LM LIBRO MISTO

Massimo Bergamini
Anna Trifone
Graziella Barozzi

Matematica.blu 2

Algebra, Geometria, Probabilità

ZANICHELLI

Massimo Bergamini
Anna Trifone
Graziella Barozzi

Matematica.blu 2

Algebra, Geometria, Probabilità

www.online.zanichelli.it/bergaminibiennio

Su questo sito ci sono esercizi guida interattivi, spiegazioni filmate, test interattivi e file .pdf.
Alcuni contenuti sono accessibili a tutti, altri sono riservati.

SE VUOI ACCEDERE AI CONTENUTI ONLINE RISERVATI	
Studente	**Insegnante**
Acquista una *chiave di attivazione* su www.scuola.zanichelli.it/attivazione	Se sei già registrato in www.myZanichelli.it, vai nella sezione **Le mie applicazioni** della tua area personale
La prima volta:	Se non sei registrato:
1. Vai su **www.online.zanichelli.it/bergaminibiennio** e seleziona **Registrati ora***	**1.** Vai su **www.myZanichelli.it** e seleziona **Registrati ora**
2. Inserisci la *chiave di attivazione* che hai acquistato	**2.** Segui i tre passaggi per registrarti come insegnante di matematica
3. Finita la registrazione, entra nel sito del libro con il tuo indirizzo e-mail e la password	**3.** Una volta confermata la registrazione, seleziona **Le mie applicazioni** (oppure entra nel sito del libro con il tuo indirizzo e-mail e la password)
Dalla seconda volta in poi, puoi entrare direttamente nel sito del libro con il tuo indirizzo e-mail e la password	

* La registrazione su www.myZanichelli.it è unica per tutte le opere del catalogo. Se ti sei già registrato, per accedere alle risorse di altri volumi non occorre registrarsi di nuovo. Accedi a www.myZanichelli.it con il tuo indirizzo e-mail e la password, e aggiungi quest'opera inserendo solo la *chiave di attivazione*.

Per maggiori informazioni: www.myZanichelli.it

ZANICHELLI

RISORSE ONLINE

- Esercitazioni guidate su Motori di ricerca, Elaborazione di testi, Presentazioni multimediali.

INDICE

RISORSE ONLINE

- 25 esercizi in più
- 55 esercizi di recupero
- 30 test interattivi
- 9 esercitazioni di Laboratorio con Excel
- 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- 7 Mettiti alla prova
- 4 Test your skills

BRAVI SI DIVENTA

- 6 videolezioni
- 2 esercizi interattivi

RISORSE ONLINE

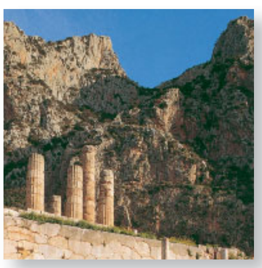
- 20 esercizi in più
- 45 esercizi di recupero
- 30 test interattivi
- 15 esercitazioni di Laboratorio con Derive o Wiris
- 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- 7 Mettiti alla prova
- 9 Test your skills

BRAVI SI DIVENTA

- 6 videolezioni
- 4 esercizi interattivi

…come fecero gli ateniesi a raddoppiare l'altare?

→ La risposta a pag. 799



CAPITOLO 11
I numeri reali e i radicali

RISORSE ONLINE

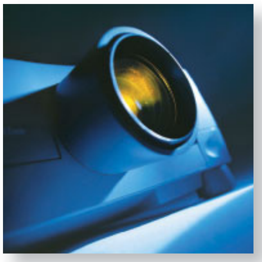
- 10 esercizi in più
- 30 test interattivi
- 21 esercitazioni di Laboratorio con Derive o Wiris
- 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- 20 Mettiti alla prova
- 5 Test your skills
- teoria e 25 esercizi su I numeri immaginari

BRAVI SI DIVENTA

- 6 videolezioni
- 4 esercizi interattivi

…a quale distanza deve essere posto il proiettore affinché l'immagine che appare sullo schermo abbia la dimensione desiderata?

→ La risposta a pag. 885



TEORIA ESERCIZI

CAPITOLO 12
Le equazioni di secondo grado

RISORSE ONLINE

- 30 esercizi in più
- 74 esercizi di recupero
- 30 test interattivi
- 13 esercitazioni di Laboratorio con Excel
- 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- 13 Mettiti alla prova
- 9 Test your skills
- teoria e 53 esercizi su I numeri complessi e le equazioni di secondo grado

BRAVI SI DIVENTA

- 4 videolezioni
- 5 esercizi interattivi

…perché il foglio di formato A4 ha i lati di 21 e 29,7 centimetri?

→ La risposta a pag. 974

CAPITOLO 13
Complementi di algebra

RISORSE ONLINE

- 82 esercizi in più
- 57 esercizi di recupero
- 30 test interattivi
- 11 esercitazioni di Laboratorio con Excel
- 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- 8 Mettiti alla prova
- 8 Test your skills

BRAVI SI DIVENTA

- 7 videolezioni
- 3 esercizi interattivi

TEORIA ESERCIZI

…considerato un peso di 70 kg, per quali fasce di altezza possiamo ritenere una persona sottopeso, normale, sovrappeso o obesa?

→ La risposta a pag. 1062

CAPITOLO 14
Le disequazioni di secondo grado

RISORSE ONLINE

- 70 esercizi in più
- 38 esercizi di recupero
- 30 test interattivi
- 13 esercitazioni di Laboratorio con Derive o Wiris
- 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- 7 Mettiti alla prova
- 5 Test your skills

BRAVI SI DIVENTA

- 6 videolezioni
- 5 esercizi interattivi

…l'esito di una sequenza di trasformazioni geometriche dipende dall'ordine in cui vengono eseguite?

→ La risposta a pag. 1143

CAPITOLO 15
Le trasformazioni e le coniche nel piano cartesiano

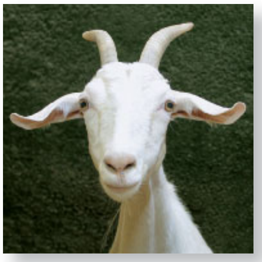
RISORSE ONLINE

- 32 esercizi in più
- 79 esercizi di recupero
- 20 test interattivi
- 6 esercitazioni di Laboratorio con Derive o Wiris
- 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- 12 Mettiti alla prova
- 26 Test your skills

TEORIA ESERCIZI

...è più conveniente confermare oppure cambiare porta per ottenere il premio?

→ La risposta a pag. β19



CAPITOLO β Introduzione alla probabilità

RISORSE ONLINE

- 40 esercizi in più
- 33 esercizi di recupero
- 30 test interattivi
- 9 esercitazioni di Laboratorio con Excel
- 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- 8 Mettiti alla prova
- 7 Test your skills

...perché le teste dei bulloni sono quasi sempre esagonali?

→ La risposta a pag. G199

CAPITOLO G4 La circonferenza, i poligoni inscritti e circoscritti

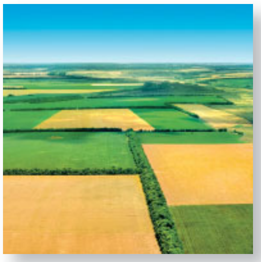
RISORSE ONLINE

- 30 esercizi in più
- 24 esercizi di recupero
- 20 test interattivi
- 27 esercitazioni di Laboratorio con Cabri o Geogebra
- 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- 8 Mettiti alla prova
- 7 Test your skills

TEORIA ESERCIZI

...come si fa a delimitare sul terreno un campo rettangolare?

→ La risposta a pag. G253



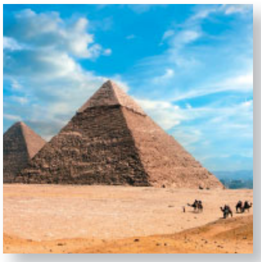
CAPITOLO G5
L'equivalenza delle superfici piane

RISORSE ONLINE

- 10 esercizi in più
- 13 esercizi di recupero
- 20 test interattivi
- 15 esercitazioni di Laboratorio con Cabri o GeoGebra
- 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- 6 Mettiti alla prova
- 2 Test your skills

...come si può misurare con un metro l'altezza di una piramide?

→ La risposta a pag. G303



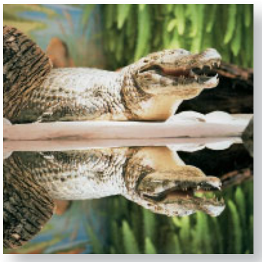
CAPITOLO G6
La misura e le grandezze proporzionali

RISORSE ONLINE

- 10 esercizi in più
- 22 esercizi di recupero
- 20 test interattivi
- 16 esercitazioni di Laboratorio con Cabri o GeoGebra
- 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- 9 Mettiti alla prova
- 6 Test your skills

…esistono parole che si possono leggere anche allo specchio?

→ La risposta a pag. G354



CAPITOLO G7
Le trasformazioni geometriche

RISORSE ONLINE

- 18 esercizi in più
- 15 esercizi di recupero
- 20 test interattivi
- 16 esercitazioni di Laboratorio con Cabri o GeoGebra
- 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- 4 Mettiti alla prova
- 6 Test your skills

…che cosa accomuna le pesanti fortificazioni di una città medievale, una mela e una leggerissima bolla di sapone?

→ La risposta a pag. G401

CAPITOLO G8
La similitudine

RISORSE ONLINE

- 40 esercizi in più
- 22 esercizi di recupero
- 20 test interattivi
- 17 esercitazioni di Laboratorio con Cabri o GeoGebra
- 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- 3 Mettiti alla prova
- 7 Test your skills

CAPITOLO

9

Il piano cartesiano e la retta

Discesa pericolosa

Molte immagini quotidiane offrono indicazioni sulle proprietà geometriche degli oggetti e dell'ambiente che ci circonda. I cartelli stradali sono importanti per la circolazione e hanno il compito di avvertirci di ciò che troveremo sul nostro cammino…

…che cosa indica questo segnale stradale?

La risposta a pag. 653

1. Le coordinate di un punto su un piano

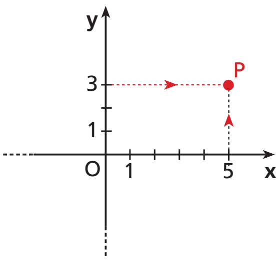
Il riferimento cartesiano ortogonale

I punti di un piano possono essere messi in corrispondenza biunivoca con **coppie** di numeri reali.

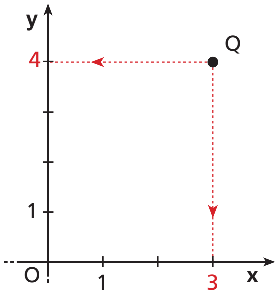
Per farlo consideriamo due rette orientate e tra loro perpendicolari. Per comodità, scegliamo la prima orizzontale e la seconda verticale. Chiamiamo tali rette **assi** del riferimento e il loro punto di intersezione O **origine** del riferimento. In questo modo abbiamo fissato nel piano un **sistema di assi cartesiani ortogonali**.

L'asse orizzontale è detto **asse delle ascisse**, o anche **asse *x***; l'asse verticale è detto **asse delle ordinate**, o anche **asse *y***.

Fissata un'unità di misura su entrambi gli assi (spesso si usa la stessa), possiamo rappresentare un punto mediante una coppia *ordinata* di numeri reali. Per esempio, consideriamo la coppia (5; 3) e determiniamo il punto P a cui essa è associata.



I numeri della coppia vengono detti **coordinate** del punto; la prima coordinata viene detta **ascissa**, la seconda viene detta **ordinata**. Per esempio, P ha ascissa 5 e ordinata 3.



Se, invece, in un piano fissiamo un punto, possiamo fargli corrispondere una coppia di numeri reali mandando dal punto le rette parallele agli assi e considerando le loro intersezioni con gli assi stessi (figura a lato).

A ogni punto del piano corrisponde una e una sola coppia di numeri; viceversa, a ogni coppia di numeri corrisponde uno e un solo punto del piano. La corrispondenza è quindi biunivoca.

In generale, per indicare che al punto P corrisponde la coppia di numeri reali $(x; y)$ (e viceversa), si usa la scrittura

$$P(x; y),$$

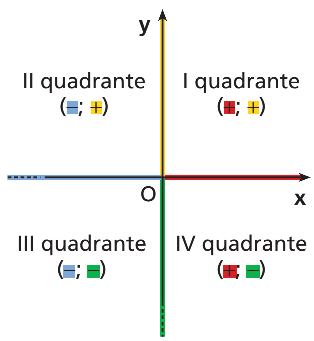
che si legge: «Il punto P di coordinate x e y».

Per esempio, $A(-1; 4)$ indica il punto A di coordinate -1 e 4.

Gli assi dividono il piano in quattro angoli retti, detti **quadranti** (figura 1):

Le coordinate dei punti del piano sono positive o negative a seconda del quadrante in cui i punti si trovano.

▶ Figura 1

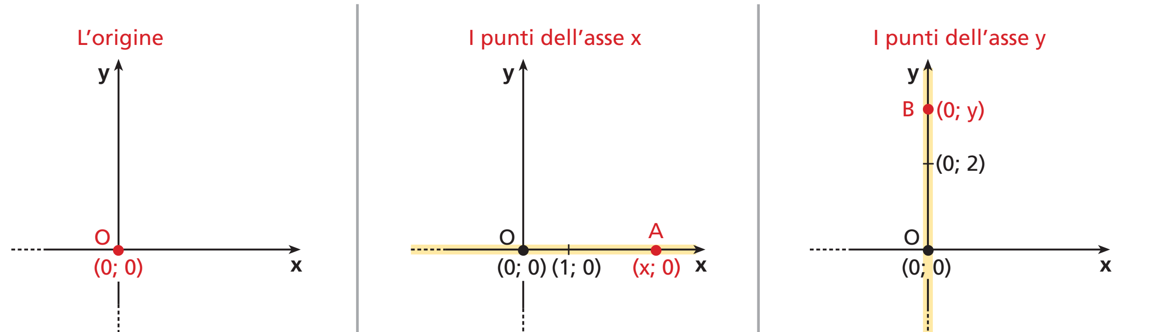


L'ascissa x e l'ordinata y sono concordi per i punti del primo e del terzo quadrante: entrambe positive nel primo quadrante ed entrambe negative nel terzo.
Le coordinate sono invece discordi per i punti del secondo e del quarto quadrante: x negativa e y positiva nel secondo quadrante, x positiva e y negativa nel quarto.

La rappresentazione di punti particolari

L'origine ha uguali a 0 sia l'ascissa sia l'ordinata. I punti dell'asse x hanno ordinata 0, quelli dell'asse y hanno ascissa 0.

▼ Figura 2



a. L'origine O è il punto di intersezione degli assi x e y: ha coordinate (0; 0).

b. Tutti i punti dell'asse x hanno come ordinata 0. Un generico punto dell'asse x è quindi del tipo $A(x; 0)$.

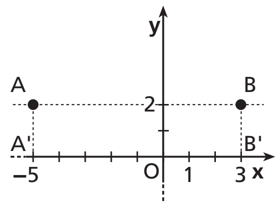
c. Tutti i punti dell'asse y hanno come ascissa 0. Un generico punto dell'asse y è quindi del tipo $B(0; y)$.

2. I segmenti nel piano cartesiano

La distanza fra due punti

I punti hanno la stessa ordinata

Consideriamo i punti $A(-5; 2)$ e $B(3; 2)$.
Essi hanno la stessa ordinata e stanno quindi su una retta parallela all'asse x.
Le parallele all'asse y passanti per A e per B incontrano l'asse x rispettivamente nei punti A' e B' (figura a lato). Poiché $A'B'BA$ è un rettangolo, risulta $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, e inoltre $x_{A'} = x_A = -5$ e $x_{B'} = x_B = 3$.
Quindi, nel nostro caso:



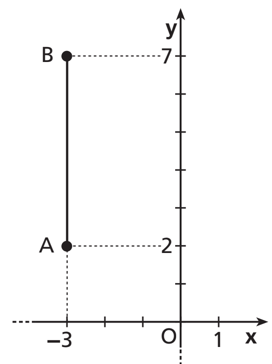
$$\overline{AB} = \overline{A'B'} = |x_{B'} - x_{A'}| = |x_B - x_A| = |3 - (-5)| = 8.$$

In generale, la distanza fra due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ che hanno la stessa ordinata $y_A = y_B$ è:

$$\boldsymbol{\overline{AB} = |x_B - x_A|}.$$

I punti hanno la stessa ascissa

Se i punti di cui dobbiamo calcolare la distanza hanno la stessa ascissa, valgono considerazioni analoghe a quelle del caso precedente, ma riferite all'asse y: infatti, i punti in questione si trovano su una retta parallela a questo asse.
Quindi, con riferimento alla figura a lato:



$$\overline{AB} = |y_B - y_A| = |7 - 2| = 5.$$

In generale, la distanza fra due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ che hanno la stessa ascissa $x_A = x_B$ è:

$$\boldsymbol{\overline{AB} = |y_B - y_A|}.$$

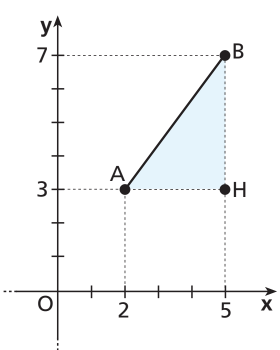
Il caso generale

Studiamo ora il caso generale e determiniamo la distanza fra due punti che non abbiano necessariamente la stessa ascissa o la stessa ordinata.

Consideriamo i punti:

$$A(2; 3) \qquad \text{e} \qquad B(5; 7).$$

Per calcolare la distanza fra A e B applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABH (figura a lato):



$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2}.$$

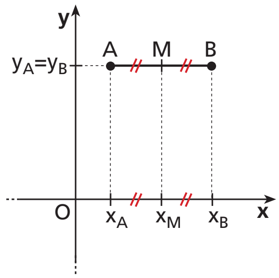
Poiché $\overline{AH} = |5 - 2| = 3$ e $\overline{BH} = |7 - 3| = 4$, otteniamo:

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5, \qquad \text{ossia} \qquad \overline{AB} = 5.$$

In generale, la distanza fra due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ è data da:

$$\boldsymbol{\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}.$$

Questa formula comprende anche i due casi particolari precedenti.



Il punto medio di un segmento

Il punto medio M di un segmento AB è tale che $\overline{AM} = \overline{MB}$, cioè è quel punto che ha la stessa distanza dagli estremi A e B del segmento.

I punti hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata
Dati due punti A e B con la stessa ordinata, il segmento di cui sono estremi è parallelo all'asse x, quindi l'ordinata del punto medio M è la stessa di A e di B.
Per ricavare l'ascissa di M, notiamo che:

$$|x_M - x_A| = |x_B - x_M|.$$

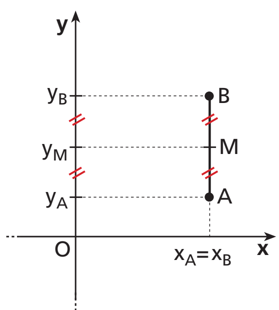
Considerando, come nella figura, $x_B > x_A$, possiamo scrivere le differenze senza valore assoluto:

◗ Considerazioni analoghe si possono fare se $x_A > x_B$.

$$x_M - x_A = x_B - x_M \rightarrow x_M + x_M = x_A + x_B \rightarrow 2x_M = x_A + x_B.$$

L'ascissa del punto medio di AB è pertanto:

$$\boldsymbol{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}}.$$

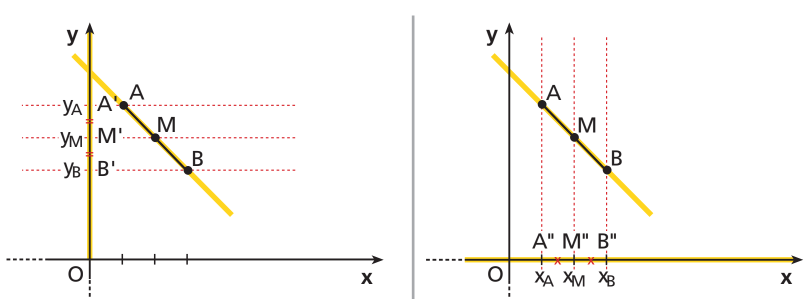


Analogamente, si ricava che per due punti A e B con la stessa ascissa, l'ascissa del punto medio di AB è la stessa di A e di B, mentre l'ordinata è:

$$\boldsymbol{y_M = \frac{y_A + y_B}{2}}.$$

Il caso generale
Consideriamo i punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$, con $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$.
Vogliamo calcolare le coordinate del punto medio del segmento AB.

▶ **Figura 3**



a. Dai tre punti A, B, M tracciamo le parallele all'asse x. Otteniamo così tre rette parallele tagliate da due trasversali: l'asse y e la retta passante per A e per B.

b. Dai tre punti A, B, M tracciamo le parallele all'asse y. Otteniamo tre rette parallele tagliate da due trasversali: l'asse x e la retta passante per A e per B.

◗ Il teorema del fascio di rette parallele afferma che, dato un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale.

Dopo aver tracciato le parallele agli assi passanti per i punti A, B e M, applichiamo il teorema del fascio di rette parallele.
Se $AM \cong MB$, allora $A'M' \cong M'B'$ e $A''M'' \cong M''B''$.

Applichiamo la formula del punto medio determinata nel caso precedente al segmento $A''B''$:

$$x_{M''} = \frac{x_A + x_B}{2}; \qquad x_M = x_{M''}.$$

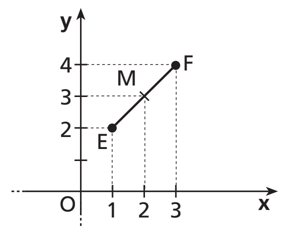
Analogamente, per il segmento $A'B'$:

$$y_{M'} = \frac{y_A + y_B}{2}; \qquad y_M = y_{M'}.$$

Dati $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$, il punto medio di AB ha quindi coordinate:

$$\underbrace{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}}_{\text{semisomma delle ascisse}} \qquad \underbrace{y_M = \frac{y_A + y_B}{2}}_{\text{semisomma delle ordinate}}$$

$E(1; 2)$, $F(3; 4)$.



$x_M = \frac{1+3}{2} = 2;$

$y_M = \frac{2+4}{2} = 3.$

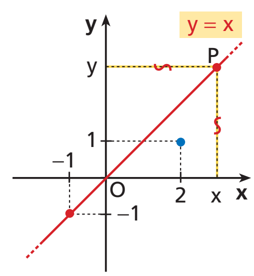
3. L'equazione di una retta passante per l'origine

Le equazioni delle bisettrici dei quadranti del piano cartesiano

Consideriamo la **bisettrice del primo e del terzo quadrante**. Ogni punto della bisettrice gode della proprietà di essere equidistante dai lati dell'angolo, cioè dagli assi cartesiani.

Preso un punto generico $P(x; y)$ sulla bisettrice, l'ascissa e l'ordinata, prese in valore assoluto, rappresentano le distanze di P dagli assi. Quindi $|y| = |x|$. Nel primo e terzo quadrante, d'altra parte, l'ascissa e l'ordinata di un punto hanno lo stesso segno, quindi:

$$y = x.$$



▲ **Figura 4** **Il punto (− 1; − 1) appartiene alla bisettrice del primo e del terzo quadrante. Il punto (2; 1) non appartiene alla bisettrice.**

Questa uguaglianza è un'equazione nelle variabili x e y e caratterizza di fatto i punti della bisettrice del primo e terzo quadrante. Le sue infinite soluzioni $(x; y)$ corrispondono a tutti e soli gli infiniti punti di tale bisettrice; se le coordinate di un punto non soddisfano l'equazione, il punto non appartiene alla bisettrice.

Con considerazioni analoghe, si ricava che alla **bisettrice del secondo e quarto quadrante** è associata l'equazione:

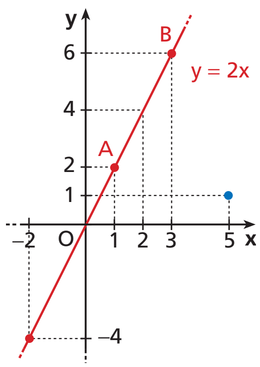
$$y = -x.$$

Il punto $(-1; 1)$ appartiene alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Tutti i punti di questa bisettrice, e soltanto essi, hanno le coordinate che sono numeri opposti.

Vedremo nei prossimi paragrafi che, data una qualsiasi retta del piano, le coordinate dei suoi punti, e soltanto esse, soddisfano un'equazione che chiamiamo **equazione della retta**.

▼ Figura 5 I punti $(-2; -4)$, $(2; 4)$, ... appartengono alla retta AB; il punto $(5; 1)$ non appartiene alla retta.



L'equazione di una generica retta passante per l'origine

Consideriamo i punti $A(1; 2)$ e $B(3; 6)$ e la retta passante per A e B.

I due punti hanno l'ordinata uguale al doppio dell'ascissa; quindi la relazione che lega le coordinate $(x; y)$ di ciascuno di essi è:

$$y = 2x.$$

Si può dimostrare che ogni altra coppia di numeri che soddisfi l'equazione $y = 2x$ corrisponde a un punto della retta AB e, viceversa, che ogni punto della retta ha coordinate che soddisfano tale equazione.

Pertanto l'equazione della retta AB è:

$$y = 2x.$$

Fra i punti della retta è compresa anche l'origine O, in quanto la coppia $(0; 0)$ soddisfa l'equazione.

Più in generale, se l'ordinata è m volte l'ascissa, l'equazione è $y = mx$.

Osserviamo che ognuna di queste rette passa per l'origine.

In generale, si può dimostrare che l'equazione di una retta passante per l'origine, purché diversa dall'asse y, è del tipo:

$$y = mx$$

per un opportuno valore di m.

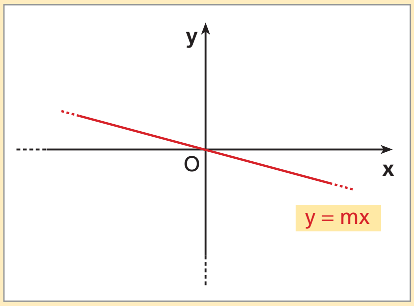
Viceversa, un'equazione del tipo $y = mx$ rappresenta sempre una retta passante per l'origine, diversa dall'asse y.

▸ L'equazione $y = mx$ non può rappresentare l'asse y, per nessun valore di m. Infatti, scelto un punto dell'asse y, per esempio $(0; 3)$, dovrebbe valere la relazione $3 = m \cdot 0$, ma non esiste un numero m che moltiplicato per 0 dia 3.

PROPRIETÀ

Equazione di una retta passante per l'origine

Una retta passante per l'origine e diversa dall'asse y ha equazione del tipo $\boldsymbol{y = mx}$.



BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V27a

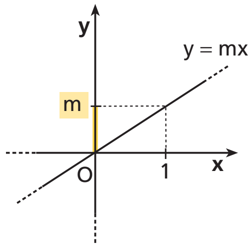
Il coefficiente angolare

Nell'equazione $y = mx$ il coefficiente m è chiamato **coefficiente angolare**. Esso esprime, per una retta passante per l'origine, il rapporto fra ordinata e ascissa di ogni punto della retta stessa, a eccezione dell'origine.

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B} = \frac{y_C}{x_C} = \frac{y_D}{x_D} = \ldots = m$$

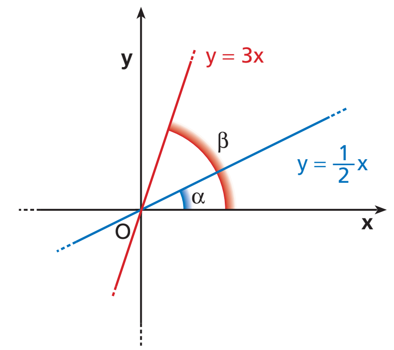
o, in generale, $\boldsymbol{\frac{y}{x} = m}$, con $x, y \neq 0$.

▸ Per $x = 1$, si ha $y = m$, dunque m è l'ordinata del punto di ascissa 1.



Se m è positivo, anche $\frac{y}{x}$ è positivo: i punti della retta hanno coordinate entrambe positive o entrambe negative. Ciò significa che la retta appartiene al primo e terzo quadrante (figura 6).

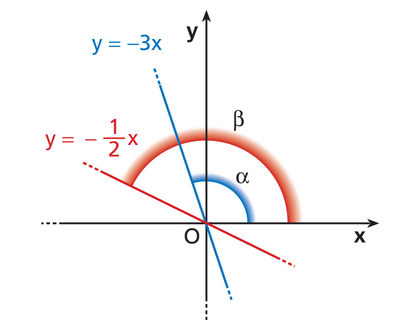
Inoltre, nel semipiano di ordinate positive la retta forma con la semiretta positiva dell'asse x un angolo acuto.



◀ **Figura 6** $\frac{1}{2}$ e 3 sono coefficienti angolari positivi, gli angoli α e β sono acuti. Al coefficiente maggiore, ossia 3, corrisponde l'angolo maggiore, cioè β.

Se m è negativo, anche $\frac{y}{x}$ è negativo: i punti della retta hanno coordinate discordi. Ciò significa che la retta appartiene al secondo e quarto quadrante (figura 7).

Inoltre, nel semipiano di ordinate positive la retta forma con la semiretta positiva dell'asse x un angolo ottuso.



◀ **Figura 7** $-\frac{1}{2}$ e -3 sono coefficienti angolari negativi, gli angoli α e β sono ottusi. A coefficiente maggiore, ossia $-\frac{1}{2}$, corrisponde angolo maggiore, cioè β.

Le equazioni degli assi cartesiani

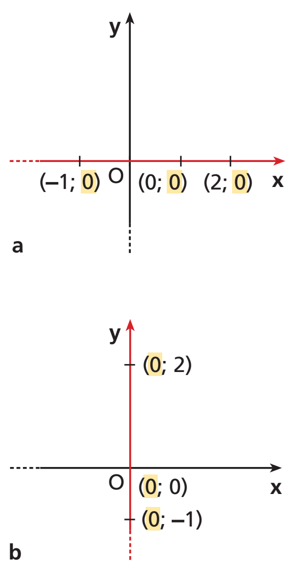
Consideriamo i punti $(-1; 0)$, $(0; 0)$, $(2; 0)$, ... (figura 8a).

Essi, come tutti gli altri punti dell'asse x, godono della stessa proprietà: la loro ordinata è 0.

Assumiamo allora come equazione dell'asse x l'uguaglianza $y = 0$.

In modo analogo si ragiona per l'asse y, i cui punti hanno tutti ascissa 0 (figura 8b).

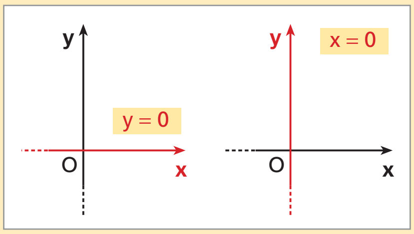
▼ **Figura 8**



PROPRIETÀ

Le equazioni degli assi

L'equazione dell'asse x è $\boldsymbol{y = 0}$;
l'equazione dell'asse y è $\boldsymbol{x = 0}$.

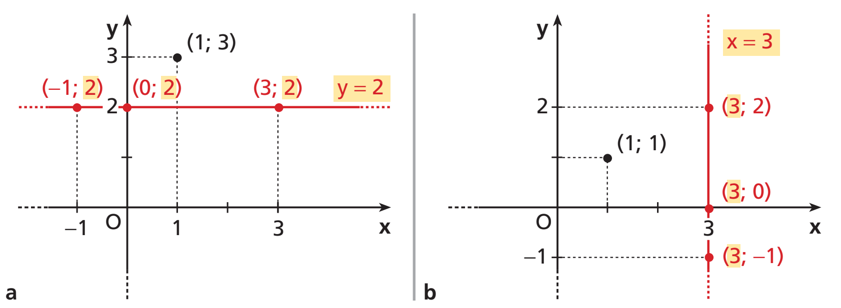


L'equazione dell'asse x può essere vista come caso particolare dell'equazione $y = mx$, quando $m = 0$, mentre quella dell'asse y, come abbiamo già notato, non è del tipo $y = mx$.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V27b

4. L'equazione generale della retta

L'equazione di una retta parallela a un asse



▶ Figura 9

I punti $(-1; 2)$, $(0; 2)$, $(3; 2)$, ... (figura 9*a*) appartengono a una retta parallela all'asse x e, come tutti gli altri punti di questa retta, godono della stessa proprietà: hanno l'ordinata uguale a 2. Per questo l'equazione della retta è $y = 2$.

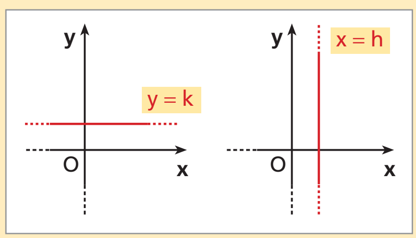
Analogamente, i punti $(3; -1)$, $(3; 0)$, $(3; 2)$, ... (figura 9*b*) appartengono a una retta parallela all'asse y. Essi hanno l'ascissa uguale a 3, come tutti i punti della retta a cui appartengono. Questo ci fa capire che l'equazione della retta è $x = 3$.

In generale vale la seguente proprietà.

PROPRIETÀ

Equazione di una retta parallela a un asse

L'equazione di una retta parallela all'asse x è $\boldsymbol{y = k}$.
L'equazione di una retta parallela all'asse y è $\boldsymbol{x = h}$.



Le lettere h e k indicano un qualunque valore reale. Al variare di k otteniamo tutte le rette parallele all'asse x, compreso l'asse x stesso per $k = 0$.
Al variare di h, otteniamo tutte le rette parallele all'asse y. Per $h = 0$ l'equazione è quella dell'asse y.

La forma esplicita $y = mx + q$

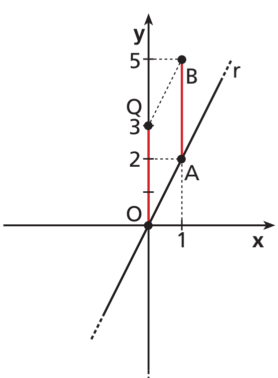
Consideriamo la retta r passante per l'origine e di equazione

$$y = 2x.$$

Scegliamo su tale retta i due punti $O\,(0; 0)$ e $A\,(1; 2)$.

Aumentando di 3 l'ordinata dei due punti, otteniamo i punti $Q\,(0; 3)$ e $B\,(1; 5)$.

Il quadrilatero $OABQ$ è un parallelogramma, perché ha i lati opposti OQ e AB congruenti e paralleli; quindi, la retta s passante per B e Q risulta parallela alla retta r.



Le coordinate dei punti Q e B soddisfano l'equazione

$$y = 2x + 3.$$

Se aumentiamo sempre di 3 l'ordinata di un qualsiasi altro punto di r, per esempio $(-2; -4)$, otteniamo il punto $(-2; -1)$ che appartiene alla retta s, perché le sue coordinate soddisfano l'equazione $y = 2x + 3$.

In generale, data una retta passante per l'origine di equazione

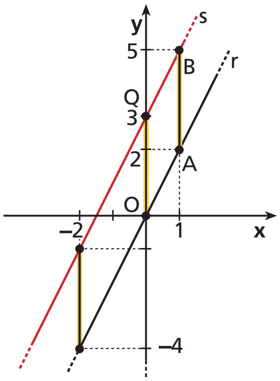
$$y = mx,$$

una retta a essa parallela passante per il punto $(0; q)$ ha equazione

$$y = mx + q.$$

Viceversa, una retta qualsiasi del piano, che intersechi l'asse y nel punto di ordinata q, può essere associata a un'equazione del tipo $y = mx + q$.

Tale equazione viene chiamata **equazione esplicita** della retta.



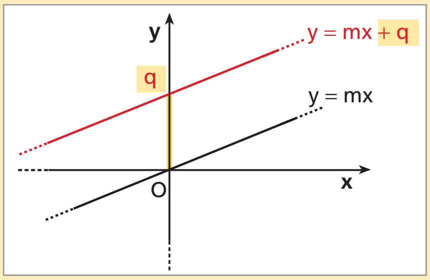
◗ L'aggettivo «esplicita» sottintende «rispetto alla variabile y» e significa che nell'equazione è messa in evidenza y in funzione di x.

◂ **Figura 10**

PROPRIETÀ

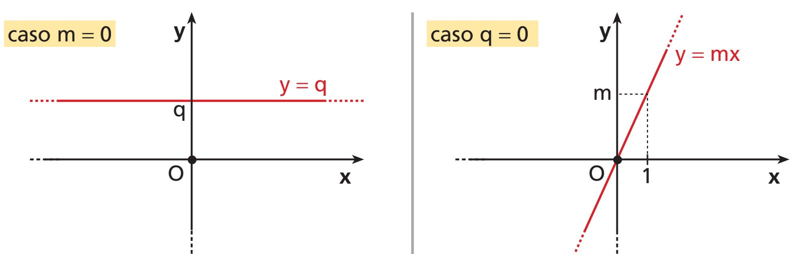
Forma esplicita $y = mx + q$

Ogni retta del piano, purché non parallela all'asse y, è rappresentata da un'equazione del tipo $y = mx + q$.



Il coefficiente q si chiama **termine noto** oppure **ordinata all'origine**, perché rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y.
Il coefficiente m è detto, anche in questo caso, coefficiente angolare.

Due casi particolari



a. Se nell'equazione $y = mx + q$ poniamo $m = 0$, otteniamo $y = q$, ossia l'equazione di una retta parallela all'asse x.

b. Se nell'equazione $y = mx + q$ poniamo $q = 0$, otteniamo $y = mx$, ossia l'equazione di una retta passante per l'origine.

L'equazione della retta in forma implicita

L'equazione esplicita $y = mx + q$ può rappresentare tutte le rette del piano, tranne l'asse y e le rette parallele a esso.
Infatti non esistono valori di m e di q che, sostituiti nell'equazione, ci forniscano equazioni del tipo $x = 0$ oppure $x = k$.

Un'equazione che rappresenti tutte le possibili rette del piano è della forma

$$ax + by + c = 0,$$

dove a, b, c sono numeri reali (a e b non entrambi nulli).

In questo caso, si dice che l'equazione della retta è in **forma implicita**, nel senso che nessuna tra le variabili x e y è scritta esplicitamente in funzione dell'altra.

PROPRIETÀ

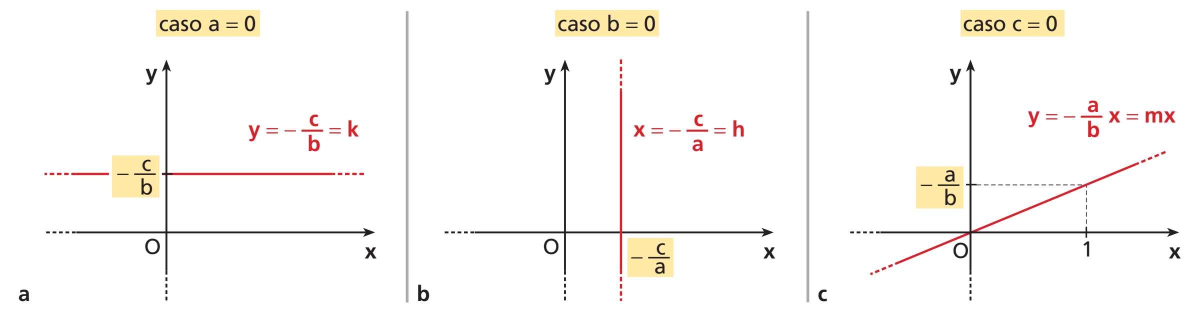
Equazione generale della retta

Ogni retta del piano è rappresentata da un'equazione lineare del tipo

$$\boldsymbol{ax + by + c = 0},$$

dove a, b, c sono numeri reali (a e b non entrambi nulli).

La forma implicita comprende tutti i casi già esaminati.



▲ **Figura 11** Casi particolari della forma implicita. Ottieni le equazioni scritte in rosso ponendo rispettivamente $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ nell'equazione $ax + by + c = 0$.

Dalla forma implicita alla forma esplicita

È possibile trasformare un'equazione scritta in forma implicita nella sua equivalente scritta in forma esplicita ricavando y (purché sia $b \neq 0$):

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Osserviamo che il coefficiente angolare è $-\frac{a}{b}$ e il termine noto è $-\frac{c}{b}$.

ESEMPIO

Scriviamo in forma esplicita l'equazione $6x - 2y + 1 = 0$.

Ricaviamo y:

$$-2y = -6x - 1 \quad \rightarrow \quad 2y = 6x + 1 \quad \rightarrow \quad y = 3x + \frac{1}{2}.$$

Il coefficiente angolare è 3, il termine noto $\frac{1}{2}$.

ESPLORAZIONE: LA NASCITA DELLA GEOMETRIA ANALITICA

◄ L'arcobaleno. La scala con la quale Buddha scende dal cielo? La dea Iride vestita di rugiada? Fin dall'antichità questo affascinante fenomeno naturale è legato alle divinità. Già Aristotele aveva tentato di spiegare scientificamente la formazione dell'arcobaleno, ma è solo con Cartesio che si ha il primo trattato matematico corretto su questo fenomeno.

CARTESIO

René Descartes, in italiano Cartesio (1596-1650), nel suo *Discorso sul metodo* (1637), critica sia la geometria dei Greci, sia l'algebra dei suoi tempi.
Come si può cogliere dal brano seguente, il suo proposito è affrontare la matematica in modo unitario, unificando algebra e geometria in quella che oggi chiamiamo «geometria analitica». Di questo si occupò ne *La geometria*, saggio pubblicato come appendice del *Discorso sul metodo*.

> «Non volevo, con questo, mettermi a imparare tutte quelle scienze particolari che son dette comunemente matematiche; […] pensai che, per meglio studiarle in particolare, dovevo raffigurarle in forma di linee, giacché non trovai niente di più semplice o che potessi più distintamente rappresentare alla mia immaginazione e ai miei sensi; e per ricordarle e per comprenderne molte insieme, dovevo invece esprimerle con qualche cifra tra le più brevi possibili. In questo modo avrei colto tutto il meglio dell'analisi geometrica e dell'algebra e corretto i difetti dell'una con l'altra.»

FERMAT

Anche Pierre de Fermat (1601-1665) utilizzò il metodo della geometria analitica. Tuttavia, i punti di vista di Cartesio e Fermat, contemporanei, erano molto distanti.
Mentre Cartesio criticò la tradizione greca e si propose di spezzarla in nome di un metodo universalmente applicabile, Fermat credette nella continuità con il pensiero greco.
A Fermat si può ricondurre il principio fondamentale secondo cui «un'equazione in due incognite individua un luogo (retta o curva)».
Poiché l'opera di Fermat relativa ai luoghi geometrici (*Varia opera matematica*) fu pubblicata postuma, la geometria analitica apparve come una personale invenzione di Cartesio. È ora invece chiaro che Fermat utilizzò lo stesso metodo nel 1636, prima della comparsa de *La geometria*, e che i contributi dei due studiosi sono del tutto autonomi.

▼ Nel francobollo commemorativo di Fermat è enunciato il teorema per cui è diventato famoso e che è stato dimostrato solo di recente (1995).

IN DIECI RIGHE

Scrivi un breve articolo con il computer sulla vita di Cartesio e di Fermat, soffermandoti sul fatto che entrambi non erano matematici «di professione».
Dai un titolo al tuo elaborato e costruisci poi una linea del tempo in cui, oltre ai momenti significativi della loro vita, siano presenti i principali personaggi della loro epoca in campo scientifico, letterario, artistico e politico.

Cerca nel web: Cartesio, Descartes, Fermat, geometria analitica, analytic geometry.

5. Il coefficiente angolare

Consideriamo la retta di equazione $y = 3x + 2$ e tre suoi punti $A(1;\,5)$, $B(2;\,8)$ e $C(3;\,11)$. Calcoliamo il rapporto fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse dei punti A e B:

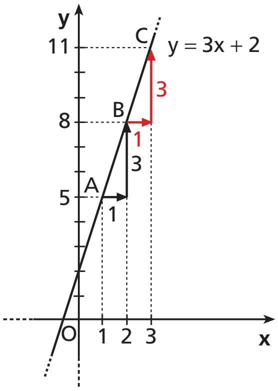
$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8-5}{2-1} = 3.$$

Eseguiamo poi lo stesso calcolo per B e C:

$$\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{11-8}{3-2} = 3.$$

Osserviamo che in ambedue i casi il rapporto calcolato è uguale al coefficiente angolare della retta, che è 3.

Avremmo ottenuto lo stesso risultato scegliendo una qualsiasi altra coppia di punti appartenenti alla retta. Interpretiamo questo risultato dicendo che il coefficiente angolare dà informazioni sulla «pendenza» della retta. Osserviamo a questo proposito la figura 12.



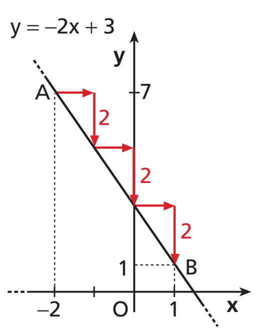
▲ **Figura 12** **Quando l'ascissa aumenta di 1, l'ordinata aumenta di *m*.**

Per andare dal punto $A(1;\,5)$ a $B(2;\,8)$ e da B a $C(3;\,11)$ possiamo spostarci prima verso destra di 1 unità, poi verso l'alto di 3 unità. È come se salissimo una scala con gradini profondi 1 e alti 3, cioè alti quanto il coefficiente angolare.

ESEMPIO

Consideriamo la retta di equazione $y = -2x + 3$ (figura 13) e i suoi due punti $A(-2;\,7)$ e $B(1;\,1)$. Osserviamo che anche in questo caso il coefficiente angolare è dato dal rapporto $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-7}{1-(-2)} = \frac{-6}{3} = -2.$$



▲ **Figura 13** **Quando l'ascissa aumenta di 1, l'ordinata aumenta di $m = -2$. Un aumento di -2 equivale a una diminuzione di 2.**

In generale, dati due punti distinti $A(x_A;\,y_A)$ e $B(x_B;\,y_B)$ appartenenti alla retta di equazione $y = mx + q$, ricaviamo la formula che esprime il coefficiente angolare m in funzione delle coordinate dei due punti.

Poiché A è un punto della retta, le sue coordinate soddisfano l'equazione, cioè: $y_A = mx_A + q$.

Poiché B è un punto della retta, anche le sue coordinate soddisfano l'equazione, cioè: $y_B = mx_B + q$.

Se sono vere le due uguaglianze precedenti, otteniamo una nuova uguaglianza vera se sottraiamo membro a membro, cioè uguagliamo la differenza fra il primo membro della prima e il primo membro della seconda alla differenza fra il secondo membro della prima e il secondo membro della seconda:

$$y_A - y_B = (mx_A + q) - (mx_B + q)$$
$$y_A - y_B = mx_A - mx_B$$
$$y_A - y_B = m(x_A - x_B).$$

Ricaviamo m:

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B},$$

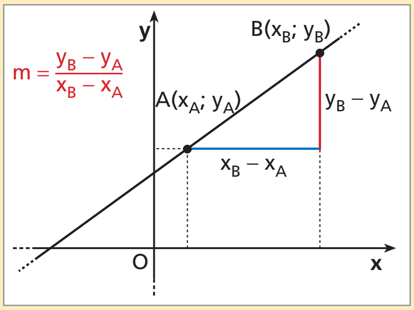
ovvero, cambiando segno al numeratore e al denominatore:

$$\boldsymbol{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}.$$

PROPRIETÀ

Coefficiente angolare e coordinate di due punti

Il coefficiente angolare di una retta di equazione $y = mx + q$ è il rapporto fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di due punti qualunque distinti della retta.



Casi particolari

1. Se due punti A e B hanno la stessa ordinata, si ha $y_B - y_A = 0$ e

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 0,$$

quindi, **il coefficiente angolare di una retta parallela all'asse x** è $\boldsymbol{m = 0}$.

2. Se i punti A e B hanno la stessa ascissa, si ha $x_B - x_A = 0$, e la frazione $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ perde di significato, quindi **il coefficiente angolare di una retta parallela all'asse y non esiste**.

6. Le rette parallele e le rette perpendicolari

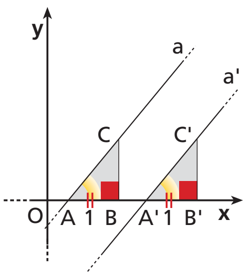
BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V27d

Le rette parallele

Abbiamo visto che il coefficiente angolare indica la «pendenza» di una retta rispetto all'asse x. Ci aspettiamo pertanto che due rette parallele, avendo, rispetto all'asse x, la stessa pendenza, abbiano anche lo stesso coefficiente angolare. Consideriamo due rette parallele, a e a'. Dimostriamo che, se il coefficiente angolare di a è m, allora è m anche quello di a'.

Ipotesi $a \parallel a'$. **Tesi** a e a' hanno lo stesso coefficiente angolare.

DIMOSTRAZIONE



Consideriamo il punto di intersezione A della retta a con l'asse x (figura a lato); prendiamo sullo stesso asse il punto B distante 1 da A. Consideriamo poi sulla retta il punto C con la stessa ascissa di B.

In modo analogo, consideriamo A' intersezione di a' con l'asse x, B' distante 1 da A' e C' su a' e con la stessa ascissa di B'.

I triangoli ABC e $A'B'C'$ hanno:

- $AB \cong A'B'$ per costruzione,
- $\hat{A} \cong \hat{A}'$ perché angoli corrispondenti formati dalle parallele a e a' tagliate dall'asse x, trasversale,
- $\hat{B} \cong \hat{B}'$ perché angoli retti,

quindi sono congruenti per il secondo criterio di congruenza fra triangoli. In particolare, $BC \cong B'C'$.

La misura di BC dà l'aumento dell'ordinata corrispondente all'aumento di una unità dell'ascissa, *quindi* il suo valore è m.

Essendo $BC \cong B'C'$, è anche $\overline{B'C'} = m$.

La misura di $B'C'$ dà l'aumento dell'ordinata corrispondente all'aumento di una unità dell'ascissa, ossia il coefficiente angolare della retta a', *quindi* anche il coefficiente angolare di a' è m.

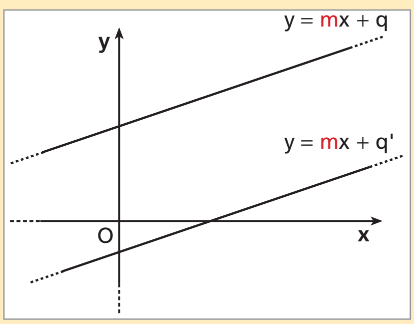
È possibile dimostrare che, viceversa, se due rette hanno lo stesso coefficiente angolare, allora sono parallele. Vale pertanto il seguente teorema.

▶ Il teorema non si applica alle rette parallele all'asse y, perché il loro coefficiente angolare non è definito.

TEOREMA

Rette parallele

Due rette (non parallele all'asse y) sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare.



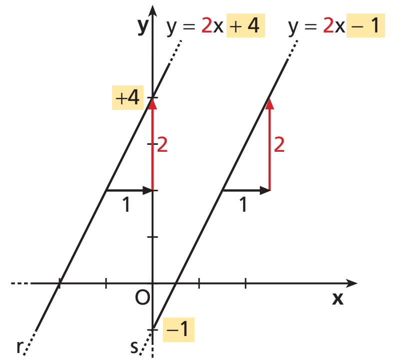
Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

ESEMPIO

Sono parallele le rette di equazione:

$r: y = 2x + 4$

$s: y = 2x - 1.$



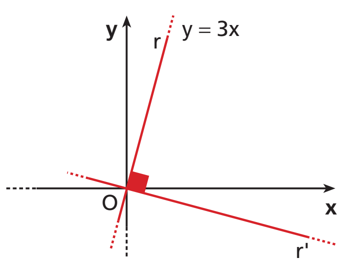
▶ **Figura 14** Le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare 2 e differiscono solo per il valore di q. La retta r interseca l'asse y in (0; 4), la retta s lo interseca in (0; − 1).

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V27e

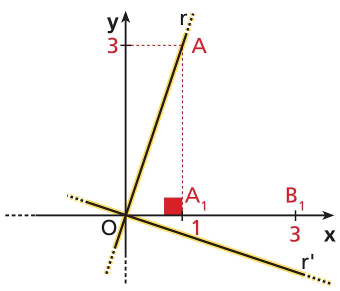
Le rette perpendicolari

Consideriamo la retta r di equazione $y = 3x$ e cerchiamo l'equazione della retta r' passante per l'origine e perpendicolare a r.

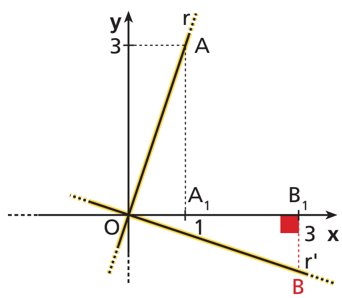
▼ **Figura 15** Costruzione.



a. Tracciamo la retta r: $y = 3x$ e la sua perpendicolare r' passante per l'origine.



b. Scegliamo su r il punto $A(1; 3)$ e chiamiamo $A_1(1; 0)$ la sua proiezione sull'asse x. Consideriamo, ancora sull'asse x, il punto $B_1(3; 0)$.



c. Mandiamo da B_1 la perpendicolare all'asse x. Chiamiamo B il punto di intersezione di questa retta con r'. Dimostriamo che il punto B ha ordinata − 1.

I triangoli OAA_1 e OBB_1 (figura a lato) sono rettangoli e inoltre hanno:

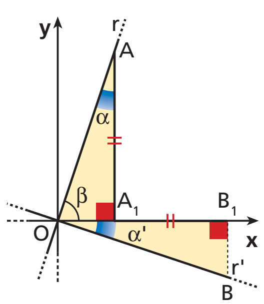
- $AA_1 \cong OB_1$ per costruzione;
- $\alpha \cong \alpha'$ perché complementari dello stesso angolo β.

Pertanto, sono congruenti per il secondo criterio. In particolare, $OA_1 \cong BB_1$. Poiché la misura di OA_1 è 1, anche la misura di BB_1 è 1, *quindi* l'ordinata di B è − 1.

Poiché il punto $B(3; -1)$ appartiene alla retta r', passante per l'origine, il coefficiente angolare di tale retta è:

$$m' = \frac{y_B}{x_B} = -\frac{1}{3}.$$

I due coefficienti angolari m e m' sono 3 e $-\frac{1}{3}$, ossia sono l'uno l'opposto del reciproco dell'altro, ovvero l'uno l'*antireciproco* dell'altro.

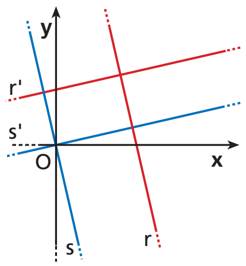


▶ Per dimostrarlo, basta applicare lo stesso procedimento dell'esempio precedente alla retta generica di equazione $y = mx$.

La proprietà di essere l'uno l'antireciproco dell'altro lega i coefficienti angolari di tutte le coppie di rette passanti per l'origine e perpendicolari fra loro. Se m è il coefficiente angolare della retta r, m' quello della retta r' e le rette r e r' sono perpendicolari, allora vale la relazione:

$$\boldsymbol{m = -\frac{1}{m'}} \quad \text{oppure} \quad \boldsymbol{m \cdot m' = -1}.$$

Si può anche dimostrare che, viceversa, se due rette hanno coefficienti angolari legati dalla relazione $m \cdot m' = -1$, allora sono perpendicolari.



Questa relazione vale anche se le rette r e r' non passano per l'origine. In tal caso, infatti, ci possiamo ricollegare al caso di rette per l'origine come segue: consideriamo le rette s e s' per l'origine e parallele rispettivamente a r e r'. È chiaro che r e r' sono perpendicolari se e solo se s e s' lo sono.

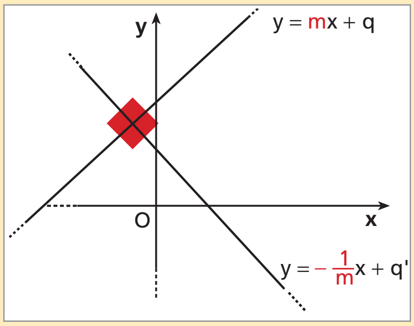
Se r ha equazione $y = mx + q$ e r' ha equazione $y = -\frac{1}{m}x + q'$, allora s ha equazione $y = mx$ e s' ha equazione $y = -\frac{1}{m}x$. Poiché s è perpendicolare a s', anche r è perpendicolare a r'.

▶ Il teorema non si applica alle rette parallele agli assi, poiché per le rette parallele all'asse y il coefficiente angolare non è definito.

TEOREMA

Rette perpendicolari

Due rette (non parallele agli assi) sono perpendicolari se e solo se il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1.



PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Lo dimostro io!

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Due rette perpendicolari hanno i coefficienti angolari che sono uno l'antireciproco dell'altro.

GIULIO: «Ho pensato una dimostrazione tutta mia!».

CARLA: «Guarda che in geometria analitica si calcola e non si dimostra!».

GIULIO: «Non è vero: partiamo dal fatto che l'asse di un segmento è perpendicolare al segmento. E che ogni suo punto è equidistante dagli estremi del segmento».

▶ Considera un segmento di generici estremi $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ e un punto $P(x; y)$ sull'asse di AB. Applica la formula della distanza fra due punti un paio di volte…

7. I fasci di rette

Il fascio improprio

Consideriamo una retta r del piano: l'insieme formato da r e da tutte le rette a essa parallele si chiama **fascio improprio** di rette parallele a r.

ESEMPIO

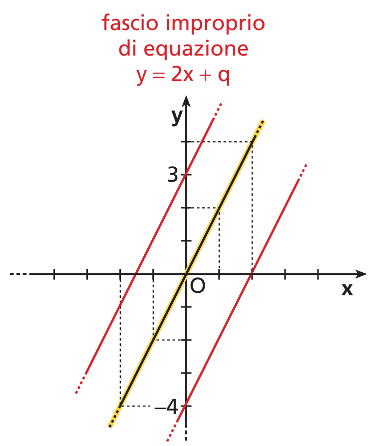
L'equazione

$$y = 2x + q$$

rappresenta, al variare di q, tutte le rette del piano che hanno coefficiente angolare 2, cioè è l'**equazione di un fascio improprio** di rette.

Se $q = 0$, abbiamo la retta del fascio passante per l'origine:

$$y = 2x.$$



◄ **Figura 16** Ogni retta del fascio è parallela alla retta base, passante per l'origine, $y = 2x$. A seconda del valore di q cambia l'intersezione della retta con l'asse y.

Per disegnare altre rette del fascio basta attribuire dei valori a q e sostituirli, di volta in volta, nell'equazione del fascio: per $q = 3$ abbiamo la retta $y = 2x + 3$, per $q = -4$ la retta $y = 2x - 4$ ecc.

Il fascio proprio

L'insieme di tutte le rette del piano che passano per uno stesso punto P si chiama **fascio proprio** di rette per P.

Il punto P comune a tutte le rette del fascio si chiama **centro del fascio**.

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione del fascio di rette di centro $P(4; 3)$.
Se una retta generica $y = mx + q$ deve passare per P, occorre che le coordinate di P soddisfino l'equazione, ossia:

$$3 = m \cdot 4 + q.$$

Ricaviamo q:

$$q = 3 - m \cdot 4.$$

Sostituendo tale espressione a q nell'equazione generica, otteniamo:

$$y = mx + 3 - 4m.$$

Così facendo, abbiamo ottenuto l'equazione in forma esplicita di una generica retta del fascio.
Tuttavia la riscriviamo come segue:

$$y - 3 = m(x - 4),$$

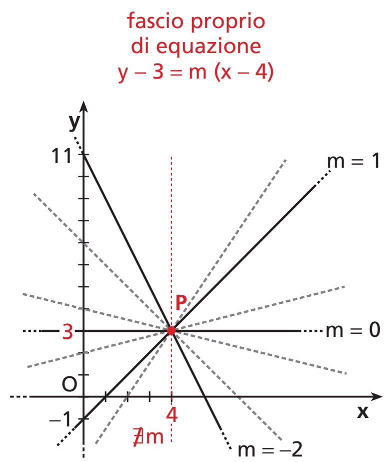
per mettere in evidenza, nell'equazione, le coordinate (4; 3) del centro.
Abbiamo trovato l'equazione del fascio di rette di centro $P(4; 3)$.
Per ogni valore reale che attribuiamo al coefficiente angolare m otteniamo una retta del fascio:

- per $m = 1$ abbiamo la retta $y - 3 = x - 4$, cioè $y = x - 1$;
- per $m = -2$ la retta $y - 3 = -2x + 8$, cioè $y = -2x + 11$;
- per $m = 0$ la parallela all'asse x, $y = 3$ e così via.

L'equazione della parallela all'asse y è $x = 4$, ma non esiste alcun valore di m che, sostituito nell'equazione del fascio, fornisca tale equazione.
Pertanto, per avere tutte le rette del fascio proprio per P, dobbiamo aggiungere all'equazione del fascio l'equazione della parallela all'asse y per P:

$$y - 3 = m(x - 4) \quad \text{(rette non parallele all'asse } y\text{);}$$

$$x = 4 \quad \text{(retta parallela all'asse } y\text{).}$$



▶ **Figura 17** **Nel fascio di rette $y - 3 = m(x - 4)$, al variare di m otteniamo tutte le rette che passano per $P(4; 3)$, tranne quella parallela all'asse y, perché per essa non c'è un corrispondente valore di m.**

In generale, dato un punto P di coordinate $(x_1; y_1)$, il **fascio di rette di centro P ha equazione**:

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1).}$$

Al variare di m si ottengono tutte le rette del fascio passanti per P, tranne la parallela all'asse y, che ha equazione $x = x_1$.

Pertanto, il **fascio completo** è descritto dalle equazioni:

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1), \quad \text{con} \quad m \in \mathbb{R};}$$

$$\boldsymbol{x = x_1.}$$

8. La retta passante per due punti

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V28a

Per due punti distinti passa una e una sola retta. In geometria analitica, questo si traduce così: date le coordinate di due punti distinti del piano, è possibile determinare l'equazione dell'unica retta passante per quei punti.
Consideriamo due punti generici, $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$, e determiniamo l'equazione della retta passante per essi.

1. Poiché la retta che cerchiamo passa per il punto P, essa deve appartenere al fascio proprio di rette per P, cioè deve avere un'equazione del tipo
   $$y - y_1 = m(x - x_1),$$
   in cui m assume un certo valore che ora determineremo.
2. Per calcolare m, utilizziamo la formula che dà il coefficiente angolare, note le coordinate di due punti della retta:
   $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$
3. Nell'equazione del fascio di rette di centro P, sostituiamo a m l'espressione ottenuta:
   $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$
4. Infine, se $y_1 \neq y_2$, dividendo entrambi i membri per $y_2 - y_1$, riscriviamo tale formula nella seguente forma:
   $$\boldsymbol{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}.$$
   Questa è l'**equazione della retta passante per i punti dati**.

▶ Assumiamo per ipotesi che sia $x_1 \neq x_2$.
Se $x_1 = x_2$, la retta cercata è parallela all'asse y e ha equazione $x = x_1$.

▶ Nel caso $y_1 = y_2$, la retta cercata è parallela all'asse x e ha equazione $y = y_1$.

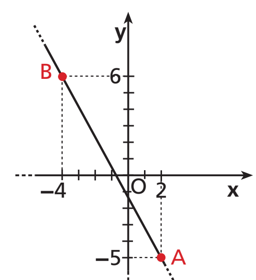
ESEMPIO

Applichiamo la formula appena ricavata per determinare l'equazione della retta passante per $A(2; -5)$ e $B(-4; 6)$:

$$\frac{y+5}{6+5} = \frac{x-2}{-4-2} \quad \rightarrow \quad \frac{y+5}{11} = \frac{x-2}{-6} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad -6y - 30 = 11x - 22 \quad \rightarrow \quad 6y = -11x - 8.$$

L'equazione cercata è quindi: $y = -\dfrac{11}{6}x - \dfrac{4}{3}$.



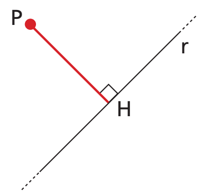
Osservazione. Come si è già evidenziato, la formula $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ non si applica per determinare l'equazione della retta passante per due punti che hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata.

- Se i punti P e Q hanno la stessa ascissa, cioè $x_1 = x_2$, l'equazione della retta passante per P e Q è $x = x_1$.
- Se i punti P e Q hanno la stessa ordinata, cioè $y_1 = y_2$, l'equazione della retta passante per P e Q è $y = y_1$.

▶ Per esempio, dati i punti $A(1; 3)$, $B(1; -5)$, l'equazione della retta passante per i punti dati è $x = 1$.
Se $A(3; -2)$ e $B(-7; -2)$, l'equazione è $y = -2$.

9. La distanza di un punto da una retta

Mandiamo da un punto P la perpendicolare a una retta r. Chiamiamo H il punto di intersezione fra la retta stessa e la perpendicolare. La misura del segmento di perpendicolare PH è la **distanza del punto *P* dalla retta *r*** (figura 18).

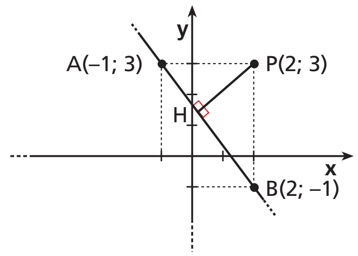


▲ Figura 18

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V28b

ESEMPIO

Dato il punto $P(2; 3)$, calcoliamo la sua distanza PH dalla retta di equazione $4x + 3y - 5 = 0$ (figura 19).
Tracciamo da P le parallele agli assi fino a incontrare la retta data nei punti A e B. Individuiamo così il triangolo rettangolo APB, di cui PH è l'altezza relativa all'ipotenusa.
Il punto A ha la stessa ordinata di P. Sostituendola nell'equazione della retta, possiamo determinare la sua ascissa:



▲ Figura 19

$$4x + 3(3) - 5 = 0, \text{da cui } x = -1.$$

In modo analogo, poiché l'ascissa di B è uguale a quella di P, si può ricavare l'ordinata di B, che è -1. Otteniamo quindi: $A(-1; 3)$, $B(2; -1)$.
Il doppio dell'area di APB si può ottenere moltiplicando le misure dei due cateti AP e PB. Se dividiamo poi per la misura dell'ipotenusa AB, otteniamo l'altezza PH relativa all'ipotenusa, ossia la misura cercata:

$$\overline{PH} = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

◗ La misura di AB si calcola con la formula della distanza fra due punti:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

In generale, si può dimostrare (con calcoli che omettiamo perché troppo laboriosi) che la **distanza di un punto $P(x_0; y_0)$ da una retta di equazione $ax + by + c = 0$** è data dalla formula:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

ESEMPIO

La distanza del punto $P(2; 3)$ dalla retta di equazione

$$4x + 3y - 5 = 0$$

risulta:

$$d = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|8 + 9 - 5|}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}.$$

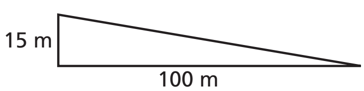
◗ Calcoliamo la distanza già determinata nell'esempio precedente usando la formula appena enunciata.

Discesa pericolosa

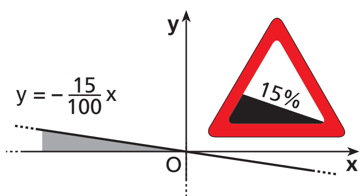
…che cosa indica questo segnale stradale?

Il quesito completo a pag. 633

In un qualunque manuale di scuola guida troviamo questo cartello: si tratta di un segnale che indica *discesa pericolosa*, e il codice della strada consiglia di rallentare l'andatura. Possiamo chiederci: di quanto scenderà la strada?
Il valore indicato nel cartello rappresenta la misura della pendenza della carreggiata rispetto a un piano orizzontale. Tale pendenza è calcolata come rapporto percentuale tra il dislivello e l'avanzamento orizzontale corrispondente.
In particolare, il valore 15% indica che la strada si abbassa di 15 m mentre si procede orizzontalmente per 100 m.



Dal punto di vista geometrico la pendenza è il rapporto tra i cateti del triangolo rettangolo che ha come ipotenusa la strada. Si utilizza la stessa definizione di pendenza quando si ha a che fare con una carreggiata in salita, per la quale esiste il cartello corrispondente, *salita ripida*. In una rampa del 10%, ogni 100 m che si percorrono in orizzontale, si sale di 10 m.
Si può interpretare il concetto di pendenza secondo la geometria analitica del piano cartesiano. Se facciamo coincidere l'asse delle ascisse con un piano orizzontale, la direzione della strada può essere rappresentata da una retta. Il valore assoluto del coefficiente angolare di tale retta costituisce così la pendenza della carreggiata.
In particolare, la discesa del 15% del cartello stradale è raffigurata dalla retta di equazione $y = -\frac{15}{100}x$. Il valore assoluto del coefficiente angolare, cioè $\frac{15}{100}$, dà la misura della pendenza della discesa.



Viceversa, una salita del 10% è rappresentata dalla retta $y = \frac{10}{100}x$.

Notiamo che una salita del 100% non è quindi una parete verticale, come si potrebbe pensare, ma è inclinata rispetto all'asse delle ascisse come una retta di coefficiente angolare $\frac{100}{100}$, cioè 1. Una retta di questo tipo è $y = x$, ovvero la bisettrice del primo e del terzo quadrante: la salita del 100% è quindi inclinata di 45° rispetto all'orizzonte.
Dal punto di vista pratico, nella collocazione di un segnale di *salita ripida* o di *discesa pericolosa*, gli uffici competenti alla manutenzione delle strade eseguono il calcolo della pendenza misurando il dislivello (cateto verticale) tramite un altimetro. La misura dell'avanzamento orizzontale (cateto orizzontale) è compiuta indirettamente su carta topografica o spesso viene sostituita con la misura della lunghezza della strada stessa (ipotenusa). L'errore che si compie è trascurabile, tenendo conto che generalmente le pendenze stradali sono inferiori al 20%. Per tale pendenza, infatti, se il cateto orizzontale è 100 m, l'ipotenusa vale circa 102 m (teorema di Pitagora).

LA TORRE DI PISA

Nel 1173 iniziò la costruzione della torre di Pisa. Nell'arco dei secoli questo edificio ha subìto una progressiva inclinazione, inizialmente verso nord e successivamente verso sud. È possibile compiere una misura approssimata dell'inclinazione della torre sapendo che la sua settima cornice sporge di circa 3,8 m rispetto alla prima e che il dislivello di tali cornici, misurato con un altimetro, è di 41,5 m.
La pendenza rispetto al piano orizzontale è quindi:

$$p = \frac{41,5}{3,8} \simeq 10,92 = 1092\%.$$

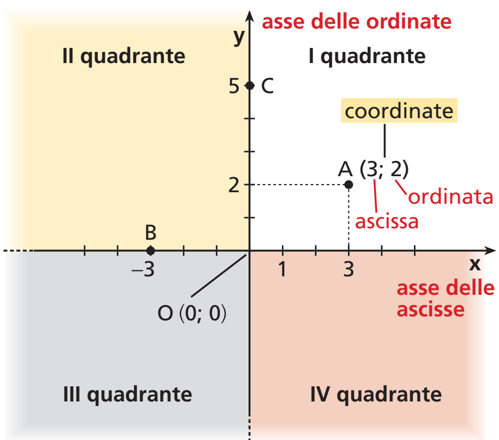
Questo valore non è molto significativo. Nel caso di una torre è preferibile calcolare la pendenza rispetto all'asse verticale. Per la torre di Pisa si ha:

$$p_v = \frac{3,8}{41,5} \simeq 0,092 = 9,2\%.$$

LA TEORIA IN SINTESI
Il piano cartesiano e la retta

1. Le coordinate di un punto su un piano

Il piano cartesiano è suddiviso dai due assi in quattro angoli retti chiamati **quadranti**. Ogni punto del piano è individuato da una coppia di numeri reali, detti **coordinate**. La prima coordinata si chiama **ascissa** e la seconda **ordinata**.
L'origine O degli assi ha coordinate $(0; 0)$.



Il punto $B(-3; 0)$ sta sull'asse x, il punto $C(0; 5)$ sta sull'asse y.

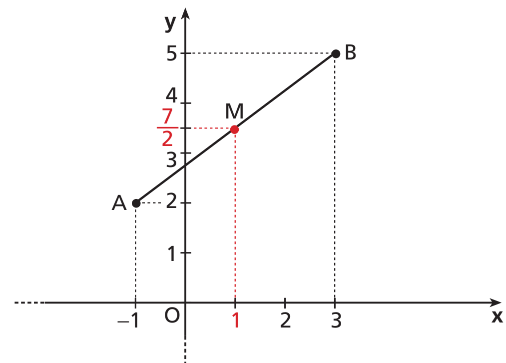
2. I segmenti nel piano cartesiano

La **distanza fra due punti** $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ è data da:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Il **punto medio** del segmento AB è $M(x_M; y_M)$ con:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$



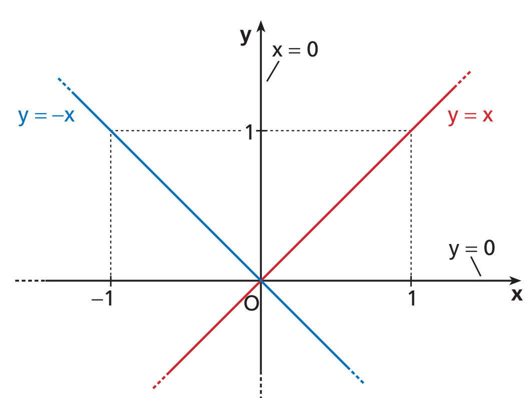
$$\overline{AB} = \sqrt{[3-(-1)]^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$M\left(1; \frac{7}{2}\right) \text{ perché } x_M = \frac{3-1}{2} = 1 \text{ e } y_M = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}$$

3. L'equazione di una retta passante per l'origine

Una **retta passante per l'origine**, purché diversa dall'asse y, ha equazione $y = mx$, mentre l'asse y ha equazione $x = 0$.
Il numero m dell'equazione $y = mx$ è chiamato **coefficiente angolare**. In particolare:

- se $m = 0$, otteniamo $y = 0$ (equazione dell'asse x);
- se $m = 1$, otteniamo $y = x$ (equazione della bisettrice del I e III quadrante);
- se $m = -1$, otteniamo $y = -x$ (equazione della bisettrice del II e IV quadrante).



4. L'equazione generale della retta

L'**equazione generale di una retta** è del tipo:

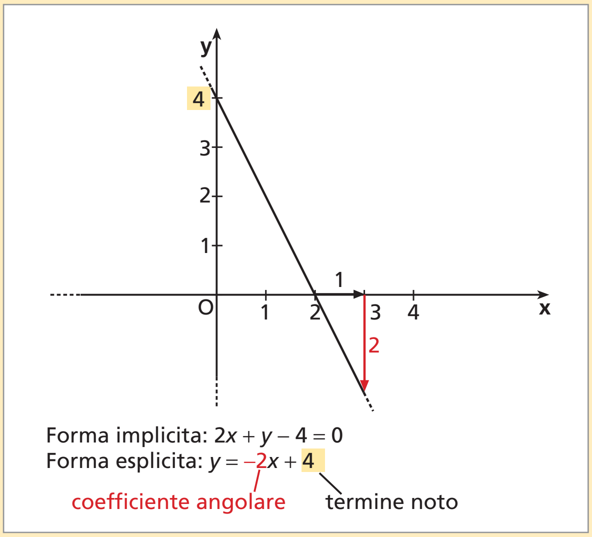
$ax + by + c = 0$ (forma implicita).

Se un punto appartiene a una retta, le sue coordinate soddisfano l'equazione della retta.

Se una retta non è parallela all'asse y, l'equazione può essere scritta nella forma

$y = mx + q$ (forma esplicita),

in cui m è il coefficiente angolare e q è il termine noto.



Se una retta è parallela all'asse y, ha equazione del tipo

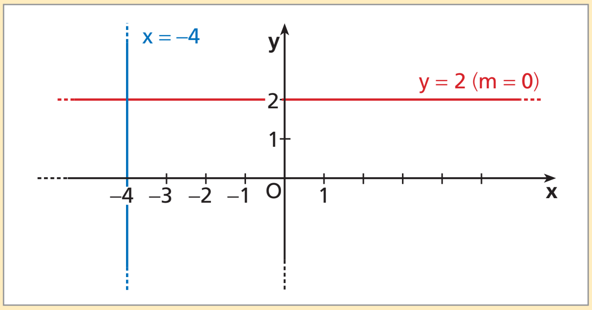
$x = k$.

Casi particolari della forma $y = mx + q$:

$q = 0 \rightarrow y = mx$ (la retta passa per l'origine);

$m = 0 \rightarrow y = q$ (la retta è parallela all'asse x);

$q = 0$ e $m = 0 \rightarrow y = 0$ (la retta è l'asse x).



5. Il coefficiente angolare

Il **coefficiente angolare** è dato dal rapporto fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di due punti distinti $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$ di una retta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

A seconda che il valore di m sia positivo o negativo, la retta forma con il semiasse positivo delle x un angolo acuto oppure ottuso; se $m = 0$, la retta è parallela all'asse x.

Il coefficiente angolare m non esiste se la retta forma un angolo retto con l'asse x; in tal caso la retta è parallela all'asse y.

ESEMPIO $P(1; 4)$, $Q(2; 6)$.

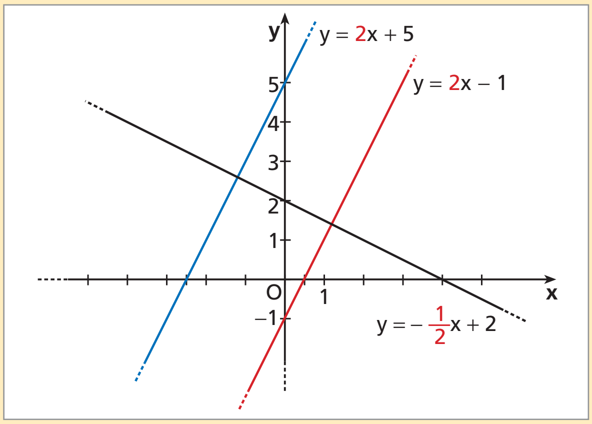
$$m = \frac{6-4}{2-1} = 2, \quad m > 0,$$

la retta passante per P e Q forma un angolo acuto con il semiasse positivo delle x.

6. Le rette parallele e le rette perpendicolari

Due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$ sono fra loro:

- **parallele** quando hanno lo stesso coefficiente angolare, cioè $m = m'$;
- **perpendicolari** quando il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1, cioè $m \cdot m' = -1$.



Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

7. I fasci di rette

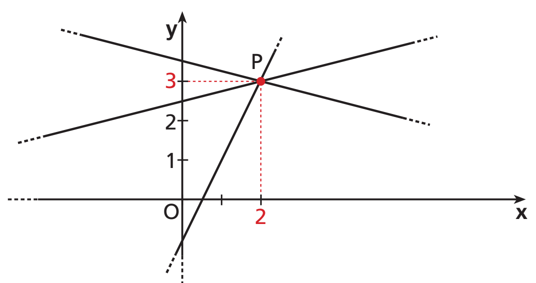
Data la retta r di equazione $y = 2x - 1$, l'insieme formato da r e da tutte le rette a essa parallele si chiama **fascio improprio** di rette parallele a r e ha equazione:

$$y = 2x + q.$$

L'insieme di tutte le rette che passano per uno stesso punto $P(x_1; y_1)$ si chiama **fascio proprio** di rette e ha equazione:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \cup x = x_1.$$

Il punto P è il centro del fascio.



fascio proprio di centro $P(2; 3)$
$y - 3 = m(x - 2) \cup x = 2$

8. La retta passante per due punti

L'**equazione della retta passante per due punti** $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$ è:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Se $y_1 = y_2$, allora l'equazione è $y = y_1$;

se $x_1 = x_2$, allora l'equazione è $x = x_1$.

9. La distanza di un punto da una retta

La **distanza di un punto $P(x_0; y_0)$ da una retta** r di equazione $ax + by + c = 0$ è data dalla misura del segmento che ha per estremi il punto P e il piede della perpendicolare a r passante per P.
Tale misura d si calcola come segue:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

1. Le coordinate di un punto su un piano

Teoria a pag. 633

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 VERO O FALSO?

a) L'asse y è l'asse delle ascisse. V F
b) Il punto $P(3; -5)$ ha ascissa -5. V F
c) La distanza del punto $Q(1; 2)$ dall'asse x si definisce ordinata del punto Q. V F
d) I punti del secondo quadrante hanno ordinata negativa. V F
e) Il punto $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ appartiene al primo quadrante. V F
f) Nel primo e nel terzo quadrante i punti hanno le coordinate di segno concorde. V F
g) Il punto $P(-1; 1)$ appartiene al secondo quadrante. V F
h) Tutti i punti dell'asse y hanno ordinata diversa da 0. V F

2 TEST Se il punto $P(-3x; -y)$ appartiene al quarto quadrante, quale dei seguenti punti appartiene al primo quadrante?

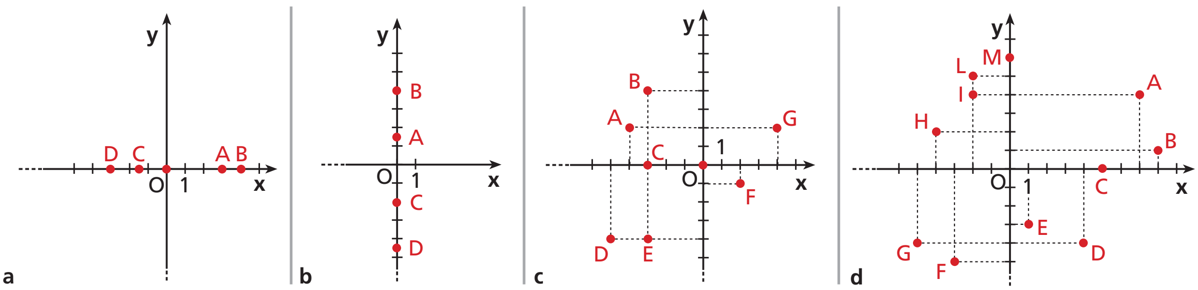
A $P'(-x; -2y)$.
B $P'(2x; -y)$.
C $P'(y; 3x)$.
D $P'(-5x; 2y)$.
E $P'(3x; y)$.

3 TEST Se il punto $P(x; y)$ appartiene al secondo quadrante, quale dei seguenti punti appartiene al terzo quadrante?

A $P'(y; x)$.
B $P'(-x; -y)$.
C $P'(-x; y)$.
D $P'(x; -y)$.
E $P'(-y; -x)$.

ESERCIZI

4 Scrivi le coordinate dei punti indicati in ogni figura.



5 Disegna la poligonale aperta che si ottiene unendo, nell'ordine, i seguenti punti:

$A(-5; -3)$, $B(-3; 3)$, $C(-2; -2)$, $D(1; 1)$, $E\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $F(4; 5)$.

Rispondi alle seguenti domande:

a) Quale punto ha l'ordinata maggiore?
b) Quale punto ha l'ascissa minore?
c) Quali punti hanno ascissa negativa?
d) Quali sono i punti appartenenti al IV quadrante?

6 Indica in quale quadrante può trovarsi un punto se:
a) l'ascissa è negativa e l'ordinata positiva;
b) le sue coordinate sono entrambe positive;
c) le sue coordinate sono tali che $xy > 0$;
d) le sue coordinate sono tali che $xy < 0$;
e) le sue coordinate sono entrambe nulle;
f) l'ascissa è uguale all'ordinata;
g) il prodotto delle coordinate è nullo.

7 Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ il punto $P(2k + 1; 0)$ coincide con l'origine degli assi? $\left[k = -\frac{1}{2}\right]$

8 Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ il punto $Q(3; k - 6)$ è interno al IV quadrante? $[k < 6]$

2. I segmenti nel piano cartesiano

Teoria a pag. 635

RIFLETTI SULLA TEORIA

9 VERO O FALSO?

a) La distanza fra due punti che hanno la stessa ascissa è uguale alla differenza delle ordinate. V F
b) La distanza di un punto del piano dall'origine degli assi cartesiani è uguale alla somma delle coordinate del punto. V F
c) La distanza dall'origine del punto $P(a; 3a)$, con $a \in \mathbb{R}$, è sempre un numero positivo. V F

10 VERO O FALSO?

a) L'origine degli assi è il punto medio del segmento AB soltanto se $x_A = y_A = -x_B = -y_B$. V F
b) Se un segmento è parallelo all'asse x, i suoi estremi e il suo punto medio hanno la stessa ordinata. V F
c) L'ascissa del punto medio di un segmento AB si può ottenere dividendo a metà le ascisse dei punti A e B e poi sommandole. V F

11 TEST Il punto $M\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ è il punto medio del segmento di estremi $A(2;1)$ e B. Quali sono le coordinate di B?

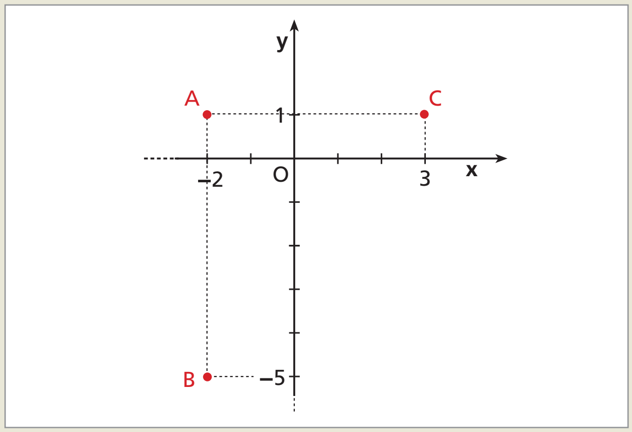
A $(-1; -3)$ B $\left(-\frac{3}{2}; -3\right)$ C $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$ D $(3; -3)$ E $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$

ESERCIZI

La distanza fra due punti

ESERCIZIO GUIDA

12 Calcoliamo le distanze $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ fra i punti disegnati in figura.



Le coordinate dei punti disegnati sono:

$A(-2; 1)$, $B(-2; -5)$, $C(3; 1)$.

Calcoliamo $\overline{AB}$

$A(-2; 1)$ e $B(-2; -5)$ si trovano su una stessa retta verticale, infatti hanno la stessa ascissa. La loro distanza è data quindi dal valore assoluto della differenza delle ordinate:

$$\overline{AB} = |y_A - y_B| = |1 - (-5)| = |6| = 6.$$

Osserviamo che avremmo trovato lo stesso risultato sottraendo le ordinate in ordine inverso:

$$\overline{AB} = |y_B - y_A| = |(-5) - 1| = |-6| = 6.$$

Calcoliamo $\overline{AC}$

$A(-2; 1)$ e $C(3; 1)$ si trovano su una stessa retta orizzontale, infatti hanno la stessa ordinata. La loro distanza è data quindi dal valore assoluto della differenza fra le ascisse:

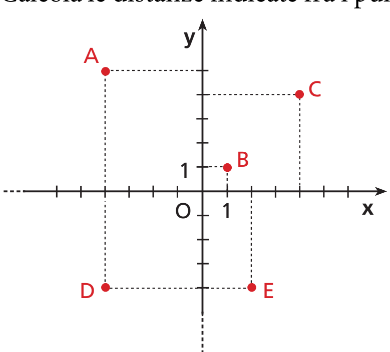
$$\overline{AC} = |x_A - x_C| = |-2 - 3| = |-5| = 5.$$

Calcoliamo $\overline{BC}$

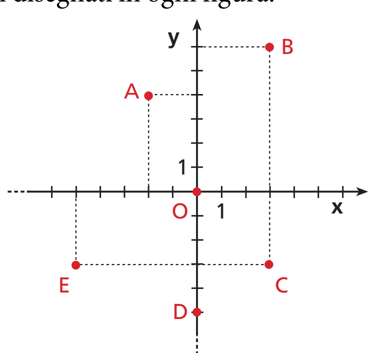
I punti $B(-2; -5)$ e $C(3; 1)$ non sono allineati né lungo una retta orizzontale, né lungo una retta verticale. Applichiamo allora la formula generale della distanza fra due punti:

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} =$$
$$= \sqrt{(-2-3)^2 + (-5-1)^2} =$$
$$= \sqrt{(-5)^2 + (-6)^2} = \sqrt{25+36} = \sqrt{61} \simeq 7{,}8.$$

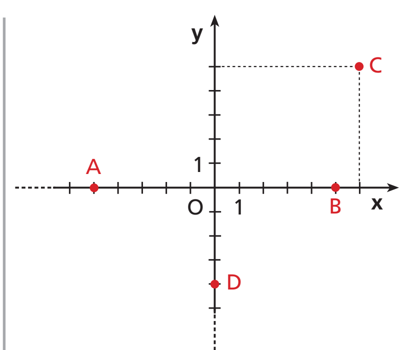
13 Calcola le distanze indicate fra i punti disegnati in ogni figura.



a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$, $\overline{AD}$, $\overline{CE}$



b $\overline{AC}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$



c $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$, $\overline{DC}$

Calcola la distanza fra i punti indicati.

14 $A(2; 4)$, $B(2; 7)$.

15 $A(-1; 3)$, $B(4; 3)$.

16 $A\left(-4; \frac{2}{3}\right)$, $B\left(-4; \frac{5}{2}\right)$.

17 $A(-3; -4)$, $B\left(\frac{1}{3}; -4\right)$.

18 $A(-4; 0)$, $B(6; 0)$.

19 $A(2; 5)$, $B(3; 7)$.

20 Determina il perimetro del triangolo i cui vertici sono $A(-3; 2)$, $B(0; 2)$, $C(0; -2)$. [12]

21 Determina il perimetro del quadrilatero i cui vertici sono $A(-6; -10)$, $B(-6; 11)$, $C(-3; 15)$, $D(9; 10)$. [64]

22 Verifica che il triangolo di vertici $A(2; 2)$, $B\left(6; \frac{3}{2}\right)$, $C(4; 5)$ è isoscele.

23 Verifica che il triangolo ABC di vertici $A(-2; 3)$, $B(4; 5)$, $C(3; -2)$ è isoscele.

24 Verifica che il triangolo ABC di vertici $A(1; -2)$, $B(-1; 2)$, $C(-1; -3)$ è un triangolo rettangolo (è sufficiente verificare che le misure dei lati soddisfano il teorema di Pitagora).

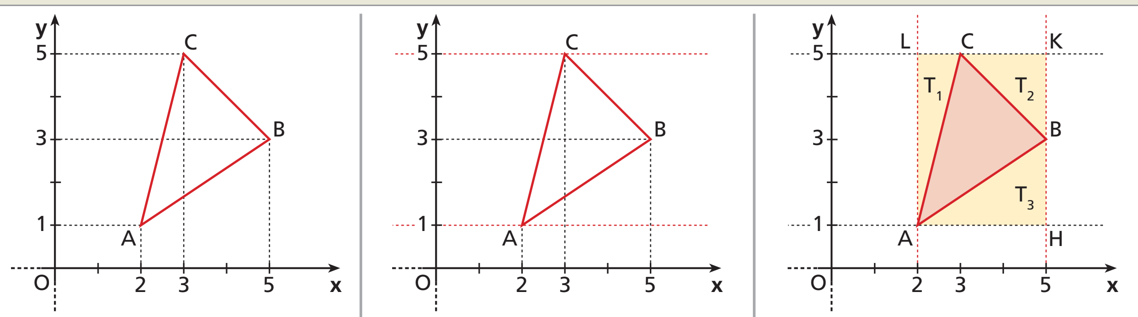
25 Determina il punto P sull'asse x equidistante da $A(-1; 2)$ e da $B(4; 5)$. $\left[P\left(\frac{18}{5}; 0\right)\right]$

26 Determina il punto P che ha ordinata uguale all'ascissa ed è equidistante da $A(-3; 1)$ e $B(4; 3)$. $\left[P\left(\frac{5}{6}; \frac{5}{6}\right)\right]$

L'area di triangoli e poligoni

ESERCIZIO GUIDA

27 Determiniamo l'area del triangolo di vertici $A(2; 1)$, $B(5; 3)$, $C(3; 5)$.



a. Disegniamo il triangolo ABC nel piano cartesiano.

b. Tracciamo le parallele all'asse x passanti per A e per C.

c. Tracciamo le parallele all'asse y passanti per A e per B. Le quattro parallele, incontrandosi, determinano un rettangolo $AHKL$. Il rettangolo è formato dal triangolo ABC e dai triangoli rettangoli T_1, T_2, T_3. Quindi possiamo determinare l'area del triangolo ABC sottraendo all'area del rettangolo l'area dei tre triangoli T_1, T_2, T_3.

Calcoliamo l'area $A(AHKL)$ del rettangolo $AHKL$ (figura c):

$A(AHKL) = \overline{AH} \cdot \overline{HK}$;

$\overline{AH} = |5 - 2| = 3, \quad \overline{HK} = |5 - 1| = 4$;

$A = 3 \cdot 4 = 12$.

Calcoliamo l'area di T_1:

$$A_{T_1} = \frac{\overline{LC} \cdot \overline{LA}}{2};$$

$\overline{LC} = |3 - 2| = 1, \quad \overline{LA} = |5 - 1| = 4$;

$$A_{T_1} = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2.$$

Calcoliamo l'area di T_2:

$$A_{T_2} = \frac{\overline{CK} \cdot \overline{KB}}{2};$$

$\overline{CK} = |5 - 3| = 2, \quad \overline{KB} = |5 - 3| = 2$;

$$A_{T_2} = \frac{\cancel{2} \cdot 2}{\cancel{2}} = 2.$$

Calcoliamo l'area di T_3:

$$A_{T_3} = \frac{\overline{AH} \cdot \overline{BH}}{2};$$

$\overline{AH} = |2 - 5| = |-3| = 3, \quad \overline{BH} = |3 - 1| = 2$;

$$A_{T_3} = \frac{3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 3.$$

Calcoliamo l'area del triangolo ABC:

$A(ABC) = A(AHKL) - (A_{T_1} + A_{T_2} + A_{T_3})$, ossia

$A(ABC) = 12 - (2 + 2 + 3) = 12 - 7 = 5$.

Calcola l'area dei triangoli che hanno i vertici indicati.

28 $A(10; 0)$, $\quad B(2; 3)$, $\quad O(0; 0)$.

29 $A\left(-4; \frac{3}{2}\right)$, $\quad B\left(6; \frac{3}{2}\right)$, $\quad C(0; -5)$.

30 $A(-11; -3)$, $\quad B\left(-11; \frac{5}{3}\right)$, $\quad C(7; -9)$.

31 $A\left(5; -\frac{1}{2}\right)$, $\quad B\left(5; \frac{9}{2}\right)$, $\quad C(-8; -5)$.

Calcola l'area dei poligoni che hanno i vertici indicati.

32 $A(1; 1)$, $\quad B(5; 0)$, $\quad C(4; 4)$, $\quad D(2; 5)$.

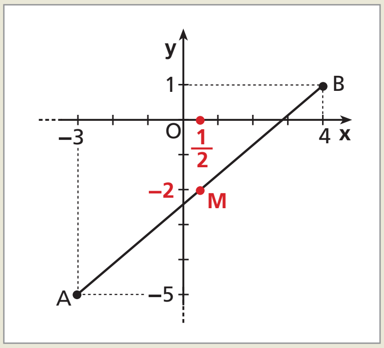
33 $A(3; -3)$, $\quad B(6; -2)$, $\quad C(4; 4)$, $\quad D(1; 3)$.

Il punto medio di un segmento

ESERCIZIO GUIDA

34 Calcoliamo le coordinate del punto medio del segmento di estremi $A(-3; -5)$ e $B(4; 1)$.

Disegniamo il segmento.



Calcoliamo l'ascissa del punto medio M, utilizzando la formula:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad \text{ossia} \quad x_M = \frac{-3 + 4}{2} = \frac{1}{2}.$$

Calcoliamo l'ordinata del punto medio, utilizzando la formula:

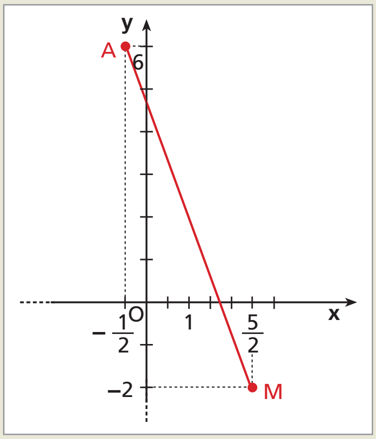
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad \text{ossia} \quad y_M = \frac{-5 + 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Il punto medio del segmento AB è $M\left(\frac{1}{2}; -2\right)$.

ESERCIZIO GUIDA

35 Conoscendo le coordinate del punto $A\left(-\frac{1}{2}; 6\right)$ e quelle del punto medio del segmento AB, $M\left(\frac{5}{2}; -2\right)$, calcoliamo le coordinate di B.

Disegniamo il segmento AM. Applichiamo le formule del punto medio:



$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

Sostituiamo le coordinate di M e di A:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{2} = \dfrac{-\frac{1}{2} + x_B}{2} \\ -2 = \dfrac{6 + y_B}{2} \end{cases}$$

Ricaviamo x_B e y_B nelle due equazioni:

$$\begin{cases} 5 = -\dfrac{1}{2} + x_B \\ -4 = +6 + y_B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_B = 5 + \dfrac{1}{2} \\ y_B = -10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_B = \dfrac{11}{2} \\ y_B = -10 \end{cases}$$

Il punto cercato è $B\left(\frac{11}{2}; -10\right)$.

Determina le coordinate del punto medio M o dell'estremo incognito del segmento AB.

36 $A(4; -7)$, $B(8; -7)$.

37 $A(-3; 2)$, $B(-3; -8)$.

38 $A(2; 4)$, $M(5; 7)$.

39 $A(-1; 3)$, $B(3; 7)$.

40 $A\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$, $M\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

41 $A\left(\frac{1}{2}; -5\right)$, $B(3; 2)$.

42 $B(-2; -5)$, $M(1; 3)$.

43 $A(2; 7)$, $B(6; -3)$.

44 $B\left(\frac{8}{5}; \frac{8}{5}\right)$, $M(0; 0)$.

45 $A\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

RIEPILOGO LA DISTANZA FRA DUE PUNTI E IL PUNTO MEDIO

46 **COMPLETA** le seguenti tabelle.

a)

A	B	$\overline{AB}$
$(a; 0)$	$(-a; 0)$	...
$(3; -2b)$	$(3; -5b)$	...
$\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{4}; 1\right)$	...

b)

P	Q	Punto medio del segmento PQ
$(2; 3)$	...	$\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$
...	$(1; -3)$	$(0; 1)$
$(-5; 0)$	$(-1; 2)$	...

TEST

47 Che cosa puoi affermare sul triangolo di vertici $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$, $B\left(5; \frac{1}{2}\right)$, $C\left(1; \frac{9}{2}\right)$?

- A Il suo perimetro vale 64.
- B La sua area vale 32.
- C È rettangolo e isoscele.
- D È equilatero.
- E È scaleno.

48 Quanto vale la distanza fra i punti $A(2k; k-3)$ e $B(2k; 2k+1)$?

- A $-k+4$
- B $k-4$
- C $|-k+4|$
- D $|k+4|$
- E $k-2$

49 Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le coordinate del punto medio del segmento di estremi $A(3a; a-1)$ e $B(a; 2a-3)$ sono opposte fra loro?

- A $\frac{4}{7}$
- B -4
- C -2
- D 2
- E $\frac{7}{4}$

50 La distanza fra $A(3a-1; -1)$ e $B(2-2a; -1)$ è uguale a 2 se:

- A $a=-1$.
- B $a=-\frac{1}{5}$.
- C $a=1 \vee a=\frac{1}{5}$.
- D $a=-1 \vee a=-\frac{1}{5}$.
- E $a=1 \vee a=5$.

51 Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ l'ascissa del punto medio del segmento di estremi $A(k; 2)$ e $B(3k; 2)$ vale -1? $\left[k=-\frac{1}{2}\right]$

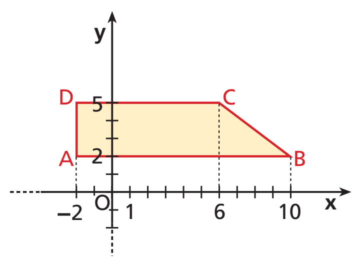
52 Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le distanze dei punti $P(2a-3; 4)$ e $Q(2a+1; 4)$ dall'origine sono uguali? $\left[a=\frac{1}{2}\right]$

53 Quali condizioni della geometria euclidea sono sufficienti per dimostrare che un quadrilatero è un parallelogramma? Applica tali condizioni al quadrilatero di vertici $A(4;6)$, $B(-1;1)$, $C(2;-5)$, $D(7;0)$ per verificare che esso è un parallelogramma. $[AB \cong DC, AD \cong BC]$

54 In che modo puoi utilizzare il calcolo della distanza fra due punti per verificare che tre punti sono allineati? Applica tale metodo per verificare che i punti $A(0;-3)$, $B(1;-2)$ e $C(3;0)$ sono allineati. $[\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}]$

55 Nel triangolo ABC, di vertici $A(-2;4)$, $B(0;2)$, $C(4;6)$, determina i punti medi dei lati e la misura delle mediane. $[(-1;3), (2;4), (1;5); \sqrt{34}, 4, \sqrt{10}]$

56 Calcola la misura del perimetro e dell'area del poligono in figura.



[28; 30]

57 Determina sull'asse y il punto equidistante dai due punti $A(-3;2)$ e $B(-1;3)$. $\left[\left(0; -\frac{3}{2}\right)\right]$

58 Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-3;-4)$, $B(10;-4)$, $C(15;8)$, $D(2;8)$ è un rombo. Determina la misura dell'area. [156]

59 Verifica che il triangolo di vertici $A(-2; -3)$, $B\left(3; -\frac{1}{2}\right)$, $C(-8; 9)$ è rettangolo e poi verifica che la mediana relativa all'ipotenusa è congruente alla metà dell'ipotenusa stessa.

60 Verifica che il quadrilatero di vertici consecutivi $I(-2; 3)$, $L(1; -2)$, $M(6; 1)$, $N(3; 6)$ è un rettangolo.

61 Considerati i punti $A(-2a; -1)$ e $B(a-5; -1)$, con $a > 0$, determina a in modo che la distanza $\overline{AB}$ sia uguale a 7. Determina poi il punto C, di ascissa 5, tale che l'area del triangolo ABC misuri 35. $[a = 4; C_1(5; 9), C_2(5; -11)]$

62 Il quadrilatero di vertici $A(2; 1)$, $B(6; 5)$, $C(4; 7)$, $D(0; 3)$ è un rettangolo. Trova i punti medi di ciascun lato, congiungili e stabilisci di che quadrilatero si tratta. Calcolane poi perimetro e area. $[4\sqrt{10}; 8]$

63 Dato il triangolo ABC con $A(1; 1)$, $B(7; 3)$ e $C(3; 5)$, stabilisci che esso è isoscele sulla base AB. Dopo aver determinato i punti medi M_1 e M_2 dei lati obliqui, verifica che il segmento M_1M_2 è uguale alla metà di AB.

64 Dato il rombo di coordinate $A(-2; -2)$, $B(11; -2)$, $C(16; 10)$, $D(3; 10)$, trova il perimetro. Determina poi i punti medi di AB e BC e calcola la lunghezza del segmento che li congiunge. $[52; 3\sqrt{13}]$

65 Il quadrilatero di vertici $A(-1; -3)$, $B(3; -7)$, $C(7; -3)$ e D è un quadrato. Determina le coordinate del punto D sapendo che il punto medio del segmento DC è $M(5; -1)$. Calcola poi perimetro e area del quadrato. $[D(3; 1); 16\sqrt{2}; 32]$

66 Del parallelogramma $ABCD$ sono noti i vertici $A(4; 8)$, $B(5; 4)$, $C(-1; -4)$. Determina le coordinate del vertice D. $[(-2; 0)]$

67 Se $M(1; 1)$ è il punto di incontro delle diagonali di un quadrato $ABCD$ di lato $l = \sqrt{2}$, determina le coordinate dei vertici del quadrato, sapendo che le diagonali sono perpendicolari agli assi coordinati.
$[A(1; 0), B(2; 1), C(1; 2), D(0; 1)]$

68 Considera i punti $A(a+3; 1)$ e $B(3; b)$, con a e b numeri reali. Determina a e b in modo che la distanza $\overline{AB}$ sia uguale a 1 e che il punto medio M del segmento AB sia situato sulla retta $y = \frac{1}{2}$.
$[a = b = 0; A(3; 1), B(3; 0)]$

69 Del rombo $ABCD$ sono noti i vertici $A(1; 0)$, $B(5; 3)$ e il punto di incontro delle diagonali $M(1; 3)$. Determina le coordinate degli altri vertici C e D e calcola il perimetro del rombo. $[C(1; 6), D(-3; 3); 2p = 20]$

70 Dati i punti $A(3h+2; -3-2h)$ e $B(6+h; -7-3h)$, determina per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il punto medio M di AB ha l'ascissa doppia dell'ordinata. $[h = -2]$

71 Nel piano cartesiano xOy sono assegnati tre punti $P(-1; 2)$, $Q(2; 1)$ e $R(m+1; 1-m)$, con $m \in \mathbb{R}$:
a) stabilisci per quale valore di m il punto R è punto medio di PQ;
b) calcola quale valore deve assumere m affinché il triangolo PQR risulti isoscele sulla base PQ.
$\left[\text{a) } m = -\frac{1}{2}; \text{ b) impossibile}\right]$

72 Sia $ABCD$ un rombo con $A(-2; 0)$, $C(2; 0)$ e D appartenente all'asse y di ordinata 4. Siano inoltre noti i punti medi dei lati AB e BC, rispettivamente $M_1(-1; -2)$ e $M_2(1; -2)$.
Determina le coordinate del punto B e calcola l'area del rombo. Trova poi le coordinate dei punti medi M_3 e M_4 dei lati DC e AD e determina il perimetro del quadrilatero $M_1M_2M_3M_4$. Di che tipo di quadrilatero si tratta? Verifica inoltre che il perimetro del quadrilatero costruito è uguale alla somma delle diagonali del rombo. $[B(0; -4); 16; M_3(1; 2), M_4(-1; 2); 12]$

3. L'equazione di una retta passante per l'origine

Teoria a pag. 637

RIFLETTI SULLA TEORIA

L'equazione di una retta passante per l'origine

73 VERO O FALSO?

a) L'equazione $y = 0$ rappresenta l'asse delle ordinate. V F
b) L'equazione di una generica retta passante per l'origine è $y = mx$. V F
c) Tutti i punti della bisettrice del primo e del terzo quadrante hanno l'ascissa uguale all'ordinata. V F
d) Le bisettrici dei quadranti del piano cartesiano sono tra loro simmetriche rispetto all'asse x e all'asse y. V F
e) L'equazione $y = mx$ rappresenta tutte le rette passanti per l'origine. V F
f) I punti del tipo $(t; -t)$, $t \in \mathbb{R}$, appartengono alla bisettrice del secondo e quarto quadrante. V F
g) I punti del tipo $(t; |t|)$, $t \in \mathbb{R}$, appartengono alla bisettrice del secondo e quarto quadrante. V F

74 TEST Il punto $P\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ appartiene a una fra le seguenti rette. Quale?

A $y = \frac{-\sqrt{3}}{2}x$

B $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

C $y = -\frac{1}{2}x$

D $y = \sqrt{3}\,x$

E $y = -\sqrt{3}\,x$

75 TEST Uno fra i seguenti punti *non* appartiene alla retta di equazione $y = -\frac{5}{2}x$. Quale?

A $\left(-\sqrt{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

B $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

C $\left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{8}\right)$

D $\left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$

E $\left(-\frac{1}{5}; -1\right)$

Il coefficiente angolare

76 VERO O FALSO?

a) Il coefficiente angolare dell'asse x è nullo. V F
b) Se il coefficiente angolare di una retta r passante per l'origine è negativo, allora r appartiene al secondo e al quarto quadrante. V F
c) Il coefficiente angolare di una retta passante per l'origine esprime il rapporto fra l'ascissa e l'ordinata di un qualunque punto della retta. V F

77 TEST Il coefficiente angolare della retta di equazione $3x - 2y = 0$ è:

A -2.

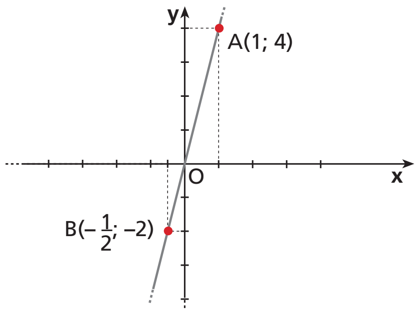
B $\frac{2}{3}$.

C $\frac{3}{2}$.

D $-\frac{3}{2}$.

E 3.

78 **TEST** Quale, fra le seguenti, è l'equazione della retta rappresentata nella figura?



A $y = -4x$

B $y = \frac{1}{4}x$

C $y = -\frac{1}{4}x$

D $y = \frac{1}{2}x$

E $y = 4x$

79 Possiamo scrivere il coefficiente angolare dell'asse y? Perché?

ESERCIZI

L'equazione di una retta passante per l'origine

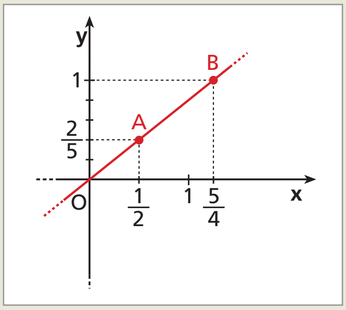
ESERCIZIO GUIDA

80 Determiniamo l'equazione della retta passante per l'origine e per il punto $A\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right)$; verifichiamo se i punti $B\left(\frac{5}{4}; 1\right)$ e $C(2; 5)$ appartengono a tale retta.

Poiché una retta passante per l'origine ha equazione del tipo $y = mx$, ci basta determinare il coefficiente angolare m.

Ricordiamo che la relazione $m = \frac{y}{x}$ lega le coordinate di tutti i punti della retta (esclusa l'origine). Sostituiamo in tale relazione le coordinate del punto $A\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right)$ e ricaviamo m:

$$m = \frac{y_A}{x_A} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{4}{5}.$$



L'equazione della retta è dunque:

$$y = \frac{4}{5}x.$$

Verifichiamo se B appartiene alla retta (e quindi se le sue coordinate ne soddisfano l'equazione). Sostituendo x_B e y_B nell'equazione $y = \frac{4}{5}x$ si ha:

$$1 = \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}.$$

Poiché i due membri dell'equazione sono uguali, B appartiene alla retta.

Verifichiamo se C appartiene alla retta:

$$5 \neq \frac{4}{5} \cdot 2.$$

I due membri dell'equazione non sono uguali e quindi C non appartiene alla retta.

Scrivi l'equazione della retta, passante per l'origine e per il punto A. Verifica se il punto B appartiene alla retta trovata.

81 $A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, $B(-1; -2)$. $[y = 2x; \text{sì}]$

82 $A(1; -1)$, $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. $[y = -x; \text{sì}]$

83 $A(-2; 0)$, $B(-2; 10)$. $[y = 0; \text{no}]$

84 $A(3; 2)$, $B(6; 4)$. $\left[y = \frac{2}{3}x; \text{sì}\right]$

I punti dei seguenti gruppi appartengono tutti a una stessa retta passante per l'origine, tranne uno. Scrivi l'equazione della retta e individua il punto che non le appartiene.

85 $A(-1; -5)$, $B(2; 10)$, $C(5; 10)$, $D(3; 15)$. $[y = 5x; C]$

86 $A(-3; 9)$, $B(-2; 6)$, $C(2; -6)$, $D(1; 3)$. $[y = -3x; D]$

87 $A(1; 4)$, $B(2; 8)$, $C(-3; 12)$, $D(-3; -12)$. $[y = 4x; C]$

88 $A\left(\frac{1}{3}; 3\right)$, $B\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$, $C(3; 1)$, $D(6; 2)$. $\left[y = \frac{1}{3}x; A\right]$

Scrivi l'equazione della retta passante per l'origine avente il coefficiente angolare indicato e disegna la retta.

89 $m = 2$; $m = -2$.

90 $m = 3$; $m = -3$.

91 $m = \frac{1}{3}$; $m = -\frac{1}{3}$.

Dall'equazione al grafico e viceversa

ESERCIZIO GUIDA

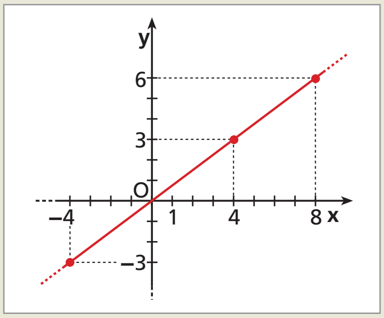
92 Disegniamo il grafico della retta d'equazione $y = \frac{3}{4}x$.

Per disegnare una retta bastano due punti. Poiché la retta passa per l'origine, è sufficiente determinare un secondo punto. Tuttavia, disegniamone alcuni in più.

Per $x = 4$, $y = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$.

La retta passa per il punto (4; 3). Osserviamo che conviene assegnare a x valori multipli di 4, per evitare di fare calcoli con le frazioni. Per esempio:

per $x = 8$, $y = 6$; per $x = -4$, $y = -3$.



Disegna le rette rappresentate dalle seguenti equazioni.

93 $y = \frac{1}{2}x$; $y = -\frac{2}{3}x$.

94 $y = \frac{3}{5}x$; $y = -\frac{5}{4}x$.

95 $y = \frac{6}{7}x$; $y = \frac{8}{3}x$.

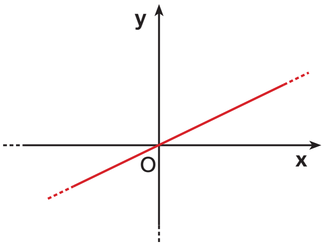
96 $y = \frac{3}{8}x$; $y = -\frac{3}{8}x$.

97 $y = -\frac{1}{3}x$; $y = 3x$.

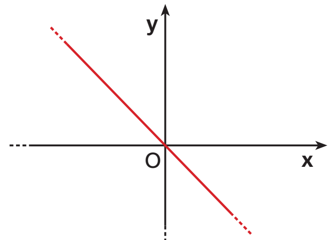
98 $y = \frac{11}{8}x$; $y = 11x$.

Scrivi per ogni grafico una delle seguenti condizioni, riferite al coefficiente angolare della retta disegnata: $m > 0$, $m = 0$, $m < 0$, m non definito.
Indica per ogni retta l'angolo che forma con la semiretta positiva dell'asse x nel semipiano delle ordinate positive.

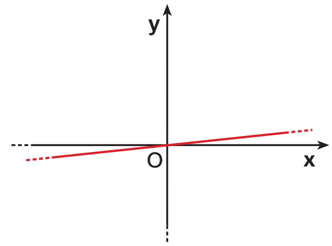
99



100

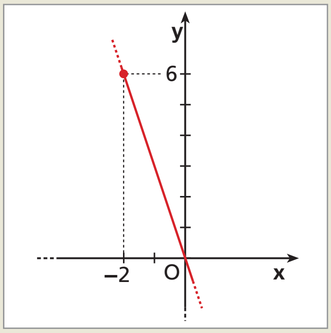


101



ESERCIZIO GUIDA

102 Dalle indicazioni date in figura ricaviamo l'equazione della retta disegnata.



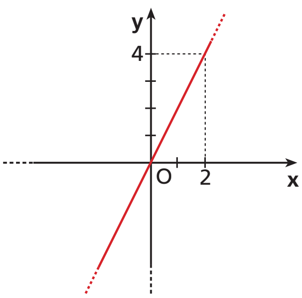
Il rapporto fra le coordinate del punto indicato è il seguente:

$$\frac{y}{x} = \frac{6}{-2} = -3.$$

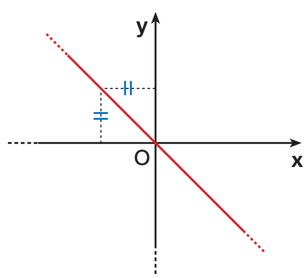
Poiché la retta passa per l'origine, l'equazione richiesta è: $y = -3x$.

Dalle indicazioni date in ogni figura ricava l'equazione della retta disegnata.

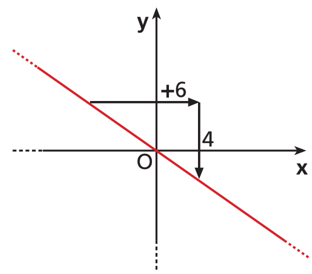
103



104



105



4. L'equazione generale della retta

Teoria a pag. 640

RIFLETTI SULLA TEORIA

La forma esplicita

106 Partendo dall'equazione $y = mx + q$, per quali valori di m e di q ottieni l'equazione dell'asse x? Esistono opportuni valori di m e di q per ottenere l'equazione dell'asse delle y? Perché?

107 Puoi scrivere l'equazione in forma esplicita di una qualsiasi retta del piano? Giustifica la risposta.

108 Due rette distinte possono intersecare l'asse delle ordinate nello stesso punto? Perché?

109 TEST Quale, fra le seguenti equazioni, è quella della retta rappresentata nella figura a lato?

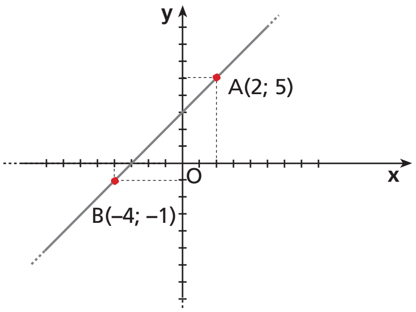
A $y = -x - 3$

B $y = -x + 3$

C $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

D $y = x + 3$

E $y = x - 3$



La forma implicita

110 VERO O FALSO?

a) Se $k = 0$, la retta di equazione $kx + y + 1 = 0$ è parallela all'asse x. V F

b) La forma implicita della seguente equazione $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{5}$ è $5x - 15y - 12 = 0$. V F

c) L'equazione $ax + c = 0$, con a e c numeri reali e $a \neq 0$, rappresenta una retta parallela all'asse y. V F

d) Se nell'equazione generale della retta $ax + by + c = 0$ si pongono $a = c = 0$ e $b \neq 0$, l'equazione non ha rappresentazione grafica. V F

111 TEST Soltanto una delle seguenti equazioni *non* è quella di una retta parallela agli assi cartesiani. Quale?

A $3x = 9$

B $2x - 5y = 5(1 - y)$

C $y - 3 = 0$

D $y - 2x + 3 = 2(1 - x)$

E $y - x + 1 = 0$

112 TEST Quale, fra le seguenti equazioni, rappresenta una retta parallela all'asse x?

A $3x + y + 1 = 0$

B $x = -2$

C $y + 1 = 0$

D $3x - y = 0$

E $y = -x$

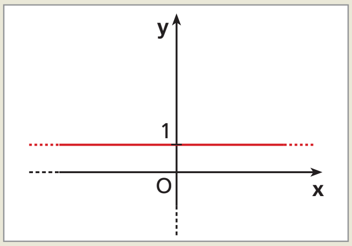
ESERCIZI

L'equazione di una retta parallela a un asse

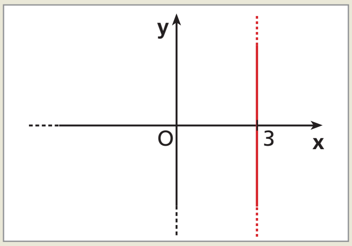
ESERCIZIO GUIDA

113 Scriviamo le equazioni delle rette disegnate nei due grafici:

a)



b)



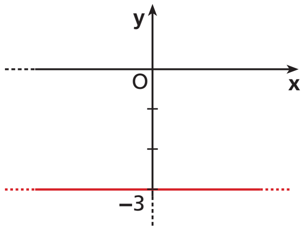
Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

a) Poiché la retta è parallela all'asse x, tutti i suoi punti hanno ascissa variabile e la medesima ordinata, uguale a 1. L'equazione della retta è:
$y = 1$.

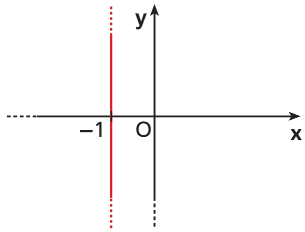
b) Poiché la retta è parallela all'asse y, tutti i suoi punti hanno la medesima ascissa, uguale a 3, e ordinata variabile. L'equazione della retta è:
$x = 3$.

Per ogni grafico scrivi l'equazione della retta corrispondente.

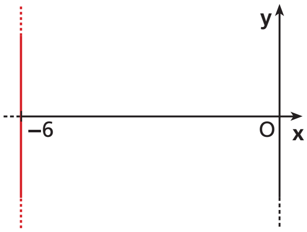
114



115



116



Disegna le rette che hanno le seguenti equazioni.

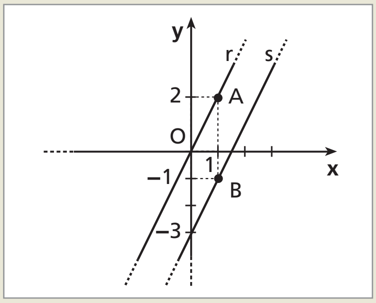
117 $x = -2$; $y = -2$; $x = 3$; $y = \frac{3}{2}$; $x = 1$.

118 $2x - 6 = 0$; $-3y = 0$; $3 - y = 0$; $5 - 10x = 0$; $2x = -8$.

La forma esplicita $y = mx + q$

ESERCIZIO GUIDA

119 Dalle informazioni fornite dal grafico ricaviamo l'equazione della retta r passante per l'origine e l'equazione della retta s parallela a r.



Ricaviamo l'equazione di r
Poiché la retta passa per l'origine, la sua equazione è del tipo $y = mx$.

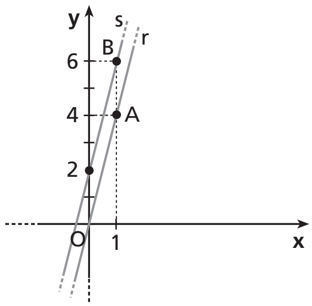
Per determinare m consideriamo il punto $A(1; 2)$ e calcoliamo $\frac{y_A}{x_A}$, ossia $m = \frac{2}{1}$.

L'equazione di r è: $y = 2x$.

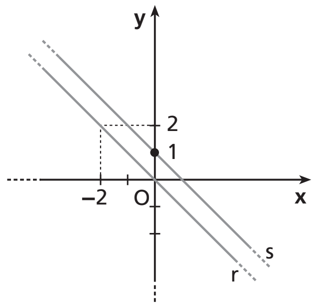
Ricaviamo l'equazione di s
Il punto $B(1; -1)$ di s ha la stessa ascissa di A e ordinata diminuita di 3 unità: $2 - 3 = -1$.
L'equazione di s si ottiene da quella di r aggiungendo al membro di destra il termine -3, che nel grafico è l'ordinata del punto di intersezione di s con l'asse y.
L'equazione di s è: $y = 2x - 3$.

Dalle informazioni fornite da ogni grafico ricava l'equazione della retta *r* e l'equazione della retta *s*.

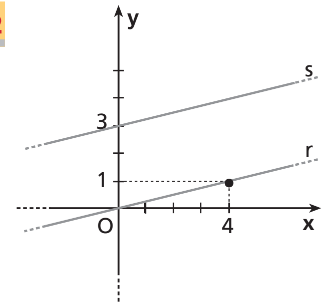
120



121



122



Dall'equazione al grafico

Nel sito: ▶ 15 esercizi in più su Insiemi di punti

ESERCIZIO GUIDA

123 Rappresentiamo in un grafico cartesiano le seguenti rette:

a) $y = -\dfrac{1}{5}x + 2$; b) $y = 5$.

a) Il termine noto 2 indica che la retta passa per il punto di coordinate $(0; 2)$. Infatti, se $x = 0$, sostituendo:

$$y = -\frac{1}{5} \cdot 0 + 2 = 2.$$

Determiniamo ora un secondo punto assegnando a x un valore a piacere, per esempio 10.

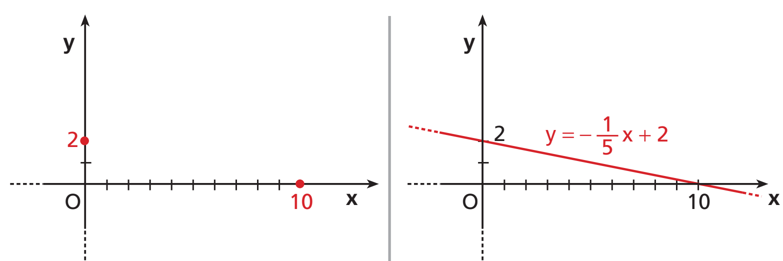
Per $x = 10$, $y = -\dfrac{1}{5} \cdot 10 + 2 = 0$.

La retta passa per i due punti $(0; 2)$ e $(10; 0)$.

Riportiamo le coordinate dei due punti in una tabella e tracciamo il grafico cartesiano.

x	y
0	2
10	0

a. Riportiamo in una tabella le coordinate dei due punti (0; 2) e (10; 0).

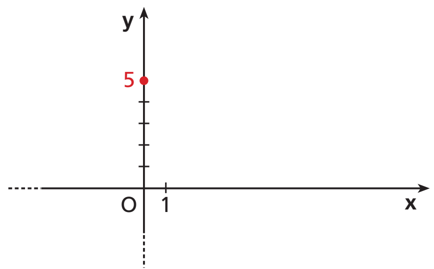


b. Disegniamo il sistema di riferimento cartesiano e i due punti (0; 2) e (10; 0).

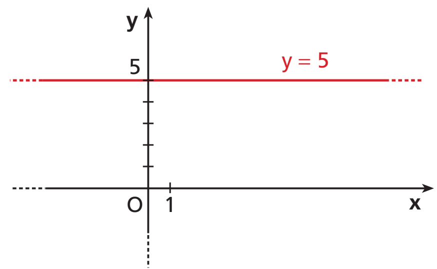
c. Tracciamo la retta passante per i due punti (0; 2) e (10; 0).

b) $y = 5$. La retta ha equazione del tipo $y = k$, quindi è parallela all'asse x e passa per il punto dell'asse y di ordinata 5.

Disegniamo il grafico.



a. Disegniamo sul sistema di riferimento cartesiano il punto (0; 5).



b. Tracciamo la retta passante per il punto (0; 5) e parallela all'asse *x*.

Disegna i grafici delle rette rappresentate dalle seguenti equazioni.

124 $y = 4x - 3$

125 $y = -3$

126 $x = -3$

127 $y = 2x + 1$

128 $y = -x + 3$

129 $y = -1$

130 $y = -3x$

131 $y = -3x - 2$

132 $y = -5x + 7$

133 $y = \frac{1}{2}x + 1$

134 $y = 2x + 6$

135 $x = -5$

136 $y = -\frac{4}{5}x - 2$

137 $x = \frac{5}{3}$

138 $y = x + \frac{1}{4}$

139 $y = 2$

140 $y = -4x + 2$

141 $y = -\frac{1}{2}x + 3$

Dalla forma esplicita alla forma implicita e viceversa

ESERCIZIO GUIDA

142 a) Data l'equazione della retta $y = \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}$, scriviamola in forma implicita.

b) Data la retta di equazione $3x - 4y - 1 = 0$, scriviamola in forma esplicita, specificando quali sono il coefficiente angolare e il termine noto.

a) La forma implicita dell'equazione di una retta è del tipo $ax + by + c = 0$, dove a, b, c sono coefficienti reali. Pertanto, l'equazione considerata è già in forma implicita se la scriviamo così:

$$\frac{3}{4}x - y - \frac{2}{3} = 0.$$

Tuttavia è preferibile avere coefficienti non frazionari. A questo proposito, «eliminiamo i denominatori», cioè moltiplichiamo l'equazione per il loro m.c.m., 12, e otteniamo:

$$9x - 12y - 8 = 0.$$

b) La forma esplicita dell'equazione di una retta è del tipo $y = mx + q$, quindi dobbiamo ricavare y dall'equazione

$$3x - 4y - 1 = 0:$$

$$-4y = -3x + 1 \quad \rightarrow \quad 4y = 3x - 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{3x - 1}{4} \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

Il coefficiente angolare è $\frac{3}{4}$ e il termine noto è $-\frac{1}{4}$.

Scrivi in forma implicita le seguenti equazioni.

143 $y = 4x + 8;$ $\qquad y = 1 - 2x;$ $\qquad y = -3x - 2.$

144 $y = x - \frac{1}{2};$ $\qquad y = -\frac{4}{5}x + 3;$ $\qquad y = \frac{1}{4} - 2x.$

Scrivi in forma esplicita le seguenti equazioni, specificando quali sono il coefficiente angolare e il termine noto.

145 $3x - y + 3 = 0;$ $\qquad 4x + 2y = 0;$ $\qquad 5x + 2y = 0.$

146 $-2x + 5y - 1 = 0;$ $\qquad -y + 2 = 0;$ $\qquad -x + 3y = 0.$

Disegna i grafici delle rette rappresentate dalle seguenti equazioni, indicando per ciascuna il coefficiente angolare e il termine noto.

147 $x - 2y = 0;$ $\qquad 6x = 0;$ $\qquad 2y - 2 = 0;$ $\qquad y = 2x.$

148 $x = -3y;$ $\qquad \frac{5}{3}y = 0;$ $\qquad 2y = -4x + 3;$ $\qquad 4x - y + 1 = 0.$

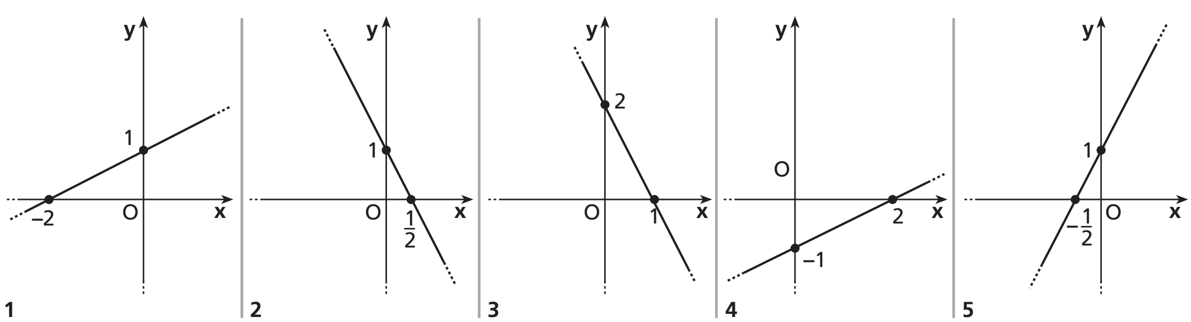
149 $x + y - 3 = 0;$ $\qquad 2x + 1 = 0;$ $\qquad y = -4;$ $\qquad x = -\frac{1}{2}y + 1.$

150 $4 + 3y = 0;$ $\qquad x + 2y = 0;$ $\qquad 2x + 5y - 3 = 0;$ $\qquad 4x - 6 = 0.$

151 **ASSOCIA** a ogni retta il suo coefficiente angolare.

1. $2y - 3x + 1 = 0$ $\qquad$ A. $-\frac{3}{2}$
2. $6x + 4y - 5 = 0$ $\qquad$ B. 0
3. $y = -\frac{2}{3}x + 1$ $\qquad$ C. $\frac{2}{3}$
4. $2x - 3y + 3 = 0$ $\qquad$ D. $\frac{3}{2}$
5. $2y - 3 = 0$ $\qquad$ E. $-\frac{2}{3}$

152 **ASSOCIA** a ogni retta la sua equazione.



A. $y = 2x + 1$ $\qquad$ B. $y = -2x + 2$ $\qquad$ C. $y = \frac{1}{2}x - 1$ $\qquad$ D. $y = -2x + 1$ $\qquad$ E. $y = \frac{1}{2}x + 1$

153 **COMPLETA** la seguente tabella, dove m indica il coefficiente angolare e q il termine noto della retta di equazione assegnata.

RETTA	m	q
$y = -5x + 2$		
$2x + y = 1$		
$x + 2y - 3 = 0$		
$3y = 4x + 1$		
$x = 6$		
$y - 4 = 0$		
$x = -6y$		

154 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $x = 0$ rappresenta l'asse delle ascisse. V F

b) La bisettrice del secondo e quarto quadrante ha equazione $y + x = 0$. V F

c) Il coefficiente angolare dell'asse y è nullo. V F

d) Se nell'equazione $y = mx + q$ è $m = 0$, allora si ottiene una retta parallela all'asse x. V F

L'appartenenza di un punto a una retta

ESERCIZIO GUIDA

155 È data la retta di equazione $3x - 6y + 2 = 0$.

a) Stabiliamo se i punti $A\left(-2; -\frac{2}{3}\right)$ e $B\left(1; \frac{1}{3}\right)$ vi appartengono.

b) Determiniamo le coordinate del punto C appartenente alla retta, sapendo che la sua ascissa è 3.

c) Determiniamo le coordinate del punto D appartenente alla retta, sapendo che la sua ordinata è -1.

a) Un punto appartiene a una retta se e solo se le sue coordinate $(x; y)$ soddisfano l'equazione della retta.
Sostituiamo le coordinate di A alle variabili x e y che compaiono nell'equazione:

$$3x - 6y + 2 = 0$$
$$3(-2) - 6\left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = 0$$
$$-6 + 4 + 2 = 0$$
$$0 = 0 \qquad \text{vero.}$$

Il punto A appartiene alla retta.
Sostituiamo ora le coordinate di B, ossia $\left(1; \frac{1}{3}\right)$:

$$3x - 6y + 2 = 0$$
$$3(1) - 6\left(\frac{1}{3}\right) + 2 = 0$$
$$3 - 2 + 2 = 0$$
$$3 = 0 \qquad \text{falso.}$$

Il punto B non appartiene alla retta.

b) Sostituiamo a x il valore 3 nell'equazione della retta:

$$3x - 6y + 2 = 0$$
$$3 \cdot 3 - 6y + 2 = 0$$
$$9 - 6y + 2 = 0$$
$$11 - 6y = 0$$
$$6y = 11$$
$$y = \frac{11}{6}.$$

Il punto C ha coordinate: $\left(3; \frac{11}{6}\right)$.

c) Sostituiamo a y il valore -1 nell'equazione della retta:

$$3x - 6y + 2 = 0$$
$$3x - 6 \cdot (-1) + 2 = 0$$
$$3x + 6 + 2 = 0$$
$$3x + 8 = 0$$
$$x = -\frac{8}{3}.$$

Il punto D ha coordinate: $\left(-\frac{8}{3}; -1\right)$.

Per ogni retta assegnata stabilisci se i punti A e B le appartengono.

156 $y = 2x - 1$, $A\left(\frac{1}{2}; -3\right)$, $B(1; -1)$. [no]

157 $y = \frac{1}{5}x + 2$, $A(-5; 3)$, $B(10; 4)$. [A no; B sì]

158 $2x - 6y + 3 = 0$, $A\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$, $B\left(-1; \frac{1}{6}\right)$. [sì]

159 $8x + 4y - 5 = 0$, $A(1; -3)$, $B\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right)$. [no]

160 Nella retta $y = 1 - x$ determina il punto A di ascissa -1 e il punto B di ordinata 7. [$A(-1; 2)$, $B(-6; 7)$]

161 Determina nella retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$ il punto A di ascissa -2 e il punto B di ordinata $\frac{2}{3}$. $\left[A\left(-2; \frac{5}{3}\right), B\left(0; \frac{2}{3}\right)\right]$

162 Determina per ciascuna delle rette di equazioni $x - 4y + 7 = 0$, $2x + 6y - 7 = 0$ e $2y - x - 4 = 0$ il relativo punto di ordinata $\frac{3}{2}$. $\left[\left(-1; \frac{3}{2}\right) \text{ per ciascuna delle rette}\right]$

163 Trova la distanza tra i punti A e B della retta di equazione $x - 2y + 3 = 0$, sapendo che $x_A = 7$ e $y_B = 1$. [$4\sqrt{5}$]

164 Il punto P della retta di equazione $y = 3x - 1$ ha ordinata 5. Calcola la sua distanza dall'origine 0. [$\sqrt{29}$]

165 Trova per quale valore di k la retta di equazione $y = 4x + k$ passa per il punto $P(2; 5)$. [-3]

166 Determina k in modo che la retta di equazione $2kx + y - k + 1 = 0$ passi per il punto $A(-2; -3)$. $\left[-\frac{2}{5}\right]$

5. Il coefficiente angolare

Teoria a pag. 644

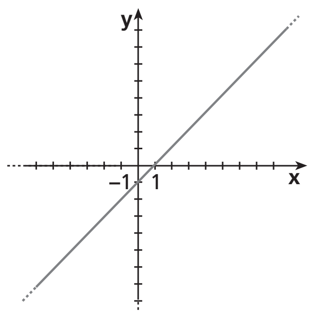
RIFLETTI SULLA TEORIA

167 VERO O FALSO?

a) Il coefficiente angolare di una retta parallela all'asse x è zero. V F
b) Il coefficiente angolare dipende dai punti della retta scelti per calcolarlo. V F
c) Il coefficiente angolare di una retta r del piano dipende dall'orientamento di r. V F
d) È possibile calcolare il coefficiente angolare di una qualsiasi retta del piano. V F
e) Due rette qualsiasi hanno sempre coefficiente angolare diverso. V F

168 TEST Quale affermazione sul coefficiente angolare della retta rappresentata in figura è vera?

A È positivo.
B È nullo.
C È negativo.
D Non esiste.
E Non si può determinare.



169 TEST Il coefficiente angolare della retta passante per $A(1;1)$ e $B(2;2)$ è:

A 0.
B 1.
C -1.
D 2.
E -2.

170 Considera l'equazione esplicita della retta

$$y = mx + q.$$

Qual è il significato geometrico del coefficiente m? Qual è il significato geometrico del termine noto q?

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

171 Determiniamo, quando è possibile, il coefficiente angolare delle rette AB, CD, EF, conoscendo le coordinate dei punti $A(-1;3)$, $B(2;4)$, $C(2;3)$, $D(5;3)$, $E(-2;4)$, $F(-2;-1)$.

Calcoliamo $m_{(AB)}$, applicando la formula $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$:

$$m_{(AB)} = \frac{4-3}{2-(-1)} = \frac{1}{3}.$$

Calcoliamo $m_{(CD)}$, sempre mediante la stessa formula:

$$m_{(CD)} = \frac{3-3}{5-2} = \frac{0}{3} = 0;$$

la retta è parallela all'asse x e la sua equazione è $y = 3$.

Calcoliamo $m_{(EF)}$ allo stesso modo:

$$m_{(EF)} = \frac{-1-4}{-2-(-2)} = \frac{-5}{0},$$ ovvero il coefficiente angolare non esiste;

la retta è parallela all'asse y e la sua equazione è $x = -2$.

Determina, quando è possibile, il coefficiente angolare della retta passante per ogni coppia di punti indicata.

172 $A(1;2)$, $B(4;5)$.

173 $A(2;4)$, $B(-4;4)$.

174 $C(5;-3)$, $D(7;-2)$.

175 $A\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right)$.

176 $E(0;2)$, $F(0;-2)$.

177 $A(4;0)$, $B(-2;4)$.

Nei seguenti esercizi sono dati: il coefficiente angolare di una retta, le coordinate di un suo punto, A, e l'ascissa, oppure l'ordinata, di un altro suo punto, B. Determina la coordinata mancante di B.

178 $m = 5$, $A(1;2)$, $B(2;?)$. $[y_B = 7]$

179 $m = 3$, $A(7;2)$, $B(?;8)$. $[x_B = 9]$

180 $m = 2$, $A(4;1)$, $B(7;?)$. $[y_B = 7]$

181 $m = -4$, $A(5;9)$, $B(6;?)$. $[y_B = 5]$

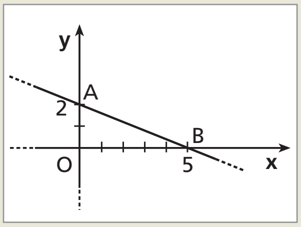
182 $m = -1$, $A(8;4)$, $B(11;?)$. $[y_B = 1]$

183 $m = 4$, $A(-7;-2)$, $B(?;6)$. $[x_B = -5]$

Dal grafico all'equazione

ESERCIZIO GUIDA

184 Ricaviamo l'equazione della retta utilizzando le informazioni fornite dal grafico.



La retta non è parallela all'asse y, quindi la sua equazione è del tipo $y = mx + q$.

Calcoliamo *q*
La retta interseca l'asse y nel punto $A\,(0; 2)$, quindi $q = 2$.

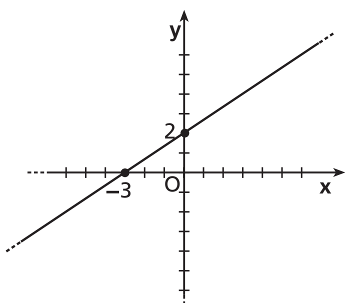
Calcoliamo *m*
Applichiamo la formula $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Abbiamo quindi $m = \dfrac{0-2}{5-0} = -\dfrac{2}{5}$.

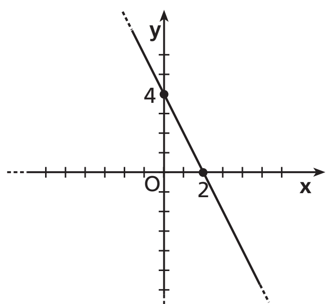
L'equazione della retta è $y = -\dfrac{2}{5}x + 2$.

In ogni esercizio scrivi l'equazione della retta utilizzando le informazioni fornite dal grafico.

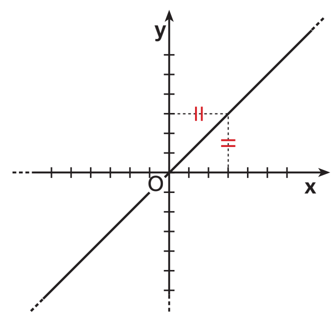
185



a

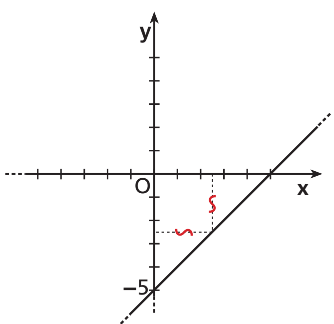


b

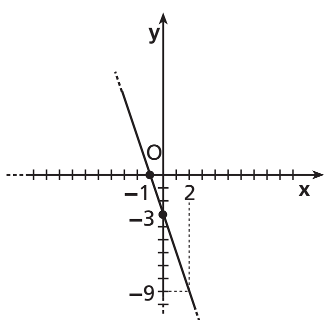


c

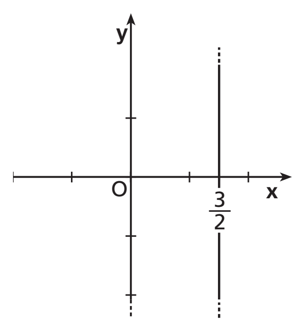
186



a

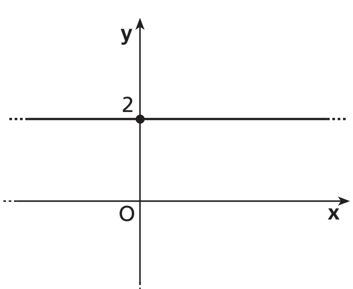


b

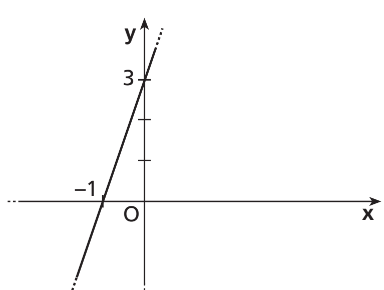


c

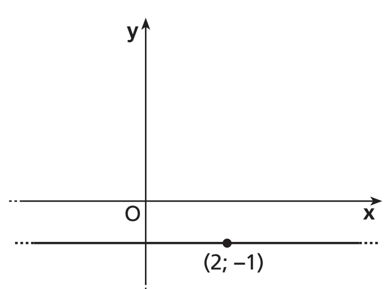
187



a

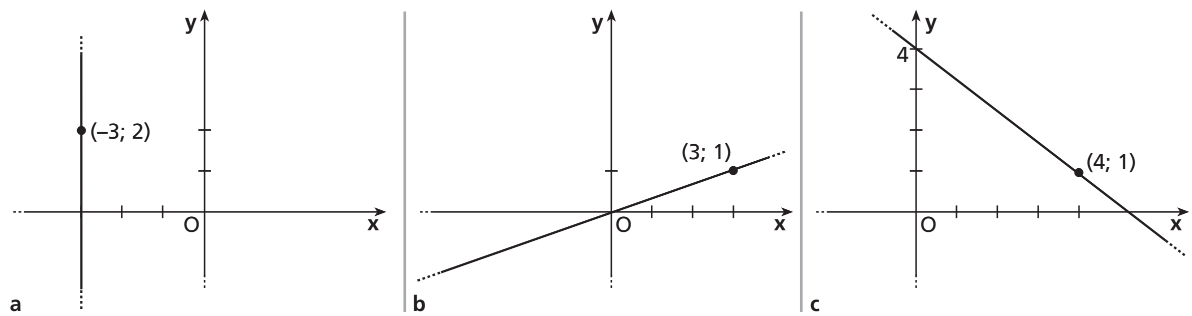


b



c

188



6. Le rette parallele e le rette perpendicolari

Teoria a pag. 646

RIFLETTI SULLA TEORIA

189 **VERO O FALSO?**

a) Le rette di equazione $x = 3$ e $y = -2$ sono fra loro perpendicolari. V F

b) Le rette di equazione $2x - y + 2 = 0$ e $-x + 2y - 2 = 0$ sono parallele. V F

c) I coefficienti angolari di due rette perpendicolari sono uno il reciproco dell'altro. V F

d) Il coefficiente angolare di tutte le rette perpendicolari alla retta $3x - 6y + 1 = 0$ è 2. V F

e) Due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare. V F

f) L'asse del segmento di estremi $A(-7; 3)$ e $B(1; 3)$ è una retta parallela all'asse y. V F

g) Le rette di equazione $y = -\frac{1}{3}x + 2$ e $y = (2k - 1)x - 1 = 0$ sono parallele per $k = 0$. V F

190 **TEST** Considera la retta r di equazione $3x - 2y + 5 = 0$. Quale fra le seguenti rette è parallela a r?

A $y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

B $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x$

C $2x - 3y + 4 = 0$

D $3x + 2y + 1 = 0$

E $-3x + 2y + 6 = 0$

191 **TEST** Le seguenti rette sono tutte perpendicolari alla retta di equazione $2x - 4y + 1 = 0$, *tranne* una. Quale?

A $-\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}y = 0$

B $4x + 2y - 5 = 0$

C $4x + 8y - 1 = 0$

D $-6x - 3y + 4 = 0$

E $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - 3 = 0$

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 12 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

192 Date le rette di equazione $y = 3x - 2$, $\quad -x + y - 4 = 0$, $\quad y = \frac{2}{3}x$, $\quad x - y - 5 = 0$, $\quad 2x + 6y - 1 = 0$, stabiliamo quali sono parallele e quali perpendicolari.

Poiché due rette sono parallele quando hanno lo stesso coefficiente angolare e perpendicolari quando $m \cdot m' = -1 \left(\text{ovvero } m = -\frac{1}{m'}\right)$, occorre calcolare i coefficienti angolari delle rette date.

r: $y = 3x - 2$. Il coefficiente angolare è $m = 3$.

s: $-x + y - 4 = 0$. Il coefficiente angolare è $m = -\frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1$.

t: $y = \frac{2}{3}x$. Il coefficiente angolare è $m = \frac{2}{3}$.

u: $x - y - 5 = 0$. Il coefficiente angolare è $m = 1$.

v: $2x + 6y - 1 = 0$. Il coefficiente angolare è $m = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$.

Conclusione:

- le rette r e v sono perpendicolari;
- le rette s e u sono parallele;
- la retta t non è perpendicolare o parallela a nessuna delle rette date.

Considera le rette di ciascuno dei seguenti gruppi, determina il loro coefficiente angolare e infine stabilisci quali sono parallele e quali perpendicolari.

193 $y = 2x - 3$, $y = -3x + 2$, $y = -\frac{1}{2}x + 1$, $y = 2x + 6$.

194 $y = x + \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}x$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$.

195 $3x - 2y + 1 = 0$, $-6x + 4y + 7 = 0$, $6x - 4y - 3 = 0$.

196 $5x + 8y - 3 = 0$, $8x - 5y + 1 = 0$, $20x + 32y + 15 = 0$.

197 $y = -3x + 1$, $6x + 2y - 5 = 0$, $9y - 3x = 0$, $y = -3$.

198 $2x - y - 6 = 0$, $2y = 4x + 1$, $y = -\frac{1}{2}x - 6$, $2x - 6 = 0$.

199 Scrivi le equazioni di tre rette parallele all'asse x e di tre rette parallele all'asse y.

200 Scrivi le equazioni di due rette parallele alla retta di equazione $2y + 5 = 0$ e di due parallele alla retta di equazione $4x - 3 = 0$.

201 Scrivi le equazioni di due rette perpendicolari alla retta di equazione $y + 2 = 0$ e di due perpendicolari alla retta di equazione $x - 1 = 0$.

202 Scrivi le equazioni di due rette parallele alle seguenti rette:

a) $y = \frac{1}{3}x + 2$; b) $2x - y = 0$.

203 Scrivi le equazioni di due rette perpendicolari alle seguenti rette:

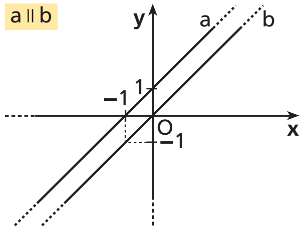
a) $y = \frac{3}{2}x - 5$; b) $4x + 3y - 1 = 0$.

204 Per ogni retta scrivi l'equazione di una retta a essa parallela e l'equazione di una retta a essa perpendicolare:

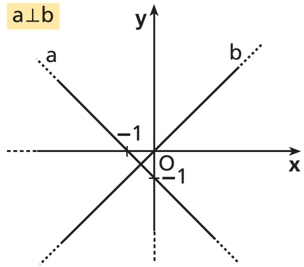
a) $y = x$; b) $y = \frac{1}{3}x - 3$; c) $y = -2x + 1$; d) $4x - 2y + 1 = 0$.

Scrivi le equazioni delle rette rappresentate in figura.

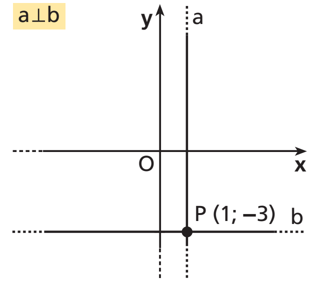
205 $a \parallel b$



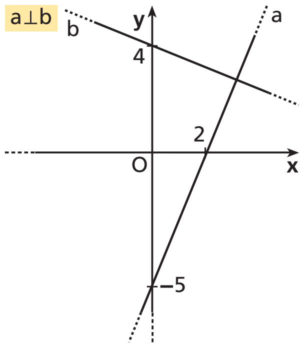
207 $a \perp b$



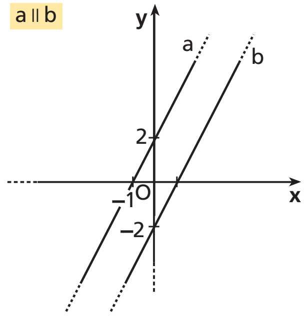
209 $a \perp b$



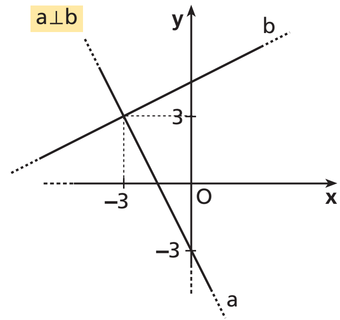
206 $a \perp b$



208 $a \parallel b$



210 $a \perp b$



ESERCIZIO GUIDA

211 **1.** Determiniamo per quale valore di a le due rette di equazioni $2x - 3y + 1 = 0$ e $(a - 1)x + y = 2$ risultano parallele.

2. Determiniamo per quali valori di k la retta di equazione $(k - 2)x + 2ky + 3 = 0$ risulta rispettivamente:

a) parallela alla bisettrice del I e III quadrante;
b) parallela all'asse x;
c) perpendicolare alla retta di equazione $y = -\dfrac{1}{4}x + 2$;
d) parallela alla retta di equazione $x = -5$.

---

1. Scriviamo in forma esplicita entrambe le equazioni:

$$2x - 3y + 1 = 0 \qquad (a - 1)x + y = 2$$
$$3y = 2x + 1 \qquad y = -(a - 1)x + 2.$$
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Poiché due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare, dobbiamo imporre:

$$\frac{2}{3} = -(a - 1).$$

Ricaviamo il valore di a:

$$\frac{2}{3} = -a + 1 \quad \rightarrow \quad a = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

2. Scriviamo in forma esplicita l'equazione della retta:

$$y = -\frac{k-2}{2k}x - \frac{3}{2k} \qquad \text{con } k \neq 0.$$

a) La bisettrice del I e III quadrante, di equazione $y = x$, ha $m = 1$. Imponiamo l'uguaglianza dei coefficienti angolari:

$$-\frac{(k-2)}{2k} = 1.$$

Ricaviamo il valore di k:

$$-k + 2 = 2k, \qquad \text{con } k \neq 0$$
$$-3k = -2 \quad \rightarrow \quad k = \frac{2}{3}.$$

b) Il coefficiente angolare deve essere nullo:

$$-\frac{(k-2)}{2k} = 0, \qquad \text{con } k \neq 0 \quad \rightarrow \quad k = 2.$$

c) Affinché le due rette siano perpendicolari dobbiamo imporre:

$$-\frac{(k-2)}{2k} = 4, \qquad \text{con } k \neq 0.$$

Ricaviamo il valore di k:

$-k + 2 = 8k$, con $k \neq 0$

$-9k = -2 \rightarrow k = \frac{2}{9}$.

d) Poiché si richiede una retta parallela all'asse y, che ha equazione in cui manca il termine con y, imponiamo:

$2k = 0 \rightarrow k = 0$.

212 Determina per quale valore di a le due rette di equazioni

$$2y + 4x - 3 = 0 \quad \text{e} \quad (3 + a)x + ay + 1 = 0$$

risultano perpendicolari. [$a = -2$]

213 Stabilisci se la retta che passa per i punti $A(2; -7)$ e $B(-1; 5)$ è parallela alla retta di equazione $y = -4x$. [sì]

214 Determina per quali valori di k la retta di equazione $kx + (k + 1)y + 2 = 0$ risulta rispettivamente:

a) parallela all'asse x;
b) parallela all'asse y;
c) parallela alla retta di equazione $x - 2y = 0$;
d) perpendicolare alla retta di equazione $4x - 2y + 1 = 0$.

$\left[\text{a) } k = 0; \text{ b) } k = -1; \text{ c) } k = -\frac{1}{3}; \text{ d) } k = 1\right]$

215 Determina per quali valori di a la retta di equazione $(a + 1)x + (2a - 3)y + 2a = 0$ risulta rispettivamente:

a) parallela alla retta $3x - 1 = 0$;
b) parallela alla retta $2y + 5 = 0$;
c) perpendicolare alla retta $9x - 3y + 1 = 0$;
d) parallela alla retta $y = -x + 2$;
e) parallela alla retta $y = 2$;
f) perpendicolare alla retta $y = -1$;
g) perpendicolare alla retta $y = -\frac{1}{5}x + 2$.

$\left[\text{a) } a = \frac{3}{2}; \text{ b) } a = -1; \text{ c) } a = -6; \text{ d) } a = 4; \text{ e) } a = -1; \text{ f) } a = \frac{3}{2}; \text{ g) } a = \frac{14}{11}\right]$

216 Dati i punti $A(2; 3k)$, $B(6; 1)$, $C(8; 2)$, determina per quale valore di k il segmento AB è perpendicolare al segmento BC. Per tale valore di k, trova l'area del triangolo ABC. [3; 10]

RIEPILOGO LE RETTE NEL PIANO CARTESIANO

TEST

217 La retta che passa per l'origine $O(0; 0)$ e per i punti $P(2; 3)$ e $Q(-4; -6)$ ha equazione:

A $y = -\frac{3}{2}x$.
B $y = \frac{3}{2}x$.
C $y = \frac{2}{3}x$.
D $y = -\frac{2}{3}x$.
E $y = 2x$.

218 Per quali valori di k la retta passante per i punti $A(0; 1)$ e $B(2; k - 1)$ è parallela all'asse x?

A Per nessun valore di k.
B Per $k \neq 2$.
C Per $k = -\frac{1}{2}$.
D Per $k = 2$.
E Per $k = -2$.

219 Il coefficiente angolare di una retta vale $-\frac{1}{3}$. Fra le seguenti coppie di punti, quale appartiene a tale retta?

A $A(10; -1)$ e $B(-1; -2)$
B $P(5; 4)$ e $Q(2; 5)$
C $R(4; 5)$ e $S(5; 2)$
D $M(0; 1)$ e $N(2; 7)$
E $C(5; 4)$ e $D(-2; -5)$

220 La retta di equazione $3kx - 2ky + k - 1 = 0$ è perpendicolare alla retta di equazione

$$2x - 3y + 1 = 0$$

per:

A $k = 1$.
B $k = \frac{3}{2}$.
C $k = 0$.
D $\forall k \in \mathbb{R}^+$.
E nessun valore di k.

221 VERO O FALSO? La retta di equazione $2x - 4y + 1 = 0$:

a) passa per $A\left(2; -\frac{5}{4}\right)$. V F

b) è parallela alla retta di equazione $y = \frac{1}{2}x + 2$. V F

c) ha ordinata all'origine uguale a 1. V F

d) è perpendicolare alla retta di equazione $2x - y + 2 = 0$. V F

222 Trova per quale valore di a le due rette di equazioni $ax + 2y - 3 = 0$ e $(2a + 1)x + y - 1 = 0$ sono parallele. $\left[a = -\frac{2}{3}\right]$

223 Data la retta di equazione $x + y - k + 1 = 0$, trova per quale valore di k essa forma con gli assi cartesiani un triangolo rettangolo ABO con i cateti uguali a 5. $[k = 6 \vee k = -4]$

224 Determina per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ l'equazione $(3 - 2a)\,xy + 2x + (3a - 1)\,y + 1 = 0$ rappresenta una retta. $\left[a = \frac{3}{2}\right]$

225 Per quali valori di a e di b, con a e b numeri reali, il coefficiente angolare della retta passante per $A(a; 2a)$ e $B(b; 2b)$ è uguale a 2? $[a \neq b]$

226 Per quale valore di $k \neq -\frac{1}{2}$ la retta passante per $A(k; 0)$ e $B(3k + 1; 1)$ è inclinata di 135° rispetto alla semiretta positiva delle x? $[k = -1]$

BRAVI SI DIVENTA ► E28

227 Trova per quale valore di k la retta r passante per $A(k - 3; 6)$ e $B(3; -2k + 2)$ è perpendicolare alla retta s passante per l'origine e per $C(-2; -1)$ e scrivi l'equazione della retta r.

228 Dopo aver scritto l'equazione della retta r passante per l'origine e per il punto $A(2; 4)$, stabilisci se il punto $B(-3; 6)$ appartiene a r. $[y = 2x$; no$]$

229 Determina il coefficiente angolare della retta passante per i punti $A(3; 0)$ e $B(-2; 5)$ e stabilisci se tale retta risulta parallela alla retta di equazione $y = -x + 5$. $[m = -1$; sì$]$

230 Dopo aver determinato il coefficiente angolare della retta passante per i punti $A(0; -2)$ e $B(2; 4)$, stabilisci se questa è perpendicolare alla retta di equazione $3x - y + 2 = 0$. $[m = 3$; no$]$

231 La retta r ha coefficiente angolare $m = -2$ e passa per il punto $A(4; 1)$. Calcola l'ordinata del punto appartenente a r avente ascissa $x = -3$. [15]

232 La retta r è parallela alla retta di equazione $y = 5x - 1$ e passa per il punto $A(-3; 0)$. Calcola l'ascissa del punto di r di ordinata 6. $\left[-\frac{9}{5}\right]$

233 Determina l'ordinata del punto di ascissa $x = -1$ appartenente alla retta passante per $A(2; 6)$ e perpendicolare alla retta di equazione $x + 3y + 2 = 0$. $[-3]$

234 Determina per quale valore di a la retta di equazione $(a+2)x+(3a+2)y+1=0$ risulta rispettivamente:

a) parallela alla retta di equazione $x=5$;

b) parallela alla retta di equazione $y=3$;

c) perpendicolare alla retta di equazione $y=x$;

d) perpendicolare alla retta di equazione $7x-y-1=0$;

e) parallela alla retta di equazione $3x+5y-2=0$.

$\left[\text{a) } -\frac{2}{3}; \text{ b) } -2; \text{ c) } 0; \text{ d) } -3; \text{ e) } 1\right]$

235 Considera i seguenti enunciati aperti:

a) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = x + 2 \wedge x \geq 0\}$

b) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = -2x - 7 \wedge x > -5\}$

c) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = x - 4 \wedge y > 1\}$

d) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = 5 \wedge x \leq 2\}$

e) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid x = 1 \wedge y < 5\}$

f) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = -2x - 3 \wedge y > 3\}$

Rappresenta nel piano cartesiano gli insiemi di verità degli enunciati e sottolinea la differenza fra quelli con la disuguaglianza forte e quelli con la disuguaglianza debole.

236 È dato il trapezio di vertici $A(1; -3)$, $B(1; 1)$, $C(5; 4)$, $D\left(\frac{31}{3}; 4\right)$. Dimostra per via geometrica e poi per via analitica che la congiungente i punti medi dei lati obliqui è parallela alle basi e congruente alla loro semisomma.

237 Rappresenta nel piano cartesiano la funzione $f\colon y = \begin{cases} -x+4 & \text{se } x > 2 \\ 2x-2 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$

Determina l'equazione della retta perpendicolare al grafico di f, passante per il suo punto di ascissa -2.

$\left[y = -\frac{1}{2}x - 7\right]$

238 Disegna i grafici delle funzioni $f\colon y = 2x + 1$ e $g\colon y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$. Determina le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$ e verifica che i loro grafici sono paralleli tra loro e perpendicolari al grafico di f.

$\left[g \circ f\colon y = -\frac{1}{2}x - 1, f \circ g\colon y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right]$

7. I fasci di rette

Teoria a pag. 649

RIFLETTI SULLA TEORIA

Il fascio improprio

239 In un fascio di rette improprio tutte le rette del fascio hanno la stessa pendenza?

240 COMPLETA La retta base del fascio improprio di equazione $y - 2x - q = 0$ ha equazione ......

241 COMPLETA Il fascio improprio individuato dalla retta di equazione $3x - y - 5 = 0$ ha equazione ......

242 TEST Le seguenti equazioni rappresentano tutte un fascio improprio, *tranne* una. Quale?

A $x = t$
B $y = r$
C $x - 5y + k = 0$
D $y - mx - 3 - 2m = 0$
E $ax - ay - 1 = 0, a \neq 0$

243 Stabilisci se la retta di equazione $y = -\frac{2}{3}x + 1$ appartiene al fascio di rette improprio di equazione $2x + 3y + q = 0$.

Il fascio proprio

244 VERO O FALSO?

a) L'equazione $x = k$ rappresenta un fascio proprio di rette. V F
b) Le rette di un fascio proprio differiscono solo per l'ordinata all'origine. V F
c) Il fascio di equazione $(k + 2)x + y - 1 = 0$ non contiene alcuna retta parallela all'asse x. V F
d) Il fascio di rette di centro $P(x_0; y_0)$ ha equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$. V F

245 TEST Il centro del fascio proprio di rette $y - 0 = m(x - 3)$ è:

A $(0; 3)$.
B $(3; 0)$.
C $(-3; 0)$.
D $(0; -3)$.
E $(3; -2)$.

246 TEST L'equazione della retta r passante per il punto $A(-1; -2)$ e parallela alla retta di equazione $2y = 3x + 5$ è:

A $y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$.
B $y + 2 = 3(x + 1)$.
C $y + 2 = \frac{3}{2}(x + 1)$.
D $y + 2 = \frac{2}{3}(x + 1)$.
E $y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 1)$.

247 Per descrivere il fascio di tutte le rette passanti per l'origine, puoi usare l'equazione $ax + by = 0$, dove a e b sono numeri reali. Perché?

ESERCIZI

Il fascio improprio

Nel sito: ▶ 10 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

248 Scriviamo l'equazione del fascio improprio di rette contenente la retta di equazione $3x - y + 2 = 0$ e disegniamo tre rette qualsiasi del fascio.

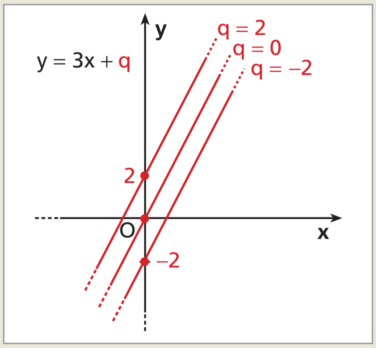
Scriviamo l'equazione della retta data in forma esplicita, per ricavare il suo coefficiente angolare m:

$$y = 3x + 2 \Rightarrow m = 3.$$

Il fascio di rette ha equazione $y = 3x + q$.

Disegniamo le rette corrispondenti a tre valori di q, per esempio $0, 2, -2$. Le rette corrispondenti hanno equazioni:

$$y = 3x;$$
$$y = 3x + 2;$$
$$y = 3x - 2.$$



249 Disegna cinque rette del fascio di equazione $y = 2x + 1 - k$.

250 Disegna cinque rette del fascio di equazione $y = -3x + k - 2$.

251 Scrivi l'equazione del fascio improprio contenente la retta di equazione $6x + 2y - 12 = 0$ e disegna tre rette del fascio. $[y = -3x + q]$

252 Ripeti l'esercizio precedente considerando la retta di equazione $8x - 4y + 10 = 0$. $[y = 2x + q]$

253 Scrivi l'equazione del fascio di rette parallele alla retta di equazione $y = -4x + 5$ e l'equazione del fascio di rette perpendicolari alle precedenti. Rappresenta alcune rette di ciascun fascio. $\left[y = -4x + q; y = \frac{1}{4}x + t\right]$

254 Ripeti l'esercizio precedente considerando la retta di equazione $2x + 4y + 1 = 0$. $\left[y = -\frac{1}{2}x + q; y = 2x + t\right]$

Il fascio proprio

Nel sito: ▶ 10 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

255 Scriviamo l'equazione del fascio proprio di rette passante per il punto $P\left(-5; \frac{1}{3}\right)$ e disegniamo le rette del fascio aventi rispettivamente coefficiente angolare $m = 0$, $m = 1$ e $m = -3$.

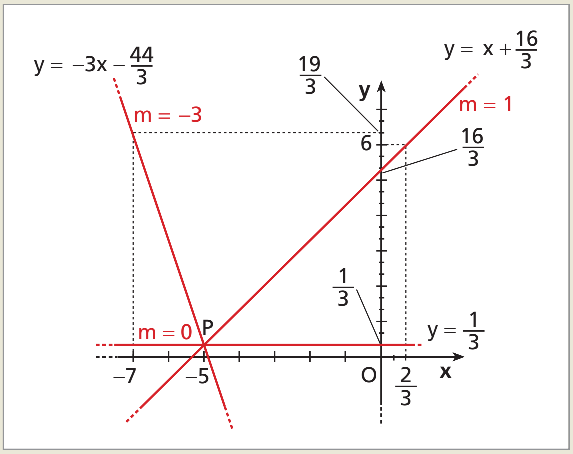
Per trovare l'equazione del fascio utilizziamo l'equazione $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Nel nostro caso $x_1 = -5$ e $y_1 = \frac{1}{3}$, perciò:

$$y - \frac{1}{3} = m(x - (-5))$$

$$y = m(x + 5) + \frac{1}{3},$$

a cui dobbiamo aggiungere la retta per P parallela all'asse y di equazione $x = -5$.



Per disegnare le rette del fascio aventi coefficiente angolare 0, 1 e -3, determiniamo prima le loro equazioni:

- se $m = 0$, $y = \frac{1}{3}$;
- se $m = 1$, $y = x + 5 + \frac{1}{3}$,
  ossia $y = x + \frac{16}{3}$;
- se $m = -3$, $y = -3(x + 5) + \frac{1}{3}$,
  ossia $y = -3x - 15 + \frac{1}{3}$,
  $y = -3x - \frac{44}{3}$.

Poiché le tre rette passano per P, per disegnarle basta determinare un solo altro punto su ciascuna.

Scrivi l'equazione del fascio di rette passante per ciascun punto indicato e disegna le rette aventi coefficiente angolare $m = 0$, $m = 5$, $m = -3$. (Per brevità, nelle soluzioni non indichiamo l'equazione della retta parallela all'asse y.)

256 $A(-1; 3)$ $[y = mx + m + 3]$

257 $O(0; 0)$ $[y = mx]$

258 $B(5; 8)$ $[y = mx - 5m + 8]$

259 $C(-2; -3)$ $[y = mx + 2m - 3]$

260 $D(6; -4)$ $[y = mx - 6m - 4]$

261 $E\left(\frac{1}{2}; -2\right)$ $\left[y = mx - \frac{1}{2}m - 2\right]$

Il centro di un fascio

ESERCIZIO GUIDA

262 Dato il fascio proprio di rette di equazione $y - mx + 5m - 1 = 0$, determiniamo le coordinate del centro del fascio.

Dobbiamo trasformare l'equazione del fascio in un'equazione equivalente del tipo $y - y_1 = m(x - x_1)$.
Isoliamo nel secondo membro i termini contenenti m: $y - 1 = mx - 5m$.
Raccogliamo m: $y - 1 = m(x - 5)$.
Il centro del fascio ha coordinate $(5; 1)$.

Determina per ogni fascio proprio di rette il relativo centro.

263 $mx - y - m - 3 = 0$

264 $6mx - 6y - 10m + 3 = 0$

265 $2y - 3mx + 5m - 1 = 0$

266 $my + x - 1 = 0$

267 $y - 3mx - 1 = 0$

268 $4kx + 1 - 4y - k = 0$

Tra le seguenti equazioni indica quali rappresentano un fascio di rette proprio e quali un fascio improprio. Per ogni fascio proprio determina il relativo centro.

269 $y = 2mx + m$; $ky + 2kx - 1 = 0$.

270 $my + (m + 1)x - 1 = 0$; $2my - mx - m = 1$.

271 $y - kx = 0$; $y + 2x - 2 = k$.

272 $y = -mx + m$; $2x + 3y - k = 0$.

273 $y = 2x + 4m$; $kx + 2y - k = 0$.

274 $y = -x + 2m$; $(k + 1)y - 2x + k = 0$.

275 $y = -2mx + m + 1$; $2x - 5y + 2k = 0$.

276 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $y = k$ rappresenta un fascio improprio di rette. V F

b) L'equazione $mx + my - 1 = 0$ rappresenta un fascio proprio di rette. V F

c) Nel fascio di rette di equazione $y = (k + 1)x + 3$ la retta parallela all'asse x si ottiene per $k = 1$. V F

d) L'equazione $y + 3 = m(x - 6)$ rappresenta tutte le rette passanti per il punto $P(6; -3)$. V F

Equazione della retta, passante per un punto, che soddisfa una condizione

Scrivi l'equazione della retta che passa per il punto indicato e ha coefficiente angolare *m* che soddisfa le condizioni date.

277 $A(-1; -3)$ e $m = -2$.

278 $B\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ e $m = -4$.

279 $C(1; 6)$ e $m = -\frac{1}{3}$.

280 $D(-2; 3)$ e con lo stesso coefficiente angolare della retta di equazione $4x - 2y - 3 = 0$.

281 $E\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ e con il coefficiente angolare della retta che passa per i punti $(0; 2)$ e $(3; 5)$.

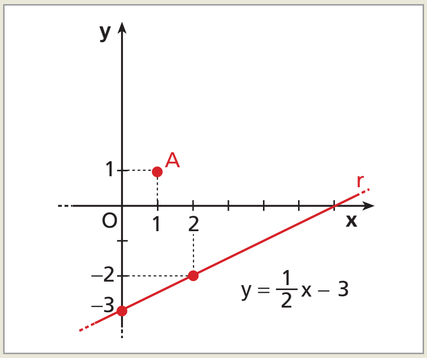
ESERCIZIO GUIDA

282 Determiniamo l'equazione della parallela e della perpendicolare alla retta r di equazione $2y - x + 6 = 0$, entrambe passanti per $A(1; 1)$.

Scriviamo in forma esplicita l'equazione di r e ricaviamo il coefficiente angolare m:

$$2y = x - 6 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x - 3,$$

dunque $m = \frac{1}{2}$.



Scriviamo l'equazione del fascio di rette di centro A:

$$y - 1 = m(x - 1).$$

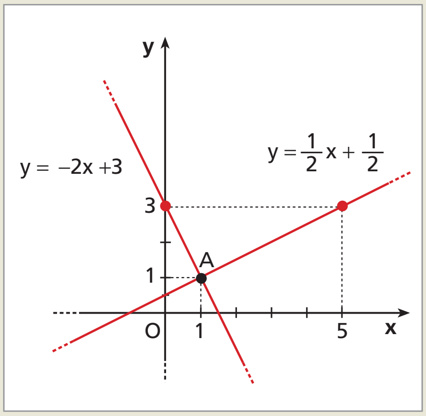
Fra tutte le rette del fascio, cerchiamo la **parallela** a r, cioè quella con il coefficiente angolare uguale a quello di r;

imponiamo, cioè, che sia $m = \frac{1}{2}$:

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1).$$

Scriviamo l'equazione in forma esplicita:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$



Cerchiamo ora, fra le rette del fascio di centro A, la **perpendicolare** a r, cioè la retta che ha come coefficiente angolare l'antireciproco di quello della retta r; imponiamo cioè $m = -2$:

$$y - 1 = -2(x - 1).$$

Scriviamo l'equazione in forma esplicita:

$$y = -2x + 3.$$

Per ciascuna retta, scrivi l'equazione della parallela e della perpendicolare a essa, passanti per il punto *A*.

283 $y = \frac{1}{3}x$, $A(1; 1)$. $\left[y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}; y = -3x + 4\right]$

284 $y = \frac{7}{6}x$, $A(-3; -3)$. $\left[y = \frac{7}{6}x + \frac{1}{2}; 6x + 7y + 39 = 0\right]$

285 $y = -\frac{8}{9}x$, $A(-1; 5)$. $\left[y = -\frac{8}{9}x + \frac{37}{9}; 9x - 8y + 49 = 0\right]$

286 $y + 3x + 2 = 0$, $A(0; -2)$. $\left[y = -3x - 2; y = \frac{1}{3}x - 2\right]$

287 $6x - 3y - 2 = 0$, $A(-5; 2)$. $[y = 2x + 12; x + 2y + 1 = 0]$

288 $3x - y - 4 = 0$, $A(0; -4)$. $\left[y = 3x - 4; y = -\frac{1}{3}x - 4\right]$

289 $x + y = 0$, $A(1; -1)$. $[y = -x; y = x - 2]$

290 Scrivi l'equazione della retta che passa per l'origine degli assi ed è parallela alla retta di equazione:

$2x - 3y + 2 = 0$. $\left[y = \frac{2}{3}x\right]$

291 Determina il coefficiente angolare della retta *r* che passa per i punti $P(1; 4)$ e $Q(-2; 5)$. Scrivi poi l'equazione della retta passante per il punto $A(3; 2)$ e perpendicolare a *r*. $\left[-\frac{1}{3}; y = 3x - 7\right]$

292 Tra le rette parallele alla retta di equazione $2x - 8y + 1 = 0$, trova quella che passa per il punto $P(-4; 2)$. $\left[y = \frac{1}{4}x + 3\right]$

293 Dati i punti $A(-3; 2)$ e $B(6; -1)$, determina l'equazione dell'asse del segmento *AB*. (Suggerimento. L'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio.) $[y = 3x - 4]$

294 Scrivi l'equazione dell'asse del segmento di estremi $P(2; -5)$ e $Q(-8; 1)$. $\left[y = \frac{5}{3}x + 3\right]$

295 Tra le rette parallele a quella di equazione $2x - 6y + 5 = 0$, trova quella:

a) passante per l'origine;
b) passante per $P(2; -9)$;
c) che ha ordinata all'origine 6;
d) passante per il punto medio del segmento di estremi $A(1; -2)$ e $B(-3; 4)$.

$\left[\text{a) } y = \frac{1}{3}x; \text{ b) } y = \frac{1}{3}x - \frac{29}{3}; \text{ c) } y = \frac{1}{3}x + 6; \text{ d) } y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right]$

296 Tra le rette del fascio di centro $P(-2; 4)$, trova la retta:

a) passante per $A(1; -3)$;
b) passante per l'origine;
c) parallela all'asse *x*;
d) perpendicolare alla retta che passa per $B(0; 2)$ e $C(4; 0)$.

$\left[\text{a) } y = -\frac{7}{3}x - \frac{2}{3}; \text{ b) } y = -2x; \text{ c) } y = 4; \text{ d) } y = 2x + 8\right]$

297 Tra le rette del fascio di centro $P(1; 2)$, determina quella che:

a) passa per l'origine;
b) è parallela alla bisettrice del II e IV quadrante;
c) è perpendicolare alla bisettrice del I e III quadrante;
d) ha coefficiente angolare $\frac{2}{3}$;
e) è parallela all'asse x.

$\left[\text{a) } y = 2x; \text{ b) } y = -x + 3; \text{ c) } y = -x + 3; \text{ d) } y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}; \text{ e) } y = 2\right]$

298 Tra le rette del fascio di equazione $kx + (k+1)y + 2 = 0$, determina quella che:

a) è perpendicolare alla bisettrice del II e IV quadrante;
b) è parallela alla retta $4y - 3 = 0$;
c) è perpendicolare alla retta $3x - 6y + 1 = 0$;
d) è parallela all'asse y.

[a) $x - y - 4 = 0$; b) $y = -2$; c) $y = -2x + 2$; d) $x = 2$]

8. La retta passante per due punti

Teoria a pag. 651

RIFLETTI SULLA TEORIA

299 VERO O FALSO?

a) Se i punti A e B hanno la stessa ordinata y_0, la retta AB ha equazione $y = y_0$. V F
b) La retta di equazione $x = 2$ passa per $A(2; 0)$ e per $B(5; 2)$. V F
c) Per i punti $A(2; 3)$ e $B(-1; 2)$ passa una sola retta. V F
d) La formula $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ si può applicare solo se $x_2 \neq x_1$. V F
e) La retta passante per $A(1; 4)$ e $B(6; 4)$ è parallela all'asse delle ascisse. V F

300 TEST L'equazione della retta passante per i punti $A(1; 1)$ e $B(-1; -5)$ è:

A $\frac{y-1}{x-1} = \frac{-5-1}{1-1}$.
B $\frac{y-1}{x-1} = \frac{-1-1}{-5-1}$.
C $\frac{y-1}{-1-1} = \frac{x-1}{-5-1}$.
D $\frac{y-1}{x-1} = \frac{-5-1}{-1-1}$.
E $\frac{y+1}{x+1} = \frac{-5+1}{1+1}$.

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 12 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

301 Scriviamo l'equazione della retta passante per i punti:

a) $A(-1; 3)$, $B(-4; 2)$; b) $A(-5; 2)$, $B\left(-5; \frac{1}{2}\right)$; c) $A(6; 3)$, $B\left(-\frac{7}{2}; 3\right)$.

a) Essendo $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$, applichiamo la formula:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Sostituiamo a $(x_1; y_1)$ le coordinate di A e a $(x_2; y_2)$ le coordinate di B:

$$\frac{y - 3}{2 - 3} = \frac{x - (-1)}{(-4) - (-1)} \quad \rightarrow \quad -(y - 3) = -\frac{1}{3}(x + 1) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 3.$$

L'equazione richiesta è $y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$.

b) Poiché $x_A = x_B$, l'equazione della retta è $x = -5$.

c) Poiché $y_A = y_B$, l'equazione della retta è $y = 3$.

Scrivi l'equazione della retta passante per le seguenti coppie di punti.

302 $A(0; 3)$, $B(8; 0)$. $\left[y = -\frac{3}{8}x + 3\right]$

303 $A(-5; 0)$, $B(0; -2)$. $\left[y = -\frac{2}{5}x - 2\right]$

304 $A(-2; 5)$, $B(-2; -3)$. $[x = -2]$

305 $A(7; 0)$, $B(6; -4)$. $[y = 4x - 28]$

306 $A(0; 0)$, $B(1; 1)$. $[y = x]$

307 $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$, $B\left(5; \frac{3}{4}\right)$. $\left[y = \frac{3}{4}\right]$

Stabilisci se i punti delle seguenti terne sono allineati.

308 $A(1; 2)$, $B(0; 3)$, $C(4; 1)$.

309 $A(3; 0)$, $B(-3; 2)$, $C(6; 1)$.

310 $A(1; 5)$, $B(-2; -1)$, $C(0; 3)$.

311 **COMPLETA** la seguente tabella.

P	Q	Retta PQ
$(2; 0)$	$(0; 1)$	....
$(-1; 3)$	$(1; 0)$	....
$\left(\frac{3}{2}; -1\right)$	$(2; -1)$	....
$\left(-\frac{7}{2}; -4\right)$	$\left(-\frac{7}{2}; 3\right)$	....

312 Scrivi l'equazione della retta che passa per $A(2; 1)$ e $B(4; -1)$ e stabilisci se il punto $C(-3; 6)$ è allineato ai primi due. $[y = -x + 3; \text{sì}]$

313 **COMPLETA** la seguente tabella.

Punti P e Q	Equazione della retta r passante per P e Q	Coefficiente angolare di r	Ordinata all'origine di r	Equazione della retta parallela a r passante per O
$P(2; 4)$ $Q(-1; 2)$	...	...	...	...
$P(-3; \ldots)$ $Q(\ldots; 6)$	...	-1	4	...
$P\left(\frac{1}{2}; \ldots\right)$ $Q(\ldots; 2)$	...	...	1	$y = 4x$
$P(2; \ldots)$ $Q(\ldots; 4)$	$y + 3x - 1 = 0$	...	...	...

Problemi sulle rette

ESERCIZIO GUIDA

314 Scriviamo l'equazione della retta che soddisfa le due condizioni seguenti:
a) è parallela alla retta passante per $A(1; -2)$ e $B(3; 2)$; **b)** passa per il punto $C(-1; 1)$.

Determiniamo il coefficiente angolare della retta AB:

$$m_{(AB)} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \quad \rightarrow \quad m_{(AB)} = \frac{-2-2}{1-3} = \frac{-4}{-2} \quad \rightarrow \quad m_{(AB)} = 2.$$

Poiché la retta cercata è parallela alla retta AB, ha lo stesso coefficiente angolare:

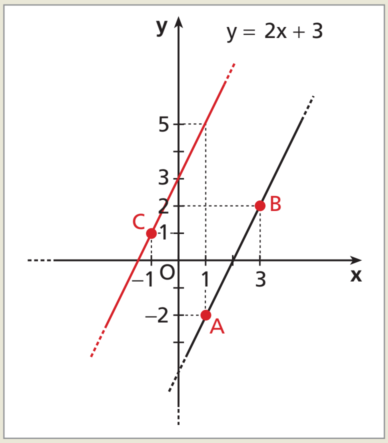
$$m = m_{(AB)} = 2.$$

Poiché la retta passa per C, otteniamo come sua equazione:

$$y - y_C = m(x - x_C) \quad \rightarrow \quad y - 1 = 2(x+1) \quad \rightarrow \quad y - 1 = 2x + 2 \quad \rightarrow \quad y = 2x + 3.$$

y = 2x + 3

x	y
–1	1
0	3
1	5



315 Scrivi l'equazione della retta che è perpendicolare alla retta passante per $A(-2; -5)$ e $B(3; 1)$ e che passa per il punto $C(2; -3)$. $[5x + 6y + 8 = 0]$

316 Fra le rette parallele alla retta r di equazione $x + 2y - 10 = 0$, determina quella che passa per il punto $P(4; -3)$. $[x + 2y + 2 = 0]$

317 Scrivi l'equazione della retta passante per i punti $A(-2; -2)$ e $B(6; 10)$. Determina su tale retta un punto C la cui ascissa è la metà dell'ordinata. $[3x - 2y + 2 = 0; C(2; 4)]$

318 Fra le rette perpendicolari alla retta s di equazione $3x - 6y + 1 = 0$, determina:
a) la retta a che passa per il punto $A(1; 3)$;
b) la retta b che passa per l'origine.
[a) $2x + y - 5 = 0$; b) $2x + y = 0$]

319 Fra le rette passanti per il punto $P(1; 3)$, determina:
a) l'equazione della retta che interseca l'asse x nel punto $A(2; 0)$;
b) l'equazione della retta che interseca l'asse y nel punto $B(0; -1)$.
[a) $y = -3x + 6$; b) $y = 4x - 1$]

320 Fra le rette passanti per il punto $Q(-2; 5)$, determina l'equazione della retta parallela alla retta passante per i punti $A(-1; 0)$ e $B(2; -4)$. $\left[y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}\right]$

321 Scrivi l'equazione della retta r passante per $A(-3; 0)$ e $B(1; 2)$. Determina l'equazione della retta parallela a r passante per $C(1; -4)$ e della retta perpendicolare a r passante per $D(6; 1)$. $[x - 2y + 3 = 0; x - 2y - 9 = 0; 2x + y - 13 = 0]$

322 I punti $A(-3; 1)$, $B(6; 3)$ e $C(-1; -5)$ sono i vertici di un triangolo.
Determina:
a) le equazioni delle rette contenenti i tre lati;
b) le coordinate dei punti di intersezione della retta contenente BC con gli assi cartesiani.

$\left[\text{a) } 2x - 9y + 15 = 0, 8x - 7y - 27 = 0, 3x + y + 8 = 0; \text{ b) } \left(0; -\frac{27}{7}\right), \left(\frac{27}{8}; 0\right)\right]$

323 Dati la retta r di equazione

$$2x + y - 12 = 0$$

e il punto $A(-2; -1)$, scrivi:
a) l'equazione della retta parallela a r e passante per A;
b) l'equazione della retta perpendicolare a r e passante per A.

$[\text{a) } 2x + y + 5 = 0; \text{ b) } x - 2y = 0]$

324 Scrivi l'equazione della retta r perpendicolare alla retta s passante per i punti $A(5; 0)$ e $B(0; -3)$ e passante per l'origine degli assi. $[5x + 3y = 0]$

325 Scrivi le equazioni delle rette contenenti i lati del quadrilatero $ABCD$, con $A(-3; 3)$, $B(-3; -1)$, $C(2; -2)$, $D(2; 2)$. Verifica che il quadrilatero è un parallelogramma.

$[x + 3 = 0; x + 5y + 8 = 0; x = 2; x + 5y - 12 = 0]$

326 Disegna il triangolo di vertici $A(1; 4)$, $B(-2; 1)$ e $C(1; 1)$. Scrivi le equazioni delle mediane.

$[x + y - 2 = 0; 2x - y + 2 = 0; x - 2y + 4 = 0]$

327 Scrivi l'equazione della retta passante per i punti $A(3; 1)$ e $B(6; 5)$. Determina su tale retta un punto C la cui ascissa è $\frac{1}{4}$ dell'ordinata.

$\left[4x - 3y - 9 = 0; C\left(-\frac{9}{8}; -\frac{9}{2}\right)\right]$

9. La distanza di un punto da una retta

Teoria a pag. 652

RIFLETTI SULLA TEORIA

328 **VERO O FALSO?**

a) La distanza di un punto dall'asse y è l'ordinata del punto. V F
b) La distanza di un generico punto del piano da una retta è sempre un numero reale non negativo. V F
c) La distanza del punto $A(0; 2)$ dalla retta di equazione $x = 3$ vale 3. V F
d) Non si può determinare la distanza dell'origine O dalla retta di equazione $2x - 5y = 0$. V F
e) La distanza dell'origine O da una generica retta di equazione $ax + by + c = 0$ è $\frac{|c|}{a^2 + b^2}$. V F
f) La distanza del punto $A(1; 0)$ dalla retta di equazione $x - 3y + 1 = 0$ è negativa. V F

329 **TEST** La distanza del punto $P(x_0; y_0)$ dalla retta di equazione $y = mx + q$ vale:

A $\frac{|y_0 - (mx_0 + q)|}{\sqrt{1 + m^2}}$.

B $\frac{|y_0 + (mx_0 + q)|}{\sqrt{1 + m^2}}$.

C $\frac{|y_0 - (mx_0 - q)|}{\sqrt{1 + m^2}}$.

D $\frac{|y_0 - (mx_0 + q)|}{\sqrt{1 + m}}$.

E $\frac{|y_0 - (mx_0 + q)|}{\sqrt{1 - m^2}}$.

330 **TEST** La distanza del punto $P(0; 1)$ dalla retta di equazione $3x - y = 0$ è:

A $\frac{-1}{\sqrt{9 + 1}}$.

B $\frac{-1}{\sqrt{9 - 1}}$.

C $\frac{1}{\sqrt{9 - 1}}$.

D $\frac{+1}{\sqrt{9 + 1}}$.

E $\frac{|3 - 1|}{\sqrt{9 + 1}}$.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

331 Determiniamo la distanza del punto $P(-2;-3)$ dalla retta di equazione $6x+8y=0$.

La formula da applicare è:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Poiché abbiamo $P(-2;-3)$ e la retta di equazione $6x+8y=0$, otteniamo:

$$d=\frac{|6\cdot(-2)+8(-3)|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{|-12-24|}{\sqrt{36+64}}=\frac{|-36|}{\sqrt{100}}=\frac{36}{10}=\frac{18}{5}.$$

Calcola la distanza dei punti assegnati dalle rette aventi l'equazione indicata a fianco.

332 $A(-2;1)$, $3x-4y-1=0$. $\left[\frac{11}{5}\right]$

333 $A(2;4)$, $y=\frac{4}{3}x+1$. $\left[\frac{1}{5}\right]$

334 $A(0;3)$, $6y=-8x+3$. $\left[\frac{3}{2}\right]$

335 $A(1;2)$, $y=\frac{5}{12}x-2$. $\left[\frac{43}{13}\right]$

336 $A(-2;3)$, $9x-12y=0$. $\left[\frac{18}{5}\right]$

337 $A(3;-1)$, $x=4$. [1]

338 Calcola la distanza di $P(-1;4)$ dalla retta che passa per i punti $A(5;2)$ e $B\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$. $\left[\frac{54}{13}\right]$

339 Calcola le distanze del punto $P(0;1)$ dalla retta r di equazione $3-x-2y=0$ e dalla retta s di equazione $y=2x$. Cosa puoi affermare riguardo alla posizione di P rispetto alle due rette? Il punto P appartiene a una retta particolare. Quale? $\left[\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}};\text{alla bisettrice dell'angolo formato da } r \text{ e } s\right]$

340 Considera il triangolo ABC di vertici $A(-3;3)$, $B(2;-1)$, $C(3;1)$. Determina l'altezza relativa al lato AB e l'area del triangolo. $\left[\frac{14}{\sqrt{41}};7\right]$

341 Determina, con la formula della distanza, l'area del triangolo di vertici $A(2;0)$, $B(-1;3)$, $C(4;4)$. [9]

RIEPILOGO LA RETTA

Nel sito: ▶ 11 esercizi di recupero

TEST

342 Nel fascio di rette di equazione

$(3k+1)x-(1-k)y+5k=0$,

quale valore di $k\in\mathbb{R}$ individua una retta r perpendicolare a $y=3$?

A Nessuno.

B $-\frac{1}{3}$

C 0

D 1

E -1

343 L'asse del segmento di estremi $P\left(2;-\frac{1}{2}\right)$ e $Q\left(2;\frac{7}{2}\right)$ ha equazione:

A $x=2$.

B $y=-6$.

C $y=\frac{3}{2}$.

D $x=\frac{3}{2}$.

E $y=2$.

344 Che cosa puoi affermare sul fascio di rette di equazione $(k-2)x+(2-k)y+k-3=0$?

A È un fascio proprio.
B È un fascio improprio di coefficiente angolare 1.
C È un fascio improprio di rette parallele a $y=-x$.
D Per $k=2$ una retta del fascio passa per l'origine.
E Contiene l'asse x.

345 Considera il triangolo ABC di vertici $A(1;0)$, $B(0;3)$ e $C(3;1)$. Della retta di equazione $x-2y-1=0$ fa parte:

A il lato AC.
B il lato BC.
C il lato AB.
D l'altezza AH.
E l'altezza CK.

346 La distanza del punto $P(3;5)$ da una retta r vale $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Qual è, fra le seguenti, l'equazione della retta r?

A $2x-y-3=0$
B $x-2y+3=0$
C $2x+y-3=0$
D $x+2y-3=0$
E $2x+y-1=0$

347 Per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ la distanza del punto $P(k;2k)$ dalla retta di equazione $2x-y=0$ vale $\sqrt{5}$?

A $k=\sqrt{5}$
B $k=5\vee k=-5$
C $k=-\sqrt{5}$
D $k=\frac{1}{5}$
E Per nessun valore di k.

348 Verifica se i tre punti $A(1;2)$, $B(-3;4)$, $C(2;-1)$ sono allineati. [no]

349 Dati i punti $A(-1;2)$, $B(3;-1)$, $C(2;4)$, determina le equazioni dei lati del triangolo da essi individuato.
[$3x+4y-5=0$; $5x+y-14=0$; $2x-3y+8=0$]

350 Dato il triangolo ABC di vertici $A(-2;-4)$, $B(6;-2)$, $C(2;2)$, determina le equazioni delle sue mediane.
[$2x-3y-8=0$; $x+6y+6=0$; $x=2$]

351 Dato il triangolo ABC di vertici $A(1;2)$, $B(6;2)$, $C(3;8)$, determina le equazioni delle sue altezze.
[$x=3$; $x-2y+3=0$; $x+3y-12=0$]

352 Dato il triangolo ABC di vertici $A(2;2)$, $B(10;-2)$, $C(2;6)$, determina le equazioni degli assi dei lati.
[$2x-y-12=0$; $x-y-4=0$; $y=4$]

353 Determina l'equazione della retta passante per $A(-5;4)$ e $B(-5;-6)$ e l'equazione della perpendicolare condotta per $P(3;2)$ alla retta AB. Determina l'area del triangolo ABP.
[$x=-5$; $y=2$; area $=40$]

354 Data la retta di equazione

$(k+1)x-2y+3=0$,

determina k in modo che:
a) la retta sia parallela alla retta $y-1=0$;
b) la retta sia parallela alla retta $2x-y=0$;
c) la retta sia perpendicolare alla retta $x-3y=0$;
d) la retta passi per il punto $(2;-1)$.
$\left[\text{a) } k=-1\text{; b) } k=3\text{; c) } k=-7\text{; d) } k=-\frac{7}{2}\right]$

355 Data la retta di equazione

$x+(a+2)y-1=0$, con $a\in\mathbb{R}$,

determina a in modo che la retta:
a) sia parallela all'asse x;
b) sia parallela all'asse y;
c) passi per l'origine.
[a) non esiste; b) $a=-2$; c) non esiste]

356 Dato il fascio di rette di equazione

$kx-2ky+1=0$,

a) stabilisci se si tratta di un fascio proprio o improprio;
b) determina la retta del fascio passante per $A(0;1)$.
[a) fascio improprio; b) $x-2y+2=0$]

357 È dato il quadrilatero $ABCD$ di vertici $A(4;3)$, $B(12;9)$, $C(13;16)$, $D(5;10)$.
Dopo aver verificato che $ABCD$ è un parallelogramma:
a) calcola l'altezza relativa al lato AB;
b) determina l'area del parallelogramma.
[a) 5; b) 50]

358 Scrivi le equazioni delle rette dei lati del triangolo di vertici $A(-3; 1)$, $B(4; -1)$, $C(4; 6)$ e determina la sua area.
$\left[2x + 7y - 1 = 0; x = 4; 5x - 7y + 22 = 0; \frac{49}{2}\right]$

359 Il triangolo isoscele ABC ha la base AB di estremi $A(-2; -1)$ e $B(6; 3)$ e il vertice C sull'asse y. Trova l'ordinata di C e l'area del triangolo.
$[y_C = 5; 20]$

360 Verifica che il quadrilatero di vertici $A(1; 1)$, $B(5; 4)$, $C(2; 8)$, $D(-2; 5)$ è un quadrato e trova le equazioni delle sue diagonali.
$[7x - y - 6 = 0; x + 7y - 33 = 0]$

361 Scrivi l'equazione della retta r passante per i punti $A\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ e $B\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$. Calcola le distanze di questi punti dalla retta s di equazione $4x - 3y + 2 = 0$. Come sono tra loro le rette r e s?
$\left[8x - 6y - 3 = 0; \frac{7}{10}; \text{parallele}\right]$

362 Considera il fascio di equazione:
$kx + (k-3)y - k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$.
Esistono punti in comune fra due rette del fascio? Perché?

363 Verifica che nel triangolo di vertici $A(-2; 2)$, $B(4; 3)$, $C(1; 7)$ il segmento che unisce i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato e congruente a metà di questo.

364 Determina l'equazione della retta parallela a $3x - 2y + 5 = 0$ e passante per il punto medio del segmento di estremi $A(3; 7)$ e $B(-1; -3)$.
$[3x - 2y + 1 = 0]$

365 Dato il quadrilatero $ABCD$ di vertici $A(-1; 0)$, $B(0; -1)$, $C\left(\frac{1}{3}; 0\right)$, $D(0; 3)$, verifica che si tratta di un trapezio e determina la misura dell'altezza.
$\left[\frac{4}{\sqrt{10}}\right]$

366 Disegna sul piano cartesiano la retta passante per l'origine degli assi e per $A(3; 2)$. Calcola poi la distanza del punto $P(5; -1)$ da tale retta. $[\sqrt{13}]$

BRAVI SI DIVENTA ▸ E29

367 Determina l'equazione della retta r passante per i punti $A\left(-\frac{1}{2}; -3\right)$ e $B\left(2; \frac{9}{2}\right)$ e data la retta s di equazione $2kx - (k-1)y + 4(k-1) = 0$:
a) trova per quale valore di k le due rette sono parallele;
b) calcola la distanza tra le due rette.

368 Determina l'equazione della retta r passante per $P(1; 3)$ e avente per coefficiente angolare $m = 2$; calcola la misura dell'area del triangolo individuato dalla retta e dagli assi cartesiani.
$\left[2x - y - 1 = 0; \text{area} = \frac{1}{4}\right]$

369 Determina l'equazione della retta passante per $A(-5; 2)$ e $B(3; 2)$. Dopo aver verificato se il punto $P(5; -3)$ appartiene a tale retta, calcola la sua distanza dal punto A. $[y = 2; \sqrt{125}]$

370 Dopo aver determinato l'equazione della retta r passante per $A(2; -3)$ e $B(1; 4)$, trova le coordinate del punto P appartenente a essa di ascissa 3. Determina poi l'equazione della retta s passante per P e perpendicolare alla retta r.
$[7x + y - 11 = 0; P(3; -10); x - 7y - 73 = 0]$

371 Disegna sul piano cartesiano la retta r di equazione $y = 2x - 3$. Determina le coordinate del suo punto di intersezione A con l'asse delle ordinate. Trova le equazioni delle rette s e t passanti per A, con s perpendicolare a r e t parallela all'asse x.
$[A(0; -3); x + 2y + 6 = 0; y + 3 = 0]$

372 Dato il triangolo di vertici $A(-1; 2)$, $B(-9; 2)$, $C(-5; -1)$, verifica che è un triangolo isoscele e determina il suo perimetro, l'area e le coordinate del baricentro. (Suggerimento. Il baricentro è il punto d'incontro delle mediane e divide ogni mediana in due parti tali che una è doppia dell'altra.) $[18; 12; (-5; 1)]$

373 Determina l'equazione della retta parallela alla bisettrice del II e IV quadrante passante per $A(3; 1)$. Rappresenta poi la retta sul piano cartesiano determinando i punti B e C in cui interseca rispettivamente l'asse delle ascisse e l'asse delle ordinate. Calcola area e perimetro del triangolo BOC.
$[x + y - 4 = 0; B(4; 0); C(0; 4); \text{area} = 8; \text{perimetro} = 8 + 4\sqrt{2}]$

374 Scrivi l'equazione della retta r, passante per $P(0; 4)$ parallela alla retta $2x - y + 1 = 0$, e calcola l'area del quadrilatero limitato dalle due rette e dagli assi cartesiani. $\left[2x - y + 4 = 0; \text{area} = \frac{15}{4}\right]$

375 Dato il fascio di rette $y = mx - 3m + 10$, calcola per quali valori di h, $k \in \mathbb{R}$, il punto $M(2k + 1; 3 - h)$ risulta medio di OA, con O origine degli assi e A centro del fascio. $\left[k = \frac{1}{4}; h = -2\right]$

376 Stabilisci per quale valore di m le rette r di equazione $mx - 2y + 3 = 0$ e s di equazione $y = \frac{2x - 1}{3}$ sono perpendicolari. Determina poi la distanza del punto P di ascissa 1, appartenente alla retta s, dalla retta r così trovata. $\left[m = -3; d = \frac{2}{3\sqrt{13}}\right]$

377 Verifica che il quadrilatero $ABCD$ di vertici $A(-3; 1)$, $B(2; 11)$, $C(0; 27)$, $D(-11; 5)$ è un trapezio rettangolo e determina la sua area. [160]

378 Data la retta r di equazione $ax + 2y + a + 1 = 0$, determina a in modo che:

a) r sia parallela all'asse x;
b) r sia parallela all'asse y;
c) r passi per l'origine;
d) r abbia coefficiente angolare positivo;
e) r sia parallela alla retta passante per $A(4; -5)$, $B(5; -7)$.

[a) $a = 0$; b) non esiste; c) $a = -1$; d) $a < 0$; e) $a = 4$]

379 Trova l'area del triangolo che ha per vertici i centri dei tre fasci di rette di equazioni:

$y = m(x - 1)$;
$kx - y + 3k - 1 = 0$;
$y = mx - 4m - 3$.

$\left[\text{area} = \frac{15}{2}\right]$

380 Dato il triangolo ABC di vertici $A(1; 1)$, $B(4; 7)$, $C(-5; 4)$:

a) verifica che è un triangolo rettangolo;
b) determina le equazioni dei lati;
c) determina l'ortocentro (non sono necessari calcoli, perché...);
d) determina il circocentro (ricorda che il circocentro del triangolo rettangolo è...).

$\left[\text{b) } 2x - y - 1 = 0, x - 3y + 17 = 0, x + 2y - 3 = 0; \text{c) } (1; 1); \text{d) } \left(-\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)\right]$

381 Considera la retta passante per $A(1; 3)$ e $B(-1; -5)$. Determina su tale retta un punto C la cui ascissa è tripla dell'ordinata. Considera la retta parallela all'asse x passante per A e la retta parallela all'asse y passante per B. Determina il punto D di intersezione di queste due rette e calcola l'area del triangolo DAC.

$\left[C\left(\frac{3}{11}; \frac{1}{11}\right); D(-1; 3); \text{area} = \frac{32}{11}\right]$

382 Sono date due rette di equazioni $3x + 4y = 0$ e $5x - 12y = 0$. Come determini le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle due rette? Dopo averle determinate, osserva le loro equazioni. Come sono fra loro tali bisettrici?

$\left[y = 8x, y = -\frac{1}{8}x; \text{perpendicolari}\right]$

383 Dato il quadrilatero di vertici $A(1; 1)$, $B(9; 7)$, $C(12; 3)$, $D(0; -6)$, verifica che è un trapezio e che il segmento che congiunge i punti medi dei lati obliqui è parallelo alle due basi e congruente alla loro semisomma.

384 Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-3; 0)$, $B(-1; 4)$, $C(5; 1)$, $D(3; -3)$ è un parallelogramma. Determina le misure dei lati e il punto di incontro delle diagonali.

$\left[\sqrt{20}; \sqrt{45}; \left(1; \frac{1}{2}\right)\right]$

LABORATORIO DI MATEMATICA

Le rette con Excel

ESERCITAZIONE GUIDATA

Determiniamo rispettivamente le equazioni delle rette *s*, passante per i punti *M* e *N* assegnati, e *r*, passante per un punto *P* noto e parallela alla retta *s*.
Troviamo i risultati supponendo che $M(-1; -1)$, $N(2; 5)$ e $P(3; 4)$.

Analizziamo il percorso risolutivo del problema

Osserviamo che la soluzione non esiste se i due punti *M* e *N* coincidono.
Abbiamo un caso particolare quando la retta *s* è parallela all'asse *x* e un caso limite quando *P* appartiene a *s*.
Determiniamo altrimenti l'equazione di *s* con la formula della retta passante per due punti e l'equazione di *r* con la formula della retta passante per un punto e parallela a una retta data.

Costruiamo il foglio corrispondente

- Apriamo il foglio elettronico Excel, inseriamo le didascalie per inserire i dati e leggere i risultati e mettiamo un bordo alle celle che richiedono i dati d'ingresso.

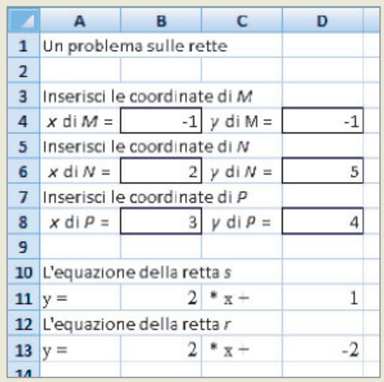
- Per ottenere l'equazione della retta *s* digitiamo rispettivamente:

`= SE(B6 = B4; SE (D6 = D4; "non esiste"; "x ="); "y =");` in A11
`= SE(B6 = B4; SE (D6 = D4; ""; B4); (D6-D4)/(B6-B4));` in B11
`= SE(B6 = B4; "";"* x +");` in C11
`= SE(B6 = B4; ""; - B11*B4 + D4).` in D11

- Per ottenere l'equazione della retta *r* digitiamo rispettivamente:

`= SE(B6 = B4; SE (D6 = D4; "non esiste"; "x ="); "y =");` in A13
`= SE(B6 = B4; SE (D6 = D4; ""; B8); B11);` in B13
`= SE(B6 = B4; "";"* x +");` in C13
`= SE(B6 = B4; ""; - B13*B8 + D8).` in D13

- Immettiamo le coordinate dei punti *M*, *N* e *P* e vediamo il foglio di figura 1.



	A	B	C	D
1	Un problema sulle rette			
2				
3	Inserisci le coordinate di *M*			
4	*x* di *M* =	-1	*y* di M =	-1
5	Inserisci le coordinate di *N*			
6	*x* di *N* =	2	*y* di *N* =	5
7	Inserisci le coordinate di *P*			
8	*x* di *P* =	3	*y* di *P* =	4
9				
10	L'equazione della retta *s*			
11	y =	2	* x +	1
12	L'equazione della retta *r*			
13	y =	2	* x +	-2
14				

▲ Figura 1

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 8 esercitazioni in più

Esercitazioni

Risolvi i seguenti problemi in modo analogo a quello dell'esercitazione guidata.

1 Determina l'equazione di una retta *r* sapendo che passa per il punto medio *M* del segmento *AB* di estremi noti e per l'origine. Casi proposti:
a) $A(3; 2)$ e $B(-1; 4)$;
b) $A(3; -2)$ e $B(-3; 2)$;
c) $A(-3; 2)$ e $B(3; 4)$.
[a) $y = 3x$; b) la retta non esiste; c) $x = 0$]

2 Determina l'equazione della mediana *AM* del triangolo *ABC*, i cui vertici hanno coordinate note. Casi proposti:
a) $A(3; 1)$, $B(1; 5)$, $C(-2; 2)$;
b) $A(2; -3)$, $B(1; -5)$, $C(3; 5)$;
c) $A(2; 1)$, $B(1; 5)$, $C(2; 1)$.
[a) $AM: 5x + 7y - 22 = 0$; b) $AM: x - 2 = 0$; c) il triangolo non esiste]

Matematica per il cittadino

LA CORSA

Durante un allenamento di atletica, Marco corre per 4 minuti esatti partendo da fermo; il suo allenatore annota i seguenti dati.

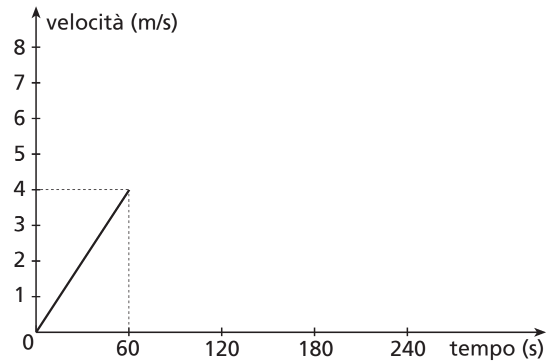
- 1° minuto: aumento uniforme della velocità, fino a 4 m/s; distanza percorsa: 120 m;
- 2° minuto: velocità costante;
- 3° minuto: diminuzione uniforme della velocità fino a 3 m/s; distanza percorsa nel minuto: 210 m;
- 4° minuto: aumento uniforme della velocità fino a 8 m/s; distanza percorsa nel minuto: 330 m.

1. Quale distanza totale ha percorso Marco?

2. Qual è stata la velocità media di Marco durante la corsa?

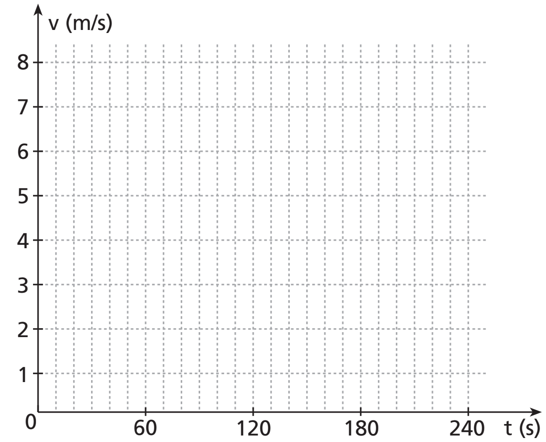
A 5 m/s B 37,5 m/s C 2,75 m/s D 3,75 m/s

3. Completa il seguente grafico velocità-tempo in base ai dati disponibili.



4. Utilizzando il grafico nella figura sopra, valuta per quanto tempo la velocità di Marco è stata superiore a 3,5 m/s. Esprimi tale risultato in percentuale rispetto al tempo totale della corsa con un'approssimazione alla prima cifra decimale.

5. In un'altra prova Marco, partendo da fermo, aumenta in modo uniforme la sua velocità e arriva a 6 m/s in quattro minuti. Roger parte un minuto dopo di lui e raggiunge la velocità di 7 m/s in tre minuti. Rappresenta nel seguente grafico le velocità dei due ragazzi e stabilisci, in modo approssimativo, dopo quanto tempo dalla sua partenza la velocità di Marco viene superata da quella di Roger.



Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 30 test interattivi in più

1 Un punto $A(p; q)$ diverso dall'origine sta sulla bisettrice del II e IV quadrante. Quale delle seguenti relazioni è giusta?

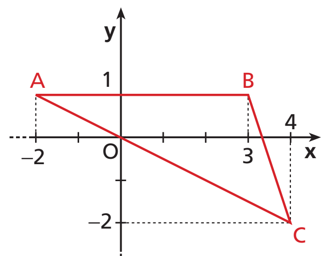
A $|p| = |q|$ C $p = \frac{1}{q}$ E $|p| \neq |q|$
B $p = q$ D $p \cdot q > 0$

2 Il punto medio del segmento di estremi $A(-4; 3)$ e $B(2; 5)$ è:

A $M(6; 2)$. D $M(-2; 8)$.
B $M(3; 1)$. E $M(1; 4)$.
C $M(-1; 4)$.

3 Nella figura è rappresentato il triangolo di vertici $A(-2; 1)$, $B(3; 1)$ e $C(4; -2)$. L'altezza relativa al lato AB misura:

A 5
B 6
C -3
D 3
E 1



4 Una delle seguenti rette è parallela all'asse delle ordinate. Quale?

A $x = y$ C $y = -2$ E $1 - 3y = 0$
B $2x + 7 = 0$ D $x = -y$

5 L'equazione della retta passante per $A(3; -2)$ e $B(-7; -2)$ è:

A $3x - 7y = -2$. D $3x - 7y = 2$.
B $10x = 3$. E $y = -2$.
C $3x + 7y = -2$.

6 Quale fra le rette seguenti *non* è parallela alla retta di equazione $y = 2x - 3$?

A $2x - y - 1 = 0$ D $2x + y + 1 = 0$
B $4x - 2y + 3 = 0$ E $-6x + 3y = 0$
C $-4x + 2y - 5 = 0$

7 Quale fra le seguenti rette è perpendicolare alla retta di equazione $x + 3y - 1 = 0$?

A $y = 3x + 1$ D $x = 3y + 2$
B $y = -3x + 2$ E $y = -\frac{1}{3}x$
C $x = -3y + 1$

8 L'equazione $y = k$ rappresenta:

A un fascio improprio di rette, con coefficiente angolare k.
B il fascio proprio di rette passanti per il punto $P(0; k)$.
C un fascio improprio di rette con coefficiente angolare zero.
D la bisettrice del primo e terzo quadrante.
E l'asse x.

9 Soltanto una delle seguenti equazioni rappresenta la retta che passa per i punti $P(0; 2)$ e $Q(-4; 0)$. Quale?

A $y = 2x - 4$ D $x = -4$
B $y = 2$ E $y = -\frac{1}{2}x + 2$
C $y = \frac{1}{2}x + 2$

10 Il coefficiente angolare della retta passante per i punti $A(-3; 2)$ e $B(1; 4)$ è:

A $\frac{1}{2}$. B 2. C -2. D $-\frac{1}{2}$. E $-\frac{1}{3}$.

11 Sono noti i vertici $A(-2; 2)$, $B(2; 1)$ e $C(6; 4)$ del parallelogramma $ABCD$. L'equazione del lato AD è:

A $x + 4y - 22 = 0$. D $x + 4y - 6 = 0$.
B $3x - 4y + 14 = 0$. E $4x + 3y - 4 = 0$.
C $3x - 4y - 2 = 0$.

12 L'equazione della retta r è:

$5x + y - 6 = 0$.

Quanto vale il coefficiente angolare di una retta perpendicolare a r?

A 5 B -5 C $\frac{1}{5}$ D $-\frac{1}{5}$ E -1

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

13 Se $a = b = c = 0$, l'equazione $ax + by + c = 0$ rappresenta:

A un punto.
B l'asse x.
C nessun ente geometrico.
D l'asse y.
E un piano.

14 L'equazione della retta passante per $A(3; 1)$ e parallela alla bisettrice del I e III quadrante è:

A $x - y - 3 = 0$
B $2x - y - 1 = 0$
C $x - y - 2 = 0$
D $x + y - 2 = 0$
E $y = x$

SPIEGA PERCHÉ

15 È dato il fascio proprio di equazione

$y - y_0 = m(x - x_0)$, con $m \in \mathbb{R}$.

A ogni valore di m corrisponde una determinata retta del piano. Vale anche il viceversa? Perché?

16 Si può associare una e una sola equazione lineare in due variabili $ax + by + c = 0$ a una qualunque retta del piano? Perché?

17 Se nell'equazione della retta $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, poni $c = 0$, ottieni l'equazione di una retta passante per l'origine. Perché?

18 Come puoi usare la formula della retta passante per due punti per verificare che i punti $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ e $C(x_3; y_3)$ sono allineati?

19 Sono date due rette r e s di equazioni rispettivamente $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ con a, b, c, a', b', c' numeri reali.
Qual è la condizione di parallelismo fra r e s? Perché?

20 Per descrivere il fascio di tutte le rette parallele alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, puoi usare l'equazione

$x - y + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$.

Perché?

21 Perché non esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali le rette di equazione

$(2k - 1)x - (1 - 2k)y + 5k = 0$

sono parallele agli assi cartesiani?

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

22 Verifica che il triangolo di vertici $A(2; 1)$, $B(6; 5)$ e $C(-2; 9)$ è un triangolo isoscele e calcolane l'area. [24]

23 Scrivi in forma esplicita le seguenti equazioni, specificando quali sono il coefficiente angolare e il termine noto, poi disegna il grafico delle tre rette.

a) $2x - 2y + 3 = 0$;
b) $3y + 5 = 0$;
c) $x - 3y + 9 = 0$.

24 Scrivi l'equazione della retta per $A(-2; -3)$ e $B(5; -3)$ e l'equazione della parallela condotta per $P\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ alla retta AB.

$\left[y = -3; y = \frac{3}{2}\right]$

25 Considera le rette le cui equazioni sono le seguenti e stabilisci quali sono parallele fra loro e quali perpendicolari.

$r: y = 2x - 1;$ $\quad s: x + 2y + 3 = 0;$

$t: 2x - y - 6 = 0;$ $u: y = \frac{1}{2}x;$ $v: y = \frac{1}{2}x - 3.$

$[r \perp s; r \parallel t; s \perp t; u \parallel v]$

26 Scrivi l'equazione del fascio improprio di rette contenente la retta di equazione $2x + 3y - 1 = 0$ e disegna tre rette qualsiasi del fascio.

$\left[y = -\frac{2}{3}x + q\right]$

27 Scrivi l'equazione del fascio di rette passante per il punto $P(-2; 3)$ e disegna le rette del fascio aventi coefficiente $m = -1$, $m = 1$, $m = 5$.

$[y = mx + 2m + 3]$

28 Determina l'equazione dell'asse del segmento AB con $A\left(-\frac{5}{2}; 4\right)$ e $B\left(2; -\frac{1}{2}\right)$. $[x - y + 2 = 0]$

29 Trova la distanza del punto $P(-3; 4)$ dalla retta AB con $A(-5; 2)$ e $B(3; -2)$. Determina l'equazione della retta perpendicolare ad AP condotta per P. $\left[d = \frac{6}{\sqrt{5}}; x + y - 1 = 0\right]$

30 Sono dati i seguenti enunciati aperti:

a) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = 2x + 1 \ \wedge \ 2 < x < 5\}$
b) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = -x + 2 \ \wedge \ -6 < x \leq 0\}$
c) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = 3 \ \wedge \ 0 \leq x \leq 5\}$
d) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid x = 1 \ \wedge \ 1 \leq y < 7\}$

Rappresenta nel piano cartesiano gli insiemi di verità degli enunciati e sottolinea la differenza fra quelli con la disuguaglianza forte e quelli con la disuguaglianza debole. [segmenti]

31 Sono dati i seguenti enunciati aperti:

a) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = x - 1 \ \wedge \ 1 < x \leq 6\}$
b) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid x - y + 1 = 0 \ \wedge \ -1 < x \leq 4\}$
c) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid x - y = 1 \ \wedge \ 1 \leq x \leq 6\}$
d) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid x = y + 1 \ \wedge \ 0 < y \leq 5\}$
e) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = x + 1 \ \wedge \ x > -1 \wedge y \leq 5\}$

Quali fra essi rappresentano gli stessi segmenti? [b) ed e) ; a) e d)]

32 Dato il triangolo di vertici $A(2; 2)$, $B(-1; -1)$ e $C(6; 0)$, scrivi le equazioni dei suoi lati. $\left[y = x; y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}; y = -\frac{1}{2}x + 3\right]$

33 Data la retta di equazione $(k - 1)x + 3y - 2 = 0$, determina k in modo che:

a) la retta sia parallela alla retta $y + 2 = 0$;
b) la retta sia parallela alla retta $x - 3y = 0$;
c) la retta sia perpendicolare alla retta $x + 2y = 0$;
d) la retta passi per $P(-2; 1)$.

$\left[\text{a) } k = 1; \text{ b) } k = 0; \text{ c) } k = -5; \text{ d) } k = \frac{3}{2}\right]$

34 Dato il triangolo di vertici $A(-1; 2)$, $B(2; -3)$, $C(5; 4)$, scrivi l'equazione della mediana AM e verifica che il punto $G(2; 1)$ appartiene a tale retta e inoltre divide la mediana AM in due parti, una doppia dell'altra. $[x + 3y - 5 = 0]$

35 Data la retta di equazione $2x - 3y + 2 = 0$, scrivi le equazioni delle rette passanti per il punto $A(2; 3)$, l'una perpendicolare e l'altra parallela alla retta data. $[3x + 2y - 12 = 0; 2x - 3y + 5 = 0]$

36 Nel triangolo di vertici $A(2; 6)$, $B(5; 1)$, $C(-1; -2)$:

a) determina le lunghezze delle mediane e le equazioni delle rette a cui appartengono;
b) verifica che tali rette passano tutte per il punto $D\left(2; \frac{5}{3}\right)$.

$\left[\text{a) } \frac{13}{2}, x = 2; \frac{\sqrt{85}}{2}, 2x + 9y - 19 = 0; \frac{\sqrt{202}}{2}, 11x - 9y - 7 = 0\right]$

37 Il segmento AB ha come estremo il punto $A(-3; 4)$. Il punto medio di AB è $M(1; 1)$.
Determina:

a) le coordinate di B;
b) l'equazione della retta AB;
c) l'equazione dell'asse del segmento AB.

[a) $B(5; -2)$; b) $3x + 4y - 7 = 0$; c) $4x - 3y - 1 = 0$]

38 È dato il parallelogramma $ABCD$ con $A(3; 2)$, $B(7; 4)$ e $D(1; -6)$. Determina le equazioni dei lati del parallelogramma e le coordinate del vertice C. $[x - 2y + 1 = 0; 4x - y - 10 = 0; x - 2y - 13 = 0; 4x - y - 24 = 0; (5; -4)]$

39 In un triangolo di vertici $A(-2; 3)$, $B(3; 2)$, $C(1; -2)$ calcola:

a) la misura della mediana BM e dell'altezza BH;
b) l'equazione di BM e quella di BH;
c) l'area del triangolo.

$\left[\text{a) } \frac{\sqrt{58}}{2}, \frac{22}{\sqrt{34}}; \text{ b) } 3x - 7y + 5 = 0, 3x - 5y + 1 = 0; \text{ c) } 11\right]$

40 Determina le equazioni dei lati e l'area del triangolo ABC di vertici $A(-2; 1)$, $B(3; -3)$ e $C(2; 4)$.

$\left[AB)\ 4x + 5y + 3 = 0; AC)\ 3x - 4y + 10 = 0; BC)\ 7x + y - 18 = 0; \text{area} = \frac{31}{2}\right]$

41 Tra le rette del fascio di centro $M(6; -1)$ determina l'equazione della retta:

a) passante per l'origine;
b) parallela all'asse x;
c) passante per $P(2; -5)$;
d) parallela alla retta che passa per $A(-1; 2)$ e $B(4; 3)$.

$\left[\text{a) } y = -\frac{1}{6}x; \text{ b) } y = -1; \text{ c) } y = x - 7; \text{ d) } y = \frac{1}{5}x - \frac{11}{5}\right]$

42 Trova per quale valore di k le rette r e s di equazione, rispettivamente, $(k+1)x - 3y + 2 = 0$ e $y = \frac{4x+1}{3}$ sono:

a) parallele;
b) perpendicolari.

Determina per quale valore di k la retta r passa per il punto di ascissa 5 della retta s.

$\left[\text{a) } 3; \text{ b) } -\frac{13}{4}; \frac{14}{5}\right]$

43 Dato il fascio di rette di equazione:

$2kx + 2y + 6 - k = 0$,

determina k in modo che:

a) la retta passi per $P\left(-\frac{3}{2}; 2\right)$;
b) la retta sia parallela all'asse x;
c) la retta sia perpendicolare all'asse x;
d) la retta sia parallela alla retta AB, con $A\left(1; \frac{2}{3}\right)$ e $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right)$.

$\left[\text{a) } k = \frac{5}{2}; \text{ b) } k = 0; \text{ c)impossibile; d)} k = \frac{2}{3}\right]$

44 Scrivi l'equazione della retta AB con $A(-1; -3)$ e $B(5; 6)$.
Determina le coordinate di un punto P appartenente alla retta AB, avente l'ascissa uguale all'ordinata e l'equazione della retta r per P e perpendicolare ad AB.

$[3x - 2y - 3 = 0; P(3; 3); r: 2x + 3y - 15 = 0]$

45 È dato il triangolo di vertici $A(10; -11)$, $B(3; 13)$, $C(-6; 1)$.

a) Trova il perimetro.
b) Verifica se il triangolo è rettangolo.
c) Considera i punti medi M e N dei lati AC e CB e verifica che il segmento MN è metà del lato AB.
d) Verifica che le rette MN e AB sono parallele.

[a) 60]

46 Dato il quadrilatero di vertici $A(-1; 0)$, $B(0; -3)$, $C(6; -1)$, $D(1; 4)$, verifica che il poligono che si ottiene congiungendo i punti medi dei suoi lati è un parallelogramma.

47 Tra le rette parallele a quella di equazione $6x - 8y + 1 = 0$ trova quella che:

a) passa per $A(2; 0)$;
b) ha distanza dall'origine uguale a 3;
c) ha ordinata all'origine uguale a 3;
d) passa per il punto di ascissa 5 della retta di equazione $x - 2y + 3 = 0$.

[a) $3x - 4y - 6 = 0$; b) $3x - 4y + 15 = 0$, $3x - 4y - 15 = 0$; c) $3x - 4y + 12 = 0$; d) $3x - 4y + 1 = 0$]

48 Scrivi l'equazione della retta AB con $A(-3; -7)$ e $B(1; 5)$.
Determina le coordinate di un punto P appartenente alla retta AB e avente l'ordinata doppia dell'ascissa. Determina il punto Q di intersezione della retta AB con l'asse x e l'equazione della retta r condotta per Q e perpendicolare ad AB.

$\left[3x - y + 2 = 0; P(-2; -4); Q\left(-\frac{2}{3}; 0\right); r: 3x + 9y + 2 = 0\right]$

49 Determina l'equazione della retta p condotta per $P(3; 2)$ e parallela alla retta AB con $A(-2; 4)$ e $B(-2; -3)$. Detti S il punto di intersezione della retta BP con l'asse x e K il piede della perpendicolare condotta da A alla retta p, calcola l'area del trapezio $ABPK$ e l'area dei triangoli ABS e APS.

$\left[x = 3; \text{area}_{ABPK} = \frac{45}{2}; \text{ area}_{ABS} = \frac{21}{2}; \text{ area}_{APS} = 7\right]$

50 Scrivi l'equazione della retta p condotta per $P(4; -1)$ e parallela alla retta AB con $A(-2; 2)$ e $B(7; 2)$. Detti R il punto di intersezione della retta AP con l'asse y e H il piede della perpendicolare condotta da B alla retta p, determina l'area del trapezio $ABHP$ e l'area dei triangoli ABR e BRP.

$\left[y = -1, \text{area}_{ABHP} = 18; \text{ area}_{ABR} = \frac{9}{2}; \text{ area}_{RBP} = 9\right]$

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 7 esercizi in più

51 Una retta r del piano cartesiano passa per $A(-2; -1)$ e ha coefficiente angolare $m = -1$. La base AB del triangolo isoscele ABC appartiene a r; inoltre B appartiene all'asse delle ordinate e C all'asse delle ascisse. Determina i tre vertici del triangolo e la sua area.
[$A(-2; -1)$, $B(0; -3)$, $C(1; 0)$; area $= 4$]

52 Sono date due rette di equazioni: $ax + 2y - 1 = 0$ e $3x - by + 2 = 0$. Determina i valori reali da assegnare ai parametri a e b affinché esse risultino perpendicolari e si intersechino sull'asse y.
$\left[a = \frac{8}{3}; b = 4\right]$

53 Sono dati i punti $A(2; -2)$ e $B(6; -2)$. Stabilisci le coordinate del centro della circonferenza che ha AB come corda ed è tangente in A alla bisettrice del II e IV quadrante. [$C(4; 0)$]

54 TEST I vertici $ABCD$ di un quadrilatero hanno coordinate $A(0; 0)$, $B(h; 0)$, $C(h+k; l)$, $D(k; l)$, ove $h \neq 0$ e $l \neq 0$. Allora $ABCD$ è:

- A un quadrato.
- B un rettangolo.
- C un parallelogramma.
- D un rombo.
- E un trapezio scaleno.

(*Olimpiadi della matematica*, *Giochi di Archimede*, 1994)

55 Siano $M(3b - 2; -2)$ e $N(1; 1 - 3b)$ due punti del piano cartesiano con $b \in \mathbb{R}$. Come devono risultare i punti M e N affinché le rette OM e ON siano parallele? Che valore assume b in questi casi? [se M, O e N allineati, allora $b = 0$; se $M \equiv N$, allora $b = 1$]

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 4 esercizi in più

56 Find the value of y if $(6; y)$ lies on the same line as $(4; 6)$ and $(0; 4)$.
(USA *Southeast Missouri State University: Math Field Day*, 2005)

57 Determine whether the lines

$$L_1: x - 2y = 8, \qquad L_2: 2x - y = 3$$

are parallel, perpendicular or neither parallel nor perpendicular.

58 H is the point of coordinates $(-2; 5)$ and K is the point $(-2; -5)$. Show that the x-axis bisects the line segment HK. T is the point such that the origin is the centre of HT. Find the coordinates of T. Verify that the y-axis bisects the line segment KT.
(IR *Leaving Certificate Examination*, *Ordinary Level*, 1992)
[$T(2; -5)$]

59 A square $ABCD$ is drawn with A on the y-axis, B on the x-axis, and C at the point $(13; 8)$. What is the area of the square?
(USA *Florida Atlantic University*, Stuyvesant Alumni Math Competition, 2000)

60 Find the equation of the line through $(2; 4)$ with slope 6.
(CAN *John Abbott College*, Final Exam, 2000)

61 P and Q are two points having coordinates $(-1; 3)$ and $(5; -1)$, respectively. Find:

a) slope of PQ;
b) K, the midpoint of PQ;
c) the equation of the line through K which is perpendicular to PQ. Test if this line contains the point $(4; 5)$.

(IR *Leaving Certificate Examination*, *Ordinary Level*, 1992)
$\left[\text{a) } -\frac{2}{3}; \text{ b) } K(2; 1); \text{ c) } y = 1{,}5x - 2; \text{ no}\right]$

GLOSSARY

axis: asse	**line**: retta	**slope**: pendenza
to bisect: dividere in due parti uguali	**midpoint**: punto medio	**square**: quadrato
to draw-drew-drawn: disegnare	**point**: punto	**through**: attraverso
to lie-lay-lain: giacere	**respectively**: rispettivamente	**whether**: se

CAPITOLO 10

I sistemi lineari

Internet

Più della metà delle famiglie in Italia dispone di una connessione ADSL e il numero è in continua crescita. L'offerta di tariffe e tecnologie dei gestori telefonici è sempre più ampia…

…come scegliere il contratto più conveniente?

La risposta a pag. 719

1. I sistemi di due equazioni in due incognite

Le equazioni lineari in due incognite

Consideriamo l'equazione $3x - 5y - 4 = 0$.

Si tratta di un'equazione di primo grado in due incognite, ovvero di un'equazione **lineare** in due incognite.

Una **soluzione** dell'equazione è una *coppia* di valori $(x; y)$ che rende il primo membro uguale al secondo.

Per esempio, la coppia ordinata $\left(0; -\frac{4}{5}\right)$ è una soluzione; per verificarlo basta sostituire, nell'equazione, a x il valore 0, a y il valore $-\frac{4}{5}$ e controllare che l'uguaglianza risulti soddisfatta.

Per trovare altre soluzioni è sufficiente assegnare un qualsiasi valore a x e poi risolvere rispetto a y l'equazione così ottenuta. Per esempio, se poniamo $x = 13$, l'equazione diventa:

$$39 - 5y = 4 \rightarrow -5y = 4 - 39 \rightarrow -5y = -35 \rightarrow y = \frac{35}{5} = 7.$$

Ricavando y, abbiamo ottenuto $y = 7$.

La coppia ordinata $(13; 7)$ è soluzione dell'equazione.

Possiamo trovare altre soluzioni allo stesso modo, attribuendo diversi valori a x e ricavando i rispettivi valori di y.
Poiché le coppie $(x; y)$ che soddisfano l'equazione sono infinite, ogni equazione lineare in due incognite è *indeterminata*.

> Dire che le soluzioni sono infinite non significa dire che qualunque coppia di numeri è soluzione dell'equazione. Per esempio, la coppia $(1; 1)$ non è soluzione di
> $3x - 5y - 4 = 0$.

I sistemi di due equazioni lineari in due incognite

Consideriamo, oltre all'equazione

$$3x - 5y - 4 = 0,$$

la seguente:

$$x - 2y = -1.$$

Ciascuna delle due equazioni considerate ha infinite soluzioni. Ma esistono soluzioni comuni a entrambe? Cioè, esistono coppie ordinate $(x; y)$ di valori che soddisfano **contemporaneamente** le due equazioni?

«Mettere a *sistema*» le due equazioni significa chiedersi esattamente questo.

DEFINIZIONE

Sistema di equazioni

Un sistema di equazioni è un insieme di equazioni in cui compaiono le stesse incognite, per le quali ci chiediamo quali sono le soluzioni comuni.

Per indicare un sistema, si scrivono le equazioni in colonna, racchiuse da una parentesi graffa:

$$\begin{cases} 3x - 5y - 4 = 0 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

Le soluzioni comuni a tutte le equazioni sono le **soluzioni del sistema**.
Si dice che un **sistema** è **impossibile** se non ha soluzioni, che è **determinato** se ha un numero finito di soluzioni, che è **indeterminato** se ha un numero infinito di soluzioni.

Così come un'equazione di primo grado è anche detta «lineare», un sistema formato soltanto da equazioni di primo grado è detto **sistema lineare**.
Per il momento ci occupiamo solo di sistemi lineari di due equazioni in due incognite.

> Se una coppia di numeri reali è soluzione di un sistema, allora sostituendo i due numeri al posto delle incognite in entrambe le equazioni del sistema si ottengono due uguaglianze vere.
> Per esempio, il sistema
> $$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 4x - y - 1 = 0 \end{cases}$$
> ha come soluzione la coppia di numeri $(1; 3)$, perché per $x = 1$ e $y = 3$ sono soddisfatte tutte e due le equazioni.
> La coppia $(0; 0)$ **non** è soluzione del sistema, perché soddisfa la prima equazione ma non la seconda.

Il grado di un sistema

DEFINIZIONE

Grado di un sistema

Il grado di un sistema di equazioni algebriche intere è il prodotto dei gradi delle singole equazioni che lo compongono.

ESEMPIO

Il sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 4x - 5y = -2 \end{cases}$$

è di primo grado, perché è formato da due equazioni di primo grado; il prodotto dei gradi è dunque $1 \cdot 1 = 1$.

Il grado del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 3 = 0 \\ 7x - xy = 0 \end{cases}$$

è 4.
Perché?

Facendo uso dei princìpi di equivalenza delle equazioni, possiamo sempre scrivere un sistema lineare, equivalente a quello dato, in **forma normale**, cioè nella forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

dove i valori a, a_1 e b, b_1 indicano, rispettivamente, i **coefficienti** delle incognite x e y, e dove c e c_1 indicano i **termini noti** delle due equazioni.

Due sistemi sono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

a, a_1, b, b_1, c, c_1 sono numeri reali.

2. Il metodo di sostituzione

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ► V29a

Dopo averlo ridotto in forma normale applicando i princìpi di equivalenza delle equazioni, per risolvere un sistema si possono utilizzare diversi metodi.

Cominciamo esaminando il **metodo di sostituzione**.

ESEMPIO

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases} \longrightarrow x = \boxed{3 - 5y}$$

a. Ricaviamo *x* dalla prima equazione.

$$\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2\boxed{(3 - 5y)} - 4y = -8 \end{cases}$$

b. Sostituiamo a *x* nella seconda equazione l'espressione trovata.

$$\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 6 - 10y - 4y = -8 \end{cases} \longrightarrow -14y = -14 \longrightarrow y = \boxed{1}$$

c. Ricaviamo il valore di *y* dalla seconda equazione.

$$\begin{cases} x + 5 \cdot \boxed{1} = 3 \longrightarrow x = 3 - 5 = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

d. Sostituiamo a *y* nella prima equazione il valore trovato e calcoliamo *x*.

▲ Figura 1

La coppia $(-2; 1)$ è la soluzione del sistema.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V30a

3. I sistemi determinati, impossibili, indeterminati

I sistemi determinati

Un sistema si dice **determinato** quando ha un numero finito di soluzioni. In particolare, si può dimostrare che un sistema lineare e determinato ha una sola soluzione.

ESEMPIO

Il sistema precedente $\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$ è determinato e la sua soluzione è la coppia di numeri reali $(-2; 1)$.

Osserviamo che il rapporto fra i coefficienti di x, cioè $\frac{1}{2}$, è diverso dal rapporto fra i coefficienti di y, che vale $-\frac{5}{4}$.

▶ $\begin{cases} 1x + 5y = 3 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$

Consideriamo un generico sistema scritto in forma normale:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases} \quad \text{con } a, a_1, b, b_1 \neq 0.$$

Esso è **determinato** quando il rapporto fra i coefficienti di x, $\frac{a}{a_1}$, è diverso dal rapporto fra i coefficienti di y, $\frac{b}{b_1}$, ossia quando:

$$\boldsymbol{\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}}.$$

▶ Questa affermazione può essere dimostrata; noi qui diamo solo una giustificazione grafica.

Interpretazione grafica

Nel piano cartesiano, ogni equazione lineare in due incognite individua una retta. È quindi possibile dare un'interpretazione grafica anche dei sistemi lineari di due equazioni in due incognite x e y.

▶ Ogni coppia $(x; y)$ soluzione di un'equazione lineare corrisponde a un punto e tali punti sono tutti e solo i punti di una retta.

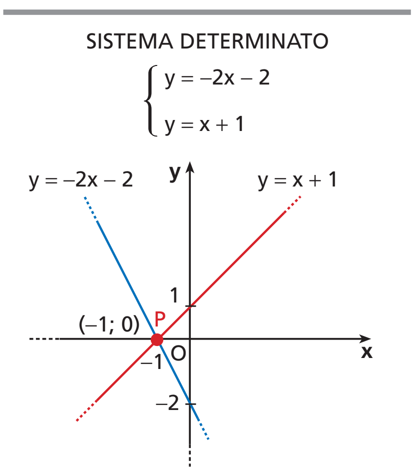
ESEMPIO

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -2x - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ciascuna equazione del sistema ha per soluzioni le coordinate $(x; y)$ dei punti della retta che la rappresenta.

$(-1; 0)$, unica soluzione del sistema, è l'unico punto in comune alle due rette.



▶ **Figura 2** Le rette di equazioni $y = x + 1$ e $y = -2x - 2$ si intersecano nel punto $P(-1; 0)$: il sistema è determinato e la sua soluzione è la coppia $(-1; 0)$ delle coordinate di P.

In generale, consideriamo le rette r e s di equazioni

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & \text{retta } r \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 & \text{retta } s \end{cases}$$

Esplicitiamo le due equazioni, supponendo che a, a_1, b, b_1 siano non nulli:

$$\begin{cases} by = -ax - c \\ b_1y = -a_1x - c_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b} \\ y = -\dfrac{a_1}{b_1}x - \dfrac{c_1}{b_1} \end{cases}$$

Le rette r e s sono scritte così in forma esplicita.

Le rette r e s si intersecano se non sono parallele, cioè se hanno coefficienti angolari diversi, ovvero se

$$-\frac{a}{b} \neq -\frac{a_1}{b_1}.$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per $-\dfrac{b}{a_1}$:

$$-\frac{a}{b} \cdot \left(-\frac{b}{a_1}\right) \neq -\frac{a_1}{b_1} \cdot \left(-\frac{b}{a_1}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}.$$

Tale condizione si può anche scrivere $\boldsymbol{ab_1 \neq a_1b}$ o anche $\boldsymbol{ab_1 - a_1b \neq 0}$.

Quest'ultima formulazione ha senso anche nel caso in cui qualcuno dei coefficienti a, b_1, a_1, b sia nullo.

I sistemi impossibili

Un sistema è **impossibile** quando non ammette soluzioni.

ESEMPIO

Risolviamo il seguente sistema con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+3y}{2} \\ 2 \cdot \dfrac{1+3y}{2} - 3y = 7 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+3y}{2} \\ 1 + 3y - 3y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+3y}{2} \\ 0 \cdot y = 6 \end{cases}$$

Poiché siamo giunti a un'equazione impossibile, il sistema non ha soluzione; quindi è impossibile.

Osserviamo che nel sistema considerato il rapporto fra i coefficienti di x, $\dfrac{2}{2}$, è uguale al rapporto fra i coefficienti di y, $\dfrac{-3}{-3}$, mentre tale rapporto è diverso da quello fra i termini noti, $\dfrac{1}{7}$.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$$

Consideriamo un generico sistema scritto in forma normale:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases} \qquad \text{con } a, a_1, b, b_1 \neq 0.$$

Esso è **impossibile** quando il rapporto fra i coefficienti di x, $\frac{a}{a_1}$, è uguale al rapporto fra i coefficienti di y, $\frac{b}{b_1}$, e tale rapporto è diverso dal rapporto fra i termini noti, $\frac{c}{c_1}$, ossia:

$$\boldsymbol{\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}}.$$

Questa condizione si può anche scrivere come $\boldsymbol{ab_1 - a_1b = 0}$ e $\boldsymbol{b_1c - bc_1 \neq 0}$, e tale formulazione può essere utilizzata anche quando qualcuno dei coefficienti a, b, a_1, b_1, c, c_1 è nullo.

Osservazione. Nel caso particolare dell'esempio, potevamo giungere alla conclusione che il sistema dato è impossibile senza effettuare calcoli. Bastava infatti osservare che il sistema è formato da due equazioni che differiscono fra loro solo per il termine noto: per nessun valore di x e di y il binomio $2x - 3y$ può essere uguale a 1 e contemporaneamente anche a 7! Il sistema è dunque impossibile.

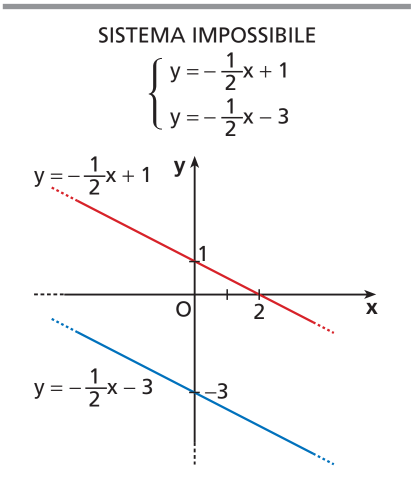
Interpretazione grafica

ESEMPIO

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 1 \\ y = -\dfrac{1}{2}x - 3 \end{cases}$$

Mediante interpretazione grafica possiamo dire che è impossibile. Infatti, le due equazioni individuano rispettivamente due rette con uguale coefficiente angolare e differente termine noto, ossia parallele e distinte.



▶ **Figura 3** Le rette di equazione $y = -\frac{1}{2}x + 1$ e $y = -\frac{1}{2}x - 3$ sono parallele e distinte, quindi non si incontrano in alcun punto: il sistema è impossibile.

Per passare al caso generale, consideriamo di nuovo le rette di equazione:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b} & \text{retta } r \\ y = -\dfrac{a_1}{b_1}x - \dfrac{c_1}{b_1} & \text{retta } s \end{cases}$$

Le rette r e s sono parallele e distinte se hanno uguali i coefficienti angolari ma diversi i termini noti, cioè se:

$$-\frac{a}{b}=-\frac{a_1}{b_1} \quad \text{e} \quad -\frac{c}{b}\neq-\frac{c_1}{b_1}.$$

La prima condizione, come abbiamo visto, equivale a:

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}.$$

Moltiplicando entrambi i membri della seconda condizione per $-\frac{b}{c_1}$ ed eseguendo le semplificazioni, si ottiene:

$$\frac{c}{c_1}\neq\frac{b}{b_1}.$$

Le due condizioni messe assieme danno:

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}\neq\frac{c}{c_1}.$$

Questa è proprio la condizione di «sistema impossibile».

I sistemi indeterminati

Un sistema è **indeterminato** quando ha infinite soluzioni.

ESEMPIO

Risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 15x-6y=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+2y}{5} \\ 15\cdot\dfrac{1+2y}{5}-6y=3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+2y}{5} \\ 3+6y-6y=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+2y}{5} \\ 0\cdot y=0 \end{cases}$$

Poiché siamo giunti a un'equazione indeterminata, il sistema ha infinite soluzioni; quindi è indeterminato.

Osserviamo che nel sistema considerato i rapporti fra i coefficienti di x, quelli di y e fra i termini noti sono uguali:

$$\frac{5}{15}=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}.$$

$$-\frac{c}{b}\left(-\frac{b}{c_1}\right)\neq -\frac{c_1}{b_1}\left(-\frac{b}{c_1}\right)$$

L'equazione

$$0\cdot y=0$$

ha infinite soluzioni; attribuendo a y un valore qualsiasi e sostituendolo nell'equazione

$$x=\frac{1+2y}{5},$$

si ottengono infinite soluzioni.

$$\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 15x-6y=3 \end{cases}$$

Un generico sistema scritto in forma normale,

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases} \text{con } a, a_1, b, b_1 \neq 0,$$

è **indeterminato** quando il rapporto fra i coefficienti di x, $\frac{a}{a_1}$, è uguale al rapporto fra i coefficienti di y, $\frac{b}{b_1}$, e al rapporto fra i termini noti, $\frac{c}{c_1}$, ossia:

$$\boldsymbol{\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}}.$$

In sintesi

Il sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

è

- **determinato** se $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$
- **impossibile** se $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$
- **indeterminato** se $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

La condizione si può scrivere nella forma $\boldsymbol{ab_1 - a_1b = 0}$ e $\boldsymbol{b_1c - bc_1 = 0}$, che ha senso anche quando qualcuno dei coefficienti a, a_1, b, b_1, c, c_1 è nullo.

Osservazione. Nel caso particolare dell'esempio, potevamo giungere alla conclusione che il sistema è indeterminato senza risolverlo. Basta infatti osservare che, moltiplicando per 3 entrambi i membri della prima equazione, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 15x - 6y = 3 \\ 15x - 6y = 3 \end{cases}$$

Il sistema risulta formato da due equazioni equivalenti. Le soluzioni del sistema sono dunque tutte le infinite coppie di valori che soddisfano l'equazione in due incognite $15x - 6y = 3$: il sistema è indeterminato.

Interpretazione grafica

ESEMPIO

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 3y = 6x + 3 \end{cases}$$

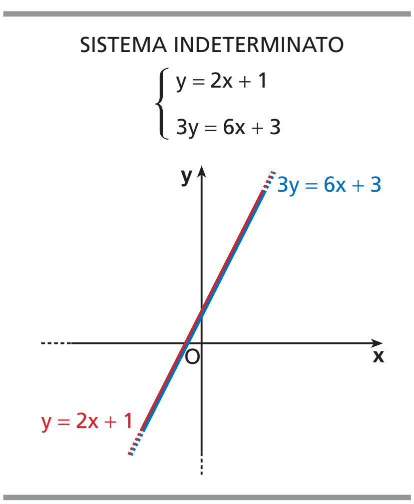
Se scriviamo le due equazioni del sistema in forma esplicita, ci accorgiamo che coincidono:

$$y = 2x + 1 \quad (1^a \text{ equazione});$$

$$3y = 6x + 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{3y}{3} = \frac{6x}{3} + \frac{3}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 2x + 1 \quad (2^a \text{ equazione}).$$



▶ **Figura 4** Le rette di equazioni $y = 2x + 1$ e $3y = 6x + 3$ coincidono: il sistema è indeterminato. Le sue soluzioni sono le infinite coppie costituite dalle coordinate dei punti della retta.

Pertanto coincidono anche le rette che tali equazioni individuano: le infinite soluzioni del sistema sono le coordinate degli infiniti punti in comune alle due rette.

In generale, consideriamo le equazioni delle rette r e s:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b} & \text{retta } r \\ y = -\dfrac{a_1}{b_1}x - \dfrac{c_1}{b_1} & \text{retta } s \end{cases}$$

Le due rette r e s coincidono se hanno lo stesso coefficiente angolare e lo stesso termine noto, cioè se

$$-\frac{a}{b} = -\frac{a_1}{b_1} \quad \text{e} \quad -\frac{c}{b} = -\frac{c_1}{b_1};$$

le due condizioni si riconducono, con passaggi analoghi a quelli già visti, a:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Questa è la condizione di «sistema indeterminato».

4. Il metodo del confronto

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V29b

Risolviamo un sistema lineare con il **metodo del confronto**.

ESEMPIO

Risolviamo il sistema: $\begin{cases} 5x + y = -2 \\ 2x - y = 16 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x + y = -2 \\ 2x - y = 16 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} y = \boxed{-2 - 5x} \\ -y = 16 - 2x \\ y = \boxed{-16 + 2x} \end{array}$$

a. Ricaviamo y dalle due equazioni.

$$\begin{cases} \boxed{-2 - 5x} = \boxed{-16 + 2x} \\ y = -16 + 2x \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{r} -5x - 2x = -16 + 2 \\ -7x = -14 \\ x = 2 \end{array}$$

b. Uguagliamo le due espressioni di y: otteniamo un'equazione nella sola incognita x, che risolviamo.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -16 + 2 \cdot 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} y = -16 + 4 \\ y = -12 \end{array}$$

c. Sostituiamo a x il valore 2 nella seconda equazione e ricaviamo y.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -12 \end{cases}$$

d. La soluzione del sistema è una sola ed è $(2; -12)$.

▲ **Figura 5** Nelle due equazioni invece di y, possiamo anche ricavare x.

La coppia $(2; -12)$ è la soluzione del sistema.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V31a

5. Il metodo di riduzione

Il metodo di riduzione è anche detto **metodo di addizione e sottrazione**, perché per applicarlo è necessario sommare (o sottrarre) membro a membro le equazioni del sistema.

ESEMPIO

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 27 \\ 2x + 8y = -14 \end{cases}$$

Per eliminare l'incognita y moltiplichiamo i due membri della prima equazione per 2 e sommiamo le equazioni membro a membro:

▶ Applichiamo il secondo e il primo principio di equivalenza delle equazioni.

$$\cdot 2 \begin{cases} 6x - 8y = 54 \\ 2x + 8y = -14 \end{cases} \rightarrow \quad + \begin{cases} 6x - 8y = 54 \\ 2x + 8y = -14 \end{cases} \qquad \rightarrow$$
$$\overline{8x \qquad = 40}$$

$$\rightarrow x = \frac{40}{8} = 5.$$

Per determinare il valore di y, sostituiamo il valore trovato per l'incognita x in una delle due equazioni e ricaviamo y:

$$\begin{cases} x = 5 \\ 2 \cdot 5 + 8y = -14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 8y = -24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è $(5; -3)$.

▶ In alternativa, è possibile utilizzare il metodo di riduzione, moltiplicando la prima equazione per 2 e la seconda per 3 e sottraendo poi membro a membro.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V32a

6. Il metodo di Cramer

Si può vedere (per esempio con il metodo di riduzione) che la soluzione del sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

è data dalle formule:

$$x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b} \quad \text{e} \quad y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}, \quad \text{con } ab_1 - a_1b \neq 0.$$

Esaminiamo ora un metodo semplice per ricordare queste formule. Utilizzeremo i determinanti.

Chiamiamo **determinante** D del sistema il numero definito da:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - ba_1.$$

Analogamente possiamo scrivere altri due determinanti.

▶ Ecco un esempio numerico di calcolo di determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7.$$

1. Determinante D_x: nella prima colonna del determinante del sistema sostituiamo i termini noti ai coefficienti di x. Scriviamo quindi:

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = cb_1 - bc_1.$$

2. Determinante D_y: nella seconda colonna del determinante del sistema sostituiamo i termini noti ai coefficienti di y. Scriviamo quindi:

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = ac_1 - ca_1.$$

Riscriviamo le soluzioni del sistema utilizzando i determinanti:

$$x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D} \to \boxed{\boldsymbol{x = \frac{D_x}{D}}}$$

$$y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D} \to \boxed{\boldsymbol{y = \frac{D_y}{D}}}.$$

Le frazioni che esprimono la soluzione $(x; y)$ hanno senso, perché stiamo supponendo $D = ab_1 - a_1b \neq 0$.

Se $D \neq 0$, la soluzione $\left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D}\right)$ esiste: il sistema è **determinato**.

Se $D = 0$, i casi sono due:

- se $D_x = 0$ e $D_y = 0$, il sistema è **indeterminato**;
- se $D_x \neq 0$ oppure $D_y \neq 0$, il sistema è **impossibile**.

Questo metodo per risolvere un sistema lineare è noto come **metodo di Cramer**.

▶ Gabriel Cramer (1704-1752), matematico svizzero, utilizzò la regola che prende il suo nome verso il 1750.

In sintesi

Se $D \neq 0$, il sistema è determinato e la soluzione è $\left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D}\right)$.

Se $D = 0$, il sistema è:

- impossibile se $D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0$;
- indeterminato se $D_x = 0 \wedge D_y = 0$.

ESEMPIO

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 5x + y = -2 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

Calcoliamo il determinante del sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5(-1) - 1(2) = -5 - 2 = -7.$$

Calcoliamo D_x e D_y:

$$D_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1) - 1(-1) = 2 + 1 = 3;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) - (-2)2 = -5 + 4 = -1.$$

La soluzione è:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}; \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}.$$

Il sistema ha come soluzione la coppia $\left(-\frac{3}{7}; \frac{1}{7}\right)$.

7. I sistemi letterali

La discussione di un sistema lineare

Abbiamo anticipato al paragrafo 3 che è possibile stabilire se un sistema, scritto in forma normale, è determinato, indeterminato o impossibile, confrontando i rapporti fra i coefficienti delle incognite e quelli dei termini noti. Diamo ora la dimostrazione delle affermazioni fatte, servendoci del metodo di riduzione.

Cerchiamo la soluzione del sistema nelle incognite x e y:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases} \qquad \text{con } a, a_1, b, b_1, c, c_1 \neq 0.$$

Applichiamo il metodo di riduzione per ricavare x:

$$\begin{cases} ax + by = c \xrightarrow{\cdot b_1} ab_1x + bb_1y = b_1c \\ a_1x + b_1y = c_1 \xrightarrow{\cdot b} a_1bx + bb_1y = bc_1 \end{cases}$$

$$\ominus \begin{cases} ab_1x + bb_1y = b_1c \\ a_1bx + bb_1y = bc_1 \end{cases}$$

$$ab_1x - a_1bx = b_1c - bc_1$$

$$\boldsymbol{x(ab_1 - a_1b) = b_1c - bc_1}.$$

Se applichiamo il metodo di riduzione al sistema iniziale per ricavare y, con calcoli analoghi otteniamo:

$$\boldsymbol{y(ab_1 - a_1b) = ac_1 - a_1c}.$$

- Se $ab_1 - a_1b \neq 0$, il sistema iniziale è **determinato**. Infatti, il sistema è equivalente a quello formato dalle due equazioni ottenute con il metodo di riduzione:

$$\begin{cases} x(ab_1 - a_1b) = b_1c - bc_1 \\ y(ab_1 - a_1b) = ac_1 - a_1c \end{cases}$$

dal quale si ricava l'unica soluzione:

$$x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b}; \qquad y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}.$$

Poiché $ab_1 - a_1b \neq 0$ equivale a $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$, il sistema iniziale è determinato se $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$.

- Se $ab_1 - a_1b = 0$, il sistema iniziale è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ x(ab_1 - a_1b) = b_1c - bc_1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} ax + by = c \\ 0 \cdot x = b_1c - bc_1 \end{cases}$$

Distinguiamo due casi.

1. Se $b_1c - bc_1 = 0$, il precedente sistema è **indeterminato**. Infatti la seconda equazione diventa $0 \cdot x = 0$ e il sistema si riduce alla sola equazione $ax + by = c$, che ha infinite soluzioni.

   Poiché $b_1c - bc_1 = 0$ equivale a $\frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ e poiché $ab_1 - a_1b = 0$ equivale a $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$, il sistema iniziale è indeterminato se $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$.

2. Se $b_1c - bc_1 \neq 0$, il sistema è **impossibile**, perché, nella seconda equazione, $0 \cdot x$ non può essere uguale all'espressione $b_1c - bc_1$, che è un numero diverso da 0.

   Poiché $b_1c - bc_1 \neq 0$ equivale a $\frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$, e $ac_1 - a_1c \neq 0$ equivale a $\frac{a}{a_1} \neq \frac{c}{c_1}$, tenendo conto che $ab_1 - a_1b = 0$, ossia che $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$, il sistema risulta impossibile quando $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$.

La risoluzione di un sistema letterale intero

I sistemi letterali sono sistemi che presentano almeno un'equazione letterale.
Nelle soluzioni di un sistema letterale è necessario discutere per quali valori delle lettere presenti il sistema è determinato, indeterminato o impossibile.

Negli esercizi troverai esempi di sistemi letterali fratti. Un sistema si dice **fratto** se contiene almeno un'equazione fratta.

ESEMPIO

Risolviamo il seguente sistema nelle incognite x e y con il metodo del confronto.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ ax + 2y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ y = \dfrac{1 - ax}{2} \end{cases}$$

Uguagliamo le due espressioni ottenute e scriviamo in forma normale l'equazione in una sola incognita:

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ 2 - x = \dfrac{1 - ax}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ 4 - 2x = 1 - ax \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ (a - 2)x = -3 \end{cases}$$

- Se $a - 2 = 0$, cioè se $a = 2$, nella seconda equazione otteniamo $0x = -3$ e quindi il sistema è impossibile.
- Se $a - 2 \neq 0$, cioè se $a \neq 2$, possiamo dividere la seconda equazione per $a - 2$ ottenendo:

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ x = -\dfrac{3}{a - 2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 + \dfrac{3}{a - 2} \\ x = -\dfrac{3}{a - 2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2a - 1}{a - 2} \\ x = -\dfrac{3}{a - 2} \end{cases}$$

In sintesi

- Se $a \neq 2$, il sistema è determinato e la soluzione è $\left(-\dfrac{3}{a - 2}; \dfrac{2a - 1}{a - 2}\right)$.
- Se $a = 2$, il sistema è impossibile.

Negli esercizi risolveremo i sistemi letterali anche con gli altri metodi di risoluzione.

8. I sistemi di tre equazioni in tre incognite

La risoluzione per sostituzione, per confronto, per riduzione

I metodi risolutivi di sostituzione, del confronto e di riduzione possono essere applicati anche a sistemi di primo grado di tre (o più) equazioni in tre (o più) incognite.

ESEMPIO Risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 3x - y + 4z = -3 \\ -x - y + 2z = -5 \end{cases}$$

Osserviamo che, nel caso di un sistema di tre equazioni nelle tre incognite x, y, z, la soluzione è una **terna** di valori

$$(x; y; z)$$

che risolve contemporaneamente tutte le equazioni del sistema.

Applichiamo il metodo di **sostituzione**. Ricaviamo y dalla prima equazione e sostituiamo l'espressione trovata *nelle altre due* equazioni:

$$\begin{cases} y = 5 - 2x + z \\ 3x - (5 - 2x + z) + 4z = -3 \\ -x - (5 - 2x + z) + 2z = -5 \end{cases}$$

La seconda e la terza equazione formano ora un sistema nelle incognite x e z: scriviamo questo sistema in forma normale e lo risolviamo con il metodo di **riduzione**:

$$\begin{cases} y = 5 - 2x + z \\ 5x + 3z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 3} \begin{array}{l} \begin{cases} y = 5 - 2x + z \\ 5x + 3z = 2 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases} \\ \hline 2x \qquad = 2 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x + z \\ 2x = 2 \\ x + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x + z \\ x = 1 \\ 1 + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x + z \\ x = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Sostituiamo nella prima equazione i valori trovati di x e z e determiniamo il valore di y:

$$\begin{cases} y = 5 - 2 \cdot 1 + (-1) = 2 \\ x = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è data dalla terna $(1; 2; -1)$.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V33a

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Bruciare metano

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Combinando molecole di metano (CH_4) con molecole di ossigeno (O_2), si ottengono, per combustione, molecole di diossido di carbonio (CO_2) e acqua (H_2O) secondo la reazione $CH_4 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$. Che relazione c'è tra le molecole di metano, ossigeno, diossido di carbonio e acqua coinvolte?

FRANCESCO: «Basta leggere lo schema: una molecola di metano e una di ossigeno danno una di diossido di carbonio e una di acqua».

MARIA: «Non direi. Nella reazione ci sono tre elementi, C, H e O, cioè carbonio, idrogeno e ossigeno. Il numero di atomi di ognuno, in una molecola, è in basso a destra. La reazione va bilanciata: gli atomi che ci sono prima e dopo la combustione devono essere gli stessi».

▶ Trova, utilizzando un sistema, quale coefficiente numerico assegnare a ciascuna molecola.

ESPLORAZIONE: PROBLEMI CINESI E SISTEMI

▲ Anziano Han con il copricapo degli antichi mandarini. La dinastia imperiale Han governò dal 206 a.C. al 220 d.C. e diede in seguito il nome alla popolazione di etnia cinese, per differenziarla dalle numerose minoranze presenti in Cina. Oggi la popolazione Han costituisce circa il 90% della popolazione totale della Cina.

GAUSS

La paternità del metodo di riduzione è generalmente attribuita a Karl Friedrich Gauss, matematico tedesco che tra il 1803 e il 1809, per studiare l'orbita di un asteroide, si trovò a risolvere un sistema di sei equazioni lineari in sei incognite. Fu così che formulò le regole generali di quello che, da allora, è noto anche come metodo di eliminazione gaussiana.

CHIU CHANG SUAN SHU

Senza nulla togliere alla genialità del giovane scienziato, le origini della tecnica risolutiva che ha preso il suo nome sono molto anteriori. Vanno infatti rintracciate nella matematica cinese, alcuni secoli prima della nascita di Cristo, al tempo della dinastia Han (202 a.C.). Nel libro *Chiu Chang Suan Shu*, ossia *Nove capitoli sull'arte matematica*, forse la più importante tra le opere matematiche dell'antica Cina, si trovano quasi 250 problemi, alcuni dei quali vengono risolti mediante sistemi di equazioni lineari.

Non vogliamo qui esaminare il metodo utilizzato per la soluzione, ma soltanto presentare esempi di problemi. Consideriamo il seguente, dove il *tou* è l'unità di misura utilizzata.

> «Il rendimento di 2 covoni di grano buono, di 3 covoni di grano medio e di 4 di grano scarso è per ognuno meno di 1 tou.
> Tuttavia, se 1 covone di grano medio viene aggiunto al grano buono, o se 1 covone di grano scarso viene aggiunto al medio, o se 1 covone di grano buono viene aggiunto allo scarso, allora il rendimento di tutti è proprio 1 tou.
> Qual è il rendimento di 1 covone di ogni qualità?»

Oggi noi risolveremmo il problema scegliendo tre incognite x, y, z, relative ai tre rendimenti, e scrivendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3y + z = 1 \\ 4z + x = 1 \end{cases}$$

con le condizioni $2x < 1$, $3y < 1$, $4z < 1$.
La soluzione del sistema è:

$$x = \frac{9}{25}, y = \frac{7}{25}, z = \frac{4}{25}.$$

IN CINQUE SLIDE

Nell'ottavo dei *Nove capitoli* si trova il quesito seguente.

> «Ci sono tre tipi di granturco, di cui tre fasci del primo, due del secondo e uno del terzo fanno 39 misure. Due del primo, tre del secondo e uno del terzo fanno 34 misure e uno del primo, due del secondo e tre del terzo fanno 26 misure. Quante misure di granturco sono contenute in un fascio di ciascun tipo?»

Risolvi il problema con un sistema, utilizzando il metodo che ritieni migliore, e cerca in Internet come il sistema è stato risolto nel *Chiu Chang*. Mostra ai tuoi compagni il tuo lavoro con una presentazione multimediale.

Cerca nel web: sistemi lineari cinesi, Chiu Chang Suan Shu, "make 39 measures", "fanno 39 misure".

Internet

…come scegliere il contratto più conveniente?

Il quesito completo a pag. 703

Molti contratti telefonici hanno questa struttura: l'utente deve pagare un costo fisso c_f e una quota variabile, che dipende dal tempo di connessione t.
Indicata con c_u la quota per unità di tempo, si può esprimere il costo c di un collegamento come: $c = c_f + c_u \cdot t$.

Consideriamo l'offerta di due compagnie, A e B.
A stabilisce una quota fissa (canone) di € 9 mensili, più un centesimo per ogni minuto di connessione; B invece chiede una quota fissa di un euro al mese e 3 centesimi per ogni minuto di connessione. Quindi:

$$c_A = 9 + 0{,}01 \cdot t,$$
$$c_B = 1 + 0{,}03 \cdot t,$$

dove t è il tempo di connessione in un mese, espresso in minuti.

Rappresentiamo le due equazioni come due rette in un piano cartesiano che ha il tempo t in ascissa e il costo c in ordinata.
A seconda del tempo che prevediamo di passare connessi alla rete, converrà scegliere la compagnia A o la B.
Se, per esempio, pensiamo di stare collegati 3 ore in tutto il mese, il prezzo da pagare a ogni società sarà:

$$c_A = 9 + 0{,}01 \cdot 3 \cdot 60 = € \; 10{,}80,$$
$$c_B = 1 + 0{,}03 \cdot 3 \cdot 60 = € \; 6{,}40.$$

Per un tempo così breve, B è il contratto più conveniente.
Se però prevediamo di stare connessi 1 ora al giorno, 5 giorni la settimana, e quindi per un totale di 20 ore, i costi saranno:

$$c_A = 9 + 0{,}01 \cdot 20 \cdot 60 = € \; 21,$$
$$c_B = 1 + 0{,}03 \cdot 20 \cdot 60 = € \; 37.$$

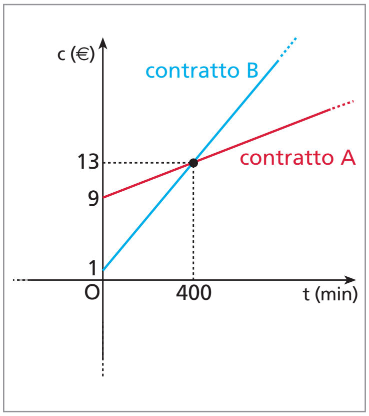
In tal caso, la compagnia più conveniente è la A.

Troviamo l'intersezione delle due rette risolvendo il sistema lineare in c e t:

$$\begin{cases} c = 9 + 0{,}01 \cdot t \\ c = 1 + 0{,}03 \cdot t \end{cases}$$

Esso ha soluzione:

$$\begin{cases} t = 400 \\ c = 13 \end{cases}$$



Al tempo $t = 400$ minuti, equivalente a poco più di 6 ore e mezzo, corrisponde un costo di € 13 per ciascuna delle due compagnie.

Se pensiamo di stare collegati circa 6 ore e mezzo al mese, i due contratti sono equivalenti e possiamo scegliere indifferentemente l'uno o l'altro. Se prevediamo un tempo di connessione inferiore, sceglieremo il contratto B; viceversa, opteremo per la compagnia A.

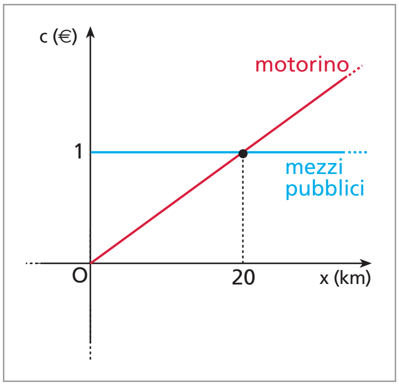
VIAGGIARE IN MOTORINO O IN AUTOBUS?

Supponiamo di possedere un motorino e di voler capire se conviene di più, dal punto di vista economico, spostarci con quello o usare i mezzi pubblici. Supponiamo che nella città in cui viviamo si usi il biglietto orario: con € 1 possiamo prendere per un'ora tutti i mezzi pubblici.
Il costo del viaggio in autobus per un'ora è dunque: $c_a = 1$ (in €).
La spesa del viaggio in motorino per un'ora dipende invece dai kilometri x percorsi; se il motorino consuma un litro di benzina ogni 25 kilometri e questa costa € 1,25 al litro, il costo del viaggio è:

$$c_m = \frac{1{,}25}{25} x \rightarrow c_m = 0{,}05x \text{ (in €)}.$$

Risolvendo il sistema $\begin{cases} c = 1 \\ c = 0{,}05x \end{cases}$ **troviamo il punto di intersezione delle rette corrispondenti alle due equazioni, ovvero** $\begin{cases} c = 1 \\ x = 20 \end{cases}$

In conclusione, dal grafico notiamo che, se dobbiamo percorrere meno di 20 kilometri, ci conviene usare il motorino, mentre sarà più economico usare i mezzi pubblici per tragitti più lunghi.



LA TEORIA IN SINTESI
I sistemi lineari

1. I sistemi di due equazioni in due incognite

Un **sistema di equazioni** è un insieme di due o più equazioni nelle stesse incognite. Il sistema è detto **lineare** se formato da equazioni di primo grado.

Il **grado** di un sistema di equazioni algebriche intere è il prodotto dei gradi delle singole equazioni che lo compongono.

La soluzione di un sistema è una soluzione comune a tutte le equazioni che lo compongono.

ESEMPIO

Il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 6x - y = 8 \end{cases}$$

ha come soluzione la coppia $(1; -2)$, mentre la coppia $(0; 0)$ non è soluzione del sistema perché soddisfa solo la prima equazione.

Prima di applicare qualsiasi metodo risolutivo a un sistema lineare è bene ridurlo a **forma normale**, cioè:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

2. Il metodo di sostituzione

Lo schema risolutivo di un sistema lineare di due equazioni in due incognite con il metodo di **sostituzione** è il seguente:

$$\begin{cases} 4x + y = 5 \quad \rightarrow \quad y = 5 - 4x \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - 4x \\ 3x - 2(5 - 4x) = 12 \quad \rightarrow \quad x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - 4 \cdot 2 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

3. I sistemi determinati, impossibili, indeterminati

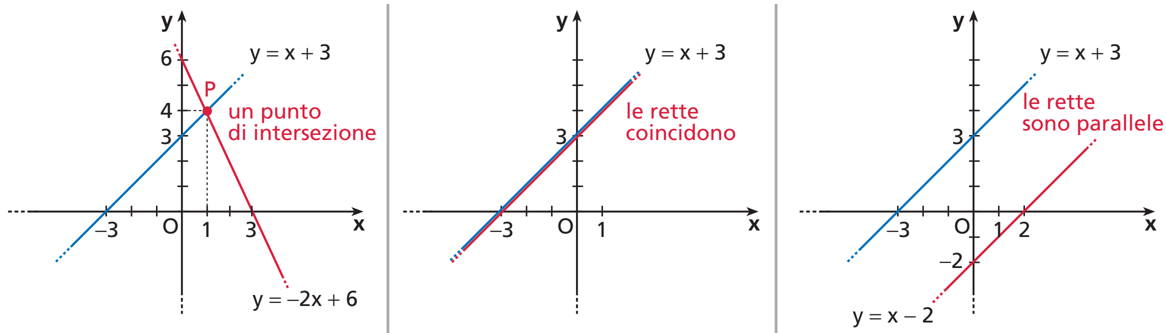
Un sistema è **determinato**, **impossibile** o **indeterminato** a seconda che abbia una, nessuna o infinite soluzioni.

Il sistema lineare $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$ è

- determinato se $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$;
- indeterminato se $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$;
- impossibile se $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$.

Se studiamo il problema in termini geometrici, le equazioni di un sistema lineare di due equazioni in due incognite sono le equazioni di due rette. Se il sistema è:

- **determinato**, le due rette si intersecano in un punto;
- **indeterminato**, le due rette sono coincidenti;
- **impossibile**, le due rette sono parallele.



$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

P (1; 4)

Il sistema è determinato

$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ -3x + 3y = 9 \end{cases}$$

Il sistema è indeterminato

$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ -x + y = -2 \end{cases}$$

Il sistema è impossibile

4. Il metodo del confronto

Lo schema risolutivo di un sistema lineare di due equazioni in due incognite con il metodo del **confronto** è il seguente:

$$\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$y = \frac{3x - 12}{2} \qquad y = 5 - 4x$$

$$\frac{3x - 12}{2} = 5 - 4x$$

$$x = 2$$

$$\begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

5. Il metodo di riduzione

Lo schema risolutivo di un sistema lineare di due equazioni in due incognite con il metodo di **riduzione** è il seguente:

$$\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

$\cdot 2$ Eliminiamo y $\qquad$ $\cdot 3$ Eliminiamo x; $\cdot 4$

$$+\begin{cases} 8x + 2y = 10 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \qquad -\begin{cases} 12x + 3y = 15 \\ 12x - 8y = 48 \end{cases}$$

$$11x = 22 \qquad 11y = -33$$

$$x = 2 \qquad y = -3$$

$$\begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

6. Il metodo di Cramer

Per risolvere un sistema lineare di due equazioni in due incognite si può applicare anche il **metodo di Cramer**.

$$\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \qquad \text{Poiché } D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - ba_1, \qquad D = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 3 = -11.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 12 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 12 = -22, \qquad D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 48 - 15 = 33.$$

- se $D \neq 0$, il sistema è **determinato**: $\left(x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}\right)$;
- se $D = 0$
  - → $D_x = 0$ e $D_y = 0$, il sistema è **indeterminato**;
  - → $D_x \neq 0$ o $D_y \neq 0$, il sistema è **impossibile**.

Nel nostro esempio, $D \neq 0$: il sistema è determinato e le soluzioni sono $x = \frac{-22}{-11} = 2$ e $y = \frac{33}{-11} = -3$.

7. I sistemi letterali

Per risolvere un **sistema letterale** è necessario discutere per quali valori delle lettere il sistema è determinato, indeterminato o impossibile.

8. I sistemi di tre equazioni in tre incognite

Per risolvere un **sistema lineare di tre equazioni in tre incognite** possiamo utilizzare i metodi di sostituzione, confronto e riduzione opportunamente combinati fra loro.

1. I sistemi di due equazioni in due incognite

→ Teoria a pag. 703

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 VERO O FALSO?

a) Se un sistema è lineare, allora tutte le equazioni che lo compongono sono di primo grado. V F
b) Le soluzioni di un sistema lineare sono le soluzioni comuni a tutte le equazioni del sistema. V F
c) Le soluzioni di un sistema di due equazioni in due incognite sono rappresentate da coppie di valori reali. V F
d) Se moltiplichi ciascuna equazione di un sistema per 2, tutti i valori della soluzione risulteranno moltiplicati per 2. V F
e) Un sistema di due equazioni in due incognite di 4° grado è sempre composto da due equazioni di 2° grado. V F
f) Due sistemi sono equivalenti quando tutte le soluzioni del primo sistema sono anche soluzioni del secondo sistema. V F
g) Si può sempre definire il grado di un sistema di equazioni algebriche. V F

ESERCIZI

Le equazioni lineari in due incognite

Per ogni equazione nelle incognite x e y verifica se le coppie di numeri scritte a lato sono soluzioni.

2 $2x+6y-5=0$ $\quad (0;1),\quad \left(1;\frac{1}{2}\right),\quad \left(\frac{5}{2};0\right).$ [no; sì; sì]

3 $5y+\frac{1}{2}x-1=-4y-\frac{1}{2}x$ $\quad (1;0),\quad \left(2;\frac{1}{9}\right),\quad \left(2;-\frac{1}{9}\right).$ [sì; no; sì]

4 $\frac{y-x}{5}=\frac{x-y}{3}$ $\quad (0;0),\quad (1;2),\quad (-6;-6).$ [sì; no; sì]

Le soluzioni di un sistema

Verifica se la coppia scritta di fianco a ogni sistema è soluzione del sistema oppure no.

5 $\begin{cases}5x-3y=12\\x-2y=1\end{cases}$ $\quad (3;1).$ [sì]

6 $\begin{cases}3x+2y=-1\\6x-9y=2\end{cases}$ $\quad (5;-2).$ [no]

7 $\begin{cases}3y=x+2\\x+5y=6\end{cases}$ $\quad (1;1).$ [sì]

8 $\begin{cases}x+y=2a\\6x+3ay=6a^2\end{cases}$ $\quad (0;2a).$ [sì]

9 La coppia $(1;-2)$ è soluzione di un solo sistema fra i seguenti. Quale?

a) $\begin{cases}\frac{y-1}{5}=2x+6\\\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{5}\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{y+2}{6}=x-1\\\frac{1}{2}y+1=\frac{1-x}{2}\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{4y-3}{8}=\frac{1-x}{5}\\\frac{8y+2}{3}=-x-1\end{cases}$

ASSOCIA a ogni sistema la relativa coppia soluzione.

10 $\begin{cases}x+3y=-1\\x-y=7\end{cases}$ $\begin{cases}2x-y=2\\x+2y=11\end{cases}$ $\begin{cases}3x+2y=-2\\-5x+y=-1\end{cases}$ $\quad (0;-1),\quad (5;-2),\quad (3;4).$

11 $\begin{cases}2x-6y=-1\\4x+9y=5\end{cases}$ $\begin{cases}2x-6y=-3\\4x+9y=1\end{cases}$ $\begin{cases}2x-6y=1\\4x+9y=-5\end{cases}$ $\quad \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right),\quad \left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right),\quad \left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right).$

Il grado di un sistema

12 Fra i seguenti sistemi nelle incognite x e y indica quelli di primo grado.

a) $\begin{cases}2x-y=0\\x^2-2xy=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}7x-\frac{1}{3}y+1=y\\4a^2x-2=0\end{cases}$ c) $\begin{cases}2ay+2=1-x\\3x+y=1-2y\end{cases}$

Indica il grado di ciascuno dei seguenti sistemi.

13 a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = y + 2 \\ 4x - 3y = 2y + 2 - 5x \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy = -7 \\ x = -y^2 + 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^3 - 3x^2y^2 = 0 \\ x^2y - 2 + 3xy = y \end{cases}$

14 a) $\begin{cases} y = 4x^2 - 2x + 1 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4xy - 8 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - 6y + z = 2 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$

15 **COMPLETA** i seguenti sistemi scrivendo un'equazione nelle incognite x e y in modo che il sistema formato dalle due equazioni abbia il grado indicato a fianco.

a) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$ secondo grado b) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$ primo grado

La riduzione di un sistema lineare a forma normale

ESERCIZIO GUIDA

16 Riduciamo a forma normale il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x - 5 = 7y \\ 4(y - 2x) + 10x - 3 = -2 \end{cases}$$

Dobbiamo scrivere le due equazioni nella forma $ax + by = c$, in cui compaiono le due incognite a primo membro e il termine noto a secondo membro.
Eseguiamo i calcoli:

$$\begin{cases} 2x - 7y = 5 \\ 4y - 8x + 10x = 3 - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 7y = 5 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

Fra i seguenti sistemi lineari, indica quelli scritti in forma normale e riduci poi gli altri alla stessa forma.

17 a) $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x = y + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 6x - y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 8x + 3y = 6 \\ -2x + 7y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = -y + 3 \\ y = 1 - 2x \end{cases}$

18 a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - y = 4 \\ 8y + 7x = -5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x = y + 1 \\ 3x = -2y + 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ 1 = 4x + 2y \end{cases}$

Riduci a forma normale i seguenti sistemi lineari.

19 $\begin{cases} 2x - 3y - 14 = 9 - 3x + y \\ x + 4y - 10 = +14 + 1 - 3x - 6y \end{cases}$

20 $\begin{cases} 9(x + y) - 8(x - y) = 19 \\ 4(x - y) + 2(3x - y) = 14 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 5(x - y) - 9 = 30 - x \\ 4x - 3y = 54 - 3x \end{cases}$

22 $\begin{cases} y - \dfrac{1}{10} + x = \dfrac{1 + x}{2} - \dfrac{1}{20} \\ 2x - y + \dfrac{3}{20} = 1 + x - \dfrac{1 + 2y}{3} \end{cases}$

2. Il metodo di sostituzione

Teoria a pag. 705

RIFLETTI SULLA TEORIA

23 VERO O FALSO?

a) Nel metodo di sostituzione si ricava sempre l'incognita x dalla prima equazione. V F

b) Il metodo di sostituzione non si può applicare se i termini noti delle equazioni del sistema lineare sono nulli. V F

c) Dato un sistema di due equazioni in due incognite, nel metodo di sostituzione si deve sostituire l'espressione ricavata, per una delle due incognite, da una delle due equazioni nell'altra equazione, al posto della stessa incognita. V F

24 TEST Sono dati i sistemi:

a) $\begin{cases} y = \dfrac{2x+1}{5} \\ 3x - 7\left(\dfrac{2x+1}{5}\right) = 5 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 2x - 5(3x-5) = -1 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x - 7y = 5 \end{cases}$

A a) e b) sono equivalenti al sistema c).
B solo a) è equivalente al sistema c).
C solo b) è equivalente al sistema c).
D a) e b) sono equivalenti fra loro.
E non si può stabilire se a) o b) siano equivalenti al sistema c).

25 TEST È dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x + y = -1 \end{cases}$$

Se lo si vuole risolvere con il metodo di sostituzione, risulta più semplice, dal punto di vista del calcolo:

A ricavare l'incognita x dalla prima equazione.
B ricavare l'incognita x dalla seconda equazione.
C ricavare l'incognita y dalla prima equazione.
D ricavare l'incognita y dalla seconda equazione.
E trasportare i termini noti a sinistra dell'uguale.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

26 Risolviamo il seguente sistema con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} 2y - 5 = -2x - 6 + y \\ 2(x-1) = 3(1-2y) + 19 \end{cases}$$

Riduciamo il sistema a forma normale:

$$\begin{cases} 2x + 2y - y = -6 + 5 \\ 2x - 2 = 3 - 6y + 19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 2x + 6y = 22 + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 2x + 6y = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + 3y = 12 \end{cases}$$

Ricaviamo y dalla prima equazione, perché ha il coefficiente uguale a 1, quindi il calcolo è più semplice:

$$\begin{cases} y = -1 - 2x \\ x + 3y = 12 \end{cases}$$

Sostituiamo l'espressione a y nella seconda equazione:

$$\begin{cases} y = -1 - 2x \\ x + 3(-1 - 2x) = 12 \end{cases}$$

Risolviamo la seconda equazione:

$$\begin{cases} y = -1 - 2x \\ x - 3 - 6x = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 - 2x \\ -5x = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 - 2x \\ x = -3 \end{cases}$$

Sostituiamo il valore di x nella prima equazione:

$$\begin{cases} y = -1 - 2(-3) \\ x = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = -3 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è $(-3; 5)$.

Risolvi con il metodo di sostituzione i seguenti sistemi.

27 $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 9 \end{cases}$ $[(6; 3)]$

28 $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ $[(16; 5)]$

29 $\begin{cases} 5x + y = 20 \\ 5x + 7y = 20 \end{cases}$ $[(4; 0)]$

30 $\begin{cases} x - 6y + 5 = 3 - 7y + 10 + 2x + 2 \\ x + y = 6 - 8 \end{cases}$ $[(-6; 4)]$

31 $\begin{cases} 2x - 4 = 3y \\ 4y - 1 = 2x \end{cases}$ $\left[\left(\frac{19}{2}; 5\right)\right]$

32 $\begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)\right]$

33 $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 4x + 3y = 4 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{5}{2}; -2\right)\right]$

34 $\begin{cases} 5(5x - 2) = 20x - 2(y - 3) \\ 2(x - 5) - 12y = 21(1 - y) \end{cases}$ $[(2; 3)]$

35 $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)(y + 1) = x^2 + y^2 + 3 \\ (x - 3y)(x + 3y) - x^2 + 3y = 4 - 9y^2 - 2x \end{cases}$ $\left[\left(0; \frac{4}{3}\right)\right]$

36 $\begin{cases} 3(x - 1) + 2(y + 1) - 6 = 5 \\ 2(x + 1) - 3(y - 1) = 0 \end{cases}$ $[(2; 3)]$

37 $\begin{cases} 8(x - y) + 6(x + y) - 96 = 144 \\ x + y = 40 \end{cases}$ $[(20; 20)]$

38 $\begin{cases} x - 2 = \dfrac{y}{3} - 1 + \dfrac{x}{2} \\ \dfrac{5x + 3y}{6} - 3 = \dfrac{2x - y}{4} + \dfrac{7}{12} \end{cases}$ $[(4; 3)]$

39 $\begin{cases} 3(x - 1) - 2(y - 1)^2 = 5 - 2y^2 \\ 6x(y - 1) + 3y(4 - 2x) = 0 \end{cases}$ $[(2; 1)]$

40 $\begin{cases} (x + 2)^2 - 3x + 2y = 9 + x^2 \\ -5x + 3(x - 3) + x - y = -6 \end{cases}$ $[(-11; 8)]$

41 $\begin{cases} \dfrac{x - 2}{5} - \dfrac{2y - 1}{3} = \dfrac{x + y}{15} \\ \dfrac{1}{3}x - 2y = 1 \end{cases}$ $[(-27; -5)]$

BRAVI SI DIVENTA ► E30

42 $\begin{cases} \dfrac{3}{2}(x + 1) + 4(x - y) = 3x + \dfrac{1}{3} \\ x(1 - x) + (y - 2)^2 = \dfrac{7}{3} + (y - x)(x + y) \end{cases}$

43 $\begin{cases} (y-x)[1+(y+x)]+(x+1)^2-6=-(x^2-y^2)+(x-2)(x+2) \\ 2(2x+3y)-3(x-5y)=1 \end{cases}$ $[(1;0)]$

44 $\begin{cases} x-(x-1)(1+y)=y+2+1-x-x(1+y) \\ y(1+x^2)+3x+x^2=x^2y+(1+x)^2+4y-13 \end{cases}$ $\left[\left(1;\frac{13}{3}\right)\right]$

45 $\begin{cases} \frac{1}{2}(x-3)-\frac{y-2x}{2}=x-1 \\ 2(x-y)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{y}{2}\right)+\frac{17}{6}=\frac{15-x}{3}-\frac{1}{6}(1-y) \end{cases}$ [indeterminato]

46 $\begin{cases} \frac{1}{3}(y+1)+y-3=\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{3}(x-y) \\ \frac{y-3-x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(x+1) \end{cases}$ $[(-1;3)]$

3. I sistemi determinati, impossibili, indeterminati

Teoria a pag. 706

RIFLETTI SULLA TEORIA

47 **VERO O FALSO?**

a) Se un sistema è impossibile, allora non ha soluzioni. V F
b) Un sistema è determinato quando ha una sola soluzione. V F
c) Un sistema è impossibile solo quando tutte le equazioni del sistema sono impossibili. V F
d) Il sistema $\begin{cases} \frac{1}{5}y=-2 \\ \frac{1}{3}x=-1 \end{cases}$ è indeterminato. V F
e) Il sistema $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$ individua due rette coincidenti. V F
f) Se in $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$ si ha $\frac{a}{b}\neq\frac{a_1}{b_1}$, allora il sistema è determinato. V F
g) I sistemi $\begin{cases} 2x-y=-2 \\ 6x-3y=4 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x-y=2 \\ 6x-3y=6 \end{cases}$ sono rispettivamente impossibile e indeterminato. V F
h) Se nel sistema $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$ si ha $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}\neq\frac{c}{c_1}$, allora il sistema è impossibile. V F
i) Un sistema lineare indeterminato è rappresentato graficamente da due rette parallele. V F

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

48 Stabiliamo se ognuno dei seguenti sistemi è determinato, indeterminato o impossibile senza risolverlo. Interpretiamo poi graficamente i sistemi.

a) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ -3x + 6y = -12 \end{cases}$

I tre sistemi sono scritti in forma normale, quindi confrontiamo in ognuno di essi i rapporti $\frac{a}{a_1}$ fra i coefficienti di x, $\frac{b}{b_1}$ fra i coefficienti di y e $\frac{c}{c_1}$ fra i termini noti.

a) $\begin{cases} 1x + 2y = 4 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$ $\frac{a}{a_1} = \frac{1}{3}$; $\frac{b}{b_1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$.

I rapporti tra i coefficienti di x e y sono diversi, quindi il sistema è determinato.

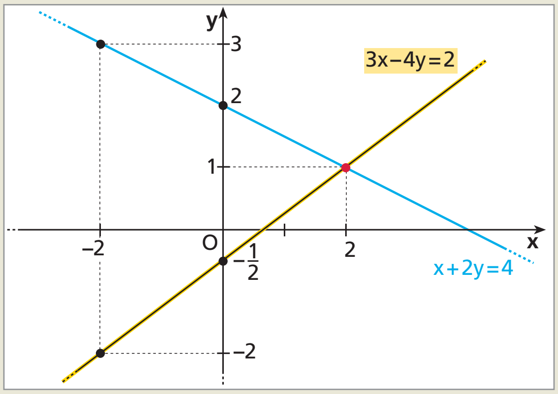
Le equazioni $x + 2y = 4$ e $3x - 4y = 2$ sono rappresentate nel piano cartesiano da due rette. Troviamo alcuni punti mediante tabelle e disegniamo le rette.

$x + 2y = 4$

x	-2	0	2
y	3	2	1

$3x - 4y = 2$

x	-2	0	2
y	-2	$-\frac{1}{2}$	1



b) $\begin{cases} 2x - 1y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$ $\frac{a}{a_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{b}{b_1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$; $\frac{c}{c_1} = \frac{1}{2}$.

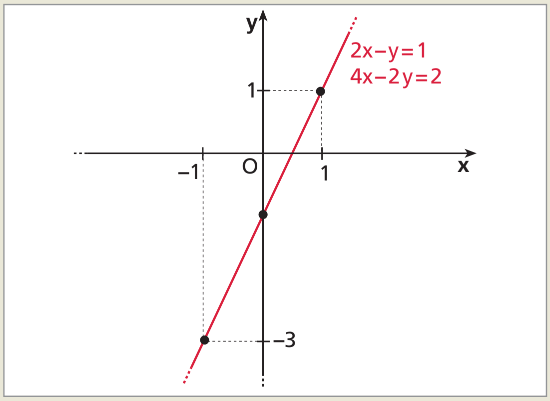
I tre rapporti sono uguali, quindi il sistema è indeterminato.
Rappresentiamo graficamente il sistema.

$2x - y = 1$

x	-1	0	1
y	-3	-1	1

$4x - 2y = 2$

x	-1	0	1
y	-3	-1	1



c) $\begin{cases} 1x - 2y = -2 \\ -3x + 6y = -12 \end{cases}$ $\quad \dfrac{a}{a_1} = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}; \quad \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3}; \quad \dfrac{c}{c_1} = \dfrac{-2}{-12} = \dfrac{1}{6}.$

$\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} \neq \dfrac{c}{c_1}$, quindi il sistema è impossibile.

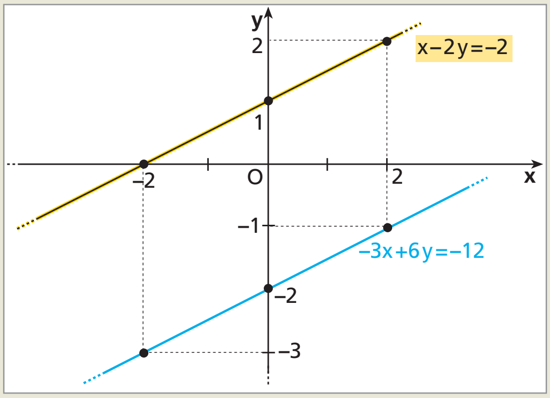
Interpretiamolo graficamente.

$x - 2y = -2$

x	-2	0	2
y	0	1	2

$-3x + 6y = -12$

x	-2	0	2
y	-3	-2	-1



Per ogni sistema stabilisci se esso è determinato, impossibile o indeterminato, senza risolverlo. Se il sistema è determinato, risolvilo con il metodo di sostituzione. Interpreta poi graficamente il sistema.

49 $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + 4y = 14 \end{cases}$ [indeterminato]

50 $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ $\left[\text{determinato}, \left(\dfrac{1}{7}; \dfrac{2}{7}\right)\right]$

51 $\begin{cases} 6x - 2y = 5 \\ 18x - 6y = -1 \end{cases}$ [impossibile]

52 $\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ -2x + y = -2 \end{cases}$ [impossibile]

53 $\begin{cases} y - 3x = 1 \\ x - \dfrac{1}{3}y = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$ [indeterminato]

54 $\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{6}y - 3 = 0 \\ \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}x = 1 \end{cases}$ $\left[\text{determinato}, \left(\dfrac{16}{13}; \dfrac{42}{13}\right)\right]$

55 $\begin{cases} 1 - 4y - \dfrac{1}{3}x = 0 \\ \dfrac{2}{3}x + 8y = +\dfrac{1}{2} \end{cases}$ [impossibile]

56 Sono date le seguenti equazioni:

a) $2x - 3y + 1 = 0$;

b) $2x + 2y = 0$;

c) $-2x + 3y + 2 = 0$;

d) $4x - 6y + 2 = 0$.

Puoi costruire con due di esse un sistema impossibile? E un sistema indeterminato?

[impossibile con a) e c), c) e d); indeterminato con a) e d)]

Determina per quali valori di k i seguenti sistemi sono determinati, senza risolverli.

57 $\begin{cases} kx - y = 1 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ $\left[k \neq -\dfrac{2}{3}\right]$

58 $\begin{cases} (k+1)x - 2ky = k \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$ $\left[k \neq -\dfrac{1}{5}\right]$

59 $\begin{cases} x - 3y = k \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ $[\forall\, k \in \mathbb{R}]$

60 $\begin{cases} 2kx + ky = 5 \\ (k+1)x + \left(\dfrac{k+1}{2}\right)y = -4 \end{cases}$ $[\nexists\, k \in \mathbb{R}]$

Trova per quali valori di k i seguenti sistemi sono impossibili, senza risolverli.

61 $\begin{cases} x + 2ky = 2 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$ $\left[k = -\dfrac{1}{4}\right]$

62 $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 6kx + 4y = 1 \end{cases}$ $[k = -2]$

63 $\begin{cases} kx - (k+3)y = 1 \\ 2x - 8y = 3 \end{cases}$ $[k = 1]$

64 $\begin{cases} 11x - 3y = k + 1 \\ 22x - 6y = -k \end{cases}$ $\left[k \neq -\dfrac{2}{3}\right]$

Trova per quali valori di a i seguenti sistemi sono indeterminati.

65 $\begin{cases} 2ax + y = -2 \\ x - 2y = +4 \end{cases}$ $\left[a = -\dfrac{1}{4}\right]$

66 $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2ax - 4y = 3 \end{cases}$ $[\nexists\, a \in \mathbb{R}]$

67 $\begin{cases} ax + ay = -3 \\ 3ax + 3y = -9 \end{cases}$ $[a = 1]$

68 $\begin{cases} -2ax + y = 5a \\ 6x - y = -15 \end{cases}$ $[a = 3]$

Sistemi e geometria analitica

COMPLETA scrivendo a fianco di ogni sistema se le rette rappresentate dalle due equazioni sono coincidenti, parallele o incidenti, *senza* risolvere il sistema.

69 $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$

70 $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + \dfrac{1}{2}y - 1 = 0 \end{cases}$

71 $\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ 4x - 12y = 4 \end{cases}$

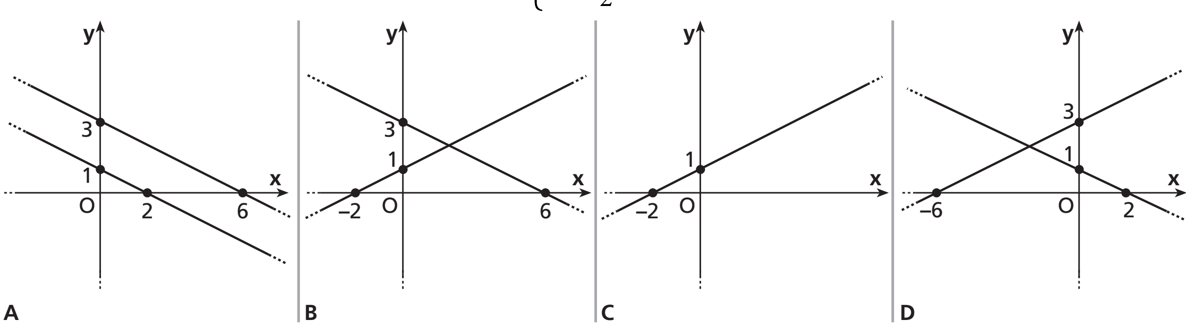
72 $\begin{cases} x = 5y + 1 \\ -2x + 10y - 4 = 0 \end{cases}$

73 $\begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0 \\ 6x - 4y - 2 = 0 \end{cases}$

74 $\begin{cases} 3x + 4y - 2 = 0 \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3} = 0 \end{cases}$

75 **ASSOCIA** a ogni sistema di equazioni il grafico che lo rappresenta.

1. $\begin{cases} 6 = 6y - 3x \\ x = 2y - 2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2y = x + 2 \\ x = 6 - 2y \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2y + x = 2 \\ y = \dfrac{1}{2}x + 3 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x = 2 - 2y \\ 2y = 6 - x \end{cases}$



Determina le coordinate degli eventuali punti di intersezione delle rette che hanno le seguenti equazioni.

76 $3x - y + 7 = 0;$ $\quad 2x + y + 3 = 0.$ $[(-2; 1)]$

77 $y = 4x - 7;$ $\quad x + y + 2 = 0.$ $[(1; -3)]$

78 $2x - y + 1 = 0;$ $\quad y = 2x - 3.$ [nessun punto]

79 $3x - y + 9 = 0;$ $\quad y = 2x + 6.$ $[(-3; 0)]$

80 $y = 3x + 1;$ $\quad 2y - 8 = 0.$ $[(1; 4)]$

81 $2x - 3y - 2 = 0;$ $\quad 6x - 9y - 6 = 0.$ [tutti i punti]

82 $2x + y + 4 = 0;$ $\quad 2y + 5 + x = 0.$ $[(-1; -2)]$

83 $2x - 6y - 12 = 0;$ $\quad y = \frac{1}{3}x - 2.$ [tutti i punti]

84 $y = \frac{3}{2}x - 1;$ $\quad 4x + 3y - 2 = 0.$ $\left[\left(\frac{10}{17}; -\frac{2}{17}\right)\right]$

85 $y = 3x - 2;$ $\quad 3x - y - 1 = 0.$ [nessun punto]

86 Trova le coordinate dei vertici del triangolo individuato dalle rette di equazioni $x - 3y - 13 = 0$, $4x - y - 8 = 0$, $3x + 2y - 17 = 0$ e calcolane l'area. $[(3; 4), (1; -4), (7; -2); \text{area} = 22]$

87 Trova perimetro e area del triangolo individuato dalle rette di equazione $y + 2 = 0$, $3x - 4y + - 11 = 0$, $3x + 4y - 19 = 0$, verificando che è un triangolo isoscele. [perimetro = 18; area = 12]

88 Scrivi l'equazione della retta r passante per $P(0; 4)$ e parallela alla retta $2x - y + 1 = 0$, e calcola l'area del quadrilatero limitato dalle due rette e dagli assi cartesiani. $\left[2x - y + 4 = 0; \text{area} = \frac{15}{4}\right]$

89 Date le rette $y - x = 0$, $x + y - 3 = 0$, $x - 4y - 3 = 0$, verifica che esse determinano un triangolo rettangolo. Calcola poi l'area del triangolo e le coordinate del circocentro D. $\left[\text{area} = \frac{15}{4}; D\left(1; -\frac{1}{2}\right)\right]$

90 Determina per quale valore di k le rette $(k + 1)x + + y - 4 = 0$ e $kx + (k - 1)y + 2 = 0$ si intersecano sull'asse delle ordinate. $\left[k = \frac{1}{2}\right]$

91 Determina per quale valore di k le rette
$(k - 2)x + + ky - 1 = 0$ e $2x - ky + 2 = 0$
si incontrano sull'asse delle ascisse. $[k = 1]$

92 Di un parallelogramma $ABCD$ sono noti l'equazione del lato AB, $y = -3x + 6$, il vertice $C(-1; 1)$, l'ascissa -4 del vertice D e l'ascissa -6 del vertice A.
Determina le coordinate mancanti dei vertici A, B, D. $[A(-6; 24); B(-3; 15); D(-4; 10)]$

93 Sono dati i punti $A(-1; 3)$ e $B(3; 1)$, e M è il loro punto medio.

a) Determina l'equazione dell'asse del segmento AB e verifica che tale retta passa per l'origine degli assi.

b) Conduci da B la retta r parallela a OM e da O la retta s parallela ad AB, e trova le loro equazioni.

c) Detto D il punto di intersezione di r e s, stabilisci la natura del quadrilatero $ABDO$ e calcolane l'area.

$\left[\text{a) } y = 2x; \text{ b) } r: y = 2x - 5, s: y = -\frac{1}{2}x;\right.$
$\left.\text{c) } D(2; -1); \text{area} = \frac{15}{2}\right]$

4. Il metodo del confronto

Teoria a pag. 711

RIFLETTI SULLA TEORIA

94 VERO O FALSO?

a) Per risolvere un sistema con il metodo del confronto si ricava la stessa incognita da tutte le equazioni. V F

b) Si può applicare il metodo del confronto solo quando le incognite hanno coefficiente unitario. V F

c) Quando si applica il metodo del confronto è sempre indifferente ricavare l'incognita x o la y. V F

d) Un sistema lineare con $a, a_1, b, b_1 \neq 0$ può sempre essere risolto con il metodo del confronto. V F

95 TEST Il sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{3-2x}{4} \\ y = \dfrac{5x-9}{7} \end{cases}$$

è stato ottenuto da uno solo dei seguenti sistemi. Quale?

A $\begin{cases} 2x+4y+3=0 \\ 5x-7y+9=0 \end{cases}$

B $\begin{cases} 2x+4y+3=0 \\ 5x-7y-9=0 \end{cases}$

C $\begin{cases} 2x+4y-3=0 \\ 5x-7y-9=0 \end{cases}$

D $\begin{cases} 2x-4y+3=0 \\ 5x+7y-9=0 \end{cases}$

E $\begin{cases} 2x+4y+3=0 \\ 5x+7y+9=0 \end{cases}$

96 Esistono casi in cui il metodo del confronto è di immediata applicazione? Quali?

97 Puoi affermare che il metodo del confronto è un caso particolare del metodo di sostituzione? Perché?

98 Sono dati i sistemi:

$$\begin{cases} 3x+13y-4=0 \\ 3x-12y+1=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y=4x-12 \\ 8x-3y+15=0 \end{cases}$$

In quale dei due pensi sia più opportuno procedere con il metodo del confronto? Perché?

99 Quando risolvi un sistema con il metodo del confronto, puoi uguagliare fra loro le espressioni che si ottengono ricavando la stessa incognita da entrambe le equazioni. Perché?

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 14 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

100 Risolviamo con il metodo del confronto il seguente sistema, dopo aver stabilito se è determinato, impossibile o indeterminato:

$$\begin{cases} 3y-2x+1=0 \\ 3(x+1)+11=2(5-6y) \end{cases}$$

Riduciamo il sistema a forma normale:

$$\begin{cases} -2x+3y=-1 \\ 3x+3+11=10-12y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x+3y=-1 \\ 3x+12y=-4 \end{cases}$$

Poiché $\dfrac{-2}{3} \neq \dfrac{3}{12}$, il sistema è determinato.

Poiché nessuno dei coefficienti di x o y è uguale a 1, è indifferente ricavare da entrambe le equazioni una variabile o l'altra. Ricaviamo y:

$$\begin{cases} 3y = -1 + 2x \\ 12y = -4 - 3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{y = \dfrac{2x-1}{3}} \\ \mathbf{y = \dfrac{-3x-4}{12}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x-1}{3} \\ \mathbf{\dfrac{2x-1}{3} = \dfrac{-3x-4}{12}} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x-1}{3} \\ \mathbf{4(2x-1) = -3x-4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x-1}{3} \\ \mathbf{8x - 4 = -3x - 4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x-1}{3} \\ \mathbf{11x = 0} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \mathbf{y = \dfrac{2 \cdot 0 - 1}{3}} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è $\left(0; -\dfrac{1}{3}\right)$.

Risolvi con il metodo del confronto i seguenti sistemi, dopo aver stabilito se ognuno di essi è determinato, impossibile o indeterminato.

101 $\begin{cases} 3x - y = -1 \\ x + y = 5 \end{cases}$ $[(1; 4)]$

102 $\begin{cases} x + 4y = 4 \\ y = +\dfrac{1}{2}(x-1) \end{cases}$ $\left[\left(2; \dfrac{1}{2}\right)\right]$

103 $\begin{cases} 6x = 1 - 2y \\ 5x + y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$ $\left[\left(-1; \dfrac{7}{2}\right)\right]$

104 $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x + 4y = 5 \\ -x + \dfrac{1}{2}y = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$ $[(3; 1)]$

105 $\begin{cases} -3x + 6y = 4 \\ 3x = 6y - 4 \end{cases}$ [indeterminato]

106 $\begin{cases} (2x-1)(y+3) + 5y + 1 = 2x(y+4) + x \\ 12x + 17 = 7y \end{cases}$ $[(-2; -1)]$

107 $\begin{cases} 3y + 24 + (y-2)^2 + 4y = 4x + y^2 + 4 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ $[(3; -4)]$

108 $\begin{cases} 3x + 2(y-4)^2 = 36 + 2y^2 - 15y + 2x \\ 3(y-1) + 2[x - (x-1)^2] = -2 - 2x(x-2) \end{cases}$ $[(3; -1)]$

109 $\begin{cases} 5(x-y)[1 + (x+y)] + 5y^2 = 5x^2 - 6 \\ 5(y-x) = 1 \end{cases}$ [impossibile]

110 $\begin{cases} 2(8-2x) - y - (y+1)^2 = 3(y-x) - y^2 - 1 \\ -24 + 4(4-y) = x - 24 + 2y \end{cases}$ [indeterminato]

111 $\begin{cases} -5x - 4[x - y + (y-2)(y+2)] = -4y^2 + 11 \\ 3(3x - 2y - 2) + x^2 - 3 = (x-3)(x+3) + 6 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{2}\right)\right]$

112 $\begin{cases} 2(x-y) + x + (x+2)^2 = x(x-1) + x + 4 \\ 3(y - 7x) = (y+x)^2 - y - 13 - (x-y)^2 - 4xy \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{13}{7}; \dfrac{13}{2}\right)\right]$

113 $\begin{cases} (x-2y)^2 - (x-y)^2 - y(3y-2x) = x + y - 2 \\ \dfrac{2x-y}{3} - \dfrac{x+2y}{6} - \dfrac{x-y}{2} = 0 \end{cases}$ $[(2; 0)]$

5. Il metodo di riduzione

Teoria a pag. 712

RIFLETTI SULLA TEORIA

114 TEST Nel sistema $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

i fattori per cui moltiplicare le due equazioni, affinché i coefficienti della y siano opposti, sono:

A 10 per entrambe le equazioni.
B 2 per la prima equazione e 5 per la seconda.
C 6 per entrambe le equazioni.
D -5 per la prima equazione e 10 per la seconda.
E 2 per la prima equazione e -5 per la seconda.

115 Se si applica il metodo di riduzione al sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

quale sistema equivalente si ottiene?

116 TEST Se applichi il primo passaggio del metodo di riduzione a uno dei seguenti sistemi, ottieni il sistema equivalente: $\begin{cases} 12x + 9y = -3 \\ -12x + 16y = 8 \end{cases}$

Qual è il sistema di partenza?

A $\begin{cases} -4x + 3y = -1 \\ -3x + 4y = 2 \end{cases}$

B $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ -3x + 4y = 2 \end{cases}$

C $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$

D $\begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ -3x - 4y = 2 \end{cases}$

E $\begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ -3x + 4y = 2 \end{cases}$

117 È dato il sistema $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

Scrivi l'equazione che si ottiene addizionando le due equazioni. La coppia soluzione del sistema verifica anche tale equazione. Perché?

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 8 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

118 Risolviamo i seguenti sistemi, già ridotti in forma normale, con il metodo di riduzione:

a) $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 4x - 5y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases}$

a) Poiché $\frac{-2}{4} \neq \frac{3}{-5}$, il sistema è determinato.

Eliminiamo x, moltiplicando i termini della prima equazione per 2 e sommando membro a membro:

$$\begin{array}{rl} \cdot 2 & \begin{cases} -4x + 6y = 2 \\ +4x - 5y = -1 \end{cases} \\ + & \\ \hline & y = 1 \end{array}$$

Sostituendo $y = 1$ in una delle due equazioni, per esempio la prima, si ha:

$-2x + 3 \cdot 1 = 1 \to -2x = 1 - 3 \to$
$\to -2x = -2 \to x = 1.$

Il sistema ha come soluzione la coppia $(1; 1)$.

b) Poiché $\frac{2}{5} \neq \frac{-3}{2}$, il sistema è determinato.

Eliminiamo y moltiplicando i termini della prima equazione per 2 e quelli della seconda per 3 e sommando membro a membro:

$$\begin{array}{rl} \cdot 2 & \begin{cases} 4x - 6y = 10 \\ 15x + 6y = 9 \end{cases} \\ + \ \cdot 3 & \\ \hline & 19x = 19 \\ & x = 1 \end{array}$$

Sostituiamo $x = 1$ nella seconda equazione:

$5 + 2y = 3 \to 2y = -2 \to y = -1.$

La soluzione del sistema è $(1; -1)$.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di riduzione, dopo aver stabilito, per ciascuno, se è determinato, indeterminato o impossibile.

119 $\begin{cases} x-y=4 \\ x+3y=8 \end{cases}$ $[(5;1)]$

120 $\begin{cases} 3x+7y=2 \\ 4x-2y=-3 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\right]$

121 $\begin{cases} y=6-3x \\ y-2x=-4 \end{cases}$ $[(2;0)]$

122 $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 7x-y=1 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{2}{5};-\frac{19}{5}\right)\right]$

123 $\begin{cases} x=4y+1 \\ 4x-16y=3 \end{cases}$ [impossibile]

124 $\begin{cases} 3x-4=5y \\ 2y+x=1 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{13}{11};-\frac{1}{11}\right)\right]$

125 $\begin{cases} x-\frac{y}{2}=\frac{5}{3} \\ \frac{3}{2}x-\frac{3}{8}y=1 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{3};-4\right)\right]$

126 $\begin{cases} 3x-8y=-12 \\ \frac{1}{2}x+4y=-3 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{9}{2};-\frac{3}{16}\right)\right]$

127 $\begin{cases} (x+2)^2-1=x^2-5y \\ 4x-1=-y \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2};-1\right)\right]$

128 $\begin{cases} x(x+y)-3=x+x^2+xy-2y \\ 3(x-y)+2=0 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)\right]$

129 $\begin{cases} 10(x-1)+7y-(x+1)(x-1)=x(1-x)+1 \\ 6x+7y=9 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{3};1\right)\right]$

130 $\begin{cases} 1+3(2x-2)(1+x)-6x^2+3=2y-6x+4 \\ x-3y+2=0 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{11}{8};\frac{9}{8}\right)\right]$

131 $\begin{cases} 6+(2x-1)(1+y)+2y-1=y(2x-1) \\ 16(x-1)+12(y+1)+24[(x+y)-1]=8(2y-1) \end{cases}$ $[(3;-5)]$

BRAVI SI DIVENTA ► E31

132 $\begin{cases} \frac{x-5}{3}+\frac{3}{5}y=x+1-\frac{2}{5}y \\ (y+1)^2-6x+y(x+1)=10+y(y+x+1)-x \end{cases}$

133 $\begin{cases} 2(x-y)=2-x \\ 2(x+y)^2+x+(x+y-1)=2x+2(x^2+y^2+2xy)+y+1 \end{cases}$ [impossibile]

134 $\begin{cases} 2(3x-2y)-4x=2(x-6y) \\ 1-2y^2(x^2-y^2)-(x^2-y^2)^2=(y^2-x^2)(x^2+y^2)+1 \end{cases}$ [indeterminato]

135 $\begin{cases} x-(x-y)(1+y)=y^2+1-x-x(1+y) \\ y(1+x^2)+3x+x^2=x^2y+(1+x)^2+4y-13 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{9}{7};\frac{25}{7}\right)\right]$

136 $\begin{cases} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{2}+y\right)(1-x)+\frac{x^2}{2}\right]=1-\frac{xy}{2} \\ \frac{1}{4}(3x-11)+y=0 \end{cases}$ $\left[\left(3;\frac{1}{2}\right)\right]$

6. Il metodo di Cramer

Teoria a pag. 712

RIFLETTI SULLA TEORIA

Il determinante

137 Come cambia il valore del determinante di un sistema lineare di due equazioni in due incognite se vengono scambiate le righe? E se si scambiano le colonne? E se si scambiano contemporaneamente righe e colonne?

Il metodo di Cramer

138 **VERO O FALSO?**

a) Se il determinante D di un sistema lineare con due equazioni in due incognite è nullo, allora il sistema è impossibile. V F

b) Il determinante D_x si ottiene dall'espressione del determinante D sostituendo nella prima colonna ai coefficienti dell'incognita x i termini noti. V F

c) Se il determinante D_y è nullo, allora $y = 0$. V F

d) Il determinante D_y del sistema $\begin{cases} 3x - 5y - 2 = 0 \\ 4x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$ è $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ V F

ESERCIZI

Il calcolo dei determinanti

ESERCIZIO GUIDA

139 Calcoliamo il determinante $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

Poiché, in generale:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

nel nostro caso abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 3 = -2 - 12 = -14.$$

Calcola i seguenti determinanti.

140 $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ $[-1]$

141 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $[1]$

142 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ $[0]$

143 $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ $[-22]$

144 $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ $[22]$

145 $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ $[1]$

146 $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -6 & 8 \end{vmatrix}$ $[2]$

147 $\begin{vmatrix} 2a^2 & -3a^3 \\ -5a & 4a^2 \end{vmatrix}$ $[-7a^4]$

148 $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ 2a+2b & 3a-3b \end{vmatrix}$ $[a^2-b^2]$

149 TEST Quale delle seguenti equazioni deve essere sostituita ai puntini in modo tale che il sistema

$$\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

abbia il determinante D uguale a -2?

A $-2x + 6y = 0$
B $2x + 6y = 3$
C $-2x - 6y = 3$
D $2x - 6y = 3$
E $6x - 2y = 3$

150 TEST Il determinante del sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 2y - x = 3 \end{cases}$ vale:

A 5 B -11 C 10 D 2 E -10

151 Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ il determinante

$$\begin{vmatrix} k & 3 \\ 2 - 3k & 4 \end{vmatrix}$$

è uguale a -1? $\left[\frac{5}{13}\right]$

Il metodo di Cramer

Nel sito: ▶ 8 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

152 Utilizzando il metodo di Cramer, risolviamo i sistemi:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x + 7y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 6x - 3y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = -10 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2\;x - 3\;y = 1 \\ 4\;x + 7\;y = 15 \end{cases}$

Calcoliamo il determinante D, formato dai coefficienti di x e di y:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & +7 \end{vmatrix} = 14 + 12 = 26.$$

Calcoliamo D_x, ottenuto da D sostituendo la prima colonna dei coefficienti di x con i termini noti:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 15 & +7 \end{vmatrix} = 7 + 45 = 52.$$

Calcoliamo D_y, ottenuto da D sostituendo la seconda colonna dei coefficienti di y con i termini noti:

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} = 30 - 4 = 26.$$

Calcoliamo la soluzione:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{52}{26} = 2; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{26}{26} = 1.$$

La soluzione del sistema è (2; 1).

b) $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 6x - 3y = 4 \end{cases}$

Calcoliamo $D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$

Il sistema non è determinato. Per decidere se è impossibile o indeterminato, calcoliamo D_x. Se $D_x = 0$, dobbiamo calcolare anche D_y; se invece $D_x \neq 0$, il sistema è impossibile.

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10 \neq 0.$$

Il sistema è quindi impossibile.

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = -10 \end{cases}$

Calcoliamo $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$

Il sistema non è determinato.

Calcoliamo $D_x = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0.$

Calcoliamo $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -6 & -10 \end{vmatrix} =$

$= -30 + 30 = 0.$

Essendo $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$, il sistema è indeterminato.

Risolvi i seguenti sistemi, utilizzando il metodo di Cramer.

153 $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ [(1; 2)]

154 $\begin{cases} 2x - 4 + y^2 = y(y-3) + 16 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$ [(7; 2)]

155 $\begin{cases} 3x + 2y + 4 = 0 \\ x(2x-1) - x^2 + y = x^2 + 2y + 3 \end{cases}$ [(2; −5)]

156 $\begin{cases} 4x + 5y + 23 = 0 \\ 9(2-x) + y + 7 = -9 \end{cases}$ [(3; −7)]

157 $\begin{cases} 4x + 2y + 5 = 3 \\ \dfrac{6}{5}y + \dfrac{3}{2}x - 1 = -4 \end{cases}$ [(2; −5)]

158 $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x + y = -2 \\ \dfrac{4}{5}y + x = 2 - \dfrac{x}{2} \end{cases}$ [(4; −5)]

159 $\begin{cases} \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{5}x = 5 \\ 2x - \dfrac{5}{6}y + 3 = 8 \end{cases}$ [(5; 6)]

160 $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{3} + 1 = \dfrac{1}{3} \\ 3x + 5y = -4 \end{cases}$ [(2; −2)]

161 $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ x(x-2) + y(y+3) = (x+y)^2 - 2xy - 7 \end{cases}$ [(2; −1)]

162 $\begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$ [impossibile]

163 $\begin{cases} 2(2y - x) = 6(x-1) \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$ [indeterminato]

BRAVI SI DIVENTA ► E32

164 $\begin{cases} \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y(x-8) = x(1+y) - (2-x)(x+2) + \dfrac{9}{4} \\ \dfrac{3(y+1) - x}{2} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{7y - x - 4}{6} \end{cases}$

RIEPILOGO LA RISOLUZIONE DEI SISTEMI

165 VERO O FALSO?

a) Il sistema $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ ax + 8y = 6 \end{cases}$ per $a = 2$ è impossibile. V F

b) Il determinante $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ vale 0 se $k = 1$. V F

c) Il sistema $\begin{cases} x = y - 1 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$ rappresenta nel piano cartesiano due rette parallele, quindi è impossibile. V F

d) Il sistema $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} y = x - 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$ V F

166 Dimostra che il sistema $\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 8x - 6y = 4 \end{cases}$ è indeterminato. Come puoi esprimere le infinite coppie di soluzioni utilizzando un solo parametro reale? $\left[\left(k; \dfrac{4k-2}{3}\right), \text{con } k \in \mathbb{R}\right]$

167 **COMPLETA** i seguenti sistemi in modo che ognuno sia come indicato a fianco.

$\begin{cases} 3x - 2y = \ldots \\ 9x - 6y = 1 \end{cases}$ indeterminato; $\begin{cases} 5x - 6y = 1 \\ 2x - \ldots y = 3 \end{cases}$ impossibile;

$\begin{cases} \ldots x + 2y = 1 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$ determinato; $\begin{cases} -x + 3y = 2 \\ 3x - 9y = \ldots \end{cases}$ impossibile.

168 Dimostra che il sistema $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -4x + 2y = 1 \end{cases}$ è impossibile in tre modi:

a) risolvendolo;
b) interpretando graficamente il sistema;
c) considerando i rapporti dei coefficienti.

169 Tra le equazioni

a) $\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y = 6$, b) $-5x + 3y = 1$, c) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{5}y = 3$, d) $\frac{1}{6}x - \frac{1}{5}y = 2$,

quali puoi scegliere per costruire un sistema che abbia determinante D nullo e D_x e D_y non nulli? E quali per ottenere un sistema che abbia determinante D uguale a 1? [a) e d) oppure c) e d); b) e c)]

170 Dopo aver scritto in forma normale il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 2 & y \\ -1 & x \end{vmatrix} = -1 \\ \begin{vmatrix} x & -4 \\ y & 3 \end{vmatrix} = 1 \end{cases}$$

risolvilo con il metodo che ritieni più opportuno. Il sistema ammette le stesse soluzioni se nei due determinanti scambi la prima riga con la seconda? Quale altro cambiamento devi fare, oltre a operare questo scambio, affinché il sistema sia equivalente a quello dato?

[(− 1; 1); no; occorre cambiare i segni del secondo membro di ogni equazione]

I sistemi numerici interi

Risolvi i seguenti sistemi lineari, utilizzando per ciascuno il metodo che ritieni più opportuno.

171 $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x(x-2) + 7 = -10 + y(1+y) + (x-y)(x+y) \end{cases}$ [(10; − 3)]

172 $\begin{cases} 5 - x + (x - 3y)(x+1) + y^2 + xy = (x-y)^2 + x - 2y + 10 \\ 5 + y = 0 \end{cases}$ [(0; − 5)]

173 $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right) - \left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) - \frac{9}{16} = -x^2 - \frac{y}{3} \\ -\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$ [(15; − 15)]

174 $\begin{cases} \frac{1}{3}x = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{2}(x - y) = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}x \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)\right]$

175 $\begin{cases} \frac{1}{3}(x+y) - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}(y-x) + \frac{1}{6} \\ \frac{3}{2}(2y - x + 2) = \frac{1}{2}y + 3 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{2}\right)\right]$

176 $\begin{cases} \frac{1}{7}(x+3) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{7} - y\right) - \frac{1}{7} \\ 2x = \frac{1}{2}(9 - 5y) \end{cases}$ $\left[\left(\frac{7}{2}; -1\right)\right]$

177 $\begin{cases} \frac{1}{6}(x+1) = \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}y \\ \frac{1}{4}y - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}(1 - x) \end{cases}$ $\left[\left(5; -\frac{2}{3}\right)\right]$

178 $\begin{cases} \frac{4x-1}{3} - \frac{y-1}{2} = \frac{2x-5}{3} \\ \frac{3y-2}{4} - \frac{y-2x}{2} = \frac{8x+3}{4} \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{2}; 3\right)\right]$

179 $\begin{cases} 4(x-y) = y - \frac{5}{4} \\ 4\left(x + \frac{1}{2}y\right) = \frac{11}{2} - 2y \end{cases}$ $\left[\left(\frac{5}{8}; \frac{3}{4}\right)\right]$

180 $\begin{cases} \frac{5}{6}x + \frac{3}{5}y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{4}{5}\right) \\ 2\left(x + y + \frac{1}{9}\right) = y + 1 \end{cases}$ $\left[\left(1; -\frac{11}{9}\right)\right]$

181 $\begin{cases} \frac{1}{11}(x + 12y) = y + \frac{4}{15} \\ \frac{1}{5}x - 3y = \frac{1}{5}\left(\frac{8}{3} - 4x\right) \end{cases}$ $\left[\left(\frac{7}{3}; \frac{3}{5}\right)\right]$

182 $\begin{cases} \frac{1}{2}(5x - 3y) - \frac{2x-1}{3} = 8 + \frac{1}{2}(6y - 5) \\ \frac{2x-3}{4} - \frac{1-3y}{2} = \frac{6y-1}{2} + \frac{3}{4} \end{cases}$ $\left[\left(2; -\frac{1}{3}\right)\right]$

183 $\begin{cases} 2(2y-1) = -\frac{1}{3}x \\ \frac{x + 3y - 1}{3} = 2\left(\frac{1}{3}x - y\right) \end{cases}$ $\left[\left(2; \frac{1}{3}\right)\right]$

184 $\begin{cases} \frac{1}{3}x = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{2}(x - y) = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}x \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)\right]$

185 $\begin{cases} (x+y)\left(\frac{1}{15} + y\right) - xy + \frac{y}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{15}y + y^2 \\ 1 - \frac{2y}{15} = -\frac{x}{5} \end{cases}$ $[(-3; 3)]$

186 $\begin{cases} \frac{-(x+1)(x-1) + x(x+1)}{2} - 1 = \frac{y+3}{4} \\ \frac{1}{2}\left[(x-1) - \frac{y-1}{2}\right] = 1 \end{cases}$ [indeterminato]

187 $\begin{cases} \frac{1}{6}[3x - 4y - (2x - 7)] + \frac{x(x-1)}{4} - \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}y \\ \frac{x - 2y}{2} - \frac{3x + y}{3} = \frac{3 - y}{3} \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{14}{3}; \frac{4}{3}\right)\right]$

188 $\begin{cases} \frac{(y-x)(1+x) - x(y-x)}{10} = \frac{y}{6} - 4 \\ \frac{(y-x)(y+x) - (x-y)}{2} - \frac{x}{4} = 6 + \frac{y^2 - x^2}{2} \end{cases}$ $[(16; 36)]$

189 $\begin{cases} \dfrac{2}{15} - xy = \dfrac{3}{5} + (1 - y)(x - 1) \\ (x + y)(4 - x) + x^2 + 2x = 2 - xy + y \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{2}{15}; \dfrac{2}{5}\right)\right]$

190 $\begin{cases} \dfrac{1}{3}(x + 2y)(x + 1) - \dfrac{2}{3}xy - 5 = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y - x}{4} \\ \dfrac{2(x - 8) - y}{7} - 2 = -\dfrac{y + 4}{3} \end{cases}$ $[(35; -37)]$

191 $\begin{cases} 3x(2y - 2) + 3x - 2y - 6 + 2y = 5(3x - 1) - 2y + 1 + (3x - 1)(2y - 1) \\ 1 - 3x + (3x + 4y - 3)^2 + 1 + 3(x - y) - y = 3x(3x - 2) + 4(2y - 1)(2y + 3x - 2) \end{cases}$ $\left[\left(0; \dfrac{3}{4}\right)\right]$

192 $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + [(x + 2y)(x - 1) - x^2 + x] = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{y}{2}\right) + y(2x - 2) \\ 2y - \dfrac{13}{3}x = -3 \end{cases}$ $\left[\left(1; \dfrac{2}{3}\right)\right]$

193 $\begin{cases} \dfrac{3}{2}x - y + (x - y)^2 - 4xy = \dfrac{1}{2} + x^2 + y^2 - 6xy \\ \dfrac{3}{2}(x - 1) - \left(y - \dfrac{1}{3}x\right) = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2} \end{cases}$ [impossibile]

194 $\begin{cases} (x + 2y)^2 - x(x - 1) - y(1 + 4y) = 3 + 4xy \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{5} = \dfrac{3}{4}y \end{cases}$ $[(5; 2)]$

195 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x + y)^2 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x + y}{2} - \dfrac{x}{3} - xy = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{2}{3}y \\ \dfrac{x - y}{3} - 1 = -\dfrac{x + 3y}{2} \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{14}\right)\right]$

196 $\begin{cases} (2x - 1)^2 - (x - 2)(4x + 3) = (y - 1)(y + 2) - y^2 \\ \dfrac{x - 2y}{2} - \dfrac{1}{4}(2 - x) = \dfrac{1}{4}(5 - y) \end{cases}$ [impossibile]

197 $\begin{cases} \dfrac{(x + y)[1 - (x - y)] + x^2}{6} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{y^2}{6} = 2 - \dfrac{3}{2} + \dfrac{x + y}{4} \\ \dfrac{y + 4}{3} = \dfrac{x - 6}{2} \end{cases}$ $[(6; -4)]$

198 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x - 2y)(2x - y) - \dfrac{1}{3}x(3x - 1) = \dfrac{1}{3}y\left(1 - \dfrac{15}{2}x + 3y\right) + \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{2}(3x - 1) - \dfrac{1}{3}(y - 2x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{6}(2y + 7) \end{cases}$ [indeterminato]

I sistemi numerici fratti

ESERCIZIO GUIDA

199 Risolviamo il seguente sistema fratto:

$$\begin{cases} \dfrac{y-1}{x-1} = 2 \\ 1 - \dfrac{5}{y} = \dfrac{18-6x}{y} \end{cases}$$

C.E.: $x \neq 1 \wedge y \neq 0$

Riduciamo il sistema a forma normale, moltiplicando la prima equazione per $x - 1$ e la seconda per y:

$$\begin{cases} \dfrac{y-1}{\cancel{x-1}} \cdot (\cancel{x-1}) = 2 \cdot (x-1) \\ \left(1 - \dfrac{5}{y}\right) \cdot y = \dfrac{18-6x}{\cancel{y}} \cdot \cancel{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 1 = 2x - 2 \\ y - 5 = 18 - 6x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x + y = -1 \\ 6x + y = 23 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 6x + y = 23 \end{cases} \quad \text{(forma normale)}$$

Poiché $\dfrac{2}{6} \neq -1$, il sistema è determinato.

Risolviamo il sistema con il metodo di riduzione. Sommiamo membro a membro le due equazioni per eliminare y:

$$\boxed{+}\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 6x + y = 23 \end{cases}$$
$$8x \quad = 24$$

$$x = \frac{24}{8} = 3.$$

Sostituiamo $x = 3$ a una delle due equazioni, per esempio alla prima:

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 6 - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ -y = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

Poiché abbiamo ottenuto per x un valore diverso da 1 e per y un valore diverso da 0, la soluzione $(3; 5)$ è accettabile.

Risolvi i seguenti sistemi di equazioni fratte (nelle soluzioni sono omesse le condizioni di esistenza).

200 $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 0 \\ 8x - 1 = -15y \end{cases}$ $[(2; -1)]$

201 $\begin{cases} \dfrac{y}{x-2} = 4 \\ \dfrac{x}{2} = y + 8 \end{cases}$ $[(0; -8)]$

202 $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y-3} = 2 \\ \dfrac{x+1}{2} = y - 3 \end{cases}$ [indeterminato]

203 $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{x} \\ x - y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$ $\left[\left(-3; -\dfrac{3}{2}\right)\right]$

204 $\begin{cases} \dfrac{8}{y} = \dfrac{2}{x} \\ \dfrac{x+4}{y-2} = 1 \end{cases}$ $[(2; 8)]$

205 $\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+4} = 2 \\ \dfrac{x+5}{y+3} = -1 \end{cases}$ [indeterminato]

206 $\begin{cases} \dfrac{2(1-2x)}{6-3y} = -1 \\ x + y = 3 \end{cases}$ $[(-1; 4)]$

207 $\begin{cases} \dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} \\ \dfrac{x+2}{x} = \dfrac{y+2}{y} + \dfrac{3}{xy} \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)\right]$

208 $\begin{cases} \dfrac{14}{x} - \dfrac{10}{y} = \dfrac{13}{2x} + \dfrac{25}{2xy} \\ y - 3x = 0 \end{cases}$ $[(1; 3)]$

209 $\begin{cases} \dfrac{y(2x+1)}{x-1} - 3y = \dfrac{x(2-y)}{x-1} \\ 2y\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) = -x\left(y - \dfrac{4}{x}\right) \end{cases}$ $[(4; 2)]$

210 $\begin{cases} \dfrac{y+1}{6-4x} - \dfrac{1-2x}{2x-3} = \dfrac{x-y}{12-8x} \\ x - y = \dfrac{4}{3} \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{3}; -1\right)\right]$

211 $\begin{cases} \dfrac{y+x^2}{x-3} - 2x = \dfrac{x^2+3x+9}{3-x} \\ -y + 9 = 3x \end{cases}$ $[(-3; 18)]$

212 $\begin{cases} -\dfrac{1}{x+4} = \dfrac{1}{y-1} \\ \dfrac{1}{3y+1} - \dfrac{1}{5x} = 0 \end{cases}$ $[(-1; -2)]$

213 $\begin{cases} 3x - y(1-2x) = 2(1+xy) \\ (x-1)\left(-\dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{2x+3}{y} - 3 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{4}{3}; 2\right)\right]$

214 $\begin{cases} \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{xy-2y} = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x-2} \\ y - x = -1 \end{cases}$ [impossibile]

215 $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{y+2} = 3 \\ \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}y = 2 \end{cases}$ $[(15; 6)]$

216 $\begin{cases} \dfrac{y}{x^2-4} = \dfrac{1+y}{x^2-4x+4} \\ y + x = 4(1+x) \end{cases}$ $\left[\left(-\dfrac{18}{13}; -\dfrac{2}{13}\right)\right]$

217 $\begin{cases} \dfrac{x-1}{y} = \dfrac{1}{4} \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{2}; -2\right)\right]$

218 $\begin{cases} \dfrac{2-y}{x+3} = \dfrac{1}{3} \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{2}\right)\right]$

219 $\begin{cases} \dfrac{x - \frac{1}{2}}{y} + 3 = \dfrac{4x-2}{2} - 2x \\ 3x - 2y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ [impossibile]

220 $\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}{y} + \dfrac{9}{10} = \dfrac{\frac{2}{5}x - \frac{1}{4}}{y} \\ 2(x+y) = 3 \end{cases}$ $\left[\left(2; -\dfrac{1}{2}\right)\right]$

221 $\begin{cases} \dfrac{2x-8y}{x-2} = \dfrac{6x+1}{3(x-2)} + \dfrac{2(4y-1)}{2-x} \\ \dfrac{3x}{y-1} - 1 = -\dfrac{6}{1-y} \end{cases}$ [impossibile]

222 $\begin{cases} \dfrac{2+x}{1+x} - \dfrac{x+1}{y} = 1 - \dfrac{x^2}{y+xy} \\ x = 1 + y \end{cases}$ $[(-2; -3)]$

223 $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{2y-3} - \dfrac{3x-5}{2y+3} = \dfrac{54}{9-4y^2} \\ \dfrac{2y-1}{x} - \dfrac{6y-7}{3x-1} = \dfrac{8}{x-3x^2} \end{cases}$ $\left[\left(-2; \dfrac{1}{2}\right)\right]$

224 $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3y+2} = \dfrac{2x-5}{3y-2} \\ \dfrac{3y-4}{4x-1} = \dfrac{3y-10}{4x} \end{cases}$ [impossibile]

225 $\begin{cases} \dfrac{2y-1}{x} = \dfrac{1+2x}{3x} \\ \dfrac{4}{x+y} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ $[(4; 2)]$

7. I sistemi letterali

Teoria a pag. 714

RIFLETTI SULLA TEORIA

226 VERO O FALSO?

a) Un sistema letterale non può essere fratto. V F

b) Il sistema $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a} = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ nelle incognite x e y è letterale intero. V F

c) Un sistema letterale può essere risolto solo con il metodo di Cramer. V F

d) La soluzione di un sistema letterale dipende dai valori assunti dai parametri. V F

227 TEST Per quali valori reali di a e di b il sistema

$$\begin{cases} x - 3ay = 3a \\ x + by = -2 \end{cases}$$

ha soluzione $(0; -1)$?

A $a = 2, b = 0$

B $a = 0, b = -2$

C $\forall a \in \mathbb{R}, b = 2$

D $\forall b \in \mathbb{R}, a = 2$

E $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$

228 È dato il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{3}kx + 2y = \dfrac{8}{5} \\ \dfrac{2}{3}hx + 5y = \dfrac{4}{7} \end{cases}$$

Determina almeno due coppie di valori reali di h e di k per i quali x abbia, nelle due equazioni, coefficienti opposti. Risolvi i sistemi corrispondenti alle coppie di valori determinate.

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

I sistemi letterali interi

ESERCIZIO GUIDA

229 Discutiamo e risolviamo il seguente sistema letterale nelle incognite x e y al variare del parametro a in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y = 2a \\ (a+1)x + ay = 2a \end{cases}$$

Il sistema è ridotto in forma normale. Applichiamo il metodo di Cramer.
Calcoliamo i determinanti D, D_x, D_y.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a+1 & a \end{vmatrix} = 2a - (a+1) = 2a - a - 1 = a - 1.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 2a & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 2a = 2a(a-1). \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 2a \\ a+1 & 2a \end{vmatrix} = 4a - 2a(a+1) = 2a - 2a^2 = 2a(1-a).$$

Il sistema è determinato se $D \neq 0$, cioè se $a - 1 \neq 0 \rightarrow a \neq 1$.

- Se $a \neq 1$, si ha $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{2a\cancel{(a-1)}}{\cancel{a-1}} = 2a \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{2a(1-a)}{a-1} = \dfrac{-2a\cancel{(a-1)}}{\cancel{a-1}} = -2a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2a \\ y = -2a \end{cases}$

- Se $a = 1$, si ha $D = 0$, $D_x = 0$ e $D_y = 0$, quindi il sistema è indeterminato.

In sintesi:
- se $a \neq 1$, il sistema è determinato e la soluzione è $(2a, -2a)$;
- se $a = 1$, il sistema è indeterminato.

Risolvi e discuti i seguenti sistemi letterali nelle incognite x e y al variare del parametro in $\mathbb{R}$.

230 $\begin{cases} 3x - y = 6a - 1 \\ x + 2y = 2(a+1) \end{cases}$ $[(2a; 1)]$

231 $\begin{cases} x + y = 3a \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$ $[(6a; -3a)]$

232 $\begin{cases} 3ax + 5ay + 2a = -a \\ x + y = 3 \end{cases}$ $[a \neq 0, (9; -6); a = 0, \text{indet.}]$

233 $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 5y = -7a \end{cases}$ $[(a; -2a)]$

234 $\begin{cases} x + 4y = a \\ x + 3y = 2a \end{cases}$ $[(5a; -a)]$

235 $\begin{cases} ax + ay = a \\ ax + (a+1)y = 2a \end{cases}$ $[a \neq 0, (1-a; a); a = 0, \text{indet.}]$

236 $\begin{cases} x + 3y = a \\ x - y = 5 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{a+15}{4}; \dfrac{a-5}{4}\right)\right]$

237 $\begin{cases} bx + b - by = 4b \\ 2bx - b + by = 0 \end{cases}$ $\left[b \neq 0, \left(\dfrac{4}{3}; -\dfrac{5}{3}\right); b = 0, \text{indet.}\right]$

238 $\begin{cases} 2x - 3ay = -10a \\ x - 3y = a - 12 \end{cases}$ $[a \neq 2, (a; 4); a = 2, \text{indet.}]$

239 $\begin{cases} 3ax + 4y = -4a \\ 2ax - 4y = 24a \end{cases}$ $[a \neq 0, (4; -4a); a = 0, \text{indet.}]$

240 $\begin{cases} ax + y + 1 = a - x \\ x - ay + y = a - 1 \end{cases}$ $\left[a \neq 0, \left(\dfrac{a-1}{a}; \dfrac{1-a}{a}\right); a = 0, \text{indet.}\right]$

241 $\begin{cases} (x-y)(1+x) - x^2 + x = a + b - xy \\ x - y = b \end{cases}$ $[(a; a-b)]$

242 $\begin{cases} (x+1)^2 - x^2 - y = 2a \\ (y+x)(1-a) + ay - 2x = 1 + a(1-x) \end{cases}$ $[(3a; 4a+1)]$

243 $\begin{cases} ax + y = 5 \\ (a+2)x - 3y = a \end{cases}$ $\left[a \neq -\dfrac{1}{2}, \left(\dfrac{15+a}{4a+2}; -\dfrac{a^2-5a-10}{4a+2}\right); a = -\dfrac{1}{2}, \text{imp.}\right]$

---

244 $\begin{cases} k(x+y) - (x-y+5) = k \\ kx + 2ky + k = 15 \end{cases}$ $\left[k \neq 3 \wedge k \neq 0, \left(\dfrac{3k+5}{k}; \dfrac{5-2k}{k}\right); k = 3, \text{indet.}; k = 0, \text{imp.}\right]$

245 $\begin{cases} a(x-1) + 2x + y = 7 \\ a(-2x-1) = 3y + 3 \end{cases}$ $[a = -6, \text{indet.}; a \neq -6, (4; -3a-1)]$

246 $\begin{cases} 2x - y = 1 - ay \\ 3(a-2)y = x + a - 7 \end{cases}$ $\left[a = \dfrac{13}{7}, \text{imp.}; a \neq \dfrac{13}{7}, \left(\dfrac{a^2-11a+13}{13-7a}; \dfrac{2a-13}{7a-13}\right)\right]$

247 $\begin{cases} ax = 2a + 6ay \\ a(x+y) = 3 + 2(x+y) \end{cases}$ $\left[a = 0, \text{ indet.}; a = 2, \text{ imp.}; a \neq 0 \wedge a \neq 2, \left(\frac{2a+14}{7a-14}; \frac{-2a+7}{7a-14}\right)\right]$

248 $\begin{cases} 2(a+1)x + 12y = 3a \\ 2ax + 4ay = a + 2 \end{cases}$ $\left[a = 0, \text{ imp.}; a = 2, \text{ indet.}; a \neq 0 \wedge a \neq 2, \left(\frac{3a+3}{2a}; \frac{-2a-1}{4a}\right)\right]$

249 $\begin{cases} x - 2ay = 1 \\ \frac{x}{3a} + \frac{y}{2} = \frac{1}{a} \end{cases}$ $\left[a = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0, \left(\frac{15}{7}; \frac{4}{7a}\right)\right]$

250 $\begin{cases} 3x - y = 3b \\ \frac{x}{2b} + \frac{y}{b} = \frac{1}{2} \end{cases}$ $[b = 0, \text{ perde sign.}; b \neq 0, (b; 0)]$

251 $\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{2y}{3b} = 1 + \frac{1}{6} \\ 2bx - y = 3b \end{cases}$ $[b = 0, \text{ perde sign.}; b \neq 0, (2; b)]$

252 $\begin{cases} 2x - 3y = 5a \\ \frac{1}{5a}(x+y) = \frac{7}{3} \end{cases}$ $\left[a = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0, \left(8a; \frac{11a}{3}\right)\right]$

253 $\begin{cases} 5x - by = 3b \\ \frac{10x}{3b} + \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$ $\left[b = 0, \text{ perde sign.}; b \neq 0, \left(\frac{3}{7}b; -\frac{6}{7}\right)\right]$

254 $\begin{cases} \frac{3x}{2ab} + \frac{y}{a} = 3 \\ 2x - by = ab \end{cases}$ $\left[a = 0 \vee b = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0, \left(\frac{8ab}{7}; \frac{9}{7}a\right)\right]$

255 $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ \frac{2x}{3a} - \frac{y}{a} = 1 \end{cases}$ $\left[a = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0, \left(\frac{15}{7}a; \frac{3a}{7}\right)\right]$

256 $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{2} = 1 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{3} = 2 \end{cases}$ $\left[a = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0, \left(\frac{8}{5}a; -\frac{6}{5}\right)\right]$

257 $\begin{cases} 2ax + 5by = 2ab \\ \frac{2x}{5b} + \frac{y}{2a} = 1 \end{cases}$ $\left[a = 0 \vee b = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0, \left(4b; -\frac{6}{5}a\right)\right]$

258 $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{3b} = 1 \\ 2bx - 3ay = ab \end{cases}$ $\left[a = 0 \vee b = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0, \left(\frac{10}{11}a; \frac{3}{11}b\right)\right]$

259 $\begin{cases} \frac{x}{3a-1} + \frac{y}{2} = 2 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases}$ $\left[a = \frac{1}{3}, \text{ perde sign.}; a = 0, \text{ indet.}; a \neq 0 \wedge a \neq \frac{1}{3}, (0; 4)\right]$

260 $\begin{cases} \dfrac{x+y+a}{a+b} - \dfrac{x-y-a}{a-b} = 2 \\ x+y=b \end{cases}$ $[a = b \vee a = -b, \text{ perde sign.}; a \neq \pm b, (b; 0)]$

261 $\begin{cases} x+2y = a+2 \\ (a-1)x + ay = 2a \end{cases}$ $[a = 2, \text{ indet.}; a \neq 2, (-a; a+1)]$

262 $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a-1} - \dfrac{2a-1}{a^2-a} = 0 \\ ax + (a+1)y = 2a \end{cases}$ $[a = 0 \vee a = 1, \text{ perde sign.}; a \neq 0 \wedge a \neq 1, (1-a; a)]$

263 $\begin{cases} ax + by = a \\ ax - by = 0 \end{cases}$ $\left[a = 0, \text{ indet.}; a \neq 0 \wedge b = 0, \text{ imp.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0, \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{a}{2b}\right)\right]$

264 $\begin{cases} mx + ny = m+n \\ mx - ny = m-n \end{cases}$ $[m = 0 \vee n = 0, \text{ indet.}; m \neq 0 \wedge n \neq 0, (1; 1)]$

265 $\begin{cases} 2ax + by = a+b \\ 2ax - by = a-b \end{cases}$ $\left[a = 0 \vee b = 0, \text{ indet.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0, \left(\dfrac{1}{2}; 1\right)\right]$

266 $\begin{cases} (x+y)(1-x) + x^2 = a - xy \\ b(x-b) + ay = 0 \end{cases}$ $[a = b, \text{ indet.}; a \neq b, (a+b; -b)]$

267 $\begin{cases} a(x-2b) + y(y+b) = (y-b)(y+b) + b^2 \\ ax - by = 0 \end{cases}$ $[a = 0 \vee b = 0, \text{ indet.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0, (b; a)]$

268 $\begin{cases} (b+1)x + y = b^2 + b \\ x - by = -b^2 - 1 \end{cases}$ $[(b-1; b+1)]$

269 $\begin{cases} a(x-a) + a(y+2a) = 2a^2 \\ \dfrac{x+a}{a} + \dfrac{y}{a} = 2 \end{cases}$ $[a = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0, \text{ indet.}]$

270 $\begin{cases} 2(x-2a^2) = 3(y+3a^2) \\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x+y}{a^2} - 2\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-y}{a^2} - 3\right) = 0 \end{cases}$ $[a = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0, (2a^2; -3a^2)]$

271 $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + \dfrac{4y}{5a} = 1 \\ ax - y = a \end{cases}$ $\left[a = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0, \left(\dfrac{27}{22}; \dfrac{5}{22}a\right)\right]$

272 $\begin{cases} \dfrac{3x}{2a-1} + \dfrac{y}{2} = 1 \\ x - 2ay = 2 - y \end{cases}$ $\left[a = \dfrac{1}{2}, \text{ perde sign.}; a \neq \dfrac{1}{2}, \left(\dfrac{4a}{7}; \dfrac{2(2a-7)}{7(2a-1)}\right)\right]$

273 $\begin{cases} \dfrac{x+y+b}{a+b} + \dfrac{x-y-b}{a-b} = 2 \\ x+y=a \end{cases}$ $[a=b \vee a=-b, \text{ perde sign.}; a \neq \pm b, (a; 0)]$

274 $\begin{cases} 2x-y=a+3 \\ ax+y+2=(a+1)^2 \end{cases}$ $[a=-2, \text{ indet.}; a \neq -2, (a+1; a-1)]$

275 $\begin{cases} a(1-x-y)+y^2=y(y-1)+y \\ a(x-2)=-(a+1)y \end{cases}$ $[a=0, \text{ indet.}; a \neq 0, (1-a; a)]$

276 $\begin{cases} x-a(x+y)+2a=1 \\ a(x+y)-2a=-y \end{cases}$ $[(1-a; a)]$

277 $\begin{cases} (a+1)x+y=a-1 \\ x-(a-1)y=a-1 \end{cases}$ $\left[a=0, \text{ indet.}; a \neq 0, \left(\dfrac{a-1}{a}; \dfrac{1-a}{a}\right)\right]$

278 $\begin{cases} ax+(a-2)y=3a-2 \\ (a+1)x+ay=2a \end{cases}$ $[a=-2, \text{ indet.}; a \neq -2, (a; 1-a)]$

279 $\begin{cases} 2bx-by+6b=2x+4 \\ 2bx+2b+y=by \end{cases}$ $\left[b=\dfrac{1}{2}, \text{ indet.}; b \neq \dfrac{1}{2}, (b-2; 2b)\right]$

280 $\begin{cases} ax-by=2a-b \\ ax+4by=2a+4b \end{cases}$ $[a=0 \vee b=0, \text{ indet.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0, (2; 1)]$

281 $\begin{cases} 5ay=a(x+1) \\ a(x+y-1)=2-3(x+y) \end{cases}$ $\left[a=0, \text{ indet.}; a=-3, \text{ imp.}; a \neq 0 \wedge a \neq -3, \left(\dfrac{4a+7}{6a+18}; \dfrac{2a+5}{6a+18}\right)\right]$

282 $\begin{cases} ax+2ay=3a \\ (a^2-1)x+3(a^2-1)y=a-1 \end{cases}$

$\left[a=0, a=1, \text{ indet.}; a=-1, \text{ imp.}; a \neq 0 \wedge a \neq \pm 1, \left(\dfrac{9a+7}{a+1}; \dfrac{-3a-2}{a+1}\right)\right]$

283 $\begin{cases} (a^2-2a)x-2ay=a \\ (a^2-4)x+(a+2)y=a-2 \end{cases}$ $\left[a=0, \text{ indet.}; a=\pm 2, \text{ imp.}; a \neq 0 \wedge a \neq \pm 2, \left(\dfrac{3a-2}{3a^2-12}; \dfrac{-4}{3a+6}\right)\right]$

284 $\begin{cases} \dfrac{2x+y-2ab}{2a} - \dfrac{2x+y-2b^2}{2a-2b} = \dfrac{y}{b} \\ 2x+y=2a^2 \end{cases}$ $[a=0 \vee b=0 \vee a=b, \text{ perde sign.};$
$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq b, (a^2+b^2; -2b^2)]$

285 $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = \dfrac{1}{b} \end{cases}$ $[a=0 \vee b=0, \text{ perde sign.}; a=b \vee a=-b, \text{ indet.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq \pm b, (1; 0)]$

286 $\begin{cases} ab(x+y) = a+b \\ ax+by = 2 \end{cases}$ $\left[a=0 \vee b=0, \text{imp.}; a=b \wedge a \neq 0, \text{indet.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq b, \left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}\right)\right]$

287 $\begin{cases} (a-1)x+y = a+2 \\ (a^2-1)x+y = 2(a+1) \end{cases}$ $\left[a=0, \text{indet.}; a=1, \text{imp.}; a \neq 0 \wedge a \neq 1, \left(\frac{1}{a-1}; a+1\right)\right]$

288 $\begin{cases} \frac{k-x}{k^2+k} + \frac{y-2k}{k+1} = -1 \\ x = 2y \end{cases}$ $[k=0 \vee k=-1, \text{perde sign.}; k=2, \text{indet.}; k \neq 0 \wedge k \neq -1 \wedge k \neq 2, (2k; k)]$

289 $\begin{cases} bx-ay = 2b+a \\ 3b^2x+a^2y = ab \end{cases}$ $\left[a=0 \wedge b=0, a=-3b, \text{indet.}; a=0 \wedge b \neq 0, a \neq 0 \wedge b=0, \text{imp.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -3b, \left(\frac{a}{b}; -\frac{2b}{a}\right)\right]$

290 $\begin{cases} \frac{x+y}{a+b} = 1 \\ -\frac{y+2x}{a+b} = \frac{-2x}{a+b} - \frac{y}{a-b} + \frac{2b^2}{a^2-b^2} \end{cases}$ $[a=b \vee a=-b, \text{perde sign.}; b=0, \text{indet.}; a \neq \pm b \wedge b \neq 0, (a; b)]$

291 $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{a-1} = \frac{2a-1}{a-1} \\ \frac{x}{a+2} + \frac{y}{a} = \frac{2a^2+a+2}{a^2+2a} \end{cases}$

$[a=-2 \vee a=0 \vee a=1, \text{perde sign.}; a=2, \text{indet.}; a \neq \pm 2 \wedge a \neq 0 \wedge a \neq 1, (2a; 1)]$

292 $\begin{cases} \frac{x+a}{a+1} + \frac{y+1}{a-1} = \frac{2(a^2+1)}{a^2-1} \\ x-y = a-1 \end{cases}$ $[a=1 \vee a=-1, \text{perde sign.}; a=0, \text{indet.}; a \neq \pm 1 \wedge a \neq 0, (a; 1)]$

293 $\begin{cases} \frac{3a^2+4}{a^2-4} + \frac{x+y}{2-a} = \frac{a-2}{a+2} \\ x+a-2y = 6 \end{cases}$ $[a=2 \vee a=-2, \text{perde sign.}; a \neq \pm 2, (a+2; a-2)]$

294 $\begin{cases} (m+2n)x+(m-2n)y = 2 \\ (m+2n)x+y(m+2n+y) = 2+y^2 \end{cases}$

$\left[n=0 \wedge m \neq 0, \text{indet.}; m=-2n, \text{imp.}; n \neq 0 \wedge m \neq -2n, \left(\frac{2}{m+2n}; 0\right)\right]$

295 $\begin{cases} ax+by = a+b \\ x-y = \frac{b^2-a^2}{ab} \end{cases}$

$\left[a=0 \vee b=0, \text{perde sign.}; a=-b \wedge a \neq 0, \text{indet.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -b, \left(\frac{b}{a}; \frac{a}{b}\right)\right]$

TEST

296 È dato il sistema letterale

$$\begin{cases} 2ab(x-y)=3(a+b) \\ 2ax-4by=3 \end{cases}$$

nelle incognite x e y.
Per quali valori di a e di b esso è determinato?

- A $a=0 \wedge \forall\, b \in \mathbb{R}$
- B $b \neq 1 \wedge \forall\, a \in \mathbb{R}$
- C $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq 2b$
- D $a=2b \wedge b \neq 0$
- E $a=2 \wedge b=1$

297 Il sistema

$$\begin{cases} 4x-ky=-5 \\ 2x+3y=-4 \end{cases}$$

è impossibile per:

- A $k=0$.
- B $k=-6$.
- C $k \neq -6$.
- D $k=6$.
- E per alcun valore di k.

298 Quale affermazione sul sistema $\begin{cases} 5x+ky=1 \\ 10x-6y=h \end{cases}$ è *corretta*?

- A È impossibile $\forall\, k \in \mathbb{R}$.
- B È determinato $\forall\, h \in \mathbb{R}$.
- C È impossibile per $k=3$ e $h=2$.
- D È determinato per $k \neq 3$.
- E È indeterminato per $k=-3$ e $h=2$.

299 È dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} (a+3)x+(3-2a)y=4 \\ (a+3)x+(2a-3)y=4 \end{cases}$$

Quale delle seguenti affermazioni è *falsa*?

- A Se $a=-3$, il sistema è impossibile.
- B Se $a \neq -\frac{3}{2}$, il sistema è determinato e ha soluzione $\left(\frac{4}{a+3};0\right)$.
- C Se $a=\frac{3}{2}$, il sistema è indeterminato.
- D Se $a \neq \frac{3}{2}$ e $a \neq -3$, il sistema è determinato e ha soluzione $\left(\frac{4}{a+3};0\right)$.
- E Se $a=1$, il sistema è determinato e ha soluzione $(1;0)$.

300 Trova per quali valori di a il sistema letterale

$$\begin{cases} 6ax-2y=a \\ (a+1)x-3y=2a \end{cases}$$

risulta determinato. Calcola poi il valore di a per cui ammette la soluzione $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{9}\right)$.

$\left[a \neq \frac{1}{8}; a=\frac{1}{9}\right]$

301 Trova per quali valori di a e b il sistema

$$\begin{cases} x-4y=b \\ 5x+ay=1 \end{cases}$$

è impossibile. Stabilisci se il sistema è determinato, indeterminato o impossibile per $a=-10$ e $b=\frac{1}{5}$.

$\left[a=-20 \wedge b \neq \frac{1}{5}; \text{determinato}\right]$

302 Calcola per quali valori di a e b il sistema

$$\begin{cases} 3ax+by=6 \\ (a-1)x+2y=3 \end{cases}$$

è indeterminato. Stabilisci se il sistema è determinato, indeterminato o impossibile per $a=2$ e $b=12$.

$[a=-2 \wedge b=4; \text{impossibile}]$

303 Detto S l'insieme delle soluzioni dell'equazione $10x+4y=1$ e S' l'insieme delle soluzioni dell'equazione $5x+ky-3=0$, con $k \in \mathbb{R}$, determina per quale valore di k risulta $S \cap S' = \varnothing$ e per quale valore di k risulta:

$$S \cap S' = \left\{\left(0;\frac{1}{4}\right)\right\}.$$

[2; 12]

304 Considera l'insieme

$$A=\{(x;y) \,|\, [(m-2)x-my+2=0] \wedge [mx+y=2]\},$$

con $(x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Determina per quali valori di $m \in \mathbb{R}$ tale insieme rappresenta:

a) una retta del piano cartesiano;
b) l'insieme vuoto;
c) un punto del piano cartesiano;
d) il punto $P(1;2)$.

[a) $m=1$; b) $m=-2$; c) $m \neq 1 \wedge m \neq -2$; d) $m=0$]

I sistemi letterali fratti

ESERCIZIO GUIDA

305 Risolviamo il seguente sistema nelle incognite x e y al variare del parametro in $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{bx+by} \\ \dfrac{3y}{bx} - 1 = \dfrac{2-3y}{x} - \dfrac{1}{b} \end{cases}$$

Osservando i denominatori delle frazioni dobbiamo porre le seguenti condizioni:

- sul parametro: $\boldsymbol{b \neq 0}$;
- sulle incognite: $x + y \neq 0 \rightarrow \boldsymbol{x \neq -y}$; $\boldsymbol{x \neq 0}$.

Se $b = 0$, il sistema perde significato.
Se $b \neq 0$, svolgiamo i calcoli per scrivere il sistema in forma normale:

$$\begin{cases} \dfrac{b(x-y)-(x+y)}{b\cancel{(x+y)}} = \dfrac{2}{b\cancel{(x+y)}} \\ \dfrac{3y-bx}{\cancel{bx}} = \dfrac{2b-3by-x}{\cancel{bx}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (b-1)x-(b+1)y = 2 \\ (1-b)x+3(1+b)y = 2b \end{cases}$$

Discussione

$$D = \begin{vmatrix} b-1 & -(b+1) \\ 1-b & 3(1+b) \end{vmatrix} = 3b^2 - 3 + 1 - b^2 = 2b^2 - 2 = 2(b^2-1).$$

Se $b \neq \pm 1$, $D \neq 0$ e possiamo determinare la soluzione.

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -(b+1) \\ 2b & 3(1+b) \end{vmatrix} = 6 + 6b + 2b^2 + 2b = 2b^2 + 8b + 6 = 2(b^2+4b+3) = 2(b+3)(b+1).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} b-1 & 2 \\ 1-b & 2b \end{vmatrix} = 2b^2 - \cancel{2b} - 2 + \cancel{2b} = 2(b^2-1).$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\cancel{2}(b+3)\cancel{(b+1)}}{\cancel{2}\cancel{(b+1)}(b-1)} = \frac{b+3}{b-1}.$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2(b^2-1)}{2(b^2-1)} = 1.$$

Confrontiamo la soluzione con le condizioni sulle incognite $x \neq -y$ e $x \neq 0$:

$$x \neq -y \rightarrow \frac{b+3}{b-1} \neq -1 \rightarrow b+3 \neq -b+1 \rightarrow 2b \neq -2 \rightarrow b \neq -1;$$

$$x \neq 0 \rightarrow \frac{b+3}{b-1} \neq 0 \rightarrow b \neq -3.$$

La soluzione $\left(\dfrac{b+3}{b-1}; 1\right)$ è quindi accettabile se $b \neq \pm 1 \wedge b \neq -3$.

Se $b = 1$, si ha $D = 0$, $D_x = 16$, $D_y = 0$, e il sistema è impossibile.
Se $b = -1$, si ha $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$, e il sistema è indeterminato con $x \neq -y$ e $x \neq 0$.

In sintesi:

- se $b = 0$, il sistema perde significato;
- se $b \neq 0 \wedge b \neq \pm 1 \wedge b \neq -3$, il sistema è determinato, con soluzione $\left(\frac{b+3}{b-1}; 1\right)$;
- se $b = -3$, il sistema è impossibile perché la soluzione non è accettabile per le condizioni di esistenza;
- se $b = 1$, il sistema è impossibile;
- se $b = -1$, il sistema è indeterminato, con $x \neq -y$ e $x \neq 0$.

Risolvi e discuti i seguenti sistemi lineari letterali fratti nelle incognite x e y al variare del parametro in $\mathbb{R}$.

306 $\begin{cases} x + ay = 2a \\ \dfrac{1}{2a} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2x} \end{cases}$ $[a = 0$, perde sign.; $a \neq 0$, $(a; 1)]$

307 $\begin{cases} x + y = \dfrac{3a+2}{6} \\ a + \dfrac{y}{ax} = \dfrac{2a+3}{6x} \end{cases}$ $\left[a = 0\text{, perde sign.; } a = \pm 1\text{, indet.; } a \neq \pm 1 \wedge a \neq 0, \left(\frac{1}{3}; \frac{a}{2}\right)\right]$

308 $\begin{cases} \dfrac{7b}{b-x} - b = \dfrac{5y}{b-x} \\ y - x = 2 \end{cases}$ $[b = 5$, indet. con $x \neq 5$; $b \neq 5$, $(b-2; b)]$

309 $\begin{cases} (m+1)(m+2) = x + y \\ \dfrac{m-1}{x-y} - \dfrac{1}{m-2} = 0 \end{cases}$ $[m = 2$, perde sign.; $m = 1$, imp.; $m \neq 2 \wedge m \neq 1$, $(m^2+2; 3m)]$

310 $\begin{cases} \dfrac{b+2}{x} - \dfrac{1}{by} = 0 \\ \dfrac{y}{b+1} + y = b + 2 - \dfrac{x}{b+1} \end{cases}$

$[b = 0 \vee b = -1$, perde sign.; $b = -2$, indet. con $x \neq 0$ e $y \neq 0$; $b \neq 0 \wedge b \neq -1 \wedge b \neq -2$, $(b(b+2); 1)]$

311 $\begin{cases} \dfrac{x}{a+1} + \dfrac{y}{a} - 2 = 0 \\ \dfrac{x+y}{4(x-y)} = \dfrac{(x-1)(y+1)}{x^2-y^2} + \dfrac{x-y}{4x+4y} \end{cases}$

$\left[a = -1 \vee a = 0\text{, perde sign.; } a = -\frac{1}{2}\text{, indet.; } a \neq -1 \wedge a \neq 0 \wedge a \neq -\frac{1}{2}, (a+1; a)\right]$

312 $\begin{cases} \dfrac{x}{a+1} + \dfrac{y}{a-1} = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{a}{xy} \end{cases}$ $\left[a = 1 \vee a = -1\text{, perde sign.; } a \neq \pm 1, \left(\frac{a+1}{2}; \frac{a-1}{2}\right)\right]$

313 $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{a(x+y)} = -\dfrac{2}{x^2-y^2} \\ x(a^2-1) + a^2y(a^2-1) + a^4 = 1 \end{cases}$ [$a = 0$, perde sign.; $a = \pm 1$, indet. con $x \neq \pm y$; $a \neq 0 \wedge a \neq \pm 1$, imp.]

314 $\begin{cases} \dfrac{ax-2y}{a-2} + \dfrac{ay-2x}{2} = 2a+4 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2(a+2)}{xy} \end{cases}$ [$a = 2$, perde sign.; $a = 4 \vee a = -2$, indet. con $x \neq 0$ e $y \neq 0$; $a = 0$, impossibile; $a \neq 4 \wedge a \neq \pm 2 \wedge a \neq 0$, $(2a; 4)$]

315 $\begin{cases} \dfrac{2(a-y)}{x} = 1 \\ \dfrac{2(y-x)}{a^2-9} + \dfrac{2}{a-3} + \dfrac{x-4y}{(a-3)^2} = 0 \end{cases}$

$\left[a = 3 \vee a = -3\text{, perde sign.; } a = -1\text{, impossibile; } a \neq \pm 3 \wedge a \neq -1, \left(a+1; \dfrac{a-1}{2}\right)\right]$

316 $\begin{cases} \dfrac{a+2}{x+y} + \dfrac{4a^2-16}{x^2-y^2} = \dfrac{a-2}{x-y} \\ \dfrac{ax-2y}{a+2} + x = y \end{cases}$ [$a = -2$, perde sign.; $a = 2$, indet. con $x \neq \pm y$; $a \neq \pm 2$, $(a+4; 2a+2)$]

8. I sistemi di tre equazioni in tre incognite

Teoria a pag. 716

RIFLETTI SULLA TEORIA

317 VERO O FALSO?

a) Il metodo del confronto può essere applicato anche ai sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite. V F

b) Un sistema di tre equazioni in tre incognite può non essere lineare. V F

c) Un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite è sempre determinato. V F

d) Nella risoluzione di un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite è possibile utilizzare più di un metodo risolutivo. V F

e) Il sistema $\begin{cases} x-y=3 \\ y-z=1 \\ x-2z=0 \end{cases}$ ha soluzione $(5; 8; 4)$. V F

318 TEST Il sistema $\begin{cases} 3x+2y-5z=0 \\ x-y+z=-1 \\ x-2y+3z=0 \end{cases}$ ha soluzione:

A $(-2; -7; -4)$.

B $(2; 7; 4)$.

C $(1; 1; 1)$.

D $(-1; -2; -2)$.

E $(3; 6; 5)$.

319 Il sistema $\begin{cases} 3x+2y-4z=1 \\ 2x-3y-z=0 \\ 6x+4y-8z=2 \end{cases}$

ha una sola soluzione?

Perché? [no…]

320 Spiega che cosa significa affermare che $(1; 3; -2)$ è soluzione del sistema: $\begin{cases} 2x - y - 3z = 5 \\ x - 2y - z = -3 \\ 5x + y + 4z = 0 \end{cases}$

321 TEST Il sistema $\begin{cases} 4x - hy + 3z = 7 \\ kx - 2y + z = 5 \\ 3x + 2y + tz = 2 \end{cases}$ ha soluzione $(2; -1; 1)$ se:

- A $h = 2, \quad k = -1, \quad t = 1.$
- B $h = -4, \quad k = 1, \quad t = -2.$
- C $h = 0, \quad k = 0, \quad t = 0.$
- D $h = -4, \quad k = -1, \quad t = 6.$
- E $h = -4, \quad k = 3, \quad t = -2.$

322 TEST Per quali valori reali dei parametri a, b, c, le terne $(1; -2; -2)$, $(1; 0; 0)$ e $(0; -1; 1)$ risultano soluzioni dell'equazione $ax + by + cz = 1$?

- A $a = 1, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}.$
- B $a = -1, \quad b = -\frac{1}{3}, \quad c = \frac{1}{2}.$
- C $a = -\frac{1}{2}, \quad b = 3, \quad c = 0.$
- D $a = 10, \quad b = 1, \quad c = -1.$
- E $a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2}.$

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

323 Risolvi il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 5 \end{cases}$$

Osserviamo che si può applicare il metodo di *riduzione* alla prima e seconda equazione per eliminare z:

$$\ominus \begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$
$$\overline{2x - y \qquad = 0}$$

Sostituiamo la prima equazione del sistema con l'equazione equivalente appena calcolata.
Otteniamo:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 5 \end{cases}$$

Ricaviamo y dalla prima equazione e procediamo per *sostituzione*:

$$\begin{cases} y = 2x \\ x - 2x + z = 0 \\ 4x + 4x - 3z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ -x + z = 0 \\ 8x - 3z = 5 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo z e procediamo ancora per *sostituzione*:

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = x \\ 8x - 3x = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = x \\ 5x = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è $(1; 2; 1)$.

Risolvi i seguenti sistemi. Quando necessario, discuti i sistemi al variare del parametro in $\mathbb{R}$.

324 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ 4x+2y-z=5 \end{cases}$ $[(1;1;1)]$

325 $\begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ x+y+4z=4 \\ x+2y=41 \end{cases}$ $[(-17;29;-2)]$

326 $\begin{cases} x+y-z=6 \\ x+y=3 \\ x+z=0 \end{cases}$ $[(3;0;-3)]$

327 $\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x-y+z=1 \\ 3x+2y+4z=-3 \end{cases}$ $[(1;-1;-1)]$

328 $\begin{cases} y=x+2 \\ x-z=4 \\ y=z-1 \end{cases}$ [impossibile]

329 $\begin{cases} x=z+3 \\ y=x \\ y-z=3 \end{cases}$ [indeterminato]

330 $\begin{cases} x+z-1=0 \\ y+\dfrac{z}{2}+1=0 \\ 2x=-z \end{cases}$ $[(-1;-2;2)]$

331 $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 2x+y-3z=2 \\ 4x=6z-2y+1 \end{cases}$ [impossibile]

332 $\begin{cases} x=\dfrac{13-3y}{2} \\ 3y=z+1 \\ 2x+4y+z=16 \end{cases}$ $[(5;1;2)]$

333 $\begin{cases} y+\dfrac{x-2z}{3}=2 \\ x-3y=2z-6 \\ \dfrac{z-y+2x}{3}=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ $\left[\left(-1;2;-\dfrac{1}{2}\right)\right]$

334 $\begin{cases} 2(x-y)+3(z+2)=24 \\ 5x-y=z+3 \\ 4(y+3x)+4=2z \end{cases}$ $[(1;-2;4)]$

335 $\begin{cases} 3(z-x)=y+3(x-3) \\ 2(x+y)-3=z \\ 5x-4(y+z+1)=-4 \end{cases}$ $[(4;0;5)]$

336 $\begin{cases} 2(x-2y+z)=5x+1 \\ 3x-4y=1-4z \\ 5-3x+2y=2(y+z)+2 \end{cases}$ $[(-1;2;3)]$

337 $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+4y+6z=3 \\ 10x+5y-3z=-4 \end{cases}$ $\left[\left(1;-2;\dfrac{4}{3}\right)\right]$

338 $\begin{cases} 3x+y+z=3 \\ 6x-2y+z=1 \\ 3x+3y+3z=7 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{3};1;1\right)\right]$

339 $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 4x-5y+2z=-2 \\ 2x+3y-2z=3 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{2};1;\dfrac{1}{2}\right)\right]$

340 $\begin{cases} 3x-y=10-2z \\ 4z-y=17-6x \\ x-2z=-5-2y \end{cases}$ $\left[\left(2;-3;\dfrac{1}{2}\right)\right]$

341 $\begin{cases} -x+y-z=1 \\ 10x-5y+10z=-3 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{7}{5};\dfrac{1}{5}\right)\right]$

342 $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{3} \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{2y-1}{4}+\dfrac{z}{2} \\ \dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}y-\dfrac{1}{6}z=1 \end{cases}$ $[(1;-2;2)]$

343 $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{y-2z}{2}=\dfrac{z-3}{3} \\ \dfrac{4x-y}{2}-\dfrac{1-z}{4}=\dfrac{4y-7z}{4} \\ \dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+2x}{2} \end{cases}$ [impossibile]

344 $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2} - \dfrac{2z-1}{3} = 1 \\ \dfrac{6x-3}{4} - \dfrac{y+4z}{2} = \dfrac{4y+5}{4} \\ \dfrac{2x-3y}{2} = \dfrac{3z-1}{3} \end{cases}$ [indet.]

345 $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 2 \\ \dfrac{x-2y}{2} + \dfrac{x+z}{3} + 1 = 0 \\ \dfrac{x+y+z}{2} + \dfrac{1}{2} = y \end{cases}$ $[(0; 1; 0)]$

346 $\begin{cases} 3(x+z) - 2(y-4) = -5 \\ x - 3y = 4(4+z) - 3 \\ z + 3 = 2y - x \end{cases}$ $[(-2; -1; -3)]$

347 $\begin{cases} -\dfrac{2}{3}(x+y) + 2(z+1) = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{3}{2}z = y - 1 \\ 3(x-z) = x + y \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{3}{2}; 2; \dfrac{1}{3}\right)\right]$

348 $\begin{cases} \dfrac{2}{3}(x+y) = z - 1 \\ \dfrac{7}{4}(z-x) = \dfrac{1}{2}(y+1) + 1 \\ z + y = \dfrac{3}{2}x + 1 \end{cases}$ $\left[\left(1; \dfrac{1}{2}; 2\right)\right]$

349 $\begin{cases} \dfrac{4}{3}y - 2x = z - \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{3}{2}\left(x + z + \dfrac{2}{3}\right) = 3y \\ x = 2(y-z) \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{2}{3}; 1; \dfrac{2}{3}\right)\right]$

350 $\begin{cases} 2(x - 3y + 2z) = 5 - 5x \\ 7x - 3(x - y + 2) = z \\ 2(x + 3y) + 1 = 3(2y + z) \end{cases}$ $[(1; 1; 1)]$

351 $\begin{cases} x - 3ay + z = -a \\ 3x - ay - 5z = 5a \\ 2x + 3ay + 2z = 7a \end{cases}$

$[a = 0, \text{indet.}; a \neq 0, (2a; 1; 0)]$

352 $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y + az = -2 \\ (a+1)x + (a-1)y + az = 2 \end{cases}$ [indet.]

353 $\begin{cases} ax - y + 3z = 4a \\ ax + y - 2z = a \\ 2ax - 3y - z = 0 \end{cases}$

$[a = 0, \text{indet.}; a \neq 0, (2; a; a)]$

354 $\begin{cases} x + 2ay - z = -2a \\ 3x - ay = 5z + 2a \\ x + ay = z \end{cases}$

$[a \neq 0, (5a; -2; 3a); a = 0, \text{indet.}]$

355 $\begin{cases} x - 3y + 5az = a \\ 2x - 6y = a - 10az \\ x + y = 4a \end{cases}$

$[a \neq 0, \text{impossibile}; a = 0, \text{indet.}]$

356 $\begin{cases} bx - ay + z = 0 \\ ax + by - z = a^2 + b^2 \\ bx + ay + z = 2ab \end{cases}$

$[a = 0, a = -b, \text{indet.}; a \neq 0 \wedge a \neq -b, (a; b; 0)]$

---

357 $\begin{cases} 2x - 3az = 5(a - y) \\ 2az - 2y = -5a - 3x \\ 5y + 2x = a(1 + 7z) \end{cases}$ $[a = 0, \text{indet.}; a \neq 0, (-a; 2a; 1)]$

358 $\begin{cases} bx - y = 4b \\ 2bx - 2b = (b-1)z - y \\ 4y + 6b = 3bz - bx \end{cases}$ $\left[b = 0, b = -\dfrac{5}{4}, \text{indet.}; b \neq 0 \wedge b \neq -\dfrac{5}{4}, (2; -2b; 0)\right]$

359 $\begin{cases} 3(a+1)x - 2y = 2a - z \\ 2ax + 4y - z = -2a \\ 3ax + 5y = a - \dfrac{z}{2} \end{cases}$ $\left[a = -\dfrac{7}{9}, \text{indet.}; a \neq -\dfrac{7}{9}, (0; 0; 2a)\right]$

360 $\begin{cases} ax + y = 0 \\ ax - y = (a+1)z + 2a \\ 2ax + 3y = 4az - a \end{cases}$ $\left[a = 0, a = -\dfrac{1}{9}, \text{indet.}; a \neq 0 \wedge a \neq -\dfrac{1}{9}, (1; -a; 0)\right]$

Sistemi lineari e problemi

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 15 esercizi di recupero

361 **COMPLETA** la seguente tabella.

TESTO DEL PROBLEMA	EQUAZIONI CHE TRADUCONO IL PROBLEMA	SOLUZIONE
Un rettangolo ha l'altezza che è i … della … . Se l'altezza aumenta di 2 cm e la base diminuisce di 10 cm, il perimetro del rettangolo diventa uguale a 56 cm. Trova la base e l'altezza del rettangolo.	$y = \frac{5}{4}x$ …	
Determina tre numeri naturali tali che la loro …… sia 18, il secondo sia $\frac{3}{4}$ del primo e che la somma tra il secondo e il terzo sia … .	$x + y + z = 18$ … … $= 2$	
Trova due numeri tali che la …… tra il doppio del primo e il …… del secondo sia …, sapendo che il primo supera di … i $\frac{3}{2}$ del … .	$2x - 3y = 15$ $x = \frac{3}{2}y + 10$	

362 **TEST** Considera il seguente problema. «Determina due numeri x e y tali che la loro differenza sia uguale a 12 e che la metà del maggiore superi di 6 la metà del minore». Puoi affermare che il problema:

- A ha soluzione $x = 12, y = 2$.
- B non ammette soluzione.
- C è indeterminato.
- D ha $x = -2, y = 14$.
- E ha soluzione $x = -14$.

363 **TEST** Un'urna contiene 300 palline di tre colori: rosso, blu e giallo. Le palline gialle sono 54, mentre il numero delle palline rosse supera di 26 il numero delle palline blu. Quante sono le palline blu?

- A 111
- B 136
- C 137
- D 110
- E È impossibile determinarlo.

Problemi vari in due incognite

ESERCIZIO GUIDA

364 Hai a disposizione € 5,00 per acquistare penne e quaderni. Se compri 4 quaderni e 3 penne, ti mancano € 0,25; se compri 3 quaderni e 3 penne, ti avanzano € 0,65. Quanto costa un quaderno e quanto una penna?

1. **Richieste:**
   Costo di un quaderno
   Costo di una penna
2. **Incognite:**
   x = costo di un quaderno (in euro)
   y = costo di una penna (in euro)
3. **Relazioni:**
   Costo di 4 quaderni + costo di 3 penne = 5 + 0,25
   Costo di 3 quaderni + costo di 3 penne = 5 − 0,65
4. **Sistema risolvente:**
   $\begin{cases} 4x + 3y = 5{,}25 \\ 3x + 3y = 4{,}35 \end{cases}$
   Condizioni: $x > 0$, $y > 0$, perché rappresentano il prezzo di due oggetti.
5. **Risoluzione:**
   Poiché i coefficienti di y nelle due equazioni sono uguali, risulta semplice utilizzare il metodo di riduzione. Sottraiamo membro a membro:

$$-\begin{cases} 4x + 3y = 5{,}25 \\ 3x + 3y = 4{,}35 \end{cases} \to \begin{cases} 4 \cdot 0{,}9 + 3y = 5{,}25 \\ x = 0{,}9 \end{cases} \to \begin{cases} 3y = 5{,}25 - 3{,}6 = 1{,}65 \\ x = 0{,}9 \end{cases} \to \begin{cases} y = 0{,}55 \\ x = 0{,}9 \end{cases}$$

$$x \quad = 0{,}9$$

   La soluzione del sistema è $(0{,}9; 0{,}55)$.
   Controllo: La soluzione è accettabile perché entrambi i valori sono numeri positivi.
6. **Risposta:** Un quaderno costa € 0,90, una penna costa € 0,55.

365 Un automobilista percorre 615 km in due giorni. Sapendo che il tragitto del primo giorno è doppio di quello del secondo giorno, trova quanti km ha percorso ogni giorno. [410 km; 205 km]

366 Una scatola contiene forchette a 2 e a 3 punte. Sapendo che le forchette in totale sono 22 e che le punte in totale sono 54, calcola quante sono le forchette a 2 punte e quante quelle a 3. [12; 10]

367 Lucia e Elena sono sorelle. La somma delle loro età è 31 e Lucia è nata tre anni prima di Elena. Quanti anni ha ciascuna? [17; 14]

368 Possiedo € 30,00. Con questo denaro acquisto alcune magliette da € 6,50 ciascuna e alcuni calzini da € 3,50 al paio. Sapendo che il numero di magliette coincide col numero di paia di calzini, calcola quante sono. [3]

369 Carlo e Laura possiedono due somme di denaro. Complessivamente potrebbero acquistare 6 confezioni di caramelle da € 0,35 ciascuna. Se Carlo regala € 0,20 a Laura, giungono ad avere la stessa somma di denaro. Quanto possiede Carlo e quanto Laura? [€ 1,25; € 0,85]

370 Un fruttivendolo compera una cesta di mele a € 0,45 al kg e un sacco di patate a € 0,10 al kg, spendendo in tutto € 6,40. Trova il peso delle mele e quello delle patate, sapendo che la cesta di mele costa il quintuplo del sacco di patate, più € 0,40. [12 kg; 10 kg]

371 Il proprietario di un ristorante ha comperato 300 bottiglie di vino e 50 di liquore, spendendo € 450,00. Ora compera 600 bottiglie della stessa qualità di vino e 120 bottiglie di liquore, spendendo € 960,00. Trova il costo di una bottiglia di vino e il costo di una bottiglia di liquore. [€ 1; € 3]

372 10 sacchi di frumento e 8 di mais pesano 1646 kg; 30 sacchi di frumento e 12 di mais, rispettivamente uguali ai precedenti, pesano 3894 kg. Quanto pesa ciascun sacco di frumento e ciascun sacco di mais? [95 kg; 87 kg]

373 Un bibliotecario vuole disporre in ordine dei libri di storia sugli scaffali di una libreria. Se mette 8 libri su ogni scaffale, ne rimane vuoto uno; se invece mette 6 libri su ogni scaffale, riempie la libreria ma gli restano fuori 2 libri. Quanti libri deve sistemare il bibliotecario? [32]

374 In un numero di due cifre la differenza tra la cifra delle decine e quella delle unità è 4. Dividendo la cifra delle decine aumentata di 3 per la cifra delle unità, si ottiene per quoziente 4 e resto 1. Trova il numero. [62]

375 Determina due numeri naturali, sapendo che la loro somma divisa per la loro differenza dà per quoziente 3 e resto 4 e che la somma di $\frac{1}{6}$ del maggiore e di $\frac{2}{5}$ del minore vale 7. [18; 10]

376 Sommando ai $\frac{5}{6}$ della somma di due numeri i $\frac{3}{4}$ della loro differenza, si ottiene 37. Sapendo che sommando i $\frac{3}{7}$ del minore al maggiore si ottiene 26, determina i due numeri naturali. [7; 23]

377 Il rapporto tra la differenza di due numeri e la somma aumentata di 6 è $\frac{1}{3}$. Aggiungendo 3 al numero minore e togliendo 6 al maggiore, si ottiene lo stesso risultato. Determina i due numeri. [6; 15]

378 Due numeri naturali sono rispettivamente proporzionali ai numeri 3 e 5 secondo uno stesso fattore di proporzionalità. Aggiungendo 2 al minore e togliendo 5 al maggiore, si ottengono due numeri il cui rapporto è $\frac{7}{10}$. Trova i due numeri. [33; 55]

379 La differenza delle età di due fratelli vale la metà dell'età del minore, la loro somma vale i $\frac{5}{3}$ dell'età del maggiore. Determina le due età. [indeterminato]

380 In un numero di due cifre la cifra delle decine è doppia di quella delle unità. Scambiando le due cifre si ottiene un nuovo numero che è minore del primo di 36. Determina il numero di partenza. (Suggerimento. Se x è la cifra delle decine e y quella delle unità, il numero è $10 \cdot x + y$.) [84]

381 Determina una frazione, sapendo che la cifra al denominatore è il doppio della cifra al numeratore aumentato di 1 e che, diminuendo di 1 la cifra al numeratore e aumentando di 1 quella al denominatore, si ottiene la frazione $\frac{1}{3}$. $\left[\frac{5}{11}\right]$

382 In un negozio di alimentari vi sono 23 confezioni di cioccolatini. Alcune contengono 3 cioccolatini e altre 10. Sapendo che complessivamente le confezioni contengono 111 cioccolatini, calcola quante sono le confezioni da 3 cioccolatini e quante quelle da 10. [17; 6]

383 In una prima elementare sono iscritti 18 alunni. Sapendo che alcuni di questi hanno 5 anni e altri 6, e che l'età complessiva degli iscritti è di 100 anni, calcola quanti sono i bambini di 5 anni e quanti di 6. [8; 10]

384 Un'agenzia immobiliare vende per conto di un cliente due appartamenti per complessivi € 400 000. A quanto è stato venduto ciascuno dei due appartamenti sapendo che per il primo sono stati spesi in più i $\frac{2}{9}$ del prezzo del secondo? [€ 220 000, € 180 000]

385 In un numero di due cifre la somma delle cifre è 11. Dividendo il numero per la cifra delle decine, si ottiene per quoziente 14 e resto 1. Trova il numero. [29]

386 L'età di una madre supera di 5 il quintuplo dell'età del figlio. Tra 7 anni l'età della madre sommata a quella del figlio darà per risultato 55. Trova le due età. [35; 6]

387 In una fabbrica ci sono 2 macchine, la prima produce 10 pezzi all'ora, la seconda 7 pezzi all'ora. Le due macchine hanno prodotto in tutto 191 pezzi, lavorando complessivamente 23 ore. Determina il numero dei pezzi prodotti dall'una e dall'altra macchina. [100; 91]

388 Due serbatoi hanno capacità rispettivamente proporzionali a 7 e 4. Il serbatoio maggiore contiene tanto liquido quanto quello minore più i $\frac{3}{4}$ di quest'ultimo. Determina le capacità. [indeterminato]

389 In un parcheggio ci sono 20 tra automobili e camion. Sapendo che i camion hanno 6 ruote, invece di 4 come le automobili, e che ci sono complessivamente 86 ruote, calcola quante sono le automobili e quanti i camion. [17; 3]

390 Trova due numeri sapendo che dividendo il doppio del maggiore per il minore si ottiene per quoziente 2 e resto 10 e aumentando il maggiore di 11 si ottiene il doppio del minore. [16; 21]

391 Determina due numeri naturali, sapendo che, dividendo il primo per il secondo, si ottiene 3 per quoziente e 1 per resto e che il primo diminuito di 1 è 3 volte il secondo. (Suggerimento. Se dividiamo a per b con quoziente q e resto r, otteniamo $a = bq + r$.) [indeterminato]

392 Angela investe un capitale di € 40 000 in banca, in parte al tasso annuo d'interesse al 5% e il rimanente al 3%. Se dopo un anno il guadagno della prima quota supera di € 300 quello della seconda, a quanto ammontava ciascuna delle due quote investite? Quali sono i due guadagni? [€ 18 750, € 21 250; € 937,50, € 637,50]

Problemi di geometria in due incognite

ESERCIZIO GUIDA

393 Un rettangolo ha il perimetro di 48 cm. Sapendo che il doppio dell'altezza è i $\frac{2}{3}$ della base, quali sono le lunghezze della base e dell'altezza?

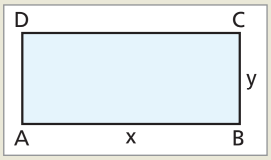
1. Richieste:
Lunghezza di AB (in cm)
Lunghezza di BC (in cm)

2. Incognite:
$x = \overline{AB}$ $\quad y = \overline{BC}$

Condizioni:
$x > 0, y > 0$, poiché sono misure di lunghezza.

3. Relazioni e dati:
Perimetro = 48 cm

$$2 \cdot \overline{BC} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB}$$



4. Sistema risolvente:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 48 \\ 2y = \frac{2}{3}x \end{cases}$$

5. Risoluzione:

$$\begin{matrix} :2 \\ :2 \end{matrix}\begin{cases} x + y = 24 \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{3}x = 24 \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}x = 24 \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 24 \cdot \frac{3}{4} = 18 \\ y = \frac{1}{3} \cdot 18 = 6 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è (18; 6).
Controllo: La soluzione è accettabile poiché 18 e 6 sono entrambi positivi.

6. Risposta: Il rettangolo ha la base di 18 cm e l'altezza di 6 cm.

BRAVI SI DIVENTA ▶ E33

394 In un trapezio isoscele che ha il perimetro uguale a 128 cm, il rapporto tra la base maggiore e la base minore è $\frac{9}{4}$. Trova l'area del trapezio sapendo che i $\frac{7}{5}$ del lato obliquo superano di 19 cm i $\frac{2}{3}$ della base minore.

395 Calcola la lunghezza di due segmenti, sapendo che la loro somma è 19 m e la loro differenza è 5 m. [12 m; 7 m]

396 In un rettangolo il perimetro è 80 cm. La base supera l'altezza di 10 cm. Trova le dimensioni del rettangolo. [25 cm; 15 cm]

397 Calcola l'area e il perimetro di un rettangolo, sapendo che le due dimensioni sono tali che la loro somma è 10 cm e che, aggiungendo 1 cm alla minore e togliendo 1 cm dalla maggiore, si ottiene un quadrato. [24 cm^2; 20 cm]

398 Calcola l'area di un rombo, sapendo che il rapporto tra le diagonali è $\frac{5}{2}$ e che la differenza fra la maggiore e il doppio della minore vale la metà della minore. [indeterminato]

399 Calcola la lunghezza delle diagonali di un rombo, sapendo che la somma di $\frac{1}{10}$ della maggiore e $\frac{1}{9}$ della minore è 19 m e che, diminuendo la maggiore di 10 m e aumentando di 9 m la minore, le due diagonali diventano congruenti. [100 m; 81 m]

400 Calcola i raggi di due circonferenze concentriche, sapendo che la loro differenza è 4 cm e che il raggio minore è la metà di quello maggiore aumentata di 1 cm. [6 cm; 10 cm]

401 Calcola l'ampiezza dei due angoli acuti di un triangolo rettangolo, sapendo che la somma del minore e dei $\frac{3}{7}$ del maggiore vale i $\frac{5}{2}$ del minore. [70°; 20°]

402 Determina le ampiezze di due angoli supplementari, sapendo che essi diventano congruenti sottraendo 20° al maggiore e sommando 20° al minore. [110°; 70°]

403 Calcola la lunghezza della diagonale di un rettangolo, sapendo che il perimetro è 14 m e che l'altezza supera la base di 1 m. [5 m]

404 Calcola le lunghezze delle basi di un trapezio, sapendo che l'area è 32 cm^2, l'altezza è 4 cm e la differenza delle basi è 4 cm. [10 cm; 6 cm]

405 Calcola l'area di un trapezio isoscele, sapendo che le basi differiscono di 6 m, che la base maggiore è uguale al doppio della minore diminuito di 3 m e che il lato obliquo è 5 m. [48 m^2]

406 Calcola le lunghezze dei lati di un parallelogramma, sapendo che il perimetro vale $34k$ e che il maggiore è uguale al doppio del minore più $2k$. [$12k$; $5k$]

407 Calcola l'area di un triangolo isoscele, sapendo che il perimetro è $16a$ e che il doppio del lato obliquo è uguale alla base aumentata dei suoi $\frac{2}{3}$. [$12a^2$]

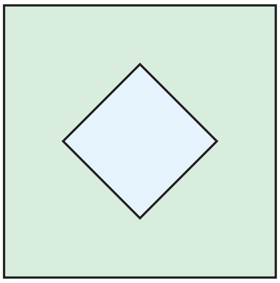
408 In un trapezio rettangolo, la differenza tra le basi vale $12k$. La base maggiore è uguale agli $\frac{8}{5}$ della base minore. Sapendo che l'altezza è $5k$, calcola area e perimetro. [$130k^2$; $70k$]

409 Calcola il perimetro di un rombo, sapendo che le sue diagonali differiscono di $2a$ e che la loro semisomma è il doppio della minore diminuito di $5a$. [$20a$]

410 Calcola l'area di un rettangolo, sapendo che il perimetro è 26 cm e che, se si tolgono 2 cm alla dimensione maggiore e si aggiungono 3 cm alla dimensione minore, quest'ultima diventa superiore di 4 cm rispetto all'altra. [42 cm^2]

411 Due circonferenze sono tangenti. La distanza tra i centri vale il doppio del raggio minore più 2 cm. Il raggio maggiore, sommato ai $\frac{4}{3}$ del raggio minore, vale 9 cm. Calcola le aree dei due cerchi. [9π cm^2; 25π cm^2]

412 Calcola le lunghezze dei lati di un rettangolo, sapendo che il maggiore supera di 4 cm il minore e che, aumentando di 2 cm il maggiore e diminuendo di 1 cm il minore, l'area diminuisce di 2 cm^2. [8 cm; 4 cm]

413 

In una città si è costruita una aiuola quadrata tenuta a prato con al centro una fontana, anch'essa quadrata, disposta come in figura.
Per i contorni, sia interno sia esterno, sono stati usati 176 m di bordo in marmo. Per il contorno esterno però sono serviti 112 m in più che per il contorno interno. Quanto è grande l'aiuola? Quanti m^2 sono rimasti per il prato? [1296 m^2; 1232 m^2]

414 In un rettangolo la base supera di $3a$ il doppio dell'altezza. Costruisci esternamente al rettangolo quattro triangoli isosceli, aventi per basi i lati del rettangolo e le altezze, relative a essi, di lunghezza $8a$. Sapendo che l'area dell'ottagono così ottenuto supera di $168a^2$ l'area del rettangolo dato, determina il perimetro del rettangolo e dell'ottagono. [$42a$; $\simeq 78a$]

Problemi in tre incognite

415 Cinque ragazze fanno colazione al bar prendendo: 2 caffè, 3 bicchieri di latte, 4 paste. Alla richiesta del conto il barista Lorenzo, con fare scherzoso, risponde: «Un caffè e un bicchiere di latte fanno € 1,90, un bicchiere di latte e una pasta fanno € 1,95, un caffè e una pasta fanno € 1,85. Quanto mi dovete?». [€ 8,60]

416 In un triangolo ABC, un terzo dell'ampiezza dell'angolo $\hat{A}$ supera di 5° l'ampiezza dell'angolo $\hat{B}$. Determina le ampiezze dei tre angoli, sapendo che $\hat{C}$ è i $\frac{3}{2}$ di $\hat{B}$. [105°; 30°; 45°]

417 La settimana scorsa ho comprato 3 litri di latte e 2 pacchi di biscotti, spendendo € 8,10. Qualche giorno fa ho comprato 2 litri di latte e 6 uova sfuse e ho speso € 4,80. Oggi, comprando un pacco di biscotti e 12 uova sfuse, ho speso € 5,40. Trova il prezzo di ciascun prodotto. [€ 1,50; € 1,80; € 0,30]

418 Fabrizio è 20 cm più alto di Aldo e 13 cm più di Antonio. La media delle altezze di Fabrizio, Aldo, Antonio è 174 cm. Determina le altezze dei tre. [185 cm; 165 cm; 172 cm]

419 Tre numeri naturali hanno somma 78. Il primo diviso per il secondo dà quoziente 3 e resto 11, diviso per il terzo dà quoziente 2 e resto 9. Trova i tre numeri. [47; 12; 19]

420 La media delle età di Giorgio, Luigi, Marco è 20. L'età di Giorgio sta all'età di Luigi come 2 sta a 1. Dividendo l'età di Marco per l'età di Luigi, si ottiene per quoziente 1 e per resto 8. Determina l'età dei tre. [26; 13; 21]

421 Tre numeri naturali sono tali che il secondo è la somma degli altri due aumentata di 7. La differenza tra il secondo e il primo è tre volte la metà del terzo, mentre la differenza tra il terzo e il doppio del primo è i $\frac{2}{13}$ del secondo. Trova i tre numeri. [5; 26; 14]

422 In un trapezio isoscele, la base maggiore è inferiore di 1 cm al doppio della base minore, che è i $\frac{3}{4}$ del lato obliquo. Sapendo che il perimetro è 16 cm, determina le lunghezze dei lati. [4 cm (lato obliquo); 3 cm (base minore); 5 cm (base maggiore)]

423 Due triangoli isosceli hanno egual base. Il perimetro del primo è 19 cm, quello del secondo 11 cm; inoltre, la differenza tra uno dei lati congruenti e la base del primo triangolo è pari alla misura di uno dei lati congruenti del secondo diminuito di 1 cm. Determina le lunghezze dei lati dei due triangoli. [5 cm; 7 cm; 3 cm]

424 In un triangolo la lunghezza dei $\frac{3}{4}$ di un lato è uguale a quella di un altro lato aumentata di 1 cm; il terzo lato è la semisomma dei primi due, mentre il perimetro del triangolo è 9 cm. Determina la lunghezza dei tre lati. [4 cm; 2 cm; 3 cm]

425 In un parallelepipedo i perimetri dei rettangoli individuati da ciascuna faccia sono rispettivamente 26 cm, 24 cm, 18 cm. Determina il volume del parallelepipedo. [160 cm^3]

426 Un quadrilatero avente due lati congruenti tra loro ha il perimetro uguale a 13 cm. Tali lati insieme sono lunghi come un terzo lato, il quale è 1 cm in meno del quarto lato. Trova la lunghezza dei quattro lati del poligono. [2 cm; 2 cm; 4 cm; 5 cm]

427 La somma delle diagonali di un rombo è pari alla lunghezza del perimetro di un quadrato; la diagonale minore ha la lunghezza del lato del quadrato aumentata di 1 cm, mentre la diagonale maggiore è lunga quanto la somma della diagonale minore e del lato del quadrato. Determina la lunghezza delle due diagonali del rombo e del lato del quadrato. [5 cm; 3 cm; 2 cm]

428 In un trapezio rettangolo, la base maggiore supera la minore di 2 cm. Il rettangolo avente come lati la base minore e l'altezza del trapezio avrebbe perimetro 14 cm, mentre il triangolo avente come lati le basi e l'altezza del trapezio avrebbe perimetro 12 cm. Determina l'area del trapezio. [16 cm^2]

429 Per coprire una spesa di € 30,00 Anna, Giorgio e Giuseppe decidono quanto segue: Anna pagherà $\frac{1}{5}$ della somma pagata complessivamente da Giorgio e Giuseppe, Giorgio pagherà i $\frac{3}{7}$ della somma pagata da Giuseppe. Determina l'importo pagato dai tre. [€ 5,00; € 7,50; € 17,50]

430 Due lati di un triangolo stanno tra loro come 3 sta a 4, il terzo lato è pari alla loro somma diminuita di 2 cm, mentre il perimetro è 26 cm. Trova i tre lati del triangolo. [6 cm; 8 cm; 12 cm]

431 In un triangolo un angolo è doppio di un altro ed è 5° in meno del terzo. Determina le ampiezze degli angoli del triangolo. [70°; 35°; 75°]

432 Tre angoli hanno come somma l'angolo giro. Un quarto di uno è pari a un terzo di un altro e a un mezzo del terzo. Determina le ampiezze dei tre angoli. [160°; 120°; 80°]

433 Il perimetro di un triangolo isoscele è uguale a quello di un rombo il cui perimetro è i $\frac{4}{3}$ della somma dei due lati congruenti del triangolo. La somma dei due perimetri è 32 cm. Determina le lunghezze dei lati dei due poligoni. [4 cm; 6 cm; 4 cm]

434 In un quadrilatero un lato è rispettivamente il doppio, i $\frac{4}{3}$ e i $\frac{2}{3}$ degli altri tre lati. Il perimetro del quadrilatero è 15 cm. Determina le lunghezze dei lati del poligono. [4 cm; 2 cm; 3 cm; 6 cm]

435 Due triangoli isosceli hanno la stessa base. Il perimetro del primo è 11 cm, quello del secondo è 7 cm, mentre quello del quadrilatero individuato dai due lati congruenti di ciascun triangolo è 12 cm. Determina le lunghezze dei lati dei due triangoli. [3 cm; 4 cm; 2 cm]

436 Tre metri di stoffa rossa e due di stoffa blu sono costati a Silvia € 42,50. Essendo avanzati due metri di stoffa rossa, Silvia è tornata al negozio per restituirli e, per cinque metri di stoffa verde, ha dovuto pagare ancora € 15. È tornata infine per un altro metro di stoffa blu e due metri di stoffa verde, pagando € 22. Determina il costo delle tre stoffe al metro. [€ 7,50; € 10; € 6]

437 Sara è andata in pasticceria e ha comprato 10 paste, 6 cioccolatini e 15 caramelle; ha speso € 9,00. Se avesse comprato 5 paste in meno, avrebbe speso € 6,00. Un suo amico, che ha comprato 5 paste e 10 cioccolatini, ha speso € 5,50. Determina il prezzo unitario di paste, cioccolatini e caramelle. [€ 0,60; € 0,25; € 0,10]

438 Tre chiodi di 6 cm, 9 cm e 7 cm vengono piantati alla parete. La somma delle porzioni conficcate è 17 cm e le porzioni esterne sono uguali per i primi due, un centimetro in meno per il terzo. Calcola di quanto affonda ciascun chiodo nel muro. [4 cm; 7 cm; 6 cm]

439 In un cortile si contano, tra gatti, cani e galline, 17 teste e 54 zampe. Il numero dei gatti supera di 2 quello dei cani. Determina quanti sono gli animali di ciascun tipo. [6; 4; 7]

440 Le case di tre amiche si trovano sui vertici di un triangolo. Anna va a trovare Carla, passando da Barbara, e percorre in tutto 3 km. Se Carla va a trovare Barbara e torna a casa, dopo essere passata da Anna, percorre 5,5 km. Quando Barbara va da Carla, dopo essere stata a prendere Anna, percorre 4 km. Calcola le distanze tra le case delle tre amiche. [1,5 km; 1,5 km; 2,5 km]

441 La somma delle cifre di un numero di 3 cifre è 12. La somma della cifra delle decine e di quella delle centinaia è doppia della cifra delle unità. Diminuendo di 3 la cifra delle decine e aumentando di 3 la cifra delle unità, si ottiene un numero dove, rispetto al numero iniziale, risultano scambiate decine e unità. Determina il numero. [174]

442 Il perimetro di un triangolo isoscele è pari al perimetro di un quadrato aumentato di 1 m. La base del triangolo è lunga quanto il lato del quadrato, mentre la somma dei due lati congruenti è pari al quadruplo della base diminuito di 4 m. Trova le lunghezze dei lati dei due poligoni. [5 m; 5 m; 8 m]

Problemi vari

Risolvi i sistemi.

443 $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}+10=0 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=6 \end{cases}$ $\left[\left(-1; -\dfrac{1}{8}\right)\right]$

(Suggerimento. Poni $\dfrac{1}{x}=t$, $\dfrac{1}{y}=v$ e risolvi il sistema nelle incognite t e v.)

444 $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=11 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=4 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{3}; 2\right)\right]$

445 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}-\dfrac{2}{z}=-8 \\ \dfrac{2}{y}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{x} \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=1 \end{cases}$ $\left[\left(-1; \dfrac{1}{2}; 2\right)\right]$

Risolvi i seguenti sistemi di secondo grado. (Suggerimento. Utilizza la legge di annullamento del prodotto e ottieni due sistemi.)

446 $\begin{cases} (x+y)(2x-4y+1)=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ $\left[(1; -1), \left(\dfrac{9}{2}; \dfrac{5}{2}\right)\right]$

447 $\begin{cases} 2x(x-3y)+x=0 \\ 4x-y=-2 \end{cases}$ $\left[(0; 2), \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)\right]$

448 $\begin{cases} (x-1)(4-y)=x^2-1 \\ x-y+5=0 \end{cases}$ $[(1; 6), (-1; 4)]$

449 Considera un sistema lineare con tre equazioni in due incognite. Aiutandoti con una rappresentazione grafica dei vari casi possibili, individua il numero di soluzioni che tale sistema può avere. In quale dei casi che hai determinato rientra il sistema $\begin{cases} 5x-3y=12 \\ x+y=4 \\ x+2y=1 \end{cases}$? [impossibile]

450 $A(2; -1)$ e $B(4; 3)$ sono punti di una retta di equazione $y=mx+q$. Trova m e q. [2; − 5]

451 Il polinomio ax^3+bx+2 ha come zeri i valori $x=-1$ e $x=2$. Trova a e b. [− 1; 3]

452 Il polinomio $P(x)=x^3+ax^2-2x+b$ è divisibile per $(x+1)$ e per $(x-2)$. Trova a e b. [− 1; 0]

453 Se il sistema $\begin{cases} 2ax+by=4 \\ -bx+3ay=-26 \end{cases}$ ha come soluzione $x=-2$, $y=4$, quali sono i valori di a e b? [− 2; − 1]

454 Per quali valori reali di h e k il polinomio $P(x)=hx^2+kx-3x+1$ si annulla per $x=1$ e per $x=2$? $\left[h=\dfrac{1}{2}, k=\dfrac{3}{2}\right]$

455 Trova per quali valori di a e b i due polinomi $A(x)=(a+b)x^2+2bx+2$ e $B(x)=3ax^2+(a+6)x+2$ sono identici. [2; 4]

456 È possibile trovare due numeri A e B tali che sia vera l'uguaglianza $\dfrac{3}{(x-3)(2x+1)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{2x+1}$?
Spiega la tua risposta. (Suggerimento. Ricorda il principio di identità dei polinomi.) $\left[\text{sì; } A = \dfrac{3}{7}, B = -\dfrac{6}{7}\right]$

457 È possibile trovare due numeri A e B tali che sia vera l'uguaglianza $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x^2+1}$?
Spiega la tua risposta.

[impossibile]

458 Considera la frazione algebrica $\dfrac{-5x+2}{x^3+x^2-2x}$. Determina per quali valori di a, b, $c \in \mathbb{R}$ può essere scritta come la somma di frazioni algebriche $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{x-1}$.

$[a = -1; b = 2; c = -1]$

459 Data l'equazione lineare $ax + 2by - cz = 2$ nelle variabili x, y e z, determina a, b, $c \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione data ammetta come soluzioni $\left(1; \dfrac{1}{2}; 1\right)$, $(4; -1; 0)$ e $\left(3; 0; \dfrac{1}{3}\right)$. Scrivi poi l'equazione così trovata.

$\left[a = \dfrac{1}{2}, b = 0, c = -\dfrac{3}{2}; x + 3z - 4 = 0\right]$

460 Un giovane imprenditore vuole iniziare una nuova attività. Una legge per l'imprenditoria giovanile gli consente di scegliere fra due diversi regimi fiscali: nel primo caso le tasse sono pagate a percentuale fissa, pari al 25% dei guadagni, e nel secondo caso le tasse sono pagate a fasce di reddito, cioè sui primi 20 000 euro di guadagno deve pagare il 10%, sulla parte eccedente deve pagare il 35%.
Rappresenta graficamente la situazione e stabilisci qual è il regime più conveniente a seconda delle previsioni di guadagno.

[fino a un guadagno di € 50 000 conviene il secondo regime fiscale]

461 Un gestore di telefonia mobile A offre ai propri clienti la tariffa di € 0,10 per ogni minuto di conversazione, con in più lo scatto alla risposta che addebita € 0,10 all'inizio della conversazione. Il secondo gestore B offre invece la tariffa di € 0,01 ogni 4 secondi di conversazione, senza scatti alla risposta. Rappresenta la situazione in un grafico cartesiano e stabilisci, sulla base di esso, quale delle due tariffe è la più conveniente in relazione all'uso che si intende fare del telefonino.

[fino a 120 secondi conviene il gestore B]

462 Due pompe riforniscono di acqua una piscina o ne aspirano l'acqua. La prima pompa immette acqua per 2 ore, la seconda per 5 ore, e in tal modo l'acqua cresce di 720 litri. La prima pompa aspira acqua per 1 ora, la seconda per 3 ore, così che l'acqua diminuisce di 430 litri. Calcola la portata oraria di ciascuna pompa. Determina le soluzioni del sistema risolvente sia graficamente sia con il metodo di riduzione.

[10 l/h; 140 l/h]

463 È dato il sistema lineare $\begin{cases} (a+1)x - ay = 3 \\ (2a-1)x + 3(2a-1)y = 2 \end{cases}$

Determina per quali valori del parametro a il sistema lineare rappresenta:

a) l'insieme vuoto;

b) un punto del piano cartesiano;

c) una retta nel piano cartesiano.

$\left[\text{a) } a = \dfrac{1}{2} \vee a = -\dfrac{3}{4}; \text{ b) } a \neq \dfrac{1}{2} \wedge a \neq -\dfrac{3}{4}; \text{ c) } \nexists\, a \in \mathbb{R}\right]$

LABORATORIO DI MATEMATICA

I sistemi lineari con Derive

ESERCITAZIONE GUIDATA

Troviamo le coordinate del punto Q, sapendo che appartiene all'asse y e che è equidistante dai punti R e P. Il punto R ha coordinate $(5; 0)$ e il punto P è l'intersezione fra le rette u di equazione $y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$ e v di equazione $y = -\frac{3}{2}x + \frac{19}{2}$. Tracciamo il grafico dei dati e dei risultati.

Per risolvere il problema svolgiamo i seguenti passi:
- troviamo le coordinate del punto P;
- scriviamo $\overline{QP}$ e $\overline{QR}$ in funzione dell'ordinata di Q, sapendo che l'ascissa di Q vale 0;
- determiniamo l'ordinata di Q.

- Entriamo in ambiente Derive.
- Risolviamo il sistema delle equazioni delle rette u e v.
- Immettiamo la formula della distanza fra due punti.
- Con *Semplifica_Sostituisci variabili*, applicato alla formula precedente, ricaviamo $\overline{QR}$ in funzione dell'ordinata di Q.
- Operiamo in modo simile per $\overline{QP}$.
- Con *Risolvi_Espressione* risolviamo l'equazione $\overline{QR}^2 = \overline{QP}^2$, trovando l'ordinata di Q.
- Dopo aver immesso le coordinate, ora note, dei punti P, Q e R attraverso la matrice `[1, 8; 0, 5/2; 5,0]`, con gli strumenti di Derive tracciamo i grafici dei dati e dei risultati.

$$\#1:\quad y = -\frac{3}{2}\cdot x + \frac{19}{2}$$

$$\#2:\quad y = \frac{x}{2} + \frac{15}{2}$$

$$\#3:\quad \text{SOLVE}\left(\left[y = -\frac{3}{2}\cdot x + \frac{19}{2},\ y = \frac{x}{2} + \frac{15}{2}\right], [x, y]\right)$$

$$\#4:\quad [x = 1 \wedge y = 8]$$

$$\#5:\quad d = \sqrt{((x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2)}$$

$$\#6:\quad d = \sqrt{(yq^2 + 25)}$$

$$\#7:\quad d = \sqrt{(yq^2 - 16\cdot yq + 65)}$$

$$\#8:\quad \sqrt{(yq^2 + 25)} = \sqrt{(yq^2 - 16\cdot yq + 65)}$$

$$\#9:\quad \text{SOLVE}(\sqrt{(yq^2 + 25)} = \sqrt{(yq^2 - 16\cdot yq + 65)},\ yq)$$

$$\#10:\quad yq = \frac{5}{2}$$

▲ **Figura 1**

Nel sito: ▶ **1 esercitazione guidata con Derive** ▶ **14 esercitazioni in più**

Esercitazioni

Risolvi i seguenti problemi in modo analogo a quello dell'esercitazione guidata.

1 Trova la distanza fra i punti P e Q, sapendo che P è l'intersezione con l'asse x della retta r di equazione $y = 2x - 4$ e Q è l'intersezione fra le rette s e t rispettivamente di equazione $y = 3x - 7$ e $y = -\frac{1}{2}x$. $[\overline{PQ} = 1]$

2 Determina le coordinate del punto medio M del segmento AB, sapendo che A ha coordinate $(4; -1)$ e B è l'intersezione fra la retta r, passante per $P(3; 3)$ e parallela alla retta p di equazione $y = -2x + 2$, e la retta s di equazione $y = -4x + 13$. $[M(3; 2)]$

3 Determina l'equazione della retta r, sapendo che passa per M, punto medio del segmento $A(2; -1)$ e $B(4; -5)$, e per N, punto d'incontro fra le rette s e t rispettivamente di equazione $4y + 3 = 0$ e $2x - 2y + 3 = 0$. $[3x + 7y + 12 = 0]$

Matematica per il cittadino

I CICLISTI

Due amici ciclisti percorrono, a velocità costanti diverse, una pista circolare di 330 metri. Se partono insieme dallo stesso punto e pedalano nello stesso verso, si incontrano ogni 7 minuti e mezzo; se viaggiano in versi opposti, si incrociano ogni 18 secondi.

1. Indicati con s, t e v rispettivamente lo spazio percorso da un ciclista, il tempo impiegato a percorrerlo e la velocità costante dell'andatura, stabilisci quali relazioni sono vere.

1. $v = s \cdot t$ 4. $t = \frac{v}{s}$ 7. $t = v \cdot s$

2. $s = v \cdot t$ 5. $v = \frac{s}{t}$ 8. $t = \frac{s}{v}$

3. $s = \frac{t}{v}$ 6. $s = \frac{v}{t}$

2. VERO O FALSO? I due amici partono contemporaneamente dallo stesso punto e, dopo una breve accelerazione iniziale, viaggiano ciascuno a velocità costante nello stesso verso. Se in un dato momento, successivo alla partenza, un ciclista sorpassa l'altro, si può affermare che:

a) i due ciclisti viaggiano alla stessa velocità. V F

b) i due ciclisti hanno percorso lo stesso spazio. V F

c) dalla partenza al momento dell'incontro è passato per entrambi lo stesso tempo. V F

d) ha compiuto almeno un giro in più. V F

3. Indicate con v_A e v_B le velocità dei due ciclisti ($v_A > v_B$), sulla base delle informazioni fornite imposta un sistema per determinare a quale velocità viaggiano i due sportivi.

4. Calcola i valori di v_A e v_B e specifica in quale unità di misura sono espressi.

5. Sulla base della seguente tabella, stabilisci che tipo di ciclisti sono i due amici.

ANDATURA	VELOCITÀ (km/h)
da passeggio	15-25
amatoriale	25-50
agonistica su strada piana	50-65
agonistica in volata su strada piana	65-75
agonistica in discesa	75-100

A Sono professionisti in allenamento su strada piana.

B Sono ciclisti amatori ben allenati.

C Sono ciclisti in passeggiata.

D Sono professionisti in volata su strada piana.

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 30 test interattivi in più

1 Il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = -2 \end{cases}$$

è di grado:

A 3.
B 6.
C 1.
D 9.
E 0.

2 Fra i seguenti sistemi di due equazioni nelle incognite x e y, due sono lineari. Quali?

1. $\begin{cases} px - q^2 + 2y = 0 \\ qx - 3y = 1 - p \end{cases}$ 2. $\begin{cases} p - q + 2y = x^2 \\ p + q - x = y \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x - xy = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x - 3y = q^2 \\ 5x + y = p^2 \end{cases}$

A 1 e 2 B 1 e 4 C 2 e 3 D 3 e 4 E 2 e 4

3 Le soluzioni di un'equazione lineare in due incognite sono:

A una sola coppia ordinata di numeri reali.
B tutte le coppie ordinate di numeri reali.
C un numero finito.
D infinite.
E due.

4 La coppia $(1; -3)$ è soluzione di uno dei seguenti sistemi. Quale?

A $\begin{cases} 3x + 5y = -12 \\ -2y = 9 - 3x \end{cases}$

B $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases}$

C $\begin{cases} y = -3 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

D $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y = -4 \end{cases}$

E $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

5 Quale dei seguenti sistemi è impossibile?

A $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

B $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 6x + 15y = 2 \end{cases}$

C $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$

D $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 4x + 10y = 2 \end{cases}$

E $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$

6 Cosa possiamo dire dei seguenti sistemi?

1. $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 3x - 9y = 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 7x - 3y = -2 \\ 21x - 9y = -60 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$

A 1 è impossibile e 2 indeterminato.
B 1 e 2 sono indeterminati.
C 1 e 3 sono determinati.
D è determinato solo il terzo.
E 2 e 3 sono indeterminati.

7 Poiché nel sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ 2x + 7y = 0 \end{cases}$ si ha $D = 11$, $D_x = D_y = 0$, possiamo affermare che:

A il sistema è indeterminato.
B il sistema è impossibile.
C la soluzione del sistema è $(0; 0)$.
D la soluzione del sistema è $(11; 0)$.
E la soluzione del sistema è $(11; 11)$.

8 Soltanto uno dei seguenti sistemi traduce il problema: «La somma delle età di due fratelli è 24 anni. Fra 6 anni il maggiore avrà un'età doppia del minore». Quale?

A $\begin{cases} x + y = 24 \\ x = 2y \end{cases}$

B $\begin{cases} x + y = 24 \\ x + 6 = 2(y + 6) \end{cases}$

C $\begin{cases} x + y = 24 \\ x + 6 = 2y \end{cases}$

D $\begin{cases} x + y = 24 \\ x + 6 = 2y + 6 \end{cases}$

E $\begin{cases} x + y = 24 \\ x = 2y + 6 \end{cases}$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

SPIEGA PERCHÉ

9 Cosa puoi concludere analizzando il sistema seguente? Qual è l'interpretazione grafica?

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ -2x + y = 3 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

10 Cosa si intende per sistema letterale? Esistono valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema seguente è determinato? Perché?

$$\begin{cases} 3ax - 4y = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

11 Un sistema letterale composto da due equazioni equivalenti è sempre indeterminato? Perché?

12 Un sistema lineare di due equazioni in due incognite è indeterminato quando i determinanti D, D_x e D_y sono tutti nulli? Perché?

13 Determina due numeri tali che la loro somma sia 12. Quante soluzioni ha questo problema? Quante soluzioni ammette se i due numeri sono naturali? E se vale anche la condizione che uno dei due numeri sia il doppio dell'altro?
[$x + y = 12$; infinite; sette; una]

14 È dato il seguente sistema: $\begin{cases} 3x - 7y = 1 \\ -6x + 14y = 3 \end{cases}$

Quanto vale il suo determinante? Osservando solo il determinante, puoi stabilire se il sistema è impossibile? In che modo potresti esserne sicuro?

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

Risolvi graficamente i seguenti sistemi lineari e poi verifica algebricamente la soluzione ottenuta applicando il metodo di riduzione.

15 $\begin{cases} y - 3x = 6 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$ [rette secanti; $(-2; 0)$]

16 $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 6x + 3y = 2 \end{cases}$ [rette parallele; impossibile]

17 $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 6y = 10 \end{cases}$ [rette coincidenti; indeterminato]

Per ogni sistema stabilisci se esso è determinato, impossibile o indeterminato, senza risolverlo.

18 $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -x + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ [indeterminato]

19 $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 3x + y = 15 \end{cases}$ [determinato]

20 $\begin{cases} 2x - \dfrac{4}{3}y = 3 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$ [impossibile]

Risolvi i seguenti sistemi con i metodi più opportuni.

21 $\begin{cases} (x+2)^2 + 1 = x^2 + 5y \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ [$(0; 1)$]

22 $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3} + 3 = \dfrac{x-2y}{6} \\ x + \dfrac{2(4y-5x)}{9} = 1 \end{cases}$ $\left[\left(-15; -\dfrac{3}{4}\right)\right]$

23 $\begin{cases} 3(y-1) = -3(x+2) \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$ $\left[\left(-\dfrac{1}{4}; -\dfrac{3}{4}\right)\right]$

24 $\begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ \dfrac{3x+y}{3} + \dfrac{2y-x}{5} = x + \dfrac{2}{5} \end{cases}$ [$(-2; 0)$]

25 $\begin{cases} \dfrac{3x+y}{5} = x - \dfrac{y+7}{10} - \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{y-x}{2} + \dfrac{2x+y}{3} = y + \dfrac{4}{9} \end{cases}$ $\left[\left(4; \dfrac{4}{3}\right)\right]$

26 $\begin{cases} x + \dfrac{1}{2} = \dfrac{y+1}{2} \\ \dfrac{1-y}{3} - 2x - 3 = 0 \end{cases}$ [$(-1; -2)$]

27 $\begin{cases} x+3+(y+1)^2=y^2 \\ 3(x+2y)=2 \end{cases}$ [impossibile]

28 $\begin{cases} \dfrac{x-y}{4}+\dfrac{y+2}{7}=2y-8 \\ 3y+4=\dfrac{8x-3y}{3}+\dfrac{9y-5x}{4} \end{cases}$ [(9; 5)]

29 $\begin{cases} 5x-y-13=0 \\ \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ [(2; − 3)]

30 $\begin{cases} \dfrac{3x-3y}{2}-2x+\dfrac{y}{3}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y-2x}{3}=y+\dfrac{1}{9} \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{4}{3};-2\right)\right]$

31 $\begin{cases} (3x-2y-6)-\dfrac{2x-3y-3}{2}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2}{3}(y-x)-(x-1)^2=(1-x)(1+x) \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{5}{2};-2\right)\right]$

32 $\begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-x(x+2)+6y=1 \\ (y-2)(y+3)+5=y(y-3)+2(x-y)+\dfrac{1}{4} \end{cases}$ [indeterminato]

33 $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2-y^2}=\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{3}{4(x+y)} \\ \dfrac{4}{y}-x=\dfrac{x(3-y)}{y}+1 \end{cases}$ [(1; 1), non accettab.]

34 $\begin{cases} \dfrac{y+1}{x+1}-\dfrac{y-1}{x-1}=\dfrac{1}{x^2-1} \\ \left(\dfrac{y-1}{4}+2x\right)+\dfrac{y-6x}{2}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$ $\left[\left(-\dfrac{7}{2};-4\right)\right]$

35 $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{x-1}=\dfrac{1}{3} \\ 3x+y+1=0 \end{cases}$ $\left[\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)\right]$

36 $\begin{cases} \dfrac{x}{y+1}=\dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{3y+1} \end{cases}$ [impossibile]

37 $\begin{cases} 3x+y-z=-2 \\ 5y+3z=-1 \\ 7x-2z=1 \end{cases}$ [(1; − 2; 3)]

38 $\begin{cases} x-y+2z=6 \\ 4x+2y+2z=0 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$ [(1; − 3; 1)]

39 $\begin{cases} ax-3y=2a \\ (1-a)x+y=-1 \end{cases}$ $\left[\text{se } a\neq\dfrac{3}{2}, (-1;-a); \text{ se } a=\dfrac{3}{2}, \text{ indeterminato}\right]$

40 $\begin{cases} (a+1)x+ay=2 \\ x+ay=-3 \end{cases}$ $\left[\text{se } a\neq 0, \left(\dfrac{5}{a};\dfrac{-3a-5}{a^2}\right); \text{ se } a=0, \text{ impossibile}\right]$

---

41 Risolvi il seguente sistema con il metodo del confronto.

$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y+4}=0 \\ \dfrac{1}{3x+1}-\dfrac{1}{5y}=0 \end{cases}$ [(− 2; − 1)]

42 Risolvi il seguente sistema letterale.

$\begin{cases} \dfrac{ax}{a+1}-y=a \\ x-\dfrac{ay}{a+1}=0 \end{cases}$ $\left[\text{se } a\neq-1\wedge a\neq-\dfrac{1}{2}, \left(-\dfrac{a^2(a+1)}{2a+1};-\dfrac{a(a+1)^2}{2a+1}\right); \text{ se } a=-\dfrac{1}{2}, \text{ imp.; se } a=-1, \text{ perde sign.}\right]$

43 Risolvi il seguente sistema letterale.

$\begin{cases} \dfrac{2x+y+1}{a+1}+\dfrac{x-y}{a}=2 \\ 2ax-y=a^2 \end{cases}$ [se $a\neq 0 \wedge a\neq -1$, $(a; a^2)$; se $a=0 \vee a=-1$, perde sign.]

44 Determina per quali valori del parametro k il seguente sistema è indeterminato.

$$\begin{cases}(k+2)x+3y=-k\\ 14x+6y=-10\end{cases}$$ $[k=5]$

Problemi

45 In un rettangolo il perimetro è 34 cm e il doppio della base supera l'altezza di 10 cm. Determina l'area del rettangolo. [72 cm^2]

46 Determina due numeri, sapendo che la somma tra il minore diminuito di 4 e il maggiore diminuito di 1 è 24 e, inoltre, che la loro somma è pari al doppio del minore aumentato di 5. [12; 17]

47 In un rombo la diagonale maggiore supera la minore di 6 cm, inoltre la somma tra i $\frac{3}{7}$ della maggiore e $\frac{1}{3}$ della minore è di 30 cm. Determina le diagonali del rombo. [36 cm; 42 cm]

48 Determina due numeri, sapendo che la loro differenza è 1 e che, se si aggiungono ai $\frac{2}{5}$ del maggiore i $\frac{3}{4}$ del minore, si ottiene 5. [(5; 4)]

49 La base di un rettangolo è i $\frac{3}{8}$ del suo perimetro, mentre i $\frac{4}{7}$ della base superano di 3 cm i $\frac{3}{2}$ dell'altezza. Determina la lunghezza dei lati del rettangolo. [42 cm; 14 cm]

50 A una festa di beneficenza sono presenti 275 persone, fra uomini, donne e bambini. Il numero complessivo delle donne e dei bambini è i $\frac{3}{2}$ di quello degli uomini. Il biglietto di ingresso costa € 5 per gli uomini, € 2,50 per le donne e € 1,50 per i bambini. Trova il numero degli uomini, delle donne e dei bambini presenti alla festa, sapendo che l'incasso totale è di € 882,50. [uomini = 110; donne = 85; bambini = 80]

51 Determina per quali valori di k le rette di equazioni $kx-2y+4=0$ e $2kx-y=2$ si incontrano in un punto della bisettrice del primo e terzo quadrante. $\left[\frac{4}{5}\right]$

52 In un rombo la differenza tra i $\frac{7}{5}$ della diagonale maggiore e la metà della diagonale minore è 7 cm. La differenza tra i $\frac{5}{3}$ della diagonale maggiore e i $\frac{9}{7}$ della diagonale minore è uguale alla differenza delle diagonali. Calcola l'area del rombo. [1050 cm^2]

53 Trova per quale valore di k le rette di equazioni $x-3y=6$ e $2x-(k+1)y=k$ si incontrano in un punto dell'asse y. $[-2]$

54 Determina il polinomio $P(x)=ax^3+bx^2+cx-8$ sapendo che:
- è divisibile per $(x+1)$;
- assume valore -18 per $x=1$;
- se viene diviso per $(x-2)$ ha come resto -24.

$[P(x)=x^3-x^2-10x-8]$

55 In due villaggi dell'Amazzonia la popolazione di uno era i $\frac{5}{6}$ della popolazione dell'altro. Una grave epidemia costrinse a emigrare 70 abitanti di ogni villaggio, per cui attualmente il primo villaggio ha i $\frac{4}{5}$ degli abitanti del secondo. Quanti abitanti ha oggi ciascun villaggio? [280 e 350]

56 Nel piano cartesiano xOy i punti $A(5;1)$, $B(0;5)$, $C(-4;2)$ sono i vertici di un parallelogramma $ABCD$ il cui vertice D si trova nel quarto quadrante.

a) Determina le coordinate di D.
b) Trova il piede H della perpendicolare BH alla diagonale AC.
c) Trova i punti di ordinata -3 che individuano con i punti A e C un triangolo rettangolo di ipotenusa AC.

$\left[\text{a) } D(1;-2);\ \text{b) } H\left(-\frac{31}{82};\frac{131}{82}\right);\ \text{c) } Q_1(1;-3),\ Q_2(0;-3)\right]$

57 Considera il sistema nelle incognite x e y:

$$\begin{cases}2x^n-ay=2\\ bx^2+y=1\end{cases}$$

Sapendo che è di secondo grado e che ha come soluzione $(-2;-1)$, trova a, b, n. $\left[6, \frac{1}{2}, 1\right]$

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 7 esercizi in più

58 Trova per quali valori di a e di b i seguenti sistemi sono equivalenti:

$$\begin{cases} x - 4y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax - 2by = -1 \\ bx - ay = 2 \end{cases}$$

[$a = -1, b = 1$]

59 Consideriamo due automobili: D con il motore diesel e B a benzina. Per l'auto D si paga una tassa annua di € 450 e l'auto percorre in media 22 km con un litro di gasolio. Per l'auto B la tassa annua è di € 120 e si percorrono 16 km con un litro di benzina. Sapendo che il gasolio costa € 1,21 al litro e la benzina € 1,32 al litro, calcola il numero di kilometri percorsi in un anno per i quali si spende la stessa somma usando le due automobili. Per un numero di kilometri maggiore quale delle due auto è più conveniente? [12 000 km; D]

60 Riempiendo di terra una carriola e ponendola su una bilancia, si rilevano complessivamente 45 kg. Dimezzando la quantità di terra, il tutto pesa 33 kg. Quanto pesa da sola la carriola? [21 kg]

61 TEST Un secchio pieno di sabbia pesa complessivamente 9 kg, riempito per metà di sabbia pesa 5 kg. Quanto pesa il secchio vuoto?

- A 0,5 kg
- B 1 kg
- C 2 kg
- D 2,5 kg
- E Il peso del secchio non può essere determinato.

(*Olimpiadi della matematica*, *Giochi di Archimede*, 1996)

62 TEST Il prezzo della mascotte delle Olimpiadi della matematica è dato dalla somma del prezzo delle materie prime e di quello della lavorazione. L'anno scorso la mascotte costava € 10. Quest'anno il costo delle materie prime è raddoppiato; di conseguenza la mascotte costa € 11,80. Quanto incide quest'anno il prezzo delle materie prime sul prezzo finale del prodotto?

- A Meno di € 1.
- B Tra € 1 e 2.
- C Tra € 2 e 3.
- D Tra € 3 e 4.
- E Più di € 4.

(*Olimpiadi della matematica*, *Giochi di Archimede*, 2000)

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 9 esercizi in più

63 Roger enjoys soccer and his team is pretty good: last season they won 7 more games than they lost. There were a total of 23 games; none were ties. How many games did his team win?

(CAN *John Abbott College*, Final Exam, 1999)

[15]

64 Trevor's farm of mutant animals has 3-legged goats and 5-legged goats. In one pen he counts 83 legs and 23 heads; how many 5-legged goats are there?

(USA *Rice University Mathematics Tournament*, 2005)

[7]

65 Jeff, Gareth and Ina all share the same birthday. Gareth is one year older than Jeff, and Ina is two years older than Gareth. This year the sum of their ages is 118. How old is Gareth?

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge*, 2003)

[39]

66 One cup of half-and-half cream contains 28 g of fat and 7 g of protein, while one cup of low-fat milk contains 5 g of fat and 8 g of protein. How many cups of half-and-half cream and how many cups of low-fat milk should be combined to get a mixture containing 71 g of fat and 38 g of protein?

(USA *Southeast Missouri State University: Math Field Day*, 2005)

[2; 3]

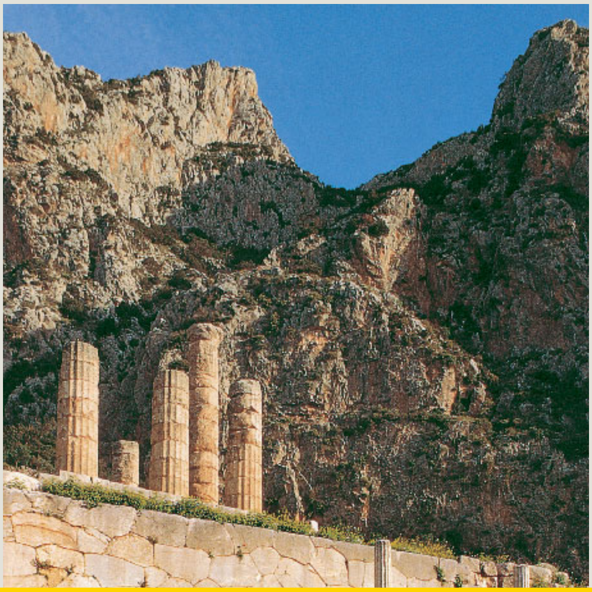
GLOSSARY

to enjoy: trovare piacere in
fat: grasso
goat: capra
(…)-legged: a (…) zampe
to lose-lost-lost: perdere
pen: recinto per animali
pretty: piuttosto, abbastanza
season: stagione
team: squadra
tie: pareggio
to win-won-won: vincere

CAPITOLO

11

I numeri reali e i radicali



Il problema di Delo

Una leggenda narra che nell'anno 400 a.C. la città di Atene fu colpita da una terribile epidemia di peste. Una delegazione di ateniesi si diresse a Delfi per consultare l'oracolo, nella speranza che potesse indicare un modo per porre fine all'epidemia. Questo fu il responso dell'oracolo: «Ateniesi, per far cessare la peste, dovete duplicare l'altare consacrato ad Apollo nell'isola di Delo»…

…come fecero gli ateniesi a raddoppiare l'altare?

➡ **La risposta a pag. 799**

1. La necessità di ampliare l'insieme $\mathbb{Q}$

L'estrazione di radice non è un'operazione interna in $\mathbb{Q}$

Abbiamo visto che, partendo dall'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, per rendere interna la sottrazione, operazione inversa dell'addizione, è stato necessario introdurre l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$.
Analogamente, con l'introduzione dell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, è stato possibile rendere interna la divisione, operazione inversa della moltiplicazione:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Nell'insieme $\mathbb{Q}$ è possibile eseguire sempre le quattro operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione (esclusa la divisione per 0).

Tuttavia, è necessario ampliare ancora l'insieme $\mathbb{Q}$, perché l'operazione inversa della potenza, l'estrazione di radice, non è interna in $\mathbb{Q}$.

Infatti abbiamo visto che un qualsiasi numero razionale corrisponde a un numero decimale finito o periodico e viceversa, mentre in alcuni casi l'estrazione di radice ha come risultato numeri decimali illimitati e non periodici.

Per semplicità studiamo il problema limitandoci a considerare solo la radice quadrata.

La definizione di radice quadrata

Vogliamo definire la radice quadrata come operazione inversa dell'elevamento al quadrato; dato un numero *a*, vogliamo quindi determinare un numero *b* che, elevato al quadrato, dia *a*.
Consideriamo, per esempio, 25. È vero che:

$$(-5)^2 = 25 \text{ e } 5^2 = 25.$$

Ci sono due numeri, -5 e 5, che elevati al quadrato danno 25; tuttavia, affinché la radice quadrata sia un'operazione, dobbiamo associare a 25 *un solo* valore. Per convenzione, scegliamo il valore positivo. Diciamo che la radice quadrata di 25 è 5 e scriviamo:

$$\sqrt{25} = 5.$$

Inoltre, non tutti i numeri razionali hanno la radice quadrata. Per esempio, $\sqrt{-16}$ non esiste perché nessun numero elevato al quadrato dà come risultato un numero negativo.

DEFINIZIONE

Radice quadrata

La radice quadrata di un numero razionale positivo o nullo è quel numero, positivo o nullo, che, elevato al quadrato, dà come risultato il numero dato.

$$\sqrt{a} = b \quad \text{se} \quad a = b^2 \quad (a \geq 0,\ b \geq 0)$$

La radice quadrata e i numeri razionali

Nell'insieme dei numeri razionali positivi o nulli, che indichiamo con $\mathbb{Q}_0^+$, la radice quadrata **non è un'operazione interna**, perché esistono numeri la cui radice quadrata non è un numero razionale.

Dimostriamo, per esempio, che **2 non ha per radice quadrata un numero razionale**, facendo vedere che non esiste alcun numero razionale che, elevato al quadrato, dia come risultato 2.

Suddividiamo a tale scopo l'insieme dei razionali positivi, compreso lo zero, in due sottoinsiemi: uno contenente le sole frazioni apparenti, cioè i numeri naturali, e l'altro contenente tutte le altre frazioni.

Procediamo in questi due insiemi alla ricerca di un numero il cui quadrato sia uguale a 2.

1. Nessun naturale ha come quadrato 2. Infatti, associando a ogni naturale il suo quadrato, si può vedere che fra i quadrati il numero 2 non compare.

n	0	1	2	3	4	5	…
n^2	0	1	4	9	16	25	…

▶ $\frac{a}{b}$ è una frazione apparente se *a* è multiplo di *b*.
Per esempio, $\frac{6}{2} = 3$ è apparente; $\frac{1}{2}$ e $\frac{7}{2}$ non sono apparenti.

2. Nessuna frazione non apparente ha come quadrato 2. Supponiamo per assurdo che esista una frazione non apparente $\frac{a}{b}$, ridotta ai minimi termini, il cui quadrato sia uguale a 2, ossia tale che:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2.$$

Se $\frac{a}{b}$ non è una frazione apparente, significa che a non è multiplo di b. Ma allora neanche la frazione $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a \cdot a}{b \cdot b}$ può essere apparente; pertanto non può essere vera l'uguaglianza tra la frazione $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ non apparente e il numero naturale 2, che è una frazione apparente.

Possiamo concludere che non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia uguale a 2; pertanto l'operazione di radice quadrata non è interna in $\mathbb{Q}_0^+$.

▶ In una frazione non apparente ridotta ai minimi termini il numeratore e il denominatore sono primi fra loro. Se eleviamo al quadrato la frazione, ancora numeratore e denominatore sono primi fra loro, perché sono dati dagli stessi fattori, ripetuti due volte. Per esempio:

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{5^2}{7^2} = \frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 7}.$$

Punti di una retta e numeri razionali

Nella rappresentazione dei numeri razionali su una retta, a ogni numero razionale corrisponde un punto della retta. Viceversa, è vero che a ogni punto della retta corrisponde un numero razionale?

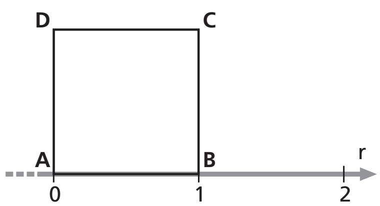
Possiamo rispondere che **non** è vero con un esempio.

ESEMPIO Consideriamo la retta orientata r. Costruiamo sul segmento AB unitario un quadrato (figura 1a), indicando con d la misura della diagonale AC (figura 1b), e applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo ABC:

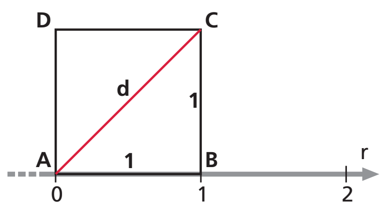
$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Il segmento AE (figura 1c) misura d, con $d^2 = 2$. Al punto E della retta r non può quindi corrispondere un numero razionale.

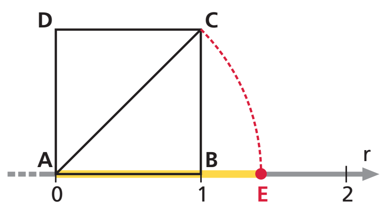
▶ Teorema di Pitagora: in un triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.



a. Costruiamo sul segmento unitario il quadrato *ABCD*.



b. Tracciamo la diagonale *AC*.



c. Riportiamo *AC* con il compasso sulla retta, ottenendo il segmento *AE*.

▲ **Figura 1**

Abbiamo così mostrato che esiste un punto sulla retta r a cui non corrisponde nessun numero razionale.

2. Dai numeri razionali ai numeri reali

Le successioni approssimanti

Abbiamo già visto che ogni numero razionale si può scrivere in forma decimale limitata o illimitata periodica e viceversa.

Consideriamo la frazione $\frac{5}{6}$, che corrisponde al numero decimale periodico $0,8\overline{3}$.

Questo numero può essere approssimato al numero di cifre decimali che si vuole, per difetto o per eccesso.

Le **approssimazioni per difetto** all'intero e a una, due, tre... cifre decimali sono le seguenti:

0 0,8 0,83 0,833 0,8333 ...

Le **approssimazioni per eccesso** sono:

1 0,9 0,84 0,834 0,8334 ...

In prima approssimazione possiamo dire che $\frac{5}{6}$ è compreso fra 0 e 1, in seconda approssimazione che $\frac{5}{6}$ è compreso fra 0,8 e 0,9 e così via.
Più aumentano le cifre decimali, più ci si avvicina al valore $\frac{5}{6}$.

Questo procedimento si può applicare a ogni numero decimale periodico.

Ogni numero decimale periodico può essere associato a due **successioni di numeri decimali finiti** che lo approssimano sempre meglio.

I numeri decimali illimitati non periodici

Vediamo ora se è possibile applicare il procedimento delle approssimazioni alla radice quadrata di 2, $\sqrt{2}$, che come abbiamo dimostrato non è un numero razionale.

Cerchiamo prima due successioni di numeri decimali, tali che i loro quadrati approssimino il numero 2, per difetto e per eccesso.

Prima approssimazione. Sappiamo che:

$$(1)^2 < 2 < (2)^2.$$

Seconda approssimazione. Calcoliamo tutti i quadrati dei numeri con una cifra decimale, compresi fra 1 e 2, e controlliamo fra quali di questi numeri si trova il numero 2:

$(1,1)^2 = 1,21$ $\quad$ $(1,2)^2 = 1,44$ $\quad$ $(1,3)^2 = 1,69$

$(1,4)^2 = 1,96$ $\quad$ $(1,5)^2 = 2,25$

Possiamo fermarci qui, perché abbiamo già trovato i due numeri richiesti:

$$1,96 < 2 < 2,25 \quad \text{ossia} \quad (1,4)^2 < 2 < (1,5)^2.$$

Terza approssimazione. Con un procedimento analogo calcoliamo i quadrati dei numeri con due cifre decimali, compresi fra 1,4 e 1,5, controllando fra quali di essi si trova il 2.

$(1,41)^2 = 1,9881$ $\quad$ $(1,42)^2 = 2,0164.$

Possiamo fermarci qui, perché abbiamo già trovato i due numeri fra cui è compreso 2:

$$1{,}9881 < 2 < 2{,}0164 \qquad \text{ossia} \qquad (1{,}41)^2 < 2 < (1{,}42)^2.$$

Ulteriori approssimazioni. Questo procedimento può continuare per la terza cifra decimale, la quarta e così via.

Scriviamo ora le due successioni che approssimano per difetto e per eccesso $\sqrt{2}$.

- S_1: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; ...
- S_2: 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422; ...

I termini della prima successione sono crescenti, quelli della seconda decrescenti. La differenza fra un termine della seconda successione e il corrispondente della prima successione va via via diminuendo:

$$2 - 1 = 1; \qquad 1{,}5 - 1{,}4 = 0{,}1; \qquad 1{,}42 - 1{,}41 = 0{,}01\ldots$$

Tuttavia, aumentando il numero delle cifre decimali, non si giunge mai a uno stesso numero decimale finito o periodico. In tal caso, infatti, dovremmo trovare un numero razionale il cui quadrato è 2, cosa esclusa in precedenza.

Comunque, così come la scrittura 0,833333... è collegata alle due successioni che approssimano $\frac{5}{6}$ e rappresenta $\frac{5}{6}$ in forma decimale, possiamo pensare che anche 1,41421... sia la scrittura decimale di $\sqrt{2}$.

Scriviamo

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$$

$\sqrt{2}$, pur avendo infinite cifre decimali, non è periodico. Un numero di questo tipo viene detto **numero decimale illimitato non periodico** e non è un numero razionale.

> Se usi la calcolatrice per calcolare $\sqrt{2}$, trovi un numero decimale finito che è una sua approssimazione.

I numeri irrazionali

Potremmo far vedere che ogni volta che un'estrazione di radice non ha come risultato un numero razionale, esiste un procedimento per associare alla radice un numero decimale illimitato non periodico. Diamo allora la seguente definizione.

> Il procedimento delle successioni approssimanti si può estendere anche alle radici cubiche, quarte ecc.

DEFINIZIONE

Numero irrazionale

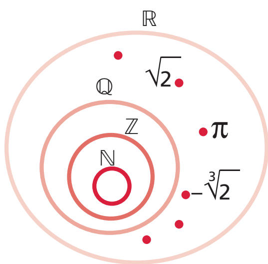
Chiamiamo numero irrazionale ogni numero decimale illimitato non periodico.

I numeri irrazionali sono infiniti. Per esempio, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{7}$ sono numeri irrazionali.
Esistono anche numeri irrazionali che non derivano dall'estrazione di radici: per esempio, il numero $\pi = 3{,}14159\ldots$

> Il rapporto fra le misure della circonferenza e del diametro è costante e viene indicato con π (pi greco). Nel 1761 il matematico tedesco Lambert dimostrò che π è un numero irrazionale.

I numeri reali

Poiché esistono dei numeri non razionali, dobbiamo ampliare l'insieme dei numeri razionali considerando un nuovo insieme, che chiamiamo insieme dei numeri **reali**; tale insieme è l'unione dell'insieme dei numeri razionali e di quello degli irrazionali.



DEFINIZIONE

Numero reale

Chiamiamo numero reale ogni numero razionale o irrazionale.

Indichiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, mentre $\mathbb{R}_0^+$ è l'insieme dei numeri reali positivi o nulli.

Nell'insieme $\mathbb{R}$ si possono eseguire le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, potenza, estrazione di radice, ma non:

a) la divisione per 0;
b) l'estrazione di radice con indice pari di numeri negativi.

Come l'insieme $\mathbb{Q}$, anche l'insieme $\mathbb{R}$ è **denso**, cioè, dati due numeri reali a e b, esiste sempre un numero reale compreso tra essi, e quindi ne esistono infiniti.

L'insieme $\mathbb{R}$ si può mettere in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta: a ogni numero reale corrisponde un punto della retta e viceversa. Per questo si dice che $\mathbb{R}$ è un insieme **completo**.

▶ Per calcolare $\sqrt{-2}$ è necessario introdurre un nuovo insieme numerico.

▶ $\mathbb{Q}$ è denso, ma non è completo.

Le operazioni tra numeri reali e le approssimazioni

Dal punto di vista teorico sarebbe possibile definire in modo rigoroso le operazioni fra numeri reali e studiarne le proprietà.
Si può inoltre dimostrare che $\mathbb{R}$ è un ampliamento di $\mathbb{Q}$: le operazioni fra numeri reali conservano le proprietà formali delle operazioni fra numeri razionali.
Noi ci limiteremo a osservare che, per svolgere i calcoli, si devono utilizzare le approssimazioni decimali dei numeri reali. Cerchiamo di capire che cosa questo comporta.

Consideriamo $\sqrt{31}$ e $\sqrt{67}$, limitandoci, per semplicità, alle approssimazioni con due cifre decimali:

$\sqrt{31}$ è approssimato per difetto da 5,56 e per eccesso da 5,57, ossia $5{,}56 < \sqrt{31} < 5{,}57$;

$\sqrt{67}$ è approssimato per difetto da 8,18 e per eccesso da 8,19, ossia $8{,}18 < \sqrt{67} < 8{,}19$.

Notiamo che le approssimazioni per difetto forniscono sempre cifre certe, ossia cifre che sarebbero senz'altro presenti se considerassimo approssimazioni con più di due cifre decimali. In altre parole siamo sicuri di poter scrivere:

$$\sqrt{31} = 5{,}56... \qquad \sqrt{67} = 8{,}18...$$

▶ Le calcolatrici forniscono approssimazioni per difetto.

Calcoliamo ora la somma di $\sqrt{31}$ e $\sqrt{67}$ per eccesso e per difetto.

$$\sqrt{31}+\sqrt{67}= \begin{cases} 5{,}56+8{,}18=13{,}74 & \text{(per difetto)} \\ 5{,}57+8{,}19=13{,}76 & \text{(per eccesso)} \end{cases}$$

Poiché il risultato è compreso fra 13,74 e 13,76, non si può dire con certezza quale sia la seconda cifra decimale della somma considerata.

L'unica cifra decimale certa è la prima, quindi possiamo solo scrivere:

$$\sqrt{31}+\sqrt{67}=13{,}7...$$

La somma è nota con un'incertezza maggiore di quella dei suoi addendi.

Questa «propagazione dell'incertezza» è ancora più evidente se eseguiamo la moltiplicazione.

Prendiamo come fattori gli addendi dell'esempio precedente e calcoliamone il prodotto per eccesso e per difetto.

$$\sqrt{31}\cdot\sqrt{67}= \begin{cases} 5{,}56\cdot 8{,}18=45{,}4808 & \text{(per difetto)} \\ 5{,}57\cdot 8{,}19=45{,}6183 & \text{(per eccesso)} \end{cases}$$

Nel prodotto sono comparse quattro cifre decimali, ma non per questo il risultato è più preciso. Infatti, poiché il prodotto è compreso fra 45,4808 e 45,6183, l'incertezza è già presente nella prima cifra decimale, quindi possiamo scrivere:

$$\sqrt{31}\cdot\sqrt{67}=45,...$$

Il prodotto è noto con un'incertezza maggiore di quella dei suoi fattori.

Questi due esempi forniscono un'idea dei problemi che sorgono quando si opera con approssimazioni di numeri irrazionali.

Per evitare questi problemi, si preferisce non operare con i numeri reali in forma approssimata, ma definendo le operazioni con i radicali. Per esempio, impareremo che $\sqrt{31}\cdot\sqrt{67}=\sqrt{31\cdot 67}=\sqrt{2077}$.

È facile comprendere che, se invece di un'operazione eseguiamo i calcoli relativi a un'espressione con più operazioni, l'incertezza si propaga di operazione in operazione, rendendo sempre meno attendibile il risultato.

ESEMPIO

Calcoliamo il prodotto $\sqrt{31}\cdot\sqrt{67}\cdot\sqrt{80}$.

Procedendo per difetto, otteniamo:

$$5{,}56\cdot 8{,}18\cdot 8{,}94=406{,}598352.$$

Se invece procediamo per eccesso, otteniamo:

$$5{,}57\cdot 8{,}19\cdot 8{,}95=408{,}283785.$$

L'incertezza si è propagata anche alla cifra dell'unità.

ESPLORAZIONE: ERONE E LA RADICE QUADRATA

L'**algoritmo di Erone** è un procedimento che permette di calcolare la radice quadrata di un numero. Possiamo spiegarlo meglio con un esempio, utilizzando un'interpretazione geometrica.

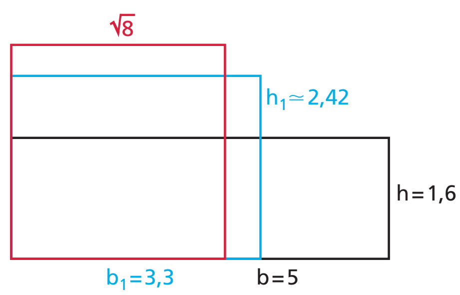
Cerchiamo di calcolare $\sqrt{8}$.
$\sqrt{8}$ può essere intesa come la misura del lato di un quadrato di area 8. Vediamo come costruire tale quadrato operando per approssimazioni successive.
Scegliamo un numero $b < 8$, per esempio 5, e il numero $h = \frac{8}{b} = \frac{8}{5} = 1{,}6$.

Costruiamo il rettangolo di lati 5 e $\frac{8}{5}$, che è equivalente al quadrato perché ha area 8.

I valori di b e h approssimano la misura del lato del quadrato, uno per eccesso e l'altro per difetto.
Calcoliamo ora il valore medio b_1 fra b e h:

$$b_1 = \frac{b+h}{2} = \frac{5+1{,}6}{2} = 3{,}3$$

e consideriamo poi $h_1 = \frac{8}{b_1} = \frac{8}{3{,}3} = 2{,}42\ldots$



Costruiamo un nuovo rettangolo i cui lati misurino b_1 e h_1. Anche in questo caso l'area del rettangolo vale 8, b_1 è un valore approssimato per eccesso della misura del lato del quadrato, mentre h_1 è un valore approssimato per difetto.
Poiché b_1 è il valore medio fra b e h, b_1 approssima $\sqrt{8}$ meglio di b.

Possiamo ora considerare $b_2 = \frac{b_1 + h_1}{2}$ e $\frac{8}{b_2}$, e procedere poi in questo modo quante volte vogliamo: le dimensioni dei rettangoli forniranno approssimazioni sempre più precise di $\sqrt{8}$, una per eccesso, l'altra per difetto. Dalla tabella (in cui i valori decimali sono approssimati) possiamo notare che con questo procedimento giungiamo piuttosto rapidamente a un valore di $\sqrt{8}$ con una buona approssimazione. Infatti, se calcoliamo $\sqrt{8}$ con una calcolatrice, otteniamo $\sqrt{8} = 2{,}828\ldots$

b	$h = \frac{8}{b}$	$\frac{b+h}{2}$
5	1,6	3,3
3,3	2,4242	2,8621
2,8621	2,7951	2,8286
…	…	…

IN DIECI RIGHE

Erone non è stato il solo ad affrontare il problema dell'estrazione della radice quadrata.
Descrivi altri metodi in una relazione redatta con il computer.

Cerca nel web: metodi calcolo radice quadrata, Archita, Bombelli, Newton.

3. I radicali

Abbiamo visto che la radice quadrata è l'operazione inversa della potenza con esponente 2 e che il simbolo $\sqrt{a}$ indica la radice quadrata di a, che esiste se $a \geq 0$ e rappresenta un numero reale non negativo.

Allo stesso modo possiamo parlare di radice cubica come operazione inversa della potenza con esponente 3.
Per esempio, la radice cubica di 8 è 2 perché $2^3 = 8$ e la radice cubica di -27 è -3 perché $(-3)^3 = -27$.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

Ogni numero reale a ha sempre una sola radice cubica in $\mathbb{R}$ che si indica con $\sqrt[3]{a}$.
In generale la radice n-esima è l'operazione inversa della potenza con esponente n.

Si legge *ennesima*.

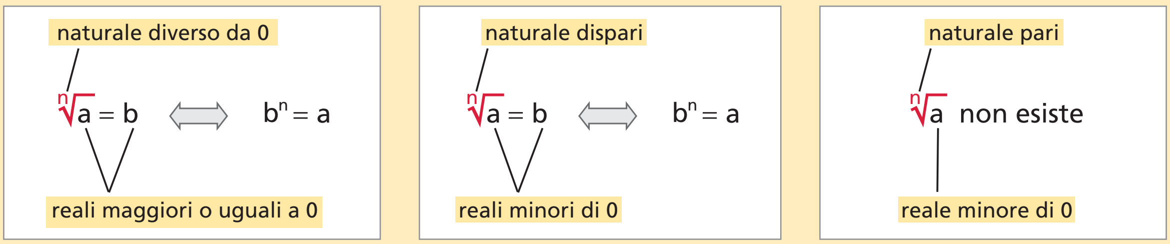
DEFINIZIONE

Radice di un numero reale *a*

Dati un numero reale a e un numero naturale $n \neq 0$:

- se $a \geq 0$, la radice n-esima di a è quel numero reale $b \geq 0$ la cui potenza con esponente n è uguale ad a;
- se $a < 0$ e n dispari, la radice n-esima di a è quel numero reale $b < 0$ la cui potenza con esponente n è uguale ad a;
- se $a < 0$ e n pari, non esiste la radice n-esima di a.

La radice n-esima di a si indica con il simbolo $\sqrt[n]{a}$.



ESEMPIO

$\sqrt[4]{81} = 3$, perché $3^4 = 81$.

$\sqrt[5]{32} = 2$, perché $2^5 = 32$.

$\sqrt[2]{0} = 0$, perché $0^2 = 0$.

$\sqrt[7]{-128} = -2$, perché $(-2)^7 = -128$.

$\sqrt[4]{-16}$ non esiste, perché non esiste un numero b tale che $b^4 = -16$.

Dalla definizione di radice n-esima si deduce la seguente proprietà:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

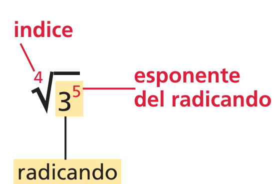
con $a \geq 0$ se n è pari, $\forall a \in \mathbb{R}$ se n è dispari.

Nell'insieme dei numeri reali l'operazione di radice è sempre interna, tranne il caso in cui si hanno $a < 0$ e n pari; si può infatti dimostrare che **la radice n-esima di un numero reale positivo o nullo esiste sempre ed è unica**.

Un po' di terminologia

La scrittura $\sqrt[n]{a}$ viene detta **radicale**.

Il numero n viene detto **indice** del radicale; il numero a si chiama **radicando**. Se il radicando è scritto sotto forma di potenza, l'esponente di tale potenza si chiama **esponente del radicando**.



Per la radice quadrata l'indice del radicale può essere omesso: $\sqrt{5}$ è un modo diverso di scrivere $\sqrt[2]{5}$. I radicali con indice 2 vengono detti **radicali quadratici**, quelli con indice 3 **radicali cubici**.

Casi particolari

Per ogni n naturale diverso da 0 e per ogni a reale si ha:

1. $\sqrt[1]{a} = a$ (infatti $a^1 = a$)

2. $\sqrt[n]{0} = 0$ (infatti $0^n = 0$)

3. $\sqrt[n]{1} = 1$.

Non si attribuisce alcun significato alla radice con l'indice uguale a 0:

$\sqrt[0]{a}$ non ha significato.

▶ $\sqrt[1]{2} = 2$; $\sqrt[2]{0} = 0$;
$\sqrt[2]{1} = 1$.

▶ $\sqrt[0]{2}$ non ha significato perché nessun numero elevato a 0 dà 2.

4. I radicali in $\mathbb{R}_0^+$

Ci limiteremo ora, per semplicità, allo studio delle proprietà dei radicali nell'insieme dei numeri reali non negativi che abbiamo indicato con $\mathbb{R}_0^+$. Pertanto considereremo espressioni del tipo:

$\sqrt[n]{a} = b$, con $a, b \geq 0$ e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Le condizioni di esistenza dei radicali in $\mathbb{R}_0^+$

Nell'espressione $\sqrt[n]{a}$ il radicando deve essere un numero reale positivo o nullo. Quando il radicando è un'espressione letterale, bisogna porre la condizione che essa sia maggiore o uguale a 0, indipendentemente dall'indice di radice.

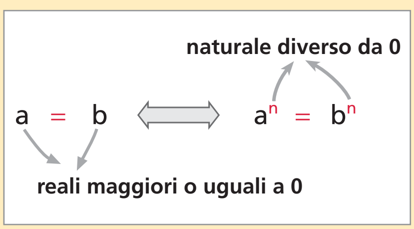
ESEMPIO

$\sqrt[3]{x-1}$ ha come condizione di esistenza $x - 1 \geq 0$, ossia: C.E.: $x \geq 1$.

Per dimostrare i prossimi teoremi utilizzeremo spesso la seguente proprietà, che ci limitiamo a enunciare.

PROPRIETÀ

Dati due numeri reali a e b, *non negativi*, e un numero naturale n, *diverso da* 0, se a e b sono uguali, sono uguali anche le loro potenze n-esime e viceversa.



▶ La proprietà non vale in generale se $a < 0$ o $b < 0$: per esempio,

$(-5)^2 = (+5)^2$,

ma $-5 \neq 5$!

La proprietà invariantiva dei radicali

TEOREMA

Dato un radicale, si può ottenere un radicale equivalente moltiplicando per uno stesso numero naturale (*diverso da* 0) sia l'indice del radicale sia l'esponente del radicando.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Due radicali sono **equivalenti** se rappresentano lo stesso numero reale, positivo o nullo. Per esempio, $\sqrt{4}$ e $\sqrt[6]{64}$ sono equivalenti perché $\sqrt{4} = 2$ e $\sqrt[6]{64} = 2$.

DIMOSTRAZIONE

Per la definizione di radicale in $\mathbb{R}_0^+$, $\sqrt[n]{a^m}$ e $\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$ indicano numeri positivi o nulli. Eleviamo i due radicali allo stesso esponente $n \cdot p$.

Primo membro

$$(\sqrt[n]{a^m})^{n \cdot p} =$$

Per la terza proprietà delle potenze:

$$= [(\sqrt[n]{a^m})^n]^p =$$

Per la definizione di radice:

$$= [a^m]^p =$$

Per la terza proprietà delle potenze:

$$= a^{m \cdot p}.$$

Secondo membro

$$(\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}})^{n \cdot p} =$$

Per la definizione di radice:

$$= a^{m \cdot p}.$$

Terza proprietà delle potenze:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

Poiché le potenze dei due radicali forniscono lo stesso risultato, possiamo scrivere:

$$(\sqrt[n]{a^m})^{n \cdot p} = (\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}})^{n \cdot p}.$$

Essendo le basi delle potenze due numeri positivi o nulli, per la proprietà $a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$ abbiamo:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}.$$

ESEMPIO

1. $\sqrt[2]{2} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[6]{8}.$
2. $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3 \cdot 5]{a^{2 \cdot 5}} = \sqrt[15]{a^{10}}.$

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V34a

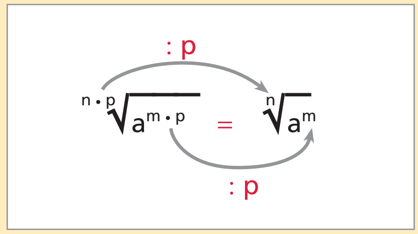
La semplificazione di radicali

Per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza, possiamo anche scrivere la proprietà invariantiva nel modo seguente:

$$\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^{m}} \text{ (con } a^m \geq 0).$$

TEOREMA

Dato un radicale, si può ottenere un radicale equivalente dividendo l'indice della radice e l'esponente del radicando per un divisore comune.



In questo caso si dice che si è *semplificato* il radicale.

ESEMPIO

1. $\sqrt[9]{5^6} = \sqrt[9:3]{5^{6:3}} = \sqrt[3]{5^2}$.
2. $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[6:2]{a^{4:2}} = \sqrt[3]{a^2}$.

▶ È **sbagliato** semplificare così:
$$\sqrt[6]{2^3 + 5^3} = \sqrt{2+5}\,.$$

DEFINIZIONE

Radicale irriducibile

Un radicale si dice irriducibile (cioè non semplificabile) quando il suo indice e l'esponente del radicando sono primi fra loro.

ESEMPIO $\sqrt[3]{5^4}$ è un radicale irriducibile, perché 3 e 4 sono primi fra loro.

▶ Non è sempre possibile semplificare un radicale. Per esempio, il radicale $\sqrt[5]{a^2}$ non si può semplificare, perché 5 e 2 non hanno divisori comuni, tranne l'unità.

Per semplificare un radicale e renderlo irriducibile, occorre:

a) cercare il M.C.D. fra indice ed esponente del radicando;
b) dividere l'indice e l'esponente per il loro M.C.D.

ESEMPIO Rendiamo irriducibile il radicale $\sqrt[20]{7^{12}}$.

a) M.C.D. $(20; 12) = 4$;

b) dividiamo per 4 l'indice e l'esponente del radicando:
$$\sqrt[20]{7^{12}} = \sqrt[20:4]{7^{12:4}} = \sqrt[5]{7^3}.$$

La semplificazione e il valore assoluto

Per semplificare il radicale $\sqrt[4]{(-5)^2}$ **non** possiamo scrivere:

$$\sqrt[4]{(-5)^2} = \sqrt[2 \cdot 2]{(-5)^2} = \sqrt[2]{-5}$$

perché, essendo il radicando negativo, l'ultimo membro non rappresenta un numero reale.

▶ Osserva che $\sqrt[4]{(-5)^2}$ è un radicale in $\mathbb{R}_0^+$ perché l'esponente 2 è pari e dunque $(-5)^2 > 0$.
Non è invece un radicale in $\mathbb{R}_0^+$ il radicale $\sqrt[15]{(-5)^9}$, perché $(-5)^9 < 0$.

Tuttavia la semplificazione è possibile perché l'esponente del radicando è pari, e perciò possiamo scrivere $(-5)^2 = (+5)^2$, e poiché $(+5)^2 = |-5|^2$, si ha:

$$\sqrt[4]{(-5)^2} = \sqrt[4]{(+5)^2} = \sqrt[4]{|-5|^2} = \sqrt{|-5|} = \sqrt{5}.$$

In generale, **se $a < 0$ e $m \cdot p$ è pari**, risulta:

$$\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{|a|^m}.$$

Per esempio: $\sqrt[8]{(-2)^2} = \sqrt[4]{|-2|} = \sqrt[4]{2}$.

In particolare, se n è pari:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

che nel caso di $n = 2$ diventa:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

ESEMPIO Semplifichiamo il radicale:

$$\sqrt{(a-1)^2}.$$

Poiché a è una variabile che può assumere qualunque valore, l'espressione $(a-1)^2$ è non negativa, mentre l'espressione $a - 1$ può essere sia positiva sia negativa. Per poter semplificare occorre utilizzare il valore assoluto:

$$\sqrt{(a-1)^2} = |a-1|.$$

La riduzione di radicali allo stesso indice

Applicando la proprietà invariantiva, si possono trasformare due o più radicali in altri che hanno lo stesso indice. In particolare, si può ridurli a radicali che abbiano il **minimo comune indice**.

I passaggi necessari sono due:

a) cercare il m.c.m. fra gli indici;
b) trasformare ogni radicale in uno equivalente, che ha per indice il m.c.m. trovato.

ESEMPIO Riduciamo al minimo comune indice i seguenti radicali.

$$\sqrt[5]{2a^2};\ \sqrt[4]{a^3}\ (\text{con } a \geq 0).$$

a) m.c.m. $(5; 4) = 20$;

b) eleviamo ogni radicando al quoziente fra il m.c.m. e l'indice; nel nostro caso, rispettivamente $20 : 5 = 4$ e $20 : 4 = 5$.

$$\sqrt[5]{2a^2} = \sqrt[5 \cdot 4]{(2a^2)^4} = \sqrt[20]{16a^8}; \quad \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4 \cdot 5]{(a^3)^5} = \sqrt[20]{a^{15}}.$$

Il confronto di radicali

Si dimostra che fra due radicali con lo stesso indice è maggiore quello che ha il radicando maggiore. Per esempio, $\sqrt[5]{28} > \sqrt[5]{12}$, poiché $28 > 12$.

Per confrontare radicali con indici diversi bisogna ridurli prima a radicali che abbiano lo stesso indice.

ESEMPIO

Confrontiamo i due radicali $\sqrt[4]{5}$ e $\sqrt[6]{8}$.
Riduciamoli allo stesso indice:

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}, \quad \sqrt[6]{8} = \sqrt[12]{8^2} = \sqrt[12]{64}.$$

Poiché $64 < 125$, anche $\sqrt[12]{64} < \sqrt[12]{125}$, quindi $\sqrt[6]{8} < \sqrt[4]{5}$.

5. La moltiplicazione e la divisione fra radicali

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V35a

La moltiplicazione fra radicali

Si possono moltiplicare due o più radicali se questi hanno lo stesso indice. Vale infatti il seguente teorema.

TEOREMA

Teorema del prodotto

Il prodotto di due radicali con lo stesso indice è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi, ossia

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

con a e b reali, $a \geq 0$, $b \geq 0$ e n naturale, $n \neq 0$.

◗ In particolare, per i radicali quadratici:
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

DIMOSTRAZIONE

Eleviamo i due membri dell'uguaglianza allo stesso esponente n.
Otteniamo:

Primo membro

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n =$$

Per la quarta proprietà delle potenze:
$$= (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n =$$

Per la definizione di radice:
$$= a \cdot b.$$

Secondo membro

$$(\sqrt[n]{a \cdot b})^n =$$

Per la definizione di radice:
$$= a \cdot b.$$

◗ Quarta proprietà delle potenze:
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Poiché le potenze n-esime di $\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$ e di $\sqrt[n]{ab}$ forniscono lo stesso risultato $a \cdot b$, concludiamo che sono uguali anche le loro basi, quindi:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

Con a e b non negativi:
$a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$.

ESEMPIO

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{2 \cdot 5} = \sqrt[4]{10}.$$

In particolare, moltiplicando un radicale quadratico per se stesso si ottiene il radicando:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3^2} = 3.$$

Se i radicali hanno **indice diverso**, per moltiplicarli è necessario ridurli al loro minimo comune indice.

ESEMPIO

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{8 \cdot 25} = \sqrt[6]{200}.$$

La divisione fra radicali

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V35b

Si possono dividere tra loro due radicali se questi hanno lo stesso indice. Vale infatti il seguente teorema.

TEOREMA

Teorema del quoziente

Il quoziente di due radicali (il secondo *diverso da* 0) con lo stesso indice è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi.

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}},$$

con a e b reali, $a \geq 0$ e $b > 0$, n naturale, $n \neq 0$.

La dimostrazione è analoga a quella del teorema del prodotto.

Anche per le divisioni valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per le moltiplicazioni.

ESEMPIO

1. $\sqrt[5]{8} : \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{8 : 2} = \sqrt[5]{4}$.
2. $\sqrt[3]{a} : \sqrt[4]{b} = \sqrt[12]{a^4} : \sqrt[12]{b^3} = \sqrt[12]{\dfrac{a^4}{b^3}}$ (con $a \geq 0$ e $b > 0$).

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V36a

Il trasporto di un fattore fuori dal segno di radice

Riprendiamo l'uguaglianza:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, \qquad \text{con } a \geq 0 \text{ e } b \geq 0.$$

Per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza possiamo scrivere

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},$$

che significa: la radice n-esima del prodotto $a \cdot b$ è uguale al prodotto della radice n-esima di a per la radice n-esima di b. In altre parole: un radicale il cui radicando è scomposto in fattori **non negativi** è uguale al prodotto di più radicali con lo stesso indice che hanno per radicandi i diversi fattori.

Questa proprietà permette di **trasportare fuori dal segno di radice i fattori del radicando che hanno come esponente un multiplo di *n***.

▶ Nel radicale $\sqrt[3]{2^3 + 5}$ **non** si può portare fuori 2 perché 2^3 è un addendo e non un fattore del radicando.

ESEMPIO

1. Consideriamo il radicale $\sqrt[3]{a^9 \cdot b^2}$, con $a \geq 0$.

   Applichiamo il teorema del prodotto e poi la proprietà invariantiva:

   $$\sqrt[3]{a^9 \cdot b^2} = \sqrt[3]{a^9} \cdot \sqrt[3]{b^2} = a^3 \cdot \sqrt[3]{b^2}.$$

   Il fattore a^9 è stato portato fuori dalla radice cubica ed è diventato a^3.

2. Semplifichiamo il radicale $\sqrt[3]{a^{13}}$, con $a \geq 0$.
   Il fattore a^{13} è una potenza con esponente maggiore dell'indice, ma non multiplo. Esso si può scrivere come prodotto $a^{12} \cdot a$. Pertanto:

   $$\sqrt[3]{a^{13}} = \sqrt[3]{a^{12} \cdot a} = \sqrt[3]{a^{12}} \cdot \sqrt[3]{a} = a^4 \cdot \sqrt[3]{a}.$$

   Notiamo che la divisione $13 : 3$ ha come quoziente 4 e resto 1.

▶ $\sqrt[3]{a^{13}} = \sqrt[3]{a^{3 \cdot 4 + 1}} =$
$= \sqrt[3]{a^{3 \cdot 4} \cdot a^1} =$
$= \sqrt[3]{a^{3 \cdot 4}} \cdot \sqrt[3]{a^1} = a^4 \cdot \sqrt[3]{a}$
(con $a \geq 0$).

In generale, considerato il radicale $\sqrt[n]{a^m}$, con $a \geq 0$ e $m \geq n$, e indicati con q il quoziente di $m : n$ e con r il resto (e quindi, $m = n \cdot q + r$), si ha:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{n \cdot q + r}} = \sqrt[n]{a^{n \cdot q} \cdot a^r} = \sqrt[n]{a^{n \cdot q}} \cdot \sqrt[n]{a^r} = a^q \sqrt[n]{a^r}.$$

Quando si vuol portare fuori radice un fattore di cui non si conosce il segno, si scrive tale fattore in valore assoluto.

ESEMPIO

$\sqrt{5a^2}$, se $a \in \mathbb{R}$, diventa $\sqrt{5}\sqrt{a^2} = \sqrt{5}\,|a|$.

6. La potenza e la radice di un radicale

La potenza di un radicale

TEOREMA

La potenza m-esima di un radicale è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando la potenza m-esima del radicando, ossia

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},$$

con n e m naturali, $n \neq 0$ e $m \neq 0$, e a reale, $a \geq 0$.

Nei radicali quadratici: $\left(\sqrt{a}\right)^m = \sqrt{a^m}$.

DIMOSTRAZIONE

Eleviamo a n entrambi i membri dell'uguaglianza.

Primo membro

$$\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^n =$$

Per la terza proprietà delle potenze:

$$= \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m \cdot n} =$$

Per la stessa proprietà:

$$= \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^m =$$

Per la definizione di radice:

$$= a^m.$$

Secondo membro

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n =$$

Per la definizione di radice:

$$= a^m.$$

I due membri sono uguali alla stessa espressione a^m e quindi sono uguali fra loro. Poiché le potenze n-esime delle due espressioni $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ e $\sqrt[n]{a^m}$ sono uguali, concludiamo che sono uguali anche le espressioni stesse.

ESEMPIO

1. $\left(\sqrt[5]{3}\right)^4 = \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{81}$.
2. $\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^5 = \sqrt[4]{(a^3)^5} = \sqrt[4]{a^{15}} = a^3 \cdot \sqrt[4]{a^3}$ (con $a \geq 0$).

In particolare, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$.

$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = \sqrt[3]{2^3} = 2$.

La radice di un radicale

TEOREMA

La radice m-esima di un radicale di indice n è un radicale che ha per indice il prodotto degli indici $m \cdot n$ e per radicando lo stesso radicando.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a},$$

con m e n naturali, $n \neq 0$ e $m \neq 0$, e a reale, $a \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE

Eleviamo entrambi i membri dell'uguaglianza allo stesso esponente $m \cdot n$ e dimostriamo che

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m \cdot n} = \left(\sqrt[m \cdot n]{a}\right)^{m \cdot n}.$$

Primo membro

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m \cdot n} =$$

Per la terza proprietà delle potenze:

$$= \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m}\right]^{n} =$$

Per la definizione di radice:

$$= \left[\sqrt[n]{a}\right]^{n} = a.$$

Secondo membro

$$\left(\sqrt[m \cdot n]{a}\right)^{m \cdot n} =$$

Per la definizione di radice:

$$= a.$$

I due membri sono entrambi uguali ad a e quindi sono uguali fra di loro.

Poiché le potenze di esponente $m \cdot n$ dei due radicali $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ e $\sqrt[m \cdot n]{a}$ sono uguali, concludiamo che sono uguali anche i radicali stessi.

Per la proprietà commutativa della moltiplicazione $m \cdot n = n \cdot m$, e si ha:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Pertanto **è possibile scambiare gli indici delle radici**. Ciò può rendere più immediata la semplificazione di un radicale.

ESEMPIO

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a} \ (\text{con } a \geq 0).$$

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V36c

Il trasporto di un fattore dentro al segno di radice

Dato il radicale $3 \cdot \sqrt[4]{5}$, è possibile portare il fattore 3 sotto il segno di radice, tenendo presente che $3 = \sqrt[4]{3^4}$.

Possiamo scrivere: $3 \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 5}$.

In generale, **se $a \geq 0$**,

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b},$$

cioè, per trasportare dentro alla radice un fattore non negativo, occorre elevarlo all'indice del radicale.

▶ Se $n = 2$, si ha: $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2}\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$ (con $a, b \geq 0$).

ESEMPIO

1. $2\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{56}$.   2. $3a^2\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{(3a^2)^3 b} = \sqrt[3]{27a^6 b}$.

▶ Possiamo portare dentro radice $(3a^2)^3$, perché è sempre $3a^2 \geq 0$.

Osservazione. I fattori negativi non vengono portati dentro la radice: il segno meno resta fuori e viene portato dentro il valore assoluto elevato all'indice del radicale.

ESEMPIO

$$-3\sqrt{5} = -\sqrt{9 \cdot 5} = -\sqrt{45}.$$

▶ Il valore assoluto di -3 è 3.

7. L'addizione e la sottrazione di radicali

BRAVI SI DIVENTA Videolezione ▶ V37a

Non sempre è possibile semplificare espressioni che contengono somme o differenze di radicali.

ESEMPIO

$\sqrt{4}+\sqrt{9}$ non è $\sqrt{4+9}$! Infatti:
$\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$, mentre $\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

▶ Analogamente,
$\sqrt{9}-\sqrt{4}$ non è $\sqrt{9-4}$!
Infatti,
$\sqrt{9}-\sqrt{4}=3-2=1$,
mentre $\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$.

In generale:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b} \qquad \text{e} \qquad \sqrt{a}-\sqrt{b}\neq\sqrt{a-b}.$$

Però, date le espressioni $2\cdot\sqrt{3}$ e $5\cdot\sqrt{3}$, si possono eseguire l'addizione o la sottrazione raccogliendo a fattore comune $\sqrt{3}$:

$$2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=(2+5)\sqrt{3}=7\sqrt{3}$$
$$2\sqrt{3}-5\sqrt{3}=-3\sqrt{3}.$$

▶ Si opera in analogia con quanto si farebbe con i monomi $2a$ e $5a$, ponendo $a=\sqrt{3}$:
$2a+5a=(2+5)a=7a$
$2a-5a=(2-5)a=-3a$.

DEFINIZIONE

Radicali simili

Due radicali irriducibili si dicono simili quando hanno lo stesso indice, lo stesso radicando e possono essere diversi solo per il fattore che li moltiplica, detto coefficiente del radicale.

$3\sqrt[\blacktriangle]{\blacksquare}$ è simile a $15\sqrt[\blacktriangle]{\blacksquare}$

ESEMPIO

$9\cdot\sqrt[5]{2}$ e $7\cdot\sqrt[5]{2}$ sono simili, perché i due radicali hanno lo stesso indice 5 e lo stesso radicando 2.

▶ I radicali $5\cdot\sqrt[9]{2}$ e $5\cdot\sqrt[7]{2}$ non sono simili, perché le due radici hanno indici diversi, 9 e 7.

A volte due radicali possono essere trasformati in radicali simili portando fuori dalla radice alcuni fattori.

ESEMPIO

I radicali $b^2\cdot\sqrt{b^3}$ e $\sqrt{b^5}$, con $b\geq 0$, non sono simili.

Portiamo fuori radice i fattori:

$$b^2\cdot\sqrt{b^3}=b^2\cdot b\cdot\sqrt{b}=b^3\cdot\sqrt{b}; \qquad \sqrt{b^5}=b^2\cdot\sqrt{b}.$$

I radicali ottenuti $b^3\cdot\sqrt{b}$ e $b^2\cdot\sqrt{b}$ sono simili.

▶ I radicali $a\cdot\sqrt[3]{b}$ e $a\cdot\sqrt[3]{b^2}$ non sono simili, perché le due radici hanno radicandi diversi, b e b^2.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

Con radicali simili possiamo eseguire l'addizione o la sottrazione.

REGOLA

Somma algebrica di radicali simili

La somma algebrica di due o più radicali simili è il radicale, simile ai dati, che ha come coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

$$3\sqrt[\blacktriangle]{\blacksquare} + 2\sqrt[\blacktriangle]{\blacksquare} = 5\sqrt[\blacktriangle]{\blacksquare}$$

ESEMPIO

1. $4\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{a} = 6\sqrt[3]{a}$ (con $a \geq 0$).

2. $a\sqrt{2} + \sqrt{2} = (a+1)\sqrt{2}$.

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Espressioni a confronto

Nel sito: ► Scheda di lavoro

È maggiore $\dfrac{\sqrt{2}}{8} + \dfrac{\sqrt{3}}{12}$ o $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{10}$?

FRANCESCO: «Nessuna delle due: sono uguali! Ho fatto il calcolo approssimato, sapendo che $\sqrt{3}$ è circa 1,7 e $\sqrt{2}$ è circa 1,4: entrambe le espressioni danno 0,3».

CHIARA: «Forse hai usato un'approssimazione eccessiva. Inoltre, anche se due espressioni hanno lo stesso valore approssimato con un numero grande di cifre, non è detto che siano uguali. Posso farti degli esempi».

FRANCESCO: «Giusto. E poi, perché tanti calcoli? Usiamo l'algebra!».

► Per il confronto, utilizza le regole sui radicali e quelle sulle disuguaglianze.

8. La razionalizzazione del denominatore di una frazione

Razionalizzare il denominatore di una frazione significa trasformare la frazione in una equivalente che non ha radicali a denominatore. Ciò risulta utile, per esempio, nella somma di frazioni.

Per razionalizzare il denominatore di una frazione si applica la proprietà invariantiva delle frazioni, moltiplicando numeratore e denominatore per uno stesso fattore diverso da 0. Esaminiamo i casi più comuni.

1. Il denominatore è un unico radicale

ESEMPIO

Se il denominatore contiene un radicale quadratico, basta moltiplicare numeratore e denominatore per il radicale stesso.

$$\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} = 3 \cdot \sqrt{2}.$$

Il risultato $3 \cdot \sqrt{2}$ non contiene radicali al denominatore.

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2.$

In generale, supposto $a > 0$, se il radicale al denominatore non è quadratico, si razionalizza nel seguente modo:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+(n-m)}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}.$$

ESEMPIO

$$\frac{21}{\sqrt[5]{49}} = \frac{21}{\sqrt[5]{7^2}} = \frac{21}{\sqrt[5]{7^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^3}} = \frac{21\sqrt[5]{7^3}}{7} = 3\sqrt[5]{7^3}.$$

2. Il denominatore è la somma o la differenza di due termini, dei quali almeno uno è un radicale quadratico

ESEMPIO

$$\frac{8}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}.$$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore per la differenza $\sqrt{7}-\sqrt{2}$, in modo da applicare il prodotto notevole $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$$\frac{8}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{8(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{8(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{5}.$$

Se al denominatore c'è una differenza, dobbiamo invece moltiplicare per la somma dei due termini.

9. I radicali quadratici doppi

Si chiama **radicale quadratico doppio** un'espressione del tipo:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \qquad \text{oppure} \qquad \sqrt{a-\sqrt{b}}\,.$$

Un radicale doppio può essere trasformato nella somma o nella differenza di due radicali semplici solo quando l'espressione $a^2 - b$ è il quadrato di un numero razionale o di un'espressione che non contiene radicali.

In tal caso valgono le due uguaglianze che consideriamo di seguito, in cui $a, b, a^2 - b \geq 0$.

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Il radicale doppio

$$\sqrt{3+\sqrt{2}}$$

non è trasformabile in una somma o differenza di radicali semplici, in quanto $3^2 - 2 = 7$ non è il quadrato di un razionale.

ESEMPIO

Trasformiamo il radicale doppio $\sqrt{8-\sqrt{15}}$ nella differenza fra due radicali semplici.
Ciò è possibile poiché $8^2 - 15 = 64 - 15 = 49 = 7^2$.

$$\sqrt{8-\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{8+\sqrt{49}}{2}} - \sqrt{\frac{8-\sqrt{49}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8+7}{2}} - \sqrt{\frac{8-7}{2}} = \sqrt{\frac{15}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

10. Le equazioni, i sistemi e le disequazioni con coefficienti irrazionali

Le proprietà finora esaminate vengono utilizzate anche quando si risolvono equazioni, sistemi e disequazioni con coefficienti irrazionali.

ESEMPIO

1. Risolviamo l'equazione

$$(\sqrt{2}+1)(x+1) = 2(2-x).$$

Svolgiamo i calcoli:

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2} + x + 1 = 4 - 2x.$$

Portiamo i termini con l'incognita al primo membro, gli altri al secondo:

$$\sqrt{2}x + x + 2x = 4 - \sqrt{2} - 1.$$

Sommiamo i termini simili:

$$3x + \sqrt{2}x = 3 - \sqrt{2}.$$

Raccogliamo l'incognita x:

$$(3+\sqrt{2})\,x = 3 - \sqrt{2}.$$

Dividiamo per $3+\sqrt{2}$:

$$\frac{(\cancel{3+\sqrt{2}})\,x}{\cancel{3+\sqrt{2}}} = \frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}.$$

Razionalizziamo il denominatore:

$$x = \frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} \cdot \frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{(3-\sqrt{2})^2}{9-2} = \frac{9+2-6\sqrt{2}}{7} = \frac{11-6\sqrt{2}}{7}.$$

La soluzione è $x = \dfrac{11-6\sqrt{2}}{7}$.

2. Risolviamo la disequazione

$$\frac{3\sqrt{2}\,x}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{6}} > \frac{5\sqrt{6}\,x}{2}.$$

Tenuto conto che $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$, il m.c.m. dei denominatori è $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$; moltiplichiamo tutti i termini per $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$:

$$\frac{3\sqrt{2}\,x}{\cancel{\sqrt{3}}} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cancel{\sqrt{3}} - \frac{2}{\cancel{\sqrt{6}}} \cdot 2\,\cancel{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} > \frac{5\sqrt{6}\,x}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}.$$

Eseguiamo i calcoli:

$$12x - 4 > 30x \quad \rightarrow \quad 12x - 30x > 4 \quad \rightarrow \quad -18x > 4 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad +\frac{18}{18}x < -\frac{4}{18} \quad \rightarrow \quad x < -\frac{2}{9}.$$

11. Le potenze con esponente razionale

È possibile scrivere i radicali in una forma diversa, che permette di estendere il concetto di potenza al caso in cui l'esponente sia un numero razionale.

DEFINIZIONE

Potenza con esponente razionale

La potenza con esponente razionale $\dfrac{m}{n}$ di un numero reale a, *positivo o nullo*, è la radice n-esima di a^m.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (a \geq 0)$$

Nel caso in cui sia $m < 0$, supponiamo $a > 0$.

ESEMPIO

1. $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$;
2. $2^{-\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{2^{-4}} = \sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{16}}$
3. $(-4)^{\frac{1}{2}}$ non ha significato, perché nella definizione sono escluse le potenze di numeri negativi.

$1^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{1} = 1$;
$0^{\frac{3}{2}} = \sqrt{0^3} = 0$.

La definizione data permette di estendere alle potenze con esponente razionale le proprietà delle potenze con esponente intero, che ricordiamo nella tabella qui sotto.

PROPRIETÀ	ESPRESSIONE	CON
1. Prodotto di potenze di ugual base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	
2. Quoziente di potenze di ugual base	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$a \neq 0$
3. Potenza di una potenza	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	
4. Prodotto di potenze di ugual esponente	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	
5. Quoziente di potenze di ugual esponente	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$b \neq 0$
6. Segno di una potenza	$(-a)^d = -a^d$ $(+a)^d = +a^d$ $(\pm a)^p = +a^p$	d numero dispari d numero dispari p numero pari
7. Potenza con base frazionaria ed esponente negativo	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$	$a \neq 0 \wedge b \neq 0$ $n > 0$

Le proprietà delle potenze con esponente razionale possono essere dimostrate mediante le proprietà dei radicali. Per esempio, dimostriamo che:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Infatti:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}} =$$

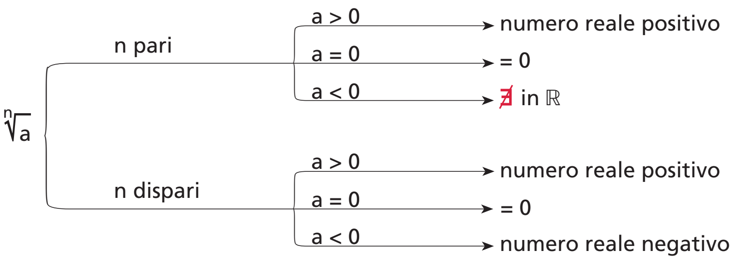
$$= \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Nelle espressioni irrazionali, invece di operare con i radicali, possiamo operare con le potenze.

ESEMPI DI ESPRESSIONI IRRAZIONALI			
	SEMPLIFICAZIONE	**ADDIZIONE**	**POTENZA**
con i radicali	$\sqrt[12]{7^8} = \sqrt[12:4]{7^{8:4}} = \sqrt[3]{7^2}$	$2\sqrt[3]{a^2} + 5\sqrt[3]{a^2} = (2+5)\sqrt[3]{a^2} = 7\sqrt[3]{a^2}$	$(\sqrt[7]{a^3})^2 = \sqrt[7]{(a^3)^2} = \sqrt[7]{a^6}$
con le potenze	$7^{\frac{8}{12}} = 7^{\frac{8:4}{12:4}} = 7^{\frac{2}{3}}$	$2a^{\frac{2}{3}} + 5a^{\frac{2}{3}} = (2+5)a^{\frac{2}{3}} = 7a^{\frac{2}{3}}$	$(a^{\frac{3}{7}})^2 = a^{\frac{3}{7}\cdot 2} = a^{\frac{6}{7}}$

12. I radicali in $\mathbb{R}$

Riprendiamo lo studio dei radicali in $\mathbb{R}$. Se il radicando è positivo o nullo, non ci sono variazioni rispetto a quello che abbiamo finora studiato. Partendo dalla definizione data nel paragrafo 3, considereremo il concetto di radicale anche nel caso di radicando negativo.
Il seguente diagramma fornisce una sintesi sulla radice n-esima di un numero reale a.



◗ Alcuni esempi:
$\sqrt[6]{64} = 2$;
$\sqrt[8]{0} = 0$;
$\sqrt[4]{-81}$ non esiste;
$\sqrt[3]{27} = 3$;
$\sqrt[7]{0} = 0$;
$\sqrt[5]{-32} = -2$

Le condizioni di esistenza dei radicali in $\mathbb{R}$

Dal diagramma precedente puoi notare che una radice con indice dispari esiste qualunque sia il radicando, mentre una radice con indice pari esiste solo se il radicando è positivo o nullo.
In questo caso, se il radicando è un'espressione letterale, dobbiamo porre le relative condizioni di esistenza.

ESEMPIO

Troviamo le condizioni di esistenza in $\mathbb{R}$ del radicale $\sqrt[4]{1-2x}$.
Essendo l'indice pari, la condizione di esistenza è:

$$1-2x \geq 0, \text{ ossia C.E.: } x \leq \frac{1}{2}.$$

◗ Per il radicale $\sqrt[3]{x+8}$, essendo l'indice dispari, non ci sono condizioni, ossia C.E.: $\forall x \in \mathbb{R}$.

La proprietà invariantiva

In generale, la proprietà invariantiva non vale per le radici con radicando negativo.
Per esempio, dato il radicale $\sqrt[3]{-8}$, **non** possiamo scrivere

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3\cdot 2]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Possiamo però trasformare il radicale iniziale in uno a esso equivalente, ma con il radicando positivo, e di seguito applicare la proprietà invariantiva. Se n è **dispari** e a un numero reale positivo, vale la relazione:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}.$$

Applicando questa proprietà al radicale considerato, si ha:

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}.$$

A questo punto possiamo applicare la proprietà invariantiva:

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -\sqrt[3\cdot 2]{8^2} = -\sqrt[6]{64} = -2.$$

La semplificazione e il valore assoluto

Per semplificare una radice con radicando scomponibile in fattori negativi basta introdurre il valore assoluto quando l'indice della radice è pari. Quando l'indice è dispari si procede al solito modo.

ESEMPIO

1. $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5.$
2. $\sqrt[12]{(-3)^{10}} = \sqrt[12:2]{(-3)^{10:2}} = \sqrt[6]{|-3|^5}.$
3. $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2.$

In generale, valgono le seguenti uguaglianze:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{se } n \text{ è dispari} \\ |a| & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

La riduzione di radicali allo stesso indice

La proprietà invariantiva permette di ridurre due o più radicali allo stesso indice.

ESEMPIO Riduciamo al minimo comune indice i seguenti radicali:

$$\sqrt[3]{-a^2-1}; \qquad \sqrt{a^4+1}.$$

a) Trasformiamo il primo radicale, rendendo positivo il radicando:

$$\sqrt[3]{-a^2-1} = \sqrt[3]{-(a^2+1)} = -\sqrt[3]{a^2+1};$$

b) m.c.m. $(3; 2) = 6$;

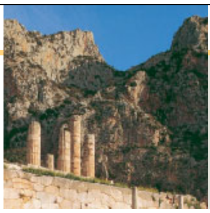
c) eleviamo ogni radicando al quoziente fra il m.c.m. e l'indice:

$$-\sqrt[3]{a^2+1} = -\sqrt[6]{(a^2+1)^2};$$

$$\sqrt{a^4+1} = \sqrt[6]{(a^4+1)^3}.$$

Per le operazioni di moltiplicazione, divisione, addizione, sottrazione e l'elevamento a potenza valgono per i radicali in $\mathbb{R}$ le stesse proprietà incontrate nei paragrafi precedenti per i radicali in $\mathbb{R}_0^+$.

Nel sito: ► teoria e 25 esercizi su I numeri immaginari

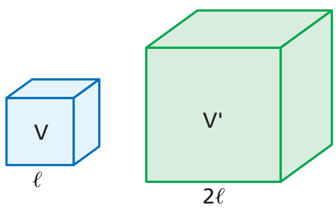


Il problema di Delo

...come fecero gli ateniesi a raddoppiare l'altare?

→ **Il quesito completo a pag. 773**

L'altare di Apollo, famoso in tutta la Grecia, aveva una forma particolare: era, infatti, un cubo. Per soddisfare la richiesta dell'oracolo di Delfi occorreva dunque costruire un nuovo altare di uguale forma ma con volume doppio.
La leggenda narra che per prima cosa gli ateniesi si recarono sull'isola di Delo e costruirono un nuovo altare, con il lato doppio del precedente.



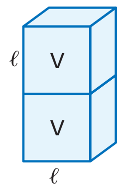
Se l era il lato dell'altare originale, il suo volume era

$$V = l^3,$$

mentre il volume del nuovo altare valeva:

$$V' = (2l)^3 = 8l^3 = 8V.$$

La peste non cessò: gli ateniesi avevano infatti costruito un altare non due, ma otto volte più grande di quello iniziale.
Resisi conto dell'errore, si rimisero al lavoro e costruirono un nuovo altare, mettendo sopra a quello vecchio un altro cubo delle stesse dimensioni. Anche questa volta, la peste non terminò: il volume era quello richiesto, ma l'altare non era più un cubo.



Analizziamo il problema dal punto di vista algebrico. Per costruire un altare cubico di volume doppio rispetto a quello originale deve essere

$$V' = 2V \rightarrow l'^3 = 2l^3,$$

e quindi:

$$l' = \sqrt[3]{2} \cdot l.$$

In conclusione, bisogna poter misurare un lato pari a $\sqrt[3]{2} \cdot l$; se per semplicità assumiamo $l = 1$, si tratta di costruire un segmento a cui corrisponda il numero $\sqrt[3]{2}$.
Le regole fondamentali delle costruzioni della geometria euclidea, applicate nell'antica Grecia, permettono il solo utilizzo di riga e compasso. Tali strumenti sono ben diversi da quelli odierni: per esempio, la riga euclidea non ha unità di misura e tacche utili per misurare, ma è una semplice asta che serve solo a tracciare segmenti di retta.

Oggi sappiamo, tramite dimostrazione algebrica, che con tali mezzi è impossibile ottenere un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$.
Il problema di Delo della duplicazione del cubo costituisce una delle questioni più discusse della Grecia classica. Molti matematici del tempo, come Ippocrate di Chio, Archita di Taranto e Menecmo, riuscirono a risolvere il problema attraverso metodi diversi, abbandonando comunque le regole geometriche di riga e compasso. È importante osservare che il segmento ottenuto attraverso questi procedimenti, corrispondente al numero $\sqrt[3]{2}$, risulta una grandezza incommensurabile rispetto al segmento di misura 1, cioè non esiste un segmento sottomultiplo comune. Questo significa che $\sqrt[3]{2}$ non è un numero razionale, ovvero non esiste alcun razionale che, elevato al cubo, sia uguale a 2. Si tratta quindi di un numero irrazionale.
La leggenda narra che la peste terminò quando gli ateniesi si rivolsero al filosofo Platone, che spiegò finalmente la risposta dell'oracolo: il dio non aveva bisogno di un altare dal volume duplicato, ma voleva far capire ai Greci che trascuravano lo studio della matematica e in particolare della geometria.

LA QUADRATURA DEL CERCHIO

Un altro dei problemi celebri della geometria classica che coinvolge i numeri irrazionali è quello della quadratura del cerchio. Dato un cerchio, bisogna costruire un quadrato di area pari a quella del cerchio.
Dal punto di vista algebrico, indicati con r il raggio del cerchio e con l il lato del quadrato da trovare, vale la relazione:

$$\pi r^2 = l^2 \rightarrow l = \sqrt{\pi} \cdot r.$$

Assunto per semplicità $r = 1$, si tratta di costruire un lato di misura $\sqrt{\pi}$. Nel 1882 venne dimostrata l'impossibilità di tale costruzione attraverso le regole euclidee di riga e compasso. Abbandonando tali regole è possibile ottenere la sua rappresentazione attraverso vari metodi. Il numero $\sqrt{\pi}$ è, come $\sqrt[3]{2}$, un numero irrazionale.

LA TEORIA IN SINTESI

I numeri reali e i radicali

1. La necessità di ampliare l'insieme $\mathbb{Q}$

La **radice quadrata** di un numero è quel numero *positivo* o *nullo* che, elevato al quadrato, dà come risultato il numero dato.
L'estrazione di radice non è un'operazione interna in $\mathbb{Q}$.
Per esempio, 2 non ha per radice quadrata un numero razionale.

2. Dai numeri razionali ai numeri reali

Ogni numero razionale può essere **approssimato** mediante due successioni di numeri decimali: una che lo approssima per eccesso, l'altra che lo approssima per difetto.

ESEMPIO

$$0 < 0{,}2 < 0{,}22 < \ldots < \frac{2}{9} < \ldots < 0{,}23 < 0{,}3 < 1$$

a meno di 0,01
a meno di 0,1
a meno di 1

I numeri **irrazionali** sono numeri decimali illimitati non periodici. Possono essere approssimati per difetto e per eccesso da due successioni di decimali.

I numeri **reali** sono tutti i numeri razionali e irrazionali.

L'insieme $\mathbb{R}$ è **denso**, cioè fra due numeri reali a e b esiste sempre un altro numero reale, e quindi ne esistono infiniti; inoltre $\mathbb{R}$ è **completo**, cioè a ogni numero reale corrisponde un punto della retta e viceversa.

3. I radicali

Dati un numero reale a e un numero naturale n diverso da 0:

- se a è positivo o nullo la **radice *n*-esima** di a è quel numero reale b, anch'esso non negativo, la cui potenza con esponente n è uguale ad a;

naturale diverso da 0

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

reali maggiori o uguali a 0

- se a è negativo e n è dispari, la **radice *n*-esima** di a è quel numero reale b negativo la cui potenza con esponente n è uguale ad a;

naturale dispari

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

reali minori di 0

- se a è negativo e n è pari, non esiste la **radice *n*-esima** di a.

naturale pari

$\sqrt[n]{a}$ non esiste

reale minore di 0

Dalla definizione di radice n-esima si deduce la seguente proprietà: dati un numero reale a positivo o nullo e un numero naturale n pari, oppure un numero reale a e un numero n dispari, la radice n-esima del numero a, elevata alla n, dà come risultato il numero a.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

con a maggiore o uguale a 0 e n pari
o con a reale e n dispari

Al simbolo $\sqrt[n]{a}$, con $a \geq 0$, si dà il nome di **radicale con indice *n***. I radicali con indice 2 si chiamano **radicali quadratici**, quelli con indice 3 **radicali cubici**.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

indice

$$\sqrt[4]{3^5}$$

esponente del radicando

radicando

4. I radicali in $\mathbb{R}_0^+$

Limitando lo studio ai radicali in $\mathbb{R}_0^+$, nell'espressione $\sqrt[n]{a}$ il radicando deve essere un numero positivo o nullo indipendentemente dall'indice di radice.

Proprietà invariantiva dei radicali: dato un radicale, moltiplicando l'indice del radicale e l'esponente del radicando per uno stesso numero naturale diverso da 0, si ottiene un radicale equivalente. È possibile ottenere un radicale equivalente anche dividendo indice ed esponente per un loro divisore comune.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} \qquad (a \geq 0)$$

$\cdot\, p \neq 0$

Applicando la proprietà invariantiva è possibile **semplificare** un radicale oppure **ridurre allo stesso indice** più radicali.

semplificazione

$$\sqrt[6]{7^{10}} = \sqrt[3]{7^5} \qquad (:2)$$

riduzione allo stesso indice

$$\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[12]{a^{10}} \qquad (\cdot 2)$$

$$\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[12]{a^9} \qquad (\cdot 3)$$

Nella semplificazione, se il radicando è letterale e non se ne conosce il segno, occorre scrivere il radicando in valore assoluto.

ESEMPIO

$$\sqrt{a^2} = |a|, \qquad \sqrt[n]{a^n} = |a|.$$

5. La moltiplicazione e la divisione fra radicali

Il **prodotto** di due radicali con lo stesso indice è un radicale che ha lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi.

ESEMPIO

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{21}.$$

Se i radicali hanno indice diverso, per moltiplicarli è sufficiente ridurli al loro minimo comune indice.

stesso indice

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[2]{5} = \sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{2000}$$

riduciamo allo stesso indice

prodotto dei radicandi

Considerazioni analoghe valgono per il **quoziente** di radicali.

ESEMPIO

$$\sqrt{2^4} : \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[10]{(2^4)^5} : \sqrt[10]{(2^3)^2} =$$
$$= \sqrt[10]{2^{20} : 2^6} = \sqrt[10]{2^{14}} = \sqrt[5]{2^7}.$$

Un **fattore del radicando**, scritto sotto forma di **potenza con base non negativa**, può essere **portato fuori dal segno di radice**, se il suo esponente m è maggiore o uguale all'indice n della radice. Il fattore esterno ha per esponente il quoziente della divisione fra m e n, quello interno ha per esponente il resto della divisione.

14	3
2	4

quoziente

resto

$$\sqrt[3]{5^{14}} = \sqrt[3]{5^{4 \cdot 3 + 2}} = \sqrt[3]{5^{4 \cdot 3}} \cdot \sqrt[3]{5^2} = 5^4 \cdot \sqrt[3]{5^2}$$

6. La potenza e la radice di un radicale

La **potenza** m-esima di un radicale è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando la potenza m-esima del radicando.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \left(\sqrt[7]{3^2}\right)^4 = \sqrt[7]{(3^2)^4} = \sqrt[7]{3^8}$$

La **radice** m-esima di un radicale di indice n è un radicale che ha per indice il prodotto degli indici $m \cdot n$ e per radicando lo stesso radicando.

prodotto degli indici

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a} \qquad \sqrt[7]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[21]{2}$$

Un **fattore non negativo** può essere **portato dentro il segno di radice**, diventando fattore del radicando, se lo si eleva alla potenza che ha per esponente l'indice del radicale.

ESEMPIO

$$5\sqrt{3} = \sqrt[2]{5^2}\cdot\sqrt[2]{3} = \sqrt{5^2\cdot 3} = \sqrt{75}.$$

7. L'addizione e la sottrazione di radicali

Due radicali irriducibili sono **simili** se hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.
La **somma di due radicali simili** è un radicale simile ai radicali dati avente per coefficiente la somma dei loro coefficienti.

radicali simili

radicale simile ai radicali dati

$$4\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$$

somma algebrica dei coefficienti

8. La razionalizzazione del denominatore di una frazione

È possibile **razionalizzare il denominatore** (in cui compaiono radicali) di una frazione, moltiplicando numeratore e denominatore per un opportuno fattore diverso da 0.

ESEMPIO

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

9. I radicali quadratici doppi

Il **radicale doppio** $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ può essere trasformato nella somma algebrica di due radicali semplici solo se $\boldsymbol{a^2 - b}$ è il quadrato di un numero razionale o di un'espressione che non contiene radicali.

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

con a, b, $a^2 - b \geq 0$.

10. Le equazioni, i sistemi e le disequazioni con coefficienti irrazionali

È possibile risolvere equazioni, sistemi e disequazioni a coefficienti irrazionali.

ESEMPIO

$$\sqrt{2}x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

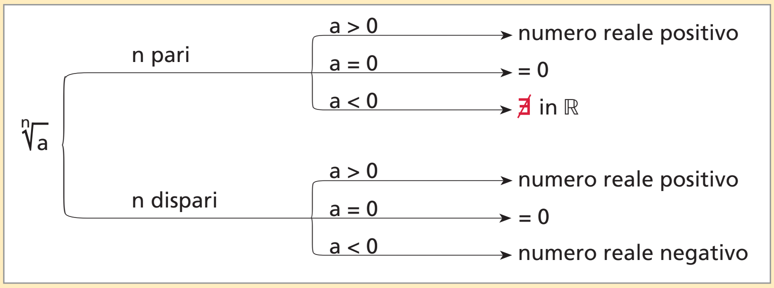
11. Le potenze con esponente razionale

È possibile scrivere i radicali sotto forma di **potenze con esponenti razionali**.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ (a \geq 0) \qquad 7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$$

12. I radicali in $\mathbb{R}$

Dati un numero reale a e un numero naturale n diverso da 0, è possibile calcolare la radice n-esima di a secondo il seguente schema:



1. La necessità di ampliare l'insieme $\mathbb{Q}$

Teoria a pag. 773

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 **VERO O FALSO?**

a) Ogni numero razionale ammette sempre due radici quadrate. V F

b) $\sqrt{a}$, con a razionale positivo, indica due numeri, uno positivo e uno negativo. V F

c) La radice quadrata di 0 è uguale a 0. V F

d) Nessun numero razionale ha come quadrato $\frac{4}{3}$. V F

e) La radice quadrata di ogni numero $a \in \mathbb{Q}_0^+$ non appartiene all'insieme $\mathbb{Q}_0^+$. V F

f) A ogni numero razionale corrisponde un punto della retta e viceversa. V F

2 Dati i tre numeri $\sqrt{1}$, $\sqrt{\frac{49}{81}}$ e $\sqrt{8}$, solo i primi due appartengono all'insieme $\mathbb{Q}_0^+$. Perché?

3 Perché è necessario ampliare l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali?

4 Le scritture $\sqrt{-4}$ e $\sqrt{5}$ sono entrambe prive di significato? Motiva la risposta.

ESERCIZI

5 Con considerazioni analoghe a quelle fatte per $\sqrt{2}$, dimostra che $\sqrt{3}$ non è un numero razionale.

6 Come nell'esercizio precedente, ma per $\sqrt{5}$.

7 Come nell'esercizio precedente, ma per $\sqrt{6}$.

8 Utilizzando il teorema di Pitagora costruisci i segmenti di lunghezza (in centimetri) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$.

2. Dai numeri razionali ai numeri reali

Teoria a pag. 776

RIFLETTI SULLA TEORIA

9 VERO O FALSO?

a) Ogni numero irrazionale ha una rappresentazione decimale illimitata e periodica. V F

b) Il numero $\sqrt{\frac{4}{25}}$ è irrazionale. V F

c) 2,13276851327685… è un numero razionale. V F

d) Nell'insieme $\mathbb{R}_0^+$ l'operazione di estrazione di radice è interna. V F

e) $\sqrt{21}$ è approssimato, a meno di un centesimo, per difetto da 4,58 e per eccesso da 4,59. V F

f) Il risultato dell'operazione $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ è 3,15. V F

10 Cosa significa l'affermazione che l'insieme $\mathbb{Q}$ è denso, ma non è completo?

11 Perché l'uguaglianza $\sqrt{7} = 2{,}646$ è *falsa*?

12 Per ognuno dei seguenti numeri specifica se si tratta di un razionale o di un irrazionale.

$0{,}67\overline{39}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{1}$; $\sqrt{\frac{9}{16}}$; $\frac{\pi}{3}$; $\sqrt{3}+\sqrt{7}$.

ESERCIZI

Scrivi un'approssimazione per difetto e una per eccesso a meno di 0,01 dei seguenti numeri.

13 $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{1}{40}$.

14 $\frac{7}{6}$; $0{,}\overline{125}$; $1{,}\overline{8}$.

Scrivi i primi 4 termini delle successioni approssimanti, per difetto e per eccesso, i seguenti numeri razionali.

15 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{14}{5}$.

16 $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{8}{9}$.

17 $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{24}{11}$.

18 $\frac{1}{6}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{2}{13}$.

Scrivi i primi 5 termini delle successioni approssimanti, per difetto e per eccesso, i seguenti numeri irrazionali.

19 $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$

20 5,12122122212222…

21 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

22 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$

23 $2\sqrt{3}$

24 $5+\sqrt{2}$

Indica quale dei seguenti numeri è razionale e quale irrazionale. Per ciascun numero razionale indica se è decimale finito oppure periodico.

25 $\frac{3}{8}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; $\sqrt{\frac{1}{4}}$; $\sqrt{\frac{25}{9}}$; $\sqrt{7}$; 2,61777…; 1,123456…

26 5,2323323332…; $-2{,}79813$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{11}$; $-\sqrt{49}$; $\sqrt{\frac{16}{9}}$; $\sqrt{\frac{32}{4}}$.

Sottolinea nel seguente gruppo di numeri quelli irrazionali.

27 $2{,}\overline{84}$; $\quad -\sqrt{36}$; $\quad 3{,}6444$; $\quad \frac{5}{9}$; $\quad \sqrt{4}\cdot\sqrt{2}$.

28 $\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}$; $\quad 7{,}5252\ldots$; $\quad 7{,}5252$; $\quad -\frac{7}{25}$; $\quad \sqrt{225}$.

29 **COMPLETA** inserendo i simboli $>, <, =$.

$4{,}12 \ldots 4{,}1\overline{2}$, $\quad -\frac{1}{3} \ldots -\frac{1}{4}$, $\quad \sqrt{7} \ldots \frac{5}{2}$,

$\sqrt{\frac{25}{4}} \ldots 2{,}51$, $\quad \frac{2}{9} \ldots 0{,}\overline{2}$, $\quad \sqrt{\frac{1}{6}} \ldots 0{,}408$.

Disponi in ordine crescente i seguenti numeri reali.

30 $6{,}2$; $\quad 6{,}\overline{2}$; $\quad 6{,}21$; $\quad 6{,}223$; $\quad 6{,}1\overline{2}$.

31 $\frac{27}{8}$; $\quad \sqrt{41}$; $\quad \frac{35}{6}$; $\quad 8{,}71$; $\quad 6{,}\overline{2}$.

32 **COMPLETA** inserendo, quando possibile, un numero reale compreso fra i numeri di ciascuna delle seguenti coppie.

$\sqrt{7} \ldots\ldots \sqrt{8}$; $\quad 12{,}8 \ldots\ldots 12{,}81$; $\quad 3\sqrt{6} \ldots\ldots \sqrt{52}$; $\quad -\frac{1}{5} \ldots\ldots -\frac{2}{5}$; $\quad \frac{1}{6} \ldots\ldots \frac{1}{7}$; $\quad \frac{\pi}{2} \ldots\ldots \pi - 2$.

Calcola con l'approssimazione a meno di $\frac{1}{100}$ il risultato delle seguenti operazioni.

33 $\sqrt{2} + 7{,}31$

34 $6{,}7\overline{2} - 4{,}561562\ldots$

35 $4{,}\overline{3}\cdot\sqrt{7}$

36 $\sqrt{5} : 2{,}1\overline{4}$

37 $\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}$

38 $\sqrt{10} : 2{,}5$

3. I radicali

Teoria a pag. 780

RIFLETTI SULLA TEORIA

39 **VERO O FALSO?**

a) $\sqrt{-9} = -3$ V F

b) $\sqrt[3]{-64} = -4$ V F

c) $\sqrt[3]{343} = 7$ V F

d) $\sqrt{64} = \pm 8$ V F

e) $\sqrt{49} = 7$ V F

f) $\sqrt{(-2)^4}$ non esiste. V F

40 **TEST** Tutte le seguenti scritture sono radicali, *tranne* una. Quale?

A $\sqrt[4]{25}$

B $\sqrt[3]{-9}$

C $\sqrt[3]{5}$

D $\sqrt{-7^4}$

E $\sqrt[6]{(-11)^2}$

41 VERO O FALSO?

a) La radice quadrata di un qualsiasi numero reale esiste ed è unica. V F

b) Per ogni numero intero positivo n, risulta $\sqrt[n]{0} = 0$. V F

c) La potenza con esponente $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ della radice n-esima di un numero $a \in \mathbb{R}_0^+$ è uguale al numero a. V F

d) Nel radicale $\sqrt{7^3}$ l'indice è 3 e l'esponente del radicando è 2. V F

e) I radicali $\sqrt[3]{x^2}$ e $\sqrt[5]{y^2}$ hanno lo stesso indice. V F

42 Perché l'uguaglianza $\sqrt{(-7)^2} = -7$ è falsa?

43 TEST Nel radicale $\sqrt[5]{x^2y^4}$, l'indice e l'esponente del radicando sono rispettivamente:

A 5, 6. B 6, 5. C 5, 2. D 5, 4. E 5, 8.

44 TEST A quale delle seguenti equivale l'uguaglianza $x^3 = y^2$, con $x, y \in \mathbb{R}_0^+$?

A $y = \sqrt[3]{x^2}$
B $x = \sqrt[3]{y^2}$
C $x = \sqrt{y^3}$
D $x = \sqrt[6]{y}$
E $y = \sqrt[6]{x}$

45 Per quale motivo la scrittura $\sqrt[0]{3}$ è priva di significato?

ESERCIZI

Le potenze e le radici

46 COMPLETA, quando è possibile, inserendo la base mancante nelle seguenti potenze.

$(.....)^5 = 32$; $(.....)^2 = -9$;

$(.....)^3 = -8$; $(.....)^4 = 625$.

47 COMPLETA inserendo l'esponente mancante nelle seguenti potenze.

$(2)^{\cdots} = 64$; $(3)^{\cdots} = 27$;

$(-5)^{\cdots} = 625$; $(4)^{\cdots} = 64$.

48 COMPLETA applicando la definizione di radice n-esima: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.

$\sqrt[4]{16} = \ldots$; $\sqrt{\frac{25}{9}} = \ldots$; $\sqrt[3]{27} = \ldots$; $\sqrt{2^6} = \ldots$; $\sqrt{81a^4} = \ldots$; $\sqrt[4]{x^8} = \ldots$; $\sqrt{16a^4b^8} = \ldots$.

49 Determina, quando è possibile, le radici quadrate dei seguenti numeri.

25; 36; -81; 49; -144; 121.

50 Determina le radici cubiche dei seguenti numeri.

-27; -343; 8; 64; 1000; 125.

Determina, quando è possibile, la radice.

51 $\sqrt[4]{-81}$; $\sqrt{100}$; $\sqrt[3]{343}$; $\sqrt[4]{0}$.

52 $\sqrt{1}$; $\sqrt[4]{625}$; $\sqrt{0}$; $\sqrt[5]{-1}$.

53 $\sqrt[5]{0}$; $\sqrt[6]{64}$; $\sqrt[4]{-625}$; $\sqrt[6]{-1}$.

Stabilisci quali delle seguenti radici esistono in $\mathbb{R}$.

54 $\sqrt[4]{8}$; $\sqrt[3]{-7}$; $\sqrt[6]{-2}$; $\sqrt{-1}$; $\sqrt{1}$; $\sqrt[4]{0}$.

55 $\sqrt{\frac{25}{16} - 1}$; $\sqrt[3]{2 - \frac{46}{27}}$; $\sqrt[5]{-32}$; $\sqrt[4]{(-3)^2}$.

Calcola le seguenti radici, se esistono in $\mathbb{R}$.

56 $\sqrt{\frac{1}{100}}$; $\sqrt[3]{-125}$; $\sqrt{(-3)^2}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$; $\sqrt{-(-2)^4}$.

57 $\sqrt[3]{-(-2)^3}$; $\sqrt[4]{-\frac{1}{25}}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{5}\right)^3}$; $\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}$.

Un po' di terminologia

ESERCIZIO GUIDA

58 Dati i radicali $\sqrt[4]{a^3b^6}$ e $\sqrt[3]{a^2+2a+1}$, scriviamo qual è l'indice, qual è il radicando e qual è l'esponente del radicando.

- $\sqrt[4]{a^3b^6}$: l'indice è 4; il radicando è a^3b^6 e si può scrivere come $(ab^2)^3$, quindi l'esponente del radicando è 3.
- $\sqrt[3]{a^2+2a+1}$: l'indice è 3; il radicando è a^2+2a+1, ma si può scrivere come $(a+1)^2$, quindi l'esponente del radicando è 2.

Di ogni radicale scrivi qual è l'indice, qual è il radicando e qual è l'esponente del radicando.

59 $\sqrt[5]{2^3}$; $\sqrt[4]{3^2 \cdot a^2}$; $\sqrt[4]{a^5}$; $\sqrt[6]{a^4 \cdot b^4}$; $\sqrt[3]{64a^2x^4}$; $\sqrt{8a^6b^9}$.

60 $\sqrt[6]{a^4+b^4}$; $\sqrt{x^2-y^2}$; $\sqrt{x^2 \cdot y^2}$; $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$; $\sqrt{x^2-4x+4}$; $\sqrt{x^4(1-x)^8}$.

4. I radicali in $\mathbb{R}_0^+$

Teoria a pag. 782

RIFLETTI SULLA TEORIA

61 Quando si applica la proprietà invariantiva dei radicali, come deve essere il fattore che moltiplica o divide l'indice del radicale e l'esponente del radicando? Fai degli esempi.

62 Nella scrittura $\sqrt[12]{a^{36}} = \sqrt[4]{a^9}$ $\forall\, a \in \mathbb{R}$, la proprietà invariantiva è stata applicata in modo corretto?

63 TEST Quale dei seguenti radicali è equivalente al radicale $\sqrt[8]{a^{12}}$?

- A $\sqrt{a^3}$
- B $\sqrt{a^4}$
- C $\sqrt{|a|}$
- D $\sqrt{|a|^3}$
- E $|\sqrt{a^3}|$

64 Perché il radicale $\sqrt[8]{4^3}$ è semplificabile?

65 VERO O FALSO?

a) Il radicale $\sqrt[n]{x^m}$ è semplificabile se M.C.D.$(m; n) = 1$. V F

b) Per semplificare un radicale è sufficiente dividere indice ed esponente per il loro m.c.m. V F

c) Il radicale $\sqrt[6]{a^3}$ è equivalente a $\sqrt{a}$. V F

d) Se $a \in \mathbb{R}_0^+$, allora $\sqrt{a^2} = a$. V F

e) $\sqrt{10} < \sqrt[3]{12}$ poiché $10 < 12$. V F

66 Confronta i radicali $\sqrt{5}$ e $\sqrt[3]{11}$. Descrivi, prima con le parole poi con i numeri, il procedimento per confrontare due radicali.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

ESERCIZI

CACCIA ALL'ERRORE

Operando con radicali in $\mathbb{R}_0^+$, indica quali delle seguenti scritture non sono corrette, spiegando il perché.

67 $\sqrt[4]{(-9)^4} = -9$; $\sqrt{(-5)^2} = 5$; $\sqrt[6]{(-2)^6} = |-2|$; $\sqrt{-7^2} = 7$.

68 $\sqrt[3]{|-8|} = 2$; $\sqrt[3]{|-4|^3} = 4$; $\sqrt[3]{-27} = |-3|$; $\sqrt[3]{125} = |5|$.

69 $-\sqrt{4} = 2$; $-\sqrt[3]{-8} = 2$; $-\sqrt{-4} = 2$; $-\sqrt[3]{8} = -2$.

Le condizioni di esistenza dei radicali in $\mathbb{R}_0^+$

ESERCIZIO GUIDA

70 Determiniamo le condizioni d'esistenza dei seguenti radicali in $\mathbb{R}_0^+$: a) $\sqrt{3x^2y^5}$; b) $\sqrt[3]{a-2}$.

a) $\sqrt{3x^2y^5}$.

Il radicando è il prodotto di tre fattori e deve essere positivo o nullo: 3 è un numero positivo; x^2 è sempre positivo o nullo, indipendentemente dal segno di x, poiché il suo esponente è pari; y^5, avendo esponente dispari, assume il segno di y, quindi, affinché y^5 sia positivo o nullo, occorre che sia $y \geq 0$. Pertanto C.E.: $y \geq 0$.

b) $\sqrt[3]{a-2}$.

Il radicando è il binomio $a-2$, che non si scompone in fattori. Dobbiamo porre $a-2$ maggiore o uguale a 0, ossia:

$a - 2 \geq 0$, da cui $a \geq 2$.

Quindi:

C.E.: $a \geq 2$.

Determina le condizioni d'esistenza dei seguenti radicali in $\mathbb{R}_0^+$.

71 $\sqrt{-\dfrac{(1-2x)}{3}}$; $\sqrt[4]{x^2+1}$; $\sqrt{-1-x}$.

72 $\sqrt{(-a)^4}$; $\sqrt{\dfrac{1}{a+1}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{2}{(a-2)^2}}$.

73 $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}$; $\sqrt{\dfrac{1}{-x^4}}$; $\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$.

74 $\sqrt{|x-3|}$; $\sqrt[3]{\dfrac{2}{|x|}}$; $\sqrt{-x}$.

La proprietà invariantiva

ESERCIZIO GUIDA

75 Indichiamo fra le seguenti coppie di radicali (con $a, b \in \mathbb{R}_0^+$) quelle equivalenti, applicando la proprietà invariantiva:

a) $\sqrt{27}, \sqrt[8]{3^{12}}$; b) $\sqrt{2a^4b}, \sqrt[6]{8a^{12}b^3}$; c) $\sqrt{a^3b}, \sqrt[4]{a^9b^2}$; d) $\sqrt[3]{a-b}, \sqrt[6]{a^2-2ab+b^2}$, con $a \geq b$.

a) $\sqrt{27}$ è equivalente a $\sqrt[8]{3^{12}}$.

Infatti otteniamo il secondo radicale dal primo scrivendo 27 come 3^3 e moltiplicando l'esponente del radicando e l'indice per 4:

$$\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = \sqrt[2\cdot 4]{3^{3\cdot 4}} = \sqrt[8]{3^{12}}.$$

b) $\sqrt{2a^4b}$ è equivalente a $\sqrt[6]{8a^{12}b^3}$.

Infatti otteniamo il secondo radicale dal primo moltiplicando l'esponente del radicando e l'indice per 3:

$$\sqrt{2a^4b} = \sqrt[2\cdot 3]{(2a^4b)^{1\cdot 3}} = \sqrt[6]{(2a^4b)^3} = \sqrt[6]{8a^{12}b^3}.$$

c) $\sqrt{a^3b}$ non è equivalente a $\sqrt[4]{a^9b^2}$.
Infatti, se si moltiplicano per 2 l'esponente del radicando e l'indice, si ottiene:

$$\sqrt{a^3b} = \sqrt[2\cdot2]{(a^3b)^{1\cdot2}} = \sqrt[4]{(a^3b)^2} = \sqrt[4]{a^6b^2}$$

e non $\sqrt[4]{a^9b^2}$.

d) $\sqrt[3]{a-b}$ è equivalente a $\sqrt[6]{a^2-2ab+b^2}$.
Infatti, moltiplicando per 2 indice ed esponente, otteniamo:

$$\sqrt[3]{a-b} = \sqrt[3\cdot2]{(a-b)^{1\cdot2}} = \sqrt[6]{(a-b)^2} =$$
$$= \sqrt[6]{a^2-2ab+b^2}.$$

Fra le seguenti coppie di radicali indica quali sono quelle equivalenti, applicando la proprietà invariantiva. Supponi che siano verificate le condizioni di esistenza dei radicali.

76 $\sqrt[4]{3^2}, \sqrt[12]{3^6}$; $\sqrt{4\cdot5^3}, \sqrt[4]{2^4\cdot5^6}$; $\sqrt[3]{\dfrac{27}{10}}, \sqrt[6]{\dfrac{3^9}{10^2}}$.

77 $\sqrt{8}, \sqrt[12]{2^{18}}$; $\sqrt[3]{25}, \sqrt[9]{5^6}$; $\sqrt[3]{81}, \sqrt[12]{3^8}$.

78 $\sqrt{x+1}, \sqrt[4]{x^2+2x+1}$; $\sqrt{1-x}, \sqrt[6]{1-x^3}$.

79 $\sqrt[3]{2ab}, \sqrt[6]{4a^2b^2}$; $\sqrt[5]{32a^5b}, \sqrt[10]{64a^{10}b^2}$;
$\sqrt[3]{2ac}, \sqrt[6]{6a^3c^3}$.

80 $\sqrt{2a^3b}, \sqrt[4]{8a^3b}$; $\sqrt{2ab^2}, \sqrt[6]{8a^3b^6}$;
$\sqrt{ab^2c}, \sqrt[5]{a^4b^6c^4}$.

81 $\sqrt[3]{abc^2}, \sqrt[4]{a^2b^2c^3}$; $\sqrt{3ab^2}, \sqrt[6]{27a^3b^6}$;
$\sqrt{2ab^3}, \sqrt[4]{8a^2b^6}$.

82 $\sqrt{3a^2b}, \sqrt[6]{9a^6b^3}$;
$\sqrt{2abc}, \sqrt[3]{6a^3b^3c^3}$;
$\sqrt{abc^3}, \sqrt[6]{3a^3b^3c^6}$.

83 $\sqrt{a-1}, \sqrt[10]{a^{10}-1}$;
$\sqrt{\dfrac{9}{2}(2a-5)}, \sqrt[6]{\dfrac{27}{8}(2a-5)^3}$.

ESERCIZIO GUIDA

84 Applicando la proprietà invariantiva, determiniamo il radicale equivalente a quello dato, indicando anche le condizioni di esistenza dei radicali.

$$\sqrt[4]{2a^5b} = \sqrt[12]{\dots\dots}.$$

La proprietà invariantiva dice che $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n\cdot p]{x^{m\cdot p}}$, con $x^m \geq 0$, $n, p \in \mathbb{N} - \{0\}$. Dobbiamo risolvere un problema del tipo $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n\cdot p]{\dots\dots}$, dove $n = 4$ e $n \cdot p = 12$, ossia $4p = 12$, da cui $p = 12 : 4 = 3$. Pertanto:

$$\sqrt[4]{2a^5b} = \sqrt[12]{(2a^5b)^{\underbrace{12:4}_{\text{quoziente degli indici}}}} = \sqrt[12]{(2a^5b)^3} = \sqrt[12]{8a^{15}b^3}.$$

Per l'esistenza dei radicali basta porre: $ab \geq 0$.
Infatti, se $ab \geq 0$, è anche: $a^5b = a^4(ab) \geq 0$ e $a^{15}b^3 = a^{14}b^2(ab) \geq 0$.

COMPLETA applicando la proprietà invariantiva e determina il radicale equivalente. Scrivi anche le condizioni di esistenza dei radicali.

85 $\sqrt{8} = \sqrt[6]{\dots\dots}$; $\sqrt[5]{2^7} = \sqrt[15]{\dots\dots}$; $\sqrt{2^4\cdot3^3} = \sqrt[12]{\dots\dots}$; $\sqrt[3]{a^4b} = \sqrt[6]{\dots\dots}$.

86 $\sqrt{3a^3} = \sqrt[4]{\dots\dots}$; $\sqrt{2b^4} = \sqrt[6]{\dots\dots}$; $\sqrt{a+1} = \sqrt[4]{\dots\dots}$; $\sqrt{2ab^2} = \sqrt[4]{\dots\dots}$.

87 $3ab^2 = \sqrt[3]{.....}$; $\sqrt{2ab^3} = \sqrt[6]{.....}$; $\sqrt[5]{3ac} = \sqrt[10]{.....}$; $\sqrt{\frac{a^6b^3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{}{.....}}$.

88 $\sqrt[4]{\frac{2a^2b^2}{c^4}} = \sqrt[12]{\frac{}{.....}}$; $\sqrt[3]{\frac{8}{a^7}} = \sqrt[6]{\frac{}{.....}}$; $\sqrt{\frac{3a}{b^2}} = \sqrt[6]{\frac{}{.....}}$; $\sqrt{\frac{1}{2}a} = \sqrt[12]{\frac{}{.....}}$.

L'indice o l'esponente sono letterali

ESERCIZIO GUIDA

89 Applicando la proprietà invariantiva, determiniamo il radicale equivalente:

$\sqrt[n]{a^2} = \sqrt[3n^2]{.....}$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Come nel caso in cui l'indice e l'esponente sono numeri, dobbiamo eseguire la divisione fra gli indici:

$3n^2 : n = 3n^{2-1} = 3n$.

Dobbiamo moltiplicare per $3n$ l'esponente del radicando:

$2 \cdot 3n = 6n$.

Quindi il radicale equivalente è: $\sqrt[n]{a^2} = \sqrt[3n^2]{a^{6n}}$.

Determina il radicale equivalente (gli indici appartengono a $\mathbb{N} - \{0\}$).

90 $\sqrt{a^m b^2} = \sqrt[6]{.....}$; $\sqrt{a^{m-2}b^n} = \sqrt[4]{.....}$; $\sqrt{abc^2} = \sqrt[2n]{.....}$.

91 $\sqrt{a^m b^2} = \sqrt[2n]{.....}$; $\sqrt{a^k b} = \sqrt[4k]{.....}$; $\sqrt[3]{ab^n} = \sqrt[6n]{.....}$.

92 $\sqrt[5]{a^n b} = \sqrt[10n]{.....}$; $\sqrt[n]{ab^2} = \sqrt[n^2]{.....}$; $\sqrt[3]{ab^k} = \sqrt[3k^2]{.....}$.

La semplificazione di radicali

ESERCIZIO GUIDA

93 Semplifichiamo i radicali: **a)** $\sqrt[9]{64}$; **b)** $\sqrt[6]{27x^3y^6}$ (con $x \geq 0$).

a) Scriviamo il radicando come potenza: $64 = 2^6$; dividiamo poi per 3 (che è il M.C.D. tra 9 e 6) l'indice di radice e l'esponente del radicando:

$$\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}.$$

b) Scriviamo il radicando come una potenza; l'esponente del radicando è 3, quindi dividiamo per 3 l'indice di radice e l'esponente del radicando:

$$\sqrt[6]{27x^3y^6} = \sqrt[6]{3^3x^3y^6} = \sqrt[6]{(3xy^2)^3} = \sqrt{3xy^2}.$$

94 **VERO O FALSO?**

a) $\sqrt[9]{27} = \sqrt[3]{3}$ V F

b) $\sqrt[3]{a^3 + b^3} = a + b$ V F

c) $\sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2}$ V F

d) $\sqrt[6]{a^8b^4} = \sqrt[3]{a^4b^2}$ V F

e) $\sqrt[8]{3^4 + 5^4} = \sqrt{3+5}$ V F

f) $\sqrt[8]{16} = \sqrt[4]{8}$ V F

Indica quali dei seguenti radicali non si possono semplificare.

95 $\sqrt[3]{32}$; $\sqrt[7]{28}$; $\sqrt[5]{a^{10}y^2}$; $\sqrt[4]{225}$; $\sqrt[9]{216}$.

96 $\sqrt{\dfrac{a^4}{a^2+b^2}}$; $\sqrt[3]{9a^3}$; $\sqrt[6]{x^2+y^2}$; $\sqrt[4]{4(x+y)^2}$; $\sqrt[8]{\dfrac{64}{a^2+2a+1}}$.

Semplifica, se possibile, i seguenti radicali, supponendo non negativi i radicandi e i fattori letterali che eventualmente compaiono (anche nei risultati).

97 $\sqrt[10]{32}$; $\sqrt[4]{9}$; $\sqrt[6]{25}$; $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[10]{16}$; $\sqrt[6]{125}$; $\sqrt[8]{2^{12}}$.

98 $\sqrt[8]{\dfrac{1}{8}}$; $\sqrt[6]{\dfrac{25}{64}}$; $\sqrt[6]{\dfrac{2^3}{27}}$; $\sqrt[6]{1000}$; $\sqrt[4]{\dfrac{36\cdot 7^2}{5^4}}$; $\sqrt[8]{\dfrac{1}{64}}$; $\sqrt[6]{4^2+3^2}$; $\sqrt[4]{13^2-5^2}$.

99 $\sqrt[6]{27a^3b^6}$; $\sqrt[10]{32a^5b^5}$.

100 $\sqrt{a^4b^6}$; $\sqrt{a^2b^4}$; $\sqrt[3]{a^6b^9}$.

101 $\sqrt[6]{a^2(a^2-4a+4)}$

102 $\sqrt[9]{a^3+8+6a^2+12a}$

103 $\sqrt[6]{4a^2b^{12}}$; $\sqrt[10]{4a^4b^2}$.

104 $\sqrt[6]{\dfrac{1}{9}+a^2+\dfrac{2}{3}a}$

105 $\sqrt[4]{\dfrac{4(2b+1)^2}{25}}$

106 $\sqrt[6]{\dfrac{(a-1)^2}{b^2+2b+1}}$

107 $\sqrt[6]{\dfrac{4a^2}{c^4}}$; $\sqrt[10]{\dfrac{4a^2b^2}{c^6}}$.

108 $\sqrt[4]{\dfrac{x^3-2x^2}{16x-32}}$

109 $\sqrt[6]{\dfrac{x^2+2x+1}{a^2+4a+4}}$

110 $\sqrt[9]{\dfrac{8a^6}{a^3+3a^2+3a+1}}$

111 $\sqrt{x^2+\dfrac{a^4}{x^2}+2a^2}$

112 $\sqrt[6]{\dfrac{a-1}{(a^2-1)(a+1)^3}}$

La semplificazione dei radicali con la discussione sul segno dei radicandi

ESERCIZIO GUIDA

113 Semplifichiamo i radicali:

a) $\sqrt[4]{(-5)^6}$; b) $\sqrt[6]{x^2y^4}$; c) $\sqrt{x^2-4x+4}$; d) $\sqrt[8]{\dfrac{x^2+14x+49}{1-6x+9x^2}}$.

a) $\sqrt[4]{(-5)^6}=\sqrt[4:2]{(-5)^{6:2}}=$

Poiché $(-5)^{6:2}=(-5)^3$ è negativo, dovendo essere il radicando sempre positivo, occorre introdurre il valore assoluto:

$$=\sqrt{|-5|^3}=\sqrt{125}.$$

b) C.E.: $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $\forall\, y\in\mathbb{R}$. Infatti il radicando è positivo o nullo per qualsiasi valore attribuito a x o a y.

$$\sqrt[6]{x^2y^4}=\sqrt[\cancel{6}\,3]{(xy^2)^{\cancel{2}\,1}}=\sqrt[3]{|x|y^2}.$$

Per avere il radicando non negativo, dopo la semplificazione occorre introdurre il valore assoluto di x.

c) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} =$ C.E.: $\forall\, x \in \mathbb{R}$, perché l'esponente del radicando è pari.

$= |x - 2|$, perché un radicale deve essere non negativo.

d) $\sqrt[8]{\dfrac{x^2 + 14x + 49}{1 - 6x + 9x^2}} = \sqrt[8]{\dfrac{(x+7)^2}{(1-3x)^2}} = \sqrt[8]{\left(\dfrac{x+7}{1-3x}\right)^2} =$

Affinché la frazione algebrica esista, deve essere $1 - 3x \neq 0$, ossia $x \neq \dfrac{1}{3}$: C.E.: $\forall\, x \neq \dfrac{1}{3}$.

Poiché l'esponente del radicando è pari, il radicale esiste:

$= \sqrt[4]{\left|\dfrac{x+7}{1-3x}\right|}$.

Abbiamo dovuto introdurre il valore assoluto perché ci sono valori di x, ammessi dalle C.E., che rendono il radicando negativo (per esempio, $x = -8$).

114 VERO O FALSO?

a) $\sqrt{(-9)^2} = 9$ V F

b) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1-\sqrt{3}}$ V F

c) $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$ V F

d) $\sqrt[4]{(2x-3)^2} = \sqrt{2x-3}$ V F

e) $\sqrt[12]{(-27)^6} = \sqrt{-27}$ V F

f) $\sqrt[n]{a^n} = a,\ \forall\, a \in \mathbb{R}$ e $\forall\, n \in \mathbb{N}$. V F

Semplifica, se è possibile, i seguenti radicali dopo aver indicato le condizioni di esistenza.

115 $\sqrt[9]{0{,}027}$; $\sqrt[6]{(-2)^4}$; $\sqrt[8]{36}$. $\left[\sqrt[3]{\dfrac{3}{10}}; \sqrt[3]{4}; \sqrt[4]{6}\right]$

116 $\sqrt[9]{27x^3}$; $\sqrt[8]{\dfrac{4a^2}{x^4}}$. $\left[x \geq 0, \sqrt[3]{3x}; x \neq 0, \sqrt[4]{\dfrac{2|a|}{x^2}}\right]$

117 $\sqrt[6]{a^3b^6}$; $\sqrt[10]{64x^4y^{10}}$. $[a \geq 0, \sqrt{ab^2}; \sqrt[5]{8x^2|y|^5}]$

118 $\sqrt[4]{16(a-1)^2}$; $\sqrt[6]{a^2(a+3)^4}$. $[\sqrt{4|a-1|}; \sqrt[3]{|a|(a+3)^2}]$

119 $\sqrt[6]{\dfrac{8a^3}{b^6}}$; $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$. $\left[a > 0, b \neq 0, \sqrt{\dfrac{2a}{b^2}}; |x-3|\right]$

120 $\sqrt{\dfrac{4}{9}a^6}$; $\sqrt{\dfrac{1}{64}a^8b^{10}}$. $\left[\dfrac{2}{3}|a|^3; \dfrac{1}{8}a^4|b|^5\right]$

121 $\sqrt{a^4 - 8a^2 + 16}$; $\sqrt{4a^2x^2}$. $[|a^2-4|; 2|ax|]$

122 $\sqrt{\dfrac{9a^6}{b^4}}$; $\sqrt[9]{\dfrac{216a^3b^6}{y^6}}$. $\left[\dfrac{3|a|^3}{b^2}, b \neq 0; a \geq 0, y \neq 0, \sqrt[3]{\dfrac{6ab^2}{y^2}}\right]$

123 $\sqrt[4]{a^4b^6}$; $\sqrt[8]{a^2 - 2a + 1}$. $[\sqrt{a^2|b|^3}; \sqrt[4]{|a-1|}]$

124 $\sqrt[4]{\dfrac{4x^2 + 4y^2}{a^4}}$; $\sqrt[8]{\dfrac{a^4(a-4)^4}{a^2 + 4a + 4}}$. $\left[a \neq 0, \text{non semplif.}; a \neq -2, \sqrt[4]{\dfrac{a^2(a-4)^2}{|a+2|}}\right]$

BRAVI SI DIVENTA ▶ E34

125 $\sqrt[12]{\dfrac{24(x^8 + 4x^6 + 4x^4)}{54b^6(a^2 + 6a + 9)}}$

126 $\sqrt[6]{\dfrac{x^2+2x+1}{4x^2+4x+1}}$; $\sqrt[6]{\dfrac{27a^6}{x^3+3x^2+3x+1}}$. $\left[x \neq -\dfrac{1}{2}, \sqrt[3]{\left|\dfrac{x+1}{2x+1}\right|}; x > -1, \sqrt{\dfrac{3a^2}{x+1}}\right]$

127 $\sqrt[10]{\dfrac{32(a-1)^{10}}{(a+1)^5}}$; $\sqrt[4]{\dfrac{4(x^2-2x+1)(x-1)}{(x^2-1)(x+1)}}$. $\left[a > -1, \sqrt{\dfrac{2(a-1)^2}{a+1}}; x \neq \pm 1, \sqrt{\left|\dfrac{2(x-1)}{x+1}\right|}\right]$

128 $\sqrt[6]{\dfrac{4(x^2+1-2x)x^2}{9(x+1)^2}}$; $\sqrt[8]{1-\dfrac{2ab-1}{a^2b^2}}$. $\left[x \neq -1, \sqrt[3]{\left|\dfrac{2x(x-1)}{3(x+1)}\right|}; a \neq 0, b \neq 0, \sqrt[4]{\dfrac{|ab-1|}{|ab|}}\right]$

129 Determina per quali valori di x sono soddisfatte le seguenti equazioni:

a) $\sqrt{4x^2} = 2x$; b) $\sqrt{x^2-10x+25} = 5-x$. [a) $x \geq 0$; b) $x \leq 5$]

L'indice o l'esponente sono letterali

ESERCIZIO GUIDA

130 Semplifichiamo i seguenti radicali:

a) $\sqrt[4]{a^8b^{2n}}$; b) $\sqrt[3n]{\dfrac{x^na^{9n}}{b^{2n}}}$, $x \cdot a > 0$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

a) $\sqrt[4]{a^8b^{2n}} = \sqrt[4]{(a^4b^n)^2} =$

- se n è pari, b^n è sempre positivo o nullo: $= \sqrt{a^4b^n}$.
- se n è dispari, b^n è negativo quando b è negativo, perciò dobbiamo introdurre il valore assoluto: $= \sqrt{a^4|b|^n}$.

b) $\sqrt[3n]{\dfrac{x^na^{9n}}{b^{2n}}} = \sqrt[3n]{\left(\dfrac{xa^9}{b^2}\right)^n}$.

Essendo $x \cdot a > 0$ per ipotesi, allora $xa^9 > 0$:

$$\sqrt[3n]{\left(\frac{xa^9}{b^2}\right)^n} = \sqrt[3]{\frac{xa^9}{b^2}}.$$

Semplifica i seguenti radicali (gli indici appartengono a $\mathbb{N} - \{0\}$).

131 $\sqrt[8]{a^{2m}b^4}$ $(a > 0)$ $[\sqrt[4]{a^mb^2}]$

132 $\sqrt[6]{(c+2)^{3m}(a-1)^{3(s+1)}}$ $(c > -2 \wedge a > 1)$ $[\sqrt{(c+2)^m(a-1)^{s+1}}]$

133 $\sqrt[6t]{\dfrac{8(x+1)^3}{(a+2)^{3t}}}$ $\left(a \neq -2, \dfrac{x+1}{(a+2)^t} > 0\right)$ $\left[\sqrt[2t]{\dfrac{2(x+1)}{(a+2)^t}}\right]$

134 $\sqrt[4]{b^{2t+2}a^4}$ $[\sqrt{b^{t+1}a^2}$ se t è dispari; $\sqrt{|b|^{t+1}a^2}$ se t è pari$]$

135 $\sqrt[2c]{\dfrac{(x+y)^4 16}{a^2+b^2-2ab}}$ $(a \neq b)$ $\left[\sqrt[c]{\dfrac{4(x+y)^2}{|a-b|}}\right]$

136 $\sqrt[6t]{\dfrac{x^tb^{3t}}{a^{2t}}}$ $\left[\sqrt[6]{\dfrac{xb^3}{a^2}}\right.$ se t è dispari; $\sqrt[6]{\dfrac{|x \cdot b^3|}{a^2}}$ se t è pari$\Big]$

La riduzione di radicali allo stesso indice

ESERCIZIO GUIDA

137 Riduciamo allo stesso indice i seguenti radicali, supponendo verificate le C.E.:

a) $\sqrt[4]{2a^2}$, $\sqrt[6]{3ab^3}$, $\sqrt[3]{a^2b^4}$; b) $\sqrt[6]{(a+b)^2}$, $\sqrt{a+b}$, $\sqrt[3]{a+b^2}$.

---

a) Calcoliamo il minimo indice comune, ossia il m.c.m. fra gli indici: m.c.m.(4, 6, 3) = 12.
Applichiamo la proprietà invariantiva:

$$\sqrt[4]{2a^2} \overset{\cdot 3}{=} \sqrt[12]{(2a^2)^3} = \sqrt[12]{8a^6}; \quad \sqrt[6]{3ab^3} \overset{\cdot 2}{=} \sqrt[12]{(3ab^3)^2} = \sqrt[12]{9a^2b^6}; \quad \sqrt[3]{a^2b^4} \overset{\cdot 4}{=} \sqrt[12]{(a^2b^4)^4} = \sqrt[12]{a^8b^{16}}.$$

b) Calcoliamo il minimo indice comune:

m.c.m.(6, 2, 3) = 6.

Applichiamo la proprietà invariantiva: l'indice del primo radicale è già 6,

$$\sqrt[2]{a+b} \overset{\cdot 3}{=} \sqrt[6]{(a+b)^3},$$

$$\sqrt[3]{a+b^2} \overset{\cdot 2}{=} \sqrt[6]{(a+b^2)^2}.$$

Abbiamo ottenuto tre radicali di indice 6:

$$\sqrt[6]{(a+b)^2}, \quad \sqrt[6]{(a+b)^3}, \quad \sqrt[6]{(a+b^2)^2}.$$

Riduci allo stesso indice i seguenti radicali. (Qui e in seguito, se non vengono date indicazioni diverse, supponi verificate le C.E.)

138 $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{3}$. $[\sqrt[12]{729}; \sqrt[12]{81}; \sqrt[12]{27}]$

139 $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[6]{5}$. $[\sqrt[6]{4}; \sqrt[6]{27}; \sqrt[6]{5}]$

140 $\sqrt[12]{52}$, $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt[3]{7}$. $[\sqrt[12]{52}; \sqrt[12]{216}; \sqrt[12]{2401}]$

141 $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt{a}$. $[\sqrt[4]{25}; \sqrt[4]{7}; \sqrt[4]{a^2}]$

142 $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt{2a^2}$. $[\sqrt[12]{a^9}; \sqrt[12]{a^4}; \sqrt[12]{64a^{12}}]$

143 $\sqrt[12]{3x^2y^3}$, $\sqrt[4]{2xy^2}$, $\sqrt[3]{3xy}$. $[\sqrt[12]{3x^2y^3}; \sqrt[12]{8x^3y^6}; \sqrt[12]{81x^4y^4}]$

144 $\sqrt[6]{(a-b)^2}$, $\sqrt{a+b}$, $\sqrt[3]{a+b}$. $[\sqrt[6]{(a-b)^2}; \sqrt[6]{(a+b)^3}; \sqrt[6]{(a+b)^2}]$

145 $\sqrt[15]{25a^3b^4}$, $\sqrt[3]{3ab^2}$, $\sqrt[5]{5a^2b}$. $[\sqrt[15]{25a^3b^4}; \sqrt[15]{243a^5b^{10}}; \sqrt[15]{125a^6b^3}]$

146 $\sqrt{a+2}$, $\sqrt[3]{a^2+4a+4}$, $\sqrt[4]{(a+2)^3}$. $[\sqrt[12]{(a+2)^6}; \sqrt[12]{(a+2)^8}; \sqrt[12]{(a+2)^9}]$

147 $\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{y+1}}$, $\sqrt{\dfrac{a+b}{3}}$, $\sqrt[10]{\dfrac{z-t}{z+t}}$. $\left[\sqrt[10]{\dfrac{(x-1)^2}{(y+1)^2}}; \sqrt[10]{\dfrac{(a+b)^5}{243}}; \sqrt[10]{\dfrac{z-t}{z+t}}\right]$

148 $\sqrt{\dfrac{(x-y)^3}{2}}$, $\sqrt[3]{(a+b)^4}$, $\sqrt[12]{\dfrac{a-b}{a+b}}$. $\left[\sqrt[12]{\dfrac{(x-y)^{18}}{64}}; \sqrt[12]{(a+b)^{16}}; \sqrt[12]{\dfrac{a-b}{a+b}}\right]$

149 $\sqrt{\dfrac{2xy}{x+1}}$, $\sqrt[6]{\dfrac{xz}{2x-1}}$, $\sqrt[4]{\dfrac{x^3y}{3}}$. $\left[\sqrt[12]{\dfrac{64x^6y^6}{(x+1)^6}}; \sqrt[12]{\dfrac{x^2z^2}{(2x-1)^2}}; \sqrt[12]{\dfrac{x^9y^3}{27}}\right]$

150 $\sqrt[3]{\dfrac{(2x-1)^t}{3}}$, $\sqrt[6]{\dfrac{4(x-1)}{2t}}$, $\sqrt{\dfrac{2x}{3a-1}}$. $\left[\sqrt[6]{\dfrac{(2x-1)^{2t}}{9}}; \sqrt[6]{\dfrac{4(x-1)}{2t}}; \sqrt[6]{\dfrac{8x^3}{(3a-1)^3}}\right]$

Il confronto di radicali

ESERCIZIO GUIDA

151 Confrontiamo i radicali $\sqrt[4]{3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[6]{7}$.

Riduciamo allo stesso indice:

$\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$

$\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$

$\sqrt[6]{7} = \sqrt[12]{7^2} = \sqrt[12]{49}$

$27 < 49 < 81$.

Mettiamo i radicali nello stesso ordine dei radicandi:

$\sqrt[4]{3} < \sqrt[6]{7} < \sqrt[3]{3}$.

Confronta i seguenti radicali.

152 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{12}$. $[\sqrt{2} < \sqrt[6]{12} < \sqrt[3]{5}]$

153 $\sqrt{90}$, $\sqrt[5]{80}$, $\sqrt[10]{120}$. $[\sqrt[10]{120} < \sqrt[5]{80} < \sqrt{90}]$

154 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$, $\sqrt[6]{4}$. $\left[\sqrt{\dfrac{2}{3}} < \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}} < \sqrt[6]{4}\right]$

155 $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{5}$. $[\sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}]$

Disponi in ordine crescente i seguenti radicali dopo averli ridotti allo stesso indice.

156 $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt{7}$.

157 $\sqrt{8}$, $\sqrt[4]{14}$, $\sqrt[6]{25}$, $\sqrt[3]{28}$.

158 Disponi in ordine crescente i seguenti numeri reali.

$\sqrt[4]{27}$, 2,2, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{18}$.

5. La moltiplicazione e la divisione fra radicali

Teoria a pag. 786

RIFLETTI SULLA TEORIA

159 VERO O FALSO?

a) Il prodotto di due radicali è un radicale che ha per indice il prodotto degli indici e per radicando il prodotto dei radicandi. V F

b) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}$, $\forall x \in \mathbb{R}_0^+$ e $\forall y \in \mathbb{R}^+$. V F

c) Il prodotto dei radicali $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[4]{7}$ è il radicale $\sqrt[12]{35}$. V F

160 VERO O FALSO?

a) È possibile trasportare fuori dal segno di radice un fattore solo se l'esponente è multiplo dell'indice. V F

b) Il fattore a^{16}, portato fuori dal segno di radice quadrata, diventa a^4. V F

c) I radicali $\sqrt[4]{a^{14}b^3}$ e $|a|^3\sqrt[4]{a^2b^3}$, con $b \in \mathbb{R}_0^+$, sono equivalenti. V F

ESERCIZI

La moltiplicazione fra radicali

ESERCIZIO GUIDA

161 Eseguiamo le seguenti moltiplicazioni fra radicali:

a) $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{25}}\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$; b) $\sqrt{\frac{2a}{b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{ab^2}{6}}$ $(a\geq 0, b>0)$.

a) Poiché **gli indici dei radicali sono uguali**, è sufficiente applicare il teorema del prodotto $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{25}}\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{2}}=\sqrt[3]{\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{25}}\cdot\frac{\cancel{5}}{2}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

b) Poiché **i radicali hanno indici diversi**, li riduciamo allo stesso indice:

$$\sqrt{\frac{2a}{b}}=\sqrt[6]{\frac{8a^3}{b^3}} \quad\text{e}\quad \sqrt[3]{\frac{ab^2}{6}}=\sqrt[6]{\frac{a^2b^4}{36}}.$$

$$\sqrt{\frac{2a}{b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{ab^2}{6}}=\sqrt[6]{\frac{8a^3}{b^3}}\cdot\sqrt[6]{\frac{a^2b^4}{36}}=$$

Il prodotto è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi:

$$=\sqrt[6]{\frac{{}^{2}\cancel{8}a^3}{\cancel{b^3}}\cdot\frac{a^2\cdot b^{\cancel{4}}}{\cancel{36}_{9}}}=\sqrt[6]{\frac{2a^5b}{9}}.$$

Esegui le seguenti moltiplicazioni fra radicali e semplifica i risultati. Supponi che siano verificate le C.E.

162 $\sqrt{48}\cdot\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}$; $\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}$. [12; 3; 8]

163 $\sqrt[5]{12}\,\sqrt[5]{36}\,\sqrt[5]{18}$; $\sqrt[6]{2}\,\sqrt[6]{8}\,\sqrt[6]{32}$. [6; $\sqrt{8}$]

164 $\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{7}\cdot\sqrt[6]{7}\cdot\sqrt[3]{7}$. [3; $\sqrt[4]{7^3}$]

165 $\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt{a^3}\,\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[5]{x}\,\sqrt[10]{x^3}\,\sqrt{x}$. [$\sqrt[3]{a^7}$; x]

166 $\sqrt[5]{\frac{6}{5}}\cdot\sqrt[5]{\frac{35}{42}}\cdot\sqrt[5]{2}$; $\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{8}{27}}\cdot\sqrt{6}$. $\left[\sqrt[5]{2};\ \sqrt{\frac{4}{3}}\right]$

167 $\sqrt{\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{\frac{8}{30}}\cdot\sqrt{6}$; $\sqrt{\frac{5}{12}}\cdot\sqrt{\frac{8}{25}}\cdot\sqrt{\frac{3}{12}}$. $\left[\sqrt{2};\ \sqrt{\frac{1}{30}}\right]$

168 $\sqrt[6]{\frac{27}{x^4}}\cdot\sqrt[6]{\frac{xy^5}{8}}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{y^2}}$; $\sqrt{\frac{4(a-b)^2}{5a^2}}\cdot\sqrt{\frac{25ab^2}{12(a-b)^4}}$. $\left[\sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{y}{x}};\ \sqrt{\frac{5b^2}{3a(a-b)^2}}\right]$

169 $\sqrt{y}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}$; $\sqrt[6]{\frac{8a}{27b^3}}\cdot\sqrt{\frac{3b}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4a}}$. $\left[\sqrt[6]{\frac{x^4y^3}{4}};\ \sqrt[6]{\frac{1}{16a}}\right]$

La divisione fra radicali

ESERCIZIO GUIDA

170 Eseguiamo le divisioni fra radicali:

a) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; b) $\sqrt[4]{24ab^2} : \sqrt{2b}$ (con $a \geq 0$ e $b > 0$).

a) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{\frac{1}{2}} =$

Portiamo allo stesso indice:

$$= \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} : \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} =$$

Applichiamo il teorema del quoziente $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$:

$$= \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^4} = \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^{3-4}} =$$

$$= \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} = \sqrt[12]{2}.$$

b) $\sqrt[4]{24ab^2} : \sqrt{2b} = \sqrt[4]{24ab^2} : \sqrt[4]{(2b)^2} =$

$$= \sqrt[4]{24ab^2 : 4b^2} = \sqrt[4]{6a}.$$

Esegui le seguenti divisioni fra radicali. (Supponi che siano verificate le C.E.)

171 $\sqrt{9} : \sqrt{3}$; $\quad \sqrt{7} : \sqrt{5}$; $\quad \sqrt{8} : \sqrt{\frac{4}{3}}$. $\quad \left[\sqrt{3}; \sqrt{\frac{7}{5}}; \sqrt{6}\right]$

172 $\sqrt{a^2} : \sqrt{a}$; $\quad \sqrt{a} : \sqrt{b}$; $\quad \sqrt{x^3} : \sqrt{\frac{x^2}{y}}$. $\quad \left[\sqrt{a}; \sqrt{\frac{a}{b}}; \sqrt{xy}\right]$

173 $\sqrt[4]{2} : \sqrt[4]{\frac{8}{5}}$; $\quad \sqrt[3]{\frac{3}{2}} : \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$; $\quad \sqrt[7]{32} : \sqrt[7]{2^6}$. $\quad \left[\sqrt[4]{\frac{5}{4}}; 1; \sqrt[7]{\frac{1}{2}}\right]$

174 $\sqrt{5} : \sqrt[4]{\frac{25}{81}}$; $\quad \sqrt[3]{2} : \sqrt[12]{\frac{8}{9}}$; $\quad \sqrt{1+\frac{3}{5}} : \sqrt{\frac{4}{5}}$. $\quad [3; \sqrt[12]{18}; \sqrt{2}]$

175 $\sqrt{x} : \sqrt[4]{\frac{x^5}{y^4}}$; $\quad \sqrt[3]{a} : \sqrt[12]{\frac{a^3}{b^2}}$; $\quad \sqrt{4} : \sqrt[4]{8}$. $\quad \left[\sqrt[4]{\frac{y^4}{x^3}}; \sqrt[12]{ab^2}; \sqrt[4]{2}\right]$

Espressioni con moltiplicazioni e divisioni

Semplifica le seguenti espressioni contenenti moltiplicazioni e divisioni fra radicali. Supponi i radicandi non negativi.

176 $\sqrt{125} : \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{6}$ $\quad [30]$

177 $(\sqrt{8} \cdot \sqrt{48}) : (\sqrt{24} \cdot \sqrt{6})$ $\quad \left[\sqrt{\frac{8}{3}}\right]$

178 $\sqrt[3]{162} : \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[6]{432}\right)$ $\quad [\sqrt[6]{18}]$

179 $\sqrt[3]{a^6b^7} : \sqrt{ab^2} \cdot \sqrt{a^2b}$ $\quad [\sqrt[6]{a^{15}b^{11}}]$

180 $\sqrt[3]{3a^2c} : \sqrt[9]{27a} \cdot \sqrt[3]{9c^2}$ $\quad [\sqrt[9]{729a^5c^9}]$

181 $\left(\sqrt[4]{\frac{x^5y}{z^2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{z}{x^4y}}\right) \cdot \sqrt[4]{\frac{z}{x}}$ $\quad [1]$

182 $\sqrt{\frac{x}{y}} : \sqrt{\frac{x^2}{z}} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}}$ $\quad \left[\sqrt{\frac{z}{x^2}}\right]$

183 $\sqrt{\frac{3ab^2}{c}} : \sqrt{\frac{9b^2}{c}} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}}$ $\quad \left[\frac{a}{3}\right]$

184 $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} : \sqrt{1+\frac{1}{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x-1}$ $\quad \left[\sqrt[6]{\frac{x}{(x-1)^3}}\right]$

185 $\sqrt{x-\frac{9}{x}}:\sqrt[3]{\frac{x+3}{2x}}:\sqrt[6]{\frac{(x-3)^3}{2x}}$ $[\sqrt[6]{8(x+3)}]$

186 $\sqrt{\frac{x^2-4x}{x^2-8x+16}}\cdot\sqrt{\frac{x-4}{x}}:\sqrt{\frac{x^2-16}{x^2}}$ $\left[\sqrt{\frac{x^2}{x^2-16}}\right]$

187 $\sqrt[3]{\frac{1}{x+y}}\cdot\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}\cdot\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+y}}$ $[\sqrt[6]{x+y}]$

188 $\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\cdot\sqrt{\frac{3(x^2-y^2)}{2(x-y)}}$ $\left[\sqrt{\frac{3(x-y)}{2}}\right]$

189 $\sqrt{\frac{12(x^2-2ax+a^2)}{5(x+a)^2}}\cdot\sqrt{\frac{10(x+a)^4}{4(x-a)}}$ $[\sqrt{6(x-a)(x+a)^2}]$

190 $\sqrt[4]{\frac{2y}{x+y}+1}\cdot\sqrt[8]{\frac{x+3y}{2x+2y}}:\sqrt{\frac{x+3y}{x+y}}:\sqrt[8]{x+y}$ $\left[\sqrt[8]{\frac{1}{2(x+3y)}}\right]$

191 $\sqrt{\frac{b^2-b-2}{b^2-1}}\cdot\sqrt[3]{\frac{b+1}{b+2}}:\sqrt[6]{\frac{b+1}{b^2-4}}$ $\left[\sqrt[6]{\frac{(b-2)^4(b+1)}{(b-1)^3(b+2)}}\right]$

Il trasporto di un fattore fuori dal segno di radice

ESERCIZIO GUIDA

192 Trasportiamo fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili nei seguenti radicali:

a) $\sqrt[3]{24}$; b) $\sqrt[4]{2^9}$; c) $\sqrt{\frac{3}{16}}$; d) $\sqrt{9a^8b}$ $(b\geq 0)$; e) $\sqrt[3]{a^5+3a^4+3a^3+a^2}$ $(a\geq -1)$.

a) $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\cdot 3}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3}=2\cdot\sqrt[3]{3}$.

b) $\sqrt[4]{2^9}=\sqrt[4]{2^8\cdot 2}=\sqrt[4]{2^8}\cdot\sqrt[4]{2}=2^2\cdot\sqrt[4]{2}=4\sqrt[4]{2}$.

c) $\sqrt{\frac{3}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}\sqrt{3}$.

d) $\sqrt{9a^8b}=\sqrt{3^2\cdot a^8\cdot b}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{a^8}\cdot\sqrt{b}=3\cdot a^4\cdot\sqrt{b}$.

e) Raccogliamo a^2 e riconosciamo il cubo di un binomio:

$$\sqrt[3]{a^5+3a^4+3a^3+a^2}=\sqrt[3]{a^2(a^3+3a^2+3a+1)}=\sqrt[3]{a^2(a+1)^3}=\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{(a+1)^3}$$

Poiché per ipotesi $a\geq -1$, il fattore $(a+1)$ non è negativo:

$=(a+1)\cdot\sqrt[3]{a^2}$.

Trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili. Supponi che i fattori da trasportare non siano negativi.

193 $\sqrt{18}$; $\sqrt{12}$; $\sqrt[3]{54}$; $\sqrt[3]{40}$. $[3\sqrt{2};\ 2\sqrt{3};\ 3\sqrt[3]{2};\ 2\sqrt[3]{5}]$

194 $\sqrt{\frac{16}{3}}$; $\sqrt{\frac{5}{4}}$; $\sqrt[3]{\frac{2}{27}}$; $\sqrt[3]{\frac{8}{5}}$. $\left[4\cdot\sqrt{\frac{1}{3}};\ \frac{1}{2}\sqrt{5};\ \frac{1}{3}\sqrt[3]{2};\ 2\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right]$

195 $\sqrt{40}$; $\sqrt{243}$; $\sqrt{125}$; $\sqrt[3]{16}$. $[2\sqrt{10}; 9\sqrt{3}; 5\sqrt{5}; 2\sqrt[3]{2}]$

196 $\sqrt[3]{96}$; $\sqrt[3]{81}$; $\sqrt[4]{320}$; $\sqrt[4]{243}$. $[2\sqrt[3]{12}; 3\sqrt[3]{3}; 2\sqrt[4]{20}; 3\sqrt[4]{3}]$

197 $\sqrt{\frac{3}{8}}$; $\sqrt{\frac{72}{25}}$; $\sqrt[3]{\frac{8}{81}}$; $\sqrt[3]{\frac{33}{160}}$. $\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{6}{5}\sqrt{2}; \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}; \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{33}{20}}\right]$

198 $\sqrt[3]{320}$; $\sqrt[3]{375}$; $\sqrt[4]{112}$; $\sqrt[4]{405}$. $[4\sqrt[3]{5}; 5\sqrt[3]{3}; 2\sqrt[4]{7}; 3\sqrt[4]{5}]$

199 $\sqrt{5a^8bc^2}$; $\sqrt[3]{6ab^3c^6}$; $\sqrt[4]{\frac{2}{81}x^{12}}$; $\sqrt{2a^2b}$. $\left[a^4c\sqrt{5b}; bc^2\sqrt[3]{6a}; \frac{1}{3}x^3\sqrt[4]{2}; a\sqrt{2b}\right]$

200 $\sqrt[3]{a^3+3a^2+3a+1}$; $\sqrt[3]{a^6(x-y)^3}$; $\sqrt[3]{3b^6}$. $[a+1; a^2(x-y); b^2\sqrt[3]{3}]$

201 $\sqrt{x^2+x^2y}$; $\sqrt{4+4b^2}$; $\sqrt{x^2y-3x^2}$. $[x\sqrt{1+y}; 2\sqrt{1+b^2}; x\sqrt{y-3}]$

202 $\sqrt{x^6-2x^3b^3+b^6}$; $\sqrt{\frac{3a^2-18a+27}{9b^2x}}$. $\left[x^3-b^3; \frac{a-3}{b}\sqrt{\frac{1}{3x}}\right]$

203 $\sqrt[4]{\frac{a+3}{(a-3)^5}}$; $\sqrt{8(x^5-6x^4+9x^3)}$. $\left[\frac{1}{a-3}\sqrt[4]{\frac{a+3}{a-3}}; 2x(x-3)\sqrt{2x}\right]$

204 $\sqrt[3]{\frac{4}{27}a^3b^6}$; $\sqrt[4]{(a^2-1)(a-1)^3}$. $\left[\frac{1}{3}ab^2\sqrt[3]{4}; (a-1)\sqrt[4]{a+1}\right]$

205 $\sqrt{4x-12b}$; $\sqrt[4]{b^4+b^4x}$; $\sqrt[3]{(2-x)^2a^6b}$. $[2\sqrt{x-3b}; b\sqrt[4]{1+x}; a^2\sqrt[3]{(2-x)^2b}]$

206 $\sqrt{a^2-\frac{1}{9}}$; $\sqrt{\frac{7a}{25b^2}}$; $\sqrt[4]{x^4+x^4b^2}$. $\left[\frac{1}{3}\sqrt{9a^2-1}; \frac{1}{5b}\sqrt{7a}; x\sqrt[4]{1+b^2}\right]$

207 $\sqrt{\frac{a^5x^3}{48}}$; $\sqrt[3]{\frac{a^4(x-1)^5}{27}}$. $\left[\frac{a^2x}{4}\sqrt{\frac{ax}{3}}; \frac{a(x-1)}{3}\sqrt[3]{a(x-1)^2}\right]$

208 $\sqrt[3]{\frac{54(2x+1)^4}{(x+3)^5}}$; $\sqrt{\frac{(x+2)^5x^3}{27}}$. $\left[\frac{3(2x+1)}{x+3}\sqrt[3]{\frac{2(2x+1)}{(x+3)^2}}; \frac{x(x+2)^2}{3}\sqrt{\frac{(x+2)x}{3}}\right]$

209 $\sqrt{\frac{80(a-2)^3a^4}{a^2-4}}$; $\sqrt{\frac{100x^3(x^2-1)^4}{(x-1)^3}}$. $\left[4a^2(a-2)\sqrt{\frac{5}{a+2}}; 10x(x+1)^2\sqrt{x(x-1)}\right]$

210 $\sqrt[3]{\frac{(a-1)^7a^4}{81}}$; $\sqrt{\frac{(x^2-2x)(x-2)^2}{(x^2-4x+4)^3}}$. $\left[\frac{a(a-1)^2}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{a(a-1)}{3}}; \frac{1}{x-2}\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right]$

211 $\sqrt{\frac{(x^3+4x^2)^2}{(x^2-16)^3}}$; $\sqrt{\frac{18a^5(x+3)^3}{x^4}}$. $\left[\frac{x^2}{x-4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-16}}; \frac{3a^2(x+3)}{x^2}\sqrt{2a(x+3)}\right]$

Fattori trasportati fuori dal segno di radice e discussione

ESERCIZIO GUIDA

212 Trasportiamo fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili nei seguenti radicali:

a) $\sqrt{a^6b}$; b) $\sqrt[3]{125a^3b}$; c) $\sqrt[3]{8a^3b^9c^2}$; d) $\sqrt{2a^2-4a+2}$.

a) C.E. di $\sqrt{a^6 b}$: $b \geq 0$.

$$\sqrt{a^6 b} = |a^3| \sqrt{b}.$$

Introduciamo il valore assoluto di a^3 poiché le C.E. non garantiscono che sia $a^3 \geq 0$.

b) C.E. di $\sqrt[3]{125a^3 b}$: $ab \geq 0$.

$$\sqrt[3]{125a^3 b} = \sqrt[3]{5^3 a^3 b} = 5|a|\sqrt[3]{|b|}.$$

Introduciamo i valori assoluti di b e a poiché le C.E. non assicurano che il radicando sia ≥ 0 e per rendere vera l'uguaglianza.

c) C.E. di $\sqrt[3]{8a^3 b^9 c^2}$: $ab \geq 0$.

$$\sqrt[3]{8a^3 b^9 c^2} = \sqrt[3]{2^3 a^3 b^9 c^2} = 2ab^3 \sqrt[3]{c^2}.$$

I valori assoluti non occorrono, perché le C.E. garantiscono che $ab^3 \geq 0$, essendo $ab^3 = ab \cdot b^2 \geq 0$.

d) C.E. di $\sqrt{2a^2 - 4a + 2} = \sqrt{2(a-1)^2}$: $\forall a \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{2(a-1)^2} = |a-1|\sqrt{2}.$$

Infatti le C.E. non garantiscono che sia $a - 1 \geq 0$ mentre $\sqrt{2(a-1)^2} \geq 0$.

COMPLETA Nelle seguenti uguaglianze sono stati trasportati fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili senza mettere i necessari valori assoluti. Aggiungili dove mancano.

213 $\sqrt{x^2} = x$; $\quad \sqrt{x^3} = x \cdot \sqrt{x}$; $\quad \sqrt{ab^2} = b\sqrt{a}$.

214 $\sqrt{x^4} = x^2$; $\quad \sqrt{x^5} = x^2 \cdot \sqrt{x}$; $\quad \sqrt[3]{a^6} = a^2$.

215 $\sqrt[3]{8a^3 bc^3} = 2ac\sqrt[3]{b}$; $\quad \sqrt[3]{\dfrac{27a^3}{b^6 c}} = \dfrac{3a}{b^2}\sqrt[3]{\dfrac{1}{c}}$.

216 $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$; $\quad \sqrt{2a^4 b^2} = a^2 \cdot b \cdot \sqrt{2}$;

$\sqrt{9a^4 b} = 3a^2\sqrt{b}$.

217 $\sqrt[4]{a^4 b^8 c} = ab^2\sqrt[4]{c}$; $\quad \sqrt[5]{32a^5 b} = 2a\sqrt[5]{b}$;

$\sqrt[6]{a^{12} b^6 c} = a^2 b\sqrt[6]{c}$.

218 $\sqrt[4]{\dfrac{16a^4 b}{c^8}} = \dfrac{2a}{c^2}\sqrt[4]{b}$; $\quad \sqrt{\dfrac{4a^2 d}{c^4}} = \dfrac{2a}{c^2}\sqrt{d}$.

219 $\sqrt{9(a-1)^2 b} = 3(a-1)\sqrt{b}$;

$\sqrt{16a^2(b-1)^2} = 4a(b-1)$.

Trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili.

220 $\sqrt{16b^4 c}$; $\quad \sqrt[3]{27a^2 b^{12} x^6}$; $\quad \sqrt[3]{12x^3 y^2}$. $\quad [4b^2\sqrt{c};\ 3b^4 x^2\sqrt[3]{a^2};\ x\sqrt[3]{12y^2}]$

221 $\sqrt{(a^2 - 2a + 1)b}$; $\quad \sqrt[3]{6x^2 y^3 c^6}$; $\quad \sqrt[5]{10x^5 y^4}$. $\quad [|a-1|\sqrt{b};\ yc^2\sqrt[3]{6x^2};\ x\sqrt[5]{10y^4}]$

222 $\sqrt[4]{16b^4 c}$; $\quad \sqrt[3]{64x^2 b^6 y^9}$; $\quad \sqrt{81x^4 y^6}$. $\quad [2|b|\sqrt[4]{c};\ 4b^2 y^3\sqrt[3]{x^2};\ 9x^2|y|^3]$

223 $\sqrt{12a^2 + a^2 x}$; $\quad \sqrt[3]{15x^3 + x^5}$. $\quad [|a|\sqrt{12+x};\ x\sqrt[3]{15+x^2}]$

224 $\sqrt{4x^2 c}$; $\quad \sqrt[3]{81x^6 y^{12} c^2}$. $\quad [2|x|\sqrt{c};\ 3x^2 y^4\sqrt[3]{3c^2}]$

225 $\sqrt{a^2 b^2 + 4b^2}$; $\quad \sqrt[3]{ab^3 - b^4}$. $\quad [|b|\sqrt{a^2+4};\ |b|\sqrt[3]{|a-b|}]$

226 $\sqrt{a^2 b + b^2 a^2}$; $\quad \sqrt[3]{27a^3 + 27}$. $\quad [|a|\sqrt{b+b^2};\ 3\sqrt[3]{a^3+1}]$

227 $\sqrt{16a^2(b^2 - 2b + 1)}$; $\quad \sqrt{16(a^2 x + 2ax + x)}$. $\quad [4|a(b-1)|;\ 4|a+1|\sqrt{x}]$

228 $\sqrt{(x^2-4)(x-2)}$; $\quad \sqrt{\dfrac{x^2 - x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}}$. $\quad \left[|x-2|\sqrt{x+2};\ \dfrac{\sqrt{x}}{|x-1|}\right]$

229 $\sqrt{\dfrac{4x^3-4x^2}{x^2+2x+1}}$; $\quad\sqrt{\dfrac{81x^3}{x^2-5x}}$. $\qquad \left[2\left|\dfrac{x}{x+1}\right|\sqrt{x-1};\ \dfrac{9x}{\sqrt{x-5}}\right]$

230 $\sqrt{(x-1)^3}$; $\quad\sqrt[4]{\dfrac{27a^5}{(x+3)^4}}$. $\qquad \left[(x-1)\sqrt{x-1};\ \dfrac{a\sqrt[4]{27a}}{|x+3|}\right]$

231 $\sqrt{(x^2-9)(x^2+3x)x^3}$; $\quad\sqrt{\dfrac{(1-x)^2 4x}{(x^2-1)(x^2+x)}}$. $\qquad \left[x^2(x+3)\sqrt{x-3};\ \dfrac{2}{x+1}\sqrt{x-1}\right]$

232 $\sqrt{\dfrac{a^4b^4}{c(x-1)^6}}$; $\quad\sqrt{3x^2-18x+27}$. $\qquad \left[\dfrac{a^2b^2}{|x-1|^3}\sqrt{\dfrac{1}{c}};\ |x-3|\sqrt{3}\right]$

233 $\sqrt[3]{x^5+3x^4+3x^3+x^2}$; $\quad\sqrt{a^5+a^4}$. $\qquad [(x+1)\sqrt[3]{x^2};\ a^2\sqrt{a+1}]$

Moltiplicare, dividere e portare fuori dal segno di radice

Dopo aver eseguito le moltiplicazioni e divisioni indicate, trasporta fuori dal segno di radice i fattori possibili. Supponi che i fattori che compongono i radicandi siano positivi.

234 $\sqrt{24}\cdot\sqrt{30}$; $\quad\sqrt{\dfrac{5}{4}}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{125}}$; $\quad\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}$. $\qquad \left[12\sqrt{5};\ \dfrac{1}{10}\sqrt{3};\ \dfrac{3}{2}\right]$

235 $\sqrt[4]{4a^3b^2}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}$; $\quad\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}x^2}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{1}{27}x^4y^3}$. $\qquad \left[2a\sqrt[12]{4a^5b^{10}};\ \dfrac{x}{3}\sqrt[15]{\dfrac{x^7y^9}{81}}\right]$

236 $\sqrt{\dfrac{x-2y}{a^2-4b^2}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a-2b}{x-2y}}\cdot\sqrt[6]{(x-2y)^5}$ $\qquad \left[(x-2y)\sqrt[6]{\dfrac{1}{(a-2b)(a+2b)^3}}\right]$

237 $\sqrt[6]{\dfrac{1}{x-1}}\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}:\sqrt{\dfrac{x^3+3x-3x^2-1}{x+1}}$ $\qquad \left[\dfrac{x+1}{x-1}\sqrt[6]{x+1}\right]$

238 $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2a-1}}\cdot\sqrt{\dfrac{4a^2-1}{(2a-1)^3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2a-1}{2a+1}}$ $\qquad \left[\dfrac{\sqrt[6]{2a+1}}{2a-1}\right]$

239 $\sqrt[6]{\dfrac{a^2-1}{a}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}+a^2+2}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{1}{a^4(a^2-1)^4}}\cdot\sqrt{\dfrac{a}{a^4-1}}$ $\qquad \left[\dfrac{1}{a(a^2-1)}\sqrt[6]{a^2+1}\right]$

240 $\sqrt[3]{a+2}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2-4a+4}}\cdot\sqrt[3]{(a^2-4)\cdot\dfrac{a^3-8}{a^2+2a+4}}$ $\qquad [\sqrt[3]{(a+2)^2}]$

BRAVI SI DIVENTA ► E35

241 $\sqrt[3]{\dfrac{9}{x^2+6x+9}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{9(x^2-9)^4}{x}}:\sqrt{\dfrac{x^3-3x^2}{3}}$

Trova le condizioni di esistenza dei radicali e, dopo aver eseguito le moltiplicazioni indicate, trasporta fuori dal segno di radice i fattori possibili; metti il valore assoluto dove necessario.

242 $\sqrt[4]{a^2b^3}\cdot\sqrt[4]{a^7b^9}$; $\quad\sqrt[6]{b^3c}\cdot\sqrt[6]{3b^3c^5}$; $\quad\sqrt[5]{2x^3y^4}\cdot\sqrt[5]{16x^3y^3}$. $\qquad [a^2b^3\sqrt[4]{a};\ bc\sqrt[6]{3};\ 2xy\sqrt[5]{xy^2}]$

243 $\sqrt[2]{\dfrac{6y}{x^3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4x}{9y^3}}$; $\quad\sqrt[6]{\dfrac{xy^5}{4}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2y^2}{x^8}}$; $\quad\sqrt[6]{\dfrac{8a^4}{b^4}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{4b^2}{a^2}}$. $\qquad \left[\dfrac{2}{|x|}\sqrt[6]{\dfrac{2}{3xy^3}};\ \dfrac{|y|}{x^2}\sqrt{\dfrac{y}{x}};\ 2\sqrt[6]{\left|\dfrac{a}{b}\right|}\right]$

244 $\sqrt{\dfrac{x-3}{x+y}}\ \sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^3-y^3}}\cdot\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}}$; $\quad\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{x}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}}$. $\qquad \left[\dfrac{1}{x+y}\sqrt{x-3};\ \dfrac{|x-1|}{x}\cdot\left(\sqrt[6]{\dfrac{1}{x}}\right)\right]$

6. La potenza e la radice di un radicale

Teoria a pag. 789

RIFLETTI SULLA TEORIA

245 VERO O FALSO?

a) Se $a \in \mathbb{R}_0^+$ e $x, y, z \in \mathbb{N} - \{0\}$, allora $(\sqrt[x]{a^y})^z = \sqrt[xz]{a^{yz}}$. V F

b) $(\sqrt[4]{3})^7 = 3\sqrt[4]{27}$. V F

c) La radice cubica della radice quinta di a è equivalente alla radice ottava di a. V F

246 È vera l'uguaglianza $(\sqrt[6]{a^3})^2 = a$, con $a \in \mathbb{R}_0^+$? Motiva la risposta e fai altri esempi.

247 Perché l'uguaglianza $-7\sqrt{z} = \sqrt{49z}$, con $z > 0$, è *falsa*? Correggila in modo che diventi vera.

ESERCIZI

La potenza di un radicale

ESERCIZIO GUIDA

248 Calcoliamo le seguenti potenze di radicali:

a) $(\sqrt[3]{2})^5$; b) $(\sqrt[5]{2xy^2})^3$ $(x \geq 0)$; c) $(\sqrt[6]{5ab^2})^3$.

Applichiamo in tutti i casi il teorema della potenza: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

a) $(\sqrt[3]{2})^5 = \sqrt[3]{2^5} = 2\sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$.

b) $(\sqrt[5]{2xy^2})^3 = \sqrt[5]{(2xy^2)^3} = \sqrt[5]{8x^3y^6} = |y|\sqrt[5]{8x^3|y|}$.

c) $(\sqrt[6]{5ab^2})^3 = \sqrt{5ab^2} = |b|\sqrt{5a}$.

Calcola le seguenti potenze di radicali.

249 $(\sqrt{3})^3$; $(\sqrt[6]{2})^3$; $(\sqrt[5]{2})^2$; $(\sqrt[4]{3})^2$. $[3\sqrt{3}; \sqrt{2}; \sqrt[5]{4}; \sqrt{3}]$

250 $(\sqrt{12})^3$; $(\sqrt[3]{9})^6$; $(\sqrt[10]{7})^2$; $(\sqrt[5]{3})^2$. $[24\sqrt{3}; 81; \sqrt[5]{7}; \sqrt[5]{9}]$

251 $(\sqrt{2a^5b})^3$; $(\sqrt[3]{3x^4y})^2$; $(\sqrt[6]{bc^3})^4$. $[2a^7b\sqrt{2ab}; x^2\sqrt[3]{9x^2y^2}; c^2\sqrt[3]{b^2}]$

252 $[\sqrt[3]{(x+3y)(x-y)}]^2$; $(\sqrt[3]{2x-3y})^2$. $[\sqrt[3]{(x+3y)^2(x-y)^2}; \sqrt[3]{(2x-3y)^2}]$

253 $(\sqrt[3]{2a-b})^4$; $\left(\sqrt{\dfrac{3a-x}{a+b}}\right)^3$. $\left[(2a-b)\sqrt[3]{2a-b}; \dfrac{3a-x}{a+b}\sqrt{\dfrac{3a-x}{a+b}}\right]$

254 $[(x+2)\sqrt{3}]^2$; $[(3x-y)\sqrt{a}]^3$. $[3(x+2)^2; a\sqrt{a}(3x-y)^3]$

255 $(\sqrt{8ab^2x})^3$ $(ax \geq 0)$; $(\sqrt[3]{x^nb^{2n}})^2$. $[16a|b|^3x\sqrt{2ax}; |b^n|\sqrt[3]{x^{2n}|b^n|}]$

Espressioni con potenze di radicali

Semplifica le seguenti espressioni con potenze di radicali. Supponi positivi i radicandi letterali.

256 $\left(\sqrt[3]{\frac{9}{16}}\right)^2 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{16}{3}}\right)^2; \quad (\sqrt{5})^3 : (\sqrt[3]{25})^2; \quad \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^2 : \sqrt{\frac{1}{27}}.$ $[\sqrt[3]{9}; \sqrt[6]{5}; \sqrt[6]{243}]$

257 $(\sqrt[4]{a})^2 \cdot (\sqrt[3]{a^2})^3 \cdot \sqrt{a}; \quad \left[(a-2b) : \sqrt{\frac{a-2b}{3a^2}}\right]^2.$ $[a^3; 3a^2(a-2b)]$

258 $\left(\sqrt[6]{1-\frac{x-3y}{x+y}} \cdot \sqrt[6]{\frac{x-y}{4y}}\right)^3 : \sqrt{\frac{1}{x+y}}$ $[\sqrt{x-y}]$

259 $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1} : \sqrt[3]{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)^2 : \sqrt[3]{\left(\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}\right)^2}$ $[1]$

260 $\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-2} : \sqrt[3]{2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}\right)^2 : \sqrt[3]{\frac{(a-b)^4}{a}}$ $\left[\sqrt[3]{\frac{1}{ab^2}}\right]$

261 $\sqrt[3]{x^2y(x-y)^2(x+y)} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}} : (\sqrt[3]{x^3-2x^2y+xy^2})^2$ $\left[\sqrt[3]{\frac{x+y}{x}}\right]$

262 $\sqrt[3]{\frac{x^2+x-6}{x^2-x-6}} \cdot \left(\sqrt{\frac{x+2}{x+3}} \cdot \sqrt{\frac{x-3}{x-2}}\right)^2$ $\left[\sqrt[3]{\frac{(x^2-x-6)^2}{(x^2+x-6)^2}}\right]$

La radice di un radicale

ESERCIZIO GUIDA

263 Eseguiamo la radice di radicale: $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$.

Applichiamo il teorema della radice di una radice:

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}.$

La radice che otteniamo ha come indice il prodotto degli indici delle singole radici: $2 \cdot 3 = 6$.

$\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}.$

Esegui le seguenti radici di radicali.

264 $\sqrt{\sqrt[3]{2}}; \quad \sqrt{\sqrt[5]{3}}; \quad \sqrt{\sqrt{6}}.$

265 $\sqrt{\sqrt[3]{7}}; \quad \sqrt[6]{\sqrt{3}}; \quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}.$

266 $\sqrt{\sqrt[3]{2a}}; \quad \sqrt{\sqrt[3]{3a^2b^3}}.$

267 $\sqrt[3]{\sqrt{6ax}}; \quad \sqrt[5]{\sqrt{9a^2b}}.$

268 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^5b^3}}}; \quad \sqrt{\sqrt[3]{a^3b^6}}.$

269 $\sqrt[5]{\sqrt[5]{x^2}}; \quad \sqrt[8]{\sqrt{2a^{10}}}.$

Il trasporto di un fattore dentro il segno di radice

ESERCIZIO GUIDA

270 Trasportiamo dentro il segno di radice un fattore:

a) $-\frac{1}{3}\sqrt{12}$; b) $a+2\sqrt[4]{\frac{3}{8}}$; c) $(a-6)\sqrt{a-1}$ $(a \geq 6)$.

a) Poiché non possiamo portare dentro il segno di radice fattori negativi, portiamo dentro $\frac{1}{3}$, mentre il segno $-$ rimane fuori.

$$-\frac{1}{3}\sqrt{12} = -\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 4 \cdot 3} =$$
$$= -\sqrt{\frac{1}{3^{\cancel{2}}} \cdot 4 \cdot \cancel{3}} = -\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

b) Il fattore da trasportare è soltanto 2:

$$a+2\sqrt[4]{\frac{3}{8}} = a+\sqrt[4]{2^{\cancel{4}\,1} \cdot \frac{3}{\cancel{2^3}}} = a+\sqrt[4]{6}.$$

c) Il fattore da trasportare è $a-6$, che, per la condizione posta, non è negativo:

$$(a-6)\sqrt{a-1} = \sqrt{(a-6)^2(a-1)}.$$

Trasporta i fattori dentro il segno di radice, supponendoli non negativi.

271 $3\sqrt{2}$; $4\sqrt{3}$; $-2\sqrt[3]{2}$; $3\sqrt[3]{3}$; $2\sqrt[4]{7}$.

272 $(-2)\sqrt{7}$; $2\sqrt{1-\frac{1}{4}}$; $3+2\sqrt{3}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)\sqrt{18}$; $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{3}+1}$.

273 $2\sqrt{\frac{5}{54}}$; $-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{9}{8}}$; $-3\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\frac{1}{6}\sqrt{\frac{9}{5}}$; $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{25}{8}}$.

274 $3\sqrt{a}$; $2\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}}$; $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2b}}$; $\frac{2}{3}\sqrt{18a}$; $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{ab^2}$.

275 $a-2\sqrt[6]{ab}$; $b^2-2\sqrt[5]{b^2}$; $a\sqrt{a}$; $x^2\sqrt{x^3}$; $a^2\sqrt{\frac{2}{a}}$.

276 $2\sqrt{a-1}$; $\frac{1}{a}\sqrt[5]{3a^3}$; $\left(-\frac{a}{2}\right)\sqrt{4a}$; $b^3\sqrt{\frac{3}{b^2}}$; $-x\sqrt{2x}$.

277 $(x-1)\sqrt{5}$; $a^2b\sqrt[3]{ab^2}$; $a^2\sqrt[3]{a^2-1}$.

278 $3ab\sqrt{\frac{7}{18a^3b^2}}$; $2+a\sqrt{\frac{1}{a^2+2a}}$. $\left[\sqrt{\frac{7}{2a}}; 2+\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right]$

279 $(a-2)\sqrt[3]{\frac{1}{a^2-4a+4}}$; $(2+a)\sqrt{\frac{1}{a^2+2a}}$. $\left[\sqrt[3]{a-2}; \sqrt{\frac{2+a}{a}}\right]$

280 $\frac{5}{a}\sqrt{\frac{a^2+a}{10}}$; $\frac{2}{a-5}\sqrt{5a}$. $\left[\sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{a+1}{a}}; \sqrt{\frac{20a}{(a-5)^2}}\right]$

281 $\frac{a+1}{a-2}\sqrt{\frac{a^2-7a+10}{a^2-2a-3}}$; $\frac{1}{(a-2)}\sqrt{\frac{a^2-2a}{a-1}}$. $\left[\sqrt{\frac{(a+1)(a-5)}{(a-2)(a-3)}}; \sqrt{\frac{a}{(a-2)(a-1)}}\right]$

282 $\frac{a+2}{a+1}\sqrt{\frac{4a+6}{a+2}-2}$; $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^2+a}{a-2}-a}$. $\left[\sqrt{\frac{2(a+2)}{a+1}}; \sqrt{\frac{3}{a(a-2)}}\right]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

Trasporto di un fattore dentro il segno di radice e discussione

ESERCIZIO GUIDA

283 Trasportiamo dentro il segno di radice un fattore di cui non conosciamo il segno:

$(a-4)\sqrt{a-3}$.

C.E.: $a-3\geq 0$, ossia $a\geq 3$. Quando il fattore da portare dentro la radice è letterale, se non conosciamo il segno del fattore, bisogna distinguere due casi: fattore positivo o nullo, oppure fattore negativo:

Primo caso: $a-4\geq 0$.
Deve essere $a\geq 3$ per le C.E. e $a-4\geq 0$, ossia $a\geq 4$.

Quindi, se $a\geq 4$: $(a-4)\sqrt{a-3}=\sqrt{(a-4)^2(a-3)}$.

Secondo caso: $a-4<0$.
Per la C.E. deve essere $a\geq 3$, inoltre deve essere $a<4$: quindi, $3\leq a<4$.
Scriviamo $a-4$ come $-[-(a-4)]$. In questo modo $-(a-4)$ risulta positivo. Se $3\leq a<4$:

$$(a-4)\sqrt{a-3}=-[-(a-4)]\sqrt{a-3}=-\sqrt{[-(a-4)]^2(a-3)}=-\sqrt{(a-4)^2(a-3)}.$$

Dopo aver determinato le C.E., trasporta i fattori (di cui non conosci il segno) dentro alla radice.

284 $(a-1)\sqrt{\dfrac{1}{a-1}}$; $\quad 2-x\sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$; $\quad a^2\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}$.

$\left[\text{se } a>1, \sqrt{a-1}; \text{ se } 0\leq x<2, 2-\sqrt{\dfrac{x^2}{2-x}}, \text{ se } x<0, 2+\sqrt{\dfrac{x^2}{2-x}}; \text{ se } a\neq 0, \sqrt[3]{a^4}\right]$

285 $(x+3)\sqrt{2}$; $\quad y\sqrt{\dfrac{1}{y}}$; $\quad (2-b)\sqrt[3]{\dfrac{1}{(b-2)^2}}$.

$[\text{se } x\geq -3, \sqrt{2(x+3)^2}, \text{ se } x<-3, -\sqrt{2(x+3)^2}; \text{ se } y>0, \sqrt{y}; \text{ se } b>2, -\sqrt[3]{b-2}, \text{ se } b<2, \sqrt[3]{2-b}]$

286 $a\sqrt{a-2}$; $\quad (a+5)\sqrt{\dfrac{1}{3a}}$; $\quad b\sqrt{3+b}$.

$\left[\text{se } a>2, \sqrt{a^2(a-2)}; \text{ se } a>0, \sqrt{\dfrac{(a+5)^2}{3a}}; \text{ se } -3\leq b<0, -\sqrt{b^2(3+b)}, \text{ se } b\geq 0, \sqrt{b^2(3+b)}\right]$

La radice di un radicale con trasporto di un fattore dentro radice

ESERCIZIO GUIDA

287 Poniamo sotto forma di unico radicale i seguenti radicali:

a) $\sqrt{5\sqrt[3]{\dfrac{3}{50}}}$; $\qquad$ b) $\sqrt{(x-1)\sqrt[3]{x+1}}\quad (x\geq 1)$.

a) $\sqrt{5\sqrt[3]{\dfrac{3}{50}}}=$

Trasportiamo il fattore 5:

$=\sqrt{\sqrt[3]{\dfrac{5^3\cdot 3}{2\cdot 5^2}}}=$

Semplifichiamo la frazione e moltiplichiamo gli indici dei radicali, applicando il teorema della radice di un radicale:

$=\sqrt[6]{\dfrac{15}{2}}$.

b) $\sqrt{(x-1)\sqrt[3]{x+1}}=$

$=\sqrt{\sqrt[3]{(x-1)^3(x+1)}}=$

$=\sqrt[6]{(x-1)^3(x+1)}$.

Determina le C.E. e poni sotto forma di un unico radicale.

288 $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$; $\sqrt[3]{2\sqrt{4}}$; $\sqrt{2\sqrt{2}}$.

289 $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; $\sqrt{\sqrt{3x}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{2ab^2}}$.

290 $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{\frac{1}{a}}}} \cdot \sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2\sqrt{\frac{1}{a}}}}$

291 $\sqrt[3]{2\sqrt{4\sqrt{2}}}$; $\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt{9}}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{4}\sqrt{4\sqrt{2}}}$.

292 $\sqrt[3]{4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2\sqrt[3]{4}}$; $\sqrt[6]{(3\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}$.

293 $\sqrt[4]{2\sqrt{5}}$; $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{9}}$; $\sqrt[3]{3\sqrt{12}}$.

294 $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$; $\sqrt{a\sqrt{a^3}}$; $\sqrt{a^3\sqrt{a}}$.

295 $\sqrt{x\sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt[3]{x\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}$ $[\sqrt[18]{x^{29}}]$

296 $\sqrt[7]{x\sqrt{\frac{1}{x}}} \cdot \sqrt[5]{x^3\sqrt{\frac{1}{x^5}}} \cdot \sqrt[7]{\frac{1}{x}}$ $[\sqrt[35]{x}]$

297 $\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt{a^3 - a^2}}$ $[\sqrt[4]{a-1}]$

298 $\sqrt[3]{\frac{1}{x+3}\sqrt{x+3}}$ $\left[\sqrt[6]{\frac{1}{x+3}}\right]$

7. L'addizione e la sottrazione di radicali

Teoria a pag. 791

RIFLETTI SULLA TEORIA

299 VERO O FALSO?

a) I radicali $4\sqrt{5}$ e $4\sqrt[3]{5}$ non sono simili. V F

b) Tutti i radicali quadratici sono simili tra loro. V F

c) I radicali $2\sqrt{75}$ e $5\sqrt{48}$ possono essere trasformati in radicali simili. V F

d) $\sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{5}$. V F

300 TEST $8\sqrt{3}$ è il risultato di una sola delle seguenti espressioni. Quale?

A $2 + 6\sqrt{3}$

B $14\sqrt{3} - 3\sqrt{12}$

C $\sqrt{3} + 7\sqrt[4]{3}$

D $\sqrt{27} - 11\sqrt{3}$

E $\sqrt{18} - 10\sqrt{3}$

301 TEST Dati i tre radicali $\sqrt{x^5}$, $-6\sqrt{x^3}$ e $9\sqrt{x}$, con $x > 0$, una sola delle seguenti affermazioni è *vera*. Quale?

A La loro somma vale $\sqrt{x^5 - 36x^3 + 81x}$.

B I radicali non sono simili poiché hanno i coefficienti diversi.

C I radicali sono simili perché sono irriducibili.

D La loro somma vale $\sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}$.

E Tutti e tre possono essere trasformati in radicali simili e la loro somma vale: $(x-3)^2\sqrt{x}$.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

302 Calcoliamo le seguenti somme algebriche di radicali:

a) $5\sqrt{18} - 7\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{98}$; b) $3\sqrt{a} - 2\sqrt{b} + 2\sqrt{a} + \frac{1}{2}\sqrt{b}$ $(a \geq 0; b \geq 0)$;

c) $3\sqrt{a^3 - 2a^2} - \sqrt{a^3 - 6a^2 + 12a - 8}$.

a) $5\sqrt{18}-7\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{98}=$

Scomponiamo in fattori i radicandi e portiamo fuori dal segno di radice:

$=5\sqrt{2\cdot 3^2}-7\sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{3\cdot 5^2}-\sqrt{2\cdot 7^2}=$

$=\underline{15\sqrt{2}}-\underline{14\sqrt{3}}+\underline{5\sqrt{3}}-\underline{7\sqrt{2}}=8\sqrt{2}-9\sqrt{3}.$

b) Segniamo i radicali simili:

$\underline{3\sqrt{a}}-\underline{2\sqrt{b}}+\underline{2\sqrt{a}}+\underline{\frac{1}{2}\sqrt{b}}=$

Raccogliamo i radicali facendo precedere ogni parentesi dal segno +:

$=(3+2)\cdot\sqrt{a}+\left(-2+\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{b}=$

Calcoliamo la somma:

$=5\sqrt{a}+\left(-\frac{3}{2}\right)\sqrt{b}=5\sqrt{a}-\frac{3}{2}\sqrt{b}.$

c) Scomponiamo in fattori entrambi i radicandi:

$3\sqrt{a^2(a-2)}-\sqrt{(a-2)^3}=$

C.E.: $a\geq 2$ per entrambi i radicali.
Portiamo fuori i fattori possibili:

$=3a\sqrt{a-2}-(a-2)\sqrt{a-2}=$

Sommiamo i radicali, visto che sono simili:

$=[3a-(a-2)]\sqrt{a-2}=$

$=(3a-a+2)\sqrt{a-2}=$

$=(2a+2)\sqrt{a-2}.$

Calcola le seguenti somme algebriche di radicali. Supponi positivi i radicandi letterali.

303 $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-7\sqrt{2};\quad 2\sqrt{3}-\sqrt{3}.$ $[\sqrt{2};\sqrt{3}]$

304 $6\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{3};\quad 11\sqrt{5}+6\sqrt{2}-(8\sqrt{5}+3\sqrt{2}).$ $[7\sqrt[3]{3};3(\sqrt{5}+\sqrt{2})]$

305 $5\sqrt{3}+3\sqrt{7}-[2\sqrt{3}-(4\sqrt{7}-3\sqrt{3})];\quad 3\sqrt{48}+2\sqrt{32}+\sqrt{98}-(4\sqrt{27}+\sqrt{450}).$ $[7\sqrt{7};0]$

306 $2\sqrt[3]{54}-\sqrt[4]{243}+3\sqrt[4]{48}-\sqrt[3]{250};\quad 2\sqrt{\frac{27}{8}}+5\sqrt{\frac{3}{50}}+7\sqrt{\frac{27}{98}}-5\sqrt{\frac{147}{50}}.$ $[\sqrt[3]{2}+3\sqrt[4]{3};0]$

307 $\sqrt{75}+3\sqrt{18}-2\sqrt{12}-2\sqrt{50};\quad 3\sqrt{128}-2\sqrt{72}-(2\sqrt{50}+\sqrt{8}).$ $[\sqrt{3}-\sqrt{2};0]$

308 $\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt{a};\quad \sqrt{b}-\sqrt{b};\quad \sqrt{a}-2\sqrt{a}.$ $[3\sqrt{a};0;-\sqrt{a}]$

309 $\sqrt{a^3}-3\sqrt{a};\quad \sqrt{x-1}+3\sqrt{x-1}-2\sqrt{x-1}.$ $[(a-3)\cdot\sqrt{a};2\sqrt{x-1}]$

310 $\sqrt{a^5}-3a^2\sqrt{a}+2a^2\sqrt{a};\quad \frac{5}{4}\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}+\frac{3}{4}\sqrt{b}-\frac{2}{8}\sqrt{a}.$ $[0;\sqrt{a}+\frac{1}{4}\sqrt{b}]$

311 $2\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sqrt{x}+\sqrt{y}-\frac{7}{3}\sqrt{x}$ $[-\sqrt{x}+\sqrt{y}]$

312 $-\frac{1}{3}\sqrt{a}+2\sqrt{a}-3\sqrt{b}-\frac{1}{2}\sqrt{a}+2\sqrt{b}$ $\left[\frac{7}{6}\sqrt{a}-\sqrt{b}\right]$

313 $-5\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{a}+\frac{1}{3}\sqrt{ab}+\frac{2}{3}\sqrt{ab}$ $\left[-\frac{11}{2}\sqrt{a}+\sqrt{ab}\right]$

314 $2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}+\frac{3}{4}\sqrt{b}-\frac{1}{4}\sqrt{a}$ $\left[\frac{7}{4}\sqrt{a}+\frac{1}{4}\sqrt{b}\right]$

315 $(2x+3y)\sqrt{xy}-\sqrt{4x^3y}-\sqrt{9xy^3}$ $[0]$

316 $\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{a^4-a^3b}-\sqrt[3]{ab^3-b^4}$ $[(1+a-b)\sqrt[3]{a-b}]$

317 $\sqrt{32a+48b}+\sqrt{18a+27b}-\sqrt{50a+75b}$ $[2\sqrt{2a+3b}]$

318 $\sqrt[4]{b^4+ab^4}+\sqrt[3]{a^3+a^3b}-\sqrt[8]{1+a^2+2a}-a\sqrt[3]{1+b}$ $(b\geq 0)$ $[(b-1)\sqrt[4]{a+1}]$

319 $\sqrt{a^4b}+2\sqrt{b}-\sqrt{a^2b-2ab+b}-\sqrt{a^4b+2a^2b+b}$ $(a\geq 1)$ $[(2-a)\sqrt{b}]$

320 $\sqrt{x^3y}-\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}-\sqrt{x^3y-2x^2y+xy}$ $(x\geq 1)$ $[(3-xy)\sqrt{xy}]$

321 $\sqrt{1-3a+3a^2-a^3}+\sqrt[4]{1-2a+a^2}-\sqrt{a^2-a^3}-\sqrt{1-a}$ $(a\leq 1)$ $[(1-a-|a|)\sqrt{1-a}]$

322 $\sqrt{2x^2+4xy+2y^2}+\sqrt{3y^2+3x^2+6xy}-\sqrt{10xy+5x^2+5y^2}$ $[|x+y|(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})]$

323 $\sqrt[4]{\dfrac{a^2b^2-a^2b}{b-a}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{a^2b^2-a^3b}{b-1}}+\sqrt{\dfrac{b}{a^2}}-\sqrt{a^2b}$ $(b>a;\ b>1)$ $\left[\dfrac{\sqrt{b}}{|a|}\right]$

Utilizzando anche le regole dei prodotti notevoli semplifica le seguenti espressioni.

324 $3(2+\sqrt{6})$; $3\sqrt{5}(1+\sqrt{5})$. $[6+3\sqrt{6};\ 3\sqrt{5}+15]$

325 $5\sqrt{2}(3+\sqrt{2})$; $2\sqrt{3}(3+2\sqrt{5})$. $[15\sqrt{2}+10;\ 6\sqrt{3}+4\sqrt{15}]$

326 $(2\sqrt{3}-2)(\sqrt{2}+1)$; $(3\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-1)$. $[2\sqrt{6}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2;\ 3\sqrt{10}-\sqrt{6}-3\sqrt{5}+\sqrt{3}]$

327 $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)$; $(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1)$. $[x+5\sqrt{x}+6;\ x-3\sqrt{x}-4]$

328 $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-5)$; $(\sqrt{x}-a)(\sqrt{x}+2a)$. $[x-4\sqrt{x}-5;\ x+a\sqrt{x}-2a^2]$

329 $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$; $(1-\sqrt{3})^2$. $[-1;\ 4-2\sqrt{3}]$

330 $(1+\sqrt{2})^2$; $(\sqrt{a}+2)^2$. $[3+2\sqrt{2};\ a+4\sqrt{a}+4]$

331 $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$; $(1+\sqrt{2})^3$. $[1;\ 7+5\sqrt{2}]$

332 $(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)$; $(1-\sqrt{3})^3$. $[a-4;\ 10-6\sqrt{3}]$

333 $(\sqrt{3a}+\sqrt{c})^2$; $(3+\sqrt{3})^2$. $[3a+2\sqrt{3ac}+c;\ 12+6\sqrt{3}]$

334 $(2\sqrt{x}-\sqrt{y})(2\sqrt{x}+\sqrt{y})$; $(\sqrt{3x}-\sqrt{2a})(\sqrt{3x}+\sqrt{2a})$. $[4x-y;\ 3x-2a]$

335 $(3\sqrt{x}-y)(3\sqrt{x}+y)$; $(2x-\sqrt{3b})(2x+\sqrt{3b})$. $[9x-y^2;\ 4x^2-3b]$

336 $(\sqrt{2a}-\sqrt{3b})(\sqrt{2a}+\sqrt{3b})$; $(\sqrt{5x}-2\sqrt{y})(\sqrt{5x}+2\sqrt{y})$. $[2a-3b;\ 5x^2-4y]$

337 $(2-\sqrt{3})^2$; $(3a-\sqrt{2x})^2$. $[7-4\sqrt{3};\ 9a^2+2x-6a\sqrt{2x}]$

338 $(a+\sqrt{2a})^3$; $(2x+\sqrt{3})^2$. $[a^3+6a^2+\sqrt{2a}(3a^2+2a);\ 4x^2+3+4\sqrt{3}x]$

339 $-2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{6}+1)^2$ $[7+2\sqrt{2}]$

340 $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-2)^2+\sqrt{48}$ $[6]$

341 $[(3\sqrt{2}-2)(3\sqrt{2}+2)-(\sqrt{2})^3-14]:\sqrt{32}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

342 $(\sqrt{5}-2)^2(\sqrt{5}+2)^2-[(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})]^2+\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ $[\sqrt{2}]$

RIEPILOGO I RADICALI E LE OPERAZIONI

TEST

343 Sono dati i radicali $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[4]{3}$. Fra le seguenti relazioni, una sola è *corretta*. Quale?

A $\sqrt{2}<\sqrt[3]{5}<\sqrt[4]{3}$
B $\sqrt{2}<\sqrt[4]{3}<\sqrt[3]{5}$
C $\sqrt[4]{3}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{5}$
D $\sqrt[3]{5}<\sqrt[4]{3}<\sqrt{2}$
E $\sqrt[4]{3}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{2}$

344 Se $a>3$, il radicale $(3-a)\sqrt{2}$ è equivalente a:

A $\sqrt{6-2a}$.
B $\sqrt{2a^2+18}$.
C $\sqrt{2a^2-12a+18}$.
D $-\sqrt{6-2a}$.
E $-\sqrt{2a^2-12a+18}$.

345 Il prodotto del radicale $\sqrt[6]{ab}$ per il radicale x è $\sqrt[12]{a^{11}b^5}$. Qual è il radicale x?

A $\sqrt{a^{10}b^4}$
B $\sqrt[6]{a^{10}b^4}$
C $\sqrt[4]{a^3b}$
D a^9b^3
E $\sqrt[9]{a^3b}$

346 Dato il radicale $\sqrt[2n+5]{3a^{4n-2}}$ $(a\geq 0)$, è possibile trasportare il fattore a fuori dal segno di radice:

A per ogni $n\in\mathbb{N}$.
B per $n\geq 4$.
C per $n\geq 3$.
D solo per $n=2$.
E per $n\geq 2$.

347 Per quali valori di $n\in\mathbb{N}$ i radicali $3\cdot\sqrt[3n-7]{2^{n+2}}$ e $7\cdot\sqrt[n-1]{8^{2n-5}}$ possono essere trasformati in radicali simili? In tal caso, quanto vale la loro somma? $[n=3;\ 26\sqrt{2}]$

348 È data l'espressione $\sqrt[11-3n]{x^{4n-2}y^{n+3}}$. Per quali valori di $n\in\mathbb{N}$:

a) l'espressione è un radicale?
b) il radicale ha lo stesso indice di $7\cdot\sqrt[5]{x^2y^3}$?
c) il radicale è irriducibile?

[a) $n=0, 1, 2, 3$; b) $n=2$; c) $n=0, 2$]

VERO O FALSO?

349 a) La radice terza del triplo di a è uguale ad a. V F
b) Il doppio della radice quadrata di a è uguale alla radice quadrata del quadruplo di a. V F
c) La radice terza del cubo di a è uguale ad a. V F
d) La radice quarta di 16 è 2. V F
e) La radice cubica di 27 è 9. V F

350 a) La radice cubica di 2 è la metà della radice cubica di 8. V F
b) Dati due numeri reali positivi, il quoziente delle loro radici quadrate è uguale alla radice quadrata del loro quoziente. V F
c) Dati due numeri reali positivi, la somma delle loro radici cubiche è uguale alla radice cubica della loro somma. V F
d) Dato un numero reale positivo, la radice quadrata della sua radice cubica è uguale alla radice cubica della sua radice quadrata. V F
e) La somma di due radicali letterali simili è un radicale che ha la stessa parte letterale dei radicali dati. V F

Semplifica le seguenti espressioni, supponendo verificate le C.E. (Negli esercizi in cui non sono poste condizioni sulle espressioni letterali, supponi che i fattori che compongono i radicandi siano non negativi.)

351 $\sqrt{b^3} - \sqrt{b}$ $\quad [(b-1)\cdot\sqrt{b}]$

352 $\sqrt[5]{a^2b} : \sqrt[10]{2a} \cdot \sqrt[2]{3ab}$ $\quad \left[\sqrt[10]{\dfrac{243a^8b^7}{2}}\right]$

353 $\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3} + 2\sqrt{a} + \sqrt{b}$ $\quad [(a+2)\sqrt{a} + (1-b)\sqrt{b}]$

354 $3\sqrt{x} - \dfrac{2}{3}\sqrt{x} + \sqrt{y} - \dfrac{7}{3}\sqrt{x}$ $\quad [\sqrt{y}]$

355 $\dfrac{1}{2}\sqrt{a} - \dfrac{4}{5}\sqrt{b} - \sqrt{a} + 0{,}4\cdot\sqrt{b}$ $\quad \left[-\dfrac{1}{2}\sqrt{a} - \dfrac{2}{5}\sqrt{b}\right]$

356 $\sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32} + 5\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250}$ $\quad [\sqrt[4]{2} + 12\sqrt[3]{2}]$

357 $(4+\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2}-1)^2 - 3(4\sqrt{2}+2)$ $\quad [3]$

358 $[(2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-1) - (\sqrt{5}-1)^2 - (\sqrt{5}-4)^2] : 2$ $\quad [5\sqrt{5}-4]$

359 $6\sqrt{ab} - 3\sqrt{a} - 7\sqrt{ab} + 2\sqrt{a} + 9\sqrt{b} + \sqrt{a}$ $\quad [-\sqrt{ab} + 9\sqrt{b}]$

360 $\sqrt{\dfrac{3ab^2}{c}} : \sqrt{\dfrac{9b^2}{c}} \cdot \sqrt{\dfrac{a}{3}}$ $\quad \left[\dfrac{a}{3}\right]$

361 $\sqrt[3]{\dfrac{2x^2}{3y}} : \sqrt{\dfrac{x}{y}} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{xy^2}{3}}$ $\quad \left[\sqrt[6]{\dfrac{4x^2y^3}{27}}\right]$

362 $\sqrt{2(a-b)} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{\dfrac{1}{4a-4b}}}$ $\quad [\sqrt[6]{2(a-b)^2}]$

363 $\sqrt{\sqrt{(2x+3)^3}} : \sqrt[6]{2x+3}$ $\quad [\sqrt[12]{(2x+3)^7}]$

364 $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y^3} - \dfrac{1}{y^2}} + \sqrt[3]{xy^3 - y^4} - \sqrt[3]{8x-8y}$ $\quad \left[\dfrac{(1-y)^2}{y}\sqrt[3]{x-y}\right]$

365 $\sqrt[4]{\dfrac{a^2-b^2}{x^4-y^4}} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{(a-b)^3}{(x-y)^3}} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{x+y}{a-2b}}$ $\quad \left[\left(\dfrac{a-b}{x-y}\right)\sqrt[4]{\dfrac{a+b}{(x^2+y^2)(a-2b)}}\right]$

366 $\sqrt{\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}} \cdot \sqrt{\dfrac{a^2-b(a-b)}{a+b}} : \sqrt{\dfrac{a^3+b^3}{a^2-b^2}}$ $\quad \left[\dfrac{1}{a-b}\sqrt{a+b}\right]$

367 $\sqrt{\dfrac{a^3+2a^2+a}{a^2+6a+9}} + \sqrt{\dfrac{a^3+4a^2+4a}{a^2+6a+9}} - \sqrt{\dfrac{a^3}{a^2+6a+9}}$ $\quad [\sqrt{a}]$

368 $\sqrt{\dfrac{a^2-1}{a^2+a-2}} : \sqrt[3]{\dfrac{a^2-4}{a+1}} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{a+2}{a^2+2a+1}}$ $\quad \left[\sqrt[6]{\dfrac{(a+1)^3}{(a+2)^4(a-2)^2}}\right]$

BRAVI SI DIVENTA ► E36

369 $\left(\sqrt{\frac{x^2+3x-4}{x^2(x-1)}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^4}{(x+4)^2}}+8\sqrt[3]{x}:\sqrt[6]{x+4}\right)\cdot\sqrt[6]{x+4}$

370 $\sqrt{\frac{12x+12}{x^2-1}}-\sqrt{\frac{6x^2}{(2x-2)(x^2-2xy+y^2)}}-\sqrt{\frac{3x^2-6xy+3y^2}{x^3-x^2}}$ $\left[-\frac{y^2}{x(x-y)}\sqrt{\frac{3}{x-1}}\right]$

371 $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{x^2-2x+1}}+\sqrt[6]{\frac{64a^6}{x^2-2x+1}}+\sqrt[6]{\frac{a^{12}}{x^2-2x+1}}\right)\sqrt[3]{x-1}$ $[(1+a)^2]$

372 $\sqrt[6]{\frac{x^2}{x+y}}\cdot\sqrt[6]{\frac{(x+y)^3}{y^2}}:\left(\sqrt[3]{\frac{x(x+y)}{y}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{y(x+y)}}\right):\sqrt[4]{\frac{1}{x}}$ $[\sqrt[4]{y(x+y)}]$

373 $\frac{y\sqrt{x}}{x+y}\sqrt{\frac{x^2+xy}{y^2}}-\sqrt{\frac{x}{x+y}}\cdot\frac{\sqrt{x^2y+y^3+2xy^2}}{\sqrt{xy}}$ $\left[-\frac{y}{\sqrt{x+y}}\right]$

374 $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}:\sqrt{\frac{a-b}{a+b}-1}\cdot\sqrt[6]{\frac{(b-a)^2}{2a}}$ $\left[\sqrt[6]{\frac{4a^2}{b-a}}\right]$

375 $\sqrt{\frac{1}{5a}+\frac{1}{25a^2}}+\sqrt{\frac{25a^2-1}{20a^3-4a^2}}-\sqrt{\frac{5a+1}{100a^2}}\quad(a>0)$ $\left[\frac{3}{5a}\sqrt{5a+1}\right]$

376 $\sqrt[4]{\frac{(a^4+b^4)^3}{2^4a^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^4+b^4}{a^3+a^2b}}\cdot\sqrt[12]{\frac{a^3+a^2b}{a^4+b^4}}\quad(a>0)$ $\left[\frac{a^4+b^4}{2a}\sqrt[4]{\frac{1}{a+b}}\right]$

377 $\left(\sqrt[5]{\sqrt{\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{y}{x}}:\sqrt{\sqrt[5]{\frac{x^5}{y^5}}\cdot\frac{y}{x}}\right)^2\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{x}{y}\right)^3}\quad(x>0;\,y>0)$ $[1]$

378 $\sqrt{4x-12y}+\sqrt{\frac{x^3-3x^2y}{y^2}}+\sqrt{\frac{xy^2-3y^3}{x^2}}\quad(0<3y\le x)$ $\left[\frac{(x+y)^2}{xy}\sqrt{x-3y}\right]$

379 $\sqrt[15]{\frac{4}{x^3}}\cdot\sqrt[10]{\frac{3^2(x+1)}{2^4}}\cdot\sqrt[5]{\frac{2x}{12(x+1)}}\quad(x>0)$ $\left[\sqrt[30]{\frac{1}{2^{14}(x+1)^3}}\right]$

380 $\sqrt[3]{\frac{a^3-1}{a^2-1}}:\sqrt[3]{\frac{a^2+a+1}{a^2+a}}\cdot\sqrt[6]{\frac{a^2}{a+1}}\quad(a>0)$ $\left[\sqrt[6]{\frac{a^4}{a+1}}\right]$

381 $\sqrt[6]{\frac{a^2-4b^2}{a^3-8b^3}}\cdot\sqrt[6]{\frac{a^2+2ab+4b^2}{a^2+4ab+4b^2}}$ $\left[\sqrt[6]{\frac{1}{a+2b}}\right]$

382 $\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x-1}}:\sqrt[3]{\frac{x^2-4x+4}{x+1}}:\sqrt[3]{\frac{x^2-x-2}{2x}}\quad(x>2)$ $\left[\sqrt[6]{\frac{4x^2}{(x-2)^3}}\right]$

383 $\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{4x^2}}+\sqrt{\frac{4x^3-4y^3}{x-y}}+\sqrt{4x^4+4x^3y+4x^2y^2}$ $\left[\frac{(1+2x)^2}{2x}\sqrt{x^2+xy+y^2}\right]$

384 $\sqrt{\frac{2x}{3(x^4-1)}}\cdot\sqrt[3]{3\left(\frac{1}{x^2}+x^2+2\right)}\cdot\sqrt[6]{\frac{3(x^2-1)}{64x}}\quad(x>1)$ $\left[\sqrt[6]{\frac{1+x^2}{8x^2(x-1)^2(x+1)^2}}\right]$

385 $\sqrt{\frac{8a^3}{a^3-b^3}}:\sqrt{\frac{4a^2b}{a^2+ab+b^2}}:\sqrt{\frac{2a}{ab-b^2}}:\sqrt[3]{\frac{a^3}{a-b}}\quad(0<b<a)$ $\left[\sqrt[3]{\frac{a-b}{a^3}}\right]$

386 $\sqrt{\frac{25x^3+25x^2}{y^3-y^2}}+\sqrt{\frac{x^3+x^2}{y^3-y^2}}-x\sqrt{\frac{4x+4}{y^3-y^2}}\quad(x\ge 0;\,y>1)$ $\left[\frac{4x}{y}\sqrt{\frac{x+1}{y-1}}\right]$

387 $\sqrt{a+\frac{1}{a}}\cdot\sqrt{a-\frac{1}{a}}:\sqrt{a^2-\frac{1}{a^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2a-1}{3b}}\quad(a>1;\,b>0)$ $\left[\sqrt[3]{\frac{2a-1}{3b}}\right]$

388 $\sqrt[3]{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1} : \left(\frac{1}{ab}\sqrt[3]{a^3-b^3}\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{a-b}{a}}$ $(0 < b \leq a)$ $[\sqrt[3]{ab^2}]$

389 $\sqrt[3]{\frac{a^2-6a+9}{a^2+3a}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3a+a^2}{a^2-5a+6}} : \sqrt[3]{\frac{9-a^2}{a-2}}$ $(a < -3)$ $\left[\sqrt[3]{\frac{-1}{a+3}}\right]$

390 $\sqrt[3]{\frac{ab+b^2}{ab-a^2}\sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2-ab}{ab+a^2}\sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}}}$ $\left[\frac{\sqrt[3]{b(a+b)^2}}{a}\right]$

Scomposizioni in fattori con i radicali

ESERCIZIO GUIDA

391 Scomponiamo in fattori le seguenti somme algebriche:

a) $3\sqrt{2}+2$; b) $x-2$ $(x \geq 0)$; c) $a+2\sqrt{ab}+b$ $(a, b \geq 0)$; d) $6+2\sqrt{5}$.

a) $3\sqrt{2}+2 = 3\cdot\underline{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\cdot\underline{\sqrt{2}} = \underline{\sqrt{2}}\cdot(3+\sqrt{2})$.

In generale, possiamo scrivere: $n = \sqrt{n}\cdot\sqrt{n}$.

b) Possiamo scrivere $x = (\sqrt{x})^2$ e $2 = (\sqrt{2})^2$, pertanto:

$x-2 = (\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2 =$

Applichiamo la regola della differenza di due quadrati:

$= (\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})$.

c) $a+2\sqrt{ab}+b =$

Poiché $a = (\sqrt{a})^2$ e $b = (\sqrt{b})^2$, riconosciamo il quadrato di un binomio:

$= (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

d) $6+2\sqrt{5} =$

$2\sqrt{5}$ è il doppio prodotto di 1 per $\sqrt{5}$. Riconosciamo anche in questo caso il quadrato di un binomio, infatti:

$= 1+5+2\sqrt{5} = (1+\sqrt{5})^2$.

Scomponi in fattori le seguenti somme algebriche, supponendo verificate le C.E.

392 $\sqrt{6}+\sqrt{2}$; $\sqrt{5}+\sqrt{10}$.

393 $\sqrt{14}+2$; $4\sqrt{2}+2\sqrt{5}$.

394 x^2-5; x^4-4.

395 $x^2+2\sqrt{2}x+2$; $a^2-4\sqrt{3}a+12$.

396 $\sqrt{5}+5$; $2-\sqrt{2}$.

397 $\sqrt{3}-2\sqrt{6}$; $3\sqrt{6}+\sqrt{15}$.

398 $a\sqrt{a}-2b\sqrt{a}+a$; $x-\sqrt{x}$.

399 $a^2-2\sqrt{3}a+3$; $2a^2+2\sqrt{2}a+1$.

400 $3+2\sqrt{2}$; $3-2\sqrt{2}$.

401 $7+4\sqrt{3}$; $11-6\sqrt{2}$.

402 $7-2\sqrt{10}$; $19-8\sqrt{3}$.

403 $\sqrt{3}ab^2-3\sqrt{3}a$; x^3-3x.

404 $1+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6}$ $[(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{3})]$

405 $2+2\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}$ $[(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})]$

406 $\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{2}-\sqrt{10}$ $[(1-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{2})]$

407 $a^2\sqrt{2}-a\sqrt{2}+2a-2$ $[\sqrt{2}(a+\sqrt{2})(a-1)]$

408 $3a+3-a\sqrt{3}-\sqrt{3}$ $[\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-1)(a+1)]$

409 $2+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{6}$ $[(1-\sqrt{3})(2+\sqrt{2})]$

410 $a^3-a^2\sqrt{3}+3a^2-3a\sqrt{3}$ $[a(a+3)(a-\sqrt{3})]$

411 $4-\sqrt{8}+\sqrt{300}-\sqrt{150}$ $[(2+5\sqrt{3})(2-\sqrt{2})]$

La semplificazione di frazioni algebriche

Dopo aver scomposto opportunamente in fattori, semplifica le seguenti frazioni.

412 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{\sqrt{5}+5}{1+\sqrt{5}}$; $\dfrac{3\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. $[\sqrt{5}+1;\ \sqrt{5};\ 3\sqrt{2}+1]$

413 $\dfrac{7+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$; $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$; $\dfrac{a^2-3}{2a-\sqrt{12}}$. $\left[\sqrt{7}+1;\ \dfrac{3}{2}(\sqrt{3}-1);\ \dfrac{1}{2}(a+\sqrt{3})\right]$

414 $\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{7+\sqrt{7}}$; $\dfrac{\sqrt{10}+3\sqrt{2}}{\sqrt{45}+9}$; $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. $\left[\dfrac{\sqrt{14}}{7};\ \dfrac{\sqrt{2}}{3};\ \sqrt{2}+1\right]$

415 $\dfrac{\sqrt{a}-a}{\sqrt{a}}$; $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $\dfrac{x^2-a}{2x+\sqrt{4a}}$. $\left[1-\sqrt{a};\ \sqrt{a}-\sqrt{b};\ \dfrac{x-\sqrt{a}}{2}\right]$

416 $\dfrac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$; $\dfrac{\sqrt{24}-\sqrt{20}}{3\sqrt{6}-\sqrt{45}}$; $\dfrac{15+2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$. $\left[-1;\ \dfrac{2}{3};\ \dfrac{5\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+1}\right]$

417 $\dfrac{\sqrt{6}a^3b}{3ab^2-\sqrt{6}a^2b}$; $\dfrac{a^2-2\sqrt{2}ab+2b^2}{2a^2-4b^2}$. $\left[\dfrac{\sqrt{2}a^2}{\sqrt{3}b-\sqrt{2}a};\ \dfrac{a-\sqrt{2}b}{2(a+\sqrt{2}b)}\right]$

418 $\dfrac{x^2-3}{x^2+x\sqrt{3}}$; $\dfrac{20x^2-50y^2}{2\sqrt{15}x-5\sqrt{6}y}$. $\left[\dfrac{x-\sqrt{3}}{x};\ \dfrac{\sqrt{10}(\sqrt{2}x+\sqrt{5}y)}{\sqrt{3}}\right]$

419 $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}$; $\dfrac{a^2b^3-3a^4b}{2a^2b^2-\sqrt{12}a^3b}$. $\left[\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}};\ \dfrac{b+\sqrt{3}a}{2}\right]$

420 $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; $\dfrac{2a^2+2a\sqrt{3}-12}{a^2-12}$. $\left[\sqrt{6};\ \dfrac{2(a-\sqrt{3})}{a-2\sqrt{3}}\right]$

421 $\dfrac{x^2+\sqrt{5}x-10}{x^3-5x}\cdot\dfrac{\sqrt{2}x^2+\sqrt{10}x}{x+2\sqrt{5}}$ $[\sqrt{2}]$

422 $\dfrac{x^3+4\sqrt{2}x^2-10x}{\sqrt{5}x-\sqrt{10}}\cdot\dfrac{5}{x}$ $[\sqrt{5}(x+5\sqrt{2})]$

423 $\dfrac{\sqrt{10}}{2x^2-\sqrt{2}x}:\dfrac{3\sqrt{5}}{2x^3-x}$ $\left[\dfrac{\sqrt{2}x+1}{3}\right]$

424 $\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{8}x^2-\sqrt{2}}{6+2\sqrt{6}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{2}x+1}$ $[\sqrt{2}x-1]$

425 $\left(\dfrac{x^2+3\sqrt{5}x+10}{14}\cdot\dfrac{7x}{x^2+\sqrt{5}x}\right)\cdot\dfrac{2}{x^2-20}$ $\left[\dfrac{1}{x-2\sqrt{5}}\right]$

426 $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}x}{x^3-2x}\cdot\dfrac{x^2+2\sqrt{2}x-6}{\sqrt{6}}$ $\left[\dfrac{x+3\sqrt{2}}{x}\right]$

8. La razionalizzazione del denominatore di una frazione

Teoria a pag. 792

RIFLETTI SULLA TEORIA

427 **VERO O FALSO?**

a) La razionalizzazione del denominatore di una frazione è basata sulla proprietà invariantiva dei radicali. V F

b) Le espressioni $\dfrac{4}{\sqrt{5}+3}$ e $3-\sqrt{5}$ sono equivalenti. V F

c) Per razionalizzare il denominatore della frazione $\dfrac{5}{\sqrt{12}}$ è sufficiente moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{3}$. V F

428 I radicali $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ e $\sqrt{45}$ possono essere trasformati in radicali simili? Motiva la risposta.

429 Per razionalizzare il denominatore della frazione $\dfrac{7}{\sqrt{x+1}}$, è corretto moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{x-1}$? Perché?

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

430 Razionalizziamo i denominatori delle seguenti frazioni:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^5}}$; c) $\dfrac{a+b}{\sqrt{a+b}}$ (con $a>-b$); d) $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ (con $a>0, b>0$).

a) Moltiplichiamo numeratore e denominatore per la radice presente nel denominatore:

$$\frac{3}{\sqrt{3}}=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}}=\sqrt{3}.$$

b) $$\frac{1}{\sqrt[3]{2^5}}=\frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2\cdot 2}=\frac{\sqrt[3]{2}}{4}.$$

Infatti:

$$\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^2\cdot 2}=\sqrt[3]{2^{2+1}}=\sqrt[3]{2^3}=2.$$

c) Il denominatore è un unico radicale che ha per radicando un binomio; moltiplichiamo per tale radicale:

$$\frac{a+b}{\sqrt{a+b}} = \frac{(a+b)\cdot\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+b}} = \frac{\cancel{(a+b)}\sqrt{a+b}}{\cancel{a+b}} = \sqrt{a+b}.$$

d) Quando al denominatore compare la somma di due termini di cui almeno uno è una radice quadrata, moltiplichiamo il numeratore e il denominatore per la differenza dei due termini.
Se compare una differenza, moltiplichiamo per la somma, in modo da poter utilizzare in entrambi i casi il prodotto notevole $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

$$\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}.$$

Razionalizza i denominatori delle seguenti frazioni.

431 $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{3}{\sqrt{27}}$; $\frac{2}{\sqrt{3}}$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}\sqrt{3}\right]$

432 $\frac{20}{\sqrt{10}}$; $\frac{5}{\sqrt{2}}$; $\frac{6}{\sqrt{8}}$. $\left[2\sqrt{10}; \frac{5}{2}\sqrt{2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$

433 $\frac{1}{4\sqrt{2}}$; $\frac{3+\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}$; $\frac{7}{2\sqrt{7}}$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{8}; \frac{\sqrt{3}+1}{5}; \frac{\sqrt{7}}{2}\right]$

434 $\frac{4}{\sqrt[3]{4}}$; $\frac{2}{\sqrt[3]{6}}$; $\frac{12}{\sqrt[5]{8}}$. $\left[2\sqrt[3]{2}; \frac{\sqrt[3]{36}}{3}; 6\sqrt[5]{4}\right]$

435 $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$; $\frac{3}{\sqrt[5]{3}}$; $\frac{2x}{\sqrt[4]{x}}$. $[2\sqrt[3]{4}; \sqrt[5]{81}; 2\sqrt[4]{x^3}]$

436 $\frac{1}{\sqrt{x}}$; $\frac{2x}{\sqrt{3x}}$; $\frac{2x}{\sqrt{xy}}$. $\left[\frac{\sqrt{x}}{x}; \frac{2}{3}\sqrt{3x}; \frac{2}{y}\sqrt{xy}\right]$

437 $\frac{ab^2}{\sqrt{abx}}$; $\frac{2x^2y}{\sqrt{x^3y}}$; $\frac{2a^3}{\sqrt{18ab}}$. $\left[\frac{b}{x}\sqrt{abx}; 2\sqrt{xy}; \frac{a^2}{3b}\sqrt{2ab}\right]$

438 $\frac{x}{3\sqrt{2x}}$; $\frac{1}{2a\sqrt{3a}}$; $\frac{\sqrt{2a+2}}{\sqrt{2ax}}$. $\left[\frac{\sqrt{2x}}{6}; \frac{\sqrt{3a}}{6a^2}; \frac{\sqrt{ax(a+1)}}{ax}\right]$

439 $\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$; $\frac{a^2-4}{\sqrt{a+2}}$; $\frac{3y+9}{\sqrt{y+3}}$. $[\sqrt{x-1}; (a-2)\sqrt{a+2}; 3\sqrt{y+3}]$

440 $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$; $\frac{a^2+2ab+b^2}{\sqrt{a+b}}$; $\frac{x-y}{\sqrt{x-y}}$. $\left[\frac{\sqrt{a+b}}{a+b}; (a+b)\sqrt{a+b}; \sqrt{x-y}\right]$

441 $\frac{xy}{\sqrt[3]{xy^2}}$; $\frac{2ab}{\sqrt[5]{a^4b^2}}$; $\frac{4x^2y}{\sqrt[7]{8x^5y^2}}$. $[\sqrt[3]{x^2y}; 2\sqrt[5]{ab^3}; 2x\sqrt[7]{16x^2y^5}]$

442 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$; $\frac{3}{\sqrt{7}+1}$; $\frac{5}{\sqrt{6}-1}$. $\left[\sqrt{2}+1; \frac{\sqrt{7}-1}{2}; \sqrt{6}+1\right]$

443 $\frac{4}{\sqrt{5}+1}$; $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; $\frac{10}{\sqrt{3}-1}$. $[\sqrt{5}-1; \sqrt{5}+\sqrt{2}; 5(\sqrt{3}+1)]$

444 $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; $\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$; $\frac{x^2-4y}{x-2\sqrt{y}}$. $\left[\sqrt{x}-\sqrt{y}; \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}; x+2\sqrt{y}\right]$

445 $\dfrac{a-4b^2}{\sqrt{a}-2b}$; $\quad \dfrac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{ab}}$; $\quad \dfrac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$. $\quad \left[\sqrt{a}+2b;\ \dfrac{\sqrt{a}+b}{a-b^2};\ \dfrac{(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2}{a-4b}\right]$

446 $\dfrac{5}{7-2\sqrt{6}}$; $\quad \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; $\quad \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$. $\quad \left[\dfrac{7+2\sqrt{6}}{5};\ 5-2\sqrt{6};\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

447 $\dfrac{5}{4-2\sqrt{3}}$; $\quad \dfrac{\sqrt{10}-2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; $\quad \dfrac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+2}$. $\quad \left[\dfrac{5}{2}(2+\sqrt{3});\ \dfrac{7\sqrt{2}-4\sqrt{5}}{3};\ \dfrac{11-4\sqrt{7}}{3}\right]$

448 $\dfrac{17\sqrt{15}}{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; $\quad \dfrac{15}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$; $\quad \dfrac{22\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+4}$. $\quad \left[10\sqrt{3}-3\sqrt{5};\ \dfrac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{2};\ 18-8\sqrt{3}\right]$

449 $\dfrac{-1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$; $\quad \dfrac{3-a}{2-\sqrt{a+1}}$; $\quad \dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x+1}}$. $\quad \left[\sqrt{1+\sqrt{2}}(1-\sqrt{2});\ 2+\sqrt{a+1};\ (x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2}\right]$

450 $\dfrac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{2\sqrt{xy}}$; $\quad \dfrac{x+y}{\sqrt{9x+9y}}$; $\quad \dfrac{x^2+4x+4}{\sqrt{x+2}}$. $\quad \left[\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2};\ \dfrac{\sqrt{x+y}}{3};\ (x+2)\sqrt{x+2}\right]$

451 $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{ab}}$; $\quad \dfrac{a^2+b^2+2ab}{\sqrt{2a+2b}}$; $\quad \dfrac{x^2-xy}{\sqrt{4xy}}$. $\quad \left[\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{a^2b};\ \dfrac{(a+b)\sqrt{2a+2b}}{2};\ \dfrac{(x-y)\sqrt{xy}}{2y}\right]$

452 $\dfrac{4y}{\sqrt{x}+\sqrt{x-y}}$; $\quad \dfrac{5x}{\sqrt{3x+y}-\sqrt{y-2x}}$. $\quad \left[4(\sqrt{x}-\sqrt{x-y});\ \sqrt{3x+y}+\sqrt{y-2x}\right]$

453 $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$; $\quad \dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-y}+\sqrt{25-y}}$. $\quad \left[\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y};\ \dfrac{\sqrt{x^2-y}-\sqrt{25-y}}{x+5}\right]$

454 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$; $\quad \dfrac{6}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}$. $\quad [\sqrt[3]{4}+1+\sqrt[3]{2};\ 2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-2]$

455 $\dfrac{3}{2+\sqrt[3]{4}}$; $\quad \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$. $\quad \left[\dfrac{2+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}{2};\ \sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}\right]$

456 $\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$; $\quad \dfrac{2}{\sqrt{2}+1-\sqrt{5}}$. $\quad [(\sqrt{3}+1-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-1);\ (\sqrt{5}+\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)]$

457 **ASSOCIA** a ogni frazione l'espressione equivalente ottenuta dopo aver razionalizzato.

1. $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ **2.** $\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}$ $\quad$ **3.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ $\quad$ **4.** $\dfrac{7}{2\sqrt{2}+1}$

A. $2\sqrt{2}+2$ $\quad$ **B.** $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ **C.** $2\sqrt{2}-1$ $\quad$ **D.** $\sqrt{2}-1$

9. I radicali quadratici doppi

Teoria a pag. 793

RIFLETTI SULLA TEORIA

458 Sono dati i seguenti radicali:

a) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; b) $\sqrt{4+\sqrt[3]{7}}$; c) $\sqrt{10+\sqrt{29}}$.

Soltanto a) può essere trasformato nella somma di due radicali semplici. Perché?

459 Indica quali dei seguenti sono radicali doppi.

$\sqrt{3}+\sqrt{5}$; $\quad \sqrt{\sqrt{a}+3}$; $\quad \sqrt{2\sqrt{5}}$.

$\sqrt{\sqrt{7}+4}$; $\quad \sqrt{6-\sqrt{11}}$;

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

460 Trasformiamo i seguenti radicali doppi nella somma o differenza di due radicali semplici:

a) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$; b) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}$ $(x \geq y \geq 0)$.

a) Poiché $4^2-7=9$ è un quadrato perfetto, utilizziamo la formula:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}} + \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{9}}{2}} + \sqrt{\frac{4-\sqrt{9}}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

La formula è utile solo nel caso in cui a^2-b sia un quadrato perfetto.

b) $$\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-(x^2-y^2)}}{2}} - \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-x^2+y^2}}{2}} = \sqrt{\frac{x+y}{2}} - \sqrt{\frac{x-y}{2}}.$$

Trasforma i seguenti radicali doppi nella somma di due radicali semplici.

461 $\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $\sqrt{3+\sqrt{5}}$. $\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}\right]$

462 $\sqrt{7-\sqrt{13}}$; $\sqrt{4-\sqrt{7}}$. $\left[\frac{\sqrt{26}-\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}\right]$

463 $\sqrt{8-\sqrt{48}}$; $\sqrt{3-\sqrt{8}}$; $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$. $[\sqrt{6}-\sqrt{2}; \sqrt{2}-1; \sqrt{5}+1]$

464 $\sqrt{4+\sqrt{12}}$; $\sqrt{11-\sqrt{40}}$; $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$. $[\sqrt{3}+1; \sqrt{10}-1; \sqrt{6}+1]$

465 $\sqrt{5-\sqrt{24}}$; $\sqrt{8-\sqrt{60}}$; $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$. $[\sqrt{3}-\sqrt{2}; \sqrt{5}-\sqrt{3}; \sqrt{7}-1]$

466 $\sqrt{6-\sqrt{32}}$; $\sqrt{6-\sqrt{11}}$; $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$. $\left[2-\sqrt{2}; \sqrt{\frac{11}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{3}+1\right]$

467 $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$; $\sqrt{6-3\sqrt{3}}$. $\left[\sqrt{7}-\sqrt{2}; \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right]$

468 $\sqrt{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}}$; $\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{17}}$. $\left[\frac{3-\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{2}(\sqrt{17}-1)}{4}\right]$

469 $\sqrt{3a-\sqrt{6a-1}}$; $\sqrt{x+2-\sqrt{8x}}$. $\left[\frac{\sqrt{6a-1}-1}{\sqrt{2}}; \sqrt{x}-\sqrt{2}\right]$

470 $\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-1}}$; $\sqrt{a-\sqrt{6a-9}}$. $\left[\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}; \frac{\sqrt{4a-6}-\sqrt{6}}{2}\right]$

RIEPILOGO LE ESPRESSIONI IRRAZIONALI

TEST

471 Quale dei seguenti valori è il risultato dell'espressione: $5\sqrt[3]{32}-\left(\frac{2\sqrt[9]{84}}{\sqrt[9]{21}}\right)^3$?

A $9\sqrt[3]{4}$
B $2\sqrt[3]{4}$
C $10\sqrt[3]{4}-128$
D $10\sqrt[3]{4}-8\sqrt[27]{4}$
E Nessuno dei precedenti.

472 Sulle tre espressioni

1. $(5-3\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})$,

2. $(\sqrt{6}-1)^2$,

3. $(\sqrt[3]{\sqrt[4]{117\,649}})^2$,

puoi affermare che:

A tutte e tre hanno lo stesso risultato.
B solo 1 e 2 hanno lo stesso risultato.
C solo 1 e 3 hanno lo stesso risultato.
D solo 2 e 3 hanno lo stesso risultato.
E i loro risultati sono tutti diversi.

473 Per razionalizzare il denominatore della frazione $\frac{x}{\sqrt{4x}-6}$ è sufficiente moltiplicare numeratore e denominatore per:

A $\sqrt{4x}-6$.
B $2x+6$.
C $\sqrt{4x}+6$.
D $2\sqrt{x}+3$.
E $\sqrt{x}+3$.

474 Quale delle seguenti espressioni è lo sviluppo di un quadrato di binomio?

A $x+3-6\sqrt{x}$
B $a^2+b+a\sqrt{4b}$
C $4+\sqrt{3}$
D $a-\sqrt{2ab}+b$
E $x+y^2+2x\sqrt{y}$

475 Il radicale $\sqrt{a+3-2\sqrt{3a}}$, con $a\geq 3$, è equivalente a:

A $a+\sqrt{3}$.
B $\sqrt{3}-\sqrt{a}$.
C $\sqrt{3-11a}$.
D $\sqrt{a}-\sqrt{3}$.
E $\sqrt{3-\sqrt{3a}}$.

Semplifica le seguenti espressioni. Supponi positivi i fattori letterali che compongono i radicandi.

476 $\frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

477 $\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{7-4\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}+2}$ $[-2\sqrt{5}]$

478 $\frac{7+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$ $[2(1+\sqrt{6})]$

479 $[(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2}):\sqrt{6}](5-2\sqrt{6})-1$ $[0]$

480 $(\sqrt{6}-1)\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{11}}$ $[0]$

481 $\sqrt{\left(\sqrt{5}-2+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}+2}\right):\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{7}-1}}-\sqrt{11-2\sqrt{30}}$ $[\sqrt{5}]$

482 $(\sqrt{5}x-3y+\sqrt{2})(3y-\sqrt{2}+\sqrt{5}x)$ $[5x^2-9y^2-2+6\sqrt{2}y]$

483 $(2+\sqrt{3}x+y)(2+\sqrt{3}x-y)$ $[4+4\sqrt{3}x+3x^2-y^2]$

484 $(\sqrt{5}+\sqrt{10}y)(5-5\sqrt{2}y+10y^2)$ $\qquad [5\sqrt{5}(1+2\sqrt{2}y^3)]$

485 $(\sqrt{2}x-\sqrt{8}y+\sqrt{6})(2\sqrt{2}y+\sqrt{6}+\sqrt{2}x)$ $\qquad [2x^2+6+4\sqrt{3}x-8y^2]$

486 $(\sqrt{2}x-\sqrt{6})(2x^2+2\sqrt{3}x+6)$ $\qquad [2\sqrt{2}x^3-6\sqrt{6}]$

487 $\dfrac{x^2+2\sqrt{3}\,x+3}{\sqrt{2}\,x^2-3\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}x-\sqrt{6}}{3}$ $\qquad \left[\dfrac{x+\sqrt{3}}{3}\right]$

488 $\dfrac{8+2\sqrt{7}}{\sqrt{7}\,x}\cdot\dfrac{7x^2}{\sqrt{7}+1}$ $\qquad [\sqrt{7}\,x(\sqrt{7}+1)]$

489 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{x^2-2}:\dfrac{2}{\sqrt{2}x-2}\right)\cdot\dfrac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ $\qquad \left[\dfrac{1}{2}\right]$

490 $\left(\sqrt{\dfrac{2a}{a+b}-1}-\sqrt{\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}}\right)\cdot\dfrac{2a}{a+b}$ $\qquad [0]$

BRAVI SI DIVENTA ► E37

491 $\left(\sqrt{\dfrac{a}{a+2}}\cdot\sqrt{\dfrac{a^2+4a+4}{a^3}}+2\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{a}\right)\cdot\sqrt{\dfrac{a^2-1}{9}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{a}{a^2-2a+1}}$

492 $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{x}\right):\dfrac{5}{4x}\cdot\dfrac{2}{x^2+2\sqrt{3}}$ $\qquad \left[\dfrac{4}{5}\right]$

493 $\dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{y}}-\dfrac{2x+y}{2x-y}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{2x}-\sqrt{y}}$ $\qquad [0]$

494 $\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}-2\right):(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ $\qquad \left[\dfrac{\sqrt{xy}}{xy}\right]$

495 $\sqrt{\dfrac{2x-1}{36x^2}}+\sqrt{\dfrac{4x^2-1}{18x^3+9x^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{4x^2}}$ $\qquad \left[\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}\right]$

496 $\sqrt{a^6+a^4}+\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^6+3a^4+3a^2+1}$ $\qquad [0]$

497 $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)[(b\sqrt{a}+a\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})-2ab]$ $\qquad [a^2-b^2]$

498 $1+\sqrt[4]{a^2b^2}\cdot\sqrt[3]{ab}:\sqrt[6]{ab}\cdot\sqrt[3]{a^4b^4}-2a^2b^2$ $\qquad [1-a^2b^2]$

499 $\left(\dfrac{x+\sqrt{3}}{3}+\dfrac{x+\sqrt{3}}{x}\right)\cdot\dfrac{3}{x^2-3}:\dfrac{x^2+3x}{x-\sqrt{3}}$ $\qquad \left[\dfrac{1}{x^2}\right]$

500 $\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-4\sqrt{x+1}+\sqrt{16x^3+16x^2}\right):\dfrac{(1-2x)^2}{x}$ $\qquad [\sqrt{x+1}]$

501 $\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}\right):\left(\dfrac{\sqrt{2}}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{6}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{6}}\right)$ $\qquad \left[\dfrac{\sqrt{2}\,x}{x+2}\right]$

502 $\dfrac{1}{xy}\cdot\left(\sqrt{xy}-\dfrac{xy}{x-\sqrt{xy}}\right)\cdot\left(\sqrt{xy}+\dfrac{xy}{x+\sqrt{xy}}\right)$ $\qquad \left[\dfrac{x-4y}{x-y}\right]$

503 $\left(\dfrac{2x^2-2\sqrt{7}x-28}{\sqrt{20}}\cdot\dfrac{x^2}{x-2\sqrt{7}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2x^2+2\sqrt{7}\,x}$ $\qquad \left[\dfrac{x}{2}\right]$

504 $\dfrac{(\sqrt[6]{ab}+1)(\sqrt[6]{ab}-1)(\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{ab}+1)}{ab-1}$ [1]

505 $\left(\dfrac{7+2\sqrt{6}}{x-y}\cdot\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{6}}-\dfrac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\cdot\dfrac{x-y}{2}$ $[\sqrt{x}-\sqrt{y}]$

506 $\left(\sqrt{\dfrac{x^3-2\sqrt{2}}{x^3-2x}\cdot\dfrac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+2}}+\sqrt{\dfrac{2}{x}}\right)\cdot\sqrt{\dfrac{x}{2}}$ [2]

507 $\sqrt{2x+y+2\sqrt{2xy}}\cdot\sqrt{2x+y-2\sqrt{2xy}}-(\sqrt{2x}-\sqrt{y})^2$ $[2(\sqrt{2xy}-y)]$

508 $\left(\sqrt[6]{\dfrac{x^{12}}{x^2+2x+1}}-\sqrt[6]{\dfrac{64x^6}{x^2+2x+1}}+\sqrt[6]{\dfrac{1}{x^2+2x+1}}\right)\cdot\sqrt[3]{x+1}$ $[(x-1)^2]$

509 $\left(\dfrac{\sqrt{3}\,x^2-5\sqrt{3}+x^2-5}{\sqrt{3}+3}\cdot\dfrac{x^2+\sqrt{5}\,x+5}{x^3-5\sqrt{5}}\right):\dfrac{x^2+\sqrt{5}x}{3}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ [1]

510 $\left(\dfrac{\sqrt{a}\,b-a\sqrt{b}}{ab}+\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{ab}}{2}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$ $\left[\dfrac{b+2}{\sqrt{b}}\right]$

511 $\left(\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}+2\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^4b^2+a^2b^4}\right)\cdot\dfrac{ab}{(ab+1)^2}$ $[\sqrt{a^2+b^2}]$

512 $ab\cdot\left(\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}-2\right):\left(\dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}-1\right)$ $[-(a+b)\sqrt{ab}]$

513 $\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{7\sqrt{xy}}{4x-y}$ $\left[\dfrac{\sqrt{xy}}{4x-y}\right]$

514 $\dfrac{2}{a^2}:\left(\dfrac{\sqrt{a^2+1}-1}{\sqrt{a^2+1}+1}-\dfrac{\sqrt{a^2+1}+1}{\sqrt{a^2+1}-1}\right)$ $\left[-\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2(a^2+1)}\right]$

515 $\dfrac{\sqrt{x+y+1}}{\sqrt{x+y+1}-\sqrt{x+y-1}}-\dfrac{\sqrt{x+y-1}}{\sqrt{x+y+1}+\sqrt{x+y-1}}$ $[x+y]$

516 $\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+2}$ $\left[\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right]$

517 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-\dfrac{4}{\sqrt{a}}}+\dfrac{2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{64a}}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{a}-2}$ [0]

518 $\left(\sqrt[4]{x+y}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x-y}}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x+y}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x-y}}\right):\dfrac{\sqrt{x^3-xy^2}-\sqrt{x}}{x}$ $\left[\dfrac{\sqrt{x^2-xy}}{x-y}\right]$

519 $\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{18}{25}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}$ $\left[1-\dfrac{13}{5}\sqrt{2}\right]$

520 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{y}}+\dfrac{8y}{\sqrt{x}}\right):\dfrac{x-2\sqrt{xy}+4y}{\sqrt{y}}-1$ $\left[\dfrac{2\sqrt{xy}}{x}\right]$

521 $\left[\dfrac{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y})-(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y})}{2}\cdot y\right]:\sqrt[3]{x^2y^2}$ $\left[\dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{x}\right]$

522 $\dfrac{1}{x^2+y^2+2xy}\cdot\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\left(x-\dfrac{y^2}{x}\right)$ $\left[\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x}\right]$

523 $\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{x}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ $\left[\dfrac{-2x-2\sqrt{x}}{x-1}\right]$

524 $\left[\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{y}}\right)\cdot\dfrac{x^3-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right]:(x^2+x\sqrt{y}+y)$ $\left[\dfrac{2x(x-\sqrt{y})}{x^2-y}\right]$

525 $\left[(\sqrt[4]{32x^5y}-\sqrt[4]{2xy^5})\cdot\dfrac{\sqrt[4]{8xy^3}}{2x-y}\right]^3$ $[8xy^3\sqrt{x}]$

526 $\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}-\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}+b-a}$ $[1]$

527 $\left(\dfrac{\sqrt{2x+3y}-\sqrt{2x-3y}}{\sqrt{2x+3y}+\sqrt{2x-3y}}+\dfrac{\sqrt{2x+3y}+\sqrt{2x-3y}}{\sqrt{2x+3y}-\sqrt{2x-3y}}\right):\dfrac{8}{y}$ $\left[\dfrac{x}{6}\right]$

528 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{12+8\sqrt{2}}}-\dfrac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ $[3\sqrt{2}-2]$

529 $\dfrac{4x}{y^2}:\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\right)$ $\left[\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{x^2-y^2}\right]$

530 $\left(\sqrt[5]{x^8}-\dfrac{y^2}{\sqrt[5]{x^2}}\right):\left(\sqrt[6]{x^5}+\dfrac{y}{\sqrt[6]{x}}\right)\cdot\sqrt[30]{x^7}$ $[x-y]$

531 $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^2b^3}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt[5]{a^6b}-\sqrt[5]{ab^6}}{a-b}+\dfrac{\sqrt[5]{a^6b}+\sqrt[5]{ab^6}}{a+b}\right)$ $\left[\dfrac{2\sqrt[5]{a^4b^3}}{ab}\right]$

532 $\sqrt{a-\sqrt{4a-4}}+\dfrac{a-2}{\sqrt{a-1}+1}$ $[2(\sqrt{a-1}-1)]$

533 $\dfrac{a}{\sqrt{a-2}+\sqrt{2}}-\sqrt{a-2\sqrt{2a-4}}$ $\left[4\cdot\dfrac{\sqrt{a-2}-\sqrt{2}}{a-4}\right]$

534 $\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}\cdot\left[\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{y^3}}+\sqrt{\dfrac{y^3}{x^3}}\right):\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}-y\right)\right]$ $\left[\dfrac{\sqrt{xy(x+y)}}{xy^2}\right]$

535 $\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}-\dfrac{x}{\sqrt{x}+x}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)\cdot\dfrac{x-1}{x}$ $\left[\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{x}\right]$

536 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}-\dfrac{b}{\sqrt{a}}\right):\dfrac{\sqrt{a^2b}-\sqrt{ab^2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}(a+\sqrt{ab}+b)}$ $\left[\dfrac{\sqrt{ab}}{a^2\cdot b}\right]$

537 $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}:\sqrt[3]{a+b\sqrt{\dfrac{b}{a}}}$ $\left[\dfrac{\sqrt[3]{(a-b)^2}}{a-b}\right]$

538 $\sqrt[6]{\dfrac{a+b}{a^3(a-b)}}\cdot\left[\sqrt[3]{\dfrac{(a-b)^2}{a^2+ab}}:\sqrt{\dfrac{a-b}{a^2}}\right]:\sqrt[6]{\dfrac{a^2}{a+b}}$ $\left[\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{a}\right]$

539 $\sqrt[n]{\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}} \cdot \left(\sqrt[n]{\dfrac{a+b}{b}\sqrt{\dfrac{a-b}{ab}}} : \sqrt[n]{\dfrac{a-b}{a^2}\sqrt{\dfrac{a+b}{ab}}}\right)$ $\left[\sqrt[n]{\dfrac{a^2}{b}}\right]$

540 $\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}-1} - \sqrt{\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}+1}\right) : \left(\sqrt{\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}-1} + \sqrt{\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}+1}\right)$ $\left[-\dfrac{\sqrt{ab}}{a}\right]$

541 $\dfrac{(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\sqrt{4+\sqrt{7}}}$ $\left[\dfrac{\sqrt{7}-1}{3}\right]$

542 $(\sqrt{6}+\sqrt{3})\cdot\sqrt{9-7\left(\sqrt{\dfrac{25}{2}}-\sqrt{\dfrac{9}{2}}-\sqrt{\dfrac{2}{49}}\right)} : \sqrt{3}$ $[\sqrt{3}]$

543 $\left(\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+\sqrt{9-x^2}}}+\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{2x}}\right)\cdot\sqrt{2x}$ $[6-\sqrt{9-x^2}]$

544 $x\left(\dfrac{\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2-9}} : \dfrac{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{x+3}}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ $\left[\dfrac{x\sqrt{x-3}}{3(x-3)}\right]$

545 $\dfrac{\sqrt{\sqrt{a\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}}-\sqrt{b\sqrt[3]{\dfrac{1}{b}}}}\cdot\sqrt{\sqrt{a\sqrt[3]{a}}+\sqrt{ab\sqrt[3]{\dfrac{1}{ab}}}+\sqrt{b\sqrt[3]{b}}}}{\sqrt{a+b}}$ $\left[\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}\right]$

546 $\sqrt{20\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{\dfrac{9}{8}}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{\dfrac{64}{3}}\right)}-\sqrt{19}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{19}{2}}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$ $[9]$

547 $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{6+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-1}}+\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$ $[\sqrt[3]{4}]$

10. Le equazioni, i sistemi e le disequazioni con coefficienti irrazionali

→ Teoria a pag. 794

RIFLETTI SULLA TEORIA

548 **VERO O FALSO?**

a) La soluzione dell'equazione $ax = b$, con a, b numeri irrazionali, è sempre un numero irrazionale. V F

b) Le condizioni di esistenza dell'equazione $\dfrac{1}{x^2-2\sqrt{3}x+3}=\dfrac{3}{2x^2-6}$ sono $x \neq \pm\sqrt{3}$. V F

c) La soluzione della disequazione $(1-\sqrt{2})x > 0$ è $x < 0$. V F

d) Nell'equazione $x-\sqrt{3}x = 1+\sqrt{3}$, per ricavare x occorre dividere entrambi i membri per $-\sqrt{3}$. V F

e) Le due disequazioni $(2-\sqrt{5})x > 3+\sqrt{7}$ e $x > \dfrac{3+\sqrt{7}}{2-\sqrt{5}}$ sono equivalenti. V F

549 TEST Fra le seguenti disequazioni, qual è equivalente a $x - \sqrt{3}x < 1 + \sqrt{3}$?

A $x < -1$.

B $x > \dfrac{1 + \sqrt{3}}{-\sqrt{3}}$.

C $x > -2 - \sqrt{3}$.

D $x < \dfrac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$.

E $x < \dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$.

ESERCIZI

Le equazioni

ESERCIZIO GUIDA

550 Risolviamo la seguente equazione:

$$\frac{2x - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{x - 3}{3} = \frac{4x}{3\sqrt{2}}.$$

Scriviamo i due membri come frazione con lo stesso denominatore $3\sqrt{2}$ ed eliminiamo i denominatori:

$$3(2x - 3\sqrt{2}) - \sqrt{2}(x - 3) = 4x.$$

Eseguiamo i calcoli:

$$6x - 9\sqrt{2} - x\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4x$$
$$6x - x\sqrt{2} - 4x = 6\sqrt{2}$$
$$2x - x\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

Raccogliamo x:

$$x(2 - \sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$$

$$\frac{x(2 - \sqrt{2})}{2 - \sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \rightarrow x = \frac{6\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}.$$

Razionalizziamo il denominatore:

$$x = \frac{6\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2} + 12}{4 - 2} =$$

$$= \frac{12(\sqrt{2} + 1)}{2} = 6 \cdot (\sqrt{2} + 1).$$

La soluzione è:

$$x = 6 \cdot (\sqrt{2} + 1).$$

Risolvi le seguenti equazioni.

551 $\sqrt{3}x = \sqrt{12}$ $[2]$

552 $\sqrt{5}x = 2 - x$ $\left[\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\right]$

553 $\sqrt{8}x - \sqrt{2}x = 4$ $[2\sqrt{2}]$

554 $2x - 1 = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ $[3\sqrt{3} + 5]$

555 $\sqrt{2}x - 4 + \sqrt{18}x = \sqrt{2}$ $\left[\dfrac{1}{4}(1 + 2\sqrt{2})\right]$

556 $6 - x = \dfrac{2x}{\sqrt{2}}$ $[6(\sqrt{2} - 1)]$

557 $\sqrt{3}(2 - x) = 2(\sqrt{3} - x)$ $[0]$

558 $x - \sqrt{2} = \dfrac{1 + x}{\sqrt{2}}$ $[3(\sqrt{2} + 1)]$

559 $\dfrac{x - 1}{3\sqrt{2}} + \dfrac{x + 3}{6\sqrt{2}} = \dfrac{x}{2}$ $\left[\dfrac{\sqrt{2} + 1}{3}\right]$

560 $3x\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ $\left[\dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{9}\right]$

561 $(\sqrt{3}x - 1)^2 + (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 4x^2$ $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$

562 $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{6}) + 3\sqrt{2} = x(x + \sqrt{6}) - 3$ $[\sqrt{3}]$

563 $\sqrt{2}(x+\sqrt{2})+\sqrt{5}(x-\sqrt{5})=0$ $[\sqrt{5}-\sqrt{2}]$

564 $(\sqrt{7}x-2)^2+\sqrt{7}x(3-\sqrt{7}x)=x-3$ $\left[\frac{7}{6}(\sqrt{7}-1)\right]$

565 $5\sqrt{2}(x+\sqrt{10})-10\sqrt{5}(1+\sqrt{5}x)-5(\sqrt{2}-10)=0$ $[1]$

566 $5+\frac{x}{\sqrt{5}}=\frac{x}{5}-\frac{3}{2\sqrt{5}}$ $\left[-\frac{1}{8}(53\sqrt{5}+65)\right]$

567 $\sqrt{2}[3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})+5\sqrt{2}(x-\sqrt{2})]=3(1-\sqrt{2}x)(1-x)-(3-7x)$ $\left[\frac{16(\sqrt{2}-1)}{3}\right]$

568 $\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}-1)x}{\sqrt{3}+1}+\sqrt{3}-1$ $\left[\frac{-2\sqrt{3}-1}{3}\right]$

569 $\frac{x+2}{1-\sqrt{2}}=\frac{x-\sqrt{2}}{4}$ $\left[\frac{3\sqrt{2}-16}{7}\right]$

570 $\frac{2x+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{x}{2}-4$ $[9\sqrt{5}(2+\sqrt{5})]$

571 $\frac{5x-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{x-3}{2}-\frac{11x-1}{3\sqrt{2}}=0$ $\left[\frac{9\sqrt{2}+1}{23}\right]$

572 $\frac{3x+\sqrt{2}}{x^3+2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}-x}{x^2-\sqrt{2}x+2}=\frac{1}{x+\sqrt{2}}$ $[2-\sqrt{2}]$

573 $\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}-\frac{2+2\sqrt{2}x}{3\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{6}}{2}=\frac{2x+\sqrt{6}}{6}$ $\left[\frac{2-\sqrt{6}}{3}\right]$

574 $\frac{(\sqrt{3}+8)x}{x^2-\sqrt{3}x-6}-\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{3}x}{2x+2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}x}{x-2\sqrt{3}}$ $[18(2-\sqrt{3})]$

575 $\frac{2+3\sqrt{5}}{5x+2\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}-3}{5x-4}-\frac{\sqrt{5}-1}{2+\sqrt{5}x}=0$ $\left[\frac{50-2\sqrt{5}}{75}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni fratte.

576 $\frac{2}{x}+\frac{1}{x-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{x}$ $\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$

577 $\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}-\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}=\frac{4}{x^2-2}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

578 $\frac{2}{\sqrt{2}x-1}+\frac{\sqrt{2}+1}{2x^2-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}x+1}$ $[6+4\sqrt{2}]$

579 $\frac{\sqrt{3}x+1}{x^2+\sqrt{3}x}-\frac{3-\sqrt{3}x}{x^2-\sqrt{3}x}=\frac{2\sqrt{3}}{x}$ [impossibile]

580 $\frac{\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}}-\frac{x+2\sqrt{3}}{x^2-3}+\frac{2}{3}=1-\frac{x}{3(x-\sqrt{3})}$ $\left[\frac{12+7\sqrt{3}}{2}\right]$

581 $\frac{1}{3-3\sqrt{3}x}+\frac{2\sqrt{3}}{1-3x^2}=\frac{\sqrt{3}}{3+3\sqrt{3}x}$ $\left[\frac{6-7\sqrt{3}}{3}\right]$

582 $\frac{x+3\sqrt{2}}{x^2+2\sqrt{2}x+2}+\frac{\sqrt{2}x}{2(x+\sqrt{2})}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ [impossibile]

583 $\frac{4x}{\sqrt{3}x-3}+\frac{2\sqrt{3}x-4}{x^2-2\sqrt{3}x+3}=\frac{4}{\sqrt{3}}$ $[2(\sqrt{3}-1)]$

I sistemi lineari

ESERCIZIO GUIDA

584 Risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases}\sqrt{2}x - 3y = \sqrt{6}\\ 2x - \sqrt{2}y = \sqrt{3}\end{cases}$$

Utilizziamo il metodo di riduzione:

Eliminiamo y: $\cdot\sqrt{2}$, $\cdot 3$

$$\begin{cases}\sqrt{2}x - 3y = \sqrt{6}\\ 2x - \sqrt{2}y = \sqrt{3}\end{cases}$$

Eliminiamo x: $\cdot 2$, $\cdot\sqrt{2}$

$$\ominus\begin{cases}2x - 3\sqrt{2}y = 2\sqrt{3}\\ 6x - 3\sqrt{2}y = 3\sqrt{3}\end{cases}$$

$$-4x = -\sqrt{3}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\ominus\begin{cases}2\sqrt{2}x - 6y = 2\sqrt{6}\\ 2\sqrt{2}x - 2y = \sqrt{6}\end{cases}$$

$$-4y = \sqrt{6}$$

$$y = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

La soluzione del sistema è $\left(\frac{1}{4}\sqrt{3}; -\frac{1}{4}\sqrt{6}\right)$.

Risolvi i seguenti sistemi.

585 $\begin{cases}x - y = \sqrt{3} - 1\\ x + y = \sqrt{3}\end{cases}$ $\left[\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\right]$

586 $\begin{cases}x + 2y = 2\sqrt{2}\\ x + y = -\sqrt{2}\end{cases}$ $[(-4\sqrt{2}; 3\sqrt{2})]$

587 $\begin{cases}y = 1 - \sqrt{3}x\\ x = -\sqrt{3}y - \sqrt{3}\end{cases}$ $[(\sqrt{3}; -2)]$

588 $\begin{cases}\sqrt{2}x - y = 3\sqrt{10}\\ 3x + \sqrt{2}y = 4\sqrt{5}\end{cases}$ $[(2\sqrt{5}; -\sqrt{10})]$

589 $\begin{cases}\dfrac{x + y}{x - \sqrt{5}} = 1\\ \dfrac{x + \sqrt{5}}{y} = -3\end{cases}$ $[(2\sqrt{5}; -\sqrt{5})]$

590 $\begin{cases}\sqrt{2}x + y = 0\\ -x + \sqrt{2}y = \sqrt{2}\end{cases}$ $\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{2}{3}\right)\right]$

591 $\begin{cases}2x - \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x - y - 4\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3}(x - \sqrt{3}y) = -3y\end{cases}$ $[(3; 2\sqrt{3})]$

592 $\begin{cases}4\sqrt{3}x + 7y = 5\\ 3\sqrt{3}(x - 2y) = 6\sqrt{3} - 1 - 10y\end{cases}$ $[(\sqrt{3}; -1)]$

593 $\begin{cases}\sqrt{3}(y + \sqrt{2}x) - \sqrt{6}x = 6\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}y = \dfrac{1}{6}[4\sqrt{3}y - (6\sqrt{3} - 2\sqrt{2}x)]\end{cases}$ $[(-3\sqrt{6}; 2\sqrt{3})]$

594 $\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{3}x + 5y}{3} - \dfrac{y + \sqrt{3}}{2} = \dfrac{5 - 3\sqrt{3}}{6}\\ \dfrac{\sqrt{3}(x - 2y)}{2} - \dfrac{2\sqrt{3} - 5y}{3} = \dfrac{2\sqrt{3} - 1}{6}\end{cases}$ $[(\sqrt{3}; -1)]$

595 $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}x = \dfrac{1}{3}(10\sqrt{3} - 5\sqrt{2}x) + 2\sqrt{2}y \end{cases}$ $[(\sqrt{6}; 3)]$

Le disequazioni

ESERCIZIO GUIDA

596 Risolviamo la disequazione:

$x(x+1) + 1 + \sqrt{2} > x^2 + \sqrt{2}(x+1).$

Svolgiamo i calcoli e utilizziamo la regola di cancellazione:

$\cancel{x^2} + x + 1 + \cancel{\sqrt{2}} > \cancel{x^2} + \sqrt{2}x + \cancel{\sqrt{2}}.$

Trasportiamo al primo membro i termini con x e al secondo membro i termini noti:

$x - \sqrt{2}x > -1.$

Raccogliamo x al primo membro:

$x(1 - \sqrt{2}) > -1.$

Dividiamo entrambi i membri per $1 - \sqrt{2}$ e, poiché $1 - \sqrt{2} < 0$, invertiamo il verso:

$x < -\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}.$

Possiamo scrivere $x < \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}.$

Razionalizziamo il denominatore:

$x < \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \rightarrow x < \sqrt{2} + 1.$

Risolvi le seguenti disequazioni.

597 $\sqrt{2}x - 3 > x - (\sqrt{2} + 1)$ $[x > \sqrt{2}]$

598 $-\sqrt{3}x + x < \sqrt{3} + 1$ $[x > -2 - \sqrt{3}]$

599 $\sqrt{5}x - \sqrt{5} > 5 + 2\sqrt{5}(x-1)$ $[x < 1 - \sqrt{5}]$

600 $3x - \sqrt{3} + 1 > (3\sqrt{3} + 2)x$ $\left[x < \dfrac{\sqrt{3}-4}{13}\right]$

601 $\dfrac{5\sqrt{2}x}{2\sqrt{3}} - \dfrac{3}{\sqrt{6}} < \dfrac{3\sqrt{6}x}{2}$ $\left[x > -\dfrac{3}{4}\right]$

602 $(\sqrt{3} + 3)(x - 2) < 2 + 3x$ $\left[x < \dfrac{2(4\sqrt{3}+3)}{3}\right]$

603 $\dfrac{x+2}{1-\sqrt{3}} > \dfrac{x}{1+\sqrt{3}}$ $\left[x < -\dfrac{\sqrt{3}+3}{3}\right]$

604 $(3 - \sqrt{5})(x + 2) > \sqrt{5}x$ $\left[x < \dfrac{2(3\sqrt{5}-1)}{11}\right]$

605 $2(2x - \sqrt{6}) \geq (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 - \sqrt{2}(x - 2) + 3$ $[x \geq 2]$

606 $\dfrac{\sqrt{3}x + 1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2} \leq \dfrac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{3} - 1}$ $\left[x \geq \dfrac{\sqrt{3}-1}{3}\right]$

607 $2bx + \sqrt{5} < \sqrt{5}bx - 3 \quad (b < 0)$ $\left[x < \dfrac{5\sqrt{5}+11}{b}\right]$

608 $\dfrac{x}{a - \sqrt{2}} + \dfrac{1-x}{a + \sqrt{2}} > 0$ $\left[a < -\sqrt{2} \vee a > \sqrt{2}, x > \dfrac{2-\sqrt{2}a}{4}; -2 < a < \sqrt{2}, x < \dfrac{2-\sqrt{2}a}{4};\right.$ $\left. a = -\sqrt{2} \vee a = \sqrt{2}, \text{perde di significato}\right]$

609 $\dfrac{\sqrt{2}ax+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}-\dfrac{2-x}{\sqrt{2}}\le a\sqrt{2}$

$\left[a<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, x\ge\dfrac{2a\sqrt{3}}{2a+\sqrt{3}}; a=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{, nessun valore di } x; a>-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, x\le\dfrac{2a\sqrt{3}}{2a+\sqrt{3}}\right]$

610 È data la disequazione nell'incognita x:

$\dfrac{x-1}{\sqrt{a}+3}>\sqrt{a}-3.$

Per quali valori di $a\in\mathbb{R}$:

a) la disequazione ha significato?
b) l'insieme soluzione è $x>-1$?
c) l'insieme soluzione è $x>-10$?

[a) $a\ge 0$; b) $a=7$; c) $\nexists a\in\mathbb{R}$, perché…]

611 È data la disequazione nell'incognita x:

$\dfrac{x-5}{\sqrt{a^2}+2}>\sqrt{a^2}-4.$

Per quali valori di $a\in\mathbb{R}$:

a) la disequazione ha significato?
b) l'insieme soluzione è $x>0$?
c) l'insieme soluzione è $x>-4$?

[a) $\forall a\in\mathbb{R}$; b) $a=3\vee a=-3$; c) $a=1\vee a=-1$]

I radicali e il piano cartesiano

Calcola la distanza fra le seguenti coppie di punti. (Ricorda che $\overline{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$.)

612 $A(-\sqrt{2}; 2)$, $B(2\sqrt{2}; 2)$. $[3\sqrt{2}]$

613 $A(-\sqrt{8}; -5)$, $B(-\sqrt{2}; -5)$. $[\sqrt{2}]$

614 $A(0; -\sqrt{32})$, $B(0; \sqrt{2})$. $[5\sqrt{2}]$

615 $A(-1; \sqrt{5})$, $B(-1; \sqrt{20})$. $[\sqrt{5}]$

616 $A(\sqrt{8}; -\sqrt{5})$, $B(-\sqrt{2}; -\sqrt{20})$. $[\sqrt{23}]$

617 $A(6; \sqrt{7})$, $B(2; \sqrt{28})$. $[\sqrt{23}]$

618 $A(\sqrt{2}; 2\sqrt{3})$, $B(3\sqrt{2}; -4\sqrt{3})$. $[2\sqrt{29}]$

619 $A\left(-\sqrt{3}; \dfrac{1}{2}\right)$, $B\left(-\sqrt{\dfrac{1}{3}}; -\dfrac{3}{2}\right)$. $\left[\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right]$

620 $A\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}; \sqrt{\dfrac{1}{5}}\right)$, $B(-\sqrt{3}; \sqrt{5})$. $\left[8\sqrt{\dfrac{2}{15}}\right]$

Determina la distanza dei punti indicati a fianco dalle seguenti rette. $\left(\text{Ricorda che } d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\right)$

621 $r: y=3x+6$, $O(0; 0)$. $\left[\dfrac{3}{5}\sqrt{10}\right]$

622 $u: y=\dfrac{1-6x}{3}$, $V(4; -1)$. $\left[\dfrac{4}{3}\sqrt{5}\right]$

623 $t: y=\dfrac{4}{5}x+2$, $Q(4; -3)$. $[\sqrt{41}]$

624 $s: y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{16}{3}$, $P(1; -4)$. $[2\sqrt{13}]$

625 Determina la misura delle mediane del triangolo di vertici: $A(6; 5)$, $B(-3; 1)$, $C(4; 0)$.

$\left[\dfrac{\sqrt{202}}{2}; \dfrac{\sqrt{265}}{2}; \dfrac{\sqrt{61}}{2}\right]$

626 Dato il quadrilatero di vertici $A(1; -1)$, $B(6; 11)$, $C(-6; 16)$, $D(-11; 4)$, verifica che è un quadrato e calcola la misura del raggio del cerchio inscritto e del raggio del cerchio circoscritto.

$\left[\dfrac{13}{2}; \dfrac{13}{2}\sqrt{2}\right]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

627 Dato il triangolo ABC di vertici $A(4; 3)$, $B(5; 8)$, $C(8; -1)$, determina:
a) il perimetro e l'area;
b) le equazioni dei suoi lati.
[a) perimetro $= \sqrt{2}(\sqrt{13} + 3\sqrt{5} + 4)$, area $= 12$; b) $5x - y - 17 = 0$, $3x + y - 23 = 0$, $x + y - 7 = 0$]

628 Dato il triangolo ABC di vertici $A(-3; 2)$, $B(5; 2)$, $C(1; 8)$:
a) stabilisci se è isoscele;
b) determina le equazioni dei lati;
c) scrivi le equazioni delle mediane;
d) calcola le lunghezze delle mediane.
[a) sì; b) $y = 2$, $3x + 2y - 19 = 0$, $3x - 2y + 13 = 0$; c) $7 + x - 2y = 0$, $x = 1$, $9 - x - 2y = 0$; d) $6, 3\sqrt{5}$]

629 Dato il triangolo ABC di vertici $A(1; -1)$, $B(7; 0)$, $C(3; -9)$, determina:
a) il perimetro e l'area;
b) le equazioni delle sue mediane;
c) le coordinate del baricentro.
[a) perimetro $= \sqrt{37} + \sqrt{97} + \sqrt{68}$, area $= 25$; b) $17x - 2y - 69 = 0$, $7x + 8y + 1 = 0$, $x - y - 7 = 0$; c) $\left(\frac{11}{3}; -\frac{10}{3}\right)$]

630 Dato il triangolo ABC di vertici $A(-4; 0)$, $B(0; -4)$, $C(-6; -6)$, determina:
a) il perimetro e l'area;
b) le equazioni delle altezze;
c) le coordinate dell'ortocentro.
[a) perimetro $= 4\sqrt{2}(1 + \sqrt{5})$, area $= 16$; b) $x - y = 0$, $3x + y + 12 = 0$, $x + 3y + 12 = 0$; c) $(-3; -3)$]

631 Di un parallelogramma $ABCD$ sono noti l'equazione del lato AB, $y = -3x + 6$, il vertice $C(-1; 1)$, l'ascissa -4 del vertice D e l'ascissa -6 del vertice A. Determina le coordinate mancanti dei vertici A, B, D e il perimetro del parallelogramma.
[$A(-6; 24)$; $B(-3; 15)$; $D(-4; 10)$; perimetro $= 2\sqrt{2}(3\sqrt{5} + 10)$]

632 Dato il triangolo di vertici $A(5; 8)$, $B(-7; 4)$, $C(8; -9)$, trova le coordinate del baricentro G. Considera la retta r parallela all'asse y passante per G e calcola il perimetro del triangolo OGD, essendo D il punto di intersezione di r con l'asse x.
[$G(2; 1)$; perimetro $= 3 + \sqrt{5}$]

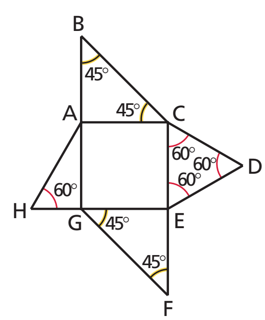
633 Verifica che il triangolo di vertici $A(-2; 0)$, $B(2; -2)$, $C(4; 7)$ è isoscele e calcola il perimetro e l'area.
[$2(\sqrt{5} + \sqrt{85})$; 20]

634 Dato il triangolo di vertici $A(-3; 1)$, $B(2; 2)$, $C(1; -6)$, calcola le misure del suo perimetro e delle tre mediane.
$\left[\sqrt{13}(\sqrt{2} + 2\sqrt{5}); \frac{\sqrt{234}}{2}, \frac{\sqrt{117}}{2}, \frac{\sqrt{117}}{2}\right]$

635 Calcola la misura del perimetro e dell'area del triangolo di vertici $A(-1; 3)$, $B\left(\frac{9}{2}; 5\right)$, $C(6; 3)$ e infine calcola la misura della mediana relativa al lato BC.
$\left[\frac{19 + \sqrt{137}}{2}; 7; \frac{\sqrt{641}}{4}\right]$

Problemi vari con i radicali

636 Calcola il perimetro e l'area della figura geometrica $ABCDEFGH$ sapendo che la diagonale del quadrato $ACEG$ misura $\sqrt{5}$.



$\left[2\sqrt{10} + 2\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{30}; 5 + \frac{25}{24}\sqrt{3}\right]$

637 Data l'espressione
$$\frac{k^2 - k - 3}{k^3 - 2k + \sqrt{2}},$$
calcolane il valore rispettivamente per:
a) $k = \sqrt{2}$;
b) $k = -\sqrt{3}$.
$\left[\text{a) } -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ b) } -(\sqrt{6} + 3)\right]$

638 Dato il trapezio scaleno $ABCD$ con gli angoli adiacenti alla base maggiore di ampiezza $\hat{A} = 30°$ e $\hat{B} = 60°$, avente la base minore DC che misura a e il lato BC che misura b, calcola il suo perimetro e la sua area in funzione di a e b.
$\left[2a + b\sqrt{3} + 3b; \frac{b}{2}(b+a)\sqrt{3}\right]$

639 Determina quale espressione divisa per $\left(\frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{y}}\right)$ dà per quoziente xy e resto $3x\sqrt{y}$. $[5y\sqrt{x}]$

640 Stabilisci per quali valori di m e n è possibile semplificare le seguenti somme tra radicali:

a) $\sqrt[\frac{m}{2}+n]{a} - \sqrt[6]{b} - 2\sqrt[8]{a} + 2\sqrt[m+\frac{n}{3}]{b}$;

b) $\sqrt[2m+n]{a} - 4\sqrt[m+\frac{1}{2}n]{b} - 3\sqrt[5]{a} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{b}$;

c) $\sqrt[m]{a} - 5\sqrt[n]{b} + 3\sqrt[3-n]{a} - 2\sqrt[3-m]{b}$.

[a) $m = 4$, $n = 6$; b) non esistono m e $n \in \mathbb{R}$; c) $(m = 1 \wedge n = 2) \vee (m = 2 \wedge n = 1)$]

641 Detti A l'insieme delle C.E. di $\sqrt{x+1-\sqrt{3}(x-1)}$ e B l'insieme delle C.E. di $\sqrt{\frac{1+x}{2x} - \frac{1}{\sqrt{3}}}$, con $x \in \mathbb{R}$, determina $A \cap B$ e $A \cup B$. Mediante quale delle due operazioni fra A e B è possibile indicare l'insieme delle C.E. di $\sqrt{x+1-\sqrt{3}(x-1)} + \sqrt{\frac{1+x}{2x} - \frac{1}{\sqrt{3}}}$?

$[A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \le 2 + \sqrt{3}\}$ e $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 2\sqrt{3} + 3\}$; $A \cap B]$

642 Un quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza; la sua diagonale AC coincide con un diametro della circonferenza ed è lunga 54 cm. Sapendo che la somma delle lunghezze di AB e AD è $56\sqrt{2}$ cm e che AB è i $\frac{5}{9}$ di AD, determina il perimetro e l'area di $ABCD$. $[2p = (56\sqrt{2} + 64)$ cm; $A = (784\sqrt{2})$ cm$^2]$

11. Le potenze con esponente razionale

Teoria a pag. 795

RIFLETTI SULLA TEORIA

643 **VERO O FALSO?**

a) La potenza di 3 con esponente $\frac{2}{5}$ è equivalente alla radice quinta di 9. V F

b) La scrittura $(2)^{-\frac{3}{4}}$ è priva di significato perché l'esponente della potenza è negativo. V F

c) L'espressione $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}} c^2$, con $a, b, c \ge 0$, equivale al radicale $\sqrt[6]{a^3 b^4 c^{12}}$. V F

644 **TEST** Le seguenti espressioni sono tra loro equivalenti, *tranne* una. Quale?

A $\sqrt[3]{16}$

B $2^{\frac{4}{3}}$

C $16^{\frac{1}{3}}$

D $2\sqrt[3]{2}$

E $2^{-\frac{3}{4}}$

ESERCIZI

Dalle potenze alle radici

ESERCIZIO GUIDA

645 Scriviamo sotto forma di radicali le seguenti potenze con esponente razionale, ricordando che $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, con $a \geq 0$:

a) $16^{\frac{5}{4}}$; b) $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$; c) $125^{-\frac{2}{3}}$; d) $(49x^8y^2)^{\frac{2}{3}}$.

a) $16^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{16^5} = \sqrt[4]{(2^4)^5} = \sqrt[\cancel{4}]{(2^5)^{\cancel{4}}} = 2^5 = 32.$

b) $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{9}{4}\right)^4} = \frac{9}{4}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.$

c) $125^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(125)^{-2}} = \sqrt[\cancel{3}]{5^{\cancel{3}\cdot(-2)}} = 5^{-2} = \frac{1}{25}.$

d) Mettiamo sotto un unico segno di radice e poi portiamo fuori i fattori possibili:

$$(49x^8y^2)^{\frac{2}{3}} = (7^2x^8y^2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(7^2x^8y^2)^2} =$$

$$= \sqrt[3]{7^4x^{16}y^4} = 7\,|x^5y|\sqrt[3]{7|\,xy|}\,.$$

Scrivi sotto forma di radicale le seguenti potenze con esponente razionale e semplifica, quando è possibile.

646 $25^{\frac{3}{2}}$; $27^{\frac{4}{3}}$; $8^{-\frac{2}{3}}$; $16^{\frac{3}{4}}$; $64^{-\frac{1}{3}}$; $4^{-\frac{3}{2}}$; $2^{\frac{5}{3}}$; $\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

647 $(\sqrt[3]{7})^{\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $125^{\frac{1}{6}}$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$; $x^{\frac{1}{2}}$; $y^{-\frac{1}{2}}$; $(2a)^{\frac{3}{4}}$; $2a^{\frac{3}{4}}$.

648 $(4a^6b^4)^{\frac{3}{2}}$; $(9a^4b^8)^{-\frac{2}{3}}$; $(8a^3b^6)^{-\frac{3}{2}}$; $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}$; $\left(\frac{27x^3}{y^6}\right)^{-\frac{3}{2}}$; $\left(\frac{8a^6}{27}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

649 $\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{6}}c^{\frac{3}{4}}\right)^2$; $\left[(2^{-2}a^{-4}b^{-6})^{-\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$; $(16x^4y^{-2})^{-\frac{3}{2}}$; $\left[\left(27a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}c\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-6}$.

Dalle radici alle potenze

ESERCIZIO GUIDA

650 Scriviamo sotto forma di potenze con esponente razionale i seguenti radicali, poi applichiamo, quando è possibile, le proprietà delle potenze:

a) $\sqrt[4]{a^2b^5}$; b) $\sqrt[3]{a^2+b^3}$; c) $\sqrt[4]{y+\sqrt[3]{y^2}}$; d) $\sqrt[5]{a^2+2a+1}$.

a) $\sqrt[4]{a^2b^5} = (a^2b^5)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{4}}b^{\frac{5}{4}} = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{4}}.$

b) $\sqrt[3]{a^2+b^3} = (a^2+b^3)^{\frac{1}{3}}$

Poiché i termini a^2 e b^3 sono sommati, non è possibile applicare alcuna proprietà delle potenze.

c) $\sqrt[4]{y+\sqrt[3]{y^2}} = (y+\sqrt[3]{y^2})^{\frac{1}{4}} = (y+y^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}$

La presenza della somma impedisce di procedere ulteriormente.

d) $\sqrt[5]{a^2+2a+1} = \sqrt[5]{(a+1)^2} = (a+1)^{\frac{2}{5}}.$

Scrivi sotto forma di potenza con esponente razionale i seguenti radicali, poi applica, quando è possibile, le proprietà delle potenze. Supponi che i fattori letterali che compongono i radicandi siano positivi.

651 $\sqrt{3}$; $\sqrt[7]{4}$; $\sqrt[5]{3^3}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$. $\left[3^{\frac{1}{2}}; 4^{\frac{1}{7}}; 3^{\frac{3}{5}}; 2^{-\frac{1}{2}}\right]$

652 $\sqrt[3]{9}$; $\sqrt[5]{2 \cdot 7^2}$; $\sqrt{2\sqrt{2}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$. $\left[3^{\frac{2}{3}}; 2^{\frac{1}{5}} \cdot 7^{\frac{2}{5}}; 2^{\frac{3}{4}}; 2^{-\frac{2}{3}}\right]$

653 $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$; $\sqrt[3]{2\sqrt{8}}$; $\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}} \cdot \sqrt[3]{4}$. $\left[3^{\frac{7}{8}}; 2^{\frac{5}{6}}; 2^{-\frac{1}{12}}\right]$

654 $\sqrt{x}$; $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[5]{y^3}$; $\sqrt{\frac{1}{a}}$. $\left[x^{\frac{1}{2}}; a^{\frac{2}{3}}; y^{\frac{3}{5}}; a^{-\frac{1}{2}}\right]$

655 $\sqrt{ab^3c^5}$; $\sqrt[3]{a^2b^4c}$; $\sqrt[4]{a^2bc^3}$; $\sqrt[5]{a^2\sqrt{b}}$. $\left[a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{5}{2}}; a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{1}{3}}; a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{3}{4}}; a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{1}{10}}\right]$

656 $\sqrt{a+2}$; $\sqrt[3]{a^3+b^3}$; $\sqrt[4]{x^2+2x+1}$. $\left[(a+2)^{\frac{1}{2}}; (a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}; (x+1)^{\frac{1}{2}}\right]$

657 $a^2b\sqrt[3]{ab^2}$; $\sqrt[3]{a(a+b)^2}$; $\sqrt[5]{x^2\sqrt{yz}}$; $\sqrt[3]{x-y}$. $\left[a^{\frac{7}{3}}b^{\frac{5}{3}}; a^{\frac{1}{3}}(a+b)^{\frac{2}{3}}; x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{10}}z^{\frac{1}{10}}; (x-y)^{\frac{1}{3}}\right]$

658 $\sqrt[3]{(x+y)\sqrt{(x+y)}}$; $\sqrt[4]{(x^2-y^2)\sqrt[3]{x^2-y^2}}$; $\sqrt{(x-y)\sqrt[3]{(x-y)^2}}$. $\left[(x+y)^{\frac{1}{2}}; (x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}; (x-y)^{\frac{5}{6}}\right]$

659 $\sqrt[5]{x^2y\sqrt{x-y}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{a^3b}}$; $\sqrt[5]{ab^3\sqrt[3]{(a+b)^{10}}}$. $\left[x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}(x-y)^{\frac{1}{10}}; a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}; a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}}(a+b)^{\frac{2}{3}}\right]$

Espressioni ed esponenti razionali

Semplifica le seguenti espressioni, utilizzando, quando è possibile, le proprietà delle potenze. Supponi che le basi letterali siano positive.

660 $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}$; $2^{\frac{1}{3}} \cdot 8 \cdot 2^{-\frac{5}{6}}$. $\left[2^{\frac{5}{4}}; 2^{\frac{5}{2}}\right]$

661 $3^{\frac{2}{3}} : 3^{-1}$; $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{8}{3}} \cdot 16 \cdot 2^{-\frac{1}{3}}$. $\left[3^{\frac{5}{3}}; 2^{\frac{13}{3}}\right]$

662 $\left(2^{\frac{3}{5}}\right)^{10}$; $3^{\frac{1}{2}} \cdot \left(3^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{9}}$. $\left[2^6; 3^{\frac{2}{3}}\right]$

663 $\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}} : 3^{\frac{1}{2}}$ $[3^{-2}]$

664 $\left(2^{-1} \cdot 2^{-2}\right)^{\frac{1}{6}} : 2^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(2^3\right)^{-\frac{1}{2}}$ $\left[2^{-\frac{7}{4}}\right]$

665 $\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} : 5^{-\frac{3}{4}}$ $\left[5^{\frac{3}{2}}\right]$

666 $2^{-1}[(2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}})^{-1} + (3^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}})^{-1}] : (3)^{-\frac{1}{2}}$ $[3]$

667 $x^{-2}\{x^6[x(x^{-3})^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{9}}\}^{\frac{2}{3}}$ $[x^2]$

668 $[(2^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}b^3c^{-2})^{\frac{1}{3}}]^{\frac{9}{2}} \cdot (2^{-\frac{1}{2}}a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{9}{2}}c^3)$ $[1]$

669 $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^4 a^{-\frac{5}{4}}b$ $\left[-\frac{1}{3}a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}}\right]$

670 $(2^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{5}})^3 : (2^{-3}x^{\frac{7}{8}}y^{-\frac{3}{10}}z^{\frac{6}{5}})^{\frac{2}{3}}$ $\left[2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{12}}y^{-\frac{13}{10}}z\right]$

671 $\frac{(a^2+a)^{\frac{3}{2}} \cdot a^{-3} \cdot (a^2-a)^2}{[(a^2-1)^{\frac{1}{2}}]^4} \cdot (a+a^2)^{\frac{1}{2}}$ $[a]$

672 $\left\{\left[\left(x\cdot x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(x^{-2}x^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{6}\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[\left(x^{3}y\right)^{-\frac{2}{3}}\right]^{-\frac{3}{4}}$ $\left[x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right]$

673 $\dfrac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{(x-1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{\frac{1}{2}}-(x-1)^{\frac{1}{2}}}$ $[-x]$

674 $\dfrac{(x+2)^{\frac{1}{2}}(x^{2}-4)^{-\frac{1}{2}}}{(x-2)^{-1}(x^{2}-2x)^{-\frac{3}{2}}}:\left(\dfrac{(x-2)^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{-3}$ $\left[(x-2)^{\frac{1}{2}}\right]$

675 $\left(x^{\frac{10}{3}}-x^{3}+x^{\frac{7}{3}}-x^{2}+x^{\frac{4}{3}}-x+x^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)$ $[x^{4}-1]$

676 $\dfrac{(x^{2}-y^{2})^{\frac{1}{2}}}{(x^{-1}+y^{-1})}\cdot\dfrac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{(y^{-2}-x^{-2})}\cdot\dfrac{(xy)^{-3}}{(x-y)^{\frac{1}{2}}}$ $\left[\dfrac{1}{x^{2}-y^{2}}\right]$

677 $\dfrac{2}{3^{\frac{1}{2}}-4}-\dfrac{3^{\frac{1}{4}}}{2+3^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{4}}-2}-\dfrac{3^{\frac{1}{2}}+2}{4-3^{\frac{1}{2}}}$ $[-1]$

678 $\left[\left(\dfrac{2x-3}{2x+3}\right)^{-\frac{1}{2}}:\left(\dfrac{6x+9}{4x^{2}-9}\right)^{-\frac{1}{3}}\right]^{3}\cdot\left[\dfrac{(2x+3)^{3}}{3^{-2}}\right]^{-\frac{1}{2}}$ $\left[(2x-3)^{-\frac{5}{2}}\right]$

679 $\dfrac{(ab-b^{2})^{\frac{1}{3}}}{(a^{2}+ab)^{\frac{2}{3}}}:\left[\dfrac{a+b}{(a-b)^{2}}\right]^{\frac{1}{3}}:\left[\left(\dfrac{a^{2}}{b}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{a+b}{a-b}\right]^{-1}$ $[1]$

680 $\left[\left(\dfrac{ab^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}b^{5}}\right)^{-\frac{1}{2}}:\left(\dfrac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{-\frac{1}{2}}}\right)^{2}\right]^{6}:b^{\frac{11}{2}}$ $\left[b^{\frac{1}{2}}\right]$

681 $\dfrac{\left[(xy)^{\frac{1}{4}}-1\right]^{2}-\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)^{2}}{\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(y^{\frac{1}{2}}-1\right)}$ $[1]$

682 $\dfrac{(x+y)^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{4}{3}}+xy^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(x^{\frac{8}{3}}-x^{\frac{7}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{2}y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}}$ $\left[x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right]$

683 $\left[(-2)^{-1}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}\right)^{4}\right]$ $[-8b]$

684 Verifica le seguenti uguaglianze utilizzando le proprietà delle potenze con esponente razionale:

a) $(\sqrt[3]{5}+\sqrt[6]{5})^3=\sqrt[6]{125}(1+\sqrt[6]{5})^3$;

b) $\sqrt{4}+\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{4}(\sqrt[6]{4}+1)$;

c) $(\sqrt{2}-\sqrt[6]{2})^2=\sqrt[6]{4}(\sqrt[6]{4}-1)^2$;

d) $\sqrt{4}-\sqrt[5]{4}=\sqrt[5]{4}(\sqrt[10]{64}-1)$.

685 Stabilisci per quali valori del parametro $k\in\mathbb{R}$ sono verificate le seguenti uguaglianze:

a) $\left[\left(2^{\frac{1}{k+1}}\right)^{3k}\right]^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}$; b) $[(3)^{k+5}]^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{15}{2}}:3^{\frac{k}{2}}$; c) $\sqrt[3]{2^{5+k}}:\sqrt[4]{2^{6k+3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

$\left[\text{a) } k=2;\text{ b) } k=5;\text{ c) } k=\frac{5}{14}\right]$

12. I radicali in $\mathbb{R}$

Teoria a pag. 797

RIFLETTI SULLA TEORIA

686 VERO O FALSO?

a) Se n è un numero dispari, la radice n-esima del numero $a\in\mathbb{R}^-$ è negativa. V F

b) $\sqrt{-9}$ è un radicale con valore negativo. V F

c) La radice cubica di $-x^3$ è equivalente a $-x$. V F

687 TEST Quale delle seguenti uguaglianze è *vera*?

A $\sqrt{4x^2}=2x$

B $\sqrt{2x^2}=-2x$

C $\sqrt{4x^2}=2|x|$

D $\sqrt{4x^2}=4|x|$

E $\sqrt{8x^3}=2|x|$

Le condizioni di esistenza dei radicali

688 L'espressione $\sqrt[6]{-8}$ non rappresenta un radicale. Perché?

689 È vero che $\sqrt{-a}$ non esiste? Perché? E $\sqrt[3]{-a}$?

690 TEST Uno solo dei seguenti radicali ha come C.E. $a\geq 0$. Quale?

A $\sqrt{5a^2b^3}$

B $\sqrt[3]{4ab}$

C $\sqrt{7a^4b^2}$

D $\sqrt[4]{\dfrac{2a^3b^2}{3}}$

E $\sqrt[6]{\dfrac{3a^2}{5}}$

691 È vero che le C.E. del radicale $\sqrt[6]{x^4y^2}$ sono $\forall\, x, y\in\mathbb{R}$?

692 Per il radicale $\sqrt[5]{x+2}$ devi porre le condizioni di esistenza? Perché?

693 TEST Dei seguenti radicali solo uno è equivalente ad a. Quale?

A $\sqrt{a^2}$

B $\sqrt[3]{a^3}$

C $\sqrt[4]{a^4}$

D $\sqrt[4]{a^8}$

E $\sqrt[24]{a^{25}}$

ESERCIZI

CACCIA ALL'ERRORE

Ognuna delle seguenti uguaglianze contiene almeno un errore. Trovalo e correggilo (x e y sono reali positivi).

694 $\sqrt[8]{(-5)^2}=\sqrt[4]{-5}$

695 $(x+y)\sqrt{3}=\sqrt{3(x^2+y^2)}$

696 $\sqrt[3]{-x^6}\cdot\sqrt[4]{-x^8}=(-x^2)\cdot(-x^2)=x^4$

697 $\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[3]{y}=\sqrt[12]{xy}$

Le condizioni di esistenza

ESERCIZIO GUIDA

698 Determiniamo le condizioni d'esistenza dei seguenti radicali:

a) $\sqrt{6a^4b^5}$; b) $\sqrt[3]{a-2}$; c) $\sqrt{\dfrac{5x}{x^2-4}}$; d) $\sqrt{|a|-2}$.

a) $\sqrt{6a^4b^5}$.

Il radicando è il prodotto di tre fattori e deve essere positivo o nullo: 6 è un numero positivo; a^4 è sempre positivo o nullo, sia che a sia negativo sia che a sia positivo o nullo, poiché il suo esponente è pari; b^5, avendo esponente dispari, assume il segno di b. Quindi, affinché b^5 sia positivo o nullo, occorre che sia $b \geq 0$: C.E.: $b \geq 0$.

b) $\sqrt[3]{a-2}$.

Poiché l'esponente è dispari, il radicando può assumere qualunque valore. C.E.: $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

c) Il radicando deve essere maggiore o uguale a 0, ossia:

$$\frac{5x}{x^2-4} \geq 0 \rightarrow \frac{5x}{(x-2)(x+2)} \geq 0.$$

Studiamo il segno:

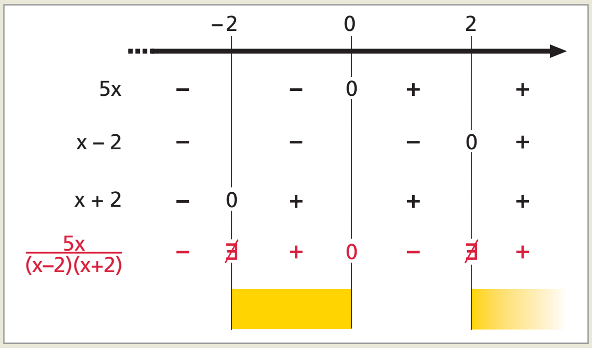
$5x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

$x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

C.E.: $-2 < x \leq 0 \vee x > 2$.

I valori -2 e 2 sono esclusi perché annullano il denominatore della frazione.



d) $\sqrt{|a|-2}$.

Dobbiamo porre $|a| - 2 \geq 0$.

La disuguaglianza è equivalente a due condizioni disgiunte, ciascuna espressa da un sistema:

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ a - 2 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ -a - 2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \geq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ a \leq -2 \end{cases}$$

C.E.: $a \geq 2 \vee a \leq -2$.

Determina le condizioni d'esistenza dei seguenti radicali.

699 $\sqrt{-a}$; $\sqrt{a^2}$; $\sqrt[3]{a^5}$; $\sqrt[4]{-2x^2}$.

700 $\sqrt{ab}$; $\sqrt[3]{2a^3b^2}$; $\sqrt[4]{3a^2b}$.

701 $\sqrt{\dfrac{2a}{x}}$; $\sqrt{\dfrac{-y^3}{3}}$; $\sqrt{\dfrac{-2}{x}}$.

702 $\sqrt[3]{a-3}$; $\sqrt{x+2}$; $\sqrt[5]{2x+4}$.

703 $\sqrt[4]{b-1}$; $\sqrt[3]{1-2a}$; $\sqrt{a+1}$.

704 $\sqrt{3a+3}$; $\sqrt[3]{x+5}$; $\sqrt[4]{2x-1}$.

705 $\sqrt{(b-1)b}$; $\sqrt{2x^3-4x^2}$; $\sqrt{a^2-1}$.

706 $\sqrt[3]{\dfrac{a-2}{2a+5}}$; $\sqrt{6(a^2+3)(b-1)}$; $\sqrt[4]{b(b-3)}$.

707 $\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}$; $\quad\sqrt[4]{\dfrac{a^2+a}{a-2}}$; $\quad\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{1-x^2}}$.

708 $\sqrt{\dfrac{2a(a-3)}{a^2+3}}$; $\quad\sqrt[3]{\dfrac{2a(a-1)}{a^2-4}}$; $\quad\sqrt[4]{\dfrac{3x(x+2)}{x-3}}$.

709 $\sqrt{\dfrac{2x(x^2+1)}{x+3}}$; $\quad\sqrt[3]{\dfrac{3(x-1)}{x^2-4}}$; $\quad\sqrt[4]{\dfrac{2(y+3)}{y+2}}$.

710 $\sqrt[4]{\dfrac{x-3}{2(1-x)}}$; $\quad\sqrt{\dfrac{1-a}{2a}}$; $\quad\sqrt{\dfrac{4a-4}{a^2-1}}$.

711 $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$; $\quad\sqrt{\dfrac{a}{b-1}}$; $\quad\sqrt{\dfrac{(x-2)(x+3)}{x^2-16}}$.

712 $\sqrt{\dfrac{4x^2-12x+9}{5x}}$; $\quad\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$; $\quad\sqrt[4]{a^3+3a^3+3a+1}$.

713 $\sqrt{-x^2-25}$; $\quad\sqrt{x^2-25}$; $\quad\sqrt{a^2-6a+9}$.

714 $\sqrt[3]{\dfrac{-x}{2x-7}}$; $\quad\sqrt[6]{\dfrac{-4x}{|x+9|}}$; $\quad\sqrt[5]{\dfrac{-4x}{|x+9|}}$.

715 $\sqrt{2|a|}$; $\quad\sqrt{1-|x|}$; $\quad\sqrt{\dfrac{|x|-4}{|x|+4}}$.

716 $\sqrt[3]{\dfrac{1}{|x-3|}}$; $\quad\sqrt{\dfrac{-3x}{1-2|x|}}$; $\quad\sqrt{\dfrac{1}{|x+1|-8}}$.

717 $\sqrt{\dfrac{6a-9-a^2}{|a-2|}}$; $\quad\sqrt{\dfrac{x^4-x^2+9x^2-9}{x^2+x}}$; $\quad\sqrt{\dfrac{-4}{|a+1|-1}}$.

718 $\sqrt[4]{\dfrac{(x+2)^2}{(x^2-x)}}$; $\quad\sqrt[6]{\dfrac{(x+1)(x-2)^2}{x(x+4)^2}}$; $\quad\sqrt[8]{\dfrac{-x^2-1}{x+2}}$.

Determina per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ esistono le seguenti espressioni.

719 $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+6}$ $\quad[x \geq 4]$

720 $\sqrt{-x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{2x}}+\sqrt{-5-x}$ $\quad[x \leq -5]$

721 $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}+\sqrt{x^2-4}$ $\quad[x \geq 2]$

722 $\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt[3]{4-x}}$ $\quad[x \leq 1 \vee x \geq 2 \wedge x \neq 4]$

723 $\sqrt{\dfrac{|x|}{9-x}}+\sqrt{-|x|+4}$ $\quad[-4 \leq x \leq 4]$

724 $\sqrt{\dfrac{x^2+4}{|x-4|}}+\sqrt[3]{-x}+\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ $[x<-1 \vee x \geq 0 \wedge x \neq 4]$

725 $\sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{\dfrac{1}{a^2-a}}+\sqrt{2a|a-1|}$ $[a>1]$

726 $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt[3]{x-4}}+\sqrt{-x^2(6x-x^2-9)}$ $[x \leq -3 \vee x \geq 3 \wedge x \neq 4]$

727 $\sqrt{\dfrac{16-x^2}{|x|+4}}+\sqrt{\dfrac{-3x}{|x|-4}}$ $[0 \leq x < 4]$

Indica le condizioni di esistenza e semplifica i seguenti radicali in $\mathbb{R}$.

728 $\sqrt[4]{a^2b^4}$; $\sqrt{x^2}$; $\sqrt[3]{x^3}$. $[|b|\sqrt{|a|}; |x|; x]$

729 $\sqrt[6]{(a-1)^2}$; $\sqrt[9]{(a+3)^3}$; $\sqrt[8]{a^4x^2}$. $[\sqrt[3]{|a-1|}; \sqrt[3]{(a+3)}; \sqrt[4]{a^2|x|}]$

730 $\sqrt{(x-1)^6}$; $\sqrt[3]{(a+2)^9}$; $\sqrt[4]{(x+3)^2}$. $[|(x-1)^3|; (a+2)^3; \sqrt{|x+3|}]$

731 $\sqrt[6]{(x^3+6x^2+12x+8)^2}$; $\sqrt[4]{(x^4+4x^2+4)^2}$. $[|x+2|; x^2+2]$

732 $\sqrt[4]{a^4(x+2)^8}$; $\sqrt[4]{(x^2-6x+9)^3}$. $[|a|(x+2)^2; \sqrt{|(x-3)^3|}]$

Indica per quali valori di a le seguenti uguaglianze sono vere. Scrivi un esempio numerico per verificare la condizione posta.

733 $\sqrt[5]{3a^6}=a\sqrt[5]{3a}$; $\sqrt[3]{5a^4}=-a\sqrt[3]{-5a}$. $[\forall a \in \mathbb{R}; \forall a \in \mathbb{R}]$

734 $\sqrt{(a+2)^2}=a+2$; $\sqrt{(3-a)^2}=a-3$. $[a \geq -2; a \geq 3]$

735 $\sqrt[3]{\left(\dfrac{a+2}{1-a}\right)^3}=\dfrac{a+2}{1-a}$ $[a \neq 1]$

736 Trasforma $\sqrt[3]{-a}$ in un radicale di indice 6. Quale proprietà hai usato?
[se $a>0$, $-\sqrt[6]{a^2}$; se $a \leq 0$, $\sqrt[6]{a^2}$; proprietà invariantiva dei radicali]

Portare fattori fuori dal segno di radice

Nelle seguenti uguaglianze sono stati trasportati fuori dal segno di radice alcuni fattori, senza mettere i necessari valori assoluti. Trova prima le C.E. e aggiungi poi i valori assoluti dove occorrono.

737 $\sqrt{a^3b^4}=ab^2\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{a^2y^5}=y\sqrt{a^2y^2}$.

738 $\sqrt{\dfrac{(2x-1)^3x^5}{y^4}}=\dfrac{(2x-1)x^2}{y^2}\sqrt{(2x-1)x}$; $\sqrt[5]{\dfrac{a^6}{(x-1)^5}}=\dfrac{a\sqrt[5]{a}}{x-1}$.

739 $\sqrt{\dfrac{a^3+2a^2+a}{x^3+x^2}}=\dfrac{a+1}{x}\sqrt{\dfrac{a}{x+1}}$; $\qquad \sqrt[3]{\dfrac{y^7}{x^4-x^3}}=\dfrac{y^2}{x}\sqrt[3]{\dfrac{y}{x-1}}$.

740 $\sqrt{\dfrac{x(x-2)(x^2-2x)}{y^3}}=\dfrac{x(x-2)}{y\sqrt{y}}$; $\qquad \sqrt[3]{\dfrac{-x^6}{(x-1)^4}}=-\dfrac{x^2}{(x-1)\sqrt[3]{x-1}}$.

Determina le C.E. dei radicali presenti nelle seguenti espressioni e successivamente semplificale.

741 $\sqrt[4]{\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+9+6x}}+\sqrt{\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4}}\cdot\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$ $\qquad \left[2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}, \text{con } x<-3 \vee x>2\right]$

742 $\sqrt[6]{\dfrac{-x^2-4x-4}{-x^2}}:\sqrt[3]{x-\dfrac{4}{x}}\cdot\sqrt{\dfrac{x-2}{3}}$ $\qquad \left[\sqrt[6]{\dfrac{x-2}{27}}, \text{con } x>2\right]$

743 $\sqrt{\dfrac{-x^2-2x-1}{1-x}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^3-1}{x^3+1}}:\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$ $\qquad \left[\sqrt[6]{\dfrac{(x+1)^3(x^3+1)}{x^3-1}}, \text{con } x>1\right]$

744 $\sqrt[4]{1+\dfrac{12x}{(x-3)^2}}\cdot\sqrt{x-\dfrac{9}{x}}:\sqrt{x^3+x}$ $\qquad \left[\dfrac{x+3}{x}\sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}}, \text{con } x>3\right]$

Trova le condizioni di esistenza dei seguenti radicali in $\mathbb{R}$ e trasporta fuori dalla radice i fattori possibili.

745 $\sqrt[3]{x^4}$; $\quad \sqrt{x^3}$; $\quad \sqrt{(x-1)^2}$. $\qquad [x\sqrt[3]{x}; x\sqrt{x}; |x-1|]$

746 $\sqrt[3]{a^3b^4}$; $\quad \sqrt{(a+2)^2b^4x}$; $\quad \sqrt[3]{-a^3y^4}$. $\qquad [ab\sqrt[3]{b}; b^2|a+2|\sqrt{x}; -ay\sqrt[3]{y}]$

747 $\sqrt[4]{ax^4}$; $\quad \sqrt{a^3x}$; $\quad \sqrt[3]{a^3x}$. $\qquad [|x|\sqrt[4]{a}; |a|\sqrt{ax}; a\sqrt[3]{x}]$

748 $\sqrt{ax^2+x^2}$; $\quad \sqrt[4]{(a+1)^5}$; $\quad \sqrt{(a^2+2a+1)^3}$. $\qquad [|x|\sqrt{a+1}; (a+1)\sqrt[4]{a+1}; |(a+1)^3|]$

749 $\sqrt{x^3+x^2}$; $\quad \sqrt[6]{a^6(x-1)^9}$; $\quad \sqrt[5]{a^6(x+8)^7}$.
$[|x|\sqrt{x+1}; |a|(x-1)\sqrt{x-1}; a(x+8)\sqrt[5]{a(x+8)^2}]$

750 $\sqrt{\dfrac{x^2(x^2-4)^2}{x+2}}$; $\quad \sqrt[3]{\dfrac{(x^3-3x^2+3x-1)a^4}{x^3}}$. $\qquad \left[|x(x-2)|\sqrt{x+2}; \dfrac{(x-1)a}{x}\sqrt[3]{a}\right]$

751 $\sqrt{(a^2x+4ax+4x)b^4}$; $\quad \sqrt[3]{6a^3(b-1)^6}$. $\qquad [b^2|a+2|\sqrt{x}; a(b-1)^2\sqrt[3]{6}]$

752 $\sqrt[4]{16a^4+32a^5}$; $\quad \sqrt[6]{64x^6+64}$. $\qquad [2|a|\sqrt[4]{1+2a}; 2\sqrt[6]{x^6+1}]$

753 $\sqrt{\dfrac{y^3+4y^2+4y}{4b^3+12b^2+9b}}$; $\quad \sqrt{\dfrac{a^4+4a^2}{4y^4+4y^2}}$. $\qquad \left[\dfrac{|y+2|}{|2b+3|}\sqrt{\dfrac{y}{b}}; \dfrac{|a|}{2|y|}\sqrt{\dfrac{a^2+4}{y^2+1}}\right]$

Nel sito: ▶ teoria e 25 esercizi su I numeri immaginari

LABORATORIO DI MATEMATICA

I radicali con Wiris

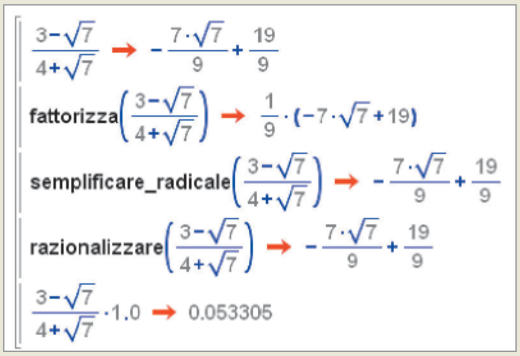
ESERCITAZIONE GUIDATA

a) Con Wiris semplifichiamo la seguente espressione irrazionale: $\dfrac{3-\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}$.

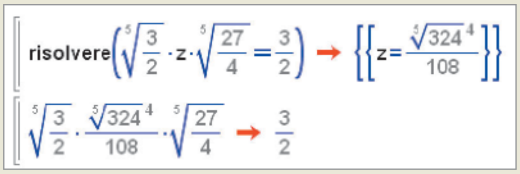
b) Con Wiris risolviamo e svolgiamo la verifica della seguente equazione:

$$\sqrt[5]{\frac{3}{2}}\cdot z\cdot\sqrt[5]{\frac{27}{4}}=\frac{3}{2}.$$

- Entriamo in ambiente Wiris.
- Digitiamo l'espressione del punto *a* e usiamo su di essa gli operatori che vediamo in figura 1.
- Facciamo clic sul pulsante *Calcola*.
- Osserviamo i risultati per renderci conto di quale funzionalità dobbiamo attenderci dagli operatori del sistema sui radicali.
- Usiamo l'operatore *risolvere* sull'equazione del punto *b* (figura 2).
- Semplifichiamo l'espressione ottenuta sostituendo a *z*, nel primo membro dell'equazione, la soluzione dataci da Wiris. Per far ciò, usiamo opportunamente le combinazioni di tasti *ctrl-C* (copia) e *ctrl-V* (incolla).



▲ **Figura 1**



▲ **Figura 2**

Nel sito: ▶ **1 esercitazione guidata con Derive** ▶ **20 esercitazioni in più**

Esercitazioni

Semplifica le seguenti espressioni sul quaderno. Poi con il computer, approssima sia l'espressione iniziale sia la sua semplificazione.

1 $(\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{3}-4)(\sqrt{2}+3)$ $\quad[-6\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{6}-9\simeq-9{,}84]$

2 $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ $\quad[-\sqrt{2}-9\simeq-10{,}41]$

3 $\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{3+\sqrt{3}}-\dfrac{1-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$ $\quad\left[\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+1\simeq 2{,}15\right]$

4 $(\sqrt[3]{2}-1)^3-(\sqrt[3]{2}+1)^2$ $\quad[\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{4}\simeq-5{,}09]$

Determina sul quaderno il radicale *z* che rende valida l'uguaglianza, poi verifica con il computer.

5 $\sqrt{125}\cdot z=25$ $\quad[\sqrt{5}]$

6 $\sqrt[4]{27}\cdot z=3$ $\quad[\sqrt[4]{3}]$

7 $\sqrt[5]{4}\cdot z\cdot\sqrt[5]{2}=2$ $\quad[\sqrt[5]{4}]$

8 $\sqrt[3]{9}\cdot z\cdot\sqrt[3]{3}=3$ $\quad[1]$

Matematica per il cittadino

GLI SCORPIONI IRRAZIONALI

La vita quotidiana è piena di numeri, a partire da quanti biscotti mangiamo a colazione fino al canale della televisione su cui ci sintonizziamo la sera.
I numeri naturali ci circondano in maniera più evidente, ma anche i numeri irrazionali si nascondono nella realtà e c'entrano con triangoli, quadrati, spirali e… scorpioni!

1. Considera i quadrati che hanno come misura dei lati i primi 7 numeri naturali. Completa la seguente tabella inserendo i valori delle loro aree.

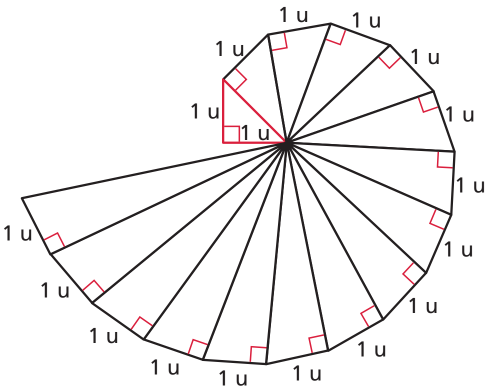
lato (u)	1	2	3	4	5	6	7
area (u^2)							

2. Considera i quadrati che hanno, come area, i primi 7 numeri naturali. Completa la seguente tabella determinando la lunghezza dei loro lati.

area (u^2)	1	2	3	4	5	6	7
lato (u)							

3. Dato un quadrato di lato 1 u, disegna un quadrato di area doppia (potrebbe essere utile tracciare una diagonale del quadrato). Quanto è lungo il suo lato?

4. Nella figura a lato la costruzione a spirale è composta da triangoli rettangoli aventi un cateto di lunghezza 1 u e l'altro lungo come l'ipotenusa del triangolo precedente. Partendo dal triangolo iniziale, che ha entrambi i cateti lunghi 1 u, completa la tabella inserendo le lunghezze mancanti. Esponi le tue considerazioni riguardo alla successione delle lunghezze delle ipotenuse.



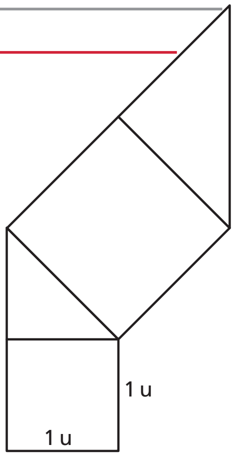
Triangolo	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°
1° cateto (u)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2° cateto (u)	1															
ipotenusa (u)																

5. Disegniamo ora la coda di uno scorpione. Nella figura a fianco, a partire dal quadrato di lato unitario, abbiamo costruito alternativamente:

- un triangolo rettangolo isoscele che ha come cateto il lato del quadrato antecedente;
- un quadrato che ha come lato l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele.

Completa la figura, calcola le lunghezze dei lati e le aree dei quadrati e inseriscile nella tabella. Esprimi le tue considerazioni sulla successione ottenuta con i valori delle superfici.

Quadrato	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
lato (u)	1	$\sqrt{2}$						
area (u^2)	1	2						



Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 30 test interattivi in più

1 $(-5)^{\frac{4}{3}}$ è uguale a:

A $\sqrt[3]{(-5)^4}$.
B $\sqrt[3]{5^4}$.
C $(\sqrt[3]{|-5|})^4$.
D non è definita.
E $(\sqrt[3]{-5})^4$.

2 Considera il radicale $\sqrt[3]{a+3}$.
Per quali valori del numero reale a esiste?

A Solo per $a \geq 0$.
B Per ogni valore di a.
C Solo per $a > -3$.
D Solo per $a \geq -3$.
E Solo per $a \geq 3$.

3 Quale delle seguenti uguaglianze è *falsa*?

A $\sqrt[1]{a} = a,\ a > 0$
B $\sqrt[1]{0} = 0$
C $\sqrt[2]{1} = 1$
D $\sqrt[0]{a} = 0,\ a > 0$
E $(\sqrt[2]{a})^2 = a,\ a > 0$

4 L'ordinamento crescente dei radicali
$\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[5]{35}$ è:

A $\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[5]{35}$.
B $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[5]{35}$, $\sqrt{10}$.
C $\sqrt[5]{35}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt{10}$.
D $\sqrt[5]{35}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{9}$.
E nessuno dei precedenti.

5 $\sqrt[3]{625}$ è uguale a:

A 25.
B $5\sqrt[3]{5}$.
C $5\sqrt[3]{25}$.
D $25\sqrt[3]{5}$.
E 5.

6 $\sqrt[4]{(-9)^2}$ è uguale a:

A $\sqrt{-9}$.
B -9.
C -3.
D 3.
E nessuno dei precedenti.

7 $\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[3]{27}$ è uguale a:

A $3\sqrt[10]{3^5 2^2}$.
B $\sqrt[30]{3 \cdot 2 \cdot 27}$.
C $3\sqrt[10]{6}$.
D $\sqrt[10]{3^4 2}$.
E nessuno dei precedenti.

8 Il risultato di $\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{7}$ è:

A $\sqrt[5]{10}$.
B $\sqrt[10]{10}$.
C $\sqrt[25]{21}$.
D $\sqrt[25]{10}$.
E nessuno dei precedenti.

9 $\sqrt[m]{a\sqrt[p]{b}}$ $(a, b \geq 0)$ è equivalente a:

A $\sqrt[mp]{ab}$.
B $\sqrt[mp]{a^p b}$.
C $\sqrt[\frac{m}{p}]{ab}$.
D $\sqrt[mp]{ab^m}$.
E $\sqrt[mp]{a^p b^m}$.

10 Quale delle seguenti uguaglianze è *vera*?

A $\sqrt[6]{(-3)^2} = \sqrt[3]{-3}$
B $\sqrt[6]{(-3)^2} = \sqrt[3]{3}$
C $\sqrt[6]{(-3)^2} = \sqrt[4]{3}$
D $\sqrt[6]{(-3)^2} = \sqrt[4]{-3}$
E $\sqrt[6]{(-3)^2} = -\sqrt[3]{3}$

11 Quale delle seguenti uguaglianze è *vera*?

A $\sqrt{x^6 y} = x^3\sqrt{y}$
B $\sqrt{x^6 y} = x^3 y$
C $\sqrt{x^6 y} = |x^3 y|$
D $\sqrt{x^6 y} = |x^3|\sqrt{y}$
E $\sqrt{x^6 y} = x\sqrt{x^4 y}$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

SPIEGA PERCHÉ

12 L'uguaglianza $\sqrt[4]{(x-3)^4} = x-3$ non è vera $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Spiega perché.

13 La proposizione: «La radice quadrata di 25 è uguale a ± 5, poiché $(+5)^2 = 25$ e $(-5)^2 = 25$» è falsa. Spiega il motivo.

14 Perché l'uguaglianza $-7\sqrt{z} = \sqrt{49z}$, con $z > 0$, è *falsa*? Correggila in modo che diventi vera.

15 Per quali valori di n la semplificazione del radicale $\sqrt[2n]{x^{3n}}$ richiede l'uso del valore assoluto? Perché?

16 Il radicale $\sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$, con $a \geq 1$, può essere trasformato nella differenza di due radicali semplici? Perché?

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

Nei seguenti esercizi ci riferiamo sempre a radicali in $\mathbb{R}_0^+$.

17 Determina le condizioni di esistenza dei seguenti radicali:

$$\sqrt[3]{\frac{ab^2}{x}}; \quad \sqrt{2xy^4}; \quad \sqrt{\frac{x-4}{x^2}}; \quad \sqrt{\frac{x^2-2x+1}{x+3}}; \quad \sqrt{x+1}\cdot\sqrt{5-2x}; \quad \sqrt{\frac{x^2+9}{3x-1}} + \sqrt{x}.$$

Semplifica i seguenti radicali, determinandone le condizioni di esistenza.

18 $\sqrt[6]{27a^9b^6c^6}$ $\quad\left[\text{C.E.: } a \geq 0; \sqrt{3a^3b^2c^2}\right]$

19 $\sqrt[4]{\dfrac{9(3x-1)^2}{4}}$ $\quad\left[\text{C.E.: } \forall\, x \in \mathbb{R}; \sqrt{\dfrac{3|3x-1|}{2}}\right]$

20 $\sqrt[4]{\dfrac{a^4-18a^2+81}{a^4}}$ $\quad\left[\text{C.E.: } a \neq 0; \sqrt{\dfrac{|a^2-9|}{a^2}}\right]$

21 $\sqrt[3]{\dfrac{a^6b^{12}}{a^3+3a^2+3a+1}}$ $\quad\left[\text{C.E.: } a > -1; \forall\, b \in \mathbb{R}; \dfrac{a^2b^4}{a+1}\right]$

22 $\sqrt[9]{\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{(x^2+x)^6}}$ $\quad\left[\text{C.E.: } x > -1 \wedge x \neq 0; \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2(x+1)}}\right]$

Trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili.

23 $\sqrt[5]{\dfrac{32a^5}{x^{22}y^{12}}}$ $\quad\left[\dfrac{2a}{x^4y^2}\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^2y^2}}\right]$

24 $\sqrt[4]{\dfrac{x^4+16}{x^4y^4}}$ $\quad\left[\dfrac{1}{|xy|}\sqrt[4]{x^4+16}\right]$

25 $\sqrt{\dfrac{a^4b^2+a^4-2a^4b}{4b^3}}$ $\quad\left[\dfrac{a^2|b-1|}{2b}\sqrt{\dfrac{1}{b}}\right]$

26 $\sqrt{\dfrac{b^4x^3}{b^2+1-2b}}$ $\quad\left[\dfrac{b^2x}{|b-1|}\sqrt{x}\right]$

27 Trova le condizioni di esistenza e, dopo aver eseguito le operazioni, trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili.

$$\sqrt{\frac{a+2}{2}} : \sqrt[3]{\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{\frac{4}{a+2}}} \qquad \left[\text{C.E.: } a > -2, a \neq 0; \sqrt[6]{\frac{(a+2)^4}{2a^4}}\right]$$

Semplifica le seguenti espressioni, supponendo verificate le C.E.

28 $(\sqrt{2}-3)^2+\sqrt{18}+\sqrt{8}+\frac{1}{2}\sqrt{50}$ $\left[11+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$

29 $\sqrt{32}+2\sqrt{18}-3\sqrt{50}+3\sqrt{98}$ $[16\sqrt{2}]$

30 $2\sqrt{3}\cdot(4\sqrt{2}-\sqrt{3})+\sqrt{2}(\sqrt{8}-3\sqrt{3})$ $[5\sqrt{6}-2]$

31 $(\sqrt{2\sqrt{3}})^2+(2+\sqrt{3})^2+(1+2\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}+2\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{2}-\sqrt{5})-2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})-(\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)^2$ $[17+8\sqrt{3}]$

32 $\left(\sqrt{\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)}:\sqrt[4]{\frac{x-y}{x^2y+xy^2}}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{x^5y^5}{x-y}}$ $[x^2y^2\sqrt{x+y}]$

33 $\sqrt[4]{\frac{x^2y^2+x^2y}{x+y}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x^2y^2+x^3y}{y+1}}+\sqrt{\frac{y}{x^3}}-\sqrt{x^2y}$ $\left[\frac{1}{x}\sqrt{\frac{y}{x}}\right]$

34 $\sqrt[6]{\frac{x^2-9}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{x-3}}:\sqrt[3]{\frac{x^2+3x}{2}}$ $\left[\sqrt[6]{\frac{2}{x^2-9}}\right]$

35 $(\sqrt{x}-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)-\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$ $\left[\frac{\sqrt{x}-x}{1+\sqrt{x}}\right]$

36 $\sqrt[4]{\frac{x+2}{x^3}}:\sqrt[3]{(x+2)\sqrt{\frac{x+2}{x^3}}}:\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+2x}}\right)^3$ $[\sqrt{x(x+2)}]$

37 $\sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x-y}{x+y}}:\sqrt[12]{\frac{x-y}{x+y}}$ $\left[\sqrt[6]{\frac{x+y}{x-y}}\right]$

38 $(a+b)^2\cdot\sqrt{(a^2-b^2)}:\sqrt[4]{a^6-b^6-3a^4b^2+3a^2b^4}$ $\left[|a+b|\cdot\sqrt[4]{\frac{(a+b)^3}{a-b}}\right]$

39 $[\sqrt[12]{(3x+2a)^3}]^4;\quad\left(\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}\right)^5.$ $\left[3x+2a;\ \sqrt[6]{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^5}\right]$

40 $\sqrt{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}\sqrt[4]{x^3}}}$ $\left[\sqrt[8]{\frac{1}{x^3}}\right]$

41 $\sqrt{25a^2+25}-\sqrt{4a^6+4+12a^4+12a^2}-\sqrt{9a^2+9}$ $[-2a^2\sqrt{1+a^2}]$

42 $(x-y)^{\frac{1}{2}}:\left[(x+y)^{\frac{1}{2}}+(x-y)^{\frac{1}{2}}\right]+(x-y)^{\frac{1}{2}}:\left[(x-y)^{\frac{1}{2}}-(x+y)^{\frac{1}{2}}\right]$ con $x>y>0$ $\left[\frac{y-x}{y}\right]$

43 $\left(\frac{3x}{\sqrt{3x+2}}-\sqrt{3x-2}\right)\cdot\left(\sqrt{3x+2}+\frac{3x}{\sqrt{3x-2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{3x+2}}{2}-\frac{3x}{\sqrt{3x-2}}$ $[-\sqrt{3x-2}]$

44 $\left(\frac{4a}{\sqrt[3]{a^2b}}+\sqrt[3]{ab^2}\right)\left(\sqrt[3]{a^2b}-\frac{4a}{\sqrt[3]{ab^2}}\right):(b^2-16)$ $\left[\frac{a}{b}\right]$

45 $\sqrt{\frac{a^6+8a^3+12a^4+6a^5}{a-2}}:\sqrt[3]{\frac{a^6+4a^5+4a^4}{a^4+24a^2+16-8a^3-32a}}:\sqrt[6]{\frac{(a^2-4)^5}{a^3}}$ $[\sqrt[3]{a^2}]$

46 $\sqrt[6]{\dfrac{(2b-1)^4}{2b}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4b^2-1}{2b}}:\sqrt[6]{\dfrac{4b^2+4b+1}{64b^6-8b^3-96b^5+48b^4}}$ $[(2b-1)\sqrt{2b-1}]$

Razionalizza i denominatori.

47 $\dfrac{a-3}{\sqrt{a^2-9}}$; $\dfrac{2ab}{\sqrt[3]{4a^2b}}$; $\dfrac{10}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. $\left[\dfrac{\sqrt{a^2-9}}{a+3};\sqrt[3]{2ab^2};2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right]$

48 $\dfrac{2\sqrt{5}+5\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-5\sqrt{2}}$; $\dfrac{b+3\left(1+\sqrt{b+3}\right)}{\sqrt{b+3}}$; $\dfrac{(x+y)\sqrt[3]{x+y}}{\sqrt[6]{x+y}}$.

$\left[-\dfrac{7+2\sqrt{10}}{3};3+\sqrt{b+3};(x+y)\sqrt[6]{x+y}\right]$

Semplifica le seguenti espressioni e razionalizza i risultati.

49 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}+\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1}-\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ $\left[\dfrac{4\sqrt{10}-3\sqrt{2}}{4}\right]$

50 $\dfrac{3\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+\dfrac{3\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}+2$ $\left[\dfrac{8a}{a-1}\right]$

Semplifica le seguenti espressioni.

51 $\left[\left(3^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot b\cdot b^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{4}{3}}\cdot\left(3^{\frac{1}{6}}\cdot a^2\cdot b^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{4}{3}}\right):a^2b^{\frac{1}{3}}$ $[\sqrt[3]{3}ab]$

52 $\left(2^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}\right):\left(3^{-1}+2^{-\frac{2}{3}}\right)\cdot 6^{-1}:\left(1+6^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(3+2^{\frac{2}{3}}\right)$ $[1]$

Risolvi.

53 $\sqrt{5}(x-1)=2(x+1)$ $[(\sqrt{5}+2)^2]$

54 $\dfrac{5}{x-\sqrt{2}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}=\dfrac{5x+\sqrt{2}}{x^2-2}$ $[\sqrt{2}-2]$

55 $\dfrac{x\sqrt{5}-\sqrt{3}}{x\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{5x-3}{5x+3}$ $[x=0]$

56 $\dfrac{\left(2\sqrt{2}+1\right)y}{\sqrt{2}}-\dfrac{y\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{y}{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2}+3$ $[y=\sqrt{2}+1]$

57 $\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{6}+3}+\dfrac{x\sqrt{3}}{2+\sqrt{6}}-\dfrac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{x-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ $[x=\sqrt{2}+\sqrt{3}]$

58 $\sqrt{3}(x-2)+\sqrt{3}>3x-1$ $\left[x<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$

59 $\begin{cases}\sqrt{5}x+y=-4\\2x+2\sqrt{5}y=0\end{cases}$ $[-\sqrt{5};1]$

60 $\begin{cases}(\sqrt{3}+1)x+2y=3\\4x-(\sqrt{3}-1)y=1\end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{3\sqrt{3}-1}{10};\dfrac{11-\sqrt{3}}{10}\right)\right]$

61 $\begin{cases}2\sqrt{3}x+\sqrt{2}y=3\\\sqrt{3}x+\sqrt{2}y=6\end{cases}$ $\left[\left(-\sqrt{3};\dfrac{9}{2}\sqrt{2}\right)\right]$

62 $\begin{cases}\sqrt{2}x+3y=3\sqrt{2}-1\\x+y=2\sqrt{2}-1\end{cases}$ $[\sqrt{2};\sqrt{2}-1]$

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 20 esercizi in più

TEST

63 $$\frac{1}{(3+\sqrt{2})(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}$$

è un numero:

A intero.
B razionale positivo, ma non intero.
C razionale negativo, ma non intero.
D irrazionale positivo.
E irrazionale negativo.

(*Olimpiadi della matematica*, *Giochi di Archimede*, 2003)

64 Se $\sqrt{a^2+1}=b$, quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

A $a \geq 0$
B $b \geq 0$
C $a > 1$
D $b \geq a^2+1$
E Nessuna delle precedenti.

(*Olimpiadi della matematica*, *Giochi di Archimede*, 2004)

65 Quale dei seguenti numeri è il più piccolo?

A 0,0000001
B 9^{-8}
C $(0,1)^{0,1}$
D $\sqrt{0,00001}$
E $(0,0001)^2$

(*Olimpiadi della matematica*, *Giochi di Archimede*, 1997)

66 Senza utilizzare la calcolatrice, stabilisci qual è l'intero che meglio approssima il numero $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$. [4]

67 Dimostra che l'espressione $\frac{x^2-2\sqrt{7}x+7}{x-\sqrt{7}} \cdot (x+\sqrt{7}) - x^2 + 14$ è uguale a 7.

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 5 esercizi in più

68 TEST What percentage of $\frac{\sqrt{24}}{3}$ is $\sqrt{\frac{8}{27}}$?

A 25%
B $33,\overline{3}\%$
C 50%
D $66,\overline{6}\%$
E 150%

(USA *Tennessee Mathematics Teachers Association: 39th Annual Mathematics Contest*, 1995)

69 Simplify each of the following. Do not give decimal answers.

a) $\sqrt{24}+6\sqrt{54}$;

b) $(\sqrt{10}-\sqrt{7})(2\sqrt{10}+3\sqrt{7})$;

c) $\sqrt{48x^2y}+5x\sqrt{27y}$ (assume $x, y \geq 0$);

d) $\sqrt{5}\sqrt{15}-4\sqrt{3}$.

(CAN *John Abbott College*, Final Exam, 2001)

[a) $20\sqrt{6}$; b) $\sqrt{70}-1$; c) $19x\sqrt{3y}$; d) $\sqrt{3}$]

70 Perform the following operations. Write all answers in simplified form (including rationalizing denominators). Assume that variables represent non-negative numbers.

a) $\sqrt[3]{2x}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{10x^5})$;

b) $-3\sqrt{b^5}+b\sqrt{b^3}+\sqrt{b^2}$.

(USA *Tacoma Community College*, Review for Test, 2002)

[a) $\sqrt[3]{2x^2}-x^2\sqrt[3]{20}$; b) $b-2b^2\sqrt{b}$]

71 TEST If $x=1-2\sqrt{3}$, then $x^2-2x-3=$

A -16
B 8
C $8+4\sqrt{3}$
D $8-4\sqrt{3}$
E $8-8\sqrt{3}$

(USA *Tennessee Mathematics Teachers Association: 39th Annual Mathematics Contest*, 1995)

72 Express as a rational number:

$$\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{28+10\sqrt{3}}}{15}.$$ $\left[-\frac{4}{15}\right]$

(USA *Southeast Missouri State University: Math Field Day*, 2005)

GLOSSARY

following: seguente
percentage: percentuale
to perform: compiere, svolgere
to simplify: semplificare

CAPITOLO

12

Le equazioni di secondo grado

Home Cinema

I proiettori si usano comunemente nelle sale cinematografiche, ma, da quando la tecnologia lo permette, molte persone scelgono di godersi la visione dei film nella propria casa, disponendo di un apparecchio ottico per la proiezione e di uno schermo bianco…

…a quale distanza deve essere posto il proiettore affinché l'immagine che appare sullo schermo abbia la dimensione desiderata?

La risposta a pag. 885

1. Che cosa sono le equazioni di secondo grado

Le equazioni di secondo grado

Un'equazione è di secondo grado se, dopo aver applicato i princìpi di equivalenza già studiati per le equazioni di primo grado, si può scrivere nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad \text{con } a \neq 0.$$

Le lettere a, b e c rappresentano numeri reali o espressioni letterali e si chiamano **primo**, **secondo** e **terzo coefficiente** dell'equazione; c è anche detto **termine noto**.

ESEMPIO L'equazione

$$5x^2 - 2x - 1 = 0$$

è di secondo grado in forma normale, e i tre coefficienti sono:

$$a = 5; \quad b = -2; \quad c = -1.$$

La forma $ax^2 + bx + c = 0$ è detta **forma normale**.

-1 è il termine noto.

Se, oltre ad $a \neq 0$, si hanno anche $b \neq 0$ e $c \neq 0$, l'equazione si dice **completa**. Per esempio, l'equazione $2x^2 - 5x + 6 = 0$ è completa.

Se invece l'equazione è **incompleta**, abbiamo i seguenti casi particolari.

EQUAZIONI INCOMPLETE			
COEFFICIENTI	FORMA NORMALE	NOME	ESEMPIO
$b \neq 0, c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	equazione **spuria**	$2x^2 - 5x = 0$
$b = 0, c \neq 0$	$ax^2 + c = 0$	equazione **pura**	$2x^2 + 6 = 0$
$b = 0, c = 0$	$ax^2 = 0$	equazione **monomia**	$2x^2 = 0$

Una **soluzione** (o **radice**) dell'equazione è un valore che, sostituito all'incognita, rende vera l'uguaglianza fra i due membri.

ESEMPIO

L'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$ ha per soluzioni i numeri 2 e 3.

Infatti, sostituendo a x il numero 2, si ottiene

$$(2)^2 - 5(2) + 6 = 0$$

e sostituendo il numero 3,

$$(3)^2 - 5(3) + 6 = 0.$$

Risolvere un'equazione di secondo grado significa cercarne le soluzioni. In genere, cercheremo le soluzioni nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Come vedremo, le soluzioni di un'equazione di secondo grado possono essere al massimo due.

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Babilonia, anno 1000 a.C.

Nel sito: ► Scheda di lavoro

Humbaba e Gamesh, studenti della Casa delle Tavolette, chiedono all'amico Nabu spiegazioni sul problema che avevano come compito a casa: moltiplicando un numero per se stesso e aggiungendo il doppio del numero, si ottiene 24; qual è il numero?
Nabu non ha dubbi: «Il numero è 4. Aggiungete la metà di 2 a 24, cioè 25. Prendete la radice quadrata, cioè 5, e poi...».

(Liberamente tratto da Ian Stewart, *L'eleganza della verità*, Einaudi, Torino, 2008)

CRISTINA: «Come ha fatto Nabu a trovare subito il numero?».

LUCA: «A me il quadrato di un numero e il suo doppio ricordano il quadrato di un binomio».

► Scrivi l'equazione relativa al problema. Cerca di risolverla trasformando uno dei due membri nel quadrato di un binomio.

2. La risoluzione di un'equazione di secondo grado

BRAVI SI DIVENTA
Videolezioni ▶ V38a ▶ V39a

Il metodo del completamento del quadrato

Applichiamo il metodo del **completamento del quadrato** per cercare le soluzioni di un'equazione di secondo grado nel caso generale

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0).$$

Di fianco ai passaggi nel caso generale, scriviamo quelli di un esempio numerico.

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

- Portiamo a secondo membro il termine noto:

$$ax^2 + bx = -c.$$

$$2x^2 + x = 3$$

- Dividiamo tutti i termini per a (che abbiamo supposto $\neq 0$):

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

$$x^2 + \frac{x}{2} = \frac{3}{2}$$

- Scriviamo il termine $\frac{b}{a}x$ come doppio prodotto di due fattori, cioè nella forma $2 \cdot p \cdot q$:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} = -\frac{c}{a}.$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

- Aggiungiamo ai due membri il termine $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{3}{2} + \frac{1}{16}$$

- Il trinomio al primo membro è il quadrato del binomio $x + \frac{b}{2a}$, quindi:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{24 + 1}{16}$$

L'espressione al primo membro è un quadrato; quindi è sempre positiva o nulla. Affinché l'equazione ammetta soluzioni reali, anche la frazione al secondo membro deve essere non negativa.

Poiché il denominatore di tale frazione è sempre positivo, il numeratore deve essere non negativo, cioè $b^2 - 4ac \geq 0$.

Se $b^2 - 4ac \geq 0$, ci sono due valori di $x + \frac{b}{2a}$, uno opposto all'altro, che soddisfano l'equazione. Li otteniamo estraendo la radice quadrata:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$x + \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{25}}{4}$$

Isoliamo la x:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$x = -\frac{1}{4} \pm \frac{5}{4}$$

Le soluzioni sono:

$$x_1 = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = 1$$

Le soluzioni dell'equazione sono:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

L'espressione $\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

viene detta **formula risolutiva** dell'equazione di secondo grado.

ESEMPIO Calcoliamo le radici dell'equazione:

$$4x^2 - 7x - 2 = 0.$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{8} = \begin{cases} \dfrac{7+9}{8} = 2 \\[2ex] \dfrac{7-9}{8} = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Le radici dell'equazione sono $x_1 = 2$ e $x_2 = -\frac{1}{4}$.

$a = 4$,
$b = -7$,
$c = -2$.

Il discriminante e le soluzioni

Chiamiamo **discriminante**, e indichiamo con la lettera greca Δ (delta), l'espressione che nella formula risolutiva è sotto radice, cioè:

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}.$$

Per sapere se esistono soluzioni reali di un'equazione di secondo grado è sufficiente calcolare il discriminante: se è negativo, non esistono soluzioni reali.

Discriminante deriva dal latino *discrimen*, che significa «ciò che serve a distinguere». Con il discriminante possiamo distinguere se le soluzioni reali di un'equazione di secondo grado sono due, una o nessuna.

ESEMPIO

$$x^2 - 3x + 5 = 0 \qquad (a = 1, \quad b = -3, \quad c = 5);$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(5) = 9 - 20 = -11.$$

Poiché $\Delta < 0$, non esistono soluzioni reali.

In generale, risolvendo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, possono presentarsi tre casi, che dipendono dal valore del discriminante:

1. $\boldsymbol{\Delta > 0}$: l'equazione ha **due soluzioni reali e distinte**:
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
2. $\boldsymbol{\Delta = 0}$: l'equazione ha **due soluzioni reali coincidenti**:
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$
3. $\boldsymbol{\Delta < 0}$: l'equazione **non ha soluzioni reali**, cioè in $\mathbb{R}$ è impossibile.

Se $\Delta = 0$:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}.$$

Si dice anche che la soluzione è **doppia**.

La formula ridotta

Quando nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ il coefficiente $\boldsymbol{b}$, **è un numero pari**, è utile applicare una formula, detta **formula ridotta**, che ricaviamo da quella generale nel modo seguente.

Raccogliamo 4 sotto il segno di radice:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4\left(\frac{b^2}{4} - ac\right)}}{2a} = \frac{-b \pm 2\sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}}{2a}.$$

Dividiamo per 2 il numeratore e il denominatore:

$$\boldsymbol{x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}}.$$

Per utilizzare questa formula, invece di $\Delta = b^2 - 4ac$ dobbiamo calcolare $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$, che si ottiene dividendo Δ per 4 e si indica con $\frac{\Delta}{4}$. Si ha:

$$\boldsymbol{\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}.$$

> La formula ridotta semplifica notevolmente i calcoli. Prova, per esempio, a risolvere l'equazione $x^2 - 12x + 27 = 0$ senza formula ridotta e poi con la formula ridotta.

ESEMPIO Risolviamo l'equazione $x^2 - 2x - 35 = 0$.

Poiché $b = -2$, applichiamo la formula ridotta.

Le soluzioni dell'equazione sono:

$$x = 1 \pm \sqrt{36} = 1 \pm 6 = \begin{cases} 7 \\ -5 \end{cases}$$

> $\frac{\Delta}{4} = 1 - 1(-35)$.

Le equazioni pure, spurie, monomie

> Qui e in seguito sottintendiamo che cerchiamo le soluzioni delle equazioni nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Le equazioni pure: $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$

ESEMPIO

1. Risolviamo l'equazione $5x^2 - 20 = 0$.

   Invece di applicare la formula generale, isoliamo il termine con l'incognita, portando al secondo membro il termine noto:

   $$5x^2 = 20 \;\rightarrow\; x^2 = 4 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \;\rightarrow\; x_1 = -2, \quad x_2 = 2.$$

2. Risolviamo l'equazione $3x^2 + 27 = 0$.

$$3x^2 + 27 = 0 \quad \to \quad 3x^2 = -27 \quad \to \quad x^2 = -9.$$

Poiché nessun numero reale ha quadrato negativo, l'equazione non ha soluzioni reali.

In generale, un'equazione di secondo grado **pura**, del tipo $ax^2 + c = 0$, con a e c numeri reali discordi, ha due soluzioni reali e opposte:

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}; \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Se a e c sono concordi, l'equazione non ha soluzioni reali.

Le equazioni spurie: $ax^2 + bx = 0$

ESEMPIO Risolviamo l'equazione $6x^2 - 5x = 0$.

Raccogliamo x: $x(6x - 5) = 0$.

Per la legge di annullamento del prodotto:

$$x = 0 \quad \text{oppure} \quad 6x - 5 = 0 \quad \to \quad x = \frac{5}{6}.$$

L'equazione ha due soluzioni: $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{5}{6}$.

In generale, un'equazione di secondo grado **spuria**, del tipo $ax^2 + bx = 0$, ha sempre due soluzioni reali di cui una è nulla:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Le equazioni monomie: $ax^2 = 0$

ESEMPIO Risolviamo l'equazione $2x^2 = 0$.

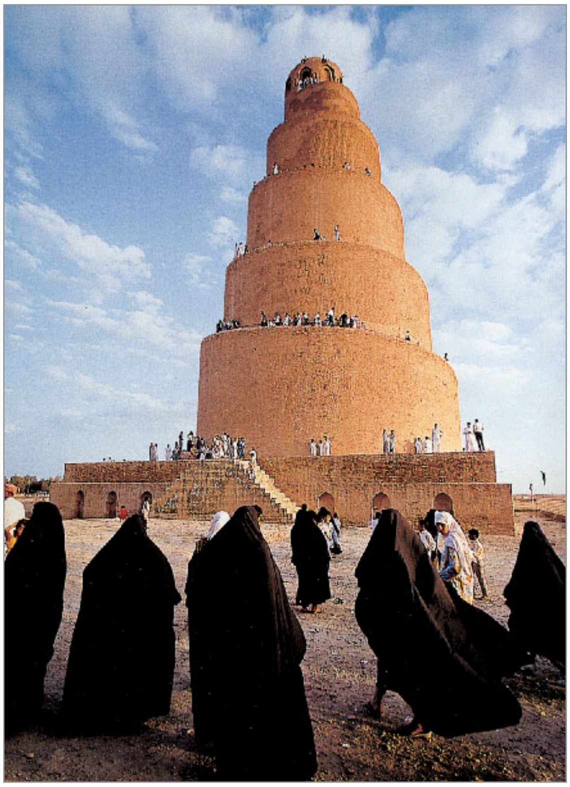
$$2x^2 = 0 \quad \to \quad x^2 = 0 \quad \to \quad x_1 = x_2 = 0.$$

In generale, un'equazione di secondo grado **monomia**, del tipo $ax^2 = 0$, ha sempre due soluzioni reali coincidenti: $x_1 = x_2 = 0$.

Negli esercizi affronteremo problemi risolvibili con equazioni di secondo grado, ossia **problemi di secondo grado**.

Nel sito: ► teoria e 53 esercizi su I numeri complessi e le equazioni di secondo grado

ESPLORAZIONE: IL COMPLETAMENTO DEL QUADRATO



▶ Minareto a Samarra, Iraq. Nella seconda metà dell'VIII secolo d.C., Baghdad divenne un fiorente centro culturale. A Baghdad fu fondata una «Casa del Sapere», che accolse scienziati e filosofi provenienti dal Medio Oriente e dal mondo cristiano. Fra i suoi membri vi era il matematico e astronomo Mohammed ibn-Musa al-Khuwarizmi. Dalla versione latinizzata del suo nome deriva la parola «algoritmo».

Vediamo un esempio di come utilizza il metodo del completamento del quadrato il matematico persiano al-Khuwarizmi, vissuto nel IX secolo d.C.

Egli propone il seguente problema:

Un quadrato e dieci radici sono uguali a 39 unità.

E di seguito spiega:

Prendi la metà delle 10 radici	$10 : 2 = 5$
moltiplicala per se stessa	$5 \cdot 5 = 25$
aggiungi 39	$25 + 39 = 64$
fai la radice quadrata	$\sqrt{64} = 8$
sottrai la metà delle radici	$8 - 5 = 3$

Noi scriveremmo così:

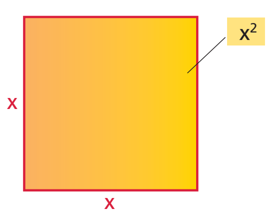
$$x^2 + 10x = 39 \to x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 \to$$

$$\to (x + 5)^2 = 64 \to x + 5 = 8 \to x = 8 - 5 = 3.$$

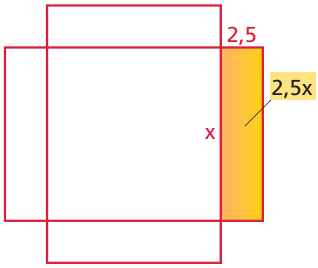
Gli Arabi non consideravano la soluzione negativa.

Seguiamo ora al-Khuwarizmi nella sua risoluzione geometrica del problema.

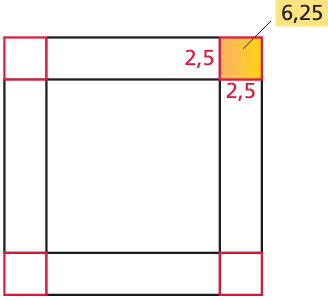
Tracciamo un quadrato che ha per lato x. La sua area è x^2.



Sui lati del quadrato costruiamo quattro rettangoli, ciascuno di lunghezza $\frac{10}{4} = 2{,}5$.



Completiamo il quadrato con quattro quadrati di lato 2,5.



In questo modo, con i quattro rettangoli, abbiamo aggiunto un'area di $4 \cdot 2{,}5 \cdot x = 10x$ e sappiamo che $x^2 + 10x = 39$. A 39 abbiamo poi aggiunto l'area dei quattro quadratini: $4 \cdot (2{,}5)^2 = 4 \cdot 6{,}25 = 25$. Otteniamo così un quadrato di area $39 + 25 = 64$ e quindi di lato 8.
D'altra parte, il lato misura $2{,}5 + x + 2{,}5$, quindi $5 + x = 8$, da cui otteniamo $x = 3$.

IN CINQUE SLIDE

Descrivi i tipi di equazioni di secondo grado risolti da al-Khuwarizmi e i passaggi algebrici utilizzati nel suo testo *Hisab al-jabr w'al-muqabala* in una presentazione multimediale.

Cerca nel web: al-Khuwarizmi, al-jabr, w'al-muqabala.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ► V40a

3. Le relazioni fra le radici e i coefficienti di un'equazione di secondo grado

La somma delle radici

Data l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, con $\Delta \geq 0$, calcoliamo la somma delle due radici:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

▶ Le radici dell'equazione sono:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La somma s delle radici di un'equazione di secondo grado a discriminante non negativo è uguale al rapporto, cambiato di segno, fra il coefficiente di x e quello di x^2.

$$s = -\frac{b}{a}.$$

Il prodotto delle radici

Calcoliamo il prodotto delle due radici:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

▶ Consideriamo ancora l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, con $\Delta \geq 0$.

▶ Applichiamo al numeratore la regola

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Il prodotto p delle radici di un'equazione di secondo grado a discriminante non negativo è uguale al rapporto fra il termine noto e il coefficiente di x^2.

$$p = \frac{c}{a}.$$

ESEMPIO

Data l'equazione $5x^2 - 9x - 2 = 0$, calcoliamo la somma e il prodotto delle radici:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-9}{5} = \frac{9}{5};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{5}.$$

▶ Per verifica, ricava le radici con la formula risolutiva e poi calcola la loro somma e il loro prodotto.

Le relazioni $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ servono a risolvere problemi inerenti alle radici di un'equazione senza risolvere l'equazione stessa.

ESEMPIO Data l'equazione $2x^2 - 13x + 15 = 0$, sapendo che una radice è 5, calcoliamo l'altra senza risolvere l'equazione.

Calcoliamo la somma delle radici:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-13}{2} = \frac{13}{2}.$$

Poiché una radice è 5, l'altra sarà:

$$\frac{13}{2} - 5 = \frac{3}{2}.$$

▶ Esegui la verifica risolvendo l'equazione.

La somma e il prodotto delle radici e l'equazione in forma normale

Se scriviamo un'equazione di secondo grado in forma normale, è possibile mettere in relazione i coefficienti a, b e c con la somma s e il prodotto p delle radici.

Data l'equazione in forma normale

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

possiamo dividere i due membri per a, poiché $a \neq 0$:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \rightarrow x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \rightarrow x^2 - sx + p = 0.$$

▶ Scriviamo $\frac{b}{a}$ come $-\left(-\frac{b}{a}\right)$.

$s = -\frac{b}{a}$, $p = \frac{c}{a}$.

In un'equazione di secondo grado ridotta a forma normale, in cui il primo coefficiente sia 1, il secondo coefficiente è la somma s delle radici cambiata di segno e il termine noto è il prodotto p delle radici.

$$\boldsymbol{x^2 - sx + p = 0}, \text{ ovvero}$$

$$\boldsymbol{x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0}.$$

▶ Per esempio, data l'equazione

$x^2 - 2x - 3 = 0$:

$x_1 + x_2 = 2$;

$x_1 \cdot x_2 = -3$.

Dalle soluzioni all'equazione

Dati due numeri qualunque, è possibile scrivere l'equazione di secondo grado che ha come radici quei due numeri.

ESEMPIO

Scriviamo l'equazione che ha come radici i numeri 3 e 7.

Poiché $s = 3 + 7 = 10$ e $p = 3 \cdot 7 = 21$, l'equazione richiesta è la seguente:

$$x^2 - 10x + 21 = 0.$$

▶ Per fare la verifica, risolvi l'equazione.

4. La regola di Cartesio

È possibile conoscere il segno delle radici reali di un'equazione completa di secondo grado senza risolverla.
Per farlo, introduciamo i concetti di variazione e di permanenza relativi al segno dei coefficienti dell'equazione.

Le permanenze e le variazioni

Dato un polinomio ordinato secondo una variabile:

- si ha una **permanenza** quando i coefficienti di un termine e del suo successivo sono concordi;
- si ha una **variazione** quando sono discordi.

▶ Figura 1 Nel polinomio ordinato in x

$$5x^3 + 2x^2 - x + 3,$$

partendo da sinistra, abbiamo:
una permanenza $(++)$,
una variazione $(+-)$,
una variazione $(-+)$.

La regola di Cartesio

In un'equazione di secondo grado completa, con $a > 0$, si possono presentare quattro casi di possibili combinazioni dei segni.

Se $a < 0$, basta moltiplicare per -1 ambo i membri dell'equazione per ricondurci al caso di $a > 0$.

PERMANENZE E VARIAZIONI IN $ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)

a	b	c	PERMANENZE E VARIAZIONI	ESEMPIO
$+$	$+$	$+$	due permanenze	$6x^2 + 13x + 6 = 0$
$+$	$-$	$+$	due variazioni	$x^2 - 8x + 15 = 0$
$+$	$-$	$-$	una variazione e una permanenza	$3x^2 - 2x - 8 = 0$
$+$	$+$	$-$	una permanenza e una variazione	$8x^2 + 10x - 7 = 0$

1° caso: la sequenza $+ + +$ (due permanenze)

Poiché a e c sono positivi, il prodotto delle radici $\frac{c}{a}$ è positivo, perciò le radici sono concordi, quindi entrambe positive o entrambe negative. Poiché a e b sono positivi, la somma delle radici $-\frac{b}{a}$ è negativa, quindi **le radici sono entrambe negative**.

Verifica che l'equazione $6x^2 + 13x + 6 = 0$ ha due radici negative.

2° caso: la sequenza $+ - +$ (due variazioni)

Poiché a e c sono concordi, il prodotto delle radici $\frac{c}{a}$ è positivo, perciò le radici sono concordi, quindi entrambe positive o entrambe negative. Poiché a e b sono discordi, la somma delle radici $-\frac{b}{a}$ è positiva, quindi **le radici sono entrambe positive**.

Verifica che l'equazione $x^2 - 8x + 15 = 0$ ha due radici positive.

3° caso: la sequenza + − − (una variazione e una permanenza)

Poiché a e c sono discordi, il prodotto delle radici $\frac{c}{a}$ è negativo, perciò le radici sono discordi, quindi **le radici sono una positiva e una negativa**.

Poiché a e b sono discordi, la somma delle radici $-\frac{b}{a}$ è positiva; quindi la radice positiva deve essere maggiore del valore assoluto di quella negativa.

4° caso: la sequenza + + − (una permanenza e una variazione)

Poiché a e c sono discordi, il prodotto delle radici $\frac{c}{a}$ è negativo, perciò le radici sono discordi, quindi **le radici sono una negativa e una positiva**.

Poiché a e b sono positivi, la somma delle radici $-\frac{b}{a}$ è negativa, quindi la radice positiva deve essere minore del valore assoluto di quella negativa.

In sintesi abbiamo la seguente regola.

REGOLA

Regola di Cartesio

In un'equazione di secondo grado completa scritta in forma normale $ax^2 + bx + c = 0$, con $\Delta \geq 0$, a ogni permanenza corrisponde una radice negativa e a ogni variazione una radice positiva. Quando le radici sono discordi, la radice con valore assoluto maggiore è positiva se la variazione precede la permanenza, è negativa nel caso contrario.

SEGNO DELLE RADICI DI $ax^2 + bx + c$

a	b	c	PERMANENZE E VARIAZIONI	x_1	x_2
+	+	+	due permanenze	−	−
+	−	+	due variazioni	+	+
+	−	−	una variazione e una permanenza	+	−
+	+	−	una permanenza e una variazione	−	+

ESEMPIO Determiniamo il segno delle radici dell'equazione

$8x^2 + 10x - 7 = 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{10}{2}\right)^2 - 8(-7) = 25 + 56 = 81.$$

Essendo il discriminante positivo, esistono due radici reali, e poiché sono presenti una permanenza (+ +) e una variazione (+ −), le due radici sono una negativa e l'altra positiva.

▶ Verifica quanto abbiamo ricavato nell'equazione $3x^2 - 2x - 8 = 0$.

▶ Fai la verifica nel caso dell'equazione $8x^2 + 10x - 7 = 0$.

▶ La regola permette di determinare il segno delle radici di un'equazione senza risolverla.

▶ Nella tabella, che schematizza la regola, consideriamo $|x_1| > |x_2|$.

▶ Nell'esempio consideriamo un caso in cui si ha $a > 0$. Se $a < 0$, basta cambiare il segno a tutti i termini: il numero e l'ordine delle variazioni e delle permanenze non cambiano.

5. La scomposizione di un trinomio di secondo grado

È dato un trinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$.

Se $\mathbf{\Delta > 0}$, l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni, x_1 e x_2; il trinomio può essere scomposto in fattori mediante la relazione:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}.$$

x_1 e x_2 sono anche detti **zeri del trinomio**.

DIMOSTRAZIONE

Utilizzando le relazioni

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2,$$

raccogliamo a e scriviamo:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = a[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2] =$$

$\frac{b}{a} = -\left(-\frac{b}{a}\right)$.

All'interno della parentesi quadra, raccogliamo x fra i primi due termini e x_2 fra gli altri due termini, in modo da potere poi raccogliere $(x - x_1)$:

$$= a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Se $\mathbf{\Delta = 0}$, il trinomio ha solo uno zero, perché $x_1 = x_2$; quindi la scomposizione è la seguente:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2}.$$

Se $\mathbf{\Delta < 0}$, il trinomio non ha zeri reali e non si può scomporre in fattori reali, cioè è **irriducibile**.

Riassumendo:

$$ax^2 + bx + c \begin{cases} a(x - x_1)(x - x_2) & \text{se } \Delta > 0 \\ a(x - x_1)^2 & \text{se } \Delta = 0 \\ \text{irriducibile} & \text{se } \Delta < 0 \end{cases}$$

ESEMPIO Esaminiamo la scomposizione dei trinomi $5x^2 - 5x - 30$, $4x^2 - 12x + 9$, $2x^2 + 3x + 4$ con la seguente tabella.

SCOMPOSIZIONE DEL TRINOMIO DI SECONDO GRADO

TRINOMIO	EQUAZIONE ASSOCIATA	Δ	RADICI	SCOMPOSIZIONE
$5x^2 - 5x - 30$	$5x^2 - 5x - 30 = 0$	$625 > 0$	$x_1 = 3, x_2 = -2$	$5(x - 3)(x + 2)$
$4x^2 - 12x + 9$	$4x^2 - 12x + 9 = 0$	0	$x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$	$4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$
$2x^2 + 3x + 4$	$2x^2 + 3x + 4 = 0$	$-23 < 0$	$\nexists$ in $\mathbb{R}$	$\nexists$ in $\mathbb{R}$

6. Le equazioni parametriche

Quando in un'equazione letterale si richiede che il valore di una lettera (ovviamente non l'incognita) sia tale da rendere vera una condizione, allora la lettera prende il nome di **parametro** e l'equazione si chiama **parametrica**.

Esaminiamo alcuni esempi di equazioni parametriche di secondo grado.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V41a

▶ Puoi trovare altri esempi negli esercizi guida.

$\Delta > 0$: le radici sono reali e distinte

ESEMPIO Determiniamo il valore di k per cui l'equazione parametrica di secondo grado in x

$$x^2 + (2k - 1)x + k^2 - 1 = 0$$

ha due **soluzioni reali distinte**.
Deve essere:

$$\Delta = (2k - 1)^2 - 4(k^2 - 1) > 0.$$

Questa disuguaglianza è una disequazione nell'incognita k:

$$4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 4 > 0$$

$$-4k + 5 > 0 \quad \rightarrow \quad 4k - 5 < 0 \quad \rightarrow \quad k < \frac{5}{4}.$$

Essa è verificata per $k < \frac{5}{4}$.

▶ Analogamente, le radici sono reali e coincidenti se $\Delta = 0$, ossia per $k = \frac{5}{4}$. Non ci sono invece radici reali se $\Delta < 0$, ossia per $k > \frac{5}{4}$.

Una delle radici è uguale a un valore assegnato

ESEMPIO Nell'equazione parametrica

$$(k - 3)x^2 - 2(k + 1)x + k = 0,$$

determiniamo il valore di k affinché una radice sia uguale a 3.

- Determiniamo per quali valori di k si ha $\Delta \geq 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = (k + 1)^2 - k(k - 3) \geq 0 \quad \rightarrow \quad 5k \geq -1 \quad \rightarrow \quad k \geq -\frac{1}{5}.$$

- Sostituiamo $x = 3$ nell'equazione data:

$$(k - 3)3^2 - 2(k + 1)3 + k = 0 \quad \rightarrow \quad 4k = 33 \quad \rightarrow \quad k = \frac{33}{4}.$$

Poiché $\frac{33}{4} > -\frac{1}{5}$, il valore di k è accettabile. Per $k = \frac{33}{4}$ l'equazione parametrica ha una radice uguale a 3.

In generale, bisogna prima di tutto imporre che le radici siano reali, ponendo $\Delta \geq 0$; poi si sostituisce alla x dell'equazione il valore assegnato e si ricava k; infine si controlla se il valore di k trovato è accettabile, ossia se soddisfa la condizione che porta a $\Delta \geq 0$.

La somma delle radici è un valore noto *s*
Le condizioni sono:

- $\Delta \geq 0$, affinché le radici siano reali;
- $-\dfrac{b}{a} = s$, affinché la somma delle radici sia s.

Osservazione. Se la somma delle radici è uguale a 0, le due radici sono opposte:

$$x_1 + x_2 = 0; \quad x_1 = -x_2.$$

ESEMPIO Nell'equazione parametrica

$$x^2 - 2(k-3)x + k^2 - 1 = 0,$$

determiniamo il valore di k affinché la somma delle radici sia uguale a 8.

- $\dfrac{\Delta}{4} = (k-3)^2 - k^2 + 1 \geq 0$

  $(k-3)^2 - k^2 + 1 = k^2 - 6k + 9 - k^2 + 1 \geq 0$

  $-6k + 10 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 3k - 5 \leq 0 \quad \rightarrow \quad k \leq \dfrac{5}{3}.$

- $-\dfrac{b}{a} = 8$

  $-\dfrac{b}{a} = 2(k-3) = 8$

  $2(k-3) = 8 \quad \rightarrow \quad 2k - 6 = 8 \quad \rightarrow \quad 2k = 14 \quad \rightarrow \quad k = 7.$

Poiché il valore 7 non è minore o uguale a $\dfrac{5}{3}$, non esiste alcun valore di k tale che la somma delle radici sia uguale a 8; pertanto il problema posto non ha soluzioni.

Il prodotto delle radici è un valore noto *p*
Le condizioni da porre sono:

- $\Delta \geq 0$;
- $\dfrac{c}{a} = p$.

Osservazione. Se il prodotto delle due radici è uguale a 1, le due radici sono reciproche:

$$x_1 \cdot x_2 = 1; \quad x_1 = \frac{1}{x_2}.$$

ESEMPIO Nell'equazione parametrica dell'esempio precedente,

$$x^2 - 2(k-3)x + k^2 - 1 = 0,$$

richiediamo che sia $p = 48$.

- Abbiamo già trovato che, affinché sia $\Delta \geq 0$, deve essere $k \leq \frac{5}{3}$;
- $\frac{c}{a} = k^2 - 1 = 48 \quad \rightarrow \quad k^2 = 49 \quad \rightarrow \quad k = \pm\sqrt{49} \quad \rightarrow \quad k = \pm 7.$

Solo il valore -7 è accettabile. Per $k = 7$, invece, il discriminante è negativo $\left(7 > \frac{5}{3}\right)$ e le soluzioni non sono reali.

La somma dei reciproci delle radici è un valore noto r

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = r.$$

Esprimiamo $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ in funzione della somma e del prodotto delle radici, eseguendo la somma delle due frazioni:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{s}{p}.$$

Sostituendo a s l'espressione $-\frac{b}{a}$ e a p l'espressione $\frac{c}{a}$, si ottiene:

$$\frac{s}{p} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = -\frac{b}{c}.$$

Le condizioni sono quindi:

- $\Delta \geq 0$;
- $\frac{s}{p} = -\frac{b}{c} = r.$

La somma dei quadrati delle radici è un valore noto q

$$x_1^2 + x_2^2 = q.$$

Poiché $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$, scriviamo:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = s^2 - 2p.$$

Scriviamo $s^2 - 2p$ in funzione di a, b e c:

$$s^2 - 2p = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

Le condizioni sono quindi:

- $\Delta \geq 0$;
- $s^2 - 2p = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = q.$

La somma dei reciproci dei quadrati delle radici è un valore noto *q*

$$\frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}=q$$

$$\frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}=\frac{x_2^2+x_1^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\frac{s^2-2p}{p^2}$$

$$\frac{s^2-2p}{p^2}=\frac{\dfrac{b^2-2ac}{a^2}}{\dfrac{c^2}{a^2}}=\frac{b^2-2ac}{a^2}\cdot\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}.$$

▶ Infatti, come abbiamo visto nel caso precedente, si ha:
$s^2-2p=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$.

Le condizioni sono quindi:

- $\Delta \geq 0$;
- $\dfrac{s^2-2p}{p^2}=\dfrac{b^2-2ac}{c^2}=q$.

7. La funzione quadratica e la parabola

La funzione $y = ax^2$

Una funzione quadratica del tipo $\boldsymbol{y = ax^2}$ (con $a \neq 0$) ha per grafico una curva chiamata **parabola**.

▶ Diciamo anche che $y = ax^2$ è l'equazione di una parabola.

Per esempio, rappresentiamo nel piano cartesiano la funzione

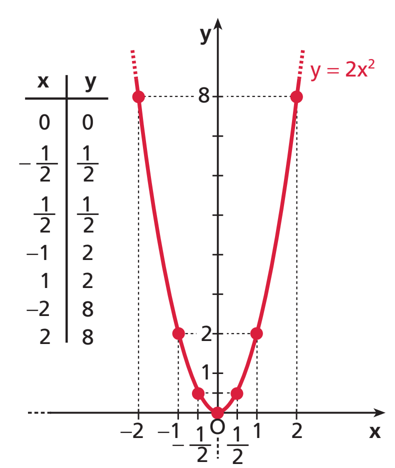
$$y = 2x^2,$$

determinando le coordinate di alcuni suoi punti e scrivendole nella tabella a fianco.

▶ Poiché i punti di ascissa opposta hanno la stessa ordinata, possiamo scrivere la tabella anche così:

x	y
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
± 1	2
± 2	8

Osserviamo che i punti della parabola sono a due a due simmetrici rispetto all'asse delle ordinate. In generale, ogni parabola ha un **asse di simmetria**. Il punto in cui la parabola si interseca con il suo asse è detto **vertice**. Per parabole di equazione $y = ax^2$ il vertice è l'origine $O(0; 0)$.



▶ **Figura 2** La parabola di equazione $y = 2x^2$.

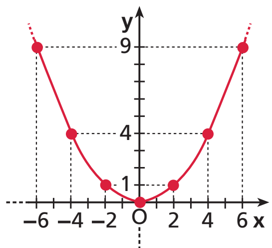
Il segno di *a* e la concavità

Tutti i punti della parabola diversi da O hanno:

- ordinata positiva **se $a > 0$**: diciamo che la parabola volge la **concavità verso l'alto**;
- ordinata negativa **se $a < 0$**: diciamo che la parabola volge la **concavità verso il basso**.

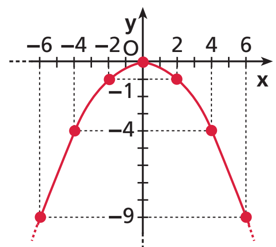
ESEMPIO

x	y
0	0
±2	1
±4	4
±6	9



a. Parabola di equazione $y = \frac{1}{4}x^2$; $a = \frac{1}{4} > 0$.

x	y
0	0
±2	−1
±4	−4
±6	−9



b. Parabola di equazione $y = -\frac{1}{4}x^2$; $a = -\frac{1}{4} < 0$.

◀ **Figura 3** La concavità di una parabola dipende dal segno di *a*.

Il valore di *a* e l'apertura della parabola

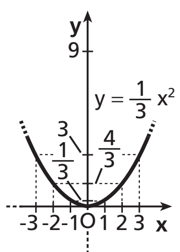
Disegniamo per punti le parabole di equazioni

$$y = \frac{1}{3}x^2, \qquad y = x^2, \qquad y = 3x^2;$$

poi confrontiamo i rispettivi grafici disegnandoli su uno stesso riferimento cartesiano.

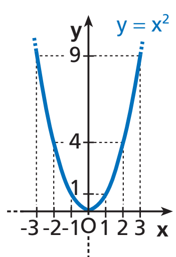
▼ **Figura 4** Se $a > 0$, l'apertura della parabola diminuisce all'aumentare di *a*.

x	y
0	0
±1	$\frac{1}{3}$
±2	$\frac{4}{3}$
±3	3



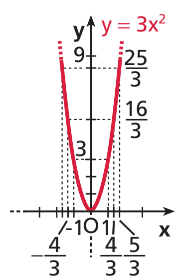
a. Grafico di $y = \frac{1}{3}x^2$.

x	y
0	0
±1	1
±2	4
±3	9

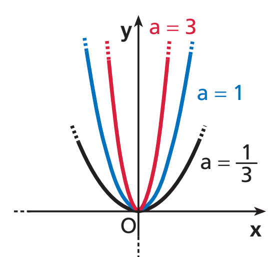


b. Grafico di $y = x^2$.

x	y
0	0
±1	3
$\pm\frac{4}{3}$	$\frac{16}{3}$
$\pm\frac{5}{3}$	$\frac{25}{3}$



c. Grafico di $y = 3x^2$.



d. All'aumentare di *a* le parabole si «stringono» attorno al proprio asse.

Se a è negativo, l'apertura della parabola diminuisce all'aumentare del valore assoluto di a.

Possiamo confrontare anche parabole che hanno coefficienti a di segno opposto: l'apertura diminuisce al crescere di $|a|$. Confronta, per esempio, $y = -\frac{1}{4}x^2$, $y = x^2$ e $y = -4x^2$.

La funzione $y = ax^2 + bx + c$

Si può dimostrare che una funzione quadratica del tipo $y = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) ha per grafico una parabola che:

- ha per **asse di simmetria** la retta verticale di equazione $\boxed{x = -\dfrac{b}{2a}}$;
- ha **vertice** V di coordinate $\boxed{V\left(-\dfrac{b}{2a};\, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)}$.

ESEMPIO

Rappresentiamo nel piano cartesiano la parabola di equazione:

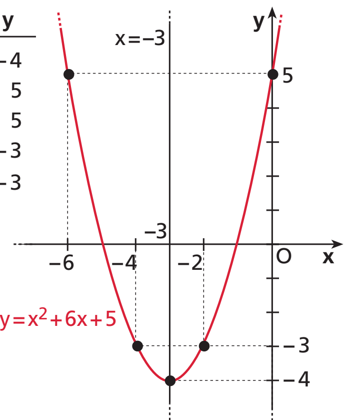
$$y = x^2 + 6x + 5.$$

L'equazione dell'asse di simmetria è $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2 \cdot 1} = -3$.

Inoltre -3 è anche l'ascissa del vertice, cioè $x_V = -3$. Sostituendo tale valore nell'equazione della parabola, ricaviamo l'ordinata del vertice $y_V = (-3)^2 + 6(-3) + 5 = -4$.

Compiliamo una tabella per determinare le coordinate di altri punti della parabola (figura 5).

x	y
−3	−4
0	5
−6	5
−2	−3
−4	−3



▶ Figura 5 Il grafico della parabola di equazione $y = x^2 + 6x + 5$.

◗ In alternativa è possibile calcolare l'ordinata del vertice utilizzando la formula

$$y_V = -\frac{b^2-4ac}{4a}:$$

$$y_V = -\frac{36-20}{4} = -4.$$

La concavità e l'apertura della parabola

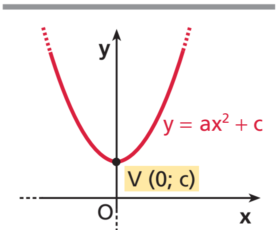
Si può dimostrare che, come per la parabola con vertice nell'origine, anche per la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$:

- **la concavità dipende solo dal segno del coefficiente a**: se $a > 0$, la concavità è rivolta verso l'alto, se $a < 0$, verso il basso;
- **l'apertura dipende dal valore assoluto di a**: all'aumentare di $|a|$ diminuisce l'apertura della parabola, ossia la parabola si «stringe» attorno al proprio asse.

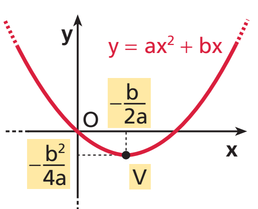
Casi particolari della funzione $y = ax^2 + bx + c$

1. Se $b = 0$, l'equazione diventa $y = ax^2 + c$.
   La parabola ha vertice $V(0; c)$ e il suo asse di simmetria è l'asse y (figura 6*a*).
2. Se $c = 0$, l'equazione diventa $y = ax^2 + bx$.
   La parabola ha vertice $V\left(-\dfrac{b}{2a};\, -\dfrac{b^2}{4a}\right)$ e passa sempre per l'origine $O(0; 0)$;
   infatti le coordinate $(0; 0)$ soddisfano l'equazione (figura 6*b*).
3. Se $b = 0$ e $c = 0$, l'equazione diventa $y = ax^2$, parabola già studiata.

▼ Figura 6 Casi particolari della funzione $y = ax^2 + bx + c$.



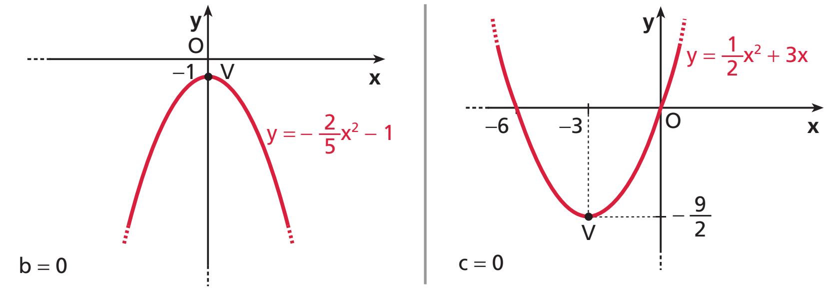
a



b

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

ESEMPIO



◀ Figura 7

Gli zeri della funzione quadratica

Cerchiamo gli **zeri** di una funzione quadratica $y = ax^2 + bx + c$, ossia i valori di x per cui il valore y della funzione è zero.

Da un punto di vista grafico ciò equivale a cercare le intersezioni di una parabola con l'asse x, ossia i punti con $y = 0$.
Sostituendo nell'equazione della parabola, otteniamo l'equazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

ESEMPIO

Cerchiamo gli zeri della funzione:

$$y = x^2 + 6x + 5.$$

Deve essere

$$y = 0,$$

da cui:

$$x^2 + 6x + 5 = 0.$$

L'equazione ha come soluzioni:

$$x_1 = -5, x_2 = -1,$$

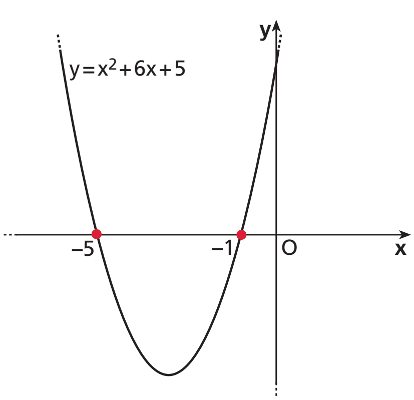
che sono gli zeri della funzione.

Da un punto di vista grafico, diciamo che la parabola di equazione

$$y = x^2 + 6x + 5$$

ha per punti di intersezione con l'asse x quelli di ascisse -5 e -1 (figura 8).

▼ Figura 8



▶ Riprendiamo l'esempio della pagina precedente.

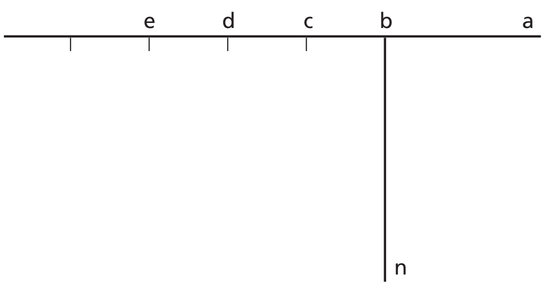
GALILEO E LA FUNZIONE QUADRATICA

Nella Giornata quarta dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, pubblicato nel 1638, Galileo si occupa dello studio del moto dei proietti, ossia dei corpi lanciati e soggetti alla forza di gravità. Egli dimostra che tali moti hanno una traiettoria parabolica.

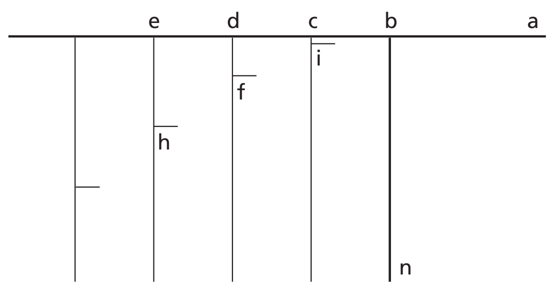
Galileo immagina che, dialogando con Simplicio e Sagredo, Salviati legga il testo di un Autore, al quale i tre studiosi fanno spesso riferimento nei loro discorsi. In realtà si tratta di Galileo stesso che scrive una pagina molto importante nella storia della fisica, fornendo un esempio di quello che verrà poi chiamato *principio di composizione dei movimenti*. Diremmo noi che, se un corpo è soggetto contemporaneamente a due diversi moti, ciascuno di essi non influenza l'altro. Galileo suppone che «tali moti e loro velocità, nel mescolarsi, non si alterino, perturbino ed impedischino».

Ma questa pagina è anche importante per la matematica perché Galileo spiega puntualmente come tracciare il grafico di una funzione quadratica.
Galileo dice di considerare un corpo che si muove su una linea orizzontale *ab* con moto uniforme. In *b*, mancando il sostegno, il corpo comincia a cadere.

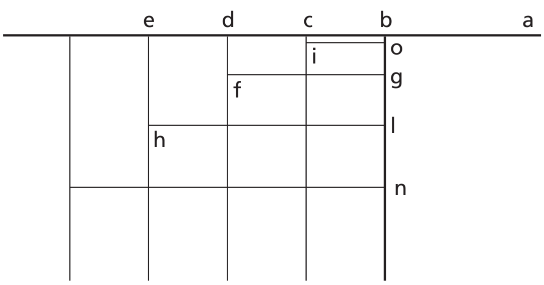
Tracciamo la traiettoria di caduta accompagnando le parole di Galileo con fotogrammi, fino a giungere al disegno proposto nel suo libro (*equidistanti dalla* sta per *parallele alla*).



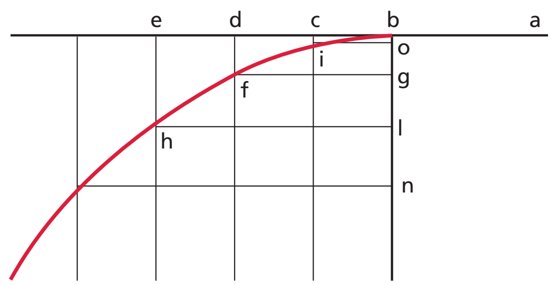
a. Sulla linea *be* che rappresenta lo scorrere del tempo, «si segnino ad arbitrio un numero qualsiasi di porzioni di tempo eguali, *bc*, *cd*, *de*»...



b. ...«dai punti *b*, *c*, *d*, *e* si intendano condotte linee equidistanti dalla perpendicolare *bn*: sulla prima di esse si prenda una parte qualsiasi *ci*; sulla successiva se ne prenda una quattro volte maggiore, *df*; una nove volte maggiore, *eh*; e così di seguito»...



c. ...«si conducano ora dai punti *i*, *f*, *h*, le rette *io*, *fg*, *hl*, equidistanti dalla medesima *eb*: le linee *hl*, *fg*, *io* saranno uguali, ad una ad una, alle linee *eb*, *db*, *cb*; e così pure le linee *bo*, *bg*, *bl* saranno eguali alle linee *ci*, *df*, *eh*»...



d. ...«i punti *i, f*, *h* si trovano su un'unica e medesima linea parabolica».

Home Cinema

…a quale distanza deve essere posto il proiettore affinché l'immagine che appare sullo schermo abbia la dimensione desiderata?

→ Il quesito completo a pag. 865

Al cinema il proiettore si trova a una certa altezza in fondo alla sala, in una posizione ottimale per illuminare bene il grande schermo su cui scorrono le immagini dei film. A casa è possibile ricreare un effetto cinematografico avendo a disposizione un ambiente abbastanza ampio, un telo bianco e un apparecchio ottico per la videoproiezione. A seconda della distanza alla quale si colloca il proiettore, le dimensioni dell'immagine riprodotta sullo schermo cambiano.
È facile notare che, allontanando lo strumento, l'immagine si ingrandisce, mentre avvicinandolo avviene il contrario.
Per semplicità, immaginiamo il proiettore come una sorgente luminosa puntiforme che illumina lo schermo attraverso un piccolo foro circolare e consideriamo il corrispondente cono di luce.
Indichiamo con x la distanza del proiettore dallo schermo e con A l'area della superficie circolare che vogliamo illuminare.
Considerata l'altezza del cono, se compiamo una qualunque sezione lungo tale direzione perpendicolare allo schermo, otteniamo un cerchio.
Il suo raggio varia al variare della distanza della sezione dalla sorgente. Assumiamo che il raggio di luce l abbia una pendenza p rispetto all'altezza. Indicato con r il raggio del cerchio illuminato sullo schermo, per la definizione di pendenza di una retta vale:

$$\frac{r}{x} = p \;\rightarrow\; x = \frac{r}{p}.$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri della relazione:

$$x^2 = \frac{r^2}{p^2}.$$

Essendo $A = \pi r^2$, si ha $r^2 = \dfrac{A}{\pi}$, e sostituendo possiamo scrivere:

$$x^2 = \frac{A}{\pi \cdot p^2}.$$

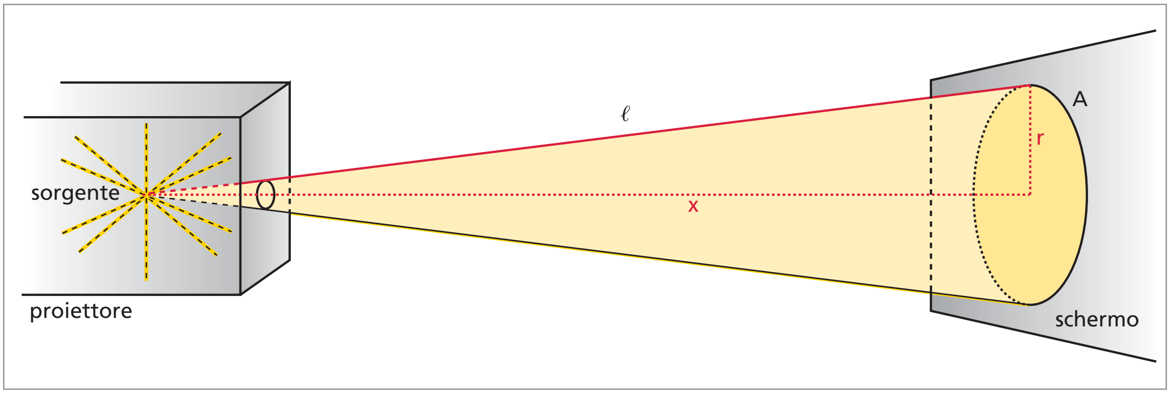
Poiché A e p sono costanti, si tratta di un'equazione di secondo grado pura in x.
La sua soluzione positiva indicherà a quale distanza bisogna porre la sorgente di luce dallo schermo per illuminare un cerchio di area A.
Se, per esempio, abbiamo un proiettore con $p = 0{,}2$ e vogliamo illuminare sullo schermo un cerchio di area $A = 2\ \text{m}^2$, risulta:

$$x^2 = \frac{2}{\pi \cdot 0{,}2^2} \rightarrow x^2 = \frac{50}{\pi}.$$

Risolvendo, accettiamo solo la soluzione positiva:

$$x = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \simeq 3{,}99.$$

In conclusione, dovremmo disporre il proiettore a una distanza di circa 4 m dallo schermo.
In generale, ci sono altri fattori da considerare per scegliere la posizione di un proiettore rispetto a uno schermo. Infatti, se da un lato allontanando il proiettore dal piano si ottiene il vantaggio di immagini più grandi, dall'altro si ha lo svantaggio di immagini meno luminose. La quantità di luce emessa è sempre la stessa: se questa si concentra in un'area piccola, lo schermo è più illuminato. Viceversa, man mano che ci si allontana, il fascio luminoso si distribuisce in superfici più ampie e la luce che raggiunge lo schermo è via via meno intensa.



LA TEORIA IN SINTESI
Le equazioni di secondo grado

1. Che cosa sono le equazioni di secondo grado

Un'**equazione di secondo grado** è riconducibile alla forma normale:

$ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$.

Sono presenti un termine di secondo grado (ax^2), uno di primo grado (bx) e un termine noto (c). Se entrambi i coefficienti b e c sono diversi da 0, l'equazione è **completa**, altrimenti è **spuria** se $b \neq 0$ e $c = 0$, **pura** se $b = 0$ e $c \neq 0$, **monomia** se $b = 0$ e $c = 0$.

ESEMPIO $4x^2 + 3x - 5 = 0$ è un'equazione di secondo grado completa;
$2x^2 = 0$ è monomia; $5x^2 - 3 = 0$ è pura; $7x^2 + x = 0$ è spuria.

2. La risoluzione di un'equazione di secondo grado

Il **discriminante** dell'equazione completa $ax^2 + bx + c = 0$ è $\Delta = b^2 - 4ac$.

SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO COMPLETE

SEGNO DEL DISCRIMINANTE	SOLUZIONI	ESEMPIO
$\Delta > 0$	due radici reali e distinte: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Delta = 4 + 3 \cdot 4 = 16$ $x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3$ $x_2 = \dfrac{2 - \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2-4}{2} = -1$
$\Delta = 0$	due radici reali e coincidenti: $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$	$4x^2 - 4x + 1 = 0$ $\Delta = 16 - 4 \cdot 4 = 0$ $x_1 = x_2 = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$
$\Delta < 0$	non esistono soluzioni reali	$2x^2 + 3x + 3 = 0$ $\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -15$

Se il coefficiente di x, cioè b, è divisibile per 2, per risolvere l'equazione si può applicare la **formula ridotta**.

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac; \quad x_1 = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}, \quad x_2 = \frac{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}.$$

SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO INCOMPLETE

TIPO DI EQUAZIONE	EQUAZIONE	SOLUZIONI	ESEMPIO
pura ($b = 0, c \neq 0$)	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{\dfrac{-c}{a}}; x_2 = -\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$ le radici sono reali solo se a e c sono discordi.	$6x^2 - 5 = 0$ $x_1 = \sqrt{\dfrac{5}{6}}; x_2 = -\sqrt{\dfrac{5}{6}}$

TIPO DI EQUAZIONE	EQUAZIONE	SOLUZIONI	ESEMPIO
spuria $(c = 0, b \neq 0)$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a}$	$4x^2 + 3x = 0$ $x_1 = 0; x_2 = -\frac{3}{4}$
monomia $(b = c = 0)$	$ax^2 = 0$	$x_1 = x_2 = 0$	$25x^2 = 0$ $x_1 = x_2 = 0$

3. Le relazioni fra le radici e i coefficienti di un'equazione di secondo grado

Se l'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ha come radici reali x_1 e x_2, posti $s = x_1 + x_2$ e $p = x_1 \cdot x_2$, si ha:

$$s = -\frac{b}{a}; \qquad p = \frac{c}{a}.$$

Pertanto l'equazione è equivalente a:

$$x^2 - sx + p = 0.$$

4. La regola di Cartesio

La **regola di Cartesio** permette di conoscere il segno delle radici senza calcolarle.
Se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha radici reali, a ogni **permanenza** nei segni dei coefficienti corrisponde una **radice negativa**, a ogni **variazione** una **radice positiva**.

ESEMPIO $2x^2 - 5x - 3 = 0$ presenta:
- una variazione $+\ -$ $(a = +2,\ b = -5)$, quindi una radice è positiva;
- una permanenza $-\ -$ $(b = -5, c = -3)$, quindi una radice è negativa.

5. La scomposizione di un trinomio di secondo grado

Dato il trinomio $ax^2 + bx + c$, se l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ ha soluzioni reali, tali soluzioni (x_1 e x_2) sono anche **zeri** del trinomio.

Il trinomio è:
- scomponibile in fattori se
  $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,
  $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$;
- irriducibile in $\mathbb{R}$ se $\Delta < 0$.

ESEMPIO
Il trinomio $4x^2 + 11x - 3$ ha l'equazione associata $4x^2 + 11x - 3 = 0$ con $\Delta = 169 > 0$.
Le radici dell'equazione sono $x_1 = \frac{1}{4}$ e $x_2 = -3$.
Questi valori sono anche gli zeri del trinomio che è scomponibile:

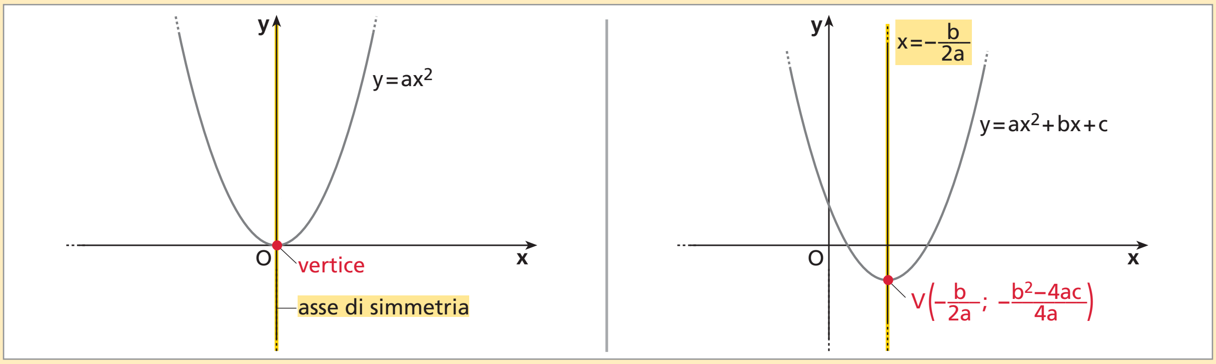
$$4x^2 + 11x - 3 = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)(x + 3).$$

6. Le equazioni parametriche

Un'**equazione parametrica** è un'equazione letterale in cui si richiede che il valore di una lettera, detta **parametro**, soddisfi una condizione.

7. La funzione quadratica e la parabola

Le funzioni quadratiche hanno per grafici delle parabole.



1. Che cosa sono le equazioni di secondo grado

Teoria a pag. 865

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 VERO O FALSO?

a) L'equazione di secondo grado $3x^2 - 5x = 7$ è in forma normale. V F

b) Nell'equazione $2x^2 + 9x = 0$ il termine noto è uguale a zero. V F

c) L'equazione $-4x^2 + \sqrt{3}x + 2 = 0$ è di secondo grado. V F

d) L'equazione, nell'incognita x, $(k-2)x^2 - (1-3k)x + 5 = 0$ ha il coefficiente della x uguale a $3k - 1$. V F

e) Se un'equazione di secondo grado è incompleta, il coefficiente di x e il termine noto sono entrambi nulli. V F

f) Le soluzioni di un'equazione di secondo grado possono essere al massimo due. V F

g) $x = -2$ è una soluzione dell'equazione $4x^2 + 5x - 6 = 0$. V F

TEST

2 È data l'equazione, nell'incognita y,

$3x^2 - 5xy - 8y^2 = 0$.

Qual è il termine noto?

A 0 B $3x^2$ C $-8y^2$ D $-5x$ E 3

3 Tra le seguenti equazioni, una sola è equivalente all'equazione $-3x^2 + 15x = 12$. Quale?

A $x^2 + 5x + 4 = 0$

B $x^2 - 5x = 12$

C $12x^2 - 12 = 0$

D $x^2 - 5x = 4$

E $x^2 - 5x + 4 = 0$

4 Quale delle seguenti affermazioni relative all'equazione seguente è *corretta*?

$2x^2 - 5x - 3 = 0$

A L'equazione è incompleta.

B Il termine noto è uguale a 3.

C L'insieme soluzione è $S = \left\{-\frac{1}{2}, -3\right\}$.

D Il coefficiente di x è uguale a -5.

E Le soluzioni dell'equazione sono due: -5 e -3.

5 L'equazione, nell'incognita x,

$4x^2 - (2k+3)x + 5 = 0$

è completa per ogni valore reale di k?

ESERCIZI

6 Sottolinea le equazioni di secondo grado, dopo averle ridotte tutte in forma normale.

$x = x^2$; $\quad x^2 = 1$; $\quad x^3 = 0$; $\quad x^2 - 2x = 0$; $\quad \sqrt{2}x^2 - 2 = 0$; $\quad 3x^2 - x + 1 = 0$; $\quad 2x - 1 = x(x-1)$;

$4x(x^2+1) = 2x + 4x^3$; $\quad x(x^2-1) - x^2 = 0$; $\quad (x-1)^2 = 0$; $\quad 2^3x + 3^2 = x^2$.

7 Sottolinea le equazioni di secondo grado nell'incognita x.

$kx^2 = 0$; $\quad ax^2 - 1 = 0$; $\quad a^2x - 5 = 0$; $\quad x - a^2 = 0$; $\quad 2a^2x - b^2 = 0$; $\quad x - a^3 + b^3 = 0$;

$a^2x + b = 0$; $\quad kx^2 - \sqrt{3} = 0$.

8 Sottolinea le equazioni di secondo grado nell'incognita y.

$2a - 3y^2 + 1 = 0$; $\quad x - y^2 = 0$; $\quad y^2 - 2xy + 2 = 0$; $\quad x^2 + y - 1 = 0$; $\quad k^2 - 3y = 0$; $\quad k - 3y^2 = 0$.

Nelle seguenti equazioni di secondo grado, scritte in forma normale a meno dell'ordine, individua e scrivi il primo coefficiente a, il secondo coefficiente b e il termine noto c.
Per esempio, se l'equazione è $2 - x + 3x^2$, si ha $a = 3$, $b = -1$, $c = 2$.

9 $-x^2 + 2x + 3 = 0;$ $\quad -x^2 + 1 = 0;$ $\quad 2x - 3x^2 = 0.$

10 $1 - 5x^2 = 0;$ $\quad 2 + 7x^2 - 3x = 0;$ $\quad 4x^2 - 3x + 2 = 0.$

11 $-\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0;$ $\quad \frac{x^2}{5} + 3x - \frac{1}{2} = 0;$ $\quad -x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{6} = 0.$

12 $\frac{2x^2 - 5}{4} = 0;$ $\quad (1 + \sqrt{2})x^2 - x + \sqrt{2} = 0;$ $\quad x + 2 + \sqrt{3}x^2 + \sqrt{3} = 0.$

Nelle seguenti equazioni di secondo grado nell'incognita x, scritte in forma normale a meno dell'ordine, i coefficienti sono letterali. Riconosci e scrivi i coefficienti.
Per evitare confusione, considera la forma normale con i coefficienti indicati da lettere maiuscole: $Ax^2 + Bx + C = 0$.
Per esempio, se l'equazione è $(a - b)x^2 - 3b + (a + b)x = 0$, si ha $A = a - b$, $B = a + b$, $C = -3b$.

13 $ax^2 - 2a^3 - 2a^2b = 0;$ $\quad ax^2 + 2ax - 1 = 0;$ $\quad bx^2 - \sqrt{2}ax + ab = 0.$

14 $(a^2 - b^2)x^2 - x(a - b) = 0;$ $\quad 3k^2x^2 - 4(2k - 1)x + 5k = 0;$ $\quad 2(3k + 1)x^2 - 2(k - 2)x + k^2 - 4 = 0.$

Riduci in forma normale le seguenti equazioni nell'incognita x; verifica quindi che siano di secondo grado e scrivine i coefficienti.

15 $x(x - 2) + x^2 - 2x + 6 = 3x^2$

16 $4x(1 - x) - 2(x - 1)(x + 1) = 2x$

17 $(\sqrt{3} + 1)(x - 3) = x(x - \sqrt{3})$

18 $ax^2 + 2ax - x^2 = x$

19 $2bx - x^2 + b = 1 - 4x^2$

20 $\sqrt{2}x^2 + ax - 2x^2 + 3 = x - a$

21 $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 2ax^2 + ax + a^2x = 0$

22 $ax(x - 2a) - 3a(x^2 - 2) = x^2$

Per ogni terna di coefficienti a, b, c, scrivi l'equazione di secondo grado corrispondente, nell'incognita x, in forma normale. Per esempio, se $a = 3$, $b = -1$, $c = 2$, l'equazione corrispondente è $3x^2 - x + 2 = 0$.

23 $a = 1 \quad b = -1 \quad c = -2;$ $\quad a = 2 \quad b = 3 \quad c = -20;$ $\quad a = 1 \quad b = \frac{13}{6} \quad c = 1.$

24 $a = 5 \quad b = 0 \quad c = 9;$ $\quad a = 2 \quad b = 0 \quad c = 0;$ $\quad a = 2k \quad b = -k - 2 \quad c = 1.$

25 Indica, per ognuna delle seguenti equazioni nell'incognita x, se l'equazione è completa, spuria, pura o monomia.

a) $ax^2 + a - 2ax = 0;$
b) $9x^2 + 2x = 0;$
c) $2x^2 = 8;$
d) $x^2 + 6x = -2;$
e) $2x^2 + 4x + \sqrt{3} = 0;$
f) $kx^2 + 2x + k = 0;$
g) $ax^2 + 4ax = 0;$
h) $(\sqrt{3} + 1)x^2 = 0;$
i) $x^2 + \sqrt{2}x^2 - 2 = 0.$

Le soluzioni

26 Indica quali di questi valori sono soluzioni dell'equazione nell'incognita x scritta a fianco.

$\frac{1}{2}, 2, -1, 0;$ $\quad 4x^2 - 8x = 0.$

$a, -a, 2a, 0;$ $\quad x^2 - 3ax + 2a^2 = 0.$

$2, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3};$ $\quad 9x^2 - 6x + 1 = 0.$

COMPLETA le seguenti equazioni che hanno per soluzioni i valori indicati a fianco, inserendo un numero al posto dei puntini.

27 $3x^2 + \dots x = 0, \quad 0 \text{ e } -3.$

28 $\dots x^2 - \frac{2}{3}x = 0, \quad 0 \text{ e } \frac{3}{4}.$

29 $9x^2 + \dots x - 4 = 0, \quad \pm\frac{2}{3}.$

30 $\dots x^2 - 9 = 0, \quad \pm\frac{3}{5}.$

31 $5x^2 - \dots = 0, \quad \pm 2.$

32 $\dots x^2 - 1 = 0, \quad \pm 2.$

2. La risoluzione di un'equazione di secondo grado

Teoria a pag. 867

RIFLETTI SULLA TEORIA

33 **VERO O FALSO?**

a) La formula risolutiva di un'equazione completa di secondo grado non è valida per risolvere l'equazione $5x^2 - 9 = 0$. V F

b) Il discriminante di un'equazione spuria è positivo. V F

c) L'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ammette due soluzioni reali e coincidenti, se il primo membro è il quadrato di un binomio. V F

d) Se le soluzioni di un'equazione di secondo grado sono entrambe negative, il discriminante Δ è negativo. V F

e) Si applica la formula ridotta quando il coefficiente b dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ è positivo. V F

34 **TEST** Mediante la formula

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+32}}{4},$$

quale delle seguenti equazioni risolvi?

A $2x^2 + 3x + 4 = 0$

B $x^2 - 3x + 32 = 0$

C $4x^2 - 3x - 2 = 0$

D $2x^2 - 3x - 16 = 0$

E $2x^2 - 3x - 4 = 0$

35 Quanto vale il Δ delle equazioni $2x^2 - 7 = 0$ e $x^2 + 9 = 0$? In generale, il discriminante di un'equazione pura può essere nullo?

ESERCIZI

Il discriminante

Nel sito: ► 8 esercizi di recupero

In ognuno degli esercizi seguenti sostituisci nella formula $\Delta = b^2 - 4ac$ i valori indicati e calcola il risultato.

36 $a = -2$; $b = -3$; $c = 0$. $[9]$

37 $a = 1$; $b = -\sqrt{2}$; $c = 3$. $[-10]$

38 $a = 2$; $b = 0$; $c = -5$. $[40]$

39 $a = 1$; $b = -3k$; $c = 2k^2$. $[k^2]$

40 $a = k$; $b = -k - 1$; $c = 1$. $[(k-1)^2]$

41 $a = \sqrt{3} - 1$; $b = 2\sqrt{3}$; $c = \sqrt{3} + 1$. $[4]$

Date le seguenti equazioni, calcola Δ e indica se le soluzioni sono reali.

42 $3x^2 - x + 1 = 0$ $[-11]$

43 $2x^2 + 3x - 2 = 0$ $[25]$

44 $\frac{1}{4}x^2 + 2x - 12 = 0$ $[16]$

45 $4x^2 - 12x + 9 = 0$ $[0]$

46 Senza calcolare le soluzioni, indica se le seguenti equazioni ammettono soluzioni reali e distinte, soluzioni reali coincidenti o non ammettono soluzioni reali.

$x^2 = 3 - 2x$; $3x^2 - 2x + 1 = 0$; $4x^2 + 25 - 20x = 0$;

$\frac{1}{2}x^2 + 9 + 3x = 0$; $2x^2 + 3x - 2 = 0$; $6x^2 + 2 = 3x$.

47 COMPLETA la seguente tabella.

EQUAZIONE	a	b	c	Δ
$2x^2 + 3x - 1 = 0$	…	…	…	…
$\dots x^2 \dots x \dots = 0$	2	-2	1	…
$x^2 \dots x \dots = 0$	…	3	…	5
$\dots x^2 \dots x + 4 = 0$	…	1	…	17
$x^2 + 16 = 0$	…	…	…	…

Le equazioni numeriche intere

Nel sito: ► 9 esercizi di recupero

Le equazioni complete

ESERCIZIO GUIDA

48 Risolviamo le seguenti equazioni:

a) $10x^2 - 2 = x$; b) $49x^2 + 126x + 81 = 0$; c) $x^2 - 2x + 2 = 0$.

a) $10x^2 - 2 = x$.

Scriviamo l'equazione in forma normale:

$10x^2 - x - 2 = 0$.

Calcoliamo il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-2) = 1 + 80 = 81$.

Poiché $\boldsymbol{\Delta > 0}$, l'equazione ha due soluzioni reali distinte.

Usiamo la formula risolutiva

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}:$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot (10)} = \begin{cases} \dfrac{1+9}{20} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1-9}{20} = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{2}{5}.$$

b) $49x^2 + 126x + 81 = 0$.

L'equazione è già in forma normale.

$$\Delta = (126)^2 - 4 \cdot 49 \cdot 81 = 15\,876 - 15\,876 = 0.$$

Poiché $\boldsymbol{\Delta = 0}$, l'equazione ha due soluzioni reali coincidenti.

Calcoliamo le soluzioni con la formula $x = -\dfrac{b}{2a}$:

$$x = \frac{-126}{2 \cdot (49)} = -\frac{63}{49} = -\frac{9}{7}.$$

Le soluzioni coincidenti sono:

$$x_1 = x_2 = -\frac{9}{7}.$$

c) $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Scriviamo i coefficienti:

$$a = 1; \quad b = -2; \quad c = 2.$$

Calcoliamo il discriminante:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (2) = -4.$$

Poiché $\boldsymbol{\Delta < 0}$, l'equazione non ha radici reali.

Risolvi le seguenti equazioni.

49 $6x^2 + 13x + 7 = 0$ $\left[-1, -\dfrac{7}{6}\right]$

50 $4x^2 - 8x + 3 = 0$ $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$

51 $x^2 - 2x - 3 = 0$ $[-1, 3]$

52 $9x^2 - 12x + 4 = 0$ $\left[\dfrac{2}{3} \text{ doppia}\right]$

53 $x^2 + 3x - 10 = 0$; $12x^2 + x - 6 = 0$. $\left[-5, 2; -\dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{3}\right]$

54 $2x^2 - 3x + 20 = 0$; $6x^2 + 13x + 8 = 0$. [impossibile; impossibile]

55 $x^2 - 4x - 32 = 0$; $x^2 + x + \dfrac{2}{9} = 0$. $\left[-4, 8; -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right]$

56 $x^2 + 3x - 4 = 0$; $x^2 - \dfrac{5}{3}x + \dfrac{25}{36} = 0$. $\left[-4, 1; \dfrac{5}{6} \text{ doppia}\right]$

57 $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x^2 - 9x + 33 = 0$. [1, 2; impossibile]

58 $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$; $x^2 - 4\sqrt{3}x - 36 = 0$. $[-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}; -2\sqrt{3}, 6\sqrt{3}]$

59 $x^2 - 4\sqrt{2}x + 6 = 0$; $x^2 - \sqrt{5}x + 2 = 0$. $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}; \text{impossibile}]$

60 $5x^2 - 12x + 9 = 0$; $x^2 - 7x + \dfrac{45}{4} = 0$. $\left[\text{impossibile}; \dfrac{5}{2}, \dfrac{9}{2}\right]$

61 $\dfrac{1}{18} + \dfrac{3}{4}x + x^2 = 0$; $x(x-9) = \dfrac{19}{4}$. $\left[-\dfrac{1}{12}, -\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{2}, \dfrac{19}{2}\right]$

62 $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$; $\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ doppia; impossibile}\right]$

63 $21x^2 - 10x + 1 = 0$; $x^2 - 6x - 16 = 0$. $\left[\frac{1}{7}, \frac{1}{3}; -2, 8\right]$

64 $18x^2 - 21x - 4 = 0$; $2x^2 - 13x - 7 = 0$. $\left[-\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; -\frac{1}{2}, 7\right]$

65 $3x^2 = 5 + 14x$; $4x(3x+1) = 5$. $\left[-\frac{1}{3}, 5; -\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right]$

66 $x(2x+13) = 24$; $x^2 = 4(x+3)$. $\left[-8, \frac{3}{2}; -2, 6\right]$

67 **ASSOCIA** a ogni equazione le sue soluzioni.

1. $x^2 - x - 12 = 0$	**A.** $3; -4$.
2. $x^2 + x - 12 = 0$	**B.** $4; 4$.
3. $-x^2 - 4x + 12 = 0$	**C.** $-3; 4$.
4. $x^2 - 8x + 16 = 0$	**D.** $2; -6$.

La formula ridotta

ESERCIZIO GUIDA

68 Risolviamo l'equazione: $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Scriviamo i coefficienti: $a = 1$, $b = 6$, $c = -7$.

Poiché b è **pari**, possiamo utilizzare la formula ridotta:

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}.$$

$$\frac{b}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 3^2 - (1)\cdot(-7) = 9 + 7 = 16$$

Poiché $\frac{\Delta}{4} > 0$, l'equazione ha due soluzioni reali distinte.

Calcoliamo le due soluzioni con la formula ridotta:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{16}}{1} = \begin{cases} -3 + 4 = +1 \\ -3 - 4 = -7 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $x_1 = 1$ e $x_2 = -7$.

Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado, applicando la formula ridotta.

69 $x^2 + 8x - 9 = 0$ $[-9; 1]$

70 $10y^2 + 8y + 5 = 0$ [impossibile]

71 $24t + 13 - 4t^2 = 0$ $\left[-\frac{1}{2}; \frac{13}{2}\right]$

72 $9 + 16x^2 + 24x = 0$ $\left[-\frac{3}{4} \text{ doppia}\right]$

73 $3x^2 + 2\sqrt{3}x - 3 = 0$ $\left[-\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

74 $x^2 = \frac{1}{3}(2x + 1)$ $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$

75 $-16x^2 + 40x - 25 = 0$ $\left[\frac{5}{4} \text{ doppia}\right]$

76 $\frac{7}{4} - 3t - t^2 = 0$ $\left[-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right]$

77 $\frac{2x}{3} - \left(\frac{5}{4} - x^2\right) = 0$ $\left[-\frac{3}{2}; \frac{5}{6}\right]$

78 $\frac{5}{2}x + 6 \cdot \frac{11}{25} - x^2 = 0$ $\left[-\frac{4}{5}; \frac{33}{10}\right]$

79 $x^2 - 14x + 24 = 0$ $[2; 12]$

80 $3x^2 + 4x - 4 = 0$ $\left[\frac{2}{3}; -2\right]$

Equazioni il cui discriminante è riconducibile a un quadrato di binomio

ESERCIZIO GUIDA

81 Risolviamo l'equazione:

$$3x^2 - 4\sqrt{3}x + 2x + 3 - 2\sqrt{3} = 0.$$

Riduciamo in forma normale:

$$3x^2 - (4\sqrt{3} - 2)x + 3 - 2\sqrt{3} = 0$$

$$3x^2 - 2(2\sqrt{3} - 1)x + 3 - 2\sqrt{3} = 0.$$

Scriviamo i coefficienti:

$a = 3$; $\quad b = -2(2\sqrt{3} - 1)$; $\quad c = 3 - 2\sqrt{3}$.

Poiché b è divisibile per 2, possiamo applicare la formula ridotta.

Calcoliamo $\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$:

$$\frac{\Delta}{4} = [-(2\sqrt{3} - 1)]^2 - 3 \cdot (3 - 2\sqrt{3}) = 12 + 1 - 4\sqrt{3} - 9 + 6\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}.$$

Possiamo considerare $2\sqrt{3}$ come doppio prodotto: $2\sqrt{3} = 2 \cdot (1 \cdot \sqrt{3})$.
Allora $4 + 2\sqrt{3}$ può derivare dal quadrato di $1 + \sqrt{3}$. Proviamo:

$$(1 + \sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}, \quad \text{pertanto} \quad \frac{\Delta}{4} = (1 + \sqrt{3})^2 > 0.$$

Calcoliamo le soluzioni dell'equazione di partenza con la formula ridotta:

$$x = \frac{2\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2}}{3} = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{3} - 1 + 1 + \sqrt{3}}{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \\[2ex] \dfrac{2\sqrt{3} - 1 - 1 - \sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3} - 2}{3} \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

$$x_1 = \sqrt{3}; \quad x_2 = \frac{\sqrt{3} - 2}{3}.$$

Risolvi le seguenti equazioni.

82 $x^2 + 2x - 2\sqrt{2} - 2 = 0$ $\quad [-2 - \sqrt{2}; \sqrt{2}]$

83 $2x^2 - 4x - 1 + 2\sqrt{2} = 0$ $\quad \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{4 - \sqrt{2}}{2}\right]$

84 $x^2 - x = \sqrt{3} \cdot (x - 1)$ $\quad [1; \sqrt{3}]$

85 $x^2 - 2\sqrt{3}x - 2 - 2\sqrt{6} = 0$ $\quad [-\sqrt{2}; 2\sqrt{3} + \sqrt{2}]$

86 $x(x - 2) = 4\sqrt{3}(2 - x)$ $\quad [-4\sqrt{3}; 2]$

87 $x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(x + 3) - \frac{5}{2} = 0$ $\quad \left[\sqrt{3} + 1; -\frac{\sqrt{3} + 2}{2}\right]$

88 $2x(2x + 3) + \sqrt{7}\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{7}{2} = 0$ $\quad \left[-\frac{\sqrt{7} + 3}{2}; \frac{\sqrt{7}}{4}\right]$

89 $x\left(5x + \frac{7}{3}\right) - \frac{\sqrt{6}}{3}(8x + 1) + \frac{4}{3} = 0$ $\quad \left[\frac{\sqrt{6} - 2}{3}; \frac{\sqrt{6} + 1}{5}\right]$

90 $\sqrt{2}\,x^2 + (\sqrt{2} - 2)\,x - 2 = 0$ $[\sqrt{2}; -1]$

91 $x^2 - x - \sqrt{5}(1 - x) = 0$ $[1; -\sqrt{5}]$

92 $3x(x-1) + \sqrt{6}x = \sqrt{6}$ $\left[-\frac{\sqrt{6}}{3}; 1\right]$

93 $\sqrt{5}x^2 + \sqrt{3} = -(1 + \sqrt{15})x$ $\left[-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$

94 $\sqrt{3}x^2 + (1 - 2\sqrt{3})x - 2 = 0$ $\left[2; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

95 $x^2 - (2\sqrt{2} + \sqrt{3})x + 2\sqrt{6} = 0$ $[2\sqrt{2}; \sqrt{3}]$

Le equazioni incomplete

ESERCIZIO GUIDA

96 Risolviamo le seguenti equazioni:

a) $2x^2 - 1 = 0$;
b) $x^2 + 1 = 0$;
c) $8x^2 - 7x = 0$;
d) $64x^2 = 0$.

a) Equazione **pura**:

$$2x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2}.$$

Estraiamo la radice quadrata:

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Le soluzioni sono: $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Equazione **pura**:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = -1.$$

Non esiste un numero reale che, elevato al quadrato, dia un numero negativo, quindi l'equazione non ha radici reali.

c) Equazione **spuria**:

$$8x^2 - 7x = 0.$$

Raccogliamo x:

$$x(8x - 7) = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto:

$$x = 0 \quad \text{oppure} \quad 8x - 7 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{7}{8}.$$

Le soluzioni dell'equazione sono $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{7}{8}$.

d) Equazione **monomia**:

$$64x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2 = 0.$$

Risolvi le seguenti equazioni.

97 $2 - x^2 = 0$; $\quad \frac{1}{3}x^2 - 2x = 0$; $\quad 9x^2 = 0$. $[\pm\sqrt{2}; 0{,}6; 0 \text{ doppia}]$

98 $7x - 5x^2 = 0$; $\quad 4 + 3x^2 = 0$; $\quad 25 = 9x^2$. $\left[0, \frac{7}{5}; \text{impossibile}; \pm\frac{5}{3}\right]$

99 $\frac{1}{2}x^2 = 0$; $\quad 1 - x^2 = 0$; $\quad 9x^2 - 12x = 0$. $\left[0 \text{ doppia}; \pm 1; 0, \frac{4}{3}\right]$

100 $-3x^2 = -12$; $\quad \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{5}x$; $\quad \frac{1}{2}x^2 - 18 = 0$. $\left[\pm 2; 0, \frac{4}{5}; \pm 6\right]$

101 $-4x^2 = 36$; $\quad 2x^2 - \frac{8}{3}x = 0$; $\quad 4 - x^2 = 0$. $\left[\text{impossibile}; 0, \frac{4}{3}; \pm 2\right]$

102 $3x^2\sqrt{5} = 0$; $\quad 16x^2 = 1$; $\quad -3x^2 + 6x = 0$. $\left[0 \text{ doppia}; \pm\frac{1}{4}; 0{,}2\right]$

103 $4x^2 - 2\sqrt{2} = 0$ $\left[\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right]$

104 $2x^2 + 1 = 0$ [impossibile]

105 $\sqrt{2}x^2 - 2 = 0$ $[\pm\sqrt[4]{2}]$

106 $x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{2}x = 0$ $[0, \sqrt{3} - \sqrt{2}]$

107 $2x^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{3}x = 0$ $\left[0, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right]$

108 $(x+7)^2 + (x-7)^2 = 98$ [0 doppia]

109 $6x - \sqrt{3}x^2 + 3x = 0$ $[0, 3\sqrt{3}]$

110 $\sqrt{5}x^2 + x^2 - \sqrt{5}x = 0$ $\left[0, \frac{5-\sqrt{5}}{4}\right]$

111 $(2x+3)^2 = (x-3)^2$ $[-6, 0]$

112 $x^2 - x = 23x - \sqrt{3}x^2$ $[0, 12(\sqrt{3}-1)]$

113 $x^2 - 2\sqrt{2}x = 0$ $[0, 2\sqrt{2}]$

114 $(x+4)^2 + 1 = 8x$ [impossibile]

115 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - x(2x-1) = 0$ $\left[\pm\frac{1}{2}\right]$

116 $3x^2 + 8 - 5\sqrt{2} = 0$ [impossibile]

117 $\frac{3}{2}x + \frac{5-x}{12} = \frac{(2x-1)5}{6} - \frac{x(x+1)}{4}$ [impossibile]

118 $\frac{5}{3}(2x-3)(x+1) = 10x - 5$ $\left[0, \frac{7}{2}\right]$

119 $3x^2 + \frac{3}{2} - \frac{x+2}{2} = \frac{3-x}{2} - (1+x^2)$ [0 doppia]

120 $\sqrt{5}(x^2-1) + 1 = x^2$ $[\pm 1]$

121 $11x + (x-2)^2 + (2x+1)(x-3) = (x+1)^2 - 14$ [impossibile]

122 $(x-3)(x+3) = 3x(x-1) + 3x - 9$ [0 doppia]

123 $x(x+3) + 1 = (1+x)^2 - 2x\left(1 + \frac{1}{2}x\right)$ $[-3, 0]$

124 $3x + (4x-1)^2 = (x-4)^2 - 3(5-x)$ [0 doppia]

Risolvi le seguenti equazioni come equazioni pure, eseguendo un'opportuna sostituzione.

125 $(3x-5)^2 = 16$ (poni $3x - 5 = y$). $\left[3, \frac{1}{3}\right]$

126 $(x+7)^2 = 9$; $4\left(2x - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$. $\left[-4, -10; \frac{3}{10}, -\frac{1}{10}\right]$

127 $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}$; $(3x - 2\sqrt{3})^2 = 12$. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}; 0, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$

128 $(\sqrt{2}x - 1)^2 - 32 = 0$; $\left(-5x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$. $\left[\frac{8+\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}-8}{2}; -\frac{1}{5}, -\frac{1}{15}\right]$

RIEPILOGO LE EQUAZIONI NUMERICHE INTERE

TEST

129 L'equazione $5x^2 - 2x + 1 = 0$:

A ha come soluzioni $x = -\frac{1}{5}, x = \frac{3}{5}$.

B ha come soluzioni $x = -\frac{3}{5}, x = \frac{1}{5}$.

C non ha soluzioni reali.

D è un'equazione incompleta.

E ha due soluzioni reali e coincidenti.

130 Esamina le tre equazioni:

1. $2x^2 + 5x = 0$; **2.** $7x^2 = 0$; **3.** $\sqrt{3}x^2 = 0$.

Quali di esse sono fra loro equivalenti?

A Tutte e tre.

B 1 e 2

C 1 e 3

D 2 e 3

E Nessuna è equivalente alle altre.

131 Le due equazioni $3x^2 - 9 = 0$ e $3x^2 + 9 = 0$ hanno:

A una sola soluzione uguale.

B le stesse soluzioni.

C soluzioni non reali.

D la prima due soluzioni, la seconda nessuna reale.

E soluzioni reciproche.

132 Le affermazioni che seguono si riferiscono all'equazione $2x^2 + 3x = 0$. Quale è *falsa*?

A È un'equazione incompleta.

B Ha discriminante positivo.

C Ha una soluzione negativa.

D Ha due soluzioni reali e distinte.

E Ha come soluzioni $x = 0, x = \frac{3}{2}$.

133 Quale delle seguenti equazioni ha come radici 2 e 3?

A $x^2 + 5x + 6 = 0$

B $x^2 - 5x - 6 = 0$

C $x^2 - 5x + 6 = 0$

D $x^2 - 5x = 0$

E $x^2 - 6 = 0$

134 CACCIA ALL'ERRORE Trova gli errori commessi nel risolvere le seguenti equazioni.

a) $x^2 + 16 = 0 \rightarrow x^2 = -16 \rightarrow x = \pm 4$.

b) $4x(x-1) = 0 \rightarrow x = -4,\ x = 1$.

c) $(x-6)(x-3) = 1 \rightarrow$

$\rightarrow x - 6 = 1 \vee x - 3 = 1 \rightarrow x = 7 \vee x = 4$.

d) $-9x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$.

Risolvi le seguenti equazioni.

135 $2x^2 - 5x - 3 = 0$ $\left[-\frac{1}{2}; 3\right]$

136 $4x^2 - 4x + 1 = 0$ $\left[\frac{1}{2}\text{ doppia}\right]$

137 $x^2 - x + 2 = 0$ [impossibile]

138 $x^2 + 5x + 6 = 0$ $[-3; -2]$

139 $x^2 + 5x + 7 = 0$ [impossibile]

140 $x^2 - 5\sqrt{2}\,x + 12 = 0$ $[2\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$

141 $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0$ $\left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right]$

142 $20x^2 - 41x + 20 = 0$ $\left[\frac{4}{5}; \frac{5}{4}\right]$

143 $x^2 + \frac{8}{5}x + \frac{16}{25} = 0$ $\left[-\frac{4}{5}\text{ doppia}\right]$

144 $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$

145 $x^2 + 3\sqrt{3}\,x + 6 = 0$ $[-2\sqrt{3}; -\sqrt{3}]$

146 $2x^2 - 3\sqrt{2}x - 4 = 0$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\sqrt{2}\right]$

147 $x^2 = 4(x-1)$ [2 doppia]

148 $x^2 = \frac{5(x\sqrt{5}-1)}{4}$ $\left[\frac{\sqrt{5}}{4}; \sqrt{5}\right]$

149 $6x^2 - 6x = 2(1-2x) - 2 - x(2-x)$ [0 doppia]

150 $2(3x-1)^2 - 3x(5x+1) = 2 - 3x$ [0; 4]

151 $\frac{2x}{\sqrt{3}} - x^2 - \frac{1}{3} = 0$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ doppia}\right]$

152 $(5x-1)x + (x-1)(x+1) = 0$ $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$

153 $x(x+2) + 9 = 8x + 1$ [2; 4]

154 $(2x+1)^2 - x^2 - (x-1)^2 = (2x+3)(2x-3) + 1$ $[-1; 4]$

155 $(2-3x)(x-2) + 3(x-1)^2 = (x-1)(x+3)$ $[\pm\sqrt{2}]$

156 $(1-x)^2 = 2x + \frac{x^2 - 3x + 7}{2}$ $\left[\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}\right]$

157 $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x(x+2) - 5x + \frac{1}{6} = \frac{x}{3}(x-5)$ $[5 \pm 2\sqrt{6}]$

158 $(2-3x)^2 - (2x+1)^2 = 4(2-4x)$ $[\pm 1]$

159 $x - (2x-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3-x}{2} - (3x-1)(x-2)$ $\left[0; -\frac{3}{2}\right]$

160 $(3x-4)^2 - 3x^2 = 2(8+13x)$ $\left[0; \frac{25}{3}\right]$

161 $x(x+2\sqrt{2}) + 2\sqrt{3}x(1+\sqrt{2}) = 2x(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ $[0; -2\sqrt{6}]$

162 $\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right) - 2x(x-1) = 2\left(x-\frac{2}{3}\right)$ $\left[\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$

163 $x(1-5x) + 3 = [5-(2+5x)]x - 2(x+1) - (x^2-6)$ $[\pm 1]$

164 $2(x^2+2) - 2(x+3)(x-3) - 4 = 7x^2 - (3x+4)^2 + 34$ $[0; -12]$

165 $2x(x-5) - (2x-3)(x+1) = x(2-x) - 15$ [2; 9]

166 $(x+3)(3x-1) - 2[2x^2 - x(x-2)] + 6 = 0$ $[-3; -1]$

167 $x(x-1)(x-2) - (x+2)(x^2-4) + 2(x+20) = 0$ $\left[-\frac{12}{5}; 4\right]$

168 $(x-3)^2 + 6(x+2) = (2x-1)(x+4) + 37$ $[-3; -4]$

169 $(x-4)(x+8) + 20 = 0$ $[-6; 2]$

170 $x(4-x) - (5-x)(x+5) = x(x+1)$ [impossibile]

171 $(x+3)(2x-1) - 3[2x^2 + x(x-6)] = 13$ $\left[1; \frac{16}{7}\right]$

172 $(x+2)^3-(x-2)^3=1+(4x+1)(4x-1)$ $[\pm 2]$

173 $(x-6)(x+1)-(2-x)(x+3)=36$ $[-4; 6]$

174 $\frac{x}{2}(2x+\sqrt{3})+\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}=0$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ doppia}\right]$

175 $x\left(\frac{x-1}{2}\right)=\frac{2}{3}(3-x)+\frac{1}{3}$ $\left[2; -\frac{7}{3}\right]$

176 $2(x-1)-\frac{5}{4}x=\frac{3-5x}{4}-2\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2$ $\left[\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

177 $\frac{(3x-1)(3x+2)}{2}-(x-4)^2+3(1+x)=\frac{-6x+10}{2}$ $\left[-\frac{38}{7}; 1\right]$

178 $\frac{2(3x+10)}{6}-x^2=\frac{3x+1}{3}$ $[\pm\sqrt{3}]$

BRAVI SI DIVENTA ► E38

179 $\frac{2x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+2x=(2x-1)(1+\sqrt{3}x)-\frac{6}{\sqrt{3}}$

180 $\frac{6-3x}{5}+\frac{x^2+2}{15}-x=\frac{4-x^2}{3}$ $[0; 4]$

181 $\frac{(x-2)(x+2)}{3}+\frac{11}{9}=-\frac{4-2x}{9}$ [impossibile]

182 $(x-1)^3=x^2(x-1)-(x+3)(x-2)-19$ $[-2; 6]$

183 $(x+1)[2(3x-1)-(4+5x)]=2(x-1)(x+2)+4$ $[-6; -1]$

184 $\frac{1}{2}(x-4)^2+\frac{1}{3}(x-6)=\frac{2}{3}$ $\left[2; \frac{16}{3}\right]$

185 $(x-2)(x^2+2x+4)+(x-5)^2=x^2(x-1)$ [impossibile]

186 $(x^2-x)(x^2+x)=(x^2-3)^2+2x+42$ $\left[-3; \frac{17}{5}\right]$

187 $3x(x-2)-2x(2x-3)=(3-x)(x-1)-6-(2x-3)^2+18$ $[0; 4]$

188 $(3x+1)(x+3)=\frac{1}{3}(1-x)(7x+9)$ $[-2; 0]$

189 $2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)=3(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)+2$ $[-5; 0]$

190 $\frac{2x}{15}+\frac{x^2+x}{6}=\frac{(x+2)(x+1)}{10}$ $[\pm\sqrt{3}]$

191 $(4-3x)^2-(x+2)(2x+3)-6=1-x(1+x)-18x-12x$ [impossibile]

192 $\left(\frac{2x-3}{4}+\frac{x-5}{2}\right)\left(x-\frac{3-x}{2}\right)=x^2-\frac{x+4}{2}+\frac{55-3x}{8}$ $[0; 11]$

193 $\frac{2}{3}\left(\frac{6+x}{2}-\frac{x-3}{4}\right)=\frac{(x-2)^2}{12}-\frac{x}{3}+\frac{1}{6}$ $[-2; 12]$

194 $\frac{1}{3}(5x-3)(2+x)-x\left(\frac{x}{3}-1\right)=\frac{1}{2}(x+3)(2-3x)$ $\left[-3; \frac{10}{17}\right]$

195 $\frac{(2-x)(3x-1)}{6}-\frac{x}{4}+\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2=\frac{2(3-x)x}{3}+\frac{1}{3}x-\frac{5x-13}{12}$ $[\pm 1]$

196 $(x-2)(x+3)+\frac{(x+1)^3-(x-2)^3}{4}=\frac{x^2-4}{2}-\frac{x+7-3x^2}{4}$ $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

197 $\frac{x+\sqrt{2}}{2}-\frac{x^2-2+\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}$ $[0; \sqrt{2}+1]$

198 $(\sqrt{3}x-1)^2-\sqrt{3}(\sqrt{6}x+1)=x(\sqrt{3}+x)-\sqrt{3}(1+\sqrt{6}x)$ $\left[\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{19}}{4}\right]$

199 $(x-1)^3+\frac{3}{2}[x(x+6)+1]=(2+x)^3$ [impossibile]

Le equazioni numeriche fratte

Nel sito: ► 8 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

200 Risolviamo l'equazione:

$$\frac{3x-2}{x-1}=\frac{x}{x+1}-3-\frac{2x}{1-x^2}.$$

Scriviamo le condizioni di esistenza:

$x-1\neq 0 \quad \rightarrow \quad x\neq 1;$

$x+1\neq 0 \quad \rightarrow \quad x\neq -1;$

$1-x^2\neq 0 \quad \rightarrow \quad (1-x)(1+x)\neq 0 \quad \rightarrow \quad x\neq 1 \wedge x\neq -1.$

C.E.: $x\neq 1 \wedge x\neq -1$.

Riduciamo i due membri allo stesso denominatore:

$$\frac{(3x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x(x-1)-3(x^2-1)+2x}{(x-1)(x+1)}.$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per il denominatore comune e riduciamo a forma normale:

$$(3x-2)(x+1)=x(x-1)-3(x^2-1)+2x$$

$$\underline{3x^2}+\underline{3x}\,\underline{-2x}-2=\underline{x^2}\,\underline{-x}\,\underline{-3x^2}+3\,\underline{+2x} \quad \rightarrow \quad 5x^2-5=0.$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado incompleta:

$$x^2-1=0 \quad \rightarrow \quad x^2=1 \quad \rightarrow \quad x=\pm\sqrt{1}=\pm 1.$$

Le soluzioni sono $x_1=-1$ e $x_2=+1$.
Esse non sono compatibili con le condizioni di esistenza, pertanto l'equazione data è impossibile.

Risolvi le seguenti equazioni.

201 $\frac{1}{x}+1=\frac{4}{x+1}$ [1 doppia]

202 $\frac{3x}{x+2}=\frac{3}{x}$ $[2; -1]$

203 $\frac{3x+1}{x}+\frac{2}{x+1}=\frac{4}{x^2+x}$ $[-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}]$

204 $\frac{1}{x}-3=\frac{1+x}{x-2}$ $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

205 $\frac{x}{5} = \frac{x+2}{x-2} - \frac{4}{5}$ $[-3; 6]$

206 $\frac{1}{x} - \frac{1}{10} = \frac{1}{x+5}$ $[-10; 5]$

207 $\frac{6}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{1}{2} + \frac{3}{x}$ $[5; -2]$

208 $\frac{1}{x} - 2 = 3x$ $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$

209 $\frac{1}{x} = 2 - x$ [1 doppia]

210 $\frac{x}{x-1} = \frac{\sqrt{3}}{x}$ [impossibile]

211 $\frac{(x+1)^2}{x-1} - \frac{9(x+1)}{4} = 2 - x$ $[3; -7]$

212 $\frac{x^2 - x + 1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ [0; 1 non accettabile]

213 $-\frac{4x^2}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{5-4x^3}{x^2-4}$ $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right]$

214 $\frac{3x^2+5}{x} + x - 1 = \frac{5}{x}$ $\left[0 \text{ non accettabile}; \frac{1}{4}\right]$

215 $\frac{8}{x-1} - 3 = \frac{6}{x+1} - \frac{x^2+x-3}{x^2-1}$ $\left[\frac{7}{2}; -2\right]$

216 $\frac{20}{x^2-4} = \frac{5-x}{x+2} + \frac{2x-3}{2-x}$ [impossibile]

217 $\frac{x}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{21-x}{x^2-9}$ [± 3 non acc.]

218 $\frac{x+3}{x^2-2x+1} = \frac{x-2}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}$ [3; 1 non acc.]

219 $\frac{2x+1}{x+1} = \frac{3-x}{x(x+1)} + \frac{2x^2}{(x+1)^2}$ $\left[-\frac{3}{4}; 1\right]$

220 $\frac{x}{x-5} - \frac{3}{2x} = \frac{15+7x}{2x^2-10x}$ [impossibile]

221 $\frac{3}{x^2-9} + \frac{x}{x-3} + \frac{2}{3+x} = \frac{12-11x}{9-x^2}$ [impossibile]

222 $\frac{9}{x^2+6x} - \frac{x-2}{2x+12} = \frac{1}{2x}$ $[-3; 4]$

BRAVI SI DIVENTA ▶ E39

223 $\frac{3}{2x+4} - \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2+2x}$

224 $\frac{2}{3(x+2)} + \frac{2}{x+2} = \frac{2}{3x} + \frac{1}{3}$ [2 doppia]

225 $\frac{x}{x-2} - \frac{4}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$ [0; 2 non accettabile]

226 $\frac{x-5}{x+3} + \frac{80}{x^2-9} = \frac{1}{2} + \frac{x-8}{3-x}$ [impossibile]

227 $\frac{2x}{2x-1} - \frac{8x^2+3}{4x^2-1} = \frac{3}{2x+1}$ $[0; -1]$

228 $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-x^2} = \frac{x}{x^2-x}$ $[\pm\sqrt{2}]$

229 $2x + \sqrt{2} = \frac{2-\sqrt{2}-2x}{2x+\sqrt{2}}$ $\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}; \frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right]$

230 $\frac{3x-1}{2x+8} - \frac{2x-3}{4(x+1)} = \frac{13}{40}$ $\left[\frac{16}{9}; 1\right]$

231 $\frac{5(x-1)}{x} = \frac{3}{x-2} - \frac{x-13}{4x-2x^2}$ $\left[\frac{11}{5}; \frac{3}{2}\right]$

232 $3\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = 1 - \frac{1}{1-x^2}$ $\left[0; \frac{3}{2}\right]$

233 $\dfrac{x^2\sqrt{3}+1}{x-1}=\dfrac{2\left(\sqrt{3}+3\right)}{\sqrt{3}}$ [impossibile]

234 $\dfrac{4(x-2)}{5x-26}=\dfrac{x+2}{x-4}$ $[-14; 6]$

235 $\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{6}{x-3}-\dfrac{27-x^2}{9-x^2}$ $\left[-3 \text{ non accettabile}; \dfrac{15}{2}\right]$

236 $\dfrac{7x}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{3}{2x-2}=\dfrac{5x(x-1)+6}{2x^2-2}$ $\left[\dfrac{1}{3} \text{ doppia}\right]$

237 $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{x+7}{x-2}-\dfrac{12x+1}{4x+8}=\dfrac{58x-14x^2+67}{4x^2-16}$ $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}\right]$

238 $\dfrac{3+x}{x+1}(x-2)=\dfrac{x^2}{x-3}-\dfrac{3x-2(x+3)}{3-x}$ $[-3; 2]$

RIEPILOGO LE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO NUMERICHE

Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni di secondo grado.

239 $4x+(x-5)(x+4)+15=(3-x)(x+3)+(x+6)(x-3)$ [impossibile]

240 $\dfrac{(2-x)(x+2)}{2}+\dfrac{2}{3}x=\dfrac{7}{3}-\dfrac{2}{15}x-\dfrac{(2x-1)^2}{5}$ $\left[\pm\dfrac{2}{3}\right]$

241 $\sqrt{3}x^2+5x\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=0$ $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{3}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

242 $\left(2x-\dfrac{1}{3}\right)\left(2x+\dfrac{1}{3}\right)-\left(2x+\dfrac{1}{3}\right)^2+4x\left(x+\dfrac{1}{3}\right)=0$ $\left[\pm\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right]$

243 $\left(x+\dfrac{2}{3}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)-\dfrac{x^2-4}{6}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2x-1}{6}-\dfrac{1}{2}(x+1)$ $\left[0; \dfrac{4}{5}\right]$

244 $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{6}{x-3}+\dfrac{72}{9-x^2}=0$ $[6; -9]$

245 $3(x^2-4\sqrt{3})-8x(\sqrt{3}-1)+19=0$ $\left[\dfrac{5\sqrt{3}-2}{3}; \sqrt{3}-2\right]$

246 $2x\left(3x-\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{\sqrt{7}}{3}(8x-1)-\dfrac{7}{6}=0$ $\left[\dfrac{\sqrt{7}}{2}; \dfrac{2-\sqrt{7}}{18}\right]$

247 $x(x+1)+2(x^2-1)=x(x-1)-3(x^2-1)+2x$ $[\pm 1]$

248 $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x^2}{2}+2\right)=\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{2}{9}$ $[0; 4]$

249 $\dfrac{3x(x+2)}{x^2-1}+\dfrac{1}{2}x=\dfrac{9+\dfrac{x^3}{2}}{x^2-1}-\dfrac{1}{2(x^2-1)}$ $\left[-\dfrac{17}{6}; 1 \text{ non accettabile}\right]$

250 $\sqrt{2}x^2+x^2=x$ $[0; \sqrt{2}-1]$

251 $\dfrac{(y+1)(y-1)}{3}=\dfrac{2y-3}{12}+\dfrac{y-1}{6}$ $\left[\dfrac{1}{2} \text{ doppia}\right]$

252 $x^2-\left(x+\dfrac{2}{3}\right)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)-1=\dfrac{4}{9}+3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{4}{3}$ $\left[-\dfrac{2}{3}; 0\right]$

253 $\dfrac{x(2x-3)}{8}=x-3+\dfrac{(2x-3)^2}{8}$ $\left[-\dfrac{5}{2};3\right]$

254 $\dfrac{3}{8}x+\dfrac{1}{2}\left(x^2+\dfrac{5}{4}x\right)=\dfrac{(2x+1)(x+3)}{4}+\dfrac{x^2}{8}$ $[-3\pm\sqrt{3}]$

255 $\dfrac{10-2x}{x^2-9}+\dfrac{1-x}{3-x}=\dfrac{3}{2x+6}+\dfrac{23}{2x^2-18}$ $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$

256 $(\sqrt{3}x+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}x)-(1-\sqrt{6})x^2+2(x+1)^2=\sqrt{6}-2$ $[-4;-1]$

257 $\dfrac{x+2}{2-x}+\dfrac{15x^2+\sqrt{3}x-6}{x^2-4}=\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{6+x^2+\sqrt{3}x}{4-x^2}$ $\left[\pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right]$

258 $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})+3=(\sqrt{5}x+1)(\sqrt{5}x-1)+2\sqrt{2}x(1-\sqrt{2}x)-x^2$ $[\sqrt{2}\pm1]$

259 $(x+\sqrt{3})^2+(x-\sqrt{3})^2=\dfrac{10(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{3}$ $[\pm2\sqrt{3}]$

260 $\sqrt{3}(x^2-1)=\sqrt{2}x^2$ $[\pm\sqrt{3+\sqrt{6}}]$

261 $\dfrac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{\sqrt{6}}-\dfrac{x-6}{\sqrt{3}}=\dfrac{x+\sqrt{3}(2\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$ $[0;\sqrt{2}+\sqrt{3}]$

262 $\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{x+2(\sqrt{2}-1)}+x=0$ $[1-\sqrt{2}$ doppia$]$

263 $\dfrac{\dfrac{6x}{9-x^2}\left(1-\dfrac{x}{3}\right)}{\dfrac{3+x}{3-x}-\dfrac{3-x}{3+x}-1}=\dfrac{3}{8}\left(1+\dfrac{1}{3}\right)$ $\left[\pm\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right]$

264 $\dfrac{x}{5x+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{x^2+5}{5\sqrt{5}x+5}$ $[\sqrt{5}+1;\sqrt{5}-1]$

265 $\dfrac{3x+2}{3x+\dfrac{1}{3}}-\dfrac{x-1}{x-\dfrac{1}{3}}=1-\dfrac{8x^2}{(9x+1)(3x-1)}$ $\left[\dfrac{1}{19};2\right]$

266 $\dfrac{3-\dfrac{3}{x+1}}{3+\dfrac{6}{x-1}}-\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{10}{x-1}=0$ [impossibile]

267 $\dfrac{y^2}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}-y=\dfrac{y-y^2}{3}$ $\left[\dfrac{\sqrt{3}-1}{2};\dfrac{3(\sqrt{3}-1)}{2}\right]$

268 $x\left(3+\dfrac{x}{5}\right)-\dfrac{4x-5}{10}=2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{3}{5}x$ [0 doppia]

269 $2x(x-3)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}x^2-1\right)+\dfrac{2x-x^2}{6}=-\dfrac{1}{3}\left(17x+\dfrac{21}{2}\right)$ [impossibile]

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

270 $\dfrac{\dfrac{2x}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4}}{\dfrac{2x}{x+2}-\dfrac{2x+1}{x-2}}+x=0$ $\left[\dfrac{-3\pm\sqrt{2}}{7}\right]$

271 $\dfrac{x-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-x}-\dfrac{x^2-6}{(\sqrt{3}-x)(3\sqrt{3}-x)}=\dfrac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}x-10)}{3\sqrt{3}-x}$ $[0;\,6\sqrt{3}]$

272 $3+\dfrac{1-12x}{4x+6}+\dfrac{10x^2-25x-15}{4x^3-9x}=\dfrac{3}{9-4x^2}$ $\left[-\dfrac{15}{58};\,2\right]$

273 $\dfrac{\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{1}{2-x}}{\dfrac{2}{2-x}-\dfrac{2}{2+x}}-\dfrac{2x}{1+2x}=\dfrac{1-2x}{2x^2+x}$ [impossibile]

274 $\dfrac{8}{x-1}+\dfrac{2(11x-16)}{x^3-4x^2+5x-2}=\dfrac{6x+10}{x^2-3x+2}-\dfrac{6}{x^2-2x+1}$ $[3;\,-3]$

275 $2x+\dfrac{(x-3)^2}{2}-6+\dfrac{2}{3}(4x-5)=\dfrac{(1-x)(x+2)}{3}-\dfrac{1}{6}+2(x-1)$ $[\pm 2]$

276 $x+\dfrac{19}{25}+6\left(2+\dfrac{x}{5}\right)\left(\dfrac{1}{5}x-2\right)=4+2\left(\dfrac{x}{5}-6\right)-\dfrac{6}{25}+3\left(\dfrac{x}{5}-4\right)$ $\left[\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right]$

277 $\dfrac{(4-x)(x+5)}{6}-\dfrac{(2-x)(x+1)}{4}=\dfrac{(3-x)(x+2)}{8}-\dfrac{(x+1)(x+2)}{6}+\dfrac{83-x}{24}$ $\left[\pm\dfrac{5}{3}\right]$

278 $\dfrac{17x-34x^2}{9}+\left(\dfrac{1}{2}-2x\right)^2-\dfrac{1}{24}=x^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-x\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2$ [impossibile]

279 $\left(\dfrac{1}{4}-x\right)x^2+\left(\dfrac{1}{3}-2x\right)^2=\dfrac{3x+4+101x^2}{36}-x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$ $\left[0;\,\dfrac{21}{8}\right]$

280 $\dfrac{x+3\sqrt{3}}{x-3\sqrt{3}}+\dfrac{x-3\sqrt{3}}{x+3\sqrt{3}}-1=\dfrac{\sqrt{3}(x+27\sqrt{3})+2(\sqrt{3}-x)}{x^2-27}$ $[\sqrt{3};\,-2]$

Risolvi le seguenti equazioni riconducendole, con opportune sostituzioni, a equazioni di secondo grado.

281 $\left(\dfrac{x+1}{x-\sqrt{3}}\right)^2-2\sqrt{3}\left(\dfrac{x+1}{x-\sqrt{3}}\right)+2=0$ $\left(\text{poni } y=\dfrac{x+1}{x-\sqrt{3}}\right)$ $\left[\dfrac{4\sqrt{3}+3}{3};\ -5-2\sqrt{3}\right]$

282 $\dfrac{x^2-4x+4}{(x+1)^2}+3\dfrac{x-2}{x+1}+2=0$ $\left(\text{poni } y=\dfrac{x-2}{x+1}\right)$ $\left[\dfrac{1}{2};\,0\right]$

283 $\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{(x^2-4)(x+2)}-7\dfrac{x-2}{x+2}=0$ $\left(\text{poni } y=\dfrac{x-2}{x+2}\right)$ $\left[-\dfrac{8}{3};\,2\text{ non accett.}\right]$

284 $\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^2-\dfrac{2x+6}{x}=8$ $\left(\text{poni } y=\dfrac{x+3}{x}\right)$ $[-1;\,+1]$

285 $1+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{2\sqrt{5}}{x}-2\sqrt{5}\dfrac{(x+\sqrt{5})}{x^2}+\dfrac{(2\sqrt{3}+1)}{x^2}=0$ $[\sqrt{3}-1;\,1-\sqrt{3}]$

286 $3\left(\dfrac{x-4}{3x+1}\right)^2-2\sqrt{3}\left(\dfrac{x-4}{3x+1}\right)-2=0$ $\left[\dfrac{-27+13\sqrt{3}}{3};\,\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right]$

287 $\left(\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+3x^2-x-3}\right)^2-\dfrac{4x+8}{x+3}-5=0$ $\left[-\dfrac{13}{4}; -\dfrac{5}{2}\right]$

288 $\dfrac{(x-2)^2}{4x^2}-(\sqrt{5}+\sqrt{2})\dfrac{x-2}{x}+4\sqrt{10}=0$ $\left[-\dfrac{2(1+4\sqrt{5})}{79}; -\dfrac{2(1+4\sqrt{2})}{31}\right]$

289 Risolvi le seguenti equazioni utilizzando delle incognite ausiliarie:

a) $(x-2)^2+2(2-x)-15=0$;
b) $(3x-1)^2-2(3x-1)+2=0$;
c) $(x^2-2x)^2-3x(x-2)=0$;
d) $x(x+1)-x^2(2x+1+x^2)+2=0$.

[a) $-1, 7$; b) $\nexists x \in \mathbb{R}$; c) $-1, 0, 2, 3$; d) $1, -2$]

290 È data l'equazione $x^2-7x+6=0$ nell'incognita x. Se è possibile, scrivi l'equazione nella forma $(x-h)^2=k^2$ determinando i valori di h e k. $\left[h=\dfrac{7}{2}; k=\pm\dfrac{5}{2}\right]$

Le equazioni letterali

Nel sito: ▶ 13 esercizi di recupero

291 È data l'equazione $3x^2-(5a-1)x+a^2-4=0$ nell'incognita x. Per quali valori di a l'equazione è:

a) pura?
b) monomia?
c) equivalente all'equazione $x^2-3x=0$?

$\left[\text{a) } a=\dfrac{1}{5}; \text{ b) } \nexists a\in\mathbb{R}; \text{ c) } a=2\right]$

292 Considera l'equazione $ax^2+3=0$ nell'incognita x. Determina per quali valori di a:

a) l'equazione ammette soluzioni reali.
b) le soluzioni sono $\pm\dfrac{1}{5}$.
c) le soluzioni sono $-3, 0$.

[a) $a<0$; b) $a=-75$; c) $\nexists a \in \mathbb{R}$]

293 **TEST** Sulle due equazioni, nell'incognita x,

1. $ax^2+bx=0$, 2. $ax^2+b=0$,

con $a\neq 0 \wedge b\neq 0$, puoi affermare che:

A 1 è pura e 2 è spuria.
B se $a\cdot b<0$, l'insieme delle soluzioni di 2 è $S=\left\{-\sqrt{-\dfrac{b}{a}}, \sqrt{-\dfrac{b}{a}}\right\}$.
C 1 è determinata solo se a e b sono discordi.
D entrambe hanno come insieme delle soluzioni $S=\left\{-\dfrac{b}{a}, 0\right\}$.
E 1 e 2 sono equivalenti.

294 **TEST** L'equazione letterale $x^2+ax-2a^2=0$:

A ha due soluzioni reali e distinte per ogni $a\in\mathbb{R}$.
B è un'equazione spuria se $a=0$.
C ha due soluzioni reali e coincidenti se $a=0$.
D ha come soluzioni $x=-a$, $x=2a$.
E è un'equazione di primo grado se $a=0$.

295 **TEST** Date le equazioni, nell'incognita x,

1. $x^2-3a^2=0$, 2. $x^2+3a^2=0$,

con $a\neq 0$, quale delle seguenti affermazioni è *corretta*?

A 1 ha due soluzioni reali e opposte.
B 1 e 2 sono spurie.
C L'insieme delle soluzioni di 2 è $S=\{\pm\sqrt{3}a\}$.
D 1 e 2 sono equivalenti.
E 2 ha due soluzioni reali e coincidenti.

296 **TEST** Sull'equazione $ax^2+ax-6a=0$ nell'incognita x, puoi affermare che:

A è indeterminata se $a=0$.
B le soluzioni sono $+3a, -2a$.
C è equivalente all'equazione $x^2+x-6=0$, per ogni $a\in\mathbb{R}$.
D è impossibile se $a\neq 0$.
E ammette due soluzione reali e coincidenti solo se $a>0$.

ESERCIZIO GUIDA

297 Risolviamo le equazioni, nell'incognita x, eseguendo la discussione quando necessaria:

a) $2x^2 - ax - 3a^2 = 0$; b) $kx^2 - 2x(k+1) + 4 = 0$.

a) Scriviamo i coefficienti, indicandoli con lettere maiuscole per non fare confusione:

$A = 2$; $B = -a$; $C = -3a^2$.

Calcoliamo $\Delta = B^2 - 4AC$:

$\Delta = (-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3a^2) = a^2 + 24a^2 = 25a^2$.

Poiché $\Delta \geq 0$, l'equazione ha due soluzioni reali, che calcoliamo con la formula risolutiva:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{25a^2}}{2 \cdot 2} = \frac{a \pm 5a}{4} = \begin{cases} \dfrac{6a}{4} = \dfrac{3}{2}a \\ -\dfrac{4a}{4} = -a \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione sono $x_1 = \frac{3}{2}a$ e $x_2 = -a$. Esse sono distinte se $a \neq 0$, mentre sono coincidenti se $a = 0$ ($x_1 = x_2 = 0$). Infatti, per $a = 0$, il discriminante si annulla.

b) Poiché il coefficiente di x^2 è letterale, esaminiamo due casi.

- Se $k = 0$, sostituendo nell'equazione otteniamo:

  $0 \cdot x^2 - 2x(0+1) + 4 = 0$, $-2x + 4 = 0$, $x = 2$.

- Se $k \neq 0$, calcoliamo il $\frac{\Delta}{4}$:

  $\frac{\Delta}{4} = (k+1)^2 - 4k = k^2 + 2k + 1 - 4k = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2$.

  Discutiamo i due casi: $\frac{\Delta}{4} \neq 0$, $\frac{\Delta}{4} = 0$.

  – Se $\frac{\Delta}{4} \neq 0$, ossia $k \neq 1$, l'equazione ha due soluzioni distinte:

  $$x = \frac{k + 1 \pm (k-1)}{k} = \begin{cases} \dfrac{k + \cancel{1} + k - \cancel{1}}{k} = 2 \\ \dfrac{\cancel{k} + 1 - \cancel{k} + 1}{k} = \dfrac{2}{k} \end{cases}$$

  – Se $\frac{\Delta}{4} = 0$, ossia $k = 1$, l'equazione ha due soluzioni coincidenti.

  $x_1 = x_2 = \frac{k+1}{k} = \frac{1+1}{1} = 2$.

In sintesi:

- se $k = 0$, l'equazione ha una sola soluzione: $x = 2$;
- se $k = 1$, l'equazione ha due soluzioni coincidenti: $x_1 = x_2 = 2$;
- se $k \neq 0 \wedge k \neq 1$, l'equazione ha due soluzioni distinte: $x_1 = 2$ e $x_2 = \frac{2}{k}$.

298 Considera l'equazione, nell'incognita x, $ax^2 + (1-a)x = 1$. Discuti e trova le soluzioni quando a assume i seguenti valori: $a = 0$, $a = -1$, $a = \sqrt{3} - 1$, $a = 2$, $a = \sqrt{2}$.

$\left[1; 1 \text{ doppia}; -\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1), 1; -\frac{1}{2}, 1; -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$

Risolvi le seguenti equazioni nell'incognita x eseguendo la discussione quando è necessaria.

299 $x^2 + xb - 6b^2 = 0$ $[-3b; 2b]$

300 $x^2 - kx - 20k^2 = 0$ $[-4k; 5k]$

301 $x^2 + kx + k^2 = 0$ [$k = 0$: 0 doppia; $k \neq 0$: impossibile]

302 $5a^2x^2 - 20a^3x = 0$ [$a = 0$: indet.; $a \neq 0$: $0, 4a$]

303 $2x^2 - 11ax + 14a^2 = 0$ $\left[2a; \frac{7}{2}a\right]$

304 $5mx^2 = 0$ [$m = 0$: indet.; $m \neq 0$: 0 doppia]

305 $x^2 - 2ax - 2x = 0$ $[0; 2(a+1)]$

306 $x^2 - 10ax + 25a^2 = 0$ [$5a$ doppia]

307 $2kx^2 + kx - x = 0$ $\left[k = 0: 0; k \neq 0: 0, \frac{1-k}{2k}\right]$

308 $-4x^2 - 12ax - 9a^2 = 0$ [$-\frac{3}{2}a$ doppia]

309 $x^2 - 12kx + 36k^2 = 0$ [$6k$ doppia]

310 $x^2 + 3k^2 = 0$ [$k = 0$: 0 doppia; $k \neq 0$: impossibile]

311 $\frac{2}{9}a^2 + \frac{a}{3}x - x^2 = 0$ $\left[-\frac{a}{3}; \frac{2}{3}a\right]$

312 $x^2 - 2kx - 3k^2 = 0$ $[-k; 3k]$

313 $4ax^2 - a^3 = 0$ [$a = 0$: indet.; $a \neq 0$: $\pm\frac{a}{2}$]

314 $(a-2)x^2 = 0$ [$a = 2$: indet.; $a \neq 2$: 0 doppia]

315 $\frac{b^2}{6} - \frac{5bx}{6} + x^2 = 0$ $\left[\frac{b}{3}; \frac{b}{2}\right]$

316 $2a\sqrt{2}x^2 = 0$ [$a = 0$: indet.; $a \neq 0$: 0 doppia]

317 $2x^2 - 4bx + 3b^2 = 0$ [$b \neq 0$: impossibile; $b = 0$: 0 doppia]

318 $3x^2 - 8ax + 4a^2 = 0$ $\left[\frac{2}{3}a; 2a\right]$

319 $36x^2 + 6ax = 0$ $\left[0; -\frac{a}{6}\right]$

320 $2a^2 - ax - x^2 = 0$ $[a; -2a]$

321 $x^2 + 8a^2x + 15a^4 = 0$ $[-3a^2; -5a^2]$

322 $k^2 - x^2 - 6k + 9 = 0$ $[\pm (k-3)]$

323 $a^2x^2 - 3ax + 2 = 0$ $\left[a = 0\text{: impossibile; } a \neq 0\text{: } \frac{1}{a}, \frac{2}{a}\right]$

324 $5k^2x^2 - 125k^3 = 0$ $[k = 0\text{: indet.; } k > 0\text{: } \pm 5\sqrt{k}\text{; } k < 0\text{: impossibile}]$

325 $x^2 + 3ax - 1 - 3a = 0$ $\left[a \neq -\frac{2}{3}\text{: } 1, -(3a+1)\text{; } a = -\frac{2}{3}\text{: 1 doppia}\right]$

326 $6b^2x^2 - 3bx = 0$ $\left[b = 0\text{: indet.; } b \neq 0\text{: } 0, \frac{1}{2b}\right]$

327 $4ax^2 = 0$ $[a = 0\text{: indet.; } a \neq 0\text{: 0 doppia}]$

328 $k^2x^2 - kx - 6 = 0$ $\left[k = 0\text{: impossibile; } k \neq 0\text{: } -\frac{2}{k}, \frac{3}{k}\right]$

329 $bx^2 + 9 - x^2 - 9b = 0$ $[b = 1\text{: indet.; } b \neq 1\text{: } \pm 3]$

330 $ax^2 - (a-6)x - 6 = 0$ $\left[a = 0\text{: 1; } a \neq 0\text{: } 1, -\frac{6}{a}\right]$

331 $a^2x^2 - 2ax + a^2x + 1 - a = 0$ $\left[a = 0\text{: impossibile; } a \neq 0\text{: } \frac{1}{a}, \frac{1-a}{a}\right]$

332 $9x^2 + a^2 = 0$ $[a \neq 0\text{: impossibile; } a = 0\text{: 0 doppia}]$

333 $3ax^2 - 12a^3x = 0$ $[a = 0\text{: indet.; } a \neq 0\text{: } 0, 4a^2]$

334 $3x^2 + 5ax = 0$ $\left[0; -\frac{5a}{3}\right]$

335 $bx^2 - b^3 = 0$ $[b = 0\text{: indet.; } b \neq 0\text{: } \pm b]$

336 $5bx^2 + 2bx + b = 0$ $[b = 0\text{: indet.; } b \neq 0\text{: impossibile}]$

337 $2x^2 + 2kx + 5(k + x) = 0$ $\left[-k; -\frac{5}{2}\right]$

338 $2x^2 + 4ax + 3x + 6a = 0$ $\left[-2a; -\frac{3}{2}\right]$

339 $x^2 - 6a(x-4) + 8(2-x) + 9a^2 = 0$ $[3a + 4\text{ doppia}]$

340 $a^2x(x-1) = 9x - 9$ $\left[a = 0\text{: 1; } a \neq 0\text{: } 1, \frac{9}{a^2}\right]$

341 $ax(x+1) - x(x+a) = 4a - 4$ $[a = 1\text{: indet.; } a \neq 1\text{: } \pm 2]$

342 $ax^2 - (a-1)x - 1 = 0$ $\left[a = 0\text{: 1; } a \neq 0\text{: } 1, -\frac{1}{a}\right]$

343 $4(x^2 - 2) = a - x^2(a + 4)$ $[a = -8\text{: indet.; } a \neq -8\text{: } \pm 1]$

344 $ax(x+a) = -2x(x-2)$ $[a=-2\text{: indet.; } a \neq -2\text{: } 0, -a+2]$

345 $x(x-1) - a(x-a) = a(x-1) + 2$ $[a+2;\ a-1]$

346 $ax^2 + (a-1)(a+1)(x+2) = x(a^2-1) - 2 + 2a^2$ $[a=0\text{: indet.; } a \neq 0\text{: 0 doppia}]$

347 $\dfrac{(x-7a)x}{6} - 5a^2 = \dfrac{ax}{6} - \dfrac{x(4a+x)}{3}$ $[\pm a\sqrt{10}]$

348 $(x-3a)(x+3a) - (x^2+4a^2) + ax = x^2 - 13a^2$ $[0; a]$

349 $\dfrac{1}{3}x^2 - 2a^2 = \dfrac{8}{3}ax - 10a^2 + (2a-x)(4a+x)$ $\left[0; \dfrac{a}{2}\right]$

350 $x^2(a+1) + 2a^2 = ax(x+3)$ $[a; 2a]$

351 $a\left(\dfrac{3a-2x}{4} - \dfrac{x+a}{2}\right) + ax = (a-x)(x+a)$ $\left[\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2a}\right]$

352 $x(x-3a) = 2x(a-1) + x(a+1)$ $[0; 6a-1]$

353 $x^2 - (2b+1)x + b^2 + b = 0$ $[b; b+1]$

354 $(2a+3)x^2 - x = 0$ $\left[a = -\dfrac{3}{2}\text{: } 0;\ a \neq -\dfrac{3}{2}\text{: } 0, \dfrac{1}{2a+3}\right]$

355 $x^2 - 6kx + 9k^2 = 0$ $[3k\text{ doppia}]$

356 $(1+x)(1-bx) + (1-x)(1+bx) = 2x^2(1+b+b^2)$ $\left[b \neq -1\text{: } \pm\dfrac{1}{1+b};\ b=-1\text{: imp.}\right]$

357 $x^2 - \left(\dfrac{2}{a} - 3\right)x - \dfrac{3}{a} + \dfrac{1}{a^2} + 2 = 0$ $\left[a=0\text{: priva di signif.; } a \neq 0\text{: } -\dfrac{2a-1}{a}, \dfrac{1-a}{a}\right]$

358 $x^2 - \dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{x-2a}{a} = x\left(2x - \dfrac{1}{a}\right)$ $\left[a=0\text{: priva di signif.; } a \neq 0\text{: } -\dfrac{5}{3}, 1\right]$

359 $\dfrac{x^2}{a^2} = x - \dfrac{x}{a}$ $[a=0\text{: priva di signif.; } a \neq 0\text{: } 0, a^2 - a]$

BRAVI SI DIVENTA ► E40

360 $\dfrac{(a-2)x^2}{a^2-4a} + \dfrac{x}{a} = \dfrac{2}{a-4}$

361 $\dfrac{x}{3-a} - \dfrac{2}{a-3} = \dfrac{x^2 - ax - 12}{a^2 - 9} + \dfrac{x-2}{a+3}$ $[a=\pm 3\text{: priva di signif.; } a \neq \pm 3\text{: } 0, -a]$

362 $\dfrac{2x}{a-3x} + \dfrac{a-3x}{2x} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{2a^2 - 11ax + 4x^2}{6x^2 - 2ax}$ $\left[a=0\text{: 0 non accett.; } a \neq 0\text{: } \dfrac{3a}{16}, \dfrac{a}{2}\right]$

363 $k^2(x+1) + 1 = \dfrac{x + 2kx - k^2}{x-1}$ $\left[k=0\text{: imp.; } k \neq 0 \wedge k \neq 1 \pm \sqrt{2}\text{: } \dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{k}\right]$

364 $\dfrac{x-a}{x-1} + \dfrac{x-1}{x-a} = \dfrac{1+a^2}{a}$ $[a=0\text{: priva di signif.; } a \neq 0 \wedge a \neq 1\text{: } 0, a+1;\ a=1\text{: indet.}]$

365 $2x - b + \dfrac{6bx + b^2}{x} = \dfrac{3b^2}{x} + 2b$ $\left[b = 0\text{: 0 non accett.; } b \neq 0\text{: } \dfrac{b}{2}, -2b\right]$

366 $\dfrac{(x^2 + k)k}{x} - 2k = \dfrac{k}{x}(k - 2x)$ $[k = 0\text{: indet.; } k \neq 0\text{: imp.}]$

367 $\dfrac{x - 3a}{2x + a} + \dfrac{2x}{2x - a} = 2 - \dfrac{2x^2 - 5ax + 4a^2}{a^2 - 4x^2}$ [impossibile]

368 $\dfrac{x + b}{x - b} + 2 - \dfrac{3b}{4(x + b)} = \dfrac{4b^2 - bx - 11x^2}{4b^2 - 4x^2}$ $[b = 0\text{: imp.; } b \neq 0\text{: } -b \text{ non accett., } -3b]$

369 $\dfrac{x(x - 2) + b(2 - x)}{2b^2 - 2x^2} = \dfrac{1}{b + x}$ $[b = 0\text{: impossibile; } b \neq 0\text{: 0, } b \text{ non accettabile}]$

370 $\dfrac{x}{k} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{k(k - 2)}{kx}$ $[k = 0\text{: priva di signif.; } k \neq 0\text{: } \pm k]$

371 $\dfrac{a^2}{a^2 - x^2} - \dfrac{2x}{x - a} = \dfrac{a}{x + a}$ $\left[a = 0\text{: impossibile; } a \neq 0\text{: 0, } -\dfrac{3}{2}a\right]$

372 $\dfrac{3b}{x + b} + \dfrac{x}{x - b} = \dfrac{4bx - 3b^2}{x^2 - b^2}$ $[b = 0\text{: impossibile; } b \neq 0\text{: 0 doppia}]$

373 $\dfrac{x - a}{x + a} + \dfrac{x + a}{x - a} = \dfrac{ax + 3a^2}{x^2 - a^2}$ $\left[a = 0\text{: impossibile; } a \neq 0\text{: } -\dfrac{a}{2}\right]$

374 $\dfrac{x + b}{x - b} + \dfrac{x - 2b}{x + b} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{bx + 11b^2}{3x^2 - 3b^2}$ $[b = 0\text{: impossibile; } b \neq 0\text{: 0, } b \text{ non accettabile}]$

375 $2m\left(\dfrac{3}{x - m} + \dfrac{1}{x + 2m}\right) : \dfrac{x + m}{x + 2m} = \dfrac{8mx - x^2 + 11m^2}{x^2 - m^2}$ [impossibile]

376 $\left(\dfrac{a - x}{x + a} + \dfrac{x + a}{a - x}\right) : \left(1 - \dfrac{a - x}{x + a}\right) = -\dfrac{13}{10}$ $\left[a = 0\text{: impossibile; } a \neq 0\text{: } -\dfrac{2}{3}a, 5a\right]$

377 $\left[\left(\dfrac{b - x}{b + 2x} - \dfrac{3b + x}{x - b}\right) : \dfrac{3x^2 + 4b^2 + 5bx}{2x + b}\right](x + 2b) + \dfrac{2b^2}{x^2 - b^2} = \dfrac{2x^2}{b^2 - x^2}$ $[0; 3b]$

378 $16k^2 - 8k + 4kx^2 + (1 - x^2) = 0$ $\left[k = \dfrac{1}{4}\text{: indet.; } k > \dfrac{1}{4}\text{: imp.; } k < \dfrac{1}{4}\text{: } \pm\sqrt{1 - 4k}\right]$

379 $kx^2 - 2x + 2 - k = 0$ $\left[k = 0\text{: 1; } k \neq 0 \wedge k \neq 1\text{: 1, } \dfrac{2 - k}{k}\text{; } k = 1\text{: 1 doppia}\right]$

380 $bx^2 - 2(b - 3)x + (6 - 3b) = 0$ $\left[b = 0\text{: } -1\text{; } b \neq 0 \wedge b \neq \dfrac{3}{2}\text{: } \dfrac{3b - 6}{b}, -1\text{; } b = \dfrac{3}{2}\text{: } -1 \text{ doppia}\right]$

381 $2a^2x^2 - (7a^2 - a)x + 3a^2 + 2a - 1 = 0$ $\left[a = 0\text{: imp.; } a \neq 0 \wedge a \neq \dfrac{3}{5}\text{: } \dfrac{3a - 1}{a}, \dfrac{a + 1}{2a}\text{; } a = \dfrac{3}{5}\text{: } \dfrac{4}{3} \text{ doppia}\right]$

382 $2ax^2 - 2(2a + 3)x - (6a - 18) = 0$ $\left[a = 0\text{: 3; } a = \dfrac{3}{4}\text{: 3 doppia; } a \neq 0 \wedge a \neq \dfrac{3}{4}\text{: 3, } \dfrac{3 - a}{a}\right]$

383 $kx^2 - x(1 + k^2) + k = 0$ $\left[k = 0\text{: 0; } k \neq 0 \wedge k \neq \pm 1\text{: } k, \dfrac{1}{k}\text{; } k = 1\text{: 1 doppia; } k = -1\text{: } -1 \text{ doppia}\right]$

384 $-16k^2+8k+4kx^2-1-x^2=0$ $\left[k=\frac{1}{4}\text{: indet.; } k>\frac{1}{4}\text{: } \pm\sqrt{4k-1};\ k<\frac{1}{4}\text{: imp.}\right]$

385 $\frac{a(x^2+1)}{a+1}-2x=0$ $\left[a=-1\text{: priva di signif.; } a=0\text{: } 0;\ a\neq 0 \wedge a\geq -\frac{1}{2}\text{: } \frac{a+1\pm\sqrt{1+2a}}{a};\ a<-\frac{1}{2}\text{: imp.}\right]$

386 $\frac{x^2}{a^2}=x^2-\frac{2x}{a^2}$ $\left[a=0\text{: priva di signif.; } a=1\vee a=-1\text{: } 0;\ a\neq 0\wedge a\neq\pm 1\text{: } 0, \frac{2}{a^2-1}\right]$

387 $\frac{x^2+ax}{a^2-3a+2}+\frac{x}{a-2}=\frac{2x}{a-1}$ $[a=2\vee a=1\text{: priva di signif.; } a\neq 2\wedge a\neq 1\text{: } 0, -3]$

388 $\frac{(3-x)(a+2)}{a}+1-\frac{6}{x}=-1$ $\left[a=0\text{: priva di signif.; } a\neq 0 \wedge a\neq -2\text{: } 3, \frac{2a}{a+2};\ a=-2\text{: } 3\right]$

389 $\frac{x^2}{b}=1-\frac{(1-x)(x+1)}{2b^2}-\frac{(x+b)(b-x)}{2}$

$[b=0\text{: priva di signif.; } b\neq 0 \wedge b\neq 1\text{: } \pm(b+1);\ b=1\text{: indet.}]$

390 $\frac{(x-1)(x+1)+x-2a}{2ax}-1=\frac{1}{2a}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2ax}$ $[a=0\text{: priva di signif.; } a\neq 0\text{: } 0 \text{ non accett., } 2a]$

391 $\frac{3x(x-k^2)}{kx-k^3}=\frac{2x}{k}+\frac{k(4-x)}{x-k^2}$ $[k=0\text{: priva di signif.; } k=\pm 2\text{: } -4, +4 \text{ non accettabile; } k\neq 0\wedge k\neq\pm 2\text{: } \pm 2k]$

392 $\frac{1}{x}+\frac{x}{x-k}=\frac{x-1}{x^2-kx}$ $[k<1\text{: impossibile; } k=1\text{: } 0 \text{ non accettabile; } k>1\text{: } \pm\sqrt{k-1}]$

393 $\frac{2a}{x-\sqrt{2}}+\frac{ax}{x+\sqrt{2}}+a\frac{x^2+2\sqrt{2}}{2-x^2}=\frac{\sqrt{2}x(\sqrt{2}a-a)}{x^2-2}$ $[\text{indeterminata se } x\neq\pm\sqrt{2}]$

394 $\frac{k(1-kx)}{k^2x^2-1}-\frac{2x}{kx+1}=\frac{k}{kx-1}$ $\left[k=0\text{: } 0;\ k=\pm\sqrt{2}\text{: } 0, \frac{1-k^2}{k} \text{ non accett.; } k\neq 0\wedge k\neq\pm\sqrt{2}\text{: } 0, \frac{1-k^2}{k}\right]$

395 È data l'equazione $2ax^2+(a^2-6)x-3a=0$ nell'incognita x.

a) Per quali valori di a l'equazione ammette una sola soluzione?
b) Per quali valori di a l'equazione ammette due soluzione reali e coincidenti?
c) Se $a\neq 0$, quali sono le soluzioni dell'equazione?

$\left[\text{a) } a=0;\ \text{b) } \nexists a\in\mathbb{R};\ \text{c) } -\frac{a}{2}, \frac{3}{a}\right]$

396 Considera l'equazione $\frac{2a}{x^2-a}=\frac{x}{x-1}$ nell'incognita x.

a) Per quali valori di a le condizioni di esistenza dell'equazione sono $x\neq 1 \wedge x=\pm 2\sqrt{3}$?
b) Per quali valori di a il m.c.m. dei denominatori è un polinomio di secondo grado?
c) Quali sono le soluzioni dell'equazione se $a=1$? [a) $a=12$; b) $a=1$; c) -2, 1 non accettabile]

397 È data l'equazione $(x-2)(3x-1)=a$ nell'incognita x. Determina per quali valori di a:

a) è possibile trovare le soluzioni risolvendo le equazioni $x-2=a$, $3x-1=a$.

b) l'equazione non ha soluzioni reali.

c) una soluzione è 4. $\left[\text{a) } a=0;\ \text{b) } a<-\frac{25}{12};\ \text{c) } a=22\right]$

Equazioni con due lettere

ESERCIZIO GUIDA

398 Risolviamo la seguente equazione nell'incognita x: $abx^2-(2ab+1)x+2=0$.

Il coefficiente di x^2 è $a\cdot b$, quindi dovremo discutere entrambe le lettere a e b.

- Se $a\cdot b=0$, può risultare $a=0$ oppure $b=0$. In entrambi i casi risulta: $0\cdot x^2-(0+1)x+2=0$, ossia $-x+2=0$, da cui $x=2$.
- Se $a\cdot b\neq 0$, ossia $a\neq 0\wedge b\neq 0$, calcoliamo il Δ:

  $\Delta=(2ab+1)^2-8ab=4a^2b^2+1+4ab-8ab=4a^2b^2+1-4ab=(2ab-1)^2$. Si ha:

  $\Delta=0$ se $2ab-1=0$, ossia se $ab=\frac{1}{2}$; $\Delta\neq 0$ se $ab\neq\frac{1}{2}$.
- Se $ab\neq\frac{1}{2}$, le due soluzioni sono:

$$x_{1,2}=\frac{2ab+1\pm(2ab-1)}{2ab}=\begin{cases}\dfrac{2ab+\cancel{1}+2ab-\cancel{1}}{2ab}=2\\[2ex]\dfrac{\cancel{2ab}+1-\cancel{2ab}+1}{2ab}=\dfrac{1}{ab}\end{cases}$$

- Se $ab=\frac{1}{2}$, le due soluzioni sono coincidenti:

  $x_1=x_2=2$.

In sintesi:

- se $a=0\vee b=0$, l'equazione ha una sola soluzione: $x=2$;
- se $a\cdot b=\frac{1}{2}$, l'equazione ha due soluzioni coincidenti: $x_1=x_2=2$;
- se $a\neq 0\wedge b\neq 0\wedge a\cdot b\neq\frac{1}{2}$, l'equazione ha due soluzioni: $x_1=2$ e $x_2=\frac{1}{ab}$.

Risolvi le seguenti equazioni nell'incognita x, eseguendo la discussione quando è necessaria.

399 $4b^2x^2+2abx=0$ $\left[b=0\text{: indet.; } b\neq 0\text{: } 0,\ -\frac{a}{2b}\right]$

400 $2ax^2+5bx=0$ $\left[a=0\wedge b=0\text{: indet.; } a=0\wedge b\neq 0\text{: } 0;\ a\neq 0\text{: } 0,\ -\frac{5b}{2a}\right]$

401 $ax^2=(a+b)x$ $\left[a=0\wedge b=0\text{: indet.; } a=0\wedge b\neq 0\text{: } 0;\ a\neq 0\text{: } 0,\ \frac{a+b}{a}\right]$

402 $ax(x+1)=bx^2$ $\left[a=b=0\text{: indet.; } a=b\neq 0\text{: } 0;\ a\neq b\text{: } 0,\ \frac{a}{b-a}\right]$

403 $ax^2-(a-3b)x-3b=0$ $\left[a=0 \wedge b=0\text{: indet.; } a=0 \wedge b\neq 0\text{: } 1\text{; } a\neq 0\text{: } 1, -\frac{3b}{a}\right]$

404 $x^2-2ax+a^2-b^2=0$ $[b=0\text{: } a \text{ doppia; } b\neq 0\text{: } a+b, a-b]$

405 $x^2+ab\left(\frac{x}{6}-ab\right)+\frac{2abx}{3}=0$ $\left[a=0 \vee b=0\text{: } 0 \text{ doppia; } a\neq 0 \wedge b\neq 0\text{: } -\frac{3ab}{2}, \frac{2ab}{3}\right]$

406 $2a^2b^2+abx-x^2=0$ $[-ab, 2ab]$

407 $ax(x+a)=bx(x+b)$ $[a=b\text{: indet.; } a\neq b\text{: } 0, -a-b]$

408 $\frac{ax+b}{a}-2=\frac{x(x-2)}{2b}+\frac{b}{a}$, con $a\neq 0$; $b\neq 0$. $[2, 2b]$

409 $\frac{a+2b}{x+b}-\frac{2abx+4ab^2+4b^3}{x^3-b^2x}=\frac{4(a+b)}{x}+\frac{3a}{b-x}$ $[b\neq 0\text{: impossibile; } b=0\text{: } \forall x\in\mathbb{R}-\{0, \pm b\}]$

410 $\frac{x-a^2}{x-b^2}x=\left(\frac{x}{a}\right)^2\frac{b^2}{x}$

$[a=0\text{: priva di signif.; } a\neq 0 \ \wedge \ a=\pm b\text{: indet.; } a\neq 0 \ \wedge \ a\neq\pm b\text{: } 0 \text{ non accettabile, } a^2+b^2]$

411 $abx^2-(1+ab)x+1=0$ $\left[a=0 \vee b=0\text{: } 1\text{; } a\neq 0 \wedge b\neq 0 \wedge ab\neq 1\text{: } 1, \frac{1}{ab}\text{; } ab=1\text{: } 1 \text{ doppia}\right]$

412 $mnx^2-(m^2-n^2)x-mn=0$

$\left[m=0 \wedge n=0\text{: indet.; } m=0 \wedge n\neq 0\text{: } 0\text{; } m\neq 0 \wedge n=0\text{: } 0\text{; } m\neq 0 \wedge n\neq 0\text{: } \frac{m}{n}, -\frac{n}{m}\right]$

413 $\frac{2a+b}{a+x}-\frac{2a}{b}=\frac{2a-b}{a-x}-\frac{2a^3-2ab^2}{a^2b-bx^2}$ $\left[b=0\text{: priva di signif.; } a\neq 0 \ \wedge \ b=\pm\frac{a}{2}\text{: } 0, 2b \text{ non accettabile; } a\neq 0 \ \wedge \ b\neq 0 \ \wedge \ b\neq\pm\frac{a}{2}\text{: } 0, 2b\text{; } a=0 \ \wedge \ b\neq 0\text{: indet.}\right]$

414 $\frac{x+3a}{x-a}-\frac{x}{a+b}=\frac{bx+3ab}{ax+bx-a^2-ab}$

$[a=-b\text{: priva di signif.; } a\neq -b \ \wedge \ a=0\text{: } 0 \text{ non accett.; } a\neq -b \ \wedge \ a\neq 0\text{: } -a, 3a]$

415 Considera l'equazione $2x^2-3ax+a^2=b^2-bx$ nell'incognita x.

a) In quali casi l'equazione ha due soluzioni reali e distinte?
b) Se $a=1$, per quali valori di b l'equazione è spuria?
c) Se $a\neq 3b$, quali sono le soluzioni dell'equazione?

$\left[\text{a) } a\neq 3b\text{; b) } b=\pm 1\text{; c) } a-b, \frac{a+b}{2}\right]$

Nel sito: ▶ **teoria e 53 esercizi su I numeri complessi e le equazioni di secondo grado**

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

I problemi di secondo grado

Problemi di geometria

Nel sito: ▶ 20 esercizi in più
▶ 13 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

416 Vogliamo piantare 21 bulbi di tulipano in un'aiuola rettangolare. Per disporli in file uguali e con la condizione che il numero dei bulbi in ogni fila superi di 4 il numero delle file, quante file di bulbi dobbiamo piantare?

1. I risultati
È richiesto il numero di file.

2. L'incognita
Poniamo x = numero di file.

3. Le relazioni
Il numero totale di bulbi è 21; i bulbi su ogni fila sono $x + 4$.
Pertanto il numero totale di bulbi è $x(x + 4)$.

4. L'equazione risolvente

$$x(x + 4) = 21.$$

Le **condizioni** sono: $x \geq 0$, poiché non è pensabile un numero negativo di file.

5. La risoluzione

$$x(x + 4) = 21$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 + 21 = 25$$

$$x = -2 \pm \sqrt{25} = \begin{cases} -2 + 5 = 3 \\ -2 - 5 = -7 \text{ non accettabile} \end{cases}$$

6. La risposta
Dobbiamo piantare i bulbi su 3 file.

417 Determina le lunghezze dei due lati di un rettangolo di area 15 cm^2 e perimetro 16 cm. [3 cm; 5 cm]

418 Dato un segmento AB di lunghezza 9 cm, determina su di esso un punto P, tale che AP sia medio proporzionale tra l'intero segmento e la parte restante aumentata di 1 cm. [$AP = 6$ cm]

419 Un quadrato ha perimetro 24 cm. Un rettangolo ha lo stesso perimetro, mentre l'area è pari ai $\frac{3}{4}$ di quella del quadrato. Determina le dimensioni del rettangolo. [3 cm; 9 cm]

BRAVI SI DIVENTA ▶ E42

420 Un trapezio rettangolo $ABCD$ è circoscritto a una semicirconferenza di diametro $AD = 24$ cm. Il punto P di tangenza divide il lato obliquo CB in due parti CP e PB tali che $\overline{CP} + \frac{1}{2}\overline{PB} = 17$ cm. Trova l'area del trapezio.

421 Un rettangolo di area 20 cm^2 ha l'altezza minore della base di 1 cm. Calcola il perimetro del rettangolo. [18 cm]

422 Un rettangolo ha le dimensioni di 5 cm e 2 cm. Vogliamo incrementare la base e l'altezza di una stessa quantità in modo da ottenere un secondo rettangolo che abbia l'area di 70 cm^2. Determina tale quantità. [5 cm]

423 In un triangolo isoscele base e altezza stanno tra loro come 3 sta a 2, e il perimetro è 16 cm. Determina l'area. [12 cm^2]

424 Un segmento è suddiviso in due parti, delle quali una risulta 5 cm più lunga dell'altra. Il prodotto tra le misure dei due segmenti componenti è 6 volte la misura dell'intero segmento. Determina la lunghezza del segmento di partenza e quella delle due parti nelle quali esso risulta suddiviso. [25 cm; 15 cm; 10 cm]

425 In un triangolo rettangolo, un cateto misura 7 cm in più dell'altro cateto e l'ipotenusa 14 cm in meno della somma dei due cateti. Determina il perimetro del triangolo. [84 cm]

426 In un rettangolo il lato maggiore aumentato di 10 cm è uguale al doppio del minore e la differenza dei quadrati dei due lati è 52 cm^2. Determina l'area del rettangolo. [168 cm^2]

427 L'area di un triangolo rettangolo è di 80 cm^2. Determina l'ipotenusa, sapendo che un cateto diminuito di 4 cm è pari al doppio dell'altro cateto. [$4\sqrt{29}$ cm]

428 L'area di un triangolo rettangolo è di 120 cm^2. Determina l'ipotenusa, sapendo che un cateto è pari alla metà dell'altro cateto aumentata di 2 cm. [$4\sqrt{34}$ cm]

429 Un rettangolo è equivalente a un quadrato di lato 8 cm. Determina il perimetro del rettangolo, sapendo che la differenza fra il doppio della base e la metà dell'altezza è 16 cm. [$8\left(5\sqrt{2}-3\right)$ cm]

430 Un rettangolo ha area di 40 cm^2 e i suoi lati sono lunghi uno 3 cm in più dell'altro. Se si allungano entrambi i lati della stessa misura, si ottiene un rettangolo la cui area è 30 cm^2 in più dell'area del rettangolo iniziale. Determina il perimetro del nuovo rettangolo. [34 cm]

431 In un triangolo rettangolo, delle due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, la maggiore è pari al doppio della minore diminuito di 4 cm, mentre l'altezza relativa all'ipotenusa supera di 10 cm la differenza delle due proiezioni. Determina l'area del triangolo. [600 cm^2]

432 Determina il perimetro di un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa di 25 cm e l'area di 150 cm^2. [60 cm]

433 In un trapezio rettangolo la base minore è lunga 4 cm in meno della maggiore e 1 cm in meno dell'altezza. Determina il perimetro del trapezio, sapendo che la sua area è di 12 cm^2. [16 cm]

434 Considera un quadrato $ABCD$ di area 144 cm^2 e determina sul lato CD un punto P tale che $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 378$. [$PC = 3$ cm, oppure $PC = 9$ cm]

435 In un triangolo rettangolo un cateto è lungo 9 cm in meno dell'ipotenusa e l'altro cateto è i $\frac{3}{4}$ del primo. Determina l'area del triangolo. [486 cm^2]

436 Un trapezio isoscele è inscritto in una semicirconferenza di diametro 70 cm. La base minore supera di 14 cm il doppio dell'altezza. Determina l'area del trapezio. [1323 cm^2]

437 Un'antenna di 9 m è posta perpendicolarmente al pavimento di un terrazzo. Un forte vento la spezza in modo tale che la cima dell'antenna tocca il pavimento a 3 m dalla base della stessa. A quale altezza si è prodotta la rottura? [4 m]

438 In un quadrato di area 49 cm^2 è inscritto un quadrato di area 25 cm^2. Determina il perimetro di ciascuno dei triangoli individuati dal quadrato inscritto nel quadrato più grande. [12 cm]

439 Per abbellire una coperta rettangolare che ha la superficie di 5,72 m^2 viene cucito sui quattro lati un pizzo lungo 9,6 m. Quali sono le dimensioni della coperta? [2,2 m; 2,6 m]

440 La differenza tra i cateti di un triangolo rettangolo è 14 cm. L'ipotenusa è lunga 26 cm. Trova le lunghezze dei cateti. [24 cm; 10 cm]

441 Andrea ha incollato la foto del suo gruppo musicale preferito su un pannello. La foto, che ha area uguale a 360 cm^2, è di forma rettangolare, come il pannello che ha il perimetro di 438 cm e l'altezza di 105 cm. Determina le dimensioni della foto, sapendo che è stata incollata con i lati equidistanti da quelli del pannello. [15 cm; 24 cm]

442 Dato un segmento AB di lunghezza 17 cm, determina su di esso un punto P che lo divida in parti tali che il rettangolo avente per dimensioni le loro lunghezze abbia area 72 cm^2.
[$AP = 9$ cm; $PB = 8$ cm]

443 L'area di un rombo è di 24 cm^2 e una diagonale è più lunga dell'altra di 2 cm. Determina il perimetro del rombo. [20 cm]

444 Su una semicirconferenza di diametro $AB = 12$ cm, determina un punto P tale che, detta H la sua proiezione su AB, risulti: $\overline{PH}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 176$.
[$AH = 4$ cm, oppure $AH = 8$ cm]

445 Calcola l'area di un quadrato avente lo stesso perimetro di un rettangolo, sapendo che l'area di questo misura 225 cm^2 e la base è uguale al triplo dell'altezza diminuito di 2 cm. [289 cm^2]

446 In un triangolo rettangolo la differenza delle misure dei cateti è 8 cm e l'ipotenusa supera di 16 cm il cateto minore. Calcola il perimetro del triangolo. [96 cm]

447 Il punto C divide il segmento AB in due parti tali che $AC < BC$; inoltre il doppio della parte minore AC è 2 cm in più di BC e il prodotto delle loro misure supera di 3 cm^2 il quadrato di AC. Tracciata per B la perpendicolare ad AB, determina su di essa un punto P tale che $\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PA}^2 = 92$. [$PB = 3$ cm]

448 In un triangolo isoscele la base supera di 3 cm il lato obliquo e l'altezza è 12 cm. Determina il perimetro. [48 cm]

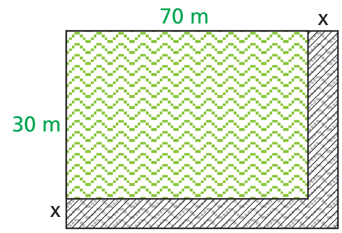
449 In un rettangolo la base supera di 4 cm il triplo dell'altezza e l'area è di 480 cm^2. Trova le dimensioni del rettangolo. [40 cm; 12 cm]

450 Disegna il triangolo ABC rettangolo in A, prolunga AC di un segmento CD tale che $\overline{AD} = 32a$. Prolunga l'ipotenusa BC di un segmento CE tale che CED sia un triangolo rettangolo in D e che $\overline{ED} = 45a$. Sapendo che $\overline{AB}$ supera $\overline{AC}$ di $7a$, determina il perimetro dei due triangoli.
[$40a$; $120a$]

451 Nel quadrato $ABCD$ di lato 12 cm trova su AD il punto P tale che:

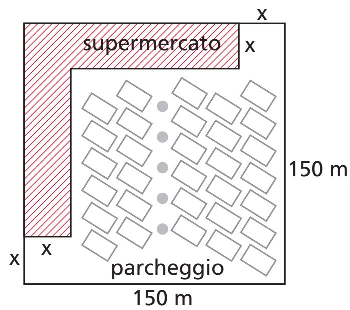
$$2\overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 = 528.$$ [$PD = 4$ cm]

452



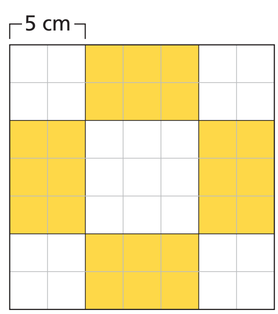
Il proprietario di un terreno deve cederne una parte (vedi figura) uguale a 416 m^2 per la costruzione di una strada. Calcola la larghezza x della strada sapendo che il terreno rimasto ha i lati lunghi 30 m e 70 m. [$x = 4$ m]

453



Si deve costruire un supermercato con il relativo parcheggio che ha la piantina in figura. Supposto che x sia minore della metà del lato del quadrato, come deve essere lungo x affinché il parcheggio occupi una superficie complessiva di 19 332 m^2?
[$x = 12$ m]

454



L'area colorata in giallo vale 156 cm^2. Qual è la lunghezza del lato del quadrato grande?
Risolvi il problema in due modi, ponendo dapprima x uguale alla misura del lato del quadrato centrale e poi x uguale a quella del lato del quadrato grande. [17,8 cm]

455 In un trapezio rettangolo la base maggiore supera di 24 cm la minore. L'altezza è i $\frac{3}{5}$ della base minore e l'area è di 324 cm^2. Determina la lunghezza delle basi. [18 cm; 42 cm]

456 Su una tavoletta babilonese, scritta a caratteri cuneiformi, si legge:
«Larghezza e lunghezza. Io ho moltiplicato la lunghezza e la larghezza e ho ottenuto un'area. Inoltre ho aggiunto all'area l'eccesso della lunghezza sulla larghezza, essendo il risultato 82. Infine la somma della lunghezza e della larghezza è 18».
Calcola la lunghezza, la larghezza e l'area.
[10; 8; 80]

457 Un rettangolo è inscritto in una circonferenza di raggio 12 cm e il suo perimetro è di $\frac{336}{5}$ cm. Determina i lati del rettangolo. $\left[\frac{96}{5}\text{ cm}; \frac{72}{5}\text{ cm}\right]$

458 Un triangolo isoscele ABC, di base AB, il cui lato è lungo 30 cm, è circoscritto a una semicirconferenza con diametro $DE = \frac{144}{5}$ cm sul lato AB. Trova il perimetro e l'altezza del triangolo.
[96 cm, 24 cm; 108 cm, 18 cm]

459 Nel triangolo ABC si sa che

$$B\hat{A}C = 30°, AB = \frac{3}{5}AC \text{ e } \overline{AB} + \overline{AC} = 32a.$$

Preso un punto P su AB, traccia l'altezza BD e da P la parallela a BD che incontri AC in H. Trova P in modo che:

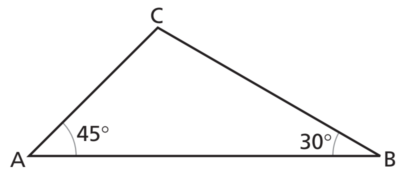
$$\overline{PD}^2 + 2\overline{AH}^2 = 124a^2.$$ $[\overline{PH} = 4a]$

460 Data la semicirconferenza di diametro AB e centro O, sul prolungamento di AB dalla parte di B considera un punto P tale che $\overline{OP} = 25$ e traccia la tangente PT nel punto T alla semicirconferenza. Sapendo che PT è i $\frac{2}{3}$ del diametro, calcola l'area e il perimetro del triangolo TBP.
$[60; 30 + 6\sqrt{5}]$

461 Dato il triangolo ABC rettangolo in A, traccia l'altezza AH e disegna le proiezioni di H sui cateti AC e AB, chiamandole rispettivamente D ed E. Sapendo che $AE = \frac{4}{3}HE$ e che l'area di ABC è $\frac{625}{6}$, trova $\overline{AH}$. [10]

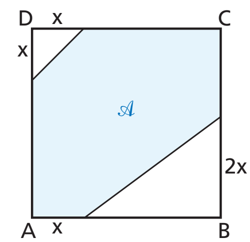
462 In una semicirconferenza di diametro $AB = 10$ cm traccia la tangente t in B. Preso un punto P sulla semicirconferenza e tracciata la sua proiezione K sulla retta t, determina per quali posizioni di P si ha: $\overline{PA}^2 + \overline{PK}^2 = 79$. $[\overline{PK} = 3; \overline{PK} = 7]$

463



Con riferimento alla figura, sapendo che $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = 128 + 32\sqrt{3}$, trova il perimetro di ABC.
$[4(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})]$

464

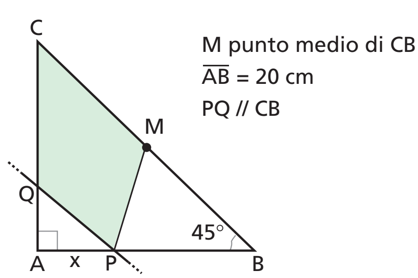


Nel quadrato $ABCD$ il lato misura 60.
a) Trova per quale valore di x la zona $\mathscr{A}$ colorata ha area in rapporto $\frac{149}{51}$ con la parte rimanente.
b) Quale valore assume $\mathscr{A}$ quando x ha il suo massimo valore? [a) 18; b) 2250]

465 Dato il quadrato $ABCD$ di lato 16, considera un punto P sul lato CB e traccia la perpendicolare PH alla diagonale AC. Determina P in modo che la somma dei quadrati dei lati del triangolo APH sia 544. $[\overline{PB} = 4]$

Problemi con i triangoli simili

466



Determina per quale valore di $\overline{AP}$ l'area della parte colorata è di 88 cm². [12]

467 Data la semicirconferenza di diametro AB e raggio 27 cm, sul prolungamento di AB dalla parte di B considera il punto C tale che $BC = 18$ cm e traccia la tangente TC nel punto T alla circonferenza. Su TC considera P e la sua proiezione H su BC. Determina P in modo che PHC abbia area uguale a 24 cm^2. $[PH = 6 \text{ cm}]$

468 In un triangolo rettangolo ABC le misure dei cateti sono $\overline{AB} = 12$ e $\overline{CA} = 16$. Sul cateto AC considera un punto P e traccia la parallela ad AB che intersechi CB in Q. Trova $\overline{AP}$ in modo che:

$$\text{Area}_{PQC} = \frac{25}{11}\text{Area}_{ABQP}. \qquad \left[\frac{8}{3}\right]$$

469 Nel triangolo isoscele ABC, di base AB, D ed E sono i punti medi rispettivamente di AC e CB. Sapendo che $AB = 48$ cm e $CB = 40$ cm, determina P su AB in modo che:

$$\overline{PD}^2 + \frac{3}{61}\overline{PE}^2 = 560. \qquad [PB = 19 \text{ cm}]$$

470 Il perimetro del parallelogramma $ABCD$ misura 96. La diagonale DB è perpendicolare al lato AD. Il rapporto tra il lato AB e DB è $\frac{5}{4}$.

a) Determina i lati del parallelogramma e la misura di AC.

b) Preso P su DB e chiamata H la sua proiezione su AB, trova per quale posizione di P si ha $\overline{PH}^2 + \overline{PC}^2 = 358$.

$[\text{a) } \overline{AB} = 30, \overline{AD} = 18, \overline{AC} = 12\sqrt{13}; \text{ b) } \overline{PB} = 5]$

471 Un triangolo isoscele ha base AB e altezzza CH, con $\overline{AB} + \overline{CH} = 80$ e $\overline{AB} > \overline{CH}$; l'area è di 768 cm^2.

a) Trova il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo (Suggerimento. Prolunga l'altezza CH fino a incontrare la circonferenza in D e considera poi il triangolo ACD…)

b) Considera P su HB e traccia la perpendicolare PK a CB. Determina per quale posizione di P il triangolo PKB ha area uguale a 192 cm^2.

$[\text{a) } 25 \text{ cm; b) } PB = 20 \text{ cm}]$

472 Sulla semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 12$, considera il punto P e la sua proiezione H su AB.

a) Determina $\overline{AH}$ in modo che:

$$\overline{AP}^2 + \frac{8}{7}\overline{PH}^2 = \overline{AB}^2.$$

b) Tracciate la tangente in P alla semicirconferenza e da B la parallela a OP, che incontri la tangente in K, trova il perimetro del triangolo PKB. $\left[\text{a) } \overline{AH} = \frac{21}{2}; \text{ b) } 3\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\right)\right]$

473 Dato il triangolo ABC rettangolo in A e isoscele, con $\overline{BC} = 18\sqrt{2}$, considera su AB un punto P. Congiungi P con C e da A traccia la parallela a PC fino a incontrare in D il prolungamento del lato BC. Determina $\overline{AP}$ in modo che:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{DC} + \frac{1}{3}\overline{AP} = 95. \qquad [15]$$

Problemi di geometria solida

474 Diminuendo di 2 cm lo spigolo di un cubo, il suo volume diminuisce di 218 cm^3. Trova la lunghezza dello spigolo. [7 cm]

475 Per fabbricare una lattina di aranciata di forma cilindrica occorrono 112π cm^2 di alluminio. Se l'altezza supera di 2 cm il diametro di base, quanti millilitri di aranciata sono contenuti nella lattina? $[160\pi \text{ ml}]$

476 In un parallelepipedo rettangolo la base ha le due dimensioni che sono una i $\frac{3}{5}$ dell'altra, mentre l'altezza supera di 3 cm la maggiore delle dimensioni di base. La superficie totale del parallelepipedo è 1134 cm^2. Determina il volume. [2430 cm^3]

477 Un parallelepipedo rettangolo ha per base un rettangolo in cui una dimensione supera l'altra di 8 cm. L'altezza è lunga 28 cm. Sapendo che il volume è 6720 cm^3, trova l'area della superficie totale. [2272 cm^2]

478 In un parallelepipedo rettangolo l'altezza è i $\frac{5}{8}$ del perimetro di base e in questa l'area supera di 32 cm^2 il quadrato costruito sul lato minore. Sapendo che il rapporto tra due lati adiacenti della base è $\frac{3}{2}$, determina il volume del parallelepipedo. [2400 cm^3]

479 In un cilindro circolare retto l'altezza supera di 12 cm il raggio di base. Se l'area della superficie totale è 220π cm^2, qual è il volume? [425π cm^3]

Problemi vari

480 Il doppio del quadrato di un numero intero è uguale a 50. Qual è il numero? [$+5$ o -5]

481 Sommando a 7 il triplo del quadrato di un numero intero si ottiene 55. Qual è il numero? [$+4$ o -4]

482 Il doppio aumentato di 9 del prodotto di un numero naturale con un altro, che lo supera di 4, è uguale a 3 volte il quadrato del primo. Determina i due numeri. [9; 13]

483 Ho depositato in banca € 20 000 in un conto corrente e ritiro oggi, dopo due anni, € 21 632. Quale tasso di interesse annuo costante è stato praticato? [4%]

484 In una frazione il denominatore supera di 5 il numeratore. Trova la frazione sapendo che sommandola con la sua reciproca si ottiene $\frac{53}{14}$. $\left[\frac{2}{7}\right]$

485 Dimostra che esiste un solo numero reale negativo che, elevato al quadrato, è uguale al suo triplo aumentato di 2.

486 In una pizzeria è esposto questo cartello: «Pizza per una persona – diametro 25 cm – costo € 3,50. Pizza per due persone – diametro 36 cm – costo € 7».

a) Quale scelta devono fare due amici per mangiare di più e spendere meno?
b) Che diametro dovrebbe avere la pizza piccola affinché la scelta sia ugualmente conveniente per i due amici? [a) la grande; b) 25,46 cm]

487 La differenza delle età di due fratelli è 6. Tra 3 anni il prodotto delle loro età sarà 952. Quanti anni hanno ora i due fratelli? [25, 31]

488 La divisione intera tra due numeri naturali dà quoziente 5 e resto 2, mentre la divisione intera tra i loro quadrati dà quoziente 29 e resto 4. Determina i due numeri. [27; 5]

489 In un numero di due cifre la cifra delle decine supera di 4 quella delle unità. Il triplo prodotto delle due cifre risulta pari al numero diminuito di 10. Determina il numero. [73]

490 Un barista vuole impilare, a piramide, nel suo magazzino 100 bottiglie nel modo rappresentato in figura.

È possibile impilare esattamente 100 bottiglie? Qual è il numero minimo di bottiglie che deve mettere nella base per impilarle tutte? Quante bottiglie dovrebbe aggiungere per completare tutta la piramide?

$\left(\text{Suggerimento: } 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.\right)$

[no; 14; 5]

491 Determina l'età di un ragazzo sapendo che il rapporto tra l'età che egli avrà tra 24 anni e quella che aveva un anno fa è uguale al rapporto tra il triplo della sua età di 6 anni fa e quella che egli avrà tra 4 anni. [26 anni]

492 Un numero è tale che la somma delle sue due cifre è uguale a 7 e sottraendo al quadrato del numero quello ottenuto da esso invertendo le cifre si ottiene 573. Trova il numero. [25]

493 Le età di un padre, di una madre e di un figlio sono rispettivamente uguali a 32, 30 e 7 anni. Fra quanti anni il quadrato dell'età del figlio sarà uguale al doppio della somma delle età dei genitori? [5]

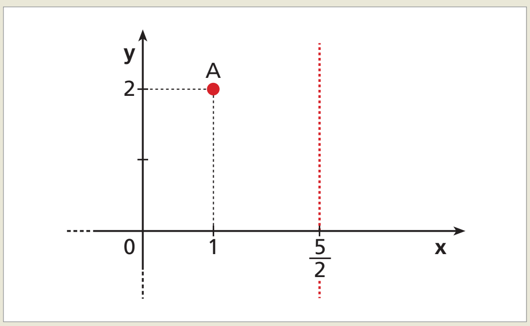
Problemi di geometria analitica

ESERCIZIO GUIDA

494 Dato il segmento AB, sappiamo che $\overline{AB} = \frac{\sqrt{34}}{2}$ e le coordinate di A sono $A(1; 2)$. Calcoliamo l'ordinata di B, sapendo che la sua ascissa è $\frac{5}{2}$.

Applichiamo la formula della distanza tra due punti $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, imponendo che la distanza fra $A(1; 2)$ e $B\left(\frac{5}{2}; y\right)$ sia uguale a $\frac{\sqrt{34}}{2}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 + (2 - y)^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$



Eleviamo al quadrato e svolgiamo i calcoli:

$$\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 4 + y^2 - 4y = \frac{34}{4}$$

$$y^2 - 4y + \frac{9}{4} + 4 - \frac{34}{4} = 0$$

$$4y^2 - 16y - 9 = 0.$$

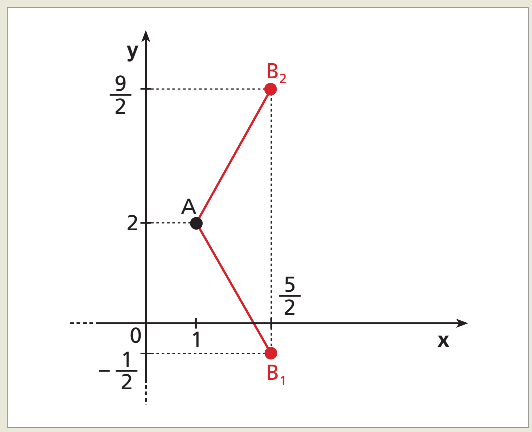
Utilizziamo la formula ridotta:

$$\frac{\Delta}{4} = 64 + 36 = 100$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{8 \pm 10}{4} = \begin{cases} \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

I punti che soddisfano il problema sono due:

$$B_1\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right), B_2\left(\frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right).$$



In ognuno dei seguenti esercizi sono date: la misura della lunghezza del segmento AB, le coordinate di A, una delle coordinate di B. Calcola la coordinata mancante.

495 $\overline{AB} = \sqrt{5}$ $\quad A(2; 3),$ $\quad B(0; ?).$ $\quad [y_1 = 2, y_2 = 4]$

496 $\overline{AB} = 2\sqrt{10}$ $\quad A\left(\frac{1}{2}; -1\right),$ $\quad B\left(-\frac{3}{2}; ?\right).$ $\quad [y_1 = -7, y_2 = 5]$

497 $\overline{AB} = \frac{\sqrt{10}}{3}$ $\quad A\left(-\frac{2}{3}; -1\right),$ $\quad B(?; 0).$ $\quad \left[x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3}\right]$

498 $\overline{AB} = \sqrt{30}$ $\quad A(\sqrt{2}; -\sqrt{3}),$ $\quad B(?; \sqrt{3}).$ $\quad [x_1 = 4\sqrt{2}, x_2 = -2\sqrt{2}]$

499 Calcola per quali valori del parametro a la distanza del punto $P(2a; 12)$ dall'origine è uguale a 13. $\left[a = \pm\frac{5}{2}\right]$

500 Calcola per quali valori del parametro k la distanza del punto $P(k; -1)$ dal punto $Q(-3; 3)$ è uguale a $2\sqrt{5}$. $[k = -5, k = -1]$

501 Determina le coordinate di un punto P che ha ordinata tripla dell'ascissa, sapendo che la sua distanza dal punto $Q(1; -1)$ è $5\sqrt{2}$. $\left[P_1\left(-\frac{12}{5}; -\frac{36}{5}\right), P_2(2; 6)\right]$

502 Calcola per quali valori del parametro a la distanza del punto $P(-2; a)$ dal punto $Q(1; 4)$ è $\overline{PQ} = 5$. $[a = 0, a = 8]$

503 Determina i punti $P(k; 2-k)$ del piano cartesiano di origine $O(0; 0)$, con $k \in \mathbb{R}$, per i quali $\overline{PO} = 2$. $[P'(0; 2), P''(2; 0)]$

504 Per quali valori del parametro a le rette di equazioni

$r: (a-1)x - (a+3)y + 1 = 0,$

$s: (a+1)x - (2a-3)y + 9a = 0$

risultano parallele? $[a = 0, a = 9]$

505 Trova il punto C sull'asse delle ordinate equidistante dai punti $A(3; 1)$ e $B(-2; -1)$. $\left[C\left(0; \frac{5}{4}\right)\right]$

506 Dati i punti $A(-1; 3)$, $B(2; k)$, $C(5; 11)$, trova k in modo che il triangolo ABC sia rettangolo in B. $[k_1 = 2, k_2 = 12]$

3. Le relazioni fra le radici e i coefficienti di un'equazione di secondo grado

→ Teoria a pag. 872

RIFLETTI SULLA TEORIA

507 **VERO O FALSO?**

a) La somma delle radici dell'equazione $2x^2 - 4x - 1 = 0$ è 2. V F

b) Il prodotto delle radici dell'equazione $3x^2 - x - 2 = 0$ è 2. V F

c) Nell'equazione $x^2 - 6x = 0$ la somma e il prodotto delle radici valgono rispettivamente 6 e 0. V F

d) Se nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ la somma delle radici è uguale al loro prodotto, allora $b = c$. V F

e) In un'equazione pura la somma e il prodotto delle soluzioni valgono sempre 0. V F

508 **VERO O FALSO?**

Le seguenti affermazioni si riferiscono all'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, con $\Delta \geq 0$.

a) La somma delle radici è uguale al rapporto, cambiato di segno, fra c e a. V F

b) Il prodotto delle radici è uguale al rapporto fra b e a. V F

c) La somma delle radici è uguale al rapporto, cambiato di segno, fra a e b. V F

d) Il prodotto delle radici è uguale al rapporto fra c e a. V F

e) La somma delle radici è uguale al rapporto fra b e a. V F

509 **TEST** Sulle due equazioni **1.** $2x^2 - x - 6 = 0$ e **2.** $2x^2 + x - 6 = 0$ puoi affermare che:

A la somma e il prodotto delle radici di 2 sono uguali rispettivamente a $-\frac{1}{2}$ e 3.

B 1 e 2, non essendo equivalenti, hanno il prodotto delle radici diverso.

C la somma delle radici di 1 è uguale alla somma delle radici di 2.

D la somma e il prodotto delle radici di 1 sono uguali rispettivamente a $\frac{1}{2}$ e 3.

E il prodotto delle radici di 1 è uguale al prodotto delle radici di 2.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

510 Senza risolvere le equazioni, calcoliamo per ognuna la somma e il prodotto delle radici, specificando se le radici sono reali oppure non lo sono:

a) $3x^2 - 2x - 8 = 0$;
b) $x^2 - x + 1 = 0$.

---

a) Applichiamo le due formule $s = -\frac{b}{a}$ e $p = \frac{c}{a}$, tenendo presente che $a = 3$, $b = -2$, $c = -8$:

$s = -\frac{-2}{3} = +\frac{2}{3}$; $p = \frac{-8}{3} = -\frac{8}{3}$.

Controlliamo se le radici sono reali, ossia se $\Delta \geq 0$. In questo caso, poiché b è un numero pari, calcoliamo $\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$:

$\frac{\Delta}{4} = (+1)^2 - 3 \cdot (-8) = 1 + 24 > 0$.

Le radici sono reali; la loro somma è $\frac{2}{3}$, il loro prodotto è $-\frac{8}{3}$.

b) Calcoliamo: $s = -\frac{-1}{1} = +1$, $p = \frac{1}{1} = 1$, $\Delta = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$.

Le radici non sono reali; la loro somma e il loro prodotto sono entrambi uguali a 1.

Senza risolvere le equazioni seguenti nell'incognita *x*, calcola per ognuna la somma e il prodotto delle radici, specificando se le radici sono reali.

511 $x^2 + 3x + 2 = 0$; $\quad 1 - 3x - 4x^2 = 0$. $\quad \left[s = -3, p = 2; s = -\frac{3}{4}, p = -\frac{1}{4}\right]$

512 $x^2 + 2x - 15 = 0$; $\quad 7x^2 - 10x + 3 = 0$. $\quad \left[s = -2, p = -15; s = \frac{10}{7}, p = \frac{3}{7}\right]$

513 $-x^2 + 5x - 6 = 0$; $\quad 2x^2 - \frac{11}{2}x + 3 = 0$. $\quad \left[s = 5, p = 6; s = \frac{11}{4}, p = \frac{3}{2}\right]$

514 $4x^2 + 8x + 3 = 0$; $\quad -2x^2 - 7x - 5 = 0$. $\quad \left[s = -2, p = \frac{3}{4}; s = -\frac{7}{2}, p = \frac{5}{2}\right]$

515 $3x^2 - 5x + 3 = 0$; $\quad 7x^2 + 48x - 7 = 0$. $\quad \left[s = \frac{5}{3}, p = 1, \text{radici non reali}; s = -\frac{48}{7}, p = -1\right]$

516 $x^2 + 3ax + 2a^2 = 0$ $\quad [s = -3a, p = 2a^2]$

517 $8x^2 - 3kx + k^2 = 0$ $\quad \left[s = \frac{3k}{8}, p = \frac{k^2}{8}, \text{radici non reali se } k \neq 0\right]$

518 $12x^2 + 7x = 1 - \sqrt{2}x$ $\quad \left[s = -\frac{7 + \sqrt{2}}{12}, p = -\frac{1}{12}\right]$

519 $18x^2 + 3\sqrt{3}x + 9\sqrt{2}x = 1$ $\quad \left[s = -\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}, p = -\frac{1}{18}\right]$

520 $x^2 + 2a^2 - 3a(b - x) = b(2x - b)$ $\quad [s = 2b - 3a, p = 2a^2 + b^2 - 3ab]$

521 $-2x^2 + \frac{11}{4}x - 3 = 0$ $\left[s = \frac{11}{8}, p = \frac{3}{2}, \text{radici non reali}\right]$

522 $\sqrt{6}x^2 - 2\sqrt{2}x + \sqrt{3} = 0$ $\left[s = \frac{2\sqrt{3}}{3}, p = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{radici non reali}\right]$

Senza risolvere le seguenti equazioni, calcola la somma e il prodotto delle radici, indicando se sono reali, e determina il loro segno.

523 $2x^2 - 3x - 7 = 0$ $\left[s = \frac{3}{2}, p = -\frac{7}{2}, \text{radici reali discordi}\right]$

524 $x^2 - 9x + 2 = 0$ $[s = 9, p = 2, \text{radici reali positive}]$

525 $6x^2 + 12x + 1 = 0$ $\left[s = -2, p = \frac{1}{6}, \text{radici reali negative}\right]$

526 $\frac{1}{2}x^2 + 7x - 1 = 0$ $[s = -14, p = -2, \text{radici reali discordi}]$

527 **ASSOCIA** a ogni equazione la somma s e il prodotto p delle soluzioni.

1. $x^2 - 6x + 4 = 0$	**A.** $s = 6, p = 2$.
2. $2x^2 - 12x + 1 = 0$	**B.** $s = 6, p = \frac{1}{2}$.
3. $x^2 + 6x + 4 = 0$	**C.** $s = 6, p = 4$.
4. $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 = 0$	**D.** $s = -6, p = 4$.

Determina quanto richiesto, note le seguenti informazioni per l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

528 $c = 4$ e $x_1 \cdot x_2 = 20$. $a = ?$

529 $a = 3$ e $x_1 \cdot x_2 = 12$. $c = ?$

530 $a = -\frac{1}{3}$ e $x_1 + x_2 = 21$. $b = ?$

531 $b = 2$ e $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$. $a = ?$

Dalle radici all'equazione

ESERCIZIO GUIDA

532 Scriviamo l'equazione di secondo grado in forma normale che ha come radici:

$$x_1 = -2 \text{ e } x_2 = \frac{1}{3}.$$

Calcoliamo la somma s e il prodotto p delle radici:

$$s = -2 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}; \quad p = -2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

L'equazione di secondo grado avente come somma delle soluzioni s e come prodotto p è $x^2 - sx + p = 0$; quindi:

$$x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 + 5x - 2 = 0.$$

Per ogni coppia di valori scrivi l'equazione di secondo grado in forma normale che ha tali valori come radici.

533 $1; 2$. $\quad -3; -1$. $\quad 2; -5$. $\quad 1; 1$.

534 $3; -\frac{1}{3}$. $\quad \frac{1}{2}; -6$. $\quad -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}$. $\quad \frac{3}{2}; -1$.

535 $a; 2a$. $\quad -a; -a$. $\quad \frac{3}{2}a; -\frac{1}{5}a$. $\quad 2; \sqrt{3}$.

536 $\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}$. $\quad -\sqrt{2}; -\sqrt{3}$. $\quad \sqrt{5}; \sqrt{5}$. $\quad a+b; a-b$.

537 $2a-b; 2a-b$. $\quad \sqrt{2}+1; \sqrt{2}-1$. $\quad \sqrt{5}-2; \sqrt{5}-2$. $\quad \frac{1}{\sqrt{3}-1}; \sqrt{3}$.

La somma e il prodotto di due numeri

ESERCIZIO GUIDA

538 Determiniamo i due numeri che hanno come somma $s = 6\sqrt{2}$ e come prodotto $p = 16$.

Scriviamo l'equazione $x^2 - sx + p = 0$:
$x^2 - 6\sqrt{2}x + 16 = 0$.

Risolviamo l'equazione (infatti le radici sono i numeri richiesti):

$$\frac{\Delta}{4} = (-3\sqrt{2})^2 - 1 \cdot 16 = 18 - 16 = 2$$

$$x = 3\sqrt{2} \pm \sqrt{2} = \begin{cases} 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

I numeri richiesti sono $2\sqrt{2}$ e $4\sqrt{2}$.

Determina, se possibile, due numeri reali, conoscendo la loro somma s e il loro prodotto p.

539 $s = 0$, $\quad p = -16$. $\quad [\pm 4]$

540 $s = 3$, $\quad p = \frac{5}{4}$. $\quad \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right]$

541 $s = 0$, $\quad p = -2a^2$. $\quad [\pm a\sqrt{2}]$

542 $s = 2\sqrt{3} + 2$, $\quad p = 3 + 2\sqrt{3}$. $\quad [\sqrt{3} + 2; \sqrt{3}]$

543 $s = \frac{1}{3}$, $\quad p = 0$. $\quad \left[0; \frac{1}{3}\right]$

544 $s = 6$, $\quad p = 13$. $\quad$ [impossibile]

545 $s = 2a$, $\quad p = a^2 - 1$. $\quad [a-1; a+1]$

546 $s = 1$, $\quad p = \frac{2}{9}$. $\quad \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$

547 $s = 2a + 2$, $\quad p = a^2 + 2a + 1$. $\quad [a+1; a+1]$

548 $s = 1$, $\quad p = \sqrt{2} - 2$. $\quad [\sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}]$

549 $s = 4\sqrt{7} - 2$, $\quad p = 21 - 6\sqrt{7}$. $\quad [\sqrt{7} - 2; 3\sqrt{7}]$

550 $s = \sqrt{3}$, $\quad p = -2 - \sqrt{6}$. $\quad [\sqrt{3} + \sqrt{2}; -\sqrt{2}]$

551 $s = 3a + 2$, $\quad p = 2a^2 - 7a - 3$. $\quad [a + 3; 2a - 1]$

552 $s = \frac{1 - 3a^2}{a}$, $\quad p = -3$, con $a \neq 0$. $\quad \left[-3a; \frac{1}{a}\right]$

553 Scrivi l'equazione di secondo grado che ha per soluzioni i valori opposti delle soluzioni di $2x^2 - 5x - 1 = 0$, senza risolvere questa equazione.
Puoi generalizzare il risultato per l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$? Motiva la risposta. $\quad [2x^2 + 5x - 1 = 0; \text{sì}]$

554 Senza risolvere l'equazione $x^2 - 2x - 8 = 0$ scrivi l'equazione di secondo grado le cui soluzioni sono doppie rispetto a quelle dell'equazione data.
Puoi generalizzare il risultato per l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$? Motiva la risposta. [$x^2 - 4x - 32$; sì]

555 Scrivi l'equazione le cui soluzioni sono uguali alla somma e al prodotto delle radici dell'equazione
$x^2 + bx + c = 0$. [$x^2 + (b - c)x - bc = 0$]

Da una soluzione all'altra

ESERCIZIO GUIDA

556 Data l'equazione $2x^2 + 3x - 20 = 0$, calcoliamo una radice sapendo che l'altra vale -4, senza utilizzare la formula risolutiva.

Calcoliamo il prodotto delle radici: $p = -\frac{20}{2} = -10$.

Se $x_1 \cdot x_2 = -10$ e $x_1 = -4$, allora:

$$-4 \cdot x_2 = -10 \rightarrow x_2 = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}.$$

La radice cercata è $\frac{5}{2}$.

Osservazione. Possiamo arrivare allo stesso risultato applicando la regola della somma invece di quella del prodotto.

Per ognuna delle seguenti equazioni in x è indicata una soluzione: calcola l'altra, senza applicare la formula risolutiva.

557 $x^2 + x - 6 = 0$; $x = -3$. [2]

558 $x^2 - 8x + 15 = 0$; $x = 5$. [3]

559 $2x^2 + 3x + 1 = 0$; $x = -\frac{1}{2}$. [-1]

560 $x^2 + 2ax - 3a^2 = 0$; $x = -3a$. [a]

561 $4 - 3x - x^2 = 0$; $x = -4$. [1]

562 $-2x^2 - \frac{5}{2}x = \frac{3}{4}$; $x = -\frac{1}{2}$. $\left[-\frac{3}{4}\right]$

563 $16x - 4x^2 - 15 = 0$; $x = \frac{5}{2}$. $\left[\frac{3}{2}\right]$

564 $2x^2 + bx - b^2 = 0$; $x = \frac{1}{2}b$. [$-b$]

565 COMPLETA la seguente tabella.

EQUAZIONE	SOMMA DELLE RADICI	PRODOTTO DELLE RADICI	x_1	x_2
…	…	…	-2	-9
$x^2 - 2x - 35 = 0$	…	…	…	…
$3x^2 - x - 2 = 0$	…	…	…	…
$\ldots x^2 + x - 1 = 0$	$-\frac{1}{6}$	…	…	…
…	-2	-24	…	…
$\ldots x^2 - 7x + 2 = 0$	…	$\frac{1}{3}$	…	…
…	0	-2	…	…

566 VERO O FALSO?

a) L'equazione $2x^2 - 3x - 3 = 0$ ha la somma delle soluzioni uguale al loro prodotto. V F

b) Nelle equazioni spurie il prodotto delle soluzioni è sempre uguale a 0. V F

c) Se la somma delle soluzioni è zero, un'equazione di secondo grado è pura. V F

d) Se la somma delle soluzioni vale 4, nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ si ha $b = -4$. V F

567 TEST Una sola delle seguenti affermazioni, relative all'equazione $5x^2 - 8x - 4 = 0$, è *falsa*. Quale?

A Il discriminante è il quadrato di 12.

B La somma delle radici è $\frac{8}{5}$.

C Le radici sono discordi.

D Una soluzione è -2.

E Il prodotto delle radici è negativo.

568 TEST Solo una delle seguenti affermazioni, relative all'equazione $(\sqrt{7} + 3)x^2 - 2\sqrt{7}x + \sqrt{7} - 3 = 0$, è *falsa*. Quale?

A $\frac{\Delta}{4} = 9$.

B Ha due radici concordi.

C Il prodotto delle radici è $3\sqrt{7} - 8$.

D 1 è una radice dell'equazione.

E La somma delle radici è $3\sqrt{7} - 7$.

4. La regola di Cartesio

Teoria a pag. 874

RIFLETTI SULLA TEORIA

569 TEST Applicando la regola di Cartesio, puoi affermare che l'equazione $15x^2 + 19x - 8 = 0$:

A ha due radici discordi, di cui quella con valore assoluto maggiore è la radice negativa.

B ha due radici negative.

C ha due radici discordi, di cui quella con valore assoluto maggiore è la radice positiva.

D non ha radici reali.

E ha due radici positive.

570 VERO O FALSO?

L'equazione $4x^2 + 5x + 1 = 0$:

a) ha due variazioni. V F

b) ha due soluzioni reali concordi. V F

c) ha due soluzioni negative. V F

d) ha una sola soluzione negativa. V F

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

571 Determiniamo il segno delle radici dell'equazione $7x^2 + 12x + 3 = 0$ senza risolverla.

Controlliamo se le radici sono reali, calcolando il discriminante.

Poiché b è pari, calcoliamo $\frac{\Delta}{4}$:

$$\frac{\Delta}{4} = 6^2 - 3 \cdot 7 = 36 - 21 > 0.$$

La sequenza dei segni è:

$$+ \quad + \quad +$$

permanenza permanenza

Per la regola di Cartesio, si hanno due radici negative.

L'equazione $7x^2 + 12x + 3 = 0$ ha due soluzioni reali negative.

Determina il segno delle radici di ogni equazione senza risolverla.

572 $x^2 - 12x + 4 = 0$

573 $2x^2 - 2x + 5 = 0$

574 $3x^2 - 2x - 1 = 0$

575 $5x^2 + 6x - 1 = 0$

576 $2x^2 + 3x - 2 = 0$

577 $2x^2 - 3x + 1 = 0$

578 $7x^2 - x - 1 = 0$

579 $3x^2 - 4x + 1 = 0$

580 $6x^2 - 3\sqrt{3}x + 2 = 0$

581 $\sqrt{2}x^2 - 6x + 2\sqrt{2} = 0$

582 $\sqrt{3}x^2 + 2x - \sqrt{3} = 0$

583 $2x^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0$

ESERCIZIO GUIDA

584 Data l'equazione, nell'incognita x,

$$(a+1)x^2 - 2ax + a + 2 = 0,$$

studiamo il segno delle soluzioni, senza risolvere l'equazione, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Se $a + 1 = 0$, cioè $a = -1$, l'equazione diventa di primo grado:

$2x + 1 = 0$, con soluzione $x = -\frac{1}{2}$, negativa.

Per $a \neq -1$, studiamo il discriminante:

$$\frac{\Delta}{4} = a^2 - (a+1)(a+2) =$$

$$= \cancel{a^2} - \cancel{a^2} - 2a - a - 2 = -3a - 2.$$

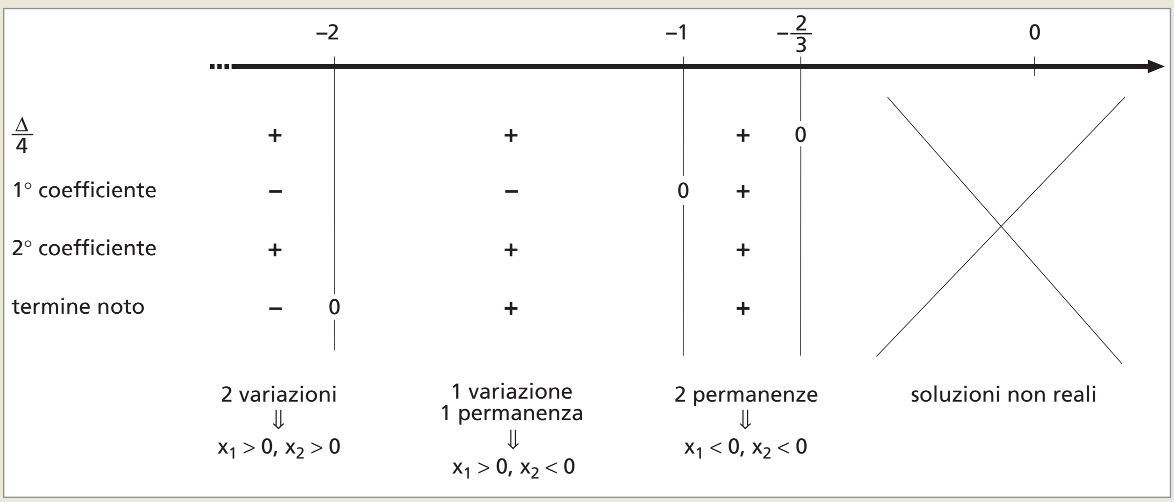
Le soluzioni sono reali se $\frac{\Delta}{4} \geq 0$.

$\frac{\Delta}{4} \geq 0$ per $-3a - 2 \geq 0 \rightarrow a \leq -\frac{2}{3}$.

Studiamo i segni dei tre coefficienti dell'equazione:

1° coefficiente: $a + 1 > 0 \rightarrow a > -1$;
2° coefficiente: $-2a > 0 \rightarrow a < 0$;
termine noto: $a + 2 > 0 \rightarrow a > -2$.

Compiliamo il quadro riassuntivo.



Studia il segno delle soluzioni delle seguenti equazioni, nell'incognita x, al variare del parametro in $\mathbb{R}$.

585 $x^2 - 2bx + b^2 - 1 = 0$

586 $ax^2 - (2a+1)x + a = 0$

587 $kx^2 - 4x + 2 = 0$

588 $x^2 - 6x - (a-1) = 0$

589 $bx^2 + 3bx + 1 = 0$

590 $(k-2)x^2 + 2(k-2)x + k = 0$

591 $kx^2 - (2k-1)x + k + 3 = 0$

592 $(a+1)x^2 - 4ax + 4a - 5 = 0$

593 $x^2 + 2(a+2)x - (1 - a^2) = 0$

594 $(a+2)x^2 + (3+2a)x + a = 0$

595 $2ax^2 - 4ax + (2a-3) = 0$

596 $(4a-1)x^2 - 4(a+1)x + a = 0$

597 $9kx^2 - (6k-1)x + k - 1 = 0$

598 $ax^2 - (2a+5)x + 8 + a = 0$

599 Determina per quali valori di a l'equazione $ax^2 - (a+3)x + 3 = 0$ ammette radici reali e positive.

600 Determina per quali valori di k l'equazione $(k-1)x^2 - 4x - 1 = 0$ ammette radici reali e discordi.

601 Determina per quali valori di b l'equazione $2x^2 + 6x + (2b-3) = 0$ ammette radici reali e concordi.

5. La scomposizione di un trinomio di secondo grado

Teoria a pag. 876

RIFLETTI SULLA TEORIA

602 VERO O FALSO? Le seguenti affermazioni si riferiscono al trinomio $ax^2 + bx + c$.

a) Può essere scomposto in fattori solo se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ è completa. V F

b) Può essere scomposto in fattori se $a > 0$. V F

c) *Non* può essere scomposto in fattori se $\Delta < 0$. V F

d) Può essere scomposto in fattori se $\Delta = 0$. V F

e) Può essere scomposto in fattori se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ *non* ammette radici reali. V F

603 TEST Sono dati i trinomi:

1. $6x^2 + 5x - 4$,
2. $25x^2 - 20x + 4$,
3. $x^2 + 2x + 10$.

Puoi dire che:

A la scomposizione in fattori di **2** è $5(x-2)^2$.
B la scomposizione in fattori di **3** è $x(x+2) + 10$.
C **1** e **3** sono irriducibili.
D la scomposizione in fattori di **1** è $(2x-1)(3x+4)$.
E nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

604 TEST Se le radici dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sono 2, -3 e $a = 5$, qual è la scomposizione in fattori del trinomio $ax^2 + bx + c$?

A $5(x-3)(x+2)$
B $\frac{1}{5}(x+3)(x-2)$
C $5(x+3)(x-2)$
D $5(x-5)(x+3)(x-2)$
E Non si può determinare.

ESERCIZI

La scomposizione di un trinomio

ESERCIZIO GUIDA

605 Scomponiamo in fattori, se è possibile, i seguenti trinomi di secondo grado:

a) $3x^2 + 14x - 5$;
b) $4x^2 - 12ax + 9a^2$;
c) $2x^2 - 6x + 15$.

Il polinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$ è scomponibile in $a(x - x_1)(x - x_2)$, dove x_1 e x_2 sono le eventuali soluzioni reali dell'equazione associata al polinomio, cioè di $ax^2 + bx + c = 0$.

a) L'equazione associata a $3x^2 + 14x - 5$ è:

$$3x^2 + 14x - 5 = 0.$$

Risolviamo l'equazione; poiché $b = 14$ è pari, applichiamo la formula ridotta:

$$\frac{\Delta}{4} = 7^2 - 3 \cdot (-5) = 49 + 15 = 64 > 0;$$ l'equazione ha due radici reali distinte.

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{64}}{3} = \begin{cases} \dfrac{-7+8}{3} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-7-8}{3} = -5 \end{cases}$$

Il trinomio dato si può scomporre così:

$$3x^2 + 14x - 5 = 3(x + 5)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (x + 5)(3x - 1).$$

b) L'equazione associata a $4x^2 - 12ax + 9a^2$ è:

$$4x^2 - 12ax + 9a^2 = 0.$$

Risolviamo l'equazione; poiché il secondo coefficiente $B = -12a$ è pari, applichiamo la formula ridotta:

$$\frac{\Delta}{4} = (-6a)^2 - 4 \cdot 9a^2 = 36a^2 - 36a^2 = 0;$$ l'equazione ha due radici reali coincidenti.

$$x = \frac{6a}{4} = \frac{3}{2}a.$$

Nel caso di radici coincidenti, la formula di scomposizione diventa:

$$Ax^2 + Bx + C = A(x - x_1)(x - x_1) = A(x - x_1)^2.$$

Il trinomio dato, pertanto, si può scomporre così:

$$4x^2 - 12ax + 9a^2 = 4\left(x - \frac{3}{2}a\right)^2 = 4\left(\frac{2x - 3a}{2}\right)^2 = (2x - 3a)^2.$$

c) L'equazione associata al trinomio $2x^2 - 6x + 15$ è:

$$2x^2 - 6x + 15 = 0.$$

Risolviamo l'equazione:

$$\frac{\Delta}{4} = (-3)^2 - 2 \cdot 15 = 9 - 30 = -21 < 0.$$

Poiché $\frac{\Delta}{4} < 0$, l'equazione non ha radici reali; pertanto il trinomio dato è irriducibile.

Scomponi in fattori, quando è possibile, i seguenti trinomi di secondo grado.

606 $x^2 + 6x + 5$ $[(x + 1)(x + 5)]$

607 $2x^2 - 4x + 5$ [irriducibile in $\mathbb{R}$]

608 $x^2 - ax - 2a^2$ $[(x + a)(x - 2a)]$

609 $4x^2 + 9k^2$ [irriducibile in $\mathbb{R}$]

610 $2x^2 - 3ax + a^2$ $[(x - a)(2x - a)]$

611 $6x^2 + x - 1$ $[(2x + 1)(3x - 1)]$

612 $5x^2 + 4x + \frac{4}{5}$ $\left[5\left(x + \frac{2}{5}\right)^2\right]$

613 $4a^2 - 4a - 3$ $[(2a - 3)(2a + 1)]$

614 $3b^2 - 5b - 2$ $[(b - 2)(3b + 1)]$

615 $2a^2 + 9a - 5$ $[(a + 5)(2a - 1)]$

616 $3x^2 - 2x - 8$ $[(3x + 4)(x - 2)]$

617 $9x^2 - 24ax + 16a^2$ $[(3x - 4a)^2]$

618 $2x^2 + (1 - 2\sqrt{3})x - \sqrt{3}$ $[(x - \sqrt{3})(2x + 1)]$

619 $ax^2 + (1 - 2a)x - 2a$ $[(x - 2)(ax + 1)]$

620 $3 - x^2 - \frac{5x\sqrt{2}}{2}$ $\left[(x + 3\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)\right]$

621 $x^2 - \frac{7}{4}\sqrt{3}x - \frac{3}{2}$ $\left[(x - 2\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + x\right)\right]$

La semplificazione di frazioni algebriche

ESERCIZIO GUIDA

622 Semplifichiamo la seguente frazione algebrica:

$$\frac{3x - 9}{2x^2 - 5x - 3}.$$

Scomponiamo il trinomio al denominatore, risolvendo l'equazione corrispondente:

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3) = (2x + 1)(x - 3).$$

Le condizioni di esistenza della frazione algebrica sono:

$$\text{C.E.: } x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq 3.$$

Semplifichiamo la frazione algebrica:

$$\frac{3\cancel{(x - 3)}}{(2x + 1)\cancel{(x - 3)}} = \frac{3}{2x + 1}.$$

Semplifica le seguenti frazioni algebriche, esplicitando le condizioni di esistenza.

623 $\frac{6x^2 + 2x}{2 + 6x}$ $\left[x, x \neq -\frac{1}{3}\right]$

624 $\frac{24x - 18}{8x^2 - 6x}$ $\left[\frac{3}{x}, x \neq 0 \wedge x \neq \frac{3}{4}\right]$

625 $\dfrac{4x-12}{2x^2-12x+18}$ $\left[\dfrac{2}{x-3}, x \neq 3\right]$

626 $\dfrac{2x^2+3x-9}{4x^2-9}$ $\left[\dfrac{x+3}{2x+3}, x \neq \pm\dfrac{3}{2}\right]$

627 $\dfrac{8b^2-8bx}{4b-4x}$ $[2b, x \neq b]$

628 $\dfrac{8x^2-2a^2}{2a^2+8x^2-8ax}$ $\left[\dfrac{2x+a}{2x-a}, x \neq \dfrac{a}{2}\right]$

629 $\dfrac{30+3x-6x^2}{6x^2-9x-15}$ $\left[-\dfrac{x+2}{x+1}, x \neq -1 \wedge x \neq \dfrac{5}{2}\right]$

630 $\dfrac{a^2-3a-4}{2a^2-11a+12}$ $\left[\dfrac{a+1}{2a-3}, a \neq 4 \wedge a \neq \dfrac{3}{2}\right]$

631 $\dfrac{6x-12}{6x^2-11x-2}$ $\left[\dfrac{6}{6x+1}, x \neq 2 \wedge x \neq -\dfrac{1}{6}\right]$

632 $\dfrac{4x^2+4x+1}{4x^2+2x}$ $\left[\dfrac{2x+1}{2x}, x \neq 0 \wedge x \neq -\dfrac{1}{2}\right]$

633 $\dfrac{x^3-6x^2+9x}{2x^2-5x-3}$ $\left[\dfrac{x(x-3)}{2x+1}, x \neq 3 \wedge x \neq -\dfrac{1}{2}\right]$

634 $\dfrac{8x^2-6ax+a^2}{2x^2+ax-a^2}$ $\left[\dfrac{4x-a}{x+a}, x \neq -a \wedge x \neq \dfrac{a}{2}\right]$

635 $\dfrac{6-2x^2}{8x^2-16x\sqrt{3}+24}$ $\left[\dfrac{x+\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}-x)}, x \neq \sqrt{3}\right]$

636 $\dfrac{4x^2+4x-2\sqrt{3}x-2\sqrt{3}}{6x^2+6x-3\sqrt{3}x-3\sqrt{3}}$ $\left[\dfrac{2}{3}, x \neq -1 \wedge x \neq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

637 $\dfrac{(3x^2+5x-2)(x^2-4x)}{3x^4-13x^3+4x^2}$ $\left[\dfrac{x+2}{x}, x \neq \dfrac{1}{3} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 4\right]$

638 $\dfrac{(x^2+2x)(2x^2-5x-3)}{(x^3-9x)(x+2)}$ $\left[\dfrac{2x+1}{x+3}, x \neq 0 \wedge x \neq \pm 3 \wedge x \neq -2\right]$

639 Considera la frazione algebrica $\dfrac{5x^2-6x+1}{ax^2-1}$. Determina per quali valori di a:

a) la C.E. è $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) il risultato della semplificazione è $\dfrac{x-1}{5x+1}$.

c) la frazione non è semplificabile. [a) $a \leq 0$; b) $a = 25$; c) $a \neq 1 \;\wedge\; a \neq 25$]

Un'applicazione: le equazioni fratte di secondo grado

ESERCIZIO GUIDA

640 Risolviamo l'equazione:

$$\frac{x+7}{3x^2-7x+2}+2=\frac{3-x}{x-2}.$$

Per calcolare il denominatore comune, scomponiamo $3x^2-7x+2$ in fattori. Determiniamo gli zeri del polinomio:

$$3x^2-7x+2=0 \;\rightarrow\; x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{6}=\frac{7\pm 5}{6}=\begin{cases} 2 \\ \dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Quindi:

$$3x^2-7x+2=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)=(3x-1)(x-2).$$

Ritornando all'equazione di partenza abbiamo:

C.E.: $x - \frac{1}{3} \neq 0 \rightarrow \boldsymbol{x \neq \frac{1}{3}}$; $x - 2 \neq 0 \rightarrow \boldsymbol{x \neq 2}$.

Il denominatore comune è il m.c.m. dei denominatori e l'equazione diventa:

$$\frac{x+7}{(3x-1)(x-2)} + \frac{2(3x-1)(x-2)}{(3x-1)(x-2)} = \frac{(3-x)(3x-1)}{(3x-1)(x-2)}.$$

Eliminando il denominatore comune e svolgendo i calcoli nei numeratori, otteniamo:

$$x + 7 + 6x^2 - 14x + 4 = 9x - 3 - 3x^2 + x$$

$$9x^2 - 23x + 14 = 0$$

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 504}}{18} = \frac{23 \pm \sqrt{25}}{18} = \frac{23 \pm 5}{18} = \begin{cases} \frac{28}{18} = \frac{14}{9} \\ \frac{18}{18} = 1 \end{cases}$$

Viste le C.E., le radici dell'equazione sono entrambe accettabili:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{14}{9}.$$

Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni nell'incognita x.

641 $\frac{x-3}{x-1} + 2 = \frac{x-3}{x+2} + \frac{x-13}{x^2+x-2}$ [0; − 2 non accettabile]

642 $\frac{x^2-2x+5}{x^2-5x+6} + \frac{x+3}{x-2} = \frac{x+2}{x-3}$ [0; 2 non accettabile]

643 $\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+2} = \frac{5-x^2}{x^2-x-6}$ [1; − 4]

644 $\frac{2+x}{x^2-2x-3} + \frac{3x}{(x-2)(x^2-2x-3)} = \frac{1+2x}{x^2-5x+6}$ [impossibile]

645 $\frac{2x}{x-4} + \frac{3}{x-3} + 4 = \frac{30+5x^2-36x}{x^2-7x+12}$ [− 2; − 3]

646 $\frac{2}{6x-15} + \frac{1}{3x} - \frac{10+2x}{4x^2-20x+25} = \frac{25}{12x^3-60x^2+75x}$ [0 non accettabile; 30]

647 $\frac{3x}{x-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{x-2\sqrt{2}} = \frac{2(x^2-1-2\sqrt{2}x)}{x^2-3\sqrt{2}x+4}$ [impossibile]

648 $\frac{3y-1}{3y-2} - \frac{3y-2}{3y-1} = \frac{1}{3} + \frac{21y-8}{27y^2-27y+6}$ [impossibile]

649 $\frac{10-2x}{3-3x} + \frac{4-3x}{1-2x} = \frac{1}{3} + \frac{x^2-40x+31}{3(2x^2-3x+1)}$ [− 1; + 1 non accettabile]

650 $\dfrac{x-3a}{2x-a} - \dfrac{2x+4a}{x-3a} = \dfrac{x^2+a^2-12ax}{2x^2-7ax+3a^2}$ $[\pm a\sqrt{3}, a \neq 0]$

651 $\dfrac{x-2a}{x+a} = \dfrac{x-a}{x-2a} + 1 + \dfrac{17a^2-2x^2}{x^2-ax-2a^2}$ $[5a; -2a, a \neq 0]$

652 $\dfrac{3x-1}{12x-36} - \dfrac{4x}{3x+3} + \dfrac{4x-2}{4x^2-8x-12} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{25x-2x^2+5}{12(x^2-2x-3)}$ [0; 3 non accettabile]

653 $\dfrac{x}{x-2b} + \dfrac{x}{x-b} = \dfrac{x^2-5bx+3b^2}{x^2-3bx+2b^2}$ [b non accettabile; $-3b$]

654 $\dfrac{5}{4} - \dfrac{x+3b}{x+2b} = \dfrac{2b-x}{x+4b} + \dfrac{bx}{2(x^2+6bx+8b^2)}$ $\left[\dfrac{\pm 2b\sqrt{30}}{5}\right]$

655 $\dfrac{x+9a}{x-3a} - \dfrac{9ax+72a^2}{4ax-3a^2-x^2} = \dfrac{2a-8x}{x-a} + \dfrac{69a^2}{x^2-4ax+3a^2}$ [0, se $a \neq 0$; a non accettabile]

6. Le equazioni parametriche

Teoria a pag. 877

RIFLETTI SULLA TEORIA

656 **VERO O FALSO?**

Le seguenti affermazioni si riferiscono all'equazione $(k-1)x^2 - 2kx + k - 1 = 0$.

a) Ha soluzioni reali se $k \geq \dfrac{1}{2}$. V F

b) È spuria se $k = 1$. V F

c) Il prodotto delle radici non dipende dal parametro k. V F

d) È pura se $k \neq 0$. V F

e) È completa se $k \neq 0 \wedge k \neq 1$. V F

657 **TEST** Per quali valori di k l'equazione parametrica

$$(k-2)x^2 - (k-1)x + 2k = 0$$

è di primo grado?

A $k = 0$

B $k = 1$

C $k = -1$

D $k = 2$

E $\nexists k \in \mathbb{R}$

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 13 esercizi di recupero

658 **COMPLETA** la tabella utilizzando le informazioni indicate, relative all'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

a	*b*	*c*	INFORMAZIONE
3	4	…	$x_1 = x_2$
…	10	5	$x_1 = \dfrac{1}{x_2}$
1	…	-12	$x_1 = -3$
1	…	-4	$x_1 + x_2 = 0$
2	…	…	$x_1 = \dfrac{1}{x_2}$ e $x_1 + x_2 = -3$
…	-4	…	$x_1 + x_2 = 2$ e $x_1 x_2 = 6$

ESERCIZIO GUIDA

659 Data l'equazione di secondo grado, nell'incognita x,

$$(k-1)x^2+(2k-5)x+k+1=0,$$

determiniamo per quali valori del parametro k sono soddisfatte le condizioni:

a) le soluzioni sono reali distinte;
b) le soluzioni sono reali coincidenti;
c) non esistono soluzioni reali;
d) una radice è nulla.

Affinché l'equazione sia di secondo grado, deve essere $k-1 \neq 0 \ \rightarrow\ k \neq 1$.

a) La condizione da imporre è $\Delta > 0$.

Calcoliamo Δ:

$$\Delta = (2k-5)^2 - 4(k-1)(k+1) = 4k^2 - 20k + 25 - 4(k^2-1) =$$
$$= 4k^2 - 20k + 25 - 4k^2 + 4 = -20k + 29.$$

Imponiamo la condizione $\Delta > 0$:

$$-20k + 29 > 0 \ \rightarrow\ -20k > -29 \ \rightarrow\ 20k < 29 \ \rightarrow\ k < \frac{29}{20}.$$

b) Dobbiamo imporre la condizione $\Delta = 0$:

$$-20k + 29 = 0 \ \rightarrow\ k = \frac{29}{20}.$$

c) Dobbiamo imporre la condizione $\Delta < 0$:

$$-20k + 29 < 0 \ \rightarrow\ 20k > 29 \ \rightarrow\ k > \frac{29}{20}.$$

d) Sostituiamo a x il valore 0:

$$(k-1)\cdot 0^2 + (2k-5)\cdot 0 + k + 1 = 0$$

$$k + 1 = 0 \ \rightarrow\ k = -1.$$

Per ogni equazione di secondo grado nell'incognita x determina per quali valori del parametro k sono soddisfatte le condizioni indicate a fianco.

660 $x^2 - 2kx + 5k - 6 = 0$; soluzioni reali coincidenti. $[k = 2 \vee k = 3]$

661 $6x^2 + (2k-3)x - k = 0$; soluzioni reali. $[\forall k \in \mathbb{R}]$

662 $(k-2)x^2 + 2(2k-3)x + 4k + 2 = 0$, con $k \neq 2$; $x_1 = 0$. $\left[k = -\frac{1}{2}\right]$

663 $(2k-1)x^2 + (k-3)x + 3k - 1 = 0$, con $k \neq \frac{1}{2}$; $x_1 = -2$. $\left[k = -\frac{1}{9}\right]$

664 $kx^2 + (4k-1)x + 4k = 0$, con $k \neq 0$; soluzioni reali distinte. $\left[k < \frac{1}{8}\right]$

665 $6kx^2 - (5k+2)x + 9 - k^2 = 0$, con $k \neq 0$; $x_1 = 0$. $[k = \pm 3]$

666 $(8k-2)x^2 - (1-2k)x + 2 - 5k = 0$, con $k \neq \frac{1}{4}$; $x_1 = -1$. $[k = -1]$

667 $9x^2 - 2(3k+1)x - 1 + k^2 = 0$; soluzioni reali. $\left[k \geq -\frac{5}{3}\right]$

668 $(1+m^2)x^2 + (m+1)x + 10m - 3m^2 - 5 = 0$; $x_1 = -3$. $\left[m = -\frac{1}{6} \vee m = -1\right]$

669 $x^2 - 2(k+1)x + 4k = 0$; non esistono soluzioni reali. $[\nexists\, k \in \mathbb{R}]$

Condizioni che riguardano la somma delle radici

ESERCIZIO GUIDA

670 Nell'equazione di secondo grado, nell'incognita x,

$kx^2 + (4k-1)x + 4k = 0$, con $k \neq 0$,

determiniamo il valore del parametro k tale che la somma s delle radici sia $-\frac{9}{2}$.

Dobbiamo porre due condizioni:

1. $\Delta \geq 0$, affinché le radici siano reali;

2. $s = -\frac{b}{a} = -\frac{9}{2}$.

1. Calcoliamo Δ:

$$\Delta = (4k-1)^2 - 4 \cdot k \cdot 4k = $$
$$= 16k^2 - 8k + 1 - 16k^2 = -8k + 1.$$

Poniamo $\Delta \geq 0$:

$$-8k + 1 \geq 0 \rightarrow -8k \geq -1 \rightarrow k \leq \frac{1}{8}.$$

2. Calcoliamo la somma delle radici $s = -\frac{b}{a}$:

$$s = -\frac{4k-1}{k}.$$

Poniamo $s = -\frac{9}{2}$:

$$-\frac{4k-1}{k} = -\frac{9}{2} \rightarrow 2(4k-1) = 9k \rightarrow$$
$$\rightarrow -k - 2 = 0 \rightarrow k = -2.$$

Poiché $-2 < \frac{1}{8}$, il valore trovato per k è accettabile.

Per ogni equazione di secondo grado nell'incognita x determina i valori del parametro k tali che sia soddisfatta la condizione scritta a fianco riguardante la somma s delle radici.

671 $kx^2 + (4k+2)x + 4k + 5 = 0$; radici opposte ($x_1 = -x_2$). $\left[k = -\frac{1}{2}\right]$

672 $5kx^2 - 2(k-1)x + \frac{1}{5}k = 0$, con $k \neq 0$; radici opposte. $[k = 1 \text{ non accettabile}]$

673 $(4k-1)x - 4x^2 - k^2 = 0$; $s = -\frac{5}{4}$. $[k = -1]$

674 $x^2 - 2(k+1)x + 4k = 0$; $s > 10$. $[k > 4]$

675 $x^2 - 4(k-3)x + 4(k^2 - 2k) = 0$; $s > 8$. $[k > 5 \text{ non accettabile}]$

676 $(9k-1)x^2 - 12(k-2)x + 3 + 4k = 0$, con $k \neq \frac{1}{9}$; $s = 4$. $\left[k = -\frac{5}{6}\right]$

Condizioni che riguardano il prodotto delle radici

ESERCIZIO GUIDA

677 Data l'equazione parametrica di secondo grado, nell'incognita x,

$$(k-1)x^2 - 2kx + k + 3 = 0, \quad \text{con } k \neq 1,$$

determiniamo i valori del parametro per i quali l'equazione ha:
a) le radici reciproche;
b) il prodotto p delle radici uguale a $\frac{1}{2}$.

Calcoliamo per quali valori di k le radici sono reali, ponendo $\frac{\Delta}{4} \geq 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = k^2 - (k-1)(k+3) = k^2 - k^2 - 3k + k + 3 = -2k + 3$$

$$\frac{\Delta}{4} \geq 0 \Rightarrow -2k + 3 \geq 0 \to 2k \leq 3 \to k \leq \frac{3}{2}.$$

a) Le radici sono **reciproche** se $x_1 = \frac{1}{x_2}$, ossia se $\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = 1}$, cioè se $p = 1$.

Poniamo $p = \frac{c}{a} = 1$:

$$\frac{k+3}{k-1} = 1 \to k + 3 = k - 1 \to 3 = -1 \text{ impossibile}.$$

Non esiste alcun valore di k tale che le radici siano reciproche.

b) Poniamo $p = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$:

$$\frac{k+3}{k-1} = \frac{1}{2} \to 2(k+3) = k - 1 \to 2k + 6 = k - 1 \to k = -7.$$

Poiché $-7 \leq \frac{3}{2}$, il valore trovato per k è accettabile.

Per ogni equazione parametrica nell'incognita x determina i valori del parametro affinché le radici siano reali e siano soddisfatte le condizioni scritte sotto. Il prodotto delle radici è indicato con p.

678 $x^2 - kx + 4k = 0$;
a) le radici sono reciproche;
b) $p = 12$.

$\left[\text{a) } k = \frac{1}{4} \text{ non accettabile; b) } k = 3 \text{ non accettabile}\right]$

679 $(k-2)x^2 - 2kx + k - 3 = 0, \quad (k \neq 2)$;
a) le radici sono reciproche;
b) $p = -1$;
c) $p > \frac{1}{2}$.

$\left[\text{a) } \nexists\, k \in \mathbb{R}; \text{ b) } k = \frac{5}{2}; \text{ c) } \frac{6}{5} \leq k < 2 \vee k > 4\right]$

680 $x^2 - 8x + 4m - 5 = 0$;
a) $p = -5$;
b) $p > 1$;
c) le radici sono concordi.

$\left[\text{a) } m = 0; \text{ b) } \frac{3}{2} < m \leq \frac{21}{4}; \text{ c) } \frac{5}{4} < m \leq \frac{21}{4}\right]$

681 $3x^2 - (2k - 3)x - 2k = 0$;
a) $x_1 = \frac{1}{x_2}$;
b) $p = -\frac{2}{3}$.

$\left[\text{a) } k = -\frac{3}{2}; \text{ b) } k = 1\right]$

682 $2x^2 - 7x + 4k = 0$;
a) le radici sono reciproche;
b) le radici sono concordi;
c) $p = -10$.

$\left[\text{a) } k = \frac{1}{2}; \text{ b) } 0 < k \leq \frac{49}{32}; \text{ c) } k = -5\right]$

683 $kx^2 - 4kx + 4k - 1 = 0$, con $k \neq 0$;
a) le radici sono reciproche;
b) $p = 9$;
c) le radici sono discordi.

$\left[\text{a) } k = \frac{1}{3}; \text{ b) } k = -\frac{1}{5}, \text{ non accettabile; c) } 0 < k < \frac{1}{4}\right]$

Alcune applicazioni di somma e prodotto delle radici

ESERCIZIO GUIDA

684 Data l'equazione parametrica, nell'incognita x,

$$4x^2 - 2(k + 2)x + 2k = 0,$$

determiniamo i valori di k per i quali sono soddisfatte le seguenti condizioni:
a) la somma dei reciproci delle radici sia uguale a 6;
b) la somma dei quadrati delle radici sia uguale a 10;
c) la somma dei reciproci dei quadrati delle radici sia uguale a 2;
d) la somma dei cubi delle radici sia uguale a 2.

Imponiamo che le radici siano reali:

$$\frac{\Delta}{4} \geq 0 \quad \rightarrow \quad (k + 2)^2 - 8k =$$
$$= k^2 + 4k + 4 - 8k = k^2 - 4k + 4 =$$
$$= (k - 2)^2 \geq 0$$

condizione verificata $\forall k \in \mathbb{R}$.

a) La somma dei reciproci delle radici è:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{s}{p}.$$

$$s = \frac{k + 2}{2}; \quad p = \frac{k}{2}.$$

Poniamo $\frac{s}{p} = 6$, con $p \neq 0$, ossia $k \neq 0$.

$$\frac{s}{p} = \frac{\frac{k + 2}{2}}{\frac{k}{2}} = \frac{k + 2}{2} \cdot \frac{2}{k} = \frac{k + 2}{k} = 6$$

$$k + 2 = 6k \quad \rightarrow \quad 5k = 2 \quad \rightarrow \quad k = \frac{2}{5}.$$

b) La somma dei quadrati delle radici è:

$x_1^2 + x_2^2$.

Poiché

$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2$

possiamo scrivere:

$\boldsymbol{x_1^2 + x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = s^2 - 2p.}$

Poniamo la condizione $s^2 - 2p = 10$:

$$\left(\frac{k+2}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{k}{2} = 10$$

$$\frac{k^2 + 4k + 4}{4} - k = 10$$

$$k^2 + 4k + 4 - 4k = 40$$

$k^2 = 36 \quad \rightarrow \quad k = \pm 6$.

c) $$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} =$$

$$= \frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{s^2 - 2p}{p^2}.$$

Poniamo la condizione $\dfrac{s^2 - 2p}{p^2} = 2$;

deve essere $p^2 \neq 0$, ossia $k \neq 0$:

$$\frac{\dfrac{(k+2)^2}{4} - 2 \cdot \dfrac{k}{2}}{\left(\dfrac{k}{2}\right)^2} = 2$$

$$\frac{k^2 + 4k + 4 - 4k}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{k^2} = 2$$

$\dfrac{k^2 + 4}{k^2} = 2 \quad \rightarrow \quad k^2 + 4 = 2k^2 \quad \rightarrow \quad k^2 = 4$

$k = \pm 2$.

d) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2 =$

$= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = s^3 - 3ps$.

Poniamo la condizione $s^3 - 3ps = 2$:

$$\left(\frac{k+2}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{k+2}{2} \cdot \frac{k}{2} = 2$$

$$\frac{k^3 + 6k^2 + 12k + 8}{8} - \frac{3k(k+2)}{4} = 2$$

$$k^3 + 6k^2 + 12k + 8 - 6k(k+2) = 16$$

$$k^3 + 6k^2 + 12k + 8 - 6k^2 - 12k = 16$$

$k^3 - 8 = 0$.

Scomponiamo la differenza dei cubi:

$(k - 2)(k^2 + 2k + 4) = 0$, da cui

- $k - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad k = 2$;
- $k^2 + 2k + 4 = 0 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad \nexists\, k \in \mathbb{R}$, perché $\dfrac{\Delta}{4} = 1 - 4 < 0$.

Per ogni equazione parametrica nell'incognita *x* determina i valori del parametro affinché le radici siano reali e siano soddisfatte le condizioni scritte sotto.

685 $(k - 1)x^2 - 2(k + 1)x + k + 2 = 0$, con $k \neq 1$;
a) la somma delle radici è nulla;
b) la somma dei reciproci delle radici è uguale a 8. $\left[\text{a) } k = -1; \text{ b) } k = -\dfrac{7}{3}\right]$

686 $kx^2 + 2(1 - k)x - 3 + k = 0$, con $k \neq 0$;
a) la somma delle radici è -4;
b) la somma dei reciproci delle radici è 3. $\left[\text{a) } k = \dfrac{1}{3}; \text{ b) } k = 7\right]$

687 $x^2 - 2(k + 1)x + 4k = 0$;
a) la somma dei reciproci delle radici è nulla;
b) la somma dei quadrati delle radici è 12. $[\text{a) } k = -1; \text{ b) } k = \pm\sqrt{2}]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

688 $(2m-3)x^2-4mx+2m-1=0$, con $m \neq \frac{3}{2}$;
a) la somma dei reciproci delle radici è uguale a 4;
b) la somma dei reciproci delle radici è nulla. [a) $m=1$; b) $m=0$ non accettabile]

689 $3mx^2-2(3m-1)x-3(1-m)=0$, con $m \neq 0$;
a) la somma dei reciproci delle radici è $\frac{1}{3}$;
b) la somma dei reciproci dei quadrati delle radici è 2. $\left[\text{a) } m=\frac{1}{5}; \text{ b) } m=\frac{7}{15}\right]$

690 $kx^2-(2k+1)x+k+1=0$;
a) la somma dei quadrati delle radici è uguale a 6;
b) la somma dei reciproci delle radici è uguale a -2;
c) la somma dei cubi delle radici è uguale a 2. $\left[\text{a) } k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}; \text{ b) } k=-\frac{3}{4}; \text{ c) } \nexists k \in \mathbb{R}\right]$

691 $x^2-(m+1)x+m=0$;
a) la somma dei reciproci dei quadrati delle radici è $\frac{5}{4}$;
b) la somma dei cubi delle radici è 9;
c) la somma dei cubi dei reciproci delle radici è 28. $\left[\text{a) } m=\pm 2; \text{ b) } m=2; \text{ c) } m=\frac{1}{3}\right]$

692 $x^2-2x+k=0$;
a) la somma dei quadrati delle radici è 4;
b) la somma dei cubi delle radici è -12;
c) la somma dei reciproci dei cubi delle radici è 0.
$\left[\text{a) } k=0; \text{ b) } k=\frac{10}{3} \text{ non accettabile; c) } k=\frac{4}{3} \text{ non accettabile}\right]$

ESERCIZIO GUIDA

693 Data l'equazione parametrica, nell'incognita x,

$$x^2-4x+2m=0,$$

determiniamo per quali valori di m:
a) una radice è doppia dell'altra;
b) il rapporto fra le radici è uguale a -3.

Calcoliamo $\frac{\Delta}{4}$ per imporre che le radici siano reali:

$$\frac{\Delta}{4}=4-2m \geq 0 \quad \rightarrow \quad m \leq 2.$$

a) Una radice è doppia dell'altra: $x_1=2x_2$.

Scriviamo la somma e il prodotto delle radici in funzione di x_2:

$$s=x_1+x_2=2x_2+x_2=3x_2, \qquad p=x_1\cdot x_2=2x_2\cdot x_2=2x_2^2.$$

Scriviamo s e p in funzione dei coefficienti dell'equazione:

$$s=4, \qquad p=2m.$$

Uguagliamo fra loro le due espressioni trovate per s e le due espressioni trovate per p, ottenendo il sistema di due equazioni nelle incognite x_2 e m:

$$\begin{cases} 3x_2 = 4 \\ \cancel{2}x_2^2 = \cancel{2}m \end{cases}$$

Ricaviamo x_2 nella prima equazione e sostituiamo il valore nella seconda equazione:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{4}{3} \\ \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = m \end{cases}$$

$m = \dfrac{16}{9}$ è accettabile perché minore di 2.

b) Il rapporto fra le radici è uguale a -3:

$$\frac{x_1}{x_2} = -3$$

oppure, moltiplicando i due membri per $x_2(\neq 0)$:

$$x_1 = -3x_2.$$

Scriviamo s e p in funzione di x_2:

$$s = x_1 + x_2 = -3x_2 + x_2 = -2x_2,$$
$$p = x_1 \cdot x_2 = -3x_2 \cdot x_2 = -3x_2^2.$$

Abbiamo già scritto s e p in funzione dei coefficienti:

$$\begin{cases} s = 4 \\ p = 2m \end{cases}$$

Uguagliamo le espressioni trovate per s e per p:

$$\begin{cases} -2x_2 = 4 \\ -3x_2^2 = 2m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = -2 \\ -3\cdot(-2)^2 = 2m \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad -12 = 2m \quad \rightarrow \quad m = -6.$$

$m = -6$ è accettabile perché minore di 2.

Per ogni equazione parametrica nell'incognita x determina i valori del parametro affinché siano soddisfatte le condizioni scritte sotto.

694 $x^2 - 2x + 5m = 0$;
a) una radice è doppia dell'altra;
b) una radice è $\frac{1}{3}$ dell'altra. $\left[\text{a) } m = \frac{8}{45}; \text{ b) } m = \frac{3}{20}\right]$

695 $x^2 - 6x + 3k = 0$;
a) una radice è la metà dell'altra;
b) una radice è sestupla dell'altra. $\left[\text{a) } k = \frac{8}{3}; \text{ b) } k = \frac{72}{49}\right]$

696 $x^2 - 4x + 2m + 6 = 0$;
a) una radice è quadrupla dell'altra;
b) il rapporto tra le radici è -2. $\left[\text{a) } m = -\frac{43}{25}; \text{ b) } m = -19\right]$

697 $x^2 - 4mx + 4m^2 - 1 = 0$;
a) una radice è doppia dell'altra;
b) una radice è quadrupla dell'altra. $\left[\text{a) } m = \pm\frac{3}{2}; \text{ b) } m = \pm\frac{5}{6}\right]$

698 $4x^2 - 4kx + k^2 - 1 = 0$;
a) il rapporto fra le radici è 3;
b) una radice è cinque volte maggiore dell'altra. $\left[\text{a) } k = \pm 2; \text{ b) } k = \pm\frac{3}{2}\right]$

699 $12x^2 - 2(k-3)x - k = 0$;
a) una radice è tripla dell'altra;
b) il rapporto tra le radici è $\frac{1}{6}$. $\left[\text{a) } k = -9 \vee k = -1; \text{ b) } k = -18 \vee k = -\frac{1}{2}\right]$

700 $x^2 - 2kx + k^2 - 2 = 0$;
a) una radice è sestupla dell'altra;
b) il rapporto tra le radici è 9. $\left[\text{a) } k = \pm\frac{7}{5}\sqrt{2}; \text{ b) } k = \pm\frac{5}{4}\sqrt{2}\right]$

RIEPILOGO LE EQUAZIONI PARAMETRICHE DI SECONDO GRADO

TEST

701 Per quali valori di k l'equazione $x^2 - 2x + k = 0$ ammette due radici reali positive?

A $k > 0$
B $k < 0$
C $\nexists k \in \mathbb{R}$
D $k > 2$
E $0 < k \leq 1$

702 Data l'equazione parametrica

$$(k^2 + 1)x^2 - (2k - 3)x + 1 = 0,$$

per quali valori reali di k il prodotto delle radici è uguale a $\frac{1}{5}$?

A $k = \frac{1}{4}$
B $k = -2$
C $k = \pm 2$
D $k = \frac{5}{12}$
E $k = \frac{3}{2}$

703 Considera l'equazione parametrica $3x^2 - 6x + 2k + 1 = 0$. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la somma delle radici è uguale al loro prodotto?

A $k = 3$
B $k = 2$
C $k = 0$
D $\nexists k \in \mathbb{R}$
E $k = \frac{5}{2}$

704 ASSOCIA Considera le seguenti cinque condizioni in cui s e p indicano rispettivamente la somma e il prodotto delle radici di un'equazione parametrica di secondo grado:

1. $p = 3s$;
2. $\frac{1}{s^2} + \frac{1}{p^2} = 16$;
3. $3s^2 = 16p$;
4. $s = 0$;
5. $\frac{s^2 - 2p}{p^2} = 16$.

Tre delle condizioni si riferiscono ai quesiti seguenti. Associa alle condizioni i quesiti corrispondenti.

a) «Determina per quali valori del parametro le radici sono opposte».
b) «Determina per quali valori del parametro la somma dei reciproci dei quadrati delle radici è uguale a 16».
c) «Determina per quali valori del parametro una radice è tripla dell'altra».

705 Nell'equazione $2x^2 - 7x + 3 = 0$, senza calcolare le soluzioni, trova:

a) $(x_2 - x_1)^2 - 3x_1 x_2$;
b) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$.

$\left[\text{a) } \frac{7}{4}; \text{ b) } \frac{37}{6}\right]$

Per ogni equazione parametrica nell'incognita x determina i valori del parametro relativi alle condizioni poste.

706 $(b - 3)x^2 - 2bx + b - 1 = 0$, con $b \neq 3$;
a) una radice è uguale a $\frac{1}{2}$;
b) le due radici sono reali coincidenti.

$\left[\text{a) } b = 7; \text{ b) } b = \frac{3}{4}\right]$

707 $3x^2 - 2(3k + 2)x + 8k = 0$;
a) le soluzioni sono reali e distinte;
b) una radice è uguale a 1.

$\left[\text{a) } k \neq \frac{2}{3}; \text{ b) } k = \frac{1}{2}\right]$

708 $(9k - 2)x^2 - (6k + 1)x + k = 0$, con $k \neq \frac{2}{9}$;
a) una radice è uguale a -2;
b) la somma delle radici vale $\frac{1}{3}$.

$\left[\text{a) } k = \frac{6}{49}; \text{ b) } k = -\frac{5}{9} \text{ non accettabile}\right]$

709 $kx^2 - (2k - 1)x + k - 3 = 0$, con $k \neq 0$;
a) la somma delle radici è minore di 2;
b) il prodotto delle radici è uguale a 4.

[a) $k > 0$; b) $k = -1$ non accettabile]

710 $x^2 - 2(m-1) = 0$;
a) le radici sono reciproche;
b) $p = 0$;
c) le radici sono concordi.
$\left[\text{a) } m = \frac{1}{2} \text{ non accettabile; b) } m = 1\text{; c) impossibile}\right]$

711 $(k-1)x^2 - 2(k+1)x + k + 2 = 0$;
a) la somma delle radici è positiva;
b) il prodotto delle radici è negativo.
[a) $-3 \leq k < -1 \vee k > 1$; b) $-2 < k < 1$]

712 $9ax^2 - 6ax - 3 + a = 0$, con $a \neq 0$;
a) le radici sono reciproche;
b) le radici sono discordi;
c) $p \leq 3$;
d) $x_1 = -1$.
$\left[\text{a) } a = -\frac{3}{8} \text{ non accettabile; b) } 0 < a < 3\text{; c) } a \geq 0\text{; d) } a = \frac{3}{16}\right]$

713 $mx^2 + 2(3-m)x - 12 = 0$, con $m \neq 0$;
a) le radici sono reali;
b) le radici sono uguali;
c) le radici sono opposte;
d) le radici sono reciproche;
e) una radice è nulla.
[a) $\forall m \in \mathbb{R}, m \neq 0$; b) $m = -3$; c) $m = 3$; d) $m = -12$; e) $\nexists m \in \mathbb{R}$]

714 $mx^2 - 6mx + 9m - 2 = 0$, con $m \neq 0$;
a) le radici sono reciproche;
b) le radici sono concordi;
c) le radici sono discordi;
d) la somma dei quadrati delle radici è uguale a 22.
$\left[\text{a) } m = \frac{1}{4}\text{; b) } m > \frac{2}{9}\text{; c) } 0 < m < \frac{2}{9}\text{; d) } m = 1\right]$

BRAVI SI DIVENTA ► E41

715 $(k-3)x^2 - 2kx + k + 1 = 0$;
a) le soluzioni sono reali concordi;
b) $|x_1 + x_2| > 4$;
c) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$.

716 $(1+k)x^2 - 2x - k + 1 = 0$, con $k \neq -1$;
a) le radici sono reciproche;
b) le radici sono discordi;
c) $p = 8$;
d) $s > 0$.
$\left[\text{a) } k = 0\text{; b) } k < -1 \vee k > 1\text{; c) } k = -\frac{7}{9}\text{; d) } k > -1\right]$

717 $x^2 - 2(k-2)x + k^2 - 3k = 0$;
a) le soluzioni non sono reali;
b) una radice è nulla;
c) la somma delle radici è positiva;
d) il prodotto delle radici è negativo;
e) ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 16$.
[a) $k > 4$; b) $k = 0 \vee k = 3$; c) $2 < k \leq 4$; d) $0 < k < 3$; e) $k = 0$, $k = 5$ non accettabile]

718 $(a+1)x^2 + 2ax + a - 1 = 0, \quad \text{con } a \neq -1;$

a) una soluzione è uguale a 2;
b) le soluzioni sono reali e distinte;
c) la somma dei reciproci delle radici è 4;
d) il quadrato della somma delle soluzioni è maggiore del prodotto delle soluzioni moltiplicato per 4;
e) le soluzioni sono opposte.

$\left[\text{a) } a = -\frac{1}{3}; \text{ b) } \forall a \in \mathbb{R}; \text{ c) } a = \frac{2}{3}; \text{ d) } \forall a \in \mathbb{R}; \text{ e) } a = 0\right]$

719 $x^2 - 2x + m = 0;$

a) le radici sono uguali;
b) le radici sono reali e distinte;
c) una radice è nulla;
d) la somma delle radici è positiva;
e) il prodotto delle radici è positivo.

$[\text{a) } m = 1; \text{ b) } m < 1; \text{ c) } m = 0; \text{ d) } m \leq 1; \text{ e) } 0 < m \leq 1]$

720 $(k-3)x^2 - 2(k+1)x + k = 0, \quad \text{con } k \neq 3;$

a) le soluzioni sono reali;
b) la somma delle radici è positiva;
c) il prodotto delle radici è uguale al triplo della loro somma;
d) le radici sono discordi.

$\left[\text{a) } k \geq -\frac{1}{5}, k \neq 3; \text{ b) } k > 3; \text{ c) } k = -\frac{6}{5}; \text{ d) } 0 < k < 3\right]$

721 $(4-k^2)x^2 - 4x + 1 = 0, \quad \text{con } k \neq \pm 2;$

a) le radici sono reali;
b) $x_1 = x_2$;
c) $x_1 = -x_2$;
d) $x_1 = -2$;
e) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 10.$

$\left[\text{a) } \forall k \in \mathbb{R}, k \neq \pm 2; \text{ b) } k = 0; \text{ c) } \nexists k \in \mathbb{R}; \text{ d) } k = \pm\frac{5}{2}; \text{ e) } k = \pm 1\right]$

722 $x^2 - 4x + 4 - k^2 = 0;$

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4;$
b) $x_1^2 + x_2^2 = 10;$
c) $x_1^3 + x_2^3 = 40.$

$[\text{a) } k = \pm\sqrt{3}; \text{ b) } k = \pm 1; \text{ c) } k = \pm\sqrt{2}]$

723 $2x^2 + (3-2k)x - 3k = 0;$

a) le radici sono reali;
b) le radici sono negative;
c) la differenza delle radici è 1;
d) il prodotto dei reciproci delle radici è $\frac{1}{3}$;
e) una radice è doppia dell'altra.

$\left[\text{a) } \forall k \in \mathbb{R}; \text{ b) } k < 0; \text{ c) } k = -\frac{5}{2} \vee k = -\frac{1}{2}; \text{ d) } k = -2; \text{ e) } k = -3 \vee k = -\frac{3}{4}\right]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

724 $4kx^2 - 2(k+1)x + 1 = 0, \quad$ con $k \neq 0$;
a) le radici sono reali;
b) $x_1 = 2 - x_2$;
c) $|x_1 + x_2| = 4$;
d) $\dfrac{3}{x_1} + \dfrac{3}{x_2} = -\dfrac{1}{3}$;
e) $x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 = 0$.

$\left[\text{a) } \forall\, k \in \mathbb{R}, k \neq 0; \text{ b) } k = \dfrac{1}{3}; \text{ c) } k = -\dfrac{1}{9} \vee k = \dfrac{1}{7}; \text{ d) } k = -\dfrac{19}{18}; \text{ e) } k = \dfrac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}\right]$

725 $m^2x^2 + (1 - 4m)x + 4 = 0, \quad$ con $m \neq 0$;
a) le radici sono reali;
b) una radice è uguale a -1;
c) il prodotto delle radici è minore di 0;
d) le radici sono opposte;
e) la somma dei reciproci delle radici è uguale a $-\dfrac{3}{2}$.

$\left[\text{a) } m \leq \dfrac{1}{8}, m \neq 0; \text{ b) } m = -1 \vee m = -3; \text{ c) } \nexists\, m \in \mathbb{R}; \text{ d) } m = \dfrac{1}{4} \text{ non accettabile; e) } m = -\dfrac{5}{4}\right]$

726 $kx^2 - 2x + 1 = 0, \quad$ con $k \neq 0$;
a) le radici sono reali e distinte;
b) una radice è uguale a -2;
c) le radici sono negative;
d) le radici sono concordi;
e) la somma dei quadrati delle radici è uguale a 2;
f) il rapporto fra le radici è uguale a 3.

$\left[\text{a) } k < 1, k \neq 0; \text{ b) } k = -\dfrac{5}{4}; \text{ c) } \nexists\, k \in \mathbb{R}; \text{ d) } 0 < k \leq 1; \text{ e) } k = -2 \vee k = 1; \text{ f) } k = \dfrac{3}{4}\right]$

727 Nell'equazione $4x^2 + 2kx - m = 0$ trova k e m, sapendo che le soluzioni sono coincidenti e il loro prodotto vale 12. Calcola poi le due soluzioni.
$[m = -48, k = \pm 8\sqrt{3}, x_{1,2} = -2\sqrt{3}, x_{3,4} = 2\sqrt{3}]$

728 Nell'equazione $2kx^2 + (m-1)x + k + 2m = 0$, $k \neq 0$, trova k e m, sapendo che la somma delle soluzioni è uguale al loro prodotto e che una soluzione vale 2.

$\left[k = \dfrac{2}{23}, m = \dfrac{7}{23}\right]$

729 Determina k e m nell'equazione $x^2 - (k+3)x + 2m - 1 = 0$, sapendo che $x_1 + x_2 = \dfrac{1}{5}x_1x_2$ e che $x_1 = 3$.

$\left[k = -\dfrac{15}{2}, m = -\dfrac{43}{4}\right]$

730 Nell'equazione parametrica $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b, c parametri, $a > 0$, $b = -2$ e x incognita, la somma dei reciproci delle soluzioni è uguale a 4.
Determina per quali valori dei parametri le soluzioni sono reali.

$\left[0 < a \leq 2, c = \dfrac{1}{2}\right]$

7. La funzione quadratica e la parabola

Teoria a pag. 880

RIFLETTI SULLA TEORIA

731 VERO O FALSO?

a) La parabola di equazione $y = 2x^2 + 1$ ha il vertice sull'asse y. V F

b) Il punto $(1; 2)$ appartiene alla parabola di equazione $y = -x^2 + 2x - 3$. V F

c) La parabola di equazione $y = -2x^2 + x$ rivolge la concavità verso il basso. V F

d) Se nell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ si ha $b = 0$, la parabola associata ha il vertice nell'origine degli assi. V F

e) Tutte le parabole che hanno il vertice nell'origine hanno equazione del tipo $y = ax^2$, con $a \neq 0$. V F

732 VERO O FALSO?

La funzione quadratica

$$y = x^2 - 4x + 12$$

rappresenta una parabola che:

a) volge la concavità verso il basso. V F

b) passa per l'origine degli assi. V F

c) ha il vertice di ascissa 2. V F

d) passa per il punto $(-1; 17)$. V F

e) ha come zeri $x_1 = -6$ e $x_1 = 2$. V F

ESERCIZI

La funzione $y = ax^2$

ESERCIZIO GUIDA

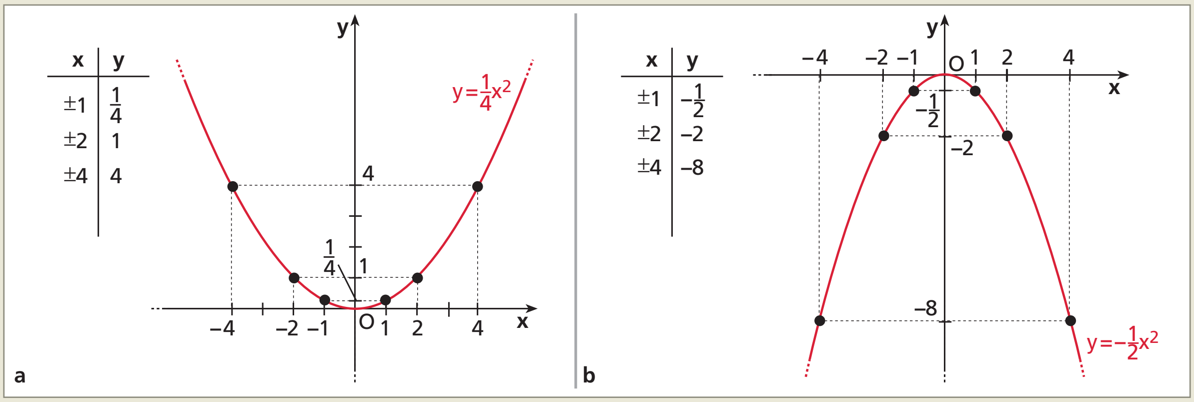
733 Tracciamo il grafico delle seguenti funzioni:

a) $y = \frac{1}{4}x^2$; b) $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Sono due funzioni quadratiche del tipo $y = ax^2$, quindi i grafici sono parabole con vertice nell'origine e asse di simmetria coincidente con l'asse y.
La prima ha $a > 0$, quindi ha concavità rivolta verso l'alto; la seconda ha $a < 0$, quindi ha concavità verso il basso. Disegniamo le due curve, compilando una tabella con le coordinate di alcuni punti.

x	y
±1	$\frac{1}{4}$
±2	1
±4	4

x	y
±1	$-\frac{1}{2}$
±2	−2
±4	−8



Traccia nello stesso piano cartesiano i grafici delle seguenti funzioni.

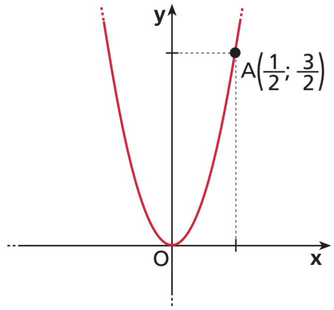
734 $y = x^2$, $\quad y = \frac{1}{2}x^2$, $\quad y = 4x^2$.

735 $y = -x^2$, $\quad y = -2x^2$, $\quad y = -4x^2$.

736 Per quali valori di k la parabola di equazione $y = (k-3)x^2$ rivolge la concavità verso l'alto? Disegna la parabola che si ottiene per $k = 6$. $[k > 3]$

737 Verifica se i punti $A(2; 1)$ e $B(-3; 2)$ appartengono alla parabola di equazione $y = \frac{1}{4}x^2$.

738 Che equazione ha la parabola della figura?



$[y = 6x^2]$

La funzione $y = ax^2 + bx + c$

Nel sito: ▶ 10 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

739 Tracciamo il grafico della funzione:

$$y = -x^2 - 5x - 6.$$

Il grafico è una parabola il cui asse di simmetria ha equazione:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{-2} = -\frac{5}{2};$$

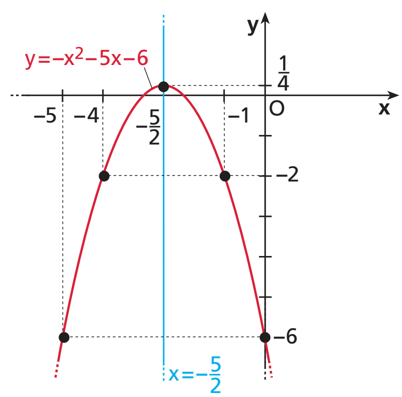
Il vertice V ha ascissa $x_V = -\frac{5}{2}$ e ordinata

$$y_V = f(x_V) = f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} - 6 =$$

$$= \frac{-25 + 50 - 24}{4} = \frac{1}{4}.$$

Compiliamo una tabella con le coordinate di alcuni punti e tracciamo il grafico.

x	y
$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}$
-1	-2
-4	-2
0	-6
-5	-6



Traccia il grafico delle seguenti funzioni, determinando le coordinate del vertice e di almeno cinque punti.

740 $y = x^2 - 4x$ $\quad [V(2; -4)]$

741 $y = -x^2 + 2x - 1$ $\quad [V(1; 0)]$

742 $y = x^2 + 3x + 2$ $\quad \left[V\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)\right]$

743 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$ $\quad \left[V\left(1; -\frac{1}{2}\right)\right]$

744 $y = 2x^2 - 8x + 3$ $\quad [V(2; -5)]$

745 $y = 3x^2 - 5x + 2$ $\quad \left[V\left(\frac{5}{6}; -\frac{1}{12}\right)\right]$

746 $y = -4x^2 + 7x - 3$ $\quad \left[V\left(\frac{7}{8}; \frac{1}{16}\right)\right]$

747 $y = -5x^2 + 4x + 1$ $\quad \left[V\left(\frac{2}{5}; \frac{9}{5}\right)\right]$

748 Indica quali dei seguenti punti appartengono alla parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 4$.

$$A(2;2),\quad B(-1;10),\quad C\left(-\frac{1}{2};3\right),\quad D(0;4).$$

749 Determina il valore di a per cui la parabola di equazione $y = ax^2 + x - 1$ ha il vertice di ascissa 2. Rappresenta graficamente la parabola ottenuta.

$\left[a = -\frac{1}{4}\right]$

750 Per ognuna delle parabole con le seguenti equazioni, indica l'equazione dell'asse di simmetria, le coordinate del vertice e se la concavità è rivolta verso l'alto o verso il basso.

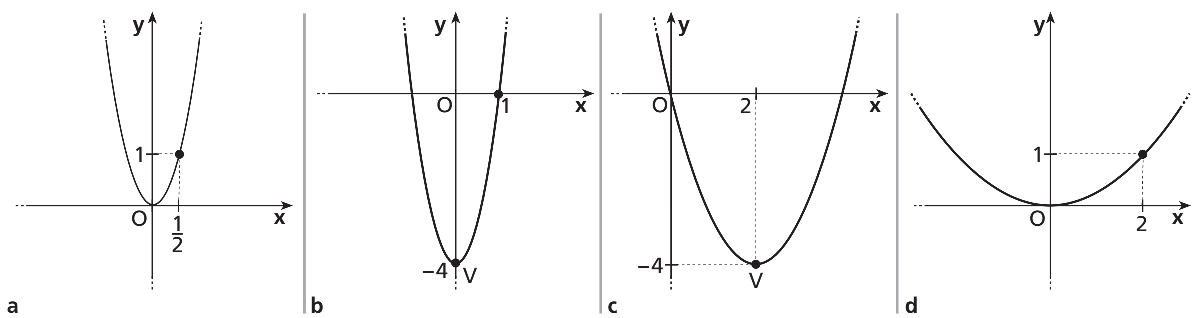
a) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x$;

b) $y = x^2 - 2x + 4$;

c) $y = -2x^2 + 6x$;

d) $y = 3x^2 - 2$.

751 **ASSOCIA** a ogni parabola la relativa equazione.



1. $y = \frac{1}{4}x^2$ **2.** $y = x^2 - 4x$ **3.** $y = 4x^2 - 4$ **4.** $y = 4x^2$

752 Date le equazioni

$$y = x(x-2) + 1,\quad y = (x-1)(x+1),$$
$$y = 2x^2 - 3,\quad y = (x-3)^2,\quad 3x^2 - x^3,$$

quale di esse non è rappresentata da una parabola?

753 **ASSOCIA** a ogni equazione di parabola il relativo vertice.

1. $y = 2x^2 - 4x + 3$	**A.** $V_1(2;5)$
2. $y = -x^2 + 4x + 1$	**B.** $V_2(1;1)$
3. $y = 2x^2 + 8x$	**C.** $V_3(-2;0)$
4. $y = x^2 + 4x + 4$	**D.** $V_4(-2;-8)$

754 Quali delle seguenti parabole passano per l'origine? Quale parabola ha il vertice sull'asse x?

a) $y = -x^2 + 2x$

b) $y = 3x^2 + x - 1$

c) $y = x^2 - 4x$

d) $y = x^2 - 4x + 4$

755 Determina il valore di b per cui la parabola di equazione $y = x^2 - 3bx + 1$ ha il vertice sull'asse y e poi rappresenta il grafico della parabola. $[b = 0]$

756 Trova per quale valore di a la parabola di equazione $y = ax^2 + 2x - \frac{1}{2}$ ha il vertice sull'asse x. Rappresenta il suo grafico. $[a = -2]$

757 Trova per quale valore di c la parabola di equazione $y = -2x^2 + x + c$ passa per il punto $A(1;3)$. [4]

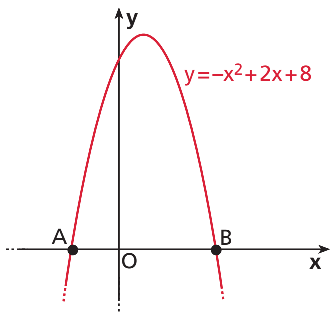
758 Indica per quale valore di b la parabola di equazione $y = 4x^2 + bx + 3$ passa per il punto $P(1;-1)$. $[-8]$

759 Trova per quali valori di a e b la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + 1$ passa per $A(-1;1)$ e $B(2;-5)$. $[-1;-1]$

Gli zeri della funzione quadratica

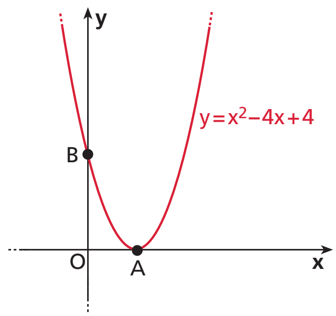
760 Rappresenta il grafico della parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$ e trova quali suoi punti hanno ordinata nulla.
$[x_1 = -1, x_2 = 3]$

761 La parabola del grafico ha equazione:
$y = -x^2 + 2x + 8$.
Trova le coordinate dei punti A e B.



$[A(-2; 0), B(4; 0)]$

762 La parabola del grafico ha equazione:
$y = x^2 - 4x + 4$.
Trova le coordinate dei punti A e B.



$[A(2; 0), B(0; 4)]$

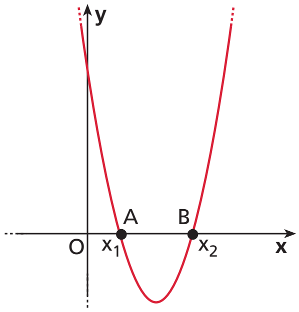
763 Trova gli zeri della funzione quadratica $y = x^2 - 4x$. Cosa rappresentano graficamente i valori trovati?
$[x_1 = 0, x_2 = 4]$

764 Disegna il grafico della parabola di equazione $y = 2(x + 2)(x - 3)$, dopo aver determinato le coordinate del vertice e i punti di intersezione con gli assi cartesiani.
$\left[V\left(\frac{1}{2}; -\frac{25}{2}\right); A(-2; 0), B(3; 0), C(0; -12)\right]$

765 Data la parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}(x - 1)(x - 5)$, trova l'area del triangolo ABC che ha come vertici i punti di intersezione della parabola con gli assi.
$[5]$

766 La parabola di equazione $y = (x - 2)(x - 6)$ ha vertice V, mentre A e B sono le sue intersezioni con l'asse x. Determina il perimetro del triangolo AVB.
$[4(\sqrt{5} + 1)]$

767



Della parabola data in figura sappiamo che $x_1 + x_2 = 4$ e che $x_1 x_2 = 3$. Trova l'equazione della parabola sapendo anche che il coefficiente a di x^2 è uguale a 2. Determina inoltre x_1 e x_2.

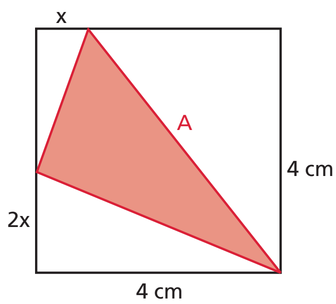
$[y = 2(x^2 - 4x + 3); x_1 = 1, x_2 = 3]$

La funzione quadratica e i problemi

768 Trova per quali valori di a la parabola di equazione $y = -x^2 + (4a + 1)x - 4a^2$ interseca l'asse x in due punti distinti.

$\left[a > -\frac{1}{8}\right]$

769



a) Utilizzando i dati della figura dimostra che l'area colorata vale:
$A = x^2 - 4x + 8$.

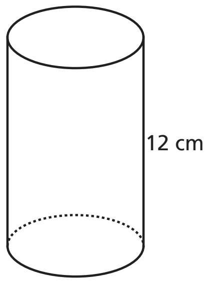
b) Rappresenta graficamente la funzione A.

c) Trova per quale valore di x l'area misura 5 cm^2.

d) Esiste un valore di x per cui l'area è nulla?

[c) 1; d) no]

770



Una lattina di aranciata ha forma cilindrica e altezza 12 cm.

a) Dimostra che, se il raggio di base è variabile e uguale a x, il suo volume è $V = 12\pi x^2$.

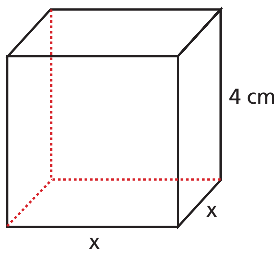
b) Rappresenta graficamente la funzione quadratica che hai ottenuto.

c) Trova per quale valore del raggio la lattina contiene 600 cm^3 di aranciata.

d) Se raddoppia il raggio, la quantità di aranciata che può essere contenuta nella lattina raddoppia?

[c) $x = 3{,}99$ cm; d) no]

771



Considera la scatola di cartone della figura.

a) Trova l'area totale A della scatola in funzione di x e rappresenta la funzione ottenuta.

b) Quanti cm^2 di cartone sono necessari per costruirla se $x = 3$ cm?

c) Quanto deve misurare x se $A = 130\ cm^2$?

[a) $A = 2x^2 + 16x$; b) 66 cm^2; c) 5 cm]

772 Si deve costruire una piscina rettangolare di perimetro uguale a 32 m.

a) Dimostra che l'area occupata è $A = -x^2 + 16x$, dove x è la lunghezza della piscina.

b) Rappresenta graficamente la funzione A tenendo conto che x non può essere un numero negativo.

c) Trova per quale valore di x si ha la piscina più grande possibile (con il perimetro invariato).

d) Calcola in questo caso le sue dimensioni.

[c) 8; d) 8,8]

LABORATORIO DI MATEMATICA

Le equazioni di secondo grado con Excel

ESERCITAZIONE GUIDATA

In un rettangolo la misura h dell'altezza è data dalla differenza fra un valore g e $\frac{1}{4}$ della misura della base.

Costruiamo un foglio di Excel che permetta di inserire il valore g e l'area S del rettangolo e dia in uscita, se esistono, le lunghezze della base e dell'altezza.

Detta x la misura della base, abbiamo $h = g - \frac{1}{4}x$ e da $S = bh$ ricaviamo:
$S = x\left(g - \frac{1}{4}x\right)$, da cui otteniamo l'equazione di secondo grado $\frac{1}{4}x^2 - gx + S = 0$.
Calcoliamo il discriminante: $\Delta = g^2 - S$.
Se $\Delta > 0$, otteniamo le due soluzioni $b_1 = 2g - 2\sqrt{\Delta}$ e $b_2 = 2g + 2\sqrt{\Delta}$ (se Δ e g sono positivi, b_1 e b_2 sono sempre positive); se $\Delta = 0$, troviamo la sola soluzione $b_0 = 2g$; se $\Delta < 0$, non abbiamo soluzioni.

- Attiviamo Excel e scriviamo le didascalie come in figura.
- Digitiamo quindi, basandoci sull'analisi svolta: `=SE(E(C2>0; C3>0); "->"; "I dati d'ingresso devono essere positivi")` in A4, `=SE(A4="->"; C2^2-C3; "")` in C5, `=SE(A4="->"; SE(C5<0; "quindi non vi sono soluzioni."; SE(C5=0; "e vi è una soluzione:"; "e vi sono due soluzioni:")); "")` in A6, `=SE(A4="->"; SE(C5>0; 2*C2-2*RADQ(C5); SE(C5=0; 2*C2; "=")); "")` in A8, `=SE(A4="->"; SE(C5>0; 2*C2+2*RADQ(C5); "="); "")` in C8, `=SE(A4="->"; SE(A8="="; "="; C3/A8); "")` in A10, `=SE(A4="->"; SE(C8="="; "="; C3/C8); "")` in C10.
- Proviamo il foglio con i valori 50 di g in C2 e 1600 di S in C3.

	A	B	C
1	Un problema di secondo grado		
2	Dai la lunghezza g		50
3	inserisci l'area S		1600
4	->		
5	Il discriminante vale		900
6	e vi sono due soluzioni:		
7	la base risulta lunga metri		
8	40		160
9	l'altezza risulta lunga metri		
10	40		10

▲ Figura 1

Nel sito: ▶ **1 esercitazione guidata con Excel** ▶ **12 esercitazioni in più**

Esercitazioni

Risolvi i seguenti problemi in modo analogo a quello dell'esercitazione guidata. Prova il foglio nei casi proposti.

1 In un triangolo isoscele ABC il perimetro $2p$ è di 100 m. Determina la misura x dell'altezza AH dopo aver assegnato la misura l del lato obliquo AC.
Casi proposti:
a) $l = 24$ m;
b) $l = 25$ m;
c) $l = 26$ m.
Fai variare x e calcola l, la misura b della base BC e l'ampiezza S dell'area di ABC.
[a) $\nexists x$; b) $x = 0$; c) $x = 10$]

2 In un rettangolo $ABCD$ l'area S è di 36 m^2, la misura x della base AB supera la misura h dell'altezza BC di g. Determina x dopo aver assegnato g.
Casi proposti:
a) $g = 0$ m;
b) $g = 9$ m;
c) $g = 16$ m.
Fai variare x e calcola h e g.
[a) $x = 6$; b) $x = 12$; c) $x = 18$]

Matematica per il cittadino

LO SPAZIO DI FRENATA

Lo spazio di frenata di un veicolo è la distanza che esso percorre da quando inizia l'azione dei freni fino all'arresto della vettura. Il Ministero dei Trasporti fornisce un modello semplificato, ma abbastanza conforme alla realtà, secondo cui la formula per calcolare lo spazio di frenata s_f, espresso in metri, è la seguente:

$$s_f = \frac{v^2}{250 \cdot f},$$

dove v è la velocità del veicolo in km/h e f è un coefficiente dimensionale che dipende dalle condizioni del fondo stradale secondo la seguente tabella.

CONDIZIONE DELLA STRADA	COEFFICIENTE DI ADERENZA f
strada asfaltata asciutta con fondo granuloso	0,8
strada asfaltata ruvida	0,6
strada asfaltata liscia	0,5
strada asfaltata bagnata	0,4
strada con fanghiglia	0,3
strada ghiacciata	0,1

1. Due motorini, A e B, viaggiano rispettivamente alle velocità di 60 km/h e di 30 km/h su una strada asfaltata liscia. Quanto vale il loro spazio di frenata?
È giusto dire che lo spazio di frenata di A è doppio di quello di B? Perché?

2. A parità di velocità, che rapporto c'è tra lo spazio di frenata su una strada asfaltata ruvida e quello su una strada con fanghiglia?

3. In un caso di tamponamento, la polizia stradale stabilisce che i segni lasciati dalle ruote durante la frenata su una strada asfaltata bagnata sono lunghi circa 92 m. A quale velocità procedeva l'automobile?

4. La tabella a lato mostra lo spazio di frenata in funzione della velocità per diversi valori del coefficiente di aderenza; completala approssimando i valori all'intero. Se vuoi, la puoi costruire con un foglio elettronico.

5. Rappresenta graficamente i valori della tabella a lato mettendo sull'asse delle ascisse le velocità, sull'asse delle ordinate gli spazi di frenata e sovrapponendo in un unico riferimento cartesiano i tre grafici relativi ai tre diversi valori di f.

VELOCITÀ (km/h)	SPAZIO (m), $f = 0,8$	SPAZIO (m), $f = 0,5$	SPAZIO (m), $f = 0,3$
0			
10			
20			
30			
40			
50			
60			
70			
80			
90			
100			
110			
120			
130			

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 30 test interattivi in più

1 L'equazione di secondo grado, nell'incognita x,

$$\frac{2ax^2}{3b} - \frac{5bx}{a} + 3 = 0 \quad \text{è:}$$

- A completa letterale.
- B intera pura.
- C pura letterale.
- D fratta numerica.
- E spuria letterale.

2 È data l'equazione di secondo grado in x:

$5x^2 - bx - c = 0$.

Quale fra le seguenti affermazioni è *vera*?

Le soluzioni:

- A sono reali $\forall\, b, c \in \mathbb{R}$.
- B sono reali se $b > 0$.
- C sono reali se $b < 0$ e $c < 0$.
- D non sono reali $\forall\, b, c \in \mathbb{R}$.
- E sono reali se $c > 0$.

3 È data l'equazione di secondo grado in x:

$ax^2 + c = 0$.

Quale fra le seguenti affermazioni è *vera*?

L'equazione:

- A non ha soluzioni reali.
- B ha due soluzioni reali coincidenti se $c < 0$.
- C ha due soluzioni reali opposte se $c < 0$.
- D ha due soluzioni reali opposte se a e c sono discordi.
- E ha soluzioni reali coincidenti se a e c sono discordi.

4 Quale fra le seguenti affermazioni è *vera*?

L'equazione $3x^2 - 2x + 3 = 0$ non ha soluzioni reali perché:

- A a e c sono concordi.
- B b è negativo.
- C $b^2 - 4ac < 0$.
- D il discriminante è nullo.
- E $b^2 > 4ac$.

5 L'equazione $4x^2 - bx + 9 = 0$ ha due soluzioni reali coincidenti se:

- A $b = 0$.
- B $\Delta < 0$.
- C $b = \pm 12$.
- D $b < 0$.
- E $b = \pm 6$.

6 L'equazione $5x^2 + bx - 9 = 0$ ha due soluzioni reali opposte se:

- A $b = 0$.
- B $\Delta < 0$.
- C $b < 0$.
- D $b^2 = 180$.
- E $b > 0$.

7 Considera l'equazione:

$x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$.

Soltanto una delle seguenti affermazioni è *vera*. Quale?

- A Il prodotto delle radici è uguale alla loro somma.
- B L'equazione ha due radici negative.
- C L'equazione non ha radici reali.
- D L'equazione ha per radici due numeri irrazionali.
- E L'equazione ha due radici positive.

8 Il discriminante di un'equazione di secondo grado è positivo; allora le soluzioni sono:

- A discordi se ci sono due permanenze.
- B positive se ci sono due permanenze.
- C negative se ci sono due variazioni.
- D discordi se ci sono una permanenza e una variazione.
- E coincidenti se ci sono due variazioni.

SPIEGA PERCHÉ

9 Un'equazione di secondo grado pura può avere una soluzione uguale a 0? Perché?

10 Perché l'equazione, nell'incognita x, $x^2 - ax + a^2 = 0$, con $a \neq 0$, non ammette soluzioni reali?

11 Perché puoi affermare che un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ ha sicuramente soluzioni reali se a e c sono discordi?

12 Perché l'equazione $\frac{x^2}{x(x+1)} = \frac{-1}{x+1}$ è palesemente impossibile?

13 L'equazione di secondo grado del tipo $(ax + b)^2 = 0$ ha il discriminante necessariamente nullo? Perché?

14 In che modo puoi utilizzare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado per risolvere l'equazione $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$?

15 Se nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ i coefficienti b e c sono opposti, la somma delle radici è uguale al loro prodotto. Spiega perché.

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

Risolvi le seguenti equazioni.

16 $\frac{33x-1}{2} - \frac{1}{2}(x+1) = 4x(1-x) - (2x-3)^2$ [impossibile]

17 $4(2-x)(x+2) + 20 = 36(x+1) - x(2x+7)$ $\left[0; -\frac{29}{2}\right]$

18 $\frac{2(x+1)(x-1)}{3} - \frac{(2x+3)^2}{12} = \frac{x^2-3x-6}{4}$ $\left[\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right]$

19 $\frac{3}{2}(x-2) + \frac{1}{6} - x\left(1 - \frac{x}{3}\right) = \frac{(3x-2)(3x+2)}{3} - \frac{3}{2}$ $\left[0; \frac{3}{16}\right]$

20 $[(x+1)^2 - x^2](2x-1) - x(x-1) = 2(x^2-x) - (1-x)$ $[-2; 0]$

21 $\frac{1}{3}(x+2)^2 - \frac{1}{2} - \frac{4-x^2}{6} = \frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$ $\left[0; \frac{1}{3}\right]$

22 $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 4(x-1)(x+1)$ $\left[\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$

23 $1 - \frac{3x-2}{5} = \frac{(2+x)(2-x)}{3} + \frac{1+x^2+15x}{15}$ $[0; 6]$

24 $5x - (x+1)^2 + (2x-1)^2 = 2 - (x+3)(x-2)$ $[\pm\sqrt{2}]$

25 $x\left(x + \frac{2}{3}\right) - \frac{2\sqrt{5}}{3}(2x+1) + \frac{5}{3} = 0$ $\left[\sqrt{5}; \frac{\sqrt{5}-2}{3}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni.

26 $\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+3}+\dfrac{5}{x-1}=\dfrac{3}{x-3}$ $[-1\pm\sqrt{17}]$

27 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2x-1}{x+2}+\dfrac{x+4}{3x+6}=\dfrac{2-x}{x^2+x-2}$ $\left[-1;\dfrac{20}{17}\right]$

28 $\dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{5x}{x^2-x-2}=\dfrac{2x+1}{x-2}+2$ $[-3;1]$

29 $\dfrac{(x^2-6x+9)(x-1)}{x+1}\cdot\dfrac{3x+3}{x^2-2x-3}=\dfrac{4x+9}{x+1}$ $\left[0;\dfrac{16}{3}\right]$

30 $\dfrac{x+3}{9x^2+6x+1}:\dfrac{1}{3x+1}+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{2(4x-x^2-1)}{3x^2-5x-2}$ $\left[-\dfrac{2}{3};1\right]$

31 $\dfrac{1}{x^2-3x}-\dfrac{9}{8x}=\dfrac{29}{2x^3+2x^2-24x}-\dfrac{1}{x^2+4x}$ $\left[\dfrac{7}{9};0\text{ non accettabile}\right]$

32 $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{1-x}{x}-\dfrac{1}{x-x^2}=\dfrac{2-2x-3x^2}{x^2-x}$ [impossibile]

33 $\dfrac{3x^2+4x}{x^2+4x}-\dfrac{6}{2x-1}=\dfrac{27}{4-7x-2x^2}$ $\left[-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\text{ non accettabile}\right]$

34 $\left(\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x-2}{x+2}\right):\left(1-\dfrac{x-2}{x+2}\right)-\dfrac{1}{2}+x=0$ [impossibile]

35 $\dfrac{2(11x-24)}{12x-x^2-32}=\dfrac{5-x}{x-8}-3-\dfrac{16}{x-4}$ $\left[\dfrac{3}{4};12\right]$

36 $\dfrac{3-16x}{8x-4}+\dfrac{8x-1}{4-16x^2}=\dfrac{12x}{4-16x^2}-\dfrac{3}{8x+4}$ $\left[\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni letterali nell'incognita x, discutendone i risultati.

37 $4bx^2=-32b^2x$ $[b=0\text{: indet; }b\neq0\text{: }0,\ -8b]$

38 $k^2x^2-4kx-5=0$ $\left[k\neq0\text{: }-\dfrac{1}{k},\dfrac{5}{k};\ k=0\text{: impossibile}\right]$

39 $2ax^2-3a=6x-a^2x$ $\left[a\neq0\text{: }-\dfrac{a}{2},\dfrac{3}{a};\ a=0\text{: }0\right]$

40 $3ax^2-(2a-3)x+1-a=0$ $\left[a\neq0\text{: }-\dfrac{1}{3},\dfrac{a-1}{a};\ a=0\text{: }-\dfrac{1}{3}\right]$

41 $\dfrac{a^2}{x^2-ax}-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x}{x-a}$ $[a=0\text{: impossibile; }a\neq0\text{: }-2a]$

42 $\dfrac{x+b}{x-2b}-1=\dfrac{x-b}{x+2b}-\dfrac{10b^2+bx}{4b^2-x^2}$ $[b=0\text{: impossibile; }b\neq0\text{: }3b,\ 2b\text{ non accettabile}]$

43 $\dfrac{5a^2}{x^2-9a^2}+\dfrac{x+2a}{x+3a}=\dfrac{7a}{x-3a}+\dfrac{8ax+6a^2}{9a^2-x^2}$ $[a=0\text{: impossibile; }a\neq0\text{: }\pm4a]$

44 $\dfrac{a}{x+a}+\dfrac{a^2-ax}{x^2+2ax+a^2}=1$ $[a=0\text{: impossibile; }a\neq0\text{: }a(-1\pm\sqrt{2})]$

Per ogni equazione nell'incognita x, determina i valori del parametro in modo che siano soddisfatte le condizioni.

45 $kx^2 - 2(k-2)x + k - 7 = 0$, con $k \neq 0$;
a) le radici sono uguali;
b) le radici sono opposte;
c) le radici sono reciproche;
d) una radice è $\sqrt{3}$;
e) la somma delle radici è uguale al loro prodotto.

$\left[\text{a) } k = -\frac{4}{3}\text{; b) } k = 2\text{; c) impossibile; d) } k = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\text{; e) } k = -3 \text{ non accettabile}\right]$

46 $(k+3)x^2 - 2kx + k - 1 = 0$, con $k \neq -3, k \neq 0$;
a) le radici sono reali;
b) la somma delle radici è -3;
c) le radici sono reciproche e opposte (antireciproche);
d) la somma dei reciproci delle radici è 2;
e) la somma dei quadrati delle soluzioni è 10.

$\left[\text{a) } k \leq \frac{3}{2}\text{; b) } k = -\frac{9}{5}\text{; c) } k = -1\text{; d) impossibile; e) } k = \frac{1}{2}\left(-8 \pm \sqrt{22}\right)\right]$

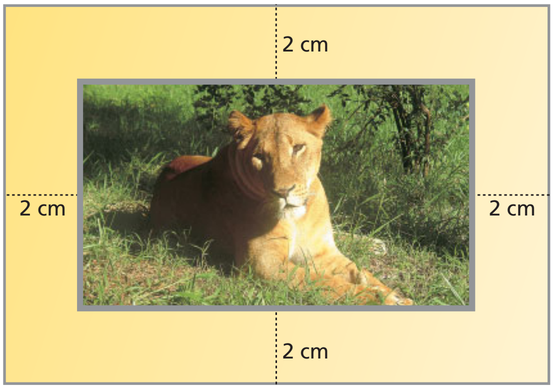
Problemi

47 Piegando un foglio di carta rettangolare, è possibile dividerlo in due parti rettangolari uguali fra loro e simili al foglio originario?
Calcola, se è possibile, il rapporto fra i lati del foglio di carta. $\left[\text{detti } x \text{ e } l \text{ i lati, } \frac{x}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

48 Per l'acquisto di un regalo del costo di € 87,50, due persone, tra quelle che inizialmente avevano aderito, si ritirano; la spesa per ciascuno dei restanti aumenta pertanto di € 5,00.
Determina quante persone avevano aderito inizialmente. [7 persone]

49 Un triangolo rettangolo ha area di 24 cm^2. Il triangolo rettangolo che si ottiene da esso, prolungando i due cateti dalla parte degli angoli non retti, entrambi di 2 cm, ha area di 40 cm^2.
Determina il perimetro del triangolo di partenza. [24 cm]

50



Una fotografia è incollata al centro di un cartone rettangolare di area uguale a 352 cm^2 e largo x cm.
Sapendo che il margine è di 2 cm:

a) dimostra che l'area della fotografia è
$$A = 368 - 4x - \frac{1408}{x};$$
b) trova x quando $A = 216$ cm^2.

[b) $x = 16$ cm, oppure $x = 22$ cm]

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 13 esercizi in più

51 TEST Data l'equazione $yx^2 + x - y = 0$, quale delle seguenti affermazioni è *corretta*?

A Esiste un valore di x che è soluzione dell'equazione per ogni valore di y.

B Per ogni valore di y vi è almeno un valore di x che risolve l'equazione.

C Per ogni valore di y esistono due valori distinti di x che risolvono l'equazione.

D Per ogni valore di x esiste un valore di y che risolve l'equazione.

E Esiste un valore di y che è soluzione dell'equazione per ogni valore di x.

(*Olimpiadi della matematica*, *Gara Provinciale*, 1995)

52 TEST Quale numero diverso da 0 è tale che la sua decima parte eguagli dieci volte il quadrato del numero stesso?

A $\frac{1}{100}$ B $\frac{1}{10}$ C $\frac{1}{2}$ D 1 E 10

(*Olimpiadi della matematica*, *Giochi di Archimede*, 1999)

53 Risolvi l'equazione di secondo grado $10000x^2 + 999999999x - 100000 = 0$, utilizzando la notazione esponenziale con potenze in base 10. Utilizza poi i risultati trovati per generalizzare la risoluzione di un'equazione del tipo $n^{\alpha}x^2 + (n^{\alpha+\beta} - 1)x - n^{\beta} = 0$, con $n, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

$[-10^5, 10^{-4}]$

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 9 esercizi in più

54 A water rocket is launched upward with an initial velocity of 48 ft/s. Its height h, in feet, after t seconds, is given by $h = 48t - 16t^2$. When will the rocket be exactly 32 feet above the ground?

(USA *Tacoma Community College*, Review for Test, 2002)

$[t = 1 \text{ s}; t = 2 \text{ s}]$

55 TEST Let a and b be distinct real numbers for which:

$$\frac{a}{b} + \frac{a + 10b}{b + 10a} = 2.$$

Find $\frac{a}{b}$.

A 0.6 B 0.7 C 0.8 D 0.9 E 1

(USA *American Mathematics Contest 10*, 2002)
Le gare *American Mathematics Contest 10* (AMC 10) sono rivolte a studenti americani del primo biennio superiore.

56 Two students attempted to solve the quadratic equation $x^2 + bx + c = 0$. Although both students did the work correctly, one miscopied the middle term and obtained the solution set {2, 3}, while the other miscopied the constant term and obtained the solution set {2, 5}. What is the correct solution set?

(USA *Lehigh University: High School Math Contest*, 2005)

[{1, 6}]

57 TEST For how many integer values of n does the equation $x^2 + nx - 16 = 0$ have integer solutions?

(Hint. Remember the relation between the solutions and the coefficients of the equation.)

A 2 B 3 C 4 D 5 E 6

(UK *Senior Mathematical Challenge*, 2002)

GLOSSARY

although: benché	**height**: altezza	**middle**: medio, centrale
to attempt: tentare	**hint**: suggerimento	**quadratic**: quadratico, di 2° grado
distinct: distinto, diverso	**integer**: intero (numero)	**upward**: verso l'alto
ground: suolo	**to launch**: lanciare	**water rocket**: razzo ad acqua

CAPITOLO

13

Complementi di algebra

Formato A4

Il classico foglio di carta, il più utilizzato nelle stampanti o nelle fotocopiatrici, ha un formato standard in tutta Europa e dimensioni quantomeno insolite…

…perché il foglio di formato A4 ha i lati di 21 e 29,7 centimetri?

La risposta a pag. 974

1. Le equazioni di grado superiore al secondo

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V43a

Come per le equazioni di secondo grado, esistono forme risolutive anche per le equazioni di terzo e di quarto grado ma non le esamineremo, perché troppo complesse. Non esistono invece procedimenti generali per risolvere equazioni di grado superiore al quarto. Noi forniremo soltanto i metodi per la risoluzione di alcuni tipi di equazione di grado superiore al secondo.

Si può dimostrare che un'equazione di grado n ha in $\mathbb{R}$ un numero di radici minore o uguale a n.

Le equazioni risolubili con la scomposizione in fattori

Consideriamo la seguente equazione di terzo grado e raccogliamo x:

$$2x^3 - 3x^2 + x = 0 \quad \rightarrow \quad x\,(2x^2 - 3x + 1) = 0.$$

Applicando la **legge di annullamento del prodotto**, otteniamo due equazioni,

$$x = 0 \;\text{ e }\; 2x^2 - 3x + 1 = 0,$$

una di primo grado, l'altra di secondo.
Abbiamo **abbassato di grado** l'equazione iniziale di terzo grado.

Legge di annullamento del prodotto: affinché un prodotto sia 0 è necessario e sufficiente che sia 0 almeno uno dei suoi fattori.

$2x^2 - 3x + 1 = 0$:

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$$x = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione $2x^3 - 3x^2 + x = 0$ sono date dall'unione delle soluzioni delle due equazioni.

La prima equazione ha per soluzione $x = 0$, la seconda $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$, quindi le soluzioni dell'equazione di terzo grado sono 0, $\frac{1}{2}$ e 1.

In generale, se un'equazione è scritta nella forma

$$P(x) = 0,$$

dove $P(x)$ è un polinomio di grado n, possiamo cercare di ottenere una o più soluzioni dell'equazione scomponendo il polinomio in un prodotto di polinomi di grado minore di n e applicando la legge di annullamento del prodotto.

L'uso della regola di Ruffini

Ricorda che lo **zero** di un polinomio $P(x)$ è la soluzione dell'equazione:

$P(x) = 0$.

Soluzione e **radice** di un'equazione sono sinonimi.

Dato un polinomio $P(x)$ e uno zero x_1 del polinomio, la regola di Ruffini permette di calcolare il quoziente della divisione tra $P(x)$ e il binomio $x - x_1$. Indicando con $Q(x)$ il polinomio quoziente, si può scrivere:

$$P(x) = (x - x_1)Q(x),$$

dove $Q(x)$ è un polinomio che ha il grado di $P(x)$ diminuito di 1.

La regola è quindi utile in molti casi per ottenere l'abbassamento di grado di un'equazione, della quale, però, bisogna conoscere una radice x_1.
Per trovare una radice, bisogna controllare nell'equazione se il coefficiente del termine di grado massimo è uguale a 1 oppure è diverso da 1.

Primo caso. Il coefficiente del termine di grado massimo è 1.

Risolviamo, per esempio, l'equazione di terzo grado:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Per trovare un'eventuale radice intera utilizziamo la seguente regola:

se un polinomio a coefficienti interi ha il coefficiente del termine di grado massimo uguale a 1, i suoi zeri, se esistono, sono divisori interi del termine noto.

Nel polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, i divisori interi di 6 sono: $+1$, -1, $+2$, -2, $+3$, -3, $+6$, -6.

Per $x = 1$ il polinomio assume il valore 0, quindi il numero 1 è uno zero del polinomio e $P(x)$ è divisibile per $x - 1$.

$P(1) = (1)^3 - 2(1)^2 + - 5(1) + 6 = 0$

Applichiamo la regola di Ruffini per calcolare il quoziente della divisione

$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1)$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

Il polinomio quoziente è $Q(x) = x^2 - x - 6$, quindi possiamo scrivere:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6).$$

Pertanto, l'insieme S delle soluzioni dell'equazione

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

è dato dall'unione delle soluzioni di $x - 1 = 0$ e di $x^2 - x - 6 = 0$:

$$S = \{1, -2, 3\}.$$

$x^2 - x - 6 = 0$:

$\Delta = 1 + 24 = 25$

$x = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

Secondo caso. Il coefficiente del termine di grado massimo è diverso da 1.

Esiste un teorema che permette di trovare le radici anche in questo caso, ma prima di enunciarlo forniamo un esempio studiando l'equazione:

$$6x^3 + 11x^2 - 3x - 2 = 0.$$

Scriviamo in una tabella i divisori, positivi e negativi, del termine noto e del coefficiente del termine di grado massimo x^3.

DIVISORI								
divisori interi di -2	1	-1	2	-2				
divisori interi di 6	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6

Si può dimostrare che una possibile radice dell'equazione è una frazione il cui numeratore è un divisore di -2 (termine noto) e il cui denominatore è un divisore di 6 (coefficiente di x^3).

In altri termini, se x_1 è soluzione dell'equazione, allora:

$$x_1 = \frac{\text{divisore di } -2}{\text{divisore di } 6}.$$

L'insieme S delle **possibili** radici è:

$$S = \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}.$$

Per sapere quali elementi dell'insieme sono effettivamente radici dell'equazione, cerchiamo per quali valori si annulla il polinomio $P(x) = 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2$:

$$P(1) = 6(1)^3 + 11(1)^2 - 3(1) - 2 = 12 \neq 0;$$

$$P(-1) = 6(-1)^3 + 11(-1)^2 - 3(-1) - 2 = 6 \neq 0;$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 11\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 0.$$

Possiamo fermarci perché abbiamo trovato uno zero di $P(x)$: l'equazione di terzo grado ha come radice $x = \frac{1}{2}$.

Per trovare le altre radici dell'equazione $6x^3 + 11x^2 - 3x - 2 = 0$, abbassiamo di grado l'equazione con la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 6 & 11 & -3 & -2 \\ \frac{1}{2} & & 3 & 7 & 2 \\ \hline & 6 & 14 & 4 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \text{Il quoziente è } Q(x) = 6x^2 + 14x + 4.$$

L'equazione $6x^3 + 11x^2 - 3x - 2 = 0$ è equivalente all'equazione

$$(6x^2 + 14x + 4)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

le cui soluzioni si determinano risolvendo separatamente le equazioni

$$6x^2 + 14x + 4 = 0 \qquad \text{e} \qquad x - \frac{1}{2} = 0.$$

- $6x^2 + 14x + 4 = 0$:

$3x^2 + 7x + 2 = 0$

$\Delta = 49 - 24 = 25$

$$x = \frac{-7 \pm 5}{6} = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -2 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione data di terzo grado è:

$$S = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -2\right\}.$$

Enunciamo ora il teorema che abbiamo applicato nell'esempio.

TEOREMA

Zeri razionali di un polinomio

Se la frazione ridotta ai minimi termini $\frac{N}{D}$ è uno zero di un polinomio a coefficienti interi, allora N è un divisore intero del termine noto e D è un divisore intero del coefficiente del termine di grado massimo.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 \qquad a_0, a_1 \ldots a_{n-1}, a_n \in \mathbb{Z}$$

$$P\left(\frac{N}{D}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{D} = \frac{\text{divisore intero di } a_0}{\text{divisore intero di } a_n}$$

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Per bisogno o per curiosità

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

«Il quinto grado presenta una specie di barriera che gli sforzi degli analisti non hanno ancora potuto superare […]. Determinare in numeri i valori delle radici è […] lo scopo della soluzione di tutti i problemi che i bisogni o la curiosità presentano da risolvere.»

(Joseph Louis Lagrange, *Lezioni elementari sulle matematiche*, Giusti, Milano, 1839)

La mancanza di formule risolutive generali per equazioni di grado superiore al quarto ha condotto a sviluppare metodi di calcolo approssimato per determinare le soluzioni di un'equazione. Risolvi in modo approssimato $x^5 + x + 1 = 0$ con un errore massimo di 0,2.

STEFANIA: «Aiutiamoci tracciando per punti il grafico di $P(x) = x^5 + x + 1$. Nell'intervallo $[-1; 0]$ c'è una soluzione, nel punto dove $P(x) = 0$».

GIACOMO: «E, negli estremi dell'intervallo, $P(x)$ ha valori di segno opposto: $P(-1) = -1$, $P(0) = +1$».

▶ Cerca un metodo che sfrutti le osservazioni di Stefania e Giacomo.

Le equazioni binomie

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V43b

DEFINIZIONE

Un'**equazione binomia** è riconducibile alla forma

$$ax^n + b = 0,$$

dove n è un numero intero positivo e a e b numeri reali, con $a \neq 0$.

Le equazioni binomie si chiamano così perché in esse il polinomio che viene uguagliato a 0 è un particolare tipo di binomio.

Per $n = 1$ o $n = 2$ l'equazione è di primo o di secondo grado, quindi sappiamo risolverla.

Negli altri casi, per risolvere l'equazione in $\mathbb{R}$, basta ricavare x^n e utilizzare la definizione di radice di un numero.

Distinguiamo due casi.

L'esponente n è dispari

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione:

$$x^5 + 32 = 0 \quad \rightarrow \quad x^5 = -32.$$

Ricaviamo x estraendo la radice quinta di -32:

$$x = \sqrt[5]{-32} = -2.$$

L'esponente n è pari

ESEMPIO Risolviamo l'equazione:

$$x^4 - 32 = 0 \quad \rightarrow \quad x^4 = 32.$$

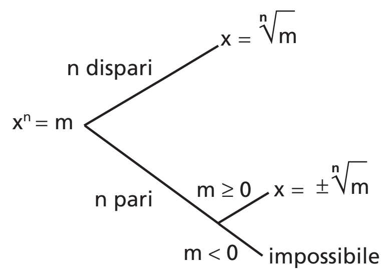
Poiché l'esponente è pari, abbiamo due soluzioni opposte che si ottengono facendo precedere $\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2}$ dai segni $+$ e $-$:

$$x_1 = -2\sqrt[4]{2}, \; x_2 = +2\sqrt[4]{2}.$$

Invece, l'equazione $x^4 = -32$ non ha soluzioni reali.

▶ Non esiste un numero reale che, elevato a esponente pari, dia un numero negativo.

Possiamo riassumere i due casi con il seguente schema.



BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V43c

Le equazioni trinomie

DEFINIZIONE

Un'**equazione trinomia** è riconducibile alla forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

dove n è un numero intero positivo, $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$.

▶ Le **equazioni trinomie** si chiamano così perché in esse il polinomio che viene uguagliato a 0 è un particolare tipo di trinomio.

L'incognita compare due volte con esponenti l'uno il doppio dell'altro.

ESEMPIO L'equazione

$$x^6 + 19x^3 - 216 = 0$$

è un'equazione trinomia. Per risolverla utilizziamo un'incognita ausiliaria, per esempio z. Poniamo:

$$x^3 = z.$$

▶ L'incognita è detta *ausiliaria* perché «aiuta» a risolvere l'equazione.

In questo modo, poiché $x^6 = (x^3)^2$, trasformiamo l'equazione in x in un'equazione di secondo grado in z, che sappiamo risolvere.

$$z^2 + 19z - 216 = 0 \quad \rightarrow \quad z_1 = -27, \quad z_2 = 8.$$

▶ $z^2 + 19z - 216 = 0$:

$\Delta = 361 + 864 = 1225$

$$z = \frac{-19 \pm 35}{2} = \begin{cases} 8 \\ -27 \end{cases}$$

Poiché $x^3 = z$, risolviamo le due equazioni binomie:

$$x^3 = -27 \quad \rightarrow \quad x = -3; \qquad x^3 = 8 \quad \rightarrow \quad x = 2.$$

Le soluzioni dell'equazione trinomia sono: $S = \{-3, 2\}$.

In generale, per risolvere l'equazione trinomia $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, si pone $z = x^n$ e si risolve l'equazione ausiliaria di secondo grado in z: $az^2 + bz + c = 0$.

Trovate le radici reali z_1 e z_2 (se esistono), si risolvono le equazioni binomie $x^n = z_1$ e $x^n = z_2$.

Se $n = 2$, le equazioni trinomie si chiamano **biquadratiche**. Ne trovi degli esempi negli esercizi.

Le equazioni reciproche

Consideriamo i seguenti polinomi ordinati:

$$3x^5 - 6x^4 + 11x^3 + 11x^2 - 6x + 3 \qquad 8x^4 - 10x^3 + 10x - 8$$

Il primo polinomio ha i coefficienti dei termini estremi (il primo e l'ultimo) e di quelli equidistanti dagli estremi (il secondo e il penultimo, il terzo e il terzultimo) *uguali*, il secondo polinomio li ha *opposti*.

Se uguagliamo a 0 polinomi di questo tipo, otteniamo particolari equazioni che vengono chiamate **equazioni reciproche**.

DEFINIZIONE

L'equazione $P(x) = 0$, dove $P(x)$ è un polinomio ordinato secondo le potenze dell'incognita, è **reciproca** se i coefficienti dei termini estremi e di quelli equidistanti dagli estremi sono uguali o sono opposti.

Un'equazione reciproca di grado pari con coefficienti opposti manca sempre del termine medio che, essendo equidistante dagli estremi, deve coincidere con il suo opposto.

Le equazioni reciproche vengono chiamate così perché si può dimostrare questa proprietà: se un'equazione reciproca ha come radice il numero m, essa ammette come radice anche il reciproco di m, cioè $\frac{1}{m}$.

Ci limiteremo a illustrare i metodi risolutivi delle equazioni reciproche di terzo grado, osservando soltanto che per gradi superiori si può spesso abbassare il grado con la regola di Ruffini.

Le equazioni reciproche di terzo grado

Un'equazione reciproca di terzo grado è sempre riconducibile a una delle due forme:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \qquad \text{oppure} \qquad ax^3 + bx^2 - bx - a = 0.$$

Per esempio

$$2x^3 + 5x^2 + 5x + 2 = 0,$$

oppure

$$x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Risolviamo l'equazione $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$

Osserviamo che -1 è una radice dell'equazione $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$.

Infatti, sostituendo x con -1 otteniamo:

$$a(-1)^3 + b(-1)^2 + b(-1) + a = 0 \quad \to \quad -a + b - b + a = 0.$$

È dunque possibile abbassare di grado l'equazione reciproca con la regola di Ruffini.

	5	−21	−21	5
−1		−5	+26	−5
	5	−26	5	0

$$\frac{\Delta}{4} = 169 - 25 = 144$$

$$x_{2,3} = \frac{13 \pm 12}{5} = \begin{cases} 5 \\ \frac{1}{5} \end{cases}$$

Negli esercizi vedremo come si risolvono le equazioni reciproche di quarto grado.

ESEMPIO Risolviamo l'equazione reciproca $5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0$.
Il polinomio si annulla per $x = -1$, quindi è divisibile per $x + 1$. Utilizzando la regola di Ruffini, otteniamo $(x + 1)(5x^2 - 26x + 5) = 0$, da cui:

$$x + 1 = 0 \quad \vee \quad 5x^2 - 26x + 5 = 0$$

$$x_1 = -1 \quad \vee \quad x_2 = 5, x_3 = \frac{1}{5}$$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione reciproca è: $S = \left\{-1, 5, \frac{1}{5}\right\}$.

In modo analogo si procede per l'equazione $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$, osservando che l'equazione ammette 1 come radice.

In generale, un'equazione reciproca di terzo grado è abbassabile di grado con la regola di Ruffini, perché ha sempre come radice 1 o − 1.

ESPLORAZIONE: LA FORMULA SEGRETA

Siamo abituati a pensare che chi scopre qualcosa in campo scientifico pubblichi immediatamente i risultati ottenuti per ricevere il riconoscimento della sua scoperta. Ma fra i matematici italiani del Cinquecento non era così. Erano di moda allora delle **disfide**, ossia delle gare pubbliche in cui un matematico sfidava un collega a risolvere problemi e viceversa. Il vincitore era proclamato da una giuria scelta dai due di comune accordo. In palio c'era spesso una somma di denaro, ma soprattutto il vincitore acquistava maggiore fama e otteneva incarichi importanti, mentre il perdente rischiava di venir messo da parte dalla comunità scientifica. Per questo, quando **Scipione del Ferro** scoprì la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado (seppure in un caso particolare), si guardò bene dal rendere pubblica la sua scoperta, perché sarebbe stata utile per risolvere problemi durante le disfide e anche per inventarne di nuovi. Soltanto sul letto di morte la comunicò al suo discepolo **Antonio Maria Fior**, che, forte della sua conoscenza, sfidò il matematico **Niccolò Fontana**, detto **Tartaglia**.

Si scambiarono trenta problemi, ma il duello finì nettamente a favore di Tartaglia, perché Fior non risolse nessuno dei problemi propostigli, mentre Tartaglia risolse tutti i problemi di Fior. Non solo: nell'affrontare quei problemi, Tartaglia scoprì, a sua volta, la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado. A questo punto entrò in gioco **Gerolamo Cardano**, che riuscì a farsi rivelare la formula da Tartaglia, dietro giuramento che mai l'avrebbe pubblicata. In realtà Cardano rivelò il segreto al suo discepolo **Ludovico Ferrari**, il quale riuscì in seguito a scoprire anche la formula per la risoluzione delle equazioni di quarto grado. Nel frattempo Cardano aveva appreso che la risoluzione dei problemi di terzo grado era stata scoperta anche da Del Ferro e si sentì quindi libero dal giuramento fatto a Tartaglia, rendendo pubblica la formula nel suo libro *Ars magna*.

Tartaglia prese molto male la cosa e definì Cardano «huomo di poco sugo», un «tondo» incapace di risolvere i problemi più elementari.
A difesa del proprio maestro, Ferrari sfidò Tartaglia a una pubblica disfida, che questa volta finì a sfavore di Tartaglia, il quale andò così incontro a una perdita di prestigio e a un periodo di difficoltà economiche.

IN CINQUE SLIDE

Cerca la formula risolutiva dell'equazione di terzo grado e anche le rime che Tartaglia utilizzò per rivelare il suo segreto a Cardano. In una presentazione multimediale, confronta la formula con i passaggi indicati.

Cerca nel web: disfida matematica, Tartaglia, Cardano.

2. Le equazioni irrazionali

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V44a

Le equazioni irrazionali e i teoremi di equivalenza

Un'equazione a una incognita è **irrazionale** quando contiene radicali nel cui radicando compare l'incognita.

ESEMPIO L'equazione $\sqrt{2x+5} = 3(x-1)$ è irrazionale.

Per risolvere un'equazione irrazionale il primo passo da fare è sempre quello di «liberarsi» in qualche modo dei radicali presenti, ossia di **ricondurre il problema alla soluzione di un'equazione razionale** che dia buone informazioni sulle soluzioni dell'equazione iniziale.

ESEMPIO Consideriamo l'equazione irrazionale:

$$\sqrt{x+7} = x+1.$$

Eleviamo entrambi i membri al quadrato:

$$(\sqrt{x+7})^2 = (x+1)^2.$$

Svolgiamo i calcoli:

$$x+7 = x^2+1+2x \quad \rightarrow \quad x^2+x-6=0$$

$$\Delta = 1+24 = 25 \qquad x = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

I valori -3 e 2 sono le soluzioni dell'equazione

$$(\sqrt{x+7})^2 = (x+1)^2.$$

Sono anche soluzioni di $\sqrt{x+7} = x+1$?

Per rispondere sostituiamo -3 e 2 nell'equazione data.

Sostituiamo -3:

Primo membro	Secondo membro
$\sqrt{-3+7} = \sqrt{4} = 2$	$-3+1 = -2$

Poiché i due membri non hanno lo stesso valore, $x = -3$ non è soluzione dell'equazione data.

Sostituiamo 2:

Primo membro	Secondo membro
$\sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$	$2+1 = 3$

I due membri hanno lo stesso valore, quindi $x = 2$ è la soluzione dell'equazione irrazionale.

L'equazione

$$\sqrt{2}x - \sqrt{3} = 1$$

non è irrazionale, perché $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ sono coefficienti, mentre l'incognita x si trova fuori dal segno di radice.

Ricorda che le radici, se sono di indice pari, hanno come valore un numero positivo (o nullo), se sono di indice dispari, hanno per valore un numero con lo stesso segno del radicando.
Per esempio,

$$\sqrt{4} = +2,$$
$$\sqrt[3]{-8} = -2.$$

◗ Solo 2 è una soluzione in comune.

Poiché le equazioni

$$\sqrt{x+7} = x+1 \qquad \text{e} \qquad (\sqrt{x+7})^2 = (x+1)^2$$

non hanno le stesse soluzioni, **non sono equivalenti**.

Questo esempio è un caso particolare del seguente teorema.

◗ Il teorema afferma in particolare che, se $\sqrt{A(x)} = B(x)$ è un'equazione irrazionale, tra le soluzioni dell'equazione $A(x) = [B(x)]^2$ troviamo anche le soluzioni di $\sqrt{A(x)} = -B(x)$.

TEOREMA

Elevamento al quadrato dei membri di un'equazione

L'equazione $A(x) = B(x)$ e l'equazione $[A(x)]^2 = [B(x)]^2$, ottenuta dalla precedente elevando al quadrato i suoi membri, non sono in generale equivalenti. Più precisamente, $[A(x)]^2 = [B(x)]^2$ equivale a

$$[A(x) = B(x)] \vee [A(x) = -B(x)],$$

ossia ha, oltre alle soluzioni di $A(x) = B(x)$, anche quelle di

$$A(x) = -B(x).$$

Ipotesi $A(x) = B(x)$.
Tesi $[A(x)]^2 = [B(x)]^2$ equivale a
$[A(x) = B(x)] \vee [A(x) = -B(x)]$.

DIMOSTRAZIONE L'equazione $[A(x)]^2 = [B(x)]^2$ equivale a:

$$[A(x)]^2 - [B(x)]^2 = 0.$$

Scomponiamo in fattori la differenza dei due quadrati:

$$[A(x) + B(x)] \cdot [A(x) - B(x)] = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto, le soluzioni dell'equazione sono quei valori dell'incognita che soddisfano $A(x) - B(x) = 0$ oppure $A(x) + B(x) = 0$, ossia quelli che soddisfano:

$$[A(x) = B(x)] \vee [A(x) = -B(x)].$$

Se invece eleviamo al *cubo* entrambi i membri di un'equazione, otteniamo un'equazione equivalente.

ESEMPIO L'equazione

$$\sqrt[3]{x} = -2$$

ha come unica soluzione $x = -8$. Se eleviamo al cubo entrambi i membri, otteniamo:

$$(\sqrt[3]{x})^3 = (-2)^3 \qquad \text{ovvero} \qquad x = -8.$$

TEOREMA

Elevamento al cubo dei membri di un'equazione

L'equazione $A(x) = B(x)$ e l'equazione $[A(x)]^3 = [B(x)]^3$, ottenuta dalla precedente elevando al cubo i suoi membri, sono equivalenti.

Ipotesi $A(x) = B(x)$.
Tesi $[A(x)]^3 = [B(x)]^3$ è equivalente ad $A(x) = B(x)$.

DIMOSTRAZIONE Per brevità, indichiamo le due espressioni $A(x)$ e $B(x)$ solo con le lettere A e B. L'equazione $A^3 = B^3$ equivale a:

$$A^3 - B^3 = 0.$$

Scomponiamo in fattori la differenza dei due cubi:

$$(A - B)(A^2 + AB + B^2) = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto, le soluzioni dell'equazione sono quei valori di x che soddisfano $A - B = 0$ oppure $A^2 + AB + B^2 = 0$.
La prima equazione equivale ad $A = B$.
La seconda non ha soluzioni reali a eccezione di $A = B = 0$, che ricade nel caso $A = B$.
Questo si dimostra pensando ad $A^2 + AB + B^2 = 0$ come a un'equazione di secondo grado nell'incognita A: il discriminante $\Delta = B^2 - 4B^2 = -3B^2$ è negativo, dunque l'equazione non ha soluzioni reali.
Ne deduciamo che le soluzioni dell'equazione $A^3 = B^3$ sono tutte e sole quelle di $A = B$ e quindi le due equazioni sono equivalenti.

ESEMPIO Risolviamo l'equazione:

$$x = \sqrt[3]{2x^2 + 3x}.$$

Eleviamo i due membri al cubo:

$$x^3 = 2x^2 + 3x \quad \rightarrow \quad x^3 - 2x^2 - 3x = 0.$$

Raccogliamo x:

$$x(x^2 - 2x - 3) = 0.$$

Le soluzioni sono $x = 0$ e quelle dell'equazione $x^2 - 2x - 3 = 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + 3 = 4$$

$$x = 1 \pm 2, \text{ cioè } x = -1 \text{ e } x = 3.$$

Dunque $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ ha come soluzioni 0, -1 e 3.

Questi valori sono anche le soluzioni di $x = \sqrt[3]{2x^2 + 3x}$, come ci garantisce il teorema appena dimostrato.

▸ Sostituendo i valori trovati nell'equazione irrazionale, possiamo verificare direttamente che la soddisfano tutti e tre: l'equazione iniziale è equivalente a quella ottenuta elevando al cubo.

I due teoremi dimostrati sono casi particolari di un teorema generale, di cui forniamo soltanto l'enunciato.

▶ Il teorema afferma che le radici dell'equazione irrazionale $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$ sono le stesse di $A(x) = [B(x)]^n$ se n è dispari, sono un sottoinsieme delle soluzioni di $A(x) = [B(x)]^n$ se n è pari.

TEOREMA

Elevamento a potenza dei membri di un'equazione

Consideriamo l'equazione $A(x) = B(x)$ e l'equazione $[A(x)]^n = [B(x)]^n$, ottenuta dalla precedente elevando all'esponente naturale positivo n i suoi membri.

- Se n è dispari, $[A(x)]^n = [B(x)]^n$ è equivalente ad $A(x) = B(x)$.
- Se n è pari, $[A(x)]^n = [B(x)]^n$ è equivalente ad $[A(x) = B(x)] \vee$ $\vee [A(x) = -B(x)]$, ossia ha, oltre alle soluzioni di $A(x) = B(x)$, anche quelle di $A(x) = -B(x)$.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezioni ▶ V44c ▶ V44d

La risoluzione di equazioni irrazionali

Per risolvere un'equazione irrazionale del tipo:

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x),$$

dobbiamo:

1. **elevare a *n*** entrambi i membri dell'equazione $[\sqrt[n]{A(x)}]^n = [B(x)]^n$, da cui si ottiene $A(x) = [B(x)]^n$;
2. controllare se ***n* è dispari o pari**:
   - se n è **dispari**, le soluzioni trovate sono quelle dell'equazione data;
   - se n è **pari**, dobbiamo eseguire il *controllo delle soluzioni*.

   I metodi che si utilizzano per il controllo sono due:
   - il **controllo mediante verifica** consiste nel sostituire ciascuna soluzione x di $A(x) = [B(x)]^n$ nell'equazione iniziale $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$: se questa risulta soddisfatta, x è una sua soluzione, altrimenti no;
   - il **controllo mediante condizioni** consiste nell'imporre via via le condizioni necessarie affinché ogni passaggio che eseguiamo sia lecito.

ESEMPIO Risolviamo la seguente equazione:

$$1 + \sqrt{19x - 13} = 3x.$$

Isoliamo la radice quadrata:

$$\sqrt{19x - 13} = 3x - 1.$$

Eleviamo al quadrato:

$$(\sqrt{19x - 13})^2 = (3x - 1)^2 \quad \rightarrow \quad 19x - 13 = 9x^2 - 6x + 1 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad 9x^2 - 25x + 14 = 0.$$

$$\Delta = 625 - 504 = 121 \qquad x = \frac{25 \pm 11}{18} = \begin{cases} \dfrac{36}{18} = 2 \\[2mm] \dfrac{14}{18} = \dfrac{7}{9} \end{cases}$$

Eseguiamo il **controllo mediante verifica**.

- Sostituiamo $x = 2$ nell'equazione di partenza:
  Primo membro: $1 + \sqrt{19 \cdot 2 - 13} = 1 + \sqrt{38 - 13} = 1 + \sqrt{25} = 1 + 5 = 6$.
  Secondo membro: $3 \cdot 2 = 6$.

- Sostituiamo $x = \frac{7}{9}$ nell'equazione di partenza:
  Primo membro:
  $$1 + \sqrt{19 \cdot \frac{7}{9} - 13} = 1 + \sqrt{\frac{133 - 117}{9}} = 1 + \sqrt{\frac{16}{9}} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}.$$
  Secondo membro: $3 \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{3}$.

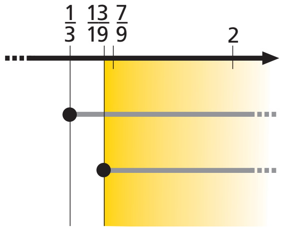
Le soluzioni 2 e $\frac{7}{9}$ sono entrambe accettabili.

Eseguiamo il **controllo mediante condizioni**. Imponiamo:

- $19x - 13 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{13}{19}$, perché il radicando non deve essere negativo;
- $3x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{1}{3}$, perché $3x - 1$ deve avere lo stesso segno del radicale.

Essendo $\frac{13}{19} > \frac{1}{3}$, la condizione è $x \geq \frac{13}{19}$.

Poiché $2 \geq \frac{13}{19}$ e $\frac{7}{9} \geq \frac{13}{19}$, le soluzioni 2 e $\frac{7}{9}$ sono entrambe accettabili.



3. I sistemi di secondo grado

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ► V45a

Un sistema di equazioni è un insieme di due o più equazioni nelle stesse incognite; l'insieme delle soluzioni è l'intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole equazioni.
Un sistema ha quindi soluzione se e solo se esiste almeno una soluzione comune a tutte le sue equazioni.

Poiché il **grado di un sistema** è dato dal **prodotto dei gradi** delle singole equazioni, un sistema di secondo grado può contenere una sola equazione di secondo grado e le altre devono essere di primo grado.

ESEMPIO Il sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + 6y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

è composto da un'equazione di primo grado e da una di secondo grado; quindi il grado del sistema è 2.

Il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x - y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

non è di secondo grado, perché contiene due equazioni di secondo grado e pertanto è di quarto grado.

I sistemi di due equazioni in due incognite

Per risolvere questi sistemi si utilizza, in generale, il metodo di sostituzione: si ricava un'incognita dall'equazione di primo grado e si sostituisce in quella di secondo grado.

Le soluzioni di un sistema di due equazioni in due incognite sono coppie ordinate di numeri reali.

ESEMPIO Risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + 6y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo $y = 2x$ dalla prima equazione e sostituiamo l'incognita nella seconda equazione:

$$\begin{cases} y = 2x \\ x^2 + 6(2x)^2 - 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x \\ x^2 + 24x^2 - 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x \\ 25x^2 = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{25}} \end{cases}$$

$$x_1 = +\frac{3}{5} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{3}{5}.$$

Sostituiamo questi valori nella prima equazione:

$$y_1 = 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}; \qquad y_2 = 2\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{6}{5}.$$

Il sistema ha per soluzioni le coppie ordinate $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$, cioè le coppie $\left(\frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right)$ e $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}\right)$.

In generale, un sistema di secondo grado di due equazioni in due incognite, che non sia indeterminato, può avere due, una o nessuna soluzione; ogni soluzione è una coppia ordinata di numeri reali.

Un sistema è:
- **indeterminato** se ha infinite soluzioni;
- **determinato** se ha un numero finito di soluzioni;
- **impossibile** se non ammette soluzioni.

ESEMPIO Il sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x^2 + 2xy + 1 = 0 \end{cases}$$

ha una sola soluzione formata dalla coppia $(1; 0)$, mentre il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

non ha soluzioni reali.

Il sistema

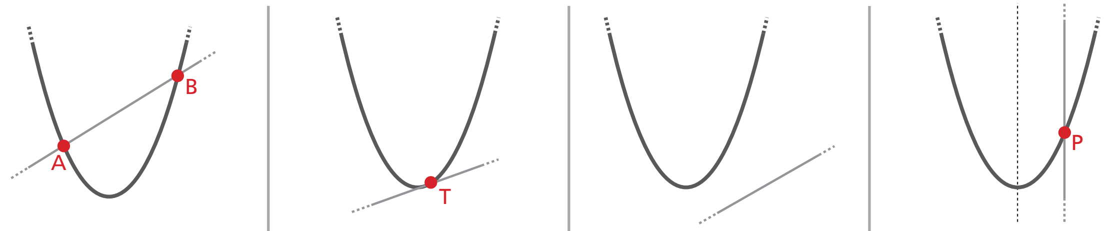
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

è indeterminato. Tutte le coppie $(h; 1 - h)$, $h \in \mathbb{R}$, che soddifano l'equazione di primo grado sono soluzioni del sistema.
Nota che il polinomio di secondo grado $x^2 - y^2 + 2y - 1$ può essere scomposto in $(x + y - 1) \cdot (x - y + 1)$.

Prova a risolvere questi sistemi in modo analogo a quello dell'esempio precedente.

L'intersezione di una parabola con una retta generica

Per determinare le coordinate degli eventuali punti di intersezione di una parabola con una retta, si deve risolvere il sistema di secondo grado formato dalle rispettive equazioni.



a. La retta è secante la parabola. I punti di intersezione sono due.

b. La retta è tangente alla parabola. Il punto di intersezione è unico e si chiama *punto di tangenza*.

c. La retta è esterna alla parabola. Non vi sono punti di intersezione.

d. La retta è parallela all'asse della parabola: vi è un unico punto di intersezione.

▲ **Figura 1**

Se supponiamo che la retta non sia parallela all'asse y e che, dunque, la sua equazione possa essere scritta nella forma esplicita $y = mx + q$, il sistema formato dall'equazione della parabola e dall'equazione della retta è il seguente:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

Si ottiene l'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = mx + q,$$

ossia

$$ax^2 + (b - m)x + c - q = 0,$$

le cui soluzioni sono le ascisse dei punti di intersezione della parabola con la retta:

- se $\mathbf{\Delta > 0}$, la retta è secante la parabola in due punti (figura 1*a*);
- se $\mathbf{\Delta = 0}$, la retta è tangente alla parabola in un punto (figura 1*b*);
- se $\mathbf{\Delta < 0}$, la retta è esterna alla parabola (figura 1*c*).

◗ Se la retta è parallela all'asse y, il sistema diventa:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = h \end{cases}$$

◗ $\Delta = (b - m)^2 + - 4a(c - q)$.

I sistemi di tre equazioni in tre incognite

Anche per risolvere questo tipo di sistema si può usare il metodo di sostituzione, ricavando un'incognita da una delle tre equazioni e sostituendola nelle altre due.
In tal modo ci si riconduce alla risoluzione di un sistema di due equazioni in due incognite. Lo vedremo negli esercizi.

4. I sistemi simmetrici e i sistemi omogenei

I sistemi simmetrici

Un sistema di due equazioni nelle incognite x e y si dice *simmetrico* quando, scambiando fra loro le incognite, il sistema non cambia.

ESEMPIO

$$\begin{cases} xy = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

è un sistema simmetrico perché, se mettiamo x al posto di y e viceversa, otteniamo lo stesso sistema:

$$\begin{cases} yx = 3 \\ y + x = 4 \end{cases}$$

In un sistema simmetrico, poiché la x si può scambiare con la y, se la coppia $(a; b)$ è soluzione del sistema, anche la coppia $(b; a)$ è soluzione dello stesso sistema. Le due soluzioni si dicono **simmetriche**.

Fra i **sistemi simmetrici di secondo grado** esaminiamo il seguente tipo:

$$\begin{cases} xy = p \\ x + y = s \end{cases}$$

Potremmo risolverlo per sostituzione, come ogni sistema di secondo grado. Tuttavia, si può procedere più rapidamente utilizzando una particolare equazione di secondo grado.

Abbiamo già visto che, dati la somma s di due numeri e il loro prodotto p, l'equazione che ha per radici i due numeri è:

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Pertanto, per risolvere il sistema

$$\begin{cases} xy = p \\ x + y = s \end{cases}$$

introduciamo la variabile ausiliaria t e scriviamo l'equazione nell'incognita t:

$$t^2 - st + p = 0.$$

Se le soluzioni di questa equazione sono t_1 e t_2, le soluzioni del sistema sono $(t_1; t_2)$ e $(t_2; t_1)$.

ESEMPIO Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} xy = -40 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

L'equazione nell'incognita ausiliaria t è:

$$t^2 - 3t - 40 = 0$$

$$\Delta = 9 + 160 = 169 \qquad t = \frac{3 \pm 13}{2} = \begin{cases} \dfrac{16}{2} = 8 \\ -\dfrac{10}{2} = -5 \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione sono $t_1 = 8$ e $t_2 = -5$.
Le soluzioni del sistema sono le coppie $(8; -5)$ e $(-5; 8)$.

▶ Verifica che queste coppie sono soluzioni del sistema.

Negli esercizi risolveremo anche **particolari sistemi simmetrici** di questi tipi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x + y = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = a \\ x + y = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = p \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

LA SOMMA E IL PRODOTTO DI DUE NUMERI PRESSO I BABILONESI

I Babilonesi (1900 a.C.) sapevano già determinare due numeri conoscendone la somma e il prodotto. Per cercare due numeri che hanno per somma 18 e prodotto 77, consideravano la metà della somma, cioè 9, e scrivevano i due numeri come $9 + d$ e $9 - d$, dove d era una quantità positiva da determinare.

$$s = x_1 + x_2 = 18,\ p = x_1 x_2 = 77;$$

$$\frac{s}{2} = 9 \ \rightarrow\ x_1 = 9 + d \ \text{ e }\ x_2 = 9 - d.$$

Poi eseguivano il prodotto, lo uguagliavano a 77 e ricavavano d.

$$(9 + d)(9 - d) = 77 \ \rightarrow\ 9^2 - d^2 = 77 \ \rightarrow\ 81 - 77 = d^2 \ \rightarrow\ d^2 = 4 \ \rightarrow\ d = 2.$$

I due numeri sono:

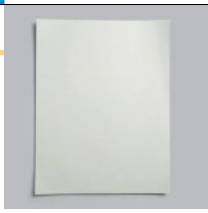
$$x_1 = 9 + 2 = 11,\ x_2 = 9 - 2 = 7.$$

I sistemi omogenei

Un'equazione è **omogenea** se è costituita da un polinomio omogeneo uguagliato a 0. Per esempio, l'equazione $6x^2 - 5xy + y^2 = 0$ è omogenea perché tutti i suoi termini sono di secondo grado.

▶ Un polinomio omogeneo è formato soltanto da monomi dello stesso grado.

Negli esercizi esamineremo come si risolvono i **sistemi omogenei**, ossia sistemi in cui entrambe le equazioni sono omogenee. Risolveremo inoltre altri sistemi particolari con polinomi omogenei.

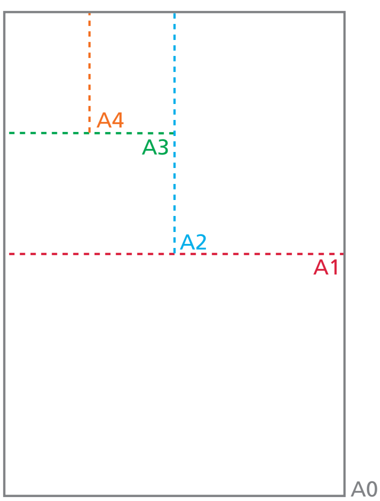


Formato A4

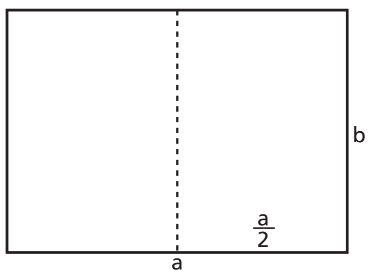
...perché il foglio di formato A4 ha i lati di 21 e 29,7 centimetri?

Il quesito completo a pag. 957

Le lunghezze dei lati dei fogli A4 rispondono a proprietà matematiche molto funzionali. Partiamo dal nome: perché il normale foglio da fotocopia si chiama A4? Il motivo è che la carta viene prodotta all'origine in fogli molto grandi, successivamente tagliati per realizzare i formati più piccoli.
Il foglio più grande di tutti è quello di formato A0, che misura 84,1 cm × 118,9 cm e ha una superficie pari a circa 1 m^2. Tagliando a metà il lato più lungo, si ottiene il foglio A1 e, continuando a dimezzare il lato maggiore, si ottengono in successione i formati A2, A3, A4 e oltre.



Se si misurano le dimensioni di ogni formato, si scopre che il rapporto tra i lati è costante per ogni foglio. L'esigenza di ottenere a ogni taglio di carta fogli con i lati in proporzione è il motivo delle dimensioni del formato A0. Verifichiamolo.
Indicati con a il lato maggiore e con b il lato minore del rettangolo A0, se lo dividiamo a metà lungo il lato maggiore a, otteniamo un nuovo rettangolo di lati b e $\frac{a}{2}$.



Imponiamo che il rapporto dei lati si mantenga costante. Poiché non abbiamo alcuna indicazione sui valori di a e b, è necessario scrivere le due possibili relazioni:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{2}}{b} \quad \rightarrow \quad 1 = 2,$$

mai verificata, e

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}} \quad \rightarrow \quad a^2 = 2b^2.$$

Osserviamo che dall'ultima relazione si ricava che il rapporto dei lati del foglio è uguale a $\sqrt{2}$.

Associamo ora a questa equazione la condizione che il foglio A0 abbia superficie pari a 1 m^2, cioè $a \cdot b = 1$.
Otteniamo il seguente sistema di quarto grado nelle incognite a e b:

$$\begin{cases} a^2 = 2b^2 \\ ab = 1 \end{cases}$$

Risolviamo per sostituzione, accettando solo le soluzioni positive:

$$\begin{cases} b = \dfrac{1}{a} \\ a^2 = \dfrac{2}{a^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \simeq 0{,}841 \\ a = \sqrt[4]{2} \simeq 1{,}189 \end{cases}$$

Si è così trovato che le dimensioni del foglio A0 devono essere di 1,189 m (118,9 cm) e 0,841 m (84,1 cm).
Ricaviamo le dimensioni in centimetri dei vari formati, approssimando per difetto ai millimetri.

A1: 84,1 e $\frac{118{,}9}{2} \simeq 59{,}4$;

A2: 59,4 e $\frac{84{,}1}{2} \simeq 42{,}0$;

A3: 42,0 e $\frac{59{,}4}{2} \simeq 29{,}7$;

A4: 29,7 e $\frac{42{,}0}{2} \simeq 21$;

ecc.

INGRANDIMENTO

In molte fotocopiatrici il massimo ingrandimento lineare ottenibile è del 141%. Ciò significa che un documento in formato A4, cioè con dimensioni di 21 cm × 29,7 cm, può essere ingrandito fino ad avere dimensioni:

$21 \cdot 141\% \simeq 29{,}6$ cm e $29{,}7 \cdot 141\% \simeq 41{,}9$ cm.

Esso potrà essere così ingrandito e fotocopiato in un foglio A3, che ha lati di 29,7 cm e 42 cm.
Il coefficiente di ingrandimento 141% non è altro che 1,41, cioè approssimativamente uguale a $\sqrt{2}$, il rapporto costante tra le dimensioni dei formati A.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

LA TEORIA IN SINTESI
Complementi di algebra

1. Le equazioni di grado superiore al secondo

Le equazioni di grado superiore al secondo, ricondotte alla forma $P(x) = 0$, si possono risolvere mediante la legge di annullamento del prodotto se si riesce a scomporre in fattori il polinomio $P(x)$.
Se un polinomio $P(x)$, di grado $n > 2$, possiede uno zero reale x_1, allora è possibile **abbassare di grado** l'equazione associata $P(x) = 0$ mediante la regola di Ruffini.

$$\text{Se } \underbrace{P(x)}_{\text{grado } n} = (x - x_1)\underbrace{Q(x)}_{\text{grado } (n-1)}$$

allora $P(x) = 0$ si spezza nelle due seguenti equazioni:

$$x - x_1 = 0 \qquad Q(x) = 0$$

Se $P(x)$ è un polinomio a coefficienti interi, un possibile zero di $P(x)$ è una frazione $\frac{N}{D}$ tale che N è un divisore intero del termine noto e D è un divisore intero del termine di grado massimo.

ESEMPIO

Data l'equazione $15x^3 - 14x^2 - 7x + 6 = 0$, un possibile zero di $15x^3 - 14x^2 - 7x + 6$ è

$\frac{3}{5}$ (3 è divisore di 6) (5 è divisore di 15).

Dopo aver verificato che $P\left(\frac{3}{5}\right) = 0$, scomponiamo in fattori $P(x)$:

$$P(x) = 15x^3 - 14x^2 - 7x + 6 =$$
$$= \left(x - \frac{3}{5}\right)(15x^2 - 5x - 10),$$

quindi abbassiamo di grado l'equazione:

$$15x^3 - 14x^2 - 7x + 6 = 0 \begin{cases} x - \frac{3}{5} = 0 \\ 15x^2 - 5x - 10 = 0 \end{cases}$$

Le **equazioni binomie** sono del tipo:

$$ax^n + b = 0$$

(n intero positivo, $a \neq 0$). Si risolvono ricavando x^n e utilizzando la definizione di radice. Se ***n* è dispari**, si ha una soluzione reale; se ***n* è pari**, l'esistenza delle radici dipende dal segno del radicando.

Le **equazioni trinomie** sono del tipo:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

(n intero positivo, $a \neq 0$). Si risolvono ponendo $x^n = z$ e risolvendo l'equazione ausiliaria di secondo grado $az^2 + bz + c = 0$.
Le soluzioni reali di questa equazione, se esistono, vanno sostituite a z nell'equazione: $x^n = z$.

Si ottengono delle equazioni binomie, le cui soluzioni, se esistono, sono le radici dell'equazione iniziale.

Un'equazione è **biquadratica** quando è riconducibile alla forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$.
Si pone $x^2 = z$ e si risolve l'equazione ausiliaria $az^2 + bz + c = 0$.
Trovate, se esistono, le soluzioni z_1 e z_2, si ricava:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1} \quad \text{e} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}.$$

Nelle **equazioni reciproche** i coefficienti dei termini estremi e di quelli equidistanti dagli estremi sono uguali oppure opposti. Le equazioni reciproche di terzo grado hanno come radici 1 o -1 e si risolvono abbassando il grado con la regola di Ruffini.

2. Le equazioni irrazionali

Un'equazione è **irrazionale** se contiene almeno un radicale nel cui radicando compare l'incognita.

Data un'equazione $A(x) = B(x)$, consideriamo l'equazione $[A(x)]^n = [B(x)]^n$:

- se n è **dispari**, essa è equivalente a quella data;
- se n è **pari**, essa ha come soluzioni, oltre a quelle di $A(x) = B(x)$, anche quelle di $A(x) = -B(x)$.

Per risolvere un'equazione irrazionale $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$ dobbiamo:

- elevare a n entrambi i membri dell'equazione;
- controllare se n è pari o dispari: se n è **dispari**, le soluzioni dell'equazione ottenuta sono **le stesse** dell'equazione irrazionale; se n è **pari**, dobbiamo eseguire il **controllo** delle soluzioni **mediante verifica** o **mediante condizioni**.

3. I sistemi di secondo grado

Il **grado** di un sistema è dato dal prodotto dei gradi delle sue equazioni. I sistemi di secondo grado si risolvono di solito con il metodo di **sostituzione**.
Un sistema di secondo grado, che non sia indeterminato, può avere due, una o nessuna soluzione.

4. I sistemi simmetrici e i sistemi omogenei

Un sistema di secondo grado nelle incognite x e y è **simmetrico** quando non cambia se al posto di x mettiamo y o viceversa.

Consideriamo due tipi di sistemi simmetrici:

- $\begin{cases} xy = p \\ x + y = s \end{cases}$

  si risolve con l'equazione ausiliaria $t^2 - st + p = 0$;

- $\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x + y = s \end{cases}$

  è riconducibile al primo caso ponendo:

  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$.

Un **polinomio** è **omogeneo** quando è formato soltanto da monomi dello stesso grado.

Un'**equazione** è **omogenea** se è costituita da un polinomio omogeneo uguagliato a 0.

Un **sistema** è **omogeneo** se le sue equazioni sono omogenee.

1. Le equazioni di grado superiore al secondo

Teoria a pag. 957

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 **VERO O FALSO?**

a) Un'equazione di quarto grado ha almeno 4 radici reali. V F

b) L'equazione $(x + 1)(x - 1) = 1$ ha per soluzione $x = 1$. V F

c) Il polinomio $8x^3 - 8x^2 + 1$ è divisibile per $\left(x - \frac{1}{2}\right)$. V F

d) L'equazione $(h + 2)x^3 - x + 1 = 0$ ha al massimo 3 radici reali se $h \neq -2$. V F

e) $S = \left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2\right\}$ è l'insieme delle possibili soluzioni di $4x^4 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$. V F

2 **TEST** La coppia di valori ± 1 *non* è l'insieme delle soluzioni di una sola delle seguenti equazioni binomie. Quale?

A $x^6 = 1$
B $x^{12} - 1 = 0$
C $1 - x^4 = 0$
D $-x^8 = -1$
E $-x^4 = 1$

3 **TEST** Sull'equazione $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ puoi affermare che sicuramente ammette:

A $2n$ soluzioni reali.
B al più 4 soluzioni reali e distinte.
C 2 soluzioni reali.
D 2 soluzioni coincidenti.
E 2 soluzioni nulle.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

4 Risolviamo l'equazione:

$$12x^3 - 4x^2 - 27x + 9 = 0.$$

Scomponiamo in fattori di primo e secondo grado il polinomio a primo membro.

Utilizziamo il raccoglimento parziale:

$$12x^3 - 4x^2 - 27x + 9 = 4x^2(3x - 1) - 9(3x - 1) = (4x^2 - 9)(3x - 1).$$

L'equazione diventa:

$$(4x^2 - 9)(3x - 1) = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto otteniamo due equazioni:

$$4x^2 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm\frac{3}{2},$$

$$3x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{3}.$$

L'equazione data ha tre soluzioni: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{1}{3}$.

Risolvi le seguenti equazioni.

5 $x^4 - 4x^2 = 0$ $[0; \pm 2]$

6 $3x^3 - \frac{3}{4}x = 0$ $\left[0; \pm\frac{1}{2}\right]$

7 $2x^5 - 32x = 0$ $[0; \pm 2]$

8 $x - x^5 = 0$ $[0; \pm 1]$

9 $x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0$ $[0; 3]$

10 $3x^2 - \frac{1}{27}x^6 = 0$ $[0; \pm 3]$

11 $(x^3 - 1)(x^2 + 6x) = 0$ $[-6; 0; 1]$

12 $4x^3 + 4x^2 - x = 1$ $\left[-1; \pm\frac{1}{2}\right]$

13 $6x^3 + 5x^2 - 4x = 0$ $\left[0; \frac{1}{2}; -\frac{4}{3}\right]$

14 $20x^3 + 48x^2 + 16x = 0$ $\left[0; -2; -\frac{2}{5}\right]$

15 $27x^2 - 6x^3 - 12x = 0$ $\left[0; 4; \frac{1}{2}\right]$

16 $4x^3 + 3x^2 - 8x - 6 = 0$ $\left[\pm\sqrt{2}; -\frac{3}{4}\right]$

17 $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ $\left[\pm\sqrt{3}; \frac{1}{3}\right]$

18 $2x - 10x^2 + 16x^3 - 8x^2 + 20x^3 = 0$ $\left[0; \frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right]$

19 $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = 0$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

20 $3x^2 - 18x + 2x^3 - 27 = 0$ $\left[-\frac{3}{2}; \pm 3\right]$

21 $x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 = 0$ $[0; \pm 1; 2]$

22 $4x^6 + 12x^5 + 9x^4 = 0$ $\left[0; -\frac{3}{2}\right]$

23 $x^2(x - 6) = 4(2 - 3x)$ $[2]$

24 $2x^2(x + 2) = 5(x^2 + 10x - 5)$ $\left[\frac{1}{2}; \pm 5\right]$

25 $4x^4 + 12x^3 = x(x + 3)$ $\left[0; -3; \pm\frac{1}{2}\right]$

26 $x^2(2x - 3) = 4(2x - 3)$ $\left[\pm 2; \frac{3}{2}\right]$

27 $\dfrac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{x+3} = 0$ $[-1; 3]$

28 $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ $[\pm 1]$

29 $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ $[-3; \pm 1]$

30 $x^3 - x - 3(x-1)(x+1) = 0$ $[\pm 1; 3]$

Dalle soluzioni all'equazione

Scrivi le equazioni che ammettono le seguenti soluzioni.

31 -3; 2; 0.

32 ± 1; -4.

33 -1; -2; 3; $\dfrac{1}{2}$.

34 ± 2; 1; 4.

35 0; 1; 6; -5.

36 ± 3; 2; -1.

37 ± 1; ± 2; $-\dfrac{3}{2}$.

L'uso della regola di Ruffini

Nel sito: ▶ 10 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

38 Risolviamo l'equazione $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$.

Proviamo a scomporre in fattori il primo membro con la regola di Ruffini. Cerchiamo quindi uno zero del polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3.$$

I possibili zeri razionali $\dfrac{N}{D}$ sono frazioni il cui numeratore è un divisore intero del termine noto 3 e il cui denominatore è un divisore intero del coefficiente 2 di x^3:

divisori interi di 3	1	−1	3	−3
divisori interi di 2	1	−1	2	−2

Pertanto l'insieme S delle possibili radici razionali di $P(x)$ è:

$$S = \left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}\right\}.$$

Proviamo a sostituire a x i valori di S:

$P(1) = 2 - 5 - 4 + 3 = -4$ NO

$P(-1) = 2(-1)^3 - 5(-1)^2 - 4(-1) + 3 =$
$= -2 - 5 + 4 + 3 = 0$ SÌ

$x_1 = -1$ è una radice di $P(x)$.

Per abbassare di grado, possiamo scrivere $P(x) = (x - x_1)Q(x)$, ossia:

$$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = (x+1)Q(x).$$

Calcoliamo $Q(x)$ con la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & -4 & 3 \\ -1 & & -2 & 7 & -3 \\ \hline & 2 & -7 & 3 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x+1)(2x^2 - 7x + 3).$$

L'equazione data ha come soluzione l'unione delle soluzioni delle due equazioni:

$x + 1 = 0 \to x_1 = -1$

$2x^2 - 7x + 3 = 0 \quad \Delta = 49 - 24 = 25$

$$\to x = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} 3 \\ \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione di terzo grado sono:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 3.$$

Risolvi le seguenti equazioni.

39 $x^3 - 7x + 6 = 0$ $[-3; 1; 2]$

40 $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$ $[1; 3]$

41 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ $[-3; -1; 2]$

42 $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$ $\left[-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; 1\right]$

43 $10x^3 - 7x^2 - 14x + 3 = 0$ $\left[-1; \frac{1}{5}; \frac{3}{2}\right]$

44 $x^3 + 8 + 6x(x + 2) = 0$ $[-2]$

45 $x(9x + 7) = 2(3 - x^3)$ $\left[-3; -2; \frac{1}{2}\right]$

46 $2x^3 - 5x - 6 = 0$ $[2]$

47 $x^4 + 3x^3 + 9x^2 - 3x - 10 = 0$ $[\pm 1]$

48 $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$ $\left[-2; \frac{1}{3}; 1\right]$

49 $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ $[-2; 1; 4]$

50 $2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = 0$ $\left[\pm 1; -\frac{1}{2}; 3\right]$

51 $x^5 - 13x^3 + 12x^2 = 0$ $[-4; 0; 1; 3]$

Le equazioni binomie

ESERCIZIO GUIDA

52 Risolviamo le seguenti equazioni binomie:

a) $\frac{x^5}{512} - 2 = 0$; b) $(2x + 3)^4 = 625$.

a) $\frac{x^5}{512} - 2 = 0 \rightarrow x^5 - 2 \cdot 512 = 0$

$x^5 = 1024.$

La soluzione è la radice quinta di 1024:

$x = \sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{4^5} = 4.$

b) L'equazione è binomia se consideriamo come «incognita» l'espressione $2x + 3$.

Poiché l'esponente dell'«incognita» è pari e il termine noto è positivo, abbiamo due soluzioni:

$(2x + 3)^4 = 625 \rightarrow (2x + 3)^4 = 5^4;$

$2x + 3 = \pm \sqrt[4]{5^4} = \pm 5.$

Ricaviamo i due valori di x:

$2x + 3 = 5 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1;$

$2x + 3 = -5 \rightarrow 2x = -8 \rightarrow x = -4.$

53 **COMPLETA** la tabella.

EQUAZIONE BINOMIA	SOLUZIONI
$x^4 - \ldots = 0$	$\pm \frac{1}{3}$
$2x^{\cdots} + 16 = 0$	-2
$5x^5 + \ldots = 0$	-2
$128x^6 - \ldots = 0$	$\pm \frac{1}{2}$
$16x^4 + \ldots = 0$	impossibile
$3x^{\cdots} - 48 = 0$	± 2

54 **ASSOCIA** a ogni equazione le sue soluzioni.

1. $2x^4 - 32 = 0$
2. $\frac{1}{4}x^8 + 64 = 0$
3. $4x^5 + 128 = 0$
4. $\frac{1}{8}x^7 - 16 = 0$

A. impossibile
B. -2
C. ± 2
D. 2

Risolvi le seguenti equazioni in x.

55 $\frac{1}{4}x^3 - 2 = 0$ $[2]$

56 $3x^3 + 375 = 0$ $[-5]$

57 $\frac{x^4}{9} - 9 = 0$ $[\pm 3]$

58 $32x^5 = 1$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

59 $\frac{5}{216}x^5 + 180 = 0$ $[-6]$

60 $81 + \frac{1}{9}x^6 = 0$ [impossibile]

61 $\frac{1}{9}x^6 - 81 = 0$ $[\pm 3]$

62 $(2x-1)^3 = -27$ $[-1]$

63 $(3x+5)^4 - 16 = 0$ $\left[-1; -\frac{7}{3}\right]$

64 $x^7 + 1 = 0$ $[-1]$

65 $10x^5 = 100$ $[\sqrt[5]{10}]$

66 $36x^4 - 25 = 0$ $\left[\pm\sqrt{\frac{5}{6}}\right]$

67 $(x^4-1)^8 = 1$ $[0; \pm\sqrt[4]{2}]$

68 $(2x^6-3)^5 = 1$ $[\pm\sqrt[6]{2}]$

69 $16x^4 - 81a^4 = 0$ $\left[\pm\frac{3}{2}a\right]$

70 $16a^4x^4 - b^4 = 0 \quad (a \neq 0)$ $\left[\pm\frac{b}{2a}\right]$

71 $(x-a)^3 = 8a^3$ $[3a]$

72 $(x+2a)^6 = 729a^6$ $[a; -5a]$

Le equazioni trinomie

ESERCIZIO GUIDA

73 Risolviamo l'equazione trinomia $x^{10} + x^5 - 2 = 0$.

Per risolvere l'equazione, ci serviamo della variabile ausiliaria z. Poniamo $x^5 = z$.
Otteniamo l'equazione ausiliaria di secondo grado in z, che sappiamo risolvere:

$$z^2 + z - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 \qquad z = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Risolviamo le due equazioni binomie in x:

$$x^5 = 1 \quad \rightarrow \quad x = 1; \qquad x^5 = -2 \quad \rightarrow \quad x = -\sqrt[5]{2}.$$

L'equazione trinomia assegnata ha due soluzioni reali: $x_1 = 1$, $x_2 = -\sqrt[5]{2}$.

Risolvi le seguenti equazioni trinomie nell'incognita x.

74 $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$ $[\pm 1; \pm 2]$

75 $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$ $[\pm 2]$

76 $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$ $[-3; 2]$

77 $x^{12} - 65x^6 + 64 = 0$ $[\pm 1; \pm 2]$

78 $16x^8 + 97x^4 + 81 = 0$ [impossibile]

79 $64x^6 + 91x^3 + 27 = 0$ $\left[-1; -\frac{3}{4}\right]$

80 $16x^8 - 17x^4 + 1 = 0$ $\left[\pm 1; \pm\frac{1}{2}\right]$

81 $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ $[-1; 2]$

82 $8x^6 - 217x^3 + 27 = 0$ $\left[3; \frac{1}{2}\right]$

83 $81x^8 - 82x^4 + 1 = 0$ $\left[\pm 1; \pm\frac{1}{3}\right]$

84 $x^6 + x^3 - 2 = 0$ $[1; -\sqrt[3]{2}]$

85 $x^8 - 10x^4 + 9 = 0$ $[\pm 1; \pm\sqrt{3}]$

86 $x^{10} + 3x^5 - 4 = 0$ $[1; -\sqrt[5]{4}]$

87 $x^6 - 5x^3 + 4 = 0$ $[1; \sqrt[3]{4}]$

88 $x^4 + \dfrac{16}{x^4} = 17$ $[\pm 2; \pm 1]$

89 $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$ $[1; \sqrt[3]{2}]$

90 $x^2 + \dfrac{216}{x^4} = \dfrac{35}{x}$ $[2; 3]$

91 $x^6 - 9a^3x^3 + 8a^6 = 0$ $[a; 2a]$

92 $x^6 + 7b^3x^3 - 8b^6 = 0$ $[b; -2b]$

93 $x^{10} + 31b^5x^5 - 32b^{10} = 0$ $[-2b; b]$

94 $x^8 + 80b^4x^4 - 81b^8 = 0$ $[-b; b]$

95 $32x^{10} + 211k^{10}x^5 - 243k^{20} = 0$ $\left[k^2; -\dfrac{3}{2}k^2\right]$

96 $81x^8 - 97b^4x^4 + 16b^8 = 0$ $\left[\pm b; \pm \dfrac{2b}{3}\right]$

97 $16(x+1)^8 + 31(x+1)^4 - 2 = 0$ $\left[-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right]$

98 $1 - 7(x+1)^3 - 8(x+1)^6 = 0$ $\left[-2; -\dfrac{1}{2}\right]$

99 $(3a - x)^6 + 7a^3(3a - x)^3 - 8a^6 = 0$ $[5a; 2a]$

Le equazioni biquadratiche

Nel sito: ► 12 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

100 Risolviamo l'equazione:

$4x^4 + 143x^2 - 36 = 0.$

Per risolvere l'equazione ci serviamo della variabile ausiliaria z.
Poniamo $x^2 = z$.
Otteniamo l'equazione ausiliaria in z di secondo grado, che risolviamo con il metodo consueto:

$$4z^2 + 143z - 36 = 0$$

$$\Delta = 20\,449 + 576 = 21\,025 = 145^2 \qquad z = \frac{-143 \pm 145}{8} = \begin{cases} \dfrac{1}{4} \\ -36 \end{cases}$$

Sostituiamo i due valori trovati per z nell'equazione $x^2 = z$ e risolviamo le due equazioni di secondo grado in x:

$$x^2 = \frac{1}{4} \quad \to \quad x = \pm\frac{1}{2}; \qquad\qquad x^2 = -36 \quad \text{impossibile.}$$

L'equazione biquadratica assegnata ha due soluzioni: $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = +\dfrac{1}{2}$.

Risolvi le seguenti equazioni nell'incognita x.

101 $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ $[\pm 2; \pm 3]$

102 $x^4 - 7x^2 - 144 = 0$ $[\pm 4]$

103 $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ $[\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{3}]$

104 $2x^4 + 13x^2 + 25 = 0$ [impossibile]

105 $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$ $\left[\pm\dfrac{1}{2}; \pm\sqrt{3}\right]$

106 $x^4 - 5x^2 - 24 = 0$ $[\pm 2\sqrt{2}]$

107 $x^4 - 12x^2 + 32 = 0$ $[\pm 2\sqrt{2}; \pm 2]$

108 $9x^4 + 77x^2 - 36 = 0$ $\left[\pm\dfrac{2}{3}\right]$

109 $16x^4 - 25x^2 + 9 = 0$ $\left[\pm 1; \pm \frac{3}{4}\right]$

110 $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$ $[\pm \sqrt{5}]$

111 $x^2(2x-3)(2x+3) + 2 = 0$ $\left[\pm \frac{1}{2}; \pm \sqrt{2}\right]$

112 $x^4 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8} = 0$ $\left[\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

113 $x^4 + \frac{14}{9}x^2 + \frac{8}{27} = 0$ [impossibile]

114 $x^4 - \frac{4}{9} + \frac{5}{9}x^2 = 0$ $\left[\pm \frac{2}{3}\right]$

115 $x^2\left(x^2 + \frac{5}{4}\right) = \frac{3}{2}$ $\left[\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

116 $x^2 + \frac{18}{x^2} = 11$ $[\pm \sqrt{2}; \pm 3]$

117 $x^2 - 10 + \frac{9}{x^2} = 0$ $[\pm 1; \pm 3]$

118 $(x^3-5)^4 - 5(x^3-5)^2 - 36 = 0$ $[2; \sqrt[3]{2}]$

119 $4\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 - 17\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4 = 0$ $[\pm 1]$

120 $\frac{5 - x^2}{x^2} - \frac{25}{16} + \frac{5}{x^4} = -1$ $[\pm 2]$

121 $\frac{1}{x^2} - 3 = \frac{1 + x^2}{x^2 - 2}$ $\left[\pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm 1\right]$

122 $\frac{x^2 + 3}{x^2 - 2} = 7 - \frac{5}{x^4 - 4}$ $[\pm \sqrt{3}]$

123 $\frac{2x^2 + 1}{1 - x^2} + \frac{x^2}{1 + x^2} - \frac{6}{1 - x^4} = 0$ [impossibile]

124 $x^4 - 10a^2x^2 + 9a^4 = 0$ $[\pm a; \pm 3a]$

125 $4x^4 + 5k^2x^2 + k^4 = 0 \quad (k \neq 0)$ [impossibile]

126 $2x^4 + a^2x^2 - a^4 = 0$ $\left[\pm \frac{1}{2}a\sqrt{2}\right]$

La scomposizione in fattori di particolari trinomi

ESERCIZIO GUIDA

127 Scomponiamo in fattori il seguente trinomio $36x^4 - 25x^2 + 4$.

Dobbiamo trovare, se esistono, le radici dell'equazione associata al trinomio, che è biquadratica:

$$36x^4 - 25x^2 + 4 = 0.$$

Poniamo $x^2 = z$.

$$36z^2 - 25z + 4 = 0$$

$$\Delta = 625 - 16 \cdot 36 = 625 - 576 = 49$$

$$z = \frac{25 \pm 7}{72} = \begin{cases} \frac{4}{9} \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

Il polinomio corrispondente all'equazione ausiliaria in z si scompone così:

$$36z^2 - 25z + 4 = 36\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z - \frac{4}{9}\right).$$

Poiché $x^2 = z$, sostituiamo:

$$36x^4 - 25x^2 + 4 = 36\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(x^2 - \frac{4}{9}\right).$$

Sviluppiamo le differenze di quadrati e otteniamo la scomposizione del polinomio di partenza:

$$36\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right).$$

Scomponi in fattori i seguenti trinomi.

128 $x^4 - 48x^2 - 49$ $[(x^2+1)(x-7)(x+7)]$

129 $16x^4 - 32x^2 - 9$ $[(2x-3)(2x+3)(4x^2+1)]$

130 $x^6 + 2x^3 + 1$ $[(x+1)^2(x^2-x+1)^2]$

131 $y^8 + 11y^4 + 18$ $[(y^4+2)(y^4+9)]$

132 $x^4 - 5x^2 + 4$ $[(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)]$

133 $x^4 - 13x^2 + 36$ $[(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)]$

134 $x^4 - 52x^2 + 576$ $[(x-4)(x+4)(x-6)(x+6)]$

135 $x^4 - 34x^2 + 225$ $[(x-5)(x+5)(x-3)(x+3)]$

136 $x^8 - 15x^4 - 16$ $[(x^4+1)(x^2+4)(x+2)(x-2)]$

Semplifica le seguenti frazioni algebriche.

137 $\dfrac{x^4 - 5x^2 - 36}{x^4 + 3x^2 - 4}$ $\left[\dfrac{x^2-9}{x^2-1}\right]$

138 $\dfrac{9x^4 - x^2}{9x^4 - 10x^2 + 1}$ $\left[\dfrac{x^2}{x^2-1}\right]$

139 $\dfrac{a^4 - 3a^2 - 4}{a^3 - 4a}$ $\left[\dfrac{a^2+1}{a}\right]$

140 $\dfrac{x^4 - 24x^2 - 25}{x^3 - 5x^2 + x - 5}$ $[x+5]$

141 $\dfrac{4a^4 - 17a^2 + 4}{2a^3 - 5a^2 + 2a}$ $\left[\dfrac{(2a+1)(a+2)}{a}\right]$

142 $\dfrac{y^2 - y - 6}{y^4 - 13y^2 + 36}$ $\left[\dfrac{1}{(y-2)(y+3)}\right]$

143 $\dfrac{6x^4 + 12x^2 + 6}{6x^4 - 6}$ $\left[\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right]$

144 $\dfrac{x^4 - 8x^2 - 9}{x^4 - 3x^2 - 4}$ $\left[\dfrac{x^2-9}{x^2-4}\right]$

145 $\dfrac{x^4 - 7x^2 + 12}{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}$ $[x+2]$

146 $\dfrac{2x^4 + 3x^2 - 2}{3x^4 + 5x^2 - 2}$ $\left[\dfrac{2x^2-1}{3x^2-1}\right]$

147 $\dfrac{6x^4 - 11x^2 + 4}{10x^4 - 7x^2 + 1}$ $\left[\dfrac{3x^2-4}{5x^2-1}\right]$

148 $\dfrac{4x^4 + 5x^2 - 6}{8x^4 - 2x^2 - 3}$ $\left[\dfrac{x^2+2}{2x^2+1}\right]$

149 $\dfrac{4x^4 - 37x^2 + 9}{4x^3 + 12x^2 - x - 3}$ $[x-3]$

150 $\dfrac{9x^4 - 10x^2 + 1}{6x^3 - x^2 - 10x - 3}$ $\left[\dfrac{3x^2-4x+1}{2x-3}\right]$

151 $\dfrac{6x^4 - 53x^2 - 9}{12x^4 - 16x^2 - 3}$ $\left[\dfrac{x^2-9}{2x^2-3}\right]$

152 $\dfrac{6x^4 + 13x^2 - 8}{6x^3 + 16x^2 - 3x - 8}$ $\left[\dfrac{3x^2+8}{3x+8}\right]$

153 $\dfrac{2x^4 - x^2 - 1}{2x^3 + x^2 - 2x - 1}$ $\left[\dfrac{2x^2+1}{2x+1}\right]$

154 $\dfrac{25x^4 - 109x^2 + 36}{25x^4 + 16x^2 - 9}$ $\left[\dfrac{x^2-4}{x^2+1}\right]$

Le equazioni reciproche

RIFLETTI SULLA TEORIA

155 VERO O FALSO?

a) Un'equazione reciproca di terzo grado con coefficienti positivi ammette come radice -1. V F

b) Se $x = 3$ è una soluzione di un'equazione reciproca di terzo grado, allora anche $x = -\dfrac{1}{3}$ lo è. V F

c) L'equazione $ax^2 + bx + a = 0$ è un'equazione reciproca. V F

156 È vero che se $x + \frac{1}{x} = 3$, allora $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$? Perché?

157 Un'equazione reciproca di quarto grado del tipo $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx - a = 0$ è divisibile per $x^2 - 1$? Perché?

ESERCIZI

Le equazioni reciproche di terzo grado

ESERCIZIO GUIDA

158 Risolviamo l'equazione reciproca di terzo grado:

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Una soluzione è $x_1 = -1$. Infatti $2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 2 = 0$.
Abbassiamo perciò di grado con la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -3 & -3 & 2 \\ -1 & & -2 & 5 & -2 \\ \hline & 2 & -5 & 2 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x+1)(2x^2 - 5x + 2)$$

Le altre soluzioni dell'equazione iniziale sono quelle dell'equazione:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \qquad \Delta = 25 - 16 = 9 \qquad x = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione reciproca sono: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

Risolvi le seguenti equazioni reciproche.

159 $3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0$ $\left[-1;\ -3;\ -\frac{1}{3}\right]$

160 $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$ $\left[-1;\ -2;\ -\frac{1}{2}\right]$

161 $4x^3 - 13x^2 - 13x + 4 = 0$ $\left[-1;\ 4;\ \frac{1}{4}\right]$

162 $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$ $\left[-1;\ 3;\ \frac{1}{3}\right]$

163 $5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0$ $\left[-1;\ 5;\ \frac{1}{5}\right]$

164 $6x^3 + 19x^2 + 19x + 6 = 0$ $\left[-1;\ -\frac{3}{2};\ -\frac{2}{3}\right]$

165 $4x^3 + 21x^2 + 21x + 4 = 0$ $\left[-1;\ -4;\ -\frac{1}{4}\right]$

166 $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ $\left[1;\ -2;\ -\frac{1}{2}\right]$

167 $4x^3 - 21x^2 + 21x - 4 = 0$ $\left[1;\ 4;\ \frac{1}{4}\right]$

168 $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$ $\left[1;\ 3;\ \frac{1}{3}\right]$

169 $5x^3 - 31x^2 + 31x - 5 = 0$ $\left[1;\ 5;\ \frac{1}{5}\right]$

170 $7x^3 + 43x^2 - 43x - 7 = 0$ $\left[1;\ -7;\ -\frac{1}{7}\right]$

171 $6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 = 0$ $\left[1;\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{2}\right]$

172 $x^3 + \frac{31}{6}x^2 - \frac{31}{6}x - 1 = 0$ $\left[1;\ -6;\ -\frac{1}{6}\right]$

Le equazioni reciproche di quarto grado: il tipo $ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$

ESERCIZIO GUIDA

173 Risolviamo l'equazione reciproca di quarto grado:

$3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0.$

Un'equazione di questo tipo ha per soluzione i valori $x = 1$ e $x = -1$, quindi utilizziamo due volte la regola di Ruffini, per abbassare di grado l'equazione:

$$x = 1 \qquad \begin{array}{c|cccc|c} & 3 & -10 & 0 & 10 & -3 \\ 1 & & 3 & -7 & -7 & 3 \\ \hline & 3 & -7 & -7 & 3 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad x = -1 \qquad \begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -7 & -7 & 3 \\ -1 & & -3 & 10 & -3 \\ \hline & 3 & -10 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\underbrace{3 \quad -7 \quad -7 \quad 3}_{3x^3 - 7x^2 - 7x + 3} \qquad\qquad \underbrace{3 \quad -10 \quad 3}_{3x^2 - 10x + 3}$$

$$3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = (x - 1)(3x^3 - 7x^2 - 7x + 3) = (x - 1)(x + 1)(3x^2 - 10x + 3).$$

Risolviamo $3x^2 - 10x + 3 = 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = 25 - 9 = 16 \qquad x = \frac{5 \pm 4}{3} = \begin{cases} 3 \\ \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione assegnata sono:

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = 3, \qquad x_4 = \frac{1}{3}.$$

Risolvi le seguenti equazioni reciproche.

174 $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0$ $\left[-\frac{1}{2};\ -2;\ \pm 1\right]$

175 $4x^4 - 17x^3 + 17x - 4 = 0$ $\left[\frac{1}{4};\ 4;\ \pm 1\right]$

176 $3x^4 + 10x^3 - 10x - 3 = 0$ $\left[-\frac{1}{3};\ -3;\ \pm 1\right]$

177 $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$ $\left[\frac{1}{2};\ 2;\ \pm 1\right]$

178 $5x^4 + 26x^3 - 26x - 5 = 0$ $\left[-\frac{1}{5};\ -5;\ \pm 1\right]$

179 $8x^4 - 65x^3 + 65x - 8 = 0$ $\left[\frac{1}{8};\ 8;\ \pm 1\right]$

180 $6x^4 + 37x^3 - 37x - 6 = 0$ $\left[-\frac{1}{6};\ -6;\ \pm 1\right]$

181 $10 + 101x^3 - 10x^4 - 101x = 0$ $\left[\frac{1}{10};\ 10;\ \pm 1\right]$

Le equazioni reciproche di quarto grado: il tipo $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

ESERCIZIO GUIDA

182 Risolviamo l'equazione reciproca di quarto grado:

$$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0.$$

- Dividiamo per x^2 $(x \neq 0)$:

$$6x^2 - 5x - 38 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0.$$

- Raccogliamo 6 e -5:

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0.$$

- Poniamo $\boldsymbol{x + \frac{1}{x} = z}$, da cui, elevando al quadrato:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2.$$

- Sostituiamo:

$$6(z^2 - 2) - 5z - 38 = 0$$
$$6z^2 - 12 - 5z - 38 = 0$$
$$6z^2 - 5z - 50 = 0$$
$$z_1 = \frac{10}{3},\ z_2 = -\frac{5}{2}.$$

- Risolviamo:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$$
$$3x^2 + 3 = 10x$$
$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$
$$x = 3, x = \frac{1}{3}.$$

- Risolviamo:

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$$
$$2x^2 + 2 = -5x$$
$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$
$$x = -2,\ x = -\frac{1}{2}.$$

L'equazione ha quindi le seguenti soluzioni:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = \frac{1}{3}.$$

Risolvi le seguenti equazioni reciproche.

183 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$ $\left[-1;\ 2;\ \frac{1}{2}\right]$

184 $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$ $\left[\frac{1}{2};\ 2;\ -\frac{1}{3};\ -3\right]$

185 $2x^4 + 9x^3 + 14x^2 + 9x + 2 = 0$ $\left[-1;\ -2;\ -\frac{1}{2}\right]$

186 $4x^4 - 7x^3 - \frac{69}{2}x^2 - 7x + 4 = 0$ $\left[-\frac{1}{2};\ -2;\ 4;\ \frac{1}{4}\right]$

187 $x^4 - \frac{128}{15}x^3 + \frac{58}{3}x^2 - \frac{128}{15}x + 1 = 0$ $\left[\frac{1}{5};\ 5;\ \frac{1}{3};\ 3\right]$

188 $x^4 - \frac{189}{20}x^3 + \frac{241}{10}x^2 - \frac{189}{20}x + 1 = 0$ $\left[\frac{1}{4};\ 4;\ \frac{1}{5};\ 5\right]$

189 $x^4 - \frac{26}{3}x^3 + \frac{209}{12}x^2 - \frac{26}{3}x + 1 = 0$ $\left[\frac{1}{6};\ 6;\ \frac{1}{2};\ 2\right]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

RIEPILOGO LE EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

190 VERO O FALSO?

a) L'equazione biquadratica $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$ ha $\Delta = 16 + 20 = 36 > 0$, e ammette radici reali. V F
b) L'equazione $x^6 + 4x^3 - 5 = 0$ ha due soluzioni, una positiva e l'altra negativa. V F
c) Un'equazione trinomia può essere di terzo grado. V F
d) Un'equazione biquadratica è trinomia. V F
e) Un'equazione reciproca ha sempre $x = 1$ come soluzione. V F
f) Un'equazione binomia ha sempre soluzione. V F

191 COMPLETA la tabella.

EQUAZIONE	TIPO	GRADO	SOLUZIONI
$x^7 + 3 = 0$	...	...	...
...	biquadratica	...	$\pm 2, \pm 3$
$32x^{10} - 31x^5 - 1 = 0$	...	...	...
...	trinomia	6	$-1, 2$
...	binomia	4	$\pm \frac{1}{3}$

Risolvi le seguenti equazioni nell'incognita *x*.

192 $2401x^4 = 81$ $\left[\pm \frac{3}{7}\right]$

193 $4x^4 - 21x^2 + 27 = 0$ $\left[\pm \frac{3}{2};\ \pm\sqrt{3}\right]$

194 $32x^5 + 243 = 0$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$

195 $x^{10} + 31x^5 - 32 = 0$ $[-2;\ 1]$

196 $194\,481x^4 = 2401$ $\left[\pm \frac{1}{3}\right]$

197 $6x^3 - 7x^2 - 7x + 6 = 0$ $\left[-1;\ \frac{3}{2};\ \frac{2}{3}\right]$

198 $12x^4 + 28x^2 + 15 = 0$ [impossibile]

199 $x^4 - 13b^2x^2 + 36b^4 = 0$ $[\pm 2b;\ \pm 3b]$

200 $4x - 17x^2 + 15x^3 = 0$ $\left[0;\ \frac{1}{3};\ \frac{4}{5}\right]$

201 $32a^5b^{10} + x^5 = 0$ $[-2ab^2]$

202 $x^8 - 97x^4 + 1296 = 0$ $[\pm 2;\ \pm 3]$

203 $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$ $\left[-3;\ \frac{1}{2};\ 2\right]$

204 $x^4 - 53x^2 + 196 = 0$ $[\pm 2;\ \pm 7]$

205 $10x^3 - 111x^2 + 111x - 10 = 0$ $\left[1;\ 10;\ \frac{1}{10}\right]$

206 $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ -2;\ 2\right]$

207 $x^4 - 13a^4x^2 + 36a^8 = 0$ $[\pm 2a^2;\ \pm 3a^2]$

208 $(2x^2 - 4)^3 = 216$ $[\pm\sqrt{5}]$

209 $x^8 + 15b^4x^4 - 16b^8 = 0$ $[-b;\ b]$

210 $7x^3 - 57x^2 + 57x - 7 = 0$ $\left[1;\ 7;\ \frac{1}{7}\right]$

211 $56x^3 + 90x^2 - 28x + 8x^2 = 0$ $\left[0;\ -2;\ \frac{1}{4}\right]$

212 $x^4 - 100x^2 + 2304 = 0$ $[\pm 6;\ \pm 8]$

213 $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 = 0$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

214 $4x^4 - 17a^2x^2 + 4a^4 = 0$ $\left[\pm 2a;\ \pm \frac{1}{2}a\right]$

215 $(3x - 1)^6 = 64$ $\left[1;\ -\frac{1}{3}\right]$

216 $9x^3 - 91x^2 + 91x - 9 = 0$ $\left[1;\ 9;\ \frac{1}{9}\right]$

217 $9x^4 + 2 = 19x^2$ $\left[\pm \frac{1}{3};\ \pm\sqrt{2}\right]$

218 $3x^3 - 2\sqrt{3}x^2 - 3x = 0$ $\left[0;\ \sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

219 $x^4 - 6a^2x^2 + 8a^4 = 0$ $\left[\pm a\sqrt{2};\ \pm 2a\right]$

220 $9x^4 - 72x^2 - 25 = 0$ $\left[\pm \frac{5}{3}\sqrt{3}\right]$

221 $4x^4 + 45 - 29x^2 = 0$ $\left[\pm \frac{3}{2};\ \pm\sqrt{5}\right]$

222 $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ $[-1;\ 1;\ 2]$

223 $36x^4 + 5b^4x^2 - b^8 = 0$ $\left[\pm \frac{b^2}{3}\right]$

224 $4x^4 - 28x^2 + 45 = 0$ $\left[\pm \frac{3}{2}\sqrt{2};\ \pm\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$

225 $x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{16} = 0$ $\left[\pm \frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{2}\right]$

226 $4x^3 + 8x^2 - x - 2 = 0$ $\left[\pm \frac{1}{2};\ -2\right]$

227 $x^4 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{6} = 0$ $\left[\pm \frac{\sqrt{2}}{2};\ \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

228 $x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{8} = 0$ $\left[\pm \frac{1}{2};\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

229 $8x^3 - 2\sqrt{2}\,x^2 - 2x = 0$ $\left[0;\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

230 $x^4 = \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{2}{27}\right)$ $\left[\pm \frac{1}{3};\ \pm\frac{\sqrt{2}}{3}\right]$

231 $\frac{1}{2}x^4 - 250 = 6 - \frac{1}{2}x^4$ $[\pm 4]$

232 $6x^3 + 43x^2 + 43x + 6 = 0$ $\left[-1;\ -6;\ -\frac{1}{6}\right]$

233 $\frac{26}{9}x^2 - \frac{1}{3} + x^4 = 0$ $\left[\pm \frac{1}{3}\right]$

234 $x^2 - 1 = 1 - x^3$ $[1]$

235 $\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)^6 = \frac{64}{729}$ $\left[-\frac{2}{9};\ \frac{14}{9}\right]$

BRAVI SI DIVENTA ▶ E43

236 $\frac{x^2 + 3}{x + 1} - \frac{10x(1 - x)}{3x^2 + x - 2} = \frac{2 - x}{2 - 3x}$

237 $\frac{9x^2 - 2a^2}{3x - a} + \frac{2a^2 - x}{3x} = \frac{a^3 + 3x^2 - ax}{3ax - 9x^2}$ [impossibile]

238 $x^4 - \frac{70}{9}x^2 + 5\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2 = 0$ $\left[\pm \frac{5}{3};\ \pm\sqrt{5}\right]$

239 $x^3(6x - 37) + (37x - 6) = 0$ $\left[\frac{1}{6};\ 6;\ \pm 1\right]$

240 $(x^4 - 9a^4)(x^4 + 9a^4) = -(9a^4)^2 + a^8$ $[\pm a]$

241 $\frac{x^3}{256} + \frac{4}{x^2} = 0$ $[-4]$

242 $5^2 + (6x^2)^2 - 109x^2 = 0$ $\left[\pm \frac{1}{2};\ \pm\frac{5}{3}\right]$

243 $7(x^4 - 1) + 50x(x^2 - 1) = 0$ $\left[-\frac{1}{7};\ -7;\ \pm 1\right]$

244 $\frac{6x^2 + 1}{x - 2} + \frac{x - 2}{x + 2} = \frac{20x^2 + 4x}{x^2 - 4}$ $\left[-1;\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{2}\right]$

245 $x^3 + 9{,}1x^2 - 9{,}1x - 1 = 0$ $\left[1;\ -10;\ -\frac{1}{10}\right]$

246 $(8x^6 - b^6)^2 = 2b^{12} + 47b^6x^6$ $[\pm b]$

247 $2x^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - 5x^2\right)$ $\left[\pm \frac{1}{2}\right]$

248 $8x^4 - 5\sqrt{3}x^2 + \frac{3}{2} = 0$ $\left[\pm \frac{\sqrt[4]{12}}{2};\ \pm\frac{\sqrt[4]{12}}{4}\right]$

249 $(2x - ab)^4 = (3x + 2ab)^4$ $\left[-3ab;\ -\frac{ab}{5}\right]$

250 $(x^2 - 4x)(x^2 + 4x) = 3(x^2 - 6)$ $[\pm 1;\ \pm 3\sqrt{2}]$

251 $2x^3 - 3x^2 - 23x + 12 = 0$ $\left[\frac{1}{2};\ -3;\ 4\right]$

252 $x^3 - \frac{73}{8}x^2 + \frac{73}{8}x - 1 = 0$ $\left[1;\ 8;\ \frac{1}{8}\right]$

253 $x^6 + (a^3 - b^3)x^3 - a^3b^3 = 0$ $[-a;\ b]$

254 $x^4 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{9}x^2 = 0$ $\left[\pm \frac{2}{3}\right]$

255 $\frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{x} = 0$ $[\pm 2]$

256 $x^4 - a^2x^2 + x^2 - a^2 = 0$ $[\pm a]$

257 $\dfrac{x^2+9}{2x-5}-\dfrac{3-4x}{2x}=\dfrac{13x^2-5}{4x^2-10x}$ $[\pm 2]$

258 $82x(x^2-1)=9(1-x^2)(1+x^2)$ $\left[-\dfrac{1}{9};\ -9;\ \pm 1\right]$

259 $x^4+b^2x^2-x^2-b^2=0$ $[\pm 1]$

260 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}x^2+9\right)=x^4$ $\left[\pm\dfrac{3}{2}\right]$

261 $\dfrac{x^4}{25}=\left(\dfrac{25}{x}\right)^2$ $[\pm 5]$

262 $x^4-x^2(4b^2+9a^2)+36a^2b^2=0$ $[\pm 3a;\ \pm 2b]$

263 $x^4-a^2(4a^2+1)x^2+4a^6=0$ $[\pm a;\ \pm 2a^2]$

264 $(1-x^2)(2x+3)^2=5(x-1)^2(x+1)$ $\left[\pm 1;\ -4;\ -\dfrac{1}{4}\right]$

265 $x^4-4x^2a^4-a^2x^2+4a^6=0$ $[\pm a;\ \pm 2a^2]$

266 $x^4-\sqrt{2}x^2-\sqrt{3}x^2+\sqrt{6}=0$ $[\pm\sqrt[4]{3};\ \pm\sqrt[4]{2}]$

267 $x^5(x^5+a^5)+b^5(x^5+a^5)=0$ $[-a;\ -b]$

268 $(8x^6-7a^3x^3-3a^6)^7=-128a^{42}$ $\left[a;-\dfrac{1}{2}a\right]$

269 $2x^4-8b^2x^2-3x^2+12b^2=0$ $\left[\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}};\ \pm 2b\right]$

270 $\dfrac{(x^2-1)^2}{5}-\dfrac{x^2}{30}=\dfrac{x(x^2+5x+1)}{6}$ $\left[-2;-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3};\ 3\right]$

271 $4x^4-36a^2x^2-x^2+9a^2=0$ $\left[\pm\dfrac{1}{2};\ \pm 3a\right]$

272 $12x^4+25x^3-25x-12=0$ $\left[-\dfrac{3}{4};\ -\dfrac{4}{3};\ \pm 1\right]$

273 $\dfrac{(x-1)^4}{x^4}-5\dfrac{(x-1)^2}{x^2}+4=0$ $\left[-1;\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{3}\right]$

274 $6x^4-49x^3+86x^2-49x+6=0$ $\left[1;\ 6;\ \dfrac{1}{6}\right]$

275 $\sqrt{6}x^4-2\sqrt{3}x^2-3\sqrt{2}x^2+6=0$ $[\pm\sqrt[4]{3};\ \pm\sqrt[4]{2}]$

276 $\sqrt{6}x^4-\sqrt{2}x^2+2\sqrt{6}x^2-2\sqrt{2}=0$ $\left[\pm\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{27}\right]$

277 $4x^4-9x^3-26x^2-9x+4=0$ $\left[-1;\ 4;\ \dfrac{1}{4}\right]$

278 $2x^4-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}x^2+x^2-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=0$ $\left[\pm\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{27}\right]$

279 $25x^4b^2-625x^2b^4-x^2+25b^2=0$ $\left[\pm 5b;\ \pm\dfrac{1}{5b}\right]$

280 $9x^4-x^2(b^2+9a^2)+a^2b^2=0$ $\left[\pm\dfrac{1}{3}b;\pm a\right]$

281 $\dfrac{x^2}{(x+3)(x^2+1)}+\dfrac{(x+1)^2}{x^4-8x^2-9}=\dfrac{1}{x^2-9}$ $[0;\ 1;\ 2]$

282 $3x^2-x=\dfrac{26x^3+1-3x^4}{9x^4+3x^3}$ $[1]$

283 $\dfrac{4x^2-3}{2x-1}=\dfrac{x-3}{2x}-\dfrac{14x^2-3x}{4x^2-2x}$ $\left[-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right]$

284 $\dfrac{32x^{11}+2}{x+1}=\dfrac{65x^5-3}{2x-1}-\dfrac{32x^{11}-7x+65x^5}{2x^2+x-1}$ $\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$

285 $12x^4+56x^3+89x^2+56x+12=0$ $\left[-\dfrac{2}{3};\ -\dfrac{3}{2};\ -2;\ -\dfrac{1}{2}\right]$

286 $\dfrac{x^2+3x}{2x^2-3x-2}-\dfrac{3x-4}{x-2}=\dfrac{1-2x^2}{2x+1}$ $[3]$

287 $2\sqrt{3}x^3+7x(x-1)=2\sqrt{3}x(x-1)+2\sqrt{3}$ $\left[1;\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ -\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right]$

288 $\dfrac{3x^3-1}{x-2}-\dfrac{7x^2+2}{2x}=\dfrac{7x-26x^2-2}{4x-2x^2}$ $\left[-1;\ \dfrac{1}{2};\ -\dfrac{1}{3}\right]$

Problemi

289 Dimostra che l'equazione nell'incognita x

$$ax^3 - (3 + a)x^2 + 5x - 2 = 0$$

ha una soluzione che non dipende da a.
Trova poi per quali valori di a le altre due soluzioni hanno per somma 9. $\left[1; a = \frac{1}{3}\right]$

290 Data l'equazione

$$x^3 + (k + 1)x^2 - x - k - 1 = 0,$$

determina per quali valori di k ha come soluzione $x = 2$.
Trova poi le altre due soluzioni. $[-3; \pm 1]$

291 Dopo aver verificato che l'equazione

$$x^3 - 6x^2 + (a + 7)x - 2a + 2 = 0$$

ammette come soluzione $x = 2$, trova per quali valori di a le altre soluzioni sono reali e distinte. $[a < 5]$

292 Indica per quali valori di a e b si ha un'equazione reciproca nell'incognita x:

$$(a + 1)x^3 - 2x^2 + 4bx - 3 = 0.$$

$\left[\left(a = -4,\ b = -\frac{1}{2}\right) \vee \left(a = 2, b = \frac{1}{2}\right)\right]$

293 Determina per quali valori di a e b l'equazione

$$x^4 + (a - 3)x^3 + 4x^2 + (b + 1)x + a = 0:$$

a) è biquadratica;
b) è reciproca.

[a) $a = 3, b = -1$; b) $a = 1, b = -3$; $a = -1, b = 3$]

294 Considera l'equazione binomia $(a - 2)x^4 - 2 = 0$ nell'incognita x. Determina per quali valori del parametro essa ammette soluzioni reali e risolvi poi l'equazione data. $\left[a > 2; x = \pm\sqrt[4]{\frac{2}{a-2}}\right]$

295 È data la seguente equazione nell'incognita x:
$(k - 2)x^3 + (3h - 1)x^2 + kx + h + 3 = 0$.
a) Per quali coppie di valori reali di h e k l'equazione è reciproca?
b) Quali sono le sue soluzioni reali in tali casi?

[a) $h = 3, k = 8$; $h = 1, k = -2$; b) $x = -1$; $x = 1$]

296 Determina le condizioni di esistenza della frazione algebrica $\frac{3x^3 - 7x^2 - 7x + 3}{9x^4 - 10x^2 + 1}$, poi semplificala.

$\left[x \neq \pm 1, x \neq \pm\frac{1}{3}; \frac{x - 3}{(x - 1)(3x + 1)}\right]$

2. Le equazioni irrazionali

Teoria a pag. 965

RIFLETTI SULLA TEORIA

297 Perché l'equazione $\sqrt{3}x + 2x^2 = 0$ *non* è irrazionale?

298 L'equazione $[A(x)]^2 = [B(x)]^2$ è equivalente all'equazione $A(x) = -B(x)$? Perché?

299 L'equazione $(x - 1)^3 = -8$ è equivalente a $1 - x = 2$. Perché?

300 Perché le equazioni $(x - 2)^4 = (x - 3)^2$ e $(x - 2)^2 = (x - 3)$ *non* sono equivalenti?

301 Il valore $x = 3$ appartiene all'insieme delle soluzioni dell'equazione $\sqrt{2x + 3} = x$?

302 Perché l'equazione $\sqrt[3]{x^2 + 1} = -1$ è impossibile?

303 Perché l'equazione $\sqrt[n]{x + 1} + \sqrt[n]{x - 1} = 0$ ammette soluzioni solo se n è dispari?

304 Dopo aver risolto l'equazione $\sqrt[3]{x - 1} = \sqrt[4]{x + 1}$, devi controllare le soluzioni mediante verifica? Perché?

305 VERO O FALSO?

a) L'equazione $x^2\sqrt{5} + \frac{1}{x} = \sqrt{2}x$ è irrazionale. V F

b) L'equazione $\sqrt{-x^2} = 2$ è impossibile. V F

c) L'equazione $\sqrt[3]{x-1} = 3$ ha come C.E.: $x \geq 1$. V F

d) Le equazioni $\sqrt{x+1} = x - 1$ e $(\sqrt{x+1})^2 = (x-1)^2$ sono equivalenti. V F

ESERCIZI

Le equazioni contenenti un solo radicale

L'equazione contiene una radice con indice pari

Nel sito: ▶ 10 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

306 Risolviamo l'equazione:

$$\sqrt{x-5} + x = 11.$$

Prima di elevare al quadrato, dobbiamo isolare il radicale a primo membro:

$$\sqrt{x-5} = 11 - x.$$

Eleviamo al quadrato:

$$(\sqrt{x-5})^2 = (11-x)^2.$$

Svolgiamo i calcoli:

$$x - 5 = 121 - 22x + x^2 \rightarrow x - 5 - 121 + 22x - x^2 = 0 \rightarrow -x^2 + 23x - 126 = 0 \rightarrow x^2 - 23x + 126 = 0$$

$$\Delta = 25 \qquad x = \frac{23 \pm 5}{2} = \begin{cases} 14 \\ 9 \end{cases}$$

Poiché abbiamo elevato l'equazione a un esponente pari, dobbiamo controllare quali tra i valori calcolati sono soluzioni dell'equazione iniziale.

Controllo mediante condizioni
Imponiamo:

$$\begin{cases} x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5 & \text{(il radicando deve essere positivo o nullo)} \\ 11 - x \geq 0 \rightarrow -x \geq -11 \rightarrow x \leq 11 & \text{(il secondo membro deve avere lo stesso segno del radicale)} \end{cases}$$

da cui segue $5 \leq x \leq 11$.
Poiché solo 9 soddisfa quest'ultima condizione, allora l'equazione data ammette come unica soluzione $x = 9$.

Controllo mediante verifica
Osserviamo che il secondo membro dell'equazione iniziale è uguale a 11.
Controlliamo se il valore dell'espressione a primo membro è 11 sia per $x = 9$, sia per $x = 14$.
Per $x = 9$ otteniamo:

$$\sqrt{9-5} + 9 = \sqrt{4} + 9 = 2 + 9 = 11,$$ dunque la soluzione $x = 9$ è accettabile.

Per $x = 14$ otteniamo:

$$\sqrt{14-5} + 14 = \sqrt{9} + 14 = 3 + 14 = 17 \neq 11,$$ dunque la soluzione $x = 14$ non è accettabile.

L'equazione ha soluzione $x = 9$.

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali.

307 $\sqrt{x-1}=7$ $[50]$

308 $\sqrt{x-2}=x-8$ $[11]$

309 $\sqrt{6+\sqrt{6-x}}=3$ $[-3]$

310 $\sqrt{1-7x}=6$ $[-5]$

311 $2\sqrt{x}-5=-3(\sqrt{x}+1)$ $\left[\frac{4}{25}\right]$

312 $3\sqrt{x-2}=4-\sqrt{x-2}$ $[3]$

313 $2+\sqrt{3x-1}=3x-1$ $\left[\frac{5}{3}\right]$

314 $x-5\sqrt{x}+6=0$ $[9; 4]$

315 $15-x=-\sqrt{x-3}$ $[19]$

316 $x+\sqrt{22-3x}=6$ $[2]$

317 $\sqrt{18x}-6=5(\sqrt{2x}-2)$ $[2]$

318 $\sqrt{4-x}=x-2$ $[3]$

319 $\sqrt{3-2x}=4x-3$ $[1]$

320 $\sqrt{3x-2}=\frac{3x+2}{5}$ $[1; 6]$

321 $2\sqrt{1-5x}=5-x$ $[-3; -7]$

322 $\sqrt{4-3x}+2x=-4$ $[-4]$

323 $3x-\sqrt{\frac{6+x}{2}}=4$ $[2]$

324 $\sqrt[4]{\frac{2-x}{6}}+2=3$ $[-4]$

325 $\sqrt[4]{\frac{x+15}{x}}=2$ $[1]$

326 $\sqrt{x-\sqrt{2x-2}}=1$ $[1; 3]$

327 $\sqrt{x^2+3x-6}=2x-6$ $[7]$

328 $\sqrt{3x(x+2)+1}=(x+1)^2+x$ $[0; -4]$

329 $3x=1+\sqrt{(2x-1)(3x-2)+2(x^2-1)+3x}$ $[1]$

330 $\sqrt[4]{(6x+4x^2)(6x-4x^2)-4x^2}=2$ $[\pm 1]$

331 $x=\sqrt[4]{(x^2+2x)^2+x^2-2}-1$ $[-1]$

332 $5-\sqrt[6]{x^2+x+8}=3$ $[-8; 7]$

L'equazione contiene una radice con indice dispari

Nel sito: ▶ 10 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

333 Risolviamo l'equazione:

$$1-\sqrt[3]{2x+3}=-2.$$

Isoliamo la radice:

$$-\sqrt[3]{2x+3}=-2-1 \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{2x+3}=3.$$

Eleviamo al cubo:

$$\left(\sqrt[3]{2x+3}\right)^3=3^3 \quad \rightarrow \quad 2x+3=27 \quad \rightarrow \quad 2x=24 \quad \rightarrow \quad x=12.$$

Poiché elevando entrambi i membri di un'equazione a esponente dispari si ottiene un'equazione equivalente, non è necessario eseguire alcun controllo sul valore calcolato: si tratta certamente della soluzione dell'equazione iniziale.

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali.

334 $\sqrt[3]{x} = x$ $[0; \pm 1]$

335 $\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 8} = 2$ $[0; -1]$

336 $\sqrt[3]{x^3 - 6x + 2} = x$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

337 $\sqrt[3]{4x^2 + 8x^3 - 2x} = 2x - 1$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

338 $\sqrt[3]{x^3 - 4x + 8} - x = 0$ $[2]$

339 $\sqrt[3]{27x^2(x+2)} = 3x + 2$ $\left[-\frac{2}{9}\right]$

340 $\sqrt[3]{8x + 9} = 3$ $\left[\frac{9}{4}\right]$

341 $\sqrt[3]{12x + 6x^2 + 9} = x + 2$ $[1]$

342 $\sqrt[3]{19x^3 + 16x^4} = -5x$ $[0; -9]$

343 $\sqrt[3]{30x(2x + 5) + 124} = 2x + 5$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

344 $1 = \sqrt[5]{(x + 1)^2 + 1}$ $[-1]$

345 $2x = \sqrt[5]{3x^5(x + 7) + 10x^4}$ $\left[0; \frac{5}{3}; 2\right]$

346 $2x = \sqrt[3]{30(x^2 + 1) + 8x^3 + 50x - 1} - 3$ $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$

347 $x^2 + 1 = \sqrt[3]{x^2(2 + x^4) + 3x^4 + (x + 1)}$ $[0; 1]$

Le equazioni con due o più radicali

L'equazione contiene due radici quadrate

ESERCIZIO GUIDA

348 Risolviamo le seguenti equazioni:

a) $\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{4x - 10} = 0$; b) $\sqrt{x - 4} + \sqrt{x^2 - 16} = 0$.

a) Portiamo un radicale a secondo membro in modo da avere le due radici isolate:

$$\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{4x - 10}.$$

Eleviamo al quadrato:

$$(\sqrt{x^2 - 3x})^2 = (\sqrt{4x - 10})^2$$

$$x^2 - 3x = 4x - 10$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\Delta = 9$$

$$x = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

Avendo elevato al quadrato, cioè a una potenza pari, controlliamo se 2 e 5 sono soluzioni mediante **verifica**.

- Per $x = 2$:

$$\sqrt{4 - 6} = \sqrt{-2},$$

$\sqrt{-2}$ non esiste, quindi $x = 2$ non è soluzione.

- Per $x = 5$:

$$\sqrt{25 - 15} = \sqrt{20 - 10}$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{10}$$

$x = 5$ è soluzione.

b) Poiché un radicale con indice pari è sempre positivo o nullo, la somma di due radicali può essere uguale a 0 solo se lo sono *entrambi* i radicali:

$\sqrt{x - 4} = 0$ per $x = 4$,

$\sqrt{x^2 - 16} = 0$ per $x = \pm 4$,

quindi *soltanto* $x = 4$ è soluzione.

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali.

349 $\sqrt{5 - 2x} - \sqrt{x + 1} = 0$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

350 $\sqrt{\frac{2x + 3}{3}} - \sqrt{x + 4} = 0$ [impossibile]

351 $\sqrt{3x - 6} + \sqrt{2x - x^2} = 0$ $[2]$

352 $\sqrt{x^2 - 25} + \sqrt{x^2 - 10x} = 0$ [impossibile]

353 $2\sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 2x} = 0$ [0]

354 $\sqrt{6x} = \sqrt{x - 5}$ [impossibile]

355 $\sqrt{3x - 2} = \sqrt{x^2 + 2x - 44}$ [7]

356 $\sqrt{x + 3} = \sqrt{4 - \sqrt{x + 1}}$ [0]

357 $\sqrt{3(x^2 - 1)} - \sqrt{x - x^3} = 0$ [$\pm 1; -3$]

358 $\sqrt{x^4 - 28} = \sqrt{3x^2}$ [$\pm\sqrt{7}$]

L'equazione contiene due radici cubiche

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali.

359 $\sqrt[3]{2x + 7} - \sqrt[3]{x - 5} = 0$ [-12]

360 $\sqrt[3]{\dfrac{x - 3}{2}} - \sqrt[3]{5 - 6x} = 0$ [1]

361 $\sqrt[3]{2(x^2 - x - 1)} = \sqrt[3]{x^2 - x + 4}$ [$-2; 3$]

362 $\sqrt[3]{(x - 2)(x + 4)} - \sqrt[3]{(x - 3)(x + 3)} = 0$ $\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

363 $(\sqrt[3]{x})^2 - 3\sqrt[3]{x} - 10 = 0$
(Suggerimento. Poni $\sqrt[3]{x} = y$.) [$-8; 125$]

364 $\sqrt[3]{3x - 1} + \sqrt[3]{x + 7} = 0$ $\left[-\dfrac{3}{2}\right]$

365 $\sqrt[3]{x^2 - 2x} = -\sqrt[3]{5x^2 + 3x - 2}$ $\left[-\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{2}\right]$

366 $\sqrt[3]{6 + \dfrac{7}{x}} = \dfrac{1}{x}\sqrt[3]{7x + 6}$ $\left[1; -\dfrac{3}{2}; -\dfrac{2}{3}\right]$

367 $\sqrt[3]{(4x - 1)^3 - 5x^3} = \sqrt[3]{56x^2(x - 1) + 8x - 1}$ $\left[0; -\dfrac{2}{3}; -2\right]$

L'equazione contiene due radici con indice diverso

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali.

368 $\sqrt{2x + 1} = \sqrt[3]{x - 1}$ [impossibile]
(Suggerimento. Trasforma in radicali con lo stesso indice.)

369 $\sqrt[3]{2x} = \sqrt[5]{4x}$ [$0; \pm\sqrt{2}$]

370 $\sqrt{x + 2} = \sqrt[4]{x + 14}$ [2]

371 $\sqrt[6]{3(1 - x)} - \sqrt[3]{3x - 1} = 0$ $\left[\dfrac{2}{3}\right]$

372 $\sqrt[3]{x + 8} = \sqrt{3x + 4}$ [0]

373 $\sqrt{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1} = 0$ [impossibile]

374 $\sqrt{5x + 2} = \sqrt[3]{\dfrac{15}{\sqrt{2}}x + 2\sqrt{2}}$ [0]

L'equazione contiene due radici quadrate e altri termini

ESERCIZIO GUIDA

375 Risolviamo l'equazione:
$$\sqrt{2x + 5} - \sqrt{6 - x} = 1.$$

Isoliamo un radicale:
$$\sqrt{2x + 5} = 1 + \sqrt{6 - x}.$$
Eleviamo entrambi i membri al quadrato:
$$2x + 5 = 1 + (6 - x) + 2\sqrt{6 - x} \quad \rightarrow \quad 3x - 2 = 2\sqrt{6 - x}.$$
Eleviamo ancora al quadrato:
$$9x^2 + 4 - 12x = 4(6 - x) \quad \rightarrow \quad 9x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 196 \qquad x = \frac{4 \pm 14}{9} = \begin{cases} 2 \\ -\dfrac{10}{9} \end{cases}$$

Verifica

- Per $x = -\frac{10}{9}$.

  Primo membro: $\sqrt{-\frac{20}{9}+5} - \sqrt{6+\frac{10}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} - \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{5}{3} - \frac{8}{3} = -1$.

  Secondo membro: 1.
- Per $x = 2$.

  Primo membro: $\sqrt{4+5} - \sqrt{6-2} = 3 - 2 = 1$.

  Secondo membro: 1.

Concludiamo che $x = 2$ è soluzione dell'equazione data, mentre $x = \frac{10}{9}$ non è soluzione.

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali nell'incognita *x*.

376 $\sqrt{x+7} + \sqrt{x} - 7 = 0$ [9]

377 $\sqrt{128x+57} + \sqrt{64x-71} = 32$ [3]

378 $\sqrt{38x+2} = \sqrt{2x-8} + 3$ [impossibile]

379 $3 - \sqrt{8x^2-2} = \sqrt{8x^2+4}$ $\left[\pm\frac{3\sqrt{2}}{8}\right]$

380 $\sqrt{(3x+1)^2-6x} = \sqrt{1-3x} + 3x$ $\left[0; \frac{1}{4}\right]$

381 $\sqrt{3x-6} = 8 - \sqrt{5x}$ [5]

382 $\sqrt{8-x} + \sqrt{3x-3} - 5 = 0$ $\left[4; \frac{31}{4}\right]$

383 $\sqrt{5-x} + \sqrt{x} = 3$ [1; 4]

384 $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = 1$ [impossibile]

385 $\sqrt{5x-4} - \sqrt{5x-24} = 2$ [8]

386 $\dfrac{\sqrt{6x}+2}{\sqrt{x}-2} = 4$ [6]

387 $\frac{1}{3}\sqrt{x+3} = \frac{7}{3} - \sqrt{\frac{x}{9}+\frac{8}{3}}$ [1]

388 $\sqrt{3(x+1)+3x-2} + \sqrt{3(x+1)+3x-5} = \sqrt{5}$ $\left[\frac{11}{30}\right]$

389 $\sqrt{(2+2x)(2-2x)-x^2} = 2\sqrt{2x+1} - \sqrt{5}x$ $\left[0; \pm\frac{2}{5}\right]$

390 $\sqrt{5x-a^2} - \sqrt{5x-6a^2} = a$ $\quad(a > 0)$ $[2a^2]$

391 $\sqrt{6x+96a^2} = 3a + \sqrt{5x-3a^2}$ $\quad(a \geq 0)$ $[a \neq 0, \nexists\, x \in \mathbb{R}; a = 0, x = 0]$

392 $\sqrt{x\left(\frac{8}{3}+x\right)+a(3a-2x)} = (x-a) + \sqrt{2x+\frac{2}{3}(x+3a^2)}$ $\quad(a \geq 0)$ $[a]$

L'equazione contiene tre o quattro radici quadrate

ESERCIZIO GUIDA

393 Risolviamo la seguente equazione:

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-4}.$$

Eleviamo i due membri al quadrato:

$$(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1})^2=(\sqrt{3x-4})^2 \to 2x-3+2\sqrt{2x-3}\sqrt{x-1}+x-1=3x-4;$$

$$\cancel{3x}-\cancel{4}+2\sqrt{(2x-3)(x-1)}=\cancel{3x}-\cancel{4} \to 2\sqrt{(2x-3)(x-1)}=0 \to \sqrt{(2x-3)(x-1)}=0.$$

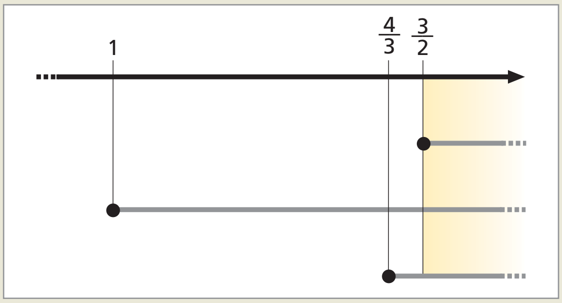
Poiché una radice è nulla se è nullo il suo radicando, risolviamo l'equazione:

$$(2x-3)(x-1)=0 \begin{cases} 2x-3=0 \to x=\dfrac{3}{2} \\ x-1=0 \to x=1 \end{cases}$$

Controllo mediante condizioni

Per l'esistenza dei radicali è necessario porre:

$$\begin{cases} 2x-3\geq 0 \\ x-1\geq 0 \\ 3x-4\geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} x\geq \dfrac{3}{2} \\ x\geq 1 \\ x\geq \dfrac{4}{3} \end{cases}$$



ossia $x\geq\dfrac{3}{2}$, quindi $\dfrac{3}{2}$ è soluzione dell'equazione, mentre 1 non lo è.

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali.

394 $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+2}=\sqrt{9x-1}$ $\left[\dfrac{3}{4}\right]$

395 $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}=2\sqrt{\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}}$ $\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

396 $\sqrt{8x+2}+\sqrt{\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}}=\sqrt{4x+\dfrac{3}{2}}+\sqrt{\dfrac{9}{2}x}$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

397 $\sqrt{-x-7}-\sqrt{6x+2}=\sqrt{3x-1}+\sqrt{2x-4}$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

398 $\sqrt{8x+7}+\sqrt{-1-3x}-\sqrt{x+2}-\sqrt{4(x+1)}=0$ $\left[-\dfrac{3}{4};-\dfrac{5}{7}\right]$

399 $\sqrt{x-\dfrac{1}{4}}+\sqrt{4x+\dfrac{5}{3}}=\sqrt{1+5\left(x+\dfrac{1}{12}\right)}$ $\left[\dfrac{1}{4}\right]$

400 $\sqrt{\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3}}+\sqrt{6x+3}=\sqrt{\dfrac{10}{3}x+2}+\sqrt{3x+\dfrac{10}{3}}$ $\left[-\dfrac{3}{8};\dfrac{1}{9}\right]$

RIEPILOGO LE EQUAZIONI IRRAZIONALI

401 CACCIA ALL'ERRORE Cerca gli errori motivando le risposte.

a) $\sqrt[3]{x-1}=x$ è equivalente a $x-1=x^3$ solo per $x \geq 1$.
b) $\sqrt{-x}=4$ è impossibile perché il radicando è un numero negativo.
c) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}=0 \ \rightarrow\ \sqrt{3x-2}=-\sqrt{x} \ \rightarrow\ (\sqrt{3x-2})^2=(-\sqrt{x})^2 \ \rightarrow\ 3x-2=x \ \rightarrow\ x=1$.
d) $\sqrt{2x}=-\sqrt{2x}$ è un'equazione impossibile perché un numero non è mai uguale al suo opposto.

402 COMPLETA la seguente tabella.

EQUAZIONE	SOLUZIONE	ACCETTABILE/NON ACCETTABILE
$\sqrt{x^2-5}=x-1$	$x=3$	
$\sqrt{1+x^3}=x-5$	$x=2$	
$\sqrt{1-x}=3-x$	$x=5$	

TEST

403 Qual è l'intervallo reale in cui l'equazione $\sqrt{1-x}=-x$ ammette soluzioni?

A $[-1; 0]$
B $]-\infty; 0]$
C $[0; +\infty[$
D $\mathbb{R}$
E $\varnothing$

404 Sull'equazione $\sqrt{x}+2=0$ puoi affermare che:

A ammette due soluzioni reali e distinte.
B ammette una soluzione reale.
C ammette due soluzioni reali e coincidenti.
D non ammette soluzioni reali.
E ammette soluzioni solo se $x>-2$.

405 Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $\sqrt{x-k+1}=3k$ ammette soluzioni reali?

A $k \leq 1$
B $k \geq 0$
C $k>1$
D $k>\frac{1}{3}$
E $\forall\, k \in \mathbb{R}$

406 Puoi ricondurre ogni equazione irrazionale a una equazione razionale, ma tale equazione non sempre è equivalente a quella data. Perché?

407 L'equazione $\sqrt[5]{x^2}=-2$ è impossibile, anche se la radice è di indice dispari. Perché?

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali nell'incognita x.

408 $\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x+1}=0$ [impossibile]

409 $\sqrt{x+18}=x-2$ [7]

410 $\sqrt[3]{7x+1}-1=x$ [0; 1; −4]

411 $\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x+6}=0$ [−7]

412 $\sqrt{x+1}=\sqrt[6]{1-x^2}$ [0; −1]

413 $\sqrt{x+7}+\sqrt{6x+5}=0$ [impossibile]

414 $\sqrt[6]{x^2(x-1)+3(x+2)}=\sqrt[3]{2x+1}$ [1; 5]

415 $\sqrt{12x}-\sqrt{5x^2-2}=\sqrt{5x^2-2}$ [1]

416 $\sqrt[4]{(1+x)(1-x)-2x}=\sqrt{1+x}$ [0]

417 $\sqrt{(x-2)(2x+3)+4x^2+65}=2x+5$ $\left[2; \frac{17}{2}\right]$

418 $\sqrt{25x^2+x-3}=5x+\sqrt{x-3}$ $[3]$

419 $3x+2=\sqrt[5]{x^2(x^3+4)-5x+1}+2(x+1)$ $\left[1;\ \frac{1}{4}\right]$

420 $\frac{1}{2}\sqrt{x(4x-21)+62}=\frac{1}{2}x-4$ [impossibile]

421 $\sqrt{3x^2+3(5x+12)}=7x+6$ $[0]$

422 $2-2x=\sqrt[3]{7(3x^2+1)+3x^2-24x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

423 $\frac{13}{4}=\frac{1}{4}x^3+\sqrt{\frac{1}{16}(x^6+1)-\frac{27}{16}x^3+10}$ $[-2]$

424 $\sqrt[4]{9x^2-40x+20}=\sqrt{3x-6}$ [impossibile]

425 $\sqrt[3]{(2x-5)^2+(3-x)(3+x)}=\sqrt[3]{(4-x)(4+x)-2x}$ $\left[\frac{3}{2};\ 3\right]$

426 $\sqrt{x^6+x^5-x^4+x^3}=\sqrt{(x^3-x^2)(x^3+x^2)+2x^3}$ $[0;\ 1]$

427 $\frac{1}{8}(x+3)=\sqrt{\frac{1}{32}(3x+4)+\frac{26}{64}x^2}$ $\left[\pm\frac{1}{5}\right]$

428 $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}x-3\right)^3-\frac{1}{8}x^3}=\sqrt[3]{-\frac{3}{2}x\left(\frac{3}{2}x+9\right)}$ $[1]$

BRAVI SI DIVENTA ► E44

429 $x(x+2)-\frac{13}{4}=\sqrt{x^2+x+3}-\left(\frac{3}{2}+x\right)\left(\frac{3}{2}-x\right)$

430 $5x=\sqrt[4]{(25x^2+1)(25x^2-1)+16x^4}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

431 $\sqrt[5]{x(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})-(x-2)^3}=2$ $[-1;\ 4]$

432 $\sqrt{8x^4-29x^2+13}=2(x^2+1)$ $\left[\pm\frac{1}{2};\ \pm 3\right]$

433 $\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}=\frac{10}{3}$ $\left[-\frac{17}{9};\ 7\right]$

434 $3x-10\sqrt{x}-8=0$ $[16]$

435 $\sqrt[3]{6x+\sqrt{3+x}}=2$ $[1]$

436 $\sqrt{5+x}=\frac{\sqrt{5+x}}{5-x}$ $[-5;\ 4]$

437 $\frac{\sqrt{x}+3-3(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}+3}+\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-3}=\frac{2(2x+3)}{x-9}$ $[4]$

438 $\sqrt{x^4+2(x+18)}=\frac{1}{6}(x+36)$ $\left[0;\ -\frac{1}{6};\ +\frac{1}{6}\right]$

439 $\frac{16x^2+2}{\sqrt{(4x+2)^2-16x}}=\frac{1}{2}+\sqrt{16x^2+4}$ [impossibile]

440 $\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{4\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}=\frac{3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}$ [impossibile]

441 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3x-1}} - \sqrt{3x+1} = 0$ $\left[\dfrac{2}{3}\right]$

442 $\dfrac{2x}{\sqrt{x(3x+2)}} - 3x - \sqrt{3x^2+2x} = 0$ $[-1]$

443 $\dfrac{3}{\sqrt{16x^2+5}} + 4x = \sqrt{16x^2+5}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

444 $\dfrac{5+4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{2}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{3x+17\sqrt{x}+3}{x-1}$ $[0; 36]$

445 $\dfrac{5x}{\sqrt{6x^2-5x}} - 4x + \sqrt{6x^2-5x} = 0$ $\left[\dfrac{4}{3}\right]$

446 $2\sqrt{(x+1)^2-5-2x} + 2x + \dfrac{2}{\sqrt{x^2-4}} = 0$ $\left[-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right]$

447 $\sqrt{52x^2-3} + x = \dfrac{52x^2-3+7x}{\sqrt{52x^2-3}}$ $[\pm 1]$

448 $\dfrac{4}{\sqrt{25x^2+4}} - \sqrt{25x^2+4} = 3x$ $\left[0; -\dfrac{3}{10}\right]$

449 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\dfrac{2+x}{3}} = 1$ $[1]$

450 $\dfrac{\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{x}} = 1$ $\left[\dfrac{25}{4}\right]$

451 $\dfrac{\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{6+\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}$ $[4]$

452 $\sqrt{x+\sqrt{2}} = \dfrac{14-x^2}{\sqrt{x-\sqrt{2}}}$ $[\sqrt{11}]$

453 $\sqrt[3]{7x-6} = x$ $[-3; 1; 2]$

454 $\sqrt{x^2-2x} + \sqrt{x^3-4x} = 0$ $[0; 2]$

455 $\sqrt{(x-3)^2-x^2+4} = 2 + \sqrt{5-6x}$ $\left[\dfrac{2}{3}\right]$

456 $\sqrt{10x+4x^2-2} - 2x = 1 + \sqrt{6x-3}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

457 $1 + \sqrt{11x^2\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right) + 3\left(\dfrac{x^4}{4}-1\right)} = \dfrac{5}{2}x^2$ [impossibile]

458 $\dfrac{4x-1}{\sqrt{8x^2-1}} + 2\sqrt{2}x = \sqrt{8x^2-1}$ [impossibile]

459 $\dfrac{9x+15}{\sqrt{27x^2+5}} = 3\sqrt{27}x + 3\sqrt{27x^2+5}$ $\left[0; -\dfrac{7}{9}\right]$

460 $\dfrac{4}{\sqrt{100x^2+2}} - 10x = \sqrt{100x^2+2}$ $\left[\dfrac{1}{\sqrt{150}}\right]$

461 $2x + 6 = \sqrt{9x + (6-x)(6+x) - 2(x^2+4)} + x + 1$ $\left[\dfrac{3}{4}; -1\right]$

462 $\sqrt{(x+3)\sqrt{2(x+3)\sqrt{x+3}}} = 4$ $[1]$

463 $\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{6}\right)=\sqrt{x^4+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{144}}-x^2$ $[0;\ -1;\ +1]$

464 $\sqrt{(x-3)(x+3)-5(x-2)+1}=\sqrt[4]{(x^2-5x)^2+(3x-19)(x-1)}$ $[-5]$

465 $4(x+2)-x^2=\sqrt{(x^2-6x)(x^2+6x)+118x+37}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

466 $\sqrt{\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}}+\sqrt{x-1}=\sqrt{\frac{1}{2}x+1}+\sqrt{\frac{5}{4}x-\frac{3}{2}}$ $[2;\ 4]$

467 $\sqrt{(x-3a)^2-x^2+4a}=2a+\sqrt{5a^2-6ax}$ $(a>0)$ $\left[\frac{5a^2-1}{6a}\right]$

468 $2x-12=\sqrt{(10x^2+16x^3)(x+2)-6x+144}$ [impossibile]

469 $\frac{3\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{x}-1}=\frac{16x}{(4+\sqrt{x})(3\sqrt{x}-1)}$ $[0;\ 1]$

470 $\sqrt{2+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=0$ $[3]$

471 $\sqrt{2+x}=\sqrt{18-x}-\sqrt{2x}$ $[2]$

472 $\frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=4$ $[3]$

473 $2x^2=+\frac{3}{2}x+\sqrt{(2x^2-2x)(2x^2+2x)+\frac{x^2}{4}}$ $[0;\ 1]$

474 $\frac{3\sqrt{x}}{7+\sqrt{x}}+\frac{2}{2\sqrt{x}-3}=\frac{13x}{(7+\sqrt{x})(2\sqrt{x}-3)}$ $[1]$

475 $\sqrt{4x\left(\frac{5}{2}+x\right)+2(2-a)}-2x=1+\sqrt{6x+3-2a}$ $(a>0)$ $\left[\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}\right]$

476 $\frac{14x}{\sqrt{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}}+3x=5x\sqrt{x^2-2}$ $[0;\ -\sqrt{6};\ \sqrt{6}]$

Le equazioni irrazionali e i problemi

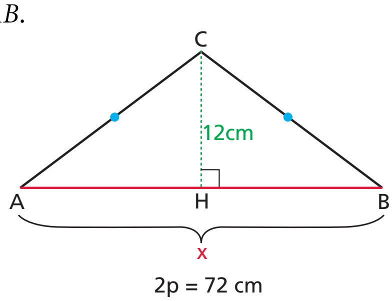
477 Se si divide la somma tra un numero e 4 per la somma tra la radice quadrata del numero e 2, si ottiene 2. Trova il numero. $[0;\ 4]$

478 La radice quadrata di un numero diminuito di 1 è uguale ai $\frac{2}{5}$ del numero stesso. Qual è il numero? $\left[\frac{5}{4};\ 5\right]$

479 Se sommi al doppio di un numero la radice quadrata del suo doppio aumentato di 1, ottieni 5. Quanto vale il numero? $\left[\frac{3}{2}\right]$

480 La radice cubica di un numero aumentato di 3 è uguale a 2. Trova il numero. $[5]$

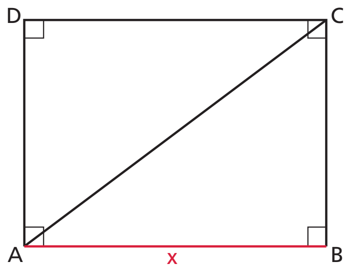
481 Utilizza i dati della figura per trovare la lunghezza di *AB*.



$[32\ \text{cm}]$

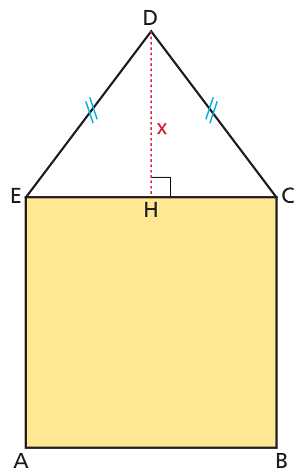
482 Determina la lunghezza di AB sapendo che BC misura 6 cm e si ha:

$2AC + AB = 28$ cm.



[8 cm]

483 Il quadrato $ABCE$ ha area di 324 cm^2. Sapendo che il perimetro di $ABCDE$ è di 84 cm, trova la lunghezza di DH e l'area del triangolo CDE.



[12 cm; 108 cm^2]

484 Quale valore reale di y verifica l'equazione irrazionale $\dfrac{y+\sqrt{2y+15}}{y+3\sqrt{2y+15}} = \dfrac{1}{2}$? [5]

485 Sottraendo 1 al triplo di un numero ed elevando alla $\dfrac{2}{3}$ tale differenza, ottieni il numero di partenza aumentato di 1. Determina i due valori reali che può assumere il numero. [0; 3]

486 Considera l'equazione irrazionale

$$\sqrt{2x-3} = 4 - a^2$$

nell'incognita x.

a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ *non* ammette soluzioni reali?

b) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la soluzione dell'equazione è 2?

c) Esiste un valore di $a \in \mathbb{R}$ tale che la soluzione dell'equazione sia 14?

[a) $a < -2 \vee a > 2$; b) $a = \pm\sqrt{3}$; c) no]

487 Disegna una semicirconferenza di diametro AB che misura $2r$ e la sua tangente in A. Da un punto M della semicirconferenza conduci la retta BM, che incontra la tangente in C. Indica con H il piede della perpendicolare condotta per M ad AB. Determina M in modo che si abbia $\overline{BM} = \sqrt{2} \cdot \overline{AH}$. (Suggerimento: poni $\overline{AH} = x$.) [$x = r$]

3. I sistemi di secondo grado

Teoria a pag. 969

RIFLETTI SULLA TEORIA

488 **TEST** Fra i seguenti sistemi, solamente *uno* è di secondo grado. Quale?

A $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$ B $\begin{cases} x - xy = 2 \\ y + xy = 3x \end{cases}$ C $\begin{cases} x^2 + 2x = 0 \\ y^2 + 2 = x \end{cases}$ D $\begin{cases} x^2 + 3y = 2x \\ x + 3y = 5x^2 \end{cases}$ E $\begin{cases} x + xy = 3 \\ y - x = 0 \end{cases}$

489 **TEST** Quale delle seguenti affermazioni è valida per un sistema di equazioni di secondo grado?

A Ammette quattro soluzioni.

B Può essere formato da due o più equazioni di secondo grado.

C Può essere formato da due equazioni di primo grado.

D Può essere indeterminato.

E Nessuna.

ESERCIZI

Scrivi di fianco a ogni sistema il suo grado.

490 ☐ $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 8x - 3y = 9 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} xy = 4 \\ 7xy = 9 \end{cases}$

491 ☐ $\begin{cases} xy = 4 \\ 7x + y = 9 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ xy = 6 \end{cases}$

492 ☐ $\begin{cases} 4xy - 2x^2 + 3y^2 = 0 \\ 6x^2 + 9y^2 = 1 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x^2y - 3xy^2 + x^2 - 9 = 0 \\ xy^2 + 2y^2 = 0 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x^3 + xy = 12 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

I sistemi di due equazioni in due incognite

I sistemi a coefficienti numerici

Nel sito: ▶ 8 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

493 Risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 24x^2 - y^2 - 2x = 1 \end{cases}$$

Ricaviamo y dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda:

$$\begin{cases} y = 2 - 3x \\ 24x^2 - (2 - 3x)^2 - 2x = 1 \end{cases}$$

Svolgiamo i calcoli nella seconda equazione:

$$24x^2 - 4 - 9x^2 + 12x - 2x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 15x^2 + 10x - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 \qquad x = \frac{-1 \pm 2}{3} = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \\ -1 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono allora quelle dei seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = 2 - 3x \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 - 3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = 2 - 3\left(\dfrac{1}{3}\right) = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 - 3(-1) = 5 \end{cases}$$

Il sistema dato ha le due soluzioni:

$$\left(\frac{1}{3}; 1\right) \text{ e } (-1; 5).$$

Risolvi i seguenti sistemi di secondo grado.

494 $\begin{cases} y = 3 \\ x^2 + 3 = 19 \end{cases}$ $[(4; 3), (-4; 3)]$

495 $\begin{cases} x = 2 \\ y^2 - x = 8 \end{cases}$ $[(2; \sqrt{10}), (2; -\sqrt{10})]$

496 $\begin{cases} x^2 + y = -8 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$ $[(1; -9)]$

497 $\begin{cases} 2y + 3x = 6 \\ xy - 3y = 4 \end{cases}$ [impossibile]

498 $\begin{cases} 3x - y^2 = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ $[(1; 1), (6; -4)]$

499 $\begin{cases} y^2 - 2x^2 + xy - 4x - 5y + 6 = 0 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ $\left[(-1; 2), \left(\frac{1}{2}; 1\right)\right]$

500 $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ \frac{4}{3} + 2y^2 - 7y + 6 = 2x + \frac{1}{3} - xy + 1 \end{cases}$ [indeterminato]

501 $\begin{cases} 3x + 3y - 2 = 2(x + 2y) - 3 \\ x(y - 2) = y \end{cases}$ $[(1 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}), (1 - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})]$

502 $\begin{cases} x - y = 2 \\ 4(x + 2)^2 + 3\left(y - \frac{16}{3}x^2\right) = 0 \end{cases}$ $\left[(2; 0), \left(-\frac{5}{12}; -\frac{29}{12}\right)\right]$

503 $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 19 - xy = (x + y)^2 \end{cases}$ $[(-1; -3), (1; 3)]$

504 $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 - xy - 4x = 42 \end{cases}$ $[(7; -3), (-3; 7)]$

505 $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x^2 - y^2 + xy + 4 = 0 \end{cases}$ $[(0; 2), (2; 4)]$

506 $\begin{cases} \frac{x}{6} - \frac{y}{3} = \frac{1}{2} \\ y^2 - xy = \frac{5}{4} \end{cases}$ $\left[\left(2; -\frac{1}{2}\right), \left(-2; -\frac{5}{2}\right)\right]$

BRAVI SI DIVENTA ► E45

507 $\begin{cases} 2(y+1)+y(x+1)=2y-1+x(y-2) \\ 2(x+1)^3+\dfrac{1}{2}x(1-2x)(1+2x)=\dfrac{y^2-5-10x}{4} \end{cases}$

508 $\begin{cases} (x-2)^2-4xy+11=0 \\ \dfrac{x-2}{3}+\dfrac{y-1}{2}=y \end{cases}$ $\left[(5;1), \left(-\dfrac{9}{5}; -\dfrac{53}{15}\right)\right]$

509 $\begin{cases} (4-x)(4+x)+y^2-3=4(y+3) \\ 3x=\dfrac{1}{3}(5+y) \end{cases}$ $\left[(1;4), \left(\dfrac{23}{40}; \dfrac{7}{40}\right)\right]$

510 $\begin{cases} y(x-2)-2x(y+x)+10=0 \\ (x-3)^2-y=x^2+4(y-4) \end{cases}$ $\left[(0;5), \left(-\dfrac{13}{4}; \dfrac{89}{10}\right)\right]$

511 $\begin{cases} x^2-3xy=3x \\ \dfrac{y}{4}-\dfrac{x}{2}=1 \end{cases}$ $[(-3;-2), (0;4)]$

512 $\begin{cases} 2y(x-6)+3(y-2)=y \\ (y-1)(y+2)+2+x=y(y+3) \end{cases}$ $\left[(6;3), \left(-1; -\dfrac{1}{2}\right)\right]$

513 $\begin{cases} 5y+3x-6=x+4y-8 \\ (x-y)^2+3xy-x+y=2(y-x) \end{cases}$ $[(-1;0), (-2;2)]$

514 $\begin{cases} x^2+(y+4)^2-100=-16+8x \\ x-y=10 \end{cases}$ $[(12;2), (-2;-12)]$

515 $\begin{cases} 3x-3y=12 \\ 2x(x+4y)-12(1+3y)-x+y=-12y^2-8x \end{cases}$ [impossibile]

516 $\begin{cases} y^2-18=\dfrac{18-3xy}{2} \\ 3x-6=2y \end{cases}$ $\left[\left(-1; -\dfrac{9}{2}\right), (4;3)\right]$

517 $\begin{cases} xy=y+2x-2(x-\sqrt{3})-(2+x) \\ y=x-2\sqrt{3} \end{cases}$ $[(\sqrt{3}+1; 1-\sqrt{3}), (\sqrt{3}-1; -1-\sqrt{3})]$

518 $\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+6=0 \\ (y-1)^2=y^2+3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)-3y \end{cases}$ $\left[(1;3), \left(\dfrac{3}{5}; \dfrac{9}{5}\right)\right]$

519 $\begin{cases} (x-3)^2-2y-\sqrt{3}x+\sqrt{6}=-3(2x-3)+y^2-y(y+1) \\ y-\sqrt{2}x=0 \end{cases}$ $[(\sqrt{2};2), (\sqrt{3};\sqrt{6})]$

520 $\begin{cases} 5xy+2\sqrt{3}x=-25x-5(2\sqrt{3}-x\sqrt{3}) \\ y-\sqrt{3}=x \end{cases}$ $\left[(-5; -5+\sqrt{3}), \left(-\dfrac{2}{5}\sqrt{3}; \dfrac{3\sqrt{3}}{5}\right)\right]$

I sistemi a coefficienti letterali

Risolvi i seguenti sistemi nelle incognite x e y. (Qui, come nei paragrafi successivi, nei risultati non è riportata l'eventuale discussione necessaria.)

521 $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - xy + 7ax - 4ay + 5a^2 = 0 \\ 5x - 2y = a \end{cases}$ $[(a; 2a), (-a; -3a)]$

522 $\begin{cases} x^2 - b = \dfrac{(y-1)(y+1)}{4} \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ $[(b; 2b-1)]$

523 $\begin{cases} y - x = 2a \\ x(x+y) - 2(1-a) = 0 \end{cases}$ $[(-1; 2a-1), (-a+1; a+1)]$

524 $\begin{cases} x^2 - 2by + x(b+2) = -2b \\ y - x - 2 = 0 \end{cases}$ $[(b; b+2), (-2; 0)]$

525 $\begin{cases} (x+y)^2 - 6m(m+1) = m(m-6) + 3xy \\ m = y - 2x \end{cases}$ $[(-2m; -3m), (m; 3m)]$

526 $\begin{cases} axy - 2y = 0 \\ y - x = -2 \end{cases}$ $\left[(2; 0), \left(\dfrac{2}{a}; \dfrac{2-2a}{a}\right)\right]$

527 $\begin{cases} 2x - my = 0 \\ (m+y)^2 = 2(x+my) - xy + m(m+2y) + y^2 \end{cases}$ $[(0; 0), (3m; 6)]$

528 $\begin{cases} x + y = 4(1+a) \\ (x-y)(x+y) + 16a - 8a^2 = 8 + 32a \end{cases}$ $[(3a+3; a+1)]$

529 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2a} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{2y}{a} = 0 \\ x + y = a \end{cases}$ $[(a; 0), (-4; 4+a)]$

I sistemi con equazioni fratte

ESERCIZIO GUIDA

530 Risolviamo il seguente sistema: $\begin{cases} \dfrac{x}{2-y} = \dfrac{2}{2y-1} \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$

C.E.: $2 - y \neq 0 \quad \wedge \quad 2y - 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ C.E.: $y \neq 2 \quad \wedge \quad y \neq \dfrac{1}{2}$.

Eliminiamo i denominatori nella prima equazione, moltiplicando per $(2-y)(2y-1)$:

$$x(2y-1) = 2(2-y) \quad \rightarrow \quad 2xy - x = 4 - 2y.$$

Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 2xy - x + 2y - 4 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo y dalla seconda equazione e sostituiamola nella prima:

$$\begin{cases} 2xy - x + 2y - 4 = 0 \\ y = -2x + 2 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 2x(-2x + 2) - x + 2(-2x + 2) - 4 = 0 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

Risolviamo la prima equazione:

$$-4x^2 + 4x - x - 4x + 4 - 4 = 0 \quad \to \quad -4x^2 - x = 0 \quad \to \quad 4x^2 + x = 0 \quad \to$$

$$\to \quad x(4x + 1) = 0 \quad \to \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{1}{4}.$$

Il sistema dato ha come soluzioni quelle dei due sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2x + 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \quad \text{non accettabile} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} \\ y = -2 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right) + 2 = \dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Il sistema ha come unica soluzione la coppia $\left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{2}\right)$.

Risolvi i seguenti sistemi.

531 $\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{6}{y} = 4 \\ \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5}x - \dfrac{2}{10}y = \dfrac{3}{5} \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right), (2; 3)\right]$

532 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{6}{y} + 1 \\ 3 = x - y \end{cases}$ $[(-1; -4)]$

533 $\begin{cases} 3x + x^2 + 2 + y^2 = (x + 2)^2 + y(y - 1) \\ \dfrac{y}{x + 1} = \dfrac{x - 2}{1 - x} - \dfrac{4}{x - 1} \end{cases}$ $[(-2; 0), (0; 2)]$

534 $\begin{cases} \dfrac{1}{2} - y = 3x \\ \dfrac{x}{2x - 2} - \dfrac{3x + 1}{x} = \dfrac{xy}{x^2 - x} \end{cases}$ $\left[\left(-2; \frac{13}{2}\right), \left(-1; \frac{7}{2}\right)\right]$

535 $\begin{cases} 4x - y = 6 \\ \dfrac{2}{x + y} + \dfrac{1}{x - y} = \dfrac{x^2}{x^2 - y^2} \end{cases}$ $[(-3; -18)]$

536 $\begin{cases} \dfrac{y+1}{x^2}+\dfrac{1}{x}=3 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{xy} \end{cases}$ $\left[\left(-\dfrac{2}{3};1\right),(2;9)\right]$

537 $\begin{cases} (x-2)(x+2)-y^2-x(y-1)=(3-y)(3+y)-3 \\ \dfrac{y}{2-3x}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $[(2;-2),(-2;4)]$

538 $\begin{cases} \dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{2x+1}=\dfrac{4x^2+5}{y(2x+1)} \\ y=\dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{2}{3}y \end{cases}$ $[(0;-1)]$

539 $\begin{cases} y-3=-x \\ \dfrac{2x}{x+3}-\dfrac{6}{x^2+x-6}=\dfrac{y}{2-x} \end{cases}$ $[(1;2),(3;0)]$

540 $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y(x+3)}-\dfrac{11(x+1)}{6y}=-\dfrac{3x-1}{2(x+3)} \\ 3x+12=2x+y+5 \end{cases}$ $[(-6;1),(2;9)]$

541 $\begin{cases} 3+2y=4(x-2y) \\ \dfrac{x+1}{x-1}-2=2-\dfrac{4y}{2y+1} \end{cases}$ $\left[\left(-2;-\dfrac{11}{10}\right),\left(2;\dfrac{1}{2}\right)\right]$

542 $\begin{cases} \dfrac{2+y}{y}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{8}{y(x-1)} \\ (x+1)^2-y(1-x)=x(x+2+y)-x \end{cases}$ $[(3;4),(-4;-3)]$

543 $\begin{cases} x^2-4+y(x-3)=y(x-2)+x(x-1)-2 \\ \dfrac{27}{x+3}+\dfrac{8}{y}=\dfrac{10x^2+5x}{y(x+3)}-\dfrac{5}{y} \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right),(3;1)\right]$

L'intersezione di una parabola con una retta generica

Nei seguenti esercizi sono assegnate le equazioni di una retta e di una parabola. Determina per ciascuna coppia i punti di intersezione delle due curve e disegnane il grafico.

544 $y=x-2,\qquad y=x^2-2x+1.$ [nessuna intersezione]

545 $y=-2x+6,\qquad y=-2x^2+2x+4.$ $[(1;4)]$

546 $y=5,\qquad y=x^2-2x-3.$ $[(-2;5);(4;5)]$

547 $y=2x-6,\qquad y=x^2-9.$ $[(3;0);(-1;-8)]$

548 $y=-\dfrac{9}{10}x+3,\qquad y=x^2-4x+3.$ $\left[\left(\dfrac{31}{10};\dfrac{21}{100}\right);(0;3)\right]$

Le rette secanti, tangenti ed esterne a una parabola

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

ESERCIZIO GUIDA

549 Stabiliamo se la retta di equazione $y = 6x - 7$ è secante, tangente o esterna alla parabola di equazione:

$y = x^2 + 2x - 3$.

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = 6x - 7 \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases}$$

Per confronto, otteniamo:

$$x^2 + 2x - 3 = 6x - 7$$

$$x^2 + 2x - 3 - 6x + 7 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 - 4 = 0$$

e quindi l'unica soluzione è:

$x = 2$.

Poiché $\Delta = 0$, la retta è tangente alla parabola.

Il punto di tangenza ha ascissa $x = 2$ e la rispettiva ordinata è $y = 6 \cdot 2 - 7 = 5$.

Il punto di tangenza è $T(2; 5)$.

Date le seguenti equazioni di una retta r e di una parabola p, stabilisci se r è tangente, secante o esterna a p. Verifica il risultato disegnando il grafico.

550 $r: y = -2x - 1$, $\quad p: y = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

551 $r: y = -x$, $\quad p: y = -x^2 + x$.

552 $r: y = 4x + 5$, $\quad p: y = 2x^2 - 3x - 9$.

553 $r: y = 3x - 5$, $\quad p: y = \frac{1}{3}x^2 - x + \frac{1}{9}$.

554 $r: y = 6x$, $\quad p: y = x^2 + 3x - 4$.

555 Data la parabola di equazione $y = x^2 + 6x$, determina le equazioni delle rette passanti per $P(-5; -6)$ e tangenti alla parabola. $[y = -2x - 16; y = -6x - 36]$

556 Scrivi le equazioni delle rette passanti per $P(2; 8)$ e tangenti alla parabola di equazione $y = -2x^2 + 16x - 24$. Determina inoltre le coordinate dei punti di tangenza. $[y = 16x - 24; y = 8; A(4; 8); B(0; -24)]$

557 Verifica che la retta tangente alla parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ nell'origine è la bisettrice del secondo e del quarto quadrante.

558 Verifica che la parabola $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8$ è tangente all'asse x e scrivi le coordinate del punto di tangenza. $[T(-4; 0)]$

559 Calcola l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione $y = -2x^2 + x + 1$ nel suo punto di ascissa nulla e verifica che la retta è parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante. $[y = x + 1]$

560 Data la parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 6$, determina l'equazione della retta tangente nel punto di intersezione fra la parabola e l'asse y. $[y = -4x - 6]$

561 Data la parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 4$, determina l'equazione della retta tangente nel suo punto di ascissa 5. $[y = 5x - 21]$

562 Data la parabola di equazione $y = \frac{3}{2}x^2 - x + 5$, determina l'equazione della retta tangente nel punto $P(2; 9)$. $[y = 5x - 1]$

I sistemi di tre equazioni in tre incognite

ESERCIZIO GUIDA

563 Risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \\ x^2 + xy - z = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo y nella seconda equazione e sostituiamo nelle altre due:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = x - 1 \\ x^2 + xy - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + (x - 1) + z = 0 \\ y = x - 1 \\ x^2 + x(x - 1) - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 1 + z = 0 \\ y = x - 1 \\ 2x^2 - x - z = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo z nella prima equazione e sostituiamo nella terza:

$$\begin{cases} z = 1 - 2x \\ y = x - 1 \\ 2x^2 - x - (1 - 2x) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 1 - 2x \\ y = x - 1 \\ 2x^2 - x - 1 + 2x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 1 - 2x \\ y = x - 1 \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{cases}$$

Risolviamo la terza equazione, che è di secondo grado in x:

$$2x^2 + x - 1 = 0 \qquad \Delta = 9 \qquad x = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases} \qquad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -1.$$

Le soluzioni del sistema sono date dall'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} z = 1 - 2x \\ y = x - 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} z = 1 - 2x \\ y = x - 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\ y = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} z = 1 - 2(-1) = 3 \\ y = -1 - 1 = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono le due terne di valori $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$ e $(-1; -2; 3)$.

Risolvi i seguenti sistemi di tre equazioni in tre incognite.

564 $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 2x-y=5 \\ 2x^2+y^2+z^2=25 \end{cases}$ $[(2;-1;4),(2;-1;-4)]$

565 $\begin{cases} 2x+z-3=0 \\ x+y=1 \\ x^2+y^2+2xy=4 \end{cases}$ [impossibile]

566 $\begin{cases} x+y=1 \\ x-z+2y=2 \\ y^2-z^2=0 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)\right]$

567 $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y+z=0 \\ x^2+xy-z=0 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right),(-1;-2;3)\right]$

568 $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x^2+y^2=z^2 \\ x-y=0 \end{cases}$ $[(0;0;0)]$

569 $\begin{cases} x+y=\frac{1}{2} \\ x-y=\frac{3}{2} \\ x^2+z^2=10 \end{cases}$ $\left[\left(1;-\frac{1}{2};3\right),\left(1;-\frac{1}{2};-3\right)\right]$

570 $\begin{cases} (x+y)^2=1 \\ x+y-z=0 \\ 2x+z=2 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right),\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2};-1\right)\right]$

571 $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ x+3y-3z=5 \\ x^2+z^2=2xz-1 \end{cases}$ [impossibile]

572 $\begin{cases} x+3y=5 \\ y+z=3 \\ x^2+\frac{1}{2}y=2z \end{cases}$ $\left[(-1;2;1),\left(\frac{11}{6};\frac{19}{18};\frac{35}{18}\right)\right]$

573 $\begin{cases} x-z+2=0 \\ z^2-3xz+8=0 \\ y-x=1 \end{cases}$ $[(2;3;4),(-3;-2;-1)]$

4. I sistemi simmetrici e i sistemi omogenei

Teoria a pag. 972

RIFLETTI SULLA TEORIA

TEST

574 Uno solo tra i seguenti sistemi *non* è simmetrico. Quale?

A $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ B $\begin{cases} 2x+3=2-2y \\ 3x+3y=0 \end{cases}$ C $\begin{cases} x-1=y^2 \\ y+1=x^2 \end{cases}$ D $\begin{cases} x^2-1=2-y^2 \\ x-1=2-y \end{cases}$ E $\begin{cases} xy=1 \\ x+y=1 \end{cases}$

575 Per risolvere i sistemi simmetrici, è opportuno ricorrere all'uso di particolari identità. Una sola fra le seguenti è *corretta*. Quale?

A $x^2+y^2=(x+y)^2$

B $x^2-y^2=(x-y)^2$

C $x^2+y^2=(x+y)^2+2xy$

D $x^2-y^2=(x-y)^2+2xy$

E $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

ESERCIZI Nel sito: ▶ 7 esercizi di recupero

I sistemi simmetrici di secondo grado

ESERCIZIO GUIDA

576 Risolviamo i seguenti sistemi:

a) $\begin{cases} xy = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 53 \\ x + y = -5 \end{cases}$

a) Utilizziamo l'incognita ausiliaria t e risolviamo l'equazione $t^2 - 6t + 8 = 0$, che è del tipo $t^2 - st + p = 0$. Le soluzioni dell'equazione formano le coppie ordinate che sono soluzioni del sistema dato:

$$t^2 - 6t + 8 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 9 - 8 = 1 \qquad t = 3 \pm 1 = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

Il sistema ha due soluzioni: (2; 4) e (4; 2).

b) Poiché $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$, sostituiamo nella prima equazione:

$$\begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 53 \\ x + y = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-5)^2 - 2xy = 53 \\ x + y = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2xy = 28 \\ x + y = -5 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} xy = -14 \\ x + y = -5 \end{cases}$$

Ci siamo riportati nel caso dell'esercizio **a**). Risolviamo allora l'equazione ausiliaria in t:

$$t^2 + 5t - 14 = 0 \qquad \Delta = 25 + 56 = 81 \qquad t = \frac{-5 \pm 9}{2} = \begin{cases} 2 \\ -7 \end{cases}$$

Il sistema ha come soluzioni $(-7; 2)$ e $(2; -7)$.

Risolvi i seguenti sistemi simmetrici di secondo grado.

577 $\begin{cases} xy = -2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $[(2; -1), (-1; 2)]$

578 $\begin{cases} xy = 48 \\ x + y = -14 \end{cases}$ $[(-6; -8), (-8; -6)]$

579 $\begin{cases} xy = \dfrac{3}{4} \\ x + y = 2 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)\right]$

580 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = -1 \end{cases}$ $[(-2; 1), (1; -2)]$

581 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5xy = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $[(0; 1), (1; 0)]$

582 $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = 65 \\ 2x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$ $\left[\left(4; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; 4\right)\right]$

583 $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - 37 = 0 \\ 2(x + y) = 5 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{2}; 3\right), \left(3; -\frac{1}{2}\right)\right]$

584 $\begin{cases} 9x^2 + 9y^2 + 20xy = 248 \\ 3x + 3y - 16 = 0 \end{cases}$ $\left[\left(6; -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}; 6\right)\right]$

585 $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = 101 \\ 2x + 2y = 11 \end{cases}$ $\left[\left(5; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; 5\right)\right]$

586 $\begin{cases} 16x^2 + 16y^2 = 1625 \\ 4x + 4y = 35 \end{cases}$ $\left[\left(10; -\frac{5}{4}\right), \left(-\frac{5}{4}; 10\right)\right]$

587 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 3\sqrt{2} \end{cases}$ $[(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}), (2\sqrt{2}; \sqrt{2})]$

588 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 39 \\ x + y = -\sqrt{3} \end{cases}$ $[(2\sqrt{3}; -3\sqrt{3}), (-3\sqrt{3}; 2\sqrt{3})]$

I sistemi simmetrici a coefficienti letterali

Risolvi i seguenti sistemi simmetrici di secondo grado nelle incognite x e y.

589 $\begin{cases} xy = -6a^2 \\ 2x + y - 25a = x - 20a \end{cases}$ $[(-a; 6a), (6a; -a)]$

590 $\begin{cases} 7a + x = 4a - y \\ 4a^2 = -xy \end{cases}$ $[(a; -4a), (-4a; a)]$

591 $\begin{cases} 2x + 2y - 3a = 1 \\ 2xy + 1 = a^2 \end{cases}$ $\left[\left(a + 1; \frac{a-1}{2}\right), \left(\frac{a-1}{2}; a + 1\right)\right]$

592 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 2b^2 - 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ $[(1 - b; 1 + b), (1 + b; 1 - b)]$

593 $\begin{cases} x + y = 3a^2 \\ xy = 2a^4 + a^2 - 1 \end{cases}$ $[(2a^2 - 1; a^2 + 1), (a^2 + 1; 2a^2 - 1)]$

594 $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = 4a + 8 + a^2 \end{cases}$ $[(a + 2; -2), (-2; a + 2)]$

595 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a^2 + 8b^2 \\ x + y = 2a \end{cases}$ $[(a + 2b; a - 2b), (a - 2b; a + 2b)]$

596 $\begin{cases} x - a + 3b = -y \\ 2xy = -8b(a + b) \end{cases}$ $[(a + b; -4b), (-4b; a + b)]$

597 $\begin{cases} ax + x + ay + y = 2a^2 + 2a \\ a^2 = xy + 1 \end{cases}$ $(a \neq -1)$ $[(a - 1; a + 1), (a + 1; a - 1)]$

598 $\begin{cases} abx + a^2 = b^2 - aby \\ xy = -1 \end{cases}$ $(a \cdot b \neq 0)$ $\left[\left(-\frac{a}{b}; \frac{b}{a}\right), \left(\frac{b}{a}; -\frac{a}{b}\right)\right]$

599 $\begin{cases} 2x - a = -2y + 3b \\ 2xy + a^2 = b^2 \end{cases}$ $\left[\left(a+b; \frac{b-a}{2}\right), \left(\frac{b-a}{2}; a+b\right)\right]$

600 $\begin{cases} xy = -(b+2) \\ x + y = \dfrac{-a^2+b+2}{a} \end{cases}$ $(a \neq 0)$ $\left[\left(-a; \frac{b+2}{a}\right), \left(\frac{b+2}{a}; -a\right)\right]$

RIEPILOGO I SISTEMI DI SECONDO GRADO

601 Osserva la seguente tabella. Utilizzando opportunamente un'equazione della prima colonna e una della seconda colonna, scrivi, e poi risolvi, un sistema simmetrico e due sistemi di secondo grado.

PRIMA EQUAZIONE	SECONDA EQUAZIONE
$x + 2y = 0$	$xy = \frac{1}{2}$
$2x + 2y = 3$	$x + 2 = 3y$
$\frac{1}{x} + y = 0$	$x^2 - 2x = 0$

602 TEST In quale punto, fra i seguenti, si incontrano la parabola e la retta di equazioni

$y = x^2 - 4x + 4$ e $y = -4x + 4$?

A $O(0; 0)$
B $A(-1; 1)$
C $B(0; 4)$
D $V(4; 0)$
E $C(-2; -2)$

Risolvi i seguenti sistemi nelle incognite x, y e z (dove compare).

603 $\begin{cases} (5x)^2 + (5y)^2 = 148 \\ x + y = -2 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{2}{5}; -\frac{12}{5}\right), \left(-\frac{12}{5}; \frac{2}{5}\right)\right]$

604 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0 \\ (y-1)^2 = y^2 + 3\left(x + \frac{1}{3}\right) - 3y \end{cases}$ $\left[(1; 3), \left(\frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right)\right]$

605 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x(x-2) + y = 3(1-x) + x^2 \end{cases}$ $[(5; -2), (-2; 5)]$

606 $\begin{cases} \dfrac{2+y}{y} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{8}{y(x-1)} \\ (x+1)^2 - y(1-x) = x(x+2+y) - x \end{cases}$ $[(3; 4), (-4; -3)]$

607 $\begin{cases} x + z = 4 \\ y^2 + 2xy - 8 = 0 \\ y + x = 3 \end{cases}$ $[(-1; 4; 5), (1; 2; 3)]$

608 $\begin{cases} 4(x^2 + y^2) = 51 \\ 2x + 2y = -3\sqrt{3} \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\right), \left(-2\sqrt{3}; \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right]$

609 $\begin{cases} xy = 9b^2 - 6ab \\ x + y = 6b - 2a \end{cases}$ $[(3b; 3b - 2a), (3b - 2a; 3b)]$

610 $\begin{cases} y - 2 = 1 - (2 - x) \\ xy - y^2 = 6 - (1 - 2x)^2 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right), (2; 3)\right]$

611 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2a} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{2y}{a} = 0 \\ x + y = a \end{cases}$ $\quad (a \neq 0)$ $\quad [(a; 0), (-4; 4 + a)]$

612 $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5 \\ 2x + 2y = 3\sqrt{2} \end{cases}$ $\quad \left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right), \left(\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$

613 $\begin{cases} 3abx + 6aby = 2a^2b^2 + 9 + 3aby \\ 2xy - 8 = -4 \end{cases}$ $\quad (ab \neq 0)$ $\quad \left[\left(\dfrac{2ab}{3}; \dfrac{3}{ab}\right), \left(\dfrac{3}{ab}; \dfrac{2ab}{3}\right)\right]$

614 $\begin{cases} 4(y - x) = -8\sqrt{2} \\ xy = x - \sqrt{2} \end{cases}$ $\quad [(\sqrt{2} + 2; 2 - \sqrt{2}), (\sqrt{2} - 1; -1 - \sqrt{2})]$

615 $\begin{cases} 32(x^2 + y^2) = 29 \\ 4x + 4y = 5 \end{cases}$ $\quad \left[\left(\dfrac{7}{8}; \dfrac{3}{8}\right), \left(\dfrac{3}{8}; \dfrac{7}{8}\right)\right]$

616 $\begin{cases} \left(x + \dfrac{1}{3}\right)\left(y - \dfrac{1}{2}\right) = -4 \\ x - \dfrac{1}{2} - \left(y - \dfrac{3}{5}\right) = 1 \end{cases}$ $\quad$ [impossibile]

617 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2b^2 + a^2 - 2ab \\ x + y = a - 2b \end{cases}$ $\quad [(-b; a - b), (a - b; -b)]$

618 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$ $\quad \left[\left(-\dfrac{19}{5}; \dfrac{17}{5}\right), (5; -1)\right]$

619 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 35 \\ x + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{3} - y \end{cases}$ $\quad [(-2\sqrt{2}; 3\sqrt{3}), (3\sqrt{3}; -2\sqrt{2})]$

620 $\begin{cases} 3x^2 + xy + y^2 = 15 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ $\quad [(2; 1), (1; 3)]$

621 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3xy = 7 + 3\sqrt{10} \\ x + y = \sqrt{2} - \sqrt{5} \end{cases}$ $\quad [(\sqrt{2}; -\sqrt{5}), (-\sqrt{5}; \sqrt{2})]$

622 $\begin{cases} by + bx = b^2 + 1 \\ xy = 1 \end{cases}$ $\quad (b \neq 0)$ $\quad \left[\left(b; \dfrac{1}{b}\right), \left(\dfrac{1}{b}; b\right)\right]$

623 $\begin{cases} \dfrac{3 - 2x}{5} + y = \dfrac{6}{5}y \\ \dfrac{x}{x - 1} + \dfrac{y}{(x - 1)(x - 2)} = -\dfrac{1}{x - 2} \end{cases}$ $\quad$ [impossibile]

624 $\begin{cases} y^2 - 2b^2 = \dfrac{2b^2 - bxy}{2} \\ bx - 2b = 2y \end{cases}$ $\quad (b \neq 0)$ $\quad \left[\left(-1; -\dfrac{3}{2}b\right), (4; b)\right]$

625 $\begin{cases} 2a(y+3)+x^2=1 \\ 4a^2+1-x+y=(1-2a)^2 \end{cases}$ $[(2a-1; -2a-1), (1-4a; 1-8a)]$

626 $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x-z=1 \\ 2z^2+8x^2-8xz-2=0 \end{cases}$ $\left[\text{infinite soluzioni del tipo } \left(\alpha; \frac{1-3\alpha}{2}; 2\alpha-1\right) \forall \alpha \in \mathbb{R}\right]$

627 $\begin{cases} m^2+x+y+4xy=4(xy+1)+(m^2-2) \\ xy=\dfrac{m^2-1}{m^2} \end{cases}$ $(m \neq 0)$ $\left[\left(\frac{m+1}{m}; \frac{m-1}{m}\right), \left(\frac{m-1}{m}; \frac{m+1}{m}\right)\right]$

628 $\begin{cases} bx+by-x=b^2+y \\ bxy-b-1=xy \end{cases}$ $(b \neq 1)$ $\left[\left(b+1; \frac{1}{b-1}\right), \left(\frac{1}{b-1}; b+1\right)\right]$

Cerca le eventuali intersezioni fra la parabola e la retta che hanno le seguenti equazioni e traccia i corrispondenti grafici.

629 $y=x^2-4,$ $y=\frac{1}{2}x-5.$ [non esistono intersezioni]

630 $y=-x^2+3x,$ $y=-x+4.$ [retta tangente in $(2; 2)$]

631 $y=x^2-3x+2,$ $y=x-1.$ $[(1; 0)$ e $(3; 2)]$

632 Scrivi l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione $y=-x^2+4$ nel suo punto di ordinata uguale a 3 e ascissa positiva. $[y=-2x+5]$

633 Trova l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione $y=x^2+x-6$ e parallela alla retta passante per i punti $A(9; 1)$ e $B(-4; -12)$. Determina il punto di tangenza T. $[y=x-6; T(0; -6)]$

Problemi

634 Matteo è più grande di Monica. La somma delle loro età vale 5, il loro prodotto 4. Quanti anni hanno i due bambini? [Matteo 4 anni, Monica 1 anno]

635 Due amici, Emanuela e Davide, abitano nella stessa via, in numeri civici diversi. La somma dei due numeri è uguale a 42. Il numero di Davide, maggiore di quello dell'amica, è uguale al numero di Emanuela elevato al quadrato. In quali numeri civici abitano i due amici? [6 e 36]

636 Le schede di ricarica di due cellulari stanno per esaurirsi. Aggiungendo € 4 all'importo della prima scheda, si ottiene il doppio di quello della seconda e, raddoppiando il quadrato dell'importo della prima scheda, si ottengono € 72. Quanti euro contengono le due schede? [€ 6; € 5]

637 Un operaio lascia cadere una chiave inglese dall'impalcatura del cantiere in cui lavora. Essa giunge a terra alla velocità di 24 m/s. Trascurando l'attrito dell'aria, determina:
a) a quale altezza da terra si trova l'operaio;
b) quanto tempo ha impiegato la chiave inglese per arrivare a terra.
(Suggerimento. La chiave cade con un moto uniformemente accelerato, pertanto l'equazione oraria del moto è $s=\frac{1}{2}gt^2$, dove $g=9{,}8$ m/s^2 è l'accelerazione di gravità.) [a) 29,4 m; b) 2,45 s]

638 È dato un rettangolo di cui l'area e il perimetro sono rispettivamente 12 m^2 e 14 m. Determina la lunghezza della diagonale del rettangolo. [5 m]

639 Determina l'insieme dei punti $P(x; y)$ del piano per i quali valgono contemporaneamente le seguenti relazioni fra le coordinate x e y: $2x + 3y = 7$ e $4x^2 + 9y^2 = 25$. $\left[(2; 1), \left(\frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right)\right]$

640 In un triangolo rettangolo ABC, l'ipotenusa è lunga 3 m e il perimetro $(5 + \sqrt{5})$ m. Determina la lunghezza dei cateti e la misura dell'area del triangolo. [2 m, $\sqrt{5}$ m; $\sqrt{5}$ m^2]

641 Una stanza rettangolare contiene un tappeto quadrato di area uguale alla metà dell'area della stanza e con i lati paralleli alle pareti. Sapendo che tre dei lati del tappeto distano p dalle pareti e il quarto lato dista $2p$, calcola le dimensioni della stanza. [$8p$ e $9p$]

Particolari sistemi simmetrici di terzo grado

ESERCIZIO GUIDA

642 Risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 28 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Tenendo presente il prodotto notevole:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

possiamo scrivere:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 =$$
$$= (x + y)^3 - 3xy\,(x + y).$$

Sostituiamo nella prima equazione:

$$\begin{cases} (x + y)^3 - 3xy\,(x + y) = 28 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4^3 - 3xy \cdot 4 = 28 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione ausiliaria:

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 - 3 = 1$$

$$t = 2 \pm 1 = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$$t_1 = 3, \quad t_2 = 1.$$

Il sistema ammette le soluzioni (1; 3) e (3; 1).

Risolvi i seguenti sistemi simmetrici di terzo grado nelle incognite x e y.

643 $\begin{cases} x^3 + y^3 = \dfrac{9}{125} \\ x + y = \dfrac{3}{5} \end{cases}$ $\left[\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right), \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)\right]$

644 $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $[(3; -2), (-2; 3)]$

645 $\begin{cases} x^3 + y^3 = 20 \\ x + y = 2 \end{cases}$ $[(1+\sqrt{3}; 1-\sqrt{3}), (1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3})]$

646 $\begin{cases} x^3 + y^3 = xy + 12 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $[(2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}), (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})]$

647 $\begin{cases} x + y = 7a \\ x^3 + y^3 = 133a^3 \end{cases}$ $[(5a; 2a), (2a; 5a)]$

648 $\begin{cases} x^3 + y^3 = -19m^3 \\ x + y = -m \end{cases}$ $[(2m; -3m), (-3m; 2m)]$

649 $\begin{cases} x^3 + y^3 = 316a^3b^3 \\ x + y = 4ab \end{cases}$ $[(7ab; -3ab), (-3ab; 7ab)]$

650 $\begin{cases} x^3 + y^3 = -3\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + 9\sqrt{3} + 11\sqrt{2} \\ x + y = \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{cases}$ $[(\sqrt{2}; \sqrt{3}), (\sqrt{3}; \sqrt{2})]$

651 $\begin{cases} x + y = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ x^3 + y^3 = \dfrac{27}{4}\sqrt{2} - \dfrac{9}{2}\sqrt{2} \end{cases}$ $\left[\left(\sqrt{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)\right]$

Particolari sistemi simmetrici di quarto grado

ESERCIZIO GUIDA

652 Risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = -3 \end{cases}$$

Scriviamo $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$:

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 10 \\ xy = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2\cdot(-3) = 10 \\ xy = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 4 \\ xy = -3 \end{cases}$$

Ricaviamo $x + y$ dalla prima equazione:

$$x + y = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$

Il sistema si scinde in due sistemi simmetrici:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -3 \end{cases}$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \qquad t = 1 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \qquad\qquad t^2 + 2t - 3 = 0 \qquad t = -1 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ -3 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono le coppie simmetriche $(3; -1)$, $(-1; 3)$, $(-3; 1)$ e $(1; -3)$.

Risolvi i seguenti sistemi simmetrici di quarto grado.

653 $\begin{cases} xy = -36 \\ x^2 + y^2 = 97 \end{cases}$ $[(9; -4), (-4; 9), (-9; 4), (4; -9)]$

654 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{cases}$ $[(-1; -4), (-4; -1), (1; 4), (4; 1)]$

655 $\begin{cases} xy = 3 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ $[(-1; -3), (-3; -1), (1; 3), (3; 1)]$

656 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = -3 \end{cases}$ $[(1; -3), (-3; 1), (-1; 3), (3; -1)]$

657 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ xy = -15 \end{cases}$ $[(5; -3), (-3; 5), (-5; 3), (3; -5)]$

658 $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{37}{4} \\ xy = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$ $\left[\left(3; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; 3\right), \left(\frac{1}{2}; -3\right), \left(-3; \frac{1}{2}\right)\right]$

659 $\begin{cases} xy = \dfrac{7}{4} \\ x^2 + y^2 = \dfrac{25}{2} \end{cases}$ $\left[\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; -\frac{7}{2}\right), \left(-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)\right]$

660 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 43 \\ xy = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$ $\left[\left(\frac{6 \pm 5\sqrt{2}}{2}; \frac{6 \mp 5\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{-6 \pm 5\sqrt{2}}{2}; \frac{-6 \mp 5\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

I sistemi riconducibili a sistemi simmetrici

ESERCIZIO GUIDA

661 Risolviamo il sistema $\begin{cases} 2x + 2y - 4xy - 1 = 0 \\ 12x + 12y + 2xy = 45 \end{cases}$

Mettiamo in evidenza il binomio $x + y$ e portiamo a secondo membro i termini noti:

$$\begin{cases} 2(x + y) - 4xy = 1 \\ 12(x + y) + 2xy = 45 \end{cases}$$

Poniamo $x + y = s$ e $xy = p$. Otteniamo un sistema lineare nelle incognite s e p:

$$\begin{cases} 2s - 4p = 1 \\ 12s + 2p = 45 \end{cases}$$

Ricavate $p = \dfrac{3}{2}$ e $s = \dfrac{7}{2}$, il sistema è equivalente al seguente sistema simmetrico:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{7}{2} \\ xy = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

che, risolto, dà le soluzioni $\left(3; \dfrac{1}{2}\right)$ e $\left(\dfrac{1}{2}; 3\right)$.

Risolvi i seguenti sistemi di quarto grado riconducibili a sistemi simmetrici.

662 $\begin{cases} 2x + 2y - 2xy - 1 = 0 \\ 2x + 2y + 4xy = 7 \end{cases}$ [impossibile]

663 $\begin{cases} 6x + 6y + 15xy - 27 = 0 \\ 39x + 39y - 197xy + 119 = 0 \end{cases}$ [(1; 1)]

664 $\begin{cases} x + y - xy = 1 \\ 6x + 6y - 5xy = 8 \end{cases}$ [(2; 1), (1; 2)]

665 $\begin{cases} 6x + 6y + xy - 4 = 0 \\ x + y - 6xy - 13 = 0 \end{cases}$ [(2; − 1), (− 1; 2)]

666 $\begin{cases} 7x + 7y - 3xy - 9 = 0 \\ 3x + 3y - 2xy + 6 = 0 \end{cases}$ [impossibile]

667 $\begin{cases} 4x + 4y + 7xy - 8 = 0 \\ 5x + 5y - 3xy - 10 = 0 \end{cases}$ [(0; 2), (2; 0)]

I sistemi omogenei

ESERCIZIO GUIDA

668 Risolviamo il sistema $\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 0 \\ 6x^2 + xy - y^2 = 0 \end{cases}$

Il sistema ammette come soluzione la coppia (0; 0). Per trovare le altre eventuali soluzioni poniamo $y = tx$:

$$\begin{cases} 2x^2 - tx^2 - t^2x^2 = 0 \\ 6x^2 + tx^2 - t^2x^2 = 0 \end{cases}$$

Dividiamo per $x^2 \neq 0$:

$$\begin{cases} 2 - t - t^2 = 0 \\ 6 + t - t^2 = 0 \end{cases}$$

Ordiniamo le due equazioni in t^2 e, dopo averle risolte, cerchiamo eventuali soluzioni in comune:

$$\begin{cases} -t^2 - t + 2 = 0 \\ -t^2 + t + 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t^2 + t - 2 = 0 \\ t^2 - t - 6 = 0 \end{cases}$$

- $t^2 + t - 2 = 0$

  $\Delta = 1 + 8 = 9$

  $$t = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

- $t^2 - t - 6 = 0$

  $\Delta = 1 + 24 = 25$

  $$t = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

L'unica soluzione in comune è $t = -2$. Sostituiamo -2 in $y = tx$, ottenendo $y = -2x$.

Il sistema è indeterminato e ammette infinite soluzioni del tipo $(\alpha; -2\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Risolvi i seguenti sistemi omogenei di quarto grado.

669 $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ -8x^2 - 2xy + 3y^2 = 0 \end{cases}$ $[(\alpha; +2\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}]$

670 $\begin{cases} y^2 - 2xy - 3x^2 = 0 \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \end{cases}$ $[(\alpha; -\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}]$

671 $\begin{cases} 2y^2 - 20x^2 + 3xy = 0 \\ -8x^2 + 2xy + y^2 = 0 \end{cases}$ $[(\alpha; -4\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}]$

672 $\begin{cases} -35x^2 + 2xy + y^2 = 0 \\ y^2 - 8xy + 15x^2 = 0 \end{cases}$ $[(\alpha; 5\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}]$

673 $\begin{cases} -22x^2 - 9xy + y^2 = 0 \\ +18x^2 + 7xy - y^2 = 0 \end{cases}$ $[(\alpha; -2\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}]$

674 $\begin{cases} -3y^2 + 34xy - 80x^2 = 0 \\ -11y^2 + 8xy + 640x^2 = 0 \end{cases}$ $[(\alpha; 8\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}]$

675 $\begin{cases} 3y^2 + 10xy + 3x^2 = 0 \\ 6y^2 + 5xy + x^2 = 0 \end{cases}$ $\left[\left(\alpha; -\frac{1}{3}\alpha\right), \forall \alpha \in \mathbb{R}\right]$

676 $\begin{cases} y^2 + (3 - \sqrt{5})xy - 3\sqrt{5}x^2 = 0 \\ y^2 + (1 - \sqrt{5})xy - \sqrt{5}x^2 = 0 \end{cases}$ $[(\alpha; \sqrt{5}\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}]$

I sistemi formati da un'equazione omogenea e da un polinomio omogeneo uguagliato a un termine noto non nullo

ESERCIZIO GUIDA

677 Risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 0 \\ x^2 - 2xy + 4y^2 = 1183 \end{cases}$$

Poniamo $y = tx$:

$$\begin{cases} 2x^2 + tx^2 - t^2x^2 = 0 & \text{dividiamo per } x^2 \neq 0 \\ x^2 - 2tx^2 + 4t^2x^2 = 1183 & \text{raccogliamo } x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + t - t^2 = 0 & \text{risolviamo in } t \\ x^2(1 - 2t + 4t^2) = 1183 & \text{ricaviamo } x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 - t - 2 = 0 \\ x^2 = \dfrac{1183}{4t^2 - 2t + 1} \end{cases} \qquad t^2 - t - 2 = 0 \qquad t = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Ricavando x e tenendo conto che $y = tx$, si ottengono le soluzioni:

$(\sqrt{91}; 2\sqrt{91}), (-\sqrt{91}; -2\sqrt{91}), (13; -13), (-13; 13)$.

Risolvi i seguenti sistemi particolari di quarto grado.

678 $\begin{cases} y^2 - 4xy + 12x^2 = 68 \\ 5x^2 + 4xy - y^2 = 0 \end{cases}$ $[(-2; 2), (2; -2), (-2; -10), (2; 10)]$

679 $\begin{cases} 20x^2 + xy - y^2 = 0 \\ -6x^2 + xy + y^2 = 6 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right), (1; -4), (-1; 4)\right]$

680 $\begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 = 0 \\ 5x^2 - 3xy + 2y^2 = 784 \end{cases}$ $[(14; 14), (-14; -14), (2\sqrt{14}; 6\sqrt{14}), (-2\sqrt{14}; -6\sqrt{14})]$

681 $\begin{cases} xy + x^2 = 0 \\ y^2 - 3xy + 5x^2 = 4 \end{cases}$ $\left[(0; 2), (0; -2), \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)\right]$

682 $\begin{cases} y^2 - 5xy + 6x^2 = 0 \\ 3x^2 + y^2 - 2xy = 27 \end{cases}$ $\left[(-3; -6), (3; 6), \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{9\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

683 $\begin{cases} -8y^2 + 4xy - 3x^2 = -3 \\ y^2 - 3xy + 2x^2 = 0 \end{cases}$ $\left[\left(\sqrt{\frac{3}{7}}; \sqrt{\frac{3}{7}}\right), \left(-\sqrt{\frac{3}{7}}; -\sqrt{\frac{3}{7}}\right), \left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)\right]$

684 $\begin{cases} y^2 - xy + x^2 = 42 \\ y^2 - xy - 20x^2 = 0 \end{cases}$ $[(\sqrt{2}; 5\sqrt{2}), (-\sqrt{2}; -5\sqrt{2}), (\sqrt{2}; -4\sqrt{2}), (-\sqrt{2}; 4\sqrt{2})]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

I sistemi formati da due polinomi omogenei uguagliati a termini noti non nulli

ESERCIZIO GUIDA

685 Risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 6x^2 + 3xy - 2y^2 = -14 \\ 5x^2 - xy - \dfrac{1}{2}y^2 = -7 \end{cases}$$

Moltiplichiamo per 2 la seconda equazione e sottraiamo membro a membro:

$$\ominus \begin{cases} 6x^2 + 3xy - 2y^2 = -14 \\ 10x^2 - 2xy - y^2 = -14 \end{cases}$$

$$-4x^2 + 5xy - y^2 = 0$$

$$4x^2 - 5xy + y^2 = 0$$

Il sistema è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} 4x^2 - 5xy + y^2 = 0 \\ 6x^2 + 3xy - 2y^2 = -14 \end{cases}$$

che può essere risolto con il metodo esaminato nell'esercizio guida 677.

Il sistema ha due soluzioni, $(1; 4)$ e $(-1; -4)$.

Risolvi i seguenti sistemi particolari di quarto grado.

686 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{10} + \dfrac{xy}{2} - \dfrac{2y^2}{5} = 1 \\ 2y^2 - 6xy + 4x^2 = 6 \end{cases}$ $[(-2; -1), (2; 1)]$

687 $\begin{cases} x^2 + 2xy - 5y^2 = -15 \\ 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 4 \end{cases}$ $\left[(1; 2), (-1; -2), \left(\dfrac{10}{\sqrt{67}}; \dfrac{17}{\sqrt{67}}\right), \left(-\dfrac{10}{\sqrt{67}}; -\dfrac{17}{\sqrt{67}}\right)\right]$

688 $\begin{cases} 4y^2 - 2xy - 7x^2 = 12 \\ y^2 + \dfrac{xy}{3} - x^2 = 4 \end{cases}$ $\left[\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{7}; -\dfrac{8\sqrt{3}}{7}\right), \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{7}; \dfrac{8\sqrt{3}}{7}\right)\right]$

689 $\begin{cases} 4x^2 - 2xy + 3y^2 = 1 \\ 6x^2 + 11xy + 8y^2 = 5 \end{cases}$ $\left[\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6}; -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}; -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right), \left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}; \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)\right]$

690 $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5y^2 = 9 \\ 2x^2 - xy + y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$ $\left[\left(-\dfrac{3}{4}; -\dfrac{3}{2}\right), \left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{3}{2}\right), \left(-\dfrac{3}{\sqrt{56}}; \dfrac{9}{\sqrt{56}}\right), \left(\dfrac{3}{\sqrt{56}}; -\dfrac{9}{\sqrt{56}}\right)\right]$

691 $\begin{cases} 3y^2 + 4xy - 25x^2 = 3 \\ y^2 + xy + 5x^2 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ $\left[\left(\sqrt{\dfrac{3}{70}}; \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{70}}\right), \left(-\sqrt{\dfrac{3}{70}}; -\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{70}}\right), \left(\sqrt{\dfrac{3}{94}}; -\dfrac{7\sqrt{3}}{\sqrt{94}}\right), \left(-\sqrt{\dfrac{3}{94}}; \dfrac{7\sqrt{3}}{\sqrt{94}}\right)\right]$

RIEPILOGO I SISTEMI DI GRADO SUPERIORE AL PRIMO

Nel sito: ▶ 12 esercizi in più

Risolvi i seguenti sistemi nelle incognite x e y.

692 $\begin{cases} x^2 - 9 - xy = 3y \\ \dfrac{y+9}{y} = \dfrac{x^2}{y} - 1 \end{cases}$ $[(-1; -4)]$

693 $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^4 + \dfrac{a^2}{9} \\ x + y = \dfrac{a - 3a^2}{3} \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{a}{3}; -a^2\right), \left(-a^2; \dfrac{a}{3}\right)\right]$

694 $\begin{cases} 4 + x(x+1) + y(y-2) = (x+y)^2 - y(3+2x) \\ xy = -77 \end{cases}$ $[(7; -11), (-11; 7)]$

695 $\begin{cases} x^3 + y^3 = 5\sqrt{5} + 1 \\ x + y = \sqrt{5} + 1 \end{cases}$ $[(\sqrt{5}; 1), (1; \sqrt{5})]$

696 $\begin{cases} 3x + 3y + 4xy = 7 \\ 2x + 2y - 4xy - 3 = 0 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}; \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right), \left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}; \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

697 $\begin{cases} 5x^2 + 4xy - y^2 = 3 \\ \dfrac{16}{3}x^2 + xy - \dfrac{1}{3}y^2 = 2 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}; \dfrac{3\sqrt{6}}{4}\right), \left(-\dfrac{\sqrt{6}}{4}; -\dfrac{3\sqrt{6}}{4}\right), \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}; -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right]$

698 $\begin{cases} 2x^2 - \dfrac{3a^2x}{2} = \dfrac{c^2x}{2} + \dfrac{a^2+c^2}{4} \cdot y \\ 2(2ac + y) - 2(c-a)(a+c) = 4ac \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{a^2+c^2}{2}; c^2 - a^2\right), \left(\dfrac{a^2-c^2}{4}; c^2 - a^2\right)\right]$

699 $\begin{cases} ax - 4 = -ay \\ a(xy + 9b^2) = 12b \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{4-3ab}{a}; 3b\right), \left(3b; \dfrac{4-3ab}{a}\right)\right]$

700 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13b^2 + 2c^2 - 2bc \\ x + y = 5b \end{cases}$ $[(3b - c; 2b + c), (2b + c; 3b - c)]$

701 $\begin{cases} x^3 + y^3 = -19 \\ x + y = -1 \end{cases}$ $[(2; -3), (-3; 2)]$

702 $\begin{cases} 3x + 3y - xy - 9 = 0 \\ 4x + 4y + 3xy + 1 = 0 \end{cases}$ $[(3; -1), (-1; 3)]$

703 $\begin{cases} 9x + 9y - 6xy = 4 \\ 15x + 15y + 6xy - 4 = 0 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{7}}{6}; \dfrac{1-\sqrt{7}}{6}\right), \left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{6}; \dfrac{1+\sqrt{7}}{6}\right)\right]$

704 $\begin{cases} x^2 - 10xy + 16y^2 = 0 \\ -3x^2 + 7xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$ $\left[\left(\alpha; \frac{1}{2}\alpha\right), \forall \alpha \in \mathbb{R}\right]$

705 $\begin{cases} x + y = 2\sqrt{3} + 1 \\ x^2 + y^2 = 7 + 2\sqrt{3} \end{cases}$ $[(\sqrt{3}+1; \sqrt{3}), (\sqrt{3}; \sqrt{3}+1)]$

706 $\begin{cases} 15x - 7a = -15y \\ 15xy + 2a^2 = 0 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{2}{3}a; -\frac{1}{5}a\right), \left(-\frac{1}{5}a; \frac{2}{3}a\right)\right]$

707 $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2m^3 + 3m^2 + 3m + 1 \\ x + y = 2m + 1 \end{cases}$ $\left(m \neq -\frac{1}{2}\right)$ $[(m; m+1), (m+1; m)]$

708 $\begin{cases} x^3 + b^3 = a^3 - y^3 \\ x + y = a - b \end{cases}$ $(a \neq b)$ $[(a; -b), (-b; a)]$

709 $\begin{cases} 9x + 9y + 10xy + 2 = 0 \\ 4x + 4y - 5xy - 18 = 0 \end{cases}$ $[(1+\sqrt{3}; 1-\sqrt{3}), (1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3})]$

710 $\begin{cases} 2x + 2y + 5xy - 11 = 0 \\ 4x + 4y + xy - 13 = 0 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right]$

711 $\begin{cases} 6x^2 - 5xy + y^2 = 0 \\ 112x^2 - 70xy + 7y^2 = 0 \end{cases}$ $[(\alpha; 2\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}]$

712 $\begin{cases} 10x^2 - 7xy + y^2 = 12 \\ -3x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}y^2 = -6 \end{cases}$ $[(\sqrt{3}; \sqrt{3}), (-\sqrt{3}; -\sqrt{3})]$

713 $\begin{cases} x - \sqrt{3} = \sqrt{2} - y \\ xy = \sqrt{6} \end{cases}$ $[(\sqrt{3}; \sqrt{2}), (\sqrt{2}; \sqrt{3})]$

714 $\begin{cases} 4x^2 - 72a^2 = 5b^2 - 4(3ab + y^2) \\ 2x - 3b = -2y \end{cases}$ $\left[\left(\frac{6a+b}{2}; b-3a\right), \left(b-3a; \frac{6a+b}{2}\right)\right]$

715 $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{226}{9} \\ xy = -\frac{5}{3} \end{cases}$ $\left[\left(-5; \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}; -5\right), \left(5; -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}; 5\right)\right]$

716 $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{4} \\ xy = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\left[\left(1; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; 1\right), \left(-1; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; -1\right)\right]$

717 $\begin{cases} -5x^2 + 2xy + 3y^2 = 0 \\ 7x^2 - 17xy + 10y^2 = 0 \end{cases}$ $[(\alpha; \alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}]$

718 $\begin{cases} 4y - x = 2\left(3y - \frac{5}{2}\right) - y \\ x^2 + \sqrt{3}y = 2(x+4) - x \end{cases}$ $[(2\sqrt{3} - 1; 6 - 2\sqrt{3}), (2 - \sqrt{3}; 3 + \sqrt{3})]$

719 $\begin{cases} x^3 + y^3 = \dfrac{9\sqrt{2}}{4} \\ x + y = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\left[\left(\sqrt{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)\right]$

720 $\begin{cases} 4by + 24b^2x = 12ab^2 \\ 2x^2 - (a + by) = a(x - 1) + y(1 - b) \end{cases}$ $(b \neq 0)$ $\left[\left(\dfrac{a}{2}; 0\right), \left(-3b; 18b^2 + 3ab\right)\right]$

721 $\begin{cases} 3x^2 + 4xy - 4y^2 = -11 \\ \dfrac{12}{11}x^2 - \dfrac{2}{11}xy + \dfrac{3}{11}y^2 = 1 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{\sqrt{7}}{7}; \dfrac{5\sqrt{7}}{7}\right), \left(-\dfrac{\sqrt{7}}{7}; -\dfrac{5\sqrt{7}}{7}\right), \left(\dfrac{\sqrt{55}}{15}; -\dfrac{\sqrt{55}}{5}\right), \left(-\dfrac{\sqrt{55}}{15}; \dfrac{\sqrt{55}}{5}\right)\right]$

722 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9b^2 + \dfrac{1}{4b^2} \\ 2bx - 6b^2 = 1 - 2by \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{2b}; 3b\right), \left(3b; \dfrac{1}{2b}\right)\right]$

723 $\begin{cases} -80x^2 + 34xy - 3y^2 = 0 \\ 112x^2 - 70xy + 7y^2 = 0 \end{cases}$ $[(\alpha; 8\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}]$

724 $\begin{cases} 72x^2 - 17xy + y^2 = 7 \\ \dfrac{256}{7}x^2 - \dfrac{104}{7}xy + \dfrac{9}{7}y^2 = 2 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}; \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right), \left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}; -\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)\right]$

Sistemi e problemi

Problemi di secondo grado

ESERCIZIO GUIDA

725 Determiniamo due frazioni la cui somma è $\dfrac{29}{10}$ e il cui prodotto è 1.

Indichiamo con x e y le due frazioni e impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{29}{10} \\ xy = 1 \end{cases}$$

Tale sistema è simmetrico di secondo grado; l'equazione risolvente è:

$$t^2 - \frac{29}{10}t + 1 = 0$$
$$10t^2 - 29t + 10 = 0$$
$$\Delta = 841 - 400 = 441$$

$$t = \frac{29 \pm \sqrt{441}}{20} = \begin{cases} \dfrac{29 + 21}{20} = \dfrac{50}{20} = \dfrac{5}{2} \\[2ex] \dfrac{29 - 21}{20} = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione sono $t_1 = \dfrac{5}{2}$ e $t_2 = \dfrac{2}{5}$. Le frazioni richieste dal problema sono $\dfrac{5}{2}$ e $\dfrac{2}{5}$.

Osservazione. Se il problema richiedesse di determinare due monomi o polinomi o frazioni algebriche, si procederebbe allo stesso modo, indicando sempre con x e y le incognite.

726 Stabilisci due numeri la cui somma è 20 e il cui prodotto è 96. [8; 12]

727 Determina due frazioni la cui somma è $\frac{5}{6}$ e il cui prodotto è $\frac{1}{6}$. $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$

728 Trova due numeri il cui rapporto è $\frac{3}{2}$ e la cui differenza dei quadrati è 20. $[(6; 4), (-6; -4)]$

729 Determina due frazioni il cui rapporto è 2 e la cui differenza dei quadrati è $\frac{27}{16}$. $\left[\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right), \left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right)\right]$

730 La somma di due numeri è 16 e la somma dei loro quadrati è 130. Quali sono i due numeri? [7; 9]

731 Individua due frazioni la cui somma è $\frac{1}{2}$ e tali che la somma dei loro quadrati sia $\frac{17}{36}$. $\left[-\frac{1}{6}; \frac{2}{3}\right]$

732 Determina due numeri la cui somma è 8 e tali che il prodotto di uno dei due per l'altro aumentato di 4 sia uguale al quadrato di 6. [2; 6]

733 Trova due monomi la cui somma è $11a$ e il cui prodotto è $18a^2$. $[2a; 9a]$

734 Determina due monomi il cui rapporto è $\frac{3}{2}$ e la cui differenza dei quadrati è $5a^2b^2$. $[a \neq 0 \wedge b \neq 0, (3ab; 2ab), (-3ab; -2ab)]$

735 Scrivi due frazioni algebriche la cui somma è $-\frac{1}{a}$ e il cui prodotto è $-\frac{2}{a^2}$. $\left[\frac{1}{a}; -\frac{2}{a}\right]$

736 Trova due frazioni algebriche il cui rapporto è $-\frac{3}{2}$ e la cui differenza dei quadrati è $\frac{5a^2}{b^2}$. $\left[\left(-2\frac{a}{b}; 3\frac{a}{b}\right), \left(2\frac{a}{b}; -3\frac{a}{b}\right)\right]$

737 Individua due numeri la cui somma è 15 e tali che, se si aumenta il primo di $\frac{1}{2}$ e il secondo di $\frac{1}{3}$, il prodotto è $\frac{125}{2}$. $\left[(7; 8), \left(\frac{47}{6}; \frac{43}{6}\right)\right]$

738 Suddividi il numero 18 in modo che il doppio prodotto delle due parti, aggiunto alla somma dei loro quadrati, sia uguale a 324. [indeterminato]

739 Trova un monomio e un polinomio la cui somma è $3a + b$ e il cui prodotto è $2a^2 + 2ab$. $[2a; a + b]$

740 Determina due polinomi tali che la loro somma sia $4a$ e la somma dei loro quadrati sia $2(4a^2 + 1)$. $[2a - 1; 2a + 1]$

741 Trova due polinomi il cui rapporto è -2 e la cui differenza dei quadrati è $3(a + 3b)^2$. $[(-a - 3b; 2a + 6b), (a + 3b; -2a - 6b)]$

742 Quali sono due polinomi la cui somma è $3a$ e il cui prodotto è $2a^2 + ab - b^2$? $[a + b; 2a - b]$

743 Determina due monomi la cui somma è $-\frac{3}{2}ab^2$ e tali che la somma dei loro quadrati sia $\frac{5}{4}a^2b^4$. $\left[-ab^2; -\frac{1}{2}ab^2\right]$

744 Il prodotto di due monomi è $-3a^2$. Sommando $9a$ al primo monomio e $5a$ al secondo, la differenza risulta 0. Scrivi i due monomi. $[(-a; 3a), (-3a; a)]$

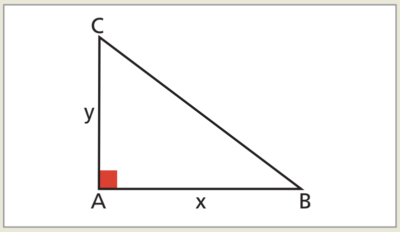
Problemi di geometria

ESERCIZIO GUIDA

745 Il perimetro di un triangolo rettangolo è 12 cm. Sapendo che l'ipotenusa è uguale ai $\frac{5}{7}$ della somma dei cateti, calcoliamo l'area del triangolo.

Il perimetro misura 12 cm, ossia:

$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 12.$$



L'ipotenusa è i $\frac{5}{7}$ della somma dei cateti:

$$\overline{BC} = \frac{5}{7}(\overline{AB} + \overline{AC}).$$

Poniamo

$$\overline{AB} = x,$$
$$\overline{AC} = y.$$

Poiché $x + y + \overline{BC} = 12$ e $\overline{BC} = \frac{5}{7}(x+y)$, scriviamo l'equazione:

$$x + y + \frac{5}{7}(x+y) = 12.$$

Il problema non fornisce altre relazioni, quindi per ottenere una seconda equazione dobbiamo utilizzare una proprietà geometrica della figura. Possiamo applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2.$$

La seconda equazione è:

$$x^2 + y^2 = \left[\frac{5}{7}(x+y)\right]^2.$$

Il sistema risolvente è:

$$\begin{cases} x + y + \frac{5}{7}(x+y) = 12 \\ x^2 + y^2 = \frac{25}{49}(x^2 + y^2 + 2xy) \end{cases}$$

Portiamo le due equazioni a forma intera:

$$\begin{cases} 7x + 7y + 5x + 5y = 84 \\ 49x^2 + 49y^2 = 25x^2 + 25y^2 + 50xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 12y = 84 & \text{dividiamo per 12} \\ 24x^2 + 24y^2 - 50xy = 0 & \text{dividiamo per 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 12(x^2 + y^2) - 25xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 12(x+y)^2 - 24xy - 25xy = 0 \end{cases}$$

Sostituiamo a $(x+y)^2$ il valore 7^2:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 12 \cdot 49 - 49xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases} \quad \text{sistema simmetrico}$$

$$t^2 - 7t + 12 = 0$$

$$\Delta = 49 - 48 = 1$$

$$t = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

I due cateti hanno lunghezza 3 cm e 4 cm.

Risposta

L'area del triangolo è $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\ \text{cm}^2$, ossia $S = 6\ \text{cm}^2$.

746 In un triangolo rettangolo l'area è 96 cm^2 e la somma dei cateti è 28 cm. Determina l'altezza relativa all'ipotenusa. [9,6 cm]

747 In un triangolo rettangolo la differenza fra i due cateti è 5 cm e l'area è 150 cm^2. Determina l'area del triangolo. [60 cm^2]

748 In un triangolo rettangolo la somma dei cateti ha lunghezza 17 cm e l'ipotenusa 13 cm. Calcola l'area del triangolo. [30 cm^2]

749 In un cerchio di raggio 25 cm è inscritto un rettangolo il cui perimetro è di 140 cm. Calcola l'area del rettangolo. [1200 cm^2]

750 La somma dei lati di due quadrati è uguale a 50 cm. Il rettangolo formato dalle diagonali dei due quadrati ha l'area di 1200 cm^2. Calcola l'area dei due quadrati. [400 cm^2; 900 cm^2]

751 Un triangolo isoscele di area 1200 cm^2 è tale che la somma dell'altezza con la metà della base è uguale a 70 cm. Calcola il perimetro del triangolo. [160 cm, 180 cm]

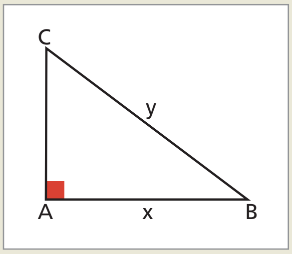
752 Determina l'area di un triangolo isoscele che ha il perimetro di 250 cm e l'altezza di 75 cm. [3000 cm^2]

753 In un triangolo isoscele l'area è di 9000 cm^2. La differenza fra la base e l'altezza supera di 5 cm il perimetro di un quadrato di lato 87,5 cm. Calcola il perimetro del triangolo. [810 cm]

754 Un triangolo isoscele è equivalente a tre quadrati di lato 40 cm. La somma della base e dell'altezza del triangolo è uguale al perimetro di un pentagono regolare di lato 44 cm. La base è maggiore dell'altezza. Calcola il perimetro del triangolo. [360 cm]

ESERCIZIO GUIDA

755 In un triangolo rettangolo un cateto misura $32a$ ($a > 0$) e il doppio dell'altro cateto supera l'ipotenusa di $8a$. Determiniamo le misure dell'area e del perimetro del triangolo.



Un cateto misura $32a$, ossia:

$\overline{AC} = 32a$.

Il doppio dell'altro cateto supera l'ipotenusa di $8a$:

$2\overline{AB} = \overline{BC} + 8a$.

Poniamo $\overline{AB} = x$,

$\overline{BC} = y$.

La seconda relazione diventa:

$2x = y + 8a$.

Per utilizzare la prima relazione, $\overline{AC} = 32a$, applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC:

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$.

La seconda equazione è: $x^2 + (32a)^2 = y^2$.

Il sistema risolvente è il seguente:

$$\begin{cases} 2x = y + 8a \\ x^2 + (32a)^2 = y^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -8a + 2x \\ x^2 + 1024a^2 = y^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -8a + 2x \\ x^2 + 1024a^2 = (-8a + 2x)^2 \end{cases}$$

Sviluppiamo i calcoli nella seconda equazione:

$x^2 + 1024a^2 = 4x^2 + 64a^2 - 32ax$

$0 = 4x^2 + 64a^2 - 32ax - x^2 - 1024a^2$

$3x^2 - 32ax - 960a^2 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = 256a^2 + 2880a^2 = 3136a^2 = (56a)^2$

$$x = \frac{16a \pm 56a}{3} = \begin{cases} \frac{16a + 56a}{3} = \frac{72}{3}a = 24a \\ \frac{16a - 56a}{3} = -\frac{40}{3}a \end{cases}$$

soluzione non accettabile perché negativa ($\overline{AB} > 0$)

Il sistema risolvente, dopo aver eliminato la soluzione negativa, è il seguente:

$$\begin{cases} y = 2x - 8a \\ x = 24a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 48a - 8a = 40a \\ x = 24a \end{cases}$$

Il cateto che cerchiamo, AB, misura $24a$ e l'ipotenusa BC misura $40a$.

L'area del triangolo misura $\frac{1}{2} \cdot (32a \cdot 24a)$, ossia $S = 384a^2$.

Il perimetro misura $2p = 24a + 32a + 40a = 96a$.

Risposta
L'area del triangolo vale $384a^2$ e il perimetro $96a$.

756 In un triangolo rettangolo la differenza fra il cateto maggiore e quello minore è $5b$ e l'area $150b^2$. Determina il perimetro del triangolo. [$60b$]

757 La somma dei lati di due quadrati vale $8a$; l'area del rettangolo avente per dimensioni le loro diagonali misura $30a^2$. Calcola il perimetro dei due quadrati. [$12a$; $20a$]

758 L'area di un triangolo rettangolo misura $6b^2$. Determina la misura dei cateti, sapendo che l'ipotenusa misura $5b$. [$3b$; $4b$]

759 In un rombo l'area misura $96l^2$ e la somma delle due diagonali è $28l$. Trova il perimetro del rombo e quello del rettangolo avente per dimensioni le diagonali del rombo. [$40l$; $56l$]

760 Un rettangolo, di area $36a^2$, ha un lato che supera l'altro di $5a$. Calcola il perimetro $2p$ del rettangolo e l'area S del quadrato costruito sulla diagonale del rettangolo. [$26a$; $97a^2$]

761 Un rettangolo ha il perimetro che misura $28r$. Calcola l'area, sapendo che il raggio della circonferenza circoscritta misura $5r$. [$48r^2$]

762 In un triangolo rettangolo la somma dei cateti misura $20r$ e l'area $48r^2$. Calcola la misura del raggio della circonferenza circoscritta al triangolo. [$2r\sqrt{13}$]

763 Calcola il perimetro di un triangolo isoscele, di area $256b^2$, la cui base è la metà dell'altezza. [$16b(1 + \sqrt{17})$]

764 Determina il perimetro del quadrato avente il lato congruente all'ipotenusa di un triangolo rettangolo di area $24a^2\sqrt{7}$. La somma dei cateti del triangolo vale $4a(3 + \sqrt{7})$. [$64a$]

765 È dato un quadrato di lato k. Prolungando i quattro lati, nello stesso verso, di un segmento x e congiungendo i quattro estremi, si ottiene un secondo quadrato. Determina il valore di x, in modo che l'area del secondo quadrato sia il quadruplo dell'area del primo. $\left[\frac{k(\sqrt{7} - 1)}{2}\right]$

Problemi di quarto grado

766 Individua due numeri, sapendo che la somma dei loro quadrati è 29 e il loro prodotto è 10. [2, 5; − 2, − 5]

767 Il prodotto di due numeri aumentato di 10 è uguale a 26, mentre la somma dei loro quadrati è uguale a 68. Scrivi i due numeri. [2, 8; − 2, − 8]

768 Trova due numeri, sapendo che la differenza fra i loro reciproci vale $\frac{5}{36}$ e il loro prodotto è 36. [4, 9; − 4, − 9]

769 Il prodotto di due numeri positivi vale 18 e la differenza fra il quadrato del maggiore e il doppio del quadrato del minore è 73. Quali sono i due numeri? [2; 9]

770 Determina due numeri positivi, sapendo che il loro prodotto è uguale a 40 e la differenza fra i loro quadrati vale 39. [5; 8]

771 Il prodotto di due numeri è uguale ai $\frac{3}{2}$ di -48 e la somma dei loro quadrati è 340. Scrivi i due numeri. [− 4, 18; 4, − 18]

772 La somma dei quadrati delle metà di due numeri positivi vale $\frac{145}{36}$. Determina i due numeri, sapendo che il loro prodotto è $\frac{4}{3}$. $\left[\frac{1}{3}; 4\right]$

773 Determina due numeri, sapendo che, se si sottrae 2 dai $\frac{4}{5}$ del loro prodotto, si ottiene la frazione $\frac{6}{7}$ e che la somma dei loro reciproci vale $\frac{176}{25}$. $\left[\frac{1}{7}; 25\right]$

774 Individua due frazioni il cui prodotto è 2 e tali che la somma dei loro reciproci sia $\frac{41}{24}$. $\left[\frac{3}{4}; \frac{8}{3}\right]$

775 Luca e Andrea hanno comprato due evidenziatori di tipo diverso. Il loro prezzo è espresso in euro. Il prodotto dei due prezzi è 0,245; la somma dei reciproci dei due prezzi vale $\frac{30}{7}$. Quanto è costato ciascun evidenziatore? [€ 0,35; € 0,70]

Problemi di geometria

776 In un rettangolo di area $240b^2$ la diagonale è $26b$. Determina il perimetro del rettangolo. [$68b$]

777 In un rettangolo la diagonale misura $15a$ e l'area $108a^2$. Calcola il perimetro del rettangolo. [$42a$]

778 Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo in cui l'ipotenusa è 15 cm e l'area 54 cm^2. [36 cm]

779 In una circonferenza di raggio $\frac{13}{4}a$ inscrivi un rettangolo di area $15a^2$. Calcola base e altezza del rettangolo. $\left[6a; \frac{5}{2}a\right]$

780 L'area di un triangolo rettangolo è $6k^2$ e l'ipotenusa misura $k\sqrt{30}$. Calcola il perimetro del quadrato costruito sul cateto minore. [$4k\sqrt{6}$]

781 La somma delle aree di due quadrati è 164 cm^2. L'area del rettangolo avente i lati rispettivamente congruenti alle diagonali dei due quadrati è 160 cm^2. Trova il perimetro del rettangolo. [$36\sqrt{2}$ cm]

782 La base minore di un trapezio isoscele è lunga 10 cm e l'altezza 3 cm. L'area è di 42 cm^2. Calcola il perimetro del trapezio. [38 cm]

783 In una circonferenza di diametro $b\sqrt{145}$ è inscritto un rettangolo di area $50b^2$, del quale è richiesto il perimetro. [$14b\sqrt{5}$]

784 La somma delle aree di due quadrati è 250 cm^2 e il semiprodotto delle due diagonali è 117 cm^2. Determina l'area dei due quadrati costruiti sulle diagonali. [162 cm^2; 338 cm^2]

785 La diagonale di un rettangolo è lunga $5a$ e l'area $10a^2$. Calcola il perimetro e l'area del quadrato costruito sulla dimensione minore del rettangolo. $[4a\sqrt{5}; 5a^2]$

786 In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è lunga 4 cm. La somma delle aree dei quadrati costruiti sulle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è 40 cm^2. Quanto vale l'area del triangolo? $[12\sqrt{2}\ cm^2]$

787 La somma delle aree di due quadrati è 193 cm^2. Il triangolo rettangolo avente per cateti le diagonali dei due quadrati ha l'area di 84 cm^2. Calcola l'area del cerchio avente per raggio il cateto minore. $[98\pi\ cm^2]$

Problemi vari

788 TEST In un triangolo rettangolo il prodotto delle misure dei cateti è 12 m^2 e l'ipotenusa è lunga 15 m. Quale fra i seguenti sistemi permette di determinare la lunghezza dei cateti?

A $\begin{cases} xy = 12 \\ x + y = 15 \end{cases}$

B $\begin{cases} x^2 + y^2 = 15 \\ xy = 12 \end{cases}$

C $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ xy = 15 \end{cases}$

D $\begin{cases} xy = 12 \\ x^2 + y^2 = 225 \end{cases}$

E $\begin{cases} xy = 12 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 225 \end{cases}$

789 TEST L'area di un rettangolo misura $20a^2$ e il perimetro $18a$. Quale dei seguenti sistemi permette di determinare le misure dei lati del rettangolo?

A $\begin{cases} xy = 20a^2 \\ x + y = 18a \end{cases}$

B $\begin{cases} xy = 18a \\ 2x + 2y = 20a^2 \end{cases}$

C $\begin{cases} x = \dfrac{20a^2}{y} \\ x + y = 9a \end{cases}$

D $\begin{cases} y = \dfrac{20a^2}{x} \\ x + y = 18a \end{cases}$

E $\begin{cases} x + y = 10a^2 \\ x = \dfrac{18a}{y} \end{cases}$

790 Determina due numeri positivi, sapendo che il loro prodotto è 28 e la somma dei loro quadrati è 65. [4; 7]

791 Calcola il perimetro di un rettangolo di area 50 cm^2, sapendo che il rapporto fra i lati è uguale a $\frac{1}{2}$. [30 cm]

792 Determina due frazioni positive, sapendo che il loro prodotto vale $\frac{1}{6}$ e che, aggiungendo 1 alla somma dei loro quadrati, si ottiene $\frac{217}{144}$. $\left[\frac{1}{4}; \frac{2}{3}\right]$

793 Un rettangolo ha l'area di 50 cm^2 e il perimetro di 30 cm. Calcola l'area del quadrato costruito sulla diagonale del rettangolo. $[125\ cm^2]$

794 Un triangolo rettangolo di area 96 cm^2 è inscritto in una semicirconferenza. Determina la lunghezza del raggio, sapendo che la somma dei cateti vale 28 cm. [10 cm]

795 Un rettangolo di area 594 cm^2 ha una dimensione di 5 cm più lunga dell'altra. Calcola il perimetro del rettangolo e la lunghezza della diagonale. [98 cm; 34,82 cm]

796 Calcola l'area di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa è lunga 26 cm e la somma dei cateti vale 34 cm. $[120\ cm^2]$

797 In un rombo la somma delle diagonali è 14 cm e l'area vale 24 cm^2. Calcola il perimetro del rombo. [20 cm]

798 Determina due numeri positivi, sapendo che la somma dei loro quadrati è 145 e che il prodotto fra la metà del primo numero e il triplo del secondo è uguale a 18. [1; 12]

799 Il prodotto di un intero positivo per una frazione vale $\frac{18}{5}$ e la somma dei quadrati delle loro terze parti equivale a $\frac{181}{225}$. Individua l'intero e la frazione. $\left[2; \frac{9}{5}\right]$

800 Il prodotto di due numeri interi negativi è uguale a 22. La somma fra il quadrato della metà del minore e il quadrato del maggiore vale $\frac{137}{4}$. Determina i due numeri. $[-11; -2]$

801 Scrivi due numeri positivi, sapendo che il loro prodotto è uguale a 15 e che la somma dei quadrati dei loro reciproci equivale a $\frac{34}{225}$. $[3; 5]$

802 La somma dei reciproci dei quadrati di due numeri è uguale a $\frac{41}{400}$. Determina due numeri, sapendo che il prodotto del primo per i $\frac{3}{5}$ del secondo è uguale a 12. $[4, 5; -4, -5]$

803 Determina due numeri, sapendo che se si sottrae $\frac{1}{3}$ al doppio del loro prodotto si ottiene $\frac{25}{6}$ e se si aggiunge $\frac{1}{4}$ alla somma dei loro reciproci si ottiene $\frac{23}{12}$. $\left[\frac{3}{4}; 3\right]$

804 Aggiungendo 1 alla quarta parte del prodotto di due numeri, si ottiene $\frac{3}{2}$ e sottraendo 2 dalla somma dei loro reciproci si ottiene $\frac{17}{8}$. $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$

805 Trova l'area di un triangolo isoscele, sapendo che l'altezza relativa alla base è lunga $12b$ e il perimetro misura $36b$. $[60b^2]$

806 L'area di un rombo vale $96k^2$ e il lato obliquo è lungo $10k$. Calcola il perimetro e l'area del quadrato costruito sulla diagonale minore del rombo. $[48k; 144k^2]$

807 Un quadrato di lato $\sqrt{42}$ cm è equivalente a un rombo di lato $\sqrt{58}$ cm. Calcola il perimetro di un parallelogramma con i lati congruenti alle due diagonali del rombo. [40 cm]

808 Considera un numero di due cifre, superiore a 70. La somma delle cifre vale 12 e la somma dei loro cubi vale 468. Qual è il numero? [75]

809 Le età di due sorelle sono tali che la somma dei loro quadrati supera di 9 il loro doppio prodotto e i $\frac{3}{4}$ del loro prodotto è uguale a 21. Quanti anni hanno le due sorelle? [4 e 7]

810 Dato il sistema $\begin{cases} x^2 + 5xy + 6y^2 = 0 \\ xy - y^2 = \dfrac{3k-1}{k} \end{cases}$ determina per quali valori di k ammette soluzioni reali. $\left[0 < k \leq \frac{1}{3}\right]$

811 Considera il sistema di terzo grado $\begin{cases} x + y = 2k \\ x^3 + y^3 = 2k\,(k^2 + 3) \end{cases}$. Calcola per quali valori di k:

a) le soluzioni sono positive;
b) le soluzioni sono opposte. [a) $k > 1$; b) $k = 0$]

812 Filippo va a trovare un amico con il suo motorino, percorrendo una strada rettilinea con moto uniformemente accelerato. Partendo da fermo, dopo 65 m, acquista la velocità di 14 m/s . Trascurando gli effetti degli attriti, calcola l'accelerazione del motorino e il tempo impiegato da Filippo per raggiungere tale velocità. [1,5 m/s^2; 9,3 s]

813 La distanza minima che un'automobile deve tenere dal veicolo che la precede, per frenare senza bloccare le ruote, è di 48 m quando viaggia ai 100 km/h. Calcola la decelerazione dell'auto in caso di frenata e il tempo che essa impiega per fermarsi completamente. [8 m/s^2; 3,5 s]

814 Il prodotto dei precedenti di due numeri naturali è uguale a 4. Moltiplicando la somma dei due numeri per il prodotto degli stessi, si ottiene 70. Quali sono i due numeri? [5; 2]

LABORATORIO DI MATEMATICA
I sistemi di secondo grado con Excel

ESERCITAZIONE GUIDATA

Costruiamo un foglio di Excel che, letta la misura del cateto AB di un triangolo rettangolo ABC, trovi l'eventuale area del triangolo, sapendo che i $\frac{3}{4}$ dell'ipotenusa BC superano il cateto AC di 3 m.

Posto $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = x$, $\overline{BC} = y$, ricaviamo il sistema di secondo grado $\begin{cases} \frac{3}{4}y = x + 3 \\ a^2 + x^2 = y^2 \end{cases}$

Applicando il metodo di sostituzione giungiamo all'equazione $7x^2 + 96x - 9a^2 + 144 = 0$, che ha le soluzioni $x_1 = \frac{-48 - \sqrt{63a^2 + 1296}}{7}$ e $x_2 = \frac{-48 + \sqrt{63a^2 + 1296}}{7}$.

La prima è sempre negativa, quindi non è accettabile. La seconda è accettabile quando è positiva, nel qual caso permette il calcolo dell'area del triangolo.

- Nel foglio scriviamo alcune didascalie (figura 1).
- Tenendo conto poi dell'analisi svolta, digitiamo:
`= SE(B4 > 0; "La lunghezza del cateto AC"; "Il dato non è corretto")` in A5, `= SE(B4 > 0; SE(-48 + RADQ(63*B4^2 +1296) <= 0; "risulta"; "è di metri"); "")` in A6, `= SE(A6=""; ""; SE(-48 + RADQ(63*B4^2 + 1296) <= 0; "negativa o nulla"; (-48 + RADQ(63*B4^2 +1296))/7))` in B6, `= SE(VAL.NUMERO(B6); "è ampia mq"; "non è calcolabile")` in A8 e `= SE(VAL.NUMERO(B6); 1/2*B4*B6; "")` in C8.
- Proviamo il foglio con $AB = 16$ m. digitando 16 in B4 e battendo *INVIO* (figura 1).

	A	B	C
1	La soluzione del problema		
2			
3	Dai la lunghezza del cateto AB		
4	in metri	16	
5	La lunghezza del cateto AC		
6	è di metri	12	
7	e l'area del triangolo ABC		
8	è ampia mq		96
9			

▲ Figura 1

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata con Excel ▶ 10 esercitazioni in più

Esercitazioni

Risolvi i seguenti problemi operando in modo simile all'esercitazione guidata.

1 In un rettangolo la base supera l'altezza di 4 m. Dopo aver assegnato l'area S determina il perimetro $2p$ del rettangolo. Prova con $S = 60$ m^2, $S = 21$ m^2, $S = 0$ m^2.
[$2p = 32$ m; $2p = 20$ m; $2p = 8$ m]

2 In un triangolo rettangolo ABC la somma dei cateti è di 14 cm. Trova la misura dei cateti, quando l'ipotenusa AC è lunga rispettivamente 6 cm, 10 cm, $7\sqrt{2}$ cm. [Il triangolo non esiste; $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm; $AB = 7$ cm, $BC = 7$ cm]

3 In un triangolo rettangolo ABC il cateto AB supera il cateto BC di 7 m. Determina il perimetro, quando l'area S del triangolo rispettivamente è di 294 m^2, 441 m^2, 588 m^2.
[$2p = 84$ m; $2p = 102{,}39$ m; $2p = 117{,}94$ m]

4 In un triangolo isoscele l'altezza è lunga 7,5 cm. Determina l'area S del triangolo, quando il perimetro rispettivamente è di 15 cm, 45 cm, 75 cm.
[$S = 0$ cm^2; $S = 75$ cm^2; $S = 135$ cm^2]

Matematica per il cittadino

MONGOLFIERE

In un parco di periferia si svolge una gara fra mongolfiere. Vince la prova chi, in un tempo prefissato, compie uno spostamento verticale maggiore.
Si aggiudica il primo posto la mongolfiera Archimede, che riesce ad aumentare la propria quota di 260 m.
All'istante iniziale della gara il conduttore dell'aerostato, che si trova alla quota h_1, lascia cadere un sacchetto di sabbia; all'istante finale, raggiunta la quota h_2, ne lascia cadere un secondo. Casualmente i due sacchi cadono a terra nello stesso punto.
Uno spettatore attento, esperto di balistica, approfitta dell'occasione per compiere un'indagine più approfondita sulla caduta osservata. Misurando le dimensioni del buco nel terreno, riesce a determinare la somma delle velocità dei due sacchetti al momento dell'impatto con il suolo: questa risulta essere pari a 130 m/s. In base a queste informazioni l'esperto giunge a ricavare sia le altezze iniziali di caduta, h_1 e h_2, dei due sacchetti, sia le loro velocità di impatto, v_1 e v_2.
Segui le fasi del suo ragionamento.

1. Se si trascura l'attrito dell'aria, un corpo in caduta libera da un'altezza h si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione uguale a quella di gravità g.

Le leggi che regolano tale moto sono: $h = \frac{1}{2}gt^2$ e $v = gt$, dove t indica il tempo impiegato per arrivare a terra e v la velocità d'impatto al suolo. Attribuendo a g il valore approssimato di 10 m/s^2, come si esprime la velocità v (in m/s) in funzione della quota (in m) da cui inizia la caduta?

- A $v = \sqrt{\dfrac{h}{20}}$
- C $v = \sqrt{\dfrac{2}{10 \cdot h}}$
- B $v = \sqrt{20 \cdot h}$
- D $v = 20 \cdot h$

2. Trascurando l'effetto dell'attrito, indica i fattori da cui dipende la velocità con cui arriva a terra un sacco di sabbia (puoi scegliere più di una risposta).

- A Il peso del sacchetto.
- B La forma del sacchetto.
- C L'altezza da cui cade.
- D La velocità della mongolfiera.
- E Il peso complessivo della mongolfiera.
- F L'accelerazione di gravità.
- G Il tipo di combustibile usato per la mongolfiera.

3. Per determinare le altezze iniziali di caduta dei sacchetti h_1 e h_2, bisogna impostare un sistema nelle incognite h_1 e h_2. Quali sono le due equazioni? (La prima lega h_1 e h_2, la seconda esprime la velocità finale totale dei due sacchi.)

4. Risolvi il sistema e trova le due quote h_1 e h_2 raggiunte dalla mongolfiera. Ricava infine le due velocità con cui ciascun sacchetto tocca il suolo.

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 30 test interattivi in più

1 Una delle seguenti affermazioni è *vera*. Quale?
Il numero delle soluzioni di un'equazione binomia di grado n è:

A n.
B 2 se n è pari.
C 2 se n è dispari.
D 1 se n è pari.
E 1 se n è dispari.

2 Per risolvere l'equazione trinomia

$$36x^4 - 25x^8 + 1 = 0,$$

utilizzando l'incognita ausiliaria z, poniamo:

A $x = z^4$.
B $x = z^8$.
C $z = x^4$.
D $z = x^8$.
E $x^2 = z^4$.

3 Delle equazioni reciproche

$$4x^3 - 5x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \text{e} \quad 4x^3 - 5x^2 + 5x - 4 = 0$$

possiamo dire che:

A sono equivalenti.
B la prima ammette soluzione -1, la seconda $+1$.
C entrambe ammettono la soluzione $+1$.
D entrambe ammettono la soluzione -1.
E entrambe ammettono le soluzioni -1 e $+1$.

4 L'equazione $x^3 = a$ ammette soluzioni:

A per ogni valore di a.
B per nessun valore di a.
C solo per $a = 0$.
D solo per $a < 0$.
E solo per $a \geq 0$.

5 Le soluzioni dell'equazione

$$\sqrt{4 - x} + \sqrt{x - 2} = 2$$

possono appartenere soltanto a uno dei seguenti insiemi. Quale?

A $0 < x < 4$
B $x < 2$
C $0 < x < 2$
D $2 < x < 4$
E $x > 4 \vee x < 2$

6 $x^2 - 7x + 10 = 0$ è l'equazione risolvente di uno dei seguenti sistemi simmetrici. Quale?

A $\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = -7 \end{cases}$
B $\begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 10 \end{cases}$
C $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = -10 \end{cases}$
D $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{cases}$
E $\begin{cases} x + y = -10 \\ xy = -7 \end{cases}$

7 Una delle seguenti proposizioni è *falsa*. Quale?
L'equazione $ax^4 + bx^2 = 0$:

A ha quattro soluzioni reali se $a > 0$ e $b < 0$.
B ha sempre due soluzioni reali coincidenti.
C ha, al massimo, quattro soluzioni reali.
D ha quattro soluzioni reali se $a < 0$ e $b > 0$.
E non ammette alcuna soluzione reale se $a > 0$ e $b > 0$.

8 L'equazione

$$A(x) = B(x)$$

è equivalente all'equazione

$$[A(x)]^n = [B(x)]^n:$$

A se n è dispari.
B se n è pari.
C se n è positivo.
D se n è negativo.
E per nessun valore di n.

9 Solo una fra le seguenti equazioni irrazionali *non* è impossibile. Quale?

A $2\sqrt[5]{x^4} = -3$
B $\sqrt{x^2 - 2} = x - 3$
C $\sqrt{3 + x} + \sqrt{2x + 1} = 0$
D $\sqrt{-2x^2 - 3} = 4$
E $\sqrt{2x^2 - 3} = 4$

SPIEGA PERCHÉ

10 Perché l'equazione $\sqrt[3]{x^2+1} = -1$ è impossibile?

11 L'equazione $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$ non ammette radici reali. Spiega perché applicando la regola di Cartesio.

12 L'equazione $\sqrt[5]{x^2} = -2$ è impossibile, anche se la radice è di indice dispari. Perché?

13 Senza risolvere l'equazione irrazionale $\sqrt{1-x} = x - 3$, puoi stabilire che non ammette soluzioni. Perché?

14 L'equazione $(k+1)x^3 - (k+1)x^2 + kx - k = 0$ ammette come soluzione $x = 1$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$? Perché?

15 L'equazione $(a^2-4)x^4 - (a+3)x^2 - 1 = 0$ è una equazione biquadratica $\forall\, a \in \mathbb{R}$?

16 L'equazione $(a+1)x^4 + a = 0$ ammette radici reali solo se $-1 < a \le 0$. Perché?

17 Perché l'equazione $ax^6 + bx^3 + c = 0$, con $a \ne 0$, ammette radici reali solo se $b^2 - 4ac \ge 0$?

18 Perché un sistema di quinto grado *non* può contenere un'equazione di secondo grado?

19 Perché il sistema simmetrico del tipo $\begin{cases} x^3 + y^3 = a \\ x + y = s \end{cases}$ è impossibile se $s = 0$ e $a \ne 0$?

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 50 esercizi in più

Risolvi le seguenti equazioni nell'incognita *x*.

20 $27x^3 - 3375 = 0$ $[5]$

21 $2x^3 + 7x^2 + 8x + 3 = 0$ $\left[-\frac{3}{2};\ -1\right]$

22 $32x^{10} + 275x^5 + 243 = 0$ $\left[-\frac{3}{2};\ -1\right]$

23 $3x^3 + x^2 - 12x - 4 = 0$ $\left[-2;\ -\frac{1}{3};\ 2\right]$

24 $4x^4 + 45 - 29x^2 = 0$ $\left[\pm\frac{3}{2};\ \pm\sqrt{5}\right]$

25 $x^2(2x-3)(2x+3) + 2 = 0$ $\left[\pm\frac{1}{2};\ \pm\sqrt{2}\right]$

26 $6x^3 + 1 - 7x^2 = 0$ $\left[-\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ 1\right]$

27 $625x^8 - 609x^4 - 16 = 0$ $[\pm 1]$

28 $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ $\left[-1;\ \frac{1}{2};\ 2\right]$

29 $2x^2 = \dfrac{2x^3 - 11x^2 + 3}{2x^2 + x}$ $\left[+\frac{1}{2}\right]$

---

30 $(2x^2-3)(4x+1) + 2x^2 = (2x-1)(2x-5) - 9$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

31 $12x^4 - 49x^3 + 74x^2 - 49x + 12 = 0$ $\left[1;\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{3}\right]$

32 $(x^2 - 3a^2)(x^2 + 3a^2) - 6a^2x^2 = (x^2 - 2a^2)(a^2 - 3x^2) - 10a^4$ $\left[\pm\sqrt{3}a;\ \pm\frac{1}{2}a\right]$

33 $(3x^2 - 10)^5 = 32$ $[\pm 2]$

34 $\sqrt{2}(x^4 - 1) = 3x(x^2 - 1)$ $\left[\pm 1;\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ \sqrt{2}\right]$

35 $\dfrac{x^3-1}{x-2}-\dfrac{2x^2-3}{x+2}=\dfrac{4-7x^2-2x}{4-x^2}$ [impossibile]

36 $x^4(x^2-a^2)(x^2+a^2)-16b^4(a^2-x^2)(a^2+x^2)=0 \qquad (b \neq 0)$ $[\pm a]$

37 $\dfrac{4x^3-1}{3x-1}-\dfrac{x^3+3}{3x+1}=\dfrac{12x-5x^3-19x^2}{1-9x^2}$ $[\pm\sqrt{2}]$

38 $(9x^2+\sqrt{2})(4x^2-3\sqrt{2})=2(\sqrt{2}x^2-7)$ $\left[\pm\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2};\ \pm\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{2}\right]$

39 $(6x^2-4)^3-485x^3=8x^2(36-54x^2)$ $\left[-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{4}{3}\right]$

40 $2x(1-27x^2)-(8x^3-3)(3x-8)=x-77x^2$ $\left[2;\ \dfrac{1}{2};\ -\dfrac{3}{4};\ -\dfrac{4}{3}\right]$

41 $(2x^2-3)(3x^2+2)-11x=(x-13x^2)(x+2)+20x^2$ $\left[\pm 1;\ -\dfrac{2}{3};\ -\dfrac{3}{2}\right]$

42 $2x^3+(\sqrt{2}-6)x=6-(\sqrt{2}+2)x^2$ $\left[-1;\ -\dfrac{3}{2}\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$

43 $(2x^2-\sqrt{3})(2x^2+2\sqrt{2})-5\sqrt{2}x^2=\sqrt{3}(2x^2-3\sqrt{2})$ $\left[\pm\sqrt[4]{3};\ \pm\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con controllo mediante condizioni.

44 $\sqrt{x+1}=5$ [24]

45 $\sqrt{x+1}=x-1$ [3]

46 $\sqrt{(x-1)(x+7)}-2=2x-3$ $\left[2;\ \dfrac{4}{3}\right]$

47 $\sqrt{\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{2x-8}{4}+\dfrac{1-x}{6}}=2$ $[-14]$

48 $\dfrac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+6}=\dfrac{3x-10}{(3\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+6)}$ $\left[\dfrac{9}{25}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali.

49 $\sqrt{x^2-x+2}=x+3$ $[-1]$

50 $\sqrt{x+11}-1=\sqrt{x+4}$ [5]

51 $\sqrt{x^2-2x+1}=3x-\dfrac{1}{3}$ $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

52 $\sqrt{(x-3)\left(x-\dfrac{7}{5}\right)}=\dfrac{2x-3}{4}+\dfrac{9x-5}{6}+\dfrac{25}{12}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

53 $\sqrt{x-1}=2-\sqrt{2x+1}$ $[10-4\sqrt{5}]$

54 $\sqrt{4x^2-7}=(x-1)(x+1)$ $[-2;\ -\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ 2]$

55 $\dfrac{3x-7}{\sqrt{3x^2-7}}+\sqrt{3}x=\sqrt{3x^2-7}$ $\left[\dfrac{5}{3}\right]$

Risolvi i seguenti sistemi nelle incognite x, y e z (dove compare).

56 $\begin{cases} x=4 \\ y^2+2x=12 \end{cases}$ $[(4;2),(4;-2)]$

57 $\begin{cases} y=3 \\ x^2-2y=2 \end{cases}$ $[(2\sqrt{2};3),(-2\sqrt{2};3)]$

58 $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x^2+y^2=2x-2y \end{cases}$ $\left[(2;0),\left(\dfrac{4}{5};-\dfrac{12}{5}\right)\right]$

59 $\begin{cases} x+y=2 \\ (x-2)^2+2xy=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2};\dfrac{4-\sqrt{10}}{2}\right),\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{2};\dfrac{4+\sqrt{10}}{2}\right)\right]$

60 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-y+\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}(y+2)(y-2)=3x-4\sqrt{2} \end{cases}$ $\left[\left(2\sqrt{2}-\sqrt{6};\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right),\left(2\sqrt{2}+\sqrt{6};\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)\right]$

---

61 $\begin{cases} x-y=-b \\ \dfrac{y^2}{ab}-\dfrac{y}{a}-\dfrac{2x}{b}=0 \end{cases}$ $[(0;b),(2a-b;2a)]$

62 $\begin{cases} x^2+y^2-ax-by=0 \\ bx+ay=ab \end{cases}$ $[(a;0),(0;b)]$

63 $\begin{cases} x-y=2 \\ \dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{x}=3 \end{cases}$ $\left[(3;1),\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3}\right)\right]$

64 $\begin{cases} x+y=1 \\ \dfrac{1-x}{y}-\dfrac{y}{x-1}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$ [(1; 0) non accettabile]

65 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z+1=0 \\ y^2+yz-x=0 \end{cases}$ $\left[(1;-1;0),\left(0;-\dfrac{1}{2};+\dfrac{1}{2}\right)\right]$

66 $\begin{cases} x+z=3 \\ y=5+z \\ x^2+y^2+2xy=4 \end{cases}$ [impossibile]

67 $\begin{cases} 2xy=5 \\ x+y=\dfrac{7}{2} \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{5}{2};1\right),\left(1;\dfrac{5}{2}\right)\right]$

68 $\begin{cases} x+y=4\sqrt{3} \\ x^2+y^2=30 \end{cases}$ $[(\sqrt{3};3\sqrt{3}),(3\sqrt{3};\sqrt{3})]$

69 $\begin{cases} x^2+y^2=5a^2-2a+1 \\ x+y=3a-1 \end{cases}$ $[(2a;a-1),(a-1;2a)]$

70 $\begin{cases} abx+a=b-aby \\ xy=-\dfrac{1}{ab} \end{cases}$ $(ab\neq 0)$ $\left[\left(\dfrac{1}{a};-\dfrac{1}{b}\right),\left(-\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{a}\right)\right]$

71 $\begin{cases} x+y=2 \\ x^3+y^3=\dfrac{7}{2} \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)\right]$

72 $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ xy=-2 \end{cases}$ $[(1+\sqrt{3};1-\sqrt{3}),(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}),(-1-\sqrt{3};-1+\sqrt{3}),(-1+\sqrt{3};-1-\sqrt{3})]$

73 $\begin{cases} 2x+2y+xy=-4 \\ x+y+2xy=-11 \end{cases}$ $[(3;-2),(-2;3)]$

74 $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \\ 2x^2+xy-3y^2=0 \end{cases}$ $[(\alpha;\alpha)\ \forall\alpha\in\mathbb{R}]$

75 $\begin{cases} -3x^2 - 2xy + y^2 = 0 \\ x^2 - xy + 2y^2 = 8 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right), (\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}; \sqrt{2})\right]$

76 $\begin{cases} 3x^2 + xy + y^2 = 15 \\ \frac{2}{3}x^2 - xy + 2y^2 = 5 \end{cases}$ $\left[(\sqrt{3}; \sqrt{3}), (-\sqrt{3}; -\sqrt{3}), \left(5\sqrt{\frac{15}{71}}; -\sqrt{\frac{15}{71}}\right), \left(-5\sqrt{\frac{15}{71}}; \sqrt{\frac{15}{71}}\right)\right]$

Problemi

77 La somma delle aree di due quadrati è 250 cm^2 e il semiprodotto delle due diagonali è 117 cm^2. Determina l'area dei due quadrati costruiti sulle diagonali. [162 cm^2; 338 cm^2]

78 La diagonale di un rettangolo è lunga $5a$ e l'area misura $10a^2$. Calcola il perimetro e l'area del quadrato costruito sulla dimensione minore del rettangolo. [$4a\sqrt{5}$; $5a^2$]

79 Calcola il perimetro di un rettangolo di area 50 cm^2, sapendo che il rapporto fra i lati è uguale a $\frac{1}{2}$. [30 cm]

80 Il prodotto di due numeri è 54 e la somma dei reciproci è $\frac{5}{18}$. Individua i due numeri. [6; 9]

81 La somma dei reciproci di due numeri vale $\frac{19}{90}$ e il prodotto del doppio del primo per la terza parte del secondo è uguale a 60. Individua i due numeri. [10; 9]

82 Determina il perimetro di un triangolo isoscele, sapendo che l'altezza relativa alla base è 9 cm e la somma della base con il lato obliquo vale 39 cm. [54 cm]

83 Per quali valori del parametro a l'equazione $a\sqrt{x+1} = 2 - a$ è impossibile? [$a \leq 0 \vee a > 2$]

84 Considera l'equazione $(a - 16)b^4 - 81 = 0$.
a) Se la variabile è b, per quali valori del parametro a essa ammette soluzioni reali?
b) Se la variabile è a, per quali valori del parametro b essa *non* ammette soluzioni reali? [a) $a > 16$; b) $b = 0$]

85 Pensa un numero; elevalo alla quarta potenza e poi sottrai 1. Raddoppia il tutto. Se aggiungi il numero che hai pensato, ottieni il cubo dello stesso numero. Qual è questo numero? Ne esiste uno solo? [1; -1]

86 Per quali valori di x la frazione algebrica $\frac{3x^4 - 2x^2 - 1}{27x^7 + x + 27x^6 + 1}$ è equivalente a $\frac{x - 1}{9x^4 - 3x^2 + 1}$?
[$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq -1$]

87 Scrivi due monomi la cui somma è $12a$ e il cui prodotto è $35a^2$. [$7a$; $5a$]

88 Determina due numeri naturali sapendo che il loro rapporto è $\frac{4}{5}$ e la somma dei loro quadrati è 369. [12; 15]

89 In un triangolo rettangolo l'area misura $18a^2$ e un cateto supera l'altro di $5a$. Determina la misura dei due cateti. [$4a$; $9a$]

90 Il perimetro di un rettangolo è $30a$ e la diagonale è lunga $5a\sqrt{5}$. Calcola l'area di un quadrato avente il lato di lunghezza uguale ai $\frac{3}{2}$ della lunghezza del lato maggiore del rettangolo. [$225a^2$]

91 L'area di un rombo è 28 cm^2 e il lato è $\frac{\sqrt{113}}{2}$ cm. Calcola il perimetro di un trapezio isoscele avente il lato obliquo di 10 cm e le due basi congruenti alle diagonali del rombo. [35 cm]

92 Se dividi gli anni di Andrea per quelli di Francesco, ottieni 2 come quoziente e 1 come resto; se invece dividi i quadrati dei loro anni, ottieni 4 come quoziente e 25 come resto. Quanti anni hanno, rispettivamente, Andrea e Francesco? [13 e 6]

93 Determina quali numeri razionali hanno le seguenti caratteristiche: la somma del numeratore con il denominatore è 7, la somma del numero stesso con il suo inverso dà per risultato $\frac{25}{12}$. $\left[\frac{3}{4}; \frac{4}{3}\right]$

94 Trova il punto di intersezione, situato nel secondo quadrante, fra la parabola di equazione $y = -x^2 + 6x + 16$ e la retta di equazione $y = 9x + 18$. $[(-1; 9)]$

95 Determina le coordinate del punto intersezione della parabola $y = 2x^2 + 4x - 2$ con la retta parallela all'asse della parabola passante per il punto $P(-2; 6)$. $[(-2; -2)]$

96 Scrivi l'equazione della retta che interseca la parabola $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ nei due punti di ascissa 0 e 3. $[4y - 3x + 4 = 0]$

97 È data la parabola di equazione $y = -x^2 - 2x + 3$. Dopo aver determinato le equazioni delle rette a essa tangenti uscenti dal punto $C(-1; 8)$, trova le coordinate dei punti di intersezione A e B delle tangenti con l'asse x. Calcola l'area del triangolo ABC. [$y = 4x + 12$, $y = -4x + 4$; area = 16]

98 Calcola il perimetro del rettangolo avente area uguale ad a e diagonale uguale a d. $[2\sqrt{d^2 + 2a}]$

99 Anna e Luca possiedono delle biglie. Anna ne possiede più di Luca. Sapendo che la differenza tra i numeri di biglie possedute dai due bambini è 2 e il prodotto è 80, trova il numero di biglie di Anna. [10]

100 La somma delle radici quadrate di due numeri è 3; il rapporto fra la somma dei due numeri e la radice quadrata del loro prodotto è 2. Quali sono i due numeri? $\left[\frac{9}{4}; \frac{9}{4}\right]$

101 Determina le coordinate dei punti del piano che verificano contemporaneamente le equazioni:
$x^2 + y^2 + 3x - 2y + 2 = 0$ e $x^2 + y^2 + 5x + y - 2 = 0$. $\left[(-1; 2); \left(-\frac{10}{13}; \frac{24}{13}\right)\right]$

102 Un ciclista parte da Pesaro per andare verso Ancona e, nello stesso istante, parte un motociclista che va da Ancona verso Pesaro, seguendo la stessa strada. L'incontro fra il ciclista e il motociclista avviene dopo mezz'ora dalla partenza. Il ciclista arriva ad Ancona un'ora e mezzo dopo che il motociclista è arrivato a Pesaro. Determina le velocità medie di entrambi, sapendo che la distanza tra Pesaro e Ancona è di 65 km. [ciclista = 30 km/h, motociclista = 100 km/h]

103 Due rimorchiatori trainano una nave verso il porto. I cavi delle corde di traino formano tra loro un angolo di 90° e la risultante delle forze dei due rimorchiatori è $10 \cdot 10^3$ N. Sapendo che la somma delle intensità di tali forze è $14 \cdot 10^3$ N, determina le misure delle intensità di ciascuna forza. $[6 \cdot 10^3\ \text{N}; 8 \cdot 10^3\ \text{N}]$

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 8 esercizi in più

104 TEST Data l'equazione

$$4 = \sqrt{7 + \sqrt{9 + \sqrt{4 + x}}},$$

quanto vale x?

A 36
B 46
C 56
D 68
E 5180

(*Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede*, 1997)

105 TEST Quante soluzioni reali ha il sistema

$$\begin{cases} x^2y = 150 \\ x^3y^2 = 4500 \end{cases}?$$

A Nessuna.
B Una.
C Più di una, ma meno di cinque.
D Un numero finito, ma almeno cinque.
E Infinite.

(*Olimpiadi della matematica, Gara provinciale*, 1999)

106 TEST Per quanti valori del parametro reale k il sistema $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 8x^3 + y^3 = k \end{cases}$ ha una e una sola soluzione reale?

A 1
B 2
C 3
D 6
E Non si può determinare.

(*Olimpiadi della matematica, Gara provinciale*, 1996)

107 Determina le coordinate dei punti del piano che verificano contemporaneamente le equazioni:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 3x + y - 10 = 0. \qquad [(2; 3), (-2; -1)]$$

108 Risolvi il seguente sistema riconducendolo a un sistema simmetrico.

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ xy = -18 \end{cases} \qquad [(6; -3), (3; -6)]$$

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 8 esercizi in più

109 Suppose 1 and -7 are roots of

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \text{ and } a + b = -15.$$

Find the final root.

(USA *North Carolina State: High School Mathematics Contest*, 2002)

[2]

110 The concentration of a drug, in parts per million, in a patient's blood x hours after the drug is administered is given by the function

$$f(x) = -x^4 + 12x^3 - 58x^2 + 132x.$$

How many hours after the drug is administered will it be eliminated from the bloodstream?

(USA *Southeast Missouri State University: Math Field Day*, 2005)

[6]

111 TEST How many different real numbers satisfy the equation below?

$$(x^2 + 4x - 2)^2 = (5x^2 - 1)^2$$

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2003)

112 If $\sqrt{n^3 + n^3 + n^3 + n^3 + n^3} = 25$, then $n = \dots$

(USA *Lehigh University: High School Math Contest*, 2001)

[5]

TEST

113 If a e b are roots of $2\sqrt{2x + 4} - 2 = x$, then $ab =$

A 0 B 4 C -12 D -4 E 12

(USA *Tennessee Mathematics Teachers Association: 39th Annual Mathematics Contest*, 1995)

GLOSSARY

to administer: somministrare
blood: sangue
bloodstream: circolazione sanguigna
concentration: concentrazione
drug: medicinale
equation: equazione
root: radice (soluzione)
to suppose: supporre

CAPITOLO 14

Le disequazioni di secondo grado

Body Mass Index

Una prima indicazione sullo stato del peso forma di una persona è data dal BMI (dall'inglese *Body Mass Index*), definito come il rapporto tra la massa (in kg) e il quadrato dell'altezza (in m). Di recente l'Organizzazione Mondiale della Sanità ha fissato nuovi criteri per classificare lo stato di sottopeso, normopeso, sovrappeso e obesità di una persona a seconda dell'indice di massa corporea…

…considerato un peso di 70 kg, per quali fasce di altezza possiamo ritenere una persona sottopeso, normale, sovrappeso o obesa?

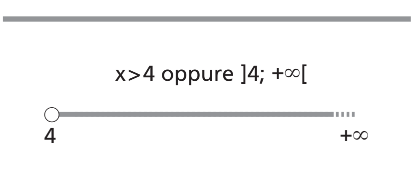
➡ La risposta a pag. 1062

1. Le disequazioni

Chiamiamo **disequazione** una disuguaglianza in cui compaiono espressioni letterali per le quali cerchiamo i valori di una o più lettere che rendono la disuguaglianza vera.

Le lettere per le quali si cercano i valori sono le **incognite**.
Ci occuperemo per il momento soltanto di disequazioni con un'unica incognita.

I valori che soddisfano una disequazione costituiscono l'insieme delle **soluzioni**, che può essere rappresentato in diversi modi. Per esempio, l'insieme delle soluzioni della disequazione $x - 4 > 0$ è quello della figura 1.



◄ **Figura 1** Nella rappresentazione mediante intervallo,]4; + ∞[, la parentesi aperta] significa che il valore 4 è escluso. Graficamente ciò si realizza disegnando un pallino vuoto.

Due disequazioni che hanno lo stesso insieme di soluzioni si dicono **equivalenti**.

Valgono i seguenti **princìpi di equivalenza**:

- **primo principio di equivalenza**:
data una disequazione, si ottiene una disequazione a essa equivalente aggiungendo a entrambi i membri uno stesso numero (o espressione);
- **secondo principio di equivalenza**:
per trasformare una disequazione in una equivalente è possibile moltiplicare o dividere entrambi i membri per uno stesso numero (o espressione) positivo. In alternativa, si possono moltiplicare o dividere entrambi i membri per uno stesso numero (o espressione) negativo e cambiare il verso della disequazione.

Per esempio, per il primo principio di equivalenza,

$$4x > -3$$

è equivalente a:

$$4x + 2 > -3 + 2.$$

Per il secondo principio di equivalenza,

$$2x > -5$$

è equivalente a:

$$\frac{2x}{2} > \frac{-5}{2}$$

e a:

$$\frac{2x}{-2} < \frac{-5}{-2}.$$

Per il primo principio **un termine può essere trasportato da un membro all'altro di una disequazione, cambiando il suo segno**.
Per il secondo principio **se si cambia il segno di tutti i termini di una disequazione e si inverte il suo verso, si ottiene una disequazione equivalente**.

Le disequazioni lineari numeriche intere

Una disequazione è:

- **lineare** se l'incognita è di primo grado;
- **numerica** se non compaiono altre lettere oltre all'incognita;
- **intera** se l'incognita compare soltanto nei numeratori delle eventuali frazioni presenti.

Per risolvere una disequazione lineare numerica intera passiamo dalla disequazione a disequazioni equivalenti sempre più semplici applicando i princìpi di equivalenza.

ESEMPIO Risolviamo la disequazione:

$$3x - \frac{5}{2} < x.$$

Applichiamo il secondo principio di equivalenza moltiplicando entrambi i membri per 2:

$$6x - 5 < 2x.$$

Applichiamo il primo principio trasportando i termini in cui è presente l'incognita al primo membro e gli altri al secondo:

$$6x - 2x < 5.$$

Riduciamo i termini simili:

$$4x < 5.$$

Applichiamo il secondo principio dividendo i due membri per 4, cioè per il coefficiente dell'incognita:

$$x < \frac{5}{4}.$$

Possiamo scrivere la soluzione anche così:

$$\left]-\infty; \frac{5}{4}\right[.$$

Lo studio del segno di un prodotto

Consideriamo una disequazione costituita da un prodotto di binomi:

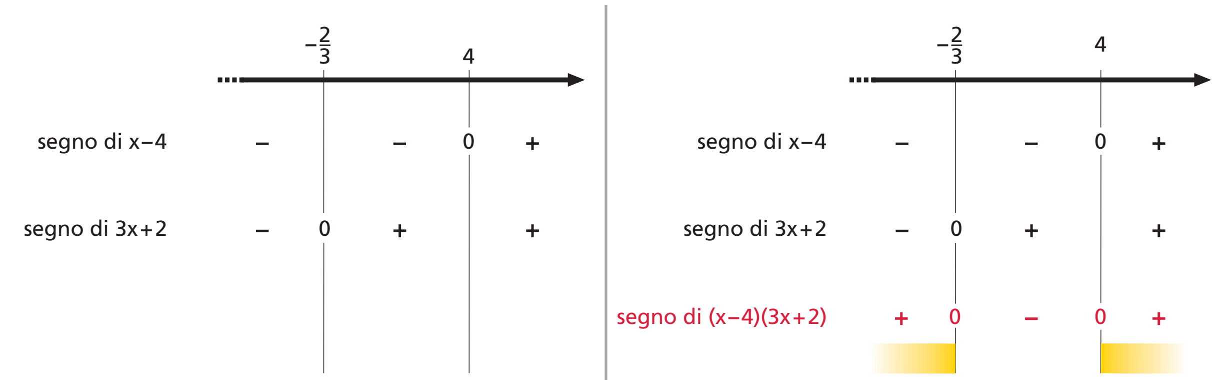
$$(x-4)(3x+2)>0.$$

Per risolverla bisogna **studiare il segno** del prodotto al variare dell'incognita x.
Studiamo il segno dei due fattori singolarmente e rappresentiamo i risultati in uno schema grafico:

$$x-4>0 \quad \rightarrow \quad x>4$$

$$3x+2>0 \quad \rightarrow \quad x>-\frac{2}{3}.$$

▼ **Figura 2**



a. Rappresentiamo i valori $-\frac{2}{3}$ e 4 sulla retta orientata e, per indicare il segno di $x-4$ e di $3x+2$, mettiamo il segno + negli intervalli con segno positivo e segno − negli intervalli con segno negativo. Scriviamo 0 dove i binomi si annullano.

b. Applichiamo la regola dei segni in ognuno degli intervalli. Per esempio, per $x<-\frac{2}{3}$, si ha $- \cdot - = +$.
Per $x=-\frac{2}{3}$ e $x=4$ il prodotto è 0.

La disequazione richiede che il prodotto sia positivo, quindi l'insieme delle soluzioni è dato da

$$x<-\frac{2}{3} \vee x>4.$$

Possiamo rappresentare le soluzioni anche in altri due modi (figura 3), mediante:

- *rappresentazione grafica*: un cerchietto pieno indica che il valore corrispondente è una soluzione, uno vuoto che non è soluzione;
- *rappresentazione con intervalli*: la parentesi è rivolta verso l'interno se il valore estremo dell'intervallo è soluzione, verso l'esterno se non lo è.

◀ **Figura 3**

$$x \in \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[\cup \left]4; +\infty\right[$$

2. Il segno di un trinomio di secondo grado

Consideriamo il trinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, e studiamo il suo segno.

Per farlo, consideriamo l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ e distinguiamo tre casi.

L'equazione associata ha $\boldsymbol{\Delta > 0}$

ESEMPIO Studiamo il segno del trinomio:

$$3x^2 + 5x - 2.$$

L'equazione associata è $3x^2 + 5x - 2 = 0$, con $\Delta = 49 > 0$.
Le radici dell'equazione sono:

$$x_1 = -2,\; x_2 = \frac{1}{3}.$$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49$

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$.

Possiamo scrivere il trinomio come prodotto di tre fattori:

$$3x^2 + 5x - 2 = 3(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Studiamo il segno del prodotto (figura 4).

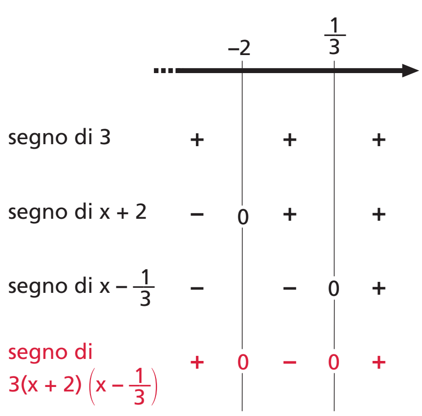
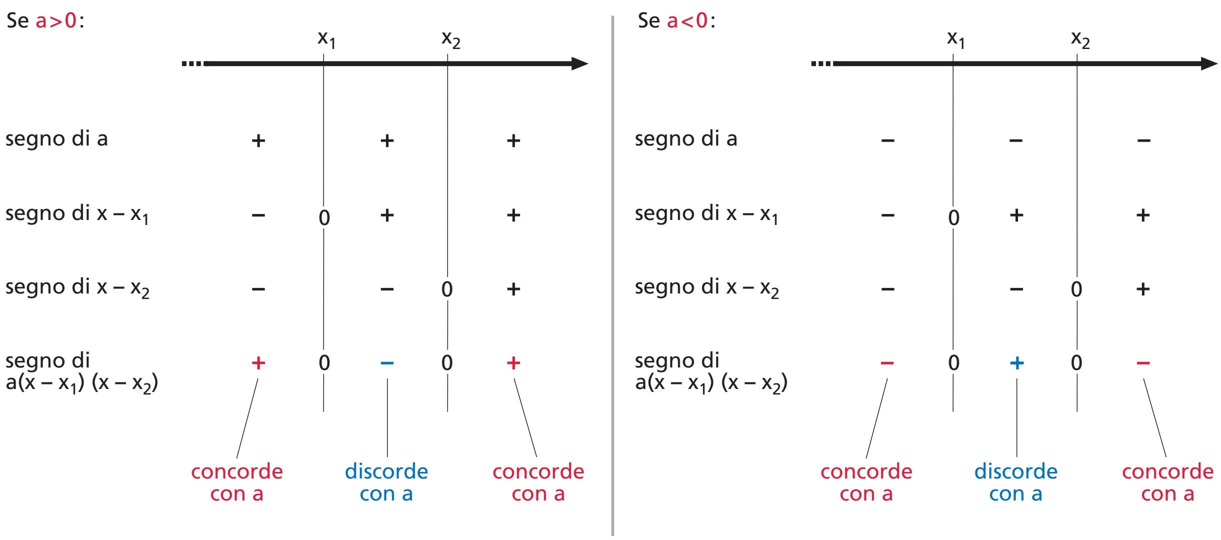


Figura 4

In generale, se $\Delta > 0$, l'equazione associata al trinomio ha due radici distinte x_1 e x_2 e possiamo scrivere:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Supponiamo $x_1 < x_2$ e studiamo il segno del prodotto a seconda del segno di a (figura 5).



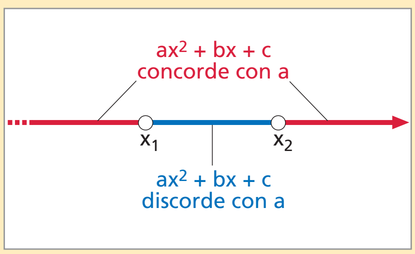
▲ **Figura 5**

Se si guarda se il segno del trinomio è concorde o discorde con a, si ottiene un'unica regola, qualsiasi sia il segno di a.

REGOLA

Se il trinomio $ax^2 + bx + c$ (con $a > 0$) ha equazione associata avente $\Delta > 0$, esso ha segno:

- concorde con a per valori esterni all'intervallo individuato dalle radici dell'equazione associata;
- discorde con a per valori interni all'intervallo delle radici.



L'equazione associata ha $\Delta = 0$

ESEMPIO Studiamo il segno del trinomio:

$$4x^2 + 20x + 25.$$

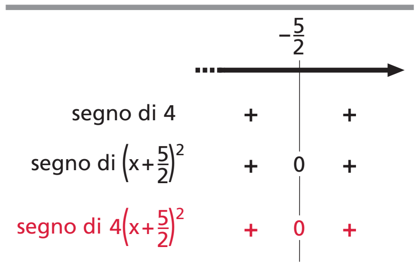
L'equazione associata è $4x^2 + 20x + 25 = 0$, con $\Delta = 0$.
La radice doppia dell'equazione è:

$$x_1 = x_2 = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}.$$

Scomponiamo in fattori il trinomio:

$$4x^2 + 20x + 25 = 4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2.$$

Studiamo il segno del prodotto (figura 6).

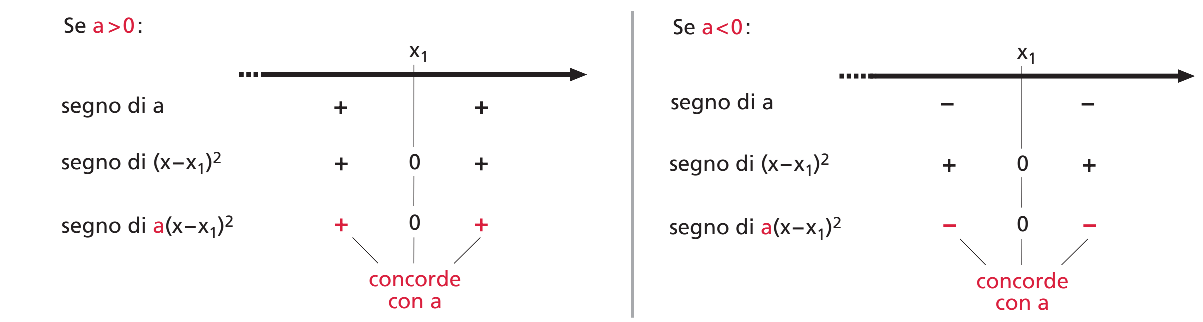


◀ **Figura 6**
4 è sempre positivo; $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2$ è il quadrato di un binomio, quindi è positivo per ogni x diverso da $-\frac{5}{2}$, valore per cui si annulla.
Quindi il trinomio $4x^2 + 20x + 25$ è concorde con il coefficiente 4 per $x \neq -\frac{5}{2}$.

In generale, se $\Delta = 0$, l'equazione associata al trinomio $ax^2 + bx + c$ ha una radice doppia $x_1 = x_2$ e possiamo scrivere:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

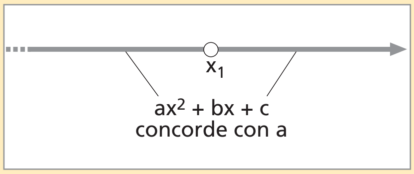
Studiamo il segno del prodotto a seconda del segno di a (figura 7).



▲ Figura 7

REGOLA

Se il trinomio $ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) ha equazione associata avente $\Delta = 0$, esso ha segno concorde con a per tutti i valori diversi dalla radice dell'equazione associata.



L'equazione associata ha $\Delta < 0$

ESEMPIO Studiamo il segno del trinomio:

$$2x^2 - 12x + 19.$$

L'equazione associata è:

$$2x^2 - 12x + 19 = 0, \text{ con } \Delta = 144 - 152 = -8 < 0.$$

Poiché l'equazione non ha radici reali, non possiamo scomporre il trinomio in fattori. Utilizziamo allora il *metodo del completamento del quadrato* per trasformare il trinomio.

Raccogliamo 2, in modo che il coefficiente di x^2 sia 1:

$$2\left(x^2 - 6x + \frac{19}{2}\right).$$

Il termine $6x$ può essere scritto come prodotto $2 \cdot x \cdot 3$, cioè come doppio prodotto di x e di 3. Pertanto aggiungiamo e togliamo all'interno delle parentesi il quadrato di 3:

$$2\left(x^2 - 6x + \frac{19}{2} + 9 - 9\right).$$

Il trinomio $x^2 - 6x + 9$ è il quadrato del binomio $x - 3$, quindi:

$$2\left[(x-3)^2 + \frac{19}{2} - 9\right] = 2\left[(x-3)^2 + \frac{1}{2}\right].$$

La somma fra parentesi quadre risulta positiva per ogni valore reale di x, perché è la somma di un addendo positivo o nullo e di un addendo positivo.

Quindi il trinomio $2x^2 - 12x + 19$, che è equivalente all'espressione ottenuta, è sempre positivo, ossia concorde con il coefficiente 2.

L'addendo $(x-3)^2$ può anche essere nullo, ma la somma è comunque positiva.

In generale, considerato il trinomio $ax^2 + bx + c$, raccogliamo $a (a \neq 0)$:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Il termine $\frac{b}{a}x$ può essere visto come il doppio prodotto $2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a}$; aggiungiamo e togliamo all'interno delle parentesi il quadrato di $\frac{b}{2a}$:

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right].$$

Il trinomio $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ è il quadrato del binomio $x + \frac{b}{2a}$:

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right].$$

Sommiamo le due frazioni $+\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$:

$$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac - b^2}{4a^2} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{-\Delta}{4a^2}.$$

Abbiamo trasformato il trinomio $ax^2 + bx + c$ nel seguente:

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right].$$

Essendo $\Delta < 0$, l'espressione $\frac{-\Delta}{4a^2}$ è positiva. Anche la somma dentro le parentesi quadre è allora positiva per ogni valore di x.

Pertanto il trinomio assume sempre lo stesso segno del coefficiente a.

REGOLA

Se il trinomio $ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) ha equazione associata avente $\Delta < 0$, esso ha segno concorde con a per ogni valore reale.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▸ V46a

3. La risoluzione delle disequazioni di secondo grado intere

Ogni disequazione di secondo grado intera nell'incognita x può essere ricondotta alla forma normale:

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ oppure } ax^2 + bx + c < 0, \text{ con } a \neq 0.$$

◗ Può anche essere $\geq$ oppure $\leq$.

Possiamo sempre fare riferimento ai casi in cui il coefficiente a di x^2 è positivo.
In caso contrario, basta moltiplicare i due membri della disequazione per -1 e cambiare il verso della disequazione applicando il secondo principio di equivalenza.

◗ La disequazione $-x^2 + 5x - 6 < 0$, avente il primo coefficiente negativo, diventa $x^2 - 5x + 6 > 0$ se moltiplichiamo entrambi i membri per -1.

La risoluzione algebrica

ESEMPIO

1. Risolviamo la disequazione:

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 > 0.$$

Il trinomio $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ ha equazione associata:

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 6x + 8 = 0 \;\rightarrow\; x = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$$

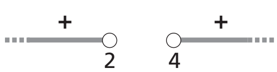
◗ $\frac{\Delta}{4} = 1$

$x = 3 \pm 1 = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$

Poiché cerchiamo i valori di x per cui il trinomio è positivo, cioè concorde con $\frac{1}{2}$, per la regola vista nel paragrafo precedente, dobbiamo considerare valori esterni all'intervallo delle radici trovate.

Quindi la disequazione è verificata per:

$$x < 2 \;\vee\; x > 4.$$



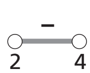
valori esterni

2. Se invece dobbiamo risolvere la disequazione

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 < 0,$$

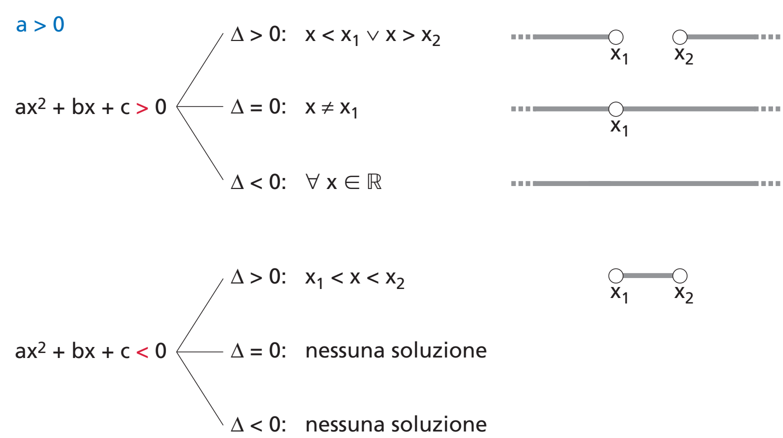
cerchiamo i valori di x per cui il trinomio è negativo, cioè discorde con $\frac{1}{2}$. Dobbiamo allora considerare valori interni all'intervallo delle radici. Quindi la disequazione è verificata per:

$$2 < x < 4.$$



valori interni

In generale, tenendo conto delle regole dello studio del segno, abbiamo lo schema seguente.



◄ Figura 8

Considereremo esempi dei vari casi negli esercizi guida.

Le disequazioni con $\geq$ o $\leq$

Le disequazioni in cui compaiono i segni $\geq$ o $\leq$ si risolvono analogamente a quelle in cui compaiono i segni $>$ o $<$, tenendo conto che:

1. $ax^2 + bx + c \geq 0$ è equivalente a

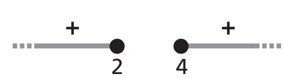
$$ax^2 + bx + c > 0 \;\vee\; ax^2 + bx + c = 0;$$

quindi, l'insieme delle soluzioni della disequazione $ax^2 + bx + c \geq 0$ è l'unione delle soluzioni della disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ e delle soluzioni dell'equazione associata.
Per esempio,

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 \geq 0$$

ha come soluzioni:

$$x \leq 2 \;\vee\; x \geq 4.$$



valori esterni

2. $ax^2 + bx + c \leq 0$ equivale a:

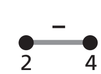
$$ax^2 + bx + c < 0 \;\vee\; ax^2 + bx + c = 0.$$

Per esempio,

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 \leq 0$$

ha come soluzioni:

$$2 \leq x \leq 4.$$



valori interni

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V46g

La risoluzione grafica

ESEMPIO

1. Consideriamo ancora la disequazione:

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 > 0.$$

Per risolverla graficamente associamo alla disequazione la parabola di equazione:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4.$$

Poiché compare il segno $>$, risolvere la disequazione significa risolvere $y > 0$, ossia *individuare le ascisse dei punti della parabola che hanno ordinata positiva*.
La parabola (figura 9*a*) interseca l'asse x nei punti $A(2; 0)$ e $B(4; 0)$.
I punti che hanno $y > 0$ sono quelli con ascissa minore di 2 oppure maggiore di 4 (le due semirette rosse della figura 9*b*).
La disequazione è quindi verificata per:

$$x < 2 \ \vee \ x > 4.$$

2. Lo stesso grafico può essere utilizzato per risolvere la disequazione con verso opposto, ossia:

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 < 0.$$

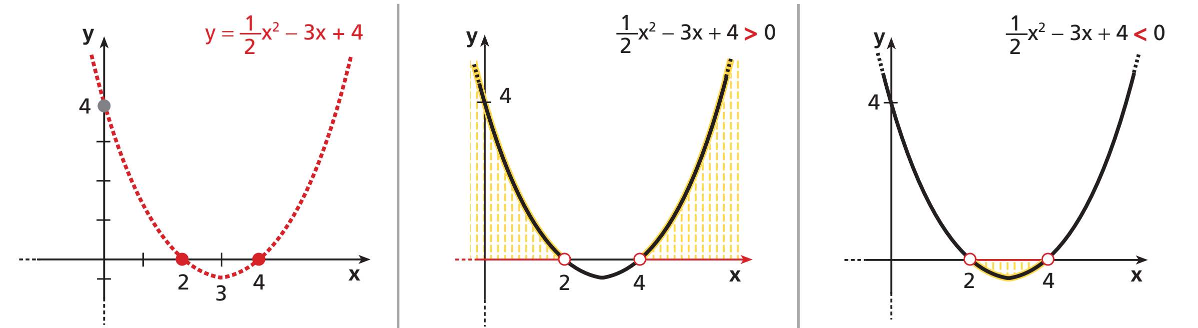
Poiché compare il segno $<$, risolvere la disequazione significa *individuare le ascisse dei punti della parabola di ordinata negativa* $(y < 0)$.
Tali punti sono quelli che hanno ascissa compresa fra 2 e 4 (figura 9*c*).
La disequazione è dunque verificata per:

$$2 < x < 4.$$

▶ I punti di intersezione con l'asse x si ottengono ponendo, nell'equazione della parabola, $y = 0$, ossia risolvendo l'equazione

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$\frac{\Delta}{4} = 1$$
$$x = 3 \pm 1 = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$$

▼ **Figura 9**



a. La parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ interseca l'asse x nei punti di ascissa 2 e 4.

b. I punti della parabola con $y > 0$ appartengono alla parte della curva che «sta sopra» l'asse x. Tali punti hanno ascissa maggiore di 4 o minore di 2.

c. I punti della parabola con $y < 0$ appartengono alla parte della curva che «sta sotto» l'asse x e hanno ascissa compresa tra 2 e 4.

Le soluzioni di $ax^2 + bx + c > 0 \ \ (a > 0)$

Per dare un'interpretazione grafica della disequazione di secondo grado

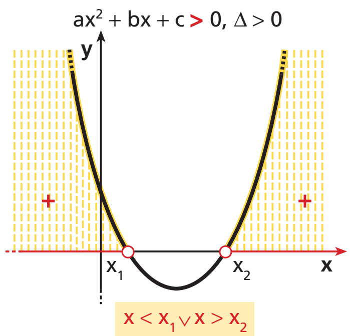
$$ax^2 + bx + c > 0,$$

- si disegna la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$;
- si cercano gli eventuali punti di intersezione della parabola con l'asse x;
- si considera la parte di parabola che sta nel semipiano dei punti di ordinate positive ($y > 0$).

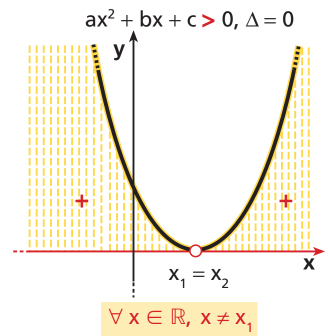
Le soluzioni della disequazione sono date dalle ascisse dei punti della parabola che hanno ordinata positiva.

Si possono presentare tre casi diversi, ossia che la parabola $y = ax^2 + bx + c$ intersechi l'asse x in due punti, in un punto o in nessun punto (figura 10).

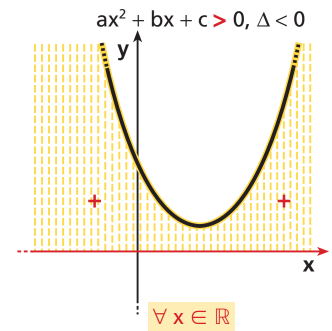
L'ipotesi $a > 0$ ci dice che la parabola volge la concavità verso l'alto.



a. La parabola interseca l'asse x in due punti: x_1 e x_2. Le soluzioni della disequazione sono $x < x_1 \vee x > x_2$.



b. La parabola interseca l'asse x in un solo punto, ossia è tangente all'asse x nel vertice; x_1 e x_2 sono coincidenti. La disequazione è verificata per ogni valore reale $x \neq x_1$.



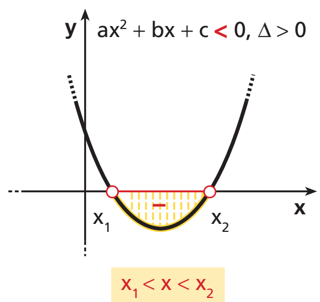
c. La parabola non interseca l'asse x. Tutti i suoi punti hanno ordinata positiva. La disequazione è sempre verificata.

▲ **Figura 10**

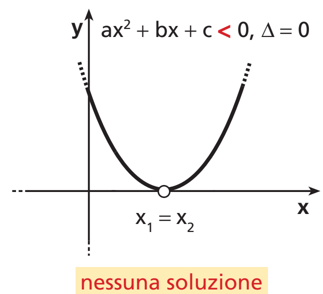
Le soluzioni di $ax^2 + bx + c < 0 \ \ (a > 0)$

Nel caso della disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ si procede allo stesso modo scegliendo, però, la parte di parabola che sta nel semipiano delle y negative (figura 11).

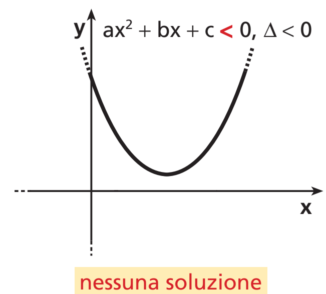
▼ **Figura 11**



a. La parabola interseca l'asse x in due punti: x_1 e x_2. Le soluzioni sono $x_1 < x < x_2$.



b. La parabola interseca l'asse x in un solo punto, ossia è tangente all'asse x nel vertice. Poiché non ci sono suoi punti con ordinata negativa, la disequazione non è mai verificata.



c. La parabola non interseca l'asse x. Non ci sono suoi punti con ordinata negativa: anche in questo caso la disequazione non è mai verificata.

ESPLORAZIONE: I SEGNI MAGGIORE E MINORE

I simboli $<$ e $>$ compaiono per la prima volta nell'anno 1631 nell'*Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas* (Le arti analitiche applicate alla risoluzione delle equazioni algebriche) del matematico e astronomo inglese Thomas Harriot. L'autore scrive:

> «Signum majoritatis ut a $>$ b significet a majorem quam b.
> Signum minoritatis ut a $<$ b significet a minorem quam b».

Il latino non deve stupire: ancora nel Seicento e nel Settecento era la lingua dotta, utilizzata dalla comunità scientifica nei libri e nelle pubblicazioni.
Nel testo manoscritto, Harriot utilizza simboli un po' differenti:

In seguito questi disegni vennero stilizzati e diventarono le V coricate che usiamo ancora oggi.
L'introduzione dei simboli $>$ e $<$ è significativa anche perché indica il conferimento di un ruolo «autonomo» alle disequazioni, che nella storia dell'algebra per molto tempo sono apparse solo come strumenti abbinati alla soluzione delle equazioni. Con l'introduzione di simboli specifici, viene attribuito anche ai segni di maggiore e minore uno «status matematico», analogamente al simbolo di uguaglianza per le equazioni. Tuttavia, non si deve pensare che il simbolo $=$, come siamo abituati a rappresentarlo oggi, sia di molto anteriore rispetto ai segni $>$ e $<$.

L'acquisizione del simbolismo matematico è stato un processo lento e graduale. Fino al XVI secolo, quindi per circa due millenni, i matematici hanno studiato le equazioni senza usare un simbolo per l'uguaglianza.

Il segno $=$ risale solo al 1557. Fu introdotto da uno studioso inglese, Robert Recorde, che scelse «una coppia di parallele o linee gemelle di una certa lunghezza perché non c'è alcunché di più uguale di una coppia di gemelli».

IN CINQUE SLIDE
Cerca informazioni in Internet sulla storia del simbolismo matematico e realizza una sintetica presentazione multimediale.

Cerca nel web: simboli matematici, math symbols, Harriot, Recorde, Vieta.

4. Le disequazioni di grado superiore al secondo

Per risolvere una disequazione di grado superiore al secondo del tipo $P(x) < 0$ o $P(x) > 0$ occorre prima scomporre il polinomio $P(x)$ in fattori di primo o secondo grado, poi discutere il segno dei fattori.

ESEMPIO Risolviamo la disequazione di terzo grado:

$$2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 < 0.$$

I possibili zeri razionali del polinomio $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$ sono le frazioni il cui numeratore è un divisore intero del termine noto e il denominatore è un divisore intero del coefficiente del termine di grado maggiore (x^3). Sono quindi:

$$\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2} \text{ e } \pm \frac{3}{2}.$$

Provando a sostituire il valore 1 all'incognita x troviamo che 1 è uno zero. Applicando la regola di Ruffini otteniamo:

$$2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = (x-1)(2x^2 - 5x - 3).$$

La disequazione iniziale è dunque equivalente a:

$$(x-1)(2x^2 - 5x - 3) < 0.$$

Studiamo il segno dei due fattori:

- $x - 1 > 0 \quad \to \quad x > 1;$
- $2x^2 - 5x - 3 > 0 \quad \to \quad x < -\dfrac{1}{2} \quad \vee \quad x > 3.$

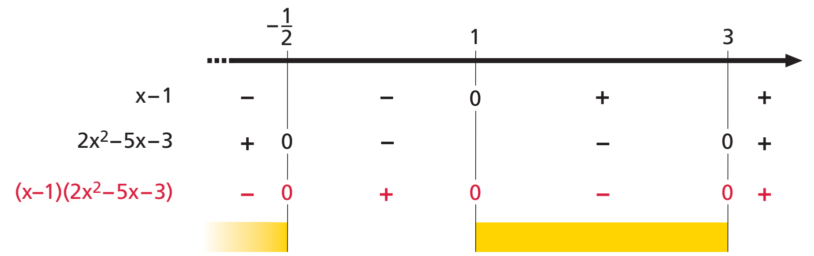
La figura 12 mostra il quadro dei segni.

	2	−7	2	+3
1		2	−5	−3
	2	−5	−3	0

La disequazione $2x^2 - 5x - 3 > 0$ è verificata per valori di x esterni all'intervallo che ha come estremi le radici

$$x_1 = -\frac{1}{2} \text{ e } x_2 = 3$$

dell'equazione associata.



◀ **Figura 12**

La disequazione $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 < 0$ è verificata per

$$x < -\frac{1}{2} \quad \vee \quad 1 < x < 3,$$

ossia l'insieme delle soluzioni è dato dall'unione di due intervalli:

$$\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \ ]1; 3[\,.$$

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Se Ruffini non funziona

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Risolvi la disequazione $x^3 - 5x^2 + 1 > 0$.

ALESSANDRO: «Ho provato a scomporre con Ruffini, ma non riesco; non so proprio come risolvere questa disequazione».

VALERIA: «Potremmo risolverla graficamente. Però noi sappiamo risolvere graficamente disequazioni di secondo grado. Questa è di terzo…».

ALESSANDRO: «Ma, se riusciamo a disegnare il grafico, il metodo mi sembra lo stesso».

▶ Partendo dall'idea di Valeria, aiuta i due amici a risolvere la disequazione.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V47a

5. Le disequazioni fratte

Nelle disequazioni fratte compare l'incognita anche al denominatore. Possono essere sempre trasformate in disequazioni del tipo

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0,$$

o in quelle analoghe con i segni $\geq$ e $\leq$.

Per risolvere una disequazione fratta, come per il prodotto di fattori, è necessario **studiare il segno** della frazione al variare di x.

ESEMPIO Risolviamo la disequazione fratta:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{4x - x^2} < 0.$$

$$\text{C.E.: } 4x - x^2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x(4 - x) \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq 4.$$

Studiamo il segno del numeratore, ponendo $N = x^2 - 2x - 3 > 0$:

$$x^2 - 2x - 3 > 0,$$

$$x < -1 \quad \vee \quad x > 3.$$

▶ Le radici dell'equazione $x^2 - 2x - 3 = 0$ sono:

$$x = 1 \pm 2 = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

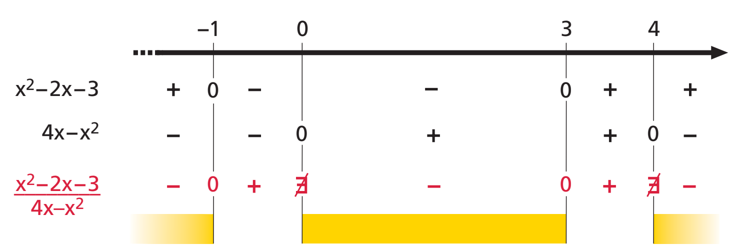
Studiamo il segno del denominatore, ponendo $D = 4x - x^2 > 0$:

$$4x - x^2 > 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4x < 0,$$

$$0 < x < 4.$$

▶ Le radici dell'equazione $4x - x^2 = 0$ sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$.

La figura 13 illustra il quadro dei segni.



▶ **Figura 13** **Il segno della frazione** $\frac{x^2 - 2x - 3}{4x - x^2}$ **viene stabilito mediante le regole di segno della divisione (o moltiplicazione) fra numeratore e denominatore. Per $x = 0$ o per $x = 4$ la frazione non esiste, perché si annulla il denominatore.**

La disequazione

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{4x - x^2} < 0$$

richiede che la frazione sia negativa; quindi, osservando il quadro dei segni, deduciamo che la disequazione è verificata per:

$$x < -1 \quad \vee \quad 0 < x < 3 \quad \vee \quad x > 4.$$

6. I sistemi di disequazioni

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V48a

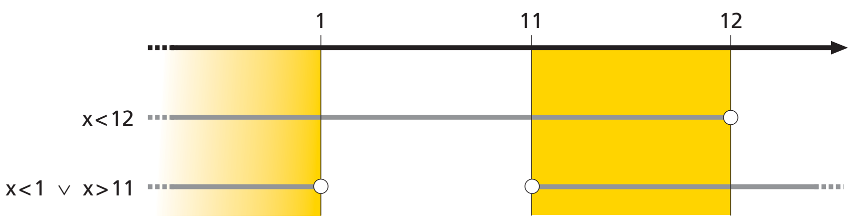
Un sistema di disequazioni è un insieme di più disequazioni nella stessa incognita. Le **soluzioni** del sistema sono quei valori reali che soddisfano **contemporaneamente** tutte le disequazioni.

ESEMPIO Risolviamo il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2x - 24 < 0 \\ x^2 - 12x + 11 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 12 \\ x < 1 \quad \vee \quad x > 11 \end{cases}$$

Rappresentiamo gli intervalli delle soluzioni (figura 14). Coloriamo le parti che rappresentano le soluzioni comuni alle due disequazioni.



Il sistema è soddisfatto per

$$x < 1 \quad \vee \quad 11 < x < 12,$$

ossia l'insieme delle soluzioni è dato da:

$$]-\infty; 1[\ \cup\ ]11; 12[\,.$$

Le soluzioni dell'equazione $x^2 - 12x + 11 = 0$ sono:

$$x = 6 \pm \sqrt{25} = 6 \pm 5 = \begin{cases} 1 \\ 11 \end{cases}$$

◀ **Figura 14** Nella rappresentazione dei valori sulla retta non è necessario rispettare le distanze fra i numeri, ma solo il loro ordine. Il sistema delle due disequazioni ha per soluzioni gli intervalli corrispondenti alle parti colorate in figura, ossia

$x < 1 \quad \vee \quad 11 < x < 12.$

7. Applicazioni delle disequazioni

Le disequazioni di secondo grado trovano applicazione nel controllo delle soluzioni delle equazioni irrazionali.

La risoluzione delle equazioni irrazionali

ESEMPIO Risolviamo la seguente equazione:

$$\sqrt{x^2 + 4x + 3} + x = 2.$$

Isoliamo la radice quadrata:

$$\sqrt{x^2 + 4x + 3} = 2 - x.$$

- Poiché il radicando non deve essere negativo, imponiamo $x^2 + 4x + 3 \geq 0$, disequazione che è verificata per $x \leq -3 \vee x \geq -1$.
- Poiché $2 - x$ deve avere lo stesso segno del radicale, allora:

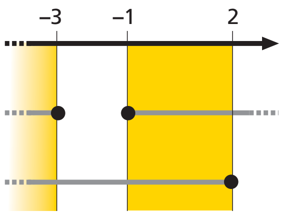
$$2 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 2.$$

Le soluzioni dell'equazione associata

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

sono:

$$x_1 = -3, x_2 = -1.$$



Ponendo a sistema le due condizioni e risolvendo, otteniamo la condizione:

$$x \leq -3 \vee -1 \leq x \leq 2.$$

Eleviamo al quadrato l'equazione di partenza:

$$(\sqrt{x^2+4x+3})^2 = (2-x)^2$$

$$\cancel{x^2} + 4x + 3 = 4 + \cancel{x^2} - 4x$$

$$8x = 1 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{8}.$$

Poiché $-1 < \frac{1}{8} < 2$, la soluzione è accettabile: $\frac{1}{8}$ è la soluzione dell'equazione irrazionale.

Le equazioni parametriche

ESEMPIO

Data l'equazione parametrica

$$x^2 + (m+1)x - m + 2 = 0,$$

ci chiediamo per quali valori del parametro m le radici sono reali.

Sappiamo che la condizione da porre è $\Delta \geq 0$, ossia

$$(m+1)^2 - 4(-m+2) \geq 0.$$

Svolgiamo i calcoli:

$$m^2 + 2m + 1 + 4m - 8 \geq 0$$

$$m^2 + 6m - 7 \geq 0 \rightarrow m \leq -7 \vee m \geq 1.$$

In conclusione, l'equazione parametrica

$$x^2 + (m+1)x - m + 2 = 0$$

ha radici reali per $m \leq -7 \;\vee\; m \geq 1$.

Per esempio, per $m = 0$ otteniamo l'equazione

$$x^2 + x + 2 = 0,$$

che non ha soluzioni reali, mentre per $m = 2$ abbiamo l'equazione

$$x^2 + 3x = 0,$$

che ha due soluzioni reali.

Le radici dell'equazione $m^2 + 6m - 7 = 0$ sono:

$$m = -3 \pm 4 = \begin{cases} -7 \\ 1 \end{cases}$$

Negli esercizi proporremo anche dei problemi risolvibili mediante le **disequazioni parametriche**.

8. Le equazioni e le disequazioni di secondo grado con valori assoluti

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V49a

Nella trattazione delle equazioni e delle disequazioni in cui compaiono i valori assoluti abbiamo fornito esempi in cui le equazioni e le disequazioni erano riconducibili al primo grado. Ora forniremo due esempi in cui le equazioni e le disequazioni associate sono di secondo grado.

ESEMPIO

1. Un'equazione di secondo grado con un valore assoluto

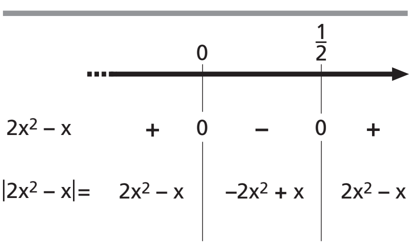
Risolviamo l'equazione:

$$|2x^2 - x| = 2x^2 + x - 8.$$

Studiamo il segno all'interno del valore assoluto, ponendolo positivo:

$$2x^2 - x > 0.$$

La disequazione è soddisfatta per i valori di x esterni all'intervallo delle radici: $x < 0 \;\vee\; x > \dfrac{1}{2}$.



◀ **Figura 15** Quadro dei segni. Il valore assoluto coincide con $2x^2 - x$ quando $2x^2 - x$ è positivo; è l'opposto di $2x^2 - x$, ossia $-(2x^2 - x)$, quando $2x^2 - x$ è negativo.

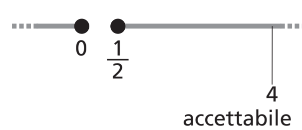
L'equazione data equivale quindi ai due sistemi misti:

$$\begin{cases} x \le 0 \vee x \ge \dfrac{1}{2} \\ 2x^2 - x = 2x^2 + x - 8 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ -2x^2 + x = 2x^2 + x - 8 \end{cases}$$

Risolviamo i due sistemi.

Primo sistema

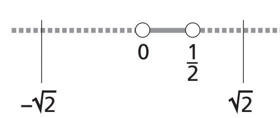
$$\begin{cases} x \le 0 \vee x \ge \dfrac{1}{2} \\ -2x = -8 \end{cases} \to \begin{cases} x \le 0 \vee x \ge \dfrac{1}{2} \\ x = 4 \quad \text{accettabile} \end{cases}$$



Secondo sistema

$$\begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ -4x^2 = -8 \end{cases} \to \begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ x^2 = 2 \end{cases} \to \begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

non accettabili



L'equazione ha come soluzione $x = 4$.

2. Una disequazione di secondo grado con un valore assoluto

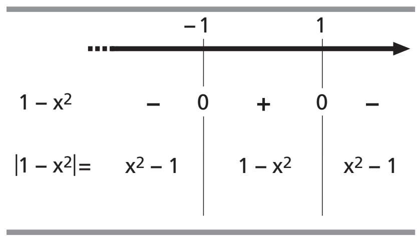
Risolviamo la disequazione:

$$|1-x^2|-x<x-2.$$

Studiamo il segno all'interno del valore assoluto:

$$1-x^2>0.$$

La disequazione è verificata per $-1<x<1$.



◀ Figura 16

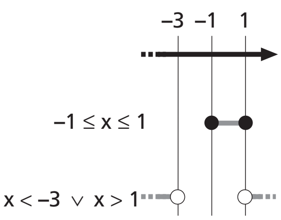
La disequazione data è equivalente ai due sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ 1-x^2-x<x-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x<-1 \vee x>1 \\ x^2-1-x<x-2 \end{cases}$$

Risolviamo separatamente i due sistemi.

Primo sistema

$$\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ -x^2-2x+3<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ x^2+2x-3>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ x<-3 \vee x>1 \end{cases}$$



Il primo sistema non ha soluzioni.

Secondo sistema

$$\begin{cases} x<-1 \vee x>1 \\ x^2-2x+1<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<-1 \vee x>1 \\ (x-1)^2<0 \quad \text{(mai verificata)} \end{cases}$$

Il secondo sistema non ha soluzioni.

La disequazione data non ha soluzioni.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V50a

9. Le disequazioni irrazionali

Le disequazioni con una radice quadrata

Prenderemo in esame soltanto disequazioni in cui compare una sola radice, con indice 2.
Tale disequazione può essere sempre scritta in una delle due seguenti forme:

$$\sqrt{A(x)}<B(x) \qquad \text{oppure} \qquad \sqrt{A(x)}>B(x).$$

Risolviamo $\sqrt{A(x)} < B(x)$
Occorre innanzitutto tener conto della condizione di esistenza della radice, ossia:

$$A(x) \geq 0.$$

Inoltre, poiché il primo membro della disequazione è un radicale con indice pari e perciò è sempre positivo o nullo, una seconda condizione è che il secondo membro deve essere positivo:

$$B(x) > 0.$$

Quando sono verificate le precedenti condizioni, poiché le due quantità $\sqrt{A(x)}$ e $B(x)$ risultano non negative, possiamo utilizzare la seguente proprietà delle disuguaglianze.

Se in una disuguaglianza fra due quantità **non negative** si elevano entrambi i membri al quadrato, si ottiene una disuguaglianza dello stesso verso.

▶ $3 < 5 \to 3^2 < 5^2$, mentre se $-3 < 2$, **non** è vero che $(-3)^2 < 2^2$!

Pertanto possiamo scrivere:

$$[\sqrt{A(x)}]^2 < [B(x)]^2.$$

Dal punto di vista delle disequazioni questo passaggio si interpreta come segue: se entrambi i membri di una disequazione sono non negativi, elevandoli al quadrato otteniamo una disequazione equivalente alla data.

In definitiva, la disequazione irrazionale

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \text{ è equivalente a: } \begin{cases} B(x) > 0 \\ A(x) \geq 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}$$

ESEMPIO Risolviamo la disequazione:

$$\sqrt{8x+9} < x.$$

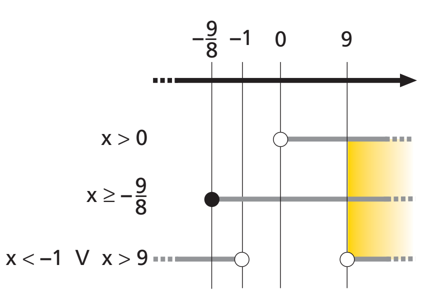
Per quanto abbiamo visto, essa è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 8x + 9 \geq 0 \\ 8x + 9 < x^2 \end{cases} \to \begin{cases} x > 0 \\ 8x \geq -9 \\ x^2 - 8x - 9 > 0 \end{cases}$$

La disequazione $x^2 - 8x - 9 > 0$ è verificata per $x < -1 \vee x > 9$.

Il sistema considerato è quindi equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \geq -\dfrac{9}{8} \\ x < -1 \vee x > 9 \end{cases}$$



◀ Figura 17

Il sistema di disequazioni è verificato per $x > 9$.

Risolviamo $\sqrt{A(x)} > B(x)$
Esaminiamo i due casi: $B(x) < 0$ e $B(x) \geq 0$.

- Se $\boldsymbol{B(x) < 0}$ ed è soddisfatta la condizione di esistenza del radicale $A(x) \geq 0$, la disequazione è senz'altro verificata. Infatti, il primo membro (positivo o nullo) è sempre maggiore del secondo (negativo).

  Pertanto, la disequazione $\sqrt{A(x)} > B(x)$ è equivalente al sistema:

  1. $\begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases}$

- Se $\boldsymbol{B(x) \geq 0}$, possiamo applicare la proprietà delle disuguaglianze ricordata prima ed elevare al quadrato i due membri della disequazione, ottenendo così una disequazione equivalente.

  Pertanto $\sqrt{A(x)} > B(x)$ è equivalente al sistema:

  2. $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$

Non è necessario porre condizioni di esistenza per il radicale, in quanto è senz'altro vero che $A(x) \geq 0$. Infatti, per la seconda disequazione del sistema, si ha $A(x) > [B(x)]^2 \geq 0$.

In sintesi, l'insieme delle soluzioni della disequazione irrazionale

$$\sqrt{A(x)} > B(x)$$

coincide con l'*unione* degli insiemi delle soluzioni dei sistemi 1 e 2, ossia la disequazione considerata equivale a:

$$\begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

ESEMPIO

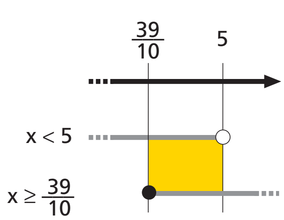
Risolviamo la disequazione $\sqrt{10x - 39} > x - 5$.

Innanzitutto risolviamo i seguenti sistemi:

1. $\begin{cases} x - 5 < 0 \\ 10x - 39 \geq 0 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x - 5 \geq 0 \\ 10x - 39 > (x-5)^2 \end{cases}$

Primo sistema

$$\begin{cases} x - 5 < 0 \\ 10x - 39 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \geq \dfrac{39}{10} \end{cases}$$



Il primo sistema è verificato per $\dfrac{39}{10} \leq x < 5$.

Secondo sistema

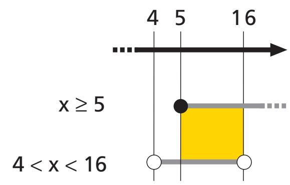
$$\begin{cases} x-5\geq 0 \\ 10x-39>(x-5)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\geq 5 \\ x^2-20x+64<0 \end{cases}$$

Le soluzioni di $x^2-20x+64=0$ sono:

$$x=10\pm\sqrt{100-64}= \begin{matrix} 4 \\ 16 \end{matrix}$$

Pertanto il secondo sistema equivale al seguente:

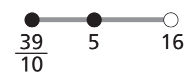
$$\begin{cases} x\geq 5 \\ 4<x<16 \end{cases}$$



Il secondo sistema è verificato per $5\leq x<16$.

La disequazione iniziale è verificata dall'unione degli intervalli trovati:

$$\frac{39}{10}\leq x<5 \quad \vee \quad 5\leq x<16, \quad \text{cioè} \quad \frac{39}{10}\leq x<16.$$



In sintesi

Per la risoluzione di una disequazione irrazionale possiamo utilizzare la seguente tabella.

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI	
LA DISEQUAZIONE	**EQUIVALE A**
$\sqrt{A(x)}<B(x)$	$\begin{cases} B(x)>0 \\ A(x)\geq 0 \\ A(x)<[B(x)]^2 \end{cases}$
$\sqrt{A(x)}>B(x)$	$\begin{cases} B(x)<0 \\ A(x)\geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x)\geq 0 \\ A(x)>[B(x)]^2 \end{cases}$

Le disequazioni in cui compaiono i segni $\geq$ o $\leq$ si risolvono in modo analogo. Possiamo utilizzare la seguente tabella.

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI	
LA DISEQUAZIONE	**EQUIVALE A**
$\sqrt{A(x)}\leq B(x)$	$\begin{cases} B(x)\geq 0 \\ A(x)\geq 0 \\ A(x)\leq[B(x)]^2 \end{cases}$
$\sqrt{A(x)}\geq B(x)$	$\begin{cases} B(x)<0 \\ A(x)\geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x)\geq 0 \\ A(x)\geq[B(x)]^2 \end{cases}$

Body Mass Index

…considerato un peso di 70 kg, per quali fasce di altezza possiamo ritenere una persona sottopeso, normale, sovrappeso o obesa?

→ Il quesito completo a pag. 1041

In campo medico, la valutazione della forma fisica di una persona viene compiuta tenendo conto di diversi parametri, quali il sesso, l'età, l'altezza, la massa, la muscolatura, la costituzione ossea e soprattutto la percentuale di massa grassa, costituita dai tessuti adiposi.
L'indice di massa corporea (BMI, dall'inglese *Body Mass Index*) tiene conto del peso e della statura e costituisce una prima stima, seppur grossolana e semplicistica, della forma fisica di un individuo.
Indicate con m la massa in kilogrammi e con h l'altezza in metri, si definisce:

$$\mathrm{BMI} = \frac{m}{h^2}.$$

A seconda del valore di BMI, è stata prodotta la classificazione che appare in tabella.

Valore BMI	Stato	Individuo
≥ 40	sovrappeso di 3° grado	obeso grave
30-39,9	sovrappeso di 2° grado	obeso
25-29,9	sovrappeso di 1° grado	sovrappeso
18,5-24,9	normopeso	normale
$< 18{,}5$	sottopeso	magro

Ora si supponga che una persona pesi 70 kilogrammi. È chiaro che l'ago della bilancia, da solo, dà poche informazioni sulla forma: fa molta differenza se si tratta di un giocatore di basket, alto più di un metro e ottanta, o di un bambino sotto il metro e cinquanta.
Considerando la classificazione dei valori di BMI, ci si chiede per quali fasce d'altezza si può considerare una persona di 70 kilogrammi magra, normale, sovrappeso, obesa o gravemente obesa.
Prendiamo come primo caso lo stato di sottopeso:

$$\mathrm{BMI} < 18{,}5.$$

Utilizziamo la definizione $\mathrm{BMI} = \frac{m}{h^2}$ e consideriamo $m = 70$:

$$\frac{70}{h^2} < 18{,}5 \quad \rightarrow \quad h^2 > \frac{70}{18{,}5}.$$

Si tratta di una disequazione di secondo grado in h. Risolviamola tenendo conto della condizione $h > 0$.

Risulta:

$$h > \sqrt{\frac{70}{18{,}5}} \simeq 1{,}95.$$

Pertanto un individuo di 70 kilogrammi più alto di un metro e 95 centimetri è sottopeso o magro.
Con lo stesso procedimento si ottengono le disequazioni per gli altri stati di forma fisica, tenendo conto che $h > 0$.
Per lo stato di normopeso:

$$18{,}5 \leq \frac{70}{h^2} \leq 24{,}9 \rightarrow h^2 \leq \frac{70}{18{,}5} \wedge h^2 \geq \frac{70}{24{,}9}.$$

Le due disequazioni hanno soluzioni accettabili:

$$h \leq \sqrt{\frac{70}{18{,}5}} \simeq 1{,}95 \wedge h \geq \sqrt{\frac{70}{24{,}9}} \simeq 1{,}68,$$

cioè:

$$1{,}68 \leq h \leq 1{,}95.$$

Pertanto, un individuo che ha una massa di 70 kilogrammi è normale se ha un'altezza compresa tra 1,68 e 1,95 metri.
Per lo stato di sovrappeso di 1° grado:

$$25 \leq \frac{70}{h^2} \leq 29{,}9 \rightarrow h^2 \leq \frac{70}{25} \wedge h^2 \geq \frac{70}{29{,}9}.$$

Le disequazioni hanno le seguenti soluzioni accettabili:

$$0 < h \leq \sqrt{\frac{70}{25}} \simeq 1{,}67 \wedge h \geq \sqrt{\frac{70}{29{,}9}} \simeq 1{,}53,$$

cioè:

$$1{,}53 \leq h \leq 1{,}67.$$

Si conclude che una persona di 70 kilogrammi è sovrappeso se ha un'altezza compresa tra 1,53 e 1,67 metri.
Per lo stato di sovrappeso di 2° grado, si ottiene invece:

$$1{,}33 \leq h \leq 1{,}52.$$

Una persona di 70 kilogrammi è obesa se ha un'altezza compresa tra 1,33 e 1,52 metri.
Per lo stato di sovrappeso di 3° grado:

$$\frac{70}{h^2} \geq 40 \rightarrow h^2 \leq \frac{70}{40}, \text{ cioè:}$$

$$0 < h \leq \sqrt{\frac{70}{40}} \simeq 1{,}32.$$

Un individuo di 70 kilogrammi è gravemente obeso se è più basso di 1,32 metri.

LA TEORIA IN SINTESI
Le disequazioni di secondo grado

1. Le disequazioni

Una **disequazione** è una disuguaglianza tra espressioni letterali per la quale cerchiamo i valori delle lettere che la rendono vera.
I valori che soddisfano una disequazione costituiscono l'insieme delle **soluzioni**; due disequazioni che hanno lo stesso insieme di soluzioni si dicono **equivalenti**.
Valgono i seguenti princìpi di equivalenza:

Primo principio di equivalenza: da una disequazione si ottiene una disequazione equivalente aggiungendo a entrambi i membri uno stesso numero (o espressione).

Secondo principio di equivalenza: se in una disequazione si moltiplicano o si dividono entrambi i membri per uno stesso numero (o espressione)
- positivo,
- negativo e si cambia il verso della disequazione,

si ottiene una disequazione equivalente.

ESEMPIO

$-3x > 5$ equivale a $3x < -5$.

Per **studiare il segno** di un prodotto di polinomi, si studia il segno di ogni polinomio fattore, poi si determina il segno del prodotto mediante la regola dei segni della moltiplicazione.

ESEMPIO

Per studiare il segno di

$(x+2)(3-x)$

poniamo:

$x+2>0 \;\rightarrow\; x>-2,$
$3-x>0 \;\rightarrow\; x<3.$

		−2		3	
x + 2	−	0	+		+
3 − x	+		+	0	−
(x + 2)(3 − x)	−	0	+	0	−

2. Il segno di un trinomio di secondo grado

Se il trinomio ax^2+bx+c (con $a>0$) ha equazione associata avente $\Delta>0$, esso ha segno:
- concorde con a, per valori esterni all'intervallo individuato dalle radici dell'equazione associata;
- discorde con a, per valori interni all'intervallo delle radici.

Se il trinomio ax^2+bx+c (con $a\neq 0$) ha equazione associata avente $\Delta=0$, esso ha segno concorde con a per tutti i valori diversi dalla radice dell'equazione associata.

Se il trinomio ax^2+bx+c (con $a\neq 0$) ha equazione associata avente $\Delta<0$, esso ha segno concorde con a per ogni valore reale.

3. La risoluzione delle disequazioni di secondo grado intere

Per risolvere le disequazioni

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c>0,\quad ax^2+bx+c<0,\quad ax^2+bx+c\geq 0,\quad ax^2+bx+c\leq 0,}$$

si considera l'equazione associata

$$ax^2+bx+c=0.$$

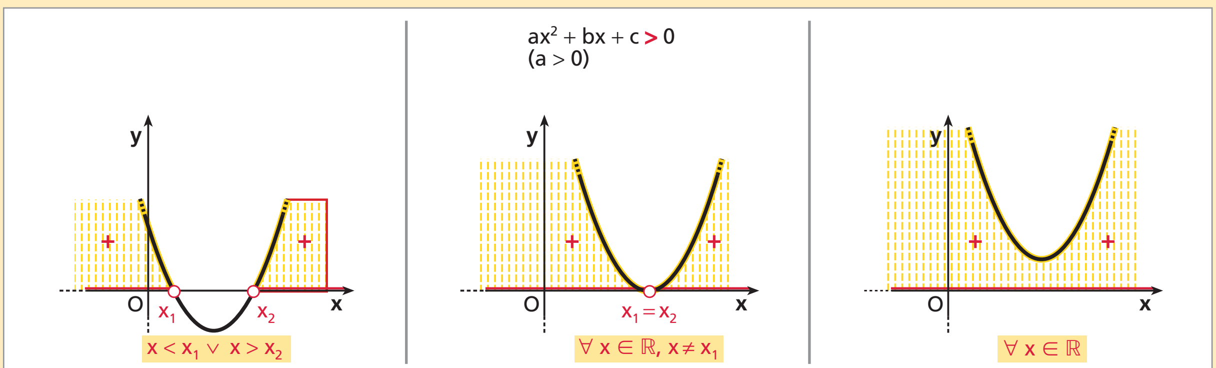
In generale, con $a > 0$ (se $a < 0$ si moltiplicano entrambi i membri per -1 e si inverte il verso della disequazione):

$ax^2 + bx + c > 0$	$\Delta > 0$:	$x < x_1 \vee x > x_2$
	$\Delta = 0$:	$x \neq x_1$
	$\Delta < 0$:	$\forall x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$\Delta > 0$:	$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$
	$\Delta = 0$:	$\forall x \in \mathbb{R}$
	$\Delta < 0$:	$\forall x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c < 0$	$\Delta > 0$:	$x_1 < x < x_2$
	$\Delta = 0$:	nessuna soluzione
	$\Delta < 0$:	nessuna soluzione
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$\Delta > 0$:	$x_1 \leq x \leq x_2$
	$\Delta = 0$:	$x = x_1$
	$\Delta < 0$:	nessuna soluzione

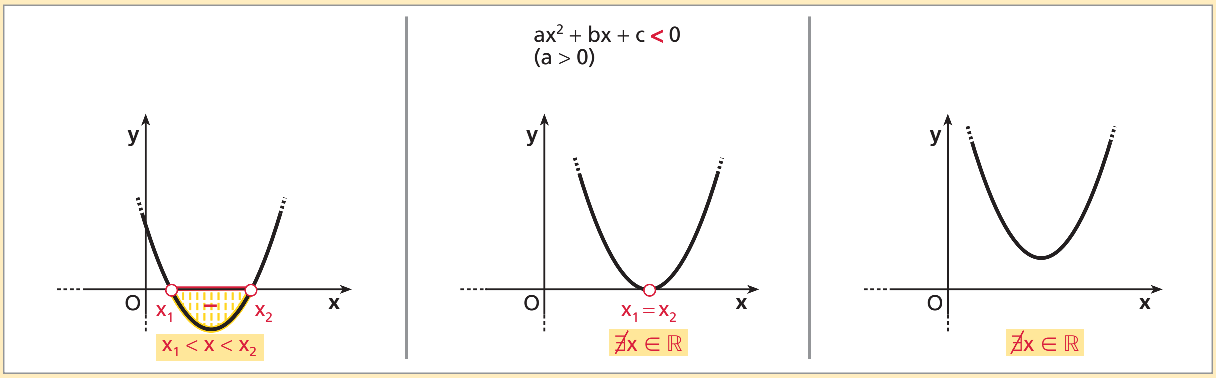
Una **disequazione di secondo grado** può essere risolta anche **graficamente** considerando la parabola associata.

Per risolvere $\boldsymbol{ax^2 + bx + c > 0}$, occorre:

- porre $y = ax^2 + bx + c$, con $y > 0$;
- disegnare la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$;
- determinare gli eventuali punti di intersezione della parabola con l'asse x;
- evidenziare la parte di parabola che si trova nel semipiano delle y positive;
- scrivere le soluzioni che sono date dalle ascisse dei punti della parabola appartenenti a tale semipiano.



Analogamente, per $ax^2 + bx + c < 0$, le soluzioni sono date dalle ascisse dei punti della parabola aventi ordinata negativa.



Quando una disequazione di secondo grado ha il **coefficiente di x^2 negativo**, può essere risolta in due modi:

1. considerando la parabola associata con la concavità rivolta verso il basso;
2. moltiplicando i due membri della disequazione per -1 e invertendo il verso della disequazione stessa.

4. Le disequazioni di grado superiore al secondo

La risoluzione delle **disequazioni di grado superiore al secondo** è a volte possibile se si riesce a scomporre in fattori il polinomio associato. In tal caso si studia il segno dei diversi fattori e si compila un quadro dei segni complessivo. Da questo quadro si determina il segno del polinomio iniziale mediante la regola dei segni della moltiplicazione.

5. Le disequazioni fratte

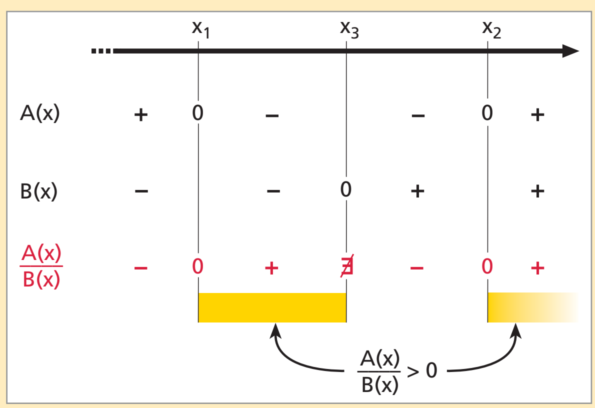
Per risolvere una **disequazione fratta**,

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0,$$

si studiano i segni del numeratore e del denominatore, poi si determina il segno della frazione mediante la regola dei segni.
La frazione si annulla se e solo se il numeratore è 0; non esiste se il denominatore è nullo.

ESEMPIO

Supponiamo che $A(x)$ sia un polinomio di secondo grado e chiamiamo x_1 e x_2 i suoi zeri.
Supponiamo che $B(x)$ sia invece di primo grado, con un unico zero x_3.
Sia $x_1 < x_3 < x_2$.



6. I sistemi di disequazioni

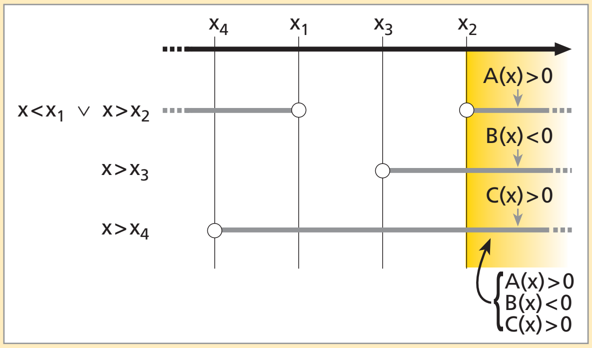
Per risolvere un **sistema di disequazioni** si risolvono le singole disequazioni; quindi si determina in quali intervalli sono verificate contemporaneamente tutte le disequazioni.

ESEMPIO

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) < 0 \\ C(x) > 0 \end{cases}$$

Supponiamo che le disequazioni siano verificate negli intervalli indicati in figura. Il sistema è allora verificato soltanto per $x > x_2$.



7. Applicazioni delle disequazioni

Vi sono **equazioni irrazionali** ed **equazioni e disequazioni parametriche** per le quali le condizioni sulle soluzioni o sul parametro sono tradotte in disequazioni di secondo grado.

ESEMPIO

1. $\sqrt{x^2 + 4x + 3} = 1$;

   condizione sul radicando: $x^2 + 4x + 3 \geq 0$.

2. $x^2 - 2mx + 5m - 6 = 0$;

   condizione $\Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 5m + 6 > 0$.

8. Le equazioni e le disequazioni di secondo grado con valori assoluti

Quando in un'equazione o disequazione di secondo grado compaiono dei **valori assoluti**, bisogna esaminare separatamente i casi per cui l'espressione interna al valore assoluto è maggiore o uguale a 0, oppure minore di 0.

ESEMPIO

$$|x+2| = x^2 \quad \begin{cases} \text{se } x \geq -2 \Rightarrow x + 2 = x^2 \\ \text{se } x < -2 \Rightarrow -x - 2 = x^2 \end{cases}$$

9. Le disequazioni irrazionali

Le **disequazioni irrazionali** del tipo $\sqrt{A(x)} < B(x)$ sono equivalenti a un sistema di tre disequazioni:

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B(x) > 0 \\ A(x) \geq 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}$$

Le disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} > B(x)$ hanno come insieme di soluzioni **l'unione** degli insiemi delle soluzioni di due sistemi composti da due disequazioni:

$$\sqrt{A(x)} > B(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

1. Le disequazioni

Teoria a pag. 1041

RIFLETTI SULLA TEORIA

TEST

1 Sul prodotto di due fattori lineari $A(x)$ e $B(x)$ possiamo affermare che:

- A è positivo solo se $A(x)$ e $B(x)$ sono entrambi positivi.
- B è negativo se $A(x)$ è negativo.
- C è positivo se $B(x)$ è positivo.
- D è negativo se $A(x)$ e $B(x)$ hanno segni discordi.
- E è positivo se $A(x)$ e $B(x)$ *non* hanno segni concordi.

2 Il prodotto $-3(2-x)$ *non* è negativo nell'intervallo:

- A $]-\infty; 2]$.
- B $]-\infty; 2[$.
- C $[2; +\infty[$.
- D $]2; +\infty[$.
- E $]-\infty; +\infty[$.

ESERCIZI

Le disequazioni lineari numeriche intere

Risolvi le seguenti disequazioni lineari numeriche.

3 $3x-2+7x<12x+6$ $\quad [x>-4]$

4 $2(1-4x)\geq 3-5(x-4)$ $\quad [x\leq -7]$

5 $2x-4\geq 3(1-2x)$ $\quad \left[x\geq \frac{7}{8}\right]$

6 $6-(2x-3)<6x+2(9-4x)$ $\quad [\forall x\in\mathbb{R}]$

7 $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}(2-x)>\frac{x-1}{6}$ $\quad \left[x>\frac{3}{4}\right]$

8 $\frac{x-2}{3}+\frac{1}{2}\geq 3(x-1)-\frac{1}{3}$ $\quad \left[x\leq \frac{19}{16}\right]$

9 $2\left[x+\frac{1}{2}(1-2x)\right]\leq -x+\frac{6-x}{2}$ $\quad \left[x\leq \frac{4}{3}\right]$

10 $\frac{x-1}{3}+\frac{2-x}{2}>\frac{4+x}{6}+x$ $\quad [x<0]$

11 $\frac{1}{4}(x+2)+\frac{1}{3}<x-\frac{x+3}{6}$ $\quad \left[x>\frac{16}{7}\right]$

12 $\frac{1}{2}\left[2(x+1)-\frac{2-x}{2}\right]\leq 6(x+1)-\frac{x}{4}$ $\quad \left[x\geq -\frac{11}{9}\right]$

13 $4\frac{2x-3}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{3}-\frac{1+x}{2}\right)>\frac{9}{4}$ $\quad [x>2]$

14 $(x+1)(x-1)<\frac{1}{2}+x(x-2)-4$ $\quad \left[x<-\frac{5}{4}\right]$

15 $1+[4-(2x-1)(x+3)]\geq 6+x(5-2x)-9$ $\quad \left[x\leq \frac{11}{10}\right]$

16 $(1-3x)^2-2x(x-1)<7(x+1)^2+12$ $\quad [x>-1]$

17 $-2+x+2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)>x(x-6)+$
$+x^2+1$ $\quad \left[x>\frac{1}{2}\right]$

18 $(3x-1)^2-(3x+1)^2\geq 2+3(x-2)$ $\quad \left[x\leq \frac{4}{15}\right]$

19 $\frac{x}{4}(8x-3)-2(x+2)^2>\frac{3}{4}$ $\quad [x<-1]$

20 $1-(x-2)(x+3)+x+(5+x)(x-3)\geq -2x$ $\quad [x\geq 2]$

21 $(3x+5)^2-9x(x+4)\leq 3(3x+2)-5x+1$ $\quad \left[x\geq \frac{9}{5}\right]$

Le disequazioni lineari letterali intere

ESERCIZIO GUIDA

22 Risolviamo la disequazione

$a(x-1) < 2a - 3x$

e discutiamola al variare di a.

Svolgiamo i calcoli:

$ax - a < 2a - 3x$.

Portiamo al primo membro i termini con x e al secondo quelli senza:

$ax + 3x < 3a$.

Raccogliamo x:

$(a+3)x < 3a$.

- Se $a + 3 > 0$, cioè $a > -3$, dividendo per la quantità positiva $a + 3$, otteniamo: $x < \frac{3a}{a+3}$.
- Se $a + 3 = 0$, cioè $a = -3$, si ha: $0x < -9 \rightarrow$ impossibile.
- Se $a + 3 < 0$, cioè $a < -3$, dividendo per la quantità negativa $a + 3$, cambiamo il verso della disequazione e otteniamo:

  $$x > \frac{3a}{a+3}.$$

In sintesi, le soluzioni sono:

- se $a > -3$, $x < \frac{3a}{a+3}$;
- se $a = -3$, la disequazione è impossibile;
- se $a < -3$, $x > \frac{3a}{a+3}$.

Risolvi e discuti le seguenti disequazioni letterali di primo grado nell'incognita x.

23 $2a(x-1) < 3$ $\left[a > 0, x < \frac{2a+3}{2a}; a = 0, \forall x \in \mathbb{R}; a < 0, x > \frac{2a+3}{2a}\right]$

24 $ax - 2 < x - 2a$ $[a > 1, x < -2; a = 1, \nexists\ x \in \mathbb{R}; a < 1, x > -2]$

25 $2kx - (1-k) > 3k - 1$ $[k > 0, x > 1; k = 0, \nexists\ x \in \mathbb{R}; k < 0, x < 1]$

26 $2a^2x \geq a^3 + a^2$ $\left[a \neq 0, x \geq \frac{a+1}{2}; a = 0, \forall x \in \mathbb{R}\right]$

27 $\frac{2x+a}{2} \leq ax + \frac{1}{2}$ $\left[a > 1, x \geq \frac{1}{2}; a = 1, \forall x \in \mathbb{R}; a < 1, x \leq \frac{1}{2}\right]$

28 $\frac{x-a}{2a} \geq 0$ $[a > 0, x \geq a; a = 0, \text{diseq. priva di significato}; a < 0, x \leq a]$

29 $(b+2)x - 2b < 2x + b(2-x)$ $[b > 0, x < 2; b = 0, \nexists\ x \in \mathbb{R}; b < 0, x > 2]$

30 $(2+a)x < 3(2+x)a - 6$ $[a < 1, x < -3; a = 1, \nexists\ x \in \mathbb{R}; a > 1, x > -3]$

31 $\dfrac{bx-5}{3} < 2b - x$ $\left[b > -3, x < \dfrac{6b+5}{b+3}; b = -3, \nexists\ x \in \mathbb{R}; b < -3, x > \dfrac{6b+5}{b+3}\right]$

32 $\dfrac{x}{2a} + \dfrac{2-x}{a} \le 0$ $[a > 0, x \ge 4; a = 0$, diseq. priva di significato; $a < 0, x \le 4]$

La rappresentazione degli intervalli

ESERCIZIO GUIDA

33 Scriviamo i seguenti intervalli (o unioni di intervalli) utilizzando le parentesi quadre e rappresentiamoli graficamente.

a) $x > 5$; b) $-4 < x < -1$; c) $-7 \le x \le 7$; d) $x \le -2 \vee x \ge 10$.

a) $]5; +\infty[$

L'estremo 5 è **escluso**: abbiamo scritto $]5; +\infty[$; graficamente, 5 è un circoletto vuoto.
Poiché $+\infty$ non è un numero reale, ma un simbolo che rappresenta una quantità «più grande» di qualsiasi numero reale, abbiamo scritto $]5; +\infty[$.

b) $]-4; -1[$

I due estremi sono **esclusi**: abbiamo scritto $]-4; -1[$ e i due circoletti sono vuoti.

c) $[-7; 7]$

Gli estremi -7 e 7 sono **inclusi**: abbiamo scritto $[-7; 7]$ e i due circoletti sono pieni.

d) $x \le -2 \vee x \ge 10$ è l'unione dei due intervalli $x \le -2$ e $x \ge 10$:

$]-\infty; -2] \cup [10; +\infty[$

Rappresenta i seguenti intervalli mediante le parentesi quadre e poi graficamente.

34 $-3 < x < 6$; $x \ge 2$; $x \le 4$.

35 $1 < x < 4$; $x > -1$; $x < \dfrac{1}{3}$.

36 $\dfrac{2}{3} \le x < 1$; $-\dfrac{1}{8} < x \le 2$.

37 $-3 \le x \le 3$; $-2 \le x \le -1$.

38 $x < 4 \vee x \ge \dfrac{16}{3}$; $x \le -\dfrac{1}{2} \vee x \ge \dfrac{1}{2}$.

39 $x < -\dfrac{1}{5} \vee x > 1$; $x \le -3 \vee x > 3$.

Correggi la notazione dei seguenti intervalli, scritti mediante parentesi quadre, in modo che siano corrispondenti alle disuguaglianze poste a fianco.

40 $[-4; +\infty[$, $x > -4$; $[0; 9[$, $0 < x \le 9$.

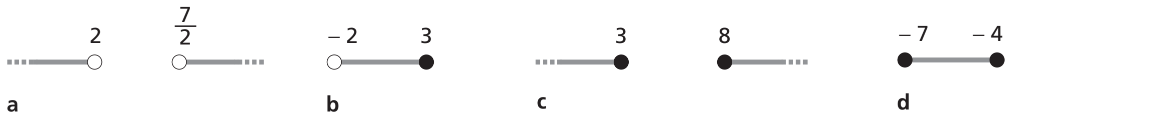
41 $]-1; +\infty]$, $x > -1$; $]-\infty; 3[$, $x \le 3$.

42 $]2; +\infty[\cup \left]\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$, $x < 2 \vee x > \dfrac{5}{2}$.

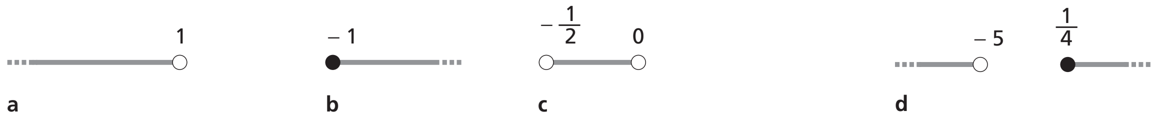
43 $\left]\dfrac{8}{3}; \dfrac{1}{4}\right]$, $\dfrac{1}{4} \le x < \dfrac{8}{3}$.

Per ogni rappresentazione grafica scrivi il corrispondente intervallo sia mediante le parentesi quadre sia mediante le disuguaglianze.

44



45



Lo studio del segno di un prodotto

ESERCIZIO GUIDA

46 Studiamo il segno del prodotto $(x+7)(3-x)$.
Dal risultato ottenuto, deduciamo il segno del polinomio quando la variabile x assume i valori: $-8, -7, 0, 6$.

Studiamo il segno dei due fattori:

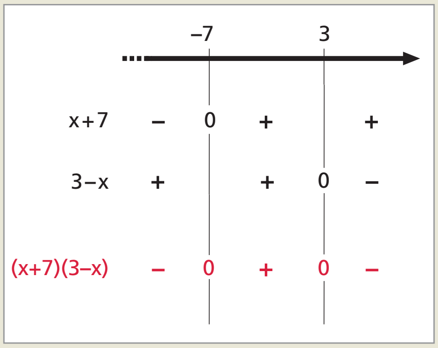
$x+7>0 \quad \rightarrow \quad x>-7.$

$3-x>0 \quad \rightarrow \quad -x>-3 \quad \rightarrow \quad x<3.$

Compiliamo il quadro applicando la regola dei segni.
Detto p il prodotto:

- per $x<-7 \vee x>3$, $\quad p<0$;
- per $-7<x<3$, $\quad p>0$;
- per $x=-7 \vee x=3$, $\quad p=0$.

Quindi, in particolare, per $x=-8$ e $x=6$, $p<0$;
per $x=-7$, $p=0$; per $x=0$, $p>0$.



Studia il segno dei seguenti prodotti. Dai risultati ottenuti deduci il segno per i valori indicati a fianco. Verifica l'esattezza della deduzione, almeno in qualche caso.

47 $x(x-1)$, $\qquad x=-2, 0, 2.$

48 $(x+5)(2x+3)$, $\qquad x=-3, 0, 3.$

49 $\left(x+\frac{1}{2}\right)(3x-1)$, $\qquad x=-4, 0, 4.$

50 $(5x+1)(x-4)$, $\qquad x=-6, 1, 3.$

51 $8(x-1)(3x+1)$, $\qquad x=-1, 0, 1.$

52 $-4(3-2x)(2-x)$, $\qquad x=-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}.$

53 $(x-1)(x+2)(x-4)$, $\qquad x=0, 4, 8.$

54 $(5-3x)(5x-1)(3x+2)$, $\qquad x=0, 2, 4.$

ESERCIZIO GUIDA

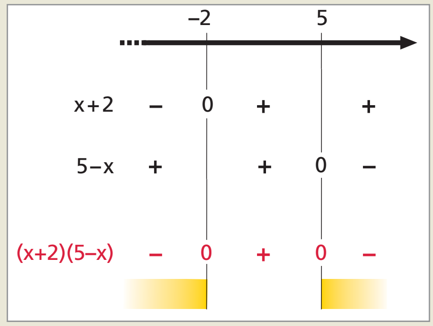
55 Risolviamo la disequazione $(x+2)(5-x) \leq 0$.

Studiamo il segno di ognuno dei fattori, cercando i valori di x per i quali ciascun fattore è positivo:

$$x+2>0 \quad \to \quad x>-2,$$

$$5-x>0 \quad \to \quad -x>-5 \quad \to \quad x<5.$$

Compiliamo il quadro dei segni (figura a lato).
Poiché si richiede che il prodotto sia negativo o nullo, le soluzioni della disequazione sono le seguenti: $x \leq -2 \vee x \geq 5$.



Risolvi le seguenti disequazioni.

56 $(x+2)(x+4)<0$ $\quad [-4<x<-2]$

57 $(x+3)(x-5)>0$ $\quad [x<-3 \vee x>5]$

58 $-x(3x+1) \leq 0$ $\quad \left[x \leq -\frac{1}{3} \vee x \geq 0\right]$

59 $(2x+3)(x+1)>0$ $\quad \left[x<-\frac{3}{2} \vee x>-1\right]$

60 $(4x-16)(9x-3) \geq 0$ $\quad \left[x \leq \frac{1}{3} \vee x \geq 4\right]$

61 $-9x(3x+18)>0$ $\quad [-6<x<0]$

62 $x(x+2)(x-5)<0$ $\quad [x<-2 \vee 0<x<5]$

63 $(3x-1)(4x+5)(1-x)>0$ $\quad \left[x<-\frac{5}{4} \vee \frac{1}{3}<x<1\right]$

64 $-\frac{3}{4}(x-1)(3x+4)(3-x)x \leq 0$ $\quad \left[-\frac{4}{3} \leq x \leq 0 \vee 1 \leq x \leq 3\right]$

65 $2x(3x+1)(x+5)(2-x)>0$ $\quad \left[-5<x<-\frac{1}{3} \vee 0<x<2\right]$

2. Il segno di un trinomio di secondo grado

Teoria a pag. 1044

RIFLETTI SULLA TEORIA

66 **VERO O FALSO?**

a) Il trinomio $-3(x^2+4x+3)$ è negativo $\forall x \in \mathbb{R}$. V F

b) Il trinomio x^2+2x+6 non è mai negativo. V F

c) Solo il valore $x=1$ rende il trinomio $-2x^2+2x$ uguale a 0. V F

d) Il trinomio $2x^2-5x+2$ è positivo per $x<\frac{1}{2} \vee x>2$. V F

67 **TEST** Il trinomio $-x^2+4x-6$ è positivo:

A $\forall x \in \mathbb{R}$.

B mai.

C per $x<-1 \vee x>3$.

D per $-1<x<3$.

E per $x<2 \vee x>3$.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

68 Studiamo il segno dei seguenti trinomi:

a) $6x^2 - 11x + 3$; b) $x^2 - 4\sqrt{3}x + 12$; c) $-5x^2 + 6x - 5$.

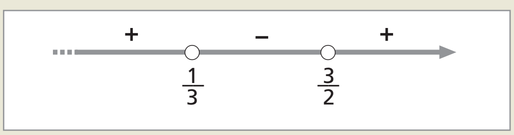
a) Consideriamo l'equazione associata:

$$6x^2 - 11x + 3 = 0,$$

$$\Delta = 121 - 72 = 49 > 0,$$

$$x = \frac{11 \pm 7}{12} = \begin{cases} \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\ \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Il trinomio è concorde con 6 (coefficiente di x^2), ossia è positivo, per valori esterni all'intervallo delle radici, cioè per $x < \frac{1}{3} \vee x > \frac{3}{2}$; è discorde con 6, cioè è negativo, per valori interni ossia per $\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$.



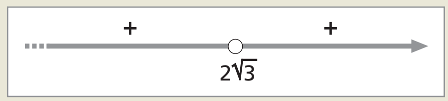
b) L'equazione associata è:

$$x^2 - 4\sqrt{3}x + 12 = 0,$$

$$\frac{\Delta}{4} = 12 - 12 = 0,$$

$$x = 2\sqrt{3}.$$

Il trinomio è concorde con 1 (coefficiente di x^2), cioè è positivo, per $x \neq 2\sqrt{3}$.

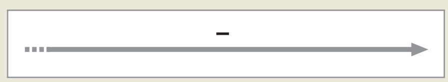


c) L'equazione associata

$$-5x^2 + 6x - 5 = 0 \rightarrow 5x^2 - 6x + 5 = 0$$

ha $\frac{\Delta}{4} = -16 < 0$.

Il trinomio è concorde con -5, cioè è negativo, per ogni x reale.



Studia il segno dei seguenti trinomi di secondo grado.

69 $-x^2 + 12x - 36$ [mai positivo; negativo per $x \neq 6$]

70 $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$ [positivo per $x \neq \sqrt{3}$; mai negativo]

71 $-x^2 + 9$ [positivo per $-3 < x < 3$; negativo per $x < -3 \vee x > 3$]

72 $2x^2 + 2x + 1$ [positivo $\forall\, x \in \mathbb{R}$]

73 $7x - x^2$ [positivo per $0 < x < 7$; negativo per $x < 0 \vee x > 7$]

74 $x^2 - 4x + 5$ [positivo $\forall\, x \in \mathbb{R}$]

75 $2x^2 - 15x + 7$ $\left[\text{positivo per } x < \frac{1}{2} \vee x > 7; \text{ negativo per } \frac{1}{2} < x < 7\right]$

76 $-8x^2 - 4$ [mai positivo]

77 $-3x^2 - 3x - 3$ [mai positivo]

78 $-x^2+x+2$ $[\text{positivo per } -1<x<2;\ \text{negativo per } x<-1 \vee x>2]$

79 $x^2-(3-\sqrt{3})x-3\sqrt{3}$ $[\text{positivo per } x<-\sqrt{3} \vee x>3;\ \text{negativo per } -\sqrt{3}<x<3]$

80 $2x^2-(6+\sqrt{2})x+3\sqrt{2}$ $\left[\text{positivo per } x<\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x>3;\ \text{negativo per } \frac{\sqrt{2}}{2}<x<3\right]$

3. La risoluzione delle disequazioni di secondo grado intere

Teoria a pag. 1048

RIFLETTI SULLA TEORIA

81 TEST Le soluzioni della disequazione $ax^2+bx+c>0$, con $a<0$, $\Delta>0$ e x_1 e x_2 soluzioni dell'equazione associata, sono:

A $x<x_1 \vee x>x_2$.
B $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
C $x_1<x<x_2$.
D $x=-\dfrac{b}{2a}$.
E $x_1 \le x \le x_2$.

82 TEST L'intervallo $]-1;0[$ è soluzione di una sola delle seguenti disequazioni. Quale?

A $x(x+1)>0$
B $-3x(x+1)<0$
C $-3x(1-x)<0$
D $3x(1-x)>0$
E $-2x(1+x)>0$

83 TEST Sapendo che $a>0$ e che $\Delta=0$, sulla disequazione $ax^2+bx+c\le 0$ puoi affermare che:

A $x=-\dfrac{b}{2a}$ è l'unica soluzione.
B ha per soluzione $x>-\dfrac{b}{2a}$.
C è verificata $\forall\, x\in\mathbb{R}$.
D è impossibile.
E ha soluzioni per valori esterni all'intervallo delle radici dell'equazione associata.

84 Il valore $x=1$ è soluzione di $x^2-2x+1>0$?

85 Cosa vuol dire che la disequazione $x^2>16$ è verificata per valori esterni all'intervallo delle radici dell'equazione associata?

Senza eseguire calcoli, indica le soluzioni delle seguenti disequazioni, giustificando la risposta.

86 $x^2+8>0$; $(x+6)^2>0$; $4x^2\le 0$; $-7x^2<0$.

87 $2x^2+9<0$; $-x^2<0$; $-x^2-3<0$; $-(x+1)^2\le 0$.

88 VERO O FALSO?

a) Se $x^2<9$, allora $x<3$. V F
b) La disequazione $x^2-6x+9>0$ è vera per ogni valore reale di x, purché $x\ne 3$. V F
c) Se nella disequazione $x^2>6x$ si semplifica per x, si ottiene la disequazione equivalente $x>6$. V F
d) Se $x^2\ge 0$, allora $x\ge 0$. V F
e) Se $-4x^2\ge -36$, allora $x^2\ge 9$. V F

89 Una parabola interseca l'asse delle x nei punti di ascissa -1 e 3, e ha la concavità rivolta verso il basso. Per quali valori di x l'ordinata della parabola è positiva? [$-1 < x < 3$]

90 L'ordinata del vertice di una parabola e il Δ dell'equazione associata sono entrambi negativi. Da che parte è rivolta la concavità della parabola? Per quali valori di x le ordinate dei punti della parabola non sono negative? [verso il basso; mai]

ESERCIZI Nel sito: ▶ 12 esercizi di recupero

La risoluzione algebrica

ESERCIZIO GUIDA

91 Risolviamo le seguenti disequazioni:

a) $-10x - 8x^2 - 3 > 0$; b) $4x^2 - 12x + 9 \geq 0$; c) $3x^2 - 2x + 1 < 0$.

a) Riscriviamo la disequazione ordinando il polinomio al primo membro:

$$-8x^2 - 10x - 3 > 0.$$

Essendo il coefficiente del termine di secondo grado negativo, moltiplichiamo i due membri per -1 e *cambiamo il verso della disequazione*:

$$8x^2 + 10x + 3 < 0.$$

Risolviamo l'equazione associata:

$$8x^2 + 10x + 3 = 0$$

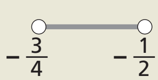
$$\frac{\Delta}{4} = (+5)^2 - 8 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{-5 \pm 1}{8} = \begin{cases} -\dfrac{3}{4} \\[2mm] -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Il trinomio $8x^2 + 10x + 3$ assume valore negativo, ossia discorde con il coefficiente 8, per valori interni all'intervallo.

L'intervallo delle soluzioni della disequazione $8x^2 + 10x + 3 < 0$ è quindi:

$$-\frac{3}{4} < x < -\frac{1}{2}, \text{ ossia } \left]-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right[.$$



b) Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata:

$$\frac{\Delta}{4} = 6^2 - 4 \cdot 9 = 36 - 36 = 0.$$

L'equazione ha una radice reale doppia:

$$x = \frac{3}{2}.$$

Il trinomio $4x^2 - 12x + 9$ assume segno positivo, cioè concorde con il coefficiente 4, per $x \neq \frac{3}{2}$.

Per $x = \frac{3}{2}$ il trinomio è nullo.

Quindi la disequazione è verificata per ogni valore di x:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ossia} \quad]-\infty; +\infty[.$$

Avremmo potuto dedurre la soluzione senza fare calcoli, riconoscendo che $4x^2 - 12x + 9$ è il quadrato del binomio $2x - 3$ e ricordando che un quadrato non può essere negativo.

c) Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata:

$$3x^2 - 2x + 1 = 0, \frac{\Delta}{4} = 1 - 3 = -2 < 0.$$

Poiché il coefficiente di x^2, $a = 3$, è positivo e $\Delta < 0$, il trinomio $3x^2 - 2x + 1$ è sempre positivo e la disequazione non è mai verificata. Scriviamo pertanto:

$$\nexists\, x \in \mathbb{R}.$$

Risolvi le seguenti disequazioni con il metodo algebrico.

92 $x^2 + 3x + 2 > 0$ $[x < -2 \vee x > -1]$

93 $x^2 + x - 6 > 0$ $[x < -3 \vee x > 2]$

94 $x^2 - 2x + 10 > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

95 $x^2 - 2x - 8 > 0$ $[x < -2 \vee x > 4]$

96 $x^2 + 4x + 5 < 0$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

97 $16x^2 - 24x + 9 < 0$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

98 $-x^2 + 3x - 2 > 0$ $[1 < x < 2]$

99 $x(x+3) \leq -2x$ $[-5 \leq x \leq 0]$

100 $-x^2 + 9 \leq 0$ $[x \leq -3 \vee x \geq 3]$

101 $x^2 + 10x + 34 < 0$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

102 $-x(x-4) < 3$ $[x < 1 \vee x > 3]$

103 $9x^2 + 4 > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

104 $81x^2 + 18x + 1 \leq 0$ $\left[x = -\frac{1}{9}\right]$

105 $-x^2 - 6x - 8 \geq 0$ $[-4 \leq x \leq -2]$

106 $6x^2 + x - 1 < 0$ $\left[-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\right]$

107 $x^2 - 8x + 20 > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

108 $\frac{1}{2}(x-1) \leq x^2 - x$ $\left[x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 1\right]$

109 $9x^2 - 30x + 25 > 0$ $\left[\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\}\right]$

110 $-x^2 - 3 \geq 0$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

111 $x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{15}{8} > 0$ $\left[x < -\frac{3}{4} \vee x > \frac{5}{2}\right]$

112 $x^2 - \frac{13}{6}x + 1 < 0$ $\left[\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}\right]$

113 $x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{5}{8} \geq 0$ $\left[x \leq -\frac{5}{4} \vee x \geq \frac{1}{2}\right]$

114 $3x^2 + 4x + \frac{4}{3} > 0$ $\left[\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}\right]$

115 $-x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} < 0$ $\left[x < -\frac{3}{2} \vee x > -1\right]$

116 $4x^2 - 48x + 145 > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

117 $2x^2 - 4x - \frac{21}{2} \leq 0$ $\left[-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}\right]$

118 $x^2 + \frac{8}{5}x + \frac{16}{25} < 0$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

119 $2x^2 - 9x + \frac{81}{8} > 0$ $\left[\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{9}{4}\right\}\right]$

120 $-x^2 + \frac{5}{2}x - 1 \leq 0$ $\left[x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 2\right]$

121 $-4x^2 - 3x - \frac{9}{16} > 0$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

122 $x^2 - 36 > 0$ $[x < -6 \vee x > 6]$

123 $9x^2 + 25 < 0$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

124 $x^2 + 9x \leq 0$ $[-9 \leq x \leq 0]$

125 $9x^2 < 25$ $\left[-\frac{5}{3} < x < \frac{5}{3}\right]$

126 **ASSOCIA** a ogni disequazione l'insieme delle sue soluzioni.

1. $x^2 \geq 4$ 2. $4 \geq x^2$ 3. $x^2 < 4$ 4. $-x^2 \leq 4$

A. $\forall x \in \mathbb{R}$ B. $x \leq -2 \vee x \geq 2$ C. $-2 < x < 2$ D. $-2 \leq x \leq 2$

127 Risolvi la disequazione $6\left(x^2-\frac{1}{3}\right) \geq -x$.

Senza eseguire ulteriori calcoli scrivi l'intervallo delle soluzioni delle seguenti disequazioni:

a) $6x^2+x-2<0$;
b) $-(6x^2+x-2)<0$;
c) $6x^2+x-2>0$.

$$\left[x \leq -\frac{2}{3} \vee x \geq \frac{1}{2}; \text{a) } -\frac{2}{3}<x<\frac{1}{2}; \text{b) } x<-\frac{2}{3} \vee x>\frac{1}{2}; \text{c) } x<-\frac{2}{3} \vee x>\frac{1}{2}\right]$$

128 **COMPLETA** la seguente tabella.

DISEQUAZIONE	SOLUZIONE	
	RAPPRESENTAZIONE GRAFICA	RAPPRESENTAZIONE ALGEBRICA
....		....
....	....	$x<-3 \vee x>4$
$-x^2+2x \geq 0$	....	....
....	....	$\forall x \neq \frac{1}{2}$
....		....

COMPLETA

129 $x^2-4x\ \ldots > 0$ $\quad\forall x \neq 2$.

130 $x^2 \ldots 9<0$ $\quad$ è impossibile.

131 $x^2+x+1 \ldots 0$ $\quad\forall x \in \mathbb{R}$.

132 $x^2 \ldots 36>0$ $\quad\forall x \in \mathbb{R}$.

133 $x^2 \ldots 49>0$ $\quad$ per $x<-7 \vee x>7$.

134 $x^2-6x\ \ldots>0$ $\quad$ per $x \neq 3$.

135 $x^2 \ldots x \ldots <0$ $\quad$ per $2<x<4$.

136 $x^2 \ldots \leq 0$ $\quad$ per $-4 \leq x \leq 4$.

137 $x^2 \ldots x \ldots >0$ $\quad$ per $x<-2 \vee x>5$.

138 $\ldots -x^2 \geq 0$ $\quad$ per $0 \leq x \leq 5$.

La risoluzione grafica

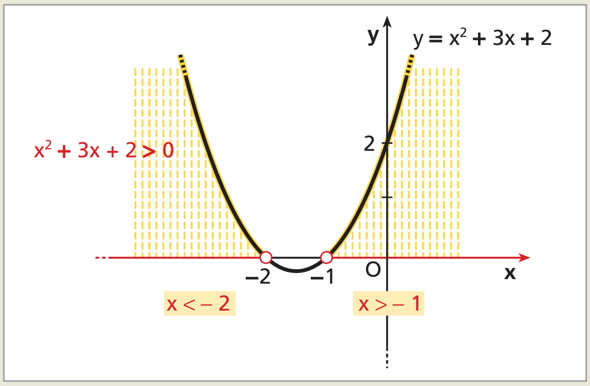
ESERCIZIO GUIDA

139 Risolviamo graficamente le seguenti disequazioni:

a) $x^2 + 3x + 2 > 0$;
b) $x^2 - 2x + 1 > 0$;
c) $x^2 + 1 < 0$;
d) $-x^2 + 2x > 0$.

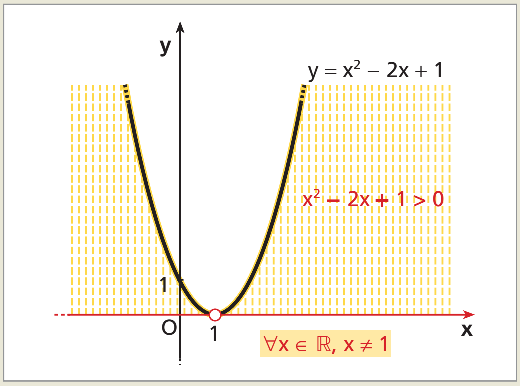
a) Associamo la disequazione alla parabola di equazione $y = x^2 + 3x + 2$ e cerchiamo i punti della parabola che hanno ordinata positiva.

La parabola ha vertice in $V\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$, la concavità rivolta verso l'alto (il coefficiente a è positivo) e interseca l'asse y nel punto $P(0; 2)$. Le ascisse dei punti di intersezione con l'asse x sono le soluzioni dell'equazione $x^2 + 3x + 2 = 0$, ossia $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.



I punti della parabola che hanno ordinata positiva sono quelli disposti «sopra l'asse x», sono cioè quelli che hanno ascissa minore di -2 o maggiore di -1.
La disequazione è verificata per: $x < -2 \vee x > -1$.

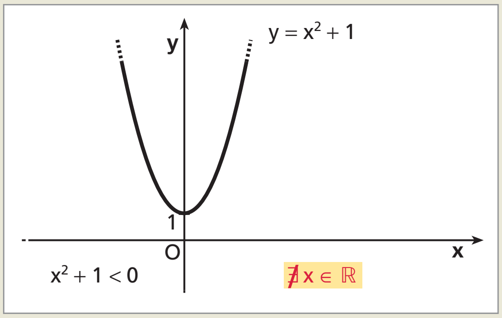
b) Associamo la disequazione alla parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 1$.
La parabola ha vertice in $V(1; 0)$, la concavità rivolta verso l'alto (il coefficiente a è positivo) e interseca l'asse y nel punto $P(0; 1)$.
La parabola è quindi tangente all'asse x nel vertice e si trova interamente «al di sopra» di esso: per ogni valore di x diverso da 1 le ordinate dei punti della parabola sono positive.
La disequazione è soddisfatta $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$.



c) Associamo la disequazione alla parabola di equazione $y = x^2 + 1$.
Tale parabola ha vertice in $V(0; 1)$, che appartiene all'asse y: l'asse della parabola coincide con l'asse y. Inoltre, essa ha la concavità rivolta verso l'alto e, poiché l'ordinata del vertice è 1, non interseca l'asse x in alcun punto.

La parabola si trova interamente «al di sopra» dell'asse x, quindi non c'è alcun punto della parabola che abbia ordinata negativa, pertanto la disequazione non è mai verificata per alcun valore reale di x.

Non esistono soluzioni reali della disequazione.

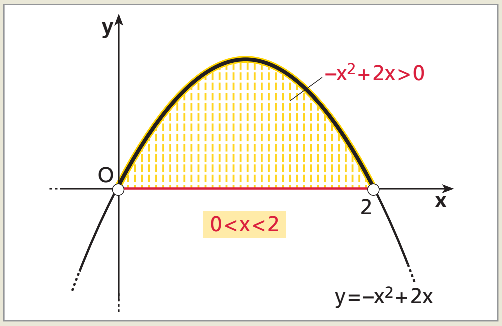


d) Associamo la disequazione alla parabola di equazione $y = -x^2 + 2x$.

Questa parabola ha vertice in $V(1; 1)$, ha concavità rivolta verso il basso e interseca l'asse x in $(0; 0)$ e $(2; 0)$.

I punti con ordinata positiva sono quelli con ascissa compresa fra 0 e 2.
Quindi le soluzioni della disequazione sono:

$0 < x < 2$.



Risolvi graficamente le seguenti disequazioni di secondo grado.

140 $x^2 - 1 > 0$ $[x < -1 \vee x > 1]$

141 $4 - x^2 < 0$ $[x < -2 \vee x > 2]$

142 $x^2 - 2x + 1 < 0$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

143 $-x^2 < 0$ $[\forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\}]$

144 $x^2 + x - 6 > 0$ $[x < -3 \vee x > 2]$

145 $-3x^2 \leq 0$ $[\forall\, x \in \mathbb{R}]$

146 $-x^2 - 2x < 0$ $[x < -2 \vee x > 0]$

147 $x^2 + x + 6 < 0$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

148 $x^2 - 4x + 6 > 0$ $[\forall\, x \in \mathbb{R}]$

149 $-x^2 + 1 > 0$ $[-1 < x < 1]$

150 $-x^2 - 1 > 0$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

151 $-x^2 + 3x + 4 < 0$ $[x < -1 \vee x > 4]$

152 $x^2 - 5x + 8 > 0$ $[\forall\, x \in \mathbb{R}]$

153 $x^2 + 4x + 3 < 0$ $[-3 < x < -1]$

154 $-x^2 + 16 \leq 0$ $[x \leq -4 \vee x \geq 4]$

155 $6x^2 + x - 1 < 0$ $\left[-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\right]$

156 $-x^2 + 6x - 9 \geq 0$ $[x = 3]$

157 $x^2 + 4x + 5 < 0$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

158 $-x^2 - 5 < 0$ $[\forall\, x \in \mathbb{R}]$

159 $-x^2 - 8x > 0$ $[-8 < x < 0]$

160 $3x^2 - 4x - 7 < 0$ $\left[-1 < x < \frac{7}{3}\right]$

161 $81x^2 + 18x + 1 \leq 0$ $\left[x = -\frac{1}{9}\right]$

162 $-x^2 + 8x + 9 \geq 0$ $[-1 \leq x \leq 9]$

163 $x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{5}{8} > 0$ $\left[x < -\frac{5}{4} \vee x > \frac{1}{2}\right]$

164 $-x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{9}{16} > 0$ $\left[\frac{1}{4} < x < \frac{9}{4}\right]$

165 $-2x^2 - 6 > 0$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

166 $4x^2 - 21x + 27 > 0$ $\left[x < \frac{9}{4} \vee x > 3\right]$

167 $4x^2 + 7x - 2 > 0$ $\left[x < -2 \vee x > \frac{1}{4}\right]$

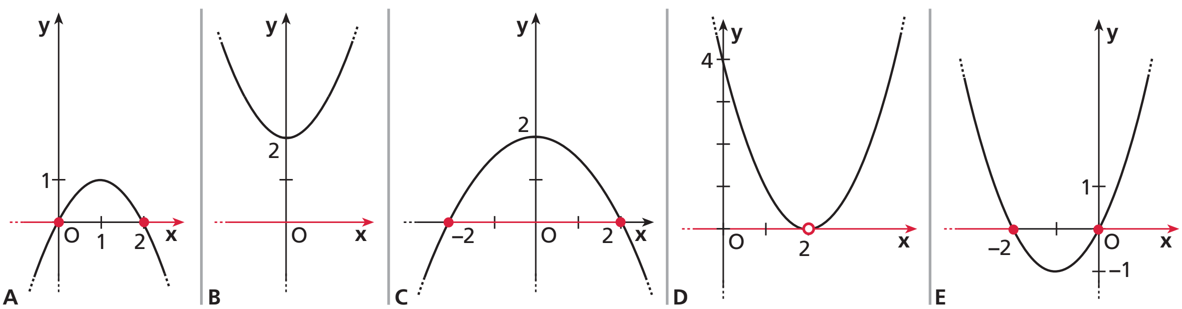
168 $-x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{1}{6} > 0$ $\left[\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\right]$

169 $32x^2 - 12x + 1 < 0$ $\left[\frac{1}{8} < x < \frac{1}{4}\right]$

170 $-2x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{4} \geq 0$ $\left[-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{4}\right]$

171 **ASSOCIA** a ogni disequazione la corrispondente soluzione grafica (la soluzione è indicata in rosso).

1. $(x-2)^2 > 0$ **2.** $-x^2 + 2x \leq 0$ **3.** $x^2 + 2 > 0$ **4.** $x^2 + 2x \geq 0$ **5.** $-\frac{1}{2}x^2 + 2 \geq 0$



RIEPILOGO LE DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO INTERE

172 **CACCIA ALL'ERRORE** Trova l'errore e correggilo.

a) $-\frac{1}{4}x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq -4$

b) $x^2 \leq 0 \rightarrow x \leq 0$

c) $-4x^2 \geq -4 \rightarrow x^2 \geq 1 \rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$

d) $x^2 \leq 16 \rightarrow x \leq 4$

e) $x^2 + 4 \leq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$

Risolvi le seguenti disequazioni.

173 $x^2 + 5x \leq 0$ $[-5 \leq x \leq 0]$

174 $-x^2 + 4x - 3 < 0$ $[x < 1 \vee x > 3]$

175 $-x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \leq 0$ $\left[x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 1\right]$

176 $x^2 - 4x + 4 > 0$ $[\forall\, x \in \mathbb{R} - \{2\}]$

177 $8x - x^2 > 0$ $[0 < x < 8]$

178 $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$ $\left[x = \frac{3}{2}\right]$

179 $2x^2 - \frac{1}{8} < 0$ $\left[-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}\right]$

180 $-\frac{1}{9}x^2 > 0$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

181 $\frac{1}{5}x^2 - 4x < 0$ $[0 < x < 20]$

182 $9x - x^2 - 20 \geq 0$ $[4 \leq x \leq 5]$

183 $7 - x^2 \leq 0$ $\quad [x \leq -\sqrt{7} \vee x \geq \sqrt{7}]$

184 $-4(x+1)^2 < 0$ $\quad [\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}]$

185 $2x^2 + x \geq 1$ $\quad \left[x \leq -1 \vee x \geq \frac{1}{2}\right]$

186 $(x-3)^2 \leq 4$ $\quad [1 \leq x \leq 5]$

187 $x^2 - 10x + 21 \leq 0$ $\quad [3 \leq x \leq 7]$

188 $x^2 - 7x + 10 > 0$ $\quad [x < 2 \vee x > 5]$

189 $9x^2 + 30x + 25 \leq 0$ $\quad \left[x = -\frac{5}{3}\right]$

190 $6x^2 - 5x + 1 < 0$ $\quad \left[\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\right]$

191 $x^2 + 2x + 5 < 0$ $\quad [\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

192 $2x^2 - x + \frac{17}{8} \leq 0$ $\quad [\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

193 $-9x^2 + 12x - 4 < 0$ $\quad \left[\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}\right]$

194 $-x^2 + 4x + 12 > 0$ $\quad [-2 < x < 6]$

195 $x^2 - x - \frac{40}{9} \geq 0$ $\quad \left[x \leq -\frac{5}{3} \vee x \geq \frac{8}{3}\right]$

196 $25x(1-x) - 6 < 0$ $\quad \left[x < \frac{2}{5} \vee x > \frac{3}{5}\right]$

197 $4 \geq 9x(x+1)$ $\quad \left[-\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}\right]$

198 $x^2 > \frac{1}{2}(x+1)$ $\quad \left[x < -\frac{1}{2} \vee x > 1\right]$

---

199 $2 + x(1-x) < 2(4x+7)$ $\quad [x < -4 \vee x > -3]$

200 $-x^2 + 4\sqrt{3}x + 13 \leq 0$ $\quad [x \leq 2\sqrt{3} - 5 \vee x \geq 2\sqrt{3} + 5]$

201 $\sqrt{3}x^2 - 2x - \sqrt{3} < 0$ $\quad \left[-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \sqrt{3}\right]$

202 $x^2 + \frac{6x}{\sqrt{6}} + \frac{3}{2} > 0$ $\quad \left[\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}\right]$

203 $1 - x^2 \geq 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$ $\quad [-2 \leq x \leq 0]$

204 $2x(x-1) + x(8+3x) - (x^2+8) > 4x + 6x(x-1)$ $\quad [\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

BRAVI SI DIVENTA ► E46

205 $6(x - \sqrt{3})^2 + \frac{x}{2}(2-x) \geq 12(1 - \sqrt{3}x) + \frac{(4+x)(4-x)}{2}$

206 $\frac{2}{3}(3x+3) + \frac{1}{9}[9x^2 + (-3)^2] + \frac{1}{4}[8x + (-2)^2] \leq 0$ $\quad [x = -2]$

207 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}(2x+1) + x(x+1) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ $\quad [\forall x \in \mathbb{R}]$

208 $-x^2 + \frac{5}{\sqrt{2}}x - 2 > 0$ $\quad \left[\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 2\sqrt{2}\right]$

209 $\frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{4x}{3} + \frac{8}{\sqrt{162}} > 0$ $\quad \left[\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\sqrt{2}\right\}\right]$

210 $\frac{\sqrt{2}x^2 - 1}{\sqrt{2}} < -\frac{14x + 23}{2}$ $\quad \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - 4 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} - 3\right]$

211 $\frac{1}{2}x\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{2}x^2\right) + x - \frac{1}{6} < \frac{5}{6}x$ $\quad \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

212 $\frac{13 + 9x^2}{9} - \frac{2x-1}{2} - \frac{1}{3}(4x+1) > 0$ $\quad [\forall x \in \mathbb{R}]$

213 $\frac{1}{3}(3x^2 - 2) - 2(x-1) - \frac{4}{3}\left(x - \frac{13}{12}\right) < 0$ $\quad [\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

214 $-6x+\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}+x\right)-9(-1)^2<0$ $\left[x<-\frac{7}{2}\vee x>-\frac{5}{2}\right]$

215 $\frac{1}{5}\left(\frac{x-2}{2}\right)+\frac{4x^2+x}{4}-\frac{1}{8}\left(1+\frac{13}{5}\right)>0$ $\left[x<-1\vee x>\frac{13}{20}\right]$

216 $\frac{5}{4}+\frac{x}{3}(3x-8)-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}-2x\right)\leq\frac{2}{3}\left(x+\frac{65}{12}\right)$ $\left[-\frac{5}{3}\leq x\leq\frac{5}{3}\right]$

217 $2\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^2-4x\right]-\frac{1}{4}(x+1)-(15+x^2)>0$ $\left[-\frac{11}{2}<x<-\frac{11}{4}\right]$

218 $\sqrt{3}x^2-x+\frac{1}{2}\geq\sqrt{3}x-\frac{1}{2}$ $\left[x\leq\frac{\sqrt{3}}{3}\vee x\geq 1\right]$

219 $\frac{1-x+x^2}{2}+\frac{x(3x+16)}{8}-\frac{3x^2+2}{4}\leq x^2+\frac{5x-4}{3}$ $\left[x\leq-\frac{4}{3}\vee x\geq\frac{8}{7}\right]$

220 $\frac{8}{5}\left(\frac{15}{2}x+90\right)-\frac{6}{5}\left[20x+\frac{6}{5}(-10)^2\right]-x^2<0$ $[x<-12\vee x>0]$

221 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2[2-(-2x)^2]-\frac{2+9x}{9}-\frac{1}{2}(x+1)>0$ $\left[-\frac{4}{3}<x<-\frac{1}{6}\right]$

222 $(1-x)^2+x(x-3)>1-2x\left(1-\frac{x}{2}\right)$ $[x<0\vee x>3]$

223 $2(x+5)^2-(x-3)(x+3)>2(6x+5)+22x$ $[\forall x\in\mathbb{R}-\{7\}]$

224 $(2x+1)^2-(3-x)(x+2)\geq 2+5x+(1-x)^2$ $[x\leq-\sqrt{2}\vee x\geq\sqrt{2}]$

225 $\frac{(3-2x)^2}{12}+\frac{2(1-x)(1+x)}{3}<\frac{-x^2-3x+6}{4}$ $\left[x<\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\vee x>\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right]$

226 $\frac{2(x-1)(x+1)}{3}+\frac{x(x+2)}{6}\leq\frac{x^2+x(1+x)}{3}$ $[-2\leq x\leq 2]$

227 $(x+5)^2-8(-x-5)+(-4)^2\leq 0$ $[x=-9]$

228 $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\geq x-\frac{1}{4}$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

229 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geq\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)$ $\left[x\leq-1\vee x\geq\frac{1}{2}\right]$

230 $2\left(5-\frac{13}{8}x\right)>(x+2)^2$ $\left[-8<x<\frac{3}{4}\right]$

231 $\left(x-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{2}{5}\leq\frac{3}{10}\left(\frac{1}{5}-\frac{7}{3}x\right)$ $\left[-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{5}\right]$

232 $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\leq x-\frac{1}{4}$ $\left[x=\frac{5}{6}\right]$

233 $(x+1)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{2}(x+1)\leq 0$ $\left[x=-\frac{3}{4}\right]$

234 $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2+(x-1)^2+1>0$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

235 $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)>\frac{x}{12}(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)$ $\left[x<-\frac{1}{3}\vee x>\frac{3}{4}\right]$

236 $\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{5}\right)+\frac{9}{16}>0$ $\left[\forall x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{11}{20}\right\}\right]$

237 $\frac{2-4x}{\sqrt{2}}-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+4x<0$ $\left[\forall x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}-\sqrt{2}\right\}\right]$

238 $\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+1\right)\frac{4}{5}+\frac{x^2-2x}{3}+\frac{2}{3}\left(1+\frac{x^2}{5}\right)-\frac{2}{3}>\frac{4}{5}$ $[x<0 \vee x>2]$

239 $\frac{1}{2}(x-1)+\left(x^2-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{10}\left(x-\frac{13}{2}\right)<0$ $\left[-\frac{3}{2}<x<\frac{9}{10}\right]$

240 $x(1-2x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2}{3}x\left(3x-\frac{3}{4}\right)>4x^2+\frac{x}{2}$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

241 $\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-6\left(\frac{x}{\sqrt{6}}-\frac{2}{27}\right)>\frac{1}{9}$ $[x<0 \vee x>\sqrt{6}]$

242 $-(x-\sqrt{3})^2-(x+\sqrt{2})^2-(x+1)^2>1$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

243 $\frac{1}{3}x(2x-1)+\frac{1}{2}x\left(1+\frac{2}{3}x\right)-4\left(1+\frac{x}{24}\right)+\frac{6}{\sqrt{3}}>0$ $[x<1-\sqrt{3} \vee x>\sqrt{3}-1]$

244 $\frac{1}{6}(1-x)-\frac{2\left(-\frac{1}{3}\right)+3x^2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}+3x\right)>0$ $\left[-\frac{1}{6}<x<1\right]$

245 $\frac{x}{5}(1-x)-\frac{4}{5}\left(x^2+\frac{3}{16}\right)+\frac{x-\frac{5}{16}-\frac{1}{3}x}{\frac{1}{3}}<0$ $\left[x<\frac{3}{4} \vee x>\frac{29}{20}\right]$

Le disequazioni intere letterali

TEST

246 Sulla disequazione $ax^2 \geq 0$, nell'incognita x, puoi affermare che è verificata:

- A per $x \geq 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.
- B $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.
- C $\forall\, x \in \mathbb{R}$, per $a = 0$.
- D per $x > 0$ se $a > 0$.
- E per $x \leq 0$ se $a < 0$.

247 Sulla disequazione $hx^2-2hx-1+h>0$, con h parametro reale, puoi affermare che:

- A se $h<0$, ammette soluzioni per valori interni alle soluzioni dell'equazione associata.
- B se $h=0$, è verificata $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- C se $h>0$, ammette due soluzioni reali.
- D se $h<0$, è impossibile.
- E se $h>0$, è verificata per valori interni alle soluzioni dell'equazione associata.

248 La disequazione $x^2-(1-k)x-k \geq 0$, con $k \in \mathbb{R}$, ammette come soluzioni tutti i numeri reali se:

- A $k=0$.
- B $k=1$.
- C $k=-1$.
- D $k>0$.
- E $k>-1$.

249 La disequazione $0<1-\frac{x^2}{k}$, con $k \in \mathbb{R}$, ammette come soluzioni:

- A $-\sqrt{k}<x<\sqrt{k}$ se $-k<0$.
- B $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se $k>0$.
- C $x=\pm 1$ se $k=0$.
- D $x<-\sqrt{k} \vee x>\sqrt{k}$ se $k>0$.
- E $x<\pm\sqrt{k}$ se $k>0$.

250 Quale simbolo di disuguaglianza puoi sostituire ai puntini nella disequazione $9 \ldots -x^2$ affinché sia verificata $\forall\, x \in \mathbb{R}$? Perché?

ESERCIZIO GUIDA

251 Risolviamo la seguente disequazione nell'incognita x:

$$4x^2 + 4ax - 3a^2 > 0, \quad \text{con } a > 0.$$

Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata $4x^2 + 4ax - 3a^2 = 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = 4a^2 - 4(-3a^2) = 4a^2 + 12a^2 = 16a^2.$$

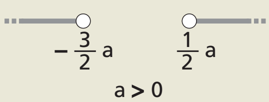
Calcoliamo le radici:

$$x = \frac{-2a \pm 4a}{4} = \begin{cases} -\frac{3}{2}a \\ \frac{1}{2}a \end{cases}$$

Poiché $a > 0$, $-\frac{3}{2}a$ è negativo, mentre $\frac{1}{2}a$ è positivo; allora:

$$-\frac{3}{2}a < \frac{1}{2}a.$$

Poiché il coefficiente di x^2 è $4 > 0$ e $\Delta > 0$, il trinomio $4x^2 + 4ax - 3a^2$ è positivo per valori esterni all'intervallo delle radici



e la disequazione è verificata per:

$$x < -\frac{3}{2}a \vee x > \frac{1}{2}a.$$

E se non ci fosse stata l'ipotesi $a > 0$? Avremmo dovuto fare la **discussione**.

Essendo $\frac{\Delta}{4} = 16a^2$, si ha:

$\Delta > 0$ per $a \neq 0$,

$\Delta = 0$ per $a = 0$.

Distinguiamo tre casi.

- Se $a > 0$, abbiamo già ottenuto:
  $x < -\frac{3}{2}a \vee x > \frac{1}{2}a.$
- Se $a = 0$, si ha $4x^2 > 0$ verificata per qualsiasi valore di x tranne che per $x = 0$ (soluzione doppia dell'equazione associata).
  Le soluzioni quindi si hanno per $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- Se $a < 0$, risulta $-\frac{3}{2}a > 0$ e $\frac{1}{2}a < 0$, quindi
  $\frac{1}{2}a < -\frac{3}{2}a \quad (a < 0).$
  Le soluzioni si hanno per
  $x < \frac{1}{2}a \vee x > -\frac{3}{2}a.$

Risolvi le seguenti disequazioni nell'incognita x.

252 $x^2 - 4bx + 4b^2 \geq 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

253 $x^2 - 4a^2 > 0 \quad (a > 0)$ $[x < -2a \vee x > 2a]$

254 $9x^2 + 6kx + k^2 > 0$ $\left[\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k}{3}\right\}\right]$

255 $(3x - a)\left(x - \frac{2a}{3}\right) < 0 \quad (a > 0)$ $\left[\frac{a}{3} < x < \frac{2a}{3}\right]$

256 $3ax \geq a^2 + 2x^2 \quad (a > 0)$ $\left[\frac{a}{2} \leq x \leq a\right]$

257 $\left(\frac{2a}{5} - x\right)^2 > 0$ $\left[\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{2a}{5}\right\}\right]$

258 $4a^2x^2 - ax + 1 < 0$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

259 $x(2x - k) < k^2 \quad (k > 0)$ $\left[-\frac{k}{2} < x < k\right]$

260 $16bx - 12b^2 - 5x^2 \geq 0 \quad (b < 0)$ $\left[2b < x < \frac{6}{5}b\right]$

261 $\frac{1}{2}x(11b - x) - \frac{1}{2}(x^2 + 5b^2) < 0 \quad (b > 0)$ $\left[x < \frac{b}{2} \vee x > 5b\right]$

262 $-x^2 - x + b^2 - 3b + 2 < 0 \quad \left(b > \frac{3}{2}\right)$ $[x < 1 - b \vee x > b - 2]$

263 $(a - 2)x^2 + 9 \geq 0$ $\left[a \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}; a < 2, \frac{-3}{\sqrt{2 - a}} \leq x \leq \frac{3}{\sqrt{2 - a}}\right]$

264 $ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$ $\left[a > 0, x < -\frac{1}{a} \vee x > a; a < 0, a < x < -\frac{1}{a}; a = 0, x > 0\right]$

265 $ax^2 - x^2 - a^2x + x \geq 0 \quad (a \geq 1)$ $[a = 1, \forall x \in \mathbb{R}; a > 1, x \leq 0 \vee x \geq a + 1]$

266 $\frac{a^2 + 3x^2}{3} - a\left(a - \frac{3x}{2}\right) - \frac{a^2}{6}\left(\frac{5x}{a} + \frac{7}{2}\right) > 0 \quad (a > 0)$ $\left[x < -\frac{3}{2}a \vee x > \frac{5}{6}a\right]$

267 $a(x - 3)^2 > x(1 - 6a) + a(5 + 4ax) \quad \left(a > \frac{1}{2}\right)$ $\left[x < \frac{1}{a} \vee x > 4a\right]$

268 $\frac{7a - 3x - a(x - 1)^2}{1 - a} > 2ax \quad (a < 0)$ $\left[x < 2a \vee x > -\frac{3}{a}\right]$

269 $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{a}{2}(x - a) - \frac{3}{4}a < 0 \quad (a > 0)$ $\left[-\frac{2a + 1}{2} < x < \frac{a + 1}{2}\right]$

270 $\frac{ax}{b^2} - 2\left(\frac{a}{b^2}\right)^2 + x^2 \leq 0 \quad (a > 0,\ b \neq 0)$ $\left[-\frac{2a}{b^2} \leq x \leq \frac{a}{b^2}\right]$

271 $\frac{1}{2}x(a + 32x) - a\left(a - \frac{x}{6}\right) > \frac{2}{3}ax - 2a + 1 \quad (a > 1)$ $\left[x < \frac{1 - a}{4} \vee x > \frac{a - 1}{4}\right]$

272 $2x^2 - 3x - 2k^4 - k^2 + 1 < 0$ $\left[\frac{1 - 2k^2}{2} < x < 1 + k^2\right]$

273 $x^2 - \frac{6bx}{7} + \frac{9b^2}{49} < 0$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

274 $x^2 + 2ax + a^2 - 1 > 0$ $[x < -a - 1 \vee x > 1 - a]$

275 $(x - k^2)(x + k^2) + 2x + 1 \geq 0$ $[x \leq -1 - k^2 \vee x \geq k^2 - 1]$

276 $-x^2 - \frac{5ax}{2b} + \frac{6a^2}{b^2} > 0 \quad (a > 0, b < 0)$ $\left[\frac{3a}{2b} < x < -\frac{4a}{b}\right]$

277 $x^2 + (a - 4)x - 4a \leq 0$ $[a < -4, 4 \leq x \leq -a; a > -4, -a \leq x \leq 4; a = -4, x = 4]$

278 $2x^2 - kx - k^2 > 0$ $\left[k > 0, x < -\frac{k}{2} \vee x > k; k < 0, x < k \vee x > -\frac{k}{2}; k = 0, x \neq 0\right]$

279 $(a - 2)x^2 - 2ax + a + 2 \geq 0$ $\left[a < 2,\ \frac{a + 2}{a - 2} \leq x \leq 1; a = 2,\ x \leq 1; a > 2,\ x \leq 1 \vee x \geq \frac{a + 2}{a - 2}\right]$

280 $x^2 - bx - 12b^2 > 0$ $[b < 0, x < 4b \vee x > -3b; b = 0, \forall x \neq 0; b > 0, x < -3b \vee x > 4b]$

281 $2[1 + a(x - 4a)] \geq 2 - x^2$ $[a < 0, x \leq 2a \vee x \geq -4a; a = 0, \forall x \in \mathbb{R}; a > 0, x \leq -4a \vee x \geq 2a]$

282 $x^2 + a\left(\frac{x}{3} + \frac{a}{2}\right) < a\left(\frac{a}{3} - \frac{x}{2}\right)$ $\left[a > 0, -\frac{a}{2} < x < -\frac{a}{3}; a = 0, \text{imp.}, a < 0, -\frac{a}{3} < x < -\frac{a}{2}\right]$

283 $x(ax - 3) < \frac{ax^2}{2} - \frac{4}{a}$ $\left[a > 0, \frac{2}{a} < x < \frac{4}{a}; a = 0, \text{perde sign.}; a < 0, x < \frac{4}{a} \vee x > \frac{2}{a}\right]$

284 $6x^2 - ax - a^2 \leq 0$ $\left[a < 0, \frac{a}{2} \leq x \leq -\frac{a}{3}; a = 0, x = 0; a > 0, -\frac{a}{3} \leq x \leq \frac{a}{2}\right]$

285 $-x^2 + \frac{5ax}{4} + \frac{6a^2}{4} > 0$ $\left[a < 0, 2a < x < -\frac{3}{4}a; a = 0, \nexists\, x \in \mathbb{R}; a > 0, -\frac{3a}{4} < x < 2a\right]$

286 $5kx - 6 - k^2x^2 < 0$ $\left[k = 0, \forall x \in \mathbb{R}; k < 0, x < \frac{3}{k} \vee x > \frac{2}{k}; k > 0, x < \frac{2}{k} \vee x > \frac{3}{k}\right]$

287 $9x(x - 1) < 2k(3x - 2) - 2$

$$\left[k < \frac{1}{2}, \frac{2k+1}{3} < x < \frac{2}{3}; k = \frac{1}{2}, \nexists\, x \in \mathbb{R}; k > \frac{1}{2}, \frac{2}{3} < x < \frac{2k+1}{3}\right]$$

288 $x^2 - 2(k - 2)x + 3 - 2k \leq 0$ $[k < 1, 2k - 3 \leq x \leq -1; k = 1, x = -1; k > 1, -1 \leq x \leq 2k - 3]$

289 $kx(x - 3) - 2x(x - 4) - 6 < 0$

$$\left[k < \frac{4}{3}, x < \frac{2}{2-k} \vee x > 3; k = \frac{4}{3}, \forall x \neq 3; \frac{4}{3} < k < 2, x < 3 \vee x > \frac{2}{2-k}; k = 2, x < 3; k > 2, \frac{2}{2-k} < x < 3\right]$$

4. Le disequazioni di grado superiore al secondo

Teoria a pag. 1052

RIFLETTI SULLA TEORIA

290 TEST Sulle disequazioni $x^3 < 8$ e $x^4 < 16$ puoi affermare che:

- A sono entrambe impossibili.
- B sono entrambe verificate per $x < 2$.
- C la prima è verificata per $x < 2$ e la seconda per $x < -2 \vee x > 2$.
- D la prima equivale a $x < 2$ e la seconda a $x^2 < 4$.
- E sono entrambe verificate $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

291 TEST La disequazione $(x - 2)^5 - (x - 2)^4 > 0$ è equivalente a una sola delle seguenti disequazioni. Quale?

- A $x - 2 > 1$
- B $(x - 2)^2 > x - 2$
- C $(x - 2) > 0$
- D $x < 2$
- E Nessuna delle precedenti.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

292 Risolviamo le disequazioni:

a) $2x^3 + x^2 - 13x + 6 > 0$;   b) $x^4 - x^2 - 2 < 0$.

a) Cerchiamo di scomporre in fattori il polinomio $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$, applicando la regola di Ruffini.

Cerchiamo uno zero del polinomio fra:

$$\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \pm 6, \ \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}.$$

Proviamo a sostituire a x i valori indicati: se $x = 2$, si ha $16 + 4 - 26 + 6 = 0$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 1 & -13 & 6 \\ 2 & & 4 & 10 & -6 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 2)(2x^2 + 5x - 3)$$

Studiamo il segno dei fattori:

- primo fattore > 0:
  $x - 2 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 2$;
- secondo fattore > 0:
  $2x^2 + 5x - 3 > 0$.

  L'equazione associata è $2x^2 + 5x - 3 = 0$:

  $\Delta = 49 > 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{2}$.

  Il secondo fattore del polinomio è positivo per:

  $x < -3 \vee x > \frac{1}{2}$.

		-3		$\frac{1}{2}$		2	
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2x^2+5x-3$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$2x^3+x^2-13x+6$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

La disequazione è verificata per:

$$-3 < x < \frac{1}{2} \vee x > 2.$$

b) Consideriamo l'equazione associata:

$x^4 - x^2 - 2 = 0$.

Risolviamo l'equazione biquadratica ponendo:

$x^2 = z$.

$z^2 - z - 2 = 0$,

$\Delta = 9$,

$$z = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

da cui otteniamo:

$x^2 = 2$ e $x^2 = -1$.

Il polinomio $x^4 - x^2 - 2$ è scomponibile nei fattori $(x^2 - 2)$ e $(x^2 + 1)$, ossia:

$$x^4 - x^2 - 2 = (x^2 - 2)(x^2 + 1) =$$
$$= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 1).$$

Dallo studio del segno dei singoli fattori otteniamo il seguente quadro dei segni.

		$-\sqrt{2}$		$+\sqrt{2}$	
$x-\sqrt{2}$	$-$		$-$	0	$+$
$x+\sqrt{2}$	$-$	0	$+$		$+$
x^2+1	$+$		$+$		$+$
$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

La disequazione è verificata per:

$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

Risolvi le seguenti disequazioni nell'incognita x.

293 $2x^4 > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}]$

294 $x^4 + 1 > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

295 $3x^3 + 2x^2 + 3x + 2 < 0$ $\left[x < -\frac{2}{3}\right]$

296 $8x^3 - 8x^2 + 4x - 4 > 0$ $[x > 1]$

297 $-3x^3 + x^2 + 7x - 5 \leq 0$ $\left[x \geq -\frac{5}{3}\right]$

298 $x^4 + x^3 < 0$ $[-1 < x < 0]$

299 $x^4 - 2x^2 \geq 0$ $[x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2} \vee x = 0]$

300 $x^4 - 1 > 0$ $[x < -1 \vee x > 1]$

301 $3x^2 + 4x^4 \leq 0$ $[x = 0]$

302 $x^4 - 81 \leq 0$ $[-3 \leq x \leq 3]$

303 $x^4 + x^2 < 0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

304 $2x^3 - x^2 - 2x + 1 > 0$ $\left[-1 < x < \frac{1}{2} \vee x > 1\right]$

305 $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 < 0$ $[x < -3 \vee 1 < x < 5]$

306 $9x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2} < 0$ $\left[x < \frac{1}{2} \wedge x \neq -\frac{1}{3}\right]$

307 $9x^4 - 145x^2 + 16 > 0$ $\left[x < -4 \vee -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} \vee x > 4\right]$

308 $76x^2 - 3x^4 - 25 > 0$ $\left[-5 < x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee \frac{\sqrt{3}}{3} < x < 5\right]$

309 $6x^3 + 13x^2 + x - 2 \geq 0$ $\left[-2 \leq x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{3}\right]$

310 $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 \geq 0$ $[-3 \leq x \leq -2 \vee x \geq 3]$

311 $4x^4 - 37x^2 + 9 \leq 0$ $\left[-3 \leq x \leq -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} \leq x \leq 3\right]$

312 $x^4 + 5x^3 - 6x^2 \geq 0$ $[x \leq -6 \vee x = 0 \vee x \geq 1]$

313 $x^4 + 3x^2 - 28 < 0$ $[-2 < x < 2]$

314 $(x^3-4x)(2x^2+1)\geq 0$ $[-2\leq x\leq 0\vee x\geq 2]$

315 $(x^4-16)(x^3-2x^2-3x)<0$ $[x<-2\vee -1<x<0\vee 2<x<3]$

316 $x^3+x^2-9x-9\leq 0$ $[x\leq -3\vee -1\leq x\leq 3]$

317 $x^4+2x^3+4x^2+8x>0$ $[x<-2\vee x>0]$

318 $2x^3-7x^2-2x+7<0$ $\left[x<-1\vee 1<x<\frac{7}{2}\right]$

319 $16x^4-41x^2+18\leq 0$ $\left[-\sqrt{2}\leq x\leq -\frac{3}{4}\vee \frac{3}{4}\leq x\leq \sqrt{2}\right]$

320 $2x(1-x^2)+(x-1)(x+1)>0$ $\left[x<-1\vee \frac{1}{2}<x<1\right]$

321 $3x(11x-1)-6(-5x^3+1)>0$ $\left[-1<x<-\frac{1}{2}\vee x>\frac{2}{5}\right]$

322 $x^4-5x^3+5x^2+5x-6>0$ $[x<-1\vee 1<x<2\vee x>3]$

323 $6x^3+x^2-11x-6\geq 0$ $\left[-1\leq x\leq -\frac{2}{3}\vee x\geq \frac{3}{2}\right]$

324 $-8x^3-26x^2-3x+9<0$ $\left[-3<x<-\frac{3}{4}\vee x>\frac{1}{2}\right]$

325 $2x^4+3x^3-7x^2-12x-4\geq 0$ $\left[x\leq -2\vee -1\leq x\leq -\frac{1}{2}\vee x\geq 2\right]$

326 $(x^2+3x-4)(2x^2+5x-3)\leq 0$ $\left[-4\leq x\leq -3\vee \frac{1}{2}\leq x\leq 1\right]$

327 $(x+2)^4(x^2+x-2)^2\leq 0$ $[x=-2\vee x=1]$

328 $x(x-1)^3(x+1)^2>0$ $[x<0\vee x>1;\, x\neq -1]$

329 $(x^2+4)(x-2)^2(x^3-1)\geq 0$ $[x\geq 1]$

330 $-2(x-2)^3(x-5)^4(x^3+8)<0$ $[x<-2\vee x>2,\, x\neq 5]$

331 $11x^2+9x-18-x^4-x^3>0$ $[-3<x<-2\vee 1<x<3]$

332 $(x^2-9)(x^2-8x+16)(x+5)>0$ $[-5<x<-3\vee x>3\wedge x\neq 4]$

333 $x^4-2x^3-11x^2+12x+36>0$ $[\forall\, x\in\mathbb{R}-\{-2,3\}]$

334 $2x^4-x^3+x^2-x-1\geq 0$ $\left[x\leq -\frac{1}{2}\vee x\geq 1\right]$

335 $-(3x-1)^2+(3x-1)^3 \geq 9(3x^2-x)$ $\left[1-\frac{\sqrt{7}}{3} \leq x \leq \frac{1}{3} \vee x \geq 1+\frac{\sqrt{7}}{3}\right]$

336 $x^3-4ax^2+a^2x+6a^3>0 \quad (a>0)$ $[-a<x<2a \vee x>3a]$

337 $2x^3-ax^2+2a^2x-a^3 \geq 0$ $\left[x \geq \frac{a}{2}\right]$

338 $a^2x^3-b^2x^2+a^2x-b^2<0$ $\left[x<\frac{b^2}{a^2}\right]$

339 $x^4-3a^2x^2-4a^4 \leq 0 \quad (a>0)$ $[-2a \leq x \leq 2a]$

340 $x^4-10a^2x^2+9a^4>0 \quad (a>0)$ $[x<-3a \vee -a<x<a \vee x>3a]$

341 $x^4-5kx^2+6k^2 \geq 0 \quad (k>0)$ $[x \leq -\sqrt{3k} \vee -\sqrt{2k} \leq x \leq \sqrt{2k} \vee x \geq \sqrt{3k}]$

342 $x^4-4a^4x^2>x^2-4a^4 \quad \left(a>\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $[-1<x<1 \vee x<-2a^2 \vee x>2a^2]$

343 $-x^3+2x^2b+5xb^2-6b^3>0 \quad (b>0)$ $[x<-2b \vee b<x<3b]$

344 $a\sqrt{a}\,x^3-ax^2+\sqrt{a}\,x-1>0 \quad (a>0)$ $\left[x>\frac{1}{\sqrt{a}}\right]$

345 $x^2(x^2-5ax+5a^2)>a^3(6a-5x) \quad (a>0)$ $[x<-a \vee a<x<2a \vee x>3a]$

346 $6x^3-5ax^2-3a^2x+2a^3<0 \quad (a>0)$ $\left[x<-\frac{2}{3}a \vee \frac{a}{2}<x<a\right]$

347 $4x^4-13k^2x^2+9k^4>0$ $\left[k>0: x<-\frac{3}{2}k \vee -k<x<k \vee x>\frac{3}{2}k;\right.$
$\left. k=0: \forall x \in \mathbb{R}-\{0\}; k<0: x<\frac{3}{2}k \vee k<x<-k \vee x>-\frac{3}{2}k\right]$

5. Le disequazioni fratte

Teoria a pag. 1054

RIFLETTI SULLA TEORIA

TEST

348 Una sola fra le seguenti disequazioni è equivalente a $\frac{2}{x^3}<1$. Quale?

A $\frac{2-x^3}{x^3}>0$

B $\frac{x^3-2}{x^3}>0$

C $2-x^3<0$

D $2<1-x^3$

E Nessuna delle precedenti.

349 Fra le seguenti disequazioni soltanto una è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$. Quale?

A $\frac{1}{x^2}>0$

B $\frac{3+x^2}{x^4}>0$

C $\frac{2+x^2}{1+x^2}<0$

D $\frac{-2}{1+x^2}>0$

E $\frac{x^2}{4+x^2} \geq 0$

350 In quale intervallo è verificata la disequazione $\frac{x+1}{2-x} \geq 0$?

A $[-1; 2[$
B $]-\infty; -1] \cup]2; +\infty[$
C $]-\infty; +\infty[$
D $[-2; 1]$
E $[-1; 2]$

351 Il segno della frazione $\frac{f(x)}{g(x)}$ è positivo soltanto se:

A $f(x) > 0$.
B $f(x) > 0 \vee g(x) \neq 0$.
C $f(x)$ e $g(x)$ hanno segni concordi.
D $g(x)$ non si annulla.
E $f(x) > g(x)$.

352 La disequazione $\frac{\frac{1}{x}+1}{x} > 0$ è verificata se:

A $x \in]-1; +\infty[$.
B $x \in]-\infty; +\infty[$.
C $x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$.
D $x \in [-1; 0]$.
E $x \neq 0$.

353 **VERO O FALSO?**

a) La disequazione $\frac{x+1}{x} > 0$ è equivalente alla disequazione $x(x+1) > 0$ se $x \neq 0$. V F

b) La disequazione $\frac{x^2+1}{x^2} > 0$ è vera $\forall x \in \mathbb{R}$. V F

c) Il segno della frazione $\frac{f(x)}{g(x)}$ è negativo solo se $f(x) < g(x)$. V F

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più ▶ 12 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

354 Risolviamo la seguente disequazione fratta:

$$\frac{9x^2+2}{x^2-5x+6} < 0.$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

- $9x^2 + 2 > 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Equazione associata:

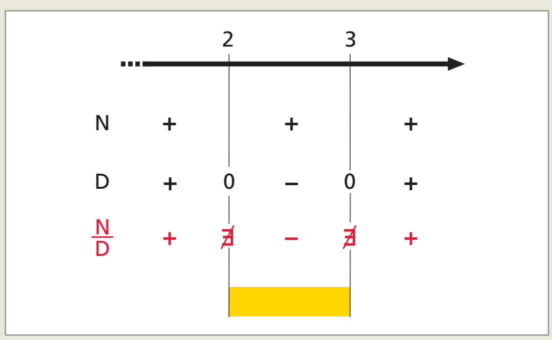
$x^2 - 5x + 6 = 0$,

$\Delta = 1$,

$$x = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

La disequazione è verificata per valori esterni alle radici: $x < 2 \vee x > 3$.

Compiliamo il quadro dei segni.



La disequazione fratta è soddisfatta per $2 < x < 3$, ossia nell'intervallo $]2; 3[$.

Risolvi le seguenti disequazioni fratte nell'incognita x.

355 $\frac{x-1}{x} > 0$ $[x < 0 \vee x > 1]$

356 $\frac{x+1}{x} > 0$ $[x < -1 \vee x > 0]$

357 $\frac{x}{9x^2 - 6x} > 0$ $\left[x > \frac{2}{3}\right]$

358 $\frac{x^2 + 4x - 5}{2x - 3} < 0$ $\left[x < -5 \vee 1 < x < \frac{3}{2}\right]$

359 $\frac{x^2 - 2x + 1}{6x} > 0$ $[x > 0, x \neq 1]$

360 $\frac{2x - 8}{(2x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)} \geq 0$ $\left[-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \vee x \geq 4\right]$

361 $\frac{3}{x-2} + x + 2 \geq 0$ $[-1 \leq x \leq 1 \vee x > 2]$

362 $-\frac{2}{x-3} - x < 0$ $[1 < x < 2 \vee x > 3]$

363 $\frac{x^2 + 1}{2x^2} > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}]$

364 $\frac{9x^2 - 12x + 4}{5x^2} \geq 0$ $[\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}]$

365 $\frac{3x^2 + 2}{3x^2 + 2x} \geq 0$ $\left[x < -\frac{2}{3} \vee x > 0\right]$

366 $\frac{5 - x^2}{5x + x^2} \leq 0$ $[x < -5 \vee -\sqrt{5} \leq x < 0 \vee x \geq \sqrt{5}]$

367 $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 8} < 0$ $[-4 < x < 1]$

368 $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 7x + 6} \geq 0$ $[x \leq -1 \vee 1 < x \leq 4 \vee x > 6]$

369 $\frac{x^2 + 3x + 7}{4x - 4 - x^2} < 0$ $[\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}]$

370 $-\frac{x^2 + 2 - x}{x - 1} + 4 > 0$ $[x < 1 \vee 2 < x < 3]$

371 $\frac{6}{5 - x} \geq x$ $[x \leq 2 \vee 3 \leq x < 5]$

372 $x \leq \frac{6}{x-1}$ $[x \leq -2 \vee 1 < x \leq 3]$

BRAVI SI DIVENTA ► E47

373 $\frac{1}{3x - x^2} - \frac{4}{x^2 - 6x + 9} \leq \frac{1}{x-3}$

374 $\frac{12}{2x - 7} + x + \frac{3}{2} > 0$ $\left[\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \vee x > \frac{7}{2}\right]$

375 $3 - x \geq \frac{4}{x+2}$ $[x < -2 \vee -1 \leq x \leq 2]$

376 $4 - x > \frac{10}{x+3}$ $[x < -3 \vee -1 < x < 2]$

377 $\frac{35}{4(x-3)} + x + 3 > 0$ $\left[-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \vee x > 3\right]$

378 $x + 3 \leq \frac{5}{3 - x}$ $[x \leq -2 \vee 2 \leq x < 3]$

379 $\frac{7 + 12x}{12} > \frac{25}{12(4x - 1)}$ $\left[-1 < x < \frac{1}{4} \vee x > \frac{2}{3}\right]$

380 $\frac{4(x-4)(x+6) + 99}{4x - 16} < 0$ $\left[x < -\frac{3}{2} \vee -\frac{1}{2} < x < 4\right]$

381 $\frac{6 + x}{x} < \frac{2}{x+1}$ $[-3 < x < -2 \vee -1 < x < 0]$

382 $-\frac{5}{6x - 9} \leq x + \frac{1}{3}$ $\left[\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3} \vee x > \frac{3}{2}\right]$

383 $x+\frac{1}{5}\leq\frac{3}{25x-5}$ $\left[x\leq-\frac{2}{5}\vee\frac{1}{5}<x\leq\frac{2}{5}\right]$

384 $1\leq\frac{14}{3(x+2)}+\frac{4}{3x-3}$ $[-2<x\leq 0\vee 1<x\leq 5]$

385 $\frac{x+2}{x-3}<\frac{1}{x+2}$ $[-2<x<3]$

386 $\frac{3}{x^2-2x+1}+\frac{3+x}{x-1}>0$ $[x<-2\vee(x>0\wedge x\neq 1)]$

387 $\frac{6}{x-1}-\frac{6}{x}<1$ $[x<-2\vee 0<x<1\vee x>3]$

388 $\frac{8}{5(x-3)}+1>\frac{3}{5(x+2)}$ $[x<-2\vee -1<x<1\vee x>3]$

389 $x\geq\frac{4x^2-13x}{x^2-9}$ $[-3<x\leq 0\vee x>3\vee x=2]$

390 $\frac{8-2x}{x-1}\leq 2x$ $[-2\leq x<1\vee x\geq 2]$

391 $x-\frac{8}{x}>-2$ $[-4<x<0\vee x>2]$

392 $-\frac{4x+7}{4x^2+7}\leq 0$ $\left[x\geq-\frac{7}{4}\right]$

393 $\frac{x^2-4}{x^2-1}\geq 1$ $[-1<x<1]$

394 $\frac{2x^2}{(3x-5)^2}\geq 0$ $\left[\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{5}{3}\right\}\right]$

395 $\frac{6-x}{x-3}-\frac{3}{2x-6}<-2$ $\left[\frac{3}{2}<x<3\right]$

396 $\frac{1+2x}{x-2}-\frac{5}{2x+4}>\frac{1}{2}$ $[x<-2\vee x>2]$

397 $\frac{2x}{x^2-4}\geq\frac{x+3}{x+2}-3$ $\left[x<-2\vee -2<x\leq\frac{3}{2}\vee x>2\right]$

398 $\frac{2x}{x^2-9}>\frac{1}{x-3}-\frac{x-2}{x^2+6x+9}$ $[-\frac{1}{2}<x<3\vee x>3]$

399 $\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{4}{x+1}\right)\geq 2-\frac{2}{x^2-1}$ $\left[-1<x\leq-\frac{1}{2}\right]$

400 $\frac{1}{x}<\frac{1}{x-3}+\frac{x^2-1}{x^2-3x}$ $[x<0\vee x>3]$

401 $\frac{81-x^4}{x^2-3x}\geq 0$ $[-3\leq x<0]$

402 $\frac{(x-3)^2(x^2+16)}{(x-2)^4}>0$ $[\forall x\in\mathbb{R}-\{2,3\}]$

403 $x^2 + \dfrac{1}{4x^2} < \dfrac{5}{4}$ $\left[-1 < x < -\dfrac{1}{2} \vee \dfrac{1}{2} < x < 1\right]$

404 $\dfrac{(x-8)(16-x^2)}{x^2-10x+25} \geq 0$ $[x \leq -4 \vee 4 \leq x < 5 \vee 5 < x \leq 8]$

405 $\dfrac{x^2-17}{x^2-10x+25} - \dfrac{4}{x-5} > 0$ $[x < 1 \vee 3 < x < 5 \vee x > 5]$

406 $\dfrac{3}{2x^2-6x} > \dfrac{5}{2x^2} - \dfrac{1}{(x-3)^2}$ $\left[\dfrac{15}{7} < x < 3 \vee x > 3\right]$

407 $\dfrac{(x^2+6)(x-4)^4}{8+x^2} > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R} - \{4\}]$

408 $\dfrac{x+1}{x-2} + \dfrac{1}{x} > \dfrac{x^2-9}{2x^2-4x}$ $[x < 0 \vee x > 2]$

409 $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x+1} \geq 1$ $\left[x < 1 \vee 1 < x \leq \dfrac{3}{2}\right]$

410 $\dfrac{1}{3x-1} + \dfrac{1}{9x^2-6x+1} > -\dfrac{1}{3x+1} + \dfrac{1}{(3x-1)^2(3x+1)}$ $\left[-\dfrac{1}{3} < x < 0 \vee \dfrac{1}{6} < x < \dfrac{1}{3} \vee x > \dfrac{1}{3}\right]$

411 $\dfrac{\dfrac{x-5}{2-x}(x-4)}{x-1} > 0$ $[1 < x < 2 \vee 4 < x < 5]$

412 $\dfrac{5x+2}{2x+5} \leq x^3$ $\left[-\dfrac{5}{2} < x \leq -2 \vee -1 \leq x \leq -\dfrac{1}{2} \vee x \geq 1\right]$

413 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{1}{4x^2} \leq \dfrac{13}{36}$ $\left[-\dfrac{3}{2} < x \leq -1 \vee 1 \leq x \leq \dfrac{3}{2}\right]$

414 $\dfrac{\dfrac{1-x}{6} - (2+x^2) - 3\left(x + \dfrac{2}{9}\right)}{6x^2 - x} \geq 0$ $\left[-\dfrac{5}{3} \leq x \leq -\dfrac{3}{2} \vee 0 < x < \dfrac{1}{6}\right]$

415 $\dfrac{a-x^2}{a+x^2} > 0 \quad (a > 0)$ $[-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}]$

416 $\dfrac{b^2}{3(x-b)} + x + \dfrac{b}{6} > 0 \quad (b > 0)$ $\left[\dfrac{b}{3} < x < \dfrac{b}{2} \vee x > b\right]$

417 $\dfrac{4a^2}{x-3a} + x + 2a > 0 \quad (a > 0)$ $[-a < x < 2a \vee x > 3a]$

418 $\dfrac{a^2}{2(2x-3a)} > \dfrac{2x-3a}{2} \quad (a > 0)$ $\left[x < a \vee \dfrac{3}{2}a < x < 2a\right]$

419 $\dfrac{5x^2}{32(4a-x)^2} - \dfrac{9x}{16(4a-x)} + \dfrac{9}{32} \geq 0 \quad (a > 0)$ $\left[x \leq \dfrac{3}{2}a \vee (x \geq 3a \wedge x \neq 4a)\right]$

420 $\dfrac{a^2x^4-1}{\sqrt{a}\,x^2-2x} < 0 \quad (a > 0)$ $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{a}} < x < 0 \vee \dfrac{1}{\sqrt{a}} < x < \dfrac{2}{\sqrt{a}}\right]$

421 $\dfrac{x^2-4ab^2x+4a^2b^4}{x^2-4a^2b^4} \geq 0 \quad (a > 0)$ $[x < -2ab^2 \vee x > 2ab^2]$

422 $\dfrac{k^2 - x^2}{2x - k} > 0$ $\left[k > 0: x < -k \vee \dfrac{k}{2} < x < k; k = 0: x < 0; k < 0: x < k \vee \dfrac{k}{2} < x < -k\right]$

423 $\dfrac{kx + x^2}{x - k} < 0$ $[k > 0: x < -k \vee 0 < x < k; k = 0: x < 0; k < 0: x < k \vee 0 < x < -k]$

424 $\dfrac{-9x^4 + 10b^2x^2 - b^4}{x^2 - 2bx} < 0$ $\left[b > 0: x < -b \vee -\dfrac{b}{3} < x < 0 \vee \dfrac{b}{3} < x < b \vee x > 2b;\right.$

$\left.b = 0: \forall x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0; b < 0: x < 2b \vee b < x < \dfrac{b}{3} \vee 0 < x < -\dfrac{1}{3}b \vee x > -b\right]$

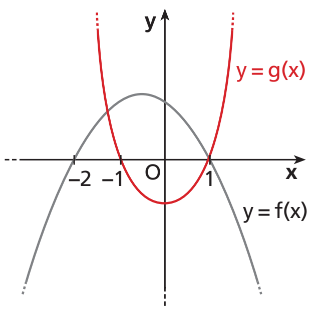
425 $\dfrac{5}{x - 2k} < \dfrac{3}{x - k}$ $\left[k < 0: x < 2k \vee k < x < -\dfrac{k}{2}; k = 0: x < 0; k > 0: x < -\dfrac{k}{2} \vee k < x < 2k\right]$

6. I sistemi di disequazioni

Teoria a pag. 1055

RIFLETTI SULLA TEORIA

426 COMPLETA la tabella, utilizzando le due funzioni rappresentate graficamente nella figura.



DISEQUAZIONE	SOLUZIONI
$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$	
$f(x)g(x) < 0$	
$\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$	

427 TEST Uno solo fra i seguenti intervalli rappresenta le soluzioni del sistema $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases}$. Quale?

A $\varnothing$ B $]-3; 1[$ C $]-\infty; +\infty[$ D $]-\infty; 3[\cap]-1; +\infty[$ E $]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$

428 La disequazione $\dfrac{x+2}{x-3} > 0$ è equivalente al sistema $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$? Perché?

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più ▶ 14 esercizi di recupero

429 ASSOCIA a ogni disequazione o sistema di disequazioni la propria soluzione.

1. $\begin{cases} x - 3 \le 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$ 2. $\dfrac{x+1}{x-3} \le 0$ 3. $\dfrac{x-3}{x+1} \ge 0$ 4. $\dfrac{x+1}{x-3} < 0$ 5. $\begin{cases} x - 3 \ge 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$

A. $x \ge 3$ B. $-1 \le x < 3$ C. $-1 < x \le 3$ D. $x < -1 \vee x \ge 3$ E. $-1 < x < 3$

ESERCIZIO GUIDA

430 Risolviamo il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2x - x^2 < 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \\ x + 6 - x^2 > 0 \end{cases}$$

Ordiniamo i polinomi rispetto a x e moltiplichiamo per -1 quando il coefficiente di x^2 è negativo:

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases}$$

Risolviamo le disequazioni separatamente considerando le equazioni associate.

- Prima disequazione:

$$x^2 - 2x = 0 \;\to\; x(x-2) = 0 \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{array}$$

È verificata per $x < 0 \vee x > 2$.

- Seconda disequazione:

$$x^2 - 3x - 4 = 0; \quad \Delta = 9 + 16 = 25; \quad x = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{array}{l} -1 \\ 4 \end{array}$$

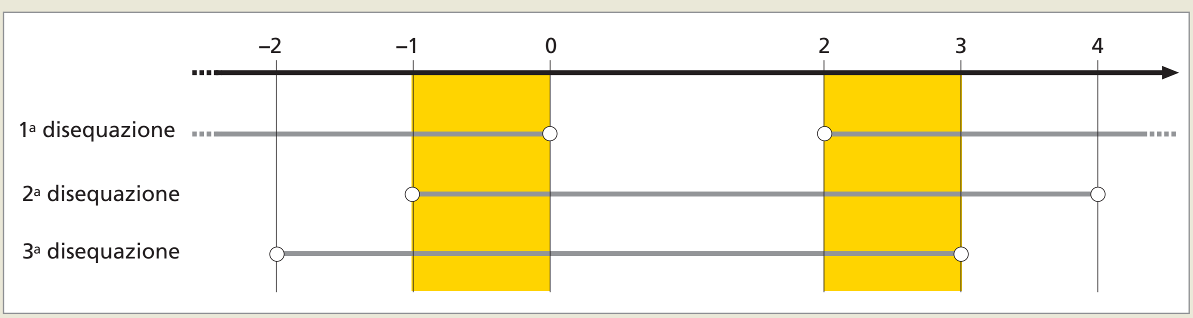
È verificata per $-1 < x < 4$.

- Terza disequazione:

$$x^2 - x - 6 = 0; \quad \Delta = 1 + 24 = 25; \quad x = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{array}{l} -2 \\ 3 \end{array}$$

È verificata per $-2 < x < 3$.

Compiliamo il quadro.



Il sistema è verificato negli intervalli in cui sono verificate contemporaneamente tutte le disequazioni, ossia per:

$-1 < x < 0 \quad \vee \quad 2 < x < 3.$

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

431 $\begin{cases} x^2+2>0 \\ x+1>0 \end{cases}$ $[x>-1]$

432 $\begin{cases} x^2+2x>0 \\ x+3>0 \end{cases}$ $[-3<x<-2 \vee x>0]$

433 $\begin{cases} 3x-2\geq 0 \\ 8x^2-30x+27>0 \end{cases}$ $\left[\frac{2}{3}\leq x<\frac{3}{2} \vee x>\frac{9}{4}\right]$

434 $\begin{cases} x^2+3>0 \\ x^2-7x+12<0 \end{cases}$ $[3<x<4]$

435 $\begin{cases} x^2-5x-7>0 \\ -4-x^2\geq 0 \end{cases}$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

436 $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{3}}-1>0 \\ x^2-2<0 \end{cases}$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

437 $\begin{cases} x-2<0 \\ -4x^2+12x+7>0 \end{cases}$ $\left[-\frac{1}{2}<x<2\right]$

438 $\begin{cases} 16x^2-8x+1>0 \\ x^2-8x-9\leq 0 \end{cases}$ $\left[-1\leq x\leq 9 \wedge x\neq\frac{1}{4}\right]$

439 $\begin{cases} 8x^2+6x-9>0 \\ x^2+8x\leq 0 \end{cases}$ $\left[-8\leq x<-\frac{3}{2}\right]$

440 $\begin{cases} 25-x^2\leq 0 \\ x^2+x-12\leq 0 \end{cases}$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

441 $\begin{cases} x^2-8x-9\leq 0 \\ x^2-8x+12>0 \end{cases}$ $[-1\leq x<2 \vee 6<x\leq 9]$

442 $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2-3x}\geq 0 \\ x-2\geq 0 \end{cases}$ $[x>3]$

443 $\begin{cases} x-5<0 \\ \dfrac{x-3}{x+2}\geq 0 \end{cases}$ $[x<-2 \vee 3\leq x<5]$

444 $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x}\leq 0 \\ x^2+3x-10\geq 0 \end{cases}$ $[x=2]$

BRAVI SI DIVENTA ► E48

445 $\begin{cases} \dfrac{x^2-4x-12}{x+3}\geq 0 \\ x(x-6)\leq 7 \end{cases}$

446 $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2-1}\geq 0 \\ \dfrac{x+4}{x-3}\leq 0 \end{cases}$ $[-4\leq x<-1 \vee 1<x<3]$

447 $\begin{cases} (x-1)^2-2(x+6)+14<0 \\ (x+2)(5x-4)>0 \end{cases}$ $[1<x<3]$

448 $\begin{cases} (2x-1)^2\geq 2x+1 \\ x(x-1)>x-1 \end{cases}$ $\left[x\leq 0 \vee x\geq\frac{3}{2}\right]$

449 $\begin{cases} \dfrac{x-2}{3}-\dfrac{6x+1}{2}>\dfrac{2x}{3} \\ -4x^2\geq 3x \end{cases}$ $\left[-\frac{3}{4}\leq x<-\frac{7}{20}\right]$

450 $\begin{cases} 3x+1\leq\dfrac{6x+5}{4} \\ x(2x-1)+1<4x+13 \end{cases}$ $\left[-\frac{3}{2}<x\leq\frac{1}{6}\right]$

451 $\begin{cases} (2-x)^2>8-x \\ \dfrac{x^2-4}{4}+x\leq -2 \end{cases}$ $[x=-2]$

452 $\begin{cases} 2x+1>0 \\ 7x-3x^2>0 \\ 2x-3>0 \end{cases}$ $\left[\frac{3}{2}<x<\frac{7}{3}\right]$

453 $\begin{cases} 4x-7<0 \\ 1-x<0 \\ 9-16x^2<0 \end{cases}$ $\left[1<x<\frac{7}{4}\right]$

454 $\begin{cases} 2x-3>0 \\ 3x+1>0 \\ 6x^2-x-1<0 \end{cases}$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

455 $\begin{cases} -x^2+x+2<0 \\ \dfrac{x+2}{2}\geq 1 \\ x^2-5x-14>0 \end{cases}$ $[x>7]$

456 $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 > 0 \\ x(x+2) < 8 \\ 2x^2 - 7x > 0 \end{cases}$ $[-4 < x < -3]$

457 $\begin{cases} 6x^2 + 7x - 5 > 0 \\ 7x + 2 - 4x^2 > 0 \\ x^2 > 2x \end{cases}$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

458 $\begin{cases} 2x^2 > 9(x+2) \\ 2x^2 - 13x > 7 \\ 4x^2 - 39x + 27 < 0 \end{cases}$ $[7 < x < 9]$

459 $\begin{cases} 3 - x^2 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x - 3 > 0 \\ x + 4x^2 - 3 < 0 \end{cases}$ $\left[-1 < x < -\frac{1}{2}\right]$

460 $\begin{cases} 4x(x-3) \geq -9 \\ 6x^2 - 11x + 3 \geq 0 \\ 2(x^2 + 6) \geq 11x \end{cases}$ $\left[x = \frac{3}{2} \vee x \leq \frac{1}{3} \vee x \geq 4\right]$

461 $\begin{cases} 9x^2 - 4 \leq 0 \\ 3x^2 + 5x + 2 \geq 0 \\ 15x^2 + x - 6 \geq 0 \end{cases}$ $\left[x = -\frac{2}{3} \vee \frac{3}{5} \leq x \leq \frac{2}{3}\right]$

462 $\begin{cases} x^2 + \sqrt{3}x - 6 > 0 \\ 2x^2 + \sqrt{3}x > 3 \\ 4x - 8\sqrt{3} < 0 \end{cases}$ $[x < -2\sqrt{3} \vee \sqrt{3} < x < 2\sqrt{3}]$

463 $\begin{cases} 2x^2 - 7\sqrt{2}x + 6 > 0 \\ 2x^2 - 7x\sqrt{2} < 0 \\ 12x^2 - 17x\sqrt{2} - 14 > 0 \end{cases}$ $\left[3\sqrt{2} < x < \frac{7}{2}\sqrt{2}\right]$

464 $\begin{cases} x^2 - x\sqrt{2} - x\sqrt{3} + \sqrt{6} < 0 \\ 3x^2 - 7x\sqrt{2} + 4 < 0 \\ 4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 > 0 \end{cases}$ $[\sqrt{2} < x < \sqrt{3}]$

465 $\begin{cases} \dfrac{2x}{x+6} > 0 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x-1} \geq 0 \end{cases}$ $\left[0 < x \leq \frac{1}{3} \vee x > 1\right]$

466 $\begin{cases} \dfrac{8}{x} \geq 0 \\ \dfrac{2}{x+3} < 1 \end{cases}$ $[x > 0]$

467 $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} < 0 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x+6} \geq 0 \end{cases}$ $[-6 < x \leq -2]$

468 $\begin{cases} \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{x-5} \\ x(7-x) > 12 \\ -2x < 0 \end{cases}$ $[3 < x < 4]$

469 $\begin{cases} 1 \leq \dfrac{2}{x} \\ \dfrac{3-x}{2x-1} + \dfrac{1}{3} \leq 0 \end{cases}$ $\left[0 < x < \frac{1}{2}\right]$

470 $\begin{cases} \dfrac{2-x}{2+x} \leq 0 \\ \dfrac{x-4}{1-2x} \geq 0 \end{cases}$ $[2 \leq x \leq 4]$

471 $\begin{cases} \dfrac{2x^2-5x-3}{4x-1}>0 \\ x^2-7x+6>0 \end{cases}$ $\left[-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{4} \vee x>6\right]$

472 $\begin{cases} \dfrac{6x^2-7x+2}{x^2+x+7}<0 \\ x^2-x-30\leq 0 \end{cases}$ $\left[\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{2}{3}\right]$

473 $\begin{cases} \dfrac{x}{x-3}>\dfrac{2x}{(x-2)(x-3)} \\ \dfrac{2}{x}<7 \end{cases}$ $[x<0 \vee 2<x<3 \vee x>4]$

474 $\begin{cases} \dfrac{x}{x-6}\leq\dfrac{3x-1}{(x+1)(x-6)} \\ \dfrac{x^2-9}{x+4}\geq 0 \end{cases}$ $[3\leq x<6]$

475 $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x+6}\geq 0 \\ 2x^2-7x+3\leq 0 \end{cases}$ $[2\leq x\leq 3]$

476 $\begin{cases} \dfrac{x+3}{1-2x}<0 \\ \dfrac{x}{x-2}>1 \end{cases}$ $[x>2]$

477 $\begin{cases} \dfrac{x(x-9)(x+1)}{x^2+4}\geq 0 \\ x^2-x+7>0 \end{cases}$ $[-1\leq x\leq 0 \vee x\geq 9]$

478 $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2-3x}-\dfrac{1}{x}<-1 \\ \dfrac{x(x+3)}{4x^2-1}\geq 0 \end{cases}$ $\left[\dfrac{1}{2}<x<2 \vee 2<x<3\right]$

479 $\begin{cases} \dfrac{x^2(x^2+4)}{x-1}\geq 0 \\ \dfrac{x^4+6x^2}{x^2-4}\geq 1 \end{cases}$ $[x>2]$

480 $\begin{cases} x^4>x^2 \\ \dfrac{(x+1)(x^2-3x)}{x^3}\geq 0 \end{cases}$ $[x<-1 \vee x\geq 3]$

481 $\begin{cases} \dfrac{3x^2+5x-2}{x-1}\geq 0 \\ x^4-9x^2<0 \end{cases}$ $\left[-2\leq x<0 \vee 0<x\leq\dfrac{1}{3} \vee 1<x<3\right]$

482 $\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+8}{2x-1} > 0 \\ (x-2)^4(x^2+x-2) > 0 \\ 9x \geq x^2 \end{cases}$ $[1 < x < 2 \vee 2 < x \leq 9]$

483 $\begin{cases} \dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x} \leq 0 \\ \dfrac{5+x^2}{x} + 3x \leq 9 \end{cases}$ $\left[1 \leq x \leq \dfrac{5}{4}\right]$

484 $\begin{cases} 9x^2 - 6\sqrt{2}x + 2 > 0 \\ x^2 - \sqrt{5}x - \sqrt{2}x + \sqrt{10} > 0 \\ (x^3-8)(x^4-9x^2) \geq 0 \end{cases}$ $\left[-3 \leq x < \dfrac{\sqrt{2}}{3} \vee \dfrac{\sqrt{2}}{3} < x < \sqrt{2} \vee x \geq 3\right]$

7. Applicazioni delle disequazioni

Teoria a pag. 1055

RIFLETTI SULLA TEORIA

La risoluzione delle equazioni irrazionali

485 Spiega, senza svolgere calcoli, perché ciascuna delle seguenti equazioni irrazionali non può ammettere soluzioni:

$\sqrt{-x^2-2} = 4$; $\sqrt{x^4-1} = -5$;

$\sqrt{x^3} + \sqrt{x^2+1} = 0$; $\sqrt{x^2-9} = -x^2-6$;

$\sqrt{x^4+16} = 0$; $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{-x^2-4}$.

486 TEST Una sola delle seguenti espressioni non esiste in $\mathbb{R}$. Quale?

A $-\sqrt{-x^2}$

B $-\sqrt{-x^3}$

C $\sqrt{-\dfrac{1}{x^3}}$

D $-\sqrt{-x^2-1}$

E $-\sqrt{x^2-4}$

Le equazioni e le disequazioni parametriche

487 Per determinare i valori di k che rendono positivo il prodotto delle soluzioni di

$(k^2-1)x^2 + kx + 3 = 0$

devi porre $\dfrac{3}{k^2-1} > 0$. Perché?

488 Perché puoi affermare che la disequazione in x $4x^2 + 3x + 2 - k > 0$ è verificata $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se $k < \dfrac{23}{16}$?

489 Le soluzioni della disequazione $\dfrac{x^2+3x+4}{k} > 0$ dipendono dal parametro k? Perché?

490 TEST La disequazione $kx - 3x^2 + k + 1 < 0$ è verificata $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se:

A $k^2 + 12(k+1) \geq 0$.

B $9 - 4k(k+1) < 0$.

C nessuna delle precedenti.

D $k^2 + 12k + 12 < 0$.

E $\dfrac{k}{3} > 0$.

491 TEST L'equazione parametrica

$(h+1)x^2 - 2hx - 1 + h = 0$

ammette radici reali, il prodotto delle quali è positivo, se:

A $h \neq 1$.

B $h < -1 \vee h > 1$.

C $\forall\, h \in \mathbb{R}$.

D $-1 < h < 1$.

E $h > 0$.

492 TEST Riguardo all'equazione $x^2 - k^2x + k = 0$, puoi affermare che:

A non ammette radici reali.

B ammette due soluzioni positive se $k < 0$.

C ammette radici reali e discordi se $k = 0$.

D ammette sempre due radici reali negative.

E nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

ESERCIZI

Le condizioni di esistenza dei radicali

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

Determina le condizioni di esistenza dei seguenti radicali.

493 $\sqrt{-x^2+9}$; $\sqrt{x(x-3)}$. $[-3 \leq x \leq 3; x \leq 0 \vee x \geq 3]$

494 $\sqrt{3x^2+11x-4}$; $\sqrt{x^2-3x+9}$. $\left[x \leq -4 \vee x \geq \frac{1}{3}; \forall x \in \mathbb{R}\right]$

495 $\sqrt{8+x^2}$; $\sqrt{4x^2-4x+1}$. $[\forall x \in \mathbb{R}; \forall x \in \mathbb{R}]$

496 $\sqrt{\frac{x}{x-5}}$; $\sqrt{\frac{x+3}{x^2(x+1)}}$. $[x \leq 0 \vee x > 5; x \leq -3 \vee -1 < x < 0 \vee x > 0]$

497 $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$; $\sqrt{\frac{-x}{x+8}}$. $[x < -2 \vee x \geq 1; -8 < x \leq 0]$

498 $\sqrt{\frac{4-x^2}{x}} + \sqrt{\frac{-2x^2}{x+1}}$ $[x \leq -2]$

499 $\sqrt[4]{\frac{x-2}{x^3}}$; $\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-4x}}$. $[x < 0 \vee x \geq 2; x \neq 0, x \neq 4]$

500 $\sqrt[3]{\frac{-x}{x^2+4x+4}}$; $\sqrt{\frac{(x-1)^4(x+2)}{x^3}}$. $[x \neq -2; x \leq -2 \vee x > 0]$

Determina il dominio naturale delle seguenti funzioni.

501 $f(x) = \sqrt{16-x^2} + \sqrt{x}$ $[0 \leq x \leq 4]$

502 $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2-2x}} - \sqrt{x^2-3x+2}$ $[x < 0 \vee x > 2]$

503 $f(x) = \frac{1}{6x-x^2} + \sqrt{2x-1}$ $\left[x \geq \frac{1}{2} \wedge x \neq 6\right]$

504 $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^4+1}} + \sqrt[3]{x}$ $[x \geq 0]$

505 $f(x) = \sqrt{\frac{4x^2-13x+3}{x(x+1)}}$ $\left[x < -1 \vee 0 < x \leq \frac{1}{4} \vee x \geq 3\right]$

La risoluzione delle equazioni irrazionali

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

ESERCIZIO GUIDA

506 Risolviamo l'equazione $\sqrt{x^2-4x+3}+2=2x$.

Isoliamo la radice:

$$\sqrt{x^2-4x+3}=2x-2.$$

Imponiamo la non negatività del radicando e del secondo membro:

$$\begin{cases} x^2-4x+3\geq 0 \\ 2x-2\geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\leq 1 \vee x\geq 3 \\ x\geq 1 \end{cases}$$

da cui segue la **condizione**: $x=1 \vee x\geq 3$.
Eleviamo al quadrato:

$$\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)^2=(2x-2)^2.$$

Svolgiamo i calcoli:

$$x^2-4x+3=4x^2-8x+4,$$
$$-3x^2+4x-1=0,$$
$$3x^2-4x+1=0.$$

$$\frac{\Delta}{4}=1, \qquad x=\frac{2\pm 1}{3}=\begin{cases}\frac{1}{3}\\ 1\end{cases}$$

Poiché dobbiamo tener conto della condizione $x=1 \vee x\geq 3$, è accettabile solo la soluzione:

$$x=1.$$

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali.

507 $\sqrt{x^2-1}=x+3$ $\left[-\frac{5}{3}\right]$

508 $\sqrt{x^2-x}=2x$ $[0]$

509 $\sqrt{4-x^2}=x+1$ $\left[\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right]$

510 $\sqrt{x^2-9}=x+1$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

511 $\sqrt{x^2-10x+16}=4-2x$ $[0;\,2]$

512 $\sqrt{2x^2-9x+4}=x-2$ $[5]$

513 $\sqrt{2x^2-3x-2}=2x-1$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

514 $2\sqrt{2x^2-x}=3x-1$ $[1]$

515 $x+2+\sqrt{2x^2+5x+11}=2x+1$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

516 $2x=\sqrt{2x-x^2}+3$ $\left[\frac{9}{5}\right]$

517 $\sqrt{5-2x^2}+1=x^2$ $[\pm\sqrt{2}]$

518 $\sqrt{x^2-x-6}=\frac{x}{2}-1$ $\left[2\sqrt{\frac{7}{3}}\right]$

519 $x^2=3+\sqrt{5-x^2}$ $[\pm 2]$

520 $\sqrt{(2x-5)(2x+5)+25}=(x-3)+2x$ $[3]$

521 $\sqrt{4x^2+11x-3}=2x+5$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

522 $3-x^2+\sqrt{x^4-3x^2-4}=0$ $\left[\pm\sqrt{\frac{13}{3}}\right]$

---

523 $\sqrt{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})+\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}}=x-\frac{1}{2}$ $\left[\frac{5}{3}\right]$

524 $\sqrt{2x^2+(8x+1)^2}=\sqrt{56x^2+13x+5}$ $\left[\frac{1}{2};\,-\frac{4}{5}\right]$

Le equazioni parametriche

ESERCIZIO GUIDA

525 Nella seguente equazione nell'incognita x determiniamo il valore del parametro k affinché la radice sia negativa:

$k^2(x-1)=9x.$

Svolgiamo i calcoli:

$k^2x-k^2=9x.$

Portiamo a primo membro i termini con l'incognita e a secondo membro quelli senza incognita:

$k^2x-9x=k^2.$

Raccogliamo l'incognita: $(k^2-9)x=k^2$.

- Se $k^2-9=0$, l'equazione è impossibile.
- Se $k^2-9\neq 0$, ossia $k\neq\pm 3$, l'equazione è determinata, cioè ammette una radice.

  Ricaviamo l'incognita:

  $$x=\frac{k^2}{k^2-9}.$$

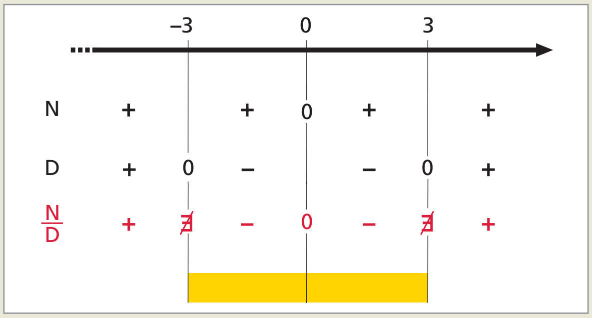
  Per avere la soluzione negativa deve essere:

  $$x=\frac{k^2}{k^2-9}<0.$$

  Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

  numeratore: $k^2>0$ per $k\neq 0$;

  denominatore: $k^2-9>0$ per valori di k esterni all'intervallo delle radici dell'equazione associata, ossia per $k<-3 \vee k>+3$.



La soluzione dell'equazione parametrica è negativa per:

$-3<k<3$ con $k\neq 0$.

526 Nell'equazione in x

$k^2+k(x-2)=x(k+1)+3$

determina i valori di k affinché la radice sia positiva. $[k<-1\vee k>3]$

527 Stabilisci per quali valori del parametro k l'equazione, in x, $x(2-k)+2kx=k(x+k)-5k$ ha soluzioni minori o uguali a -3. $[2\leq k\leq 3]$

528 Determina per quali valori di k la seguente equazione in x ha per radice un valore maggiore di 8 e minore di 20:

$x+2k=k(k+4)+5.$ $[-5<k<-3\vee 1<k<3]$

529 Determina per quali valori di k la misura dell'area di un rettangolo data da $x=13k-4k^2-3$ ha valori accettabili. $\left[\frac{1}{4}\leq k\leq 3\right]$

530 Trova per quali valori di k l'equazione in x

$4kx - k^2 = x + 2$

ha per soluzione un numero maggiore di 1.

$\left[\frac{1}{4} < k < 1 \vee k > 3\right]$

531 Determina per quali valori del parametro k è maggiore o uguale a 3 la soluzione dell'equazione $x - 5 = \frac{k - x}{k^2}$.

$\left[k \leq -\frac{3}{2} \vee k \geq 1\right]$

532 Determina i valori di k affinché la soluzione dell'equazione, in x, $x - k^2 + 7k = -(45 + k)$ sia maggiore o uguale a -12 e minore o uguale a 3.

$[-4 \leq k \leq -3 \vee 11 \leq k \leq 12]$

533 Date le equazioni, in x, $1 - 8kx - 3k = 0$ e $x + 2k^2 = 0$, determina i valori di k affinché abbiano soluzioni tali che il loro prodotto sia minore di 1.

$\left[-1 < k < \frac{4}{3} \wedge k \neq 0\right]$

534 Determina per quali valori di k l'equazione, in x, $(x - 2)^2 + 5k = 8 + (x + k)^2$ ha soluzione maggiore di -1. $[k < -2 \vee 0 < k < 7]$

535 Determina per quali valori del parametro k la differenza delle soluzioni delle equazioni in x

$k^2 + (x - 1)k - 2(x + 1) = 0$

e

$(k + 1)x - k^2 - k(x + 1) = 0$

risulta essere positiva o nulla. $[k = -1]$

536 Determina per quali valori del parametro k la seguente equazione in x ha soluzione maggiore o uguale a 1: $(k^2 - 2)x + k^2 - 1 = 0$.

$\left[-\sqrt{2} < k \leq -\sqrt{\frac{3}{2}} \vee \sqrt{\frac{3}{2}} \leq k < \sqrt{2}\right]$

537 Un triangolo isoscele ha il lato obliquo la cui misura è soluzione dell'equazione in x

$\frac{x + 1}{k - 1} - \frac{x - 1}{k + 1} = \frac{k + 1}{k - 1}$,

e la misura della sua base è soluzione dell'equazione in x

$3(x - k) + 2kx + 5 = 2(kx + 1)$.

Stabilisci per quali valori di k tale triangolo esiste.

$[k > 1]$

538 Stabilisci per quali valori di k l'equazione in x

$2(x - k) = -5(x + 1)$

ha soluzione minore del doppio della soluzione dell'equazione $3kx - 5 = x - 2k$.

$\left[k < -\frac{13}{3} \vee \frac{1}{3} < k < \frac{5}{2}\right]$

539 Per quali valori reali del parametro k la soluzione x dell'equazione $(k^2 - 3)x + 6x - 3k^2\ x + k = 0$ verifica la disequazione $x^2 - x \leq 0$?

$\left[[-1; 0] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[\right]$

ESERCIZIO GUIDA

540 Data l'equazione nell'incognita x

$(k + 4)x^2 + 2(k - 1)x - (k - 1) = 0$,

determiniamo per quali valori di k la somma delle radici è minore di 4.

Determiniamo per quali valori di k l'equazione ha soluzioni reali:

$$\frac{\Delta}{4} = (k - 1)^2 + (k + 4)(k - 1) =$$

$$= k^2 + 1 - 2k + k^2 - k + 4k - 4 = 2k^2 + k - 3.$$

Imponiamo la condizione di realtà delle radici:

$$\frac{\Delta}{4} \geq 0 \quad \rightarrow \quad 2k^2 + k - 3 \geq 0.$$

Poniamo la condizione che la somma delle radici sia minore di 4:

$$\frac{-2(k - 1)}{k + 4} < 4.$$

Mettiamo poi a sistema le due condizioni:

$$\begin{cases} 2k^2 + k - 3 \geq 0 \\ \dfrac{-2(k - 1)}{k + 4} < 4 \end{cases}$$

- *Prima disequazione*. Ricaviamo le soluzioni dell'equazione:

$$2k^2 + k - 3 = 0,\ k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione associata alla disequazione sono $-\frac{3}{2}$ e 1, pertanto la disequazione è risolta da:

$$k \leq -\frac{3}{2} \vee k \geq 1.$$

- *Seconda disequazione*. Risolviamo:

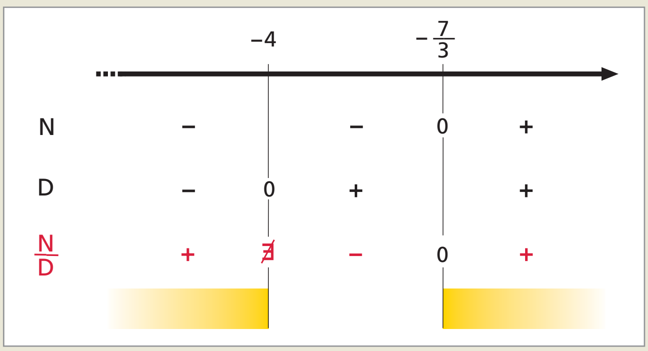
$$\frac{-2k+2-4k-16}{k+4} < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-6k-14}{k+4} < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{3k+7}{k+4} > 0.$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

$$3k+7>0 \quad \rightarrow \quad k > -\frac{7}{3}$$

$$k+4>0 \quad \rightarrow \quad k > -4$$

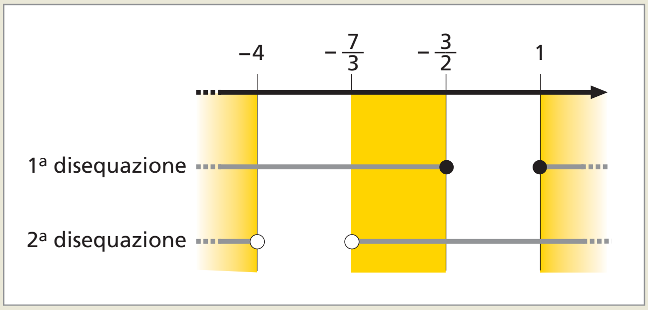
Compiliamo il quadro dei segni:



La soluzione della seconda disequazione è:

$$k < -4 \vee k > -\frac{7}{3}.$$

- *Soluzione del sistema*. Facciamo un grafico di sistema con le soluzioni trovate:



Il sistema è verificato per $k < -4 \vee -\frac{7}{3} < k \leq -\frac{3}{2} \vee k \geq 1$.

Per tali valori la somma delle radici è minore di 4.

Date le seguenti equazioni parametriche di secondo grado nell'incognita x, stabilisci per quali valori del parametro le soluzioni sono reali.

541 $x^2 - 2(a-2)x + 9 = 0$ $[a \leq -1 \vee a \geq 5]$

542 $2x^2 - ax + 2 = 0$ $[a \leq -4 \vee a \geq 4]$

543 $x^2 - 2kx - k^2 + 8 = 0$ $[k \leq -2 \vee k \geq 2]$

544 $(a+2)x^2 - 2x - a = 0$ $[\forall a \in \mathbb{R}]$

545 $kx^2 - (k+3)x - 2k = 0$ $[\forall k \in \mathbb{R}]$

546 Stabilisci per quali valori di k l'equazione, in x, $x^2 - kx + 2x - \frac{k^2 - 5k}{4} = 0$ ammette due soluzioni reali distinte. $\left[k < \frac{1}{2} \vee k > 4\right]$

547 Determina per quali valori di k l'equazione, in x, $(k-2)x^2 - 2kx - 3 + 2k = 0$ non ammette soluzioni reali. $[k < 1 \vee k > 6]$

548 Trova per quali valori di k l'equazione in x

$$(6k-1)x - 3kx^2 - 3k + 2 = 0$$

non ammette soluzioni reali. $\left[k < -\frac{1}{12}\right]$

549 Determina per quali valori di k l'equazione in x

$$(k+1)x^2 - 2(k+2)x + 4(k+1) = 0$$

ha soluzioni la cui somma sia maggiore di -2. $[-1 < k \leq 0]$

550 Stabilisci per quali valori di k l'equazione, in x, $x^2 - 4(k+3)x + 6(k^2 - 5k + 6) = 0$ ammette soluzioni di segno opposto. (Suggerimento. Se le soluzioni sono opposte, il loro prodotto è negativo…) $[2 < k < 3]$

551 Determina per quali valori di k l'equazione, in x, $(k-5)x^2 - 4kx + k - 2 = 0$ ammette radici reali e negative. (Suggerimento. Se le radici sono negative, il prodotto è positivo e la somma è negativa.) $[1 \leq k < 2]$

552 Determina il valore di k per cui l'equazione, in x, $(k-3)x^2 - 2kx + k - 1 = 0$ ha:
a) soluzioni reali distinte; b) soluzioni opposte.
$\left[\text{a) } k > \frac{3}{4} \wedge k \neq 3; \text{ b) } \nexists\, k \text{ accettabile}\right]$

553 Data l'equazione in x

$$(k+2)x^2 - 2(k+1)x - (1-k) = 0,$$

stabilisci per quali valori del parametro k essa ha:
a) radici reali distinte;
b) radici reali e positive;
c) radici reali e negative;
d) radici reali e discordi;
e) radici opposte.
[a) $k > -3 \wedge k \neq -2$; b) $-3 < k < -2 \vee k > 1$; c) $\nexists\, k \in \mathbb{R}$; d) $-2 < k < 1$; e) $k = -1$]

554 Data l'equazione

$$x^2 - 2(a-3)x + a^2 + 2a = 0,$$

stabilisci per quale valore del parametro a:
a) le soluzioni x_1 e x_2 sono reali;
b) il prodotto delle soluzioni è maggiore di 3.
$\left[\text{a) } a \leq \frac{9}{8}; \text{ b) } a < -3 \vee 1 < a \leq \frac{9}{8}\right]$

555 Nell'equazione $(k-2)x^2 - 2(k+3)x + k = 0$ determina per quale valore del parametro k:
a) le soluzioni x_1 e x_2 sono reali;
b) la somma delle soluzioni è maggiore o uguale a 6;
c) il prodotto delle soluzioni è minore di 1.
$\left[\text{a) } k \geq -\frac{9}{8}; \text{ b) } -2 < k \leq \frac{9}{2}; \text{ c) } -\frac{9}{8} \leq k < 2\right]$

556 Data l'equazione parametrica

$$(k^2+4)x^2 + 2\sqrt{3}kx + k^2 - 1 = 0,$$

determina i valori di k affinché:
a) il prodotto delle radici dell'equazione sia positivo;
b) la somma delle radici dell'equazione sia negativa.
[a) $-\sqrt{2} \leq k < -1 \vee 1 < k \leq \sqrt{2}$; b) $0 < k \leq \sqrt{2}$]

557 Trova i valori di k affinché l'equazione di secondo grado $(2k+3)x^2 - (k+4)x + 1 = 0$ ammetta:
a) due soluzioni positive;
b) due soluzioni negative;
c) due soluzioni discordi.
$\left[\text{a) } k > -\frac{3}{2}; \text{ b) } \nexists\, k \in \mathbb{R}; \text{ c) } k < -\frac{3}{2}\right]$

Le equazioni parametriche e la regola di Cartesio

ESERCIZIO GUIDA

558 Data l'equazione parametrica di secondo grado in x

$$(k^2 - 1)x^2 - (k - 2)x - 1 = 0,$$

studiamo il segno delle radici al variare del parametro k, applicando la regola di Cartesio.

Per applicare la regola di Cartesio, dobbiamo studiare il segno del discriminante e il segno dei coefficienti dell'equazione a, b e c:

- $\Delta \geq 0$: $\Delta = (k - 2)^2 + 4(k^2 - 1) = k^2 - 4k + 4 + 4k^2 - 4 \rightarrow 5k^2 - 4k \geq 0 \rightarrow k \leq 0 \vee k \geq \frac{4}{5}$;
- $a > 0$: $k^2 - 1 > 0 \rightarrow k < -1 \vee k > 1$;
- $b > 0$: $-(k - 2) > 0 \rightarrow k - 2 < 0 \rightarrow k < 2$;
- $c > 0$: $-1 > 0$, impossibile.

Compiliamo il quadro dei segni:

		-1		0		$\frac{4}{5}$		1		2	
Δ	+		+	0	−	0	+		+		+
a	+	0	−		−		−	0	+		+
b	+		+		+		+		+	0	−
c	−		−		−		−		−		−

Studiamo il segno delle radici, *intervallo per intervallo*, con la regola di Cartesio:

- per $k < -1$: due radici reali distinte e discordi (una permanenza e una variazione);
- per $k = -1$: l'equazione è di primo grado; la radice è positiva (una variazione fra b e c);
- per $-1 < k < 0$: due radici reali distinte positive (due variazioni);
- per $k = 0$: due radici reali coincidenti positive (due variazioni);
- per $0 < k < \frac{4}{5}$: non ci sono radici reali;
- per $k = \frac{4}{5}$: due radici reali coincidenti positive (due variazioni);
- per $\frac{4}{5} < k < 1$: due radici reali distinte positive (due variazioni);
- per $k = 1$: l'equazione è di primo grado; la radice è positiva (una variazione fra b e c);
- per $1 < k < 2$: due radici reali distinte discordi (una permanenza e una variazione);
- per $k = 2$: due radici opposte ($b = 0$);
- per $k > 2$: due radici reali distinte discordi (una variazione e una permanenza).

Studia il segno delle radici delle seguenti equazioni parametriche di secondo grado nell'incognita *x*, al variare del parametro, applicando la regola di Cartesio.

559 $x^2 - 2(k-2)x + k^2 = 0$

$[k \leq 1 \wedge k \neq 0: x_1 < 0, x_2 < 0; k = 0: x_1 = 0, x_2 < 0; k = 1: x_1 = x_2 < 0; k > 1: \nexists x \in \mathbb{R}]$

560 $3x^2 + 6x + 2k + 1 = 0$

$\left[k < -\frac{1}{2}: x_1 < 0, x_2 > 0; k = -\frac{1}{2}: x_1 = 0, x_2 < 0; -\frac{1}{2} < k < 1: x_1 < 0, x_2 < 0; k = 1: x_1 = x_2 < 0; k > 1: \nexists x \in \mathbb{R}\right]$

561 $x^2 - 3x + 2(k-1) = 0$

$\left[k < 1: x_1 > 0, x_2 < 0; k = 1: x_1 = 0, x_2 > 0; 1 < k < \frac{17}{8}: x_1 > 0, x_2 > 0; k = \frac{17}{8}: x_1 = x_2 > 0; k > \frac{17}{8}: \nexists x \in \mathbb{R}\right]$

562 $(k-2)x^2 + (2k+1)x + 3 = 0$

$\left[k < -\frac{1}{2}: x_1 < 0, x_2 > 0; k = -\frac{1}{2}: x_1 = -x_2; -\frac{1}{2} < k < 2: x_1 > 0, x_2 < 0; k = 2: x_1 < 0; k > 2: x_1 < 0, x_2 < 0\right]$

563 $(k+3)x^2 + 2(1-k)x + k + 2 = 0$

$\left[k < -3: x_1 > 0, x_2 > 0; k = -3: x_1 > 0; -3 < k < -2: x_1 < 0, x_2 > 0; k = -2: x_1 = 0, x_2 < 0; -2 < k < -\frac{5}{7}: x_1 < 0, x_2 < 0; k = -\frac{5}{7}: x_1 = x_2 < 0; k > -\frac{5}{7}: \nexists x \in \mathbb{R}\right]$

564 $(k+1)x^2 - 2(k+3)x + 3k = 0$

$\left[k = -\frac{3}{2}: x_1 = x_2 < 0; -\frac{3}{2} < k < -1: x_1 < 0, x_2 < 0; k = -1: x_1 < 0; -1 < k < 0: x_1 > 0, x_2 < 0; k = 0: x_1 = 0, x_2 > 0; 0 < k < 3: x_1 > 0, x_2 > 0; k = 3: x_1 = x_2 > 0; k < -\frac{3}{2} \vee k > 3: \nexists x \in \mathbb{R}\right]$

565 $x^2 - (2k-1)x + k = 0$

$\left[k < 0: x_1 < 0, x_2 > 0; k = 0: x_1 = 0, x_2 < 0; 0 < k < 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}: x_1 < 0, x_2 < 0; k = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}: x_1 = x_2 < 0; 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < k < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}: \nexists x \in \mathbb{R}; k = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}: x_1 = x_2 > 0; k > 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}: x_1 > 0, x_2 > 0\right]$

Le disequazioni parametriche di secondo grado

ESERCIZIO GUIDA

566 Determiniamo per quali valori di k la disequazione parametrica in x

$$(k+2)x^2 - 2(k+1)x + k - 1 > 0$$

ammette come soluzioni i valori di x esterni all'intervallo delle radici dell'equazione associata.

Dobbiamo porre due condizioni:

1. il discriminante dell'equazione associata deve essere maggiore o uguale a zero, affinché le radici siano reali;
2. il coefficiente a di x^2 deve essere positivo, in modo che le soluzioni della disequazione data siano esterne all'intervallo delle radici.

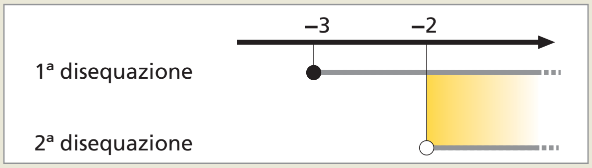
Calcoliamo i valori di k che soddisfano le due condizioni:

1. $\frac{\Delta}{4} = (k+1)^2 - (k+2)(k-1) = \cancel{k^2} + \cancel{2}k + 1 - \cancel{k^2} - \cancel{2}k + k + 2 = k + 3 \geq 0;$

2. $k + 2 > 0.$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} k+3 \geq 0 \\ k+2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k \geq -3 \\ k > -2 \end{cases}$$



Per $k > -2$ la disequazione ammette come soluzioni i valori di x esterni all'intervallo delle radici.

Per ogni disequazione parametrica nell'incognita x, determina i valori del parametro affinché sia soddisfatta la condizione scritta a fianco.

567 $x^2 - kx \geq 0;$ verificata per valori esterni all'intervallo delle radici. $[\forall\, k \in \mathbb{R} - \{0\}]$

568 $x^2 + m \geq 0;$ verificata $\forall\, x \in \mathbb{R}$. $[m \geq 0]$

569 $kx^2 + 1 < 0;$ verificata per nessun x reale. $[k \geq 0]$

570 $(k^2 - 1)x^2 - 1 > 0;$ verificata per nessun valore reale di x. $[-1 \leq k \leq 1]$

571 $2x^2 - 6x + k > 0;$ verificata per valori esterni all'intervallo delle radici. $\left[k < \frac{9}{2}\right]$

572 $x^2 - 4kx + 5 < 0;$ verificata per valori esterni all'intervallo delle radici. $[\nexists\, k \in \mathbb{R}]$

573 $kx^2 - 2x + 1 \geq 0;$ verificata $\forall\, x \in \mathbb{R}$. $[k \geq 1]$

574 $x^2 + 2(1-k)x - 4k > 0;$ verificata per valori esterni all'intervallo delle radici. $[\forall\, k \in \mathbb{R} - \{-1\}]$

575 $9mx^2 - 4x + m < 0;$ verificata $\forall\, x \in \mathbb{R}$. $\left[m < -\frac{2}{3}\right]$

I problemi con le disequazioni

576 In un triangolo l'altezza è i $\frac{3}{4}$ della base a essa relativa.

Indica con x la misura della base e trova per quali valori di essa l'area del triangolo è compresa tra 150 cm^2 e 600 cm^2. $[20 < x < 40]$

577 Considera il rettangolo della figura a lato:
a) per quali valori di x esiste il rettangolo?
b) determina quali rettangoli hanno il perimetro minore di 20 cm e l'area maggiore di 4 cm^2.

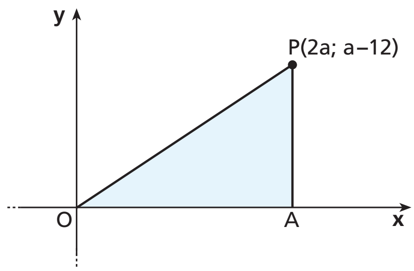
$\left[\text{a) } x > 3; \text{ b) } \frac{7}{2} < x < 4\right]$

578 Un rettangolo ha l'area di 50 cm^2. Quanto deve misurare la sua base affinché il perimetro non superi i 30 cm? $[5 \leq x \leq 10]$

579 È dato un rettangolo la cui base supera di 2 cm l'altezza. Determina l'altezza in modo tale che la somma fra l'area del rettangolo e 8 cm^2 sia maggiore del doppio dell'area del quadrato costruito sull'altezza. $[0 < x < 4]$

580 Per quali valori di k la parabola di equazione $y = 2x^2 + k^2 - 3$ ha il vertice con ordinata maggiore di 1? $[k < -2 \vee k > 2]$

581 Il punto P della figura a lato si trova nel primo quadrante. Per quale valore di a il triangolo POA ha area compresa tra 28 e 108? $[14 < a < 18]$



8. Le equazioni e le disequazioni di secondo grado con valori assoluti

Teoria a pag. 1057

RIFLETTI SULLA TEORIA

Le equazioni con valori assoluti

582 Perché l'equazione $|x^2 - 1| + 3 = 0$ è impossibile?

583 Per risolvere $|x^2 - 5| = 2$ puoi semplicemente elevare al quadrato entrambi i membri dell'equazione, ma non lo puoi fare per risolvere l'equazione $|x^2 - 5| = 2x$. Perché?

Le disequazioni con valori assoluti

584 La disequazione $|x^2 - 2x| > -1$ è verificata $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Perché?

585 Per risolvere la disequazione $2 + |x^2 - 4| < x$, devi risolvere due sistemi di disequazioni. Perché? In generale, per risolvere una qualsiasi disequazione con un valore assoluto, è sempre necessario risolvere due sistemi di disequazioni?

ESERCIZI

Le equazioni con valori assoluti

Le equazioni con un valore assoluto

ESERCIZIO GUIDA

586 Risolviamo l'equazione $|x^2 - 16| = -6x$.

Poiché il valore assoluto di un numero reale k è

$$|k| \begin{cases} k & \text{se } k \geq 0 \\ -k & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

si ha:

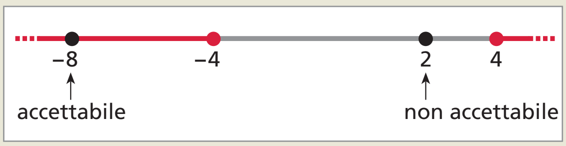
$$|x^2 - 16| \begin{cases} x^2 - 16 & \text{se } x^2 - 16 \geq 0 \;\rightarrow\; x \leq -4 \vee x \geq 4 \\ -x^2 + 16 & \text{se } x^2 - 16 < 0 \;\rightarrow\; -4 < x < 4 \end{cases}$$

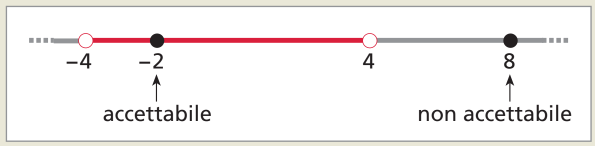
L'equazione data è quindi equivalente a:

$$\begin{cases} x \leq -4 \vee x \geq 4 \\ x^2 - 16 = -6x \end{cases} \vee \begin{cases} -4 < x < 4 \\ -x^2 + 16 = -6x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -4 \vee x \geq 4 \\ x^2 + 6x - 16 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x^2 - 6x - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -4 \vee x \geq 4 \\ x = -3 \pm \sqrt{9+16} = -3 \pm 5 \begin{cases} -8 \text{ accettabile} \\ 2 \text{ non accettabile} \end{cases} \end{cases} \vee \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x = 3 \pm \sqrt{9+16} = 3 \pm 5 \begin{cases} -2 \text{ accettabile} \\ 8 \text{ non accettabile} \end{cases} \end{cases}$$





Le soluzioni sono allora $x = -8$, $x = -2$.

Risolvi le seguenti equazioni.

587 $(x-3)^2 + (x-4)^2 = |x|$ $\left[\frac{5}{2}; 5\right]$

588 $x^2 + 3|x+2| = -3$ [impossibile]

589 $|3 - 3x^2 + x| = 3(2x+1)$ $[0; 3]$

590 $|x^2| + x = 0$ $[-1; 0]$

591 $\left|\frac{1}{x}\right| = x - 1$ $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

592 $(x-5)|x+5| + 8 + (x-5)^2 = 0$ $[1; 4]$

593 $|x-5|(x+5) + 8 + (x-5)^2 = 0$ [impossibile]

594 $|x^2 - 8x + 10| = 3$ $[1; 4-\sqrt{3}; 4+\sqrt{3}; 7]$

595 $|x^2 + x + 5| = x + 10$ $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$

596 $x + 1 = -|x^2 - x - 3|$ $[-\sqrt{2}; 1-\sqrt{5}]$

597 $|3x^2 - 20x| = 3x - 2x^2 - 12$ [impossibile]

598 $|2(x+1) - 3(x-1)| - (x+1)^2 = -x(x+2) + 6$ $[-2; 12]$

599 $\dfrac{|x^2 + x| - 3}{x^2 + x} = 0$ $\left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$

600 $\dfrac{x-2}{|2x^2 + x - 1|} + \dfrac{x+2}{2x^2 + x - 1} = \dfrac{1}{x+1}$ [impossibile]

601 $\dfrac{x^2}{1-x^2} + \dfrac{x+1}{|x-1|} - \dfrac{2x+1}{x+1} = 0$ $\left[-\frac{1}{4}; 0; 2\right]$

602 $4 + |x(x + 2\sqrt{2})| = (x + \sqrt{2})^2 + (x - \sqrt{5})^2$ $[\sqrt{5} - \sqrt{2}; \sqrt{5} + \sqrt{2}]$

603 $x + 1 + \left|\dfrac{x + 2}{x^2 + x - 2}\right| = 2 + \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ $[0; 2]$

604 $\left|\dfrac{x}{1 + x}\right| = \dfrac{1}{1 - x^2} + \dfrac{1}{x - 1}$ $[0; 2]$

Le equazioni con due valori assoluti

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

ESERCIZIO GUIDA

605 Risolviamo la seguente equazione:

$$|x^2 - 4x| + 8 = |6x - x^2| - 4.$$

Studiamo il segno delle espressioni all'interno dei valori assoluti:

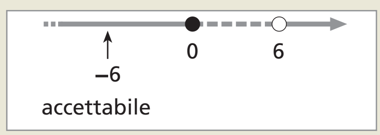
- $x^2 - 4x > 0 \quad \to \quad x < 0 \vee x > 4.$
- $6x - x^2 > 0 \quad \to \quad 0 < x < 6.$

Compiliamo il quadro dei segni dei due valori assoluti:

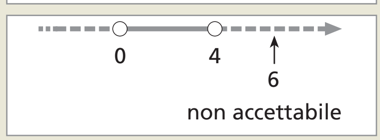
		0		4		6	
$x^2 - 4x$	+	0	−	0	+		+
$\|x^2 - 4x\| =$	$x^2 - 4x$		$-x^2 + 4x$		$x^2 - 4x$		$x^2 - 4x$
$6x - x^2$	−	0	+	0	+		−
$\|6x - x^2\| =$	$-6x + x^2$		$6x - x^2$		$6x - x^2$		$-6x + x^2$
	(1)		(2)		(3)		(1)

L'equazione equivale ai tre seguenti sistemi misti:

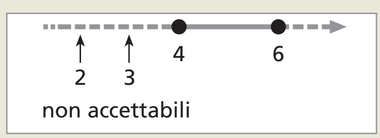
1. $\begin{cases} x \le 0 \vee x > 6 \\ \cancel{x^2} - 4x + 8 = -6x + \cancel{x^2} - 4 \end{cases} \to \begin{cases} x \le 0 \vee x > 6 \\ x = -6 \end{cases}$



2. $\begin{cases} 0 < x < 4 \\ -\cancel{x^2} + 4x + 8 = 6x - \cancel{x^2} - 4 \end{cases} \to \begin{cases} 0 < x < 4 \\ x = 6 \end{cases}$



3. $\begin{cases} 4 \le x \le 6 \\ x^2 - 4x + 8 = 6x - x^2 - 4 \end{cases} \to \begin{cases} 4 \le x \le 6 \\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \end{cases}$



L'equazione ha quindi una sola soluzione: $x = -6$.

Risolvi le seguenti equazioni.

BRAVI SI DIVENTA ► E49

606 $5 + |x^2 - 2x| - x^2 - |x - 3| = 6x$

607 $(x + 1)^2 - x|1 - x| - (x - 2)|x + 2| = 4$ $\left[\dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}\right]$

608 $|4x + 2| = |-x^2 - 2|$ $[-2; 0; 4]$

609 $|2x - 5|^2 = 72 + |x - 4|^2$ $[-3; 7]$

610 $|x + 1| - 3\dfrac{x^2}{|x - 1|} = 0$ $\left[\pm\dfrac{1}{2}\right]$

611 $\dfrac{x^2 + |x| + 1}{|x + 3|} = 1$ $[1 - \sqrt{3}; \sqrt{2}]$

612 $2|x + 3| = 2 - \left|\dfrac{x + 2}{x - 1}\right|$ $\left[\dfrac{-5 - \sqrt{105}}{4}; -2\right]$

613 $|x^2 + 4x + 3| = 4x + 1 + |x - 2|$ $[-1; 0]$

614 $\dfrac{x - 1}{|x(x + 1)|} + \dfrac{3 - 2x}{x^2 - x} = \dfrac{2}{x + 1} - \dfrac{1}{|x - 1|}$ $\left[-\dfrac{1}{3}; 2\right]$

615 $\dfrac{x + 3}{|x^2 - 2x + 1|} + \dfrac{1}{2x - 2} + \dfrac{|5 + x|}{1 - x^2} = 0$ [impossibile]

616 $|x^2 - 4| + |-2x| = -5x$ $[-4; -1]$

617 $|x - 1| - 1 = |2x^2 - 4x|$ $[0; 2]$

618 $\dfrac{2}{|x + 3|} - \dfrac{3}{|x - 2|} = 0$ $[-13; -1]$

Le disequazioni con valori assoluti

Nel sito: ► 20 esercizi in più

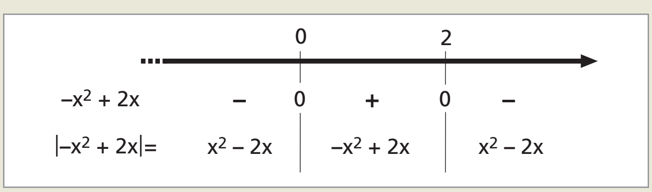
ESERCIZIO GUIDA

619 Risolviamo la seguente disequazione:

$$x - |-x^2 + 2x| < 3x - 9.$$

Studiamo il segno dell'espressione all'interno del valore assoluto:

$$-x^2 + 2x > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < x < 2.$$



La disequazione data è equivalente ai due sistemi:

$$\begin{cases} x < 0 \vee x > 2 \\ x - (x^2 - 2x) < 3x - 9 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x - (-x^2 + 2x) < 3x - 9 \end{cases}$$

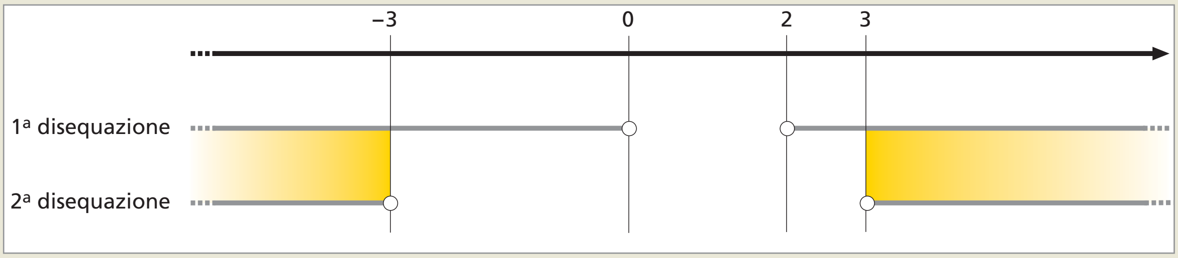
Risolviamo la disequazione del primo sistema:

$\cancel{x} - x^2 + \cancel{2}x - \cancel{3}x + 9 < 0$

$-x^2 + 9 < 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 9 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -3 \vee x > 3.$

Il primo sistema è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x < 0 \vee x > 2 \\ x < -3 \vee x > 3 \end{cases}$$



Il primo sistema è quindi verificato per:

$x < -3 \quad \vee \quad x > 3.$

Risolviamo la disequazione che compare nel secondo sistema:

$x + x^2 - 2x - 3x + 9 < 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4x + 9 < 0.$

Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata $x^2 - 4x + 9 = 0$:

$\frac{\Delta}{4} = 4 - 9 = -5 < 0.$

Poiché $\frac{\Delta}{4} < 0$ e il coefficiente di x^2 è positivo, la disequazione non è mai verificata; quindi il secondo sistema non ha soluzioni.

In conclusione, la disequazione data è verificata per $x < -3 \vee x > 3$.

Risolvi le seguenti disequazioni.

620 $x|x| < 5$ $[x < \sqrt{5}]$

621 $|x^2 - 3x + 2| > 2$ $[x < 0 \vee x > 3]$

622 $|x^2 - 7x + 6| < -x^2$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

623 $\frac{|x^2 - 81|}{4} \leq 0$ $[-9; 9]$

624 $|x^2 - x + 3| \leq 2$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

625 $\frac{x^2 - 2x}{|x - 1|} \leq 0$ $[0 \leq x \leq 2 \wedge x \neq 1]$

626 $|x^2 - 1| < x + x - 1$ $[-1 + \sqrt{3} < x < 2]$

627 $\left|\frac{x + 1}{x}\right| < x$ $\left[x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right]$

628 $\left|\frac{x^2 - 4x + 4}{x}\right| < 1$ $[1 < x < 4]$

629 $|x + 1| + (x^2 + 5) > 5$ $[\forall\, x \in \mathbb{R}]$

630 $|3 - 5x| + x^2 > 3$ $[x < 0 \vee x > 1]$

631 $\frac{|x|}{x} < x$ $[-1 < x < 0 \vee x > 1]$

632 $|x + 3| > 2x^2 + 10$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

633 $|x| - x^2 < \frac{1}{4}$ $\left[x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq \frac{1}{2}\right]$

634 $x^2 - |3x + 2| + x > 0$ $[x < -2 - \sqrt{2} \vee x > 1 + \sqrt{3}]$

635 $2(3 - 12x - 8) - 9x^2 > |3x + 4|$ $\left[-2 < x < -\frac{2}{3}\right]$

636 $\frac{2}{x + 3} < \frac{3}{|x - 2|}$ $[x < -3 \vee x > -1 \wedge x \neq 2]$

637 $\frac{x^2 - 5x + 6}{|x^2 - 9|} > 0$ $[x < 2 \wedge x \neq -3 \vee x > 3]$

638 $\frac{x^2 + 4x - 12}{|x^2 - 2x| - 3} < 0$ $[-6 < x < -1 \vee 2 < x < 3]$

639 $x^2 - 2x - 3 < 4 - |3x - 3|$ $\left[\frac{5 - \sqrt{41}}{2} < x < \frac{-1 + \sqrt{41}}{2}\right]$

640 $|x^2 + 7 - 9x| < 7$ $[0 < x < 2 \vee 7 < x < 9]$

641 $\frac{x + 1}{|x|} < x$ $\left[x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right]$

642 $4 + x^2 > |x^2 - 4|$ $[\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}]$

643 $\frac{|4 - x^2|}{5x - x^2} < 0$ $[x < 0 \wedge x \neq -2 \vee x > 5]$

644 $\frac{|x^2 + 1| + 2x}{5x + 3} < 0$ $\left[x < -\frac{3}{5} \wedge x \neq -1\right]$

645 $|x^3 + 4x^2 + x - 6| > 0$ $[x \neq -3; -2; 1]$

646 $|6x^4 - 13x^3 + 13x - 6| \leq 0$ $\left[x = \pm 1, x = \frac{2}{3}, x = \frac{3}{2}\right]$

647 $|x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x| < 0$ $[\nexists\, x]$

648 $\left|x - \frac{4}{x} - 2\right| \geq 1$ $\left[x \leq \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \vee -1 \leq x < 0 \vee 0 < x \leq \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \vee x \geq 4\right]$

649 $\left|\frac{x^2 + 3x + 2}{x}\right| < 1$ $[-2 - \sqrt{2} < x < -2 + \sqrt{2}]$

650 $\frac{x(6x - 3) + 4x - 2}{3x + 2} < |x^2 - 2x|$ $\left[x < 1 \wedge x \neq -\frac{2}{3} \vee x > 2 + \sqrt{3}\right]$

651 $\left|\frac{10x^2 - 3x - 2}{3x - 2 - x^2}\right| < 1$ $\left[-\frac{2}{3} < x < 0 \vee \frac{6}{11} < x < \frac{2}{3}\right]$

652 $\dfrac{x-2}{x-1}+\left|\dfrac{x^2}{x^2-3x+2}\right|\le\dfrac{1-x}{2-x}$ $[\nexists\ x\in\mathbb{R}]$

653 $\dfrac{x+4}{|x+1|+|x^2-1|}\ge 0$ $[x\ge -4\wedge x\ne -1]$

654 $\dfrac{2|x+2|-|x|}{|x|+4}>0$ $\left[x<-4\vee x>-\dfrac{4}{3}\right]$

655 $-4-|-x^2+1|\le -3$ $[\forall\ x\in\mathbb{R}]$

656 $\dfrac{|x+9|-|x|}{1-|x|}\ge 0$ $\left[x\le-\dfrac{9}{2}\vee -1<x<1\right]$

657 $\left|\dfrac{x-3}{2-x}-\dfrac{x+2}{3x-6}\right|\ge\dfrac{1}{3}$ $\left[x\le\dfrac{5}{3}\vee\dfrac{9}{5}\le x<2\vee x>2\right]$

658 $2(|x|-1)+|4-2x|\le|x-2|$ $[x=0]$

659 $\dfrac{|x+1|}{3}<\dfrac{1}{|x-1|}$ $[-2<x<1\vee 1<x<2]$

660 $|x^2-4x|+|x^2-1|\ge 4x-1$ $[\forall\ x\in\mathbb{R}]$

661 $\begin{cases}|x^2-4|>5\\ \dfrac{x-1}{x+4}\le 2\end{cases}$ $[x\le -9\vee -4<x<-3\vee x>3]$

662 $\begin{cases}|x^2-1|-1>0\\ \dfrac{|x-3|}{x^2-1}>0\end{cases}$ $[x<-\sqrt{2}\vee\sqrt{2}<x<3\vee x>3]$

663 $\begin{cases}x|x|+|x^2-1|>7\\ \dfrac{4x^2-1}{x}\ge 0\end{cases}$ $[x>2]$

664 $\begin{cases}|9-x^2|>7\\ |x^2+3x|+|x|>0\\ \dfrac{2x+1}{x-4}\ge 0\end{cases}$ $\left[x<-4\vee -\sqrt{2}<x\le-\dfrac{1}{2}\vee x>4\right]$

665 Determina l'insieme dei valori di $a\in\mathbb{N}$ per i quali l'equazione $|a|x^2-(a-3)x+|5-a|=0$, nell'incognita x, ammette radici reali. $[A=\{0,5\}]$

9. Le disequazioni irrazionali

Teoria a pag. 1058

RIFLETTI SULLA TEORIA

666 Per risolvere la disequazione $\sqrt{x+2}>3$, basta elevare al quadrato entrambi i membri della disequazione. Perché?

667 Per risolvere la disequazione $\sqrt{x^2-4}<3$, occorre tenere conto delle condizioni di esistenza del radicando. Perché?

668 L'insieme delle soluzioni di $x<\sqrt{3-x}$ coincide con l'unione degli insiemi delle soluzioni di due sistemi di disequazioni. Quali? Perché?

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

669 Risolviamo le seguenti disequazioni:

a) $2 + \sqrt{x^2 - 7x + 10} < x$;
b) $2x + \sqrt{3 - 2x} > 1$.

---

a) La disequazione è riconducibile alla forma:

$$\sqrt{A(x)} < B(x).$$

Infatti, se isoliamo la radice nel primo membro, otteniamo:

$$\sqrt{x^2 - 7x + 10} < x - 2.$$

La disequazione è equivalente al sistema di tre disequazioni:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x^2 - 7x + 10 \geq 0 \\ x^2 - 7x + 10 < (x - 2)^2 \end{cases}$$

La prima disequazione è verificata per $x > 2$, mentre la seconda disequazione è soddisfatta per:

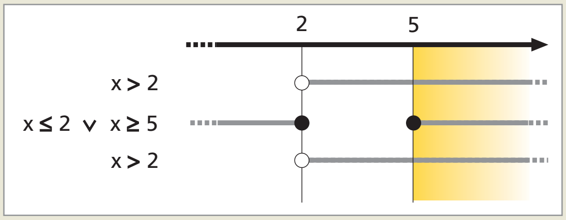
$$x \leq 2 \quad \vee \quad x \geq 5.$$

Risolviamo la terza disequazione:

$$\cancel{x^2} - 7x + 10 < \cancel{x^2} - 4x + 4 \rightarrow -7x + 4x < 4 - 10 \rightarrow -3x < -6 \rightarrow x > 2.$$

Pertanto il sistema iniziale equivale al seguente:

$$\begin{cases} x > 2 \\ x \leq 2 \quad \vee \quad x \geq 5 \\ x > 2 \end{cases}$$



La disequazione data è verificata per $x \geq 5$, ossia l'insieme delle soluzioni è l'intervallo $[5; +\infty[$.

b) La disequazione è riconducibile alla forma:

$$\sqrt{A(x)} > B(x).$$

Infatti, se isoliamo la radice nel primo membro, otteniamo:

$$\sqrt{3 - 2x} > 1 - 2x.$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è dato dall'unione degli insiemi delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} 1 - 2x < 0 \\ 3 - 2x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 - 2x \geq 0 \\ 3 - 2x > (1 - 2x)^2 \end{cases}$$

Risolviamo il primo sistema:

$$\begin{cases} 1 - 2x < 0 \\ 3 - 2x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x < -1 \\ 2x \leq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x > 1 \\ 2x \leq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x \leq \dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}.$$

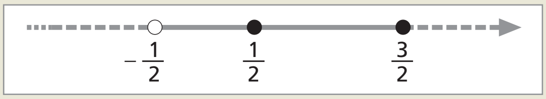
Risolviamo il secondo sistema:

$$\begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ 3-2x > (1-2x)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x \geq -1 \\ 3-2x > 1+4x^2-4x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{1}{2} \\ 3-2x-1-4x^2+4x > 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{1}{2} \\ 4x^2-2x-2<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{1}{2} \\ 2x^2-x-1<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}.$$

Disegniamo gli intervalli delle soluzioni sulla stessa retta orientata:



L'insieme delle soluzioni della disequazione è l'unione dei due intervalli soluzioni dei due sistemi, ossia l'intervallo:

$$\left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right].$$

Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali, riconducibili alla forma $\sqrt{A(x)} > B(x)$ oppure $\sqrt{A(x)} < B(x)$.

670 $\sqrt{3x-2} > 4$ $[x > 6]$

671 $\sqrt{1-x} + 2 > 0$ $[x \leq 1]$

672 $\sqrt{x^2-1} > 3$ $[x < -\sqrt{10} \vee x > \sqrt{10}]$

673 $\sqrt{4+x} > -4$ $[x \geq -4]$

674 $\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}} \geq 0$ $[-1 < x \leq 0 \vee x > 1]$

675 $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}} + 2 \geq 0$ $[x < -2 \vee x \geq 1]$

676 $\sqrt{\dfrac{9-x}{x}} \geq 3$ $\left[0 < x \leq \dfrac{9}{10}\right]$

677 $\sqrt{2x-1} > \sqrt{x}$ $[x > 1]$

678 $\sqrt{x+4} - \sqrt{2x-5} < 0$ $[x > 9]$

679 $\sqrt{x^2-2x} + \sqrt{x^2+4x} \leq 0$ $[x = 0]$

BRAVI SI DIVENTA ▶ E50

680 $\sqrt{8x-7-x^2} \geq 5-2x$

681 $\sqrt{x+9} + \sqrt{9x+x^2} > 0$ $[x \geq 0]$

682 $\dfrac{3x^2-7x}{\sqrt{x^2-4}} > 0$ $\left[x < -2 \vee x > \dfrac{7}{3}\right]$

683 $\sqrt{|x|+1} < 3$ $[-8 < x < 8]$

684 $\sqrt{2x+5} > 5$ $[x > 10]$

685 $\sqrt{x^2+1} < -2x-1$ $\left[x < -\dfrac{4}{3}\right]$

686 $\sqrt{x+2} > x+1$ $\left[-2 \leq x < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$

687 $\sqrt{x^2-x-6} < \dfrac{1}{2}x+1$ $\left[3 \leq x < \dfrac{14}{3}\right]$

688 $\sqrt{4x^2-5x-6} - x < x-8$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

689 $\sqrt{4x^2-4x-8} > x+1$ $[x < -1 \vee x > 3]$

690 $\sqrt{x^2-5x+6}<\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$ $\left[\frac{5}{3}<x\leq 2 \vee 3\leq x<\frac{19}{5}\right]$

691 $\sqrt{x^2+4}+x^2>(x+1)(x+2)$ $[x<0]$

692 $3x+\sqrt{6x^2-6}<4(x-1)$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

693 $3(x-\sqrt{x^2+2x+4})<1$ $[\forall\, x\in\mathbb{R}]$

694 $\sqrt{16-x^2}-x\geq 4$ $[-4\leq x\leq 0]$

695 $2\leq x+\sqrt{x^2-1}$ $\left[x\geq\frac{5}{4}\right]$

696 $\sqrt{\frac{x-4}{3x+2}}<\frac{1}{\sqrt{3}}$ $[x\geq 4]$

697 $\sqrt{\frac{9x+18}{5x-3}}<12$ $\left[x\leq -2 \vee x>\frac{50}{79}\right]$

698 $\sqrt{x^2-2x-3}\geq 2x-8$ $\left[x\leq -1 \vee 3\leq x\leq 5+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right]$

699 $\sqrt{\frac{13x+2}{3x-4}}<7$ $\left[x\leq -\frac{2}{13}\vee x>\frac{99}{67}\right]$

700 $3\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{4x^2-13x+3}>5x+1$ $\left[x<\frac{1}{4}\right]$

701 $\sqrt{(4x+3)^3}>\sqrt{3}(3+6x)$ $\left[x\geq -\frac{3}{4}; x\neq 0\right]$

702 $\sqrt{(x-1)^2-3x+3}+3<x$ $[4\leq x<5]$

703 $x\leq 2+\sqrt{(x-4)^2-1}$ $\left[x\leq\frac{11}{4}\right]$

704 $\sqrt{4x^2-3x}\leq 2x-1$ $\left[\frac{3}{4}\leq x\leq 1\right]$

705 $\sqrt{(x+1)(3-5x)}>\frac{1}{2}(3-x)$ $\left[-\frac{3}{7}<x<\frac{1}{3}\right]$

706 $\sqrt{x^2+2x+2}\leq\frac{2}{5}-\frac{3}{5}x$ $\left[-\frac{23}{8}\leq x\leq -1\right]$

707 $\sqrt{x(x+1)(x-2)-(x-2)^3}<x+1$ $\left[\frac{1}{2}<x\leq\frac{4}{5}\vee 2\leq x<\frac{7}{2}\right]$

708 Trova i valori di x per i quali il reciproco di $x-1$ supera o eguaglia la radice quadrata di $x-1$. $[1<x\leq 2]$

709 Per quali valori di $a\in\mathbb{R}$ l'equazione $(a+1)\sqrt{x^2-1}=a^2-9$, nell'incognita x, può ammettere soluzioni reali? $[-3\leq a<-1 \vee a\geq 3]$

LABORATORIO DI MATEMATICA
Le disequazioni di secondo grado con Wiris

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Wiris determiniamo per quali valori di k la disequazione nell'incognita x

$(2-k)x^2 - 2(k+1)x + 3k + 1 > 0$

ammetta soluzioni esterne all'intervallo delle radici dell'equazione associata.
Svolgiamo una verifica per uno di tali valori di k.

Per determinare i valori di k ai quali corrispondano disequazioni con soluzioni esterne all'intervallo delle radici, dobbiamo imporre al coefficiente di x^2 e al discriminante della disequazione di essere maggiori di 0.

- Attiviamo, allora, Wiris e assegniamo alla variabile d l'equazione associata, la inseriamo nel comando per risolvere le equazioni e con *Calcola* troviamo le sue radici in funzione di k (figura 1).

$$\mathrm{d} = (2-\mathrm{k})\cdot \mathrm{x}^2 - 2\cdot(\mathrm{k}+1)\cdot \mathrm{x} + 3\cdot \mathrm{k} + 1;$$

$$\mathrm{risolvere}(\mathrm{d}, \mathrm{x}) \rightarrow \left\{\left\{\mathrm{x} = -\frac{\sqrt{4\cdot \mathrm{k}^2-3\cdot \mathrm{k}-1}}{\mathrm{k}-2} + \frac{-\mathrm{k}-1}{\mathrm{k}-2}\right\}, \left\{\mathrm{x} = \frac{\sqrt{4\cdot \mathrm{k}^2-3\cdot \mathrm{k}-1}}{\mathrm{k}-2} + \frac{-\mathrm{k}-1}{\mathrm{k}-2}\right\}\right\}$$

$$\mathrm{risolvere\_disequazione}(2-\mathrm{k}>0\ \&\ 4\cdot \mathrm{k}^2-3\cdot \mathrm{k}-1>0, \mathrm{k}) \rightarrow \mathrm{k}>1\ \&\ \mathrm{k}<2\ |\ \mathrm{k}<-\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{risolvere\_disequazione}(\mathrm{sostituire}(\mathrm{d}, \mathrm{k}, -2)>0, \mathrm{x}) \rightarrow \mathrm{x}>\frac{\sqrt{21}}{4}-\frac{1}{4}\ |\ \mathrm{x}<-\frac{\sqrt{21}}{4}-\frac{1}{4}$$

◄ Figura 1

- Scriviamo, poi, all'interno del comando per risolvere le disequazioni, il sistema formato dal coefficiente di x^2 posto maggiore di 0 e dal discriminante della disequazione (estratto da una delle soluzioni trovate precedentemente con *ctrl-C* e incollato con *ctrl-V*), a sua volta posto maggiore di 0, desiderando ottenere radici reali e distinte. Diamo *Calcola* e otteniamo gli intervalli di k richiesti dal problema.
- Infine impostiamo e con *Calcola* risolviamo la disequazione ottenuta sostituendo a k -2, uno dei valori accettabili, e Wiris dà soluzioni esterne all'intervallo delle radici.

Nel sito: ► **1 esercitazione guidata con Derive** ► **12 esercitazioni in più**

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer, per ogni disequazione parametrica nell'incognita x, determina i valori del parametro k affinché siano soddisfatte le condizioni indicate. Verifica per alcuni valori di k.

1 $5(k+3)x^2 - 10(2k-1)x + 9(k-1) > 0$.
a) Le soluzioni sono esterne all'intervallo delle radici.
b) Ammette come soluzioni tutte le x reali, tranne un solo valore.

$\left[\text{a) } -3 < k < \frac{16}{11} \vee k > 2; \text{ b) } k = \frac{16}{11}, k = 2\right]$

2 $(1-k^2)x^2 - 2kx - 1 > 0$.
a) Le soluzioni sono esterne all'intervallo delle radici.
b) Una radice è uguale a 2.

$\left[\text{a) } -1 < k < 1; \text{ b) } k = -\frac{3}{2}, k = \frac{1}{2}\right]$

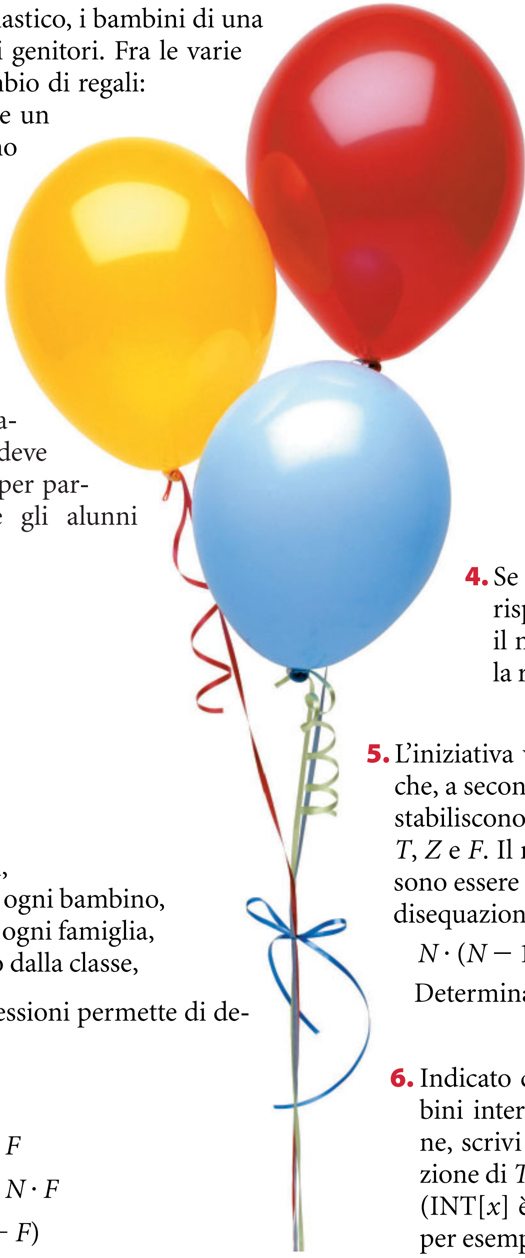
3 $kx^2 - 2x + 1 > 0$.
a) Le soluzioni sono esterne all'intervallo delle radici.
b) Le soluzioni sono interne all'intervallo delle radici.
c) Ammette come soluzioni tutte le x reali, tranne un solo valore.
d) Una radice è uguale a 3.

$\left[\text{a) } 0 < k < 1; \text{ b) } k < 0; \text{ c) } k = 1; \text{ d) } k = \frac{5}{9}\right]$

Matematica per il cittadino

REGALI PER TUTTI

Per la festa di fine anno scolastico, i bambini di una classe elementare invitano i genitori. Fra le varie attività è previsto uno scambio di regali: ogni alunno deve acquistare un regalo per ciascun compagno e un dono da destinare a una famiglia estratta a sorte.



1. Se il costo del regalo destinato a ogni bambino deve essere di € 0,30 e quello per le famiglie di € 1,50, quanto deve spendere ogni bambino per partecipare all'iniziativa se gli alunni sono 22?

A € 37,80
B € 7,80
C € 6,30
D € 8,10

2. Indicati con:

- N il numero di bambini,
- Z il costo del regalo per ogni bambino,
- F il costo del regalo per ogni famiglia,
- T l'importo totale speso dalla classe,

quale delle seguenti espressioni permette di determinare il valore di T?

A $T = N \cdot (N \cdot Z + F)$
B $T = N \cdot (N - 1) \cdot Z + F$
C $T = N \cdot (N - 1) \cdot Z + N \cdot F$
D $T = N \cdot (N - 1) \cdot (Z + F)$

3. L'assessore all'Istruzione della città decide di seguire la stessa iniziativa per alcune scuole e di stanziare € 1000 per l'acquisto dei regali, in modo che la spesa non gravi sui bambini e le loro famiglie. Determina il numero massimo degli studenti che possono essere coinvolti nell'iniziativa.

A 55
B 58
C 56
D 26

4. Se il comune stanzia un importo doppio rispetto al precedente, raddoppia anche il numero di bambini interessati? Motiva la risposta.

5. L'iniziativa viene proposta anche da altri comuni che, a seconda delle condizioni del bilancio locale, stabiliscono ciascuno i propri valori degli importi T, Z e F. Il numero massimo di bambini che possono essere coinvolti dipende dalla soluzione della disequazione:

$$N \cdot (N - 1) \cdot Z + N \cdot F < T.$$

Determina tale soluzione considerando N reale.

6. Indicato con N_{max} il numero massimo di bambini interessati all'iniziativa per singolo comune, scrivi l'espressione generale di N_{max} in funzione di T, Z e F, utilizzando l'operatore INT. (INT[x] è la parte intera di un numero reale x; per esempio, INT[5,347] = 5.)

Verifiche di fine capitolo

TEST Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 30 test interattivi in più

1 Il trinomio $x^2 - 2x + 3$ è positivo per tutti gli x tali che:

A $x < 2 \vee x > 3$.
B $x < 1 \vee x > 3$.
C $1 < x < 2$.
D $x < 1 \vee x > 2$.
E $\forall x \in \mathbb{R}$.

2 La disequazione $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$ è verificata:

A soltanto dagli x tali che $x < 2 \vee x > 2$.
B soltanto da $x = 2$.
C soltanto da $x = \frac{1}{2}$.
D soltanto dagli x tali che
$$x < -\frac{1}{2} \vee x > -\frac{1}{2}.$$
E $\forall x \in \mathbb{R}$.

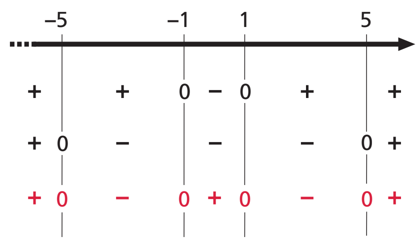
3 La scomposizione in fattori del trinomio $-2x^2 + 24x - 40$ è:
$$-2(x-2)(x-10).$$
Per quali valori di x il trinomio è positivo?

A $x \leq 2 \vee x \geq 10$
B $x = 2 \vee x = 10$
C $x > 2$
D $x < 10$
E $2 < x < 10$

4 La disequazione $ax^2 + c \geq 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$ se:

A $a < c \wedge c < 0$.
B $a \leq 0 \wedge c < 0$.
C $a \geq 0 \wedge c < 0$.
D $a > 0 \wedge c \geq 0$.
E $a < 0 \wedge c \geq 0$.

5 Il grafico rappresenta il quadro dei segni relativo allo studio del segno di un trinomio di 4° grado. Quale?



A $x^4 - 26x^2 + 25$
B $x^4 + 26x^2 + 25$
C $x^4 - 6x^2 + 5$
D $x^4 + 6x^2 + 5$
E $x^4 - 26x^2 - 25$

6 Le soluzioni della disequazione
$$x^5 - 8x^2 \leq 0$$
sono tutti gli x tali che:

A $x \leq 0 \vee x \geq 2$.
B $0 \leq x \leq 2$.
C $x \leq 0$.
D $x \geq 2$.
E $x \leq 2$.

7 Date le disequazioni
$$x^3 - 27 \leq 0 \quad \text{e} \quad x^2 - 9 > 0,$$
possiamo affermare che:

A sono equivalenti.
B l'unione delle loro soluzioni è $\mathbb{R}$.
C l'intersezione delle loro soluzioni è l'insieme vuoto.
D sono entrambe verificate da $x = 3$.
E sono verificate entrambe da tutti i valori reali di x escluso $x = 3$.

8 Date $(x-3)^4\ (x-2)>0$ e $\dfrac{(x-3)^2}{x-2}>0$, si può concludere che:

A $]2;+\infty[$ è soluzione di entrambe.
B $]2;3[\ \cup\ ]3;+\infty[$ sono soluzioni della prima ma non della seconda.
C $]2;3[\ \cup\ ]3;+\infty[$ sono soluzioni di entrambe.
D $]2;3[\ \cup\ ]3;+\infty[$ sono soluzioni della seconda ma non della prima.
E $]-\infty;2[\ \cup\ ]3;+\infty[$ sono soluzioni di entrambe.

9 Per quali valori di x è verificata la seguente disequazione fratta?

$$\frac{x+3}{2x-1}\leq 1$$

A $-2\leq x<1$
B $x\leq -2$
C $x\geq 4$
D $x\leq\dfrac{1}{2}\ \vee\ x\geq 4$
E $x<\dfrac{1}{2}\ \vee\ x\geq 4$

10 Quale affermazione, riferita al seguente sistema di disequazioni, è vera?

$$\begin{cases}2x^2+18\geq 0\\ x+2<0\end{cases}$$

A È sempre verificato.
B Non è mai verificato.
C È verificato per $x<-3$.
D È verificato per $x<-2$.
E È verificato per $x>2$.

11 Per risolvere la disequazione $\sqrt{5x^2-9}>-5$, è sufficiente risolvere:

A $5x^2-9>0$.
B $5x^2-9>25$.
C $5x^2-9>0\ \wedge\ 5x^2-9>25$.
D $5x^2-9\geq 0$.
E $5x^2-9>5$.

12 È data la disequazione $|2x-1|+x^2\geq 0$. Possiamo dire che:

A l'insieme delle soluzioni è l'unione di quelle delle disequazioni
$x^2+2x-1\geq 0$ e $x^2+2x-1\leq 0$.
B la disequazione è verificata soltanto dagli x tali che $x\neq\dfrac{1}{2}$.
C $x<\dfrac{1}{2}$ non è soluzione della disequazione.
D l'insieme delle soluzioni è $\mathbb{R}$.
E l'insieme delle soluzioni è l'intersezione di quelle delle disequazioni
$2x-1+x^2\geq 0$ e $-2x+1++x^2\geq 0$.

SPIEGA PERCHÉ

13 È possibile che il quadrato di un numero sia minore del numero stesso? Spiega perché con una disequazione.

14 Dopo aver spiegato perché non è corretta l'implicazione $x^2>9\ \rightarrow\ x>\pm 3$, scrivi, motivando, la soluzione corretta.

15 Se nella disequazione $ax^2+bx+c\leq 0$ è $a>0$ e $\Delta=0$, possiamo affermare che ha come unica soluzione $x=-\dfrac{b}{2a}$? Motiva la risposta.

16 Quale simbolo di disuguaglianza puoi sostituire ai puntini nella disequazione $9\ldots -x^2$ affinché sia verificata $\forall\, x\in\mathbb{R}$? Perché?

17 È vero che la disequazione di quarto grado $(x^2-4)^2\geq 0$ è verificata per $x\leq -2\vee x\geq 2$? Perché?

18 La disequazione $\dfrac{x+2}{x-3}>0$ è equivalente al sistema $\begin{cases}x+2>0\\ x-3>0\end{cases}$? Perché?

ESERCIZI

Risolvi le seguenti disequazioni.

19 $12x^2-5x-2\geq 0$ $\left[x\leq -\frac{1}{4} \vee x\geq \frac{2}{3}\right]$

20 $\left(\frac{x}{3}-1\right)\left(\frac{x}{3}+1\right)+2x<(x-1)^2+2$ $\left[x<\frac{3}{2} \vee x>3\right]$

21 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2(x-3)\geq 0$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

22 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\geq\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x\right)$ $\left[x\leq\frac{2}{3} \vee x\geq 2\right]$

23 $-3x^2-13x+10\geq 0$ $\left[-5\leq x\leq\frac{2}{3}\right]$

24 $2\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4x-\frac{15}{2}\right]<x^2-\frac{1}{2}(x+1)$ $\left[x<-4 \vee x>-\frac{7}{2}\right]$

25 $x^2-6x+45\geq 0$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

26 $7x^2-9ax+2a^2>0 \qquad (a>0)$ $\left[x<\frac{2}{7}a \vee x>a\right]$

27 $(x-a)(x+a)+\frac{3}{2}a(x-a)>0 \qquad (a>0)$ $\left[x<-\frac{5}{2}a \vee x>a\right]$

28 $4x^3-8x^2-21x\leq 0$ $\left[x\leq-\frac{3}{2} \vee 0\leq x\leq\frac{7}{2}\right]$

29 $2x^3-x^2-11x+10>0$ $\left[-2<x<1 \vee x>\frac{5}{2}\right]$

30 $8x^4-14x^2+7>0$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

31 $9x^4+3x^3-11x^2-3x+2<0$ $\left[-1<x<-\frac{2}{3}\vee\frac{1}{3}<x<1\right]$

32 $2x^3-x^2-8x+4>0$ $\left[-2<x<\frac{1}{2} \vee x>2\right]$

33 $5x^3+9x^2-8x-12\leq 0$ $\left[x\leq -2 \vee -1\leq x\leq\frac{6}{5}\right]$

34 $\frac{x^2-2x-3}{x^2+2}>0$ $[x<-1 \vee x>3]$

35 $\frac{2x+3}{x}-\frac{6}{x-1}<0$ $\left[-\frac{1}{2}<x<0 \vee 1<x<3\right]$

36 $4-\frac{2x+6}{2-x}\leq\frac{x+1}{2x-4}$ $\left[\frac{5}{11}\leq x<2\right]$

37 $\frac{x^2-4x}{x^2-5x+6}\leq 0$ $[0\leq x<2 \vee 3<x\leq 4]$

38 $\frac{3}{x}+\frac{x}{x+1}>\frac{2x+1}{x}$ $[-\sqrt{2}<x<-1 \vee 0<x<\sqrt{2}]$

39 $\frac{4}{x-1}+2\leq\frac{3}{x+1}-\frac{x^2+2x-4}{x^2-1}$ $[-1<x<1]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

40 $\frac{x}{x-4}-\frac{2x}{x+1}<\frac{9(x-1)}{x^2-3x-4}$ $[x<-3 \vee -1<x<3 \vee x>4]$

41 $\frac{2}{3(x+1)}-\frac{2}{3x-6}-1>0$ $[-1<x<0 \vee 1<x<2]$

42 $\frac{12}{x-1}-\frac{6}{x-2}<1$ $[x<1 \vee 2<x<4 \vee x>5]$

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

43 $\begin{cases} 3x-2>0 \\ 5x+1>0 \\ 2x^2-x-3<0 \end{cases}$ $\left[\frac{2}{3}<x<\frac{3}{2}\right]$

44 $\begin{cases} \frac{x}{3-x}>0 \\ x^2-16<0 \\ x^2-3x+2>0 \end{cases}$ $[0<x<1 \vee 2<x<3]$

45 $\begin{cases} x^2-7x+12>0 \\ x^2-6x+5<0 \\ 2x-10<0 \end{cases}$ $[1<x<3 \vee 4<x<5]$

46 $\begin{cases} \frac{x-4}{2x+1}>0 \\ \frac{1}{2x^2+x}<0 \\ 2x^2-x-3<0 \end{cases}$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

47 $\begin{cases} \frac{x^2}{9-x^2}\geq 0 \\ \frac{x}{x-2}-\frac{x}{x+2}\leq\frac{4}{x^2-4} \end{cases}$ $[-3<x<-2 \vee 1\leq x<2]$

48 $\begin{cases} \frac{x^2-7x+13}{x-7}<0 \\ \frac{x+1}{x^4+2}\geq 0 \end{cases}$ $[-1\leq x<7]$

49 Nell'equazione parametrica $k^2(x+4)=5x$, determina il valore del parametro k affinché la radice sia negativa. $[k<-\sqrt{5} \vee k>\sqrt{5}]$

50 Determina per quale valore di k l'equazione parametrica $3kx+5k^2=1-x$ ha per soluzione un numero maggiore di 2. $\left[k<-1 \vee -\frac{1}{3}<k<-\frac{1}{5}\right]$

51 Data l'equazione parametrica

$$(2-k)x^2+2kx+3-2k=0$$

nell'incognita x, determina per quali valori di k l'equazione:

a) ha radici reali;
b) ha radici reali e la loro somma è maggiore di -2;
c) ha una radice nulla;
d) ha radici reali e il loro prodotto è maggiore di 1.

$\left[\text{a) } 1\leq k\leq 6;\ \text{b) } 2<k\leq 6;\ \text{c) } k=\frac{3}{2};\ \text{d) } 2<k\leq 6\right]$

52 Data la disequazione

$$3x^2+2(k-1)x+k-1>0,$$

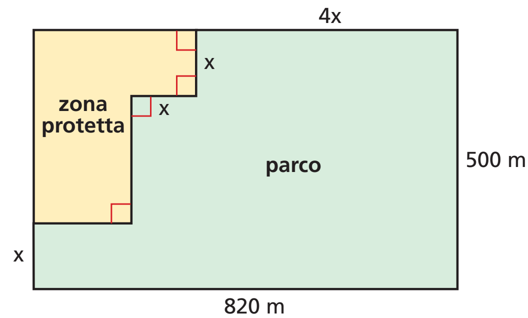
determina per quali valori di k essa risulta verificata per ogni valore reale di x. $[1<k<4]$

53 Data la disequazione parametrica $2x^2 - 3(k+1)x + k^2 + k > 0$ nell'incognita x, determina i valori del parametro k affinché sia verificata $\forall\, x \in \mathbb{R}$. $[-9 < k < -1]$

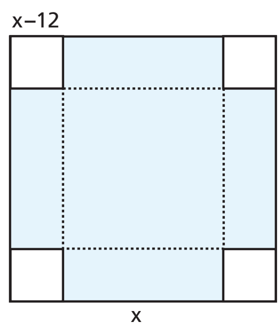
54 Risolvi e discuti la disequazione letterale $(k+3)x^2 - 2kx \leq 0$ nell'incognita x.
$\left[k < -3: x \leq 0 \vee x \geq \frac{2k}{k+3}; k = -3: x \leq 0; -3 < k < 0: \frac{2k}{k+3} \leq x \leq 0; k = 0: x = 0; k > 0: 0 \leq x \leq \frac{2k}{k+3}\right]$

Problemi

55 All'interno di un parco di forma rettangolare si vuole creare un'area verde protetta che ha la forma della figura.
a) Quali valori può assumere x?
b) Determina per quali valori di x l'area della zona protetta è minore di 207 000 m^2.
$[a)\ 0 \leq x \leq 205;\ b)\ 70 < x \leq 205]$



56 Da una lamiera quadrata di lato x cm vengono tagliati quattro quadrati di lato $(x - 12)$ cm e, ripiegando lungo i lati tratteggiati, si costruisce una scatola. Determina per quali valori di x:
a) è possibile costruire la scatola;
b) si ottengono scatole con superficie maggiore di 180 cm^2.
$[a)\ 12 < x < 24;\ b)\ 14 < x < 18]$



Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni.

57 $\left|\frac{2x+1}{x^2-4}\right| - 1 = 0$ $[-3; 1-\sqrt{6}; 1; 1+\sqrt{6}]$

58 $\frac{|x+5|}{x^2-4} - \frac{4}{|x-2|} = \frac{1}{x+2}$ $\left[-\frac{15}{4}\right]$

59 $|x-3| = 2(x^2 - 5x + 6)$ $\left[3; \frac{3}{2}\right]$

60 $|2x^2 - 9x| + 10 = |6x - x^2| - 8$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

61 $10 + |x| \cdot (x+3) = (2x+1)|x+2|$ $[2]$

62 $x^2 - 1 > |x^2 - 5x + 1| - 2$ $\left[0 < x < \frac{1}{2} \vee x > 2\right]$

63 $x^2 - x - 2 \leq |x-1|$ $[-\sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}]$

64 $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \geq \sqrt{6}$ $[x \leq -1 \vee x \geq 4]$

65 $\sqrt{x^2 + 2} > x - 1$ $[\mathbb{R}]$

66 $\sqrt{x-2} < 2x - 5$ $[x > 3]$

67 $\sqrt{(x+1)(x-1) - (x+2)^2} < x$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

68 $\sqrt{(1-x)(x+4)} - 2 > x$ $[-4 \leq x < 0]$

69 $\sqrt{4 - 9x^2} > 4x$ $\left[-\frac{2}{3} \leq x < \frac{2}{5}\right]$

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 7 esercizi in più

70 È data l'equazione $(a+1)x^2-(2a-3)x+a=0$ nell'incognita x. Determina per quali valori interi del parametro a l'equazione ammette soluzioni reali e concordi. $[a<-1, a \in \mathbb{Z}]$

71 Considera la disequazione letterale

$x^2-(2-k)x-k+1 \geq 0$ nell'incognita x.

a) Per quali valori di k ammette soluzioni reali?
b) Quali sono le soluzioni se il parametro assume valori negativi?
c) Per quali valori di k è sempre verificata?

$[a)\ \forall k \in \mathbb{R}$; b) se $k<0$: $x \leq 1 \vee x \geq 1-k$; c) $k=0]$

72 Sono dati i due polinomi:

$P(x)=x^3+2x^2-5x-6$ e $Q(x)=x^3+1$.

Per quali $x \in \mathbb{R}$ i valori assunti dai due polinomi risultano discordi? $[-3<x<2 \wedge x \neq -1]$

73 Per quali valori reali del parametro a la retta di equazione

$y=(2a^2+a-6)x-3$

forma con l'asse positivo delle x un angolo maggiore dell'angolo retto? $\left[-2<a<\dfrac{3}{2}\right]$

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 5 esercizi in più

74 Solve the inequality $\dfrac{(x-2)(x+5)}{(x-3)(x+3)} \geq 0$.

Write the solution in interval notation.

(USA *Southeast Missouri State University: Math Field Day*, 2005)

$[]-\infty;-5] \cup]-3;2] \cup]3;+\infty[]$

75 For which values of k are the roots of

$x^2-kx+(2-k)=0$

real? $[k \leq -2(1+\sqrt{3}) \vee k \geq -2(1-\sqrt{3})]$

TEST

76 Let m be a constant. The graphs of the lines $y=x-2$ and $y=mx+3$ intersect at a point whose x-coordinate and y-coordinate are both positive if and only if:

A $m=1$.
B $m<1$.
C $m>-\dfrac{3}{2}$.
D $-\dfrac{3}{2}<m<0$.
E $-\dfrac{3}{2}<m<1$.

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2003)

77 For all real numbers p, q, x, y which satisfy $x>p$ and $y>q$, which of the following inequalities are satisfied?

1. $x^2y^2>p^2q^2$
2. $x+y>p+q$
3. $x^2+y^2>p^2+q^2$

A 1, 2, 3
B 1 only
C 2, 3
D 2 only
E None

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2003)

78 Find all real numbers a such that the inequality $ax^2-2x+a<0$ holds for all real numbers x.

A $a<-2$.
B $a<-1$.
C $a<0$.
D $a<-2$ or $a>2$.
E $a<-1$ or $a>1$.

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2002)

79 The set of real numbers satisfying

$\dfrac{1}{x+1}>\dfrac{1}{x-2}$ is:

A $\{x \mid x>2\}$.
B $\{x \mid -1<x<2\}$.
C $\{x \mid x<2\}$.
D $\{x \mid x<-1\}$.
E $\{x \mid x>-1\}$.

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2003)

GLOSSARY

both: entrambi	**line**: retta	**set**: insieme
graph: grafico	**notation**: notazione	**to solve**: risolvere
to hold-held-held: valere	**root**: radice (soluzione)	**such that**: tale che
to intersect: intersecare	**to satisfy**: soddisfare	**value**: valore

CAPITOLO 15

Le trasformazioni e le coniche nel piano cartesiano

In viaggio

Le indicazioni di un navigatore satellitare per automobili sono, in definitiva, una successione di traslazioni e di rotazioni nel piano, cioè una sequenza di trasformazioni geometriche.
Ma una sequenza di istruzioni contiene, implicitamente, un'istruzione ulteriore, trascurando la quale si rischia di trovarsi molto lontano dalla meta prevista…

…l'esito di una sequenza di trasformazioni geometriche dipende dall'ordine in cui vengono eseguite?

➡ La risposta a pag. 1143

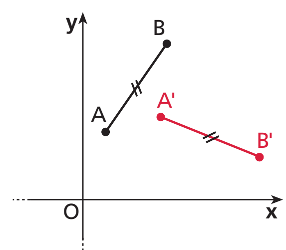
1. Le isometrie

Consideriamo due punti qualunque, A e B, del piano e i loro corrispondenti A' e B' in una trasformazione geometrica:

$$A \mapsto A' \quad \text{e} \quad B \mapsto B'.$$

La trasformazione viene detta **isometria** se la distanza fra i punti A e B è uguale alla distanza fra i punti corrispondenti A' e B', comunque si scelgano A e B nel piano, ossia se si ha $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Studiamo questi tipi di isometrie: la traslazione, la simmetria assiale, la simmetria centrale e la rotazione.



In ogni isometria
$\overline{AB} = \overline{A'B'}$

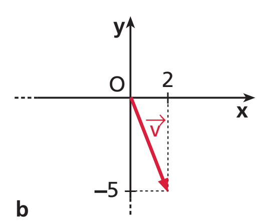
La traslazione

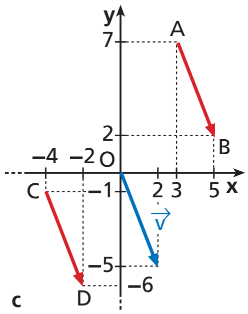
La rappresentazione di un vettore nel piano cartesiano
Rappresentiamo nel piano cartesiano il vettore $\vec{v}$ della figura *a* a lato, ponendo il primo estremo nell'origine degli assi (figura *b*).

Le coordinate del secondo estremo sono una coppia di numeri, dette **componenti** del vettore. Le componenti del vettore $\vec{v}$ della figura sono 2 e − 5. Possiamo indicare il vettore in modo sintetico scrivendolo seguito, fra parentesi, dalle sue componenti: $\vec{v}\,(2; -5)$.

a

b





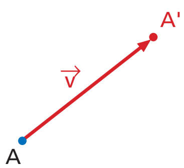
c

Lo stesso vettore può essere rappresentato con altri segmenti orientati equipollenti a quello dato, ossia con uguale distanza fra gli estremi (**modulo**), stessa **direzione** e stesso **verso**.
Per esempio, nella figura c consideriamo $\vec{AB}$, con $A(3; 7)$, $B(5; 2)$, e $\vec{CD}$, con $C(-4; -1)$, $D(-2; -6)$. Entrambi rappresentano $\vec{v}$, perché sono equipollenti al segmento iniziale. In questo caso, per calcolare le componenti, dobbiamo considerare le differenze fra le coordinate del secondo estremo e quelle del primo estremo:

$$\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A) = \vec{AB}(5-3; 2-7) = \vec{AB}(2; -5);$$

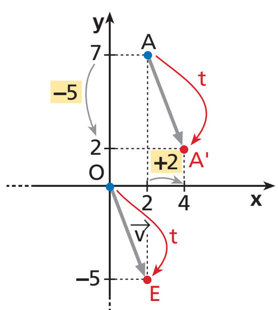
$$\vec{CD}(x_D - x_C; y_D - y_C) = \vec{CD}(-2-(-4); \ -6-(-1)) = \vec{CD}(2; -5).$$

Le equazioni della traslazione



Consideriamo un generico punto A del piano e il vettore $\vec{v}$ **applicato** ad A: facciamo coincidere con A il primo estremo di $\vec{v}$ e chiamiamo A' il punto del piano coincidente con il secondo estremo.

La **traslazione** di vettore $\vec{v}$ è quella isometria che associa al punto A il punto A'.
Il trasformato dell'origine O nella traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$ è il punto $O'(a; b)$. Per esempio (figura a lato), la traslazione individuata dal vettore precedente $\vec{v}(2; -5)$ fa corrispondere al punto $O(0; 0)$ il punto $E(2; -5)$. Per trovare il corrispondente di un altro punto, per esempio $A(2; 7)$, applichiamo ad A il vettore $\vec{v}$, ottenendo il punto A':



$$A(2; 7) \xmapsto{t} A'(4; 2) \qquad (x: +2,\ y: -5)$$

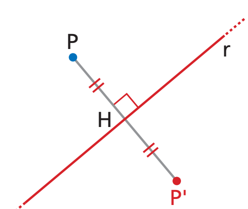
Dato un generico punto $P(x; y)$, le coordinate del suo corrispondente $P'(x'; y')$ sono date dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 5 \end{cases}$$

In generale, le **equazioni della traslazione secondo il vettore** $\boldsymbol{\vec{v}(a; b)}$ sono:

$$\boxed{\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}}$$

La simmetria assiale

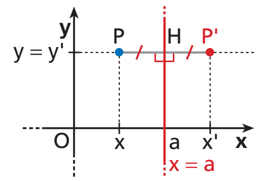


Fissata nel piano una retta r, la **simmetria assiale rispetto alla retta** $\boldsymbol{r}$ è quell'isometria che a ogni punto P fa corrispondere il punto P', nel semipiano opposto rispetto a r, tale che r sia asse del segmento PP', ossia:

- r passa per il punto medio di PP';
- PP' è perpendicolare a r.

La retta r è detta **asse di simmetria**.

La simmetria rispetto a un asse parallelo all'asse y
Consideriamo una generica retta parallela all'asse y di equazione $x = a$ e un punto $P(x; y)$. Disegniamo il punto P' simmetrico di P rispetto alla retta data (figura a lato).
Il punto P' ha la stessa ordinata di P. Per calcolare l'ascissa di P', osserviamo che H è punto medio di PP', quindi la sua ascissa a è data da



$$a = \frac{x + x'}{2} \quad \rightarrow \quad x' = 2a - x.$$

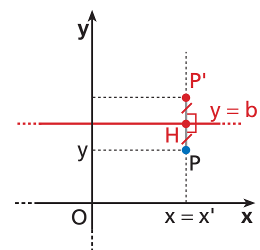
Le coordinate di P', trasformato del punto $P(x; y)$, sono $(2a - x; y)$.
Pertanto le **equazioni della simmetria rispetto all'asse $x = a$** sono:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$$

Se $a = 0$, l'asse di simmetria è l'asse y.

Se una trasformazione geometrica manda un punto P in se stesso, P è detto **punto unito** della trasformazione.
Ponendo $x = x'$ nella prima equazione, puoi dimostrare che i punti uniti della simmetria assiale sono i punti dell'asse.

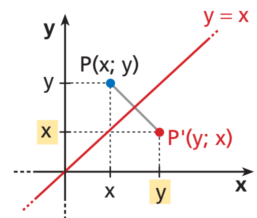
La simmetria rispetto a un asse parallelo all'asse x
Con ragionamenti analoghi, si ricava che le **equazioni della simmetria rispetto all'asse $y = b$** (parallelo all'asse x) sono:



$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

Se $b = 0$, l'asse di simmetria è l'asse x.

La simmetria rispetto alle bisettrici dei quadranti
Si dimostra che due punti simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante $(y = x)$ hanno coordinate scambiate fra loro, ossia che, se P ha coordinate $(x; y)$, il suo simmetrico P' ha coordinate $(y; x)$. **Le equazioni della simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante** sono:



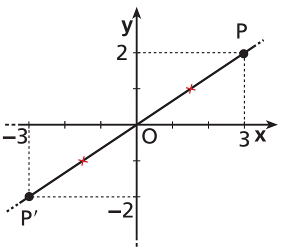
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Si dimostra inoltre che **le equazioni della simmetria rispetto alla bisettrice b' del secondo e del quarto quadrante $(y = -x)$** sono:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

La simmetria centrale

Fissato nel piano un punto M, la simmetria centrale di centro M è l'isometria che a ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' tale che M è il punto medio del segmento PP'.



▸ Poiché al punto $O(0; 0)$ corrisponde se stesso, il centro di simmetria O è punto unito della trasformazione.

La simmetria centrale rispetto all'origine degli assi
Dato il punto $P(3; 2)$, disegniamo il punto simmetrico di P rispetto a O. Congiungiamo P con O e, sul prolungamento di PO, scegliamo il punto P' tale che sia $\overline{P'O} = \overline{OP}$.

Vediamo che il simmetrico di $P(3; 2)$ rispetto a O è il punto $P'(-3; -2)$ di coordinate opposte a quelle di P.

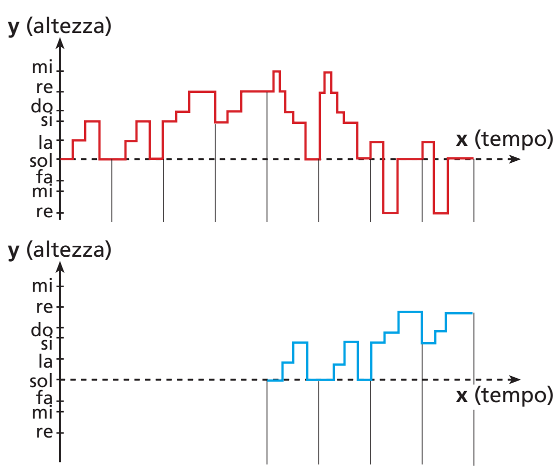
In generale, si dimostra che due punti simmetrici qualsiasi rispetto all'origine degli assi cartesiani hanno le rispettive coordinate opposte.

Le **equazioni della simmetria centrale di centro O** sono pertanto:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

ESPLORAZIONE: MUSICA E TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

FRA MARTINO E LE TRASLAZIONI
Il *canone* è una composizione musicale in cui una prima voce (detta *antecedente*) che esegue un *tema* viene imitata da una seconda voce (*conseguente*) che «entra», cioè inizia, a un certo punto dello svolgimento dell'antecedente. Le due melodie devono «sovrapporsi» rispettando le regole dell'*armonia*, cioè le note simultanee devono «suonare bene» insieme.
La filastrocca *Fra Martino* è un esempio di **canone diretto** a due voci. La voce conseguente, copia esatta del tema, entra a un certo punto dell'esposizione del tema stesso da parte della prima voce. La voce conseguente si ottiene quindi per semplice *traslazione nel tempo* della voce antecedente.
Una schematizzazione «cartesiana» del rigo musicale consente di visualizzare l'analogia tra canoni e trasformazioni geometriche. Se il *tempo* musicale è rappresentato sull'asse delle ascisse e l'*altezza* di una nota su quello delle ordinate, fissando convenzionalmente le unità, si può tradurre il rigo musicale di una melodia nel grafico di una funzione a gradini.
Per ottenere la seconda voce, la traslazione nel tempo di un tema, cioè la sua ripetizione a partire da un istante T, corrisponde a una traslazione lungo l'asse x di vettore $\vec{v}(T; 0)$ del grafico del tema. T deve essere scelto in modo che il tema risulti armonico con il traslato di se stesso.



▲ *Fra Martino* come esempio di canone diretto a due voci (traslazione lungo l'asse x). Il *sol* della seconda voce armonizza con il *re* e il *mi* della prima, il *la* della seconda con il *re* e il *do* della prima, e così via.

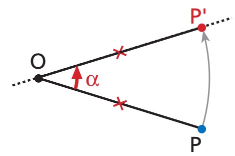
BACH E L'_ARS CANONICA_
Johann Sebastian Bach (1685-1750) utilizzò le trasformazioni geometriche nella cosiddetta *ars canonica*, uno degli esempi più interessanti di interazione tra forme musicali e matematica. In particolare fece uso del **canone inverso** e del **canone cancrizzante**.

IN CINQUE SLIDE
Cerca informazioni sui canoni dell'*ars canonica* di Bach. Realizza una presentazione multimediale.

Cerca nel web: Bach, ars canonica, trasformazioni geometriche, inverso, cancrizzante.

La rotazione

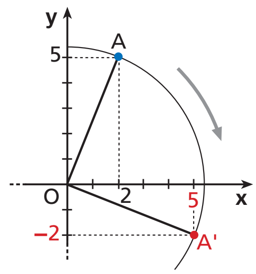
Dato un angolo $a\hat{O}b$, possiamo considerarlo **orientato** pensando di considerare le semirette da cui è formato procedendo da a verso b oppure da b ad a.
Fissati nel piano un punto O e un angolo orientato α, la **rotazione di angolo α** è l'isometria che a ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' tale che:



1. $\overline{OP} = \overline{OP'}$;
2. l'angolo $P\hat{O}P'$ è congruente ad α e ugualmente orientato.

O è detto **centro di rotazione**.

La rotazione di un angolo retto con centro nell'origine degli assi
Ruotiamo di un angolo retto intorno all'origine degli assi cartesiani, in senso orario, un punto $A(2; 5)$ e otteniamo il corrispondente $A'(x'; y')$.
Si può dimostrare che l'ascissa di A' risulta uguale all'ordinata di A e l'ordinata di A' è l'opposta dell'ascissa di A, ossia:



$$A(2; 5) \mapsto A'(5; -2).$$

In generale, si dimostra che le **equazioni della rotazione di un angolo retto in senso orario di centro O** sono:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

Si dimostra inoltre che la rotazione di un angolo retto **in senso antiorario** di centro O ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

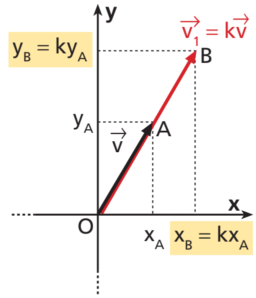
Poiché in una rotazione al centro di rotazione corrisponde se stesso, il centro $O(0; 0)$ è punto unito della trasformazione.

2. Le omotetie

Il prodotto di un vettore per un numero reale

Dati un vettore $\vec{v}$ e un numero reale $k \neq 0$, il prodotto $k \cdot \vec{v}$ (o semplicemente $k\vec{v}$) del numero per il vettore è un nuovo vettore $\vec{v}_1$ che ha:

- la stessa direzione di $\vec{v}$;
- modulo uguale al prodotto del valore assoluto di k per il modulo di $\vec{v}$, ossia $|\vec{v}_1| = |k||\vec{v}|$;
- verso concorde con quello di $\vec{v}$ se k è positivo, discorde se k è negativo.

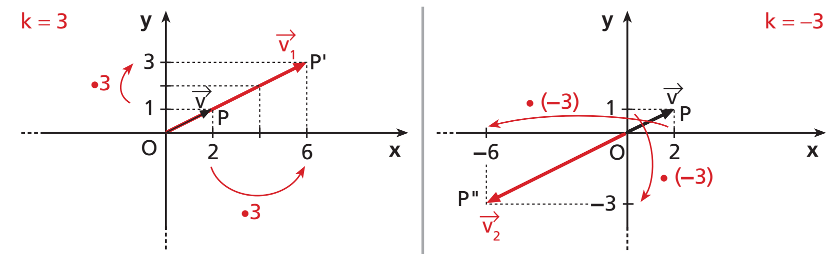


Se $(a; b)$ sono le componenti di $\vec{v}$, le componenti di $\vec{v}_1 = k\vec{v}$ sono $(ka; kb)$, cioè:

$$k \cdot \vec{v}(a; b) = \vec{v}_1(ka; kb).$$

La figura 1 riporta due esempi con $\vec{v}(2; 1)$ e con $k = 3$ e $k = -3$.

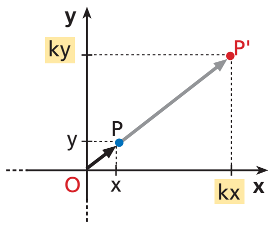
▶ Figura 1



a. Il vettore $\vec{v}_1 = 3\,\vec{v} = \overrightarrow{OP'}$ si ottiene da $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ moltiplicando entrambe le sue componenti per 3.

b. Il vettore $\vec{v}_2 = -3\,\vec{v} = \overrightarrow{OP''}$ si ottiene da $\vec{v}$ moltiplicando entrambe le sue componenti per –3.

Le omotetie con centro nell'origine degli assi



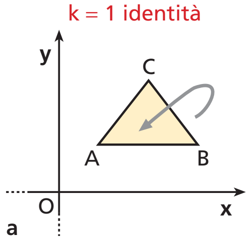
Dati un numero reale $k \neq 0$ e un punto P del piano, **l'omotetia di rapporto k e centro O** (dove O è l'origine degli assi) è quella trasformazione che associa a P il punto P' tale che:

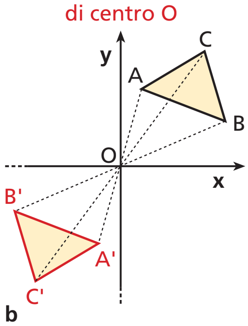
$$\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}.$$

Il punto P' è detto **omotetico** di P. Il numero k è detto **rapporto di omotetia**.

Le **equazioni dell'omotetia di centro O e rapporto k** sono:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$





Osservazioni

1. Se $k = 1$ (figura *a*), l'omotetia coincide con l'**identità**, ossia con la trasformazione che a ogni punto associa se stesso. Infatti le equazioni diventano:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

In questo caso a ogni punto $P(x; y)$ corrisponde se stesso, quindi tutti i punti del piano sono punti uniti della trasformazione.

2. Se $k = -1$ (figura *b*), otteniamo:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

ossia ritroviamo la simmetria di centro $O(0; 0)$. In tal caso sappiamo già che O è l'unico punto unito della trasformazione.

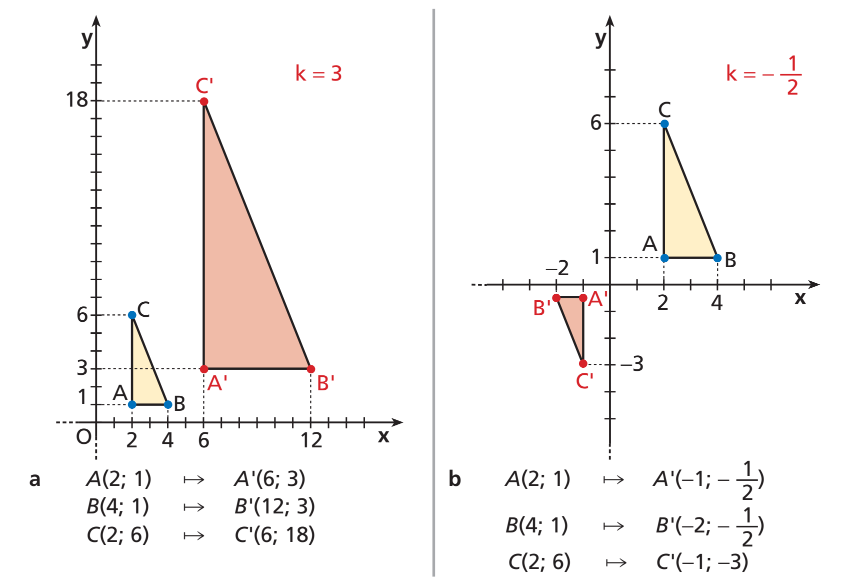
3. Se $k \neq 1$ $(k \neq 0)$, si può dimostrare che il centro $O(0; 0)$ è l'unico punto unito dell'omotetia.

Gli ingrandimenti e le riduzioni

L'omotetia permette di ingrandire o ridurre una figura, lasciandone inalterata la forma. Valgono le seguenti proprietà:

- se $|k| > 1$, l'omotetia ingrandisce la figura;
- se $|k| < 1$, l'omotetia riduce la figura;
- se $k > 0$, l'omotetia è **diretta**, cioè due punti corrispondenti si trovano nello stesso quadrante;
- se $k < 0$, l'omotetia è **inversa**, cioè punti corrispondenti appartengono a quadranti opposti (primo e terzo oppure secondo e quarto).

Nella figura 2 sono illustrati due esempi di omotetie per diversi valori del rapporto k.



◄ **Figura 2** L'omotetia di rapporto 3 ingrandisce la figura data ed è diretta; quella di rapporto $-\frac{1}{2}$ riduce la figura ed è inversa.

3. La composizione di due trasformazioni

È data una figura $\mathcal{F}$ del piano. Supponiamo di applicare a $\mathcal{F}$ una trasformazione t e chiamiamo $\mathcal{F}'$ la trasformata di $\mathcal{F}$ mediante t. Successivamente, applichiamo a $\mathcal{F}'$ una trasformazione s, e chiamiamo $\mathcal{F}''$ la trasformata di $\mathcal{F}'$ mediante s.

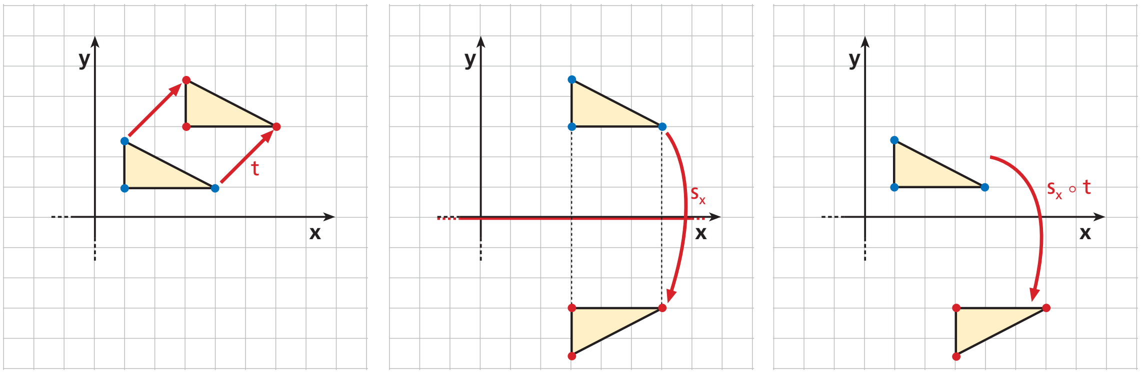
Esiste una trasformazione che applicata a $\mathcal{F}$ dia $\mathcal{F}''$? Sì: è la composizione delle due trasformazioni. La composizione viene indicata nel seguente modo:

$$\mathcal{F} \xmapsto{s \circ t} \mathcal{F}''.$$

In generale, la composizione non gode della proprietà commutativa: la trasformazione composta $s \circ t$ è diversa dalla trasformazione $t \circ s$.

Una trasformazione geometrica è una funzione. Pertanto, la scrittura $s \circ t$ si legge «**s composto t**» e significa che eseguiamo la trasformazione ottenuta applicando **prima t e poi s**.

Nella figura 3 puoi osservare in un esempio il modo di ottenere le equazioni di una trasformazione composta a partire dalle equazioni delle trasformazioni che la compongono.



$$t: \begin{cases} x' = \boxed{x+2} \\ y' = \boxed{y+2} \end{cases} \qquad s_x: \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = -y' \end{cases} \longrightarrow \quad s_x \circ t: \begin{cases} x'' = x+2 \\ y'' = -y-2 \end{cases}$$

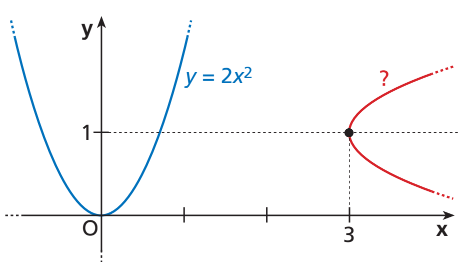
▲ Figura 3

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Parallelo all'asse *x*

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Utilizza le trasformazioni geometriche per ottenere l'equazione della parabola disegnata in rosso nella figura, che è congruente alla parabola di equazione $y = 2x^2$.



FRANCESCO: «Se la parabola avesse lo stesso vertice, ma asse parallelo all'asse *y*, basterebbe una traslazione».

CHIARA: «Forse dobbiamo prima trovare il modo di ribaltare la parabola blu».

FRANCESCO: «Usiamo una simmetria?».

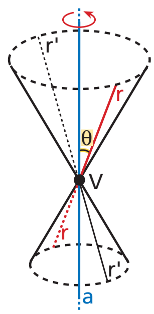
▶ Componi due isometrie in modo da passare dalla parabola blu a quella rossa. Generalizza il risultato ottenuto.

4. Le coniche

LE SEZIONI CONICHE

Data una retta r nello spazio che intersechi in V la retta a, si chiama **superficie conica a due falde** la superficie generata in una rotazione completa di r attorno ad a. La parte di spazio racchiusa dalla superficie è detta **cono a due falde**.

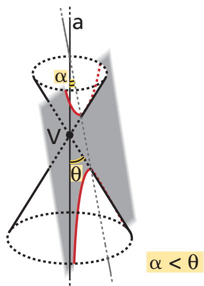
La retta r, e ogni altra retta r' della superficie conica, si dice **generatrice**; l'angolo θ che r forma con a si chiama **semiapertura**. L'asse di rotazione è anche asse di simmetria del cono. V è detto **vertice** del cono.



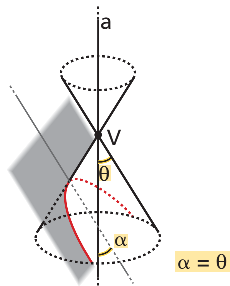
Le curve che si possono ottenere sezionando con un piano una superficie conica a due falde sono dette **sezioni coniche** o semplicemente **coniche**.

Possiamo distinguere tre casi.

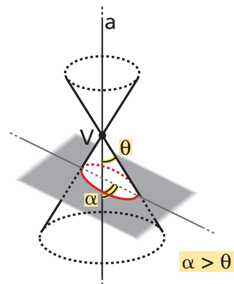
1. L'angolo α formato dal piano secante con l'asse a del cono è minore della semiapertura θ: la sezione conica è un'**iperbole** (figura a).
2. L'angolo α formato dal piano secante con l'asse a del cono è uguale alla semiapertura θ: la sezione conica è una **parabola** (figura b).
3. L'angolo α formato dal piano secante con l'asse a del cono è maggiore della semiapertura θ: la sezione conica è un'**ellisse**; in particolare, se $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, abbiamo una circonferenza (figure c e d).



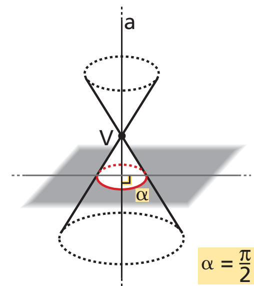
a. La sezione conica è una curva costituita da due rami illimitati: l'iperbole.



b. La sezione conica è una curva costituita da un unico ramo aperto illimitato: la parabola.



c. La sezione conica è una curva chiusa e limitata: l'ellisse.



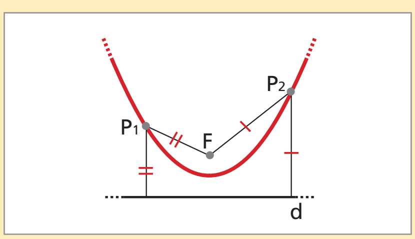
d. L'ellisse è ridotta a circonferenza.

La parabola

DEFINIZIONE

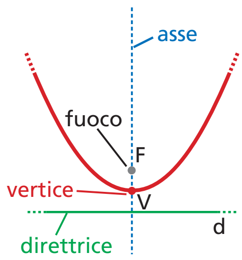
Parabola

Assegnati nel piano un punto F e una retta d, si chiama parabola la curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da F e da d.



In questo paragrafo esaminiamo le principali proprietà delle coniche definendole come **luoghi geometrici**, ossia insiemi di tutti e soli i punti del piano che godono di una particolare proprietà. Iniziamo con la parabola che hai già studiato come grafico della funzione quadratica.

Il punto F e la retta d vengono detti, rispettivamente, **fuoco** e **direttrice** della parabola. La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si chiama **asse** della parabola. Il punto V in cui la parabola interseca il suo asse è detto **vertice** della parabola.



Si può dimostrare che l'asse della parabola è anche asse di simmetria della curva, ossia è vero che, preso un punto della parabola, esiste un altro suo punto che è simmetrico del primo rispetto all'asse.

Studieremo soltanto le parabole del piano cartesiano con asse parallelo all'asse y, che hanno le seguenti caratteristiche.

REGOLA

Equazione della parabola con asse parallelo all'asse *y*

L'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y è del tipo

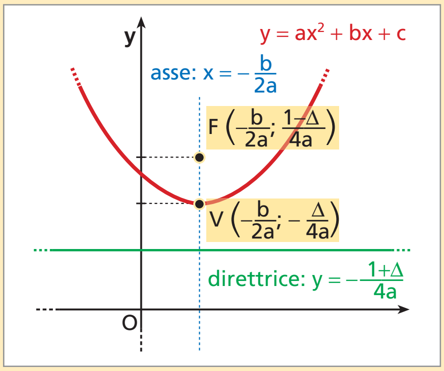
$$y = ax^2 + bx + c,$$

dove a, b, c sono coefficienti reali e $a \neq 0$. Inoltre, l'asse ha equazione

$$x = -\frac{b}{2a},$$

il vertice è il punto $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, il fuoco è il punto $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$

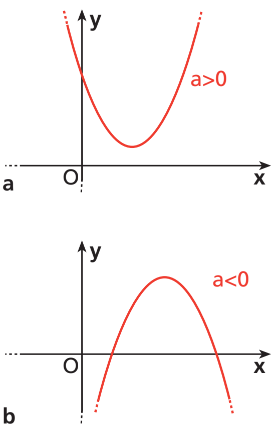
e la direttrice ha equazione $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$.



$\Delta = b^2 - 4ac$.

Si può dimostrare che per una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ **la concavità dipende solo dal segno del coefficiente *a***: se $a > 0$, la concavità è rivolta verso l'alto (figura a); se $a < 0$, verso il basso (figura b).

Inoltre, **l'apertura della parabola dipende dal valore assoluto di *a***: all'aumentare di $|a|$ diminuisce l'apertura della parabola, ossia la parabola si «stringe» attorno al proprio asse.



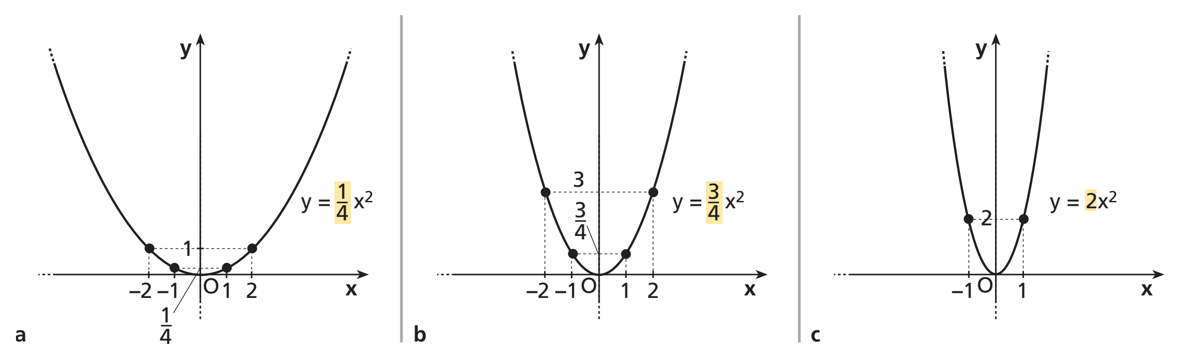
▼ **Figura 4** L'apertura della parabola diminuisce all'aumentare di ***a***.

ESEMPIO

1. Disegniamo per punti, assegnando a x alcuni valori a piacere, le parabole di equazione

$$y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = \frac{3}{4}x^2, \quad y = 2x^2.$$

Sono parabole con il vertice nell'origine, asse coincidente con l'asse y, e concavità rivolta verso l'alto.



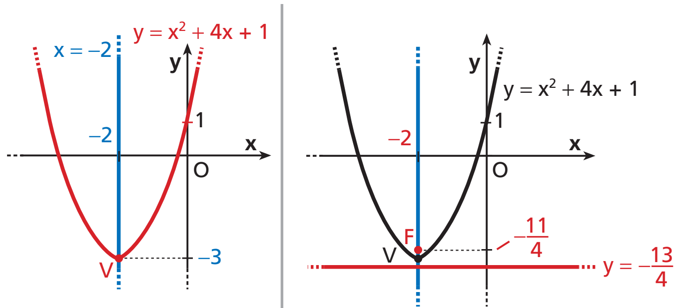
2. Rappresentiamo nel piano cartesiano la parabola di equazione

$$y = x^2 + 4x + 1.$$

L'equazione dell'asse di simmetria è $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$.
Inoltre -2 è anche l'ascissa del vertice, si ha cioè $x_V = -2$. Dall'equazione ricaviamo l'ordinata del vertice $y_V = (-2)^2 + 4(-2) + 1 = -3$.

Compiliamo una tabella per determinare le coordinate di altri punti della parabola (figura 5), in particolare quello di ascissa nulla e, se esistono, quelli di ordinata nulla.
L'ascissa del fuoco è uguale a quella del vertice, ossia $x_F = -2$; l'ordinata del fuoco è $y_F = \frac{1-\Delta}{4a} = \frac{1-12}{4} = -\frac{11}{4}$, quindi $F\left(-2; -\frac{11}{4}\right)$.
La direttrice ha equazione $y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{1+12}{4} = -\frac{13}{4}$.

x	y
−2	−3
0	1
$-2+\sqrt{3}$	0
$-2-\sqrt{3}$	0



a. Parabola di equazione $y = x^2 + 4x + 1$. La concavità è rivolta verso l'alto. **b.** Direttrice e fuoco della parabola di equazione $y = x^2 + 4x + 1$.

◀ **Figura 5**

▶ In alternativa è possibile calcolare l'ordinata del vertice utilizzando la formula

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}.$$

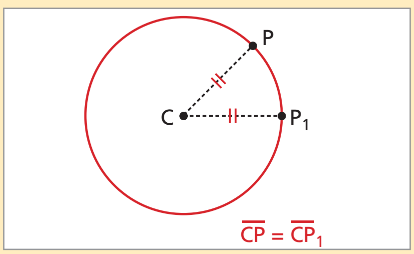
Poiché $\Delta = 16 - 4 = 12$, risulta $y_V = -\frac{12}{4 \cdot 1} = -3$.

La circonferenza

DEFINIZIONE

Circonferenza

Assegnato nel piano un punto C, detto centro, si chiama circonferenza la curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da C.

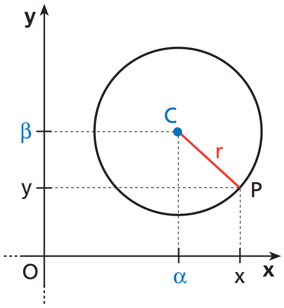


La distanza fra ogni punto della circonferenza e il centro è il **raggio** della circonferenza.
Determiniamo l'equazione di una generica circonferenza di centro $C(\alpha; \beta)$ e raggio r.
Un generico punto $P(x; y)$ del piano appartiene alla circonferenza se e solo se

$$\overline{PC} = r, \qquad \text{ossia} \qquad \overline{PC}^2 = r^2.$$

Poiché, per la formula della distanza tra due punti,

$$\overline{PC}^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2,$$



sostituendo nella relazione precedente, otteniamo

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,$$

che è l'equazione cercata.
Possiamo scrivere tale equazione anche in altro modo.
Svolgiamo i calcoli:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0.$$

Ponendo

$$a=-2\alpha,\quad b=-2\beta,\quad c=\alpha^2+\beta^2-r^2,$$

otteniamo l'equazione scritta in modo più semplice:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0.$$

L'equazione trovata è di secondo grado nelle incognite x e y. Osserviamo che manca il termine con il prodotto xy e i coefficienti di x^2 e di y^2 sono uguali fra loro.

▶ Se si vuole che r sia un valore reale e positivo, deve essere

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c>0,$$

condizione affinché l'equazione

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

rappresenti una circonferenza.

Dall'equazione al grafico

Per disegnare una circonferenza di equazione data è sufficiente determinare le coordinate del centro e la misura del raggio con le formule seguenti, ottenute dalle posizioni precedenti che legano a, b, c ad α, β e r:

$$C\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$$

$$r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}\,.$$

ESEMPIO

Disegniamo la circonferenza di equazione

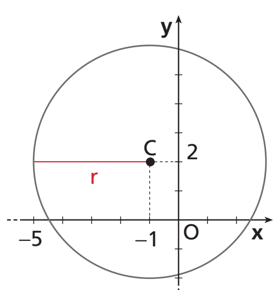
$$x^2+y^2+2x-4y-11=0.$$

Le coordinate del centro C sono

$$\alpha=-\frac{a}{2}=-\frac{2}{2}=-1,\quad \beta=-\frac{b}{2}=\frac{4}{2}=2,$$

quindi $C(-1;2)$.
Il raggio misura:

$$r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}=\sqrt{16}=4.$$



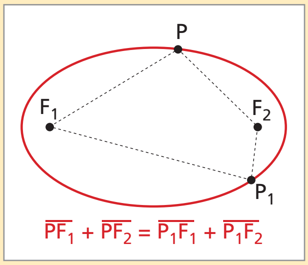
L'elisse

DEFINIZIONE

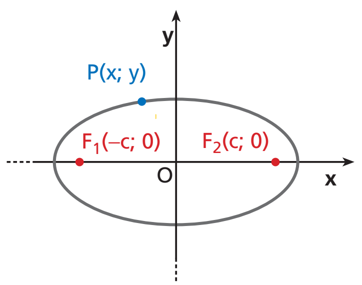
Ellisse

Assegnati nel piano due punti F_1 e F_2, detti **fuochi**, si chiama ellisse la curva piana luogo geometrico dei punti P tali che sia costante la somma delle distanze di P da F_1 e da F_2.

$$\boldsymbol{PF_1 + PF_2 = \text{costante}.}$$



L'ellisse con i fuochi appartenenti all'asse x



Scegliamo come asse x la retta F_1F_2 e come asse y la perpendicolare a tale retta condotta per il punto medio del segmento F_1F_2.
Indichiamo con $2c$ la distanza fra i due fuochi le cui coordinate sono allora: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

◀ **Figura 6**

▶ L'equazione dell'ellisse, così come quella della parabola o della circonferenza, è diversa a seconda della posizione della curva rispetto al sistema di riferimento.
Noi studiamo i tipi di ellisse con le equazioni più semplici, che sono quelle con centro nell'origine degli assi e fuochi sull'asse x o sull'asse y.
Esaminiamo per primo il caso in cui la retta passante per F_1 e F_2 è l'asse x.

Indicato con $P(x; y)$ un generico punto dell'ellisse e posto

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a,$$

si può dimostrare che l'equazione dell'ellisse è:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}, \quad \text{con } \boldsymbol{c^2 = a^2 - b^2} \text{ e } \boldsymbol{a \geq b}.$$

▶ Questa equazione è detta **equazione canonica** dell'ellisse.

Quindi le coordinate dei fuochi sono:

$$\boldsymbol{F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}; 0), \qquad F_2(\sqrt{a^2 - b^2}; 0).}$$

▶ Dalla relazione precedente:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

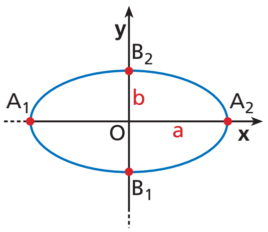
Per determinare le intersezioni di un'ellisse con l'asse x, mettiamo a sistema l'equazione dell'ellisse e l'equazione dell'asse x:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = a^2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pm a \\ y = 0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{A_1(-a; 0)}$ e $\boldsymbol{A_2(a; 0)}$ sono le **intersezioni dell'ellisse con l'asse x.**

Analogamente, per determinare le intersezioni con l'asse y, risolviamo:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 = b^2 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \pm b \\ x = 0 \end{cases}$$



$\boldsymbol{B_1(0; -b)}$ e $\boldsymbol{B_2(0; b)}$ sono le **intersezioni dell'ellisse con l'asse y.**

I punti A_1, A_2, B_1 e B_2 si chiamano **vertici** dell'ellisse.

I segmenti A_1A_2 e B_1B_2 sono detti **assi** dell'ellisse. La distanza $\overline{A_1A_2}$ misura $2a$, mentre $\overline{B_1B_2}$ misura $2b$, quindi a e b rappresentano le misure dei semiassi. Poiché $a > b$, risulta anche $\overline{A_1A_2} > \overline{B_1B_2}$. Per questo il segmento A_1A_2 è detto **asse maggiore** e B_1B_2 è detto **asse minore**.

La parola *asse* è usata per indicare sia i segmenti A_1A_2 e B_1B_2, sia le relative rette (che sono gli assi di simmetria).

La distanza fra uno dei vertici sull'asse y e un fuoco è sempre uguale ad a.

Per esempio, poiché $\overline{OB_2} = b$ e $\overline{OF_2} = c$, per il teorema di Pitagora, si ha

$$\overline{B_2F_2} = \sqrt{b^2 + c^2} = a.$$

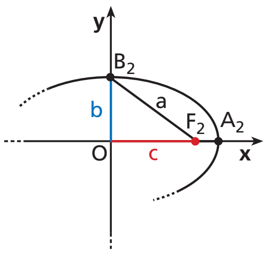


Figura 7

ESEMPIO Nell'ellisse di equazione

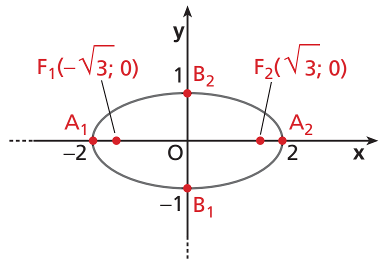
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, a = 2 \text{ e } b = 1.$$

I vertici sono $A_1(-2; 0)$, $A_2(2; 0)$, $B_1(0; -1)$, $B_2(0; 1)$.

Inoltre $c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Pertanto i fuochi sono:

$F_1(-\sqrt{3}; 0)$, $F_2(\sqrt{3}; 0)$.



L'**eccentricità** $\boldsymbol{e = \dfrac{c}{a}}$ indica la forma più o meno schiacciata dell'ellisse.

Poiché $c < a$, è sempre:

$$0 \leq e < 1.$$

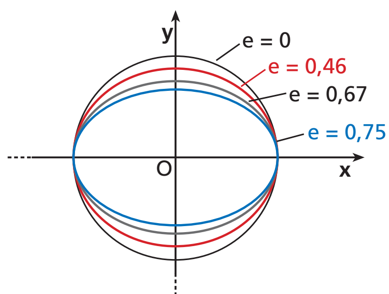


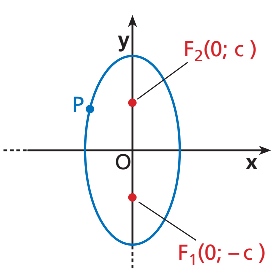
Figura 8 Sono rappresentate quattro ellissi con lo stesso asse maggiore ma diversa eccentricità. Quando $e = 0$, l'ellisse è una circonferenza.

L'ellisse con i fuochi appartenenti all'asse *y*

Consideriamo un'ellisse con i fuochi sull'asse y e centro coincidente con l'origine.

Le coordinate dei fuochi sono $F_1(0; -c)$ e $F_2(0; c)$.

Detta $2b$ la lunghezza dell'asse maggiore, i punti dell'ellisse verificano la relazione $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b$.



Si può dimostrare che l'equazione dell'ellisse è ancora

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,}$$

ma, in questo caso, si ha: $\boldsymbol{a \leq b}$, $\boldsymbol{c = \sqrt{b^2 - a^2}}$ ed $\boldsymbol{e = \dfrac{c}{b}}$.

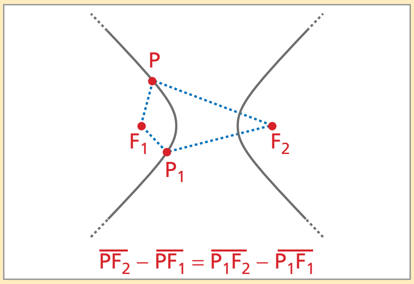
Per le altre proprietà valgono considerazioni analoghe a quelle già espresse per l'ellisse con i fuochi sull'asse x.

L'iperbole

DEFINIZIONE

Iperbole

Assegnati nel piano due punti F_1 e F_2, detti **fuochi**, si chiama iperbole la curva piana luogo geometrico dei punti P che hanno costante la differenza delle distanze da F_1 e da F_2.

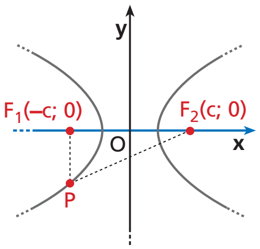


L'iperbole con i fuochi appartenenti all'asse *x*

Indicato con $P(x; y)$ un generico punto dell'iperbole e posto

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a,$$

si può dimostrare che l'**equazione canonica** dell'iperbole, quando l'asse x passa per i fuochi e l'asse y per il punto medio del segmento che li congiunge, è:



$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,} \qquad \text{con } \boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2} \text{ e } \boldsymbol{a < c}.$$

I fuochi hanno coordinate $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, ossia:

$$\boldsymbol{F_1(-\sqrt{a^2+b^2}; 0), \qquad F_2(\sqrt{a^2+b^2}; 0).}$$

Dalla relazione precedente:

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Per determinare le intersezioni dell'iperbole con l'asse x, mettiamo a sistema le rispettive equazioni, ossia risolviamo:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = a^2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pm a \\ y = 0 \end{cases}$$

Puoi verificare che l'iperbole **non** ha intersezioni con l'asse y.

I punti $\boldsymbol{A_1(-a; 0)}$ e $\boldsymbol{A_2(a; 0)}$ sono le **intersezioni con l'asse *x*** e si dicono **vertici reali** dell'iperbole. Il segmento A_1A_2 si chiama **asse trasverso**. Lo stesso nome ha la retta per A_1 e A_2, ossia l'asse x.

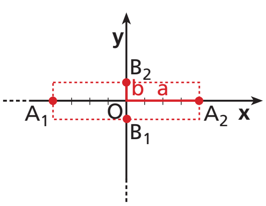
Per disegnare l'iperbole, è utile evidenziare sull'asse y i punti $B_1(0; -b)$ e $B_2(0; b)$, anche se non sono punti di intersezione tra l'iperbole e l'asse delle ordinate. Tali punti sono anche detti **vertici non reali**. La retta B_1B_2 è detta **asse non trasverso**.

Disegniamo il rettangolo con i lati paralleli agli assi cartesiani e passanti per i punti A_1, A_2, B_1 e B_2 (figura a).

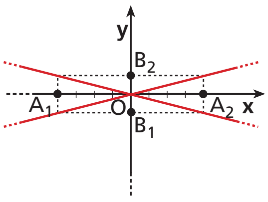
Disegniamo anche le due rette sulle quali giacciono le diagonali del rettangolo, dette **asintoti** dell'iperbole (figura b).

Poiché passano per l'origine e per $(a; b)$ e $(a; -b)$, esse hanno equazioni:

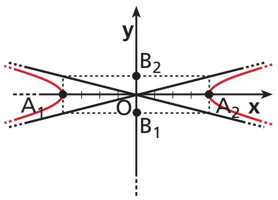
$$\boldsymbol{y = \frac{b}{a}x} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{y = -\frac{b}{a}x.}$$



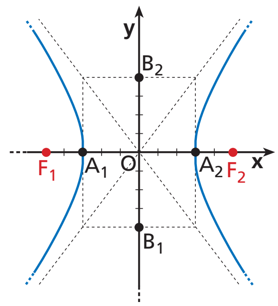
a



b



c



▶ Per le altre proprietà, valgono considerazioni analoghe a quelle per l'iperbole con i fuochi appartenenti all'asse x.

Il grafico che si ottiene per l'iperbole è disegnato nella figura *c*. L'iperbole non è una curva chiusa ed è costituita da due **rami** distinti.
Si dimostra che gli asintoti non intersecano mai la curva, ma le si avvicinano sempre più man mano che ci si allontana dall'origine.

ESEMPIO Nell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, $a = 3$, $b = 4$, le equazioni degli asintoti sono: $y = \frac{4}{3}x$ e $y = -\frac{4}{3}x$.

$$c = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \quad \rightarrow \quad F_1(-5; 0) \text{ e } F_2(5; 0).$$

Per l'iperbole ritroviamo il concetto di **eccentricità**:

$$e = \frac{c}{a}, \text{ con } e > 1.$$

A eccentricità maggiori corrisponde una maggior apertura dei rami dell'iperbole.

L'iperbole con i fuochi appartenenti all'asse *y*
Quando l'asse y passa per i fuochi e l'asse x per il punto medio del segmento che li congiunge, si può dimostrare che l'equazione dell'iperbole è:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1}.$$

L'iperbole equilatera

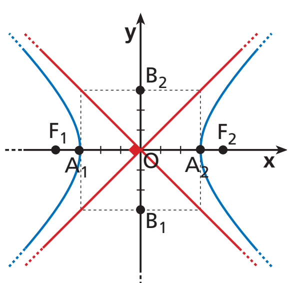
L'iperbole equilatera riferita agli assi di simmetria
Se nell'equazione canonica, si ha $a = b$, l'iperbole si dice **equilatera**.
Per esempio, consideriamo il caso in cui i fuochi siano sull'asse x.
L'equazione dell'iperbole equilatera è

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x^2 - y^2 = a^2}.$$

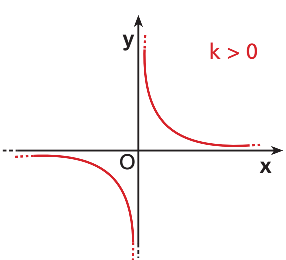
Essendo $2a = 2b$, il rettangolo che ha per lati l'asse trasverso e quello non trasverso diventa un quadrato. Le equazioni degli **asintoti** sono:

$$\boldsymbol{y = x} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{y = -x},$$

e gli asintoti coincidono quindi con le bisettrici dei quadranti.



ESEMPIO L'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = 9$ ha per vertici $A_1(-3; 0)$, $A_2(3; 0)$, $B_1(0; -3)$ e $B_2(0; 3)$. I fuochi sono $F_1(-3\sqrt{2}; 0)$ e $F_2(3\sqrt{2}; 0)$.



▶ Se $k > 0$, i rami dell'iperbole sono nel primo e terzo quadrante; se $k < 0$, sono nel secondo e nel quarto.

L'iperbole equilatera riferita agli asintoti
Abbiamo appena visto che, in un'iperbole equilatera, gli asintoti coincidono con le bisettrici dei quadranti, ovvero sono perpendicolari fra loro. Se consideriamo gli asintoti come assi di un sistema di riferimento per l'iperbole, possiamo dimostrare che l'equazione dell'iperbole equilatera in questo nuovo sistema è

$$\boldsymbol{xy = k}, \quad \text{con } k \text{ costante positiva o negativa.}$$

In viaggio

…l'esito di una sequenza di trasformazioni geometriche dipende dall'ordine in cui vengono eseguite?

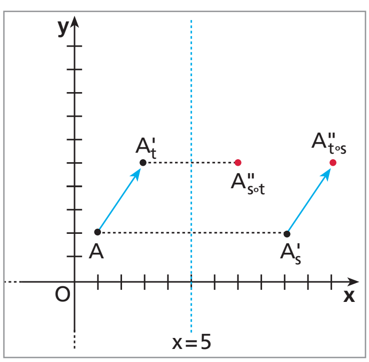
➜ Il quesito completo a pag. 1127

Ogni trasformazione geometrica è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del piano uno e un solo punto del piano stesso. Si tratta pertanto di una funzione. Se si compie un'operazione di composizione tra due funzioni f e g, è noto che tale operazione non gode in generale della proprietà commutativa, ovvero la funzione composta $f \circ g$ è diversa dalla funzione $g \circ f$.
Ciò vale anche per le trasformazioni geometriche: l'ordine con cui viene eseguita la composizione di una serie di trasformazioni è determinante sull'esito della trasformazione composta finale.
Esistono molti esempi che dimostrano il mancato rispetto della commutatività dell'operazione di composizione. Consideriamo per esempio la traslazione t di vettore $\vec{v}(2; 3)$ e la simmetria assiale s di asse $x = 5$. Le equazioni delle trasformazioni sono rispettivamente:

$$t: \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 3 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x' = 10 - x \\ y' = y \end{cases}$$

Prendiamo un punto qualsiasi, per esempio $A(1; 2)$, e operiamo le due trasformazioni nei due possibili ordini:

$$A(1; 2) \xmapsto{t} A'_t(3; 5) \xmapsto{s} A''_{s \circ t}(7; 5),$$
$$A(1; 2) \xmapsto{s} A'_s(9; 2) \xmapsto{t} A''_{t \circ s}(11; 5).$$



I punti finali $A''_{s \circ t}$ e $A''_{t \circ s}$ sono diversi.
In generale, si può ricavare la non commutatività di t e s calcolando le trasformazioni composte:

$$s \circ t: \begin{cases} x' = 10 - (x + 2) \\ y' = y + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = 8 - x \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

$$t \circ s: \begin{cases} x' = (10 - x) + 2 \\ y' = y + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = 12 - x \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

Le trasformazioni ottenute sono diverse.
L'ordine con cui si esegue una sequenza di trasformazioni risulta quindi *in generale* essenziale riguardo all'esito finale. Tuttavia esistono casi specifici in cui questo non si verifica. Per esempio, se ci limitassimo a operare la composizione nell'insieme delle sole traslazioni, potremmo facilmente constatare che in tal caso la commutatività è rispettata, cioè l'ordine di esecuzione di una serie di traslazioni non influenza l'esito finale.
Si considerino le seguenti traslazioni:

$$t_1: \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 3 \end{cases} \quad t_2: \begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y - 2 \end{cases} \quad t_3: \begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y \end{cases}$$

Ricaviamo le trasformazioni composte $t_3 \circ t_2 \circ t_1$ e $t_2 \circ t_1 \circ t_3$:

$$t_3 \circ t_2 \circ t_1: \begin{cases} x' = ((x + 2) + 4) + 4 \\ y' = (y + 3) - 2 \end{cases} \rightarrow$$

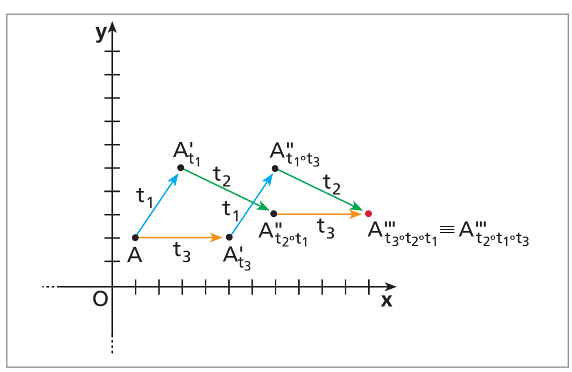
$$\rightarrow \begin{cases} x' = x + 10 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

$$t_2 \circ t_1 \circ t_3: \begin{cases} x' = ((x + 4) + 2) + 4 \\ y' = (y + 3) - 2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x' = x + 10 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

Le due trasformazioni sono uguali.

In figura è rappresentata l'applicazione sequenziale delle tre trasformazioni al punto $A(1; 2)$.



LA TEORIA IN SINTESI

Le trasformazioni e le coniche nel piano cartesiano

1. Le isometrie

Abbiamo trattato le seguenti isometrie: **traslazione**, **simmetria centrale**, **rotazione** e **simmetria assiale**. Le loro equazioni sono le seguenti

Traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$	Simmetria centrale di centro O(0; 0)	Rotazione di centro O(0; 0) di un angolo retto in senso orario
$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$	$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

Simmetria assiale di asse…

...una retta parallela all'asse y (x = a)	...una retta parallela all'asse x (y = b)	...la bisettrice del I e del III quadrante (y = x)	...la bisettrice del II e del IV quadrante (y = – x)
$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$	$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$	$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$	$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$

2. Le omotetie

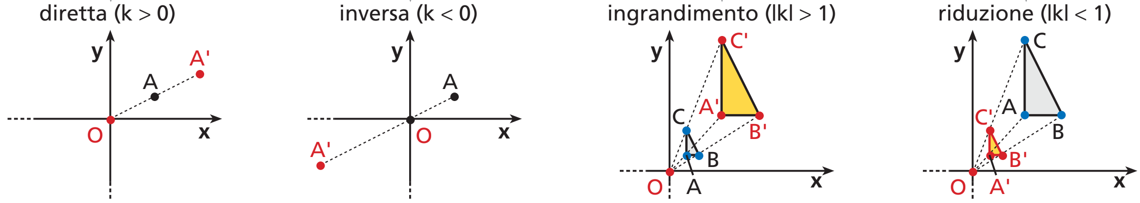
Fissato un numero reale k ($k \neq 0$), le **omotetie con centro l'origine O degli assi** sono quelle trasformazioni che associano a ogni punto P del piano un punto P' tale che $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$.

- Se $\boldsymbol{k > 0}$, l'omotetia si dice **diretta** e in tal caso due punti corrispondenti A e A' si trovano sulla medesima semiretta con origine il centro O.
- Se $\boldsymbol{k < 0}$, l'omotetia si dice **inversa** e due punti corrispondenti sono allineati con il centro O, ma si trovano su semirette opposte.
- Se $\boldsymbol{|k| > 1}$, si ha un ingrandimento.
- Se $\boldsymbol{|k| < 1}$, si ha una riduzione.

Omotetia di centro O(0; 0) e rapporto k

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

diretta (k > 0) inversa (k < 0) ingrandimento (|k| > 1) riduzione (|k| < 1)



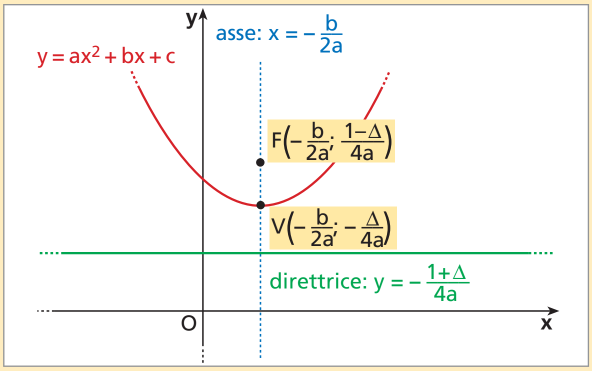
3. La composizione di due trasformazioni

Se a un punto P si applica una trasformazione t e al punto trasformato P' si applica un'altra trasformazione s, si ottiene un punto P'' che è il corrispondente di P mediante la trasformazione $s \circ t$, detta **composizione** delle due.

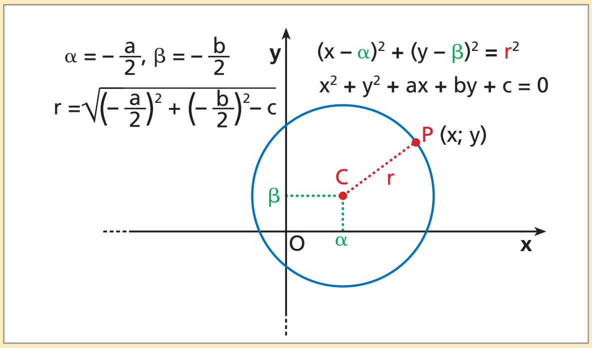
Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

4. Le coniche

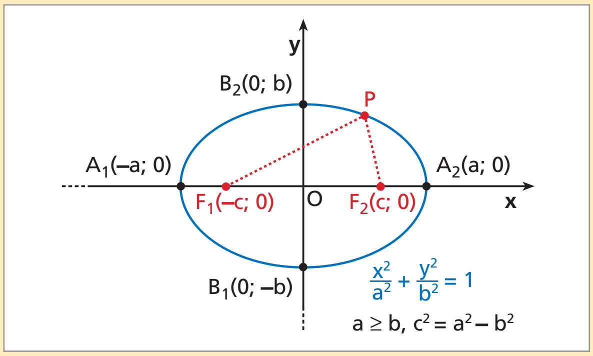
La **parabola** è il luogo geometrico dei punti equidistanti da una retta (**direttrice**) e da un punto (**fuoco**). La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si chiama **asse** della parabola.
L'asse della parabola è asse di simmetria e interseca la parabola nel **vertice**.



La **circonferenza** è la curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto C, detto **centro**.
La distanza fra ognuno dei suoi punti e il centro è detta **raggio** della circonferenza.



L'**ellisse** è una curva piana luogo geometrico dei punti P tali che sia costante la somma delle distanze di P da due punti fissati, F_1 e F_2, detti **fuochi**.

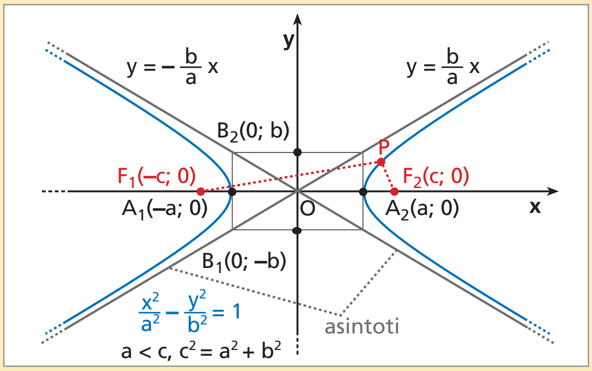


I punti $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$ e $B_2(0; b)$ sono le sue **intersezioni con gli assi** e si chiamano **vertici** dell'ellisse.
I segmenti A_1A_2 e B_1B_2 sono gli **assi** dell'ellisse. A_1A_2 è detto **asse maggiore**, B_1B_2 **asse minore**, a e b sono le misure dei semiassi, c è la metà della distanza focale.
Il rapporto $e = \frac{c}{a}$ è l'**eccentricità** dell'ellisse ed è tanto più grande quanto più l'ellisse è «schiacciata». Si ha $0 \leq e < 1$.

Se i **fuochi** sono **sull'asse *y***, l'equazione dell'ellisse è della stessa forma, ma si ha:

$$a \leq b, \quad c^2 = b^2 - a^2 \quad \text{ed} \quad e = \frac{c}{b}.$$

L'**iperbole** è una curva piana luogo geometrico dei punti P che hanno costante la differenza delle distanze da due punti fissati, F_1 e F_2, detti **fuochi**.



Il rapporto $e = \frac{c}{a}$ è l'**eccentricità** dell'iperbole, ed è tanto più grande quanto più l'iperbole ha maggiore apertura. Per l'iperbole è $e > 1$.
$A_1(-a; 0)$ e $A_2(a; 0)$ sono le intersezioni con l'asse x e si dicono **vertici reali**. A_1A_2 è l'**asse trasverso**.
$B_1(0; -b)$ e $B_2(0; b)$ *non* sono intersezioni con l'asse y e sono detti **vertici non reali**. B_1B_2 è l'**asse non trasverso**.

Se i **fuochi** sono **sull'asse *y***, l'equazione dell'iperbole è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

L'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = a^2$ è detta **equilatera**. Gli **asintoti** sono le **bisettrici dei quadranti**.

L'equazione dell'iperbole equilatera **riferita agli asintoti** è:

$$xy = k, \text{ con } k > 0 \text{ o } k < 0.$$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

1. Le isometrie

Teoria a pag. 1127

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 TEST L'isometria di equazioni

$$\begin{cases} x' = -x + 8 \\ y' = y \end{cases}$$

A è la simmetria assiale di asse $x = 8$.
B è la traslazione di vettore $\vec{v}(-8; 0)$.
C è la simmetria assiale di asse $x - 4 = 0$.
D è la traslazione di vettore $\vec{v}(1; -1)$.
E è la traslazione di vettore $\vec{v}(8; 0)$.

2 TEST L'isometria di equazioni

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 4 \end{cases}$$

A è la traslazione di vettore $\vec{v}(1; -4)$.
B è la simmetria assiale di asse $-x + 4 = 0$.
C è la simmetria assiale di asse $y + 4 = 0$.
D è la simmetria assiale di asse $y = x$.
E è la traslazione di vettore $\vec{v}(-1; 4)$.

ESERCIZI

La traslazione

Nel sito: ► 5 esercizi di recupero

La traslazione di punti e di poligoni

ESERCIZIO GUIDA

3 Trasliamo il triangolo di vertici $A(6; -5)$, $B(9; -3)$ e $C(8; -2)$ secondo il vettore $\vec{v}(-2; 5)$.

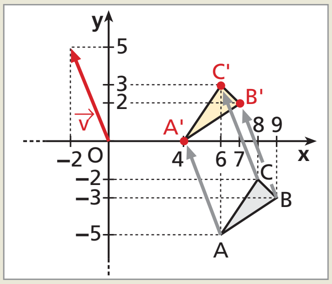
Scriviamo le equazioni della traslazione:

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 5 \end{cases}$$

Determiniamo le coordinate dei punti corrispondenti ai dati:

$A(6; -5) \mapsto A'(4; 0)$
$B(9; -3) \mapsto B'(7; 2)$
$C(8; -2) \mapsto C'(6; 3)$.

Disegniamo il vettore $\vec{v}$ applicato nell'origine e i due triangoli corrispondenti ABC e $A'B'C'$.



Trasla il poligono di vertici indicati secondo il vettore $\vec{v}$ dato.

4 $A(-8; -3)$, $B(-3; -2)$, $C(-7; 6)$; $\vec{v}(9; 1)$.

5 $A(2; 5)$, $B(4; 7)$, $C(2; 8)$; $\vec{v}(-6; -3)$.

6 $A(-3; 1)$, $B(-2; 5)$, $C(-3; 9)$, $D(-5; 5)$; $\vec{v}(9; 1)$.

7 $A(-2; 1)$, $B(4; 1)$, $C(2; 3)$, $D(-4; 3)$; $\vec{v}(9; 1)$.

8 $A(4; -12)$, $B(6; -12)$, $C(-16; -8)$, $D(4; -8)$; $\vec{v}(9; 1)$.

La traslazione di una retta

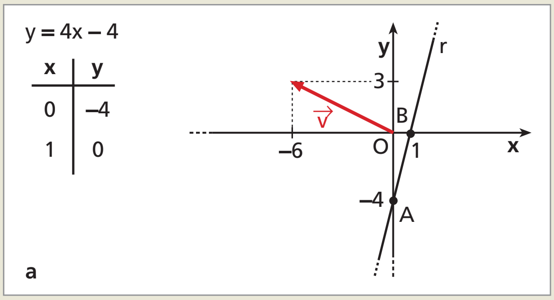
ESERCIZIO GUIDA

9 Sono assegnate la retta r di equazione $y = 4x - 4$ e la traslazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = x - 6 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione della retta r' corrispondente di r nella traslazione data.

Disegniamo la retta r calcolando le coordinate dei suoi punti di intersezione con gli assi cartesiani, cioè $A(0; -4)$ e $B(1; 0)$, come in figura *a*.



La traslazione è individuata dal vettore $\vec{v}(-6; 3)$.
Ricaviamo x e y dal sistema:

$$\begin{cases} x = x' + 6 \\ y = y' - 3 \end{cases}$$

Sostituiamo le espressioni di x e y così trovate nell'equazione della retta r, $y = 4x - 4$, ottenendo:

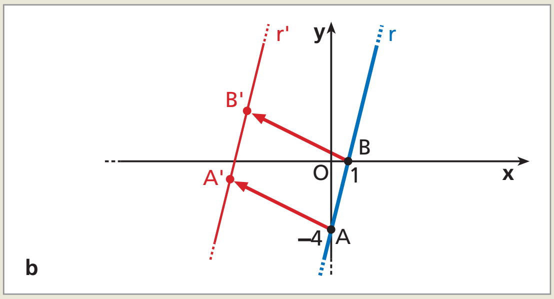
$$y' - 3 = 4(x' + 6) - 4.$$

Gli apici delle variabili x' e y' servono solo per distinguere r' da r. Determinata l'equazione di r', possiamo eliminarli:

$$y - 3 = 4(x + 6) - 4,$$
$$y - 3 = 4x + 20 \quad \rightarrow \quad y = 4x + 23.$$

L'equazione di r' è: $y = 4x + 23$.

Le rette r e r' hanno lo stesso coefficiente angolare, quindi sono parallele. Questo è vero in generale: **le rette che si corrispondono in una traslazione sono parallele**.
Disegniamo le due rette r e r' in uno stesso riferimento cartesiano (figura *b*).



Sono date l'equazione di una retta e le equazioni di una traslazione. Trova l'equazione della retta traslata e traccia il grafico completo.

10 $y = \dfrac{x}{4} - \dfrac{5}{4}$ $\qquad \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y \end{cases}$

11 $4x - 3y + 2 = 0$ $\qquad \begin{cases} x' = x + 5 \\ y' = y - 6 \end{cases}$

12 $x + y = 2$ $\qquad \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 4 \end{cases}$

13 $y = 2x - 3$ $\qquad \begin{cases} x' = x + \dfrac{1}{2} \\ y' = y + \dfrac{5}{2} \end{cases}$

14 $y = -\dfrac{1}{3}x$ $\qquad \begin{cases} x' = x + \dfrac{1}{3} \\ y' = y - \dfrac{1}{3} \end{cases}$

15 Determina l'equazione della retta corrispondente della retta che passa per $A(0; 3)$ e $B(1; -1)$ nella traslazione di equazioni $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 4 \end{cases}$ $[y = -4x - 1]$

16 Qual è l'immagine della retta r, di coefficiente angolare $m = -2$ e passante per $(-1; 3)$, nella traslazione di vettore $\vec{v}(2; 4)$? $[y = -2x + 9]$

La simmetria assiale

Nel sito: ► 5 esercizi di recupero

La simmetria di punti e di poligoni

ESERCIZIO GUIDA

17 Data la retta r di equazione $x = -2$, scriviamo le equazioni della simmetria rispetto a r e determiniamo le coordinate dei punti corrispondenti ai vertici del quadrilatero $ABCD$, dove $A(-12; -4)$, $B(-6; -4)$, $C(-8; 3)$, $D(-11; 1)$. Disegniamo la figura.

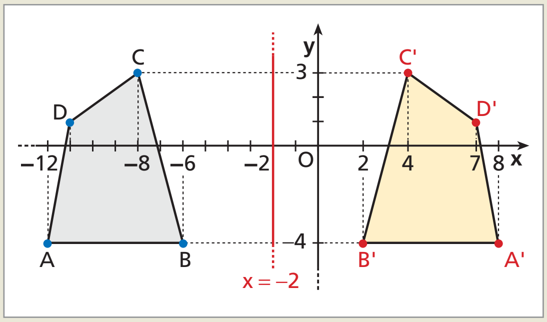
La retta r è parallela all'asse y. Le equazioni di una simmetria di asse parallelo all'asse y di equazione $x = a$ sono del tipo

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$$

e, poiché nel nostro caso $a = -2$, le equazioni della simmetria sono:

$$\begin{cases} x' = -4 - x \\ y' = y \end{cases}$$

Scriviamo le coordinate dei punti corrispondenti e disegniamo la figura:



$A(-12; -4) \mapsto A'(8; -4)$; $B(-6; -4) \mapsto B'(2; -4)$; $C(-8; 3) \mapsto C'(4; 3)$; $D(-11; 1) \mapsto D'(7; 1)$.

Dati i vertici di un poligono e l'equazione di un asse di simmetria, scrivi le equazioni della simmetria e determina i simmetrici dei poligoni assegnati. Disegna la figura.

18 Triangolo di vertici $A(2; 9)$, $B(-2; 3)$, $C(-4; 7)$; asse di equazione $x = 0$.

19 Quadrilatero di vertici $A(2; 2)$, $B(5; 6)$, $C(0; 10)$, $D(-4; 5)$; asse di equazione $x = -3$.

20 Trapezio di vertici $A(0; 0)$, $B\left(-\frac{3}{2}; 4\right)$, $C\left(-\frac{9}{2}; 4\right)$, $D(-6; 0)$; asse di equazione $x = -3$.

21 Triangolo di vertici $A(3; 1)$, $B(1; 5)$ e $C(-2; 1)$; asse di equazione $y = 0$.

22 Quadrilatero di vertici $A(-1; 2)$, $B(0; 6)$, $C(3; 6)$ e $D(5; 0)$; asse di equazione $y = -1$.

23 Parallelogramma di vertici $A(-2; -2)$, $B(-1; 1)$, $C(2; 2)$ e $D(-1; 1)$; asse di equazione $y = 3$.

24 Dato il triangolo di vertici $A(2; 1)$, $B(0; 4)$ e $C(-1; 1)$, trova il suo simmetrico $A'B'C'$ rispetto all'asse di equazione $x = 1$. Verifica che i due triangoli abbiano la stessa area.

25 Dato il parallelogramma di vertici $A(0; 2)$, $B(3; 1)$, $C(4; 4)$ e $D(1; 5)$, trova il suo simmetrico rispetto all'asse di equazione $x = -2$ e verifica che i due parallelogrammi abbiano lo stesso perimetro.

26 Dato il triangolo di vertici $A(2; 5{,}5)$, $B(5; 8)$ e $C(5; 3)$, trova il triangolo simmetrico rispetto all'asse di equazione $y = \frac{11}{2}$. Che cosa osservi?

27 Dato il rombo di vertici $A(-2; 1)$, $B(-3; 4)$, $C(-2; 7)$ e $D(-1; 4)$, trova la sua figura simmetrica rispetto all'asse di equazione $y = -2$ e verifica che è ancora un rombo.

28 Dato il parallelogramma di vertici $A(0; 2)$, $B(3; 1)$, $C(4; 4)$ e $D(1; 5)$, trova la sua figura simmetrica rispetto all'asse di equazione $y = -2$ e verifica che il perimetro è uguale a quello di $ABCD$.

29 Fra i seguenti punti, individua quelli che si corrispondono nella simmetria di asse $y = x$:

$\left(2; -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-2; \frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$, $\left(3; -\frac{1}{2}\right)$, $(1; 6)$, $(1; -6)$, $(6; 1)$, $(-6; 1)$.

30 Fra i seguenti punti individua quelli che si corrispondono nella simmetria di asse $y = -x$:

$(-1; 2)$, $(2; -1)$, $\left(\frac{1}{2}; 5\right)$, $(-2; +1)$, $(4; 3)$, $\left(3; \frac{1}{4}\right)$, $\left(-5; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{4}; -3\right)$.

31 Determina il segmento simmetrico del segmento di estremi $A(2; 5)$ e $B(-1; -3)$ rispetto alla bisettrice di equazione $y = x$; scrivi la corrispondenza fra i punti dati e i loro simmetrici e rappresenta i due segmenti sul piano cartesiano.

32 Determina il simmetrico del parallelogramma di vertici $A(-6; -5)$, $B(-3; -3)$, $C(-1; -4)$, $D(-4; -6)$ rispetto alla bisettrice di equazione $y = -x$; scrivi la corrispondenza fra i punti e disegna la figura.

33 Dato il triangolo di vertici $A(1; 2)$, $B(5; 2)$ e $C(3; 4)$, determina il suo simmetrico rispetto alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante e verifica che tali triangoli sono isosceli e fra loro congruenti.

34 Disegna il triangolo di vertici $A(4; -1)$, $B(6; -3)$ e $C(1; -4)$. Determina il suo simmetrico rispetto alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante e verifica che tali triangoli sono rettangoli e fra loro congruenti.

La simmetria di rette

35 In una trasformazione geometrica una **figura** è **unita** se coincide con la sua corrispondente. Dimostra che in una simmetria assiale, con asse di equazione $y = b$, l'asse è una retta unita.

36 Dimostra che in una simmetria di asse di equazione $x = a$ ogni retta perpendicolare all'asse è unita.

Per ognuna delle seguenti rette, determina la retta corrispondente nella simmetria di asse assegnato e disegna la figura.

37 Retta: $2x + 5y - 7 = 0$; asse: $x = 0$.

38 Retta: $y = 2x - 4$; asse: $x = -1$.

39 Retta: $4x - 2y + 1 = 0$; asse: $x = -3$.

40 Retta: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$; asse: $x = \frac{3}{2}$.

41 Retta: $3x - 5y = 0$; asse: $y = 0$.

42 Retta: $3x + 2y - 1 = 0$; asse: $y = 0$.

43 Retta: $y = -3x + 5$; asse: $y = -2$.

44 Retta: $2x - 6y + 3 = 0$; asse: $y = 4$.

45 Retta: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; asse: $y = \frac{1}{3}$.

46 Retta: $y = x - 3$; asse: $y = x$.

47 Retta: $2x + 5y - 6 = 0$; asse: $y = x$.

48 Retta: $y = -\frac{3}{2}x + 2$; asse: $y = x$.

49 Retta: $2x - \sqrt{3}y = 0$; asse: $y = -x$.

50 Retta: $2x + 2y - 5 = 0$; asse: $y = -x$.

51 Retta: $y = \frac{5}{7}x + \frac{2}{7}$; asse: $y = -x$.

52 Determina la retta r' corrispondente della retta r di equazione $y = 2$ nella simmetria di asse $x = -1$. Disegna entrambe le rette e l'asse di simmetria. Che cosa puoi affermare? [$y = 2$]

53 Determina la retta r' corrispondente della retta r di equazione $x = -3$ nella simmetria di asse $x = 1$. Disegna entrambe le rette e l'asse di simmetria. Che cosa osservi? [$x = 5$]

54 Data la simmetria di asse $x = -4$, determina la retta r' corrispondente della retta r di equazione
$y = -3x + 5$.
Trova il punto di intersezione delle due rette. Che cosa osservi? [$y = 3x + 29$; $(-4; 17)$]

55 La retta r, di coefficiente angolare 2, passa per $A(-1; 4)$. Trova l'equazione della sua simmetrica rispetto all'asse y. [$2x + y - 6 = 0$]

56 Determina la retta r' corrispondente della retta r di equazione $x = -3$ nella simmetria di asse $y = -1$. Che cosa osservi? Come si trasforma il punto $P(-3; -5)$ appartenente a r? [$x = -3$; $P'(-3; 3)$]

57 Determina la retta r' corrispondente della retta r di equazione $2x - 3y + 4 = 0$ nella simmetria di asse $y = 3$. Determina il punto di intersezione di r e r' senza risolvere il sistema delle loro equazioni.
$$\left[2x + 3y - 14 = 0; \left(\frac{5}{2}; 3\right)\right]$$

58 Data la retta r di equazione $2x + 4y - 1 = 0$, determina la sua simmetrica r' rispetto all'asse di equazione $y = x$. Dove si incontrano r e r'?
$$\left[4x + 2y - 1 = 0; \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right)\right]$$

59 Data la retta r di equazione $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + 1 = 0$, determina la sua simmetrica r' rispetto all'asse di equazione $y = -x$. Trova il punto di intersezione delle due rette.
$$\left[\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - 1 = 0; (1; -1)\right]$$

La simmetria centrale

Nel sito: ▶ 5 esercizi di recupero

La simmetria di punti e di poligoni

Di seguito, sono dati i vertici di alcune figure. Determina le figure simmetriche rispetto all'origine degli assi e disegnale.

60 Triangolo di vertici $A(3; 4)$, $B(2; 3)$ e $C(4; 1)$.

61 Quadrato di vertici $A(-5; 3)$, $B(-3; 1)$, $C(-1; 3)$ e $D(-3; 5)$.

62 Rombo di vertici $A(0; 3)$, $B(-2; 0)$, $C(0; -3)$ e $D(2; 0)$. Che cosa osservi in questo caso?

63 Determina i simmetrici, rispetto all'origine degli assi, dei punti $A(-1; 3)$ e $B(3; 3)$, e indicali con A' e B'. Verifica che il quadrilatero $ABA'B'$ è un parallelogramma.

64 Il segmento $A'B'$ è il simmetrico del segmento di estremi $A(2; 1)$ e $B(5; 4)$ nella simmetria di asse $y = 0$. Il segmento $A''B''$ è il simmetrico di $A'B'$ nella simmetria di asse $x = 0$. Qual è la trasformazione che fa corrispondere direttamente ad AB il segmento $A''B''$? Scrivi le equazioni di questa trasformazione.

65 Trasforma il triangolo di vertici $A(2; 3)$, $B(5; 3)$ e $C(2; 7)$ in un triangolo $A'B'C'$ mediante la simmetria di asse $y = x$. Trasforma $A'B'C'$ nel triangolo $A''B''C''$ mediante la simmetria di asse $y = -x$. Qual è la trasformazione che associa direttamente ad ABC il triangolo $A''B''C''$? Scrivi le equazioni della trasformazione.

La simmetria di rette

ESERCIZIO GUIDA

66 Determiniamo la retta corrispondente alla retta r di equazione $y = 3x - 2$ nella simmetria con centro l'origine degli assi cartesiani.

Le equazioni della simmetria di centro l'origine degli assi sono:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

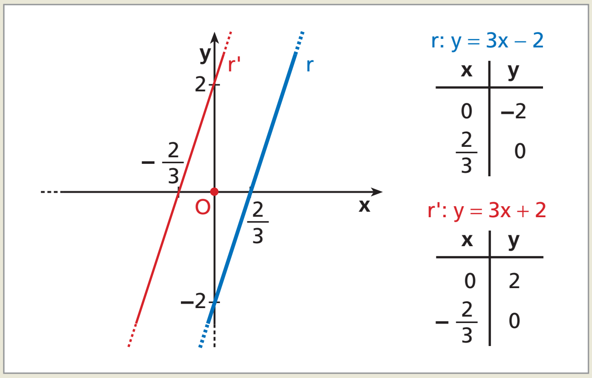
Ricaviamo x e y dalle equazioni precedenti:

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$$

Nell'equazione della retta r sostituiamo a x e y le espressioni trovate:

$y = 3x - 2$ (retta r),

$-y' = 3(-x') - 2$ (retta r').



Togliamo gli apici e otteniamo, cambiando i segni, l'equazione della retta r': $y = 3x + 2$.
Disegniamo il grafico: r e r' sono parallele. Infatti hanno lo stesso coefficiente angolare 3.

Determina le rette corrispondenti alle rette date nella simmetria di centro $O(0; 0)$ e verifica che due rette corrispondenti sono parallele.

67 $y = -2x + 5$ $[y = -2x - 5]$

68 $y = \frac{1}{2}x + 4$ $\left[y = \frac{1}{2}x - 4\right]$

69 $2x - 3y + 2 = 0$ $[2x - 3y - 2 = 0]$

70 $-2x + 6y - 3 = 0$ $[6y - 2x + 3 = 0]$

La rotazione

Nel sito: ▶ 7 esercizi di recupero

Nei seguenti esercizi, per «rotazione» (oraria e antioraria) intenderemo sempre «rotazione di un angolo retto con centro nell'origine».

La rotazione di punti e di poligoni

71 Determina il corrispondente del segmento di estremi $A(-2; 5)$ e $B(3; 4)$ in una rotazione oraria e traccia il grafico.

72 È dato il triangolo di vertici $A(-2; 3)$, $B(1{,}5; 1)$ e $C(1; 5)$. Scrivi la corrispondenza fra i punti nella rotazione antioraria e disegna i due triangoli.

73 Determina il corrispondente del pentagono di vertici $A(-4; 3)$, $B(-3; -1)$, $C(2; -1)$, $D(3; 3)$ ed $E(-3; 5)$ nella rotazione antioraria.

74 Dato il rettangolo di vertici $A(2; 3)$, $B(4; -1)$, $C(6; 0)$ e $D(4; 4)$, determina il rettangolo corrispondente nella rotazione oraria. Verifica che i due rettangoli hanno lo stesso perimetro.

75 Dato il rombo di vertici $A(-10; -1)$, $B(-6; -4)$, $C(-2; -1)$ e $D(-6; 2)$, determina il quadrilatero corrispondente nella rotazione oraria e verifica che $A'B'C'D'$ è ancora un rombo.

76 Determina la figura corrispondente del quadrato di vertici $A(0; 5)$, $B(-5; 0)$, $C(0; -5)$ e $D(5; 0)$ nella rotazione oraria. Che cosa osservi? Le tue osservazioni sono valide anche se la rotazione è antioraria?

77 Disegna il segmento $P'Q'$ corrispondente del segmento di estremi $P(-3; 5)$ e $Q(2; 3)$ nella rotazione in senso orario; disegna poi il segmento $P''Q''$ corrispondente di $P'Q'$ nella rotazione in senso antiorario. Che cosa osservi?

78 Ruota in senso orario il segmento di estremi $A(2; 3)$ e $B(5; 6)$ ottenendo il segmento $A'B'$. Ruota nuovamente in senso orario il segmento $A'B'$ ottenendo $A''B''$. Individua la trasformazione che associa direttamente AB ad $A''B''$ e scrivi le sue equazioni. Di quale isometria si tratta?

Determina la retta corrispondente alla retta data nella rotazione indicata in parentesi. Verifica che ciascuna retta e la sua corrispondente sono perpendicolari.

79 $y = -4$ (oraria); $x = 5$ (antioraria). $[x = -4; y = 5]$

80 $y = -x + 3$ (antioraria); $y = x - 4$ (oraria). $[y = x + 3; y = -x - 4]$

81 $y = 2x$ (oraria); $y = 2x + 5$ (oraria). $[2y + x = 0; 2y + x - 5 = 0]$

82 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ (antioraria); $2x - 3y + 7 = 0$ (oraria). $[y = 2x + 6; 3x + 2y - 7 = 0]$

2. Le omotetie

Teoria a pag. 1131

RIFLETTI SULLA TEORIA

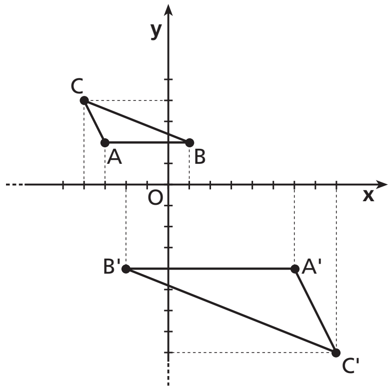
83 TEST La trasformazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x \\ y' = -\dfrac{3}{5}y \end{cases}$$

A è la simmetria centrale di centro $O(0; 0)$.
B è la simmetria assiale di asse $-3x + 5 = 0$.
C è l'omotetia di centro $O(0; 0)$ e rapporto $-\frac{3}{5}$.
D è la simmetria assiale di asse $y = x$.
E è la traslazione di vettore $\vec{u}(-3; 5)$.

84 TEST Qual è il rapporto di omotetia fra i triangoli?

A 2
B -1
C 1
D -2
E $-\frac{1}{2}$



ESERCIZI

Nel sito: ▶ 7 esercizi di recupero

Disegna le omotetiche delle figure assegnate nell'omotetia di centro $O(0; 0)$ e rapporto k.

85 Segmento di estremi $A(-2; -1)$ e $B(3; 5)$, con $k = +3$.

86 Triangolo di vertici $A(4; 6)$, $B(7; 10)$ e $C(10; 4)$, con $k = -2$.

87 Quadrilatero di vertici $A(0;5)$, $B(10; 1)$, $C(0; -7)$ e $D(-10; -3)$, con $k = -1$. I quadrilateri corrispondenti sono quadrilateri particolari?

88 Il triangolo $A'B'C'$ è il corrispondente del triangolo di vertici $A(2; 4)$, $B(5; 0)$ e $C(6; 7)$ nell'omotetia di centro O e rapporto $k = 2$. Verifica che entrambi i triangoli sono rettangoli e che il rapporto tra il perimetro di $A'B'C'$ e quello di ABC è uguale a 2.

89 Sia $A'B'C'D'$ il corrispondente del parallelogramma di vertici $A(-8; -6)$, $B(-4; -5)$, $C(-1; -1)$ e $D(-5; -2)$ nell'omotetia di centro O e rapporto $k = -\dfrac{1}{3}$. Verifica che i lati omologhi sono paralleli.

90 Il segmento di estremi $A(-3; -5)$ e $B(-1; 4)$ e il segmento di estremi $A'\left(2; \dfrac{10}{3}\right)$ e $B'(-4; 5)$ si possono corrispondere in un'omotetia di centro O? Se la risposta è negativa, modifica le coordinate di un solo punto affinché i segmenti si corrispondano; determina poi il valore di k.

3. La composizione di due trasformazioni

Teoria a pag. 1133

RIFLETTI SULLA TEORIA

91 **TEST** Sono date le trasformazioni di equazioni:

$$t: \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad o: \begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases}$$

L'immagine del punto $P(2; -3)$ nella trasformazione composta $t \circ o$ è:

- A $P'(-6; +2)$.
- B $P'(-3; +8)$.
- C $P'(+2; -6)$.
- D $P'(+2; +7)$.
- E $P'(+8; -3)$.

92 **TEST** Quali sono le equazioni della trasformazione ottenuta dalla composizione della traslazione di vettore $\vec{v}(1; 2)$ con la simmetria rispetto all'asse x?

- A $\begin{cases} x'' = x + 1 \\ y'' = -y - 2 \end{cases}$
- B $\begin{cases} x'' = -x - 1 \\ y'' = y + 2 \end{cases}$
- C $\begin{cases} x'' = x - 1 \\ y'' = -y + 2 \end{cases}$
- D $\begin{cases} x'' = x + 1 \\ y'' = y + 2 \end{cases}$
- E $\begin{cases} x'' = -x - 1 \\ y'' = -y - 2 \end{cases}$

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

93 Sono dati il triangolo di vertici $A(-5; 2)$, $B(-2; 4)$ e $C(-4; 6)$ e il vettore $\vec{v}(7; 2)$. Trasliamo il triangolo ABC secondo il vettore $\vec{v}$ e otteniamo il triangolo $A'B'C'$; trasliamo ora $A'B'C'$ secondo il vettore $\vec{w}(2; -7)$ e chiamiamo $A''B''C''$ il triangolo trasformato. Quali sono le equazioni della trasformazione che associa ad ABC il triangolo $A''B''C''$?

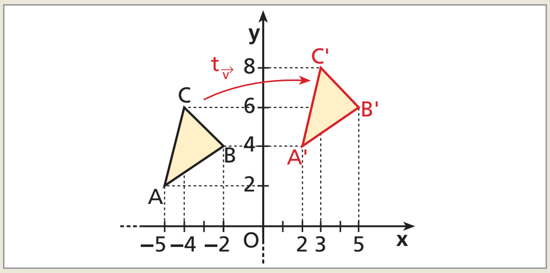
Le equazioni della prima traslazione sono:

$$\begin{cases} x' = x + 7 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

Sostituiamo a x e a y le coordinate del punto A per ottenere le coordinate del punto A':

$$\begin{cases} x' = -5 + 7 = 2 \\ y' = 2 + 2 = 4 \end{cases} \rightarrow \quad A'(2; 4).$$

In modo analogo si trovano le coordinate di B' e C': $B'(5; 6)$, $C'(3; 8)$.



Scriviamo le equazioni della seconda traslazione, indicando con x'' e y'' le coordinate del generico punto trasformato:

$$\begin{cases} x'' = x' + 2 \\ y'' = y' - 7 \end{cases}$$

Queste equazioni ci permettono di trovare le coordinate di A'', B'' e C'' a partire da quelle di A', B' e C'. Sostituendo otteniamo:

$A''(4; -3)$, $B''(7; -1)$, $C''(5; 1)$.

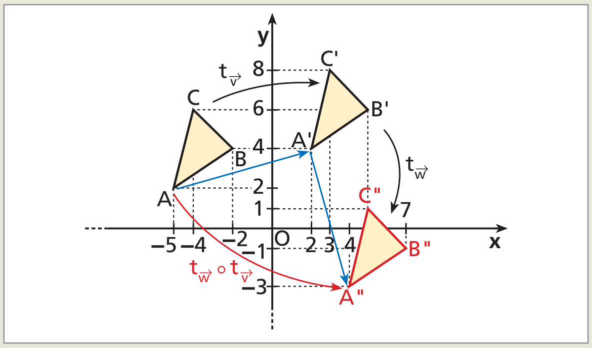
Determiniamo, ora, le equazioni della trasformazione composta. Riconsideriamo le equazioni della seconda trasformazione e a x' e y' sostituiamo le loro espressioni date dalle equazioni della prima traslazione ($x' = x + 7$; $y' = y + 2$):

$$\begin{cases} x'' = x' + 2 = (x + 7) + 2 \\ y'' = y' - 7 = (y + 2) - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = x + 9 \\ y'' = y - 5 \end{cases}$$

Queste sono le equazioni della trasformazione composta, quella che ad ABC fa corrispondere $A''B''C''$. Si tratta ancora di una traslazione, di vettore $\vec{u}(9; -5)$.

Osserviamo che le componenti del vettore $\vec{u}$ sono la somma delle componenti dei vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$.



94 Determina la traslazione che si ottiene componendo quella di vettore $\vec{v}(2; -5)$ con quella di vettore $\vec{w}(-3; 4)$ e scrivine le equazioni. Trova, poi, l'equazione della retta r'' corrispondente della retta r di equazione $x - y + 7 = 0$ nella traslazione composta. Che cosa osservi?

95 Considera la traslazione che associa al punto $A(3; 2)$ il punto $A'(9; 2)$. Trova due simmetrie assiali, con assi paralleli, tali che, eseguite in successione, facciano corrispondere al punto A il punto A'.

96 Determina il corrispondente $A'B'$ del segmento di vertici $A(1; -4)$ e $B(3; 2)$ nella simmetria di asse $x = 0$. Applica poi ad $A'B'$ la simmetria di asse $y = x$ e ottieni il segmento $A''B''$. Scrivi le equazioni della trasformazione che associa ad AB direttamente $A''B''$.

97 Disegna il quadrato di vertici $A(-3; 3)$, $B(3; 3)$, $C(3; -3)$ e $D(-3; -3)$. Applica al quadrato la rotazione in senso antiorario che ha per centro l'origine O e per ampiezza un angolo retto. Che cosa osservi? Possiamo affermare che $ABCD$ è unito anche nella rotazione in senso orario?

98 Determina le equazioni della trasformazione $s \circ t$, ottenuta componendo la traslazione t di vettore $\vec{v}(4; 6)$ con la simmetria s rispetto alla retta di equazione $y = -2$. Applica la trasformazione composta al segmento AB, con $A(-8; 2)$ e $B(1; 2)$, ottenendo il segmento $A''B''$. Verifica che $A''B''$ si ottiene anche applicando ad AB la traslazione e successivamente ad $A'B'$ la simmetria.

4. Le coniche

Teoria a pag. 1135

RIFLETTI SULLA TEORIA

99 **TEST** Che cosa hanno in comune le due parabole di equazioni $y = x^2 + 3$ e $y = -2x^2 + 3$?

A Il vertice.
B Il fuoco.
C La direttrice.
D L'apertura.
E La concavità verso l'alto.

100 **TEST** Date le equazioni

$$3x^2 + 5y^2 + 1 = 0, \quad \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 0,$$
$$x^2 = -4y^2 + 2,$$

quali rappresentano un'ellisse?

A Solo la terza.
B La prima e la terza.
C Solo la seconda.
D Tutte e tre.
E Nessuna delle tre.

101 **TEST** Considera le equazioni

$$x^2 = \frac{y^2}{4} + 1, \quad x^2 = \frac{y^2}{4} - 1,$$
$$3x^2 = -5y^2 + 1, \quad x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

Quale delle seguenti proposizioni è *falsa*?

A La prima rappresenta un'iperbole, la terza un'ellisse.
B La prima e la seconda rappresentano due iperboli.
C La seconda rappresenta un'iperbole, la terza un'ellisse.
D La prima rappresenta un'iperbole, la quarta una circonferenza.
E La terza è un'ellisse, la quarta non è una conica.

ESERCIZI

La parabola

Nel sito: ► 14 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

102 Rappresentiamo nel piano cartesiano la parabola di equazione $y = -x^2 - 5x + 6$.

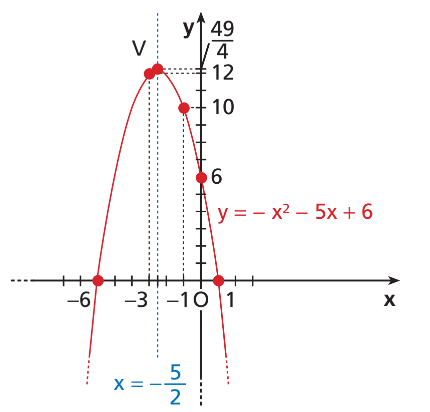
Calcoliamo le coordinate del vertice V:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2(-1)} = -\frac{5}{2},$$
$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{49}{4(-1)} = \frac{49}{4},$$
$$V\left(-\frac{5}{2}; \frac{49}{4}\right).$$

Conoscendo x_V, possiamo anche scrivere l'equazione dell'asse: $x = -\frac{5}{2}$.

Cerchiamo le coordinate di altri punti della parabola, scrivendo una tabella in cui assegniamo a x alcuni valori minori di x_V e altri maggiori. Disegniamo infine il grafico della parabola per punti.

x	y
−3	12
−6	0
−1	10
0	6
1	0



Osserviamo in particolare che, poiché $a < 0$, la parabola volge la concavità verso il basso.

Disegna le parabole che hanno le seguenti equazioni.

103 $y = 2x^2 - 8$; $y = -x^2 + 1$.

104 $y = 4x^2 - 5x$; $y = x^2 - x$.

105 $y = 2x^2 + x - 3$; $y = -x^2 - 3x + 10$.

106 $y = x^2 - 4$; $y = -x^2 + 5x - 6$.

107 $y = 4x^2 - 8x$; $y = -3x^2 + x$.

108 $y = -2x^2 + 5$; $y = -x^2 + 4$.

109 $y = -\frac{2}{3}x^2 + 2x$; $y = \frac{3}{2}x^2 - x$.

110 $y = -\frac{1}{3}x^2 - 9$; $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x$.

111 $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 7$; $y = -\frac{1}{2}x^2 - 6x - 22$.

La circonferenza

Nel sito: ▶ 8 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

112 Rappresentiamo graficamente la circonferenza di equazione $4x^2 + 4y^2 - 16x - 8y + 11 = 0$.

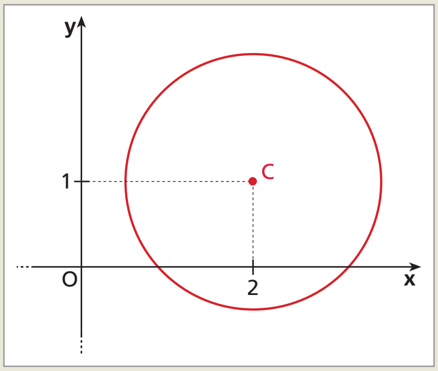
Dividiamo entrambi i membri per il coefficiente comune 4 dei termini di secondo grado:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + \frac{11}{4} = 0.$$

Determiniamo le coordinate del centro e la misura del raggio e rappresentiamo la circonferenza nel piano cartesiano:

$$x_C = -\frac{a}{2} = -\frac{-4}{2} = 2, \quad y_C = -\frac{b}{2} = -\frac{-2}{2} = 1,$$

$$r = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 - \frac{11}{4}} = \sqrt{4 + 1 - \frac{11}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}.$$



Rappresenta graficamente le circonferenze aventi le seguenti equazioni, dopo aver determinato le coordinate del centro e la misura del raggio.

113 a) $x^2 + y^2 = 5$; b) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$; c) $x^2 + y^2 - 16 = 0$.

114 a) $x^2 + y^2 - x + 4y = 0$; b) $x^2 + y^2 - 14x + 8y + 16 = 0$; c) $x^2 + y^2 + y = 0$.

115 a) $4x^2 + 4y^2 + 12x + 20y + 18 = 0$; b) $16x^2 + 16y^2 + 24x - 16y - 23 = 0$; c) $x^2 + y^2 - x = 0$.

116 a) $x^2 + y^2 - 4y + 1 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$; c) $x^2 + y^2 + x - y = 0$.

L'ellisse

Nel sito: ► 7 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

117 Data l'ellisse di equazione $4x^2 + 9y^2 = 36$, determiniamo la misura dei semiassi, le coordinate dei vertici, quelle dei fuochi e l'eccentricità, e rappresentiamo la curva graficamente.

Dividiamo entrambi i membri dell'equazione data per il termine noto, per ridurla nella forma canonica:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36} \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

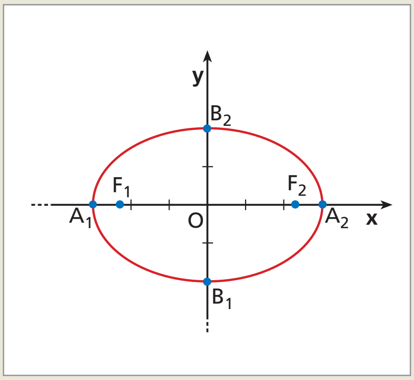
da cui deduciamo $a = 3$, $b = 2$ e le coordinate dei vertici:

$A_1(-3; 0)$, $A_2(3; 0)$, $B_1(0; -2)$, $B_2(0; 2)$;

Determiniamo il valore di c^2: $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$;

le coordinate dei fuochi: $F_1 = (-\sqrt{5}; 0)$, $F_2 = (\sqrt{5}; 0)$;

il valore dell'eccentricità: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.



Rappresentiamo graficamente l'ellisse dopo aver disegnato i quattro vertici.

Data l'equazione dell'ellisse, in ciascuno dei seguenti casi, determina la misura dei semiassi, le coordinate dei vertici, quelle dei fuochi e l'eccentricità, e rappresenta la curva graficamente.

118 a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; b) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; d) $\frac{4}{25}x^2 + \frac{4}{9}y^2 = 1$.

119 a) $x^2 + 9y^2 = 36$; b) $8x^2 + 9y^2 = 8$; c) $5x^2 + 16y^2 = 20$; d) $4x^2 + y^2 = 16$.

120 a) $x^2 = 9 - 9y^2$; b) $4 - x^2 - 16y^2 = 0$; c) $y^2 = 1 - 16x^2$; d) $25x^2 + y^2 - 100 = 0$.

L'iperbole

Nel sito: ► 8 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

121 Data l'iperbole di equazione $9x^2 - 16y^2 = 144$, determiniamo le sue caratteristiche e rappresentiamola.

Dividiamo entrambi i membri dell'equazione data per il termine noto, per ridurla in forma canonica:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1, \text{ da cui } a = 4, b = 3.$$

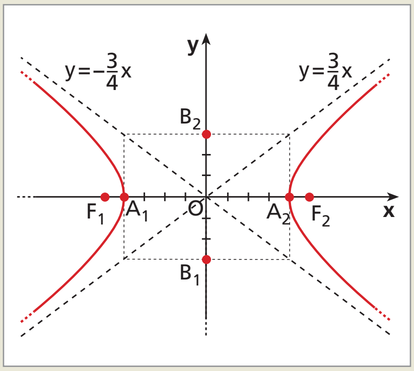
Vertici reali: $A_1(-4; 0)$, $A_2(4; 0)$.

Vertici non reali: $B_1(0; -3)$, $B_2(0; 3)$.

Determiniamo il valore di c^2: $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$;

pertanto le coordinate dei fuochi sono: $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$,

e il valore dell'eccentricità è: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.



Infine le equazioni degli asintoti sono:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad \rightarrow \quad y = \pm \frac{3}{4} x.$$

Rappresentiamo l'iperbole graficamente, dopo aver disegnato i quattro vertici e gli asintoti, che sono le diagonali del rettangolo individuato dai vertici.

Data l'equazione dell'iperbole, determina le sue caratteristiche e rappresenta graficamente la curva.

122 a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; b) $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$; c) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$; d) $9x^2 - 16y^2 = 576$.

123 a) $4x^2 - 9y^2 = 9$; b) $x^2 - 4y^2 = 25$; c) $9x^2 - 100y^2 = 25$; d) $x^2 - y^2 = 8$.

124 a) $x^2 = 9 + 9y^2$; b) $4 - x^2 + 16y^2 = 0$; c) $y^2 = 1 + 4x^2$; d) $16x^2 - y^2 - 25 = 0$.

L'iperbole equilatera

125 Disegna le seguenti iperboli equilatere, scrivendo le equazioni degli asintoti, le coordinate dei vertici e dei fuochi. Calcola poi l'eccentricità.

a) $y^2 - x^2 = 1$; b) $y^2 - x^2 = 9$; c) $x^2 - y^2 = 16$; d) $x^2 - y^2 = 25$; e) $y^2 - x^2 = 36$.

ESERCIZIO GUIDA

126 Data l'iperbole equilatera di equazione $xy = 16$, determiniamo le coordinate dei vertici e rappresentiamo la curva graficamente.

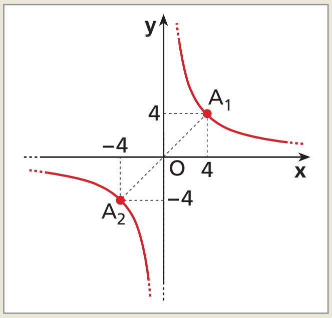
Poiché $k = 16 > 0$, il grafico della curva si trova nel primo e nel terzo quadrante e l'asse trasverso della curva è la bisettrice dei precedenti quadranti, ossia $y = x$.
Per determinare le coordinate dei vertici si risolve il sistema costituito dalle equazioni dell'iperbole e della bisettrice. Si ottiene:

$$A_1(\sqrt{k}; \sqrt{k}), \quad A_2(-\sqrt{k}; -\sqrt{k}) \quad \rightarrow \quad A_1(4; 4), \quad A_2(-4; -4).$$

Per disegnare l'iperbole troviamo qualche punto della curva assegnando un valore qualunque, purché diverso da 0, a x e calcoliamo il corrispondente valore di y; per esempio, per $x = 2$ si ha $y = 8$.

Analogamente possiamo ottenere altri punti della curva.

Infine, congiungendo i punti ottenuti, rappresentiamo la curva richiesta, ricordando che gli assi cartesiani sono gli asintoti.



Data l'equazione dell'iperbole, determina le coordinate dei vertici e rappresenta graficamente la curva.

127 a) $xy = 36$; b) $xy = -12$; c) $xy = 8$; d) $xy = -18$.

128 a) $xy = 4$; b) $xy = -9$; c) $xy = -16$; d) $xy = 20$.

129 a) $y = \frac{2}{x}$; b) $y = -\frac{1}{x}$; c) $y = -\frac{2}{3x}$; d) $y = \frac{1}{2x}$.

L'equazione di una conica, note alcune condizioni

ESERCIZIO GUIDA

130 Determiniamo:

a) l'equazione della parabola avente per vertice il punto $V(1; 0)$ e per fuoco il punto $F\left(1; \frac{1}{4}\right)$;

b) l'equazione dell'ellisse che interseca l'asse y nei punti $(0; -4)$ e $(0; 4)$ e ha un fuoco in $(3; 0)$.

---

a) La parabola ha equazione generale $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. Per trovare a, b, c utilizziamo la formula del vertice $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ e quella del fuoco $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$. Si ha il sistema:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 0 \\ \dfrac{1-\Delta}{4a} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 - 4ac = 0 \\ 1 - (b^2 - 4ac) = a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ \cancel{4}a^2 - \cancel{4}ac = 0 \\ 1 - 4a^2 + 4ac = a \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = a \vee a = 0 \text{ (non accett.)} \\ 1 - \cancel{4a^2} + \cancel{4a^2} = a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = a \\ a = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

L'equazione della parabola è $y = x^2 - 2x + 1$.

b) Le intersezioni dell'ellisse con gli assi cartesiani, sono vertici della curva, quindi: $b = 4$.

L'ascissa del fuoco permette di ricavare $c = 3$.

Determiniamo a^2:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad a^2 = 4^2 + 3^2 \quad \rightarrow \quad a^2 = 16 + 9 \quad \rightarrow \quad a^2 = 25,$$

e sostituiamo nell'equazione canonica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Note le seguenti informazioni, relative a una parabola di asse parallelo all'asse y (A, B, C sono punti per cui passa la parabola, V è il vertice, F il fuoco, d la direttrice), determina la sua equazione e rappresentala.

131 $V(2; -1)$, $F\left(2; -\frac{5}{4}\right)$. $[y = -x^2 + 4x - 5]$

132 $V(2; 1)$, $F(2; 0)$. $\left[y = -\frac{1}{4}x^2 + x\right]$

133 $V\left(1; -\frac{9}{2}\right)$; d: $y = -4$. $\left[y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 5\right]$

134 $V(-1; 0)$; d: $y = -2$. $\left[y = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\right]$

135 $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(-1; -9)$. $[y = -x^2 + 5x - 3]$

136 $A(-1; 0)$, $B(2; -6)$, $C(4; 0)$. $[y = x^2 - 3x - 4]$

137 $A(-1; 16)$, $V(4; -9)$. $[y = x^2 - 8x + 7]$

138 $A(4; 10)$, $V(1; -8)$. $[y = 2x^2 - 4x - 6]$

139 Scrivi l'equazione della circonferenza passante per l'origine e avente il centro nel punto di ordinata 2 della retta di equazione $y = 3x - 4$. $[x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0]$

140 Scrivi l'equazione della circonferenza concentrica a quella di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ e avente raggio uguale a 6. $[x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0]$

141 Trova l'equazione della circonferenza passante per $(3; 4)$, $(0; -5)$ e $(-2; -1)$. $[x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0]$

142 Scrivi l'equazione della circonferenza passante per $(9; -1)$, $(1; 5)$ e $(10; 2)$. $[x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0]$

143 Determina l'equazione dell'ellisse avente un fuoco in $(-3; 0)$ e un vertice in $(0; -4)$. $\left[\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1\right]$

144 Trova l'equazione dell'ellisse di eccentricità $\frac{1}{2}$, sapendo che ha un vertice in $(0; -\sqrt{3})$. $[3x^2 + 4y^2 = 12]$

145 Determina l'equazione dell'ellisse passante per i punti $\left(\sqrt{3}; \frac{1}{2}\right)$ e $\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $[x^2 + 4y^2 = 4]$

146 Qual è l'equazione dell'ellisse passante per i punti $(-2\sqrt{2}; 2)$ e $(\sqrt{5}; 4)$? $\left[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1\right]$

147 Determina l'equazione dell'iperbole avente un fuoco in $(-\sqrt{29}; 0)$ e un asintoto di equazione $y = \frac{5}{2}x$.
$[25x^2 - 4y^2 = 100]$

148 Scrivi l'equazione dell'iperbole di eccentricità 2, passante per $(-\sqrt{7}; 3)$. $[3x^2 - y^2 = 12]$

149 Scrivi l'equazione dell'iperbole avente un vertice in $(\sqrt{5}; 0)$ e passante per $\left(-\frac{5}{2}; -1\right)$. $\left[\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1\right]$

150 Determina l'equazione dell'iperbole avente un asintoto di equazione $3x + 4y = 0$ e passante per $(-4\sqrt{5}; 3)$.
$\left[\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1\right]$

Le rette secanti, tangenti ed esterne a una conica

Nel sito: ► 13 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

151 Stabiliamo se la retta di equazione $y = 6x - 7$ è secante, tangente o esterna alla parabola di equazione $y = x^2 + 2x - 3$.

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = 6x - 7 \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases}$$

Per confronto, otteniamo

$$x^2 + 2x - 3 = 6x - 7$$

$$x^2 + 2x - 3 - 6x + 7 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 - 4 = 0$$

e quindi l'unica soluzione è:

$$x = 2.$$

Poiché $\Delta = 0$, la retta è tangente alla parabola. Il punto di tangenza ha ascissa $x = 2$ e la rispettiva ordinata è $y = 6 \cdot 2 - 7 = 5$.

Il punto di tangenza è $T(2; 5)$.

Date le seguenti equazioni di una retta r e di una parabola p, stabilisci se r è tangente, secante o esterna a p. Verifica il risultato disegnando il grafico.

152 $r:\ y = -2x - 1, \qquad p:\ y = \frac{1}{2}x^2 + 1.$

153 $r:\ y = -x, \qquad p:\ y = -x^2 + x.$

154 $r:\ y = 4x + 5, \qquad p:\ y = 2x^2 - 3x - 9.$

155 $r:\ y = 3x - 5, \qquad p:\ y = \frac{1}{3}x^2 - x + \frac{1}{9}.$

Date le seguenti coppie di equazioni, stabilisci la posizione della retta rispetto alla conica e, nei casi in cui la retta non sia esterna, determina le coordinate dei punti di intersezione.

156 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0, \qquad x - 4 = 0.$ [secante: $(4; 0)$, $(4; 2)$]

157 $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 25 = 0, \qquad y + 9 = 0.$ [tangente: $(4; -9)$]

158 $x^2 + y^2 - 50 = 0, \qquad 3x + 4y + 40 = 0.$ [esterna]

159 $4x^2 + 9y^2 = 36; \qquad x - y - 7 = 0.$ [esterna]

160 $x^2 + 4y^2 = 40; \qquad x + 6y - 20 = 0.$ [tangente: $(2; 3)$]

161 $3x^2 - y^2 = 2; \qquad x - y = 0.$ [secante: $(1; 1)$, $(-1; -1)$]

162 $2x^2 - 5y^2 = 30; \qquad x - y - 3 = 0.$ [tangente: $(5; 2)$]

RIEPILOGO LE CONICHE

Nel sito: ▶ 20 esercizi in più

163 Determina le equazioni della parabola passante per i punti $P(1; -6)$, $Q(-2; 6)$ e $R(3; -4)$ e della parabola passante per i punti $M(-1; -5)$, $N(2; 4)$ e per l'origine degli assi cartesiani. Determina le intersezioni fra le due parabole.
$\left[y = x^2 - 3x - 4;\ y = -x^2 + 4x;\ A(4; 0)\ \text{e}\ B\left(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)\right]$

164 Determina l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(1; 1)$, $B(3; 3)$ e $C(1; -1)$. Trova le equazioni degli assi del triangolo ABC. Verifica che, mettendo a sistema le equazioni di due assi, ottieni come soluzione le coordinate del centro Ω della circonferenza.
$\left[x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0;\ y = -\frac{1}{2}x + 2;\ y = 0;\ y = -x + 4;\ \Omega(4; 0)\right]$

165 Disegna l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, con i relativi asintoti. Calcola le coordinate dei punti di intersezione A e B dell'asintoto del primo e del terzo quadrante con la circonferenza di centro O e raggio $\sqrt{13}$. Fissato il punto $C(4; -1)$, determina l'area S del triangolo ABC. [$A(2; 3)$; $B(-2; -3)$; $S = 11$]

166 Scrivi l'equazione dell'iperbole passante per i punti $A(2; 1)$ e $B(-1; 0)$ e poi quella della circonferenza di centro O e passante per i fuochi dell'iperbole. Individua le intersezioni delle due curve e calcola l'area del rettangolo che esse formano.
$\left[x^2 - 3y^2 = 1;\ 3x^2 + 3y^2 = 4;\ C\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{6}\right);\ \text{area} = \frac{\sqrt{15}}{3}\right]$

167 Scrivi l'equazione della circonferenza passante per il punto $C(3; -2)$ e per le intersezioni A e B fra l'iperbole di equazione $xy = 4$ e la retta di equazione $y = -x + 5$. Determina le eventuali ulteriori intersezioni fra la circonferenza e l'iperbole. [$A(1; 4)$; $B(4; 1)$; $x^2 + y^2 - x - y - 12 = 0$; $T(-2; -2)$]

Le coniche e le trasformazioni geometriche

Le coniche e la traslazione

Applica a ogni conica la traslazione di vettore $\vec{v}$ scritto di fianco all'equazione e disegna le due curve.

168 $y = -2x^2 - x$; $\quad \vec{v}(-5; 0)$.

169 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$; $\quad \vec{v}(-4; 2)$.

170 $x^2 + y^2 - 4x = 0$; $\quad \vec{v}(0; 2)$.

171 $xy = 1$; $\quad \vec{v}(3; -1)$.

172 $y = \frac{1}{2}x^2$; $\quad \vec{v}(3; 2)$.

173 $y = 3x^2 + x - 2$; $\quad \vec{v}\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

174 $3x^2 + 3y^2 - 8x - 12y + 9 = 0$; $\quad \vec{v}\left(-\frac{4}{3}; -2\right)$.

175 $xy = \frac{1}{2}$; $\quad \vec{v}(2; 0)$.

Determina il vertice V di ogni parabola e trasla la parabola mediante $\vec{VO}$. Infine disegna le due parabole.

176 $y = 2x^2 - 3$ $\quad [V(0; -3); y = 2x^2]$

177 $y = -x^2 + 1$ $\quad [V(0; 1); y = -x^2]$

178 Dimostra che, traslando la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ e di vertice V, secondo il vettore $\vec{VO}$ si ottiene la parabola di equazione $y = ax^2$.

179 Alla parabola di equazione $y = x^2 - 1$ applica la traslazione prima di vettore $\vec{v}(1; -1)$ e poi di vettore $\vec{w}(-3; -2)$. Quale parabola ottieni se inverti l'applicazione delle due traslazioni? $\quad [y = x^2 + 4x$; la stessa$]$

180 Data la parabola di equazione $y = x^2$, determina la sua corrispondente nella simmetria rispetto all'asse x. Che cosa osservi? $\quad [y = -x^2]$

181 Determina la simmetrica rispetto all'asse x della parabola di equazione $y = -2x^2 + 5x$. $\quad [y = 2x^2 - 5x]$

182 Determina la simmetrica rispetto all'asse y della parabola di equazione $y = \frac{1}{3}x^2 + x$. $\quad \left[y = \frac{1}{3}x^2 - x\right]$

183 Determina la simmetrica rispetto all'asse y della parabola di equazione $y = -x^2 + 1$. Che cosa osservi? $\quad [y = -x^2 + 1]$

184 Verifica che la circonferenza di centro $(2; 0)$ e raggio 1 è figura unita nella simmetria rispetto all'asse x.

185 Verifica che la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 è simmetrica rispetto all'asse x e all'asse y.

186 Verifica che la circonferenza di centro l'origine e raggio 3 è simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante e anche rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

187 Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, verifica che è simmetrica rispetto a entrambi gli assi cartesiani.

188 Disegna le seguenti iperboli equilatere di equazioni: $xy = 2$; $y = \frac{3}{x}$; $xy = -2$; $y = -\frac{1}{x}$. Quali fra esse sono simmetriche rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

Le coniche e la simmetria centrale

189 Verifica che la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 è simmetrica rispetto all'origine degli assi.

190 Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, verifica che è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani.

191 Verifica che l'iperbole equilatera di equazione $xy = -2$ è simmetrica rispetto all'origine degli assi.

192 Disegna le circonferenze di equazioni: $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$; $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$; $x^2 + y^2 = 2$; $x^2 + y^2 = 16$; $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 11 = 0$. Quali fra esse sono simmetriche rispetto all'origine?

193 Data l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, stabilisci se è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani.

Le coniche e l'omotetia

194 Applica le omotetie di centro $O(0; 0)$ e rapporto $k = \frac{1}{2}$ e $k = 2$ alla parabola di equazione $y = x^2 - 2x$.
Trova le intersezioni con gli assi cartesiani e i vertici della parabola iniziale e delle parabole trasformate.

$\left[y = 2x^2 - 2x; y = \frac{1}{2}x^2 - 2x; V_1(1; -1); V_2\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right); V_3(2; -2)\right]$

195 Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita agli assi, passante per $P(2; 1)$. Applica a essa l'omotetia di centro $O(0; 0)$ e rapporto $k = 2$. Trova le intersezioni della retta $y = \frac{x}{2}$ con le due iperboli.

$\left[\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1; \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{12} = 1; (2; 1); (-2; -1); (4; 2); (-4; -2)\right]$

La composizione di isometrie e la parabola

A ogni parabola applica l'isometria g e poi alla parabola così ottenuta applica l'isometria h. Rappresenta le tre parabole su uno stesso grafico.

196 $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + 6$,
g: simmetria rispetto all'asse x,
h: simmetria rispetto all'asse x.

$\left[y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x - 6; y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + 6\right]$

197 $y = -x^2 + x + 6$,
$g: \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 2 \end{cases}$
h: simmetria centrale di centro l'origine degli assi. $[y = -x^2 - 5x + 2; y = x^2 - 5x - 2]$

198 $y = 2x^2 - x + 3$,
g: simmetria rispetto alla retta $y = 2$,
h: simmetria rispetto alla retta $y = -4$.
$[y = -2x^2 + x + 1; y = 2x^2 - x - 9]$

199 $y = \frac{1}{9}x^2 - x$,
g: simmetria rispetto all'origine,
h: simmetria rispetto all'asse y.

$\left[y = -\frac{1}{9}x^2 - x; y = -\frac{1}{9}x^2 + x\right]$

200 $y = -3x^2 + 2x - 5$,
g: simmetria rispetto alla retta $x = 3$,
h: simmetria rispetto alla retta $x = -1$.
$[y = -3x^2 + 34x - 101; y = -3x^2 - 46x - 181]$

201 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$,
g: simmetria rispetto all'asse x,
$h: \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 3. \end{cases}$

$\left[y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4; y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}\right]$

LABORATORIO DI MATEMATICA

Le trasformazioni geometriche con Derive

ESERCITAZIONE GUIDATA

Troviamo l'equazione della retta r passante per i punti $A(-2; 1)$ e $B\left(1; \frac{5}{2}\right)$. Determiniamo l'equazione della retta s simmetrica di r rispetto all'asse y.

Determiniamo le coordinate dei punti A' e B' simmetrici rispetto all'asse y dei punti A e B. Troviamo l'equazione della retta passante per A' e per B' e verifichiamo che coincide con l'equazione di s.

- Costruiamo una funzione che applichi la formula della retta passante per due punti.
- Impostiamo la funzione per trovare l'equazione della retta AB e la facciamo operare.
- Per determinare l'equazione della retta s applichiamo le equazioni della simmetria rispetto all'asse y, che sono $x' = -x$ e $y' = y$, alla retta r. Diamo *Semplifica_Sostituisci variabili* sulla #3, sostituiamo $-x$ alla x, lasciamo inalterata la y, chiudiamo con un clic su *Semplifica* e otteniamo l'equazione della retta s in #4.
- Immettiamo le coordinate di A e di B, digitando con *Crea_Espressione* `[-2, 1; 1, 5/2]`, seguita da INVIO. Otteniamo #5.
- Diamo *Crea_Espressione*, battiamo F3, importando le coordinate di A e di B nella riga di editazione delle espressioni `[-2, 1; 1, 5/2]`. Cambiamo il segno alle ascisse dei due punti `[2, 1; -1, 5/2]` ottenendo le coordinate di A' e di B'. Con INVIO le immettiamo nella zona algebrica.
- Con #7 e #8 otteniamo la verifica.

#1: $\mathrm{RETTA2(x1, y1, x2, y2)} :=$

$$\mathrm{y} = \frac{\mathrm{y2} - \mathrm{y1}}{\mathrm{x2} - \mathrm{x1}} \cdot (\mathrm{x} - \mathrm{x1}) + \mathrm{y1}$$

#2: $\mathrm{RETTA2}\left(-2, 1, 1, \frac{5}{2}\right)$

#3: $\mathrm{y} = \frac{\mathrm{x}}{2} + 2$

#4: $\mathrm{y} = 2 - \frac{\mathrm{x}}{2}$

#5: $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

#6: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

#7: $\mathrm{RETTA2}\left(2, 1, -1, \frac{5}{2}\right)$

#8: $\mathrm{y} = 2 - \frac{\mathrm{x}}{2}$

Nel sito: ▶ **1 esercitazione guidata con Derive** ▶ **5 esercitazioni in più**

Esercitazioni

1 Trasla di un vettore $\vec{v}(4; 2)$ la parabola passante per i punti $P(-4; 0)$, $Q(-1; -6)$ e $R(2; 6)$. $[y = x^2 - 5x + 2]$

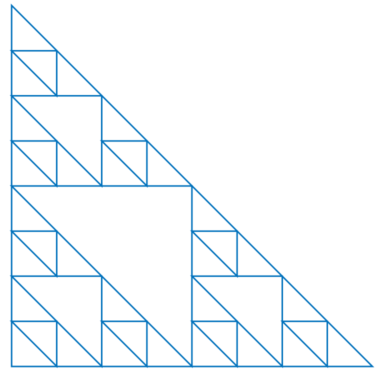
2 Trova i vertici del rettangolo ottenuto come rotazione in senso antiorario di 90° attorno all'origine del rettangolo di vertici $A(-1; -1)$, $B(4; -1)$, $C(4; 1)$ e $D(-1; 1)$. $[(1; -1), (1; 4), (-1; 4), (-1; -1)]$

3 Determina l'equazione della parabola simmetrica rispetto all'origine della parabola di vertice $V\left(1; -\frac{25}{4}\right)$ e passante per $P\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$. $\left[y = -x^2 - 2x + \frac{21}{4}\right]$

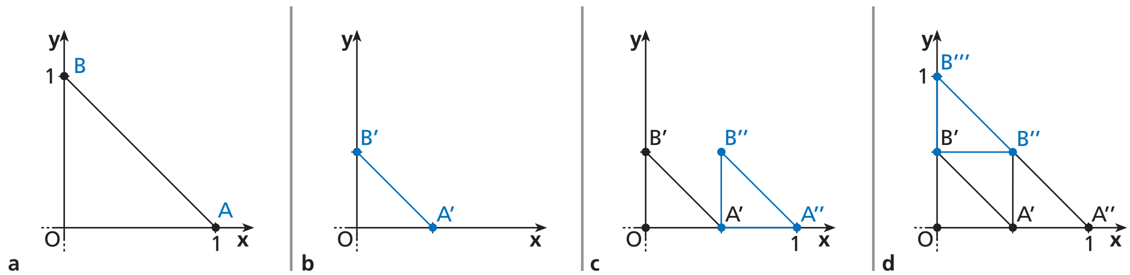
Matematica per il cittadino

I FRATTALI

I frattali sono figure geometriche caratterizzate dal ripetersi all'infinito di uno stesso motivo su scala sempre più ridotta. Ingrandendo un particolare di un frattale si ottiene un'immagine che ha la stessa forma della figura di origine.



La geometria frattale, attualmente diffusa anche grazie alla potenza di calcolo dei computer, sembra essere la più adatta per descrivere la complessità di molte forme della natura, come, per esempio, contorni di coste, profili di montagne, vortici atmosferici, la distribuzione di crateri lunari, ammassi di stelle e galassie, contorni di foglie, lo sviluppo di coralli, fibre nervose, vasi sanguigni ecc.
Un esempio famoso di frattale è *il triangolo di Sierpiński* che prende il nome dal matematico polacco Wacław Sierpiński (1882-1969), che lo introdusse e ne studiò le proprietà.
Questo frattale è ottenuto attraverso diversi metodi, partendo da una figura base «piena» (superficie) e operando con ripetizione una serie di «buchi» o rimozioni. In figura puoi osservarne una versione stilizzata in segmenti, che si basa sulla manipolazione iterata di un triangolo.
Questa figura, come in generale ogni frattale, si può ottenere attraverso l'applicazione di un insieme di n trasformazioni geometriche allo stesso sottoinsieme del piano cartesiano. Ottenuti n sottoinsiemi, a ognuno di essi viene nuovamente applicata la stessa serie di trasformazioni geometriche di partenza e così via. Vediamo quali sono le trasformazioni per questo frattale. Consideriamo la seguente figura e comprendiamo meglio quanto detto.



1. Considera il triangolo ABO (figura a). Supponi di trasformarlo nel triangolo $A'B'O$ (figura b) secondo l'omotetia di rapporto $\frac{1}{2}$ e centro O. Determina le equazioni dell'omotetia e le coordinate dei punti A' e B'.

2. Osserva ora la figura c. Quale trasformazione bisogna applicare al triangolo ABO per ottenere $A''B''A'$?

A $\begin{cases} x' = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \\ y' = y \end{cases}$ **B** $\begin{cases} x' = x + \frac{1}{2} \\ y' = y + \frac{1}{2} \end{cases}$ **C** $\begin{cases} x' = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{y}{2} \end{cases}$ **D** $\begin{cases} x' = 1 - \frac{x}{2} \\ y' = \frac{y}{2} \end{cases}$

3. Specifica il tipo di trasformazione che porta il triangolo ABO nel triangolo $B''B'''B'$ (figura d) e scrivi le sue equazioni.

4. Con le tre precedenti trasformazioni applicate allo stesso triangolo di partenza ABO si ottengono i tre triangoli $A'B'O$, $A''B''A'$, $B''B'''B'$ (figura d). Applica le stesse trasformazioni a ognuno di questi triangoli e disegna la figura risultante.

5. Compi una nuova iterazione sui triangoli ottenuti alla domanda precedente e rappresenta l'immagine ottenuta.

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 20 test interattivi in più

1 Sono dati il vettore $\vec{u}(3; -5)$ e i punti $O(0; 0)$, $A(-5; 1)$, $B(-2; -4)$, $C(3; -5)$, $D(3; 0)$, $E(0; 5)$, $F(-3; 5)$. I seguenti vettori hanno tutti le stesse componenti di $\vec{u}$ *tranne* uno. Quale?

A $\overrightarrow{AB}$
B $\overrightarrow{ED}$
C $\overrightarrow{OC}$
D $\overrightarrow{FO}$
E $\overrightarrow{CO}$

2 Nella trasformazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

al punto $P(-1; 2)$ corrisponde il punto:

A $P'(-1; -2)$.
B $P'(-2; 0)$.
C $P'(-2; -1)$.
D $P'(2; -2)$.
E $P'(1; -3)$.

3 Quali sono le equazioni della simmetria rispetto alla retta di equazione $y = -2$?

A $\begin{cases} x' = -4 - x \\ y' = y \end{cases}$

B $\begin{cases} x' = -2 - x \\ y' = y \end{cases}$

C $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$

D $\begin{cases} x' = x \\ y' = 4 - y \end{cases}$

E $\begin{cases} x' = x \\ y' = -4 - y \end{cases}$

4 Sono date le trasformazioni

$$s: \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \quad \text{e} \quad t: \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

L'immagine della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ nella trasformazione composta $s \circ t$ è:

A $x^2 + y^2 = 1$.
B $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$.
C $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$.
D $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.
E $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$.

5 Per la parabola γ: $y = 2x^2 - 4x - 4$, le seguenti proposizioni sono tutte vere *tranne* una. Quale?
Nell'omotetia di equazioni:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$$

A l'immagine di γ è la parabola $y = x^2 - 2x - 2$.
B l'immagine di γ ha asse di simmetria $x = 2$.
C l'immagine di γ è la parabola $y = x^2 - 4x - 8$.
D la parabola non ha punti uniti.
E l'immagine di γ è una parabola con vertice $(2; -12)$.

SPIEGA PERCHÉ

6 Dimostra che le due parabole di equazioni $y = ax^2 + c$ e $y = -ax^2 - c$ sono simmetriche rispetto all'origine degli assi. Commenta la tua dimostrazione.

7 Dimostra che il centro O di rotazione è punto unito sia nella rotazione oraria sia in quella antioraria. Commenta la tua dimostrazione.

8 Spiega perché in una simmetria di asse $x = a$ due rette corrispondenti, se non sono parallele, si intersecano in un punto dell'asse.

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 12 esercizi in più

9 Data la trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$, determina la figura corrispondente al quadrato di vertici $A(2; 3)$, $B(7; 3)$, $C(7; -2)$ e $D(2; -2)$ e verifica che si tratta di un altro quadrato.

10 Trasla il triangolo di vertici $A(-2; 3)$, $B(0; 5)$ e $C(3; -2)$ secondo il vettore $\vec{v}(2; -1)$.

11 Sono assegnate la retta r di equazione $4x + y - 3 = 0$ e la traslazione di equazioni: $\begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y + 1 \end{cases}$

Calcola l'equazione della retta r' corrispondente di r nella traslazione e rappresenta r e r' in un grafico. $[4x + y + 12 = 0]$

12 Sono date le rette r e r' di equazioni, rispettivamente, $y = 2x + 3$ e $y = 2x - 2$, che si corrispondono in una traslazione. Determina un vettore di traslazione.

13 I punti $P(5; 8)$ e $P'(5; -3)$ si corrispondono in una simmetria assiale. Individua l'asse di simmetria e le equazioni della trasformazione. $\left[y = \frac{5}{2}; \begin{cases} x' = x \\ y' = 5 - y \end{cases}\right]$

14 Date le rette di equazioni $y = x + 5$ e $y = -x - 3$ determina le equazioni delle simmetrie in cui si corrispondono. [simmetrie di assi; $x = -4$, $y = 1$]

15 Determina la retta simmetrica di r rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante e la retta simmetrica di r rispetto alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante. L'equazione della retta r è $2x + 3y - 1 = 0$. $[3x + 2y - 1 = 0; 3x + 2y + 1 = 0]$

16 Determina la parabola corrispondente alla parabola di equazione $y = x^2 + 2x - 3$ nella simmetria di centro l'origine degli assi cartesiani e disegna le due parabole. $[y = -x^2 + 2x + 3]$

17 Dato il triangolo di vertici $A(1; 1)$, $B(2; 6)$ e $C(5; 2)$, disegna il triangolo a esso corrispondente in un'omotetia di centro $O(0; 0)$ e rapporto $k = -3$.

18 Trova l'equazione della parabola p passante per i punti $A(1; 0)$, $B(2; -1)$ e $C(0; 3)$. Scrivi l'equazione della parabola simmetrica della parabola p rispetto all'origine. Determina i punti simmetrici di quelli precedenti. $[y = x^2 - 4x + 3; y = -x^2 - 4x - 3; A'(-1; 0), B'(-2; 1), C'(0; -3)]$

19 Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $C\left(-2; \frac{3}{2}\right)$ e raggio $\frac{5}{2}$. Determina l'equazione della circonferenza simmetrica rispetto all'asse y. Trova le equazioni delle tangenti alle due circonferenze nel punto, diverso dall'origine, dove incontrano l'asse y. $\left[x^2 + y^2 + 4x - 3y = 0; x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0; y = -\frac{4}{3}x + 3; y = \frac{4}{3}x + 3\right]$

20 Trasla la circonferenza con centro nell'origine e raggio 1 prima secondo il vettore $\vec{v}\left(\frac{5}{4}; -\frac{5}{4}\right)$ poi secondo il vettore $\vec{w}(-3; 3)$.
Verifica che la retta $y = -x + \sqrt{2}$ è tangente alle tre circonferenze sia con i calcoli analitici sia con la rappresentazione grafica. $[8x^2 + 8y^2 - 20x + 20y + 17 = 0; x^2 + y^2 + 6x - 6y + 17 = 0]$

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 12 esercizi in più

21 Scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per l'origine $O(0; 0)$ e tangente in $T\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ alla retta di equazione $y = -2x + \frac{1}{2}$.
Nella simmetria di centro l'origine degli assi cartesiani, determina la parabola e la retta tangente corrispondenti a quelle date.
Traccia i grafici delle due parabole e delle due rette in uno stesso riferimento cartesiano.

$\left[y = -\frac{1}{2}x^2 - x; y = \frac{1}{2}x^2 - x; y = -2x - \frac{1}{2}\right]$

22 Scrivi le equazioni della trasformazione $t \circ s$ ottenuta componendo la simmetria s rispetto alla bisettrice $y = x$ con la traslazione t di vettore $\vec{v}(-10; 4)$. Applica la trasformazione composta al triangolo di vertici $A(3; 6)$, $B(4; 7)$ e $C(1; 9)$, ottenendo il triangolo $A''B''C''$. Verifica che $A''B''C''$ si ottiene anche applicando ad ABC la simmetria e successivamente ad $A'B'C'$ la traslazione.

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 26 esercizi in più

23 The point $(4; -2)$ is reflected in the x-axis. The resulting point is then reflected in the line with equation $y = x$. What are coordinates of the final point?

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge, COMC*, 2003)

$[(2, 4)]$

24 If quadrilateral $DEFG$ ($D(-7; 4)$, $E(-6; 6)$, $F(-3; 7)$, $G(-1; 3)$) is dilated with a scale factor of 2 using center of dilation $(-5; 9)$, give the coordinates of each of the vertices of the image $D'E'F'G'$.

(USA *University of Houston: High School Mathematics Contest*, 2005)

$[D'(-9; -1), E'(-7; 3), F'(-1; 5), G'(3; -3)]$

25 If quadrilateral $DEFG$ ($D(-7; 4)$, $E(-6; 6)$, $F(-3; 7)$, $G(-1; 3)$) is rotated 90° counterclockwise with center of rotation $(-2; 1)$, give the coordinates of each of the vertices of the image $D'E'F'G'$.

(USA *University of Houston: High School Mathematics Contest*, 2005)

$[D'(-5; -4), E'(-7; 3), F'(-8; 0), G'(-4; 2)]$

26 TEST Consider the circles with radii $4\sqrt{5}$ and which are tangent to the line $x - 2y = 20$ at the point $(6; -7)$. The sum of the x coordinates of the centers of the circles is:

A 12.
B -14.
C 3.
D -5.
E 2.

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2004)

27 TEST How many points do the graphs of $4x^2 - 9y^2 = 36$ and $x^2 - 2x + y^2 = 15$ have in common?

A 0
B 1
C 2
D 3
E 4

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2000)

GLOSSARY

circle: circonferenza
counterclockwise: in senso antiorario
to dilate: dilatare
image: immagine
to reflect: riflettere
to rotate: ruotare
scale factor: fattore di scala

CAPITOLO

β

Introduzione alla probabilità

Il dilemma di Monty Hall

In un popolare show televisivo americano il presentatore mostra al concorrente tre porte chiuse. Dietro a una di esse si cela il premio in palio, un'automobile; le altre due nascondono una capra. Il giocatore sceglie una delle tre porte, poi il conduttore, che sa qual è quella vincente, ne apre un'altra mostrando una capra. A questo punto il concorrente deve fare la scelta definitiva…

…è più conveniente confermare oppure cambiare porta per ottenere il premio?

➡ **La risposta a pag. β19**

1. Gli eventi e la probabilità

Eventi certi, impossibili, aleatori

Ci sono avvenimenti che accadono con certezza, mentre altri sicuramente non possono mai verificarsi. Per esempio, se una scatola contiene soltanto palline nere, estraendone una a caso siamo sicuri che è nera, mentre è impossibile estrarre una pallina bianca.
Chiamiamo gli avvenimenti del primo tipo **eventi certi** e quelli del secondo tipo **eventi impossibili**.

Ci sono anche eventi che possono accadere, ma senza certezza. Se la scatola contiene sia palline bianche sia palline nere, l'estrazione di una pallina bianca è un evento possibile ma non certo, così come l'estrazione di una pallina nera. In altre parole, non possiamo prevedere il colore della pallina estratta, perché l'estrazione è *casuale*.

Un fatto che può accadere o non accadere in modo casuale è detto **evento aleatorio**. Per esempio, essere interrogati in matematica nell'arco di una settimana di lezioni è un evento aleatorio.
È opportuno osservare che uno stesso evento può essere certo, aleatorio o impossibile a seconda del contesto in cui viene considerato.

Aleatorio deriva dal latino *ālea*, che significa «gioco dei dadi». Il lancio di un dado è il classico esempio di evento aleatorio.

ESEMPIO L'evento «Susy vince alla lotteria» è certo se Susy compra tutti i biglietti della lotteria, è impossibile se non ne compra nemmeno uno, è aleatorio se ne compra uno o più di uno, ma non tutti.

La probabilità di un evento

Il fatto che certi eventi siano aleatori ha portato l'uomo a formulare scommesse sul loro accadere. Il concetto di probabilità è nato proprio per effetto dei giochi d'azzardo!

Consideriamo il seguente gioco. Hai di fronte due mazzi di carte, A e B, così composti: A contiene 10 carte con figure e 3 carte senza figure; B è formato da 12 carte con figure e 6 senza figure. Devi scegliere una carta da uno dei due mazzi: vinci se scegli una figura. Da quale mazzo conviene scegliere la carta?

Il gioco è interpretabile come un **esperimento** che ha carattere aleatorio, in quanto il **risultato** non dipende da una legge precisa ma, di volta in volta, è imprevedibile.

Se le carte non sono truccate, le estrazioni di una carta dai due mazzi sono tutte **ugualmente possibili**, poiché le carte sono coperte e non possiamo distinguerle l'una dall'altra.

Chiamiamo **casi possibili** tutti i risultati che possono verificarsi. Per il mazzo A i casi possibili sono 13, mentre per il mazzo B sono 18.

Chiamiamo **casi favorevoli** quelli in cui si verifica l'evento che fa vincere. Poiché per vincere bisogna estrarre una figura, i casi favorevoli sono tanti quante le carte con figure: 10 per il mazzo A e 12 per il mazzo B.

Consideriamo il rapporto fra i casi favorevoli e quelli possibili:

$$\text{mazzo } A: \frac{10}{13}; \qquad \text{mazzo } B: \frac{12}{18}.$$

Poiché $\frac{10}{13}$ è maggiore di $\frac{12}{18}$, conviene scegliere il mazzo A!

Il quoziente $\dfrac{\text{numero dei casi favorevoli}}{\text{numero dei casi possibili}}$ fornisce una stima sulla possibilità che si verifichi un determinato evento e viene chiamato **probabilità** di quell'evento.

DEFINIZIONE

Probabilità

La probabilità di un evento è il quoziente fra il numero dei casi favorevoli f e quello dei casi possibili u, quando essi sono tutti ugualmente possibili.

probabilità di E

numero dei casi favorevoli

$$p(E) = \frac{f}{u}$$

numero dei casi possibili

D'ora in poi indicheremo un evento con una lettera maiuscola, per esempio E, e la probabilità che l'evento si verifichi con il simbolo $p(E)$.

ESEMPIO Nel lancio di un dado a sei facce consideriamo i seguenti eventi:

E_1 = «esce il 4»; E_2 = «esce un numero dispari»;

E_3 = «esce un numero maggiore di 2».

Calcoliamo la probabilità di ciascun evento nell'ipotesi che il dado non sia truccato:

$p(E_1) = \frac{1}{6}$ (casi possibili 6, casi favorevoli 1);

$p(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (casi favorevoli: numeri 1, 3, 5);

$p(E_3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (casi favorevoli: numeri 3, 4, 5, 6).

I valori della probabilità

Abbiamo detto che u rappresenta il numero dei casi possibili e f il numero dei casi favorevoli.

- Se un evento è impossibile, il numero dei casi favorevoli è 0; quindi

  $$p = \frac{f}{u} = \frac{0}{u} = 0.$$

  Pertanto **la probabilità di un evento impossibile è 0**.

- Se un evento è certo, il numero dei casi favorevoli è uguale a quello dei casi possibili; quindi

  $$p = \frac{f}{u} = \frac{u}{u} = 1.$$

  La probabilità di un evento certo è 1.

- Per gli eventi aleatori, il numero f dei casi favorevoli è compreso fra 0 e u: $0 < f < u$. Dividendo tutti i termini della doppia disuguaglianza per u, si ottiene:

  $$\frac{0}{u} < \frac{f}{u} < \frac{u}{u}, \qquad \text{ossia} \qquad 0 < p < 1.$$

  Pertanto **la probabilità di un evento aleatorio è un numero compreso fra 0 e 1**.

In generale, considerando assieme i tre casi, possiamo dire che la probabilità di un evento è compresa fra 0 e 1, estremi inclusi: $\mathbf{0 \leq p \leq 1}$.

Spesso il valore della probabilità viene espresso in termini percentuali. Per esempio, un evento certo si verificherà al 100%.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

Gli eventi e gli insiemi

Consideriamo il lancio di un dado e l'evento «esce un numero dispari». Per descrivere la situazione possiamo utilizzare il linguaggio degli insiemi. I casi possibili sono 6, quindi l'insieme universo è

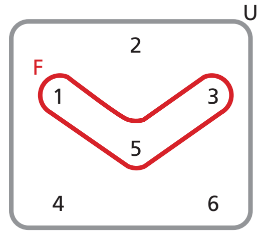
$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

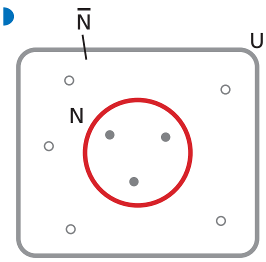
I casi favorevoli sono tre; infatti l'evento è verificato quando escono 1, 3, oppure 5. Indichiamo con F l'insieme dei casi favorevoli:

$$F = \{1, 3, 5\}.$$

Poiché F è un sottoinsieme di U, il numero degli elementi di F è sempre minore o uguale al numero degli elementi di U. Se l'insieme F non ha elementi, cioè $F = \varnothing$, allora l'evento è impossibile; se F coincide con l'insieme universo U, allora l'evento è certo.

L'insieme U di tutti i casi possibili si chiama **insieme universo**.





Se N è l'insieme dei casi favorevoli all'evento E, i casi favorevoli all'evento contrario $\overline{E}$ appartengono al complementare $\overline{N}$ di N rispetto a U, ossia all'insieme degli elementi di U che non appartengono a N.

L'evento contrario e la sua probabilità

Dato un evento E, il suo **evento contrario** è quell'evento che si verifica quando e solo quando non si verifica E, e lo indichiamo con il simbolo $\overline{E}$.

ESEMPIO

Nel lancio di un dado, l'evento contrario dell'uscita di un numero pari è l'uscita di un numero dispari.

TEOREMA

La somma della probabilità di un evento e di quella del suo evento contrario è 1:

$$\boldsymbol{p(E) + p(\overline{E}) = 1.}$$

DIMOSTRAZIONE

Se f è il numero di casi favorevoli dell'evento E e u il numero dei casi possibili, il numero dei casi favorevoli dell'evento contrario è $u - f$, quindi:

$$p(E) + p(\overline{E}) = \frac{f}{u} + \frac{u-f}{u} = \frac{f+u-f}{u} = \frac{u}{u} = 1.$$

2. La probabilità della somma logica di eventi

L'evento unione

Consideriamo 12 dischetti numerati da 1 a 12 e gli eventi:

E_1 = «esce un numero pari»;

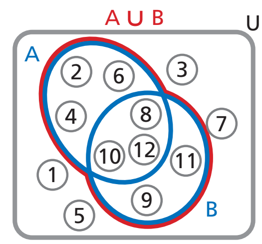
E_2 = «esce un numero maggiore di 7».

L'insieme dei casi favorevoli a E_1 è $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
L'insieme dei casi favorevoli a E_2 è $B = \{8, 9, 10, 11, 12\}$.
L'evento

E = «esce un numero pari **o** maggiore di 7»

è formato dai due eventi E_1 ed E_2, uniti dal connettivo «o».
Questo evento si verifica se si verifica E_1 oppure E_2, perciò è detto **evento unione** o **somma logica** di E_1 ed E_2.
L'evento E ha come casi favorevoli sia quelli dell'insieme A sia quelli dell'insieme B.
L'insieme che lo rappresenta è quindi l'unione dei due insiemi:

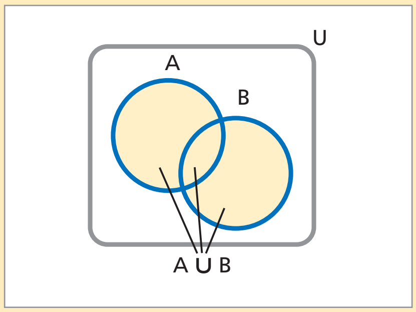
$$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$



DEFINIZIONE

Evento unione

Dati gli eventi E_1, E_2, relativi allo stesso insieme universo, il loro evento unione, che indichiamo con $E_1 \cup E_2$, è quell'evento che si verifica al verificarsi di almeno uno degli eventi dati.



◗ Come nell'esempio precedente, nella figura della definizione, A è l'insieme dei casi favorevoli a E_1, B quello dei casi favorevoli a E_2. Allora $A \cup B$ è l'insieme dei casi favorevoli a $E_1 \cup E_2$.

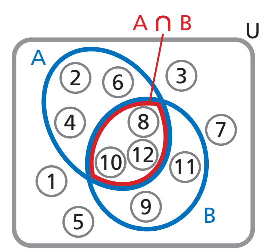
L'evento intersezione

Consideriamo ancora fra i 12 dischetti numerati l'evento

E = «esce un numero pari **e** maggiore di 7»,

formato dai due eventi semplici E_1 ed E_2, uniti dal connettivo «e». Questo evento si verifica se si verificano entrambi gli eventi E_1 ed E_2, perciò è detto **evento intersezione** o **prodotto logico** di E_1 ed E_2. Esso ha come casi favorevoli quelli comuni all'insieme A e all'insieme B. L'insieme che lo rappresenta è l'insieme intersezione:

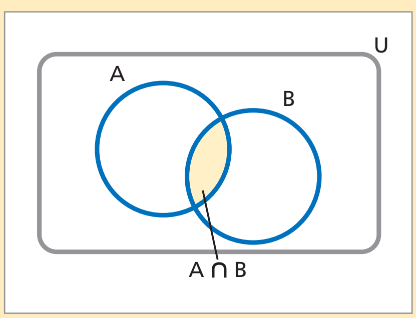
$$A \cap B = \{8, 10, 12\}.$$



DEFINIZIONE

Evento intersezione

Dati gli eventi E_1 ed E_2, relativi allo stesso insieme universo, il loro evento intersezione, che indichiamo con $E_1 \cap E_2$, è quell'evento che si verifica quando si verificano contemporaneamente gli eventi dati.



◗ Le notazioni sono le stesse della definizione precedente. Quindi $A \cap B$ è l'insieme dei casi favorevoli a $E_1 \cap E_2$.

◗ Osserva che, nonostante la notazione insiemistica, $E_1 \cup E_2$ ed $E_1 \cap E_2$ non sono unione e intersezione di insiemi.

Gli eventi compatibili e gli eventi incompatibili

Facendo sempre riferimento all'esempio dei 12 dischetti numerati, osserviamo che gli eventi E_1 ed E_2 possono verificarsi *contemporaneamente*: per esempio, estraendo il dischetto col numero 10, otteniamo sia un numero pari sia un numero maggiore di 7. In questo caso si dice che gli eventi sono *compatibili*.

Consideriamo ora gli eventi:

E_3 = «esce un multiplo di 5»;

E_4 = «esce un multiplo di 3».

Questi due eventi, invece, non possono verificarsi contemporaneamente, e sono chiamati *eventi incompatibili*.

Se i dischetti fossero 20, i due eventi resterebbero incompatibili?

In generale due eventi, relativi allo stesso insieme universo, si dicono **incompatibili** se il verificarsi di uno esclude il verificarsi contemporaneo dell'altro. In caso contrario si dicono **compatibili**.

Il teorema della somma per eventi incompatibili

Riprendiamo l'esempio dei 12 dischetti numerati e consideriamo i due eventi incompatibili

E_3 = «esce un multiplo di 5»;

E_4 = «esce un multiplo di 3».

Cerchiamo la probabilità dell'evento unione

E = «esce un multiplo di 5 o di 3».

I casi favorevoli di E_3 sono 2, quelli di E_4 sono 4. Pertanto i casi favorevoli di E sono 6, mentre i casi possibili sono 12. La probabilità dell'evento E è uguale alla somma delle due probabilità:

$$p(E) = \frac{6}{12} = \frac{2}{12} + \frac{4}{12} = p(E_3) + p(E_4).$$

Vale il seguente teorema.

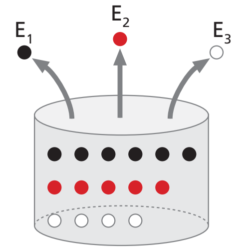
TEOREMA

Teorema della somma per eventi incompatibili

Se due eventi, E_1 ed E_2, sono incompatibili, la probabilità del loro evento unione è uguale alla somma delle loro probabilità.

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2).$$

ESEMPIO Un'urna contiene 6 gettoni neri, 5 rossi e 4 bianchi. Estraendo un gettone a caso si può verificare uno dei seguenti eventi:



E_1 = «estrazione di un gettone nero»;

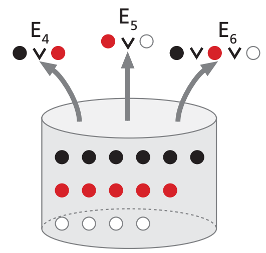
E_2 = «estrazione di un gettone rosso»;

E_3 = «estrazione di un gettone bianco».

Le probabilità sono: $p(E_1) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$; $p(E_2) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; $p(E_3) = \frac{4}{15}$.

Questi eventi sono fra loro incompatibili, perché se uno si verifica, non si verifica contemporaneamente nessuno degli altri due.

Calcoliamo, applicando il teorema, la probabilità degli eventi seguenti:



E_4 = «estrazione di un gettone nero o rosso»;

E_5 = «estrazione di un gettone rosso o bianco»;

E_6 = «estrazione di un gettone nero o rosso o bianco».

$$p(E_4) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15};$$

$$p(E_5) = \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5};$$

$$p(E_6) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{15}{15} = 1.$$

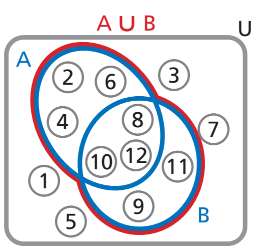
Il teorema della somma per eventi compatibili

Consideriamo nuovamente i 12 dischi e i seguenti eventi compatibili:

E_1 = «esce un numero pari»;

E_2 = «esce un numero maggiore di 7».

I casi favorevoli di E_1 sono 6, quelli di E_2 sono 5.
I casi favorevoli dell'evento composto

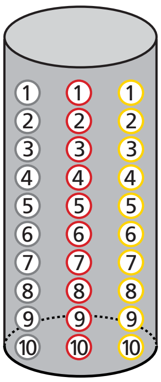


E = «esce un numero pari o maggiore di 7»

non sono però 11, ma solo 8. Ciò è dovuto al fatto che vi sono casi favorevoli a entrambi gli eventi. Se sommiamo i casi favorevoli di E_1 e quelli di E_2, vengono considerati per due volte i casi di $E_1 \cap E_2$, mentre nell'unione essi devono essere contati una volta sola. Possiamo concludere che i casi favorevoli di $E_1 \cup E_2$ si possono ottenere dalla somma di quelli di E_1 e di E_2, sottraendo quelli di $E_1 \cap E_2$: $(6 + 5) - 3 = 8$.
Dividendo per il numero di casi possibili otteniamo:

$$p(E_1 \cup E_2) = \frac{(6+5)-3}{12} = \frac{6}{12} + \frac{5}{12} - \frac{3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} =$$
$$= p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2).$$

◗ Il teorema vale anche nel caso di eventi incompatibili. Infatti se E_1 ed E_2 sono incompatibili, l'insieme dei risultati favorevoli a $E_1 \cap E_2$ è vuoto, cioè il numero di casi favorevoli è 0. Pertanto anche la probabilità è 0 e si riottiene la relazione già studiata $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$.



In generale, vale il seguente teorema.

TEOREMA

Teorema della somma per eventi compatibili

Se due eventi E_1 ed E_2 sono compatibili, la probabilità del loro evento unione è uguale alla somma delle loro probabilità, diminuita della probabilità del loro evento intersezione.

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2).$$

ESEMPIO Dentro un'urna vi sono 30 palline: 10 bianche numerate da 1 a 10, 10 rosse e 10 gialle numerate allo stesso modo.
Calcoliamo la probabilità che, estraendone una a caso, venga estratta una pallina gialla o pari.

Il numero totale di palline è 30. La probabilità che venga estratta una gialla è $p(G) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.
Le palline con numero pari sono 5 per ogni colore, quindi 15. La probabilità che venga estratto un numero pari è $p(P) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.
Gli eventi sono compatibili; i casi favorevoli a entrambi gli eventi (pallina gialla e pari) sono 5. La probabilità dell'evento cercato è

$$p = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{30} = \frac{2}{3}.$$

3. La probabilità del prodotto logico di eventi

La probabilità condizionata

Come si determina la probabilità di un evento che dipende da un altro evento?
Consideriamo di nuovo il sacchetto con i gettoni numerati da 1 a 12 e i due eventi:

E_1 = «esce un multiplo di 3»;

E_2 = «esce un numero minore di 9».

L'insieme universo è dato da $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, quello dei casi favorevoli a E_1 è $A = \{3, 6, 9, 12\}$, quello dei casi favorevoli a E_2 è $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

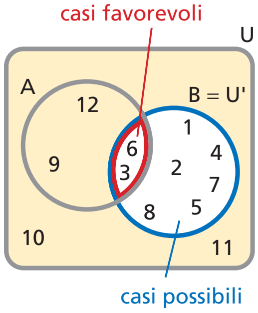
La probabilità di E_1 è: $p(E_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
Supponiamo che un amico estragga un numero e, senza farcelo vedere, ci dica che esso è minore di 9, ossia che si è verificato l'evento E_2.

Cosa possiamo dire, ora, della probabilità che il numero estratto sia multiplo di 3, ossia di $p(E_1)$?
L'evento E_1 è condizionato dall'evento E_2: il fatto che E_2 si sia verificato ci dà alcune informazioni in più sulla possibilità che si verifichi E_1.
Indichiamo la probabilità di E_1, calcolata nell'ipotesi che E_2 si sia verificato, con il simbolo $p(E_1|E_2)$.

Chiamiamo $\boldsymbol{p(E_1|E_2)}$ **probabilità di** $\boldsymbol{E_1}$ **condizionata a** $\boldsymbol{E_2}$.

Per calcolare la probabilità condizionata teniamo presente che:

- poiché supponiamo che l'evento E_2 si sia verificato, l'insieme universo U' per $E_1|E_2$ è dato dai risultati favorevoli a E_2, cioè $U' = B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
- i casi favorevoli per $E_1|E_2$ devono essere ricercati solo all'interno del nuovo insieme universo; quindi sono dati dall'intersezione tra i casi favorevoli per E_1 (insieme A) e quelli per E_2 (insieme B).



L'insieme F dei casi favorevoli è dato da $F = A \cap B = \{3, 6\}$.
Dunque $p(E_1|E_2)$ è data dal rapporto tra il numero di elementi di F e il numero di elementi di U':

$$p(E_1|E_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

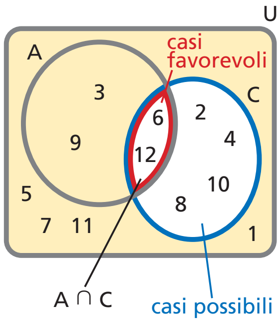
La probabilità di E_1 è $\frac{1}{3}$, mentre quella di E_1 condizionata a E_2 è $\frac{1}{4}$, quindi:

$$p(E_1) \neq p(E_1|E_2).$$

Consideriamo ora un altro caso con i due eventi:

E_1 = «esce un multiplo di 3»;

E_3 = «esce un numero pari».



Supponiamo che il nostro amico ci dica che ha estratto un numero pari, ossia che si è verificato l'evento E_3 rappresentato dall'insieme $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
Se si è verificato l'evento E_3, i casi possibili che il numero uscito sia multiplo di 3, cioè dell'evento E_1 condizionato dall'evento E_3, sono 6 e quelli favorevoli 2, cioè quelli dell'insieme $A \cap C = \{6, 12\}$.
La probabilità di E_1 condizionata a E_3 è:

$$p(E_1|E_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

A differenza del primo caso, in questo esempio le due probabilità sono uguali, $p(E_1) = p(E_1|E_3)$.

Due eventi, E_1 ed E_2, si dicono **dipendenti** se $p(E_1)$ è diversa dalla probabilità condizionata $p(E_1|E_2)$.
Gli eventi E_1 ed E_2 si dicono **indipendenti** se $p(E_1)$ è uguale alla probabilità condizionata $p(E_1|E_2)$.

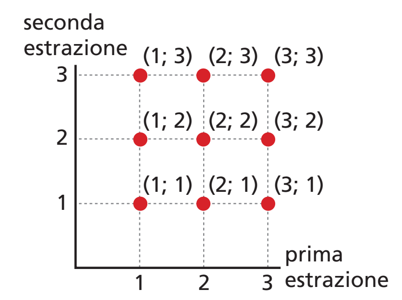
Si può dimostrare che la relazione di indipendenza è simmetrica, ossia che se l'evento E_1 è indipendente dall'evento E_2, cioè $p(E_1) = p(E_1|E_2)$, allora anche E_2 è indipendente da E_1, cioè $p(E_2) = p(E_2|E_1)$.

Le definizioni si interpretano come segue: due eventi sono indipendenti se il verificarsi di uno non modifica la probabilità che anche l'altro si verifichi.

ESEMPIO Lanciamo contemporaneamente una moneta e un dado, e consideriamo i due eventi «esce testa» ed «esce il numero 2».
Fra i due eventi non c'è nessun legame, ognuno si può verificare indipendentemente dall'altro. In altri termini, la probabilità che esca testa sulla moneta non influenza la probabilità che esca il numero 2 sul dado. Questi sono eventi indipendenti.

Il teorema del prodotto per eventi indipendenti

Consideriamo un sacchetto che contiene tre gettoni con i numeri 1, 2, 3. Dal sacchetto estraiamo un gettone e poi un secondo gettone, *dopo che il primo è stato rimesso nel sacchetto*.
Qual è la probabilità che in due estrazioni successive vengano estratti due numeri dispari?
I casi possibili si possono ottenere mediante il diagramma cartesiano della figura 1. Per esempio, la coppia (3; 2) indica che è stato estratto prima il gettone 3, poi il gettone 2.
L'evento composto



▶ **Figura 1** In un sacchetto ci sono tre gettoni con scritti i numeri 1, 2 e 3. I casi possibili nelle estrazioni successive di un gettone e di un secondo gettone sono 9 e possono essere rappresentati dalle coppie del prodotto cartesiano.

$$E = \text{«escono due numeri dispari»}$$

può essere visto come l'evento intersezione dei due eventi semplici:

$$E_1 = \text{«il primo numero è dispari»;}$$

$$E_2 = \text{«il secondo numero è dispari».}$$

E_1 ed E_2 sono indipendenti; infatti, dopo la prima estrazione, il gettone è rimesso nel sacchetto e la situazione iniziale viene ripristinata.
Poiché i numeri dispari sono 2 e i casi possibili 3, le probabilità di E_1 ed E_2 sono:

$$p(E_1) = \frac{2}{3}, \qquad p(E_2) = \frac{2}{3}.$$

I casi favorevoli all'evento composto E corrispondono alle coppie (1; 1), (1; 3), (3; 1), (3; 3); quindi sono 4. I casi possibili, come è già stato illustrato nella figura 1, sono 9, quindi:

$$p(E) = \frac{4}{9}.$$

Osserviamo che $\frac{4}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$, ossia la probabilità dell'evento E, che è l'intersezione di E_1 ed E_2, è data dal prodotto della probabilità di E_1 per la probabilità di E_2.
In generale vale il seguente teorema.

TEOREMA

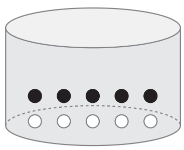
Teorema del prodotto per eventi indipendenti

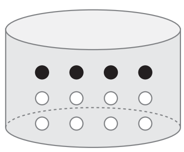
Se due eventi, E_1 ed E_2, sono indipendenti, la probabilità del loro evento intersezione è uguale al prodotto delle loro probabilità.

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2).$$

ESEMPIO Due urne contengono:

- urna 1: 5 palline bianche e 5 nere;
- urna 2: 8 palline bianche e 4 nere.





Viene estratta una pallina da ogni urna. Qual è la probabilità che siano entrambe nere?
L'evento «vengono estratte due palline nere» è composto dai due eventi semplici:

E_1 = «viene estratta una pallina nera dall'urna 1»;

E_2 = «viene estratta una pallina nera dall'urna 2».

Si ha: $p(E_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ e $p(E_2) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Gli eventi sono indipendenti; quindi la probabilità dell'evento intersezione è:

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2) = p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Il teorema del prodotto per eventi dipendenti

Consideriamo ancora il sacchetto con tre gettoni che hanno i numeri 1, 2, 3 e gli eventi

E_1 = «il primo estratto è dispari»,

E_2 = «il secondo estratto è dispari»,

ma supponiamo che, *dopo la prima estrazione, il gettone non venga rimesso nel sacchetto*.
Gli eventi sono dipendenti: infatti, la probabilità del secondo evento non è più quella di prima, perché la composizione iniziale del sacchetto risulta modificata.
I due eventi semplici non hanno lo stesso insieme universo: nella prima estrazione U contiene 3 elementi, nella seconda ne contiene solo 2.

Abbiamo già visto che

$$p(E_1) = p(E_2) = \frac{2}{3},$$

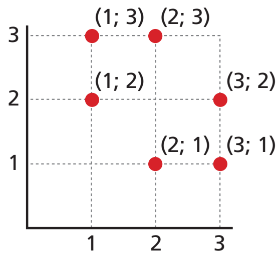
perché i numeri dispari sono 2 su 3.
Calcoliamo la probabilità condizionata $p(E_2|E_1)$, ossia la probabilità che si abbia E_2 supposto che sia avvenuto E_1.

Se si è verificato E_1, significa che è stato estratto un numero dispari; quindi nel sacchetto rimangono due gettoni: il 2 e l'altro numero dispari. La probabilità di estrarre un altro numero dispari è:

$$p(E_2|E_1) = \frac{1}{2}.$$

Calcoliamo, ora, la probabilità dell'evento composto:

E = «i numeri estratti sono entrambi dispari».



Se il primo gettone non è rimesso nel sacchetto, le coppie (1; 1), (2; 2), (3; 3) non sono possibili.

Poiché la prima volta si estrae un gettone fra tre e la seconda uno fra i due rimanenti, i casi possibili possono essere schematizzati con il diagramma a fianco.

I casi possibili sono 6. I casi favorevoli sono 2, corrispondenti alle coppie (1; 3) e (3; 1). Quindi:

$$p(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Osserviamo che la probabilità di E si ottiene moltiplicando la probabilità di E_1, $p(E_1)$, per la probabilità di E_2 condizionata a E_1, $p(E_2|E_1)$:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}.$$

In generale vale il seguente teorema.

TEOREMA

Teorema del prodotto per eventi dipendenti

Se due eventi, E_1 ed E_2, sono dipendenti, la probabilità del loro evento intersezione è uguale al prodotto della probabilità di E_1 per la probabilità di E_2 condizionata a E_1.

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2|E_1).$$

ESEMPIO In un'urna ci sono 8 palline bianche e 4 nere (figura *a* nella pagina seguente). Qual è la probabilità che, estraendo contemporaneamente due palline, esse siano entrambe bianche?

Si può pensare di estrarre prima una pallina e poi, senza rimettere la prima nell'urna, una seconda pallina.

La probabilità che la prima sia bianca è:

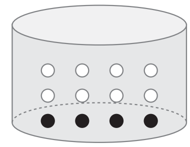
$$p_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

La probabilità che la seconda sia bianca, condizionata dal fatto che la prima estratta sia bianca, si ottiene pensando a un'urna che contiene 7 palline bianche e 4 nere (figura *b*):

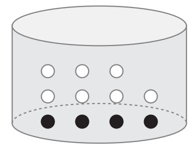
$$p_2 = \frac{7}{11}.$$

La probabilità che entrambe le palline siano bianche è:

$$p = p_1 \cdot p_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33}.$$



a. Situazione iniziale.



b. Situazione dopo la prima estrazione.

Il teorema vale anche nel caso di eventi indipendenti. Infatti, se E_1 ed E_2 sono indipendenti,

$$p(E_2|E_1) = p(E_2).$$

Sostituendo nella relazione

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2|E_1),$$

otteniamo

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2),$$

che è la relazione già dimostrata in precedenza.

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Positivo al test!

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Per avere informazioni sulla diffusione di una malattia, si fanno test diagnostici non invasivi e poco costosi, ottenendo una prima informazione, da sottoporre a verifiche più approfondite nei casi di esito positivo.
Supponiamo che si sappia che la probabilità che il test funzioni correttamente nel caso di individui malati (ossia risulti positivo) sia del 99%, mentre quella che il test funzioni correttamente nel caso di individui sani (ossia risulti negativo) sia del 99,5%. Se si sa anche che la probabilità di avere quella malattia è dello 0,5%, qual è la probabilità che un individuo positivo al test sia davvero malato?

FRANCA: «Se il test è positivo, il paziente è malato almeno al 99%!».

MARCO: «Però la malattia è poco diffusa; intendo dire che è raro che un individuo testato sia malato, quindi la probabilità dovrebbe essere molto più bassa del 99%, direi anche molto più bassa del 90%».

▶ Chi ha ragione, secondo te? Costruisci un diagramma ad albero delle situazioni possibili; poi usa il teorema del prodotto per eventi dipendenti…

4. Fra probabilità e statistica

Le variabili aleatorie discrete e le distribuzioni di probabilità

Consideriamo i punteggi che si possono ottenere nel lancio di due dadi a sei facce e calcoliamo la probabilità che si verifichi ognuno di essi. Esaminiamo la seguente tabella a doppia entrata.

▶ Tabella 1

SECONDO DADO \ PRIMO DADO	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

I casi possibili sono 36. La probabilità che il risultato sia 2 è $p(2) = \frac{1}{36}$, che sia 3 è $p(3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, che sia 4 è $p(4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ e così via.
Se indichiamo con X un generico valore che può essere assunto dal risultato, possiamo riassumere le probabilità che si ottengono con una tabella.

▶ Tabella 2

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Notiamo che gli eventi che abbiamo considerato sono tutti quelli possibili; inoltre, essi si escludono a vicenda, quindi costituiscono una partizione dell'insieme universo U di tutti gli eventi.

X viene detta *variabile aleatoria* (o *casuale*) e, poiché può assumere un numero finito di valori, è chiamata *discreta*.

▶ La definizione si può estendere al caso di una *infinità numerabile* di valori $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Per esempio, se lanciamo più volte un dado e ci chiediamo qual è la probabilità che esca 4 per n volte consecutive, la variabile aleatoria ha gli infiniti valori 1, 2, 3, 4, 5, …

DEFINIZIONE

Variabile aleatoria discreta

Una variabile aleatoria discreta X è una variabile che può assumere i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ corrispondenti a eventi aleatori $E_1, E_2, \ldots, E_n$, non impossibili, che si escludono a vicenda e tali che sicuramente uno di essi si verifichi.

Diciamo inoltre che la tabella appena compilata descrive la *distribuzione di probabilità* relativa alla variabile X.

▶ Poiché gli eventi di una variabile aleatoria sono incompatibili e la loro unione coincide con l'insieme universo U, si ha:

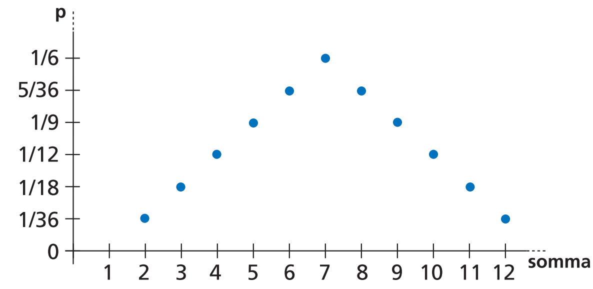
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

DEFINIZIONE

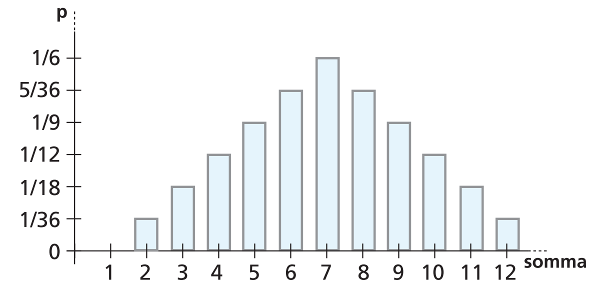
Distribuzione di probabilità

Data una variabile aleatoria discreta X, con valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la successione delle probabilità $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a essi associate si chiama distribuzione di probabilità della variabile X.

Per rappresentare una distribuzione di probabilità possiamo utilizzare, oltre che una tabella, un diagramma cartesiano o un istogramma. Per l'esempio precedente abbiamo le rappresentazioni della figura 2.



a. Diagramma cartesiano.



b. Istogramma.

▲ **Figura 2 Rappresentazioni grafiche della distribuzione di probabilità *p* della variabile *X* = «somma dei punti realizzati nel lancio di due dadi».**

La legge empirica del caso

Consideriamo ancora il lancio, ripetuto più volte, di due dadi. Possiamo studiare i risultati ottenuti da un punto di vista statistico, costruendo una tabella delle frequenze. La tabella che riportiamo è riferita a 10, 100 e 1000 lanci. Abbiamo indicato anche le frequenze relative espresse mediante numeri decimali e le probabilità della tabella 2, approssimate alla terza cifra decimale.

LANCI DI DUE DADI							
SOMMA DEI PUNTI	10 LANCI		100 LANCI		1000 LANCI		PROBABILITÀ
	F	*f*	*F*	*f*	*F*	*f*	
2	0	0	1	0,01	27	0,027	0,028
3	1	0,1	4	0,04	51	0,051	0,056
4	0	0	10	0,10	81	0,081	0,083
5	1	0,1	7	0,07	110	0,110	0,111
6	3	0,3	16	0,16	140	0,140	0,139
7	2	0,2	19	0,19	171	0,171	0,167
8	1	0,1	5	0,05	139	0,139	0,139
9	1	0,1	12	0,12	111	0,111	0,111
10	0	0	15	0,15	89	0,089	0,083
11	1	0,1	7	0,07	53	0,053	0,056
12	0	0	4	0,04	28	0,028	0,028

◗ Nella tabella, F rappresenta la frequenza, f la frequenza relativa, ossia $\frac{F}{N}$, dove N è il numero dei lanci. Abbiamo scritto le probabilità della tabella 2 in forma decimale per poter fare meglio il confronto con le frequenze relative.

Osserviamo che, aumentando il numero dei lanci, le frequenze relative tendono ad avvicinarsi ai valori delle probabilità.

In generale si può affermare che, in un grande numero di prove, la frequenza relativa di un evento aleatorio è molto vicina alla probabilità dell'evento. La differenza fra i due valori tende a diminuire all'aumentare del numero di prove che si eseguono.

Questa affermazione prende il nome di **legge empirica del caso**.

ESEMPIO In un'urna ci sono 20 palline rosse e 30 gialle. Se facciamo 12 000 estrazioni, rimettendo ogni volta la pallina nell'urna, quante volte, approssimativamente, ci aspettiamo che esca una pallina rossa?
Per la legge empirica del caso, visto l'elevato numero di prove, possiamo pensare che le frequenze relative siano molto vicine alle probabilità.
La probabilità che venga estratta una pallina rossa è:

$$p_R = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}.$$

Per ottenere la frequenza delle palline rosse, identifichiamo la probabilità con la frequenza relativa e la moltiplichiamo per il numero delle estrazioni:

$$12\,000 \cdot \frac{2}{5} = 4800.$$

Ci aspettiamo che, su 12 000 palline estratte, circa 4800 siano rosse.

La probabilità statistica

Abbiamo definito la probabilità come quoziente fra numero di casi favorevoli e numero di casi possibili. La probabilità così definita viene anche detta probabilità «**a priori**», perché è calcolata senza che vengano eseguite prove concrete.
Tuttavia ci sono eventi aleatori per i quali non è possibile calcolare la probabilità in questo modo. Per esempio, non è possibile calcolare a priori la probabilità che esca 2 in un dado truccato.
In casi come questi viene in aiuto la legge empirica del caso. Accettiamo infatti come probabilità, che chiamiamo **probabilità statistica**, la frequenza relativa di un evento che si ottiene da un numero abbastanza elevato di prove, tutte ripetute nelle stesse condizioni. Il valore della probabilità statistica è un valore **a posteriori**.

ESEMPIO Il metodo statistico viene utilizzato nel campo delle assicurazioni per calcolare la probabilità che ha una persona di essere in vita o di morire entro un certo periodo.
La tabella a lato, basata su un'ipotetica popolazione di 100 000 nati vivi, riporta il numero di coloro che sono vivi alle diverse età. Dalla tabella si possono calcolare sia le probabilità di morte sia quelle di vita.
Per esempio, la probabilità che una persona di 35 anni e di sesso maschile muoia nei successivi 5 anni si ottiene calcolando il rapporto fra il numero dei decessi nei cinque anni (ossia la differenza fra 97 800 e 97 252) e il numero dei vivi a 35 anni:

$$\frac{97\,800 - 97\,252}{97\,800} \simeq 0{,}006.$$

La stessa probabilità calcolata per una persona di 75 anni è molto maggiore:

$$\frac{66\,138 - 50\,272}{66\,138} \simeq 0{,}24.$$

TAVOLA DI MORTALITÀ ANNO 2003

ETÀ (ANNI)	MASCHI	FEMMINE
0	100 000	100 000
5	99 483	99 557
10	99 420	99 511
15	99 338	99 460
20	99 055	99 362
25	99 651	99 242
30	98 232	99 105
35	97 800	98 927
40	97 252	98 649
45	96 484	98 219
50	95 285	97 526
55	93 270	96 397
60	90 070	94 727
65	85 005	92 154
70	77 534	88 181
75	66 138	81 511
80	50 272	70 339
85	32 085	53 051
90	13 811	28 894
95	3903	10 390
100	529	1818

La fonte della tavola di mortalità è: *http://demo.istat.it*, ottobre 2006.

ESEMPIO

La probabilità che una persona di 50 anni e di sesso femminile sia in vita dopo 5 anni si ottiene calcolando il rapporto fra il numero delle donne vive a 55 anni e quello delle donne vive a 50 anni:

$$\frac{96\,397}{97\,426} \simeq 0{,}99.$$

La stessa probabilità a 80 anni è molto minore:

$$\frac{53\,051}{70\,339} \simeq 0{,}75.$$

I giochi d'azzardo

Un gioco d'azzardo è un gioco composto esclusivamente da mosse casuali, perciò la vincita dipende dal caso anziché dalla bravura del giocatore. Sono esempi di giochi d'azzardo il gioco dei dadi, la roulette, il baccarat ecc.
In un gioco d'azzardo è importante che, a prescindere dall'intervento della casualità, la somma puntata da ciascun giocatore sia proporzionale alla probabilità che questo ha di vincere; in tal caso **il gioco** si dice **equo**.

ESEMPIO

Due giocatori A e B scommettono la stessa somma sul lancio di un dado: A vince se esce il 2, in caso contrario vince B.
È chiaro che questo gioco non è equo, perché B ha più probabilità di vincite di A. Infatti le probabilità di vincita di A e di B sono:

$$p(A) = \frac{1}{6}, \qquad p(B) = \frac{5}{6}.$$

Indichiamo con $S(A)$ la somma puntata da A e con $S(B)$ la somma puntata da B. Affinché il gioco sia equo deve valere la proporzione:

$$S(A) : p(A) = S(B) : p(B).$$

Se il giocatore A punta 0,50 euro sulla vincita, la somma puntata da B deve soddisfare la proporzione:

$$0{,}50 : \frac{1}{6} = S(B) : \frac{5}{6},$$

da cui si ricava:

$$S(B) = 2{,}50.$$

Perché il gioco sia equo, il giocatore B deve puntare una somma 5 volte maggiore, dato che la sua probabilità di vincita è 5 volte più grande di quella di A. In questo modo, secondo la legge empirica del caso, dopo molte partite i due sarebbero circa in parità: uno ha vinto spesso una piccola somma, l'altro ha vinto meno spesso ma ogni volta una somma maggiore.

ESPLORAZIONE: IL GIOCO DEL LOTTO

Le origini del gioco del lotto risalgono al XVI secolo, quando a Genova venivano estratti a sorte, tra 90 candidati, i 5 Reggitori che dovevano governare la Repubblica.

Poiché su questa estrazione la popolazione effettuava scommesse, si decise di regolamentare il gioco in modo da arricchire le casse dello Stato.

Nel gioco del lotto vengono estratti cinque numeri tra i primi 90 numeri naturali. L'estrazione viene effettuata su dieci *ruote* identificate con altrettanti nomi di città italiane. Per vincere è importante indovinare i numeri e non l'ordine con cui i numeri sono estratti. Il gioco può essere effettuato puntando su un numero singolo (ambata o estratto semplice), su due numeri (ambo), su tre (terno), su quattro (quaterna) o su cinque (cinquina).

LOTTO

Estrazione di

giovedì 20 aprile 2006

Bari	90_{6}	70_{31}	84_{1}	66_{38}	21_{7}
Cagliari	17_{66}	36_{5}	3_{6}	45_{16}	1_{2}
Firenze	44_{23}	88_{5}	39_{22}	58_{20}	75_{1}
Genova	13_{4}	80_{0}	55_{6}	38_{7}	47_{2}
Milano	90_{10}	32_{2}	83_{57}	59_{10}	60_{11}
Napoli	82_{3}	37_{1}	65_{3}	5_{4}	29_{2}
Palermo	58_{13}	41_{2}	6_{14}	26_{22}	40_{40}
Roma	35_{2}	79_{6}	48_{14}	62_{20}	70_{25}
Torino	6_{1}	67_{14}	11_{18}	29_{15}	50_{87}
Venezia	52_{24}	75_{15}	29_{39}	24_{2}	35_{35}
Nazionale	42_{22}	22_{11}	5_{5}	66_{1}	29_{21}

I valori a lato degli estratti rappresentano i ritardi all'estrazione.

SuperEnalotto 32 35 44 58 82 90 J: 52 S: 42

Supponiamo di puntare 1 euro sull'uscita del numero 3 sulla ruota di Genova. Per l'estratto semplice, i casi possibili sono 90 e 5 i favorevoli, per cui la probabilità che il numero 3 compaia fra i 5 estratti è di 5/90, cioè 1/18. Quindi dobbiamo aspettarci di vincere in media 1 volta su 18.

Analizziamo la situazione dal punto di vista finanziario, ricordando che il lotto in questo caso paga 11,232 volte la puntata. Ecco allora la conseguenza: se giocando 18 volte 1 euro sull'uscita del numero 3 a Genova vinciamo, in media, una sola volta, spendiamo in tutto 18 euro, ma riceviamo soltanto 11,23 euro!

IN DIECI RIGHE

La tabella mostra (in euro) la vincita reale e quella che si dovrebbe avere in caso di gioco equo. Per confrontare gli svantaggi che il giocatore ha nei confronti dello Stato nei diversi casi, calcola la percentuale della vincita reale rispetto a quella con gioco equo. Quali sono i tipi di scommesse meno penalizzati? Quali invece si posizionano al top delle scommesse inique? Riassumi le tue considerazioni in una relazione redatta con il computer.

GIOCATA	VINCITA REALE (€)	VINCITA CON GIOCO EQUO (€)
Ambata	11,23	18
Ambo	250	400,5
Terna	4250	11 748
Quaterna	80 000	511 038
Cinquina	1 000 000	43 949 268

Cerca nel web: giochi equi, giochi non equi, probabilità.

Il dilemma di Monty Hall

…è più conveniente confermare oppure cambiare porta per ottenere il premio?

Il quesito completo a pag. β1

Il quesito è noto come *dilemma* o *paradosso di Monty Hall*, dal nome del conduttore del celebre gioco a premi televisivo americano *Let's Make a Deal*.
Quando nel 1990 un lettore della rivista *Parade* scrisse alla rubrica *Ask Marilyn* chiedendo quale fosse la strategia vincente, il problema si trasformò in un'accesa controversia. La soluzione proposta da Marilyn Vos Savant, presente nel Guinness dei Primati per il suo altissimo quoziente d'intelligenza, scatenò una valanga di lettere di contestazione, molte delle quali provenivano da matematici e accademici che accusavano Vos Savant di ignorare la teoria della probabilità. Il giornale diventò l'arena di un furente botta e risposta: da una parte Vos Savant, secondo la quale al giocatore conviene sempre cambiare porta; dall'altra chi sosteneva che è indifferente scegliere l'una o l'altra delle due porte rimanenti. Il caso finì persino in prima pagina sul *New York Times*, acquisendo in breve tempo un'enorme popolarità. Chi aveva ragione?

Esaminiamo il problema: secondo la definizione classica della probabilità di un evento, data dal rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili, quando il concorrente sceglie una delle tre porte chiuse ha una probabilità pari a $\frac{1}{3}$ di vincere il premio.
Dopo che il presentatore ha aperto una porta, mostrando una capra, si potrebbe pensare che la probabilità di aver indovinato la porta esatta salga da $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}$. Dopo tutto, restano due porte chiuse e una delle due nasconde l'auto. Pertanto, la probabilità che questa sia dietro l'una o dietro l'altra è identica e pari a $\frac{1}{2}$. A questo punto il giocatore può scegliere a piacimento, perché è indifferente cambiare o non cambiare. Risposta sbagliata!
Infatti, il concorrente ha ancora una probabilità su tre di aver indovinato la porta esatta. La probabilità che l'automobile sia dietro una delle due porte non scelte è $\frac{2}{3}$ e, quando il presentatore rivela quale di queste due non nasconde il premio, la probabilità che l'automobile sia dietro l'altra porta è ancora $\frac{2}{3}$. Di conseguenza, se il giocatore mantiene la scelta iniziale, ha una probabilità di vincere pari a $\frac{1}{3}$, se cambia, pari a $\frac{2}{3}$.

Si può arrivare alla stessa conclusione seguendo un'altra argomentazione, che convincerà i più scettici. Partiamo dal presupposto (fondamentale!) che il conduttore conosce qual è la porta che nasconde l'automobile e apre sempre una porta con dietro una capra. Ora, supponiamo che la prima porta scelta dal giocatore sia sbagliata e nasconda una capra. Il conduttore non ha scelta e aprirà l'altra porta con la capra. In questo caso, se il giocatore cambia porta, vince. Se invece la prima porta scelta dal giocatore è esatta e il giocatore cambia, ovviamente perde.
Possiamo concludere che, se il giocatore cambia porta, *vince se e solo se la sua prima scelta era sbagliata*, evento che ha probabilità pari a $\frac{2}{3}$.
Se la strategia del giocatore è di non cambiare mai, *vince se e solo se la sua prima scelta è corretta*, evento con probabilità $\frac{1}{3}$.

Anche se apparentemente contro-intuitiva, la risposta di Vos Savant era esatta. Perché allora moltissime persone rimasero persuase del contrario? Alla base della controversia c'è probabilmente un punto chiave del problema: il conduttore sa qual è la porta vincente. Se il conduttore non sapesse dove si nasconde l'automobile (e quindi potesse anche aprire la porta fortunata), allora al giocatore resterebbero due porte con identica probabilità: cambiando o non cambiando, il concorrente avrebbe la stessa probabilità di vincere o perdere.
Questo paradosso è una variante del *paradosso delle tre carte* del matematico americano Warren Weaver (1950), il quale, a sua volta, deriva dal *paradosso delle tre scatole*, formulato per la prima volta nel 1889 dal matematico francese Joseph Bertrand.

LA TEORIA IN SINTESI
Introduzione alla probabilità

1. Gli eventi e la probabilità

Un **evento** è un fatto che può accadere o non accadere. Se avviene con certezza è detto **evento certo**, se non può mai accadere **evento impossibile**, **evento aleatorio** altrimenti.
La **probabilità** di un evento E è il quoziente fra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili, quando essi siano tutti ugualmente possibili:

$$p(E) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}.$$

La probabilità di un qualunque evento è un **numero compreso fra 0 e 1**: la probabilità di un evento certo è 1, quella di un evento impossibile è 0, quella di un evento aleatorio è maggiore di 0 e minore di 1.

ESEMPIO Estraiamo una carta da un mazzo di carte da poker; consideriamo i 4 eventi possibili: E_c = «esce cuori», E_q = «esce quadri»; E_f = «esce fiori», E_p = «esce picche». La probabilità dell'evento «esce cuori» è $p(E_c) = \frac{1}{4}$.

L'**evento contrario** $\overline{E}$ di un evento E è l'evento che si verifica nei casi in cui non si verifica E e soltanto in essi. Si ha: $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$.

ESEMPIO Nel mazzo di carte da poker, l'evento contrario a «esce un seme rosso» è «esce un seme nero».

2. La probabilità della somma logica di eventi

Due eventi sono **incompatibili** se il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro; in caso contrario sono **compatibili**.

ESEMPIO L'evento «esce un re di quadri» e l'evento «esce fiori» sono incompatibili; l'evento «esce un re di quadri» e l'evento «esce una figura» sono compatibili.

Dati due eventi, E_1 ed E_2:

- l'**evento unione** $E_1 \cup E_2$ è quello che si verifica se si verifica almeno uno degli eventi dati;
- l'**evento intersezione** $E_1 \cap E_2$ è quello che si verifica se si verificano entrambi gli eventi dati.

La **probabilità dell'evento unione** di due eventi E_1 ed E_2 è uguale:

- alla somma delle loro probabilità, se E_1 ed E_2 sono incompatibili;
- alla somma delle loro probabilità diminuita della probabilità del loro evento intersezione, se E_1 ed E_2 sono compatibili.

ESEMPIO L'evento unione di E_c = «esce cuori» e di E_f = «esce fiori» è E = «esce cuori o fiori». Poiché i due eventi E_c ed E_f sono incompatibili, la probabilità dell'evento unione è:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

ESEMPIO L'evento intersezione di E_c = «esce cuori» e di E_p = «esce una carta pari» è E = «esce una carta pari di cuori», ossia E = «esce il 2, o il 4, o il 6, o l'8 o il 10 di cuori».

3. La probabilità del prodotto logico di eventi

La probabilità dell'evento E_1 condizionata all'evento E_2, $p(E_1|E_2)$, è la probabilità di E_1 calcolata nell'ipotesi che E_2 si sia verificato.
E_1 ed E_2 sono eventi **indipendenti** se $p(E_1) = p(E_1|E_2)$; in caso contrario sono **dipendenti**.

ESEMPIO Nel lancio di un dado consideriamo l'evento E_1 = «esce il 2», che ha probabilità $\frac{1}{6}$. Supponiamo che l'evento si verifichi al primo lancio. Lanciando di nuovo il dado, ogni numero ha ancora probabilità $\frac{1}{6}$ perché l'esito del nuovo lancio non dipende dal precedente.

ESEMPIO In un mazzo di 40 carte da poker (una volta tolti gli 8, i 9, i 10 e i jolly), la probabilità che si verifichi l'evento E_1 = «esce l'asso di cuori» è $\frac{1}{40}$.
Alla prima estrazione si verifica l'evento E_2: «esce il 2 di picche». Senza reinserire nel mazzo il 2 di picche, facciamo una seconda estrazione: ora la probabilità che esca l'asso di cuori è $\frac{1}{39}$: pertanto $p(E_1) \neq p(E_1 | E_2)$, dunque E_1 ed E_2 sono dipendenti.
Se, prima della seconda estrazione, reimmettiamo il 2 di picche nel mazzo, gli eventi risultano indipendenti.

La **probabilità dell'evento intersezione** di due eventi E_1 ed E_2 è uguale:

- al prodotto delle loro probabilità, se E_1 ed E_2 sono indipendenti;
- al prodotto della probabilità di E_1 per la probabilità di E_2 condizionata a E_1, se E_1 ed E_2 sono dipendenti.

4. Fra probabilità e statistica

Una variabile aleatoria discreta X è una variabile che può assumere i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ corrispondenti a eventi non impossibili $E_1, E_2, \ldots, E_n$, che sono incompatibili e tali che uno di essi sicuramente si verifichi.

Data una variabile aleatoria discreta X, con valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la **distribuzione di probabilità** di X è la successione delle probabilità $p_1, p_2, \ldots, p_n$, associate ai valori di X.

La **legge empirica del caso** afferma che, considerato un evento aleatorio, in un grande numero di prove la sua frequenza relativa è in generale molto vicina alla probabilità e la differenza fra le due tende a diminuire all'aumentare del numero di prove effettuate.
Per questo si definisce come **probabilità statistica** di un evento la frequenza relativa che si ottiene da un numero abbastanza elevato di prove, tutte ripetute nelle stesse condizioni.

ESEMPIO Su 24 000 lanci di una moneta è uscita testa 12 012 volte; $f = \frac{12\,012}{24\,000} = 0{,}5005$ è la probabilità statistica che esca testa.

Un **gioco** è **equo** se, chiamata $S(A)$ la somma puntata dal giocatore A, $p(A)$ la probabilità che vinca A, $S(B)$ la somma puntata dal giocatore B e $p(B)$ la probabilità che vinca B, vale la proporzione:

$$S(A) : p(A) = S(B) : p(B).$$

1. Gli eventi e la probabilità

Teoria a pag. β1

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 VERO O FALSO?

a) Dato l'insieme universo $U = \{x, y, z\}$, se l'insieme dei casi favorevoli all'evento E è $\{x, y\}$, la probabilità di E è $p(E) = \frac{1}{3}$. V F

b) Se un evento ha probabilità 0, allora il suo contrario ha probabilità 1. V F

c) Un'urna contiene 7 palline numerate da 2 a 8. Dato l'evento E = «estrazione di una pallina recante un numero primo», l'evento contrario è $\overline{E}$ = «estrazione di un numero pari». V F

d) Un evento ha probabilità 1 quando il numero dei casi favorevoli è uguale a 1. V F

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

Eventi certi, impossibili, aleatori

2 Determina fra i seguenti eventi quali sono certi, quali impossibili, quali aleatori.

a) Domani pioverà.

b) Il 21 settembre il sole sorge alle 7:30.

c) Nel lancio di un dado esce un numero con una sola cifra.

d) Nel lancio di un dado esce un divisore di 12.

3 Per i seguenti eventi, indica due diversi contesti in cui l'evento è rispettivamente certo e impossibile.

a) Una banconota da cinque euro viene estratta da un portafoglio.

b) La squadra di calcio che tu preferisci vincerà lo scudetto.

c) Paolo Rossi, candidato del partito XY, sarà eletto alle elezioni.

d) Se si lancia un dado esce il numero 1.

4 Per i seguenti eventi, indica due diversi contesti in cui l'evento è rispettivamente certo e aleatorio.

a) Estrai una pallina nera da un'urna.

b) Sei interrogato in Storia.

c) Estrai una figura da un mazzo di carte.

d) Estrai una pedina con un multiplo di 5 da un sacchetto che contiene pedine numerate.

La probabilità di un evento

Nel sito: ▶ 7 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

5 Abbiamo a disposizione un mazzo di 40 carte. Le carte sono di 4 semi (cuori, quadri, fiori, picche), per ogni seme ci sono 10 carte, di cui tre figure (jack, donna, re) e i numeri da 1 a 7. Viene estratta una carta. Calcoliamo la probabilità che si abbia:

a) una figura;

b) una carta di cuori;

c) l'asso di quadri;

d) un numero pari.

Poiché il mazzo contiene 40 carte e ne viene estratta una sola, in tutte le situazioni descritte il numero dei casi possibili è 40.

a) La probabilità che si verifichi un evento è data dal rapporto:

$$p = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}.$$

Nel mazzo ci sono 3 figure per ogni seme; quindi in totale le figure sono 12. La probabilità che esca una figura è:

$$p = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}.$$

b) Nel mazzo ci sono 10 carte di cuori, quindi i casi favorevoli sono 10. La probabilità che esca una carta di cuori è:

$$p = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}.$$

c) Nel mazzo c'è un solo asso di quadri, quindi c'è un solo caso favorevole. La probabilità che esca è:

$$p = \frac{1}{40}.$$

d) Per ogni seme ci sono carte numerate da 1 a 7 e i numeri pari sono tre. I casi favorevoli sono ancora 12, perché i semi sono 4. La probabilità che esca un numero pari è:

$$p = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}.$$

6 In una pila di compact disc, 6 sono di musica classica, 5 di cantautori italiani, 8 di complessi rock. Calcola la probabilità che, scegliendone uno a caso, esso sia:
a) di musica classica;
b) di un complesso rock. $\left[\text{a) } \frac{6}{19}; \text{ b) } \frac{8}{19}\right]$

7 Un'urna contiene 8 palline gialle, 4 rosse e 10 verdi. Calcola la probabilità che venga estratta:
a) una pallina gialla;
b) una pallina rossa;
c) una pallina verde. $\left[\text{a) } \frac{4}{11}; \text{ b) } \frac{2}{11}; \text{ c) } \frac{5}{11}\right]$

8 Un'urna contiene dei dischetti numerati da 1 a 20. Calcola la probabilità che, estraendone uno a caso, si abbia:
a) un numero primo;
b) un numero dispari. $\left[\text{a) } \frac{2}{5}; \text{ b) } \frac{1}{2}\right]$

9 Nella roulette ci sono 37 numeri così colorati: lo 0 è bianco, i numeri da 1 a 18 sono rossi, quelli da 19 a 36 sono neri. Calcola la probabilità che, facendo girare la ruota, la pallina si fermi su:
a) un numero nero;
b) 0;
c) un numero dispari. $\left[\text{a) } \frac{18}{37}; \text{ b) } \frac{1}{37}; \text{ c) } \frac{18}{37}\right]$

10 Si lancia un dado a sei facce. Calcola la probabilità che esca:
a) il numero 3;
b) un numero dispari;
c) un multiplo di 4;
d) un numero primo. $\left[\text{a) } \frac{1}{6}; \text{ b) } \frac{1}{2}; \text{ c) } \frac{1}{6}; \text{ d) } \frac{1}{2}\right]$

11 Il sacchetto della tombola contiene 90 numeri. Viene estratto un numero. Calcola la probabilità che si abbia:
a) un numero pari;
b) un numero maggiore di 10;
c) un numero con due cifre uguali;
d) un multiplo di 5. $\left[\text{a) } \frac{1}{2}; \text{ b) } \frac{8}{9}; \text{ c) } \frac{4}{45}; \text{ d) } \frac{1}{5}\right]$

12 Il sacchetto della tombola contiene 90 numeri. Viene estratto un numero. Calcola la probabilità che esca:
a) un numero maggiore di 50;
b) un numero con due cifre diverse;
c) un numero multiplo di 4;
d) un numero primo inferiore a 20.
$\left[\text{a) } \frac{4}{9}; \text{ b) } \frac{73}{90}; \text{ c) } \frac{11}{45}; \text{ d) } \frac{4}{45}\right]$

13 Abbiamo un mazzo di 52 carte. Viene estratta una carta. Calcola la probabilità che esca:
a) una carta di picche;
b) una figura;
c) una carta rossa. $\left[\text{a) } \frac{1}{4}; \text{ b) } \frac{3}{13}; \text{ c) } \frac{1}{2}\right]$

I valori della probabilità

14 Quali dei seguenti numeri non possono rappresentare la probabilità di un evento?

$\frac{1}{3}; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}; \frac{1}{4}; \frac{7}{9}; \frac{7}{4}; \frac{8}{100}; \frac{234}{1234}; 0{,}021.$

15 Nel lancio di un dado a sei facce, indica un evento:
a) con probabilità diversa da 0 e da 1;
b) con probabilità 0;
c) con probabilità 1.

16 Nel gioco della tombola, indica un evento con probabilità diversa sia da 1 sia da 0 e un evento con probabilità 1.

Gli eventi e gli insiemi

Negli esercizi che seguono sono riportati alcuni eventi. Rappresenta l'insieme universo e l'insieme dei casi favorevoli relativo all'evento indicato.

17 Da un sacchetto della tombola viene estratto un numero maggiore di 20.

18 Da un'urna che contiene 10 biglie nere, 8 rosse e 4 bianche viene estratta una biglia nera.

19 Da una collezione composta da 10 francobolli italiani, 7 francesi, 5 inglesi viene estratto un francobollo italiano.

20 Nel gioco della roulette esce un numero pari.

21 Nel lancio di un dado, considera i due eventi seguenti:

E_1 = «esce un multiplo di 3»;

E_2 = «esce il numero 2».

Scrivi qual è l'insieme universo e qual è l'insieme dei casi favorevoli a ciascun evento.

L'evento contrario e la sua probabilità

ESERCIZIO GUIDA

22 Nell'esercizio guida 5, da un mazzo di 40 carte veniva estratta una carta e poi venivano indicati i seguenti quattro eventi: «è una figura»; «è una carta di cuori»; «è l'asso di quadri»; «è un numero pari». Ora proponiamo un altro insieme di eventi:

a) «una carta che non è una figura»;
b) «una carta di quadri o di fiori o di picche»;
c) «un asso di cuori o di fiori o di picche»;
d) «una carta dispari».

Quali di questi ultimi eventi sono contrari a quelli indicati in precedenza? Per gli eventi contrari calcoliamo la probabilità che essi si verifichino.

a) L'evento «estrarre una carta che non è una figura» è contrario all'evento «estrarre una figura». Per calcolarne la probabilità basta sottrarre da 1 la probabilità dell'evento «estrarre una figura»:

$$p = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}.$$

Possiamo verificare questo risultato anche calcolando direttamente la probabilità. Poiché le carte senza figura sono 7 per ogni seme, i casi favorevoli sono $7 \cdot 4 = 28$:

$$p = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}.$$

b) «Estrarre una carta di quadri o di fiori o di picche» è un evento contrario a «estrarre una carta di cuori»; quindi:

$$p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

c) I due eventi «estrarre l'asso di quadri» ed «estrarre un asso di cuori o di fiori o di picche» non sono contrari, perché è possibile estrarre carte che non sono assi.

d) Anche in questo caso, i due eventi «estrarre un numero pari» ed «estrarre un numero dispari» non sono uno il contrario dell'altro. Infatti nel mazzo ci sono anche delle figure, che sono carte senza numero.

Nei quattro esercizi che seguono sono indicate, per ogni esperimento, tre coppie di possibili eventi. Per ogni coppia, indica se sono eventi contrari oppure no; in caso di risposta affermativa, calcola la probabilità di entrambi gli eventi.

23 Lancio di un dado a sei facce.

E_1 = «esce il numero 3»;
E_2 = «esce un numero dispari».

E_1 = «esce un multiplo di 2»;
E_2 = «esce un numero dispari».

E_1 = «esce un multiplo di 3 e di 5»;
E_2 = «esce un numero pari».

24 Si estrae un numero dal sacchetto della tombola.

E_1 = «è un numero maggiore di 10»;
E_2 = «è un numero dispari».

E_1 = «è un numero pari»;
E_2 = «è un numero minore di 10».

E_1 = «è un numero con due cifre uguali»;
E_2 = «è un numero pari».

25 Estrazione di una pallina da un'urna che contiene 8 palline gialle, 4 rosse e 10 verdi.

E_1 = «è una pallina gialla»;
E_2 = «è una pallina non gialla».

E_1 = «è una pallina bianca»;
E_2 = «è una pallina rossa».

E_1 = «è una pallina verde»;
E_2 = «è una pallina rossa o gialla».

26 Si fa girare la ruota della roulette. La pallina si ferma su:

E_1 = «un numero nero»;
E_2 = «un numero rosso».

E_1 = «0»;
E_2 = «un numero rosso o nero».

E_1 = «un numero dispari»;
E_2 = «un numero pari».

27 Calcola la probabilità che nel lancio di un dado si verifichi l'evento contrario dell'evento:

«esce un multiplo di 2». $\left[\frac{1}{2}\right]$

28 Calcola la probabilità che nel lancio di un dado non esca:
a) il numero 5;
b) un numero maggiore di 5;
c) un numero minore di 5.
$\left[a)\ \frac{5}{6};\ b)\ \frac{5}{6};\ c)\ \frac{1}{3}\right]$

29 Un'urna contiene 5 palline rosse e 3 bianche. Calcola la probabilità che, estraendone una a caso, non esca una pallina bianca. $\left[\frac{5}{8}\right]$

30 Un'urna contiene 8 palline bianche, 5 palline nere e 7 palline rosse. Si estrae una pallina. Calcola la probabilità che:
a) esca una pallina nera;
b) non esca una pallina nera;
c) non esca una pallina rossa.
$\left[a)\ \frac{1}{4};\ b)\ \frac{3}{4};\ c)\ \frac{13}{20}\right]$

2. La probabilità della somma logica di eventi

Teoria a pag. β4

RIFLETTI SULLA TEORIA

31 **TEST** Si estrae una carta da un mazzo di 52 carte. La probabilità che la carta estratta sia rossa, o una figura, o un asso è:

A $\frac{21}{26}$. B $\frac{9}{13}$. C $\frac{10}{13}$. D $\frac{11}{13}$. E $\frac{17}{26}$.

32 **TEST** La probabilità che, nell'estrazione del lotto, il primo estratto sulla ruota di Milano sia un numero primo o un numero dispari è:

A $\frac{22}{45}$. B $\frac{1}{2}$. C $\frac{7}{9}$. D $\frac{23}{45}$. E $\frac{4}{15}$.

ESERCIZI

Nel sito: ► 6 esercizi di recupero

Gli eventi unione e intersezione

ESERCIZIO GUIDA

33 In un cassetto ci sono 16 biglie numerate da 1 a 16. Estraiamo una biglia a caso e consideriamo gli eventi:

E_1 = «estrazione di un numero dispari e divisibile per 3»;
E_2 = «estrazione di un numero dispari o divisibile per 3».

Qual è l'insieme degli eventi favorevoli a E_1? E quello degli eventi favorevoli a E_2?

L'insieme universo è:

$U = \{1, 2, 3, \ldots, 14, 15, 16\}$.

L'evento E_1 è composto da due eventi:

E_1' = «estrazione di un numero dispari»;
E_1'' = «estrazione di un numero divisibile per 3».

Insieme degli eventi favorevoli a E_1':

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$.

Insieme degli eventi favorevoli a E_1'':

$B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.

L'insieme favorevole all'evento E_1 è l'intersezione di A e B: $A \cap B = \{3, 9, 15\}$.

L'evento E_2 è formato dagli stessi eventi, però legati dal connettivo «o»; quindi l'insieme degli eventi favorevoli è l'unione di A e di B:

$A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15\}$.

34 Nel lancio di un dado, considera i due eventi seguenti:

E_1 = «esce un multiplo di 3 o un numero pari»;

E_2 = «esce un multiplo di 3 e un numero pari».

Scrivi qual è l'insieme dei casi favorevoli a ciascun evento.

35 Un'urna contiene 5 palline rosse, 6 bianche e 4 gialle. Considera gli eventi:

E_1 = «estrazione di una pallina gialla»;

E_2 = «estrazione di una pallina nera».

a) Qual è l'insieme dei casi favorevoli a E_1 ed E_2?

b) Scrivi l'evento unione e determina l'insieme che lo rappresenta.

36 Nel lancio di due monete identiche, qual è l'insieme universo e l'insieme dei casi favorevoli all'evento «escono due croci»?

37 Nel lancio contemporaneo di due dadi, quanti elementi contiene l'insieme universo? Qual è l'insieme dei casi favorevoli all'evento «la somma dei due numeri è pari»?

Gli eventi compatibili e gli eventi incompatibili

38 Considera il lancio di un dado. Quali delle seguenti coppie di eventi sono compatibili?

a) «Esce il numero 2, esce un multiplo di 2».

b) «Esce un numero dispari, esce il numero 4».

c) «Esce un numero primo, esce un numero pari».

39 Nell'estrazione di una carta da un mazzo di 40, determina quali fra i seguenti eventi sono compatibili e quali incompatibili:

a) «esce un re»;

b) «esce un asso»;

c) «esce una figura»;

d) «esce una carta di quadri».

40 Si estrae un gettone da una scatola che ne contiene 25 numerati. Quali dei seguenti eventi sono compatibili e quali incompatibili?

a) «Esce un numero maggiore di 10».

b) «Esce un multiplo di 2».

c) «Esce un numero dispari».

Il teorema della somma per eventi incompatibili

ESERCIZIO GUIDA

41 In un sacchetto ci sono 30 gettoni rossi, 20 neri e 15 bianchi. Calcoliamo la probabilità che venga estratto a caso un gettone nero o bianco.

L'evento che ci interessa è

E = «estrazione di un gettone nero o bianco»,

composto dai due eventi:

E_1 = «estrazione di un gettone nero»;

E_2 = «estrazione di un gettone bianco».

Poiché E_1 ed E_2 sono incompatibili, è sufficiente sommare le probabilità $p(E_1)$ e $p(E_2)$.

$$p(E_1) = \frac{20}{65} = \frac{4}{13};$$

$$p(E_2) = \frac{15}{65} = \frac{3}{13};$$

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) = \frac{4}{13} + \frac{3}{13} = \frac{7}{13}.$$

42 Un cassetto contiene 18 calzini blu, 6 neri e 4 grigi. Calcola la probabilità che, estraendone uno a caso, esso sia blu o grigio. $\left[\frac{11}{14}\right]$

43 Su uno scaffale sono posati 12 musicassette, 20 compact disc e 14 floppy disk. Prendendo un oggetto a caso, qual è la probabilità di prendere un compact disc o un floppy disk? $\left[\frac{17}{23}\right]$

44 Qual è la probabilità di estrarre a caso una biro rossa o nera da un cassetto che ne contiene 20 rosse, 15 nere e 23 blu? $\left[\frac{35}{58}\right]$

45 Su un tavolo ci sono 65 lampadine piccole, 35 medie e 50 grosse. Qual è la probabilità che, prendendo una lampadina a caso, essa sia media o grossa? $\left[\frac{17}{30}\right]$

46 Una cassaforte contiene 400 banconote da 5 euro, 220 da 10 euro e 700 da 20 euro. Qual è la probabilità di estrarne a caso una da 5 euro o da 10 euro? $\left[\frac{31}{66}\right]$

47 In una busta sono contenute 28 figurine numerate da 1 a 28. Calcola la probabilità di estrarre a caso una figurina con numero dispari o multiplo di 4. $\left[\frac{3}{4}\right]$

48 In un'urna vengono introdotti 100 bigliettini gialli, verdi e rossi. I gialli sono 40, i verdi sono i $\frac{2}{3}$ dei rossi.
Calcola la probabilità che, estraendone uno a caso, esso sia verde o rosso. $\left[\frac{3}{5}\right]$

49 Una scatola contiene 54 fra cioccolatini, caramelle e liquirizie. Sapendo che i cioccolatini sono il doppio delle liquirizie e le caramelle sono i $\frac{3}{2}$ delle liquirizie, calcola la probabilità di prendere a caso un cioccolatino o una caramella. $\left[\frac{7}{9}\right]$

50 Nel suo tratto di spiaggia, un bagnino ha 180 ombrelloni, a righe, a quadri o a fiori. Gli ombrelloni a quadri sono 44.
La probabilità che venga assegnato a un bagnante un ombrellone a righe è $\frac{3}{5}$.
Qual è la probabilità che venga assegnato a caso un ombrellone a fiori? $\left[\frac{7}{45}\right]$

51 In un negozio ci sono 240 paia di jeans blu, rossi e neri. La probabilità di prendere a caso un paio blu è $\frac{2}{3}$. Sapendo che i jeans neri sono 60, calcola la probabilità di prendere a caso un paio di jeans rossi. $\left[\frac{1}{12}\right]$

52 In una busta ci sono 210 francobolli, alcuni italiani, altri francesi, altri ancora tedeschi. La probabilità che si prenda a caso un francobollo italiano è $\frac{2}{7}$. I francobolli tedeschi sono 50. Calcola la probabilità che si prenda a caso un francobollo francese. $\left[\frac{10}{21}\right]$

53 In un'urna ci sono palline gialle, rosse e verdi. La probabilità che esca una pallina rossa o verde è $\frac{2}{5}$. Le palline gialle sono 45. Il numero delle rosse è doppio di quello delle verdi. Quante sono le palline verdi? [10]

Il teorema della somma per eventi compatibili

ESERCIZIO GUIDA

54 In un sacchetto ci sono 16 gettoni: 7 di forma quadrata (3 rossi e 4 verdi) e 9 di forma circolare (4 rossi e 5 verdi). Qual è la probabilità di estrarre a caso un gettone rosso oppure tondo?

Gli eventi E_1 = «estrazione di un gettone rosso» ed E_2 = «estrazione di un gettone tondo» sono compatibili; infatti, un gettone può essere contemporaneamente rosso e tondo. Calcoliamo $p(E_1)$ e $p(E_2)$ tenendo presente che i casi possibili sono 16:

$$p(E_1) = \frac{7}{16};\ p(E_2) = \frac{9}{16}.$$

Inoltre, per calcolare $p(E_1 \cap E_2)$, teniamo presente che i casi favorevoli sono i gettoni rossi e tondi:

$$p(E_1 \cap E_2) = \frac{4}{16}.$$

La probabilità che si estragga un gettone rosso oppure tondo è:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = \frac{7}{16} + \frac{9}{16} - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}.$$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

55 Calcola la probabilità che, lanciando un dado, si verifichi almeno uno dei due eventi: E_1 = «numero dispari», E_2 = «numero minore di 4». $\left[\frac{2}{3}\right]$

56 Calcola la probabilità che, lanciando un dado, esca un numero maggiore di 2 o pari. $\left[\frac{5}{6}\right]$

57 In una sacca sportiva ci sono 10 maglie numerate da 1 a 10. Calcola la probabilità che, estraendo a caso una maglia, questa abbia un numero dispari o un numero maggiore di 5. $\left[\frac{4}{5}\right]$

58 I 24 libri di uno scaffale sono numerati da 1 a 24. Qual è la probabilità che, scegliendone uno a caso, si prenda un libro con numero pari o minore di 12? $\left[\frac{3}{4}\right]$

59 In un negozio ci sono 32 paia di sci numerati da 1 a 32. Calcola la probabilità che, prendendone uno a caso, abbia il numero dispari o maggiore di 23. $\left[\frac{21}{32}\right]$

3. La probabilità del prodotto logico di eventi

Teoria a pag. β8

RIFLETTI SULLA TEORIA

60 VERO O FALSO?

a) Si estraggono consecutivamente due carte da un mazzo di 40 carte senza rimettere la prima carta nel mazzo. Gli eventi E_1 = «La prima carta è un quattro» ed E_2 = «La seconda carta è un numero pari» sono indipendenti. V F

b) Se si effettuano estrazioni consecutive da un'urna contenente palline di colore diverso, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna, si hanno eventi dipendenti. V F

c) Se sappiamo che $p(E_1) = \frac{1}{10}$ e $p(E_2 | E_1) = \frac{2}{3}$, allora $p(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{15}$. V F

d) Un'urna contiene 3 palline nere, numerate da 1 a 3, e 5 palline gialle, numerate da 1 a 5. L'evento E = «estrazione di una pallina gialla o nera con un numero pari» è un evento intersezione. V F

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 12 esercizi di recupero

La probabilità condizionata

ESERCIZIO GUIDA

61 Un amico lancia un dado e, senza farcelo vedere, dice: «È uscito un numero minore di 5». Qual è la probabilità che sia uscito il 3?

Consideriamo i due eventi:

E_1 = «estrazione del numero 3»;

E_2 = «estrazione di un numero minore di 5».

Insieme universo: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
insieme degli eventi favorevoli a E_1:

$A = \{3\}$;
insieme degli eventi favorevoli a E_2:

$B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Dunque $p(E_1) = \frac{1}{6}$, ma l'evento E_1 è condizionato dal fatto che si è verificato E_2; quindi dobbiamo calcolare la probabilità condizionata $p(E_1 | E_2)$; l'insieme universo per $E_1 | E_2$ è allora B, mentre quello dei casi favorevoli è $A \cap B = \{3\}$.

Perciò la probabilità cercata è $p(E_1 | E_2) = \frac{1}{4}$.

62 Calcola la probabilità che nel lancio di un dado esca un numero primo, sapendo che è uscito un numero minore di 5. $\left[\frac{1}{2}\right]$

63 Da una scatola contenente 20 palline, numerate da 1 a 20, viene estratta a caso una pallina. Calcola la probabilità che si sia realizzato l'evento «estrazione di un multiplo di 3», sapendo che è uscito un numero minore di 12. $\left[\frac{3}{11}\right]$

64 Un'urna contiene palline numerate da 1 a 12, le prime 7 sono nere, le altre rosse. Calcola la probabilità che venga estratta una pallina con numero pari condizionata dal fatto che la pallina sia nera. $\left[\frac{3}{7}\right]$

65 Ripeti l'esercizio precedente, modificando la condizione: la pallina estratta è rossa. $\left[\frac{3}{5}\right]$

66 Calcola la probabilità che, estraendo una carta da un mazzo di 40, essa sia un re, sapendo che è uscita una figura. $\left[\frac{1}{3}\right]$

67 Un'urna contiene 22 palline numerate da 1 a 22. Calcola la probabilità che, estraendo una pallina, essa rechi un numero multiplo di 3, sapendo che è uscito un numero dispari. $\left[\frac{4}{11}\right]$

68 Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, la somma delle facce sia un numero dispari, sapendo che le facce portano numeri diversi. $\left[\frac{3}{5}\right]$

Il teorema del prodotto per eventi indipendenti

ESERCIZIO GUIDA

69 In un sacchetto ci sono 30 gettoni rossi, 20 neri e 15 bianchi. Viene estratto un primo gettone; il gettone viene reimmesso nel sacchetto; viene estratto un secondo gettone. Calcoliamo la probabilità che si verifichino i seguenti eventi:
a) i due gettoni sono rossi (E_1);
b) viene estratto prima un gettone nero e poi uno bianco (E_2);
c) vengono estratti un gettone nero e uno bianco in un ordine qualsiasi (E_3).

Poiché le estrazioni sono **con reimmissione**, gli eventi sono indipendenti.

a) La probabilità $p(R)$ che venga estratto un gettone rosso è:

$$p(R) = \frac{30}{65} = \frac{6}{13}$$

quindi, per il teorema del prodotto, la probabilità che ne vengano estratti due è:

$$p(E_1) = p(R) \cdot p(R) = \frac{6}{13} \cdot \frac{6}{13} = \frac{36}{169}.$$

b) La probabilità $p(N)$ che venga estratto un gettone nero è:

$$p(N) = \frac{20}{65} = \frac{4}{13}.$$

La probabilità $p(B)$ che venga estratto uno bianco è:

$$p(B) = \frac{15}{65} = \frac{3}{13}.$$

La probabilità dell'evento E_2 è:

$$p(E_2) = p(N) \cdot p(B) = \frac{4}{13} \cdot \frac{3}{13} = \frac{12}{169}.$$

c) Poiché non viene precisato in quale ordine devono essere estratti i due gettoni, dobbiamo considerare l'evento E_3 come evento unione dei due eventi:

- «esce un gettone nero e poi uno bianco» (E_2);
- «esce un gettone bianco e poi uno nero» (E_2').

Conosciamo già la probabilità dell'evento E_2. Anche E_2' ha la stessa probabilità, infatti:

$$p(E_2') = p(B) \cdot p(N) = \frac{3}{13} \cdot \frac{4}{13} = \frac{12}{169}.$$

Per il teorema della somma:

$$p(E_3) = p(E_2) + p(E_2') = \frac{12}{169} + \frac{12}{169} = \frac{24}{169}.$$

70 Un sacchetto contiene 4 biglietti blu, 5 rossi e 1 bianco. Calcola la probabilità che in due estrazioni successive, con reimmissione del primo estratto, escano nell'ordine un biglietto blu e uno rosso. $\left[\frac{1}{5}\right]$

71 In un cesto ci sono animali di peluche: 6 cagnolini, 10 gattini, 4 papere. Qual è la probabilità di estrarre a caso, reimmettendo il primo oggetto estratto, un gattino e poi una papera? $\left[\frac{1}{10}\right]$

72 Dal sacchetto della tombola si fanno due estrazioni successive con reimmissione. Calcola la probabilità di ottenere un numero pari e uno dispari. $\left[\frac{1}{2}\right]$

73 Da un mazzo di 40 carte se ne estraggono due con reimmissione. Calcola la probabilità di ottenere una figura e una carta minore di 7. $\left[\frac{9}{25}\right]$

74 In uno scatolone ci sono 52 paia di scarpe sportive, alcune da tennis, altre da jogging, altre da pallavolo: quelle da tennis sono la metà di quelle da jogging che sono il doppio di quelle da pallavolo. Calcola la probabilità, in due estrazioni con reimmissione, di avere nell'ordine un paio di scarpe da jogging e uno da pallavolo. $\left[\frac{1}{8}\right]$

75 In una libreria ci sono 1500 volumi fra libri gialli, romanzi e saggi. Sapendo che i romanzi sono 348 e i gialli sono il triplo dei saggi, calcola la probabilità di ottenere, in due estrazioni successive con reimmissione, un libro giallo e un romanzo. $\left[\frac{4176}{15\,625}\right]$

76 La probabilità che una persona colpisca un bersaglio è del 20% e la probabilità che lo colpisca un'altra persona è del 60%. Le due persone sparano contemporaneamente. Calcola la probabilità che:

a) il bersaglio venga colpito da entrambi;
b) almeno uno colpisca il bersaglio.

[a) 12%; b) 68%]

Il teorema del prodotto per eventi dipendenti

ESERCIZIO GUIDA

77 Consideriamo il sacchetto dell'esercizio guida 69, contenente 30 gettoni rossi, 20 neri e 15 bianchi. Calcoliamo la probabilità che si verifichino i seguenti eventi:

a) vengono estratti contemporaneamente due gettoni rossi (E_1);
b) viene estratto prima un gettone nero e poi uno bianco, senza però reimmettere il primo gettone nel sacchetto (E_2);
c) vengono estratti contemporaneamente un gettone nero e uno bianco (E_3).

---

a) Estrarre **contemporaneamente** due gettoni equivale a estrarre prima un gettone e poi, senza rimetterlo nel sacchetto, estrarre un secondo gettone. La probabilità che il primo gettone sia rosso è:

$$p(R) = \frac{30}{65} = \frac{6}{13}.$$

Senza un gettone, sia i casi possibili sia quelli favorevoli sono diminuiti di 1. Perciò la probabilità che il secondo gettone sia rosso, supposto che il primo sia stato rosso, è:

$$p(R \mid R) = \frac{29}{64}.$$

Per il teorema del prodotto per eventi dipendenti:

$$p(E_1) = p(R) \cdot p(R \mid R) = \frac{6}{13} \cdot \frac{29}{64} = \frac{87}{416}.$$

b) Procedendo come nel caso precedente:

$$p(N) = \frac{20}{65} = \frac{4}{13};$$

$$p(B \mid N) = \frac{15}{64}.$$

Si ha quindi:

$$p(E_2) = p(N) \cdot p(B \mid N) = \frac{4}{13} \cdot \frac{15}{64} = \frac{15}{208}.$$

c) Considerare l'estrazione contemporanea di un gettone nero e di uno bianco equivale a considerare l'evento unione dei seguenti eventi senza reimmissione:

- «estrarre prima un gettone nero e poi uno bianco» (E_2);
- «estrarre prima un gettone bianco e poi uno nero» (E_2').

Abbiamo già calcolato la probabilità di E_2 nel caso b). Calcoliamo la probabilità dell'evento E_2':

$$p(B) = \frac{15}{65} = \frac{3}{13};$$

$$p(N \mid B) = \frac{20}{64} = \frac{5}{16};$$

$$p(E_2') = \frac{3}{13} \cdot \frac{5}{16} = \frac{15}{208}.$$

Le probabilità di E_2 ed E_2' sono uguali.
Applicando il teorema della somma:

$$p(E_3) = p(E_2) + p(E_2') = \frac{15}{208} + \frac{15}{208} = \frac{15}{104}.$$

78 Nell'estrazione contemporanea di due carte da un mazzo di 40, qual è la probabilità che escano due 5? $\left[\frac{1}{130}\right]$

79 Un cassetto contiene 25 magliette; quelle a manica corta sono i $\frac{2}{3}$ di quelle a manica lunga. Calcola la probabilità che, estraendone due contemporaneamente, siano entrambe a manica lunga. $\left[\frac{7}{20}\right]$

80 Calcola la probabilità che da un mazzo di 40 carte vengano estratti contemporaneamente un re e un asso. $\left[\frac{4}{195}\right]$

81 Un ragazzo ha una collezione di 40 videocassette: 10 di film vari, 12 di cartoni animati e le rimanenti di film gialli. Qual è la probabilità che, estraendone due contemporaneamente, si abbia un cartone animato e un film giallo? $\left[\frac{18}{65}\right]$

82 Da un'urna contenente 20 palline gialle, 18 blu e 4 rosse si estraggono tre palline, senza reimmissione nell'urna. Calcola la probabilità che siano la prima rossa, la seconda blu, la terza gialla. $\left[\frac{6}{287}\right]$

83 Uno scatolone contiene 7 palloni da pallavolo, 5 da pallacanestro e 8 da rugby. Qual è la probabilità che, prelevandone 3, senza reimmetterli nello scatolone, i primi due siano da rugby e il terzo da pallavolo? $\left[\frac{49}{855}\right]$

84 Un cestino contiene 100 fra castagne, noci e nocciole. Le castagne sono 20 e le noci sono $\frac{1}{4}$ delle nocciole. Calcola la probabilità che, estraendone due, senza reimmissione della prima, si ottenga prima una noce e poi una nocciola. $\left[\frac{256}{2475}\right]$

4. Fra probabilità e statistica

→ Teoria a pag. β14

RIFLETTI SULLA TEORIA

85 VERO O FALSO?

a) Se la frequenza di un evento è 0 allora l'evento è impossibile. V F

b) Quando per un evento è possibile calcolare la probabilità come quoziente fra numero dei casi favorevoli e numero dei casi possibili, è anche possibile calcolare la probabilità statistica. V F

c) In base alla legge empirica del caso, il valore della frequenza dell'estrazione di una figura da un mazzo di 40 carte tende al valore 0,3 quando il numero delle prove tende a diventare infinito. V F

d) Una società di assicurazione ha rilevato che, su 14 300 automobilisti assicurati, 4320 hanno presentato denuncia di sinistro, e valuta che la probabilità di incorrere in un incidente automobilistico sia del 30,21%. Questa valutazione è corretta. V F

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 8 esercizi di recupero

La legge empirica del caso

ESERCIZIO GUIDA

86 Un'urna contiene 60 gettoni telefonici e 30 gettoni per distributori di merendine. Si effettuano 900 estrazioni reinserendo ogni volta il gettone estratto. Quante volte, approssimativamente, uscirà un gettone telefonico?

Per la legge empirica del caso possiamo identificare la frequenza relativa con la probabilità.
La probabilità che esca un gettone telefonico è:

$$p(T) = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}.$$

Per ottenere la frequenza dei gettoni telefonici, moltiplichiamo la frequenza relativa, coincidente con la probabilità, per il numero delle estrazioni:

$$F(T) = \frac{2}{3} \cdot 900 = 600.$$

Su 900 estrazioni ci aspettiamo venga estratto un gettone telefonico circa 600 volte.

87 Si lancia 60 volte un dado. Quante volte uscirà approssimativamente un numero minore di 3? [20]

88 Si lancia 1800 volte un dado. Quante volte uscirà approssimativamente un numero diverso da 2? [1500]

89 Una scatola contiene 150 fra cioccolatini e caramelle. Si effettuano 500 estrazioni con reimmissione e si ottengono 350 caramelle. Quanti sono approssimativamente i cioccolatini? [45]

I giochi d'azzardo

ESERCIZIO GUIDA

90 Carla e Guido utilizzano il gioco della tombola per fare scommesse. Carla estrae un numero a caso: se è un multiplo di 5, Guido dovrà pagare 10 euro. Affinché il gioco sia equo, quanto dovrà pagare Carla se il numero non è un multiplo di 5?

I numeri della tombola sono 90 e i multipli di 5 sono 18. La probabilità che venga estratto un multiplo di 5 è:

$$p = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}.$$

La probabilità dell'evento contrario è:

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Indicando con S_C la somma pagata da Carla e con S_G la somma pagata da Guido, perché il gioco sia equo deve valere la seguente proporzione:

$$S_C : p = S_G : q;$$

$$S_C : \frac{1}{5} = 10 : \frac{4}{5};$$

$$S_C = 2{,}50.$$

Se vince Guido, Carla deve pagare 2,50 euro.

91 Un giocatore punta 2 euro e vince se, lanciando un dado, esce il numero 4. Quale deve essere la posta del suo avversario perché il gioco sia equo? [10 euro]

92 Un giocatore punta 2,50 euro e vince se, lanciando un dado, esce un numero dispari. Quanto deve valere la posta del suo avversario perché il gioco sia equo? [2,50 euro]

93 Un'urna contiene 30 palline rosse e 20 bianche. Un giocatore punta 3,30 euro sull'uscita di una pallina rossa. Quale deve essere la posta dell'avversario perché il gioco sia equo? [2,20 euro]

RIEPILOGO LA PROBABILITÀ

Nel sito: ▶ 15 esercizi in più

94 Un sacchetto contiene dei gettoni numerati da 1 a 100. Calcola la probabilità che esca:
a) un numero dispari;
b) un multiplo di 8;
c) un numero a due cifre di cui la seconda cifra sia uguale a 3;
d) un numero non primo.

$\left[\text{a) } \frac{1}{2}; \text{ b) } \frac{3}{25}; \text{ c) } \frac{9}{100}; \text{ d) } \frac{3}{4}\right]$

95 Dal sacchetto della tombola viene estratto un numero. Calcola la probabilità che il numero sorteggiato sia un multiplo di 3, sapendo che è uscito un multiplo di 5. $\left[\frac{1}{3}\right]$

96 Un frigorifero contiene 30 gelati: quelli alla fragola sono 4 in meno di quelli alla crema e 4 in più di quelli al cioccolato. Qual è la probabilità che, estraendone uno a caso, sia al cioccolato o alla fragola? $\left[\frac{8}{15}\right]$

97 In un astuccio ci sono 22 oggetti, tra penne a sfera, matite e pennarelli colorati. La probabilità di prendere a caso un pennarello è $\frac{6}{11}$. Le matite sono 4. Calcola la probabilità di prendere a caso una penna a sfera. $\left[\frac{3}{11}\right]$

98 Da un mazzo di 40 carte se ne estraggono 3, reimmettendo ogni carta nel mazzo. Calcola la probabilità che si abbia nell'ordine un cinque, un asso e una figura. $\left[\frac{3}{1000}\right]$

99 Un vaso contiene 240 biglie colorate (blu o rosse). Sapendo che in 800 estrazioni con reimmissione sono uscite 350 biglie rosse, quante biglie blu ci sono approssimativamente nel vaso? [135]

100 L'evento E ha una probabilità di verificarsi pari a $\frac{9}{10}$; sapendo che si puntano 9 euro e che si vince se l'evento si verifica, calcola la posta dell'avversario perché il gioco sia equo. [1 euro]

101 Un giocatore punta 1 euro e vince se, lanciando un dado, esce un numero maggiore di 4. Calcola la posta dell'avversario perché il gioco sia equo. [2 euro]

102 Calcola la probabilità che, estraendo una pallina da un'urna che ne contiene 220 numerate in successione, si abbia un numero dispari o un numero maggiore di 180. $\left[\frac{13}{22}\right]$

103 Un cassetto contiene 28 magliette polo: 10 azzurre e 6 bianche a manica corta, 4 azzurre e 8 bianche a manica lunga. Calcola la probabilità che, estraendone una a caso, sia azzurra o a manica corta. $\left[\frac{5}{7}\right]$

104 Da un mazzo di 40 carte vengono estratte contemporaneamente due carte. Calcola la probabilità che siano due sette. $\left[\frac{1}{130}\right]$

105 Da un sacchetto contenente 25 gettoni telefonici e 35 gettoni per distributori di bibite vengono estratti contemporaneamente due gettoni. Qual è la probabilità che siano entrambi telefonici? $\left[\frac{10}{59}\right]$

106 Un cestino contiene 25 biglietti a quadretti, 15 a righe e 8 colorati. Calcola la probabilità che, estraendone due contemporaneamente, siano uno a righe e uno colorato. $\left[\frac{5}{47}\right]$

107 Uno scaffale di un negozio contiene 58 tute, di cui 19 con pantalone lungo, 15 con pantalone corto e le rimanenti con la cerniera. Qual è la probabilità che, prendendone due contemporaneamente, siano una con cerniera e una con pantalone lungo? $\left[\frac{8}{29}\right]$

108 Dal sacchetto della tombola vengono estratti contemporaneamente due numeri. Calcola la probabilità che uno sia primo e l'altro multiplo di 10. $\left[\frac{24}{445}\right]$

109 Per assegnare i premi di una lotteria si estraggono tre biglietti senza reimmissione. Sapendo che 26 biglietti sono azzurri, 40 gialli e 14 verdi, calcola la probabilità che il primo sia giallo e gli altri due azzurri. $\left[\frac{25}{474}\right]$

110 Calcola la probabilità che, estraendo successivamente 2 carte da un mazzo di 40, senza rimettere quella estratta per prima nel mazzo, esse siano:

a) la prima una figura e la seconda una non figura;
b) una figura e un sette. $\left[\frac{14}{65}; \frac{4}{65}\right]$

111 Si hanno due mazzi da 40 carte. Da ciascuno viene estratta una carta. Calcola la probabilità che:

a) le due carte siano due re;
b) siano due figure;
c) almeno una carta sia un asso. $\left[\frac{1}{100}; \frac{9}{100}; \frac{19}{100}\right]$

112 Si hanno due urne. La prima contiene 4 palline bianche e 6 rosse. La seconda ne contiene 3 bianche e 5 rosse. Calcola la probabilità che, estraendo una pallina da ciascuna urna, esse siano:

a) entrambe bianche;
b) bianca dalla prima urna e rossa dalla seconda;
c) una bianca e una rossa. $\left[\frac{3}{20}; \frac{1}{4}; \frac{19}{40}\right]$

113 Si hanno due urne. La prima contiene 4 palline bianche e 6 rosse. La seconda ne contiene 3 bianche e 5 rosse. Si estrae una pallina dalla prima urna e la si inserisce nella seconda. Si estrae poi una pallina dalla seconda urna. Calcola la probabilità che le palline siano:

a) entrambe bianche;
b) bianca dalla prima urna e rossa dalla seconda;
c) una bianca e una rossa. $\left[\frac{8}{45}; \frac{2}{9}; \frac{19}{45}\right]$

LABORATORIO DI MATEMATICA
La probabilità con Excel

ESERCITAZIONE GUIDATA

Un sacchetto contiene n gettoni, di cui r rossi, g gialli, b blu. Costruiamo un foglio elettronico che riceva in ingresso i numeri n, r, g, controlli che siano accettabili, calcoli b, determini la probabilità dell'estrazione di un gettone blu, verifichi il risultato teorico con la simulazione di 24 estrazioni, supponendo che ogni volta il gettone venga rimesso nel sacchetto. Proviamo il foglio con $n = 90$, $g = 40$, $g = 20$.

- Attiviamo Excel e inseriamo le didascalie come vediamo in figura 1.
- Per il controllo dei dati digitiamo `= SE(C4 > 0; "accettabile,"; "errato,")` in D4, `= SE(C5 > C4; "errato,";"accettabile,")` in D5, `= SE(C6 > C4 - C5; "errato."; "accettabile.")` in D6 e `= SE(O(D4 = "errato,"; D5 = "errato,"; D6 = "errato."); ""; "=")` in D7.
- Per ottenere la probabilità di uscita del gettone blu, digitiamo `= C4 - (C5+C6)` in C7, `= SE(D7 = ""; "non è calcolabile"; C7/C4)` in C9 e la dichiariamo in formato percentuale.
- Per simulare le 24 estrazioni, digitiamo `= INT($C$4 * CASUALE()) + 1` in A12, copiamo la A12 sino alla D12 e copiamo la riga A12:D12 sino alla riga 17.
- Per abbinare i colori ai numeri casuali, digitiamo `= SE(A12 < $C$5 + 1; "rosso"; SE(A9 < $C$5 + $C$6 + 1; "giallo";"blu")` in A18, copiamo la A18 sino alla D18 e copiamo la riga A18:D18 sino alla riga 23.
- Per calcolare la percentuale di uscite del gettone blu digitiamo `= CONTA.SE(A18:D23; "blu")` in C25, digitiamo `= C25/24` in C26 e la dichiariamo in formato percentuale.
- In C4, C5, C6 inseriamo 90, 40, 20 e otteniamo il foglio di figura 1.
- Se battiamo il tasto F9 effettuiamo un'altra estrazione.

	A	B	C	D
1	Un problema sulla probabilità			
2				
3	Il numero dei gettoni			Il dato è
4	totale		90	accettabile,
5	di colore rosso		40	accettabile,
6	di colore giallo		20	accettabile.
7	di colore blu		30	=
8				
9	La probabilità del blu		33,3%	
10				
11	Proviamo 24 estrazioni			
12	1	61	88	58
13	56	73	16	22
14	21	20	78	64
15	15	45	23	70
16	71	22	27	88
17	43	1	52	63
18	rosso	blu	blu	giallo
19	giallo	blu	rosso	rosso
20	rosso	rosso	blu	blu
21	rosso	giallo	rosso	blu
22	blu	rosso	rosso	blu
23	giallo	rosso	giallo	blu
24				
25	Il blu è uscito		9	volte,
26	in percentuale		37,5%	.

▲ **Figura 1**

Nel sito: ► 1 esercitazione guidata ► 8 esercitazioni in più

Esercitazioni

Per ognuno dei seguenti problemi costruisci un foglio elettronico che riceva i dati d'ingresso indicati, controlli la loro accettabilità e determini le probabilità teoriche richieste. Nel foglio fai comparire i risultati delle prove casuali consigliate per verificare i risultati teorici, supponi che dopo ogni estrazione l'oggetto venga rimesso nel contenitore.

1 Un'urna contiene n gettoni di cui v verdi ed r rossi. Dati n e v, calcola la probabilità di estrarre un gettone rosso e quella di estrarre un gettone verde. Simula cento estrazioni.

2 Un cestino contiene n biglie, di cui r rosse, b bianche, 20 arancioni. Dati n e r, calcola le probabilità che, estraendone due, escano una rossa e una arancione in un ordine qualsiasi. Estrai una coppia di biglie, osserva se il caso è favorevole e poi rimettile nel cestino.

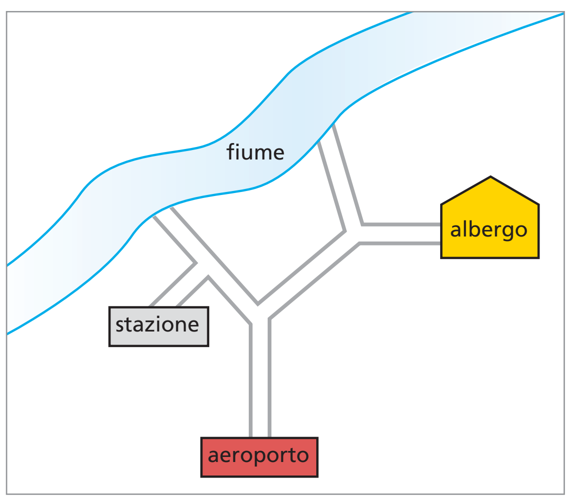
3 Determina le probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte: un asso, una carta di denari, il due di coppe. Per tre volte simula quaranta estrazioni registrando sul quaderno i risultati del foglio elettronico.

4 Un sacchetto contiene n gettoni, di cui a verdi, $a + 4$ gialli, $a - 8$ blu. Dato n, determina la probabilità dell'estrazione per ogni tipo di gettone. Simula centoventi estrazioni.

Matematica per il cittadino

TURISTA PER CASO

Un turista arriva in città dall'aeroporto e deve recarsi in albergo. Non conoscendo la strada, decide di affidarsi al caso e a ogni bivio lancia una moneta: quando esce testa, gira a destra, altrimenti svolta a sinistra.



1. Considerate le strade disegnate nella figura a lato, qual è la probabilità che il turista arrivi in albergo seguendo il percorso più breve?

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{3}$ C $\frac{1}{4}$ D $\frac{4}{3}$

2. Qual è la probabilità che egli raggiunga il fiume?

A 50% B 25% C 30% D 75%

3. Uscendo dall'aeroporto, il turista deve passare prima dalla stazione e poi dirigersi in albergo. Pur non conoscendo la strada, sa che se per errore raggiunge il fiume, deve tornare indietro fino al primo bivio che incontra, per poi lanciare di nuovo la moneta. Inoltre, se passa per la seconda volta da uno stesso bivio, lo riconosce e sceglie la strada corretta senza lanciare nuovamente la moneta. Al primo bivio, il turista lancia la moneta e gira a sinistra; in seguito lancia la moneta due volte e riesce a raggiungere i suoi due obiettivi. Spiega passo per passo il percorso compiuto.

4. Riferendoti alla prima domanda, modifica il disegno in modo tale che la probabilità che il turista raggiunga l'albergo dall'aeroporto, percorrendo il tragitto più breve, si riduca della metà.

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 30 test interattivi in più

1 Quali fra i seguenti eventi è impossibile?

A Lunedì prossimo ci sarà la nebbia.
B Lanciando un dado uscirà il numero 3.
C Domenica prossima tutte le squadre di serie A pareggeranno.
D Sabato andrò al mare.
E Lanciando un dado uscirà un numero a due cifre.

2 La probabilità di un evento aleatorio è:

A uguale a 1.
B uguale a 0.
C compresa tra 0 e 1.
D maggiore di 1.
E minore di 0.

3 Un sacchetto contiene 20 dischetti numerati da 1 a 20. Dobbiamo estrarre un dischetto con stampato sopra un numero pari e multiplo di 3. Quanti sono i casi favorevoli?

A 15 B 3 C 13 D 5 E 14

4 Da un mazzo di 40 carte viene estratta una carta. Quanti sono i casi favorevoli, se la carta deve essere di cuori o un tre?

A 13
B $\frac{13}{40}$
C 14
D 1
E $\frac{7}{20}$

5 Un sacchetto contiene 21 dischetti, ciascuno con stampata una lettera dell'alfabeto italiano. Qual è la probabilità di estrarre un disco con una consonante?

A $\frac{5}{21}$
B $\frac{16}{21}$
C $\frac{5}{16}$
D $\frac{16}{23}$
E 16

6 Due eventi si dicono incompatibili se:

A $E_1 \cup E_2 \neq \emptyset$.
B $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.
C $E_1 \cap E_2 = E_1 \cdot E_2$.
D $E_1 \cup E_2 = E_1 + E_2$.
E $E_1 \cup E_2 = \frac{E_1}{E_2}$.

7 Se due eventi E_1 ed E_2 sono compatibili allora $p(E_1 \cup E_2)$ è uguale a:

A $p(E_1) \cdot p(E_2)$.
B $p(E_1 + E_2)$.
C $p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$.
D $p(E_1) \cup p(E_2)$.
E $p(E_1) + p(E_2)$.

8 Un astuccio contiene 5 matite rosse, 2 blu, 3 verdi e 6 gialle. Qual è la probabilità di estrarre una matita gialla o blu?

A $\frac{3}{64}$
B $\frac{1}{2}$
C $\frac{2}{5}$
D $\frac{1}{8}$
E $\frac{3}{8}$

9 Due eventi si dicono indipendenti se:

A $E_1 \cup E_2 \neq \emptyset$.
B $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$.
C $p(E_1) = p(E_2)$.
D $p(E_1) = p(E_1 | E_2)$.
E $p(E_1) + p(E_2) = 1$.

10 Se due eventi sono indipendenti, la probabilità del loro evento intersezione è:

A $p(E_1) + p(E_2)$.
B $p(E_1) \cdot p(E_2) - p(E_2 | E_1)$.
C $p(E_1) \cdot p(E_2)$.
D $p(E_1) \cdot p(E_2 | E_1)$.
E $\frac{p(E_2)}{p(E_1)}$.

11 Le frasi che seguono sono riferite a due eventi compatibili E_1 ed E_2. Una sola è *falsa*, quale?

A Il verificarsi di E_1 non esclude il verificarsi contemporaneamente di E_2.

B Se si verifica E_2 si può verificare contemporaneamente E_1.

C L'intersezione di E_1 con E_2 è diversa dall'insieme vuoto.

D $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$.

E $p(E_1 \cap E_2) = 0$.

12 Le frasi che seguono sono riferite a due eventi indipendenti E_1 ed E_2. Una sola è *falsa*, quale?

A Il verificarsi di E_1 non modifica la probabilità di E_2.

B Il verificarsi di E_2 non modifica la probabilità di E_1.

C $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2)$.

D $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$.

E $p(E_1) = p(E_1 | E_2)$.

13 Da un'urna contenente 3 palline rosse e 10 palline bianche ne vengono estratte tre, una dopo l'altra, senza rimetterle ogni volta nel contenitore. Qual è la probabilità che siano tutte e tre rosse?

A $\frac{3}{13}$ B $\frac{6}{2187}$ C $\frac{1}{286}$ D $\frac{10}{13}$ E $\frac{7}{13}$

14 Su 7800 lanci di un dado, è uscito 1200 volte il numero 5. Qual è la probabilità statistica che con quel dado esca il numero 5?

A $\frac{1}{6}$ B $\frac{5}{6}$ C $\frac{5}{7800}$ D $\frac{1}{1200}$ E $\frac{2}{13}$

15 Un gioco è equo se, chiamate con $S(A)$ e $S(B)$ le somme puntate dai due giocatori, $p(A)$ e $p(B)$ le rispettive probabilità, vale:

A $S(A) + S(B) = p(A) + p(B)$.

B $S(A) \cdot S(B) = p(A) \cdot p(B)$.

C $p(A) : p(B) = S(A) : S(B)$.

D $S(A) : p(B) = S(B) : p(A)$.

E $S(A) \cdot p(A) = S(B) \cdot p(B)$.

SPIEGA PERCHÉ

16 Si consideri il lancio di un dado e i due eventi E_1 = «uscita di un numero pari» ed E_2 = «uscita di un numero multiplo di 3». L'evento $E_1 \cup E_2$ ha probabilità $p(E_1 \cup E_2) = \frac{2}{3}$ diversa dal valore di $p(E_1) + p(E_2)$. Perché?

17 Se E_1 e E_2 sono incompatibili, allora $p(E_1 | E_2) = 0$. Perché?

18 Due eventi E_1 ed E_2 si dicono indipendenti se $p(E_1) = p(E_1 | E_2)$. Perché?

19 Se $p(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{5}$ e $p(E_1) = \frac{1}{2}$, dimostra se è possibile che il risultato di $p(E_2)$ sia $\frac{4}{5}$. Perché?

20 Per calcolare la probabilità di un evento, che si verifica quando si devono verificare due o più eventi successivi, uno dopo l'altro, in modo prestabilito, si applica il teorema del prodotto logico. Perché?

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 15 esercizi in più

21 Nello scaffale di una biblioteca vi sono 10 libri gialli, 20 romanzi e 30 libri di fantascienza. Calcola la probabilità che venga scelto a caso un libro giallo o un libro di fantascienza. $\left[\frac{2}{3}\right]$

22 In un mazzo di quaranta carte le figure sono 12 e i semi sono quattro: coppe, bastoni, denari e spade. Qual è la probabilità di estrarre a caso una figura o una carta di bastoni? $\left[\frac{19}{40}\right]$

23 In un'urna ci sono 100 palline di colore bianco, rosso e nero. Le palline bianche sono 10. La probabilità di pescare una pallina nera è $\frac{3}{5}$. Qual è la probabilità di pescare una pallina rossa? Quante sono le palline rosse e le palline nere? $\left[\frac{3}{10}; 30; 60\right]$

24 La probabilità di estrarre un oggetto da un'urna è $\frac{2}{15}$. Calcola quante volte, approssimativamente, l'oggetto può essere estratto in 450 estrazioni con reimmissione. [60]

25 Si lancia 900 volte un dado a sei facce. Quante volte è probabile che si verifichi l'evento «esce il numero 1 o il numero 6»? [300]

26 Un sacchetto contiene 600 biglie bianche e nere. Sapendo che in 900 estrazioni con reimmissione sono uscite 375 biglie nere, calcola il probabile numero di biglie bianche nel sacchetto. [350]

27 Un cestino contiene 100 biglie di cui 50 rosse, 30 bianche e 20 nere. Calcola la probabilità che, estraendone due contemporaneamente, si ottengano una biglia bianca e una nera. $\left[\frac{4}{33}\right]$

28 Calcola la probabilità di estrarre 4 assi da un mazzo di 40 carte in questo ordine: asso di bastoni, asso di coppe, asso di denari, asso di spade. $\left[\frac{1}{2\,193\,360}\right]$

29 Da un mazzo di 40 carte si estrae una carta, la si rimette nel mazzo e si estrae quindi una seconda carta. Calcola la probabilità che:
a) le due carte siano due assi;
b) le due carte siano dello stesso seme;
c) le due carte siano una di bastoni l'altra di denari in un ordine qualsiasi.
$\left[\text{a) } \frac{1}{100}; \text{ b) } \frac{1}{16}; \text{ c) } \frac{1}{8}\right]$

30 Un'urna contiene 10 palline rosse, 6 palline bianche e 4 palline nere. Calcola la probabilità di estrarre una pallina rossa oppure una pallina nera. $\left[\frac{7}{10}\right]$

31 Lanciamo un dado e una moneta contemporaneamente. Calcola la probabilità che si verifichi l'evento «esce 6 ed esce testa». $\left[\frac{1}{12}\right]$

32 In un'urna ci sono 10 biglie bianche e 20 nere. Si estraggono contemporaneamente due biglie. Calcola la probabilità che siano entrambe nere. $\left[\frac{38}{87}\right]$

33 Un'urna contiene 10 biglie bianche e 20 nere. Si estrae una biglia, la si rimette nell'urna e quindi si procede a una seconda estrazione. Calcola la probabilità che le biglie estratte siano entrambe bianche. $\left[\frac{1}{9}\right]$

34 Calcola quante volte ci aspettiamo di fare 6 lanciando 120 volte un dado a sei facce. [20]

35 Due giocatori, A e B, giocano all'estrazione di una carta da un mazzo di 40 carte, contenente 12 figure. A vince se estrae una figura; in caso contrario vince B. Calcola quanto deve puntare B, affinché il gioco sia equo, se il giocatore A punta 1,50 euro. [3,50 euro]

36 Una maestra ha rilevato che il 20% dei suoi alunni non sa riconoscere le parole accentate e il 25% non usa correttamente la lettera «h». Ritenendo i due tipi di errori indipendenti, calcola la probabilità che ha un alunno di commettere entrambi gli errori e quella di commettere il primo o il secondo. [0,05; 0,4]

37 Calcola la probabilità che, estraendo successivamente due carte da un mazzo da 40, senza rimettere la carta estratta nel mazzo, esse siano due carte di bastoni o due figure. Calcola la probabilità anche nel caso in cui la prima carta estratta venga rimessa nel mazzo. $\left[\frac{9}{65}; \frac{47}{320}\right]$

38 Un candidato deve sostenere un esame di ammissione a un corso universitario. Vi sono due commissioni che esaminano i candidati. Si è rilevato che la prima commissione boccia con una percentuale del 30% e la seconda del 40%. Calcola la probabilità che ha un candidato, scegliendo una commissione a caso, di essere ammesso al corso universitario. [65%]

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 8 esercizi in più

39 In una certa località del Trentino, rilevazioni statistiche accurate consentono di affermare che, mediamente, in ogni settimana vi sono 2 giorni in cui piove e 5 giorni in cui non piove. Inoltre, l'alternarsi dei giorni in cui piove e di quelli in cui non piove è completamente casuale. Qual è la probabilità che, in una data settimana, non piova né il sabato né la domenica?

A $\frac{2}{7}$ B $\frac{5}{14}$ C $\frac{10}{21}$ D $\frac{25}{49}$ E $\frac{3}{5}$.

(*Olimpiadi della matematica, Gara provinciale*, 1995)

40 Quattro ragazzi vogliono telefonare tutti contemporaneamente alle rispettive ragazze. Ogni cellulare può funzionare su quattro frequenze distinte. Se due cellulari si attivano sulla stessa frequenza, la comunicazione cade. Se ogni ragazzo non sa che frequenza scelgono gli altri tre, qual è la probabilità che tutti e quattro riescano a parlare con le loro ragazze?

A $\frac{3}{32}$ B $\frac{3}{64}$ C $\frac{1}{256}$ D $\frac{1}{16}$ E $\frac{9}{128}$

(*Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede*, 2003)

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 7 esercizi in più

41 TEST A bag contains a number of marbles of which 80 are red, 24 are white and the rest are blue. If the probability of randomly selecting a blue marble from this bag is $\frac{1}{5}$, how many blue marbles are there in the bag?

A 25 B 26 C 27 D 28 E 29

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2003)

42 Suppose there is a seven-sided die with the property that, when it is rolled, there is an equal probability of getting 1, 2, 3, 4, 5, 6, or 7. If this die is rolled twice, then what is the probability that the sum of the two rolls is even?

(USA *Bay Area Math Meet, BAMM, Bowl Sampler*, 1995)

$\left[\frac{25}{49}\right]$

43 Two different numbers are chosen at random from the set $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. What is the probability that their sum is greater than their product?

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge, COMC*, 2003)

$\left[\frac{7}{10}\right]$

44 TEST A drawer contains 64 socks. Each sock is one of 8 colors, and there are 8 socks of each color. If the socks in the drawer are thoroughly mixed and you randomly choose two of the socks, then what is the probability that these two socks will have the same color?

A $\frac{1}{7}$ B $\frac{1}{8}$ C $\frac{1}{9}$ D $\frac{7}{64}$ E $\frac{9}{64}$

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2001)

45 A quiz consisting of four multiple-choice questions has four available options (a, b, c, or d) for each question. If a person guesses at every question, what is the probability of answering all questions correctly?

(USA *Southeast Missouri State University: Math Field Day*, 2005)

$\left[\frac{1}{256}\right]$

GLOSSARY

available: disponibile
die: dado
drawer: cassetto
even: pari
to guess: tentare, provare
marble: biglia, pallina di vetro
multiple-choice: a scelta multipla
randomly, at random: a caso
to roll: far rotolare
sock: calzino
thoroughly: completamente
twice: due volte

CAPITOLO

G4

La circonferenza, i poligoni inscritti e circoscritti

Bulloni!

La torre Eiffel, un gigante di ferro: 50 ingegneri, 221 operai, 5300 disegni preparatori, 320 metri d'altezza, 10 000 tonnellate di peso, 18 038 travi in acciaio e ben due milioni e mezzo di bulloni…

…perché le teste dei bulloni sono quasi sempre esagonali?

La risposta a pag. G199

1. La circonferenza e il cerchio

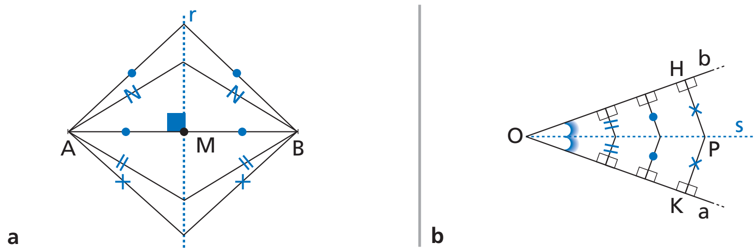
I luoghi geometrici

Un **luogo geometrico** è l'insieme di *tutti e soli* i punti del piano che godono di una certa proprietà, detta proprietà caratteristica del luogo.

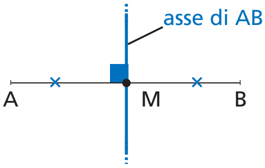
Consideriamo due esempi.

L'**asse di un segmento** è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento (figura 1*a*).

La **bisettrice di un angolo** è il luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo (figura 1*b*).



L'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento, passante per il suo punto medio.



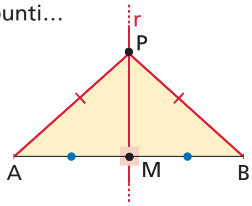
◀ **Figura 1**

▶ Per poter affermare che una figura è un luogo geometrico occorre dimostrare che:

1. tutti i punti godono della stessa proprietà caratteristica;
2. solo i punti della figura godono di quella proprietà.

- *Tutti* e *soli* i punti dell'asse hanno uguale distanza dagli estremi A e B del segmento.

Tutti i punti...

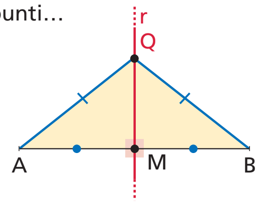


Ipotesi 1. r è asse di AB;
2. $P \in r$.

Tesi $PA \cong PB$.

a. Un punto P dell'asse è equidistante da A e da B poiché i triangoli AMP e PMB sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli rettangoli.

Solo i punti...



Ipotesi 1. r è asse di AB;
2. $QA \cong QB$.

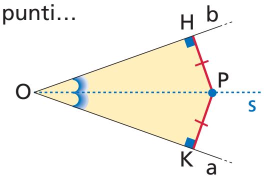
Tesi $Q \in r$.

b. Un punto Q equidistante da A e da B appartiene all'asse di AB poiché, essendo il triangolo AQB isoscele, la mediana QM è anche altezza.

▶ Figura 2

- *Tutti* e *soli* i punti della bisettrice hanno uguale distanza dai lati Oa e Ob dell'angolo.

Tutti i punti...

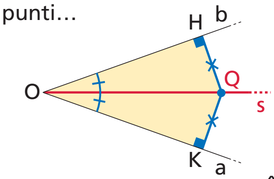


Ipotesi 1. Os è bisettrice di $a\hat{O}b$;
2. $P \in Os$;
3. $PH \perp b$;
4. $PK \perp a$.

Tesi $PH \cong PK$.

a. Un punto P della bisettrice è equidistante da a e da b poiché i triangoli OHP e OKP sono congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli rettangoli.

Solo i punti...



Ipotesi 1. Os è bisettrice di $a\hat{O}b$;
2. $QH \cong QK$;
3. $QH \perp b$;
4. $QK \perp a$.

Tesi $Q \in Os$.

b. Un punto Q equidistante da a e da b appartiene alla bisettrice di $a\hat{O}b$ poiché i triangoli OHQ e OKQ sono congruenti per il quarto criterio di congruenza dei triangoli rettangoli.

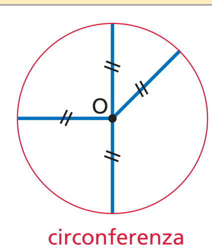
▶ Figura 3

La circonferenza e il cerchio

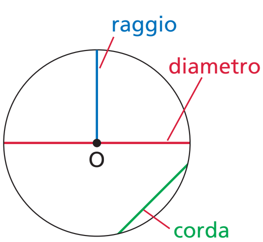
DEFINIZIONE

Circonferenza

Una circonferenza è il luogo dei punti di un piano che hanno distanza assegnata da un punto, detto centro.



▶ Il concetto di luogo geometrico ci permette di riscrivere la definizione di circonferenza data nel paragrafo 3 del capitolo G1.



Si chiama **raggio** della circonferenza ogni segmento che ha come estremi il centro e un punto della circonferenza stessa.

Ogni segmento che ha per estremi due punti di una circonferenza si chiama **corda**.

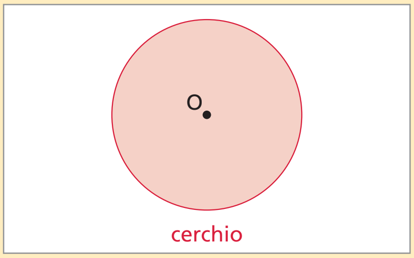
Ogni corda passante per il centro della circonferenza è detta **diametro**.

I punti interni a una circonferenza sono i punti che hanno distanza dal centro minore del raggio; i punti esterni hanno distanza dal centro maggiore del raggio.

DEFINIZIONE

Cerchio

Un cerchio è una figura piana formata dai punti di una circonferenza e da quelli interni alla circonferenza.

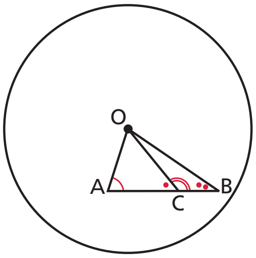


Il cerchio è il luogo dei punti che hanno distanza dal centro minore o uguale al raggio.

Se congiungiamo due punti qualunque A e B di un cerchio, il segmento AB risulta completamente interno al cerchio.

Infatti, se A e B appartengono a un diametro, anche ogni punto di AB appartiene allo stesso diametro e quindi è interno al cerchio.

Se A e B non appartengono a uno stesso diametro, consideriamo il triangolo OAB (figura a lato). Scelto C su AB, il segmento OC, interno al triangolo, è minore di OA o di OB (o di entrambi se $OC \perp AB$).
Infatti, se OC non è perpendicolare ad AB, congiungendo O con C, si formano un angolo ottuso e uno acuto. Per esempio, nella figura, l'angolo ottuso è $O\hat{C}B$. Considerato il triangolo OCB, poiché ad angolo maggiore ($O\hat{C}B$) sta opposto il lato maggiore, abbiamo che $OC < OB$. Se OC è minore di un lato è anche minore del raggio.
Pertanto il cerchio è una forma **convessa**.



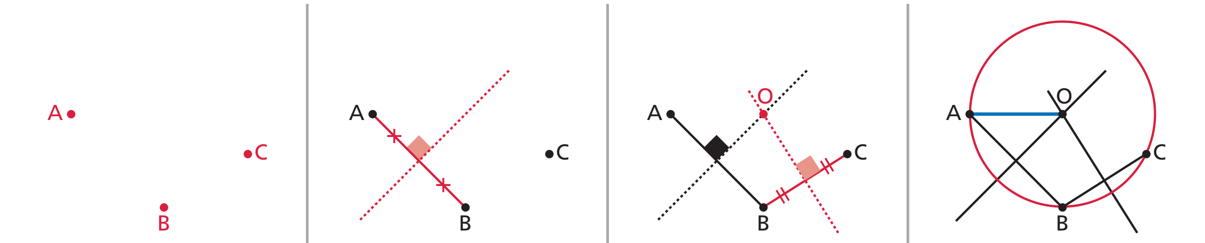
La circonferenza per tre punti non allineati

TEOREMA

Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza.

Ipotesi A, B, C sono punti non appartenenti a una stessa retta.

Tesi 1. Esiste una circonferenza passante per A, B e C;
2. la circonferenza per A, B e C è unica.



a. Disegniamo tre punti A, B e C non allineati.

b. Congiungiamo A con B e tracciamo l'asse del segmento AB.

c. Congiungiamo B con C e tracciamo l'asse del segmento BC. Poiché A, B e C non sono allineati, i due assi si incontrano in un punto, che chiamiamo O.

d. Puntiamo il compasso in O con apertura OA e tracciamo la circonferenza.

▼ **Figura 4 Costruzione. Se i tre punti fossero allineati, potresti ottenere il punto *O*?**

DIMOSTRAZIONE

1. Per dimostrare l'esistenza della circonferenza controlliamo la correttezza della costruzione.
Il punto O appartiene all'asse di AB, *quindi* ha la stessa distanza da A e da B, ossia $OA \cong OB$.
Il punto O appartiene anche all'asse di BC, *quindi* ha la stessa distanza da B e da C, ossia $OB \cong OC$.
Per la proprietà transitiva è anche $OA \cong OC$, *pertanto* O è equidistante dai punti A, B e C, *quindi* i punti A, B, C appartengono a una circonferenza di centro O.

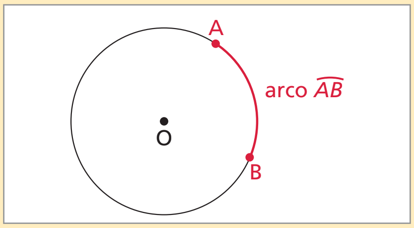
2. Per dimostrare l'unicità, basta osservare che è unico il punto di intersezione dei due assi, *quindi* è unico il punto O equidistante da A, B e C.

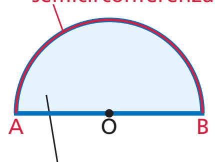
Le parti della circonferenza e del cerchio

DEFINIZIONE

Arco

Un arco è la parte di circonferenza compresa fra due suoi punti.





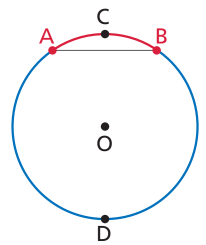
Usando il termine «compresa» intendiamo dire, qui e in seguito, che anche le linee del contorno fanno parte della figura.

I due punti della circonferenza che delimitano l'arco sono gli **estremi** dell'arco. L'arco di estremi A e B si indica con $\overset{\frown}{AB}$.

Una **semicirconferenza** è un arco i cui estremi sono distinti e appartengono a un diametro.

La parte di piano *compresa* fra una semicirconferenza e un diametro si chiama **semicerchio**.

Gli estremi di una corda suddividono la circonferenza in due archi; diremo che la corda **sottende** i due archi oppure che ogni arco è sotteso dalla corda (figura 5).

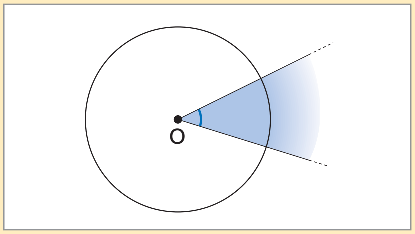


◄ **Figura 5** La corda AB sottende due archi, quello disegnato in rosso e quello disegnato in blu. Per evitare ambiguità, l'arco rosso si può indicare con $\overset{\frown}{ACB}$, quello blu con $\overset{\frown}{ADB}$.
Possiamo individuare un arco anche indicando se è il minore o il maggiore fra i due aventi come estremi A e B.

DEFINIZIONE

Angolo al centro

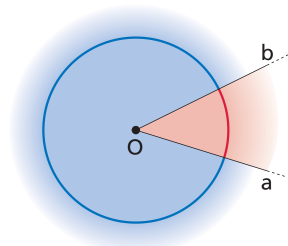
Un angolo al centro è un angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza.



Poiché la circonferenza è una linea chiusa, se congiungiamo un punto interno con uno esterno a essa, il segmento ottenuto interseca la circonferenza in un punto.

Pertanto i lati di un angolo al centro intersecano la circonferenza in due punti, che sono gli estremi di un arco, intersezione fra l'angolo al centro e la circonferenza. Diremo che l'angolo al centro **insiste** su tale arco.

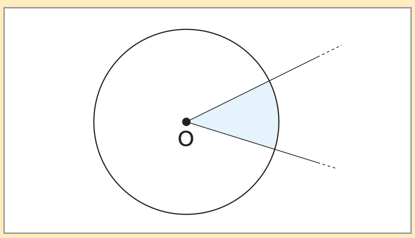
Se tracciamo due semirette con origine nel centro di una circonferenza, individuiamo due angoli al centro, di cui, in genere, uno è convesso e l'altro concavo. L'angolo convesso insiste sull'arco minore della circonferenza, mentre l'angolo concavo insiste sull'arco maggiore della circonferenza.



DEFINIZIONE

Settore circolare

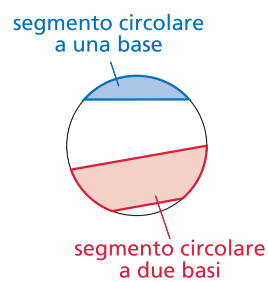
Un settore circolare è la parte di cerchio compresa fra un arco e i raggi che hanno un estremo negli estremi dell'arco.



Possiamo definire il settore circolare anche come intersezione di un cerchio e di un suo angolo al centro.

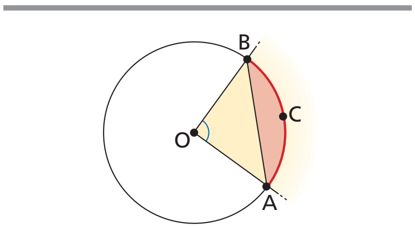
La parte di cerchio compresa fra un arco e la corda che lo sottende viene chiamata **segmento circolare a una base**.

Un **segmento circolare a due basi** è la parte di cerchio compresa fra due corde parallele e i due archi che hanno per estremi gli estremi delle due corde.



Gli angoli al centro e le figure a essi corrispondenti

Dati una circonferenza e un suo arco $\overset{\frown}{ACB}$, come nella figura 6, risultano determinati senza ambiguità anche l'angolo al centro $A\hat{O}B$ che contiene C, il settore circolare $AOBC$ e il segmento circolare ABC di base AB.



◄ **Figura 6**

Più in generale, ognuna delle figure precedenti determina univocamente le altre. Diciamo che l'arco, l'angolo al centro, il settore circolare e il segmento circolare così individuati sono fra loro **corrispondenti**.

TEOREMA

Data una circonferenza, se si verifica una delle seguenti congruenze:

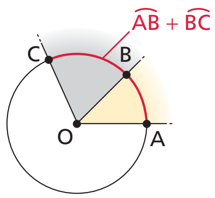
- fra due angoli al centro,
- fra due archi,
- fra due settori circolari,
- fra due segmenti circolari,

allora sono congruenti anche le restanti figure corrispondenti a quelle considerate.

◗ Le corrispondenze considerate sono biunivoche. Per esempio, a ogni angolo al centro corrisponde uno e un solo arco e viceversa.

Per esempio, se sono congruenti due archi, allora sono congruenti anche le due corde corrispondenti, gli angoli al centro corrispondenti…

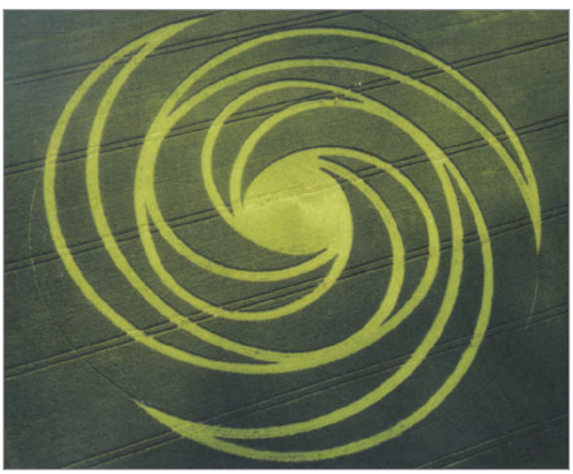
La dimostrazione si basa sul fatto che, prese per ipotesi due figure congruenti, esiste un movimento rigido che porta a far coincidere le due figure e tutti gli elementi a esse corrispondenti.



La corrispondenza fra archi e angoli al centro consente di definire i concetti di minore, maggiore, somma, differenza, multiplo e sottomultiplo relativamente agli archi e agli angoli a essi corrispondenti. Per esempio, diciamo che in una circonferenza la **somma di due archi** è l'arco che ha come angolo al centro la somma degli angoli al centro corrispondenti ai due archi dati.

ESPLORAZIONE: I CERCHI NEL GRANO

I cerchi nel grano (*crop circles*) compaiono in Inghilterra alla fine degli anni Settanta su vasti campi, di notte, durante l'estate. Al loro interno le spighe sono piegate a spirale e non spezzate.
Fino al 1980 i cerchi conosciuti sono solo tre: il più grande di venticinque metri di diametro, il più piccolo delle dimensioni di una ruota. Quando i giornali cominciano a parlarne, i cerchi aumentano progressivamente di numero e presentano forme sempre più complesse. Diventano vere e proprie opere d'arte, poi definite «pittogrammi»: cerchi collegati tra loro con appendici varie, triangoli o rettangoli, in modo da creare composizioni elaborate e spettacolari. Alcune prove portano a concludere che i cerchi sono esclusivamente opera umana, ma c'è anche chi sostiene il contrario. Fra ufologi e non, il dibattito è ancora aperto.



▲ Hackpen Hill, Inghilterra, 4 luglio 1999.

IN CINQUE SLIDE

La testimonianza più celebre riguardante qualcosa di analogo ai *crop circles* nell'antichità è data dall'incisione seicentesca del Mowing Devil, o Diavolo Mietitore (1678). Di che si tratta?
Cerca nel web l'interpretazione fornita dagli esperti e spiega le differenze rispetto ai comuni cerchi nel grano. Prepara una presentazione multimediale sui *crop circles* e sul Diavolo Mietitore.

Cerca nel web: diavolo mietitore, mowing devil, crop circles.

2. I teoremi sulle corde

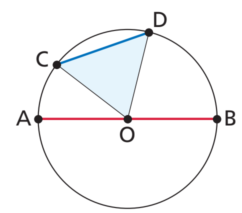
Un diametro è maggiore di ogni corda non passante per il centro

TEOREMA

In una circonferenza, ogni diametro è maggiore di qualunque altra corda che non passa per il centro.

Ipotesi 1. AB diametro;
2. CD corda non passante per il centro.

Tesi $AB > CD$.



DIMOSTRAZIONE Consideriamo il triangolo COD. La corda CD è lato del triangolo COD, *quindi* è minore della somma degli altri due lati. *Pertanto*, possiamo scrivere $CD < OC + OD$, oppure $OC + OD > CD$. OC e OD sono due raggi, *quindi* la loro somma è un segmento congruente al diametro AB. *Pertanto*, il diametro è maggiore della corda.

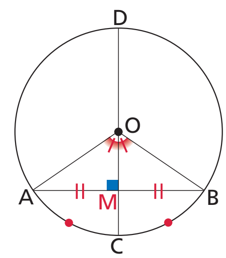
Il diametro perpendicolare a una corda

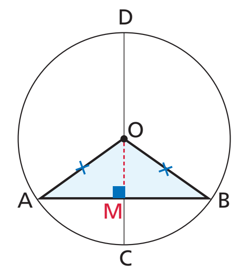
TEOREMA

Se in una circonferenza un diametro è perpendicolare a una corda, allora la corda, l'angolo al centro e l'arco corrispondenti risultano divisi a metà da tale diametro.

Ipotesi 1. AB è una corda;
2. CD è un diametro;
3. $CD \perp AB$.

Tesi 1. $AM \cong MB$;
2. $A\hat{O}C \cong C\hat{O}B$;
3. $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{CB}$.





DIMOSTRAZIONE Il triangolo ABO è isoscele, perché i lati OA e OB sono due raggi. Il segmento OM è altezza, in quanto $AB \perp CD$ per l'ipotesi 3. Nel triangolo isoscele l'altezza è:

- mediana, *quindi* $AM \cong MB$;
- bisettrice, *quindi* $A\hat{O}C \cong C\hat{O}B$.

Inoltre, nella circonferenza, ad angoli al centro congruenti corrispondono archi congruenti, *quindi* $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{CB}$.

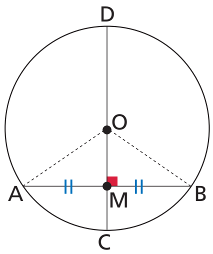
Il diametro per il punto medio di una corda

TEOREMA

Se in una circonferenza un diametro interseca una corda non passante per il centro nel suo punto medio, allora il diametro è perpendicolare alla corda.

Ipotesi 1. AB è una corda non passante per O;
2. CD è un diametro;
3. $AM \cong MB$.

Tesi $CD \perp AB$.



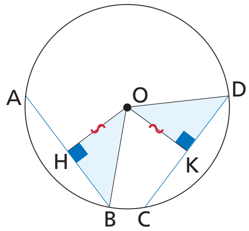
DIMOSTRAZIONE Congiungiamo A e B con il centro O. Otteniamo il triangolo isoscele AOB in cui OM è la mediana relativa alla base AB, in quanto $AM \cong MB$ per l'ipotesi 3. In un triangolo isoscele la mediana relativa alla base è anche altezza. *Pertanto*, CD è perpendicolare ad AB.

Corollario. In una circonferenza l'asse di una corda passa per il centro della circonferenza.

La relazione tra corde aventi la stessa distanza dal centro

TEOREMA

In una circonferenza, corde congruenti hanno la stessa distanza dal centro.



Ipotesi 1. $AB \cong CD$;
2. $OH \perp AB$;
3. $OK \perp CD$.

Tesi $OH \cong OK$.

DIMOSTRAZIONE Congiungiamo il centro O con gli estremi B e D. Consideriamo i triangoli rettangoli OHB e OKD, essi hanno:

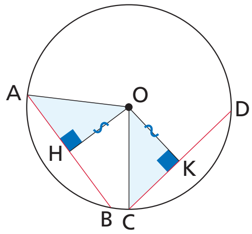
- $OB \cong OD$ perché raggi;
- $HB \cong KD$ perché metà di corde congruenti (infatti, nei triangoli isosceli AOB e COD le altezze OH e OK sono anche mediane).

Pertanto, i triangoli rettangoli OHB e OKD sono congruenti per il quarto criterio di congruenza dei triangoli rettangoli. In particolare, sono congruenti i cateti OH e OK.

Vale anche il **teorema inverso**.

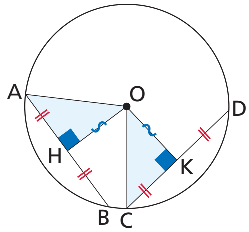
TEOREMA

In una circonferenza, corde aventi la stessa distanza dal centro sono congruenti.



Ipotesi 1. $OH \perp AB$;
2. $OK \perp CD$;
3. $OH \cong OK$.

Tesi $AB \cong CD$.



DIMOSTRAZIONE I triangoli AHO e CKO, rettangoli per le ipotesi 1 e 2, hanno:

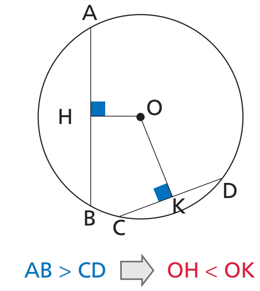
- $AO \cong CO$ perché raggi di una stessa circonferenza;
- $OH \cong OK$ per l'ipotesi 3.

Quindi sono congruenti per il quarto criterio di congruenza dei triangoli rettangoli. In particolare sono congruenti i cateti AH e CK.
I triangoli AOB e COD sono isosceli, quindi AH e CK sono la metà rispettivamente di AB e CD.
Se $AH \cong CK$, anche $2AH \cong 2CK$, *pertanto* le corde AB e CD sono congruenti.

Vale inoltre il seguente teorema, di cui proponiamo la dimostrazione guidata a pagina G210.

TEOREMA

Se in una circonferenza due corde non sono congruenti, non hanno la stessa distanza dal centro: la corda maggiore ha distanza minore.



3. Le posizioni di una retta rispetto a una circonferenza

I punti in comune fra una retta e una circonferenza

TEOREMA

Una retta e una circonferenza che si intersecano non possono avere più di due punti in comune.

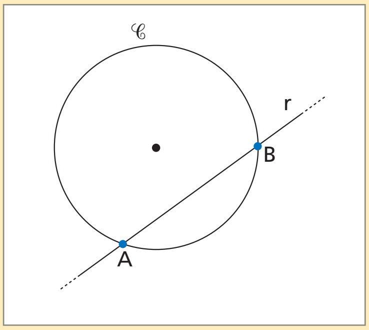
DIMOSTRAZIONE Ragioniamo per assurdo.
Supponiamo che la retta r e la circonferenza abbiano in comune tre punti A, B e C.
Poiché i punti A, B e C appartengono a r, i segmenti AB e BC sono allineati. Di conseguenza, i loro assi sono entrambi perpendicolari a r, *quindi* sono paralleli fra loro.
D'altra parte, AB e BC sono corde della circonferenza, *quindi* i loro assi devono passare per il centro. *Pertanto*, le rette individuate da AB e BC si intersecano.
Risulterebbe che due rette, contemporaneamente, si intersecano e sono parallele. Poiché questo è assurdo, retta e circonferenza non possono avere tre (o più) punti in comune.

Il ragionamento vale anche per più di tre punti in comune.

DEFINIZIONE

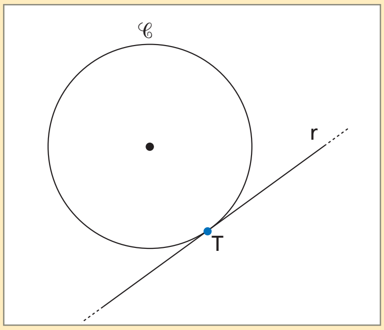
Retta secante una circonferenza

Una retta è **secante** una circonferenza se ha due punti in comune con essa.



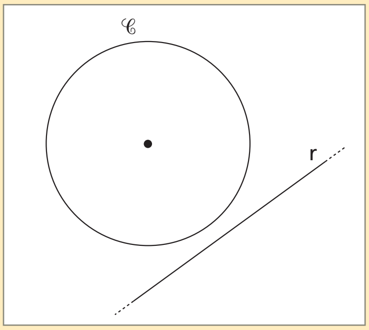
Retta tangente a una circonferenza

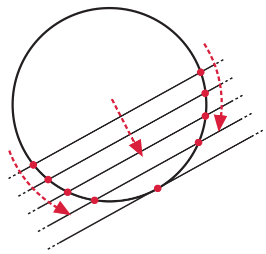
Una retta è **tangente** a una circonferenza se ha un solo punto in comune con essa.



Retta esterna a una circonferenza

Una retta è **esterna** a una circonferenza se non ha punti in comune con essa.





▲ Figura 7

Se consideriamo le rette secanti e la tangente parallele a una retta data (figura 7), notiamo che, man mano che le secanti si avvicinano alla retta tangente, i punti di intersezione con la circonferenza si avvicinano sempre più fra loro. Si può allora pensare che anche per la tangente i punti di intersezione con la circonferenza siano due, e siano coincidenti.

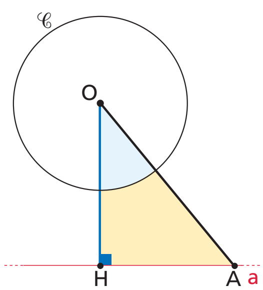
La distanza di una retta dal centro di una circonferenza e la sua posizione rispetto alla circonferenza stessa

TEOREMI

Se la distanza del centro di una circonferenza da una retta è:

1. maggiore del raggio, allora la retta è esterna alla circonferenza;
2. uguale al raggio, allora la retta è tangente alla circonferenza;
3. minore del raggio, allora la retta è secante la circonferenza.

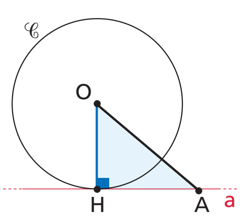
Esaminiamo i tre casi possibili fornendo separatamente le dimostrazioni. Indichiamo con a la retta, con $\mathscr{C}$ la circonferenza e con OH il segmento di perpendicolare condotto dal centro della circonferenza alla retta.



1. Ipotesi $OH > r$. **Tesi** a è esterna a $\mathscr{C}$.

DIMOSTRAZIONE Indichiamo con A un altro qualsiasi punto della retta a, diverso da H, e tracciamo il segmento OA.
Il segmento OH è maggiore del raggio, *quindi* il punto H è esterno alla circonferenza.
Il segmento OA è ipotenusa del triangolo rettangolo AOH, *quindi* $OA > OH$.

$OH > r$ per ipotesi, *quindi* $OA > r$, *pertanto* il punto A è esterno alla circonferenza.
La retta a non ha alcun punto in comune con la circonferenza, *pertanto* è esterna.



2. Ipotesi $OH \cong r$. **Tesi** a è tangente a $\mathscr{C}$.

DIMOSTRAZIONE Consideriamo un altro qualsiasi punto A della retta a, diverso da H, e congiungiamo A con il centro O.
Il segmento OH è congruente al raggio, *quindi* il punto H appartiene alla circonferenza.
Il segmento OA è ipotenusa del triangolo rettangolo OHA, *quindi* $OA > OH$.
Per ipotesi $OH \cong r$, *quindi* $OA > r$, *pertanto* il punto A è esterno alla circonferenza.
La retta a ha un solo punto in comune con la circonferenza, *pertanto* è tangente.

3. Ipotesi $OH < r$. **Tesi** a è secante $\mathscr{C}$.

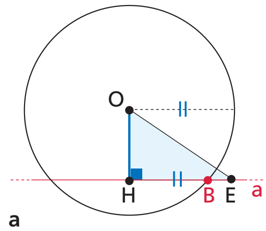
DIMOSTRAZIONE Consideriamo sulla retta a un segmento HE congruente al raggio e congiungiamo O con E (figura *a*).

Nel triangolo rettangolo OHE l'ipotenusa OE è maggiore del cateto HE, *quindi* possiamo scrivere $OE > HE$. Ma $HE \cong r$, *quindi* $OE > r$, *pertanto* il punto E è esterno alla circonferenza.

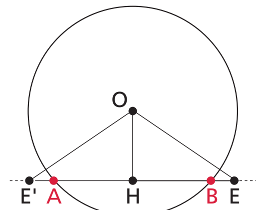
Il segmento HE congiunge il punto H, interno alla circonferenza, con il punto E, esterno, *quindi*, per il postulato di partizione del piano, HE interseca la circonferenza almeno in un punto (in figura il punto B).

Ripetendo la costruzione da parte opposta rispetto a OH (figura *b*), si trova che la retta interseca la circonferenza nel punto A.

La retta a ha in comune con la circonferenza due punti, A e B, *pertanto* risulta secante.



a



b

I tre teoremi appena dimostrati ammettono anche i **teoremi inversi**, che sono tutti dimostrabili per assurdo.
Per esempio, dimostriamo il seguente teorema.

TEOREMA

Se una retta è tangente a una circonferenza, la sua distanza dal centro è uguale al raggio.

DIMOSTRAZIONE

Ragioniamo per assurdo.
Se la distanza fosse maggiore o minore del raggio, allora la retta sarebbe rispettivamente esterna o secante. Ciò contraddirebbe l'ipotesi.

Dai teoremi precedentemente dimostrati deriva il seguente.

TEOREMA

Se una retta è tangente a una circonferenza di centro O in un suo punto H, allora è perpendicolare al raggio OH.

Vale anche il teorema inverso.

TEOREMA

Se una retta è perpendicolare al raggio di una circonferenza nel suo estremo H, allora è tangente in H alla circonferenza.

Poiché la perpendicolare a una retta passante per un punto è una e una sola, anche la retta tangente in un punto è una e una sola.

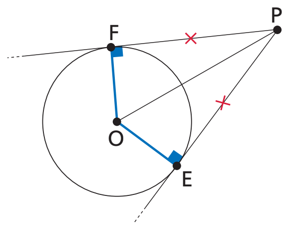
Le tangenti a una circonferenza da un punto esterno

TEOREMA

Se da un punto P esterno a una circonferenza si conducono le due rette tangenti a essa, allora i segmenti di tangente, aventi ciascuno un estremo nel punto P e l'altro in un punto in comune con la circonferenza, sono congruenti.

Ipotesi 1. P è esterno alla circonferenza $\mathscr{C}$;
2. le rette PE e PF sono tangenti a $\mathscr{C}$.

Tesi $PE \cong PF$.



◄ Figura 8

DIMOSTRAZIONE $OE \perp EP$, in quanto raggio condotto nel punto di tangenza; $OF \perp FP$ per lo stesso motivo, *quindi* i triangoli OEP e OFP sono rettangoli e hanno:

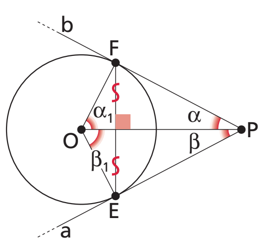
- PO in comune;
- $OE \cong OF$, perché raggi di una stessa circonferenza.

Pertanto sono congruenti, per il quarto criterio di congruenza dei triangoli rettangoli.

In particolare, sono congruenti i cateti PE e PF.

Corollario. Se un segmento ha per estremi il centro di una circonferenza e un punto esterno a essa (figura 9), allora il segmento appartiene:

1. alla bisettrice dell'angolo formato dalle due tangenti condotte dal punto esterno alla circonferenza;
2. alla bisettrice dell'angolo formato dai raggi aventi un estremo nei punti di contatto;
3. all'asse della corda che unisce i due punti di contatto.



◄ **Figura 9** La prima tesi afferma che $\alpha \cong \beta$, la seconda che $\alpha_1 \cong \beta_1$ e la terza che PO è asse della corda EF.

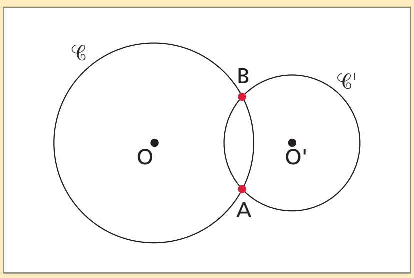
4. Le posizioni reciproche fra due circonferenze

Due circonferenze non possono intersecarsi in più di due punti. Infatti, se avessero tre punti in comune coinciderebbero, poiché per tre punti passa una e una sola circonferenza. Pertanto, possono avere in comune *due punti*, *un solo punto* oppure *nessun punto*.

DEFINIZIONE

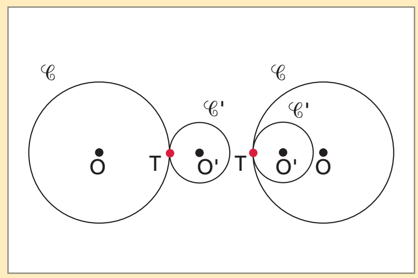
Circonferenze secanti

Due circonferenze sono secanti quando hanno due punti in comune.



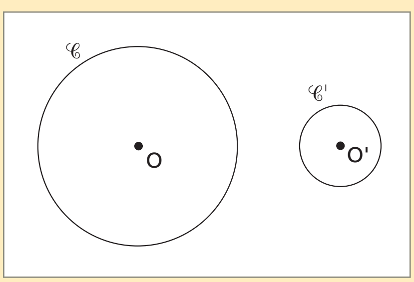
Circonferenze tangenti

Due circonferenze sono tangenti quando hanno un solo punto in comune.
Se il centro di una è esterno all'altra, sono **tangenti esternamente**. Se il centro di una è interno all'altra, sono **tangenti internamente**.



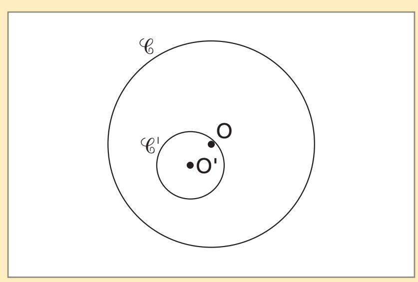
Circonferenze esterne

Due circonferenze sono esterne quando tutti i punti di una circonferenza sono esterni all'altra e viceversa.



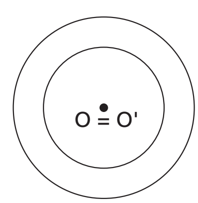
Circonferenze una interna all'altra

Due circonferenze sono una interna all'altra se, avendo raggi diversi, tutti i punti della circonferenza di raggio minore sono interni all'altra.



Il punto comune a due circonferenze tangenti si chiama **punto di tangenza** o **punto di contatto**.

Due circonferenze, una interna all'altra, che hanno lo stesso centro vengono dette **concentriche**.



circonferenze concentriche

La posizione reciproca fra due circonferenze e la distanza fra i loro centri

Per il teorema enunciato qui a lato ci limitiamo a un'illustrazione.

TEOREMA

Condizione necessaria e sufficiente affinché due circonferenze siano:

- **una interna all'altra** è che la distanza dei centri sia minore della differenza dei raggi;
- **secanti** è che la distanza dei centri sia minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza;
- **tangenti internamente** è che la distanza dei centri sia uguale alla differenza dei raggi;
- **tangenti esternamente** è che la distanza dei centri sia uguale alla somma dei raggi;
- **esterne** è che la distanza dei centri sia maggiore della somma dei raggi.

Esemplifichiamo nella figura 10 i casi descritti dal teorema.

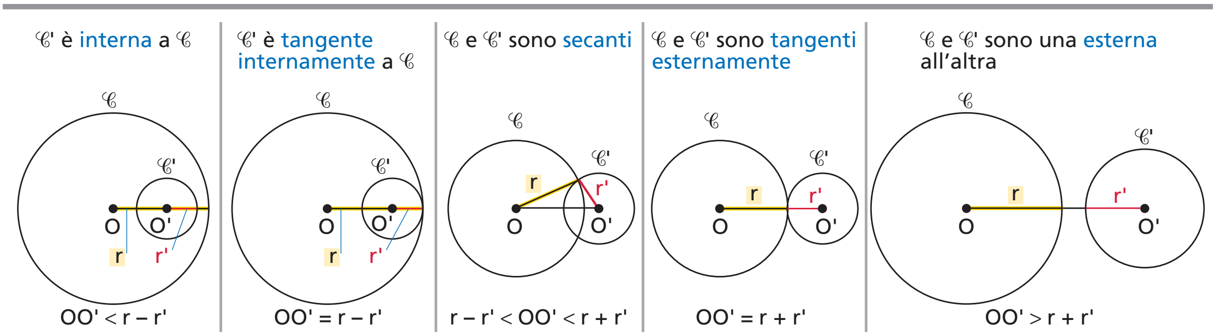


Figura 10 Nella figura delle circonferenze secanti puoi notare che vale la proprietà dei triangoli: un lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

Esaminiamo una proprietà delle circonferenze secanti e una delle circonferenze tangenti.

Circonferenze secanti

Se due circonferenze di centri O e O' sono secanti nei punti A e B, allora la retta dei centri è perpendicolare al segmento AB.

Infatti $OA \cong OB$ e $O'A \cong O'B$, pertanto, essendo O e O' equidistanti dagli estremi del segmento AB, OO' è asse di AB.

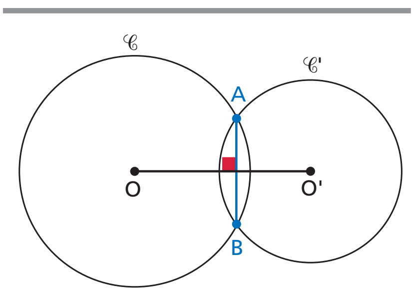


Figura 11

Circonferenze tangenti

Se due circonferenze sono tangenti, il punto di tangenza appartiene alla retta dei centri. Infatti, la retta tangente per A è comune alle due circonferenze e, per l'unicità della tangente, i punti O, A, O' sono allineati.

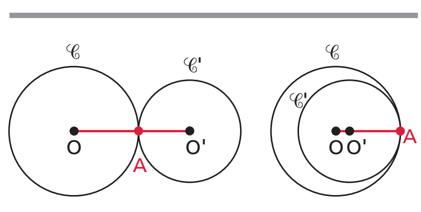


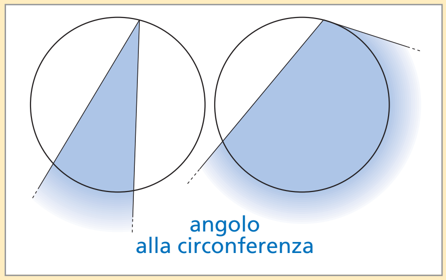
Figura 12

5. Gli angoli alla circonferenza e i corrispondenti angoli al centro

DEFINIZIONE

Angolo alla circonferenza

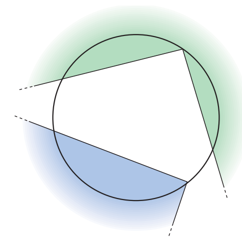
Un angolo alla circonferenza è un angolo convesso che ha il vertice sulla circonferenza e i due lati secanti la circonferenza stessa, oppure un lato secante e l'altro tangente.



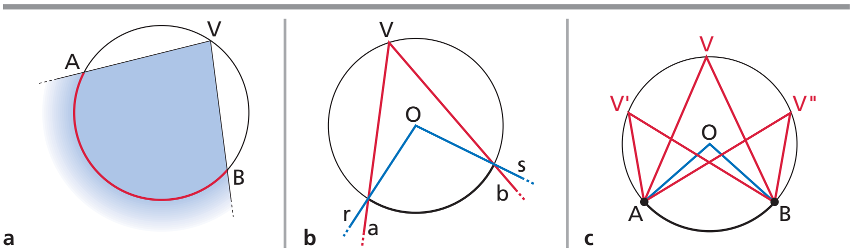
I lati di un angolo alla circonferenza intersecano la circonferenza in due punti, che sono gli estremi di un arco. Tale arco è l'intersezione dell'angolo con la circonferenza.

Si dice che l'angolo alla circonferenza **insiste** su tale arco. Si può anche dire che l'arco **è sotteso** dall'angolo.

Un **angolo al centro** e **un angolo alla circonferenza** si dicono **corrispondenti** quando insistono sullo stesso arco.



▲ **Figura 13** L'angolo colorato in verde non è alla circonferenza perché non è convesso. L'angolo colorato in azzurro non è alla circonferenza perché un lato non è secante e neppure tangente.



◀ **Figura 14**
a) L'angolo $A\hat{V}B$ insiste sull'arco $\overset{\frown}{AB}$; l'arco $\overset{\frown}{AB}$ è sotteso dall'angolo $A\hat{V}B$.
b) $a\hat{V}b$ e $r\hat{O}s$ sono corrispondenti.
c) Per ogni arco esiste un solo angolo al centro che insiste su di esso, mentre gli angoli alla circonferenza che insistono su quell'arco sono infiniti.

La proprietà degli angoli al centro e alla circonferenza corrispondenti

TEOREMA

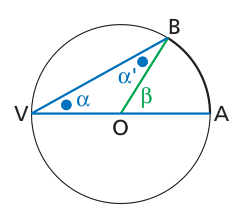
Un angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro.

Ipotesi 1. α angolo alla circonferenza;
2. β angolo al centro corrispondente di α.

Tesi $\alpha \cong \frac{1}{2}\beta$.

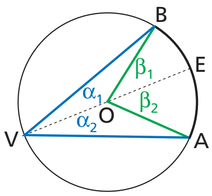
DIMOSTRAZIONE Esaminiamo i tre casi possibili.

1. Un lato dell'angolo alla circonferenza contiene un diametro.
Indichiamo con α' l'angolo $V\hat{B}O$.
Il triangolo VBO è isoscele perché VO e OB sono due raggi, *quindi* $\alpha \cong \alpha'$, per il teorema del triangolo isoscele.
Nel triangolo VBO l'angolo β è esterno di vertice O, *quindi* $\beta \cong \alpha + \alpha'$, per il teorema dell'angolo esterno (somma).



Poiché $\alpha \cong \alpha'$, possiamo anche scrivere $\beta \cong \alpha + \alpha$, ossia $\beta \cong 2\alpha$, *quindi* $\alpha \cong \frac{1}{2}\beta$.

2. Il centro O è interno all'angolo α.



Tracciamo il diametro VE. Indichiamo l'angolo $E\hat{V}B$ con α_1, il corrispondente angolo al centro $E\hat{O}B$ con β_1, $A\hat{V}E$ con α_2, e il corrispondente al centro $A\hat{O}E$ con β_2.
Gli angoli α_1 e α_2 hanno un lato che contiene un diametro, *quindi*

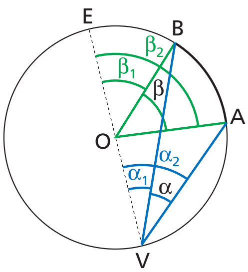
$$\alpha_1 \cong \frac{1}{2}\beta_1 \text{ e } \alpha_2 \cong \frac{1}{2}\beta_2.$$

Sommando gli angoli α_1 e α_2, otteniamo:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \cong \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2, \quad \text{cioè} \quad \alpha_1 + \alpha_2 \cong \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2).$$

Per costruzione risulta $\alpha_1 + \alpha_2 \cong \alpha$ e $\beta_1 + \beta_2 \cong \beta$, *pertanto* $\alpha \cong \frac{1}{2}\beta$.

3. Il centro O è esterno all'angolo α.



Tracciamo il diametro VE. Indichiamo l'angolo $E\hat{V}B$ con α_1, il corrispondente angolo al centro $E\hat{O}B$ con β_1, $E\hat{V}A$ con α_2, e il corrispondente al centro $E\hat{O}A$ con β_2.
Gli angoli α_1 e α_2 hanno un lato che contiene un diametro, *quindi*

$$\alpha_1 \cong \frac{1}{2}\beta_1 \text{ e } \alpha_2 \cong \frac{1}{2}\beta_2.$$

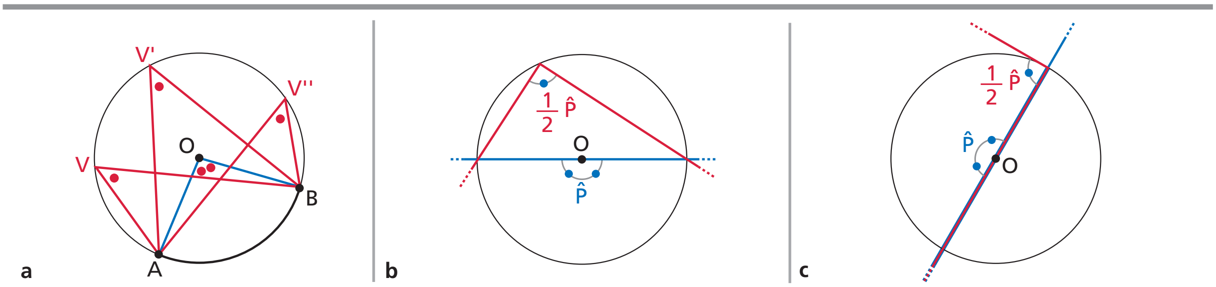
Nella sottrazione $\alpha_2 - \alpha_1$ otteniamo:

$$\alpha_2 - \alpha_1 \cong \frac{1}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_1, \text{ cioè } \alpha_2 - \alpha_1 \cong \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1).$$

Per costruzione risulta $\alpha_2 - \alpha_1 \cong \alpha$ e $\beta_2 - \beta_1 \cong \beta$, *pertanto* $\alpha \cong \frac{1}{2}\beta$.

Corollario 1. Nella stessa circonferenza, due o più angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco (o su archi congruenti) sono congruenti (figura 15*a*).

Corollario 2. Se un angolo alla circonferenza insiste su una semicirconferenza, è retto (figure 15*b* e 15*c*).



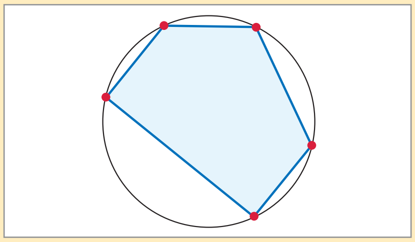
▼ **Figura 15**
a) $A\hat{V}B$, $A\hat{V}'B$ e $A\hat{V}''B$ sono tutti congruenti alla metà di $A\hat{O}B$, quindi sono congruenti fra loro.
b) L'angolo al centro è piatto, quindi l'angolo alla circonferenza è un angolo retto.
c) Il secondo corollario vale anche quando un lato dell'angolo alla circonferenza è secante e l'altro è tangente.

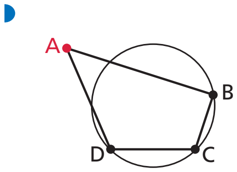
6. I poligoni inscritti e circoscritti

DEFINIZIONE

Poligono inscritto in una circonferenza

Un poligono è inscritto in una circonferenza se ha tutti i vertici sulla circonferenza.





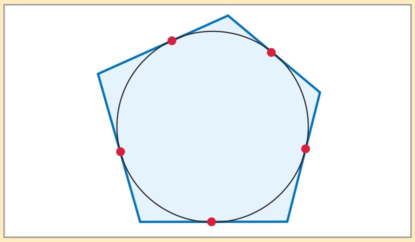
Il poligono *ABCD* non è inscritto nella circonferenza.

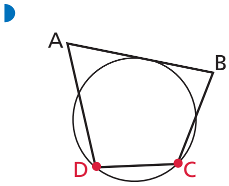
Quando un poligono è inscritto in una circonferenza possiamo anche dire che **la circonferenza è circoscritta al poligono**.

DEFINIZIONE

Poligono circoscritto a una circonferenza

Un poligono è circoscritto a una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.





Il poligono *ABCD* non è circoscritto alla circonferenza.

Quando un poligono è circoscritto a una circonferenza possiamo anche dire che **la circonferenza è inscritta nel poligono**.

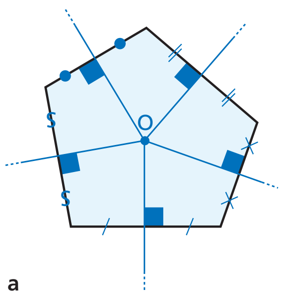
I poligoni inscritti e gli assi dei lati

Non tutti i poligoni possono essere inscritti in una circonferenza.

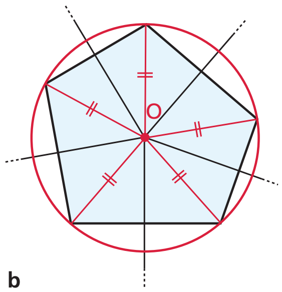
TEOREMA

Se un poligono ha gli assi dei lati che passano per uno stesso punto, allora il poligono può essere inscritto in una circonferenza.

DIMOSTRAZIONE Disegniamo un poligono e gli assi dei suoi lati, in modo che si intersechino in O secondo l'ipotesi (figura *a*).
Poiché l'asse di un segmento è il luogo dei punti equidistanti dai suoi estremi, il punto di intersezione degli assi ha la stessa distanza da tutti i vertici del poligono, quindi è tracciabile la circonferenza che ha per raggio tale distanza e centro il punto di intersezione (figura *b*).
Questa circonferenza passa per tutti i vertici del poligono.



a



b

Valgono anche i seguenti teoremi.

TEOREMA

Se gli assi dei lati di un poligono non passano per uno stesso punto, il poligono non può essere inscritto in una circonferenza.

TEOREMA

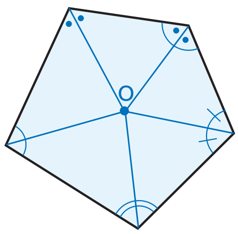
Se un poligono è inscritto in una circonferenza, gli assi dei suoi lati si incontrano nel centro della circonferenza.

I poligoni circoscritti e le bisettrici degli angoli

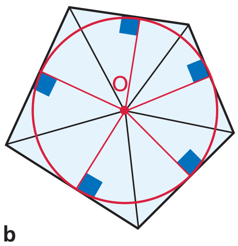
Non tutti i poligoni possono essere circoscritti a una circonferenza.

TEOREMA

Se un poligono convesso ha le bisettrici degli angoli che passano tutte per uno stesso punto, allora il poligono può essere circoscritto a una circonferenza.



a



b

DIMOSTRAZIONE

Disegniamo un poligono e le bisettrici dei suoi angoli interni, le quali per ipotesi si intersecano in O (figura *a*).
Poiché la bisettrice di un angolo è il luogo dei punti equidistanti dai lati, il punto di intersezione delle bisettrici del poligono ha la stessa distanza da tutti i lati, quindi è possibile tracciare la circonferenza che ha come raggio tale distanza e come centro il punto di intersezione (figura *b*). Questa circonferenza è tangente a tutti i lati del poligono.

Valgono anche i seguenti teoremi.

TEOREMA

Se le bisettrici degli angoli di un poligono non passano per uno stesso punto, il poligono non può essere circoscritto a una circonferenza.

TEOREMA

Se un poligono è circoscritto a una circonferenza, le bisettrici dei suoi angoli si incontrano nel centro della circonferenza.

7. I punti notevoli di un triangolo

Un punto notevole di un triangolo è un punto in cui si intersecano segmenti o rette particolari quali le altezze, le mediane, gli assi...
Esaminiamo per primi quei punti notevoli che permettono di trovare per il triangolo la circonferenza circoscritta e quella inscritta.

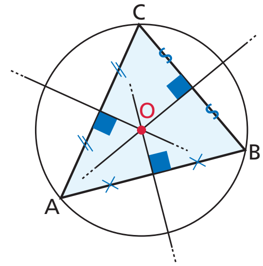
Il circocentro

TEOREMA

Gli assi dei lati di un triangolo si incontrano in un punto.

DIMOSTRAZIONE

Poiché per tre punti passa una circonferenza, il triangolo è inscrivibile e gli assi dei suoi lati passano per il centro della circonferenza.



O circocentro di ABC

DEFINIZIONE

Circocentro

Il punto di incontro degli assi dei lati di un triangolo si chiama circocentro ed è il centro della circonferenza circoscritta.

Corollario. Ogni triangolo è inscrivibile in una circonferenza che ha come centro il circocentro del triangolo.

L'incentro e l'excentro

TEOREMA

Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo si incontrano in un punto.

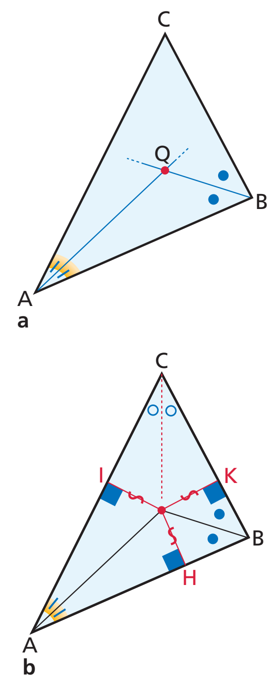
DIMOSTRAZIONE

Tracciamo le bisettrici degli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ (figura 16*a*).
Possiamo essere certi che le due bisettrici si incontrano in un punto, che chiamiamo Q. Infatti la somma degli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ del triangolo è minore di un angolo piatto, quindi, a maggior ragione, lo è anche la somma delle loro metà. Le bisettrici di $\hat{A}$ e di $\hat{B}$ formano dunque con la trasversale AB angoli coniugati interni non supplementari, perciò si incontrano.
Tracciamo da Q le perpendicolari ai lati e chiamiamo H, I e K i rispettivi piedi (figura 16*b*).
Dobbiamo dimostrare che anche la bisettrice dell'angolo $\hat{C}$ passa per il punto Q.
Osserviamo che:

- $QI \cong QH$, perché il punto Q appartiene alla bisettrice di $\hat{A}$, perciò è equidistante dai suoi lati;
- $QH \cong QK$, perché il punto Q appartiene alla bisettrice di $\hat{B}$, perciò è equidistante dai suoi lati.

Per la proprietà transitiva: $QI \cong QK$.
Il punto Q è equidistante dai lati dell'angolo $\hat{C}$, *quindi* appartiene alla sua bisettrice.

▼ **Figura 16**

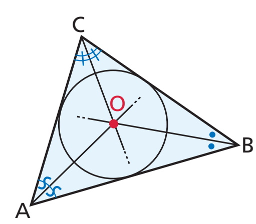


DEFINIZIONE

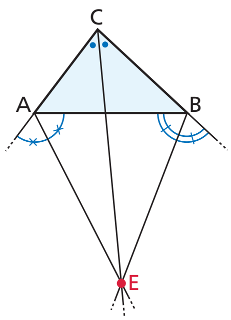
Incentro

Il punto di incontro delle bisettrici di un triangolo si chiama incentro ed è il centro della circonferenza inscritta.

Corollario. Ogni triangolo è circoscrivibile a una circonferenza che ha come centro l'incentro del triangolo.



O incentro di ABC



E excentro di ABC

Enunciamo il seguente teorema senza dimostrarlo.

TEOREMA

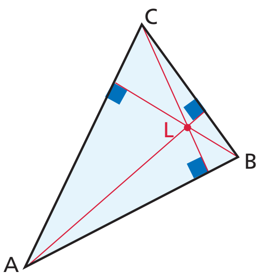
Le bisettrici di due angoli esterni di un triangolo e la bisettrice dell'angolo interno non adiacente a essi si intersecano in uno stesso punto.

DEFINIZIONE

Excentro

Il punto di incontro delle bisettrici di due angoli esterni di un triangolo con la bisettrice dell'angolo interno non adiacente a essi si chiama excentro.

Se ne deduce che un triangolo ha quattro punti equidistanti dalle rette dei lati: l'incentro e tre excentri.

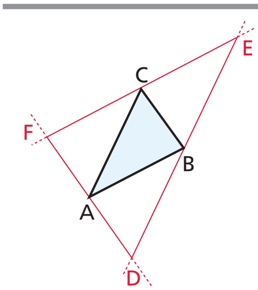


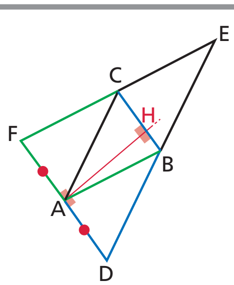
L'ortocentro

TEOREMA

Le altezze di un triangolo (o i loro prolungamenti) si incontrano in un punto.

▼ Figura 17





▲ Figura 18

DIMOSTRAZIONE

Per ogni vertice del triangolo tracciamo la parallela al lato opposto. Queste rette si incontrano a due a due per il corollario relativo alla proprietà transitiva delle rette parallele (paragrafo 2 del capitolo G3). Chiamiamo D, E e F i loro punti di intersezione (figura 17).

I quadrilateri $ADBC$ e $ABCF$ sono parallelogrammi, in quanto hanno i lati opposti paralleli per costruzione, *quindi*:

- $AD \cong BC$ perché lati opposti di un parallelogramma;
- $BC \cong FA$ per lo stesso motivo.

Per la proprietà transitiva, $AD \cong FA$, *quindi* A è il punto medio di FD.

La retta AH dell'altezza è perpendicolare al lato BC (figura 18), *quindi* è anche perpendicolare a FD ($FD \parallel BC$ per costruzione). AH interseca il segmento FD nel suo punto medio A, *quindi* è l'asse di FD.

In modo analogo si dimostra che B e C sono i punti medi degli altri due lati del triangolo DEF e che le rette delle altre due altezze sono gli assi di DE e di EF.

Dunque le rette delle tre altezze di ABC sono anche gli assi del triangolo DEF, *quindi* si incontrano in un punto, per il teorema del circocentro.

DEFINIZIONE

Ortocentro

In un triangolo il punto di incontro delle altezze (o dei loro prolungamenti) si chiama ortocentro.

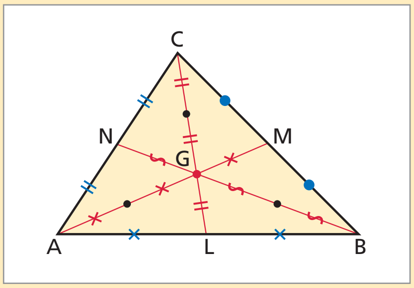
Ortocentro è una parola composta da «orto» (dal greco *orthós*, che significa «diritto, retto») e da «centro».

Il baricentro

TEOREMA

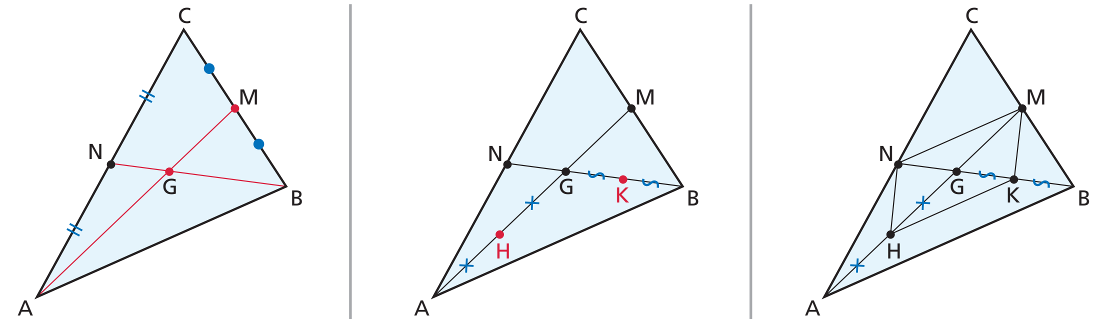
Le mediane di un triangolo si incontrano in un punto.
Il punto di intersezione divide ogni mediana in due parti, tali che quella avente per estremo un vertice è doppia dell'altra.

$AG \cong 2GM$,
$BG \cong 2GN$, $CG \cong 2GL$.



DIMOSTRAZIONE

▼ **Figura 19** Costruzione.



a. Nel triangolo *ABC* disegniamo le due mediane *AM* e *BN*. Chiamiamo *G* il loro punto di intersezione.

b. Sulla mediana *AM* fissiamo il punto medio *H* di *AG*, e sulla mediana *BN* il punto medio *K* di *BG*.

c. Congiungiamo *N* e *K* con *M* e con *H*.

1. Dimostriamo che il punto di incontro di *due* mediane divide ognuna delle mediane in due parti una doppia dell'altra.

Nel triangolo ABC il segmento MN congiunge i punti medi di due lati, *quindi* MN è parallelo ad AB e congruente alla sua metà, per la proprietà della congiungente dei punti medi dei lati di un triangolo.

Nel triangolo AGB il segmento HK congiunge i punti medi di due lati, *quindi* HK è parallelo ad AB e congruente alla metà di AB, per la proprietà enunciata in precedenza.

Il quadrilatero $HKMN$ ha i due lati opposti MN e HK congruenti (entrambi metà di AB) e paralleli (entrambi paralleli ad AB), *quindi* è un parallelogramma.
In un parallelogramma le diagonali si incontrano nel loro punto medio, *quindi* $HG \cong GM$ e $KG \cong GN$.

Per la proprietà della congiungente dei punti medi dei lati di un triangolo, vedi il paragrafo 10 del capitolo G3.

Per costruzione, H è punto medio di AG, *quindi* $AH \cong HG \cong GM$, *pertanto* $AG \cong 2GM$. Analogamente, K è punto medio di BG, *quindi* $BK \cong KG \cong GN$, *pertanto* $BG \cong 2GN$.
Ripetendo lo stesso ragionamento con le mediane CL e BN, *si deduce* che anch'esse si intersecano in modo da dividersi in parti tali che quella che ha per estremo un vertice del triangolo ABC è doppia dell'altra.

2. Dimostriamo che il punto di incontro delle mediane è uno solo.
La mediana BN è divisa nello stesso modo sia dal punto di intersezione con AM, sia da quello di intersezione con CL, *quindi* AM e CL devono intersecare BN nello stesso punto G.

Baricentro è una parola composta da «bari» (dal greco *barýs*, che significa «pesante») e da «centro». Il baricentro è chiamato anche *centro di gravità* del triangolo.

DEFINIZIONE

Baricentro

Il punto di incontro delle mediane di un triangolo si chiama baricentro.

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Sempre in fila (e non solo)

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Che relazioni esistono fra baricentro, circocentro e ortocentro di un qualunque triangolo?

GIADA: «Io proverei a partire da qualche caso particolare, per esempio da un triangolo rettangolo. Oppure isoscele».

SARA: «Ma quante relazioni ci saranno?».

▶ Formula congetture relative a due relazioni fra i tre punti notevoli, poi dimostrale mediante la geometria analitica.

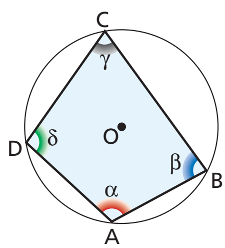
8. I quadrilateri inscritti e circoscritti

I quadrilateri inscritti

In base a questo teorema, un rombo, in generale, è inscrivibile in una circonferenza?

TEOREMA

In un quadrilatero inscritto in una circonferenza gli angoli opposti sono supplementari.



Ipotesi *ABCD* è inscritto in una circonferenza.

Tesi 1. $\alpha + \gamma \cong \hat{P}$;
2. $\beta + \delta \cong \hat{P}$.

DIMOSTRAZIONE

Disegniamo i raggi OB e OD. Indichiamo con α l'angolo alla circonferenza di vertice A e con γ quello di vertice C; con α' l'angolo al centro $D\hat{O}B$ corrispondente di α e con γ' l'angolo al centro $D\hat{O}B$ corrispondente di γ (figura 20*a*).

La somma dei due angoli α' e γ' è un angolo giro, *quindi* $\alpha' + \gamma' \cong 2\hat{P}$.

L'angolo α è un angolo alla circonferenza che insiste sull'arco $\overset{\frown}{BCD}$, *quindi* è la metà del suo corrispondente angolo al centro α' (figura 20*b*).

L'angolo γ è un angolo alla circonferenza che insiste sull'arco $\overset{\frown}{DAB}$, *quindi* è la metà del suo corrispondente angolo al centro γ' (figura 20*c*).

Da $\alpha \cong \frac{1}{2}\alpha'$ e $\gamma \cong \frac{1}{2}\gamma'$, sommando membro a membro, otteniamo:

$$\alpha + \gamma \cong \frac{1}{2}\alpha' + \frac{1}{2}\gamma'.$$

Raccogliamo $\frac{1}{2}$ a fattor comune:

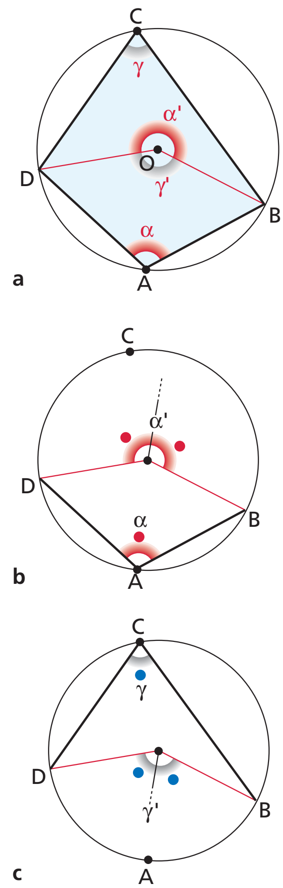
$$\alpha + \gamma \cong \frac{1}{2}(\alpha' + \gamma'),$$

e quindi, essendo $\alpha' + \gamma' \cong 2\hat{P}$:

$$\alpha + \gamma \cong \frac{1}{2}\cdot 2\hat{P} \cong \hat{P}.$$

Tracciando gli altri due raggi OA e OC e ripetendo lo stesso ragionamento, si deduce che $\beta + \delta \cong \hat{P}$.

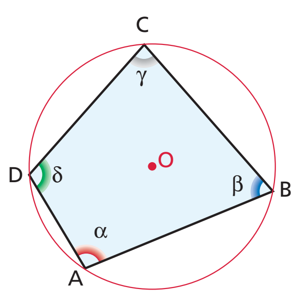
▼ Figura 20



Vale anche il teorema inverso.

TEOREMA

Un quadrilatero con gli angoli opposti supplementari è inscrivibile in una circonferenza.



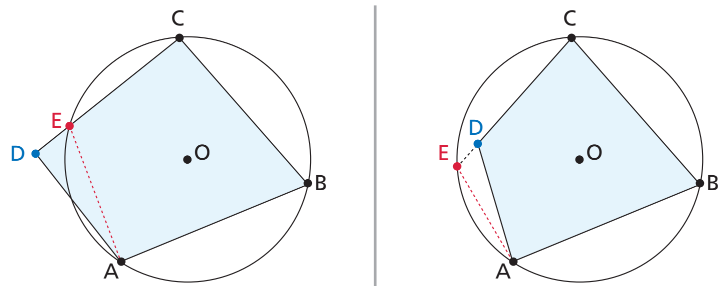
Ipotesi **1.** *ABCD* è un quadrilatero;
2. $\alpha + \gamma \cong \hat{P}$;
3. $\beta + \delta \cong \hat{P}$.

Tesi *ABCD* è inscrivibile in una circonferenza.

La somma degli angoli interni di un quadrilatero è $2\hat{P}$. Si può quindi dire che un quadrilatero convesso è inscrivibile in una circonferenza quando le somme degli angoli opposti sono congruenti.

DIMOSTRAZIONE Dobbiamo dimostrare che la circonferenza passante per A, B e C passa anche per D.
Ragioniamo per assurdo.

Se, per assurdo, la circonferenza per *A*, *B*, e *C* non passa per *D*, si hanno due casi possibili:



a. *D* è esterno alla circonferenza: la circonferenza interseca il lato *CD* nel punto *E*.

b. *D* è interno alla circonferenza: la circonferenza interseca il prolungamento del lato *CD* nel punto *E*.

▶ **Figura 21**

Osservando la figura 21 notiamo che:

- $A\hat{E}C + A\hat{B}C \cong \hat{P}$ perché angoli opposti in un quadrilatero inscritto in una circonferenza;
- $A\hat{D}C + A\hat{B}C \cong \hat{P}$ per ipotesi.

Quindi $A\hat{E}C$ e $A\hat{D}C$ sono congruenti, perché supplementari dello stesso angolo.

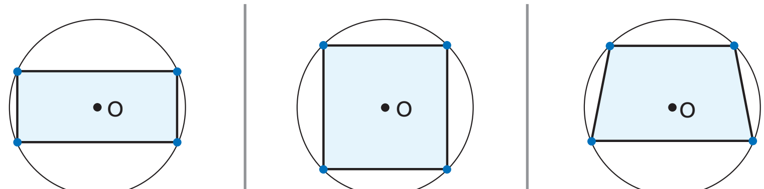
D'altra parte, essi sono angoli corrispondenti fra le rette AD e AE, tagliate dalla trasversale DE. Le rette AD e AE, avendo angoli corrispondenti congruenti, risultano parallele, e ciò è in *contraddizione* con il fatto che hanno in comune il punto A.
Quindi la circonferenza deve passare anche per il punto D.

I due teoremi dimostrati si riassumono nel seguente.

TEOREMA

Condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia inscrivibile in una circonferenza è che abbia gli angoli opposti supplementari.

Corollario. Ogni rettangolo, quadrato o trapezio isoscele è inscrivibile in una circonferenza.



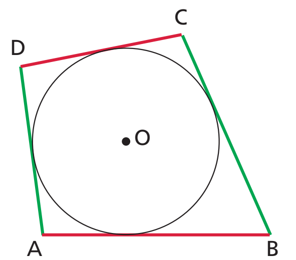
a. Rettangolo. **b.** Quadrato. **c.** Trapezio isoscele.

▶ **Figura 22** **In tutte e tre le figure gli angoli opposti sono supplementari. Nelle prime due perché gli angoli sono tutti congruenti, di conseguenza retti; nel trapezio isoscele per il corollario del teorema relativo a tale figura (paragrafo 9 del capitolo G3).**

I quadrilateri circoscritti

TEOREMA

In un quadrilatero circoscritto a una circonferenza, la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due.



Ipotesi $ABCD$ è circoscritto a una circonferenza.

Tesi $AB + CD \cong AD + BC$.

> In base a questo teorema, un rettangolo, in generale, è circoscrivibile a una circonferenza?

DIMOSTRAZIONE

Indichiamo con P, Q, R, S i punti di tangenza dei lati con la circonferenza.
I segmenti AP e AS (figura 23*a*) sono segmenti di tangente condotti dal vertice A, esterno alla circonferenza, *quindi* sono congruenti.
Per lo stesso motivo sono congruenti i segmenti BP e BQ, CR e CQ, DR e DS (figura 23*b*).
Possiamo scrivere:

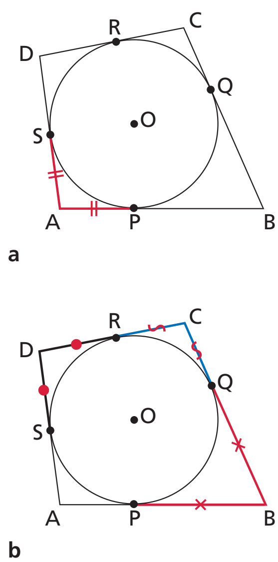
$$AP \cong AS, \quad BP \cong BQ, \quad CR \cong CQ, \quad DR \cong DS.$$

Sommando membro a membro otteniamo:

$$AP + BP + CR + DR \cong AS + BQ + CQ + DS, \text{ ossia}$$

$$\underbrace{AP + BP} + \underbrace{CR + DR} \cong \underbrace{AS + DS} + \underbrace{BQ + CQ}.$$

Nelle addizioni indicate, sostituendo a ogni coppia di segmenti il segmento congruente, otteniamo: $AB + CD \cong AD + BC$.



▲ Figura 23

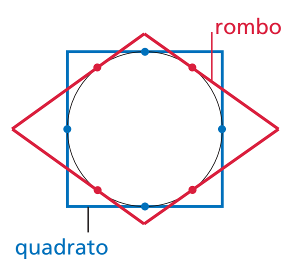
Vale anche il teorema inverso (dimostrazione per assurdo).

TEOREMA

Se in un quadrilatero la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due, allora è possibile circoscrivere il quadrilatero a una circonferenza.

Corollario. Se un quadrilatero è un rombo (o, in particolare, un quadrato), è circoscrivibile a una circonferenza. Per il quadrato i punti di contatto coincidono con i punti medi dei lati (figura 24).

▼ Figura 24



I due teoremi possono essere riassunti nel seguente.

TEOREMA

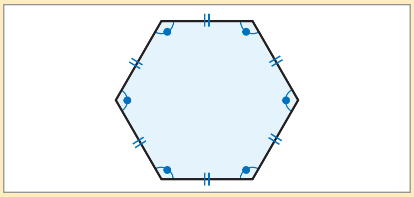
Condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia circoscrivibile a una circonferenza è che la somma di due lati opposti sia congruente alla somma degli altri due.

9. I poligoni regolari

DEFINIZIONE

Poligono regolare

Un poligono è regolare quando ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti.



Possiamo dire che un poligono regolare è equilatero ed equiangolo.

Un rombo non è un poligono regolare perché, pur avendo tutti i lati congruenti, non ha tutti gli angoli congruenti.
Un rettangolo non è un poligono regolare perché, pur avendo tutti gli angoli congruenti, non ha tutti i lati congruenti.
Il triangolo equilatero e il quadrato sono poligoni regolari.

I poligoni regolari e le circonferenze inscritta e circoscritta

TEOREMA

Un poligono regolare è inscrivibile in una circonferenza e circoscrivibile a un'altra; le due circonferenze hanno lo stesso centro.

Ipotesi 1. $AB \cong BC \cong CD \cong DE \cong EA$;
2. $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \cong \hat{E}$.

Tesi 1. $ABCDE$ è inscrivibile in una circonferenza $\mathscr{C}$;
2. $ABCDE$ è circoscrivibile a una circonferenza $\mathscr{C}'$;
3. $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ hanno lo stesso centro.

DIMOSTRAZIONE Tracciamo la bisettrice dell'angolo $\hat{A}$, che divide $\hat{A}$ in α e α'.
Tracciamo la bisettrice dell'angolo $\hat{B}$, che lo divide in β e β'. Indichiamo con O il punto d'intersezione delle due bisettrici.
Congiungiamo O con il vertice C; indichiamo con γ l'angolo $B\hat{C}O$ e con γ' l'angolo $O\hat{C}B$ (figura *a*).
Vogliamo dimostrare che OC è bisettrice di $\hat{C}$.
Per l'ipotesi 2, $\hat{A} \cong \hat{B}$, *quindi* $\alpha \cong \beta$ perché metà di angoli congruenti. *Dunque* il triangolo ABO è isoscele, *pertanto* $OA \cong OB$.

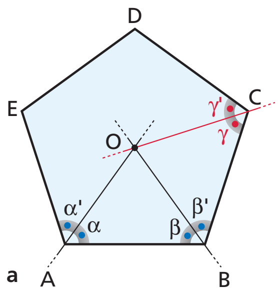
Consideriamo i triangoli ABO e BCO (figura *b*). Essi hanno:

- BO in comune;
- $AB \cong BC$, perché lati del poligono regolare;
- $\beta \cong \beta'$, per costruzione.

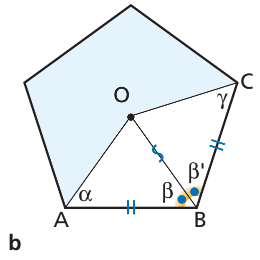
Quindi sono congruenti per il primo criterio.

In particolare, risulta $OA \cong OC$ e $\alpha \cong \gamma$.

$\hat{A} \cong \hat{C}$, per l'ipotesi 2, $\alpha \cong \frac{1}{2}\hat{A}$ per costruzione, allora anche $\gamma \cong \frac{1}{2}\hat{C}$, *quindi*, essendo $\gamma \cong \gamma'$, OC è bisettrice dell'angolo $\hat{C}$.



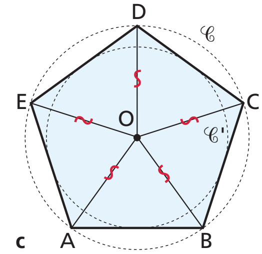
a



b

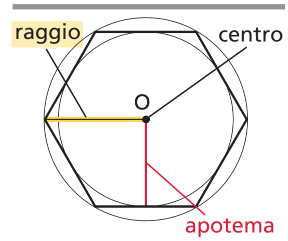
Se congiungiamo il punto O con i rimanenti vertici (figura *c*), possiamo ripetere lo stesso ragionamento per tutti gli altri triangoli che si formano (CDO, DEO, EAO). Essi sono tutti isosceli e fra loro congruenti.

Il punto O è equidistante da tutti i vertici del poligono e **rappresenta il centro della circonferenza in cui il poligono è inscritto**.
O è anche il punto di incontro delle bisettrici di tutti gli angoli, *pertanto*, per la proprietà della bisettrice, risulta equidistante da tutti i lati del poligono. *Quindi* il punto O rappresenta anche il **centro della circonferenza alla quale il poligono è circoscritto**.



Il teorema precedente permette di individuare nei **poligoni regolari** alcuni **elementi notevoli**. In ogni poligono regolare:

- il **centro** è il centro delle circonferenze inscritta e circoscritta;
- l'**apotema** è il raggio della circonferenza inscritta;
- il **raggio** è il raggio della circonferenza circoscritta.



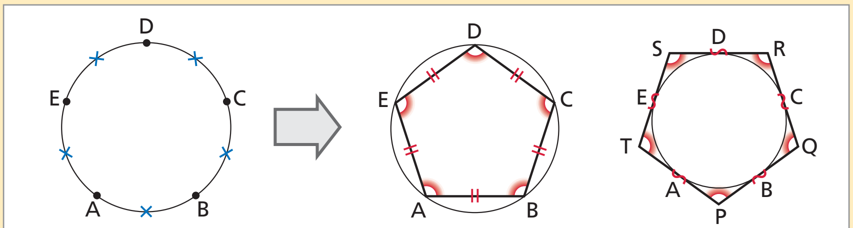
▲ **Figura 25** **Il centro, l'apotema e il raggio di un esagono regolare.**

La circonferenza divisa in archi congruenti

TEOREMA

Se una circonferenza è divisa in tre o più archi congruenti, allora:

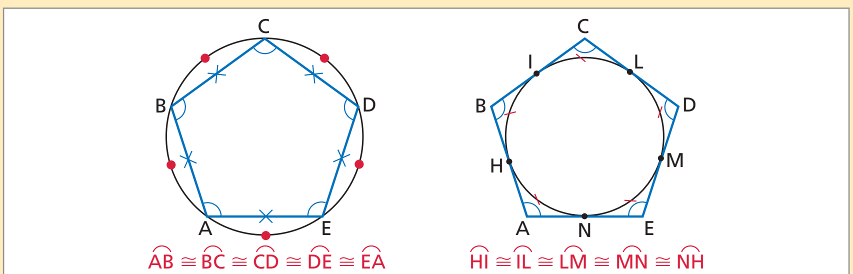
- il poligono inscritto che si ottiene congiungendo i punti di suddivisione è regolare;
- il poligono circoscritto che si ottiene tracciando le tangenti alla circonferenza nei punti di suddivisione è regolare.

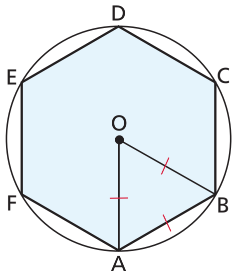


TEOREMA

Una circonferenza è suddivisa in archi congruenti dai:

- vertici dei poligoni regolari inscritti;
- punti di tangenza dei poligoni regolari circoscritti.





TEOREMA

Il lato dell'esagono regolare inscritto in una circonferenza è congruente al raggio della circonferenza.

DIMOSTRAZIONE Dimostriamo che congiungendo il centro O della circonferenza con i punti A e B si ottiene un triangolo equilatero. Infatti l'angolo $A\hat{O}B$ è $\frac{1}{6}$ di angolo giro poiché insiste sull'arco $\widehat{AB}$ congruente a $\frac{1}{6}$ di circonferenza.

Quindi $O\hat{A}B \cong O\hat{B}A \cong A\hat{O}B$, tutti congruenti a $\frac{1}{6}$ di angolo giro.

Pertanto AOB è un triangolo equilatero e $OA \cong AB$.

LA CICLOTOMIA

Con «ciclotomia» si indica il problema di dividere, *con riga e compasso*, la circonferenza in n parti congruenti, con n numero naturale.

Osserviamo che se riusciamo a dividerla in n parti congruenti, abbiamo anche ottenuto un metodo per disegnare con riga e compasso il poligono regolare di n lati.

Friedrich Gauss, nel 1801, studiando la questione, arrivò al seguente risultato: è possibile suddividere la circonferenza in un numero n di parti congruenti, usando riga e compasso, soltanto se:

- n è un numero primo e $n = 2^{2^l} + 1$, dove $l \in \mathbb{N}$;
- n non è un numero primo e $n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots$, dove $m \in \mathbb{N}$ e p_1, p_2, … sono fattori primi distinti della forma $2^{2^l} + 1$.

Per il primo tipo di numeri otteniamo, per esempio:

$$2^1 + 1 = 3; \quad 2^2 + 1 = 5; \quad 2^4 + 1 = 17; \ldots$$

Per il secondo tipo di numeri abbiamo:

$$2^2 = 4;\ 2(2^1 + 1) = 6;\ 2^3 = 8;$$
$$2(2^2 + 1) = 10; \ldots$$

Procedendo in questo modo, si ottiene che con riga e compasso è possibile dividere la circonferenza in 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, … parti congruenti, ma non è possibile in 7, 9, 11, 13, 14, … parti congruenti.

10. La piramide e i solidi di rotazione

In questo paragrafo i concetti relativi alla circonferenza vengono utilizzati per studiare la piramide retta e i solidi di rotazione.

La piramide

DEFINIZIONE

Piramide

Si chiama piramide la parte di angoloide compresa fra il suo vertice e un piano che interseca tutti i suoi spigoli.

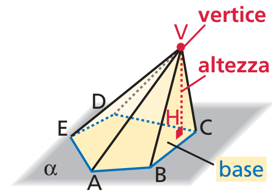
Il poligono intersezione fra il piano e l'angoloide si chiama **base** della piramide, il vertice dell'angoloide si chiama **vertice** della piramide.

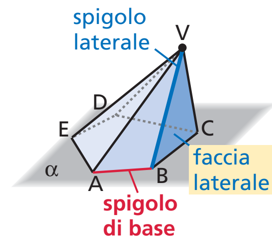
La distanza fra il vertice e il piano di base è l'**altezza** della piramide.

La piramide è delimitata, oltre che dalla base, da triangoli detti **facce laterali**.

Ogni lato della base si chiama anche **spigolo** di base, gli altri lati dei triangoli si chiamano **spigoli laterali**.

Piramide





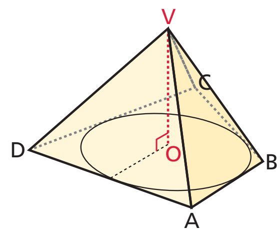
Due piramidi particolari

DEFINIZIONE

Piramide retta

Una piramide è retta quando nella sua base si può inscrivere una circonferenza il cui centro è la proiezione ortogonale del vertice della piramide sul piano di base.

Piramide
retta

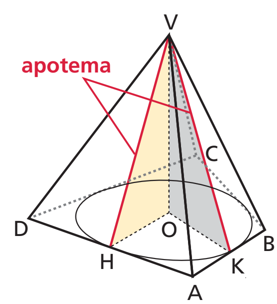


Il centro O della circonferenza è la proiezione ortogonale del vertice V, cioè il piede della perpendicolare alla base passante per il vertice V.

Osserva che il segmento VO è l'altezza della piramide.

TEOREMA

In una piramide retta, le altezze delle facce laterali passano per i punti di tangenza dei lati di base con la circonferenza inscritta e sono tra loro congruenti.



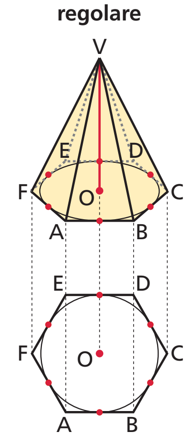
L'altezza delle facce laterali della piramide retta si chiama **apotema**.

DEFINIZIONE

Piramide regolare

Una piramide retta si dice regolare quando la sua base è un poligono regolare.

Piramide
regolare



Le facce laterali di una piramide regolare sono triangoli isosceli fra loro congruenti.

I solidi di rotazione

Si chiama **solido di rotazione** il solido generato dalla rotazione di una figura piana intorno a una retta r, secondo un angolo α.

Se α è un angolo giro, allora si dice che la rotazione è **completa**.

In una rotazione completa, il punto P, che corrisponde a se stesso, descrive una circonferenza appartenente al piano perpendicolare alla retta e passante per P.

Il cilindro

DEFINIZIONE

Cilindro

Un cilindro è un solido generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno a uno dei suoi lati.

Cilindro

Il lato attorno al quale ruota il rettangolo è detto **altezza** del cilindro. Gli altri due lati perpendicolari all'altezza sono detti **raggi di base**.

I raggi di base nella rotazione determinano due cerchi, che sono detti **basi** del cilindro.

Un cilindro si dice **equilatero** se la sua altezza è congruente al diametro della base.

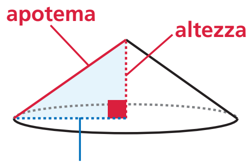
Il cono

DEFINIZIONE

Cono

Un cono è un solido generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno a uno dei cateti.

Cono



Il cateto attorno a cui ruota il triangolo è l'**altezza** del cono, l'altro cateto è il **raggio di base**. L'ipotenusa è detta **apotema** del cono.

Un cono si dice **equilatero** se l'apotema è congruente al diametro della base. L'intersezione fra un cono equilatero e un piano contenente la sua altezza è un triangolo equilatero.

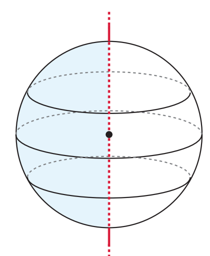
La sfera

DEFINIZIONE

Sfera

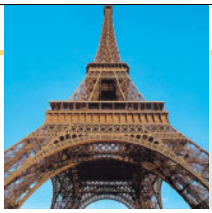
La sfera è un solido generato dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al suo diametro.

Sfera



La semicirconferenza che ruota genera una superficie detta **superficie sferica**. Il raggio della semicirconferenza è detto **raggio** della sfera.

La superficie sferica e la sfera possono essere considerate luoghi geometrici:
- la superficie sferica è il luogo dei punti dello spazio che hanno dal centro distanza uguale al raggio;
- la sfera è il luogo dei punti dello spazio che hanno dal centro distanza minore o uguale al raggio.



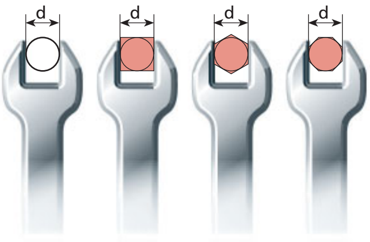
Bulloni!

…perché le teste dei bulloni sono quasi sempre esagonali?

Il quesito completo a pag. G169

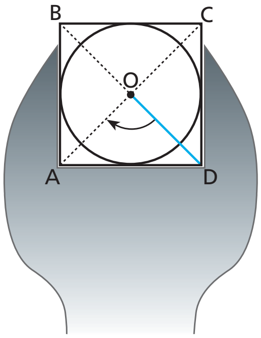
Supponiamo di voler stringere un bullone a testa pentagonale con una comune chiave: possiamo verificare immediatamente che lo strumento tende a scappare via, poiché i suoi lati paralleli hanno pochi punti di contatto col bullone.

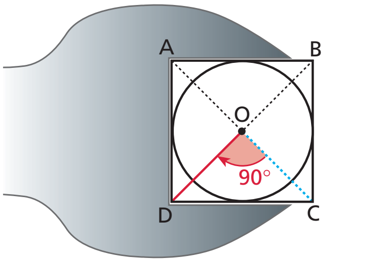
Affinché questo non succeda è necessario che anche i lati della testa del bullone su cui si fa forza siano paralleli. Dato che ogni poligono regolare avente un numero pari di lati ha i lati opposti paralleli, in teoria la testa dei bulloni potrebbe avere una qualunque di queste forme: quadrata, esagonale, ottagonale e così via.



Precisamente, con la stessa chiave inglese possiamo stringere o allentare tutti i bulloni la cui testa sia un poligono regolare avente un numero pari di lati, circoscritto alla circonferenza di diametro *d*.

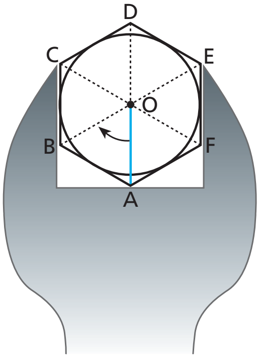
Partiamo dunque dal più semplice di tali poligoni, il quadrato, e consideriamo nella figura la rotazione da far compiere al bullone per ottenere la stessa configurazione di partenza.
Seguiamo tale rotazione registrando il movimento, per esempio, della semidiagonale *OD*.

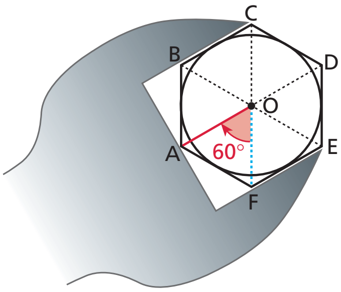




Ciò che si osserva è che l'angolo di rotazione richiesto vale 90°, pari all'angolo in cui è diviso l'angolo giro al centro quando un quadrato è circoscritto alla circonferenza. Ugualmente anche lo spazio di manovra della chiave è di 90° e ciò può creare problemi di ingombro.
Se invece il bullone ha testa esagonale, è sufficiente una rotazione di 60° per portarlo alla configurazione iniziale e lo spazio di manovra della chiave è così inferiore.

L'angolo di rotazione di 60° è ancora quello per cui l'angolo giro al centro risulta suddiviso quando un esagono è circoscritto alla circonferenza.





Sembrerebbe dunque ancora più conveniente utilizzare dei bulloni con testa ottagonale: di fatto, però, non è così. Infatti, al crescere del numero dei lati, il poligono regolare circoscritto a una circonferenza ha il lato sempre più corto, e approssima sempre meglio la circonferenza stessa: questo fa sì che il bullone ottagonale sia molto più delicato di quello esagonale, in quanto è più facile, girandolo con la chiave, smussarne un angolo, rendendolo quindi inutilizzabile.

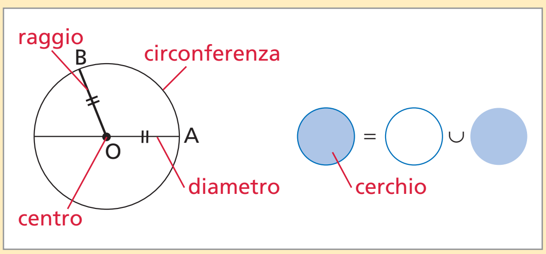
LA TEORIA IN SINTESI

La circonferenza, i poligoni inscritti e circoscritti

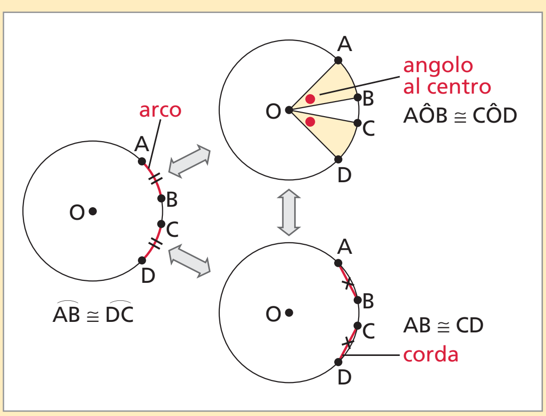
1. La circonferenza e il cerchio

Un **luogo geometrico** è l'insieme di tutti e soli i punti di un piano che godono di una determinata proprietà caratteristica.

L'**asse di un segmento** è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento.
La **circonferenza** è il luogo dei punti di un piano che hanno una distanza assegnata da un punto fisso detto **centro**. Il **cerchio** è la figura formata dai punti della circonferenza e dai suoi punti interni.

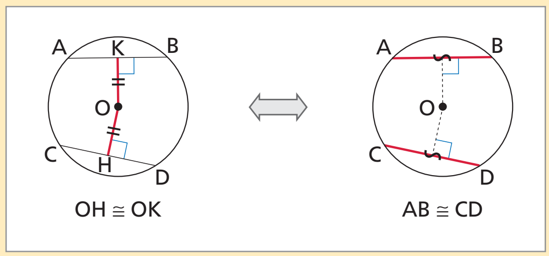


Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza.
Se in una circonferenza sono congruenti due figure dello stesso tipo, per esempio due archi, allora sono congruenti anche le figure corrispondenti, ossia le due corde e i due angoli al centro.

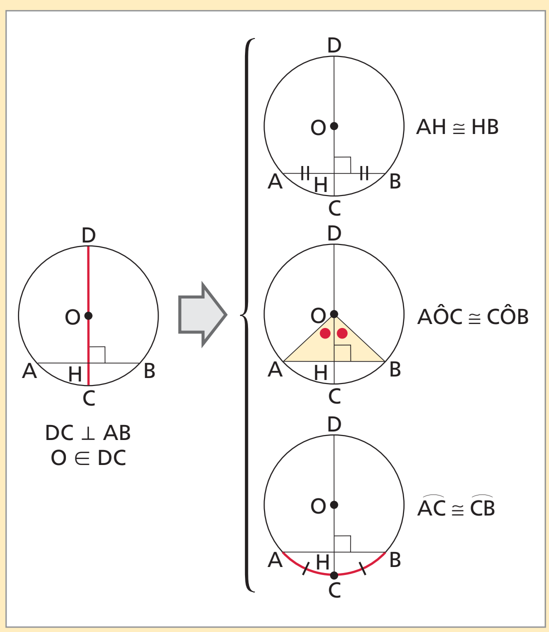


2. I teoremi sulle corde

In una circonferenza due corde hanno la stessa distanza dal centro se e solo se sono congruenti.

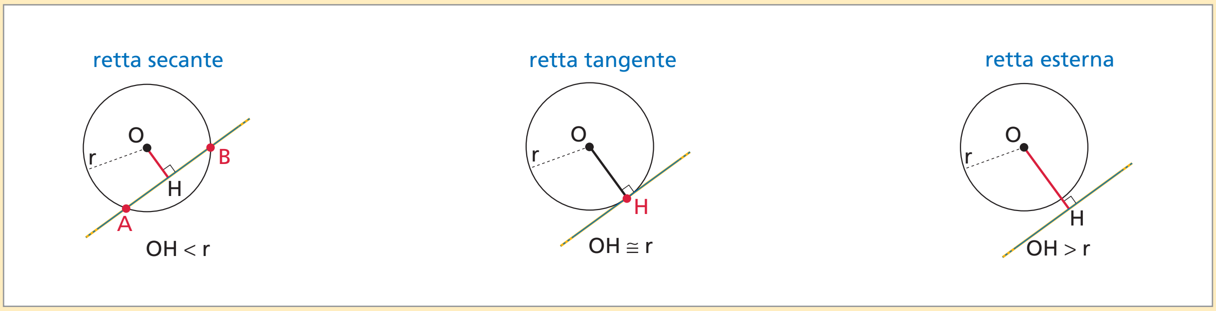


Se un diametro è perpendicolare a una corda non passante per il centro, allora esso divide la corda in due parti congruenti. Tale diametro divide in due parti congruenti anche i due archi che la corda individua e i due angoli al centro corrispondenti a detti archi.

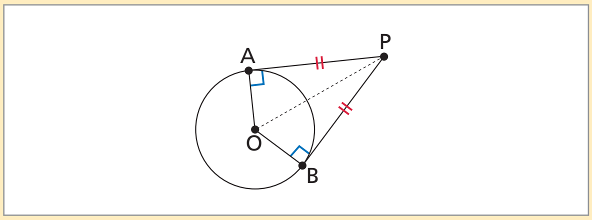


3. Le posizioni di una retta rispetto a una circonferenza

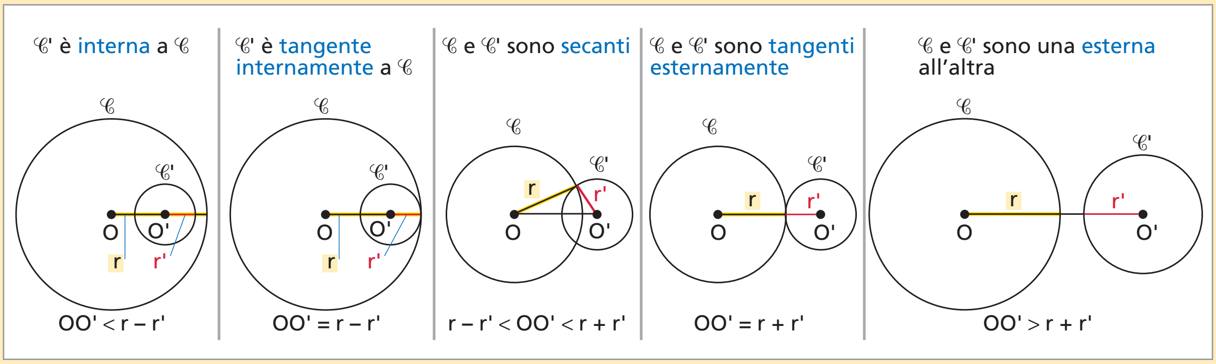
Una retta e una circonferenza che si intersecano non possono avere più di due punti in comune.
Una retta è **secante** una circonferenza se ha due punti in comune con essa, è **tangente** se ha un solo punto in comune, è **esterna** se non ha punti in comune.



Le tangenti a una circonferenza da un punto esterno
Se da un punto esterno a una circonferenza si conducono le due rette tangenti, risultano congruenti i due segmenti di tangente.

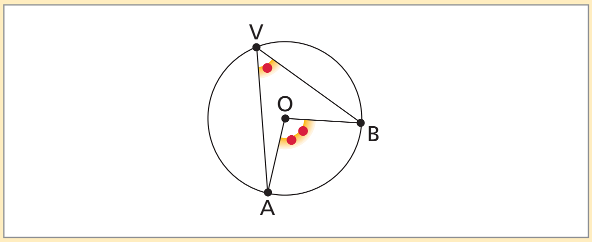


4. Le posizioni reciproche fra due circonferenze



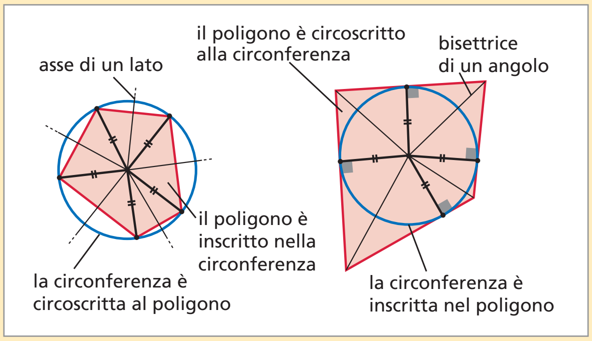
5. Gli angoli alla circonferenza e i corrispondenti angoli al centro

Un angolo al centro e un angolo alla circonferenza si dicono **corrispondenti** quando insistono sullo stesso arco. Ogni angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro corrispondente.
Nella stessa circonferenza, due o più angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco o su archi congruenti sono congruenti.
Se un angolo alla circonferenza insiste su una semicirconferenza, è retto.



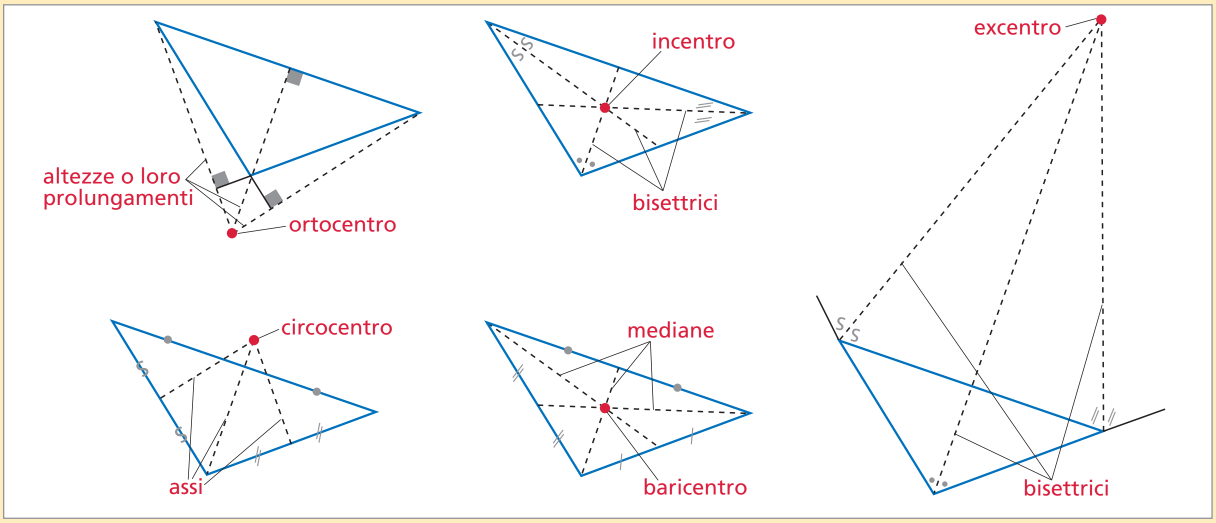
6. I poligoni inscritti e circoscritti

Un poligono è **inscritto** in una circonferenza quando ha tutti i vertici sulla circonferenza. Un poligono può essere inscritto in una circonferenza se e solo se gli assi dei suoi lati si incontrano tutti in uno stesso punto. Il punto di intersezione degli assi dei lati del poligono coincide con il centro della circonferenza.
Un poligono è **circoscritto** a una circonferenza quando tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza. Un poligono può essere circoscritto a una circonferenza se e solo se le bisettrici dei suoi angoli si incontrano tutte in uno stesso punto. Il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli del poligono coincide con il centro della circonferenza.



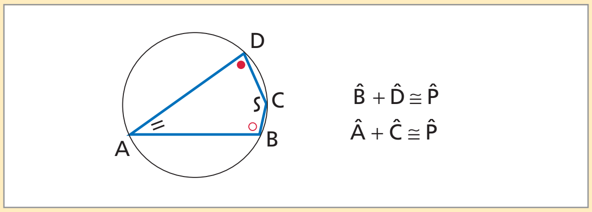
7. I punti notevoli di un triangolo

- Il **circocentro** è il punto di incontro degli assi dei lati del triangolo.
- L'**incentro** è il punto di incontro delle bisettrici degli angoli del triangolo.
- L'**excentro** è il punto di incontro delle bisettrici di due angoli esterni con la bisettrice dell'angolo interno non adiacente a essi.
- L'**ortocentro** è il punto di incontro delle altezze del triangolo.
- Il **baricentro** è il punto di incontro delle mediane del triangolo.
  Proprietà del baricentro. Il baricentro divide ogni mediana in due parti di cui quella contenente il vertice è doppia dell'altra.

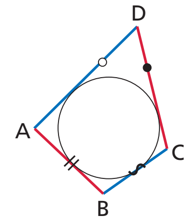


8. I quadrilateri inscritti e circoscritti

Condizione necessaria e sufficiente affinché un **quadrilatero** sia **inscrivibile** in una circonferenza è che abbia gli angoli opposti supplementari.



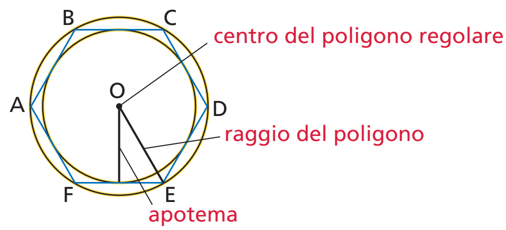
Condizione necessaria e sufficiente affinché un **quadrilatero** sia **circoscrivibile** a una circonferenza è che la somma di due lati opposti sia congruente alla somma degli altri due.



$AB + CD \cong AD + BC$

9. I poligoni regolari

Un poligono **regolare** è un poligono avente tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti.
Se un poligono è regolare, allora esso è inscrivibile in una circonferenza e circoscrivibile a un'altra.
Le due circonferenze hanno lo stesso centro, detto centro del poligono.



10. La piramide e i solidi di rotazione

Una **piramide** è un poliedro delimitato da un poligono, detto **base**, e da **facce laterali** triangolari, le quali:

- hanno in comune un vertice, detto **vertice della piramide**;
- hanno il lato opposto a tale vertice coincidente con un lato del poligono di base.

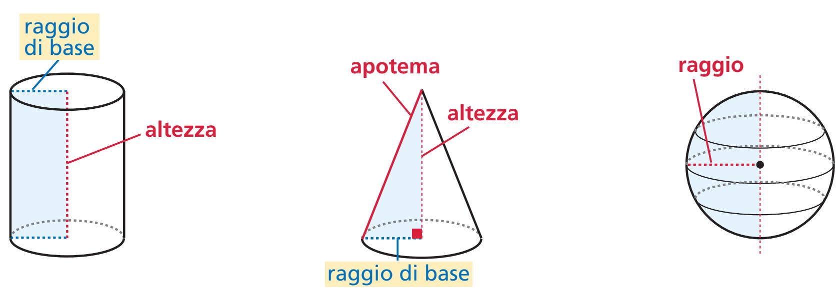
La distanza fra il vertice e il piano della base è detta **altezza** della piramide.

Una piramide è **retta** quando nella sua base si può inscrivere una circonferenza il cui centro è la proiezione ortogonale del vertice della piramide sul piano di base. Le facce laterali di una piramide retta hanno altezze congruenti; tale altezza viene detta **apotema**.

Una piramide è **regolare** quando è retta e la sua base è un poligono regolare.

I **solidi di rotazione** sono generati dalla rotazione di una figura piana attorno a una retta. In particolare:

- un **cilindro** è generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno a uno dei suoi lati;
- un **cono** è generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno a uno dei suoi cateti;
- una **sfera** è generata dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al suo diametro.



1. La circonferenza e il cerchio

Teoria a pag. G169

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 TEST Per tre punti qualsiasi e fissati passa:

A sempre una e una sola retta.
B una e una sola circonferenza.
C una e una sola circonferenza, purché i punti non siano allineati.
D un diametro.
E una corda.

2 Un settore circolare può coincidere con un segmento circolare? Motiva la risposta.

3 VERO O FALSO?

a) A ogni corda corrisponde sempre un solo arco e viceversa. V F
b) Per tre punti distinti passa sempre una circonferenza. V F
c) Gli estremi di due diametri perpendicolari sono i vertici di un quadrato. V F
d) Per due punti distinti passano infinite circonferenze che hanno tutte il centro sull'asse della corda. V F
e) Ogni diametro è una corda. V F

ESERCIZI

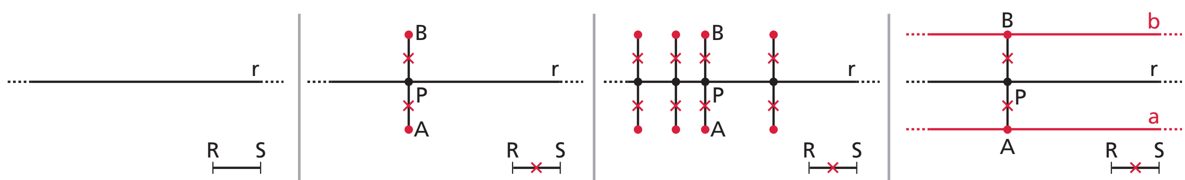
Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

I luoghi geometrici

ESERCIZIO GUIDA

4 Tracciamo una retta *r* e, fuori di essa, un segmento *RS*. Disegniamo il luogo dei punti del piano che hanno da *r* distanza *RS*.
Dimostriamo che la figura ottenuta è il luogo richiesto.

Dimostrazione



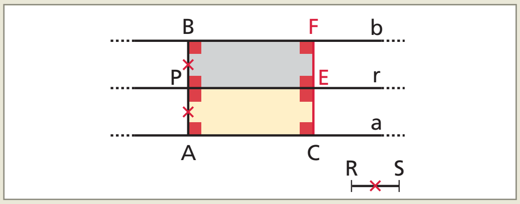
a. Disegniamo una retta *r* e un segmento *RS*.

b. I punti del piano richiesti devono avere distanza *RS* da *r*. Per trovarne uno, scegliamo un punto *P* di *r* e riportiamo con il compasso sulla retta passante per *P* e perpendicolare a *r* due segmenti, *PA* e *PB*, congruenti a *RS*.

c. Ripetiamo la stessa costruzione per altri punti della retta *r*.

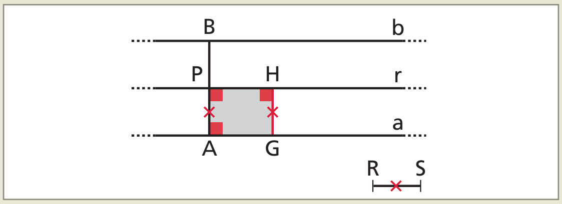
d. Il luogo richiesto è formato da due rette *a* e *b*, parallele a *r*, che hanno da *r* distanza *RS*.

1. Dimostriamo che tutti i punti delle rette a e b hanno distanza RS da r.



Scegliamo sulla retta a un qualunque altro punto C; tracciamo la perpendicolare per C alla retta a, che incontra r nel punto E e b in F.
Il quadrilatero $ACEP$ ha i lati opposti paralleli e gli angoli retti, per costruzione, *quindi* è un rettangolo e *pertanto* $AP \cong CE$.
Anche il quadrilatero $BFEP$ ha i lati opposti paralleli e gli angoli retti, per costruzione, *quindi* è un rettangolo, *pertanto* $PB \cong EF$.
I segmenti AP e PB sono congruenti a RS per costruzione, *quindi* anche i segmenti EC ed EF sono congruenti a RS.

2. Dimostriamo che soltanto i punti delle rette a e b hanno distanza RS da r, ossia che se un punto G ha distanza da r congruente a RS, allora G appartiene alla retta a oppure alla retta b.



GH è congruente a RS. Anche AP è congruente a RS, *quindi* GH è congruente ad AP.
Il quadrilatero $AGHP$ ha i lati opposti AP e GH congruenti e paralleli, *quindi* è un parallelogramma; inoltre gli angoli $\widehat{P}$ e $\widehat{H}$ sono retti, *quindi* $AGHP$ è un rettangolo, *pertanto* il lato AG appartiene alla retta a.

Disegna i seguenti luoghi geometrici e dimostra che ogni figura ottenuta è il luogo richiesto.

5 Disegna due rette r e s, non parallele, e fissa un segmento AB. Determina il luogo dei punti che hanno distanza congruente ad AB sia da r sia da s.

6 Traccia una retta r e due punti A e B fuori di essa tali che la retta AB non sia perpendicolare a r. Determina il luogo dei punti appartenenti a r che sono equidistanti da A e da B.

7 Determina il luogo dei punti equidistante da due rette parallele.

8 Determina il luogo dei punti che hanno distanze assegnate da due rette non parallele.

9 Nel quadrato $ABCD$ il vertice A rimane fisso, mentre varia la lunghezza del lato. Determina il luogo dei punti P di intersezione delle diagonali.

10 Considera tutti i rettangoli con la base in comune e altezza variabile. Qual è il luogo geometrico costituito dai punti di intersezione delle diagonali?

11 Dati un quadrato $ABCD$ e un segmento EF minore di AB, disegna il luogo dei punti del quadrato che hanno distanza da AB congruente al segmento EF.

12 Nel triangolo ABC sono assegnate la base BC e la lunghezza dell'altezza AH. Qual è il luogo dei vertici A?

13 Nel triangolo isoscele ABC di base AB determina il luogo dei vertici C al variare dell'angolo al vertice dei triangoli isosceli aventi tutti la stessa base AB.

14 Considera un rettangolo $ABCD$ e un segmento EF minore della base AB. Determina il luogo dei punti del rettangolo che hanno da BC distanza EF.

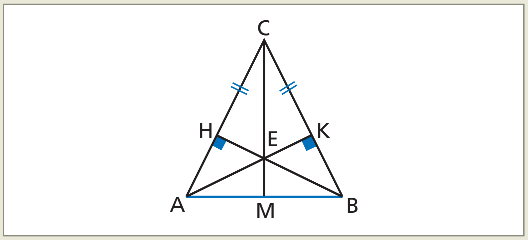
15 Dati un trapezio $ABCD$ e un segmento EF minore dell'altezza, determina il luogo dei punti del trapezio aventi dalla base maggiore una distanza minore o uguale alla lunghezza del segmento EF.

16 Disegna un rettangolo $ABCD$, in modo che la somma della base e dell'altezza sia congruente a un segmento EF assegnato. Col vertice in A disegna un altro rettangolo $AB'C'D'$, in modo che il lato AB' stia sul lato AB, AD' su AD e la somma della base e dell'altezza sia sempre congruente al segmento EF. Determina il luogo dei vertici C al variare dei rettangoli.

Le applicazioni dei luoghi geometrici

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

17 Nel triangolo isoscele ABC di base AB, traccia le perpendicolari AK al lato BC e BH al lato AC, che si incontrano nel punto E e disegna la mediana CM. Dimostra che $E \in CM$.



Ipotesi 1. ABC è un triangolo ....;
2. $AK \perp$ ...... e ...... $\perp AC$;
3. ...... è mediana.

Tesi $E \in$ ....

Dimostrazione

- *Dimostra che i triangoli ABH e ABK sono congruenti.*
  Essi hanno:
  ...... $\cong K\hat{B}A$ perché angoli alla .... di un triangolo ...., $B\hat{H}A \cong$ .... perché ...., hanno inoltre AB ...., *quindi* sono congruenti per il .... di .... dei triangoli rettangoli.
- *Deduci che il triangolo ABE è isoscele.*
  In particolare hanno congruente anche il terzo angolo: ...... $\cong K\hat{A}B$. *Pertanto* il triangolo ABE è ....
- *Dimostra la tesi.*
  Il punto E è .... da A e B. Anche i punti ...... e M sono equidistanti da ...... e ......, *quindi* i punti C, ..., M appartengono all'...... del segmento AB, *pertanto* sono allineati ed E .... alla retta CM.

18 In un triangolo isoscele ABC, di vertice C, le altezze AK e BH si incontrano nel punto E. Conduci per A la perpendicolare al lato AC e per B la perpendicolare al lato BC e indica con F il loro punto intersezione. Dimostra che C, E, F sono allineati.

19 Dimostra che gli assi dei cateti di un triangolo rettangolo s'incontrano sull'ipotenusa.

20 Disegna un triangolo ABC e indica con I il punto d'incontro delle bisettrici dei suoi angoli. Indica con IH, IK, IR le distanze di I dai lati AB, BC, CA. Dimostra che $IH \cong IK \cong IR$.

21 Disegna un angolo $a\hat{O}b$ e la sua bisettrice Os. Su Os fissa un punto P e disegna un secondo angolo, $a'\hat{P}b'$, di vertice P, in modo che Os sia bisettrice anche di questo (Pa' non deve essere parallela a Oa e Pb' non deve essere parallela a Ob). La semiretta Pa' incontra Oa nel punto A e la semiretta Pb' incontra Ob nel punto B. Dimostra che Os è asse del segmento AB.

22 Nel triangolo ABC prolunga i lati AB dalla parte di A e BC dalla parte di C. Traccia le bisettrici degli angoli esterni di vertici A e C che si incontrano in E. Dimostra che la bisettrice dell'angolo $A\hat{B}C$ passa per E.

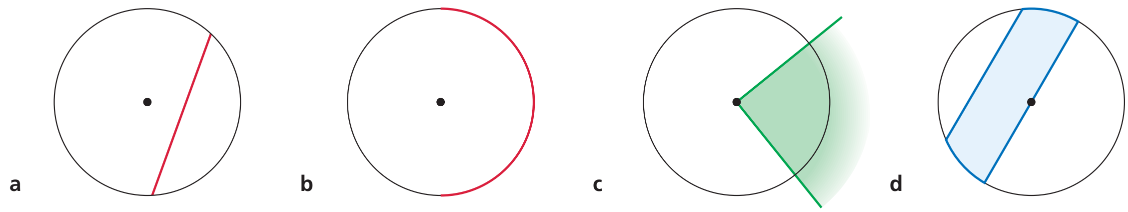
La circonferenza e il cerchio

23 Disegna tre punti non allineati e costruisci la circonferenza che passa per i tre punti.

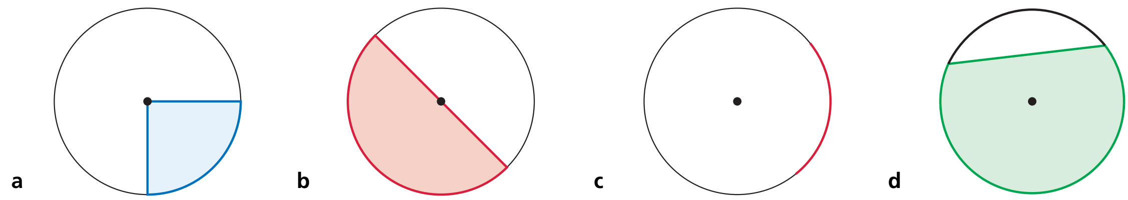
24 Disegna una circonferenza utilizzando, per esempio, una moneta e poi determina il centro con riga e compasso.

COMPLETA scrivendo il nome della parte colorata.

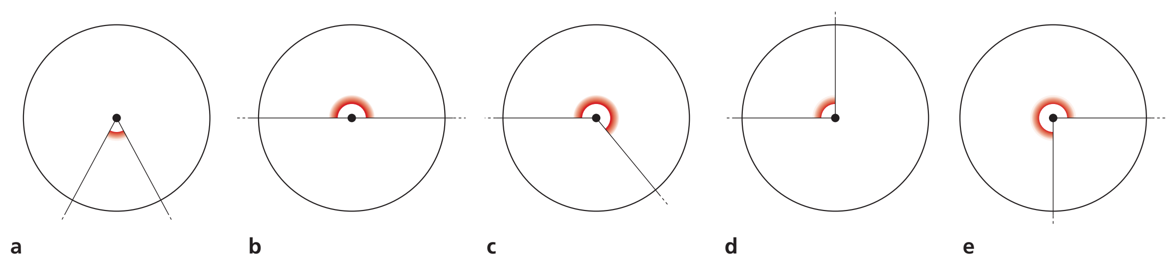
25



26

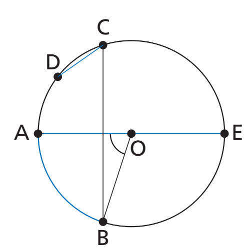


27 **COMPLETA** colorando l'arco su cui insiste ogni angolo al centro indicato in figura.



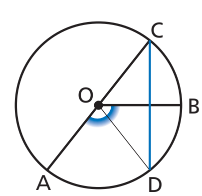
28 Facendo riferimento alla figura, scrivi il nome e il simbolo, se esiste, corrispondente a:

a) segmento di estremi C e D;
b) parte minore di circonferenza compresa fra A e B;
c) angolo di vertice O avente per lati le semirette OA e OB;
d) segmento di estremi A ed E;
e) parte di cerchio limitata da CD e da $\overset{\frown}{CD}$.



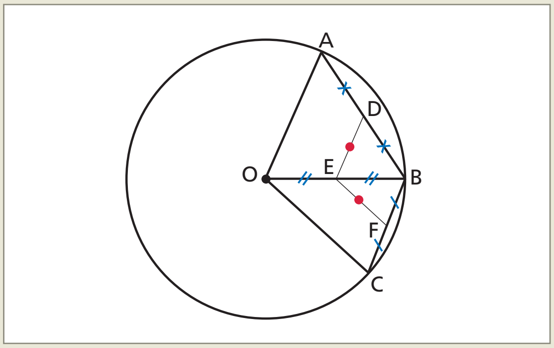
29 Facendo riferimento alla figura, scrivi il nome corrispondente all'intersezione fra:

a) il cerchio e l'angolo $A\hat{O}B$;
b) la circonferenza e l'angolo $A\hat{O}B$;
c) la circonferenza e la corda CD;
d) il cerchio e la corda CD.



DIMOSTRAZIONE GUIDATA

30 Nel cerchio di centro O e raggio OB, disegna due corde consecutive AB e BC e i raggi OA e OC. Considera i punti medi D di AB, E di OB, F di BC. Dimostra che $ED \cong EF$.
▶ *Caso particolare*: se le corde AB e CB sono congruenti al raggio, di che natura è il triangolo OFD?



Ipotesi 1. ......, OB, ... sono ...... ;
2. punti medi: ...... di AB, E di ......, ... di ....

Tesi $ED \cong$ ....

Dimostrazione

- *Dimostra che ED è congruente alla metà di OA.*
Nel triangolo AOB il segmento ED ha per estremi i punti ...... di due lati, *quindi*
...... // OA e ...... $\cong \frac{1}{2}$ ....
- *Dimostra che EF è congruente alla metà di OC.*
Analogamente nel triangolo ...... il segmento EF ha per estremi ...., *quindi* ...... // ...... e ...... $\cong$ ...... OC.
- *Deduci la tesi.*
$OA \cong$ ...... perché ......, *quindi* ...... $\cong$ ...... perché metà di ....

▶ *Caso particolare*
I triangoli OAB e OBC sono ....; i segmenti OF e OD sono altezze e bisettrici, *quindi* OF .... OD. L'angolo $F\hat{O}D$ è $\frac{1}{3}$ dell'angolo piatto, *quindi* OFD è un triangolo ....

31 Dimostra che due corde parallele AB e CD, tracciate dagli estremi di un diametro AD, sono congruenti.

32 Disegna un cerchio di centro C e un triangolo isoscele ABC, con i lati congruenti AC e BC minori del raggio. Prolunga AC e BC fino a incontrare la circonferenza nei punti E e F. Dimostra che la corda EF è parallela alla base AB del triangolo.

2. I teoremi sulle corde

→ Teoria a pag. G175

RIFLETTI SULLA TEORIA

33 **VERO O FALSO?**

a) In una circonferenza, una retta passante per il centro e per il punto medio di una corda è perpendicolare alla corda stessa. V F

b) La proiezione del centro di una circonferenza su una qualsiasi corda divide a metà la corda stessa. V F

c) Il diametro di un cerchio è la corda avente minima distanza dal centro. V F

d) In una circonferenza esiste un solo diametro perpendicolare a una corda data. V F

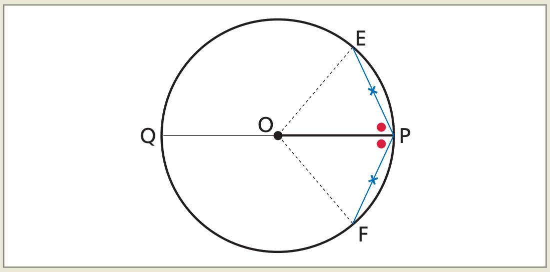
ESERCIZI Nel sito: ▶ 7 esercizi di recupero

Il diametro perpendicolare a una corda e il diametro per il punto medio di una corda

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

34 In una circonferenza di centro O e diametro QP, traccia due corde congruenti PE e PF e i raggi OE e OF. Dimostra che PQ è bisettrice di $E\hat{P}F$.

▶ *Caso particolare*: se le corde FP e PE sono tali per cui i punti E e F sono diametralmente opposti, di che natura è l'angolo $F\hat{P}E$?



Ipotesi $EP \cong$ …… .

Tesi PQ è ……………… di …… .

Dimostrazione

- *Traccia i raggi OE e OF e dimostra la congruenza dei triangoli POE e POF.*

Essi hanno:
$OE \cong$ …… perché …… ;
…… $\cong PF$ per …………… ;
OP ………………
Per il ……… di congruenza, i triangoli sono ……

- *Deduci la tesi.*
In particolare …… $\cong O\hat{P}F$, *quindi* …… è …… …………… di $E\hat{P}F$.

▶ *Caso particolare*
Il diametro EF è ……… al diametro QP e i due triangoli EOP e OPF sono ………………… e isosceli. Gli angoli $E\hat{P}O$ e $O\hat{P}F$ sono ciascuno metà di un angolo retto, *quindi* $F\hat{P}E$ è ……… .

35 Disegna due circonferenze di centri O e O' che si intersecano nei punti C e D. Congiungi O con O' e determina il punto medio M del segmento OO'. Traccia la retta per C, perpendicolare a CM, che interseca le circonferenze in A e in B. Dimostra che le corde AC e CB sono congruenti.

36 Dimostra che se in una circonferenza di centro O si tracciano due corde EP e FP e la semiretta OP è bisettrice dell'angolo $E\hat{P}F$, allora le due corde sono congruenti.

37 Disegna una circonferenza e una retta r che la intersechi in A e in B. Considerato un diametro CD che non intersechi la retta, traccia su r le proiezioni P e Q dei punti C e D.
Dimostra che $PA \cong BQ$.

38 Date una circonferenza di centro O e una sua corda AB, dopo aver costruito il punto medio M della corda, scegli su essa due punti, C e D, equidistanti da M. Dimostra che C e D sono anche equidistanti da O.

39 In una circonferenza, una corda AB ha punto medio M. Considerata una qualunque altra corda CD passante per M, dimostra che M divide CD in parti non congruenti.

40 Su una circonferenza di centro O considera due archi consecutivi $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BC}$ e indica con M il punto medio di $\overset{\frown}{AB}$ e con N il punto medio di $\overset{\frown}{BC}$. Traccia la corda MN, che interseca la corda AB in E e la corda BC in F. Dimostra che $BE \cong BF$. (Suggerimento. Il triangolo OMN è isoscele, quindi gli angoli alla base sono...)

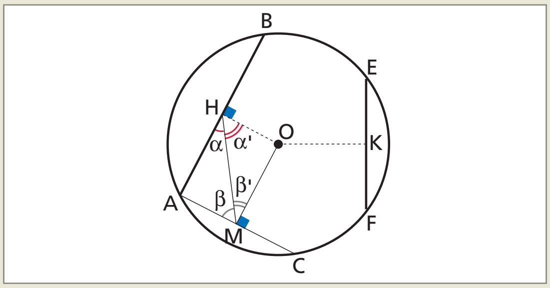
▶ *Caso particolare*: se gli archi $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BC}$ sono tali per cui le corde AB e BC sono congruenti al raggio OC, di che natura è il triangolo MON?

41 Date una circonferenza di centro O e due corde congruenti AB e CD che si incontrano nel punto E, dimostra che il punto E individua sulle corde segmenti rispettivamente congruenti.
(Suggerimento. Traccia le perpendicolari OH e OK alle corde AB e CD e considera i triangoli...)

La relazione tra corde aventi la stessa distanza dal centro

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

42 Dimostra che, se in una circonferenza due corde non sono congruenti, allora non hanno la stessa distanza dal centro e la corda maggiore ha distanza minore (vedi paragrafo 2 a pagina G177).



Ipotesi 1. AB, EF corde;
2. $AB >$ …… .

Tesi $OK >$ …… .

Dimostrazione

- Costruisci la corda AC consecutiva ad AB e congruente a EF, indica con OM la distanza di AC da O. Traccia le distanze OH e OK rispettivamente di AB ed EF da O.
- *Esamina gli angoli $A\hat{H}O$ e $A\hat{M}O$.* Essi sono entrambi retti, *quindi* α e α' sono ……………, come pure β e β', ossia: $\alpha +$ …… $\cong \hat{R}$, $\beta +$ …… $\cong$ …… .
- *Considera il triangolo AMH.* A lato maggiore si oppone angolo ……… . In tale triangolo, fra i lati AH e AM, il maggiore è AH. Infatti $EF \cong AC$ e per ipotesi $AB >$ …… , da cui risulta anche $AB > AC$. Dividendo i due membri per 2, si ottiene: $\frac{1}{2}AB > \frac{1}{2}$……, ossia $AH >$ …… . *Pertanto* $\beta >$ …… .
- *Considera il triangolo MOH.* Poiché $\beta >$ …… , tra i rispettivi complementari sussiste la relazione $\beta' <$ …… . Nel triangolo MOH, all'angolo maggiore α' si oppone il lato maggiore …… , *quindi* $OM >$ …… .
- *Deduci la tesi.* OM e OK sono distanze da corde congruenti, *quindi* OM …… OK, da cui risulta $OK >$ …… .

43 Dati una circonferenza di centro O e un suo punto P interno, dimostra che, fra tutte le corde passanti per P, la maggiore è un diametro.

44 Preso un punto P interno a una circonferenza di centro O, traccia per P due corde, in modo che PO sia bisettrice dell'angolo formato dalle due corde. Dimostra che le due corde sono congruenti.

45 In una circonferenza di centro O, le corde congruenti AB e CD si incontrano in P. Dimostra che PO è bisettrice dell'angolo formato dalle due corde. (Suggerimento. Ricorda che corde congruenti hanno distanze dal centro congruenti.)

46 P è un punto interno di una circonferenza di centro O. Traccia il raggio OP e la corda AB passante per P, perpendicolare a OP. Dimostra che la corda AB è minore di qualunque altra corda passante per P.

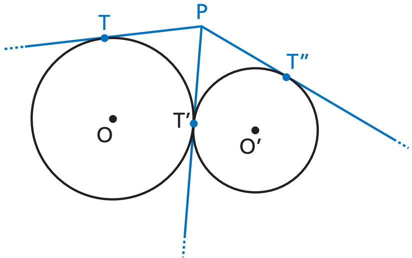
3. Le posizioni di una retta rispetto a una circonferenza

Teoria a pag. G177

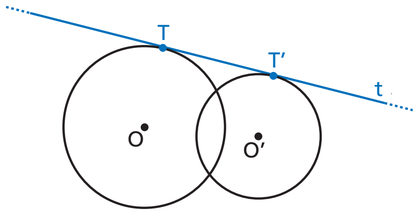
RIFLETTI SULLA TEORIA

47 Traccia una retta r e considera su di essa un punto Q. Esternamente a r prendi un punto A. Disegna la circonferenza che passa per A ed è tangente a r in Q.

48 Osserva la figura. Quale relazione sussiste fra i segmenti PT e PT''? Dimostrala.



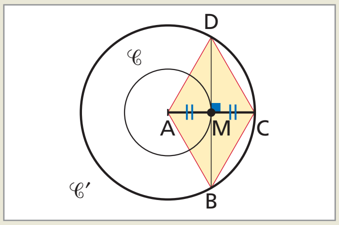
49 Osserva la figura. Come risultano le rette OT e $O'T'$? Giustifica la risposta.



ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

50 Disegniamo un segmento AC e il suo punto medio M. Tracciamo due circonferenze aventi centro in A, una di raggio AM e l'altra di raggio AC. Conduciamo per M la retta tangente alla circonferenza di raggio minore, fino a incontrare l'altra nei punti B e D. Dimostriamo che $ABCD$ è un rombo.



Ipotesi 1. $AM \cong MC$;
2. BD tangente in M.

Tesi $ABCD$ è un rombo.

Dimostrazione

Nella circonferenza minore, la retta tangente BD è perpendicolare al raggio AM passante per il punto di tangenza M. *Quindi* scriviamo $AM \perp BD$.
Nella circonferenza maggiore, il raggio AC è perpendicolare alla corda BD, *quindi* dimezza la corda stessa, ossia $BM \cong MD$.

D'altra parte, $AM \cong MC$ per ipotesi.

Il quadrilatero $ABCD$ ha le diagonali che si dimezzano scambievolmente, *quindi* è un parallelogramma. Inoltre, le diagonali sono perpendicolari, pertanto il parallelogramma $ABCD$ è un rombo.

51 Nella circonferenza di centro O e diametro AB, traccia le rette tangenti alla circonferenza in A e in B e dimostra che sono parallele.

52 Disegna una circonferenza di centro O e un punto P a essa esterno. Congiungi P con O e traccia da P due secanti Pa e Pb, in modo che PO sia bisettrice dell'angolo $a\hat{P}b$. Dimostra che le due corde intercettate dalla circonferenza sulle secanti sono congruenti.

53 Da un punto P esterno a una circonferenza di centro O traccia due secanti che intersecano il cerchio in due corde congruenti AB e CD. Dimostra che PO è bisettrice dell'angolo formato dalle due secanti.

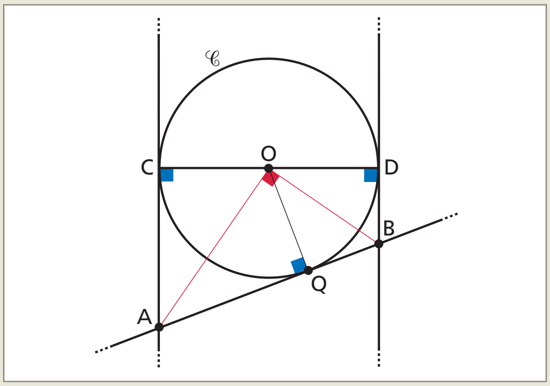
54 Disegna una circonferenza di centro O e due archi consecutivi congruenti, $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BC}$. Traccia la retta tangente alla circonferenza in B e disegna la corda AC. Dimostra che AC è parallela alla tangente.

Le tangenti a una circonferenza da un punto esterno

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

55 La circonferenza di centro O e diametro CD passa per il punto Q. Le tangenti condotte per C, D e Q si intersecano in A e in B. Dimostra che l'angolo $A\hat{O}B$ è retto.

▶ *Caso particolare*: se il punto Q è il punto medio dell'arco $\overset{\frown}{CD}$, come sono fra loro AB e CD? Come risulta il triangolo AOB?



Ipotesi 1. CD è un .... ;
2. AC, ... e BD sono .... a $\mathscr{C}$.

Tesi $A\hat{O}B$ è ....

Dimostrazione

- *Dimostra la congruenza dei triangoli AOC e AOQ, e quindi di $C\hat{O}A$ e $A\hat{O}Q$.*
I triangoli .... hanno:
...... $\cong OQ$ perché .... ;
AO in ....
Per il .... criterio di congruenza dei triangoli ...., i triangoli sono congruenti.
In particolare: $C\hat{O}A \cong$ ....

- *Ripeti il ragionamento per $B\hat{O}D$ e $B\hat{O}Q$.*
Analogamente sono congruenti i triangoli ...... e BOD perché hanno:
....
In particolare: $Q\hat{O}B \cong$ ....

- *Deduci la tesi.*
Consideriamo l'angolo piatto $C\hat{O}D$:
$C\hat{O}D = \ldots + A\hat{O}Q + \ldots + B\hat{O}D = \hat{P}$.
E tenendo conto delle congruenze dimostrate:
$2A\hat{O}Q + 2Q\hat{O}B = \ldots$.
Dividendo ambo i membri per 2:
$A\hat{O}Q + \ldots = \dfrac{\hat{P}}{2} = \ldots$.
Quindi l'angolo $A\hat{O}B$ è retto.

▶ *Caso particolare*
Se Q è il punto medio di $\overset{\frown}{CD}$, il raggio OQ è perpendicolare sia a CD che a ...., *quindi AB* .... CD. Il triangolo AOB oltre che rettangolo è anche ....

56 Disegna una circonferenza di centro O e da un punto P esterno a essa conduci le due tangenti in A e B. Traccia il diametro per A e dimostra che l'angolo $O\hat{A}B$ è congruente a metà dell'angolo formato dalle due tangenti.

57 Data la circonferenza di centro O e diametro AB, prolunga AB di un segmento BE congruente al raggio e poi traccia la retta per B tangente alla circonferenza. Scegli su tale retta un punto V e disegna l'ulteriore tangente VF alla circonferenza. Dimostra che l'angolo $F\hat{V}E$ è triplo dell'angolo $B\hat{V}E$.

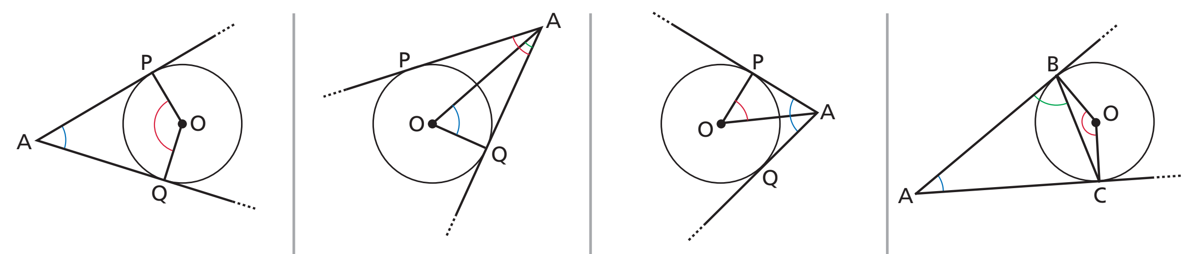
58 Disegna un angolo $a\hat{V}b$ e una circonferenza di centro O tangente ai lati dell'angolo. Dimostra che VO è la bisettrice dell'angolo $a\hat{V}b$. Detto E il punto di intersezione della circonferenza con il segmento VO, traccia per E la retta perpendicolare a VO, che interseca i lati dell'angolo nei punti A e B. Dimostra che il triangolo AVB è isoscele.

59 Considera una circonferenza di centro O e i punti P e Q, fuori di essa, equidistanti da O. Tracciati i segmenti di tangente condotti da P e da Q alla circonferenza, dimostra che sono congruenti.

60 Con riferimento all'esercizio precedente, dimostra che la corda avente per estremi i punti di tangenza delle tangenti uscenti da P è congruente alla corda avente per estremi i punti di tangenza delle tangenti uscenti dal punto Q.

Proprietà geometriche e misure

61 Determina gli angoli scritti sotto a ogni figura utilizzando i dati indicati.



a) $P\hat{A}Q = 48°$; $P\hat{O}Q$?

b) $A\hat{O}Q = O\hat{A}Q + 28°$; $P\hat{A}Q$?

c) $P\hat{A}Q = 76°$; $P\hat{O}A$?

d) $A\hat{B}C = 2B\hat{A}C$; $B\hat{O}C$?

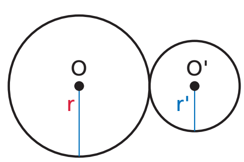
4. Le posizioni reciproche fra due circonferenze

Teoria a pag. G181

RIFLETTI SULLA TEORIA

62 TEST Quale fra le seguenti affermazioni è *vera*?

A $OO' \cong r - r'$
B $OO' < r - r'$
C $OO' < r + r'$
D $OO' \cong r + r'$
E $OO' > r + r'$



63 Disegna due circonferenze in ognuna delle cinque possibili posizioni reciproche. Per ogni figura traccia, se esistono, le tangenti comuni alle due circonferenze.

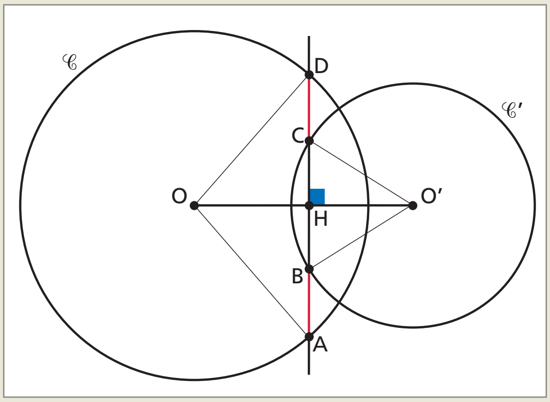
64 Disegna una circonferenza di centro O e raggio OA e una avente il centro nel punto medio di OA e raggio pari a $\frac{1}{4}$ di OA.
Qual è la posizione di una circonferenza rispetto all'altra? Motiva la risposta.

65 È data una circonferenza di centro O e raggio OA. Una seconda circonferenza ha centro O' esterno alla prima e tale che $O'O = \frac{5}{3}\ OA$.
Come deve essere il raggio della seconda affinché le due circonferenze siano secanti?

ESERCIZI

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

66 Date due circonferenze secanti, di centri O e O', traccia una retta perpendicolare a OO' in modo che incontri la prima circonferenza in A e in D e l'altra in B e in C e OO' in H. Dimostra che $AB \cong CD$.



Ipotesi 1. $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ sono .... ;
2. $DA \perp OO'$.

Tesi $AB \cong$ ....

Dimostrazione

- *Dimostra la congruenza dei segmenti DH e HA.*
  Nella circonferenza $\mathscr{C}$, $DA \perp OO'$ per ...., *quindi* $DH \cong$ ...... per il teorema sulla perpendicolare a una corda passante per il ....
- *Dimostra la congruenza dei segmenti CH e BH.*
  Nella circonferenza $\mathscr{C}'$, $CB \perp$ ... per ipotesi, *quindi* ...... $\cong HB$.
- *Deduci la tesi.*
  ... $\cong CD$ perché .... di segmenti ....

67 Date due circonferenze concentriche e una retta che le interseca entrambe, nell'ordine, nei punti A, B, C e D, dimostra che AB e CD sono congruenti.
Dimostra inoltre che l'asse del segmento AD coincide con l'asse del segmento BC e che tale asse passa per il centro delle due circonferenze.

68 Due circonferenze s'intersecano in A e in B. Traccia per A e B le rette parallele a e b e siano C, D ed E, F rispettivamente le intersezioni con le due circonferenze.
Dimostra che $EFDC$ è un parallelogramma.

69 Disegna due circonferenze tangenti esternamente. Per il punto di tangenza traccia una secante comune e, nei punti d'intersezione di questa secante con le circonferenze, conduci le tangenti. Dimostra che le due tangenti non comuni sono parallele.

70 Due circonferenze di centri O e O' sono tangenti internamente in P. Traccia per P una retta secante s, che intersechi la circonferenza minore in A e quella maggiore in B.
Dimostra che i raggi $O'A$ e OB sono paralleli.
(Suggerimento. Dimostra che O, O', P sono allineati; poi considera i triangoli $AO'P$ e BOP...)

Proprietà geometriche e misure

71 Due circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ sono tangenti internamente e la distanza tra i loro centri è 24 cm. Se il raggio di $\mathscr{C}$ è 4 cm, quanto è lungo quello di $\mathscr{C}'$?

72 La distanza fra i centri di due circonferenze di raggi lunghi 8 cm e 12 cm è uguale a 18 cm. Come sono le circonferenze?

73 **COMPLETA** la seguente tabella, dove r_1 e r_2 sono le misure dei raggi e O_1 e O_2 i centri di due circonferenze.

r_1	r_2	O_1O_2	$r_1 + r_2$	$r_1 - r_2$	POSIZIONE RECIPROCA
10	4	5	...	...	...
8	6	...	...	...	tangenti internamente
...	8	20	20	...	...
12	...	5	...	7	...
...	7	...	16	...	tangenti esternamente

5. Gli angoli alla circonferenza e i corrispondenti angoli al centro

Teoria a pag. G183

RIFLETTI SULLA TEORIA

74 **VERO O FALSO?**

a) In una circonferenza a ogni angolo al centro corrispondono infiniti angoli acuti alla circonferenza, tutti metà dell'angolo al centro. V F

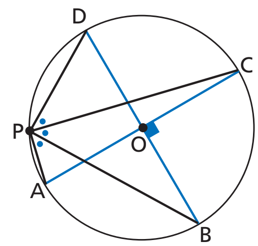
b) Per ogni arco esiste un solo angolo alla circonferenza corrispondente. V F

c) Non esistono angoli alla circonferenza maggiori di un angolo retto. V F

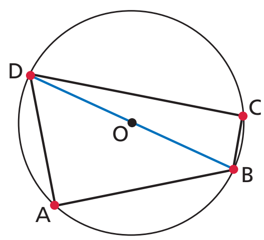
d) Ogni angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza è retto. V F

e) L'angolo formato da un diametro e dalla semiretta tangente alla circonferenza in un estremo del diametro stesso è un angolo alla circonferenza. V F

75 Se due angoli alla circonferenza sono complementari, come sono fra loro i due angoli al centro corrispondenti?

76 

Nella figura, *DB* e *AC* sono due diametri perpendicolari. Preso un punto qualsiasi interno all'arco $\overset{\frown}{AD}$, spiega perché i tre angoli evidenziati sono congruenti.

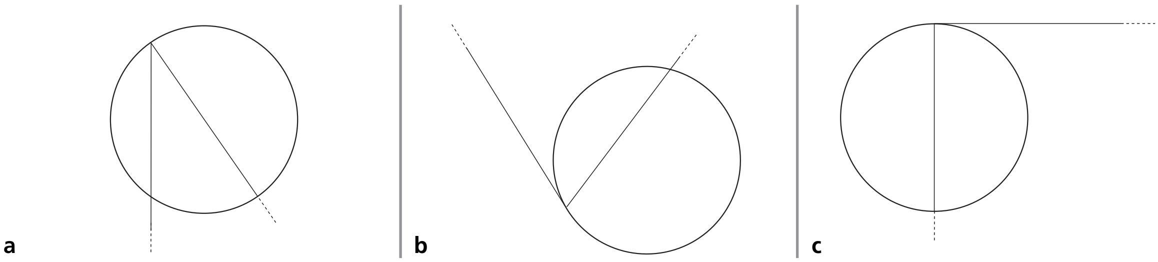
77 

Nel quadrilatero *ABCD* la diagonale *DB* è un diametro.
Spiega perché la somma di $A\hat{D}C$ e $C\hat{B}A$ è congruente a un angolo piatto.

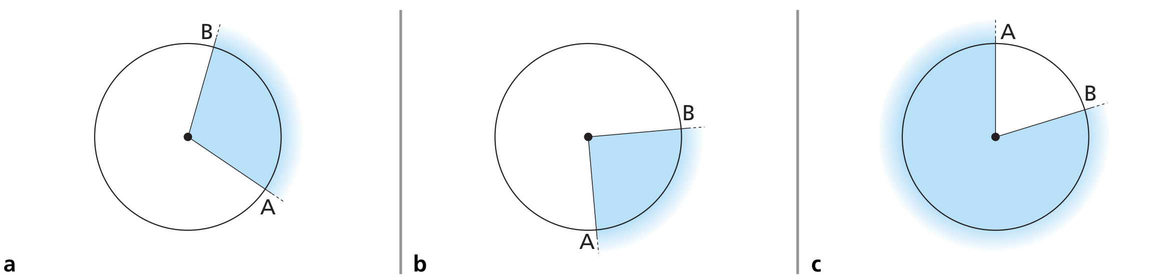
ESERCIZI

Nel sito: ▶ 11 esercizi di recupero

78 **COMPLETA** Colora l'arco su cui insiste ogni angolo alla circonferenza e disegna il corrispondente angolo al centro.



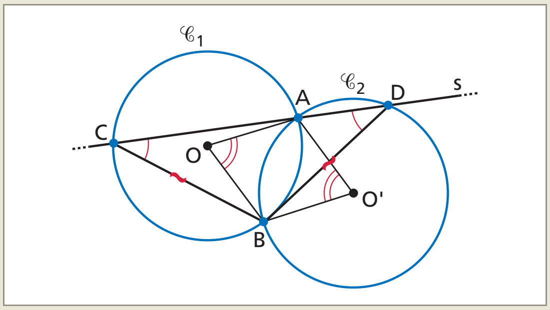
79 **COMPLETA** Per ogni angolo al centro, disegna tre angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco. Uno degli angoli tracciati deve avere il vertice in *B*.



Dimostrazioni

ESERCIZIO GUIDA

80 Disegniamo due circonferenze $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ congruenti, rispettivamente di centro O e O', che si intersecano in A e in B. Per il punto A tracciamo una secante s che incontra le due circonferenze in C e D.
Dimostriamo che il triangolo CBD è isoscele.



Ipotesi 1. $\mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2$;
2. $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{A; B\}$;
3. $s \cap \mathscr{C}_1 = \{A; C\}$;
$s \cap \mathscr{C}_2 = \{A; D\}$.

Tesi CBD è isoscele.

Dimostrazione

Tracciamo i raggi OA, OB, $O'A$, $O'B$, che sono congruenti tra loro poiché $\mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2$ per ipotesi.

$AOBO'$ è un rombo avendo i lati congruenti, *pertanto* $A\hat{O}B \cong A\hat{O}'B$ poiché angoli opposti di un rombo.

$A\hat{O}B$ è angolo al centro che insiste sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ e $A\hat{C}B$ è angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco $\overset{\frown}{AB}$, *pertanto* $A\hat{C}B \cong \dfrac{1}{2} A\hat{O}B$ perché angoli al centro e alla circonferenza corrispondenti.

Analogamente $A\hat{D}B \cong \dfrac{1}{2} A\hat{O}'B$ e poiché $A\hat{O}B \cong A\hat{O}'B$ anche $A\hat{D}B \cong A\hat{C}B$, *pertanto* CBD è isoscele.

81 Considera il triangolo ABC e traccia le altezze AH e BK. Dimostra che H e K sono punti della circonferenza di diametro AB. Se il triangolo ABC è rettangolo in C, dove si trovano i punti H e K?

82 Nel triangolo rettangolo ABC, M è il punto medio dell'ipotenusa AB. Dimostra che l'angolo $B\hat{M}C$ è doppio dell'angolo $\hat{A}$.

83 Su una circonferenza di centro O scegli tre punti A, B, C e congiungili, ottenendo un triangolo. Traccia l'asse del segmento AB, che incontra l'arco non contenente C nel punto E.
Congiungi E con C.
Dimostra che CE è bisettrice dell'angolo $\hat{C}$.

84 Disegna una circonferenza di centro O, un diametro AB e due corde, AE e AF, tali che AB sia bisettrice dell'angolo $F\hat{A}E$.
Dimostra che le corde AE e AF sono congruenti.

85 Da un punto B di una circonferenza, traccia le corde AB e BC. Congiungi il punto medio M dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ col punto medio N dell'arco $\overset{\frown}{BC}$. La corda MN interseca le due corde in E e in F. Dimostra che il triangolo BEF è isoscele sulla base EF.

86 Dati una circonferenza di centro O e un suo arco $\overset{\frown}{AB}$, traccia due angoli alla circonferenza che insistono su $\overset{\frown}{AB}$ e poi disegna le bisettrici dei due angoli. Dimostra che tali bisettrici passano per il punto medio dell'arco $\overset{\frown}{AB}$.

87 In una circonferenza di centro O disegna due diametri AB e CE. Traccia la corda ED perpendicolare ad AB.
Dimostra che $AB \parallel CD$.

88 Data una circonferenza di diametro AB, disegna un triangolo ABC in modo che il lato AC intersechi la circonferenza in E e il lato BC in F. Proietta su EF il punto B, indicando con H la proiezione.
Dimostra che $A\hat{B}E \cong F\hat{B}H$.
(Suggerimento. Dimostra che $A\hat{B}E \cong A\hat{F}E$ e osserva la relazione che esiste tra AF e BC.)

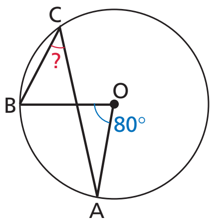
89 Il triangolo rettangolo ABC ha per base il cateto AB e M è il punto medio dell'ipotenusa BC. Traccia la circonferenza di diametro AM. Essa incontra AB in E e AC in F.
Dimostra che $EF \parallel BC$.
(Suggerimento. Ricorda che, in un triangolo rettangolo, la mediana relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.)

90 Disegna una circonferenza e due corde AB e CD perpendicolari fra loro. Per il loro punto di intersezione P traccia la retta perpendicolare a DB che interseca nel punto Q la corda AC.
Dimostra che il triangolo PQC è isoscele.

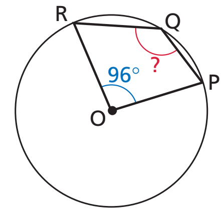
Proprietà geometriche e misure

Determina la misura dell'ampiezza degli angoli indicati.

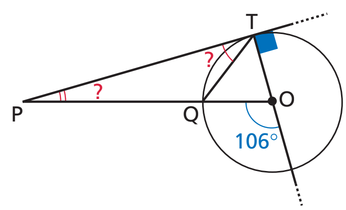
91



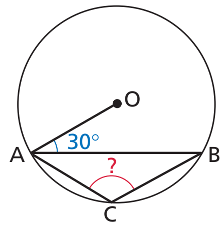
93



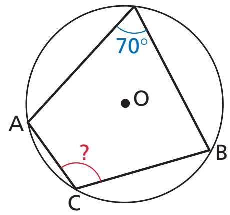
95



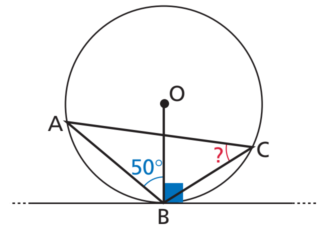
92



94



96



RIEPILOGO LA CIRCONFERENZA E IL CERCHIO

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

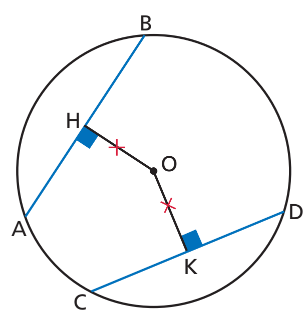
97 **TEST** Considera una circonferenza di centro O e raggio OR e quella di diametro OR. Come sono le due circonferenze?

A Concentriche.
B Tangenti esternamente.
C Esterne.
D Secanti.
E Tangenti internamente.

98 **TEST** Una sola delle seguenti affermazioni è *falsa*. Quale?

A Due circonferenze esterne hanno quattro tangenti comuni che si incontrano a due a due sulla retta dei centri.
B Due circonferenze tangenti esternamente hanno tre tangenti comuni.
C Due circonferenze tangenti internamente non hanno tangenti in comune.
D Date due circonferenze concentriche, per ogni tangente t a una delle due esistono due tangenti all'altra parallele a t.
E Due circonferenze una interna all'altra non hanno tangenti in comune.

99 Enuncia il teorema espresso dalla seguente figura e dalle relative ipotesi e tesi. Enuncia il teorema che ottieni scambiando la prima ipotesi con la tesi.



Ipotesi 1. $AB \cong DC$;
2. $OH \perp AB$;
3. $OK \perp CD$.

Tesi $OH \cong OK$.

100 Dati una circonferenza $\mathscr{C}$ di centro O e un punto P esterno a essa, disegna la circonferenza $\mathscr{C}'$ che ha per centro il punto medio M del segmento OP e raggio OM. $\mathscr{C}'$ incontra $\mathscr{C}$ in T_1 e T_2. Dimostra che le rette PT_1 e PT_2 sono tangenti alla circonferenza $\mathscr{C}$.

101 In una circonferenza congiungi gli estremi di due corde parallele disuguali. Dimostra che il quadrilatero ottenuto è un trapezio isoscele.

102 Disegna una circonferenza di diametro AB e una di diametro BC, che interseca la precedente in E, oltre che in B.
Dimostra che i punti A, E, C sono allineati.

103 Una circonferenza è intersecata da due rette parallele. Dimostra che gli archi compresi fra le due parallele sono congruenti. (Suggerimento. Traccia una trasversale che congiunga...)

104 Date due circonferenze concentriche di centro O, traccia una semiretta Oa che incontra la circonferenza interna in A e l'altra in A'; allo stesso modo traccia una semiretta Ob che incontra la circonferenza interna in B e l'altra in B'.
Dimostra che $AB \parallel A'B'$.
▶ *Caso particolare*: se il raggio della circonferenza esterna è congruente al diametro di quella interna, quale relazione sussiste fra le corde AB e $A'B'$?

105 In una circonferenza di centro O prolunga una corda BC di un segmento CD congruente al raggio. Congiungi D con O e prolunga tale segmento fino a incontrare in A la circonferenza.
Dimostra che $C\hat{O}D$ è la terza parte di $A\hat{O}B$.

106 Dati due angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ con i lati paralleli e discordi, dimostra che:
a) le bisettrici di tali angoli sono parallele;
b) $\hat{A}$ e $\hat{B}$ staccano sulla circonferenza di diametro AB corde congruenti;
c) congiungendo gli estremi di tali corde con il centro, ottieni due triangoli congruenti.

107 Disegna una circonferenza, una sua corda CD e il punto medio M della corda. Scegli su CD due punti, A e B, equidistanti da M. Traccia da A la perpendicolare a CD, che incontra l'arco minore in F e da B la perpendicolare sempre a CD, che incontra lo stesso arco in E.
Dimostra che $AF \cong BE$. Come risulta il quadrilatero $ABEF$?
▶ *Caso particolare*: se CD è un diametro, il quadrilatero $ABEF$ può essere un quadrato con i lati congruenti al raggio della circonferenza? Dimostralo.

108 Disegna due circonferenze concentriche, di raggio uno doppio dell'altro. Sulla circonferenza di raggio maggiore scegli un punto A e da esso conduci i segmenti di tangente, AB e AC, alla circonferenza minore. Traccia la corda BC.
Dimostra che il triangolo ABC è equilatero.

109 Considera una circonferenza di diametro AB e una corda CD perpendicolare ad AB, che incontra AB nel punto E. Indica con M il punto medio della corda BD. La retta ME incontra AC in F.
Dimostra che $EF \perp AC$.
▶ *Caso particolare*: come risulta il quadrilatero $ADBC$ se CD è congruente ad AB?

110 Disegna una circonferenza di centro O, un diametro AB e una corda CD, parallela ad AB. Dagli estremi della corda traccia le perpendicolari CF e DE al diametro AB.
Dimostra che $AF \cong BE$.

111 Una retta r interseca una circonferenza di centro O nei punti C e D. Costruisci un triangolo isoscele di vertice O e base AB appartenente a r.
Dimostra che $AC \cong BD$, distinguendo due casi:
a) $AB < CD$;
b) $AB > CD$.

112 Disegna un triangolo ABC e le altezze AH e BK. Dimostra che l'asse del segmento HK passa per il punto medio di AB.

113 Considera un triangolo isoscele FAD di base FA e prolunga il lato FD di un segmento $DC \cong FD$.
a) Dimostra che il triangolo FAC è rettangolo.
b) Indica con M il punto medio di AC e dimostra che DM appartiene all'asse del segmento AC.
c) Con centro in A e raggio AD traccia un arco che incontra il prolungamento di DM nel punto B. Dimostra che il quadrilatero $ABCD$ è un rombo.

114 In una circonferenza di centro O traccia una corda AB e la semiretta t tangente in B nel semipiano che contiene il centro.
Considera su t un punto C tale che $CB \cong AB$ e indica con P il punto di intersezione della retta AC con la circonferenza. Dimostra che:
a) $PB \cong PC$;
b) $B\hat{P}C \cong 2O\hat{B}P$.

115 Su una circonferenza di diametro AB fissa un punto C. Traccia la corda AC e la bisettrice dell'angolo $\hat{A}$, che incontra la circonferenza in E. Congiungi B con C e traccia la bisettrice dell'angolo $\hat{B}$, che incontra AE in F. Dimostra che il triangolo BEF è rettangolo isoscele.

116 Disegna una circonferenza di diametro AB, scegli su di essa un punto C in modo che la tangente a essa in C incontri il prolungamento di AB, dalla parte di B, nel punto E. Traccia il segmento CH perpendicolare ad AB. Dimostra che CB è bisettrice dell'angolo $H\hat{C}E$.

117 Disegna due circonferenze tangenti esternamente. Per il loro punto di contatto traccia due rette secanti le circonferenze. Dimostra che le corde che congiungono i punti d'intersezione con le circonferenze sono parallele.

118 Disegna due circonferenze concentriche $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$. Da un punto P della circonferenza maggiore $\mathscr{C}$ conduci le tangenti alla circonferenza minore $\mathscr{C}'$. Siano A e B i punti d'intersezione con la circonferenza $\mathscr{C}$ e C e D i punti di tangenza con $\mathscr{C}'$. Dimostra che $ABCD$ è un trapezio isoscele.

119 Le circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ di centri O e O' sono tangenti esternamente nel punto A. Conduci la tangente comune in A e un'altra tangente BC. Le due tangenti s'intersecano in P.
Dimostra che $B\hat{A}C$ e $O\hat{P}O'$ sono retti.

120 Disegna un triangolo ABC e due circonferenze di diametri AC e BC. La retta perpendicolare ad AB passante per A incontra la circonferenza di diametro AC in E; la retta perpendicolare ad AB passante per B incontra l'altra circonferenza in F.
Dimostra che:
a) i punti E, C, F sono allineati;
b) la retta EF è parallela ad AB.
▶ *Caso particolare*: se il triangolo ABC è isoscele di vertice C, come sono i triangoli ACE e BCF?

121 Dati una circonferenza di centro O e un punto P esterno a essa, traccia due secanti Pa e Pa' in modo che PO risulti bisettrice dell'angolo $a\hat{P}a'$. Indica con A e A' i punti intersezione di Pa con la circonferenza e con B e B' i punti intersezione dell'altra secante. Dimostra che:
a) O ha la stessa distanza dai lati dell'angolo $a\hat{P}a'$;
b) $PA \cong PB$;
c) $PA' \cong PB'$.

122 Da un punto P esterno a una circonferenza di centro O conduci le tangenti PT e PR. Sull'arco $\overset{\frown}{TR}$, dalla parte di P, traccia una terza tangente che incontra le precedenti in A e B.
Dimostra che $A\hat{O}B \cong \frac{1}{2} R\hat{O}T$.

123 Disegna due circonferenze congruenti, che si intersecano nei punti A e B. Traccia una retta r, perpendicolare ad AB, che interseca la prima circonferenza in C e D e la seconda in E e F.
Dimostra che le corde CD ed EF sono congruenti. Dimostra inoltre che AB è asse sia del segmento CF sia del segmento ED. Detti O e O' i centri delle due circonferenze, dimostra che il quadrilatero $OO'FC$ è un trapezio isoscele.

124 Considera una circonferenza di centro O e disegna due corde parallele e congruenti, poi congiungi gli estremi in modo che la figura non risulti intrecciata.
Dimostra che il quadrilatero ottenuto è un rettangolo.
▶ *Caso particolare*: se un angolo (acuto) alla circonferenza che insiste su una delle due corde è congruente a $\frac{1}{4}\hat{P}$, che quadrilatero ottieni?

125 Disegna una circonferenza di centro O e diametro AB, e una retta r che interseca la circonferenza nei punti C e D. Conduci da A e da B le perpendicolari AE e BF alla retta r. Dimostra che $EC \cong FD$. (Suggerimento. Traccia da O la perpendicolare a CD e considera il fascio di rette.)

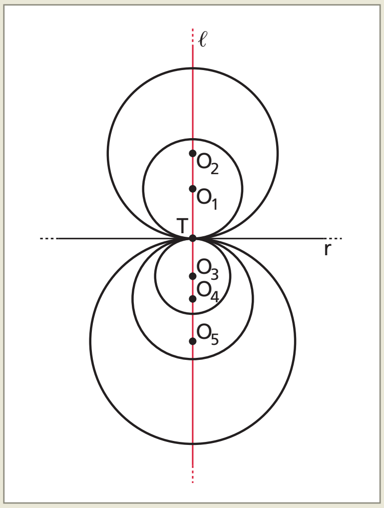
La circonferenza e i luoghi geometrici

ESERCIZIO GUIDA

126 Dati una retta r e un suo punto T, tracciamo alcune circonferenze tangenti a r in T. Disegniamo il luogo dei centri delle circonferenze tangenti in T a r e dimostriamo che la retta è il luogo richiesto.

Dimostrazione

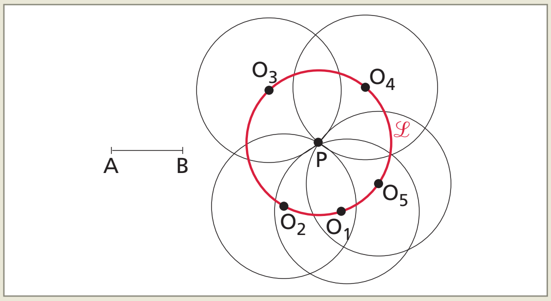
Vogliamo dimostrare che il luogo cercato è la retta ℓ perpendicolare a r in T.



1. Preso un qualsiasi punto O di ℓ, il segmento OT è raggio di una circonferenza di centro O e passante per T. Il raggio OT è perpendicolare a r, poiché appartiene alla retta ℓ, *quindi* la circonferenza è tangente a r. *Pertanto* tutti i punti di l sono centri di circonferenze tangenti in T a r.
2. Se O è centro di una circonferenza tangente in T a r, OT ne è il raggio. *Allora* OT è perpendicolare a r e $T \in r$. *Quindi* OT appartiene alla retta passante per T e perpendicolare a r, che è unica, *quindi* $O \in \ell$. *Pertanto* solo i punti di ℓ sono centri di circonferenze tangenti in T a r.

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

127 Considera un punto P e un segmento AB. Dimostra che il luogo geometrico dei centri delle circonferenze passanti per P e di raggio congruente ad AB è la circonferenza di centro P e raggio congruente ad AB.



- *Dimostra che* tutti *i punti del luogo $\mathscr{L}$ godono della proprietà richiesta.*

Ipotesi $O \in \mathscr{L}$.

Tesi …… è centro di una ………….. passante per P con raggio congruente ad ……… .

Se $O \in \mathscr{L}$, $PO \cong$ …… , perché raggio della ……… …… , *quindi* esiste la circonferenza di centro ……… e raggio congruente ad ……… , che passa per ……… .

- *Dimostra che* solo *i punti di $\mathscr{L}$ godono della proprietà richiesta.*

Ipotesi O' è centro di una ………….. passante per P con raggio congruente ad …… .

Tesi $O' \in$ …… .

Se PO' è un raggio, risulta $PO' \cong$ …… , *quindi* $O' \in$ …… .

128 Determina il luogo geometrico dei centri delle circonferenze aventi raggio congruente a un segmento AB e tangenti a una retta r.

129 Nel triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa AB, determina il luogo dei vertici C al variare dell'angolo $\hat{A}$, tenendo fissa l'ipotenusa AB.

130 Disegna una semicirconferenza di diametro AB e un triangolo ABC con C appartenente alla semicirconferenza; traccia l'altezza CH del triangolo. Individua il luogo dei punti H al variare di C sulla semicirconferenza.

131 Disegna un triangolo ABC in modo che la mediana CM sia congruente al lato AC. Tenendo fissa la base AB, disegna altri triangoli ABC', ABC''…, con la proprietà che la mediana rispetto ad AB sia congruente al lato AC. Disegna il luogo dei vertici C e dimostra che la figura ottenuta è il luogo richiesto.

132 Determina il luogo dei punti equidistanti da due rette parallele e da due punti fuori di esse.

133 Dati due punti A e B del piano, disegna il luogo dei centri delle circonferenze passanti per A e per B e dimostra che la figura ottenuta è il luogo richiesto.

134 Disegna un segmento AB e il suo punto medio M. Traccia da M una retta r e proietta su r il punto B, indicando la proiezione con H. Determina il luogo dei punti H al variare dell'inclinazione di r su AB (AB rimane fisso).

135 Considera una circonferenza di centro O, una sua corda AB e il punto medio di AB. Disegna il luogo dei punti medi delle corde congruenti ad AB e dimostra che la figura ottenuta è il luogo richiesto.

136 Disegna due rette r e s incidenti e alcune circonferenze tangenti a entrambe. Traccia il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alle due rette e dimostra che la figura ottenuta è il luogo richiesto.

137 Date una circonferenza e una retta qualunque, disegna il luogo dei punti medi delle corde parallele alla retta e dimostra che la figura ottenuta è il luogo richiesto.

138 Disegna due circonferenze concentriche $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$; traccia alcune circonferenze tangenti a entrambe. Determina il luogo dei centri delle circonferenze tangenti a $\mathscr{C}$ e a $\mathscr{C}'$ e dimostra che la figura ottenuta è il luogo richiesto.

6. I poligoni inscritti e circoscritti

→ Teoria a pag. G185

RIFLETTI SULLA TEORIA

139 **VERO O FALSO?**

a) Un poligono è circoscrivibile a una circonferenza se gli assi dei lati passano per uno stesso punto. V F

b) Se le bisettrici degli angoli di un poligono passano tutte per uno stesso punto, questo è il centro della circonferenza inscritta. V F

c) Unendo ordinatamente n punti qualsiasi presi su una circonferenza, si ottiene un poligono di n lati inscritto in tale circonferenza. V F

d) I punti di contatto di quattro rette tangenti a una stessa circonferenza determinano un poligono inscritto nella circonferenza stessa. V F

ESERCIZI

140 Un rettangolo, che non sia un quadrato, ha sempre una circonferenza circoscritta, ma non ha mai quella inscritta. Spiega perché.

141 Un rombo, che non sia un quadrato, ha sempre una circonferenza inscritta, ma non ha mai quella circoscritta. Spiega perché.

7. I punti notevoli di un triangolo

Teoria a pag. G186

RIFLETTI SULLA TEORIA

142 VERO O FALSO?

a) Il punto di incontro degli assi di un triangolo si chiama circocentro perché è il centro del cerchio circoscritto. V F

b) L'incentro divide le mediane in due parti, una doppia dell'altra. V F

c) L'incentro di un triangolo è equidistante dai lati del triangolo stesso. V F

d) Il baricentro è l'unico punto notevole di un triangolo sempre interno. V F

e) Ortocentro, baricentro, incentro e circocentro di uno stesso triangolo non possono mai concidere. V F

143 TEST Quale fra le seguenti affermazioni è *falsa*?
In un triangolo:

A il circocentro è il punto di incontro degli assi.

B l'incentro è il punto di incontro delle mediane.

C l'ortocentro è il punto di incontro delle altezze.

D è sempre possibile inscrivere una circonferenza.

E vi sono sempre tre excentri.

ESERCIZI

Nel sito: ► 6 esercizi di recupero

Considera 5 triangoli: un triangolo scaleno acutangolo, un triangolo scaleno rettangolo, un triangolo scaleno ottusangolo, un triangolo isoscele, un triangolo equilatero. Effettua su questi triangoli le costruzioni richieste.

144 Costruisci il circocentro e traccia la circonferenza circoscritta.

145 Costruisci l'incentro e traccia la circonferenza inscritta.

146 Costruisci l'ortocentro.

147 Costruisci il baricentro.

148 Disegna gli excentri di un triangolo equilatero.

149 In un triangolo rettangolo, con quale punto coincide il circocentro? Motiva la risposta.

150 In un triangolo acutangolo l'ortocentro è sempre interno al triangolo? E in un triangolo ottusangolo? È in un triangolo rettangolo? Motiva le risposte.

151 In quale caso l'ortocentro coincide con uno dei vertici del triangolo? Motiva la risposta.

152 In un triangolo acutangolo l'incentro è un punto interno? E in un triangolo rettangolo o in uno ottusangolo? Motiva le risposte.

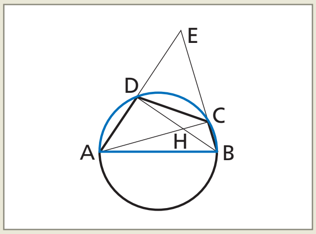
153 Indica dove si trova il baricentro di un triangolo acutangolo, di un triangolo rettangolo, di un triangolo ottusangolo. Motiva le risposte.

Dimostrazioni

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

154 Data la circonferenza di diametro AB, su una stessa semicirconferenza considera due punti C e D in modo da ottenere il quadrilatero $ABCD$, con diagonali AC e BD, che si intersecano in H.
Dimostra che H è l'ortocentro del triangolo ABE, essendo E il punto d'incontro delle rette AD e BC.

► *Caso particolare*: se i punti C e D sono tali per cui la corda CD è parallela ad AB, come risulta il triangolo ABE?



Ipotesi 1. AB è un .... ;
2. $C \in \overset{\frown}{ADB}$.

Tesi H è l'ortocentro di ....

Dimostrazione

- *Dimostra che DB e AC sono altezze.*
$A\hat{D}B$ è un angolo .... perché insiste su .... ; anche ...... è un angolo .... perché .... *Pertanto* DB è .... ad AE e AC è .... a .... DB, dunque sono due altezze del triangolo ......, *quindi* il loro punto d'incontro H è l'............... .

▶ *Caso particolare*
Il quadrilatero $ABCD$ risulta un trapezio .... *quindi* anche il triangolo ABE risulta ....

155 Dimostra che in ogni triangolo rettangolo:
a) il circocentro si trova sull'ipotenusa;
b) congiungendo il circocentro con i punti medi dei cateti e con il vertice dell'angolo retto, si ottengono quattro triangoli congruenti.

156 Dati un triangolo ABC e le sue altezze AH e BK, dimostra che i punti A, B, H, K appartengono alla stessa circonferenza.

157 Disegna un triangolo ABC e circoscrivi a esso una circonferenza di centro O. L'asse del lato BC incontra l'arco $\overset{\frown}{BC}$ non contenente A nel punto E. Dimostra che:
a) $B\hat{O}E \cong C\hat{O}E$;
b) AE è bisettrice dell'angolo $\hat{A}$.

158 Considera un triangolo qualunque e la circonferenza inscritta in esso. Con centro nei vertici del triangolo disegna tre circonferenze passanti per i punti di tangenza con la circonferenza inscritta. Dimostra che le circonferenze sono a due a due tangenti esternamente.

159 Dato il triangolo ABC, dal vertice B traccia la retta perpendicolare ad AB e dal vertice C la retta perpendicolare ad AC. Le due rette si intersecano nel punto E. Dimostra che E appartiene alla circonferenza circoscritta al triangolo. Considera i due casi determinati dall'appartenenza o meno di O, centro della circonferenza, al triangolo dato.

160 Disegna un triangolo rettangolo circoscritto a una circonferenza. Dimostra che il diametro della circonferenza è congruente alla differenza fra la somma dei cateti e l'ipotenusa.
(Suggerimento. Congiungi il centro della circonferenza con i punti di tangenza.)

161 Considera l'incentro S di un triangolo qualunque ABC e traccia per S la parallela al lato BC che incontra in P e in Q rispettivamente i lati AB e AC. Dimostra che il perimetro del triangolo APQ è congruente alla somma di AB e AC. (Suggerimento. Considera i triangoli BPS e SQC.)

8. I quadrilateri inscritti e circoscritti

→ Teoria a pag. G190

RIFLETTI SULLA TEORIA

162 VERO O FALSO?

a) È sempre possibile inscrivere un rombo in una circonferenza. V F
b) Se un quadrilatero è inscritto in una circonferenza, allora la somma degli angoli opposti è congruente a un angolo piatto. V F
c) Esiste sempre una circonferenza inscritta in un rettangolo. V F
d) Ogni trapezio è inscrivibile in una semicirconferenza. V F

163 TEST Un parallelogramma può essere inscritto in una circonferenza solo se:

A è un rombo.

B la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due.

C è un rettangolo.

D la somma degli angoli interni è un angolo giro.

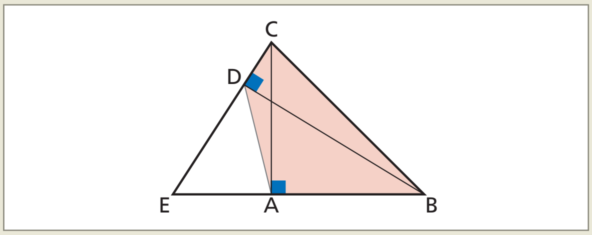
E un lato passa per il centro della circonferenza.

ESERCIZI

Dimostrazioni

ESERCIZIO GUIDA

164 Dati un triangolo EBC e le sue altezze CA e BD, dimostriamo che il quadrilatero $ABCD$ è inscrivibile in una circonferenza.

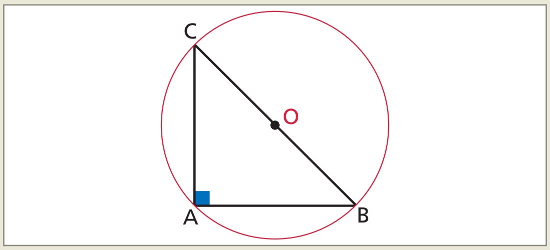


Ipotesi 1. $CA \perp EB$;
2. $BD \perp CE$.

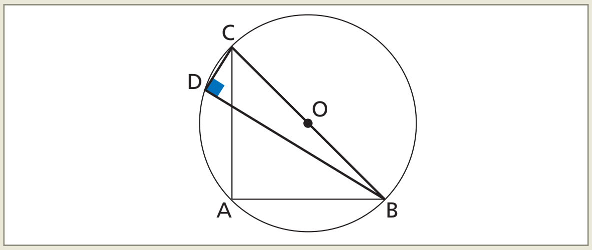
Tesi $ABCD$ è inscrivibile in una circonferenza.

Dimostrazione

Poiché l'angolo $B\hat{A}C$ è retto, è possibile disegnare una circonferenza che ha come diametro CB e passante per A. Il centro O della circonferenza è il punto medio di CB, *pertanto* il raggio è la metà di CB.



Anche l'angolo $B\hat{D}C$ è retto, quindi anche D è un punto della circonferenza che ha come centro O il punto medio di CB e come raggio la metà di CB.



Possiamo concludere che il quadrilatero $ABCD$ è inscrivibile in una circonferenza.

165 Dato un quadrilatero inscritto in una circonferenza, dimostra che ogni angolo è congruente all'angolo esterno di vertice opposto.

166 Dimostra che, se un trapezio è isoscele, è inscrivibile in una circonferenza.

167 Dimostra che se un parallelogramma è inscritto in una circonferenza, è un rettangolo.

168 Disegna due triangoli isosceli ABC e ABD aventi la base AB in comune e i vertici C e D da parti opposte rispetto ad AB. Dimostra che il quadrilatero $ACBD$ è circoscrivibile a una circonferenza.

169 Dopo aver disegnato una circonferenza di diametro AB, traccia le rette a e b tangenti rispettivamente in A e B alla circonferenza. Dai punti C e D di a, equidistanti da A, traccia le tangenti alla circonferenza. Indica con E e F i punti in cui tali tangenti incontrano b. Dimostra che il quadrilatero $CDFE$ è un trapezio isoscele.

170 Dagli estremi di una corda AB della circonferenza di centro O, traccia due corde AC e BD a essa perpendicolari. Dimostra che il quadrilatero $ABDC$ è un rettangolo.

171 Dal punto medio H della corda AB della circonferenza di centro O, traccia il diametro CD (in modo tale che l'arco $\overset{\frown}{ADB}$ sia minore dell'arco $\overset{\frown}{ACB}$). Dal punto D traccia una corda DE che incontra AB in F. Dimostra che il quadrilatero $ECHF$ è inscrivibile in una circonferenza.

172 Un quadrilatero convesso $ABCD$ inscritto in una circonferenza ha i due angoli $\hat{B}$ e $\hat{D}$ opposti congruenti. Dimostra che:
a) $\hat{B}$ e $\hat{D}$ sono angoli retti;
b) $A\hat{C}B \cong A\hat{D}B$, $A\hat{C}D \cong A\hat{B}D$.

173 Disegna un angolo convesso $a\hat{O}b$. Internamente all'angolo segna un punto P e traccia le distanze PR e PQ dai lati dell'angolo. Dimostra che il quadrilatero $OQPR$ è inscrivibile in una circonferenza, di cui devi precisare il diametro.

174 In una semicirconferenza di diametro AB inscrivi un trapezio $ABCD$.
Dimostra che il trapezio è isoscele e che la diagonale è perpendicolare al lato obliquo.

175 Dimostra che, in ogni trapezio circoscritto a una circonferenza di centro O, i due triangoli che si ottengono congiungendo il punto O con gli estremi dei lati obliqui sono rettangoli.

176 Dimostra che, in un trapezio isoscele circoscritto a una semicirconferenza, il lato obliquo è congruente alla metà della base maggiore.

177 Considerato il triangolo rettangolo EFC, di ipotenusa EF, traccia l'altezza CA, il punto medio D di EC e il punto medio B di FC.
Dimostra che $ABCD$ è inscrivibile in una circonferenza, di cui devi specificare centro e raggio.

178 Dato il quadrilatero $ABCD$, traccia le bisettrici dei suoi angoli e indica con L, M, N, P i loro punti d'incontro. Dimostra che $LMNP$ è un quadrilatero inscrivibile in una circonferenza.

179 In un triangolo rettangolo ABC, avente per base l'ipotenusa BC, traccia l'altezza AH. Da H manda le perpendicolari ai cateti indicando con E l'intersezione con AB e con D l'intersezione con AC.
Dimostra che:
a) A, E, H, D sono punti di una stessa circonferenza;
b) il quadrilatero $EBCD$ è inscrivibile in una circonferenza.

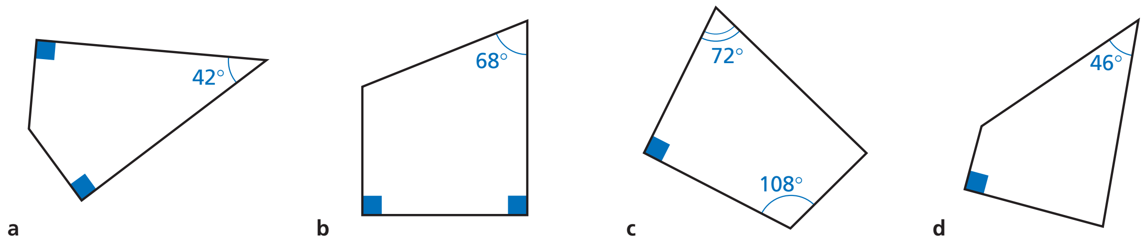
180 Nel triangolo ABC, inscritto in una circonferenza, traccia la corda BE perpendicolare al lato AC, la corda CF perpendicolare al lato AB e la corda AD perpendicolare al lato BC.
Dimostra che C è punto medio dell'arco $\overset{\frown}{ED}$, come pure B è medio di $\overset{\frown}{FD}$ e A è medio di $\overset{\frown}{EF}$.
(Suggerimento. Considera gli angoli $D\hat{F}C$ e $C\hat{F}E$ rispettivamente congruenti a $C\hat{A}D$ e $C\hat{B}E$.)

181 Disegna un triangolo rettangolo ABC, avente la base nell'ipotenusa AB. Puntando il compasso in A, riporta su AB un segmento $AD \cong AC$. Dal punto D conduci la perpendicolare ad AB, che incontra BC in E e il prolungamento di AC in F. Dimostra che:
a) AE è bisettrice dell'angolo $\hat{A}$;
b) $CD \parallel BF$;
c) il trapezio $CFBD$ è isoscele;
d) il trapezio $CFBD$ è inscrivibile in una circonferenza.

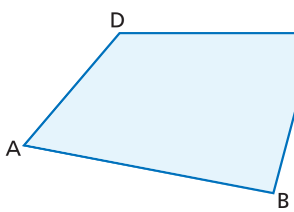
182 Considera una corda EF in una circonferenza e il punto medio M dell'arco $\overset{\frown}{EF}$ (minore). Da M traccia una corda MA, che interseca EF in D e una corda MB, che interseca EF in C. Dimostra che il quadrilatero $ABCD$ è inscrivibile in una circonferenza. (Suggerimento. Congiungi A con F, F con M e considera gli angoli $M\hat{A}F$ ed $E\hat{F}M$… . $MFAB$ è inscritto nella circonferenza. Dimostra che $M\hat{F}A \cong C\hat{D}A$.)

Proprietà geometriche e misure

183 Considera i seguenti quadrilateri e indica quale di essi è inscrivibile in una circonferenza.



184 **COMPLETA** in modo che il quadrilatero *ABCD* sia inscrivibile e circoscrivibile.



AB	*BC*	*CD*	*DA*	$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$	$\hat{D}$
30 cm	…	17 cm	21 cm	96°	…	…	104°
15 cm	$\frac{4}{3}AB$	…	27 cm	…	108°	…	115°
…	$\frac{5}{6}CD$	$3AD$	38 cm	…	110°	72°	…
…	124 cm	70 cm	$\frac{3}{10}CD$	…	$\frac{2}{3}\hat{D}$	$\frac{1}{3}\hat{A}$	…

9. I poligoni regolari

Teoria a pag. G194

RIFLETTI SULLA TEORIA

185 **VERO O FALSO?**

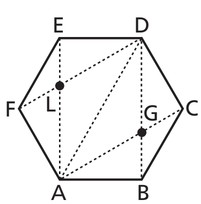
a) Il centro della circonferenza inscritta in un quadrato coincide con il centro della circonferenza circoscritta allo stesso quadrato. V F

b) Il raggio di un quadrato è congruente a metà diagonale. V F

c) L'apotema di un triangolo equilatero è congruente a un terzo di una delle mediane. V F

TEST

186 Nella figura sono disegnati l'esagono regolare *ABCDEF* e le sue diagonali uscenti dai vertici *A* e *D*.



Quale dei seguenti enunciati è *falso*?

A *AGDL* è un parallelogramma.

B La diagonale *AD* è congruente al diametro della circonferenza circoscritta.

C *AGDL* è un rombo.

D *AGDL* è inscrivibile in una circonferenza.

E *ACDF* è rettangolo.

187 Un punto *P* interno a un pentagono convesso ha la stessa distanza da tutti i vertici. Allora possiamo dire che:

A le mediane dei lati passano per *P*.

B il pentagono è circoscrivibile a una circonferenza.

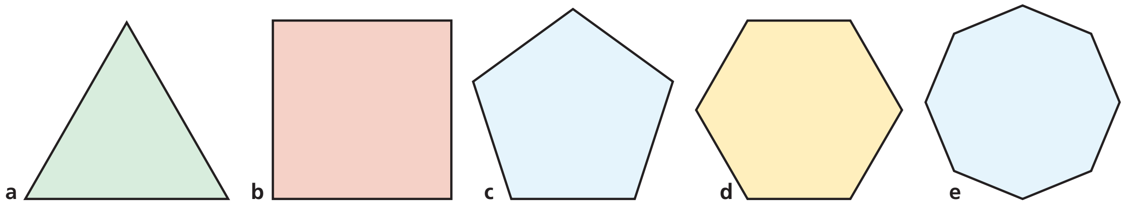
C il pentagono è inscrivibile in una circonferenza.

D il pentagono è regolare.

E gli assi dei lati passano per *P*.

ESERCIZI

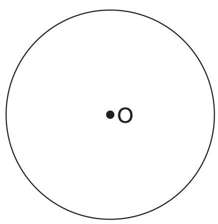
188 **COMPLETA** disegnando, per ogni poligono regolare della figura, il centro, il raggio e l'apotema.



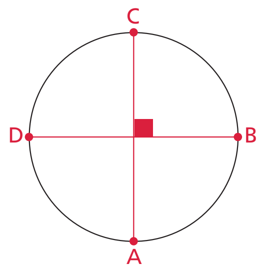
Costruzione di alcuni poligoni regolari

Dimostra la validità delle seguenti costruzioni di poligoni regolari.

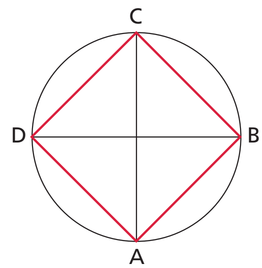
189



a. Disegniamo una circonferenza.

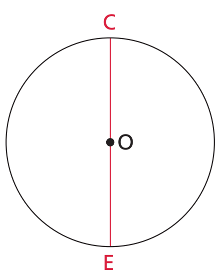


b. Tracciamo due diametri perpendicolari, *AC* e *BD*.

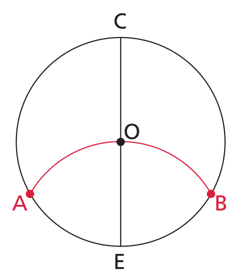


c. Congiungiamo gli estremi dei diametri. La figura *ABCD* è un quadrato.

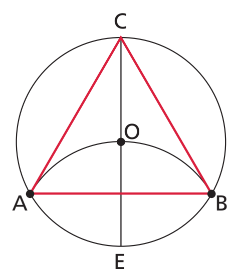
190



a. Disegniamo una circonferenza e un diametro *EC*.

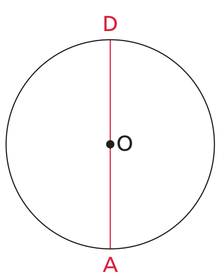


b. Puntando il compasso in *E*, sempre con la stessa apertura *OE*, tracciamo un arco $\overset{\frown}{AB}$.

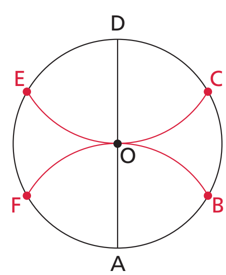


c. Congiungiamo *A* con *B*, *B* con *C* e *C* con *A*. La figura *ABC* è un triangolo equilatero.

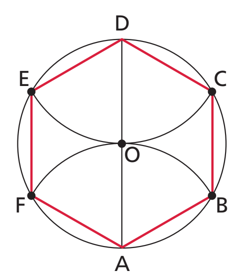
191



a. Disegniamo una circonferenza e un diametro *AD*.



b. Mantenendo la stessa apertura *OA*, puntiamo il compasso in *A* e tracciamo l'arco $\overset{\frown}{FB}$; puntiamo il compasso in *D* e tracciamo l'arco $\overset{\frown}{EC}$.



c. Congiungiamo i punti ottenuti. La figura *ABCDEF* è un esagono regolare.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

Applicazioni del teorema del poligono regolare inscritto o circoscritto e del teorema della circonferenza divisa in archi congruenti

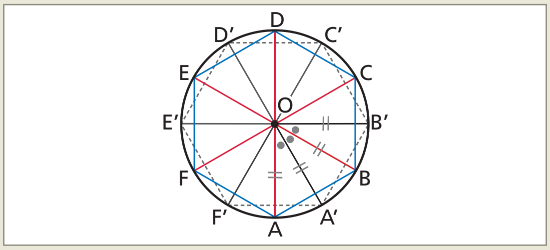
ESERCIZIO GUIDA

192 Disegniamo un esagono regolare, $ABCDEF$, inscritto in una circonferenza. Conduciamo ogni apotema e prolunghiamo fino a incontrare la circonferenza nei punti A', B', C', D', E', F'. Dimostriamo che:
a) l'esagono $A'B'C'D'E'F'$ è congruente all'esagono $ABCDEF$;
b) congiungendo i vertici dei due esagoni si ottengono le corde AA', BB', CC'..., lati di un dodecagono regolare.

Ipotesi 1. $ABCDEF$ è un esagono regolare;
2. OA', OB', OC', OD', OE', OF' raggi ottenuti prolungando gli apotemi.

Tesi 1. $A'B'C'D'E'F' \cong ABCDEF$;
2. $AA'BB'CC'DD'EE'FF'$ è un poligono regolare.

Dimostriamo la tesi 1
Congiungiamo O con i vertici di $ABCDEF$.



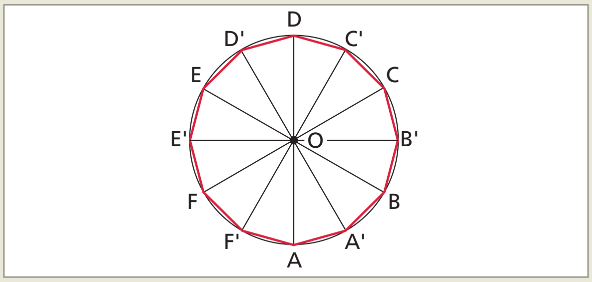
L'esagono $ABCDEF$ è suddiviso dai raggi tracciati in sei triangoli equilateri congruenti di vertice O, *quindi* ogni angolo di vertice O è $\frac{1}{6}$ dell'angolo giro.

Ogni apotema divide l'angolo di vertice O in due parti congruenti.

Consideriamo i triangoli OAB e $OA'B'$. Essi hanno:
- $OA' \cong OA \cong OB' \cong OB$, perché raggi;
- $A'\hat{O}B' \cong A\hat{O}B$, perché somme di angoli congruenti.

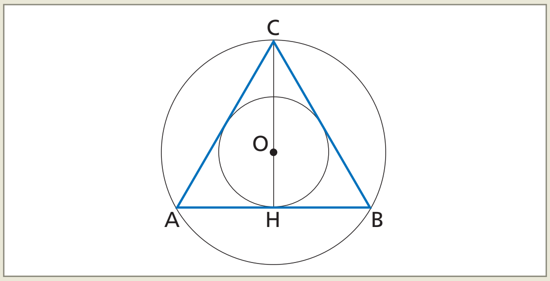
Quindi sono congruenti. In particolare, risulta che $AB \cong A'B'$.
Poiché $ABCDEF$ è regolare, anche $A'B'C'D'E'F'$ è regolare e, avendo i lati rispettivamente congruenti, sono congruenti.

Dimostriamo la tesi 2
Congiungiamo O con i vertici del dodecagono. L'angolo giro di vertice O risulta suddiviso in dodici angoli al centro congruenti, *quindi* anche la circonferenza è suddivisa in dodici archi congruenti, *pertanto* il dodecagono $AA'BB'CC'DD'EE'FF'$ è regolare.



DIMOSTRAZIONE GUIDATA

193 Dimostra che l'apotema di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza è metà del suo raggio.



Ipotesi ABC è un triangolo ....

Tesi $OH \cong \frac{1}{2}$ ....

Dimostrazione
- *Prendi in considerazione il punto O.*
  1. Esso è il centro della circonferenza .... e di quella .... al triangolo ...... , perché è equilatero, *quindi* OH è .... del triangolo e OC è il ....
  2. Il punto O è anche il punto di intersezione delle altezze, ... e bisettrici del triangolo ABC.
- *Considera la mediana relativa al lato AB.*
  La mediana ...... è divisa dal punto ...... in due parti, una doppia dell'altra, *quindi* $OC \cong 2$...... , da cui $OH \cong$ ....

194 Dimostra che in un pentagono regolare le due diagonali uscenti da un vertice dividono l'angolo in tre parti congruenti.

195 Dimostra che in un esagono regolare le tre diagonali uscenti da un vertice dividono l'angolo in quattro parti congruenti.

196 Generalizza l'enunciato precedente nel caso di un poligono regolare di n lati.

197 Dati un esagono regolare $ABCDEF$ e la sua diagonale AC, dimostra che AC è perpendicolare ad AF.

198 Disegna un pentagono regolare $ABCDE$, inscritto in una circonferenza. Conduci ogni apotema e prolungalo fino a incontrare la circonferenza nei punti A', B', C', D', E'. Dimostra che:
a) il pentagono $A'B'C'D'E'$ è congruente al pentagono $ABCDE$;
b) congiungendo i vertici dei due pentagoni si ottiene un decagono regolare.

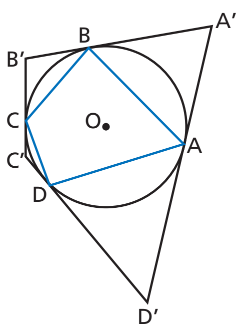
199 Considera un triangolo equilatero e un esagono regolare inscritti in una stessa circonferenza.
Dimostra che il lato del triangolo è doppio dell'apotema dell'esagono.

200 Nell'esagono regolare $ABCDEF$ prolunga da entrambe le parti i lati AB, CD, EF. I prolungamenti determinano un triangolo.
Dimostra che tale triangolo è equilatero e che il lato è triplo di quello dell'esagono.

201 Disegna separatamente un triangolo equilatero, un quadrato e un esagono regolare. Su ognuno dei lati delle tre figure considera il relativo quadrato (esterno al poligono). Per ogni figura congiungi i vertici liberi dei quadrati, ottenendo un esagono, un ottagono e un dodecagono.
Questi tre nuovi poligoni sono tutti regolari?
Dimostra la proprietà che hai ricavato.

RIEPILOGO I POLIGONI INSCRITTI E CIRCOSCRITTI

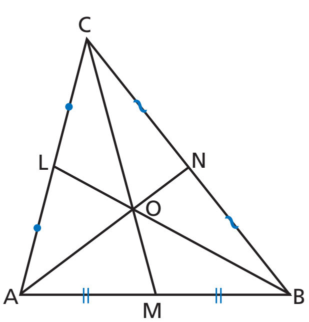
202 TEST Con riferimento alla figura, quale fra queste relazioni è *sbagliata*?



A $OB \cong OA$
B $AA' + CB' \cong BB' + BA'$
C $AB + CD \cong CB + AD$
D $C'D' \cong D'A + CC'$
E $A'D' \cong AA' + DD'$

203 Disegna una circonferenza inscritta in un triangolo equilatero ABC, con punti di tangenza M, N, L. Dimostra che:
a) il triangolo MNL è equilatero;
b) il lato del triangolo inscritto è la metà di quello circoscritto.

204 Enuncia il teorema espresso dalla seguente figura e dalle relative ipotesi e tesi. Se elimini la prima ipotesi e la prima tesi, è ancora valido il teorema? Dimostralo.



Ipotesi
1. $AM \cong MB$;
2. $AL \cong LC$;
3. $CN \cong NB$.

Tesi
1. $CO \cong 2OM$;
2. $OB \cong 2OL$;
3. $AO \cong 2ON$.

205 Nell'esagono regolare $ABCDEF$ congiungi B con F e C con E.
Dimostra che $BCEF$ è un rettangolo.

206 In un esagono regolare congiungi i punti medi di due coppie di lati opposti. Dimostra che tali segmenti sono le diagonali di un rettangolo.

207 Disegna un ottagono regolare. Prolunga da entrambe le parti quattro lati, alternando un lato sì e un lato no. Dimostra che i prolungamenti dei lati individuano un quadrato.

208 In un esagono regolare scegli due vertici opposti. Da questi vertici traccia le due diagonali non passanti per il centro. Dimostra che queste, incontrandosi, determinano un rombo.

209 Disegna un triangolo ABC inscritto in una circonferenza di centro O e il diametro CD, e determina l'ortocentro H. Dimostra che:
a) AH è parallelo a BD;
b) AB e HD si bisecano.

▶ *Caso particolare*: se il triangolo ABC è equilatero, come sono i punti O e H? Sono ancora vere le tesi?

210 Dato un triangolo equilatero di centro O, traccia gli assi dei segmenti OA, OB, OC, che incontrano i lati del triangolo in sei punti. Dimostra che tali punti sono i vertici di un esagono regolare.

211 Disegna un esagono regolare $ABCDEF$, la diagonale AC e le due diagonali BD e BF.
Dimostra che AC è divisa dalle altre due diagonali in tre parti congruenti.

212 Nel triangolo ABC inscritto in una circonferenza indica con H l'ortocentro. Traccia la corda BE perpendicolare ad AB. Dimostra che $BE \cong CH$.

213 Nel triangolo equilatero ABC, inscritto in una circonferenza, indica con D ed E i punti medi degli archi $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{CA}$. Dimostra che la corda ED, incontrando i lati AC e BC, viene suddivisa in tre parti congruenti.

214 Dimostra che se un poligono è sia inscrivibile che circoscrivibile a due circonferenze concentriche, allora è regolare.

215 Considera un pentagono regolare e dimostra che ogni diagonale ne divide un'altra in due parti di cui la maggiore è congruente al lato del pentagono.

216 Un trapezio isoscele è circoscritto a una semicirconferenza. Dimostra che la base maggiore è congruente alla somma dei lati obliqui. Considera anche il caso del trapezio scaleno e del trapezio rettangolo. (Suggerimento. Traccia dagli estremi della base minore le perpendicolari alla maggiore, congiungi i punti di tangenza di un lato con il centro della semicirconferenza e considera i triangoli ottenuti.)

217 Considera una circonferenza e quattro rette a essa tangenti, a due a due parallele. Indica con A, B, C, D i punti di contatto con la circonferenza e con P, Q, R, S i punti intersezione delle rette fra loro. Dimostra che:
a) $PQRS$ è un rombo;
b) $ABCD$ è un rettangolo.

218 Disegna un quadrato $ABCD$ di diagonale AC, congiungi il punto medio M di AB col punto medio N di AD e prolunga MN fino a incontrare in E il prolungamento di CD.
Dimostra che:
a) $AC \perp MN$;
b) $CN \perp AE$;
c) $AMDE$ è un parallelogramma.
(Suggerimento. Indica con P l'intersezione di MN con AC e considera il triangolo EAC, in esso AD ed EP sono…)

219 Disegna un triangolo ABC e le sue altezze AE, BF, CD, che individuano l'ortocentro H. Dimostra che le altezze di ABC sono le bisettrici del triangolo DEF. (Suggerimento. Traccia la circonferenza di diametro HB e confronta gli angoli $H\hat{D}E$ e $H\hat{B}E$. Poi traccia la circonferenza di diametro AH e confronta gli angoli $C\hat{A}E$ e $F\hat{D}C$.)

220 Nel triangolo ABC inscritto in una circonferenza di centro O e diametro AD, a partire dal vertice A, traccia l'altezza AH e la bisettrice AE. Dimostra che $H\hat{A}E \cong E\hat{A}D$. (Suggerimento. Congiungi D con C e considera i triangoli ABH e ADC.)

221 Nel triangolo acutangolo ABC traccia le altezze BH e CK e indica con O l'ortocentro. Dimostra che sono inscrivibili in una circonferenza i quadrilateri:
a) $AKOH$;
b) $BCHK$.

10. La piramide e i solidi di rotazione

Teoria a pag. G196

RIFLETTI SULLA TEORIA

222 VERO O FALSO?

a) Le facce laterali di una piramide retta sono congruenti. V F

b) Se una piramide ha per base un quadrato, allora è regolare. V F

c) L'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ruota attorno a uno dei cateti si trasforma sempre nell'apotema di un cono. V F

d) Un triangolo isoscele che ruota completamente attorno alla propria base genera due coni con la base in comune. V F

e) Un rettangolo che ruota completamente attorno a una retta parallela alla base, ma esterna al rettangolo, genera due cilindri, uno dentro all'altro. V F

ESERCIZI

223 Dimostra che, in una piramide retta, gli apotemi sono congruenti.

Disegna i solidi generati dalla rotazione dei seguenti poligoni intorno alla retta indicata e descrivi i solidi ottenuti. Se non viene specificato diversamente, considera una rotazione completa (360°).

224 Rotazione di un triangolo rettangolo intorno alla retta:
a) di uno dei cateti;
b) dell'ipotenusa.

225 Rotazione di un triangolo acutangolo intorno alla retta:
a) di uno dei lati;
b) passante per un vertice e parallela al lato opposto.

226 Rotazione di un triangolo isoscele intorno alla retta:
a) della base;
b) dell'altezza relativa alla base (rotazione di 180°).

227 Rotazione di un trapezio isoscele intorno alla retta:
a) della base maggiore;
b) della base minore;
c) di uno dei lati obliqui.

228 Rotazione di un quadrato intorno alla retta:
a) di una diagonale (rotazione di 180°);
b) passante per i punti medi di due lati opposti (rotazione di 180°);
c) passante per un vertice e parallela alla diagonale opposta a quel vertice.

229 Rotazione di un rettangolo intorno alla retta:
a) di un lato;
b) parallela a un lato e non intersecante il rettangolo;
c) passante per un vertice e parallela alla diagonale opposta a quel vertice.

230 Rotazione dell'esagono regolare $ABCDEF$ intorno alla retta:
a) AD (rotazione di 180°);
b) di un lato;
c) passante per D e parallela a EC.

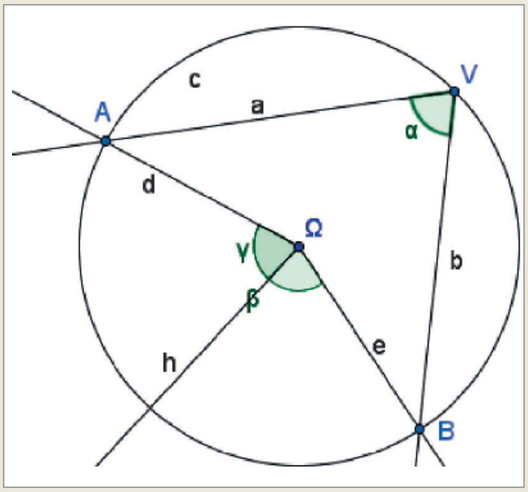
LABORATORIO DI MATEMATICA

La circonferenza con GeoGebra

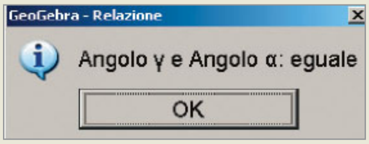
ESERCITAZIONE GUIDATA

Con gli strumenti di GeoGebra verifichiamo il teorema:
Un angolo alla circonferenza è metà del corrispondente angolo al centro.

- Attiviamo GeoGebra, nascondiamo gli assi cartesiani e la finestra algebrica e chiediamo al sistema di mostrare il nome degli oggetti senza il loro valore.
- Costruiamo la figura per verificare il teorema: con *Nuovo punto* inseriamo un punto che chiamiamo Ω e con *Circonferenza di dato centro e di dato raggio* tracciamo la circonferenza c di centro Ω e raggio 4 (figura 1).
- Su di essa con *Nuovo punto* evidenziamo i punti V (vertice dell'angolo alla circonferenza), A e B.
- Con *Semiretta per due punti* tracciamo i lati a e b dell'angolo alla circonferenza e i lati c e d del corrispondente angolo al centro.
- Con *Angolo* evidenziamo l'angolo alla circonferenza α e poi il corrispondente angolo al centro β.
- Con *Bisettrice* ricaviamo le due bisettrici di β, con *Semiretta per due punti* sovrapponiamo la semiretta h alla bisettrice che ci interessa, con *Mostra/nascondi oggetto* nascondiamo l'altra e con *Angolo* evidenziamo l'angolo $d\hat{\Omega}h$, la metà di β, che prende il nome γ.
- Applichiamo *Relazione fra due oggetti* agli angoli α e γ, ricevendo da GeoGebra la risposta di figura 2.
- Spostiamo poi il punto B e applichiamo di nuovo *Relazione fra due oggetti*, ricevendo la medesima risposta.



▲ Figura 1



▲ Figura 2

Nel sito: ► 2 esercitazioni guidate con Cabri ► 25 esercitazioni in più

Esercitazioni

Verifica i seguenti teoremi sulla circonferenza.

1 Se un diametro interseca una corda non passante per il centro nel suo punto medio, allora il diametro è perpendicolare alla corda.

2 Se un diametro è perpendicolare a una corda, allora esso divide a metà la corda, l'angolo al centro corrispondente e l'arco.

3 Le corde aventi la stessa distanza dal centro sono congruenti.

4 Se le due corde AN e NB (con A e B punti distinti) sono congruenti, allora il diametro MN è bisettrice dell'angolo $A\hat{N}B$.

5 Le rette tangenti negli estremi di un diametro sono parallele.

6 La tangente nel punto T della circonferenza è perpendicolare al raggio OT.

7 Ogni angolo inscritto in una semicirconferenza è retto.

8 Gli angoli alla circonferenza che insistono su archi (corde) congruenti sono congruenti.

Matematica per il cittadino

VIAGGIO IN TOSCANA

Durante un viaggio in Toscana, scopri di aver dimenticato la cartina stradale. Nel cruscotto rintracci l'ultima pagina di un vecchio atlante geografico, in cui sono riportate le distanze in linea d'aria tra i capoluoghi di provincia toscani (le distanze sono espresse in kilometri).

Arezzo (AR)									
80	Firenze (FI)								
125	140	Grosseto (GR)							
160	100	135	Livorno (LI)						
150	75	160	45	Lucca (LU)					
190	115	200	70	45	Massa C. (MS)				
155	90	150	25	20	50	Pisa (PI)			
120	35	165	80	45	75	60	Pistoia (PT)		
100	25	160	90	60	95	75	20	Prato (PO)	
60	65	80	110	110	155	110	95	85	Siena (SI)

1. Utilizzando la tabella, stabilisci quanto è lungo in linea d'aria il percorso che, partendo e tornando a Firenze, tocca le città di Lucca, Massa Carrara, Livorno (indica il percorso in questo modo: FI-LU-MS-LI-FI).

A 330 km B 430 km C 190 km D 290 km

2. Vuoi visitare tutte e dieci le città toscane compiendo un percorso che, partendo e tornando a Siena, passi una e una sola volta per ciascuna di esse.
Quale tra i seguenti itinerari è il più breve, considerando le distanze stradali approssimativamente coincidenti con quelle della tabella?

A SI-GR-LI-AR-FI-PO-PT-LU-MS-PI-SI
B SI-LI-PI-LU-MS-PT-PO-FI-AR-GR-SI
C SI-PI-LU-MS-PT-PO-FI-AR-GR-LI-SI
D SI-GR-LI-MS-PI-LU-PT-PO-FI-AR-SI

Sapresti suggerirne un altro ancora più breve?

3. Immagina di scambiare l'ordine di due città nella tabella delle distanze relative. Per ognuna delle seguenti affermazioni, indica se è vera o falsa.

a) Si devono modificare solamente le caselle delle righe relative alle due città scambiate, mentre le altre righe restano immutate. V F
b) Il numero di caselle che si devono modificare dipende da quali città vengono scambiate. V F
c) Qualunque coppia si scambi, le caselle da modificare sono 18. V F
d) Indipendentemente da quali città si scambiano, le caselle da modificare sono al più 16. V F

4. Sulla cartina della Toscana qui riportata, immagina di disegnare in scala una circonferenza che ha centro in Siena e raggio 90 km.
Quali città appartengono al cerchio?
Se tracci la stessa circonferenza con centro in Pisa, quali località si trovano nell'intersezione tra i due cerchi?

5. Sommando le distanze contenute nelle caselle della riga e della colonna relative a una data città, si ottengono valori diversi; per esempio, per Lucca 710 km, per Grosseto 1315 km. Quale interpretazione geometrica di questo dato ti sembra più corretta?

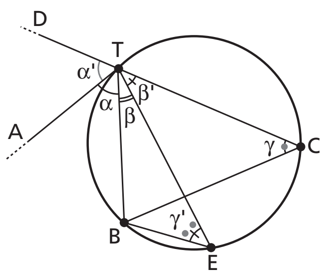
A Più il valore è grande, più la città ha poche città vicine, quindi è più vicina al mare.
B Il valore relativo a Firenze è il più piccolo perché è il capoluogo di regione.
C Più il valore è piccolo, minore è la distanza media di quella città da tutte le altre, cioè tale città è più «centrale» rispetto alla disposizione complessiva.
D Il valore per ogni città non ha alcun significato particolare.

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 20 test interattivi in più

1 Osserva la figura. La semiretta TA è tangente in T alla circonferenza.



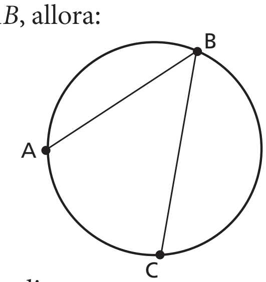
Una delle seguenti affermazioni è *falsa*. Quale?

- A α e γ insistono sullo stesso arco.
- B α e β sono angoli alla circonferenza.
- C α' e β' sono angoli alla circonferenza.
- D α e γ' insistono sullo stesso arco.
- E γ e γ' sono congruenti.

2 Due corde hanno uguale distanza dal centro di una circonferenza. Allora sono:

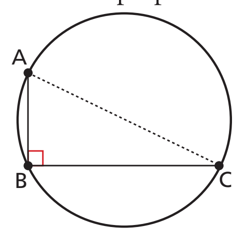
- A perpendicolari.
- B parallele.
- C incidenti.
- D congruenti.
- E consecutive.

3 Nella figura sono disegnate due corde AB e BC.
Se $BC > AB$, allora:



- A BC è un diametro.
- B AB e BC hanno uguale distanza dal centro.
- C gli assi delle due corde si incontrano in un punto diverso dal centro.
- D la distanza di BC dal centro è maggiore di quella di AB.
- E la distanza di AB dal centro è maggiore di quella di BC.

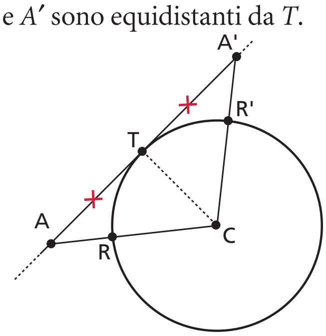
4 Osserva la figura.
Le corde AB e BC sono perpendicolari.



Uno dei seguenti enunciati è *vero*. Quale?

- A AC è un diametro.
- B AC è un diametro solo se $AB \cong BC$.
- C Il centro della circonferenza è interno al triangolo ABC.
- D Il centro della circonferenza è esterno al triangolo ABC.
- E Nessuna delle affermazioni precedenti è vera.

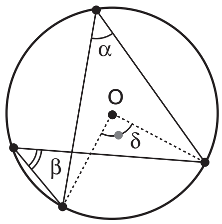
5 Osserva la figura.
La retta è tangente in T alla circonferenza.
I punti A e A' sono equidistanti da T.



Quale fra le seguenti proposizioni è *falsa*?

- A $AC \cong A'C$.
- B ACA' è un triangolo rettangolo.
- C $ATC \cong A'TC$.
- D TC è bisettrice di $A\hat{C}A'$.
- E $AR \cong A'R'$.

6 Osserva la figura e indica quale delle seguenti relazioni è *falsa*.



A $\beta < \alpha$

B $\alpha \cong \frac{1}{2}\delta$

C $\delta \cong 2\beta$

D $\beta \cong \delta - \alpha$

E $\alpha + \beta \cong \delta$

7 Solo una delle seguenti proposizioni è *vera*. Quale?

A In ogni punto di una circonferenza esistono due rette a essa tangenti.

B Per un punto interno a una circonferenza passano due rette tangenti.

C Le tangenti a una circonferenza condotte da un punto esterno hanno distanza dal centro maggiore del raggio.

D Le tangenti a una circonferenza condotte da un punto interno hanno distanza dal centro minore del raggio.

E Per un punto esterno a una circonferenza passano due rette tangenti.

8 Un parallelogramma è inscrivibile in una circonferenza se:

A due angoli consecutivi sono congruenti.

B due lati consecutivi sono congruenti.

C le diagonali si dividono scambievolmente a metà.

D le diagonali sono bisettrici degli angoli.

E le diagonali sono perpendicolari.

9 Un quadrilatero convesso è circoscrivibile a una circonferenza se:

A una diagonale è doppia dell'altra.

B la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due.

C le diagonali si dividono scambievolmente a metà.

D le mediane passano per lo stesso punto.

E le altezze sono tutte interne al quadrilatero.

10 Un trapezio isoscele è circoscrivibile a una circonferenza se:

A il lato obliquo è congruente alla semisomma delle basi.

B le diagonali sono congruenti.

C le diagonali sono perpendicolari.

D il lato obliquo è congruente alla base minore.

E gli angoli opposti sono supplementari.

11 Una delle seguenti proposizioni è *vera*. Quale?

A In un triangolo isoscele baricentro e ortocentro non appartengono alla stessa retta.

B In un triangolo isoscele il circocentro e l'ortocentro sono interni al triangolo.

C In un triangolo rettangolo l'ortocentro è il vertice dell'angolo retto e il circocentro è esterno.

D In un triangolo equilatero baricentro e incentro non appartengono alla stessa retta.

E In un triangolo equilatero incentro e circocentro coincidono.

12 L'altezza di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza è congruente:

A alla metà del raggio.

B al doppio del raggio.

C alla metà del diametro.

D ai $\frac{3}{4}$ del diametro.

E al diametro.

13 Se in un triangolo circocentro e incentro coincidono, allora esso è:

A equilatero.

B isoscele.

C ottusangolo e isoscele.

D rettangolo e scaleno.

E rettangolo e isoscele.

SPIEGA PERCHÉ

14 Un angolo alla circonferenza può essere maggiore di un angolo piatto? Motiva la risposta.

15 Dati i punti A e B, rappresenta il luogo dei centri delle circonferenze passanti per i due punti dati. Come sono fra loro la retta AB e il luogo trovato? Perché?

16 Quando due circonferenze si dicono tangenti? In due circonferenze tangenti la distanza fra i centri può essere minore della somma dei raggi delle due circonferenze? Perché?

17 Il segmento che unisce i centri di due circonferenze tangenti esternamente può formare un triangolo con due raggi qualsiasi delle due circonferenze? E se le circonferenze sono tangenti internamente? Giustifica le tue risposte.

18 Disegna due circonferenze con i raggi congruenti e tali che il centro della seconda appartenga alla prima. Detti A e B i punti di intersezione delle due circonferenze, e rispettivamente O e O' i centri delle due circonferenze, di che natura è il quadrilatero $AOBO'$? Perché?

19 Perché gli angoli alla circonferenza che insistono su corde aventi stessa distanza dal centro sono congruenti? Come deve essere una corda AB affinché l'angolo acuto che insiste sul minore degli archi AB sia un sesto di $\widehat{P}$?

20 Data una corda MN nella circonferenza di centro O, quale relazione sussiste fra l'angolo al centro $M\widehat{O}N$ e l'angolo ottuso alla circonferenza che insiste sull'arco $\overset{\frown}{MN}$?

21 Un trapezio isoscele inscritto in una circonferenza è sempre inscrivibile anche in una semicirconferenza?

22 Unendo, uno sì e uno no, i vertici di un decagono regolare ottieni un altro poligono regolare inscritto nella stessa circonferenza? Quale? Perché?

23 Data una circonferenza, quale poligono regolare individuano gli estremi di due diametri perpendicolari e i punti di incontro con la circonferenza delle bisettrici degli angoli che i due diametri formano? Tale poligono è circoscrivibile a una circonferenza? Come puoi disegnare tale circonferenza?

24 Unendo i vertici di un poligono regolare con il centro della circonferenza inscritta o circoscritta a esso, ottieni sempre dei triangoli isosceli. Perché? Quanti sono?

25 Congiungendo gli estremi di due diametri qualsiasi, presi su una circonferenza, ottieni sempre un rettangolo. Perché? È corretto affermare che, poiché i diametri sono tutti congruenti, allora i rettangoli inscritti in una circonferenza sono tutti congruenti? Perché?

26 Disegna una circonferenza di centro O e diametro AB e prolunga AB da entrambe le parti di due segmenti AE e BF congruenti al diametro. Dai punti E e F traccia le rette tangenti alla circonferenza. Che quadrilatero formano le tangenti? Che quadrilatero formano i punti di contatto delle suddette tangenti?

27 Date due rette, descrivi come puoi disegnare una circonferenza tangente a entrambe. E se le rette sono tre, puoi sempre disegnare una circonferenza tangente a tutte e tre? Motiva la risposta.

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

28 Determina il luogo dei punti equidistanti da tre punti fissi A, B e C.

29 In una circonferenza disegna due archi $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ fra loro congruenti. Dimostra che le corde AD e BC sono congruenti.

30 Disegna una corda AB di una circonferenza e indica con M il punto medio dell'arco $\widehat{AB}$. Dimostra che la parallela ad AB condotta per M è tangente alla circonferenza.

31 Sono date una circonferenza di centro O e diametro AB e la retta r tangente alla circonferenza nel punto B. Scegli sulla circonferenza un punto C qualunque e traccia la retta s tangente alla circonferenza in C. Indica con P il punto di intersezione delle tangenti r e s. Dimostra che PO è parallelo ad AC.
▶ *Caso particolare*: se C è il punto medio dell'arco $\widehat{AB}$, di che natura è il quadrilatero $POAC$?

32 Disegna una circonferenza e un punto P esterno a essa. Da P conduci le due rette tangenti alla circonferenza, indicando con A e B i punti di contatto. Sull'arco maggiore $\widehat{AB}$ scegli un punto qualunque C e congiungi tale punto con A e con B. Dimostra che la somma degli angoli $P\hat{A}C$ e $P\hat{B}C$ è costante al variare di C su $\widehat{AB}$.

33 Traccia una retta r, un suo punto P e un punto A non appartenente a essa. Congiungi A con P e indica con H il punto medio del segmento AP. Costruisci l'asse s del segmento AP, che interseca la retta r nel punto M. Sulla retta s determina il punto M', tale che sia $MH \cong M'H$. Qual è il luogo dei punti M' al variare di P su r?

34 Dimostra che l'altezza di un triangolo equilatero è congruente ai tre quarti del diametro della circonferenza a esso circoscritta.

35 Disegna una circonferenza e due suoi diametri AB e CD. Dall'estremo A traccia la perpendicolare al diametro CD, che interseca la circonferenza nel punto E. Dimostra che la corda BE è parallela al diametro CD.

36 Dimostra che se il circocentro di un triangolo appartiene a un lato, allora l'angolo opposto a questo lato è retto.

37 In una circonferenza disegna una corda AB. Traccia poi le corde AD e BC congruenti fra loro, nello stesso semipiano rispetto ad AB. Dimostra che $D\hat{A}B \cong C\hat{B}A$.

38 Disegna un triangolo equilatero ABC e poi, esternamente a esso, i triangoli equilateri ABE, BCF e ACD, i cui baricentri sono, rispettivamente, P, Q e R. Dimostra che l'esagono $APBQCR$ è regolare e che il triangolo PQR è congruente al triangolo ABC.

39 Nel triangolo ABC rettangolo in A indica con H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, con M e N i punti medi dei due cateti. Dimostra che i punti A, M, H, N giacciono su una stessa circonferenza.

40 In un triangolo equilatero ABC costruisci il baricentro G. Disegna l'asse del segmento AG e l'asse di BG. Dimostra che il lato AB è diviso dai due assi in tre parti congruenti.

41 Dimostra che l'incentro di un triangolo ABC coincide con l'ortocentro del triangolo formato dalle bisettrici degli angoli esterni di ABC.

42 Dimostra che la somma dei cateti di un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei diametri della circonferenza inscritta e della circonferenza circoscritta al triangolo.

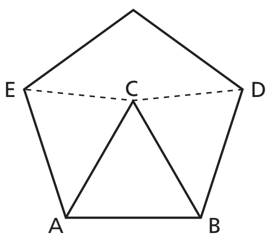
METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 8 esercizi in più

TEST

43 Nel pentagono regolare in figura, il triangolo ABC è equilatero. Quanto vale l'angolo convesso $E\hat{C}D$?

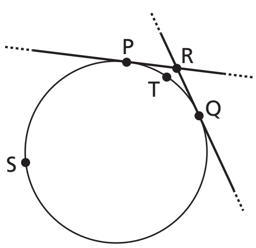
A 120°
B 144°
C 150°
D 168°
E 170°



(*Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede*, 1996)

44 PR e QR sono tangenti al cerchio in figura. Sapendo che l'arco PSQ è quattro volte l'arco PTQ, allora l'angolo $P\hat{R}Q$ è:

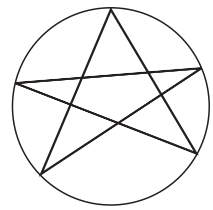
A 72°
B 90°
C 105°
D 108°
E 120°



(*Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede*, 1997)

45 Sia data una stella a cinque punte inscritta in una circonferenza. Quanto vale la somma degli angoli con vertice nelle punte della stella?

A 100°
B 150°
C 180°
D 200°
E I dati a disposizione sono insufficienti.



(*Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede*, 2003)

46 In un triangolo, per ogni coppia di lati consecutivi, i due assi dei lati e la bisettrice dell'angolo formato dai due lati si incontrano in uno stesso punto.
Possiamo affermare che:

A non esiste un triangolo con questa proprietà.
B il triangolo è equilatero.
C il triangolo ha un angolo di 30°.
D il triangolo è rettangolo.
E il triangolo ha un angolo di 45°.

(*Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede*, 2005)

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 7 esercizi in più

47 TEST Consider a quadrilateral whose vertices, A, B, C, and D, are on a circle. Let x, y, and z be the truth values of the following three statements. What is the value of the ordered triple (x, y, z)?

x: For quadrilateral $ABCD$, $A\hat{B}C + C\hat{D}A = 180°$.
y: The perimeter of quadrilateral $ABCD$ is greater than twice the diameter of the circle.
z: The perpendicular bisector of any side will pass through the circle's center.

A (F, F, T)
B (F, T, T)
C (T, T, T)
D (F, F, F)
E (T, F, T)

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2004)

48 Two circles C_1 and C_2 have a common chord GH. Point Q is chosen on C_1 so that it is outside C_2. Lines QG and QH are extended to cut C_2 at V and W, respectively. Show that, no matter where Q is chosen, the length of VW is constant.

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge, COMC*, 2003)

49 TEST A regular polygon has each interior angle half as large as each exterior angle. How many sides does the polygon have?

A 3
B 4
C 5
D 6
E None of these answers.

(USA *Northern State University: 52nd Annual Mathematics Contest*, 2005)

GLOSSARY

chord: corda
circle: circonferenza, talvolta cerchio
to cut-cut-cut: tagliare, intersecare
extended: prolungato
perpendicular bisector: asse
side: lato
statement: enunciato, frase
triple: terna
twice: doppio

L'equivalenza delle superfici piane

Annodando funi

Racconta Erodoto che il re egizio Sesostri, vissuto intorno al 2000 a.C., distribuì il territorio tra tutti gli egiziani, dando a ciascuno un lotto uguale di forma rettangolare, e richiese in cambio il pagamento di un tributo annuo. Erano incaricati della suddivisione gli agrimensori egizi, chiamati «arpedonapti», ovvero «annodatori di funi»…

…come si fa a delimitare sul terreno un campo rettangolare?

La risposta a pag. G253

1. L'estensione e l'equivalenza

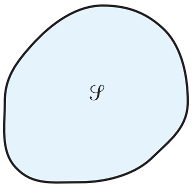
Le superfici e la loro estensione

Una **superficie piana limitata** è una figura piana costituita da una regione di piano limitata da una linea chiusa, oppure da una regione di piano compresa fra due o più linee chiuse che non si intersecano.

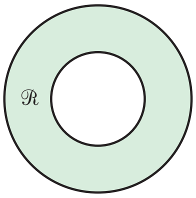
Per brevità diremo **superficie** per indicare una **superficie piana limitata**.

Per indicare una superficie utilizziamo le lettere maiuscole corsive.

La superficie $\mathcal{S}$ (figura *a*) è limitata da una linea chiusa; la superficie $\mathcal{R}$ (figura *b*) è limitata da due linee chiuse.



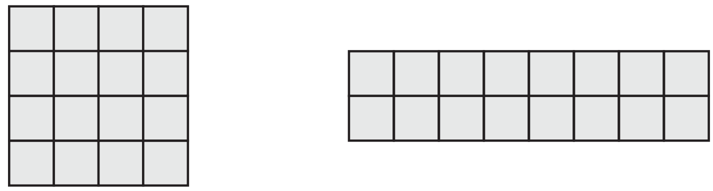
a



b

Abbiamo già introdotto alcuni concetti primitivi (intuitivi, non definibili), quali il punto, la retta e il piano. In questo capitolo introduciamo un nuovo concetto primitivo: l'**estensione di una superficie**.

Questo concetto risulta chiaro se si confrontano due superfici. Per esempio, se per ricoprire due pavimenti diversi occorre lo stesso numero di mattonelle (tutte dello stesso tipo), diciamo che le superfici dei due pavimenti hanno la stessa estensione (figura 1).

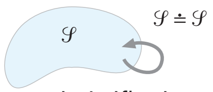


▶ **Figura 1** Per ricoprire i due pavimenti vengono utilizzate 16 mattonelle dello stesso tipo: i pavimenti hanno la stessa estensione.

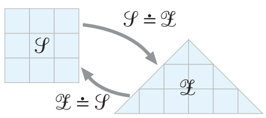
Due superfici che hanno la stessa estensione si dicono **equivalenti**.

Indichiamo l'equivalenza fra superfici con il simbolo $\doteq$.

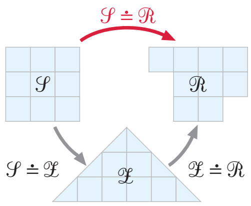
L'equivalenza tra superfici piane gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.



proprietà riflessiva



proprietà simmetrica



proprietà transitiva

- Proprietà **riflessiva**: ogni superficie piana è equivalente a se stessa:

  $\mathcal{S} \doteq \mathcal{S}$.

- Proprietà **simmetrica**: se una superficie $\mathcal{S}$ è equivalente a una superficie $\mathcal{T}$, allora $\mathcal{T}$ è equivalente a $\mathcal{S}$:

  se $\mathcal{S} \doteq \mathcal{T}$, allora $\mathcal{T} \doteq \mathcal{S}$.

- Proprietà **transitiva**: se una superficie $\mathcal{S}$ è equivalente a una superficie $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}$ è equivalente a una superficie $\mathcal{R}$, allora $\mathcal{S}$ è equivalente a $\mathcal{R}$:

  se $\mathcal{S} \doteq \mathcal{T}$ e $\mathcal{T} \doteq \mathcal{R}$, allora $\mathcal{S} \doteq \mathcal{R}$.

Poiché gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, l'equivalenza fra superfici è una **relazione di equivalenza**.
Possiamo dunque ripartire le superfici del piano in classi di equivalenza, ciascuna delle quali è costituita da infinite superfici aventi a due a due la stessa estensione.

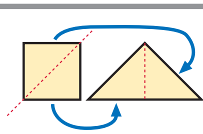
Chiamiamo **area** la caratteristica comune alle superfici che appartengono alla stessa classe.

Ogni classe di equivalenza alla quale appartengono superfici aventi la stessa estensione definisce una e una sola area. In particolare, ogni punto è una superficie, e la classe di equivalenza a cui appartiene è quella che individua l'area nulla.

In sintesi, diciamo che **superfici equivalenti hanno la stessa area**.

POSTULATO

Due superfici congruenti sono sempre equivalenti.



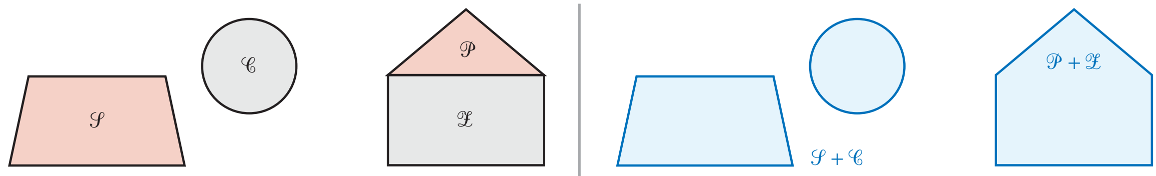
▲ **Figura 2** Il quadrato e il triangolo della figura sono equivalenti ma non congruenti.

Non è detto, invece, che due superfici equivalenti siano congruenti (figura 2).

La somma e la differenza di superfici

È possibile definire la somma di due superfici $\mathcal{S}$ e $\mathcal{L}$ quando queste non hanno punti in comune oppure hanno in comune solo punti appartenenti alle linee che le delimitano.

▼ **Figura 3**



a. Consideriamo due superfici $\mathcal{S}$ e $\mathcal{C}$ che non hanno punti in comune e altre due, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{L}$, che hanno in comune solo parte delle linee che le delimitano.

b. La superficie $\mathcal{S} + \mathcal{C}$ è formata da due parti distinte, mentre $\mathcal{P} + \mathcal{L}$ da un'unica superficie.

La **somma** $\mathcal{S} + \mathcal{L}$ è la superficie $\mathcal{R}$ ottenuta come unione dei punti di $\mathcal{S}$ e di quelli di $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{R} = \mathcal{S} + \mathcal{L}.$$

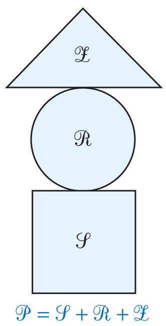
Se $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{L}$ sono superfici e $\mathcal{R} = \mathcal{S} + \mathcal{L}$, allora le superfici $\mathcal{S}$ e $\mathcal{L}$ sono dette **parti** di $\mathcal{R}$.

La somma di due o più superfici gode delle proprietà **commutativa** e **associativa**. Se $\mathcal{S}$, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$ sono tre superfici, allora:

$$\mathcal{S} + \mathcal{R} = \mathcal{R} + \mathcal{S}$$
$$(\mathcal{S} + \mathcal{R}) + \mathcal{L} = \mathcal{S} + (\mathcal{R} + \mathcal{L}).$$

Se la superficie $\mathcal{R}$ è la somma delle superfici $\mathcal{S}$ e $\mathcal{L}$, chiamiamo $\mathcal{S}$ **differenza** di $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$ e la indichiamo con:

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} - \mathcal{L}.$$

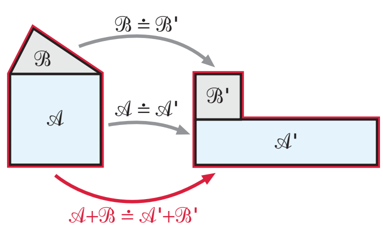


◗ Il concetto di somma può essere esteso a più di due superfici: la superficie $\mathcal{P}$ è la somma delle tre superfici $\mathcal{S}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$.

POSTULATO

Superfici ottenute come somme o differenze di superfici rispettivamente equivalenti sono equivalenti.

Se $\mathcal{A} \doteq \mathcal{A}'$ e $\mathcal{B} \doteq \mathcal{B}'$, allora $\mathcal{A} + \mathcal{B} \doteq \mathcal{A}' + \mathcal{B}'$.

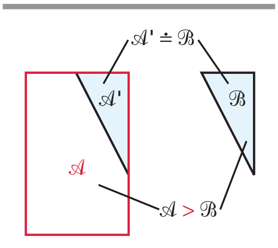


Il confronto di superfici

POSTULATO

Postulato di De Zolt

Una superficie non può essere equivalente a una sua parte.



▲ **Figura 4** Se $\mathcal{A}'$, che è una parte di $\mathcal{A}$, è equivalente a $\mathcal{B}$, diciamo che $\mathcal{A}$ è maggiore di $\mathcal{B}$, oppure che $\mathcal{B}$ è minore di $\mathcal{A}$.

Una superficie $\mathcal{A}$ è **maggiore** di una superficie $\mathcal{B}$ se $\mathcal{B}$ è equivalente a una parte di $\mathcal{A}$. In tal caso si può anche dire che $\mathcal{A}$ è **prevalente** a $\mathcal{B}$. Scriviamo:

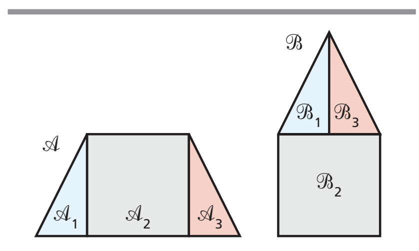
$$\mathcal{A} > \mathcal{B}.$$

Possiamo anche dire che $\mathcal{B}$ è **minore** di $\mathcal{A}$, o che $\mathcal{B}$ è **suvvalente** ad $\mathcal{A}$.

Le figure equivalenti ed equiscomponibili

Nei prossimi paragrafi studieremo l’equivalenza fra i poligoni considerandoli come somme o differenze di poligoni fra loro congruenti.

ESEMPIO Consideriamo i poligoni $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ della figura 5.



► **Figura 5**

Ciascuna delle superfici può essere pensata come la somma di quelle di altri poligoni: $\mathcal{A}$ è la somma di $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, mentre $\mathcal{B}$ è la somma di $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$. Se sappiamo che $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{B}_1$, $\mathcal{A}_2 \cong \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{A}_3 \cong \mathcal{B}_3$, possiamo affermare che i poligoni $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono fra loro equivalenti. Infatti:

- se $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{B}_1$, $\mathcal{A}_2 \cong \mathcal{B}_2$, $\mathcal{A}_3 \cong \mathcal{B}_3$, allora $\mathcal{A}_1 \doteq \mathcal{B}_1$, $\mathcal{A}_2 \doteq \mathcal{B}_2$, $\mathcal{A}_3 \doteq \mathcal{B}_3$, perché superfici congruenti sono equivalenti;
- i poligoni $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ risultano somme di poligoni equivalenti, quindi sono equivalenti in virtù del postulato che abbiamo enunciato.

In generale, diciamo che due poligoni sono **equicomposti** (o **equiscomponibili**) se sono somme di poligoni congruenti.

Il risultato dell’esempio si generalizza mediante il seguente teorema.

TEOREMA

Due poligoni equicomposti sono equivalenti.

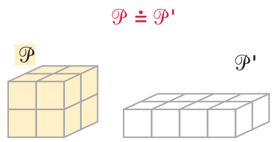
Possiamo fare considerazioni analoghe a quelle relative alla somma di poligoni anche per le differenze tra poligoni: due poligoni sono **equivalenti se sono differenze di poligoni congruenti**.

L'ESTENSIONE E L'EQUIVALENZA DEI SOLIDI

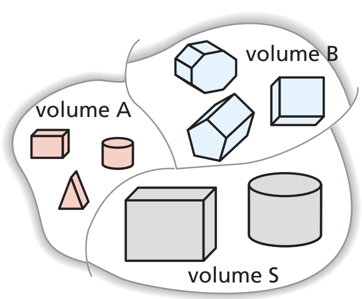
L'ESTENSIONE DEI SOLIDI

Il concetto di estensione spaziale deriva dalle nostre esperienze concrete. Siamo abituati a considerare un oggetto grande o piccolo a seconda che occupi più o meno spazio o, come spesso diciamo, sia più o meno voluminoso. Se consideriamo poi due solidi di forma diversa ma realizzati con lo stesso materiale e dello stesso peso, diciamo che hanno la stessa estensione. Anche la capienza di un recipiente è collegata alla sua estensione nello spazio.

Due solidi che hanno la stessa estensione si dicono **equivalenti**. Indichiamo l'equivalenza con il **simbolo** $\doteq$. L'equivalenza tra solidi gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, quindi è una relazione di equivalenza.



Tale relazione determina una partizione nell'insieme dei solidi. Da ciò nasce il concetto di volume.

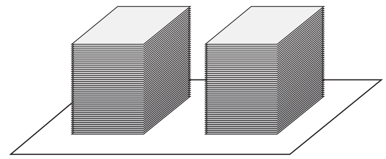


Data la relazione di equivalenza tra solidi, definiamo **volume di un solido** la classe di equivalenza alla quale il solido appartiene.

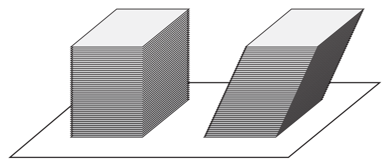
Per la somma e la differenza di solidi valgono considerazioni analoghe a quelle fatte a proposito della somma e della differenza di superfici.

In particolare, due solidi si dicono **equicomposti** (o **equiscomponibili**) se sono scomponibili in solidi rispettivamente congruenti.
Si può dimostrare che due solidi equicomposti sono equivalenti.

IL PRINCIPIO DI CAVALIERI



a



b

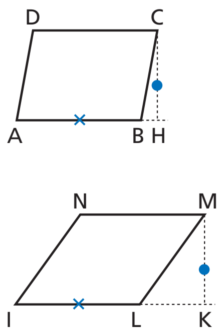
Consideriamo due pile di fogli a forma di parallelepipedo rettangolo (figura *a*), formate dalla sovrapposizione dello stesso numero di fogli: i solidi che li rappresentano sono congruenti e quindi equivalenti.

Possiamo far scorrere i fogli di uno di questi parallelepipedi in modo che la sua forma cambi (figura *b*). L'intuizione ci dice che l'estensione dei due solidi rimane la stessa e quindi essi sono ancora equivalenti.

Potremmo anche ripetere le considerazioni dell'esperienza precedente prendendo, al posto di pile di fogli uguali, pile di fogli che abbiano a due a due la stessa area ma forma diversa.

Passando dal mondo concreto alla geometria, possiamo pensare i fogli sostituiti dalle sezioni ottenute intersecando i solidi con piani tutti paralleli a uno scelto come riferimento. Possiamo così comprendere il seguente principio, che assumiamo come postulato.

Principio di Cavalieri
Due solidi che possono essere disposti in modo che ogni piano parallelo a un altro fissato, scelto come riferimento, li tagli secondo sezioni equivalenti, sono equivalenti.



2. L'equivalenza di due parallelogrammi

TEOREMA

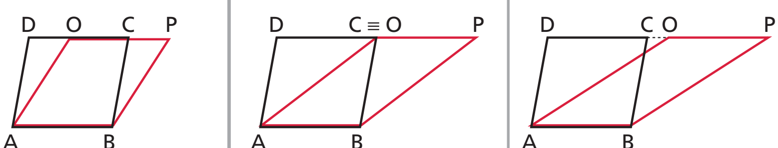
Se due parallelogrammi hanno congruenti le basi e le altezze corrispondenti, allora sono equivalenti.

Ipotesi 1. $ABCD$ è un parallelogramma;
2. $ILMN$ è un parallelogramma;
3. CH è altezza di $ABCD$ relativa ad AB;
4. MK è altezza di $ILMN$ relativa a IL;
5. $AB \cong IL$;
6. $CH \cong MK$.

Tesi $ABCD \doteq ILMN$.

DIMOSTRAZIONE Disegniamo il parallelogramma $ABPO$ congruente a $ILMN$ e avente base AB.
Poiché $ABPO$ ha la stessa altezza di $ABCD$, la retta OP coincide con la retta DC. Si possono presentare i tre casi a, b e c della figura 6.

▶ Figura 6 Costruzione.



a. I segmenti CD e OP hanno una parte in comune.

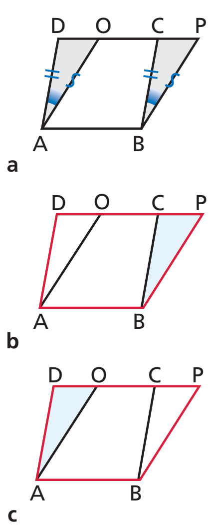
b. I segmenti CD e OP hanno soltanto un estremo in comune.

c. I segmenti CD e OP non hanno punti in comune.

I parallelogrammi $ILMN$ e $ABPO$ sono congruenti, *quindi* sono anche equivalenti. Poiché vale la proprietà transitiva dell'equivalenza fra superfici, invece di dimostrare l'equivalenza fra $ABCD$ e $ILMN$, possiamo dimostrare l'equivalenza fra $ABCD$ e $ABPO$. La dimostrazione è la stessa in ognuno dei tre casi. Facciamo quindi riferimento alla figura del primo caso. I triangoli AOD e BPC hanno (figura a):

- $AD \cong BC$, perché lati opposti di un parallelogramma;
- $AO \cong BP$, per lo stesso motivo;
- $D\hat{A}O \cong C\hat{B}P$, poiché i loro lati sono paralleli e concordi.

Pertanto essi sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli.



Notiamo che il parallelogramma $ABCD$ è la differenza fra il trapezio $ABPD$ e il triangolo BPC (figura b), mentre il parallelogramma $ABPO$ è la differenza fra lo stesso trapezio $ABPD$ e il triangolo AOD (figura c). Poiché sono differenze di poligoni congruenti, i parallelogrammi $ABCD$ e $ABPO$ sono equivalenti.

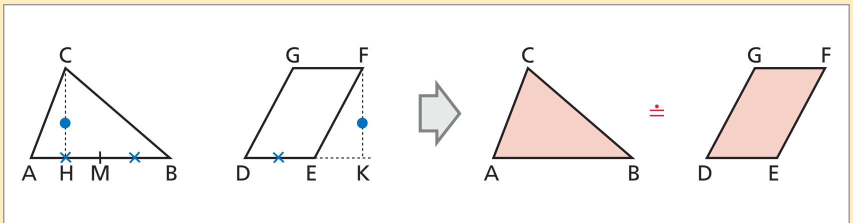
Corollario. Se un parallelogramma e un rettangolo hanno congruenti le basi e le relative altezze, sono equivalenti.

3. I triangoli e l'equivalenza

L'equivalenza fra parallelogramma e triangolo

TEOREMA

Un triangolo è equivalente a un parallelogramma che ha altezza congruente a quella del triangolo e base congruente a metà di quella del triangolo.



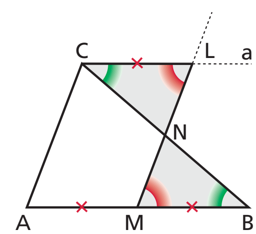
Ipotesi 1. ABC è un triangolo;
2. $DEFG$ è un parallelogramma;
3. CH è altezza di ABC relativa ad AB;
4. FK è altezza di $DEFG$ relativa a DE;
5. $CH \cong FK$;
6. $AB \cong 2DE$.

Tesi $ABC \doteq DEFG$.

DIMOSTRAZIONE Tracciamo la semiretta Ca di origine C e parallela alla base AB e indichiamo con M il punto medio della base AB.

Da M conduciamo la parallela ad AC. Essa incontra BC in N e Ca in L.

Il quadrilatero $AMLC$ è un parallelogramma, perché ha i lati opposti paralleli per costruzione, ed è equivalente al parallelogramma $DEFG$, per il teorema di equivalenza dei parallelogrammi.

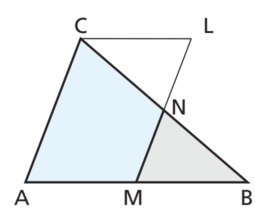


a

I triangoli MBN e CNL hanno (figura *a*):

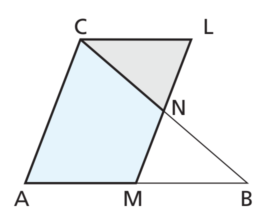
- $MB \cong CL$, perché entrambi congruenti ad AM;
- $M\hat{B}N \cong N\hat{C}L$, perché sono angoli alterni interni formati dalle rette parallele AB e CL, tagliate dalla trasversale BC;
- $N\hat{M}B \cong N\hat{L}C$, perché sono angoli alterni interni formati dalle stesse rette parallele, tagliate dalla trasversale ML.

Pertanto i triangoli MBN e CNL sono congruenti per il secondo criterio.



b

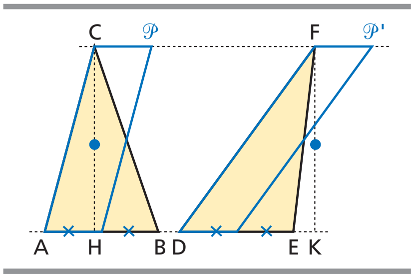
Il triangolo ABC può essere considerato come somma del trapezio $AMNC$ e del triangolo MBN (figura *b*). Il parallelogramma $AMLC$ può essere considerato come somma dello stesso trapezio $AMNC$ e del triangolo CNL (figura *c*). Il triangolo ABC e il parallelogramma $AMLC$, essendo equicomposti, sono equivalenti.



c

Il parallelogramma $AMLC$ è equivalente a $DEFG$ per il criterio di equivalenza dei parallelogrammi, quindi il triangolo ABC è equivalente al parallelogramma $DEFG$, per la proprietà transitiva.

Corollario. Se due triangoli hanno congruenti le basi e le rispettive altezze, sono equivalenti.



▶ Figura 7 I triangoli ABC e DEF hanno $AB \cong DE$ e $CH \cong FK$. Per il teorema precedente, il triangolo ABC è equivalente al parallelogramma $\mathcal{P}$, che ha la base congruente alla metà di AB e altezza CH. Sempre per il teorema precedente, il triangolo DEF è equivalente al parallelogramma $\mathcal{P}'$, che ha la base congruente alla metà di DE e altezza FK. Poiché i parallelogrammi $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ sono equivalenti, anche i triangoli ABC e DEF sono equivalenti.

Vale anche il seguente teorema, di cui non forniamo la dimostrazione.

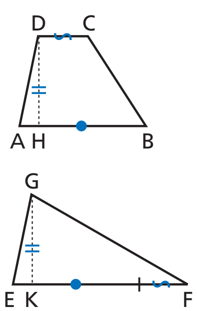
TEOREMA

Un triangolo è equivalente a un parallelogramma che ha base congruente a quella del triangolo e altezza congruente a metà altezza del triangolo.

L'equivalenza fra triangolo e trapezio

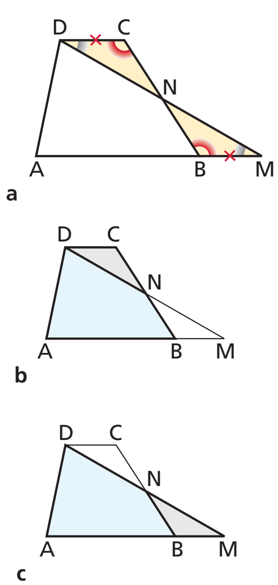
TEOREMA

Un trapezio è equivalente a un triangolo se la sua altezza è congruente a quella del triangolo e la somma delle due basi è congruente alla base del triangolo.



Ipotesi 1. $ABCD$ è un trapezio;
2. EFG è un triangolo;
3. DH è altezza del trapezio;
4. GK è altezza del triangolo;
5. $DH \cong GK$;
6. $AB + CD \cong EF$.

Tesi $ABCD \doteq EFG$.



DIMOSTRAZIONE Prolunghiamo la base AB di un segmento $BM \cong CD$.

Congiungiamo M con D: il segmento MD interseca BC in N.

I triangoli AMD ed EFG sono equivalenti, perché, per costruzione, hanno basi congruenti e altezze congruenti.

Ora consideriamo i triangoli NCD e BMN (figura *a*). Essi hanno:
- $DC \cong BM$, per costruzione;
- $C\hat{D}N \cong N\hat{M}B$, perché sono angoli alterni interni formati dalle rette parallele DC e AM, tagliate dalla trasversale DM;
- $D\hat{C}N \cong N\hat{B}M$, perché sono angoli alterni interni formati dalle stesse rette parallele, tagliate dalla trasversale BC.

Pertanto sono congruenti per il secondo criterio.

Il trapezio $ABCD$ è la somma del quadrilatero $ABND$ e del triangolo NCD (figura *b*). Il triangolo AMD è la somma dello stesso quadrilatero $ABND$ e del triangolo BMN (figura *c*). Il trapezio $ABCD$ e il triangolo AMD, essendo equicomposti, sono equivalenti.

Poiché AMD è equivalente a EFG, il trapezio $ABCD$ è equivalente al triangolo EFG, per la proprietà transitiva dell'equivalenza.

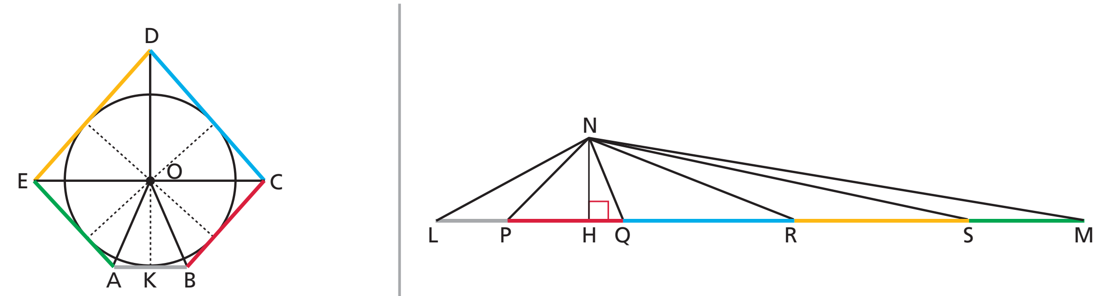
L'equivalenza fra triangolo e poligono circoscritto a una circonferenza

TEOREMA

Un poligono circoscritto a una circonferenza è equivalente a un triangolo che ha base congruente al perimetro del poligono e altezza congruente al raggio della circonferenza.

Il **perimetro** di un poligono è un segmento congruente alla somma di tutti i lati del poligono.

Dimostriamo il teorema per un poligono di cinque lati; la dimostrazione per un poligono circoscritto con un numero qualsiasi di lati è del tutto analoga.



a. Congiungiamo il centro O della circonferenza con i vertici del poligono, che resta così scomposto in cinque triangoli.

b. Riportiamo consecutivamente su una retta i segmenti $LP \cong AB$, $PQ \cong BC$, $QR \cong CD$, $RS \cong DE$, $SM \cong EA$ e congiungiamo gli estremi L e M con un punto N che dista dalla retta di un segmento $NH \cong OK$.

▲ **Figura 8** **Costruzione. Il poligono è scomposto in cinque triangoli, ognuno dei quali ha un vertice coincidente con il centro della circonferenza. Il lato opposto a tale vertice è tangente alla circonferenza, quindi l'altezza relativa è un raggio della circonferenza. Per esempio, l'altezza OK nel triangolo AOB è la distanza di O dalla retta tangente AB, ossia il raggio OK.**

DIMOSTRAZIONE I triangoli ABO e LPN hanno basi congruenti (per costruzione) e altezze congruenti (perché congruenti al raggio), *quindi* sono equivalenti, ossia

$$ABO \doteq LPN.$$

Analogamente:

$$BCO \doteq PQN, \qquad CDO \doteq QRN, \qquad DEO \doteq RSN, \qquad EAO \doteq SMN,$$

ossia ogni triangolo del poligono è equivalente al corrispondente triangolo costruito su una parte del segmento LM.

Il triangolo LMN è equivalente alla somma dei triangoli di cui è composto il poligono $ABCDE$, *quindi* il poligono e il triangolo sono equivalenti.

Poiché un poligono regolare è sempre circoscrivibile a una circonferenza, vale il seguente corollario.

Corollario. Un poligono regolare è equivalente a un triangolo che ha base congruente al perimetro del poligono e altezza congruente all'apotema.

4. La costruzione di poligoni equivalenti

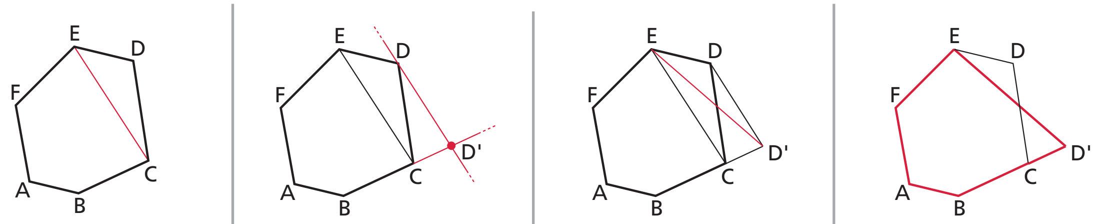
Da un poligono convesso a uno equivalente con un lato in meno

Da ogni poligono convesso, che non sia un triangolo, possiamo ottenere con una costruzione un poligono equivalente con un lato in meno. Per esempio scegliamo un esagono convesso e costruiamo un pentagono a esso equivalente.

▶ Il metodo che utilizziamo è indipendente dal numero dei lati del poligono considerato.

ESEMPIO

▼ **Figura 9** Costruzione.

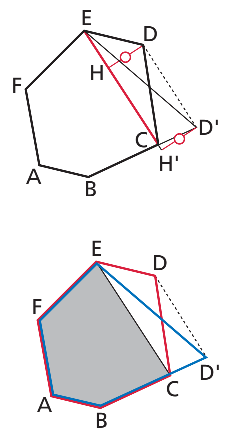


a. È dato l'esagono convesso *ABCDEF*. Tracciamo la diagonale *EC*.

b. Tracciamo la retta per *D* parallela alla diagonale *EC*, che incontra in *D'* il prolungamento di *BC*.

c. Congiungiamo *E* con *D'*.

d. Il pentagono *ABD'EF* è equivalente all'esagono *ABCDEF*.



Dimostriamo che il pentagono ottenuto è equivalente all'esagono dato.

I triangoli ECD e ECD' hanno (figura *a*):

- la stessa base EC;
- altezze congruenti $DH \cong D'H'$, perché distanze fra le rette parallele EC e DD'.

Pertanto sono equivalenti.

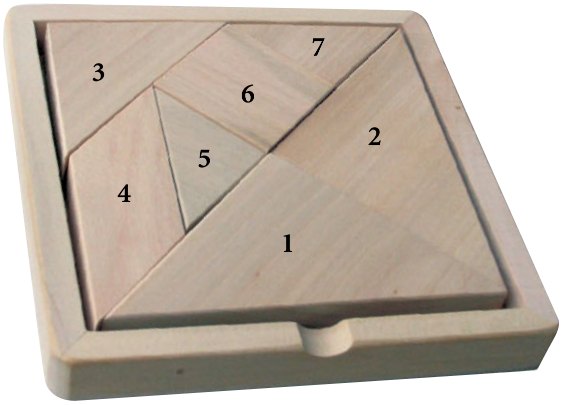
L'esagono $ABCDEF$ (figura *b*) è formato dal pentagono $ABCEF$ e dal triangolo ECD.

Il pentagono $ABD'EF$ è formato dal pentagono $ABCEF$ e dal triangolo ECD'.

L'esagono convesso $ABCDEF$ e il pentagono $ABD'EF$ risultano somme di superfici equivalenti, *quindi* sono equivalenti.

Ripetendo più volte la costruzione precedente su un qualsiasi poligono convesso, si può giungere a un triangolo equivalente al poligono dato. Pertanto un qualsiasi poligono convesso è sempre equivalente a un triangolo.

ESPLORAZIONE: IL TANGRAM



Il Tangram è un antico gioco cinese, divenuto popolare in Europa e in America a partire dal 1800. È una sorta di puzzle le cui tessere sono sette figure geometriche ottenute dalla scomposizione di un quadrato in: due triangoli grandi, due triangoli piccoli, un triangolo medio, un quadrato e un parallelogramma. Componendo in diversi modi questi pezzi base (detti *tan*), con la sola regola di usarli tutti e senza sovrapposizioni, è possibile dare forma a una grande varietà di figure rappresentanti oggetti, animali, persone e quant'altro.

GIOCARE CON LA GEOMETRIA

In quale relazione sono fra loro i singoli pezzi *tan*? Il quadrato, il parallelogramma e il triangolo medio sono figure equivalenti. Tutti e tre possono essere ottenuti come unione dei due triangoli piccoli. I due triangoli grandi, invece, possono essere costruiti unendo i due triangoli piccoli a uno qualunque dei pezzi intermedi: equivalgono a 4 triangoli piccoli. Il concetto di equivalenza ritorna quando si costruiscono le figure tangram: sono figure equiscomponibili. Tante e diverse, ma con la stessa area complessiva, che è quella del quadrato di partenza.

IN CINQUE SLIDE

Cerca esempi di figure tangram e poi divertiti a realizzarle, mettendo alla prova la tua abilità di giocatore!
In Internet puoi trovare anche parecchi problemi geometrici con i tan. Risolvine alcuni e prepara una presentazione multimediale per mostrarli ai tuoi compagni.

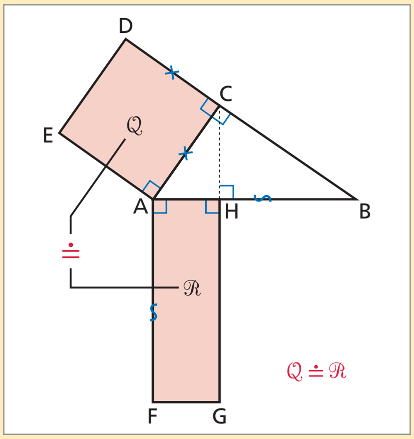
Cerca nel web: tangram, tan, problemi, figure tangram.

5. I teoremi di Euclide e Pitagora

Il primo teorema di Euclide

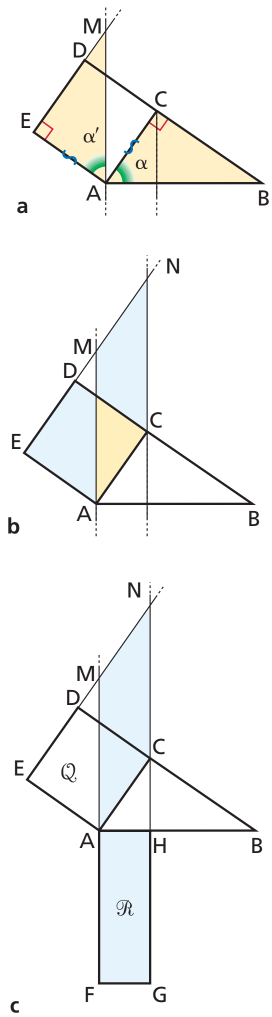
TEOREMA

In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti all'ipotenusa e alla proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa.

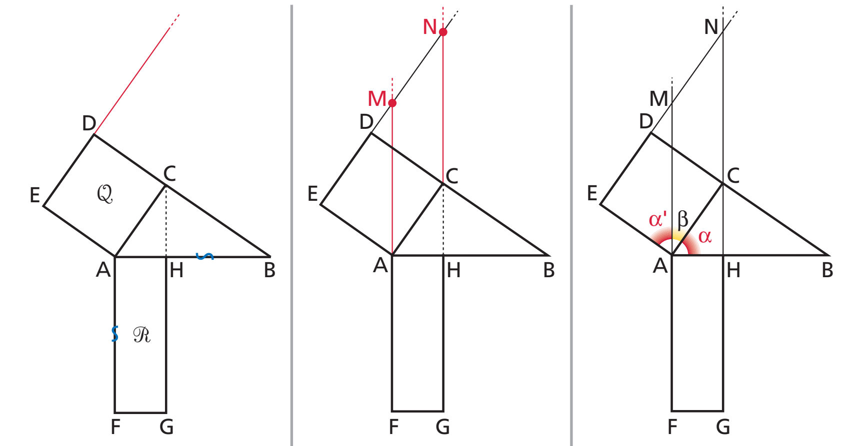


Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

▶ **Figura 10** **Costruzione.**



DIMOSTRAZIONE



a. Dopo aver disegnato il quadrato *ACDE* e il rettangolo *AFGH*, prolunghiamo il lato *ED*.

b. Prolunghiamo i lati *FA* e *GH* del rettangolo *AFGH* fino a incontrare il prolungamento di *ED* rispettivamente nei punti *M* e *N*.

c. Indichiamo con α l'angolo $C\hat{A}B$, con α' l'angolo $E\hat{A}M$ e con β l'angolo $M\hat{A}C$.

I triangoli ABC e AME (figura *a*) hanno:

- $AC \cong AE$, per costruzione ($ACDE$ è un quadrato);
- $\hat{C} \cong \hat{E}$, retti per costruzione;
- $\alpha \cong \alpha'$, perché complementari dello stesso angolo β

$$\left(\alpha + \beta = \frac{1}{2}\hat{P} \text{ e anche } \alpha' + \beta = \frac{1}{2}\hat{P}\right).$$

Pertanto sono congruenti per il secondo criterio. In particolare hanno

$$AB \cong AM.$$

Il quadrilatero $ACNM$ è un parallelogramma, perché ha i lati opposti paralleli per costruzione.

Il parallelogramma $ACNM$ e il quadrato $ACDE$ hanno la stessa base AC e la stessa altezza EA, *quindi* sono equivalenti (figura *b*).

Il parallelogramma $ACNM$ e il rettangolo $AFGH$ hanno le basi congruenti $AM \cong AF$ (perché entrambe congruenti all'ipotenusa) e la stessa altezza AH, *quindi* sono equivalenti (figura *c*).

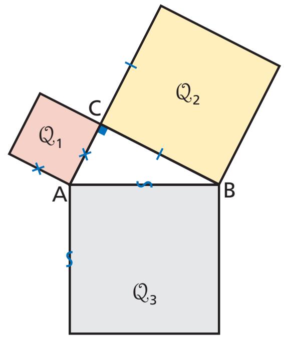
Poiché $ACDE \doteq ACNM$ e $ACNM \doteq AFGH$, per la proprietà transitiva dell'equivalenza, abbiamo anche $ACDE \doteq AFGH$, ossia $\mathcal{Q} \doteq \mathcal{R}$.

In modo del tutto analogo, si può procedere eseguendo la costruzione sull'altro cateto.

Il teorema di Pitagora

TEOREMA

In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.



▲ **Figura 11** $\mathcal{Q}_3 \doteq \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2$.

DIMOSTRAZIONE

Tracciamo l'altezza CH e prolunghiamola in modo da scomporre il quadrato $\mathcal{Q}_3$ nei rettangoli $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ (figura 12):

$$\mathcal{Q}_3 \doteq \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2.$$

L'altezza CH individua sull'ipotenusa i segmenti AH e BH, proiezioni dei cateti. Inoltre AH e BH sono le basi di $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, che hanno i lati congruenti alla proiezione di un cateto e all'ipotenusa. *Quindi*, per il primo teorema di Euclide, abbiamo:

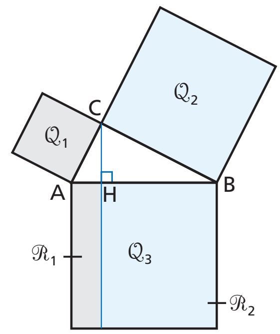
$$\mathcal{Q}_1 \doteq \mathcal{R}_1, \qquad \mathcal{Q}_2 \doteq \mathcal{R}_2.$$

Poiché somme di figure equivalenti sono equivalenti, risulta:

$$\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 \doteq \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2.$$

Essendo $\mathcal{Q}_3 \doteq \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 \doteq \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2$, per la proprietà transitiva dell'equivalenza si ottiene:

$$\mathcal{Q}_3 \doteq \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2.$$



▲ **Figura 12**

Vale anche il teorema inverso, del quale non diamo la dimostrazione.

TEOREMA

Un triangolo nel quale la somma dei quadrati costruiti su due lati è equivalente al quadrato costruito sul terzo lato è rettangolo.

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Più di Pitagora

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Se ABC è un triangolo qualsiasi e se $ABDE$ e $ACFG$ sono parallelogrammi qualsiasi costruiti sui due lati AB e AC, allora è possibile costruire sul lato BC un terzo parallelogramma $BCHI$ equivalente alla somma degli altri due.

(Pappo, *Collezioni matematiche*, IV secolo d.C.)

CARLO: «Più generale del teorema di Pitagora: ABC è un triangolo qualsiasi e non rettangolo».

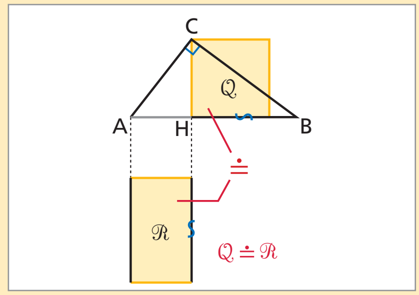
VALERIA: «E poi ci sono tre parallelogrammi e non tre quadrati. Ma come si dimostra?».

▶ Per dimostrare il teorema, prolunga i lati DE e FG dei parallelogrammi $ABDE$ e $ACFG$ in modo che si incontrino in un punto K. Costruisci ora sul lato BC un parallelogramma avente due lati BI e CH paralleli e congruenti ad AK. Prolunga i segmenti BI, CH e AK…

Il secondo teorema di Euclide

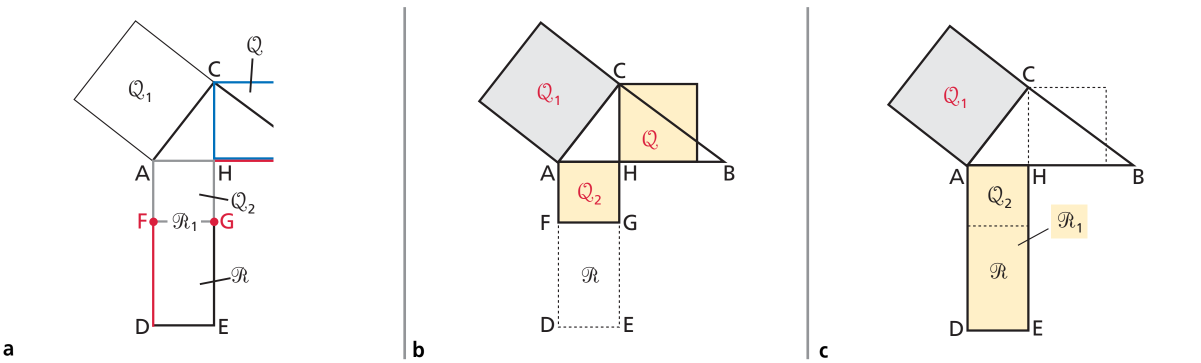
TEOREMA

In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



DIMOSTRAZIONE Disegniamo: il quadrato $\mathcal{Q}_1$ di lato AC, il quadrato $\mathcal{Q}$ di lato CH; il rettangolo $\mathcal{R}_1$ di base AH e altezza $AD \cong AB$, ossia il rettangolo $ADEH$ (figura 13a).

▼ **Figura 13**



Consideriamo su AD il punto F tale che $AF \cong AH$ e su HE il punto G tale che $HG \cong AH$. Chiamiamo $\mathcal{Q}_2$ il quadrato $AFGH$. Poiché $AD \cong AB$ e $AF \cong AH$, il rettangolo $DEGF$ è $\mathcal{R}$.

Il rettangolo $\mathcal{R}_1$ è formato dal quadrato $\mathcal{Q}_2$ e dal rettangolo $\mathcal{R}$. Vale cioè la seguente relazione:

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{Q}_2 + \mathcal{R}.$$

Applicando al triangolo AHC il teorema di Pitagora (figura 13b), otteniamo:

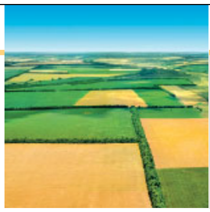
$$\mathcal{Q}_1 \doteq \mathcal{Q} + \mathcal{Q}_2 \;\rightarrow\; \mathcal{Q} \doteq \mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2.$$

Applichiamo al triangolo ABC il primo teorema di Euclide (figura 13c):

$$\mathcal{Q}_1 \doteq \mathcal{R}_1 \;\rightarrow\; \mathcal{Q}_1 \doteq \mathcal{R} + \mathcal{Q}_2 \;\rightarrow\; \mathcal{R} \doteq \mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2.$$

Essendo $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ equivalenti entrambi a $\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2$, sono equivalenti fra loro per la proprietà transitiva:

$$\mathcal{Q} \doteq \mathcal{R}.$$



Annodando funi

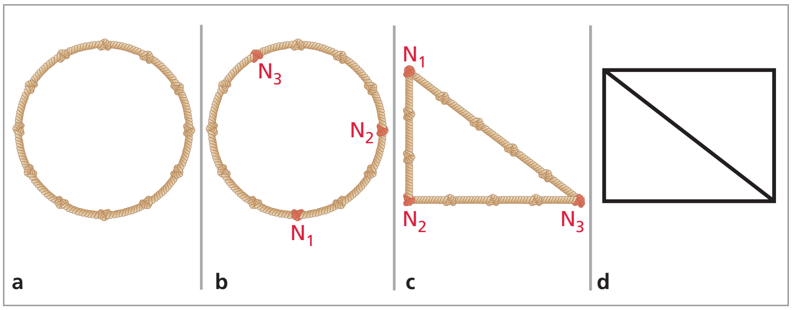
…come si fa a delimitare sul terreno un campo rettangolare?

Il quesito completo a pag. G239

La squadra, che potremmo usare per disegnare un rettangolo sul foglio, non è certo lo strumento adatto per risolvere lo stesso problema sul terreno. Se anche disponessimo di una squadra molto grande con un angolo perfettamente retto, sarebbe insufficiente per tracciare i confini di un campo da coltivare.
Lo strumento adatto è molto più semplice: una lunga corda ad anello.
Dividiamo la corda in 12 tratti di uguale lunghezza, segnalando gli estremi degli intervalli con 12 nodi (figura *a*).
Fissiamo uno di questi nodi e individuiamo il terzo e il settimo nodo a partire da quello scelto: in altre parole, individuiamo sulla corda tre punti, a distanze 3, 4 e 5 (figura *b*).
Quindi tiriamo la corda a forma di triangolo, coi vertici nei punti segnati: il triangolo che otteniamo è un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è compreso fra i lati più corti, di lunghezza 3 e 4 (figura *c*).
Ce lo assicura il teorema di Pitagora, o meglio il suo inverso: se i lati di un triangolo hanno lunghezza 3, 4 e 5 (e quindi tali che il quadrato del lato più lungo è uguale alla somma dei quadrati degli altri due), allora il triangolo ha un angolo retto.
A questo punto, per ottenere un campo rettangolare, basterà ripetere lo stesso procedimento, ottenere un secondo triangolo e far coincidere le due ipotenuse (figura *d*).
Non sappiamo se questo sia stato il procedimento effettivamente seguito dagli agrimensori dell'antichità. Quello che è certo è che si erano accorti, più di mille anni prima di Pitagora, dell'esistenza delle terne pitagoriche: quelle terne di numeri interi positivi (a; b; c) tali che

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ne troviamo testimonianza, per esempio, nella tavoletta babilonese catalogata col nome di *Plimpton 322*, risalente a un periodo tra il 1900 e il 1600 a.C. Su di essa è incisa una tabella di quindici righe di numeri in forma sessagesimale che, «tradotti» in forma decimale, sono proprio terne pitagoriche.

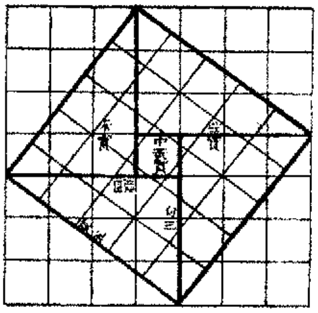


Le prime righe sono:

120	119	169
3456	3367	4825
4800	4601	6649
13500	12709	18541

IL TEOREMA DI PITAGORA NELLA CULTURA CINESE

Pare che il teorema di Pitagora fosse già noto anche in Cina, almeno mille anni prima della nascita del matematico greco. Sembra provarlo una figura che si trova nel *Chou Pei Suan Ching* (*Il libro classico dello gnomone e delle orbite circolari del cielo*), uno dei più antichi testi cinesi di matematica, scritto al tempo della dinastia Shang (1500-1000 a.C.).
La figura rappresenta quattro triangoli rettangoli aventi i lati di lunghezza 3, 4 e 5, e un quadrato grande di lato 7. Essa consente di ricostruire una dimostrazione del teorema *kou ku*, nome cinese del teorema di Pitagora.



LA TEORIA IN SINTESI
L'equivalenza delle superfici piane

1. L'estensione e l'equivalenza

Il concetto di **estensione** di una **superficie** è primitivo. Due superfici si dicono **equivalenti** quando hanno la stessa estensione.

L'equivalenza fra superfici gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva ed è quindi una relazione di equivalenza.

La caratteristica comune alle superfici che appartengono alla stessa classe di equivalenza è detta **area** della superficie.

Due superfici congruenti sono sempre equivalenti.

Le superfici ottenute come somme (o differenze) di superfici rispettivamente equivalenti sono equivalenti.

ESEMPIO $\mathcal{S} \doteq \mathcal{S}'$, $\mathcal{Z} \doteq \mathcal{Z}' \rightarrow \mathcal{S} + \mathcal{Z} \doteq \mathcal{S}' + \mathcal{Z}'$.

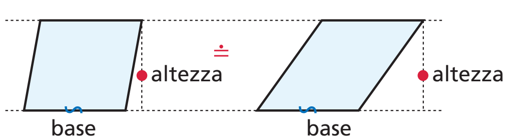
Due solidi aventi la stessa estensione sono **equivalenti**. Anche l'equivalenza fra solidi è una relazione di equivalenza. La caratteristica comune ai solidi che appartengono alla stessa classe di equivalenza è il **volume**.

Principio di Cavalieri: due solidi sono equivalenti se possono essere disposti in modo che ogni piano parallelo a un altro fissato, scelto come riferimento, li tagli secondo sezioni equivalenti.
Solidi **equicomposti** sono equivalenti.

2. L'equivalenza di due parallelogrammi

Se **due parallelogrammi** hanno congruenti le basi e le altezze, relative a tali basi, allora sono equivalenti.

L'equivalenza di due parallelogrammi

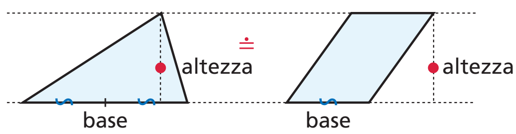


Se un parallelogramma e un rettangolo hanno congruenti le basi e le relative altezze, sono equivalenti.

3. I triangoli e l'equivalenza

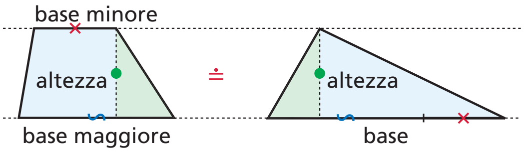
Un **triangolo** è equivalente a un **parallelogramma** che ha altezza congruente a quella del triangolo e base congruente a metà base del triangolo.

L'equivalenza fra parallelogramma e triangolo



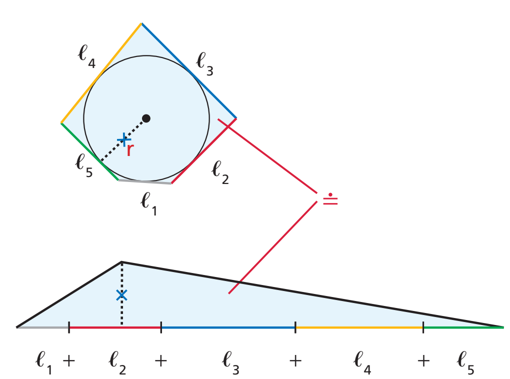
Un **trapezio** è equivalente a un **triangolo** che ha altezza congruente all'altezza del trapezio e base congruente alla somma delle basi del trapezio.

L'equivalenza fra triangolo e trapezio



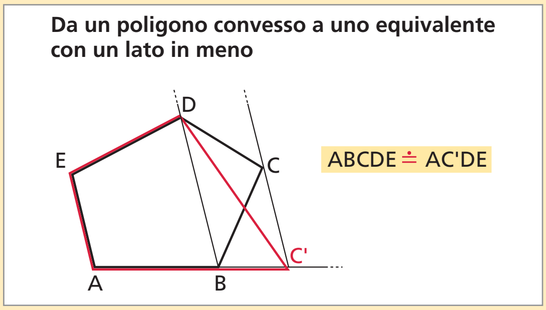
Un **poligono circoscritto a una circonferenza** è equivalente a un **triangolo** che ha base congruente al perimetro del poligono e altezza congruente al raggio della circonferenza.

L'equivalenza fra triangolo e poligono circoscritto a una circonferenza



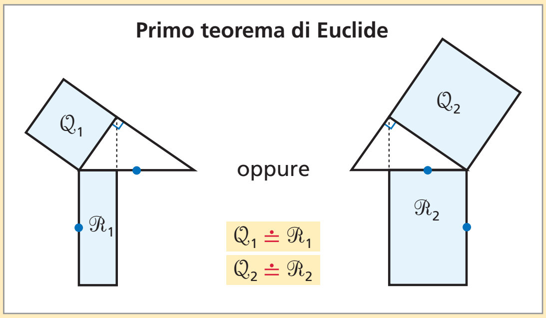
4. La costruzione di poligoni equivalenti

Da ogni **poligono convesso**, che non sia un triangolo, possiamo ottenere un **poligono equivalente con un lato in meno** mediante un'opportuna costruzione.

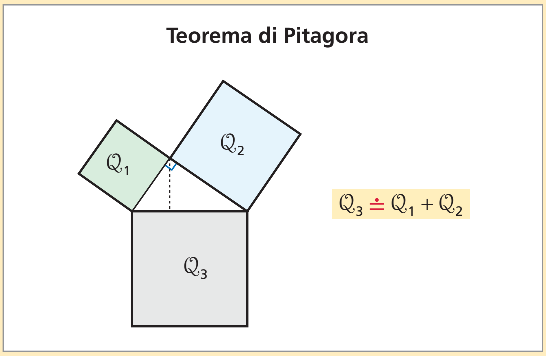


5. I teoremi di Euclide e Pitagora

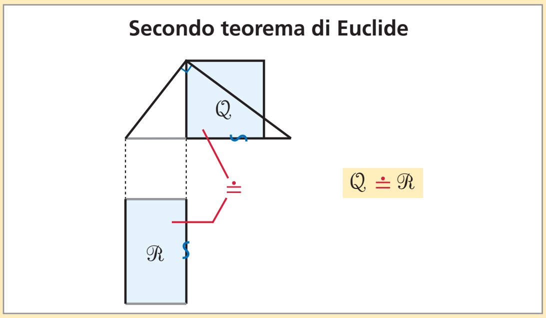
Il primo teorema di Euclide
In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti all'ipotenusa e alla proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa.



Il teorema di Pitagora
In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.



Il secondo teorema di Euclide
In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



1. L'estensione e l'equivalenza

Teoria a pag. G239

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 VERO O FALSO?

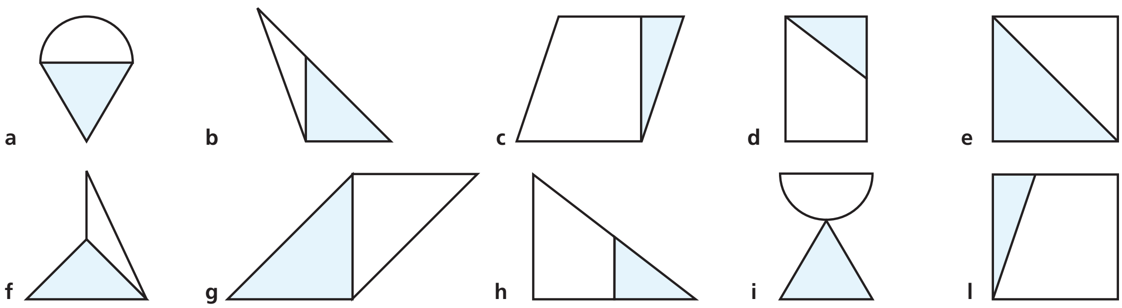
a) La striscia delimitata da due rette parallele non è una superficie piana limitata. V F
b) L'area di una superficie è un numero reale. V F
c) Ogni punto del piano è una superficie di area nulla. V F
d) L'estensione di una superficie coincide con la sua area. V F
e) Non si può fare la somma di due superfici che hanno intersezione non vuota. V F

2 VERO O FALSO?

a) Due superfici con la stessa area sono equiscomponibili. V F
b) Due superfici congruenti sono equivalenti. V F
c) Due superfici equiscomponibili sono equivalenti. V F
d) Due superfici congruenti sono equiscomponibili. V F
e) Due superfici equivalenti sono congruenti. V F

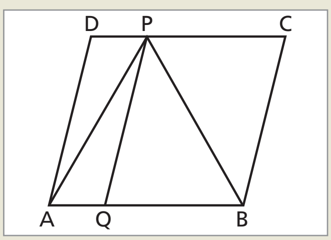
ESERCIZI

3 Individua le coppie di figure equivalenti.



ESERCIZIO GUIDA

4 Dimostriamo la seguente equivalenza fra superfici, usando le ipotesi indicate.



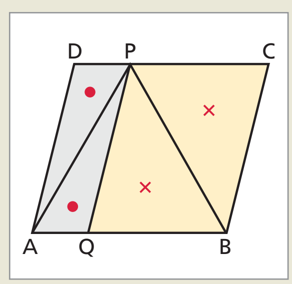
Ipotesi 1. $ABCD$ è un parallelogramma;
2. $QP \parallel AD$.

Tesi $ABCD \doteq 2ABP$.

Dimostrazione

Per l'ipotesi 2 risulta $QP \parallel AD$, per l'ipotesi 1 risulta $AD \parallel BC$. Per la proprietà transitiva del parallelismo è anche vero che $QP \parallel BC$.
Quindi i quadrilateri $AQPD$ e $QBCP$, avendo i lati opposti paralleli, sono parallelogrammi.

Nel parallelogramma $AQPD$ la diagonale AP individua due triangoli congruenti AQP e APD. Allo stesso modo nel parallelogramma $QBCP$ la diagonale PB individua i triangoli congruenti QBP e PBC.



Poiché $ABP \doteq AQP + QBP$, tenendo conto delle congruenze precedenti, abbiamo:

$$ABP \doteq APD + PBC.$$

Il parallelogramma risulta scomposto nei triangoli APD, ABP, BCP:

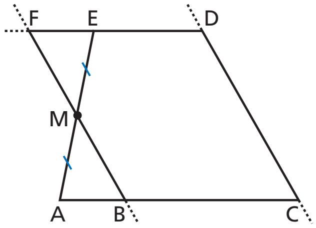
$$ABCD \doteq ABP + APD + PBC.$$

Ricordando che $ABP \doteq APD + PBC$, concludiamo che:

$$ABCD \doteq ABP + ABP, \text{ ossia } ABCD \doteq 2ABP.$$

Dimostra le seguenti equivalenze fra superfici usando le ipotesi indicate.

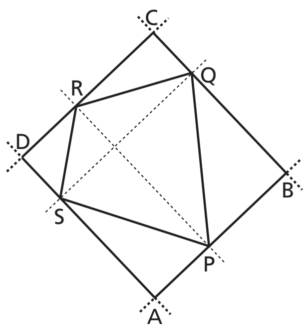
5



Ipotesi 1. $AM \cong ME$;
2. $ED \parallel AC$.

Tesi $ACDE \doteq BCDF$.

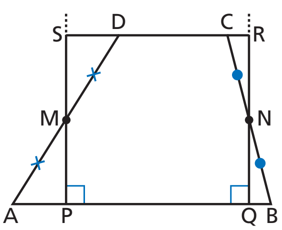
6



Ipotesi 1. $DC \parallel SQ \parallel AB$;
2. $DA \parallel RP \parallel CB$.

Tesi $ABCD \doteq 2PQRS$.

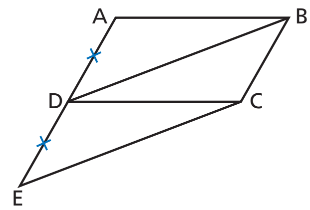
7



Ipotesi 1. $DC \parallel AB$;
2. $SP \perp AB$;
3. $RQ \perp AB$;
4. $AM \cong MD$, $CN \cong NB$.

Tesi $ABCD \doteq PQRS$.

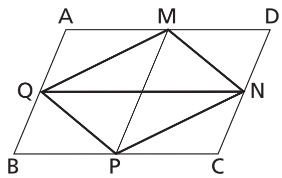
8



Ipotesi 1. $AE \parallel BC$;
2. $AB \parallel DC$;
3. $AD \cong DE$.

Tesi $ABCD \doteq 2CDE$.

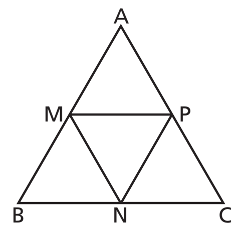
9



Ipotesi 1. $ABCD$ è un parallelogramma;
2. Q, P, N, M sono i punti medi dei suoi lati.

Tesi $QPN \doteq QNM$.

10



Ipotesi 1. ABC è un triangolo equilatero;
2. M, N, P sono i punti medi dei suoi lati.

Tesi $ABC \doteq 4MNP$.

11 Sia AB il diametro di una circonferenza di centro O e sia T un qualunque punto della circonferenza distinto da A e B. Da T conduci la tangente t alla circonferenza e indica con C e D i punti di intersezione della retta t con le tangenti alla circonferenza condotte rispettivamente da B e da A. Dimostra che $ABCD \doteq 2DOC$.

12 Indica con P, Q, R, S i punti medi di un parallelogramma $ABCD$. Dimostra che $ABCD$ è equivalente al doppio del parallelogramma $PQRS$. (Suggerimento. Traccia i segmenti PR e QS.)

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

13 Disegna un rettangolo e congiungi i punti medi dei suoi lati. Dimostra che si ottiene un rombo equivalente alla metà del rettangolo. (Suggerimento. Utilizza l'esercizio precedente.)

14 Disegna un parallelogramma $ABCD$ e sia T un punto qualunque a esso interno. Congiungi i vertici del parallelogramma con T. Dimostra che la somma dei triangoli ATD e BTC è equivalente alla somma dei triangoli ATB e CTD. (Suggerimento. Traccia da T le parallele ai lati del parallelogramma.)

15 Sono dati due segmenti a e b tali che $a > b$. Dimostra che la differenza dei due quadrati costruiti su a e su b è equivalente al rettangolo che ha lati congruenti ad $a - b$ e ad $a + b$.

16 Dimostra che l'estensione di un triangolo equilatero circoscritto a una circonferenza è il quadruplo dell'estensione del triangolo equilatero in essa inscritto.

17 Disegna un triangolo isoscele ABC. Prolunga la base AB di un segmento $BE \cong 2AB$ e il lato AC di un segmento $CF \cong 2AC$. Congiungi E con F. Dimostra che $AEF \doteq 9ABC$.

18 In un triangolo ABC considera i punti medi M e N rispettivamente dei lati AB e AC. La retta MN interseca in P la parallela ad AB passante per C. Dimostra che il triangolo ABC è equivalente al parallelogramma $MBCP$.

2. L'equivalenza di due parallelogrammi

Teoria a pag. G244

RIFLETTI SULLA TEORIA

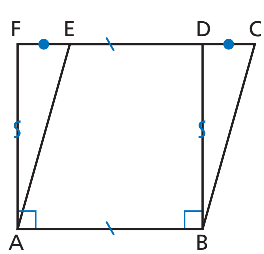
19 **VERO O FALSO?**

a) Due parallelogrammi equivalenti a un rettangolo sono fra loro equivalenti. V F
b) La somma di due quadrati congruenti è equivalente a un parallelogramma avente la base congruente al lato del quadrato e l'altezza congruente al doppio del lato del quadrato. V F
c) Due quadrati sono sempre equivalenti. V F
d) Un rettangolo con la base congruente al lato di un rombo, e l'altezza congruente a un'altezza del rombo, è equivalente al rombo stesso. V F

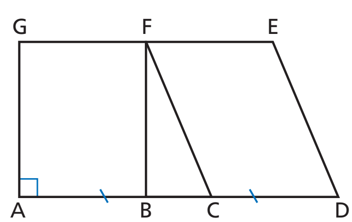
ESERCIZI

Nelle seguenti figure indica quali sono i parallelogrammi che, avendo basi e altezze rispettivamente congruenti, sono equivalenti. Specifica opportunamente la congruenza tra le basi e quella tra le altezze.

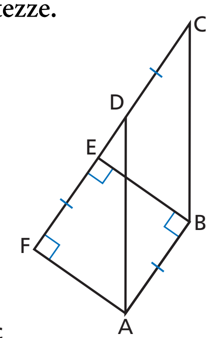
20



a



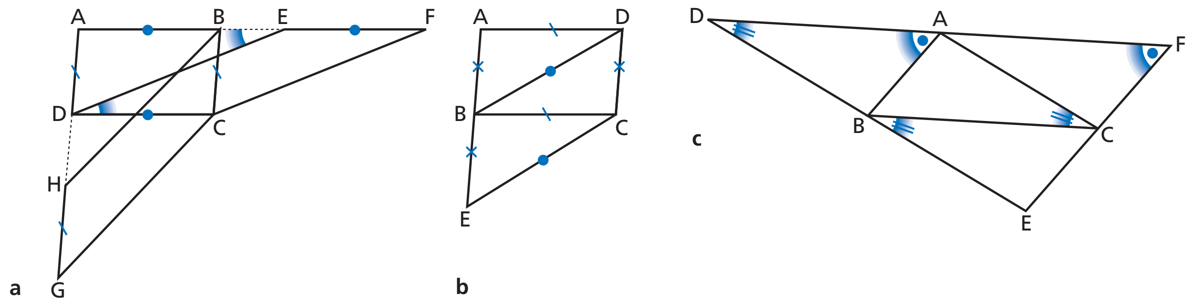
b



c

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

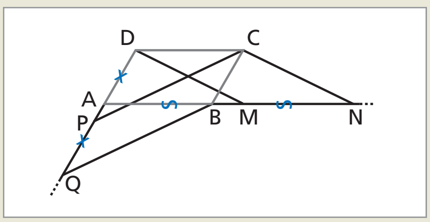
21



DIMOSTRAZIONE GUIDATA

22 In un parallelogramma *ABCD*, sul prolungamento del lato *AD* scegli un segmento *PQ* congruente ad *AD* e sul prolungamento del lato *AB* segna un segmento *MN* congruente ad *AB*. Dimostra che i quadrilateri convessi *BCPQ* e *MNCD* sono equivalenti.

▶ *Caso particolare*: se il quadrilatero *ABCD* fosse un quadrato, *BCPQ* e *MNCD* sarebbero anche congruenti?



Ipotesi 1. *ABCD* è un parallelogramma;
2. $PQ \cong$ ……;
3. $MN \cong$ …… .

Tesi *BCPQ* …… *MNCD*.

Dimostrazione

- *Dimostra che il parallelogramma BCPQ è equivalente ad ABCD.*
  Il quadrilatero *BCPQ* è un parallelogramma perché i lati opposti …… e …… sono congruenti e paralleli.
  I parallelogrammi *ABCD* e *BCPQ* hanno la stessa base ……… .
  L'altezza dei due parallelogrammi è ……….. perché è la distanza fra le rette parallele *AD* e ……….. .
  Quindi i due parallelogrammi sono …………… .
- *Dimostra in modo analogo che ABCD è equivalente a MNCD.*
  Il quadrilatero *MNCD* è un parallelogramma perché i lati opposti …… e …… sono congruenti e paralleli.
  I parallelogrammi *ABCD* e *MNCD* hanno la stessa base ……… .
  L'altezza dei due parallelogrammi è ……….. perché è la distanza fra le rette parallele ……… e ……… .
  Quindi i due parallelogrammi sono ……………… .
- *Dimostra la tesi.*
  I parallelogrammi *MNCD* e *BCPQ* sono equivalenti per la proprietà ……………… dell'equivalenza.

▶ *Caso particolare*: in generale no, ma se *AP* e *BM* sono ……….. *allora* ……… .

23 Nel parallelogramma *ABCD*, sul prolungamento del lato *AD*, scegli un segmento *PQ* congruente ad *AD*. Dimostra che il quadrilatero convesso *BCQP* è equivalente ad *ABCD*.

▶ *Caso particolare*: se *ABCD* è un rettangolo, lo è anche *BCQP*?

24 Da ciascun vertice di un triangolo *ABC* traccia la parallela al lato opposto. Le parallele condotte da *A* e *B* si intersecano in A', quelle da *B* e *C* in B', e quelle da *C* e *A* in C'. Dimostra che i quadrilateri convessi $AA'BC$, $ABCC'$ e $ABB'C$ sono equivalenti.

▶ *Caso particolare*: se il triangolo *ABC* è equilatero, come sono i quadrilateri $AA'BC$ e $ABCC'$?

25 Disegna due parallelogrammi *ABCD* e *DCEF* situati da parti opposte rispetto al lato in comune *DC*. Congiungi *A* con *F* e *B* con *E*. Dimostra che *ABEF* è equivalente alla somma dei due parallelogrammi iniziali.

26 Disegna un rettangolo *ABCD* e prolunga la base *AB* di un segmento *BE* minore di *AB*. Traccia la diagonale *BD* e manda, per *E*, la parallela a *DB*, che incontra il prolungamento di *AD* nel punto *F*. Costruisci sul segmento *BE* il rettangolo *BENC* e sul segmento *DC* il rettangolo *DCMF*. Dimostra che i due rettangoli costruiti *BENC* e *DCMF* sono equivalenti.

27 Disegna un parallelogramma *ABCD* e conduci da *C* la parallela alla diagonale *BD*. Chiama *E* il punto di intersezione di tale parallela con il prolungamento del lato *AB*. Dimostra che i parallelogrammi *ABCD* e *BDCE* sono equivalenti.

28 In un parallelogramma *ABCD* scegli un punto *P* sulla diagonale *AC*. Disegna il parallelogramma *CDEP*, che ha come lati consecutivi *PC* e *CD*, e il parallelogramma *ABFP*, che ha come lati consecutivi *AB* e *AP*.
Dimostra che *ABCD* è equivalente alla somma di *ABFP* e *CDEP*. (Suggerimento. Considera le coppie di parallelogrammi a due a due equivalenti.)

29 Dimostra per assurdo che se due parallelogrammi sono equivalenti e hanno le basi congruenti, allora anche le rispettive altezze sono congruenti.

3. I triangoli e l'equivalenza

Teoria a pag. G245

RIFLETTI SULLA TEORIA

30 TEST Un triangolo e un parallelogramma sono equivalenti:

A mai, poiché il triangolo ha tre lati e il parallelogramma quattro.
B se hanno le basi e le altezze congruenti.
C se la base del triangolo è doppia di quella del parallelogramma e le altezze sono congruenti.
D se la base del triangolo è metà di quella del parallelogramma e le altezze sono congruenti.
E se il triangolo ha la base e l'altezza doppie rispetto a quelle del parallelogramma.

31 VERO O FALSO?

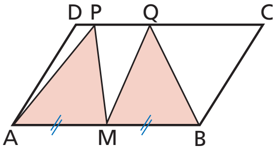
a) Un rombo non può mai essere equivalente a un triangolo. V F
b) Se un triangolo e un parallelogramma hanno un lato congruente, non sono mai equivalenti. V F
c) Ogni mediana di un triangolo lo divide in due triangoli equivalenti. V F
d) Due triangoli che hanno congruenti la base e l'altezza sono equivalenti e congruenti. V F

32 Considera tutti i triangoli equivalenti aventi la stessa base. Qual è il luogo dei vertici?

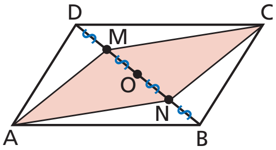
ESERCIZI

L'equivalenza fra parallelogramma e triangolo

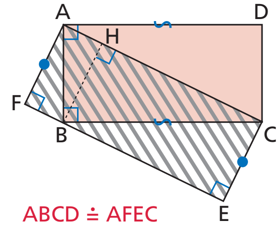
Spiega le equivalenze scritte sotto ogni figura, applicando i teoremi sull'equivalenza che conosci.

33


$AMP + MBQ \doteq \frac{1}{2} ABCD$

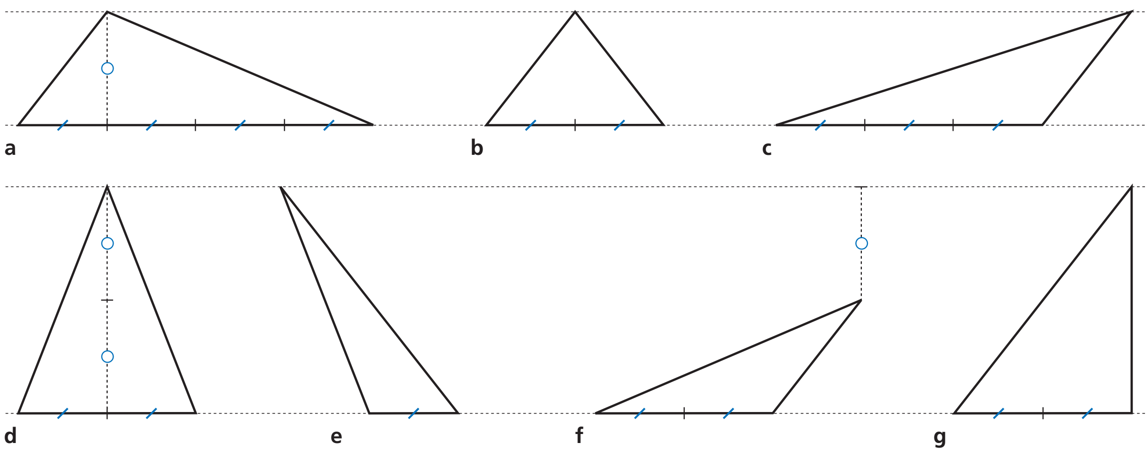
34


$ANCM \doteq \frac{1}{2} ABCD$

35


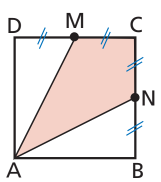
$ABCD \doteq AFEC$

36 Applicando il corollario sull'equivalenza di due triangoli, stabilisci quali fra i seguenti sono tra loro equivalenti.



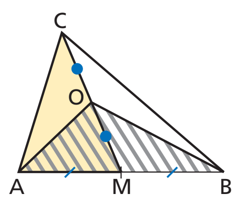
Spiega le equivalenze scritte sotto ogni figura, applicando i teoremi e i corollari sulle equivalenze che conosci.

37



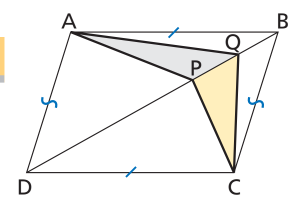
$ANCM \doteq \frac{1}{2} ABCD$

38



$ABO \doteq AMC$

39

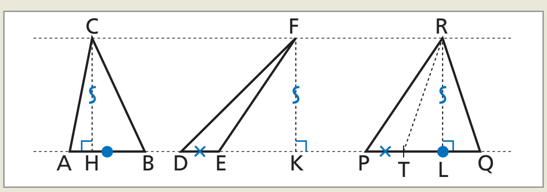


$APQ \doteq CPQ$

Dimostrazioni

ESERCIZIO GUIDA

40 Consideriamo due triangoli che hanno altezze congruenti. Dimostriamo che un triangolo avente altezza congruente a quella dei triangoli dati e base congruente alla somma delle loro basi è equivalente alla somma dei due triangoli.



Ipotesi 1. CH, FK e RL sono altezze congruenti;
2. $PQ \cong AB + DE$.

Tesi $PQR \doteq ABC + DEF$.

Dimostrazione

Consideriamo su PQ il punto T tale che $PT \cong DE$ e $TQ \cong AB$. Congiungiamo T con R.

$TQR \doteq ABC$ perché sono triangoli che hanno basi e altezze congruenti.

Per lo stesso motivo $PTR \doteq DEF$.

Sommando membro a membro: $PTR + TQR \doteq ABC + DEF$.

Inoltre $PQR \doteq PTR + TQR$ e, confrontando con la relazione precedente, concludiamo che:

$PQR \doteq ABC + DEF$.

41 Nel quadrato *ABCD* indica con *E* e *F* i punti medi dei lati opposti *AD* e *BC*, con *M* e *N* i punti medi dei lati *AB* e *DC*. Dimostra che i segmenti *EF* e *MN*, che si intersecano nel punto *O*, dividono il quadrato in quattro quadrati congruenti. Preso sul lato *DC* un qualsiasi punto *L*, dimostra che il triangolo *ELF* è equivalente a ognuno dei quattro quadrati.

▶ *Caso particolare*: se scegliessi $L \equiv N$, a quale frazione del quadrato *ABCD* sarebbe equivalente il triangolo *EOL*?

42 Dimostra che un triangolo è equivalente a un rettangolo che ha base congruente a quella del triangolo e altezza congruente a metà altezza del triangolo.

43 Un trapezio *ABCD* di basi *AB* e *CD* ha le diagonali *AC* e *BD* che si intersecano nel punto *E*. Dimostra che i triangoli *AED* e *BCE* sono equivalenti.

44 Disegna un parallelogramma *ABCD* e indica con *O* un qualunque punto della diagonale *BD*. Dimostra che il triangolo *ACD* è equivalente alla somma dei triangoli *ABO* e *ADO*.

▶ *Caso particolare*: se $O \equiv D$, è ancora valido il teorema?

45 Disegna un triangolo scaleno *ABC* e traccia la mediana *CM*. Indica con *P* il punto medio di *CM*. Congiungi *A* e *B* con *P*. Dimostra che i quattro triangoli *AMP*, *BMP*, *BCP* e *CAP* sono tra loro equivalenti.

46 Nel parallelogramma *ABCD* prendi su *AC* due punti distinti *E* e *F* e dimostra che i triangoli *EBF* ed *EDF* sono equivalenti.

▶ *Caso particolare*: se i punti *E* e *F* sono equidistanti dal punto medio di *AC*, di che natura è il quadrilatero *EBFD*? I triangoli *EBF* ed *EDF* sono congruenti?

47 Dimostra che un parallelogramma viene diviso dalle sue diagonali in quattro triangoli equivalenti.

48 Disegna un parallelogramma *ABCD* e sia *E* un punto qualsiasi del lato *CD*. Dimostra che la somma dei due triangoli *AED* e *BEC* è equivalente a metà del parallelogramma *ABCD*.

49 Disegna un parallelogramma *ABCD* e indica con *M* e *N* i punti medi rispettivamente dei lati *AB* e *AD*. Dimostra che il triangolo *AMN* è equivalente a $\frac{1}{8}$ del parallelogramma stesso. (Suggerimento. Traccia da *N* la parallela a un lato.)

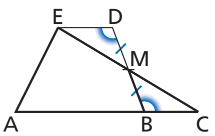
50 Nel triangolo rettangolo *ABC* costruisci il quadrato *ACPQ* sul cateto *AC* e il quadrato *ABEF* sull'ipotenusa *AB*. Dimostra che il triangolo *ACF* è equivalente alla metà del quadrato *ACPQ*. (Suggerimento. Traccia l'altezza *FH* del triangolo *ACF* e dimostra che i triangoli *ABC* e *AFH* sono congruenti.)

51 Disegna un triangolo rettangolo *ABC* con ipotenusa *AB*. Sul cateto *CB*, dalla parte opposta ad *A*, costruisci un rettangolo *CBEF*. Congiungi *A* con *E*. Dimostra che il triangolo *ABE* è equivalente alla metà del rettangolo *CBEF*.

52 Disegna un triangolo *ABC* e indica con *M* e *N* i punti medi rispettivamente dei lati *AB* e *BC*. Dimostra che i triangoli *AMC* e *ANC* sono equivalenti.

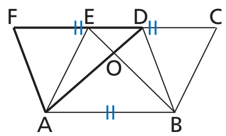
L'equivalenza fra triangolo e trapezio

53 **COMPLETA** le equivalenze scritte sotto ogni figura.



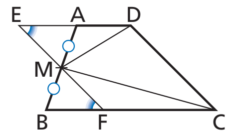
ACE ≐ ......

a



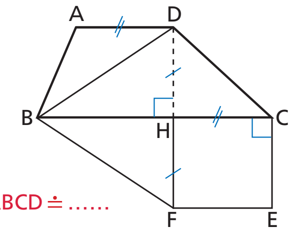
ADF ≐ ...... ≐ ......

b



ABCD ≐ ......

c



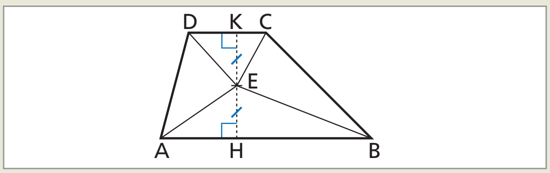
ABCD ≐ ......

d

Dimostrazioni

ESERCIZIO GUIDA

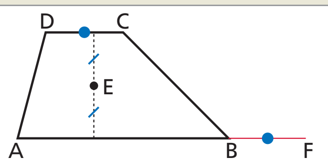
54 Disegniamo un trapezio *ABCD*. Scegliamo internamente a esso un punto *E* equidistante dalle due basi. Dimostriamo che la somma dei triangoli *AEB* e *DEC* è equivalente alla somma dei triangoli *AED* e *BEC*.



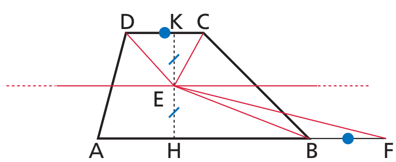
Ipotesi 1. *ABCD* è un trapezio; 3. $EK \perp DC$;
2. $HE \cong EK$; 4. $EH \perp AB$.

Tesi $AEB + DEC \doteq AED + BEC$.

Costruzione



a. Prolunghiamo la base *AB* di un segmento $BF \cong DC$.

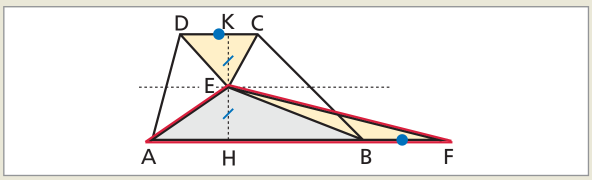


b. Tracciamo per *E* la parallela alle basi e congiungiamo *E* con i punti *B*, *C*, *D* e *F*.

Dimostrazione

I triangoli *DEC* e *BEF* hanno:

- base congruente, $DC \cong BF$ per costruzione;
- altezza congruente, $EK \cong EH$, metà dell'altezza del trapezio, *quindi* sono equivalenti.



Il triangolo *AFE* è costituito dai due triangoli *ABE* e *BEF*; poiché $BEF \doteq DEC$ per quanto appena dimostrato, possiamo scrivere:

$AFE \doteq ABE + DEC$.

Inoltre il triangolo *AFE*, avendo la base congruente alla somma delle basi del trapezio e altezza congruente a metà di quella del trapezio, è equivalente a metà trapezio.

Se $AEB + DEC \doteq \frac{1}{2} ABCD$, allora

$$AED + BEC \doteq \frac{1}{2} ABCD.$$

Per la proprietà transitiva possiamo scrivere:

$AEB + DEC \doteq AED + BEC$.

55 Nel trapezio *ABCD*, *M* e *N* sono i punti medi dei lati obliqui *AB* e *CD*. Detto *O* il punto medio di *MN*, dimostra che un qualunque segmento avente gli estremi sulle due basi e passante per *O* divide il trapezio in due trapezi equivalenti.

56 Disegna un parallelogramma *ABCD* e prolunga il lato *BC* dalla parte di *C* di un segmento *CE* congruente a *BC*. Dimostra che il trapezio *ABED* è triplo del triangolo *CED*.

57 Disegna un trapezio $ABCD$ e indica con M e N i punti medi delle basi AB e CD. Dimostra che i trapezi $AMND$ e $MBCN$ sono equivalenti.

58 Nel trapezio $ABCD$ indica con M e N i punti medi dei lati obliqui AB e CD. Da M e N conduci due rette fra loro parallele che incontrano le rette delle basi maggiore e minore rispettivamente nei punti H ed E per la parallela da M, nei punti G e F per la parallela da N. Dimostra che il trapezio $ABCD$ e il parallelogramma $EFGH$ sono equivalenti.

59 Il trapezio isoscele $ABCD$ ha base maggiore AB e altezza CH. Dimostra che $ABCD$ è equivalente al doppio del triangolo ACH.

60 Disegna un trapezio rettangolo $ABCD$ che ha per lato obliquo CD. Dimostra che il trapezio è equivalente a metà della somma dei due rettangoli aventi come basi le due basi del trapezio e come altezza il lato AB.

61 Nel trapezio $ABCD$ di base maggiore AB e altezza CH, sia M il punto medio di CH. Dimostra che $ABCD$ è equivalente al rettangolo i cui lati sono congruenti a CM e alla somma delle basi del trapezio.

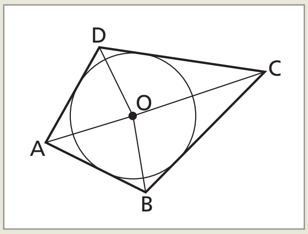
62 Disegna un trapezio $ABCD$, sia BC uno dei lati non paralleli e M il punto medio di AD. Dimostra che il triangolo BMC è equivalente a metà del trapezio. (Suggerimento. Conduci per M la retta parallela a BC e considera il parallelogramma così ottenuto.)

63 Nel trapezio $ABCD$, BC è uno dei lati non paralleli e M il punto medio di AD. Considera il parallelogramma $CMEB$ in cui BC e CM sono lati consecutivi. Dimostra che $ABCD$ e $CMEB$ sono equivalenti. (Suggerimento. Traccia la diagonale BM del parallelogramma... Utilizza il risultato ottenuto nell'esercizio precedente.)

L'equivalenza fra triangolo e poligono circoscritto a una circonferenza

ESERCIZIO GUIDA

64 Il quadrilatero $ABCD$ è circoscritto a una circonferenza di centro O. Dimostriamo che la somma dei triangoli AOB e DOC è equivalente alla metà del quadrilatero.



Ipotesi $ABCD$ è un quadrilatero circoscritto alla circonferenza di centro O.

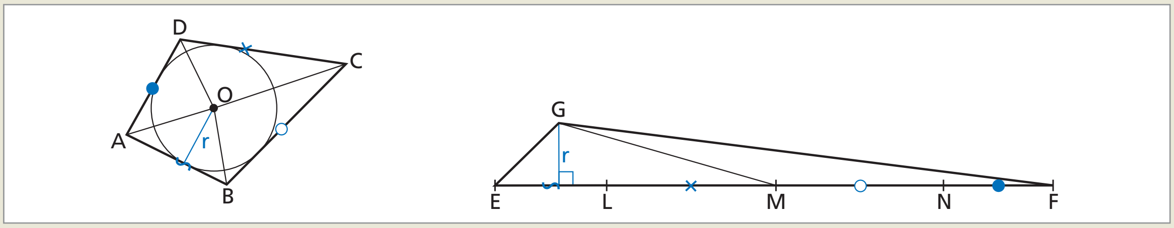
Tesi $AOB + DOC \doteq \frac{1}{2} ABCD$.

Dimostrazione

In un quadrilatero circoscritto a una circonferenza, la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due, *quindi*:

$$AB + CD \cong BC + DA.$$

Il quadrilatero $ABCD$ è equivalente a un triangolo che ha per base la somma dei lati e per altezza il raggio (teorema di equivalenza fra triangolo e poligono circoscritto).



Sulla base EF di EFG consideriamo i segmenti congruenti ai lati del quadrilatero che soddisfano le seguenti relazioni:

$$EL \cong AB, \qquad LM \cong DC, \qquad MN \cong BC, \qquad NF \cong AD.$$

Poiché $AB + CD \cong BC + DA$, è anche $EL + LM \cong MN + NF$, *quindi* M è il punto medio di EF.
I triangoli EMG e MGF hanno:
- la stessa altezza GH;
- base congruente, $EM \cong MF$, per quanto appena visto.

Quindi:

$$EMG \doteq \frac{1}{2} EFG \doteq \frac{1}{2} ABCD.$$

Inoltre possiamo scrivere che $EMG \doteq ELG + LMG$. Sapendo che $AOB \doteq ELG$ e $DOC \doteq LMG$, perché hanno basi e altezze congruenti, otteniamo:

$$AOB + DOC \doteq EMG \doteq \frac{1}{2} ABCD.$$

65 Dimostra che un triangolo equilatero circoscritto a una circonferenza è equivalente a un triangolo che ha la base congruente al triplo del lato del triangolo equilatero e l'altezza congruente a un terzo dell'altezza del triangolo equilatero stesso.

66 Dimostra che un qualunque triangolo ABC è equivalente a un altro triangolo che ha base congruente al perimetro di ABC e altezza relativa congruente al raggio del cerchio inscritto in ABC.

67 Dimostra che ogni quadrato è equivalente a un triangolo che ha un lato e l'altezza a esso relativa congruenti rispettivamente al quadruplo e alla metà del lato del quadrato.

68 Dimostra che un poligono circoscritto a una circonferenza è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti al raggio della circonferenza e al semiperimetro del poligono. (Suggerimento. Ricorda l'equivalenza tra triangolo e rettangolo.)

69 Disegna un quadrilatero $ABCD$ circoscritto a una circonferenza di centro O e raggio OH. Dimostra che $ABCD$ è equivalente a un parallelogramma che ha un lato congruente alla somma dei segmenti AB e CD e l'altezza congruente a OH. (Suggerimento. Ricorda che in un quadrilatero circoscritto a una circonferenza la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due.)

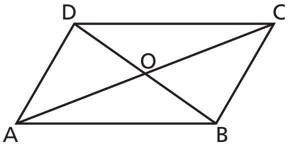
RIEPILOGO L'EQUIVALENZA DELLE SUPERFICI PIANE

TEST

70 Quale delle seguenti affermazioni è *vera*?

- **A** Due rettangoli equivalenti sono congruenti.
- **B** Due triangoli isosceli equivalenti sono congruenti.
- **C** Due rombi equivalenti sono congruenti.
- **D** Due quadrati equivalenti sono congruenti.
- **E** Due trapezi isosceli equivalenti sono congruenti.

71 Con riferimento alla figura, quale equivalenza è *sbagliata*?



- **A** $AOB \doteq DOC$
- **B** $AOD \doteq BOC$
- **C** $ADB \doteq BDC$
- **D** $AOD + DOC \doteq AOB + BOC$
- **E** $AOB + DOC \doteq AOD + BOC$

72 Nel triangolo ABC prolunga il lato AB dalla parte di B di un segmento BD congruente ad AB. Dimostra che i triangoli ABC e BCD sono equivalenti.

73 Dimostra che, se in un triangolo ABC congiungi i punti medi dei lati, si ottengono quattro triangoli tra loro equivalenti.

74 Dato un quadrilatero $ABCD$, considera il quadrilatero $MNPQ$ che ha i vertici nei punti medi dei lati di $ABCD$. Dimostra che $MNPQ \doteq \frac{1}{2} ABCD$.

75 Disegna un quadrilatero $ABCD$ con le diagonali perpendicolari e dimostra che è equivalente a metà del rettangolo che ha per lati le due diagonali di $ABCD$.

76 Nel triangolo scaleno ABC indica con M e N i punti medi rispettivamente dei lati AB e BC. Sia P un generico punto del lato AC. Dimostra che il quadrilatero $PMBN$ è equivalente a metà di ABC.

▶ *Caso particolare*: se P è il punto medio di AC, di che natura è il quadrilatero $PMBN$?

77 Nel quadrilatero $ABCD$ traccia la diagonale BD e indica con O il suo punto medio. Congiungi O con gli altri vertici del quadrilatero e dimostra che i quadrilateri $BAOC$ e $DAOC$ sono equivalenti.

78 Nel rettangolo $ABCD$ individua sui prolungamenti dei lati i segmenti $BB' \cong AB$, $CC' \cong BC$, $DD' \cong DC$, $AA' \cong AD$. Dimostra che il parallelogramma $A'B'C'D'$ è equivalente a cinque volte $ABCD$.

79 Indica con M e N i punti medi, rispettivamente, dei lati AB e BC del triangolo ABC. Siano P e Q due punti distinti di AC.
Dimostra che i triangoli MPN e MQN sono equivalenti.

80 Dimostra per assurdo che se due parallelogrammi sono equivalenti e hanno le altezze congruenti, allora anche le basi corrispondenti sono congruenti.

81 Dimostra che le tre mediane di un triangolo lo dividono in sei triangoli equivalenti.

82 Sulla diagonale BD del parallelogramma $ABCD$ prendi un generico punto P. Da P traccia la parallela a BC e chiama R e S le sue intersezioni rispettivamente con AB e CD. Sempre da P traccia la parallela ad AB e chiama T e V le sue intersezioni con BC e DA, rispettivamente. Dimostra che i parallelogrammi $ARPV$ e $CSPT$ sono equivalenti.
(Suggerimento: i due parallelogrammi possono essere visti come differenze di triangoli.)

83 Il trapezio $ABCD$ di basi AB e CD è circoscritto a una circonferenza di diametro PQ. Dimostra che $ABCD$ è equivalente a un triangolo che ha un lato congruente alla somma dei segmenti AD e BC e l'altezza a esso relativa congruente a PQ.
(Suggerimento. Ricorda l'equivalenza tra triangolo e trapezio.)

84 Disegna un triangolo scaleno ABC e traccia le mediane AN e CM. Indica con P il loro punto di intersezione. Dimostra che i triangoli CPN e APM sono equivalenti e che il triangolo APC è equivalente al quadrilatero $BMPN$.
Dimostra inoltre che il triangolo APC è equivalente al doppio del triangolo CPN.
(Suggerimento. Osserva le figure come differenza di figure equivalenti. Ricorda la proprietà del baricentro.)

85 Nel parallelogramma $ABCD$ siano O e M i punti medi, rispettivamente, di BD e BC. Dopo aver congiunto A e D con O e con M dimostra che il quadrilatero concavo $AMDO$ è equivalente al triangolo BOC.
(Suggerimento. Considera $AMDO$ come differenza di triangoli.)

86 Nel parallelogramma $ABCD$, da A conduci una retta che interseca in P il lato BC e in Q il prolungamento del lato DC.
Dimostra che i triangoli PCD e PBQ sono equivalenti.
(Suggerimento. Considera il triangolo CAQ.)

4. La costruzione di poligoni equivalenti

Teoria a pag. G248

RIFLETTI SULLA TEORIA

87 VERO O FALSO?

a) Non si può mai trasformare un poligono convesso in un rettangolo equivalente. V F
b) Solo i poligoni che sono circoscritti a una circonferenza sono sempre equivalenti a un triangolo. V F
c) Un pentagono convesso si può trasformare in un quadrilatero. V F
d) Un esagono non si può trasformare in un triangolo equivalente. V F

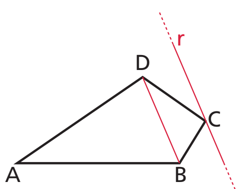
ESERCIZI

Da un poligono convesso a un triangolo equivalente

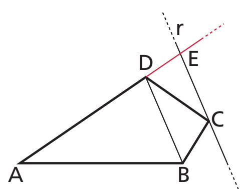
ESERCIZIO GUIDA

88 Dato un quadrilatero convesso *ABCD*, costruiamo un triangolo a esso equivalente.

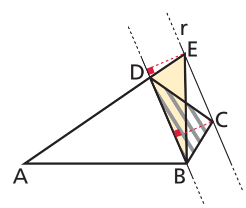
Costruzione



a. Tracciamo la diagonale *BD* e la parallela a essa passante per *C*, *r*.

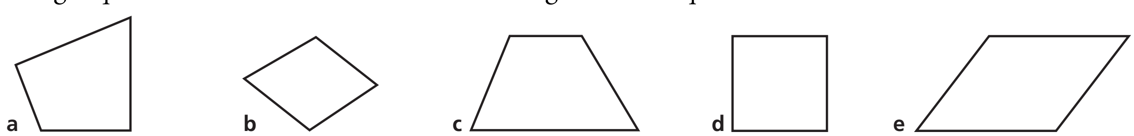


b. Prolunghiamo *AD* fino a incontrare la retta *r* nel punto *E*.

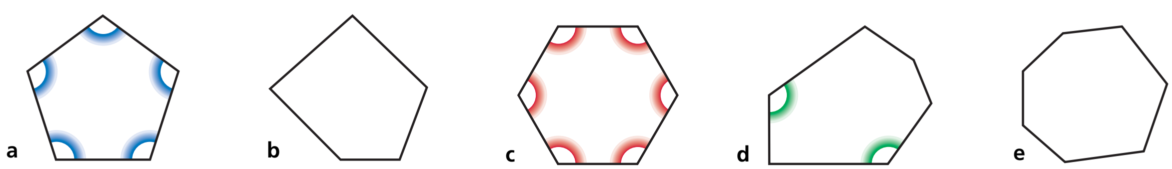


c. Congiungiamo *E* con *B*. *ABE* è il triangolo cercato. Infatti i triangoli *BCD* e *BED* sono equivalenti perché hanno la stessa base *BD* e altezze congruenti, in quanto rappresentano la distanza delle rette parallele *DB* ed *EC*.

89 Per ogni quadrilatero convesso costruisci un triangolo a esso equivalente.



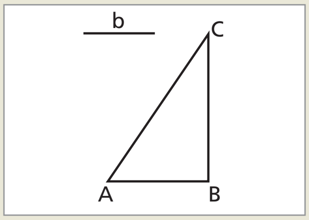
90 Per ogni poligono convesso, copia la figura sul quaderno e costruisci un triangolo a esso equivalente.



Da un triangolo a un altro equivalente

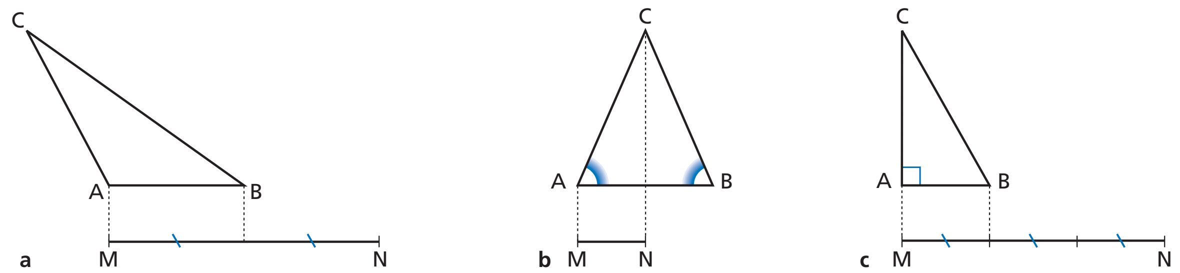
COSTRUZIONE GUIDATA

91 Dato un triangolo ABC, costruiscine un altro equivalente di base assegnata b.



- Prendi sulla base AB un segmento AD congruente a b e congiungi C con D.
- Traccia per B la parallela a CD e chiama E il punto in cui essa interseca la retta AC. Congiungi D con E. *Come sono fra loro i triangoli CED e CBD?* ....
- *I triangoli ABC e AED sono .... perché .... di triangoli equivalenti.*
- *Se la base assegnata è maggiore della base del triangolo, il punto E è ancora esterno al triangolo? .... Perché?* ....
- *Se il triangolo ABC è isoscele e ha ciascuno dei lati obliqui doppi rispetto alla base e congruenti a b, come sono i triangoli AED e ABC?* ....

92 Per ogni triangolo in figura, costruiscine uno equivalente avente base congruente al rispettivo segmento MN.



93 Costruisci un parallelogramma di base assegnata equivalente a un triangolo dato.

94 Trasforma un triangolo in un triangolo rettangolo equivalente con un cateto assegnato.

95 Costruisci un triangolo rettangolo con ipotenusa assegnata equivalente a un triangolo dato.

96 Trasforma un triangolo in un triangolo isoscele equivalente di altezza assegnata.

5. I teoremi di Euclide e Pitagora

Teoria a pag. G249

RIFLETTI SULLA TEORIA

97 **VERO O FALSO?** In ogni triangolo rettangolo:

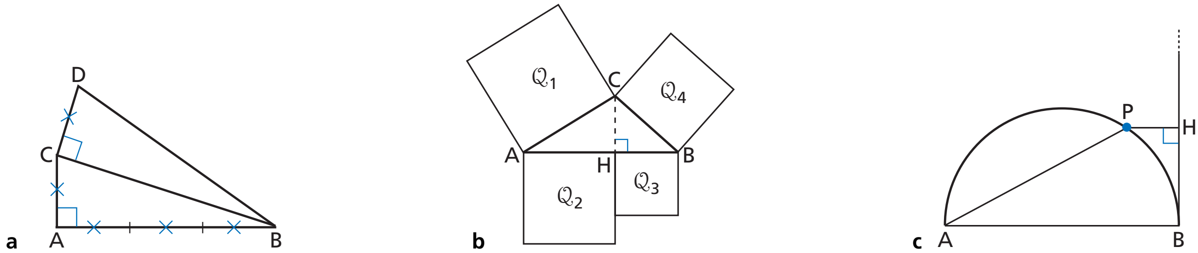
a) l'area del quadrato costruito sull'altezza è uguale all'area del rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. V F

b) il quadrato costruito su un cateto è equivalente alla differenza tra il quadrato costruito sull'ipotenusa e quello costruito sull'altro cateto. V F

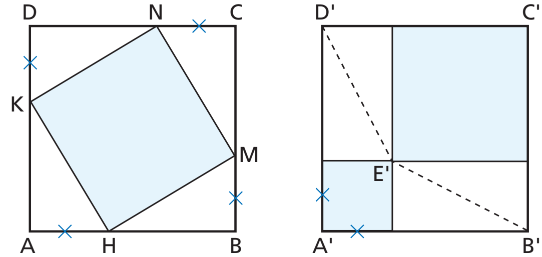
c) il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. V F
d) l'area del quadrato costruito su un cateto è uguale all'area del rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la roiezione del cateto sull'ipotenusa. V F
e) l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti. V F

98 **VERO O FALSO?**

a) Se nella figura *a* è $AB \cong 3AC$ e $CD \cong AC$, detti $\mathcal{Q}(DB)$ il quadrato costruito su DB e $\mathcal{Q}(AC)$ quello costruito su AC, si ha: $\mathcal{Q}(DB) \doteq 11\,\mathcal{Q}(AC)$. V F
b) Dalla figura *b* puoi dedurre che $\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_3 = \mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}_4$. V F
c) Dalla figura *c* puoi dedurre che il quadrato costruito su PB è equivalente al rettangolo che ha per lati AB e PH. V F



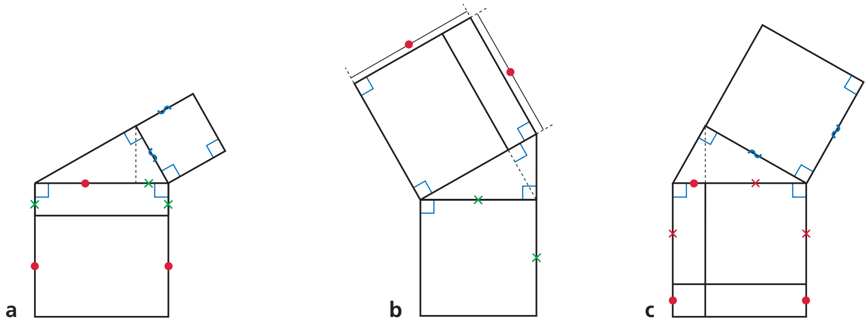
99 Osserva le due figure e spiega perché costituiscono una dimostrazione del teorema di Pitagora. (Suggerimento. Considera il triangolo AHK…)



ESERCIZI

Il primo teorema di Euclide

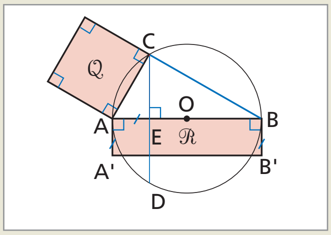
100 In ognuno dei seguenti triangoli rettangoli riconosci le figure equivalenti, applicando il primo teorema di Euclide.



Dimostrazioni

ESERCIZIO GUIDA

101 In una circonferenza di centro O e diametro AB disegniamo una corda CD, perpendicolare al diametro, che interseca il diametro stesso nel punto E. Tracciamo le tangenti alla circonferenza in A e in B e stacchiamo su di esse, dalla parte opposta a C rispetto al diametro, due segmenti AA' e BB' entrambi congruenti ad AE. Dimostriamo che il quadrilatero $AA'B'B$ è equivalente al quadrato costruito sulla corda AC.



Ipotesi 1. AB è un diametro;
2. $CD \perp AB$;
3. AA' e BB' sono tangenti;
4. $AA' \cong BB' \cong AE$;
5. $\mathcal{Q}$ è il quadrato di lato AC;
6. $\mathcal{R}$ è il quadrilatero $AA'B'B$.

Tesi $\mathcal{R} \doteq \mathcal{Q}$.

Dimostrazione

Le tangenti AA' e BB' sono entrambe perpendicolari ad AB (per il teorema della retta tangente a una circonferenza), *quindi* il quadrilatero $AA'B'B$ è un rettangolo, per le ipotesi 3 e 4.

Congiungendo C con B, otteniamo il triangolo ABC, inscritto in una semicirconferenza, *quindi* rettangolo in C. In tale triangolo, CE è l'altezza relativa all'ipotenusa.

Nel triangolo rettangolo ABC, il segmento AE è la proiezione del cateto AC sull'ipotenusa, *quindi* $\mathcal{R}$ è il rettangolo formato dall'ipotenusa e dalla proiezione di AC sull'ipotenusa. *Pertanto*:

$$\mathcal{R} \doteq \mathcal{Q}$$

per il primo teorema di Euclide.

102 Dimostra che in una circonferenza il quadrato costruito su una corda AB, non passante per il centro, è equivalente al rettangolo i cui lati sono congruenti alla proiezione della corda sul diametro AC e al diametro stesso.

103 Disegna un triangolo ABC e traccia l'altezza AH. Dimostra che il rettangolo avente i lati congruenti ad AB e alla proiezione di AH su AB è equivalente al rettangolo con i lati congruenti ad AC e alla proiezione di AH su AC stesso.

104 Nel rombo $ABCD$ indica con O il punto d'incontro delle diagonali. Dimostra che il quadrato costruito sulla diagonale BD è quadruplo del rettangolo i cui lati sono congruenti al lato del rombo e alla proiezione di BO sul lato del rombo.

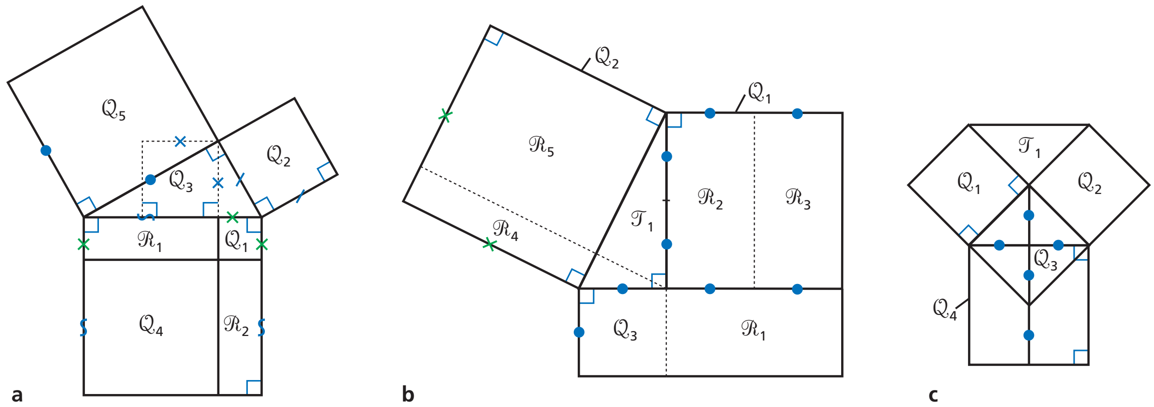
105 Disegna un trapezio rettangolo con la diagonale minore perpendicolare al lato obliquo. Dimostra che il quadrato costruito sulla diagonale minore è equivalente al rettangolo i cui lati sono congruenti alle basi del trapezio.

106 Il triangolo ABC, di base BC, ha gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ acuti. Detta AH l'altezza relativa a BC, dimostra che, se il quadrato costruito su AB è equivalente al rettangolo con i lati congruenti a BC e BH, allora il triangolo dato è rettangolo in A. (Suggerimento. Questo è l'inverso del primo teorema di Euclide: ripeti la costruzione fatta per dimostrare il teorema diretto.)

Il teorema di Pitagora

Nel sito: ▶ 7 esercizi di recupero

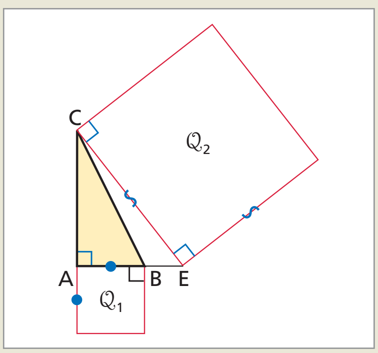
107 In relazione alle seguenti figure, scrivi tutte le equivalenze possibili, applicando il teorema di Pitagora e il primo teorema di Euclide.



Dimostrazioni

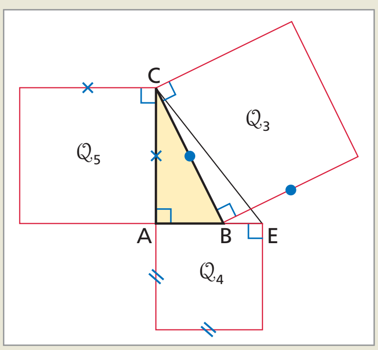
ESERCIZIO GUIDA

108 In un triangolo rettangolo ABC prolunghiamo il cateto AB di un segmento a piacere BE. Dimostriamo che la somma dei quadrati costruiti sui segmenti AB e CE è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su BC e AE.



Ipotesi 1. ABC è un triangolo rettangolo;
2. E appartiene alla retta AB;
3. $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3, \mathcal{Q}_4, \mathcal{Q}_5$ sono quadrati costruiti su AB, CE, BC, AE, AC.

Tesi $\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2 \doteq \mathcal{Q}_3 + \mathcal{Q}_4$.



Dimostrazione

Applichiamo il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli AEC e ABC. Otteniamo:

$$\mathcal{Q}_2 \doteq \mathcal{Q}_4 + \mathcal{Q}_5 \text{ e } \mathcal{Q}_3 \doteq \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_5.$$

Per la proprietà simmetrica dell'equivalenza possiamo scrivere $\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_5 \doteq \mathcal{Q}_3$. Sommando membro a membro questa equivalenza con $\mathcal{Q}_2 \doteq \mathcal{Q}_4 + \mathcal{Q}_5$, otteniamo:

$$\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_5 + \mathcal{Q}_2 \doteq \mathcal{Q}_3 + \mathcal{Q}_4 + \mathcal{Q}_5.$$

Sottraendo dai due membri dell'equivalenza il termine $\mathcal{Q}_5$, otteniamo infine:

$$\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2 \doteq \mathcal{Q}_3 + \mathcal{Q}_4.$$

109 Disegna un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC. Sia D un punto qualunque di AB. Dimostra che la somma dei quadrati costruiti su AB e su CD è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su BC e su AD.

110 Dimostra che un quadrato è equivalente alla metà del quadrato costruito su una sua diagonale.

111 Disegna un triangolo ABC in cui gli angoli in A e in B sono acuti e tali che l'angolo in A sia minore di quello in B. Traccia l'altezza CH relativa al lato AB. Dimostra che la differenza fra i quadrati costruiti sui lati AC e BC è equivalente alla differenza dei quadrati costruiti sui segmenti AH e BH.

112 Nel trapezio rettangolo $ABCD$ la diagonale minore BD è perpendicolare al lato obliquo. Dimostra che il quadrato costruito sulla base maggiore BC è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri tre lati.

113 Disegna un quadrilatero $ABCD$ con le diagonali perpendicolari. Dimostra che la somma dei quadrati costruiti sui lati AB e CD è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su BC e DA.

114 Dimostra che il quadrato costruito sull'altezza di un triangolo equilatero è equivalente al triplo del quadrato costruito su metà del lato.

115 Disegna un quadrato $ABCD$ e indica con E un generico punto interno. Dimostra che la somma dei quadrati costruiti sui segmenti AE, BE, CE, DE è equivalente al doppio della somma dei quadrati costruiti sulle distanze di E dai quattro lati.

▶ *Caso particolare*: se E si trova nel punto di incontro delle diagonali, la somma dei quadrati costruiti su AE, BE, CE, DE è equivalente al doppio di $ABCD$. Perché?

116 Nel triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC, siano P e Q, rispettivamente, due punti qualsiasi dei cateti AB e AC. Dimostra che la somma dei quadrati costruiti su BC e su PQ è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su PC e su QB.

▶ *Caso particolare*: se P e Q sono i punti medi dei cateti, a quale frazione del quadrato costruito su CB è equivalente il quadrato costruito su QP?

Il secondo teorema di Euclide

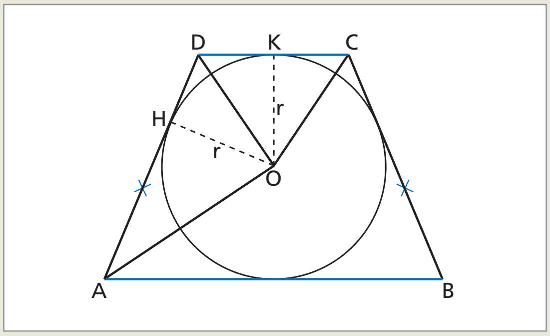
Nel sito: ▶ 6 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

117 Dimostriamo che, in un trapezio isoscele circoscritto a una circonferenza, il quadrato del raggio è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le semibasi del trapezio.

Ipotesi 1. $AB \parallel CD$ e $AD \cong BC$;
2. $ABCD$ circoscritto a una circonferenza.

Tesi $\mathcal{Q}(r) \doteq \mathcal{R}\left(\frac{AB}{2}; \frac{CD}{2}\right)$.



Dimostrazione

Nel triangolo DOA l'angolo $A\hat{D}O \cong \frac{1}{2} A\hat{D}C$ e l'angolo $D\hat{A}O \cong \frac{1}{2} D\hat{A}B$ per il teorema delle tangenti da un punto esterno a una circonferenza. Poiché $C\hat{D}A + D\hat{A}B \cong \hat{P}$, essendo angoli coniugati interni delle rette parallele AB e DC con trasversale DA, *ne segue* che $A\hat{D}O + D\hat{A}O \cong \frac{1}{2}\hat{P}$, *perciò* ADO è triangolo rettangolo in O. Traccia-

mo $OH \cong r$ nel punto di tangenza ($OH \perp DA$).
Applichiamo il secondo teorema di Euclide al triangolo DOA:

$\mathcal{Q}(OH) \doteq \mathcal{R}(DH; HA)$.

Tracciamo $OK \perp DC$ e consideriamo i triangoli rettangoli DHO, DKO, KOC:

- $HO \cong KO$ perché raggi della circonferenza;
- $H\hat{D}O \cong O\hat{D}K \cong K\hat{C}O$ metà di angoli congruenti.

Perciò i triangoli DHO, DKO, KOC sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli rettangoli, in particolare

$DH \cong DK \cong KC$, ossia $DH \cong \frac{1}{2} DC$.

Analogamente si dimostra che $AH \cong \frac{1}{2} AB$.

Sostituiamo nell'equivalenza precedente e otteniamo $\mathcal{Q}(r) \doteq \mathcal{R}\left(\frac{AB}{2}; \frac{CD}{2}\right)$.

118 Sia AB il diametro di una circonferenza di centro O e sia CD una corda perpendicolare ad AB che interseca AB nel punto H. Sulla tangente passante per A scegli un punto E in modo che AE sia congruente a BH. Da E traccia la parallela ad AB fino a incontrare il prolungamento di CD in F. Dimostra che il quadrato costruito su CH è equivalente al rettangolo $AEFH$.

119 Sia AB il diametro di una circonferenza di centro O e sia CD una corda perpendicolare ad AB che interseca AB nel punto H. Dimostra che il quadrato costruito su CD è quadruplo del rettangolo avente i lati congruenti a BH e AH.

120 Dimostra che, se in un triangolo ABC il piede dell'altezza AH è interno a BC e il quadrato di lato AH è equivalente al rettangolo i cui lati sono congruenti a BH e CH, allora il triangolo è rettangolo in A. (Questo teorema è l'inverso del secondo teorema di Euclide.)

121 Sia AB il diametro di una circonferenza di centro O e sia C un punto di questa distinto da A e da B. Da C disegna la tangente che incontra le tangenti tracciate da A e da B rispettivamente nei punti P e Q. Dimostra che il rettangolo avente i lati congruenti ai segmenti PC e CQ è equivalente al quadrato costruito sul raggio CO della circonferenza.

▶ *Caso particolare*: se C è il punto medio dell'arco $\widehat{AB}$, il rettangolo di lati PC e CQ diventa un quadrato. Perché? È ancora valido il teorema?

I teoremi di Pitagora generalizzati

Illustra con una figura i seguenti teoremi.

122 Il quadrato $\mathcal{Q}(a + b)$ costruito sulla somma $a + b$ di due segmenti è equivalente alla somma dei quadrati $\mathcal{Q}(a)$ e $\mathcal{Q}(b)$ costruiti sui due segmenti a e b aumentata del doppio del rettangolo $\mathcal{R}(a; b)$ che ha i lati congruenti ai due segmenti dati.

$$\mathcal{Q}(a+b) \doteq \mathcal{Q}(a) + \mathcal{Q}(b) + 2\mathcal{R}(a;b)$$

123 Il quadrato costruito sulla differenza di due segmenti è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due segmenti diminuita del doppio del rettangolo che ha i lati congruenti ai due segmenti dati.

$$\mathcal{Q}(a-b) \doteq \mathcal{Q}(a) + \mathcal{Q}(b) - 2\mathcal{R}(a;b)$$

Con l'aiuto delle proprietà enunciate nei due precedenti teoremi, dimostra i seguenti.

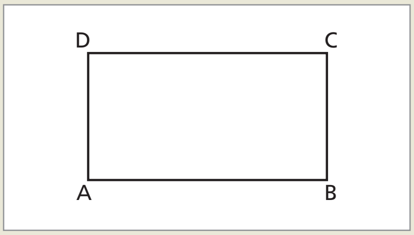
124 Primo teorema di Pitagora generalizzato. In un triangolo ottusangolo il quadrato costruito sul lato opposto all'angolo ottuso è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati aumentata del doppio del rettangolo avente come dimensioni uno di questi lati e la proiezione dell'altro su di esso.

125 Secondo teorema di Pitagora generalizzato. In un qualsiasi triangolo il quadrato costruito sul lato opposto a un angolo acuto è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati diminuita del doppio del rettangolo avente come dimensioni uno di questi lati e la proiezione dell'altro su di esso.

La costruzione di un quadrato equivalente a un rettangolo

COSTRUZIONE GUIDATA

126 Costruisci un quadrato equivalente a un rettangolo dato $ABCD$.



Primo metodo

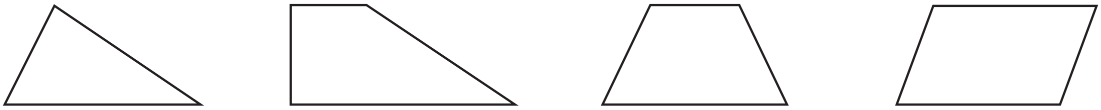
- Considera il rettangolo $ABCD$.
- Individua il punto medio O di uno dei lati maggiori, per esempio di CD, e disegna la semicirconferenza di centro O e raggio OC, esterna al rettangolo.
- Con il compasso punta in D e, con apertura AD, traccia un arco dal punto A fino a intersecare il lato DC nel punto H. *Come sono fra loro DH e CB?* ....
- Dal punto H traccia la perpendicolare a DC e chiama con E il punto in cui questa interseca la semicirconferenza. Congiungi E con C e con D.
- *Il triangolo DCE è .... in E perché* ....
- Costruisci su DE un quadrato: questo è il quadrato richiesto. *Infatti è .... al rettangolo per il .... teorema di Euclide.*

Secondo metodo

- Considera il rettangolo $ABCD$. Prolunga il lato maggiore CD dalla parte di D.
- Punta il compasso in D e, con apertura DA, descrivi un arco fino a intersecare il prolungamento di CD in un punto E. *Come sono i segmenti ED e CB?* ....
- Chiama O il punto medio di EC e traccia la semicirconferenza di centro O e raggio OC, che non interseca il rettangolo.
- Prolunga AD fino a incontrare la semicirconferenza nel punto F. Congiungi F con E e con C, ottenendo il triangolo ECF. *Di che natura è tale triangolo?*............ . *Perché?*..................... .
- Costruisci sull'altezza FD un quadrato: questo è il quadrato cercato.
- *Infatti esso è .... al rettangolo per il .... teorema di Euclide.*
- *I quadrati ottenuti con le due costruzioni sono congruenti?*........... . *Perché?* ....

127 Disegna due rettangoli diversi e costruisci i loro quadrati equivalenti applicando i metodi della costruzione guidata precedente.

128 Per ogni poligono seguente costruisci un quadrato equivalente.



RIEPILOGO — I TEOREMI DI EQUIVALENZA

129 Disegna un trapezio isoscele con le diagonali perpendicolari ai lati obliqui. Dimostra che il quadrato costruito su una diagonale è equivalente al rettangolo i cui lati sono congruenti alla base maggiore e alla semisomma delle basi del trapezio.

130 Nel parallelogramma $ABCD$ traccia le bisettrici degli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$, indicando con E il loro punto di intersezione.
Dimostra che il quadrato costruito su AB è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su AE e BE.
(Suggerimento. Dimostra che il triangolo ABE è rettangolo.)

▶ *Caso particolare*: dove si trova E se $ABCD$ è un rombo? E se $ABCD$ è un rettangolo, di che natura è il triangolo ABE?

131 Dimostra che in ogni triangolo isoscele il quadrato costruito sulla base è equivalente al doppio del rettangolo avente le dimensioni congruenti a uno dei lati congruenti del triangolo e alla proiezione della base su tale lato.

132 Disegna un triangolo rettangolo ABC e sia AH l'altezza relativa all'ipotenusa.
Dimostra che il rettangolo avente i lati congruenti a BH e CH è equivalente al rettangolo che ha un lato congruente ad AC e l'altro lato congruente alla proiezione di AH su AC.

133 Nel triangolo scaleno ABC traccia l'altezza AH. Dimostra che il quadrato costruito su AC è equivalente alla somma del quadrato costruito su CH e del rettangolo avente i lati congruenti ad AB e alla proiezione di AH su AB.

134 Traccia una circonferenza di centro O e da un punto P esterno conduci le tangenti alla circonferenza. Indica con A e con B i punti di tangenza. Detto H il punto d'incontro dei segmenti PO e AB, dimostra che il quadrato costruito su AB è quadruplo del rettangolo i cui lati sono congruenti a PH e HO.

135 Dimostra che un quadrato circoscritto a una circonferenza è equivalente al doppio del quadrato inscritto.

136 Disegna un rettangolo $ABCD$ e indica con E un generico punto interno.
Dimostra che la somma dei quadrati costruiti sui segmenti EA ed EC è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui segmenti EB ed ED.

137 Nel parallelogramma $ABCD$ sia O un punto generico della diagonale AC.
Dimostra che i triangoli AOB e AOD sono equivalenti.

138 Dimostra che la somma dei quadrati costruiti sui lati di un parallelogramma è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sulle sue diagonali.

139 Disegna il triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC e il cateto minore AB. Siano M il punto medio di AB e H il piede della perpendicolare condotta da M a BC.
Dimostra che il quadrato costruito su AC è equivalente alla differenza dei quadrati costruiti su CH e BH.
(Suggerimento. Traccia la mediana CM.)

140 Da un punto P esterno a una circonferenza di centro O traccia le tangenti che incontrano la circonferenza nei punti A e B. Indica con H e K le intersezioni del segmento PO rispettivamente con la corda AB e con la circonferenza.
Dimostra che il rettangolo avente i lati congruenti a PH e OH è equivalente alla differenza dei quadrati costruiti su KO e OH.
(Suggerimento. Ricorda che OK è un raggio della circonferenza.)

▶ *Caso particolare*: se $A\hat{O}B$ è retto, il quadrato costruito su OK è equivalente a metà del quadrato costruito su OP. Perché?

141 Nel quadrato $ABCD$ traccia la diagonale AC prolungandola, dalla parte di C, di un segmento CP tale che AP sia il doppio di AB. Da P traccia la retta perpendicolare alla retta AB che incontra questa nel punto H.
Dimostra che il triangolo AHP e il quadrato $ABCD$ sono equivalenti.

142 Dimostra che il quadrato costruito sulla diagonale maggiore BC di un parallelogramma $ABDC$ è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su BD e CD e del doppio del rettangolo avente i lati congruenti a BD e alla proiezione di CD sul prolungamento del lato BD.

143 Disegna il triangolo ABC rettangolo in A. Sull'ipotenusa BC costruisci un generico rettangolo $BCDE$ e congiungi il vertice A dell'angolo retto con D e con E.
Dimostra che la differenza dei quadrati costruiti su AD e su AE equivale alla differenza dei quadrati dei cateti.

LABORATORIO DI MATEMATICA

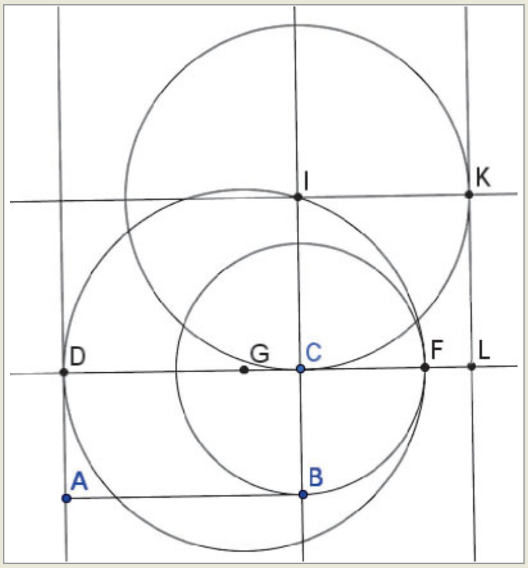
L'equivalenza delle superfici piane con GeoGebra

ESERCITAZIONE GUIDATA

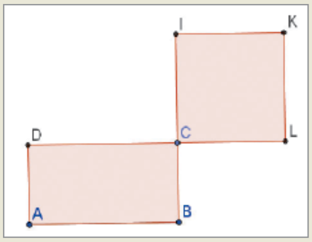
Dato un rettangolo di vertici *ABCD*, costruiamo il quadrato a esso equivalente.
Disegnato il quadrato, verifichiamo l'equivalenza delle due figure.

Per trovare il quadrato equivalente a un rettangolo costruiamo un triangolo rettangolo avente le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa congruenti alle dimensioni del rettangolo, in tal modo l'altezza del triangolo, in virtù del II teorema di Euclide, diventa un lato del quadrato equivalente al rettangolo.

- Con gli strumenti di GeoGebra disegniamo i lati del rettangolo *ABCD* (figura 1).
- Con *Circonferenza di dato centro* tracciamo la circonferenza di centro *C* e raggio *CB* e con *Intersezione di due oggetti* evidenziamo il punto *F* sulla retta *DC*.
- Con *Punto medio* ricaviamo *G*, con *Circonferenza di dato centro* tracciamo la circonferenza di centro *G* e raggio *GD* e con *Intersezione di due oggetti* evidenziamo il punto *I* sulla retta *BC*. Il triangolo *IDF* è il triangolo rettangolo desiderato.
- Costruiamo, pertanto, con gli strumenti di GeoGebra sul lato *IC* i lati del quadrato *ICLK*.
- Nascondiamo le linee usate per la costruzione e con *Poligono* sovrapponiamo il rettangolo *ABCD* e il quadrato *CLKI* ai loro lati già presenti nel disegno (figura 2).
- Nella finestra algebrica leggiamo che i due poligoni hanno la stessa area, poi spostiamo il punto *B*: il rettangolo e il quadrato cambiano estensione, ma mantengono la loro equivalenza.



▲ Figura 1



◄ Figura 2

Nel sito: ► 1 esercitazione guidata con Cabri ► 14 esercitazioni in più

Esercitazioni

Con il computer opera le seguenti costruzioni e controlla l'equivalenza delle figure.

1 Disegna un quadrato *ABCD* e costruisci un rettangolo equivalente, di base *MN* assegnata.

2 Disegna un triangolo *ABC* e costruisci un triangolo equivalente, di data base *DE*.

3 Disegna un triangolo *ABC* e costruisci un triangolo isoscele equivalente, avente la stessa base *AB*.

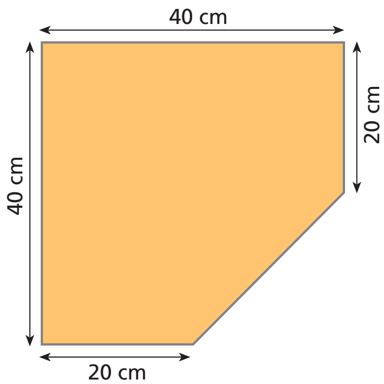
4 Disegna un triangolo *ABC* e costruisci un triangolo isoscele equivalente, di data base *DE*.

5 Disegna un triangolo *ABC* e costruisci un triangolo rettangolo equivalente, di cateto *DE* assegnato.

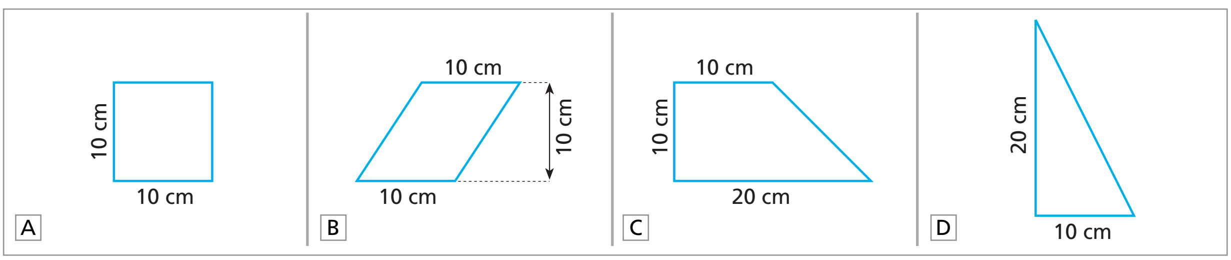
Matematica per il cittadino

PIASTRELLE

Vuoi rivestire un piano di lavoro della cucina con piastrelle di ceramica. La superficie ha la forma e le dimensioni indicate in figura.



1. Non è detto che si riesca a rivestire il piano utilizzando solo piastrelle intere. Scegli, fra i seguenti, quale tipo di piastrella comporta il maggior numero di tagli.



2. Scartando la tipologia di piastrella che richiede maggiori tagli, utilizza i tre tipi rimanenti per rivestire il piano da cucina e rappresenta con un disegno la disposizione che proponi. Per ogni tipo scrivi il numero di tagli necessari e il numero di piastrelle occorrenti.

Piastrella	Tipo:	Tipo:	Tipo: ....
numero tagli			
numero piastrelle			

3. Per ciascuna delle quattro tipologie, calcola la superficie minima che rimane non rivestita se non si fanno tagli, cioè se si utilizzano solo piastrelle intere.

4. Quale forma deve avere una piastrella per consentire il rivestimento del piano senza tagli?
(È da escludere il caso di un'unica piastrella delle dimensioni del piano da rivestire.)

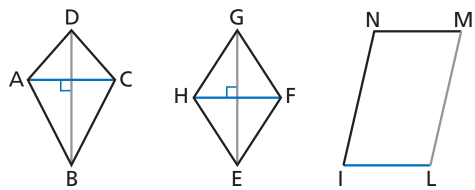
5. Utilizzando il tipo di piastrelle indicato nella risposta alla domanda precedente, qual è il numero minimo di piastrelle occorrenti?

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 20 test interattivi in più

1 Osserva i quadrilateri nella figura.



Se $AC \cong HF \cong IL$ e $BD \cong EG \cong LM$, allora:

A $ABCD$ è equivalente a $EFGH$.

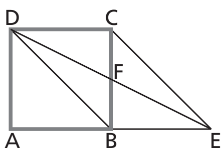
B $ABCD$ è equivalente a $ILMN$.

C $EFGH$ è equivalente a $ILMN$.

D nessun quadrilatero è equivalente a uno degli altri due.

E i tre quadrilateri sono tutti equivalenti.

2 Le equivalenze riferite alla figura sono tutte *vere tranne* una. Quale?
Se $ABCD$ è un quadrato e CE è parallelo a BD:



A ABD è equivalente a BED.

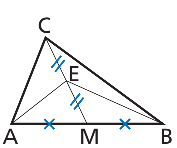
B ABD è equivalente a DCE.

C CFE è equivalente a BFE.

D DCF è equivalente a CFE.

E CFE è equivalente ad ABD.

3 Quale delle seguenti equivalenze riferite alla figura è *falsa*?



A AEM è equivalente a BME.

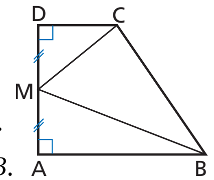
B AEC è equivalente a BCE.

C AEC è equivalente ad AME.

D ABE è equivalente ad $AEC + BEC$.

E ABE è equivalente a BEC.

4 Quale, fra le seguenti equivalenze riferite alla figura a fianco, è *vera*?



A AMB è equivalente a MDC.

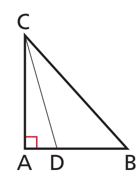
B MCB è equivalente ad AMB.

C $AMB + MDC$ è equivalente a MCB.

D MCB è equivalente a MDC.

E $MCD + MCB$ è equivalente ad AMB.

5 Osserva la figura. Quale delle seguenti proposizioni è *vera*?



A ADC è equivalente a BDC.

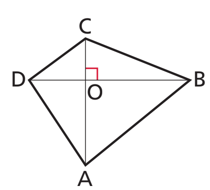
B La somma dei quadrati costruiti su AB e CD è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su BC e AD.

C Il quadrato costruito su DC è equivalente al quadrato costruito su BC.

D Il quadrato costruito su DC è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su AD e DB.

E Il quadrato costruito su AC è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su AD e DB.

6 Osserva la figura.
Una delle seguenti proposizioni è *vera*. Quale?



A La somma dei quadrati di due lati opposti è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due.

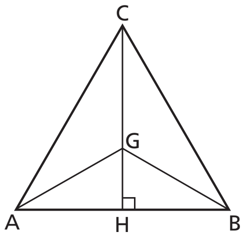
B $DOC + AOB$ è equivalente a $DOA + BOC$.

C $DOC + BOC$ è equivalente a $DOA + DOC$.

D $DOC + DOA$ è equivalente a AOB.

E ADC è equivalente a BOC.

7 Se il triangolo ABC è equilatero e G è il suo baricentro, quale delle seguenti proposizioni è falsa?



- A AGC è equivalente al doppio di GHB.
- B ABC è equivalente al triplo di AGB.
- C Il quadrato costruito su AH è equivalente alla differenza tra il quadrato costruito su CB e quello costruito su CH.
- D AHG è equivalente a $\frac{1}{3}$ di CGB.
- E Il quadrato costruito su HB è equivalente alla differenza tra il quadrato costruito su AG e quello costruito su GH.

SPIEGA PERCHÉ

8 Se raddoppi il lato di un quadrato o il lato di un triangolo equilatero, la loro estensione quadruplica. Perché?

9 Descrivi in che modo è possibile passare da un qualsiasi poligono convesso a un rettangolo a esso equivalente.

10 Perché è possibile trasformare qualunque poligono in un quadrato a esso equivalente?

11 In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente alla differenza fra il quadrato costruito su un cateto e il quadrato costruito sulla proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa. Perché?

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

12 In un parallelogramma $ABCD$ conduci internamente all'angolo $\hat{C}$ una semiretta che interseca il lato AD nel punto M e il prolungamento della base AB nel punto N. Dimostra che i due triangoli ABM e MDN sono equivalenti.

13 Disegna un triangolo ABC e la mediana BM relativa al lato AC. Conduci per M la retta parallela al lato BC, che interseca la base AB nel punto N. Dimostra che il triangolo NBM è equivalente alla quarta parte del triangolo ABC.

14 Dimostra che, congiungendo il baricentro di un triangolo con i vertici del triangolo stesso, si ottengono tre triangoli equivalenti.

▶ *Caso particolare*: se il triangolo è equilatero, come sono i tre triangoli?

15 Disegna un triangolo rettangolo ABC e dal punto medio M del cateto AC conduci la perpendicolare MN all'ipotenusa BC. Dimostra che il quadrato costruito su BN è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su CN e su AB.

16 Dato un trapezio, costruisci un rettangolo a esso equivalente che abbia per base la somma delle basi del trapezio. Motiva la costruzione.

17 Disegna due segmenti AB e CD, in modo che risulti $CD \leq \frac{AB}{2}$. Dividi il segmento AB in due parti tali che il rettangolo che ha per lati queste due parti sia equivalente al quadrato che ha per lato CD. Motiva la costruzione.

18 Dimostra che in un triangolo con un angolo che è $\frac{1}{3}$ di angolo piatto il quadrato costruito sul lato opposto all'angolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati diminuita del rettangolo avente come dimensioni i due lati stessi.

19 Dimostra che la somma dei quadrati costruiti sopra due lati di un triangolo è equivalente al doppio del quadrato della mediana relativa al terzo lato aumentato del doppio del quadrato della metà del terzo lato stesso. (Suggerimento. Applica uno dei teoremi di Pitagora generalizzati che trovi negli esercizi 124 e 125 alle pagine G273 e G274.)

20 Disegna una circonferenza di centro O. Su un diametro AB da parti opposte rispetto a O considera due punti E e F equidistanti da O. Dimostra che la somma dei quadrati delle loro distanze da un qualunque punto P della circonferenza è costante. (Suggerimento. Utilizza il il risultato dell'esercizio precedente.)

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 6 esercizi in più

21 Disegna un triangolo isoscele ABC. Sulla base BC scegli un generico punto D e congiungilo con il vertice A. Dimostra che la differenza dei quadrati costruiti su AB e su AD è equivalente al rettangolo avente i lati congruenti a BD e DC. Dal momento che si parla di differenza di quadrati, che relazione c'è fra i lati di detti quadrati? (Suggerimento. Applica due volte il teorema di Pitagora, poi utilizza il risultato dell'esercizio 15 di pagina G258 sulla differenza di quadrati costruiti su due segmenti…)

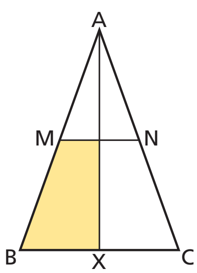
22 Disegna un rettangolo $ABCD$. Indica con E un punto esterno al rettangolo, che si trova nel semipiano individuato dalla retta AB non contenente il rettangolo ed è tale che risulti $EB > EA$. Dimostra che la differenza dei quadrati costruiti sui segmenti EC ed ED è equivalente alla differenza dei quadrati costruiti sui segmenti EB ed EA. (Suggerimento. Conduci da E la perpendicolare ai lati AB e DC.)

23 Nel triangolo rettangolo ABC traccia l'altezza CH relativa all'ipotenusa AB. Dal punto medio M del cateto BC traccia la parallela a CH, indicando con N la sua intersezione con AB. Dimostra che la figura formata dal doppio dei quadrati costruiti su CM, MN e NB a cui viene sottratto il quadrato costruito su HB è equivalente al rettangolo avente i lati congruenti ad AH e HB.

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 2 esercizi in più

24 TEST Triangle ABC has $AB \cong AC$ with M and N midpoints and $AX \perp BC$. What is the ratio of the area of the yellow region to the area of triangle ABC?



A $\frac{5}{8}$

B $\frac{3}{8}$

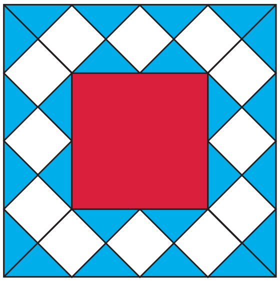
C $\frac{3}{4}$

D $\frac{1}{2}$

E $\frac{7}{8}$

(USA *University of North Carolina: Western Region State Mathematics Finals*, 1999)

25 TEST Betsy designed a flag using blue triangles, small white squares, and a red center square, as shown. Let B the total area of the blue triangles, W the total area of the white squares, and R the area of the red square.



Which of the following is correct?

A $B = W$

B $W = R$

C $B = R$

D $3B = 2R$

E $2R = W$

GLOSSARY

to design: progettare	**midpoint**: punto medio	**square**: quadrato
flag: bandiera	**ratio**: rapporto, proporzione	

CAPITOLO

G6

La misura e le grandezze proporzionali

Che misure!

La piramide di Cheope, nella piana di Giza, è una delle più grandi costruzioni realizzate dall'uomo. Ha un volume 30 volte superiore all'Empire State Building di New York; può contenere agevolmente al suo interno San Pietro e un altro paio di cattedrali europee. Con la sua pietra si potrebbe fare un'autostrada a 8 corsie da San Francisco a New York. Pesa 5 milioni e 273 mila tonnellate, ha i lati alla base lunghi 234 metri…

…come si può misurare con un metro l'altezza di una piramide?

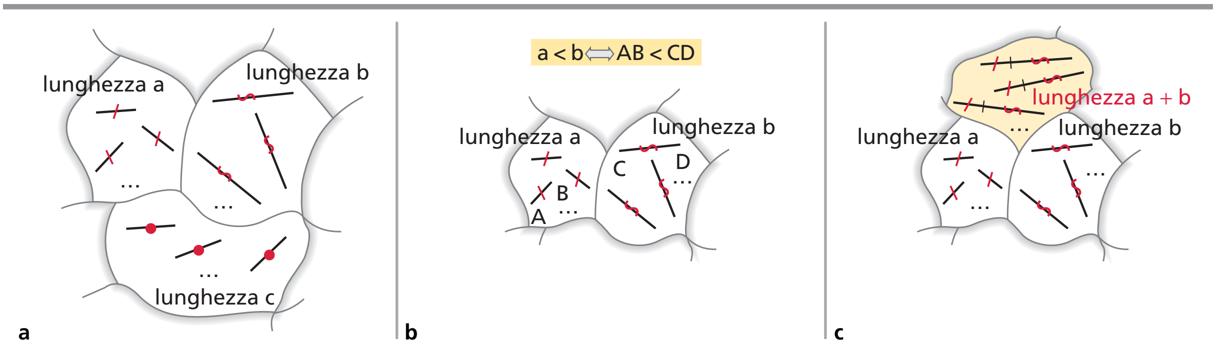
La risposta a pag. G303

1. Le classi di grandezze geometriche

Le lunghezze

Consideriamo nel piano l'insieme S dei segmenti e la relazione di congruenza fra segmenti. Questa relazione permette di suddividere l'insieme S in classi di equivalenza. Ogni classe contiene segmenti fra loro congruenti.

La relazione di congruenza fra segmenti gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, quindi è una relazione di equivalenza.



▲ Figura 1

Data la relazione di congruenza fra segmenti, chiamiamo **lunghezza** di un segmento la classe di equivalenza alla quale il segmento appartiene.

Indichiamo le lunghezze con lettere minuscole dell'alfabeto.

Per confrontare due lunghezze a e b basta confrontare due segmenti qualunque scelti fra gli elementi appartenenti alle relative classi di equivalenza a e b (figura 1b).

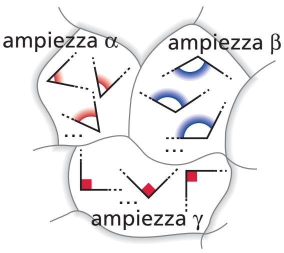
La lunghezza **somma di a e b** è la lunghezza $\boldsymbol{a + b}$, ottenuta addizionando un qualunque segmento della classe a con un qualunque segmento della classe b. La somma dei due segmenti appartiene alla classe di equivalenza $a + b$ (figura 1c).

▶ Le proprietà delle operazioni fra segmenti sono valide anche per le lunghezze se, invece della relazione di congruenza fra segmenti, applichiamo la relazione di uguaglianza fra lunghezze.

Se a, b e c sono tre lunghezze, valgono le seguenti proprietà dell'addizione:

- proprietà commutativa: $a + b = b + a$;
- proprietà associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- esistenza dell'elemento neutro: $a + 0 = 0 + a = a$.

Le ampiezze



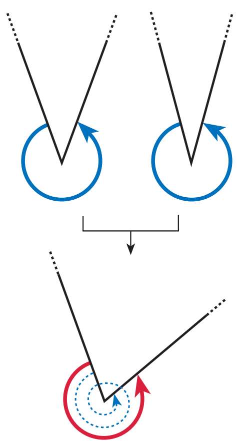
Consideriamo l'insieme A degli angoli del piano e la relazione di congruenza fra angoli. Tale relazione è anch'essa di equivalenza, pertanto è possibile suddividere l'insieme A in classi di equivalenza, ciascuna delle quali contiene angoli fra loro congruenti.

Indichiamo le ampiezze con le lettere minuscole dell'alfabeto greco.

Data la relazione di congruenza fra angoli, chiamiamo **ampiezza** di un angolo la classe di equivalenza alla quale l'angolo appartiene.

Nell'insieme A degli angoli è sempre possibile il confronto, ma non l'addizione: sommando due angoli di A non sempre si ottiene un angolo di A, cioè *l'operazione di addizione nell'insieme A non è interna*.

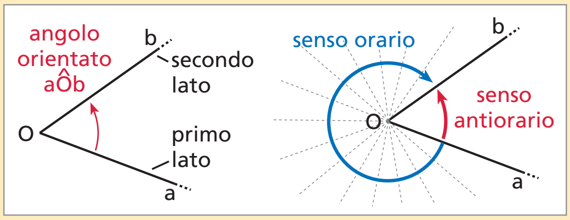
▶ Per esempio, come sommare due angoli ciascuno più grande di un angolo piatto?



DEFINIZIONE

Angolo orientato

Un angolo $a\hat{O}b$ si dice orientato quando i suoi lati sono considerati in un determinato ordine: per esempio, a è il primo lato e b il secondo.



Diciamo che l'angolo orientato $a\hat{O}b$, di primo lato a, è **orientato in senso orario** se le semirette che compongono $a\hat{O}b$ si susseguono da a e b in senso orario; altrimenti è **orientato in senso antiorario**.

Se n è un numero naturale, è possibile estendere il concetto chiamando **angolo** l'insieme unione di n volte l'angolo giro orientato (in senso orario o antiorario) e di un angolo orientato nello stesso senso.

Di conseguenza, l'operazione di addizione fra ampiezze di angoli orientati è interna, gode delle proprietà commutativa e associativa, ed esiste l'elemento neutro, che è l'ampiezza dell'angolo nullo, cioè l'angolo i cui lati coincidono.

▶ È sempre possibile sommare due angoli orientati, anche quando sono entrambi maggiori di un angolo piatto.

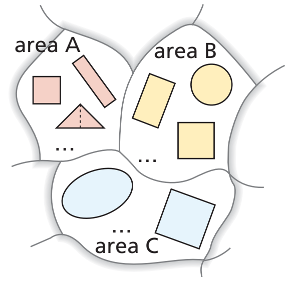
Le aree

Consideriamo l'insieme S delle superfici piane e, in tale insieme, la relazione di uguale estensione. Abbiamo visto che tale relazione è di equivalenza, quindi è possibile suddividere l'insieme S in classi di equivalenza. Ogni classe contiene superfici fra loro equivalenti.

Data la relazione di equivalenza fra superfici piane, chiamiamo **area** di una superficie la classe di equivalenza a cui la superficie appartiene.

Anche fra le aree sono possibili il confronto e l'addizione.

▶ Indichiamo le aree con lettere maiuscole dell'alfabeto.



Le classi di grandezze geometriche

DEFINIZIONE

Classe di grandezze geometriche

Una classe di grandezze geometriche è un insieme di enti geometrici in cui risultano possibili le due seguenti operazioni:

1. il confronto fra due elementi qualunque dell'insieme;
2. l'addizione che associa a due elementi qualunque A e B dell'insieme un terzo elemento $A + B$ dell'insieme, detto somma di A e di B. L'addizione deve godere delle proprietà *associativa* e *commutativa*, inoltre deve esistere l'elemento neutro, che chiamiamo *grandezza nulla*.

Le grandezze di una stessa classe sono dette **omogenee**.

▶ Sono grandezze geometriche i segmenti, gli angoli orientati, le superfici.

▶ Sono classi di grandezze omogenee:
- l'insieme delle lunghezze dei segmenti;
- l'insieme delle ampiezze degli angoli;
- l'insieme delle aree delle superfici piane.

I multipli e i sottomultipli

DEFINIZIONE

Multiplo di una grandezza

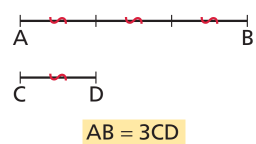
Il multiplo di una grandezza A secondo il numero naturale n è una grandezza B, omogenea alla data, definita come segue:

- B è la somma di n grandezze uguali ad A, se $n > 1$;
- B è uguale ad A, se $n = 1$;
- B è uguale alla grandezza nulla, se $n = 0$.

Una grandezza A è **sottomultipla** secondo il numero naturale $n \neq 0$ di una grandezza B a essa omogenea, se B è il multiplo di A secondo n.

La lunghezza del segmento AB nella figura a lato è multipla della lunghezza di CD secondo il numero 3. Possiamo anche dire che la lunghezza di AB è 3 volte quella di CD.

▶ **Esempio**



La lunghezza di CD è sottomultipla di quella di AB secondo il numero 3 e si scrive:

$$CD = \frac{1}{3}AB.$$

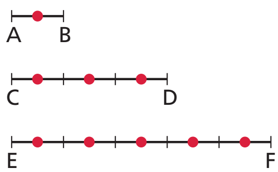
POSTULATO

Postulato di Eudosso-Archimede

Date due grandezze omogenee, che non siano congruenti o nulle, esiste sempre una grandezza multipla della minore che supera la maggiore.

2. Le grandezze commensurabili e incommensurabili

Le grandezze commensurabili



Consideriamo i segmenti della figura a lato. Il segmento AB è sottomultiplo di CD, secondo il numero 3, e anche di EF, secondo il numero 5.
Si dice allora che CD ed EF, avendo un segmento sottomultiplo comune, sono segmenti **commensurabili**, così come le loro lunghezze.

In generale, diamo la seguente definizione.

Il termine **commensurabile** viene usato per grandezze che ammettono una comune «unità di misura».

DEFINIZIONE

Grandezze commensurabili

Due grandezze omogenee si dicono commensurabili se esiste una grandezza, omogenea con le due date, che sia loro sottomultipla comune.

In generale, date due grandezze A e B commensurabili, detta U la grandezza sottomultipla comune e detti m e n due numeri naturali tali che

$$U = \frac{1}{m}A, \qquad U = \frac{1}{n}B,$$

allora è possibile scrivere la relazione:

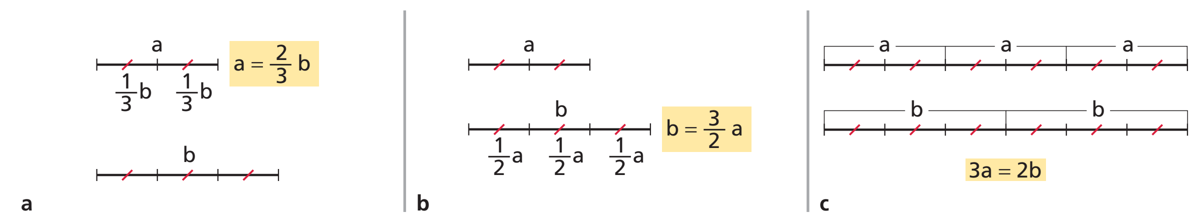
$$A = mU = m\left(\frac{1}{n}B\right) = \frac{m}{n}B.$$

Detto in altro modo, due grandezze A e B sono commensurabili se e solo se esiste un numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che:

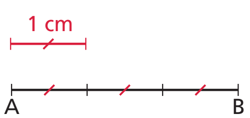
$$A = \frac{m}{n}B.$$

ESEMPIO

▼ **Figura 2** I segmenti a e b sono commensurabili.
Se $a = \frac{2}{3}b$, è anche:
$b = \frac{3}{2}a$. Inoltre, $3a = 2b$.



La misura di una grandezza commensurabile rispetto a un'altra



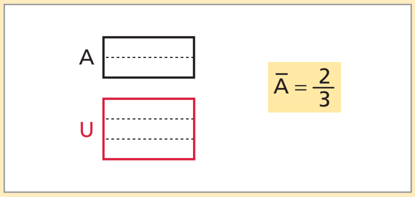
Se diciamo che la lunghezza di un segmento AB è 3 cm, significa che quel segmento è multiplo secondo il numero 3 di un segmento di lunghezza 1 cm. Diremo allora che 3 è la misura di AB rispetto al centimetro.

DEFINIZIONE

Misura di una grandezza rispetto a un'altra a essa commensurabile

Date due grandezze A e U commensurabili fra di loro, si definisce misura di A rispetto a U il numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che:

$$A = \frac{m}{n}U.$$



Indichiamo la misura di A con $\overline{A}$.

Come unità di misura delle **lunghezze** viene spesso usato il **metro** o la sua centesima parte, il **centimetro**.

Come unità di misura delle **aree** viene spesso usato il **metro quadrato** (m^2), che è l'area di un quadrato di lato 1 m, oppure il **centimetro quadrato** (cm^2), che è l'area di un quadrato di lato 1 cm.

Come unità di misura delle **ampiezze** degli angoli usiamo spesso il **grado** sessagesimale, che è la trecentosessantesima parte dell'angolo giro.

▸ La grandezza U viene detta **unità di misura**. L'unità di misura non deve essere identificata con 1 perché U è una grandezza, mentre 1 è la sua misura.

▸ Se la misura in centimetri della lunghezza di AB è 7,3, scriviamo:

$AB = 7{,}3$ cm,

oppure

$\overline{AB} = 7{,}3$.

Le grandezze incommensurabili

DEFINIZIONE

Grandezze incommensurabili

Due grandezze omogenee si dicono incommensurabili se non esiste una grandezza, omogenea con le due date, che sia loro sottomultipla comune.

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Atene, IV secolo a.C.

Nel sito: ▸ Scheda di lavoro

Platone racconta di un dialogo fra Socrate e un giovane schiavo.

«Socrate: "Il lato di questo quadrato è di due piedi; quanto sarà quello del quadrato avente superficie doppia?".
Schiavo: "Evidentemente il doppio, Socrate".»

(Dialogo tratto dal *Menone*, in Platone, *Dialoghi*)

LUCIA: «Lo schiavo afferma che, se si raddoppiano i lati di un quadrato, si ottiene un quadrato di superficie doppia».

GABRIELE: «Non c'è dubbio: è proprio così!».

▸ Non cadere in errore come Gabriele! Dato un quadrato, come puoi disegnare un quadrato di area doppia?

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

La diagonale e il lato del quadrato

TEOREMA

La diagonale di un quadrato e il suo lato sono segmenti incommensurabili.

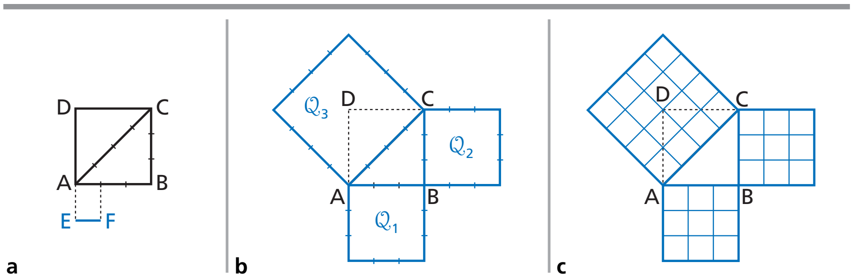
Ipotesi $ABCD$ è un quadrato. **Tesi** AB e AC non sono commensurabili.

DIMOSTRAZIONE Supponiamo per assurdo che il lato AB e la diagonale AC siano commensurabili. Deve allora esistere un loro sottomultiplo comune. Chiamiamo EF questo sottomultiplo e supponiamo che sia sottomultiplo di AB secondo il numero n, e di AC secondo il numero m; in altre parole, supponiamo che AB sia suddiviso in n parti e AC in m parti, tutte congruenti al segmento EF (figura 3*a*).

Consideriamo i quadrati Q_1, Q_2 e Q_3 con lati, rispettivamente, AB, BC e AC: segniamo su ognuno dei loro lati i punti di suddivisione in m o n parti (figura 3*b*).

Tracciando da ogni punto di suddivisione le perpendicolari ai lati, dividiamo i quadrati in altri quadrati tutti congruenti fra loro e di lato congruente a EF (figura 3*c*). I quadrati Q_1 e Q_2 sono composti ognuno da n^2 di questi quadrati, mentre Q_3 è composto da m^2 quadrati. Per esempio, se i lati di Q_1 sono divisi in 3 parti, in Q_1 ci sono 3 file di 3 quadrati, ossia $3 \cdot 3 = 3^2$ quadrati.

▶ Figura 3



Per il teorema di Pitagora, il numero dei quadrati in Q_3 deve essere uguale alla somma del numero dei quadrati di Q_1 e di Q_2, cioè:

$$m^2 = n^2 + n^2 = 2n^2.$$

Questa uguaglianza non può essere vera: se m^2 e $2n^2$ fossero uguali, scomposti in fattori primi essi dovrebbero contenere gli stessi fattori. Ma in m^2, che è il quadrato di un numero naturale, il fattore 2 o non c'è o è contenuto un numero pari di volte. Per la stessa ragione, in $2n^2$, ossia il doppio del quadrato di un numero naturale, il fattore 2 è contenuto un numero dispari di volte. Da ciò segue che m^2 e $2n^2$ non possono essere uguali.

Supponendo che la diagonale e il lato del quadrato siano commensurabili, siamo dunque giunti a un assurdo, perché l'uguaglianza $n^2 = 2m^2$ non è mai vera. *Quindi* la diagonale e il lato del quadrato sono incommensurabili.

Le lunghezze della diagonale e del lato di un quadrato non sono l'unico esempio di grandezze incommensurabili. Tra gli esempi notevoli, citiamo la lunghezza di una circonferenza e del relativo diametro, la lunghezza del lato e dell'altezza di un triangolo equilatero ecc.

La misura di una grandezza incommensurabile rispetto a un'altra

Se una grandezza A e l'unità di misura U sono incommensurabili, non esiste un loro sottomultiplo comune. In altre parole non esiste un numero razionale $\frac{m}{n}$ che sia la misura di A rispetto a U.

Tuttavia, è possibile estendere il concetto di misura anche a grandezze non commensurabili, purché si utilizzino i numeri reali anziché i razionali. In tal caso, se A e U sono grandezze incommensurabili, la misura di A rispetto a U è un numero irrazionale.

Per esempio, si può dimostrare che la misura della diagonale di un quadrato rispetto al lato è $\sqrt{2}$.

La continuità

POSTULATO

Postulato di continuità

Dato un insieme di grandezze omogenee, fissata un'unità di misura U e scelto un qualunque numero reale positivo o nullo, esiste sempre la grandezza la cui misura rispetto a U è il numero dato.

Formuliamo il postulato di continuità mediante insiemi *contigui* di grandezze.

Due classi di grandezze omogenee si dicono **contigue** se:

1. ogni grandezza della prima classe è minore di ogni grandezza della seconda;
2. comunque si fissi una grandezza A, omogenea alle date e piccola a piacere, si possono sempre trovare una grandezza della seconda classe e una della prima la cui differenza sia minore della grandezza A.

Il postulato può essere riscritto nel modo seguente:

date due classi contigue di grandezze esiste sempre un'unica grandezza omogenea alle date che non è minore di qualsiasi grandezza della prima classe e non è maggiore di qualsiasi grandezza della seconda classe.

Tale grandezza viene anche detta **elemento separatore** delle due classi contigue.

Le proprietà della misura

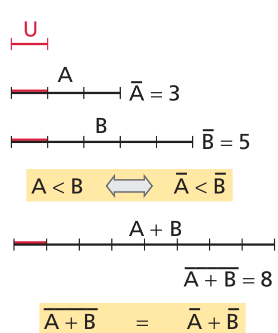
Ci limitiamo a enunciare le proprietà fondamentali relative alla misura di grandezze, illustrandole con esempi riferiti alle lunghezze dei segmenti.

1. Se due grandezze A e B sono disuguali, le loro misure $\overline{A}$ e $\overline{B}$ lo sono nello stesso senso (e viceversa), ossia:

$$A < B \Leftrightarrow \overline{A} < \overline{B}; \qquad A > B \Leftrightarrow \overline{A} > \overline{B}.$$

2. La misura della somma di due grandezze A e B è uguale alla somma delle loro misure $\overline{A}$ e $\overline{B}$:

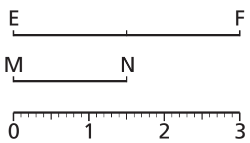
$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}.$$



3. I rapporti e le proporzioni fra grandezze

Il rapporto fra due grandezze omogenee

Dati un segmento EF e un segmento MN, è possibile determinare la misura di EF scegliendo MN come unità di misura.



ESEMPIO Se EF è un segmento lungo 3 cm e MN è un segmento lungo 1,5 cm, la misura di EF rispetto a MN è uguale a 2:

$$\overline{EF} = 2.$$

Si dice anche che il rapporto fra le lunghezze di EF e MN è:

$$(3 \text{ cm}) : (1{,}5 \text{ cm}) = 2.$$

DEFINIZIONE

Rapporto fra grandezze

Il **rapporto** fra due grandezze omogenee A e B è la misura di A rispetto a B, quando quest'ultima è scelta come grandezza unitaria.

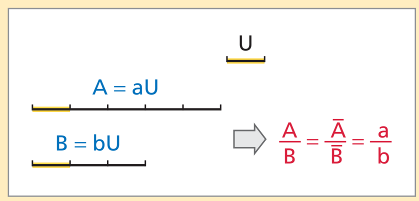
▶ Osserva che, in particolare, il rapporto fra due grandezze uguali è sempre uguale a 1, ossia:

$$\frac{A}{A} = 1 .$$

Tale rapporto viene indicato con $A : B$, oppure con $\frac{A}{B}$.
Si può dimostrare la seguente proprietà.

TEOREMA

Date due grandezze omogenee A e B, con B diversa dalla grandezza nulla, il loro rapporto $\frac{A}{B}$ è uguale al rapporto fra le loro misure $\overline{A}$ e $\overline{B}$, rispetto a una qualunque unità di misura.



▶ Questo teorema è importante perché permette di identificare il rapporto fra le lunghezze di due segmenti con il rapporto fra le loro misure. Considerazioni analoghe valgono per le ampiezze di due angoli o per le aree di due superfici.

Ipotesi
1. A e B grandezze omogenee;
2. $B \neq 0$;
3. $\overline{A} = a$, rispetto a U;
4. $\overline{B} = b$, rispetto a U;
5. $\frac{A}{B} = r$.

Tesi
1. $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$;
2. $\frac{A}{B}$ non dipende da U.

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo la tesi 1. Per l'ipotesi 3 risulta $A = aU$ e per l'ipotesi 5 risulta $A = rB$.

Uguagliando le due espressioni otteniamo $aU = rB$.

Per l'ipotesi 4 si ha $B = bU$ e, sostituendo quest'ultima espressione nell'uguaglianza precedente, si ha:

$$aU = r\,(bU), \text{ ossia } aU = rbU.$$

Essendo uguali le due grandezze aU e rbU, possiamo affermare che:

$$a = rb.$$

Dividiamo i due membri per b (*diverso da* 0 per l'ipotesi 2):

$$\frac{a}{b} = r.$$

Poiché $\frac{A}{B} = r$ per l'ipotesi 5 e $\frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{a}{b} = r$, possiamo concludere che il rapporto fra le grandezze A e B è uguale al rapporto fra le loro misure:

$$\frac{A}{B} = \frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{a}{b}.$$

Dimostriamo la tesi 2. Il rapporto $\frac{A}{B}$ che abbiamo calcolato non dipende dall'unità U scelta. Infatti, se consideriamo una diversa unità di misura, U', e le rispettive misure a' e b' di A e B rispetto a U', risulta:

$$A = a'U' \quad \text{e} \quad B = b'U'.$$

Essendo $\frac{A}{B} = r$ si ha:

$$a'U' = r\,(b'U'), \text{ da cui}$$

$$\frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{a'}{b'} = r.$$

Pertanto, il rapporto fra le grandezze A e B è uguale al rapporto fra le loro misure e tale rapporto non dipende dall'unità di misura scelta.

Le proporzioni fra grandezze

Dati quattro numeri reali, a, b, c e d ($b \neq 0$ e $d \neq 0$), una proporzione è l'uguaglianza fra i due rapporti:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

che si può anche scrivere:

$$a : b = c : d.$$

Estendiamo la definizione di proporzione anche alle grandezze.

DEFINIZIONE

Proporzione fra grandezze

Date due grandezze omogenee A e B, con B diversa dalla grandezza nulla, e altre due grandezze omogenee C e D, con D diversa dalla grandezza nulla, si chiama proporzione fra le grandezze assegnate l'uguaglianza fra il rapporto $\frac{A}{B}$ e il rapporto $\frac{C}{D}$.

Non è necessario che le quattro grandezze siano tutte omogenee fra di loro, basta che lo siano le prime due e le seconde due.

Anche una proporzione fra grandezze può essere scritta nei due modi equivalenti:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \qquad \text{e} \qquad A : B = C : D.$$

Inoltre, la terminologia usata per le proporzioni fra grandezze è del tutto identica a quella utilizzata per le proporzioni fra numeri.

$$\underbrace{A : \overbrace{B = C}^{\text{medi}} : D}_{\text{estremi}}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$
antecedenti: A, C; conseguenti: B, D

In particolare, la proporzione $A : B = C : D$ si legge: «A sta a B come C sta a D». In una proporzione fra grandezze si chiamano **medi** il secondo e il terzo termine, immediatamente a sinistra e a destra del segno di uguale, **estremi** il primo e l'ultimo elemento della proporzione.

In una proporzione fra grandezze gli **antecedenti** sono i numeratori dei due rapporti, i **conseguenti** sono i denominatori.

Diciamo poi che una proporzione fra tre grandezze omogenee è **continua** se ha i due medi uguali:

$$A : X = X : D.$$

▶ In questo caso le grandezze devono essere tutte omogenee fra di loro. Perché?

In questo caso la grandezza X è detta **media proporzionale** fra A e D.

Poiché il rapporto fra due grandezze omogenee è uguale al rapporto fra le loro misure, si può dimostrare il seguente teorema, che noi enunciamo solamente.

TEOREMA

Se due grandezze omogenee A e B e altre due grandezze omogenee C e D sono in proporzione, allora lo sono anche le loro misure, e viceversa.

Le proprietà delle proporzioni fra grandezze

È possibile estendere alcune proprietà delle proporzioni fra numeri alle proporzioni fra grandezze, purché ogni rapporto considerato sia fra grandezze omogenee.

PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI FRA GRANDEZZE

PROPRIETÀ	$A : B = C : D$ se e solo se
del comporre	$(A + B) : B = (C + D) : D$
dello scomporre	$(A - B) : B = (C - D) : D$ (con $A > B$ e, di conseguenza, $C > D$)
del permutare	$A : C = B : D$ (con A, B, C, D tutte omogenee fra loro)
dell'invertire	$B : A = D : C$
dei due multipli	$hA : hB = C : D$ $A : B = kC : kD$ (per ogni h, k reali non nulli)

▶ C'è un'altra proprietà riguardante le proporzioni, detta **proprietà fondamentale**. Essa stabilisce che il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.
Nel caso di proporzioni fra grandezze non possiamo però enunciarla, perché non abbiamo definito il «prodotto fra grandezze».

Vale inoltre la seguente proprietà relativa a una **catena di rapporti uguali** di grandezze tutte omogenee fra loro:

$$A : B = C : D = E : F \Rightarrow (A + C + E) : (B + D + F) = A : B.$$

Vale anche il **teorema della quarta proporzionale**, che ci limitiamo a enunciare.

TEOREMA

Date due grandezze omogenee A e B, e una terza grandezza C (A, B e C non nulle), esiste ed è unica una quarta grandezza D, omogenea a C, che con le prime tre grandezze forma la proporzione $A : B = C : D$.

Le grandezze direttamente proporzionali

Consideriamo l'insieme L delle lunghezze dei segmenti del piano e l'insieme P delle lunghezze dei perimetri dei quadrati del piano.

La corrispondenza fra i due insiemi L e P, che alla lunghezza di un segmento fa corrispondere la lunghezza del perimetro del quadrato costruito su quel segmento, è biunivoca perché:

- è iniettiva (scelte in L due diverse lunghezze, i corrispondenti perimetri sono diversi);
- è suriettiva (ogni perimetro dell'insieme P è il corrispondente di una sola lunghezza, pari a $\frac{1}{4}$ del perimetro).

Per studiare i rapporti fra le grandezze dei due insiemi in esame, costruiamo una tabella con alcune misure delle lunghezze dei segmenti e dei corrispondenti perimetri dei quadrati.

LUNGHEZZE DEI SEGMENTI E PERIMETRI DEI QUADRATI

LUNGHEZZA SEGMENTO	MISURA	LUNGHEZZA PERIMETRO	MISURA
s_1	0,2	p_1	0,8
s_2	0,5	p_2	2
s_3	1	p_3	4
s_4	1,5	p_4	6
s_5	2	p_5	8
s_6	2,5	p_6	10

Calcoliamo il rapporto fra due lunghezze di segmenti qualunque, per esempio fra s_3 e s_5:

$$\frac{s_3}{s_5} = \frac{1}{2}.$$

Il rapporto fra le lunghezze dei perimetri corrispondenti p_3 e p_5 è:

$$\frac{p_3}{p_5} = \frac{1}{2}.$$

Confrontando i due rapporti otteniamo:

$$\frac{s_3}{s_5} = \frac{p_3}{p_5}.$$

In generale, il rapporto fra le lunghezze di due segmenti è sempre uguale al rapporto fra le lunghezze dei perimetri dei quadrati corrispondenti. Date infatti due lunghezze s e s' in L e i rispettivi perimetri p e p' in P, risulta

$$p = 4s \quad \text{e} \quad p' = 4s',$$

pertanto, applicando la proprietà dei due multipli, si ottiene:

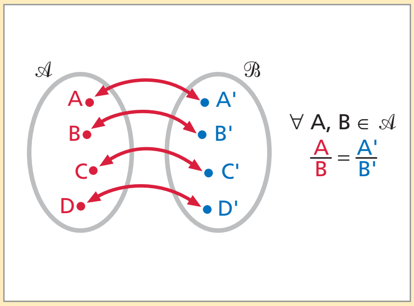
$$\frac{p}{p'} = \frac{4s}{4s'} = \frac{s}{s'}.$$

Nell'esempio precedente, $\mathcal{A} = L$ e $\mathcal{B} = P$.

DEFINIZIONE

Insiemi di grandezze direttamente proporzionali

Consideriamo due insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, ciascuno di grandezze omogenee, fra i quali esiste una corrispondenza biunivoca. $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono insiemi di grandezze direttamente proporzionali quando il rapporto fra due grandezze qualunque di $\mathcal{A}$ è uguale al rapporto fra le grandezze corrispondenti di $\mathcal{B}$.



Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono insiemi di grandezze proporzionali e le grandezze di $\mathcal{A}$ e di $\mathcal{B}$ sono omogenee, allora il rapporto fra due grandezze corrispondenti è costante e si chiama *rapporto di proporzionalità*:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \ldots = r.$$

Il criterio della proporzionalità diretta

Si può dimostrare il seguente teorema, di cui noi daremo solo l'enunciato.

TEOREMA

Consideriamo due insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, ciascuno di grandezze omogenee, fra i quali esiste una corrispondenza biunivoca. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ siano insiemi di grandezze direttamente proporzionali è che:

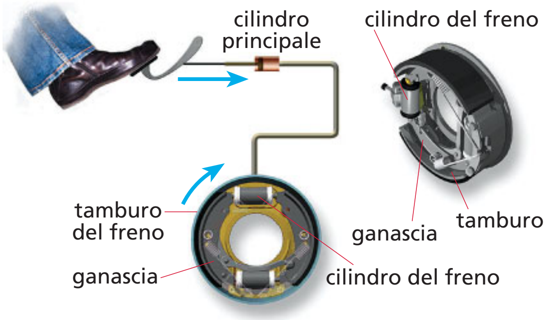
1. a grandezze uguali scelte nell'insieme $\mathcal{A}$ corrispondano grandezze uguali nell'insieme $\mathcal{B}$;
2. alla somma di due grandezze di $\mathcal{A}$ corrisponda la somma delle due grandezze corrispondenti in $\mathcal{B}$.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

ESPLORAZIONE: LA PROPORZIONALITÀ CHE FRENA

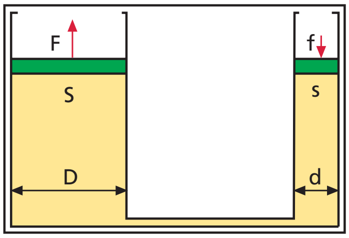
◄ Ci sono auto che possono correre anche fino alla velocità di 300 km/h. Come può bastare una leggera pressione sul pedale del freno per fermarle?

▼ Nella figura puoi osservare lo schema dei freni a tamburo.



Il torchio idraulico è un dispositivo che permette di amplificare o diminuire una forza data. Questa macchina è basata sulla legge di Pascal: la pressione esercitata su una superficie di un liquido si trasmette con uguale intensità su ogni altra superficie del liquido.

Prendiamo due cilindri pieni d'olio collegati da un tubo indeformabile e chiusi da due pistoni che hanno superfici S e s. Per la legge di Pascal la pressione esercitata sul pistone più piccolo si trasmette all'altro pistone. Poiché la pressione è data dal rapporto tra forza e superficie, si ha



$$\frac{f}{s} = \frac{F}{S},$$

ossia:

$$f : s = F : S$$
$$\downarrow$$
$$f : F = s : S.$$

Scegliendo opportunamente le dimensioni dei pistoni (s piccola e S grande), è quindi possibile, applicando una piccola forza f alla superficie s, ottenere una forza F molto più grande, per la proporzionalità diretta tra forze e superfici. Il funzionamento dei freni delle automobili si basa sul dispositivo chiamato «torchio idraulico».

La pressione esercitata dal piede sul pedale si trasmette attraverso il liquido del circuito idraulico ai pistoni. Questi premono le due ganasce contro il tamburo collegato alla ruota, che rallenta, per attrito, il suo movimento. Cessata la pressione, una molla riporta le ganasce nella loro posizione iniziale.

IN DIECI RIGHE

Scrivi con il computer una relazione sul torchio idraulico e rispondi alle seguenti domande:

- Quale deve essere il rapporto S/s per ottenere una forza $F = 4f$?
- E quale tra i due raggi?
- Che cosa significa che «il torchio idraulico può essere utilizzato sia come *moltiplicatore* che come *riduttore* di forze»?

Cerca nel web: torchio idraulico, freni.

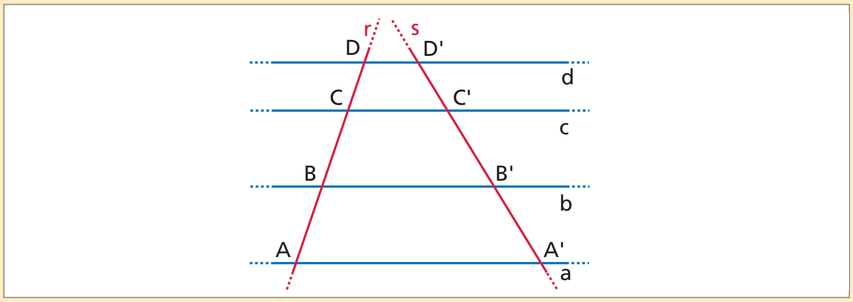
4. Il teorema di Talete

Per brevità, parliamo di proporzionalità fra segmenti per indicare la proporzionalità fra le loro lunghezze.

TEOREMA

Teorema di Talete

Se un fascio di rette parallele è intersecato da due trasversali, i segmenti (compresi fra rette parallele) che si formano sulla prima trasversale sono direttamente proporzionali ai segmenti (compresi fra le stesse rette parallele) che si formano sulla seconda trasversale.



Ipotesi $a \parallel b \parallel c \parallel d$. **Tesi** $AB : CD = A'B' : C'D'$.

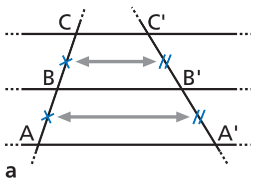
DIMOSTRAZIONE

Consideriamo i segmenti compresi fra rette parallele sulle trasversali *r* e *s*. Indichiamo con *R* l'insieme dei segmenti che stanno sulla retta *r* e con *S* l'insieme dei segmenti che stanno sulla retta *s*.

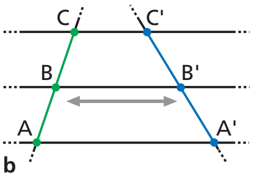
Stabiliamo una corrispondenza biunivoca associando a ogni segmento di *R* il segmento di *S* compreso fra le stesse parallele e viceversa.

Utilizziamo il criterio di proporzionalità diretta, controllando che siano verificate le due condizioni richieste:

1. a segmenti congruenti su *r* corrispondono segmenti congruenti su *s*, per il teorema del fascio di rette parallele (figura *a*);
2. alla somma di due segmenti su *r* corrisponde la somma dei segmenti corrispondenti su *s* (figura *b*):



a



b

$$
\begin{array}{ccccc}
AB & + & BC & = & AC \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
A'B' & + & B'C' & = & A'C'.
\end{array}
$$

Concludiamo che l'insieme dei segmenti individuati sulla trasversale *r* e l'insieme dei segmenti individuati sulla trasversale *s* sono insiemi di grandezze direttamente proporzionali. In particolare:

$$AB : CD = A'B' : C'D'.$$

Si può anche dimostrare il teorema inverso.

TEOREMA

Se su due rette r e r' si considerano rispettivamente due insiemi di punti ordinati e in corrispondenza biunivoca tali che

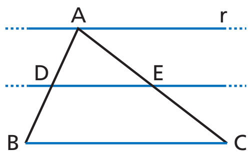
1. i segmenti aventi per estremi punti corrispondenti sono in proporzione,
2. le rette che congiungono due coppie di punti tra loro corrispondenti sono parallele,

allora tutte le rette congiungenti coppie di punti corrispondenti sono parallele.

La retta parallela a un lato di un triangolo

TEOREMA

Una retta parallela a un lato di un triangolo divide gli altri due lati, o i loro prolungamenti, in segmenti proporzionali.



Ipotesi $DE \parallel BC$. **Tesi** $AD : DB = AE : EC$.

DIMOSTRAZIONE

Tracciamo per A la retta r parallela a DE e BC. Le rette BC, DE e r costituiscono un fascio di rette parallele tagliate dalle trasversali AB e AC.

Per il teorema di Talete, possiamo scrivere la proporzione:

$$AD : DB = AE : EC.$$

Si può anche dimostrare il teorema inverso.

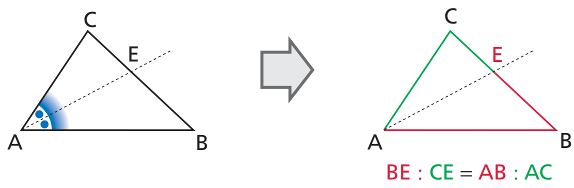
TEOREMA

Una retta che determina su due lati di un triangolo, o sui loro prolungamenti, segmenti proporzionali, è parallela al terzo lato.

Il teorema della bisettrice di un angolo interno di un triangolo

TEOREMA

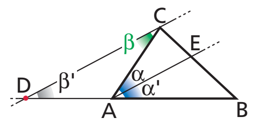
In un triangolo, la bisettrice di un angolo interno divide il lato opposto in parti direttamente proporzionali agli altri due lati.

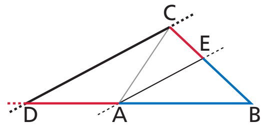


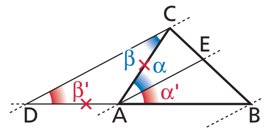
Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

Ipotesi 1. ABC è un triangolo qualunque; 2. AE è bisettrice dell'angolo interno $\hat{A}$.

Tesi $BE : CE = AB : AC$.







DIMOSTRAZIONE Indichiamo con α l'angolo $C\hat{A}E$ e con α′ l'angolo $B\hat{A}E$. Disegniamo la retta per C parallela alla bisettrice AE.

Prolunghiamo il lato BA fino a incontrare in D la parallela alla bisettrice. Indichiamo con β l'angolo $D\hat{C}A$ e con β′ l'angolo $A\hat{D}C$ (figura *a*).

Nel triangolo DBC la retta AE, essendo parallela al lato DC, divide gli altri due lati in parti direttamente proporzionali (figura *b*):

$$BE : CE = AB : DA.$$

Gli angoli α e β (figura *c*) sono alterni interni delle rette parallele AE e CD tagliate dalla trasversale AC, *quindi* sono congruenti.
Gli angoli α′ e β′ sono corrispondenti delle stesse rette parallele, tagliate dalla trasversale DB, *quindi* sono congruenti.
Poiché $\alpha \cong \alpha'$, per ipotesi, e abbiamo dimostrato che $\alpha \cong \beta$ e $\alpha' \cong \beta'$, risulta anche $\beta \cong \beta'$, *quindi* il triangolo ADC è isoscele sulla base DC. *Pertanto* $DA \cong AC$.

Nella proporzione $BE : CE = AB : DA$ possiamo quindi sostituire DA con AC:

$$BE : CE = AB : AC,$$

ossia la bisettrice divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.

Si può anche dimostrare il teorema inverso.

TEOREMA

Se in un triangolo un punto di un lato lo divide in parti direttamente proporzionali agli altri due lati, allora la congiungente questo punto con il vertice dell'angolo opposto è bisettrice di tale angolo.

5. Le aree dei poligoni

Da questo momento in poi, per alleggerire la notazione, indicheremo le grandezze e le loro misure allo stesso modo, cioè con lettere corsive e senza soprassegni. Di volta in volta, scriveremo esplicitamente se si tratta di grandezze o di misure.

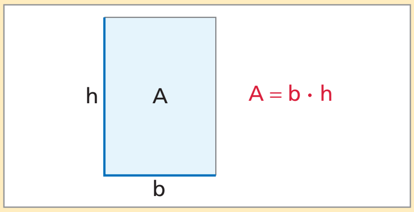
▶ La misura di un segmento AB continua a essere indicata con $\overline{AB}$.

L'area del rettangolo

TEOREMA

Area del rettangolo

La misura dell'area di un rettangolo è uguale al prodotto delle misure della base e dell'altezza.

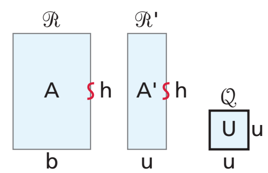


Ipotesi $\mathcal{R}$ è un rettangolo di base b, altezza h, area A. **Tesi** $A = b \cdot h$.

DIMOSTRAZIONE

Chiamiamo $\mathcal{Q}$ un quadrato il cui lato abbia per lunghezza l'unità di misura u. $\mathcal{Q}$ ha come area U, l'unità di misura delle aree. Inoltre, consideriamo un rettangolo $\mathcal{R}'$, di area A', che abbia base u e altezza h.
$\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ hanno altezze congruenti, *quindi* le loro aree sono proporzionali alle rispettive basi:

$$A : A' = b : u.$$



Pertanto, indicando allo stesso modo le rispettive misure, vale la proporzione:

$$A : A' = b : 1.$$

Applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni:

$$1 \cdot A = b \cdot A' \qquad \text{ossia} \qquad A = b \cdot A'.$$

La proporzione tra le misure è numerica. Di conseguenza, si può fare riferimento alla proprietà fondamentale.

$\mathcal{R}'$ e $\mathcal{Q}$ hanno basi congruenti, *quindi* le loro aree sono proporzionali alle rispettive altezze:

$$A' : U = h : u.$$

Considerando le loro misure:

$$A' : 1 = h : 1.$$

Applicando la proprietà fondamentale:

$$A' \cdot 1 = 1 \cdot h, \qquad \text{ossia} \qquad A' = h.$$

Poiché $A = b \cdot A'$ e $A' = h$, sostituendo, otteniamo:

$$A = b \cdot h.$$

Le aree di altri poligoni

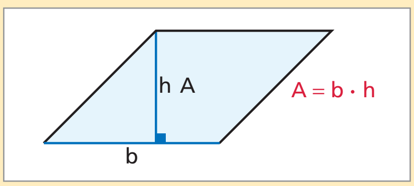
Dal teorema precedente e dai teoremi relativi all'equivalenza fra poligoni si ricavano i seguenti teoremi.

Per esempio, il teorema relativo all'area del parallelogramma si basa sul fatto che un parallelogramma è equivalente a un rettangolo con la base e l'altezza rispettivamente congruenti a quelle del parallelogramma.

TEOREMA

Area del parallelogramma

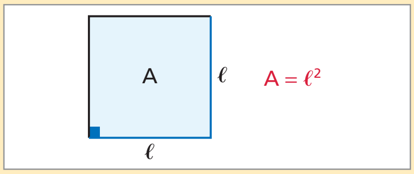
La misura dell'area di un parallelogramma è uguale al prodotto della misura di un suo lato e della misura dell'altezza relativa a esso.



TEOREMA

Area del quadrato

La misura dell'area di un quadrato è uguale al quadrato della misura del suo lato.

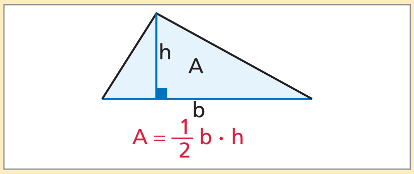


▸ Un quadrato può essere considerato un particolare rettangolo che ha base e altezza congruenti.

TEOREMA

Area del triangolo

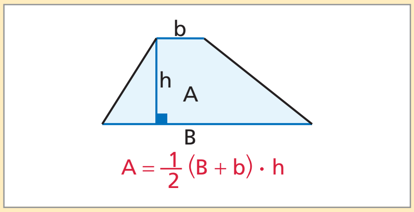
La misura dell'area di un triangolo è uguale al semiprodotto della misura della base per quella dell'altezza.



TEOREMA

Area del trapezio

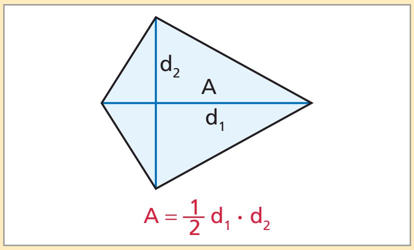
La misura dell'area di un trapezio è uguale al semiprodotto della misura della somma delle basi per quella dell'altezza.



TEOREMA

Area di un quadrilatero con le diagonali perpendicolari

La misura dell'area di un quadrilatero con le diagonali perpendicolari è uguale al semiprodotto delle misure delle diagonali.

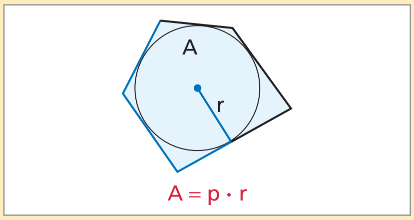


▸ Questo teorema vale in particolare per il rombo. Un quadrilatero con le diagonali perpendicolari può essere visto come la somma di due triangoli che hanno per base una stessa diagonale e per altezza due segmenti la cui somma è uguale all'altra diagonale.

TEOREMA

Area di un poligono circoscritto a una circonferenza

La misura dell'area di un poligono circoscritto a una circonferenza è uguale al prodotto della misura del semiperimetro del poligono per la misura del raggio della circonferenza.



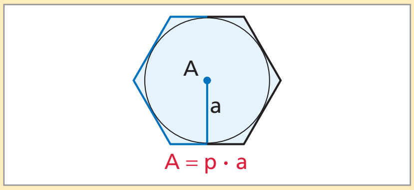
▸ Un poligono circoscritto a una circonferenza, infatti, è equivalente a un triangolo che ha base congruente alla somma dei lati del poligono e altezza congruente al raggio. Indicata con $2p$ la misura del perimetro e con r quella del raggio:

$$A = \frac{1}{2}(2p) \cdot r = p \cdot r.$$

TEOREMA

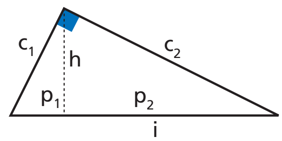
Area di un poligono regolare

La misura dell'area di un poligono regolare è uguale al prodotto della misura del semiperimetro del poligono per quella dell'apotema.



▸ Questo è un caso particolare del teorema precedente, poiché un poligono regolare ammette sempre la circonferenza inscritta, il cui raggio è l'apotema del poligono.

Le relazioni fra le misure degli elementi di un triangolo rettangolo



Dato un triangolo rettangolo, indichiamo con c_1 e c_2 le misure dei cateti, con i quella dell'ipotenusa, con h la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa, con p_1 e p_2 quelle delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

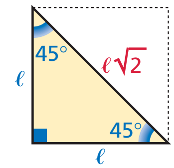
I teoremi relativi all'area del rettangolo e del quadrato ci permettono di scrivere i teoremi di Pitagora e di Euclide mediante relazioni fra queste misure.

Teorema di Pitagora:	$c_1^2 + c_2^2 = i^2$	
Primo teorema di Euclide:	$c_1^2 = p_1 \cdot i$	$c_2^2 = p_2 \cdot i$
Secondo teorema di Euclide:	$h^2 = p_1 \cdot p_2$	

A queste relazioni si può aggiungere quella che si ricava tenendo presente che la misura dell'area A del triangolo rettangolo può essere calcolata considerando come base l'ipotenusa oppure uno dei due cateti. Quindi la misura della doppia area del triangolo è uguale al prodotto di c_1 e c_2 e anche al prodotto di i e h:

$$2A = i \cdot h = c_1 \cdot c_2 .$$

I triangoli rettangoli con angoli di 45°



Ogni triangolo rettangolo con angoli di 45° è la metà di un quadrato.

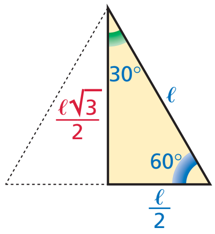
Se indichiamo con l la misura del lato del quadrato e con d quella della diagonale, applicando il teorema di Pitagora, troviamo:

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{l^2} \quad \rightarrow \quad d = l\sqrt{2}.$$

Viceversa, conoscendo la diagonale di un quadrato, è possibile ricavare il lato:

$$l = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad l = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

I triangoli rettangoli con angoli di 60° e di 30°



Ogni triangolo rettangolo con gli angoli di 60° e di 30° è la metà di un triangolo equilatero.

Detta l la misura del lato del triangolo e h quella dell'altezza, applicando il teorema di Pitagora, troviamo:

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4} l^2} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

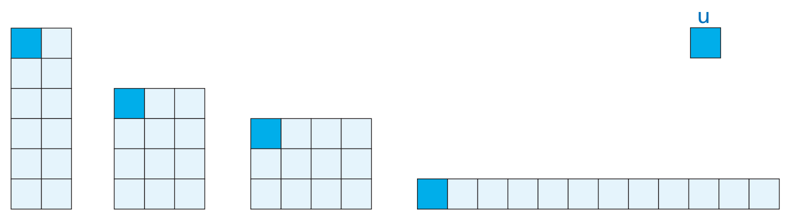
Viceversa, conoscendo l'altezza è possibile ricavare il lato:

$$l = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2h \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2h\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad l = \frac{2h\sqrt{3}}{3}.$$

La proporzionalità inversa

Consideriamo i rettangoli di un piano che hanno una stessa area prefissata. Per esempio, pensiamo a rettangoli la cui area misura 12 rispetto a una data unità di misura U, come quelli della figura 4.

▶ Figura 4



Chiamiamo B l'insieme delle lunghezze delle basi e H quello delle lunghezze delle altezze e consideriamo la corrispondenza biunivoca che a $b \in B$ associa $h \in H$, tali che il prodotto delle rispettive misure sia

$$b \cdot h = 12.$$

Dimostriamo che il rapporto fra le lunghezze di due basi è sempre uguale al reciproco del rapporto fra le lunghezze delle corrispondenti altezze. Date infatti due lunghezze b e b' di B e le corrispondenti lunghezze h e h' in H, considerando le rispettive misure, risulta $bh = 12$ e $b'h' = 12$, pertanto:

$$b = \frac{12}{h} \qquad \text{e} \qquad b' = \frac{12}{h'},$$

quindi:

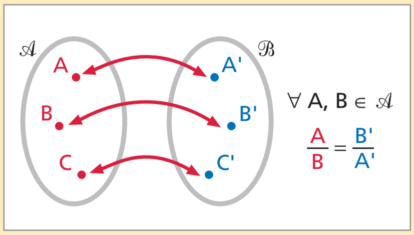
$$\frac{b}{b'} = \frac{\frac{12}{h}}{\frac{12}{h'}} = \frac{12}{h} \cdot \frac{h'}{12} = \frac{h'}{h}.$$

Diciamo allora che B e H sono insiemi di grandezze *inversamente proporzionali*.

DEFINIZIONE

Insiemi di grandezze inversamente proporzionali

Consideriamo due insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, ciascuno di grandezze omogenee, fra i quali esiste una corrispondenza biunivoca. $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono insiemi di grandezze inversamente proporzionali quando il rapporto fra due grandezze qualunque di $\mathcal{A}$ è uguale al reciproco del rapporto fra le grandezze corrispondenti di $\mathcal{B}$.

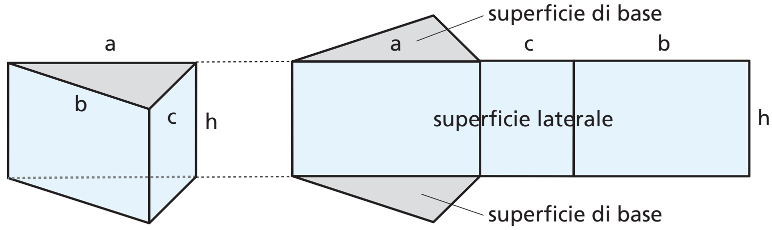


6. Le aree e i volumi dei poliedri

Le superfici dei poliedri

La superficie di un poliedro è la somma delle superfici di tutte le sue facce.

Immaginiamo di trasportare su un unico piano le facce che compongono il solido (figura 5).



◀ **Figura 5** Lo sviluppo su un piano della superficie di un poliedro.

La figura che si ottiene si chiama **sviluppo** della superficie poliedrica e permette lo studio delle aree delle superfici dei poliedri.

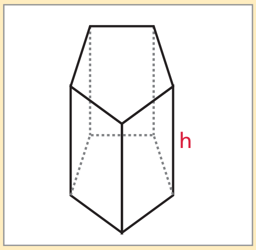
In particolare, studieremo alcuni solidi notevoli nei quali, essendo presenti una o due basi, si distinguono la superficie laterale, relativa alle sole facce laterali, e la superficie totale, che si ottiene aggiungendo le superfici delle basi alla superficie laterale.

I volumi dei poliedri

Nei solidi, si sceglie come unità di misura dei volumi quello di un cubo U che ha per spigolo il segmento di lunghezza u, unità di misura delle lunghezze.

Mediante i teoremi di equivalenza fra solidi che si possono dimostrare sulla base del principio di Cavalieri, si ottengono le seguenti formule, che ci limitiamo a enunciare insieme a quelle delle aree delle superfici.

Prisma retto



$$A_l = 2p \cdot h$$
$$A_t = A_l + 2A_b$$
$$V = A_b \cdot h$$

Ricordiamo che, date due grandezze omogenee A e U, si definisce misura di A rispetto a U il numero reale m tale che:

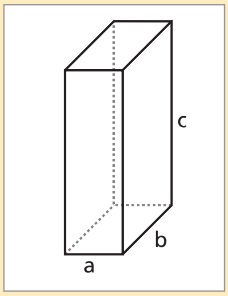
$$A = mU,$$

dove U rappresenta l'unità di misura fissata.

Simboli per le misure:

- A_t area della superficie totale;
- A_l area della superficie laterale;
- A_b area di base;
- V volume;
- $2p$ perimetro di base;
- h altezza del solido.

Parallelepipedo rettangolo



$A_b = ab$

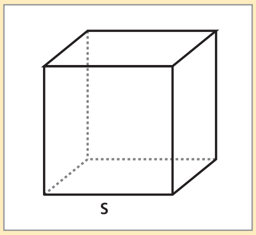
$A_l = 2(ac + bc)$

$A_t = 2(ac + ab + bc)$

$V = a \cdot b \cdot c$

Cubo

Indichiamo con s la misura dello spigolo.



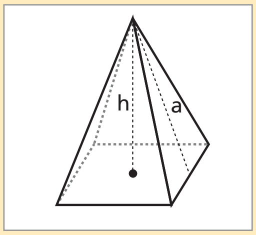
$A_b = s^2$

$A_t = 6s^2$

$V = s^3$

Piramide retta

Indichiamo con a la misura dell'apotema.



$A_l = p \cdot a$

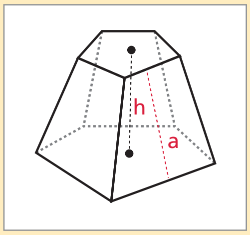
$A_t = A_l + A_b$

$V = \dfrac{1}{3} A_b \cdot h$

Tronco di piramide retta

Un tronco di piramide si ottiene considerando i punti di una piramide che stanno fra un piano parallelo alla base e la base stessa. Il solido così ottenuto ha due basi parallele fra loro.

Chiamiamo p e p' le misure dei semiperimetri delle basi e A_b e A'_b quelle delle aree delle due basi.



$A_l = (p + p') \cdot a$

$A_t = A_l + A_b + A'_b$

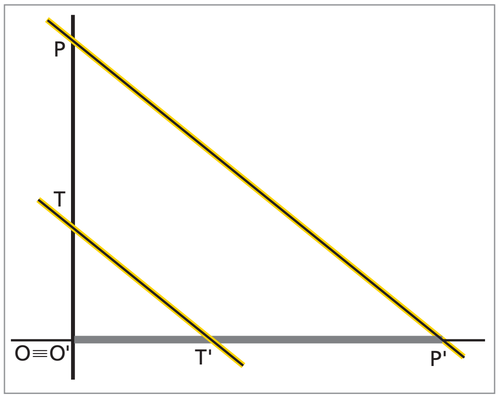
$V = \dfrac{1}{3} h\,(A_b + A'_b + \sqrt{A_b \cdot A'_b})$

Che misure!

…come si può misurare con un metro l'altezza di una piramide?

➜ **Il quesito completo a pag. G281**

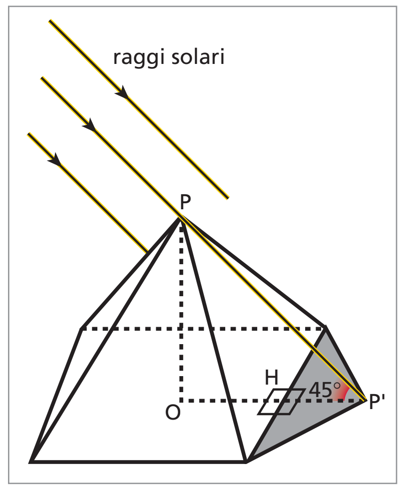
A causa dell'erosione, oggi la piramide è alta 137 m, ma al tempo della sua costruzione misurava una decina di metri in più.
Secondo la leggenda, il primo a misurare l'altezza della piramide di Cheope fu Talete, disponendo soltanto di una lunga corda e con l'aiuto dei raggi solari. Egli capì che bastava misurare la lunghezza della sua ombra in un particolare momento. Più precisamente, confrontando la propria altezza e la lunghezza della propria ombra, Talete intuì che, quando la misura della sua ombra fosse stata uguale alla sua statura, anche l'ombra della piramide sarebbe stata uguale alla rispettiva altezza. Questo perché i raggi solari si possono considerare tra loro paralleli.
Per comprendere il ragionamento rappresentiamo la sezione della piramide, Talete e i raggi solari su un piano (figura sotto).
Tenendo conto delle zone d'ombra che si formano, si ottengono i due triangoli rettangoli OPP' e $O'TT'$.



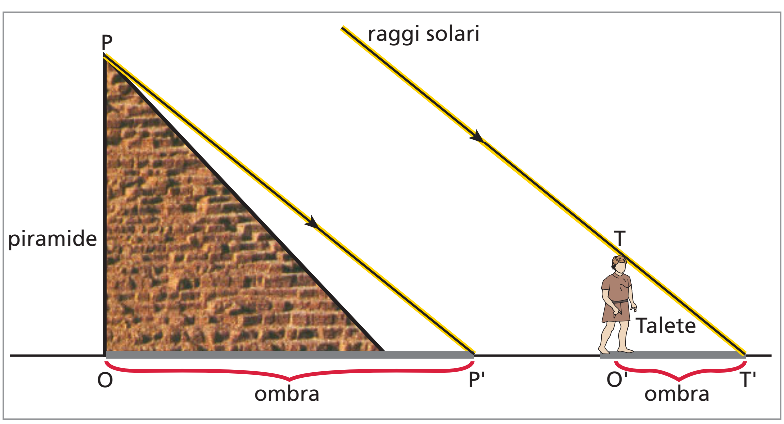
Disponiamo i due triangoli in modo che gli angoli retti coincidano. Applichiamo il teorema di Talete al fascio di rette parallele tagliate dalle trasversali OP e OP':

$$OT : OP = OT' : OP' \quad \to$$
$$\to \quad OT : OT' = OP : OP'.$$

In conclusione, come aveva sostenuto Talete, quando il rapporto $OT : OT'$ vale 1, anche $OP : OP'$ risulta uguale a 1.
Dal punto di vista pratico, la misura dell'ombra della piramide non è cosa semplice, poiché ciò che si può osservare è solo la parte dell'ombra esterna alla piramide.
La leggenda narra che Talete eseguì la misurazione in condizioni particolari, cioè quando la proiezione dei raggi solari sul suolo (OP') era perpendicolare al lato della base del solido, in modo che la parte nascosta dell'ombra fosse uguale alla metà del lato.



In tale situazione, l'ombra totale OP' si ottiene sommando la metà OH del lato di base con la distanza HP' tra l'estremo dell'ombra e il lato della base stessa.
Un'altra condizione che deve essere verificata è che i raggi colpiscano la terra con un angolo di 45°, in modo che l'ombra sia uguale all'altezza.
La collocazione geografica della piramide di Cheope e le conoscenze astronomiche permettono di affermare che tali requisiti sono soddisfatti solo in due momenti dell'anno: il 20 gennaio e il 21 novembre, a mezzogiorno.



LA TEORIA IN SINTESI

La misura e le grandezze proporzionali

1. Le classi di grandezze geometriche

Data la relazione di congruenza fra segmenti, la **lunghezza di un segmento** è la classe di equivalenza alla quale il segmento appartiene.
Data la relazione di congruenza fra angoli, chiamiamo **ampiezza** di un angolo la classe di equivalenza alla quale l'angolo appartiene. Data la relazione di equivalenza fra superfici piane, chiamiamo **area** di una superficie la classe di equivalenza alla quale la superficie appartiene.
Una **classe di grandezze geometriche omogenee** è un insieme di enti geometrici in cui sono possibili due operazioni, il **confronto** e l'**addizione**.
L'addizione deve essere interna all'insieme e godere delle proprietà *associativa* e *commutativa*. Deve inoltre esistere l'elemento neutro, ossia la *grandezza nulla*.

ESEMPIO Sono classi di grandezze omogenee l'insieme delle lunghezze dei segmenti e quello delle aree delle superfici piane.

Una grandezza B è **multipla** di una grandezza A secondo il numero naturale n se:

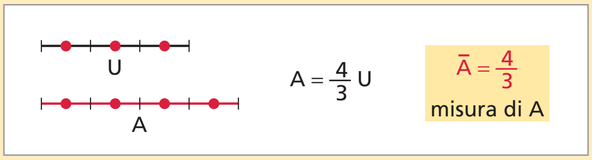
- B è somma di n grandezze uguali ad A, se $n > 1$;
- B è uguale ad A, se $n = 1$;
- B è uguale alla grandezza nulla, se $n = 0$.

Se una grandezza B è multipla di una grandezza A secondo n (con $n \neq 0$), diciamo che A è **sottomultipla** di B secondo n.

ESEMPIO $A = 2B$: A è multipla di B secondo 2;
$B = \frac{1}{2}A$: B è sottomultipla di A secondo 2.

2. Le grandezze commensurabili e incommensurabili

Due grandezze omogenee sono **commensurabili** se esiste una grandezza che sia loro sottomultipla comune.
Date due grandezze A e U commensurabili fra loro, la **misura di A rispetto a U** è il numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che $A = \frac{m}{n}U$. La grandezza U viene detta **unità di misura**.



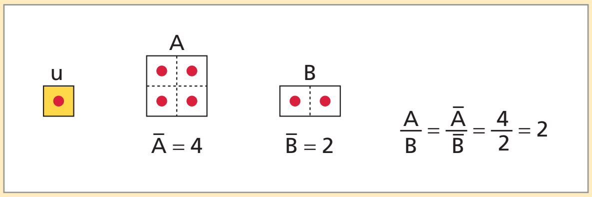
Due grandezze omogenee sono **incommensurabili** se non esiste una grandezza, omogenea alle due date, che sia loro sottomultipla comune.

ESEMPIO Le lunghezze della diagonale e del lato di un quadrato sono grandezze incommensurabili.

Date due grandezze A e U incommensurabili fra loro, la **misura di A rispetto a U** è un numero irrazionale.

3. I rapporti e le proporzioni fra grandezze

Il **rapporto** fra due grandezze omogenee A e B, con B diversa dalla grandezza nulla, è la misura di A rispetto a B e si indica con $A : B$, oppure con $\frac{A}{B}$.
Il rapporto fra due grandezze omogenee A e B è uguale al rapporto fra le loro misure.



Date due grandezze omogenee A e B e altre due grandezze omogenee C e D, si chiama **proporzione** fra le grandezze l'uguaglianza fra il rapporto $\frac{A}{B}$ e il rapporto $\frac{C}{D}$ e si scrive $A : B = C : D$.

Data una **catena di rapporti uguali** di grandezze tutte omogenee fra loro, si ha:

$$A : B = C : D = E : F \Rightarrow (A + C + E) : (B + D + F) = A : B.$$

PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI FRA GRANDEZZE	
PROPRIETÀ	**$A : B = C : D$ se e solo se**
del comporre	$(A + B) : B = (C + D) : D$
dello scomporre	$(A - B) : B = (C - D) : D$ (con $A > B$ e, di conseguenza, $C > D$)
del permutare	$A : C = B : D$ (con A, B, C, D tutte omogenee fra loro)
dell'invertire	$B : A = D : C$
dei due multipli	$hA : hB = C : D$ $A : B = kC : kD$ (per ogni h, k reali non nulli)

Due insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, ciascuno di grandezze omogenee, fra i quali esiste una corrispondenza biunivoca, sono **insiemi di grandezze direttamente proporzionali** quando il rapporto fra due grandezze qualunque di $\mathcal{A}$ è uguale al rapporto fra le grandezze corrispondenti di $\mathcal{B}$.

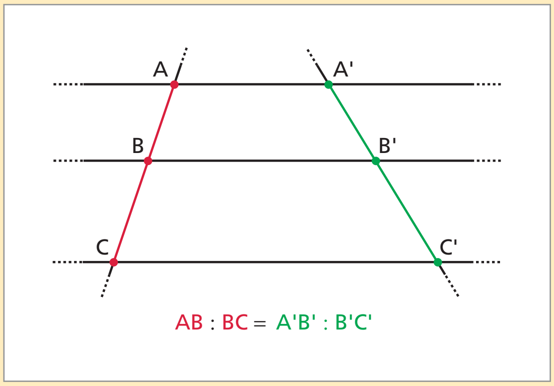
Criterio di proporzionalità diretta. Condizione necessaria e sufficiente affinché due insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, ciascuno di grandezze omogenee, fra i quali esiste una corrispondenza biunivoca, siano insiemi di grandezze direttamente proporzionali è che:

1. a grandezze uguali scelte nell'insieme $\mathcal{A}$ corrispondano grandezze uguali nell'insieme $\mathcal{B}$;

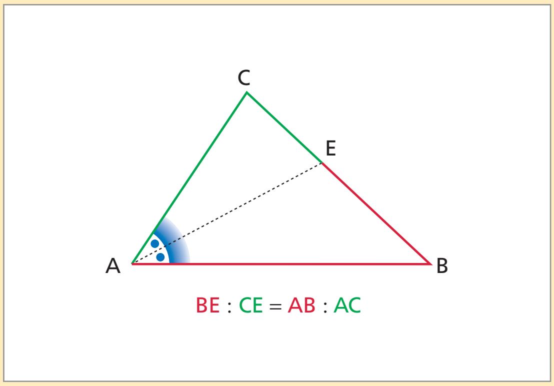
2. alla somma di due grandezze di $\mathcal{A}$ corrisponda la somma delle due grandezze corrispondenti in $\mathcal{B}$.

4. Il teorema di Talete

Teorema di Talete. Dato un fascio di rette parallele intersecato da due trasversali, i segmenti che si formano su una trasversale sono direttamente proporzionali ai segmenti corrispondenti che si formano sull'altra trasversale.



Teorema della bisettrice di un angolo interno di un triangolo. In un triangolo la bisettrice di un angolo interno divide il lato opposto in parti direttamente proporzionali agli altri lati.



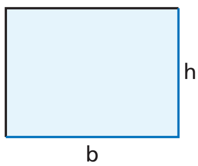
Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

5. Le aree dei poligoni

Utilizzando la teoria della proporzionalità fra grandezze e la teoria dell'equivalenza di superfici piane, troviamo le formule per calcolare la **misura delle aree** di alcune figure.

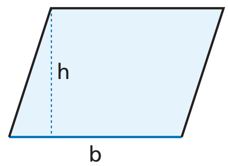
Le lettere b, h, ℓ, ecc. indicano le misure dei segmenti corrispondenti. A indica la misura dell'area.

Rettangolo



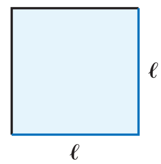
$A = b \cdot h$

Parallelogramma



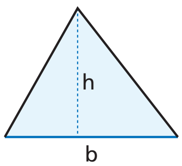
$A = b \cdot h$

Quadrato



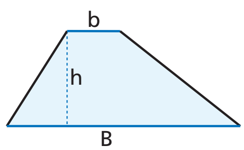
$A = \ell^2$

Triangolo



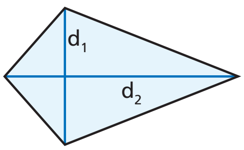
$A = \frac{1}{2} b \cdot h$

Trapezio



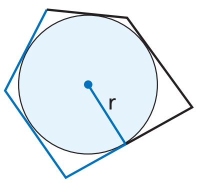
$A = \frac{1}{2}(B + b) \cdot h$

Quadrilatero con diagonali perpendicolari (in particolare rombo)



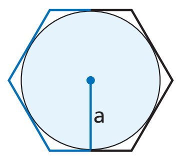
$A = \frac{1}{2}(d_1 \cdot d_2)$

Poligono circoscritto a una circonferenza



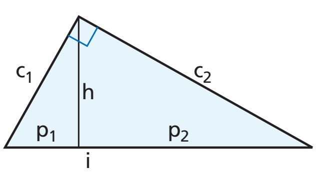
$A = p \cdot r$

Poligono regolare



$A = p \cdot a$

Mediante la misura delle aree di rettangoli e quadrati scriviamo le relazioni che esprimono, in un triangolo rettangolo, il **teorema di Pitagora**, i due **teoremi di Euclide** e l'**area del triangolo**.
Possiamo inoltre esprimere alcune relazioni che valgono nei **triangoli rettangoli con angoli di 45° e con angoli di 30° e 60°**.

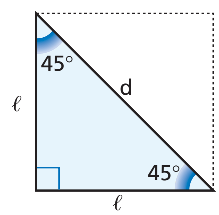


Teorema di Pitagora
$c_1^2 + c_2^2 = i^2$

Primo teorema di Euclide
$c_1^2 = p_1 \cdot i$
$c_2^2 = p_2 \cdot i$

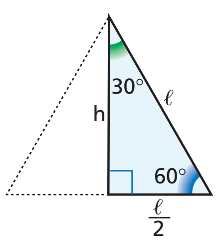
Secondo teorema di Euclide
$h^2 = p_1 \cdot p_2$

Area del triangolo
$2A = c_1 \cdot c_2 = i \cdot h$



$d = \ell\sqrt{2}$

$\ell = \frac{d\sqrt{2}}{2}$



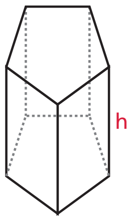
$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$\ell = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$

Due insiemi $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$, ciascuno di grandezze omogenee, fra i quali esiste una corrispondenza biunivoca, sono **insiemi di grandezze inversamente proporzionali** quando il rapporto fra due grandezze qualunque di $\mathscr{A}$ è uguale al reciproco del rapporto fra le grandezze corrispondenti di $\mathscr{B}$.

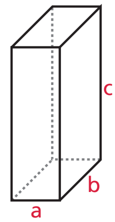
6. Le aree e i volumi dei poliedri

PRISMA RETTO



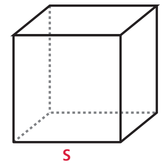
$A_\ell = 2p \cdot h$
$A_t = A_\ell + 2A_b$
$V = A_b \cdot h$

PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO



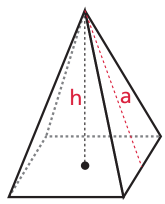
$A_\ell = 2(ac + bc)$
$A_t = 2(ac + ab + bc)$
$V = a \cdot b \cdot c$

CUBO



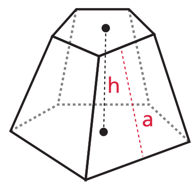
$A_t = 6s^2$
$V = s^3$

PIRAMIDE RETTA



$A_\ell = p \cdot a$
$A_t = A_\ell + A_b$
$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$

TRONCO DI PIRAMIDE RETTA



$A_\ell = (p + p') \cdot a$
$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$
$V = \frac{1}{3} h\,(A_b + A'_b + \sqrt{A_b \cdot A'_b})$

1. Le classi di grandezze geometriche

Teoria a pag. G281

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 Spiega qual è la differenza fra un segmento e la sua lunghezza.

2 Considera l'insieme degli archi di una circonferenza e introduci il concetto di lunghezza di un arco.

3 Considera gli angoli al centro di una circonferenza e definisci per questi il concetto di ampiezza.

4 **VERO O FALSO?**

a) L'insieme delle ampiezze degli angoli acuti è una classe di grandezze omogenee. V F
b) L'insieme delle lunghezze degli archi di una stessa circonferenza è un insieme di grandezze omogenee. V F
c) Le lunghezze dei segmenti e le aree delle superfici sono grandezze omogenee. V F
d) L'insieme delle ampiezze degli angoli al centro di una stessa circonferenza non è un insieme di grandezze omogenee. V F
e) La lunghezza di una circonferenza è multipla di quella del suo raggio. V F

ESERCIZI

5 Fai vedere con un esempio che la somma di due lunghezze di segmenti non dipende dai segmenti scelti come rappresentanti delle lunghezze.

6 Verifica le proprietà commutativa e associativa dell'addizione di aree delle superfici piane e l'esistenza dell'elemento neutro.

I multipli e i sottomultipli

Nel sito: ▶ 5 esercizi di recupero

Negli esercizi seguenti sono indicate delle relazioni fra le lunghezze *a* e *b* di due segmenti. Disegna i due segmenti e, quando è possibile, esprimi a parole la relazione usando i termini «multipla» e «sottomultipla» secondo un numero naturale diverso da 0.

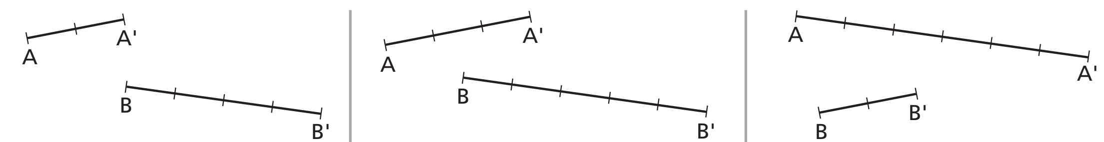
7 $a = 3b$; $\quad b = 4a$; $\quad b = 1a$; $\quad a = \frac{1}{5}b$.

8 $a = \frac{3}{4}b$; $\quad a = \frac{7}{3}b$; $\quad b = \frac{5}{6}a$.

9 $a = 0{,}1\,b$; $\quad b = 3{,}2\,a$; $\quad a = 0{,}5\,b$.

10 $2a = 3b$; $\quad 5b = 7a$; $\quad 6a = 5b$.

11 COMPLETA Nella figura sono rappresentati il segmento AA' di lunghezza a e il segmento BB' di lunghezza b. Scrivi la relazione fra le due lunghezze e traduci la relazione in una frase.



a .... **b** .... **c** ....

Le frasi che seguono sono riferite a due grandezze *A* e *B*. Per ognuna di esse scrivi la relazione fra *A* e *B* e poi fai dei disegni riferiti a lunghezze che ne rappresentino il significato.

12
a) A è multipla di B secondo 4;
b) A è sottomultipla di B secondo 3;
c) A è sottomultipla secondo 2 della multipla di B secondo 5;
d) A è multipla secondo 3 della sottomultipla di B secondo 4.

13
a) La grandezza multipla secondo 3 di A è uguale alla multipla secondo 2 di B;
b) la grandezza multipla secondo 4 di A è uguale alla sottomultipla secondo 2 di B;
c) la grandezza sottomultipla secondo 5 di A è uguale alla sottomultipla secondo 7 di B.

2. Le grandezze commensurabili e incommensurabili

→ Teoria a pag. G284

RIFLETTI SULLA TEORIA

14 VERO O FALSO?

a) Due segmenti commensurabili hanno un segmento multiplo in comune. V F
b) Due grandezze commensurabili possono non essere omogenee. V F
c) Le lunghezze dei segmenti e le aree delle superfici *non* sono grandezze omogenee fra loro. V F
d) Se $A = \frac{2}{3}B$, allora A e B non sono grandezze commensurabili. V F

15 VERO O FALSO?

a) Condizione necessaria affinché due grandezze siano incommensurabili è che siano omogenee. V F
b) La lunghezza del lato di un esagono regolare e del relativo apotema sono grandezze incommensurabili. V F
c) Se due classi di grandezze omogenee sono contigue, allora ogni grandezza della prima classe è minore di ogni grandezza della seconda. V F
d) La misura della somma di due grandezze è minore della somma delle loro misure. V F

ESERCIZI

Le grandezze commensurabili

ESERCIZIO GUIDA

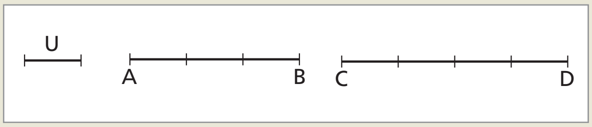
16 Siano AB e CD due segmenti tali che $AB = \frac{3}{4}CD$. Esprimiamo i due segmenti in funzione di un opportuno sottomultiplo comune U e poi li rappresentiamo graficamente.

La relazione $AB = \frac{3}{4}CD$ ha il seguente significato: CD è diviso in 4 parti congruenti e AB è uguale a 3 di queste parti. Sia U un segmento congruente a una di queste parti. Poiché U è un sottomultiplo comune di entrambi i segmenti, possiamo scegliere U come unità di misura.

Quindi le relazioni richieste sono:

$AB = 3U$; $CD = 4U$.

Rappresentando U come il lato del quadretto del foglio, il disegno dei due segmenti è il seguente:



Osserviamo che U è il più grande sottomultiplo comune di AB e CD, e che esistono infiniti altri sottomultipli comuni. Per esempio, con:

$$U' = \frac{U}{2}, \quad \text{ossia} \quad U = 2U',$$

abbiamo:

$$AB = 3U = 3 \cdot (2U') = 6U';$$

$$CD = 4U = 4 \cdot (2U') = 8U'.$$

Esprimi in funzione di un segmento U, sottomultiplo comune, i segmenti legati fra loro dalle seguenti relazioni e fornisci una rappresentazione grafica.

17 $AB = \frac{3}{5}CD$; $HL = \frac{6}{7}EF$; $PO = \frac{3}{8}MN$.

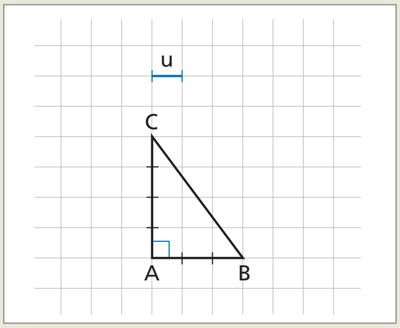
18 $3CD = 2AB$; $EF = 3GH$; $5MN = 4PQ$.

19 $6CD = 4EF$; $2AB = 5MN$; $\frac{2}{3}QP = \frac{3}{4}RS$.

20 $\frac{1}{2}MN = \frac{3}{8}CD$; $\frac{2}{5}OR = \frac{6}{7}PQ$.

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

21 In un triangolo rettangolo un cateto è $\frac{3}{4}$ dell'altro. Dimostra che l'ipotenusa è commensurabile con entrambi i cateti.



Ipotesi 1. ABC è un triangolo ....;
2. $AB \cong \frac{3}{4} AC$.

Tesi 1. BC commensurabile con AC;
2. BC commensurabile con ... .

Dimostrazione

- *Scegli l'unità di misura U e scrivi i cateti in funzione di U.*
  Detta U l'unità di misura, coincidente con la lunghezza del lato di un quadratino del foglio, risulta $AB = 3U$ e $AC =$ ...... U.
- *Scrivi anche l'ipotenusa in funzione di U.*
  Nel quadrato di lato AB ci sono $3^2 = 9$ quadrati di lato U.
  Nel quadrato di lato AC ci sono ...... = ... quadrati di lato U.
  Per il teorema di .... nel quadrato di lato BC ce ne sono $3^2 + \ldots = \ldots$. *Quindi*, $BC = \ldots U$.
- *Dimostra la tesi.*
  Poiché U è sottomultipla comune delle lunghezze dell'ipotenusa e dei ...., l'ipotenusa è .... con i cateti.

22 In un triangolo rettangolo un cateto è $\frac{5}{12}$ dell'altro. Dimostra che l'ipotenusa è commensurabile con entrambi i cateti.

23 In un triangolo rettangolo un cateto è $\frac{7}{25}$ dell'ipotenusa. Dimostra che i due cateti sono fra loro commensurabili.

24 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è $\frac{41}{9}$ di un cateto. Dimostra che l'ipotenusa è commensurabile anche con l'altro cateto.

25 In un rettangolo la base è $\frac{8}{15}$ dell'altezza. Dimostra che la diagonale è commensurabile sia con la base sia con l'altezza.

La misura di una grandezza commensurabile rispetto a un'altra

ESERCIZIO GUIDA

26 Dati i segmenti AB, CD ed EF, sapendo che $AB = \frac{3}{4} CD + 3EF$ e $\frac{3}{2} CD = 4EF$, calcoliamo la misura di AB rispetto a EF.

Dalla seconda relazione ricaviamo CD, dividendo i due membri per $\frac{3}{2}$:

$$\frac{\cancel{\frac{3}{2}} CD}{\cancel{\frac{3}{2}}} = \frac{4EF}{\frac{3}{2}}$$

$$CD = \frac{2}{3}(4EF) = \frac{8}{3} EF.$$

Sostituiamo nella prima relazione:

$$AB = \frac{3}{4}\left(\frac{8}{3} EF\right) + 3EF = 2EF + 3EF = 5EF.$$

La misura di AB rispetto a EF è:

$$\overline{AB} = 5.$$

27 Date le relazioni

$$AB = 2CD + \frac{1}{4}EF, \qquad \frac{4}{3}CD = \frac{1}{2}EF,$$

calcola la misura di AB rispetto a EF.

28 Calcola la misura di AB rispetto a CD, sapendo che $3AB = 2EF$ e $5CD = 3EF$.

29 Date le relazioni

$$AB = \frac{4}{5}CD + \frac{2}{3}EF, \qquad \frac{3}{2}CD = \frac{1}{4}EF,$$

calcola la misura di AB rispetto a CD.

30 Valgono le relazioni: $7AB = 6CD$; $14AB = 3EF$. Calcola la misura di CD rispetto a EF.

31 Dato un segmento AB di lunghezza $6l$, calcola la misura di AB rispetto alle seguenti unità di misura: l, $3l$, $\frac{1}{2}l$.

32 Il segmento AB è lungo $2a$. Scrivi la misura di AB rispetto alle unità di misura: a, $2a$, $\frac{1}{2}a$.

33 La lunghezza del segmento CD è $\frac{1}{2}u$. Scrivi la misura di CD rispetto alle unità di misura: u, $2u$, $\frac{3}{2}u$.

34 Vale la seguente relazione: $EF = \frac{2}{3}x$. Scrivi la misura di EF rispetto alle unità di misura: $\frac{1}{3}x$, $\frac{1}{2}x$, $4x$.

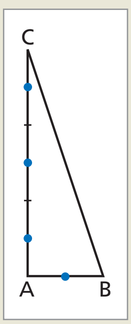
35 Sapendo che $GH = \frac{1}{2}y$, calcola la misura di GH rispetto alle unità di misura: y, $2y$, $\frac{1}{4}y$.

36 Sia $LM = x + y$. Scrivi la misura di LM rispetto alle unità di misura: $x + y$, $2x + 2y$, $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$.

Le grandezze incommensurabili

ESERCIZIO GUIDA

37 In un triangolo rettangolo un cateto è il triplo dell'altro. Dimostriamo che l'ipotenusa è incommensurabile con entrambi i cateti.



Ipotesi 1. ABC è un triangolo rettangolo;
2. $AC \cong 3AB$.

Tesi 1. BC incommensurabile con AB;
2. BC incommensurabile con AC.

Supponiamo che il triangolo sia rettangolo in A e che, fra i cateti AB e AC, valga la relazione $AC = 3AB$.
Ragioniamo per assurdo. Se l'ipotenusa fosse commensurabile con i cateti dovrebbe esistere un sottomultiplo comune U tale che:

$BC = mU$;
$AB = nU$;
$AC = 3\,AB = 3nU$.

I quadrati costruiti sui tre lati sarebbero costituiti rispettivamente di m^2, n^2 e $(3n)^2 = 9n^2$ quadrati di lato U.
Per il teorema di Pitagora dovrebbe essere:

$n^2 + 9n^2 = m^2$;
$10n^2 = m^2$;
$2 \cdot 5 \cdot n^2 = m^2$.

In n^2 il fattore 2 è contenuto un numero pari di volte, quindi nel membro di sinistra il fattore 2 è contenuto un numero *dispari* di volte.

In m^2 il fattore 2 è contenuto un numero *pari* di volte, quindi il membro di destra non può essere uguale a quello di sinistra.

Considerazioni analoghe si possono fare per il fattore 5.

Dalla supposizione iniziale siamo giunti a un assurdo, quindi l'ipotenusa non è commensurabile con i cateti.

38 Un triangolo rettangolo ha i due cateti di uguale lunghezza. Dimostra che l'ipotenusa è incommensurabile con i cateti.

39 In un rettangolo la base è un quarto dell'altezza. Dimostra che la diagonale è incommensurabile sia con la base sia con l'altezza.

40 Dimostra che il lato e l'altezza di un triangolo equilatero sono incommensurabili.

41 Fra le grandezze A, B e C valgono le seguenti relazioni:

$$A = \sqrt{2}B; \qquad B = \sqrt{2}C.$$

A e B sono incommensurabili? E B e C? E A e C?

42 Fra le lunghezze a, b e c di tre segmenti valgono le seguenti relazioni:

$$a = \sqrt{5}b; \qquad \sqrt{3}a = c.$$

a e b sono incommensurabili? E b e c? E a e c?

43 Date le relazioni fra le lunghezze a, b e c di tre segmenti:

$$a = \sqrt{3}b, \qquad b = \sqrt{2}c,$$

determina la misura di a rispetto a c.

3. I rapporti e le proporzioni fra grandezze

Teoria a pag. G288

RIFLETTI SULLA TEORIA

44 VERO O FALSO?

a) Affinché la proporzione $A : B = C : D$ sia valida, A, B, C e D devono essere grandezze omogenee. V F

b) La scrittura $\frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{\overline{C}}{\overline{D}}$ è priva di significato. V F

c) Se $A : B = C : D$, allora $B : A = D : C$ per la proprietà del permutare. V F

d) Date tre grandezze omogenee p, q e r, esiste sempre una quarta grandezza s, omogenea alle tre date, che forma la proporzione $p : q = r : s$. V F

ESERCIZI

Le proporzioni fra grandezze

ESERCIZIO GUIDA

45 Date quattro grandezze A, B, C e D, non nulle e tali che $2A = 3B$ e $2C = 3D$, dimostriamo che vale la proporzione $A : B = C : D$.

Ipotesi 1. $2A = 3B$;
2. $2C = 3D$.

Tesi $A : B = C : D$.

Dalle relazioni fra le grandezze passiamo alle corrispondenti relazioni fra le loro misure:

$$2\overline{A} = 3\overline{B}; \qquad 2\overline{C} = 3\overline{D}.$$

Dividiamo entrambi i membri della prima uguaglianza per $2\overline{B}$:

$$\frac{2\overline{A}}{2\overline{B}} = \frac{3\overline{B}}{2\overline{B}} \quad \rightarrow \quad \frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{3}{2}.$$

Dividiamo entrambi i membri della seconda uguaglianza per $2\overline{D}$:

$$\frac{2\overline{C}}{2\overline{D}} = \frac{3\overline{D}}{2\overline{D}} \quad \rightarrow \quad \frac{\overline{C}}{\overline{D}} = \frac{3}{2}.$$

Poiché sono uguali i rapporti fra le misure di A, B, C, e D, sono uguali anche i rapporti fra le grandezze, quindi:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \quad \text{ossia} \quad A : B = C : D.$$

46 Date quattro grandezze A, B, C e D non nulle e tali che $3A = 4B$ e $3C = 4D$, dimostra che vale la proporzione $A : B = C : D$.

47 Come nell'esercizio precedente, ma con le relazioni:

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{5} \quad \text{e} \quad \frac{C}{2} = \frac{D}{5}.$$

48 A, B, C e D sono quattro grandezze. Dimostra che, se $A : B = C : D$, allora è vero che $3A : 7B = 3C : 7D$.

49 Dimostra che, se per quattro grandezze vale la proporzione $4A : 9B = 4C : 9D$, allora vale anche la proporzione $A : B = C : D$.

Le proprietà delle proporzioni fra grandezze

50 A, B, C e D (B e D non nulle) sono grandezze omogenee, h e k sono numeri naturali diversi da 0. Dimostra che, se $hA = kB$ e $hC = kD$, allora $A : B = C : D$.

51 A e B sono grandezze omogenee (B non nulla), n è un numero naturale diverso da 0 e da 1. Dimostra che $A : B = nA : nB$.

52 A, B, C, D, F e G sono grandezze omogenee (F, G, B e D non nulle). Dimostra che, se $A : F = C : G$ e $F : B = G : D$, allora $A : B = C : D$.

53 A, B, C, D, F e G sono grandezze omogenee (B, D, F e G non nulle). Dimostra che, se $A : B = C : D$ e $A : F = C : G$, allora $B : F = D : G$.

54 A, B, C, D, F e G sono grandezze omogenee (F, D, B e G non nulle). Nell'ipotesi che $A : F = G : D$ e $F : B = C : G$, dimostra che $A : B = C : D$.

Le grandezze direttamente proporzionali

ESERCIZIO GUIDA

55 Tre numeri sono proporzionali ai numeri 3, 7 e 8 e la loro somma è 90.
Determiniamo i tre numeri.

Indichiamo con x, y, z i numeri e scriviamo la relazione:

$$x : 3 = y : 7 = z : 8.$$

Applichiamo più volte la proprietà del comporre della catena di rapporti, mediante la quale ricaviamo i tre numeri:

$$(x+y+z) : (3+7+8) = x : 3 \quad \rightarrow \quad 90 : 18 = x : 3 \quad \rightarrow \quad x = \frac{90 \cdot 3}{18} = 15;$$

$$(x+y+z) : (3+7+8) = y : 7 \quad \rightarrow \quad 90 : 18 = y : 7 \quad \rightarrow \quad y = \frac{90 \cdot 7}{18} = 35;$$

$$(x+y+z) : (3+7+8) = z : 8 \quad \rightarrow \quad 90 : 18 = z : 8 \quad \rightarrow \quad z = \frac{90 \cdot 8}{18} = 40.$$

56 Le misure delle lunghezze dei lati di un triangolo sono proporzionali ai numeri 3, 5 e 6; il perimetro misura 168 rispetto al cm. Determina le misure dei lati. [36; 60; 72]

57 Determina l'ampiezza degli angoli di un triangolo, sapendo che sono proporzionali ai numeri 7, 10, 13. [42°; 60°; 78°]

58 In un triangolo isoscele ogni angolo alla base è il quadruplo dell'angolo al vertice. Determina l'ampiezza degli angoli. [20°; 80°; 80°]

59 Determina l'ampiezza degli angoli acuti di un triangolo rettangolo, sapendo che sono proporzionali ai numeri 5 e 7. [37° 30′; 52° 30′]

60 Il lato obliquo, la base minore e la base maggiore di un trapezio isoscele sono proporzionali ai numeri 15, 7 e 25; il perimetro del trapezio è 372 m. Determina le lunghezze dei lati. [90 m; 42 m; 150 m]

4. Il teorema di Talete

Teoria a pag. G294

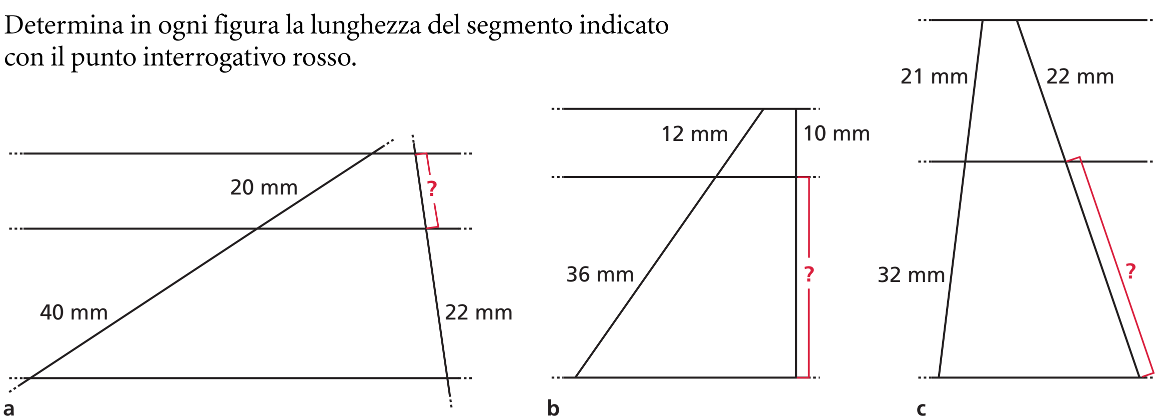
RIFLETTI SULLA TEORIA

61 VERO O FALSO?

a) Una retta che determina sui lati di un triangolo segmenti proporzionali è parallela al terzo lato. V F
b) In ogni triangolo la bisettrice di un angolo interno divide il lato opposto in parti direttamente proporzionali alla metà degli altri lati. V F
c) Tre rette parallele formano con due trasversali solo due coppie di segmenti proporzionali. V F
d) In un quadrilatero una parallela alla diagonale divide due lati in segmenti proporzionali. V F

ESERCIZI

62 Determina in ogni figura la lunghezza del segmento indicato con il punto interrogativo rosso.



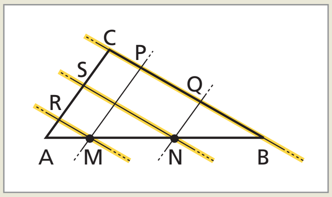
$\left[11 \text{ mm}; 30 \text{ mm}; \frac{704}{21} \text{ mm}\right]$

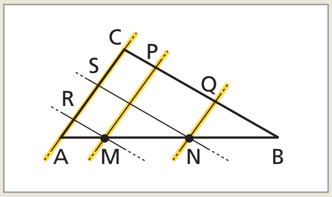
ESERCIZIO GUIDA

63 Dato il triangolo ABC, consideriamo sul lato AB due punti qualsiasi M e N. Da M e N tracciamo le parallele al lato AC. Indichiamo, rispettivamente con P e con Q, i punti di intersezione di queste parallele con CB. Dai punti M e N tracciamo anche le parallele a CB e chiamiamo R e S i punti in cui intersecano AC. Dimostriamo che $AC : RS = CB : PQ$.

Ipotesi 1. $MP \parallel NQ \parallel AC$;
2. $MR \parallel NS \parallel CB$.

Tesi $AC : RS = CB : PQ$.





Dimostrazione

Applichiamo il teorema di Talete al fascio di rette parallele alla retta CB:

$AC : RS = AB : MN$.

Applichiamo il teorema di Talete al fascio di rette parallele alla retta AC:

$AB : MN = CB : PQ$.

Per la proprietà transitiva, dalle due uguaglianze deduciamo che:

$AC : RS = CB : PQ$.

64 Disegna due rette incidenti a e b. Considera sulla retta a i punti A, A' e A'', e sulla retta b le loro proiezioni ortogonali B, B' e B''. Dimostra che $AA' : A'A'' = BB' : B'B''$.

65 Dimostra che la parallela a un lato di un triangolo passante per il baricentro divide gli altri due lati in parti che sono l'una il doppio dell'altra.

66 Costruisci un triangolo ABC. Da un punto P di AB traccia la parallela a CB e chiama Q il suo punto di intersezione con AC. Da P traccia la parallela a QB e indica con R la sua intersezione con AC. Dimostra che AQ è medio proporzionale fra AR e AC.

67 Dimostra che in un trapezio il punto di incontro delle diagonali le divide in parti tra loro direttamente proporzionali.

68 In un triangolo ABC traccia la mediana CM e considera il suo punto medio N. Il lato CB è intersecato in P da AN e in Q dalla parallela ad AP passante per M. Dimostra che P e Q dividono CB in tre segmenti congruenti.

69 Disegna il triangolo ABC e la sua mediana BM. Da un punto P del segmento AM traccia la parallela a BM; essa incontra AB e il prolungamento di CB rispettivamente in Q e in R. Dimostra che $BR : BC = QB : AB$.

70 Dimostra che i punti medi dei lati consecutivi di un quadrilatero sono vertici di un parallelogramma.

71 Nel quadrilatero $ABCD$, da un punto P della diagonale AC, traccia le parallele a CB e CD che incontrino AB e AD rispettivamente in Q e in R. Dimostra che la retta RQ è parallela a DB.

72 Nel triangolo ABC il lato AB è diviso dai punti P e Q in tre segmenti congruenti. Da P traccia la parallela ad AC e chiama S il punto di intersezione con CB; dal punto Q traccia la parallela a CB e chiama R il punto di intersezione con AC. Dimostra che RS è parallela ad AB.

Il teorema della bisettrice di un angolo interno di un triangolo

73 Utilizzando il teorema della bisettrice di un angolo interno, dimostra che in un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana.

74 Nel triangolo ABC la bisettrice di $\hat{C}$ incontra il lato AB nel punto D. Sul lato AC considera un punto P, in modo che AP sia congruente ad AD. La parallela ad AB per il punto P interseca CB nel punto Q. Dimostra che DB è congruente a QB.

75 Nel trapezio $ABCD$ prolunga i lati obliqui AD e BC fino a che si incontrano nel punto P. Dimostra che la bisettrice dell'angolo $A\hat{P}B$ divide ognuna delle basi del trapezio in segmenti direttamente proporzionali ai lati obliqui.

76 Nel triangolo ABC, rettangolo in A, la bisettrice dell'angolo $\hat{B}$ incontra il lato AC in P. Traccia da P la perpendicolare all'ipotenusa CB e indica con Q il punto di intersezione con l'ipotenusa stessa. Dimostra che $PQ : CP = AB : CB$.

5. Le aree dei poligoni

Teoria a pag. G296

RIFLETTI SULLA TEORIA

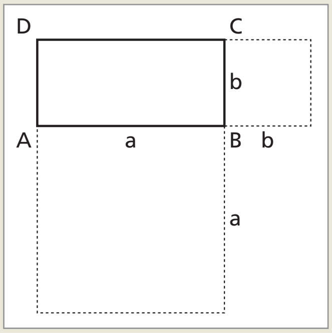
77 VERO O FALSO?

a) La misura dell'area di un rombo è uguale al prodotto della misura della diagonale minore per la misura della semidiagonale maggiore. V F
b) La misura dell'area di un triangolo rettangolo è uguale al semiprodotto delle misure dei cateti. V F
c) La misura dell'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale al rapporto fra la misura della doppia area e il prodotto delle misure dei cateti. V F
d) Condizione necessaria affinché due grandezze siano inversamente proporzionali è che siano omogenee. V F
e) La misura dell'area di un triangolo equilatero di lato l è uguale a $\frac{1}{2} l^2 \sqrt{3}$. V F

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

78 Verifichiamo che l'area di un rettangolo è media proporzionale tra le aree dei quadrati costruiti su due suoi lati consecutivi.



Disegniamo la figura e indichiamo con a e b le misure dei lati.
Dobbiamo verificare la validità della proporzione numerica:

$$a^2 : ab = ab : b^2.$$

La proporzione è vera perché vale la proprietà fondamentale delle proporzioni (il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi):

$$(ab) \cdot (ab) = a^2b^2.$$

79 Verifica che esiste proporzionalità fra le aree e le altezze dei triangoli aventi basi congruenti.

80 L'insieme delle aree dei quadrati è direttamente proporzionale all'insieme dei lati? Motiva la risposta.

81 Le aree dei rombi che hanno una diagonale congruente sono proporzionali alle altre diagonali? Motiva la risposta.

82 Verifica che le aree dei rettangoli sono proporzionali a quelle dei rombi che hanno per vertici i punti medi dei lati dei rettangoli.

83 Verifica che un triangolo rettangolo viene diviso dall'altezza relativa all'ipotenusa in due triangoli le cui aree sono proporzionali alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

84 Verifica che in un triangolo rettangolo i quadrati costruiti sui cateti hanno aree proporzionali alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

La proporzionalità inversa

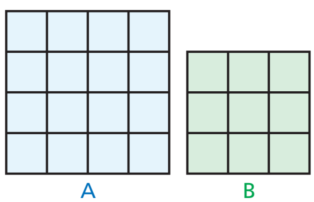
85 Dimostra che due classi di grandezze inversamente proporzionali a una terza classe di grandezze sono direttamente proporzionali fra loro.

86 Dati due rettangoli equivalenti, dimostra che le loro basi sono inversamente proporzionali alle rispettive altezze.

87 Dimostra che in un insieme di triangoli di area data le altezze sono inversamente proporzionali alle rispettive basi.

RIEPILOGO LA MISURA DELLE GRANDEZZE GEOMETRICHE E LE GRANDEZZE PROPORZIONALI

88 **TEST** Qual è il rapporto fra l'area A e l'area B?



A $\frac{4}{3}$ B $\frac{3}{4}$ C 1 D $\frac{16}{9}$ E $\frac{9}{16}$

89 **TEST** Data la proporzione $A : B = C : D$, con A, B, C e D grandezze omogenee, indica quale fra le seguenti proporzioni è *errata*.

A $A : 5B = C : 5D$

B $5A : 5B = 6C : 6D$

C $2A : 7D = 2C : 7B$

D $8B : 9A = 8D : 9C$

E $D : B = 3C : 3A$

90 Data la proporzione $A : B = C : D$, con A, B, C e D grandezze omogenee, determina la grandezza che permette di scrivere una proporzione con $3A$, $2C$ e $3D$.

91 Dimostra che se A e B sono commensurabili con C, allora A e B sono commensurabili fra di loro.

92 Dimostra che se A e B sono grandezze commensurabili con C, allora anche la somma $A + B$ è commensurabile con C.

93 In un triangolo rettangolo i cateti sono uno doppio dell'altro. Dimostra che l'ipotenusa è incommensurabile con entrambi i cateti.

94 Il perimetro di un rettangolo è 220 m e i lati sono proporzionali ai numeri 5 e 3. Determina le lunghezze dei lati. [68,75 m; 41,25 m]

95 Dato un triangolo, dimostra che la bisettrice di un angolo interno lo divide in due triangoli le cui aree sono proporzionali ai lati adiacenti all'angolo.

96 Dimostra che se due triangoli hanno le basi inversamente proporzionali alle altezze, allora sono equivalenti.

97 Date le relazioni fra le aree A, B e C di tre superfici:

$$3A = \sqrt{3}\,B, \qquad C = 2\sqrt{3}\,A,$$

determina la misura di B rispetto a C.

98 In un rombo una diagonale è doppia dell'altra. Dimostra che il lato del rombo è incommensurabile con entrambe le diagonali.

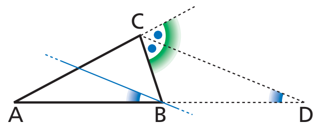
99 Nel triangolo ABC, da un punto P della mediana CM traccia le parallele ai lati AC e CB; indica con Q e R i loro punti di intersezione con AB. Dimostra che M è punto medio di QR. (Suggerimento. Nel triangolo AMC, QP è parallelo ad AC, perciò puoi scrivere una proporzione; anche nel triangolo BMC puoi scrivere una proporzione...)

▶ *Caso particolare*: se il triangolo ABC è isoscele sulla base AB, di che natura è il triangolo PRQ? Com'è l'angolo $P\hat{M}R$?

100 Disegna il triangolo ABC e la sua mediana BM. Da un punto P del segmento AM traccia la parallela a BM; essa incontra AB e il prolungamento di CB rispettivamente in Q e in R. Dimostra che $BR : BC = QB : AB$.

▶ *Caso particolare*: se il triangolo ABC è equilatero, di che natura è il triangolo BQR?

101 Dimostra il seguente teorema (teorema della bisettrice di un angolo esterno): in un triangolo la bisettrice di un angolo esterno, se non è parallela al lato opposto, incontra il prolungamento del lato in un punto che determina con gli estremi di quel lato segmenti proporzionali agli altri due lati. (Suggerimento. Traccia la parallela a CD passante per B, come nella figura, e ragiona come nella dimostrazione della bisettrice di un angolo interno. Devi dimostrare che $AD : BD = AC : CB$.)



102 Enuncia e dimostra l'inverso del teorema della bisettrice di un angolo esterno di un triangolo (vedi esercizio 101).

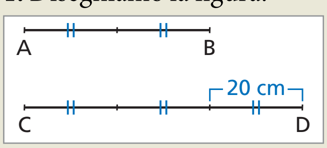
La risoluzione algebrica di problemi geometrici

Problemi sui segmenti

ESERCIZIO GUIDA

103 Determiniamo la lunghezza di due segmenti, sapendo che la loro differenza è 20 cm e che uno dei segmenti è i $\frac{3}{2}$ dell'altro.

1. Disegniamo la figura:



2. Relazioni

a) $\overline{CD} - \overline{AB} = 20$;

b) $\overline{CD} = \frac{3}{2}\overline{AB}$.

Richieste

$\overline{AB}$; $\overline{CD}$.

Risolviamo il problema con tre metodi diversi.

Primo metodo

3. Usiamo due incognite, indichiamo con x e y le misure dei due segmenti:

$\overline{AB} = x$; $\overline{CD} = y$.

4. Le due relazioni permettono di scrivere un sistema di primo grado:

$$\begin{cases} y - x = 20 \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases}$$

5. Risolviamo con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - x = 20 \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 40 \\ y = 60 \end{cases}$$

I due segmenti hanno lunghezza 40 cm e 60 cm.

Secondo metodo

3. Usiamo una sola incognita, la misura di un segmento. Poniamo:

$\overline{AB} = x$.

La seconda relazione ci dice che:

$\overline{CD} = \frac{3}{2}x$.

4. La prima relazione dà origine all'equazione di primo grado in x:

$\frac{3}{2}x - x = 20$.

5. Risolvendo troviamo:

$x = 40$.

Calcoliamo la misura del secondo segmento:

$$\overline{CD} = \frac{3}{2}40 = 60.$$

I due segmenti hanno lunghezza 40 cm e 60 cm.

Terzo metodo

3. Usiamo come incognita la misura di un sottomultiplo comune.
Se indichiamo con x la misura del sottomultiplo comune, possiamo scrivere:

$$\overline{AB} = 2x;$$
$$\overline{CD} = 3x.$$

4. Utilizzando la prima relazione otteniamo:
$3x - 2x = 20$, cioè $x = 20$.

5. Pertanto:

$$\overline{AB} = 2x = 40,$$
$$\overline{CD} = 3x = 60,$$

cioè ritroviamo i risultati precedenti.

Quest'ultimo metodo permette di evitare calcoli con le frazioni.

104 Due segmenti sono uno doppio dell'altro e la loro somma è 120 cm. Calcola le lunghezze dei due segmenti. [40 cm; 80 cm]

105 Calcola le lunghezze di due segmenti, sapendo che uno è i $\frac{3}{4}$ dell'altro e che la loro somma è 210 cm. [90 cm; 120 cm]

106 Calcola le lunghezze di due segmenti, sapendo che uno supera l'altro di 6 cm e che la loro somma è 78 cm. [42 cm; 36 cm]

107 Calcola le lunghezze di due segmenti, sapendo che la loro somma è 60 cm e che la loro differenza è 17 cm. [21,5 cm; 38,5 cm]

108 Determina le lunghezze di due segmenti sapendo che il minore supera i $\frac{2}{5}$ dell'altro di 9 cm e che la loro differenza è 6 cm. [19 cm; 25 cm]

Problemi con tre incognite

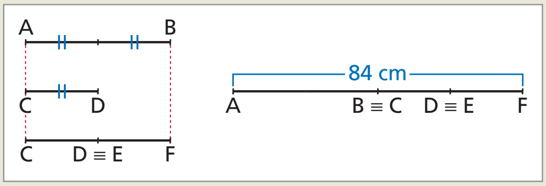
ESERCIZIO GUIDATO

109 La somma di tre segmenti è 84 cm. Il primo è doppio del secondo, il secondo sommato al terzo dà il primo. Determina le lunghezze dei tre segmenti.

Relazioni

1. $\overline{AB} + \ldots\ldots\ldots + \overline{EF} = 84$;
2. $\overline{AB} = \ldots\ldots\ldots\ \overline{CD}$;
3. $\overline{CD} + \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$.

Richieste 1. $\overline{AB}$; 2. $\overline{CD}$; 3. $\overline{EF}$.



Risoluzione

- *Scegli le incognite.*

  $\overline{AB} = x$, $\overline{CD} = y$ e $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = z$.

- *In base alle relazioni 1, 2 e 3, imposta il sistema risolvente.*

$$\begin{cases} x + y + \ldots = \ldots \\ x = \ldots y \\ y + \ldots = \ldots \end{cases}$$

- *Risolvi il sistema e scrivi le misure dei tre segmenti.*

$$\begin{cases} 3y + z = \ldots \\ x = 2y \\ -y + z = \ldots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4y = \ldots \\ x = 2y \\ z = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \ldots \\ y = 21 \\ z = \ldots \end{cases}$$

Quindi, $AB = 42$ cm, $CD = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ cm e $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

110 La somma di tre segmenti è 213,5 m. Determina le lunghezze di ciascuno, sapendo che il primo è doppio del secondo e il secondo doppio del terzo. [122 m; 61 m; 30,5 m]

111 In un triangolo il semiperimetro è 38 cm. Un lato è i $\frac{4}{3}$ di un altro lato che, a sua volta, supera il terzo lato di 4 cm. Determina le lunghezze dei tre lati. [32 cm; 24 cm; 20 cm]

112 Il perimetro di un triangolo isoscele è 64 cm. Il rapporto fra il lato obliquo e metà base è $\frac{5}{3}$. Determina la lunghezza della base e del lato. [24 cm; 20 cm]

113 Il perimetro di un triangolo è 45 m. La differenza fra il primo e il secondo lato è 6 m, mentre la differenza fra il doppio del terzo lato e il secondo è 3 m. Determina la lunghezza dei tre lati. [21 m; 15 m; 9 m]

Problemi sugli angoli

114 Due angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono complementari. Determina le loro ampiezze, sapendo che il loro rapporto vale 5. [15°; 75°]

115 Determina le ampiezze in gradi di due angoli la cui somma è 33° e la differenza è 9°. [21°; 12°]

116 Due angoli complementari differiscono di 32°. Calcola le loro ampiezze. [29°; 61°]

117 Due angoli supplementari sono uno metà dell'altro. Determina le loro ampiezze. [60°; 120°]

118 La somma di due angoli è un angolo giro, uno dei due angoli è i $\frac{5}{7}$ dell'altro. Determina le loro ampiezze. [150°; 210°]

119 Due angoli supplementari sono tali che il doppio del minore supera il maggiore di 15°. Calcola l'ampiezza dei due angoli. [115°; 65°]

120 La somma di tre angoli è 92°. Il primo è triplo del secondo e questo è i $\frac{5}{3}$ del terzo. Determina le ampiezze dei tre angoli. [60°; 20°; 12°]

121 Il rapporto fra le ampiezze di due angoli è $\frac{4}{7}$; la differenza fra il doppio del minore e il maggiore è 10°; la somma fra il doppio del maggiore e l'altro angolo è uguale alla differenza fra 270° e il triplo di un terzo angolo. Determina le ampiezze dei tre angoli. [40°; 70°; 30°]

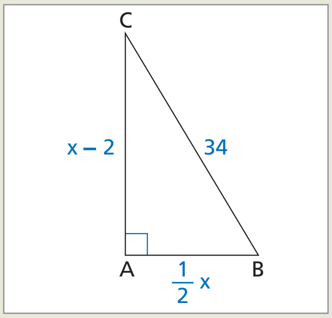
Applicazioni dei teoremi di Pitagora e di Euclide

Nel sito: ▶ 10 esercizi di recupero

Il teorema di Pitagora

ESERCIZIO GUIDA

122 Determiniamo le misure dei cateti del triangolo rettangolo indicate in figura; le misure sono espresse in funzione di una incognita x per i cateti, mentre l'ipotenusa misura 34 rispetto al centimetro.



Relazioni e dati

1. $\overline{AB} = \frac{1}{2}x$; 2. $\overline{AC} = x - 2$; 3. $\overline{BC} = 34$.

Richieste

1. $\overline{AB}$; 2. $\overline{AC}$.

Risoluzione

Applichiamo il teorema di Pitagora:

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{CB}^2$$

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + (x-2)^2 = 34^2.$$

Sviluppando i calcoli otteniamo l'equazione di secondo grado $5x^2 - 16x - 4608 = 0$.
Calcoliamo le soluzioni:

$$x_1 = 32, \quad x_2 = -\frac{144}{5}.$$

La seconda soluzione è da scartare perché la misura di un segmento non può essere negativa.

Troviamo le lunghezze dei cateti sostituendo 32 nelle espressioni iniziali:

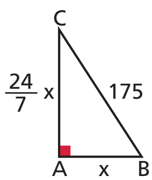
$$\overline{AC} = x - 2 = 30;$$

$$\overline{AB} = \frac{1}{2}x = 16.$$

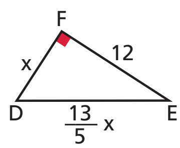
Le misure dei cateti del triangolo, rispetto al centimetro, sono 30 e 16.

Determina le misure dei lati dei triangoli nelle figure (le misure sono rispetto al centimetro).

123

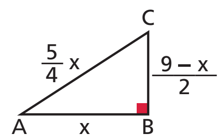


a

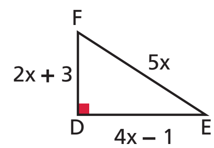


b

124



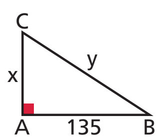
a



b

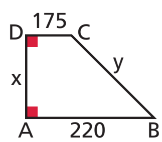
Utilizzando i dati e le relazioni riportate nelle figure, determina il perimetro di ogni figura (le misure sono rispetto al centimetro).

125



$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{17}{8}$$

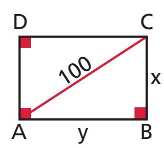
a



$$\overline{AD} = \frac{40}{41}\,\overline{CB}$$

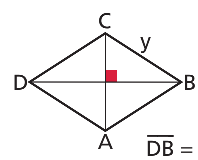
b

126



$$\overline{BC} = \frac{7}{24}\,\overline{AB}$$

a



$$\overline{DB} = \frac{5}{13}\,\overline{CB} \qquad \overline{DB} = x \qquad \overline{AC} = 120$$

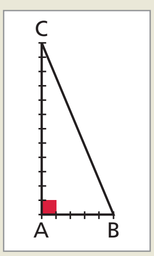
b

ESERCIZIO GUIDA

127 In un triangolo rettangolo un cateto è i $\frac{5}{12}$ dell'altro e il perimetro è 180 cm. Determiniamo le lunghezze dei tre lati.

Relazioni e dati

1. $\overline{AB} = \frac{5}{12}\overline{AC}$;
2. $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{CB} = 180$;
3. $B\hat{A}C = 90°$.



Richieste

1. $\overline{AB}$; 2. $\overline{AC}$; 3. $\overline{BC}$.

Risoluzione

Indichiamo con x la misura del sottomultiplo comune dei cateti: $\overline{AB} = 5x$; $\overline{AC} = 12x$.

Per il teorema di Pitagora:

$$\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 25x^2 + 144x^2 = 169x^2;$$

$$\overline{CB} = 13x.$$

La relazione relativa al perimetro diventa:

$$5x + 12x + 13x = 180;$$

$$30x = 180 \rightarrow x = 6.$$

Sostituendo troviamo le misure dei lati rispetto al cm:

$$\overline{AB} = 5x = 30;$$

$$\overline{AC} = 12x = 72;$$

$$\overline{CB} = 13x = 78.$$

128 Un triangolo isoscele ha la base uguale ai $\frac{5}{2}$ del lato e l'altezza di 3 cm. Calcola l'area del triangolo. [il problema non ha soluzione]

129 In un triangolo isoscele la lunghezza della base supera di $5a$ quella del lato obliquo. Determina l'area sapendo che il perimetro è $80a$. [$300a^2$]

130 I lati di un rettangolo inscritto in una circonferenza di diametro 30 cm stanno fra loro nel rapporto $\frac{3}{4}$. Determina l'area del rettangolo. [432 cm^2]

131 Due triangoli rettangoli congruenti hanno un cateto in comune, l'altro posto su rette parallele. Il perimetro di ciascun triangolo è $108a$, mentre quello del poligono individuato da essi è $144a$. Determina la lunghezza del cateto comune e dell'ipotenusa. [$36a$; $45a$]

132 In un rettangolo di base 60 cm l'altezza è i $\frac{3}{5}$ della diagonale. Determina il perimetro di ciascuno dei due triangoli nei quali il rettangolo risulta suddiviso da una diagonale. [180 cm]

133 In un trapezio rettangolo una base è doppia dell'altra, la diagonale maggiore è 13 cm, l'area 45 cm^2. Determina l'altezza del trapezio. [5 cm oppure 12 cm]

134 In una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ è inscritto un triangolo avente un lato uguale a $\frac{4}{3}$ del diametro. Calcola il perimetro del triangolo. [il problema non ha soluzione]

135 In un rombo di perimetro $100k$, il perimetro di ciascuno dei triangoli individuati dalle diagonali è $60k$. Determina l'area del rombo. [$600k^2$]

136 Il diametro di una semicirconferenza misura 15 cm. Calcola le lunghezze dei tre lati di un triangolo inscritto nella semicirconferenza, sapendo che i due lati distinti dal diametro sono uno i $\frac{3}{4}$ dell'altro. [15 cm; 12 cm; 9 cm]

137 In un triangolo rettangolo di perimetro 40 cm, l'ipotenusa è uguale alla somma dei cateti diminuita di 6 cm. Determina le lunghezze dei due cateti. [15 cm; 8 cm]

138 In un rettangolo di area 300 cm^2, la base è i $\frac{3}{5}$ della diagonale. Determina il perimetro. [70 cm]

139 Determina le lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo avente area 600 cm^2 e un cateto congruente ai $\frac{4}{5}$ dell'ipotenusa. [40 cm; 30 cm]

140 La diagonale maggiore di un rombo è i $\frac{2}{5}$ del perimetro, mentre l'altra diagonale è 36 cm. Determina l'area del rombo. [864 cm^2]

141 In una circonferenza, due corde, di cui una è un diametro, hanno un estremo in comune e sono una i $\frac{5}{4}$ dell'altra. Il perimetro del triangolo individuato unendo i due estremi non comuni è 84 cm. Determina l'area di tale triangolo. [294 cm^2]

142 Un triangolo è diviso dall'altezza in due triangoli rettangoli aventi le ipotenuse e i cateti non in comune che stanno tra loro rispettivamente nel rapporto $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{16}$. Il triangolo iniziale ha un perimetro di 60 cm e base di 25 cm. Determina l'area del triangolo. Verifica che il triangolo è rettangolo. [150 cm^2]

143 Il perimetro di un trapezio rettangolo è 32 cm. Il lato obliquo è congruente alla base maggiore, lunga 6 cm in più di quella minore. Determina l'area del trapezio. [56 cm^2]

Il primo teorema di Euclide

ESERCIZIO GUIDA

144 Calcoliamo il perimetro di un triangolo rettangolo le cui proiezioni dei cateti sull'ipotenusa sono lunghe 13 cm e 36 cm, senza applicare il teorema di Pitagora.

La misura dell'ipotenusa è:

$\overline{AB} = 13 + 36 = 49.$

Applichiamo il primo teorema di Euclide per trovare $\overline{AC}$:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH} \quad \rightarrow \quad \overline{AC}^2 = 49 \cdot 13.$

Estraiamo la radice quadrata:

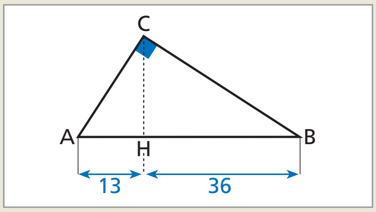
$\overline{AC} = \sqrt{49 \cdot 13} = \sqrt{7^2 \cdot 13} = 7\sqrt{13}.$

Applichiamo ancora il primo teorema di Euclide per trovare $\overline{BC}$:

$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BH} \quad \rightarrow \quad \overline{BC}^2 = 49 \cdot 36 \quad \rightarrow \quad \overline{BC} = \sqrt{49 \cdot 36} = \sqrt{7^2 \cdot 6^2} = 7 \cdot 6 = 42.$

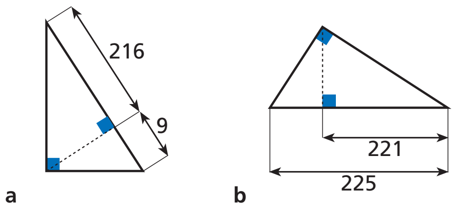
La lunghezza del perimetro del triangolo, espressa in cm, è:

$49 \text{ cm} + 42 \text{ cm} + 7\sqrt{13} \text{ cm} = (91 + 7\sqrt{13}) \text{ cm}.$

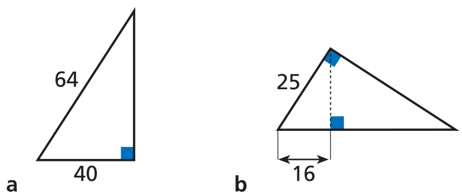


Utilizzando i dati in centimetri forniti dalle figure, calcola il perimetro di ogni triangolo senza mai applicare il teorema di Pitagora.

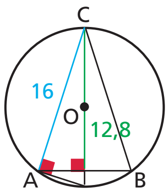
145



146



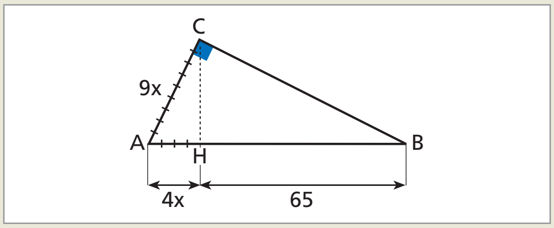
147 Sono date le misure in centimetri dell'altezza e del lato di un triangolo isoscele ABC, come indicato in figura. Determiniamo il raggio della circonferenza circoscritta.



ESERCIZIO GUIDA

148 In un triangolo rettangolo la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è $\frac{4}{9}$ del cateto stesso, mentre la proiezione dell'altro cateto ha lunghezza 65 cm. Determiniamo il perimetro del triangolo.

Disegniamo un triangolo rettangolo avente come base l'ipotenusa, per tracciare facilmente l'altezza a essa relativa. Il piede di tale altezza determina le proiezioni dei due cateti.



Relazioni e dati

1. $A\hat{C}B = 90°$;
2. $CH \perp AB$;
3. $\overline{AH} = \frac{4}{9} AC$;
4. $\overline{HB} = 65$.

Richiesta Perimetro (ABC)

Risoluzione. Introduciamo una sola incognita, la misura di un sottomultiplo comune.

Poiché $AH = \frac{4}{9} AC$, poniamo:

$\overline{AH} = 4x \;\text{ e }\; \overline{AC} = 9x.$

Abbiamo:

$\overline{AB} = 65 + 4x.$

Applichiamo il primo teorema di Euclide:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH}.$

Sostituendo, otteniamo l'equazione in x:

$(9x)^2 = (65 + 4x)4x$

$81x^2 = 260x + 16x^2$

$81x^2 - 16x^2 - 260x = 0$

$65x^2 - 260x = 0$

$$65x(x-4) = 0 \quad \begin{cases} 65x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ x - 4 = 0 \rightarrow x_2 = 4 \end{cases}$$

$x_1 = 0$, soluzione non accettabile;
$x_2 = 4$, soluzione accettabile.

Per $x = 4$, calcoliamo $\overline{AC}$, $\overline{AH}$ e $\overline{AB}$:

$\overline{AC} = 9x = 9 \cdot 4 = 36;$

$\overline{AH} = 4x = 4 \cdot 4 = 16;$

$\overline{AB} = 65 + 16 = 81.$

Possiamo trovare $\overline{BC}$ in due modi:

1. applicando il teorema di Pitagora:

$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2};$

2. applicando ancora il primo teorema di Euclide:

$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BH}.$

Utilizziamo la seconda relazione, anche perché il calcolo della radice di un prodotto risulta più facile della radice quadrata della differenza di due quadrati.

$\overline{BC}^2 = 81 \cdot 65$

$\overline{BC} = \sqrt{81 \cdot 65} = \sqrt{9^2 \cdot 65}$

$\overline{BC} = 9\sqrt{65}.$

La lunghezza del perimetro del triangolo è, in cm:

$36 + 81 + 9\sqrt{65}.$

Se $2p$ rappresenta la misura del perimetro in cm, scriviamo:

$2p = 117 + 9\sqrt{65}.$

149 In un triangolo rettangolo un cateto e la sua proiezione sull'ipotenusa sono rispettivamente $60k$ e $36k$. Calcola il perimetro del triangolo. [$240k$]

150 Determina l'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente un cateto e l'ipotenusa che sono rispettivamente $165a$ e $275a$. [$132a$]

151 L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga 25 cm e supera di 9 cm una delle proiezioni dei cateti. Determina l'area del triangolo. [150 cm^2]

152 Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa di 50 cm e un cateto uguale ai $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa. [120 cm]

153 In un triangolo rettangolo un cateto è 75 cm, la sua proiezione sull'ipotenusa 30 cm in meno. Determina l'area del triangolo. [3750 cm^2]

154 Il cateto maggiore di un triangolo rettangolo è i $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa ed è anche il doppio dell'altra proiezione aumentato di $2a$. Determina l'area del triangolo. [$150a^2$]

155 I cateti di un triangolo rettangolo sono lunghi 60 cm e 80 cm. Determina le due proiezioni sull'ipotenusa. [36 cm; 64 cm]

156 La proiezione del lato maggiore di un rettangolo sulla diagonale è 320 cm, il lato minore e la sua proiezione sulla diagonale stanno tra loro nel rapporto $\frac{5}{3}$. Determina il perimetro del rettangolo. [1400 cm]

157 In un triangolo rettangolo, la maggiore delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è 9 cm in più del cateto minore, che a sua volta è i $\frac{3}{5}$ dell'intera ipotenusa. Determina l'area del triangolo. [12 150 cm^2]

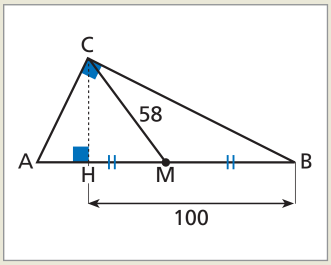
158 Le proiezioni dei cateti di un triangolo rettangolo sull'ipotenusa sono una i $\frac{16}{9}$ dell'altra; la lunghezza del cateto maggiore supera di 28 cm quella della sua proiezione. Determina il perimetro del triangolo. [420 cm]

159 In un triangolo rettangolo la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ volte il cateto stesso, mentre la proiezione dell'altro cateto è lunga $\frac{4}{5}\sqrt{5}$ cm. Determina il perimetro del triangolo. [$(12 + 4\sqrt{5})$ cm]

Il secondo teorema di Euclide

ESERCIZIO GUIDA

160 Calcoliamo il perimetro dei triangoli rettangoli ABC e BCH senza mai utilizzare il teorema di Pitagora. (L'unità di misura è il centimetro.)



Relazioni e dati

1. $\overline{CM} = 58$;
2. $\overline{HB} = 100$.

Richiesta

1. Perimetro (ABC);
2. Perimetro (BCH).

Risoluzione

- Nel triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è congruente alla metà dell'ipotenusa stessa, quindi:

  $$CM \cong \frac{1}{2}AB.$$

  Calcoliamo $\overline{HM}$: $\overline{HM} = 100 - 58 = 42$.

  Calcoliamo $\overline{AB}$: $\overline{AB} = 58 \cdot 2 = 116$.

  Calcoliamo $\overline{AH}$: $\overline{AH} = 116 - 100 = 16$.

- Calcoliamo $\overline{CH}$, applicando il secondo teorema di Euclide:

  $$\overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{BH} \quad \rightarrow \quad \overline{CH}^2 = 16 \cdot 100$$
  $$\overline{CH} = \sqrt{16 \cdot 100} = 4 \cdot 10 = 40.$$

- Calcoliamo $\overline{AC}$, applicando il primo teorema di Euclide:

  $$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH} \quad \rightarrow \quad \overline{AC}^2 = 116 \cdot 16$$
  $$\overline{AC} = \sqrt{116 \cdot 16} = \sqrt{2^2 \cdot 29 \cdot 4^2} = 8\sqrt{29}.$$

- Calcoliamo $\overline{BC}$ con il primo teorema di Euclide:

  $$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BH} \quad \rightarrow \quad \overline{BC}^2 = 116 \cdot 100$$
  $$\overline{BC} = \sqrt{116 \cdot 100} = \sqrt{2^2 \cdot 29 \cdot 10^2} = 20\sqrt{29}.$$

- Calcoliamo la misura del perimetro di ABC:

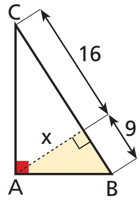
  $$2p(ABC) = \overline{AC} + \overline{CB} + \overline{AB}$$
  $$2p(ABC) = 8\sqrt{29} + 20\sqrt{29} + 116$$
  $$2p(ABC) = 28\sqrt{29} + 116 = 4(7\sqrt{29} + 29).$$

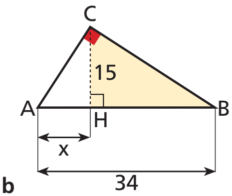
- Calcoliamo la misura del perimetro di BCH:

  $$2p(BCH) = \overline{CH} + \overline{HB} + \overline{CB}$$
  $$2p(BCH) = 40 + 100 + 20\sqrt{29}$$
  $$2p(BCH) = 140 + 20\sqrt{29} = 20(7 + \sqrt{29}).$$

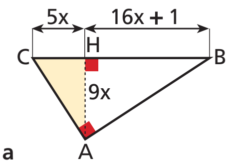
Utilizzando i dati forniti dalle figure, calcola il perimetro dei triangoli colorati, senza far uso del teorema di Pitagora. (L'unità di misura è il centimetro.)

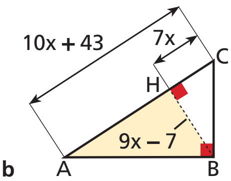
161

a


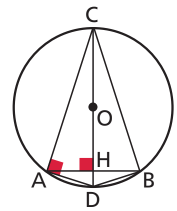
b


162

a


b


163 Della figura sono noti $\overline{CH} = 23{,}04$ e $\overline{HD} = 1{,}96$. Determina la misura del perimetro del triangolo isoscele ABC.

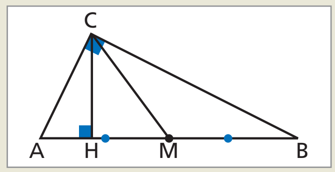


ESERCIZIO GUIDA

164 Nel triangolo rettangolo ABC della figura, di ipotenusa AB e altezza CH, la mediana CM è lunga 30,5 cm.

L'altezza CH relativa all'ipotenusa è i $\frac{60}{11}$ del segmento HM.

Calcoliamo il perimetro del triangolo HMC.



Relazioni e dati

1. $A\hat{C}B = 90°$;
2. $CH \perp AB$;
3. $AM \cong MB$;
4. $\overline{CM} = 30{,}5$;
5. $\overline{CH} = \frac{60}{11}\overline{HM}$.

Richiesta Perimetro (HMC)

Risoluzione

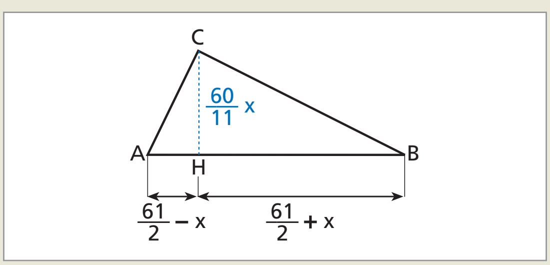
Poniamo $\overline{HM} = x$, per cui $\overline{CH} = \frac{60}{11}x$.

Nel triangolo rettangolo la mediana CM è la metà dell'ipotenusa AB, quindi $\overline{AB} = 30{,}5 \cdot 2 = 61$.

Calcoliamo in funzione di x le misure delle proiezioni AH e BH:

$$\overline{AH} = 30{,}5 - x = \frac{61}{2} - x;$$

$$\overline{BH} = 30{,}5 + x = \frac{61}{2} + x.$$



Applichiamo il secondo teorema di Euclide:

$$\overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{BH}$$

$$\left(\frac{60}{11}x\right)^2 = \left(\frac{61}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{61}{2} + x\right)$$

$$\frac{3600}{121}x^2 = \frac{3721}{4} - x^2$$

$$\frac{3600}{121}x^2 + x^2 = \frac{3721}{4} \rightarrow \frac{3721}{121}x^2 = \frac{3721}{4}$$

$$x^2 = \frac{\cancel{3721}}{4} \cdot \frac{121}{\cancel{3721}} = \frac{121}{4}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{121}{4}} = \pm\frac{11}{2}.$$

Scartiamo la soluzione negativa, quindi:

$$\overline{HM} = \frac{11}{2};\ \overline{CH} = \frac{\overset{30}{\cancel{60}}}{\underset{1}{\cancel{11}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{11}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 30.$$

Calcoliamo la misura in cm del perimetro di HMC:

$$2p(HMC) = \overline{CM} + \overline{HM} + \overline{CH}$$

$$2p(HMC) = \frac{61}{2} + \frac{11}{2} + 30 = 66.$$

165 Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo, sapendo che un cateto ha lunghezza 3 m e che la sua proiezione sull'ipotenusa è 1,8 m. Ripeti l'esercizio nel caso in cui il cateto è di 1,8 m e la sua proiezione di 3 m. [12 m; 6 m^2; il problema non ha soluzione]

166 Calcola l'area di un triangolo rettangolo, sapendo che l'ipotenusa è lunga 10 cm e che le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa sono proporzionali ai numeri 1 e 9. [15 cm^2]

167 In un trapezio isoscele la base minore è 5,6 m e la proiezione del lato obliquo sulla base maggiore è 7,2 m. Sapendo che la diagonale è perpendicolare al lato obliquo, calcola perimetro e area del trapezio. [49,6 m; 122,88 m^2]

168 La base maggiore di un trapezio rettangolo è 5 m, il lato obliquo 4 m e la diagonale minore è perpendicolare al lato. Calcola l'area e il perimetro del trapezio. $\left[\frac{204}{25}\text{ m}^2; \frac{66}{5}\text{ m}\right]$

169 Un rombo *ABCD* ha il perimetro di 40 cm e la diagonale minore *AC* di 12 cm. Conduci dal punto *O* di incontro delle diagonali la perpendicolare *OL* al lato *AB*. Calcola l'area del rombo, la lunghezza dei segmenti *AL*, *LB* e *OL*. [96 cm^2; 3,6 cm; 6,4 cm; 4,8 cm]

170 In un trapezio rettangolo il lato obliquo e la sua proiezione sulla base maggiore sono rispettivamente $60a$ e $48a$, la diagonale *AC* è perpendicolare al lato obliquo *CB*. Determina l'area e il perimetro del trapezio. [$1836a^2$; $198a$]

171 Un triangolo isoscele è inscritto in una circonferenza il cui raggio misura 25 cm e la sua altezza misura 32 cm. Determina il perimetro, l'area del triangolo e la misura del raggio della circonferenza inscritta. [128 cm; 768 cm; 12 cm]

172 Una corda AB di una circonferenza di raggio $13r$ è la base di un triangolo isoscele, di altezza maggiore del raggio, inscritto nella circonferenza. Sapendo che la corda *AB* è i $\frac{5}{13}$ del diametro, calcola perimetro ed area del triangolo. [$10(\sqrt{26}+1)r$; $125\,r^2$]

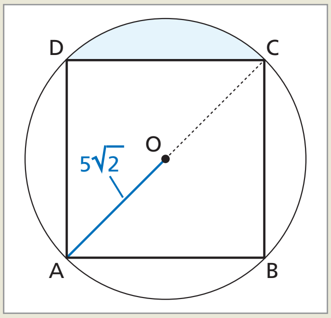
Triangoli rettangoli con angoli particolari

Nel sito: ▶ 7 esercizi di recupero

Angoli di 45°

ESERCIZIO GUIDA

173 Conoscendo la misura del segmento *AO* in figura (rispetto al cm), calcoliamo l'area azzurra della figura.



Il quadrato *ABCD* è inscritto in una circonferenza di diametro *AC*. Ricordando che fra le misure *d* e *l* della diagonale e del lato di un quadrato esiste la relazione $d = l\sqrt{2}$, possiamo scrivere:

$$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2}.$$

La diagonale coincide con il diametro della circonferenza, perciò:

$$\overline{AC} = 2 \cdot 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}; \quad 10\sqrt{2} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \overline{AB} = 10.$$

La misura dell'area del quadrato è: $A_q = 100$.

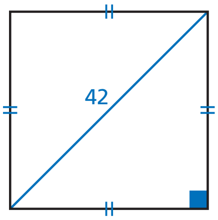
La misura dell'area del cerchio è: $A_c = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (5\sqrt{2})^2 = 50\pi$.

L'area azzurra è la quarta parte della differenza fra l'area del cerchio e l'area del quadrato:

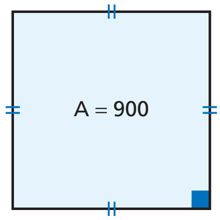
$$A = (A_c - A_q) : 4 = (50\pi - 100) : 4 = \frac{25}{2}\pi - 25 = 25\left(\frac{\pi}{2} - 1\right),$$ misura rispetto al cm^2.

Per ognuna delle seguenti figure, calcola la lunghezza del segmento indicato; le misure dei lati sono espresse in centimetri, quelle delle aree in centimetri quadrati.

174

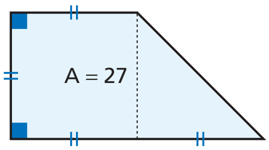


a lato?

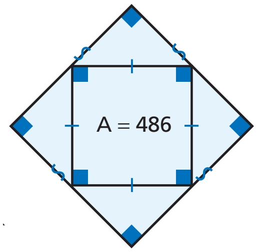


b diagonale?

175



a lato obliquo?



b lato del quadrato centrale?

176 L'area di un quadrato è $8k^2$. Calcola la lunghezza della diagonale. [$4k$]

177 In un quadrato le diagonali si dividono in parti la cui lunghezza è di $5\sqrt{2}$ cm. Calcola area e perimetro del quadrato. [100 cm^2; 40 cm]

178 L'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele misura $\sqrt{2}$ m. Calcola il perimetro e l'area del triangolo. [$2(2+\sqrt{2})$ m; 2 m^2]

179 L'area di un triangolo rettangolo isoscele è 8 m^2. Calcola la lunghezza del perimetro e quella dell'altezza relativa all'ipotenusa. [$4(2+\sqrt{2})$ m; $2\sqrt{2}$ m]

180 L'altezza di un trapezio rettangolo è congruente alla base minore e alla metà di quella maggiore. Sapendo che il perimetro è $4(4+\sqrt{2})$ cm, calcola l'area. [24 cm^2]

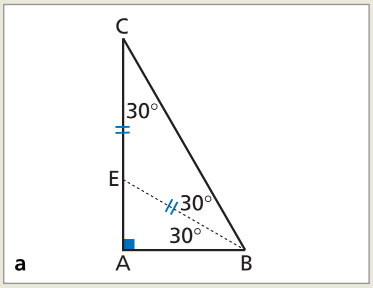
181 In un triangolo *ABC* l'angolo in *B* è 135°. Sapendo che le lunghezze dei lati *AB* e *BC* sono rispettivamente $20k$ e $12k$, calcola l'area del triangolo e l'altezza relativa alla base *BC*. [$60\sqrt{2}k^2$; $10\sqrt{2}k$]

182 Un poligono *ABCDE* è formato da un quadrato *ABCE* su cui è costruito un triangolo rettangolo isoscele *ECD* con *EC* come ipotenusa. Il perimetro del poligono è $4(3+\sqrt{2})$ cm. Calcola l'area e la distanza di *D* dal lato *AB*. [20 cm^2; 6 cm]

Angoli di 30° e 60°

ESERCIZIO GUIDA

183 Un triangolo rettangolo *ABC* ha l'angolo $\hat{B}$ di 60° e l'angolo $\hat{C}$ di 30°. La bisettrice *BE* dell'angolo $\hat{B}$ è 12 cm. Calcoliamo il perimetro del triangolo *ABC*.

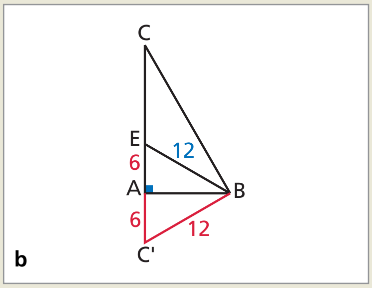


La bisettrice divide l'angolo $\hat{B}$ in due angoli di 30°, quindi il triangolo *EBC* è isoscele (figura *a*), perciò *BE* è congruente a *CE*, quindi:

$$\overline{CE} = 12.$$

Consideriamo il triangolo *AEB*. L'angolo $A\hat{E}B$ è di 60°, quindi

$$\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{EB}, \text{ ossia } \overline{AE} = 6.$$

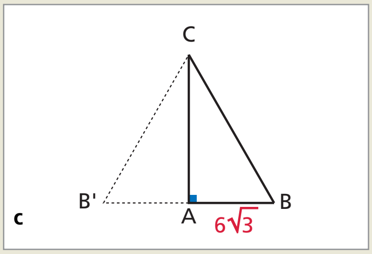


Il lato AB del triangolo AEB rappresenta l'altezza del triangolo equilatero di lato EB (figura *b*), quindi:

$$\overline{AB} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

La misura del cateto AB, base del triangolo ABC, è $\overline{AB} = 6\sqrt{3}$, la misura del cateto AC, altezza, è

$$\overline{AC} = 12 + 6 = 18.$$



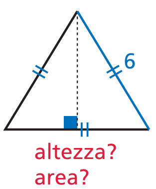
Il lato BC è doppio di AB, perciò $\overline{BC} = 12\sqrt{3}$ (figura *c*).
La misura del perimetro del triangolo ABC è:

$$\overline{AC} + \overline{AB} + \overline{BC} = 18 + 6\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = 18 + 18\sqrt{3} = \\ = 18(1 + \sqrt{3}).$$

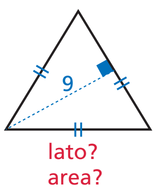
Il triangolo ha perimetro di lunghezza $18(1 + \sqrt{3})$ cm.

Per ogni figura calcola le misure delle grandezze indicate. Le misure sono espresse in centimetri e, nel caso di aree, in centimetri quadrati.

184

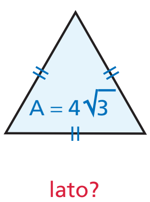


a

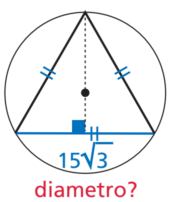


b

185



a



b

186 In un triangolo rettangolo un angolo acuto ha l'ampiezza di 30° e il cateto opposto è lungo 10 cm. Calcola l'area e la lunghezza del perimetro del triangolo. $[50\sqrt{3}\,\text{cm}^2;\ 10(3+\sqrt{3})\text{cm}]$

187 Un trapezio isoscele è inscritto in una semicirconferenza di raggio r. Gli angoli alla base maggiore sono di 60°. Calcola area e perimetro del trapezio. $\left[\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2;\ 5r\right]$

188 Disegna un trapezio $ABCD$ con la base maggiore doppia della base minore e con gli angoli adiacenti alla base minore di 120°. Traccia le altezze DE e CF. Sapendo che l'area del rettangolo $EFCD$ è $32\sqrt{3}$ cm^2, calcola area e perimetro del trapezio. $[48\sqrt{3}\,\text{cm}^2;\ 40\,\text{cm}]$

189 In un parallelogramma l'angolo acuto ha l'ampiezza di 30°, il lato maggiore è quattro volte quello minore e l'area è 1250 cm^2. Determina le lunghezze dei lati e delle due altezze del parallelogramma. [25 cm; 100 cm; 12,5 cm; 50 cm]

190 In un trapezio rettangolo l'angolo acuto adiacente alla base maggiore ha ampiezza di 60°. Calcola l'area del trapezio sapendo che la base minore è i $\frac{3}{4}$ di quella maggiore e che il perimetro è $2(9 + \sqrt{3})$ cm. $[14\sqrt{3}\,\text{cm}^2]$

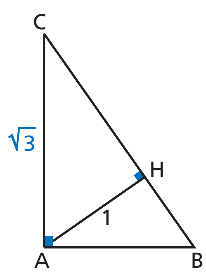
191 Un triangolo rettangolo ha un angolo acuto la cui ampiezza è di 30° e l'altezza relativa all'ipotenusa di 7 cm. Calcola il perimetro, l'area del triangolo e le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
$\left[14(1+\sqrt{3})\text{ cm}; \frac{98}{3}\sqrt{3}\text{ cm}^2; 7\sqrt{3}\text{ cm}; \frac{7\sqrt{3}}{3}\text{ cm}\right]$

192 Il triangolo rettangolo ABC ha l'angolo $\hat{A}$ di 90° e $\hat{B}$ di 60°. La bisettrice BD dell'angolo $\hat{B}$ divide il cateto CA in due parti tali che DA è 2 m. Calcola la lunghezza del perimetro, l'area del triangolo ABC e la lunghezza del segmento CD.
$[6(\sqrt{3}+1)\text{ m}; 6\sqrt{3}\text{ m}^2; 4\text{ m}]$

193 Un triangolo ABC ha l'angolo in $\hat{C}$ con ampiezza di 120°. L'altezza AH relativa alla base BC è 5 cm, il lato BC è $\left(12-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$ cm. Calcola il perimetro.
$\left[5\left(5+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\text{ cm}\right]$

RIEPILOGO LA RISOLUZIONE ALGEBRICA DI PROBLEMI GEOMETRICI

194 TEST Utilizzando i dati in centimetri forniti dalla figura, quale delle seguenti affermazioni è *vera*?



A $AB = 1$ cm
B $CB = 2$ cm
C $A(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm^2
D $CH = 2$ cm
E $HB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cm

195 TEST Il perimetro di un quadrato è 32 cm. Quanto vale la misura della sua diagonale, espressa in cm?

A $8\sqrt{2}$ B 8 C 4 D 1 E $4\sqrt{2}$

196 La diagonale maggiore AC di un rombo è $16a$. Indica con O il punto di incontro delle diagonali e traccia il segmento OH perpendicolare ad AB. Sapendo che AH è uguale a $6{,}4a$, calcola area e perimetro del rombo. $[40a; 96a^2]$

197 Determina l'area di un rettangolo la cui altezza è $\frac{4}{3}$ della diagonale e il perimetro è $10a$.
[il problema non ha soluzione]

198 Le misure rispetto al centimetro dei lati di un triangolo sono $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=9$ e $\overline{BC}=10$. Detta AD la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$, determina l'area del rettangolo che ha per lati i segmenti CD e BD. [24 cm^2]

199 In un triangolo rettangolo avente ipotenusa di 26 m, un cateto è i $\frac{13}{11}$ della sua proiezione sull'ipotenusa. Determina l'area del triangolo. $[88\sqrt{3}\text{ m}^2]$

200 Il perimetro di un rombo è 40 m. Sapendo che il punto di contatto della circonferenza inscritta con ciascun lato lo divide in parti proporzionali a 16 e 9, calcola l'area del rombo e il raggio del cerchio inscritto. [96 m^2; 4,8 m]

201 In un triangolo rettangolo un cateto supera di 12 cm la sua proiezione sull'ipotenusa. Sapendo che la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa è 32 cm, calcola perimetro e area del triangolo.
[120 cm; 600 cm^2]

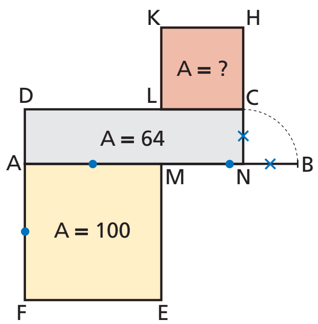
202 Un rettangolo ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo. Tale rettangolo ha la stessa area di un quadrato di lato 2,4 m. Sapendo che nel triangolo la differenza fra le proiezioni dei due cateti è 1,4 m, determina area e perimetro del triangolo. [6 m^2; 12 m]

203 Nel triangolo rettangolo ABC la somma dei cateti è 70 cm e uno è i $\frac{3}{4}$ dell'altro. La bisettrice dell'angolo acuto maggiore incontra il cateto opposto nel punto D. Determina le lunghezze delle due parti in cui il punto D divide tale cateto.
[15 cm; 25 cm]

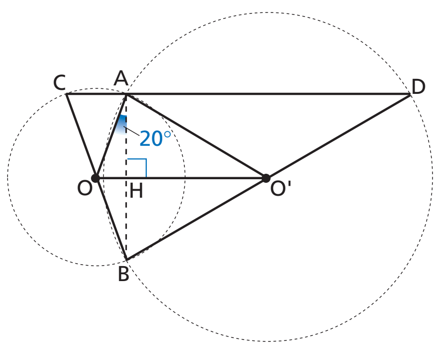
204 L'area del triangolo ABC, rettangolo in A, è 216 cm^2 e il cateto maggiore AC supera di 15 cm la metà del cateto minore AB. Calcola il perimetro del triangolo e la lunghezza della bisettrice BD dell'angolo B. [72 cm; $9\sqrt{5}$ cm]

205 Il perimetro di un triangolo isoscele è 48 cm e ciascun lato obliquo è 15 cm. Calcola la lunghezza del raggio del cerchio inscritto. [4,5 cm]

206 M è punto medio del segmento AB; $CN \cong NB$ e $AM \cong AF$. L'area del rettangolo $ANCD$ è 64 cm^2 e l'area del quadrato $AFEM$ è 100 cm^2. Calcola l'area del quadrato $CHKL$. [36 cm^2]



207 L'angolo $O\hat{A}H$ misura 20° e l'angolo $H\hat{A}O'$ è $\frac{3}{4}$ dell'angolo $O\hat{A}O'$. Calcola le ampiezze degli angoli $A\hat{C}B$, $A\hat{D}B$, $C\hat{B}D$. [70°; 30°; 80°]



208 Un rombo ha il lato lungo 20 cm e l'area di 384 cm^2. Determina le due diagonali. [24 cm; 32 cm]

209 I lati consecutivi di un parallelogramma differiscono di $8a$ e l'angolo fra essi compreso è di 60°. Sapendo che l'area del parallelogramma è $120a^2\sqrt{3}$, calcola la misura delle diagonali. [$4\sqrt{19}a$; $28a$]

210 Data una circonferenza di raggio r, costruisci il triangolo rettangolo OAB, retto in B (O è il centro della circonferenza e OB il raggio). Sapendo che l'angolo AOB ha ampiezza 60°, calcola area e perimetro del triangolo ABC, con C intersezione di AO con la circonferenza. $\left[\frac{\sqrt{3}}{4}r^2; r(2+\sqrt{3})\right]$

211 In un triangolo rettangolo, il cui perimetro è 30 m, la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è $\frac{144}{25}$ della proiezione dell'altro cateto. Determina la lunghezza dell'ipotenusa. [13 m]

212 In un triangolo isoscele ciascun lato misura $\frac{3}{5}\sqrt{10}\,a$ e l'altezza relativa alla base è i $\frac{3}{2}$ della base stessa. Determina il perimetro del triangolo e il diametro della circonferenza circoscritta al triangolo. $\left[\frac{6}{5}(1+\sqrt{10})a; 2a\right]$

213 La somma di due segmenti è 17,6 cm. La somma del doppio del secondo segmento e del triplo di un terzo segmento è 33,2 cm. Il rapporto fra la somma del primo segmento e dell'ultimo con il secondo è $\frac{75}{41}$. Determina la lunghezza dei tre segmenti. [9,4 cm; 8,2 cm; 5,6 cm]

214 Disegna un trapezio rettangolo con la diagonale minore perpendicolare al lato obliquo. L'altezza del trapezio è $\frac{3}{4}$ della base minore e il lato obliquo è $3a$. Calcola area e perimetro del trapezio. [$9{,}84\,a^2$; $13{,}6\,a$]

215 La base di un triangolo isoscele misura 36 cm e il perimetro 96 cm. Calcola la misura del raggio della circonferenza circoscritta e quella del raggio della circonferenza inscritta. [18,75 cm; 9 cm]

216 In un triangolo rettangolo ABC il cateto minore AB è inferiore di 6 cm rispetto all'ipotenusa BC; sapendo che la bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$ divide il cateto opposto in due segmenti che stanno tra loro come 4 sta a 5, calcola l'area del triangolo. [54 cm^2]

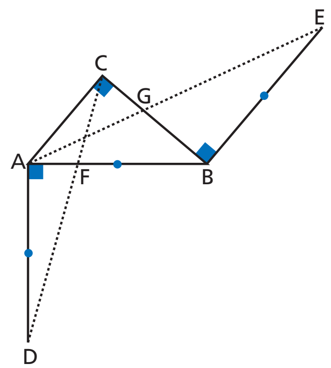
217 Disegna un triangolo rettangolo di ipotenusa 5 m e altezza a essa relativa di 2,4 m. Costruisci sul cateto minore un triangolo equilatero, di cui è richiesta la misura dell'area. $\left[\frac{9}{4}\sqrt{3}\ \text{m}^2\right]$

218 Un triangolo rettangolo ha il perimetro che misura quanto quello di un quadrato di lato $18a$. I cateti stanno fra di loro come 3 sta a 4. Determina l'area del triangolo. $[216a^2]$

219 Il triangolo ABC è rettangolo in C; il triangolo BEG è rettangolo in B; il triangolo ADF è rettangolo in A. Il cateto AC è 30 cm e BC è 40 cm; inoltre $AD \cong AB \cong BE$. Calcola:

a) l'area del triangolo ACD;
b) l'area del triangolo ABE.

(Suggerimento. Traccia l'altezza CH e costruisci il rettangolo $AHKD$. Il triangolo ADC ha base AD e altezza...) $[450\ \text{cm}^2; 1000\ \text{cm}^2]$



220 Un trapezio ha gli angoli alla base minore di 120° e 135°; l'altezza è a, il perimetro $a(7 + \sqrt{3} + \sqrt{2})$. Calcola l'area del trapezio. $\left[\frac{a^2}{6} \cdot (21 + \sqrt{3})\right]$

221 Un quadrilatero $ABCD$ ha l'angolo in A retto, le diagonali perpendicolari e l'area di 336 m². Sapendo che il punto O di incontro delle diagonali divide la diagonale DB in parti proporzionali ai numeri 16 e 9 e che AO è 9,6 m, calcola il perimetro del quadrilatero e le lunghezze delle diagonali. [$\simeq$ 80,26 m; 20 m; 33,6 m]

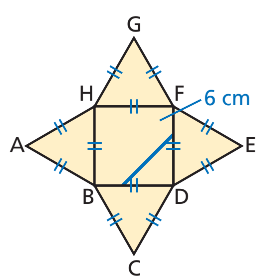
222 L'area di un trapezio isoscele è 40 cm². Sapendo che tale trapezio è circoscritto a una circonferenza di raggio $2\sqrt{2}$ cm, determina la misura dei suoi lati. $[2\sqrt{2}; 8\sqrt{2}; 5\sqrt{2}; 5\sqrt{2}]$

223 Disegna un trapezio con gli angoli adiacenti alla base maggiore di 45° e di 30° e con la base minore congruente al doppio dell'altezza. Il perimetro del trapezio è $3(7 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm. Calcola l'area del trapezio e la diagonale opposta all'angolo di 30°. $\left[\frac{9(5+\sqrt{3})}{2}\ \text{cm}^2; 3\sqrt{10}\ \text{cm}\right]$

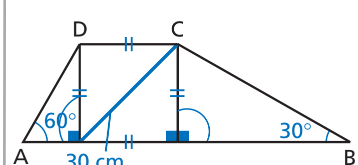
224 In un triangolo ABC la somma dei quadrati dei lati è 1250 cm². La bisettrice dell'angolo A divide il lato opposto BC in due segmenti lunghi $\frac{600}{31}$ cm e $\frac{175}{31}$ cm. Determina le lunghezze dei lati AB e AC e dimostra che il triangolo è rettangolo. [7 cm; 24 cm]

Per ognuna delle seguenti figure determina ciò che viene richiesto.

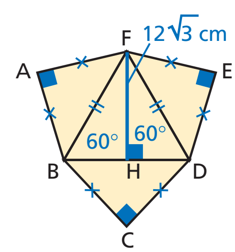
225



a. Area di *ABCDEFGH*?



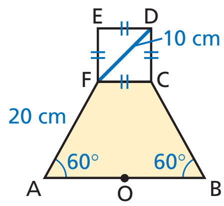
b. Perimetro del trapezio *ABCD*?



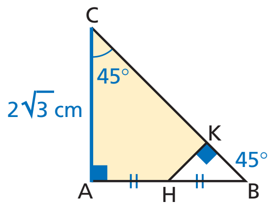
c. Area di *ABCDEF*?

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

226



a. Area di *ABCF*?



b. Area di *AHKC*?

6. Le aree e i volumi dei poliedri

Teoria a pag. G301

RIFLETTI SULLA TEORIA

227 **VERO O FALSO?**

a) La misura dell'altezza di un prisma retto è uguale al rapporto fra l'area laterale e il perimetro di base. V F

b) La formula che esprime l'area laterale del cubo è $A_l = 6s^2$. V F

c) L'area della superficie laterale di un tronco di piramide retta è uguale al prodotto dell'apotema per la somma dei perimetri di base. V F

d) La misura del volume di una piramide retta è uguale al prodotto della misura dell'area di base per l'altezza. V F

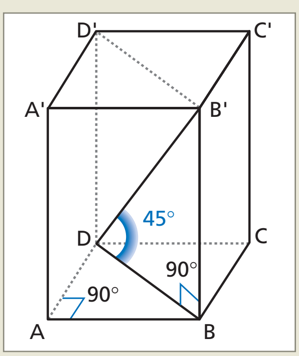
e) Lo spigolo di base di un cubo si può calcolare con la formula $s = V^{\frac{1}{3}}$. V F

ESERCIZI

Le superfici dei poliedri

ESERCIZIO GUIDA

228 Un parallelepipedo rettangolo ha la diagonale che forma un angolo di 45° con la diagonale di base. La base ha un lato lungo 20 dm e l'altro che è i $\frac{2}{3}$ dell'altezza del solido. Determiniamo l'area della superficie totale del parallelepipedo.



Relazioni e dati

1. $B\hat{D}B' = 45°$;
2. $\overline{AB} = 20$;
3. $\overline{BC} = \frac{2}{3}\overline{BB'}$.

Richiesta

A_t

Risoluzione

- Scegliamo l'incognita.

Poiché $\overline{BC}$ è i $\frac{2}{3}$ di $\overline{BB'}$, possiamo considerare un sottomultiplo comune, indicandone con x la misura, tale che:

$$\overline{BC} = 2x$$
$$\overline{BB'} = 3x.$$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

Inoltre la diagonale $\overline{DB'}$ forma un angolo di 45° con la diagonale di base DB; ne deriva che il rettangolo $DBB'D'$ è un quadrato e quindi:

$$\overline{DB} = \overline{BB'} = \overline{B'D'} = \overline{DD'} = 3x.$$

- Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ADB:

$$20^2 + 4x^2 = 9x^2 \to 5x^2 = 400 \to x^2 = 80x = \sqrt{80} \to x = 4\sqrt{5}.$$

Sostituiamo alla x il valore trovato e otteniamo:

$$\overline{BC} = 8\sqrt{5} \text{ e } \overline{BB'} = 12\sqrt{5}.$$

- Calcoliamo l'area della superficie totale del parallelepipedo:

$$A_b = (20 \cdot 8\sqrt{5}) = 160\sqrt{5}$$

$$A_l = 2p \cdot h = (40 + 16\sqrt{5}) \cdot 12\sqrt{5} = 480\sqrt{5} + 960$$

$$A_t = 2A_b + A_l = = 2 \cdot 160\sqrt{5} + 480\sqrt{5} + 960 = 800\sqrt{5} + 960.$$

L'area della superficie totale del parallelepipedo rettangolo è $(800\sqrt{5} + 960)$ dm^2.

229 In un parallelepipedo rettangolo, le dimensioni della base sono una i $\frac{3}{4}$ dell'altra e il lato maggiore della base è i $\frac{2}{3}$ dell'altezza del parallelepipedo. Calcola le lunghezze delle tre dimensioni, sapendo che l'area della superficie totale del parallelepipedo è 1200 dm^2. $\left[10 \text{ dm}; \frac{40}{3} \text{ dm}; 20 \text{ dm}\right]$

230 La diagonale di un parallelepipedo rettangolo forma un angolo di 60° con lo spigolo laterale del solido ed è lunga 20 dm. Sapendo che un lato di base è $8\sqrt{3}$ dm, calcola l'area della superficie totale del parallelepipedo. $[8(35\sqrt{3} + 36)$ dm$^2]$

231 Determina la misura della diagonale di un parallelepipedo rettangolo in cui la somma delle tre dimensioni è 15 cm, il rapporto fra le dimensioni di base è $\frac{2}{3}$ e l'area della superficie totale è 148 cm^2. $[\sqrt{77}$ cm$]$

232 Un prisma esagonale regolare ha la diagonale di ogni faccia laterale inclinata di 60° rispetto alla base e di lunghezza 20 dm. Determina l'area della superficie totale del solido. $[900\sqrt{3}$ dm$^2]$

233 Un prisma regolare ha per base un triangolo equilatero, il cui lato è i $\frac{2}{7}$ dell'altezza del solido. Sapendo che l'area della superficie totale del prisma è $(168 + 8\sqrt{3})$ dm^2, determina la lunghezza degli spigoli del prisma. [4 dm; 14 dm]

234 Una piramide retta a base quadrata ha l'altezza lunga $15\sqrt{3}$ cm, che forma un angolo di 30° con l'apotema di ogni singola faccia. Determina l'area della superficie totale del solido. [2700 cm^2]

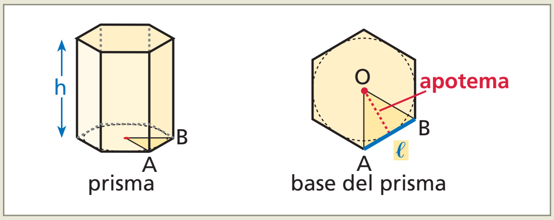
235 Una piramide regolare a base esagonale, il cui lato di base è lungo $10a$ cm, ha l'area della superficie totale di $1050 \cdot a^2\sqrt{3}$ cm^2. Determina l'altezza della piramide. $[5\sqrt{105}\,a$ cm$]$

236 In un tronco di piramide regolare a base quadrata, la somma di uno spigolo della base minore con uno della base maggiore è 20 cm e la superficie laterale è equivalente al quadruplo della differenza fra le aree delle due basi. Sapendo che l'apotema del tronco di piramide è 8 cm, calcola l'area della superficie totale. [528 cm^2]

Il volume dei poliedri

ESERCIZIO GUIDA

237 In un prisma regolare a base esagonale, il rapporto fra l'altezza e il lato di base è $2\sqrt{3}$ e l'area della superficie laterale è $192a^2\sqrt{3}$. Calcoliamo il volume del prisma.



Relazioni e dati

1. $\dfrac{h}{l} = 2\sqrt{3}$;
2. $A_l = 192a^2\sqrt{3}$.

Richiesta

V_P

Risoluzione

Scegliamo l'incognita.

Poiché $\dfrac{h}{l} = 2\sqrt{3}$, risulta $h = 2\sqrt{3} \cdot l$.

Pertanto, se poniamo $l = x$, abbiamo $h = 2\sqrt{3} \cdot x$.

Poiché $A_l = 192a^2\sqrt{3}$, determiniamo A_l in funzione di x e poi uguagliamo l'espressione ottenuta a $192a^2\sqrt{3}$:

$$A_l = 2p \cdot h \quad \rightarrow \quad A_l = 6x \cdot 2\sqrt{3}x = 12\sqrt{3}x^2$$

$$12\sqrt{3}x^2 = 192a^2\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad 12x^2 = 192a^2$$

$$x^2 = \frac{192a^2}{12} \rightarrow x^2 = 16a^2 \rightarrow x = \pm 4a.$$

Pertanto, $x = 4a$ (perché $-4a$ non accettabile).
Sostituiamo a x il valore $4a$ e calcoliamo le misure del prisma:

$$l = 4a$$

$$h = 2\sqrt{3} \cdot 4a = 8a\sqrt{3}.$$

Poiché la formula per calcolare il volume del prisma è $V = A_b \cdot h$, dobbiamo calcolare l'area di base.
Per farlo, usiamo la formula $A_b = p \cdot$ apotema.

Determiniamo l'apotema dell'esagono, ricordando che il triangolo OAB è equilatero. Applichiamo quindi la formula $h = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$, in cui h e l indicano rispettivamente l'altezza e il lato del triangolo equilatero, e otteniamo:

$$\text{apotema} = 4a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}.$$

Poiché il perimetro di base è

$$2p = 24a \rightarrow p = 12a,$$

risulta:

$$\text{area (base)} = 12a \cdot 2a\sqrt{3} = 24a^2\sqrt{3}.$$

Il volume del prisma è:

$$V = 24a^2\sqrt{3} \cdot 8a\sqrt{3} = 576a^3.$$

238 Il volume di un prisma triangolare regolare è $108\sqrt{3}$ cm^3. L'altezza del prisma è doppia dello spigolo di base. Determina l'area della superficie laterale del prisma. [216 cm^2]

239 Un prisma pentagonale regolare ha l'area della superficie totale di 204 cm^2. La somma delle basi è $\dfrac{5}{12}$ della superficie laterale e l'altezza è uguale al perimetro di una base. Determina il volume del prisma e lo spigolo di base. $\left[360 \text{ cm}^3; \dfrac{12}{5} \text{ cm}\right]$

240 Un parallelepipedo retto ha per base un rombo le cui diagonali stanno fra loro come 8 sta a 15. Sapendo che l'altezza del parallelepipedo è 10 cm e che l'area della superficie totale è 3280 cm^2, determina il volume del solido. [9600 cm^3]

241 Un parallelepipedo rettangolo ha la diagonale inclinata di 60° rispetto al piano di base e lunga 40 dm. Sapendo che i lati di base sono l'uno i $\dfrac{3}{4}$ dell'altro, calcola il volume del solido. [$3840\sqrt{3}$ dm^3]

242 Una piramide retta a base quadrata ha lo spigolo lungo $12a$ ed è inclinato di 60° rispetto alla base. Calcola il volume della piramide. [$144a^3\sqrt{3}$]

243 In una piramide regolare a base quadrata, la differenza fra l'area della superficie laterale e quella di base è 640 cm^2; l'altezza della piramide è $\dfrac{6}{5}$ del lato di base. Calcola l'apotema e il volume della piramide. [26 cm; 3200 cm^3]

244 In un tronco di piramide regolare a basi quadrate, la somma dei perimetri delle basi è 64 m e la somma delle loro aree è 160 m^2. Il volume del solido è $\dfrac{1664}{3}\sqrt{7}$ m^3. Calcola l'area della superficie totale. [$160 + 128\sqrt{29}$ m^2]

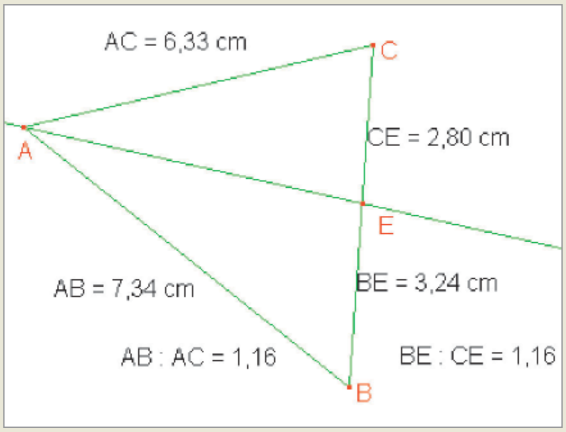
LABORATORIO DI MATEMATICA

Le grandezze proporzionali con Cabri

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Cabri verifichiamo il teorema della bisettrice: in un triangolo ABC la bisettrice AE divide il lato BC in due parti, BE e CE, tali che $AB : AC = BE : CE$.

- Attiviamo Cabri e con *Rette_Segmento*, applicato tre volte, costruiamo il triangolo ABC (figura 1).
- Con *Costrusci_Bisettrice* tracciamo la bisettrice dell'angolo $C\hat{A}B$ e segniamo con *Punti_Intersezione* il punto E.
- Con *Misura_Distanza* rendiamo visibili le misure dei segmenti AB, AC, CE e DE, e all'interno di ogni riquadro, che contiene un dato numerico, digitiamo il nome del segmento a cui corrisponde.
- Con *Misura_Calcolatrice* attiviamo la calcolatrice e valutiamo il primo membro della tesi del teorema: facciamo clic, di seguito, sulla misura di AB, sul simbolo /, sulla misura di AC e sul simbolo uguale. Con il mouse stacchiamo il risultato dalla calcolatrice, lo portiamo nella zona del disegno e, a fianco di esso, scriviamo l'espressione `AB:AC =`.
- Operiamo in modo simile per il secondo membro, scrivendo a fianco del dato numerico `BE:CE =`. Notiamo che i due rapporti risultano uguali.
- Per verificare il teorema spostiamo poi i punti A, B e C in vari modi, osservando che i valori dei due rapporti cambiano, ma restano uguali fra loro.



▲ Figura 1

Nel sito: ► 1 esercitazione guidata con Cabri ► 15 esercitazioni in più

Esercitazioni

Con il computer verifica le tesi dei seguenti problemi.

1 Disegna un triangolo ABC. Da un punto P di AB traccia la parallela a CB e chiama Q il suo punto di intersezione con AC. Da P traccia la parallela a QB e indica con R la sua intersezione con AC. Verifica che AQ è medio proporzionale fra AR e AC.

2 Disegna un triangolo ABC e la retta parallela al lato AB e passante per il suo baricentro G, detti P e Q, rispettivamente, i punti d'incontro con i lati AC e BC. Verifica che CP è il doppio di PA e CQ è il doppio di QB.

3 In un triangolo la semiretta uscente da un vertice di un triangolo divide il lato opposto in due parti direttamente proporzionali agli altri due lati, verifica che è la bisettrice dell'angolo.

4 Disegna un triangolo ABC e congiungi i punti medi M e N dei lati BC e CA. Verifica che la retta MN è parallela ad AB.

5 Disegna il triangolo ABC e traccia la bisettrice dell'angolo C, che incontra il lato AB nel punto D. Sul lato AC segna un punto P, in modo che AP sia congruente ad AD. Chiama Q il punto in cui la parallela ad AB per il punto P interseca CB. Verifica che DB è congruente a QB. Verifica che in un triangolo la congiungente i punti medi di due lati è parallela al terzo lato.

6 Verifica che in un triangolo la parallela a un lato e passante per il punto medio del secondo incontra il terzo lato nel suo punto medio.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

Matematica per il cittadino

FUSI ORARI E CHAT

Supponi che tutti i fusi orari siano costituiti da meridiani che uniscono i poli passando per l'equatore, trascurando l'esistenza di zone geografiche forzatamente incluse nei fusi, per evitare che in uno stesso Paese siano contemporaneamente presenti ore differenti.
Inoltre, ignora tutte le differenze forzate di orario, come per esempio l'ora legale.

1. Qual è la differenza di longitudine (posizione angolare rispetto al meridiano di Greenwich) fra due successivi meridiani che definiscono i fusi orari?

A 30°

B 15°

C 45°

D 24°

2. Le longitudini di Venezia, Teheran e Reykjavík sono rispettivamente: Est 12° 19′, Est 51° 26′, Ovest 21° 51′. Quando a Venezia sono le 15:27, che ora è a Teheran e a Reykjavík?

3. Tre amici, Beshir, Paolo e Valgeróur, abitano rispettivamente a Teheran, Venezia e Reykjavík. Vista la lontananza, decidono di chiacchierare simultaneamente su una chat, ognuno da casa propria, in un giorno della settimana, evitando il week-end. Beshir esce per andare a scuola alle 7 : 15 e rientra alle 16 : 50, ma il mercoledì ritorna alle 14 : 00. Paolo esce per andare a lavorare, dalle 7 : 30 alle 18 : 50, tranne il venerdì, quando rientra alle 14 : 00. Valgeróur va all'università dal lunedì al giovedì, dalle 9 : 00 alle 15 : 00. Paolo ha il compito di decidere quando si può organizzare la chat, facendo in modo che ognuno si connetta di sera al massimo fino alle 24 : 00, ora locale. Completa la tabella indicando per ogni giorno della settimana se può essere fatta la connessione e, in caso positivo, in quali orari secondo l'orologio di Paolo.

Giorno	Connessione (sì/no)	dalle	alle
lunedì			
martedì			
mercoledì			
giovedì			
venerdì			

4. Indicate con V, T, R rispettivamente l'ora di Venezia, Teheran e Reykjavík, scrivi nella tabella seguente le formule che permettono di determinare l'ora di una località, quando è noto l'orario di un'altra.

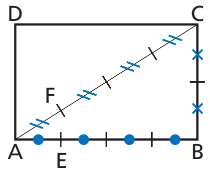
Ora nota	Formula
T	$R =$
	$V =$
V	$R =$
	$T =$
R	$V =$
	$T =$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

Verifiche di fine capitolo

TEST Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 20 test interattivi in più

1 Nella figura seguente sono incommensurabili tutte le coppie di segmenti indicate *tranne* una. Quale?



A AB e AF
B BC e AC
C BC e CF
D AB e AE
E AF e AE

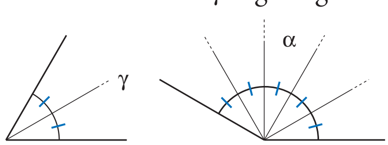
2 La misura del segmento AB rispetto a MN è $\sqrt{2}$. Quale fra le seguenti scritture è corretta?

A $AB = \sqrt{2}$
B $\sqrt{2}\,AB = MN$
C $\overline{AB} = \sqrt{2}\,\overline{MN}$
D $AB = \sqrt{2}\,MN$
E $AB = \sqrt{2}\,\overline{MN}$

3 Le seguenti uguaglianze relative alla lunghezza di due segmenti sono tutte equivalenti *tranne* una. Quale?

A $AB = 2{,}5\,CD$
B $2\,AB = 5\,CD$
C $0{,}4\,AB = CD$
D $AB = \dfrac{5}{2}\,CD$
E $CD = \dfrac{5}{2}\,AB$

4 Nella seguente figura sono rappresentati un angolo α e l'unità di misura γ degli angoli.



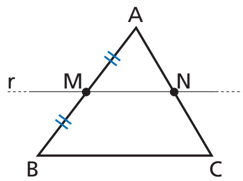
Quale delle seguenti uguaglianze è *vera*?

A $\alpha = \dfrac{5}{2}$
B $\alpha = 5$
C $\alpha = \dfrac{2}{5}$
D $\alpha = 10$
E $\alpha = 120$

5 La proporzione $a : b = c : d$ è equivalente soltanto a una delle seguenti proporzioni. Quale?

A $(a + b) : b = (c + d) : d$
B $(a - b) : a = (c - d) : d$
C $b : a = c : d$
D $a : c = d : b$
E $(a + b) : c = (b + c) : a$

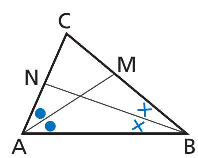
6 Nel triangolo ABC rappresentato in figura la retta r è parallela a BC e passa per il punto medio M di AB.



Quale delle seguenti relazioni è *falsa*?

A $MA = AN$
B $AN = NC$
C $AB : AM = AC : AN$
D $AM : MB = AN : NC$
E $AC : AN = AB : AM$

7 Osserva la figura. Quale delle seguenti proporzioni è *falsa* (con $2p$ indichiamo il perimetro del triangolo ABC)?



A $BM : MC = AB : AC$
B $BM : MC = AB : BC$
C $AN : NC = AB : BC$
D $AC : NC = (2p - AC) : BC$
E $BC : MC = (2p - BC) : AC$

8 In un quadrato la diagonale misura 5. Quanto misura il lato?

A $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$
B $\sqrt{5}$
C $\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$
D $5\sqrt{2}$
E $2\sqrt{5}$

SPIEGA PERCHÉ

9 In un triangolo rettangolo un cateto è cinque volte l'altro. Dimostra che l'ipotenusa è incommensurabile con entrambi i cateti.

10 Fra le grandezze A, B e C valgono le seguenti relazioni:

$$A = \sqrt{3}\,C, \qquad B = 5\sqrt{3}\,C.$$

A e C sono commensurabili? E A e B?

11 Spiega perché l'insieme delle ampiezze degli angoli al centro di una stessa circonferenza è un insieme di grandezze omogenee. E l'insieme degli archi della stessa circonferenza?

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

12 AB e CD sono due segmenti. Determina le relazioni tra essi e illustrale con un disegno.

a) AB è multiplo secondo 5 del sottomultiplo secondo 3 di CD.
b) Il multiplo secondo 3 di AB è uguale al multiplo secondo 5 di CD.
c) Il sottomultiplo secondo 3 del multiplo secondo 4 di AB è uguale al multiplo secondo 2 del sottomultiplo secondo 3 di CD.

13 In quali dei seguenti casi le grandezze A e B sono commensurabili?

a) $A = \frac{2}{3}B$; b) $A = 0{,}\overline{3}\,B$; c) $A = \sqrt{3}\,B$; d) $A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}B$.

14 Esprimi, per ciascuno dei due casi rappresentati nel disegno, il rapporto fra l'area A e l'area B.

15 Due triangoli hanno la stessa area di 50 cm^2. Sapendo che la base del primo triangolo è il doppio dell'altra e che l'altezza del primo triangolo è lunga 10 cm, determina la lunghezza della base del secondo triangolo. [5 cm]

16 In un triangolo isoscele, l'ampiezza dell'angolo al vertice è quattro volte quella degli angoli alla base. Determina l'ampiezza dei tre angoli del triangolo. [30°; 30°; 120°]

17 In un triangolo ABC, sia BD la bisettrice dell'angolo $A\hat{B}C$. Il lato AB è lungo 16 cm. Sapendo che il lato BC è la metà del lato AB e che $AD - DC = 5$ cm, determina il perimetro del triangolo ABC. [39 cm]

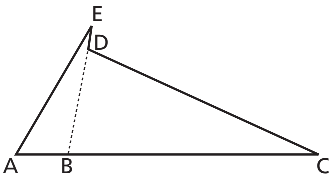
18 Un triangolo ABC è inscritto in una semicirconferenza di centro O e raggio $2a$. L'angolo $C\hat{O}B$ è di 60°. Calcola la area e perimetro del triangolo, altezza relativa al diametro AB e le due parti in cui tale altezza divide la base. [$2\sqrt{3}a^2$; $2a(3+\sqrt{3})$; $a\sqrt{3}$; $3a$; a]

19 I punti P e Q dividono la base maggiore AB di un trapezio in tre parti congruenti. Conduci da P la parallela alla diagonale BD e chiama R il suo punto di intersezione con il lato AD; conduci da Q la parallela alla diagonale AC e chiama S il suo punto di intersezione con il lato BC. Dimostra che il rapporto tra i segmenti AR e RD è uguale al rapporto tra i segmenti BS e SC. Dimostra che la retta RS è parallela alle basi del trapezio.

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▸ 9 esercizi in più

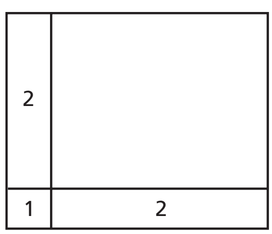
20 TEST Si sa che nella figura $C\hat{A}E = 60°$, $A\hat{E}B = 20°$, $A\hat{C}D = 25°$. I punti E, D, B sono allineati. Qual è la misura di $B\hat{D}C$?



- A 75°
- B 85°
- C 90°
- D 105°
- E Le informazioni sono insufficienti.

(*Olimpiadi della matematica*, *Giochi di Archimede*, 1998)

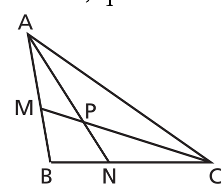
21 TEST Nella figura le cifre rappresentano il perimetro, in centimetri, del corrispondente rettangolo. Quanti centimetri è lungo il perimetro del quarto rettangolo?



- A 1
- B 2
- C 4
- D $\frac{3}{2}$
- E 3

(*Olimpiadi della matematica*, *Gara provinciale*, 1995)

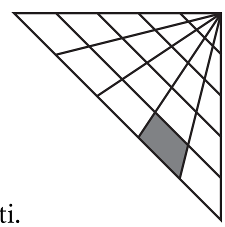
22 TEST Nel triangolo ABC le semirette AN e CM sono le bisettrici di $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$ e si intersecano in P. Sapendo che $A\hat{P}C = 140°$, quanto misura l'angolo in B?



- A 90°
- B 100°
- C 110°
- D 120°
- E 130°

(*Olimpiadi della matematica*, *Giochi di Archimede*, 2000)

23 TEST Nel triangolo rettangolo isoscele disegnato, ogni lato è stato diviso in cinque parti uguali. Determinare l'area della regione evidenziata in grigio sapendo che ciascun cateto è lungo 50 cm.



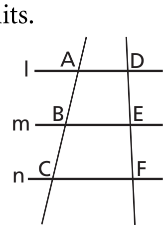
- A 9 cm^2
- B 50 cm^2
- C 90 cm^2
- D $18\sqrt{26}$ cm^2
- E Nessuna delle precedenti.

(*Olimpiadi della matematica*, *Gara provinciale*, 2001)

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▸ 6 esercizi in più

24 TEST In the figure, if $l \parallel m \parallel n$, $AB = 5$, $AC = 10$, $DE = 3x + 4$, and $DF = 10x - 4$, then:



- A $DE = 5$ units and $DF = 10$ units.
- B $DE = \left(7 + \frac{3}{7}\right)$ units.
- C $DE = \left(6 + \frac{2}{7}\right)$ units.
- D $DE = 3$ units.
- E None of the answers.

(USA *Northern State University: 50th Annual Mathematics Contest*, 2003)

25 Find the area of a regular octagon which is circumscribed by a circle with radius 1.

(USA *Bay Area Math Meet, BAMM, Bowl Sampler*, 1995)

[$2\sqrt{2}$]

26 TEST A square has a perimeter $p > 0$ and area $A = 2p$, then what is the value of p?

- A 24
- B 32
- C 36
- D 48
- E 54

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2001)

27 Suppose a trapezoid has sides 5, 5, 5, and 11. Find its area.

(USA *Bay Area Math Meet, BAMM, Bowl Sampler*, 1997)

[32]

28 Find the area of a regular hexagon which has perimeter 12.

(USA *Bay Area Math Meet, BAMM, Bowl Sampler*, 1997)

[$6\sqrt{3}$]

GLOSSARY

circle: cerchio
circumscribed: circoscritto
hexagon: esagono
none: nessuno
octagon: ottagono
perimeter: perimetro
radius: raggio
square: quadrato
trapezoid: trapezio

CAPITOLO

G7

Le trasformazioni geometriche

Letture allo specchio!

Ingegni, ossesso, anilina: tre esempi di palindromi, ovvero di parole che si possono leggere sia da sinistra verso destra, sia da destra verso sinistra. Esistono anche delle frasi palindrome, come per esempio «I re sono seri», o perfino interi componimenti letterari. Ma se guardi la parola INGEGNI allo specchio ottieni IИGƎGИI, che rispetta sì la successione delle lettere, ma non la loro forma…

…esistono parole che si possono leggere anche allo specchio?

➡ **La risposta a pag. G354**

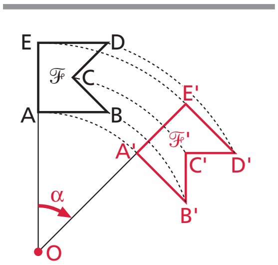
1. Che cosa sono le trasformazioni geometriche

Introduciamo il concetto di trasformazione geometrica prendendo come esempio una rotazione.

Consideriamo il punto O e un angolo orientato di ampiezza α (figura 1). Al punto A associamo il punto A' tale che $OA \cong OA'$.

Allo stesso modo, possiamo associare a un altro punto B il punto B', a C il punto C' e così via.

Abbiamo creato una corrispondenza fra punti del piano. Tale corrispondenza è biunivoca perché, fissato il punto O e l'angolo orientato α, a ogni punto del piano corrisponde uno e un solo punto del piano stesso e viceversa.



▲ **Figura 1** **Al punto A associamo A', al segmento AB il segmento $A'B'$, al poligono $ABCDE$ (figura $\mathcal{F}$) il poligono $A'B'C'D'E'$ (figura $\mathcal{F}'$).**

DEFINIZIONE

Trasformazione geometrica

Una trasformazione geometrica è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del piano un punto del piano stesso.

In altre parole, una trasformazione geometrica è una *funzione biiettiva* del piano in sé.

Ogni punto (o figura) che si ottiene mediante una trasformazione geometrica viene detto **trasformato** o **immagine** del punto (o della figura) di partenza.

Nell'esempio precedente il punto A' è immagine di A, il segmento $A'B'$ è immagine del segmento AB.

Se indichiamo con r la rotazione, r rappresenta una funzione, quindi possiamo anche scrivere $A' = r(A)$.

Si legge «A' uguale a erre di A».

Quando in una trasformazione a un punto corrisponde se stesso, diciamo che il punto è **unito**.

Per esempio, nella rotazione precedente il punto O è un punto unito.

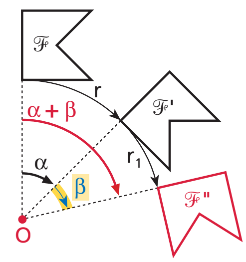
La composizione di trasformazioni

Poiché le trasformazioni geometriche sono funzioni, possiamo considerare la loro **composizione**.
Date due trasformazioni geometriche t e t', se al punto P viene associato il punto $P' = t(P)$ e a P' viene associato $P'' = t'(P')$, la **composizione** di t' con t associa al punto P il punto P''.

Indichiamo la composizione delle due trasformazioni allo stesso modo della composizione di funzioni, ossia con la scrittura $t' \circ t$.

Si legge «t' composto t».

La figura $\mathcal{F}''$, corrispondente della figura $\mathcal{F}$ mediante $t' \circ t$, si trova applicando prima t e poi t'.



◄ **Figura 2** Composizione di due rotazioni: una rotazione intorno a O di un angolo α, seguita da una rotazione intorno a O di un angolo β, equivale a un'unica rotazione intorno a O di $\alpha + \beta$.

L'identità

DEFINIZIONE

Identità

L'identità è la trasformazione che a ogni punto del piano associa il punto stesso.

Per esempio, fra le rotazioni di centro O quella in cui l'angolo di rotazione è nullo è l'identità.

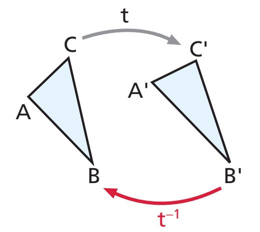
Indichiamo l'identità con i. In una identità tutti i punti sono uniti:

$$\forall P, \quad P = i(P).$$

La trasformazione inversa

Poiché le trasformazioni geometriche sono funzioni biiettive, l'inversa di una trasformazione geometrica è ancora una trasformazione geometrica.

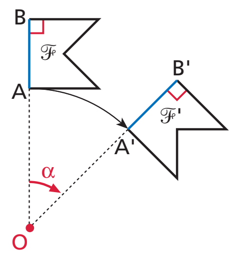
In generale, data una trasformazione t che associa a un punto P il punto P', la **trasformazione inversa** associa al punto P' il punto P e viene indicata con il simbolo $\boldsymbol{t^{-1}}$.



Per esempio, la trasformazione inversa della rotazione precedente r è la rotazione r^{-1} di stesso centro e angolo di uguale ampiezza ma orientato in verso contrario.

La composizione di una trasformazione con la sua inversa ha come risultato la trasformazione identità $t^{-1} \circ t = i$.

Gli invarianti di una trasformazione



Consideriamo di nuovo una rotazione di centro O e angolo α (figura a lato): osserviamo che il lato AB è congruente al lato $A'B'$, le due figure $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}'$ sono entrambe concave, un angolo retto viene trasformato in un angolo retto.

Le proprietà delle figure che non cambiano nelle trasformazioni si chiamano **invarianti** della trasformazione.

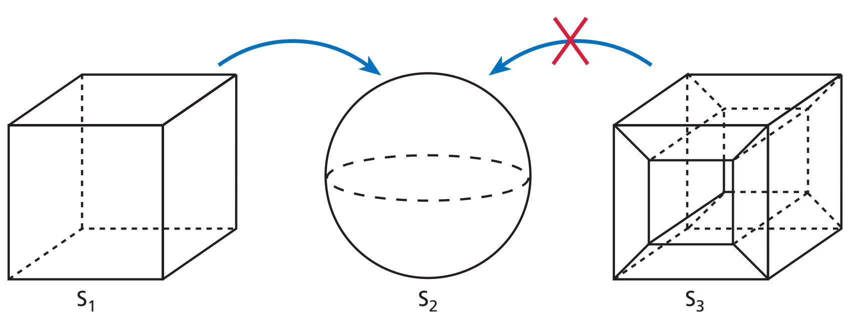
Presentiamo ora una classificazione sintetica e intuitiva delle trasformazioni geometriche, basata sugli invarianti. Cominciamo dalle trasformazioni con il minor numero di invarianti.

Gli omeomorfismi

Tra le proprietà di un **omeomorfismo** figurano le seguenti:

- a curve chiuse corrispondono curve chiuse, a curve aperte corrispondono curve aperte;
- a curve intrecciate corrispondono curve intrecciate con lo stesso numero di nodi (i punti in cui le curve intersecano se stesse);
- se un punto è intersezione di due curve, il punto che gli corrisponde risulta intersezione delle curve corrispondenti.

Un invariante di un omeomorfismo è la **continuità** delle figure. Gli omeomorfismi sono anche chiamati *trasformazioni topologiche*.

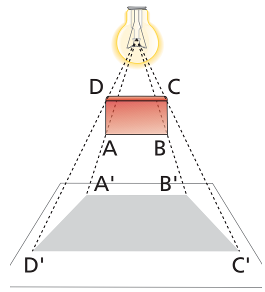


▼ **Figura 3** **Dei due poliedri, solo il cubo S_1 è trasformabile nella sfera S_2 mediante una trasformazione topologica. Poliedri di questo tipo vengono detti semplicemente connessi. Si può dimostrare che per essi, detti F il numero delle facce, V quello dei vertici, S quello degli spigoli, vale la seguente formula di Eulero per i poliedri:**
$F - S + V = 2$.
Questo è un esempio di proprietà invariante in una trasformazione topologica. Scoperta da Eulero intorno al 1750, dal suo studio iniziò lo sviluppo di quella parte della matematica detta Topologia.
Puoi verificare che la formula non vale per poliedri non semplicemente connessi. Per esempio, nel poliedro S_3, $V = 16$, $F = 16$, $S = 32$, quindi $F - S + V = 0 \neq 2$.

Le trasformazioni proiettive

Una **trasformazione proiettiva**, o **proiettività**, è una particolare trasformazione topologica, in cui **le rette si trasformano in rette** e i segmenti in segmenti. Possiamo dire che è invariante la «rettilinearità».

Nelle proiettività viene in particolare conservata la **convessità** delle figure.

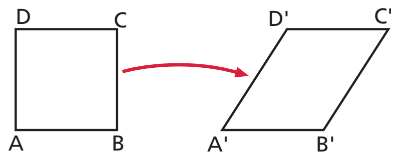


▸ **Figura 4** L'ombra di un libro generata da una lampadina dà l'idea della trasformazione di un rettangolo (il libro) in un quadrilatero (l'ombra) mediante una proiettività.

I triangoli si trasformano in triangoli, i poligoni convessi in poligoni convessi con lo stesso numero di lati.

Le trasformazioni affini

Una **trasformazione affine**, o **affinità**, è una particolare trasformazione proiettiva, nella quale viene conservato anche il **parallelismo fra rette**.



▸ **Figura 5** In un'affinità al quadrato *ABCD* corrisponde il parallelogramma *A'B'C'D'*: alle rette parallele *AB* e *CD* corrispondono le rette *A'B'* e *C'D'*, ancora parallele, e così via.

La similitudine

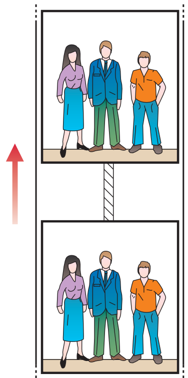
Una **similitudine** è un'affinità, nella quale si conserva la forma delle figure e, in particolare, la congruenza fra gli angoli; inoltre, fra i segmenti corrispondenti esiste un rapporto costante.

▸ **Figura 6** Una stessa fotografia riprodotta in due formati diversi è un esempio di similitudine: la forma delle figure non cambia.

Le isometrie

Le isometrie sono le trasformazioni che descrivono, in modo astratto, i movimenti che mantengono inalterate le misure degli oggetti, ossia i *movimenti rigidi*.

Le **isometrie**, o **congruenze**, sono quindi particolari similitudini che hanno il rapporto di similitudine uguale a 1. In altre parole, esse hanno come invariante la **distanza** fra i punti: la distanza fra due punti è uguale alla distanza fra le loro immagini.



▸ **Figura 7** Rappresentiamo un ascensore con un rettangolo. Il movimento traslatorio dell'ascensore in direzione verticale è una particolare isometria detta *traslazione*.

Isometria deriva dal greco *isos*, che significa «uguale», e *métron*, che significa «misura».

Più in generale, le figure che si corrispondono in un'isometria sono congruenti.

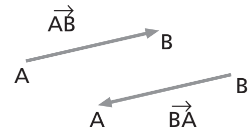
Studieremo quattro tipi di isometrie: traslazione, rotazione, simmetria centrale, simmetria assiale.

Anche l'identità può essere vista come una particolare isometria.

2. La traslazione

I vettori

È possibile orientare un segmento AB, fissandone un verso di percorrenza, da A verso B oppure da B verso A. Parleremo, in questo caso, di **segmento orientato**.



Indichiamo il segmento orientato da A verso B con il simbolo $\overrightarrow{AB}$ e da B verso A con il simbolo $\overrightarrow{BA}$.

Dato un segmento orientato $\overrightarrow{AB}$, diciamo che è **equipollente** ad $\overrightarrow{AB}$ ogni altro segmento orientato che ha la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso.

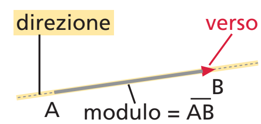
Nell'insieme dei segmenti orientati, la relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza, perché gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. L'equipollenza suddivide perciò i segmenti orientati del piano in classi di equivalenza. Ogni classe è chiamata **vettore** e contiene tutti e soli i segmenti fra loro equipollenti.

Vettore deriva dal latino *vector*, il cui significato è «che trasporta».

Indichiamo un vettore con una lettera sormontata da una freccia, $\vec{a}$, oppure con il segmento orientato che lo rappresenta, $\overrightarrow{AB}$.

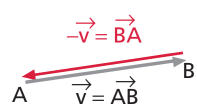
Un vettore $\overrightarrow{AB}$ è caratterizzato da:

- il **modulo** $|\overrightarrow{AB}|$, ossia la misura della lunghezza del segmento AB rispetto a un'unità prefissata;
- la **direzione**, cioè la direzione della retta a cui appartiene il segmento;
- il **verso**.

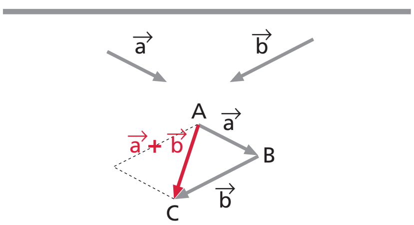


Si chiama **vettore nullo** il vettore che ha come rappresentanti i segmenti nulli. Il vettore nullo viene indicato con $\vec{0}$, ha modulo 0 e direzione e verso indeterminati.

Si chiama **vettore opposto** di un vettore $\overrightarrow{AB}$ il vettore $\overrightarrow{BA}$, ossia il vettore che ha lo stesso modulo di $\overrightarrow{AB}$ e la stessa direzione, ma verso contrario.
Indichiamo il vettore opposto di $\vec{v}$ con $-\vec{v}$.



Per ottenere la **somma di due vettori** $\vec{a}$ e $\vec{b}$, rappresentiamo $\vec{a}$ con il segmento $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{b}$ con il segmento $\overrightarrow{BC}$, consecutivo al primo (figura 8). Il vettore somma è rappresentato dal segmento $\overrightarrow{AC}$. In altre parole, il vettore somma ha lunghezza e direzione della diagonale del parallelogramma di lati i due vettori. Per questa ragione, la regola per sommare due vettori assegnati è nota come **regola del parallelogramma**.



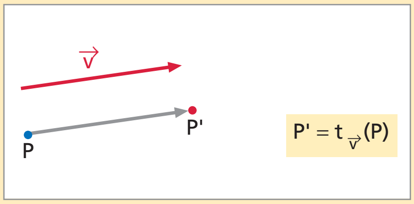
◀ **Figura 8** **Facciamo coincidere il secondo estremo del primo segmento con il primo estremo del secondo segmento. Il vettore somma è $\overrightarrow{AC}$.**

La traslazione

DEFINIZIONE

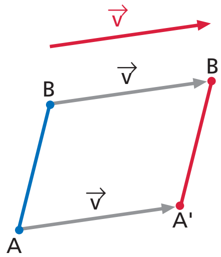
Traslazione

Fissato nel piano un vettore $\vec{v}$, una traslazione è una trasformazione geometrica che a ogni punto P fa corrispondere il punto P' tale che $\overrightarrow{PP'}$ è equipollente a $\vec{v}$.



Indichiamo una traslazione di vettore $\vec{v}$ con il simbolo $t_{\vec{v}}$; analogamente, la traslazione di vettore $\overrightarrow{AB}$ si indica con $t_{\overrightarrow{AB}}$.

Dimostriamo che una traslazione è un'**isometria**: basta dimostrare che, dati due punti qualsiasi A e B e i loro trasformati A' e B', i segmenti AB e $A'B'$ sono congruenti.



Al punto A corrisponde il punto A', a B corrisponde B'. Il quadrilatero $AA'B'B$ è un parallelogramma, perché ha due lati opposti AA' e BB' congruenti e paralleli (sono due rappresentanti del vettore $\vec{v}$). In un parallelogramma i lati opposti sono congruenti, *quindi* $AB \cong A'B'$.

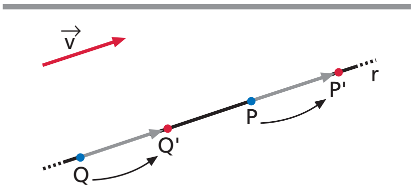
Si può dimostrare anche che alla retta AB corrisponde la retta $A'B'$ e che le due rette sono parallele.
Questa proprietà è comune a tutte le traslazioni: a ogni retta corrisponde una retta a essa parallela.

Un caso particolare di traslazione è la **traslazione nulla**, ossia la traslazione di vettore nullo. La traslazione nulla coincide con l'identità.

I punti uniti e le figure unite

Una **figura unita** è una figura che coincide con la sua trasformata.

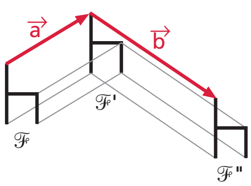
ESEMPIO In una traslazione di vettore $\vec{v}$ ogni retta parallela a tale vettore è unita. Infatti, se una retta è parallela al vettore $\vec{v}$, a ogni suo punto corrisponde ancora un suo punto, quindi alla retta corrisponde se stessa.

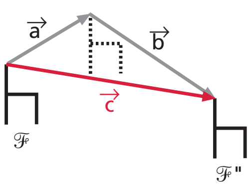


▶ **Figura 9** La retta r è parallela al vettore della traslazione. Al punto P di r corrisponde il punto P' ancora di r. La retta è unita.

In una traslazione di vettore qualsiasi non esistono punti uniti.

La composizione di due traslazioni





Applichiamo la traslazione $t_{\vec{a}}$ alla figura $\mathcal{F}$ (figura a lato). A $\mathcal{F}$ corrisponde la figura $\mathcal{F}'$.

La traslazione $t_{\vec{b}}$ fa corrispondere a $\mathcal{F}'$ la figura $\mathcal{F}''$.

La composizione delle due traslazioni $t_{\vec{b}} \circ t_{\vec{a}}$ è una nuova traslazione, $t_{\vec{c}}$, il cui vettore, $\vec{c}$, è la somma vettoriale di $\vec{a}$ e di $\vec{b}$, ossia:

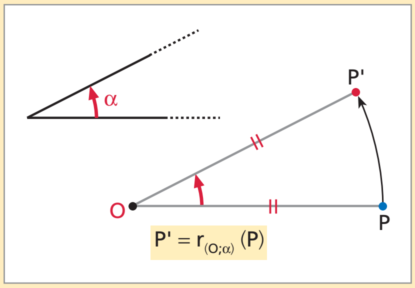
$$t_{\vec{b}} \circ t_{\vec{a}} = t_{\vec{a}+\vec{b}}.$$

3. La rotazione

DEFINIZIONE

Rotazione

Fissati nel piano un punto O e un angolo α, la rotazione di centro O e angolo α è quella trasformazione geometrica che a ogni punto P fa corrispondere il punto P' tale che:
- $OP' \cong OP$;
- l'angolo $P\hat{O}P'$ è congruente ad α e ugualmente orientato.



▶ Indichiamo una rotazione di centro O e angolo α con il simbolo $r_{(O;\,\alpha)}$.

Si può dimostrare che una rotazione è un'**isometria**.

Un caso particolare di rotazione è la **rotazione nulla**, ossia la rotazione di angolo nullo o di un angolo multiplo di un angolo giro. La rotazione nulla coincide con l'identità.
In una rotazione non nulla l'unico **punto unito** è il centro O, mentre esistono **figure unite** rispetto a particolari rotazioni. Per esempio:
- la circonferenza e il cerchio sono figure unite rispetto a una rotazione, di angolo qualsiasi, intorno al loro centro;
- il quadrato è una figura unita per rotazioni di centro il punto d'incontro delle diagonali e di angoli multipli interi di un angolo retto (un angolo retto, un angolo piatto...).

La composizione di rotazioni

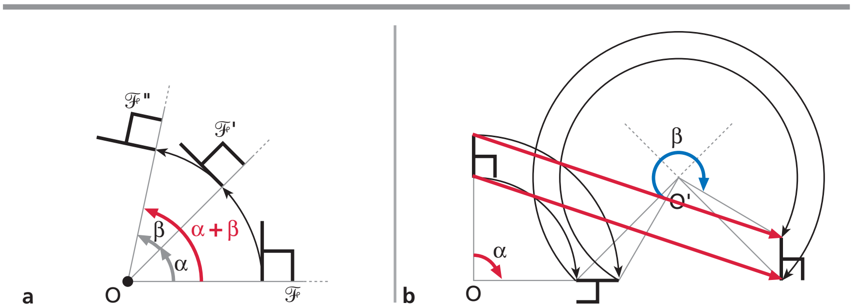
Consideriamo due rotazioni con lo stesso centro O e con angoli di rotazione diversi α e β (figura 10*a*), rotazioni indicate rispettivamente con:

$r_{(O;\,\alpha)}$ e $r_{(O;\,\beta)}$.

La trasformazione composta $r_{(O;\,\beta)} \circ r_{(O;\,\alpha)}$ è una nuova rotazione avente lo stesso centro O e angolo uguale all'angolo somma di α e β:

$$r_{(O;\,\beta)} \circ r_{(O;\,\alpha)} = r_{(O;\,\alpha+\beta)}.$$

Non è detto, invece, che la composizione di due rotazioni di centri diversi sia ancora una rotazione. Osserva l'esempio della figura 10*b*.
Pertanto la composizione fra rotazioni di centri diversi **non** è un'operazione interna all'insieme delle rotazioni.



◀ Figura 10

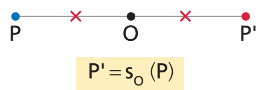
4. La simmetria centrale

DEFINIZIONE

Simmetria centrale

Fissato nel piano un punto O, una simmetria centrale di centro O è la trasformazione geometrica che a ogni punto P fa corrispondere il punto P' tale che il segmento PP' abbia O come punto medio.

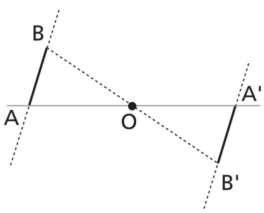
Indichiamo una simmetria di centro O con il simbolo s_O.



Dalla definizione deduciamo che al punto O corrisponde se stesso, quindi O è un punto unito.

Si può dimostrare che la simmetria centrale è un'**isometria**.

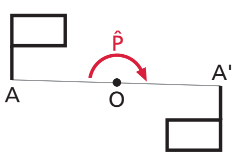
Inoltre, nelle simmetrie centrali **a ogni retta corrisponde una retta a essa parallela** (figura a lato).



Dunque, anche nella simmetria centrale, come nella traslazione, la direzione delle rette è un invariante.

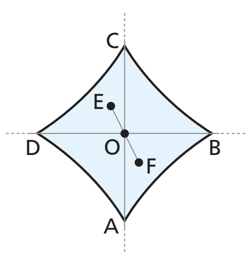
Il punto O, centro di simmetria, è l'unico **punto unito** della simmetria centrale, mentre ogni **retta** passante per O è **unita**.

La simmetria centrale può anche essere pensata come una rotazione di un angolo piatto intorno al centro di simmetria e viceversa (figura a lato).



Il centro di simmetria di una figura

Consideriamo la figura $ABCD$ e il punto O interno a essa (figura a lato).

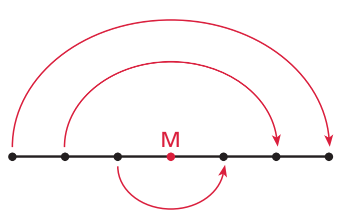


Determiniamo la figura corrispondente nella simmetria di centro O.

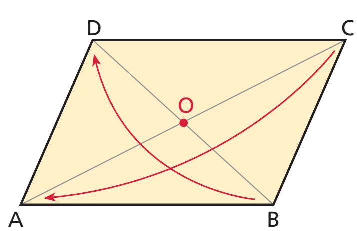
In questo caso particolare, osserviamo che a ciascun punto della figura corrisponde un altro punto della figura: ad A corrisponde C, a B corrisponde D, a E corrisponde F ecc. La figura data è quindi una **figura unita** rispetto alla simmetria centrale. Il punto O, centro della simmetria, è detto *centro di simmetria* della figura.

In generale, un punto del piano è detto **centro di simmetria di una figura** se la figura è unita rispetto alla simmetria centrale di centro quel punto.

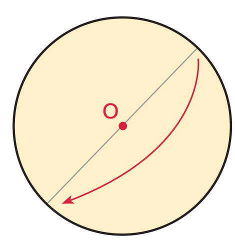
▼ **Figura 11**



a. Un segmento ha come centro di simmetria il proprio punto medio.



b. Un parallelogramma ha come centro di simmetria il punto di incontro delle diagonali.



c. Un cerchio ha come centro di simmetria il proprio centro.

La composizione di due simmetrie centrali

Consideriamo la simmetria centrale s_O applicata alla figura $\mathcal{F}$. Alla figura $\mathcal{F}$ corrisponde $\mathcal{F}'$ (figura *a*).

Applichiamo la simmetria centrale $s_{O'}$ alla figura $\mathcal{F}'$. Alla figura $\mathcal{F}'$ corrisponde $\mathcal{F}''$.

La composizione delle due simmetrie $s_{O'} \circ s_O$ è una traslazione, $t_{\vec{v}}$, il cui vettore $\vec{v}$ è il doppio del vettore che congiunge i due centri (figura *b*), ossia:

$$s_{O'} \circ s_O = t_{2\vec{OO'}}.$$

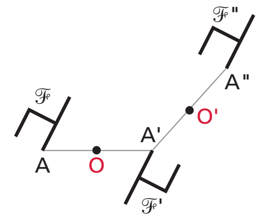
Infatti, nel triangolo $AA'A''$, il punto O è punto medio di AA' e O' è punto medio di $A'A''$, *quindi* il segmento OO' è parallelo ad AA'' ed è lungo metà del segmento stesso per il teorema di Talete.

Questo esempio fa capire che l'operazione di composizione non è un'operazione interna nell'insieme delle simmetrie centrali: componendo due simmetrie centrali non si ottiene una simmetria centrale, ma una traslazione.

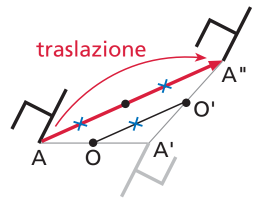
La composizione di una simmetria centrale con se stessa dà come risultato l'identità. Infatti, a un qualunque punto A corrisponde in una simmetria s_O il punto A' e al punto A' corrisponde nella stessa simmetria s_O di nuovo il punto A.

Si dice anche che la simmetria centrale è una *trasformazione involutoria*.

In generale, una trasformazione geometrica è **involutoria** quando, componendola con se stessa, si ottiene come risultato l'identità.



a



b

5. La simmetria assiale

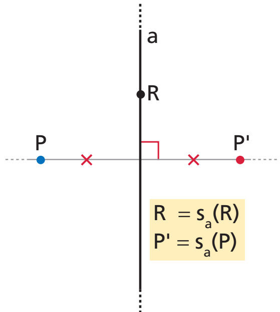
DEFINIZIONE

Simmetria assiale

Fissata una retta a nel piano, una simmetria assiale è la trasformazione geometrica che:

1. a ogni punto R di a fa corrispondere se stesso;
2. a ogni punto P, non appartenente ad a, fa corrispondere il punto P', dalla parte opposta di P rispetto ad a, tale che:

- P' appartiene alla retta passante per P e perpendicolare ad a;
- P e P' hanno la stessa distanza da a.



La retta a viene detta **asse di simmetria**.

Si può dimostrare che la simmetria assiale è un'**isometria**.

In una simmetria assiale, l'asse di simmetria è l'insieme di tutti e soli i **punti uniti** della trasformazione.

Indichiamo una simmetria assiale di asse a con il simbolo s_a.

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Il percorso più breve

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Due punti *A* e *B* sono situati in uno stesso semipiano generato da una retta *r*. Determina su *r* il punto *P* tale che la spezzata *APB* abbia la minima lunghezza.

MARCELLO: «Dipende molto da come sono messi *A* e *B*. Bisogna esaminare più casi».

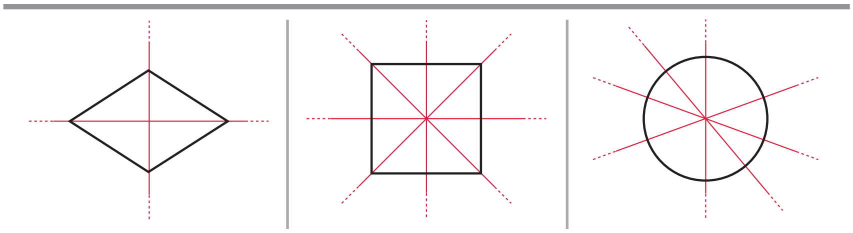
GIOVANNA: «Mi sembra che quello più semplice sia quando *A* e *B* sono alla stessa distanza da *r*. Partiamo da lì».

▶ Procedi come suggerisce Giovanna. Dove si trova *P*? Scegli poi *B* a diverse distanze da *r* e, in ognuno dei casi che esamini, determina *P*. Riassumi i casi in uno stesso foglio che contenga un unico punto *A*, i punti B_1, B_2, B_3, … e i corrispondenti P_1, P_2, P_3, … Riesci a individuare qualche proprietà?

L'asse di simmetria di una figura

Una retta del piano si dice **asse di simmetria di una figura** se la figura è unita rispetto alla simmetria assiale che ha per asse quella retta.

ESEMPIO

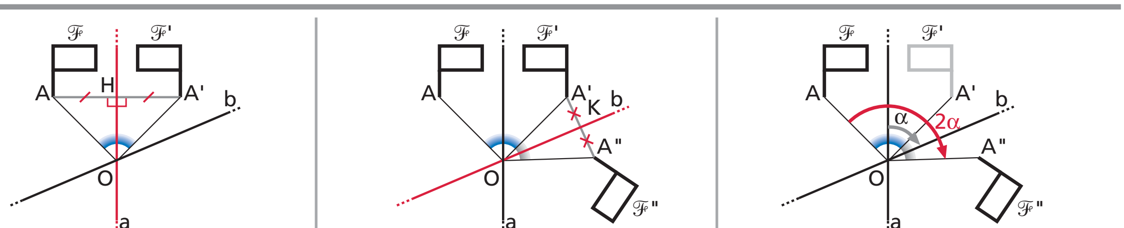


▶ **Figura 12** Sono assi di simmetria le rette
- delle diagonali, nel rombo;
- delle diagonali e dei punti medi dei lati opposti, nel quadrato;
- dei diametri, nel cerchio.

La composizione di due simmetrie assiali

La composizione di simmetrie con assi non paralleli

▼ **Figura 13** Composizione $s_b \circ s_a$. Cosa puoi dire di $s_a \circ s_b$?



a. Consideriamo le rette *a* e *b* incidenti in *O*. La simmetria s_a trasforma la figura 𝓕 nella figura 𝓕'. I triangoli rettangoli *AHO* e *OHA'* sono congruenti per il primo criterio, perciò $A\hat{O}H \cong H\hat{O}A'$.

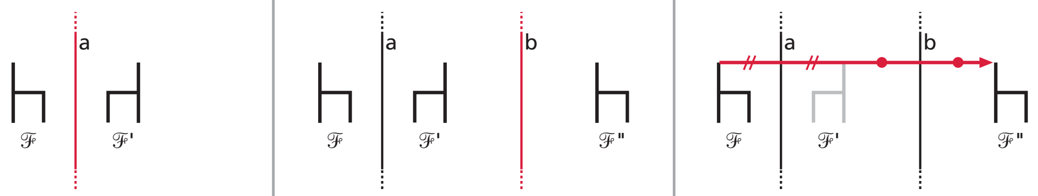
b. La simmetria s_b trasforma 𝓕' nella figura 𝓕". I triangoli rettangoli *A'KO* e *KOA"* sono congruenti, sempre per il primo criterio, quindi $A'\hat{O}K \cong K\hat{O}A''$.

c. La composizione delle due simmetrie $s_b \circ s_a$ è la rotazione di centro *O*, intersezione degli assi, e di angolo il doppio dell'angolo α segnato in figura (l'angolo convesso formato dalle rette *a* e *b*).

La composizione di una simmetria con se stessa
Se applichiamo due volte una stessa simmetria assiale, vediamo che a un punto A corrisponde il suo simmetrico A' e ad A' corrisponde di nuovo A. La simmetria assiale è quindi una trasformazione involutoria.

La composizione di simmetrie con assi paralleli

▼ Figura 14



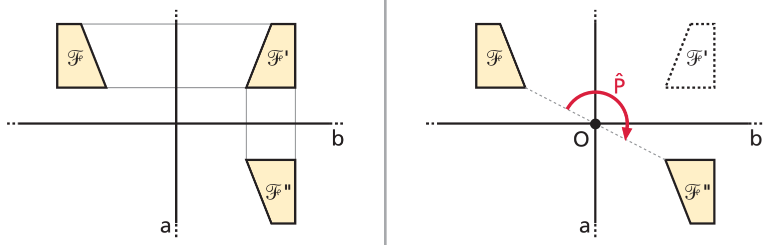
a. Consideriamo la simmetria s_a, che applicata alla figura $\mathscr{F}$ produce la figura $\mathscr{F}'$.

b. Applichiamo ora a $\mathscr{F}'$ la simmetria s_b (dove l'asse b è parallelo ad a). A $\mathscr{F}'$ corrisponde la figura $\mathscr{F}''$.

c. La composizione delle due simmetrie $s_b \circ s_a$ è una traslazione, il cui vettore ha per modulo il doppio della distanza fra i due assi.

La composizione di simmetrie con assi perpendicolari
Se gli assi di simmetria sono perpendicolari, la composizione delle due simmetrie equivale a una rotazione di un angolo piatto, ossia a una simmetria centrale (figura 15).

◄ Figura 15



a. Alla figura $\mathscr{F}$ corrisponde $\mathscr{F}'$ nella simmetria di asse a e a $\mathscr{F}'$ corrisponde la figura $\mathscr{F}''$ nella simmetria di asse b.

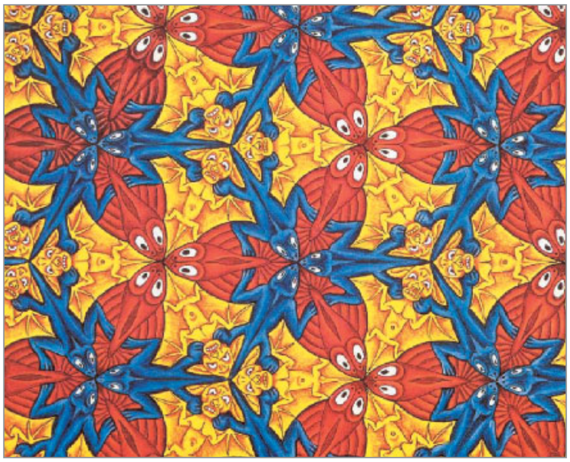
b. La figura $\mathscr{F}$ viene trasformata in $\mathscr{F}''$ con una rotazione di un angolo piatto $\hat{P}$ di centro O, ossia con una simmetria centrale di centro O.

Le simmetrie assiali e le isometrie
Si può dimostrare che ogni rotazione e ogni traslazione possono essere pensate come composizioni di due opportune simmetrie assiali.

Abbiamo anche visto che la simmetria centrale coincide con la rotazione di un angolo piatto e di medesimo centro.

Pertanto, possiamo dire che *ogni isometria* può essere pensata come composizione di simmetrie assiali.

ESPLORAZIONE: TASSELLARE È UN'ARTE



▲ Una tassellazione di M.C. Escher.

Le tassellazioni sono ricoprimenti del piano mediante figure geometriche disposte senza lasciare parti vuote, come, per esempio, nel pavimento di una stanza.

Nell'arte sono state rappresentate tassellazioni nelle quali figure geometriche vengono ripetute mediante traslazioni, simmetrie e loro composizioni.

IN CINQUE SLIDE

Nell'immagine di Escher prova a individuare le trasformazioni geometriche utilizzate.

Cerca in Internet altri esempi di tassellazioni, individuando il motivo che si ripete, le trasformazioni applicate.
Realizza una presentazione multimediale.

Cerca nel web: tassellazioni, Escher, plane patterns, mathematics.

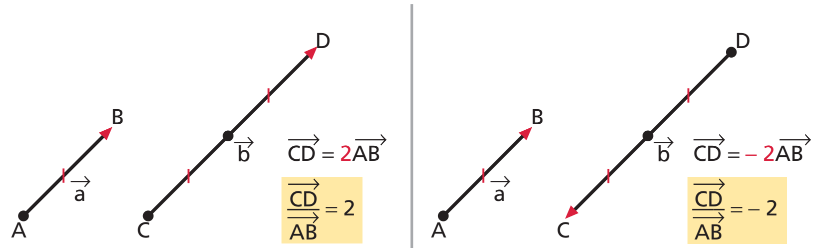
6. L'omotetia

Il rapporto fra vettori paralleli

I vettori sono segmenti orientati, quindi è possibile definire il rapporto fra due vettori paralleli in analogia al rapporto fra due segmenti.

ESEMPIO

▶ Figura 16



a. Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ hanno lo stesso verso, $\frac{\vec{a}}{\vec{b}}$ è positivo.

b. Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ hanno verso opposto, $\frac{\vec{a}}{\vec{b}}$ è negativo.

Il rapporto fra due vettori paralleli è quel numero reale k che esprime il rapporto fra i segmenti corrispondenti, con la seguente convenzione:

- se i vettori hanno lo stesso verso, il numero k è positivo;
- se i vettori hanno verso opposto, il numero k è negativo.

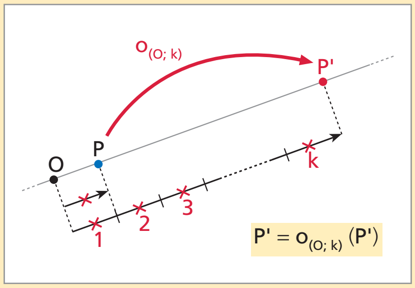
L'omotetia

DEFINIZIONE

Omotetia

Fissati un punto O nel piano e un numero reale k diverso da zero, l'omotetia è la trasformazione geometrica che a un punto P fa corrispondere il punto P' tale che:

- P' appartiene alla retta OP;
- $\dfrac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OP}} = k$.



Il punto O è detto **centro** dell'omotetia e k **rapporto di omotetia**.

Un'omotetia si dice **diretta** se $k > 0$, **inversa** se $k < 0$.

In generale, se $|k| > 1$ la figura immagine è ingrandita rispetto a quella iniziale, se $|k| < 1$ è rimpicciolita.

In un'omotetia l'unico punto unito è il centro.

Talvolta le omotetie sono dette dilatazioni (sia per $k > 1$, sia per $k \leq 1$).

Studiamo ora i due casi particolari $k = 1$ e $k = -1$.

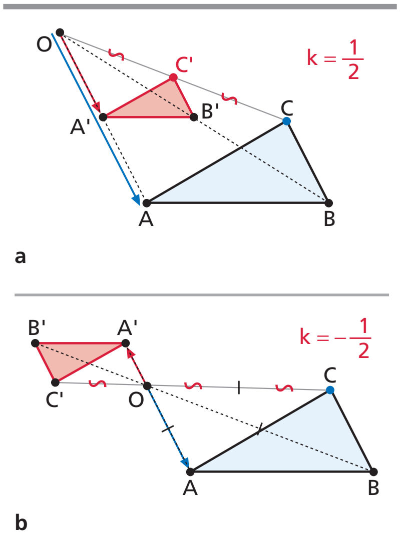


Figura 17

a) Dato un triangolo ABC e un punto O, il triangolo $A'B'C'$ è omotetico ad ABC nell'omotetia di centro O e rapporto $\frac{1}{2}$ (omotetia diretta). Due punti corrispondenti stanno sulla stessa semiretta di origine O.

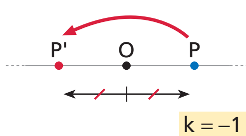
b) $A'B'C'$ è il corrispondente del triangolo ABC nell'omotetia di centro O e rapporto $-\frac{1}{2}$ (omotetia inversa). Due punti corrispondenti stanno su semirette opposte di origine O.

L'identità ($k = 1$)

Se $\dfrac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OP}} = 1$, allora è $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP}$. A ogni punto corrisponde se stesso: l'omotetia considerata è l'identità.

La simmetria centrale ($k = -1$)

Se $\dfrac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OP}} = -1$, allora è $\overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP}$, ossia i due vettori $\overrightarrow{OP'}$ e $\overrightarrow{OP}$ hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e verso opposto. L'omotetia è la simmetria centrale di centro O.



Ci limitiamo a enunciare i seguenti teoremi.

TEOREMA

In un'omotetia di rapporto k, a un segmento AB corrisponde un segmento $A'B'$ parallelo ad AB e tale che $\dfrac{A'B'}{AB} = k$.

TEOREMA

In un'omotetia a ogni angolo corrisponde un angolo congruente.

Omotetia deriva dal greco *omós*, «uguale», e *thetós*, «posto».

Indichiamo un'omotetia di centro O e rapporto k con il simbolo $o_{(O;\,k)}$. Per esempio, $o_{(P;\,-2)}$ indica l'omotetia di centro P e rapporto -2.

Nel prossimo capitolo studieremo la similitudine, che è la composizione di un'omotetia con un'isometria o viceversa.

Letture allo specchio!

…esistono parole che si possono leggere anche allo specchio?

Il quesito completo a pag. G341

Una parola (o una frase) palindroma contiene in sé una forma particolare di simmetria assiale. In ogni palindromo si può infatti rintracciare un «asse di simmetria», oltre il quale le lettere si ripetono, con l'ordine rovesciato. Nel caso della parola INGEGNI, l'asse si trova sulla lettera E. Parliamo di asse di simmetria non per la forma delle lettere, ma per la loro distanza dall'asse: entrambe le I distano tre lettere dall'asse passante per la E, le N ne distano due, le G una. Osservalo nella figura seguente.

In certi casi, l'asse di simmetria non passa per una lettera: è il caso della frase

ACETO NELL'ENOTECA.

Qui l'asse di simmetria passa tra le due L:

A C E T O N E L | L E N O T E C A

Se guardati con occhio esclusivamente geometrico, i palindromi non sono perfettamente simmetrici. Nella parola **INGEGNI** la forma della lettera G, per esempio, non viene riportata fedelmente dopo la riflessione sull'asse.

Allo stesso modo, mettendo la parola INGEGNI davanti allo specchio, che stabilisce una simmetria secondo un asse esterno alla parola, non si riesce a leggerla nuovamente.

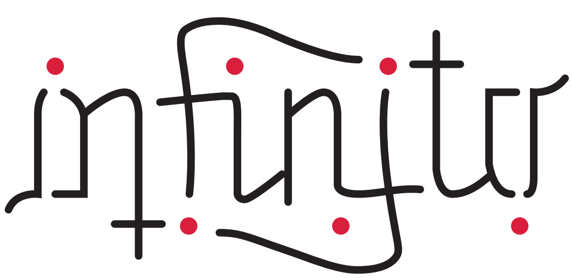
A differenza della G, tuttavia, esistono lettere che, una volta riflesse, risultano identiche anche come forma. Sono le lettere:

A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y.

Affinché una parola possa essere letta anche allo specchio, dovrà innanzitutto essere palindroma, inoltre dovrà essere scritta esclusivamente con lettere la cui forma abbia un asse di simmetria verticale. Le due condizioni rendono molto difficile la ricerca di parole «da specchio». Alcuni esempi sono ATTA, OTTO, AMA, TOT.

Se vogliamo rendere più fruttuosa la ricerca, possiamo ricorrere a un piccolo stratagemma che elimina la condizione più forte, e cioè che le parole siano palindrome. Presa una qualsiasi parola composta soltanto da lettere simmetriche, sarà sufficiente scriverla in verticale per poterla leggere allo specchio immutata. Attenzione: anche la parola IMMUTATA rimarrà immutata!

AMBIGRAMMI



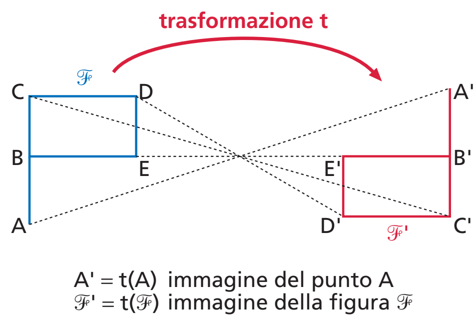
Esiste una forma di arte grafica che gioca proprio sulla simmetria e le parole. Gli ambigrammi sono immagini in cui la parola scritta può essere letta in più di un modo. La parola INFINITO qui indicata ne è un esempio: ruota il libro di 180° e…

Riconosci qualche simmetria? La posizione dei pallini rossi può aiutarti…

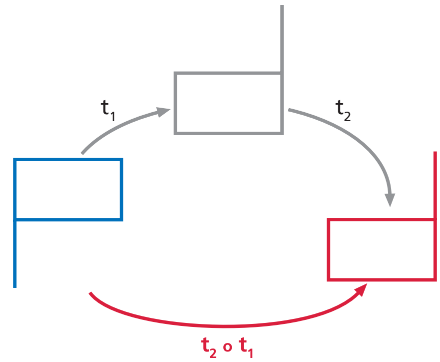
LA TEORIA IN SINTESI
Le trasformazioni geometriche

1. Che cosa sono le trasformazioni geometriche

Una **trasformazione geometrica** è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del piano un punto del piano stesso.



Date due trasformazioni geometriche t_1 e t_2, se al punto P viene associato $P' = t_1(P)$ e a P' viene associato $P'' = t_2(P')$, la **trasformazione composta** $t_2 \circ t_1$ associa al punto P il punto P''.

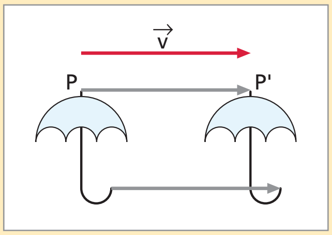
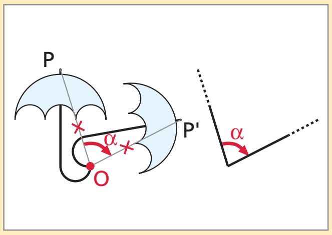
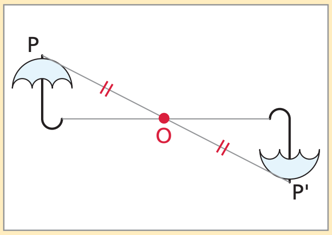
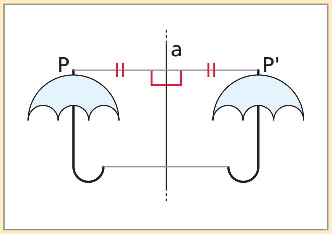


L'**identità** è la trasformazione che a ogni punto del piano associa il punto stesso.

Un **invariante** di una trasformazione è una proprietà che si conserva nel passare da una figura alla sua corrispondente.
Se, in una trasformazione, a un **punto** corrisponde se stesso, allora tale punto si dice **punto unito**.
Se, in una trasformazione, a una **figura** corrisponde se stessa, allora tale figura si dice **figura unita**.

2. 3. 4. 5. Le isometrie

Le **isometrie**, o **congruenze**, sono particolari similitudini che hanno come invariante la distanza fra punti. Nella tabella a pagina G356 sono illustrati i quattro tipi di isometrie con le relative definizioni.

ISOMETRIE			
TIPO DI ISOMETRIA	**ENTI CHE LA CARATTERIZZANO**	**A OGNI PUNTO *P* ASSOCIA IL PUNTO *P′* TALE CHE:**	**ESEMPIO**
Traslazione	vettore $\vec{v}$	$\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$	
Rotazione	centro O angolo α orientato	$OP' \cong OP$ $P\hat{O}P' \cong \alpha$ $P\hat{O}P'$ è orientato come α	
Simmetria centrale	centro O	il segmento PP' ha O come punto medio (a O corrisponde se stesso)	
Simmetria assiale	asse a	P' è sulla retta passante per P e perpendicolare ad a, dalla parte opposta di P rispetto ad a; P e P' hanno la stessa distanza da a	

6. L'omotetia

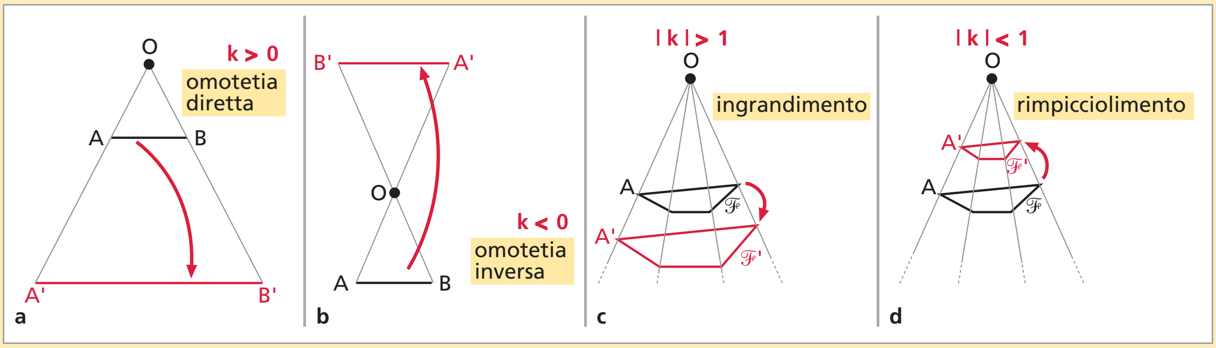
Fissato un punto O e un numero reale $k \neq 0$, un'**omotetia** fa corrispondere a un punto P il punto P' tale che:

1. P' appartiene alla retta OP;

2. il **rapporto** $\dfrac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OP}} = k$.

Il punto O è detto **centro** dell'omotetia.

- Se $k > 0$, l'omotetia si dice **diretta** e la figura corrispondente è dalla stessa parte di O rispetto alla figura data.
- Se $k < 0$, l'omotetia si dice **inversa** e la figura corrispondente è dalla parte opposta rispetto a O.
- Se $|k| > 1$, la figura immagine è **ingrandita** rispetto alla figura data; se $|k| < 1$, è **rimpicciolita**.



1. Che cosa sono le trasformazioni geometriche

Teoria a pag. G341

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 VERO O FALSO?

a) In un'identità tutti i punti del piano sono uniti. V F

b) La composizione di due trasformazioni può non essere una trasformazione. V F

c) In ogni proiettività un invariante è il parallelismo. V F

d) La trasformazione che associa un triangolo a una spirale è un omeomorfismo. V F

e) L'inversa di una trasformazione geometrica è sempre una trasformazione geometrica. V F

f) Un'affinità è una similitudine. V F

ESERCIZI

2 TEST Una trasformazione geometrica è:

A una relazione di equivalenza fra le figure del piano.

B una corrispondenza iniettiva, che può essere non suriettiva, fra i punti del piano.

C una corrispondenza biiettiva del piano in sé.

D una corrispondenza biiettiva del piano in sé che mantiene invariate le dimensioni delle figure.

E una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano che mantiene invariata la forma delle figure.

3 TEST Una delle seguenti proposizioni è *falsa*. Quale?

A La continuità e la convessità sono invarianti degli omeomorfismi.

B La convessità e il parallelismo sono invarianti delle isometrie.

C La continuità e la forma sono invarianti delle similitudini.

D La continuità, la convessità e il parallelismo sono invarianti delle affinità, delle similitudini e delle isometrie.

E La forma è invariante delle similitudini e non delle affinità.

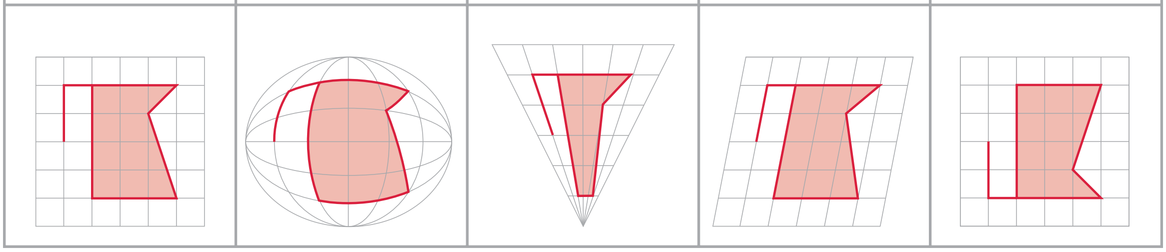
4 La trasformazione t associa a un quadrato Q un quadrato Q' di lato la metà del lato di Q. La trasformazione t' associa a un quadrato S un quadrato S' di lato il triplo del lato di S. Esegui la composizione $t' \circ t$ e poi $t \circ t'$. Le due trasformazioni composte coincidono?

5 Considera le trasformazioni t e t' dell'esercizio precedente: descrivi le trasformazioni inverse t^{-1} e t'^{-1}.

COMPLETA inserendo al posto dei puntini il nome della trasformazione rappresentata in figura.

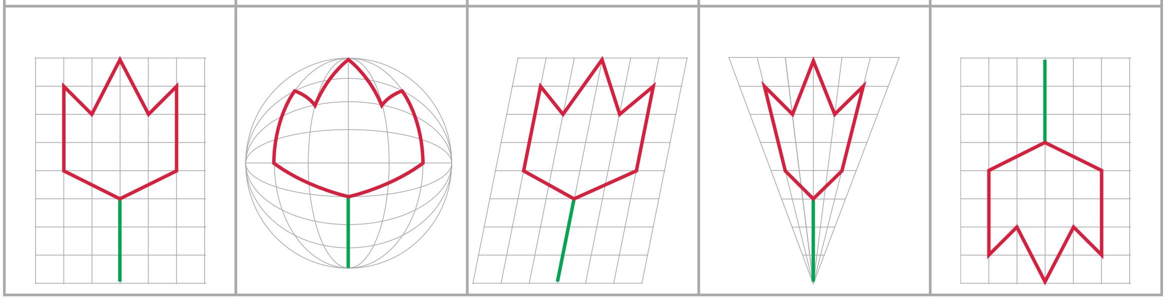
6

identità	omeomorfismo	....	....	....



7

identità	....	....	....	....



2. La traslazione

Teoria a pag. G345

RIFLETTI SULLA TEORIA

8 VERO O FALSO?

a) L'equipollenza è una relazione d'ordine che suddivide i segmenti orientati in classi di equivalenza dette vettori. V F

b) Il vettore opposto di un vettore $\vec{v}$ è un vettore che ha stesso modulo e verso di $\vec{v}$, ma direzione opposta. V F

c) La somma di due vettori opposti è il vettore nullo. V F

d) Per sommare due vettori che hanno la stessa direzione, ma versi opposti, si usa la regola del parallelogramma. V F

9 VERO O FALSO?

a) La traslazione di vettore nullo coincide con l'identità. V F

b) Una figura unita è una figura di punti uniti. V F

c) Una traslazione, diversa dalla traslazione nulla, non ha punti uniti, ma può avere rette unite. V F

d) La composizione di due traslazioni, una di vettore $\vec{v}$ e una di vettore $\vec{w}$, è una traslazione di vettore $\vec{v} + \vec{w}$. V F

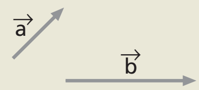
ESERCIZI Nel sito: ▶ 4 esercizi di recupero

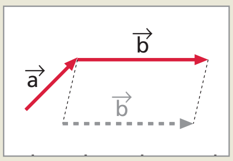
I vettori

La somma di vettori

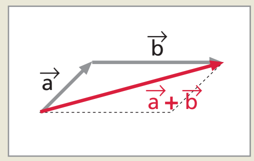
ESERCIZIO GUIDA

10 Rappresentiamo il vettore somma dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ in figura.





a. Disegniamo i vettori in modo che risultino consecutivi, facendo coincidere il secondo estremo di $\vec{a}$ con il primo estremo di $\vec{b}$.

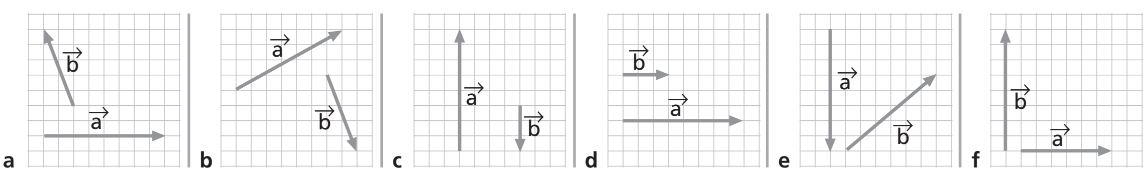


b. Disegniamo il parallelogramma avente per lati i due vettori e tracciamo la diagonale.

Il vettore somma $\vec{a} + \vec{b}$ è il vettore che ha:

- modulo uguale alla misura della lunghezza della diagonale del parallelogramma;
- direzione uguale a quella della diagonale del parallelogramma;
- verso che va dal primo estremo del primo vettore al vertice opposto del parallelogramma.

11 Rappresenta il vettore somma dei vettori indicati nelle figure.

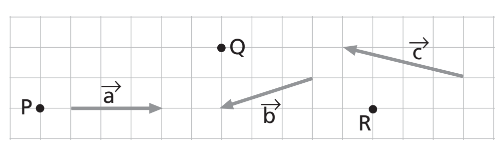


12 Verifica che l'addizione tra vettori è commutativa.

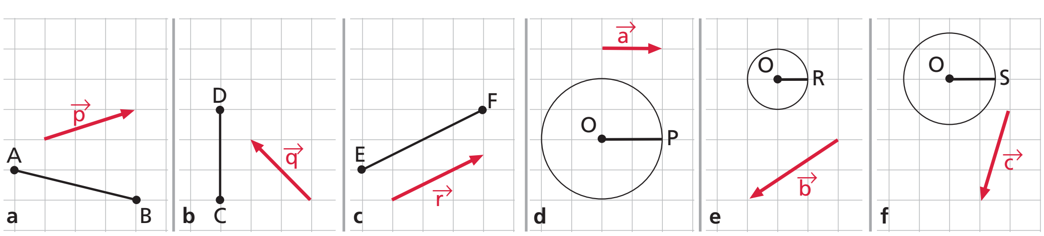
13 Verifica che l'addizione tra vettori è associativa.

La traslazione

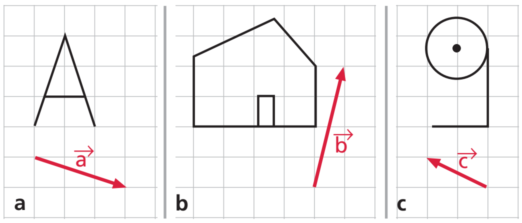
14 Applica a ogni punto della figura la traslazione di vettore indicato e determina il punto corrispondente.



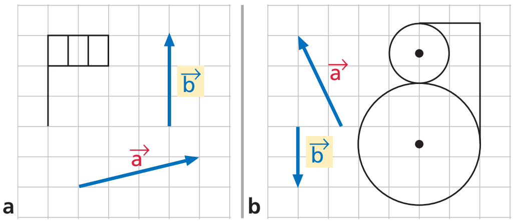
15 Trasla ogni figura secondo il vettore indicato.



16 Trasla ogni figura secondo il vettore indicato.



17 Applica a ogni figura la composizione di traslazioni $t_{\vec{a}} \circ t_{\vec{b}}$ e poi $t_{\vec{b}} \circ t_{\vec{a}}$. Si tratta della stessa trasformazione?



La traslazione e la congruenza

18 Dimostra che in una traslazione segmenti corrispondenti sono congruenti e paralleli.

19 Disegna una retta r e un segmento AB fuori di essa. Scegliendo un punto D su r, è possibile individuare un quarto punto C del piano tale che $ABCD$ sia un parallelogramma. Caratterizza, mediante un'opportuna traslazione, il luogo geometrico descritto dal punto C al variare di D sulla retta r.

20 Disegna un parallelogramma $ABCD$ di centro O. Traccia per A la parallela a BD e per D la parallela ad AC. Le due parallele si intersecano nel punto E. Determina le immagini dei punti A e D nella traslazione di vettore $\vec{EO}$.

21 Disegna il triangolo isoscele ACD sulla base AC e il punto medio M di AC. Determina l'immagine B del punto C nella traslazione di vettore $\vec{DA}$ e l'immagine N del punto B nella traslazione di vettore $\vec{CM}$. Studia la natura dei quadrilateri $ABCD$ e $BMAN$.

3. La rotazione

Teoria a pag. G347

RIFLETTI SULLA TEORIA

22 **VERO O FALSO?**

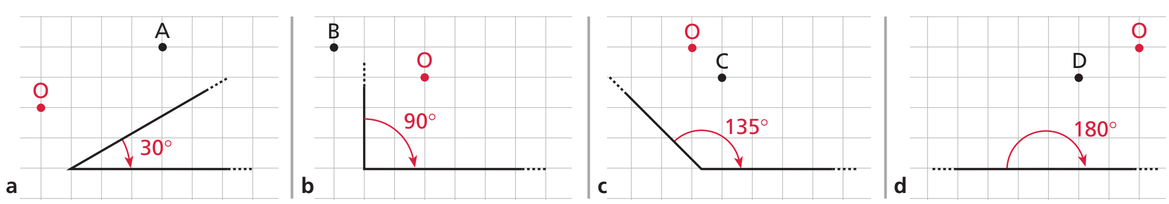
a) La rotazione è un'affinità. V F

b) Fissato in un piano un punto O e un angolo α, la rotazione di centro O e angolo α è univocamente determinata. V F

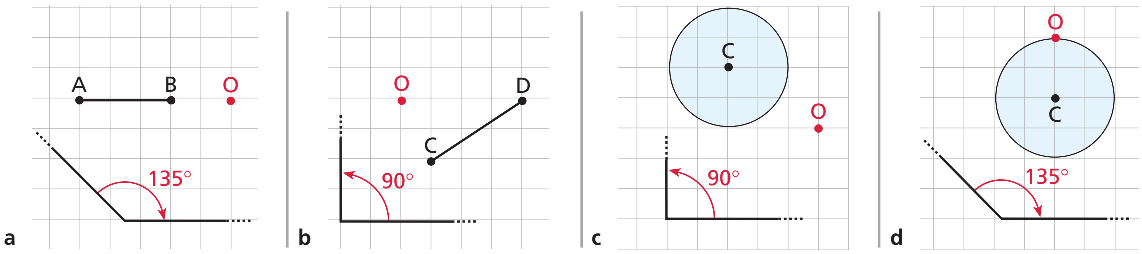
c) Il triangolo equilatero è una figura unita per rotazioni di centro il baricentro del triangolo e angolo α di ampiezza pari a 120°. V F

d) La composizione fra rotazioni di centri diversi è un'operazione interna all'insieme delle rotazioni. V F

23 In ogni figura applica al punto disegnato in nero la rotazione di centro O e angolo indicato.

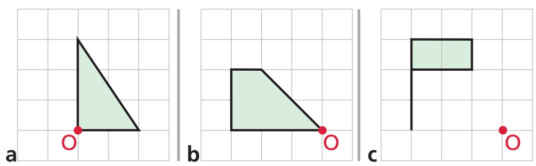


24 Applica ai segmenti e ai cerchi dati la rotazione di centro O e angolo indicato.

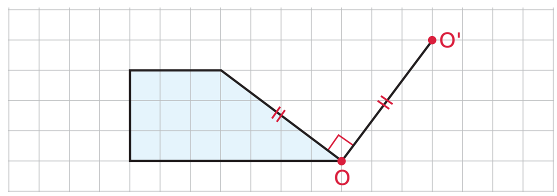


La composizione di rotazioni

25 Applica a ciascuna figura la composizione della rotazione $r_{(O;\,90°)}$ in senso antiorario con la rotazione $r_{(O;\,180°)}$ sempre in senso antiorario. Applica poi la trasformazione composta $r_{(O;\,90°)} \circ r_{(O;\,180°)}$. Le due composizioni danno la stessa trasformazione?



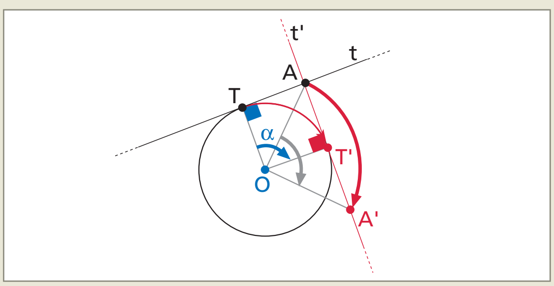
26 Applica al trapezio in figura la composizione della rotazione $r_{(O;\,90°)}$ in senso antiorario intorno a O con la rotazione $r_{(O';\,45°)}$ intorno a O', sempre in senso antiorario. Applica poi la trasformazione composta $r_{(O;\,90°)} \circ r_{(O';\,45°)}$. Ottieni la stessa trasformazione?



Dimostrazioni

ESERCIZIO GUIDA

27 Una retta t tangente a una circonferenza di centro O ruota intorno a O di un angolo α, determinando un'altra retta t'. Dimostriamo che anche t' è tangente alla circonferenza.



Ipotesi 1. t retta tangente in T alla circonferenza;
2. t' è corrispondente di t nella rotazione $r_{(O;\,\alpha)}$.

Tesi t' è tangente alla circonferenza in T'.

Dimostrazione

- Nella rotazione di centro O e angolo orientato α, al punto T della circonferenza corrisponde il punto T' della circonferenza. A un punto qualunque A della retta tangente corrisponde un punto A'.
- Poiché in una rotazione a una retta corrisponde una retta, alla retta t individuata dai punti T e A corrisponde la retta t' individuata dai punti corrispondenti T' e A'.
- La retta t' ha in comune con la circonferenza solo il punto T'. Infatti, se avesse con essa un altro punto di intersezione distinto da T', questo dovrebbe essere il corrispondente di un punto di intersezione della circonferenza con la retta t, diverso da T. Ma ciò sarebbe contro l'ipotesi 1.
- *Pertanto*, la retta t' è tangente alla circonferenza nel punto T'.

28 Dati due punti A e B nel piano, individua un punto O tale che la rotazione di 90° e centro O porti il punto A su B.

29 Disegna un triangolo ABC e costruisci esternamente i due triangoli equilateri BCE e ACF. Confronta i due segmenti BF e AE.

▶ *Caso particolare*: se ABC è equilatero, come sono i punti E, C e F?

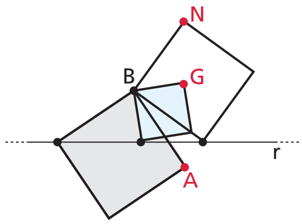
30 Dimostra che, in una rotazione di 90° e centro O arbitrario, una retta e la sua corrispondente sono sempre perpendicolari.

31 Disegna due triangoli isosceli non congruenti, OAB e OCD, rettangoli in O, unico vertice in comune. Nomina i vertici in senso antiorario e dimostra che:
a) AC è congruente a BD;
b) AC è perpendicolare a BD.

32 Disegna un quadrato $OABC$ e un triangolo equilatero OAD interno al quadrato. Costruisci esternamente al quadrato i triangoli equilateri ABE e ACF, in modo che F sia dalla parte opposta a B rispetto al vertice O.
a) Cosa puoi affermare sui punti B, O, F?
b) Dimostra che i punti C, D, E sono allineati.

33 Disegna un quadrato $ABCD$ e il suo centro O. Fissa un punto M sul lato AD e costruisci il suo corrispondente N nella rotazione di centro O di un angolo retto in senso antiorario.
a) Dimostra che N appartiene ad AB.
b) Confronta i due segmenti BM e CN.
c) Confronta gli angoli $A\hat{O}M$ e $B\hat{O}N$.
d) Confronta i triangoli MDB e ANC.

34 I tre quadrati della figura hanno in comune il vertice B e ognuno ha un vertice sulla retta r. Spiega perché i punti A, G e N sono allineati.



4. La simmetria centrale

Teoria a pag. G348

RIFLETTI SULLA TEORIA

35 **VERO O FALSO?**

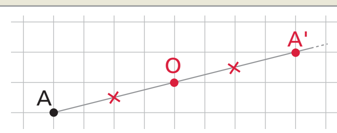
a) La simmetria centrale di centro O può essere vista come una rotazione di centro O e per angolo un angolo piatto. V F
b) La composizione di due simmetrie centrali è una simmetria centrale. V F
c) Il centro di simmetria di un rombo è il punto di incontro delle diagonali. V F
d) Nelle simmetrie centrali a ogni segmento corrisponde un segmento parallelo. V F

ESERCIZI

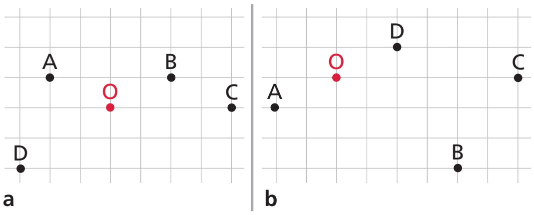
ESERCIZIO GUIDA

36 Dati i punti A e O, determiniamo il punto A' corrispondente di A nella simmetria centrale di centro O.

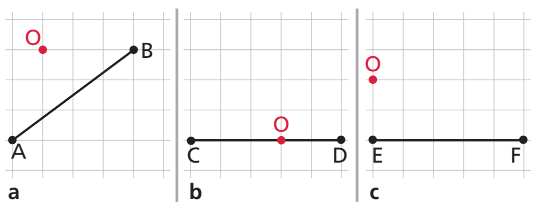
Congiungiamo A con O e prolunghiamo il segmento AO di un segmento OA' congruente al segmento AO. Il punto A' è il punto cercato.



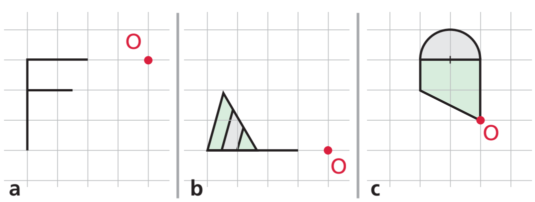
37 In ciascuna figura determina il simmetrico di ogni punto rispetto al punto O.



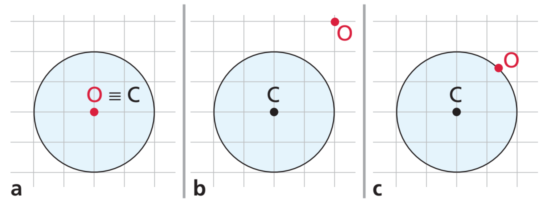
38 Disegna il simmetrico di ogni segmento in figura rispetto al punto O.



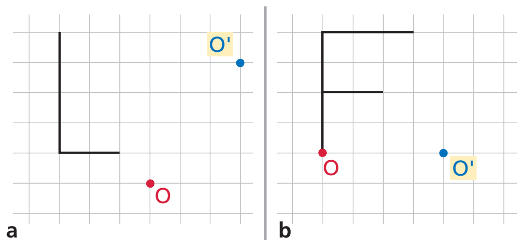
39 Disegna, per ogni figura, la figura corrispondente nella simmetria centrale di centro O.



40 Per ciascuna delle tre figure disegna il simmetrico del cerchio rispetto al punto O.



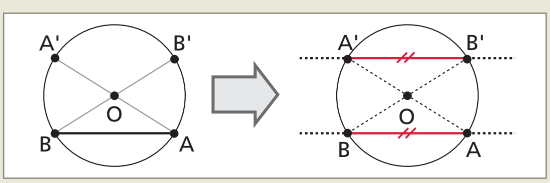
41 Trasforma le due figure mediante la composizione di simmetrie $s_{O'} \circ s_O$. Trasformale poi mediante $s_O \circ s_{O'}$. Ottieni le stesse figure trasformate?



La simmetria centrale e la congruenza

ESERCIZIO GUIDA

42 Dimostriamo che, in una circonferenza, i punti diametralmente opposti agli estremi di una corda AB sono gli estremi di una corda $A'B'$ parallela e congruente ad AB.



Ipotesi 1. AB corda;
2. AA' diametro;
3. BB' diametro.

Tesi 1. $AB \cong A'B'$;
2. $AB \parallel A'B'$.

Dimostrazione

- Il punto A' è simmetrico di A rispetto al centro O della circonferenza (ipotesi 2) e così pure B' è simmetrico di B rispetto a O (ipotesi 3).
- Poiché la simmetria centrale è un'isometria, al segmento AB corrisponde il segmento $A'B'$ a esso congruente, cioè:
  $AB \cong A'B'$.
- Inoltre, poiché in una simmetria centrale a una retta corrisponde una retta parallela, al segmento AB corrisponde il segmento $A'B'$ a esso parallelo, cioè:
  $AB \parallel A'B'$.

43 Disegna un parallelogramma *ABCD* di centro *O*. Indica le immagini dei punti *A*, *B*, *C* e *D* nella simmetria di centro *O* e dimostra che esse formano un parallelogramma.

44 Disegna un parallelogramma *ABCD* di centro *O*. Dimostra le proprietà del parallelogramma mediante la simmetria di centro *O*.

45 Disegna due parallelogrammi *ABCD* e *EBFD* in modo che abbiano la diagonale *BD* in comune.
a) Confronta gli angoli $E\hat{A}D$ e $B\hat{C}F$.
b) Confronta i triangoli *DEC* e *ABF*.

46 Nel triangolo *ABC* rettangolo in *A*, costruisci l'immagine *D* del vertice *B* nella simmetria di centro *A* e l'immagine *E* del vertice *C* nella stessa simmetria. Specifica la natura del quadrilatero *BCDE*.

47 Dimostra che due angoli con i lati paralleli discordi sono congruenti.

48 Due rette *r* e *r′* si intersecano in un punto *O*. Individua una circonferenza che incontra le due rette in quattro punti, vertici di un rettangolo.

49 Disegna due circonferenze *C* e *C′* tangenti esternamente in *T* e una retta tangente a entrambe nei punti *A* appartenente a *C* e *A′* appartenente a *C′*. Specifica la natura del triangolo *AA′T*.
(Suggerimento. Indica con *O* il punto medio del segmento *AA′* e considera la simmetria...)

50 Disegna una retta *r* e un segmento *AC* fuori di essa. Fissa su *r* un punto *B* e costruisci il parallelogramma *ABCD*. Determina il luogo dei punti *D* al variare di *B* sulla retta *r*.

Il centro di simmetria di una figura

51 Disegna due rette parallele *r* e *r′*, intersecate da una trasversale *t*. Individua il centro di simmetria della figura e dimostra che *t* è unita.

52 Dimostra che il centro di un poligono regolare di *n* lati è centro di simmetria solo se *n* è un numero pari.

5. La simmetria assiale

Teoria a pag. G349

RIFLETTI SULLA TEORIA

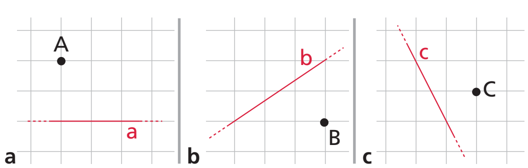
53 VERO O FALSO?

a) In una simmetria assiale l'asse di simmetria è una retta unita. V F
b) In una simmetria assiale a ogni retta corrisponde una retta a essa parallela. V F
c) La composizione di due simmetrie assiali aventi assi paralleli è ancora una simmetria assiale. V F
d) La composizione di due simmetrie assiali con assi perpendicolari equivale a una simmetria centrale. V F

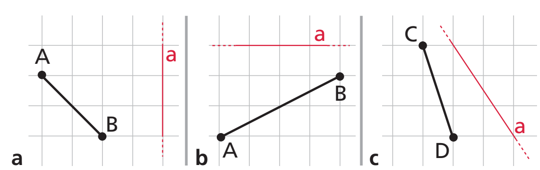
ESERCIZI

Nel sito: ▶ 5 esercizi di recupero

54 In ciascuna figura determina il simmetrico del punto indicato rispetto alla retta disegnata.

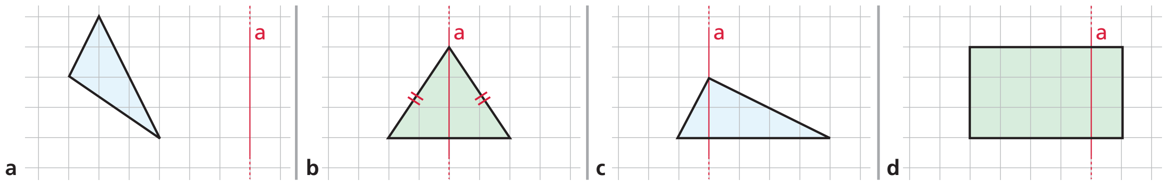


55 Disegna il simmetrico di ogni segmento in figura rispetto all'asse *a*.



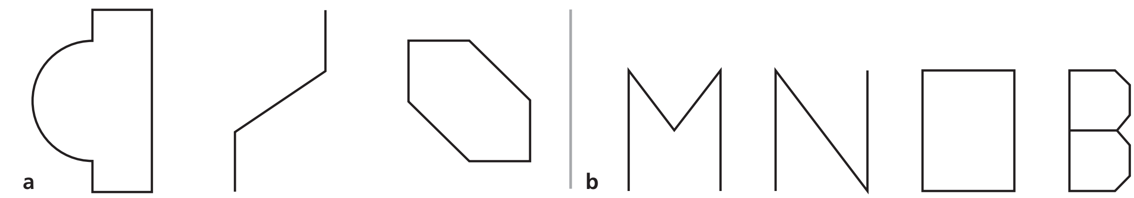
Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

56 Disegna per ogni figura la figura corrispondente nella simmetria assiale di asse a.



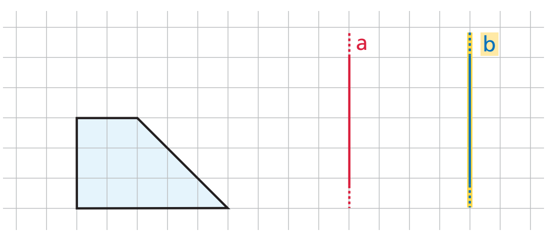
L'asse di simmetria di una figura

57 Quanti assi di simmetria possiede ogni figura? Disegnali.

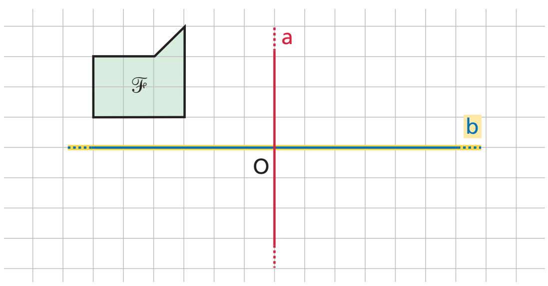


La composizione di due simmetrie assiali

58 Trasforma il trapezio in figura mediante la composizione di simmetrie assiali $s_b \circ s_a$. Trasformalo poi mediante $s_a \circ s_b$. Ottieni la stessa figura trasformata?



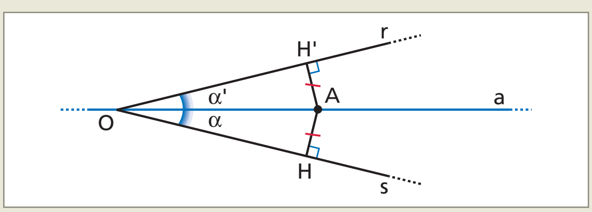
59 Disegna la figura trasformata di $\mathcal{F}$ mediante la composizione delle due simmetrie ad assi perpendicolari $s_b \circ s_a$. Applica $s_a \circ s_b$. Si tratta della stessa trasformazione?



La simmetria assiale e la congruenza

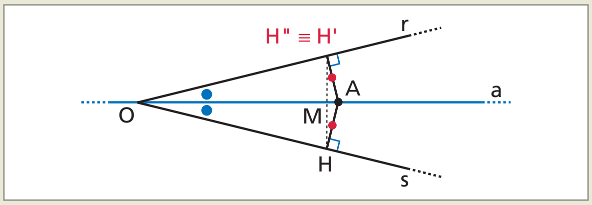
ESERCIZIO GUIDA

60 Dimostriamo, mediante una simmetria assiale, che i punti della bisettrice di un angolo sono equidistanti dai lati dell'angolo.



Ipotesi 1. $\alpha \cong \alpha'$;
2. A è un punto della bisettrice;
3. $AH \perp Os$;
4. $AH' \perp Or$.

Tesi $AH \cong AH'$.



Dimostrazione

- Nella simmetria di asse a, al punto A corrisponde se stesso, perché tutti i punti dell'asse sono uniti.
- Disegniamo il corrispondente del punto H nella stessa simmetria e lo indichiamo con H''. Dimostriamo che H'' coincide con H'. Nella simmetria di asse a, al segmento AH corrisponde il segmento AH'', alla semiretta Os corrisponde la semiretta Or.
- Per l'ipotesi 3, il segmento AH è perpendicolare a Os, quindi risulta anche $AH'' \perp Or$.
- Per l'ipotesi 4, $AH' \perp Or$; poiché è unica la perpendicolare a Or passante per A, il punto H'' deve coincidere col punto H'.
- Inoltre, poiché la simmetria assiale è un'isometria, i segmenti corrispondenti sono congruenti, quindi:

$AH \cong AH'$.

61 Dato un asse di simmetria, scegli due punti A e B, esterni all'asse, in modo che con i corrispondenti punti A' e B' si formi il rettangolo $AA'B'B$.

62 Data una retta r, scegli due punti C e D, esterni a essa, in modo che, detti C' e D' i loro corrispondenti nella simmetria assiale di asse r, i due segmenti CD e $C'D'$ siano fra loro perpendicolari.

63 Dato il quadrato $ABCD$, determina gli assi rispetto ai quali risultano simmetrici:
a) AC e BD;
b) AB e AD.

64 Disegna un rombo $ABCD$ e un punto P sulla diagonale AC. Confronta la distanza di P da AB con la distanza di P da AD.

65 Dimostra che un triangolo isoscele e il suo simmetrico rispetto alla base formano un rombo.

66 Dimostra che il luogo dei punti equidistanti da due rette parallele è la retta parallela alle date e che ha la stessa distanza da entrambe.

67 La figura intersezione di due figure che hanno un asse di simmetria comune è ancora una figura simmetrica rispetto a tale asse. Dimostralo.

68 Dimostra che l'asse di un segmento è anche suo asse di simmetria.

69 Dimostra che una corda di un cerchio ha per asse di simmetria il diametro perpendicolare alla corda.

70 Data una circonferenza e due rette parallele tangenti a essa, dimostra che la figura ha due diverse simmetrie assiali. Quali?

71 Disegna un segmento AA', il suo asse a e un punto B esterno a entrambi. Costruisci il simmetrico B' del punto B rispetto all'asse, utilizzando la sola proprietà che, in una simmetria assiale, a rette corrispondono rette.

72 Individua l'asse rispetto al quale sono simmetriche le tangenti a una circonferenza condotte da un punto esterno. Giustifica la risposta.

73 Disegna una retta r e due punti A e B non appartenenti a r e posti nel medesimo semipiano avente origine nella retta. Considera un punto P che può scorrere sulla retta. Determina P in modo tale che il percorso APB sia minimo.
(Suggerimento. Considera il punto B' simmetrico di B rispetto a r, congiungi A con B', …)

74 Data una circonferenza di centro O, da un punto V esterno traccia le due tangenti. Dimostra che VO è asse di simmetria per l'angolo formato dalle due semirette tangenti aventi origine in V.

75 Due circonferenze di centri O e O' e stesso raggio si intersecano in A e in B. Indica con K il punto intersezione di AB con OO'. Dimostra che la figura ottenuta ammette OO' e AB come assi di simmetria e K come centro di simmetria.

76 Disegna un triangolo ABC non isoscele e costruisci il punto M che sia equidistante dalle rette AB e AC e dai punti B e C. Giustifica la costruzione.

77 Considera una circonferenza di centro O e un punto esterno P. Conduci da P le tangenti r e r' alla circonferenza e una retta a che le interseca entrambe. Determina il punto A di a tale che la simmetria di asse OA trasformi la retta r in r'.

6. L'omotetia

Teoria a pag. G352

RIFLETTI SULLA TEORIA

78 **VERO O FALSO?**

a) Un'omotetia di centro P e rapporto -1 è una simmetria assiale. V F

b) La congruenza degli angoli è un invariante per le omotetie. V F

c) La composizione di due omotetie con lo stesso centro è un'omotetia che ha lo stesso centro e, per rapporto di omotetia, la somma dei due rapporti. V F

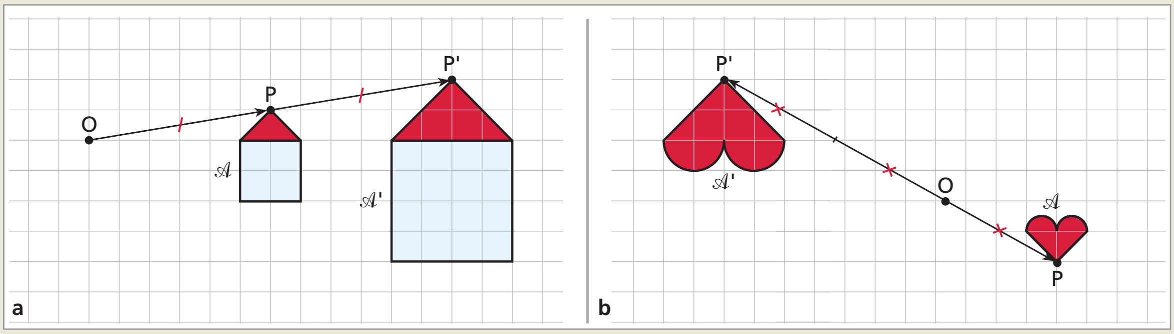
d) La similitudine è un'omotetia. V F

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 6 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

79 Nei due riquadri ci sono due figure omotetiche $\mathscr{A}$ e $\mathscr{A}'$. Alla figura $\mathscr{A}$ corrisponde la figura $\mathscr{A}'$. Stabiliamo se le omotetie di centro O sono dirette o inverse e calcoliamo il rapporto k di omotetia.



a) Poiché i vettori $\vec{OP}'$ e $\vec{OP}$ hanno lo stesso verso, l'omotetia è diretta. Il rapporto k di omotetia è dato dal rapporto fra i vettori $\vec{OP}'$ e $\vec{OP}$. Poiché $\vec{OP}'$ è il doppio di $\vec{OP}$,

$$k = \frac{\vec{OP}'}{\vec{OP}} = 2.$$

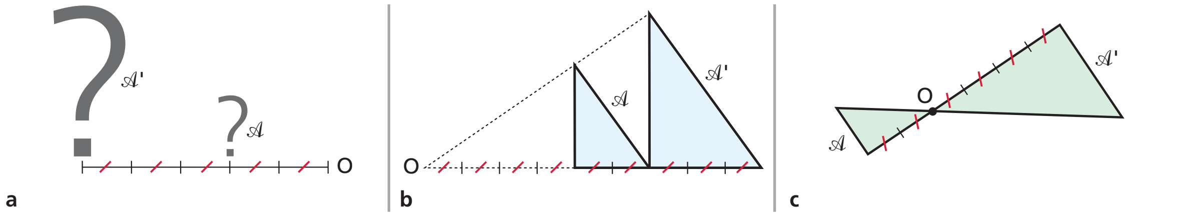
Si tratta di un ingrandimento.

b) Poiché i vettori $\vec{OP}'$ e $\vec{OP}$ hanno verso opposto, l'omotetia è inversa. Il rapporto k di omotetia è dato dal rapporto fra i vettori $\vec{OP}'$ e $\vec{OP}$. Poiché OP' è il doppio di OP,

$$k = \frac{\vec{OP}'}{\vec{OP}} = -2.$$

Si tratta ancora di un ingrandimento.

80 In ogni riquadro ci sono due figure omotetiche $\mathscr{A}$ e $\mathscr{A}'$. Alla figura $\mathscr{A}$ corrisponde la figura $\mathscr{A}'$. Stabilisci se l'omotetia di centro O è diretta o inversa e determina il rapporto k di omotetia.

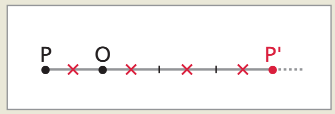


ESERCIZIO GUIDA

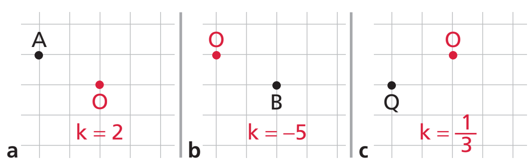
81 Dati i punti P e O determiniamo il punto P' corrispondente di P nell'omotetia di centro O e rapporto -3.

Poiché il rapporto di omotetia è negativo, il punto P' si trova da parte opposta a P rispetto a O.
Pertanto congiungiamo P con O e prolunghiamo il segmento PO.

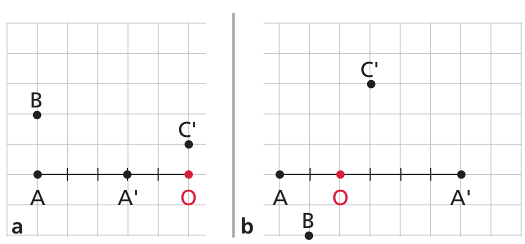
Poiché $\dfrac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OP}} = -3$, $|\overrightarrow{OP'}| = 3 \cdot |\overrightarrow{OP}|$, quindi costruiamo il segmento OP' triplo di OP. Il punto P' disegnato in figura è il punto cercato.



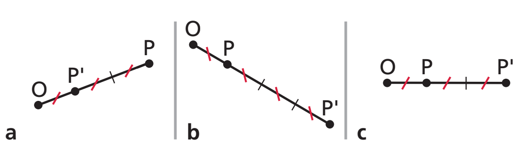
82 Determina per ogni riquadro il punto corrispondente rispettivamente ad A, B e Q nell'omotetia di centro O e rapporto k indicati.



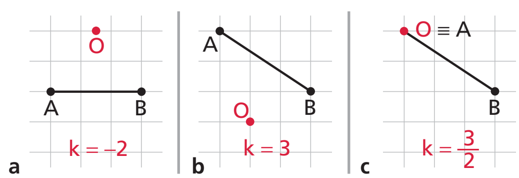
83 Nelle due figure un'omotetia di centro O trasforma A in A', B in B' e C in C'. Determina B' e C.



84 Il punto P' è omotetico di P nell'omotetia di centro O e rapporto 3. Quale figura rappresenta in modo corretto l'omotetia?

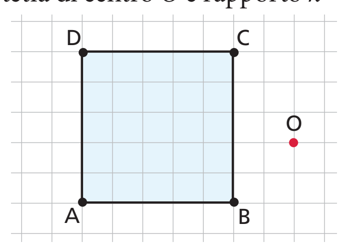


85 Disegna il segmento corrispondente nell'omotetia di centro O e rapporto indicato.

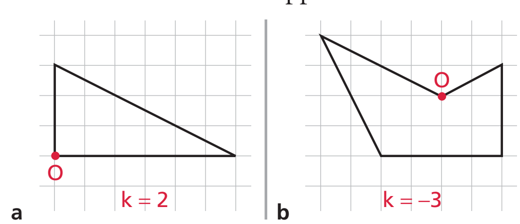


Le figure omotetiche

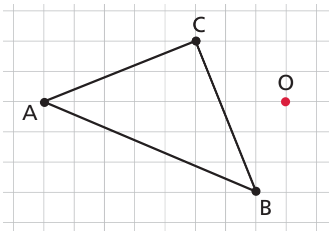
86 Disegna la figura omotetica della figura $ABCD$ nell'omotetia di centro O e rapporto $k = -2$.



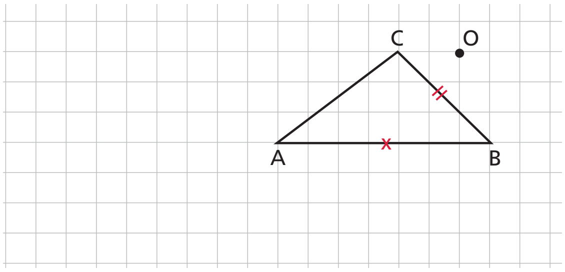
87 Disegna le figure omotetiche a quelle date nella omotetia di centro O e rapporto k indicati.



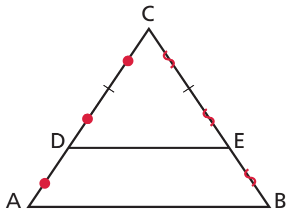
88 Disegna la figura omotetica della figura ABC nell'omotetia di centro O e rapporto $k = \frac{1}{2}$.



89 Disegna la figura omotetica di quella data nell'omotetia di centro O e rapporto $k = 2$.

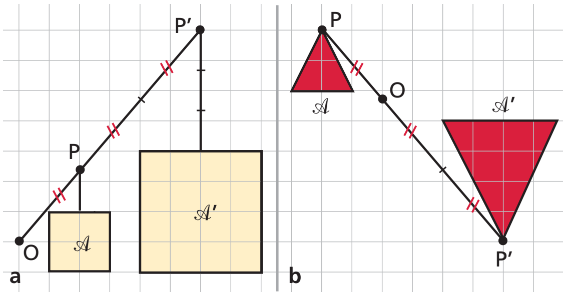


90 Nel triangolo ABC, il segmento DE è parallelo ad AB. Individua il centro e il rapporto dell'omotetia che trasforma A in D e B in E.



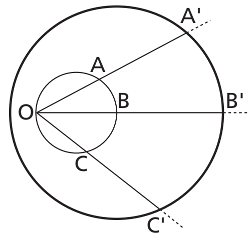
91 I lati opposti di un parallelogramma si possono corrispondere in una stessa omotetia di centro O?

92 Osserva i due disegni: alla figura $\mathscr{A}$ corrisponde la figura $\mathscr{A}'$. Stabilisci se le omotetie sono dirette o inverse e calcola il rapporto di omotetia k.

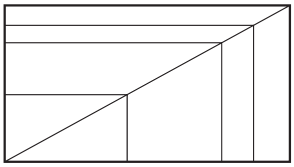


[a) $k = 3$; b) $k = -2$]

93 Esiste un'omotetia che fa corrispondere ad A il punto A', a B il punto B' e a C il punto C'?

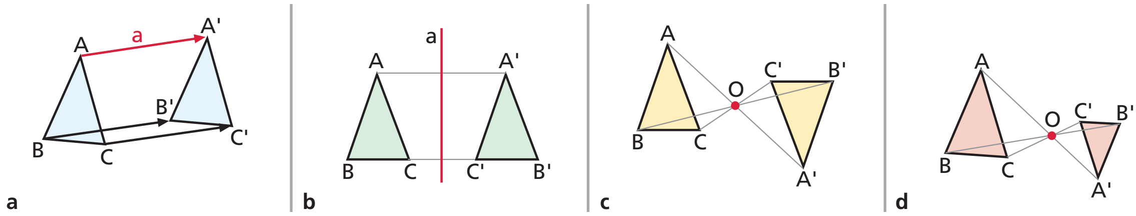


94 I rettangoli in figura sono omotetici fra loro?



RIEPILOGO LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

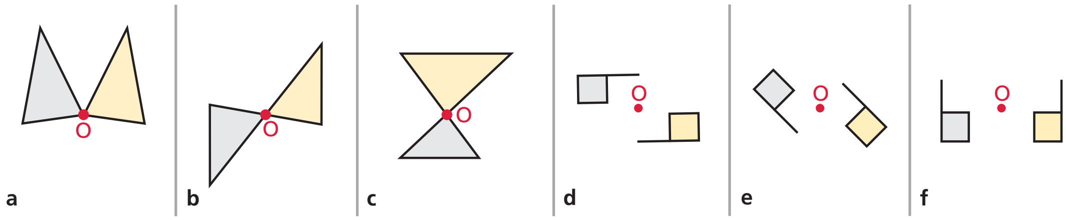
95 Riconosci le seguenti trasformazioni.



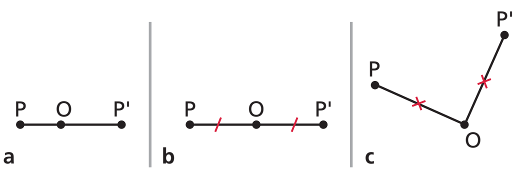
96 Disegna tutti gli assi di simmetria di un triangolo equilatero, di un quadrato e di un esagono regolare.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

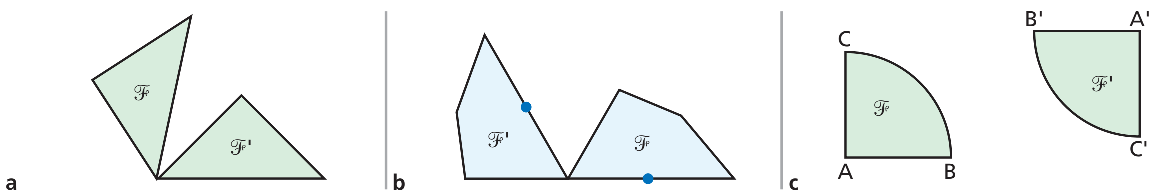
97 Individua in quali riquadri sono rappresentate in modo corretto una figura e la sua simmetrica rispetto al punto O.



98 Il punto P' è simmetrico di P rispetto al centro O. Quale figura rappresenta in modo corretto la simmetria?



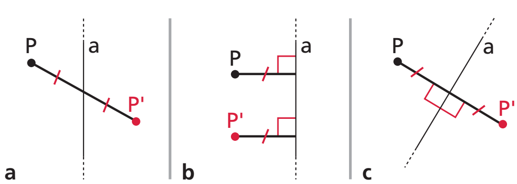
99 Individua il centro e l'angolo della rotazione che fa corrispondere a $\mathcal{F}$ la figura $\mathcal{F}'$.



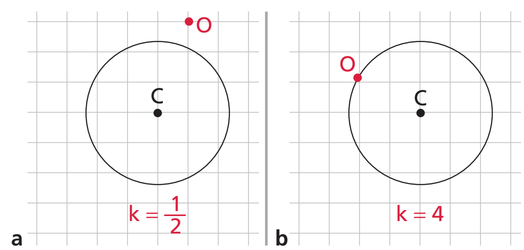
100 Decomponi un quadrato in otto triangoli congruenti, usando i suoi assi di simmetria.

101 Individua le rotazioni che trasformano in sé un triangolo equilatero, un quadrato e un esagono regolare.

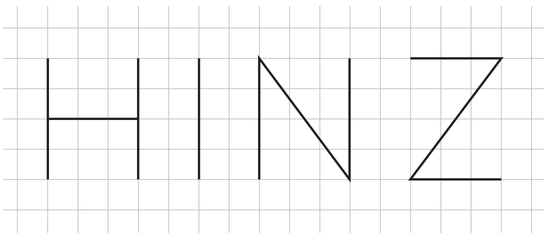
102 Il punto P' è simmetrico di P rispetto all'asse a. Quale figura rappresenta in modo corretto la simmetria?



103 Disegna il corrispondente di ogni cerchio in figura nell'omotetia di centro O e rapporto k indicati.

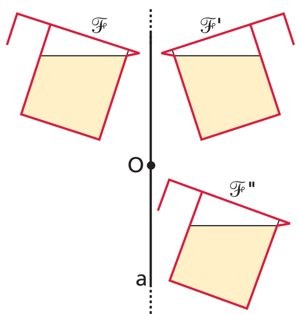


104 Determina il centro di simmetria delle seguenti lettere.



105 Scrivi altre due lettere dotate di un centro di simmetria.

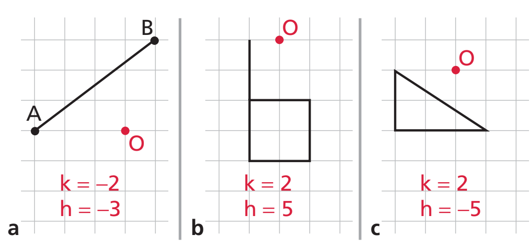
106 La figura $\mathscr{F}'$ dovrebbe essere la simmetrica di $\mathscr{F}$ rispetto all'asse a. La figura $\mathscr{F}''$ dovrebbe essere la simmetrica di $\mathscr{F}$ rispetto al punto O.
Che cosa c'è di sbagliato nella figura?



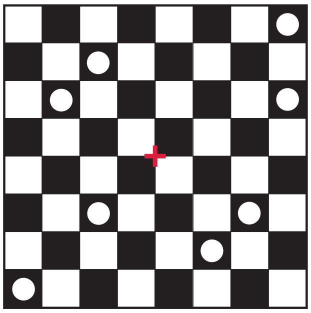
107 Gli angoli formati dai segmenti che compongono la lettera Z sono congruenti? Perché?

108 Una figura formata da due angoli con i lati paralleli discordi ammette un centro di simmetria?

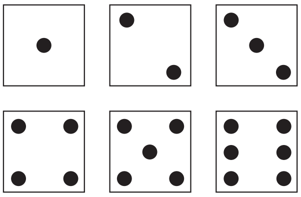
109 Per ciascuno dei riquadri esegui la composizione delle due omotetie di centro O e rapporto h e di centro O e rapporto k, come indicato in figura. Esegui poi la composizione delle due omotetie in ordine inverso.
Ottieni la stessa trasformazione?



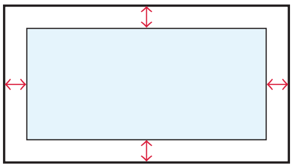
110 Sposta una pedina affinché la scacchiera abbia un centro di simmetria nel punto indicato dalla croce.



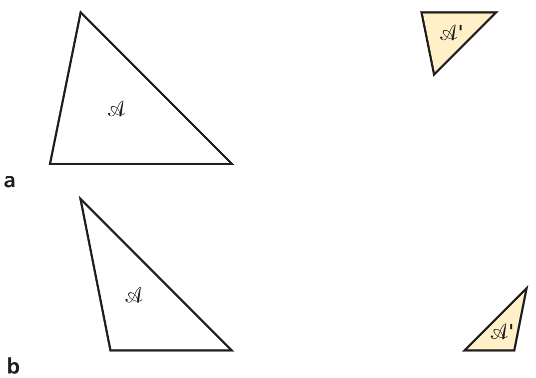
111 In figura sono rappresentate le sei facce di un dado. Per ognuna individua tutti gli assi di simmetria.



112 La cornice del quadro ha la stessa larghezza sui quattro lati. I due rettangoli che delimitano la cornice sono omotetici?



113 Per ognuna delle figure determina una trasformazione che trasformi il triangolo $\mathscr{A}$ nel triangolo $\mathscr{A}'$.



114 Considera un triangolo ABC e il punto D simmetrico di A rispetto a B. Determina il punto E immagine di B nella traslazione di vettore $\vec{AC}$. Il triangolo ABC è il trasformato di BDE in una traslazione. Qual è il vettore di questa traslazione?

115 Disegna un parallelogramma $ABCD$ di centro O. Nella simmetria di asse AC, indica con B' il simmetrico del vertice B e con D' il simmetrico del vertice D. Dimostra che la simmetria di centro O trasforma B' in D'.

116 Dati una retta r e due punti A e B fuori di essa, indica con H la proiezione di A su r e con H' la proiezione di B su r. Considera i punti A' e B' simmetrici di A e di B rispetto alla retta r. Se BH' è doppia di AH e HH' è triplo di AH, qual è il rapporto fra $A'B$ e HH'?

117 Dopo aver disegnato un triangolo ABC di base AB, indica con E il punto medio del lato AC e con F quello di BC. Utilizzando le proprietà della simmetria di centro F, dimostra che il segmento EF è parallelo ad AB e che EF è la metà di AB.

118 Disegna un triangolo equilatero ABC inscritto in una circonferenza di centro O. Le tangenti alla circonferenza in A e in B si incontrano nel punto E. Dimostra che il triangolo ABE è equilatero.

119 Considera due rette r e s che si intersecano nel punto P e un punto O che non appartiene a nessuna delle due rette. Nella simmetria di centro O, costruisci la retta r' corrispondente di r e indica con A il punto intersezione di r' con s. Indica con B il punto intersezione di AO con r. Dimostra che i punti A e B sono simmetrici rispetto al punto O.

120 Sono dati due rette r e s che si intersecano nel punto P e un punto O che non appartiene né a r né a s. Determina un segmento AB che abbia O come punto medio e gli estremi su r e su s.
(Suggerimento. Questo esercizio è un'applicazione della costruzione precedente.)

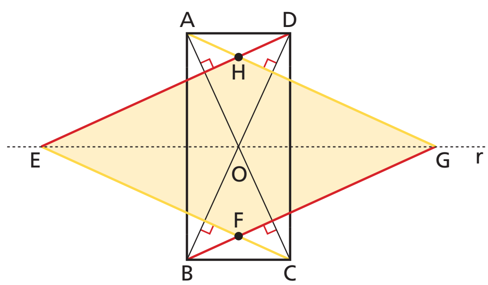
121 Disegna due rette r e r' che si intersecano nel punto O e un punto P esterno a entrambe. Indica con H la proiezione di P su r e con H' la proiezione di P su r'. Dimostra che se la simmetria di asse OP trasforma r in r', allora $PH \cong PH'$ e viceversa.

122 Disegna un triangolo ABC rettangolo in A, poi indica con N il punto medio dell'ipotenusa BC e con M il punto medio di AC.
a) Dimostra che AN e CN sono simmetrici rispetto a MN.
b) Traccia una retta a perpendicolare a MN che intersechi AN in E e CN in P. Dimostra che il triangolo PNE è isoscele.

123 Nel triangolo ABC indica con M il punto medio di AC e con N il punto medio di BC. Dimostra che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, utilizzando due simmetrie centrali, una di centro M e l'altra di centro N.
(Suggerimento. Conduci per il punto C la parallela ad AB.)

124 Nel parallelogramma $ABCD$ di centro O, proietta O sui quattro lati in modo da ottenere i punti E, F, G, H.
a) Che tipo di quadrilatero è $EFGH$?
b) Precisa che tipo di quadrilatero è $EFGH$ nel caso in cui $ABCD$ sia un rettangolo, oppure un quadrato, oppure un rombo.

125



Considera il rettangolo $ABCD$ in figura. Supponi che la retta r sia asse del lato AB e inoltre che $AG \perp BD$; $CE \perp BD$; $BG \perp AC$; $DE \perp AC$.
a) Nella simmetria di asse r determina le immagini di AG e DE e deduci che i punti E e G appartengono a r.
b) Dimostra che H e F appartengono all'asse di BC.
c) Dimostra che il quadrilatero $EFGH$ è un rombo.

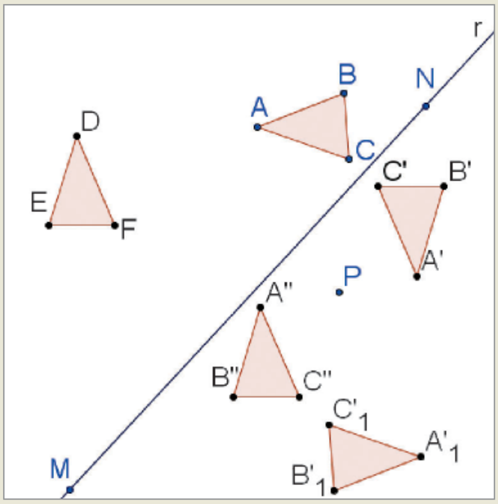
LABORATORIO DI MATEMATICA

Le trasformazioni geometriche con GeoGebra

ESERCITAZIONE GUIDATA

Verifichiamo con un esempio che la composizione di due simmetrie non sempre gode della proprietà commutativa. Applichiamo a un triangolo una simmetria assiale e al suo trasformato una simmetria puntuale e poi scambiamo l'ordine delle due trasformazioni.

- Attiviamo GeoGebra e nascondiamo gli assi cartesiani e la finestra algebrica.
- Tracciamo con *Retta per due punti* una retta r, con *Nuovo Punto* un punto P fuori di essa e con *Poligono* un triangolo ABC (figura 1).
- Applichiamo al triangolo ABC con *Simmetrico rispetto a una retta* una simmetria assiale con asse la retta r ottenendo il triangolo $A'B'C'$ e poi a questi una simmetria con centro il punto P con *Simmetrico rispetto a un punto*, facendo apparire il triangolo $A''B''C''$.
- Applichiamo al triangolo ABC con *Simmetrico rispetto a un punto* una simmetria con centro il punto P ottenendo il triangolo $A_1'B_1'C_1'$ e poi a questi con *Simmetrico rispetto a una retta* una simmetria assiale con asse la retta r pervenendo al triangolo DEF.



▲ Figura 1

Vediamo che i triangoli trasformati non coincidono, quindi concludiamo che in tal caso la composizione delle due simmetrie non gode della proprietà commutativa. Proviamo, poi, a portare il punto P sulla retta r e notiamo che i trasformati del triangolo secondo le due simmetrie vanno a coincidere.

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata con Cabri ▶ 15 esercitazioni in più

Esercitazioni

Usa il computer per svolgere le seguenti esercitazioni.

1 Applica a un quadrato $ABCD$ quattro rotazioni di 30° attorno ai quattro vertici.

2 Applica a un pentagono $ABCDE$ le cinque simmetrie centrali con centro i cinque vertici.

3 Applica a un ottagono $ABCDEFGH$ le otto simmetrie assiali aventi i lati come assi.

4 Applica al triangolo ABC l'omotetia di rapporto 4 e centro il suo baricentro G. Verifica che il triangolo trasformato $A'B'C'$ rispetto all'originale ha i lati paralleli e di misura quadrupla, gli angoli corrispondenti congruenti e l'area che misura sedici volte l'area di ABC.

5 Applica a una circonferenza, di centro O, la composizione di due traslazioni, che hanno come vettori due raggi $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$, fra loro perpendicolari, e una traslazione di vettore la somma dei due vettori.

6 Applica a un triangolo isoscele ABC, di base BC, la composizione di due simmetrie: la prima di centro il vertice A, la seconda di centro il vertice B. Determina il vettore della traslazione equivalente.

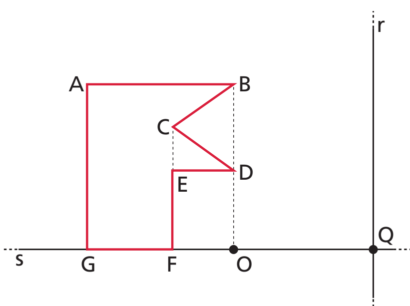
7 Applica a un triangolo scaleno ABC la composizione di due trasformazioni: una simmetria centrale, di centro un punto O, e un'omotetia di centro O e di rapporto 2. Scambia le trasformazioni e indica se l'operazione di composizione è commutativa.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

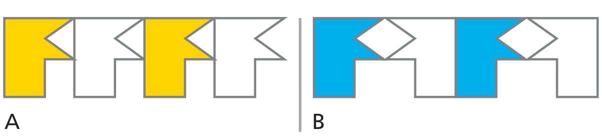
Matematica per il cittadino

LE ISOMETRIE NELL'ARTE

Durante un viaggio di istruzione, Elisa ha ammirato i bellissimi mosaici delle Domus dell'Ortaglia a Brescia e ha notato che molti fregi sono stati ottenuti utilizzando e componendo tra loro delle isometrie.
Si consideri la figura seguente, dove le rette r e s sono perpendicolari; il poligono $ABCDEFG$ ha i segmenti AB e GF, GA ed EF paralleli, e si ha $GO = OQ$.

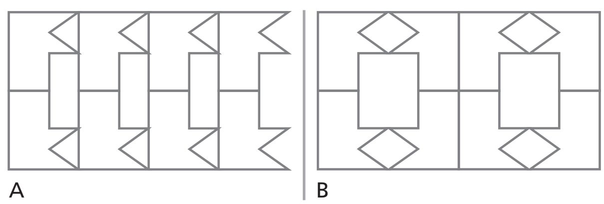


1. Partendo da questo elemento base, Elisa ha disegnato delle greche, colorate a piacimento e rappresentate in figura.



Quali isometrie sono state applicate all'elemento base per ottenere le greche A e B?

2. Continuando a disegnare, Elisa ha ottenuto delle decorazioni sempre più complesse traslando più volte un nuovo modulo, ricavato a sua volta applicando delle isometrie all'elemento base.



Partendo dall'elemento base, sapresti costruire passo passo il modulo da traslare? (Utilizza al massimo due trasformazioni.)

3. Cominciando dall'elemento base, segui le istruzioni date e disegna un nuovo modulo da traslare.
- Simmetria centrale rispetto al punto O.
- Simmetria assiale rispetto alla retta r.
- Traslazione dei quattro elementi ottenuti secondo un vettore $\vec{AB}$.

4. Osserva che le isometrie considerate fin qui sono traslazioni di vettore parallelo alla direzione del fregio (data dalla retta s), simmetrie assiali rispetto a s e a r, simmetrie centrali rispetto a un punto appartenente a s, cioè rotazioni di 180°. Spiega il perché di questa scelta, considerando che l'obiettivo è quello di ottenere una decorazione che sia un fregio, cioè un disegno contenuto dentro una striscia e generato dall'iterazione di una traslazione base.

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 20 test interattivi in più

1 Le proposizioni seguenti sono tutte vere *tranne* una. Quale?

A Le traslazioni, eccettuato il caso dell'identità, non hanno punti uniti.

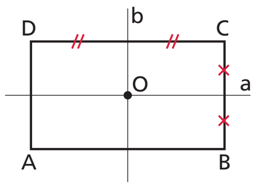
B Le traslazioni sono isometrie.

C L'unica traslazione che ammette segmenti uniti è l'identità.

D Ogni traslazione ammette rette unite.

E In una traslazione di vettore $\vec{AB}$, il rettangolo $ABCD$ si trasforma in un parallelogramma.

2 È dato il rettangolo $ABCD$.



A esso viene applicata la trasformazione t tale che:

$$t(A) = C, \quad t(B) = D, \quad t(C) = A, \quad t(D) = B.$$

Una delle seguenti affermazioni è *falsa*. Quale?

A t può essere una rotazione di centro O e angolo 180°.

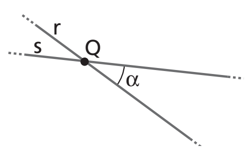
B I lati del rettangolo sono segmenti uniti.

C t può essere la simmetria centrale di centro O.

D Il rettangolo $ABCD$ è una figura unita.

E t può essere la composizione delle due simmetrie assiali di assi a e b.

3 Osserva la figura.



La composizione delle simmetrie assiali di assi r e s è:

A la simmetria assiale che ha per asse la bisettrice dell'angolo α.

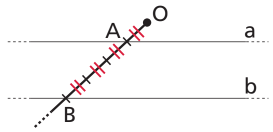
B la rotazione di centro Q e angolo 2α.

C la rotazione di centro Q e angolo α.

D una traslazione.

E la simmetria centrale di centro Q.

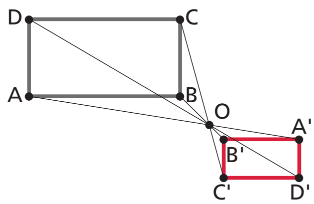
4 La retta b della figura è omotetica della retta a nell'omotetia di centro O e rapporto k.



Se AB è triplo di OA, allora k è uguale a:

A 4. B 3. C $\frac{1}{3}$. D $\frac{1}{4}$. E 1.

5 Il rettangolo $A'B'C'D'$ è l'immagine del rettangolo $ABCD$ nell'omotetia di centro O e rapporto k.



Se l'area di $ABCD$ è quadrupla di quella di $A'B'C'D'$ allora k è uguale a:

A 2. B -2. C 4. D $-\frac{1}{4}$. E $-\frac{1}{2}$.

6 Quale delle seguenti proposizioni sulle affinità è *vera*?

A Trasformano rette parallele in rette parallele.

B Mantengono inalterate le distanze.

C Trasformano circonferenze in circonferenze.

D Conservano gli angoli.

E Lasciano invariata la forma delle figure.

7 La composizione di due simmetrie centrali di centri rispettivamente O e O' è:

A la simmetria centrale avente per centro il punto medio di OO'.

B la traslazione di vettore $\vec{OO'}$ oppure $\vec{O'O}$.

C la simmetria assiale di asse coincidente con l'asse del segmento OO'.

D una rotazione con centro nell'asse di simmetria OO'.

E la traslazione di vettore $2\vec{OO'}$ oppure $2\vec{O'O}$.

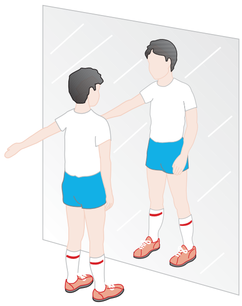
SPIEGA PERCHÉ

8 Le parole SI e NON ammettono un asse di simmetria? E un centro di simmetria?

9 Considera una semicirconferenza di diametro d e la simmetria assiale s_d rispetto al diametro d. La trasformazione $s_d \circ s_d$, applicata alla semicirconferenza, è involutoria?

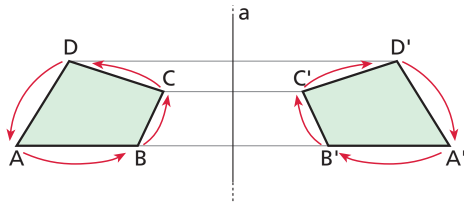
10 Motiva le risposte ai seguenti quesiti.
a) Esiste una proiettività che trasforma un cerchio in una corona circolare?
b) In una rotazione di 360° rispetto al proprio centro, un cerchio è una figura unita?
c) I punti del cerchio trasformato in b) sono punti uniti?

11 La figura illustra una situazione della vita quotidiana. Un bambino si diverte davanti allo specchio, perché trova strano che la sua immagine riflessa si avvicini se egli si avvicina e si allontani se egli si allontana. Se poi muove la mano sinistra, l'immagine muove la destra.



Le immagini speculari sono un esempio di simmetria *nello spazio*. Nello spazio, le figure sono solidi e la simmetria è rispetto a un piano anziché rispetto a un asse.

Spiega il fatto che la destra sia scambiata con la sinistra, pensando alla simmetria nel piano, aiutandoti con l'esempio qui sotto.



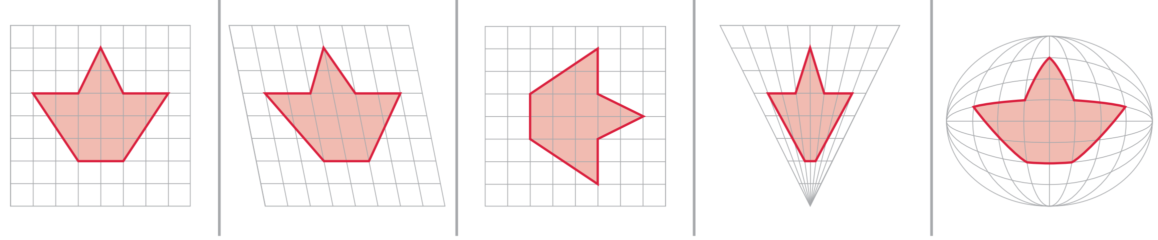
ESERCIZI

Nel sito: ▶ 18 esercizi in più

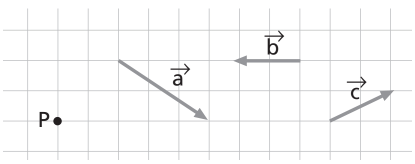
12 Considera la funzione t dal piano in sé che associa a un segmento AB una semicirconferenza di diametro AB. t è una trasformazione geometrica? Qual è l'immagine del punto medio di AB? E l'immagine di A?

13 Indica il nome della trasformazione rappresentata in ciascuna figura.

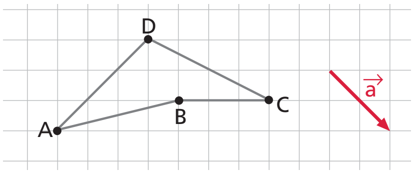
identità	....	....	....	....



14 Applica al punto P della figura la traslazione di vettore dato dalla somma dei vettori $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

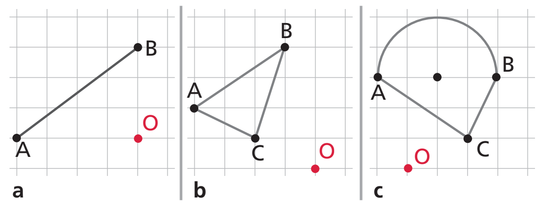


15 Trasla la figura secondo il vettore indicato.



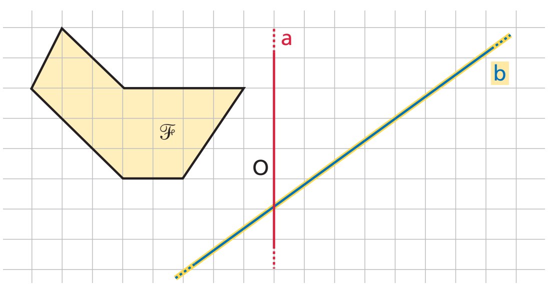
16 Dati due punti distinti A e B e un angolo α, disegna le due rotazioni di angolo α che associano il punto A al punto B.

17 Disegna il simmetrico di ognuna delle seguenti figure rispetto al punto O.

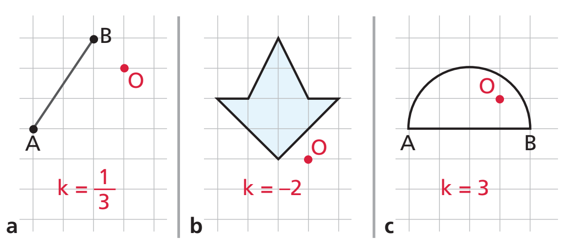


18 Disegna una circonferenza di centro O e raggio r. Traccia poi un suo asse di simmetria. Ve ne sono altri? Quanti sono? Esegui la stessa operazione e rispondi alle stesse domande nel caso di un triangolo isoscele.

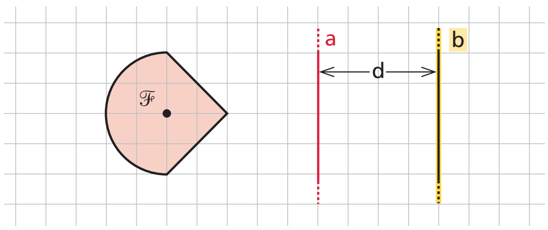
19 Partendo dalla figura $\mathcal{F}$, disegna la figura che si ottiene mediante la composizione delle simmetrie assiali $s_b \circ s_a$.



20 In ciascun caso disegna la figura corrispondente nell'omotetia di centro O e rapporto indicato.



21 A partire dalla figura $\mathcal{F}$, disegna la figura che ottieni applicando due simmetrie assiali rispetto alle rette parallele a e b, cioè applicando $s_b \circ s_a$. Indica di che tipo è la trasformazione $s_b \circ s_a$ e descrivine le caratteristiche.

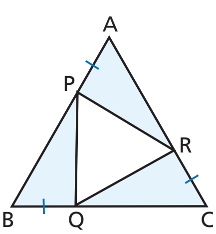


22 Dimostra che le bisettrici di un poligono regolare e gli assi dei lati si intersecano in uno stesso punto O, centro della circonferenza inscritta nel poligono.

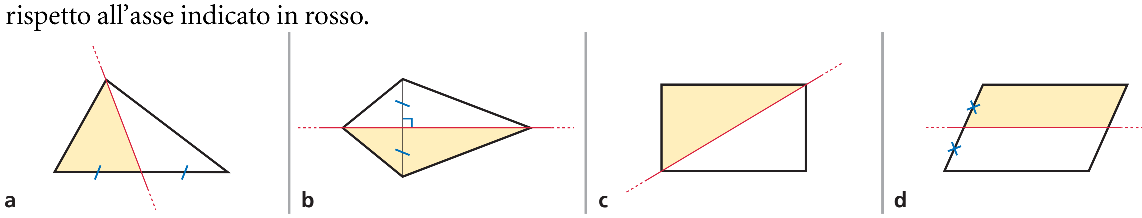
23 Dimostra che la distanza di un punto da una retta rappresenta la metà di un segmento di cui la retta è asse di simmetria.

24 Disegna una circonferenza di centro O e una retta r tangente alla circonferenza nel punto B. Considera una rotazione di centro O e ampiezza 120° e costruisci la retta r' corrispondente di r e il punto C corrispondente di B nella rotazione. Indica con A il punto intersezione di r con r'. Dimostra che il quadrilatero $ABOC$ è inscrivibile in una circonferenza.

25 Il triangolo ABC in figura è equilatero. Inoltre è $AP \cong BQ \cong CR$. Dimostra che PQR è un triangolo equilatero. (Suggerimento. Determina il punto di intersezione O delle mediane di ABC…)



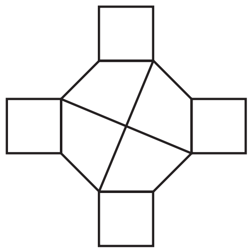
26 Individua in quale dei riquadri seguenti sono rappresentate in modo corretto una figura e la sua simmetrica rispetto all'asse indicato in rosso.



METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 4 esercizi in più

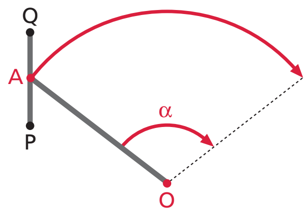
27 TEST Quanti assi di simmetria possiede la figura?



A 2.
B 4.
C 6.
D 8.
E Nessuna delle precedenti.

(*Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede*, 2000)

28 Considera un sistema formato da un'asta OA che ruota intorno al punto O e da un'asta PQ che mantiene sempre la stessa direzione, fissata a OA per un suo punto, come in figura (pensa al tergicristallo di un'automobile). Qual è il luogo descritto dai punti P e Q al variare di A nella rotazione?



TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 6 esercizi in più

29 TEST The following is not an isometry:

A a rotation.
B a reflection.
C a translation.
D a dilation.

(USA *Northern State University: 52nd Annual Mathematics Contest*, 2005)

30 TEST Which of the following statements is not true?

A A reflection in a line is congruent to the original figure.
B Corresponding sides of a figure and its reflection in a line are parallel.
C Corresponding sides of a figure and its reflection in a line are congruent.
D The line of symmetry bisects a segment connecting corresponding points of a figure and its reflection.
E The line of symmetry is perpendicular to a segment connecting corresponding points of a figure and its reflection.

(USA *Northern State University: 52nd Annual Mathematics Contest*, 2005)

31 TEST A quadrilateral that is central symmetric with respect to a point is always:

A a rectangle.
B a rhombus.
C a parallelogram.
D a square.
E a trapezoid.

32 How many different isometries transform a regular pentagon in itself? [10]

33 TEST If the length of each side of a triangle is increased by 20%, then the area of the triangle is increased by:

A 40%.
B 44%.
C 48%.
D 52%.
E 60%.

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2001)

GLOSSARY

to bisect: dividere in due parti uguali
dilation: dilatazione (omotetia)
to increase: aumentare
isometry: isometria
length: lunghezza
reflection: riflessione (simmetria assiale)
rotation: rotazione
statement: enunciato
translation: traslazione
trapezoid: trapezio

CAPITOLO

G8

La similitudine

Quale forma per le mura?

Nel Medioevo ai costruttori di fortificazioni spettava una decisione importante: stabilire quale forma dare alle mura di cinta di una città in modo che essa fosse meno vulnerabile dagli attacchi dei nemici e che potesse delimitare una superficie sufficiente a dare alloggio a tutti i propri abitanti. In Europa furono molti a scegliere una forma circolare…

…che cosa accomuna le pesanti fortificazioni di una città medievale, una mela e una leggerissima bolla di sapone?

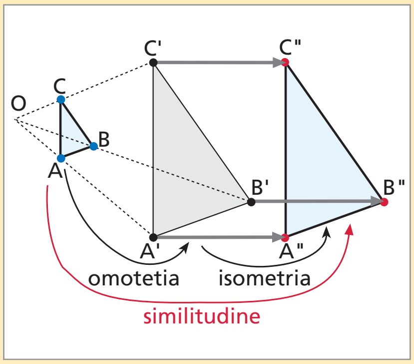
➡ **La risposta a pag. G401**

1. La similitudine e le figure simili

DEFINIZIONE

Similitudine

Una similitudine è una trasformazione geometrica che si ottiene dalla composizione di un'omotetia e un'isometria, o viceversa.



Due figure si dicono **simili** se si corrispondono in una similitudine. Per esempio, sono simili i triangoli ABC e $A''B''C''$ della figura.

In particolare, sono simili due figure **congruenti**: la similitudine che le fa corrispondere è la composizione di un'opportuna isometria con un'omotetia di centro qualsiasi e rapporto 1 (cioè l'identità).

Per indicare la similitudine utilizziamo il simbolo $\approx$.
Per esempio, scriviamo

$$ABC \approx A''B''C''$$

per dire che i triangoli ABC e $A''B''C''$ sono simili.

Due lati o due angoli che si corrispondono in una similitudine si dicono **omologhi**.

La similitudine gode di tutte le proprietà delle omotetie.

In particolare, se due poligoni sono simili, essi hanno gli **angoli omologhi congruenti** e i **lati omologhi in proporzione**, per le proprietà dell'omotetia.

Il rapporto fra due lati omologhi si chiama **rapporto di similitudine**.

Prima di tutto ci occuperemo della similitudine fra triangoli.

2. I criteri di similitudine dei triangoli

Esistono tre teoremi, i **criteri di similitudine dei triangoli**, che forniscono condizioni sufficienti affinché due triangoli ABC e $A'B'C'$ siano simili.

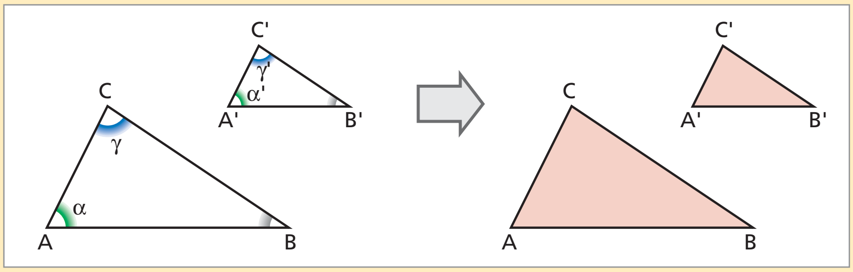
Le dimostrazioni dei tre criteri seguono uno stesso schema, basato sulla costruzione di un terzo triangolo, omotetico ad ABC e congruente ad $A'B'C'$.

Per semplicità, prenderemo sempre come centro dell'omotetia il vertice C, ma le dimostrazioni si possono ripetere scegliendo come centro un punto qualunque del piano.

Il primo criterio di similitudine

TEOREMA

Se due triangoli hanno due angoli ordinatamente congruenti, allora sono simili.



Ipotesi 1. $\alpha \cong \alpha'$;
2. $\gamma \cong \gamma'$.

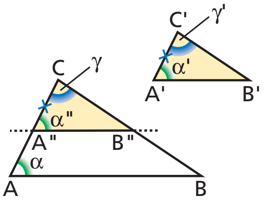
Tesi $ABC \approx A'B'C'$.

DIMOSTRAZIONE

Se $AC \cong A'C'$, i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti per il secondo criterio di congruenza, *quindi* sono simili.

Supponiamo ora che AC non sia congruente ad $A'C'$.

Consideriamo il rapporto $k = \dfrac{A'C'}{AC}$ e costruiamo il triangolo $A''B''C$, omotetico ad ABC nell'omotetia di centro C e rapporto k (figura a lato).



Poiché $\dfrac{A'C'}{AC} = k$, per l'ipotesi formulata, e, dato che k è il rapporto dell'omotetia, anche $\dfrac{A''C}{AC} = k$, abbiamo $A''C \cong A'C'$.
Inoltre, per le proprietà dell'omotetia, $A''B''$ è parallelo ad AB.

Indichiamo con α'' l'angolo $C\widehat{A''}B''$. Gli angoli α'' e α sono corrispondenti delle rette parallele AB e $A''B''$, tagliate dalla trasversale AC, *quindi* $\alpha'' \cong \alpha$.
I triangoli $A''B''C$ e $A'B'C'$ hanno $\alpha'' \cong \alpha'$, $\gamma \cong \gamma'$, $A''C \cong A'C'$, *quindi* sono congruenti, per il secondo criterio di congruenza.
Il triangolo $A'B'C'$ è congruente a un triangolo omotetico ad ABC, *pertanto* ABC e $A'B'C'$ sono simili.

Corollario 1. Due triangoli equilateri sono simili.

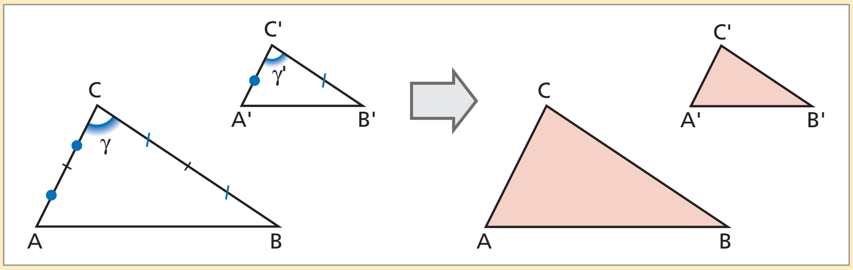
Corollario 2. Due triangoli rettangoli, con un angolo acuto congruente, sono simili.

Corollario 3. Due triangoli isosceli, con gli angoli al vertice congruenti, sono simili. Infatti, detta α l'ampiezza degli angoli al vertice, poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è l'angolo piatto $\hat{P}$, in entrambi i triangoli ogni angolo alla base ha ampiezza $\dfrac{1}{2}(\hat{P} - \alpha)$. I triangoli, quindi, hanno angoli corrispondenti congruenti, e pertanto sono simili.

Il secondo criterio di similitudine

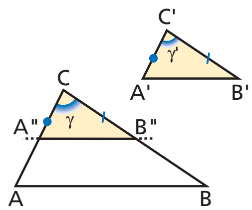
TEOREMA

Se due triangoli hanno due lati ordinatamente in proporzione e l'angolo tra essi compreso congruente, allora sono simili.



Ipotesi 1. $\gamma \cong \gamma'$;
2. $AC : A'C' = BC : B'C'$.

Tesi $ABC \approx A'B'C'$.



DIMOSTRAZIONE

Se $AC \cong A'C'$, anche $BC \cong B'C'$, per l'ipotesi 2; per il primo criterio di congruenza i triangoli sono congruenti e *quindi* sono simili.

Supponiamo ora che AC non sia congruente ad $A'C'$ e, per esempio, sia $AC > A'C'$.

Costruiamo il triangolo $A''B''C$, omotetico ad ABC nell'omotetia di centro C e rapporto $k = \dfrac{A'C'}{AC}$ (figura a lato).

Poiché $\dfrac{A'C'}{AC} = k$ e, essendo C punto unito dell'omotetia, anche $\dfrac{A''C}{AC} = k$, abbiamo $A''C \cong A'C'$.

Per l'ipotesi 2, anche $\dfrac{B'C'}{BC} = k$ e, essendo il segmento $B''C$ immagine di BC mediante l'omotetia, anche $\dfrac{B''C}{BC} = k$; abbiamo *quindi* $B''C \cong B'C'$.

I triangoli $A''B''C$ e $A'B'C'$ sono *quindi* congruenti, per il primo criterio di congruenza.

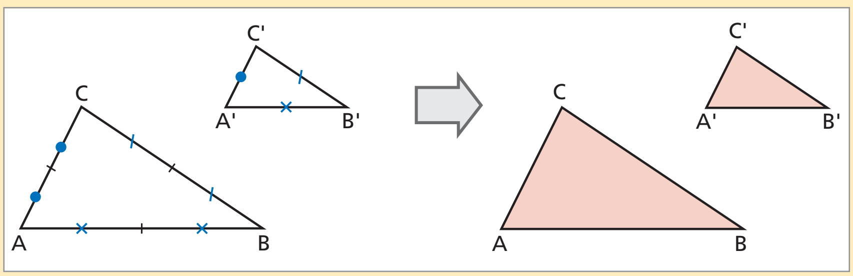
Il triangolo $A'B'C'$ è congruente a un triangolo omotetico ad ABC, *pertanto* ABC e $A'B'C'$ sono simili.

Corollario. Due triangoli rettangoli sono simili se hanno i cateti in proporzione.

Il terzo criterio di similitudine

TEOREMA

Se due triangoli hanno i lati ordinatamente in proporzione, allora sono simili.



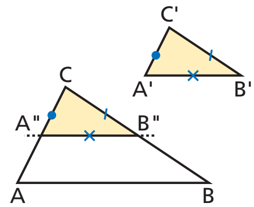
Ipotesi $AB : A'B' = BC : B'C' = AC : A'C'$. **Tesi** $ABC \approx A'B'C'$.

DIMOSTRAZIONE

Se $AC \cong A'C'$, per ipotesi anche $BC \cong B'C'$ e $AB \cong A'B'$: i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti per il terzo criterio di congruenza, *quindi* sono simili.

Supponiamo invece che AC non sia congruente ad $A'C'$ e, per esempio, sia $AC > A'C'$.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*



Costruiamo il triangolo $A''B''C$, omotetico ad ABC nell'omotetia di centro C e rapporto $k = \dfrac{A'C'}{AC}$.

Poiché $\dfrac{A'C'}{AC} = k$ e, essendo C punto unito dell'omotetia, anche $\dfrac{A''C}{AC} = k$, abbiamo $A''C \cong A'C'$.

Per ipotesi anche $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'B'}{AB} = k$, dunque, analogamente, si dimostra che $B''C \cong B'C'$ e $A''B'' \cong A'B'$.
I triangoli $A''B''C$ e $A'B'C'$ sono *quindi* congruenti per il terzo criterio di congruenza.

Il triangolo $A'B'C'$ è congruente a un triangolo omotetico ad ABC, *pertanto* ABC e $A'B'C'$ sono simili.

3. Applicazioni dei criteri di similitudine

La proporzionalità fra basi e altezze di triangoli simili

TEOREMA

In due triangoli simili le basi stanno fra loro come le rispettive altezze.

Poiché $ABC \approx A'B'C'$, si ha:

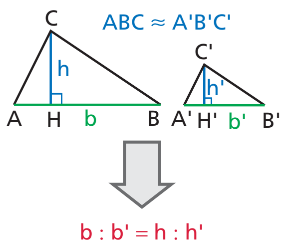
$b : b' = AC : A'C'$, $\hat{A} \cong \hat{A}'$.

Osserviamo che anche i triangoli rettangoli AHC e $A'H'C'$ sono simili (primo criterio), quindi:

$AC : A'C' = h : h'$.

Dalla proprietà transitiva dell'uguaglianza:

$b : b' = h : h'$.

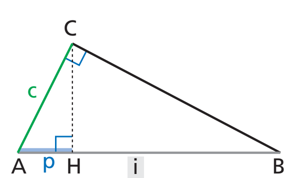


◄ Figura 1

Il primo teorema di Euclide

TEOREMA

In un triangolo rettangolo ogni cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la propria proiezione sull'ipotenusa.



Ipotesi ABC triangolo rettangolo in C.
Tesi $i : c = c : p$.

DIMOSTRAZIONE Nel triangolo ABC, CH è l'altezza relativa all'ipotenusa. I triangoli ABC e AHC sono simili perché sono rettangoli e hanno l'angolo $\hat{A}$ in comune, quindi $AB : AC = AC : AH$.

Analogamente, considerando la proiezione *HB* di *CB* sull'ipotenusa, si dimostra che:

$AB : CB = CB : HB.$

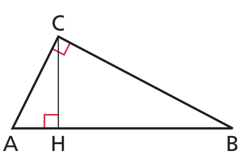
Passando alla proporzione fra le misure abbiamo:

$$i : c = c : p \rightarrow c^2 = i \cdot p,$$

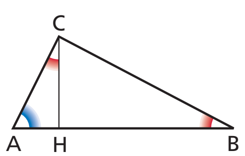
in cui c^2 è la misura dell'area del quadrato di lato c e $i \cdot p$ è la misura dell'area del rettangolo di dimensioni i e p. Abbiamo così ritrovato il primo teorema di Euclide espresso mediante la misura di aree.

COME INDIVIDUARE I LATI OMOLOGHI

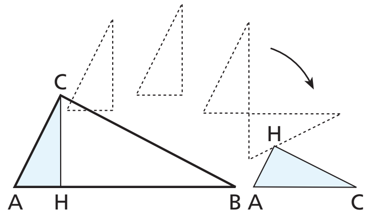
Per individuare i lati omologhi di due triangoli simili, ricorda che essi sono i lati opposti ad angoli congruenti.
Come esempio, riprendiamo la figura relativa al primo teorema di Euclide e consideriamo i triangoli *ABC* e *ACH*.



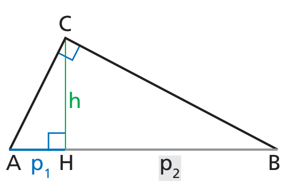
a. Gli angoli $A\hat{H}C$ e $A\hat{C}B$ sono congruenti perché entrambi retti; i lati opposti *AC* e *AB* sono dunque corrispondenti.



b. Gli angoli $A\hat{C}H$ e $C\hat{B}H$ sono congruenti perché angoli complementari del medesimo angolo, $C\hat{A}B$; i lati opposti *AH* e *AC* sono dunque corrispondenti.



c. Per individuare facilmente i lati omologhi si può disegnare separatamente il triangolo *AHC* in modo che *AC* sia parallelo (o allineato) ad *AB*, e *AH* sia parallelo ad *AC*.



Ipotesi ABC triangolo rettangolo in C.
Tesi $p_1 : h = h : p_2$.

▶ **Figura 2**

Il secondo teorema di Euclide

TEOREMA

In un triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa è medio proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

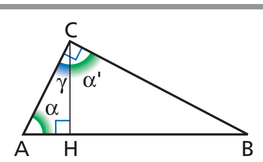
DIMOSTRAZIONE Indichiamo con α l'angolo $\hat{A}$; l'angolo retto $A\hat{C}B$ è suddiviso dall'altezza nei due angoli γ e α'. Nel triangolo rettangolo *AHC*, α è complementare di γ. *Quindi* $\alpha' \cong \alpha$ perché complementari dello stesso angolo.

I triangoli rettangoli *AHC* e *BHC* hanno un angolo acuto congruente, *quindi* sono simili. Fra i lati omologhi *AH* e *CH*, *CH* e *BH* vale la proporzione:

$$AH : CH = CH : BH.$$

Passando alle misure:

$$p_1 : h = h : p_2 \rightarrow h^2 = p_1 p_2.$$



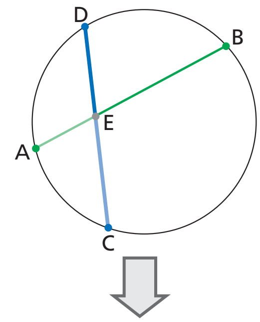
Osserviamo che h^2 è la misura dell'area del quadrato di lato h e $p_1 \cdot p_2$ quella del rettangolo di dimensioni p_1 e p_2. Ritroviamo così il secondo teorema di Euclide scritto mediante la misura di aree.

4. La similitudine nella circonferenza

Il teorema delle corde

TEOREMA

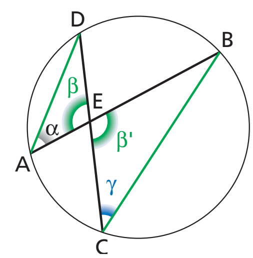
Se in una circonferenza due corde si intersecano, i segmenti che si formano sulla prima corda e quelli che si formano sulla seconda sono, rispettivamente, i medi e gli estremi di una stessa proporzione.



AE : CE = ED : EB

DIMOSTRAZIONE

Congiungiamo A con D e B con C.



Indichiamo con α l'angolo $D\hat{A}B$, con γ l'angolo $D\hat{C}B$, con β l'angolo $A\hat{E}D$ e con β' l'angolo $C\hat{E}B$.
I triangoli AED e BEC hanno:

- $\beta \cong \beta'$ perché angoli opposti al vertice;
- $\alpha \cong \gamma$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{DB}$.

Quindi i triangoli AED e BEC sono simili per il primo criterio di similitudine dei triangoli.

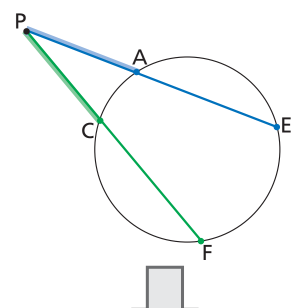
I lati omologhi sono AE e CE, ED ed EB, AD e BC, *pertanto* è soddisfatta la proporzione:

$$AE : CE = ED : EB.$$

Il teorema delle secanti

TEOREMA

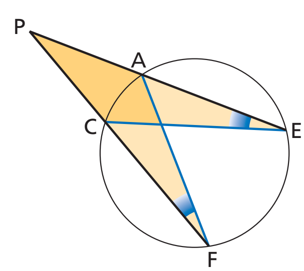
Se da un punto P esterno a una circonferenza si conducono due secanti e si considerano i segmenti che hanno un estremo in P e l'altro in ciascuno dei punti di intersezione, i segmenti sulla prima secante sono gli estremi e i segmenti sulla seconda i medi di una stessa proporzione.



PF : PE = PA : PC

DIMOSTRAZIONE

Congiungiamo E con C e A con F.



I triangoli che si formano, PCE e PFA, hanno:

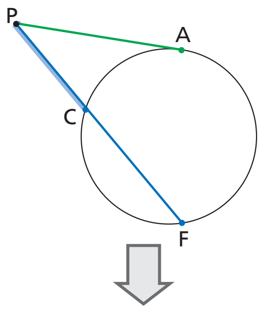
- l'angolo in P in comune;
- $\hat{E} \cong \hat{F}$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{AC}$.

Quindi i triangoli PCE e PFA sono simili, per il primo criterio di similitudine dei triangoli.

I lati omologhi sono PC e PA, PE e PF, CE e AF, *pertanto* è soddisfatta la proporzione:

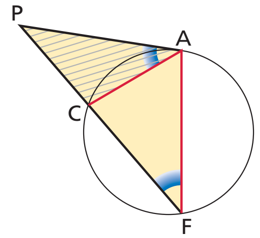
$$PF : PE = PA : PC.$$

Il teorema della secante e della tangente



TEOREMA

Se da un punto P esterno a una circonferenza si tracciano una secante e una tangente, il segmento di tangente che ha per estremi P e il punto di contatto è medio proporzionale fra i segmenti di secante che hanno per estremi P e ciascuno dei punti di intersezione.



DIMOSTRAZIONE

Congiungiamo il punto A di tangenza con F e con C.

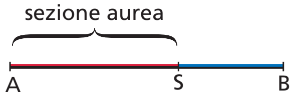
I triangoli PFA e PCA hanno (figura a lato):

- $A\hat{P}F$ in comune;
- $P\hat{A}C \cong P\hat{F}A$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{CA}$.

Quindi i triangoli PFA e PCA sono simili.

I lati omologhi sono PF e PA, PA e PC, AF e AC, *pertanto* è soddisfatta la proporzione $PF : PA = PA : PC$.

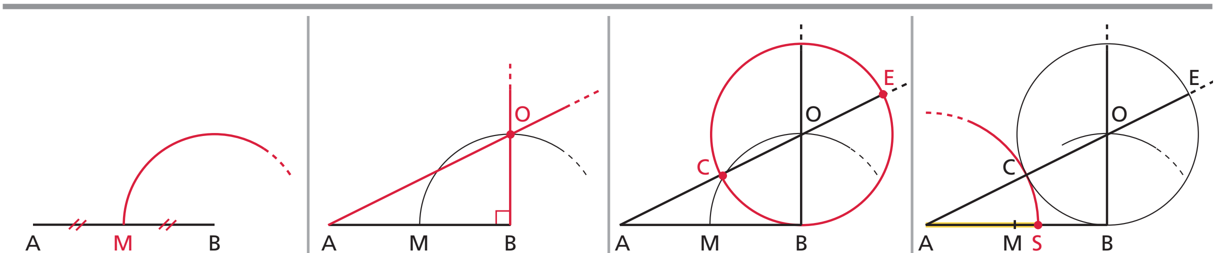
La sezione aurea di un segmento



DEFINIZIONE

Sezione aurea

La sezione aurea di un segmento è quella sua parte che è medio proporzionale fra l'intero segmento e la parte di segmento rimanente.



a. Disegniamo un segmento AB, il suo punto medio M e un arco di centro B e raggio BM.

b. La perpendicolare per B al segmento AB interseca l'arco nel punto O. Tracciamo la semiretta AO.

c. Tracciamo la circonferenza di centro O e raggio OB. Essa interseca la semiretta AO nei punti C ed E.

d. Con centro in A e raggio AC, tracciamo un arco che interseca AB nel punto S. Il segmento AS è la sezione aurea di AB.

▲ **Figura 3** **Costruzione della sezione aurea di un segmento.**

Per dimostrare che il segmento AS è la sezione aurea di AB, dobbiamo dimostrare che vale la proporzione $AB : AS = AS : SB$.
Per costruzione AB è tangente alla circonferenza di centro O e AE è secante. Applicando il teorema della secante e della tangente, otteniamo:

$$AE : AB = AB : AC.$$

Applichiamo la proprietà dello scomporre:

$$(AE - AB) : AB = (AB - AC) : AC.$$

Poiché $AB \cong CE$, risulta $AE - AB \cong AC$.

Inoltre, $AC \cong AS$, $AE - AB \cong AS$ e $AB - AC \cong AB - AS \cong SB$.

Riscriviamo la proporzione sostituendo con queste espressioni:

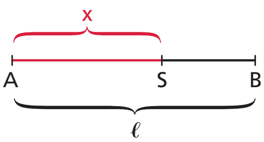
$$AS : AB = SB : AS.$$

Infine invertiamo i medi con gli estremi e otteniamo $AB : AS = AS : SB$.

Ciò dimostra che AS è la sezione aurea di AB.

LA SEZIONE AUREA NELL'ALGEBRA

Se il segmento AS è la sezione aurea di AB, vale la proporzione $AB : AS = AS : SB$.
Indichiamo con l la misura di AB e con x la misura di AS: la misura di SB è $l - x$. Determiniamo il valore di x in funzione di l.



Nella proporzione sostituiamo ai segmenti le misure delle rispettive lunghezze:

$$l : x = x : (l - x).$$

Applichiamo la proprietà fondamentale delle proporzioni:

$$x^2 = l(l - x) \quad \to \quad x^2 = l^2 - lx.$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado in x:

$$x^2 + lx - l^2 = 0$$

$$\Delta = l^2 + 4l^2 = 5l^2 \quad \to \quad x = \frac{-l \pm l\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{-l - l\sqrt{5}}{2} & \text{NON ACCETTABILE} \\[2ex] \dfrac{-l + l\sqrt{5}}{2} = \dfrac{l(\sqrt{5} - 1)}{2} & \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot l}$$

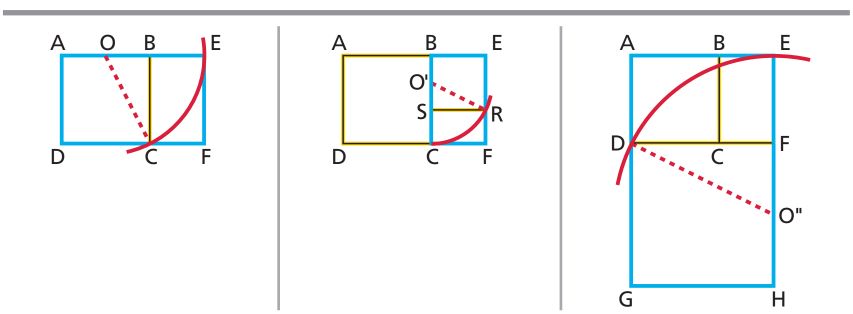
$$\frac{AS}{AB} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0{,}618033\ldots$$

$$\frac{AB}{AS} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = 1{,}618033\ldots$$

Il rapporto $\dfrac{AB}{AS}$ fra un segmento e la sua sezione aurea viene chiamato **numero aureo** e indicato con Φ.

Da un rettangolo aureo ad altri ancora

Da un quadrato si può ottenere un rettangolo aureo, ossia un rettangolo i cui lati hanno per rapporto il numero aureo. Con la stessa costruzione si possono ottenere altri due rettangoli aurei e da essi altri ancora.

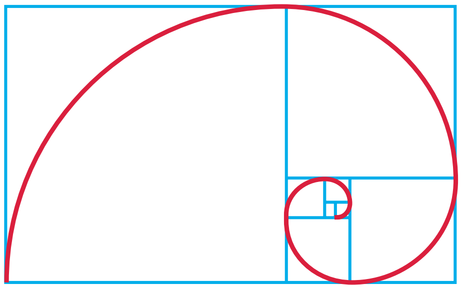


◄ **Figura 4** Costruzione. Gli archi di circonferenza tracciati hanno centro in O, O' e O'', che sono rispettivamente i punti medi di AB, BS e FH.

ESPLORAZIONE: UN NUMERO D'ORO

◄ **La conchiglia del *Nautilus*.**
Il *Nautilus* è un mollusco diffuso principalmente nell'Oceano Pacifico occidentale e nell'Oceano Indiano.
La sua conchiglia, di colore bianco con screziature rosso arancio, è suddivisa all'interno in una serie di camere collegate tra loro da un canale (*sifone*) che permette la circolazione dei liquidi da un vano all'altro. La struttura della conchiglia è alla base del meccanismo che regola gli spostamenti verticali e il galleggiamento del *Nautilus*. Quando una camera si svuota, attraverso il sifone, dei liquidi che erano presenti al suo interno, si riempie di gas. Variando opportunamente il rapporto tra la quantità di gas e quella dei liquidi presenti nelle camere, il *Nautilus* è in grado di scegliere a che profondità portarsi.

La presenza del numero aureo $\Phi = 1{,}618\ldots$ è stata considerata fin dall'antichità come caratteristica di armonia. Per questo il numero aureo è stato utilizzato nell'arte, nell'architettura, nella musica, ed è stato ricercato nei fenomeni naturali. Vediamo un esempio.
Nella struttura della conchiglia del *Nautilus*, un mollusco che popola da miliardi di anni le profondità degli oceani, si può riconoscere la presenza della sezione aurea.
Per capire come si ottiene la forma a spirale del guscio osserviamo la figura, dove ritroviamo i quadrati e i rettangoli aurei di cui abbiamo già visto la costruzione.



All'interno di ogni quadrato viene tracciato un arco di circonferenza. Gli archi successivi, collegati fra loro, formano una spirale, che riproduce la forma con cui il *Nautilus*, crescendo, ingrandisce la propria conchiglia.

IN DIECI RIGHE

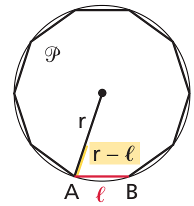
Nella facciata del Partenone, il principale tempio dell'acropoli di Atene, si possono trovare diversi rettangoli aurei. Cerca informazioni sull'argomento in Internet o su testi di storia dell'arte.
Cerca poi altri esempi di utilizzazione della sezione aurea nell'arte e scrivi una breve relazione con il computer.

Cerca nel web: sezione aurea, arte, Partenone, golden ratio, art Parthenon.

Il lato del decagono regolare

TEOREMA

Il lato di un decagono regolare è la sezione aurea del raggio della circonferenza circoscritta al decagono.



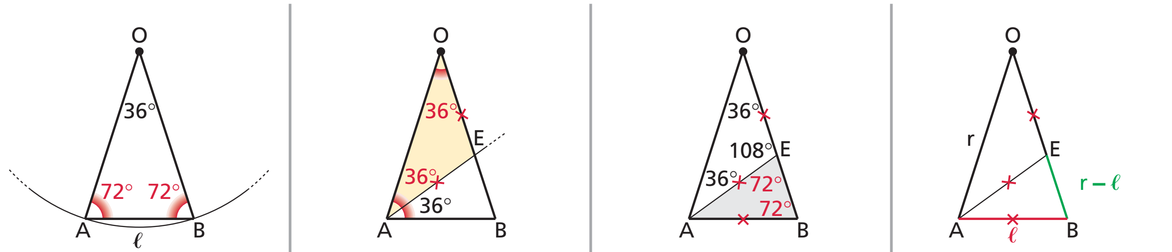
Ipotesi 𝒫 decagono regolare.

Tesi $r : \ell = \ell : (r - \ell)$.

▼ Figura 5

DIMOSTRAZIONE

Congiungiamo il centro O con gli estremi del lato AB. Il triangolo ABO è isoscele (figura 5).



a. L'angolo $\hat{O}$ è la decima parte dell'angolo giro, quindi ha ampiezza 36°. Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, l'ampiezza degli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ è: $\frac{180° - 36°}{2} = 72°$.

b. Tracciamo la bisettrice AE dell'angolo $\hat{A}$. Essa divide $\hat{A}$ in due angoli congruenti di $\frac{72°}{2} = 36°$, pertanto il triangolo AEO è isoscele sulla base AO. Deduciamo che $AE \cong OE$.

c. Nel triangolo ABE, l'angolo $A\hat{E}O$ ha ampiezza $180° - 2 \cdot 36° = 108°$, dunque $A\hat{E}B$ ha ampiezza $180° - 108° = 72°$. Pertanto ABE è isoscele e, in particolare, $AE \cong AB$.

d. Poiché $OE \cong AE$ e $AE \cong AB$, anche $OE \cong AB$, ossia $OE = \ell$ ed $EB = r - \ell$.

I triangoli isosceli ABO e ABE hanno gli angoli congruenti, *quindi* sono simili.

I lati omologhi sono AO e AB, AB e BE, OB e AE, *pertanto* è soddisfatta la proporzione:

$$AO : AB = AB : BE \quad \rightarrow \quad r : l = l : (r - l).$$

5. I poligoni simili

Abbiamo definito le figure simili come figure che si corrispondono in una similitudine. È dunque vero che *due poligoni simili hanno gli angoli ordinatamente congruenti e i lati corrispondenti in proporzione*.

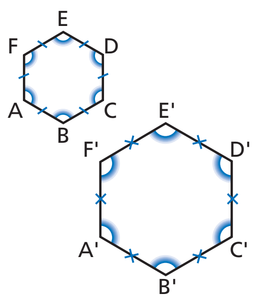
Un criterio di similitudine per i poligoni

Esiste un criterio per stabilire se due poligoni con un numero qualsiasi di lati sono simili. Qui lo enunciamo senza dimostrarlo.

TEOREMA

Condizione sufficiente affinché due poligoni con lo stesso numero di lati siano simili è che abbiano gli angoli ordinatamente congruenti e i lati ordinatamente in proporzione, tranne al più:

- tre angoli consecutivi, *oppure*
- un lato e i due angoli a esso adiacenti, *oppure*
- due lati consecutivi e l'angolo compreso.



Corollario. Se due poligoni regolari hanno lo stesso numero di lati, allora sono simili.

Ciò dipende dal fatto che:

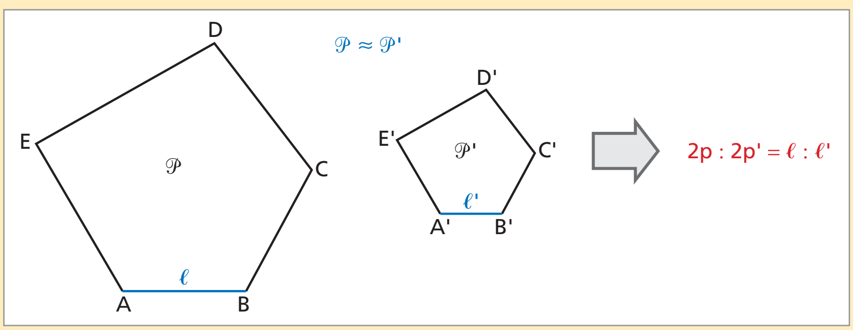
- i rapporti fra lati corrispondenti sono tutti uguali; per esempio, riferendoci alla figura, se $\frac{A'B'}{AB} = k$ anche $\frac{B'C'}{BC} = k$ perché $A'B' \cong B'C'$ e $AB \cong BC$;
- se n è il numero dei lati, gli angoli dei due poligoni sono congruenti poiché hanno tutti ampiezza uguale a $\frac{(n-2)\widehat{P}}{n}$.

I perimetri di poligoni simili

▶ Indichiamo con $2p$ e $2p'$ i perimetri dei poligoni.

TEOREMA

I perimetri di due poligoni simili stanno fra loro come due lati omologhi.



▶ Per la dimostrazione facciamo riferimento a due pentagoni, ma essa è valida per poligoni con un numero qualunque di lati.

DIMOSTRAZIONE

Poiché i due poligoni sono simili, hanno i lati in proporzione, cioè:

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DE : D'E' = EA : E'A'.$$

Applicando la proprietà del comporre alla catena di rapporti, otteniamo

$$(AB + BC + CD + DE + EA) : (A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A') = AB : A'B',$$

ossia:

$$2p : 2p' = AB : A'B'.$$

Dal teorema deduciamo che, in poligoni simili, il **rapporto dei perimetri è uguale al rapporto di similitudine**, così come accade per il rapporto dei lati omologhi.

I poligoni regolari e il raggio della circonferenza circoscritta

TEOREMA

I perimetri di due poligoni regolari con lo stesso numero di lati stanno fra loro come i rispettivi apotemi e come i raggi delle rispettive circonferenze circoscritte.

Indichiamo perimetro, raggio e apotema dei due poligoni rispettivamente con $2p$, r, a, per il primo, e con $2p'$, r', a', per il secondo. Dobbiamo dimostrare che:
$2p : 2p' = r : r' = a : a'$.

DIMOSTRAZIONE

I due poligoni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$, essendo regolari, sono simili, per il corollario del criterio di similitudine, *quindi* i loro perimetri stanno fra loro come due lati omologhi, cioè:

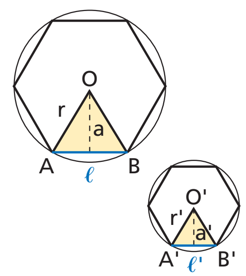
$$2p : 2p' = l : l'.$$

I triangoli isosceli ABO e $A'B'O'$ hanno gli angoli al vertice congruenti, perché entrambi congruenti a un angolo giro diviso per il numero dei lati, *quindi* sono simili. In particolare risulta:

$$l : l' = r : r' = a : a'.$$

Confrontando quest'ultima proporzione con la precedente otteniamo:

$$2p : 2p' = r : r' = a : a'.$$



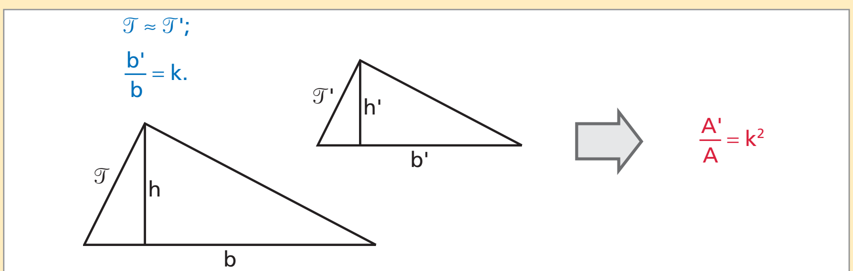
▲ **Figura 6** **Costruzione.** Indichiamo con ℓ un lato di $\mathcal{P}$, per esempio AB, e con ℓ' il lato corrispondente $A'B'$ di $\mathcal{P}'$. Congiungiamo il centro O con A e B, poi congiungiamo il centro O' con A' e B'.

Il teorema può essere enunciato in altro modo, tenendo presente che due poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono simili: *dati due poligoni regolari, il loro rapporto di similitudine è uguale al rapporto fra i lati e al rapporto fra i perimetri dei due poligoni, e anche al rapporto fra gli apotemi e al rapporto fra i raggi delle rispettive circonferenze circoscritte.*

Le aree di poligoni simili

TEOREMA

Il rapporto fra le aree di due triangoli simili è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.



Indichiamo con A la misura dell'area del triangolo $\mathcal{T}$ e con A' la misura dell'area del triangolo $\mathcal{T}'$.

DIMOSTRAZIONE

$$A = \frac{bh}{2} \quad \text{e} \quad A' = \frac{b'h'}{2}.$$

Se k è il rapporto di similitudine dei due triangoli, si ha $k = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{h'}{h}$, da cui:

$$b' = kb \quad \text{e} \quad h' = kh.$$

Sostituiamo i valori b' e h' nella formula di A':

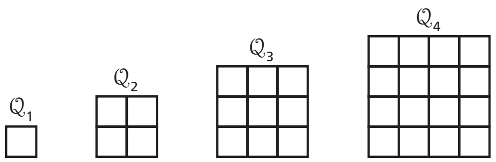
$$A' = \frac{kb \cdot kh}{2} \quad \rightarrow \quad A' = \frac{k^2 \cdot b \cdot h}{2} \quad \rightarrow \quad A' = k^2 A \quad \rightarrow \quad \frac{A'}{A} = k^2.$$

Il teorema appena dimostrato per i triangoli si può estendere ai poligoni:

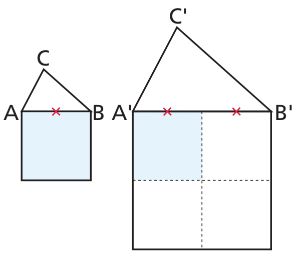
il rapporto fra le aree di due poligoni simili è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.

IL RAPPORTO FRA LE AREE DI QUADRATI

I quadrati sono poligoni simili fra loro. Se il lato di $\mathcal{Q}_2$ è doppio del lato di $\mathcal{Q}_1$, cioè $k = 2$, allora il rapporto fra le aree è $k^2 = 4$. Se il lato di $\mathcal{Q}_3$ è il triplo del lato di $\mathcal{Q}_1$, allora il rapporto fra le aree è $3^2 = 9$. Analogamente, se il rapporto fra i lati di $\mathcal{Q}_4$ e $\mathcal{Q}_1$ è 4, allora il rapporto fra le aree è 4^2.



Il teorema relativo al rapporto fra le aree può anche essere interpretato mediante una proporzione fra le aree dei poligoni simili e le aree dei quadrati costruiti su due lati omologhi.



▲ Figura 7

Esaminiamo questa interpretazione nel caso di due triangoli (figura 7). Poiché il rapporto di similitudine k è uguale al rapporto fra due lati omologhi, possiamo scrivere:

$$\frac{A'}{A} = k^2 = \left(\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2}.$$

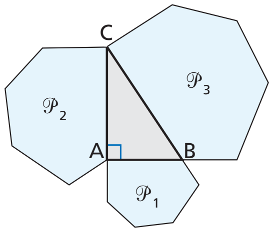
Poiché $\overline{A'B'}^2$ e $\overline{AB}^2$ sono le misure delle aree dei quadrati di lato rispettivamente $A'B'$ e AB, possiamo dire, passando dalle misure alle grandezze, che:

le aree di due triangoli simili (o di due poligoni simili) sono proporzionali alle aree dei quadrati costruiti su due lati omologhi.

Un'estensione del teorema di Pitagora

TEOREMA

Se sui lati di un triangolo rettangolo si costruiscono tre poligoni simili che hanno i lati del triangolo come lati omologhi, il poligono costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei poligoni costruiti sui cateti.



Ipotesi $\mathcal{P}_3 \approx \mathcal{P}_1 \approx \mathcal{P}_2$.
Tesi $\mathcal{P}_3 \doteq \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$.

DIMOSTRAZIONE

Indichiamo con A_1, A_2 e A_3 le aree di $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_3$ e con Q_1, Q_2 e Q_3 quelle dei quadrati costruiti rispettivamente su AB, AC e BC.
Le aree di due poligoni simili stanno fra loro come quelle dei quadrati costruiti su due lati omologhi, *quindi*, date le ipotesi, sono soddisfatte le proporzioni:

$$A_1 : A_2 = Q_1 : Q_2 \quad \text{e} \quad A_3 : A_2 = Q_3 : Q_2.$$

Applichiamo la proprietà del comporre nella prima proporzione:

$$(A_1 + A_2) : A_2 = (Q_1 + Q_2) : Q_2.$$

Per il teorema di Pitagora, $Q_1 + Q_2 = Q_3$, *quindi*:

$$(A_1 + A_2) : A_2 = Q_3 : Q_2.$$

Dal confronto con $A_3 : A_2 = Q_3 : Q_2$ *deduciamo* che:

$$A_3 = A_1 + A_2, \quad \text{ossia} \quad \mathcal{P}_3 \doteq \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2.$$

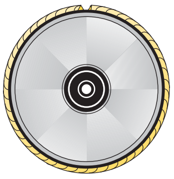
6. La lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio

La circonferenza rettificata

Supponi di voler determinare sperimentalmente la lunghezza del bordo di un compact disc.
Se fai coincidere un filo flessibile con il bordo del disco (figura 8) e poi lo tendi, puoi pensare a un segmento la cui lunghezza coincide con la lunghezza della circonferenza relativa al bordo del disco.

Naturalmente il filo non deve avere proprietà elastiche, ossia deve essere **inestensibile**.

Diciamo che quel segmento rappresenta la *circonferenza rettificata*.



▲ **Figura 8**

Risulta più complesso giungere alla definizione matematica di circonferenza rettificata. Descriveremo i passi essenziali, omettendo le dimostrazioni dei relativi teoremi.

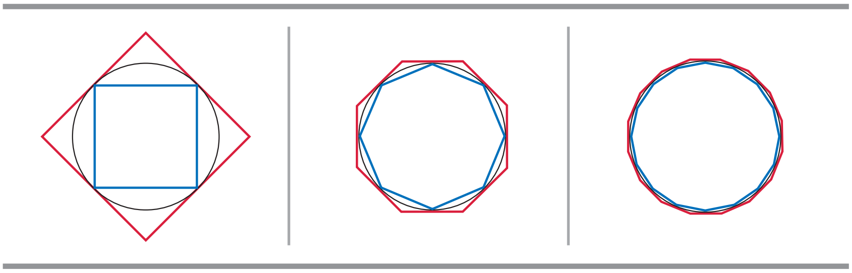
Data una circonferenza, consideriamo due insiemi: quello dei poligoni regolari inscritti e quello dei poligoni regolari circoscritti alla circonferenza. Si può dimostrare che **il perimetro di ogni poligono inscritto è minore del perimetro di ogni poligono circoscritto**.
In particolare, sono vere queste due proprietà:

1. il perimetro di ogni poligono regolare inscritto è sempre minore del perimetro del poligono circoscritto corrispondente (con lo stesso numero di lati);
2. aumentando il numero dei lati di un poligono regolare inscritto e del relativo poligono circoscritto, la differenza fra i loro perimetri diventa sempre più piccola.

Queste due caratteristiche vengono anche riassunte dicendo che le lunghezze dei poligoni inscritti e quelle dei poligoni circoscritti costituiscono due **classi contigue**.
Esiste una e una sola lunghezza che è maggiore di ognuno dei perimetri dei poligoni inscritti e minore di ognuno dei perimetri dei poligoni circoscritti. Gli elementi di questi due insiemi si avvicinano sempre di più a tale lunghezza, tuttavia essa, pur separandoli, non appartiene né all'uno né all'altro. Tale lunghezza viene chiamata **lunghezza della circonferenza rettificata** (o, in breve, lunghezza della circonferenza).

Per il postulato di continuità esiste sempre ed è unico l'elemento separatore di due classi contigue.

▶ **Figura 9** Dal punto di vista intuitivo, i perimetri del poligono inscritto e del poligono circoscritto tendono a identificarsi con la circonferenza man mano che il numero dei loro lati aumenta.



La lunghezza della circonferenza

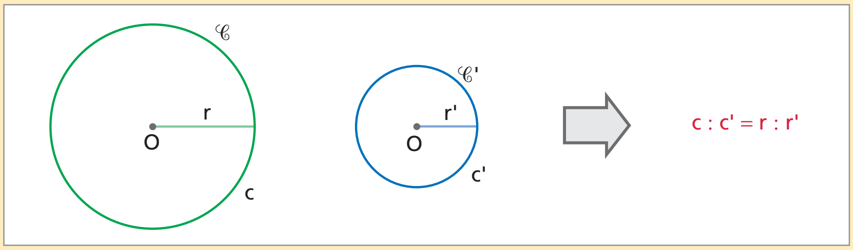
DEFINIZIONE

Lunghezza di una circonferenza

La lunghezza di una circonferenza è l'elemento separatore fra le classi contigue costituite dalle lunghezze dei perimetri dei poligoni regolari inscritti e da quelle dei perimetri dei poligoni regolari circoscritti alla circonferenza.

TEOREMA

Le misure delle lunghezze di due circonferenze sono proporzionali alle misure dei rispettivi raggi.



◗ Questo teorema ci permetterà di giungere alla formula che mette in relazione la misura della lunghezza di una circonferenza e quella del suo raggio.

◗ r e r' sono le misure dei raggi, c e c' quelle delle circonferenze.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo due poligoni regolari inscritti rispettivamente nelle circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ e con lo stesso numero di lati. Indichiamo con $2p$ e $2p'$ le misure delle lunghezze dei loro perimetri.

I due poligoni sono simili fra loro e i perimetri sono proporzionali ai raggi delle circonferenze (teorema sui poligoni regolari). Se k è il rapporto fra r' e r, k è anche il rapporto fra $2p'$ e $2p$, cioè vale:

◗ $2p : 2p' = r : r'$.

$$2p' = k2p.$$

Analoghe considerazioni valgono per i poligoni regolari circoscritti con lo stesso numero di lati dei precedenti. Fra le misure $2P'$ e $2P$ dei loro perimetri esiste lo stesso rapporto k:

◗ $2P : 2P' = r : r'$.

$$2P' = k2P.$$

Poiché la circonferenza rettificata è maggiore del perimetro di un poligono inscritto e minore di quello di uno circoscritto, abbiamo:

$$2p < c < 2P.$$

Moltiplicando per k si ottiene:

$$k2p < kc < k2P, \quad \text{ossia} \quad 2p' < kc < 2P'.$$

Poiché questa relazione è vera per qualunque coppia di poligoni regolari, indipendentemente dal numero dei lati, per l'unicità dell'elemento separatore di due classi contigue, deve essere:

$$c' = kc.$$

Quindi $\dfrac{c'}{c} = k = \dfrac{r'}{r}$, ossia $c' : c = r' : r$ e anche $c : c' = r : r'$.

Nella proporzione appena trovata moltiplichiamo il secondo antecedente e il suo conseguente per 2, poi permutiamo i medi:

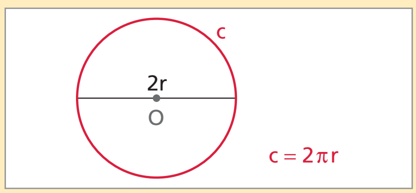
$$c : c' = 2r : 2r' \quad \rightarrow \quad c : 2r = c' : 2r'.$$

Questa relazione dice che il rapporto fra la misura della lunghezza della circonferenza e quella del suo diametro, $2r$, è costante. Abbiamo già incontrato questa costante, che viene indicata con il simbolo π ed è un numero irrazionale, il cui valore approssimato è 3,141592.

REGOLA

Misura della lunghezza della circonferenza

La misura della lunghezza di una circonferenza è uguale al prodotto della misura del diametro per π.



PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Una cifra dopo l'altra

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Ci sono filastrocche in diverse lingue per ricordare le prime cifre di π. Basta contare il numero di lettere delle parole. Ecco come inizia una in francese: *Que j'aime à faire apprendre ce nombre utile aux sages* ... (31415926535).
Ma come si calcolano le cifre di π? Determina una procedura per ottenere approssimazioni sempre migliori di π.

VALERIA: «π è il rapporto fra la misura di una circonferenza e quella del suo diametro: potremmo partire da lì».

CLAUDIO: «E la lunghezza di una circonferenza è approssimata sempre meglio dai perimetri dei poligoni regolari inscritti, all'aumentare del numero dei lati».

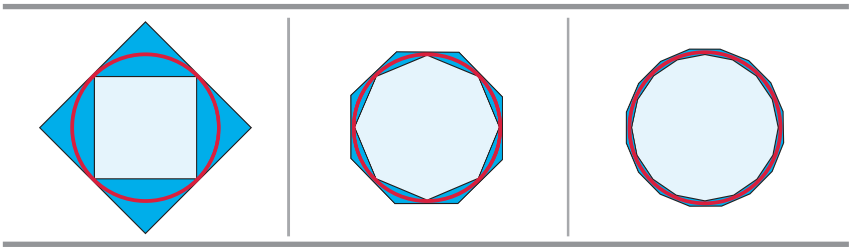
▶ Considera poligoni regolari inscritti di 4, 8, 16, 32, … lati. Cerca una formula che, noto il lato di uno di questi poligoni, permetta di calcolare quello del poligono che ha il doppio dei lati. Calcola poi i perimetri dei poligoni, a partire da quello del quadrato…

L'area del cerchio

Dato un cerchio, consideriamo l'insieme A delle aree dei poligoni regolari inscritti e l'insieme B delle aree dei poligoni regolari circoscritti al cerchio.

Si può dimostrare che tali insiemi sono classi contigue e che esiste ed è unico il loro elemento separatore.

▶ **Figura 10** Dal punto di vista intuitivo, i poligoni inscritti e quelli circoscritti tendono a identificarsi con il cerchio man mano che il numero dei loro lati aumenta.



DEFINIZIONE

Area del cerchio

L'area del cerchio è l'elemento separatore fra le classi contigue costituite dalle aree dei poligoni regolari inscritti e da quelle dei poligoni regolari circoscritti al cerchio.

◗ L'area del cerchio è maggiore di quella di un qualsiasi poligono inscritto e minore di quella di un qualsiasi poligono circoscritto.

Vale il seguente teorema.

TEOREMA

Un cerchio è equivalente a un triangolo che ha base congruente alla circonferenza rettificata e altezza congruente al raggio.

DIMOSTRAZIONE

Sappiamo che un poligono regolare è equivalente a un triangolo che ha la base congruente al perimetro del poligono e l'altezza congruente all'apotema.

Ogni poligono regolare inscritto nel cerchio ha perimetro minore della circonferenza rettificata e apotema minore del raggio, *quindi* la sua area è minore di quella di $\mathcal{T}$.

◗ Indichiamo con $\mathcal{C}$ il cerchio e con $\mathcal{T}$ il triangolo.

Ogni poligono regolare circoscritto al cerchio ha apotema congruente al raggio e perimetro maggiore della circonferenza rettificata, *quindi* ha area maggiore di quella di $\mathcal{T}$.

L'area di $\mathcal{T}$ è dunque elemento separatore delle classi contigue costituite dalle aree dei poligoni regolari inscritti e dalle aree dei poligoni regolari circoscritti. Poiché anche l'area di $\mathcal{C}$ è elemento separatore e questo è unico, devono coincidere le aree di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{T}$.

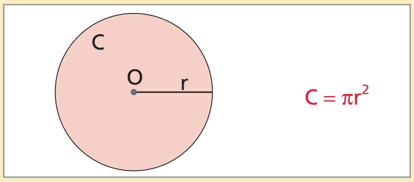
Poiché la misura della lunghezza della circonferenza è $2\pi r$, la relazione che lega la misura C dell'area del cerchio a quella r del raggio è:

$$C = \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}2\pi r \cdot r = \pi r^2.$$

REGOLA

Misura dell'area del cerchio

La misura dell'area di un cerchio è uguale al prodotto di π per il quadrato della misura del raggio.



▶ Dalla regola consegue che **le aree di due cerchi hanno come rapporto il quadrato del rapporto dei rispettivi raggi**, ossia:

$$\frac{C'}{C} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2.$$

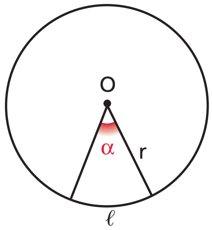
La lunghezza di un arco

Siano $\mathscr{A}$ l'insieme degli archi di una circonferenza e $\mathscr{B}$ l'insieme degli angoli al centro della stessa circonferenza. A ciascun arco di $\mathscr{A}$ si può associare un angolo al centro di $\mathscr{B}$ e tale corrispondenza è biunivoca.

Al crescere della lunghezza dell'arco, anche l'ampiezza dell'angolo al centro corrispondente cresce; si può dimostrare che lunghezza dell'arco e ampiezza dell'angolo al centro sono grandezze direttamente proporzionali.

Quindi, se indichiamo con l la misura della lunghezza dell'arco e con α quella dell'ampiezza del corrispondente angolo al centro in gradi, si ha la proporzione:

$$l : 2\pi r = \alpha : 360 \quad \rightarrow \quad l = \frac{\alpha}{180}\pi r.$$



L'area di un settore circolare

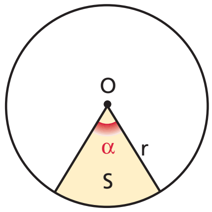
Se S è la misura dell'area di un settore, si può dimostrare che:

$$S : \pi r^2 = \alpha : 360 \quad \rightarrow \quad S = \frac{\alpha}{360}\pi r^2.$$

Dividendo membro a membro questa uguaglianza per quella relativa alla lunghezza dell'arco si ottiene:

$$\frac{S}{l} = \frac{1}{2}r \quad \rightarrow \quad S = \frac{1}{2}l \cdot r.$$

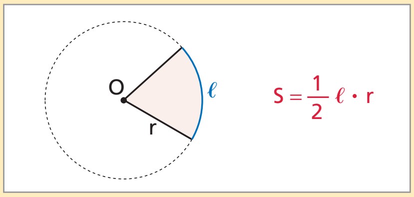
▶ Più in generale fra aree di settori circolari e ampiezze degli angoli al centro corrispondenti esiste una proporzionalità diretta.



REGOLA

Area del settore circolare

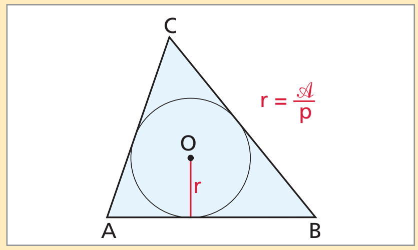
La misura dell'area di un settore circolare è uguale al semiprodotto delle misure dell'arco sotteso e del raggio.

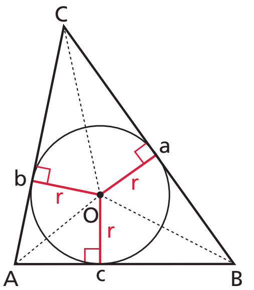


Il raggio del cerchio inscritto in un triangolo

REGOLA

La misura del raggio del cerchio inscritto in un triangolo è uguale al rapporto fra la misura dell'area del triangolo e la misura del suo semiperimetro.





Chiamiamo *a*, *b*, *c* le misure dei tre lati e 2*p* quella del perimetro di *ABC*.

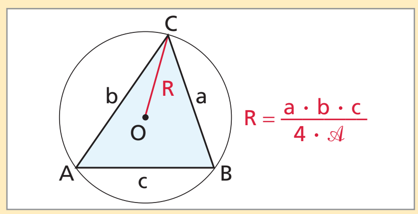
Infatti, poiché la circonferenza è inscritta nel triangolo, essa risulta tangente ai lati del triangolo. I raggi passanti per i punti di tangenza sono perpendicolari ai relativi lati, *quindi* sono le altezze dei triangoli *OAB*, *OBC* e *OAC* in cui risulta scomposto il triangolo *ABC*. L'area $\mathcal{A}$ del triangolo *ABC* è la somma di quelle dei tre triangoli:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{1}{2}r2p = rp.$$

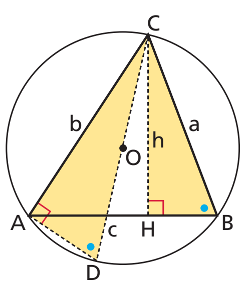
Il raggio del cerchio circoscritto a un triangolo

REGOLA

La misura del raggio del cerchio circoscritto a un triangolo è uguale al prodotto delle misure dei lati diviso per il quadruplo dell'area del triangolo.



Indichiamo con *a*, *b* e *c* le misure dei lati e con *R* la misura del raggio.



Infatti, tracciati l'altezza *CH* e il diametro *CD* (figura a lato), si ha $ACD \approx CHB$, quindi:

$$b : h = 2R : a \;\rightarrow\; 2R = \frac{a \cdot b}{h}$$

$$R = \frac{ab}{2h} = \frac{abc}{2hc} = \frac{abc}{4\mathcal{A}},$$

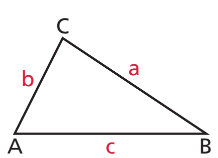
essendo $h \cdot c = 2\mathcal{A}$.

La formula di Erone

È possibile calcolare l'area di un triangolo, conoscendo solamente le lunghezze dei tre lati, mediante una formula, nota come **formula di Erone**.

Indicate con *a*, *b* e *c* le misure dei tre lati di un triangolo e con *p* la misura del semiperimetro, la misura dell'area $\mathcal{A}$ del triangolo è:

$$\mathcal{A} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}.$$



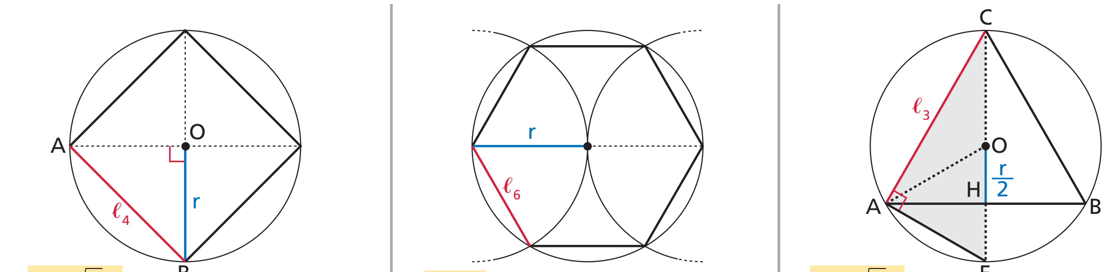
I lati di poligoni regolari

La misura del lato di un poligono regolare inscritto in una circonferenza è legata in modo univoco alla misura r del suo raggio. Lo stesso vale per un poligono regolare circoscritto.
Riassumiamo nella tabella 1 queste relazioni nel caso di un triangolo equilatero, un quadrato e un esagono regolare.

◄ Tabella 1

LATI DI POLIGONI REGOLARI		
Poligono	**Inscritto**	**Circoscritto**
Triangolo equilatero	$l_3 = \sqrt{3}\,r$	$L_3 = 2\sqrt{3}\,r$
Quadrato	$l_4 = \sqrt{2}\,r$	$L_4 = 2r$
Esagono regolare	$l_6 = r$	$L_6 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,r$

▼ Figura 11

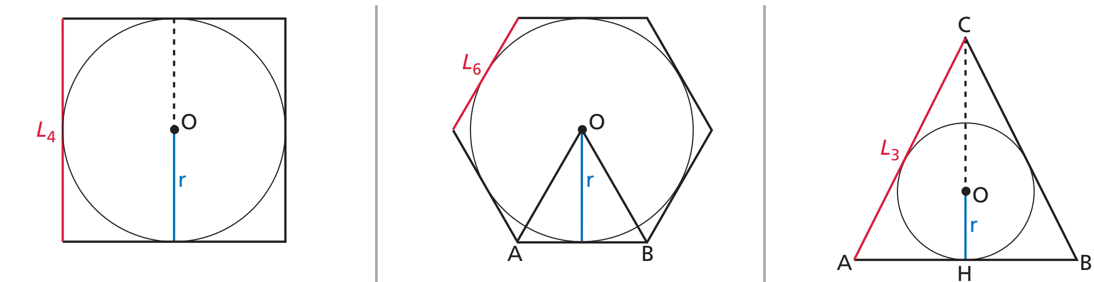


a. $\ell_4 = \sqrt{2}\,r$
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABO si ottiene infatti $\overline{AB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OA}^2$, cioè $\ell_4^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$ da cui $\ell_4 = \sqrt{2}\,r$.

b. $\ell_6 = r$
In un esagono regolare inscritto in una circonferenza il lato è congruente al raggio, perché ciascun triangolo avente per base un lato dell'esagono e per terzo vertice il centro della circonferenza è equilatero.

c. $\ell_3 = \sqrt{3}\,r$
Il triangolo AEC è rettangolo in A (inscritto in una semicirconferenza); $\overset{\frown}{AE}$ è metà di $\overset{\frown}{AB}$, quindi AE è il lato dell'esagono regolare inscritto, cioè $\overline{AE} = r$. Da $\overline{AC} = \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{AE}^2}$ segue $\ell_3 = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3r^2} = \sqrt{3}r$.

▼ Figura 12



a. $L_4 = 2r$
L_4 è uguale al diametro della circonferenza inscritta, da cui $L_4 = 2r$.

b. $L_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,r$
Il triangolo ABO è equilatero, con lato L_6 e altezza congruente al raggio, da cui
$$L_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,r.$$

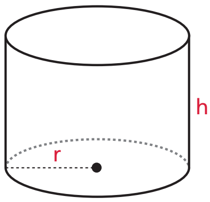
c. $L_3 = 2\sqrt{3}\,r$
Il centro della circonferenza inscritta è anche baricentro del triangolo, per cui $\overline{CH} = 3\overline{OH} = 3r$.
$$L_3 = \frac{2 \cdot \overline{CH}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{3}}\,r = 2\sqrt{3}\,r.$$

Le aree e i volumi dei solidi di rotazione

Conoscendo le formule relative alla lunghezza della circonferenza e all'area del cerchio, si possono ricavare quelle relative alle aree delle superfici e ai volumi dei solidi di rotazione.

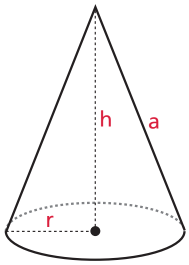
▶ Simboli per le misure:
A_b area di base;
A_l area della superficie laterale;
A_t area della superficie totale;
V volume;
h altezza del solido;
a apotema;
r raggio di base.

Cilindro



$$A_b = \pi r^2$$
$$A_l = 2\pi r \cdot h$$
$$A_t = 2\pi r(h + r)$$
$$V = \pi r^2 \cdot h$$

Cono

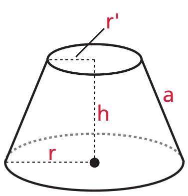


$$A_b = \pi r^2$$
$$A_l = \pi r a$$
$$A_t = \pi r(a + r)$$
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

Tronco di cono

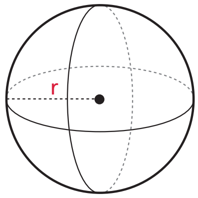
Un tronco di cono si ottiene considerando i punti di un cono che stanno fra un piano parallelo alla base e la base stessa. Il solido così ottenuto ha due basi parallele fra loro.

▶ Chiamiamo A_b e A'_b le misure delle aree delle due basi, r e r' quelle dei due raggi di base.



$$A_b = \pi r^2$$
$$A'_b = \pi r'^2$$
$$A_l = \pi a(r + r')$$
$$A_t = A_l + A_b + A'_b$$
$$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r'^2 + r \cdot r')$$

Sfera



$$A = 4\pi r^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Quale forma per le mura?

…che cosa accomuna le pesanti fortificazioni di una città medievale, una mela e una leggerissima bolla di sapone?

Il quesito completo a pag. G379

Per quanto robuste e alte fossero, le fortificazioni delle città medievali rimanevano la parte più esposta agli attacchi dei nemici. Se si considera inoltre che trasportare i pesanti massi con cui venivano issate le mura di cinta costava non poca fatica ai costruttori, si comprende che avere un giro di mura che fosse il meno lungo possibile diventava non solo un'esigenza per la sicurezza della città e dei suoi cittadini, ma anche un modo per risparmiarsi un lavoro gravoso. Non è tuttavia sulle dimensioni della città che i costruttori potevano decidere: queste dipendevano dal numero di famiglie e di abitanti da proteggere. L'unica possibilità diventava quindi quella di trovare come disporre le case all'interno della città in modo da avere il più piccolo perimetro possibile.
Dato che il numero di case definisce una superficie fissata, il problema si può formulare così: tra tutte le figure geometriche con la stessa superficie, qual è quella con il perimetro minimo? La figura che risolve questo problema è la forma da dare alla città per renderla più sicura.
Proviamo ora a calcolare il perimetro di alcune figure regolari equivalenti (per comodità fissiamo l'area comune uguale a 1).

1. Nel caso del triangolo equilatero, indicato con l il lato e sapendo che l'altezza è pari a $h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$, l'area risulta:

$$A_{equilatero} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2.$$

Ricaviamo l e sostituiamo $A_{equilatero} = 1$:

$$l = \frac{2\sqrt{A_{equilatero}}}{\sqrt[4]{3}} \to l = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} = \frac{2\sqrt[4]{27}}{3}.$$

Il perimetro vale quindi:

$$2p_{equilatero} = 2\sqrt[4]{27} \simeq 4{,}56.$$

2. Nel caso del quadrato di area 1, quest'ultimo ha il lato pari a 1 e quindi il perimetro vale: $2p_{quadrato} = 4$.

3. Per l'esagono regolare di area 1, poiché esso è composto da sei triangoli equilateri di area $\frac{1}{6}$, il lato, alla luce del primo caso, risulta:

$$l_{esagono} = \frac{2\sqrt{\frac{1}{6}}}{\sqrt[4]{3}} = 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{36 \cdot 3}} = 2\frac{1}{\sqrt[4]{108}} = 2\frac{1}{\sqrt[4]{4 \cdot 27}} = \frac{1}{3}\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{3}.$$

Il perimetro è quindi:

$$2p_{esagono} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{3} \simeq 3{,}72.$$

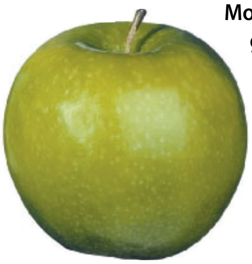
Già da questi tre esempi si può notare che, man mano che il numero dei lati di un poligono regolare aumenta, esso assomiglia sempre più a una circonferenza e, parallelamente, diminuisce la misura del suo perimetro (a parità di area).
Si può quindi concludere che la soluzione del problema dei costruttori è la circonferenza. Calcoliamo infatti il perimetro del cerchio equivalente ai tre poligoni precedenti. Essendo $A_{cerchio} = \pi r^2 = 1$, il raggio risulta $r = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ e il perimetro vale:

$$2p_{circonferenza} = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} = 2\sqrt{\pi} \simeq 3{,}54.$$

Tale valore è inferiore alle misure dei perimetri calcolati in precedenza.
Ecco allora perché la pianta di molte città fortificate è di forma circolare.

BOLLE DI SAPONE E FRUTTA

Le bolle di sapone si ritrovano a dover risolvere la versione tridimensionale del problema dei costruttori: a parità di volume (e cioè di aria soffiata all'interno della bolla), qual è il solido che ha una superficie minore? La soluzione al problema è esattamente la forma che la bolla assume: una sfera.

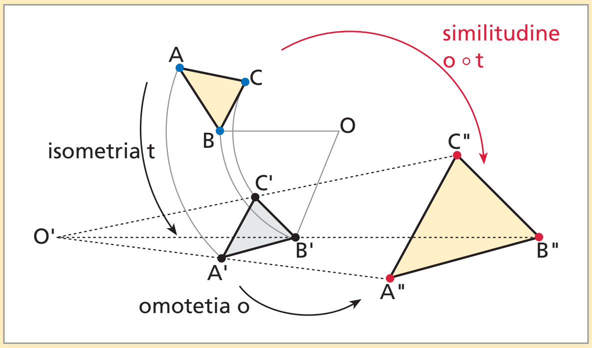


Molta frutta ha una forma somigliante a una sfera: essendo la buccia la parte più vulnerabile dagli insetti e dagli agenti atmosferici, è vantaggioso che la sua superficie sia ridotta al minimo e che il frutto abbia forma rotondeggiante.

LA TEORIA IN SINTESI
La similitudine

1. La similitudine e le figure simili

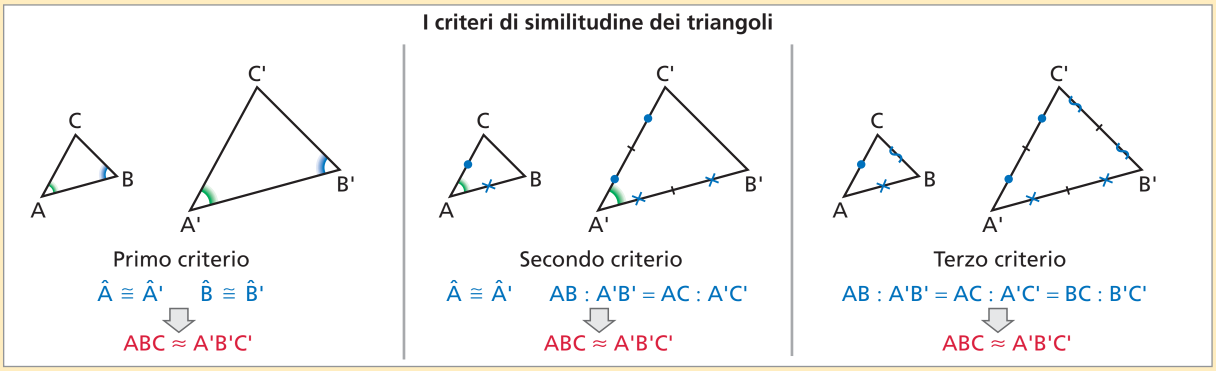
Due figure si dicono **simili** se l'una si può ottenere dall'altra mediante una **similitudine**, ossia la composizione di una omotetia e una isometria. Gli elementi (lati, angoli, …) di una figura che si corrispondono in una similitudine si dicono **omologhi**. Se due poligoni sono simili, gli **angoli** omologhi sono **congruenti**, i **lati** omologhi sono in **proporzione**.



2. I criteri di similitudine dei triangoli

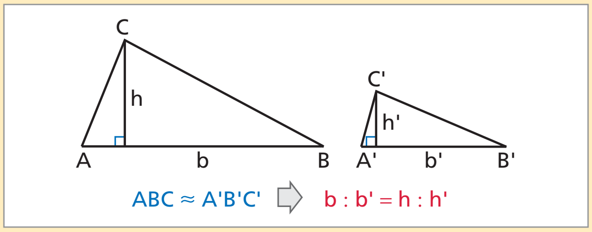
Due triangoli sono simili se si verifica una delle seguenti condizioni:

- i triangoli hanno due angoli ordinatamente congruenti (**primo criterio di similitudine**);
- i triangoli hanno due lati ordinatamente in proporzione e l'angolo compreso congruente (**secondo criterio di similitudine**);
- i triangoli hanno i lati ordinatamente in proporzione (**terzo criterio di similitudine**).

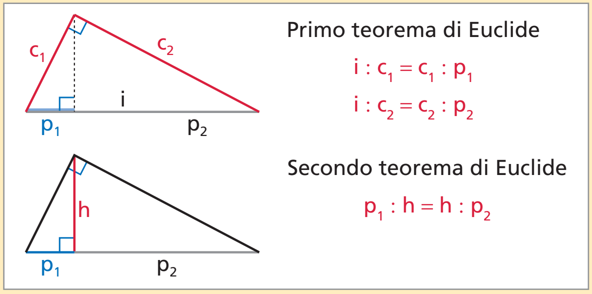


3. Applicazioni dei criteri di similitudine

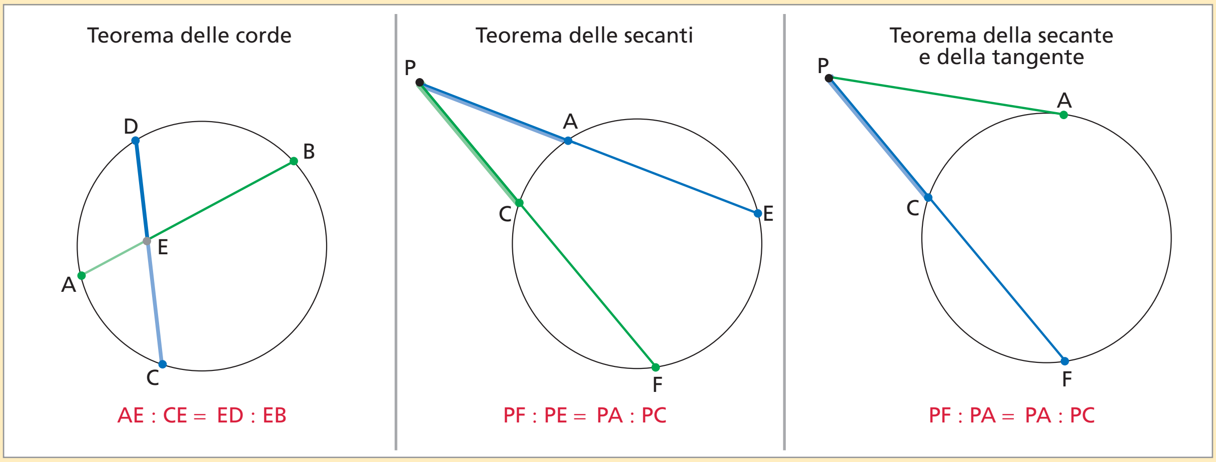
Quando due triangoli sono simili **le basi e le rispettive altezze sono in proporzione**. Il rapporto, costante, fra le basi e le relative altezze è lo stesso rapporto che c'è fra lati omologhi, ossia il **rapporto di similitudine**.



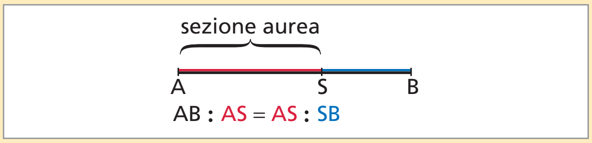
I **teoremi di Euclide** possono essere enunciati mediante **proporzioni**, invece che con l'equivalenza di figure.
In un triangolo rettangolo:
- ogni cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa (**primo teorema di Euclide**);
- l'altezza relativa all'ipotenusa è medio proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa (**secondo teorema di Euclide**).



4. La similitudine nella circonferenza



La **sezione aurea** di un segmento è la parte del segmento che è medio proporzionale fra l'intero segmento e la parte rimanente.

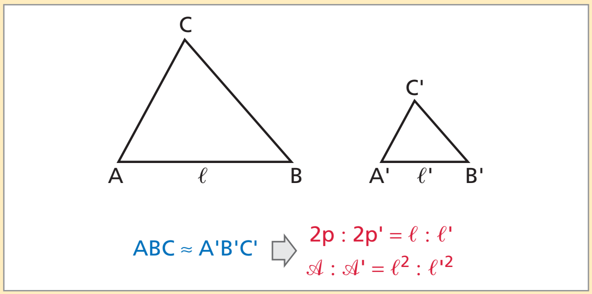


Il **lato di un decagono regolare** è la sezione aurea del raggio della circonferenza a esso circoscritta.

5. I poligoni simili

Condizione sufficiente affinché due poligoni con lo stesso numero di lati siano simili è che abbiano gli angoli ordinatamente congruenti e i lati ordinatamente in proporzione, tranne al più tre angoli consecutivi, oppure un lato e i due angoli a esso adiacenti, oppure due lati consecutivi e l'angolo compreso.

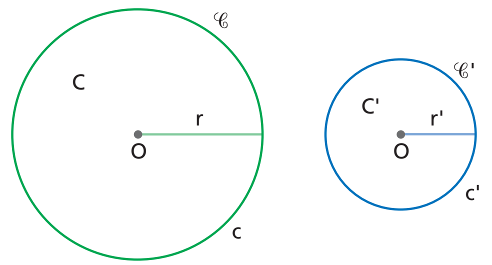
I **perimetri** di due triangoli simili (o di due poligoni simili) stanno fra loro come due lati omologhi; le **aree** stanno fra loro come quelle dei quadrati costruiti su due lati omologhi.



Poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono simili. Fra i loro lati, perimetri, apotemi, raggi delle rispettive circonferenze inscritte o circoscritte, c'è lo stesso rapporto, che è ancora il rapporto di similitudine.

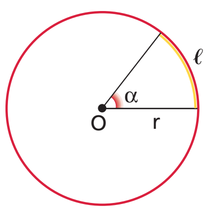
6. La lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio

Il rapporto fra le lunghezze di due circonferenze è uguale al rapporto fra i rispettivi raggi, mentre il rapporto fra le aree dei cerchi è uguale al quadrato del rapporto fra i raggi.



$c : c' = r : r'$

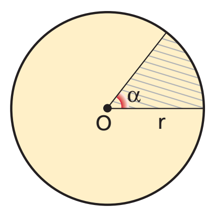
$C : C' = r^2 : r'^2$



$c = 2\pi r$

$\ell = \dfrac{\alpha}{180}\pi r$

a. Misure della lunghezza della circonferenza (c) e dell'arco di angolo al centro α (ℓ).



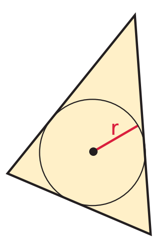
$C = \pi r^2$

$S = \dfrac{\alpha}{360}\pi r^2 = \dfrac{1}{2}\ell r$

b. Misure dell'area del cerchio (C) e dell'area del settore circolare di angolo al centro α (S).

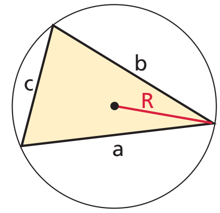
La misura del raggio del cerchio **inscritto** in un triangolo è uguale al rapporto fra la misura dell'area del triangolo e la misura del suo semiperimetro.

La misura del raggio del cerchio **circoscritto** a un triangolo è uguale al prodotto delle misure dei lati del triangolo diviso per il quadruplo dell'area del triangolo.



$r = \dfrac{\mathscr{A}}{p}$

a. Raggio del cerchio inscritto nel triangolo.



$R = \dfrac{abc}{4\mathscr{A}}$

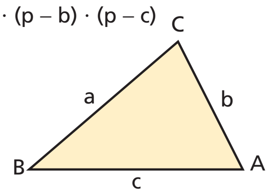
b. Raggio del cerchio circoscritto al triangolo.

Indicate con a, b, c le misure dei tre lati di un triangolo e con p quella del semiperimetro, la misura dell'area $\mathscr{A}$ del triangolo è data dalla **formula di Erone**:

$$\mathscr{A} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}.$$

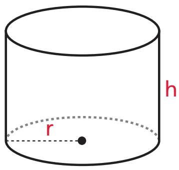
$\mathscr{A} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$

con $p = \dfrac{a+b+c}{2}$



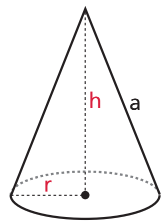
Le aree e i volumi dei solidi di rotazione

CILINDRO



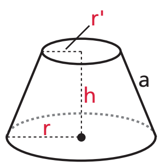
$A_b = \pi r^2$
$A_\ell = 2\pi r \cdot h$
$A_t = 2\pi r(h + r)$
$V = \pi r^2 \cdot h$

CONO



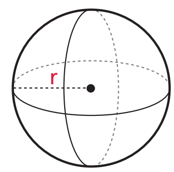
$A_b = \pi r^2$
$A_\ell = \pi ra$
$A_t = \pi r(a + r)$
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

TRONCO DI CONO



$A_b = \pi r^2$
$A'_b = \pi r'^2$
$A_\ell = \pi a(r + r')$
$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$
$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r'^2 + r \cdot r')$

SFERA



$A = 4\pi r^2$
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

1. La similitudine e le figure simili

Teoria a pag. G379

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 VERO O FALSO?

a) Due figure congruenti sono simili. V F

b) Le basi di due triangoli isosceli simili si dicono omologhe. V F

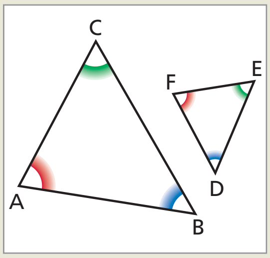
c) La similitudine non gode della proprietà transitiva. V F

d) Componendo una traslazione e un'omotetia si ottiene una similitudine. V F

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

2 Dati i triangoli simili della figura, scriviamo la catena di rapporti fra i lati che si corrispondono.

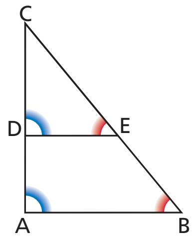


Quando due triangoli sono simili, i lati che si oppongono ad angoli congruenti si corrispondono nella similitudine. Per esempio, poiché l'angolo $\widehat{C}$ è congruente all'angolo $\widehat{E}$, il lato AB corrisponde al lato FD. Analogamente BC corrisponde a DE e AC corrisponde a FE. Perciò possiamo scrivere la seguente catena di rapporti:

$$AB : FD = BC : DE = AC : FE.$$

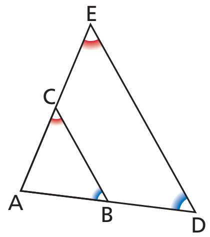
Negli esercizi che seguono sono indicate tre proporzioni; una sola è riferita ai lati omologhi dei due triangoli simili in figura. Quale?

3



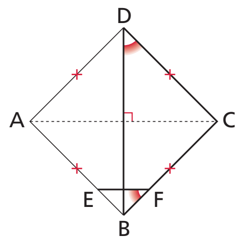
a) $AB : DE = AC : AD$
b) $AC : AD = BC : BE$
c) $AC : DC = BC : CE$

4



a) $AB : AD = BC : DE$
b) $AB : BD = BC : DE$
c) $AC : CE = AD : AB$

5



a) $BD : EF = BE : BC$
b) $BD : EF = BC : BE$
c) $CD : CF = EB : BF$

2. I criteri di similitudine dei triangoli

Teoria a pag. G380

RIFLETTI SULLA TEORIA

6 VERO O FALSO?

a) Due triangoli equivalenti sono sempre simili. V F

b) Due triangoli isosceli possono essere simili o meno: dipende dall'angolo al vertice. V F

c) Condizione sufficiente affinché due triangoli siano simili è che abbiano due angoli congruenti. V F

d) Avere due lati ordinatamente proporzionali è condizione sufficiente affinché due triangoli siano simili. V F

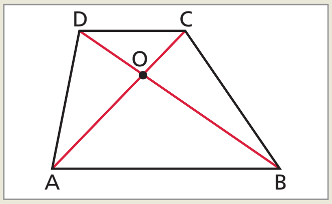
ESERCIZI

Nel sito: ▸ 7 esercizi di recupero

Il primo criterio di similitudine

ESERCIZIO GUIDA

7 Dato il trapezio *ABCD* della figura, troviamo due triangoli simili tra i quattro in cui lo dividono le diagonali, e scriviamo le proporzioni fra i lati corrispondenti.

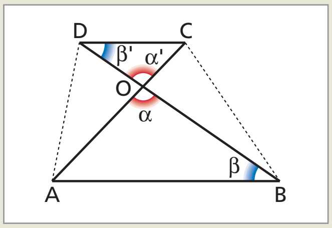


I triangoli simili sono *ABO* e *OCD*.

Infatti essi hanno:

- $\alpha \cong \alpha'$, perché opposti al vertice;
- $\beta \cong \beta'$, perché alterni interni di rette parallele tagliate dalla trasversale *BD*.

Quindi i due triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine.

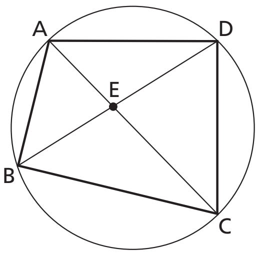


Poiché ad angoli congruenti si oppongono lati corrispondenti, le proporzioni richieste sono:

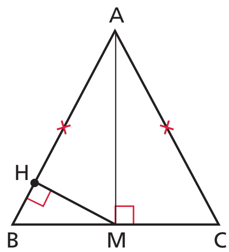
$$AB : CD = AO : OC; \; AB : CD = BO : DO; \; BO : DO = AO : OC.$$

COMPLETA **Applicando il primo criterio di similitudine, trova i triangoli simili in ognuna delle seguenti figure, poi scrivi di fianco a ogni figura le proporzioni fra i lati corrispondenti.**

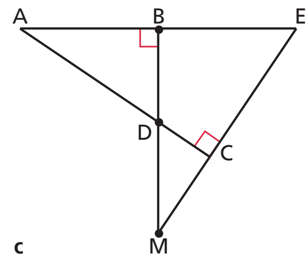
8



a

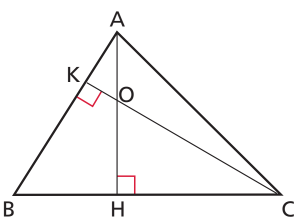


b

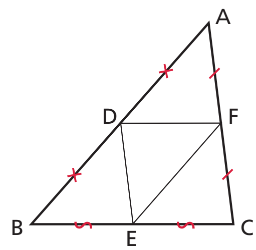


c

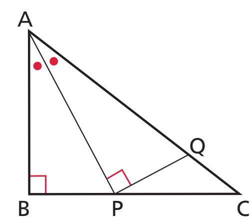
9



a



b

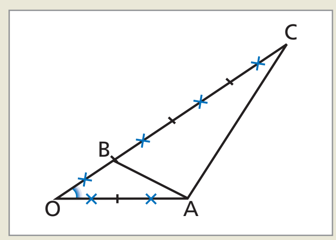


c

Il secondo criterio di similitudine

ESERCIZIO GUIDA

10 Dimostriamo che, nella figura a lato, si possono individuare due triangoli simili; scriviamo poi la catena di rapporti fra lati corrispondenti.



I triangoli OAB e OAC hanno l'angolo $\hat{O}$ in comune; inoltre:

$OA = 2 \cdot OB$ e $OC = 2 \cdot OA$.

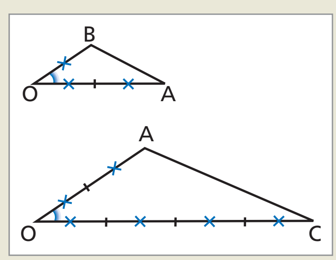
Quindi il rapporto fra i primi due membri delle uguaglianze è uguale al rapporto fra gli ultimi due membri, cioè:

$OA : OC = OB : OA$.

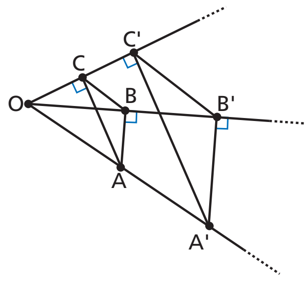
Pertanto i triangoli sono simili per il secondo criterio di similitudine.
La catena di rapporti fra i lati corrispondenti è:

$OA : OC = BA : AC = OB : OA$.

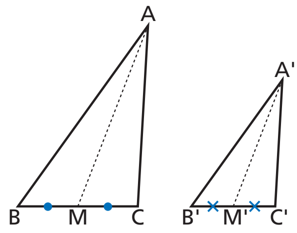
Osservazione. Per individuare con maggior facilità i lati corrispondenti possiamo disegnare i triangoli OAB e OAC con i lati ordinatamente paralleli.



11 Usa i dati indicati nelle figure per riconoscere in ciascuna tutte le coppie di triangoli simili, poi scrivi la catena di rapporti fra lati corrispondenti.

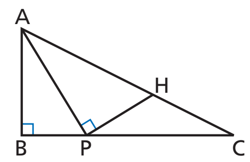


a



Ipotesi ABC e A'B'C' simili

b

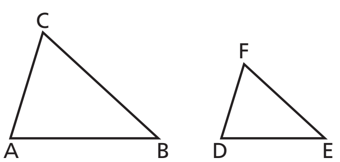


Ipotesi AP : AB = PH : BP

c

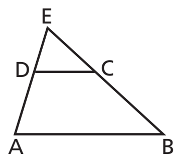
Il terzo criterio di similitudine

12 In ognuna delle figure che seguono compaiono due triangoli simili e una catena di rapporti. Individua gli angoli che si corrispondono e colorali.



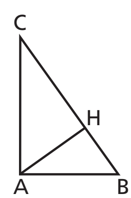
AB : DE = AC : DF = BC : EF

a



AB : DC = AE : DE = BE : CE

b



AB : BH = AC : AH = BC : AB

c

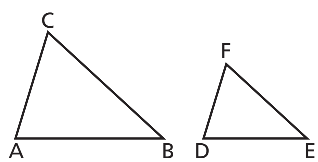
13 I due triangoli della figura a lato sono simili e vale la proporzione

$AB : DE = BC : EF$.

Individua quale delle seguenti proporzioni è equivalente a quella data:

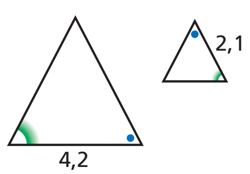
a) $AB : BC = DE : EF$; c) $DE : AB = DF : AC$.

b) $AB : DE = DE : BC$;



RIEPILOGO I CRITERI DI SIMILITUDINE DEI TRIANGOLI

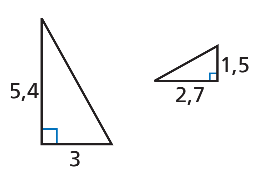
14 COMPLETA



a. Triangoli simili? ....

Criterio di similitudine: ....

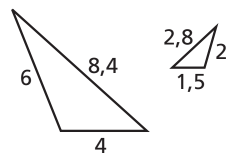
Rapporto di similitudine: ....



b. Triangoli simili? ....

Criterio di similitudine: ....

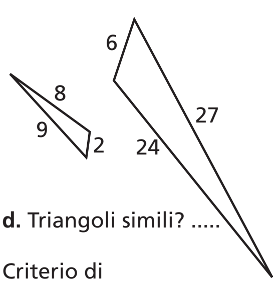
Rapporto di similitudine: ....



c. Triangoli simili? ....

Criterio di similitudine: ....

Rapporto di similitudine: ....



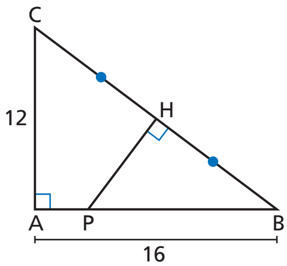
d. Triangoli simili? .....

Criterio di similitudine: ....

Rapporto di similitudine: ....

COMPLETA utilizzando i dati indicati nelle figure.

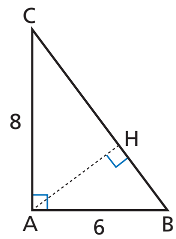
15



$\overline{PH} = \ldots$

Area (HPB) = ...

16

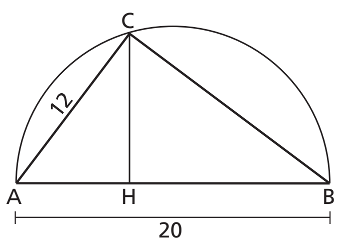


$\overline{AH} = \ldots$

2p(AHB) = ...

Area (AHC) = ...

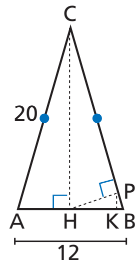
17



$\overline{AH} = \ldots$

2p(CHB) = ...

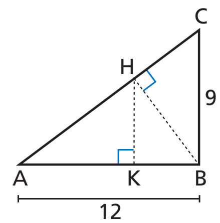
18



$\overline{CP} = \ldots$

$\overline{KB} = \ldots$

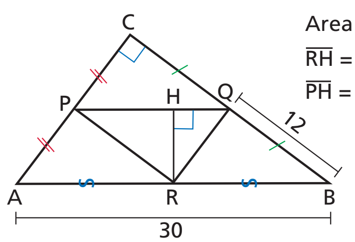
19



$\overline{HB} = \ldots$

$\overline{KH} = \ldots$

20



Area (PQR) = ...

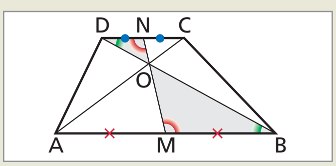
$\overline{RH} = \ldots$

$\overline{PH} = \ldots$

Dimostrazioni

ESERCIZIO GUIDA

21 Nel trapezio $ABCD$ di base maggiore AB, siano O il punto di intersezione delle diagonali e N il punto medio della base minore CD. Prolunghiamo NO fino a incontrare la base AB nel punto M. Dimostriamo che:
1. M è il punto medio di AB;
2. O divide MN in parti proporzionali alle basi del trapezio.



Ipotesi 1. $ABCD$ è un trapezio;
2. $DN \cong NC$.

Tesi 1. $AM \cong MB$;
2. $DC : AB = NO : OM$.

Dimostriamo la tesi 1

I triangoli DNO e MBO hanno:

- $O\hat{D}N \cong O\hat{B}M$ perché angoli alterni interni formati dalle parallele DN e MB tagliate dalla trasversale DB;
- $D\hat{N}O \cong O\hat{M}B$ perché alterni interni formati dalle parallele DN e MB tagliate da NM.

Quindi sono simili per il primo criterio e perciò hanno i lati in proporzione. In particolare, è soddisfatta la proporzione:

$DN : MB = NO : OM.$

In modo analogo si dimostra che i triangoli NOC e AOM sono simili, *quindi* è soddisfatta la proporzione:

$NC : AM = NO : OM.$

Dal confronto delle proporzioni deduciamo che:

$DN : MB = NC : AM.$

Poiché per ipotesi $DN \cong NC$, dalla proporzione ricaviamo che anche $MB \cong AM$, ossia M è il punto medio di AB.

Dimostriamo la tesi 2
Consideriamo di nuovo la proporzione:

$$NC : AM = NO : OM$$

e riscriviamola moltiplicando i primi due termini per 2:

$$2NC : 2AM = NO : OM.$$

Poiché N e M sono punti medi di DC e AB, abbiamo:

$$DC : AB = NO : OM.$$

22 In un triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa AB, inscrivi un quadrato $PQRS$ con il lato PQ appartenente ad AB. Dimostra che il lato del quadrato è medio proporzionale fra i due restanti segmenti sull'ipotenusa, AP e QB.

▶ *Caso particolare*: se il triangolo ABC è anche isoscele, quanto vale il rapporto $\frac{AP}{PQ}$?

23 Dimostra che due triangoli aventi i lati a due a due paralleli sono simili.

24 Due semirette r e s con la stessa origine A formano un angolo acuto. Da un generico punto M, interno a tale angolo, conduci le perpendicolari ad Ar e As e indica con B e con C i piedi di tali perpendicolari. Indica con D il punto intersezione di s con MB e con E il punto intersezione di MC con r. Dimostra che $AB : AC = AD : AE$.

25 Da due vertici omologhi di due triangoli simili ABC e $A'B'C'$ traccia le bisettrici AP e $A'P'$. Dimostra che AP e $A'P'$ stanno fra loro come due lati omologhi.

26 In un trapezio $ABCD$, le diagonali si intersecano in O. Dimostra che $AO : CO = BO : DO$.

27 Nei triangoli simili ABC e $A'B'C'$ traccia le mediane AM e $A'M'$.
Dimostra che $AM : A'M' = BC : B'C'$.

28 Disegna un triangolo ABC e traccia la bisettrice CP. Prolunga CP dalla parte di P fino a incontrare in Q la circonferenza circoscritta al triangolo. Dimostra che i triangoli ACP, QBP e QCB sono simili.

▶ *Caso particolare*: se ABC è equilatero, che relazione sussiste fra i segmenti QB e QP?

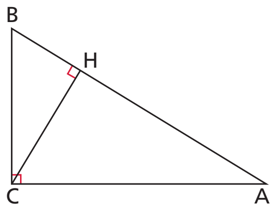
29 Tre semirette a, b, c hanno origine comune O, e Oa è interna all'angolo acuto $b\hat{O}c$. Su a prendi due punti A e A', e da essi conduci le perpendicolari AB, $A'B'$, AC, $A'C'$, rispettivamente, alle semirette b e c. Dimostra che BC è parallela a $B'C'$. (Suggerimento. I triangoli OBC e $OB'C'$ sono simili perché...)

3. Applicazioni dei criteri di similitudine

Teoria a pag. G383

RIFLETTI SULLA TEORIA

30 **VERO O FALSO?**



Con riferimento alla figura quali affermazioni sono *vere* e quali *false*?

a) I triangoli ACH e CHB sono simili. V F

b) L'ipotenusa AB e il cateto AC sono lati omologhi per i triangoli simili ABC e ACH. V F

c) Il rapporto tra AB e CB è uguale al rapporto tra CH e la distanza di H da CB. V F

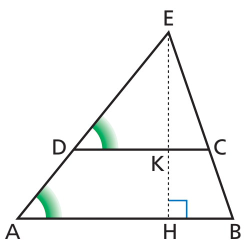
d) Nei triangoli simili ACB e CHB i lati CB e HB sono omologhi. V F

ESERCIZI

La proporzionalità fra basi e altezze di triangoli simili

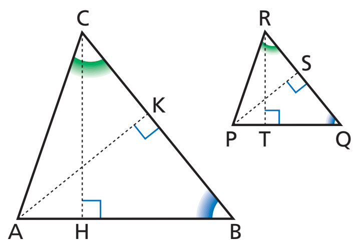
COMPLETA le proporzioni che compaiono sotto le figure (le linee tratteggiate sono le altezze dei triangoli).

31



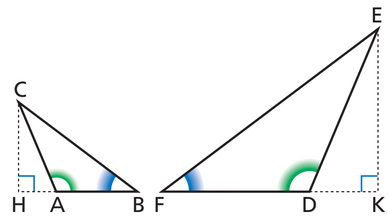
AB : CD = EH : ……

a



AK : BC = …… : ……

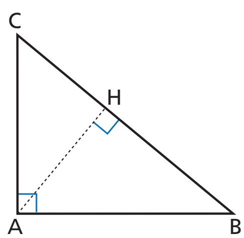
b



AB : CH = FD : ……

c

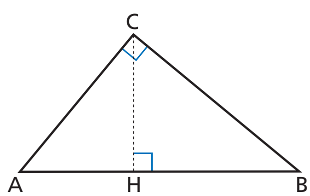
32



BC : …… = …… : BH

…… : AC = AC : ……

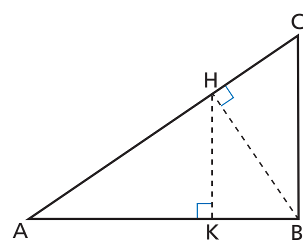
a



AH : CH = …… : ……

CH : …… = …… : CH

b



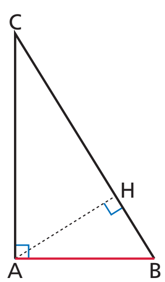
HK: …… = …… : BH

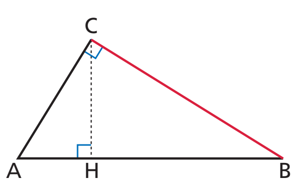
…… : AH = HK : ……

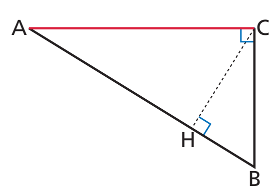
c

I teoremi di Euclide

33 Per ogni triangolo rettangolo in figura scrivi una proporzione che esprima il primo o il secondo teorema di Euclide, utilizzando come medio proporzionale il segmento colorato.



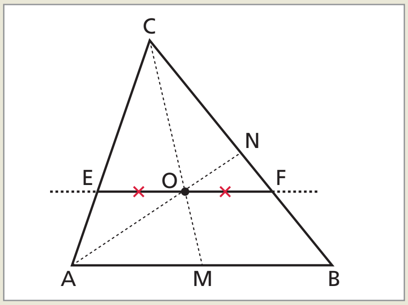




Dimostrazioni

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

34 Dato il triangolo ABC, con il suo baricentro O, traccia per O una retta parallela alla base AB che interseca AC in E e BC nel punto F. Dimostra che O è il punto medio di EF e che EF è congruente ai due terzi di AB.



Ipotesi 1. $AM \cong \ldots\ldots$;
2. $BN \cong \ldots\ldots$;
3. O è il baricentro;
4. $AB \parallel \ldots\ldots$;
5. $O \in \ldots\ldots\ldots$.

Tesi 1. $EO \cong \ldots\ldots\ldots$;
2. $EF \cong \dfrac{2}{3} \ldots\ldots$.

Dimostrazione

- *Dimostra che i triangoli AMC ed EOC sono simili.*
  L'angolo $E\hat{C}O$ è in ....;
  $C\hat{E}O \cong C\hat{A}M$ perché .... di rette parallele. Quindi i due triangoli sono simili per il .... criterio di similitudine dei triangoli.
  Pertanto è soddisfatta la seguente proporzione:
  $AM : EO = CM : \ldots\ldots$.

- *Dimostra in modo analogo che i triangoli MBC e OFC sono simili.*
  L'angolo $F\hat{C}O$ è in ....;
  $C\hat{F}O \cong C\hat{B}M$ perché .... di rette parallele. Quindi i due triangoli sono simili per il .... criterio di similitudine dei triangoli.
  Pertanto è soddisfatta la seguente proporzione:
  $MB : OF = CM : \ldots\ldots$

- *Dimostra la tesi 1.*
  Confrontando le due proporzioni, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza vale
  $AM : EO = MB : \ldots$;
  tenendo presente l'ipotesi 1, poiché $AM \cong MB$, *allora* anche $EO \cong \ldots$.

- *Dimostra la tesi 2.*
  Per la proprietà del baricentro $CO \cong 2\ \ldots\ldots$;
  perciò $CM \cong CO + \ldots\ldots \cong 3\ \ldots\ldots$, da cui si ricava che $\dfrac{CO}{CM} \cong \dfrac{2 \cdot \ldots\ldots}{3 \cdot \ldots\ldots} \cong \dfrac{\ldots}{\ldots}$.
  I triangoli EFC e ABC sono simili e il rapporto di similitudine è ....
  Pertanto $\dfrac{EF}{AB} \cong \dfrac{\ldots}{\ldots}$, cioè $EF \cong \ldots\ldots\ AB$.

35 Disegna il trapezio $ABCD$ e sia AB la base maggiore. Prolunga i lati non paralleli AD e BC, rispettivamente dalla parte di D e di C, e indica con P il loro punto di intersezione. Dimostra che le distanze di P dalle basi sono proporzionali alle basi stesse.

36 Da un punto P di una circonferenza conduci la perpendicolare PH a un diametro AB. Dimostra che PH è medio proporzionale tra le parti in cui il diametro rimane diviso dal punto H.

37 Dimostra che una corda AB di una circonferenza è medio proporzionale fra il diametro AC e la sua proiezione su AC.

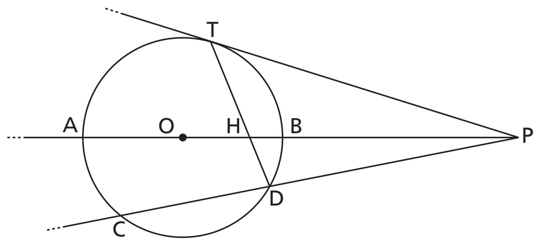
38 Disegna due triangoli ABC e $A'B'C'$ aventi le altezze AH e $A'H'$ congruenti. Conduci due rette parallele alle basi BC e $B'C'$ e da queste equidistanti. La prima parallela incontra i lati AB e AC, rispettivamente nei punti P e Q, e la seconda incontra i lati $A'B'$ e $A'C'$, rispettivamente in P' e Q'.
Dimostra che $PQ : P'Q' = BC : B'C'$.

4. La similitudine nella circonferenza

→ Teoria a pag. G385

RIFLETTI SULLA TEORIA

39 **VERO O FALSO?**



Con riferimento alla figura quali proporzioni sono *vere* e quali *false*?

a) $PC : PB = (AB + PB) : PD$. V F

b) $TH : AO = OB : HB$. V F

c) $AP : PT = PT : PB$. V F

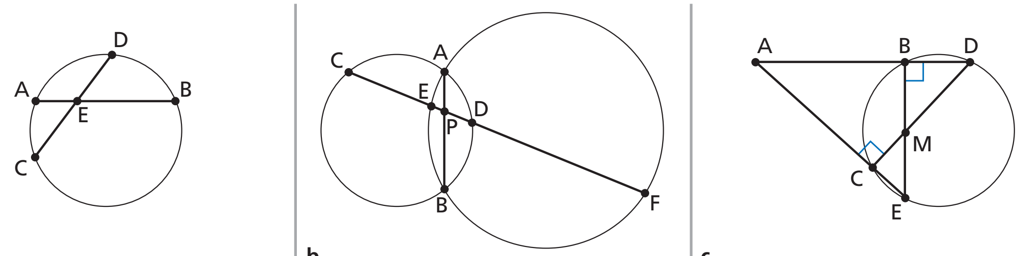
d) $AH : HD = TH : HP$. V F

e) $PT : PC = PD : PT$. V F

ESERCIZI

Il teorema delle corde

40 Applicando il teorema delle corde, scrivi per ognuna delle seguenti figure tutte le possibili proporzioni che coinvolgono i segmenti disegnati.

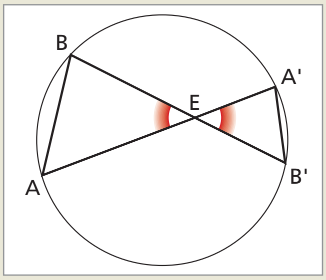


a b c

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

41 Su una circonferenza, fissato un verso di percorrenza, scegli nell'ordine quattro punti A, B, A', B', in modo che le corde AA' e BB' si intersechino in un punto E. Congiunti A con B e A' con B', dimostra che $AB : A'B' = AE : EB'$.

▶ *Caso particolare*: se le corde AA' e BB' passano per il centro della circonferenza, che tipo di quadrilatero è $ABA'B'$? Qual è in tal caso il rapporto di similitudine fra i triangoli ABE e $A'B'E$?



Ipotesi 1. AA' è una ……… della circonferenza;
2. BB' è una ……… della circonferenza;
3. E è il punto di intersezione fra ……… e ……… .

Tesi $AB : …… = AE : ……$.

Dimostrazione

- *Applica il teorema delle corde.*
  Per le ipotesi 1 e 2 si può applicare il teorema delle ………………, pertanto
  $AE : BE =$ …… : …… .
- *Dimostra che i triangoli* ABE e $A'B'E$ *sono simili.*
  Permutando i ……. della precedente proporzione otteniamo $AE : EB' =$ …… : …… .
  I triangoli ABE e $A'B'E$ hanno due lati ordinatamente in proporzione e l'angolo $A\hat{E}B \cong$ …… perché opposti al ………..;
  quindi sono simili per il …… criterio di similitudine dei triangoli.
- *Deduci la tesi.*
  Pertanto vale la proporzione $AB : A'B' =$ …… : …….

▶ *Caso particolare*
Se AA' e BB' passano per O, allora sono due ……………, in tal caso i triangoli ABE e $A'B'E$ sono ………, quindi il quadrilatero $ABA'B'$ è un ………… . Il rapporto di similitudine fra i due triangoli ……… è ……… .

42 Disegna due semirette r e s aventi la stessa origine A. Da un punto M interno all'angolo acuto $r\hat{A}s$ conduci le perpendicolari alle due semirette r e s e indica con B e con C i piedi di tali perpendicolari. Siano D il punto di intersezione di s con la retta MB ed E quello della retta MC con r. Dimostra che $MB : MC = ME : MD$.

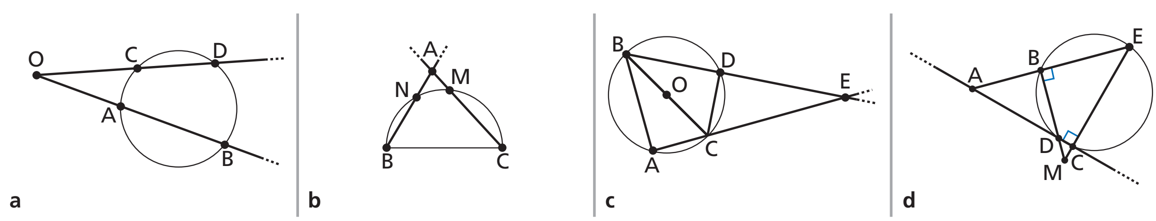
▶ *Caso particolare*: se M appartiene alla bisettrice dell'angolo $r\hat{A}s$, come sono i triangoli MBE e MCD? Qual è il rapporto di similitudine?

43 Traccia due circonferenze secantisi in due punti A e B. Da un punto P della corda AB traccia una retta che incontri la prima circonferenza nei punti C e D e la seconda nei punti E e F. Dimostra che il rettangolo avente come lati i segmenti PC e PD è equivalente al rettangolo avente come lati i segmenti PE e PF.

44 Dimostra che se due segmenti AB e CD si tagliano in un punto P tale che $AP : CP = DP : BP$, allora i punti A, B, C e D appartengono a una stessa circonferenza.
(Suggerimento. Considera la circonferenza passante per tre punti e utilizza l'unicità della quarta proporzionale.)

Il teorema delle secanti

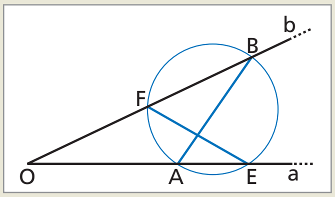
45 Applicando il teorema delle secanti, scrivi una proporzione per ognuna delle figure seguenti.



ESERCIZIO GUIDA

46 È dato un angolo acuto $a\hat{O}b$. Sulla semiretta Oa fissiamo un punto A e su Ob un punto B. Tracciamo una circonferenza di diametro AB, che interseca il lato Oa dell'angolo nel punto E e il lato Ob in F. Dimostriamo che:

$AB : EF = OA : OF.$



Ipotesi 1. AB è un diametro;
2. OE è secante;
3. OB è secante.

Tesi $AB : EF = OA : OF$.

Dimostrazione

Per le ipotesi 2 e 3 possiamo applicare il teorema delle secanti e scrivere la proporzione:

$OE : OB = OF : OA$,

oppure, invertendo:

$OB : OE = OA : OF$.

I triangoli OAB e OEF hanno:

- due lati ordinatamente in proporzione;
- l'angolo compreso $\hat{O}$ in comune.

Quindi sono simili per il secondo criterio di similitudine dei triangoli.

Pertanto vale la proporzione $AB : EF = OA : OF$.

47 Traccia due circonferenze che si intersecano nei punti A e B. Da un punto P della retta AB esterno alle circonferenze traccia due rette, una che incontri la prima circonferenza nei punti C e D, l'altra che incontri la seconda nei punti E e F. Dimostra che il rettangolo avente come lati i segmenti PC e PD è equivalente al rettangolo avente come lati i segmenti PE e PF.

48 Disegna un triangolo con l'angolo in A acuto. Traccia la circonferenza di diametro BC e siano M e N le intersezioni con i lati AB e AC. Dimostra che i triangoli ABC e ANM sono simili.

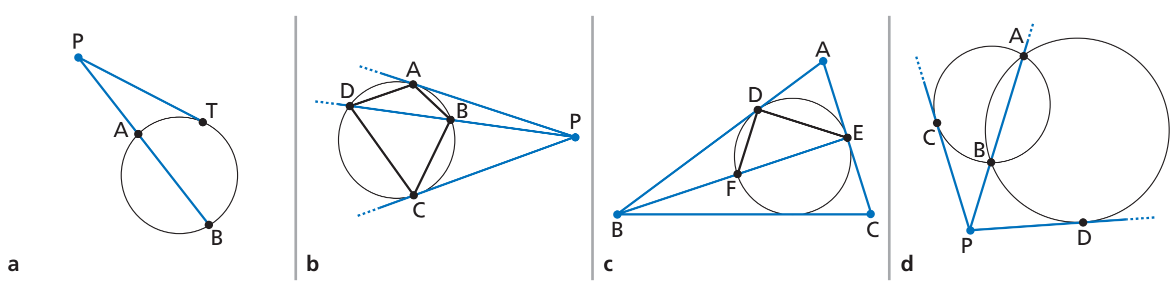
▶ *Caso particolare*: se $AB \cong AC$, di che natura è il quadrilatero $CBMN$?

49 Nel triangolo ABC traccia le altezze AD e BE. Sia F l'intersezione delle rette AD e BE. Dimostra che il rettangolo con i lati congruenti ai segmenti AD e AF è equivalente al rettangolo con i lati congruenti ai segmenti AC e AE.

50 Disegna due triangoli rettangoli ABC e ABD con i vertici C e D da parti opposte ripetto all'ipotenusa comune AB. Prolunga i lati AC e DB fino a incontrarsi nel punto E. Dimostra che $EA : ED = EB : EC$.

Il teorema della secante e della tangente

51 Applicando il teorema della secante e della tangente, scrivi una proporzione relativa a ogni figura.



52 Considera due circonferenze che si intersecano nei punti A e B e un punto E sulla retta AB, esterno al segmento AB. Dal punto E traccia le tangenti alle due circonferenze. Dimostra che i segmenti di tangenza sono congruenti.

53 Disegna una circonferenza e a essa circoscrivi un triangolo ABC. Indica con D e con E i punti di contatto di AB e AC con la circonferenza. Unisci B con E e indica con F l'altro punto d'incontro di BE con la circonferenza. Dimostra che i triangoli BDE e DFB sono simili.

▶ *Caso particolare*: se ABC è equilatero, qual è il rapporto di similitudine fra BDE e DFB?

54 Traccia una circonferenza di centro O e congiungi un punto P esterno alla circonferenza con O. Indica con A il punto di intersezione di PO con la circonferenza. Da P traccia una tangente alla circonferenza e indica con T il punto di tangenza. Dimostra che la differenza dei quadrati costruiti su PT e su PA è equivalente al rettangolo avente i lati congruenti al diametro della circonferenza e al segmento AP.

5. I poligoni simili

Teoria a pag. G389

RIFLETTI SULLA TEORIA

55 VERO O FALSO?

a) Avere gli angoli ordinatamente congruenti è condizione sufficiente affinché due poligoni siano simili. V F

b) I perimetri di due esagoni regolari stanno fra loro come i rispettivi apotemi. V F

c) Il rapporto fra i perimetri di due quadrilateri simili è uguale al quadruplo del rapporto di similitudine. V F

d) Il rapporto fra gli apotemi di due pentagoni regolari è uguale al rapporto fra i lati dei pentagoni stessi. V F

56 VERO O FALSO?

a) Se il rapporto fra i perimetri di due esagoni regolari è 3, allora il rapporto fra le rispettive aree è 9. V F

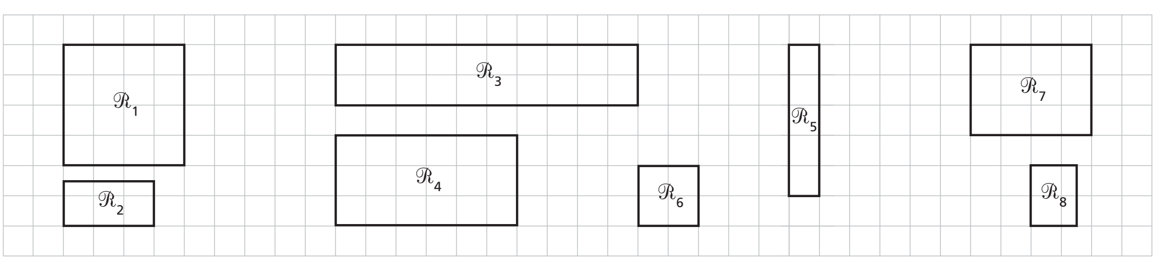
b) Se b e b' sono le misure delle basi di due triangoli simili e A e A' le loro rispettive aree, allora vale la relazione $b^2 : b'^2 = A : A'$. V F

c) L'esagono regolare costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei triangoli equilateri costruiti sui cateti. V F

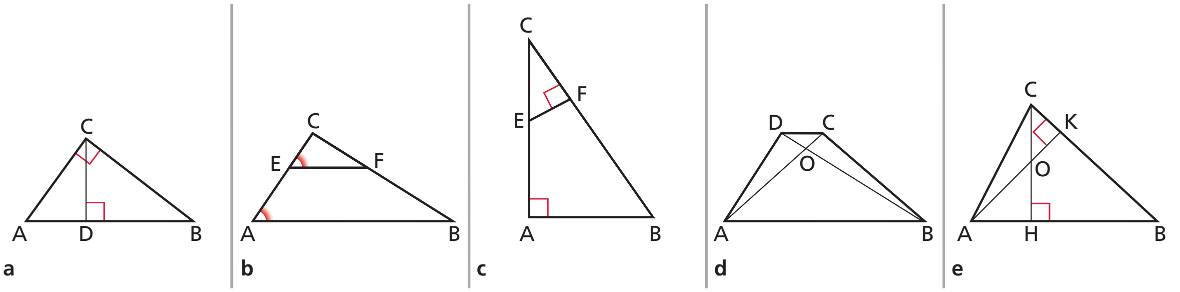
d) Indicate con l e l' le misure dei lati di due quadrati, allora vale la relazione $4l : 4l' = l^2 : l'^2$. V F

ESERCIZI

57 Individua le coppie di rettangoli simili fra loro e scrivi il rapporto di similitudine, il rapporto fra le misure dei perimetri e quello fra le misure delle aree.



58 Per ognuna delle seguenti figure scrivi una proporzione che coinvolga le misure dei perimetri e una che coinvolga le misure delle aree di due triangoli simili.



59 In due triangoli simili, un lato del primo è lungo 24 cm e quello corrispondente del secondo 40 cm. Determina il rapporto tra i perimetri e quello tra le aree dei triangoli. $\left[\frac{3}{5}; \frac{9}{25}\right]$

60 In un triangolo ABC di base AB, M e N sono rispettivamente i punti medi di AC e BC. Qual è il rapporto fra i perimetri dei triangoli MCN e ABC? E il rapporto fra le loro aree? Qual è il rapporto fra le aree del triangolo ABC e del trapezio $AMNB$? $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{4}{3}\right]$

61 La somma delle aree di due rettangoli simili è 915 cm^2. Le due basi hanno lunghezza 25 cm e 30 cm. Determina le aree e i perimetri dei rettangoli. [375 cm^2, 540 cm^2; 80 cm, 96 cm]

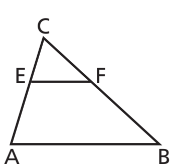
62 Un triangolo ABC ha base AB e altezza CH lunghe rispettivamente 18 cm e 8 cm. $A'B'C'$ è simile ad ABC e ha la base $A'B'$, omologa di AB, lunga 27 cm. Quanto misura l'area di $A'B'C'$? [162 cm^2]

63 La somma dei perimetri dei triangoli simili ABC e $A'B'C'$ è 83,25 cm. Determina i perimetri dei due triangoli sapendo che $AB = 16$ cm e il suo corrispondente $A'B' = 20$ cm. [37 cm; 46,25 cm]

RIEPILOGO LA SIMILITUDINE

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

64 **TEST** Nella figura, $EF \parallel AB$. Quale delle seguenti proporzioni è *errata*?



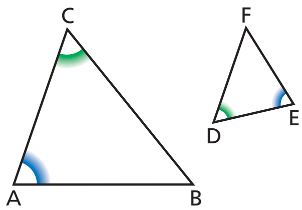
A $AB : EF = AC : CE$.
B $AB : AC = EF : EC$.
C $AB : BC = EF : FC$.
D $AC : AE = BF : FC$.
E $AC : BC = EC : CF$.

65 **TEST** Quale delle seguenti affermazioni è *vera*?

A Due triangoli isosceli non possono essere simili.
B Un triangolo isoscele e un triangolo scaleno sono simili se hanno un angolo acuto congruente.
C Un triangolo rettangolo non può mai essere simile a un triangolo ottusangolo.
D Due triangoli rettangoli sono sempre simili.
E Un triangolo isoscele e un triangolo ottusangolo non possono mai essere simili.

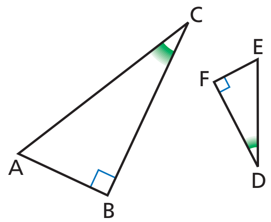
Negli esercizi che seguono sono indicate tre proporzioni; una sola è riferita ai lati corrispondenti dei due triangoli simili in figura. Quale?

66



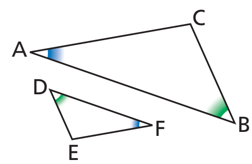
a) $AB : DE = AC : DF$
b) $AC : DF = BC : EF$
c) $AB : AC = EF : DE$

67



a) $AB : FE = BC : FD$
b) $AC : ED = AB : FD$
c) $AC : ED = EF : AB$

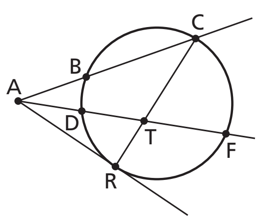
68



a) $AB : DF = BC : EF$
b) $AB : DF = BC : DE$
c) $AB : DF = DE : BC$

69 **COMPLETA** le seguenti uguaglianze o proporzioni utilizzando la figura e applicando i teoremi delle corde, delle secanti, della secante e della tangente (AR è tangente alla circonferenza in R).

$\overline{DT} : \overline{RT} = \ldots : \ldots;$
$\overline{AR}^2 = \overline{AF} \cdot \ldots;$
$\overline{TF} : \overline{\ldots} = \overline{\ldots} : \overline{DT};$
$\overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{AD} \cdot \ldots;$
$AC : AR = \ldots : AB;$
$AB : AF = \ldots : AC.$



70 Un trapezio rettangolo $ADCB$ ha il lato AB perpendicolare alle basi e le diagonali AC e BD fra loro perpendicolari. Indicato con O il punto d'intersezione delle diagonali, dimostra che i triangoli BOC, AOB e AOD sono simili.

71 Disegna un triangolo ABC e indica con AH la proiezione di AC su AB e con AK la proiezione di AB su AC. Dimostra che $AB : AC = AK : AH$.

72 Dal vertice B del triangolo ABC conduci una retta che intersechi la retta AC nel punto D, in modo che l'angolo $C\hat{B}D$ sia congruente all'angolo $C\hat{A}B$. Dimostra che BC è medio proporzionale fra AC e CD.

73 Disegna tre semirette a, b, c uscenti dalla stessa origine O, in modo che Oc sia contenuta nell'angolo acuto $a\hat{O}b$. Fissa su Oc due punti P e Q e da questi traccia due rette parallele che intersecano la semiretta Oa nei punti L e M, rispettivamente. Sempre da P e da Q traccia altre due rette parallele che intersecano la semiretta Ob nei punti N e R, rispettivamente.
Dimostra che $PL : QM = PN : QR$.

74 Nel trapezio $ABCD$, rettangolo in A e in D, le diagonali AC e BD sono fra loro perpendicolari. Dimostra che l'altezza del trapezio è medio proporzionale fra le basi.

75 Dato un triangolo rettangolo ABC, da un punto P dell'ipotenusa BC conduci la perpendicolare all'ipotenusa stessa che incontra i cateti AB e AC, o i loro prolungamenti, rispettivamente nei punti M e N. Dimostra che $PM : PB = PC : PN$.

76 Nel triangolo ABC indica con L, M, N i punti medi dei lati. Dimostra che ABC e LMN sono simili.

▶ *Caso particolare*: se ABC è equilatero, di che natura è il triangolo LMN? Qual è il rapporto di similitudine?

77 Disegna un triangolo isoscele ABC, di base BC, e traccia le altezze AH e BK. Dimostra che $AH : BK = AB : BC$.

78 Dimostra che in due triangoli simili due lati omologhi stanno fra loro come i raggi delle circonferenze inscritte e come i raggi di quelle circoscritte.

79 Traccia una circonferenza di centro O, conduci due rette a e b, a essa tangenti e parallele, e una terza retta t tangente alla circonferenza nel punto T. Indica con A il punto di tangenza della retta a, con B il punto di tangenza della retta b, con R l'intersezione di a con t e con S l'intersezione di b con t. Dimostra che il segmento OT è medio proporzionale fra i segmenti RT e ST.

80 Disegna un parallelogramma $ABCD$ e la sua diagonale AC. Per un punto P di AC traccia le parallele ai lati e dimostra che, fra i quattro parallelogrammi ottenuti, quelli che hanno per diagonale i segmenti AP e PC sono simili.

81 Dimostra che, se due quadrilateri hanno tre angoli congruenti e due lati consecutivi in proporzione, allora sono simili.

82 In una circonferenza sono date due corde MN e $M'N'$ che si intersecano in un punto P tale che $PM : PN = PM' : PN'$. Dimostra che le due corde sono congruenti.

83 Dimostra che, se due quadrilateri hanno ordinatamente un angolo congruente e i quattro lati in proporzione, allora sono simili.

84 Dimostra che, se sui lati di un triangolo rettangolo si costruiscono tre poligoni regolari con lo stesso numero di lati, allora il poligono costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei poligoni costruiti sui cateti.

85 Disegna un trapezio e indica con O il punto intersezione delle diagonali. Dimostra che O dimezza la corda MN passante per O e parallela alle basi AB e CD. (Suggerimento. Utilizza la similitudine dei triangoli ABD e MOD e dei triangoli ABC e ONC e la prima applicazione dei criteri di similitudine.)

86 Nel triangolo ABC traccia l'altezza CD. Traccia la circonferenza circoscritta al triangolo e indica con CE un suo diametro. Dimostra che il rettangolo avente i lati congruenti ad AC e a BC è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti a CD e a CE. (Suggerimento. I triangoli CBD e CEA sono...)

87 In una circonferenza traccia due corde AB e BC e conduci per B la retta tangente a tale circonferenza. Dimostra che ogni retta parallela alla tangente taglia le rette AB e BC in due punti M e N tali che i triangoli ABC e NBM risultano simili. (Suggerimento. Utilizza le proprietà dell'angolo alla circonferenza.)

▶ *Caso particolare*: se AB e BC sono congruenti e perpendicolari, come sono fra loro la retta tangente e la corda AC?

88 Da un punto P esterno a una circonferenza traccia le tangenti PA e PC e una secante che incontri la circonferenza nei punti B e D. Dimostra che i lati opposti del quadrangolo $ABCD$ inscritto nella circonferenza si possono prendere, rispettivamente, come medi ed estremi di una proporzione. (Suggerimento. Osserva che i triangoli APD e BPA sono simili, come anche i triangoli CPD e BPC.)

89 Per il punto medio M dell'arco AB di una circonferenza, conduci una corda MN che taglia in P la corda AB. Dimostra che la retta MA è tangente alla circonferenza passante per A, P, N. (Suggerimento. Sfrutta la similitudine dei triangoli APM e NAM.)

6. La lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio

→ Teoria a pag. G393

RIFLETTI SULLA TEORIA

Nel sito: ▶ 7 esercizi di recupero

90 VERO O FALSO?

a) La lunghezza della circonferenza è maggiore del perimetro di qualsiasi poligono circoscritto alla circonferenza stessa. V F

b) Le aree dei poligoni inscritti in una circonferenza e le aree dei poligoni circoscritti alla stessa circonferenza sono classi contigue. V F

c) Se nella circonferenza di raggio r una corda misura $r\sqrt{3}$, allora qualsiasi angolo acuto alla circonferenza che insiste su tale corda misura 60°. V F

d) Il raggio del cerchio inscritto in un triangolo è uguale al rapporto fra l'area del triangolo e il suo semiperimetro. V F

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

91 Data una circonferenza, prendiamo su un suo diametro AB un punto P e tracciamo le circonferenze di diametro AP e PB. Verifichiamo che la somma delle lunghezze delle due circonferenze tracciate è uguale alla lunghezza della circonferenza di diametro AB.

Indichiamo rispettivamente con r, r_1, r_2 i raggi delle circonferenze di diametri AB, AP, PB e con c, c_1 e c_2 le lunghezze delle tre circonferenze. Dobbiamo verificare che $c = c_1 + c_2$. Calcoliamo le lunghezze delle tre circonferenze:

$c = 2\pi r$;

$c_1 = 2\pi r_1$;

$c_2 = 2\pi r_2$.

La somma delle lunghezze c_1 e c_2 è:

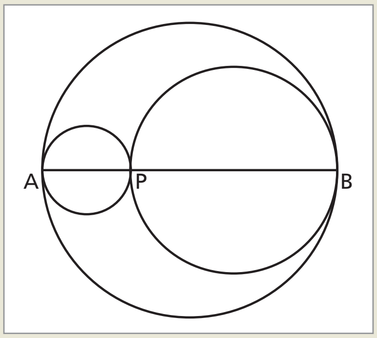
$$c_1 + c_2 = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 = \pi(2r_1 + 2r_2).$$

Poiché $2r_1 + 2r_2 = AP + PB = AB = 2r$, possiamo scrivere:

$$c_1 + c_2 = \pi(2r_1 + 2r_2) = \pi 2r = 2\pi r.$$

Pertanto,

$$c = c_1 + c_2.$$



92 Disegna un trapezio inscritto in una circonferenza in modo che il centro della circonferenza sia interno al trapezio, la base minore sia congruente al lato dell'esagono regolare inscritto e la base maggiore sia congruente al lato del triangolo equilatero inscritto. Dimostra che il lato obliquo del trapezio è congruente al lato del quadrato inscritto nella stessa circonferenza.

93 Dati due cerchi concentrici aventi i raggi che misurano R e $r (R > r)$, dimostra che la superficie della corona circolare delimitata dalle due circonferenze è equivalente a quella del rettangolo che ha per base la semicirconferenza rettificata di raggio $R - r$ e per altezza $R + r$.

94 Inscrivi in un cerchio un quadrato e su ogni lato disegna, esternamente al quadrato, una semicirconferenza di diametro il lato stesso. Dimostra che la somma delle quattro lunule comprese fra le semicirconferenze e la circonferenza data è equivalente al quadrato.

95 Dimostra che in un triangolo rettangolo il semicerchio costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei semicerchi costruiti sui cateti.

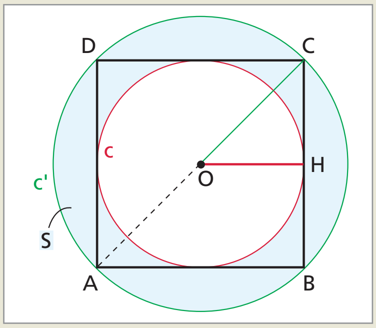
96 Traccia una circonferenza di diametro AB e su AB prendi due punti C e D. Traccia dalla stessa parte rispetto ad AB due semicirconferenze di diametro AC e AD. Traccia inoltre, dalla parte opposta rispetto ad AB, altre due semicirconferenze di diametri CB e DB. La parte di piano compresa fra le quattro semicirconferenze si chiama *pelecoide*. Dimostra che il contorno del pelecoide e la circonferenza hanno la stessa lunghezza.

97 Sul diametro AB di una circonferenza scegli un punto P e traccia le semicirconferenze di diametri AP e PB, giacenti da parti opposte rispetto ad AB. Dimostra che il cerchio resta diviso dalle due semicirconferenze in due parti che stanno fra loro come i due segmenti in cui è diviso il diametro.

ESERCIZIO GUIDA

98 Un quadrato ha il lato di 6 cm. Calcoliamo la lunghezza della circonferenza inscritta nel quadrato, la lunghezza di quella circoscritta e l'area della corona circolare fra esse compresa.

Indichiamo con c e c' le misure della circonferenza inscritta e di quella circoscritta, con S la misura dell'area della corona circolare.



Dati
1. $ABCD$ è un quadrato; 2. $\overline{AB} = 6$.

Richieste
1. c; 2. c'; 3. S.

Risoluzione

Le due circonferenze hanno lo stesso centro O. Il raggio di quella inscritta è metà del lato del quadrato, quello della circonferenza circoscritta è metà della diagonale. La misura c della circonferenza inscritta è:

$$c = 2\pi \cdot \overline{OH} = 2\pi \cdot \frac{\overline{AB}}{2} = 6\pi.$$

La misura della diagonale è:

$$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

La misura c' della circonferenza circoscritta è:

$$c' = 2\pi \cdot \overline{OC} = 2\pi \cdot \frac{\overline{AC}}{2} = 2\pi \cdot 3\sqrt{2} = 6\pi\sqrt{2}.$$

L'area della superficie richiesta è la differenza fra le aree dei due cerchi.
La sua misura è:

$$S = \pi \cdot \overline{OC}^2 - \pi \cdot \overline{OH}^2 = \pi \cdot (3\sqrt{2})^2 - \pi \cdot 3^2 = 9\pi.$$

La lunghezza della circonferenza inscritta è 6π cm, quella della circonferenza circoscritta $6\pi\sqrt{2}$ cm; l'area della superficie compresa fra le due circonferenze è 9π cm^2.

99 Due cerchi concentrici hanno i raggi che misurano R e r $(R > r)$. Determina la misura del contorno e l'area della corona circolare delimitata dalle due circonferenze. $[2\pi(R + r); \pi(R^2 - r^2)]$

100 Sia AB il diametro di una circonferenza la cui lunghezza misura $10\pi a$. Traccia una corda AC che formi con AB un angolo di 60°. Determina la misura dell'area del triangolo ABC. $\left[\frac{25}{2}a^2\sqrt{3}\right]$

101 Il lato e la diagonale minore di un rombo misurano a. Calcola la misura dell'area del rombo e del cerchio inscritto in esso. $\left[a^2\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{16}\pi a^2\right]$

102 Un trapezio isoscele è circoscritto a una semicirconferenza di diametro 16 dm e la sua base maggiore si trova sul diametro di questa. Sapendo che la differenza fra le basi è 12 dm, determina il perimetro del trapezio e il rapporto fra tale perimetro e la semicirconferenza. $\left[48 \text{ dm}; \frac{6}{\pi}\right]$

103 È dato un triangolo equilatero di lato 4 cm. Traccia le circonferenze inscritta e circoscritta al triangolo. Calcola l'area della corona circolare delimitata dalle due circonferenze. $[4\pi \text{ cm}^2]$

104 In una circonferenza la cui lunghezza misura $50\pi a$, è inscritto un trapezio $ABCD$, contenente il centro O. La base maggiore AB è lunga $48a$ e la distanza della base minore CD dal centro O misura $20a$. Determina la misura dell'area della superficie compresa fra la circonferenza e il trapezio. $[(625\pi - 1053)a^2]$

105 Il raggio della circonferenza maggiore di una corona circolare è $\frac{41}{5}$ cm e quello della circonferenza minore è $\frac{9}{5}$ cm. Inscrivi nella circonferenza maggiore un triangolo isoscele comprendente il centro, in modo che la base risulti tangente alla circonferenza minore. Calcola l'area del triangolo e della parte del cerchio maggiore esterno al triangolo. $\left[80 \text{ cm}^2; \left(\frac{1681}{25}\pi - 80\right) \text{cm}^2\right]$

106 Su una circonferenza sono dati quattro punti consecutivi, A, B, C e D, che la dividono in quattro archi consecutivi, AB, BC, CD e DA, lunghi rispettivamente 2π cm, 3π cm, 5π cm e 8π cm. Determina il raggio della circonferenza e le ampiezze degli angoli al centro corrispondenti ai quattro archi. [9 cm; 40°, 60°, 100°, 160°]

107 Sia MN una corda di una circonferenza di centro O, e la sua distanza OH dal centro sia 6 cm. Per i punti M e N conduci le tangenti alla circonferenza e sia P il loro punto d'incontro. Sapendo che la misura dell'ampiezza dell'angolo $H\hat{N}O$ è 30°, calcola l'area del quadrilatero $MONP$ e il rapporto fra il perimetro di $MONP$ e la circonferenza data. $\left[144\sqrt{3}\text{ cm}^2; \frac{\sqrt{3}+1}{\pi}\right]$

108 L'area di un triangolo equilatero ABC misura $162\,k^2\sqrt{3}$. Conduci per il centro della circonferenza a esso circoscritta la parallela MN alla base BC del triangolo; calcola le misure del perimetro del triangolo AMN e dell'area della corona circolare compresa tra detta circonferenza e quella inscritta nel triangolo. $[36\sqrt{2}k; 162\pi k^2]$

109 In una circonferenza siano AB una corda e CD il diametro a essa perpendicolare. Sapendo che AB è $\frac{24}{25}$ di CD e che la loro differenza è 6 cm, determina la lunghezza della circonferenza, l'area del cerchio e l'area del quadrilatero convesso $ABCD$. [150π cm; 5625π cm^2; 10800 cm^2]

110 Un diametro AB di un cerchio interseca una corda in P dividendola in due parti lunghe 12 cm e 20 cm. Sapendo che PB è la quarta parte di AP, calcola l'area del cerchio. [375π cm^2]

111 In un triangolo ABC, rettangolo in A, la proiezione BH del cateto AB sull'ipotenusa è i $\frac{18}{25}$ della mediana AM. Sapendo che il perimetro misura $240k$, determina la misura della circonferenza circoscritta. [$100\pi k$]

112 Due circonferenze, di centro O e O' e di lunghezza 68π cm e 40π cm, si intersecano nei punti M e N. Sulla retta passante per M e N scegli un punto P non appartenente a MN dalla parte di M e tale che MP sia lungo 18 cm e traccia i segmenti PR e PS tangenti alle due circonferenze. Sapendo che OO' è lungo 42 cm, determina la misura del perimetro del pentagono $PROO'S$. [156 cm]

113 Da un punto esterno a un cerchio di area 225π cm^2, situato a una distanza di 25 cm dal centro, conduci le tangenti. Calcola la misura dell'area del triangolo determinato dalle tangenti e dalla retta del diametro perpendicolare alla congiungente il punto dato con il centro. $\left[\frac{1875}{4}\text{ cm}^2\right]$

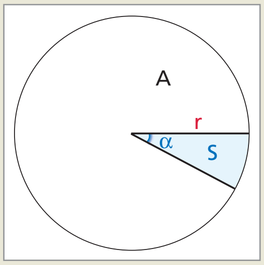
114 In una circonferenza, la corda CD è perpendicolare in P alla corda AB, lunga 30 cm, e la divide in parti aventi rapporto $\frac{11}{4}$. Determina le lunghezze dei segmenti PC e PD e della circonferenza, sapendo che la somma delle distanze delle due corde dal centro della circonferenza è 27 cm. [4 cm; 44 cm; 50π cm]

La lunghezza di un arco e l'area di un settore circolare

ESERCIZIO GUIDA

115 Calcoliamo il raggio di un cerchio sapendo che l'area di un suo settore, di ampiezza 11°15′, è 50π cm^2.

Indichiamo le misure dell'ampiezza del settore e della sua area con α e con S, quella dell'area del cerchio con A e quella del raggio con r.



Dati 1. $\alpha = 11°15'$;
2. $S = 50\,\pi$.

Richiesta r

Risoluzione
Calcoliamo A usando la proporzione $A : 360 = S : \alpha$.

Trasformiamo 11°15′ in gradi. Tenendo presente che $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$, risulta
$15' = \left(15 \cdot \frac{1}{60}\right)^\circ = \left(\frac{1}{4}\right)^\circ$ e quindi:

$$11°15' = 11° + \left(\frac{1}{4}\right)^\circ = \left(11 + \frac{1}{4}\right)^\circ = \left(\frac{45}{4}\right)^\circ.$$

Riscriviamo la proporzione, sostituendo i valori calcolati:

$$A : 360 = 50\pi : \frac{45}{4} \to A = \frac{360 \cdot 50\pi}{\frac{45}{4}} = 360 \cdot 50\pi \cdot \frac{4}{45} = 1600\pi.$$

Calcoliamo il raggio ricavando r dalla formula della misura dell'area del cerchio:

$$A = \pi \cdot r^2 \to \frac{A}{\pi} = \frac{\pi \cdot r^2}{\pi} \to \frac{A}{\pi} = r^2 \to r^2 = \frac{A}{\pi} \to r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}.$$

Sostituendo otteniamo:

$$r = \sqrt{\frac{1600\pi}{\pi}} \to r = \sqrt{1600} \to r = 40.$$

Lo stesso risultato si ottiene ricavando r dalla formula $S = \frac{\alpha}{360}\pi r^2$:

$$r = \sqrt{\frac{360S}{\alpha\pi}} = \sqrt{\frac{360 \cdot 50\cancel{\pi}}{\left(\frac{45}{4}\right) \cdot \cancel{\pi}}} = \sqrt{1600} = 40.$$

Il raggio del cerchio è quindi di 40 cm.

116 La lunghezza di un arco appartenente a una circonferenza di raggio 135 cm è $\frac{165}{2}\pi$ cm. Calcola l'ampiezza del rispettivo angolo al centro. [110°]

117 Un arco di circonferenza è lungo $\frac{5}{6}\pi$ cm e l'ampiezza del rispettivo angolo al centro è 7°30′. Calcola la lunghezza del raggio. [20 cm]

118 Disegna tre circonferenze di raggio r, tangenti a due a due e indica con A, B e C i punti di tangenza. Calcola l'area della superficie della figura delimitata dagli archi AC, BC e CA, e la lunghezza del suo contorno. $\left[r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right); \pi r\right]$

119 Disegna un cerchio di raggio r e inscrivi in esso un triangolo equilatero. Determina la misura dell'area della regione del cerchio limitata dal lato del triangolo e dall'arco minore corrispondente. $\left[\frac{r^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})\right]$

120 In un cerchio di raggio 2 cm è inscritto un quadrato. Determina l'area della regione del cerchio limitata dal lato del quadrato e dall'arco minore corrispondente. [$(\pi - 2)$ cm^2]

121 In un cerchio di raggio r inscrivi un esagono regolare. Determina la misura dell'area della regione del cerchio limitata dal lato dell'esagono e dall'arco minore corrispondente. $\left[r^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]$

122 Disegna un triangolo equilatero e, con centro in ciascuno dei tre vertici e apertura congruente al lato, traccia tre archi, in modo che ogni arco sia sotteso da un lato del triangolo. Sapendo che il lato del triangolo è lungo $6\sqrt{3}$ cm, calcola l'area della superficie racchiusa dai tre archi. [$54(\pi - \sqrt{3})$ cm^2]

123 Sia MN una corda di una circonferenza di centro O, e la sua distanza OH dal centro sia 6 cm. Sapendo che l'angolo $H\hat{N}O$ è di 30°, calcola la misura dell'area del settore circolare avente per angolo al centro l'angolo $M\hat{O}N$. [48π cm^2]

124 Un triangolo rettangolo ha un angolo di 60° e l'ipotenusa misura $12a$. Dal vertice dell'angolo di 60° traccia un arco di circonferenza con raggio congruente al cateto minore, dividendo il triangolo in due parti. Determina l'area di tali parti. $[6\pi a^2; (18\sqrt{3} - 6\pi)a^2]$

125 Un segmento circolare ha per basi due corde parallele e congruenti rispettivamente al lato del triangolo equilatero inscritto e al lato del quadrato inscritto. Esse sono situate dalla stessa parte rispetto al centro della circonferenza. Se il raggio misura $2k$, qual è la misura dell'area del segmento circolare? $\left[\frac{k^2}{3}(6 + \pi - 3\sqrt{3})\right]$

126 Da due vertici opposti di un quadrato traccia due archi di circonferenza di raggio congruente al lato del quadrato e interni a esso. Se il lato del quadrato misura $2a$, quali sono le misure delle aree delle tre parti in cui è diviso il quadrato? $[a^2(4 - \pi); a^2(4 - \pi); 2a^2(\pi - 2)]$

127 L'area di un triangolo equilatero ABC misura $648\,k^2\sqrt{3}$. Indicato con O il centro delle circonferenze inscritta e circoscritta, calcola il rapporto fra l'area della corona circolare compresa tra le due circonferenze e l'area del settore circolare appartenente al cerchio maggiore e avente per angolo al centro l'angolo convesso $B\hat{O}C$. $\left[\frac{9}{4}\right]$

128 Due circonferenze congruenti passano l'una per il centro dell'altra, e il loro raggio misura r. Calcola l'area dell'ogiva comune ai due cerchi delimitati dalle circonferenze. $\left[\frac{(4\pi - 3\sqrt{3})}{6}r^2\right]$

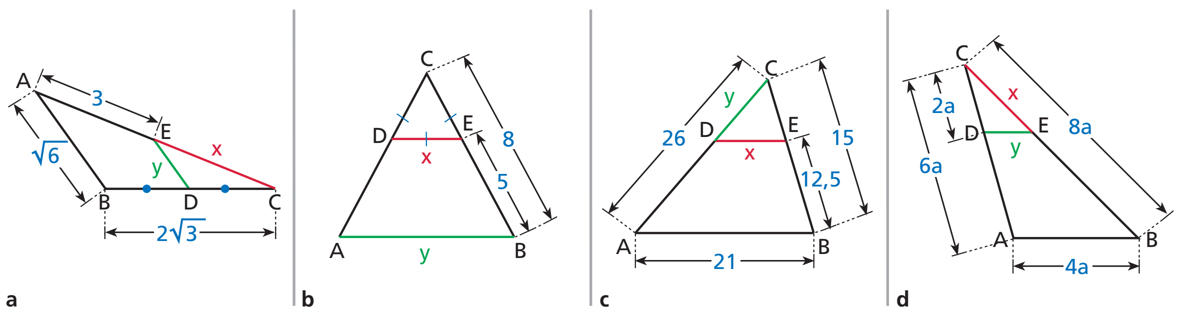
129 Esternamente a un quadrato $ABCD$, il cui lato misura l, traccia le semicirconferenze di diametri AB e AD e l'arco di circonferenza di centro A ed estremi B e D. Trova la misura dell'area della figura mistilinea delimitata dagli archi tracciati. $\left[\frac{\pi l^2}{2}\right]$

Applicazioni dell'algebra alla geometria

Nel sito: ▶ 8 esercizi di recupero

Problemi con triangoli simili

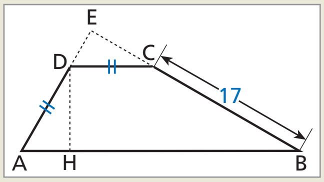
130 In tutte le figure che seguono il segmento DE è parallelo al lato AB del triangolo. Utilizzando le misure indicate e le opportune proporzioni, ricava le misure x e y incognite.



ESERCIZIO GUIDA

131 Un lato obliquo di un trapezio è congruente alla base minore, mentre l'altro lato è lungo 17 cm. Le misure della base maggiore, della base minore e dell'altezza stanno tra loro, rispettivamente, come i numeri 124, 40 e 32. Prolunghiamo i lati obliqui e consideriamo un triangolo che ha per base la base minore del trapezio. Calcoliamo il rapporto fra il perimetro di questo triangolo e il perimetro del trapezio.

Dati e relazioni



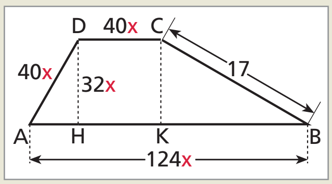
1. $ABCD$ è un trapezio;
2. $\overline{AD} = \overline{DC}$;
3. $\overline{BC} = 17$;
4. $\overline{AB} : 124 = \overline{DC} : 40 = \overline{DH} : 32$.

Richiesta

$$\frac{\text{perimetro}(DCE)}{\text{perimetro}(ABCD)}$$

Risoluzione

1. Calcoliamo il perimetro del trapezio $ABCD$.
   Utilizziamo come incognita la misura x di un sottomultiplo comune di AB, CD e DH:



$\overline{AB} = 124x$

$\overline{CD} = \overline{AD} = 40x$

$\overline{DH} = \overline{CK} = 32x$

Calcoliamo $\overline{AH}$ in funzione di x, applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHD:

$(\overline{AH})^2 = (\overline{AD})^2 - (\overline{DH})^2$

$(\overline{AH})^2 = (40x)^2 - (32x)^2 =$
$= 1600x^2 - 1024x^2 = 576x^2$

$\overline{AH} = \sqrt{576x^2}$

$\overline{AH} = 24x.$

Calcoliamo $\overline{KB}$ per differenza:

$\overline{KB} = \overline{AB} - \overline{AH} - \overline{HK}$

$\overline{KB} = 124x - 24x - 40x = 60x.$

Esprimiamo $\overline{BC}$ in funzione di x applicando di nuovo il teorema di Pitagora:

$(\overline{BC})^2 = (\overline{CK})^2 + (\overline{KB})^2$

$(\overline{BC})^2 = (32x)^2 + (60x)^2 =$
$= 1024x^2 + 3600x^2 = 4624x^2$

$\overline{BC} = \sqrt{4624x^2}$

$\overline{BC} = 68x.$

Uguagliamo $\overline{BC}$ a 17 e ricaviamo x:

$$68x = 17 \quad \rightarrow \quad x = \frac{17}{68} = \frac{1}{4}.$$

Calcoliamo le misure degli elementi del trapezio sostituendo a x il valore $\frac{1}{4}$:

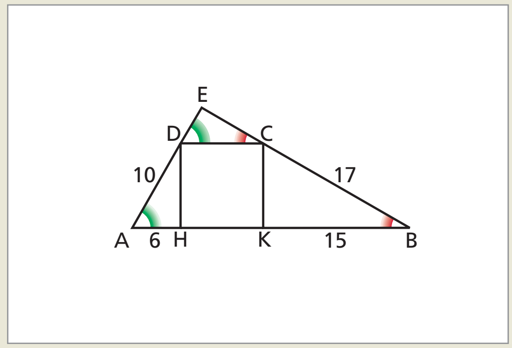
$\overline{AD} = 10$; $\overline{AH} = 6$; $\overline{DH} = 8$; $\overline{KB} = 15$; $\overline{AB} = 31$.

Il perimetro del trapezio $ABCD$ è:

$\overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CB} + \overline{AB} = 68$

perimetro $(ABCD) = 68$ cm.

2. Calcoliamo il perimetro del triangolo DCE.



I triangoli DCE e ABE sono simili, avendo gli angoli congruenti, pertanto:

$\overline{AB} : \overline{DC} = \overline{AE} : \overline{DE}$.

Applichiamo la proprietà dello scomporre:

$(\overline{AB} - \overline{DC}) : \overline{DC} = (\overline{AE} - \overline{DE}) : \overline{DE}$

$(31 - 10) : 10 = 10 : \overline{DE}$

$$\overline{DE} = \frac{10 \cdot 10}{21} = \frac{100}{21}.$$

Analogamente, da $\overline{AB} : \overline{DC} = \overline{BE} : \overline{CE}$ otteniamo:

$(\overline{AB} - \overline{DC}) : \overline{DC} = (\overline{BE} - \overline{CE}) : \overline{CE}$

$(31 - 10) : 10 = 17 : \overline{CE}$

$$\overline{CE} = \frac{10 \cdot 17}{21} = \frac{170}{21}.$$

Il perimetro del triangolo DCE è:

$$\overline{DC} + \overline{CE} + \overline{ED} = \frac{\cancelto{160}{480}}{\cancelto{7}{21}} = \frac{160}{7}$$

$$\text{perimetro } (DCE) = \frac{160}{7} \text{ cm}.$$

3. Il rapporto richiesto è:

$$\frac{\text{perimetro } (DCE)}{\text{perimetro } (ABCD)} = \frac{\frac{160}{7}\text{ cm}}{68 \text{ cm}} = \frac{40}{119}.$$

132 Dato il triangolo rettangolo ABC avente ipotenusa $AB = 3{,}5$ cm e un cateto i $\frac{3}{4}$ dell'altro, traccia da un punto P del cateto minore la parallela all'ipotenusa. Sapendo che $AP : PC = 5 : 2$, calcola il perimetro e l'area del triangolo ABC e del trapezio ottenuto. [8,4 cm; 2,94 cm^2; 8 cm; 2,7 cm^2]

133 Del trapezio $ABCD$, rettangolo in A e in D, si conoscono le lunghezze $45a$, $24a$ e $28a$ delle basi AB, CD e dell'altezza AD. Indicata con E l'intersezione dei prolungamenti dei lati non paralleli, determina la lunghezza dei lati e l'area del triangolo DBE. (*Maturità magistrale 1966/67*) [$53a$; $32a$; $75a$; $720a^2$]

134 Dato il triangolo ABC di base AB e lato AC con $AC = k$, determina su AC un punto D tale che $\frac{AD}{DC} = \frac{3}{4}$. Traccia dal punto D la parallela DE alla base. Calcola il rapporto fra le aree dei triangoli ABC e CDE. $\left[\frac{49}{16}\right]$

135 Nel triangolo ABC, di base $AB = 24$ dm e altezza $CH = 16$ dm, inscrivi il quadrato $EPGF$ (con un lato su AB) e calcolane l'area. [92,16 dm^2]

136 La base AB di un triangolo è lunga 10 cm. Una retta parallela alla base, che interseca i lati AC e BC nei punti D ed E, divide l'altezza relativa alla base, CK, in due segmenti CH e HK il cui rapporto è $\frac{2}{3}$. Determina la lunghezza della corda DE. [4 cm]

137 In un trapezio rettangolo la base minore, congruente all'altezza, è lunga 4,8 cm e la base maggiore è i $\frac{7}{4}$ della minore. Prolungando i lati non paralleli, ottieni un triangolo avente per base la base maggiore del trapezio. Calcola l'area del triangolo. [47,04 cm^2]

138 Nel triangolo rettangolo ABC, il cateto AC è doppio del cateto AB, la cui lunghezza è a. Traccia la parallela EF all'ipotenusa in modo che il rapporto fra il perimetro del trapezio $EBCF$ e il perimetro del triangolo AEF sia $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. Calcola la lunghezza del segmento EF. $\left[\frac{3\sqrt{5}+5}{8}a\right]$

139 Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo $2\sqrt{2}$ cm. Traccia una retta perpendicolare a tale cateto, in modo che il triangolo risulti suddiviso in due poligoni equivalenti. Calcola la lunghezza delle due parti in cui il cateto è suddiviso dalla retta. [2 cm; $2(\sqrt{2}-1)$ cm]

140 Disegna un triangolo di base AB e altezza CH. Dal punto medio dell'altezza traccia la parallela alla base, ottenendo un trapezio. Sapendo che l'area del trapezio è 13,5 cm^2 e che l'altezza del triangolo è 6 cm, calcola la lunghezza delle due basi del trapezio. [6 cm; 3 cm]

141 In un triangolo rettangolo, i cui cateti sono lunghi c e d, è inscritto un quadrato con due lati consecutivi sui cateti. Calcola la diagonale del quadrato. $\left[\frac{cd}{c+d}\sqrt{2}\right]$

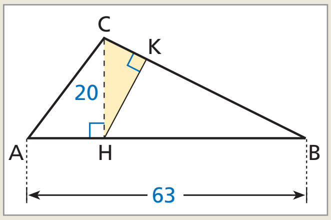
142 In un trapezio rettangolo $ABCD$ l'altezza AD è i $\frac{3}{2}$ della base minore CD che, a sua volta, è i $\frac{4}{9}$ della base maggiore AB. La somma delle due basi è $52k$. Prolungando l'altezza e il lato obliquo, i due prolungamenti si intersecano nel punto E. Calcola l'area del triangolo ABE. [$777{,}6k^2$]

143 L'area di un trapezio isoscele è 242 cm^2. La base maggiore supera la minore di 4 cm e la somma della base maggiore e dell'altezza è uguale ai $\frac{7}{4}$ della base minore. Calcola l'altezza del triangolo che ottieni prolungando i lati obliqui, avente per base la base minore del trapezio. [55 cm]

144 Un triangolo rettangolo ABC ha area 384 cm^2 e un cateto è i $\frac{4}{3}$ dell'altro. Sull'ipotenusa determina un punto Q che la divida in due parti, delle quali una sia i $\frac{3}{7}$ dell'altra. Dal punto Q traccia poi le parallele ai cateti. Calcola l'area e il perimetro dei tre poligoni in cui viene suddiviso il triangolo dato. [34,56 cm^2; 188,16 cm^2; 161,28 cm^2; 28,8 cm; 67,2 cm; 52,8 cm]

ESERCIZIO GUIDA

145 Nel triangolo ABC indicato in figura, la base AB è lunga 63 cm e l'altezza CH è 20 cm. Il punto H divide AB in due parti tali che la parte maggiore supera di 12 cm i $\frac{12}{5}$ della minore. Indicata con HK l'altezza del triangolo CBH relativa al lato CB, determiniamo il perimetro del triangolo CHK.

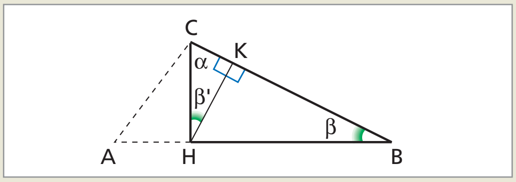


Dati e relazioni
1. $\overline{AB} = 63$;
2. $\overline{CH} = 20$;
3. $\overline{HB} = 12 + \frac{12}{5}\overline{AH}$.

Richiesta
$2p\,(CHK)$

Risoluzione
1. Calcoliamo $\overline{AH}$ e $\overline{HB}$.
Poniamo:
$$\overline{AH} = x, \text{ quindi } \overline{HB} = 12 + \frac{12}{5}x.$$
Esprimiamo anche $\overline{AB}$ in funzione di x:
$$\overline{AB} = x + 12 + \frac{12}{5}x = \frac{17}{5}x + 12.$$
Uguagliamo a 63 il valore di $\overline{AB}$ e ricaviamo x:
$$\frac{17}{5}x + 12 = 63 \rightarrow x = 15.$$
Si ricava:
$$\overline{AH} = 15, \overline{HB} = 12 + \frac{12}{5}\cdot 15 = 48.$$
Calcoliamo $\overline{CB}$ applicando il teorema di Pitagora al triangolo CHB:
$$\overline{CB}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2$$
$$\overline{CB}^2 = 20^2 + 48^2 = 2704$$
$$\overline{CB} = 52.$$

2. Calcoliamo il perimetro del triangolo CHK.



I triangoli rettangoli CHB e CHK sono simili per il primo criterio, in quanto hanno l'angolo α in comune, e β congruente a β', perché complementari dello stesso angolo α.

Poiché in due triangoli simili i perimetri stanno fra loro come due lati omologhi, vale la proporzione:
$$2p(CHB) : 2p(CHK) = \overline{CB} : \overline{CH}.$$
Essendo $2p(CHB) = 20 + 48 + 52 = 120$, otteniamo:
$$120 : 2p(CHK) = 52 : 20$$
$$2p(CHK) = \frac{20 \cdot 120}{52} = \frac{600}{13}.$$
Il perimetro di CHK è $\frac{600}{13}$ cm.

146 Un trapezio rettangolo $ABCD$ è tale che, congiungendo il punto medio M della base minore CD con gli estremi della base maggiore AB, il triangolo ABM risultante è rettangolo in M. Calcola l'area del trapezio sapendo che le basi misurano rispettivamente $25a$ e $18a$. [$258a^2$]

147 In un triangolo rettangolo ABC, di cateti $3a$ e $4a$, traccia l'altezza AH relativa all'ipotenusa BC e la bisettrice AK dell'angolo retto. Calcola l'area del triangolo AKH. $\left[\frac{72}{175}a^2\right]$

148 Un trapezio rettangolo è circoscritto a un cerchio di raggio 12 cm. Determina l'area del trapezio, sapendo che il suo perimetro è 100 cm. [600 cm^2]

149 Nel triangolo ABC si ha: $AB = 20$ cm, $AC = 18$ cm, $BC = 12$ cm. Traccia la bisettrice dell'angolo $\widehat{B}$ e indica con E il suo punto di intersezione con AC. Conduci dal vertice C la parallela ad AB, che interseca il prolungamento della bisettrice BE nel punto F. Calcola CF, AE, EC. $\left[12 \text{ cm}; \frac{45}{4} \text{ cm}; \frac{27}{4} \text{ cm}\right]$

150 In un triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa è lunga a e la proiezione del cateto maggiore sull'ipotenusa supera di $2\sqrt{3}a$ la proiezione del cateto minore.
Calcola il rapporto fra le aree dei triangoli rettangoli che l'altezza determina. $[7 + 4\sqrt{3}]$

151 Nel triangolo ABC, rettangolo in A, la bisettrice dell'angolo $\hat{C}$ incontra il cateto AB nel punto H. Traccia da H la perpendicolare HK all'ipotenusa BC.
Calcola il perimetro del triangolo BHK, sapendo che $AB = 12$ cm e che si ha:

$$BC + AC = 24 \text{ cm}.$$

[18 cm]

152 Un trapezio isoscele $ABCD$ è inscritto in una semicirconferenza di diametro AB lungo 2 cm.
Determina il perimetro del trapezio, sapendo che la somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati obliqui è 1,25 cm^2. $\left[\frac{27 + 4\sqrt{10}}{8} \text{ cm}\right]$

153 Su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ fissa un punto P. Traccia la tangente in B alla semicirconferenza e il segmento PH perpendicolare a tale tangente.
Determina PA in modo che sia soddisfatta la seguente relazione:

$$\overline{PA} + 2 \cdot \overline{PH} = r(2 + \sqrt{2}).$$

$[r\sqrt{2}]$

154 In un triangolo rettangolo ABC i cateti AB e AC sono lunghi, rispettivamente, 15 cm e 5 cm. Traccia l'altezza AH relativa all'ipotenusa e, sul segmento CH, fissa un punto E. La perpendicolare da E all'ipotenusa interseca AC nel punto F.
Determina CE in modo che sia soddisfatta la seguente relazione:

$$\overline{BE} \cdot \overline{EC} = \overline{EF}^2.$$

$\left[\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ cm}\right]$

155 Le diagonali di un trapezio rettangolo sono perpendicolari.
Sapendo che l'altezza è $6\sqrt{3}$ cm e la base maggiore è $12\sqrt{3}$ cm, determina la lunghezza delle diagonali. $[6\sqrt{15} \text{ cm}; 3\sqrt{15} \text{ cm}]$

156 Disegna due triangoli isosceli ABC e BEF in modo che siano simili fra loro, che le rispettive basi AB e BE appartengano alla stessa retta, e che siano tutti e due dalla stessa parte rispetto a tale retta. L'altezza CH è 8 cm e la base BE è 6 cm, inoltre l'area del triangolo ABC è quadrupla dell'area del triangolo BEF.
Calcola area e perimetro del triangolo BFC.
$[24 \text{ cm}^2; (15 + \sqrt{97}) \text{ cm}]$

157 Disegna un trapezio rettangolo $ABCD$, con la diagonale AC perpendicolare al lato obliquo BC, e traccia l'altezza CH, relativa alla base maggiore AB, in modo che CH risulti i $\frac{3}{4}$ di HB. La differenza fra l'area del rettangolo di dimensioni AD e HB e l'area del quadrato di lato AD è 900 cm^2.
Calcola area e perimetro del trapezio $ABCD$.
$[165\sqrt{3} \text{ cm}; 3825 \text{ cm}^2]$

158 In un triangolo rettangolo ABC, l'ipotenusa BC è lunga $25\sqrt{3}$ cm e il cateto AB è i $\frac{3}{4}$ di AC.

a) Calcola la lunghezza della bisettrice BE dell'angolo $\hat{B}$.
b) Disegna l'altezza AH relativa all'ipotenusa e traccia la bisettrice AF dell'angolo $C\hat{A}H$. Dimostra che le due bisettrici BE e AF sono perpendicolari e calcola la distanza del vertice A dalla bisettrice BE.

$\left[\text{a) } \frac{15\sqrt{15}}{2} \text{ cm; b) } 3\sqrt{15} \text{ cm}\right]$

159 In un trapezio rettangolo, di area $\frac{35}{10}\sqrt{3}$ dm^2, la diagonale minore è perpendicolare al lato obliquo.
Sapendo che l'altezza è lunga $\sqrt{3}$ dm, determina il perimetro del trapezio e la diagonale del quadrato che ha lo stesso perimetro del trapezio.
$\left[(9 + \sqrt{3}) \text{ dm}; \frac{\sqrt{2}}{4}(9 + \sqrt{3}) \text{ dm. Oppure } (7 + \sqrt{3} + \sqrt{39}) \text{ dm}; \frac{\sqrt{2}}{4}(7 + \sqrt{3} + \sqrt{39}) \text{ dm}\right]$

160 Disegna un triangolo isoscele ottusangolo, di base AB e altezza CH. Fissa sull'altezza CH un punto E, tale che risulti $AE : EH = 7 : 2$, e traccia da E il segmento EF perpendicolare al lato BC. Il lato del triangolo è lungo 30 cm e la somma dell'altezza CH e della proiezione di BC sulla base AB è 42 cm.

a) Calcola la lunghezza della base AB. Quante soluzioni ci sono? Giustifica la risposta.

b) Calcola il perimetro del triangolo CEF.

$$\left[\text{a) } 48\text{ cm; b) } \frac{24}{5}\left(9 - \frac{8\sqrt{5}}{5}\right)\text{ cm}\right]$$

161 È data la semicirconferenza di diametro AB lungo 20 cm. Preso sulla semicirconferenza un punto Q, prolunga AQ in modo che incontri la tangente alla semicirconferenza passante per B nel punto T. Siano R e H rispettivamente le proiezioni di Q su TB e su AB.

a) Determina AQ sapendo che:

$$10\,\overline{QR} + 3\overline{AQ} = 120.$$

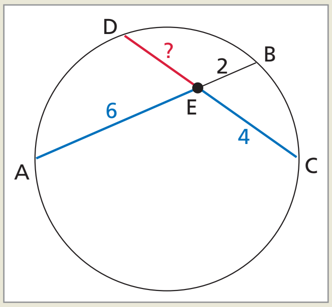
b) Trova il rapporto di similitudine fra i triangoli QTR e QBR.

$$\left[\text{a) } 16\text{ cm; b) } \frac{3}{4}\right]$$

Il teorema delle corde

ESERCIZIO GUIDA

162 Utilizzando i dati forniti in figura, determiniamo la misura del segmento ED.



Applicando il teorema delle corde ricaviamo la proporzione:

$$\overline{AE} : \overline{EC} = \overline{ED} : \overline{EB},$$

da cui:

$$\overline{AE} \cdot \overline{EB} = \overline{EC} \cdot \overline{ED}.$$

Poniamo $\overline{ED} = x$. Otteniamo:

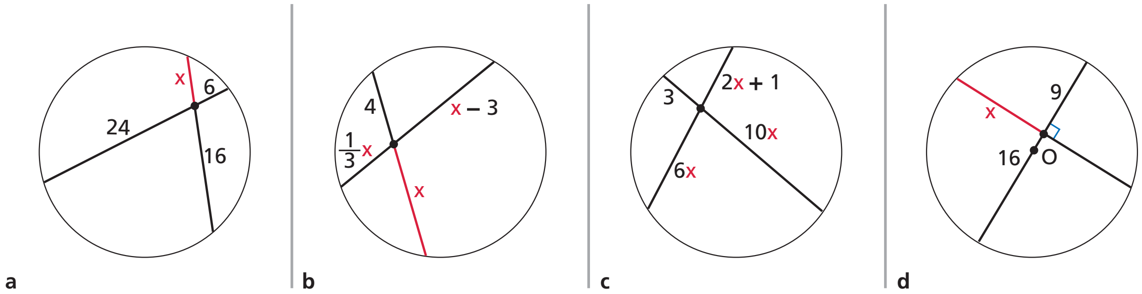
$$12 = 4x \quad \rightarrow \quad x = 3.$$

La risposta è dunque:

$$\overline{ED} = 3.$$

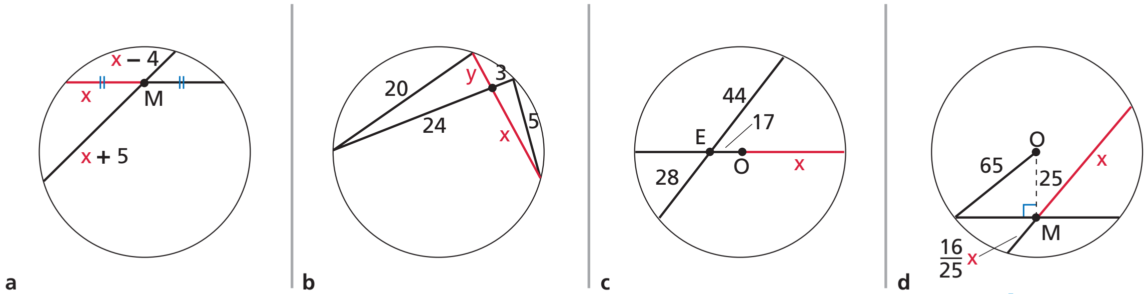
Mediante i dati forniti in ogni figura, determina le misure dei segmenti incogniti.

163



[9; 15; 2; 12]

164



[20; 6, 12; 39; 75]

165 In un cerchio, una corda CD lunga $48k$ è perpendicolare al diametro AB nel punto E. Sapendo che AE è lunga $32k$, determina la lunghezza del raggio del cerchio e la lunghezza della circonferenza. $[25k;\ 50\pi k]$

166 Disegna una circonferenza e due corde: AB, lunga 27 cm, e AC, lunga 12 cm. Una terza corda, CD, taglia AB nel punto E in modo che il segmento AE sia i $\frac{7}{9}$ di AB e CE i $\frac{3}{7}$ di AE. Determina il perimetro dei triangoli AEC e BED. Verifica che il rapporto fra i due perimetri è uguale al rapporto di similitudine. [42 cm; 12 cm]

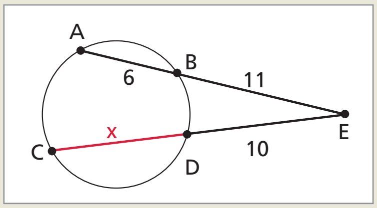
167 Il diametro AB di una circonferenza è diviso da una corda CD in due parti che misurano $6a$ e $84a$. La misura della corda è i $\frac{9}{2}$ della misura della parte minore in cui la corda stessa è divisa dal diametro. Determina la misura della corda CD e dell'area del triangolo COD. $[54a;\ 972a^2]$

168 In una circonferenza di raggio $123a\sqrt{2}$, un punto interno C dista $27a\sqrt{2}$ dal centro O. Una corda AB passante per C è divisa da tale punto in due parti che risultano una i $\frac{9}{4}$ dell'altra. Determina la corda AB.
(Suggerimento. Disegna il diametro su cui giace il segmento CO.) $[260a\sqrt{2}]$

Il teorema delle secanti

ESERCIZIO GUIDA

169 Utilizzando i dati forniti in figura, determiniamo la misura della secante CE.



Per il teorema delle secanti:

$\overline{AE} : \overline{CE} = \overline{DE} : \overline{BE} \rightarrow \overline{CE} \cdot \overline{DE} = \overline{AE} \cdot \overline{BE}$.

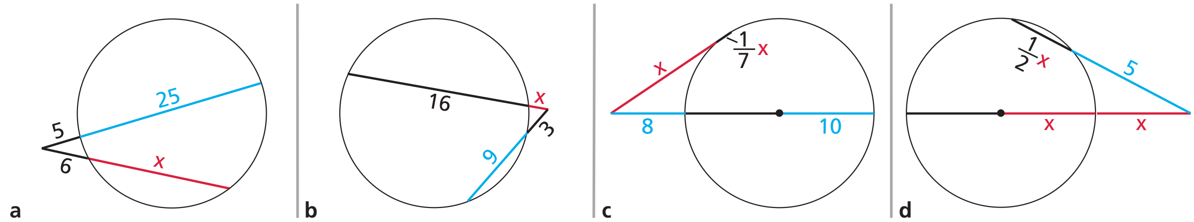
Se indichiamo con x la misura di CD, allora $\overline{CE} = 10 + x$, pertanto:

$10(10 + x) = 11(11 + 6)$

$100 + 10x = 187 \rightarrow 10x = 87 \rightarrow x = 8{,}7$.

La misura della secante CE è 18,7.

170 Usando i dati forniti in ogni figura, determina la misura del segmento incognito.



$\left[19;\ 2;\ 14;\ \frac{10}{3}\right]$

171 È data una circonferenza di centro O e raggio 5 cm. Un punto P dista 9 cm dal centro O. Una secante uscente da P incontra la circonferenza in due punti tali che la parte esterna della secante è sette volte la corda avente come estremi quei punti. Determina la lunghezza di tale corda e la sua distanza dal centro. $\left[1 \text{ cm};\ \frac{3}{2}\sqrt{11} \text{ cm}\right]$

172 In una circonferenza di raggio $\sqrt{6}$ cm disegna una corda AB tale che AB sia il lato del quadrato inscritto. Prolunga AB di un segmento BC lungo $\sqrt{3}$ cm e traccia un'altra secante per C, la cui parte esterna sia congruente al raggio. Determina la lunghezza dell'intera secante. $\left[\frac{3\sqrt{6}}{2} \text{ cm}\right]$

173 Disegna una circonferenza di diametro $AB = 2r$ e prolunga AB di un segmento BC uguale al raggio. Dal punto C traccia una secante in modo che determini una corda EF uguale al raggio, con F dalla parte di C. Congiungi F con O. Calcola il perimetro del triangolo OCF in funzione del raggio. $\left[\frac{5+\sqrt{13}}{2}r\right]$

174 In una circonferenza di raggio 10 cm e centro O, traccia la corda AB, lato del triangolo equilatero inscritto, e la corda CD, lato dell'esagono regolare inscritto. Prolunga la corda AB dalla parte di B. Tale prolungamento incontra il prolungamento di CD in un punto E tale che l'area del triangolo AEO è $75\sqrt{3}$ cm^2. Determina DE. $[5(\sqrt{73}-1)$ cm$]$

Il teorema della secante e della tangente

ESERCIZIO GUIDA

175 Usando i dati forniti in figura, determiniamo la misura del segmento di tangente PT.

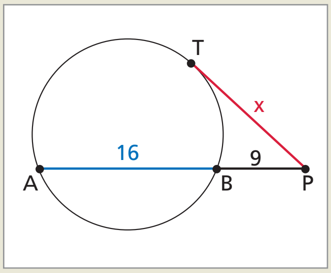
Per il teorema della secante e della tangente:

$$\overline{PA} : \overline{PT} = \overline{PT} : \overline{PB} \rightarrow \overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}.$$

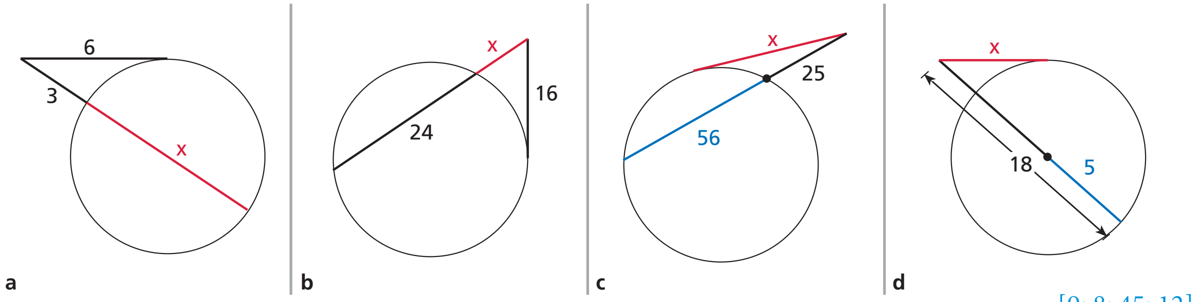
Tenendo presente che $\overline{PA} = 16 + 9 = 25$ e ponendo $\overline{PT} = x$, otteniamo:

$$x^2 = 25 \cdot 9 = 225$$
$$x = 15.$$

Pertanto $\overline{PT} = 15$.



176 In base ai dati forniti in ciascuna figura, determina la misura del segmento incognito.



[9; 8; 45; 12]

177 Una circonferenza di centro O ha il diametro AB di 16 cm. Prolunga AB di un segmento BC lungo 9 cm e dal punto C traccia una tangente CD alla circonferenza. Determina il rapporto fra l'area del triangolo equilatero costruito sulla tangente CD e l'area del quadrato inscritto nella circonferenza. $\left[\frac{225}{512} \cdot \sqrt{3}\right]$

178 In una circonferenza di centro O e diametro AB, il raggio è 10 cm. Traccia per A la perpendicolare al diametro e su questa scegli un punto C, in modo che OC sia 26 cm. Traccia per C la retta perpendicolare a OC, che incontra il prolungamento di AB nel punto D. Determina il rapporto fra il perimetro del triangolo ACD e il perimetro del triangolo AOC. $\left[\frac{12}{5}\right]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Probabilità*

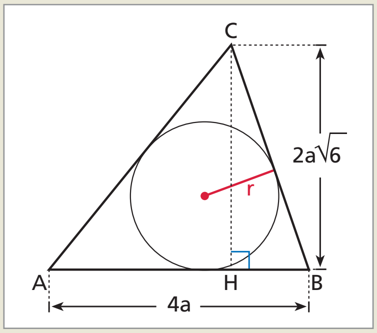
179 Data una circonferenza di centro O e raggio 12 cm, scegli un punto A distante dal centro i $\frac{25}{24}$ del raggio. Traccia da A una tangente AB alla circonferenza e da B la perpendicolare BC ad AO. Calcola il rapporto fra l'area del triangolo AOB e quella del triangolo ACB. $\left[\frac{625}{49}\right]$

180 In una circonferenza di centro O, il diametro AB è $8a$. Sul prolungamento di AB scegli un punto C in modo che BC sia un quarto del raggio. Da C traccia una tangente CE alla circonferenza e da B la perpendicolare al diametro; indica con F il punto in cui queste due rette si incontrano. Calcola il perimetro del triangolo BCF e l'area del quadrilatero $OBFE$. $\left[4a; \frac{16}{3}a^2\right]$

Il raggio del cerchio inscritto in un triangolo e del cerchio circoscritto

ESERCIZIO GUIDA

181 In un triangolo ABC la base AB misura $4a$ e l'altezza a essa riferita $2a\sqrt{6}$. Sapendo che la somma delle misure degli altri due lati è $12a$ e la loro differenza è $2a$, calcoliamo il raggio del cerchio inscritto nel triangolo e il raggio del cerchio circoscritto.



Dati e relazioni

1. $\overline{AB} = 4a$;
2. $\overline{CH} = 2a\sqrt{6}$;
3. $\overline{AC} + \overline{BC} = 12a$;
4. $\overline{AC} - \overline{BC} = 2a$.

Richieste

1. Raggio del cerchio inscritto;
2. raggio del cerchio circoscritto.

Risoluzione

Calcoliamo l'area del triangolo ABC mediante la formula $\mathcal{A} = \frac{b \cdot h}{2}$:

$$\mathcal{A} = \frac{4a \cdot 2a\sqrt{6}}{2} = 4a^2\sqrt{6}.$$

Per determinare il raggio del cerchio inscritto utilizziamo la formula $r = \frac{\mathcal{A}}{p}$, dove p indica la misura del semiperimetro.

Per calcolare p, dobbiamo trovare $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

Poniamo $\overline{AC} = x$ e $\overline{BC} = y$.

Usando i dati 3 e 4, scriviamo il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 12a \\ x - y = 2a \end{cases}$$

Risolviamo usando il metodo di riduzione:

$$\begin{cases} x + y = 12a \\ x - y = 2a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 7a \\ y = 5a \end{cases}$$

Pertanto risulta $\overline{AC} = 7a$ e $\overline{BC} = 5a$.

Calcoliamo il semiperimetro:

$$p = \frac{(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC})}{2} =$$

$$= \frac{(4a + 7a + 5a)}{2} = 8a.$$

Sostituendo nella formula $r = \frac{\mathcal{A}}{p}$, otteniamo:

$$r = \frac{4a^2\sqrt{6}}{8a} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Il raggio del cerchio circoscritto è $R = \frac{abc}{4\mathcal{A}}$.

Sostituendo, otteniamo:

$$R = \frac{4a \cdot 7a \cdot 5a}{4 \cdot 4a^2\sqrt{6}} = \frac{35a}{4\sqrt{6}} = \frac{35a\sqrt{6}}{24}.$$

182 Le misure dei lati di un triangolo sono espresse da tre numeri consecutivi e il perimetro è 42 cm. Sapendo che l'altezza relativa al lato di lunghezza intermedia è 12 cm, calcola la misura del raggio del cerchio inscritto nel triangolo. [4 cm]

183 In un triangolo *ABC*, la base *AB* è lunga 36 cm e il piede dell'altezza *CH* la divide in parti proporzionali ai numeri 5 e 7. Calcola la lunghezza del raggio del cerchio inscritto nel triangolo, sapendo che *CH* è 20 cm. [8 cm]

184 In un triangolo rettangolo, il rapporto fra i due cateti è $\frac{3}{4}$ e la lunghezza della circonferenza inscritta nel triangolo è 18π cm. Calcola la lunghezza dell'altezza relativa all'ipotenusa. Dal punto medio dell'ipotenusa traccia le parallele ai cateti, che determinano due triangoli. Calcola le lunghezze dei raggi dei cerchi inscritti nei due triangoli. [21,6 cm; 4,5 cm]

185 In un triangolo *ABC*, la base *AB* è lunga 10,5 cm e l'altezza *CH* 4 cm. Il rapporto fra gli altri due lati è $\frac{17}{10}$ e l'altezza *CH* è i $\frac{4}{5}$ del lato minore. Calcola la lunghezza del raggio del cerchio inscritto e quella del raggio del cerchio circoscritto al triangolo. [1,75 cm; 5,3125 cm]

186 In un triangolo scaleno, la differenza fra il lato maggiore e quello minore è 22 cm, mentre il terzo lato supera il minore di 14 cm. Il perimetro del triangolo è 96 cm e l'altezza relativa al lato minore è 33,6 cm. Calcola l'area della corona circolare delimitata dal cerchio circoscritto al triangolo e dal cerchio inscritto. [1264,69 cm^2]

187 Le lunghezze dei lati di un triangolo sono proporzionali ai numeri 4, 5 e 7, e il perimetro è 48 cm. L'altezza relativa al lato minore è $6\sqrt{6}$ cm. Calcola:

a) la lunghezza delle altre due altezze;
b) la lunghezza del raggio del cerchio inscritto nel triangolo;
c) la lunghezza del raggio del cerchio circoscritto.

$\left[\text{a) } \frac{24}{5}\sqrt{6}\text{ cm; } \frac{24}{7}\sqrt{6}\text{ cm; b) } \frac{3}{2}\sqrt{6}\text{ cm; c) } \frac{35}{8}\sqrt{6}\text{ cm}\right]$

188 I lati di un triangolo, ordinati in senso crescente, differiscono ciascuno dal successivo di 2 cm. L'area del triangolo è 336 cm^2 e il raggio del cerchio in esso inscritto è 8 cm. Calcola le lunghezze dei tre lati.
Una retta parallela a un lato interseca i prolungamenti degli altri due lati in modo da formare un nuovo triangolo. Sapendo che il raggio del cerchio inscritto in tale triangolo è lungo 12 cm, calcola l'area di quest'ultimo. [26 cm; 28 cm; 30 cm; 756 cm^2]

189 Nel triangolo rettangolo *ABC*, il cateto *AC* è maggiore del cateto *AB* e l'altezza *AH* divide l'ipotenusa *BC* in due parti, di cui la minore è lunga 18 cm. La circonferenza di diametro *AH* interseca il cateto *AB* nel punto *E* e il cateto *AC* nel punto *F*. Dimostra che il quadrilatero *AEHF* è un rettangolo. Le dimensioni di tale rettangolo sono 14,4 cm e 19,2 cm. Calcola il rapporto fra i raggi delle circonferenze circoscritte ai triangoli *CHF* e *HBE*. $\left[\frac{16}{9}\right]$

La formula di Erone

ESERCIZIO GUIDA

190 I lati di un triangolo *ABC* sono proporzionali ai numeri 4, 3 e 6 e il perimetro è 65 cm.
Calcoliamo l'area del triangolo.

Dati e relazioni 1. $\overline{AC} : 4 = \overline{BC} : 3 = \overline{AB} : 6$;
2. $2p = 65$.

Richiesta $\mathcal{A}(ABC)$

Risoluzione

Indichiamo con x la misura di un sottomultiplo comune dei tre lati:

$$\overline{AC} = 4x, \quad \overline{BC} = 3x, \quad \overline{AB} = 6x.$$

La misura del perimetro in funzione di x è:

$$2p = \overline{AC} + \overline{BC} + \overline{AB} = 4x + 3x + 6x = 13x.$$

Uguagliamola a 65:

$$13x = 65 \rightarrow x = \frac{65}{13} = 5.$$

Calcoliamo le misure dei lati:

$$\overline{AC} = 4x = 4 \cdot 5 = 20$$
$$\overline{BC} = 3x = 3 \cdot 5 = 15$$
$$\overline{AB} = 6x = 6 \cdot 5 = 30.$$

Calcoliamo la misura dell'area $\mathcal{A}$ con la formula di Erone:

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Per il dato 2, si ha $p = \frac{65}{2}$, quindi:

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{65}{2} \cdot \left(\frac{65}{2} - 20\right) \cdot \left(\frac{65}{2} - 15\right) \cdot \left(\frac{65}{2} - 30\right)} =$$
$$= \sqrt{\frac{65}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{35}{2} \cdot \frac{5}{2}} =$$
$$= \sqrt{5^4 \cdot \frac{455}{2^4}} = \frac{25}{4}\sqrt{455}.$$

L'area del triangolo è $\frac{25}{4}\sqrt{455}$ cm^2.

191 I lati di un triangolo, ordinati secondo lunghezze crescenti, sono tali che il secondo supera di $2k$ il primo e il terzo supera di $2k$ il secondo. Il perimetro del triangolo è $30k$. Calcola l'area del triangolo e l'altezza relativa a ogni lato.
$\left[15\sqrt{7}k^2; \frac{15}{4}\sqrt{7}k; 3\sqrt{7}k; \frac{5}{2}\sqrt{7}k\right]$

192 Il perimetro di un triangolo è 16 cm. Due lati differiscono fra loro di 1 cm, mentre il terzo lato è di 2 cm più lungo del più grande dei due. Calcola l'area del triangolo e i raggi dei cerchi inscritto e circoscritto.
$\left[4\sqrt{6}\text{ cm}^2; \frac{\sqrt{6}}{2}\text{ cm}; \frac{35}{24}\sqrt{6}\text{ cm}\right]$

193 Un triangolo ABC ha il perimetro di 130 cm. Uno dei lati è 40 cm e gli altri due sono l'uno il doppio dell'altro. Calcola l'area del triangolo. Supponiamo che il lato di 40 cm sia AB: chiamiamo M il suo punto medio, tracciamo la parallela al lato AC passante per M e chiamiamo N il punto in cui questa interseca il lato BC. Determina i raggi delle circonferenze inscritte nei triangoli ABC e MNB. Verifica infine che il rapporto fra i raggi è 2.
$[25\sqrt{455}\text{ cm}^2]$

194 In un triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa è 12 cm e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è i $\frac{4}{5}$ del cateto stesso. Calcola l'area del triangolo in tre modi diversi. L'altezza relativa all'ipotenusa suddivide il triangolo in altri due triangoli, in ciascuno dei quali viene inscritto un cerchio. Determina il rapporto fra i raggi dei due cerchi.
$\left[150\text{ cm}^2; \frac{4}{3}\right]$

195 In un triangolo i lati, ordinati secondo le lunghezze crescenti, sono tali che il primo è la metà dell'ultimo e il secondo supera il primo di 2 cm. Il perimetro del triangolo è 18 cm. Calcola la lunghezza delle tre altezze e del raggio del cerchio inscritto.
$\left[\frac{3}{2}\sqrt{15}\text{ cm}; \sqrt{15}\text{ cm}; \frac{3}{4}\sqrt{15}\text{ cm}; \frac{\sqrt{15}}{3}\text{ cm}\right]$

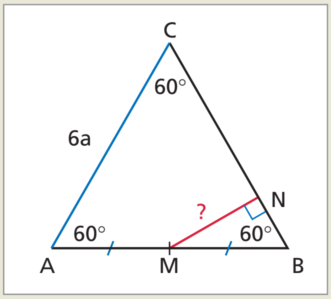
I triangoli con angoli di 30°, 60°, 45°

ESERCIZIO GUIDA

196 Dato un triangolo equilatero di lato che misura $6a$, mandiamo dal punto medio M della base AB la perpendicolare al lato BC. Indicato con N il piede della perpendicolare, calcoliamo $\overline{MN}$.

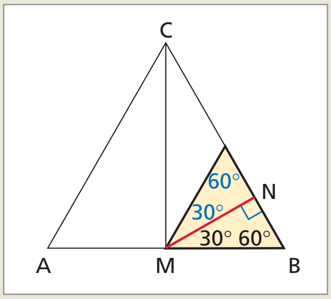
Dati e relazioni
1. ABC è equilatero;
2. $\overline{AC} = 6a$;
3. $AM \cong MB$.

Richiesta
$\overline{MN}$



Risoluzione
La perpendicolare MN individua un triangolo rettangolo MNB che, avendo un angolo di 60°, ha l'altro angolo acuto di 30°.

Congiungiamo M con C e troviamo un altro triangolo rettangolo, MBC, anch'esso con gli angoli di 60° e 30°.



I due triangoli MNB e MBC sono simili, quindi vale la proporzione:

$$\overline{MB} : \overline{CB} = \overline{MN} : \overline{MC}.$$

Possiamo calcolare $\overline{MC}$ mediante il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo MBC:

$$\overline{MC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{MB}^2 \to \overline{MC}^2 = (6a)^2 - (3a)^2 = 27a^2$$

$$\overline{MC} = 3a\sqrt{3}$$

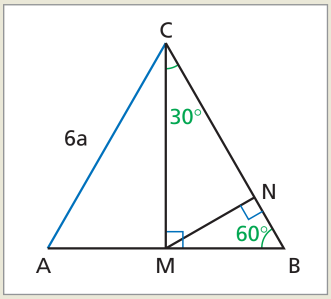
$$3a : 6a = \overline{MN} : 3a\sqrt{3} \to \overline{MN} = \frac{3}{2}a\sqrt{3}.$$

Osservazione. Per calcolare $\overline{MN}$ possiamo usare anche la formula dell'altezza del triangolo equilatero applicata al triangolo MBN, cioè

$$\overline{MN} = \overline{MB}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

e, poiché $\overline{MB} = 3a$, risulta ancora:

$$\overline{MN} = 3a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}a\sqrt{3}.$$



197 Un triangolo isoscele ha l'angolo al vertice di 120° e l'area di $400\sqrt{3}$ cm². Calcola il perimetro del triangolo e il raggio della circonferenza inscritta.
(Suggerimento. Indica con x la misura dell'altezza del triangolo.) [$40(\sqrt{3} + 2)$ cm; $20(2\sqrt{3} - 3)$ cm]

198 Un triangolo ABC ha gli angoli alla base di 45° e di 60°. Il raggio del cerchio a esso circoscritto è $8\sqrt{6}$ cm. Calcola il perimetro del triangolo. [$24(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm]

199 Disegna un triangolo equilatero ABC e la bisettrice dell'angolo esterno di vertice C. Traccia da B la perpendicolare al lato AB, che interseca la bisettrice nel punto E. L'area del quadrilatero $ABEC$ è $\frac{18}{\sqrt{3}}$ cm². Calcola il perimetro di $ABEC$.
[$2(5 + \sqrt{3})$ cm]

200 Un parallelogramma $ABCD$ ha BC lungo 2 cm, AB doppio di BC e l'angolo $\hat{A}$ di 60°. Fissa su CD un punto P e su AB un punto Q in modo che DP sia la metà di AQ. Determina la lunghezza di AQ, sapendo che la somma delle aree dei quadrati di lati DQ e BP è 12,8 cm^2. [0,8 cm, oppure 3,2 cm]

201 Un trapezio isoscele di area $16a^2$ ha gli angoli alla base di 60°. Determina il raggio del cerchio inscritto nel trapezio. $\left[\sqrt{2}\sqrt[4]{3}\,a\right]$

202 Un triangolo rettangolo ABC ha i cateti AB e AC che misurano rispettivamente b e $b\sqrt{3}$. Sulla bisettrice dell'angolo $\hat{B}$ determina un punto Q tale che la somma delle distanze di Q dall'ipotenusa e dal vertice A misuri $\dfrac{b\sqrt{3}}{2}$. $\left[\overline{QB} = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}\right]$

203 In un triangolo AOP, la base AO misura $2l$ e l'angolo in O è di 30°. Traccia da O la semiretta perpendicolare al lato OP, giacente nello stesso semipiano del triangolo rispetto alla retta AO. Su tale perpendicolare considera un punto B tale che OB sia lungo l. Calcola la misura del segmento OP, sapendo che vale la seguente relazione: $\overline{PA}^2 + \overline{BP}^2 = 5l^2$. $[l\sqrt{3}]$

204 Un triangolo ABC ha i lati AC e BC lunghi rispettivamente 3 cm e 2 cm e l'angolo $\hat{C}$ di 60°.
a) Calcola il perimetro del triangolo.
b) Sul lato AC determina il punto E e sul lato BC il punto F tali che $\overline{AE} = \overline{FB}$. Calcola la lunghezza di AE sapendo che vale la seguente relazione:
$$\overline{AE}^2 + \overline{EF}^2 + \overline{FB}^2 + \overline{AB}^2 = \frac{25}{2}.$$
$\left[(5+\sqrt{7})\text{ cm}; \dfrac{5 \pm \sqrt{7}}{6}\text{ cm}\right]$

Le aree e i volumi dei solidi di rotazione

205 L'altezza di un cilindro circolare retto è $\dfrac{23}{8}$ del diametro di base e la superficie totale è equivalente alla superficie di una sfera di raggio 6 cm. Determina il raggio e l'altezza del cilindro. $\left[\dfrac{4}{3}\sqrt{6}\text{ cm}; \dfrac{23}{3}\sqrt{6}\text{ cm}\right]$

206 Un cubo ha la superficie totale di 216 cm^2. Determina l'area della superficie della sfera inscritta e quella della sfera circoscritta al cubo. [36π cm^2; 108π cm^2]

207 L'apotema di un cono è i $\dfrac{5}{4}$ della sua altezza. Sapendo che l'area della superficie laterale misura 60π cm^2, calcola l'area della superficie totale del cono. [96π cm^2]

208 Il raggio e l'altezza di un cono circolare retto sono rispettivamente 10 cm e 24 cm. Determina di quanto si deve diminuire il raggio affinché l'area della superficie totale diventi $\dfrac{28}{45}$ di quella data. [3 cm]

209 In un triangolo rettangolo, il rapporto fra l'ipotenusa e un cateto è $\dfrac{5}{3}$ e l'area della superficie del solido ottenuto da una rotazione completa del triangolo attorno all'ipotenusa è 420π m^2. Determina il perimetro del triangolo. [60 m]

210 Il raggio di base di un cilindro è 6 cm e l'altezza 9 cm. Determina sull'asse un punto V tale che sia 4 il rapporto fra i volumi dei due coni aventi per basi le basi del cilindro e per vertice il punto V. $\left[\dfrac{36}{5}\text{ cm oppure } \dfrac{9}{5}\text{ cm}\right]$

211 In un cilindro, la superficie laterale è equivalente ai $\frac{4}{7}$ di quella totale. Sapendo che l'altezza del cilindro è 12 cm, determina il volume della sfera che ha raggio congruente alla metà del raggio di base del cilindro. $\left[\frac{243}{2}\pi\ \text{cm}^3\right]$

212 Un solido è costituito da un cilindro sulle cui basi sono state sovrapposte due semisfere aventi i cerchi massimi coincidenti con le basi del cilindro. Sapendo che l'altezza del cilindro è 7 cm e che l'area della superficie totale del solido è 44π cm^2, calcola il volume del solido. $\left[\frac{116}{3}\pi\ \text{cm}^3\right]$

213 Un triangolo rettangolo ha un cateto di 9 cm. La somma dei volumi dei due solidi ottenuti dalla rotazione completa del triangolo attorno a ciascuno dei suoi cateti è 756π cm^3. Calcola l'area del triangolo dato. [54 cm^2]

214 In un triangolo rettangolo, un cateto è $\frac{15}{8}$ dell'altro e l'altezza relativa all'ipotenusa è lunga $\frac{240}{17}$ cm. Ruota il triangolo di 360° attorno all'ipotenusa e calcola l'area della superficie e il volume del solido così ottenuto. $\left[\frac{11\,040}{17}\pi\ \text{cm}^2; \frac{38\,400}{17}\pi\ \text{cm}^3\right]$

RIEPILOGO LA SIMILITUDINE. LA CIRCONFERENZA E IL CERCHIO

Nel sito: ▶ 20 esercizi in più

215 Calcola la misura dell'area del cerchio inscritto e di quello circoscritto a un esagono regolare di lato che misura *l*. $\left[\frac{3}{4}\pi l^2; \pi l^2\right]$

216 Un quadrilatero *ABCD*, con le diagonali perpendicolari, è inscritto in una circonferenza e la diagonale *AC* coincide col diametro. L'area del quadrilatero è $312k^2$ e il rapporto tra diagonali è $\frac{12}{13}$. Calcola l'area del cerchio. [$169\pi k^2$]

217 Il diametro di una circonferenza è diviso da una corda a esso perpendicolare in due parti il cui rapporto è $\frac{9}{16}$; la lunghezza della corda è 24 cm. Determina la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio. $\left[25\pi\ \text{cm}; \frac{625}{4}\pi\ \text{cm}^2\right]$

218 Un triangolo acutangolo *ABC*, di area 4,5 dm^2, ha l'altezza congruente alla base. Inscrivi nel triangolo un quadrato avente un lato sulla base. Calcola il perimetro del quadrato. [6 dm]

219 Le basi di un trapezio isoscele circoscritto a una circonferenza sono lunghe 24 cm e 54 cm. Calcola la lunghezza della circonferenza. [36π cm]

220 Verifica che un cerchio è equivalente alla corona circolare avente per raggi i lati del triangolo equilatero e del quadrato inscritti nel cerchio.

221 Disegna un circonferenza di diametro *AB* e una circonferenza di diametro *AE*, tangente internamente alla prima nel punto *A*. Traccia per *E* la corda *CD* tangente alla circonferenza minore. Sapendo che *CD* è $48a$ e *BE* è $18a$, determina i raggi delle due circonferenze. [$16a$; $25a$]

222 Il raggio maggiore di una corona circolare è i $\frac{7}{3}$ del minore e si sa che la differenza fra $\frac{1}{4}$ del primo e $\frac{1}{3}$ del secondo è 3 cm. Calcola l'area della corona circolare e il rapporto fra il perimetro del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza maggiore e il perimetro del quadrato circoscritto alla circonferenza minore. $\left[640\pi\ \text{cm}^2; \frac{7\sqrt{3}}{8}\right]$

223 Il triangolo isoscele ABC, di base AB lunga 32 cm, è inscritto in una circonferenza. La differenza fra il diametro e l'altezza relativa alla base è 4 cm. Determina l'area del triangolo e la lunghezza della circonferenza. $[1024\ \text{cm}^2; 68\pi\ \text{cm}]$

224 In un triangolo, il lato maggiore è doppio di quello minore; il lato di lunghezza intermedia supera di 2 cm il minore. Sapendo che il perimetro è 42 cm, calcola l'area e i raggi dei cerchi inscritto e circoscritto al triangolo.
$$\left[3\sqrt{231}\ \text{cm}^2; \frac{\sqrt{231}}{7}\ \text{cm}; 200\frac{\sqrt{231}}{231}\ \text{cm}\right]$$

225 L'area di un triangolo è $24\sqrt{6}\,b^2$ e il raggio del cerchio inscritto è $\frac{4}{3}\sqrt{6}\,b$. I lati, ordinati secondo lunghezze crescenti, sono tali che il secondo supera il primo di $2b$ e il terzo supera il secondo ancora di $2b$. Determina i lati del triangolo e il raggio del cerchio circoscritto.
$$\left[10b; 12b; 14b; \frac{35}{12}\sqrt{6}\,b\right]$$

226 In un triangolo rettangolo, un cateto supera di $2a$ il doppio dell'altro cateto e l'ipotenusa supera di a il cateto maggiore. Calcola l'area del triangolo e il raggio del cerchio inscritto. $[30a^2; 2a]$

227 In un triangolo rettangolo, il cateto minore è $6a$. La somma del doppio della proiezione del cateto maggiore sull'ipotenusa con il triplo dell'altra proiezione è uguale a $23{,}6a$. Calcola il perimetro del triangolo e i raggi del cerchio inscritto e del cerchio circoscritto. $[24a; 2a; 5a]$

228 Il raggio maggiore di una corona circolare è 50 cm. Conduci per un punto P sulla circonferenza di raggio maggiore le tangenti alla circonferenza di raggio minore e indica con A e B i punti di tangenza. Sapendo che AB è 48 cm, calcola l'area della corona circolare.
$[1600\pi\ \text{cm}^2$, oppure $900\pi\ \text{cm}^2]$

229 Sia AB una corda di una circonferenza di centro O. Per i punti A e B si traccino le tangenti alla circonferenza e sia C il loro punto d'incontro. Dato che AB è 24 cm e che l'area di $ACBO$ è 300 cm², calcola l'area del cerchio.
$[225\pi\ \text{cm}^2$, oppure $400\pi\ \text{cm}^2]$

230 Due circonferenze di centri O e O' sono tangenti esternamente nel punto T. Una retta tangente a entrambe tocca la prima circonferenza nel punto R e la seconda nel punto R'. La distanza fra i centri è 17 cm e il segmento RR' è 15 cm. Calcola le aree dei due cerchi e l'area del quadrilatero $OO'R'R$. $\left[\frac{625}{4}\pi\ \text{cm}^2; \frac{81}{4}\pi\ \text{cm}^2; \frac{255}{2}\ \text{cm}^2\right]$

231 Un rettangolo di perimetro 28 dm è inscritto in un triangolo di base $AB = 16$ dm e altezza $CH = 12$ dm. Calcola le dimensioni del rettangolo.
[8 dm; 6 dm]

232 Data una semicirconferenza di diametro AB, traccia la retta tangente nel punto A e considera su questa, dalla parte della semicirconferenza, un segmento AD lungo 18 cm. Congiungi B con D e indica con C il punto intersezione di BD con la semicirconferenza. Sapendo che DC è lungo 10,8 cm, determina la lunghezza della semicirconferenza e l'area del semicerchio. $[12\pi\ \text{cm}; 72\pi\ \text{cm}^2]$

233 Inscrivi in una circonferenza di raggio $a\sqrt{3}$ un rettangolo di area $3a^2\sqrt{3}$. Determina il perimetro del rettangolo. $[2(\sqrt{3}+3)a]$

234 In una circonferenza di centro O, considera una corda AB lunga $6a\sqrt{2}$ e, sul suo prolungamento dalla parte di B, un punto C tale che $\frac{AB}{BC} = 2\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$. Da C traccia una tangente alla circonferenza; siano D il punto di tangenza, E il punto di intersezione del raggio OD con la corda AB, H il piede della perpendicolare da O ad AB. Sapendo che DE è $a\sqrt{3}$, calcola:
a) la lunghezza di CD;
b) l'area del triangolo DCE. $\left[\text{a) } 3a; \text{b) } \frac{3}{2}\sqrt{3}a^2\right]$

235 Disegna una circonferenza di centro O e raggio $2r$. Disegna un'altra circonferenza tangente esternamente alla prima nel punto P, di centro O' e raggio r. Traccia nella circonferenza di centro O una corda PA e nella circonferenza di centro O' una corda PB, entrambe nello stesso semipiano rispetto alla retta OO' e tali che $PA \cong 2PB$. Supponi inoltre che $B\hat{P}O'$ sia 30°. Determina:
a) PA e PB;
b) il perimetro del triangolo PBA.
$[\text{a) } 2r\sqrt{3}, r\sqrt{3}; \text{b) } 3\sqrt{3}r + r\sqrt{21}]$

236 In un triangolo equilatero ABC, di lato che misura l, disegna, con centro sulla base AB, una semicirconferenza che interseca AC in A ed E, AB in A e D. Sapendo che $\overline{ED}^2 + \overline{DB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{EC}^2 = \frac{48}{25}l^2$, determina il raggio della circonferenza. $\left[\frac{3}{10}l, \text{ oppure } \frac{9}{20}l\right]$

237 Il diametro della circonferenza inscritta in un triangolo rettangolo è 6 cm. Determina il perimetro del triangolo, sapendo che il diametro della circonferenza circoscritta è 17 cm. [40 cm]

238 In un triangolo equilatero di lato a determina sull'altezza relativa alla base un punto P tale che la somma delle sue distanze dai vertici del triangolo sia $\frac{\sqrt{27}}{2}a$. [impossibile, soluzioni non accettabili]

239 In una semicirconferenza di centro O e diametro AB lungo $2r$, considera una corda AD lunga r. Determina sulla retta AB un punto C tale che la sua distanza da A superi di $(3 - \sqrt{7})\,r$ la sua distanza da D. $\left[AC = 3r\right]$

240 Un quadrato, di lato 10 cm, viene suddiviso da una parallela a una diagonale in un triangolo e in un pentagono tali che il rapporto tra le loro aree è $\frac{2}{3}$. Calcola area e perimetro dei due poligoni.
[40 cm^2; 60 cm^2; $4\sqrt{5}(2+\sqrt{2})$ cm; $40 + 4\sqrt{5}(\sqrt{2} - 2)$ cm]

241 Nel trapezio rettangolo $ABCD$, la diagonale maggiore BD, bisettrice dell'angolo $\hat{B}$, forma con la base maggiore un angolo di 30°. Sapendo che il lato AD, perpendicolare alle basi, misura $3a\sqrt{7}$, determina su di esso un punto P tale che la sua distanza dal punto B sia in rapporto $\frac{\sqrt{7}}{2}$ con la sua distanza dal punto C. $\left[\overline{PD} = 2a\sqrt{7}\right]$

242 Considera una semicirconferenza di centro O e diametro AB lungo $2r$. Nel quarto di circonferenza $\widehat{BC}$, considera un punto P; indica con Q la sua proiezione su OC e con E il punto di intersezione dei prolungamenti di AQ e di OP. Determina OQ e PQ in modo che il triangolo QPE abbia area pari a $\frac{1}{3}$ di quella del trapezio $AOPQ$. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}r; \frac{1}{2}r\right]$

243 Sul diametro AB, di lunghezza $2r$, di una circonferenza, determina due punti C e D tali che $AD : AC = 15 : 4$. Traccia per C e per D le corde EF e HK, perpendicolari al diametro. Determina AC in modo che il prodotto delle misure delle due corde sia uguale a $\frac{32}{45}\sqrt{3} \cdot \overline{AD}^2$. $\left[\frac{2}{5}r\right]$

244 In un rettangolo $ABCD$, la base AB è doppia dell'altezza BC e la diagonale AC è $5\sqrt{5}a$. Su questa diagonale fissa un punto P tale che i segmenti PC e PA risultino proporzionali ai numeri 4 e 1. Traccia per P la parallela all'altra diagonale, in modo che intersechi AB in Q e AD in R. Determina area e perimetro del pentagono $QBCDR$. $[46a^2; 2(12 + \sqrt{5})a]$

245 In un triangolo isoscele ABC, l'altezza AM è i $\frac{6}{5}$ della base BC e la circonferenza a esso circoscritta è lunga $\frac{169}{6}\pi$ cm. Determina il perimetro del triangolo ABC. Dal punto M traccia il segmento MN parallelo al lato AB e calcola l'area del trapezio $ABMN$. [72 cm; 180 cm^2]

246 Dato un angolo di vertice O e ampiezza 60°, considera su un suo lato il punto A, che dista $3a$ da O, e sull'altro il punto B, che dista a da O. Sulla bisettrice dell'angolo determina un punto P tale che la somma dei quadrati delle sue distanze da A e da B sia $\frac{62}{3}a^2$.
Calcola la distanza del punto P da O. $\left[\frac{8\sqrt{3}}{3}a\right]$

247 Su una circonferenza di centro O e diametro AB lungo $2r$, determina un punto P tale che il trapezio che ha per lati il diametro e le tangenti alla circonferenza per A, per B e per P abbia perimetro uguale a $8r$. Trova la distanza di P dal diametro. $\left[\frac{2}{3}r\right]$

248 Disegna un triangolo equilatero ABC e sulla base AB scegli due punti P e Q. Traccia da P e da Q le perpendicolari ad AB che intersecano, rispettivamente, AC in N e BC in M, in modo che NM risulti perpendicolare a BC. Sapendo che il lato del triangolo ABC è l e che l'area del trapezio $PQMN$ è $\frac{1}{10}\sqrt{3}\,l^2$, determina la lunghezza di AP. $\left[\left(\frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{5}}{15}\right)l\right]$

249 Disegna una circonferenza di centro O e prolunga un diametro AB dalla parte di A di un segmento AP tale che, conducendo da P una secante alla circonferenza, determini con questa una corda CD lunga come il raggio r. La somma delle distanze di P da A e da C è uguale alla lunghezza del lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza. Determina:
a) il perimetro del triangolo PCO;
b) l'ampiezza dell'angolo $C\hat{P}A$.
[a) $r(2+\sqrt{3})$; b) 30°]

250 Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa BC lunga $2a$ e il cateto AB lungo a. Dal vertice B traccia una semiretta, esterna al triangolo, che forma con BC un angolo di 60°, e dal vertice C traccia un'altra semiretta, sempre esterna al triangolo, che forma con AC un angolo di 120°, poi indica con E il loro punto di intersezione. Determina:
a) il raggio della circonferenza inscritta in ABC;
b) l'area e il perimetro del quadrilatero $ABEC$;
c) il rapporto tra le aree dei due triangoli in cui il quadrilatero viene diviso dalla diagonale BC.
$\left[\text{a) } \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}a;\ \text{b) } \frac{5}{2}a^2\sqrt{3};\ (5+3\sqrt{3})a;\ \text{c) } \frac{1}{4}\right]$

251 Si considerino due circonferenze, rispettivamente di centro A e A' e di raggio 9 e 1, tangenti esternamente nel punto O.
Sia r la tangente comune in O e s una retta tangente a entrambe le circonferenze nei punti B e B'. Detto C il punto di intersezione delle rette r e s, si dimostri che i triangoli ACA' e BOB' sono rettangoli e si calcoli il rapporto delle loro aree.
(*Maturità scientifica, 1990/91*) $\left[\frac{25}{9}\right]$

252 La base BC di un triangolo isoscele ABC è i $\frac{16}{15}$ dell'altezza AH, e il lato è lungo 17 cm. Inscrivi nel triangolo la circonferenza e traccia la retta tangente a essa, parallela alla base del triangolo. Indica con M e N i punti in cui tale retta interseca i lati AB e AC del triangolo. Determina:
a) l'area del triangolo ABC;
b) la lunghezza della circonferenza;
c) il perimetro del triangolo AMN;
d) il rapporto fra l'area del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza e l'area del quadrato inscritto.
$\left[\text{a) } 120\text{ cm}^2;\ \text{b) } \frac{48}{5}\pi\text{ cm};\ \text{c) } 18\text{ cm};\ \text{d) } 3\frac{\sqrt{3}}{8}\right]$

253 Un triangolo rettangolo ABC ha i cateti AB e AC rispettivamente di 45 cm e 24 cm. Sia D il punto dell'ipotenusa che la divide in due segmenti BD e CD, proporzionali ai numeri 1 e 2. Conduci da D la perpendicolare DE ad AB e dal punto E la perpendicolare EF all'ipotenusa BC. Calcola:
a) l'area del poligono $AEDC$;
b) il perimetro del triangolo DEF;
c) la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio inscritto nel triangolo EBF.
$\left[\text{a) } 480\text{ cm}^2;\ \text{b) } \frac{320}{17}\text{ cm};\ \text{c) } \frac{90}{17}\pi\text{ cm},\ \frac{2025}{289}\pi\text{ cm}^2\right]$

254 Un rettangolo $ABCD$ è inscritto in una circonferenza di raggio r. Sapendo che l'area del rettangolo è $1{,}92r^2$, determina:
a) il perimetro del rettangolo;
b) l'area del quadrilatero formato dalle tangenti alla circonferenza nei vertici del rettangolo.
Dimostra infine che il quadrilatero è un rombo.
$\left[\text{a) } 5{,}6r;\ \text{b) } \frac{25}{6}r^2\right]$

255 Disegna un triangolo ABC di base AB lunga $40a$, maggiore degli altri lati, e altezza CH lunga $12a$. Le proiezioni dei lati AC e BC su AB sono l'una i $\frac{2}{3}$ dell'altra. Traccia per B la perpendicolare a BC, che interseca il prolungamento di CA nel punto E. Determina:
a) il perimetro del triangolo ABC;
b) il raggio della circonferenza inscritta e quello della circonferenza circoscritta al triangolo ABE.
[a) $12(5+\sqrt{5})a$; b) $4(5-\sqrt{5})a$, $20\sqrt{5}a$]

256 Disegna un triangolo rettangolo ABC, rettangolo in A, e sul cateto AB fissa un punto E in modo che la semicirconferenza di diametro AE sia inscritta nel triangolo. Indica con O il centro della semicirconferenza e con F il punto di tangenza con l'ipotenusa BC. Sapendo che AE è $2r$ e che il perimetro del triangolo OBF è $r(3+\sqrt{3})$, determina:
a) il segmento EB;
b) il perimetro del triangolo ABC;
c) dopo aver dimostrato che il quadrilatero $AOFC$ è circoscrivibile a una circonferenza, calcola il raggio.
$\left[\text{a) } r;\ \text{b) } 3r(1+\sqrt{3});\ \text{c) } \frac{3-\sqrt{3}}{2}r\right]$

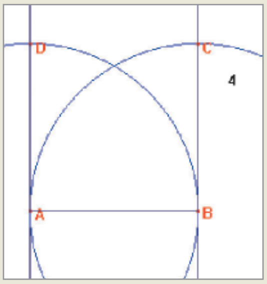
LABORATORIO DI MATEMATICA

La lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio con Cabri

ESERCITAZIONE GUIDATA

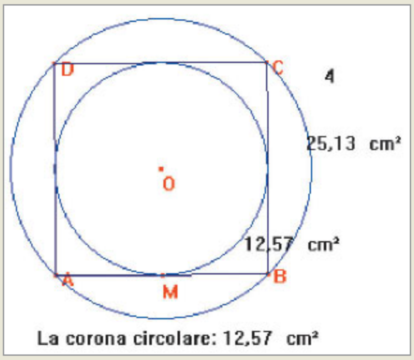
Calcoliamo l'area della corona circolare compresa fra le circonferenze inscritta e circoscritta a un quadrato, con il lato prima lungo 4 cm, poi 3 cm.

- Attiviamo Cabri e costruiamo un quadrato di lato 4.
- Con *Visualizza_Numeri* immettiamo il numero 4, con *Punti_Punto* il punto A, con *Disegna_Compasso*, applicato ad A e al numero 4, otteniamo una circonferenza di raggio 4 sulla quale evidenziamo il punto B (figura 1).
- Con *Rette_Segmento* tracciamo il segmento AB, con gli strumenti di Cabri realizziamo il quadrato di lato AB e nascondiamo le linee della costruzione.
- Con *Costruisci_Punto medio*, evidenziamo rispettivamente i punti O e M che permettono di ricavare con *Curve_Circonferenza* le circonferenze circoscritta e inscritta al quadrato (figura 2).
- Con *Misura_Area* determiniamo l'area del cerchio circoscritto al quadrato e quella del cerchio inscritto.
- Con *Misura_Calcolatrice* attiviamo la calcolatrice e facciamo clic, di seguito, sul dato di un'area, sul segno meno, sul dato dell'altra area e sull'uguale, ottenendo la loro differenza.
- Stacchiamo il risultato dalla calcolatrice, lo portiamo nella zona del disegno e a fianco di esso scriviamo: `La corona circolare:`.
- Per cambiare la lunghezza di AB, facciamo clic sul numero 4 e digitiamo 3, ottenendo 7,07 cm^2 per l'area della corona circolare.



◄ Figura 1

▼ Figura 2



Nel sito: ► **1 esercitazione guidata con Cabri** ► **16 esercitazioni in più**

Esercitazioni

Risolvi i seguenti problemi con il computer.

1 Il raggio di una circonferenza è lungo 6 cm. Costruisci il triangolo equilatero inscritto e calcola la misura dell'area compresa fra la circonferenza e il triangolo. Incrementa la lunghezza del raggio di 2 cm e poi di altri 2 cm e calcola in corrispondenza l'area indicata.

2 Il lato e la diagonale minore di un rombo sono lunghi rispettivamente 10 cm e 12 cm. Costruisci il rombo e la circonferenza inscritta. Determina la differenza delle misure delle loro aree. Poni la lunghezza della diagonale a 10 cm e poi a 8 cm e determina le differenze delle misure delle aree corrispondenti.

3 Costruisci un esagono regolare con il lato di 5 cm. Calcola la misura dell'area compresa fra la circonferenza circoscritta e l'esagono e quella compresa fra l'esagono e la circonferenza inscritta. Calcola poi le medesime aree con il lato posto a 4 cm, poi a 3 cm.

4 Costruisci una circonferenza con il diametro AB di lunghezza 10 cm. Determina la misura del lato del pentagono regolare inscritto nella circonferenza. Decrementa la lunghezza del diametro di 3 cm e poi di altri 3 cm e calcola le misure dei lati corrispondenti.

Matematica per il cittadino

EUROWHEEL

Al parco di Mirabilandia, fra Rimini e Ravenna, si trova la ruota panoramica più alta d'Europa. Costruita nel 1999, è una delle attrazioni simbolo del complesso. Il suo raggio è di 42 m. Il viaggio a bordo di una delle 50 cabine dura 11 minuti.

1. Considerando l'approssimazione $\pi \simeq 3{,}14$, qual è la lunghezza in metri dell'arco tra due cabine successive?

- A 2,64
- B 263,76
- C 5,28
- D 1,68

E l'area in m^2 del settore circolare relativo?

- A 110,78
- B 2,64
- C 5538,96
- D 35,28

2. Sapendo che ogni cabina trasporta 8 persone e supponendo che tutte le cabine siano sempre a pieno carico, calcola il numero massimo di persone che possono essere trasportate in 3 ore e 40 minuti.

A 1000 B 400 C 800 D 8000

3. Supponi che la ruota panoramica giri con moto circolare uniforme, cioè a velocità costante. In questo caso, si chiama *velocità scalare v* di una cabina il rapporto fra un arco di circonferenza percorso e il tempo impiegato a percorrerlo; inoltre, si definisce *velocità angolare* ω il rapporto fra l'angolo al centro spazzato dal raggio (che unisce il centro e la cabina) e il tempo impiegato a spazzarlo.
Calcola la velocità scalare e quella angolare di una cabina, esplicitando i passaggi delle operazioni compiute.

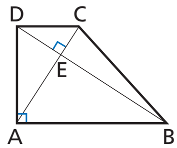
4. Se sei in coda e hai davanti circa 1300 persone, quanti minuti dovrai aspettare prima di salire sulla ruota panoramica?

Verifiche di fine capitolo

TEST

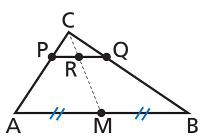
Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 20 test interattivi in più

1 Nel trapezio rettangolo $ABCD$ le diagonali sono perpendicolari; allora risultano simili i triangoli:



A soltanto CDE e ABE.
B soltanto ADE e BCE.
C ADE, ABE, CDE.
D BCE, ABE, CDE.
E soltanto CDE e BCE.

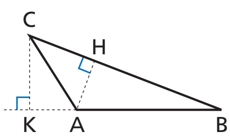
2 Nel triangolo ABC in figura il segmento CM è mediana e il segmento PQ è parallelo alla base AB.



Soltanto una delle seguenti relazioni è *falsa*. Quale?

A $PR \cong RQ$
B $CR : RM = PR : AM$
C $PQC \approx ABC$
D $CR : CM = PQ : AB$
E $Area_{PQC} : Area_{ABC} = \overline{CR}^2 : \overline{CM}^2$

3 Nel triangolo ABC in figura i segmenti AH e CK sono le altezze relative ai lati BC e AB.



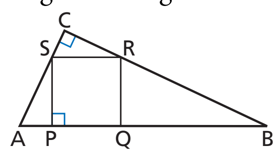
Allora possiamo dire che:

A il triangolo ACK è simile al triangolo ABH
B $AB : BC = CK : AH$
C $AH : BC = CK : AB$
D $ACK \cong ACH$
E $AB : BC = AH : CK$

4 I cerchi $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ hanno rispettivamente raggio r_1 e r_2. Se l'area di $\mathscr{C}_2$ è doppia dell'area di $\mathscr{C}_1$, allora:

A $r_2 = r_1$
B $r_2 = \dfrac{1}{2} r_1$
C $r_2 = \sqrt{2} \cdot r_1$
D $r_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} r_1$
E $r_2 = 4r_1$

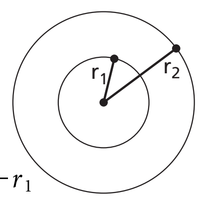
5 Il quadrato $PQRS$, illustrato nella figura, è inscritto nel triangolo rettangolo ABC.



Soltanto una delle seguenti relazioni è *falsa*. Quale?

A $AP : PQ = PQ : QB$
B Il triangolo QBR è simile al triangolo RCS.
C Il triangolo APS è simile al triangolo RCS e il rapporto di similitudine è 1.
D Il triangolo APS è simile al triangolo BRQ.
E Il triangolo APS è simile al triangolo ABC.

6 Se l'area della corona circolare è uguale a quella del cerchio di raggio minore, possiamo dire che:



A $r_2 = 2r_1$
B $r_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} r_2$
C $r_1 = 2r_2$
D $r_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} r_1$
E $r_2 = \dfrac{1}{2} r_1$

7 Un pentagono regolare è inscritto in una circonferenza di raggio 2. Qual è la lunghezza dell'arco che sottende uno dei lati?

A $\dfrac{2}{5}\pi$
B $\dfrac{1}{5}\pi$
C $\dfrac{5}{2}\pi$
D $\dfrac{4}{5}\pi$
E $\dfrac{5}{4}\pi$

8 In una circonferenza di raggio r è inscritto un triangolo equilatero di lato l, altezza h e area S. Quale fra le seguenti uguaglianze è *falsa*?

A $l = \sqrt{3} \cdot r$
B $S = \dfrac{3}{4}\sqrt{3} \cdot r^2$
C $h = \dfrac{3}{2} r$
D $4S = \sqrt{3} \cdot l^2$
E $r = \dfrac{2}{3} l$

SPIEGA PERCHÉ

9 Perché il rapporto fra l'area del cerchio circoscritto e l'area del cerchio inscritto in un triangolo equilatero è uguale a 4?

10 Perché in un triangolo equilatero di lato l, area A e semiperimetro p vale l'uguaglianza:

$$2 \cdot \frac{A}{p} = \frac{l^3}{4 \cdot A}?$$

11 L'area di un poligono regolare circoscritto a una circonferenza aumenta all'aumentare dei lati? Giustifica la tua risposta.

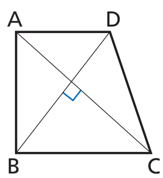
12 Scrivi la relazione che sussiste tra i cateti di un triangolo rettangolo avente un angolo di 30°. Dimostra tale relazione e utilizzala per calcolare il perimetro di un triangolo di questo tipo, avente l'ipotenusa che misura $2a$.

13 Scrivi la formula dell'area di un settore circolare in funzione del raggio e dell'arco sotteso. Se la misura dell'area del settore e la misura della lunghezza dell'arco sono espresse dallo stesso numero, quanto vale il raggio?

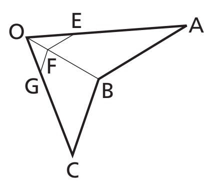
ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

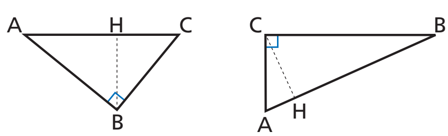
14 Considera il trapezio rettangolo $ABCD$ della figura, in cui le diagonali sono perpendicolari. Applicando i criteri di similitudine, riconosci che i triangoli ABC e ABD sono simili, poi scrivi le proporzioni fra i lati corrispondenti.



15 Nella figura seguente vale la proporzione $OA : OE = OB : OF = OC : OG$. Stabilisci quali triangoli sono simili, specificando il criterio di similitudine applicato.



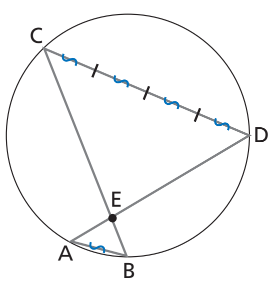
16 Per ciascuno dei triangoli rettangoli in figura scrivi una proporzione che esprima il primo teorema di Euclide e una proporzione che esprima il secondo teorema di Euclide.



17 Disegna un triangolo ABC, rettangolo in A. Scegli un punto D sull'ipotenusa e da esso traccia la retta perpendicolare a BC. Indica con E e F rispettivamente i punti di intersezione con le rette AC e AB. Dimostra che il rettangolo avente i lati congruenti a DF e DE è equivalente al rettangolo con i lati congruenti a DC e DB.

18 Disegna una circonferenza e inscrivi un triangolo ABC isoscele di vertice A. Fissato un punto qualsiasi D sulla base BC, sia E il punto di intersezione della retta AD con la circonferenza. Dimostra che AB è medio proporzionale fra AD e AE.

19 Qual è il rapporto fra le aree dei triangoli AEB e CED della figura? Motiva la tua risposta.



20 I cateti di un triangolo rettangolo sono lunghi rispettivamente 30 cm e 40 cm. Determina la lunghezza della circonferenza a esso circoscritta e l'area del cerchio inscritto nel triangolo.

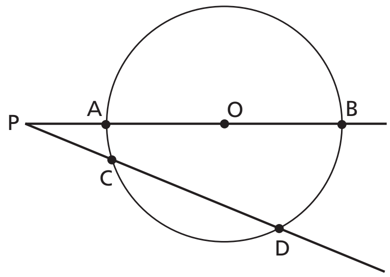
[50π cm, 100π cm^2]

21 In un triangolo rettangolo ABC, il cateto AB è lungo 45 cm e il cateto AC è 22 cm. Sul cateto AB scegli un punto E e traccia la parallela EF al cateto AC. Determina la distanza del punto E dal vertice A, in modo che l'area del triangolo EBF sia 220 cm^2. [15 cm]

22 In un trapezio isoscele le basi sono lunghe 60 cm e 132 cm e l'altezza è 40 cm. Le diagonali si intersecano formando due coppie di segmenti congruenti. Determina la lunghezza di tali segmenti. [32,5 cm; 71,5 cm]

23 In una circonferenza di centro O e raggio r inscrivi un rettangolo $ABCD$. Traccia per A e per B le tangenti alla circonferenza e indica con E il loro punto di intersezione. Sapendo che l'area del triangolo ABE è $\frac{1}{3}$ dell'area del rettangolo $ABCD$, determina la distanza di O dalla corda AB. $\left[\frac{\sqrt{21}}{7}r\right]$

24 Osserva la figura e completa la tabella.



AO	*PA*	*PC*	*CD*
$\frac{11}{6}CD$	3 cm	4 cm	
$5a$		$\frac{4}{3}PA$	$6a$
	$6AO$	$9\sqrt{3}a$	$3\sqrt{3}a$

25 Una circonferenza di raggio $2a$ è inscritta in un triangolo isoscele. La distanza del vertice del triangolo dal centro della circonferenza è $3a$. Determina i lati del triangolo isoscele. $[4a\sqrt{5}; 3a\sqrt{5}]$

26 In un triangolo rettangolo un cateto è i $\frac{13}{5}$ della sua proiezione sull'ipotenusa. Sapendo che l'ipotenusa è lunga 26 cm, calcola la lunghezza dei cateti, il perimetro e l'area del triangolo. [10 cm; 24 cm; 60 cm; 120 cm^2]

27 La diagonale maggiore di un rombo è $\frac{8}{5}$ del lato. Sapendo che il perimetro del rombo misura $60a$, calcola la distanza tra il punto di incontro delle diagonali e un lato del rombo. $\left[\frac{36}{5}a\right]$

28 In un trapezio rettangolo il lato obliquo misura 6 cm e forma un angolo di 30° con la base maggiore. Determina l'area del trapezio sapendo che il perimetro è $3(13+\sqrt{3})$ cm. $\left[\frac{9(10+\sqrt{3})}{2}\,cm^2\right]$

29 In un trapezio rettangolo la diagonale minore forma con la base maggiore un angolo di 45° e la base minore è $\frac{3}{5}$ della maggiore. Calcola la misura delle basi del trapezio, sapendo che la sua area è 48 m^2. [6 m; 10 m]

30 Disegna un triangolo rettangolo avente i cateti $AC = 5$ cm e $BC = 10$ cm. Traccia una retta parallela all'ipotenusa che incontri i cateti BC e AC rispettivamente nei punti P e Q. Chiama M e N le proiezioni rispettivamente di P e Q su AB. Quanto deve essere lungo PM affinché si abbia $QM = 2\sqrt{5}$ cm? $\left[\frac{42}{29}\sqrt{5}\text{ cm}\right]$

31 Data la semicirconferenza di centro O e diametro AB, traccia la tangente a essa in B. Conduci da A una semiretta che incontri in P la semicirconferenza e in T la tangente e tale che sia $B\hat{A}P = 60°$. Detta H la proiezione di O su AP, determina la lunghezza del raggio in modo che valga la relazione $TB + AH = \frac{47}{2}a$. $[(4\sqrt{3}-1)a]$

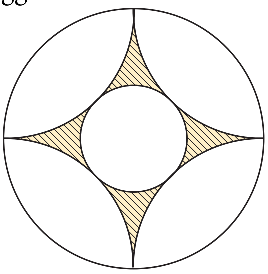
METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▸ 3 esercizi in più

32 Si scelgano i punti H, K, M sui lati di un triangolo ABC in modo tale che AH sia un'altezza, BK sia una bisettrice e CM sia una mediana. Si indichi con D l'intersezione tra AH e BK, e con E l'intersezione tra HM e BK.
Sapendo che $KD = 2$, $DE = 1$, $EB = 3$:
1. si dimostri che HM è parallelo ad AC;
2. si dimostri che $AB = AC$;
3. si dimostri che $AB = BC$.

(*Olimpiadi della matematica*, *Giochi di Archimede*, 2000)

33 TEST Calcolare l'area della figura tratteggiata sapendo che la circonferenza esterna e i 4 archi all'interno hanno raggio R.



A $R^2\left(\frac{4-\pi\sqrt{2}}{2}\right)$

B $2R^2[2-\pi(2-\sqrt{2})]$

C $\pi R^2(2-\sqrt{2})$

D $R^2(4-\pi)$

E $4R^2(\pi-\sqrt{2})$

(*Olimpiadi della matematica*, *Gara provinciale*, 1996)

34 TEST In una carta geografica con scala 1 : 100 000 la distanza fra due città è 10 cm. Qual è la distanza fra le stesse due città su una carta con scala 1 : 250 000?

A 2,5 cm
B 4 cm
C 6,25 cm
D 25 cm
E 40 cm

(*Olimpiadi della matematica*, *Giochi di Archimede*, 1995)

35 TEST La figura è costituita da due cerchi che si secano e hanno raggi che misurano rispettivamente 1 e 3. Sapendo che l'area della regione comune è $\frac{\pi}{2}$, si dica qual è l'area totale della figura tratteggiata.

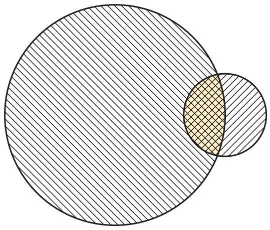
A 10π

B $\frac{19\pi}{2}$

C 8π

D $\frac{17\pi}{2}$

E 9π



(*Olimpiadi della matematica*, *Giochi di Archimede*, 1994)

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▸ 7 esercizi in più

36 TEST Given two similar triangles one of which has twice the perimeter of the other, by what factor is the area of the larger triangle bigger than the smaller?

A 2
B 4
C $\sqrt{2}$
D $2\sqrt{2}$
E None of these.

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2004)

37 A circle of greatest area is cut out of a 4 cm square of material. A square of greatest area is then cut out of the circle. How much material is wasted?

(USA *Southeast Missouri State University: Math Field Day*, 2005)

[8 cm^2]

38 In a normally-shaped room, there is a light on the floor. If I hold a disc 4 feet above the light, then it casts a circular shadow on the ceiling of diameter 6 feet. If I then raise the disc 2 feet, what will be the new diameter of the shadow on the ceiling?

(USA *Bay Area Math Meet*, *BAMM*, *Bowl Sampler*, 1995)

[4 feet]

39 The circumference of a circle (measured in feet) is equal to its area (measured in square feet). Find the radius of the circle.

(USA *Bay Area Math Meet*, *BAMM*, *Bowl Sampler*, 1995)

[2 feet]

GLOSSARY

to cast-cast-cast: proiettare	**floor**: pavimento	**shadow**: ombra
ceiling: soffitto	**radius**: raggio	**twice**: doppio, due volte
factor: fattore	**to raise**: sollevare	**to waste**: sprecare

INDICE ANALITICO

- Le pagine evidenziate in neretto (per esempio, **957**) sono quelle in cui un termine viene definito.
- I termini preceduti dal trattino indicano una sottovoce; quelli preceduti dal trattino e rientrati indicano una sotto-sottovoce.
  Per esempio:

voce — asse-i
sottovoce («asse di simmetria») — – di simmetria, 1129, **G349**
sotto-sottovoce («asse di simmetria di una figura») — – di una figura, G350

D

E

T

U

V

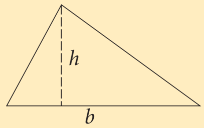
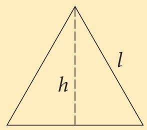
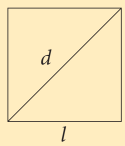
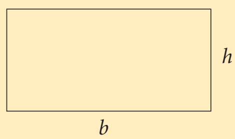
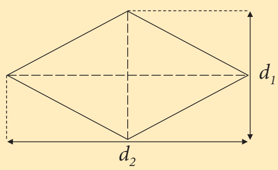
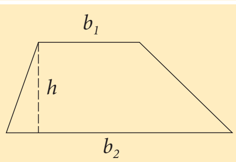
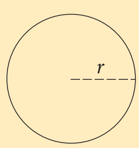
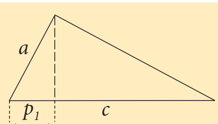
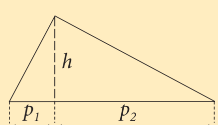
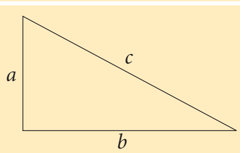
W

Z

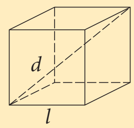
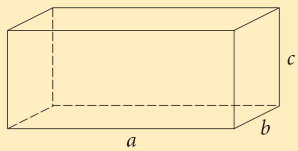
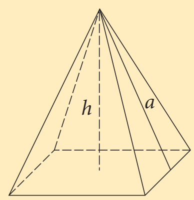
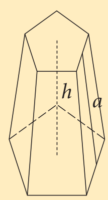
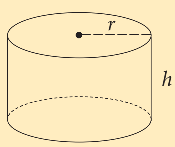
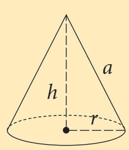
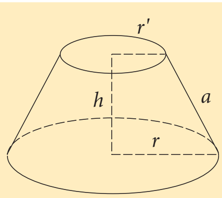
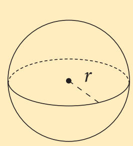
FONTI DELLE ILLUSTRAZIONI

II (a), 633, 653 (a): Roberto Marchetti, 2006;
II (b), 703, 719: Yuri Arcurs/Shutterstock;
IV (b), 957, 974: Photodisc, Just Documents 12, Seattle, WA, 1995;
V (a), 1041, 1062: Elena Bacchilega, 2006;
V (b), 1127, 1143: Radian-Alexandru Olaru/BigStockPhoto;
VI (a), β1, β19: David Meharey/IStockphoto;
VI (b), G169, G199: PhotoAlto, I. Rozenbaum/F. Cirou, CD 7 Paris, The City, Paris, 1996;
VII (a), G239, G253: Fedorov Oleksiy/Shutterstock;
VII (b), G281, G303: Vladimir Korostyshevskiy/Shutterstock;
VIII (a), G341, G354: Norbert Kaiser, 2006;
VIII (b), G379, G401 (a): Beato Angelico, *Pala di Santa Trinita* (particolare dell'anta di destra), Firenze, Museo di San Marco;
653 (b): Digital Stock, World Travel 97, Encinitas, CA, 1998;
697: Comstock, Sport in motion, New York, 1999;
718: Daniele Pellegrini, 1988;
767: Comstock, Sport in motion, New York, 1999;
859: Stanislav Bokach/Shutterstock;
871: L. Abercrombie, 1991;
919: Lana Design/BigStockPhoto;
951: www.hecklerspray.com, gennaio 2006;
1033: www.duffergeek.com, gennaio 2006;
1120: Photodisc, Backgrounds and Objects 8, Seattle, WA, 1993;
β18 (a): Massimo Mastrorillo, 1994/Magnus Edizioni S.p.A., Udine;
β36: Annie Griffith Belt, 2000 (*National Geographic*, August 2000);
G249: www.klangspiel.ch;
G293 (b): www.RSportsCars.com;
G337: Image Source, Teen Matters, London/Cologne;
G344: Massimo Bergamini;
G352: M.C. Escher Works © 2003 Cordon Art-Holland;
G374: Allestimento dello studio Tortelli-Frassoni;
G388 (a): Geanina/Shutterstock;
G388 (b): Cornel Achirei/Shutterstock;
G442: Sandro Damiano, www.unafotoalgiorno.it.

Formule di geometria piana

figura		grandezza	formula
Triangolo		area	$A = \frac{1}{2} bh$
Triangolo equilatero		altezza	$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$
		area	$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$
Quadrato		diagonale	$d = l\sqrt{2}$
		area	$A = l^2$
Rettangolo		area	$A = bh$
Rombo		area	$A = \frac{d_1 d_2}{2}$
Trapezio		area	$A = \frac{(b_1 + b_2)h}{2}$
Circonferenza		lunghezza	$C = 2\pi r$
Cerchio		area	$A = \pi r^2$
Teoremi di Euclide			
primo			$a^2 = p_1 c$
secondo			$h^2 = p_1 p_2$
Teorema di Pitagora			$a^2 + b^2 = c^2$

Formule di geometria solida

figura		grandezza	formula
Cubo		area volume diagonale	$A = 6l^2$ $V = l^3$ $d = l\sqrt{3}$
Parallelepipedo rettangolo		area volume diagonale	$A = 2(ab + ac + bc)$ $V = abc$ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Piramide retta		area laterale volume	$A_l = pa$ semiperimetro di base $V = \frac{1}{3} A_b h$ area di base
Tronco di piramide retta		area laterale volume	$A_l = (p + p')\,a$ semiperimetri delle basi $V = \frac{1}{3} h (A_b + A'_b + \sqrt{A_b A'_b})$ aree delle basi
Cilindro		area volume	$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ $V = \pi r^2 h$
Cono		area volume	$A = \pi r (a + r)$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Tronco di cono		area volume	$A = \pi a (r + r') + \pi r^2 + \pi r'^2$ $V = \frac{1}{3}\pi h (r^2 + r'^2 + r r')$
Sfera		area volume	$A = 4\pi r^2$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$