte che è uscito:

Valore	Frequenza assoluta
50	10
54	12
58	24
62	4

Se calcoliamo la media aritmetica, otteniamo:

$$M = \frac{50 \cdot 10 + 54 \cdot 12 + 58 \cdot 24 + 62 \cdot 4}{50} = 55{,}76.$$

Avremmo anche potuto scrivere la media nella forma:

$$M = 50 \cdot \frac{10}{50} + 54 \cdot \frac{12}{50} + 58 \cdot \frac{24}{50} + 62 \cdot \frac{4}{50} = 55{,}76,$$

dove compaiono le frequenze relative.
Se accompagniamo ogni valore con la relativa probabilità, otteniamo la seguente distribuzione:

X	50	54	58	62
$P(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{20}$

● La media calcolata è la media aritmetica ponderata, in quanto ogni valore è moltiplicato per il numero delle volte (peso) in cui si presenta.

La somma dei prodotti di ogni valore per la sua probabilità dà un **valore medio** che ha carattere di previsione:

$$M(X) = 50 \cdot \frac{1}{5} + 54 \cdot \frac{1}{4} + 58 \cdot \frac{2}{5} + 62 \cdot \frac{3}{20} = 56.$$

Il valore ottenuto, $\mu = 56$, esprime in modo sintetico la variabile casuale ed è un **valore teorico** che, fra l'altro, nel nostro esempio non può mai essere ottenuto.

● μ è la dodicesima lettera dell'alfabeto greco. La leggiamo *mu*. Con μ indicheremo spesso il valore di $M(X)$.

● Il valore medio è chiamato anche **valore atteso** oppure **speranza matematica**.

DEFINIZIONE

Valore medio

Data la distribuzione di probabilità di una variabile casuale discreta X:

X	x_1	x_2	$x_{...}$	x_n
P(X)	p_1	p_2	$p_{...}$	p_n

il valore medio $M(X)$ di X è la somma dei prodotti di ogni valore assunto dalla variabile casuale per la corrispondente probabilità:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i .$$

● Se consideriamo un numero elevato di prove relative a un esperimento aleatorio, per la legge empirica del caso la frequenza relativa di un evento approssima la sua probabilità. Pertanto, se consideriamo le frequenze relative degli eventi corrispondenti ai valori della variabile casuale discreta X che descrive l'esperimento, abbiamo che la media aritmetica ponderata approssima il valore medio di X.
Quindi possiamo dire che *il valore medio permette di fare una previsione teorica* sul risultato dell'esperimento aleatorio quando il numero di prove è molto grande.

Esaminiamo un esempio.
Una ditta produce sedie da giardino e deve stabilire la quantità da produrre per la prossima stagione estiva, in relazione alla probabilità di vendita. La distribuzione di probabilità che esprime il numero di sedie che si venderanno è data da:

X	1500	1800	2000	2100	2500
P(X)	0,30	0,35	0,15	0,12	0,08

Il numero di sedie che si prevede di vendere durante la prossima stagione estiva è dato da:

$$M(X) = 1500 \cdot 0,30 + 1800 \cdot 0,35 + 2000 \cdot 0,15 + 2100 \cdot 0,12 + 2500 \cdot 0,08 =$$
$$= 450 + 630 + 300 + 252 + 200 = 1832.$$

La varianza e la deviazione standard

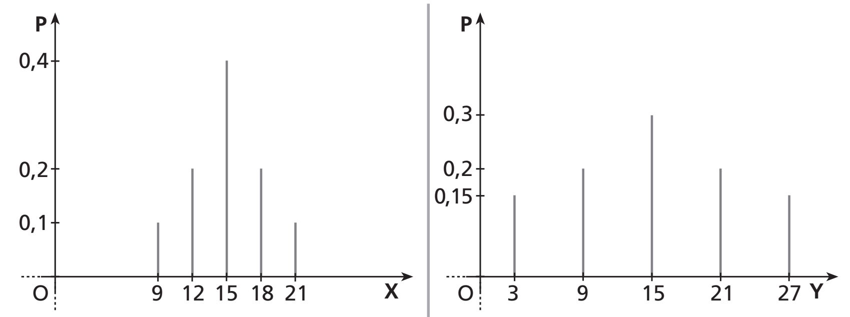
Sono date le seguenti variabili discrete e le relative distribuzioni di probabilità:

X	9	12	15	18	21
P(X)	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Y	3	9	15	21	27
P(Y)	0,15	0,2	0,3	0,2	0,15

Esse hanno la stessa media $M(X) = M(Y) = \mu = 15$. Tuttavia, osserviamo le rappresentazioni grafiche delle distribuzioni di probabilità.

◀ Figura 5



a. Grafico della distribuzione di probabilità di *X*.

b. Grafico della distribuzione di probabilità di *Y*.

Vediamo che nel primo caso i valori risultano più vicini al valore medio, pertanto c'è una minore *dispersione*.

Per misurare questa dispersione possiamo considerare gli scarti di ogni valore dal valore medio, creando così la variabile casuale $X - M(X)$, che chiamiamo *variabile casuale scarto*, con la seguente distribuzione di probabilità:

$X - M(X)$	-6	-3	0	3	6
$P[X - M(X)]$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Osserviamo che il valore medio della variabile casuale scarto è nullo:

$$M[X - M(X)] = -6 \cdot 0{,}1 - 3 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}1 = 0.$$

Allo stesso risultato si giunge se si opera in modo analogo con la variabile Y. Il valore medio dello scarto non è quindi adatto per esprimere la dispersione.

Consideriamo allora i *quadrati degli scarti dal valore medio*, cioè la variabile $[X - M(X)]^2$:

$[X - M(X)]^2$	36	9	0	9	36
$P([X - M(X)]^2)$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

● In generale, **la variabile casuale X^2** ha come valori i quadrati dei valori di X e la stessa distribuzione di probabilità.

Assumiamo come indice della dispersione il valore medio della variabile casuale quadrato degli scarti, che chiamiamo *varianza* e indichiamo con $var(X)$:

$$var(X) = 36 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}2 + 36 \cdot 0{,}1 = 10{,}8.$$

Possiamo anche considerare, come indice della dispersione, la radice quadrata della varianza, detta *deviazione standard* $\sigma(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{var(X)} = \sqrt{10{,}8} \simeq 3{,}29.$$

● La lettera greca σ si legge *sigma*.

Per la seconda variabile casuale Y abbiamo i seguenti valori:

$Y - M(Y)$	-12	-6	0	6	12
$[Y - M(Y)]^2$	144	36	0	36	144
P	0,15	0,2	0,3	0,2	0,15

● Qui e in seguito, per brevità, indichiamo una distribuzione di probabilità soltanto con la lettera P, senza precisare la variabile a cui si riferisce, che è quella che la precede immediatamente nella tabella.

$$var(Y) = 144 \cdot 0{,}15 + 36 \cdot 0{,}2 + 36 \cdot 0{,}2 + 144 \cdot 0{,}15 = 57{,}6;$$
$$\sigma(Y) = \sqrt{57{,}6} \simeq 7{,}59.$$

Questi valori confermano la maggiore dispersione che avevamo rilevato.
Generalizziamo.

DEFINIZIONE

Variabile casuale scarto
Data una variabile casuale discreta X, si chiama variabile casuale scarto di X la variabile casuale che ha per valori le differenze fra i valori di X e il valore medio $M(X)$, cioè è la variabile $X - M(X)$.

Questa variabile non è molto significativa perché **il suo valore medio è sempre nullo**. Per avere informazioni riguardo alla **dispersione** dei valori di una variabile X, si considera allora la variabile casuale quadrato dello scarto di X.

Il parallelo con la statistica è immediato. Ricordiamo che la somma degli scarti dalla media aritmetica è nulla e che la somma dei quadrati degli scarti dalla media aritmetica è minima rispetto a qualunque altro valore diverso da essa. Nella statistica ci troviamo in situazioni reali che cerchiamo di interpretare, qui siamo in situazioni teoriche delle quali conosciamo l'origine e che utilizziamo per interpretare la realtà.

DEFINIZIONE

Varianza
Data la distribuzione di probabilità di una variabile casuale discreta X:

X	x_1	x_2	$x_{...}$	x_n
P	p_1	p_2	$p_{...}$	p_n

con valore medio $M(X) = \mu$, si chiama varianza $var(X)$ di X il valore medio della variabile casuale quadrato dello scarto di X:

$$var(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i.$$

La varianza ci dice quanto sono concentrati i valori della variabile X attorno al valore medio μ. La varianza si può anche indicare con $\sigma^2(X)$.

La deviazione standard viene anche detta **scarto quadratico medio**.

DEFINIZIONE

Deviazione standard
Si chiama deviazione standard $\sigma(X)$ di una variabile casuale X la radice quadrata della varianza di X:

$$\sigma(X) = \sqrt{var(X)}.$$

Noi possiamo, attraverso il **valore di sintesi μ** e **il valore di dispersione σ^2**, individuare le **caratteristiche di una variabile casuale**.

Si può inoltre dimostrare che vale il seguente teorema.

TEOREMA

Sia X una variabile casuale, allora la varianza di X è uguale alla differenza tra il valore medio della variabile X^2 e il quadrato del valore medio di X:

$$var(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Le proprietà del valore medio e della varianza

Il valore medio di una variabile casuale gode delle seguenti proprietà.

PROPRIETÀ

Siano X e Y due variabili casuali discrete e k, h due costanti numeriche.

1. Se X è *costante*, cioè assume sempre uno stesso valore a, allora $M(X) = a$;
2. $M(k \cdot X) = k \cdot M(X)$;
3. $M(X + h) = M(X) + h$;
4. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

Combinando la seconda e la terza proprietà, otteniamo:
$M(k \cdot X + h) =$
$= k \cdot M(X) + h$.

La varianza ha le seguenti proprietà.

PROPRIETÀ

Siano X e Y due variabili casuali discrete e k, h due costanti numeriche:

1. $var(k \cdot X) = k^2 \cdot var(X)$;
2. $var(X + h) = var(X)$;
3. se le variabili sono *indipendenti*, $var(X + Y) = var(X) + var(Y)$.

Combinando le prime due proprietà, otteniamo:
$var(k \cdot X + h) =$
$= k^2 \cdot var(X)$.
La costante additiva h non incide sulla varianza.

La semidifferenza tra $var(X + Y)$ e $[var(X) + var(Y)]$ viene detta **covarianza** di X e Y e si indica con $\boldsymbol{cov(X, Y)}$:

$$\boldsymbol{cov(X, Y) = \frac{var(X+Y) - [var(X) + var(Y)]}{2}}.$$

La covarianza di due variabili casuali discrete è un indice di variabilità che lega le due variabili.

Ha senso parlare di covarianza solo per le variabili dipendenti, poiché *la covarianza di variabili indipendenti è nulla*.

Se le variabili sono indipendenti, sappiamo che $var(X + Y)$ è uguale a $var(X) + var(Y)$, quindi la differenza al secondo membro è 0.

La covarianza può anche essere calcolata direttamente (senza conoscere le varianze) nel seguente modo:

- si determinano gli scarti dei valori della variabile X;
- si determinano gli scarti dei valori della variabile Y;
- si calcola la somma dei prodotti degli scarti per le rispettive probabilità congiunte.

Si noti che, quando conosciamo la covarianza di due variabili casuali X e Y, possiamo ricavare la varianza della loro somma dalla formula precedente:

$$var(X + Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X, Y).$$

4. LE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ DI USO FREQUENTE

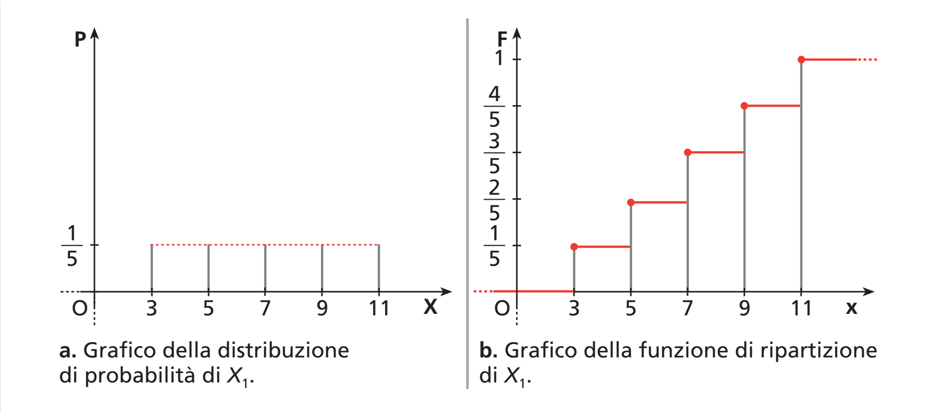
La distribuzione uniforme discreta

Consideriamo la seguente distribuzione di probabilità relativa a una variabile casuale X_1 e la corrispondente funzione di ripartizione.

X_1	3	5	7	9	11
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
F	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1

Per ogni fenomeno specifico si può costruire una sua variabile casuale. Lo statistico ha il compito di esaminare i fenomeni e di classificarli, andando oltre l'apparente diversità, per ricondurli a quelle «regolarità» che li descrivono.

Nei grafici delle distribuzioni di probabilità, pur essendo le variabili casuali discrete, congiungiamo i valori delle probabilità con una spezzata soltanto per visualizzare meglio il loro andamento.



▶ **Figura 6** Grafici che descrivono una distribuzione uniforme.

Osserviamo che tutti i valori della variabile hanno la stessa probabilità $\frac{1}{5}$.

In questo caso la distribuzione di probabilità è detta **uniforme** e il suo grafico ha un andamento rettilineo (figura 6*a*).

DEFINIZIONE

Distribuzione uniforme discreta

Si dice che una variabile casuale discreta ha una distribuzione di probabilità uniforme se tutti i suoi valori hanno la stessa probabilità.

Se i valori di una variabile casuale X sono 1, 2, 3, …, n e tutti hanno probabilità $p = \frac{1}{n}$, si può dimostrare che:

$$M(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{e} \qquad var(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Per esempio, se per la variabile casuale X si hanno i valori 1, 2, 3, 4, 5, tutti con probabilità $\frac{1}{5}$, si ha:

$$\mu = \frac{5+1}{2} = 3, \qquad \sigma^2 = \frac{5^2-1}{12} = 2, \qquad \sigma = \sqrt{2}.$$

Consideriamo di nuovo X_1. I suoi valori si possono ottenere dai valori 1, 2, 3, 4, 5 di una variabile X moltiplicando questi ultimi per 2 e aggiungendo 1 al prodotto.

Pertanto X_1 è la variabile casuale $2 \cdot X + 1$ e quindi applicando le proprietà del valore medio e della varianza otteniamo:

$$\mu_1 = M(2X+1) = 2M(X) + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7;$$
$$\sigma_1^2 = var\,(2X+1) = 2^2\, var\,(X) = 2^2 \cdot 2 = 8;$$
$$\sigma_1 = 2\sqrt{2}.$$

IN PRATICA
▶ Videolezione 85

La distribuzione binomiale

Un'urna contiene 8 palline nere e 24 bianche. Si estraggono consecutivamente cinque palline rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna. Consideriamo l'evento «uscita della pallina nera».

Abbiamo un evento, con probabilità costante $p = \frac{1}{4}$, sottoposto a 5 prove tutte nelle stesse condizioni.

Consideriamo la variabile casuale X corrispondente al numero delle volte in cui l'evento può verificarsi. La sua distribuzione di probabilità è data dalla legge

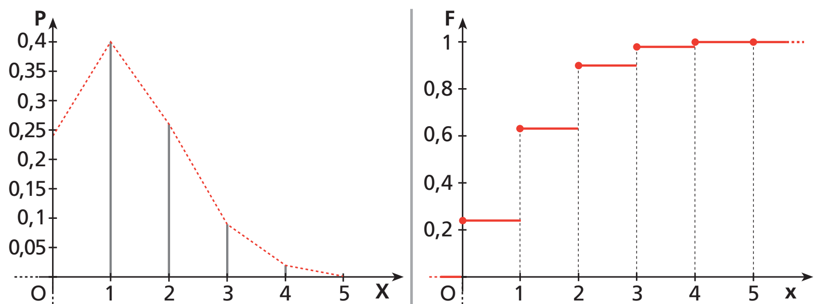
$$P(X = x) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}$$

e deriva dal modello probabilistico delle prove ripetute. Questa distribuzione viene detta **binomiale** o **bernoulliana**:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,237305	0,395508	0,263672	0,087891	0,014648	0,000977
F	0,237305	0,632813	0,896484	0,984375	0,999023	1

● Nello schema delle prove ripetute, la probabilità che un evento E, di probabilità costante p, si verifichi k volte su n prove è:

$$p_{(k,\,n)} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$



a. Grafico della distribuzione di probabilità di X.

b. Grafico della funzione di ripartizione di X.

◄ **Figura 7** Grafici che descrivono una distribuzione binomiale con $p = \frac{1}{4}$ e $n = 5$.

DEFINIZIONE

Distribuzione binomiale (o di Bernoulli)

Si dice che una variabile casuale discreta X, con valori $x = 0, 1, 2, \ldots, n$, ha una distribuzione di probabilità binomiale di *parametri* n e p se:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

Una variabile casuale con distribuzione binomiale descrive il numero di volte che si può verificare un evento aleatorio di probabilità p su n prove.

Supponiamo di effettuare **una sola prova**. Abbiamo la seguente distribuzione di probabilità:

X	0	1
P	q	p

● $q = 1 - p$ e quindi $p + q = 1$.

Allora il valore medio di X è

$$M(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

e la varianza vale:

$$var(X) = p^2 q + (1-p)^2 p = p^2 q + q^2 p = pq(p+q) = pq.$$

Se consideriamo ***n* prove**, esse corrispondono alla *somma di n variabili casuali indipendenti* e pertanto si hanno i seguenti valori:

$$\boldsymbol{M(X) = np} \qquad \text{(valore medio)}$$

$$\boldsymbol{var(X)} = npq = \boldsymbol{np(1-p)} \qquad \text{(varianza)}$$

$$\boldsymbol{\sigma(X)} = \sqrt{npq} = \boldsymbol{\sqrt{np(1-p)}} \qquad \text{(deviazione standard)}$$

ESEMPIO

Una macchina di precisione produce pezzi di ricambio per elettrodomestici con una percentuale del 2% di pezzi difettosi.
Calcoliamo il numero medio di pezzi difettosi che si possono prevedere su una produzione giornaliera di 400 pezzi e la deviazione standard.

Essendo $n = 400$, $p = 0{,}02$ e $q = 0{,}98$, otteniamo:

$$\mu = 400 \cdot 0{,}02 = 8 \qquad \text{e} \qquad \sigma = \sqrt{400 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98} = 2{,}8.$$

● Siméon Denis Poisson (1781-1840), matematico francese.

La distribuzione di Poisson

Un evento ha probabilità $p = 0{,}005$. Calcoliamo la probabilità che su 800 prove, *effettuate nelle stesse condizioni*, l'evento si verifichi 6 volte.
Per calcolare la probabilità richiesta dobbiamo applicare lo schema delle prove ripetute:

● $p_{(k,\,n)} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

$$p_{(6,800)} = \binom{800}{6} \cdot 0{,}005^6 \cdot 0{,}995^{794} \simeq 0{,}10433.$$

Quando, come in questo caso, n è elevato e p piccolo, per ottenere un valore approssimato del precedente si può utilizzare la seguente **distribuzione di probabilità** dovuta a **Poisson**:

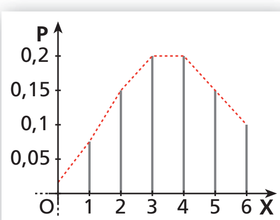
● $e = 2{,}718281828\ldots$ è la base dei logaritmi naturali che sono indicati con ln sulle calcolatrici tascabili.

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, \qquad \text{con } \lambda = np.$$

Utilizzando questa formula, otteniamo $\lambda = 800 \cdot 0{,}005 = 4$ e:

$$P(X = 6) = \frac{4^6}{6!} e^{-4} \simeq 0{,}104196,$$

che è una buona approssimazione del valore precedente.
Si può provare che l'approssimazione diventa migliore al crescere di n.



▲ **Figura 8** Grafico della distribuzione di Poisson con $\lambda = 4$.

Al variare di $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, otteniamo la seguente distribuzione di probabilità:

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,018316	0,073263	0,146525	0,195367	0,195367	0,156293	0,104196

DEFINIZIONE

Distribuzione di Poisson

Si dice che una variabile casuale discreta X, con valori $x = 0, 1, 2, \ldots, n$, ha una distribuzione di probabilità di Poisson di *parametro* λ se:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda},$$

dove λ è il numero medio di eventi per intervallo di tempo.

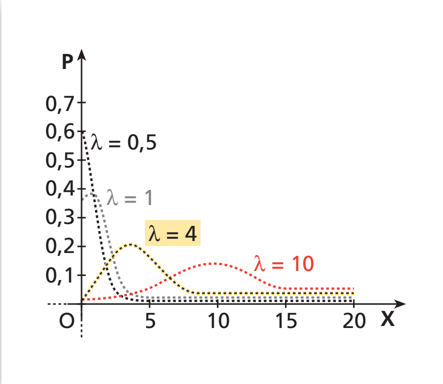
Essendo utilizzata per eventi con valori della probabilità piccoli, si usa indicare la distribuzione di Poisson come *distribuzione degli eventi rari*.

La distribuzione di probabilità di Poisson è un modello teorico che rappresenta importanti fenomeni in fisica (decadimento radioattivo), in medicina (malattie rare), in campo economico (file di attesa).
La distribuzione di probabilità di Poisson, **definita per valori interi non negativi**, **è illimitata** ed è utilizzata per semplificare e approssimare la distribuzione binomiale di parametri n e p, ponendo $\lambda = np$, quando n è grande e p è piccolo.

Il parametro λ di una distribuzione di Poisson assume particolare interesse perché si può dimostrare che, per una variabile casuale discreta X con questa distribuzione di probabilità, esso coincide con il valore medio e la varianza della variabile:

$$\boldsymbol{M(X) = var(X) = \lambda}.$$

Confrontiamo i valori della distribuzione per $\lambda = 0{,}5$, 1, 4, 10.



◄ **Figura 9** Grafici della distribuzione di probabilità di una variabile di Poisson di parametro $\lambda = 0{,}5, 1, 4, 10$.

Osserviamo che all'aumentare del valore di λ la distribuzione della probabilità tende a diventare simmetrica attorno al valore medio.

ESEMPIO

1. Una macchina produce pezzi difettosi con una probabilità $p = 0{,}006$. Calcoliamo la probabilità che su 500 pezzi:

- nessuno risulti difettoso;
- risultino difettosi 3 pezzi;
- risultino difettosi più di 5 pezzi.

La variabile casuale relativa al numero di pezzi difettosi ha valore medio e distribuzione di probabilità:

$$\mu = \lambda = 500 \cdot 0{,}006 = 3, \qquad P(X = x) = \frac{3^x}{x!} e^{-3}.$$

La probabilità che nessun pezzo sia difettoso è:

$$P(X = 0) = \frac{3^0}{0!} e^{-3} \simeq 0{,}04979.$$

La probabilità che i pezzi difettosi siano 3 è $P(X=3) = \frac{3^3}{3!} e^{-3} \simeq 0{,}22404$.

Per l'ultimo quesito è necessario calcolare tutti i valori fino a $x = 5$. Nella tabella seguente, indichiamo anche i valori della funzione di ripartizione:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,049787	0,149361	0,224042	0,224042	0,168031	0,100819
F	0,049787	0,199148	0,42319	0,647232	0,815263	0,916082

La probabilità che vi siano più di 5 pezzi difettosi è:

$$P(X > 5) = 1 - F(5) \simeq 1 - 0{,}916082 = 0{,}083918.$$

2. A uno sportello bancario arrivano in media 30 persone all'ora. Calcoliamo la probabilità che in 5 minuti:

- arrivino 4 persone;
- arrivino meno di 3 persone.

Calcoliamo in media quante persone arrivano nell'unità di tempo, cioè in 5 minuti:

$$\lambda = 2{,}5.$$

● λ si può calcolare mediante una proporzione. Essendo 30 le persone e 60 i minuti in un'ora:

$$30 : 60 = x : 5,$$

da cui:

$$\lambda = x = 2{,}5.$$

La distribuzione di probabilità è $P(X = x) = \dfrac{2{,}5^x}{x!} e^{-2{,}5}$:

X	0	1	2	3	4
P	0,082085	0,205212	0,256516	0,213763	0,133602
F	0,082085	0,287297	0,543813	0,757576	0,891178

Pertanto $P(X = 4) \simeq 0{,}133602$.

La probabilità che arrivino meno di 3 persone è $P(X \leq 2) = F(2) \simeq 0{,}543813$.

5. LE VARIABILI CASUALI STANDARDIZZATE

Le seguenti variabili casuali discrete mostrano il punteggio di due test sottoposti ai 23 alunni di una classe, in momenti successivi. I test si differenziano per il numero dei quesiti, e quindi per il punteggio massimo ottenibile, e per le difficoltà:

X_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	$\frac{2}{23}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{6}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{23}$

X_2	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{2}{23}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{3}{23}$

Le due variabili casuali hanno rispettivamente valori medi:

$$\mu_1 \simeq 3{,}478 \quad \text{e} \quad \mu_2 \simeq 2{,}609.$$

Consideriamo un alunno che ha conseguito 4 punti nel primo test e 3 nel secondo e gli scarti dalle medie dei suoi punteggi:

$$4 - \mu_1 \simeq 0{,}522; \qquad 3 - \mu_2 \simeq 0{,}391.$$

Potremmo concludere che l'alunno ha avuto un peggioramento, in quanto con il primo test ha uno scarto positivo, rispetto alla media della classe, maggiore di quello del secondo test.

La differenza con la media non è però sufficiente a valutare la situazione, in quanto non tiene conto della diversa difficoltà dei test.
La difficoltà è misurata dalla variabilità dei risultati, e pertanto rapportiamo le differenze dal valore medio con le deviazioni standard, cioè misuriamo gli scarti dai valori medi in unità di σ.

Essendo: $\sigma_1 \simeq 2{,}061$ e $\sigma_2 \simeq 1{,}496$,

si hanno: $\dfrac{4-\mu_1}{\sigma_1} \simeq 0{,}253$ e $\dfrac{3-\mu_2}{\sigma_2} \simeq 0{,}261$.

Dobbiamo concludere che, per il secondo test, l'alunno ha conseguito un miglioramento rispetto alla situazione complessiva della classe.

Se operiamo la stessa trasformazione per tutti i valori della variabile casuale X_1, otteniamo una **nuova variabile casuale Z_1**, detta **standardizzata**, **che ha la stessa distribuzione di probabilità**:

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \simeq \frac{X_1 - 3{,}478}{2{,}061}.$$

Z_1	$-1{,}688$	$-1{,}202$	$-0{,}717$	$-0{,}232$	$0{,}253$	$0{,}738$	$1{,}224$	$1{,}709$	$2{,}194$
P	$\frac{2}{23}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{6}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{23}$

DEFINIZIONE

Variabile casuale standardizzata

Data una variabile casuale X con valore medio μ e deviazione standard σ, si chiama standardizzata di X la variabile casuale:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Effettuando la standardizzazione di una variabile casuale si possono fare confronti tra fenomeni descritti da grandezze diverse, cioè da variabili aventi unità di misura diverse, in quanto la variabile Z è indipendente dall'unità di misura.

I valori assunti dalla variabile standardizzata Z di una variabile casuale X vengono chiamati **punti zeta** e hanno la stessa distribuzione di probabilità di X.

Applicando le proprietà del valore medio osserviamo che

$$M(Z) = M\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}M(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}[M(X)-\mu] = \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu) = 0$$

e

$$var(Z) = M(Z^2) - [M(Z)]^2 =$$

$$= M\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right] - 0 = \frac{1}{\sigma^2}M\left[(X-\mu)^2\right] = \frac{1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2 = 1.$$

Ricordiamo che per la varianza vale il seguente teorema:
$var(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Pertanto vale la seguente proprietà.

PROPRIETÀ

Una variabile standardizzata Z ha valore medio nullo e varianza e deviazione standard unitarie:

$$M(Z) = 0, \qquad var(Z) = \sigma(Z) = 1.$$

6. LE VARIABILI CASUALI CONTINUE

Consideriamo un esperimento in cui abbiamo un cronometro che fermiamo, in modo casuale, premendo un pulsante. Vogliamo determinare la probabilità che venga fermato, per esempio, esattamente dopo 8 secondi. La grandezza legata al fenomeno aleatorio è il tempo, che varia con continuità: a seconda della sensibilità del cronometro, possiamo pensare di considerare, oltre ai secondi, i decimi di secondo, i centesimi, e così via. Se consideriamo un intervallo di tempo, per esempio fra 0 e 10 secondi, a ogni istante possiamo far corrispondere un numero reale e viceversa. In generale, diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Variabile casuale continua

Una variabile casuale continua X è una grandezza che può assumere tutti i valori reali contenuti in un intervallo.

● L'intervallo può essere anche illimitato.

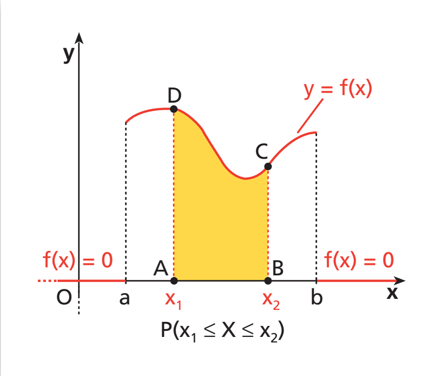
Riprendiamo il nostro esempio.
La possibilità di fermare il cronometro dopo 8 secondi esatti è praticamente nulla, in quanto si tratta di «centrare» un istante preciso fra gli infiniti istanti possibili. Questo è vero anche per qualsiasi altro istante.

Il modello matematico che serve per descrivere le probabilità associate a una variabile casuale continua X che varia entro un intervallo $I = [a; b]$, dove $I \subset \mathbb{R}$, non si basa quindi sulle probabilità dei singoli valori di X, bensì sulla probabilità che X assuma valori compresi fra due estremi $x_1, x_2 \in I$.

● Per esempio, nel caso del cronometro, potremmo chiederci qual è la probabilità di fermarlo in un istante compreso fra 7 e 9 secondi.

Per il calcolo utilizziamo una funzione $f(x) \geq 0$, definita punto per punto in $\mathbb{R}$, chiamata **funzione densità di probabilità di X**: il valore della probabilità $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ **è uguale all'area compresa fra il grafico di $f(x)$ e l'asse delle ascisse nell'intervallo $[x_1; x_2]$** (figura 10).

● Non ha rilevanza il tipo di intervallo, aperto o chiuso, cioè se si ha $x_1 < X < x_2$ o $x_1 \leq X \leq x_2$, in quanto l'area non cambia.



▶ **Figura 10** La probabilità $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ è uguale all'area del trapezoide *ABCD*.

DEFINIZIONE

Funzione densità di probabilità

La funzione densità di probabilità di una variabile casuale continua X è una funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Dalla definizione osserviamo che quando, come nel caso della figura, l'intervallo I in cui varia X ha estremi finiti a e b, la funzione densità di probabilità ha valore:

$$f(x) = 0, \qquad \text{per } x < a \text{ e per } x > b.$$

In questo modo l'area complessiva compresa tra il grafico di $f(x)$ e l'asse delle ascisse coincide con quella relativa all'intervallo $I = [a; b]$.
Il fatto che l'area valga 1 indica che la variabile X assume sicuramente un valore compreso fra a e b. Per un intervallo $[x_1; x_2] \subseteq [a; b]$ possiamo scrivere:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx, \qquad \text{dove } x_1, x_2 \in I.$$

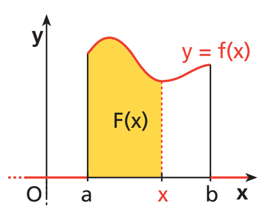
Analogamente al caso discreto, possiamo introdurre il concetto di funzione di ripartizione.

DEFINIZIONE

Funzione di ripartizione

Si chiama funzione di ripartizione di una variabile casuale continua X la funzione $F(x)$ che fornisce la probabilità che il valore della variabile X non superi un determinato valore x:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$



Dalla definizione osserviamo che:

- $F(x)$ è uguale all'area compresa tra il grafico della funzione densità di probabilità $f(x)$ e l'asse delle ascisse nell'intervallo $]-\infty; x]$;
- essa è una primitiva della funzione densità di probabilità $f(x)$, cioè:

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x);$$

- possiamo utilizzare $F(x)$ per calcolare $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ applicando la relazione

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Anche per le variabili casuali continue possiamo parlare di valore medio, varianza e deviazione standard. Le formule sono l'estensione nel continuo di quelle per le variabili casuali discrete; l'integrale sostituisce la sommatoria.

Valore medio: $$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx.$$

Varianza: $var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(x)]^2 f(x)\, dx.$

Deviazione standard: $\sigma(X) = \sqrt{var(X)}.$

ESEMPIO

Una variabile casuale continua X varia nell'intervallo $[0; 2]$ e la sua funzione densità di probabilità è:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{4} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 2 \end{cases}$$

Controlliamo che si tratti di una funzione densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{x^3}{4} \geq 0 \qquad \text{nell'intervallo } [0; 2],$$

$$\int_0^2 \frac{x^3}{4} dx = \left[\frac{x^4}{16}\right]_0^2 = 1.$$

Non consideriamo gli integrali negli intervalli diversi da $[0; 2]$, in quanto in tali intervalli gli integrali sono nulli, essendo $f(x) = 0$.

Determiniamo la funzione di ripartizione:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{t^3}{4} dt = \left[\frac{t^4}{16}\right]_0^x = \frac{1}{16}x^4 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Calcoliamo la probabilità che X assuma un valore compreso tra 1 e 1,5,

$$P(1 \leq X \leq 1{,}5) = \int_1^{1,5} \frac{x^3}{4} dx = \left[\frac{x^4}{16}\right]_1^{1,5} = \frac{1}{16}(5{,}0625 - 1) \simeq 0{,}2539,$$

oppure, utilizzando la funzione di ripartizione:

$$P(1 \leq X \leq 1{,}5) = F(1{,}5) - F(1) = \frac{1}{16}5{,}0625 - \frac{1}{16} \simeq 0{,}2539.$$

Il valore medio è:

$$M(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x^3}{4} dx = \left[\frac{x^5}{20}\right]_0^2 = \frac{32}{20} = \frac{8}{5}.$$

La varianza è:

$$var(X) = \int_0^2 \left(x - \frac{8}{5}\right)^2 \frac{x^3}{4} dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^5 - \frac{4}{5}x^4 + \frac{16}{25}x^3\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{24}x^6 - \frac{4}{25}x^5 + \frac{4}{25}x^4\right]_0^2 = \frac{8}{75}.$$

Più semplicemente applicando la proprietà:

$$var(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

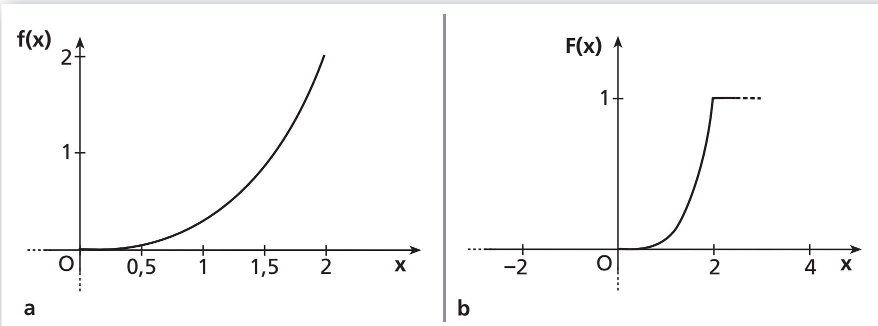
$$var(X) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x^3}{4} dx - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \int_0^2 \frac{x^5}{4} dx - \frac{64}{25} =$$

$$= \left[\frac{x^6}{24}\right]_0^2 - \frac{64}{25} = \frac{64}{24} - \frac{64}{25} = \frac{8}{75}.$$

Il grafico della funzione densità di probabilità nell'intervallo [0; 2] è quello di figura 11*a*.

Il grafico della funzione di ripartizione è quello di figura 11*b*.

● L'area compresa tra la curva e l'asse delle ascisse nell'intervallo [0; 2] è 1.



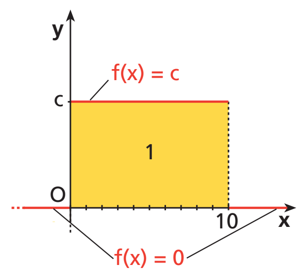
◄ **Figura 11**

La distribuzione uniforme continua

Consideriamo una variabile casuale continua X definita nell'intervallo [0; 10], che abbia una funzione densità di probabilità del tipo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ c & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{se } x > 10 \end{cases}$$

dove c è un numero reale positivo costante.
Il grafico di $f(x)$ è rappresentato nella figura a lato.
Per la definizione di funzione densità di probabilità, l'area nell'intervallo [0; 10] compresa tra questa retta e l'asse delle ascisse, cioè l'area del rettangolo di base 10 e altezza c, deve essere uguale a 1, pertanto:



$$10 \cdot c = 1 \quad \rightarrow \quad c = \frac{1}{10}.$$

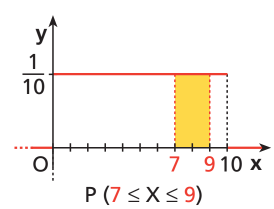
Quindi $f(x) = \dfrac{1}{10}$ per $0 \leq x \leq 10$.

Una distribuzione di questo tipo è detta *uniforme*.

La probabilità che la variabile X assuma valori contenuti in un intervallo $[x_1; x_2]$, per esempio $x_1 = 7$ e $x_2 = 9$, è:

$$P(7 \leq X \leq 9) = \int_7^9 \frac{1}{10} dx = \left[\frac{x}{10}\right]_7^9 = \frac{1}{5}.$$

● Possiamo anche calcolare la probabilità considerando l'area del rettangolo avente come base $(9-7)$ e altezza $\frac{1}{10}$.



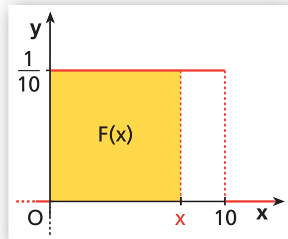
Se consideriamo invece l'intervallo $[0; x]$, otteniamo l'espressione della funzione di ripartizione:

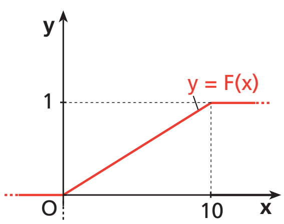
$$F(x) = P(0 \le X \le x) = \int_0^x \frac{1}{10} dt = \left[\frac{t}{10}\right]_0^x = \frac{x}{10}, \quad \text{per } 0 \le x \le 10.$$

Inoltre si ha:

$$F(x) = 0, \quad \text{per } x < 0; \qquad F(x) = 1, \quad \text{per } x > 10.$$

- Possiamo anche calcolare $F(x)$ come l'area del rettangolo di base x e altezza $\frac{1}{10}$.





Il grafico della funzione di ripartizione è rappresentato nella figura a lato.

Utilizzando la funzione di ripartizione, possiamo calcolare in modo alternativo la probabilità che X assuma un valore compreso fra 7 e 9:

$$P(7 \le X \le 9) = F(9) - F(7) = \frac{9}{10} - \frac{7}{10} = \frac{1}{5}.$$

In generale abbiamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Distribuzione uniforme continua

Si dice che una variabile casuale continua X, definita in $[a; b]$, ha una distribuzione uniforme se la sua funzione densità di probabilità è:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ c & \text{se } a \le x \le b \\ 0 & \text{se } x > b \end{cases}$$

con $c = \frac{1}{b-a}$.

La probabilità che X assuma valori contenuti nell'intervallo $[x_1; x_2]$ (con $a \le x_1 \le x_2 \le b$) è:

- $P(x_1 \le X \le x_2)$ è l'area di un rettangolo di base $(x_2 - x_1)$ e altezza c.

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{b-a}.$$

La funzione di ripartizione di X è:

- Per $F(x)$ nell'intervallo $[a; b]$ si ha:

$$\int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \le x \le b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$$

Inoltre si dimostra che valgono le seguenti formule per i valori di sintesi della variabile X.

Valore medio: $M(X) = \frac{a+b}{2}$.

Varianza: $var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

La distribuzione normale o gaussiana

IN PRATICA
▶ Videolezione 86

La distribuzione normale è una funzione densità di probabilità che è stata individuata come il modo con il quale si distribuiscono le misure ripetute, che differiscono fra loro per motivi accidentali, di una stessa grandezza X.

DEFINIZIONE

Distribuzione normale (o di Gauss)

Una funzione densità di probabilità $f(x)$ si dice normale se è definita in $\mathbb{R}$ e ha espressione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

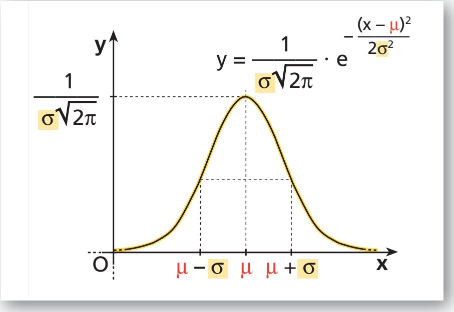
dove i parametri μ e σ sono due costanti reali positive.

● La funzione $f(x)$ è anche detta **gaussiana**, dal nome del matematico tedesco Karl Friedrich Gauss (1777-1855) che l'ha determinata.

Indichiamo con $\boldsymbol{N(\mu;\sigma^2)}$ una variabile casuale continua con una funzione densità di probabilità normale e la chiamiamo **variabile casuale normale**. I parametri **μ e σ coincidono rispettivamente con il valore medio e la deviazione standard della variabile casuale**.

● Sono molto frequenti i fenomeni collettivi naturali, sociali e produttivi con valori che si distribuiscono *normalmente*.

La curva che rappresenta la funzione gaussiana (figura 12) è chiamata *curva degli errori accidentali* o, dalla sua forma dovuta alla simmetria, *curva a campana*.

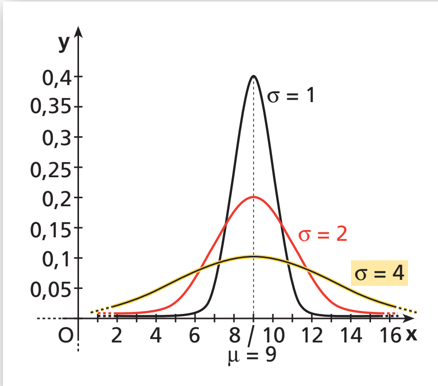


▶ **Figura 12** Il grafico della gaussiana.

Sottolineiamo alcune caratteristiche di questa curva:

- è simmetrica rispetto all'asse di equazione $x = \mu$;
- la curva ha un massimo in corrispondenza del punto $\left(\mu; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$;
- ha l'asse delle ascisse come asintoto orizzontale;
- presenta due punti di flesso in corrispondenza di $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$.

Se consideriamo più variabili casuali normali con uguale valore medio μ, ma diverso valore di σ, rileviamo che la curva si appiattisce all'aumentare della deviazione standard.



◀ **Figura 13** Grafico di tre curve gaussiane tutte con media $\mu = 9$, ma con $\sigma = 1, 2, 4$.

Per calcolare la probabilità che il valore della variabile casuale X sia compreso tra x_1 e x_2, dobbiamo calcolare l'area sottesa dal grafico della gaussiana nell'intervallo $[x_1; x_2]$.

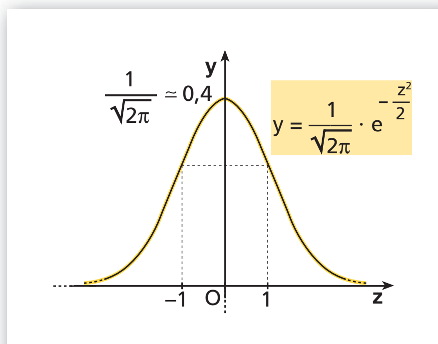
Calcoliamo la probabilità che la variabile casuale normale $X = N(9; 4)$ assuma valori compresi nell'intervallo $[10; 12]$.
Per semplificare il calcolo, *standardizziamo* la funzione densità, cioè trasformiamo la variabile X nella variabile Z:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

In questo modo abbiamo ottenuto ancora una *variabile casuale normale*, ma con valore medio $\mu = 0$ e deviazione standard $\sigma = 1$.

Quindi **la variabile casuale standardizzata di una variabile casuale normale è $\boldsymbol{N(0; 1)}$**, a cui corrisponde la funzione gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}.$$



▶ **Figura 14** Grafico della funzione *gaussiana standardizzata.*

Il calcolo della probabilità che la variabile $N(9; 4)$ assuma un valore compreso tra 10 e 12 si riconduce al calcolo della probabilità che la variabile casuale standardizzata $Z = N(0; 1)$ assuma un valore compreso tra 0,5 e 1,5 essendo questi i due valori di Z corrispondenti ai precedenti.

Infatti, applicando la relazione $Z = \frac{X - 9}{2}$, si ha:

$$x_1 = 10 \quad \rightarrow \quad z_1 = \frac{10 - 9}{2} = 0,5;$$

$$x_2 = 12 \quad \rightarrow \quad z_2 = \frac{12 - 9}{2} = 1,5.$$

Esiste una tavola apposita (**tavola di Sheppard**) che fornisce il valore delle aree sottostanti la curva $f(z)$ nell'intervallo $[0; z]$, cioè:

$$\boldsymbol{F(z) = P(0 < Z < z)}.$$

In questa tavola, le righe sono in corrispondenza della parte decimale del valore z e le colonne corrispondono ai centesimi. Per esempio, per trovare il valore di $F(1{,}35)$ occorre individuare la riga in cui compare il numero 1,3 e scorrerla fino alla colonna corrispondente al numero 0,05; la casella così individuata contiene il valore cercato.

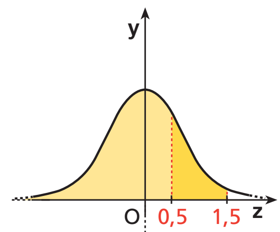
- Riportiamo la tavola di Sheppard alla fine di questo capitolo. La tavola è stata ricavata utilizzando l'apposita funzione offerta da Excel.
- In questo caso il simbolo $F(z)$ non rappresenta la funzione di ripartizione.

Applichiamo la tavola per risolvere il nostro problema:

$$P(0 < Z < 1{,}5) = F(1{,}5) = 0{,}4332 \quad \text{e} \quad P(0 < Z < 0{,}5) = F(0{,}5) = 0{,}1915.$$

Quindi:

$$P(0{,}5 < Z < 1{,}5) = P(0 < Z < 1{,}5) - P(0 < Z < 0{,}5) =$$
$$= 0{,}4332 - 0{,}1915 = 0{,}2417.$$



P (0,5 < Z < 1,5)

La simmetria della curva gaussiana rispetto all'asse y comporta che *la stessa tavola possa essere utilizzata anche per valori negativi della variabile Z*:

$$\boldsymbol{P(-z < Z < 0) = P(0 < Z < z)},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P(-\infty < Z < -z)} &= P(z < Z < +\infty) = \\ &= P(0 < Z < +\infty) - P(0 < Z < z) \\ &= \boldsymbol{0{,}5 - P(0 < Z < z)}.\end{aligned}$$

- $P(0 < Z < +\infty)$ corrisponde alla metà dell'area totale sottostante la curva gaussiana (che vale 1).

ESEMPIO

I punteggi assegnati alle prove di un concorso hanno avuto una distribuzione normale e il punteggio medio è stato $\mu = 48$ con una deviazione standard $\sigma = 12$.

Calcoliamo la probabilità:

a) che il punteggio sia compreso tra 39 e 43;
b) che il punteggio sia compreso tra 35 e 65;
c) che il punteggio sia inferiore a 30.

Per la standardizzazione abbiamo la relazione $Z = \dfrac{X - 48}{12}$.

- Qui e in seguito utilizziamo valori di z approssimati alla seconda cifra decimale. Approssimazioni diverse possono portare a risultati leggermente differenti.

a) $x_1 = 39 \quad \rightarrow \quad z_1 = -0{,}75;$
$x_2 = 43 \quad \rightarrow \quad z_2 = -0{,}42.$

$$P(-0{,}75 < Z < -0{,}42) = P(0{,}42 < Z < 0{,}75) =$$
$$= P(0 < Z < 0{,}75) - P(0 < Z < 0{,}42) = 0{,}2734 - 0{,}1628 = 0{,}1106.$$

b) $x_1 = 35 \quad \rightarrow \quad z_1 = -1{,}08;$
$x_2 = 65 \quad \rightarrow \quad z_2 = 1{,}42.$

$$P(-1{,}08 < Z < 1{,}42) = P(-1{,}08 < Z < 0) + P(0 < Z < 1{,}42) =$$
$$= P(0 < Z < 1{,}08) + P(0 < Z < 1{,}42) = 0{,}3599 + 0{,}4222 = 0{,}7821.$$

c) $x = 30 \quad \rightarrow \quad z = -1{,}5.$

$$P(-\infty < Z < -1{,}5) = P(1{,}5 < Z < +\infty) =$$
$$= 0{,}5 - P(0 < Z < 1{,}5) = 0{,}5 - 0{,}4332 = 0{,}0668.$$

Vi sono delle aree di probabilità che rivestono importanza in quanto sono frequentemente usate. Sono quelle che in una distribuzione normale corrispondono ai seguenti intervalli:

$$\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$$
$$\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma$$
$$\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma$$
$$\ldots$$
$$\boldsymbol{\mu - n\sigma < X < \mu + n\sigma}.$$

Le relative probabilità si determinano ancora considerando i corrispondenti intervalli della variabile standardizzata Z e poi applicando la tavola dei valori di $F(z)$:

$$P(-1 < Z < 1) = P(-1 < Z < 0) + P(0 < Z < 1) = 2 \cdot F(1) = 0{,}6826$$
$$P(-2 < Z < 2) = P(-2 < Z < 0) + P(0 < Z < 2) = 2 \cdot F(2) = 0{,}9544$$
$$P(-3 < Z < 3) = P(-3 < Z < 0) + P(0 < Z < 3) = 2 \cdot F(3) = 0{,}9974$$
$$\ldots$$
$$\boldsymbol{P(-n < Z < n)} = P(-n < Z < 0) + P(0 < Z < n) = \boldsymbol{2 \cdot F(n)}.$$

ESEMPIO

Le altezze di un gruppo di 400 persone hanno una distribuzione normale. La media è risultata di 172 cm con una varianza di 25 cm^2. Determiniamo il numero di persone che hanno un'altezza compresa tra 162 cm e 182 cm.

Essendo $\mu = 172$ cm e $\sigma = 5$ cm, gli estremi dell'intervallo considerato non sono altro che $\mu - 2\sigma$ e $\mu + 2\sigma$; esso ha probabilità $2 \cdot F(2)$, cioè corrisponde al 95,44% dei casi. Pertanto le persone che hanno un'altezza compresa tra 162 cm e 182 cm sono:

$$400 \cdot 0{,}9544 \simeq 382.$$

Possiamo anche procedere in modo inverso. Fissiamo una probabilità e, utilizzando la tavola $F(z)$, determiniamo l'intervallo per il quale si verifica detto valore.

ESEMPIO

Il peso di scatole di detersivo confezionate automaticamente si distribuisce normalmente. Il peso medio è 2,5 kg con una deviazione standard di 0,12 kg. Determiniamo l'intervallo di peso entro il quale si concentra il 99% delle scatole confezionate.

Cerchiamo nella tavola $F(z)$, che fornisce solo i valori per $z > 0$, il valore 0,495 (metà di 0,99). Questo numero corrisponde a un valore compreso tra 2,57 e 2,58. Quindi la probabilità dello 0,99 corrisponde (arrotondando) all'intervallo:

$$-2{,}57 < Z < 2{,}57 \quad \text{cioè} \quad \mu - 2{,}57\sigma < X < \mu + 2{,}57\sigma.$$

Essendo $\mu = 2{,}5$ e $\sigma = 0{,}12$, l'intervallo entro il quale troviamo il 99% della produzione è $2{,}19 < X < 2{,}81$.

LA MATEMATICA AL SERVIZIO DELLA LEGGE

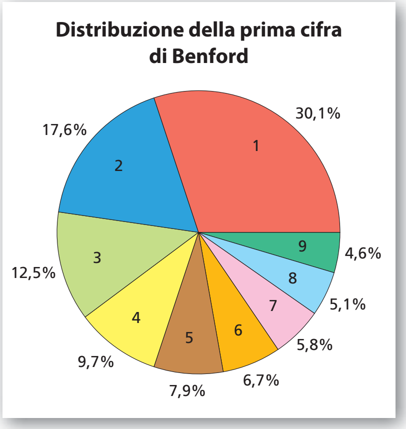
Come si può riconoscere se una dichiarazione dei redditi non è veritiera?

▶ Il quesito completo a pag. σ1

Il metodo antifrode elaborato dal matematico Mark Nigrini si basa sulla legge di Benford, o legge di distribuzione della prima cifra.

La legge della prima cifra di Benford in funzione antifrode
Può essere utilizzata per individuare distribuzioni numeriche sospette nelle dichiarazioni dei redditi. Infatti, quando una persona falsifica la propria situazione economica, sceglie arbitrariamente sequenze di numeri che quasi sicuramente presentano grandi deviazioni dalla legge di Benford (a meno che l'evasore non abbia buone competenze matematiche!). Per sapere se un contribuente ha compilato onestamente la dichiarazione dei redditi, si può studiare la frequenza delle cifre indicate.

Una scoperta quasi casuale
In un brano scritto in una certa lingua, le lettere dell'alfabeto hanno frequenze diverse. Per esempio, in italiano, le lettere A, E e I hanno una frequenza che supera l'11%, mentre la F e la B sono intorno all'1%. Succede qualcosa di simile anche per le cifre di un insieme di dati? Sembra che il primo a osservare come si distribuiscono le diverse cifre di una raccolta di dati sia stato l'astronomo Simon Newcomb alla fine dell'Ottocento. L'aneddoto racconta che, consultando la tavola dei logaritmi, Newcomb notò che le prime pagine del suo manuale, quelle in cui i numeri iniziavano con cifre più piccole, erano più sciupate delle ultime. Cinquant'anni più tardi, fu il fisico Frank Benford a testare la scoperta empirica di Newcomb con un'enorme mole di dati numerici provenienti da ambiti applicativi diversi, come l'economia, la demografia, la chimica, la geografia. Trovò che, effettivamente, in un insieme di dati reali oltre il 30% dei numeri comincia con 1, quasi il 18% con 2 e meno del 5% ha il 9 come prima cifra (vedi il diagramma a torta in figura).



L'intuizione diventa legge matematica
Nel 1938 Benford formulò la legge che porta il suo nome, secondo la quale la probabilità che, scegliendo a caso un valore in un insieme di dati, la prima cifra sia n è:

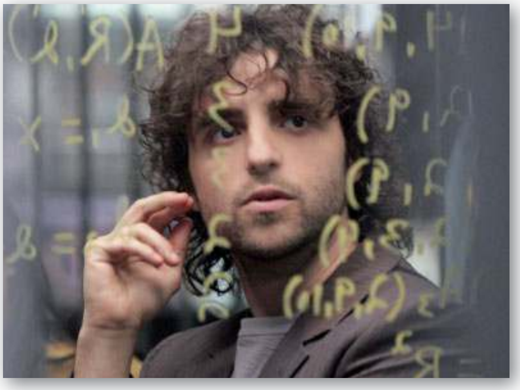
$$P(c_1 = n) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$
$$= \log_{10}(n+1) - \log_{10}(n).$$

È possibile generalizzare questa formula anche per le cifre successive alla prima. Per esempio, la probabilità che la seconda cifra di un numero a caso sia n è:

$$P(c_2 = n) = \sum_{k=1}^{9} \log_{10}\left(1 + \frac{1}{10k+n}\right)$$

per $n = 0, 1, 2, \ldots, 9$.

La legge di Benford non è applicabile a tutti gli insiemi di dati. Per esempio, non vale per insiemi di numeri casuali, come quelli delle estrazioni del lotto. Tuttavia si può utilizzare in molte situazioni di carattere scientifico, finanziario ed economico, demografico e sociale.
Così, solo alcuni decenni dopo la loro scoperta, le distribuzioni di probabilità di Benford hanno trovato applicazione nella lotta all'evasione fiscale grazie all'intuizione di Mark Nigrini.



Matematica e crimini in tv

Si chiama *Numb3rs* ed è una serie televisiva prodotta dai fratelli Tony e Ridley Scott (lo stesso di *Alien*, *Blade Runner*, *Il gladiatore*). La serie narra le vicende di un brillante docente di matematica che riveste un ruolo cruciale nella risoluzione di casi criminali, collaborando con l'FBI.
A volte avvincente, a volte paradossale, la serie è riuscita a portare teoremi e dimostrazioni dalle aule universitarie alle case di milioni di telespettatori.
Traendo spunto dalla serie, Keith Devlin (matematico) e Gary Lorden (consulente del telefilm) hanno scritto *Il matematico e il detective*, edito in Italia da Longanesi.

LABORATORIO DI MATEMATICA
LE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

ESERCITAZIONE GUIDATA

Una fabbrica produce rasoi la cui durata si distribuisce normalmente.
Costruiamo un foglio di Excel che determini la probabilità che un rasoio duri
a) sino a m anni, b) almeno n anni, c) un tempo compreso fra p e q anni,
e calcoli il numero dei rasoi corrispondenti, dopo aver ricevuto la durata media μ, la deviazione standard σ, i numeri m, n, p, q espressi in anni e il numero r dei rasoi prodotti.
Proviamo con $\mu = 6$, $\sigma = 1{,}5$, $m = 8$, $n = 7$, $p = 4$, $q = 9$ e $r = 1000$.

- In un nuovo foglio di Excel scriviamo alcune didascalie, mettiamo un bordo alle celle che devono contenere i dati d'ingresso e dichiariamo in formato percentuale le celle D8, D9 e D11, come vediamo in figura 1.

	A	B	C	D	E	F	G
1	La distribuzione normale o gaussiana						
2							
3	La durata dei rasoi prodotti da una fabbrica si distribuisce normalmente						
4	con una media di			6,0	anni		
5	e una deviazione standard di			1,5	anni.		
6							
7	La probabilità della durata			è del	corrispondente a		
8	sino a	8,0	anni	90,88%	909	rasoi su	1000
9	di almeno	7,0	anni	25,25%	252	rasoi su	1000
10	da	4,0	anni				
11	a	9,0	anni	88,60%	886	rasoi su	1000
12							

▲ Figura 1

- Per ottenere la percentuale di probabilità del

caso	digitiamo	in
a	= DISTRIB.NORM(B8; D4; D5; VERO)	D8
b	=1 − DISTRIB.NORM(B9; D4; D5; VERO)	D9
c	= DISTRIB.NORM(B11; D4; D5; VERO) − DISTRIB.NORM(B10; D4; D5; VERO)	D11

- Per avere il numero dei rasoi che soddisfano le probabilità di durata richieste, digitiamo = D8*G8 in E8; = D9*G9 in E9 e = D11*G11 in E11.
- Immettiamo i dati proposti e il foglio appare come in figura 1.

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 15 esercitazioni in più

Esercitazione

1 Dopo aver svolto l'analisi del seguente problema, costruisci un foglio elettronico che permetta l'ingresso dei dati, calcoli e mostri gli eventuali risultati e realizzi i grafici indicati. Prova il foglio con i dati proposti.
Da un'urna contenente 4 palline gialle e b palline blu si estraggono consecutivamente 4 palline. Determina la distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione della variabile casuale: X = «numero delle palline gialle uscite», sia nel caso che ogni pallina venga rimessa nell'urna, sia nel caso che non vengano rimesse. Rappresenta graficamente le funzioni. Prova con $b = 6$.

[0, 1, 2, …; 12,96%, 34,56%, 34,56%, …; 7,14%, 38,10%, 42,86%, …]

LA TEORIA IN SINTESI

LE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

1. LE VARIABILI CASUALI DISCRETE E LE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

- **Variabile casuale discreta**: è una variabile che può assumere i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ al verificarsi di eventi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ che costituiscono una partizione di un insieme universo.

- **Distribuzione di probabilità** di una variabile casuale X: è la successione delle probabilità p_i associate ai valori x_i di X, cioè:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

con $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

- **Funzione di ripartizione di una variabile casuale X**: è una funzione che associa a ogni valore x_i di X la probabilità che la variabile X assuma un valore non superiore a x_i, e si indica con:

$$\boldsymbol{F(X) = P(X \leq x_i)}.$$

- **Operazioni sulle variabili casuali**
  - **Prodotto** di una costante k per la variabile X: è la variabile $\boldsymbol{k \cdot X}$ che ha per valori i prodotti di ogni valore di X moltiplicato per k.
  - **Somma** di una costante k per la variabile X: è la variabile $\boldsymbol{X + k}$ che ha per valori le somme di ogni valore di X con k.

  Le probabilità dei valori delle variabili $k \cdot X$ e $X + k$ sono uguali alle probabilità dei corrispondenti valori di X.
  - **Somma di due variabili** casuali X e Y: è la variabile $X + Y$ che ha come valori tutte le possibili somme di un valore di X con un valore di Y.

- Per costruire la distribuzione di probabilità di $X + Y$ è necessario costruire le probabilità congiunte.
  - **Probabilità congiunte**: sono le probabilità del prodotto logico dell'evento in cui la variabile X assume il valore x_i e dell'evento in cui la variabile Y assume il valore y_j.

2. I GIOCHI ALEATORI

- **Speranza matematica** della variabile casuale X avente per valori i guadagni (positivi o negativi) $S_1, S_2, \ldots, S_n$ di un gioco:

$$\boldsymbol{M(X) = S_1 \cdot p_1 + S_2 \cdot p_2 + \ldots + S_n \cdot p_n}.$$

  - Se $M(X) = 0$, il gioco è **equo**.
  - Se $M(X) > 0$, il gioco è **favorevole**.
  - Se $M(X) < 0$, il gioco è **sfavorevole**.

3. I VALORI CARATTERIZZANTI UNA VARIABILE CASUALE DISCRETA

- **Valore medio** di una variabile casuale X che assume i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con probabilità $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$\boldsymbol{M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i}.$$

- **Proprietà del valore medio**
  - $M(k \cdot X) = k \cdot M(X)$;
  - $M(X + k) = M(X) + k$;
  - $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

- **Varianza** della variabile casuale X:

$$var(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2 \cdot p_i.$$

- **Proprietà della varianza**
  - $var(k \cdot X) = k^2 \cdot var(X)$;
  - $var(X + k) = var(X)$;
  - $var(X + Y) = var(X) + var(Y)$ se X e Y sono indipendenti;
  - $var(X + Y) = var(X) + var(Y) + 2\,cov(X, Y)$ se X e Y sono dipendenti.

4. LE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ DI USO FREQUENTE

- **La distribuzione uniforme discreta**
  - Una variabile casuale discreta X ha una distribuzione di probabilità uniforme se tutti i suoi valori hanno la stessa probabilità.
  - Se i valori di X sono $1, 2, \ldots, n$ con probabilità costante uguale a $\frac{1}{n}$, allora:

$$M(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{e} \quad var(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

- **La distribuzione binomiale (o di Bernoulli)**
  - Una variabile casuale discreta X con valori $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ ha una distribuzione di probabilità binomiale di parametri n e p se i valori della variabile sono dati dal numero di successi di un evento di probabilità costante p in n prove indipendenti e le corrispondenti probabilità si ricavano dal teorema delle prove ripetute, cioè:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

  - $M(X) = n \cdot p$, $\quad var(X) = n \cdot p(1-p)$, $\quad \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p(1-p)}$.

- **La distribuzione di Poisson**
  - Una variabile casuale discreta X con valori $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ ha una distribuzione di Poisson se tali valori sono relativi al numero di volte in cui un evento può verificarsi in un intervallo di tempo o in un contesto fissato e le prove si realizzano in modo indipendente (*legge degli eventi rari*).
    La sua distribuzione di probabilità è

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda},$$

    dove λ è un parametro che coincide con il valore medio e con la varianza di X:

$$M(X) = \lambda \quad \text{e} \quad var(X) = \lambda.$$

  - Questa distribuzione approssima quella binomiale quando il numero delle prove n è elevato e il valore della probabilità p è piccolo, essendo $\lambda = np$.

5. LE VARIABILI CASUALI STANDARDIZZATE

- Una variabile casuale X, avente valore medio μ e deviazione standard σ, può essere *trasformata* in un'altra variabile casuale Z, detta **variabile standardizzata di X**, mediante la seguente relazione:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

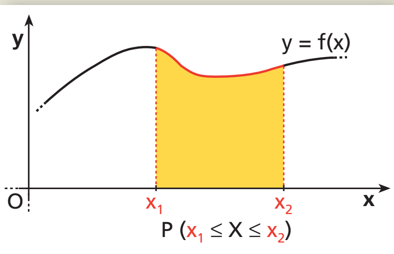
I valori di questa nuova variabile casuale, detti **punti z**, mantengono le stesse probabilità dei valori di X. Per Z si hanno: $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

6. LE VARIABILI CASUALI CONTINUE

- Una **variabile casuale** X si dice **continua** se assume tutti i valori reali compresi in un intervallo I che può essere limitato o illimitato.

- La **funzione densità di probabilità** di una variabile casuale X è tale che:
  a) $f(x) \geq 0$ in $\mathbb{R}$;
  b) l'area sottesa dal grafico di $f(x)$ in $\mathbb{R}$ è uguale a 1.

- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$, con $[x_1; x_2] \subset \mathbb{R}$.

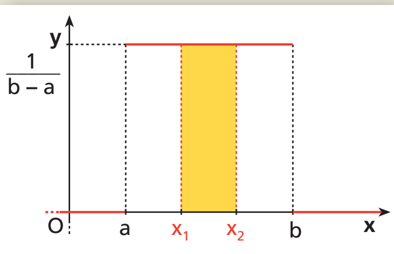


Analogamente al caso discreto possiamo parlare di **funzione di ripartizione** $\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x)}$ e di valore medio, varianza e deviazione standard.

- **La distribuzione uniforme continua**
  La variabile casuale continua X è definita in un intervallo limitato $[a; b]$; la sua funzione densità di probabilità è costante in tutti i punti dell'intervallo ed è data da:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{se } x < a \vee x > b \end{cases}$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{x_2 - x_1}{b-a}.$$



Funzione di ripartizione:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$$

Valore medio: $M(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

Varianza: $var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

- **La distribuzione normale (o di Gauss)**
  La variabile casuale continua X è definita in $\mathbb{R}$ e la sua funzione densità di probabilità, detta **gaussiana**, ha espressione:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}.$$

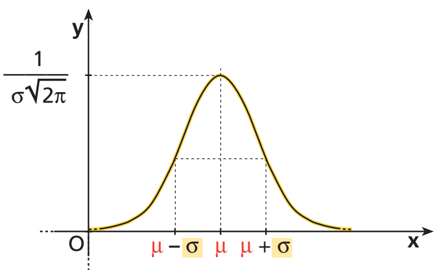
La variabile X, detta **variabile casuale normale** e indicata con $\boldsymbol{N(\mu; \sigma^2)}$, ha *valore medio* μ e *deviazione standard* σ.

$\boldsymbol{P(x_1 \leq X \leq x_2)}$ **si calcola trasformando** $\boldsymbol{X}$ **nella variabile casuale standardizzata** $\boldsymbol{Z = N(0; 1)}$, che ha funzione densità di probabilità gaussiana

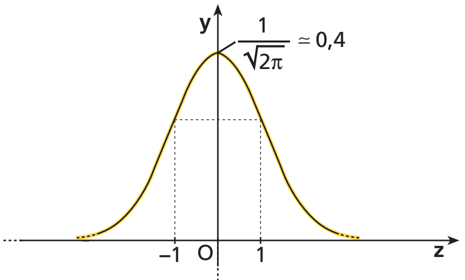
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}},$$

e utilizzando la **tavola di Sheppard**, che fornisce il valore $F(z)$ dell'area sottostante la curva $f(z)$ per valori $z \geq 0$.
Proprietà che derivano dalla simmetria della curva gaussiana:

$$\boldsymbol{P(-z < Z < 0) = P(0 < Z < z)}; \qquad \boldsymbol{P(-\infty < Z < -z) = 0{,}5 - P(0 < Z < z)}.$$



a. Grafico della gaussiana di parametri μ e σ.



b. Grafico della gaussiana standardizzata.

1. LE VARIABILI CASUALI DISCRETE E LE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

▶ Teoria a pag. σ2

1 **VERO O FALSO?**

a) Una variabile si dice discreta se assume un numero finito, o un'infinità numerabile, di valori. V F

b) Gli eventi aleatori $E_1, E_2, \ldots, E_n$ da cui dipendono i valori di una variabile casuale X possono essere compatibili fra di loro. V F

c) In una distribuzione di probabilità la somma dei singoli valori p_i deve essere uguale a 1. V F

2 **COMPLETA** la seguente tabella affinché essa rappresenti la distribuzione di probabilità della variabile casuale X.

X	2	4	6	8	10
$P(X)$	0,25	0,3	0,15	0,05	...

3 **TEST** Data la distribuzione di probabilità della variabile X:

X	-3	-2	-1	0	1
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

la probabilità che la variabile X assuma valore minore di 0 è:

A $\frac{2}{8}$. B $\frac{3}{4}$. C $\frac{1}{8}$. D $\frac{1}{4}$. E 1.

4 **ESERCIZIO GUIDA**

Vengono lanciate contemporaneamente quattro monete non regolari. La probabilità di uscita della faccia testa è $\frac{2}{3}$ e quella di uscita della faccia croce è $\frac{1}{3}$.

a) Determiniamo la distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione della variabile casuale X che esprime il numero di croci uscite.

b) Calcoliamo la probabilità che il valore della variabile casuale X non superi il valore 2.

c) Calcoliamo la probabilità che il valore della variabile casuale X superi il valore 1.

a) Il numero di volte che la faccia croce può comparire varia da 0 a 4. Le probabilità sono:

nessuna croce (e quattro teste) $$P(X=0)=\binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81};$$

una croce (e tre teste) $$P(X=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81};$$

due croci (e due teste) $$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27};$$

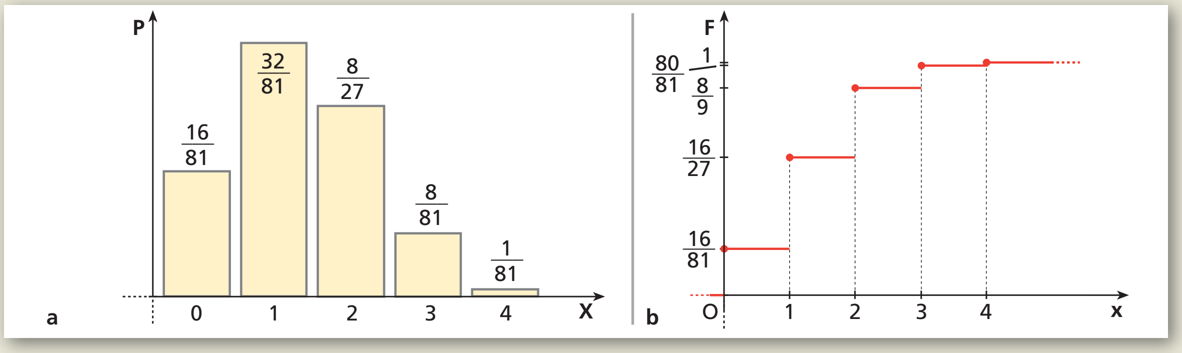
tre croci (e una testa) $$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{81};$$

quattro croci (e nessuna testa) $$P(X=4)=\binom{4}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{81}.$$

La distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione della variabile casuale X sono:

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$
$F(X)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{80}{81}$	1

Le rappresentazioni grafiche della distribuzione di probabilità e della funzione di ripartizione sono le seguenti.



b) $P(X \leq 2) = F(2) = \frac{8}{9}$.

c) $P(X > 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{16}{27} = \frac{11}{27}$.

Nei seguenti esercizi determina la distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione della variabile casuale indicata. Rappresentale graficamente.

5 Si lancia un dado regolare. Variabile casuale: $X =$ «valore della faccia del dado che è uscita».
$\left[1, 2, \dots; \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots; \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \dots\right]$

6 Si lancia tre volte una moneta regolare. Variabile casuale: $X =$ «numero delle facce testa uscito».
$\left[0, 1, \dots; \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \dots; \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \dots\right]$

7 Si lanciano contemporaneamente due dadi regolari. Variabile casuale: $X =$ «somma dei due punteggi usciti».
$\left[2, 3, 4, \dots; \frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \dots; \frac{1}{36}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \dots\right]$

8 Da un'urna contenente 4 palline nere e 5 rosse si estraggono consecutivamente senza reimmissione 4 palline. Variabile casuale: $X =$ «numero delle palline nere uscite».
$\left[0, 1, 2, \dots; \frac{5}{126}, \frac{20}{63}, \frac{10}{21}, \dots; \frac{5}{126}, \frac{15}{42}, \frac{5}{6}, \dots\right]$

9 Da un'urna contenente 2 palline nere e 1 rossa si estraggono consecutivamente, con reimmissione della pallina estratta, 4 palline. Variabile casuale: $X =$ «numero delle palline nere uscite».
$\left[0, 1, 2, \dots; \frac{1}{81}, \frac{8}{81}, \frac{8}{27}, \dots; \frac{1}{81}, \frac{1}{9}, \frac{11}{27}, \dots\right]$

10 Un'urna contiene 5 palline numerate da 1 a 5. Si estraggono contemporaneamente due palline e non si considera la pallina con il numero inferiore. Per la variabile casuale dei valori maggiori ottenuti, determina la relativa distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione. Calcola la probabilità di avere un valore minore di 5.
$\left[2, 3, \dots; \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots; \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \dots; \frac{3}{5}\right]$

11 Un'urna contiene 4 palline rosse, 2 gialle e 3 nere. Si estraggono contemporaneamente due palline. Considera la variabile casuale $X =$ «escono due palline con uguale colore», assegnando valore 1 se l'evento si verifica e valore 0 in caso contrario. Determina la distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione.
$\left[0, 1; \frac{13}{18}, \frac{5}{18}; \frac{13}{18}, 1\right]$

12 Un negozio, nel prossimo mese, ha probabilità del 30% di vendere 50 frigoriferi, del 40% di venderne 75, del 20% di venderne 90 e del 10% di venderne 100. Costruisci la distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione della variabile che indica il numero di frigoriferi che verranno venduti. Calcola la probabilità di vendere al massimo 90 frigoriferi e la probabilità di venderne almeno 75. $[50,\ 75,\ \dots; 0{,}3,\ 0{,}4,\ \dots; 0{,}3,\ 0{,}7,\ \dots; 0{,}9; 0{,}7]$

13 Preso un campione di 1000 famiglie, si rileva che la spesa media mensile per gli alimentari è la seguente: 450 famiglie spendono 600 €, 300 famiglie 700 €, 150 famiglie 850 € e 100 famiglie 1100 €.
Costruisci la distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione della variabile che indica la spesa media alimentare e qual è la probabilità che si spendano non più di 850 €.
$[600,\ 700,\ \ldots; 0,45,\ 0,3,\ \ldots; 0,45,\ 0,75,\ \ldots; 0,9]$

14 Un'urna contiene i 90 numeri del lotto. Si estrae una pallina. Considera la variabile casuale $X =$ «esce un numero multiplo di 6», assegnando valore 1 se l'evento si verifica e valore 0 in caso contrario. Determina la distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione.
$\left[0, 1; \frac{5}{6}, \frac{1}{6}; \frac{5}{6}, 1\right]$

15 Due concorrenti tirano contemporaneamente a un bersaglio. Il primo ha la probabilità di colpirlo del 90% e il secondo del 70%. Determina la distribuzione di probabilità della variabile casuale relativa a quante volte viene colpito il bersaglio.
$[0, 1, 2; 0,03,\ 0,34,\ 0,63]$

16 Two fair dice are thrown. If the scores are unequal, the larger of the two scores is recorded. If the scores are equal, then that score is recorded. Let X be the number recorded.

a) Draw up a table showing the probability distribution of X and show that

$$p(X = 3) = \frac{5}{36}.$$

b) Find the mean and the variance of X.
[b) 4.472; 1.97]

17 Una macchina produce pezzi difettosi con la probabilità del 10%. Si prendono a caso 5 pezzi. Considera la variabile casuale che indica il numero dei pezzi difettosi con la relativa distribuzione di probabilità e funzione di ripartizione. Calcola la probabilità che i pezzi difettosi siano almeno 3.
$[0, 1, 2, \ldots; 0,59049,\ 0,32805,\ \ldots; 0,59049,\ 0,91854, \ldots; 0,00856]$

18 Tre oggetti diversi devono essere collocati ognuno al proprio posto. Vengono sistemati a caso. Determina la distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione della variabile casuale che indica che nessuno è stato collocato al proprio posto, uno solo è al suo posto ecc. Calcola la probabilità che i pezzi collocati al loro posto siano almeno due.
$\left[0, 1, 3; \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{1}{6}; \frac{2}{6}, \frac{5}{6}, 1; \frac{1}{6}\right]$

19 In un portamonete ci sono 3 monete da 1 €, 4 monete da 20 centesimi e 5 monete da 10 centesimi. In un altro portamonete ci sono 4 monete da 1 € e 4 monete da 50 centesimi. Si estrae una moneta da ciascun portamonete. Determina la funzione di probabilità e la funzione di ripartizione della variabile casuale $X =$ «somma del valore delle due monete estratte».
$\left[0,60,\ 0,70,\ \ldots; \frac{20}{96}, \frac{16}{96}, \ldots; \frac{20}{96}, \frac{36}{96}, \ldots\right]$

20 Un rivenditore di benzina assegna a quattro suoi clienti un premio ciascuno. I premi si scelgono a caso, avendo a disposizione cinque ombrelli e sette cappellini. Studia la distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione della variabile casuale $X =$ «numero di ombrelli assegnati».
$\left[0, 1, \ldots; \frac{35}{495}, \frac{175}{495}, \ldots; \frac{35}{495}, \frac{210}{495}, \ldots\right]$

Operazioni sulle variabili casuali

21 **COMPLETA** Data la variabile casuale:

X	10	20	30	40
$P(X)$	0,25	0,18	0,44	0,13

completa le seguenti tabelle.

$X + 15$	25	…	…	…
$P(X)$	…	…	…	…

$\frac{1}{2}X$	5	…	…	…
$P(X)$	…	…	…	…

22 **ESERCIZIO GUIDA**

Abbiamo la seguente variabile casuale X = «numero delle giornate di assenza per malattia degli impiegati in una settimana» con la relativa distribuzione di probabilità rilevata statisticamente:

X	0	1	2	3	4	5
$P(X)$	0,49	0,18	0,12	0,1	0,09	0,02

a) Determina le distribuzioni di probabilità delle variabili $2X$, $X - 3$ e $5X + 1$.
b) Consideriamo la variabile casuale Y = «numero delle giornate di assenza degli impiegati per motivi diversi dalla malattia» avente distribuzione di probabilità:

Y	0	1	2
$P(Y)$	0,9	0,08	0,02

Determina la distribuzione di probabilità della somma $X + Y$ nel caso in cui le variabili X e Y siano indipendenti.

a) La variabile casuale $2X$ ha i valori di X moltiplicati per 2 e le stesse probabilità:

$2X$	0	2	4	6	8	10
$P(2X)$	0,49	0,18	0,12	0,1	0,09	0,02

La variabile casuale $X - 3$ ha i valori di X sommati alla costante -3 e la stessa distribuzione delle probabilità:

$X - 3$	-3	-2	-1	0	1	2
$P(X - 3)$	0,49	0,18	0,12	0,1	0,09	0,02

La variabile casuale $5X + 1$ ha i valori di X moltiplicati per 5 e sommati a 1; le probabilità non cambiano:

$5X + 1$	1	6	11	16	21	26
$P(5X+1)$	0,49	0,18	0,12	0,1	0,09	0,02

b) Costruiamo la tabella delle probabilità congiunte. Le probabilità marginali coincidono rispettivamente con le probabilità di X e Y.
Poiché le variabili sono indipendenti, ogni probabilità congiunta è il prodotto delle probabilità marginali:

X \ Y	0	1	2	$P(X)$
0	0,441	0,0392	0,0098	0,49
1	0,162	0,0144	0,0036	0,18
2	0,108	0,0096	0,0024	0,12
3	0,09	0,008	0,002	0,1
4	0,081	0,0072	0,0018	0,09
5	0,018	0,0016	0,0004	0,02
$P(Y)$	0,9	0,08	0,02	1

e la variabile casuale $X + Y$ ha la seguente distribuzione di probabilità:

$X + Y$	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X+Y)$	0,441	0,2012	0,1322	0,1032	0,0914	0,0272	0,0034	0,0004

Data la variabile X, avente la seguente distribuzione di probabilità:

X	1	2	5	8	9	12
$P(X)$	0,42	0,08	0,15	0,02	0,23	0,1

determina le distribuzioni di probabilità delle variabili indicate.

23 a) $4X$, b) $X + 6$, c) $X - 2$.

24 a) $3X + 8$, b) $-2X + 1$, c) $4X + 2$.

25 Date le variabili casuali indipendenti X e Y aventi ripettivamente le seguenti distribuzioni di probabilità:

X	2	3	4
$P(X)$	0,2	0,3	0,5

Y	1	2	3	5
$P(Y)$	0,1	0,2	0,4	0,3

costruisci la tabella delle probabilità congiunte e quindi la distribuzione di probabilità della variabile casuale $X + Y$.

[3, 4, …, 9; 0,02, 0,07, …, 0,15]

26 **COMPLETA** la seguente tabella determinando le probabilità congiunte, sapendo che le variabili X e Y sono indipendenti:

$X \backslash Y$	2	3	6	$P(X)$
3				0,3
4				0,6
5				0,1
$P(Y)$	0,2	0,1	0,7	1

Determina la distribuzione di probabilità della variabile casuale $X + Y$.

[5, 6, …, 11; 0,06, 0,15, …, 0,07]

27 **COMPLETA** la seguente tabella delle probabilità congiunte:

$X \backslash Y$	0	1	4	$P(X)$
1	0,35	0,1	0,05	
2	0,21	0,06	0,03	
3	0,14	0,04	0,02	
$P(Y)$				1

Stabilisci se X e Y sono indipendenti e determina la distribuzione di probabilità della loro somma.

[indip.; 1, 2, …, 7; 0,35, 0,31, …, 0,02]

28 Un commerciante vende detersivi di tipo A e di tipo B. Indichiamo con X la variabile casuale che esprime la quantità (in kg) del detersivo di tipo A che venderà durante la prossima settimana e con Y la quantità (in kg) del detersivo di tipo B. Le due variabili hanno le seguenti distribuzioni:

X	75	100	150	200
$P(X)$	0,35	0,40	0,20	0,05

Y	20	30	40
$P(Y)$	0,45	0,30	0,25

Costruisci la distribuzione di probabilità della variabile casuale $X + Y$ e stabilisci quali quantità (in kg) dei due detersivi il commerciante ha maggiore probabilità di vendere contemporaneamente, tenendo presente che la vendita di un detersivo non influenza quella dell'altro.

[95, 105, 115, …; 0,1575, 0,105, 0,0875, …; $X = 100$, $Y = 20$]

29 Una ditta produce pantaloni e gonne. Indichiamo con X la variabile casuale che esprime il guadagno, in migliaia di euro, che la ditta avrà dalla vendita di pantaloni nel prossimo mese e con Y la variabile che esprime il guadagno dalla vendita di gonne.
Le due variabili hanno le seguenti distribuzioni:

X	4000	5000	6000
$P(X)$	0,50	0,30	0,20

Y	1750	2500	2900
$P(Y)$	0,48	0,37	0,15

Costruisci la distribuzione di probabilità della variabile casuale $X+Y$, che esprime il guadagno che si avrà dalla vendita di pantaloni e gonne nel prossimo mese, supponendo che la vendita degli uni non influenzi la vendita delle altre. Costruisci anche la funzione di ripartizione della variabile $X+Y$ e stabilisci qual è la probabilità di guadagnare, dalla vendita di entrambi i capi di abbigliamento, almeno 7500 euro.

[5750, 6500, 6750, ...; 0,24, 0,185, 0,144, ...; 0,24, 0,425, 0,569, ...; 0,356]

2. I GIOCHI ALEATORI

Teoria a pag. σ9

30 **TEST** Un giocatore partecipa a un gioco in cui viene estratta una pedina numerata da un sacchetto che ne contiene 90 (numerate da 1 a 90). Se esce un numero minore di 50 vince 5 euro, se esce un numero maggiore di 80 vince 15 euro, in tutti gli altri casi deve pagare una somma. La somma che deve pagare affinché il gioco sia equo è:

A 50 euro. B 4 euro. C 20 euro. D 10 euro. E 12,74 euro.

31 **ESERCIZIO GUIDA**

Un'urna contiene 4 palline nere e 6 verdi. Il giocatore A estrae consecutivamente due palline rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna. Se esse hanno colore uguale, vince 9 euro, altrimenti paga a B la sua posta. Calcoliamo la posta che A deve pagare, in caso di gioco equo.

La probabilità di vincita di A è $\frac{13}{25}$, quella di perdita è $\frac{12}{25}$ e conosciamo la posta di B che è 9 euro.

Impostiamo la seguente proporzione fra le poste dei due giocatori e le rispettive probabilità di vincita:

$$S_A : 9 = \frac{13}{25} : \frac{12}{25} \quad \rightarrow \quad S_A = \frac{9 \cdot \frac{13}{25}}{\frac{12}{25}} = 9,75.$$

Otteniamo lo stesso risultato impostando la seguente equazione ottenuta uguagliando a 0 la speranza matematica.

$$9 \cdot \frac{13}{25} - S_A \cdot \frac{12}{25} = 0 \quad \rightarrow \quad S_A = 9,75.$$

32 **ESERCIZIO GUIDA**

Un giocatore partecipa a un gioco organizzato e paga un prezzo di 4 euro. Il gioco consiste nell'estrarre consecutivamente senza reimmissione due carte da un mazzo di 40: se sono due figure dello stesso seme, il giocatore vince 45 euro, mentre se hanno lo stesso valore vince 17 euro.

a) Verifichiamo che il gioco non è equo e determiniamo la posta corretta affinché lo sia.
b) Lasciando immutata la posta modifichiamo la prima vincita affinché il gioco sia equo.

a) I valori delle due probabilità sono: $\frac{2}{130}$ e $\frac{10}{130}$. Calcoliamo il valore della posta in caso di gioco equo applicando la relazione della speranza matematica delle vincite lorde:

$$P = 45 \cdot \frac{2}{130} + 17 \cdot \frac{10}{130} = 2.$$

Essendo il prezzo inferiore alla posta richiesta, il gioco è sfavorevole.

b) Per rispondere al secondo quesito impostiamo la seguente equazione, sempre relativa alla speranza matematica della vincita lorda:

$$x \cdot \frac{2}{130} + 17 \cdot \frac{10}{130} = 4, \qquad \text{da cui} \qquad x = 175.$$

33 Si partecipa a un gioco estraendo contemporaneamente tre carte da un mazzo di 52 carte. Se le carte estratte sono dello stesso seme, viene corrisposta la somma di 78 euro. Determina la posta da pagare affinché il gioco sia equo. [4,26 euro circa]

34 Per partecipare a un gioco si pagano 20 euro. Si vince se vengono estratte contemporaneamente tre palline di colore uguale da un'urna che ne contiene 7 bianche e 3 nere. Calcola la somma corrisposta in caso di vincita se il gioco è equo. [66,67 euro circa]

35 Determina quale posta, in caso di gioco equo, deve pagare un giocatore al banco se estraendo un numero, tra i 90 del lotto, vince 50 euro quando esso è dispari o multiplo di 10. [30 euro]

36 Un giocatore punta 40 euro e vince se, estraendo un numero tra i 90 del lotto, esce un numero dispari o multiplo di 3. Calcola il guadagno in caso di vincita se il gioco è equo. [20 euro]

37 In un gioco di carte il piatto è di 60 euro. Il giocatore A vince se, estraendo una carta da un mazzo di 40 carte, essa è una figura o un sette; in caso contrario, vince il giocatore B. Determina le poste dei due giocatori A e B quando il gioco è equo. [A: 24 euro; B: 36 euro]

38 Si hanno due urne. La prima contiene 10 palline bianche e 5 rosse, mentre la seconda 5 palline bianche e 20 rosse. Si vincono 30 euro se si estrae una pallina rossa da entrambe le urne e 10 euro se hanno colore diverso. Calcola l'importo che si deve pagare per poter partecipare al gioco, che si suppone equo. [14 euro]

39 Si lanciano due dadi e si vincono 30 euro se escono due numeri uguali, altrimenti si pagano 8 euro. Stabilisci se il gioco è equo. [no; si dovrebbero pagare 6 euro]

40 Un giocatore estrae contemporaneamente 2 palline da un'urna che ne contiene 13 bianche e 5 rosse e guadagna 44 euro se sono di colore diverso. Se il gioco è equo, determina la posta che dovrà pagare in caso di perdita al gioco. [32,5 euro]

41 Un'urna contiene 9 palline rosse, 5 bianche e 6 nere. Un giocatore vince 5 euro se esce una pallina nera, 10 euro se esce una pallina bianca e perde 12 euro se esce una pallina rossa. Verifica che il gioco non è equo e determina quale dovrebbe essere la seconda vincita affinché il gioco sia equo. [15,6 euro]

42 Al gioco del lotto lo Stato paga 250 volte la posta per un ambo, 4250 volte la posta per un terno, 80 000 volte la posta per una quaterna e 1 000 000 di volte la posta per una cinquina. Dopo aver verificato che il gioco non è equo, ma favorevole allo Stato, determina quante volte lo Stato dovrebbe pagare la posta in caso di gioco equo. [400,5; 11 748; 511 038; 43 949 268]

43 La merce di un magazzino viene assicurata contro il furto. La merce è valutata 40 000 euro e il rischio di furto è valutato del 2%. Per effettuare l'assicurazione viene richiesto il pagamento di un premio di 1000 euro. Considera l'assicurazione come un gioco equo e l'assicurato come un giocatore che partecipa a un gioco; calcola quale dovrebbe essere il premio che si dovrebbe pagare. [800 euro]

3. I VALORI CARATTERIZZANTI UNA VARIABILE CASUALE DISCRETA

Teoria a pag. σ11

Il valore medio, la varianza, la deviazione standard

44 **VERO O FALSO?**

a) Il valore medio permette di fare una previsione teorica sul risultato di un esperimento aleatorio. V F

b) Il valore medio coincide sempre con uno dei valori assunti dalla variabile X. V F

c) La varianza è un valore che indica il grado di dispersione dei valori di una variabile X rispetto al suo valore medio. V F

d) Date due variabili X e Y con uguale valore medio, ha valori più vicini al valore medio quella con varianza maggiore. V F

e) Il valore medio della variabile scarto è sempre uguale a 0. V F

45 **TEST** In una classe di 24 alunni si calcola la frequenza delle assenze relative al mese di novembre e si arriva alla seguente tabella.

N. assenze	0	1	2	3
N. alunni	13	5	4	2

Se consideriamo la variabile casuale X = «n. di giorni di assenza», il suo valore medio è dato da:

A 6,5. B 2,5. C 0,79. D 0. E 1,5.

46 **TEST** La varianza della variabile dell'esercizio precedente è uguale a:

A 0,79.

B 0,998.

C 1.

D 4,2243.

E 0,0011.

47 **ESERCIZIO GUIDA**

Un'urna contiene 5 palline che portano i numeri 1, 2, 3, 6 e 7. Estraiamo consecutivamente due palline senza rimettere nell'urna la pallina estratta per prima, e consideriamo come variabile casuale X il valore minore dei due numeri estratti. Calcoliamo il valore medio, la varianza e la deviazione standard di X.

La distribuzione di probabilità della variabile casuale X è la seguente:

X	1	2	3	6
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

Il valore medio di X è:

$$M(X) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 6 \cdot \frac{1}{10} = \frac{11}{5} = 2{,}2.$$

Per determinare la varianza, consideriamo la variabile casuale degli scarti dalla media:

$[X - M(X)]$	$-1{,}2$	$-0{,}2$	$0{,}8$	$3{,}8$
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

Il valore medio di $[X - M(X)]$ è nullo:

$$M[X - M(X)] = -1{,}2 \cdot \frac{2}{5} - 0{,}2 \cdot \frac{3}{10} + 0{,}8 \cdot \frac{1}{5} + 3{,}8 \cdot \frac{1}{10} = 0.$$

Consideriamo poi la variabile casuale dei quadrati degli scarti:

$[X - M(X)]^2$	1,44	0,04	0,64	14,44
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

Il valore medio dei quadrati degli scarti è la varianza di X:

$$var(X) = 1{,}44 \cdot \frac{2}{5} + 0{,}04 \cdot \frac{3}{10} + 0{,}64 \cdot \frac{1}{5} + 14{,}44 \cdot \frac{1}{10} = 2{,}16;$$

dalla varianza si ottiene la deviazione standard:

$$\sigma(X) = \sqrt{var(X)} = \sqrt{2{,}16} \simeq 1{,}47.$$

La variabile casuale considerata è caratterizzata dal valore di sintesi $\mu = 2{,}2$ e dal valore di dispersione $\sigma^2 = 2{,}16$.
I calcoli per determinare i due valori caratteristici della variabile casuale possono essere esposti nella tabella seguente:

	x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i - \mu$	$(x_i - \mu)^2$	$(x_i - \mu)^2 p_i$
	1	0,4	0,40	−1,20	1,44	0,576
	2	0,3	0,60	−0,20	0,04	0,012
	3	0,2	0,60	0,80	0,64	0,128
	6	0,1	0,60	3,80	14,44	1,444
Σ			2,20			2,16

48 Una macchina produce pezzi difettosi secondo la seguente distribuzione di probabilità:

Pezzi difettosi	10	20	30	40	50
Probabilità	0,4	0,3	0,2	0,05	0,05

Determina il numero medio dei pezzi difettosi, la deviazione standard e la probabilità che la macchina produca non più di 20 pezzi difettosi. [20,5; 11,17 circa; 0,7]

49 Le vendite di un prodotto espresse in kg sono previste secondo la seguente distribuzione di probabilità:

Quantità venduta (kg)	60	80	100	120
Probabilità	0,2	0,3	0,35	0,15

Determina la quantità media, in kilogrammi, che si prevede di vendere e la deviazione standard. [89; 19,47]

50 Un'operazione finanziaria in Borsa può permettere i seguenti guadagni con le relative probabilità:

Guadagno (euro)	3000	6000	9000	−2000	−1500
Probabilità	0,3	0,25	0,1	0,25	0,1

Calcola il valore medio dei guadagni e la deviazione standard. [2650; 3741,99]

51 In un'impresa i dipendenti hanno la facoltà di entrare con una flessibilità oraria di mezz'ora. Una rilevazione statistica ha mostrato la seguente distribuzione di probabilità:

Numero minuti	5	10	15	20	25	30
Probabilità	$\frac{2}{25}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{5}$

Determina il tempo medio e la deviazione standard. $[18,2; 7,795]$

52 Data la distribuzione di probabilità della variabile casuale X:

X	2	4	6	8	10	12
P	0,05	0,10	0,15	0,30	0,25	0,15

determina il valore medio e la varianza.
Calcola quale valore deve assumere la variabile casuale X al posto di 12 affinché il valore medio sia 9.
Calcola, con il nuovo valore determinato, la varianza. $[8,1; 7,39; 18; 19]$

Per ognuno dei seguenti esercizi determina il valore medio μ e la deviazione standard σ che caratterizzano la variabile casuale.

53 Si lancia un dado regolare. Variabile casuale: $X =$ «valore della faccia del dado che è uscita». $[3,5; 1,708]$

54 Si lancia tre volte una moneta regolare. Variabile casuale: $X =$ «numero delle facce testa uscito». $[1,5; 0,866]$

55 Si lanciano contemporaneamente due dadi regolari. Variabile casuale: $X =$ «somma dei due punteggi usciti». $[7; 2,415]$

56 In una lista di candidati all'elezione nel consiglio di istituto di una scuola ci sono cinque ragazzi aventi le seguenti età: uno di 14 anni, uno di 15, uno di 16, uno di 17, uno di 18. Per scegliere il capolista, si estraggono contemporaneamente due nomi, ma si tiene conto solo di quello con età maggiore. Variabile casuale: $X =$ «età maggiore ottenuta». $[17; 1]$

57 In una classe ci sono 13 maschi e 15 femmine. Si estraggono a caso e contemporaneamente i nomi di due ragazzi. Variabile casuale: $X =$ «X ha valore 1 se escono due femmine e valore 0 in caso contrario». $[0,278; 0,4478]$

58 Da un controllo sulle magliette prodotte da un'azienda, risulta che il 2% delle magliette contiene due difetti, il 3,5% un solo difetto e le rimanenti nessun difetto. Variabile casuale: $X =$ «numero di difetti». $[0,075; 0,331]$

59 Un'urna contiene i 90 numeri del lotto. Si estrae una pallina. Variabile casuale: X ha valore 1 se «esce un numero multiplo di 8» e valore 0 in caso contrario. $[0,122; 0,328]$

60 In una classe 10 alunni sono figli unici, 4 hanno un fratello, 4 hanno due fratelli e 2 hanno tre fratelli. Variabile casuale: $X =$ «numero dei fratelli». $[0,9; 1,044]$

61 Un'urna contiene 24 palline di cui 12 con il numero uno, 6 con il numero due, 3 con il numero tre, 2 con il numero quattro e 1 con il numero cinque. Variabile casuale: $X =$ «numero della pallina estratta». $[1,917; 1,152]$

62 Al supermercato una confezione di pasta di tre marche diverse costa € 0,50, € 0,80, € 1,10 e una bottiglia di olio di quattro marche diverse costa € 2,80, € 3,10, € 3,40, € 4,10. Si acquistano una scatola di pasta e una bottiglia di olio. Variabile casuale: $X =$ «somma spesa». $[4,15; 0,541]$

63 Due concorrenti tirano contemporaneamente a un bersaglio. Il primo ha la probabilità di colpirlo del 95% e il secondo del 70%. Variabile casuale: $X =$ «numero delle volte in cui il bersaglio viene colpito». $[1,65; 0,507]$

Le proprietà del valore medio e della varianza

64 **VERO O FALSO?** Essendo X e Y variabili casuali discrete e k una costante:

a) $var(k \cdot X) = k \cdot var(X)$. V F

b) $var(X + k) = var(X)$. V F

c) $var(X + Y) = var(X) + var(Y)$ sempre. V F

65 **TEST** Date due variabili casuali indipendenti X e Y, se $M(X) = 1{,}2$ e $M(Y) = 0{,}8$, allora $M(X + Y)$ vale:

A 0,12. B 3,4. C 0,4. D 0,96. E 2,0.

66 **ESERCIZIO GUIDA**

Consideriamo due variabili casuali X e Y aventi rispettivamente distribuzione di probabilità:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,45	0,22	0,13	0,1	0,07	0,03

Y	1	2	3
P	0,6	0,21	0,19

Calcoliamo il valore medio e la varianza delle seguenti variabili casuali:

a) $3X$, $Y - 4$ e $3Y + 5$;
b) $X + Y$, sapendo che le due variabili sono indipendenti.

La variabile casuale X ha valore medio $\mu_X = 1{,}21$ e varianza $\sigma^2{}_X \simeq 2{,}05$.
La variabile casuale Y ha valore medio $\mu_Y = 1{,}59$ e varianza $\sigma^2{}_Y \simeq 0{,}62$.

a) $3X$ → valore medio: $\mu = 3 \cdot \mu_X = 3 \cdot 1{,}21 = 3{,}63$;
varianza: $\sigma^2 = 3^2 \cdot \sigma^2{}_X \simeq 9 \cdot 2{,}05 = 18{,}45$.

$Y - 4$ → valore medio: $\mu = \mu_Y - 4 = 1{,}59 - 4 = -2{,}41$;
varianza: $\sigma^2 = \sigma^2{}_Y \simeq 0{,}62$.

$3Y + 5$ → valore medio: $\mu = 3 \cdot \mu_Y + 5 = 3 \cdot 1{,}59 + 5 = 9{,}77$;
varianza: $\sigma^2 = 3^2 \cdot \sigma^2{}_Y \simeq 9 \cdot 0{,}62 = 5{,}58$.

b) Poiché le variabili casuali sono indipendenti, abbiamo:

$\mu = \mu_X + \mu_Y = 1{,}21 + 1{,}59 = 2{,}8$ (valore medio);
$\sigma^2 = \sigma^2{}_X + \sigma^2{}_Y \simeq 2{,}05 + 0{,}62 = 2{,}67$ (varianza).

67 **ESERCIZIO GUIDA**

Date due variabili casuali dipendenti X e Y aventi le probabilità congiunte indicate a fianco, calcoliamo sia il valore medio e la varianza della somma $X + Y$, sia la covarianza di X e Y.

X \ Y	3	4	7	9
3	0	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{5}{132}$
4	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{33}$	$\frac{5}{33}$
7	$\frac{1}{66}$	$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{5}{66}$
9	$\frac{5}{132}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{5}{33}$

Le probabilità relative ai valori delle variabili casuali X e Y sono date dalle probabilità marginali.
Osserviamo che le due variabili hanno la stessa distribuzione di probabilità.
Il valore medio e la varianza delle due variabili sono: $\mu_X = \mu_Y = 6{,}5$ e $\sigma^2{}_X = \sigma^2{}_Y = 5{,}75$.

In questo caso il valore medio di $X + Y$ è ancora uguale alla somma dei valori medi di X e Y:

$$\mu = \mu_X + \mu_Y = 6{,}5 + 6{,}5 = 13.$$

Per determinare la varianza, invece, dobbiamo applicare la definizione e quindi determinare la distribuzione di probabilità di $X + Y$.

La distribuzione di probabilità che si ottiene è:

$X+Y$	6	7	8	10	11	12	13	14	16	18
P	0	$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{4}{33}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{10}{33}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{5}{33}$

Applicando la definizione, otteniamo che la varianza di $X + Y$ è $\sigma^2 = 10{,}\overline{45}$.
La covarianza $cov(X, Y)$ è la semidifferenza tra la varianza di $X + Y$ e la somma delle varianze delle due variabili casuali X e Y:

$$cov(X, Y) = \frac{10{,}\overline{45} - (5{,}75 + 5{,}75)}{2} = -0{,}52\overline{27}.$$

Possiamo ottenere questo valore anche direttamente, calcolando:

- gli scarti dei valori della variabile X;
- gli scarti dei valori della variabile Y;
- la somma dei prodotti degli scarti per le rispettive probabilità congiunte.

Nella tabella seguente sono esposti i calcoli effettuati:

$X-\mu_X$ \ $Y-\mu_Y$	$-3{,}5$	$-2{,}5$	$0{,}5$	$2{,}5$	Σ
$-3{,}5$	0	0,2652	−0,0265	−0,3314	−0,0927
$-2{,}5$	0,2652	0,5682	−0,0758	−0,9470	−0,1894
$0{,}5$	−0,0265	−0,0758	0,0038	0,0947	−0,0038
$2{,}5$	−0,3314	−0,9470	0,0947	0,9470	−0,2367
Σ	−0,0927	−0,1894	−0,0038	−0,2367	−0,5226

68 Data la distribuzione di probabilità di una variabile casuale X:

X	-4	-2	5	8	10
P	0,25	0,10	0,20	0,15	0,30

calcola il valore medio e la varianza delle variabili casuali $X_1 = 2X$ e $X_2 = 2X + 8$. [8, 132; 16, 132]

69 Calcola il valore medio e la varianza della variabile casuale X avente la seguente distribuzione di probabilità:

X	4	6	11	18	25
P	0,25	0,10	0,20	0,15	0,30

e determina, applicando le relative proprietà, il valore medio e la varianza delle seguenti variabili casuali aventi la stessa distribuzione di probabilità.

a)

Y	0	2	7	14	21

b)

T	0	4	14	28	42

c)

W	2	3	5,5	9	12,5

[a) 10; 71,9; b) 20; 287,6; c) 7; 17,975]

70 Determina il valore medio e la varianza delle variabili casuali considerate negli esercizi 17, 18, 19 e 20.

71 Un'urna contiene 5 palline con il numero due, 3 palline con l'otto e 2 con il venti. Dopo aver costruito la variabile casuale X = «numero della pallina che si ottiene dopo un'estrazione», calcola il valore medio e la varianza delle variabili casuali X e $X + X$ = «somma dei numeri di due palline estratte consecutivamente *con* reimmissione della prima estratta nell'urna». [7,4; 46,44; 14,8; 92,88]

72 **COMPLETA** la seguente tabella delle probabilità congiunte e marginali di due variabili casuali X e Y.

X \ Y	1	2	3	5	$P(X)$
2	0,01	0,03	0,07	0,09	
3	0,02	0,07	0,03	0,18	
4	0,07	0,10	0,30	0,03	
$P(Y)$					1

Determina la distribuzione di probabilità della variabile casuale $X + Y$. Verifica che X e Y sono dipendenti.
Calcola i valori medi e le varianze di X, Y e $X + Y$.
Determina la covarianza di X e Y in due modi diversi.

[3, 4, …, 9; 0,01, 0,05, …, 0,03; 3,3, 0,61; 3,2, 1,76; 6,5, 1,63; − 0,37]

73 **COMPLETA** la seguente tabella delle probabilità congiunte e marginali di due variabili casuali X e Y.

X \ Y	0	1	2	$P(X)$
0	0,45	0,03	0,01	
1	0,16	0,015	0,005	
2	0,11	0,008	0,002	
3	0,08	0,018	0,002	
4	0,0812	0,008	0,0008	
5	0,0188	0,001	0,0002	
$P(Y)$				1

Stabilisci se le variabili sono dipendenti.
Calcola il valore medio e la varianza di X, Y e $X + Y$. Calcola la covarianza di X e Y.

[dipendenti; 1,18, 2,1076; 0,12, 0,1456; 1,3, 2,2908; 0,0188]

4. LE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ DI USO FREQUENTE

▶ Teoria a pag. σ15

IN PRATICA ▶ Videolezione 85

74 **TEST** Nel laboratorio linguistico di una scuola vi sono 24 postazioni che funzionano in modo indipendente. La probabilità che un apparecchio audio si guasti in un mese è del 12,5%. In media, gli apparecchi che si guastano in un mese sono:

A 0. B 20,5. C 3. D 1,2. E 12,5.

75 **VERO O FALSO?**

a) In una distribuzione uniforme e discreta i valori di X hanno probabilità crescenti. V F

b) Una variabile casuale bernoulliana di parametri n e p descrive i risultati di n prove indipendenti di un evento con probabilità costante p. V F

c) Il grafico della distribuzione binomiale ha un massimo per un numero di prove pari al suo valore medio np o al numero intero più vicino. V F

d) Nella distribuzione di Poisson la variabile casuale X assume sempre un numero limitato di valori. V F

e) Per calcolare le probabilità della distribuzione binomiale, si può sempre utilizzare la distribuzione di Poisson. V F

76 **ESERCIZIO GUIDA**

Un'urna contiene 30 palline numerate da 1 a 30. Consideriamo le seguenti variabili casuali:

a) resto della divisione tra il numero presente sulla pallina estratta e il numero 6;

b) numero di volte in cui può uscire, effettuando 4 estrazioni nelle stesse condizioni, una pallina con un numero divisibile per 3;

c) numero delle volte in cui può uscire, effettuando 4 estrazioni nelle stesse condizioni, la pallina con il numero 1.

Determiniamo per ogni variabile casuale la distribuzione di probabilità, la funzione di ripartizione, il valore medio, la varianza e la deviazione standard.
Per la variabile casuale b) determiniamo la probabilità di ottenere almeno 2 successi.

a) I possibili resti della divisione con divisore 6 sono 0, 1, 2, 3, 4, 5 e ognuno di questi valori ha probabilità costante di verificarsi pari a $p = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$. Infatti i numeri sulle palline che divisi per 6 danno resto 1 sono: 1, 7, 13, 19, 25; i numeri che divisi per 6 danno resto 2 sono: 2, 8, 14, 20, 26; e così via.

Abbiamo una **distribuzione uniforme**

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
F	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1

con i seguenti valori di sintesi per la variabile casuale X:

$$\mu = \frac{0+1+2+3+4+5}{6} = \frac{15}{6} = 2,5;$$

$$\sigma^2 = \frac{(0-2,5)^2+(1-2,5)^2+(2-2,5)^2+(3-2,5)^2+(4-2,5)^2+(5-2,5)^2}{6} = \frac{17,5}{6} = 2,91\overline{6};$$

$$\sigma = \sqrt{2,91\overline{6}} \simeq 1,708.$$

b) È il caso della **distribuzione binomiale** (o **di Bernoulli**).

La probabilità di estrarre un numero divisibile per 3 è $p = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ e pertanto $q = \frac{2}{3}$. La legge che determina la distribuzione di probabilità è $P(X = x) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x}$. Sostituendo a x i valori 0, 1, 2, 3, 4, numero delle possibili volte che in quattro estrazioni può uscire un numero divisibile per 3, otteniamo:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$
F	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{80}{81}$	1

Abbiamo: $\mu = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = 1,\overline{3}$, $\sigma^2 = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9} = 0,\overline{8}$, $\sigma = \sqrt{\frac{8}{9}} \simeq 0,943$.

Inoltre: $P(X \geq 2) = 1 - F(1) = 1 - \frac{16}{27} = \frac{11}{27}$.

c) Anche in questo caso la variabile casuale assume i valori 0, 1, 2, 3, 4, ma essendo piccolo il valore della probabilità dell'evento $p = \frac{1}{30}$, è opportuno utilizzare la **distribuzione di Poisson**.

Occorre porre $\lambda = 4 \cdot \frac{1}{30} = \frac{2}{15}$; la distribuzione di probabilità è quindi $P(X = x) = \frac{\left(\frac{2}{15}\right)^x}{x!} \cdot e^{-\frac{2}{15}}$.
Otteniamo

X	0	1	2	3	4
P	0,875173	0,116690	0,007779	0,000346	0,000012
F	0,875173	0,991863	0,999642	0,999988	1

e: $\mu = \sigma^2 = \lambda = \frac{2}{15}$, $\sigma = \sqrt{\frac{2}{15}} \simeq 0,365$.

77 Viene lanciato un dado regolare. Determina la distribuzione di probabilità della variabile casuale X = «valore della faccia» e calcola il valore medio, la varianza e la deviazione standard. Determina la probabilità di ottenere un numero inferiore a 4.
[3,5; 2,917; 1,708; 0,5]

78 Si è rilevato che, lanciando un dado non regolare per 50 volte, la faccia 6 si è presentata solo 2 volte. Si effettuano 7 lanci. Determina la distribuzione di probabilità della variabile casuale X = «numero delle volte di uscita della faccia 6» e calcola il valore medio, la varianza e la deviazione standard.
[Bernoulli: 0,28; 0,27; 0,518]

79 Supponendo equiprobabile la nascita di un maschio e di una femmina, considera la variabile casuale X = «numero dei figli maschi» in famiglie aventi quattro figli. Calcola il valore medio, la varianza, la deviazione standard e la probabilità che in una famiglia vi sia almeno un figlio maschio. [2; 1; 1; 0,9375]

80 Un tiratore scelto ha la probabilità di colpire un bersaglio del 98%. A una gara spara 8 colpi. Considera la variabile casuale X = «numero dei centri effettuati» e calcola il valore medio, la varianza, la deviazione standard e la probabilità di colpire sempre il bersaglio. [7,84; 0,1568; 0,3959; 0,8508]

81 Da un'analisi di mercato è risultato che il 32% della popolazione usa il prodotto A. In un gruppo di 12 persone considera la variabile casuale X = «numero di persone che usa il prodotto A» e determina il valore medio, la varianza e la deviazione standard. Calcola la probabilità che le persone che usano detto prodotto sia un numero compreso tra 2 e 5. [3,84; 2,611; 1,616; 0,783]

82 Un settore di un'impresa di materiale elettrico produce fusibili e, su un campione di 100 elementi, 8 si sono rivelati difettosi. I fusibili vengono venduti in confezioni di 50. Calcola il valore medio, la varianza e la deviazione standard della variabile casuale X = «numero di fusibili difettosi in una confezione». Determina la probabilità che vi siano al massimo due fusibili difettosi. [4; 3,68; 1,918; 0,226]

83 Un evento ha la probabilità di verificarsi del 2%. Si effettuano 6 prove nelle stesse condizioni. Considera la variabile casuale X = «numero delle volte in cui l'evento si è verificato» e, dopo aver calcolato il valore medio, la varianza e la deviazione standard, determina la probabilità che detto evento non si verifichi mai. [Poisson: 0,12; 0,12; 0,346; 0,887]

84 Un esame di laboratorio, effettuato su 200 campioni, fornisce un risultato non attendibile nell'1% dei casi. Considera la variabile casuale X = «numero dei risultati non corretti» e determina il numero medio degli esami con risultato non corretto, la varianza e la deviazione standard. Calcola la probabilità che il risultato non sia corretto per non più del numero medio determinato. [Bernoulli: 2; 1,98; 1,407; 0,677]

85 Risolvi l'esercizio precedente assumendo che la probabilità sia dello 0,01% e il numero dei casi esaminati sia 20 000. [2; 2; 1,414; 0,677]

86 Si lancia un dado regolare 6 volte. Determina la distribuzione di probabilità della variabile casuale X = «numero delle volte di uscita di una faccia con un numero dispari» e calcola il valore medio, la varianza, la deviazione standard. Rappresenta graficamente la distribuzione e calcola la probabilità che un numero dispari si presenti al massimo 4 volte. [3; 1,5; 1,225; 0,89]

87 Le pile di una certa marca hanno la probabilità del 60% di superare 2000 ore. Un negozio compra 400 pile di tale marca. Calcola il valore medio, la varianza e la deviazione standard della variabile casuale X = «numero delle pile che potrebbero superare le 2000 ore».

Determina la probabilità che tutte le pile superino le 2000 ore. [240; 96; 9,798; $1,8 \cdot 10^{-89}$]

88 Un'agenzia di una compagnia di assicurazione ha rilevato che, su 300 assicurati nel corso dell'anno precedente, 120 hanno denunciato un sinistro. Nel primo mese dell'anno nuovo si sono avuti 25 nuovi assicurati. Considera la variabile casuale X = «numero dei nuovi assicurati che denunceranno un sinistro» e calcola il valore medio, la varianza e la deviazione standard. Calcola la probabilità che al massimo 4 dei nuovi assicurati denuncino un sinistro. [10; 6; 2,449; 0,0095]

89 Da una statistica è risultato che lo 0,32% della popolazione possiede un terrario con rettili. In un gruppo di 12 persone, studia la variabile casuale X = «numero delle persone che hanno rettili in casa» e determina il valore medio, la varianza e la deviazione standard. Calcola la probabilità che il numero dei proprietari di un rettile sia compreso tra 2 e 5. [0,0384; 0,0384; 0,1960; 0,0007]

90 Un produttore di bulbi garantisce la fioritura al 90% avendo constatato sperimentalmente che il 5% di essi non germoglia. I bulbi che pone in commercio sono confezionati in scatole da 40 unità. Considera la variabile casuale X = «numero dei bulbi non fioriti» e determina il valore medio, la varianza, la deviazione standard e la probabilità che una confezione non raggiunga il livello garantito. [binomiale: 2; 1,9; 1,378; 0,048; Poisson: 2; 2; 1,414; 0,0527]

91 In una classe di 25 alunni, in una settimana vi sono stati 9 alunni assenti. Considera la variabile casuale $X =$ «numero di alunni assenti in un certo giorno» e calcola il numero medio di alunni assenti per giorno, la varianza e la deviazione standard. Calcola la probabilità che in un certo giorno vi siano 4 alunni assenti.
$[1,5; 1,5; 1,225; 0,047]$

92 A un Pronto Soccorso, nel corso di 24 ore, arrivano 60 urgenze. Calcola il numero medio di urgenze che si presentano ogni ora, la varianza e la probabilità che in una stessa ora arrivino 4 richieste. $[2,5; 2,5; 0{,}134]$

93 Un'impresa produce piccoli soprammobili in cristallo e la produzione ha un tasso di pezzi difettosi dello 0,5%. Considera una produzione di 500 pezzi e determina il numero medio di produzione senza difetti e la varianza. Qual è la probabilità di rilevare al massimo 4 pezzi difettosi? $[497,5; 497,5; 0,891]$

94 Una fabbrica di cioccolato, a scopo pubblicitario, inserisce un premio nella carta di 10 cioccolatini ogni 500 prodotti. Tutti i cioccolatini prodotti vengono confezionati in modo casuale in scatole da 30. Determina il numero medio atteso di cioccolatini con premio in una confezione e la probabilità di trovare un premio in una confezione. Rispondi alle stesse domande nel caso in cui i cioccolatini con il premio fossero 10 ogni 5000.
$[0,6; 0,334; 0,06; 0,0566]$

5. LE VARIABILI CASUALI STANDARDIZZATE

▶ Teoria a pag. σ20

95 **TEST** Una variabile aleatoria X ha valore medio 12,3 con deviazione standard 1,8. Al valore $x = 8,3$ corrisponde il valore della variabile standardizzata Z:

A $-2,2$. B 4,25. C 0,53. D 0,45. E 11,44.

96 **ESERCIZIO GUIDA**

Un concorrente a una prova ha conseguito i seguenti punteggi in tre test diversi: 48, 35, 74. Per questi test conosciamo i punteggi medi 39, 27, 65 e le deviazioni standard 6, 5, 14.
Determiniamo in quale test il concorrente ha conseguito il risultato migliore.

Chiamando X la variabile casuale dei punteggi ottenuti, la variabile standardizzata Z è:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Trasformiamo i punteggi ottenuti x nei corrispondenti punti zeta:

$$x = 48 \quad \to \quad z = \frac{48-39}{6} = 1,5; \qquad x = 35 \quad \to \quad z = \frac{35-27}{5} = 1,6;$$

$$x = 74 \quad \to \quad z = \frac{74-65}{14} \simeq 0,64.$$

Possiamo concludere che il punteggio migliore si è ottenuto con il secondo test.

97 Trasforma la seguente variabile casuale X nella variabile casuale standardizzata Z e verifica che il valore medio è 0 e la deviazione standard è 1:

X	5	10	15	20	25
P	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3

$[Z: -1,769; -1,032; \dots]$

98 Una variabile casuale X ha valore medio 12,5 e varianza 4,41. Calcola i valori della variabile X i cui valori zeta sono -2 e 2,4.
$[8,3; 17,54]$

99 Una variabile casuale X ha valore medio 9,8 e per il valore $x = 6{,}3$ il punto zeta corrispondente è $z = -2{,}5$. Calcola la varianza di X. $[1,96]$

100 Una variabile aleatoria X ha media 6,3 e deviazione standard 2,1. Calcola i punti zeta per i seguenti valori della variabile: $x = 5{,}2$ e $x = 8{,}8$. $[-0,52; 1,19]$

101 In una classe terza il voto medio degli alunni in matematica è stato 7,3 con una deviazione standard di 2,8 e in un'altra terza il voto medio è stato 6,8 con una deviazione standard di 1,2. Determina, rispetto all'andamento della classe, se è migliore il rendimento di un alunno della prima classe con voto 6 o di un alunno della seconda classe con voto 6,2. $[z_1 = -0,46; z_2 = -0,5]$

102 Il venerdì sera il numero medio di spettatori nella sala cinematografica di una cittadina è di 80 con una deviazione standard di 30, mentre in una seconda località è di 130 con una deviazione standard di 45. Viene proiettato lo stesso film e il numero degli spettatori è stato rispettivamente di 105 e 160. Determina in quale località il film ha avuto maggiore successo. $[z_1 = 0,83; z_2 = 0,67]$

6. LE VARIABILI CASUALI CONTINUE

▶ Teoria a pag. σ22

103 **ESERCIZIO GUIDA**

Dopo aver verificato che la seguente funzione è una funzione densità di probabilità, consideriamo in [0; 4] una variabile casuale continua X avente tale funzione densità.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{8}x & \text{se } 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

a) Determiniamo la funzione di ripartizione $F(x)$ di X. b) Rappresentiamo graficamente $f(x)$ e $F(x)$. c) Calcoliamo $P(1 \le X \le 3)$. d) Calcoliamo il valore medio e la varianza di X.

Verifichiamo che la funzione $f(x)$ è una funzione densità di probabilità:

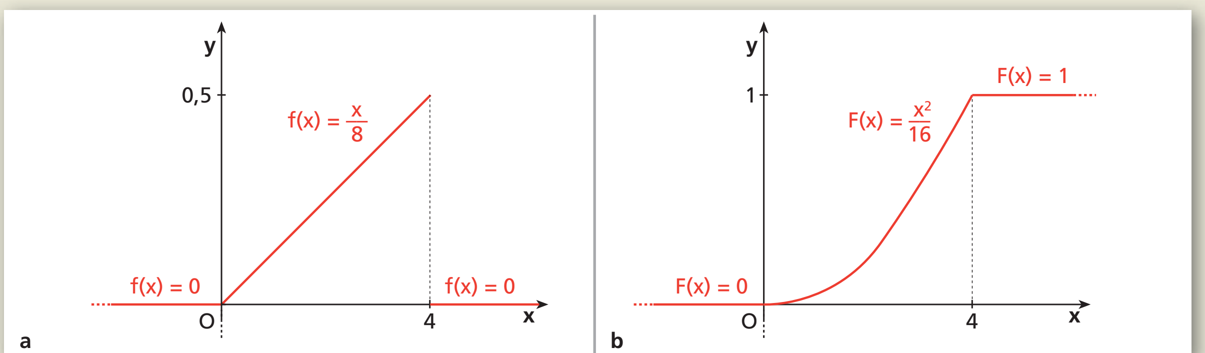
$$f(x) \ge 0 \text{ in } \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^4 \frac{1}{8}x\,dx = \left[\frac{1}{8}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 1.$$

a) Determiniamo la funzione di ripartizione $F(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{8}t\,dt = \left[\frac{1}{8}\cdot\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{16}, \quad \text{per} \quad 0 \le x \le 4;$$

$$F(x) = 0, \quad \text{per} \quad x < 0; \qquad F(x) = 1, \quad \text{per} \quad x > 4.$$

b) Rappresentiamo graficamente le funzioni $f(x)$ e $F(x)$:



c) Calcoliamo $P(1 \leq X \leq 3)$ in due modi, cioè mediante la funzione densità di probabilità o quella di ripartizione:

$$P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 \frac{1}{8} x \, dx = \left[\frac{x^2}{16}\right]_1^3 = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2};$$

$$P(1 \leq X \leq 3) = F(3) - F(1) = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}.$$

d) Calcoliamo il valore medio di X:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \, dx = \int_0^4 x \cdot f(x) \, dx = \int_0^4 x \cdot \frac{1}{8} x \, dx = \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{8}{3}.$$

Calcoliamo la varianza:

$$var(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \int_0^4 x^2 \cdot \frac{1}{8} x \, dx - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{x^4}{4}\right]_0^4 - \frac{64}{9} = 8 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9}.$$

Negli esercizi che seguono indichiamo le funzioni $f(x)$, definite in $\mathbb{R}$, solo negli intervalli in cui non si annullano. Verifica che esse sono funzioni densità di probabilità. Determina la funzione di ripartizione $F(x)$, il valore medio e la varianza della variabile casuale continua X avente $f(x)$ come funzione densità di probabilità. Rappresenta graficamente $f(x)$ e $F(x)$ e calcola la probabilità che X assuma valori compresi tra i due valori x_1 e x_2 indicati. (Qui e in seguito la funzione di ripartizione è indicata soltanto per gli intervalli in cui non vale 0 o 1.)

104 $f(x) = \frac{1}{5}$, $[0; 5]$; $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. $\left[F(x) = \frac{1}{5}x; 2,5; \frac{25}{12}; 0,6\right]$

105 $f(x) = \frac{2}{9}x$, $[0; 3]$; $x_1 = 1,3$, $x_2 = 2,3$. $\left[F(x) = \frac{x^2}{9}; 2; \frac{1}{2}; 0,4\right]$

106 $f(x) = \frac{3}{35}x^2$, $[-2; 3]$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. $\left[F(x) = \frac{x^3}{35} + \frac{8}{35}; \frac{39}{28}; \frac{2175}{784}; \frac{1}{35}\right]$

Negli esercizi che seguono indichiamo le funzioni $f(x)$, definite in $\mathbb{R}$, solo negli intervalli in cui non si annullano. Verifica che esse sono funzioni densità di probabilità. Determina la funzione di ripartizione $F(x)$ della variabile casuale continua X avente $f(x)$ come funzione densità di probabilità. Rappresenta graficamente $f(x)$ e $F(x)$ e calcola la probabilità che X assuma valori compresi tra i due valori x_1 e x_2 indicati.

107 $f(x) = \frac{2}{x^2}$, $[2; +\infty[$; $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. $\left[F(x) = 1 - \frac{2}{x}; \frac{1}{2}\right]$

108 $f(x) = e^{-x}$, $[0; +\infty[$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. $\left[F(x) = 1 - e^{-x}; 1 - e^{-2}\right]$

109 Data la funzione di ripartizione $F(x) = \frac{x^4}{16}$ di una variabile casuale continua X che può assumere valori nell'intervallo $[0; 2]$, determina la funzione densità di probabilità di X. Calcola $P(0,5 \leq X \leq 1,5)$ e rappresenta graficamente $F(x)$ e $f(x)$. $\left[f(x) = \frac{1}{4}x^3; 0,31\right]$

110 Una macchina produce sbarrette meccaniche della lunghezza nominale di 22 mm e sono accettate solo le sbarrette con lunghezza superiore. Sapendo che la funzione di ripartizione per lo scarto in lunghezza è $F(x) = \frac{x^2}{4}$, determina entro quale limite superiore le sbarrette sono accettate, la funzione densità di probabilità e la probabilità che una sbarretta sia difettosa al massimo di 1,2 mm. $\left[24 \text{ mm}; f(x) = \frac{1}{2}x; 0,36\right]$

111 Il tempo impiegato da una macchina per produrre un pezzo varia da 8 a 14 minuti. Un'attenta osservazione suggerisce che la funzione di ripartizione del tempo di produzione è $F(x) = \frac{1}{6}x - \frac{4}{3}$. Determina la funzione densità di probabilità corrispondente. Rappresenta graficamente $f(x)$ e $F(x)$. Calcola il valore medio, la varianza e la probabilità che il tempo impiegato sia compreso tra 10 e 13 minuti. $\left[f(x) = \frac{1}{6}; 11; 3; 0,5\right]$

La distribuzione uniforme continua

112 **ESERCIZIO GUIDA**

Consideriamo una variabile casuale continua *X* che si distribuisce uniformemente nell'intervallo [2; 7].
a) Calcoliamo la funzione di ripartizione, il valore medio, la varianza e la deviazione standard di *X*.
b) Calcoliamo la probabilità che *X* assuma valori compresi tra 2,5 e 3.

La funzione densità di probabilità di X, nell'intervallo [2; 7], è $f(x) = \frac{1}{7-2} = \frac{1}{5}$.

a) In [2; 7] la funzione di ripartizione è:

$$F(x) = \int_2^x \frac{1}{5}\,dt = \left[\frac{t}{5}\right]_2^x = \frac{x-2}{5}.$$

I valori di sintesi di X valgono:

$$\mu = \frac{7+2}{2} = \frac{9}{2}; \quad \sigma^2 = \frac{(7-2)^2}{12} = \frac{25}{12}; \quad \sigma = \frac{5}{2\sqrt{3}}.$$

b) $P(2,5 \leq X \leq 3) = \int_{2,5}^3 \frac{1}{5}\,dx = \left[\frac{x}{5}\right]_{2,5}^3 = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = 0,1$, oppure, con la funzione di ripartizione,

$$P(2,5 \leq X \leq 3) = F(3) - F(2,5) = \frac{1}{5} - \frac{0,5}{5} = \frac{0,5}{5} = 0,1.$$

Calcola la funzione densità di probabilità e la funzione di ripartizione di una variabile casuale continua che assume valori nell'intervallo indicato con una distribuzione uniforme. Determina inoltre il valore medio, la varianza e la deviazione standard di tale variabile. Calcola $P(x_1 \leq X \leq x_2)$.

113 $[1; 5]$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,75$. $\left[f(x) = \frac{1}{4}; F(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}; 3; \frac{4}{3}; \frac{2}{\sqrt{3}}; 0,0625\right]$

114 $[-3; 5]$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0,2$. $\left[f(x) = \frac{1}{8}; F(x) = \frac{x+3}{8}; 1; \frac{16}{3}; \frac{4}{\sqrt{3}}; 0,15\right]$

115 $[4; 11]$, $x_1 = 5$, $x_2 = 6,5$. $\left[f(x) = \frac{1}{7}; F(x) = \frac{x-4}{7}; 7,5; \frac{49}{12}; \frac{7}{2\sqrt{3}}; 0,21\right]$

116 $[-8; -2]$, $x_1 = -7$, $x_2 = -4$. $\left[f(x) = \frac{1}{6}; F(x) = \frac{x+8}{6}; -5; 3; \sqrt{3}; 0,5\right]$

117 Determina l'ampiezza massima dell'intervallo di valori che può assumere una variabile casuale continua X affinché abbia $f(x) = 8$ come funzione densità di probabilità. [0,125]

Determina l'intervallo limitato [*a*; *b*] dei valori che può assumere una variabile continua con distribuzione uniforme, sapendo che ha valore medio μ e varianza σ^2. (Suggerimento. Scrivi un sistema le cui incognite sono gli estremi dell'intervallo.)

118 $\mu = 2$, $\sigma^2 = 3$. $[a = -1; b = 5]$

119 $\mu = 2,5$, $\sigma^2 = 1,25$. $[a \simeq 0,56; b \simeq 4,44]$

120 $\mu = 10$, $\sigma^2 = 7$. $[a \simeq 5,42; b \simeq 14,58]$

121 $\mu = -1,6$, $\sigma^2 = 0,3$. $[a \simeq -2,55; b \simeq -0,65]$

La distribuzione normale o gaussiana

IN PRATICA
▶ Videolezione 86

122 VERO O FALSO?

a) La distribuzione normale, o gaussiana, rappresenta la distribuzione dei valori di molti fenomeni naturali, sociali e produttivi. V F

b) La curva gaussiana è simmetrica rispetto alla retta $x = \mu$ e si appiattisce al diminuire della deviazione standard. V F

c) La variabile casuale standardizzata di una variabile casuale normale è $N(0; 1)$. V F

d) Il grafico della densità di probabilità della variabile casuale standardizzata è simmetrico rispetto alla retta $x = \mu$. V F

e) La tavola di Sheppard fornisce il valore delle aree sottostanti la curva $f(z)$, per $0 < z < z_1$. V F

123 TEST Una macchina produce penne di lunghezza media di 15 cm con deviazione standard di 0,2 cm. La probabilità che una penna abbia lunghezza compresa tra 14,7 cm e 15,3 cm è:

A 0,4332. B 0,3. C 0,8664. D 0,002. E 1,341.

124 ESERCIZIO GUIDA

Un'impresa costruisce rasoi elettrici la cui durata è una grandezza che si distribuisce normalmente. La durata media è di 6 anni con una deviazione standard di 1,5 anni.
Calcoliamo:

a) la probabilità che un rasoio abbia una durata fino a 8 anni;

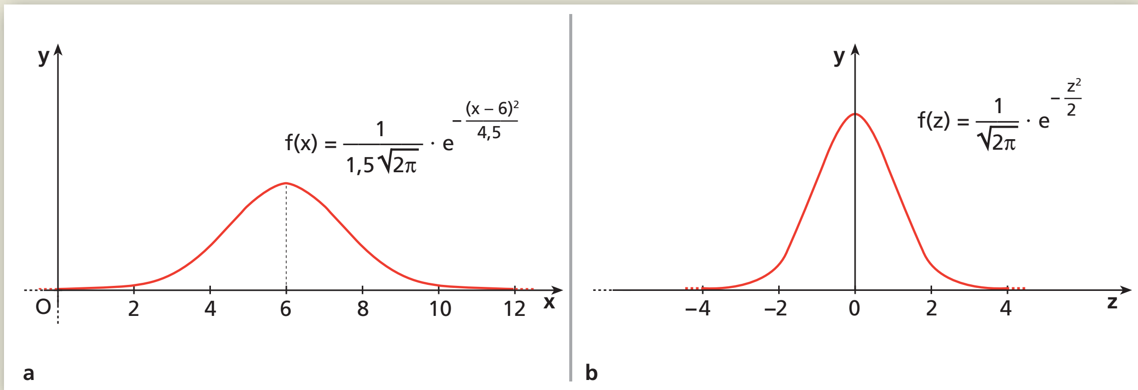
b) la probabilità che abbia una durata di almeno 7 anni;

c) il numero di rasoi che, su una produzione di 400, abbia una durata compresa tra 4 e 9 anni.

Consideriamo la variabile casuale normale $N(6; 2{,}25)$, la cui funzione densità di probabilità ha il grafico riportato in figura *a*.

Utilizziamo la variabile standardizzata $Z = N(0; 1)$ che si ottiene con la trasformazione $Z = \frac{X-6}{1{,}5}$. Il grafico è quello in figura *b*.

In entrambi i grafici l'area compresa tra la curva e l'asse delle ascisse è 1, ma per il secondo grafico abbiamo a disposizione la tavola $F(z)$ che fornisce il valore dell'area sotto la curva per valori crescenti di $z > 0$.



a) Probabilità che un rasoio abbia una durata fino a 8 anni.

Il punto zeta corrispondente a $x = 8$ è $z = 1,\overline{3}$. Sfruttiamo la simmetria di $f(z)$ e utilizziamo la tavola $F(z)$:

$$P(X \leq 8) \simeq P(-\infty < Z \leq 1,33) = P(-\infty < Z < 0) + P(0 \leq Z \leq 1,33) =$$
$$= 0,5 + 0,4082 = 0,9082.$$

b) Probabilità che abbia una durata di almeno 7 anni.

Il punto zeta corrispondente a $x = 7$ è $z = 0,\overline{6}$:

$$P(X \geq 7) \simeq P(Z \geq 0,67) = 0,5 - P(0 < Z < 0,67) = 0,5 - 0,2486 = 0,2514.$$

c) Calcoliamo la probabilità che un rasoio abbia una durata compresa tra 4 e 9 anni.
Trasformando $x_1 = 4$ e $x_2 = 9$ otteniamo $z_1 = -1,\overline{3}$ e $z_2 = 2$:

$$P(4 \leq X \leq 9) \simeq P(-1,33 \leq Z \leq 2) = P(0 \leq Z \leq 1,33) + P(0 \leq Z \leq 2) =$$
$$= 0,4082 + 0,4772 = 0,8854.$$

Possiamo valutare il numero di rasoi che, su una produzione di 400, avranno una durata compresa tra 4 e 9 anni. Otteniamo:

$400 \cdot 0,8854 \simeq 354$.

125 Il tempo per rispondere a un test con quesiti a risposta multipla ha una distribuzione gaussiana con un tempo medio di 20 minuti e una varianza pari a 16 minuti. Qual è la probabilità che un test venga restituito entro 15 minuti? [0,1056]

126 Una macchina confeziona sacchetti di cioccolatini e il loro peso si distribuisce normalmente. Sapendo che il peso medio è di 250 grammi e la deviazione standard è di 15 grammi, calcola la probabilità che un sacchetto abbia un peso compreso tra 240 e 260 grammi. [0,4972]

127 The height of the jumps of an Olympic high jumper is normally distributed with mean $\mu = 2.36$ m and variance $\sigma^2 = 0.45$ m^2.

a) What is the probability the jumper manages a height over 2.26 m?

b) What height is exceeded by 10% of his jumps? [a) 55.96%; b) 3.224 m]

128 Una marca di burro in confezioni da 250 grammi ha una durata dalla data di confezionamento distribuita normalmente con media di 30 giorni e una deviazione standard di 8 giorni. La data di scadenza viene fissata dopo 38 giorni. Calcola la percentuale di confezioni che si presume debbano essere ritirate perché scadute. [0,1587]

129 Il tempo impiegato per effettuare la rifinitura di pezzi meccanici ha una distribuzione normale con una media di 60 minuti e una deviazione standard di 12 minuti. Determina la probabilità che il tempo impiegato:

a) sia di almeno 50 minuti;

b) sia compreso tra 50 e 70 minuti;

c) sia al massimo di 50 minuti;

d) sia di almeno 70 minuti;

e) sia di almeno 60 minuti;

f) sia al massimo di 60 minuti.

[a) 0,7967; b) 0,5934; c) 0,2033; d) 0,2033; e) 0,5; f) 0,5]

130 Una macchina produce sfere di acciaio il cui diametro è una grandezza distribuita normalmente con valore medio di 18 mm e deviazione standard di 0,5 mm. Calcola la probabilità di produrre sfere con diametro nell'intervallo indicato; calcola il corrispondente numero di sfere su un lotto di 400:

a) $[18 - \sigma; 18 + \sigma]$;

b) $[18 - 2\sigma; 18 + 2\sigma]$;

c) $[18 - 3\sigma; 18 + 3\sigma]$.

[a) 0,6826; 273; b) 0,9544; 381; c) 0,9974; 398]

131 Il punteggio conseguito dai candidati a un concorso ha una distribuzione normale e il punteggio medio in centesimi è stato 63,8 con una deviazione standard di 15,5. Determina la percentuale dei candidati che hanno ottenuto almeno 60. Determina il punteggio massimo ottenuto dall'80% dei candidati e il punteggio minimo del 10% dei concorrenti migliori.
$[0,5987; 76,82; 83,64]$

132 Una macchina riempie di vino piccole damigiane di vetro da 5 litri, con una deviazione standard di 0,015 litri. La quantità imbottigliata è una grandezza gaussiana e non vengono immesse in commercio confezioni con meno di 4,99 litri. Determina la percentuale delle damigiane che non vengono accettate. Qual è il minimo contenuto del 10% delle damigiane più piene?
$[0,2514; 4,998]$

ESERCIZI VARI Le distribuzioni di probabilità

133 Da un'urna contenente 3 palline nere e 1 rossa si estraggono consecutivamente, con reimmissione della pallina estratta, 4 palline. Variabile casuale: $X =$ «numero delle palline nere uscite». Determina il valore medio μ e la deviazione standard σ che caratterizzano la variabile casuale. $[3; 0,866]$

134 In un allevamento di polli, la probabilità che un animale contragga una malattia è dello 0,02%. Calcola il valore medio, per 400 animali, di contrarre tale malattia e la probabilità che nessuno sia ammalato. $[0,08; 0,9231]$

135 In una classe 8 alunni sono figli unici, 6 hanno un fratello, 6 hanno due fratelli e 4 hanno tre fratelli. Considera la variabile casuale che descrive il numero dei fratelli, con la sua distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione. Calcola la probabilità che vi siano alunni con meno di due fratelli. $\left[0, 1, \ldots; \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots; \frac{7}{12}\right]$

136 Vengono lanciate contemporaneamente 4 monete. Costruisci la variabile casuale che indica il numero delle volte in cui esce testa. Determina la funzione di ripartizione e calcola la probabilità che testa esca almeno 2 volte. Calcola il valore medio e la varianza. $\left[0, 1, \ldots; \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \ldots; \frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \ldots; \frac{11}{16}; 2; 1\right]$

137 Vengono lanciati due dadi contemporaneamente.
Costruisci la variabile casuale X che indica la somma dei punti. Determina la funzione di ripartizione e calcola la probabilità che la somma sia almeno 7. Calcola il valore medio di X.
$\left[2, 3, \ldots, 12; \frac{1}{36}, \frac{3}{36}, \frac{6}{36}, \ldots, 1; \frac{21}{36}; 7\right]$

138 A uno sportello la probabilità che il disbrigo di una pratica duri più di 10 minuti è del 2%. Determina la probabilità che su 60 pratiche ve ne siano 3 che comportino tale durata. $[0,0865]$

139 Un'urna contiene 8 palline numerate da 1 a 8 e si estrae una pallina. Costruisci la variabile casuale che indica il numero della pallina estratta e determina il valore medio e la varianza. $[4,5; 5,25]$

140 **TEST** Una distribuzione gaussiana ha valore medio $\mu = 10$ e si ha $P(Z \leq z_1) = 0,9332$, dove z_1 è il punto zeta corrispondente di $x = 13$. Il valore della deviazione standard è:

A 0,5. B 3. C 0,6. D 2. E 9.

141 **TEST** Durante la sperimentazione di un farmaco su 1500 pazienti è stato rilevato che il farmaco ha prodotto effetti indesiderati su 45 pazienti. Essendo stato prescritto a 80 pazienti, il numero medio e la varianza dei pazienti che si prevede segnalino effetti indesiderati sono:

A 2,4 e 2,328. B 2,4 e 2,4. C 2,4 e 2,205. D 2,4 e 2,458. E 2,4 e 1,68.

142 Una macchina produce pezzi la cui lunghezza ha una distribuzione gaussiana. Sapendo che la media è 12 cm e lo scarto quadratico medio 1,8 cm, calcola la probabilità che un pezzo sia scartato (il limite di tolleranza è ± 1,2 cm). $[0,5028]$

143 Un alunno a un primo test ha ottenuto 45 punti e a un secondo test 84 punti. Sapendo che complessivamente le medie sono state 40 e 74 con varianze di 9 e 25, in quale test il risultato è stato migliore?

$[z_1 = 1,67; z_2 = 2;$ secondo test$]$

144 Una macchina produce pezzi difettosi con la probabilità del 10%. Si prendono a caso 5 pezzi e si considera la variabile casuale X = «numero dei pezzi difettosi». Determina il valore medio μ e la deviazione standard σ che caratterizzano la variabile casuale X. [0,5; 0,6708]

145 La durata media delle pile prodotte da un'impresa è di 400 ore (h) con una varianza di 225 h^2. Sapendo che la durata ha una distribuzione di tipo gaussiano, determina la percentuale di pile che avranno una durata compresa tra 380 e 420 ore. $[81,64\%]$

146 In una classe, durante l'estate, 8 ragazzi hanno letto 10 libri, 6 ragazzi 8 libri, 5 ragazzi 4 libri, 3 ragazzi 3 libri. Considera la variabile casuale X = «numero di libri letti durante l'estate», costruisci la sua distribuzione di probabilità e calcola il numero medio di libri letti e il relativo scarto quadratico medio.

$$\left[3, 4, 8, 10; \frac{3}{22}, \frac{5}{22}, \frac{6}{22}, \frac{8}{22}; 7,1; 2,78\right]$$

147 L'altezza media di un gruppo di ragazzi maschi è 173 cm con una deviazione standard di 10 cm. Determina entro quali limiti di altezza si trova l'80% dei ragazzi, nell'ipotesi che le altezze abbiano una distribuzione normale.

$[160 < X < 186$ (circa)$]$

148 Una piccola sfera si muove in modo uniforme lungo una circonferenza lunga 8 cm. Determina la funzione densità di probabilità e la funzione di ripartizione per la posizione e, dopo aver tracciato il loro grafico, calcola la probabilità che la sfera si trovi fra i punti che hanno una distanza, misurata lungo la circonferenza, di 4,2 cm e 7,3 cm da un punto zero convenzionale.

$$\left[f(x) = \frac{1}{8} \text{ per } 0 \le x \le 8; F(x) = \frac{1}{8}x \text{ per } 0 \le x \le 8; 0,3875\right]$$

149 Si è rilevato che, in un tratto rettilineo di una strada con limite di velocità di 90 km/h, 600 autovetture su 800 non hanno rispettato il limite. Considera il passaggio di 12 vetture e determina il valore medio, la varianza e la deviazione standard della variabile casuale X = «numero delle vetture che non rispettano il limite». Calcola la probabilità che un numero di vetture pari al valore medio non rispetti il limite imposto.
Se inoltre si è rilevato che la probabilità che succeda un incidente è dello 0,8%, determina il numero medio di incidenti che si può prevedere per le 12 vetture, la varianza e la probabilità che un numero pari al valore medio delle vetture che non rispettano il limite di velocità abbia un incidente.

$[9; 2,25; 1,5; 0,258; 0,096; 0,095; 2,882 \cdot 10^{-17}]$

150 Uno studente ha conseguito 76 punti su 100 in una prova nella quale il punteggio medio è stato 85 con varianza pari a 49, e 77 punti su 100 in una seconda prova il cui punteggio medio è stato 84 con varianza pari a 28. Determina in quale delle due prove ha conseguito un risultato migliore. Determina, inoltre, la percentuale di candidati che nelle due prove hanno ottenuto un punteggio che differisce dalle due medie rispettivamente per meno di 9 punti e per meno di 7 punti, sapendo che la distribuzione dei punteggi è stata normale. $[z_1 = -1,29$ e $z_2 = -1,32; 80,3\%$ e $81,32\%]$

151 Verifica che la funzione $f(x) = -\frac{3}{500}(x^2 - 10x)$ nell'intervallo [0; 10] è una funzione densità di probabilità. Determina la funzione di ripartizione $F(x)$, il valore medio e la varianza della variabile casuale continua X avente $f(x)$ come funzione densità di probabilità. Rappresenta graficamente $f(x)$ e $F(x)$ e calcola la probabilità che X assuma valori compresi tra $x_1 = 3$ e $x_2 = 6$.

$\left[F(x) = \frac{-x^3}{500} + \frac{3x^2}{100}; 5; 5; \frac{54}{125}\right]$

152 Abbiamo due urne. La prima contiene 3 palline nere e 2 rosse e la seconda 2 nere e 2 rosse. Si estraggono consecutivamente da ciascuna urna 2 palline senza rimettere la pallina estratta nell'urna. Esamina le due variabili casuali X e Y che indicano il numero di palline nere estratte da ciascuna urna e costruisci la variabile casuale $X + Y$. Verifica il legame tra i valori medi e le varianze di X, Y e $X + Y$.

$[M(X) = 1{,}2; var(X) = 0{,}36; M(Y) = 1; var(Y) = 0{,}333;$
$M(X + Y) = 2{,}2; var(X + Y) = 0{,}693]$

153 L'autobus che prende Marco per tornare a casa può arrivare alla fermata con probabilità uniforme tra le 13:30 e le 14:00. Marco arriva alla fermata alle 13:30.

a) Qual è la probabilità che Marco debba aspettare più di 12 minuti?

b) Esprimi analiticamente e disegna la funzione di ripartizione della variabile casuale relativa al tempo di attesa t.

$\left[\text{a) } \frac{3}{5}\right]$

154 L'andamento dei prezzi di una crema solare sul mercato durante l'anno ha il comportamento di una variabile aleatoria di distribuzione normale con media di 10 euro e deviazione standard di 1,2 euro.

a) Determina l'intervallo monetario in cui si concentra nel 95% dei casi il prezzo della crema.

b) Calcola la probabilità che il prezzo sia compreso tra 9,5 e 10,5 euro.

c) Calcola la probabilità che il prezzo sia minore di 9 euro.

[a) $7{,}65 < x < 12{,}35$; b) 0,3256; c) 0,2033]

155 In un teatro ci sono due sale, una da 16 posti, l'altra da 22 posti. I gestori del teatro hanno riscontrato che gli spettatori prenotati non si presentano con una probabilità del 10%, così vengono accettate 24 prenotazioni nella sala grande e 17 nell'altra. In quale delle due sale è più probabile che qualche spettatore non avrà il posto a sedere?

[sala da 22 posti]

156 Nella tabella sono riportati i dati relativi al numero di visite mediche effettuate in un anno in un piccolo paese dell'Abruzzo.

Numero visite	Numero persone	Totale visite
0	40	0
1	25	25
2	18	36
3	8	24
4	5	20
5	3	15
6	1	6
0-6	100	126

a) Calcola il valore medio della variabile casuale X = «numero delle visite per persona in un anno».

b) Calcola la probabilità che una persona del paese si rivolga al medico in un anno.

c) Disegna il grafico della distribuzione di probabilità di X.

[a) 1,26; b) 0,6]

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Data la seguente variabile casuale

X	4	6	11	15
P	0,3	0,1	0,2	0,4

la funzione di ripartizione vale:

A F: 0,4; 0,6; 0,7; 1.
B F: 0,7; 0,6; 0,4; 1.
C F: 0,1; 0,3; 0,6; 1.
D F: 0,3; 0,4; 0,6; 1.
E F: 0,4; 0,7; 0,9; 1.

2 Data la variabile casuale precedente, il valore medio e la varianza sono rispettivamente:

A 9 e 74.
B 10 e 78.
C 9 e 23,6.
D 10 e 7,44.
E 10 e 22,6.

3 Un'urna contiene 4 palline rosse e 6 bianche. Estraiamo consecutivamente 3 palline, rimettendo la pallina estratta nell'urna. La variabile casuale X = «numero delle volte che esce una pallina rossa» è:

A una variabile casuale uniforme con media $\mu = 1{,}5$ e varianza $\sigma^2 = 1{,}25$.
B una variabile casuale binomiale con media $\mu = 1{,}2$ e varianza $\sigma^2 = 0{,}72$.
C una variabile casuale binomiale con media $\mu = 1{,}2$ e varianza $\sigma^2 = 0{,}56$.
D una variabile casuale di Poisson con media $\mu = 1{,}2$ e varianza $\sigma^2 = 1{,}2$.
E una variabile casuale di tipo diverso dalle precedenti con $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 1{,}64$.

4 Una variabile casuale X ha valore medio $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 0{,}09$. La variabile casuale $2 \cdot X + 3$ ha valore medio e varianza:

A 4 e 0,36.
B 4 e 0,12.
C 7 e 0,09.
D 7 e 0,36.
E 4 e 0,39.

5 Una variabile casuale continua ha funzione di densità $f(x) = \frac{1}{6}$ nell'intervallo [2; 8]. Il valore medio e la varianza sono rispettivamente:

A 3 e 8,3.
B 5 e 3.
C 4 e 1,3.
D 5 e 2.
E 3 e 3.

6 Il valore medio del numero dei visitatori di una fiera campionaria che si svolge ogni anno è di 850 persone al giorno con una deviazione standard di 34 visitatori. Essendo la distribuzione del numero dei visitatori normale, la probabilità che in un certo giorno il numero dei visitatori superi il valore medio del 10% è:

A 0,7462.
B 0,2469.
C 0,0062.
D 0,9938.
E 0,4938.

7 Data la seguente variabile casuale X

X	3	8	11	16
P	0,1	0,4	0,3	0,2

la variabile casuale standardizzata Z assume i valori:

A −1,87, −0,53, 0,27, 1,60.
B −0,50, −0,14, 0,07, 0,43.
C 1,87, 0,53, −0,27, −1,60.
D 0,50, 0,14, −0,07, −0,43.
E 0,50, 0,14, 0,07, 0,43.

8 Dovendo calcolare la probabilità che su 150 prove un evento E di probabilità costante 0,6 si verifichi 100 volte, quale delle seguenti relazioni *non* può essere applicata?

A $P(X = 100) = \binom{150}{100}(0,6)^{100}(0,4)^{50}$
B $P(X = 100) = P(1{,}58 < Z < 1{,}75)$
C $P(X = 100) = \frac{90^{100}}{100!} \cdot e^{-90}$
D $P(X = 100) = F(1{,}75) - F(1{,}58)$
E $P(X = 100) = P(Z = 1{,}67) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{2{,}78}{2}}$

QUESITI

9 Utilizzando un esempio, spiega cosa si intende per variabile casuale precisando le caratteristiche degli eventi che la originano e quelle della relativa distribuzione di probabilità.

10 Spiega mediante un esempio la relazione che esiste tra il valore medio e la varianza di una variabile casuale X e gli stessi indici di una variabile casuale $k \cdot X + h$, con k e h costanti.

11 Spiega cosa si intende per variabile casuale normalizzata e il vantaggio che si può ottenere con i punti zeta.

12 Quali sono le differenze tra i grafici della funzione gaussiana e quelli della funzione gaussiana standardizzata? Quanto vale l'area delle regioni comprese tra tali grafici e l'asse x?

PROBLEMI

13 Da un mazzo di 40 carte si estrae per 5 volte una carta rimettendo ogni volta la carta estratta nel mazzo. Data la variabile casuale $X =$ «numero delle volte di uscita dell'asso di coppe», calcola applicando la distribuzione binomiale e quella di Poisson:

a) il valore medio, la varianza e la deviazione standard;
b) la probabilità che l'asso di coppe esca al massimo una volta;
c) la probabilità che l'asso di coppe esca almeno una volta.

[binomiale: a) 0,125; 0,122; 0,349; b) 0,994; c) 0,119; Poisson: a) 0,125; 0,125; 0,354; b) 0,993; c) 0,118]

14 L'ora di arrivo in ufficio degli impiegati di un'azienda varia dalle ore 8 alle ore 8:30 a causa del traffico. La funzione densità di probabilità, che misura la probabilità di arrivo a una certa ora, è stata individuata nella seguente funzione:

$$f(x) = \frac{65}{32} - (x-8)^3.$$

a) Determina la funzione di ripartizione $F(x)$.

Calcola:

b) il valore medio e la varianza;
c) la probabilità che ha un impiegato di arrivare fra le 8:12 e le 8:24;
d) la probabilità che ha un impiegato di arrivare negli ultimi 15 minuti.

$\left[\text{a) } F(x) = \frac{65}{32}x - \frac{(x-8)^4}{4} - \frac{65}{4}\text{; b) 8:15; 1 min e 15 s; c) 0,400; d) 0,493}\right]$

15 Al servizio di guardia medica festivo in 24 ore arrivano in media 84 richieste. Calcola la probabilità che in un'ora:

a) vi siano 5 chiamate;
b) il numero delle chiamate sia al massimo 3;
c) il numero delle chiamate sia compreso tra 2 e 6;
d) sapendo che le chiamate sono state effettuate dal 40% da donne che per l'80% hanno richiesto l'intervento a domicilio, mentre questa percentuale per gli uomini è stata del 70%, determina la probabilità che un intervento a domicilio sia stato effettuato in seguito alla richiesta di un uomo.

$\left[\text{a) 0,1322; b) 0,5366; c) 0,7988; d) } \frac{21}{37}\right]$

16 Tre concorrenti tirano contemporaneamente a un bersaglio. Essi hanno probabilità di colpirlo rispettivamente dell'80%, del 70% e del 50%.

a) Determina la distribuzione di probabilità della variabile casuale relativa al numero dei colpi andati a segno.

Calcola:

b) il valore medio e la deviazione standard della variabile casuale del punto a);
c) la probabilità che almeno due colpi vadano a segno. [a) $0, 1, \ldots; 0,03, 0,22, \ldots$; b) $2; 0,787$; c) $0,75$]

17 A un servizio di autolavaggio automatico, aperto 24 ore su 24, arrivano in media 42 macchine ogni giorno; considera la variabile casuale $X =$ «numero delle macchine che arrivano ogni ora».

a) Determina il valore medio e la varianza.

Calcola la probabilità che in un'ora:

b) non arrivi alcun veicolo;
c) ne arrivino 2;
d) ne arrivino almeno 2.

[a) $1,75; 1,75$; b) 0,174; c) $0,266$; d) $0,522$]

18 Una società di assicurazione ha rilevato che su 950 polizze di assicurazione contro i furti in abitazioni ha dovuto pagare 133 indennizzi. Nell'anno corrente le polizze stipulate sono 1250. Supponendo che la distribuzione del numero dei furti sia normale, determina:

a) il valore medio, la varianza e la deviazione standard dei furti che si possono verificare;
b) la probabilità che il numero dei furti differisca dal valore medio almeno del doppio della deviazione standard;
c) la probabilità che il numero dei furti sia un numero compreso fra 140 e 160;
d) la probabilità che il numero dei furti sia esattamente uguale al valore medio.

[a) $175; 150,5; 12,27$; b) $0,0456$; c) 0,109; d) $0,032$]

19 L'altezza e il peso di un gruppo di giocatori di volley sono considerati due grandezze indipendenti con distribuzione normale. Sapendo che l'altezza media è 1,85 m con una deviazione standard di 5 cm e che il peso medio è 74 kg con una deviazione standard di 6 kg, determina la probabilità che:

a) un giocatore abbia l'altezza compresa tra 1,82 m e 1,87 m e un peso tra 71 kg e 77 kg;
b) un giocatore abbia un'altezza inferiore a 1,80 m e un peso superiore a 78 kg;
c) il peso non superi la media di più di 8 kg.

[a) 0,1460; b) $0,0399$; c) $0,9082$]

Tavola di Sheppard

Valori della funzione $F(z)$. Aree sotto la curva normale standardizzata da 0 a z.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

CAPITOLO **C3**

٣ [numerazione araba] | ३ [numerazione devanagari] | 三 [numerazione cinese]

COLLEGAMENTI

TRIANGOLI APERTI Nell'arte la forma a punta del triangolo è stata spesso utilizzata come schema compositivo e anche come elemento di spiritualità. Scrive Kandinskij: «Il contatto dell'angolo acuto di un triangolo col cerchio non ha un effetto minore di quello dell'indice di Dio con quello di Adamo in Michelangelo»…

…ma esistono triangoli senza punta?

La risposta a pag. C68

LE GEOMETRIE E I FONDAMENTI

1. GLI *ELEMENTI* DI EUCLIDE

A Euclide, matematico greco vissuto ad Alessandria intorno al 300 a.C., si deve la composizione degli *Elementi*, un'opera che raccoglie in modo organico le conoscenze acquisite dai Greci in circa trecento anni di ricerche.

Gli *Elementi* sono composti da 13 libri che riguardano i seguenti argomenti: le figure piane rettilinee e i cerchi (libri I-IV), le proporzioni (libro V), le figure simili (libro VI), la teoria dei numeri (libri VII-IX), le grandezze incommensurabili (libro X), la geometria solida (libri XI-XIII). Noi prenderemo in esame solo il I libro, dove sono enunciate le basi della costruzione euclidea (23 *termini*, 5 *postulati* e 8 *nozioni comuni*) e dove vengono dimostrate alcune proposizioni fondamentali, come il teorema di Pitagora e i criteri di uguaglianza dei triangoli.

I **termini** introdotti da Euclide costituiscono un gruppo di definizioni che ha lo scopo di descrivere gli enti geometrici a partire dal loro modello reale.

I **postulati** hanno un contenuto strettamente geometrico. Nell'intenzione di Euclide i postulati sono dotati di verità autoevidente, dunque sono accettabili sulla base dell'intuizione comune.

Le **nozioni comuni** sono proposizioni primitive di grande generalità, che appaiono chiare ed evidenti sulla base dell'intuizione. La loro generalità le differenzia dai postulati, i quali, come abbiamo visto, hanno un carattere strettamente legato alla particolare disciplina trattata, geometrico in questo caso.

A partire da questi elementi primitivi Euclide fa ricorso a figure costruite con riga e compasso, per facilitare la comprensione delle dimostrazioni, quindi organizza in modo sistematico una grande quantità di risultati, già ottenuti dai matematici dei secoli precedenti.

● Pur non essendo la sola opera del genere, gli *Elementi* costituiscono, per l'influenza che hanno esercitato per oltre duemila anni, uno dei più importanti testi della storia della cultura occidentale. Dimenticati in Europa per tutto l'Alto Medioevo, essi sono stati riscoperti grazie alla traduzione dall'arabo a opera di Abelardo di Bath, nel XII secolo. La loro diffusione ha coinciso con la rinascita degli studi matematici in Europa.

I termini

Nei primi sette termini Euclide introduce i concetti di punto, linea, retta e superficie.

I. Punto è ciò che non ha parti.
II. Linea è lunghezza senza larghezza.
III. Estremi di una linea sono punti.
IV. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su di essa (cioè, ai suoi punti).
V. Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.
VI. Estremi di una superficie sono linee.
VII. Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su di essa (cioè, alle sue rette).

I termini non sono delle vere e proprie definizioni, come le intendiamo noi oggi, ma piuttosto delle descrizioni di enti che Euclide considera già esistenti (in un mondo ideale). Per questo Euclide utilizza spesso concetti presi dal linguaggio comune, senza darne un'adeguata spiegazione. Per esempio, nel termine I ci dice che cos'è un punto, introducendo però un altro concetto (quello di «parte») che non è mai stato precedentemente definito. Euclide presuppone infatti che il lettore abbia già l'idea di «punto» e il suo termine serve soltanto a chiarire un concetto che è presente intuitivamente nella mente di ognuno.

● Il «punto» di Euclide è quello che siamo abituati a pensare: è l'elemento costitutivo elementare di tutti gli altri enti e senza dimensione. La retta e il piano di Euclide (e dei Greci) differiscono invece dagli enti della geometria che abbiamo studiato perché hanno estremi e quindi non sono illimitati. In particolare, quando Euclide parla di retta, possiamo pensare a un segmento.

I termini dal VIII al XII riguardano gli altri enti fondamentali della geometria (angoli, cerchi, triangoli…).
L'ultimo termine, il XXIII, riguarda le rette parallele.

XXIII. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.

Si noti l'uso della parola «illimitatamente». Euclide si richiama ancora una volta alla nostra intuizione, in quanto l'aggettivo «illimitato» non è mai stato introdotto prima. Fa riferimento a una nostra intuizione che parte dall'osservazione di quanto accade nel mondo reale (al finito) per elaborare concetti validi in zone «illimitate», dunque infinitamente lontane da noi e dalla nostra esperienza concreta. Il *salto* dal finito all'infinito è in realtà molto problematico; proprietà valide al finito possono infatti non valere all'infinito e viceversa.

I postulati

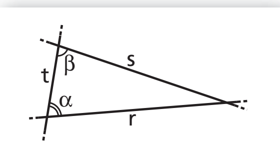
Si richiede:

I. che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto;
II. che una retta terminata si possa prolungare continuamente per diritto;
III. che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza;
IV. che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro;
V. che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno a incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

I primi tre postulati sono di «esistenza». Di questi, i primi due chiariscono l'idea di «retta». Benché la retta sia già stata definita nel termine IV, non erano ancora state introdotte le sue proprietà e neppure le sue caratteristiche costruttive.

● I postulati I-III sono collegati all'uso della riga e del compasso. Seguendo la tradizione, anche Euclide considerava una figura geometrica «costruibile» solo se essa poteva tracciarsi con l'impiego della riga e del compasso. Allo stesso modo, un problema geometrico era «risolubile» solo se la sua soluzione poteva essere costruita con l'uso esclusivo di questi strumenti.

Il postulato IV, l'unico non costruttivo, è indispensabile per introdurre il V, poiché consente di parlare di angolo retto in maniera determinata. Qui viene introdotta per la prima volta la parola «uguale».
Il postulato V può essere introdotto, in termini moderni, come segue.
Siano date due rette r e s tagliate da una trasversale t e siano α e β gli angoli coniugati interni formati da r e s con t. Se $\alpha + \beta < 2\widehat{R}$, dove $\widehat{R}$ indica l'angolo retto, allora le due rette r e s prolungate illimitatamente si incontrano dalla parte in cui $\alpha + \beta < 2\widehat{R}$ (figura 1).



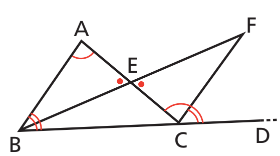
▲ **Figura 1** Il postulato V.

Nell'intenzione di Euclide, i postulati dovevano essere autoevidenti e accettabili sulla base dell'intuizione comune. Tuttavia salta agli occhi come il V postulato, per la complessità del suo enunciato e della costruzione geometrica, si distingua dai precedenti. Di questa difficoltà erano consapevoli già i primi commentatori all'opera euclidea, oltre probabilmente allo stesso Euclide. Il dibattito sulla validità del V postulato si è protratto per oltre duemila anni e ha avuto come estrema conseguenza la scoperta delle geometrie non euclidee, cioè di geometrie basate su postulati diversi da quelli di Euclide.

● La nozione comune VII significa: cose (ossia figure) che possono sovrapporsi mediante uno spostamento l'una sull'altra sono uguali. Due figure che coincidono, se si spostano l'una sull'altra, per Euclide sono «uguali». Ciò equivale a chiedere che il movimento di una figura nello spazio non alteri la figura stessa. Nel linguaggio moderno, il termine *uguale* usato da Euclide per le figure geometriche è spesso sostituito dal termine *congruente*.

● In realtà, in alcune dimostrazioni Euclide fa ricorso a proprietà delle figure che non derivano dai cinque postulati. Si può dire pertanto che il suo sistema *non è completo*.

● La Proposizione 3 e la 10 sono esempi di come Euclide scriva sotto forma di problema di costruzione quello che noi scriveremmo come proprietà di esistenza. Per esempio, invece della Proposizione 10, diremmo: «dato un segmento, esiste il suo punto medio».



Le nozioni comuni

I. Cose uguali a una stessa cosa sono uguali fra loro.
II. Se a cose uguali si aggiungono cose uguali, le somme ottenute sono uguali.
III. Se da cose uguali si tolgono cose uguali, i resti sono uguali.
IV. Se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le somme sono disuguali.
V. I doppi di una stessa cosa sono uguali tra loro.
VI. Le metà di una stessa cosa sono uguali tra loro.
VII. Cose che coincidono tra loro sono uguali.
VIII. Il tutto è maggiore della parte.

Le proposizioni

Sulla base dei termini, dei postulati e delle nozioni comuni, nel I libro degli *Elementi*, Euclide si propone di mostrare 48 proposizioni applicando ragionamenti deduttivi (dimostrazioni).

Alcune proposizioni fanno diretto riferimento a procedimenti costruttivi. Dimostrare che esistono punti, angoli, segmenti e circonferenze dotati di particolari proprietà equivale, per Euclide, a mostrare che essi possono essere effettivamente costruiti.
Diamo alcuni esempi di proposizioni e di dimostrazioni.

Proposizione 3 - Dati due segmenti di diverse lunghezze, [si può] togliere dal maggiore un segmento uguale al minore.
Proposizione 4 - Se due triangoli hanno ordinatamente uguali due lati e l'angolo fra essi compreso, allora sono uguali.
Proposizione 10 - [È possibile] Trovare il punto medio di un segmento dato.
Proposizione 13 - Se una retta innalzata su un'altra retta forma degli angoli, essa verrà a formare o due angoli retti o due angoli la cui somma è uguale a due angoli retti.
Proposizione 15 - Se due rette si tagliano tra loro, formano angoli opposti al vertice tra loro uguali.
Proposizione 16 - In un triangolo ABC, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni e opposti.

DIMOSTRAZIONE

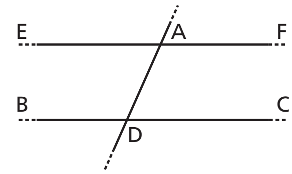
Si deve dimostrare che l'angolo $A\widehat{C}D$ è maggiore di $C\widehat{B}A$ e $B\widehat{A}C$.
Per la Proposizione 10 si può dividere AC per metà in E.
Si può determinare per la Proposizione 3 il punto F in modo che $EF = BE$.
Si considerino i triangoli ABE e CEF, per i quali $AE = EC$; $BE = EF$; $A\widehat{E}B = F\widehat{E}C$ per la Proposizione 15. Dunque per la Proposizione 4 i due triangoli sono uguali e, in particolare, gli angoli $B\widehat{A}E = E\widehat{C}F$.
Ma $E\widehat{C}D > E\widehat{C}F$ per la nozione comune VIII, quindi:

$$A\widehat{C}D = E\widehat{C}D > E\widehat{C}F = E\widehat{A}B = C\widehat{A}B.$$

Analogamente si dimostra che $A\widehat{C}D = E\widehat{C}D > D\widehat{C}F = C\widehat{B}A$.

Proposizione 17 - In un triangolo la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due angoli retti.

Proposizione 27 - Se due rette sono intersecate da una terza formando angoli alterni interni congruenti, allora le due rette sono fra loro parallele.
Proposizione 31 - [È possibile] Condurre per un punto dato una retta parallela a una retta data.



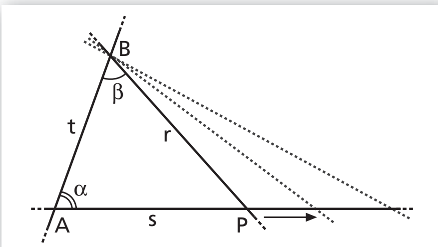
DIMOSTRAZIONE

Sia A il punto dato e sia BC la retta data. Considerato un punto D su BC si traccia la congiungente AD. Si costruisce poi AE tale che $D\widehat{A}E = A\widehat{D}C$.
In virtù di questa uguaglianza e della Proposizione 27, se si prolunga EA mediante la retta AF si ottiene la retta EF parallela a BC.

● La dimostrazione è condotta sulla base dei primi quattro postulati. Ciò significa che l'esistenza di almeno una parallela a una retta data è indipendente dal V postulato.

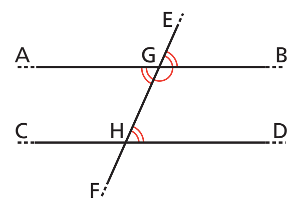
Il V postulato

Come abbiamo già osservato, molte erano le perplessità, già note allo stesso Euclide, sull'evidenza intuitiva del V postulato.
In effetti, se due rette r e s formano con una trasversale t angoli α e β la cui somma è «piccola», allora è evidente che le due rette si incontrano nel punto P.
Se ora si fa ruotare la retta r in modo da aumentare l'angolo β e rendere la somma $\alpha + \beta$ sempre più vicina a $2\widehat{R}$, si nota subito che il punto P tende a sfuggire al controllo uscendo fuori dal foglio (figura 2). Questa osservazione pone dei dubbi sull'evidenza del V postulato.

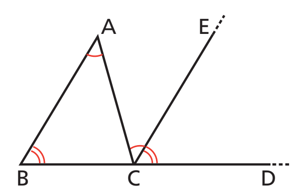


◀ **Figura 2**

Inoltre, il fatto che le prime 28 proposizioni degli *Elementi* siano indipendenti dal V postulato fa pensare che Euclide cercasse di ritardarne il più possibile l'introduzione, quasi che egli stesso dubitasse della sua validità.
La prima proposizione che dipende dal V postulato è la seguente.
Proposizione 29 - Date due rette parallele AB, CD e una trasversale EF, che interseca la retta AB nel punto G e la retta CD nel punto H, allora: (1) $A\widehat{G}H = G\widehat{H}D$; (2) $E\widehat{G}B = G\widehat{H}D$; (3) $B\widehat{G}H + G\widehat{H}D = 2\widehat{R}$.



Proposizione 32 - In ogni triangolo un angolo esterno è uguale alla somma degli angoli interni a esso non adiacenti e la somma degli angoli interni del triangolo è uguale a $2\widehat{R}$.



DIMOSTRAZIONE

Sia ABC il triangolo considerato di cui si prolunghi il lato BC.
Per la Proposizione 31, si conduca per il punto C la parallela CE alla retta AB.
In virtù della Proposizione 29, poiché le rette AB e CE sono parallele e su di esse cade la trasversale AC, si ha che $B\widehat{A}C = A\widehat{C}E$.

Analogamente, poiché AB è parallela a CE e la retta BD è una loro trasversale, ancora per la Proposizione 29, $E\widehat{C}D = A\widehat{B}C$.
Pertanto $A\widehat{B}C + B\widehat{A}C = E\widehat{C}D + A\widehat{C}E = A\widehat{C}D$, in quanto somme di angoli uguali.

Se all'uguaglianza precedente si aggiunge a entrambi i membri l'angolo $A\widehat{C}B$, si ottiene: $A\widehat{B}C + B\widehat{A}C + A\widehat{C}B = E\widehat{C}D + A\widehat{C}E + A\widehat{C}B$.
Ma $E\widehat{C}D + A\widehat{C}E = A\widehat{C}D$ e $A\widehat{C}D + A\widehat{C}B = 2\widehat{R}$ per la Proposizione 13 e dunque la somma degli angoli interni del triangolo è $A\widehat{B}C + B\widehat{A}C + A\widehat{C}B = 2\widehat{R}$.

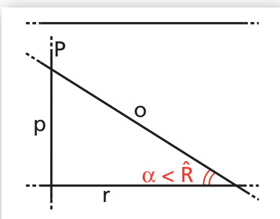
● Si può dimostrare che dalla Proposizione 32 discendono le Proposizioni 16 e 17. Perché allora Euclide non si è limitato a provare la sola Proposizione 32? La risposta più naturale è che Euclide abbia cercato di dimostrare il maggior numero possibile di teoremi senza far ricorso al V postulato.

Enunciati equivalenti al V postulato

Fin dall'antichità si cercò il modo di risolvere le difficoltà legate al V postulato di Euclide. La via preferenziale era quella di dimostrare il V postulato a partire dai termini, dalle nozioni comuni, dai primi quattro postulati degli *Elementi* e dalle proposizioni (1-28 e 31) da esso indipendenti. In questo modo, il V postulato sarebbe stato dedotto come un «teorema» e tutte le proposizioni dimostrate da Euclide sarebbero rimaste valide. L'intero edificio della geometria euclidea avrebbe così poggiato su basi rigorose e stabili.
Tuttavia, i numerosi tentativi compiuti dai matematici in questa direzione si protrassero per oltre duemila anni senza mai giungere all'obiettivo finale. Nonostante il sistematico fallimento di tutti i loro tentativi, prima del XIX secolo i matematici non dubitarono mai della verità del V postulato euclideo e continuarono costantemente a ricercarne la «vera» dimostrazione.
Gli studi compiuti portarono a scoprire enunciati equivalenti al V postulato. Esaminiamone alcuni.

● Due enunciati si dicono equivalenti se è possibile ricavare l'uno dall'altro e viceversa.

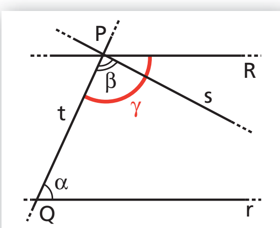
- La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a $2\widehat{R}$.
- Una perpendicolare p e un'obliqua o a una stessa retta si incontrano sempre in un punto dalla parte in cui l'obliqua forma con la retta un angolo acuto (postulato dell'obliqua).
- Dati una retta r e un punto P esterno a essa, passa per P al più una parallela alla retta r (postulato dell'unicità della parallela).



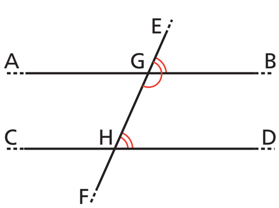
▲ **Figura 3** Postulato dell'obliqua.

Particolarmente interessante è il caso del «postulato dell'obliqua» (figura 3), che Posidonio di Rodi (I sec. a.C.) ritenne di avere dimostrato a partire dagli altri postulati. In realtà la sua dimostrazione conteneva un'ipotesi nascosta, che lo rendeva equivalente al V postulato: «se due rette sono parallele, allora sono equidistanti». Egli poté così provare il V postulato solo a partire da esso.

Per quanto riguarda il «postulato dell'unicità della parallela», esso è talmente noto che spesso viene sostituito a quello originario senza tenere conto che fu introdotto da Proclo solo nel V secolo d.C. Presentiamo la dimostrazione della sua equivalenza al V postulato dividendola in due parti.



▲ **Figura 4** Unicità della parallela.



Per la Proposizione 28, se $E\widehat{G}B \cong E\widehat{H}D$ oppure $B\widehat{G}H + G\widehat{H}D = 2\widehat{R}$, allora le rette AB e CD, tagliate dalla trasversale EF, sono parallele.

DIMOSTRAZIONE

a) *Dall'unicità della parallela segue il V postulato*
Siano r e s due rette tagliate, rispettivamente nei punti Q e P, da una trasversale t, che forma con esse due angoli α e β la cui somma è minore di $2\widehat{R}$ (figura 4). Consideriamo la retta PR per P che forma con la trasversale PQ un angolo γ tale che $\alpha + \gamma = 2\widehat{R}$. Poiché $\gamma > \beta$, PR è distinta dalla retta s e, per la Proposizione 28, essa risulta parallela alla retta r. Dal postulato dell'unicità della parallela, segue che PR è l'unica parallela a r e dunque s dovrà incontrare r, come richiesto dal V postulato.

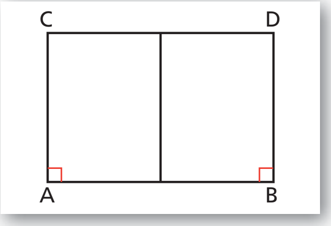
b) *Dal V postulato segue l'unicità della parallela*
Siano r una retta, P un punto del piano esterno a essa e PQ una trasversale alla retta r che formi con essa un angolo α. Si tracci per P la retta PR che formi con la retta PQ un angolo γ tale che $\alpha + \gamma = 2\widehat{R}$. In virtù del V postulato, tutte le altre rette per P, distinte da PR, incontrano la retta r; dunque per P passa al più una parallela alla retta r.

2. LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Il birettangolo isoscele di Saccheri

Nel tentativo di dimostrare l'assoluta verità della geometria euclidea, **Girolamo Saccheri** (1667-1733) dette inconsapevolmente un contributo fondamentale alla costruzione delle geometrie non euclidee.
Saccheri analizzò le proprietà del **quadrilatero birettangolo isoscele**, una figura ottenuta innalzando da una base AB due segmenti uguali AC e BD perpendicolari a essa e unendo i punti C e D. Saccheri osservò che gli angoli $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ possono essere:

- acuti (**ipotesi dell'angolo acuto**);
- retti (**ipotesi dell'angolo retto**);
- ottusi (**ipotesi dell'angolo ottuso**).



◀ **Figura 5** Il quadrilatero birettangolo isoscele.

Dato che l'ipotesi dell'angolo retto implica la validità del V postulato di Euclide, Saccheri cercò delle contraddizioni nelle due ipotesi rimanenti, in modo da convalidare solo la prima.

Solo l'ipotesi dell'angolo ottuso è in realtà contraddittoria, mentre quella dell'angolo acuto, per quanto controintuitiva, può essere utilizzata in alternativa a quella dell'angolo retto. Saccheri non si rese tuttavia conto di questa possibilità.

Lobačevskij e Bolyai

La geometria di Lobačevskij e Bolyai si ottiene semplicemente sostituendo il V postulato di Euclide con la sua negazione. Se esprimiamo il V postulato affermando che *per un punto passa una e una sola retta parallela a una retta data* la geometria di Lobačevskij e Bolyai risulta fondata sul postulato V′, secondo il quale *per un punto passano almeno due rette parallele a una retta data.*
La geometria creata da Lobačevskij e Bolyai corrisponde all'ipotesi dell'angolo acuto di Saccheri. Essa è stata denominata **iperbolica**, con riferimento a una classificazione introdotta dal matematico tedesco Felix Klein (1849-1925). Nella classificazione di Klein la geometria euclidea è detta **parabolica**.
Nella geometria iperbolica si possono dedurre svariati teoremi non euclidei e numerosi risultati ottenuti in precedenza da Saccheri. Ci limitiamo a citarne due.

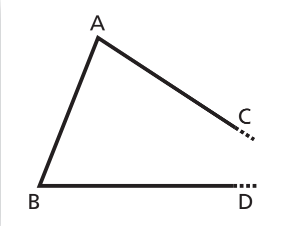
- La somma degli angoli interni di un triangolo è *minore* di due retti.
- Due triangoli che hanno angoli interni congruenti sono *congruenti*.

Le corrispondenti proprietà, in ambito euclideo, sono le seguenti.

- La somma degli angoli interni di un triangolo è *uguale* a due retti.
- Due triangoli che hanno angoli interni congruenti sono *congruenti oppure simili*.

In geometria iperbolica non è più possibile, invece, ricavare i risultati euclidei dipendenti dal V postulato, quali per esempio il teorema di Pitagora.

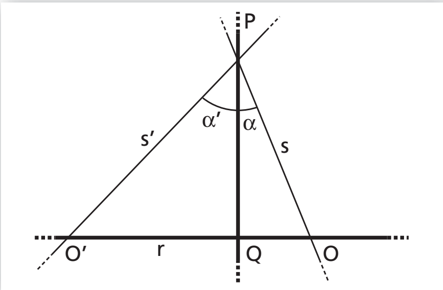
● Neanche le figure geometriche restano le stesse. In geometria iperbolica si perde la possibilità di costruire quadrati e parallelogrammi (le cui costruzioni dipendono dalla verità del V postulato euclideo); tuttavia esistono nuove figure, come per esempio i *triangoli aperti* (figura 6). Un triangolo aperto è una figura costituita da due semirette parallele AC e BD e dal lato AB che le unisce.



▲ **Figura 6** Un triangolo aperto: per esso valgono teoremi di congruenza, analogamente a quanto avviene per gli usuali triangoli della geometria euclidea.

La geometria iperbolica

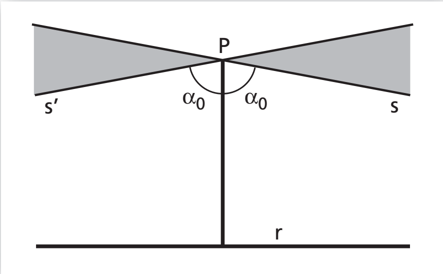
A livello intuitivo, possiamo mettere in evidenza la differenza tra geometria iperbolica e geometria euclidea a partire dalle seguenti considerazioni.



▶ Figura 7

Tracciamo una retta r e un punto P esterno a essa. Da P facciamo passare due rette, s e s', che intersecano r in O e O'. Sia PQ la perpendicolare a r passante per P e siano α e α' gli angoli $Q\widehat{P}O$ e $Q\widehat{P}O'$. Facendo ruotare s in senso antiorario e s' in senso orario i punti di intersezione O e O' si allontanano sempre più da Q. A un certo punto s e s' non intersecano più r a destra e, rispettivamente, a sinistra di Q, ma proseguendo la rotazione iniziano a intersecare r dalla parte opposta. Il V postulato di Euclide stabilisce che, quando α e α' sono entrambi retti, e solo in quel caso, s e s' non incontrano la retta r. In tale condizione esse sono coincidenti tra loro e individuano l'unica parallela alla retta r.

Dato che non si può dimostrare che questo caso è unico, Euclide inserì il V postulato (che è equivalente alla proposizione dell'unicità della parallela) tra i suoi enunciati primitivi.



▶ **Figura 8** Rette parallele e rette iperparallele nella geometria iperbolica.

Lobačevskij, da parte sua, postulò invece che s e s' cessino di intersecare r quando α e α' raggiungono un valore comune α_0, che viene detto **angolo di parallelismo**, inferiore all'angolo retto. Ciò implica che, anziché una sola, nella geometria di Lobačevskij vi siano infinite rette passanti per uno stesso punto, che non incontrano la retta data. Lobačevskij chiamò s e s' **parallele** a r, mentre le rette comprese tra s e s' furono definite **iperparallele**.

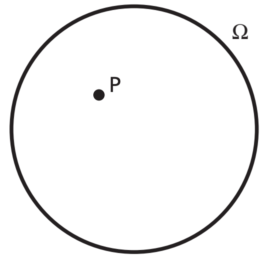
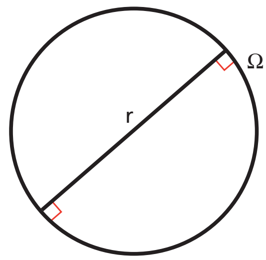
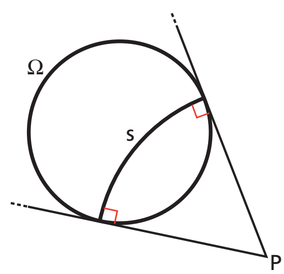
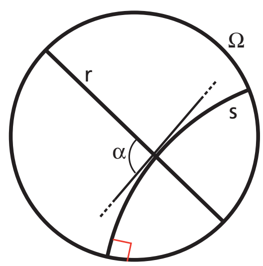
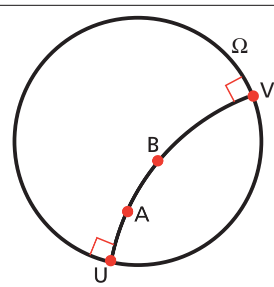
Non contraddittorietà della geometria di Lobačevskij

Le proprietà controintuitive della geometria di Lobačevskij potevano indurre a credere che essa contenesse al suo interno qualche elemento contraddittorio. Tuttavia se fosse stato possibile costruire un modello che traducesse concetti non euclidei in concetti euclidei, allora si sarebbe dimostrato che la geometria di Lobačevskij è tanto coerente quanto lo è la geometria di Euclide. In caso contrario, cioè se si fossero trovate nella prima contraddizioni da cui la seconda è esente, la costruzione di tale modello sarebbe diventata impraticabile.

● Con il termine **modello** si intende una traduzione (o interpretazione) con cui i termini e i postulati di una teoria vengono riferiti a un determinato universo di oggetti. In altre parole, un modello è un insieme di enti tratti da un'altra teoria, che soddisfano tutti gli assiomi della teoria data.

Il modello di Poincaré

Il modello di Poincaré fa riferimento alla porzione di piano euclideo formata da un cerchio Ω avente centro O e raggio r. I concetti di punto, retta, angolo e distanza della geometria iperbolica sono interpretati nel modo seguente.

Geometria di Lobačevskij	**Modello di Poincaré**	
punto	*punto interno a* Ω (esempio: punto *P*)	
retta	*diametro di* Ω (esempio: retta *r*)	
	oppure	
	arco di circonferenza interno a Ω *e ortogonale a esso* (esempio: retta *s*)	
angolo	*angolo fra due rette qualsiasi* *definite al punto precedente* (esempio: angolo tra le rette *r* e *s*)	
distanza fra due punti A e B	$\overline{AB} = \left\lvert \ln \frac{\overline{BU} \times \overline{AV}}{\overline{BV} \times \overline{AU}} \right\rvert$, dove *U* e *V* sono i punti estremi della retta passante per *A* e *B* posti sulla circonferenza	

Le figure possono aiutare a comprendere il significato delle definizioni. Si osservi, in particolare, come possono essere costruiti gli archi di circonferenza ortogonali a Ω: da un punto *P* qualsiasi esterno a Ω si tracciano le tangenti a essa e l'arco di circonferenza interno a Ω, avente per estremi i punti di tangenza.

La **geodetica** è la curva di minima lunghezza che unisce due punti di uno spazio in cui è definito un criterio di misura. Per convenzione, chiamiamo *rette* le geodetiche.

La distanza fra due punti *A* e *B* è la misura del segmento di geodetica che congiunge *A* e *B*.

La geometria sferica e la geometria ellittica

La geometria iperbolica non è l'unica che si può costruire in alternativa a quella euclidea. L'ipotesi dell'angolo ottuso di Saccheri apre infatti la strada a un terzo tipo di geometria, in cui non esistono parallele a una retta data per un punto qualsiasi.

C'è però una differenza sostanziale: mentre nell'ipotesi dell'angolo acuto è sufficiente sostituire il V postulato con la sua negazione per sviluppare la geometria iperbolica, è invece necessario introdurre variazioni più profonde dell'edificio euclideo se si assume l'ipotesi dell'angolo ottuso. Infatti, come si ricorderà, essa conduceva Saccheri a individuare una contraddizione con i postulati rimanenti, dai quali deriva l'esistenza di almeno una parallela (Proposizione 31).

La Proposizione 31 deve la sua validità ai postulati I e II di Euclide, dai quali discende che:

a) per due punti dati passa una sola retta e quindi due rette non possono racchiudere un'area (conseguenza del I postulato);

b) una retta è sempre illimitatamente prolungabile (conseguenza del II postulato).

Se si vuole costruire una geometria che escluda l'esistenza di rette parallele, è dunque necessario modificare almeno uno dei due postulati coinvolti.

A differenza di quanto accade nel caso della geometria iperbolica, che è l'unico tipo di geometria compatibile con l'ipotesi dell'angolo acuto di Saccheri, nell'ipotesi dell'angolo ottuso si ottengono due distinte geometrie, che negano entrambe l'esistenza di rette parallele, ma che si fondano su postulati differenti.

Esse furono classificate da Klein e denominate, rispettivamente, **geometria sferica** e **geometria ellittica**.
Tra i risultati che le accomunano si possono citare i seguenti:

- tutte le rette sono linee chiuse, tra loro congruenti, che non possono essere prolungate illimitatamente (in contrasto con il II postulato euclideo);
- la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di $2\widehat{R}$;
- i triangoli che hanno angoli uguali sono tutti congruenti tra loro (ciò accade anche nel caso della geometria iperbolica).

Una differenza notevole che distingue la geometria sferica dalla geometria ellittica è costituita dal fatto che nella geometria sferica due rette qualsiasi hanno sempre due punti di intersezione (in contrasto con il I postulato euclideo), mentre ciò non accade nella geometria ellittica. Queste geometrie non possono dunque essere interpretate per mezzo di uno stesso modello euclideo. A titolo di esempio, presentiamo un modello euclideo della geometria sferica, usualmente chiamato modello di Riemann.

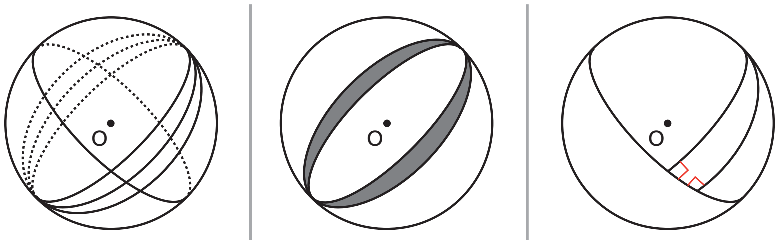
Il modello di Riemann

Consideriamo una superficie sferica Σ di raggio r e centro O. Per fornire una interpretazione euclidea della geometria sferica su Σ introduciamo il seguente dizionario.

Geometria sferica	Modello di Riemann
punto	*punto della superficie* Σ
retta	*cerchio massimo di* Σ (intersezione tra Σ e un piano passante per O)
angolo tra due rette	*angolo formato dai due piani che tagliano* Σ *secondo le due rette*

Si può verificare sul modello che non esistono rette parallele, che le rette sono linee chiuse e che due rette distinte racchiudono sempre un'area finita, come richiesto dalle modifiche apportate ai postulati I, II e V. Inoltre, tutti i triangoli costruiti su Σ hanno somma degli angoli interni maggiore di $2\widehat{R}$.

● Il modello di Riemann mostra che in uno spazio «curvo», qual è la superficie della sfera, la geometria è non euclidea, in particolare sferica. È possibile costruire modelli analoghi della geometria ellittica e iperbolica, utilizzando superfici opportunamente incurvate. Ciò rivela l'esistenza di una relazione tra geometria e curvatura dello spazio che assume grande importanza nello studio della struttura dell'universo.



a. Rette nel modello di Riemann.
b. Due rette distinte racchiudono sempre una superficie.
c. Angoli tra coppie di rette.

◄ **Figura 9**

Classificazione delle geometrie

Presentiamo un quadro riassuntivo delle geometrie analizzate. Sarà così possibile evidenziare alcune differenze e analogie che le caratterizzano.

Proprietà	Geometria			
	sferica	ellittica	parabolica (Euclide)	iperbolica (Lobačevskij)
assiomi euclidei modificati	I, II, V	II, V	nessuno	V
parallele per un punto a una retta data	nessuna		una	≥ 2
somma degli angoli interni di un triangolo	$> 2\widehat{R}$		$= 2\widehat{R}$	$< 2\widehat{R}$
triangoli simili non congruenti	no		sì	no
teorema di Pitagora	no		sì	no
rapporto tra la diagonale e il lato del quadrato	$\sqrt{2} < \frac{d}{l} < 2$		$\frac{d}{l} = \sqrt{2}$	$1 < \frac{d}{l} < \sqrt{2}$

Nella tabella sono state evidenziate proprietà delle geometrie non euclidee che non sono state analizzate nel testo per non rendere troppo complessa la trattazione. Lo studente interessato può approfondire l'argomento consultando la bibliografia.

Dal confronto si può notare che la geometria euclidea è il caso particolare che separa in due grandi famiglie le geometrie non euclidee.

3. I FONDAMENTI DELLA MATEMATICA

Il ruolo degli assiomi nella matematica classica e moderna

La scoperta delle geometrie non euclidee ha avuto importanti conseguenze sul modo di concepire la conoscenza matematica. Fino all'inizio dell'Ottocento si pensava che potesse esistere una sola geometria, sicuramente vera in quanto fondata su assiomi evidenti e sicuramente coerente perché da assiomi veri non si possono dedurre contraddizioni. In pratica l'assiomatica classica era fondata sullo schema seguente.

► **Figura 10** Lo schema su cui si basa l'assiomatica classica.

EVIDENZA → come garanzia di → VERITÀ → che implica necessariamente → COERENZA

La presunta unicità della geometria euclidea garantiva la validità di questo schema. Esso entrò in crisi quando si scoprì che esistono più teorie, dotate di diversa evidenza ma egualmente coerenti, come le geometrie non euclidee. In un contesto in cui si possono costruire molteplici teorie riferite agli stessi oggetti, il ruolo della verità deve essere riconsiderato.

Per risolvere il problema, i matematici del XIX e XX secolo adottarono un punto di vista radicalmente nuovo.

Nella moderna assiomatica, gli assiomi non dovevano più essere scelti in base alla loro presunta evidenza, ma *in modo arbitrario, purché non contraddittorio*. Essi non erano altro che enunciati, né veri né falsi, scelti liberamente come base dell'intero edificio.

Il problema della verità delle affermazioni della teoria rispetto al mondo reale veniva posto invece al di fuori della matematica. Se si vuole che una teoria dica qualcosa di «vero» al riguardo del mondo reale bisogna rivolgersi alle scienze empiriche.

La *coerenza*, che nell'assiomatica classica occupava un ruolo secondario in quanto diretta conseguenza della «evidente» verità degli assiomi, diventava invece nel contesto moderno qualcosa da dimostrare o da garantire nella costruzione delle teorie su basi convenzionali.

Il programma di Hilbert

David Hilbert

Una volta dimostrata la possibilità di costruire teorie egualmente coerenti, sorse il problema di cercare una base dell'intera costruzione matematica che fosse dotata di una coerenza non relativa (come quella evidenziata dalle diverse geometrie l'una rispetto all'altra), ma assoluta, la cui dimostrazione non facesse cioè riferimento a qualcosa di esterno a essa.

Il matematico che influenzò maggiormente le ricerche in questa direzione nel periodo compreso tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento fu il tedesco David Hilbert (1862-1943).

Sulla base della moderna concezione del ruolo degli assiomi, Hilbert elaborò un ambizioso programma, che si prefiggeva di individuare il fondamento dell'intera conoscenza matematica.

La geometria, che grazie alla solidità dell'edificio euclideo era stata considerata la base e il modello di riferimento di tutta la matematica classica, non poteva più svolgere questo ruolo fondamentale. La teoria che, per varie ragioni, venne individuata come candidato ideale fu l'aritmetica elementare. A partire dall'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, attraverso successive generalizzazioni, è infatti possibile costruire l'intera teoria dei numeri interi $\mathbb{Z}$, razionali $\mathbb{Q}$, reali $\mathbb{R}$ e complessi $\mathbb{C}$.
Hilbert avanzò l'idea che le teorie matematiche (aritmetica innanzitutto) devono essere considerate in modo puramente formale, avendo cura di definire i simboli del loro linguaggio, le regole di formazione degli enunciati e le regole di trasformazione con cui, date certe premesse, si ricavano certe conclusioni. Attraverso questa formalizzazione, egli mirava a dimostrare che l'aritmetica è dotata di proprietà intrinseche tali da renderla il fondamento dell'intero edificio matematico.
Tuttavia, come vedremo, il tentativo di dimostrare la coerenza assoluta dell'aritmetica si scontrò contro ostacoli inattesi.

Le proprietà generali dei sistemi formali

Una teoria matematica **T** si dice *formalizzata* quando sono definiti il suo linguaggio $\mathscr{L}$ e l'universo $\mathscr{U}$ di oggetti a cui essa si riferisce. La teoria, simbolicamente rappresentata dall'espressione $\mathbf{T} = (\mathscr{L}, \mathscr{U})$, si dice allora **teoria formale** o **sistema formale**.
Il linguaggio $\mathscr{L}$ deve specificare:

- i simboli con cui vengono espressi gli enunciati;
- i criteri di formazione delle espressioni (le regole con cui i simboli si possono combinare tra loro per produrre espressioni corrette all'interno del linguaggio);
- le espressioni scelte come assiomi;
- le regole di inferenza con cui, a partire dagli assiomi, si deducono altre espressioni.

Le regole di inferenza sono regole di deduzione.

Le espressioni che, attraverso una sequenza di deduzioni, possono essere ricavate a partire dagli assiomi si dicono **teoremi**. La sequenza logica attraverso cui un teorema viene dedotto si chiama invece **dimostrazione**.
Quando l'insieme di oggetti di $\mathscr{U}$ è definito in modo da dare un significato ai simboli del linguaggio si ha una **interpretazione** di $\mathscr{L}$. Un'interpretazione che rende veri tutti gli assiomi di $\mathscr{L}$ è detta un **modello** di $\mathscr{L}$.

Abbiamo già visto esempi di modelli nel paragrafo 2, in cui abbiamo trattato le geometrie non euclidee (modelli di Poincaré e Riemann).

La teoria e la metateoria

Una teoria formale che permette di affermare qualcosa relativamente alle proprietà di determinati oggetti matematici può essere a sua volta studiata per mezzo di una seconda teoria, che viene detta **metateoria** e che indicheremo con **MT**.
MT è dotata di un proprio linguaggio $\mathscr{ML}$ e studia le proprietà di $\mathscr{L}$, che rappresenta quindi il suo universo e viene detto per questo **linguaggio-oggetto**. Scriveremo allora $\mathbf{MT} = (\mathscr{ML}, \mathscr{L})$.
Spesso linguaggio-oggetto $\mathscr{L}$ e metalinguaggio $\mathscr{ML}$ risultano essere coincidenti, altre volte sono chiaramente diversi. È importante, tuttavia, distinguere i loro ruoli per mezzo di alcuni esempi.

Consideriamo le frasi seguenti:

«In italiano si usano sei articoli determinativi: il, lo, la, i, gli, le»;
«L'enunciato "la neve è bianca" è vero nella lingua italiana».

In questo caso l'italiano svolge simultaneamente il ruolo di $\mathscr{L}$ e $\mathscr{ML}$: esso è al tempo stesso la lingua di cui si parla e quella con cui si parla.
La confusione tra i ruoli viene superata nel caso delle seguenti frasi:

«In inglese si usa un solo articolo determinativo: the»;
«L'enunciato "snow is white" è vero nella lingua inglese».

Adesso $\mathscr{L}$ è rappresentato dalla lingua inglese, $\mathscr{ML}$ dalla lingua italiana: utilizzando l'italiano si discutono le proprietà di espressioni ed elementi linguistici propri dell'inglese.

La sintassi e la semantica

Lo studio metateorico di una teoria **T** può svilupparsi in due direzioni diverse:

- se analizziamo il linguaggio $\mathscr{L}$ indipendentemente dall'universo $\mathscr{U}$ di riferimento, occupandoci solo della sua struttura e delle regole cui obbedisce, studiamo la **sintassi** di **T**; è questo il caso delle espressioni che definiscono gli articoli dell'italiano e dell'inglese negli esempi visti sopra;
- se analizziamo $\mathscr{L}$ in rapporto a $\mathscr{U}$, considerando quindi la verità o falsità dei suoi enunciati rispetto al mondo degli oggetti di cui parla, studiamo invece la **semantica** di **T**; ciò accade, per esempio, nel caso delle frasi riguardanti il colore della neve.

Lo studio sintattico pone l'accento sul problema della correttezza e quindi sulla coerenza di **T**, mentre lo studio semantico concentra la propria attenzione sulla verità di **T**, ovvero sull'aderenza delle sue affermazioni alle proprietà degli oggetti di $\mathscr{U}$. È chiaro allora che, mentre la prospettiva classica di intendere gli assiomi era basata su un approccio semantico, la prospettiva moderna, sorta dopo la nascita delle geometrie non euclidee e sviluppata da Hilbert, ha rivolto la propria attenzione allo studio sintattico delle teorie.

La distinzione fra sintassi e semantica permette di chiarire il significato di due concetti, dimostrabilità e verità, che nella storia della matematica sono stati spesso confusi.
La *dimostrabilità* di un'espressione è una proprietà puramente sintattica e indica l'esistenza di una catena di espressioni che, a partire dagli assiomi, per mezzo delle regole di inferenza ammesse in $\mathscr{L}$, conduce all'espressione che si vuole dimostrare.
La *verità* è invece un concetto semantico, che stabilisce una relazione tra un'espressione di $\mathscr{L}$ e le proprietà degli oggetti dell'universo $\mathscr{U}$ a cui la teoria formale si riferisce. Quindi, mentre la dimostrabilità è una proprietà intrinseca al linguaggio $\mathscr{L}$, la verità dipende dall'interpretazione di $\mathscr{L}$, ovvero dal rapporto fra $\mathscr{L}$ e $\mathscr{U}$.
Consideriamo per esempio l'espressione seguente: «per x e y qualunque si ha che: [(x $\square$ successore di y) = (successore di x $\square$ y)]».
Se interpretiamo la funzione $\square$ come addizione, l'espressione è vera; mentre è falsa se la stessa funzione viene interpretata come moltiplicazione.

La coerenza, la completezza e la decidibilità

Una volta definito, sia pure schematicamente, che cosa si intende per teoria formale, occorre specificare quali proprietà essa può possedere. Riportiamo le più importanti.

- Una teoria **T** si dice **coerente** se non esiste, in essa, alcun enunciato A tale che A e non-A siano entrambi teoremi di **T**. In altre parole, non è possibile dedurre, dagli assiomi di **T**, sia l'enunciato A sia l'enunciato non-A. Non possono esserci, quindi, contraddizioni all'interno di **T**.
- Una teoria **T** si dice **completa** se, per ogni enunciato A, essa è capace di dimostrare A oppure non-A. Ciò significa che gli assiomi della teoria consentono di dimostrare qualsiasi enunciato di **T** oppure la sua negazione.
- Una teoria **T** si dice **decidibile** se esiste un procedimento meccanico per dimostrare, in un numero finito di passi, se un qualsiasi enunciato A è un teorema oppure no, cioè se esiste una sua dimostrazione a partire dagli assiomi. In caso contrario, se la teoria è indecidibile, questa procedura meccanica non esiste e la dimostrazione dei teoremi può richiedere una certa dose di ingegno.

Coerenza, completezza e decidibilità sono caratteristiche desiderabili delle teorie formali. Le prime due, in particolare, sono essenziali per una teoria che voglia costituire la base dell'intera conoscenza matematica.

Un esempio di teoria formale: il calcolo delle proposizioni

Il nucleo più elementare del linguaggio matematico è costituito dal calcolo delle proposizioni. Le **proposizioni** sono enunciati, a cui si può attribuire un valore vero (V) o falso (F), di cui non viene analizzata la struttura interna. Esse vengono combinate fra loro per mezzo di connettivi formando nuove proposizioni che possono essere a loro volta vere o false.
Tra i connettivi figurano la negazione *non* (per esempio, la negazione di A è $\overline{A}$), la congiunzione *e* ($\wedge$), la disgiunzione *o* ($\vee$), l'implicazione *se... allora...* ($\rightarrow$) e la doppia implicazione *se e solo se* ($\leftrightarrow$).
Partendo dalla verità o falsità di due proposizioni A e B possiamo mostrare l'effetto prodotto da questi connettivi per mezzo delle seguenti *tavole di verità*.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	F	F	V	V

Dalla tabella si deducono le proprietà dei vari connettivi. Per esempio, $A \wedge B$ è vera se e solo se A e B sono entrambe vere; $A \vee B$ è falsa se e solo se A e B sono entrambe false. La proposizione $A \rightarrow B$ si considera falsa solo se A risulta vera e B falsa, mentre $A \leftrightarrow B$ è vera quando A e B sono entrambe vere o false.
Una teoria formale **L** del calcolo proposizionale può essere formulata nei termini seguenti.

- Simboli di **L** sono le lettere proposizionali A, B, C, …, i connettivi primitivi $\overline{A}$ e $\rightarrow$, le parentesi (e). Gli altri connettivi possono essere definiti a partire dai primitivi.

- Le espressioni di **L** hanno la forma A, B, $\overline{A}$, $A \rightarrow B$, e quelle che si costruiscono combinando le precedenti. Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ sono espressioni di **L**, ottenute da combinazioni dei simboli, lo sono anche $\overline{\mathscr{A}}$ e $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$.
- Se $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ sono espressioni di **L**, allora i seguenti sono assiomi della teoria:
  a1: $(\mathscr{A} \rightarrow (\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A}))$;
  a2: $(\mathscr{A} \rightarrow (\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C})) \rightarrow ((\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \rightarrow (\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{C}))$;
  a3: $((\overline{\mathscr{B}} \rightarrow \overline{\mathscr{A}}) \rightarrow ((\overline{\mathscr{B}} \rightarrow \mathscr{A}) \rightarrow \mathscr{B}))$.
- Dalle espressioni $\mathscr{A}$ e $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ discende $\mathscr{B}$. Questa è l'unica regola di inferenza di **L**. Essa viene denominata *Modus Ponens* (MP).

Gli assiomi a1, a2, a3 rappresentano schemi di proposizioni che risultano sempre veri, qualsiasi espressione si sostituisca ad $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$. Per esempio, nel caso di a1 si può verificare che, sostituendo $\mathscr{A}$ con $A \rightarrow B$, e $\mathscr{B}$ con B, dove A e B sono proposizioni, la tavola di verità assume sempre il valore V.

Si può dimostrare che la teoria formale del calcolo proposizionale così formulata gode delle seguenti proprietà:

- è coerente (non esiste $\mathscr{A}$ tale che $\mathscr{A}$ e $\overline{\mathscr{A}}$ siano entrambi teoremi di **L**);
- è completa (per ogni $\mathscr{A}$ si può ottenere una dimostrazione di $\mathscr{A}$ o di $\overline{\mathscr{A}}$);
- è decidibile (per ogni $\mathscr{A}$ si può dimostrare con una procedura meccanica, le tavole di verità, se $\mathscr{A}$ è un teorema).

Il calcolo dei predicati

Il calcolo proposizionale, pur essendo dotato di tutte le proprietà desiderabili per una teoria formale, è troppo elementare per costituire la base dell'aritmetica e della matematica in generale.
Se si vuole raggiungere tale obiettivo occorre costruire teorie formali più ricche.

Un primo passo nello sviluppo di una teoria formale dei numeri naturali consiste nell'introduzione di nuovi elementi linguistici che permettano, innanzitutto, di analizzare la struttura interna delle proposizioni.
Essi sono:

- quantificatori ($\forall$ «per ogni», $\exists$ «esiste»);
- variabili individuali («x», …);
- costanti («a», …);
- lettere predicative («P», «Q», …);
- lettere funzionali («$f(x)$», …).

L'argomentazione

- Tutti gli uomini sono mortali,
- Socrate è un uomo,
- Socrate è mortale

si può tradurre nel modo seguente:

- $\forall x(U(x) \rightarrow M(x))$,
- $U(s)$,
- $M(s)$,

dove U e M sono i predicati «uomo» e «mortale» e s è Socrate.

Per esempio, con l'espressione $\forall x\, P(x)$ si afferma che ogni elemento x di un dato insieme possiede la proprietà P, mentre l'espressione $\exists x\, Q(x)$ afferma che esiste almeno un x che gode della proprietà Q.
L'espressione $P(a)$ indica invece che l'individuo a (e non un elemento x qualsiasi) possiede la proprietà P.

La teoria più elementare che si ottiene facendo uso di predicati e quantificatori viene denominata *calcolo dei predicati del primo ordine*.
In essa i predicati si riferiscono solo alle variabili e alle costanti (non sono ammessi predicati di predicati), mentre i quantificatori operano solo sulle variabili (è esclusa la quantificazione di predicati).

Una teoria formale **K** del calcolo dei predicati del primo ordine richiede quindi un linguaggio più ricco di **L**, nonché un insieme di assiomi più ampio.
Tuttavia, neanche le teorie del primo ordine così strutturate sono sufficienti per la costruzione di una teoria formale dell'aritmetica.

La teoria formale dei numeri

Se si vuole costruire una teoria formale per l'aritmetica occorre aggiungere a una teoria del primo ordine tutti quegli elementi non logici che servono a caratterizzare le proprietà dei numeri naturali, vale a dire lo zero, il successore di un numero, le operazioni di addizione e moltiplicazione e il principio di induzione.
La formalizzazione dell'aritmetica allora richiede:

- una costante individuale indicante lo zero (0);
- una relazione unaria che esprima il successore (x') di un numero dato x;
- due relazioni binarie che esprimano le operazioni di addizione e moltiplicazione ($+$ e $\cdot$);
- una costante predicativa che individui l'identità ($=$);
- l'aggiunta di alcuni assiomi non logici che definiscano le proprietà dell'identità, dell'addizione e della moltiplicazione, nonché il principio d'induzione matematica, per mezzo del quale si stabilisce che, se una proprietà è posseduta dallo 0, da un x qualsiasi e dal suo successore x', allora essa è posseduta da tutti gli x.

Per esempio, si può dimostrare per induzione che la somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2. La proprietà vale infatti per $n = 1$. Supponendo che valga anche per $n = k$, ovvero che

$$1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2,$$

si ottiene che essa vale anche per $n = k + 1$, in quanto

$$1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Gli assiomi non logici sono i seguenti:

A1) $\forall x_1, x_2, x_3 \quad x_1 = x_2 \to (x_1 = x_3 \to x_2 = x_3)$;
A2) $\forall x_1, x_2 \quad x_1 = x_2 \to x_1' = x_2'$;
A3) $\forall x \quad 0 \neq x'$;
A4) $\forall x_1, x_2 \quad x_1' = x_2' \to x_1 = x_2$;
A5) $\forall x \quad x + 0 = x$;
A6) $\forall x_1, x_2 \quad x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$;
A7) $\forall x \quad x \cdot 0 = 0$;
A8) $\forall x_1, x_2 \quad x_1 \cdot x_2' = (x_1 \cdot x_2) + x_1$;
A9) per ogni espressione $\mathscr{A}(x)$ si ha:

$$\forall x(\mathscr{A}(0) \wedge (\forall x(\mathscr{A}(x) \to \mathscr{A}(x')))) \to \forall x(\mathscr{A}(x)).$$

La teoria formale **S** che si ottiene in questo caso è un *calcolo del primo ordine con identità*.

Il teorema di Gödel

La maggiore potenza dei linguaggi che si possono costruire con il calcolo dei predicati ha però riflessi negativi sulle proprietà delle teorie formali. Sebbene si possa dimostrare che il calcolo dei predicati del primo ordine è completo, ciò non è vero per il calcolo dei predicati del primo ordine con identità. Il programma di Hilbert di ottenere una teoria **S**, coerente e completa, abbastanza potente da esprimere l'aritmetica elementare naufragò quando, nel 1931, il moravo Kurt Gödel (1906-1978) dimostrò che, in tale teoria, esiste un enunciato G che afferma: «l'enunciato G è indimostrabile in **S**».


Kurt Gödel

- Supponiamo di poter dimostrare G. Allora G è dimostrabile. Da ciò nasce una contraddizione in quanto l'enunciato afferma di essere indimostrabile. **S** risulta dunque incoerente.
- Supponiamo di non poter dimostrare G. Allora G è veramente indimostrabile. Ciò implica che la teoria **S** è incompleta, in quanto in essa esiste un enunciato vero ma non dimostrabile.

Da queste considerazioni deriva che la teoria **S** è incoerente oppure è incompleta. La dimostrazione di Gödel rivelò quindi che la coerenza di una teoria non può essere provata dall'interno, ma solo ricorrendo a una teoria più potente, anch'essa soggetta alle stesse limitazioni imposte dal teorema per quanto riguarda la propria completezza e coerenza.

● I numeri di Gödel permettono di aritmetizzare il linguaggio di **S**, traducendo simboli e formule in numeri naturali. Per mezzo di essi si può utilizzare l'aritmetica come metateoria di se stessa.

● Per giungere a questo risultato Gödel ideò un metodo per mezzo del quale è possibile associare a ogni simbolo o formula u di **S** un numero naturale $g(u)$, che viene detto *numero di Gödel*.
In tal modo, gli enunciati di **S** sono tradotti in enunciati dell'aritmetica e diventa possibile parlare della teoria formale dei numeri «dall'interno»: linguaggio e metalinguaggio vengono così a coincidere.
L'associazione tra simboli e numeri può essere condotta secondo lo schema seguente.

u	0	′	(	)	=	+	−	x_k	…
$g(u)$	3	5	7	9	11	13	15	$15 + 2k$	…

In esso ogni simbolo corrisponde a un numero dispari, escluso il numero 1.
Una formula composta dai simboli $u_1u_2u_3u_4u_5u_6\ldots$ è associata al numero di Gödel:

$$g(u_1u_2u_3u_4u_5u_6\ldots) = 2^{g(u1)}3^{g(u2)}5^{g(u3)}7^{g(u4)}11^{g(u5)}13^{g(u6)}17^{\cdots}.$$

Data l'univoca scomponibilità di un qualsiasi numero naturale in numeri primi, non esistono due o più formule di **S** associate allo stesso numero. Inoltre, mentre i numeri di Gödel dei simboli sono dispari, quelli delle formule, a causa della presenza della potenza con base 2, sono pari. Per esempio, l'espressione (0) è associata al numero di Gödel pari,

$$g((0)) = 2^{g(()} \cdot 3^{g(0)} \cdot 5^{g())} = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^9 = 6\,750\,000\,000,$$

mentre il simbolo 0 è associato, come si è detto, al numero 3.

I paradossi sintattici e semantici

Un uomo afferma: «Io sto mentendo». Se egli mente, allora ciò che dice è vero e quindi non sta mentendo. Se invece egli non mente, allora dice la verità e quindi la sua affermazione è falsa. In ogni caso egli dice il vero e il falso al tempo stesso.

Questo paradosso, noto sin dall'antichità come il «paradosso del mentitore», non contiene errori logici e rivela l'esistenza di problemi profondi legati all'uso di espressioni che contengono autoriferimenti, che affermano cioè qualcosa a proposito di se stesse. Affermazioni come quella del mentitore hanno la struttura logica di una proposizione:

P : P è falsa.

● Anche nel secondo caso la presenza di autoriferimenti genera situazioni contraddittorie e rivela l'impossibilità di costruire un sistema formale chiuso in se stesso. Ogni teoria formale **T** che voglia essere metateoria di se stessa incorre necessariamente nelle limitazioni imposte dal teorema di Gödel.

Se P è vera allora essa è falsa, se P è falsa allora è vera.
Nella dimostrazione del teorema di Gödel ci si imbatte in una espressione G che afferma di essere indimostrabile. La sua struttura è quindi:

G : G è indimostrabile.

È evidente l'analogia esistente tra le due situazioni: la differenza sostanziale tra il paradosso del mentitore e il risultato di Gödel sta nel fatto che il primo concerne la nozione di *verità* (e quindi si riferisce al livello semantico), mentre il secondo verte sulla nozione di *dimostrabilità* (e quindi opera a livello sintattico).

L'assiomatizzazione dell'aritmetica

Gli assiomi di Peano

In un contesto generale di *aritmetizzazione* della matematica, il chiarimento del concetto di numero, e in particolare di numero naturale, acquistava una posizione di assoluta centralità. Tra i tentativi che vennero effettuati in questa direzione spicca quello compiuto dal matematico italiano Giuseppe Peano (1858-1932), il quale propose, nel 1889, un'assiomatizzazione dell'aritmetica.

Nel sistema di Peano il concetto di numero naturale (originariamente inteso come intero positivo, escludendo lo zero) non è definito, ma introdotto come primitivo, e le sue proprietà vengono sviluppate a partire da cinque assiomi specifici, dopo avere esplicato il significato dei segni 1 (unità), $a + 1$ (successore), $=$ (uguale):

1. 1 è un numero;
2. se a è un numero, $a + 1$ è un numero;
3. se a e b sono due numeri, e se i loro successori sono uguali, anch'essi sono uguali;
4. 1 non è successore di alcun numero;
5. se s è una proprietà tale che
   - 1 ha la proprietà s,
   - se a ha la proprietà s, anche $a + 1$ la possiede,

   allora ogni numero ha la proprietà s.

Limiti del sistema di Peano

Peano si proponeva, con i suoi assiomi, di caratterizzare in modo univoco, assoluto, il sistema dei numeri naturali.

Il suo progetto fu però messo in crisi dalla dimostrazione, fornita dal matematico e filosofo inglese Bertrand Russell (1872-1970), che gli assiomi di Peano, anziché caratterizzare solamente l'insieme dei numeri naturali, possono essere applicati a qualunque progressione.

Diamo alcuni esempi:

- è sufficiente sostituire a 1 qualunque altro numero naturale (per esempio 5), per ottenere una successione diversa dall'insieme dei numeri naturali (5, 6, 7, ...);
- basta sostituire 1 con 2 e considerare come successore $a + 2$ anziché $a + 1$ per ottenere l'insieme dei soli numeri pari (2, 4, 6, ...).

Una base insiemistica per i numeri naturali

In realtà, tutti i tentativi che vennero fatti per fornire basi assiomatiche per l'aritmetica alla fine dell'Ottocento rivelarono dei limiti. Ciò indusse a pensare che il concetto di numero, anziché essere considerato come primitivo, dovesse essere fondato, a sua volta, sul concetto di insieme.

I matematici tedeschi Georg Cantor (1845-1918) e Gottlob Frege (1848-1925) giunsero, separatamente, a definire i numeri naturali su basi insiemistiche.

La linea di pensiero di Cantor e Frege può essere riassunta, schematicamente, nei seguenti punti:

- per insieme si intende una collezione di oggetti;
- a ogni insieme spetta una determinata potenza o *cardinalità*, che è quella proprietà generale dell'insieme che si ottiene quando si astrae dalla natura particolare dei suoi elementi e dall'ordine con cui essi sono dati;
- due insiemi equipotenti sono tali che tra essi può stabilirsi una corrispondenza biunivoca: a ogni elemento del primo corrisponde uno e un solo elemento del secondo;
- due insiemi equipotenti hanno quindi la stessa cardinalità;
- *i numeri naturali sono le cardinalità degli insiemi finiti.*

A partire da questa definizione, Frege si propose di fondare l'aritmetica su princìpi puramente logici, a cui poteva essere ricondotta l'intera teoria degli insiemi. Egli diede avvio, con le sue ricerche, a un filone di indagine che divenne noto come «scuola logicista». Anche l'approccio logicista, tuttavia, rivelò ben presto, all'inizio del Novecento, l'esistenza di grosse difficoltà, lasciando senza risposta il problema dei fondamenti.

Il rapporto fra aritmetica e geometria

«In Euclide – e in generale negli antichi pensatori matematici – la geometria è, grazie ai suoi assiomi, la base rigorosa dell'aritmetica generale, che comprende anche l'irrazionale. L'aritmetica ha conservato questa condizione di vassallaggio rispetto alla geometria fino al XIX secolo. Ma in seguito le condizioni si sono completamente modificate; oggi è proprio l'aritmetica che ha ottenuto il predominio, come la vera disciplina fondamentale».

Queste parole del matematico tedesco Felix Klein (1849-1925), scritte nel 1895, illustrano chiaramente il cambiamento avvenuto, durante l'Ottocento, nella concezione del rapporto fra geometria e aritmetica. Tale cambiamento, che ebbe tra le sue cause l'emergere delle geometrie non euclidee, portò a riconsiderare, sotto nuove prospettive, il problema dei fondamenti della matematica.

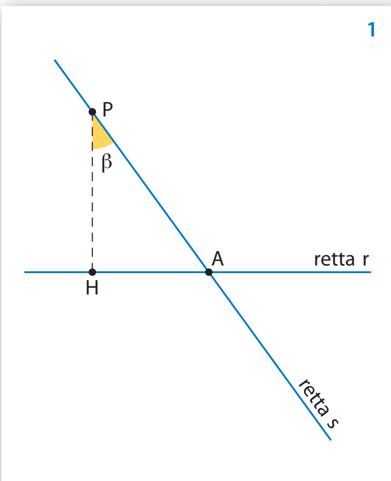
TRIANGOLI APERTI

…ma esistono triangoli senza punta?

▶ Il quesito completo a pag. C49

L'angolo di parallelismo della geometria iperbolica

Consideriamo, nel piano, una retta r e un punto P non appartenente a essa. Sia s una retta passante per P che interseca r in un punto A (figura 1).



La geometria euclidea afferma che il punto A esiste fino a che l'angolo β formato da r con la perpendicolare PH alla retta r è acuto.

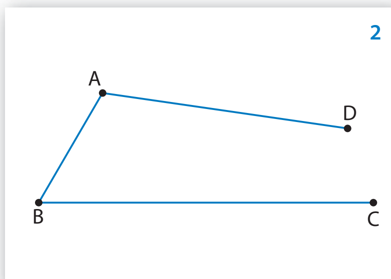
È possibile dimostrare che, se l'ampiezza di β è di 90°, allora la retta s è parallela a r e quindi non la interseca. Non è però possibile dimostrare, nella geometria euclidea, l'unicità della parallela: si può quindi pensare a una geometria in cui la retta s cessi di intersecare r anche per valori di β minori di 90°. Questo è proprio il caso della geometria iperbolica, in cui, dati una retta r, un punto P non appartenente a essa e una retta s passante per P che forma un angolo β con la perpendicolare a r per P, si definisce **angolo di parallelismo** l'angolo di minima ampiezza per cui s non interseca r.

Tutti gli angoli di parallelismo della geometria iperbolica sono acuti.

I triangoli aperti della geometria iperbolica

Consideriamo un segmento AB e due semirette fra loro parallele AD e BC, tali che $B\widehat{A}D$ sia angolo di parallelismo.

La figura aperta $BADC$ si chiama **triangolo aperto** (figura 2).



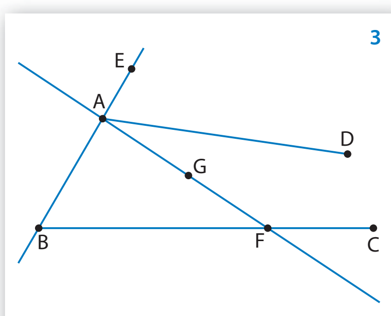
Teorema. In ogni triangolo aperto un angolo esterno è maggiore dell'angolo interno non adiacente.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che l'angolo esterno $D\widehat{A}E$ non sia maggiore dell'angolo interno non adiacente $A\widehat{B}C$. Si possono avere due casi:

a) $D\widehat{A}E < A\widehat{B}C$;

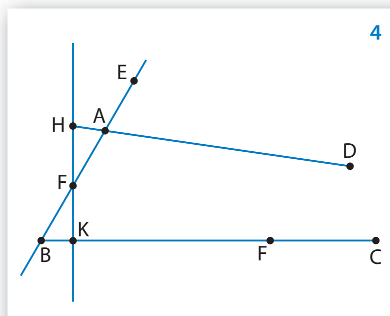
b) $D\widehat{A}E = A\widehat{B}C$.

Consideriamo innanzitutto il primo caso (figura 3).



Poiché, per ipotesi, $D\widehat{A}E < A\widehat{B}C$, possiamo considerare l'angolo $G\widehat{A}E = A\widehat{B}C$. La semiretta AG, essendo interna all'angolo di parallelismo $B\widehat{A}D$, deve incontrare BC in F. Allora il triangolo chiuso ABF avrebbe l'angolo esterno $F\widehat{A}E$ congruente all'angolo interno $A\widehat{B}F$ non adiacente a esso. Ma il teorema che afferma che ogni angolo esterno di un triangolo euclideo è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti a esso non è una conseguenza dell'assioma della parallela, quindi deve valere anche nella geometria iperbolica. Da qui l'assurdo.

Consideriamo ora il caso $D\widehat{A}E = A\widehat{B}C$ (figura 4).



Consideriamo il punto medio F di AB e da F tracciamo la perpendicolare FK alla retta contenente B e C. Tale perpendicolare incontri AD in H.

I triangoli FHA e FBK sono congruenti per il secondo criterio, infatti $FA \cong FB$ per costruzione, $H\widehat{F}A \cong K\widehat{F}B$ perché opposti al vertice e $F\widehat{A}H \cong F\widehat{B}K$ perché congruenti all'angolo $D\widehat{A}E$ ($F\widehat{A}H \cong D\widehat{A}E$ perché opposti al vertice e $F\widehat{B}K \cong D\widehat{A}E$ per ipotesi).

In particolare $F\widehat{H}A = F\widehat{K}B = 90°$; ma ciò è assurdo, perché $F\widehat{H}A$, essendo angolo di parallelismo, deve essere acuto.

Poiché abbiamo trovato un assurdo sia nel caso $D\widehat{A}E < A\widehat{B}C$, sia nel caso $D\widehat{A}E = A\widehat{B}C$, possiamo concludere che $D\widehat{A}E > A\widehat{B}C$, che è ciò che volevamo dimostrare.

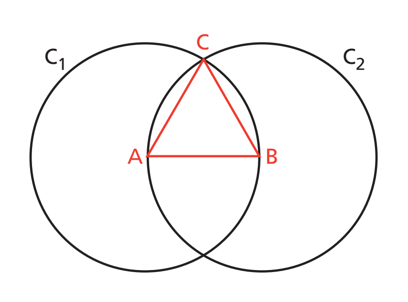
1. GLI *ELEMENTI* DI EUCLIDE

Teoria a pag. C50

1 **ESERCIZIO GUIDA**

Indichiamo, all'interno delle parentesi, i termini, i postulati, le nozioni comuni e le proposizioni che vengono usate nella seguente dimostrazione e completiamo la dimostrazione con il disegno.

Proposizione 1
Su un segmento dato costruire un triangolo equilatero.

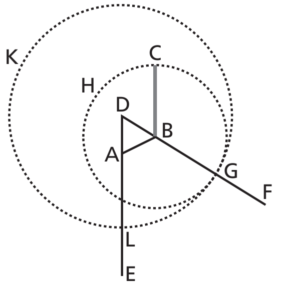


Dimostrazione
Sia AB il segmento dato. Si deve dunque costruire il triangolo equilatero di lato AB. In base al (postulato III) si costruiscano il cerchio C_1 di centro A e raggio AB e il cerchio C_2 di centro B e raggio AB. I due cerchi si tagliano nel punto C; in base al (postulato I) si traccino da C i due segmenti CA e CB.
Poiché A è il centro del cerchio C_1, si ha che $AC = AB$ per (il termine XV); analogamente si ha che $BC = BA$. Dunque per (la nozione comune I) $AC = AB = BC$. Pertanto il triangolo ABC è equilatero.

COMPLETA indicando, all'interno delle parentesi (..........), i termini, i postulati, le nozioni comuni e le proposizioni usate nelle seguenti dimostrazioni e, quando è richiesto, integra la dimostrazione con il disegno.

2 *Proposizione 2*
Applicare in un punto dato un segmento uguale a uno dato.

Dimostrazione
Siano dati il punto A e il segmento BC; si deve applicare con estremo in A un segmento di lunghezza uguale a BC.
Per (..........) si può tracciare la congiungente AB dal punto A al punto B e per (..........) si può costruire su di essa un triangolo equilatero DAB.
In base a (..........) è possibile prolungare i segmenti DA, DB rispettivamente dalla parte di A e B in linea retta ottenendo le rette DE, DF e per (..........) si possono descrivere il cerchio CGH di centro B e raggio BC e il cerchio GKL di centro D e raggio DG.
Poiché, per costruzione, $BC = BG$, $DL = DG$ e $DA = DB$, allora in base a (..........) $AL = BG$. Dalle uguaglianze $BC = BG$ e $AL = BG$ si deduce per (..........) che $AL = BC$, che è quanto si voleva dimostrare.

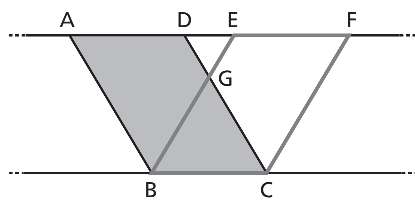


3 *Proposizione 3*
Dati due segmenti di diverse lunghezze, togliere dal maggiore un segmento uguale al minore.

Dimostrazione (Si richiede di fare anche il disegno.)
Siano AB, XY i due segmenti dati e $AB > XY$. Per (..........) si può applicare con estremo nel punto A il segmento AD uguale al segmento XY e per (..........) può descriversi un cerchio di centro A e raggio AD.
Si indichi con E il punto di intersezione tra il cerchio e il segmento AB. Per (..........) si ha che $AE = AD$ in quanto raggi dello stesso cerchio.
Poiché anche $XY = AD$, da (..........) si ha che $XY = AE$ da cui la tesi.

4 *Proposizione 35*
Parallelogrammi che sono posti sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali tra loro (ossia: hanno la stessa area).

Dimostrazione
Siano $ABCD$ e $EBCF$ parallelogrammi e BC la loro base comune; per (..........), valgono le uguaglianze: $AD = BC$, $AB = DC$, $EF = BC$ e $EB = FC$. Per (..........) segue che $AD = EF$.
Sommando a entrambi i segmenti (AD ed EF) il segmento DE, si ha per (..........): $AE = DF$.
Si considerino ora i triangoli AEB e DCF. Per (..........) vale l'uguaglianza $F\widehat{D}C = E\widehat{A}B$ (in quanto i lati AB e DC sono paralleli e FA è una loro trasversale comune); inoltre $AE = DF$ e $AB = DC$. In base a (..........) i triangoli AEB e DCF sono congruenti. Ne segue, in particolare, che le loro aree sono uguali: $\mathcal{A}(AEB) = \mathcal{A}(DCF)$.
Per (..........), sottraendo a entrambi i membri l'area del triangolo DGE, si ha:



$$\mathcal{A}(AEB) - \mathcal{A}(DGE) = \mathcal{A}(DCF) - \mathcal{A}(DGE).$$

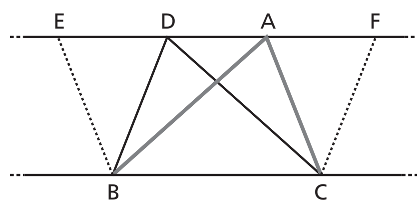
Dunque: $\mathcal{A}(ABGD) = \mathcal{A}(EGCF)$. Per (..........), sommando a entrambe le aree quella del triangolo GBC otteniamo:

$$\mathcal{A}(ABGD) + \mathcal{A}(GBC) = \mathcal{A}(EGCF) + \mathcal{A}(GBC),$$

da cui $\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(EBCF)$.

5 *Proposizione 37*
Triangoli posti sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali fra loro (ossia: hanno la stessa area).

Dimostrazione
Siano ABC e DBC i due triangoli con base comune BC; per ipotesi BC e AD sono parallele.
Sulla base di (..........), si costruisce per B la parallela a CA che incontra il prolungamento del segmento AD nel punto E. Analogamente, sempre per (..........), si traccia per C la parallela CF al lato BD. Per (..........), le aree dei triangoli ABC, DBC sono la metà di quelle dei parallelogrammi $EBCA$, $DBCF$ rispettivamente:

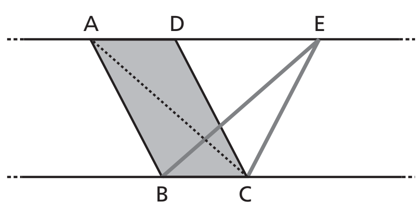


$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(EBCA); \mathcal{A}(DBC) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(DBCF).$$

Da (..........) ne segue che $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(DBC)$.

6 *Proposizione 41*
Se un parallelogramma ha la stessa base ed è compreso fra le stesse parallele di un triangolo, il parallelogramma ha area doppia di quella del triangolo.

Dimostrazione
Siano $ABCD$ il parallelogramma e BCE il triangolo aventi come base comune BC; per ipotesi BC e AE sono parallele.
Si traccia dapprima il triangolo ABC che, in virtù di (..........), ha area uguale a quella del triangolo EBC (sono triangoli aventi base comune e posti fra le stesse parallele): $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(EBC)$.
Ma per (..........) si ha che: $\mathcal{A}(ABCD) = 2\mathcal{A}(ABC)$.
Da cui, per (..........): $\mathcal{A}(ABCD) = 2\mathcal{A}(EBC)$.



2. LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Teoria a pag. C55

Indica in quali geometrie (euclidea, iperbolica o entrambe) valgono i seguenti enunciati.

7 Il teorema di Pitagora.

8 Un angolo esterno a un triangolo è maggiore di ciascuno dei due angoli del triangolo a esso non adiacenti.

9 Un angolo esterno a un triangolo è uguale alla somma dei due angoli interni a esso non adiacenti.

10 La somma degli angoli interni di un triangolo è minore di $2\widehat{R}$.

11 Dati una retta e un punto fuori di essa, esistono infinite rette passanti per il punto e parallele alla retta data.

12 È possibile costruire un quadrato di lato dato.

13 Un parallelogramma ha lati opposti di lunghezza uguale e angoli opposti della stessa ampiezza.

14 Dati una retta e un punto fuori di essa, esiste almeno una retta passante per il punto e parallela alla retta data.

Rispondi ai seguenti quesiti relativi al modello di Poincaré per la geometria iperbolica.

15 A che cosa corrispondono i punti «reali» del piano iperbolico sul modello di Poincaré? Come viene rappresentato l'insieme dei «punti all'infinito» sul modello?

16 Confronta il concetto di retta della geometria iperbolica con quello euclideo che conosci.

17 Enuncia le proprietà fondamentali della distanza tra due punti sul modello di Poincaré e fai un confronto con l'usuale nozione di distanza nella geometria euclidea.

18 Quali sono i postulati della geometria iperbolica? Confrontali con quelli dati da Euclide.

Rispondi ai seguenti quesiti relativi alle geometrie sferica ed ellittica.

19 Quali sono i postulati della geometria euclidea che è necessario cambiare per ottenere la geometria sferica?

20 Quali sono i postulati della geometria ellittica? Confrontali con quelli delle altre geometrie che conosci (euclidea, iperbolica e sferica).

21 Come si traduce una retta della geometria sferica sul modello di Riemann? Confronta questo nuovo concetto con le definizioni di retta delle geometrie euclidea e iperbolica.

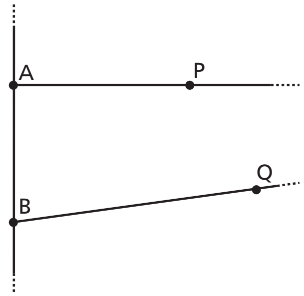
22 Come si rappresenta l'angolo tra due rette della geometria sferica sul modello di Riemann?

23 Perché è *geometria «non» euclidea*? Che cosa e come viene negato della geometria euclidea? Si illustri la questione con gli esempi che si ritengono più adeguati.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2008, *quesito* 7)

24 «*Se due punti P e Q del piano giacciono dalla stessa parte rispetto a una retta AB e gli angoli $P\widehat{A}B$ e $Q\widehat{B}A$ hanno somma minore di* 180°, *allora le semirette AP e BQ, prolungate adeguatamente al di là dei punti P e Q, si devono intersecare.*» Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2009, *quesito* 10)



25 Si consideri il teorema: «*la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto*» e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria *non euclidea*. Quali le formulazioni nella geometria *iperbolica* e in quella *ellittica*? Si accompagni la spiegazione con il disegno.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2007, *quesito* 5)

26 Si enunci il quinto postulato di Euclide e si descriva qualche modello di planimetria non euclidea.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione straordinaria*, 2007, *quesito* 9)

3. I FONDAMENTI DELLA MATEMATICA

▶ Teoria a pag. C60

27 ESERCIZIO GUIDA

Dimostriamo, sulla base degli assiomi A1, …, A9 dell'aritmetica, la proposizione: $\forall x\,(x = x)$.

a) Per l'assioma A5 si ha: $x + 0 = x$.
b) Per l'assioma A1, ponendo $x_1 = x + 0$, $x_2 = x$, $x_3 = x$ si ha: $(x + 0 = x) \to ((x + 0 = x) \to (x = x))$.
c) Per inferenza (MP) si ha dunque che: $(x + 0 = x) \to (x = x)$.
d) Ancora per inferenza (MP): $x = x$.

Dimostra, sulla base degli assiomi A1, …, A9 dell'aritmetica, le seguenti proposizioni.

28 $\forall x\, \forall y\, ((x = y) \to (y = x))$

29 $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y) \to ((y = z) \to (x = z))$

30 ESERCIZIO GUIDA

Indichiamo, per ciascuna formula, se essa è vera o falsa per la teoria dei numeri naturali, dei numeri interi, dei numeri razionali e dei numeri reali, quando il simbolo ♣ è interpretato come addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione.

Dalle proprietà di chiusura degli insiemi numerici rispetto alle quattro operazioni otteniamo:

	♣ interpretata come	$x, y, z \in \mathbb{N}$	$x, y, z \in \mathbb{Z}$	$x, y, z \in \mathbb{Q}$	$x, y, z \in \mathbb{R}$
$\forall x\, \forall y\, \exists z\, (x ♣ y = z)$	addizione	V	V	V	V
$\forall x\, \forall y\, \exists z\, (x ♣ y = z)$	sottrazione	F	V	V	V
$\forall x\, \forall y\, \exists z\, (x ♣ y = z)$	moltiplicazione	V	V	V	V
$\forall x\, \forall y \neq 0\, \exists z\, (x ♣ y = z)$	divisione	F	F	V	V

Indica, per ciascuna delle seguenti formule, se essa è vera o falsa nella teoria indicata, quando i simboli ♣, ♥, ♦, ♠ sono interpretati, rispettivamente, come addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione.

31 $\forall x\, \forall y\, (x ♣ y = y ♣ x)$, con $x, y \in \mathbb{N}$.

32 $\forall x\, \forall y\, (x ♥ y = y ♥ x)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

33 $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x ♦ (y ♣ z) = (x ♦ y) ♣ (x ♦ z))$, con $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

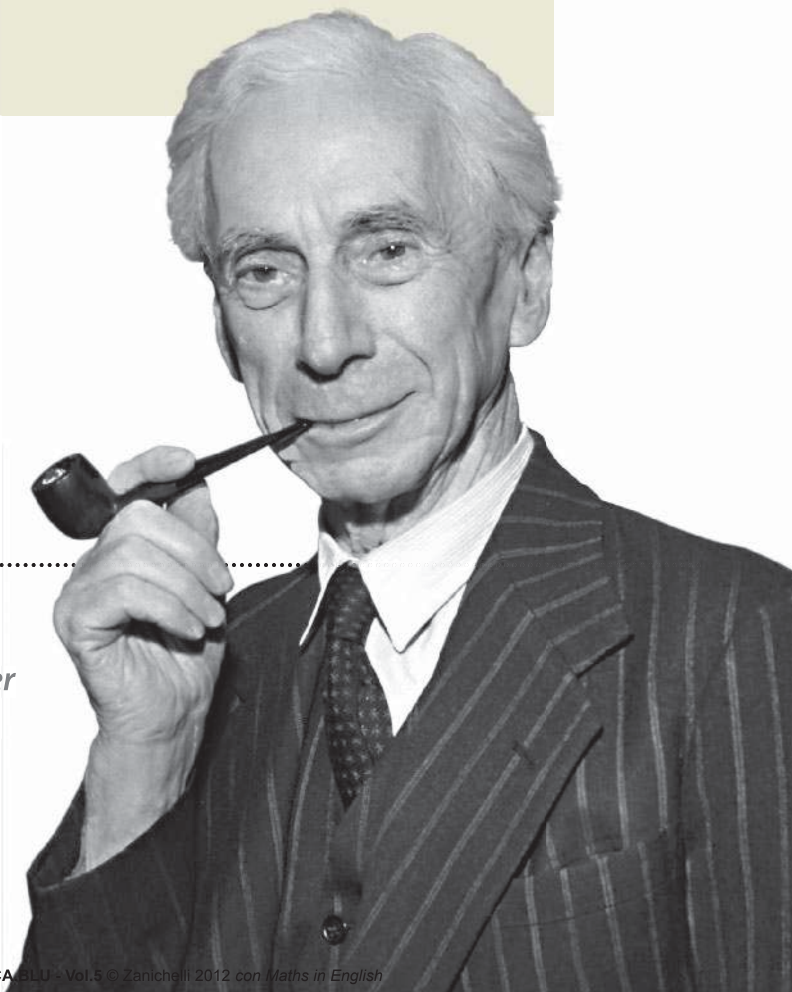
34 $\forall x\, \forall y \neq 0\, \exists z\, (x ♦ y ♠ z = x)$, con $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

MATHS IN ENGLISH

1.
INTERPOLATION AND EXTRAPOLATION: GUESSING BETWEEN AND BEYOND

2.
ISAAC NEWTON

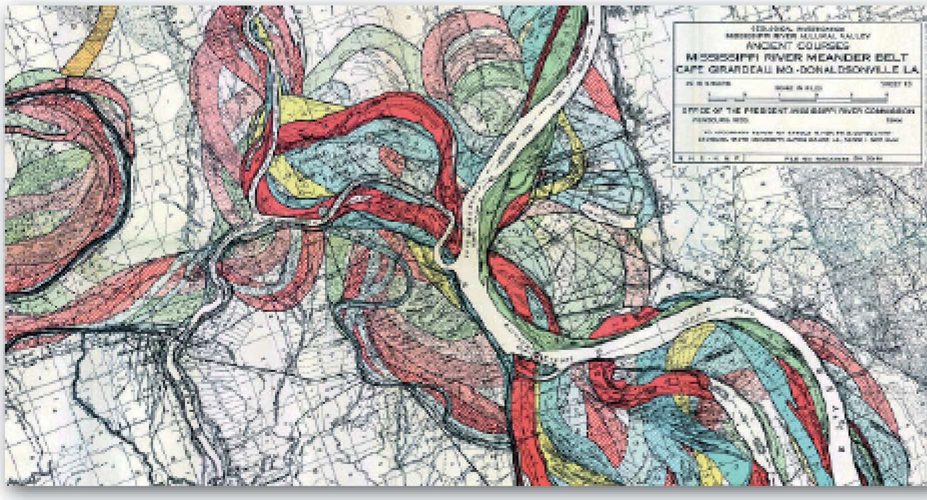
3.
ARCHIMEDES AND THE AREA OF A PARABOLIC SEGMENT



Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.

Bertrand Russell (1872-1970),
Mysticism and Logic (1917)

1. INTERPOLATION AND EXTRAPOLATION: GUESSING BETWEEN AND BEYOND



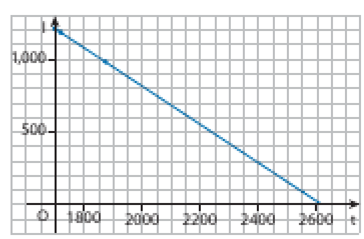
▶ **As it winds from Minnesota to the Gulf of Mexico, the Mississippi River is in constant flux. Fast water carries sediment while slow water deposits it. Soft riverbanks are continuously eroded. Floods occasionally spread across the wide, shallow valley that flanks the river, and new channels are left behind when the water recedes. This history of change is recorded in the *Geological Investigation of the Alluvial Valley of the Lower Mississippi River*, published by the Army Corps of Engineers in 1944.**

Mark Twain once remarked that in eternity he planned to spend 8 million years on mathematics. In his book *Life on the Mississippi*, Twain used some mathematics to make a strange prediction about the future of the Mississippi River. The river is extremely crooked with many curves, some of which are shown in the photograph above. From time to time, the river changes its course from a wide bend to a more direct path, called a cutoff. As a result, the length of the Mississippi is becoming shorter and shorter. Twain gave some figures:

> *The Mississippi between Cairo and New Orleans was 1,215 miles long 176 years ago. It was 1,180 after the cutoff of 1722 … its length is only 973 miles at present [1875].*

Because the length of the Mississippi is a function of time, a table can be made from these numbers. Rounding them slightly, we get:

Time (in years), t	1700	1720	1875
Lenght in miles, l	1,215	1,180	975



Although we have no formula for this function, the points in the table can be graphed. The result, shown in the graph, suggests that they might lie on a straight line.
If a line is drawn through the three points, we can get additional information from it. For example, it appears that in 1800 the river was approximately 1,100 miles long. This information, found by reading between the values that we know, was obtained by *interpolation* (1).
If the line representing the length of the Mississippi is extended until it intersects the time axis, it looks as if the river will disappear sometime about the year 2600. Twain jokingly made this prediction:

> *Any calm person, who is not blind or idiotic, can see … that 742 years from now the Lower Mississippi will be only a mile and three-quarters long …. There is something fascinating about science. One gets such wholesale returns of conjecture out of such a trifling investment of fact.*

(1) To **interpolate** is to guess other values of a variable *between* values that are known.

What's wrong with this reasoning? The trouble is that, although the three points may seem to lie along a straight line, the graph must actually curve later on. The river cannot become any shorter after all the bends are gone. In drawing the line past the third point, we are *extrapolating*[2].

If a function continues to behave in the same way, then our guess may be very close; otherwise, you can see what may happen.

(Harold R. Jacobs, *Mathematics. A human endeavor,* 3rd ed.
Eight printing 2003, W.H. Freeman and company)

2 To **extrapolate** is to guess other values of a variable *beyond* those that are known.

Exercises

1 **It's chocolate time!** When chocolate fudge cools after it has been cooked, its temperature is a function of time. A table is shown here.

Time in minutes, x	10	20	40	70	80
Temperature in °C, y	95	77	52	28	23

a) Draw a pair of axes, letting 1 unit on each axis represent 10. Plot the five points in the table.
b) Do they seem to lie along a *straight line* or a *curve*? Connect them accordingly.
c) Use your graph to estimate the temperature of the fudge when it has cooled for 50 and 90 minutes.
d) Did you *interpolate* or *extrapolate* in making these estimates? Explain.
e) What happens to the rate at which fudge cools as time passes?

2 **Gases.** In 1787, the French physicist Jacques Charles observed that all gases contract in the same way when cooled. A table of the volume of a gas as a function of its temperature is shown below.

Temperature in °C, t	50	-30	-110	-135	-220
Volume of gas, v	120	90	60	50	20

a) Draw a pair of axes as shown and plot the five points in this table.
b) What do you notice about the five points?

3 **Winning speed.** The Indianapolis 500 automobile race is run each year on Memorial Day. The table below shows some of the winning speeds in the race.

Year	Winning speed in miles per hour
1920	89
1930	100
1940	114
1950	124
1960	139
1970	156
1980	143
1990	186

◄ A shot of the Indianapolis Motor Speedway.

a) In general, how has the winning speed changed over the years?
b) For which year does the winning speed seem the most surprising?
c) Graph this function. Draw a line through the points for 1920 and 1960.
d) In 1960, what winning speeds do you suppose people might have predicted for 1970, 1980, and 1990?
e) The Indianapolis 500 was first held in 1911. Judging from your graph, guess the winning speed for that year.
f) Judging from your graph, when was the winning speed 0 miles per hour?
g) Why doesn't this answer make any sense?
h) Does it seem reasonable that you could correctly guess from your graph what the winning speed in the year 2050 will be?

2. ISAAC NEWTON

Piece on Newton

Isaac Newton (1643-1727) was a strange, improbable blend of a great mathematician and physicist, one of history's greatest, with the mindset of an ignorant, naïve fundamentalist. As a practicing Anglican, he never doubted that God created the entire universe literally in six days, that He once drowned every human and beast except for Noah and his companions, that Eve was made from Adam's rib, that Lot's wife turned into a pillar of salt, that Moses parted the Red Sea, and that the prophecies of Daniel and the Book of Revelation came straight from the Almighty and are certain to be fulfilled.

▲ Portrait of Isaac Newton by Godfrey Kneller, oil on canvas, feigned oval, 1702. National Portrait Gallery, London.

Newton tried to calculate the exact date of Jesus's return to earth. He set a precise year for the creation that was half a century later than Bishop Ussher's famous 2004 B.C.. He was convinced that the Catholic Church was the Antichrist of the Book of Revelation. After his death, Ackroyd tells us, Newton left a manuscript on biblical prophecy that ran to 850 pages.

Newton's single great departure from Anglican orthodoxy was his opposition to the Trinity. Jesus was indeed the Son of God, but he was not Jehovah. "We should not pray to two Gods," Newton wrote. The notion that Jesus was God in human flesh was a heresy perpetuated by Rome. Newton carefully concealed his anti-trinitarianism to avoid being expelled from Cambridge University where for decades he was a professor, ironically at Trinity College.

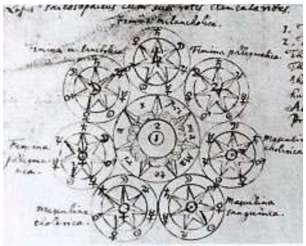
Another aspect of Newton's curious, complicated life was his obsession with alchemy. He owned and studied all the books on alchemy he could obtain, and spent endless days in his laboratory trying vainly to turn base metals into gold. His unpublished writings on alchemy, though smaller than his writings on Bible prophecy, ran to more than a million words, far exceeding everything he wrote about physics and astronomy. Ackroyd cites John Maynard Keynes's celebrated Cambridge lecture on Newton's secret records about alchemy. He found nothing of the slightest value to science.

Late in life, Newton suffered a mental breakdown that lasted more than a year. It has been suggested it was the result of poisoning by the mercury used in his alchemical experiments. Others believe Newton was the victim of a bipolar disorder that triggered a deep depression.

It is hard now to comprehend, but only a small fraction of Newton's long life was devoted to investigating God's laws of nature. In a few years of his mid-twenties he invented calculus, found that white light was a mixture of all colors, explained for the first time the rainbow, and constructed one of the earliest reflecting telescopes. His greatest discovery, of course, was that gravity, which holds us to the earth and makes apples fall, is the same force that guides the path of our moon, our sister planets, and our comets. What else might he have discovered had he not squandered his energy and talents on alchemy and Biblical exegesis!

Gravity, Newton wrongly believed, acts instantaneously at a distance. Its nature remained a total mystery. Newton knew its force varied directly with the product of two masses, and inversely with the square of the distance between them, but its cause, he said, "I do not pretend to understand." Not until Einstein came along was it partly explained by the curvature of space-time.

▶ Newton's copied diagram of the Philosopher's Stone, the Holy Grail of alchemy. Signs of the seven most notable heavenly bodies (the planets Mercury, Venus, Mars, Jupiter and Saturn, plus the Sun and the Moon) are assigned to the points of each star, and inscribed in rings around each disk. The use of occult symbolism seems at odds to the modern eye, but, on one level, the planetary signs were merely the common symbols for metals – Venus was copper, and Saturn lead, for example. The seven metals – lead, tin, iron, copper, mercury, silver and gold – were basic ingredients for any alchemist and, according to Newton, they were transformed by a vital spirit.



Light, Newton believed, was corpuscular, composed of minute particles. In this he was half right. Today, light is known to be both a particle and also a wave.

(www.newcriterion.com/articles.cfm/sir-isaacs-ocean-3822)

Newton vs. Leibniz

Newton was involved in a dispute with Leibniz over priority in the development of infinitesimal calculus. Most modern historians believe that Newton and Leibniz developed infinitesimal calculus independently, although with very different notations. Occasionally it has been suggested that Newton published almost nothing about it until 1693, and did not give a full account until 1704, while Leibniz began publishing a full account of his methods in 1684. (Leibniz's notation and "differential Method", nowadays recognised as much more convenient notations, were adopted by continental European mathematicians, and after 1820 or so, also by British mathematicians.)

Exercises

1 Compute

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$$ $\left[\frac{11}{4}\right]$

2 Compute

$$\lim_{x \to \infty} x^5 - x^2 + x - 10$$ $[\infty]$

3 Determine if the following function is continuous at $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & \text{if } x \neq 1 \\ 2, & \text{if } x = 1 \end{cases}$$ [no]

4 Determine all values of the constant A so that the following function is continuous for all values of x.

$$f(x) = \begin{cases} A^2x - A, & \text{if } x \geq 3 \\ 4, & \text{if } x < 3 \end{cases}$$ $\left[-1; \frac{4}{3}\right]$

5 You are standing at the edge of a slow-moving river which is one mile wide and wish to return to your campground on the opposite side of the river. You can swim at 2 mph and walk at 3 mph. You must first swim across the river to any point on the opposite bank. From there walk to the campground, which is one mile from the point directly across the river from where you start your swim. What route will take the least amount of time?

6 Construct a window in the shape of a semi-circle over a rectangle. If the distance around the outside of the window is 12 feet, what dimensions will give the rectangle having largest possible area?

7 There are 50 apple trees in an orchard. Each tree produces 800 apples. For each additional tree planted in the orchard, the output per tree drops by 10 apples. How many trees should be added to the existing orchard in order to maximize the total output of trees? [15]

8 Assume that

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{x}\,, & \text{if } x \geq 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, & \text{if } x < 1. \end{cases}$$

Show that f is differentiable at $x = 1$, i.e., use the limit definition of the derivative to compute $f'(1)$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

9 Assume that $h(x) = (f(x))^3$, where f is a differentiable function. If $f(0) = -\frac{1}{2}$ and $f'(0) = \frac{8}{3}$, determine an equation of the line tangent to the graph of h at $x = 0$. $\left[y = 2x - \frac{1}{8}\right]$

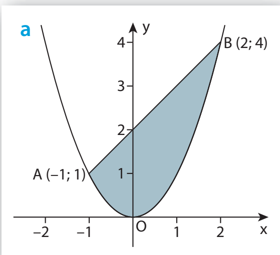
3. ARCHIMEDES AND THE AREA OF A PARABOLIC SEGMENT

A **parabolic segment** is a region bounded by a parabola and a line, as indicated by the light blue region in figure *a*.
For the proof we will use the parabola with equation $y = x^2$ and choose the end points of the line to be $A\,(-1; 1)$ and $B\,(2; 4)$. However, the theorem will work for any parabola and any line passing through that parabola, intersecting in two points.

Archimedes then found point C on the parabola such that the x-value of C is half-way between the x-values of points A and B. He then constructed the triangle ABC, as follows (figure *b*): C has x-value 0.5, which is 1.5 units from both $x = -1$ and $x = 2$.

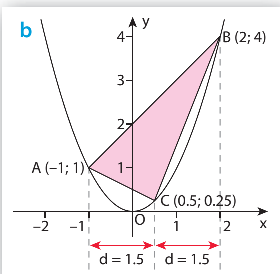
Archimedes showed that the area of the (light blue) parabolic segment is $\frac{4}{3}$ of the area of the triangle ABC.
The way Archimedes achieved this result was using the *Method of Exhaustion* [1], which involves finding the area of a curved shape by inscribing successively smaller polygons until the shape is filled. We can find the area of those polygons and hence the area of the curved shape.

[1] Archimedes did not use any coordinate system, since it was not invented until the 17th century by Descartes.

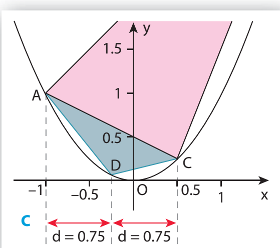


We now construct another triangle by choosing a point on the parabola such that its x-value is half-way between the x-values of A and C, similar to what we did before.

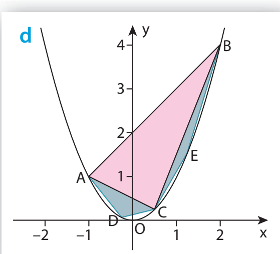
Let's zoom in and see the result (figure *c*).



We can again do the same thing on line BC, by locating a point E on the parabola such that its x-value is half-way between C and B (figure *d*).



We can already notice that if we add the areas of triangles ABC, ACD and BCE, we have a reasonable approximation for the area of the parabolic segment, but we can do better.
Continuing the process, we can form four more triangles (figure *e* on the next page).
There is very little "white space" left now, so if we were to add the areas of the seven triangles, we would have an even better approximation for the area of the parabolic segment.
If we kept going and added the areas of an *infinite* number of such triangles, we would obtain the *exact* area of the parabolic segment.
Using parametric equations it is possible to show that the area of each light green triangle is $\frac{1}{8}$ of the area of the pink triangle.
So if we call the area of the large pink triangle X, then the sum of the areas of all of the triangles is given by:



$$X + 2\frac{X}{8} + 4\frac{X}{64} + 8\frac{X}{512} + \ldots = X + \frac{X}{4} + \frac{X}{16} + \frac{X}{64} + \ldots =$$

$$= X\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots\right) = X\left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots\right]$$

The expression in brackets is a Geometric Series, with common ratio $r = \frac{1}{4}$ and first term $a = 1$. The sum of this series is given by:

$$\text{Sum} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$ [2]

So the total area of the triangles (which gives us the area of the original light blue parabolic segment) is $\frac{4X}{3}$, which is $\frac{4}{3}$ of the area of the pink triangle, as Archimedes claimed.
The thought process behind this solution is very similar to the ideas underlying the development of calculus.

[2] Archimedes used a geometric proof for this portion.

Archimedes

Archimedes of Syracuse lived roughly from 287 BC to 212 BC and he spent much of his life in the cities of Alexandria and Syracuse. He devoted his life almost entirely to mathematics. Although the true nature of his death is not known, there are three different stories that share a common theme as to what Archimedes was doing the moment before he died. According to one story, when Syracuse was captured, a soldier slew Archimedes after he refused to leave with him until he had completed his reflections upon a mathematical problem. Another version of this story is that a soldier drew his sword to kill Archimedes when Archimedes begged him to wait until he solved the problem he was working on. However, while he was begging, another soldier killed him without listening to his plea. Another story suggests that Archimedes agreed to leave with the soldier but he decided to take his mathematical instruments with him. A second soldier mistook these instruments for gold and thus killed him to steal it. There is a last and most likely story according to which, when Syracuse was captured, Archimedes was slain by an invading soldier who did not know who Archimedes was and how important he was to the world. However he might have died, it is rather likely that Archimedes died doing what he had devoted his life to, mathematics.
To prove many of his propositions or theorems Archimedes used a method called the *Method of Exhaustion*. He used this method, for example, to prove the propositions that led to his geometrical proof about the value of the area of a parabolic segment. In this proof, Archimedes "exhausts" the parabola by drawing an infinite number of triangles within the parabola. The area of the parabola can then be seem as the sum of the area of each triangle. This is obviously an infinite sum. Since Greek mathematicians never liked to mention infinity, Archimedes tried to express this value in a way that was more acceptable for the time. In any case, his method for finding the area of a parabola was a prelude to his anticipation of integral calculus.

adapted by http://www.ms.uky.edu/~carl/ma330/projects/parasegfin.html

Using Calculus

Let's use integral calculus to check the answer we obtained using Archimedes' [3] approach. In the particular example, with $y = x^2$ and the line $y = x + 2$ intersecting the parabola at $(-1; 1)$ and $(2; 4)$, the pink triangle has width 3 units and height 2.25 units, so:

$$\text{Area } (ABC) = 0.5 \times 3 \text{ unit} \times 2.25 \text{ unit} = 3.38 \text{ unit}^2$$

So according to Archimedes, the area of the (light blue) parabolic segment will be:

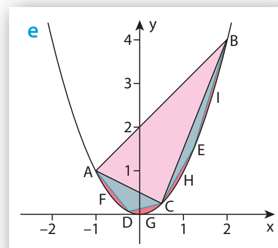
$$\text{Area segment} = \frac{4}{3} \times 3.38 \text{ unit}^2 = 4.5 \text{ unit}^2$$

Now, let's see what we get using calculus. The required area is an area between two curves. The upper curve is the line with equation $y_2 = x + 2$ and the lower curve has equation $y_1 = x^2$. The integration bounds are $x = -1$ and $x = 2$.

$$\int_a^b (y_2 - y_1)dx = \int_{-1}^2 [(x + 2) - x^2]dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 = 4.5.$$

So we get the same answer, 4.5 unit^2.

adapted by http://www.squarecirclez.com/blog/archimedes-and-the-area-of-a-parabolic-segment/1652



3 Archimedes' solution for finding the area of a parabolic segment is a remarkable result. Almost 2000 years before Newton and Leibniz formalized differential and integral calculus, Archimedes already had a good handle on the basics.

Exercises

1. Write a short summary of Archimedes' proof.
2. Consider the parabolic segment bounded by $y = x^2$ and the line $y = 2x + 3$.
   - **a)** Sketch the segment and find the points A, B and C.
   - **b)** Using the *Method* of *Exhaustion*, compute the area of triangle ACB.
   - **c)** Find the area of the parabolic segment by integrating and check Archimedes' theorem.
3. Use integration to verify Archimedes' theorem for the parabolic segment bounded by $y = x^2$ and the line $y = 1$ (determine the vertex of the segment and show that the inscribed triangle has area 1. Then integrate to verify that the segment has area $\frac{4}{3}$).

MATHS TALK

Let's read the equations

Visit us online for the pronunciation of these formulas and many others!

Some useful notions when calculating limits

$$\lim_{x \to \alpha} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to \alpha} f(x) + \lim_{x \to \alpha} g(x)$$

The limit, for *x* that tends to alpha, of *f* of *x* plus *g* of *x* equals the limit, for *x* that tends to alpha, of *f* of *x* plus the limit, for *x* that tends to alpha, of *g* of *x*

$$\lim_{x \to \alpha} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \to \alpha} f(x),\ k \neq 0$$

The limit, for *x* that tends to alpha, of *k* times *f* of *x* equals *k* times the limit, for *x* that tends to alpha, of *f* of *x*, with *k* different from zero

$$\lim_{x \to \alpha} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to \alpha} f(x) \cdot \lim_{x \to \alpha} g(x)$$

The limit, for *x* that tends to alpha, of *f* of *x* times *g* of *x* equals the limit, for *x* that tends to alpha, of *f* of *x* times the limit, for *x* that tends to alpha, of *g* of *x*

$$\lim_{x \to \alpha} f(g(x)) = f(\lim_{x \to \alpha} g(x)) = f(z_0)$$

The limit, for *x* that tends to alpha, of a compound function *f* of *g* of *x* equals *f* of the limit, for *x* that tends to alpha, of *g* of *x* equals *f* of zed not

- $\lim_{x \to \alpha} g(x) = z_0$,
- f is continuous in z_0

The conditions are that the limit , for *x* that tends to alpha, of *g* of *x* equals zed not, and that *f* is continuous in zed not

Two fundamental limits

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

The limit for *x* that tends to zero of sine *x* over *x* equals 1

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

The limit for *x* that tends to plus or minus infinity of 1 plus one over *x* all to the *x* equals *e*

A few fundamental derivatives

$$D(e^x) = e^x$$

The derivative of *e* to the *x* equals *e* to the *x*

$$D(\sin x) = \cos x$$

The derivative of sine *x* equals cosine *x*

$$D(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

The derivative of tangent *x* equals one over cosine squared of *x*

Graph of a function

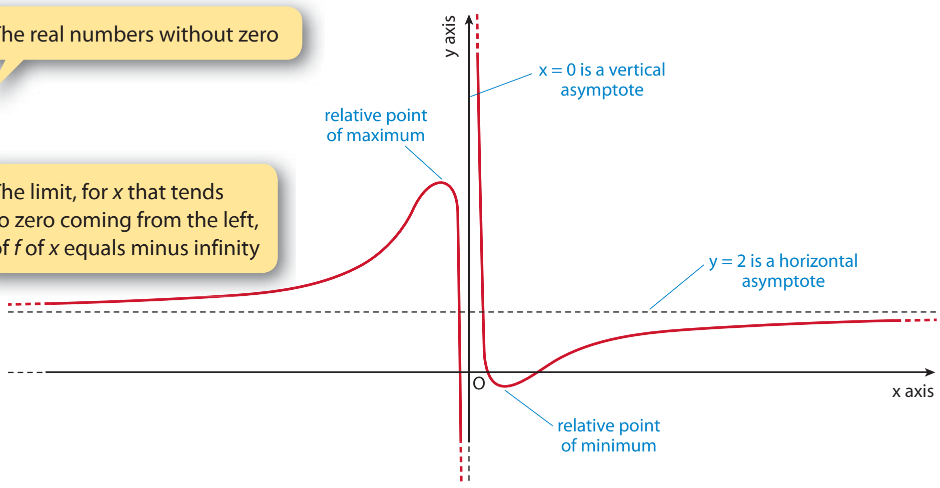
- The domain of the function $y = f(x)$ is $\mathbb{R} - \{0\}$.

The real numbers without zero

- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$.
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.
- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.

The limit, for *x* that tends to zero coming from the left, of *f* of *x* equals minus infinity

- The function is unbounded; the range of the function is $\mathbb{R}$.



DERIVATE

Le derivate

Potenze di x		**Funzioni goniometriche**
$D\, k = 0$		$D \operatorname{sen} x = \cos x$
$D\, x^a = a x^{a-1}$,	$a \in \mathbb{R}$	$D \operatorname{sen} x^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cos x^\circ$
$D\, x = 1$		$D \cos x = -\operatorname{sen} x$
$D \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,	$x > 0$	$D \cos x^\circ = -\frac{\pi}{180^\circ} \operatorname{sen} x^\circ$
$D \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$,	$x > 0, n \in \mathbb{N}$	$D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$D \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$		$D \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$
Funzioni logaritmiche ed esponenziali		**Inverse delle funzioni goniometriche**
$D\, a^x = a^x \ln a$,	$a > 0$	$D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$
$D\, e^x = e^x$		$D \operatorname{arccotg} x = -\frac{1}{1+x^2}$
$D \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e$,	$x > 0$	$D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$D \ln x = \frac{1}{x}$,	$x > 0$	$D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Le regole di derivazione

$D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$

$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$D[f(x) \cdot g(x) \cdot z(x)] = f'(x) \cdot g(x) \cdot z(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot z(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot z'(x)$

$D[f(x)]^a = a[f(x)]^{a-1} \cdot f'(x), \quad a \in \mathbb{R}$

$$D\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$D[f(g(x))] = f'(z) \cdot g'(x), \quad \text{con } z = g(x)$

$D[f(g(z(x)))] = f'(u) \cdot g'(t) \cdot z'(x), \quad \text{con } t = z(x),\ u = g(t)$

$$D[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)}\left[g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)}\right]$$

$$D[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{con } x = f^{-1}(y)$$

Massimo Bergamini Anna Trifone Graziella Barozzi

5

Matematica.blu 2.0

Un libro di matematica a colori, che illustra con fotografie il legame tra matematica e realtà, e mette in evidenza a colpo d'occhio ciò che è importante imparare.

Nel libro

- **Esercizi** suddivisi in due livelli di difficoltà.
- **Esercizi** tratti dai **test universitari**, dalle **gare di matematica** ed **esercizi in inglese** (*Test your skills*).
- **Verso l'esame di Stato**: per ogni capitolo test, quesiti e problemi per prepararsi alla prova scritta già dal terzo anno.
- **Approfondimenti** sulla storia della matematica, la filosofia e la fisica (*Riflettere sui fondamenti*, *Modelli di crescita e caos*).
- **Aperture di capitolo** con domande su **matematica e realtà** (per esempio, come funziona la TAC, quanto sono attendibili i risultati dei sondaggi) e risposte alla fine della teoria.
- Schede di **Esplorazione** su matematica e storia, musica, arte, medicina, con esercizi di comunicazione e ricerca su Internet.
- **Realtà e modelli**: problemi insoliti per costruire e applicare modelli matematici che descrivono la realtà.