

Massimo Bergamini
Anna Trifone
Graziella Barozzi

Algebra.blu con Statistica

1



ZANICHELLI

Algebra.blu con Statistica e Probabilità è la versione mista (libro + risorse multimediali/digitali online) di *Manuale di algebra e Manuale di matematica: Modulo M plus*, di cui conserva il progetto didattico e culturale.

I diritti di elaborazione in qualsiasi forma o opera, di memorizzazione anche digitale su supporti di qualsiasi tipo (inclusi magnetici e ottici), di riproduzione e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche), i diritti di noleggio, di prestito e di traduzione sono riservati per tutti i paesi. L'acquisto della presente copia dell'opera non implica il trasferimento dei suddetti diritti né li esaurisce.

Per le riproduzioni ad uso non personale (ad esempio: professionale, economico, commerciale, strumenti di studio collettivi, come dispense e simili) l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del presente volume. Le richieste per tale tipo di riproduzione vanno inoltrate a

Associazione Italiana per i Diritti di Riproduzione delle Opere dell'Ingegno (AIDRO)
Corso di Porta Romana, n. 108
20122 Milano
e-mail segreteria@aidro.org e sito web www.aidro.org

L'editore, per quanto di propria spettanza, considera rare le opere fuori del proprio catalogo editoriale, consultabile al sito www.zanichelli.it/f_catalog.html.
La fotocopia dei soli esemplari esistenti nelle biblioteche di tali opere è consentita, oltre il limite del 15%, non essendo concorrentiale all'opera.
Non possono considerarsi rare le opere di cui esiste, nel catalogo dell'editore, una successiva edizione, le opere presenti in cataloghi di altri editori o le opere antologiche. Nei contratti di cessione è esclusa, per biblioteche, istituti di istruzione, musei ed archivi, la facoltà di cui all'art. 71 - ter legge diritto d'autore.
Maggiori informazioni sul nostro sito: www.zanichelli.it/fotocopie/

Realizzazione editoriale:

- Coordinamento redazionale: Giulia Laffi
- Redazione: Valentina Franceschi
- Collaborazione redazionale e indice analitico: Massimo Armenzoni, Parma
- Segreteria di redazione: Deborah Lorenzini
- Progetto grafico: Byblos, Faenza
- Progetto grafico delle pagine I-XVI, delle aperture di capitolo e delle schede *Problemi, ragionamenti, deduzioni*: Roberto Marchetti
- Composizione e impaginazione: Litoincisa, Bologna
- Disegni: Graffito, Cusano Milanino
- Ricerca iconografica: Raffaella Agostini, Alessandra Giannini, Giulia Laffi

Contributi:

- Stesura del *Laboratorio di matematica*: Antonio Rotteglia
- Revisioni dei testi e degli esercizi: Francesca Incensi, Elisa Menozzi, Monica Prandini, Elisa Quartieri, Ambra Tinti, Alessandro Zagnoli
- Stesura di schede: Chiara Ballarotti (*Insiemi infiniti*), Silvia Benvenuti (*I numeri nel mondo, 1870: nasce la bicicletta!*), Davide Bergamini (*Numeri e musica*), Andrea Betti (*Cicale e numeri primi, Acqua ed energia, Ad alta quota!*), Daniela Cipolloni (*I gruppi sanguigni, Il padre dei polinomi, 1729, Partite di calcio*), Robert Ghattas (*Calcolatrici*), Daniele Gouthier (*Un po' d'equilibrio, Spese e ricavi nella produzione*), Chiara Lugli (5, 6, 7, ... miliardi), Maria Chiara Manzini (*La falsa posizione*), Ilaria Pellati (*Il fumo fa male?*)
- Revisione di schede: Ambra Tinti
- Risoluzione degli esercizi: Francesca Anna Riccio, Angela Capucci, Elisa Capucci, Elisa Garagnani, Daniela Giorgi, Erika Giorgi, Cristina Imperato, Chiara Lugli, Elisa Targa, Ambra Tinti
- Stesura e revisione degli esercizi di *Matematica per il cittadino*: Roberto Ceriani, Andrea Betti, Daniela Boni, Maria Luisa Pagani
- Stesura e revisione degli esercizi in lingua inglese: Andrea Betti
- Revisione linguistica degli esercizi in inglese: Alexander Synge
- Rilettura dei testi: Marco Giusiano, Francesca Anna Riccio

Il DVD-ROM è stato realizzato con la collaborazione di:

- Elisa Garagnani (esercizi);
- Luca Malagoli (revisione);
- Valentina Franceschi e Giulia Laffi (redazione);
- Priscilla Labardi, Piero Chessa (voci).

L'interfaccia del multimedia deriva da un progetto grafico di Chialab s.r.l., Bologna
- Progettazione esecutiva e sviluppo software: Infmedia (www.infmedia.it)
- Video realizzati da PèM s.r.l. (www.pemproduzioni.com)
- Immagini © Shutterstock

Derive è un marchio registrato della Soft Warehouse Inc.
Excel è un marchio registrato della Microsoft Corp

L'intera opera è frutto del lavoro comune di Massimo Bergamini e Anna Trifone

Il format *Bravi si diventa*, inclusi i video e le spiegazioni teoriche, è un'opera collettiva di proprietà di Zanichelli editore.

Hanno collaborato alla realizzazione di questo volume Davide Bergamini e Enrico Bergamini.

Copertina:

- Progetto grafico: Miguel Sal & C., Bologna
- Realizzazione: Roberto Marchetti
- Immagine di copertina: Artwork Miguel Sal & C., Bologna

Legenda dei rimandi a **Bravi si diventa***:



5. Le percentuali

Spiegazione filmata su *Le percentuali*, codice V05a.



534 In un numero di due cifre, la cifra delle decine supera di 5 quella delle unità. Scambiando le cifre, si ottiene un numero il cui doppio diminuito di 6 è uguale ai $\frac{2}{3}$ del numero iniziale. Trova il numero iniziale.

Esercizio interattivo, codice E25.

Per accedere a questi contenuti, digita il codice V05a o E25 nell'apposita sezione della homepage di *Bravi si diventa*.

*DVD-ROM allegato al Libro Misto Multimediale (LMM), disponibile anche online con chiave di attivazione.

Prima edizione: marzo 2010

L'impegno a mantenere invariato il contenuto di questo volume per un quinquennio (art. 5 legge n. 169/2008) è comunicato nel catalogo Zanichelli, disponibile anche online sul sito www.zanichelli.it, ai sensi del DM 41 dell'8 aprile 2009, All. 1/B.



File per diversamente abili

L'editore mette a disposizione degli studenti non vedenti, ipovedenti, disabili motori o con disturbi specifici di apprendimento i file pdf in cui sono memorizzate le pagine di questo libro. Il formato dei file permette l'ingrandimento dei caratteri del testo e la lettura mediante software screen reader. Le informazioni su come ottenere i file sono sul sito www.zanichelli.it/diversamenteabili

Suggerimenti e segnalazione degli errori

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi. L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli. Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro scrivere al seguente indirizzo:

lineauno@zanichelli.it

Le correzioni di eventuali errori presenti nel testo sono pubblicate nella sezione *errata corrigere* del sito dell'opera (www.online.zanichelli.it/bergaminibienno)

Zanichelli editore S.p.A. opera con sistema qualità certificato CertiCarGraf n. 477 secondo la norma UNI EN ISO 9001:2008

Massimo Bergamini

Anna Trifone

Graziella Barozzi

Algebra.blu con Statistica

1

ZANICHELLI



INDICE

RISORSE ONLINE

- Esercitazioni guidate su Motori di ricerca, Elaborazione di testi, Presentazioni multimediali, Introduzione a GeoGebra, Introduzione a Wiris.



Strette di mano

Risolvere problemi

Calcolare

Dimostrare

Ricercare

Imparare a imparare

IX

X

XII

XIII

XIV

XVI

...perché le cicale preferiscono i numeri primi?

→ La risposta a pag. 29

**TEORIA****ESERCIZI**

CAPITOLO 1

I numeri naturali e i numeri interi

1. Che cosa sono i numeri naturali	1	33
2. Le quattro operazioni	2	34
3. I multipli e i divisori di un numero	5	35
4. Le potenze	6	36
5. Le espressioni con i numeri naturali	6	37
6. Le proprietà delle operazioni	8	45
7. Le proprietà delle potenze	11	47
8. Il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo	14	50

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI Ma quanti sono i numeri primi?

9. I sistemi di numerazione	17	52
-----------------------------	----	----

ESPLORAZIONE I numeri maya

10. Che cosa sono i numeri interi	19	54
-----------------------------------	----	----

11. Le operazioni nell'insieme dei numeri interi	22	55
--	----	----

ESPLORAZIONE I quadrati magici

12. Le leggi di monotonia	27	68
---------------------------	----	----

■ Laboratorio di matematica I numeri naturali con Derive	70
--	----

■ Matematica per il cittadino Cassa comune	71
--	----

■ Verifiche di fine capitolo	72
------------------------------	----

RISORSE ONLINE



- 20 esercizi in più
- 86 esercizi di recupero
- 30 test interattivi
- 20 esercitazioni di Laboratorio con Derive o Wiris
- 12 esercitazioni di Laboratorio con Excel
- 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- 17 Mettiti alla prova
- 12 Test your skills
- tabella con le cifre nel mondo

BRAVI SI DIVENTA

- 10 videolezioni
- 3 esercizi interattivi

...perché nella bicicletta si usano i rapporti?
→ La risposta a pag. 100



CAPITOLO 2 I numeri razionali

TEORIA **ESERCIZI**

RISORSE ONLINE



- ▶ 32 esercizi in più
- ▶ 34 esercizi di recupero
- ▶ 30 test interattivi
- ▶ 14 esercitazioni di Laboratorio con Excel
- ▶ 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- ▶ 4 Mettiti alla prova
- ▶ 6 Test your skills

BRAVI SI DIVENTA

- ▶ 8 videolezioni
- ▶ 4 esercizi interattivi

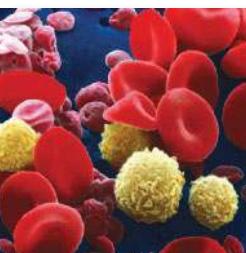
...esistono donatori universali? E riceventi universali?

→ La risposta a pag. 176

1. Dalle frazioni ai numeri razionali 77
2. Il confronto tra numeri razionali 83
3. Le operazioni in \mathbb{Q} 85
4. Le potenze con esponente intero negativo 89
5. Le percentuali 90

ESPLORAZIONE Numeri e musica

6. Le frazioni e le proporzioni 91
- PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI** **Il problema delle parti** 93
7. I numeri razionali e i numeri decimali 93
 8. Il calcolo approssimato 97
- **Laboratorio di matematica** **I numeri razionali con Excel** 143
- **Matematica per il cittadino** **La ricetta** 144
- **Verifiche di fine capitolo** 145



CAPITOLO 3 Gli insiemi e la logica

RISORSE ONLINE



- ▶ 10 esercizi in più
- ▶ 17 esercizi di recupero
- ▶ 30 test interattivi
- ▶ 17 esercitazioni di Laboratorio con Derive o WinRis sugli insiemi
- ▶ 34 esercitazioni di Laboratorio con Derive o WinRis sulla logica
- ▶ 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- ▶ 18 Mettiti alla prova
- ▶ 14 Test your skills
- ▶ teoria e 14 esercizi su I sillogismi
- ▶ teoria e 15 esercizi su I circuiti elettrici e i connettivi logici

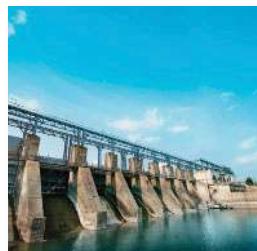
1. Che cos'è un insieme 151
 2. Le rappresentazioni di un insieme 153
 3. I sottoinsiemi 154
- ESPLORAZIONE Insiemi infiniti** 156
4. Le operazioni con gli insiemi 157
 5. L'insieme delle parti e la partizione di un insieme 163
 6. Le proposizioni logiche 164
 7. I connettivi logici e le espressioni 165
- PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI** **Cavalieri e furfanti** 167
8. Forme di ragionamento valide 171
 9. La logica e gli insiemi 173
 10. I quantificatori 175



■ <u>Laboratorio di matematica</u>	Gli insiemi con Wiris	213
■ <u>Matematica per il cittadino</u>	Partita di pallone	214
■ <u>Verifiche di fine capitolo</u>		215

...di quanto si deve aumentare il diametro di una conduttrice per dimezzare il tempo di svuotamento di un certo volume d'acqua?

→ La risposta a pag. 248



CAPITOLO 4 Le relazioni e le funzioni

1. Le relazioni binarie	223	252
2. Le relazioni definite in un insieme e le loro proprietà	226	255
3. Le relazioni di equivalenza	230	259
4. Le relazioni d'ordine	231	260
5. Le funzioni	232	264
6. Le funzioni numeriche	237	270
PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI Alberi in più, alberi in meno	238	
7. Particolari funzioni numeriche	239	275
8. Le funzioni goniometriche	243	280
ESPLORAZIONE 5, 6, 7, ... miliardi	247	
■ <u>Laboratorio di matematica</u> Le funzioni numeriche con Excel		282
■ <u>Matematica per il cittadino</u> Albero genealogico		283
■ <u>Verifiche di fine capitolo</u>		284

RISORSE ONLINE

- 37 esercizi in più
- 13 esercizi di recupero
- 30 test interattivi
- 13 esercitazioni di Laboratorio con Excel
- 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- 7 Mettiti alla prova
- 6 Test your skills

...come si può calcolare a mente 63^2 ?

→ La risposta a pag. 318



CAPITOLO 5 I monomi e i polinomi

1. Che cosa sono i monomi	291	322
2. Le operazioni con i monomi	293	323

RISORSE ONLINE

- ▶ 50 esercizi in più
- ▶ 56 esercizi di recupero
- ▶ 30 test interattivi
- ▶ 8 esercitazioni di Laboratorio con Derive o Wiris
- ▶ 11 esercitazioni di Laboratorio con Excel
- ▶ 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- ▶ 8 Mettiti alla prova
- ▶ 8 Test your skills

BRAVI SI DIVENTA

- ▶ 13 videolezioni
- ▶ 7 esercizi interattivi

3. Massimo comune divisore e minimo comune multiplo fra monomi	296	348
4. Che cosa sono i polinomi	297	350
5. Le operazioni con i polinomi	300	356
PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI Un campo da rifare		
6. I prodotti notevoli	302	370
ESPLORAZIONE Il padre dei polinomi		
7. Le funzioni polinomiali	308	383
8. La divisione fra polinomi	310	386
9. La regola di Ruffini	313	394
10. Il teorema del resto	315	399
11. Il teorema di Ruffini	316	401
Laboratorio di matematica I monomi con Wiris		
Matematica per il cittadino Taxi a New York		
Verifiche di fine capitolo		
		403
		404
		405

...che cosa ha di speciale un numero così?

→ La risposta a pag. 425

**CAPITOLO 6**

La scomposizione in fattori e le frazioni algebriche

RISORSE ONLINE

- ▶ 80 esercizi in più
- ▶ 58 esercizi di recupero
- ▶ 30 test interattivi
- ▶ 11 esercitazioni di Laboratorio con Derive o Wiris
- ▶ 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- ▶ 11 Mettiti alla prova
- ▶ 5 Test your skills

BRAVI SI DIVENTA

- ▶ 15 videolezioni
- ▶ 8 esercizi interattivi

1. La scomposizione in fattori dei polinomi	413	428
PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI Ragionar con lettere		
2. Il M.C.D. e il m.c.m. fra polinomi	414	454
3. Le frazioni algebriche	418	456
4. Il calcolo con le frazioni algebriche	419	458
ESPLORAZIONE L'algebra sincopata		
Laboratorio di matematica Le frazioni algebriche con Derive		
Matematica per il cittadino La botte di vino		
Verifiche di fine capitolo		
		423
		483
		484
		485



...hai una bilancia e due pesi, da 10 g e da 40 g. Come puoi separare con tre sole pesate 1800 g di mais in due mucchi, da 400 g e da 1400 g?

→ La risposta a pag. 508



CAPITOLO 7

Le equazioni lineari

TEORIA ESERCIZI

1. Le identità	491	511
2. Le equazioni	492	513
3. I principi di equivalenza	495	516
4. Le equazioni numeriche intere	499	520

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI Il principe e il messaggero 500

ESPLORAZIONE La falsa posizione

5. Le equazioni fratte	503	529
6. Le equazioni letterali	504	534
7. Equazioni e problemi	505	548

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI Occhio al trucco!

■ Laboratorio di matematica	Le equazioni lineari con Excel	561
■ Matematica per il cittadino	La lente di ingrandimento	562
■ Verifiche di fine capitolo		563

RISORSE ONLINE



- 49 esercizi in più
- 55 esercizi di recupero
- 30 test interattivi
- 13 esercitazioni di Laboratorio con Excel
- 2 schede di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- 5 Mettiti alla prova
- 3 Test your skills

BRAVI SI DIVENTA

- 7 videolezioni
- 3 esercizi interattivi

...fino a che quota può volare una mongolfiera?

→ La risposta a pag. 587



CAPITOLO 8

Le disequazioni lineari

1. Le diseguaglianze numeriche	571	590
2. Le disequazioni di primo grado	573	591
3. Le disequazioni intere	577	594

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI Pensieri e parole 579

4. Le disequazioni fratte	580	605
5. I sistemi di disequazioni	583	612

ESPLORAZIONE Spese e ricavi nella produzione

La risoluzione dei problemi mediante le disequazioni lineari	618
6. Equazioni e disequazioni con valori assoluti	585

■ **Laboratorio di matematica** **Le disequazioni lineari con Wiris**

	625
■ Matematica per il cittadino La palestra	626

■ Verifiche di fine capitolo	627
-------------------------------------	-----

RISORSE ONLINE



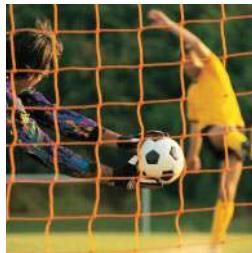
- 88 esercizi in più
- 24 esercizi di recupero
- 30 test interattivi
- 12 esercitazioni di Laboratorio con Derive o Wiris
- 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- 6 Mettiti alla prova
- 3 Test your skills

BRAVI SI DIVENTA

- 3 videolezioni
- 2 esercizi interattivi

...è vero che è più facile vincere una partita in casa che in trasferta?

→ La risposta a pag. α20



TEORIA **ESERCIZI**

CAPITOLO α

Introduzione alla statistica

RISORSE ONLINE



- ▶ 13 esercizi in più
- ▶ 26 esercizi di recupero
- ▶ 30 test interattivi
- ▶ 13 esercitazioni di Laboratorio con Excel
- ▶ 1 scheda di lavoro su Problemi, ragionamenti, deduzioni
- ▶ 8 Mettiti alla prova
- ▶ 9 Test your skills

1. I dati statistici

α1 α22

2. La rappresentazione grafica dei dati

α7 α25

ESPLORAZIONE Il fumo fa male?

α10

3. Gli indici di posizione centrale

α11 α26

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI Tasse

α12

4. Gli indici di variabilità

α15 α29

■ Laboratorio di matematica La statistica con Excel

α35

■ Matematica per il cittadino I furti

α36

■ Verifiche di fine capitolo

α37

STRUMENTI I vettori

α41 α55

STRUMENTI Gli algoritmi

α64

α70

...come scegliere il contratto più conveniente?

→ La risposta a pag. 719



CAPITOLO 10

I sistemi lineari

...è più conveniente confermare oppure cambiare porta per ottenere il premio?

→ La risposta a pag. β19



CAPITOLO β

Introduzione alla probabilità



Questi capitoli, presenti nel volume *Algebra.blu 2 con probabilità*, sono scaricabili gratuitamente in pdf dal sito www.online.zanichelli.it/bergaminibennio

Strette di mano

Stringersi la mano serve per presentarsi e anche per dimostrare la propria amicizia.

- Nelle prossime pagine ti proponiamo occasioni per stringere la mano ai tuoi compagni e all'insegnante che ti seguirà, oltre che a noi autori del libro.
- È un modo per conoscerci e riflettere su cosa pensiamo della matematica, su cosa sappiamo e su cosa studieremo.
- È anche un modo per andare alla scoperta del libro, capire che cosa offre e come utilizzarlo al meglio.



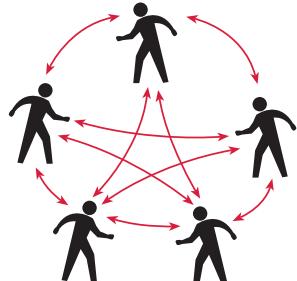
Iniziamo con un problema in tema!

Quante strette di mano diverse si possono scambiare gli studenti di una classe?

Naturalmente stiamo pensando che tutti gli studenti si stringano la mano e ogni coppia di studenti se la stringa una volta sola.

Prima di leggere la soluzione che proponiamo nelle righe seguenti, chiudi il libro e prova a cercarne una insieme ai tuoi compagni, magari cogliendo l'occasione per stringere loro la mano davvero!

Soluzione



- ➔ Il numero di strette di mano varia in base al numero dei componenti della classe o, più in generale, del gruppo di persone che le stringono.
- ➔ Per cercare la soluzione generale, concentriamoci prima su un esempio con un numero ridotto di persone in modo da poter costruire uno schema grafico.
Nello schema della figura abbiamo pensato a 5 ragazzi.
- ➔ Notiamo che ogni ragazzo stringe la mano ai 4 rimanenti; quindi, essendo i ragazzi 5, possiamo pensare a $5 \cdot 4$ strette di mano.
- ➔ Ma in questo modo abbiamo contato ogni stretta di mano 2 volte, corrispondenti alle 2 punte di freccia che ci sono nello schema per ogni linea. Le punte sono 20, le linee 10.
- ➔ Quindi le strette di mano sono: $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

Pensiamo ora a n persone che si stringono la mano (con n indichiamo un numero generico). Il ragionamento è del tutto simile a quello precedente: ognuno stringe la mano a $n - 1$ persone.

Le strette di mano sono quindi: $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$.



Allora, quante strette di mano sono possibili nella tua classe?

Risolvere problemi



«Il prezzo scontato di un computer è di 400 euro.

Sapendo che lo sconto è stato del 25%, posso affermare che prima dello sconto il computer costava 500 euro.»

È giusto questo ragionamento?

■ Prima di rispondere

PERCENTUALI CHE INGANNO

«Sono soddisfatto delle azioni che ho comprato. In questo giornale, per ogni mese, è riportata la percentuale di aumento o diminuzione del valore rispetto all'inizio del mese. È vero che in un mese le azioni hanno perso il 40% del loro valore, ma il mese dopo hanno guadagnato il 50%. Quindi in due mesi il loro valore è aumentato del 10%. Non male!»

► È giusto questo ragionamento?

Supponiamo che all'inizio del primo mese un'azione avesse valore 100. Dopo un mese il suo valore è diminuito del 40% e quindi è sceso a 60. Alla fine del secondo mese si è avuto un aumento del 50% rispetto al valore di inizio mese, quindi un aumento di:

$$\frac{50}{100} \cdot 60 = 30.$$

Il valore finale è quindi: $60 + 30 = 90$.

Rispetto a due mesi prima, il valore è calato del 10% e non aumentato del 10%!

Come vedi, con le percentuali è molto importante fare attenzione a quale quantità si riferiscono.

UP TO YOU

«Qualcuno dice che sto cercando di guadagnare troppo. È falso! L'anno scorso guadagnavo il 20% rispetto al prezzo dei prodotti che vendeva, quest'anno il 22%. Un guadagno di appena il 2% in più: non è poi tanto!»

È giusto questo ragionamento?

? Ora risovi il problema iniziale



Nel sito: ► Scheda di lavoro

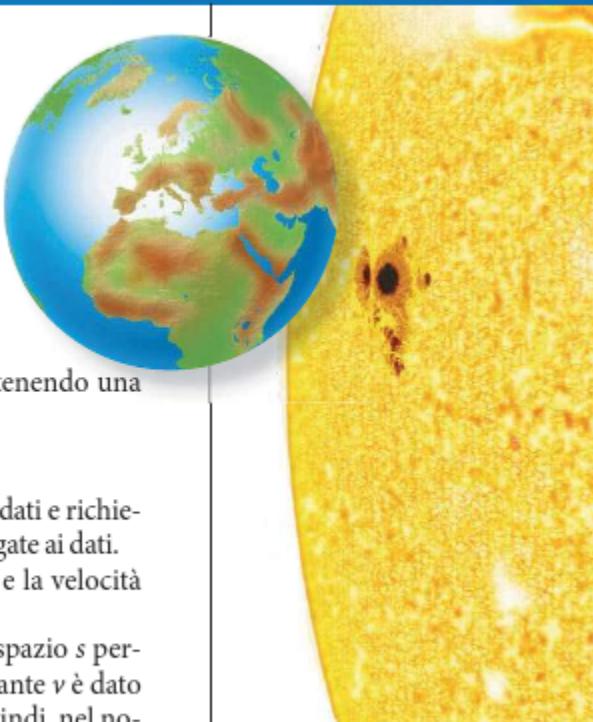
Per approfondire

Sconti su sconti

«Il supermercato dove faccio spese ha molti prodotti in offerta "Prendi due, paghi uno". In più, alla cassa, viene dato un buono pari al 20% dell'importo pagato, da utilizzare in una spesa successiva. Se compro soltanto prodotti in offerta, è come se avessi lo sconto del 70%.»

È giusto questo ragionamento?

A quale velocità ci muoviamo con la Terra intorno al Sole?



■ Prima di rispondere

QUARANTA ALL'ORA

Un ciclista ha percorso 50 km di circuito pianeggiante mantenendo una velocità di 40 km/h.

► Quanto tempo ha impiegato?

Un problema presenta, in genere, una situazione che contiene dati e richieste. Per risolverlo è necessario trovare come le richieste sono legate ai dati.

I dati del nostro problema sono lo spazio percorso (50 km) e la velocità costante mantenuta dal ciclista (40 km/h).

La relazione che lega fra loro dati e richieste afferma che lo spazio s percorso in un tempo t da un corpo che si muove a velocità costante v è dato dal prodotto fra la velocità e il tempo. In simboli: $s = v \cdot t$. Quindi, nel nostro caso, abbiamo l'equazione $50 = 40 \cdot t$.

Ci chiediamo qual è quel numero t che moltiplicato per 40 dà 50.

Per la definizione di quoziente di due numeri, ciò equivale a dire che

$$t = \frac{50}{40} = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ ore, ossia } 1 \text{ ora e } 15 \text{ minuti.}$$

UP TO YOU

Se un ciclista percorre 180 km in 5 ore, qual è la sua velocità media?

ALLA SCOPERTA DEL LIBRO

C'è un sottoparagrafo intitolato «Che cos'è un'equazione». Cerca «equazione» con l'indice analitico.



Ora risovi il problema iniziale



Nel sito: ► Esercitazione guidata su Motori di ricerca ► Esercitazione guidata su Elaborazione di testi

In dieci righe

Foreste di carta

Riciclare la carta è importante per ridurre la velocità della deforestazione. Quanti fogli di carta si ricavano da un albero?

Per rispondere alla domanda fai una ricerca in Internet, poi realizza con il computer una sintetica relazione che spieghi come si possa calcolare una stima del numero di fogli formato A4 ricavabili da un pino di circa 10-15 metri. Dai anche informazioni relative alla deforestazione e ai suoi effetti.

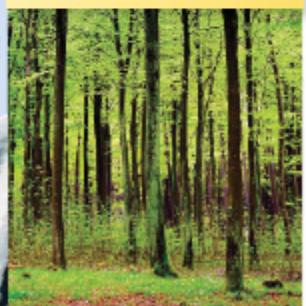


Cerca nel web: fogli, carta, albero, deforestazione, effetti.



ALLA SCOPERTA DEL LIBRO

Elaborare informazioni e sintetizzare è un tipo di esercizio che spesso ti proponremo all'interno delle Esplorazioni.



Calcolare



ALLA SCOPERTA DEL LIBRO

Trovi la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, per esempio, nella *Teoria in sintesi* del primo capitolo.



ALLA SCOPERTA DEL LIBRO

La proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla sottrazione si trova in una nota nel *colonnino* della teoria del capitolo 1. Anche nel colonnino ci sono informazioni importanti!



Ora rispondi alla domanda iniziale



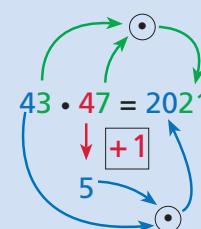
Nel sito: ► Scheda di lavoro

Per approfondire

Per calcolare $43 \cdot 47$ procediamo come nella figura:

al 4 di 47 aggiungiamo 1: $4 + 1 = 5$;
moltiplichiamo il 4 di 43 con il 5 ottenuto: $4 \cdot 5 = 20$;
moltiplichiamo il 3 di 43 con il 7 di 47: $3 \cdot 7 = 21$;
il risultato è: 2021 .

Uno strano calcolo



Giustifica il metodo usato, mediante le proprietà delle operazioni.

Ci sono delle condizioni che ci dicono rapidamente quando possiamo applicare questo metodo?

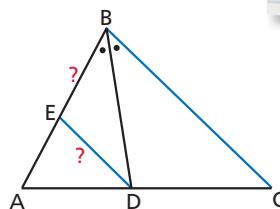
Dimostrare

Nel trapezio $ABCD$ della figura il punto P è tale che i segmenti DP e CP sono congruenti. Come sono gli angoli $\hat{A}PD$ e $\hat{B}PC$? Perché?

■ Prima di rispondere

LA BISETTRICE E LA PARALLELA

In un triangolo qualsiasi ABC , chiamiamo D il punto di incontro tra la bisettrice dell'angolo in B e il lato AC . Da D tracciamo la retta parallela al lato BC e chiamiamo E il suo punto di incontro con AB .



► Che cosa possiamo dire dei segmenti DE e EB ? Perché?

Se osservi con attenzione la figura, forse puoi giungere alla conclusione che i segmenti DE ed EB sono congruenti. Per confermarlo potresti provare a misurarli: se la loro misura è uguale, allora i segmenti sono congruenti. Tuttavia, queste prove e osservazioni non consentono di essere sicuri che la congruenza dei segmenti continui a essere vera per tutti i triangoli ABC che è possibile considerare, né consentono di capire perché la proprietà è sempre vera. Per soddisfare queste due esigenze serve una dimostrazione. Dimostriamo che DE ed EB sono congruenti utilizzando queste proprietà:

- a) Se in un triangolo due angoli sono congruenti, allora i due lati del triangolo che i due angoli non hanno in comune sono congruenti (il triangolo è isoscele);
- b) Se due rette sono parallele, tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni congruenti.
- c) Se x è congruente a y e y è congruente a z , allora x è congruente a z (proprietà transitiva della congruenza).

Ipotesi 1. BD è bisettrice di \hat{ABC} ; **Tesi** ED e EB sono congruenti.
2. DE è parallela a BC .

Dimostrazione

L'angolo $\hat{E}BD$ è congruente a $\hat{D}BC$, perché, per ipotesi, BD è bisettrice dell'angolo \hat{ABC} .

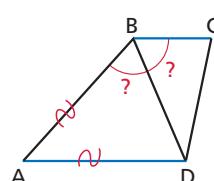
Ma \hat{DBC} è congruente a $\hat{B}DE$, perché angoli alterni interni formati dalle parallele ED e BC tagliate dalla trasversale BD (proprietà b).

Quindi anche $\hat{E}BD$ è congruente a $\hat{B}DE$ per la proprietà transitiva della congruenza (proprietà c).

Allora, per la proprietà a il triangolo EBD è isoscele e BE è congruente a ED .

UP TO YOU

Nel trapezio di basi AD e BC della figura, i lati AB e DC sono congruenti. Che cosa possiamo dire degli angoli $\hat{A}BD$ e \hat{DBC} ? Perché? Utilizza le proprietà b e c viste prima e questa: in un triangolo isoscele i due angoli alla base sono congruenti.



ALLA SCOPERTA DEL LIBRO

Trovi problemi sulle rette parallele nella *Matematica per il cittadino* del capitolo G3.

ALLA SCOPERTA DEL LIBRO

Cerca queste proprietà e le definizioni dei termini utilizzati con l'*indice* e con l'*indice analitico*. Confronta i due tipi di ricerca.

Nel sito: ► Esercitazione guidata su *Motori di ricerca*,
► Esercitazione guidata su *Presentazioni multimediali*



In cinque slide

Il teorema di Pitagora

Con una presentazione multimediale, spiega che cosa dice il teorema di Pitagora e illustra diversi modi per dimostrarlo.

Cerca nel web:
teorema, Pitagora, dimostrazione.



Ora risovi il problema iniziale



Nel sito:

- ▶ Esercitazione guidata su *Motori di ricerca*
- ▶ Esercitazione guidata su *Elaborazione di testi*

In dieci righe



Una ricerca infinita

In matematica ci sono concetti oggetto di incessante indagine e ricerca. Il matematico tedesco David Hilbert affermò che nessun altro concetto ha mai scosso così profondamente lo spirito umano come quello di infinito. Scrivi una relazione con il computer descrivendo il paradosso dell'infinito in cui si imbatté Galileo e i risultati ottenuti in seguito. Descrivi poi almeno un paradosso dell'infinito riguardante la geometria. Per esempio, i punti di una semiretta sono di più di quelli di un suo segmento?

Cerca nel web:
paradosso, quadrati, paradosso Grand Hotel.



ALLA SCOPERTA DEL LIBRO

Trovi informazioni nell'*Esplorazione «Insiemi infiniti»*. Cercala nell'indice.

Sono di più i numeri naturali o i numeri interi?



ALLA SCOPERTA DEL LIBRO

Sugli insiemi puoi svolgere le esercitazioni con il computer del *Laboratorio di matematica* del capitolo 3.

■ Prima di rispondere UN NUMERO FINITO DI ELEMENTI

Per confrontare la numerosità di due insiemi A e B con un numero finito di elementi, basta contarli.

► Verifichiamo che l'insieme A dei divisori di 10 ha lo stesso numero di elementi dell'insieme B dei divisori di 8.

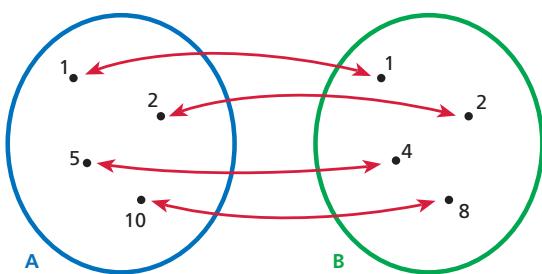
Elenchiamo gli elementi degli insiemi:

$$A = \{1, 2, 5, 10\}, \quad B = \{1, 2, 4, 8\}.$$

A e B hanno entrambi 4 elementi; si dice anche che hanno la stessa *cardinalità*.

Possiamo arrivare alla stessa conclusione costruendo una corrispondenza come quella della figura.

Poiché a ogni elemento di A corrisponde uno e un solo elemento di B e, viceversa, a ogni elemento di B corrisponde uno e un solo elemento di A , i due insiemi hanno la stessa cardinalità, ossia hanno lo stesso numero di elementi.



INFINITI ELEMENTI

Che cosa succede se gli insiemi hanno infiniti elementi?

Per esempio, consideriamo C insieme dei numeri naturali e D insieme dei numeri naturali maggiori di 0. Poiché D si ottiene da C privandolo dello 0, si direbbe che il numero di elementi di D è minore di quello degli elementi di C . Ragioniamoci sopra.

In questo caso non possiamo contare gli elementi di C e di D : non finiremmo mai! Allora cerchiamo di creare una corrispondenza fra gli elementi dei due insiemi, come quella dell'esempio precedente.

Associamo al numero 0 dell'insieme C il numero 1 dell'insieme D , al numero 1 di C il numero 2 di D e così via: al numero n appartenente a C associamo il numero $n + 1$ appartenente a D .

Poiché a ogni elemento di C corrisponde uno e un solo elemento di D e, viceversa, a ogni elemento di D corrisponde uno e un solo elemento di C , i due insiemi hanno la stessa cardinalità, ossia lo stesso numero di elementi.

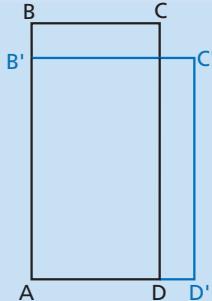
UP TO YOU

Sono di più i numeri naturali o i numeri pari?



Ora rispondi alla domanda iniziale

Il rettangolo $ABCD$ ha base lunga 2 cm e altezza 2 cm. Ai lati AB e CD togliamo e ai lati AD e BC aggiungiamo segmenti congruenti, in modo da ottenere il rettangolo $AB'C'D'$. Quale deve essere la lunghezza di questi segmenti per fare in modo che il nuovo rettangolo abbia area massima?



■ Prima di rispondere

UN PROBLEMA DI MASSIMO

Fin dai tempi dei Greci, i concetti di massimo e minimo costituiscono un importante strumento di ricerca del pensiero scientifico, tanto da far dire al matematico Eulero (1774): «nel mondo non avviene nulla senza che si osservi una regola di minimo o di massimo».

► **Dimostriamo che fra tutti i rettangoli di perimetro 40 cm, quello che ha area massima è il quadrato di lato 10 cm.**

L'area del quadrato è 100 cm^2 . Notiamo poi che ogni rettangolo di perimetro 40 cm si può ottenere dal quadrato, togliendo un segmento da due lati paralleli del quadrato e aggiungendo un segmento di uguale misura agli altri due lati. Se chiamiamo x questa misura, una dimensione del rettangolo è $10 - x$, l'altra è $10 + x$, quindi la misura A dell'area del rettangolo è:

$$A = (10 - x) \cdot (10 + x).$$

Applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:

$$\begin{aligned} A &= (10 - x) \cdot (10 + x) = (10 - x) \cdot 10 + (10 - x) \cdot x = \\ &= 10 \cdot 10 - 10 \cdot x + 10 \cdot x - x \cdot x = 10^2 - x^2 = 100 - x^2. \end{aligned}$$

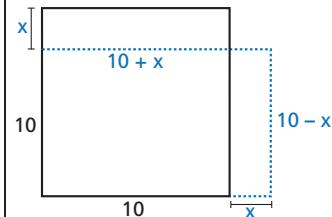
L'area del rettangolo è quindi sempre minore di quella del quadrato.

Possiamo anche vedere questa proprietà mediante un grafico cartesiano della funzione $A = 100 - x^2$, dove i valori relativi ai rettangoli sono soltanto quelli con $x \geq 0$. Notiamo che il valore massimo di A è in corrispondenza di $x = 0$, ossia quando consideriamo il quadrato.

x	A
0	100
± 3	91
± 5	75
± 7	51
± 9	19
± 10	0

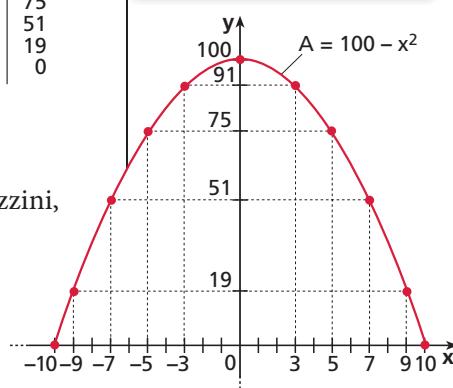
ALLA SCOPERTA DEL LIBRO

Esercizi di scrittura di aree e perimetri con espressioni algebriche sono nel *paragrafo «Le operazioni con i polinomi»*. Cercalo.



ALLA SCOPERTA DEL LIBRO

La rappresentazione di una funzione mediante una tabella e un grafico è trattata nel *paragrafo «Le funzioni numeriche»*.



UP TO YOU

In un paese, piazza Garibaldi ha lo stesso perimetro di piazza Mazzini, ma area maggiore. Che cosa possiamo dire dei loro lati?



Ora rispondi alla domanda iniziale



Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Per approfondire

Un perimetro infinito

È possibile racchiudere una regione finita di piano con una linea di lunghezza infinita?

Imparare a imparare



Alcuni matematici sono uccelli, altri sono rane.

Gli uccelli volano alto nell'aria e scrutano le vaste distese della matematica, spingendo lo sguardo fino all'orizzonte. Prediligono i concetti che unificano i nostri modi di pensare e partendo da punti diversi del paesaggio riuniscono una molteplicità di problemi.

Invece le rane vivono nel fango e vedono solo i fiori che crescono nei pressi. Preferiscono osservare i singoli oggetti nei loro minuti particolari e risolvono i problemi uno alla volta.

Freeman Dyson, *Uccelli e rane: la matematica come metafora*, in *Il club dei matematici solitari* del Prof. Odifreddi, Mondadori, 2009.

Imparare a imparare è una delle competenze chiave che l'Unione Europea ha individuato per i cittadini della società della conoscenza.

Implica:

- saper cercare e controllare le informazioni;
- individuare collegamenti e relazioni;
- progettare la propria attività;
- comunicare e collaborare con gli altri;
- risolvere problemi della vita reale.

■ Essere rana

Nello studio della matematica sarai soprattutto una rana: affronterai i problemi uno alla volta e cercherai di capire i *particolari*.

Ma non dimenticare di «vedere i fiori».

La matematica è nella realtà Può essere difficile vederla, ma ci circonda e serve nella vita di tutti i giorni. Scoprilo nei problemi di *Matematica per il cittadino*.

La matematica è cultura È una delle discipline che più si prestano al collegamento con le altre ed è necessaria per affrontare i problemi del sapere in campi anche molto diversi fra loro. Puoi vederlo nelle *Esplorazioni* e nelle prime pagine di ogni capitolo.

La matematica è palestra Una palestra per la mente. La comprensione di ogni nuovo concetto e l'esercizio giornaliero allenano ad affrontare i problemi in modo razionale.

Ma non accontentarti degli esercizi di allenamento: nei *Mettiti alla prova*, gioca le tue partite!



La matematica ha un linguaggio specifico al quale devi fare attenzione nelle definizioni e nelle parole che mettiamo in evidenza. Nei *Test your skills* hai un'occasione per imparare il lessico matematico in inglese.

■ Essere falco

Nello studio è importante anche avere una *visione d'insieme*. Per darti una mano a essere falco, ti proponiamo di inquadrare quello che farai mediante quattro competenze fondamentali, indicando dove le incontrerai prevalentemente.



Competenza	Dove si trova nel libro	Per esempio
Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico	Capitoli 1, 2, 5, 6, 7, 8	Le espressioni con i razionali, pag. 120 Il calcolo con i polinomi, pag. 356
Rappresentare e analizzare figure geometriche	Capitoli G1, G2, G3	I criteri di congruenza dei triangoli, pag. G52 Le proprietà dei parallelogrammi, pag. G104
Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi	<i>Problemi, ragionamenti, deduzioni</i> in tutti i capitoli Capitoli 1, 2, 3, 7, alfa	<i>Il problema delle parti</i> a pag. 93 I problemi con le percentuali e le proporzioni, pag. 132 I problemi in cui si applica l'algebra alla geometria, pag. 548
Rilevare, analizzare e interpretare dati	Capitoli 3, 4, alfa	La proporzionalità diretta, pag. 239 La frequenza nei dati statistici, pag. α3

I numeri naturali e i numeri interi



Cicale e numeri primi

In alcune zone degli Stati Uniti vivono due specie di cicale, *Magicicada septendecim* e *Magicicada tredecim*, con cicli vitali di 17 e 13 anni: ogni 17 anni le une, ogni 13 le altre, dopo una lunga «infanzia» passata sottoterra, emergono in massa per riprodursi e quindi morire. Naturalmente non è vantaggioso per le due specie competere per le risorse ambientali emergendo dal terreno negli stessi anni...

...perché le cicale preferiscono i numeri primi?

→ La risposta a pag. 29

1. Che cosa sono i numeri naturali

I numeri naturali sono:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...

I numeri naturali hanno un **ordine**. Dati due numeri naturali qualunque e diversi fra loro, è sempre possibile stabilire se il primo è minore del secondo o viceversa. Per indicare questa relazione usiamo i simboli < (minore) e > (maggiore). Per esempio, $0 < 5$, $8 > 3$.

Di ogni numero naturale, escluso lo 0, esistono il **precedente** e il **successivo**. Per esempio, il precedente di 7 è 6, il successivo di 7 è 8.

L'insieme dei numeri naturali viene indicato con la lettera \mathbb{N} .

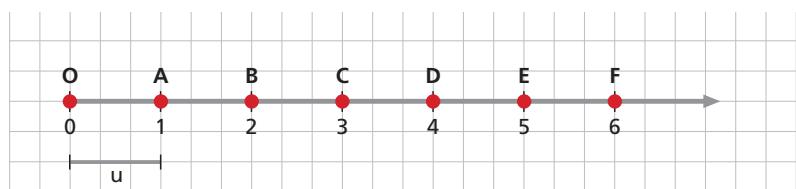
■ La rappresentazione dei numeri naturali

Poiché i numeri naturali sono ordinati, si possono rappresentare su una **semiretta orientata**, cioè su una semiretta sulla quale fissiamo, a partire dal punto origine O , un verso di percorrenza, che indichiamo con una freccia, e un'unità di misura.

Il simbolo	significa
<	minore
>	maggiore
\leq	minore o uguale
\geq	maggiore o uguale
=	uguale
\neq	diverso

► Orientato qui significa «che ha un verso».

► Figura 1 Fissata una unità di misura, è possibile far corrispondere ai numeri naturali determinati punti di una semiretta orientata.



I punti della semiretta sono molti di più di quelli che corrispondono ai numeri naturali. Per esempio, fra B e C vi sono infiniti punti che non rappresentano numeri naturali. Per indicarlo si dice che \mathbb{N} è un insieme **discreto**.

2. Le quattro operazioni

Gli operatori, gli operandi, il risultato

Nell'insieme \mathbb{N} si possono eseguire le quattro operazioni: addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione.

I simboli usati per le operazioni ($+$, \cdot , $-$, $:$) si chiamano **operatori**.

Ogni operatore agisce su due numeri che si chiamano **operandi** e produce un **risultato**. Vediamo i loro nomi in ogni operazione.

► Per la moltiplicazione useremo di solito il simbolo \cdot invece del simbolo \times .

OPERANDI E RISULTATO				
OPERAZIONE	1° OPERANDO	2° OPERANDO	RISULTATO	ESEMPIO
addizione	addendo	addendo	somma	$\begin{array}{r} \text{1° addendo} \\ 8 \\ + \text{2° addendo} \\ 4 \\ \hline \text{somma} \\ 12 \end{array}$
moltiplicazione	fattore	fattore	prodotto	$\begin{array}{r} \text{1° fattore} \\ 8 \\ \cdot \text{2° fattore} \\ 4 \\ \hline \text{prodotto} \\ 32 \end{array}$
sottrazione	minuendo	sottraendo	differenza	$\begin{array}{r} \text{minuendo} \\ 8 \\ - \text{sottraendo} \\ 4 \\ \hline \text{differenza} \\ 4 \end{array}$
divisione	dividendo	divisore	quoziente	$\begin{array}{r} \text{dividendo} \\ 8 \\ : \text{divisore} \\ 4 \\ \hline \text{quoziente} \\ 2 \end{array}$

L'addizione e la moltiplicazione

► La sottrazione e la divisione sono definite rispettivamente in base all'addizione e alla moltiplicazione e agiscono in modo contrario rispetto a queste; per tale motivo sono anche chiamate **operazioni inverse**.

Fra le quattro operazioni solo l'addizione e la moltiplicazione danno sempre come risultato un numero naturale. Per questo si dice che l'addizione e la moltiplicazione sono **operazioni interne in \mathbb{N}** , oppure che \mathbb{N} è **chiuso** rispetto a tali operazioni.

La sottrazione e la divisione

La **differenza** fra due numeri è quel numero che, addizionato al sottraendo, dà come somma il minuendo.

ESEMPIO

$$5 - 3 = 2, \quad \text{perché} \quad 2 + 3 = 5.$$

Non sempre esiste in \mathbb{N} il risultato della sottrazione: il risultato di una sottrazione è un numero naturale se e solo se il minuendo è maggiore o uguale al sottraendo.

Il quoziente fra due numeri è quel numero che, moltiplicato per il divisore, dà come prodotto il dividendo. Quindi, perché la divisione abbia senso *il divisore deve sempre essere diverso da 0*.

ESEMPIO

1. $18 : 3 = 6$, perché $6 \cdot 3 = 18$.
2. $18 : 0$ è un'operazione impossibile, perché non esiste nessun numero che, moltiplicato per 0, dia 18.

Anche con il divisore diverso da 0, non sempre esiste per la divisione il risultato in \mathbb{N} , cioè la divisione non è un'operazione interna in \mathbb{N} .

Per esempio, il risultato di $15 : 6$ non esiste in \mathbb{N} , perché non esiste un numero naturale che, moltiplicato per 6, dia 15.

Nei numeri naturali è sempre possibile eseguire la **divisione non esatta** (con resto). In questo caso fra dividendo, divisore, quoziente e resto vale la relazione:

$$\text{dividendo} = \text{divisore} \cdot \text{quoziente} + \text{resto} \quad (\text{figura 2}).$$

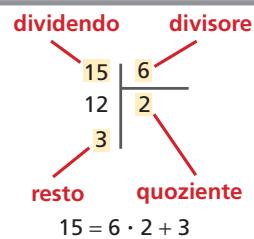
Solo se il resto è 0, ritorniamo al caso della divisione esatta.

► La sottrazione **non** è un'operazione interna in \mathbb{N} :

$$4 - 9 = ?$$

Non esiste in \mathbb{N} il risultato di $4 - 9$, perché non esiste un numero naturale n tale che $n + 9 = 4$.

▼ Figura 2



$$15 = 6 \cdot 2 + 3$$

DAI NUMERI ALLE LETTERE

In matematica le lettere offrono la possibilità di parlare non di un numero particolare, ma di un numero generico.

Il doppio di 4 è $2 \cdot 4$, il doppio di 100 è $2 \cdot 100$.

Se indichiamo con n un generico numero naturale, il suo doppio è $2 \cdot n$.

L'espressione $2 \cdot n$ ha un valore diverso a seconda del valore attribuito a n :

- se $n = 4$, $2 \cdot n$ diventa $2 \cdot 4 = 8$;
- se $n = 100$, $2 \cdot n$ diventa $2 \cdot 100 = 200$.

Quando vogliamo indicare un numero generico, usiamo quindi una lettera dell'alfabeto. A tale lettera viene dato il nome di **variabile numerica** (o, più brevemente, **variabile**); nell'esempio precedente n è una variabile.

■ Il numero 0

Addizione e sottrazione

Lo 0 sommato a qualsiasi numero dà come risultato il numero stesso. Ciò è vero indifferentemente quando 0 è il primo addendo o il secondo. Per questo motivo 0 è detto **elemento neutro dell'addizione**.

Non è invece possibile in \mathbb{N} la sottrazione con il minuendo uguale a 0.

► Se utilizziamo la variabile n , possiamo scrivere:

$$n + 0 = 0 + n = n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dove il simbolo \forall significa «per ogni» e \in significa «che appartiene».

ESEMPIO

$$\underline{8} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{8} = 8.$$

$0 - 6$ non ha risultato in quanto in \mathbb{N} non esiste un numero che, sommato a 6, dia 0.

- $\underline{7} - \underline{7} = 0$ perché
 $0 + \underline{7} = \underline{7}.$

- In generale:

$$n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- È **necessario** significa che se il prodotto è 0, almeno uno dei fattori deve essere 0. È **sufficiente** significa che se uno dei fattori è 0, anche il prodotto è uguale a 0.

- Anche la divisione $0 : 0$ non viene definita. Infatti ogni numero, moltiplicato per 0, dà come risultato 0: la divisione non potrebbe quindi avere un unico risultato. In casi come questo si dice che l'operazione è *indeterminata*.

- Esempio:

$$5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = 5.$$

- In generale:

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La somma di due numeri naturali è 0 soltanto se entrambi i numeri sono 0. Invece, quando la sottrazione dà come risultato 0, significa che il minuendo e il sottraendo sono uguali.

Moltiplicazione e divisione

Nella moltiplicazione basta che lo 0 compaia una sola volta tra i fattori per annullare il prodotto. Lo 0 è quindi un numero che, moltiplicato per qualsiasi numero, dà come risultato se stesso. Per questo lo 0 viene detto **elemento assorbente della moltiplicazione**.

ESEMPIO

$$7 \cdot 0 = 0 \cdot 7 = 0; \quad 5 \cdot 4 \cdot 0 \cdot 200 = 0.$$

Nella moltiplicazione vale la **legge di annullamento del prodotto**: affinché un prodotto sia 0 è *necessario e sufficiente* che sia 0 almeno uno dei suoi fattori.

Nella divisione, quando il dividendo è 0, il quoziente è 0.

ESEMPIO

$$\underline{0} : 4 = 0 \text{ perché } \underline{0} \cdot 4 = \underline{0}.$$

Non è possibile la divisione con il divisore uguale a 0.

ESEMPIO $6 : 0$ non ha significato. Infatti non è possibile trovare un numero che moltiplicato per 0 dia come risultato 6.

In casi come questo si dice che l'operazione è *impossibile*.

Il numero 1

Moltiplicando qualsiasi numero per 1 si ottiene come risultato il numero stesso, indifferentemente quando 1 è il primo fattore o il secondo. Per questo 1 è detto **elemento neutro della moltiplicazione**.

Nella divisione, quando il divisore è 1, il quoziente coincide con il dividendo. Se la divisione ha quoziente 1, il dividendo e il divisore sono uguali.

ESEMPIO

$$\underline{16} : 1 = 16 \text{ perché } \underline{16} \cdot 1 = 16.$$

$$8 : \underline{1} = 8 \text{ perché } 1 \cdot \underline{8} = 8.$$

3. I multipli e i divisori di un numero

Un numero naturale è **multiplo** di un altro se la divisione del primo per il secondo dà come resto 0.

Attraverso la moltiplicazione possiamo trovare per ogni numero diverso da 0 infiniti multipli: basta moltiplicare il numero per 0, 1, 2, 3, 4, ... (il numero 0 ha invece come unico multiplo se stesso).

Un numero naturale diverso da 0 è **divisore** di un altro numero naturale se la divisione fra quest'ultimo e il numero dato è esatta, cioè se la divisione dà come resto 0.

ESEMPIO 6 è divisore di 18, perché $18 : 6 = 3$ con resto 0;

7 non è divisore di 18, perché $18 : 7 = 2$ con resto 4.

Mentre i multipli di un numero sono infiniti, i suoi **divisori** sono un numero finito.

ESEMPIO I divisori di 40 sono:

1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.

► I multipli di 8 sono:

0, 8, 16, 24, 32, 40, ...

Per indicarli sinteticamente possiamo scrivere:

$8 \cdot n, \forall n \in \mathbb{N}$.

I multipli di 2 sono i **numeri pari** e si indicano con:

$2 \cdot n, \forall n \in \mathbb{N}$.

CRITERI DI DIVISIBILITÀ			
UN NUMERO È DIVISIBILE PER	QUANDO	ESEMPIO DI NUMERO DIVISIBILE	ESEMPIO DI NUMERO NON DIVISIBILE
2	l'ultima cifra è pari	5 679 254	60 018 841
5	l'ultima cifra è 0 o 5	279 640; 310 065	9 111 008
4	il numero formato dalle ultime due cifre a destra lo è, oppure	295 264; 310 500	917 426
25	queste cifre sono 00	157 275; 98 200	784 040
3	la somma delle cifre è divisibile per 3	74 391 $(7+4+3+9+1=24=3 \cdot 8)$	32 723 $(3+2+7+2+3=17)$
9	la somma delle cifre è divisibile per 9	65 682 $6+5+6+8+2=27=9 \cdot 3$	15 747 $1+5+7+4+7=24$
11	sommendo le cifre di posto dispari e poi quelle di posto pari, la differenza fra il risultato maggiore e quello minore è 11 oppure un multiplo di 11	6 150 914 $(4+9+5+6)-(1+0+1)=24-2=22$	122 333 $(3+3+2)-(3+2+1)=8-6=2$

4. Le potenze

Ci sono moltiplicazioni particolari nelle quali tutti i fattori sono uguali. Per esempio, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

▶ Usando le lettere:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

Per evitare scritture così lunghe è stata introdotta una nuova operazione, la **potenza**: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ si scrive 2^7 (si legge «2 alla settima»).

Il numero 2 è la **base** e il numero 7 è l'**esponente** della potenza. La base indica quale fattore viene moltiplicato per se stesso, l'esponente indica il numero di fattori uguali. Dunque:

se l'esponente è maggiore di 1, la potenza è il prodotto di tanti fattori quanti vengono indicati dall'esponente, tutti uguali alla base.

È ragionevole pensare che l'esponente sia maggiore o uguale a 2, per avere almeno una moltiplicazione, ossia due fattori. Tuttavia vogliamo dare un significato anche a **potenze con esponente 1 o esponente 0**.

Per definizione:

- **elevando a 0 un numero naturale diverso da 0 si ottiene 1:**
 $a^0 = 1$ se $a \neq 0$;
- **elevando a 1 un numero naturale si ottiene il numero stesso:** $a^1 = a$.

Non viene invece definita la potenza con base ed esponente 0:

0⁰ non ha significato.

1. Potenze con esponente 0:

$$2^0 = 1; \quad 2008^0 = 1; \\ 1^0 = 1.$$

0^0 non ha significato.

2. Potenze con esponente 1:

$$2^1 = 2; \quad 2008^1 = 2008; \\ 1^1 = 1; \quad 0^1 = 0.$$

5. Le espressioni con i numeri naturali

Se vogliamo eseguire una sequenza di operazioni con i numeri naturali risolviamo un'espressione. Per esempio,

$$3^4 + 2 \cdot 5^2 - 3 + 20 : 2^2$$

Le operazioni vanno eseguite con un **ordine** ben preciso: prima vengono calcolate le potenze, poi le moltiplicazioni e le divisioni, nell'ordine in cui sono scritte, infine le addizioni e le sottrazioni, sempre nell'ordine in cui sono scritte.

Ciò significa che alcune operazioni hanno la precedenza rispetto ad altre. Moltiplicazioni e divisioni hanno pari precedenza, così come addizioni e sottrazioni.

ESEMPIO

$$10 + 2 \cdot 3 = 10 + 6 = 16.$$

▶ 10 + 2 · 3 = 12 · 3 = 36

è sbagliato!

La moltiplicazione ha priorità sull'addizione e va quindi svolta per prima.

Semplificare un'espressione significa sostituirla con una più semplice che abbia lo stesso valore.

ESEMPIO Semplifichiamo l'espressione $3^4 + 2 \cdot 5^2 - 3 + 20 : 2^2$.

$$3^4 + 2 \cdot 5^2 - 3 + 20 : 2^2 =$$

Calcoliamo le potenze:

$$= 81 + 2 \cdot 25 - 3 + 20 : 4 =$$

Eseguiamo la moltiplicazione e la divisione:

$$= 81 + 50 - 3 + 5 =$$

Eseguiamo nell'ordine in cui le incontriamo le addizioni e la sottrazione:

$$= 133.$$

Le espressioni con le parentesi

A che cosa servono le parentesi in un'espressione? Ad alterare la priorità delle operazioni, cioè a modificare l'ordine con cui devono essere svolte.

Occorre eseguire prima i calcoli presenti all'interno delle parentesi *tonde*, poi quelli all'interno delle *quadre* e infine quelli all'interno delle *graffe*.

ESEMPIO

$$\{2^5 - [15^2 - (20 : 2)^2 \cdot 2]\} \cdot 5 =$$

$$= \{32 - [225 - 10^2 \cdot 2]\} \cdot 5 =$$

$$= \{32 - 25\} \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35.$$

Se abbiamo
 $20 : 2^2 =$

eseguiamo prima la
potenza:

$$= 20 : 4 = 5.$$

Se abbiamo

$$(20 : 2)^2 =$$

eseguiamo prima la
divisione:

$$= 10^2 = 100.$$

LE ESPRESSIONI E LE LETTERE

Con le variabili possiamo scrivere espressioni letterali, per esempio:

$$2 \cdot a - b + 3 \cdot a^2.$$

Il simbolo di moltiplicazione fra variabile e numero, o fra variabili, può essere sottinteso.

Per esempio, l'espressione precedente può essere scritta:

$$2a - b + 3a^2.$$

Quando una variabile compare più volte nella stessa espressione, essa rappresenta sempre lo stesso numero.

Possiamo calcolare il valore di un'espressione per particolari valori attribuiti alle lettere.

Per esempio, prendendo $a = 5$ e $b = 10$, sostituendo i valori alle lettere, otteniamo per l'espressione precedente:

$$2 \cdot 5 - 10 + 3 \cdot 5^2 = 75.$$

Invece, se:

$$a = 2 \text{ e } b = 3,$$

l'espressione vale:

$$2 \cdot 2 - 3 + 3 \cdot 2^2 = 4 - 3 + 3 \cdot 4 = 1 + 12 = 13.$$

6. Le proprietà delle operazioni

Le proprietà che ora studieremo vengono dette **proprietà formali** delle operazioni. Esse valgono indipendentemente dai particolari numeri ai quali scegliamo di applicarle.

■ La proprietà commutativa

■ PROPRIETÀ

Proprietà commutativa dell'addizione

In un'addizione, se si cambia l'ordine degli addendi, la somma non cambia.

$$\triangle + \bullet = \bullet + \triangle$$

$$a + b = b + a$$

ESEMPIO

$$5 + 4 = 4 + 5.$$

► La proprietà commutativa **non** vale né per la sottrazione né per la divisione. Per esempio,

$$15 - 3 = 12,$$

mentre $3 - 15$ non è nemmeno un numero naturale.

■ PROPRIETÀ

Proprietà commutativa della moltiplicazione

In una moltiplicazione, se si cambia l'ordine dei fattori, il prodotto non cambia.

$$\triangle \cdot \bullet = \bullet \cdot \triangle$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

ESEMPIO

$$4 \cdot 2 = 2 \cdot 4.$$

■ La proprietà associativa

■ PROPRIETÀ

Proprietà associativa dell'addizione

La somma di tre numeri non cambia se si associano diversamente gli addendi, lasciando invariato il loro ordine.

$$(\triangle + \bullet) + \square = \triangle + (\bullet + \square)$$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

ESEMPIO

$$(3 + 6) + 4 = 3 + (6 + 4).$$

La proprietà associativa fa sì che, in una sequenza di addizioni, possiamo sostituire a due addendi consecutivi la loro somma: il risultato non cambia.

ESEMPIO

$$5 + \underline{7} + 3 + 2 = 5 + \underline{10} + 2.$$

PROPRIETÀ**Proprietà associativa della moltiplicazione**

Il prodotto di tre numeri non cambia se si associano diversamente i fattori, lasciando invariato il loro ordine.

$$\begin{aligned} (\triangle \cdot \bullet) \cdot \blacksquare &= \triangle \cdot (\bullet \cdot \blacksquare) \\ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \end{aligned}$$

Leggendo l'uguaglianza da destra a sinistra, possiamo anche dire che la somma di due o più numeri naturali non cambia se sostituiamo a un suo addendo due numeri naturali che abbiano per somma tale addendo.

ESEMPIO

$$(6 \cdot 4) \cdot 5 = 6 \cdot (4 \cdot 5).$$

La proprietà associativa fa sì che, in una sequenza di moltiplicazioni, possiamo sostituire a due fattori consecutivi il loro prodotto: il risultato non cambia.

ESEMPIO

$$3 \cdot 7 \cdot \underline{2 \cdot 5} = 3 \cdot 7 \cdot \underline{10}.$$

In una sequenza di addizioni (o moltiplicazioni), applicando le proprietà commutativa e associativa più volte, è sempre possibile spostare in qualsiasi posizione uno o più addendi (o fattori).

$$\mathbf{ESEMPIO} \quad (5 + 3) + 7 = (7 + 3) + 5.$$

Infatti, per la proprietà associativa dell'addizione:

$$(5 + 3) + 7 = 5 + (3 + 7) =$$

Per la proprietà commutativa:

$$= 5 + (7 + 3) = (7 + 3) + 5.$$

Leggendo l'uguaglianza da destra a sinistra, possiamo anche dire che il prodotto di due o più numeri naturali non cambia se sostituiamo a un suo fattore due numeri naturali che abbiano per prodotto tale fattore.

La proprietà associativa non vale né per la sottrazione né per la divisione. Infatti:

$$(10 - 3) - 1 \neq 10 - (3 - 1);$$

$$(24 : 4) : 2 \neq 24 : (4 : 2).$$

Non è valida la proprietà distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione.

$$\begin{aligned} 7 + (2 \cdot 5) &\neq \\ &\neq (7 + 2) \cdot (7 + 5). \end{aligned}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} 7 + (2 \cdot 5) &= 17; \\ (7 + 2) \cdot (7 + 5) &= 108. \end{aligned}$$

La proprietà distributiva**PROPRIETÀ****Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione**

Quando si deve moltiplicare un numero per una somma, si può moltiplicare quel numero per ciascun addendo e poi sommare i prodotti ottenuti, e il risultato non cambia.

$$\begin{aligned} \triangle \cdot (\bullet + \blacksquare) &= \triangle \cdot \bullet + \triangle \cdot \blacksquare \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

ESEMPIO

$$5 \cdot (4 + 2) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 2.$$

Abbiamo formulato la proprietà in modo che il fattore venga distribuito verso destra. In tal caso si parla di proprietà distributiva **a destra**. Poiché la moltiplicazione è commutativa, la proprietà distributiva vale anche **a sinistra**.

ESEMPIO

$$(3 + 4) \cdot 5 = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5.$$

► In simboli:

$$\begin{aligned} a \cdot b + a \cdot c &= a \cdot (b + c); \\ b \cdot a + c \cdot a &= (b + c) \cdot a. \end{aligned}$$

► Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla sottrazione

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \quad \text{con } b \geq c.$$

► La proprietà distributiva della divisione è vera anche rispetto alla sottrazione.

Per esempio:

$$(20 - 4) : 2 = 20 : 2 - 4 : 2.$$

► La proprietà vale solo a sinistra (la divisione non è commutativa).

Leggendo le uguaglianze dei due esempi precedenti da destra verso sinistra, si può ricavare la regola del **raccoglimento a fattore comune**: quando in una somma tutti gli addendi presentano un fattore in comune, esso può essere raccolto moltiplicandolo per la somma degli altri termini.

ESEMPIO

$$9 \cdot 8 + 9 \cdot 2 = 9 \cdot (8 + 2).$$

La proprietà distributiva della moltiplicazione e il raccoglimento a fattore comune valgono anche rispetto alla sottrazione.

PROPRIETÀ**Proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione**

Quando si deve dividere una somma per un numero, si può dividere ciascun addendo per quel numero e poi sommare i quozienti ottenuti, e il risultato non cambia.

ESEMPIO

$$(20 + 4) : 2 = 20 : 2 + 4 : 2.$$

La proprietà può essere espressa in lettere:

$$(a + b) : c = a : c + b : c, \quad \text{con } c \neq 0 \text{ e } a + b, a, b \text{ multipli di } c.$$

■ La proprietà invariantiva**PROPRIETÀ****Proprietà invariantiva della sottrazione**

In una sottrazione, se si aggiunge o si toglie uno stesso numero sia al minuendo sia al sottraendo, la differenza non cambia.

In lettere:

$$\begin{aligned} a - b &= (a + c) - (b + c), && \text{con } a \geq b; \\ a - b &= (a - c) - (b - c), && \text{con } a \geq b \geq c. \end{aligned}$$

ESEMPIO

$$15 - 8 = (15 + 2) - (8 + 2).$$

PROPRIETÀ

Proprietà invariantiva della divisione

In una divisione, se si moltiplica o divide per uno stesso numero, *diverso da 0*, sia il dividendo sia il divisore, il quoziente non cambia.

ESEMPIO

$$60 : 15 = (60 \cdot 2) : (15 \cdot 2); \quad 60 : 15 = (60 : 3) : (15 : 3).$$

In lettere:

$$\begin{aligned} a : b &= (a \cdot n) : (b \cdot n), && \text{con } b \neq 0, n \neq 0 \text{ e } a \text{ multiplo di } b; \\ a : b &= (a : n) : (b : n), && \text{con } b \neq 0, n \neq 0 \text{ e } a \text{ multiplo di } b \\ &&& \text{e } a, b \text{ multipli di } n. \end{aligned}$$

► Se dividiamo il dividendo e il divisore per uno stesso numero, questo deve essere un divisore di entrambi.

► La proprietà invariantiva **non** vale né per l'addizione né per la moltiplicazione. Infatti, per esempio:
 $10 + 2 \neq (10 + 3) + (2 + 3)$;
 $15 \cdot 9 \neq (15 : 3) \cdot (9 : 3)$.

7. Le proprietà delle potenze

■ Il prodotto di potenze di uguale base

Consideriamo la seguente moltiplicazione:

$$4^2 \cdot 4^3.$$

Applichiamo la definizione di potenza,

$$4^2 \cdot 4^3 = \underbrace{4 \cdot 4}_{2 \text{ volte}} \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3 \text{ volte}} = 4 \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{5 \text{ volte}} = 4^5,$$

ossia: $4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3}$.

PROPRIETÀ

Prima proprietà delle potenze

Il prodotto di potenze di uguale base è una potenza con la stessa base avente come esponente la somma degli esponenti.

$$\begin{aligned} \blacksquare^{\bullet} \cdot \blacksquare^{\Delta} &= \blacksquare^{\bullet+\Delta} \\ a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \end{aligned}$$



BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V01a

► Poiché 0^0 non ha significato, in tutte le proprietà delle potenze che esaminiamo, l'esponente e la base di una stessa potenza non possono essere contemporaneamente nulli.

► La definizione data per le potenze con esponente 1 o 0 è tale da verificare la prima proprietà.

$$\begin{aligned} 6^4 \cdot 6^0 &= 6^4 \cdot 1 = 6^4; \\ 6^4 \cdot 6^0 &= 6^{4+0} = 6^4. \end{aligned}$$

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V01b

■ Il quoziente di potenze di uguale base

Consideriamo la divisione $4^7 : 4^3$.

Poiché la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione, stiamo cercando quel numero che, moltiplicato per 4^3 , dia come prodotto 4^7 .

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{7 \text{ volte}} = \dots \cdot ? \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3 \text{ volte}}$$

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{7 \text{ volte}} = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{(7-3) \text{ volte}} \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3 \text{ volte}}$$

Il numero cercato è 4^4 ; quindi possiamo scrivere:

$$4^7 : 4^3 = 4^{7-3}.$$

- Se gli esponenti sono uguali, si ha, per esempio,
 $4^7 : 4^7 = 4^{7-7} = 4^0 = 1$,
e in generale:

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0 = 1.$$

■ PROPRIETÀ

Seconda proprietà delle potenze

Il quoziente di potenze di uguale base (con l'esponente della seconda minore o uguale all'esponente della prima e con la base diversa da 0) è una potenza con la stessa base che ha come esponente la differenza degli esponenti.

$$\blacksquare^{\bullet} : \blacksquare^{\Delta} = \blacksquare^{\bullet-\Delta}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

con $m \geq n$, $a \neq 0$

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V01c

■ La potenza di una potenza

Consideriamo 4^2 come base di un'altra potenza con esponente 3:

$$(4^2)^3.$$

Per definizione di potenza:

$$(4^2)^3 = 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2.$$

Per la prima proprietà delle potenze:

$$4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 = 4^{2+2+2} = 4^{2 \cdot 3}.$$

Quindi:

$$(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3}.$$

■ PROPRIETÀ

Terza proprietà delle potenze

La potenza di una potenza è una potenza che ha la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

$$(\blacksquare^{\bullet})^{\Delta} = \blacksquare^{\bullet \cdot \Delta}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

■ Il prodotto di potenze di uguale esponente

Dato un prodotto fra potenze con lo stesso esponente, per esempio $4^2 \cdot 6^2$, cerchiamo di scriverlo in altro modo, utilizzando proprietà note.

Per la definizione di potenza:

$$4^2 \cdot 6^2 = 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6.$$

Applichiamo le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione:

$$4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 = (4 \cdot 6) \cdot (4 \cdot 6).$$

Per la definizione di potenza:

$$(4 \cdot 6) \cdot (4 \cdot 6) = (4 \cdot 6)^2.$$

Quindi:

$$4^2 \cdot 6^2 = (4 \cdot 6)^2.$$

PROPRIETÀ

Quarta proprietà delle potenze

Il prodotto di potenze di uguale esponente è una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$$\bullet^{\square} \cdot \triangle^{\square} = (\bullet \cdot \triangle)^{\square}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

■ Il quoziente di potenze di uguale esponente

Consideriamo un quoziente fra potenze con lo stesso esponente:

$$12^2 : 4^2.$$

Poiché la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione, stiamo cercando quel numero che, moltiplicato per 4^2 , dia come prodotto 12^2 .

Mostriamo che quel numero è $(12 : 4)^2$, cioè che:

$$(12 : 4)^2 \cdot 4^2 = 12^2.$$

Per la quarta proprietà delle potenze:

$$(12 : 4)^2 \cdot 4^2 = [(12 : 4) \cdot 4]^2 = 12^2.$$

Quindi:

$$12^2 : 4^2 = (12 : 4)^2.$$

PROPRIETÀ

Quinta proprietà delle potenze

Il quoziente di potenze di uguale esponente è una potenza che ha per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$$\bullet^{\square} : \triangle^{\square} = (\bullet : \triangle)^{\square}$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

con $b \neq 0$

BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V01d



BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V01e



Osservazione. Le cinque proprietà delle potenze si basano sul fatto che la potenza è una moltiplicazione ripetuta, quindi riguardano solo la moltiplicazione e la sua inversa, la divisione. Per l'addizione e la sottrazione di potenze non si può ricavare alcuna proprietà.

► Analogamente puoi verificare che:

$$\begin{aligned}2^5 - 2^3 &\neq 2^{5-3}; \\4^2 + 6^2 &\neq (4+6)^2; \\12^2 - 4^2 &\neq (12-4)^2.\end{aligned}$$

ESEMPIO

$$4^2 + 4^3 \neq 4^{2+3}.$$

Infatti $4^2 + 4^3 = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 + 64 = 80$, mentre $4^{2+3} = 4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$.

8. Il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo

■ La scomposizione in fattori primi

Si dicono **primi** i numeri naturali, diversi da 0 e da 1, che hanno come divisori soltanto 1 e se stessi.

ESEMPIO

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ..., 53, ..., 941, ..., 1987, ...

sono divisibili solo per se stessi e per 1, quindi sono numeri primi.

► La scomposizione in fattori primi di 60 è:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Scriviamo anche:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Quando un numero non è primo, è sempre possibile farne la **scomposizione in fattori primi**, ossia scriverlo sotto forma di un prodotto in cui tutti i fattori sono numeri primi.

ESEMPIO

$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. 20 è scomposto in fattori primi.

$60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$. 60 non è scomposto in fattori primi.

La scomposizione di un numero in fattori primi viene anche chiamata **fattorizzazione** in numeri primi.

■ Il massimo comune divisore

Consideriamo i numeri 30 e 40.

I divisori di 30 sono: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

I divisori di 40 sono: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.

30 e 40 hanno in comune i divisori 1, 2, 5, 10. 10 è il più grande e viene perciò chiamato *massimo comune divisore* e indicato con *M.C.D.*

Possiamo scrivere: $M.C.D.(30, 40) = 10$.

DEFINIZIONE

Massimo comune divisore

Il massimo comune divisore (M.C.D.) di due o più numeri naturali, *diversi da 0*, è il più grande fra i divisori comuni.

Il M.C.D. di due o più numeri è il **prodotto dei soli fattori primi comuni, ognuno preso una sola volta con l'esponente più piccolo**.

ESEMPIO

Scomponiamo 30 e 40, mettendo in colonna i fattori uguali.

$$\begin{array}{rcl} 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 40 = 2^3 \cdot 5 \end{array} \rightarrow \text{Il M.C.D. è } 2 \cdot 5, \text{ cioè } 10.$$

Le colonne «piene» individuano i fattori comuni 2 e 5; bisogna prendere ciascuno con l'esponente più piccolo.

Se il M.C.D. di due numeri è 1, significa che essi non hanno divisori comuni, tranne il numero 1.

In questo caso i due numeri vengono detti **primi tra loro**. Per esempio 8 e 9 sono primi tra loro.

Il minimo comune multiplo

Consideriamo di nuovo i numeri 30 e 40 e i loro multipli *diversi da 0*.

I multipli di 30 sono: 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, ...

I multipli di 40 sono: 40, 80, 120, 160, 200, 240, ...

Il più piccolo multiplo che i numeri 30 e 40 hanno in comune è 120; esso viene perciò chiamato **minimo comune multiplo** e indicato con *m.c.m.*

Possiamo scrivere: $\text{m.c.m.}(30, 40) = 120$.

DEFINIZIONE

Minimo comune multiplo

Il minimo comune multiplo (m.c.m.) di due o più numeri naturali, *diversi da 0*, è il più piccolo fra i multipli comuni, *diversi da 0*.

Il **m.c.m.** di due o più numeri è il **prodotto di tutti i fattori primi, comuni e non comuni, ognuno preso una sola volta con l'esponente più grande**.

Il m.c.m. di due numeri primi fra loro è il loro prodotto. Per esempio:

$$\text{m.c.m.}(8, 9) = 72.$$

ESEMPIO

Riprendiamo le scomposizioni dell'esempio precedente:

$$\begin{array}{rcl} 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 40 = 2^3 \cdot 5 \end{array} \rightarrow \text{Il m.c.m. è } 2^3 \cdot 3 \cdot 5, \text{ cioè } 120.$$

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

UNA CONGETTURA E LA SUA VERIFICA

All'interno di un campo di ricerca, i matematici affrontano uno dei **problemi** non ancora risolti o inventano nuovi problemi, per la soluzione dei quali formulano spesso delle **congetture**, ossia supposizioni ritenute vere. Consideriamo, come esempio, la congettura di Goldbach, formulata nel 1742:

«Ogni numero pari maggiore di 2 può essere scritto come somma di due numeri primi».

Verifichiamo la congettura:

$$\begin{array}{lll} 4 = 2 + 2 & 8 = 3 + 5 & 12 = 5 + 7 \\ 6 = 3 + 3 & 10 = 3 + 7 & \dots \end{array}$$

Ma è sufficiente verificare una congettura una, due, tre,... tante volte per poter affermare che è vera?

LA VERIFICA NON BASTA...

Pierre de Fermat, matematico vissuto nella prima metà del Seicento, affermò che la formula

$$F_n = 2^{2^n} + 1,$$

con n numero naturale, generava soltanto numeri primi. Proviamo a vedere se aveva ragione:

$$\begin{array}{ll} F_0 = 2^1 + 1 = 3, & F_1 = 2^2 + 1 = 5, \\ F_2 = 2^4 + 1 = 17, & F_3 = 2^8 + 1 = 257, \\ F_4 = 2^{16} + 1 = 65\,537. & \end{array}$$

3, 5, 17, 257, 65 537 sono effettivamente numeri



primi. Ma anche Fermat, come noi, si fermava a $n = 4$, perché ai suoi tempi il calcolo dei valori successivi era difficile e non si conoscevano metodi per stabilire in tempi accettabili se numeri grandi fossero primi o no.

Infine, nel 1732, Eulero riuscì a dimostrare che $F_5 = 4\,294\,967\,297$ è divisibile per 641 e che quindi non è primo. Dunque la congettura di Fermat era falsa! Inoltre, fino a oggi, non si è ancora trovato un numero generato dalla formula di Fermat per $n \geq 5$ che sia primo!

...È NECESSARIO DIMOSTRARE

Esempi come questo fanno capire che una congettura che riguarda infiniti casi non può essere accettata come vera sulla base di un numero finito, anche se molto grande, di verifiche. Infatti non si può escludere di trovare un caso in cui la proprietà non è verificata, ossia un controsenso. Se lo si trova, si dice che la congettura è stata **confutata**, se invece si riesce a dimostrarla, diventa un **teorema**.

Fino a oggi nessuno è riuscito a dimostrare la congettura di Goldbach.

TOCCA A TE

In ogni capitolo troverai un **problema**. Discutine con i tuoi compagni e formula congetture per trovare strategie risolutive. Sostienile con **ragionamenti** e **deduzioni**. Ecco il problema di questo capitolo.

Ma quanti sono i numeri primi?



Nel sito: ► Scheda di lavoro

Man mano che si procede nella successione dei numeri naturali, è sempre più raro incontrare numeri primi. Chi garantisce che, prima o poi, non troveremo il più grande numero primo? I Greci hanno risolto questo problema:

«Esistono sempre numeri primi in numero maggiore di quanti numeri primi si vogliano proporre». (Euclide, *Elementi*, Libro IX, Proposizione 20, III secolo a.C.)

ANDREA: «È ovvio che i numeri primi sono infiniti: fanno parte dei numeri naturali, che, come si sa, sono infiniti».

LUISA: «Non mi sembra che basti quello che dici! Facciamo così: se consideriamo i numeri primi 2 e 3, troviamo un nuovo numero primo calcolando: $2 \cdot 3 + 1 = 7 \dots$ ».

► Quella di Andrea è una buona giustificazione?
A che cosa porta l'osservazione di Luisa?

9. I sistemi di numerazione

■ Il sistema a base dieci

Il nostro modo di scrivere i numeri si basa sull'uso di dieci simboli diversi, le **cifre**:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

I primi dieci numeri naturali sono indicati da una sola cifra, mentre per scrivere i successivi utilizziamo una combinazione di cifre.

Consideriamo il numero 222. Leggendolo da destra, il primo 2 indica le unità, il secondo 2 le decine, il terzo 2 le centinaia. Le cifre assumono un valore diverso a seconda della *posizione* in cui si trovano. Per questo il nostro sistema è di tipo **posizionale**.

Ogni numero può essere scritto in **forma polinomiale**, come somma di prodotti costituiti da un numero di una cifra e una potenza di 10.

ESEMPIO

$$4637 = 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0.$$

Il numero 10 assume un ruolo particolare e viene detto **base**. Il nostro sistema di numerazione è chiamato **a base dieci** o **decimale**.

■ I sistemi con altre basi

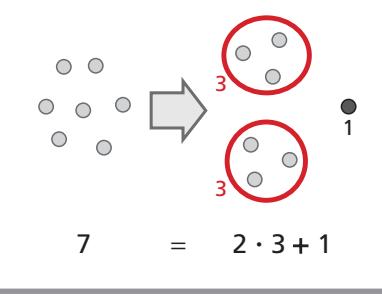
Un sistema di tipo posizionale può avere come base un numero qualsiasi. È sufficiente raggruppare le unità non secondo le potenze di dieci, ma secondo quelle della nuova base.

ESEMPIO Scriviamo 7 in base tre. Questo significa che possiamo utilizzare solo tre simboli come cifre: 0, 1, 2.

Il numero 7 si può pensare come costituito di 2 gruppi da 3 unità e di 1 da 1 unità. Perciò il numero 7 (in base dieci) scritto in base tre diventa 21 (si legge: «due-uno»).

In forma polinomiale:

$$7 = 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0.$$



◀ Figura 3

Con il simbolo 21 in base tre indichiamo un numero diverso da quello che lo stesso simbolo indica in base dieci (ossia ventuno). Per non creare confusione, conveniamo di scrivere i numeri in base diversa da dieci fra parentesi,

indicando in piccolo la base. Nell'esempio precedente scriviamo quindi:

$$7 = (21)_3.$$

Scriviamo una tabella dei primi cinque numeri diversi da 0 scritti nelle basi da 2 a 5.

NUMERO	BASE 2	BASE 3	BASE 4	BASE 5
1	1	1	1	1
2	10	2	2	2
3	11	10	3	3
4	100	11	10	4
5	101	12	11	10

Lo stesso simbolo 10 (uno-zero) indica il 2 in base due, il 3 in base tre e così via. Il simbolo 100 (uno-zero-zero) indica la potenza con esponente 2 della base e così via.

Inoltre, scelta una base, essa ci indica anche quanti simboli (cifre) sono necessari per rappresentare tutti i numeri; per esempio, in base due sono necessari solo due simboli, 0 e 1, in base tre sono necessari i simboli 0, 1 e 2 e così via.

Il sistema di numerazione in base due si chiama anche **sistema binario**.

■ Da una base qualsiasi a base dieci e viceversa

Nella scrittura di un numero possiamo passare da una base prescelta a base dieci utilizzando la forma polinomiale.

ESEMPIO

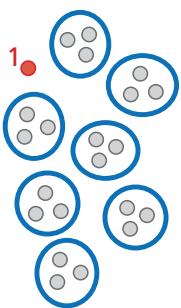
$$(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11;$$

$$(232)_5 = 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 50 + 15 + 2 = 67;$$

$$(1A)_{12} = 1 \cdot 12^1 + 10 \cdot 12^0 = 22.$$

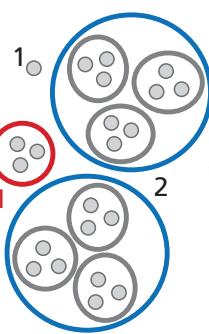
Per passare invece da base dieci a una base qualsiasi possiamo utilizzare un procedimento di divisioni successive che hanno come divisore la base. Scriviamo 22 in base tre.

▼ Figura 4



$$\begin{array}{r} 22 \\ \hline 3 \\ 1 \end{array}$$

a. Dividendo 22 per 3 otteniamo
quoziente 7 e resto 1: in 22 ci sono
7 gruppi da 3 e 1 unità.



b. Dividendo 7 per 3 otteniamo
quoziente 2 e resto 1: dai 7 gruppi
da 3 si ottengono 2 gruppi da 3^2 e
1 gruppo da 3 isolato.

$$\begin{array}{r} 22 \\ \hline 3 \\ 1 \quad 7 \\ \hline 1 \quad 2 \end{array}$$

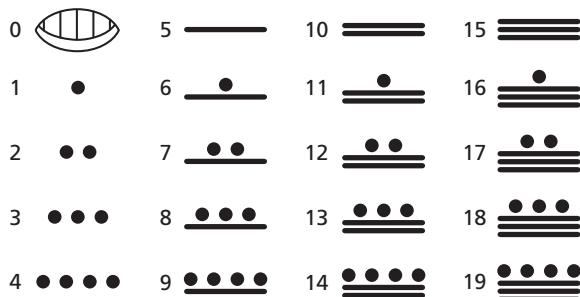
$$\begin{array}{r} 22 \\ \hline 3 \\ 1 \quad 7 \\ \hline 1 \quad 2 \end{array}$$

c. Il numero in base tre si legge
nella direzione della freccia:
 $(22)_{10} = (211)_3$.

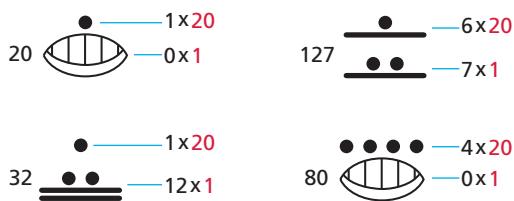
ESPLORAZIONE: I NUMERI MAYA

Un antico sistema di numerazione posizionale è quello dei Maya.

Questa è la rappresentazione maya dei numeri fino a 19.

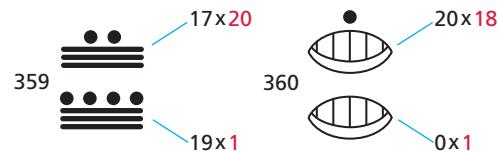


Per i numeri successivi la scrittura posizionale era verticale e, nei numeri con due «cifre», la cifra sopra indicava i gruppi da 20, quella sotto le unità. Ecco alcuni esempi.



La cosa particolare è che, arrivati al numero 359, i Maya cambiavano base, passando da base venti a base diciotto.

Consideravano poi come unità di ordine superiore il gruppo da 360. Si aveva quindi:



Il numero 360, legato ai giorni dell'anno, doveva esercitare un fascino particolare sui Maya, visto che rappresentava l'unica eccezione, e l'unità di ordine superiore, 7200, che è uguale a $20 \cdot 360$, tornava a considerare 20 gruppi da 360 (e non 18).

IN CINQUE SLIDE

Illustra ai tuoi compagni, con una presentazione multimediale, i sistemi di numerazione dell'antichità presso gli Egizi, i Greci, i Babilonesi, i Romani, gli Arabi, i Cinesi. Sfidalì poi a scrivere alcuni numeri alla maniera degli antichi. Per esempio come si scrivono i numeri 75, 64, 28, 374, 420, 722 con la numerazione maya?

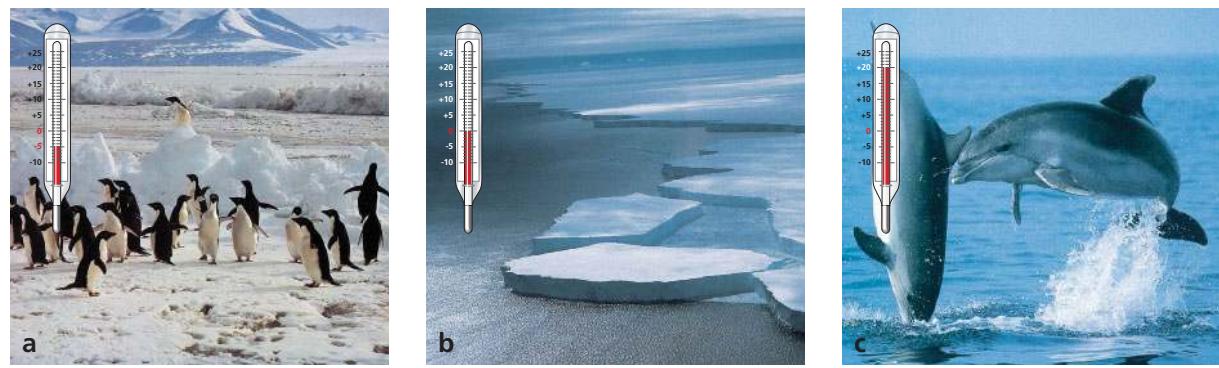
Cerca nel web: sistemi di numerazione, contare, simboli numerici.

10. Che cosa sono i numeri interi

I numeri naturali non sono adatti per risolvere tutti i problemi. Conosci senz'altro situazioni in cui vengono usati numeri diversi.

Per misurare la temperatura di un ambiente, di solito utilizziamo un termometro nel quale troviamo, oltre lo 0, dei numeri dotati di segno.

▼ **Figura 5** La temperatura si misura di solito in gradi °C. Lo 0 corrisponde alla temperatura del ghiaccio che fonde (b). Per indicare temperature minori di 0 si usano numeri con segno – (a). Per temperature maggiori di 0 si usano numeri con segno + (c).



Quando siamo «sopra zero», la temperatura viene indicata con un numero preceduto dal segno +, per esempio + 20; quando siamo «sotto zero», la temperatura è espressa con un numero preceduto dal segno –, per esempio – 5.

In pratica, da ogni numero naturale diverso da 0 si sono ricavati due numeri, per mezzo dei due segni + e –. Per esempio, da 5 si ottengono + 5 e – 5.

I numeri con il segno + si chiamano *positivi*, quelli con il segno – si chiamano *negativi*.

L'insieme \mathbb{Z}

Indichiamo con \mathbb{Z} l'insieme costituito dai numeri:

$$\dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots$$

Questi numeri si chiamano interi relativi o, più semplicemente, **interi**.

I numeri che hanno lo stesso segno si chiamano **concordi**, quelli che hanno segno diverso **discordi**.

Per esempio, – 3 e – 7 sono concordi, – 3 e + 7 sono discordi.

Il **valore assoluto** di un numero è il numero considerato senza il segno che lo precede. Per indicarlo si usa il simbolo $| |$.

ESEMPIO Il valore assoluto di + 5 è 5: $| +5 | = 5$.

Il valore assoluto di – 6 è 6: $| -6 | = 6$.

► 0 è l'unico numero intero senza segno.

Indichiamo con \mathbb{Z}^+ l'insieme degli interi positivi e con \mathbb{Z}^- l'insieme degli interi negativi.

► Il valore assoluto si chiama anche **modulo**.

► Il numero 0 può essere considerato opposto di se stesso.

► Dati due insiemi A e B , B è **sottoinsieme** di A se ogni elemento di B è anche elemento di A . B si dice **sottoinsieme proprio** di A se esistono elementi di A che non sono elementi di B .

Due numeri interi si dicono **opposti** se hanno lo stesso valore assoluto e sono discordi.

Per esempio, sono opposti i numeri – 1 e + 1, – 2 e + 2, – 3 e + 3, ...

L'insieme \mathbb{Z} come ampliamento dell'insieme \mathbb{N}

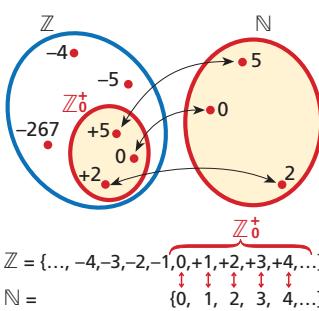
Che relazione c'è fra l'insieme dei numeri naturali e quello degli interi?

Consideriamo il sottoinsieme di \mathbb{Z} formato da 0 e da tutti gli interi positivi, che indichiamo con \mathbb{Z}_0^+ :

$$\mathbb{Z}_0^+ = \{0, +1, +2, +3, +4, \dots\}.$$

Associamo allo 0 di \mathbb{Z}_0^+ lo 0 di \mathbb{N} , a + 1 il numero naturale 1, a + 2 il numero naturale 2 e così via.

► **Figura 6** Gli insiemi \mathbb{Z}_0^+ e \mathbb{N} sono in corrispondenza biunivoca: a ogni numero intero di \mathbb{Z}_0^+ associamo il numero naturale che si ottiene da esso privandolo del segno + e viceversa. Allo 0 di \mathbb{Z}_0^+ associamo lo 0 di \mathbb{N} .



Fra i due insiemi \mathbb{Z}_0^+ e \mathbb{N} abbiamo creato una corrispondenza biunivoca. Questo è il primo passo per riuscire a pensare l'insieme dei naturali come un sottoinsieme proprio di quello degli interi, ma non è sufficiente.

Per poter identificare del tutto $+5$ con 5 , $+2$ con 2 e così via, è anche necessario che per i numeri interi positivi **si conservino i risultati** ottenuti con i loro corrispondenti naturali confrontandoli o eseguendo operazioni fra loro.

Per esempio, essendo $5 > 2$ in \mathbb{N} , il confronto in \mathbb{Z} deve operare in modo che si ottenga $+5 > +2$; inoltre, poiché $3 + 7 = 10$, allora $(+3) + (+7)$ deve avere come risultato $+10$ ecc.

Per le operazioni poi devono continuare a valere **le stesse proprietà formali** valide nell'insieme dei numeri naturali.

Nel definire le operazioni fra numeri interi rispetteremo queste condizioni, in modo tale da identificare del tutto i numeri naturali con i numeri interi positivi (incluso lo 0).

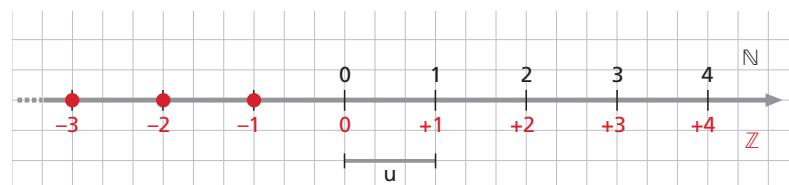
Quando si opera in questo modo nel passaggio da un insieme numerico a un altro, si dice che si costruisce un **ampliamento** dell'insieme di partenza. In questo caso, \mathbb{Z} è un ampliamento di \mathbb{N} .

In generale, per avere un ampliamento di un insieme numerico è necessario:

- creare un nuovo insieme numerico e dare una legge che a ogni numero del vecchio insieme faccia corrispondere uno e un solo numero del nuovo;
- definire nel nuovo insieme il confronto e le operazioni in modo che si conservino i risultati ottenuti nel vecchio;
- mantenere le proprietà formali relative al confronto e alle operazioni.

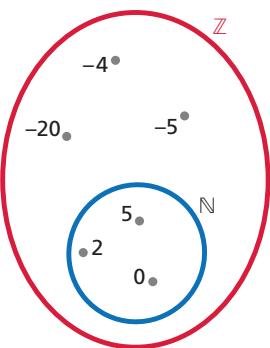
■ La rappresentazione dei numeri interi su una retta

Abbiamo già visto come rappresentare i numeri naturali su una semiretta. Consideriamo ora la retta a cui appartiene la semiretta dei naturali. Poiché abbiamo identificato \mathbb{N} con \mathbb{Z}_0^+ , abbiamo subito la rappresentazione di \mathbb{Z}_0^+ . Per rappresentare i numeri negativi, associamo a -1 il punto che dista una unità da 0 verso sinistra, a -2 il punto che dista una unità da -1 verso sinistra ecc.



► Una **corrispondenza biunivoca** fra due insiemi A e B associa a ogni elemento di A uno e un solo elemento di B e viceversa. Per questo motivo la corrispondenza è del tipo «uno a uno».

► Per esempio, per l'addizione e per la moltiplicazione devono ancora valere le proprietà commutativa, associativa e distributiva.



◀ Figura 7 La rappresentazione di \mathbb{N} e di \mathbb{Z} su una retta orientata. Osserva che sulla retta orientata i numeri opposti sono equidistanti da 0.

■ Il confronto fra numeri interi

Rappresentare i numeri interi sulla retta dà la possibilità di visualizzare un ordinamento fra essi. Poiché abbiamo fissato sulla retta l'orientamento in senso crescente, ogni numero risulta minore di tutti quelli che stanno alla sua destra e maggiore di quelli che stanno alla sua sinistra.

Per esempio, -6 è minore di -5 , -1 è minore di 2 ecc.

In generale:

- Per esempio:
 - $+5 > +3$ perché $5 > 3$;
 - $-7 > -9$ perché $7 < 9$;
 - $+5 > -10$;
 - $-7 < 0$ e $0 < +8$.

- Per esempio, il precedente di -5 è -6 , il successivo di -3 è -2 .

- fra due numeri positivi, il maggiore è quello che ha valore assoluto maggiore;
- fra due numeri negativi, il maggiore è quello che ha valore assoluto minore;
- ogni numero positivo è sempre maggiore di ogni numero negativo;
- il numero 0 è maggiore di ogni numero negativo e minore di ogni numero positivo.

Dunque, dati due numeri interi a e b , si verifica una e una sola delle seguenti situazioni: $a = b$, oppure $a < b$, oppure $a > b$.

Diciamo perciò che l'insieme \mathbb{Z} è un **insieme ordinato**.

Anche nell'insieme \mathbb{Z} , come in \mathbb{N} , è sempre possibile conoscere il **precedente** e il **successivo** di un numero. Per ogni numero intero x , $x - 1$ è il precedente di x , $x + 1$ è il successivo di x .

Inoltre, sulla retta che rappresenta \mathbb{Z} , fra un numero intero e il successivo non vi sono altri numeri interi. Per questo motivo anche l'insieme \mathbb{Z} , come \mathbb{N} , è un **insieme discreto**. Di conseguenza, fra due numeri interi qualsiasi vi è sempre, al più, un numero finito di numeri interi.

11. Le operazioni nell'insieme dei numeri interi

■ L'addizione

■ DEFINIZIONE

Somma di numeri concordi

La somma di due numeri concordi è un numero che ha:

- per valore assoluto la somma fra i valori assoluti dei due numeri;
- per segno lo stesso dei due numeri.

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V02a

ESEMPIO

$$(+4) + (+5) = + (4 + 5) = + 9;$$

$$(-3) + (-7) = - (3 + 7) = - 10.$$

DEFINIZIONE**Somma di numeri discordi**

La somma di due numeri discordi è un numero che ha:

- per valore assoluto la differenza fra il maggiore e il minore dei valori assoluti;
- per segno quello del numero che ha valore assoluto maggiore.

ESEMPIO

$$(-12) + (+40) = + (40 - 12) = + 28;$$

$$(-20) + (+4) = - (20 - 4) = - 16.$$

L'operazione di addizione è **interna** in \mathbb{Z} . Puoi verificare, inoltre, che anche per l'addizione fra interi valgono le **proprietà commutativa** e **associativa**, e che lo **0** è l'**elemento neutro**.

Abbiamo anche una nuova proprietà collegata all'esistenza dell'opposto di ogni numero: **per ogni numero ne esiste un secondo (il suo opposto) tale che la loro somma è 0**, ossia l'elemento neutro dell'addizione. Per esempio, $(-9) + (+9) = 0$.

► Più in breve:

$$(+4) + (+5) = + 4 + 5;$$

$$(-3) + (-7) = - 3 - 7.$$

► Più in breve:

$$(-12) + (+40) = -12 + 40;$$

$$(-20) + (+4) = -20 + 4.$$

Quello che segue è un esempio di **quadrato magico** ed è stato inserito in un'incisione di Albrecht Dürer dal titolo *Melancholia I*. Ai tempi di Dürer quadrati come questo venivano associati ai sentimenti e considerati dei portafortuna.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Puoi notare che se sommiamo i numeri di una riga, o di una colonna, o di una delle due diagonali, otteniamo lo stesso numero, detto anche **costante magica**. In questo caso la costante magica è 34.

Di quadrati magici di quattro righe e quattro colonne, ossia di **ordine 4**, con costante magica 34, ce ne sono tanti. Dürer ha scelto quello in cui si legge l'anno di esecuzione della sua opera: 1514.

I quadrati magici sono di solito composti con i numeri naturali da 1 a n^2 , dove n è l'ordine, ma si possono realizzare anche con gli interi. Se facciamo corrispondere ai numeri naturali da 1 a 16 i

numeri interi da -8 a 8 , escluso lo 0, il quadrato di Dürer diventa:

8	-6	-7	5
-4	2	3	-1
1	-3	-2	4
-5	7	6	-8

Con gli interi la costante magica diventa 0 ed è evidente la disposizione simmetrica, rispetto al centro del quadrato, dei numeri opposti.

IN CINQUE SLIDE

Costruisci un quadrato magico di ordine 3 con i numeri naturali. Questo quadrato era un simbolo sacro nell'antica Cina, dove era chiamato *Lo Shu*. Realizza una presentazione multimediale sull'argomento.

 **Cerca nel web:** quadrati magici, magic squares, Lo Shu.

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V02b

$$\begin{array}{r} \text{minuendo} \\ (+14) - (+3) = +11. \\ \text{sottraendo} \qquad \qquad \text{differenza} \end{array}$$

- Proprietà invariantiva:
 $a - b = (a + c) - (b + c)$;
 $a - b = (a - c) - (b - c)$.

Esempio:

$$\begin{aligned} (+5) - (-3) &= \\ &= (+5 + 3) - (-3 + 3) = \\ &= +8 - 0 = +8. \end{aligned}$$

- L'operazione $4 - 7$ può essere vista sia come un'addizione:

$$\begin{aligned} (+4) + (-7), \\ \text{sia come una sottrazione:} \\ (+4) - (+7). \end{aligned}$$

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V02c

■ La sottrazione

■ DEFINIZIONE

Differenza fra interi

La differenza di due numeri interi è la somma del minuendo con l'opposto del sottraendo.

$$a - b = a + (-b)$$

■ ESEMPIO

$$(+14) - (+3) = (+14) + (-3) = +11;$$

$$(-4) - (-6) = (-4) + (+6) = +2.$$

Più in breve, eliminiamo le parentesi del sottraendo, cambiando il suo segno:

$$(+19) - (-4) = +19 + 4 = +23.$$

Anche per la sottrazione fra interi vale la **proprietà invariantiva**.

L'operazione di sottrazione è **interna** in \mathbb{Z} , mentre non lo è in \mathbb{N} . Per esempio, l'operazione $4 - 9$ non ha risultato in \mathbb{N} ; invece in \mathbb{Z} otteniamo:

$$4 - 9 = (+4) - (+9) = (+4) + (-9) = -5.$$

Pertanto, nell'eseguire una sottrazione, non dobbiamo più porre la condizione che il minuendo sia maggiore o uguale al sottraendo.

Poiché la sottrazione fra numeri interi è riconducibile all'addizione, è possibile parlare più semplicemente di **addizione algebrica**, senza specificare addizioni e sottrazioni.

■ La moltiplicazione

■ DEFINIZIONE

Prodotto di due interi

Il prodotto di due numeri interi è un intero che ha:

- per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti;
- per segno il segno positivo se i fattori sono concordi, il segno negativo se i fattori sono discordi.

•	+	-
+	+	-
-	-	+

■ ESEMPIO

$$(+6) \cdot (+8) = +48; \quad (-5) \cdot (-7) = +35;$$

$$(-3) \cdot (+5) = -15; \quad (+9) \cdot (-2) = -18.$$

Spesso, per comodità, il simbolo \cdot di moltiplicazione viene omesso:

$$(-3) \cdot (+7) \text{ equivale a } (-3)(+7).$$

Se si moltiplicano più numeri, per determinare il **segno del prodotto**, basta contare il numero dei fattori negativi:

- se essi sono presenti in numero dispari, il prodotto è negativo;
- se essi sono presenti in numero pari, il prodotto è positivo.

ESEMPIO

$$(-3)(+5)(+2)(-1) = +30, \quad 2 \text{ fattori negativi.}$$

$$(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = -1, \quad 5 \text{ fattori negativi.}$$

Moltipicare un numero per -1 equivale a cambiargli il segno, ottenendo come risultato il suo opposto.

ESEMPIO

$$(+5)(-1) = -5.$$

La moltiplicazione è un'**operazione interna** in \mathbb{Z} . Inoltre valgono tutte le proprietà già esaminate in \mathbb{N} : **commutativa**, **associativa**, **distributiva** rispetto all'addizione, esistenza dell'**elemento neutro** ($+1$).

■ La divisione

DEFINIZIONE

Quoziente di due interi

Il quoziente di due numeri interi, quando il primo è multiplo del secondo e il secondo è *diverso da 0*, è un intero che ha:

- per valore assoluto il quoziente dei valori assoluti dei due numeri;
- per segno quello dato dalle regole di segno della moltiplicazione.

ESEMPIO

$$(+45) : (+9) = +5; \quad (-12) : (-6) = +2;$$

$$(+24) : (-4) = -6; \quad (-15) : (+5) = -3.$$

Nella divisione valgono la proprietà **invariantiva** e la **distributiva a destra** rispetto all'addizione.

ESEMPIO Proprietà invariantiva:

$$-45 : 9 = (-45 : 3) : (9 : 3).$$

Proprietà distributiva a destra:

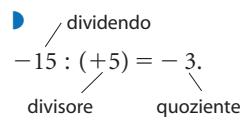
$$(15 + 9) : (-3) = 15 : (-3) + 9 : (-3).$$

- Se si omette il simbolo \cdot , occorre sempre scrivere i fattori tra parentesi, per non sbagliare operazione. Per esempio, $(+5)(-7)$ significa $(+5) \cdot (-7)$ e **non** può essere scritto eliminando tutte le parentesi: $+5 - 7$ non è una moltiplicazione ma un'addizione! È accettabile invece la scrittura: $+5(-7)$.



BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V02d



► **Non** vale invece, come in \mathbb{N} , la proprietà distributiva a sinistra:

$$30 : (3 + 2)$$

non è uguale a:

$$30 : 3 + 30 : 2.$$

Anche in \mathbb{Z} , come in \mathbb{N} , la divisione non è un'operazione interna. Per esempio, $(-20) : (+3)$ non ha risultato in \mathbb{Z} .

Casi particolari

- $a : 1 = a$;
- $a : a = 1$, con $a \neq 0$;
- $0 : a = 0$, con $a \neq 0$;
- $a : 0$ è impossibile, con $a \neq 0$;
- $0 : 0$ è indeterminata.



■ La potenza

■ DEFINIZIONE

Potenza di un intero con esponente naturale

La potenza di un numero intero è un intero che ha:

- per valore assoluto la potenza del valore assoluto;
- per segno il segno negativo se la base è negativa e l'esponente è dispari, il segno positivo negli altri casi.

► Il segno di una potenza è una conseguenza di quanto abbiamo detto per il segno del prodotto di più numeri.

Per esempio:

$(-5)^4 = +625$ perché in $(-5)^4$, cioè

$$\underbrace{(-5)(-5)}_{+} \underbrace{(-5)(-5)}_{+}$$

c'è un numero pari di segni $-$.

$(-5)^3 = -125$ perché in $(-5)^3$, cioè

$$\underbrace{(-5)(-5)}_{+} \underbrace{(-5)}_{-}$$

c'è un numero dispari di segni $-$.

Se a è il valore assoluto della base, p un numero naturale pari e d uno dispari:

$$\begin{aligned} (+a)^p &= +a^p; \\ (+a)^d &= +a^d; \\ (-a)^p &= +a^p; \\ (-a)^d &= -a^d. \end{aligned}$$

■ ESEMPIO

$$(+3)^2 = +9; \quad (-3)^2 = +9;$$

$$(+3)^3 = +27; \quad (-3)^3 = -27.$$

L'operazione di potenza ha la precedenza rispetto al segno. In altre parole, quando una potenza è scritta senza le parentesi, significa che è riferita solo al numero (in valore assoluto) e non al segno che la precede.

■ ESEMPIO

$$-3^2 = -9, \text{ mentre } (-3)^2 = +9.$$

Casi particolari

- $a^1 = a$;
- $a^0 = 1$, con $a \neq 0$;
- 0^0 non è definita;
- $0^n = 0$, con $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$.

Per le potenze in \mathbb{Z} valgono le stesse **proprietà delle potenze** valide in \mathbb{N} .

12. Le leggi di monotonia

Le uguaglianze e le disuguaglianze fra numeri naturali e interi godono di due proprietà fondamentali, una relativa all'addizione, l'altra alla moltiplicazione. Queste proprietà vengono dette **leggi di monotonia**.

PROPRIETÀ

Prima legge di monotonia

Un'uguaglianza o una disuguaglianza resta valida se aggiungiamo ai due membri uno stesso numero.

$$\begin{array}{c} a \stackrel{>}{\equiv} b \\ a + c \stackrel{>}{\equiv} b + c \end{array}$$

ESEMPIO

Applichiamo a: $5 < 13$

la prima legge aggiungendo 7: $5 + 7 < 13 + 7$.

La disuguaglianza è vera, infatti: $12 < 20$.

PROPRIETÀ

Seconda legge di monotonia per le uguaglianze

Un'uguaglianza resta valida se moltiplichiamo i due membri per uno stesso numero, *diverso da 0*.

$$\begin{array}{c} a = b \\ a \cdot c = b \cdot c \\ \text{con } c \neq 0 \end{array}$$

► Lo zero e la monotonia
Lo 0 è un numero particolare. Nella prima legge di monotonia, essendo l'elemento neutro dell'addizione, non fa sorgere particolari problemi, in quanto aggiungendo 0 si ottiene di nuovo l'uguaglianza o la disuguaglianza così com'era.

Nella seconda legge dobbiamo escluderlo poiché, essendo elemento assorbente della moltiplicazione, rende nulli i prodotti. Questo fa sì che si potrebbe passare da una relazione falsa a una vera. Per esempio, la relazione

$$5 + 3 = 10$$

è falsa, mentre la relazione

$$(5 + 3) \cdot 0 = 10 \cdot 0$$

è vera.

PROPRIETÀ

Seconda legge di monotonia per le disuguaglianze

Se moltiplichiamo i due membri di una disuguaglianza per un numero positivo, la disuguaglianza è ancora valida; se li moltiplichiamo per un numero negativo, dobbiamo cambiare verso alla disuguaglianza.

$$\begin{array}{c} a < b \\ \downarrow \\ a \cdot c < b \cdot c \quad \text{se } c > 0 \\ a \cdot c > b \cdot c \quad \text{se } c < 0 \end{array}$$

ESEMPIO

Data la disuguaglianza $12 < 20$, se moltiplichiamo i due membri per -1 , essa si trasforma nella disuguaglianza di verso contrario fra gli opposti dei numeri:

$$-12 > -20.$$

► Le leggi di cancellazione possono essere viste come leggi di monotonia per la sottrazione e per la divisione.

Sono vere anche le inverse delle leggi di monotonia, dette anche **leggi di cancellazione**.

ESEMPIO**Prima legge di cancellazione**

$$10 + \cancel{8} = 6 + 4 + \cancel{8} \rightarrow 10 = 6 + 4;$$

$$5 + \cancel{7} < 13 + \cancel{7} \rightarrow 5 < 13.$$

Seconda legge di cancellazione

$$10 \cdot \cancel{3} = (6 + 4) \cdot \cancel{3} \rightarrow 10 = 6 + 4;$$

$$5 \cdot \cancel{2} < 13 \cdot \cancel{2} \rightarrow 5 < 13.$$

I NUMERI NEL MONDO

Oggi, per scrivere i numeri, si usa quasi dovunque il sistema decimale posizionale.

Nonostante la scrittura araba si scriva da destra a sinistra, i numeri si scrivono da sinistra a destra, come in Europa e in India.

In mongolo anche i numeri si scrivono in verticale, dall'alto verso il basso: la cifra che rappresenta le unità è quindi quella più in basso, quella delle decine è immediatamente sopra ecc.

La scrittura cinese è un po' più complicata: quando si scrive in verticale, si usa la notazione posizionale dall'alto verso il basso, utilizzando le cifre elencate nell'ultima riga della tabella che mettiamo a disposizione nel sito. Se invece si scrive in orizzontale, si usa un sistema differente, che combina le cifre da uno a nove con simboli che rappresentano gli ordini di grandezza (decine, centinaia, migliaia ecc.). I simboli per dieci, cento, mille sono 十, 百, 千. Per scrivere, per esempio, ventuno ($2 \times 10 + 1$), si disegnano i simboli due – dieci – uno;

per scrivere tredici, dieci – tre. La scrittura giapponese è analoga a quella cinese (anche se cambiano i nomi di tutti i numeri).

LEGGERE NUMERI

- Questa è la targa di una locomotiva della ferrovia dell'Hegiaz (Siria e Giordania); grazie alla tabella puoi decifrare i simboli arabi: 130-755.



- Utilizzando la tabella, leggi questi numeri.

٦٩

百十一

١٠٠



Nel sito: ► tabella con le cifre nel mondo





Cicale e numeri primi

...perché le cicale preferiscono i numeri primi?

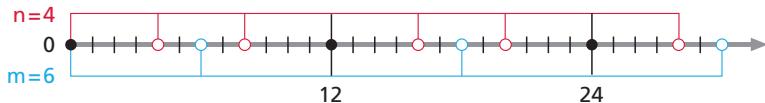
→ Il quesito completo a pag. 1

Le cicale americane *Magicicada tredecim* e *Magicicada septendecim* vivono in gruppi geograficamente ben distinti, condividendo lo stesso periodo di latenza, rispettivamente di 13 e 17 anni, per poi uscire dal sottosuolo per accoppiarsi, deporre le uova e infine morire. Non sembra un caso che tali cicli vitali siano rappresentati da due numeri primi.

Se consideriamo due cicli di n e m anni, che iniziano nello stesso momento, essi si ritroveranno a coincidere ogni numero di anni uguale al *minimo comune multiplo* di n e m .

Per esempio, se $n = 4$ e $m = 6$, ogni 12 anni l'inizio dei due cicli vitali combacerà (vedi figura in alto).

Nel caso in cui n e m siano primi tra loro, tali coincidenze si verificano solo una volta ogni $n \cdot m$ anni. Per i due tipi di cicale americane ciò avviene ogni $13 \cdot 17 = 221$ anni.

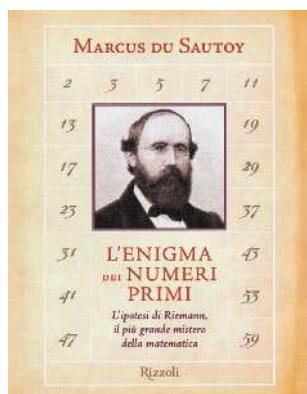


Questo permette di diminuire notevolmente la possibilità di ibridazione con conseguente indebolimento della specie e allo stesso tempo di ridurre le occasioni di competizione per le stesse risorse ambientali.

Osserviamo che con cicli entrambi più lunghi, ma non primi tra loro, la frequenza delle coincidenze potrebbe aumentare: per esempio, con cicli di 15 e 18 anni l'incontro avverrebbe ogni 90 anni.

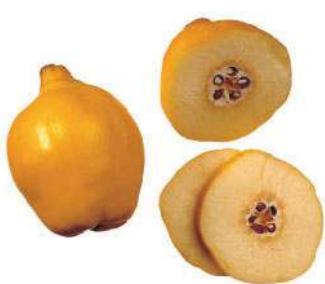
Il fatto che, oltre a essere primi tra loro, 13 e 17 siano anche singolarmente due numeri primi, riduce al minimo anche la frequenza degli incontri con eventuali predatori che abbiano cicli vitali più brevi. Pensiamo per esempio allo svantaggio che comporterebbe per la cicala un ciclo

di 12 anni in presenza di predatori con cicli di 2, 3 o 4 anni. Il matematico Marcus du Sautoy parla delle cicale americane e di altre curiosità legate ai numeri primi nel suo recente libro *The Music of the Primes* (edito in Italia con il titolo *L'enigma dei numeri primi*).



I NUMERI PRIMI IN NATURA

In diversi fenomeni la natura sembra scegliere i numeri primi. Se proviamo a sezionare una banana, il frutto all'interno appare diviso in 3 parti, mentre se tagliamo una mela a metà nel senso trasversale possiamo osservare 5 logge, che contengono i semi del frutto, disposte secondo una simmetria a stella. Il numero 5 ricorre spesso: basta pensare alle dita degli arti dei mammiferi, alle stelle marine, ai petali di fiori come la rosa canina, la petunia, il gelsomino, alle foglie della vite o del platano. Sette sono i giorni della settimana: dato che tra una fase di luna piena e la successiva intercorrono circa 29 giorni (anch'esso un numero primo), il numero 7 permette una pratica suddivisione del mese in 4 gruppi di 7 giorni. Ma questi sono solo alcuni esempi; guardandoti intorno, puoi scoprire tanti numeri primi anche tu!



LA TEORIA IN SINTESI

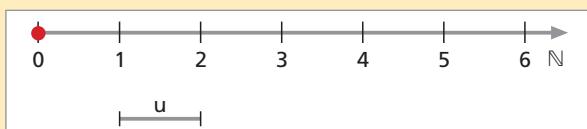
I numeri naturali e i numeri interi

1. Che cosa sono i numeri naturali

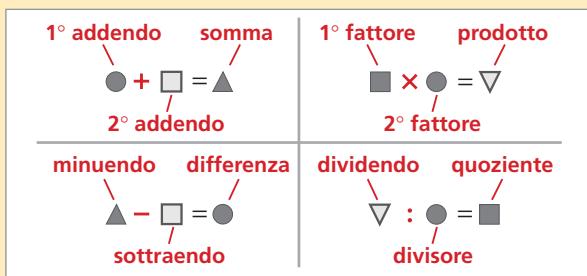
I **numeri naturali** 0, 1, 2, 3, ... servono per contare gli elementi di un insieme; indicano cioè la **cardinalità** di un insieme.

I numeri naturali hanno un **ordine** e possono essere rappresentati su una **semiretta orientata**.

L'insieme dei numeri naturali si indica con \mathbb{N} .



2. Le quattro operazioni



Il divisore deve essere diverso da 0.

Delle quattro operazioni, solo l'addizione e la moltiplicazione sono **operazioni interne** in \mathbb{N} .

3. I multipli e i divisori di un numero

Un numero naturale è **multiplo** di un altro se la divisione del primo per il secondo dà come resto 0.

Un numero naturale (diverso da 0) è **divisore** di un altro se la divisione del secondo per il primo dà come resto 0.

4. Le potenze

Una **potenza** con esponente maggiore di 1 è una moltiplicazione della base per se stessa tante volte quante sono indicate dall'esponente:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

Qualunque numero **elevato a 1** dà come risultato se stesso:

$$a^1 = a.$$

Qualunque numero diverso da 0 **elevato a 0** dà come risultato 1:

$$a^0 = 1.$$

L'espressione 0^0 non ha significato.

5. Le espressioni con i numeri naturali

In un'**espressione**, le operazioni devono essere svolte in questo ordine:

1. elevamento a potenza;
2. moltiplicazione e divisione, nell'ordine in cui sono scritte;
3. addizione e sottrazione, nell'ordine in cui sono scritte.

Inoltre, le operazioni scritte tra parentesi hanno la precedenza.

6. Le proprietà delle operazioni

PROPRIETÀ DELL'ADDITIONE

PROPRIETÀ	ESPRESSONE
commutativa	$a + b = b + a$
associativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$

PROPRIETÀ DELLA MOLTIPLICAZIONE

PROPRIETÀ	ESPRESSONE
commutativa	$a \cdot b = b \cdot a$
associativa	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
distributiva a destra rispetto all'addizione	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
distributiva a sinistra rispetto all'addizione	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

PROPRIETÀ DELLA SOTTRAZIONE		
PROPRIETÀ	ESPRESSONE	CON
invariantiva	$a - b = (a + n) - (b + n)$ $a - b = (a - n) - (b - n)$	$a \geq b$ $a \geq b \geq n$
PROPRIETÀ DELLA DIVISIONE		
PROPRIETÀ	ESPRESSONE	CON
invariantiva	$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$ $a : b = (a : n) : (b : n)$	$b \neq 0, n \neq 0, a$ multiplo di b $b \neq 0, n \neq 0, a$ multiplo di b, a e b multipli di n
distributiva a sinistra rispetto all'addizione	$(a + b) : c = a : c + b : c$	$c \neq 0, a + b, a$ e b multipli di c

7. Le proprietà delle potenze

PROPRIETÀ DELLE POTENZE		
PROPRIETÀ	ESPRESSONE	CON
1 ^a : prodotto di potenze di uguale base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	
2 ^a : quoziente di potenze di uguale base	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$m \geq n, a \neq 0$
3 ^a : potenza di una potenza	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	
4 ^a : prodotto di potenze di uguale esponente	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	
5 ^a : quoziente di potenze di uguale esponente	$a^n : b^n = (a : b)^n$	$b \neq 0, a$ multiplo di b

Le lettere della tabella indicano numeri naturali qualsiasi. La base e l'esponente di una stessa potenza non possono essere contemporaneamente nulli.

8. Il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo

Un numero naturale (maggiore di 1) è **primo** quando è divisibile soltanto per 1 e per se stesso.

Ogni numero naturale non primo si può scomporre nel prodotto di **fattori primi**.

Il **M.C.D.** di due o più numeri, diversi da 0, è il più grande dei divisori comuni ed è dato dal prodotto dei soli fattori primi comuni, ognuno preso una sola volta con l'esponente più piccolo.

ESEMPIO

$$\text{M.C.D.}(18, 48) = \text{M.C.D.}(2 \cdot 3^2, 2^4 \cdot 3) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Il **m.c.m.** di due o più numeri naturali diversi da 0 è il più piccolo dei multipli comuni ed è dato dal prodotto di tutti i fattori primi, comuni e non comuni, presi ciascuno una sola volta con l'esponente più grande.

ESEMPIO

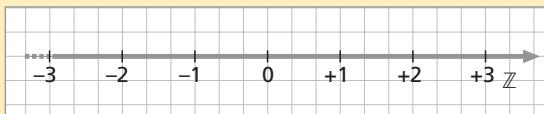
$$\begin{aligned} \text{m.c.m.}(12, 20) &= \text{m.c.m.}(2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5) = \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60. \end{aligned}$$

9. I sistemi di numerazione

Il nostro sistema di numerazione è **posizionale a base dieci**: ogni numero viene rappresentato mediante dieci cifre (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) che assumono valore diverso a seconda della posizione che occupano.

10. Che cosa sono i numeri interi

L'insieme degli interi è **ordinato** e può essere rappresentato su una retta orientata.



Il **valore assoluto** di un numero intero è il numero considerato senza il segno che lo precede.

Due numeri interi sono **concordi** quando hanno lo stesso segno, sono **discordi** quando hanno segno diverso, sono **opposti** quando hanno lo stesso valore assoluto ma sono discordi.

11. Le operazioni nell'insieme dei numeri interi

La **somma di due interi concordi** è un intero che ha come valore assoluto la somma dei valori assoluti degli addendi e come segno il segno comune agli addendi.

ESEMPIO $(-44) + (-4) = - (44 + 4) = - 48.$

La **somma di due interi discordi** è un intero che ha come valore assoluto la differenza fra il maggiore e il minore dei valori assoluti degli addendi e come segno il segno dell'addendo che ha valore assoluto maggiore.

ESEMPIO $(-19) + (+9) = - (19 - 9) = - 10.$

La **differenza di due interi** è la somma del minuendo con l'opposto del sottraendo:

$$a - b = a + (-b).$$

ESEMPIO $(-4) - (+6) = (-4) + (-6) = -10.$

Il **prodotto di due interi** ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti, segno positivo se i fattori sono concordi, segno negativo se i fattori sono discordi.

ESEMPIO $(-3) \cdot (-6) = + 18;$
 $(-3) \cdot (+6) = - 18.$

Il **quoziente di due interi**, di cui il primo multiplo del secondo, ha per valore assoluto il quoziente dei valori assoluti, segno positivo se dividendo e divisore sono concordi, segno negativo se dividendo e divisore sono discordi.

ESEMPIO $(-18) : (-3) = + 6;$
 $(+18) : (-3) = - 6.$

La **potenza di un intero**, con esponente naturale, ha per valore assoluto la potenza del valore assoluto e segno negativo se la base è negativa e l'esponente è dispari, segno positivo altrimenti.

ESEMPIO $(-2)^3 = -8;$
 $(-2)^4 = +16.$

L'operazione di potenza ha la precedenza rispetto al segno.

In \mathbb{Z} valgono le stesse **proprietà delle operazioni e delle potenze** che valgono in \mathbb{N} .

12. Le leggi di monotonia

LEGGI DI MONOTONIA

SE	PRIMA LEGGE	SECONDA LEGGE
$a = b$	$a + n = b + n$	$an = bn \ (n \neq 0)$
$a < b$	$a + n < b + n$	$an < bn \text{ se } n > 0; an > bn \text{ se } n < 0$
$a > b$	$a + n > b + n$	$an > bn \text{ se } n > 0; an < bn \text{ se } n < 0$

Le lettere a, b, n rappresentano numeri interi qualunque.

1. Che cosa sono i numeri naturali

→ Teoria a pag. 1

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 VERO O FALSO?

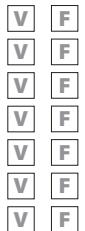
- a) 6 è precedente a 7.
- b) 7 è il precedente di 8.
- c) 8 è il successivo di 6.
- d) 7 è successivo a 8.
- e) 0 non ha il successivo.



- 2 Di uno dei numeri naturali 1, 4, 0 non esiste il precedente. Quale?
Hanno tutti il successivo?

3 VERO O FALSO?

- a) $8 < 8$
- b) $0 < 7$
- c) $7 < 5$
- d) $1 \neq 2$
- e) $9 = 8$
- f) $0 \geq 0$
- g) $2 < 5$



- 4 Perché si dice che \mathbb{N} è un insieme discreto?

ESERCIZI

■ L'ordinamento dei numeri naturali

- 5 COMPLETA inserendo fra le seguenti coppie di numeri il simbolo di minore ($<$) o di maggiore ($>$) al posto dei puntini:

$$\begin{array}{llll} 4 \dots 7; & 8 \dots 10; & 0 \dots 12; & 15 \dots 13; \\ 15 \dots 0; & 14 \dots 7; & 1 \dots 2; & 3 \dots 2. \end{array}$$

- 6 Scrivi quanti numeri naturali sono compresi fra i numeri delle coppie precedenti.

- 7 COMPLETA le seguenti frasi, mettendo il numero giusto al posto dei puntini.

Il successivo di 7 è

Il precedente di 10 è

Il successivo di è 2001.

Il precedente di è 500 000.

- 8 Traduci le seguenti frasi usando i simboli $<$, \leq , $>$, \geq , $=$, \neq .

7 è minore di 9; a è uguale a 21.

x è maggiore o uguale a 2; 10 è diverso da 3.

b è maggiore di 9; x è minore o uguale a 4.

9 è maggiore di 7 e minore di 11; a è diverso da b .

- 9 Scrivi tutti i numeri naturali n , se esistono, che verificano le relazioni indicate.

$$\begin{array}{lll} n \leq 4; & n < 2; & 1 < n \leq 5; \\ 6 < n < 7; & 4 \leq n < 8; & 1 \leq n < 6. \end{array}$$

- 10 Scrivi in ordine crescente i seguenti numeri:
6; 10; 2; 114; 38; 100.

- 11 Scrivi in ordine decrescente i seguenti numeri:
28; 0; 129; 14; 99; 237.

■ La rappresentazione dei numeri naturali

- 12 Rappresenta su una semiretta orientata i numeri:
0; 1; 10; 2; 5; 15; 3.

- 13 Rappresenta su una semiretta orientata i numeri:
0; 100; 250; 10; 50.

È conveniente scegliere come unità di misura la stessa dell'esercizio precedente? Motiva la risposta.

2. Le quattro operazioni

→ Teoria a pag. 2

RIFLETTI SULLA TEORIA

14 VERO O FALSO?

Dati tre numeri naturali qualsiasi a, b, c :

a) $a + c = c + a$.

V F

b) $b - a = a - b$.

V F

c) $(a + b) - c = a + (b - c)$.

V F

d) $a - 0 = 0 - a$.

V F

15 Perché lo 0 è detto elemento assorbente della moltiplicazione?

16 Se il prodotto di due numeri naturali è 0, sono nulli entrambi i fattori? Perché?

17

Perché le operazioni di sottrazione e di divisione non sono operazioni interne a \mathbb{N} ?

18 VERO O FALSO?

La divisione fra due numeri naturali:

a) è sempre possibile.

V F

b) è possibile solo se il secondo è diverso da 0.

V F

c) è possibile solo se il primo è multiplo del secondo e il secondo è diverso da 0.

V F

d) è possibile solo se il primo è maggiore del secondo.

V F

ESERCIZI

19

Per ognuna delle operazioni seguenti, indica il nome di ogni operatore e del risultato.

$$5 + 10 = 15; \quad 7 - 5 = 2; \quad 5 \cdot 4 = 20; \quad 10 : 2 = 5;$$

20 COMPLETA

scrivendo il numero mancante al posto dei puntini e indica quale operazione hai eseguito per ottenere quel numero:

$$5 + \dots = 18; \quad \dots \cdot 7 = 21;$$

$$329 + \dots = 742; \quad 32 \cdot \dots = 2368.$$

21

Nelle uguaglianze seguenti i simboli \blacklozenge , \star , \blacktriangle , \blacktriangledown rappresentano un'operazione. Quale?

$$9 \blacklozenge 3 = 27 \quad 20 \blacktriangle 5 = 15$$

$$15 \star 5 = 3 \quad 10 \blacktriangledown 14 = 24$$

22

La somma di due numeri naturali *consecutivi* (cioè due numeri di cui uno è successivo dell'altro) è 27. Trova i due numeri.

23

La somma di un numero e del suo precedente è 683. Trova i due numeri.

Le operazioni interne in \mathbb{N}

24

Indica quali delle seguenti operazioni sono possibili in \mathbb{N} .

$$3 + 5; \quad 7 - 3; \quad 4 - 18; \quad 5 : 5;$$

$$12 : 9; \quad 3 : 6; \quad 4 \cdot 9; \quad 0 : 1.$$

25

Elimina con una crocetta le operazioni non possibili in \mathbb{N} .

$$3 - 4; \quad 4 - 4; \quad 5 - 4; \quad 4 : 3;$$

$$4 : 4; \quad 4 : 8; \quad 8 : 4; \quad 8 : 8.$$

26

COMPLETA Scrivi alcuni dei numeri che rendono possibili in \mathbb{N} le seguenti operazioni.

$$\dots - 4 \quad \dots - 1 \quad 4 : \dots \quad 13 : \dots$$

$$\dots - 10 \quad 3 : \dots \quad 10 : \dots \quad \dots : 2$$

27 L'insieme $\{0, 1, 2, 3\}$ è chiuso rispetto all'addizione? E rispetto alla moltiplicazione?

28 L'insieme $\{0, 1\}$ è chiuso rispetto all'addizione? E rispetto alla moltiplicazione?

29 L'addizione è interna nell'insieme dei numeri pari? E la moltiplicazione?

30 L'addizione è interna nell'insieme dei numeri dispari? E la moltiplicazione?

■ Il numero 0 e il numero 1

31 COMPLETA le seguenti uguaglianze, quando è possibile.

$$\begin{array}{lll} 2 : \dots = 1 & \dots \cdot 0 = 0 & 3 : 0 = \dots \\ \dots : 4 = 4 & \dots + 0 = 0 & 2 - \dots = 2 \\ 3 \cdot \dots = 0 & \dots : 3 = 0 & \dots \cdot 1 = 1 \end{array}$$

32 Spiega perché non sono possibili le seguenti divisioni.

$$4 : 0; \quad 10 : 0; \quad 500 : 0; \quad 0 : 0.$$

33 COMPLETA scrivendo i risultati delle seguenti operazioni, quando esistono.

$$3 : 1 = \dots \quad 0 : 3 = \dots$$

$$3 : 0 = \dots \quad 3 \cdot 1 = \dots$$

$$3 \cdot 0 = \dots \quad 3 : 3 = \dots$$

$$0 : 5 = \dots \quad 0 \cdot 0 = \dots$$

■ 34 VERO O FALSO?

a) La differenza fra due numeri consecutivi è 1.

V F

b) In \mathbb{N} non è possibile la sottrazione con il sottraendo uguale a 0.

V F

c) Se si considera l'insieme dei naturali escluso lo 0, la divisione è operazione interna in tale insieme.

V F

d) Dati due numeri (il primo maggiore del secondo), se si addiziona al secondo numero la differenza fra il primo e il secondo, si ottiene il primo.

V F

→ Teoria a pag. 5

3. I multipli e i divisori di un numero

RIFLETTI SULLA TEORIA

35 VERO O FALSO?

- a) Ogni numero naturale diverso da 0 ha almeno due divisori.
- b) Il numero 0 ha solo un multiplo.
- c) Tra i multipli di ogni numero naturale c'è sempre 0.
- d) Tutti i multipli di 1 costituiscono l'insieme dei numeri naturali.

V F
 V F

V F

V F

Quale numero naturale ha come multiplo solo se stesso e infiniti divisori?

Quale invece ha solo un divisore e infiniti multipli?

37 TEST Se un numero naturale n è divisibile per 3 e per 7, allora è divisibile per:

A $3 + 7$. **B** $3 \cdot 7$. **C** 37 . **D** 3^7 . **E** 7^3 .

ESERCIZI

38 Scrivi alcuni multipli di ciascuno dei seguenti numeri:

$$3; 7; 8; 11; 13; 21; 25.$$

39 Scrivi tutti i divisori di ciascuno dei seguenti numeri:

$$6; 15; 18; 21; 24; 25; 27; 28; 30; 60.$$

40**VERO O FALSO?**

- a) 0 è divisore di ogni numero.
 V F
- b) 0 è multiplo di ogni numero.
 V F
- c) 0 è divisibile per qualsiasi numero.
 V F
- d) 1 è divisore di ogni numero.
 V F
- e) Il divisore di un numero non è divisore di un suo multiplo.
 V F

41**VERO O FALSO?**

- a) Se un numero è divisibile per 8, lo è anche per 4.
 V F
- b) Se un numero è divisibile per 4, lo è anche per 8.
 V F
- c) Se un numero è divisibile per 2 e per 3, lo è anche per 6.
 V F
- d) Se un numero è divisibile per due numeri, lo è anche per il loro prodotto. V F

42**COMPLETA** la seguente tabella applicando i criteri di divisibilità.

<i>a</i>	è divisibile per	2	3	5	10	11	25
45							
60						sì	
171							
506						no	
1625							
2304						sì	
4950							
5400							sì

4. Le potenze

→ Teoria a pag. 6

RIFLETTI SULLA TEORIA**43****VERO O FALSO?**

- a) Nell'espressione 5^3 , 5 è l'esponente e 3 la base.
 V F
- b) L'espressione 0^0 è indeterminata.
 V F
- c) Le potenze 5^0 e 1^{15} hanno lo stesso risultato.
 V F
- d) La potenza 2^4 è multipla della potenza 2^5 .
 V F

44Qual è il risultato della potenza 0^n , con $n \in \mathbb{N}$?**45**

Quale numero ha come potenza solo se stesso?

46

Quale numero non ha fra le sue potenze 1?

ESERCIZI**47**

Scrivi le potenze di 5 comprese fra 0 e 11.

48

Indica fra i seguenti numeri quelli che sono potenze di 3.

3; 6; 9; 0; 1; 12; 27; 30; 33; 81; 121; 99.

Calcola il valore delle seguenti potenze.**49** $2^2; 2^3; 2^4; 2^5; 2^6. \quad 3^2; 3^3; 3^4; 3^5.$ **50** $2^3; 3^4; 5^2; 7^1; 8^0. \quad 7^2; 100^0; 1^0; 0^1.$ **51** $9^3; 4^2; 2^5; 0^4; 3^5. \quad 1^8; 10^7; 2^6; 3^6; 5^3.$

COMPLETA, quando è possibile, mettendo il numero giusto al posto dei puntini.

52² = 0;³ = 27;⁰ = 2;¹ = 8.

53 0^{..} = 1; 5^{..} = 10; 7^{..} = 1; 4^{..} = 16.

54 3^{..} = 6; 2^{..} = 8; 1^{..} = 2; 5^{..} = 0.

55² =; 0^{..} = 0; 6^{..} = 37;² = 225.

56 0⁶ =; 16⁰ =; 3^{..} = 243;² = 1.

57**VERO O FALSO?**

a) $1^n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) $0^n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

c) $n^0 = 1$, con $n = 1, 2, 3, \dots$

d) $n^1 = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

e) $0^0 = 0$.

f) $0^1 = 0$.

g) $n^2 > n, \forall n \in \mathbb{N}$.

5. Le espressioni con i numeri naturali

→ Teoria a pag. 6

RIFLETTI SULLA TEORIA

58 Tra le espressioni

$$(12 - 4) \cdot 3,$$

$$12 - 4 \cdot 3,$$

$$12 + 3 \cdot 4,$$

due hanno lo stesso risultato. Quali?

59

Considera le seguenti coppie di espressioni:

a) $(5 + 7) + 8;$ $5 + 7 + 8;$

b) $7 + (2 \cdot 3);$ $7 + 2 \cdot 3;$

c) $20 : (5 - 4);$ $20 : 5 - 4.$

Solo in una coppia l'eliminazione della parentesi influenza sul risultato. Quale?

ESERCIZI

Dalle parole alle espressioni

ESERCIZIO GUIDA

60 Scriviamo le espressioni relative alle seguenti frasi:

- a) «Sottrarre da 12 il quoziente fra 4 e 2»; b) «Dividere per 2 la differenza fra 12 e 4».

Traduciamo nell'ordine le parole in espressioni:

a) «Sottrarre da 12...» si traduce con:

$$12 - \dots$$

«... il quoziente tra 4 e 2» si traduce con:

$$4 : 2.$$

Pertanto l'espressione equivalente è:

$$12 - 4 : 2.$$

b) «Dividere per 2...» si traduce con: : 2.

«... la differenza tra 12 e 4» si traduce con: $12 - 4$.

Scrivendo l'espressione $12 - 4 : 2$, poiché la divisione si esegue prima della sottrazione, verrebbe diviso per 2 solamente il 4. La frase invece dice di dividere per 2 la **differenza**..., quindi bisogna scrivere $12 - 4$ tra **parentesi**.

L'espressione richiesta è $(12 - 4) : 2$.

Scrivi le espressioni relative alle seguenti frasi e calcolane il risultato.

61 Sottrarre 9 dal prodotto di 8 per 2.

63 Moltiplicare per 3 la differenza tra 12 e 7.

62 Dividere 15 per la differenza tra 9 e 4 e poi sommare 2.

64 Moltiplicare 3 per la somma di 9 e del quoziente di 14 e 2.

65 Sottrarre 3 al risultato della divisione di 12 per la differenza tra 5 e 1.

66 Dividere 18 per la differenza tra 9 e il prodotto di 3 per 2.

67 Sottrarre a 17 la differenza tra il prodotto di 8 per 2 e 9.

68 Dividere per 5 la differenza tra 15 e il prodotto di 5 per 2.

69 Moltiplicare per 7 la differenza tra 10 e 8; sottrarre al risultato 14.

70 Sommare 2 al prodotto di 3 per la differenza tra il quoziente di 16 e 4 e 3.

71 Sommare 7 al prodotto di 12 per la somma di 4 e la differenza tra 5 e il prodotto di 3 per 1.

Dalle espressioni alle parole

ESERCIZIO GUIDA

72 Traduciamo in parole le espressioni: a) $12 + 3 \cdot 5$; b) $(12 + 3) \cdot 5$.

Sostituiamo mano a mano le parole alle espressioni, facendo attenzione alla presenza delle parentesi.

a) Dato che non ci sono parentesi, la moltiplicazione si esegue prima dell'addizione:

... $3 \cdot 5$ si traduce in: «... il prodotto di 3 per 5»;
12 + ... si traduce in: «Aggiungere a 12 ...»

La frase corrispondente alla nostra espressione è:

«Aggiungere a 12 il prodotto di 3 per 5».

b) La **parentesi** ci dice che, al momento dello svolgimento, bisogna eseguire prima l'addizione e poi la moltiplicazione:

12 + 3 si traduce in: «La somma tra 12 e 3»;

... · 5 si traduce in: «Moltiplicare ... per 5».

La frase corrispondente alla nostra espressione è:

«Moltiplicare la somma tra 12 e 3 per 5».

Traduci in parole le seguenti espressioni.

73 $12 - 6 : 3$; $15 + 7 \cdot 3$.

74 $(12 + 6 : 3) : 7$; $(15 - 10) \cdot 3 + 2$.

75 $(15 : 5 - 2) - 1$; $[4 : (15 : 3 - 3)] + 2$.

76 $8 \cdot (12 : 6 - 2) + 1$; $6 - [15 : (2 + 3)]$.

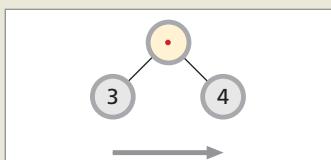
Espressioni e diagrammi ad albero

ESERCIZIO GUIDA

77 Nei seguenti esempi utilizziamo diagrammi ad albero per rappresentare delle espressioni e per comprendere l'ordine di esecuzione delle operazioni.

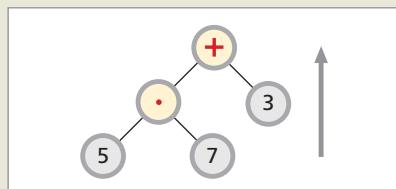
a) $3 \cdot 4$

Un'operazione si rappresenta come nella figura. L'ordine con cui sono scritti i termini va da sinistra a destra.



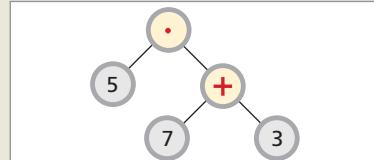
b) $5 \cdot 7 + 3$

La prima operazione da eseguire è in basso, l'ultima in alto.



c) $5 \cdot (7 + 3)$

L'introduzione della parentesi cambia l'ordine delle operazioni, «legando» diversamente i numeri dell'espressione.



Rappresenta con diagrammi ad albero le seguenti espressioni.

78

$$4 + 6 \cdot 9; \quad (4 + 6) \cdot 9.$$

79

$$7 - 3 + 2; \quad 7 - (3 + 2).$$

80

$$5 \cdot 6 : 2 + 1; \quad 5 \cdot (6 : 2) + 1.$$

81

$$10 - 4 \cdot 2 + 3; \quad 10 - 4 \cdot (2 + 3).$$

82

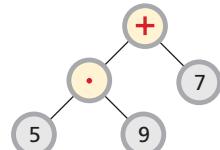
$$15 + 20 : 4 - 2; \quad 15 + 20 : (4 - 2).$$

83

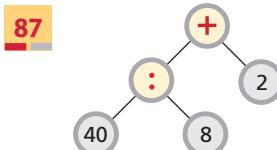
$$4 \cdot 6 - 2 - 5; \quad 4 \cdot (6 - 2) - 5.$$

Scrivi le espressioni relative ai seguenti diagrammi ad albero.

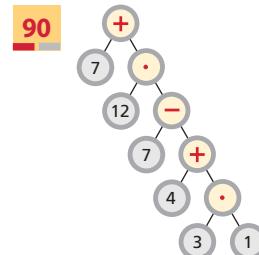
84



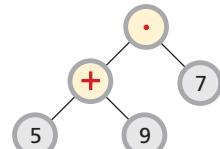
87



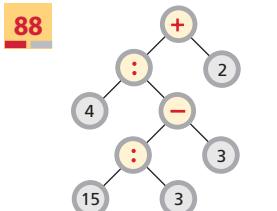
90



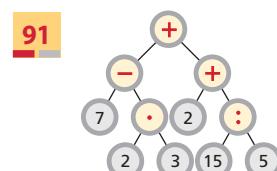
85



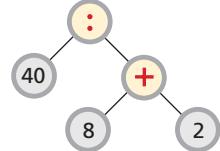
88



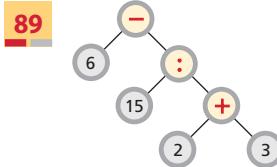
91



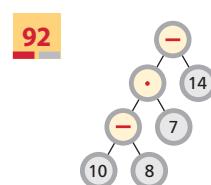
86



89



92



Dai problemi alle espressioni

ESERCIZIO GUIDA

93 Scriviamo l'espressione che fornisce la soluzione del seguente problema.

Giorgia ha 10 euro. Compra 4 quaderni che costano ognuno 1 euro. Al suo ritorno la madre le regala 2 euro. Quanto ha in tasca Giorgia?

Costruiamo l'espressione:

$$1 \cdot 4$$

$$10 - 1 \cdot 4$$

$$10 - 1 \cdot 4 + 2.$$

Scrivi le espressioni che forniscono le soluzioni dei seguenti problemi e calcolane i valori.

94

Anna riceve dalla madre € 8 e va ad acquistare 2 scatole di colori del costo di € 3 l'una. Al ritorno si ferma dalla nonna che le regala € 5. Con quanto denaro arriva a casa Anna? [€ 7]

95

Luca e suo fratello Andrea vanno al cinema ricevendo € 10 ciascuno dai genitori. Il costo di un biglietto è di € 5; Luca acquista prima di entrare al cinema una bibita del costo di € 2, mentre Andrea compera 2 pacchetti di patatine da € 2 l'uno: complessivamente con quanto denaro tornano a casa i due fratelli? [€ 4]

96 Una cuoca possiede 4 sacchetti di farina del peso di 1 kg ciascuno. Deve fare 7 dolci: nei primi 3 occorrono 350 g di farina per ciascuno e negli altri 600 g di farina per ciascuno. Alla fine quanta farina rimane alla cuoca? [550 g]

97 Una nonna ha 5 nipoti e 25 torroncini. Decide di dare 3 torroncini al primo nipote e uno in più a ciascuno degli altri nipoti. Quanti torroncini le rimangono? [6]

98 In uno stabilimento tessile, in una settimana (6 giorni lavorativi), si producono 26 304 m di tela. La tela viene suddivisa in pezzi da 32 m ciascuna. Quanti giorni lavorativi occorrono per fabbricare 1233 pezzi? [9]

■ Le espressioni con le quattro operazioni

Nel sito: ▶ 11 esercizi di recupero



■ ESERCIZIO GUIDA

99 Calcoliamo: $[(9 + 1 - 6) \cdot (3 \cdot 4 - 2)] : \{10 \cdot 2 - [4 \cdot (5 + 1 - 3)]\}$.

Svolgiamo i calcoli all'interno delle parentesi tonde:

$$= [(4) \cdot (10)] : \{10 \cdot 2 - [4 \cdot (3)]\} =$$

Eliminiamo le parentesi tonde ed eseguiamo i calcoli all'interno delle parentesi quadre:

$$= [40] : \{10 \cdot 2 - [12]\} =$$

Eliminiamo le parentesi quadre e svolgiamo i calcoli all'interno delle parentesi graffe:

$$= 40 : \{20 - 12\} = 40 : 8 =$$

Scriviamo il risultato:

$$= 5.$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

100 $[12 - (3 + 2)] \cdot 2 - [6 + (3 + 1) \cdot 2 - 5 + 1]$ [4] **102** $[20 : (3 \cdot 2 - 2) + 4] : (6 - 3 \cdot 2 + 3)$ [3]

101 $\{[10 \cdot (3 + 2)] : [16 + 3 \cdot 3]\} + 3 \cdot (2 + 1)$ [11] **103** $\{[12 + 2 \cdot (3 + 1)] : (3 + 2)\} - (3 + 1)$ [0]

.....

104 $\{12 \cdot [(5 + 2) \cdot 3 - 19]\} : [(3 + 1) \cdot (2 + 1)]$ [2]

105 $\{15 - [13 + (2 + 14) : (2 + 2 \cdot 3) - 3]\} : [(2 + 7) : 3]$ [1]

106 $\{(2 + 7 - 3 \cdot 2) \cdot [4 - (1 + 2)]\} : [7 - (3 \cdot 2 + 0)]$ [3]

107 $\{[(10 - 7 + 3 + 2 - 5) \cdot (25 : 5) - 2] \cdot [(30 - 5 + 1 - 16) : (30 : 15) + 10 + 7 - 20]\} : 2$ [13]

108 $13 - \{8 \cdot 15 - [(7 \cdot 5 + 5) : 8 + 20 : (28 : 4 - 3)]\} : 11$ [3]

109 $(22 - 5 \cdot 4) : 2 + \{[36 : 2 + 7 \cdot 3 - 1 - (2 \cdot 8 + 6)] - 2^3\}$ [9]

110 $(2^0 \cdot 3^0 + 8) : 3 + [3^2 - (2^1 + 4) : 2] + (2^4 + 2) : 3^2$ [11]

111 $[(4 + 3^2 - 1) : 2^2 + 45 : 3^2] : 2^2 + (21 \cdot 3) : 9 + 1^0$ [10]

112 $\{[7 \cdot (2 + 1) - 2 \cdot 3] : (1 + 2)\} - [(3 \cdot 2 + 5) - 10]$ [4]

113 $[(2 - 1) \cdot 7 + 5] : [3 - (1 - 1)] + [15 - 3 \cdot (1 + 2)]$ [10]

- 114** $\{[2 \cdot (3 + 7) - 15] \cdot [3 + 4 \cdot (1 + 2) - 14] + 2\} : 7$ [1]
- 115** $[(10 + 3 - 9) \cdot (3 \cdot 2 - 4)] : [(14 + 24 - 30 - 6) \cdot (40 - 10 + 2 - 30)]$ [2]
- 116** $(16 \cdot 2 - 18) : [48 : (69 : 3 + 1)] \cdot \{6 \cdot 3 - [40 - (9 \cdot 8 - 2) : 2] - 10\}$ [21]
- 117** $(2 \cdot 3 - 12 : 4) - \{4 + 3 \cdot [(42 : 3 + 2) - (6 \cdot 8 : 3) + 4]\} : (5 \cdot 4 - 16 : 4)$ [2]
- 118** $63 - [48 - (14 + 2 \cdot 16)] \cdot (2 \cdot 12) - (2 + 28 : 4) - 18 : (14 - 48 : 24 - 56 : 8 - 2)$ [0]
- 119** $\{2 + 2 \cdot 6 \cdot [36 - (4 + 7 \cdot 4) + 48 : (4 + 4 \cdot 11)] + (100 : 2) : (45 : 3 + 35)\} : \{21 - [140 : 7 - (2 + 2 \cdot 2)]\}$ [9]
- 120** $\{[135 + 3 \cdot 5 + (4 + 3 \cdot 7) \cdot 2] : 8\} : \{2 + [8 \cdot 11 - (5 + 7 \cdot 5)] : 4 + (39 : 3 - 2)\}$ [1]
- 121** $\{(25 - 9) : 4 + 40 : [20 - (2 + 3 \cdot 4) : 7 - 4 \cdot 3 - 2] - 18 : (48 : 4 - 6)\} \cdot 10 : [18 - (21 : 7 + 60 : 15) + (44 \cdot 2) : (4 \cdot 2)]$ [5]
- 122** $5 \cdot 8 : (2^3 - 2 + 2^2) + (7 \cdot 9 + 7) \cdot 5^0 - 28 : 2^2$ [67]
- 123** $3^3 - \{[(4^2)^3]^2\}^0 - 2^4 - [(5^2)^1]^2 : 5^3$ [5]
- 124** $2 \cdot 6 - (3^2 + 1) + (2^2 \cdot 3^2)^0 + 15^3 : 5^3 - (3^2)^2 : 3^3$ [27]
- 125** $(2^2 \cdot 3^6 \cdot 2^4) : (3^3 \cdot 2^2 \cdot 2^4 \cdot 3^3) - 1$ [0]
- 126** $[(1 + 2)^3 \cdot (1 + 4)^3] : [(6^8 : 6^4) : 3^4 - 1]^2$ [15]
- 127** $[(15 : 3 \cdot 2)^3 : 10^2 + 2 \cdot 2^2] : (2 \cdot 3)$ [3]
- 128** $4 \cdot 5 - 2^2 \cdot 2^3 : 2 + (3^2 \cdot 2^2) : 6 - (2^4 \cdot 3^4)^0$ [9]
- 129** $7 \cdot [(5^2 \cdot 5^3)^3 : 5^{14}] - 3 \cdot 2^0 - 6^5 : 3^5$ [0]
- 130** $[(2^2 \cdot 2^4) : 2^3]^2 : 2^4 + 5 \cdot 7 - 3^2 \cdot 2^2 + (5^2 \cdot 3^2)^0$ [4]
- 131** $[(243 : 81 + 4^3 : 4 - 3) : (5 - 3^0) + 125 : 25] \cdot 2^2 : 3$ [12]
- 132** $7 \cdot 4 + (2^6 : 2^4)^0 - 25^2 : 5^2 + (7 \cdot 3 - 5 \cdot 4) \cdot (5^3 : 5^2)$ [9]
- 133** $\{[(53^2 - 45^2) : 7 + 3 \cdot 2^4] : [(21^2 - 7 \cdot 8) : 7 - 17 \cdot 3]^2 + 2 \cdot 5^2\}^2 : (2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + 10 \cdot 2^2$ [100]
- 134** $3^3 - \{3 \cdot 2^3 - [(5 \cdot 2^2 - 7)^2 : 13 + 12 : (3 \cdot 2^3 - 2^2 \cdot 3)] : 2\}^2 : 17^2$ [26]
- 135** $15 \cdot [(12^2 : 3^2) : 2^2] - [(2)^2]^2 + 7 \cdot 3 - (20^4 : 5^4)^0 - 15^3 : 5^3$ [37]
- 136** $[(2^2)^3 : (2^2)^2] + \{(3^4 \cdot 3^2)^3 : [(3^2)^3]^2\} : (3^2 \cdot 3^3) - 6$ [1]
- 137** $\{[(2^3 + 2^2) : 2^2 - 3^0]^2 - 1\}^3 - \{(8^2 : 4^2 - 1) \cdot [(3^3)^4 : (3^4)^3]^5\}^2$ [18]
- 138** $\{[(3^2 + 11) : 2^2]^2 : 5 - 1\} \cdot 2^3 - [7^2 : (2 \cdot 3 + 1) + 2^3 + 10^0]$ [16]
- 139** $\{[(6^0 + 2 \cdot 5^2 - 11) : 2^3 + 8] - 2^0\} : 4 + (7 - 4) \cdot 2 + 3^2 \cdot 2$ [27]

Indica in quali casi lo spostamento o l'eliminazione delle parentesi non influisce sul risultato dell'espressione. Verifica le tue indicazioni calcolando il valore delle espressioni.

140 $(5 + 2) + 8;$

$5 + 2 + 8.$

141 $7 + (5 \cdot 3);$

$7 + 5 \cdot 3.$

142 $(3 + 2) \cdot 11;$

$3 + 2 \cdot 11.$

143 $5 + (3 + 9);$

$5 + 3 + 9.$

144 $40 : (5 - 4);$

$40 : 5 - 4.$

145 $24 + 6 : 3;$

$(24 + 6) : 3.$

ESERCIZIO GUIDA

146 Calcoliamo il valore dell'espressione $3a^2 - 2b$, per $a = 2$ e $b = 5$.

Operiamo la sostituzione mettendo al posto delle lettere i valori scritti tra parentesi:

$$\begin{array}{cc} 3 \boxed{a}^2 - 2 \boxed{b} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 2 \quad 5 \end{array}$$

$3(2)^2 - 2(5) = 3 \cdot 4 - 10 = 12 - 10 = 2.$

Dopo un po' di pratica puoi evitare l'uso delle parentesi, avendo cura di scrivere i segni di moltiplicazione:

$3a^2 - 2b, \text{ se } a = 2 \text{ e } b = 5, \text{ è uguale a } 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 5.$

Negli esercizi seguenti, calcola il valore delle espressioni (quando esiste) per i valori delle lettere scritte a fianco.

147 $5x$
 $2y$

$x = 0, 2, 50.$
 $y = 1, 6, 32.$

148 $2a - 5b$
 $3a - 2b$

$a = 8, \quad b = 3.$
 $a = 4, \quad b = 5.$

149 $2ab$
 $3a^2b$
 $3ab^2$

$a = 7, \quad b = 8.$
 $a = 4, \quad b = 3.$
 $a = 1, \quad b = 2.$

150 $a^2 - b^2$
 $a^2 + b^2$

$a = 3, \quad b = 2.$
 $a = 1, \quad b = 4.$

151 a^b

$(2a)^b$

$a = 299, \quad b = 0;$
 $a = 0, \quad b = 6.$
 $a = 9, \quad b = 0;$
 $a = 1, \quad b = 5.$

152 $(a - b)^3 - 3ab$
 $2ab^2 - (a + b)^2$
 $2a^2 + b^2 - 2(a - b)^2$

$a = 7, \quad b = 3.$
 $a = 2, \quad b = 3.$
 $a = 9, \quad b = 1.$

[1; 11; 35]

153

$(a - b)^2 + 4a^2b^3 - 7b^2 - 7a^3$

$a = 4, \quad b = 2.$

[40]

154

$a^3 + b^3 - 2a^2 - (a + b - 4)^3$

$a = 5, \quad b = 3.$

[38]

155

$a^3 : b^2 - (a - b)^2 - (a - b - 2)^3$

$a = 8, \quad b = 4.$

[8]

156

$(a : b)^2 - 4a^2 : b^3 + a(a - b)^2 : b^5$

$a = 36, \quad b = 4.$

[36]

157

$(a + b)^2 : 3a^2 + (b^2 - a^2) : (2a^2)$

$a = 2, \quad b = 10.$

[24]

158

$(1 + a^3) : b^2 + 49(b^3 + 1) : (a + 2b)^2$

$a = 3, \quad b = 2.$

[16]

159

$(a - 2b + 1)^3 : (a + b - 5)^2 + (a + 2b)^2 : (a - b)$

$a = 8, \quad b = 2.$

[29]

160

$(a - b)^3 : 3b + 2a^3 : (4b) - b(a + b)^2 : (2a - 3)^2$

$a = 6, \quad b = 3.$

[36]

Dalle parole alle espressioni

Nel sito: ▶ 11 esercizi di recupero



ESERCIZIO GUIDA

- 161** Traduciamo in espressione la frase «Aggiungi al quadrato di a il quadrato di b e sottrai il doppio prodotto di a con b », poi calcoliamo il valore dell'espressione per $a = 9$ e $b = 5$.

«quadrato di a » → a^2 ;
 «quadrato di b » → b^2 ;
 «prodotto di a con b » → ab ;
 «doppio prodotto» → $2ab$.

L'espressione è: $a^2 + b^2 - 2ab$.

Sostituiamo $a = 9$, $b = 5$:

$$\begin{aligned} 9^2 + 5^2 - 2 \cdot 9 \cdot 5 &= \\ = 81 + 25 - 90 &= 106 - 90 = 16. \end{aligned}$$

Negli esercizi seguenti, traduci le frasi in espressioni letterali e calcola il loro valore per i numeri indicati.

- 162** Somma ad a il suo successivo; $a = 10$; $a = 7$.

- 163** Somma ad a i due consecutivi di a ; $a = 4$; $a = 9$.

- 164** Somma ad a il suo precedente; $a = 1$; $a = 5$.

- 165** Somma al triplo di a il doppio di b ;
 $a = 7$, $b = 0$; $a = 9$, $b = 4$.

- 166** Sottrai dal quintuplo di a il triplo di b ;
 $a = 1$, $b = 0$; $a = 7$, $b = 9$.

- 167** Sottrai b dal prodotto del triplo di a col doppio di b ;
 $a = 3$, $b = 5$; $a = 2$, $b = 10$.

- 168** Dividi la somma di a con b per la differenza fra a e b ; $a = 5$, $b = 4$; $a = 8$, $b = 6$.

- 169** Moltiplica il doppio di a per il quadrato di b ;
 $a = 5$, $b = 3$; $a = 2$, $b = 1$.

- 170** Dividi il doppio di a per la differenza tra a e b ;
 $a = 3$, $b = 1$. [3]

- 171** Al quintuplo di a sottrai la somma tra il doppio di b e a ;
 $a = 3$, $b = 2$. [8]

- 172** Dividi la somma di a e b per il doppio di a ;
 $a = 1$, $b = 5$. [3]

- 173** Dividi il cubo di a per la somma di a e b ;
 $a = 4$, $b = 12$. [4]

- 174** Moltiplica la somma di a e b per il doppio di a e poi aggiungi il triplo di b ;
 $a = 2$, $b = 1$. [15]

- 175** Ad a diminuito di 3 somma la differenza dei quadrati di b e di a ;
 $a = 4$, $b = 5$. [10]

- 176** Moltiplica il doppio di a per la somma di a e b e poi sottrai il triplo di b ;
 $a = 3$, $b = 2$. [24]

- 177** Moltiplica la differenza tra a e b per il quadrato di a e poi aggiungi la metà di b ;
 $a = 6$, $b = 4$. [74]

Scrivi il precedente e il successivo dei numeri indicati dalle seguenti espressioni. Calcola le espressioni ottenute per $a = 2$, $b = 5$, $c = 1$, $n = 3$, $x = 4$.

178 a ; $2a$; a^2 ; $a + 1$; $b + 1$; c^2 .

179 $c - 1$; $2c + 1$; $2n + 1$; $n - 4$; $2n + 5$.

180 $n^2 + 1$; $2x^2$; $2x^2 - 1$; x^3 ; $(a + b)^2$.

Traduci in espressione letterale e calcola per i valori indicati.

- 181** Il successivo del doppio di un numero; 7.

- 182** Il doppio del successivo di un numero; 7.

- 183** Il precedente di un numero; 3.

- 184** Il quadrato del precedente di un numero; 4.

185

Il doppio prodotto di un numero per un altro; 2; 9.

186

Il triplo prodotto del quadrato di un numero; 5.

187

La somma di due numeri per la loro differenza; 6; 1.

188

La differenza fra i quadrati di due numeri; 5; 3.

Dalle espressioni alle parole

ESERCIZIO GUIDA

- 189 Scriviamo la frase corrispondente all'espressione $2a(a + b)^2$.

Poiché a e b indicano due numeri, nella frase traduciamo le due lettere a e b proprio con la parola «numeri». Facciamo una traduzione analitica:
 $2a$ è il doppio di un numero;
 $a + b$ è la somma di quel numero con un altro;
 $(a + b)^2$ è il quadrato della somma di quel numero con un altro.

Fra $2a$ e $(a + b)^2$ è sottintesa una moltiplicazione.

La frase richiesta è la seguente:

«Il prodotto del doppio di un numero per il quadrato della somma di quel numero con un altro».

Scrivi per ogni espressione la frase corrispondente. Calcola il valore delle espressioni per $a = 1$, $b = 6$; $a = 5$, $b = 2$.

- 190 $2a$; $3a$; b^2 ; $2ab$; $3a^2$; $3a^2b$.

- 192 $a - b$; $(a + b)(a - b)$; $a^2 - b^2$; $a^3 - b^3$.

- 191 $a + 1$; $b - 1$; $b + 2$; $2a - 1$; $a + b$.

- 193 $a^3 + b^3$; $(a + b)^2$; $(a - b)^2$; $(a + b)^3$; $(a - b)^3$.

Dalle immagini alle espressioni

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più



ESERCIZIO GUIDA

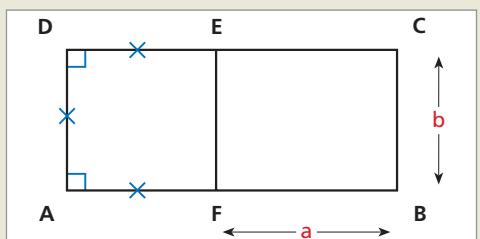
- 194 Esprimiamo con un'espressione letterale la misura dell'area del rettangolo $ABCD$.

$AFED$ è un quadrato;
 a indica la misura di FB ;
 b indica la misura di BC .

La misura dell'area del rettangolo $ABCD$ è data dalla somma di quelle delle due figure:

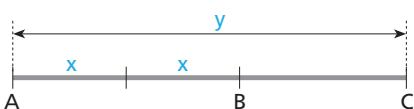
- quadrato $AFED$, di area b^2 ;
- rettangolo $FBCE$, di area ab .

L'espressione richiesta è: $b^2 + ab$.



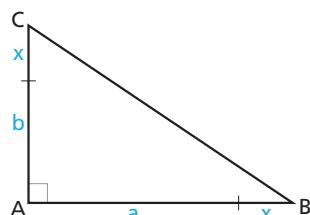
Per ognuna delle figure seguenti determina l'espressione della misura di ciò che è scritto sotto.

195



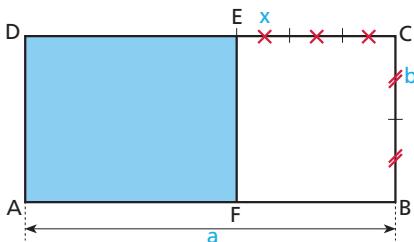
Lunghezza di BC .

196

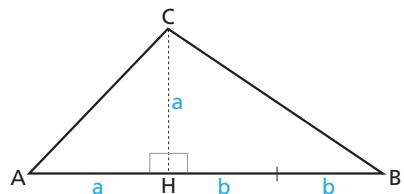


Area del triangolo ABC .

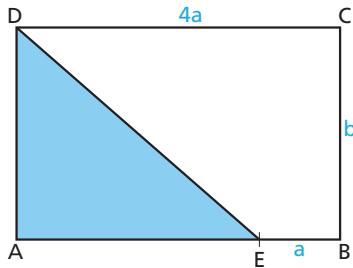
197



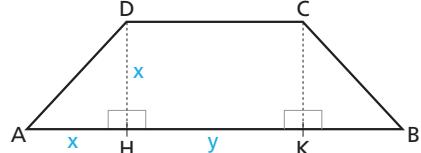
199

Area dei triangoli ABC , ACH e CHB .Perimetro e area del rettangolo $AFED$.

198



200

Area del trapezio isoscele $ABCD$.Perimetro del rettangolo $ABCD$ e area del triangolo AED .

6. Le proprietà delle operazioni

→ Teoria a pag. 8

RIFLETTI SULLA TEORIA

201

Sono date le uguaglianze:

$$2 \cdot (4 + 5) = (2 \cdot 4) + (2 \cdot 5); \quad (2 - 4) : 2 = (2 : 2) - (4 : 2); \quad 2 \cdot (4 \cdot 5) = (2 \cdot 4) \cdot 5.$$

Solo in due è stata applicata la proprietà distributiva. Quali?

202

VERO O FALSO?

- a) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot (a \cdot c)$
- b) $(a + b) + c = a + (c + b)$
- c) $(a - b) + c = a - (b + c)$,
con $a \geq b$
- d) $a \cdot (b + c) = (a \cdot c) + (b \cdot a)$
- e) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- f) $a - b = (a - c) + (b - c)$,
con $a \geq b \geq c$

 V F V F V F V F

203

Discuti la validità della seguente affermazione:

«In \mathbb{N} la proprietà associativa vale sia per l'addizione sia per la sottrazione».

204

TEST Fra le seguenti coppie di operazioni, individua quella in cui entrambe *non* godono della proprietà commutativa:

- A addizione e moltiplicazione.
- B divisione e sottrazione.
- C addizione e divisione.
- D addizione e sottrazione.
- E sottrazione e moltiplicazione.

ESERCIZI

Ciascuna delle seguenti uguaglianze fornisce un esempio di applicazione di una delle proprietà formali delle operazioni. Indica di quale proprietà si tratta.

205 $24 + 31 = 31 + 24; \quad 7 + 2 + 4 = 7 + 6.$

206 $(3 + 1) + 4 = 3 + (1 + 4);$
 $(5 + 2) + 3 = 3 + (5 + 2).$

207 $(18 + 24) : 3 = 18 : 3 + 24 : 3;$
 $(64 - 16) : 4 = 64 : 4 - 16 : 4.$

208 $4 \cdot (2 + 3) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3;$
 $(2 + 3) \cdot 4 = 4 \cdot (2 + 3).$

209 $18 - 6 = (18 + 4) - (6 + 4);$
 $27 - 12 = (27 - 2) - (12 - 2).$

210 $180 : 15 = (180 \cdot 2) : (15 \cdot 2);$
 $120 : 15 = (120 : 5) : (15 : 5).$

211 $15 + 9 = 9 + 15; \quad 7 \cdot 3 = 3 \cdot 7.$

212 $15 : (3 \cdot 1) = 15 : (1 \cdot 3);$
 $3 \cdot (1 + 2) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2.$

213 $(15 + 2) + 4 = 15 + (2 + 4);$
 $(3 \cdot 6) \cdot 1 = 3 \cdot (6 \cdot 1).$

214 $17 - (4 \cdot 3) = 17 - (3 \cdot 4);$
 $(2 + 4) \cdot 6 = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6.$

215 $17 - 3 = (17 + 3) - (3 + 3);$
 $(17 + 2) \cdot 3 = 17 \cdot 3 + 2 \cdot 3.$

216 $(15 + 75) : 15 = (15 : 15) + (75 : 15);$
 $(7 + 3) + 2 = 7 + (3 + 2).$

217 $12 - 4 = (12 - 2) - (4 - 2);$
 $80 : 40 = (80 : 10) : (40 : 10).$

218 Fra le seguenti uguaglianze indica quali sono vere e quale è la proprietà applicata.

a) $(127 + 3) + 8 = 127 + (3 + 8);$

b) $12 : (4 + 2) = 12 : 4 + 12 : 2;$

c) $(6 + 9) \cdot 3 = 3 \cdot (6 + 9);$

d) $(70 - 12) - 8 = 70 - (12 - 8);$

e) $4 \cdot (20 : 2) = (4 \cdot 20) : (2 \cdot 20);$

f) $10 - 8 = 15 - 13;$

g) $36 - 12 = 6 \cdot (6 - 2);$

h) $36 : 12 = (36 : 6) : (12 : 6).$

219 COMPLETA precisando la proprietà che viene applicata.

$6 \cdot (3 + \dots) = 6 \cdot 3 + 6 \cdot 7$

$15 \cdot 9 + 3 \cdot \dots = (\dots + \dots) \cdot 9$

$7 \cdot (\dots + 4) = 7 \cdot 5 + \dots \cdot 4$

$2 \cdot 8 \cdot \dots = \dots \cdot (\dots \cdot 6)$

$\dots \cdot (5 + 7) = 6 \cdot \dots + 6 \cdot \dots$

$12 - 4 = (\dots + 5) - (4 + \dots)$

$(3 + \dots) + 13 = 3 + (1 + \dots)$

$5 \cdot 3 \cdot \dots = 4 \cdot (5 \cdot \dots)$

220 COMPLETA scrivendo di fianco a ogni uguaglianza la proprietà delle operazioni su cui è basata. Scegli fra le seguenti: commutativa, associativa, distributiva, raccoglimento, invariantiva.

$5 + 7 + 9 = 9 + 5 + 7$

$20 : 4 = 10 : 2$

$5 \cdot 8 \cdot 9 = 5 \cdot 72$

$5 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 5 \cdot (1 + 2 + 3)$

$15 - 8 = 16 - 9$

$18 - 5 = 15 - 2$

$3 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = (3 + 6 + 5) \cdot 2$

$60 : 30 = 6 : 3$

7. Le proprietà delle potenze

→ Teoria a pag. 11

RIFLETTI SULLA TEORIA

221 VERO O FALSO?

- a) $a^n \cdot a^m = a^{m-n}$
- b) $a^n + a^m = a^{n+m}$
- c) $a^n \cdot a^0 = a^n$
- d) $a^n : a^m = a^{m-n}$
- e) $(a^m)^n = (a^n)^m$
- f) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$



222 TEST Una sola delle seguenti espressioni è equivalente a $6^2 + 6^3$. Quale?

- A $(2 \cdot 3)^3 + (2 \cdot 3)^2$
- B $2 \cdot (3^2 + 3^3)$
- C $3 \cdot (2^2 + 2^3)$
- D 6^3
- E $(2 \cdot 3)^5$

223 VERO O FALSO?

- a) La somma dei quadrati di due numeri è uguale al quadrato della loro somma.
- b) La somma di due potenze è una potenza che ha per base la somma delle basi e per esponente la somma degli esponenti.
- c) Il prodotto dei quadrati di due numeri è uguale al quadrato del prodotto dei due numeri.
- d) Il prodotto di due potenze uguali è uguale al quadrato della potenza.

224 TEST All'espressione $(5 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot c)^2$ viene applicata una proprietà delle potenze. Qual è l'espressione equivalente ottenuta?

- A $25 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot c^2$
- B $25 \cdot a^6 \cdot b^2 \cdot c$
- C $5 \cdot a^6 \cdot b^4 \cdot c^2$
- D $25 \cdot a^6 \cdot b^4 \cdot c^2$
- E $5 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot c^2$

ESERCIZI

Applica, quando è possibile, le proprietà delle potenze e indica la proprietà applicata.

- | | | |
|------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 225 $(3^4)^2 \cdot 3^7;$ | $2^4 \cdot 3^4;$ | $(5^3)^5 \cdot 2^{15}.$ |
| 226 $3^2 \cdot (3^4)^2;$ | $(10^2)^5 : 2^{10};$ | $3^4 : 3^2.$ |
| 227 $(8^4 : 2^4) \cdot 4^3;$ | $(2^2 : 2^1)^4;$ | $(3^2)^3 \cdot 2^6.$ |
| 228 $(7^2 \cdot 2^2) : 7^2;$ | $(4^3)^2 : 2^6;$ | $2^4 \cdot 3^4.$ |
| 229 $6^5 : 2^5;$ | $(4^5)^2;$ | $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^1.$ |
| 230 $2^2 \cdot 5^2;$ | $3^3 : 3^2;$ | $12^4 : 4^4.$ |
| 231 $(2^4)^2;$ | $3^2 \cdot 3^5;$ | $6^2 \cdot 2^2.$ |

COMPLETA quando è possibile.

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------|
| 232 $2^5 \cdot 2^{\dots} = 2^{10};$ | $7^2 \cdot \dots = 7^8.$ |
| 233 $2^4 \cdot (\dots)^4 = 16^4;$ | $(5^{\dots})^4 = 5^7.$ |

234 $3^{\dots} : 3^3 = 3^3;$ $2^{\dots} : 2^8 = 2^5.$

235 $2^4 \cdot 2^{\dots} = 2^7;$ $8^4 : (\dots)^4 = 2^4.$

236 $15^2 : (\dots)^2 = 5^2;$ $(4^{\dots})^5 = 4^{10}.$

237 $2^3 \cdot (\dots)^3 = 16^3;$ $(5^{\dots})^3 = 5^{15}.$

238 $4^3 \cdot 4^{\dots} = 4^5;$ $2^4 \cdot (\dots)^4 = 6^4.$

239 $5^2 \cdot 5^{\dots} = 5^{10};$ $5^3 : (\dots)^3 = 5^3.$

240 CACCIA ALL'ERRORE Le seguenti uguaglianze sono false. Correggi l'errore.

- | | |
|------------------------|--|
| $2^9 : 2^3 = 2^3;$ | $(5^0)^2 = 5^2.$ |
| $4^3 + 4^2 = 4^5;$ | $4^5 \cdot 3^5 = 12^{10}.$ |
| $(2^3)^2 = 2^5;$ | $4^3 + 2^3 = 6^3.$ |
| $8^3 \cdot 8^2 = 8^6;$ | $5^4 \cdot 5^3 \cdot 5^2 - 5^3 = 5^6.$ |

241 $A = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots\}$ è l'insieme delle potenze di 2. A è chiuso rispetto all'operazione di addizione? E a quella di moltiplicazione? Giustifica le risposte.

242 VERO O FALSO?

a) $5^3 + 5^4 = 5^7$

b) $3^5 - 3 = 3^4$

c) $2^3 \cdot 2^6 = 2^9$

d) $6^2 \cdot 6^4 = 6^8$

e) $10^2 : 5^2 = 2^2$

f) $3^5 + 7^5 = 10^5$

g) $(4^2)^3 = 4^5$

h) $(10^2)^3 = 1\,000\,000$

i) $2^4 \cdot 3^4 = 6^8$

j) $8^3 - 3^3 = 5^3$

243 Scrivi i prodotti mediante potenze, come nell'esempio svolto.

$2 \cdot 4 \cdot 7 = 2 \cdot 2^2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7.$

$9 \cdot 2 \cdot 81 \cdot 8; \quad 5 \cdot 3 \cdot 125 \cdot 9. \quad 6 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 32.$

$24 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3^4; \quad 10 \cdot 25 \cdot 100 \cdot 10^4; \quad 40 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 9.$

244 ASSOCIA a ogni espressione il proprio risultato.

1. $(5^4)^2 \cdot 5$

A. 5^7

2. $(5^2)^4 : 5$

B. 6

3. $(5^3 + 5^2) : 5^2$

C. 100

4. $(2^3 \cdot 5^3) : 10$

D. 5^9 **245 VERO O FALSO?**

a) $5^4 \cdot 5^2 = 5^6$

b) $5^4 + 5^2 = 5^6$

c) $(2^2)^3 = 2^5$

d) $2^8 = 2^4 + 2^4$

e) $3^9 = 3^5 \cdot 3^4$

f) $2^8 = (2^2)^4$

g) $2^2 \cdot 3^2 = 6^2$

h) $3^2 \cdot 3^2 = 9^4$

i) $2^6 : 2^0 = 2^6$

j) $20^2 : 4^2 = 5^2$

k) $20^5 : 4^2 = 5^3$

 COMPLETA le seguenti uguaglianze.

246 $7^0 = 5 \cdots; \quad (2^3)^2 = (2^2) \cdots;$
 $(2 \cdots)^2 \cdot \cdots = 2^7.$

247 $3^4 - 4^3 = (\cdots)^1; \quad (1^6) \cdots = 5^0;$
 $(15 \cdots)^2 : 15 = 15^5.$

248 $\cdots^3 \cdot \cdots^3 = 6^3; \quad (7^3)^4 : 7 \cdots = 7^7;$
 $(3 \cdots)^4 = 3^{24}.$

249 $3^4 : 3 \cdots = 3^4; \quad (18 : 3)^3 = 18^3 : \cdots;$
 $(2 \cdot 4 \cdot 5^2)^2 = 2 \cdots \cdot 4 \cdots \cdot 5 \cdots.$

Proprietà delle operazioni e proprietà delle potenze

Per ogni uguaglianza indica quale proprietà è stata applicata. Verifica le uguaglianze per i valori indicati.

250 $a^4 b = b a^4; \quad a = 3, b = 2.$
 $c^3 + d^3 = d^3 + c^3; \quad c = 4, d = 1.$

251 $(a^2 + b^2) + c = a^2 + (b^2 + c); \quad a = 1, b = 2, c = 3.$
 $a - b^2 = (a + c^3) - (b^2 + c^3); \quad a = 3, b = 1, c = 2.$

252 $a^4 : b^4 = (a : b)^4; \quad a = 20, b = 5.$
 $a^4 : b^4 = (a^4 d) : (b^4 d); \quad a = 6, b = 2, d = 3.$

253 $c^3 \cdot c^7 \cdot c^2 = c^{12}; \quad c = 2.$
 $(a^2)^b = a^{2b}; \quad a = 2, b = 3.$

254 $(1 + a^4)b = b + a^4 b; \quad a = 2, b = 7.$
 $2a(b^2 - c) = 2ab^2 - 2ac; \quad a = 9, b = 3, c = 6.$

255 $a^2 b^2 c^2 = (abc)^2; \quad a = 2, b = 3, c = 2.$
 $8a^3 b^3 = (2ab)^3; \quad a = 3, b = 1.$

256 $10 - 3a = 4 - (3a - 6); \quad a = 3.$
 $x(1+x) = x + x^2; \quad x = 1.$

257 $(3a + 2b) : c = 3a : c + 2b : c; \quad a = 4, b = 7, c = 2.$
 $(2a)^b \cdot (2a)^c = (2a)^{b+c}; \quad a = 3, b = 2, c = 3.$

258 $20^n : 4^n = 5^n; \quad n = 2.$
 $5^x \cdot 5^y = 5^{x+y}; \quad x = 3, y = 2.$

259 $2(a^2 - 1) = 2a^2 - 2; \quad a = 12.$
 $3a : 3b = (3a : 3) : (3b : 3); \quad a = 21, b = 7.$

260 $a - 10 = (a + 2) - 12; \quad a = 15.$
 $x : y = 6x : 6y; \quad x = 30, y = 5.$

261 $(2x)^3 : (2x)^2 = 2x; \quad x = 3.$
 $(a + x)x^2 = ax^2 + x^3; \quad a = 5, x = 2.$

■ Espressioni e proprietà delle potenze

Nel sito: ▶ 12 esercizi di recupero



Applicando le proprietà delle potenze, calcola il valore delle seguenti espressioni.

262 $2^5 : 2^4 + 2 \cdot 2^2 - 2^0$

[9] 271 $(4^2 : 2^2)^3 \cdot 2^2 : (6^6 : 3^6)$ [4]

263 $(3^4 : 3^3)^4 \cdot 3^5 : (3^2)^4$

[3] 272 $[(3)^2 \cdot (3)^3] : (3)^2 + [(2)^5 : (2)^3]^2 : (2^2)^2$ [28]

264 $4^2 \cdot 4^0 - 3^5 : 3^3 + 5^0$

[8] 273 $[6^6 \cdot 4^6 : (3^2 \cdot 8^2)] : 8^4$ [81]

265 $5^3 : 5^1 \cdot 2^2 : 5^2$

[4] 274 $(4^2 \cdot 2^2) : 2^2 - 5^2 : 5^1 + (2^2 \cdot 3^2)^3 : 6^5$ [17]

266 $2^6 \cdot 3^6 : (18^4 : 3^4)$

[36] 275 $[(8^6 \cdot 16^4) \cdot 64^3] : (2^9 \cdot 4^5) : (8^7 \cdot 4^4)$ [16]

267 $(2^2 \cdot 3^2)^4 : 6^4 : 3^4$

[16] 276 $(9^4 \cdot 6^7) : 54^5 + (3^6 \cdot 18^3) : (9^4 \cdot 3^3)$ [28]

268 $(3^2)^3 : (3^2)^2 \cdot [(3^4)^3 : (3^2)^6]$

[9] 277 $(12^5 \cdot 24^4) : (72^3 \cdot 8^4) + 6^3 \cdot 9^3 : 54^2$ [108]

269 $(2)^3 \cdot (2^2 \cdot 2^3)^3 : \{[(2^4)^3] \cdot (2^2)^2\}$

[4] 278 $\{64^9 : [(4^3 \cdot 8 \cdot 2^7)^2 : 8^3]\} : (4^5 \cdot 2^4)^2 - 2^2$ [4]

270 $3^5 : (3^2)^2 \cdot [(3^2)^3] : [(3^3)^2] \cdot (3)^2$

[27] 279 $(3^4 \cdot 2^4 \cdot 7^4) : (3^3 \cdot 2^3 \cdot 7^3) - 2^5 - [(3^2)^2]^2 : 3^6$ [1]

280 $3^2 \cdot 2^2 + (3^6 : 3^4)^0 - 25^2 : 5^2 + (7 \cdot 3 - 5 \cdot 4) \cdot (4^3 : 4^2)$ [12]

281 $10 \cdot [(12^2 : 3^2) : 2^2] - [(2)^2]^2 + 7 \cdot 3 - (25^4 : 5^4)^0 - 10^3 : 5^3$ [36]

282 $[(6^2 \cdot 6^4) : (6 \cdot 6^2)]^2 : (6^2)^2 - [(2^2 \cdot 8^2) : 16] \cdot 2$ [4]

283 $[(3^2)^3 : (3^2)^2] + \{(5^4 \cdot 5^2)^3 : [(5^2)^3]^2\} : (5^2 \cdot 5^3) - 6$ [8]

284 $\{[(2^3 + 2^2) : 2^2 - 3^0]^2 - 1\}^3 - \{(8^3 : 4^3 - 5) \cdot [(5^3)^4 : (5^4)^3]^5\}^2$ [18]

BRAVI SI DIVENTA ▶ E01



285 $8^2 \cdot 2^8 \cdot 16^4 : (4^3)^4 + (15^5 - 15^4) : 15^4 + (2^8)^0 \cdot 2 + (39^4 : 13^4)^2 : 9^4$

286 $(7^4 : 7)^2 : (7^2)^2 - [(3^2 \cdot 3^0 \cdot 3^3)^2 : (3^3)^3 + 2^0 + 2^2 - 3^1] + 5^2$ [69]

287 $[(10^3 : 2^3) \cdot 5^3] : (5^3)^2 + \{[(4^0 \cdot 4^4)^3 : (4^2 \cdot 4^3)^2 - 2^3] + 90\}$ [10]

288 $[27^2 : (2^2 - 2^0)^5]^{10} : 9^4 + (2^3 - 3)^4 : (27^3 : 9^4 + 2)^3$ [14]

289 $(20^4 - 20^3) : 20^3 + \{24^2 : 3^2 - (5 \cdot 2^4)^2 : [(7^4)^2 : 7^6 - 9]^2\} - (5^0 \cdot 2^2 - 1)^3 - 5^2$ [27]

8. Il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo

RIFLETTI SULLA TEORIA

290 Qual è il più piccolo numero primo?

d) Il M.C.D. di due numeri è divisibile per entrambi i numeri.

V F

291 Fra i numeri 121, 37, 14, solo due sono scomponibili in fattori primi. Quali?

e) Dati due numeri, ognuno è divisore del loro m.c.m.

V F

VERO O FALSO?

a) Ogni numero primo è dispari.

V F

b) Ogni numero dispari è primo.

V F

c) Ogni numero pari si scomponete in fattori primi.

V F

d) Ogni numero scomposto in fattori primi non è primo.

V F

293 Il m.c.m. tra 4 e 5 è 20. Perché? Come sono tra loro questi numeri?

h) Se $m.c.m.(a, b) = a$, allora b è divisore di a .

V F

VERO O FALSO?

a) Il M.C.D. di due numeri esiste sempre.

V F

b) Il M.C.D. di due numeri primi è 0.

V F

c) Il M.C.D. di due numeri pari è il numero minore tra i due.

V F

i) Se $m.c.m.(a, b) = a \cdot b$, allora a e b sono numeri primi.

V F

j) Se $M.C.D.(a, b) = a$, allora b è divisore di a .

V F

k) Il M.C.D. di due numeri primi è uguale al più grande dei numeri.

V F

l) Il m.c.m. di due numeri primi non esiste.

V F

m) Il M.C.D. di due numeri primi fra loro è uguale al minore dei due numeri.

V F

ESERCIZI

■ La scomposizione in fattori primi

Le seguenti scomposizioni non sono in fattori primi. Modificalle in modo che ogni fattore sia primo e scrivi la scomposizione in potenze di numeri primi.

295 $5 \cdot 15$; $4 \cdot 3$; $4 \cdot 8$; $21 \cdot 3$.

296 $4 \cdot 9$; $4 \cdot 10$; $5 \cdot 25$; $6 \cdot 6$.

297 $2 \cdot 3 \cdot 9$; $7 \cdot 8 \cdot 3$; $2 \cdot 10 \cdot 14$; $2 \cdot 15 \cdot 6$.

298 $2 \cdot 6 \cdot 8$; $3 \cdot 6 \cdot 9$; $3 \cdot 33 \cdot 21$; $26 \cdot 22 \cdot 34$.

299 $15^3 \cdot 3^2$; $13^2 \cdot 26$; $144 \cdot 13$; $58 \cdot 2$.

300 49^5 ; 18^6 ; $8^2 \cdot 27^3$; $6^3 \cdot 35^2$.

ESERCIZIO GUIDA

301 Scomponiamo in fattori primi 980 e 360.

Cerchiamo il più piccolo divisore primo di 980; è 2, poiché l'ultima cifra è pari. Scriviamo:

$$\begin{array}{r|l} 980 & 2 \end{array}$$

Calcoliamo $980 : 2$, riportiamo il quoziente sotto 980 e cerchiamone il più piccolo divisore primo:

$$\begin{array}{r|l} 980 & 2 \\ 490 & 2 \end{array}$$

Procediamo in questo modo fino a ottenere come quoziente 1:

$$\begin{array}{r|l} 980 & 2 \\ 490 & 2 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

La scomposizione in fattori primi di 980 è:

$$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

Possiamo seguire anche un metodo più veloce, ma meno automatico: con il calcolo mentale operiamo delle scomposizioni parziali, come negli esercizi precedenti dal 295 al 300, poi applichiamo le proprietà delle potenze.

Scomponiamo in questo modo 360:

$$\begin{aligned} 360 &= 10 \cdot 36 = 2 \cdot 5 \cdot 6^2 = 2 \cdot 5 \cdot (3 \cdot 2)^2 = \\ &= 2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5. \end{aligned}$$

Scomponi in fattori primi i seguenti numeri.

302 6; 15; 18; 21; 24.

304 69; 70; 121; 125; 144.

306 320; 660; 740; 850; 1000.

303 25; 27; 28; 30; 35.

305 40; 42; 75; 225; 300; 405.

307 1500; 2000; 3300; 4800; 5000.

Calcola il M.C.D. dei seguenti gruppi di numeri.

308 6, 8; 21, 24; 20, 30; 5, 6.

Calcola il m.c.m. dei seguenti gruppi di numeri.

311 3, 4; 30, 40; 300, 400.

309 4, 20; 6, 18; 20, 60; 5, 10.

312 15, 20; 25, 30; 56, 72; 8, 12.

310 12, 18, 24; 8, 20, 16; 10, 20, 30.

313 7, 14; 9, 27; 6, 18; 22, 44.

Nel sito: ► 9 esercizi di recupero

**ESERCIZIO GUIDA**

314 Mediante la scomposizione in fattori primi, determiniamo il M.C.D. e il m.c.m. dei numeri: 60, 15, 18.

Scomponiamo ciascun numero in fattori primi, incolonnando i fattori uguali:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,$$

$$15 = 3 \cdot 5,$$

$$18 = 2 \cdot 3^2.$$

Il M.C.D. è il prodotto dei fattori comuni, ciascuno preso con l'esponente più piccolo:

$$\text{M.C.D.}(60, 15, 18) = 3.$$

Il m.c.m. è il prodotto di tutti i fattori, comuni e non comuni, ciascuno preso con l'esponente più grande:

$$\text{m.c.m.}(60, 15, 18) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180.$$

Mediante la scomposizione in fattori primi determina il M.C.D. e il m.c.m. dei seguenti gruppi di numeri.

315 12, 4, 6.

318 14, 24, 22.

321 528, 18, 24.

316 12, 8.

319 63, 168.

322 63, 9, 25.

317 90, 30, 150.

320 28, 18.

323 10, 45, 90.

324 Il M.C.D. di due numeri naturali è 2 e il loro m.c.m. 60. Se si moltiplicano entrambi i numeri per 2, quanto vale il loro M.C.D.? Se si moltiplica il primo per 2 e il secondo per 7, si può stabilire quanto diventa il loro m.c.m.? [4; no]

9. I sistemi di numerazione

→ Teoria a pag. 17

RIFLETTI SULLA TEORIA

VERO O FALSO?

- Un numero può essere scritto in forma polinomiale solo se è in base 10.
- I simboli che si possono usare in base 4 sono 0, 1, 2, 3, 4.
- Nel numero $(143)_5$ la cifra 1 indica $1 \cdot 5^2$.
- $1 + 1 = 10$ in base 2.
- Il numero 10 in qualunque base n indica la base n .

CACCIA ALL'ERRORE

I seguenti numeri scritti in forma polinomiale non sono scritti in forma corretta. Trova l'errore.

a) $(3220)_4 = 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0$.

b) $(254)_6 = 2 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1$.

c) $(1101)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.

ESERCIZI

■ Il sistema a base dieci

Scrivi in forma polinomiale i seguenti numeri.

328 138; 427; 3321; 1000.

329 1010; 1001; 1100; 2222.

Scrivi i numeri a cui corrispondono le seguenti espressioni senza svolgere i calcoli.

330 $2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10 + 7$;
 $5 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$.

331 $3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3 + 5 + 9 \cdot 10$;
 $1 \cdot 10 + 2 + 7 \cdot 10^2$.

■ I sistemi con altre basi

332 Scrivi i primi dieci numeri naturali in base due.

Scrivi i seguenti numeri in forma polinomiale.

333 $(1)_2$; $(1)_3$; $(1)_4$; $(1)_5$.

334 $(10)_2$; $(10)_3$; $(10)_4$; $(10)_6$.

335 $(11)_2$; $(11)_3$; $(111)_2$; $(111)_3$.

336 $(1101)_2$; $(1001)_2$; $(1111)_2$; $(1000)_3$.

337 $(1231)_3$; $(1000)_4$; $(1222)_3$; $(200)_4$.

■ Operazioni in altre basi

■ ESERCIZIO GUIDA

- 338** Dopo aver costruito le tabelle di addizione e moltiplicazione in base tre, calcoliamo:
 $(211)_3 + (122)_3; \quad (212)_3 \cdot (21)_3.$

Le tabelle cercate sono:

base tre	+	0	1	2	·	0	1	2
0	0	1	2	0	0	0	0	0
1	1	2	10	1	0	1	2	1
2	2	10	11	2	0	2	11	0

Eseguiamo i calcoli utilizzando le tabelle e la tecnica del riporto.

base tre	$\begin{array}{r} 11 \\ 211 \\ + 122 \\ \hline 1110 \end{array}$	$\begin{array}{r} 212 \\ \cdot 21 \\ \hline 212 \\ 1201 - \\ \hline 12222 \end{array}$
----------	--	--

Dopo aver costruito le tabelle di addizione e moltiplicazione in base due, esegui i seguenti calcoli (i numeri sono espressi in base due).

339 $1101 + 111; \quad 1001 + 1110; \quad 111 + 111.$

340 $110 + 10110; \quad 1000 + 1010 + 1011.$

341 $110 \cdot 11; \quad 1010 \cdot 100; \quad 1110 \cdot 1101.$

Calcola i risultati delle seguenti operazioni fra numeri espressi in base tre.

342 $201 + 111; \quad 101 + 220; \quad 222 + 111.$

343 $212 + 100; \quad 1011 + 2112; \quad 2001 + 2212.$

344 $21 \cdot 12; \quad 21 \cdot 100; \quad 21 \cdot 22.$

345 $122 \cdot 110; \quad 12 \cdot 200; \quad 10 \cdot 212.$

346 Costruisci le tabelle di addizione e moltiplicazione in base cinque.

■ Da una base qualsiasi a base dieci e viceversa

Scrivi nel sistema decimale i seguenti numeri.

347 $(101)_2; \quad (1110)_2; \quad (10000)_2; \quad (10111)_2.$

348 $(10)_3; \quad (100)_3; \quad (2012)_3; \quad (222)_3.$

349 $(10)_5; \quad (100)_5; \quad (222)_5; \quad (314)_5.$

350 $(321)_4; \quad (123)_4; \quad (27A)_{12}; \quad (2B)_{12}.$

351 $(100)_8; \quad (19F)_{16}; \quad (1ABC)_{16}; \quad (100)_{12}.$

Trasforma i seguenti numeri in base dieci nella base indicata, a mente o aiutandoti con uno schema grafico.

352 5, 8, 16, 15, 17, 64, 66; base 2.

353 4, 9, 12, 13, 15, 30, 32, 81, 80; base 3.

354 5, 8, 20, 27, 32; base 4.

355 5, 10, 15, 16, 20, 19, 50, 56; base 5.

356 12, 16, 23, 32, 41, 64, 80, 100, 800; base 8.

357 21, 62, 124, 240; base 12.

358 17, 64, 144, 1025; base 16.

Nei seguenti esercizi scrivi nella base indicata i numeri espressi in base dieci, mediante il metodo delle divisioni successive.

359 10, 15, 26, 37, 48; base 2.

360 100, 204, 327, 412; base 3.

361 64, 88, 137, 1600; base 4.

362 1712, 350, 427, 1000; base 5.

10. Che cosa sono i numeri interi

RIFLETTI SULLA TEORIA

363

VERO O FALSO?

Il numero intero -6 appartiene all'insieme dei:

- a) numeri interi compresi tra -4 e -2 .
- b) numeri interi maggiori di -5 .
- c) numeri interi minori di -4 .
- d) numeri interi compresi tra -8 e -1 .

364

VERO O FALSO?

- a) $-4 > -2$.
- b) $-6 < -3$.
- c) $-5 < +2$.
- d) $0 < -4$.

365

VERO O FALSO?

a) Due numeri interi con lo stesso valore assoluto sono uguali.

b) Due numeri interi opposti hanno lo stesso valore assoluto.

c) Tra due numeri negativi il minore è quello che ha valore assoluto maggiore.

d) $|-5| < |-6|$.

e) Ogni numero intero ha un precedente.

f) Il successivo di -1 è $+1$.

ESERCIZI

366

Rappresenta su una retta orientata i seguenti numeri.

$$+3, -7, +4, -2, 0, +1, -6.$$

367

Scrivi gli opposti dei numeri dell'esercizio precedente e rappresentali sulla stessa retta. Che proprietà geometrica hanno due punti corrispondenti a numeri opposti?

368

Scrivi il valore assoluto dei numeri dei due esercizi precedenti.

369

Scrivi tutti i numeri interi che hanno valore assoluto minore di 4 .

370

Scrivi cinque numeri di cui tre positivi e due negativi. Considerandoli a coppie, quante sono le coppie di numeri concordi e quante di numeri discordi?

371

Scrivi due numeri interi discordi che abbiano lo stesso valore assoluto. Come sono i due numeri?

372

Scrivi due numeri interi discordi il cui valore assoluto sia maggiore di 16 .

373

Scrivi quattro numeri interi, concordi con -1 , il cui valore assoluto sia compreso fra 4 e 11 .

374

Scrivi in ordine crescente i seguenti numeri.

$$-6, +9, -1, +7, -2, -4.$$

375

Scrivi in ordine decrescente i seguenti numeri.

$$+8, -3, 0, -5, +4, -11.$$

376

Quanti sono gli interi compresi fra $+3$ e $+9$? E fra -25 e $+2$? E fra $+21$ e -1 ? E fra -27 e $+26$?

COMPLETA con i segni $<$ o $>$.

377

$$|-2| \dots -|2|; \quad +4 \dots |-9|; \quad 0 \dots |-6|.$$

378

$$-5 \dots +7; \quad 0 \dots -2; \quad +6 \dots -3; \quad -21 \dots -4.$$

Le lettere a , b e c indicano generici numeri interi: mettili in ordine crescente, quando è possibile. Per ogni situazione fornisci un esempio numerico, sostituendo le lettere con opportuni numeri interi.

- 379** $a > +5$, $b < -4$;
 $a > -3$, $|a| > |b|$;
 $b < +4$, $|a| > |b|$.

- 380** a e b sono discordi, a e c sono concordi, $b < 0$, $|a| < |b| < |c|$;
 a e b sono concordi, b e c sono discordi, $a > +9$, $|a| < |b| < |c|$.

11. Le operazioni nell'insieme dei numeri interi

→ Teoria a pag. 22

RIFLETTI SULLA TEORIA

381 VERO O FALSO?

- a) La differenza tra due numeri opposti è 0.
- b) La somma dei valori assoluti di due numeri opposti è 0.
- c) La somma di due numeri discordi è un numero negativo.
- d) Se la somma di due numeri interi è 0, allora i due numeri sono discordi.
- e) Per la sottrazione di numeri interi vale la proprietà commutativa.

V F

V F

V F

V F

V F

382 VERO O FALSO?

- a) Il prodotto di un numero per la somma di due opposti è 0.
- b) Il quoziente di due numeri concordi è un numero positivo.
- c) Il prodotto degli opposti di due numeri è uguale all'opposto del loro prodotto.
- d) Il quoziente di due numeri interi è 0 se il divisore è 0.
- e) Se si moltiplica per -1 un qualunque numero intero a , si ottiene un risultato negativo.

V F

V F

V F

V F

V F

- 383** Discuti la validità della seguente affermazione:
«La divisione è un'operazione interna all'insieme \mathbb{Z} ; infatti $(-8) : (+4) = (-2)$ ».

384 VERO O FALSO?

- a) Se il risultato di una potenza è negativo, il suo esponente è dispari.
- b) Se il risultato di una potenza è positivo, il suo esponente è pari.
- c) $(-2)^4 = (+2)^4$
- d) $a^0 = 0$
- e) $(-1)^0 = 1$

V F

V F

V F

V F

- 385 TEST** Fra le seguenti uguaglianze una sola è vera per qualunque valore di $a \in \mathbb{Z}$. Quale?

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> A $a^0 = a$ | <input type="checkbox"/> D $a : 1 = 0$ |
| <input type="checkbox"/> B $a - 0 = a$ | <input type="checkbox"/> E $a : a = a$ |
| <input type="checkbox"/> C $a \cdot a = 2 \cdot a$ | |

- 386 TEST** Due numeri interi a e b sono discordi. La loro somma è:

- A sempre positiva.
- B sempre negativa.
- C positiva se $|a| > |b|$ e $a > 0$.
- D negativa se $|a| > |b|$ e $a > 0$.
- E nulla.

ESERCIZI

L'addizione e la sottrazione

Per ciascuna delle seguenti coppie di numeri interi, scrivi l'addizione fra i due numeri e calcola la somma.

387 $+5, +8; \quad +5, -8; \quad -5, +8; \quad -5, -8; \quad +4, +4; \quad +4, -4; \quad -4, +4; \quad -4, -4.$

388 $0, +2; \quad 0, -2; \quad -2, 0; \quad +2, 0; \quad -36, +6; \quad +36, -6; \quad +42, +8; \quad +25, -7.$

389 COMPLETA la seguente tabella.

<i>a</i>	-5	+2	-8	+5	-3	-7		+14
<i>b</i>	+7		+6	-5		-1	-12	+4
<i>a + b</i>		-6		+2	-4	0	-9	+4

390 Scrivi tre coppie di numeri interi concordi che abbiano come somma +7 e tre coppie che abbiano come somma -15.

391 Scrivi tre coppie di numeri interi discordi che abbiano come somma -8 e tre coppie che abbiano come somma +11.

Per ciascuna delle seguenti coppie di numeri interi, scrivi la sottrazione fra i due numeri e calcola la differenza.

392 $+3, +8; \quad +2, -6; \quad -3, +9; \quad -11, -14; \quad 0, -4; \quad +4, 0.$

393 $+5, -5; \quad -2, +2; \quad +6, +6; \quad -6, -6; \quad -8, -1; \quad -8, +1.$

394 COMPLETA la seguente tabella.

<i>a</i>	+5	0	-2	+8	-12	0	0	+6
<i>b</i>	-5	-4		0	+8	0	0	+15
<i>a - b</i>		0	+4			-21	+8	0

Espressioni con addizioni e sottrazioni**ESERCIZIO GUIDA**

395 Calcoliamo il valore dell'espressione $+7 - (+3 - 5 + 4)$.

Possiamo procedere in due modi.

Primo modo

$$+7 - (+3 - 5 + 4) =$$

Calcoliamo il valore della somma fra parentesi:

$$= +7 - (+2) =$$

Eseguiamo la sottrazione:

$$= +5.$$

Secondo modo

$$+7 - (+3 - 5 + 4) =$$

Eliminiamo le parentesi. Le parentesi precedute dal segno - si eliminano cambiando di segno a ogni termine in esse contenuto:

$$= +7 - 3 + 5 - 4 =$$

Eseguiamo le addizioni algebriche:

$$= +5.$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

- 396** $(+3) + (-7) + (+8) + (-21)$ [−17]
- 397** $(+4) + (+5 - 9) + (-2 + 6) + (+12 - 19)$ [−3]
- 398** $(15 - 9) + (16 - 8 - 11) + (13 + 2 - 30 - 7)$ [−19]
- 399** $-15 - (+12 - 5 + 6 - 10) + (-3 + 7 - 11)$ [−25]
- 400** $-5 + (+7 - 3 + 5 - 6) - (+12 - 5 - 6 + 7)$ [−10]
- 401** $+10 - (+15 - 8 - 6) + (+12 - 15 - 3) + (+7 - 3 - 12)$ [−5]
- 402** $+17 - (+6 - 7 - 5) + (+12 - 16 + 1) - (1 + 7 - 15)$ [+27]
- 403** $[+15 - (+7 + 3 - 2)] - [-15 - (-6 + 7 - 1)] - (-1 + 6 - 2)$ [+19]
- 404** $+12 - [+13 + (-15 - 7 - 8)] + [-20 - (+15 - 7 - 12)]$ [+13]
- 405** $(74 - 85) + [(+35) + (42 - 51 + 1) - 6] + [23 + (14 - 8 - 2)]$ [+37]
- 406** $(-28 + 37) + \{(-25 + 11) + [1 + (36 - 44)] - (+9)\} + 1$ [−20]
- 407** $+25 + \{+37 + [49 + (-6 - 8 - 20) + (13 - 7)]\} + (-80)$ [+3]

■ Problemi con addizioni e sottrazioni

Risovi i seguenti problemi, scrivendo un'espressione con i numeri interi e calcolandone il valore.

- 408** Mettendo un corpo alla temperatura di -17°C vicino a un altro corpo più caldo, la temperatura del primo aumenta di 70°C . Successivamente si pone il corpo iniziale in frigorifero: la sua temperatura diminuisce di 4°C . Qual è attualmente la temperatura del corpo? [49 °C]
- 409** Parto da un certo punto di una scala e poi salgo 7 gradini, scendo 5 gradini, salgo 13 gradini, scendo 20 gradini. In che punto mi trovo rispetto a quello di partenza? [−5, cioè 5 gradini al di sotto]
- 410** Ho ottenuto un prestito di € 75 senza interessi. Dopo un certo tempo ho restituito al creditore € 37, poi ho preso in prestito altri € 42. Oggi, dopo aver restituito altri € 25, qual è la mia situazione con il creditore, considerando positivamente i crediti e negativamente i debiti? [−€ 55]
- 411** Un automobilista parte con il serbatoio contenente 50 l di benzina, percorre un primo tragitto consumando 17 l di carburante, un secondo tratto consumando 13 l, poi si ferma a un distributore dove fa rifornimento di 36 l di benzina. Quanto carburante ha nel serbatoio prima di ripartire? [56 l]
- 412** Giocando a carte con tre avversari, effettuo due partite che terminano nel modo seguente:
1. vincita di 40 punti con il primo giocatore; perdita di 170 punti con il secondo giocatore; vincita di 10 punti con il terzo giocatore;
 2. vincita di 60 punti con ciascun giocatore.
- Qual è la mia situazione attualmente? [60 punti]

■ La moltiplicazione e la divisione

413 Nella moltiplicazione $(-3) \cdot (-2) \cdot (+5)$ è possibile eliminare le parentesi di -3 , ottenendo un'espressione equivalente? E le parentesi di -2 ? E quelle di $+5$?

414 Le seguenti scritture vogliono indicare moltiplicazioni fra due interi. Indica le moltiplicazioni scritte in modo corretto e spiega perché le altre sono sbagliate.

$$\begin{array}{lll} (-3) \cdot (-5); & +7 \cdot (-8); & +6 \cdot -4; \\ -2 + 1; & -2(+1); & (-4) \cdot (-1); \\ (-5) - 8; & -5(-8); & -3(-2); \\ 3 \cdot 2; & (+3)2; & +3(-5). \end{array}$$

Calcola i seguenti prodotti.

415 $(+3)(+4); \quad (-5)(-2);$
 $(-1)(+7); \quad (+8)(-6).$

416 $(+9)(-11); \quad (-12)(+7);$
 $(+15)(+6); \quad (-13)(-5).$

417 $(+2)(-12)(-5); \quad (-2)(+2)(-2)(-2).$

418 COMPLETA la seguente tabella.

a	$+4$	-1	$+2$	-3		-3		-4
b	$+7$	-6			$+1$	-1	$+4$	-2
ab		-10						
$a \cdot (-b)$			-9	$+4$	-1			
$-a \cdot (-b)$						-18	$+16$	
$-ab$							0	$+24$

419 Nell'insieme $\{-2, 0, +2\}$ l'addizione è operazione interna? E la moltiplicazione?

420 Nell'insieme $\{-1, 0, +1\}$ l'addizione è operazione interna? E la moltiplicazione?

■ ESERCIZIO GUIDA

421 Determiniamo due numeri interi il cui prodotto p è -6 e la cui somma s è $+1$.

Le coppie di numeri interi la cui somma è 1 sono infinite, mentre le coppie di numeri interi che hanno un prodotto assegnato sono in numero finito.

Scomponiamo quindi il numero -6 in tutti i modi possibili:

$$-6 = (+1)(-6) = (-1)(+6) = (+2)(-3) = (-2)(+3).$$

Compiliamo una tabella, mettendo in una colonna i prodotti e nell'altra colonna le somme dei due numeri. Noi cerchiamo la somma uguale a 1 :

p	s
$(+1)(-6)$	$+1 - 6 = -5$
$(-1)(+6)$	$-1 + 6 = +5$
$(+2)(-3)$	$+2 - 3 = -1$
$(-2)(+3)$	$-2 + 3 = +1$

I due numeri richiesti sono -2 e $+3$.

422**TEST** Se $a \cdot b > 0$ e $a + b > 0$, allora:

- A** $a > 0$ e $b > 0$. **D** $a < 0$ e $b > 0$.
B $a > 0$ e $b < 0$. **E** $a > 0$ e $b = 0$.
C $a < 0$ e $b < 0$.

Nei seguenti esercizi determina due numeri che abbiano per somma s e prodotto p i valori indicati.

423

$$s = +13, p = +12; \quad s = -5, p = +6.$$

424

$$s = +3, p = -10; \quad s = -6, p = -7.$$

425

$$s = 0, p = -1; \quad s = -2, p = +1.$$

426

$$s = 0, p = -9; \quad s = -1, p = -30.$$

Calcola i seguenti quozienti, quando esistono in \mathbb{Z} .

427

$$\begin{array}{ll} (+15) : (+3); & (+15) : (-3); \\ (-15) : (+3); & (-15) : (-3). \end{array}$$

428

$$\begin{array}{ll} (-8) : (+4); & (-8) : (-8); \\ (-8) : (+8); & 0 : (-5). \end{array}$$

429

$$\begin{array}{ll} (-21) : (-7); & (-7) : (+21); \\ (+1) : (-1); & -7 : 0. \end{array}$$

430

$$\begin{array}{ll} 0 : (+1368); & (-45) : (+9); \\ (-1215) : (-27). & \end{array}$$

431

$$\begin{array}{ll} +54 : (-3); & +1232 : (-22); \\ +1964 : 0. & \end{array}$$

432**COMPLETA** la seguente tabella.

a	+ 24	- 10	- 30	- 20	+ 15	+ 28		
b	- 4	- 2		+ 2		- 3	- 1	+ 5
$a : b$			+ 6	- 7				
$a : (-b)$					- 10	+ 1	- 6	+ 25
$(-a) : (-b)$							- 4	+ 6

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

433

$$\begin{aligned} & (-72) : (-6) : (+2); \\ & (-72) : [(-6) : (+2)]. \end{aligned}$$

434

$$\begin{aligned} & (-7) \cdot (4) : (-2); \\ & (15) \cdot [(+18) : (-6)]. \end{aligned}$$

435

$$\begin{aligned} & (-6) : [(+18) : (-3)]; \\ & (-24) : [(2) \cdot (-3)]; \\ & (+2) \cdot [15 : (-3)] : 5. \end{aligned}$$

436

$$\begin{aligned} & [(+12) \cdot (-3)] : [(+2) \cdot (-3)]; \\ & (-63) : \{[(3) \cdot (-4)] : (4)\}; \\ & [(-8) : (-2)] : [(-1) \cdot (+2)]. \end{aligned}$$

437

$$\begin{aligned} & \{(-30) : [(-2) \cdot (3)]\} : [(-1) \cdot (+5)]; \\ & (-32) : [(+4) \cdot (-2)]; \\ & (-1) \cdot [(-3) \cdot (+12)] : (-6) \cdot (+2). \end{aligned}$$

CACCIA ALL'ERRORE Cambia le parentesi o inserisci-ne di nuove in modo che il risultato sia corretto.

438

$$-2 + 4 \cdot (+3) = 6; \quad -12 : (-6) : (-2) = -4.$$

439

$$16 - 4 \cdot 2 = 24; \quad 15 - 16 + 2 = -3.$$

440

$$3 \cdot 2 \cdot 5 + 4 = 42; \quad 14 : (7 - 4)^0 + 6 = 7.$$

441

$$16 : (2 + 6) = 14; \quad (-15) : 5 - 3 + 1 = -7.$$

442

$$\begin{aligned} & 15 - 6 \cdot (15 - 6) - 5 = -9; \\ & 12 - (7 + 1) - 2 = 4. \end{aligned}$$

443

$$13 \cdot 2 - (26 + 1) = 1; \quad 4 + 3 \cdot 2 - 1 : 9 = 1.$$

444

$$\begin{aligned} & 2 - [5 \cdot 4 - 3 - 2] + 6 = 5; \\ & 15 - [12 - 7 + 3 - 2] = 11. \end{aligned}$$

445

$$\begin{aligned} & (-32) : (-16) : 2 = 4; \\ & 2 - 5 \cdot (4 - 3) - 2 + 6 = -7. \end{aligned}$$

Raccogli il fattore comune agli addendi delle seguenti espressioni e poi calcolane il valore. Svolgi ogni esercizio raccogliendo il fattore sia con il segno + sia con il segno -.

446 $-15 + 20 - 10 + 35 = +5 (-3 + \dots - \dots + \dots);$
 $-15 + 20 - 10 + 35 = -5 (+\dots - 4 + \dots - \dots).$

447 $+7 - 21 + 14; -121 + 22 - 77.$

448 $-27 - 9 - 12; 13 - 169 - 39.$

449 $+42 - 30 - 48 + 54; -34 + 42 + 66.$

450 $-75 - 15 + 100; +30 - 40 - 50 + 60.$

Nel sito: ▶ 11 esercizi di recupero



■ Le espressioni con le quattro operazioni

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

451 $-7 \cdot (+6 - 4 - 7 + 2) - 15 + 5 \cdot (-12 + 7 + 3)$ [−4]

452 $+15 - 6 \cdot (15 - 6 - 5) - 5 \cdot (-3 + 2) + 7 - (+6 \cdot 4 - 16)$ [−5]

453 $13 - 2 \cdot (6 - 3 + 2) - 15 \cdot (2 - 3) + 7 \cdot (7 - 5 - 2)$ [+18]

454 $+6 - 4 \cdot 2 + 15 : 3 - 7 \cdot 3 + 8$ [−10]

455 $-7 - 5 \cdot 2 + 16 : 8 - 5 + 6 - 18 : 3$ [−20]

456 $(-15) : 3 - 6 + 18 : (-6) - (+7 \cdot 3 - 10) + 7 \cdot 2$ [−11]

457 $(15 - 7) : (-4) - (7 - 3 \cdot 2 + 4) : (-5) - (6 - 3 \cdot 4)$ [+5]

458 $15 : (3 - 2 + 4) - (7 - 3 + 5 \cdot 2) + 7 \cdot (3 - 2 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 2 - 4)$ [−11]

459 $[3 \cdot (2 - 4) - 5] \cdot (-2) - [15 + 3 \cdot (-4) - (-6 + 2)] + 5$ [+20]

460 $[3 \cdot 2 \cdot (10 - 7 + 4) \cdot (7 - 2 + 3) - 2 \cdot 3 - 2] - [(8 + 7 - 18) - (7 + 10 - 15) + 13 - 17] - 300$ [+37]

461 $[(81 - 3 + 2 - 79 + 41 + 50) + (-27 + 30 + 5 \cdot 10 - 58) + 9] - [87 + 3 - 37 - 43 - (7 + 2 + 10 - 8)]$ [+97]

462 $5 \cdot 4 + 3 \cdot [18 + 2 - 37 + (44 - 36 + 39) \cdot 3 - 130] + [17 + 1 - 2 \cdot (3 - 4 + 5 - 9) \cdot (4 + 6 - 12)]$ [0]

■ Le potenze

463 TEST L'espressione $-(a)^5 : a^3$ è equivalente a:

A $-(a^5 : a^3).$

D $a^5 : a^3.$

B $(a^5 : a^3).$

E $-(-a^5 : a^3).$

C $-(a)^5 : (-a)^3.$

Calcola le seguenti potenze di numeri interi.

465 $(-2)^3; (+2)^2; (-2)^4; (+2)^5.$

466 $(-1)^5; (+2)^1; (-3)^2; (-2)^0.$

464 VERO O FALSO?

a) $(-2)^3 = -2^3$

V **F**

467 $(-1)^4; -7^0; (-10)^2; (-4)^3.$

b) $5^3 = (-5)^3$

V **F**

468 $-1^7; (-1)^7; -1^6; (-1)^6.$

c) $(-6)^2 = -6^2$

V **F**

469 $-3^4; (-3)^4; -3^3; (-3)^3.$

d) $-3^7 : 3^2 = (-3)^7 : (-3)^2$

V **F**

e) $-(-2)^3 \cdot (-5)^2 = 2^3 \cdot (-5^2)$

V **F**

470

COMPLETA la seguente tabella (a volte ci sono più possibilità).

a	- 3	+ 4	- 1	- 6
$(-a)^2$			0	+ 4
$-a^2$		- 25		
$(-a)^3$			- 8	
$-a^3$				- 27 + 125

COMPLETA le seguenti uguaglianze.

471

$$(\dots)^3 = 27; \quad (-\dots)^4 = \dots 16.$$

475

$$(\dots)^{\dots} = -216; \quad (\dots)^{\dots} = +128.$$

472

$$0^{12} = \dots; \quad -(-1)^5 = \dots.$$

476

$$(-\dots)^{\dots} = \dots 81; \quad -(-\dots)^{\dots} = \dots 625.$$

473

$$-3^5 = \dots; \quad (\dots)^3 = -125.$$

477

$$-(\dots)^6 = \dots 729; \quad (\dots)^{\dots} = -512.$$

474

$$-(\dots)^2 = \dots 81; \quad (-3)^{\dots} = \dots 243.$$

478

$$-(-2)^5 = \dots; \quad \dots(-\dots)^6 = -64.$$

■ Le proprietà delle potenze

Nel sito: ▶ 17 esercizi di recupero



■ ESERCIZIO GUIDA

479 Calcoliamo: a) $(-3)^9 : (+3)^6$; b) $(+2)^8 : (-2)^5$.

a) $(-3)^9 : (+3)^6 =$

Tenendo conto che $(-3)^9 = -(3^9) = -(+3)^9$:
 $= -(+3)^9 : (+3)^6 =$
 $= -(+3)^{9-6} = -(+3)^3 = -27.$

b) $(+2)^8 : (-2)^5 =$

Tenendo conto che $(+2)^8 = (-2)^8$:
 $= (-2)^8 : (-2)^5 = (-2)^{8-5} =$
 $= (-2)^3 = -8.$

480

TEST Una sola fra le seguenti uguaglianze è falsa. Quale? ($a \in \mathbb{Z}$)

A $-(a)^2 = (-a)^2$

B $(-a)^2 \cdot (-b)^2 = a^2 b^2$

C $(-a)^3 \cdot (+b)^3 = -a^3 b^3$

D $(-a)^3 \cdot (-a)^2 = -a^5$

E $(-ab)^3 = -a^3 b^3$

ASSOCIA a ciascuna espressione il suo risultato.

481

1. 2^{3^2} A. -2^9
 2. $-[(-2)^3]^2$ B. 2^6
 3. -2^{3^2} C. 2^9
 4. $(-2^3)^2$ D. -2^6

482

1. $-(+4)^3 \cdot (-4)^2$ A. -2^5
 2. $-(+2)^4 \cdot (-2)^3$ B. -2^2
 3. $(-6)^3 : (+3)^3 \cdot (+2)^2$ C. -2^{10}
 4. $-(-2)^6 : (+4)^2$ D. 2^7

Calcola il valore delle seguenti espressioni, applicando le proprietà delle potenze.

- | | | | |
|------------|--|-------------------------------------|--|
| 483 | $(-6)^9 : (-6)^3;$ | $(-2)^2 \cdot (-2) \cdot (-2)^4;$ | $(-24)^2 : (+6)^2.$ |
| 484 | $[(-6)^3]^2 : (6)^5;$ | $[(-6)^2 \cdot (6)^3](6)^4;$ | $[(-5)^4 \cdot (4)^4] : (-20)^3.$ |
| 485 | $[(-15)^3 : (+3)^3]^2;$ | $[(-2)^2 \cdot (2)^3] : (-2)^2;$ | $[(-4)^2 \cdot (4)^3]^2 : (-4)^9.$ |
| 486 | $[(7)^3 \cdot (-6)^3]^2 : (-21)^6;$ | $[(+2)^4 \cdot (-2)^3] : (-2)^5;$ | $[(-6)^4 : (3)^4]^2 \cdot (2)^4.$ |
| 487 | $[(2)^3 \cdot (5)^3]^2 : (-10)^3;$ | $(-2)^4 \cdot (2)^3 : (-2)^2;$ | $[(+7)^4]^2 : (7)^6.$ |
| 488 | $[(-2)^3 : (2)^2]^3 : (-2)^2;$ | $[(-10)^6 : (+5)^6]^4 : (-2)^{20};$ | $\{[(-4)^2]^3 : (-2)^6\} \cdot (2)^2.$ |
| 489 | $\{-4^{3^2} [(-4)^3]^2\} : [(-4^2)^3 \cdot (-4)^8]$ | | [+ 4] |
| 490 | $[(15^2)^2 : (-5)^4]^6 : [(-30)^{10} : (-10^2)^5]^2$ | | [+ 81] |
- BRAVI SI DIVENTA ► E02**
- 491** $[-8^4 : (-8)^3]^3 : [(-2)^3]^2 + 2^5 + [(-12)^5 : 4^5]^3 : 9^6 - [(-3)^5 \cdot 3^6 : (3^5)^2]^6 : 3^5$
- 


COMPLETA applicando le proprietà delle potenze.

- | | | | |
|------------|--|--|--|
| 498 | $(+3)^{20} : (+3)^4 = (+3)^{\dots};$ | $[(-6)^3]^8 = \dots 6^{\dots};$ | $(+5)^4 \cdot (-5)^3 = \dots 5^{\dots}.$ |
| 499 | $(-2)^8 \cdot (-2) = \dots 2^{\dots};$ | $(-30)^4 : (+5)^4 = (\dots)^4;$ | $(-4)^{10} \cdot \dots = (+20)^{10}.$ |
| 500 | $-(-8)^5 = \dots 2^{\dots};$ | $(-81)^6 = \dots 3^{\dots};$ | $-(125)^4 = \dots 5^{\dots}.$ |
| 501 | $-[(-216)^3]^2 = \dots 6^{\dots};$ | $(-6)^5 \cdot (-9)^5 = (+54)^{\dots};$ | $(\dots)^7 : (-8)^7 = -1.$ |
| 502 | $[(-3)^{\dots}]^6 = (+3)^{42};$ | $[(\dots)^3]^2 = 0;$ | $(8^{\dots})^2 = 2^{24}.$ |
| 503 | $4^3 = 4^{\dots};$ | $[(-3)^2]^3 = \dots;$ | $(-3^2)^3 = \dots$ |

COMPLETA usando le proprietà delle potenze.

- | | | |
|------------|--------------------------------|--|
| 504 | $[-(+2)^4]^2 = \dots;$ | $(-2)^6 \cdot (+2)^5 \cdot (-2) = \dots$ |
| 505 | $(-2^4) \cdot (-2^5) = \dots;$ | $-2^4 \cdot (+2)^3 = \dots$ |
| 506 | $-3^5 \cdot (-3)^2 = \dots;$ | $(-2)^6 \cdot 5^6 = \dots$ |
| 507 | $2^{4^2} = \dots;$ | $(2^4)^2 = \dots$ |
| 508 | $(-6)^5 : 3^5 = \dots;$ | $(-6)^5 : 3^4 = \dots$ |

Scrivi, quando è possibile, il risultato come un'unica potenza di b , applicando le proprietà delle potenze.

- | | | |
|------------|-----------------------|-----------------------------------|
| 509 | $(-b^2)^3 \cdot b^4;$ | $b^4 - b^3.$ |
| 510 | $-b^8 : b^4;$ | $b^{2^3};$ |
| 511 | $(-b^3)^4;$ | $(-b)^4 \cdot (+b)^3 \cdot (-b).$ |
| 512 | $b^3 - b \cdot b;$ | $b^3 - b \cdot (-b)^2.$ |

■ Espressioni con numeri interi

■ ESERCIZIO GUIDA

513 Calcoliamo il valore della seguente espressione:

$$[15 - (13 \cdot 2 - 10)]^3 + [(-3)^2 \cdot (-2)^2 : 18]^5 : (-2)^4 - 2.$$

Svolgiamo i calcoli dentro le parentesi e applichiamo la proprietà del prodotto di potenze con esponente uguale [$a^n \cdot b^n = (ab)^n$]:

$$\begin{aligned} &= [15 - (26 - 10)]^3 + \{[(-3) \cdot (-2)]^2 : 18\}^5 : (-2)^4 - 2 = \\ &= [15 - 16]^3 + \{6^2 : 18\}^5 : (-2)^4 - 2 = \\ &= [-1]^3 + \{36 : 18\}^5 : (-2)^4 - 2 = -1 + 2^5 : (-2)^4 - 2 = \end{aligned}$$

Poiché l'esponente è pari, $(-2)^4 = 2^4$:

$$= -1 + 2^5 : 2^4 - 2 =$$

Applichiamo la proprietà del quoziente di potenze con uguale base ($a^n : a^m = a^{n-m}$):

$$= -1 + 2^{5-4} - 2 = -1 + \cancel{2} - \cancel{2} = -1.$$

CACCIA ALL'ERRORE

Le seguenti uguaglianze sono false. Correggi l'errore.

514 $17 - (3 + 4 - 7) = 17 - 3 + 4 - 7 = 11$

515 $(-6)^2 : (3)^2 + 7 - 14 = -4 + 7 - 14 = -11$

516 $17 + (3 \cdot 2) - 16 + 2^2 =$
 $= (17 + 3) \cdot (17 + 2) - 16 + 4 =$
 $= 20 \cdot 19 - 16 + 4 =$
 $= 180 - 16 + 4 = 168$

517 $(18)^2 : (-6)^2 + (-2)^3 \cdot 2^2 - 16 + 1 =$
 $= (-3)^2 + (-2)^1 - 16 + 1 =$
 $= 9 - 2 - 16 + 1 = -8$

518 $(15 : 3 - 4)^2 + 5 - 3 \cdot (-3)^2 - 2 =$
 $= (5 - 4)^2 + 5 + 27 = 1 + 5 + 27 = 33$

519 $(14 : 7 - 4)^0 + 6 - (13 + 7 - 6) =$
 $= (2 - 4)^0 + 6 - 13 - 7 + 6 =$
 $= -2 + 6 - 13 - 7 + 6 = -10$

Cambia le parentesi o inseriscine di nuove in modo che il risultato sia corretto.

520 $-2 + 4 \cdot (+3) = 6; \quad -12 : (-6) : (-2) = -4.$

521 $16 - 4 \cdot 2 = 24; \quad 15 - 16 + 2 = -3.$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

522 $(2 + 45) + [(+3) + (-4)] + \{(+6) + [(-14) + (-13) + (+9)] + (-17)\}$ [+ 17]

523 $+15 - \{+7 + [-6 - (+15 - 6)] + 1\} + \{-[+6 - 4 + (3 - 2)] + 6\}$ [+ 25]

524 $[15 - (6 \cdot 3 - 5 \cdot 2) + 3] : [2 \cdot (-4) - 2] + 7 \cdot [(-6) \cdot 2 + 5]$ [- 50]

525 $3 \cdot 3 - 2 + 5 + [3 + 10 - 20 + (3 - 2 - 10)] + [32 + 10 - (32 + 5 + 12) + 7]$ [- 4]

- 526** $21 - 7 \cdot \{2 - [5 \cdot (4 - 3) - 2] + 6\} + 5 \cdot \{7 \cdot [6 \cdot (3 - 1) - 4 \cdot (2 + 1)] - 4\}$ [− 34]
- 527** $10 - (15 : 5 - 3^2 : 3) + 4 \cdot (2^2 - 3^2) + 7 \cdot 2$ [+ 4]
- 528** $(10 \cdot 2 - 6) : (3^2 - 2) + 7 \cdot (4 \cdot 2 - 5) - 6 : 3 + (2^2)^3 - 50$ [+ 35]
- 529** $(10 + 6 \cdot 2^2) : (2^3 : 2^2) - 15 \cdot 2 + (7 - 4 \cdot 6) - (4 + 3 - 7^2)$ [+ 12]
- 530** $[17 - (15 \cdot 2 - 13)]^3 + [(-7)^2 : 7]^0 - [15 + 6 \cdot (4 \cdot 3 - 6 \cdot 2)] + 7$ [− 7]
- 531** $15 - (-2)^3 \cdot (2^2) + 17 \cdot 2 - 15 \cdot 4 - [(4)^2]^3 : (2)^4 + 200$ [− 35]

BRAVI SI DIVENTA ► E03



532 $\{16 : [-3(6 - 2^3) + 2(-5)]\}^3 : (-2)^4 - (-3)^2 [5 - (2 - 6 + 1)]$

533 $15 : \{7 - [4 + 2 \cdot (-1)]\} - \{15 + 12 - 20 + 7 \cdot [4 + 3 \cdot (2 - 4)] - 4\}$ [+ 14]

534 $\{[2 - 7 \cdot (4 - 6)] : (-2) - (-2^3 + 2^2)\} : (-2) + [-(-2 + 7) \cdot (-4)]$ [+ 22]

535 $[(6 - 22) : (-2)^3 + (11 - 13) \cdot (-7 + 4)] \cdot (8 - 11) + (-2 \cdot 3 + 4 \cdot 9)$ [+ 6]

536 $(-4 + 2)^3 \cdot 4 - \{[(5 - 7) \cdot (4 - 1) + 3] : 3\} - (-5) + 2(-4)$ [− 28]

537 $\{-(+7) - [-3(-3)]\} + \{[-6 \cdot (-1)] - [-(-2)]\} - \{-[-(-5)] - [(-1) \cdot (-3)]\}$ [− 4]

538 $(3 \cdot 5 - 40 : 2) - \{5 \cdot 2 - [3 \cdot (-2) - (-15) : 3] + [(-12) : (-3) - (-6) \cdot (-2)]\} : [(-5) \cdot 4 + 17]$ [− 4]

539 $\{[(-4)^3 \cdot (-4)^4 \cdot (-4)^2] : [(-4)^3 \cdot (-4)^1]\} : [-(4)^3 \cdot (-4)^0]$ [+ 16]

540 $[7 \cdot 9 : (47 - 5 \cdot 8)] : [(-4 \cdot 8) + 29] \cdot \{5 \cdot (-4) - [-5 + (-4 \cdot 7 + 4) : 2]\} + 1$ [+ 6]

541 $\{16 : [18 - 5 \cdot (3 - 2 + 1)]\}^3 : (-2)^2 + 6 \cdot [4 - (3 \cdot 2 + 1)] - 15$ [− 31]

542 $\{[(18 - 4 \cdot 5) \cdot (-2)^2]^3 : [(-2)^2]^3\} - [7 \cdot (5 - 3)]^2 : [(2)^5 - (-5)^2]^2$ [− 12]

543 $\{[(24 - 7 \cdot 3)^4 : (-3)^2]^3 : (3)^6\} \cdot [15 - (16 + 6)]^2 - 43 + 7$ [+ 13]

544 $\{[(-7)^4 \cdot (-3)^4]^2 : [(21)^3 \cdot (21)^2]\} : \{[(-7)^2]^2 : 7\}$ [+ 27]

545 $\{(-2)^4 - [(-2)^2 + 3^4 : (-3)^2 \cdot (2^3 : 2^2)^2] : [(-2^2)^1 \cdot (2^0)]\} \cdot 2 - (-4)^2$ [+ 36]

546 $[(-3)^7 : (+3)^4 \cdot (+3)^2] \cdot (-2)^5 : [-(+7)^2 \cdot (-7)^3 : (-7^2)^2 - 1]^4 - 6^4 : [(+2)^3 \cdot (-3)^3]$ [+ 12]

547 $\{[(-3)^6 \cdot (-3)^2] : (-3)^5\}^2 : [(-3) \cdot (-3)^2]^2 + [(+2)^3 \cdot (+2)^4] : [(-2)^3]^2$ [+ 3]

548 $\{[-2^4 \cdot (+2)^3] \cdot [(+3)^2 \cdot (-3)^5]\} : (+6)^5 - 3^2 + (-3)^2 : (+3) - 7^0$ [+ 29]

- 549** $(+4^2)^3 \cdot \{[(-2)^3]^2 \cdot [(+2)^2]^4\} : \{[(-4)^3]^2\}^2 + (-4)^2 \cdot (+4)^3 : (-4)^4$ [+ 8]
- 550** $\{(-7)^6 \cdot (+2)^6 : [(+14)^3]^2 \cdot (-14)\}^7 : \{[(-21)^2]^3 : (+3)^6\} : (-2)^4$ [- 56]
- 551** $\{[-10 \cdot (+10)^3 \cdot 10^7]^5 : [(-10)^5]^9\} : \{[(+5)^7 \cdot (-5)^3]^3 : [(-5)^4]^5\}$ [- 1024]
- 552** $(-2)^2 - (2^3 + 2^2) : 2^2 + \{2^3 \cdot [-5^2 : (-5)]^3\} : [(-6)^3 : (-2)^3 - 3^2 - 2^3] - 5^0$ [+ 100]
- 553** $[4^2 \cdot (-64)^3] : [(-2^4)^5 \cdot 4] \cdot (-8)^2 - 2^3 \cdot [(-16)^5 : (-2^3)^6]$ [+ 96]
- 554** $[(-125)^2 : (2^2 + 5^0)^5]^{10} : (-25)^4 + (-5 \cdot 2 + 3)^4 : [125^3 : (-25)^4 + 2]^3$ [+ 32]
- 555** $[(-18)^{12} : 3^{12} - 6^4 \cdot 6^7] : [(-2)^{10} \cdot 3^{10}] + (9^6 - 27^3) : (-27)^3 + (-2)^{13} : (-4)^6$ [+ 2]

■ Le espressioni letterali in \mathbb{Z}

- 556** COMPLETA la tabella, sostituendo ad a i valori riportati nella prima colonna.

a	$-a$	$-2a$	$-(-a)$	a^2	$-a^2$	$(-3a)^2$	$-3a^2$
-1							
+3							
+5							
-2							

- 557** COMPLETA la tabella, sostituendo ad a e b i valori riportati nelle prime due colonne.

a	b	$-(-a)$	$-(-b)$	$a - b$	$-(b - a)$	$(a - b)^2$	$(b - a)^2$
+2	+3						
+7	-3						
-2	-6						
-1	+1						

Calcola il valore delle seguenti espressioni dopo aver sostituito alle lettere i valori scritti a fianco.

- | | | | |
|----------------------|--|-----------------------------|---|
| 558 $3x$ | $x = 0, -1, +5, -3.$ | 563 $2ab$ | $a = -3, b = -4;$
$a = -10, b = +5.$ |
| 559 $2y$ | $y = -1, -2, +6, -8.$ | 564 $a^2 - b^2$ | $a = +5, b = -4;$
$a = -3, b = +7.$ |
| 560 $3 - x$ | $x = 0, -1, +5, -3.$ | 565 $3a^2b$ | $a = -1, b = +2;$
$a = +6, b = -3.$ |
| 561 $a - b$ | $a = +10, b = -8;$
$a = 0, b = +3.$ | 566 $(a + b)(a - b)$ | $a = +5, b = -4;$
$a = -3, b = +7.$ |
| 562 $3a + 2b$ | $a = -1, b = +2;$
$a = -2, b = -3.$ | | |

- 567** $a \cdot (a - b) - a^2 + 2a + ab$ $a = -1, b = +2.$ [−2]
- 568** $-3[a + b(a - 2b) - 6ab] - 15ab$ $a = +4, b = -3.$ [+42]
- 569** $a(b + a) + b^2 - a^3 + b(b + 2a)$ $a = -2, b = +3.$ [+12]
- 570** $a(b + a) - a^2 : a - b^3 + b(a + b)$ $a = +7, b = +4.$ [+50]
- 571** $ab - 7a(b + a) - 4b^2 \cdot (b - a) + 3b$ $a = -1, b = +3.$ [−124]
- 572** $(2b) : a - 7a \cdot (b - 2a) + (3a - b)^2 + 5a - b$ $a = +2, b = +7.$ [−31]
- 573** $(2b + 3a)^2 - 5b[3a - (2b + a) - 3] + 4ab - 7a$ $a = +3, b = -2.$ [+50]
- 574** $\{(5^{2a} : 5^{3b})^{2c} + a^b\} - [(2^{3a} \cdot 2^b : 2^{3c}) : b^a] : a$ $a = +3, b = +2, c = +2.$ [+2]
- 575** $\{[5^a \cdot (-5)^b \cdot (-5)^c]^{a-b} : (-5)^{3a}\} + \{[2^{2a} \cdot (-2)^{3b}]^c : [(-2)^{3c} \cdot (-2)^a \cdot (-2)^{2b}]\} - b$ $a = +4, b = +2, c = +1.$ [+15]
- 576** $[6 + (7^a)^b - 7^a] : [(-7)^2 : (7)^{2a} + 7^a] + 7a - 7^b$ $a = +1, b = +2.$ [−36]
- 577** $[(-4)^a \cdot (4)^{2b}]^c : \{[(-4)^{3a} \cdot (-4)^b]^c\}^a + [3^b \cdot (-3)^c] : (-3)^b$ $a = +1, b = +2, c = +1.$ [−2]

Dalle parole alle espressioni numeriche

ESERCIZIO GUIDA

578 Traduciamo in espressione la frase «Moltiplica per -6 la somma di $+5$ e -2 , poi aggiungi al risultato l'opposto del quoziente fra $+72$ e -4 » e calcoliamo il valore dell'espressione.

Facciamo una traduzione analitica:
 «la somma di $+5$ e -2 » $\rightarrow +5 + (-2);$
 «l'opposto del quoziente fra $+72$ e -4 » \rightarrow
 $\rightarrow -(+72) : (-4).$

L'espressione richiesta è la seguente:

$$\begin{aligned} & -6 \cdot [+5 + (-2)] - (+72) : (-4) = \\ & = -6 \cdot (+3) - (-18) = -18 + 18 = 0. \end{aligned}$$

Traduci in espressioni le seguenti frasi e calcolane il valore.

- 579** Sottrai alla somma di 7 e del prodotto di 2 per 3 la differenza tra 15 e il prodotto di 7 per 2 , aggiungi poi al risultato il quoziente di 16 per -2 . [4]
- 581** Dividi la differenza tra 15 e 3 per la differenza tra il prodotto di 2 per 3 e 2 , aggiungi poi al risultato la differenza tra 7 e 4 . [6]
- 580** Sottrai a 17 il prodotto di 4 per la somma di 3 e del prodotto di 2 per -1 , aggiungi poi al risultato il prodotto di 8 per -2 . [−3]
- 582** Dividi 16 per la somma di 2 e del prodotto tra 3 e 2 , aggiungi poi 2 al risultato. [4]

583

Moltiplica per -3 la differenza tra 4 e il prodotto di 2 per 3 , sottrai poi al risultato il quoziente della divisione di 15 per la somma tra 2 e 3 . [3]

584

Sottrai il quadrato di 5 alla somma della differenza tra 17 e 4 e del quoziente tra 18 e -6 . [-15]

585

Moltiplica per 6 il quadrato della differenza tra 2 e 4 , aggiungi poi al risultato il quoziente di -16 per il cubo di 2 . [22]

586

Dividi 12 per il quadrato della differenza tra 6 e 4 , aggiungi poi al risultato la somma tra 17 , 15 e il cubo di -3 . [8]

Dalle parole alle espressioni letterali

Nel sito: ► 15 esercizi di recupero



ESERCIZIO GUIDA

587 Traduciamo in espressione la frase «Dati due numeri a e b , sottrai dal quadrato della somma del triplo di a con il quintuplo di b la differenza fra il quadrato di a e il quadrato di b », poi calcoliamo il valore dell'espressione per $a = -2$ e $b = -3$.

Facciamo una traduzione analitica: «triplo di a » $\rightarrow 3a$;
«quintuplo di b » $\rightarrow 5b$;
«somma del triplo di a con il quintuplo di b » $\rightarrow 3a + 5b$;
«quadrato della somma del» $\rightarrow (3a + 5b)^2$;
«sottrai dal quadrato» \rightarrow
 $(3a + 5b)^2 -$;

«la differenza fra il quadrato di a e il quadrato di b » $\rightarrow a^2 - b^2$.

L'espressione richiesta è la seguente:
 $(3a + 5b)^2 - (a^2 - b^2)$.

Per sostituire i valori, riscriviamo l'espressione mettendo fra parentesi le lettere:

$$[3 \cdot (a) + 5 \cdot (b)]^2 - [(a)^2 - (b)^2].$$

Sostituiamo:

$$\begin{aligned} & [3 \cdot (-2) + 5 \cdot (-3)]^2 + \\ & - [(-2)^2 - (-3)^2] = \\ & = (-6 - 15)^2 - [+4 - (+9)] = \\ & = (-21)^2 - (4 - 9) = \\ & = +441 - (-5) = \\ & = +441 + 5 = +446. \end{aligned}$$

Essendo a e b due numeri interi, traduci in espressioni le seguenti frasi e calcola il valore delle espressioni per i valori indicati.

588

Aggiungi il quadruplo di b alla differenza tra il triplo di a e b ; $a = 3, b = 2$. [15]

589

Moltiplica la somma del quadruplo di a e del triplo di b per la somma del doppio di a e del triplo di b ;
 $a = -3, b = 2$. [0]

590

Somma al doppio di a il quadrato della differenza tra b e il triplo di a ; $a = -2, b = 1$. [45]

591

Dividi la somma di sette volte a e il cubo di b per la somma di a e b ; $a = 5, b = -2$. [9]

592

Sottrai a 2 la differenza tra il triplo di a e la somma tra b e il doppio di a ; $a = 1, b = -5$. [-4]

593

Somma il prodotto di b per la somma tra b e il doppio di a alla differenza tra il quadrato di b e il cubo di a ;
 $a = -2, b = 3$. [14]

594

Dalla somma del quintuplo di b e del triplo di a sottrai il quadrato della differenza tra il doppio di b e il doppio di a ; $a = 3, b = 4$. [25]

595

Moltiplica a per la somma di a con b , somma poi al risultato la differenza tra il quoziente del quadrato di a per a e il cubo di b ; $a = 7, b = -4$. [92]

596

VERO O FALSO?

- a) L'opposto del quadrato di un numero è uguale al quadrato dell'opposto del numero.
- b) Il cubo dell'opposto di un numero è uguale all'opposto del cubo del numero.
- c) Se moltiplichiamo il quadrato di un numero per il cubo dell'opposto, troviamo l'opposto elevato alla quinta.
- d) Elevando al quadrato il cubo di un numero si ottiene il numero elevato alla quinta.

COMPLETA

597

Il quadrato del prodotto di due numeri è uguale al prodotto dei quadrati dei numeri.

L'uguaglianza è $(a \cdot b)^2 = \dots$

598

Il quadruplo della somma di due numeri è uguale alla somma del quadruplo del primo con il quadruplo del secondo.

L'uguaglianza è \dots

599

Il doppio del quadrato di un numero è uguale alla metà del quadrato del doppio del numero.

L'uguaglianza è \dots

600

Moltiplicando il quadrato di un numero per il doppio del quadrato di un altro numero si ottiene il doppio del quadrato del prodotto dei due numeri.

L'uguaglianza è \dots

12. Le leggi di monotonia

→ Teoria a pag. 27

RIFLETTI SULLA TEORIA

COMPLETA

601

Applica la prima legge di monotonia alle seguenti uguaglianze e disuguaglianze.

$$5 + 3 = 6 + 2 \quad \dots$$

$$1 < 2 \quad \dots$$

$$7 + 1 = 10 - 2 \quad \dots$$

$$6 \cdot 8 + 2 = 5 \cdot 10 \quad \dots$$

$$17 - 2 \cdot 3 > 2 \cdot 4 \quad \dots$$

$$20 : 5 + 3 = 10 - 3 \quad \dots$$

602

Applica la seconda legge di monotonia alle uguaglianze e alle disuguaglianze precedenti.

603

Data l'uguaglianza $3 \cdot 6 - 8 = 2 \cdot 5$, indica quale delle leggi di monotonia è stata applicata per ottenere le seguenti uguaglianze.

$$3 \cdot 6 = 2 \cdot 5 + 8 \quad \dots$$

$$3 \cdot 6 - 10 = 2 \cdot 5 - 2 \quad \dots$$

$$3 \cdot 3 - 4 = 5 \quad \dots$$

$$6 \cdot 6 - 16 = 4 \cdot 5 \quad \dots$$

$$3 \cdot 6 - 18 = 0 \quad \dots$$

604 Data la disuguaglianza $15 - 9 < 9$, indica quale delle due leggi di monotonia è stata applicata per ottenere le seguenti disuguaglianze.

$$15 < 18 \quad \dots$$

$$30 - 18 < 18 \quad \dots$$

$$15 - 9 - 6 < 9 - 6 \quad \dots$$

$$0 < 9 + 9 - 15 \quad \dots$$

$$5 - 3 < 3 \quad \dots$$

ESERCIZI

COMPLETA

- 605** Applica a ogni diseguaglianza della tabella seguente la seconda legge di monotonia, moltiplicando i due membri della diseguaglianza per il numero indicato nella seconda colonna.
Riscrivi nella terza colonna la diseguaglianza corretta.

DISEGUAGLIANZA	MOLTIPLICA PER...	DISEGUAGLIANZA
$5 < 6$	3	$15 < 18$
$8 > 3$	-2	
$1 < 2$	-1	
$7 > 5$	7	
$-2 < 0$	5	
$2 > 0$	-5	
$-1 > -2$	-6	
$-6 < -5$	-8	
$-1 < 1$	-1	
$3 > -4$	4	

- 606** Applica alle seguenti uguaglianze e diseguaglianze le leggi di cancellazione.

$5 + 3 = 1 + 4 + 3$	$48 - 12 = 6 \cdot (4 + 2)$
$6 + 5 < 8 + 2 + 5$	$20 - 4 > 2 \cdot 5 - 4$
$7 \cdot 3 = (5 + 2) \cdot 3$	$10 - 2 = 2 \cdot 5 - 2$
$3 \cdot 4 < 9 \cdot 4 \cdot 5$	$3 \cdot 8 - 2 < 30 - 2$

- 607** Nella seguente tabella, alle uguaglianze o diseguaglianze scritte nella prima colonna è stata applicata una delle due leggi di monotonia. Scrivi di quale legge si tratta e quale operazione è stata introdotta.

$a + b = b + a$	$a + b + 1 = b + a + 1$	Prima legge; è stato aggiunto 1 ai due membri
$ab = ba$	$3ab = 3ba$	
$a - b > 0$	$a - b + b > b$	
$a - 1 > 0$	$a - 1 + 1 > 1$	
$a^2 a^3 = a^5$	$a^2 a^3 - a = a^5 - a$	
$a - b < a + b$	$2a - 2b < 2a + 2b$	
$a + a = 2a$	$a + a + a = 3a$	
$4(a - 1) = 4a - 4$	$a - 1 = a - 1$	
$6a + 2 = 4b + 2$	$6a = 4b$	
$13a - 5 > b - 5$	$13a > b$	
$a < b + c$	$-2a > -2b - 2c$	
$a < b + c$	$a - c < b$	

LABORATORIO DI MATEMATICA

I numeri naturali con Derive

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di Derive troviamo il M.C.D. e il m.c.m. fra 2250 e 1050.

- Attiviamo Derive.
- Inseriamo e scomponiamo i due numeri in fattori primi con il comando *Semplifica_Fattorizza*.
- Dalla tastiera impostiamo il calcolo del massimo comune divisore inserendo i fattori comuni con il minimo esponente.
- Svolgiamo il prodotto con *Semplifica_Sviluppa* e otteniamo il massimo comune divisore.
- Operiamo similmente per ottenere il minimo comune multiplo, scegliendo i fattori comuni con il massimo esponente e i non comuni.
- Per verifica applichiamo le funzioni di Derive GCD per il massimo comune divisore e LCM per il minimo comune multiplo.
- Effettuiamo un'altra verifica sfruttando la proprietà che dice che dividendo il prodotto di due numeri per il loro massimo comune divisore ottieni il loro minimo comune multiplo.

#1:	1050
#2:	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
#3:	2250
#4:	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$
#5:	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$
#6:	150
#7:	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$
#8:	15750
#9:	GCD(2250, 1050)
#10:	150
#11:	LCM(2250, 1050)
#12:	15750
#13:	$\frac{1050 \cdot 2250}{GCD(2250, 1050)}$
#14:	15750

► Figura 1



Nel sito: ► 1 esercitazione guidata con Derive ► 19 esercitazioni in più
► 1 esercitazione guidata e 11 esercitazioni con Excel

Esercitazioni

Verifica le proprietà delle potenze controllando la validità o meno delle seguenti uguaglianze. Quando l'uguaglianza è falsa, correggi il secondo membro in modo da ottenere l'uguaglianza vera e verifica di nuovo.

1 $[(3^3 : 3)^3 : 3^2]^2 = 3^9$?

2 $(-10)^6 : (-10^3) : (-10)^2 = 10$?

3 $\{(5^4 : 5)^2 : 5^5\}^2 \cdot 5 : 5^3 = 5$?

4 Sul quaderno applica i criteri di divisibilità per 2, 3, 4, 5, 9, 11 ai seguenti numeri: 565, 692, 725, 781, 1143, 2342, poi opera con il computer la scomposizione in fattori e controlla i tuoi risultati.

5

I numeri triangolari sono: $T_1 = 1$, $T_2 = 1 + 2$, $T_3 = 1 + 2 + 3$, $T_4 = 1 + 2 + 3 + 4$, ... I numeri quadrati sono: $Q_1 = 1$, $Q_2 = 2^2$, $Q_3 = 3^2$, $Q_4 = 4^2$, ... Verifica con il computer la proprietà che dice che il numero quadrato di posto n è uguale alla somma del numero triangolare di posto n e di quello di posto $n - 1$, assegnando a n i valori 10, 32, 580.

6

Verifica con il computer le seguenti proprietà:

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$ sostituendo a n 12, poi 27, poi 112;

b) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ sostituendo a n i valori che vanno da 1 a 10.

Matematica per il cittadino

CASSA COMUNE

Elisa, Chiara, Anna, Giulia, Luca e Marco sono in vacanza insieme: fanno un giro della Germania e della Repubblica ceca spostandosi con treni e autobus e dormendo in campeggi o pensioni. Tutti, tranne Marco, hanno una carta di credito prepagata e cercano di sfruttarla il più possibile per non avere troppi contanti. A turno, utilizzano la propria carta per pagare per tutti e annotano le varie spese sul foglio giallo in figura. Non sempre le spese sono da dividere fra tutti, perché, per esempio, Luca raggiunge il gruppo più tardi; a volte qualcuno salta i pasti oppure si separa temporaneamente dagli amici.



A metà del viaggio, sul treno per Dresda, decidono di fare un po' di conti per pareggiare le varie spese e per capire quanto rimane a ciascuno.

- Riscrivi le spese effettuate in una tabella organizzata in modo tale che poi sia semplice fare i conti (per esempio, per ogni spesa deve essere chiaro non solo chi l'ha fatta, ma anche fra quali persone va suddivisa). Ricorda che all'inizio del viaggio Luca non c'è e che, quando non è specificato nulla, la spesa è per tutto il gruppo.
- Sulla base delle informazioni raccolte, prepara una tabella riassuntiva delle spese collettive e individuali di ciascuno. Puoi organizzarla così:

<u>SPESE COMUNI</u>	
Giulia - cena Monaco → 65 €	(Elisa, Chiara e Anna)
Elisa - museo Monaco → 18 €	
Anna - campeggio Monaco → 95 €	
<u>ARRIVA LUCA :</u>	
Chiara - notte a Lipsia → 90 €	(Tutti)
Elisa - birreria → 30 €	(Tutti)
Luca - treno per Berlino → 192 €	
Elisa - Regali amiche → 27 €	(Elisa, Giulia e Anna)
Giulia - Noleggio bici → 44 €	(Elisa, Chiara, Anna e Giulia)
Anna - museo Berlino → 35 €	(No Giulia)
<u>*MARCO PRESTA 30 € A GIULIA</u>	
Chiara - Cene → 66 € / Elisa - Treno → 66 €	borsa

Nome	Soldi spesi (€)	Spese personali (€)	Saldo (€)
Giulia	109	- 161	- 52
...

Sistemati i conti precedenti, i ragazzi decidono di continuare nello stesso modo per la parte successiva del viaggio. In Repubblica ceca non è ancora in vigore l'euro: la moneta è la corona ceca (CZK) e il cambio è approssimativamente $100 \text{ €} = 2800 \text{ CZK}$. In molti posti accettano comunque il pagamento in euro. Ecco il successivo foglio in cui i ragazzi annotano le spese.

- Riscrivi le spese effettuate in una tabella analoga a quella compilata per la prima domanda. Modificala adeguatamente per affrontare il problema delle due valute ed esprimi poi tutte le spese in euro (calcola tu il valore di un euro).
- Sulla base delle informazioni raccolte, prepara una tabella riassuntiva delle spese collettive e individuali di ciascuno in questa seconda parte del viaggio, come hai fatto per rispondere alla domanda 2.

<u>SPESE COMUNI BIS</u>	
Chiara - treno per Praga → 84 €	
Marco - cena → 1176 CZK	
Anna - Spesa → 840 CZK	
Giulia - regali vari → 16 €	(Elisa, Anna, Chiara, Giulia)
Elisa - castello → 252 CZK	(Elisa, Luca e Marco)
Luca - birreria → 560 CZK	(No Chiara)
Giulia - albergo → 120 €	
Elisa - autobus → 1512 CZK	
<u>*LUCA PRESTA 380 CZK A CHIARA E 20 € A ELISA</u>	
Anna - canoa → 68 € (Anna, Giulia, Marco, Chiara)	
Chiara - Spese → 1344 CZK / Luca - campeggio → 504 CZK	

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ► questi test interattivi ► 30 test interattivi in più



- 1** Solo in una delle seguenti uguaglianze è stata applicata la proprietà invariantiva della divisione. Quale?
- A** $36 : 12 = 34 : 10$
B $36 : 12 = 24 : 1$
C $36 : 12 = 9 : 3$
D $36 : 12 = 3 \cdot 1$
E $36 : 12 = 2 + 1$
- 2** Solo in una delle seguenti uguaglianze è stata applicata in modo corretto la proprietà distributiva. Quale?
- A** $(12 \cdot 6) + 3 = 36 \cdot 18$
B $(12 : 6) + 1 = 13 : 6$
C $(12 + 6) \cdot 2 = 24 + 12$
D $(12 - 6) + 2 = 14 - 8$
E $(12 \cdot 6) : 2 = 24 : 3$
- 3** Nel sistema decimale, il numero $(22)_3$ equivale a:
- A** 8. **B** 66. **C** 30. **D** 3. **E** 22.
- 4** Il successivo del numero $2n - 1$ è:
- A** $n + 1$. **D** $2n + 1$.
B $2(n + 1) - 1$. **E** $2n$.
C $2(n + 1)$.
- 5** In base 10 un numero naturale è formato da a decine e b unità. Il numero è:
- A** $a + b$. **D** $a + 10b$.
B $a \cdot b$. **E** $a \cdot 10b$.
C $10a + b$.
- 6** Il prodotto del numero n , maggiore di 1, per il quadrato del suo precedente è:
- A** $n^2 \cdot (n - 1)^2$. **D** $n \cdot n - 1^2$.
B $n \cdot (n - 1)^2$. **E** $n \cdot n^2 - 1$.
C $n^2 \cdot (n - 1)$.
- 7** Delle seguenti operazioni solo una è eseguibile in \mathbb{Z} e non in \mathbb{N} . Quale?
- A** $(7 - 4) + 5$
B $(7 - 5) - 3$
C $(7 + 5) - 9$
D $9 - (7 - 5)$
E $(9 - 7) + 5$
- 8** Fra le seguenti divisioni una sola è possibile in \mathbb{Z} . Quale?
- A** $(-1) : 3$
B $1 : (-3)$
C $9 : (-2)$
D $-8 : (-4)$
E $(-4) : (-8)$
- 9** La scrittura $(-3)^8 : 3^2$ è equivalente a:
- A** -3^6 .
B 3^6 .
C -3^4 .
D 3^4 .
E 3^{10} .
- 10** In quale delle seguenti uguaglianze *non* è stata applicata correttamente la proprietà associativa?
- A** $10 - 7 + 2 = 3 + 2$
B $10 - 7 + 2 = 10 - (7 + 2)$
C $10 - 7 + 2 = (10 - 7) + 2$
D $10 - 7 + 2 = 10 - 5$
E $10 - 7 + 2 = 10 - (7 - 2)$
- 11** Moltiplicando per -1 i due membri della diseguaglianza $-5 > -10 - 1$, otteniamo:
- A** $5 > 10$.
B $-5 > 10$.
C $-5 - 1 > -10 - 1$.
D $-5 - 1 < -10 - 1$.
E $5 < 10$.
- 12** Fra le seguenti uguaglianze, una sola è *vera*. Quale? ($a \in \mathbb{Z}$)
- A** $-a^2 \cdot (-a)^5 = -a^7$
B $(-a)^2 \cdot a^5 = a^7$
C $(-a)^2 \cdot (-a)^5 = a^7$
D $a^2 \cdot (-a)^5 = a^7$
E $-a^2 \cdot a^5 = a^7$

SPIEGA PERCHÉ

Spiega perché sono valide le seguenti affermazioni.

13 Il prodotto fra due numeri consecutivi è sempre un numero pari.

14 Se $M.C.D.(a, b) = a$, allora b è multiplo di a .

15 Il m.c.m. di due numeri primi fra loro è uguale al prodotto dei due numeri.

16 Il M.C.D. di due numeri è divisore del m.c.m.

17 Discuti la validità delle seguenti affermazioni.
a) «L'uguaglianza $a : 1 = 0$ è vera per qualunque valore di a naturale».
b) « $0 : a = 0$ è vera per ogni numero a naturale».

18 La somma dei valori assoluti di due numeri opposti può essere nulla?

19 Perché il M.C.D. fra due numeri primi tra loro è 1?

20 Se n è un numero naturale, scrivi la legge di formazione della successione 1, 6, 11, 16, 21, ... Qual è la legge di formazione della successione opposta?

21 Per quali valori di n l'espressione $(n - 5) : 3$ rappresenta un numero naturale?

22 Dimostra che la somma o la differenza di due numeri dispari qualunque sono sempre pari.

23 Dimostra che, se $a < b$ e $c < d$, allora $a + c < b + d$.

(Suggerimento. Applica le leggi di monotonia sommando c nella prima diseguaglianza...)

ESERCIZI

Nel sito: ► 10 esercizi in più



Calcola il valore delle seguenti espressioni.

24 $\{(6 - 12) + (-8 + 6) \cdot (4 + 3) + [2 \cdot (-2)]\} : (-8 + 2) + [(-3) \cdot (-2) + 4] : (-5)$ [+ 2]

25 $\{[(-2) \cdot (-4) + (8 + 4) : (-3) + 2] : [2 \cdot (-6) - 36 : (-12) + 7]\} \cdot (-1) - 5$ [- 2]

26 $\{5 \cdot [10 - 2 \cdot (3 \cdot 7 - 5 \cdot 4)] \cdot 8\} : 80 + [(4 + 3 \cdot 5) : (3 + 2 \cdot 8)]$ [5]

27 $-3 \cdot (-4) + 80 + (-2) + (-8) \cdot (+5) + 5 \cdot [-7 - 1 \cdot (+4) - 3] + 3 \cdot (-4) \cdot (-4)$ [28]

28 $\{-(+5) - [-(-1)]\} - \{[-(+5)] - [-(-7)]\} - \{-[-(-3)] - [-(-6)]\}$ [+ 15]

29 $(-6) \cdot (-3) + 30 + (-8) + (-4) \cdot (+5) + 7 \cdot [-5 - 1 \cdot (+4) \cdot 3] + 6 \cdot (-4) \cdot (-2)$ [- 51]

30 $[(-3) \cdot (-9) + 49 : (-7)] : [(+12) : (-6) + (-2)] + 96 : \{9 + [(-5) + 2 \cdot (-11) \cdot 2] : (-7) - 4\}$ [+ 3]

31 $\{[(10 - 6)^2 + 3 \cdot 10] : (6 : 3)\} + 4 + 3^2 - (2^4 - 1)$ [21]

32 $(4 + 1)^3 - 6 \cdot 4^2 + [(4 - 2)^2 : 4 + 6] - 2^0 \cdot 3^3 : 9$ [33]

33 $7 \cdot 5 + 2 \cdot [2 \cdot 5 + 2(5 - 1)] : 2 - 5^2 - (3 \cdot 2^3 : 4 + 3^2 \cdot 2)$ [4]

34 $[(2^4 + 2^3) : (8^2 : 4^2)] + [3^2 \cdot 2^2 : (6^3 : 6^2)]$ [12]

- 35** $[(6^3 \cdot 2^3 : 3^3) : (10^4 : 5^4 - 8) \cdot 2^3] : (2^3)^2$ [1]
- 36** $[(4^8 : 4^4)^2 \cdot (4^7 : 4^2)] : 4^{11} + 1^4 - (2^2 \cdot 3 + 1)$ [4]
- 37** $(6^3 : 6 \cdot 6^2)^2 : (4 \cdot 3^2)^3 - [(2^3)^4 : 4^4 + 2^0 \cdot 2^2] + 3^3 : 3$ [25]
- 38** $[(5^4 \cdot 2^4)^3 : (10^5)^2 - 5^2 \cdot 2] : [(5^2)^2 : 5^2] + 2^2 + 2^3$ [14]
- 39** $\{[(-6)^3 \cdot (-3)^3] : 18^2\} : (-18) \cdot (-2)$ [+ 2]
- 40** $(3^2 \cdot 2^2) : (-6)^2 + (-2)^5 : (2)^2 + 12 - 1$ [+ 4]
- 41** $\{2^4 : [3^2 \cdot 2^2 - 3(3^3 : 3) - 2^4 : 2^3 + 2^2 - 3] + 3\}^2$ [+ 25]
- 42** $[12 - (7 \cdot 3 - 10)]^3 + [(-3)^2(-4)^2 : 48]^4 : (3)^3 - 2$ [+ 2]
- 43** $\{[(24 - 7 \cdot 3)^6 : (-3)^2]^3 : (3)^6\} : [13 - (16 + 6)]^2 - 43 + 7$ [- 27]
- 44** $[(-3^2)^3 \cdot (-3)^4] : [(-3^3)^2 \cdot (-3)^2]$ [- 9]
- 45** $[7^3 : 7 - (13 + 1)^2 : 7] : [(7^3)^2 : 7^5] + (2^6 \cdot 3^6) : 6^5 + 6^2$ [45]
- 46** $(-10)^5 : [(-25 : 5)^2 \cdot (-5)^3] : (-2^2)^2 + [3^3 \cdot (-2)^3 : (-6)^2]^2$ [+ 38]
- 47** $\{[3^2 \cdot (12 - 9)^3] : (9 - 6)^3\} : (-3) \cdot \{[(-6)^2]^2 : 2^4\} : 3^4 + (-2)^3$ [- 11]
- 48** $\{[(18 - 4 \cdot 5) \cdot (-2)^2]^4 : [(-2)^2]^3\} + [7 \cdot (5 - 3)]^3 : [(2)^5 - (-5)^2]^2$ [+ 120]
- 49** $\{[(-3)^5 \cdot (-3) \cdot (-3)^3] : [(-3)^4 : (-3)^0]\} : (-3)^3$ [+ 9]
- 50** $\{+12 - [+2 + 2^3 : (-2)^2 \cdot (2^4 : 2^3)^2] : [(-2^2)^2 : 2^3]\} \cdot 3 + (-3)^3$ [- 6]
- 51** $(2^2)^5 \cdot (-2)^3 : \{[-(-2)^2]^3 \cdot [(-2)^2]^2\} \cdot (-2^2) : (-2)^4$ [- 2]
- 52** $\{[-(-3)^3]^5 \cdot [(-3)^5]^2\} : \{-(-3)^3 \cdot (-3)^7 \cdot [(-3)^2]^7\} + 3^0$ [- 2]

Traduci in espressioni le seguenti frasi e poi calcola i valori delle espressioni per i valori di a e b indicati a fianco.

- 53** «Somma a con il doppio di b , dividi per la differenza tra a e b e poi somma il triplo di a . $a = -1, b = -2$. $[(a + 2b) : (a - b) + 3a; -8]$
- 54** «Moltiplica a elevato alla quarta potenza per b elevato alla stessa potenza, poi sottrai la differenza tra a e b , elevata alla quarta potenza». $a = 2, b = -2$. $[a^4 \cdot b^4 - (a - b)^4; 0]$
- 55** «Dividi il cubo del doppio prodotto di a con b per il quadrato della differenza tra a e b e poi sottrai il cubo di b ». $a = 3, b = -3$. $[(2a \cdot b)^3 : (a - b)^2 - b^3; -135]$
- 56** «Moltiplica il doppio di a per b e poi sottrai a . $a = 3, b = 2$. $[2ab - a; 9]$
- 57** «Aggiungi al quadrato di a il cubo di b e poi sottrai il triplo di a . $a = 2, b = 3$. $[a^2 + b^3 - 3a; 25]$
- 58** «Al successivo di a aggiungi il precedente di b moltiplicato per la differenza fra a e b . $a = 3, b = 1$. $[a + 1 + (b - 1)(a - b); 4]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni per i valori delle lettere indicati.

- | | | | |
|-----------|---|-------------------|---------------|
| 59 | $2a^3 + b^2 - a \cdot (2a - 3b)$ | $a = -2, b = 4.$ | [− 32] |
| 60 | $3 - a^3 - 2b^2 + a^2 \cdot (a - b)$ | $a = 2, b = -2.$ | [+ 3] |
| 61 | $2a(b + 1) - 6ab$ | $a = 3, b = 0.$ | [6] |
| 62 | $3ab - 5a^2 + 3a - 1$ | $a = 2, b = 8.$ | [33] |
| 63 | $2a^2 + b^2 - a(1 + 2b)$ | $a = -3, b = 4.$ | [61] |
| 64 | $a^3 : a + (b - 1) : a + 2$ | $a = -2, b = 13.$ | [0] |
| 65 | $(a + b)(a - b) + ab - a^2$ | $a = 6, b = -3.$ | [− 27] |
| 66 | $4b + 3(a + b) + (b^2 - a^2)^2 : (a + 1)^3$ | $a = 3, b = 5.$ | [48] |
| 67 | $(x^2 + a)x - a(x - 1) : (x + 1) + 4a$ | $x = 1, a = -9.$ | [− 44] |

Problemi

68 Pensa un numero

Proponi a un tuo compagno di pensare un numero. Fagli aggiungere i tre numeri successivi a quello pensato, poi digli di comunicarti la somma. Ora cerca di indovinare il numero che ha pensato! (Suggerimento. Indica con n il numero. I tre successivi sono La somma è

Per ottenere il numero n devi solo usare le operazioni inverse: togli e dividi per

69 Un attraversamento pedonale è verniciato a strisce alternativamente bianche e gialle: ogni striscia bianca è larga 35 cm, mentre ogni striscia gialla è larga 22 cm. Sapendo che all'estremità della strada ci sono due strisce bianche e che le strisce gialle sono 15, calcola quanto è larga la strada. **[890 cm]**

70 Le ampiezze di due angoli consecutivi sono rispettivamente di 30° e 40° . Calcola l'ampiezza dell'angolo formato dalle loro bisettrici. Variando l'ampiezza dei due angoli, in modo però che la loro somma sia sempre 70° , varia l'ampiezza dell'angolo formato dalle loro bisettrici? **[35°; no]**

71 Per accedere a un sito internet, ti è stata assegnata una password di 8 numeri. Ne ricordi solo i primi 7, e precisamente 2, 3, 5, 9, 17, 33, 65, ma ricordi che i numeri sono legati fra loro da una

relazione matematica. Qual è la cifra che hai dimenticato?

(Suggerimento. Ogni numero è uguale al doppio del precedente...) **[129]**

72 Qual è il più piccolo numero divisibile sia per 12, sia per 14, sia per 35? **[420]**

73 Tre amici, Andrea, Barbara e Carlo, si incontrano nella stessa paninoteca ogni volta che pranzano per un rientro pomeridiano a scuola. Andrea ha un rientro ogni 12 giorni, Barbara ogni 8 e Carlo ogni 20 giorni. Se l'ultima volta si sono incontrati tutti e tre il 9 settembre, quando si ritroveranno di nuovo Andrea e Carlo? E quando Barbara e Carlo? Quando invece si rivedranno tutti e tre?

[8 novembre; 19 ottobre; 7 gennaio]

74 È dato il seguente numero:

$$(5^{20} \cdot 2^5)^3 : (5^{42} \cdot 2^k) \cdot 27^4.$$

Si desidera che valgano 0 le ultime tre cifre, ma non la quartultima. Quanto deve valere k ? **[12]**

75 A lettera uguale corrisponde cifra uguale. Determina le cifre incognite.

$$\begin{array}{r} a & b & \cdot & c & = & 1 & e & f \\ + & & & - & & & & - \\ 1 & 1 & 1 & : & 3 & = & 3 & c \\ \hline 1 & 3 & h & - & b & = & 1 & 3 & 1 \end{array}$$

$$[a = 2; b = 4; c = 7; e = 6; f = 8; h = 5]$$

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 17 esercizi in più



76

TEST Sulla lavagna si trova scritto il numero 1. La sola mossa permessa è cancellare il numero scritto sulla lavagna e sostituirlo o con il suo doppio o con il suo quadrato. Qual è il numero più grande che si può ottenere in 8 mosse?

- [A] 2^8 [B] 4^7 [C] 8^8 [D] 2^{64} [E] 2^{128}

(Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede, 1997)

77

TEST Quanti sono i numeri naturali n , con $1 \leq n \leq 1995$, che non sono divisibili né per 2 né per 5?

- [A] 399 [B] 599 [C] 798 [D] 898 [E] 997

(Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede, 1995)

78

Dati

$a = 2^{(3^4)}$, $b = 3^{(4^2)}$, $c = 4^{(2^3)}$, $d = 4^{(3^2)}$, $e = 3^{(3^3)}$, qual è il numero più piccolo e quale il più grande? (Suggerimento. Scrivi i numeri come potenze di 2 o di 3. Confronta le potenze con lo stesso esponente o con la stessa base.)

(Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede, 1995)

$$[a > e > b > d > c]$$

80

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 12 esercizi in più



82

Find the sum of the integer numbers from -50 to $+52$, including -50 and $+52$.

(USA Bay Area Math Meet, Bowl Sampler, 1997)

[103]

83

TEST If $2^4 \cdot 3^8 = n \cdot 6^4$, then $n =$

- [A] 12 [B] 24 [C] 27 [D] 54 [E] 81

(USA University of South Carolina: High School Math Contest, 2003)

84

TEST Which of the following numbers is a perfect square?

- | | |
|------------------|------------------|
| [A] $4^{45}6^6$ | [D] $4^{65}46^5$ |
| [B] $4^{45}6^5$ | [E] $4^{65}56^4$ |
| [C] $4^{55}46^6$ | |

(USA, AMC 12, 2002)

Le gare American Mathematics Contest 12 (AMC 12) sono rivolte a ragazzi americani del secondo biennio superiore.

GLOSSARY

to add: aggiungere

to double: raddoppiare

first: primo

following: seguenti

integer: intero

less: meno, minore

no matter what: qualunque

square: quadrato

sum: somma, addizione

to take-took-taken away:

sottrarre, portar via

time: volta

79

TEST In un gioco bisogna contare da 1 a 100 e applaudire ogni volta che si incontra o un multiplo intero di 3 o un numero che termina per 3. Quante volte si dovrà applaudire?

- [A] 30 [B] 33 [C] 36 [D] 39 [E] 43

(Gare Kangourou di matematica, 2002)

80

TEST Oggi è mercoledì 13 dicembre 1995. Qual è stata l'ultima volta in cui il 13 dicembre è caduto di mercoledì?

- | | |
|---------------|---------------|
| [A] Nel 1967. | [D] Nel 1989. |
| [B] Nel 1984. | [E] Nel 1990. |
| [C] Nel 1988. | |

(Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede, 1995)

81

Dimostra che per moltiplicare un qualsiasi numero naturale per 12, basta moltiplicarlo per 10 e sommargli il suo doppio. Analogamente dimostra che per quadruplicare un qualsiasi numero naturale basta raddoppiarlo due volte. Quali proprietà hai usato?

Nel sito: ▶ 12 esercizi in più



85

TEST Which of the following numbers is equal to the sum $8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8$?

- [A] 8^8 [B] 8^9 [C] 64^8 [D] 8^{64} [E] 64^{64}

(USA University of South Carolina: High School Math Contest, 2002)

86

TEST Think of a number, double it, then add 3. Multiply your answer by 4 and take away 5. Now take away the number you first thought of. No matter what the first number was, your answer will be a multiple of:

- [A] 2 [B] 3 [C] 5 [D] 7 [E] 11

(UK Intermediate Mathematical Challenge, 2003)

87

Find two consecutive integers whose product is five less than the square of the smaller.

(USA Southeast Missouri State University: Math Field Day, 2005)

[−5; −4]

I numeri razionali



1870: nasce la bicicletta!

Certo il velocipede, questo il suo nome, era un po' diverso dalle biciclette di oggi: ruota anteriore enorme, ruota posteriore minuscola e un non trascurabile rischio di cadere.

Simpatico ma pericoloso, fu soppiantato definitivamente in una ventina d'anni da un nuovo biciclo, in tutto simile a una bicicletta moderna...

...perché nella bicicletta si usano i rapporti?

→ La risposta a pag. 100

1. Dalle frazioni ai numeri razionali

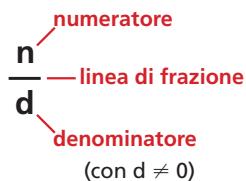
Abbiamo visto che la divisione non è un'operazione interna né in \mathbb{N} né in \mathbb{Z} . L'esigenza di renderla sempre possibile ci porterà a considerare l'insieme dei numeri razionali, che studieremo in questo capitolo e che sono un ampliamento dell'insieme dei numeri interi.

Per fare questo, cominciamo introducendo le *frazioni*.

DEFINIZIONE

Frazione

Una frazione è una coppia ordinata di numeri naturali, di cui il secondo è diverso da 0.



Mettiamo il primo numero, detto **numeratore**, al di sopra della **linea di frazione** e il secondo, detto **denominatore**, al di sotto.

Abbiamo così definito la frazione in modo formale e faremo altrettanto con le operazioni tra frazioni. Tuttavia, nel corso del capitolo vedremo anche che una frazione rappresenta il quoziente tra due numeri naturali, ossia il loro **rapporto**. Per esempio, la frazione $\frac{3}{4}$ avrà lo stesso significato di 3 : 4. In questo modo avremo un ampliamento dell'insieme dei numeri naturali.

Una scrittura del tipo $\frac{n}{0}$ è priva di significato, non indica una frazione:

non esistono frazioni con denominatore 0.

ESEMPIO Le scritture $\frac{1}{0}$, $\frac{25}{0}$, $\frac{1234}{0}$, ... non indicano delle frazioni perché, per definizione, sono prive di significato.

Le frazioni in cui il numeratore è minore del denominatore vengono dette **proprie**, quelle con numeratore maggiore del denominatore **improperie**, quelle con numeratore multiplo del denominatore **apparenti**.

ESEMPIO

$\frac{2}{5}$ è propria, $\frac{5}{2}$ è impropria, $\frac{10}{2}$ è apparente e impropria.

■ Le frazioni equivalenti

■ DEFINIZIONE

Frazioni equivalenti

► I prodotti della figura, ad e bc , si chiamano *prodotti in croce*.

Due frazioni sono equivalenti se il prodotto del numeratore della prima per il denominatore della seconda è uguale al prodotto del denominatore della prima per il numeratore della seconda.

$$\frac{a}{b} \cancel{\times} \frac{c}{d} \quad (\text{con } b, d \neq 0)$$

$$ad = bc$$

Indichiamo l'equivalenza con il simbolo \sim :

$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ si legge: $\frac{a}{b}$ è equivalente a $\frac{c}{d}$.

ESEMPIO Le frazioni $\frac{3}{5}$ e $\frac{6}{10}$ sono equivalenti.

Infatti i prodotti in croce risultano uguali.

$$\frac{3}{5} \cancel{\times} \frac{6}{10} \quad 3 \cdot 10 = 30$$

$$5 \cdot 6 = 30.$$

► Le frazioni $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{9}$ non sono equivalenti, perché $5 \cdot 9 = 45$ è diverso da $6 \cdot 7 = 42$.

■ La proprietà invariantiva

PROPRIETÀ

Proprietà invariantiva

Se si moltiplica per uno stesso numero *diverso da 0* sia il numeratore che il denominatore di una frazione, si ottiene una frazione equivalente. Allo stesso modo si possono dividere numeratore e denominatore per uno stesso numero *diverso da 0*, purché sia divisore di entrambi.

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad (\text{con } b, c \neq 0)$$

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a : d}{b : d} \quad (\text{con } b, d \neq 0)$$

ESEMPIO

$$\frac{2}{5} \sim \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3}$$

Infatti $2 \cdot (5 \cdot 3) = 5 \cdot (2 \cdot 3)$, quindi:

$$\frac{2}{5} \sim \frac{6}{15}.$$

Non possiamo moltiplicare numeratore e denominatore per 0, perché otterremmo $\frac{0}{0}$, che non ha significato, né possiamo dividere per 0.

► Numeratore e denominatore devono essere moltiplicati (o divisi) per **lo stesso** numero.
Per esempio,

$$\frac{2}{5} \text{ **non** è equivalente a } \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}.$$

$$\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}.$$

■ La semplificazione di frazioni

Data una frazione, quando applichiamo la proprietà invariantiva *dividendo* numeratore e denominatore per uno stesso numero, diciamo che **semplifichiamo** la frazione.

Se semplifichiamo il più possibile una frazione, giungiamo alla **frazione ridotta ai minimi termini**, nella quale numeratore e denominatore non hanno più divisori in comune diversi da 1.

Per ridurre una frazione ai minimi termini è sufficiente dividere il numeratore e il denominatore per il loro M.C.D.

ESEMPIO

$\frac{24}{40}$ **non** è ridotta ai minimi termini.

Per ridurla calcoliamo il M.C.D.(24, 40) = 8 e poi dividiamo per 8 numeratore e denominatore:

$$\frac{24}{40} \sim \frac{24 : 8}{40 : 8}, \quad \text{quindi} \quad \frac{24}{40} \sim \frac{3}{5}.$$

► Si può anche procedere scomponendo numeratore e denominatore in fattori e dividendo per i fattori comuni:

$$\frac{24}{40} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} \sim \frac{3}{5}.$$

■ La riduzione di frazioni a denominatore comune

«Ridurre a denominatore comune» due frazioni significa trovare altre due frazioni aventi lo stesso denominatore, ciascuna equivalente a una delle frazioni date.

► Date le frazioni

$$\frac{5}{6} \text{ e } \frac{4}{15},$$

applicando la proprietà invariantiva troviamo infinite riduzioni a denominatore comune. Per esempio:

$$\frac{5}{6} \sim \frac{75}{90}, \quad \frac{4}{15} \sim \frac{24}{90}.$$

$\cdot 15$ $\cdot 6$
 \curvearrowright \curvearrowright

90 non è però il *minimo* denominatore comune.

Applicando la proprietà invariantiva, si possono trovare infinite soluzioni a questo problema.

Per semplicità di calcolo, fra tutti i possibili denominatori comuni si sceglie il più piccolo, cioè il m.c.m. fra i denominatori: si parla allora di **riduzione al minimo denominatore comune**.

ESEMPIO Riduciamo le frazioni $\frac{5}{6}$ e $\frac{4}{15}$ al minimo denominatore comune.

Calcoliamo il m.c.m.(6, 15) = 30.

Applichiamo la proprietà invariantiva: $\frac{5}{6} \sim \frac{?}{30}$.

Cerchiamo il numero che, moltiplicato per 6, dà 30, ossia $30 : 6 = 5$:

$$\frac{5}{6} \sim \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5};$$

applichiamo ancora la proprietà invariantiva: $\frac{4}{15} \sim \frac{?}{30}$.

Il fattore di moltiplicazione è $30 : 15 = 2$:

$$\frac{4}{15} \sim \frac{4 \cdot 2}{15 \cdot 2}.$$

Le frazioni $\frac{5}{6}$ e $\frac{4}{15}$, ridotte al minimo denominatore comune, diventano:

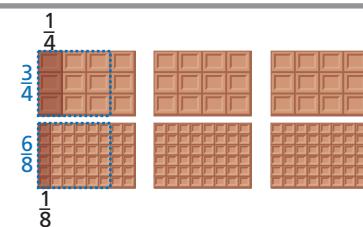
$$\frac{25}{30} \quad \text{e} \quad \frac{8}{30}.$$

■ I numeri razionali assoluti

Supponiamo di voler dividere tre tavolette di cioccolata in parti uguali fra quattro amici.

► **Figura 1** *Frazioni equivalenti rappresentano la stessa parte rispetto all'intero.*

Possiamo dividere ogni tavoletta in 4 parti uguali e darne 3 a ogni ragazzo, ma possiamo anche dividere le tavolette in 8 parti e darne 6 a ogni ragazzo, oppure in 12 e darne 9 ecc. Ciascuna di tali quantità può essere espressa mediante una frazione, nell'ordine: $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}$. Osserva che $\frac{3}{4} \sim \frac{6}{8} \sim \frac{9}{12}$: un problema risolto con l'uso di una frazione in realtà è risolto anche con le altre infinite frazioni a essa equivalenti.

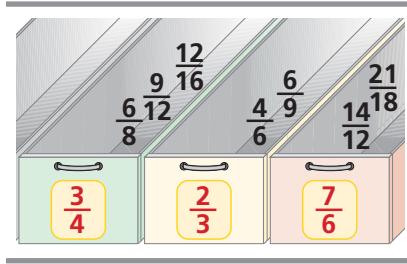


Possiamo pensare di raggruppare tutte le frazioni equivalenti a $\frac{3}{4}$ in un «cassetto», tutte quelle equivalenti a $\frac{2}{3}$ in un altro «cassetto» e così via per tutte le altre frazioni.

Non accade mai, in questo modo, che una frazione appartenga a due «cassetti» diversi. In matematica questi cassetti sono particolari insiemi chiamati «classi di equivalenza». Per comodità sceglieremo come rappresentante di ogni classe la frazione ridotta ai minimi termini.

In questo modo, $\frac{3}{4}$ è la frazione che rappresenta $\frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}$ ecc.

Tutte le frazioni di una stessa classe sono scritture diverse che rappresentano una stessa classe, che chiamiamo *numero razionale assoluto*.

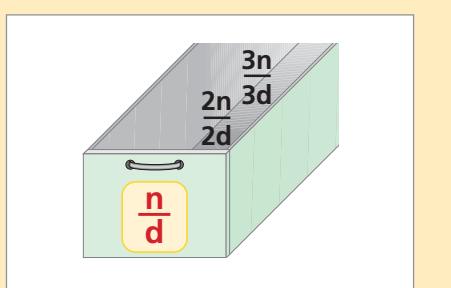


◀ Figura 2 Per rappresentare graficamente le classi di equivalenza possiamo utilizzare dei «cassetti». Ogni «cassetto» contiene tutte e sole le frazioni equivalenti tra loro.

DEFINIZIONE

Numero razionale assoluto

Un numero razionale assoluto è una classe di frazioni fra loro equivalenti.



▶ Assoluto significa in questo caso «senza segno»: infatti abbiamo definito finora frazioni di numeri naturali, che non hanno segno.

Per esempio, $\frac{2}{3}$ e $\frac{6}{9}$ sono due modi diversi di rappresentare lo stesso numero razionale assoluto, che è $\left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \dots \right\}$.

Possiamo scrivere allora $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, nel senso che le due frazioni individuano **lo stesso numero razionale assoluto**.

L'insieme dei numeri razionali assoluti si indica con \mathbb{Q}_a .

▶ Per questo, in seguito, utilizzeremo il simbolo $=$ invece del simbolo \sim .

I numeri razionali

È possibile estendere il concetto di frazione anche al caso in cui **numeratore e denominatore** sono numeri **intei** (con il denominatore diverso da 0):

$$\frac{-3}{4}, \quad \frac{15}{-7}, \quad \frac{0}{-2}, \quad \frac{-4}{1}, \quad \dots$$

Anche la definizione di frazioni equivalenti e la proprietà invariantiva si possono estendere alle frazioni di numeri interi.

► Per rappresentare la prima classe di frazioni usiamo la scrittura $-\frac{6}{7}$, per la seconda classe $+\frac{5}{3}$, per la terza $-\frac{3}{4}$.

ESEMPIO

$$1. \frac{-6}{7} \sim \frac{6}{-7} \text{ perché } (-6) \cdot (-7) = 7 \cdot 6.$$

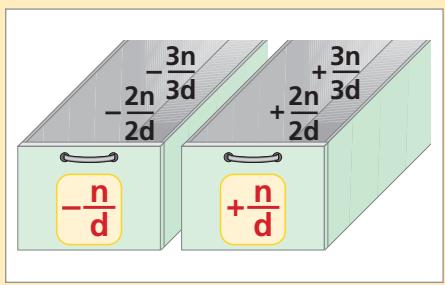
$$2. \frac{5}{3} \sim \frac{-5}{-3} \text{ perché } (5) \cdot (-3) = 3 \cdot (-5).$$

$$3. \frac{6}{-8} \sim \frac{-3}{4} \text{ perché } 6 \cdot 4 = (-8) \cdot (-3).$$

Se facciamo precedere una frazione che rappresenta un numero razionale assoluto dal segno $-$, stiamo scrivendo una **frazione negativa**; se la facciamo precedere dal segno $+$, stiamo scrivendo una **frazione positiva**.

DEFINIZIONE**Numero razionale**

Un numero razionale è una classe di frazioni equivalenti in cui numeratore e denominatore sono numeri interi (con il denominatore diverso da 0).



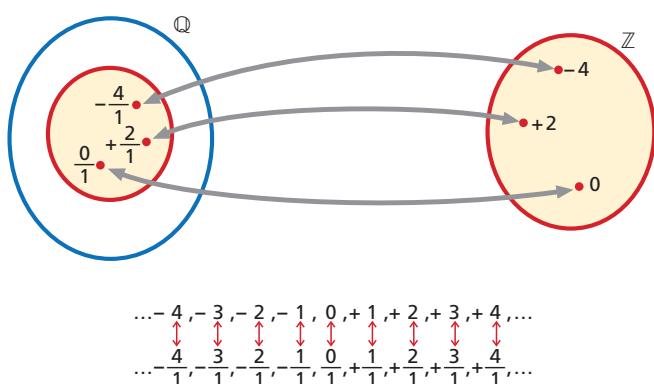
L'insieme dei numeri razionali si indica con \mathbb{Q} .

► La definizione di ampliamento si trova nel paragrafo 10 del capitolo 1.

► **Figura 3** Nell'insieme \mathbb{Q} le frazioni con denominatore 1 corrispondono ai numeri interi.

Per fare in modo che \mathbb{Q} sia un ampliamento di \mathbb{Z} , a ciascuna frazione con denominatore 1 di \mathbb{Q} facciamo corrispondere un numero intero.

Per esempio, la frazione $+\frac{5}{1}$ si identifica con il numero intero $+5$, $-\frac{3}{1}$ si identifica con -3 .



2. Il confronto tra numeri razionali

Consideriamo due frazioni con lo stesso denominatore positivo: diciamo che la frazione maggiore è quella che ha numeratore maggiore.

ESEMPIO

1. Confrontiamo $\frac{5}{6}$ e $\frac{4}{15}$.

Riducendo al minimo denominatore comune, otteniamo, nell'ordine:

$$\frac{25}{30} \text{ e } \frac{8}{30}.$$

Poiché $25 > 8$, concludiamo che $\frac{5}{6} > \frac{4}{15}$.

2. Confrontiamo ora le frazioni $-\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{3}$.

Riducendo allo stesso denominatore *positivo* 6, otteniamo, nell'ordine:

$$-\frac{3}{6} \text{ e } -\frac{2}{6}. \text{ Poiché } -3 < -2, \text{ abbiamo } -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}.$$

Date due frazioni positive, possiamo confrontarle anche in un altro modo: utilizzando il prodotto in croce. Chiamiamo *diagonale principale* quella su cui si trova il numeratore della prima frazione, *diagonale secondaria* l'altra.

Se il prodotto sulla diagonale principale è minore di quello sulla diagonale secondaria, la prima frazione è minore della seconda; in caso contrario la prima frazione è maggiore della seconda.

ESEMPIO Confrontiamo $\frac{2}{9}$ e $\frac{7}{12}$.

Poiché $2 \cdot 12 < 9 \cdot 7$, cioè $24 < 63$, abbiamo $\frac{2}{9} < \frac{7}{12}$.

Infatti, per la proprietà invariantiva:

$$\frac{2}{9} = \frac{2 \cdot 12}{9 \cdot 12} = \frac{24}{108}; \quad \frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 9}{12 \cdot 9} = \frac{63}{108}.$$

Con frazioni negative la regola precedente è ancora valida se si attribuisce il segno $-$ ai numeratori delle frazioni. Possiamo così ricondurci al caso del confronto di frazioni con denominatore positivo uguale.

ESEMPIO Confrontiamo $-\frac{1}{2}$ e $-\frac{2}{3}$, cioè $-\frac{-1}{2}$ e $-\frac{-2}{3}$.

Poiché $(-1) \cdot 3 > (-2) \cdot 2$, la prima frazione è maggiore della seconda.

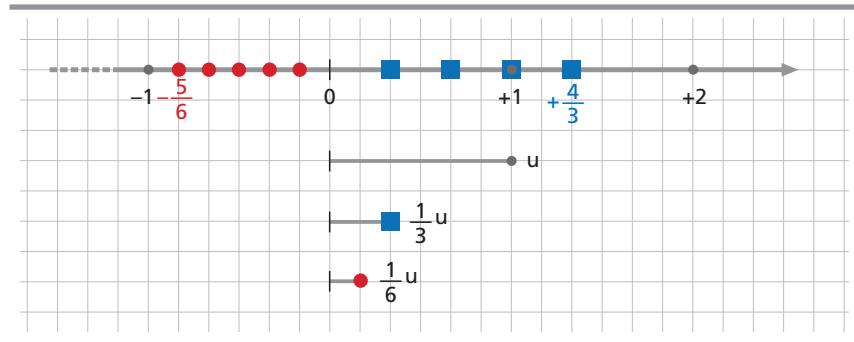
$$\begin{array}{c} \cancel{2} \quad \cancel{7} \\ \cancel{9} \quad \cancel{12} \\ 24 < 63 \end{array}$$

▲ Figura 4 Il segno di disuguaglianza tra i due prodotti coincide col segno di disuguaglianza tra le frazioni.

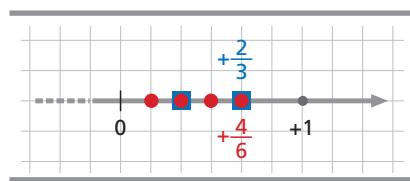
■ La rappresentazione dei numeri razionali su una retta

Anche i numeri razionali possono essere rappresentati su una retta orientata (figura 5).

► **Figura 5** Per rappresentare sulla retta orientata un numero razionale espresso con una frazione, dividiamo il segmento unità di misura u in tante parti quante sono indicate dal denominatore e prendiamo poi tante parti quante sono indicate dal numeratore.



Tutte le frazioni tra loro equivalenti corrispondono allo stesso punto sulla retta (figura 6). Ciò equivale a dire che la costruzione della figura 5 fa corrispondere a ogni numero razionale un solo punto della retta.



◀ **Figura 6** Le frazioni equivalenti $+\frac{2}{3}$ e $+\frac{4}{6}$ corrispondono allo stesso punto sulla retta.

Q È DENSO NELLA RETTA

Come sono distribuiti i numeri razionali sulla retta orientata?

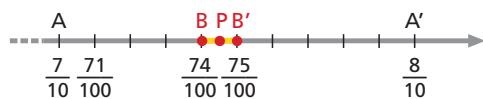
Per rispondere, prendiamo un punto P qualsiasi sulla retta e, partendo dall'origine, iniziamo a riportare segmenti lunghi $\frac{1}{10}$ consecutivamente l'uno all'altro, finché uno di questi segmenti contiene il punto P :



Ciascun estremo del segmento contenente il punto P corrisponde a un numero razionale: A corrisponde a $\frac{7}{10}$ e A' a $\frac{8}{10}$.

Questi due punti distano non più di $\frac{1}{10}$ da P . Quindi, esistono punti corrispondenti ai razionali che al massimo distano $\frac{1}{10}$ da P .

Possiamo ripetere la stessa costruzione con segmenti lunghi $\frac{1}{100}$, poi $\frac{1}{1000}$ e così via:



In questo modo è possibile trovare punti che corrispondono a razionali vicini quanto si vuole a un qualsiasi dato punto della retta. Per esempio, B e B' distano al massimo $\frac{1}{100}$ da P .

Per esprimere questo fatto si dice che \mathbb{Q} è **denso nella retta**.

I punti che corrispondono a razionali sono infinitamente vicini a qualunque punto della retta. Ci poniamo allora questa domanda: esistono punti della retta che *non* corrispondono a numeri razionali? Affronteremo questo problema più avanti, ma possiamo anticipare che la risposta è sì.

3. Le operazioni in \mathbb{Q}

■ L'addizione e la sottrazione

Consideriamo due numeri razionali espressi da frazioni con lo stesso denominatore.



BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V03a

DEFINIZIONE

Somma e differenza di numeri razionali

La somma (o la differenza) di due numeri razionali espressi da frazioni con lo stesso denominatore è il numero espresso dalla frazione che ha per denominatore lo stesso denominatore e per numeratore la somma (o la differenza) dei numeratori.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

(con $b \neq 0$)

ESEMPIO

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2+4}{5} = \frac{6}{5};$$

$$\frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5-1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Se i numeri razionali sono espressi da frazioni che hanno **denominatori diversi**, si utilizza la definizione precedente dopo aver ridotto le frazioni al minimo denominatore comune.

ESEMPIO Determiniamo la somma:

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{15}.$$

Riduciamo al minimo denominatore comune, che è il m.c.m.(6, 15) = 30:

$$\frac{1}{6} = \frac{5}{30} \quad \frac{2}{15} = \frac{4}{30}.$$

Ricadiamo nel caso di frazioni con lo stesso denominatore:

$$\frac{5}{30} + \frac{4}{30} = \frac{9}{30}.$$

In forma abbreviata possiamo scrivere: $\frac{5+4}{30} = \frac{9}{30}$.

► La somma (o differenza) non cambia se i due numeri razionali sono espressi da due frazioni equivalenti a quelle date. Per esempio, se consideriamo $\frac{15}{9}$ invece di $\frac{5}{3}$ e $\frac{3}{9}$ invece di $\frac{1}{3}$, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{15}{9} - \frac{3}{9} &= \frac{15-3}{9} = \\ &= \frac{12}{9} = \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

La definizione di addizione in \mathbb{Q} è tale che, sommando due razionali con denominatore uguale a 1, si ottiene il numero razionale corrispondente alla somma in \mathbb{Z} dei due numeri interi corrispondenti agli addendi.

ESEMPIO

$$\frac{5}{1} + \left(-\frac{7}{1} \right) = \frac{5 + (-7)}{1} = \frac{-2}{1} \text{ nell'insieme } \mathbb{Q}.$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 + (-7) & = & -2 \end{array} \text{ nell'insieme } \mathbb{Z}.$$

L'addizione e la sottrazione sono operazioni interne in \mathbb{Q} .

In \mathbb{Q} valgono tutte le **proprietà dell'addizione** (commutativa, associativa, esistenza dell'opposto) e della sottrazione (invariantiva) e vale la **prima legge di monotonia** sia per le uguaglianze, sia per le disuguaglianze.

Inoltre, l'elemento neutro per l'addizione in \mathbb{Q} è 0, come già si verificava nell'insieme dei numeri interi \mathbb{Z} .

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V03b

■ La moltiplicazione**■ DEFINIZIONE****Prodotto di numeri razionali**

Il prodotto di due numeri razionali espressi da frazioni è il numero espresso dalla frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

(con $b, d \neq 0$)

- Il risultato non cambia se i due numeri razionali sono espressi da due frazioni equivalenti a quelle date.

Per esempio:

$$\begin{aligned} \frac{3}{6} \cdot \frac{20}{12} &= \frac{60}{72} = \\ &= \frac{5 \cdot 12}{6 \cdot 12} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

ESEMPIO

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}.$$

Anche la definizione di moltiplicazione è tale da fornire gli stessi prodotti della moltiplicazione fra interi corrispondenti.

ESEMPIO

$$\frac{5}{1} \cdot \frac{7}{1} = \frac{5 \cdot 7}{1 \cdot 1} = \frac{35}{1} \text{ nell'insieme } \mathbb{Q}.$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 \cdot 7 & = & 35 \end{array} \text{ nell'insieme } \mathbb{Z}.$$

La moltiplicazione è un'operazione interna in \mathbb{Q} .

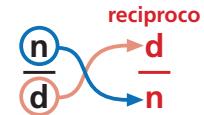
Sono ancora valide le **proprietà della moltiplicazione**: commutativa, associativa, distributiva rispetto all'addizione, esistenza dell'elemento neutro 1, esistenza dell'elemento assorbente 0, legge di annullamento del prodotto. Vale inoltre la **seconda legge di monotonia** sia per le ugualianze, sia per le disugualianze.

Per la moltiplicazione in \mathbb{Q} esiste anche una proprietà analoga all'esistenza dell'opposto nell'addizione.

Chiamiamo **reciproco** del numero razionale espresso dalla frazione $\frac{n}{d}$ il numero espresso dalla frazione $\frac{d}{n}$, che si ottiene scambiando numeratore e denominatore.

ESEMPIO

Sono reciproci $\frac{7}{2}$ e $\frac{2}{7}$, 3 e $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$ e $-\frac{3}{2}$.



▲ Figura 7 Il reciproco
di $\frac{n}{d}$ è $\frac{d}{n}$.

Poiché per definizione non esistono frazioni con denominatore 0, **il numero 0** ($= \frac{0}{1}$) **non ha reciproco**.

La moltiplicazione di un numero razionale per il suo reciproco dà sempre come prodotto 1.

ESEMPIO

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = 1; \quad \left(-\frac{3}{7}\right) \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) = 1; \quad 9 \cdot \frac{1}{9} = 1.$$

Di ogni numero razionale, **escluso 0**, esiste il reciproco; il prodotto di un numero per il suo reciproco è uguale all'elemento neutro della moltiplicazione, cioè 1.

■ La divisione

DEFINIZIONE

Quoziente di numeri razionali

Il quoziente di due numeri razionali, di cui il secondo *diverso da 0*, è uguale al prodotto del primo per il reciproco del secondo.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad (\text{con } b, c, d \neq 0)$$



BRAVI SI DIVENTA

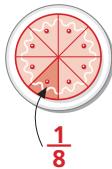
Videolezione ▶ V03c

ESEMPIO

$$\begin{aligned} -\frac{4}{7} : \left(-\frac{12}{21}\right) &= -\frac{4}{7} \cdot \left(-\frac{21}{12}\right) = 1; \\ -\frac{2}{5} : \frac{4}{15} &= -\frac{2}{5} \cdot \frac{15}{4} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

► Osserva che $-\frac{4}{7}$ e $-\frac{12}{21}$ rappresentano lo stesso numero razionale; quindi il loro quoziente è uguale a 1.

► Si dice anche che $\frac{5}{7}$ è il rapporto fra 5 e 7.



▲ Figura 8 Le frazioni risolvono problemi pratici di divisione per i quali non bastano i numeri naturali. Supponiamo di dividere 1 torta in 8 parti uguali: non sappiamo scrivere un numero naturale che corrisponda a una delle fette, perché in \mathbb{N} non è possibile calcolare $1:8$. Per indicare una delle 8 parti uguali in cui la torta viene divisa usiamo la frazione $\frac{1}{8}$.

Analogamente, per indicare due fette di torta usiamo $\frac{2}{8}$ e così via.

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V03d

► Anche in \mathbb{Q} il risultato di una potenza è negativo solo in caso di frazione negativa ed esponente dispari.

Per esempio:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}.$$

La definizione di quoziente permette di effettuare sempre la divisione in \mathbb{Q} , escluso il caso in cui il divisore è 0. In particolare, in \mathbb{Q} possiamo eseguire anche le divisioni che non era possibile eseguire in \mathbb{Z} . Per esempio,

$$5 : 7$$

non ha risultato in \mathbb{Z} ,

$$\frac{5}{1} : \frac{7}{1} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{7} \quad \text{ha risultato in } \mathbb{Q}.$$

Possiamo quindi identificare la scrittura $5 : 7$ con la scrittura $\frac{5}{7}$.

Pertanto la divisione è un'operazione interna in \mathbb{Q} .

Per la divisione in \mathbb{Q} continuano a valere la proprietà invariantiva e la proprietà distributiva a destra rispetto all'addizione.

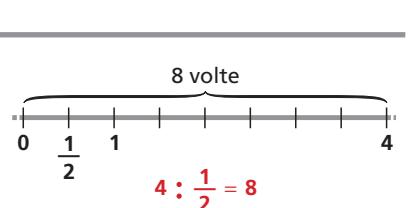
Negli interi la divisione (quando è possibile) fornisce sempre un numero minore del dividendo. Nei razionali questa caratteristica non è sempre verificata.

ESEMPIO Il quoziente di $4 : \frac{1}{2}$ non

è un numero minore di 4.

$$\text{Infatti } 4 : \frac{1}{2} = 4 \cdot 2 = 8.$$

Ciò significa che $\frac{1}{2}$ sta otto volte nel 4.



▲ Figura 9

■ La potenza

Anche in \mathbb{Q} vogliamo che la potenza di una frazione assuma il significato di una moltiplicazione ripetuta. Per esempio:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}.$$

Pertanto diamo la seguente definizione.

■ DEFINIZIONE

Potenza di una frazione

Dato un numero naturale n , la potenza n -esima di una frazione $\frac{a}{b}$ è la frazione che ha per numeratore a^n e per denominatore b^n .

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

(con $b \neq 0$)

■ ESEMPIO

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{5^3} = \frac{-8}{125} = -\frac{8}{125}.$$

4. Le potenze con esponente intero negativo

BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V04a



Vogliamo dare significato anche a potenze con esponente intero negativo. Per farlo consideriamo la divisione di due potenze di uguale base con l'esponente della prima minore di quello della seconda e applichiamo la seconda proprietà delle potenze. Per esempio,

$$3^4 : 3^6 = 3^{4-6} = 3^{-2}.$$

Qual è il significato di 3^{-2} ?

Scriviamo la precedente divisione sotto forma di frazione e semplifichiamo:

$$3^4 : 3^6 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3^2}.$$

Se vogliamo che la seconda proprietà delle potenze sia valida anche in questo caso, deve essere vera l'uguaglianza:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

Diamo allora la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Potenza con esponente negativo

La potenza di un numero razionale, diverso da 0, con esponente intero negativo è una potenza che ha per base il reciproco del numero dato e per esponente l'opposto dell'esponente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

(con $a, b \neq 0$)

- In generale, se $a \neq 0$,
 $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$.

- $\frac{b}{a}$ è il reciproco di $\frac{a}{b}$.

ESEMPIO

$$5^{-7} = \left(\frac{1}{5}\right)^7 = \frac{1}{5^7};$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}.$$

L'esponente -1 permette di scrivere la frazione reciproca di una frazione data mediante una potenza.

ESEMPIO

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}; \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} = -\frac{3}{2};$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2; \quad 9^{-1} = \frac{1}{9}.$$

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V05a

5. Le percentuali

Le percentuali sono un modo diverso per scrivere le frazioni con denominatore 100. Per esempio, consideriamo la percentuale 25% (si legge: «venticinque per cento»).

Essa equivale alla frazione $\frac{25}{100}$, ossia possiamo scrivere:

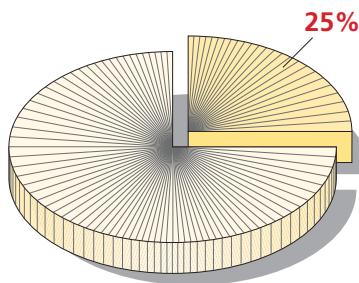
$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

► Figura 10 Diagramma a torta.

A volte per visualizzare le percentuali si usa un diagramma detto «a torta», perché utilizza un cerchio suddiviso in settori simili alle fette di una torta.

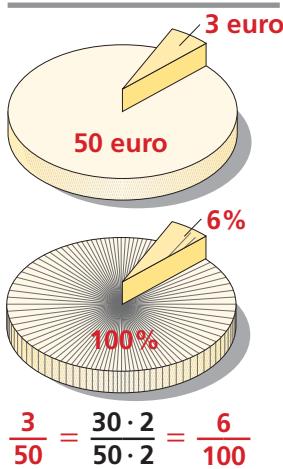
L'intera «torta» rappresenta cento «fette» su cento, cioè $\frac{100}{100} = 100\%$.

Il 25% è rappresentato da $\frac{1}{4}$ della torta. Diagrammi di questo tipo vengono anche detti **areogrammi**.



Per risolvere problemi con percentuali basta ragionare in termini di frazioni.

▼ Figura 11



ESEMPIO Il prezzo di un prodotto è stato portato da € 50 a € 53. Determinare il suo aumento in percentuale.

Nella figura 11 rappresentiamo con un diagramma a torta il vecchio prezzo del prodotto (la torta intera corrisponde a € 50).

L'aumento assoluto è: € 53 – € 50 = € 3.

Nel diagramma a torta, a quale frazione corrisponde una fetta da € 3?

La frazione corrispondente alla fetta è $\frac{3}{50}$.

Poiché la torta rappresenta la percentuale del 100%, per avere la percentuale corrispondente alla frazione dobbiamo trasformare $\frac{3}{50}$ in una frazione con denominatore 100, usando la proprietà invariantiva.

$$\frac{3}{50} = \frac{3 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{6}{100}.$$

L'aumento in percentuale è del 6%.

In sintesi, per trasformare una frazione in percentuale, basta scrivere la frazione a essa equivalente con denominatore 100.

Osservazione

A volte la percentuale è espressa in **millesimi**.

2‰ (si legge «due per mille») significa:

$$2\% = \frac{2}{1000}.$$

ESPLORAZIONE: NUMERI E MUSICA

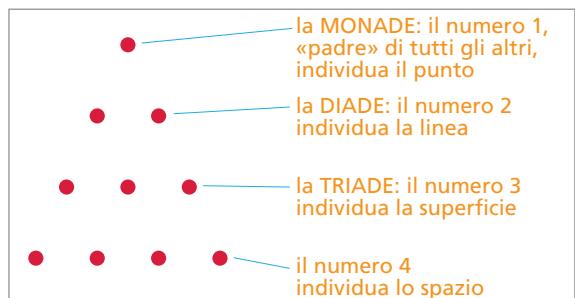
Nella musica, per dare il nome agli intervalli fra le note, si contano sia la prima sia l'ultima nota. Per esempio, fra un *do* e il *do* successivo c'è un'*ottava*, perché fra i due *do* c'è la sequenza di otto note: *do, re, mi, fa, sol, la, si, do*. Allo stesso modo, fra un *mi* e un *la* c'è una *quarta*, perché fra le due note c'è la sequenza *mi, fa, sol, la*.

I Pitagorici studiarono le relazioni fra le lunghezze delle corde vibranti e le note prodotte nella vibrazione. Scoprirono che, considerate corde tese in modo uguale e dello stesso spessore, se una corda produce un *do*, una corda lunga la metà produce il *do* più acuto e una corda lunga il doppio il *do* più grave, con un'*ottava* come intervallo. Nel primo caso le lunghezze hanno rapporto $\frac{1}{2}$, nel secondo hanno rapporto $\frac{2}{1}$.

Analogamente i rapporti $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$ sono collegati a quinte e i rapporti $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$ a quarte.

I numeri 1, 2, 3, 4, così strettamente legati alla musica, avevano grande importanza per i Pitagorici, che erano abituati a giurare sulla *tétraktys*, rappre-

sentazione del numero 10 mediante quella dei primi quattro numeri.



▲ La **TÉTRAKTYS** rappresenta la successione delle tre dimensioni che caratterizzano l'universo fisico. A essa corrisponde la somma $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, la **DECADE**, base della maggioranza dei sistemi di numerazione.

IN DIECI RIGHE

Nella *scala temperata* i rapporti corrispondenti ai diversi intervalli sono leggermente diversi da quelli pitagorici. Scrivi con il computer una relazione su questa scala e sul suo collegamento con un particolare numero. È razionale?

Cerca nel web: scala temperata, tempered scale.

6. Le frazioni e le proporzioni

Una proporzione è un'uguaglianza fra due rapporti. Quindi un'uguaglianza tra due frazioni equivalenti è una proporzione.

ESEMPIO

$$\frac{10}{5} = \frac{8}{4} \text{ si può scrivere } 10 : 5 = 8 : 4.$$

Nella figura 12 riassumiamo la terminologia relativa a una proporzione.



◀ Figura 12 La proporzione della figura si legge: «7 sta a 14 come 25 sta a 50».

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V05b

► La proprietà discende dalla definizione di frazioni equivalenti. Per definizione di frazioni equivalenti, consideriamo i prodotti in croce.

► Giustifichiamo la proprietà con un esempio.

$$\begin{aligned} 4 : 7 &= 12 : 21 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{4}{7} &= \frac{12}{21} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{4}{7} + 1 &= \frac{12}{21} + 1 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{4+7}{7} &= \frac{12+21}{21} \rightarrow \\ \rightarrow (4+7) : 7 &= \\ = (12+21) : 21. \end{aligned}$$

IL MEDIO PROPORZIONALE

Il medio proporzionale x fra due numeri a e b è quel numero, se esiste, per cui vale la proporzione:

$$a : x = x : b.$$

Per esempio:

$$2 : x = x : 32.$$

Applicando la proprietà fondamentale:

$$x^2 = 64.$$

Il numero positivo il cui quadrato vale 64 è 8, pertanto:

$$x = 8.$$

PROPRIETÀ

Proprietà fondamentale delle proporzioni

In una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

$$a : b = c : d \quad bc = ad$$

ESEMPIO

Scriviamo $2 : 5 = 6 : 15$ come uguaglianza tra frazioni:

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} \rightarrow 2 \cdot 15 = 5 \cdot 6.$$

PROPRIETÀ

Proprietà del comporre

In ogni proporzione, la somma dei primi due termini sta al primo (o al secondo) termine come la somma dei due restanti termini sta al terzo (o quarto) termine.

$$a : b = c : d$$

$$(a+b) : a = (c+d) : c$$

$$(a+b) : b = (c+d) : d$$

PROPRIETÀ

Proprietà dello scomporre

In ogni proporzione, la differenza fra i primi due termini sta al primo (o al secondo) termine come la differenza fra i due restanti termini sta al terzo (o al quarto) termine.

$$a : b = c : d$$

$$(a-b) : a = (c-d) : c$$

$$(a-b) : b = (c-d) : d$$

PROPRIETÀ

Proprietà del permutare

Data una proporzione, è ancora una proporzione quella che si ottiene scambiando fra loro i medi (o gli estremi).

$$a : b = c : d$$

$$a : c = b : d$$

$$d : b = c : a$$

PROPRIETÀ

Proprietà dell'invertire

Data una proporzione, si ottiene ancora una proporzione se si scambia ogni antecedente con il proprio conseguente.

$$a : b = c : d$$

$$b : a = d : c$$

ESEMPIO

È data la proporzione: $3 : 2 = 12 : 8$.

Se componiamo:

$$(3 + 2) : 2 = (12 + 8) : 8;$$

Se invece scomponiamo:

$$(3 - 2) : 2 = (12 - 8) : 8;$$

se permutiamo i medi, otteniamo: $3 : 12 = 2 : 8$;

se invertiamo i termini, otteniamo: $2 : 3 = 8 : 12$.

BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V05c

**PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI****Il problema delle parti**

Nel sito: ► Scheda di lavoro

A e B giocano a testa o croce con una moneta non truccata. Vince chi per primo indovina 6 esiti. La partita viene interrotta sul 5 a 3 per A. Come devono essere suddivisi i 24 denari in gioco, in modo che la suddivisione possa essere accettata sia da A sia da B?

(Da un problema di Luca Pacioli in *Summa de arithmeticā, geometriā, proportioni et proportionalitā*, 1494)

MARTINA: «Ma è semplice: basta suddividere la posta in parti direttamente proporzionali a 3 e 5».

LUCIO: «Se fossi A, forse non accetterei, perché 5 è molto vicino alla vincita. Potremmo provare a vedere che cosa accadrebbe partendo da altri punteggi...».

► Pensi che Martina abbia ragione o condividi l'idea di Lucio?

7. I numeri razionali e i numeri decimali

■ Le frazioni e i numeri interi

Se una frazione è apparente, le può essere associato un numero intero.

ESEMPIO

$$\frac{12}{3} = 4; \quad -\frac{22}{2} = -11; \quad \frac{5}{5} = 1.$$

■ Le frazioni e i numeri decimali finiti

Le frazioni che hanno come denominatore una potenza di 10 (con esponente un naturale diverso da 0) vengono dette **frazioni decimali**.

ESEMPIO

$\frac{2357}{100}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{49}{1000}$, $\frac{81}{100}$ sono frazioni decimali.

Per le frazioni decimali possiamo utilizzare la **rappresentazione decimale**, che si basa sulla scrittura posizionale e sull'uso della virgola.

Consideriamo una frazione decimale e trasformiamola così:

$$\begin{aligned}\frac{2357}{100} &= \frac{2000 + 300 + 50 + 7}{100} = \frac{2000}{100} + \frac{300}{100} + \frac{50}{100} + \frac{7}{100} = \\ &= 20 + 3 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100} = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{100}.\end{aligned}$$

La frazione può essere vista come la somma di 2 decine, 3 unità, 5 decimi e 7 centesimi, ed essere indicata con la scrittura sintetica 23,57.

Le cifre assumono un diverso valore a seconda della **posizione** in cui si trovano (come nella scrittura dei numeri naturali); la virgola serve per separare la parte intera da quella decimale.

Con la scrittura decimale possiamo rappresentare non solo le frazioni decimali, ma anche tutte quelle a esse equivalenti.

In questo modo a ogni numero razionale rappresentabile con una frazione decimale viene fatto corrispondere un **numero decimale finito**, ossia un numero decimale che ha un numero finito di cifre decimali.

Data una frazione, il numero decimale corrispondente si può ottenere dalla divisione fra il numeratore e il denominatore della frazione.

► Le frazioni

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \frac{10}{25}$$

sono equivalenti a $\frac{4}{10}$,
perciò sono tutte rappresentate da 0,4.

ESEMPIO

$$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75.$$

LA NOTAZIONE SCIENTIFICA E L'ORDINE DI GRANDEZZA DI UN NUMERO

I numeri molto grandi e i numeri molto piccoli si possono scrivere in forma abbreviata utilizzando le potenze di 10.

Si dice **notazione scientifica** di un numero q la sua rappresentazione attraverso il prodotto di un numero decimale compreso tra 1 e 10 e di una potenza di 10:

$$q = \pm a \cdot 10^r \quad \text{con } a \in \mathbb{Q} \ (1 \leq a < 10) \quad \text{e } r \in \mathbb{Z}.$$

Per esempio, i numeri $2,3 \cdot 10^{-4}$, $9 \cdot 10^8$, $6,75 \cdot 10^6$ sono numeri scritti in notazione scientifica. Invece i numeri $0,7 \cdot 10^4$ e $51 \cdot 10^8$ non sono scritti in notazione scientifica perché 0,7 è minore di 1 e 51 è maggiore di 10.

Per esprimere un numero qualsiasi in notazione scientifica dobbiamo trasformare il numero usando opportunamente le potenze di 10.

Per esempio:

$$270,1 = 2,701 \cdot 100 = 2,701 \cdot 10^2,$$

$$0,00092 = 9,2 \cdot \frac{1}{10000} = 9,2 \cdot \frac{1}{10^4} = 9,2 \cdot 10^{-4},$$

$$51,2 \cdot 10^{-2} = 5,12 \cdot 10 \cdot 10^{-2} = 5,12 \cdot 10^{-1},$$

$$42\,000 = 4,2 \cdot 10\,000 = 4,2 \cdot 10^4.$$

La notazione scientifica è molto utile quando occorre confrontare due numeri.

Per esempio, dati i numeri $9,1 \cdot 10^4$ e $2,3 \cdot 10^7$, basta confrontare le potenze di 10 per affermare che il secondo è maggiore del primo di 1000 volte. Infatti $10^7 : 10^4 = 10^3$.

L'ordine di grandezza di un numero è la potenza del 10 più vicina al numero.

Per esempio, l'ordine di grandezza di $1,9 \times 10^5$ è 10^5 , mentre quello di $9,4 \times 10^2$ è 10^3 .

In generale, per determinare l'ordine di grandezza di un numero si procede così:

- si scrive il numero in notazione scientifica cioè nella forma $\pm a \cdot 10^r$ con $a \in \mathbb{Q}$ ($1 \leq a < 10$) e $r \in \mathbb{Z}$;
- se $a < 5$, l'ordine di grandezza è 10^r ; se $a \geq 5$, l'ordine di grandezza è 10^{r+1} .

Le frazioni e i numeri decimali periodici

Non tutti i numeri razionali sono rappresentabili mediante frazioni decimali; infatti, lo sono soltanto quelli corrispondenti a frazioni che, ridotte ai minimi termini, hanno il denominatore che contiene come fattori primi solo il 2 e il 5.

ESEMPIO

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0,2; \quad \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75; \quad \frac{31}{40} = \frac{775}{1000} = 0,775.$$

Invece, per esempio, non è possibile trasformare la frazione $\frac{3}{7}$ in frazione decimale, applicando la proprietà invariantiva.

Quando non è possibile trasformare una frazione in frazione decimale, significa che essa corrisponde a un **numero decimale periodico**, ossia a un numero le cui cifre decimali sono infinite e, da un certo punto in poi, si ripetono a gruppi sempre uguali.

Il gruppo di cifre ripetute si chiama **periodo**; l'insieme delle cifre comprese fra la virgola e il periodo si chiama **antiperiodo**.

Per comodità di scrittura indicheremo il periodo soprassegnandolo.

ESEMPIO

$$\frac{35}{6} = 5,83333\ldots = 5,8\bar{3}.$$

Il periodo è 3, l'antiperiodo 8.

► Se esegui $4 : 3$ con una calcolatrice trovi un numero decimale finito, per esempio 1,333333333. Questo non è il valore di $\frac{4}{3}$, ma solo una sua approssimazione.

DALLA FRAZIONE AL NUMERO DECIMALE

Per trasformare una frazione in un numero decimale eseguiamo la divisione fra numeratore e denominatore.

I casi che si possono presentare sono due.

1. Troviamo, dopo un certo numero di passaggi, un resto uguale a 0.

In questo caso il quoziente è un numero decimale finito.

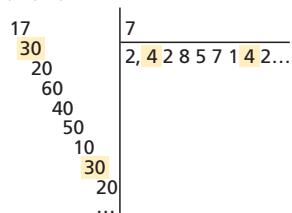
2. Troviamo resti sempre diversi da 0, ma che si ripetono con regolarità.

In questo caso le cifre del quoziente, da un certo punto in poi, si ripetono, generando un numero decimale periodico.

Siamo sicuri che la ripetizione deve avvenire, perché ogni possibile resto parziale deve essere minore del divisore; quindi i resti fra loro diversi sono in numero finito.

Per esempio, nella divisione della figura, poiché il divisore è 7, i resti diversi fra loro (e diversi da 0) possono essere solo 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Dopo sei divisioni (al massimo) siamo sicuri di trovare un resto già incontrato, che farà ripetere il procedimento di divisione.



Un numero razionale può sempre essere rappresentato da un numero decimale finito o periodico.

■ Le frazioni generatrici

Esiste una regola che permette di scrivere ogni numero decimale periodico sotto forma di frazione, detta **frazione generatrice** del numero decimale.

Si può dimostrare che la frazione generatrice di un numero decimale periodico si ottiene considerando la frazione avente:

- come **numeratore** il numero, scritto senza virgola, diminuito del numero costituito da tutte le cifre che precedono il periodo;
- come **denominatore** il numero costituito da tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.

ESEMPIO Il numero $0,\overline{73}$ ha come frazione generatrice:

$$\frac{73 - 7}{90} = \frac{66}{90} = \frac{11}{15}.$$

Come caso particolare, anche i numeri interi possono essere considerati come numeri decimali periodici. Per esempio:

$$3 = 2,\overline{9}, \quad \text{infatti} \quad 2,\overline{9} = \frac{29 - 2}{9} = \frac{27}{9} = 3.$$

Quindi, a ogni numero razionale corrisponde un numero decimale, o finito o periodico e viceversa.

■ I numeri reali

Ci sono procedimenti matematici, quale per esempio quello di estrazione di radice, che portano a numeri decimali illimitati e non periodici.

ESEMPIO Si può dimostrare che la radice di 2 ha come risultato un numero decimale che ha come prime cifre 1,41421...

Il numero è decimale illimitato e inoltre, se si determinano altre cifre decimali, si nota che non si arriva mai a ottenere una sequenza periodica.

► Abbiamo visto che un qualsiasi numero razionale corrisponde a un numero decimale finito o periodico.

Ci sono dunque numeri decimali che non corrispondono a numeri razionali. Questo porta ad ampliare l'insieme dei numeri razionali con l'introduzione dei **numeri irrazionali**.

■ DEFINIZIONE

Numero irrazionale

Chiamiamo numero irrazionale ogni numero decimale illimitato non periodico.

Sono numeri irrazionali: $\sqrt{3}, -\sqrt{5}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{13}, -\sqrt[6]{7}$.

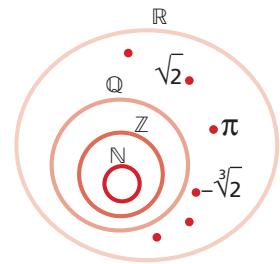
Esistono anche numeri irrazionali che non derivano dall'estrazione di radici: per esempio, il numero π (pi greco) che è il rapporto fra la misura di una circonferenza e del suo diametro: $\pi = 3,1415926\dots$

Per ampliare l'insieme dei numeri razionali, consideriamo l'insieme dei **numeri reali**, che indichiamo con \mathbb{R} .

DEFINIZIONE

Numero reale

Chiamiamo numero reale ogni numero razionale o irrazionale.



8. Il calcolo approssimato

Molti numeri razionali nella forma decimale sono rappresentati da un numero elevato di cifre, per esempio 1947251,23 o 21,376. Nelle operazioni di calcolo, e in particolare nel calcolo mentale, spesso è conveniente operare con un numero limitato di cifre. L'azione da compiere è di approssimare i numeri in gioco. Ciò comporta valori più leggibili e maneggevoli, ma anche inevitabili errori di valutazione e perdita di informazioni.

L'approssimazione di un numero

Per approssimare procediamo mediante **arrotondamento**.

Consideriamo il valore della prima cifra trascurata e:

- se tale valore è maggiore o uguale a 5, aumentiamo di 1 l'ultima cifra considerata;
- se è minore di 5, lasciamo invariata l'ultima cifra considerata.

Per esempio, se approssimiamo a meno di 10^{-2} , ossia ai centesimi, il numero 21,2381, scriviamo 21,24, poiché la prima cifra trascurata (quella dei millesimi) è 8, che è maggiore di 5. L'approssimazione è per *eccesso*.

Se invece vogliamo approssimare a meno di 10^{-1} , ossia ai decimi, il numero 21,2381, allora scriviamo 21,2, poiché la prima cifra trascurata è 3, che è minore di 5. L'approssimazione è per *difetto*.

DEFINIZIONE

Approssimazione per eccesso, approssimazione per difetto

Dati un numero q e la sua approssimazione a ,

se $a > q$, si dice che a è un'approssimazione per eccesso di q ;
se $a < q$, si dice che a è un'approssimazione per difetto di q .

► Operare con un numero limitato di cifre permette di avere subito la stima del valore del risultato ed è utile per il controllo dei risultati delle operazioni svolte con la calcolatrice.

► Dato un numero che vogliamo approssimare a meno di 10^r , con $r \in \mathbb{Z}$, la prima cifra trascurata occupa la posizione corrispondente a 10^{r-1} .

$$21,24 > 21,2381.$$

$$21,2 < 21,2381.$$

L'errore assoluto e l'errore relativo

Con un'approssimazione si compie inevitabilmente un errore.

Possiamo calcolare l'errore commesso considerando la differenza tra il numero e il suo valore approssimato. Se al posto di 78,2718 usiamo la sua approssimazione a meno di $\frac{1}{100}$, cioè 78,27, l'errore è:

$$78,2718 - 78,27 = 0,0018.$$

► Per esempio, approssimando per difetto otteniamo un valore minore del numero di partenza.

In generale, vale la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Errore assoluto

Dati un numero $q \in \mathbb{Q}$ e un suo valore approssimato a , si chiama errore assoluto dell'approssimazione, e si indica con e , il valore assoluto della differenza tra il numero e il suo valore approssimato:

$$e = |q - a|.$$

Consideriamo il valore assoluto perché quello che interessa è lo scostamento fra valore approssimato e valore esatto indipendentemente dal fatto che l'uno o l'altro sia il più grande.

L'errore relativo dà una misura della **precisione** con cui è compiuta l'approssimazione.

Nell'esempio gli errori relativi sono stati arrotondati. Confrontando i rispettivi errori relativi, si può concludere che la prima approssimazione è più precisa della seconda.

Nell'esempio precedente gli errori percentuali sono 0,002% e 1%.

Riprendendo l'esempio precedente, dove $e = 0,0018$, osserviamo che l'errore si ha dalla terza cifra decimale in poi. Poiché questo valore è minore di $\frac{1}{100}$, a meno del quale era stata fatta l'approssimazione, si può arrotondare l'errore assoluto:

$$e \approx 0,002.$$

L'errore assoluto non è sempre adeguato a valutare l'approssimazione compiuta. Le approssimazioni $1324,52 \approx 1324,5$ e $1,52 \approx 1,5$ hanno lo stesso errore assoluto $e = 0,02$, ma la prima è sicuramente più *precisa* della seconda: un errore di 0,02 su un numero che arriva alle migliaia è molto più piccolo dello stesso errore su un numero che si ferma alle unità. Per dare una stima della precisione è conveniente calcolare il rapporto tra l'errore assoluto e il valore assoluto del numero approssimato.

DEFINIZIONE

Errore relativo

Dati un numero $q \in \mathbb{Q}$ e un suo valore approssimato a , si chiama errore relativo e si indica con e_r il rapporto tra l'errore assoluto e il valore assoluto di a :

$$e_r = \frac{e}{|a|} = \frac{|q - a|}{|a|}.$$

ESEMPIO Riprendiamo le approssimazioni sopraindicate e calcoliamo i rispettivi errori relativi:

$$1324,52 \approx 1324,5, \quad e = 0,02,$$

$$e_r = \frac{0,02}{1324,5} \approx 0,00002 = \frac{2}{100\,000} = 2 \cdot \frac{1}{100\,000} = 2 \cdot 10^{-5};$$

$$1,52 \approx 1,5, \quad e = 0,02, \quad e_r = \frac{0,02}{1,5} \approx 0,01 = \frac{1}{100} = 1 \cdot \frac{1}{100} = 1 \cdot 10^{-2}.$$

Osservazione. Spesso gli errori relativi vengono espressi mediante percentuali: dire, per esempio, che un'approssimazione è affetta da un errore relativo del 3% significa che il rapporto tra errore assoluto e valore assoluto del numero approssimato è uguale a $\frac{3}{100}$.

Le operazioni con i numeri approssimati

Eseguire un calcolo tra numeri approssimati porta a un risultato affetto da errore. Esso risente infatti delle singole approssimazioni e del numero delle operazioni compiute in una sorta di *propagazione* degli errori. Ciò è materia di uno studio complesso che prende il nome di *teoria degli errori*. Dati due numeri p e q , siano a e b i rispettivi valori approssimati, e_1 ed e_2 gli errori assoluti, e_{r1} ed e_{r2} gli errori relativi. Si dimostrano le seguenti affermazioni.

TEOREMA

Propagazione degli errori

- **Somma degli operandi.** Il valore massimo dell'errore assoluto della somma $a + b$ è uguale alla somma degli errori assoluti dei due addendi:

$$e = e_1 + e_2.$$

- **Differenza degli operandi.** Il valore massimo dell'errore assoluto della differenza $a - b$ è uguale alla somma degli errori assoluti del minuendo a e del sottraendo:

$$e = e_1 + e_2.$$

- **Prodotto degli operandi.** Il valore massimo dell'errore relativo del prodotto $a \cdot b$ è uguale alla somma degli errori relativi dei due fattori:

$$e_r = e_{r1} + e_{r2}.$$

- **Quoziente degli operandi.** Il valore massimo dell'errore relativo del quoziente $\frac{a}{b}$ è uguale alla somma degli errori relativi del dividendo a e del divisore:

$$e_r = e_{r1} + e_{r2}.$$

► Noi ci limiteremo ad accennare ad alcuni dei risultati della teoria degli errori, analizzando le quattro operazioni fondamentali e vedendo come, noti gli errori di approssimazione degli operandi, si possa calcolare l'errore commesso nell'intero procedimento.

► Poiché le approssimazioni possono compiersi per eccesso o per difetto o attraverso l'arrotondamento, si esegue una stima dell'errore assoluto valutando il massimo valore che l'errore può assumere.

ESEMPIO Vogliamo sommare i due numeri 12 165 e 6137 dopo averli arrotondati a meno di 10^2 .

Arrotondiamo:

$$12\,165 \approx 12\,200, \quad 6137 \approx 6100.$$

Calcoliamo la somma dei valori arrotondati, che indicheremo con s' :

$$s' = 12\,200 + 6100 = 18\,300.$$

Troviamo gli errori assoluti per i singoli addendi:

$$e_1 = |12\,165 - 12\,200| = |-35| = 35, \quad e_2 = |6137 - 6100| = 37.$$

Determiniamo l'errore assoluto da associare a s' :

$$e = e_1 + e_2 \rightarrow e = 35 + 37 = 72.$$

Poiché $s' = 18\,300$ ha un errore massimo pari a 72, possiamo dire che il valore esatto s della somma è compreso fra $18\,300 - 72 = 18\,228$ e $18\,300 + 72 = 18\,372$. Confrontando questi ultimi valori si osserva che le cifre certe sono quindi soltanto 1 e 8.

► La somma s dei valori di partenza è:

$$s = 12\,165 + 6137 = \\ = 18\,302.$$



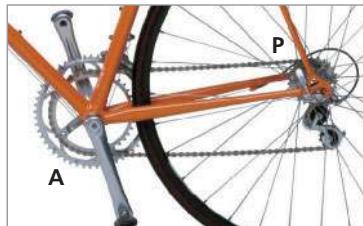
1870: nasce la bicicletta!

...perché nella bicicletta si usano i rapporti?

Nei velocipedi di una volta la ruota davanti era direttamente collegata ai pedali, proprio come succede nell'attuale triciclo da bambino: a ogni giro di pedali corrispondeva un giro della ruota e quindi un avanzamento pari alla lunghezza della sua circonferenza. Maggiore era il diametro d della ruota, più grande era la distanza percorsa per ogni giro ($d \cdot \pi$). È per questo che i velocipedi avevano ruote anteriori molto grandi.

Per esempio, se il diametro era pari a 2 m, con un giro si avanzava di $2 \cdot \pi \approx 6,3$ m; se si pedalava al ritmo di un giro al secondo, in un'ora si compiva un tragitto di circa 22,7 km.

Poiché il velocipede risultava comunque scomodo e pericoloso a causa della ruota anteriore troppo grande, in breve tempo fu trovata una soluzione alternativa, che vediamo ancora oggi nelle nostre biciclette: il sistema a ruote dentate e catena. Il meccanismo base consiste in due ingranaggi dentati, A e P , uno collegato ai pedali e l'altro, più piccolo, collegato alla ruota posteriore, connessi da una catena che trasmette il movimento: scopo del sistema è aumentare il numero di giri che la ruota posteriore compie in corrispondenza di ogni pedalata.



In generale, se l'ingranaggio A esegue un certo numero di giri in un determinato intervallo di tempo, nello stesso intervallo, l'ingranaggio P , collegato alla ruota posteriore, compie un numero di giri maggiore. Più precisamente, il rapporto tra i numeri di giri è uguale al rapporto tra il numero di denti a dell'ingranaggio anteriore e quello p dell'ingranaggio posteriore:

$$\frac{\text{numero giri di } P}{\text{numero giri di } A} = \frac{a}{p}.$$

In particolare, se consideriamo il tempo di una sola pedalata (cioè il numero giri di A è pari a 1), l'ingranaggio P e la ruota posteriore a esso collegata compiono $\frac{a}{p}$ giri.

Se, per esempio, supponiamo che l'ingranaggio collegato ai pedali abbia 54 denti e quello posteriore ne abbia invece 18, risulta:

$$\frac{\text{numero giri di } P}{\text{pedalata}} = \frac{54}{18} = 3.$$

Ciò vuol dire che per ogni peda-

lata la ruota posteriore compie 3 giri e dunque, presa una ruota standard del diametro di 70 cm, per ogni pedalata il ciclista avanza di $0,7 \cdot \pi \cdot 3 \approx 6,6$ m.

Molto spesso si trovano delle biciclette dotate di *cambio*: si tratta, nel caso più comune (*cambio a deragliatore*), di una semplice evoluzione del meccanismo base illustrato sopra. Questa è ottenuta mettendo al posto di ogni ingranaggio un sistema di più ingranaggi coassiali di diversa grandezza (si veda la figura) e sfruttando un meccanismo, il deragliatore, che consente alla catena di scivolare da un ingranaggio all'altro, collegando sempre tra loro un ingranaggio anteriore e uno posteriore.



Nelle biciclette da città di solito troviamo un solo ingranaggio collegato ai pedali e 9 ingranaggi collegati alla ruota posteriore, per un totale di 9 rapporti possibili. Nelle mountain bike e nelle bici da corsa gli ingranaggi connessi al pedale sono invece tre, in modo tale da poter ottenere ben 27 rapporti diversi: questo consente al ciclista di scegliere il rapporto più adatto al percorso.

E IN MOTO?

Nelle moto bisogna risolvere il problema opposto a quello affrontato nella bicicletta: il motore, infatti, gira troppo veloce (anche 10 000 giri al minuto); è quindi necessario diminuire il numero di giri effettuati dalla ruota in corrispondenza di un giro del motore. Questo si realizza molto semplicemente invertendo il meccanismo visto nelle biciclette, ovvero collegando al motore l'ingranaggio più piccolo e alla ruota quello più grande.



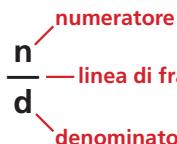
LA TEORIA IN SINTESI

I numeri razionali

1. Dalle frazioni ai numeri razionali

Le frazioni

FRAZIONE



$n < d$ frazione **propria**

$n > d$ frazione **improperia**

n multiplo di d frazione **apparente**

$n \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}$ e $d \neq 0$

Le frazioni equivalenti

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad ad = bc$$

ESEMPIO $\frac{3}{4} \sim \frac{12}{16}$, perché $3 \cdot 16 = 4 \cdot 12$.

La proprietà invariantiva

$$\frac{n}{d} \sim \frac{2n}{2d} \sim \frac{3n}{3d} \sim \dots$$

ESEMPIO $\frac{3}{4} \sim \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{12}{16}$.

La frazione $\frac{n}{d}$ è **ridotta ai minimi termini** se n e d sono primi fra loro.

I numeri razionali

Anche per le frazioni formate da numeri interi relativi si può dare la stessa definizione di equivalenza.

ESEMPIO $\frac{-2}{7} \sim \frac{2}{-7}$,

perché $(-2) \cdot (-7) = 7 \cdot 2$. Le frazioni precedenti si indicano anche con $-\frac{2}{7}$.

Ripartiamo l'insieme delle frazioni di numeri interi in classi di frazioni equivalenti: ogni classe d'equivalenza individua un **numero razionale**. Come rappresentante della classe si sceglie la frazione ridotta ai minimi termini.

ESEMPIO $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots \right\}$ è il numero razionale rappresentato da $\frac{1}{2}$.

Possiamo perciò scrivere: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$.

L'insieme dei numeri razionali si indica con \mathbb{Q} .

2. Il confronto tra numeri razionali

Per **confrontare** due numeri razionali espressi da frazioni si può usare il «prodotto in croce».

ESEMPIO $\frac{5}{7} < \frac{3}{4}$ perché $5 \cdot 4 = 20 < 7 \cdot 3 = 21$.

$$\frac{5}{7} < \frac{3}{4} \quad -\frac{6}{7} > -\frac{10}{11}$$

$20 < 21$ $-66 > -70$

3. Le operazioni in \mathbb{Q}

Addizione e sottrazione:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \frac{m.c.m.(b,d)}{b} \pm c \cdot \frac{m.c.m.(b,d)}{d}}{m.c.m.(b,d)},$$

con $b, d \neq 0$.

Moltiplicazione: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, con $b, d \neq 0$.

Divisione: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, con $b, c, d \neq 0$.

La divisione è interna in \mathbb{Q} .

Potenza: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, con $b \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Valgono tutte le proprietà viste in \mathbb{Z} .

Il **reciproco** di $\frac{a}{b}$, con $a, b \neq 0$, è $\frac{b}{a}$.

Il prodotto di un numero per il suo reciproco è 1, cioè l'elemento neutro della moltiplicazione.

4. Le potenze con esponente intero negativo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}, \text{ con } a, b \neq 0.$$

ESEMPIO $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$.

5. Le percentuali

Le **percentuali** sono un modo per rappresentare frazioni con denominatore 100.

ESEMPIO $3\% = \frac{3}{100}; \quad 75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

6. Le frazioni e le proporzioni

Una **proporzione** è un modo per scrivere l'ugualanza di frazioni equivalenti.

PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI

Proprietà	$a : b = c : d$ se e solo se
fondamentale	$ad = bc$
del comporre	$(a+b) : a = (c+d) : c$
	$(a+b) : b = (c+d) : d$
dello scomporre	$(a-b) : a = (c-d) : c$
	$(a-b) : b = (c-d) : d$
del permutare	$a : c = b : d$
	$d : b = c : a$
dell'invertire	$b : a = d : c$

7. I numeri razionali e i numeri decimali

La **rappresentazione decimale** di un numero si basa sulla scrittura posizionale e sull'uso della virgola.

ESEMPIO $28,104 = 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{100} + 4 \cdot \frac{1}{1000}$.

Ogni numero razionale non intero è rappresentato da un numero decimale **finito** o **periodico**.

8. Il calcolo approssimato

I numeri decimali si possono approssimare **per difetto** e **per eccesso**.

ESEMPIO 120,71 approssima 120,7129 per difetto, 120,72 per eccesso.

Errore assoluto: $e = |q - a|$, dove q è il numero dato e a il suo valore approssimato.

Errore relativo: $e_r = \frac{e}{|a|}$.

La propagazione degli errori

Dati due numeri approssimati:

- nella somma e nella differenza di essi l'errore assoluto massimo è uguale alla somma degli errori assoluti;
- nel prodotto e nel quoziente l'errore relativo è uguale alla somma degli errori relativi.

1. Dalle frazioni ai numeri razionali

→ Teoria a pag. 77

RIFLETTI SULLA TEORIA

1

VERO O FALSO?

- a) Ogni coppia di numeri naturali individua una frazione.
- b) Nella frazione $\frac{2}{7}$, 2 è il numeratore e 7 è il denominatore.
- c) Considerare la frazione $\frac{a}{b}$ dell'unità significa dividere l'unità in b parti uguali e prenderne a .
- d) In una frazione $\frac{a}{b}$, a deve essere multiplo di b .
- e) Le frazioni apparenti hanno il denominatore multiplo del numeratore.
- f) In una frazione, se il numeratore è il successivo del denominatore, la frazione è impropria.
- g) Ogni frazione apparente è impropria, ma non è vero il viceversa.

2

VERO O FALSO?

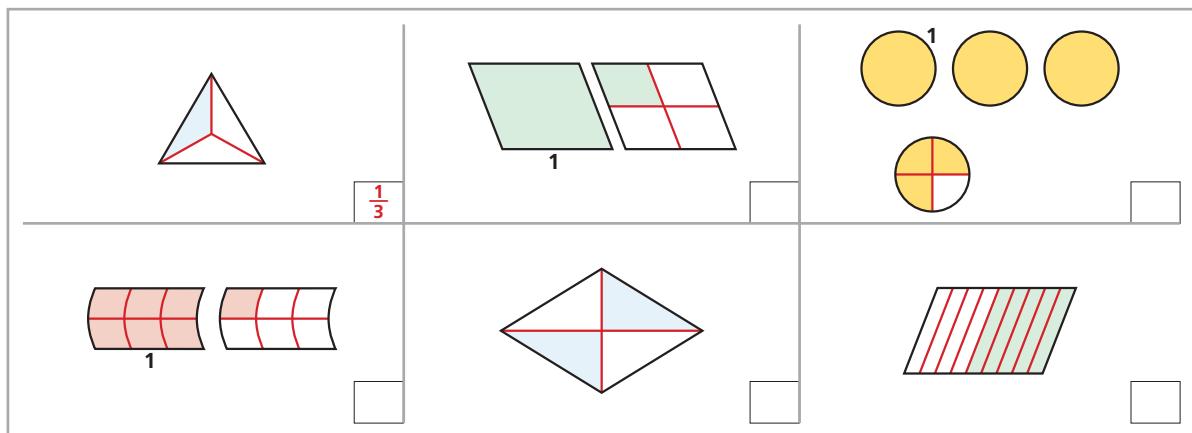
- a) La frazione $\frac{15 - 2}{7 - 2}$ ridotta ai minimi termini è $\frac{15}{7}$.
- b) Le frazioni $\frac{3}{15}$ e $\frac{1}{5}$ sono equivalenti.
- c) Applicando la proprietà invariantiva si può scrivere $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2}$.
- d) Applicando la proprietà invariantiva si può scrivere $\frac{8}{6} = \frac{8 : 2}{6 : 2}$.

ESERCIZI

3

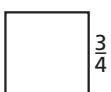
Le frazioni

Indica la frazione corrispondente alla parte colorata delle figure nei riquadri.



4

Colora la parte indicata dalla frazione.



6

Fissata un'unità di misura (per esempio un segmento di opportuna lunghezza), rappresenta le seguenti frazioni, indicando se sono proprie, improprie, apparenti.

$$\frac{5}{8}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{4}{2}, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{8}{3}, \quad \frac{12}{4}, \quad \frac{7}{2}.$$

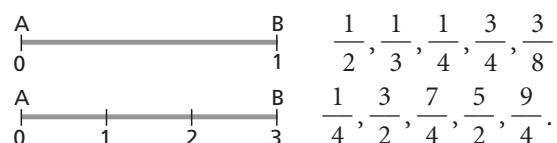
5

Scrivi le frazioni che corrispondono ai punti A, B, C, D, E.



7

Rappresenta sul segmento AB le frazioni indicate a fianco.



■ Le frazioni equivalenti

Utilizzando la definizione, stabilisci se le seguenti coppie di frazioni sono fra loro equivalenti.

8 $\frac{4}{5}, \frac{8}{10}; \quad \frac{6}{2}, \frac{10}{4}; \quad \frac{0}{15}, \frac{2}{30}.$

9 $\frac{12}{3}, \frac{4}{1}; \quad \frac{1}{8}, \frac{2}{9}; \quad \frac{0}{20}, \frac{0}{40}.$

COMPLETA, se possibile, le seguenti uguaglianze, utilizzando la definizione di frazioni equivalenti.

10 $\frac{3}{4} = \frac{\dots}{8}; \quad \frac{6}{15} = \frac{\dots}{14}; \quad \frac{10}{21} = \frac{\dots}{3}.$

11 $\frac{20}{22} = \frac{\dots}{11}; \quad \frac{2}{5} = \frac{5}{\dots}; \quad \frac{1}{4} = \frac{0}{\dots}.$

■ Applicazioni della proprietà invariantiva

ESERCIZIO GUIDA

12 Cerchiamo, se è possibile, una frazione equivalente a una data e avente un certo denominatore.

a) Scriviamo la frazione equivalente a $\frac{3}{7}$ con denominatore 14.

b) Scriviamo la frazione equivalente a $\frac{3}{5}$ con denominatore 12.

a) $\frac{3}{7} \sim \frac{\dots}{14}.$

Il numero 14 si ottiene da 7 moltiplicando per 2 (infatti $14 : 7 = 2$). Applichiamo la proprietà inva-

riantiva delle frazioni, moltiplicando numeratore e denominatore per 2:

$$\frac{3}{7} \sim \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}.$$

b) $\frac{3}{5} \sim \frac{\dots}{12}.$

Non è possibile ottenere la frazione equivalente a $\frac{3}{5}$, perché 12 non è multiplo di 5.

Applicando la proprietà invariantiva delle frazioni scrivi, quando è possibile, le frazioni equivalenti alle seguenti, in modo che abbiano, nell'ordine, denominatori 9, 10, 12, 14, 15, 18, 21, 35, 60, 84.

13 $\frac{1}{5}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{5}{7}.$

14 $\frac{3}{4}, \quad \frac{2}{9}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{6}{11}.$

COMPLETA trasformando il numero dato nelle frazioni indicate.

15 $6 = \frac{\dots}{2} = \frac{\dots}{3} = \frac{\dots}{5} = \frac{\dots}{6}$

16 $1 = \frac{\dots}{2} = \frac{\dots}{3} = \frac{\dots}{4} = \frac{\dots}{10}$

17 Scrivi tre frazioni equivalenti a ciascuna delle seguenti.

$$\frac{7}{4}, \quad \frac{8}{10}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{0}{7}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{11}{12}.$$

18 Fra le seguenti frazioni, sottolinea quelle equivalenti a $\frac{2}{5}$.

$$\begin{array}{ccccc} \frac{4}{9}, & \frac{4}{10}, & \frac{4}{12}, & \frac{3}{6}, & \frac{10}{25}, \\ \frac{12}{30}, & \frac{20}{50}, & \frac{5}{2}, & \frac{16}{40}, & \frac{65}{20}, \\ \frac{202}{505}, & \frac{300}{750}, & \frac{1200}{3000}, & \frac{3000}{7500}. \end{array}$$

23 $\frac{9}{12}, \quad \frac{18}{24}, \quad \frac{3}{9}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{90}{120},$

$$\frac{180}{200}, \quad \frac{45}{60}, \quad \frac{45}{90}.$$

Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni, qualora non lo siano già.

24 $\frac{12}{25}, \quad \frac{15}{18}, \quad \frac{12}{27}, \quad \frac{9}{16}.$

25 $\frac{24}{26}, \quad \frac{60}{15}, \quad \frac{20}{8}, \quad \frac{63}{21}.$

26 $\frac{200}{120}, \quad \frac{150}{180}, \quad \frac{441}{112}, \quad \frac{3036}{1515}.$

27 $\frac{336}{42}, \quad \frac{900}{495}, \quad \frac{84}{294}, \quad \frac{510}{68}.$

28 $\frac{2^2 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 5^2}, \quad \frac{9 \cdot 16}{3^3 \cdot 2^5}, \quad \frac{2^4 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 2^3}, \quad \frac{5^3 \cdot 7}{25 \cdot 7^4}.$

■ La riduzione di frazioni a denominatore comune

Riduci le frazioni di ognuno dei seguenti gruppi al minimo comune denominatore.

29 $\frac{7}{2}, \quad \frac{3}{5}; \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{5}; \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{1}{4}.$

30 $\frac{7}{15}, \quad \frac{1}{30}, \quad \frac{3}{10}; \quad \frac{4}{6}, \quad \frac{9}{10}, \quad \frac{11}{30}.$

31 $\frac{1}{2}, \quad \frac{5}{6}, \quad 3, \quad \frac{3}{8}; \quad \frac{1}{27}, \quad \frac{4}{81}, \quad \frac{2}{9}, \quad \frac{8}{3};$
 $12, \quad \frac{0}{3}, \quad 1, \quad \frac{4}{25}, \quad \frac{3}{7}, \quad 2, \quad \frac{21}{49}.$

32 Semplifica le frazioni dei tre gruppi seguenti e poi trova il loro minimo comune denominatore.

$$\frac{3}{21}, \quad \frac{5}{20}, \quad \frac{2}{42};$$

$$\frac{4}{30}, \quad \frac{20}{24}, \quad \frac{25}{60};$$

$$\frac{8}{20}, \quad \frac{9}{30}, \quad \frac{15}{90}.$$

■ La semplificazione di frazioni

Cancella le frazioni che non sono equivalenti alla prima; fra quelle rimaste, cerchia la frazione ridotta ai minimi termini.

19 $\frac{4}{10}, \quad \frac{2}{9}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{6}{10}, \quad \frac{6}{15}, \quad \frac{16}{20},$
 $\frac{16}{21}, \quad \frac{16}{40}, \quad \frac{15}{35}.$

20 $\frac{30}{70}, \quad \frac{15}{35}, \quad \frac{15}{30}, \quad \frac{10}{7}, \quad \frac{3}{7}, \quad \frac{7}{3},$
 $\frac{6}{14}, \quad \frac{7}{14}, \quad \frac{31}{71}.$

21 $\frac{80}{12}, \quad \frac{21}{4}, \quad \frac{40}{6}, \quad \frac{60}{9}, \quad \frac{60}{27}, \quad \frac{10}{15},$
 $\frac{20}{3}, \quad \frac{100}{15}, \quad \frac{120}{20}.$

22 $\frac{5}{30}, \quad \frac{10}{15}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{2}{12}, \quad \frac{6}{31},$
 $\frac{20}{120}, \quad \frac{8}{90}, \quad \frac{9}{34}.$

I numeri razionali

33 VERO O FALSO?

a) I numeri razionali si ottengono utilizzando tutte le coppie ordinate di numeri interi.

b) Nell'insieme \mathbb{Q} le frazioni con denominatore 1 corrispondono ai numeri naturali.

c) Il numero $\frac{2}{5}$ rappresenta anche le frazioni $\frac{4}{10}$ e $\frac{6}{15}$.

COMPLETA trasformando il numero intero dato nelle frazioni indicate.

34 $-1 = \frac{\dots}{5} = \frac{\dots}{-6} = \frac{\dots}{8} = \frac{\dots}{-25}$

35 $-2 = \frac{\dots}{12} = \frac{\dots}{16} = \frac{\dots}{-18} = \frac{\dots}{-25}$

36 $8 = \frac{\dots}{2} = \frac{\dots}{-4} = \frac{\dots}{8} = \frac{\dots}{20}$

37 Per ognuno dei seguenti numeri, indica se appartiene a \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} .

$$-5, -\frac{3}{4}, +\frac{1}{5}, 10, 0, -1.$$

38 Suddividi le seguenti frazioni in insiemi, in modo che ogni insieme individui la classe di frazioni che corrisponde a un certo numero razionale. Per ogni insieme, indica di quale numero razionale si tratta utilizzando la frazione ridotta ai minimi termini.

$$\begin{aligned} & \frac{3}{9}, \frac{14}{12}, -\frac{30}{8}, \frac{5}{9}, -\frac{4}{10}, \frac{15}{-4}, -\frac{4}{4}, \frac{35}{63}, -\frac{16}{16}, \frac{1}{3}, -\frac{8}{20}, \frac{6}{18}, \frac{10}{18}, \frac{-8}{8}, \frac{8}{24}, \\ & \frac{-40}{100}, \frac{7}{6}, \frac{2}{-5}, \frac{22}{-22}, \frac{20}{36}. \end{aligned}$$

2. Il confronto tra numeri razionali

→ Teoria a pag. 83

RIFLETTI SULLA TEORIA

39 VERO O FALSO?

a) $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

b) $\frac{4}{12} > \frac{1}{3}$

c) $\frac{7}{14} > \frac{1}{2}$

d) Tra due frazioni con lo stesso numeratore, è maggiore quella che ha il denominatore minore.

40 Solo in una delle seguenti relazioni il segno di confronto è errato. Quale? Perché?

$$\frac{5}{6} > \frac{4}{15},$$

$$-\frac{1}{2} > -\frac{1}{3},$$

$$\frac{2}{9} < \frac{7}{12},$$

ESERCIZI

Confronta le seguenti coppie di frazioni mediante i prodotti in croce.

41

$$\frac{5}{7}, \frac{2}{8};$$

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5};$$

$$\frac{5}{6}, \frac{3}{4}.$$

42

$$\frac{3}{8}, \frac{2}{7};$$

$$\frac{11}{12}, \frac{6}{7};$$

$$\frac{8}{9}, \frac{14}{15}.$$

43

$$-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4};$$

$$-\frac{2}{5}, -\frac{7}{8};$$

$$-\frac{8}{9}, -\frac{3}{8}.$$

COMPLETA inserendo uno dei simboli $<$, $>$, $=$.

44

$$\frac{7}{4} \dots \frac{5}{3}; \quad \frac{3}{7} \dots \frac{5}{8}; \quad \frac{11}{4} \dots \frac{17}{6};$$

$$\frac{5}{14} \dots \frac{13}{20}.$$

45

$$-\frac{7}{8} \dots -\frac{5}{6}; \quad -\frac{8}{15} \dots -\frac{11}{20};$$

$$\frac{7}{9} \dots \frac{29}{33}.$$

Scrivi le frazioni dei seguenti insiemi come frazioni aventi lo stesso denominatore, e indica la maggiore.

46

$$\frac{5}{4}, \quad \frac{11}{12}, \quad \frac{7}{6}.$$

47 $-\frac{3}{10}, \quad -\frac{7}{25}, \quad -\frac{5}{6}.$

Scrivi in ordine crescente le seguenti frazioni.

48

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{4}{8}, \quad \frac{8}{3}, \quad \frac{7}{7}, \quad \frac{15}{4}.$$

49

$$-\frac{1}{3}, \quad +\frac{11}{6}, \quad -\frac{9}{8}, \quad +\frac{3}{2}, \quad -\frac{6}{5}, \quad +\frac{4}{3}.$$

Scrivi in ordine decrescente le seguenti frazioni.

50

$$-2, \quad +\frac{1}{3}, \quad -5, \quad -\frac{2}{7}, \quad -\frac{15}{8}, \quad +\frac{2}{7}.$$

51

$$-\frac{1}{4}, \quad -\frac{2}{3}, \quad +\frac{3}{4}, \quad +\frac{4}{5}, \quad -\frac{2}{5}, \quad +\frac{5}{3}.$$

52

Determina tre frazioni che siano comprese fra le seguenti coppie.

53

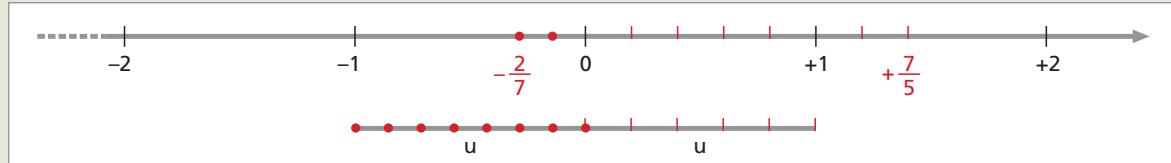
Determina fra quali numeri interi è compresa ognuna delle seguenti frazioni.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{36}{7}, -\frac{43}{8}, -\frac{7}{9}, -\frac{26}{5}, -\frac{47}{5}.$$

■ La rappresentazione dei numeri razionali su una retta

■ ESERCIZIO GUIDA

54 Rappresentiamo su una retta orientata le due frazioni $\frac{7}{5}$ e $-\frac{2}{7}$.



Fissiamo sulla retta orientata i punti corrispondenti a $-2, -1, 0, +1, +2$, scegliendo il segmento unitario piuttosto grande. Per rappresentare $\frac{7}{5}$ dobbiamo dividere il segmento unitario in 5 parti uguali e, partendo da 0, percorrere verso destra la retta, fermandoci dopo 7 passi (ciascun passo è lungo $\frac{1}{5}$ del segmento unitario). Per rappresentare la frazione $-\frac{2}{7}$, dividiamo il segmento unitario in 7 parti uguali e procediamo verso sinistra, fermandoci dopo 2 passi (ciascun passo è lungo $\frac{1}{7}$ del segmento unitario).

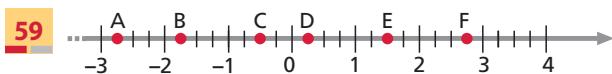
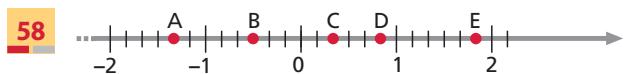
Rappresenta su una retta orientata le seguenti frazioni, indicando per ogni frazione se è propria, impropria o apparente.

55 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{8}{5}, \frac{7}{8}.$

56 $-\frac{5}{6}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{8}{9}, \frac{3}{3}, \frac{9}{5}.$

57 $-\frac{4}{3}, +\frac{5}{2}, -\frac{11}{6}, -\frac{7}{2}, +\frac{7}{6}, +\frac{5}{4}.$

Determina i numeri razionali rappresentati dai punti segnati sulla retta orientata della figura.



3. Le operazioni in \mathbb{Q}

→ Teoria a pag. 85

RIFLETTI SULLA TEORIA

VERO O FALSO?

a) $\frac{p}{r} + \frac{q}{s} = \frac{p+q}{rs}.$

b) $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r}.$

c) $\frac{p}{r} - \frac{q}{s} = \frac{ps - qr}{rs}.$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}.$

61 Considera le seguenti frazioni:

$$\frac{1}{3}, \frac{0}{4}, 2.$$

Solo di una di esse non esiste il reciproco. Quale?

62

Fra le seguenti disuguaglianze individua quelle vere e quelle false senza svolgere i calcoli. Verifica poi le tue risposte eseguendo le operazioni.

$$7 : \frac{1}{4} > 6 : 4, \quad 4 + \frac{1}{3} > 3 + \frac{1}{4},$$

$$10 \cdot \frac{1}{3} > 10 \cdot \frac{1}{2}, \quad 6 \cdot \frac{1}{3} < 9 \cdot \frac{2}{3}.$$

VERO O FALSO?

a) Se il prodotto fra due numeri è 1, i due numeri sono sempre uno reciproco dell'altro.

b) Se un numero è negativo, il suo reciproco è positivo.

c) Il prodotto dei reciproci di due numeri è uguale al reciproco del prodotto.

d) Se $a < b$, il reciproco di a è minore del reciproco di b .

e) Dato un qualsiasi numero razionale, esiste sempre il suo reciproco.

f) Il quoziente di un numero e del suo reciproco è 1.

g) Il quoziente di un numero e del suo opposto è 1.

h) Il prodotto di una frazione per il reciproco di una sua frazione equivalente è uguale a 1.

ESERCIZI**L'addizione e la sottrazione****ESERCIZIO GUIDA**

64 Calcoliamo: a) $+\frac{7}{2} - \frac{3}{5}$; b) $3 - \frac{4}{5}$.

- a) Determiniamo il m.c.m.(2, 5) = 10. Applichiamo la proprietà invariantiva:

$$\frac{7}{2} = \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{35}{10}; \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}.$$

Sommiamo le frazioni con lo stesso denominatore:

$$\frac{35}{10} - \frac{6}{10} = \frac{29}{10}.$$

In forma abbreviata:

$$+\frac{7}{2} - \frac{3}{5} = \frac{35 - 6}{10} = \frac{29}{10}.$$

- b) Scriviamo 3 come frazione di denominatore 5:

$$\frac{3}{1} = \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 5} = \frac{15}{5}.$$

Sommiamo le frazioni con lo stesso denominatore:

$$\frac{15}{5} - \frac{4}{5} = \frac{11}{5}.$$

In forma abbreviata:

$$3 - \frac{4}{5} = \frac{3}{1} - \frac{4}{5} = \frac{15 - 4}{5} = \frac{11}{5}.$$

Calcola le seguenti somme algebriche.

65 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} + \frac{7}{2}$

66 $\frac{4}{5} + \frac{6}{5} - \frac{20}{5}$

67 $-\frac{1}{12} - \frac{3}{12} - \frac{7}{12} + \frac{23}{12}$

68 $-\frac{2}{3} - \frac{5}{3} + \frac{2}{3} + \frac{5}{3}$

69 $\frac{1}{2} - \frac{3}{5}; \quad \frac{1}{5} + \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{6} - \frac{1}{2}; \quad \frac{3}{8} - \frac{1}{4}.$

70 $\frac{2}{3} - \frac{3}{2}; \quad -\frac{5}{4} - \frac{4}{5}; \quad -\frac{4}{5} + \frac{5}{4}; \quad \frac{7}{8} - \frac{1}{2}.$

71 $4 - \frac{1}{3}; \quad \frac{4}{5} + 5; \quad 1 - \frac{1}{2}; \quad \frac{3}{2} + 1.$

72 $-5 - \frac{7}{8}; \quad 9 + \frac{1}{6}; \quad 2 - \frac{1}{4}; \quad 2 + \frac{1}{4}.$

73 $\frac{2}{3} + \frac{1}{8} - 1; \quad 1 + \frac{3}{5} - \frac{6}{7}; \quad \frac{3}{4} - 4 + \frac{1}{2}; \quad \frac{4}{5} + \frac{1}{3} - 2.$

74 $-\frac{8}{3} + 5 - \frac{2}{5}; \quad \frac{5}{2} + 3 - \frac{3}{8}; \quad 12 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}; \quad 13 + \frac{1}{2} - 9.$

75 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 1; \quad \frac{2}{5} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 6; \quad \frac{4}{3} - \frac{3}{4} + 2 - \frac{1}{2}; \quad \frac{2}{5} - \frac{3}{2} + \frac{7}{10} - 1.$

76

COMPLETA la seguente tabella.

a	$+\frac{3}{4}$	$+\frac{2}{7}$	$-\frac{7}{3}$	0	$+\frac{8}{7}$	$+2$
b		$+\frac{4}{5}$	0			$+\frac{3}{9}$
$a+b$	$+1$	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{14}{3}$	$+2$		$+\frac{2}{3}$
$-a+b$	0	$\frac{2}{11}$	$-\frac{12}{13}$		$+\frac{1}{5}$	$+1$

■ Le espressioni contenenti somme algebriche

Nel sito: ▶ 11 esercizi di recupero



ESERCIZIO GUIDA

77 Calcoliamo: $2 + \left[1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + 2 \right) - \frac{1}{2} \right] - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) =$

Sviluppiamo i calcoli dentro le parentesi tonde:

$$= 2 + \left[1 - \left(\frac{3-4+12}{6} \right) - \frac{1}{2} \right] - \left(\frac{3-4}{12} \right) =$$

$$= 2 + \left[1 - \left(\frac{11}{6} \right) - \frac{1}{2} \right] - \left(\frac{-1}{12} \right) =$$

Eliminiamo le parentesi tonde, facendo attenzione se sono precedute o no dal segno $-$:

$$= 2 + \left[1 - \frac{11}{6} - \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{12} =$$

Sviluppiamo i calcoli dentro le parentesi quadre:

$$= 2 + \left[\frac{6-11-3}{6} \right] + \frac{1}{12} =$$

$$= 2 + \left[-\frac{8}{6} \right] + \frac{1}{12} =$$

$$= 2 - \frac{8}{6} + \frac{1}{12} =$$

$$= \frac{24-16+1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}.$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

78 $3 - \frac{1}{2} + \left[\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{5} - \frac{6}{10} \right) \right] - 1; \quad -1 + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \right) \right] + 2. \quad \left[\frac{37}{20}; \frac{22}{15} \right]$

79 $\frac{1}{10} - \frac{3}{5} + \left[\frac{5}{2} - \left(6 - 7 - \frac{2}{10} \right) \right] - \left(\frac{6}{5} + 3 \right); \quad \frac{5}{4} - \frac{2}{3} + \left[7 - 4 + \frac{5}{2} + \frac{1}{12} - \left(6 - 2 + \frac{1}{6} \right) \right]. \quad [-1; 2]$

80 $-(1+2) - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{5}{2} - \frac{4}{3} \right) - \left[\frac{1}{6} + \left(-\frac{5}{4} - \frac{1}{3} \right) - 1 \right] \quad [0]$

81 $\frac{1}{9} - \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{6} \right) + \frac{2}{3} + \left[\frac{1}{9} - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{9} - \frac{1}{6} \right) + \frac{5}{3} \right] \quad \left[-\frac{2}{3} \right]$

- 82** $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left[\left(-\frac{1}{15} + \frac{5}{6}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)\right]$ [0]
- 83** $-2 - \frac{11}{30} - \left[1 - \left(1 + \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)\right] - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$ [-1]
- 84** $-2 - \left(-1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{8}{11} - \left[-\frac{3}{11} - \frac{1}{3} - \left(\frac{4}{5} - \frac{7}{15}\right)\right]$ [1]
- 85** $7 - \left[\left(3 + \frac{1}{5} - \frac{3}{4} - 2\right) - \left(\frac{2}{5} - 6 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{6}{5} - \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{20}\right)$ [2]
- 86** $\frac{1}{9} - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{8} - \frac{23}{9}\right) - \left[\frac{3}{8} + \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2}\right) - \frac{1}{6}\right] + \frac{4}{9}$ [0]
- 87** $4 - \left[2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right) - \left(-4 + \frac{1}{5}\right)\right] + \left[7 - \left(6 + \frac{1}{15}\right) - \frac{2}{5}\right]$ $\left[-\frac{8}{5}\right]$

■ La moltiplicazione

■ ESERCIZIO GUIDA

88 Calcoliamo: a) $\frac{12}{25} \cdot \frac{10}{9}$; b) $3 \cdot \frac{2}{5}$.

$$\text{a) } \frac{12}{25} \cdot \frac{10}{9} = \frac{\cancel{12} \cdot \cancel{10}}{\cancel{25} \cdot \cancel{9}} = \frac{12 \cdot 10}{25 \cdot 9} = \frac{120}{225} = \frac{\cancel{12} \cdot \cancel{5}}{\cancel{25} \cdot \cancel{9}} = \frac{8}{15}.$$

applichiamo la definizioneriduciamo ai minimi termini la frazione ottenuta

Per evitare di scrivere un passaggio, si possono anche «semplificare» i fattori al numeratore e denominatore, dividendoli per uno stesso numero:

$$\frac{\cancel{12}^4 \cdot \cancel{10}^2}{\cancel{25}^5 \cdot \cancel{9}^3} = \frac{8}{15} \quad (\text{abbiamo diviso per 3 il 12 e il 9 e per 5 il 10 e il 25}).$$

$$\text{b) } 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}. \quad \text{Oppure, più brevemente: } 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5}.$$

Calcola i seguenti prodotti.

89 $\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8}; \quad \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{25}{7}; \quad \frac{12}{3} \cdot \left(-\frac{21}{35}\right); \quad \left(-\frac{27}{26}\right) \cdot \left(-\frac{39}{8}\right); \quad \frac{22}{33} \cdot \frac{3}{2}.$

90 $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{10}{2}; \quad \left(-\frac{100}{7}\right) \cdot \left(-\frac{14}{1000}\right); \quad \left(-\frac{15}{4}\right) \cdot \left(\frac{-3}{20}\right); \quad \left(\frac{-1}{4}\right) \cdot \left(\frac{8}{-7}\right).$

91 $-\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{2}{6}\right); \quad \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{10}{4}; \quad \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{10}{8}\right) \cdot \frac{25}{6}; \quad \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot \left(-\frac{9}{12}\right) \cdot \left(-\frac{36}{5}\right).$

92 $(-1) \cdot \frac{3}{2}; \quad 5 \cdot \frac{3}{7}; \quad 7 \cdot \frac{5}{25}; \quad -3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right); \quad -9 \cdot \left(\frac{9}{81}\right).$

93 $\frac{5}{6} \cdot (-7); \quad \frac{2}{33} \cdot 11; \quad \frac{5}{10} \cdot (-2); \quad \frac{21}{7} \cdot (-3); \quad -\frac{3}{18} \cdot 2.$

94 $\frac{10}{169} \cdot \left(-\frac{6}{5}\right) \cdot (+13); \quad (-27) \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right); \quad \left(-\frac{8}{25}\right) \cdot (-3) \cdot \left(-\frac{125}{6}\right).$

95 Qual è il numero razionale che, moltiplicato per $\left(5 + \frac{7}{9}\right)$, dà come risultato $\left(5 - \frac{2}{3}\right)$? $\left[\frac{3}{4}\right]$

96 COMPLETA la seguente tabella.

a	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	-1	1
b		1	$\frac{2}{3}$		0		$\frac{4}{9}$
$a \cdot b$	1	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	0	-1	$\frac{2}{3}$

■ Esercizi con somme algebriche e moltiplicazioni

■ ESERCIZIO GUIDA

97 Calcoliamo il valore della seguente espressione:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left[\left(\frac{7}{24} + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{7}{25}\right) - 1 \right] =$$

Svolgiamo i calcoli dentro le parentesi tonde:

$$= \left(\frac{2-1}{2}\right) - \left[\left(\frac{7+18}{24}\right) \cdot \left(\frac{5+7}{25}\right) - 1 \right] = \left(\frac{1}{2}\right) - \left[\left(\frac{25}{24}\right) \cdot \left(\frac{12}{25}\right) - 1 \right] =$$

Eseguiamo prima la moltiplicazione:

$$= \frac{1}{2} - \left[\cancel{\frac{25}{24}}^{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{\frac{12}{25}}^{\frac{1}{1}} - 1 \right] = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2} - 1 \right] = \frac{1}{2} - \left[\frac{1-2}{2} \right] = \frac{1}{2} - \left[-\frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

98 $-\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{2} + 1\right); \quad \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{6}\right); \quad \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{13} + 3\right). \quad \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{18}; \frac{37}{12}\right]$

99 $-\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right); \quad \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\right); \quad \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{7}{2} + 1\right). \quad \left[\frac{3}{4}; -\frac{9}{5}; -1\right]$

100 $\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\right); \quad \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{7} - 4\right); \quad \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{15}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right). \quad \left[\frac{2}{9}; -\frac{9}{2}; 1\right]$

101 $\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{5} - 2\right); \quad \left(\frac{2}{3} + 1\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{5}\right); \quad \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{12}{11} - 3\right).$ $\left[\frac{1}{2}; 3; 1\right]$

102 $\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{4}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right); \quad \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{7} - 5\right); \quad \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{4}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{2}\right).$ $\left[-\frac{13}{8}; -1; -\frac{5}{4}\right]$

103 $\left(\frac{1}{2} + \frac{8}{3} - \frac{7}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{5} - \frac{3}{2}\right) - \frac{7}{3} + \frac{11}{3}; \quad -\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{5} - 1\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{8} - 2\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right).$ $[0; -1]$

104 $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} - 3\right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + 7; \quad -3 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{2} \left(-2 - \frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right).$ $\left[\frac{22}{3}; -\frac{5}{6}\right]$

105 $\left[\frac{3}{2} \cdot \frac{10}{9} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{3}{2}\right] + \left(\frac{2}{3} - 4 - \frac{1}{30}\right)$ $[-1]$

106 $\left\{ \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{12}{11} - 3\right) \right] \cdot \frac{16}{5} \right\} + \frac{2}{7} - \frac{3}{35}$ $\left[-\frac{3}{5}\right]$

107 $\left\{ \left[\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{7} - 4\right) \right] \cdot \frac{16}{3} \right\} - \left(\frac{1}{12} + \frac{31}{4}\right)$ $\left[\frac{115}{18}\right]$

Per ogni numero, scrivi il suo reciproco.

108 $-4, \quad +6, \quad -2, \quad +1, \quad -11.$ **109** $-\frac{5}{4}, \quad +\frac{6}{7}, \quad -\frac{1}{5}, \quad -\frac{3}{11}, \quad +\frac{1}{8}.$

110 Scrivi il reciproco del valore delle seguenti espressioni.

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4}; \quad \frac{4}{3} - \frac{1}{5}; \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{3}{2}.$$
 $\left[-4; \frac{15}{17}; -\frac{3}{2}\right]$

■ La divisione

Calcola i seguenti quozienti.

111 $\frac{2}{4} : \frac{1}{2}; \quad -\frac{4}{5} : \left(-\frac{12}{25}\right); \quad \frac{4}{9} : \left(-\frac{8}{27}\right); \quad -\frac{6}{5} : \frac{36}{35}.$

112 $3 : \left(-\frac{4}{3}\right); \quad -\frac{2}{5} : 4; \quad -\frac{5}{6} : (-30); \quad \frac{1}{2} : (-2).$

113 $(-3) : 2; \quad 2 : (-3); \quad 5 : (-1); \quad (-1) : (-5).$

114 $1 : (-6); \quad \frac{3}{4} : (+2); \quad 2 : \left(+\frac{3}{4}\right); \quad -\frac{6}{5} : \left(-\frac{6}{5}\right).$

115 $\frac{3}{2} : \left(+\frac{2}{3}\right); \quad \left(+\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right); \quad \frac{1}{2} : (-1); \quad 1 : \frac{1}{2}.$

116 $1 : \frac{1}{3}; \quad 1 : \frac{1}{4}; \quad 1 : \frac{2}{3}; \quad 1 : \left(-\frac{5}{4}\right).$

117 COMPLETA la seguente tabella.

a	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{5}{4}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{7}$
b	$\frac{2}{3}$		2	$-\frac{3}{7}$	$\frac{7}{3}$		$-\frac{3}{4}$	
$a : b$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$			$-\frac{4}{3}$	
$b : a$		1				3	$\frac{9}{25}$	$\frac{7}{16}$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

118 $\left(-2 + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{5} + 1\right); \quad \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{9}{2} - \frac{14}{3}\right). \quad \left[-\frac{25}{18}; -\frac{13}{2}\right]$

119 $\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{2}\right) : \left(3 - \frac{7}{2}\right); \quad \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) : \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right). \quad \left[\frac{11}{5}; \frac{7}{3}\right]$

120 $\left(3 - \frac{3}{11}\right) : \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{11}\right); \quad \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{3}{5} - 2\right). \quad \left[\frac{12}{5}; \frac{1}{3}\right]$

121 $\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{6}\right) : \left(\frac{11}{18} - 1\right); \quad \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\right) : \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right). \quad [-3; 15]$

122 $(-5) \cdot (-8) : (+3); \quad (-5) : (-3) \cdot (-8). \quad \left[+\frac{40}{3}; -\frac{40}{3}\right]$

123 $(+7) : (+3) \cdot (-5); \quad (+7) : [(+3) \cdot (-5)]. \quad \left[-\frac{35}{3}; -\frac{7}{15}\right]$

124 $(-225) : (-15) : (+2) \cdot (+5); \quad (-225) : (-15) : [(+2) \cdot (+5)]. \quad \left[+\frac{75}{2}; +\frac{3}{2}\right]$

125 $-\frac{21}{5} : \frac{9}{25} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) : \frac{5}{8}; \quad \frac{1}{9} : \left(1 - \frac{2}{27}\right) - \frac{1}{5} : 5. \quad \left[-11; \frac{2}{25}\right]$

126 COMPLETA la seguente tabella.

a	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
b		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
c	3		-2	$\frac{1}{2}$
$a : b : c$		$\frac{1}{6}$		
$a : (b : c)$				
$a : b \cdot c$		$-\frac{3}{8}$		
$a : (b \cdot c)$			-4	
$a : c \cdot b$			4	
$a : (c \cdot b)$				
$a \cdot c : b$			$-\frac{15}{2}$	

Espressioni con le quattro operazioni

Nel sito: ▶ 12 esercizi di recupero



VERO O FALSO?

- 127** a) $\frac{b \cdot a}{a \cdot c} = \frac{b}{c}$
- b) $\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}$
- c) $\frac{a + b}{b + c} = \frac{a}{c}$
- d) $\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$
- e) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$
- 128** a) $\frac{a + b}{c + d} = \frac{a}{c} + \frac{b}{d}$
- b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$
- c) $a : b : c = a : (b : c)$
- d) $a : b \cdot c = a : (b \cdot c)$
- e) $(a \cdot b) : c = a \cdot (b : c)$
- f) $a \cdot b : c = (a : c) \cdot b$

ESERCIZIO GUIDA

129 Calcoliamo il valore della seguente espressione:

$$\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) : \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3} \right] \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{2} \right) =$$

Svolgiamo i calcoli dentro le parentesi tonde:

$$= \left[\left(\frac{2-9}{6} \right) : \left(\frac{1-4}{6} \right) + \frac{2}{3} \right] \cdot \left(\frac{1-15}{6} \right) =$$

$$= \left[-\frac{7}{6} : \left(-\frac{\cancel{3}}{\cancel{6}} \right) + \frac{2}{3} \right] \cdot \left(-\frac{\cancel{14}}{\cancel{6}} \right) =$$

$$= \left[-\frac{7}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} \right] \cdot \left(-\frac{7}{3} \right) =$$

Svolgiamo i calcoli dentro le parentesi quadre:

$$= \left[+\frac{7}{3} + \frac{2}{3} \right] \cdot \left(-\frac{7}{3} \right) =$$

$$= \frac{3}{\cancel{7}} \cdot \left(-\frac{7}{3} \right) = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \left(-\frac{7}{\cancel{3}} \right) = -7.$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

130 $\left[\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5} \right) : \left(3 - \frac{1}{7} \right) \right] \cdot \left[\left(\frac{25}{28} \cdot \frac{7}{2} \right) : \frac{1}{8} \right] \quad \left[-\frac{1}{2} \right]$ **132** $\left[\left(\frac{1}{6} - 4 \right) : \left(\frac{2}{3} - 2 \right) \right] \cdot \left[\frac{4}{23} : \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5} \right) \right]$ [5]

131 $\left[\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{5} \right) : \left(\frac{2}{3} - 1 \right) \right] : \left[\left(\frac{1}{10} : \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} \right] \quad \left[\frac{21}{2} \right]$ **133** $\left[\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{4} \right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4} \right) \right] : \left[\frac{4}{9} : \left(\frac{2}{3} - 2 \right) \right] \quad \left[\frac{8}{3} \right]$

134 $\left[\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2} \right) : \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3} \right) \right] \cdot \left[\left(\frac{1}{6} : \frac{1}{3} \right) : \left(-\frac{3}{2} \right) \right] \quad \left[-\frac{1}{15} \right]$

135 $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \left[\frac{4}{3} - \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{15} \right) + \frac{1}{3} \right] - \frac{4}{3} \cdot \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \right] : \frac{13}{5} - \frac{4}{5} \quad \left[-\frac{10}{9} \right]$

136 $\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \left(1 + \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{12}{5} \right] \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{9} : \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{27} \quad \left[\frac{5}{9} \right]$

137 $\left\{ \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{7} \right) : \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{3} \right] : 2 \right\} \cdot \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + 1 \quad \left[\frac{1}{3} \right]$

138 $\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5} \right) \cdot \frac{3}{7} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right) \right] + \left[\frac{4}{3} - \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{3} \right) \right] : \frac{3}{20} + \frac{9}{15} \quad \left[\frac{14}{3} \right]$

139 $\left\{ \left[\left(3 - \frac{13}{11} \right) : \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{11} \right) \right] - \frac{3}{5} \right\} \cdot \frac{8}{3} - \left(\frac{4}{3} : \frac{1}{3} - 4 + \frac{16}{5} \right) \quad \left[-\frac{8}{15} \right]$

140 $\left\{ \left[\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{4} \right) \cdot \left(-\frac{2}{13} + 3 \right) - \frac{30}{12} \right] : \frac{7}{4} - \frac{2}{3} \right\} \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{5} + 1 \quad \left[\frac{2}{5} \right]$

141 $\left\{ \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right] - \frac{1}{5} \cdot \left[15 \cdot \left(2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{5}{3} \right] \right\} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + 4 \quad \left[-\frac{7}{12} \right]$

142 $\left\{ \left[-\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{2} + 1 \right) + \frac{3}{2} \right] : \frac{5}{4} + \left(3 - \frac{2}{3} \right) \cdot \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{7} \right) \right\} : \frac{4}{3} - \frac{1}{12} \quad \left[-\frac{1}{3} \right]$

143 $\left\{ \left[\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{3} \right] : \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \right\} \cdot 2 - \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{10} - \frac{27}{5} \right) \quad [5]$

144 $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \left[\frac{2}{4} - \frac{1}{3} - \left(1 + \frac{4}{5} \right) : \frac{1}{5} \right] - \left[\frac{1}{7} + \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{14} + 1 \right) \right] \cdot \frac{7}{11} + 8 \quad \left[-\frac{1}{6} \right]$

Frazioni a termini frazionari

145 Trasforma le seguenti frazioni in divisioni e risolvi.

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{6}{25}}, \quad \frac{\frac{3}{9}}{\frac{10}{16}}, \quad \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{3}{16}}, \quad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{4}}.$$

146 Trasforma le seguenti divisioni in frazioni.

$$\frac{\frac{9}{5}}{3}, \quad \frac{\frac{16}{7}}{\frac{4}{49}}, \quad (-2) : \frac{8}{9}, \\ \left(-\frac{5}{36} \right) : \frac{1}{6}.$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

$$\begin{array}{ll} \text{147} \quad \frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{16}}{2 - \frac{1}{8}}; & \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}. \end{array} \quad \left[\frac{1}{30}; -\frac{1}{4} \right] \quad \text{148} \quad \frac{(-4) \cdot \left(-\frac{3}{8} \right)}{5} ; \quad \frac{2 - \frac{1}{3}}{5 \cdot \left(-\frac{5}{9} \right)} \cdot \left[\frac{36}{5}; -\frac{3}{5} \right]$$

$$\text{149} \quad \frac{\frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{4}{5} + \frac{1}{2} \right)}{\frac{1}{14} - \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{4} \right)} \cdot \left(\frac{5}{9} - 1 \right); \quad \frac{-\left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right)}{-\frac{3}{5} - \left(-\frac{2}{3} \right)} + \frac{\frac{5}{6} + \left(-\frac{1}{3} \right)}{-\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}. \quad \left[\frac{8}{5}; -\frac{5}{2} \right]$$

$$\text{150} \quad \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{-\frac{3}{2} - \left(-\frac{2}{3} \right)} + \frac{\frac{2}{3} - \left(+\frac{1}{3} \right)}{\left(-\frac{1}{9} \right) \cdot 3 - \frac{2}{3} : (-4)} \quad \left[-\frac{9}{5} \right]$$

$$\text{151} \quad \frac{\left(\frac{1}{7} - 1 \right) \cdot \left(-\frac{2}{3} + \frac{5}{4} \right)}{-\frac{11}{12} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4}} + \frac{\frac{2}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{3}{2} + \frac{4}{9}} : \frac{\frac{1}{10} - \frac{2}{21}}{1 - \frac{7}{9}} \quad [-4]$$

■ La potenza

152 Senza eseguire il calcolo, indica il segno del risultato delle seguenti potenze.

$$(-2)^4, \quad -2^4, \quad \left(-\frac{7}{2} \right)^3, \quad -7^3, \quad -(-7)^3, \quad -\left(\frac{4}{3} \right)^0, \quad \left(-\frac{1}{4} \right)^0.$$

COMPLETA

$$\text{153} \quad \left(-\frac{3}{5} \right)^2 = \dots, \quad -\left(-\frac{3}{2} \right)^4 = \dots \frac{\dots}{\dots}, \quad \left(\dots \frac{\dots}{\dots} \right)^3 = -\frac{125}{8}, \quad \left(-\frac{1}{2} \right)^{\dots} = \dots \frac{1}{64}.$$

$$\text{154} \quad \left(\frac{200}{53} \right)^0 = \dots, \quad \left(\frac{625}{27} \right)^{\dots} = 1, \quad -\left(\frac{2}{7} \right)^{\dots} = -1, \quad \left(\frac{4}{3} \right)^0 = \dots, \quad -\left(-\frac{5}{7} \right)^0 = \dots.$$

Calcola il valore delle seguenti potenze.

$$\text{155} \quad \left(\frac{1}{2} \right)^2; \quad \left(-\frac{2}{3} \right)^2; \quad \left(-\frac{5}{6} \right)^2; \quad \left(-\frac{2}{5} \right)^3. \quad \text{157} \quad \left(1 - \frac{1}{2} \right)^3; \quad \left(-1 - \frac{3}{2} \right)^3; \quad \left(\frac{4}{5} - \frac{5}{4} \right)^2.$$

$$\text{156} \quad \left(\frac{1}{2} \right)^3; \quad \left(-\frac{12}{6} \right)^2; \quad \left(-\frac{4}{10} \right)^3; \quad \left(-\frac{2}{6} \right)^4. \quad \text{158} \quad \left(\frac{5}{4} - \frac{4}{5} \right)^2; \quad \left(-\frac{7}{8} + 2 \right)^3; \quad \left(-\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \right)^3.$$

159 Quale delle seguenti espressioni vale -1 ?

$$\left(-\frac{2}{5} \right)^0; \quad -\left(\frac{2}{5} \right)^1; \quad -\frac{2^0}{5}; \quad -\frac{2}{5^0}; \quad -\left(\frac{2}{5} \right)^0.$$

Indica quali proprietà delle potenze sono state applicate in ciascuna delle seguenti uguaglianze.

160 $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)^7 = -\frac{2^7}{3^7}; \quad \left(-\frac{4}{5}\right)^6 : \left(-\frac{4}{5}\right)^4 = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = +\frac{4^2}{5^2}.$

161 $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = +\frac{1}{2^6}; \quad \left[\left(+\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (+7)\right]^2 = \left(+\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \cdot (+7)^2.$

162 $\left[(-3)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(+\frac{5}{2}\right)\right]^3 = (-3)^9 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(+\frac{5}{2}\right)^3; \quad \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^5}{\left(-\frac{3}{4}\right)^6} = \left(-\frac{3}{4}\right)^4.$

163 $\left[\left(+\frac{5}{6}\right)^8 : \left(+\frac{5}{6}\right)^6\right]^2 \cdot \left(+\frac{5}{6}\right) = \left(+\frac{5}{6}\right)^{16} : \left(+\frac{5}{6}\right)^{12} \cdot \left(+\frac{5}{6}\right) = \left(+\frac{5}{6}\right)^5$

164 $\left(-\frac{5}{8}\right)^4 \cdot \left(+\frac{16}{25}\right)^4 : \left(-\frac{12}{5}\right)^4 = \left[\left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \left(+\frac{16}{25}\right) \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)\right]^4 = \left(+\frac{1}{6}\right)^4$

165 CACCIA ALL'ERRORE Trova l'errore commesso in ognuna delle seguenti espressioni.

a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(+\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(+\frac{1}{3}\right)^6$

b) $(+6)^2 \cdot (-6)^5 = (+6)^2 \cdot (+6)^5 = (+6)^7$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\left(-\frac{3}{2}\right)^5 \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\left(-\frac{3}{2}\right)^8 = +\left(\frac{3}{2}\right)^8$

d) $\left[-\left(-\frac{2}{5}\right)^2\right]^3 : \left(+\frac{2}{5}\right) = \left(+\frac{2}{5}\right)^6 : \left(+\frac{2}{5}\right) = \left(+\frac{2}{5}\right)^5$

e) $[-(-2)^3]^3 : (-2)^2 = (+2)^9 : (-2)^2 = (-2)^9 : (-2)^2 = (-2)^7$

166 ASSOCIA a ogni espressione il proprio risultato.

1. $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(+\frac{1}{2}\right)^2 \quad$ 2. $\left(+\frac{1}{2}\right)^7 : \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \quad$ 3. $\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 \quad$ 4. $\left[-\left(+\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$

A. $-\frac{1}{64}$

B. $-\frac{1}{32}$

C. $+\frac{1}{64}$

D. $+ \frac{1}{32}$

■ Espressioni e proprietà delle potenze

Nel sito: ► 11 esercizi di recupero



ESERCIZIO GUIDA

167 Calcoliamo, applicando le proprietà delle potenze, il valore della seguente espressione:

$$\left\{ \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^3 \right]^2 : \left(\frac{5}{2} \right)^{10} \right\} : \left(-\frac{1}{5} \right)^6 \cdot 10^4 =$$

Applichiamo la proprietà del prodotto di potenze di uguale base:

$$= \left\{ \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^5 \right]^2 : \left(\frac{5}{2} \right)^{10} \right\} : \left(-\frac{1}{5} \right)^6 \cdot 10^4 =$$

Applichiamo la proprietà della potenza di una potenza:

$$= \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^{10} : \left(\frac{5}{2} \right)^{10} \right] : \left(-\frac{1}{5} \right)^6 \cdot 10^4 =$$

Applichiamo la proprietà del quoziente di potenze di uguale esponente e calcoliamo il quoziente delle basi:

$$= \left(-\frac{1}{2} : \frac{5}{2} \right)^{10} : \left(-\frac{1}{5} \right)^6 \cdot 10^4 =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \right)^{10} : \left(-\frac{1}{5} \right)^6 \cdot 10^4 = \\ = \left(-\frac{1}{5} \right)^{10} : \left(-\frac{1}{5} \right)^6 \cdot 10^4 =$$

Applichiamo la proprietà del quoziente di potenze di uguale base:

$$= \left(-\frac{1}{5} \right)^4 \cdot 10^4 =$$

Applichiamo la proprietà del prodotto di potenze di uguale esponente:

$$= \left(-\frac{1}{5} \cdot 10 \right)^4 = (-2)^4 = 16.$$

Calcola, applicando le proprietà delle potenze, il valore delle seguenti espressioni.

168 $\left[\left(-\frac{1}{4} \right)^3 : \left(-\frac{1}{4} \right) \right]^2$

$$\left[\frac{1}{256} \right]$$

173 $\left[\left(\frac{4}{3} \right)^2 \right]^3 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^6 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^6$

[1]

169 $\left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{8} \right)^2 \right]^2 \cdot (-2)^4$

$$\left[\frac{1}{16} \right]$$

174 $\left[\left(\frac{4}{5} \right)^2 \cdot \left(-\frac{4}{5} \right)^3 \right]^2 : \left(-\frac{4}{5} \right)^8$

$$\left[\frac{16}{25} \right]$$

170 $\left[\left(-\frac{1}{25} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{25} \right)^3 \right] \cdot \left(\frac{25}{3} \right)^5$

$$\left[\frac{1}{243} \right]$$

175 $\left\{ \left[\left(\frac{1}{2} \right)^4 \right]^3 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{12} \right\} : \left(-\frac{1}{3} \right)^{10}$

$$\left[\frac{1}{9} \right]$$

171 $\left[\left(\frac{2}{15} \right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right)^3 \right]^2 \cdot 5^6$

[1]

176 $\left\{ \left(-\frac{1}{2} \right)^3 \cdot \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^3 \right]^2 \right\} : \left(-\frac{1}{2} \right)^7$

$$\left[\frac{1}{4} \right]$$

172 $\left[\left(-\frac{1}{2} \right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{7} \right)^3 \right] : \left(\frac{5}{7} \right)^3$

$$\left[\frac{1}{125} \right]$$

177 $\left\{ \left[\frac{16}{81} : \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right]^3 \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^6 \right\}^2 : \left(\frac{5}{3} \right)^{10}$

$$\left[\frac{25}{9} \right]$$

178 $\left[\left(-\frac{3}{5} \right)^4 \cdot \left(+\frac{5}{9} \right)^4 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^7 \right] : \left[\left(-\frac{1}{3} \right)^5 \right]^2$

$$\left[-\frac{1}{3} \right]$$

179 $\left\{ \left[\left(\frac{125}{27} \right)^2 \cdot \left(\frac{4}{25} \right)^3 \right]^4 : \left[\left(\frac{1}{9} \cdot 4 \right) \cdot \frac{2}{3} \right]^5 \right\} : \left(\frac{2}{3} \right)^8$

$$\left[\frac{2}{3} \right]$$

180 $\left\{ \left[\left(\frac{1}{4} \right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^2 \right]^3 : \left[\left(-\frac{1}{5} \right)^2 \right]^3 \right\} \cdot \left[\left(\frac{2}{3} \right)^6 : \left(-\frac{1}{3} \right)^6 \right]$

[1]

181 $\left\{ \left[\left(\frac{1}{4} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^3 \right]^2 \cdot \left(-\frac{4}{5} \right)^{10} \right\} : \left[\left(\frac{3}{25} \right)^5 \cdot \frac{1}{3^3} \right]$

$$\left[\frac{1}{9} \right]$$



■ Expressioni con i razionali

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

■ ESERCIZIO GUIDA

- 182** Calcoliamo il valore della seguente espressione:

$$\left\{ \left(\frac{7}{11} \right)^2 \cdot \left(-\frac{11}{14} \right)^2 - \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] \right\} : \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} - \frac{5}{9} \right] =$$

Prima di calcolare le potenze, controlliamo se ci sono moltiplicazioni e divisioni di potenze che hanno la stessa base o lo stesso esponente. Nella prima moltiplicazione applichiamo la proprietà del prodotto di potenze con lo stesso esponente:

$$\begin{aligned} &= \left\{ \left[\frac{1}{\cancel{11}} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{14}} \right) \right]^2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} \right) \right\} : \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{3} - \frac{5}{9} \right) = \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{9+4}{36} \right) \right] : \left(\frac{4+3-5}{9} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{13}{36} \right) : \frac{2}{9} = \left(\frac{9-13}{36} \right) : \frac{2}{9} = - \frac{\cancel{4}}{\cancel{36}} \cdot \frac{\cancel{9}}{2} = - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

183 $\left[\left(-\frac{1}{4} \right)^6 : \left(-\frac{1}{2} \right)^6 \right] : \left(\frac{1}{2} \right)^4 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \quad \left[\frac{1}{2} \right]$

184 $\left(-\frac{2}{3} \right)^3 - \left(-\frac{2}{3} \right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right)^4 : \left(-\frac{2}{3} \right)^3 + \left(-\frac{2}{3} \right)^0 \quad [1]$

185 $-\frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \cdot \frac{13}{6} + \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right)^3 : \left(1 + \frac{1}{2} \right)^3 \right] + \frac{1}{9} \quad [1]$

186 $\left(\frac{7}{4} \right)^3 : \left[\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{5} \right) \cdot \frac{15}{8} \right] - \frac{17}{16} \quad [2]$

187 $\left[\left(1 + \frac{1}{2} \right)^3 \cdot \left(2 - \frac{1}{2} \right)^5 \right]^2 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^2 : \left[\left(-\frac{3}{2} \right)^8 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^7 \right] \quad \left[\frac{27}{8} \right]$

188 $\left(-\frac{3}{5} \right)^8 : \left(1 - \frac{2}{5} \right)^5 \cdot \left[\left(2 + \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{5}{2} \right] - 1 \quad \left[\frac{19}{8} \right]$

189 $\left(2 - \frac{14}{9} \right)^2 : \left(-\frac{2}{3} \right)^2 - \left(2 - \frac{5}{3} \right)^4 : \frac{1}{27} - \frac{2}{9} \quad \left[-\frac{1}{9} \right]$

190 $\left[\left(3 + \frac{2}{5} \right) : \left(2 + \frac{1}{8} \right) \right] \cdot \frac{5}{2^2} - \left[-\left(-\frac{2}{3} \right)^3 : \left(\frac{2}{3} \right) \right] + \left(-\frac{2}{3} \right)^6 : \left(\frac{2}{3} \right)^4 \quad [2]$

191 $-2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{12} + \left[\left(\frac{2}{3} : \frac{4}{15} \right)^3 : \frac{75}{28} \right] \quad [2]$

192 $\left[\left(\frac{5}{4} + \frac{9}{10} - \frac{5}{3} \right) : \frac{58}{45} \right]^2 : \left(-\frac{3}{4} \right)^2 + \frac{1}{2} - 2 \quad \left[-\frac{5}{4} \right]$

- 193** $\left\{ \frac{1}{3} + \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^4 \right]^2 : \left(-\frac{2}{3} \right)^{10} \right\} \cdot \left(\frac{3}{7^2} \right) + \frac{1}{4} - \frac{2}{3}$ $\left[-\frac{31}{84} \right]$
- 194** $\left[\left(1 - \frac{1}{2} \right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{3} - 5 \right) + \frac{1}{6} \right]^3 + \left[\left(\frac{2}{9} - \frac{1}{15} + \frac{7}{5} \right) : \frac{56}{33} \right] \cdot (-3^2) - \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(4 + \frac{2}{3} : \frac{4}{9} \right)$ BRAVI SI DIVENTA ▶ E04 
- 195** $\left(1 - \frac{1}{4} \right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left[\left(\frac{7}{2} \right)^2 \cdot \left(-3 - \frac{1}{2} \right)^3 : \left(-1 - \frac{5}{2} \right)^4 + 1 \right]$ $\left[-\frac{9}{4} \right]$
- 196** $\left[\left(\frac{2}{35} - \frac{1}{5} \right) : \left(\frac{1}{7} - 1 \right) \right] : \left[\frac{2}{3} : \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \right) \right] \cdot \left(-\frac{1}{10} \right)^0 - \left(-\frac{1}{2} \right)^4$ $\left[\frac{3}{8} \right]$
- 197** $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(1 + \frac{4}{5} \right) : \frac{1}{5} \right] - \left[\frac{1}{7} + \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{14} + 1 \right) \right] \cdot \frac{7}{11} - (-2^3)$ $\left[-\frac{1}{6} \right]$
- 198** $\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5} \right) \cdot \frac{3}{7} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right) \right] + \left[\frac{4}{3} - \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{3} \right) \right] : \frac{3}{20} + \frac{9}{15}$ $\left[\frac{14}{3} \right]$
- 199** $\left\{ -\frac{4}{9} + \frac{8}{3} \cdot \left[\left(1 + \frac{2}{3} - \frac{5}{12} \right) - 1 \right] \right\} : \left[-1 + \left(-2 + \frac{4}{3} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \right]$ $\left[-\frac{1}{3} \right]$
- 200** $\left[\left(\frac{7}{3} + \frac{5}{12} \right) : \left(\frac{13}{2} + \frac{1}{10} \right) \right] \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^2 - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1$ $\left[-\frac{7}{15} \right]$
- 201** $(-2 + 5)^3 : (5 - 2)^2 - \left(2 + \frac{3}{2} \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{3}{4} + 2 - \frac{13}{7} \right) \right] + \frac{3}{4}$ $\left[\frac{27}{8} \right]$
- 202** $\left\{ \left[\left(3 - \frac{13}{11} \right) : \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{11} \right) \right] - \frac{3}{5} \right\} \cdot \frac{8}{3} - \left[\frac{4}{3} : \frac{1}{3} - 4 + \frac{(-2)^4}{5} \right]$ $\left[-\frac{8}{15} \right]$
- 203** $\left\{ \left[\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{4} \right) \cdot \left(-\frac{2}{13} + 3 \right) - \frac{30}{12} \right] : \frac{7}{4} - \frac{2}{3} \right\} \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{5} + \frac{9^3}{36} \cdot \frac{3^4}{4}$ $\left[\frac{2}{5} \right]$
- 204** $\left(-1 + \frac{4}{5} - \frac{7}{5} \right)^2 \cdot \left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \right) : 10 + \frac{1}{25} + \frac{1}{50} \right] : \left[\left(\frac{3}{5} \right) \cdot (-1) \right]^2 \right\} + \frac{2}{5}$ $\left[\frac{22}{15} \right]$
- 205** $\left[\left(1 - \frac{5}{4} \right)^3 : \left(1 + \frac{1}{8} - \frac{7}{4} \right) - 1 + \frac{3}{5} \right]^2 : \left[\left(-\frac{6}{5} \right) : \left(\frac{8}{5} \right) \right]^3 + 1$ $\left[\frac{2}{3} \right]$
- 206** $\left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 : \frac{3}{2} \right]^2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 \right)^2 \right\} : \left(\frac{19}{2^3} \right) + 1 - \frac{1}{4}$ $\left[\frac{9}{4} \right]$
- 207** $\left\{ \left[\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3} \right)^2 - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3} \right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] : \left(-\frac{17}{27} \right) + \frac{3}{4} \right\}^2 - \left(\frac{1}{32} \right)^3 : \left(\frac{1}{128} \right)^2 + \frac{1}{2}$ $\left[\frac{1}{16} \right]$
- 208** $\frac{\left[\left(2 - \frac{1}{2} \right) + \left(-2 + \frac{1}{3} \right) + \left(4 - \frac{1}{6} \right) - 1 \right] : 2^3 - \frac{4}{3}}{\left\{ \left[(-2)^2 + (-3)^3 - \left(\frac{12}{5} \right)^0 \right] \cdot \left(-\frac{1}{5} \right)^2 - \frac{1}{25} \right\} \cdot \frac{3}{4}}$ $\left[\frac{4}{3} \right]$
- 209** $\frac{\left(2 - \frac{3}{5} - \frac{33}{15} \right) + \left(1 + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} : 3 - 1 + \frac{1}{6} \right)^3 : \frac{5}{27}}{\left(1 - \frac{1}{4} \right) : \frac{3}{8} + \frac{25}{32} : \left(1 - \frac{1}{2} : 4 - \frac{3}{2} : 6 \right)^2}$ [3]

210 $\left\{ \left[-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{6} \right)^4 : \left(-\frac{1}{6} \right)^3 \right] : \left(\frac{17}{5} \right)^2 \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{5} + \left(1 + \frac{1}{5} \right)^2 \cdot \left[\left(-\frac{3}{5} + \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3} \right)^2 - 1 \right] \right\}$ $\left[\frac{1}{17} \right]$

211 $\frac{\left(-\frac{1}{2} \right)^4 : \left(+\frac{1}{2} \right)^2 + \left[\left(\frac{23}{30} - \frac{13}{18} \right) \cdot \left(\frac{23}{15} - \frac{1}{30} \right) \right] : \frac{3}{2} - \frac{5}{4}}{\left[\frac{13}{12} - \left(\frac{7}{9} - \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{9} \right] - \left(-\frac{7}{18} + \frac{1}{12} + \frac{5}{6} \right) - \frac{1}{3} + 1}$ $\left[-\frac{43}{45} \right]$

212 $\frac{\left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{2}{5} \right) \cdot \left(\frac{7}{2} - \frac{7}{3} + \frac{13}{12} \right) \cdot \frac{15}{2} - \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} \right) \cdot \left(1 + \frac{7}{2} - \frac{3}{4} \right) \right] \cdot \frac{15}{4}}{\left[\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \right) - \left(-\frac{4}{5} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) \right] \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{9} \right)}$ $\left[\frac{285}{28} \right]$

Dalle parole alle espressioni numeriche

Traduci in espressioni le seguenti frasi, poi calcolane il valore.

213 Moltiplica $\frac{2}{3}$ per la differenza tra $\frac{4}{5}$ e 1, sottrai poi 2 al risultato. $\left[-\frac{32}{15} \right]$

214 Moltiplica il quadrato dell'opposto di $\frac{4}{5}$ per la somma di $\frac{2}{3}$ e 1, poi sottrai al risultato $\frac{5}{3}$. $\left[-\frac{3}{5} \right]$

215 Moltiplica per $\frac{3}{10}$ il cubo dell'opposto di $\frac{2}{3}$, sottrai al risultato il prodotto della differenza tra $\frac{4}{5}$ e 1 per l'opposto di $\frac{5}{2}$. $\left[-\frac{53}{90} \right]$

216 Moltiplica per il quadrato dell'opposto di $\frac{1}{3}$ la differenza tra $\frac{1}{4}$ e il prodotto della somma di $\frac{1}{4}$ e di $\frac{2}{3}$ per $\frac{6}{5}$. $\left[-\frac{17}{180} \right]$

217 Moltiplica per il quadrato dell'opposto di $\frac{3}{2}$ la differenza tra 2 e il prodotto della somma dell'opposto di $\frac{2}{3}$ e 1 per l'opposto di $\frac{3}{5}$. $\left[\frac{99}{20} \right]$

218 Dividi per 2 il risultato della sottrazione di $\frac{4}{3}$ al quoziente tra 5 e la somma di $\frac{2}{3}$ e di 1. $\left[\frac{5}{6} \right]$

219 Sottrai $\frac{1}{4}$ al prodotto di 2 per il risultato della sottrazione di $\frac{3}{2}$ al quoziente tra $\frac{2}{3}$ e la somma di $\frac{1}{3}$ e di 1. $\left[-\frac{9}{4} \right]$

220 Moltiplica il cubo dell'opposto di $\frac{2}{3}$ per il risultato della sottrazione di 9 al prodotto di 9 per il quadrato della differenza tra $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$, sottrai poi al risultato 4. $\left[-\frac{67}{50} \right]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni assegnando alle lettere i valori indicati a fianco.

221 $(x+y)^2 - (x^2 + y^2)$	$x = \frac{1}{2}$	$y = -\frac{1}{3}$	$\left[-\frac{1}{3} \right]$
222 $\frac{a+b}{a^2 b^2} : \frac{a^2 - b^2}{a^2}$	$a = -1$	$b = \frac{1}{4}$	$\left[-\frac{64}{5} \right]$
223 $(2a+b) : (4a^2 - b^2)$	$a = \frac{3}{2}$	$b = -\frac{1}{2}$	$\left[\frac{2}{7} \right]$

224 $\left(a - \frac{1}{a}\right) \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{4a}{3}$

$$a = -\frac{3}{2}$$

$$\left[-\frac{65}{18} \right]$$

225 $\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x+1}$

$$x = -\frac{1}{4}$$

$$[-4]$$

226 $\frac{1}{y-2} + y + 2$

$$y = \frac{1}{3}$$

$$\left[\frac{26}{15} \right]$$

Dalle parole alle espressioni letterali

ESERCIZIO GUIDA

227 Traduciamo in espressione la frase: «Ai $\frac{2}{5}$ della differenza fra la metà di a e i $\frac{2}{3}$ di b , aggiungi la terza parte della somma fra il quadrato di a e i $\frac{3}{2}$ di b ».

Calcoliamo poi il valore dell'espressione per $a = -\frac{5}{2}$ e $b = -\frac{3}{2}$.

Eseguiamo la traduzione per gradi:

« $\frac{2}{5}$ della differenza fra...»	$\rightarrow \frac{2}{5} \cdot (\dots - \dots);$
«la metà di a »	$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot a;$
«i $\frac{2}{3}$ di b »	$\rightarrow \frac{2}{3} \cdot b;$
«aggiungi la terza parte della somma fra...»	$\rightarrow + \frac{1}{3} \cdot (\dots + \dots);$
«il quadrato di a »	$\rightarrow a^2;$
«i $\frac{3}{2}$ di b »	$\rightarrow \frac{3}{2} \cdot b.$

L'espressione è dunque la seguente:

$$\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(a^2 + \frac{3}{2}b \right).$$

Calcoliamo ora il valore dell'espressione per $a = -\frac{5}{2}$ e $b = -\frac{3}{2}$:

$$\frac{2}{5} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{5}{2} \right) - \frac{2}{3} \left(-\frac{3}{2} \right) \right] + \frac{1}{3} \left[\left(-\frac{5}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(-\frac{3}{2} \right) \right] = \dots$$

Lasciamo a te il compito di svolgere i calcoli. Il risultato è $\frac{37}{30}$.

Traduci in espressioni le seguenti frasi e calcola poi il loro valore, con i dati assegnati.

BRAVI SI DIVENTA ▶ E05



228 Moltiplica la somma del doppio di a e della terza parte di b per la differenza tra il doppio di a e la terza parte di b , sottrai poi al risultato la somma del quadruplo del quadrato di a e del doppio di c ;

$$a = 1, b = \frac{3}{2}, c = -2.$$

$$\left[\frac{15}{4} \right]$$

229 Moltiplica la differenza tra $\frac{4}{3}$ di a e b per il quadrato della somma di a e b e al risultato sottrai il quoziente tra il cubo di a e la differenza tra i quadrati di a e b ; $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$.

230 Sottrai $\frac{1}{8}$ di a ai $\frac{4}{5}$ di c , dividi poi il risultato per i $\frac{3}{8}$ del quadrato di b ; $a = 3$, $b = -\frac{1}{5}$, $c = \frac{1}{16}$. $[-\frac{65}{3}]$

231 Moltiplica la somma dei $\frac{2}{5}$ di b e a per la differenza tra la metà di b e c , somma poi al risultato il quoziente tra $\frac{1}{4}$ di a e la differenza tra i $\frac{2}{5}$ di b e 2; $a = 2$, $b = \frac{5}{2}$, $c = 1$. $[\frac{1}{4}]$

232 Calcola il quadrato della somma di 1 e del risultato della divisione della somma dei $\frac{2}{3}$ di b e di c per la differenza tra $\frac{1}{4}$ di a e b ; $a = 4$, $b = 6$, $c = -\frac{1}{3}$. $[\frac{16}{225}]$

233 Moltiplica la differenza tra i $\frac{2}{5}$ di a e la metà di b per il doppio di c , somma poi al risultato il quoziente tra $\frac{1}{4}$ di a e la differenza tra il doppio di b e 1; $a = \frac{5}{3}$, $b = 2$, $c = \frac{3}{4}$. $[-\frac{13}{36}]$

234 Sottrai i $\frac{4}{9}$ di a al quadrato della somma del doppio di c e del prodotto dei $\frac{3}{2}$ di b per la differenza tra i $\frac{2}{5}$ di c e a ; $a = 1$, $b = \frac{4}{9}$, $c = \frac{5}{6}$. $[\frac{85}{81}]$

235 Calcola il quadrato della somma di $2b$ e del risultato della divisione della somma dei $\frac{2}{3}$ di b e di $\frac{1}{5}$ di a per la differenza tra $\frac{1}{4}$ di c e a , sottrai poi al risultato i $\frac{3}{5}$ di a ; $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{3}{4}$, $c = 2$. $[-\frac{1}{2}]$

Problemi con le frazioni

236 Ho portato in banca i $\frac{5}{8}$ di una somma guadagnata e ho trattenuto il resto per spese immediate che ammontano a € 915. Quale somma avevo guadagnato? [€ 2440]

237 Paolo deve acquistare uno scooter che costa € 2760, ma possiede solo i $\frac{2}{3}$ della somma. Quanto manca per effettuare la spesa? [€ 920]

238 Un numero aumentato dei suoi $\frac{2}{7}$ dà come risultato 495. Qual è il numero? [385]

239 Prima di partire per un viaggio si fa il pieno di gasolio in un'automobile che ha un serbatoio della capacità di 64 l. Nella prima tappa del viaggio si consumano i $\frac{3}{8}$ del gasolio, nella seconda i $\frac{3}{4}$ del rimanente. Facendo una sosta al distributore vengono introdotti i $\frac{7}{9}$ del gasolio consumato. Quanto gasolio viene introdotto nella sosta? [42 l]

240 In un centro commerciale Andrea acquista un set di valigie che sono in sconto. Se spende € 123 e lo sconto è uguale ai $\frac{9}{50}$ del prezzo iniziale, quanto costavano le valigie? [€ 150]

241 Un triangolo con il perimetro di 27 cm ha un lato di 5 cm, mentre gli altri due sono uno i $\frac{5}{6}$ dell'altro. Quanto misurano i due lati? [10 cm; 12 cm]

242 Roberta compra un'automobile che costa € 16 500. Al momento dell'acquisto versa i $\frac{6}{11}$ del prezzo e il resto a rate mensili. Quanto deve versare ogni mese se vuole estinguere il pagamento in 30 rate? [€ 250]

243 Il 31 maggio Pietro dice a Tommaso di volerlo incontrare dopo i $\frac{7}{6}$ dei giorni del mese successivo. In che giorno si incontreranno i due amici? [5 luglio]

244 Anna si trova in una località di mare dove i $\frac{3}{4}$ della spiaggia, occupata dagli ombrelloni, hanno una larghezza di 60 m. Quanto è larga complessivamente la spiaggia? Il medico ha consigliato ad Anna di stare a 4 metri dalla riva; a quale frazione dell'intera spiaggia corrisponde tale distanza?

$$\left[80 \text{ m}; \frac{1}{20} \right]$$

245 L'intersezione degli insiemi A e B ha 48 elementi, che rappresentano sia i $\frac{3}{5}$ degli elementi di A sia i $\frac{4}{9}$ degli elementi di B . Quanti elementi ha ciascuno degli insiemi A e B ? [80; 108]

246 Moltiplicando una data frazione per $\frac{4}{3}$, aggiungendo al prodotto $\frac{1}{6}$ e dividendo la somma ottenuta per $\frac{25}{12}$, si ottiene $\frac{2}{5}$. Qual è la frazione?

$$\left[\frac{1}{2} \right]$$

Gli operatori relazionali e le leggi di monotonia

247 Applica la prima legge di monotonia alle seguenti uguaglianze e disuguaglianze.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} &= 1; & -\frac{2}{5} &< \frac{1}{2}; \\ \frac{3}{2} + 1 &= 6 - \frac{7}{2}; & \frac{4}{3} - \frac{2}{5} &> \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

248 Applica la seconda legge di monotonia alle uguaglianze e alle disuguaglianze precedenti, moltiplicando sia per un numero positivo che per un numero negativo.

Applica alle seguenti uguaglianze e disuguaglianze le leggi di cancellazione.

249 $\frac{9}{10} + \frac{4}{12} = \frac{2}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5};$
 $\frac{25}{30} - \frac{3}{4} < \frac{9}{2} - \frac{6}{8} - \frac{2}{3}.$

250 $\frac{6}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{15} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right);$
 $3 \cdot \left(-\frac{12}{3}\right) > (-4) \cdot \frac{11}{2}.$

251 $\frac{4}{3} - 2 = 1 - \frac{4}{2} + \frac{1}{3};$
 $\frac{9}{3} \cdot \frac{5}{6} < \frac{10}{3} \cdot 3.$

Per ognuna delle seguenti uguaglianze e disuguaglianze, scrivi la nuova relazione che ottieni, applicando una legge di monotonia o di cancellazione, trasformando entrambi i membri come è indicato a fianco. Specifica quale legge hai utilizzato. Verifica la validità della relazione ottenuta.

252 $\frac{5}{4} - \frac{1}{3} = \frac{11}{12}$, aggiungi $\frac{1}{3}$;
 $-\frac{1}{4} < -\frac{1}{5}$, moltiplica per $-\frac{1}{2}$.

254 $\frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2}$, aggiungi $-\frac{1}{2}$;
 $\frac{7}{4} < \frac{10}{3}$, dividi per -2 .

253 $\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{2}{3}$, dividi per $\frac{1}{9}$;
 $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, sottrai $-\frac{3}{2}$.

255 $6 - \frac{1}{4} < 7 - \frac{1}{4}$, aggiungi $\frac{1}{4}$;
 $5 + \frac{3}{5} > -2 - \frac{1}{2}$, aggiungi $-\frac{5}{7}$.

256

Per ognuna delle seguenti uguaglianze e disuguaglianze, applicando una delle leggi di monotonia, fai in modo che al primo membro rimanga una sola frazione.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}; \quad \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}; \quad \frac{1}{2} - 2 < \frac{3}{2}; \quad (-6) \cdot \frac{2}{9} > -\frac{5}{3}.$$

■ Applicazioni delle leggi di monotonia: come ricavare una variabile numerica

■ ESERCIZIO GUIDA

- 257** a) Nella formula $s = 2a + 3b$, ricaviamo b . b) Nella formula $v = \frac{s}{t}$, ricaviamo prima s e poi t .

a) Per ricavare b occorre «eliminare» tutto ciò che si trova nello stesso membro in cui si trova b , ossia $2a$ e il coefficiente 3 di b .

Eliminiamo $2a$ sottraendo dai due membri (prima legge di monotonia):

$$s - 2a = 2a + 3b - 2a \rightarrow s - 2a = 3b.$$

Per eliminare il fattore 3 basta dividere i due membri per 3 (seconda legge di monotonia):

$$\frac{s - 2a}{3} = \frac{3b}{3} \rightarrow \frac{s - 2a}{3} = b$$

oppure, leggendo da destra a sinistra: $b = \frac{s - 2a}{3}$.

b) Se si considera una frazione, risulta conveniente utilizzare la regola del prodotto in croce per avere un'uguaglianza scritta in forma intera (ponendo $t \neq 0$):

$$\frac{v}{1} = \frac{s}{t} \rightarrow vt = s.$$

In questo modo abbiamo già ricavato s : $s = vt$.

Ricaviamo t dividendo i membri di $vt = s$ per v (seconda legge di monotonia):

$$\frac{vt}{v} = \frac{s}{v} \rightarrow t = \frac{s}{v}.$$

Dalle seguenti formule ricava la lettera indicata fra parentesi.

258 $s = a + b, (a); \quad s = a + 2b, (a).$ **262** $y + 2 = 3x + 4, (x); \quad 2y + 6 = 8x + 10, (y).$

259 $y = 3x + 2, (x); \quad x = 2y + 1, (y).$ **263** $4y + 1 = 5x, (y); \quad 3x + 2y = 0, (y).$

260 $d = a - b, (a); \quad t = x - y, (y).$ **264** $ax = c, (x); \quad ax + b = c, (x).$

261 $3a - b = 9, (b); \quad 3c = a - b, (b).$ **265** $y - 1 = m(x + 3), (y); \quad y - 6 = m(x - 3), (m).$

266 $V = \frac{k}{p} \quad (k, p); \quad k = -\frac{F}{x} \quad (F, x); \quad s = \frac{1}{2}at^2 \quad (a); \quad y = \frac{3}{x} \quad (x).$

267 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (a, d); \quad \frac{a}{3} = \frac{6}{b} \quad (a, b); \quad \frac{2}{3}a = \frac{1}{5b} \quad (a, b); \quad a = \frac{b \cdot h}{2} \quad (b).$

4. Le potenze con esponente intero negativo

→ Teoria a pag. 89

RIFLETTI SULLA TEORIA

268 VERO O FALSO?

Indica se le seguenti uguaglianze, dove $a, b \neq 0$ e $m, n \in \mathbb{N}$, sono vere o false.

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

V F

b) $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}\right]^n = -\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m$

V F

c) $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^{-n} = \left[\left(\frac{b}{a}\right)^n\right]^m$

V F

d) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^n = 1$

V F

269 Considera le seguenti frazioni:

$$\frac{1}{5}, \frac{0}{2}, 2.$$

Solo di una di esse non è possibile calcolare la potenza a esponente -2 . Perché?

270 VERO O FALSO?

Si sa che:

- a è un numero intero positivo;
- b è un numero intero negativo;
- $|a| < |b|$.

Per ognuna delle seguenti affermazioni, stabilisci se è vera o falsa.

a) $\frac{a}{b}$ è un numero compreso fra -1 e 0 . V F

b) $\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}\right]^2$ è un numero maggiore di 1 . V F

c) $b - a$ è un numero positivo. V F

d) $-ab^2$ è un numero negativo. V F

e) $\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$ è un numero minore di -1 . V F

f) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$ è un numero compreso fra 0 e 1 . V F

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

271 Calcoliamo le seguenti potenze con esponente negativo.

a) $(-3)^{-2};$

b) $-3^{-2};$

c) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2};$

d) $\frac{3^{-2}}{5}.$

a) $(-3)^{-2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = +\frac{1}{9}.$

d) $\frac{3^{-2}}{5} =$

b) $-3^{-2} =$

In questo caso l'esponente riguarda solo il numeratore:

$$= -\left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{9}.$$

c) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}.$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{5} = \frac{\frac{1}{9}}{5} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{45}.$$

Calcola le seguenti potenze con esponente negativo.

272 $2^{-3}; \quad (-2)^{-3}; \quad 2^{-2}; \quad (-2)^{-2}; \quad -2^{-2}; \quad 2^{-1}.$

273 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}; \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}; \quad \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}; \quad -\frac{3^{-2}}{2}; \quad \frac{1^{-4}}{2}; \quad \frac{4}{3^{-2}}.$

274 $(-2)^{-1}; \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}; \quad \left(\frac{9}{5}\right)^{-1}; \quad \left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}; \quad (-1)^{-1}; \quad -\frac{5^{-1}}{6}.$

275 $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}; \quad \left(\frac{4}{7}\right)^{-2}; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}; \quad 3^{-3}; \quad 1^{-7}; \quad -1^{-7}.$

276 VERO O FALSO?

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -32$

V **F**

b) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]^{-2} = \left(+\frac{1}{3}\right)^{10}$

V **F**

c) $(-3)^3 \cdot (-3)^{-3} : (-3)^2 = (+3)^4$

V **F**

d) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(-\frac{5}{2}\right)^3$

V **F**

e) $\left(\frac{1}{4}\right)^6 : \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^4$

V **F**

f) $6^{-3} = \left(-\frac{1}{6}\right)^3$

V **F**

277 In ognuna delle seguenti formule determina quali valori di k (se esistono) soddisfano l'uguaglianza.

a) $3^{-3} = k; \quad \text{d)} \quad \left(\frac{1}{k}\right)^{-3} = \frac{1}{64};$

b) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-k} = 9; \quad \text{e)} \quad k^4 = -\frac{1}{16};$

c) $\left(\frac{k}{3}\right)^0 = 1; \quad \text{f)} \quad k^1 = 0.$

278 COMPLETA

$\left(\frac{7}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{\dots}{\dots}\right)^3; \quad 6^{-2} = \left(\frac{\dots}{\dots}\right)^2;$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\dots} = \frac{27}{8}; \quad 3^{\dots} = \frac{1}{81};$

$\left(-\frac{2}{7}\right)^{-4} = \left(\frac{7}{2}\right)^{\dots}; \quad \left(\frac{1}{\dots}\right)^3 = -1;$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{-\dots} = 25; \quad \frac{12}{\dots^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1};$

$\frac{4}{7} = \left(\frac{7}{2^{\dots}}\right)^{-1}; \quad \left(\frac{3}{5^2}\right)^{-2} = \frac{5^{\dots}}{\dots^2}.$

279 COMPLETA la seguente tabella.

a	a^{-2}	a^{-1}	$(-a)^{-2}$	$(-a)^{-1}$
$-\frac{1}{5}$				
$+\dots$	$\frac{4}{9}$			
			-1	
				-4

ESERCIZIO GUIDA

280 Calcoliamo il valore delle seguenti espressioni applicando le proprietà delle potenze.

• $2^7 \cdot 2^{-5} = 2^{7+(-5)} = 2^2;$

• $10^{-2} \cdot 2^{-2} = (10 \cdot 2)^{-2} = 20^{-2} = \frac{1}{20^2};$

• $2^7 : 2^{-5} = 2^{7-(-5)} = 2^{7+5} = 2^{12};$

• $10^{-2} : 2^{-2} = (10 : 2)^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2}.$

• $(2^7)^{-2} = 2^{7 \cdot (-2)} = 2^{-14} = \frac{1}{2^{14}};$

Calcola il valore delle seguenti espressioni applicando le proprietà delle potenze.

- 281** $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^4 \cdot 3^{-1}; \quad 2^{-5} : 2^{-3}; \quad 5^{-2} : 5^7 \cdot 5^{10}.$ $\left[1; \frac{1}{4}; 5 \right]$
- 282** $4^{-1} \cdot 5^{-1} \cdot (-2)^{-1}; \quad 8^{-2} : 4^{-2}; \quad [(-3)^2]^{-3}.$ $\left[-\frac{1}{40}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3^6} \right]$
- 283** $\left[\left(\frac{1}{5} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^3 \right]^2 \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^{-7}; \quad \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{-1} \right]^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^3.$ $\left[\frac{1}{125}; \frac{1}{3} \right]$
- 284** $[(2^2 \cdot 2^{-3})^{-1} \cdot 2^{-4}]^{-1} : 2^3; \quad \left[\left(\frac{5}{4} \right)^2 : \left(\frac{5}{4} \right)^{-3} \right]^{-2} \cdot \left(\frac{5}{4} \right)^8.$ $\left[1; \frac{16}{25} \right]$
- 285** $\left\{ \left[\left(\frac{3}{4} \right)^{-1} \right]^2 \cdot \left(\frac{2}{9} \right)^{-2} \right\} : \left(\frac{1}{6} \right)^{-3}; \quad \left\{ \left[\left(\frac{2}{5} \right)^2 : \left(\frac{2}{5} \right)^{-2} \right] \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^3 \right\}^{-1} : 5^4.$ $\left[\frac{1}{6}; \frac{125}{128} \right]$
- 286** $\left\{ \left[3^2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^3 \right]^{-1} \cdot 3^2 \right\} \cdot \left[\left(\frac{3}{2} \right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{-6} \right]; \quad \left\{ \left[\left(\frac{3}{5} \right)^2 : \left(\frac{3}{5} \right)^{-1} \right] : \left(\frac{3}{5} \right)^2 \right\}^{-1} : \left(\frac{15}{2} \right)^{-1}.$ $\left[8; \frac{25}{2} \right]$
- 287** $\left\{ \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 : \left(\frac{3}{2} \right)^3 \right]^{-2} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^2 \right\} : \left(\frac{2}{3} \right)^{-1}; \quad \left\{ \left[\left(-\frac{1}{4} \right)^{-2} : \left(-\frac{1}{4} \right)^3 : 16^2 \right]^2 \right\}^2 : (-4)^5.$ $\left[\frac{8}{27}; -\frac{1}{4} \right]$
- 288** $-(-3)^{-4} : 3^{-2} + 3^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^3; \quad \{[4 : (-2)^{-4} : (-8)]^2\}^3 : [(-16)^{-1}]^{-4}.$ $\left[-\frac{1}{9}; 4 \right]$
- 289** $\left\{ \left[\left(\frac{1}{4} \right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^3 \right]^{-1} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^4 \right\}^{-1} : \left[\left(\frac{1}{4} \right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^3 \right]^0$ [6]
- 290** $\left[\left(-\frac{3}{4} \right)^{-2} \right]^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^{-3} : \left(-\frac{3}{4} \right)^5 + \left[\left(-\frac{3}{4} \right)^5 : \left(\frac{4}{3} \right)^{-2} \right] \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{-3}$ $\left[-\frac{25}{16} \right]$
- 291** $\{[(3^5 \cdot 3)^{-2} : (3 \cdot 3^3)^{-1}] \cdot (3^{-2} \cdot 3^3) : 3^2\}^{-1} \cdot 3^{-2}$ [27]
- 292** $\left[\left(-\frac{7}{3} \right)^{-2} \right]^{-2} \cdot \left(\frac{7}{3} \right)^{-3} : \left(-\frac{7}{3} \right)^5 + \left(-\frac{49}{9} \right)^{-2}$ [0]
- 293** $\left\{ \left[2^3 : \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] : 2^3 \right\}^{-1} \cdot \left\{ \left[\left(-\frac{3}{2} \right)^4 : \left(+\frac{3}{2} \right)^2 \right] \left(\frac{8}{7} \right)^2 \right\}$ $\left[\frac{36}{49} \right]$
- 294** $\left(4 + \frac{1}{2} \right)^{-2} : \left(1 - \frac{1}{9} \right)^2 + (-2)^{-3} - \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^{-4} : \left(\frac{9}{4} \right)^{-2} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right)^7 - \frac{2^{-3}}{5} \right] - \left(-\frac{2}{5} \right)^{-2} \cdot 5^{-1}$ BRAVI SI DIVENTA ▶ E06 
- 295** $\left\{ \left[\left(\frac{1}{5} \right)^{-2} \cdot 5^3 \right]^{-1} \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^{-4} \right\}^2 : \left(\frac{2}{15} \right)^2; \quad \left\{ [(3^2)^{-1}]^2 : \left(\frac{1}{3} \right)^{-3} \right\}^{-1} \cdot \left[\left(\frac{2}{5} \right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^2 \right].$ $\left[\frac{9}{4}; 243 \right]$
- 296** $\left\{ \left[\left(2 - \frac{3}{2} + \frac{2}{5} \right) \cdot 10^{-1} + \frac{3}{50} \right] : \left(-\frac{5}{4} \right)^{-2} \right\} \cdot \left(2 + \frac{2}{5} - \frac{7}{2} - 1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{7}{5}$ $\left[\frac{41}{40} \right]$
- 297** $\left(2 - \frac{4}{5} \right)^2 : \left\{ \left[\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{12} - \frac{13}{12} \cdot \left(-\frac{5}{9} \right)^{-1} \right] \cdot \left[\frac{3^2}{6} - \frac{(1-5)^2}{6} + \frac{(-2)^2}{6} \right] \right\}$ $\left[-\frac{9}{10} \right]$
- 298** $\left\{ [(3^2 : 3^{-3})^2 : 3^8]^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{-1} \right\}^2 \cdot \left\{ \left[\left(\frac{2}{5} \right)^2 \cdot \left(\frac{15}{2} \right)^2 \right] : \left(\frac{5}{2} \right)^2 \right\}$ $\left[\frac{4}{25} \right]$

- 299** $\left[(-2)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^{-2} + \frac{1}{12} \right]^3 : \left\{ -\frac{1}{2} - \left[2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right) \right] \right\}^2 + \frac{4}{3}$ $\left[\frac{5}{3}\right]$
- 300** $\left(-\frac{5}{2} \right)^2 - \left\{ \left[\left(-\frac{2}{5} \right)^2 : \left(-\frac{2}{5} \right) + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right] : \left(1 - \frac{7}{10} \right) - 1 + \frac{1}{2} \right\}^2 \cdot \left(-\frac{5}{2} \right)^{-2} - 2$ $\left[\frac{409}{100}\right]$
- 301** $\left[\left(1 - \frac{1}{2} \right)^{-2} \left(2 - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-1} \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{-1} - 1 \cdot (-2)^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right)^{-2}$ $\left[-\frac{119}{108}\right]$
- 302** $\left(-\frac{3}{2} \right)^{-3} + \left\{ \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^3 : \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] : \left(1 - \frac{7}{6} \right) - 1 - \frac{1}{2} \right\}^3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{-3} + 1$ [1]
- 303** $\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{33} - \frac{1}{3} \right) \cdot \left\{ \left(-\frac{1}{3} \right)^{-2} - 15 - \left[2 + \left(-\frac{5}{3} \right)^{-1} : \left(1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{5} \right) \right] \right\} - 1$ [1]
- 304** $\left(1 - \frac{5}{6} + \frac{4}{3} \right) \cdot \left\{ \left(1 - \frac{4}{9} \right) : \left[2 - \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{11}{6} \right) \cdot \left(-\frac{13}{6} \right)^{-1} - 1 \right]^2 - \left(\frac{9}{23} \right)^{-1} \right\}^3 + \frac{1}{6}$ $\left[\frac{1}{9}\right]$
- 305** $\left[\left(\frac{9^3 \cdot 2^6}{18^4} - \frac{2}{3} \right)^3 \cdot \left(\frac{2}{9} \right)^2 \right]^{-3} \cdot \left(\frac{72^4}{9^8} \cdot \frac{2}{27^4 \cdot 9^5} \right)$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$
- 306** $\left[\frac{25^3}{75^2} - 2 \left(-\frac{5}{3} \right)^2 - \frac{7}{9} \right] + \left[\left(-\frac{8}{3} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{27} \right)^{-3} \right]^{-1} \cdot \left(-\frac{3}{2} \right)^{10}$ $\left[-\frac{20}{9}\right]$
- 307** $2 - \frac{5}{6} - \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^3 : \left(2 - \frac{4}{3} \right) \left(1 + \frac{2}{7} \right)}{\left(-\frac{1}{9} : \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) : \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} : \left(\frac{2}{3} \right)^{-2} + 1 \right]} + \frac{7}{6}$ [1]
- 308** $\frac{\left(-\frac{9}{7} \right)^3 \cdot \left(1 + \frac{2}{5} \right)^3 : \left(1 + \frac{4}{5} \right)^3}{3^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^{-2} + \left(+\frac{1}{2} \right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{5} \right)^3 : \left(-\frac{1}{5} \right)^2}$ $\left[-\frac{15}{2}\right]$

5. Le percentuali

→ Teoria a pag. 90

RIFLETTI SULLA TEORIA

309 VERO O FALSO?

a) 7% equivale alla frazione $\frac{7}{100}$.

b) $\frac{1}{3}$ equivale a 30%.

c) Nell'uguaglianza $\frac{1}{5} = \frac{20}{100}$ è stata applicata la prima legge di monotonia.

310 Se aumenti un numero del suo 5% e diminuisci il risultato del suo 5%, ottieni il numero iniziale?

ESERCIZI

Scrivi sotto forma di percentuali le seguenti frazioni.

311 $\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; \frac{1}{10}; \frac{1}{4}; \frac{1}{50}; \frac{1}{25}.$

312 $\frac{3}{2}; \frac{2}{5}; \frac{7}{10}; \frac{9}{4}; \frac{3}{50}; \frac{5}{25}.$

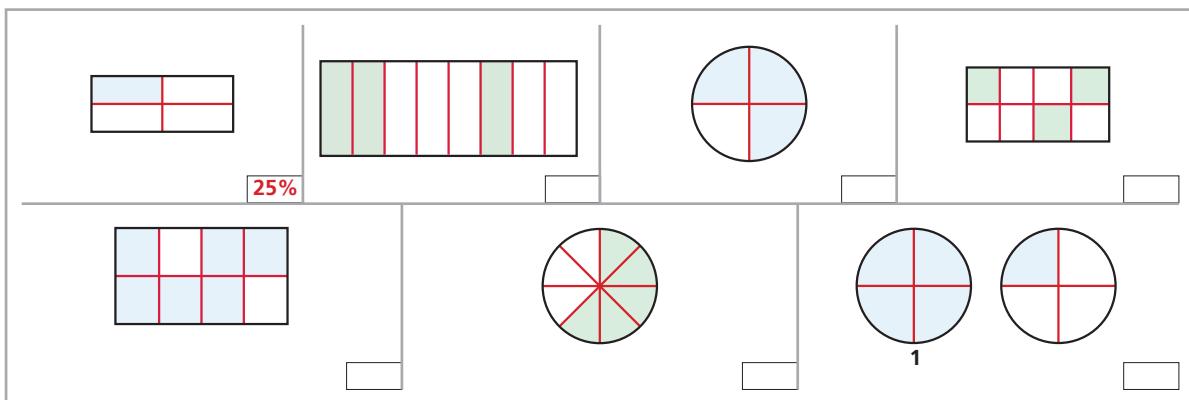
Scrivi sotto forma di frazioni ridotte ai minimi termini le seguenti percentuali.

313 50%; 90%; 2%; 40%; 20%.

314 15%; 10%; 1%; 2,5%; 1,50%.

315 4%; 25%; 150%; 200%; 250%.

316 COMPLETA scrivendo sotto ogni figura la percentuale che rappresenta la parte colorata.

**Calcolo di percentuali****ESERCIZIO GUIDA**

317 Calcoliamo il 15% di 1720.

Trasformiamo la percentuale 15% in una frazione ridotta ai minimi termini:

$$15\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}.$$

Per calcolare i $\frac{3}{20}$ di 1720 dobbiamo moltiplicare

la frazione per il numero:

$$\frac{3}{20} \cdot \frac{86}{1720} = \frac{3 \cdot 86}{20 \cdot 1720} = \frac{1}{1} = 258.$$

Il 15% di 1720 è il numero 258.

Calcola le seguenti percentuali.

318 15% di 62; 10% di 125;
30% di 200; 5% di 20.

319 15% di 160; 21% di 300;
20% di 60; 0,1% di 28.

320 12% di 150; 121% di 38;
3,5% di 10 000; 10% di 142,7.

321 Nella tua classe, qual è la percentuale rappresentata da un singolo studente?

322 Calcola la percentuale degli assenti della tua classe in un giorno della settimana. Calcola inoltre la percentuale dei presenti durante il compito di matematica.

323 Scrivi la percentuale dei tuoi compagni e compagnie di classe che hanno lo scooter.

■ Problemi con le percentuali

■ ESERCIZIO GUIDA

- 324** Sull'etichetta di una confezione di cioccolata da 600 g c'è scritto:

Ingredienti:
cacao 70%
latte in polvere 25%

- a) Qual è la percentuale degli ingredienti diversi dal cacao e dal latte?
 b) Quanti grammi di cacao contiene la confezione di cioccolata?
 c) Quanti grammi di latte in polvere?

- a) La somma di tutti gli ingredienti è il 100%.

Poiché il cacao e il latte sono in tutto il
 $70\% + 25\% = 95\%$, gli ingredienti non
 dichiarati sono il $100\% - 95\% = 5\%$.

- b) Trasformiamo la percentuale 70% in frazione:

$$70\% = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}.$$

Calcoliamo $\frac{7}{10}$ di 600 g:

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{60}{100} \text{ g} = 420 \text{ g}.$$

- c) Trasformiamo anche 25% in frazione:

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

Calcoliamo $\frac{1}{4}$ di 600 g:

$$\frac{1}{4} \cdot 600 \text{ g} = 150 \text{ g}.$$

Quindi, la cioccolata contiene 420 g di cacao e 150 g di latte in polvere.

Risovi i seguenti problemi.

BRAVI SI DIVENTA ▶ E07



- 325** Un blocco costituito da una lega di zinco e rame pesa complessivamente 2 kg. Si sa che in esso il 45% è costituito da zinco. Calcola quanto zinco e quanto rame sono stati necessari per produrlo.

[900 g; 1100 g]

- 326** Su un cartone di latte da 500 ml c'è scritto:
 «Latte parzialmente scremato. Grasso max 1,8%». Quanti ml di grasso contiene il cartone di latte? Se un bicchiere medio contiene 200 ml di latte, quanti ml di grasso contiene?

[9 ml; 3,6 ml]

- 327** In pizzeria, con gli amici, ricevi il seguente conto:
 «4 pizza: € 20. Bibite: € 5. 2 dessert: € 4.
 Servizio: 15% (sul totale)». Quanto dovete pagare in tutto?

[€ 33,35]

- 328** Una ditta produce cinture, di cui il 44% è in pelle. Fra quelle in pelle, il 75% è costituito da cinture nere. Su 800 cinture prodotte, quante sono in pelle nera? Se, invece, le cinture in pelle nera sono 594, quante cinture in totale ha prodotto la ditta?

- 329** Un paese contava 12 000 abitanti all'inizio del 2007. Durante l'anno i nati sono l'1,7% del totale degli abitanti e i morti sono il 2%. Calcola quanti sono i nati e quanti i morti nel 2007. Calcola inoltre qual è la popolazione all'inizio del 2008.

[204; 240; 11 964]

- 330** Due persone ereditano € 25 000. Una delle due ha diritto al 25% dell'eredità. A quale percentuale ha diritto la seconda persona? Qual è la somma ricevuta da ciascuna persona?

[75%; € 6250; € 18 750]

331 Due negozi espongono due articoli uguali. In uno l'articolo costa € 14,25, nell'altro costa € 16,95, ma il negozio pratica alla cassa uno sconto del 20%. Dove andresti a comprare l'articolo, per risparmiare? [nel secondo negozio]

332 Un rettangolo ha l'altezza lunga 14 cm; essa corrisponde al 70% della lunghezza della base. Calcola il perimetro e l'area del rettangolo.

[68 cm; 280 cm²]

333 Un libro oggi costa € 12,50. Se il suo prezzo viene aumentato del 3%, quanto costerà dopo l'aumento? [€ 12,88]

334 Un negoziante, rivendendo un cappotto che aveva acquistato per € 125, ha guadagnato € 26. Che percentuale di guadagno ha realizzato?

[20,8%]

335 In un anno € 30 000 producono in banca un interesse di € 650. Che tasso pratica la banca? Quanto potrei guadagnare in totale in un anno impiegando altri € 15 000? [2,17%; € 975]

336 Ho letto 320 pagine di un romanzo, pari all'80% del libro. Quante pagine mancano alla fine? [80]

337 Nella prima fase di un gioco a quiz undici concorrenti realizzano i seguenti punteggi.

Punteggi	100	110	120	140	160
n. concorrenti	2	4	1	3	1

Per poter passare alla fase successiva occorre un punteggio di almeno 120. Qual è la percentuale di candidati che supera la prima selezione?

[45,45%]

344 In una classe prima, gli studenti provengono da quattro comuni.

	COMUNE A	COMUNE B	COMUNE C	COMUNE D
Femmine	9	3	1	1
Maschi	7	3	2	2

Quale percentuale di studenti proviene dal comune A? E quale percentuale dal comune D? [57,14%; 10,7%]

338 Riscaldando una sbarra di alluminio, questa si allunga del 3% e raggiunge una lunghezza di 2,526 m. Quanto era lunga inizialmente la sbarra?

[2,5184 m]

339 In un'azienda il 15% del personale è costituito da impiegati, il 20% da tecnici specializzati e infine vi sono 273 operai. Quanti sono gli impiegati e quanti i tecnici?

[63; 84]

340 Il prezzo di vendita di un divano è di € 1625. Calcola quanto è costato al rivenditore sapendo che ha realizzato un utile del 28%. [€ 1269,53]

COMPLETA le tabelle degli esercizi seguenti.

341 In una fabbrica sono stati prodotti 800 scooter in quattro modelli.

TIPO DI SCOOTER	QUANTITÀ	PERCENTUALE
Alfabeta	...	25%
XY	120	...
Tuono	320	...
S50	160	...

342 Tre amici hanno totalizzato 12 000 punti in un videogioco.

NOME	PUNTI	PERCENTUALE
Luca	3360	...
Andrea	...	45%
Giorgio	3240	...

343 Quattro giocatori di pallacanestro hanno realizzato 50 punti in una partita.

GIOCATORE	PUNTI	PERCENTUALE
n. 1	...	40%
n. 2	5	...
n. 3	...	30%
n. 4	10	...

345

I 20 studenti di una classe hanno svolto un tema di italiano, scelto fra tre argomenti.

ARGOMENTO	N. DI TEMI SVOLTI	PERCENTUALE
Letteratura	5	...
Storia	2	...
Attualità	...	65%

346

In un sacchetto sono contenute delle palline numerate da 1 a 25. Calcola la probabilità, espressa in percentuale, che estraendo una pallina a caso si ottenga un numero:

- a) dispari;
 - b) pari;
 - c) multiplo di 5;
 - d) maggiore di 15 e multiplo di 3;
 - e) maggiore di 15 o multiplo di 3.
- [a) 52%; b) 48%; c) 20%; d) 12%; e) 60%]

347

Un lettore di musica seleziona i brani da un archivio così composto:

GENERE	Rock	Folk	Melodico
LINGUA			
Inglese	12	4	4
Italiano	6	4	4
Spagnolo	4	/	2

Calcola la probabilità che venga eseguito un brano:

- a) folk;
 - b) rock in inglese;
 - c) in inglese;
 - d) in inglese o in spagnolo;
 - e) melodico o rock in italiano.
- [a) 20%; b) 30%; c) 50%; d) 65%; e) 25%]

348

Un agronomo ha compiuto l'analisi di un terreno. Dal referto di laboratorio risulta che il campione era formato da: 50% sabbia; 20% limo; 19% argilla; 7% scheletro; il restante è formato da sostanze organiche. Sapendo che il campione esaminato era di 4,5 kg, determinare il peso delle varie parti.

[2250 g; 900 g; 855 g; 315 g; 180 g]

349

Un corpo di metallo è stato scaldato e la sua lunghezza è aumentata di 7 mm. Sapendo che l'allungamento equivale al 2% della lunghezza iniziale, calcola quest'ultima in centimetri.

[35 cm]

350

Dopo un anno dal ricevimento di un prestito Andrea è andato a pagare gli interessi che ammontano a € 615. Sapendo che essi costituiscono il 5% del prestito, calcola la somma che ha ricevuto un anno fa.

[€ 12 300]

351

Giovanna porta in banca € 36 000. Ne impiega $\frac{1}{3}$ al 2,1% annuo e il resto al 3%. Quale interesse potrà riscuotere in un anno?

[€ 972]

352

Sapendo che il latte contiene panna per circa l'11% del suo peso e che la panna produce burro per il 27% del suo peso, calcola quanti chilogrammi di burro si possono ricavare da 125 kg di latte.

[3,7125 kg]

353

Elisa investe nella sua banca € 27 000 con un guadagno netto dopo un anno di € 729. La sua amica Claudia le rivela che invece nella sua banca ha guadagnato € 1092 investendo € 42 000 per un anno. In quale banca è meglio investire?

[banca di Elisa]

354

Una coppia di sposi acquista un appartamento che costa € 140 000. Per pagarlo chiedono un prestito pari al 25% del prezzo di acquisto. Per la restituzione si impegnano a versare alla fine di ogni anno € 5000, pagando però un interesse del 6% sul debito di ogni anno. Calcola a quanto ammonta il prestito e quale cifra viene pagata alla fine del terzo anno.

[€ 35 000; € 6500]

355

Un ragazzo acquista uno scooter, il cui prezzo di listino è di € 1549. Per ottenere uno sconto, paga subito € 368,65 in contanti e si impegna a portare il resto in due assegni: il primo, dopo una settimana, di € 316 e il secondo, di importo doppio del primo, dopo due settimane. Quale sconto in percentuale ottiene?

[15%]

356

Chiedo a un'amica in prestito € 500 per un anno. Alla fine del periodo riscuoterà la cifra prestata maggiorata del 4%. Un amico è disponibile a prestarmi la stessa cifra chiedendomi alla fine la cifra, € 10,20 di spese e il 3% del capitale come interessi. Quale proposta è più conveniente? Qual è il vantaggio in percentuale?

[amica: € 520; amico: € 525,20; ≈ 1%]

6. Le frazioni e le proporzioni

→ Teoria a pag. 91

RIFLETTI SULLA TEORIA

357 VERO O FALSO?

- a) La proprietà fondamentale delle proporzioni discende dalla definizione di frazioni:

proprie.

V F

improprie.

V F

equivalenti.

V F

- b) Nella proporzione $3 : 2 = 12 : 8$:

3 è un estremo.

V F

2 è un antecedente.

V F

8 è un conseguente.

V F

- c) Se $3 : 2 = 12 : 8$, allora:

$$2 : 3 = 12 : 8.$$

V F

$$3 : 2 = 8 : 12.$$

V F

$$5 : 3 = 20 : 12.$$

V F

$$3 : 12 = 2 : 8.$$

V F

- 358 Data la proporzione $4 : 5 = 8 : 10$, se scriviamo $10 : 5 = 8 : 4$, quale proprietà si applica?

- 359 Aggiungendo 4 a tutti i termini di una proporzione si ottiene ancora una proporzione? E moltiplicandoli per 4?

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

- 360 Risolviamo alcune proporzioni.

a) $3 : 8 = x : 20$; b) $12 : x = x : 3$; c) $\left(\frac{1}{3} + x\right) : x = \frac{1}{5} : 2$.

a) $3 : 8 = x : 20$.

Applichiamo la proprietà fondamentale delle proporzioni (il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi):

$$8 \cdot x = 3 \cdot 20.$$

Applichiamo la seconda legge di monotonia, dividendo i due membri per 8:

$$x = 3 \cdot \frac{\cancel{20}}{\cancel{8}} = \frac{15}{2}.$$

b) $12 : x = x : 3$.

$$x^2 = 12 \cdot 3 \rightarrow x^2 = 36.$$

Considerando il numero x positivo il cui quadrato è 36, risulta:

$$x = 6.$$

c) $\left(\frac{1}{3} + x\right) : x = \frac{1}{5} : 2$.

Applichiamo la proprietà dello scomporre:

$$\left[\left(\frac{1}{3} + x\right) - x\right] : x = \left(\frac{1}{5} - 2\right) : 2$$

$$\frac{1}{3} : x = -\frac{9}{5} : 2$$

$$-\frac{9}{5} \cdot x = \frac{1}{3} \cdot 2.$$

Applichiamo la seconda legge di monotonia, dividendo i due membri per $-\frac{9}{5}$:

$$x = \frac{2}{3} : \left(-\frac{9}{5}\right) = -\frac{10}{27}.$$

Risovi le seguenti proporzioni, applicando le proprietà necessarie.

361 $6 : 16 = x : 40$

368 $\left(\frac{2}{3} + x\right) : x = \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$

373 $x : 3 = (2 + x) : 4$

362 $5 : x = 10 : 20$

369 $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{6} - x\right) : x$

374 $x : 6 = (x + 5) : 9$

363 $x : 7 = 28 : 4$

370 $\left(\frac{3}{5} - x\right) : x = \frac{1}{3} : \frac{1}{5}$

375 $15 : x = 2x : 120$

364 $35 : 5 = 70 : x$

371 $\frac{5}{6} : \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{2} + x\right) : x$

376 $45 : 3x = x : 60$

365 $4 : x = x : 4$

372 $(x + 6) : 6 = x : 3$

377 $(x + 3) : 6 = x : 3$

367 $x : 75 = 3 : x$

378 Calcola il medio proporzionale fra i numeri 2 e 8; 4 e 100; 3 e 12; 48 e 75. [4, 20, 6, 60]

Risovi i seguenti problemi, utilizzando le proporzioni.

379 In un triangolo la lunghezza della base sta a quella dell'altezza come 7 sta a 5. Sapendo che la base è lunga 28 cm, calcola l'area del triangolo.

[280 cm²]

380 Un tennista ha vinto 10 tornei. Sapendo che essi stanno al numero di quelli non vinti come 2 sta a 17, calcola complessivamente a quanti tornei ha partecipato il tennista. [95]

381 Per preparare 720 g di marmellata di pesche occorrono 1,8 kg di pesche e 360 g di zucchero. Se vogliamo preparare 2,5 kg di marmellata, quanti kilogrammi di pesche e quanto zucchero occorrono? [6,25 kg, 1250 g]

382 Due soci si dividono gli utili della loro società nel rapporto di 5 a 7. Se il secondo riceve € 5850 più del primo, quali sono gli utili dei due soci?

[€ 14 625, € 20 475]

383 La distanza tra i punti A e B sta alla distanza tra i punti B e C come 4 sta a 5. Sapendo che $BC = 15$ cm, calcola AB. [12 cm]

384 Considera i punti A, B e C in proporzione come nell'esercizio precedente. Sapendo che $AC = 18$ m, calcola la lunghezza di BC. [10 cm]

385 L'altezza di un armadio sta all'altezza del soffitto come 7 sta a 10. Sapendo che il soffitto è alto 3 m, calcola l'altezza dell'armadio e la lunghezza della parete che rimane scoperta. [210 cm; 90 cm]

386 Determina due numeri, sapendo che la loro differenza è 54 e il loro rapporto è $\frac{13}{4}$. [78; 24]

387 La somma di due numeri è 156 ed essi stanno tra loro come 5 sta a 8. Trova i due numeri. [60; 96]

388 Una tua amica ti dà le dosi per l'impasto della pizza per 3 persone:

- 500 g di farina tipo 0;
- 30 g di lievito;
- 45 g di olio;
- 1 dl di acqua tiepida;
- sale q.b.

Volendo preparare la pizza per 7 tuoi amici, quali sono le nuove dosi per l'impasto?

[1,166 kg; 70 g; 105 g; 2,3 dl]

389 La pianta di un appartamento è in scala 1 : 200 (ossia il rapporto fra una distanza sulla pianta e quella corrispondente nella realtà è $\frac{1}{200}$). Se nella piantina le dimensioni del bagno sono 1,2 cm e 1,7 cm, quali sono le sue lunghezze reali? [2,4 m; 3,4 m]

390 Nella pianta del progetto di un edificio è scritto: scala 1 : 150. A quanti metri corrispondono 6 cm? Se il giardino ha le dimensioni di 12 m e 8,4 m, quali sono le sue lunghezze nella rappresentazione in scala? [9 m; 8 cm; 5,6 cm]

391 In un trapezio rettangolo l'altezza è media proporzionale tra le due basi, che misurano 75 cm e 12 cm. Trova l'area e il lato obliquo del trapezio. [1305 cm²; ≈ 69,8 cm]

392 Il tempo già trascorso di una vacanza sta al tempo totale come 4 sta a 5. Sapendo che sono già passati 8 giorni, quanto tempo durerà ancora la vacanza? [2 giorni]

393 Il rapporto tra le aree di due rettangoli è $\frac{9}{16}$. Trova l'altezza del secondo rettangolo sapendo che ha la base di 20 cm e che il primo rettangolo ha i lati lunghi 15 cm e 6 cm. [8 cm]

394 In un cortile la superficie adibita a prato sta alla superficie totale come 12 sta a 16. Sapendo che l'area senza prato vale 24 m², calcola l'area del prato e l'area totale del cortile. [72 m²; 96 m²]

7. I numeri razionali e i numeri decimali

→ Teoria a pag. 93

RIFLETTI SULLA TEORIA

395 VERO O FALSO?

- a) Nel numero decimale $5,8\bar{3}$, 58 è l'antiperiodo.
- b) Ogni frazione equivale a un numero decimale.
- c) $\frac{2}{5}$ è un numero decimale.
- d) Un numero decimale può essere periodico.
- e) $\frac{2}{15}$ equivale a un numero decimale finito perché contiene 5 tra i fattori del denominatore 15.



396 Fra le frazioni $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{2}{21}$, solo una rappresenta un numero decimale finito. Quale?

ESERCIZI

Scrivi sotto forma di numeri decimali le seguenti frazioni.

397 $\frac{1}{2}; \quad \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{5}; \quad \frac{1}{6}.$

398 $\frac{1}{7}; \quad \frac{1}{8}; \quad \frac{1}{9}; \quad \frac{1}{10}; \quad \frac{2}{10}.$

399 $\frac{3}{2}; \quad \frac{2}{3}; \quad \frac{8}{5}; \quad \frac{9}{4}; \quad \frac{11}{220}.$

Scrivi a quale tipo di numero decimale (finito o periodico) danno origine le seguenti frazioni, senza eseguire la divisione.

400 $\frac{1}{5}; \quad \frac{2}{3}; \quad \frac{11}{10}; \quad \frac{1}{7}; \quad \frac{4}{25}; \quad \frac{3}{50}; \quad \frac{5}{26}.$

401 $\frac{5}{21}; \quad \frac{7}{28}; \quad \frac{3}{30}; \quad \frac{4}{7}; \quad \frac{5}{22}; \quad \frac{8}{23}; \quad \frac{32}{3}.$

Dai numeri decimali alle frazioni

ESERCIZIO GUIDA

402 Trasformiamo in frazioni: a) 1,04; b) 2,8; c) 1,4583.

a) 1,04 è un numero **decimale finito**.

Al *numeratore* scriviamo il numero senza virgola.

Al *denominatore* scriviamo 1 seguito da tanti 0 quante sono le cifre dopo la virgola, e semplifichiamo:

$$1,04 = \frac{104}{100} = \frac{26}{25}.$$

b) 2,8 è un numero **decimale periodico senza antiperiodo**.

Al *numeratore* scriviamo la differenza tra il numero senza virgola e le cifre che precedono il periodo.

Al *denominatore* scriviamo tanti 9 quante sono le cifre del periodo:

$$2,8 = \frac{28 - 2}{9} = \frac{26}{9}.$$

c) 1,4583 è un numero **decimale periodico con antiperiodo**.

Al *numeratore* scriviamo la differenza tra il numero senza virgola e le cifre che precedono il periodo.

Al *denominatore* scriviamo tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo, poi semplifichiamo:

$$1,458\bar{3} = \frac{14\,583 - 14\,58}{9\,000} = \frac{13\,125}{9\,000} = \frac{35}{24}.$$

Trasforma i seguenti numeri decimali in frazioni.

403 3,7; 123,22; 0,04; -3,005; 10,01.

404 5,2; -0,3; 0,6; 2,3; -3,4.

405 3,14; 3,14; -3,5; 3,141.

406 4,321; 0,025; 0,216; 0,216.

407 COMPLETA inserendo uno dei simboli <, >, =.

$$\begin{array}{lll} 2,3 \dots 2,33; & \frac{2}{5} \dots 0,4; & 12,1 \dots \frac{122}{10}; \\ 0,6\bar{2} \dots 0,622; & 5,02 \dots 5,0\bar{2}; & \frac{15}{2} \dots 7,5; \\ \frac{2}{9} \dots 0,222; & 0,0018 \dots 0,001\bar{8}; & 6,3\bar{7} \dots 6,3777. \end{array}$$

408 Ordina in senso crescente i seguenti numeri razionali, poi scrivi il quarto numero dell'elenco.

$$(0,2)^2; \quad 0,2; \quad 0,\bar{2}; \quad (0,\bar{2})^2; \quad \frac{1}{0,2}; \quad \frac{1}{0,\bar{2}}.$$

Trasforma i numeri decimali in frazioni e calcola il risultato delle seguenti operazioni.

409 $5,7 \cdot 0,04;$ $21,25 \cdot 0,01.$

410 $(0,1)^2 \cdot 3,2;$ $4,9 \cdot 0,5.$

411 $(0,4)^2 \cdot (1,8)^2;$ $(3,5)^2 : (0,1)^2.$

412 $0,5 - 0,\bar{5};$ $0,1 + 0,\bar{1}.$

Senza trasformare i numeri decimali in frazioni, esegui le seguenti operazioni.

413 $16,3 \cdot 10;$ $1,2 : 100;$ $531 : 10^3;$ $6,2 : 10^3.$

414 $(0,1)^2;$ $(0,1) \cdot 0,01;$ $0,1 \cdot 100;$ $0,1 : 10^3.$

415 $0,5 \cdot 0,01;$ $3500 : 10^4;$ $7,5 \cdot 10^2 \cdot 0,1;$ $2,6 : 0,01.$

Scrivi in notazione scientifica i seguenti numeri.

416 1 275 000; 3,2; 0,00073; 0,002; 885.

417 $15,2 \cdot 10^4;$ 0,009; $3201 \cdot 10^5;$ $123 \cdot 10^{-3};$ $82 \cdot 10^7.$

Esegui le seguenti operazioni dopo aver scritto, se necessario, i numeri in notazione scientifica.

418 $(42,7 \cdot 10^2) \cdot 0,02;$ $1,4 \cdot (81,3 \cdot 10^{-3});$
 $0,0061 \cdot 4500.$

419 $0,42 \cdot 10^{-4} : 0,00021;$ $(31 \cdot 10^8) \cdot (0,6 : 0,0083);$
 $415\,000 \cdot (2,3 \cdot 10^{-6}) \cdot 0,71.$

420 $1,3 \cdot 10^3 + 4,5 \cdot 10^5;$ $621 \cdot 10^{-4} + 0,25 \cdot 10^{-6}.$

421 $[(8,2 \cdot 10^4 + 4,8 \cdot 10^2) : 10^{-6}] \cdot 10^{-5}$

422 $(2,3 \cdot 10^{-11}) : (1,6 \cdot 10^8)^{-2} \cdot (1,5 \cdot 10^3)^4$

423 $[(3,4 \cdot 10^8)^2 \cdot [(-1,1 \cdot 10^{-5})^3] : (0,2 \cdot 10^{-8})^2]$

424 $6,7 \cdot 10^{-11} \cdot [(6 \cdot 10^{24}) \cdot (2 \cdot 10^{30})] : (1,5 \cdot 10^{11})^2$

425 $(1,4 \cdot 10^{-9} \cdot 10)^2 : [-(4,1 \cdot 10^{-6})^2]^3 \cdot (-2 \cdot 10^{-6})^3$

Determina l'ordine di grandezza dei seguenti numeri.

426 $250\,000;$ $721,3 \cdot 10^{-2};$ $0,003 \cdot 10^5.$

427 $892;$ $3227,6;$ $51,3 \cdot 10^{-4}.$

■ Esempi con i numeri decimali

Calcola il valore delle seguenti espressioni dopo aver trasformato i numeri decimali in frazioni.

428 $3,5 - \frac{1}{2} \cdot 1,9$

$\left[\frac{5}{2} \right]$

432 $(0,\bar{3} + 0,35) : \frac{41}{20} + 0,\bar{1}$

$\left[\frac{4}{9} \right]$

429 $2,\bar{4} - 3,5 : 0,5$

$\left[-\frac{41}{9} \right]$

433 $[(0,25)^2 \cdot (0,\bar{6})^2]^2 : (0,1\bar{6})^3$

$\left[\frac{1}{6} \right]$

430 $(2 \cdot 4,5)^2 - 8 \cdot (0,1)^{-1} + (10 - 5,6) : \frac{1}{2}$

$\left[\frac{49}{5} \right]$

434 $[(0,2\bar{6})^3 : (0,4)^3]^2 : \left(\frac{2}{3} \right)^4$

$\left[\frac{4}{9} \right]$

431 $0,1\bar{6} : 0,75 + 0,\bar{7}$

[1]

435 $\{[(0,8)^3 \cdot (0,\bar{5})^3] \cdot (0,6)^6\} \cdot 5^4$

$\left[\frac{64}{25} \right]$

436 $\left\{ \left[\left(\frac{1}{7} - 0,5 \right) \cdot \left(3 + \frac{1}{2} \right) \right] : \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right\} \cdot \frac{3}{2} + 1 - \frac{3}{4}$

$\left[-\frac{13}{4} \right]$

437 $\left\{ \left[\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{5} \right] : \frac{3}{5} + 2 \right\} : 3 - 0,08\bar{3} + 2$

$\left[\frac{5}{4} \right]$

438 $\left[\left(0,1\bar{6} + \frac{2}{3} \right) : \left(\frac{4}{3} - 2 \right) \right] \cdot \left[1,\bar{3} : \left(0,2 - \frac{2}{3} \right) \right]$

$\left[\frac{25}{7} \right]$

439 $- (0,8 - 0,\bar{6}) + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3} + 0,0\bar{6} \right) \right] - \left[\frac{2}{5} + \left(\frac{1}{6} - 0,3 \right) \right]$

$\left[-\frac{19}{30} \right]$

440 $0,25 - \frac{7}{3} + 5 - 0,5 + \frac{5}{3} - 12 + 6 - \frac{10}{3} + \frac{5}{12}$

$\left[-\frac{29}{6} \right]$

441 $\left(3 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - 1 \right) - 2 + \left(3 - \frac{1}{2} + 1,\bar{6} - 1 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) - 0,8\bar{3}$

[2]

442 $\left(0,4 - \frac{1}{7} \right) - \left[\frac{4}{3} - 0,\bar{3} - \left(1 + \frac{4}{7} \right) \right] - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) - 3$

$\left[-\frac{88}{35} \right]$

443 $\left[\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} \right) : \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \right] : \left[\left(-\frac{4}{5} \right) : \left(0,5 - \frac{2}{3} \right) \right]$

$\left[-\frac{1}{12} \right]$

444 $0,625 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) - \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{16} \right) \right] + \left(2 - \frac{1}{24} \right) + \frac{5}{24}$

$\left[\frac{8}{3} \right]$

- 445** $\frac{2}{3} - 0,25 + \frac{2}{12} - \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right) \right] + \left[-\frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{12} \right]$ $\left[\frac{5}{4} \right]$
- 446** $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + 0,125 - \left[5 - \left(\frac{2}{3} + 4 - \frac{1}{6} \right) \right] + \left[2 - \left(\frac{1}{8} + \frac{4}{3} + 1 \right) \right]$ $\left[-\frac{3}{4} \right]$
- 447** $0,4 + \left(\frac{1}{5} - 2,3 \right) \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) \cdot 11,25 - \frac{2}{3}$ $\left[-\frac{34}{15} \right]$
- 448** $\frac{13}{2} - 3,3 \cdot \left(\frac{11}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} + 1,5 + \frac{4}{5} \right) + 23$ $[5]$
- 449** $\left[\frac{10}{3} + \left(\frac{1}{2} + \frac{8}{3} - \frac{7}{3} \right) \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{5} - \frac{3}{2} \right) - \frac{7}{3} \right] \cdot \frac{3}{4} - 0,08\bar{3} + 0,\bar{6}$ $\left[\frac{1}{3} \right]$
- 450** $\left\{ \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{8} \right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right) - \frac{5}{4} \right] : \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right\} : \left(-\frac{8}{3} \right) - 0,5 - \left(\frac{1}{16} + 1,875 \right)$ $\left[\frac{9}{16} \right]$
- 451** $\left\{ \left[\left(0,5 - \frac{3}{5} \right) : \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} \right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5} \right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7} \right) \right] \right\} \cdot \frac{7}{3} - 2 - 0,8$ $\left[-\frac{9}{10} \right]$
- 452** $1 - \left\{ \frac{4}{3} \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot \left(2 - \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{4} \right] + 2 - \frac{4}{3} \right\} - \left[\frac{1}{5} : \left(2 - \frac{3}{5} \right) \right] \cdot 2,3 - \frac{1}{4} + \frac{16}{45}$ $\left[\frac{1}{12} \right]$
- 453** $\left\{ \left[\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{6} \right) : \left(\frac{11}{18} - 1 \right) + 2 - 0,75 \right] : \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right\} \cdot \frac{3}{5} - 0,0\bar{6} + 2$ $\left[-\frac{17}{30} \right]$
- 454** $\left\{ \left[5^2 \cdot \left(\frac{2}{15} \right)^2 \right]^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{-2} \right\}^{-1} : [(0,8)^{-1} \cdot (1,\bar{1})^{-1}]^{-2}$ $\left[\frac{9}{16} \right]$
- 455** $\left\{ \left[\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3} \right) \cdot (1,\bar{3} - 3) + \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \right) \right] \cdot 3 \right\} \cdot 0,5 - \frac{1}{12} + 1$ $\left[\frac{13}{12} \right]$
- 456** $\frac{1}{6} + \left(\frac{2}{5} \right)^2 : \frac{8}{35} - 0,75 + \left(\frac{2}{5} + 0,1 + \frac{1}{3} \right)^3 : (1,\bar{6})^2$ $\left[\frac{13}{40} \right]$
- 457** $\left\{ \left[1 + 0,8 \cdot \left(\frac{5}{8} - 0,\bar{3} \right) \right] : \left(0,1\bar{7} - \frac{3}{7} \cdot 0,2\bar{3} \right) \right\} \cdot 0,\overline{108} - 0,8$ $\left[\frac{32}{35} \right]$
- 458** $\left[(-3)^{-2} - \left(\frac{2}{3} \right)^3 - \left(1,1\bar{6} - \frac{5}{6} \right)^3 : \left(1 + \frac{1}{6} - \frac{3}{2} \right)^2 \right] : \left[-\frac{1}{3} - \left(-\frac{3}{2} \right)^{-3} : \frac{2}{9} + (-1,\bar{1}) \left(-\frac{5}{3} \right) \right]$ $\left[-\frac{2}{11} \right]$
- 459** $\frac{(2 - 1,6) \cdot \left(\frac{17}{45} - 0,1 \right) + \frac{11}{13} \cdot 0,\overline{39}}{\left(0,\bar{7} - \frac{37}{63} \right)^2 : \frac{1}{49} + 1 + 0,\bar{2}} \cdot 0,45 + 0,2$ $\left[\frac{4}{15} \right]$
- 460** $\frac{\left(\frac{7}{6} + \frac{5}{12} \right) \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot \left[\frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4} + \frac{7}{5} \right) - \left(-\frac{13}{6} + 2,\bar{6} \right) \cdot \frac{1}{4} \right]}{\left[\left(\frac{6}{5} - \frac{8}{15} \right) : \left(\frac{13}{8} - \frac{4}{3} \right) \right] : 0,25}$ $\left[\frac{7}{64} \right]$
- 461** $\frac{1 + \frac{9}{2} \cdot \left[\left(0,\bar{3} - \frac{1}{7} \right) : 0,\bar{3} - \frac{5}{21} \right]^2}{\frac{2}{3} + 0,5 \cdot \left[(0,8\bar{3} + 0,25) : \frac{13}{6} + \frac{1}{2} \right]} \cdot 2,\bar{3} + \frac{1}{2}$ $\left[\frac{7}{2} \right]$

8. Il calcolo approssimato

→ Teoria a pag. 97

RIFLETTI SULLA TEORIA

462 VERO O FALSO?

- a) Un valore approssimato per difetto è sempre minore del valore esatto.
- b) Un valore arrotondato è sempre maggiore del valore esatto.
- c) Il valore approssimato per eccesso a meno di 10^{-4} di 3,141593 è 3,1416.
- d) 4100 è il valore arrotondato di 4125,342 a meno di 10^{-2} .
- e) 375,47 è il valore approssimato per difetto di 375,485 a meno di 10^{-1} .

ESERCIZI

L'approssimazione di un numero

Arrotonda i seguenti valori numerici a meno della potenza di 10 a fianco indicata.

463 $3,24792, 10^{-2}; \quad 194\,725,7, 10^4; \quad 48,\overline{345}, 10^{-4}.$

[3,25; 190 000; 48,3455]

464 $681,7845, 10^{-1}; \quad 3\,274\,227, 10^3; \quad 0,000\overline{165}, 10^{-7}.$

[681,8; 3 274 000; 0,0001652]

465 $467,925, 10^0; \quad 3228,4, 10; \quad 0,0\overline{8}, 10^{-5}.$

[468; 3230; 0,08889]

466 Arrotonda i seguenti valori numerici a meno della potenza di 10 scritta a fianco e indica in quali casi l'approssimazione è per eccesso o per difetto.

$-2,7194, 10^{-2}; \quad 0,00371, 10^{-3}; \quad -45\,380, 10^2.$

[-2,72; 0,004; -45 400]

467 Arrotonda a meno di 10^{-2} i seguenti valori numerici.

$$\frac{884}{1000}; \quad \frac{3126}{500}; \quad \frac{7}{3}; \quad \frac{5}{6}; \quad -\frac{7}{8}.$$

[0,88; 6,25; 2,33; 0,83; -0,88]

468 Arrotonda i seguenti numeri a meno della potenza di 10 a fianco indicata e calcola l'errore assoluto compiuto nell'approssimazione.

$94,4684, 10^{-2}; \quad 29\,682\,166, 10^4; \quad \frac{12}{11}, 10^{-3}.$

[0,0016; 2166; 0,00009]

469 Arrotonda i seguenti numeri a meno della potenza di 10 a fianco indicata e calcola l'errore relativo compiuto nell'approssimazione.

$312\,000\,000, 10^8; \quad 0,45714571, 10^{-4}; \quad \frac{5}{3}, 10^{-5}.$

[0,04; 0,0001; 2166; 0,000002]

Calcola l'errore assoluto commesso nel considerare i seguenti numeri al posto dei numeri scritti a fianco di ciascuno di essi.

470 $0,16, \frac{1}{6}; \quad 0,167, \frac{1}{6}; \quad 0,833, \frac{5}{6}.$

Determina l'errore relativo per i seguenti valori approssimati conoscendo l'errore assoluto scritto a fianco di ciascuno di essi.

472 $2,715, 0,8; \quad 5246,1, 3,2.$

471 $1,3, 1\bar{3}; \quad 1,34, 1\bar{3}; \quad 1,333, 1\bar{3}.$

473 $-0,058, 0,062; \quad 7,5 \cdot 10^{-2}, 3 \cdot 10^{-3}.$

474

Dati i seguenti numeri e i loro corrispondenti valori arrotondati, determina in percentuale l'errore relativo dell'approssimazione.

$$\begin{array}{ll} 31,5, & 30; \\ 2160, & 2000; \end{array} \quad \begin{array}{ll} -0,24, & -0,2; \\ 30\,378, & 30\,000. \end{array}$$

$$[5\%; 8\%; 20\%; 1,26\%; \approx 0,02\%]$$

475

Dati i seguenti valori approssimati e i rispettivi errori relativi, calcola gli errori assoluti di approssimazione.

$$\begin{array}{ll} 0,1, & e_r = 0,08; \\ 3,25, & e_r = 0,14; \end{array} \quad \begin{array}{ll} -15\,800, & e_r = 0,5\%; \\ 100\,000, & e_r = 3\%. \end{array}$$

$$[0,008; 0,455; 79; 3000]$$

476

Arrotonda il numero 45,67837 alla seconda cifra decimale e verifica che l'errore assoluto è minore di 10^{-2} . Trova inoltre l'errore relativo.

$$[45,68; e = 0,00163; e_r \approx 0,000036]$$

477

Arrotonda il numero 106 829 alla cifra di posto +3 e verifica che l'errore assoluto è minore di 10^3 . Determina inoltre l'errore relativo.

$$[107\,000; e = 171; e_r \approx 0,0016]$$

■ Il calcolo approssimato

■ ESERCIZIO GUIDA

478 Calcoliamo l'errore relativo del prodotto tra i due numeri 3452 e 619 dopo averli arrotondati a meno di 10^2 . Determiniamo il corrispondente errore assoluto e valutiamo le cifre certe.

Arrotondiamo i valori numerici a meno di 10^2 :

$$3452 \approx 3500, \quad 619 \approx 600.$$

Calcoliamo il prodotto dei valori approssimati che indichiamo con p' :

$$p' = 3500 \cdot 600 = 2\,100\,000.$$

Troviamo gli errori relativi per i singoli fattori:

$$e_{r1} = \frac{|3452 - 3500|}{3500} \approx 0,0137,$$

$$e_{r2} = \frac{|619 - 600|}{600} = 0,031\bar{6} \approx 0,0317.$$

Determiniamo l'errore relativo massimo da attribuire all'approssimazione p' :

$$e_r = e_{r1} + e_{r2} \rightarrow e_r \approx 0,0137 + 0,0317 = 0,0454.$$

Calcoliamo il corrispondente errore assoluto:

$$e = e_r \cdot p' \rightarrow e \approx 0,0454 \cdot 2\,100\,000 = 95\,340.$$

Essendo il valore esatto compreso fra

$$\begin{aligned} 2\,100\,000 - 95\,340 &= 2\,004\,660 \text{ e} \\ 2\,100\,000 + 95\,340 &= 2\,195\,340, \end{aligned}$$

possiamo valutare che l'unica cifra certa è 2.

Calcola l'errore assoluto massimo delle seguenti operazioni dopo aver arrotondato gli operandi a meno della potenza di 10 a fianco indicata. Valuta le cifre certe del valore approssimato.

479

$$12\,525 + 23\,402, \quad 10^4.$$

$$[e = 5927]$$

$$481 \quad 0,03521 + 0,09754, \quad 10^{-3}. \quad [e = 0,00067]$$

480

$$827\,402 - 275\,988, \quad 10^3.$$

$$[e = 414]$$

$$482 \quad 0,0751 - 0,0124, \quad 10^{-2}. \quad [e = 0,0073]$$

Calcola l'errore relativo massimo delle seguenti operazioni dopo aver arrotondato gli operandi a meno della potenza di 10 a fianco indicata. Determina l'errore assoluto e valuta le cifre certe del valore approssimato.

483

$$62,592 \cdot 4,325, \quad 10^{-1}.$$

$$[e_r \approx 0,00594; e \approx 1,6]$$

$$485 \quad 12\,426 : 12, \quad 10.$$

$$[e_r \approx 0,2003; e \approx 248,9729]$$

484

$$0,3453 \cdot 0,4185, \quad 10^{-1}.$$

$$[e_r = 0,19725; e = 0,02367]$$

$$486 \quad 15,7251 : 0,324, \quad 10^{-2}.$$

$$[e_r \approx 0,0128; e \approx 0,629]$$

LABORATORIO DI MATEMATICA

I numeri razionali con Excel

ESERCITAZIONE GUIDATA

Dopo aver registrato, nei giorni di una settimana, gli alunni presenti in una classe di N studenti, stabiliamo per ogni giorno le frazioni corrispondenti ai presenti e agli assenti e le percentuali di presenti e di assenti. Risolviamo il problema per una classe (la III B) di 24 alunni in una settimana, che ha presentato la situazione registrata in tabella.

	Presenti
lunedì	22
martedì	20
mercoledì	24
giovedì	18
venerdì	23
sabato	24

- Attiviamo il foglio elettronico Excel.
- Prepariamo la tabella con alcune didascalie, scriviamo i giorni della settimana, digitando lunedì nella cella A5 e copiandola sino alla A10.
- Immettiamo i dati del problema: il numero degli studenti e quello dei presenti.
- Ricaviamo il numero degli assenti, digitando $=\$D\$1 - B5$ in C5 e copiandola sino alla C10.
- Per ottenere i dati scritti sotto forma di frazione, evidenziamo la zona D5:E10, diamo il comando *Formato Cella*, selezioniamo *Numero* e nella finestra di dialogo facciamo clic su *Frazione* e scegliamo la frazione *sino a tre cifre*.
- Calcoliamo poi le frazioni corrispondenti ai presenti e agli assenti, scrivendo $=B5/\$D\1 in D5, $=1 - D5$ in E5 e copiando la zona D5:E5 sino alla riga 10.
- Per ottenere le percentuali evidenziamo la zona F5:G10 e dichiariamo con *Formato Cella Numero Percentuale* il formato percentuale. Digitiamo poi $=D5$ in F5 e $=E5$ in G5, evidenziamo la zona C5:G5 e la copiamo sino alla riga 10.

A	B	C	D	E	F	G
1 Classe III B		Alumni	24			
2						
3		Numero	Frazione		Percentuale	
4	Presenti	Assenti	Presenti	Assenti	Presenti	Assenti
5 lunedì	22	2	11/12	1/12	91,67%	0,33%
6 martedì	20	4	5/6	1/6	83,33%	16,67%
7 mercoledì	24	0	1	0	100,00%	0,00%
8 giovedì	18	6	3/4	1/4	75,00%	25,00%
9 venerdì	23	1	23/24	1/24	95,83%	4,17%
10 sabato	24	0	1	0	100,00%	0,00%

▲ Figura 1

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata con Excel ▶ 13 esercitazioni in più



Esercitazioni

- 1** Costruisci un foglio elettronico che riceva in celle separate il numeratore e il denominatore di due frazioni e calcoli rispettivamente la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente, dia i risultati in celle separate e li riduca ai minimi termini. (Suggerimento. Per la riduzione ai minimi termini usa l'operatore MCD.)
Prova con i seguenti dati:

a) $\frac{5}{8}$ e $\frac{7}{2}$; c) $\frac{8}{15}$ e $-\frac{1}{3}$;

b) $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{7}$; d) $-\frac{6}{5}$ e -2 .

- 2** In un triangolo isoscele ABC , la lunghezza del lato obliquo AB supera di s metri quella della base BC , e $\frac{1}{5}$ del lato obliquo è uguale a $\frac{1}{4}$ della base. Costruisci un foglio elettronico che, dopo aver letto il valore di s , determini le misure del lato obliquo e della base. Prova con s variabile da 1 m a 10 m con passo 1 m.

- 3** Tre soci investono in un affare rispettivamente 5120 euro, 4500 euro, a euro. Costruisci un foglio che, dopo aver letto il valore di a , stabilisca le percentuali di partecipazione di ogni socio all'affare.

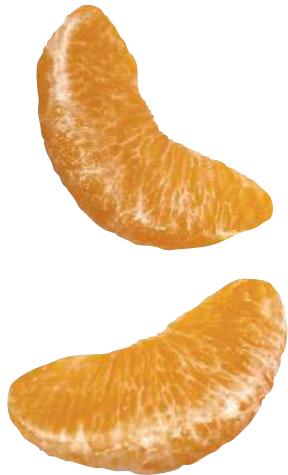
Matematica per il cittadino

LA RICETTA

La ricetta per un dolce all'arancia contiene le seguenti indicazioni riguardo agli ingredienti.

DOSI PER 4 PERSONE

farina	160 g
zucchero	200 g
uova	2
latte	100 cc
burro	90 g
succo d'arancia diluito (3 parti di succo per 7 parti d'acqua)	130 cc



1. Volendo preparare un dolce per 7 persone, quanta farina si dovrebbe aggiungere a quella indicata nella ricetta?

- [A] 70 g [B] 120 g [C] 280 g [D] 150 g

2. Potendo disporre di succo d'arancia diluito al 50%, quanto di questo succo e quanta acqua si devono mescolare per ottenere 130 cc di succo alla diluizione richiesta dalla ricetta?

Succo d'arancia:

- [A] 78 cc [B] 46 cc [C] 70 cc [D] 52 cc

Acqua:

- [A] 84 cc [B] 52 cc [C] 60 cc [D] 78 cc

3. Di seguito sono riportati i valori energetici degli ingredienti del dolce in kilocalorie per grammo.

Ingrediente	farina	zucchero	uova	latte	burro	succo d'arancia diluito
Valore energetico (kcal/g)	2,5	12	1,3	0,6	15	1,5

Qual è all'incirca l'apporto calorico di 100 g di dolce?

Si tenga conto che un volume di succo o di latte pari a 1 cc pesa circa 1 g. Un uovo medio ha massa pari a 50 g.

- [A] 4535 kcal [B] 454 kcal [C] 581 kcal [D] 32,9 kcal

4. Se 800 g di dolce vengono cucinati in uno stampo circolare, quante kilocalorie sono contenute in una fetta ampia circa 30°?

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ► questi test interattivi ► 30 test interattivi in più



1 Una sola di queste relazioni è falsa. Quale?

A $\frac{3}{7} < \frac{4}{9}$

D $\frac{4}{9} > \frac{2}{7}$

B $-\frac{3}{7} > -\frac{4}{9}$

E $\frac{3}{7} > \frac{2}{7}$

C $-\frac{2}{7} < -\frac{4}{9}$

2 Tra le seguenti uguaglianze una sola è esatta. Quale?

A $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{5}$ **D** $\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{15}$

B $\left(-\frac{3}{4}\right) : \left(-\frac{4}{3}\right) = 1$ **E** $\frac{3}{4} : 0 = \frac{3}{4}$

C $\frac{15}{20} : 5 = \frac{3}{4}$

3 Quale fra i seguenti valori è il risultato della potenza $(-3)^{-2}$?

A $\frac{2}{3}$ **B** $-\frac{1}{9}$ **C** -9 **D** 9 **E** $\frac{1}{9}$

4 È data la divisione $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$.

Una sola, fra le seguenti espressioni, non è equivalente alla divisione data. Quale?

A $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$ **D** $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$

B $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} : \left(\frac{2}{3}\right)^2$ **E** $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$

C $\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^2$

5 Quale delle seguenti espressioni è equivalente a:

$$\left[\left(\frac{3}{4} \right)^{-2} : \left(\frac{3}{4} \right)^{-3} \right] \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^0 ?$$

A $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5}$ **B** $-\frac{3}{4}$ **C** $\frac{4}{3}$ **D** 0 **E** $\frac{3}{4}$

6 Sottrarre il quadrato di a al cubo di $-\frac{1}{2}$, con $a = -3$. Il risultato è:

A $\frac{71}{8}$.

D $\frac{73}{8}$.

B $-\frac{73}{8}$.

E $-\frac{71}{8}$.

C $\frac{70}{8}$.

7 Le seguenti operazioni sono tutte eseguibili in \mathbb{Q} ma solo una lo è in \mathbb{Z} . Quale?

A $3 : (-2)$

D $\frac{4}{3} : \frac{2}{3}$

B $(-12) : (-5)$

E $\left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{9}{4}\right)$

C $(-12) : 3$

Se $x : y = 5 : 2$ e $x + y = 14$, allora:

A $x = 10$ e $y = 4$.

D $x = 2$ e $y = 5$.

B $x = 5$ e $y = 2$.

E $x = 4$ e $y = 10$.

C $x = 7$ e $y = 7$.

8 Devi calcolare il 25% di 36. Come fai?

A $25 \cdot 100 \cdot 36$

D $25 \cdot \frac{100}{36}$

B $36 \cdot \frac{100}{25}$

E $\frac{25}{36} \cdot \frac{1}{100}$

C $36 \cdot \frac{25}{100}$

9 Una delle seguenti affermazioni è falsa. Quale? ($x \in \mathbb{Q}$)

A Il 60% del 10% di x è minore del 10% di x .

B Il 15% di x è maggiore del 15% del 41% di x .

C Il 75% di x è uguale ai $\frac{3}{4}$ di x .

D Il 38% di x è uguale a $0,38x$.

E Il 32% del 27% di x è diverso dal 27% del 32% di x .

SPIEGA PERCHÉ

Spiega perché sono vere le seguenti affermazioni.

- 11** Il 20% del 30% equivale al 6% del totale.
- 12** Il 3‰ è equivalente allo 0,3%.
- 13** Data la proporzione $a : b = c : d$, da essa è possibile dedurre $c : a = d : b$, mentre non è possibile ricavare la proporzione $c : b = a : d$.
- 14** Se si eleva alla potenza -1 il quadrato di 25, si ottiene $\left(\frac{1}{5}\right)^4$.

VERO O FALSO?

- a) $\frac{4}{7}$ e $\frac{8}{14}$ sono frazioni equivalenti.
- b) $\frac{4}{5} < \frac{4}{7}$.
- c) $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs}$.
- d) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$.
- e) $3^3 \cdot 4^3 = 12^3$.
- f) $4^2 : 8 = 2$.
- g) $[(25)^2]^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^4$.
- h) Se $4 : 3 = 12 : 9$, allora $7 : 3 = 21 : 9$.
- i) $\frac{4}{5}$ è un numero decimale periodico.

16 Di una frazione $\frac{x}{y}$, dove x e y sono numeri naturali, si sa che:

- $1 < \frac{x}{y} < 2$;
- $xy = 24$.

Quali sono i due numeri? Motiva la risposta.

[6; 4]

17 Aumentando di 1 sia il numeratore sia il denominatore, entrambi positivi, di una frazione, la frazione aumenta o diminuisce? Che cosa succede se la frazione è uguale all'unità? Spiega perché.
(Suggerimento. Considera i due casi: frazione propria e frazione impropria.)

ESERCIZI

Nel sito: ► 15 esercizi in più



Rappresenta su una retta orientata i seguenti numeri.

- 18** $-2,5; +\frac{1}{4}; +\frac{4}{5}; -\frac{1}{3}; +3,5; -2,6; +\frac{2}{3}; -\frac{2}{8}; +1,4; -\frac{3}{5}$.
- 19** $-0,6; \frac{2}{3}; -\frac{3}{2}; -3; 0,\bar{3}; 0,2\bar{3}$.

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

- 20** $\left[\left(\frac{7}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(3 + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{4}{3} - 3\right)\right] + \left(\frac{1}{6} - 1\right)$ $\left[-\frac{7}{2}\right]$
- 21** $\frac{1}{6} - \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right) + \left(2 - \frac{2}{3}\right)$ $\left[\frac{41}{30}\right]$

- 22** $3 + \left(-1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{4}{15} - \left[-\frac{2}{15} - \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{2} \right) \right]$ $\left[\frac{3}{20} \right]$
- 23** $\left[\left(\frac{1}{6} - \frac{3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right] - \frac{1}{4} \left[12 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{4}{3} \right] + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 6$ $\left[\frac{13}{9} \right]$
- 24** $\left\{ \left[\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6} \right) : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{2} \right] : \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right\} \cdot 2 - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{6} - \frac{15}{4} \right)$ $[-7]$
- 25** $\frac{4}{11} \cdot \left[\left(-\frac{3}{8} + 3 \right) : \left(+\frac{3}{4} \right) : \left(\frac{5}{6} : \frac{20}{3} \right) - \left(\frac{27}{8} : \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{8} \right] \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)$ $\left[-\frac{63}{22} \right]$
- 26** $-3 + \frac{7}{3} - \left\{ 1 + \frac{1}{6} - \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + 3 - \left(\frac{7}{12} + \frac{1}{4} \right) \right] - 1 \right\}$ $\left[\frac{3}{2} \right]$
- 27** $-2 + \frac{5}{2} - \left\{ 1 + \frac{2}{3} - \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6} \right) + 2 - \left(1 - \frac{7}{12} \right) \right] - \frac{2}{3} \right\}$ $\left[\frac{3}{4} \right]$
- 28** $\left\{ \frac{3}{10} + \left(-\frac{6}{5} \right) \cdot \left[-\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right) + \frac{5}{6} \right] \right\} : \left[-\frac{1}{4} + \left(-2 + \frac{5}{3} \right) \cdot \frac{9}{4} \right]$ $\left[-\frac{1}{2} \right]$
- 29** $\left\{ \left[\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{6} \right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{32} (-6) \right] : \left(-\frac{19}{4} \right) - 1 \right\}^3$ $\left[-\frac{1}{8} \right]$
- 30** $\left\{ \left[\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3} \right)^2 - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3} \right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] : \left(-\frac{17}{27} \right) + \frac{3}{4} \right\}^2$ $\left[\frac{1}{16} \right]$
- 31** $1 - 2 + \left(\frac{3}{2} - 2 \right)^2 : \left\{ -2 - \left[\frac{5}{3} - \left(1 + \frac{1}{3} \right)^2 \cdot \left(\frac{8}{9} \right)^{-1} \right] \right\} - \frac{1}{10}$ $\left[-\frac{5}{4} \right]$
- 32** $\frac{\left(-\frac{9}{7} \right)^3 \cdot \left(1 + \frac{2}{5} \right)^3 : \left(1 + \frac{4}{5} \right)^3}{3^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^{-2} + \left(+\frac{1}{2} \right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{5} \right)^3 : \left(-\frac{1}{5} \right)^2}$ $\left[-\frac{15}{2} \right]$
- 33** $\frac{\frac{1}{3} - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right)}{\frac{1}{6} - \left(2 - \frac{1}{2} \right) \cdot (-3)} - \frac{2 - \left[\frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) : \left(1 - \frac{1}{5} \right) \right]}{\frac{1}{11} \cdot \left(1 - \frac{1}{12} \right) \cdot \left(10 + \frac{9}{5} \right)}$ $\left[-\frac{9}{4} \right]$
- 34** $\frac{\frac{2}{5} + 2 \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \right)}{\frac{3}{2} + \left(2 - \frac{1}{5} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \right)} + \frac{3 - \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} \right) \right]}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{8} - 1 \right) \cdot \left(9 + \frac{8}{5} \right)}$ $\left[-\frac{7}{15} \right]$
- 35** $\frac{\left[\left(\frac{2}{3} \right)^3 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{32}{135} \right] \cdot \frac{25}{3} - 4}{\left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] \cdot 3} \cdot \frac{77}{3} - 13$ $\left[\frac{17}{3} \right]$
- 36** $\left[\left(2 - \frac{3}{5} : 2,25 \right) : \left(0,0\bar{7} + \frac{1}{15} \right) \right] \cdot \frac{5}{108} + 0,0\bar{3} : \left[\left(1,6 - \frac{1}{7} \right) : \left(1 + \frac{25}{7} \right) \right]$ $\left[\frac{59}{90} \right]$

37 $\left[\left(0,8\bar{3} - \frac{3}{7} \right) : \left(\frac{6}{7} + 0,\bar{2} \right) - (0,3\bar{6} - 0,\bar{2}) : (0,5 + 0,5\bar{1}) \right] : \left[\left(0,\bar{1} + \frac{2}{21} \right) : (0,3 + 1) \right]$ $\left[\frac{117}{80} \right]$

38 $\frac{\left(\frac{3}{4} - 0,0\bar{3} \right) \cdot \frac{3}{43} + (2,\bar{4} - 1,2) \cdot \frac{9}{7} - \frac{8}{5}}{\left[\frac{2,3 - 2,\bar{1}\bar{5}}{0,2 + 1,3} \cdot \left(5 + \frac{8}{49} \right) + \frac{3}{4} \right] : \left(1 + \frac{1}{4} \right)} + \frac{4}{0,\bar{2} + 1,2}$ $\left[\frac{229}{80} \right]$

39 $\left\{ \left[\frac{5}{17} + 0,2\bar{7} \cdot (0,\bar{5} - 0,25) : (1 + 0,1\bar{3}) \right] : \left(0,3 + \frac{1}{17} \right) \right\} \cdot (61 \cdot 0,0\bar{3}\bar{6}) + \frac{1}{2}$ $\left[\frac{61}{22} \right]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni applicando le proprietà delle potenze.

40 $\left(-\frac{1}{8} \right)^3 : \left\{ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right)^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{4} \right)^2 : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)^2 \right] \right\}$ $\left[-\frac{1}{8} \right]$

41 $\left\{ \left[\left(\frac{2}{5} \right)^{-2} + \frac{5}{2} \right] \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^{-4} + \left(-\frac{2}{5} \right)^2 : \left(\frac{2}{5} \right)^{-1} \right\}^{-1}$ $\left[\frac{125}{36} \right]$

42 $\left[\left(2 + \frac{1}{2} \right)^4 \cdot \left(3 - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^2 \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^2 : \left[\left(-\frac{5}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^4 \right]^2 - \frac{5}{2}$ $\left[\frac{15}{4} \right]$

43 $\left\{ \left[\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{6} \right)^2 : \left(2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right)^2 \right] + \left(-\frac{3}{2} \right)^3 : \left(-\frac{3}{2} \right)^2 + 1 \right\} : \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{2} \right) - 1 \right]$ $\left[\frac{5}{54} \right]$

44 $\left(-\frac{1}{2} \right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^4 : \left[\left(\frac{4}{9} \right)^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{8} \right)^3 \right]^2 + 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^3$ [1]

45 $\left\{ -\left(\frac{4}{5} \right)^2 \right\}^3 : \left[\left(\frac{4}{5} \right)^6 \right]^2 \cdot \left[\left[\left(-\frac{3}{2} \right)^2 \right]^3 \right]^2 : \left[\left(\frac{3}{5} \right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{5} \right)^4 \cdot \left(\frac{3}{5} \right)^6 \right]$ [2¹²]

46 $\left\{ \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 \right]^6 \right\}^2 : \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^4 \right]^3 : \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 \right]^3 \cdot \left[\left(-\frac{3}{4} \right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^3 \right] : \left(\frac{1}{2} \right)^4$ $\left[\frac{9}{64} \right]$

47 $\frac{\left[\left(2 + \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \left(3 - \frac{4}{3} \right)^2 \cdot \left(-1 - \frac{1}{5} \right)^2 \right]^{-1} : \left(-1 + \frac{4}{5} \right)^2}{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^{-2} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{3}{8} \right)^{-2} : \left(1 - \frac{3}{5} \right)^2 - \frac{5}{2}}$ $\left[\frac{1}{3} \right]$

Traduci in espressioni le seguenti frasi e poi calcola i valori delle espressioni per i valori delle lettere indicati.

48 «Esegui la divisione tra i $\frac{3}{7}$ di a e la differenza fra i $\frac{3}{14}$ del quadrato di b e i $\frac{9}{8}$ del cubo di c . $a = -\frac{7}{12}$, $b = \frac{7}{3}$, $c = -\frac{2}{3}$. $\left[\frac{3}{7}a : \left(\frac{3}{14}b^2 - \frac{9}{8}c^3 \right); -\frac{1}{6} \right]$

49 «Moltiplica i $\frac{3}{5}$ di a per la differenza tra il doppio di a e i $\frac{3}{2}$ di b , e poi aggiungi il quoziente tra il quadrato di a e b . $a = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{2}{3}$. $\left[\frac{3}{5}a \cdot \left(2a - \frac{3}{2}b \right) + a^2 : b; -\frac{3}{8} \right]$

50 «Aggiungi al triplo del cubo di a il quadrato della semisomma di a e b , e poi somma la potenza che ha per base il quoziente tra i $\frac{3}{2}$ di a e i $\frac{9}{4}$ di b e per esponente -1 . $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$.

$$\left[3a^3 + [(a+b) : 2]^2 + \left(\frac{3}{2}a : \frac{9}{4}b \right)^{-1}; -\frac{37}{8} \right]$$

51 «Dividi il cubo dei $\frac{3}{4}$ di a per il cubo dei $\frac{14}{3}$ di b poi moltiplica per i $\frac{4}{7}$ di b elevati al numero intero -2 . $a = -\frac{2}{9}$, $b = \frac{1}{4}$.

$$\left[\left(\frac{3}{4}a \right)^3 : \left(\frac{14}{3}b \right)^3 \cdot \left(\frac{4}{7}b \right)^{-2}; -\frac{1}{7} \right]$$

Problemi

Risolvi i seguenti problemi con le frazioni.

52 Alcuni alunni della tua scuola partecipano ai giochi sportivi; precisamente $\frac{2}{31}$ partecipano alle gare di atletica e $\frac{1}{9}$ alle partite di pallavolo. Sapendo che i partecipanti sono complessivamente 98, calcola quanti sono gli alunni che non partecipano ai giochi sportivi. [460]

53 La differenza tra la base e l'altezza di un triangolo è 21,6 cm. Sapendo che l'altezza è $\frac{3}{5}$ della base, determina l'area del triangolo. [874,8 cm²]

54 Disegna tre segmenti AB , CD ed EF tali che CD sia il doppio di AB ed EF sia il triplo di CD . Calcola la somma dei tre segmenti, assumendo come unità di misura prima AB , poi CD e infine EF . $\left[9AB; \frac{9}{2}CD; \frac{3}{2}EF \right]$

55 Luigi ha collezionato $\frac{1}{5}$ delle carte di una raccolta. Quando ne avrà trovate altre 10 possiederà $\frac{1}{3}$ della raccolta. Determina di quante carte è composta la raccolta. [75]

56 Un ragazzo riesce a montare un computer in 6 ore, mentre un suo amico ne impiega 3. In quanto tempo riescono ad assemblare 5 computer, lavorando insieme? [10 ore]

57 Due amici abitano su uno stesso viale, ma da parti opposte. Dopo essersi chiamati col cellulare, escono da casa per incontrarsi. Trascorso un certo tempo, il primo ragazzo ha percorso $\frac{2}{5}$ della strada e il secondo $i \frac{3}{7}$ e la loro distanza è di 600 m. Quanto è lungo il viale? [3,5 km]

Risolvi i seguenti problemi con le percentuali.

58 Maria vende un immobile al prezzo di € 84 000, superiore del 5% rispetto al prezzo che aveva pagato per acquistarlo. Quanto era costato l'immobile? [€ 80 000]

59 In una svendita ho acquistato un pullover al prezzo di € 70. So che è stato scontato del 30%. Qual era il prezzo originario e a quanto ammonta lo sconto? [€ 100; € 30]

60 Una scatola da 1 kg di tonno sott'olio contiene il 4% di olio, mentre una scatoletta da 250 g di tonno sott'olio ne contiene il 18%. Quale delle due confezioni di tonno contiene una minor quantità di olio? Perché la scatoletta da 250 g abbia la stessa quantità di olio della confezione da 1 kg, quale deve essere la sua percentuale di olio? [quella da 1 kg; 16%]

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 4 esercizi in più



61

Un imbianchino per dipingere una parete di colore verde deve utilizzare, per ogni 10 m^2 di superficie, $\frac{1}{4}$ l di vernice bianca, 2 dl di colorante giallo e 3 dl di colorante blu per ogni litro di vernice bianca. Sapendo che le pareti della casa misurano complessivamente 252 m^2 e che quelle di colore verde devono essere i loro $\frac{5}{9}$, determina i m^2 di parete verde e le quantità di vernice bianca, di colorante giallo e blu necessarie per pitturarli.

[[140 m²; 3,5 l; 7 dl; 10,5 dl](#)]

62

Un numero razionale è tale che il successivo del suo reciproco vale $3,2\bar{3}$. Determina tale numero.

$$\left[\begin{array}{l} \frac{30}{67} \\ \frac{31}{67} \end{array} \right]$$

63

Come deve essere il numero naturale k , affinché la frazione $\frac{5^3 \cdot 3^3 + k}{2}$ risulti apparente? [[dispari](#)]

64

Ordina in senso crescente i seguenti sei numeri razionali, poi scrivi il quarto numero.

$$(0,2)^2; \quad 0,2; \quad 0,\bar{2}; \quad (0,\bar{2})^2; \quad \frac{1}{0,2}; \quad \frac{1}{0,\bar{2}}.$$

[[0,2̄](#)]

Nel sito: ▶ 6 esercizi in più



TEST YOUR SKILLS

65

If prices go down by 20%, by what percentage does your purchasing power increase?
«Purchasing power» means the amount of goods that you can purchase for a fixed amount of money.)

(USA Lehigh University: High School Math Contest, 2001)
[[25%](#)]

66

An operation « Δ » is defined by

$$a \Delta b = 1 - \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

What is the value of $(1 \Delta 2) \Delta (3 \Delta 4)$?

(CAN Canadian Open Mathematics Challenge, 2000)
[[-1](#)]

67

At a party, there were 200 people, of whom 5% wore one earring and, of the other 95%, half wore no earrings and half wore two earrings. How many earrings were worn at this party?

(USA Bay Area Math Meet, BAMM, Bowl Sampler, 1997)
[[200](#)]

68

A car has a price of \$ 8640. For trading in his old car, Tom will get 30% off. Find the price of the car with the trade in.

(CAN John Abbott College, Final Exam, 2001)
[\$ [6048](#)]

69

Attendance at a concert was 480. The ratio of adults to students was 5 to 3. How many adults attended?

(USA Southeast Missouri State University: Math Field Day, 2005)
[[300](#)]

70

Multiply and write scientific notation for the answer:

$$(2.4 \times 10^5)(5.4 \times 10^{-16}).$$

(USA Tacoma Community College, Review for Test, 2002)
[[1.296 \times 10^{-10}](#)]

71

Write $2.3 \times 10^{-2} + 3.5 \times 10^{-3}$ as a decimal number. Say if this number is greater than or less than 0.02.

(IR Leaving Certificate Examination, Ordinary Level, 1994)
[[0.0265, greater](#)]

GLOSSARY

amount: ammontare

attendance: pubblico, spettatori

decimal: decimale

earring: orecchino

goods: beni di consumo

greater: maggiore

to increase: accrescere, aumentare

less: meno, minore

percentage: percentuale

price: prezzo

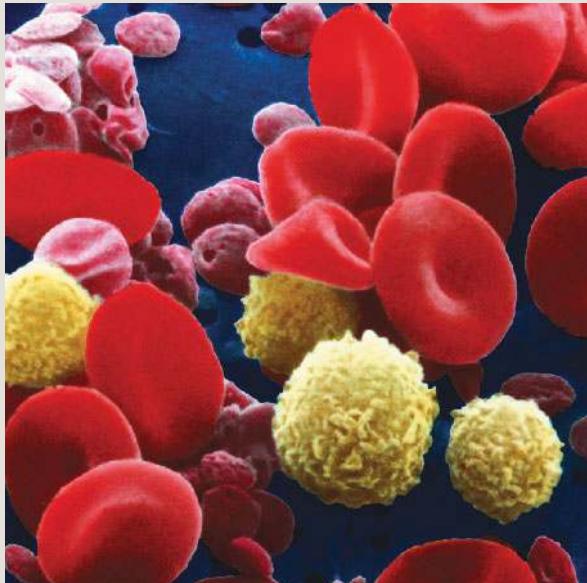
purchasing power: potere d'acquisto

ratio: rapporto

to trade in: farsi ritirare l'usato

to wear-wore-worn: indossare

Gli insiemi e la logica



I gruppi sanguigni

Le trasfusioni e i trapianti di organo non sono sempre possibili: è indispensabile che vi sia compatibilità tra il gruppo sanguigno del donatore e quello del ricevente...

...esistono donatori universali? E riceventi universali?

→ La risposta a pag. 176

1. Che cos'è un insieme

Una squadriglia di aerei, un branco di pesci, un mazzo di fiori, un gruppo qualsiasi di oggetti danno un'idea del concetto di insieme.

I matematici hanno costruito una vera e propria *teoria degli insiemi*, il cui linguaggio viene utilizzato nella matematica moderna per la sua particolare semplicità.

Fra gli insiemi è possibile definire operazioni che godono di proprietà simili a quelle delle operazioni fra numeri.

Un raggruppamento di oggetti rappresenta un **insieme in senso matematico** se esiste un criterio oggettivo che permette di decidere univocamente se un qualunque oggetto fa parte o no del raggruppamento.

ESEMPIO

Sono insiemi i seguenti raggruppamenti:

- i giocatori di calcio che hanno segnato più di 5 reti nel campionato italiano di serie A 2006/07;
- i pianeti del sistema solare;
- i numeri naturali maggiori di 1000.

► Che cosa significa **più severi**? Un insegnante può essere ritenuto severo da uno studente ma non da un altro. E cosa vuol dire **più ascoltati**? $\frac{1}{1000}$ è una frazione **molto piccola**?

► Indicheremo gli insiemi con lettere maiuscole, mentre useremo generalmente lettere minuscole per indicare gli elementi.

Non sono insiemi, invece:

- i dischi più ascoltati durante l'estate del 2007;
- i professori più severi;
- le frazioni molto piccole.

Infatti, in questi ultimi casi, le informazioni fornite non sono sufficienti per stabilire con certezza se certi «oggetti» fanno parte del raggruppamento considerato.

■ Gli elementi di un insieme

Gli oggetti che formano un insieme sono chiamati **elementi** dell'insieme. Un insieme è **finito** se contiene un numero finito di elementi, in caso contrario si dice **infinito**.

ESEMPIO

L'insieme dei granelli di sabbia contenuti in un recipiente è un insieme finito; l'insieme dei numeri naturali multipli di 3 è un insieme infinito.

■ Gli insiemi numerici

Per gli insiemi numerici utilizziamo le seguenti lettere:

- | | | | |
|--------------|--------------------------------------|--------------|-------------------------------|
| \mathbb{N} | insieme dei numeri naturali; | \mathbb{Z} | insieme dei numeri interi; |
| \mathbb{P} | insieme dei numeri naturali pari; | \mathbb{Q} | insieme dei numeri razionali; |
| \mathbb{D} | insieme dei numeri naturali dispari; | \mathbb{R} | insieme dei numeri reali. |

■ L'insieme vuoto

Fra i vari insiemi si considera anche l'insieme che non ha elementi, che si chiama **insieme vuoto**.

Per indicare l'insieme vuoto si utilizza il simbolo \emptyset .

L'insieme vuoto è uno solo. Gli insiemi seguenti sono lo stesso insieme, cioè l'insieme vuoto:

- l'insieme dei numeri dispari divisibili per 2;
- l'insieme delle consonanti della parola «io»;
- l'insieme dei triangoli aventi quattro lati.

■ Appartenenza a un insieme

Per indicare che un elemento **appartiene** a un insieme si usa il simbolo \in . Per indicare che un elemento **non appartiene** a un insieme si usa il simbolo \notin .

Si scrive $x \in A$ e si legge « **x appartiene ad A** »;
si scrive $y \notin A$ e si legge « **y non appartiene ad A** ».

► In matematica la negazione relativa a un simbolo si esprime barrando il simbolo stesso.
Per esempio, usiamo i simboli $=$ (uguale) e \neq (non uguale).

ESEMPIO

$5 \in \mathbb{N}$ significa: 5 appartiene all'insieme \mathbb{N} ;

$\frac{3}{4} \notin \mathbb{N}$ significa: $\frac{3}{4}$ non appartiene all'insieme \mathbb{N} .

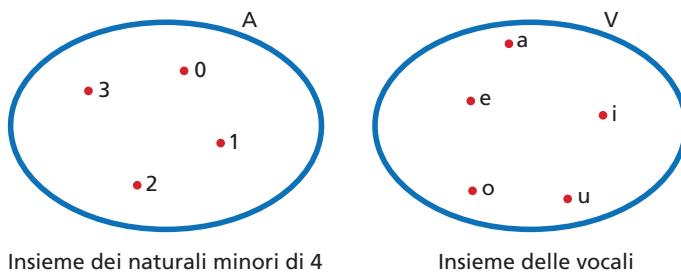
2. Le rappresentazioni di un insieme

Possiamo descrivere gli insiemi in tre modi diversi:

- rappresentazione grafica;
- rappresentazione per elencazione;
- rappresentazione mediante la proprietà caratteristica.

■ La rappresentazione grafica

Si utilizzano i **diagrammi di Eulero-Venn**, nei quali gli elementi degli insiemi sono racchiusi dentro linee chiuse.



◀ Figura 1 Esempi di diagrammi di Eulero-Venn. Questi diagrammi prendono il loro nome da quello di due matematici. Lo svizzero Leonhard Euler (1707-1783) utilizzava diagrammi fatti con dei cerchi in problemi di logica. Essi vennero anche detti «cerchi di Euler». L'inglese John Venn (1834-1925) usò anche altre linee chiuse.

■ La rappresentazione per elencazione

Gli elementi vengono elencati, racchiusi fra parentesi graffe e separati da virgole. Gli elementi non devono essere ripetuti e non ha importanza l'ordine con cui sono scritti.

ESEMPIO

La rappresentazione per elencazione dell'insieme delle lettere della parola «aristogatti» è:

$$L = \{a, g, i, o, r, s, t\}.$$

▶ La rappresentazione per elencazione viene anche chiamata **rappresentazione tabulare**.

Se l'insieme è costituito da infiniti elementi, dopo aver elencato un numero di elementi sufficiente a identificarlo, si può ricorrere ai puntini.

ESEMPIO

Numeri naturali, numeri pari, numeri dispari:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}, \quad \mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}, \quad \mathbb{D} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}.$$

■ La rappresentazione mediante la proprietà caratteristica

L'insieme è definito enunciando la proprietà che caratterizza in modo oggettivo e univoco ogni suo elemento.

ESEMPIO

Osserviamo la scrittura

$$I = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è multiplo di } 3\}:$$

- La rappresentazione mediante la proprietà caratteristica degli elementi di un insieme risulta utile soprattutto quando l'insieme contiene molti elementi.

- il simbolo \mid significa «tale che»;
- la lettera x indica un elemento generico dell'insieme;
- «è multiplo di 3» è la proprietà di cui gode x , ossia ogni elemento dell'insieme.

La scrittura $I = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è multiplo di } 3\}$ si legge nel modo seguente:

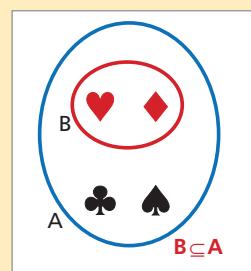
« I è l'insieme dei numeri naturali x tali che x è multiplo di 3».

3. I sottoinsiemi

■ DEFINIZIONE

Sottoinsieme

Si dice che l'insieme B è sottoinsieme dell'insieme A se tutti gli elementi di B appartengono anche ad A .

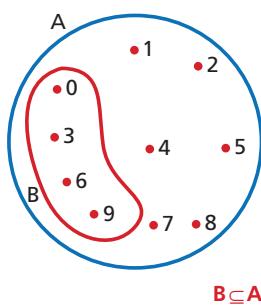


Si scrive $B \subseteq A$ e si legge « B è sottoinsieme di A », o « B è incluso in A », o « B è contenuto in A ».

ESEMPIO

Consideriamo $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $B = \{0, 3, 6, 9\}$.

L'insieme B è un sottoinsieme di A e scriviamo $B \subseteq A$.



▲ Figura 2 Nell'insieme dei numeri naturali minori di 10 (insieme A), consideriamo i multipli di 3 (insieme B). Ogni elemento di B è anche elemento di A .

Due insiemi sono **uguali** se sono formati dagli stessi elementi.

Si scrive $A = B$.

Per dire che « A e B non sono uguali» scriviamo invece $A \neq B$.

ESEMPIO

$A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{x \mid x \text{ è una vocale della parola «aiuole»}\}$

sono insiemi uguali, perché hanno gli stessi elementi.

Per stabilire che $A = B$, è sufficiente controllare che sia $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Infatti, se $A \subseteq B$, tutti gli elementi di A sono elementi di B e se $B \subseteq A$, anche tutti gli elementi di B sono elementi di A , perciò A e B hanno gli stessi elementi.

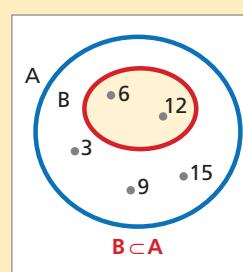
È vero anche il contrario, cioè se $A = B$, allora $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

L'inclusione stretta

DEFINIZIONE

Inclusione stretta

Si dice che l'insieme B è strettamente incluso nell'insieme A quando ogni elemento di B è anche elemento di A , ma esistono elementi di A che non sono elementi di B .



Si scrive $B \subset A$ e si legge « **B contenuto strettamente in A** », oppure « **B è incluso strettamente in A** »: $B \subset A$ se $B \subseteq A$ e $B \neq A$.

ESEMPIO

1. $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$, perché tutti i numeri pari sono naturali, ma esistono naturali che non sono pari.
2. $\{x \mid x \text{ è un gatto siamese}\} \subset \{x \mid x \text{ è un gatto}\}$, perché tutti i gatti siamesi sono gatti, ma esistono gatti che non sono siamesi.

► Se $B \subset A$, allora $B \subseteq A$, mentre non è vero il contrario: se $B \subseteq A$, non è detto che $B \subset A$.

► **Osservazione.** Nell'utilizzo dei simboli \subset e \in è sbagliato scrivere $2 \subset \mathbb{N}$ e $\{8\} \in \mathbb{N}$. Correggi tu.

I sottoinsiemi propri e impropri

Per qualunque insieme A vale la relazione $\emptyset \subseteq A$.

Infatti, poiché l'insieme vuoto non ha elementi, possiamo sempre affermare che ogni elemento dell'insieme vuoto è anche elemento dell'insieme A .

Inoltre è vero che $A \subseteq A$.

Pertanto, dato un insieme, l'insieme stesso e l'insieme vuoto sono sempre suoi sottoinsiemi e si dicono sottoinsiemi **impropri**.

ESEMPIO

1. L'insieme A delle consonanti della parola «aia» è un sottoinsieme **improprio** dell'insieme delle consonanti, perché $A = \emptyset$.
2. L'insieme B delle vocali della parola «aiuole» è un sottoinsieme **improprio** dell'insieme V delle vocali, perché $B = V$.

Ogni sottoinsieme non vuoto strettamente incluso in un insieme si dice sottoinsieme **proprio** dell'insieme.

► L'insieme delle vocali è un sottoinsieme proprio di quello delle lettere dell'alfabeto.

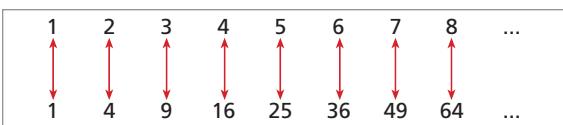
ESPLORAZIONE: INSIEMI INFINITI

GALILEO

Intuitivamente siamo portati a pensare che ogni insieme debba essere più numeroso di un suo sottoinsieme proprio. Tale convinzione, supportata dall'esperienza diretta, è certamente vera ed evidente nel caso degli insiemi finiti. Quando però si considerano gli insiemi infiniti, le cose cambiano e l'affermazione secondo cui «l'intero è maggiore della parte» perde validità.

Il primo ad accorgersene fu Galileo (1564-1642). Nel suo trattato *Discorsi e dimostrazioni matematiche attorno a due nuove scienze* (1638), egli riconobbe la possibilità di stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli interi positivi e i loro quadrati, sebbene questi ultimi siano solo un sottoinsieme di \mathbb{Z}^+ . Galileo considerò paradossale questa situazione, giungendo alla conclusione che non fosse opportuno confrontare insiemi infiniti.

nivoca tra gli interi positivi e i loro quadrati, sebbene questi ultimi siano solo un sottoinsieme di \mathbb{Z}^+ . Galileo considerò paradossale questa situazione, giungendo alla conclusione che non fosse opportuno confrontare insiemi infiniti.



▲ C'è corrispondenza biunivoca fra gli interi positivi e i loro quadrati, quindi i due insiemi sono «ugualmente numerosi».

DEDEKIND

Nel XIX secolo questa posizione venne superata da Dedekind (1831-1916), il quale riconobbe che il paradosso scoperto da Galileo era per gli insiemi infiniti una proprietà caratteristica, tanto che, nel

1872, la utilizzò per la loro definizione: un insieme è infinito se e soltanto se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

CANTOR

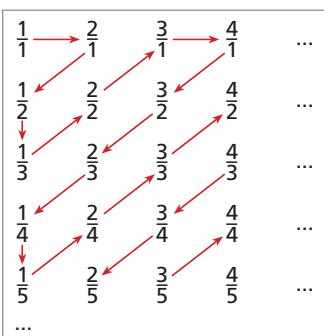
Cantor (1845-1918), contemporaneo e amico di Dedekind, si spinse oltre. Studiò a fondo il problema di quali insiemi infiniti avessero la stessa «numerosità». Definiti *equipotenti* due insiemi i cui elementi possono essere messi in corrispondenza biunivoca, chiamò *potenza del numerabile* quella di tutti gli insiemi equipotenti ai numeri naturali. Nel 1874 giunse alla scoperta sensazionale che l'insieme dei numeri razionali è numerabile.

Lo schema della figura a lato fa comprendere su quale idea è basata la sua dimostrazione.

Cantor provò inoltre che esistono insiemi che non hanno la potenza del numerabile. È il caso, per esempio, dell'insieme dei punti di una retta.

D'altra parte tale insieme è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri reali. Ciascuno dei due insiemi possiede una potenza superiore a quella del numerabile. Cantor la chiamò *potenza del continuo*.

nivoca con l'insieme dei numeri reali. Ciascuno dei due insiemi possiede una potenza superiore a quella del numerabile. Cantor la chiamò *potenza del continuo*.



◀ Seguendo le frecce è possibile ordinare tutte le frazioni positive, in modo da contarle e quindi metterle in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali.

IN DIECI RIGHE

Georg Cantor è considerato il padre della teoria degli insiemi. Ai suoi tempi, però, il suo lavoro non ebbe soltanto apprezzamenti... Scrivi con il computer una sintetica biografia di Cantor, mettendo in evidenza la sua amicizia con Dedekind e l'opposizione incontrata da parte di Kronecker.



Cerca nel web: Cantor, Dedekind, Kronecker, teoria, insiemi, set theory.

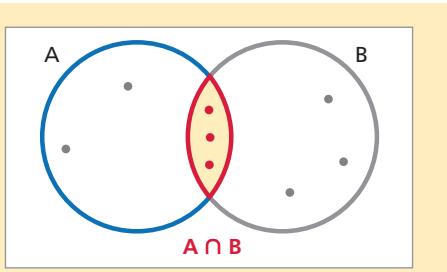
4. Le operazioni con gli insiemi

L'intersezione di due insiemi

DEFINIZIONE

Intersezione

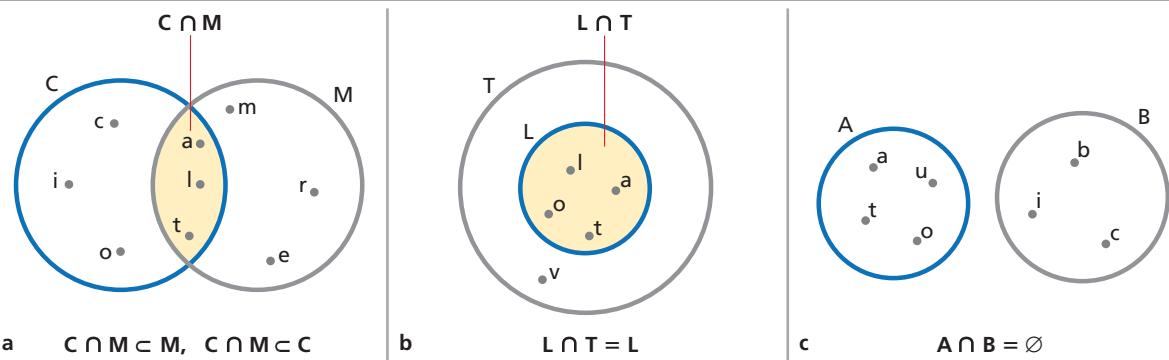
Si dice intersezione di due insiemi A e B l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A sia a B .



Si scrive $A \cap B$ e si legge « A intersezione B » o « A intersecato B ».

In simboli: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$.

ESEMPIO



▲ Figura 3

- a) C e M hanno alcuni elementi in comune, ma non tutti: la loro intersezione è un sottoinsieme proprio sia di C sia di M .
- b) L è sottoinsieme di T : l'intersezione è sottoinsieme improprio di L , poiché coincide con L .
- c) A e B non hanno elementi in comune e la loro intersezione è l'insieme vuoto, cioè un sottoinsieme improprio di entrambi.

Consideriamo gli insiemi della figura 3.

- a) $C = \{x | x \text{ è una lettera della parola «cioccolata»}\}$ e $M = \{x | x \text{ è una lettera della parola «marmellata»}\}$. Gli elementi in comune sono a, l, t ; quindi $C \cap M = \{a, l, t\}$.
- b) $L = \{x | x \text{ è una lettera della parola «lato»}\}$ e $T = \{x | x \text{ è una lettera della parola «tavolo»}\}$. L'insieme L è sottoinsieme di T e si ha:

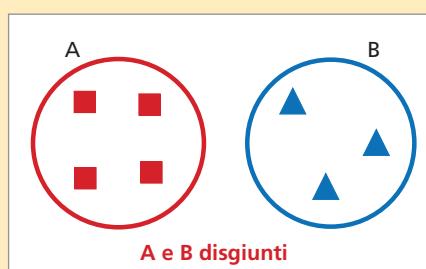
$$L \cap T = \{l, a, t, o\} = L.$$
- c) $A = \{x | x \text{ è una lettera della parola «auto»}\}$ e $B = \{x | x \text{ è una lettera della parola «bici»}\}$. I due insiemi non hanno elementi in comune, quindi $A \cap B = \emptyset$.

► Per esempio, sono disgiunti l'insieme dei mammiferi e quello degli uccelli, perché non esiste alcun uccello che sia mammifero.

DEFINIZIONE

Insiemi disgiunti

Se due insiemi non hanno elementi in comune, si dicono disgiunti.



In generale, sull'intersezione possiamo affermare che:

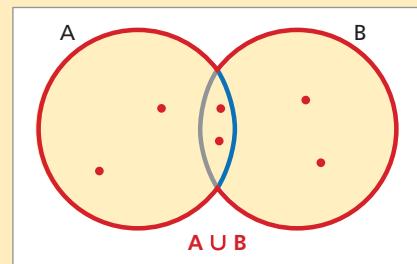
- se $A \subseteq B$, allora $A \cap B = A$;
- se A e B sono **disgiunti**, allora $A \cap B = \emptyset$.

L'unione di due insiemi

DEFINIZIONE

Unione

Si dice unione di due insiemi A e B l'insieme degli elementi che appartengono ad A o a B .

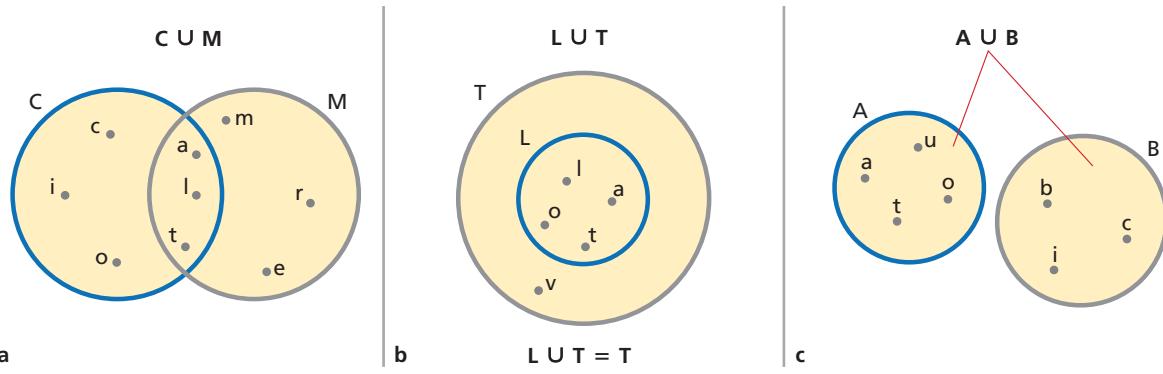


Si scrive $A \cup B$ e si legge «**A unione B**» o «**A unito B**». In simboli:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

ESEMPIO

▼ Figura 4 Consideriamo gli stessi insiemi della figura 3. Nell'unione ci sono tutti gli elementi dei due insiemi e soltanto essi. Gli elementi in comune vengono scritti una sola volta (l'insieme unione è colorato in giallo).



Le proprietà dell'intersezione e dell'unione

Le operazioni di intersezione e di unione di insiemi godono di proprietà analoghe a quelle che abbiamo visto per la moltiplicazione e l'addizione dei numeri.

PROPRIETÀ DELL'INTERSEZIONE

commutativa	$A \cap B = B \cap A$
associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
distributiva rispetto all'unione	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

PROPRIETÀ DELL'UNIONE

commutativa	$A \cup B = B \cup A$
associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
distributiva rispetto all'intersezione	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

L'uso dei diagrammi di Eulero-Venn permette di verificare con rapidità le proprietà dell'unione e dell'intersezione.

► Fra i numeri **non** vale la proprietà distributiva dell'unione rispetto alla moltiplicazione:

$$4 + (2 \cdot 5) \neq (4 + 2) \cdot (4 + 5).$$

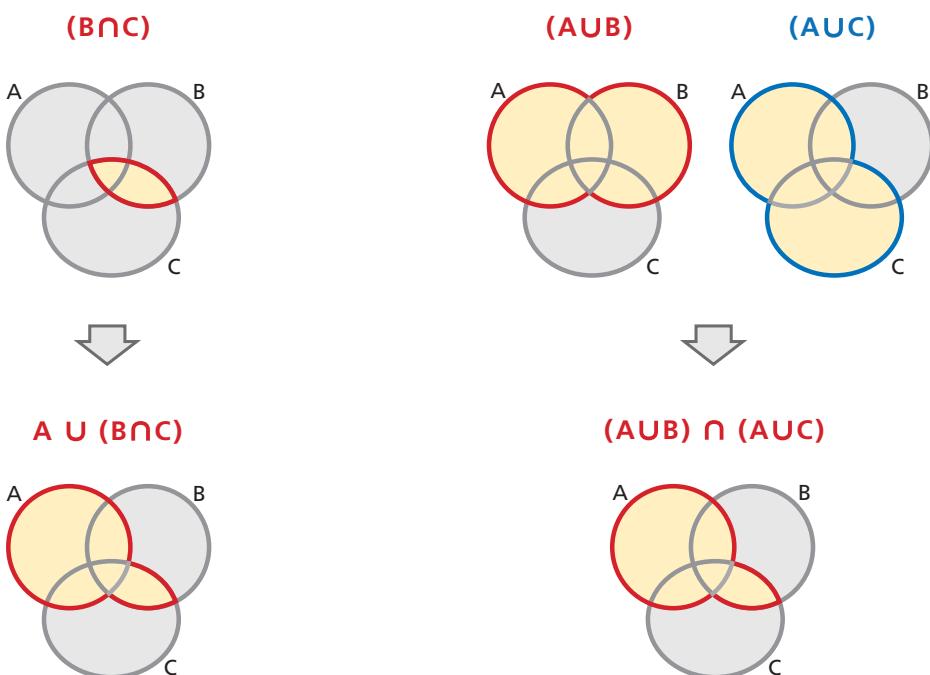
VERIFICA DELLA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DELL'UNIONE RISPETTO ALL'INTERSEZIONE

Vogliamo verificare

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Per ottenere $A \cup (B \cap C)$, prima consideriamo $B \cap C$ e poi l'unione fra A e $B \cap C$.

Per ottenere $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, prima consideriamo $A \cup B$ e $A \cup C$ e poi la loro intersezione. Osserviamo graficamente che otteniamo lo stesso insieme.

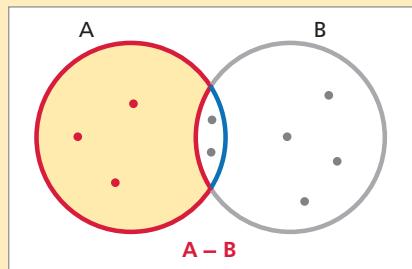


■ La differenza tra due insiemi

■ DEFINIZIONE

Differenza

Si dice differenza tra due insiemi A e B , considerati nell'ordine, l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B .



Si scrive $A - B$ e si legge « A meno B ». In simboli:

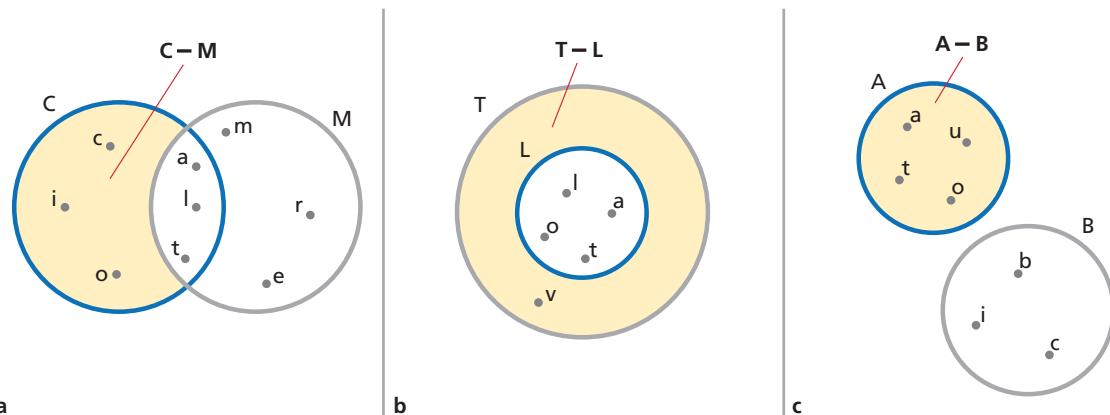
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

■ ESEMPIO

▼ Figura 5 Consideriamo gli stessi insiemi visti per l'intersezione e per l'unione (l'insieme differenza è colorato in giallo).

a) $C - M = \{c, i, o\}$; b) $T - L = \{v\}$; c) $A - B = A$.

Se i due insiemi sono disgiunti, la differenza coincide sempre con il primo insieme.



La differenza fra insiemi non è commutativa.

■ ESEMPIO

Consideriamo gli insiemi dell'esempio precedente (figura 5):

$$M - C = \{m, r, e\} \text{ è diverso da } C - M = \{c, i, o\};$$

$$L - T = \emptyset \text{ ed è diverso da } T - L = \{v\};$$

$$B - A = B \text{ ed è diverso da } A - B = A.$$

In generale:

- se $B \subseteq A$, allora $B - A = \emptyset$;
- se $A \cap B = \emptyset$, allora $A - B = A$.

L'insieme complementare di un insieme

DEFINIZIONE

Insieme complementare

Se $B \subseteq A$, l'insieme complementare di B rispetto ad A è $A - B$.

L'insieme complementare di B rispetto ad A si indica con \bar{B}_A .

ESEMPIO

- Se A è l'insieme delle lettere di una parola e B quello delle sue consonanti, \bar{B}_A è l'insieme delle vocali della parola.
- Il complementare di un insieme può essere vuoto. Per esempio, è sempre vero che $\bar{A}_A = \emptyset$.

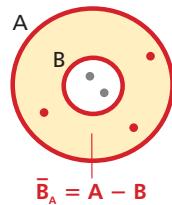
Spesso gli elementi di uno o più insiemi vengono scelti fra quelli di uno stesso insieme più ampio, al quale viene dato il nome di **insieme universo**.

In questo caso, se vogliamo indicare il complementare di A rispetto all'insieme universo, scriveremo semplicemente \bar{A} .

ESEMPIO

Se l'insieme universo è \mathbb{N} , allora il complementare dell'insieme dei numeri pari è l'insieme dei numeri dispari:

$$\bar{\mathbb{P}} = \mathbb{D}.$$



► Sai trovare l'insieme $\bar{\mathbb{O}}_A$?

► Se l'insieme universo è \mathbb{Z} , allora il complementare dell'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} è:

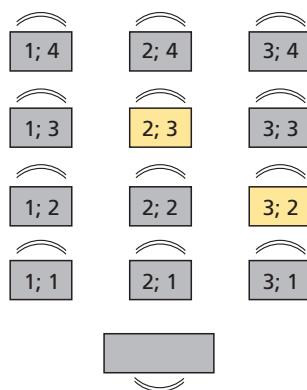
$$\bar{\mathbb{N}} = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}.$$

Il prodotto cartesiano

In una classe, gli studenti sono seduti ai loro banchi disposti come in figura 6. Per determinare a caso uno studente da interrogare, un insegnante estrae due numeri: il primo indicherà in quale fila verticale si trova il banco dell'alunno sorteggiato, il secondo in quale fila orizzontale.

Ogni studente è quindi individuato da una coppia di numeri.

► **Figura 6** Nella pianta della classe la coppia $(2; 3)$ non indica lo stesso studente della coppia $(3; 2)$. Inoltre, mentre ha senso parlare della posizione $(2; 4)$, il banco in posizione $(4; 2)$ non esiste.



Il primo numero viene scelto nell'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ e il secondo nell'insieme $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Indichiamo ogni possibile coppia mediante i due numeri, separati da un punto e virgola, scritti fra parentesi tonde.

In queste coppie di numeri è importantissimo l'**ordine**.

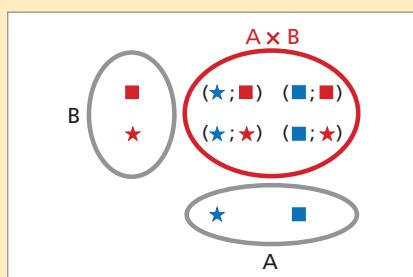
Coppie come $(2; 3)$ e $(3; 2)$ non hanno lo stesso significato.

L'insieme delle coppie viene indicato con $A \times B$ e si chiama *prodotto cartesiano* degli insiemi A e B .

DEFINIZIONE

Prodotto cartesiano

Si dice prodotto cartesiano di due insiemi A e B , considerati nell'ordine, l'insieme di tutte le coppie ordinate in cui il primo elemento appartiene ad A e il secondo appartiene a B .



Si scrive $A \times B$ e si legge « A per B » o « A cartesiano B ».

In simboli:

$$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

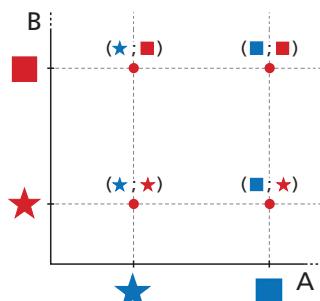
La **rappresentazione cartesiana**, o **diagramma cartesiano**, del prodotto cartesiano è una rappresentazione grafica che utilizza due semirette fra loro perpendicolari.

Sulla semiretta orizzontale rappresentiamo gli elementi del primo insieme, su quella verticale gli elementi del secondo insieme.

Da ogni elemento del primo insieme tracciamo una semiretta verticale; da ogni elemento del secondo insieme tracciamo una semiretta orizzontale.

Queste semirette formano una griglia: i nodi della griglia rappresentano le coppie del prodotto cartesiano.

► **Figura 7** Nella rappresentazione cartesiana di $A \times B$, gli elementi di A sono rappresentati su una semiretta orizzontale, gli elementi di B su una semiretta verticale, gli elementi di $A \times B$ sono i nodi della griglia.



Il prodotto cartesiano fra due insiemi non è **commutativo**:

$$A \times B \neq B \times A.$$

ESEMPIO

Consideriamo gli insiemi: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$.

In $A \times B$ ci sono le coppie: $(1; a)$, $(2; a)$, $(3; a)$, $(1; b)$, $(2; b)$, $(3; b)$.

Invece in $B \times A$ ci sono $(a; 1)$, $(a; 2)$, $(a; 3)$, $(b; 1)$, $(b; 2)$, $(b; 3)$.

$A \times B \neq B \times A$ perché, per esempio, $(1; a) \neq (a; 1)$.

► Si può rappresentare $A \times B$ anche con una **tavola a doppia entrata**.

\times	a	b
1	$(1; a)$	$(1; b)$
2	$(2; a)$	$(2; b)$
3	$(3; a)$	$(3; b)$

► Per esempio, se $B = \{a, b\}$, allora:
 $B \times B = \{(a; a), (a; b), (b; a), (b; b)\}$.

5. L'insieme delle parti e la partizione di un insieme

L'insieme delle parti

Consideriamo l'insieme A formato da due elementi, $A = \{1, 2\}$, e tutti i possibili sottoinsiemi di A , compresi il vuoto e A stesso. Essi sono: \emptyset , $\{1\}$, $\{2\}$, A .

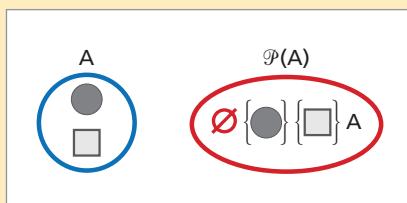
L'insieme formato da questi quattro insiemi viene chiamato insieme delle parti di A .

DEFINIZIONE

Insieme delle parti

Si chiama insieme delle parti di A l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A .

Si scrive: $\mathcal{P}(A)$.



► Se in un insieme A ci sono n elementi, quanti sono gli elementi di $\mathcal{P}(A)$?

La partizione di un insieme

Consideriamo l'insieme A degli animali vertebrati e l'insieme dei suoi sottoinsiemi:

$$C = \{\text{pesci, anfibi, rettili, uccelli, mammiferi}\}.$$

Esso gode delle seguenti proprietà:

- a) in ogni sottoinsieme c'è almeno un animale;
- b) lo stesso animale non appartiene mai a due sottoinsiemi diversi;
- c) nessun animale resta fuori dalla classificazione.

Questo è un esempio di *partizione* di A .

► Questa è la classificazione che di solito si usa nelle scienze biologiche.

► Suddividiamo, per esempio, l'insieme A delle automobili che circolano in Italia a seconda della marca.
Otteniamo una partizione di A , in quanto sono soddisfatte le tre condizioni. Tale partizione non è l'unica possibile; sai trovarne altre?

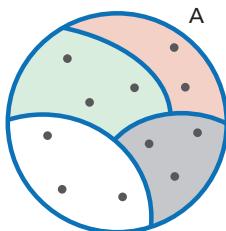
► Un **enunciato** è un insieme di parole o simboli dotato di senso.
Per esempio,
« $\sqrt{\text{pollo}} \times \text{uova}$ »,
«Pape satàn aleppe»
non sono enunciati; invece
«Canti molto bene» o
« $a + b = c$ » sono enunciati.

DEFINIZIONE

Partizione

Si chiama partizione dell'insieme A un insieme di sottoinsiemi di A che ha queste caratteristiche:

- ogni sottoinsieme non è vuoto;
- tutti i sottoinsiemi sono disgiunti fra loro;
- l'unione di tutti i sottoinsiemi è A .



6. Le proposizioni logiche

DEFINIZIONE

Proposizione logica

Una proposizione logica è un enunciato che è o **vero** o **falso**.

ESEMPIO

Sono proposizioni logiche:

- Il Sole è una stella.
- Parigi è la capitale dell'Olanda.
- 15 è un numero primo.

Non sono proposizioni logiche:

- L'hamburger è buonissimo.
- Viva l'Italia!
- Che cosa farai domani?

In generale **non** sono proposizioni logiche:

- le domande;
- le esclamazioni;
- i comandi;
- le frasi del tipo «mi piace», «è bello», «è buona», «lo amo», «è bassa» ecc.: infatti esse sono vere per chi le esprime, ma non per tutti;
- le frasi con riferimenti al futuro del tipo «domani pioverà», «più tardi andremo al cinema» ecc.

Le variabili logiche

Per indicare in modo generale un numero o un'espressione numerica, cioè una variabile numerica, si utilizzano le lettere dell'alfabeto.

Esiste un tipo diverso di variabile: è la *variabile logica*, che rappresenta una proposizione. Anch'essa viene indicata con una lettera dell'alfabeto.

DEFINIZIONE

Variabile logica

Si chiama variabile logica ogni lettera utilizzata al posto di una proposizione.

Per indicare che la lettera A rappresenta la proposizione «Il Po è il fiume più lungo d'Italia», scriveremo A : «Il Po è il fiume più lungo d'Italia».

ESEMPIO

A: «Il numero 5 non è primo»; B: «Il numero 6 è multiplo di 3».

Attribuire un **valore di verità** a una proposizione significa affermare che essa è vera oppure falsa.

Scriviamo brevemente la lettera «V» se la proposizione è vera, la lettera «F» se è falsa.

7. I connettivi logici e le espressioni

Finora abbiamo considerato *proposizioni semplici*, dette anche *elementari* o *atomiche* perché sono costituite da una sola forma verbale (o *predicato*).

Soggetto	Predicato
Il bambino	è caduto
Le uova	sono fresche

In genere, però, un ragionamento non è formato da una singola proposizione semplice, ma da più proposizioni legate fra loro dai **connettivi** «e», «o», «non», «o... o...», «se... allora...», «se e solo se».

ESEMPIO Consideriamo le due proposizioni elementari:

A: «Vado alla stazione»;

B: «Accompagno il mio amico in palestra».

Con esse possiamo costruire altre proposizioni:

C: «Vado alla stazione **e** accompago il mio amico in palestra»;

D: «**O** vado alla stazione **o** accompago il mio amico in palestra»;

E: «**Non** vado alla stazione **e** accompago il mio amico in palestra»;

F: «**Se** vado alla stazione, **allora** accompago il mio amico in palestra»;

G: «Vado alla stazione **se e solo se** accompago il mio amico in palestra».

Ogni proposizione risulta dalla composizione delle stesse proposizioni elementari, ma ha un significato diverso dalle altre.

Due proposizioni legate da un connettivo danno come risultato una nuova proposizione.

DEFINIZIONE**Proposizione composta**

Una proposizione è composta quando è formata da più proposizioni elementari legate da connettivi.

I connettivi logici consentono di costruire proposizioni composte, dette anche **espressioni logiche**, effettuando operazioni tra le proposizioni elementari, così come le quattro operazioni permettono di operare con i numeri. Per stabilire il valore di verità di una proposizione composta si usano le **tavole di verità**.

► Poiché i valori di verità sono due, per indicarli a volte si usano anche le cifre 0 e 1: 0 sta per «F», 1 per «V».

◀ **Figura 8** Le proposizioni semplici sono le frasi di senso compiuto più brevi e sono composte da soggetto e predicato.

Il soggetto è ciò di cui parla il predicato.

Il predicato è la parte che dice qualcosa del soggetto.

► Una proposizione composta si dice anche **molecolare**.

► Come per le quattro operazioni, per i connettivi logici si usano delle regole di precedenza e per scrivere le espressioni logiche si possono utilizzare delle parentesi.

La tavola di verità è una tabella in cui si riportano le proposizioni elementari, le proposizioni composte e i relativi valori di verità possibili.

Come si attribuisce il valore di verità a una proposizione composta conoscendo i valori di verità propri delle proposizioni elementari?

Non è facile rispondere, perché il risultato dipende dal connettivo che si usa. Studieremo le regole valide per ciascuno dei connettivi.

■ La negazione: non

- Si scrive: \bar{A} , oppure
- A. Si legge: «**non** A».

DEFINIZIONE

Negazione di una proposizione

La negazione di una proposizione A è la proposizione «**non** A», che risulta vera se A è falsa e falsa se A è vera.

se A è VERA allora \bar{A} è FALSA

se A è FALSA allora \bar{A} è VERA

Indichiamo col simbolo « $\bar{}$ » la negazione. Per esempio, la negazione di A è \bar{A} (si legge «**non** A»).

ESEMPIO

A: «Rimini è una città di mare» V;

\bar{A} : «Rimini non è una città di mare» F.

A	\bar{A}
V	F
F	V

Data una generica proposizione A, che può essere vera o falsa, riportiamo a lato la **tavola di verità della negazione**.

■ La congiunzione: e

DEFINIZIONE

Congiunzione di due proposizioni

La congiunzione di due proposizioni A e B è la proposizione «A e B». Essa è vera solo se le due proposizioni sono entrambe vere. In tutti gli altri casi è falsa.

se A è VERA e B è VERA: A \wedge B è VERA

altrimenti: A \wedge B è FALSA

ESEMPIO

1. A: «La Terra è un pianeta»; B: «La Luna è un satellite della Terra»;
 $A \wedge B$: «La Terra è un pianeta e la Luna è un satellite della terra».

La proposizione $A \wedge B$ è vera, perché sono vere sia A sia B.

2. A: «10 è multiplo di 5»; B: «10 è un numero primo»;
 $A \wedge B$: «10 è multiplo di 5 ed è un numero primo».

La proposizione $A \wedge B$ è falsa, perché B è falsa.

Mediante la definizione costruiamo la **tavola di verità della congiunzione**. La prima riga della tavola si legge: «Se A è vera e B è vera, allora $A \wedge B$ è vera»; la seconda riga si legge: «Se A è vera e B è falsa, allora $A \wedge B$ è falsa» ecc.

In una proposizione composta che utilizza i connettivi «non» ed «e» la negazione «non» ha la precedenza rispetto alla congiunzione «e».

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ESEMPIO

Date le proposizioni A e B , scriviamo la proposizione composta $A \wedge \bar{B}$:

A : «Marina gioca a pallavolo», B : «Marina gioca a tennis».

Si deve prima considerare \bar{B} : «Marina non gioca a tennis» e poi

$A \wedge \bar{B}$: «Marina gioca a pallavolo e non a tennis».

► Il connettivo «non» ha la precedenza rispetto a tutti gli altri connettivi.

■ La disgiunzione inclusiva: o



PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Cavalieri e furfanti



Nel sito: ► Scheda di lavoro

Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti:

- 1) un abitante dell'isola dice la verità se e solo se è un cavaliere;
- 2) un abitante dell'isola mente se e solo se è un furfante;
- 3) non vi sono altri abitanti oltre ai cavalieri e ai furfanti.

(Da un'idea di Raymond Smullyan, *Qual è il titolo di questo libro?*, Zanichelli, 1981)

GIOVANNI: «Quando visitai l'isola, parlando con due abitanti X e Y , il primo affermò: "Almeno uno fra me e Y è un furfante". Non riesco proprio a capire che cosa fossero X e Y !».

SILVIA: «Forse bisogna fare delle ipotesi. Per esempio, se X è un furfante...».

► Continua il ragionamento di Silvia, cercando di scoprire se X e Y sono cavalieri o furfanti.

DEFINIZIONE

Disgiunzione inclusiva di due proposizioni

La disgiunzione inclusiva di due proposizioni A e B è la proposizione « $A \vee B$ ». Essa è falsa solo se le due proposizioni sono entrambe false. In tutti gli altri casi è vera.

se A è FALSA e B è FALSA: $A \vee B$ è FALSA

altrimenti: $A \vee B$ è VERA

► Si scrive: $A \vee B$.
Si legge: « A o B », oppure (dal latino) « A vel B », oppure (dall'inglese) « A OR B ».

ESEMPIO

1. La proposizione «2 è minore di 3 o maggiore di 10» è vera. Infatti essa è formata dalle due proposizioni:

A : «2 è minore di 3»; B : «2 è maggiore di 10».

Poiché A è vera, anche $A \vee B$ risulta vera, anche se B è falsa.

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

► Si scrive: $A \dot{\vee} B$.
Si legge: «o A o B», oppure (dal latino) «A aut B», oppure (dall'inglese) «A XOR B» (eXclusive OR).

► Aut in latino significa «o», ma, a differenza di «vel», veniva usato come disgiunzione esclusiva. «Hic vincendum aut moriendum est» (Livio): «Qui bisogna o vincere o morire».

► La disgiunzione inclusiva include tra i casi veri quello in cui le due proposizioni sono entrambe vere. Nella disgiunzione esclusiva questo caso è escluso.

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

2. La proposizione «5 è minore di 3 o maggiore di 10» è falsa. Infatti risultano false sia A: «5 è minore di 3» sia B: «5 è maggiore di 10».

Tavola di verità della disgiunzione inclusiva

La tavola a lato si costruisce mediante la definizione.

■ La disgiunzione esclusiva: o... o...

■ DEFINIZIONE

Disgiunzione esclusiva di due proposizioni

La disgiunzione esclusiva di due proposizioni A e B è la proposizione «o A o B». Essa è vera solo se una proposizione è vera e l'altra è falsa.

se A è VERA e B è FALSA
 oppure
 se A è FALSA e B è VERA
 altrimenti:
 $A \dot{\vee} B$ è VERA
 $A \dot{\vee} B$ è FALSA

■ ESEMPIO

1. La proposizione «10 o è minore di 100 o è maggiore di 100» è vera. Infatti essa è formata dalle due proposizioni:
A: «10 è minore di 100»; B: «10 è maggiore di 100».
Poiché A è vera e B è falsa, $A \dot{\vee} B$ risulta vera.
2. La proposizione «5 o è minore di 10 o è minore di 7» è falsa. Infatti risultano vere sia «5 è minore di 10» sia «5 è minore di 7».

Tavola di verità della disgiunzione esclusiva

$A \dot{\vee} B$ risulta falsa se le due proposizioni sono entrambe vere o entrambe false.

A	B	$A \dot{\vee} B$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

■ L'implicazione materiale

■ DEFINIZIONE

Implicazione materiale

L'implicazione materiale di due proposizioni A e B è la proposizione «se A, allora B» che risulta falsa solo se A è vera e B è falsa. In tutti gli altri casi è vera.

se A è VERA e B è FALSA: $A \rightarrow B$ è FALSA

altrimenti:
 $A \rightarrow B$ è VERA

La tavola di verità di $A \rightarrow B$ è riportata a lato.

A si chiama antecedente e B conseguente.

ESEMPIO

- «Se 15 è un numero dispari, allora 15 è divisibile per 7» è una proposizione falsa. Infatti, essendo A : «15 è un numero dispari» vera e B : «15 è divisibile per 7» falsa, $A \rightarrow B$ risulta falsa.
- «Se 4 è un numero pari, allora 4 è divisibile per 2» è una proposizione vera. Infatti essa è formata dalle due proposizioni:
 A : «4 è un numero pari»; B : «4 è divisibile per 2».
Poiché A è vera e B è vera, è vera anche $A \rightarrow B$.

■ La doppia implicazione**DEFINIZIONE****Doppia implicazione**

La doppia implicazione di due proposizioni A e B è una proposizione vera se A e B sono entrambe vere o entrambe false. Negli altri due casi è falsa.

**se A è VERA e B è VERA
oppure
se A è FALSA e B è FALSA** } : $A \leftrightarrow B$ È VERA
altrimenti: $A \leftrightarrow B$ È FALSA

Si scrive: $A \leftrightarrow B$.
Si legge: « A se e solo se B ».

La tavola di verità di $A \leftrightarrow B$ è riportata a lato.

ESEMPIO

La proposizione «Un triangolo è equilatero se e solo se è equiangolo» è vera. Infatti, essa è formata dalle due proposizioni:

A : «Un triangolo è equilatero», B : «Un triangolo è equiangolo».

Poiché A è vera e B è vera, è vera anche $A \leftrightarrow B$.

A	B	$A \leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

■ Le espressioni logiche

Componendo più proposizioni con i connettivi esaminati finora e con quelli che esamineremo, si ottengono le **espressioni logiche**.

ESEMPIO $(A \wedge B), A \wedge B \wedge \bar{C}, A \wedge \bar{B} \wedge C$ sono espressioni logiche.

Consideriamo quali sono le precedenze da rispettare sulle espressioni logiche con più connettivi:

- se non ci sono parentesi, si deve seguire il seguente ordine: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;
- se ci sono parentesi, si usano le stesse convenzioni delle espressioni numeriche, cioè prima le parentesi tonde, poi le quadre, poi le graffe.

Se una negazione si riferisce a un'intera parentesi, occorre prima ottenere il valore di verità dentro la parentesi e poi effettuare la negazione.

ESEMPIO

Consideriamo l'espressione $A \wedge \bar{B}$.

Per costruire la tavola di verità di questa espressione si procede così:

- prima si compilano le colonne relative ad A e a B ;
- poi si compila la colonna relativa a \bar{B} ;
- infine si compila quella relativa alla congiunzione di A e di \bar{B} .

A	B	\bar{B}	$A \wedge \bar{B}$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Le tautologie

Il prefisso «tauto» deriva dal greco *táutó* e significa «lo stesso»; una **tautologia** in linguaggio non matematico è una proposizione in cui il predicato ripete il concetto già contenuto nel soggetto. Per esempio, «Il cantante canta».

Tavola di verità:

A	\bar{A}	$A \vee \bar{A}$
V	F	V
F	V	V

La proposizione $A \vee \bar{A}$ risulta sempre vera, quindi è una tautologia.

Tavola di verità:

A	\bar{A}	$A \wedge \bar{A}$
V	F	F
F	V	F

La proposizione $A \wedge \bar{A}$ risulta sempre falsa, quindi è una contraddizione.

DEFINIZIONE**Tautologia**

Una proposizione composta è una tautologia se risulta **sempre vera**, qualunque valore di verità si attribuisca alle proposizioni elementari di cui è composta.

ESEMPIO Nella proposizione «A pallavolo o si vince o si perde» poniamo A: «A pallavolo si vince».

Possiamo allora formalizzare la frase in esame con l'espressione $A \vee \bar{A}$, che equivale a dire: «A pallavolo o si vince o non si vince».

Poiché $A \vee \bar{A}$ risulta sempre vera, si tratta di una tautologia.

Le contraddizioni

Frasi del tipo «Q è un quadrato e ha cinque lati», «11 è un numero primo e ha tre divisorì» ecc. sono senza alcun dubbio sempre false.

DEFINIZIONE**Contraddizione**

Una proposizione composta è una contraddizione se risulta **sempre falsa**, qualunque valore di verità si attribuisca alle proposizioni elementari di cui è composta.

ESEMPIO «11 è un numero primo e ha tre divisorì».

La frase può essere formalizzata con l'espressione $A \wedge \bar{A}$ in cui A è «11 è un numero primo». Infatti equivale a dire: «11 è un numero primo e non lo è».

Poiché $A \wedge \bar{A}$ risulta sempre falsa, si tratta di una contraddizione.

L'equivalenza di espressioni logiche

DEFINIZIONE

Espressioni logiche equivalenti

Due espressioni logiche nelle stesse variabili si dicono equivalenti se hanno uguale la relativa colonna della tavola di verità.

Per esprimere l'equivalenza fra due espressioni logiche usiamo il simbolo $=$.

ESEMPIO

Esaminiamo l'espressione $(A \wedge B) \vee A$ e calcoliamone i valori di verità.

A	B	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee A$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

I valori scritti nella prima colonna coincidono con quelli della quarta colonna. Possiamo affermare che le due proposizioni A e $(A \wedge B) \vee A$ sono equivalenti: $A = (A \wedge B) \vee A$.

Nel sito: ► teoria e 15 esercizi su I circuiti elettrici e i connettivi logici



Consideriamo:

A : «Monica va al cinema».

Otteniamo:

\overline{A} : «Monica non va al cinema».

$\overline{\overline{A}}$: «Non è vero che Monica non va al cinema».

$\overline{\overline{A}}$ è equivalente ad A .

Verificalo con le tavole di verità.

8. Forme di ragionamento valide

I ragionamenti logici

Un **ragionamento** è un insieme di proposizioni che possiamo dividere in due parti: la prima parte contiene le **premesse**, cioè le proposizioni da considerarsi vere, la seconda parte contiene una o più proposizioni che rappresentano la **conclusione**.

Un ragionamento è **valido** se ci assicura che da premesse vere giungiamo a una conclusione vera. In questo caso esso prende anche il nome di **deduzione logica**.

Le forme di ragionamento valido sono molte, ma per il momento ne studiamo solo due: il *modus ponens* e il *modus tollens*.

Il *modus ponens*

Se Alice è colpevole, allora anche Bruno è colpevole; Alice è colpevole, quindi Bruno è colpevole.

Questo ragionamento contiene le proposizioni semplici

A : «Alice è colpevole»,

B : «Bruno è colpevole»,

e l'implicazione $A \rightarrow B$.

Le premesse vere sono $A \rightarrow B$ e A ; la conclusione è B .

- Sopra la riga scriviamo la premessa, sotto la riga la conclusione.

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Si scrive: \Rightarrow .
Si legge: «da ... si deduce logicamente che ...».

Lo schema generale del ragionamento, detto **modus ponens**, è:

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

e si legge:

«Se $A \rightarrow B$ è vera ed è vera A , allora è vera anche B ».

Analizziamo il ragionamento mediante la tavola di verità dell'implicazione. Le due premesse $A \rightarrow B$ e A sono entrambe vere solo nella prima riga della tavola a lato. In tale riga anche B risulta vera. Pertanto il ragionamento è valido.

Poiché le due premesse $A \rightarrow B$ e A devono essere contemporaneamente vere, possiamo sostituirle con un'unica premessa formata dalla congiunzione delle due, ossia:

$$(A \rightarrow B) \wedge A.$$

Dalla congiunzione delle due premesse, il ragionamento conduce alla **deduzione** della conclusione. Utilizzando il simbolo \Rightarrow per indicare la deduzione, possiamo scrivere così il **modus ponens**:

$$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B.$$

Il simbolo \Rightarrow della deduzione non deve essere confuso con il simbolo \rightarrow dell'implicazione materiale, in quanto la deduzione indica un ragionamento, mentre l'implicazione materiale è un connettivo.

■ Il modus tollens

Esaminiamo il seguente ragionamento.

Se un triangolo è isoscele, allora ha due angoli congruenti; il triangolo non ha due angoli congruenti, *quindi* il triangolo non è isoscele.

In questo ragionamento sono presenti due proposizioni,

A : «Un triangolo è isoscele»,

B : «Un triangolo ha due angoli congruenti»,

e l'implicazione $A \rightarrow B$.

Lo schema generale del ragionamento, detto **modus tollens**, è:

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ \overline{B} \\ \hline \overline{A} \end{array}$$

oppure

$$(A \rightarrow B) \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A}.$$

Analizziamo anche questo ragionamento con la tavola di verità, aggiungendo le due colonne B e A .

Le due premesse, che devono essere contemporaneamente vere, sono $A \rightarrow B$ e \overline{B} . Solo nell'ultima riga della tavola le due premesse sono vere. In questa riga risulta vera anche \overline{A} ; quindi il ragionamento è valido.

A	B	$A \rightarrow B$	\overline{B}	\overline{A}
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

9. La logica e gli insiemi

■ Enunciati aperti

Consideriamo l'enunciato

« x è un numero negativo»,

in cui x rappresenti un numero intero.

La lettera x è una **variabile**: al suo posto possiamo sostituire un particolare valore, scelto in un determinato **insieme universo**. Nel nostro esempio, possiamo scegliere come insieme universo \mathbb{Z} .

■ DEFINIZIONE

Enunciato aperto

Un enunciato contenente almeno una variabile, il cui valore deve essere scelto in un insieme universo, viene chiamato enunciato aperto.

Indichiamo un enunciato aperto con una lettera dell'alfabeto, seguita dalla variabile scritta fra parentesi, per esempio $A(x)$, $B(y)$, $P(z)$ ecc.

$A(x)$ si legge « A di x » e indica che A varia in funzione di x , in quanto il suo valore di verità (V o F) dipende dal valore dato alla variabile x .

■ ESEMPIO

$B(y)$: «6 è divisore di y » (con y numero naturale pari);

$B(y)$ è un enunciato aperto, perché contiene la variabile y ; l'insieme dei numeri naturali pari è l'insieme universo.

► Non è possibile dire se questo enunciato è vero o falso.

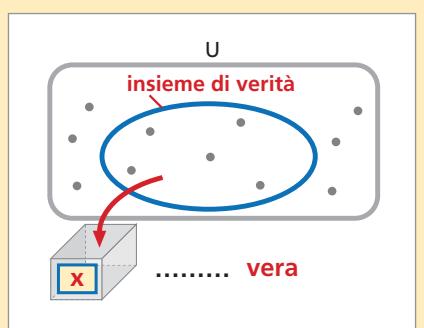
► Per semplicità, gli esempi che proporremo contengono una sola variabile.

■ Gli insiemi di verità

■ DEFINIZIONE

Insieme di verità

Si chiama insieme di verità di un enunciato aperto l'insieme di tutti i valori scelti in un insieme universo U che, sostituiti alla variabile, trasformano l'enunciato in una proposizione vera.



I valori che trasformano l'enunciato in una proposizione falsa si trovano nell'insieme complementare rispetto all'universo U .

ESEMPIO Nell'universo \mathbb{N} dei naturali consideriamo l'enunciato:

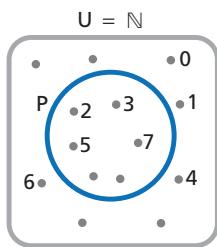
$P(x)$: « x è un numero primo».

L'insieme di verità di $P(x)$ è $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$.

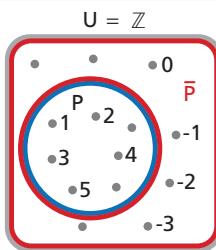
► Non è possibile attribuire un valore di verità a un enunciato aperto. Per rendere possibile tale operazione occorre trasformare tale enunciato in una proposizione, sostituendo alla variabile un elemento scelto nell'insieme universo.

Per esempio:
 $B(12)$: «6 è divisore di 12» è una proposizione con valore di verità V.

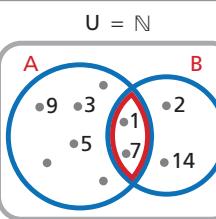
$B(20)$: «6 è divisore di 20» è una proposizione con valore di verità F.



▲ Figura 9



▲ Figura 10



▲ Figura 11

► Prova a scrivere l'insieme di verità di $A(x) \vee B(x)$ dell'esempio precedente.

I connettivi logici e gli insiemi

PROPOSIZIONE

Negazione e complementare

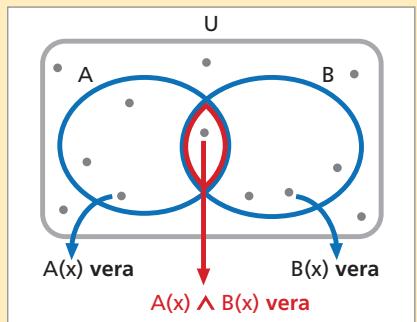
Dato l'enunciato aperto $P(x)$ in un insieme universo U , l'insieme di verità di $\bar{P}(x)$ è il complementare, rispetto a U , dell'insieme di verità di $P(x)$.

ESEMPIO Consideriamo $U = \mathbb{Z}$ e $P(x)$: « x è positivo», chiamando P il corrispondente insieme di verità (figura 10). La negazione di $P(x)$, (cioè $\bar{P}(x)$), ha come insieme di verità il complementare di P rispetto a U , ossia l'insieme costituito da 0 e dai numeri negativi.

PROPOSIZIONE

Congiunzione e intersezione

Dati gli enunciati aperti $A(x)$ e $B(x)$, con lo stesso universo U , l'insieme di verità di $A(x) \wedge B(x)$ è l'intersezione dei due insiemi di verità di $A(x)$ e di $B(x)$.



ESEMPIO Nell'universo $U = \mathbb{N}$ consideriamo gli enunciati aperti:

$A(x)$: « x è un numero dispari»; $B(x)$: « x è divisore di 14».

L'insieme di verità di $A(x)$ è $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$. L'insieme di verità di $B(x)$ è $B = \{1, 2, 7, 14\}$.

Congiungiamo i due enunciati:

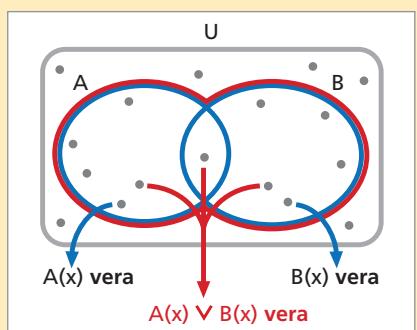
$A(x) \wedge B(x)$: « x è dispari e divisore di 14».

L'insieme di verità di $A(x) \wedge B(x)$ è $A \cap B = \{1, 7\}$.

PROPOSIZIONE

Disgiunzione e unione

Dati gli enunciati aperti $A(x)$ e $B(x)$, con lo stesso universo U , l'insieme di verità di $A(x) \vee B(x)$ è l'unione dei due insiemi di verità di $A(x)$ e di $B(x)$.



Nel sito: ► teoria e 14 esercizi su I sillogismi



10. I quantificatori

Esaminiamo nell'universo \mathbb{N} l'enunciato aperto: « x è multiplo di 5».

Abbiamo già visto che attribuendo a x un valore dell'insieme universo otteniamo una proposizione. Tuttavia possiamo trasformare un enunciato aperto in una proposizione anche in un altro modo.

Consideriamo questi esempi:

- «Esiste almeno un multiplo di 5»;
- «Esistono infiniti multipli di 5»;
- «Tutti i numeri sono multipli di 5»;
- «Non esiste alcun numero multiplo di 5».

Pur non avendo sostituito a x dei valori, siamo passati dall'enunciato aperto alle proposizioni. Le prime due sono vere, le altre due sono false. Le espressioni del tipo «esiste almeno un», «esistono dei», «tutti gli elementi di», «per ogni» si chiamano **quantificatori**.

Utilizzeremo due quantificatori.

Quantificatore esistenziale: afferma l'esistenza di almeno un elemento dell'insieme universo che ha la proprietà esaminata

si scrive:	si legge:
$\exists x \in U$	esiste almeno un elemento nell'insieme U o esiste

◀ Figura 12

Quantificatore universale: afferma che ogni elemento dell'insieme universo gode della proprietà esaminata

si scrive:	si legge:
$\forall x \in U$	per ogni elemento nell'insieme U o per tutti

◀ Figura 13

Un uso corretto dei quantificatori richiede sempre la specificazione dell'insieme universo nel quale la variabile deve assumere i suoi valori.

ESEMPIO

Siano $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ l'insieme universo e $P(x)$: « x è multiplo di 3». Possiamo trasformare l'enunciato aperto in una proposizione vera:

$$\exists x \in A \mid x \text{ è multiplo di } 3.$$

Significato: esiste almeno un elemento x in A che è multiplo di 3.

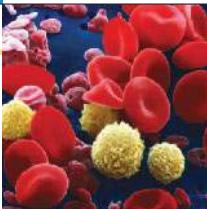
Nell'insieme A ci sono due multipli di 3 (3 e 6); quindi la proposizione è vera.

Possiamo trasformare lo stesso enunciato aperto in una proposizione falsa:

$$\forall x \in A, x \text{ è multiplo di } 3.$$

Significato: comunque sceglieremo un elemento in A , esso è multiplo di 3.

Basta scegliere in A il numero 2 per vedere che tale proposizione è falsa.



I gruppi sanguigni

...esistono donatori universali? E riceventi universali?

→ Il quesito completo a pag. 151

Il gruppo sanguigno è una delle caratteristiche, come il colore degli occhi o dei capelli, determinate a livello genetico. Ne esistono otto tipi, distinti in base alla presenza o all'assenza di specifiche sostanze, dette antigeni, sulla superficie dei globuli rossi. I primi gruppi sono stati identificati nel 1901 dal patologo austriaco Karl Landsteiner e appartengono al cosiddetto sistema AB0, formato da quattro insiemi diversi: il gruppo A, il gruppo B, il gruppo AB e il gruppo zero. Successivamente è stato scoperto anche il fattore Rh, che può essere presente ($Rh+$) o assente ($Rh-$), per ogni gruppo del sistema AB0.

La popolazione mondiale può essere suddivisa, in base ai gruppi sanguigni, nei seguenti insiemi: A+, A-, B+, B-, AB+, AB-, 0+, 0-. Se due persone appartengono a insiemi diversi, prima di procedere a una trasfusione o a un trapianto è indispensabile controllare che siano compatibili i loro gruppi sanguigni, per non mettere in pericolo la salute del ricevente.

Per comprendere la compatibilità del sangue, definiamo le caratteristiche di appartenenza a ciascun insieme.

Le persone del **gruppo A** presentano sui globuli rossi l'antigene A e producono anticorpi contro l'antigene B (cioè capaci di distruggere i globuli rossi dei gruppi B e AB).

Le persone del **gruppo B**, viceversa, presentano sui globuli rossi l'antigene B e producono anticorpi contro l'antigene A (cioè capaci di distruggere i globuli rossi dei gruppi A e AB).

Le persone del **gruppo AB** presentano sui globuli rossi sia l'antigene A sia l'antigene B e non producono anticorpi né contro A né contro B.

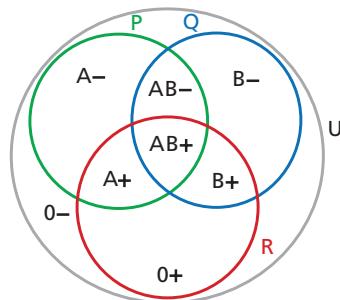
Le persone del **gruppo zero** non presentano sui globuli rossi né A, né B e producono anticorpi diretti contro entrambi (cioè capaci di distruggere i globuli rossi dei gruppi A, B e AB).

Lo scambio di sangue è possibile se e solo se il sangue della persona ricevente contiene gli stessi antigeni presenti nel sangue del donatore. La condizione vale anche per il fattore Rh: per esempio, una persona Rh-positiva non potrà mai donare il sangue a una persona Rh-negativa.

Queste regole ci permettono di stabilire l'insieme dei donatori universali (che possono donare il sangue a tutti, ma possono riceverlo solo dalle persone che appartengono al proprio insieme) e l'insieme dei riceventi universali (che possono ricevere il sangue da tutti, ma possono donarlo solo alle persone del proprio insieme).

Nel diagramma di Eulero-Venn sono rappresentati i seguenti insiemi:

- $P = \{x \text{ è una persona} \mid x \text{ ha sangue in cui è presente l'antigene A}\}$;
- $Q = \{x \text{ è una persona} \mid x \text{ ha sangue in cui è presente l'antigene B}\}$;
- $R = \{x \text{ è una persona} \mid x \text{ ha sangue in cui è presente l'antigene Rh}\}$.



Si può verificare che i donatori universali sono i soggetti del gruppo complementare all'insieme $(P \cup Q \cup R)$, cioè $U - (P \cup Q \cup R)$. Si tratta dell'insieme 0- formato da coloro che sui globuli rossi non hanno né A né B né Rh e possono quindi donare a tutti.

Il gruppo dei riceventi universali è invece l'insieme in cui si trovano tutte le sostanze di qualsivoglia donatore, ovvero è dato dall'intersezione di tutti gli insiemi: $(P \cap Q \cap R)$, che corrisponde al gruppo AB+.

In generale, seguendo gli stessi ragionamenti, è possibile costruire uno schema generale di compatibilità, come quello rappresentato nella tabella seguente.

		DONATORE							
		A+	A-	B+	B-	AB+	AB-	O+	O-
RICEVENTE	A+	sì	sì	no	no	no	no	sì	sì
	A-	no	sì	no	no	no	no	no	sì
	B+	no	no	sì	sì	no	no	sì	sì
	B-	no	no	no	sì	no	no	no	sì
	AB+	sì	sì	sì	sì	sì	sì	sì	sì
	AB-	no	sì	no	sì	no	sì	no	sì
	O+	no	no	no	no	no	no	sì	sì
	O-	no	no	no	no	no	no	no	sì

LA TEORIA IN SINTESI

Gli insiemi e la logica

1. Che cos'è un insieme

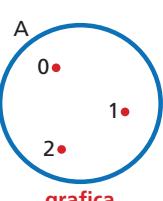
Un raggruppamento di oggetti è un **insieme matematico** se esiste un criterio oggettivo per stabilire univocamente se un oggetto fa parte del raggruppamento oppure no.

Se un oggetto a fa parte di un insieme A , si dice che esso è un **elemento** che **appartiene** all'insieme e si scrive $a \in A$.

L'**insieme vuoto** è l'insieme che non ha elementi; si indica con il simbolo \emptyset .

2. Le rappresentazioni di un insieme

Diamo tre tipi di **rappresentazione di un insieme**: grafica (con i diagrammi di Eulero-Venn), per elencazione, mediante proprietà caratteristica.

Rappresentazioni di un insieme	
 grafica	$A = \{0, 1, 2\}$ per elencazione $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq x \leq 2\}$ proprietà caratteristica

3. I sottoinsiemi

Se tutti gli elementi di un insieme B appartengono anche all'insieme A , B è un **sottoinsieme di A** ($B \subseteq A$).

Se A è un sottoinsieme di B e B è un sottoinsieme di A , A e B sono **insiemi uguali** ($A = B$).

Se $B \subseteq A$ e $B \neq A$ e $B \neq \emptyset$, allora B è un **sottoinsieme proprio** di A ($B \subset A$).

\emptyset e A stesso si chiamano sottoinsiemi **impropri** di A .

4. Le operazioni con gli insiemi

L'**intersezione** di A e B ($A \cap B$) è l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A sia a B .

L'**unione** di A e B ($A \cup B$) è l'insieme degli elementi che appartengono ad A o a B .

Due insiemi sono **disgiunti** se non hanno elementi in comune. La **differenza** ($A - B$) fra A e B è l'insieme formato dagli elementi di A che non sono elementi di B .

ESEMPIO

$A = \{p, a, n, e\}$, $B = \{v, i, n, o\}$,
 $A \cup B = \{p, a, n, e, v, i, n, o\}$,
 $A \cap B = \{n\}$, $A - B = \{p, a, e\}$.

Se B è sottoinsieme di A , il **complementare** di B rispetto ad A è $A - B$ e si indica con B_A .

ESEMPIO

$A = \{d, i, t, o\}$, $B = \{i, o\}$,
 $B_A = A - B = \{d, t\}$.

Il **prodotto cartesiano** di A e B si indica con $A \times B$ ed è costituito da tutte le coppie ordinate $(a; b)$ con $a \in A$ e $b \in B$.

ESEMPIO $A = \{s, t\}$, $B = \{1, 2\}$,
 $A \times B = \{(s; 1), (s; 2), (t; 1), (t; 2)\}$.

Il prodotto cartesiano non è commutativo.

5. L'insieme delle parti e la partizione di un insieme

L'**insieme delle parti** di A , $\mathcal{P}(A)$, è l'insieme che ha come elementi tutti i sottoinsiemi di A .

ESEMPIO $A = \{a, b, c\}$,
 $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$.

Una **partizione** di A è un insieme di sottoinsiemi di A tale che:

- a) ogni sottoinsieme non è vuoto;
- b) tutti i sottoinsiemi sono disgiunti fra loro;
- c) l'unione di tutti i sottoinsiemi è A .

ESEMPIO

$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
 $B = \{2, 4, 8\}$, $C = \{3, 6\}$, $D = \{5, 7\}$;
l'insieme $\{B, C, D\}$ è una partizione di A .

6. Le proposizioni logiche

Le **proposizioni logiche** sono enunciati tali che è possibile stabilire se essi sono veri o falsi, attribuendo loro un **valore di verità**.

7. I connettivi logici e le espressioni

I **connettivi logici** «**e**», «**o**», «**non**», «**o... o...**», «**se... allora**», «**se e solo se**» legano fra loro due o più proposizioni, formando le **proposizioni composte**.

La **negazione**, la **congiunzione** e la **disgiunzione** di due proposizioni A e B sono definite nella seguente tabella.

CONNETTIVO	PROPOSIZIONE	IN SIMBOLI
negazione	non A : vera se A è falsa, falsa se A è vera.	\bar{A}
congiunzione	A e B : vera se e soltanto se A è vera e B è vera	$A \wedge B$
disgiunzione inclusiva	A o B : falsa se e soltanto se A è falsa e B è falsa	$A \vee B$
disgiunzione esclusiva	o A o B : vera se A è vera e B è falsa, o viceversa	$A \dot{\vee} B$

Questa è la **tavola di verità** di negazione, congiunzione e disgiunzione:

A	B	\bar{A}	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \dot{\vee} B$
V	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F

Il connettivo **implicazione** di due proposizioni A e B è definito nella seguente tabella:

CONNETTIVO	PROPOSIZIONE	IN SIMBOLI
implicazione	se A allora B : falsa soltanto se A è vera e B è falsa	$A \rightarrow B$
materiale		
doppia implicazione	A se e solo se B : vera se A e B sono entrambe vere o entrambe false	$A \leftrightarrow B$

A	B	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Componendo più proposizioni (A, B, C, \dots) con i connettivi logici, si ottengono delle **espressioni logiche**. Il connettivo **non** ha priorità rispetto agli altri.

Le **tautologie** sono proposizioni composte **sempre vere**; le **contraddizioni** sono proposizioni composte **sempre false**.

■ **ESEMPIO** $(A \wedge B) \rightarrow A$ è una tautologia.

A	B	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \rightarrow A$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

■ **ESEMPIO** $A \wedge \bar{A}$ è una contraddizione.

A	\bar{A}	$A \wedge \bar{A}$
V	F	F
F	V	F

Due **espressioni logiche** sono **equivalenti** se hanno uguali tavole di verità.

8. Forme di ragionamento valide

Il **modus ponens** e il **modus tollens** sono particolari forme di ragionamento valide.

$$\frac{A \rightarrow B}{\begin{array}{c} A \\ \hline B \end{array}} \quad \text{Modus ponens } (A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$$

$$\frac{A \rightarrow B}{\begin{array}{c} \overline{B} \\ \hline \overline{A} \end{array}} \quad \text{Modus tollens } (A \rightarrow B) \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$$

9. La logica e gli insiemi

Un **enunciato aperto** è un enunciato che contiene almeno una **variabile**. Se alla variabile sostituiamo un elemento dell'insieme **universo**, l'enunciato aperto diventa una proposizione.

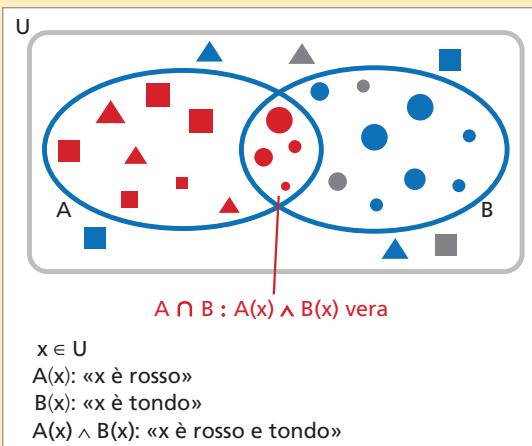
ESEMPIO L'enunciato aperto $A(x)$: « x è divisore di 12», con universo \mathbb{N} , può diventare una proposizione mediante la sostituzione di un valore a x :

$A(4)$: «4 è divisore di 12» V;

$A(5)$: «5 è divisore di 12» F.

Dato un insieme universo, a un enunciato aperto corrisponde un **insieme di verità**; l'insieme di verità è formato dagli elementi che, sostituiti alla variabile, rendono l'enunciato una proposizione vera.

Agli enunciati che otteniamo con i **connettivi logici** corrispondono gli insiemi di verità che si ottengono con le **operazioni fra insiemi**.



10. I quantificatori

Un enunciato aperto diventa una proposizione anche se utilizziamo un **quantificatore**.

Quantificatore esistenziale: afferma l'esistenza di almeno un elemento dell'insieme universo che ha la proprietà indicata.

Simbolo: \exists (si legge: «esiste almeno un»).

Quantificatore universale: afferma che la proprietà indicata è vera per ogni elemento dell'insieme universo.

Simbolo: \forall (si legge: «per ogni»).

Un uso corretto dei quantificatori richiede sempre la specificazione dell'insieme universo nel quale la variabile deve assumere i suoi valori.

ESEMPIO Sia \mathbb{Q} l'insieme universo e $P(x)$:

$$\langle x^{-2} = \frac{1}{x^2} \rangle.$$

Passiamo alla proposizione:

$$\exists x \in \mathbb{Q} \mid x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

Questa proposizione è vera, infatti esiste almeno un numero razionale che soddisfa l'uguaglianza $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ (in particolare, tutti i razionali eccetto lo 0, se sostituiti a x , verificano l'uguaglianza).

Possiamo trasformare lo stesso enunciato aperto in una proposizione falsa:

$$\forall x \in \mathbb{Q}, x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

Il numero 0, infatti, non soddisfa l'uguaglianza.

ESEMPIO Sia \mathbb{N} l'insieme universo e $P(x)$: « $2x$ è un numero pari». Questo enunciato aperto può diventare una proposizione vera:

$$\forall x \in \mathbb{N}, 2x \text{ è un numero pari.}$$

1. Che cos'è un insieme

→ Teoria a pag. 151

RIFLETTI SULLA TEORIA

- 1** I pianeti del sistema solare formano un insieme matematico, mentre le città più belle d'Europa non sono un insieme matematico. Perché?
- 2** Per indicare che l'elemento a appartiene all'insieme A , si usa la scrittura $a \in A$ o $a \subset A$? Come mai?
- 3** L'insieme vuoto è privo di elementi. Perché possiamo scrivere $\emptyset \subset A$ e non $\emptyset \in A$?

ESERCIZI

4

Indica quali, fra i seguenti, sono insiemi matematici.

- a) Gli alunni molto alti della tua classe.
- b) I numeri naturali minori di 11.
- c) I treni partiti da Roma ieri.
- d) Le grandi capitali d'Europa.
- e) I numeri pari divisibili per 7.
- f) I numeri razionali maggiori di 4 e minori di 5.

5

Quali fra i seguenti insiemi sono finiti? Quali sono vuoti?

- a) I numeri naturali compresi tra 2 e 12.
- b) Le consonanti della parola «aiuola».
- c) I multipli di 4.
- d) I numeri razionali compresi tra 1 e 2.
- e) I divisori di 12 compresi tra 8 e 10.

6

VERO O FALSO?

Dati gli insiemi A , B e C , formati rispettivamente dalle lettere delle parole «cammello», «cavallo» ed «elefante», stabilisci quali tra le seguenti affermazioni sono vere.

- a) $e \in A$.
- b) $a \notin B$.
- c) $x \in A$.
- d) cammello $\notin B$.
- e) fante $\in C$.
- f) cammello $\in A$.

7

VERO O FALSO?

Dati gli insiemi $A = \{0, 1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{-2, -1, 2, 3\}$, stabilisci quali tra le seguenti affermazioni sono vere.

- a) $1 \in A$. d) $(-2) \cdot (-1) \in C$.
- b) $0 \notin C$. e) $3 \cdot 5 \in A$.
- c) $2, 4 \in B$. f) $\frac{8}{4} \notin B$.

8

COMPLETA con i simboli \in e \notin le seguenti frasi, in modo da renderle vere, considerando gli insiemi dell'esercizio precedente.

- a) $-2 \dots C$
- b) $\frac{1}{2} + \frac{7}{2} \dots B$
- c) $246 \dots B$
- d) $5 \dots B$
- e) $(-1) \cdot 2 \dots C$
- f) $3 + 5 \dots A$

9

Fra le seguenti scritture indica quelle *formalmente* scorrette.

$$0 \in \emptyset; \quad \emptyset \in A; \quad 5 \in A; \quad 8 \notin A; \quad A \notin A.$$

10

COMPLETA inserendo i simboli \in e \notin al posto dei puntini.

$$-5 \dots \mathbb{N}; -\frac{1}{8} \dots \mathbb{Z}; -\frac{1}{2} \dots \mathbb{Q}; -6 \dots \mathbb{Z}.$$

2. Le rappresentazioni di un insieme

→ Teoria a pag. 153

RIFLETTI SULLA TEORIA

TEST

11

L'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x \leq 11 \text{ e } x \text{ è dispari}\}$ è rappresentato da:

- A $A = \{5, 7, 9, 11\}$.
- B $A = \{5, 7, 9\}$.
- C $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$.
- D $A = \{4, 5, 7, 9, 11\}$.
- E $A = \{3, 5, 7, 9\}$.

12

Dato l'insieme $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, indica la proprietà che caratterizza i suoi elementi:

- A $x | x$ è un numero pari.
- B $x | x$ è un numero pari minore di 10.
- C $x | x$ è un numero pari maggiore di 2.
- D $x | x$ è un numero pari minore di 10 e maggiore di 2.
- E $x | x$ è un numero pari minore o uguale a 10 e maggiore o uguale a 2.

13

Dato l'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x \leq 20\}$, indica quale tra le seguenti scritture è corretta:

- A $5 \in A$.
- B $10 \in A$.
- C $20 \notin A$.
- D $15 \notin A$.
- E $22 \in A$.

ESERCIZI

14

Rappresenta graficamente gli insiemi A , B e C formati rispettivamente dalle lettere delle parole «rododendro», «giglio», «azalea».

15

Rappresenta graficamente gli insiemi:

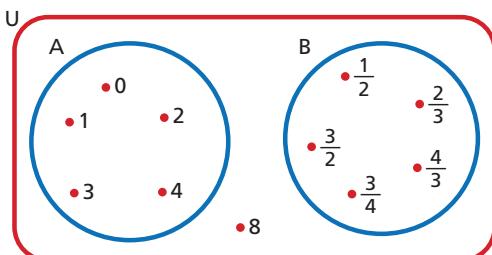
$$A = \{2, 4, 6, 8\},$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$C = \{1, 3, 5, 7\}.$$

16

COMPLETA



$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \dots B$$

$$(2 \cdot 3 - 4) \dots A$$

$$\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right) \in \dots$$

$$\left(4 : \frac{4}{3}\right) \in \dots$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \dots B$$

$$\left(\frac{1}{2} : 2\right) \dots B$$

$$(4 \cdot 3 - 4) \notin \dots$$

$$\left(\frac{1}{2} : \frac{2}{3}\right) \in \dots$$

■ La rappresentazione per elencazione

■ ESERCIZIO GUIDA

17 Rappresentiamo per elencazione l'insieme A delle consonanti della parola «libellula».

Elenchiamo gli elementi di A fra parentesi graffe, separati da virgolette:

$$A = \{b, l\}.$$

Ogni consonante ripetuta va considerata una volta sola.

18

Rappresenta per elencazione i seguenti insiemi.

- a) I naturali non maggiori di 8.
- b) I naturali dispari compresi fra 30 e 40.
- c) I multipli pari di 7 minori di 40.
- d) I divisori di 42.
- e) I divisori primi di 42.
- f) I giorni della settimana che iniziano per «b».
- g) Le vocali della parola «farfalla».

19

Rappresenta per elencazione i seguenti insiemi.

- a) L'insieme A dei numeri del tipo $3n$, con $n \in \{0, 2, 4, 6\}$.
- b) L'insieme B dei numeri del tipo $2n + 1$, con $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

- c) L'insieme C dei numeri del tipo $-2n$, con $n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
- d) L'insieme D dei numeri del tipo $\frac{1}{2}n$, con $n \in \{-1, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- e) L'insieme E dei numeri del tipo $\frac{1}{n}$, con $n \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
- f) L'insieme F dei numeri del tipo $\frac{3n+1}{3}$, con $n \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$.

■ La rappresentazione mediante la proprietà caratteristica

ESERCIZIO GUIDA

- 20** Scriviamo la rappresentazione mediante la proprietà caratteristica dell'insieme:

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

L'insieme A è formato dai numeri naturali compresi tra 2 e 6.
Indichiamo il generico numero naturale con x e scriviamo:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 6\}.$$

Possiamo scrivere anche:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 7\}.$$

Scrivi la rappresentazione mediante la proprietà caratteristica degli insiemi seguenti.

- 21**
- a) $A = \{\text{martedì, mercoledì}\};$
 - b) $B = \{\text{Nord, Sud, Est, Ovest}\};$
 - c) $C = \{\alpha, \beta, \gamma\};$
 - d) $D = \{a, e, i, o, u\}.$

- 22**
- a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\};$
 - b) $B = \{5, 7, 9, 11, 13\};$
 - c) $C = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\};$
 - d) $D = \{12, 16, 20, 24, 28, 32\};$
 - e) $E = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} \right\}.$

- 23**
- a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\};$
 - b) $B = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\};$
 - c) $C = \{\dots, -20, -19, -18, -17, -16, -15\};$
 - d) $D = \{9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, \dots\}.$

- 24** Fornisci la rappresentazione mediante la proprietà caratteristica dei seguenti insiemi numerici.
- a) I razionali maggiori di 1000.
 - b) I pari minori o uguali a 16.
 - c) I naturali compresi fra 10 e 30.
 - d) Gli interi negativi.

- 25** È possibile descrivere l'insieme vuoto mediante la proprietà caratteristica?

■ Dalla proprietà caratteristica alla rappresentazione per elencazione

- 26** Scrivi la rappresentazione per elencazione dei seguenti insiemi.
- a) $A = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola «avvocato»}\};$
 - b) $B = \{x \mid x \text{ è una vocale}\};$
 - c) $C = \{x \mid x \text{ è il nome di un mese che inizia con la lettera «g»}\};$
 - d) $D = \{x \mid x \text{ è un pianeta del sistema solare}\};$
 - e) $E = \{x \mid x \text{ è una provincia del Lazio}\}.$

- 27** Descrivi a parole i seguenti insiemi e danne la rappresentazione per elencazione.
- a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 9\};$
 - b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{D}, x > 30\};$
 - c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{P}, 11 \leq x \leq 22\};$
 - d) $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 3\}.$

- 28** Fai cinque esempi di insiemi di numeri naturali con particolari caratteristiche. Per ognuno di essi fornisci la rappresentazione grafica, la rappresentazione per elencazione e quella mediante la proprietà caratteristica.

3. I sottoinsiemi

→ Teoria a pag. 154

RIFLETTI SULLA TEORIA

29

VERO O FALSO?

- a) Ogni insieme è sempre sottoinsieme di se stesso.
- b) L'insieme vuoto è sottoinsieme di qualunque insieme.
- c) Se tutti gli elementi di A sono anche elementi di B , B è un sottoinsieme di A .
- d) Due insiemi con lo stesso numero di elementi sono uguali.

30

È dato l'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3n, \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ e } n < 7\}$. Perché $21 \notin A$? E 0 appartiene ad A ? Se $B = \{3, 6, 7\}$, perché non è vero che $B \subset A$?

ESERCIZI

31

I sottoinsiemi

VERO O FALSO?

Dati gli insiemi A , B e C , formati rispettivamente dalle lettere delle parole «podio», «doppio» e «dopo», stabilisci quali delle seguenti affermazioni sono vere.

- a) $\{d\} \subseteq A$.
- b) $\{\text{oppio}\} \subseteq B$.
- c) $\{\text{do, po}\} \subseteq C$.
- d) $C \subset A$.
- e) $B \subset A$.
- f) $C \subseteq B$.
- g) $A \subseteq B$.
- h) $B \subseteq A$.
- i) $\{\text{pio}\} \subset A$.

32

VERO O FALSO?

Dato l'insieme $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, stabilisci quali delle seguenti affermazioni sono vere.

- a) $9 \subset A$.
- b) $12 \in A$.
- c) $\{6\} \notin A$.
- d) $\{3, 6\} \subset A$.
- e) $\{12\} \subset A$.
- f) $\{369\} \subset A$.
- g) $\{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 \leq x \leq 15\} \subset A$.
- h) $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 3n, n = 1, 2, 3, 4, 5\} \subset A$.
- i) $\{x \mid x \in \mathbb{D}, 3 \leq x < 15\} \subset A$.

33

VERO O FALSO?

Sono dati i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid x \text{ è un quadrato}\}, \\ B &= \{x \mid x \text{ è un rettangolo}\}, \\ C &= \{x \mid x \text{ è un rombo}\}, \\ D &= \{x \mid x \text{ è un quadrilatero}\}. \end{aligned}$$

Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | | |
|------------------|--|------------------|--|
| a) $D \subset B$ | <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> | d) $B \subset C$ | <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> |
| b) $C \subset D$ | <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> | e) $B \subset A$ | <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> |
| c) $A \subset C$ | <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> | f) $A \subset D$ | <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> |

34

COMPLETA inserendo correttamente i simboli

$\in, \notin, \subset, \subsetneq, \subseteq, \subsetneq, =$.

Considera gli insiemi:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ è multiplo di } 3\},$$

$$B = \{3, 6, 9, 12, \dots\}, \quad C = \{4, 12\}.$$

$$\{9\} \dots A; \quad 9 \dots C; \quad B \dots A; \quad C \dots B;$$

$$\{4\} \dots A; \quad \{12\} \dots C; \quad 15 \dots A; \quad C \dots A.$$

35

CACCIA ALL'ERRORE Fra le seguenti scritture elmina quelle formalmente scorrette.

$$\begin{array}{llll} \emptyset \subset \mathbb{N}; & 4 \in \mathbb{Z}; & -5 \notin \mathbb{N}; & 7 \subset \mathbb{N}; \\ \mathbb{P} \in \mathbb{N}; & 6 \subset 12; & \{6\} \subseteq \{12\}; & \emptyset \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

36

Considera i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{SERA}\}, B = \{S, E, R, A\}, \\ C &= \{A, R, S, E\}, D = \{R, E, S, A\}, \\ E &= \{\text{RESA}\}. \end{aligned}$$

Quali sono uguali tra loro?

37

Scrivi tutti i sottoinsiemi di $A = \{a, b, c\}$.

38

Fornisci tre esempi di insiemi formati da persone che hanno una caratteristica comune e, per ognuno, indica almeno un sottoinsieme.

39

Scrivi tre parole le cui lettere formino tre insiemi A, B, C , tali che $A \subset B \subset C$.

40

Rappresenta graficamente gli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e indica le relazioni di inclusione stretta esistenti fra gli insiemi considerati.

41

Dati gli insiemi P, T, Q, R, E, I , formati rispettivamente dai poligoni, dai triangoli, dai quadrati, dai rettangoli, dai triangoli equilateri, dai triangoli isosceli, indica le relazioni di inclusione stretta esistenti fra tali insiemi.

I sottoinsiemi propri e impropri

42

Dati gli insiemi $A = \{x \mid x \in \mathbb{P}, 2 \leq x \leq 10\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 12\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > -8\}$, scrivi cinque sottoinsiemi propri comuni ai tre insiemi.

43

VERO O FALSO?

Considera l'insieme $A = \{0, 1\}$ e indica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) $\emptyset \subset A$.

V F

b) $\emptyset \subseteq \emptyset$.

V F

c) $0 \in \emptyset$.

V F

d) $\{0\} = \emptyset$.

V F

e) $\{0\} \subset A$.

V F

f) $\{1\}$ è un sottoinsieme proprio di A .

V F

g) $\{0, 1\}$ è un sottoinsieme proprio di A .

V F

h) $\emptyset \subset \{1\}$.

V F

44

Stabilisci se gli insiemi A, B, C sono sottoinsiemi (propri e impropri) dell'insieme D .

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è multiplo di } 5\}$,

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -1\}$, $C = \{5, 10, 15\}$, $D = \mathbb{N}$.

b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x < 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 5\}$,

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 9\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 8\}$.

c) $A = \{x \mid x \text{ è una lettera di «diario»}\}$, $B = \{x \mid x \text{ è una lettera di «ardore»}\}$, $C = \{x \mid x \text{ è una lettera di «orda»}\}$, $D = \{x \mid x \text{ è una lettera di «radio»}\}$.

45

Scrivi i sottoinsiemi impropri dell'insieme vuoto, dell'insieme $A = \{0, 1\}$ e dell'insieme $B = \{0\}$.

46

Scrivi i sottoinsiemi propri dell'insieme vuoto, dell'insieme $A = \{1\}$ e dell'insieme $B = \{a, b, c\}$.

4. Le operazioni con gli insiemi

→ Teoria a pag. 157

RIFLETTI SULLA TEORIA

47

VERO O FALSO?

a) Per ogni coppia di insiemi A e B , si ha: $(A \cup B) \cap \emptyset = A \cup B$.

V F

b) Per ogni coppia di insiemi A e B , si ha: $(A \cap B) \cup \emptyset = \emptyset$.

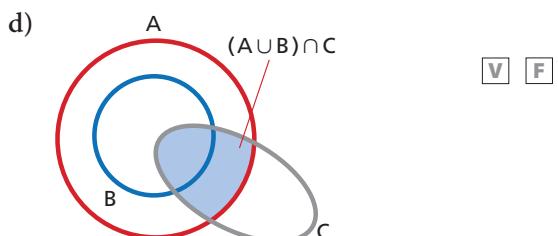
V F

c) Sono dati:

$A = \{x \mid x \text{ è multiplo di } 2\}$;

$B = \{x \mid x \text{ è multiplo di } 3\}$.

Si ha: $A \cup B = \{x \mid x \text{ è multiplo di } 2 \text{ o di } 3\}$. V F



e) Sono dati:

$A = \{x \mid x \text{ è divisore di } 12\}$;

$B = \{x \mid x \text{ è divisore di } 20\}$.

Si ha: $A \cap B = \{1, 2\}$.

V F

48

VERO O FALSO?

a) Sono dati:

$$A = \{0, 1, 2\}; B = \{0, 3\}; C = \{0, 2, 4\}.$$

Si ha: $A \cap B \cap C = \{0\}$. b) Sono dati: $A = \{1\}$; $B = \{2\}$; $C = \{1, 3\}$.Si ha: $A \cap B \cup C = C$. c) Sono dati: $A = \{2, 4, 9\}$; $B = \{7\}$; $C = \{2, 7\}$.Si ha: $A \cup B \cap C = \{2, 7\}$.

d) Sono dati:

$$A = \{x \mid x \text{ è un triangolo rettangolo}\};$$

$$B = \{x \mid x \text{ è un triangolo isoscele}\}.$$

Si ha: $A \cap B = \{x \mid x \text{ è un triangolo scaleno}\}$.

e) Sono dati:

$$A = \{x \mid x \text{ è un quadrilatero}\};$$

$$B = \{x \mid x \text{ ha tutti gli angoli congruenti}\}.$$

Si ha: $A \cap B = \{x \mid x \text{ è un quadrato}\}$.

ESERCIZI

■ L'intersezione e l'unione

Nel sito: ► 6 esercizi di recupero



■ ESERCIZIO GUIDA

- 49** Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 8\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è divisore di } 24\}$, rappresentiamo per elencazione e con i diagrammi di Eulero-Venn gli insiemi $A \cap B$ e $A \cup B$.

Rappresentiamo per elencazione gli insiemi A e B :

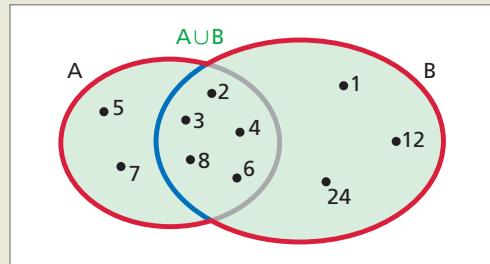
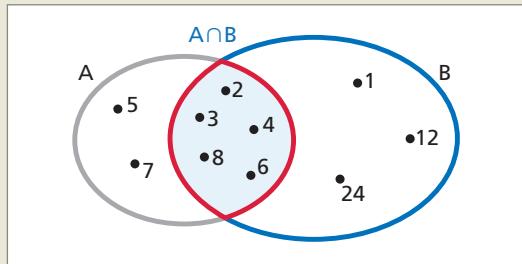
$$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}; B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

- L'intersezione di A e B è l'insieme formato dagli elementi che appartengono sia ad A sia a B .

$$A \cap B = \{2, 3, 4, 6, 8\}.$$

- L'unione di A e B è l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A oppure a B . Gli elementi comuni sono considerati una sola volta.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 24\}.$$



Per ogni coppia di insiemi determina l'unione e l'intersezione, rappresentandole mediante un diagramma di Eulero-Venn.

50

$$A = \{0, 1, 3, 5\}; B = \{3, 5, 8, 11\}.$$

51

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 6\};$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ divisore di } 15\}.$$

52

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x < 4\};$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{D}, 1 \leq x \leq 7\}.$$

53

$$\text{a)} A = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola «tegame»}\};$$

$$B = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola «gomito»}\}.$$

$$\text{b)} A = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola «attesa»}\};$$

$$B = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola «paese»}\}.$$

Determina l'intersezione e l'unione dei seguenti insiemi di persone A e B.

54 $A = \{x \mid x \text{ ha statura superiore a } 1,40 \text{ m}\};$
 $B = \{x \mid x \text{ ha statura inferiore a } 1,80 \text{ m}\}.$

55 $A = \{x \mid x \text{ ha più di } 25 \text{ anni}\};$
 $B = \{x \mid x \text{ ha meno di } 25 \text{ anni}\}.$

56 Dati gli insiemi numerici $A = \{x \mid x \text{ è multiplo di } 3\}$ e $B = \{x \mid x \text{ è multiplo di } 6\}$, che insieme è $A \cap B$? E $A \cup B$?

57 Se $A = \{x \mid x \text{ è divisore di } 8\}$ e $B = \{x \mid x \text{ è divisore di } 16\}$, che insieme è $A \cap B$? E $A \cup B$?

58 Considera l'insieme A dei rettangoli e l'insieme B dei quadrati. Determina $A \cap B$ e $A \cup B$.

59 Come nell'esercizio precedente ma con A insieme dei rombi e B insieme dei quadrati.

60 Fai tre esempi di insiemi A e B tali che $A \cap B = B$.

61 COMPLETA le tabelle considerando gli insiemi $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, c\}$.

\cap	\emptyset	A	B	C
\emptyset				
A				
B				
C				

\cup	\emptyset	A	B	C
\emptyset				
A				
B				
C				

62 Fai tre esempi di insiemi A e B tali che $A \cup B = B$.

63 Determina due insiemi A e B tali che

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \text{ e } A \cap B = \{5, 7\}.$$

Puoi trovare più coppie di insiemi valide?

Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$, calcola i risultati delle seguenti espressioni.

64 $(A \cap B) \cup C$

67 $(A \cap B) \cap C$

65 $A \cap (B \cap C)$

68 $(A \cup B) \cap C$

66 $A \cup (B \cup C)$

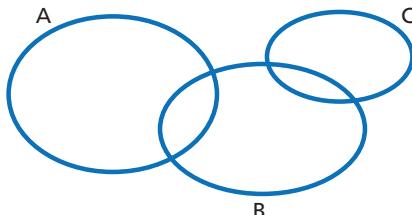
69 $(A \cup B) \cup C$

70

Ricopia più volte sul quaderno la figura e colora i seguenti insiemi:

$$A \cap B; B \cup C; (B \cup C) \cap A;$$

$$A \cup (B \cap C); (A \cup C) \cap B; (A \cup B) \cap (B \cup C).$$



71

Dati gli insiemi $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 7\}$ e $C = \{0, 1, 2, 8\}$, rappresenta per elencazione e con i diagrammi di Eulero-Venn gli insiemi:

$$(A \cap C) \cup B; A \cap B \cap C; (B \cap C) \cup A;$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Dati gli insiemi $A = \{0, 1, a\}$, $B = \{1, 2, a, b\}$ e $C = \{0, 2, 4\}$, calcola i risultati delle seguenti espressioni.

72 $A \cap B \cap C$

75 $A \cup B \cup C$

73 $A \cup (B \cap C)$

76 $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

74 $(A \cup B) \cap (A \cap C)$

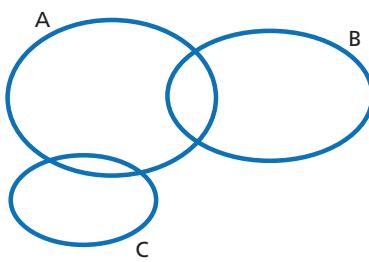
77 $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

78

Sistema negli insiemi A, B e C della figura gli elementi a, b, c, d, e, f in modo tale che siano vere contemporaneamente le seguenti condizioni.

$$A \cup B = \{a, b, c, d, f\}; A \cap B = \{a\};$$

$$A \cap C = \{c, d\}; A \cup C = \{a, b, c, d, e\}.$$



79

Un'indagine di mercato compiuta su 90 famiglie ha evidenziato che 59 possiedono il robot da cucina, 80 hanno il forno a microonde o il robot da

cucina e 24 possiedono entrambi gli elettrodomestici. Quante famiglie hanno solo il robot e quante solo il forno? Quante non possiedono nessuno di questi elettrodomestici? [35; 21; 10]

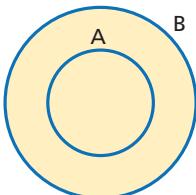
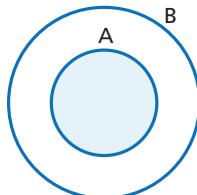
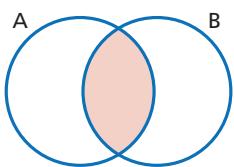
80

In una classe di 28 studenti, si vota per decidere dove andare in gita. Le città candidate sono tre: Roma, Vienna e Parigi. Nella scheda di valutazio-

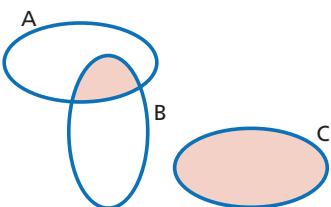
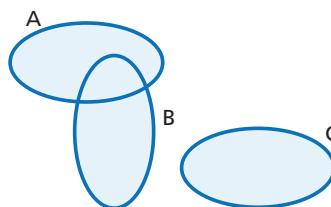
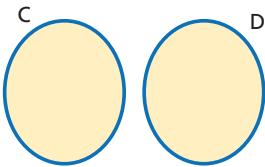
ne si può esprimere anche più di una preferenza. Allo spoglio dei voti si raccolgono i seguenti dati: 5 persone hanno votato tutte e tre le città, 4 persone hanno votato solo Roma, 3 solo Vienna e 2 solo Parigi; 1 ha votato solo per Roma e Vienna e 3 hanno votato solo per Roma e Parigi. Calcola quanti hanno votato solo per Vienna e Parigi. Quale città ha raccolto più voti? [10; Parigi]

COMPLETA determinando, mediante un'espressione con l'unione e l'intersezione di insiemi, la parte colorata in ognuno dei diagrammi delle figure seguenti.

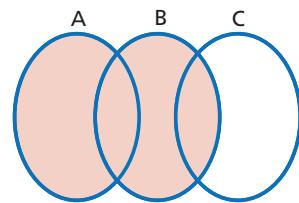
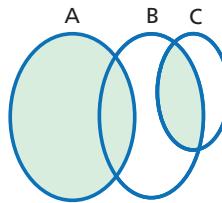
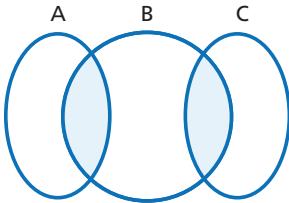
81



82



83



Le proprietà dell'intersezione e dell'unione

ESERCIZIO GUIDA

84 Verifichiamo la proprietà associativa dell'intersezione con i seguenti insiemi:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \quad B = \{1, 5, 7, 9, 11\}; \quad C = \{3, 5, 7, 10, 12\}.$$

L'uguaglianza da verificare è:
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
 Eseguiamo le operazioni al primo membro e quelle al secondo membro dell'ugua-

glianza in due colonne separate:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= \\ &= \{1, 5\} \cap C = \\ &= \{5\}. \end{aligned}$$

I due membri forniscono lo stesso risultato; quindi l'uguaglianza è verificata.

85

Servendoti degli insiemi dell'esercizio guida, verifica le seguenti proprietà delle operazioni.

- Commutativa dell'intersezione.
- Associativa dell'unione.
- Distributiva dell'unione rispetto all'intersezione.

Considera tre insiemi qualsiasi, A , B e C , e utilizza i diagrammi di Eulero-Venn per verificare le seguenti proprietà.

86

Proprietà associativa dell'unione.

87

Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione.

COMPLETA le seguenti espressioni, tenendo presente che A e B sono insiemi generici. Se necessario, aiutati con un diagramma di Eulero-Venn.

88

$$A \cup A = \dots \quad A \cup \emptyset = \dots$$

$$A \cap A = \dots \quad A \cap \emptyset = \dots$$

89

Se $B \subset A$, allora:

$$A \cup B = \dots \quad A \cap (A \cup B) = \dots$$

$$A \cap B = \dots \quad A \cup (A \cap B) = \dots$$

Calcola il risultato delle seguenti espressioni con A e B insiemi generici.

90

$$A \cap (A \cup A); \quad A \cap (A \cup \emptyset).$$

91

$$(A \cup B) \cap A; \quad (A \cup B) \cup \emptyset.$$

92

$$(A \cap A) \cup \emptyset; \quad (A \cap B) \cup (A \cup \emptyset).$$

Dato $B \subset A$, con A e B insiemi generici, calcola il risultato delle seguenti espressioni.

93

$$(A \cap B) \cup A; \quad (A \cap B) \cup B.$$

94

$$[(A \cap \emptyset) \cap (A \cup B)] \cap A.$$

95

$$[(A \cap B) \cap (A \cup \emptyset)] \cup A.$$

■ La differenza tra due insiemi

■ ESERCIZIO GUIDA

96 Dati i due insiemi

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{P} \text{ e } x \leq 8\} \quad \text{e} \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq x \leq 4\},$$

determiniamo i due insiemi differenza $A - B$ e $B - A$.

Poiché A e B hanno pochi elementi, è conveniente elencarli:

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}; \quad B = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

$A - B$ è l'insieme formato dagli elementi di A che non sono elementi di B ; dobbiamo cioè togliere fra gli elementi di A quelli che sono presenti anche in B :

$$A - B = \{6, 8\}.$$

Analogamente:

$$B - A = \{1, 3\}.$$

97

Dati gli insiemi

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } |x| \in \mathbb{D} \text{ e } |x| \leq 3\},$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } -4 \leq x \leq 1\},$$

determina i due insiemi differenza $A - B$ e $B - A$.

98

Dati gli insiemi di numeri naturali

$$A = \{x \mid x < 50\}, \quad B = \{x \mid 20 \leq x \leq 60\},$$

$$C = \{x \mid 40 \leq x \leq 80\},$$

determina $A - (B - C)$ e $(A - B) - C$.

99

Dati $A = \{x \mid x \text{ è residente in Veneto}\}$ e $B = \{x \mid x \text{ è residente a Venezia}\}$, determina $A - B$ e $B - A$.

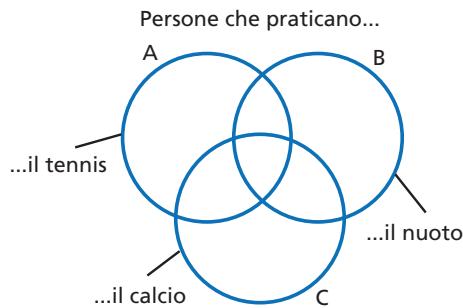
100

Dati gli insiemi A , B , C , formati rispettivamente dalle lettere delle parole «colore», «sapore», «odore», determina la differenza fra tutte le possibili coppie di insiemi.

101

Fornisci tre esempi del fatto che per la differenza fra insiemi non vale la proprietà commutativa.

- 102** Ricopia più volte il diagramma della figura e colora gli insiemi elencati, indicando per ognuno l'operazione con cui si ottengono a partire dagli insiemi A , B , C .



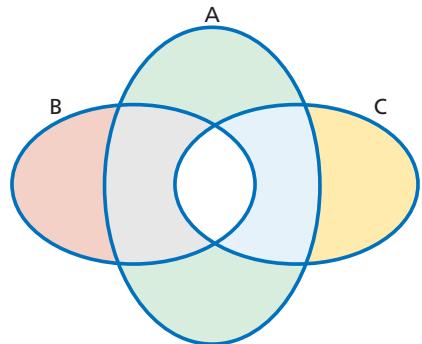
Colora l'insieme delle persone che praticano:

- il tennis e il nuoto;
- il calcio o il tennis;
- il tennis ma non il nuoto;
- il calcio o il tennis, ma non entrambi;
- nessuno dei tre sport.

Modifica poi il diagramma della figura in modo da rappresentare la situazione in cui nessuno pratica tutti e tre gli sport e tutti coloro che giocano a calcio praticano anche il nuoto.

- 103** Modifica il diagramma della figura dell'esercizio 102 in modo da rappresentare la situazione in cui nessuno pratica tutti e tre gli sport e tutti coloro che giocano a calcio praticano anche il tennis e non praticano il nuoto.

- 104** Nel diagramma della figura indica mediante un'operazione ognuno degli insiemi colorati (parti che hanno lo stesso colore costituiscono un unico insieme).



L'insieme complementare e l'insieme universo

Determina il complementare dei seguenti insiemi rispetto all'insieme U indicato.

- 105** $U = \{x \mid x \text{ è una lettera dell'alfabeto}\};$
 $A = \{x \mid x \text{ è una vocale}\}.$

- 106** $U = \{x \mid x \text{ è un punto della superficie terrestre}\};$
 $A = \{x \mid x \text{ è un punto delle terre emerse}\}.$

- 107** $U = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è divisibile per } 5\};$
 $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ ha come ultima cifra } 5\}.$

- 108** $U = \{x \mid x \text{ è un punto della retta che passa per i punti } P \text{ e } Q\};$
 $A = \{x \mid x \text{ è un punto della semiretta che ha origine } P \text{ e passa per } Q\}.$

Descrivi ogni situazione con un diagramma, facendo riferimento a un insieme universo U .

- 109** $B \subset \bar{A}; \quad \bar{A} \subset B.$

- 110** $A \subset \bar{B}; \quad \bar{B} \subset A.$

Dai diagrammi alle parole

ESERCIZIO GUIDA

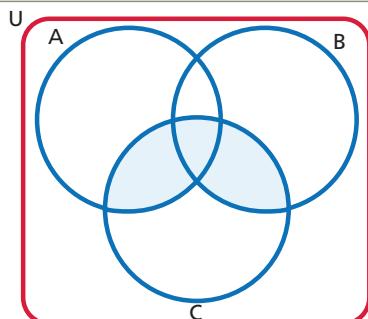
- 111** Nell'insieme universo U degli italiani consideriamo l'insieme A degli abitanti di Genova, l'insieme B dei giocatori di pallanuoto e l'insieme C di coloro dalla cui casa si vede il mare.
 Descriviamo a parole l'insieme colorato in figura.

L'insieme è il risultato di $(A \cup B) \cap C$.

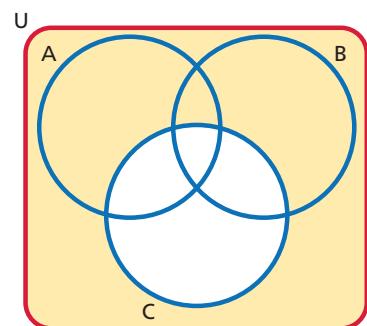
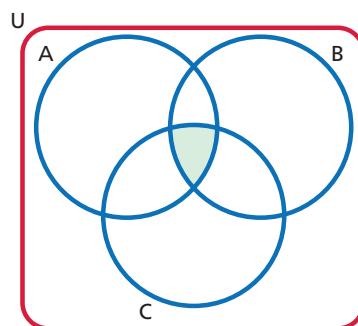
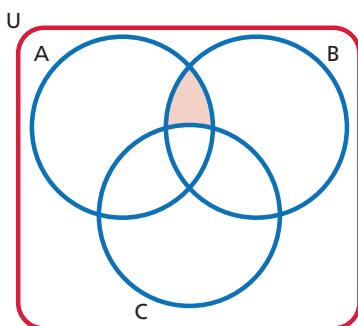
Per aiutarci a trovare la frase, rappresentiamo l'insieme mediante la caratteristica:

$\{x \text{ è italiano} \mid x \text{ è abitante di Genova o } x \text{ è un giocatore di pallanuoto e dalla casa di } x \text{ si vede il mare}\}$.

In parole: gli italiani che abitano a Genova oppure giocano a pallanuoto e dalla cui casa si vede il mare.

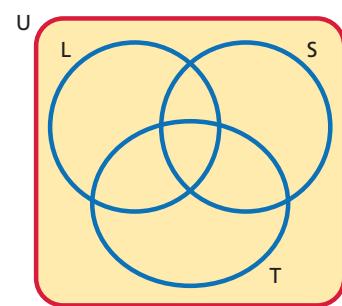
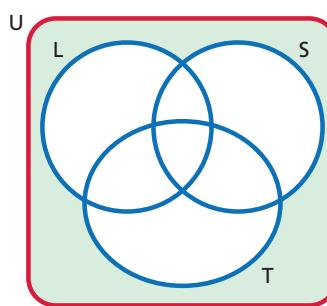
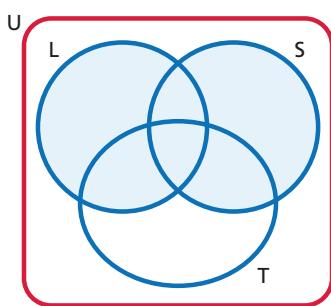
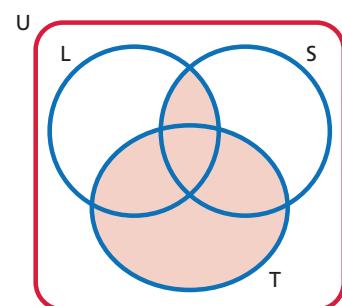
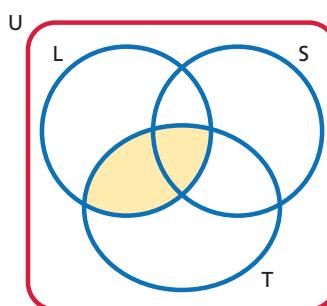
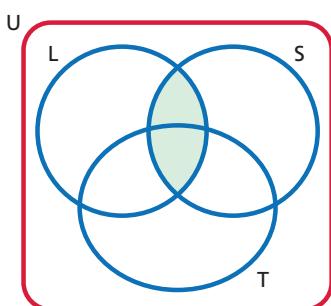
**112**

Facendo riferimento agli insiemi dell'esercizio guida, descrivi con una o più frasi l'insieme evidenziato in ogni diagramma.

**113**

Nell'insieme universo U dei ragazzi e ragazze italiani di età compresa fra 15 e 25 anni consideriamo i seguenti insiemi: $S = \{x \mid x \text{ è studente}\}$; $L = \{x \mid x \text{ è lavoratore}\}$; $T = \{x \mid x \text{ è giocatore di tennis}\}$.

Descrivi con una o più frasi l'insieme evidenziato in ogni diagramma.



■ Il prodotto cartesiano

Nel sito: ▶ 6 esercizi di recupero



ESERCIZIO GUIDA

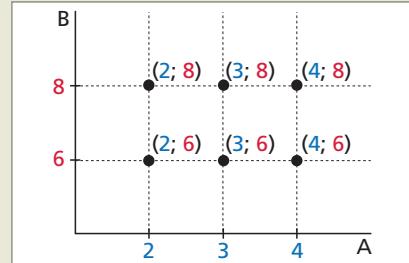
- 114** Dati gli insiemi $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 < x \leq 4\}$ e $B = \{x \mid x \in \mathbb{P}, 5 < x < 10\}$, rappresentiamo il prodotto $A \times B$ per elencazione e con un diagramma cartesiano.

Rappresentiamo A e B per elencazione.

$$A = \{2, 3, 4\}, \quad B = \{6, 8\}.$$

Il prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme di tutte le coppie ordinate che hanno il primo elemento in A e il secondo in B :

$$A \times B = \{(2; 6), (2; 8), (3; 6), (3; 8), (4; 6), (4; 8)\}.$$



Per ogni coppia di insiemi A e B , scrivi la rappresentazione per elencazione di $A \times B$ e disegnane la rappresentazione cartesiana.

115 $A = \{a, b\}; \quad B = \{4, 6\}.$

116 $A = \{0, 1, 2\}; \quad B = \{3, 4\}.$

117 $A = \{x, y, z\}; \quad B = \{0, 1\}.$

118 $A = \{a, b, c, d\}; \quad B = \{2\}.$

119 $A = \{\text{Sara, Lia}\}; \quad B = \{\text{Luca, Andrea, Paolo}\}.$

120 $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 4 \leq x < 7\};$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{D}, 2 < x \leq 6\}.$$

121 $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 3\};$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 < x \leq 6\}.$$

122 $A = \{\text{Milan, Inter, Reggina}\};$

$$B = \{\text{Roma, Lazio, Juventus}\}.$$

123 Dei precedenti insiemi (esercizi da 115 a 122) rappresenta per elencazione il prodotto $B \times A$ e disegnane la rappresentazione cartesiana.

Per ogni coppia di insiemi A e B , nei seguenti esercizi determina $A \times B$, $B \times A$ e $(A \times B) \cap (B \times A)$.

124 $A = \{2, 4, 6\}; \quad B = \{-2, -1, 0\}.$

125 $A = \{a, b\}; \quad B = \{1, 2, 3\}.$

126 $A = \{1, 3, 5\}; \quad B = \{a, b, c, d\}.$

Per ognuno dei seguenti insiemi determina il prodotto cartesiano dell'insieme per se stesso (per esempio, per l'insieme A determina $A \times A$) e disegnane la rappresentazione cartesiana.

127 $A = \{1\}; \quad B = \emptyset; \quad C = \{a\}.$

128 $D = \{2, 4\}; \quad E = \{1, 3\}; \quad F = \{x, y, z\}.$

129 $G = \{-2, 2, 4\}; \quad H = \{0, 6, 7, 8\}.$

Per ognuna delle seguenti coppie di insiemi determina $A \times A$; $A \times B$; $B \times A$; $B \times B$ e disegnane la rappresentazione cartesiana.

130 $A = \{2, 4\}; \quad B = \{1, a\}.$

131 $A = \{x, y\}; \quad B = \{x, y, 3\}.$

132 $A = \{a, b, c\}; \quad B = \{1, 2, a\}.$

Dati $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c\}$, $C = \{c\}$, calcola i risultati delle seguenti espressioni.

133 $(A - B) \times C; \quad (A - C) \times B.$

134 $(A - C) \times (B - C); \quad (A \times B) \cap (B \times C).$

135 $(A \times B) - (B \times C); \quad (A \times C) - (B \times C).$

136 $(A \times C) \cap (B \times C);$

$$(A - C) \times (B - C) \cap (A \times B).$$

137 $C \times (A \cap B); \quad (B \times C) \cap (A \times C).$

Ripeti gli esercizi precedenti con le seguenti terne di insiemi.

138 $A = \{-1, 0, 1\}; B = \{-1\}; C = \{0, 1\}.$

139 $A = \{a, b, c\}; B = \{1\}; C = \{2, 3\}.$

140 $A = \{1, 2, 3\}; B = \{3\}; C = \{2, 3\}.$

141 VERO O FALSO?

Dati gli insiemi

$$A = \{a, b, c\}, B = \{1, a\}, C = \{2, 3\},$$

fra le seguenti uguaglianze indica quelle vere e quelle false.

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

c) $(A - B) \times C = (B - A) \times C$

d) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

Dal prodotto cartesiano agli insiemi di partenza

Dati i seguenti prodotti cartesiani, scrivi gli elementi dell'insieme A e quelli dell'insieme B .

142 $A \times B = \{(\star; \bigcirc), (\star; \blacklozenge), (\heartsuit; \bigcirc), (\heartsuit; \blacklozenge)\}$

143 $A \times B = \{(r; t), (e; r), (r; e), (e; t), (r; r), (e; e)\}$

144 $B \times A = \{(1; a), (2; a), (1; b), (2; b)\}$

145 $A \times B = \{(+; a), (+; b), (+; c), (-; a), (-; b), (-; c)\}$

146 $B \times A = \{(a; l), (a; n), (a; i), (m; l), (m; n), (m; i), (o; l), (o; n), (o; i)\}$

5. L'insieme delle parti e la partizione di un insieme

→ Teoria a pag. 163

RIFLETTI SULLA TEORIA

147 TEST Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3\}$, quale fra i seguenti insiemi *non* fa parte di $\mathcal{P}(A)$?

- | | | | |
|----------------------------|-------------|----------------------------|---------|
| <input type="checkbox"/> A | \emptyset | <input type="checkbox"/> D | $\{2\}$ |
| <input type="checkbox"/> B | $\{0\}$ | <input type="checkbox"/> E | $\{3\}$ |
| <input type="checkbox"/> C | $\{1\}$ | | |

148 TEST Se B è un insieme formato da n elementi, il suo insieme delle parti $\mathcal{P}(B)$ ha il seguente numero di elementi:

- | | | | |
|----------------------------|---------|----------------------------|-----------|
| <input type="checkbox"/> A | $2n$. | <input type="checkbox"/> D | $n + 1$. |
| <input type="checkbox"/> B | n^2 . | <input type="checkbox"/> E | $n + 2$. |
| <input type="checkbox"/> C | 2^n . | | |

149 Fai tre esempi di insiemi che hanno come elementi degli insiemi.

150 Se suddividi l'insieme delle motociclette circolanti in Italia a seconda della cilindrata, ottieni una partizione dell'insieme? Prova a fornire un esempio di una partizione dell'insieme considerato.

151 Se A è l'insieme delle lettere di una parola, l'insieme delle sillabe della parola costituisce una partizione di A ?

ESERCIZI

L'insieme delle parti

Per ognuno dei seguenti insiemi determina l'insieme delle parti.

152 $A = \{1\}; B = \{0\}; C = \{a, b\}.$

153 $D = \{-1, 0, 1\}; E = \{1, a, b, 2\}; \emptyset.$

154 Dato $A = \{x \mid x \in \mathbb{D} \text{ e } x \text{ è un divisore di } 18\}$, determina l'insieme delle parti di A .

155 Indica alcuni elementi dell'insieme delle parti di \mathbb{N} .

156 $\frac{3}{4}$ è un elemento dell'insieme delle parti di \mathbb{Q} ?

157 $\{0\}$ è un elemento dell'insieme delle parti di \mathbb{Z} ?

158 Se $A = \{x \mid x \text{ è residente a Firenze}\}$, l'insieme di tutti gli insiemi i cui elementi sono persone residenti a Firenze è $\mathcal{P}(A)$?

159 Se $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 4\}$, quanti elementi ha l'insieme delle parti di A ? [64]

160 Quanti sottoinsiemi ha l'insieme delle vocali della parola «guanto»? [8]

La partizione di un insieme

161 Determina una partizione di $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 10 < x \leq 20\}$.

162 Determina una partizione di $\{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } -10 \leq x \leq 10\}$.

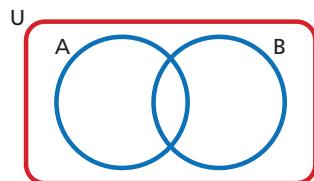
163 Fai un esempio di partizione dell'insieme dei tuoi libri.

164 Fai un esempio di partizione dei fiumi italiani.

165 Determina due partizioni dell'insieme di tutti i triangoli.

166 Dati gli insiemi della figura, indica una partizione di U mediante:

- quattro insiemi che si ottengono dagli insiemi di partenza con una o più operazioni;
- tre insiemi, ottenuti come nel punto a).



RIEPILOGO

GLI INSIEMI

167 TEST Dati gli insiemi $A = \{4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$, l'insieme $A \cap B$ è dato da:

- A) $\{4, 6\}$.
- B) $\{2, 4, 6, 7, 8, 10\}$.
- C) $\{2, 5, 7\}$.
- D) $\{4, 6, 7\}$.
- E) $\{2, 4, 6, 8\}$.

168 TEST Se $A \times B = \{(x; 1), (y; 1), (z; 1), (x; 2), (y; 2), (z; 2)\}$, i due insiemi A e B sono:

- A) $A = \{x, y\}, B = \{z, 2, 1\}$.
- B) $A = \{1, 2\}, B = \{x, y, z\}$.

C) $A = \{x, y, z\}, B = \{1, 2\}$.

D) $A = \{y, z\}, B = \{x, 1, 2\}$.

E) $A = \{2, 1\}, B = \{z, x\}$.

169 COMPLETA scrivendo di fianco a ogni operazione la definizione relativa, completando con le parole e con i simboli opportuni.

a) $A \cup B$ { $x \dots x \dots A \dots x \dots B$ }.

b) $A \cap B$ { $x \dots x \dots A \dots x \dots B$ }.

c) $A - B$ { $x \dots x \dots A \dots x \dots B$ }.

Per ognuna delle seguenti coppie di insiemi determina $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$ e disegnane la rappresentazione cartesiana.

170 $A = \{1, x\};$

$B = \{2, y\}.$

171 $A = \{1, 2\};$

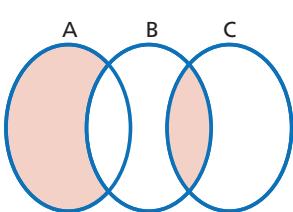
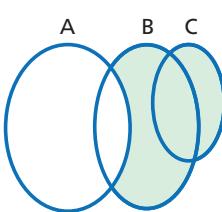
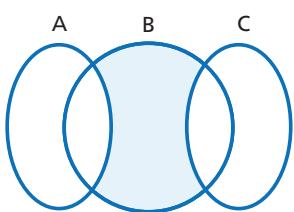
$B = \{4, 5, 6\}.$

172 $A = \{a, e, u\};$

$B = \{3, 4\}.$

173 Fai tre esempi di insiemi A e B , tali che $A \cup B = B$.

174 **COMPLETA** determinando, mediante un'espressione con l'unione e l'intersezione fra insiemi, la parte colorata in ognuno dei diagrammi seguenti:



Considera l'insieme universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Aiutandoti con un diagramma di Eulero-Venn, calcola il risultato delle seguenti espressioni.

175 $\bar{A} \cup B, \quad A \cup \bar{B}, \quad \bar{A} \cap B, \quad A \cap \bar{B}.$

176 $\bar{A} \cup B, \quad \bar{A} \cup \bar{B}, \quad \bar{A} \cap B, \quad \bar{A} \cap \bar{B}.$

177 Determina due insiemi A e B , tali che

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A \cap B = \{3, 4\}$.

Puoi trovare più coppie di insiemi valide?

178 **COMPLETA** le tabelle, dati gli insiemi $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{4, 6\}$.

n	\emptyset	A	B	C
\emptyset				
A				
B				
C				

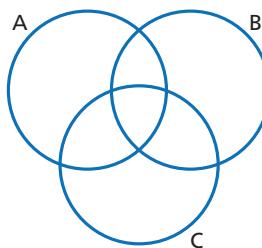
U	\emptyset	A	B	C
\emptyset				
A				
B				
C				

Dato $B \subset A$, con A e B insiemi generici, calcola il risultato delle seguenti espressioni.

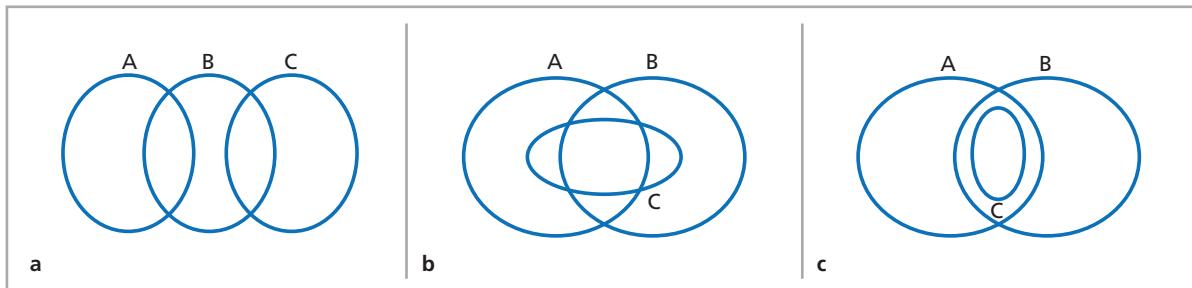
181 $(A \cup B) \cup A; \quad (A \cup B) \cup B.$

182 $[(A \cap B) \cap (A \cup B)] \cap \emptyset.$

183 $[(A \cup B) \cup (A \cap \emptyset)] \cup A.$



Ricopia più volte i diagrammi della figura e in ognuno evidenzia, se possibile, gli insiemi che risultano dalle operazioni indicate negli esercizi seguenti.



184 $A \cup (B - C); (A - B) \cup C.$

185 $(A \cap B) \cap C; A - (B \cap C).$

186 $(A \cap B) \cup (B \cap C); (A - B) \cup (C - B).$

Problemi

■ ESERCIZIO GUIDA

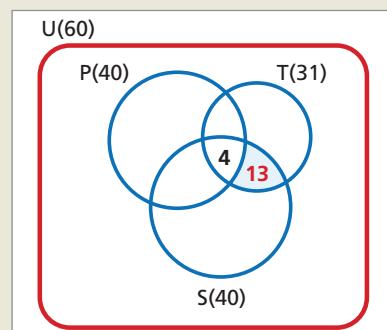
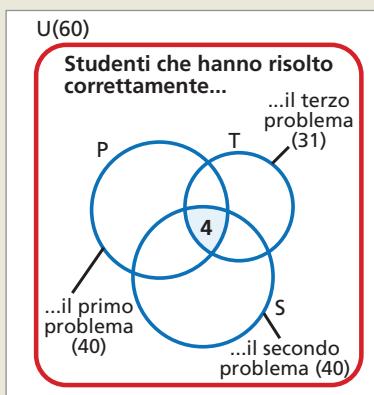
187 Una commissione esamina 60 studenti. Il compito di matematica è costituito da tre problemi. La tabella riporta i numeri relativi agli studenti che hanno risolto correttamente:

il primo problema	40
il secondo problema	40
il terzo problema	31
il primo e il secondo	25
il primo e il terzo	15
il secondo e il terzo	17
tutti i problemi	4

In base alle informazioni fornite, possiamo rispondere alle seguenti domande?

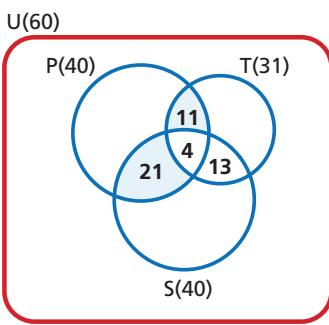
- Quanti studenti hanno risolto correttamente il secondo e il terzo problema, ma non il primo?
- Quanti hanno svolto correttamente solo il secondo problema?
- Quanti non hanno svolto correttamente alcun problema?

Per rispondere alle domande, disegniamo una partizione dell'insieme degli studenti e ricaviamo il numero degli elementi di ciascun insieme della partizione.

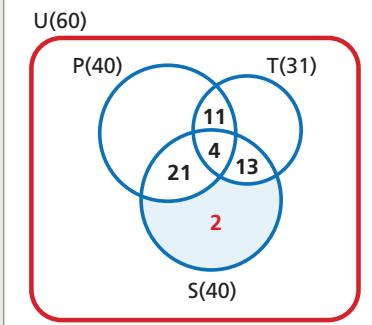


Dai dati vediamo che $(P \cap S) \cap T$ è formato da 4 elementi. Scriviamo il numero di elementi nella parte corrispondente del diagramma.

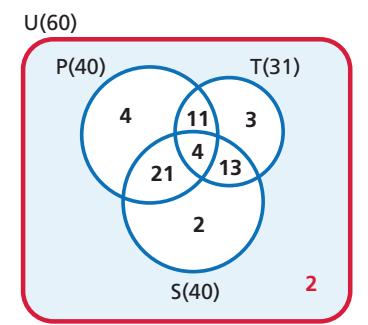
Se $S \cap T$ ha 17 elementi, allora l'insieme $(S \cap T) - (P \cap S \cap T)$, ossia l'intersezione tra S e T privata degli elementi dell'intersezione tra i tre insiemi, ha **13 elementi**. Questa è la **risposta alla domanda a**).



In modo analogo, se $S \cap P$ ha 25 elementi, allora $(S \cap P) - (P \cap S \cap T)$ è formato da 21 elementi; l'insieme $(P \cap T) - (P \cap S \cap T)$ è formato da 11 elementi.



Gli studenti che hanno risolto solo il secondo problema sono $40 - (13 + 4 + 21) = 2$. Questa è la **risposta alla domanda b**).



Fra i 60 studenti, coloro che non sono riusciti a risolvere alcun problema sono:
 $60 - (4 + 21 + 2 + 11 + 4 + 13 + 3) = 2$. Questa è la **risposta alla domanda c**.

188

In una provincia ci sono 14 campeggi. Di essi 1 ha solo la piscina, 1 ha solo la piscina e il campo da tennis, 2 solo il tennis, 1 ha solo il tennis e il campo da calcio, 4 solo il campo da calcio, 2 solo il campo da calcio e la piscina. 2 campeggi non hanno nessuno di questi impianti. Cerca il numero dei campeggi che hanno: a) il campo da calcio; b) la piscina; c) il campo da tennis; d) almeno un impianto; e) solo un impianto; f) almeno due impianti. [a] 8; b) 5; c) 5; d) 12; e) 7; f) 5]

189

In un'indagine relativa alla conoscenza delle lingue straniere condotta su un gruppo di italiani si hanno i seguenti risultati:

NUMERO DELLE PERSONE	LINGUE CONOSCIUTE
76	inglese
56	francese
21	inglese e francese
12	né inglese né francese

- a) Quante sono le persone intervistate?
- b) Quante conoscono una sola lingua straniera?
- c) Quante solo l'inglese?
- d) E solo il francese?

[a] 123; b) 90; c) 55; d) 35]

190

Un'inchiesta condotta in un liceo ha fornito questi dati:

- il 30% degli alunni ama la matematica;

- il 60% ama la filosofia;
 - il 20% ama sia la filosofia sia la matematica.
- Calcola la percentuale di alunni che non ama né la matematica né la filosofia. [30%]

191

Chiama con C l'insieme delle coppie ordinate $(m; n)$ di numeri naturali che soddisfano l'ugualanza $m \cdot n = 12$, e con D l'insieme delle coppie ordinate $(a; b)$ di numeri naturali che soddisfano $2a + b = 10$. Determina $C \cap D$. È possibile pensare all'insieme così trovato come al prodotto cartesiano di due sottoinsiemi di \mathbb{N} ?

$\{(2; 6), (3; 4)\}; \text{no}$

192

In una compagnia di 32 amici è stata fatta un'indagine sui tipi di pizza che preferiscono. Ciascun ragazzo ha indicato almeno una pizza. L'indagine ha i seguenti risultati:

- a 3 ragazzi piace sia la pizza «quattro stagioni», sia la «margherita», sia la «salsiccia e funghi»;
- a 8 ragazzi piace sia la «quattro stagioni» sia la «margherita»;
- a 4 ragazzi piace sia la «quattro stagioni» sia la «salsiccia e funghi»;
- i ragazzi a cui piace la «quattro stagioni» sono 16;
- a 6 ragazzi piace sia la «margherita» sia la «salsiccia e funghi»;
- a 2 ragazzi piace solo la «margherita».

Quanti sono i ragazzi a cui piace la «margherita» e quanti quelli a cui piace la «salsiccia e funghi»?

[13; 18]

193 Nel periodo delle elezioni dei rappresentanti di classe, in una classe di 31 alunni si sono candidati 3 studenti: Anna, Camilla e Pietro.

Ogni alunno della classe può votare anche più di un candidato. Allo spoglio dei voti risulta che:

- 2 schede sono bianche;
- non ci sono schede nulle;
- 2 schede indicano tutti e tre i nomi;
- 8 schede indicano solo Anna;
- 5 schede indicano solo Camilla;
- 2 schede indicano solo Anna e Camilla;
- 3 schede indicano solo Camilla e Pietro;
- 2 schede indicano solo Anna e Pietro.

Quanti hanno votato solo Pietro? E chi saranno i due rappresentanti di classe eletti?

[7; Anna e Pietro]

194 Indica con A l'insieme dei numeri naturali multipli di 3 e minori di 50, con B l'insieme dei numeri interi multipli di 2 e compresi fra -10 e 10 , con C l'insieme di numeri naturali dispari minori di 41. Determina $A \times (B \cap C)$.

[\emptyset]

195 Quale dei seguenti insiemi coincide con l'insieme vuoto?

- a) $\{\text{divisori di } 6\} \cap \{\text{multipli di } 6\}$;
- b) $\{m \mid m \in \mathbb{N}, \frac{2}{3}m = 7\} \cup \{\text{divisori di } 17\}$;

c) l'insieme dei numeri primi dispari minori di 4;

- d) $\{\text{multipli di } 2\} \cap \{\text{multipli di } 3\}$;

e) $\left\{m \mid m \in \mathbb{N}, \frac{3m - 1}{3} = 5\right\}$;

- f) $\mathbb{N} \cap \{p \mid p \in \mathbb{Z}, 3p + 1 = 5\}$.

[b, e, f]

196 Considera l'insieme R dei punti di una retta r e l'insieme C dei punti di una circonferenza γ , appartenente allo stesso piano della retta. Come può risultare $R \cap C$? Come sono disposte nei corrispondenti casi la retta e la circonferenza? Detto C' l'insieme dei punti del cerchio interno alla circonferenza γ , come risulta $R \cap C'$ nei vari casi?

6. Le proposizioni logiche

→ Teoria a pag. 164

RIFLETTI SULLA TEORIA

Indica con una crocetta quali fra le seguenti frasi sono proposizioni logiche.

- 197**
- a) «Che bella giornata!».
 - b) «Per favore, sedetevi».
 - c) «Gli insegnanti della mia classe sono maschi».
 - d) «La matematica è facile».
 - e) «Non è vero che $2 + 2$ fa 5 ».
 - f) «Alcuni miei compagni vanno in vacanza a Taormina».
 - g) «Quanto mi piace il dolce alle mandorle!».
 - h) «Tutti gli insegnanti sono maschi».

198

- a) «Sofia è alta 1,67 m».
- b) «Il rombo è una figura strana».
- c) «Questo bambino pesa poco».
- d) «Il rombo è un particolare parallelogramma».
- e) «Ciao!».
- f) «Questo bambino pesa 4,5 kg».
- g) «Giovanni è veloce nei calcoli».
- h) «4 è un numero dispari».

199

Una frase può essere una proposizione logica, anche se è falsa?

ESERCIZI

200 Fra le seguenti proposizioni logiche, ce ne sono due false. Quali?

- a) «Nel mese di ottobre ci sono 30 giorni».
- b) «Ogni rettangolo ha 4 angoli congruenti».
- c) «Ogni triangolo ha 3 angoli congruenti».

Valori di verità

201

Considera solo le **proposizioni logiche** dell'esercizio 198 e attribuisci a ciascuna il suo valore di verità.

202

Attribuisci il valore di verità alle seguenti proposizioni.

- «Il numero 2 è l'unico divisore di 6».
- «Ogni trapezio è isoscele oppure rettangolo».
- «La Terra è un pianeta».
- «Marte non è un pianeta».
- «L'uguaglianza $x + 2 = 0$ è sempre verificata in \mathbb{N} ».
- «L'uguaglianza $2x = 0$ non è mai verificata in \mathbb{N} ».

g) «L'uguaglianza $\frac{1}{x} = 1$ non è mai verificata in \mathbb{N} ».

h) «L'uguaglianza $x + 3 = 0$ può essere verificata in \mathbb{Z} ».

i) «Il minimo comune multiplo di due numeri pari è un numero pari».

j) «La somma di due numeri dispari è un numero pari».

k) «La somma di due interi discordi è sempre un intero negativo».

→ Teoria a pag. 165

7. I connettivi logici e le espressioni

RIFLETTI SULLA TEORIA

203 La frase «10 è un numero pari multiplo di 5» è formata da due proposizioni. Quali?

204 Date le proposizioni A: «Luisa mangia il pesce», B: «Luisa beve il vino bianco», esprimi mediante i connettivi logici la proposizione:

«Luisa mangia il pesce e non beve il vino bianco».

205 Come possiamo esprimere più semplicemente la frase «Non è vero che Luigi non studia»?

ESERCIZI

■ La negazione: non

206 Date le seguenti proposizioni, scrivi quali sono le eventuali coppie formate da una proposizione e dalla sua negazione.

- «Vedo nero».
- «Non vado al mare».
- «Non devi passare col semaforo rosso».
- «Ci si deve fermare col semaforo giallo».

e) «Vedo bianco».

f) «Non è vero che non vado al mare».

g) «Si deve passare col semaforo verde».

h) «Non vedo nero».

i) «Vado in montagna».

j) «Si deve passare col semaforo rosso».

k) «Vado in vacanza».

l) «Non si deve passare a nessun semaforo».

■ La congiunzione: e

Dalle parole ai simboli e viceversa

■ ESERCIZIO GUIDA

207 È data la proposizione composta: «Otto è il mio gatto e ha sette anni».

Indichiamo ogni proposizione componente con una variabile e riscriviamo in forma simbolica la proposizione composta.

Le proposizioni componenti sono: A: «Otto è il mio gatto»; B: «Otto ha sette anni».

Riscriviamo la proposizione composta in forma simbolica:

$$A \wedge B.$$

208 Date le seguenti proposizioni composte, indica ogni proposizione componente con una variabile e riscrivi la proposizione composta in forma simbolica.

- a) «D'estate lavoro e coi guadagni mi compro il motorino».
- b) «Mara suona e canta».
- c) «Marco canta e non balla».
- d) «Rosa e Gianni sono sposati e Luisa e Matteo non sono sposati».
- e) «100 è il risultato dell'operazione $80 + 2$ ed è un quadrato perfetto».
- f) «Il quadrato è un rettangolo e un rombo».
- g) «Un triangolo equilatero è isoscele e rettangolo e scaleno».

209 Dati gli enunciati A e B, esprimi a parole le proposizioni indicate in forma simbolica.

A: «Vado in palestra», B: «Esco con Luca», C: «Vado a comprare un paio di jeans».

$$A \wedge B; \quad \overline{A} \wedge C; \quad \overline{A} \wedge \overline{B}; \quad A \wedge C; \quad \overline{C} \wedge B; \quad (A \wedge B) \wedge \overline{C}; \quad \overline{A} \wedge \overline{B}; \quad B \wedge C.$$

ESERCIZIO GUIDA

210 Date le tre proposizioni

A: «3 è un numero primo», B: «3 è divisore di 11», C: «2 è un numero dispari»,

attribuiamo a ciascuna il suo valore di verità, poi stabiliamo il valore di verità delle seguenti proposizioni composte:

$$A \wedge B; \quad \overline{A} \wedge \overline{B}; \quad A \wedge \overline{C}.$$

A è vera, B e C sono false. Attribuiamo alle proposizioni composte il loro valore di verità, costruendo la tabella di verità relativa.

A	B	C	$A \wedge B$	\overline{A}	\overline{B}	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	\overline{C}	$A \wedge \overline{C}$
V	F	F	F	F	V	F	V	V

Date le proposizioni

A: «30 è minore di 10», B: «30 è maggiore di 10»,

C: «30 è multiplo di 5», D: «30 è numero dispari»,

E: «30 è multiplo di 60»,

scrivi a parole le seguenti proposizioni composte e assegna a ognuna il valore di verità.

211 $A \wedge B; \quad A \wedge C; \quad D \wedge E; \quad \overline{A} \wedge B; \quad \overline{A} \wedge \overline{B}.$

212 $A \wedge E; \quad B \wedge C; \quad C \wedge D; \quad \overline{C} \wedge D; \quad D \wedge \overline{E}.$

Date le proposizioni

A: «Roma è capitale d'Italia»,

B: «Milano è in Veneto»,

C: «La Sardegna è un'isola»,

scrivi a parole le seguenti proposizioni composte e assegna a ognuna il valore di verità.

213 $A \wedge C; \quad \overline{B} \wedge C; \quad \overline{C} \wedge \overline{A}.$

214 $\overline{A \wedge B}; \quad \overline{A} \wedge B; \quad A \wedge \overline{B}; \quad \overline{A} \wedge \overline{B}.$

■ La disgiunzione inclusiva: o

215 Date le seguenti proposizioni composte, indica ogni proposizione componente con una variabile e riscrivi la proposizione composta in forma simbolica. (Vedi esercizio guida 207.)

- «È nuvoloso o piove».
- «Vado al bowling con Mario o con Andrea».
- «Nelle prossime vacanze andrò in montagna o al lago».
- «Luisa lava i piatti o fa scorrere l'acqua calda o aggiunge detergente nel lavandino».
- «Non leggo quella pagina o la strizzo o la brucio».
- «Leggo o mangio una mela o tengo in mano una penna».
- «7 è un numero primo o è pari».
- «Non esco o cucino o faccio una doccia».
- «Marco va a correre o in piscina o in palestra».
- «Aspetto Laura o prendo l'autobus o non vado alla festa».

216 Date le proposizioni

- S: «Oggi fa caldo», T: «Oggi vado al mare», traduci in simboli le seguenti proposizioni composte.
- «Oggi fa caldo e vado al mare».
 - «Oggi non fa caldo e vado al mare».
 - «Oggi non fa caldo e non vado al mare».
 - «Oggi fa caldo o vado al mare».
 - «Oggi non fa caldo o vado al mare».
 - «Oggi non fa caldo o non vado al mare».

217 Date le proposizioni A: «100 è un numero pari», B: «100 è un numero primo», C: «100 è multiplo di 5», D: «100 è maggiore di 300», E: «100 è divisore di 200», scrivi a parole le seguenti proposizioni composte e assegna a ognuna il valore di verità. (Vedi esercizio guida 210.)

$$\begin{array}{lllll} A \vee B; & A \vee C; & A \vee E; & B \vee C; & C \wedge D; \\ D \vee E; & \bar{A} \vee B; & \bar{A} \wedge \bar{B}; & \bar{C} \vee D; & D \vee \bar{E}. \end{array}$$

Nei seguenti esercizi, dopo aver attribuito il valore di verità alle proposizioni semplici, attribuisci il corrispondente valore di verità alle proposizioni composte indicate.

218 A: «3 è un numero primo»; B: «3 è divisore di 11»;

C: «2 è un numero dispari».

$$A \vee B; \quad A \wedge B; \quad A \vee \bar{C}; \quad \bar{A} \wedge B; \quad \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}.$$

219 A: «6 è il doppio di 3»; B: «4 è pari»;

C: «M.C.D.(3, 5) = 1».

$$\begin{array}{llll} \bar{A} \vee \bar{C}; & \bar{A} \vee B \wedge \bar{C}; & A \vee B \vee \bar{C}; & \bar{A} \vee B \wedge \bar{C}; \\ \bar{A} \wedge B \vee \bar{C}. \end{array}$$

220 A: «Il quadrato è un parallelogramma»;

B: «Il quadrato è un rettangolo»;

C: «Il quadrato è un trapezio».

$$\begin{array}{llll} A \vee B \vee C; & A \wedge B \wedge C; & A \vee \bar{C} \vee B; & \bar{A} \wedge B \wedge C; \\ \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}; & \bar{A} \vee B \wedge \bar{C}; & A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}; & \bar{A} \vee B \vee \bar{C}. \end{array}$$

■ La disgiunzione esclusiva: o... o...

221 Date le seguenti proposizioni composte, indica ogni proposizione componente con una variabile e riscrivi la proposizione composta in forma simbolica.

a) «O studi o sarai bocciato».

b) «O mi aiuti o te ne vai».

c) «Nelle prossime vacanze o andrò in montagna o farò un viaggio a Parigi».

d) «O accendi la stufa a legna o farà un gran freddo».

e) «Non so se andare a teatro o al cinema».

f) «O la borsa o la vita».

g) «O c'è il sole o non esco».

222 Date le proposizioni A: «Non studio», B: «Vado in discoteca», C: «Vado al cinema», D: «Esco con le amiche», scrivi in forma simbolica le seguenti proposizioni composte:

«O studio o vado al cinema»;

«O vado al cinema o esco con le amiche»;

«O vado in discoteca o non vado al cinema»;

«O non esco con le amiche o studio»;

«O non studio o non esco con le amiche».

223

Date le proposizioni A: «Lavoro», B: «Non guadagno», C: «Mi diverto», scrivi a parole le seguenti proposizioni composte.

$$A \vee B; \quad A \vee C; \quad B \vee C; \quad \bar{B} \vee \bar{C}; \quad \bar{A} \vee \bar{B}.$$

Dopo aver attribuito il valore di verità alle proposizioni

A: «7 non è un numero pari», B: «7 è un numero primo», C: «7 è un divisore di 14», attribuisci il valore di verità alle proposizioni composte indicate.

224

$$A \vee B; \quad A \vee C; \quad B \vee C.$$

225

$$\bar{A} \vee \bar{C}; \quad A \vee (\bar{B} \vee C); \quad (\bar{A} \vee \bar{B}) \wedge C.$$

226

$$A \wedge (B \vee C); \quad (A \vee B) \vee C; \quad (A \vee \bar{B}) \vee \bar{C}; \quad (A \vee B) \vee C.$$

L'implicazione materiale

227

Date le proposizioni

A: «Pippo sta a casa», B: «Pippo passa col semaforo rosso», C: «Paperino è vestito a festa»,

D: «Paperino sgrida i tre nipotini», E: «Qui, Quo, Qua sono Giovani Marmotte»,

F: «Qui, Quo, Qua sono nipoti di Paperino»,

scrivi a parole le seguenti proposizioni composte:

$$A \rightarrow B; \quad \bar{A} \rightarrow B; \quad D \rightarrow C; \quad F \rightarrow E;$$

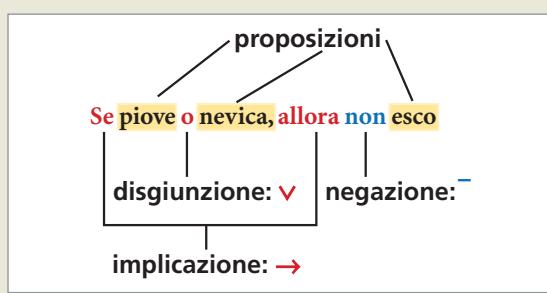
$$A \rightarrow \bar{C}; \quad \bar{D} \rightarrow B; \quad (\bar{A} \wedge B) \rightarrow C; \quad E \wedge (\bar{F} \rightarrow D).$$

ESERCIZIO GUIDA

228 È data la seguente proposizione composta:

«Se piove o nevica, allora non esco».

Indichiamo ogni proposizione componente con una variabile e riscriviamo la proposizione composta in forma simbolica.



A: «piove»;

B: «nevica»;

C: «esco».

Poiché l'antecedente dell'implicazione è «piove o nevica», nella rappresentazione simbolica racchiudiamo la disgiunzione fra parentesi. La proposizione composta è:

$$(A \vee B) \rightarrow \bar{C}.$$

229

Date le seguenti proposizioni composte, indica ogni proposizione componente con una variabile e riscrivi la proposizione composta in forma simbolica.

a) «Se sono promossa agli esami, mi iscrivo a Medicina».

b) «Se non studi, non prenderai la sufficienza».

c) «Se un triangolo non ha tre lati congruenti, è scaleno o isoscele».

- d) «Se un parallelogramma è un quadrato, allora è un rombo e un rettangolo».
- e) «Se un trapezio ha due lati congruenti, allora è isoscele».
- f) «Se un trapezio è rettangolo, allora non è isoscele».
- g) «Se un numero è multiplo di 10, allora è pari ed è divisibile per 5».
- h) «Se il mare è calmo e Alessandro scrive romanzi, allora Giacomo scrive poesie».

■ La doppia implicazione

230 Date le seguenti proposizioni composte, indica ogni proposizione componente con una variabile e riscrivi la proposizione composta in forma simbolica. (Vedi esercizio guida 228.)

- a) «Un parallelogramma è un quadrato se e solo se ha i lati congruenti e gli angoli retti».
- b) «La congiunzione di due proposizioni è vera se e solo se sono entrambe vere».
- c) «La disgiunzione di due proposizioni è falsa se e solo se sono entrambe false».
- d) «L'implicazione è falsa se e solo se l'antecedente è vera e la conseguente è falsa».
- e) «La doppia implicazione è vera se e solo se le due proposizioni sono entrambe vere o entrambe false».
- f) «Tom è un attore famoso se e solo se la bicicletta non inquina».

231 Attribuisci il valore di verità alle proposizioni:

A: «Il reciproco di 0 è 0»,

B: «Il reciproco di 2 è $\frac{1}{2}$ »,

C: «Il reciproco di 4 è $-\frac{1}{4}$ ».

Stabilisci successivamente il valore di verità alle seguenti proposizioni composte:

$A \leftrightarrow B$; $B \leftrightarrow C$; $A \leftrightarrow C$; $A \leftrightarrow (B \wedge C)$;

$(A \wedge \bar{B}) \leftrightarrow (B \vee \bar{C})$; $(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee C)$;

$\bar{A} \rightarrow ((B \vee C) \leftrightarrow A)$.

■ Proposizioni e tavole di verità

Nel sito: ► 5 esercizi di recupero



■ ESERCIZIO GUIDA

232 Costruiamo la tavola di verità della seguente proposizione composta: $A \wedge (A \wedge \bar{B})$, dove A e B sono due generiche proposizioni.

Prepariamo la tavola di verità con le possibili combinazioni di V e F per le due proposizioni A e B :

A	B
V	V
V	F
F	V
F	F

Aggiungiamo la colonna con la negazione di B e calcoliamo il valore di verità dell'espressione $A \wedge \bar{B}$:

A	B	\bar{B}	$A \wedge \bar{B}$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Calcoliamo il valore dell'espressione completa:

A	B	\bar{B}	$A \wedge \bar{B}$	$A \wedge (A \wedge \bar{B})$
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F

Costruisci la tavola di verità delle seguenti proposizioni composte.

233 $A \wedge \bar{B}$; $\bar{A} \wedge B$; $\bar{A} \wedge \bar{B}$; $A \wedge \bar{\bar{B}}$; $(A \wedge \bar{A}) \wedge \bar{B}$; $A \wedge (\bar{A} \wedge B)$; $A \wedge (B \wedge \bar{B})$; $(A \wedge B) \wedge \bar{B}$.

234 $A \vee \bar{B}$; $\bar{A} \vee B$; $\bar{A} \vee \bar{B}$; $A \vee \bar{\bar{B}}$.

235 $A \dot{\vee} \bar{B}$; $\bar{A} \dot{\vee} B$; $\bar{A} \dot{\vee} \bar{B}$; $A \dot{\vee} \bar{\bar{B}}$.

236 $A \rightarrow \bar{B}$; $\bar{A} \rightarrow B$; $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$; $A \rightarrow \bar{\bar{B}}$.

237 $A \leftrightarrow \bar{B}$; $\bar{A} \leftrightarrow B$; $\bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$; $A \leftrightarrow \bar{\bar{B}}$.

238 $(A \vee \bar{A}) \vee \bar{B}$; $A \vee (\bar{A} \vee B)$; $A \vee (B \wedge \bar{B})$; $(A \wedge B) \vee \bar{B}$.

239 $(A \dot{\vee} \bar{A}) \dot{\vee} \bar{B}$; $A \vee (\bar{A} \dot{\vee} B)$; $A \dot{\vee} (B \wedge \bar{B})$; $(A \wedge B) \dot{\vee} \bar{B}$.

240 $(A \wedge \bar{B}) \wedge \bar{\bar{B}}$; $\overline{A \wedge B}$; $\overline{A \wedge \bar{B}}$; $\overline{\bar{A} \wedge B}$.

241 $(A \vee \bar{A}) \rightarrow \bar{B}$; $A \vee (\bar{A} \rightarrow B)$; $A \rightarrow (B \wedge \bar{B})$; $(A \wedge B) \rightarrow \bar{B}$.

242 $(A \wedge B) \wedge \bar{A}$; $\overline{(A \wedge B) \wedge A}$.

243 $(A \vee B) \wedge \bar{\bar{B}}$; $\overline{A \vee B}$; $\overline{A \vee \bar{B}}$; $\overline{\bar{A} \wedge B} \vee \bar{B}$.

244 $(A \vee \bar{A}) \leftrightarrow \bar{B}$; $(A \vee B) \leftrightarrow (A \wedge B)$; $(A \dot{\vee} B) \leftrightarrow (A \vee B)$; $(A \wedge B) \leftrightarrow (A \dot{\vee} B)$.

245 $(A \dot{\vee} \bar{B}) \wedge \bar{\bar{B}}$; $\overline{A \dot{\vee} B}$; $\overline{A \dot{\vee} \bar{B}}$; $\overline{\bar{A} \wedge B} \dot{\vee} \bar{B}$.

246 $(A \rightarrow \bar{B}) \wedge \bar{\bar{B}}$; $\overline{A \rightarrow B}$; $\overline{A \rightarrow \bar{B}}$; $\overline{\bar{A} \wedge B} \rightarrow \bar{B}$.

247 $(A \leftrightarrow \bar{B}) \wedge \bar{\bar{B}}$; $\overline{A \leftrightarrow B}$; $\overline{A \leftrightarrow \bar{B}}$; $\overline{\bar{A} \wedge B} \leftrightarrow \bar{B}$.

RIEPILOGO

LE PROPOSIZIONI COMPOSTE

248 VERO O FALSO?

Le proposizioni semplici A , B e C hanno valori di verità rispettivamente V, F, V. Determina i valori di verità delle seguenti proposizioni composte.

- a) $A \vee C$ V F
- b) $A \wedge C$ V F
- c) $B \dot{\vee} \bar{C}$ V F
- d) $B \leftrightarrow C$ V F
- e) $B \rightarrow A$ V F
- f) $A \rightarrow (B \vee C)$ V F
- g) $(B \wedge C) \rightarrow A$ V F
- h) $(A \dot{\vee} C) \rightarrow B$ V F
- i) $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$ V F
- j) $(A \wedge C) \leftrightarrow (\bar{B} \wedge C)$ V F

249

Date le seguenti proposizioni composte, indica ogni proposizione componente con una variabile e riscrivi la proposizione composta in forma simbolica.

- a) «36 è un multiplo di 3 ed è un numero pari».
- b) «O ti comporti bene o non ti accompagnano».
- c) «Se vedi il rosso o il giallo, devi fermarti».
- d) «Abbiamo mangiato pane e salame».
- e) «Se un numero è dispari, allora è primo ed è divisibile per 3».
- f) «Studio matematica o italiano».
- g) «Se studio matematica, allora non esco».
- h) «Un triangolo è equilatero se e solo se ha gli angoli congruenti».

Nei seguenti esercizi, dopo aver attribuito il valore di verità alle proposizioni semplici, attribuisci il valore di verità alle proposizioni indicate.

250 A: «Il rombo è un quadrato»;

B: «Il rombo è un quadrilatero»;

C: «Il rombo è un parallelogramma».

$$\begin{array}{lll} A \vee B \wedge C; & A \wedge B \vee C; & \bar{B} \leftrightarrow C; \\ \hline A \vee B \wedge C; & \bar{A} \vee \bar{B} \wedge \bar{C}; & A \vee \bar{B} \wedge C; \end{array} \quad \begin{array}{l} \bar{A} \leftrightarrow B; \\ A \rightarrow \bar{B}. \end{array}$$

251 A: «4 è la metà di 10»;

B: «4 è divisore di 10»;

C: $m.c.m.(4, 10) = 2$.

$$\begin{array}{lll} A \dot{\vee} \bar{B}; & A \leftrightarrow C; & B \wedge \bar{C}; \\ \hline \bar{A} \vee \bar{C}; & \bar{A} \dot{\vee} \bar{C}; & \bar{A} \dot{\vee} C; \\ A \wedge (B \dot{\vee} C); & (A \wedge B) \rightarrow C; & (A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge C). \end{array}$$

252 A: «15 è un multiplo di 5»;

B: «15 è un numero primo»;

C: «15 è divisibile per 5».

$$\begin{array}{lll} A \vee B; & A \rightarrow (B \vee C); & (A \vee C) \rightarrow B; \\ A \leftrightarrow C; & (A \wedge C) \rightarrow C; & (A \wedge C) \rightarrow B; \\ (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C); & A \dot{\vee} C; & B \dot{\vee} C. \end{array}$$

253 Date le proposizioni

A: «Roma è la capitale d'Italia»;

B: «Vienna è bagnata dal Tevere»;

C: «Vienna è la capitale della Svizzera»;

scrivi a parole le seguenti proposizioni composte e assegna a ognuna il suo valore di verità.

$A \rightarrow B$; $A \leftrightarrow C$; $B \vee C$;

$\bar{A} \dot{\vee} C$; $\bar{A} \rightarrow B$; $\bar{A} \wedge \bar{B}$;

$(B \wedge C) \rightarrow A$; $A \rightarrow (B \wedge C)$.

254 Sono date le seguenti tabelle.

?	V	F	?	V	F	?	V	F	?	V	F
V	V	V	V	V	F	V	V	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V	F	F	V	F	V	F

Le tabelle indicano il risultato di $A \text{ ? } B$, con i valori di A nella prima colonna e quelli di B nella prima riga. Al posto del punto interrogativo scrivi l'operatore corrispondente, scelto fra i seguenti: \wedge ; \vee ; $\dot{\vee}$; \rightarrow ; \leftrightarrow .

255 Una radio locale ha fissato un provino per assumere un nuovo DJ. Possono partecipare alla selezione i ragazzi che sono o celibi o che non hanno più di 25 anni e almeno diplomati.

Schematizza la richiesta delle caratteristiche ed esamina la tavola di verità. Stabilisci se Luigi, ragioniere di 22 anni e sposato, e Carlo, laureato, celibe e ventiquattrenne, possono partecipare al provino.

[Luigi sì, Carlo no]

256 Considera le proposizioni

A: «Oggi piove», B: «Oggi c'è il sole»;

C: «Oggi vado al mare», D: «Oggi vado in piscina».

Utilizzando le variabili logiche, i connettivi e le implicazioni adeguate, traduci le espressioni:

a) «Oggi c'è il sole e io o vado al mare o vado in piscina»;

b) «Oggi, sia che ci sia il sole sia che piova, vado in piscina e non vado al mare»;

c) «Oggi, se piove vado in piscina, oppure se non piove vado al mare».

Per ciascuna delle espressioni logiche che hai trovato, stabilisci in quali casi risultano vere.

[a) $B \wedge (C \dot{\vee} D)$; b) $(B \vee A) \rightarrow (D \wedge \bar{C})$;

c) $(A \rightarrow D) \vee (\bar{A} \rightarrow C)$

■ Le tautologie e le contraddizioni

Verifica, servendoti delle tavole di verità, che le seguenti espressioni sono tautologie.

257 $A \vee \bar{A}$; $(A \wedge B) \vee (\bar{A} \vee \bar{B})$.

258 $(A \vee B) \vee \bar{B}$; $A \vee \bar{A} \wedge \bar{B}$; $(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$.

259 $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$;

$[(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C)$.

260 $[(A \rightarrow B) \wedge A] \Rightarrow B$ (regola del *modus ponens*).

261 $[(A \rightarrow B) \wedge \bar{B}] \Rightarrow \bar{A}$ (regola del *modus tollens*).

262 Verifica, servendoti delle tavole di verità, che le seguenti espressioni sono contraddizioni.

$A \wedge \bar{A}$; $(A \wedge B) \wedge \bar{A}$; $(A \wedge B) \wedge \bar{B}$;

$(A \vee B) \wedge (\bar{A} \wedge \bar{B})$; $(A \wedge B) \wedge (A \wedge \bar{B})$.

■ Le proprietà della congiunzione e della disgiunzione

■ ESERCIZIO GUIDA

263 Verifichiamo la proprietà associativa della disgiunzione: $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$.

Poiché le proposizioni sono tre, i casi possibili di combinazione vero/falso sono 2^3 , cioè 8.

Prepariamo la tavola di verità (tabella sotto a sinistra); compiliamo poi le colonne successive, tenendo presente che prima si svolgono i calcoli dentro le parentesi.

Calcoliamo $(B \vee C)$ e poi $A \vee (B \vee C)$, per il primo membro dell'uguaglianza (tabella sotto a destra); calcoliamo $(A \vee B)$ e poi $(A \vee B) \vee C$, per il secondo membro.

A	B	C
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

A	B	C	$B \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F

I valori di verità di $A \vee (B \vee C)$ e di $(A \vee B) \vee C$ coincidono; pertanto risulta verificata la proprietà associativa della disgiunzione.

264 Verifica la proprietà commutativa della congiunzione: $A \wedge B = B \wedge A$.

265 Verifica la proprietà commutativa della disgiunzione: $A \vee B = B \vee A$.

266 Verifica la proprietà associativa della congiunzione: $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$.

267 Verifica le seguenti equivalenze (**leggi di idempotenza** della congiunzione e della disgiunzione): $A \wedge A = A$; $A \vee A = A$.

268 Verifica le seguenti equivalenze (**leggi di De Morgan**): $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$; $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$.

269 Verifica la proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

270 Verifica la proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

271 Verifica che le due proposizioni $A \wedge B$ e $\overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$ sono equivalenti.

272 Verifica che le due proposizioni $A \vee B$ e $\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$ sono equivalenti.

273 Verifica l'equivalenza $A \dot{\vee} B = (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$.

■ Verifica di equivalenze mediante le proprietà degli operatori

LE PROPRIETÀ DEGLI OPERATORI LOGICI

PROPRIETÀ	ESPRESSIONE
la doppia negazione	$\overline{\overline{A}} = A$
legge di idempotenza della congiunzione	$A \wedge A = A$
legge di idempotenza della disgiunzione	$A \vee A = A$
commutativa della congiunzione	$A \wedge B = B \wedge A$
commutativa della disgiunzione	$A \vee B = B \vee A$
associativa della congiunzione	$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$
associativa della disgiunzione	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione	$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
leggi di De Morgan	$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$

■ ESERCIZIO GUIDA

274 Dimostriamo, senza l'aiuto delle tavole di verità, la validità delle seguenti equivalenze:

a) $A \wedge (A \vee B) = A \vee (A \wedge B);$ b) $\overline{\overline{A \vee B}} = A \wedge \overline{B}.$

a) Utilizzando la tabella riportata sopra, per la proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione abbiamo:

$$A \wedge (A \vee B) = (A \wedge A) \vee (A \wedge B) =$$

Per la legge di idempotenza:

$$= A \vee (A \wedge B).$$

b) Dimostriamo la seconda equivalenza:

$$\overline{\overline{A \vee B}} =$$

Per la seconda legge di De Morgan:

$$= \overline{\overline{A}} \wedge \overline{\overline{B}} =$$

Per la proprietà della doppia negazione:

$$= A \wedge \overline{B}.$$

Dimostra la validità delle seguenti equivalenze senza l'aiuto delle tavole di verità.

275 $A \vee (A \wedge B) = A \wedge (A \vee B)$

277 $A \wedge B = \overline{\overline{A \vee B}}$

279 $\overline{A \vee A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

276 $\overline{A \wedge \overline{B}} = \overline{A} \vee B$

278 $A \vee B = \overline{\overline{A \wedge B}}$

280 $\overline{B \wedge \overline{A \vee B}} = \overline{A} \wedge \overline{B}$

■ Le proprietà dell'implicazione

281 Verifica che l'implicazione non gode della proprietà commutativa.

282 Verifica le seguenti proprietà dell'implicazione e della doppia implicazione. (Serviti delle tavole di verità.)

a) $A \rightarrow B = \overline{A} \vee B.$ b) $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$

Nel sito: ► teoria e 15 esercizi su I circuiti elettrici e i connettivi logici



8. Forme di ragionamento valide

→ Teoria a pag. 171

RIFLETTI SULLA TEORIA

283

COMPLETA i tre ragionamenti seguenti, in modo che risultino validi.

- Se ascolti la radio, allora non studi storia. Ascolti la radio.
- Se un parallelogramma ha i lati congruenti, allora è un rombo oppure un quadrato. Il parallelogramma non ha i lati congruenti.
-

Paola legge o scrive. Paola non telefona.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

284 Per ognuna delle seguenti forme di ragionamento, indichiamo se è stato applicato lo schema del *modus ponens* o quello del *modus tollens*. Se non è stato applicato nessuno dei due schemi, spieghiamo con un esempio perché il ragionamento non è valido.

- Se il treno va a Parigi, allora passa per Torino. Il treno va a Parigi. Il treno passa per Torino.
- Se dormi, allora non pigli pesci. Non pigli pesci. Dormi.

a) Il ragionamento segue lo schema del *modus ponens* con:

- A: «Il treno va a Parigi»;
B: «Il treno passa per Torino».

b) Non sono applicati né il *modus ponens* né il *modus tollens*. È un ragionamento non valido, perché potremmo non pigliare pesci e, per esempio, studiare matematica invece di dormire.

Indica se le seguenti forme di ragionamento sono o non sono valide. In caso affermativo, scrivi se è stato applicato lo schema del *modus ponens* o quello del *modus tollens*.

285

«Se manca la benzina, la macchina non parte».

«La macchina non parte».

«Manca la benzina».

286

«Se resti a cena da noi, mangi il pesce».

«Non resti a cena da noi».

«Non mangi il pesce».

287

«Se un numero è multiplo di 8, allora è pari».

«Non è pari».

«Non è multiplo di 8».

288

«Se Giorgio era a Parigi all'ora del delitto, allora Giorgio è innocente».

«Giorgio era a Parigi all'ora del delitto».

«Giorgio è innocente».

289

«Se il professore si accorge che copio, mi annulla il compito».

«Il professore non mi annulla il compito».

«Il professore non si accorge che copio».

290

«Se mi porti il DVD col film, restiamo in casa a guardarlo».

«Mi porti il DVD col film».

«Restiamo in casa a guardarlo».

291

«Se hai l'influenza, hai la febbre».

«Hai la febbre».

«Hai l'influenza».

292

«Se ti butti in mare, ti bagni».

«Non ti butti in mare».

«Non ti bagni».

9. La logica e gli insiemi

RIFLETTI SULLA TEORIA

TEST

293 I due enunciati aperti $A(x)$ e $B(x)$ sono definiti sullo stesso insieme universo U e i loro insiemi di verità sono rispettivamente A e B .

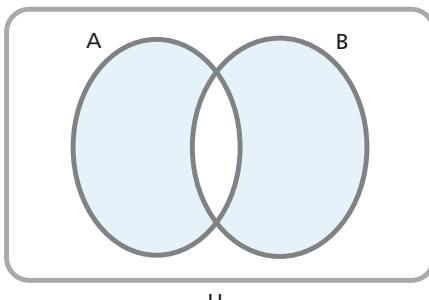
L'insieme di verità dell'enunciato $A(x) \wedge B(x)$ è:

- A l'intersezione fra A e B .
- B l'unione fra A e B .
- C il complementare di A rispetto a U .
- D la differenza fra A e B .
- E il complementare di B rispetto a U .

294 Qual è l'insieme che individua il seguente enunciato aperto: $A(x) : |x| = 4$?

- | | |
|-------------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> A {4} | <input type="checkbox"/> D {0, 4} |
| <input type="checkbox"/> B {-4} | <input type="checkbox"/> E {0, -4, +4} |
| <input type="checkbox"/> C {-4, +4} | |

295 Osserva il diagramma di Eulero-Venn in figura e determina a quale tra i seguenti enunciati aperti corrisponde.



- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> A $A(x) \wedge B(x)$ | <input type="checkbox"/> D $\overline{A(x) \wedge B(x)}$ |
| <input type="checkbox"/> B $A(x) \wedge \overline{B(x)}$ | <input type="checkbox"/> E $\overline{A(x)} \wedge B(x)$ |
| <input type="checkbox"/> C $\overline{A(x)} \vee B(x)$ | |

ESERCIZI

Nel sito: ► teoria e 14 esercizi su I sillogismi



Gli enunciati aperti e gli insiemi di verità

Nei seguenti esercizi, per ogni enunciato, indica un insieme universo U e rappresenta la situazione di verità-falsità con un diagramma di Eulero-Venn.

Fornisci degli esempi di elementi di U che non rendono vero l'enunciato aperto.

296 $A(x)$: « x è un monte delle Dolomiti»;
 $B(x)$: « x è un fiume della Germania».

297 $A(x)$: « x è un triangolo rettangolo»;
 $B(x)$: « x è un triangolo rettangolo isoscele».

298 $A(x)$: « x è un quadrato»;
 $B(x)$: « x è un trapezio».

299 $A(x)$: « x è un numero intero negativo»;
 $B(x)$: « x è una frazione propria».

Nei seguenti esercizi, dopo aver fissato un insieme universo U , trasforma ognuno degli enunciati aperti in due proposizioni, una vera e una falsa, scegliendo due opportuni elementi di U .

300 $A(x)$: « x è una frazione propria»;
 $B(y)$: « y è negativo»;
 $C(z)$: « z è maggiore di 7».

301 $D(t)$: « t è una frazione maggiore di 7»;
 $E(x)$: «12 è divisore di x »;
 $F(s)$: « s è divisore di 12».

302 $A(x)$: « x è un numero naturale minore di 10»;
 $B(x)$: « x è un numero naturale dispari minore di 10».

303 $G(x)$: « x è uno stato dell'Unione Europea»;
 $H(y)$: « y è un mammifero»;
 $I(z)$: « z è un bipede».

304 $L(z)$: « z è un lago»;

$M(t)$: « t è un frutto»;

$N(x)$: « x è un vulcano».

305 $O(x)$: «Milano e Bergamo sono due città della x »;

$P(y)$: «Il fiume Arno bagna la città di y »;

$Q(z)$: « z è uno sport di squadra».

I connettivi logici e gli insiemi

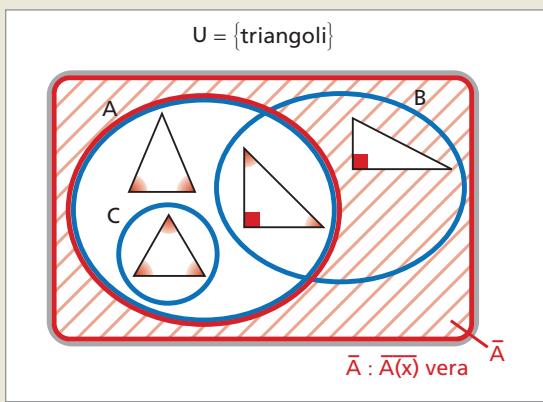
ESERCIZIO GUIDA

306 Consideriamo gli enunciati aperti:

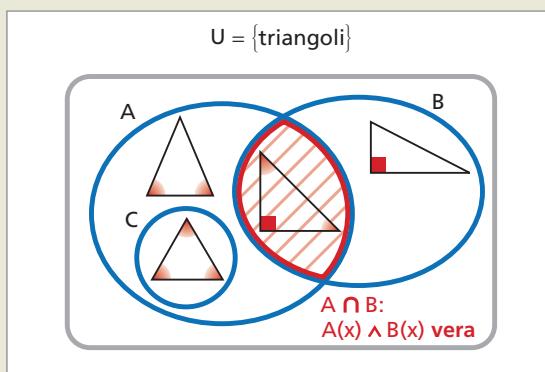
$A(x)$: « x è un triangolo isoscele»; $B(x)$: « x è un triangolo rettangolo»; $C(x)$: « x è un triangolo equilatero».

Stabiliamo un insieme universo U e rappresentiamo con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme di verità dei tre enunciati aperti. Rappresentiamo poi, sempre con un diagramma di Eulero-Venn, l'insieme di verità dei seguenti enunciati: $A(x) \wedge B(x)$.

Stabiliamo che l'insieme U è l'insieme dei triangoli, A è l'insieme dei triangoli isosceli, B dei triangoli rettangoli, C dei triangoli equilateri. A ha come insieme di verità l'insieme complementare di A rispetto a U .



$A \wedge B$ ha come insieme di verità l'insieme intersezione di A e B .



Osservazione. Se invece consideriamo $A \vee B$, questo enunciato ha come insieme di verità l'insieme unione di A e B .

Negli esercizi seguenti, per ogni terna di enunciati aperti, stabilisci un insieme universo U e poi disegna l'insieme di verità dei tre enunciati $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$. Rappresenta con i diagrammi di Eulero-Venn l'insieme di verità dei seguenti enunciati composti:

$$\bar{A}; \quad A \wedge B; \quad A \vee B; \quad A \vee \bar{B}; \quad (A \wedge C) \vee B.$$

307 $A(x)$: « x è un quadrupede»;

$B(x)$: « x è un animale con gli zoccoli»;

$C(x)$: « x è un cavallo».

308 $A(x)$: « x è un numero naturale che ha come ultima cifra 0 o 5»;

$B(x)$: « x è un numero primo»;

$C(x)$: « x è un numero divisibile per 5».

309 $A(x)$: « x è un rettangolo»;

$B(x)$: « x è un rombo»;

$C(x)$: « x è un quadrato».

310 $A(x)$: « x è sposato»;

$B(x)$: « x è padre»;

$C(x)$: « x è madre».

Nei seguenti esercizi rappresenta l'insieme di verità degli enunciati aperti $A(x)$ e $B(x)$ in un opportuno insieme universo U . Verifica poi con i diagrammi di Eulero-Venn la validità delle due leggi di De Morgan.

311 $A(x)$: « x ha gli occhi azzurri»;
 $B(x)$: « x è un maschio».

312 $A(x)$: « x è un mammifero»;
 $B(x)$: « x è un cetaceo».

313 $A(x)$: « x è un quadrato perfetto»;
 $B(x)$: « x è pari».

314 $A(x)$: « x è un numero intero negativo maggiore di -10 »;

$B(x)$: « x è un numero intero compreso fra -1 e 1 ».

315 $A(x)$: « x è divisore di 15 »;
 $B(x)$: « x è elemento neutro della moltiplicazione».

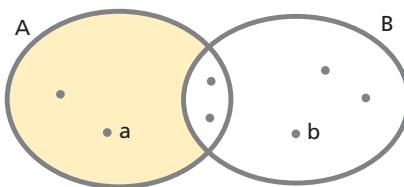
10. I quantificatori

→ Teoria a pag. 175

RIFLETTI SULLA TEORIA

316 TEST Fra i seguenti enunciati, uno solo non corrisponde al diagramma di Eulero-Venn in figura. Quale?

- | | | | |
|----------------------------|-----------------------|----------------------------|---------------------------|
| <input type="checkbox"/> A | Qualche b è a . | <input type="checkbox"/> D | Almeno un a non è b . |
| <input type="checkbox"/> B | Nessun a è b . | <input type="checkbox"/> E | Qualche a è b . |
| <input type="checkbox"/> C | Almeno un a è b . | | |



317 TEST Dato l'enunciato $A(x)$: « x è divisibile per 4 », che cosa significa: $\exists x \in \mathbb{N} | A(x)$?

- | | |
|----------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> A | Non esistono numeri naturali divisibili per 4 . |
| <input type="checkbox"/> B | Esiste almeno un numero naturale divisibile per 4 . |
| <input type="checkbox"/> C | Tutti i numeri naturali sono divisibili per 4 . |
| <input type="checkbox"/> D | Esistono infiniti numeri naturali divisibili per 4 . |
| <input type="checkbox"/> E | Esiste almeno un numero naturale che non sia divisibile per 4 . |

318 VERO O FALSO?

- | | | |
|--|----------------------------|----------------------------|
| a) $\exists x \in \mathbb{N} x$ è un numero primo. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| b) $\forall x \in \mathbb{N}, x$ è un numero primo. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| c) $\exists x \in \mathbb{N} x \neq 1$ e $x = \text{M.C.D.}(7, 9)$. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| d) $\exists x \in \mathbb{N} x = \text{m.c.m.}(2, 3)$. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| e) $\forall x \in \{2, 3\}, x$ è divisore di 6 . | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

319 Nell'insieme universo U degli animali consideriamo l'enunciato: $A(x)$: « x è un rettile».

Trasformiamo l'enunciato in proposizione, utilizzando prima il quantificatore \forall (per ogni), poi \exists (esiste). Indichiamo per ogni proposizione ottenuta il suo valore di verità.

Mediante il quantificatore universale otteniamo la proposizione: $\forall x \in U, x$ è un rettile.

La proposizione ottenuta è falsa. Infatti non è vero che qualunque animale è un rettile.

Mediante il quantificatore esistenziale otteniamo la proposizione: $\exists x \in U | x$ è un rettile.

La proposizione ottenuta è vera. Infatti esiste almeno un animale che è un rettile.

Trasforma i seguenti enunciati aperti in proposizioni, utilizzando i due quantificatori \forall e \exists . Scrivi di fianco a ogni proposizione ottenuta il suo valore di verità.

- 320** a) $U = \mathbb{N}$; $B(x)$: « x è un divisore di 10».
 b) $U = \mathbb{Z}$; $C(x)$: « x è opposto di 5».
 c) $U = \mathbb{N}$; $D(x)$: « x è reciproco di 6».

- 321** a) $U = \{\text{figure piane}\}$;
 $A(x)$: « x è un insieme di punti».
 b) $U = \{\text{parallelogrammi}\}$;
 $R(x)$: « x è un quadrilatero».
 c) $U = \{\text{rette di un piano}\}$;
 $P(x)$: « x è parallela a una retta data».

- 322** a) $U = \{\text{città dell'Umbria}\}$;
 $F(x)$: « x è capoluogo di provincia».
 b) $U = \{\text{fiumi d'Italia}\}$;
 $A(x)$: « x è più lungo del fiume Po».
 c) $U = \{\text{Stati della UE}\}$;
 $B(x)$: « x è uno Stato europeo».

- 323** a) $U = \mathbb{Q}$; $H(x)$: « x è minore di 100».
 b) $U = \{\text{numeri pari}\}$; $I(x)$: « x è divisibile per 3».
 c) $U = \mathbb{N}$; $L(x)$: « x è maggiore o uguale a 0».

ESERCIZIO GUIDA

- 324** Cambiamo l'insieme universo relativo all'enunciato a) dell'esercizio 320, in modo che le proposizioni che otteniamo mediante i due quantificatori \forall e \exists abbiano valore di verità diverso da quello che hanno con l'insieme U assegnato.

$B(x)$: « x è un divisore di 10».

Se $U = \mathbb{N}$, la proposizione che otteniamo mediante il quantificatore \forall è falsa, quella con il quantificatore \exists risulta vera.

La proposizione che otteniamo mediante il quantificatore \forall è vera se $U = \{2, 10\}$, perché qualsiasi elemento di questo insieme è un divisore di 10.

La proposizione con il quantificatore \exists risulta falsa se $U = \{\text{numeri naturali maggiori di } 1000\}$, in quanto in questo insieme non ci sono divisori di 10.

- 325** Per ognuno degli enunciati degli esercizi 320 e 321 cambia l'insieme universo, in modo che le proposizioni con i quantificatori \forall e \exists abbiano valori di verità diversi da quelli che hanno con gli insiemi U assegnati.

- 326** Come nell'esercizio precedente, ma per gli enunciati degli esercizi 322 e 323.

- 327** Inventa tre esempi di enunciati aperti, con i relativi insiemi universo, in cui le proposizioni con i quantificatori \forall e \exists siano entrambe false.

- 328** Come nell'esercizio precedente, ma con entrambe le proposizioni vere.

- 329** Come nell'esercizio 327, ma con le proposizioni con i quantificatori \forall vere e quelle con i quantificatori \exists false.

- 330** Come nell'esercizio 327, ma con le proposizioni con i quantificatori \forall false e quelle con i quantificatori \exists vere.

RIEPILOGO

LE ESPRESSIONI LOGICHE

331

VERO O FALSO?

Le proposizioni semplici A , B e C hanno valori di verità rispettivamente F , V , V . Determina i valori di verità delle seguenti proposizioni composte.

- a) $B \vee C$
- b) $\bar{A} \wedge B$
- c) $A \dot{\vee} \bar{C}$
- d) $A \leftrightarrow \bar{C}$
- e) $A \rightarrow B$
- f) $A \rightarrow (B \vee C)$
- g) $(B \wedge C) \rightarrow A$
- h) $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \wedge C)$
- i) $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \vee A)$
- j) $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

332

Stabilisci se le seguenti proposizioni composte con le proposizioni elementari A , B e C sono delle tautologie o delle contraddizioni.

- a) $(B \wedge \bar{B}) \rightarrow C$ [tautologia]
- b) $(A \vee C) \vee (\bar{A} \vee B)$ [tautologia]
- c) $(B \wedge \bar{B}) \leftrightarrow (A \vee \bar{A})$ [contraddizione]
- d) $(A \wedge B) \vee (\bar{B} \vee \bar{A})$ [tautologia]
- e) $(A \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$ [tautologia]
- f) $(A \wedge \bar{B}) \leftrightarrow (\bar{A} \vee B)$ [contraddizione]

Dimostra la validità delle seguenti equivalenze senza l'aiuto delle tavole di verità.

333 $(\bar{A} \wedge B) = (\bar{B} \vee A); \quad \bar{A} \vee (\bar{A} \wedge B) = (\bar{A} \vee \bar{B}).$

334 $(\bar{A} \vee \bar{B}) \wedge (\bar{A} \rightarrow B) = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \rightarrow B)$

Per ognuna delle seguenti forme di ragionamento indica se è o non è valida. In caso affermativo, scrivi se è stato applicato lo schema del *modus ponens* o quello del *modus tollens*.

- 335 «Se vado al cinema, allora mangio i popcorn»;
- «Non vado al cinema»;
- «Non mangio i popcorn».

336

- «Se un quadrilatero ha i lati opposti congruenti, è un parallelogramma»;
- «Il quadrilatero non è un parallelogramma»;
- «Il quadrilatero non ha i lati opposti congruenti».

337

Trasforma i seguenti enunciati aperti in proposizioni utilizzando i quantificatori \forall e \exists . Tenendo presente l'insieme universo U assegnato, scrivi a fianco di ogni proposizione il suo valore di verità.

$$U = \mathbb{N}, A(x): «x \text{ è divisore di } 12»;$$

$$U = \{\text{triangoli}\}, A(x): «x \text{ ha gli angoli la cui somma dà un angolo piatto}»;$$

$$U = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}, A(x): «x \text{ è un numero primo}».$$

338

Considera gli enunciati aperti:

$$A(x): «x \text{ è un numero intero maggiore di } -1 \text{ e minore di } 7»;$$

$$B(x): «x \text{ è un numero intero divisore di } 6».$$

Stabilisci l'insieme universo U e rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme di verità degli enunciati A , B , $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \wedge \bar{B}$.

339

Verifica la validità del seguente ragionamento utilizzando un diagramma di Eulero-Venn.

«Ogni quadrato è un rombo».

«Ogni rombo è un parallelogramma».

«Qualche parallelogramma è un quadrato».

340

È data la proposizione composta: «Se 10 è divisibile per 3, allora 10 è pari». Indica le proposizioni componenti con le variabili P e Q e riscrivi la proposizione composta in forma simbolica. Traduci in parole la proposizione inversa ($\underline{Q} \rightarrow P$), la contraria ($\underline{P} \rightarrow Q$), la contronominale ($\underline{Q} \rightarrow \underline{P}$) e individua di ciascuna il valore di verità.

[F; F; V]

341

Considera l'implicazione «Se un numero è divisibile per 2, allora è pari» e la proposizione «Il numero 21 è dispari». Utilizzando lo schema di ragionamento del *modus tollens*, cosa puoi dedurre a proposito del numero 21? Utilizza le tavole di verità per verificare che tale ragionamento è una tautologia.

[non è divisibile per 2; $(A \rightarrow B) \wedge \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \dots$]

LABORATORIO DI MATEMATICA

Gli insiemi con Wiris

ESERCITAZIONE GUIDATA

Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ e $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, con Wiris calcoliamo $A \cap B$ e, dopo aver controllato che A è contenuto in U , i complementari di A e di $A \cap B$ rispetto a U .

- Attiviamo Wiris.
- Inseriamo, assegnandoli contemporaneamente alle lettere A , B e U , i tre insiemi dati.
- Impostiamo e determiniamo l'intersezione fra gli insiemi A e B .
- Impostiamo ed eseguiamo il controllo che A sia un sottoinsieme di U .
- Impostiamo e determiniamo il complementare di A rispetto all'insieme U , scelto come insieme universo.
- Impostiamo e determiniamo il complementare di $A \cap B$ rispetto all'insieme U .

Operazioni con gli insiemi

```
A := {1, 2, 3};  
B := {0, 1, 2};  
U := {0, 1, 2, 3, 4, 5};  
A ∩ B → {1,2}  
sottoinsieme?(A, U) → vero  
U ∩ non(A) → {0,4,5}  
U ∩ non(A ∩ B) → {0,3,4,5}
```

▲ Figura 1

Nel sito: ► 1 esercitazione guidata con Derive ► 16 esercitazioni in più
 ► 1 esercitazione guidata con Derive sulla logica ► 33 esercitazioni in più



Esercitazioni

Dati gli insiemi $A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 3, 6, 7\}$, $C = \{1, 3, 5, 7\}$ e $UNIVERSO = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, verifica con il computer le seguenti equivalenze fra insiemi, svolgendo le varie operazioni partendo dalle parentesi più interne. Dove devi determinare il complementare di un insieme effettua la differenza fra l'insieme universo e l'insieme stesso.

Fai la verifica dei risultati ottenuti mediante diagrammi di Eulero-Venn.

1 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

4 $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

5 $\overline{A \cap B} - C = \overline{A \cup C} \cup \overline{B \cup C}$

6 $(A \cup \overline{B}) \cap C = (A \cap C) \cup (C - B)$

7 $(A \cap \overline{C}) \cup \overline{B \cup C} = (A \cup B) - C$

Una classe di una scuola dove si praticano tre sport è formata da 20 studenti. Riconosciuti dal numero progressivo di registro, praticano

- il tennis: 1, 2, 3, 7, 9;
- il calcio: 3, 4, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 17, 18;
- la pallavolo: 2, 3, 7, 12, 15, 18, 19, 20.

Con il computer definisci i tre insiemi e determina quanti sono gli studenti che praticano:

- 8** a) tutti e tre gli sport;
 b) solo il tennis;
 c) il calcio o il tennis, ma non la pallavolo.

- 9** a) il calcio e non il tennis;
 b) un solo sport;
 c) solo la pallavolo.

- 10** a) il calcio o la pallavolo, ma non il tennis;
 b) sia il calcio sia la pallavolo;
 c) solo il calcio.

11 Trova quali sport praticano rispettivamente gli studenti 7, 8, 16.

12 Determina tutte le possibili coppie di tennisti che si possono formare con i praticanti del tennis.

Matematica per il cittadino

PARTITA DI PALLONE

Carlo e Marco giocano nella stessa squadra di calcio. Nei giorni precedenti un'importante partita discutono dell'incontro che li aspetta.

Lunedì

Carlo: «Domenica c'è la partita, vieni vero? Perché, se non ci sei tu, non vinciamo di certo!»

Marco: «Spero di poter venire, ma non lo so; se domani la prof. di matematica mi restituisce il compito, possono esserci dei problemi. Mio padre mi ha detto che, se non è andato bene, o mi faccio interrogare in settimana e prendo la sufficienza, o non esco domenica».

Giovedì

Carlo: «Ciao Marco, allora vieni alla partita?»

Marco: «Non lo so ancora. La prof. mi ha reso il compito: ho preso 5 e non mi ha ancora interrogato».

1. Considera le due proposizioni:

A: «Marco gioca la partita», B: «La squadra dei due amici vince».

Formalizza, usando i connettivi logici, la considerazione fatta da Carlo lunedì: «Se non ci sei tu, non vinciamo di certo».

2. Supponiamo che l'affermazione fatta da Carlo, «Se non ci sei tu, non vinciamo di certo», sia vera.

Stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni.



PROPOSIZIONE

V/F

Marco gioca e la sua squadra sicuramente vince la partita

Marco gioca e la sua squadra può perdere la partita

Marco gioca e la sua squadra può pareggiare la partita

Marco non gioca e la sua squadra sicuramente non vince la partita

Marco non gioca e la sua squadra vince la partita

La squadra ha vinto, perciò Marco ha giocato

La squadra ha perso, perciò Marco non ha giocato

La squadra può perdere anche se Marco gioca

Se Marco gioca, sicuramente la squadra vince

3. Considera l'affermazione fatta dal padre di Marco e identifica in essa le proposizioni logiche fondamentali. Formalizza l'affermazione legando le proposizioni con i connettivi.

4. Costruisci la tavola di verità della proposizione esaminata nella domanda precedente, tenendo conto di quanto Marco dice giovedì.

5. Domenica la squadra di Carlo e Marco vince la partita. Stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni.

PROPOSIZIONE

V/F

Marco ha preso la sufficienza nell'interrogazione e ha giocato

Marco ha giocato, ma non è detto che sia stato interrogato

Marco non è stato interrogato e non ha giocato

Marco non ha preso la sufficienza nell'interrogazione e non ha giocato

Marco non ha giocato, perciò non è stato interrogato

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ► questi test interattivi ► 30 test interattivi in più



1 Il risultato di $(A \cap A) \cup \emptyset$ è:

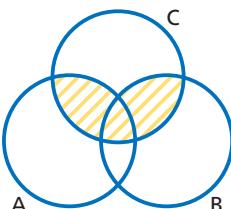
- A. \bar{A} .
- B. \emptyset .
- C. $A \times A$.
- D. A.
- E. nessuno dei precedenti.

2 Se $A = \{9\}$ e $B = \{6\}$, allora:

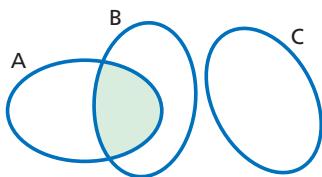
- A. $A - B = \{9\}$.
- B. $A - B = \{3\}$.
- C. $A - B = \emptyset$.
- D. $A - B = 9$.
- E. $A - B = 3$.

3 La parte tratteggiata della figura è il risultato di una delle seguenti operazioni. Quale?

- A. $A \cup B \cup C$
- B. $A \cap B \cap C$
- C. $A \cup (B \cap C)$
- D. $(A \cup B) \cap C$
- E. $(A \cap B) \cup C$



4 La parte colorata in figura è il risultato di una delle seguenti operazioni. Quale?



- A. $(C \cup A) - B$
- B. $(B \cup C) - A$
- C. $(A \cup C) \cap (B \cup C)$
- D. $(A \cap C) \cup (B \cap C)$
- E. $(A \cap B) - C$

5 Fra le seguenti relazioni una sola è falsa. Quale?

- A. $(A \cup B) \cap A = A$
- B. $(A \cap B) \cup A = A$
- C. $(A \cap B) \cap A = A$
- D. $(A \cap B) \cap (A \cap B) = A \cap B$
- E. $(A \cap B) \cup (A \cup B) = A \cup B$

6

Fra le seguenti affermazioni una sola è sicuramente vera. Quale?

- A. $(A \cap B) \subset (\bar{A} \cap \bar{B})$
- B. $(A \cup B) \subset (\bar{A} \cap \bar{B})$
- C. $(A \cup B) \subset A \cap B$
- D. $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B)$
- E. $(A - B) \subseteq (A \cap B)$

7

Sono dati gli insiemi:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ e } x < 4\}; B = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ e } x > 4\}; \\ C = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ e } x \neq 4\}.$$

Una sola delle seguenti affermazioni è falsa. Quale?

- A. $C = A \cup B$
- B. $A = C - B$
- C. $C = \emptyset$
- D. $B \subset C$
- E. $B \cap C = B$

8

L'insieme $A = \{(2; 5), (3; 5)\}$ è il risultato di una delle seguenti operazioni. Quale?

- A. $\{2, 3\} \cup \{5\}$
- B. $\{2, 3\} \cap \{2, 3, 5\}$
- C. $\{2, 3\} \times \{5\}$
- D. $\{5\} \times \{2, 3\}$
- E. $\{2, 3\} \cap \{3, 5\}$

9

Se $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{0\}$, allora:

- A. $A \times B = \emptyset$.
- B. $B \times A = \{(0; x) \mid x \in A\}$.
- C. $B \times A = \{(0; 2), (0; 4), (0; 6), (0; 8)\}$.
- D. $(A \times B) \cap \emptyset = \{0\}$.
- E. $B \times A = \{(2; 0), (4; 0), (6; 0), (8; 0), (10; 0)\}$.

10

Nella seguente tavola di verità compare un punto interrogativo. Cosa metteresti al suo posto?

- A. $\bar{A} \wedge B$
- B. $\bar{A} \vee B$
- C. $\bar{A} \rightarrow B$
- D. $A \wedge B$
- E. $A \rightarrow B$

A	B	\bar{A}	?
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

11

Nella seguente tavola di verità compare un punto interrogativo. Cosa metteresti al suo posto?

- A $A \vee B$
- B $A \wedge B$
- C $\bar{B} \rightarrow A$
- D $\bar{A} \vee B$
- E $A \vee B$

A	B	?
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

12

Fra le seguenti equivalenze una sola è *vera*. Quale?

- A $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) = A \leftrightarrow B$
- B $(A \rightarrow B) \wedge B = A$
- C $(A \vee B) \wedge \bar{B} = A$
- D $\overline{(A \vee B)} = \bar{A} \vee B$
- E $A \rightarrow B = B \rightarrow A$

13

Fra le seguenti equivalenze una sola è *falsa*. Quale?

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> A $A \wedge B = B \wedge A$ | <input type="checkbox"/> D $A \rightarrow B = \bar{A} \vee \bar{B}$ |
| <input type="checkbox"/> B $\overline{A \wedge B} = \bar{B} \vee \bar{A}$ | <input type="checkbox"/> E $A \vee \bar{A} = B \vee \bar{B}$ |
| <input type="checkbox"/> C $\bar{A} \vee \bar{B} = A \rightarrow \bar{B}$ | |

14

Una fra le seguenti proposizioni è una contraddizione. Quale?

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> A $A \vee (\bar{B} \wedge A)$ | <input type="checkbox"/> D $(\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \vee B)$ |
| <input type="checkbox"/> B $(A \vee B) \vee \bar{B}$ | <input type="checkbox"/> E $(\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge B$ |
| <input type="checkbox"/> C $(A \rightarrow B) \vee A$ | |

15

Una fra le seguenti proposizioni è una tautologia. Quale?

- A $[(A \rightarrow B) \wedge \bar{B}] \rightarrow \bar{A}$
- B $(\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge (A \wedge B)$
- C $[\bar{A} \rightarrow (A \wedge B)] \wedge \bar{A}$
- D $A \rightarrow (A \vee B)$
- E $(A \leftrightarrow B) \wedge B$

16

In quale delle seguenti alternative è applicato correttamente lo schema del *modus ponens* alla proposizione «Se Carlo è milanese, allora non è francese»?

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> A Carlo è milanese | <input type="checkbox"/> Carlo non è francese |
| <input type="checkbox"/> B Carlo non è milanese | <input type="checkbox"/> Carlo è francese |
| <input type="checkbox"/> C Carlo è milanese | <input type="checkbox"/> Carlo è francese |
| <input type="checkbox"/> D Carlo è francese | <input type="checkbox"/> Carlo non è milanese |
| <input type="checkbox"/> E Carlo non è francese | <input type="checkbox"/> Carlo è milanese |

SPIEGA PERCHÉ

17

Sono dati i tre insiemi A , B e C , formati rispettivamente dai triangoli, dai quadrilateri e dai parallelogrammi. Perché possiamo affermare che $C \subset B$, mentre non è vero che $A \subset B$?

18

Fra i sottoinsiemi di $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -8 \leq x \leq 8\}$ c'è $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$ ma non $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 4\}$. Perché?

19

L'unione di due insiemi A e B coincide con A . Che cosa puoi affermare sull'insieme B ?

20

È possibile fare una partizione dell'insieme dei cellulari venduti in Italia? Se sì, come?

21

La frase «Maria è una parola formata da cinque lettere» è una proposizione, mentre «Maria è una parola corta» non lo è. Perché?

22

Se A : «Giorgio va in moto» e B : «Giorgio ascolta musica», la proposizione «Se Giorgio va in moto, non ascolta musica» è espressa da $A \wedge \bar{B}$ oppure $\bar{A} \vee \bar{B}$? Perché?

23

La negazione della proposizione «Ho i calzini bianchi» non è «Ho i calzini neri». Come mai?

24

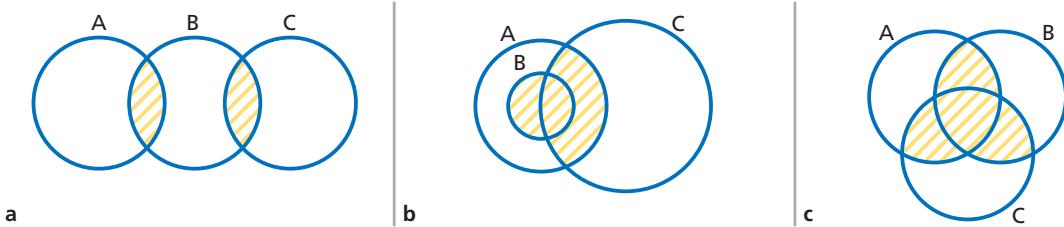
Considera le seguenti proposizioni: A : « x e y sono numeri primi tra loro»; B : « x e y sono numeri primi». $A \rightarrow B$ è vera? E $B \rightarrow A$? Perché?

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

**Gli insiemi**

- 25** Dati gli insiemi $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{a, b, c\}$, \emptyset e $C = \{e, r, a\}$, stabilisci quali sono i sottoinsiemi di A .
- 26** Dati gli insiemi $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x < 10\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 2 \leq x < 8\}$, stabilisci se B e C sono sottoinsiemi di A .
- 27** Dato l'insieme $A = \{3, 5, 7\}$, scrivi i suoi possibili sottoinsiemi.
- 28** Dati gli insiemi $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è divisore di } 12\}$ e $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è divisore di } 18\}$, rappresenta per elencazione gli insiemi A e B e determina $A \cap B$ e $A \cup B$.
- 29** Dati gli insiemi $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{2, 3, 6, 7, 9\}$, dà la rappresentazione per elencazione di $A \cap B$ e $A \cup B$, mediante l'opportuno diagramma di Eulero-Venn.
- 30** Dati gli insiemi $A = \{c, d, 6, 7\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ e $C = \{c, 6, 7\}$, determina $(A \cup B) \cap C$ e $(A \cap B) \cup C$.
- 31** Dati gli insiemi A , B , C , formati rispettivamente dai film italiani, western e quelli prodotti prima del 1950, descrivi a parole gli insiemi che risultano dalle seguenti operazioni: $A \cap B$; $A \cup C$; $A - B$; $B - A$; $A \cap (B - C)$.
- 32** Dati gli insiemi $A = \{x \mid x \text{ è lettera della parola «informatica»}\}$, $B = \{x \mid x \text{ è lettera della parola «amata»}\}$, determina B_A .
- 33** In ognuna delle seguenti figure, esprimi la parte tratteggiata usando le operazioni di unione e intersezione fra gli insiemi A , B e C assegnati.



- 34** Dati gli insiemi $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, e, f\}$ e $C = \{c, d, e, g\}$, dimostra che:

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C).$$
- 35** Rappresenta graficamente gli insiemi $A = \{x \mid x \text{ è lettera della parola «mamma»}\}$, $B = \{x \mid x \text{ è lettera della parola «palla»}\}$ e dai la rappresentazione per elencazione di: $A - B$, $B - A$, $A \times B$.
- 36** Dati gli insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{4, 5\}$, rappresenta per elencazione gli insiemi $A \times B$ e $B \times A$ e poi disegnane la rappresentazione cartesiana.
- 37** È dato il prodotto cartesiano $A \times B = \{(1; 3), (1; a), (1; b), (z; 3), (z; a), (z; b)\}$. Determina i due insiemi A e B .
- 38** Dato l'insieme $A = \{x, y, z, t\}$, determina il prodotto cartesiano $A \times A$ e disegna la rappresentazione cartesiana.

Dati gli insiemi $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 3\}$, $D = \{b, d\}$, determina il risultato delle seguenti espressioni.

39 $A \times (B \cap C)$; $(A \cap D) \times C$; $A \times (B \cup C)$.

40 $(A \times C) \cap (D \times C)$; $(A \times B) \cap (A \times C)$; $(A \times B) \cap (B \times C)$.

41 $(A \times C) \cap (D \times B)$; $(B \times A) \cap (D \times C)$.

Con gli insiemi degli esercizi precedenti verifica la validità delle seguenti uguaglianze.

42 $B \times (A \cup C) = (B \times A) \cup (B \times C)$ **44** $(A - D) \times C = (A \times C) - (D \times C)$

43 $B \times (A \cap D) = (B \times A) \cap (B \times D)$

Considera l'insieme universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Aiutandoti con un diagramma di Eulero-Venn, calcola il risultato delle seguenti espressioni.

45 $\bar{A} \cup B$, $A \cup \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $A \cap \bar{B}$.

46 $\bar{A \cup B}$, $\bar{A} \cup \bar{B}$, $\bar{A \cap B}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$.

47 Determina l'insieme delle parti di ciascuno dei seguenti insiemi.

$$A = \{x \mid x \text{ è lettera della parola «pasta»}\};$$

$$B = \{1\}; \quad C = \{x, y\}.$$

48 Dato l'insieme $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 2 \leq x \leq 11\}$, stabilisci se $\{A_1, A_2, A_3\}$ è una partizione di A con $A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 2 \leq x \leq 5\}$, $A_2 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 6 \leq x < 9\}$, $A_3 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 8 < x \leq 11\}$.

51 VERO O FALSO?

Dati gli insiemi $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{a, e\}$, quali tra le seguenti affermazioni sono vere e quali false?

- a) $\{a\} \in A$
- b) $\{b, a\} \subset A$
- c) $\{a, e\} \subseteq B$
- d) $a \subseteq A \cap B$
- e) $A \cup B$ ha 6 elementi
- f) $A - B$ ha 2 elementi
- g) B non è un sottoinsieme di A
- h) $A \subseteq \mathcal{P}(A)$
- i) $A \subseteq A - B$
- j) $A - B \subseteq A \cup B$
- k) $A \times B \subseteq A \cup B$

49 Dato l'insieme $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 2 \leq x < 20\}$ e i sottoinsiemi $A_1 = \{x \mid x \in A \text{ e } x \text{ è divisibile per } 2\}$, $A_2 = \{x \mid x \in A \text{ e } x \text{ è divisibile per } 3\}$, $A_3 = \{x \mid x \in A \text{ e } x \text{ è divisibile per } 5\}$, $\{A_1, A_2, A_3\}$ formano una partizione di A ? Perché?

50 Dato l'insieme $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, i sottoinsiemi $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{c\}$, $A_3 = \{d, e, f\}$ formano una partizione di A ? Stabiliscilo mediante un diagramma di Eulero-Venn.

52 VERO O FALSO?

Dati A e B insiemi qualsiasi, possiamo affermare che:

- a) se $a \in A$, allora $\{a\} \subseteq A$;
- b) se $B \subseteq A$ e $A \neq B$, allora $B \subset A$;
- c) se $A \cup B = B$, allora $B \subseteq A$;
- d) se $A - B = B - A$, allora $A = B$;
- e) se $A = B$, allora $A - B = A$;
- f) la differenza fra insiemi è sempre possibile;
- g) $A \times \emptyset = \emptyset$;
- h) se $B \subset A$, allora $B \in \mathcal{P}(A)$;
- i) se $A \cap B = \emptyset$, anche $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \emptyset$.

Problemi

53

In una classe di 28 ragazzi, tutti hanno un mezzo di trasporto. In particolare, 24 hanno il motorino e 9 la bicicletta.

Quanti sono i ragazzi che hanno sia il motorino sia la bicicletta? [5]

54

In una compagnia di 25 ragazzi, 15 usano il cellulare per telefonare, 9 usano il cellulare per inviare SMS e 5 non usano il telefonino.

Rappresenta la situazione con un diagramma di Eulero-Venn: quanti insiemi disgiunti vedi?

Quanti sono i ragazzi che telefonano con il cellulare e inviano SMS? [4]

55

Un sondaggio mostra che al 63% dei ragazzi piacciono le scarpe di marca A e al 76% quelle di marca B. Ciascun ragazzo del gruppo esaminato esprime almeno una preferenza. Calcola la percentuale dei ragazzi ai quali piace sia la marca A sia la B e la percentuale di quelli a cui piace solo la A. [39%, 24%]

56

Una società di assicurazioni auto e moto conta 635 iscritti. Di questi clienti, 462 assicurano la loro auto e 203 assicurano una motocicletta. Quanti clienti assicurano sia un'auto che una moto? Quanti solo la moto? [30; 173]

57

In un paesino con pochi abitanti c'è un gruppo di ragazzi tra i 14 e i 17 anni. D'estate, durante la settimana, vanno alla sala giochi, al bar oppure stanno nella piazza sotto i portici a parlare. Le loro abitudini possono essere così riassunte:

- 4 ragazzi vanno sia alla sala giochi, sia al bar, sia sotto i portici;
- uno solo sta al bar e va sotto i portici, ma non va alla sala giochi;
- 27 ragazzi stanno alla sala giochi, ma soltanto 10 vanno solo alla sala giochi;
- 14 ragazzi vanno al bar e alla sala giochi;
- 5 ragazzi preferiscono stare sempre sotto i portici;
- 20 ragazzi vanno al bar.

Da quanti ragazzi tra i 14 e i 17 anni è composto il gruppo esaminato? [38]

■ La logica

58

Indica quali tra le seguenti frasi sono proposizioni logiche e a queste attribuisci un valore di verità.

- «Il Monte Bianco è la cima più alta delle Alpi».
- «Cosa hai fatto ieri?».
- «6 è un numero dispari».

59

Indica quali, fra le seguenti frasi, sono proposizioni logiche e a queste attribuisci un valore di verità.

- A: «14 è la metà di 28».
 B: «I tortellini di Modena sono buoni».
 C: «Mi piacciono le fragole».
 D: «10 è uguale al quadrato di 3 più 1».

60

Date le proposizioni

- A: «Laura studia storia»,
 B: «Marco fa i compiti»,

scrivi le proposizioni:

$$\bar{A}; \bar{B}; A \vee B; A \wedge B; \bar{A} \wedge B; A \vee \bar{B}; \bar{A} \wedge \bar{B}; \bar{A} \vee \bar{B}.$$

61

Date le proposizioni

- A: «27 è cubo di 3»,
 B: «27 è un numero pari»,
 C: «27 è maggiore di 20»,

assegna i valori di verità ad A, B e C.
 Traduci poi in parole le seguenti proposizioni composte e assegna loro i corrispondenti valori di verità:

$$A \vee B, A \wedge B, A \vee C, \bar{A} \wedge \bar{C}, A \vee (\bar{B} \wedge C).$$

62

Date le proposizioni

- D: «5 è un numero dispari»,
 B: «4 è divisore di 10»,
 C: «6 è un numero primo»,

attribuisci a ciascuna proposizione il suo valore di verità e poi stabilisci il valore di verità delle proposizioni:

$$A \wedge B; \bar{A} \wedge \bar{B}; A \wedge \bar{C}.$$

63

Date le proposizioni

- A: «8 è multiplo di 3», B: «m.c.m. (6, 4) = 12»,
C: «il quadrato è equilatero ed equiangolo»;

attribuisci a ciascuna proposizione il suo valore di verità e poi stabilisci il valore di verità delle proposizioni:

$$A \rightarrow B; \quad B \rightarrow \bar{C}; \quad A \leftrightarrow B.$$

Date le proposizioni

- A: «7 è un numero pari»,
B: «il trapezio è un parallelogramma»,
C: «il rettangolo ha le diagonali congruenti»,

attribuisci a ciascuna il suo valore di verità e poi stabilisci il valore di verità delle proposizioni:

64

$$A \vee B; \quad \bar{A} \vee C; \quad \bar{A} \vee \bar{B}.$$

65

$$A \wedge (A \wedge \bar{B}); \quad A \vee (\bar{B} \wedge C); \quad A \vee (\bar{B} \wedge \bar{C}).$$

66

$$(A \vee B) \wedge \bar{\bar{B}}; \quad \bar{\bar{A}} \dot{\vee} C; \quad (C \wedge B) \dot{\vee} \bar{A}.$$

67

$$A \rightarrow (B \vee C); \quad (A \vee B) \rightarrow \bar{A}; \quad (A \vee B) \leftrightarrow (\bar{A} \wedge \bar{B}).$$

68

Date le proposizioni

- A: «16 è multiplo di 4»,
B: «16 è un numero dispari»,
C: «16 è maggiore di 10»,

assegna i valori di verità ad A, B e C.

Poi traduci in parole ognuna delle seguenti proposizioni composte e assegna loro i corrispondenti valori di verità.

$$A \vee B, \quad A \wedge B, \quad A \vee C, \quad \bar{A} \wedge \bar{C}, \quad A \vee (\bar{B} \wedge C).$$

69

Scrivi la tavola di verità delle proposizioni

$$\bar{A} \vee B \text{ e } A \wedge \bar{B}$$

e verifica che le proposizioni sono equivalenti.

70

Dimostra, senza l'ausilio delle tavole di verità, che:

$$\bar{A} \vee \bar{B} = \bar{A} \wedge B.$$

71

Scrivi la tavola di verità delle proposizioni

$$\bar{A} \leftrightarrow B \text{ e } (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B})$$

e verifica che le proposizioni sono equivalenti.

Costruisci la tavola di verità di ciascuna delle seguenti proposizioni.

72

$$A \wedge (B \vee \bar{A}); \quad A \vee (\bar{B} \wedge A); \quad A \vee (\bar{B} \wedge \bar{A}).$$

73

$$\bar{A} \dot{\vee} B; \quad (\bar{A} \dot{\vee} B) \wedge \bar{A}; \quad (\bar{A} \wedge B) \dot{\vee} \bar{A}.$$

74

$$\bar{A} \rightarrow B \vee A; \quad (A \dot{\vee} B) \rightarrow \bar{A}; \quad (A \wedge B) \leftrightarrow (\bar{A} \dot{\vee} B).$$

Per ciascuna forma di ragionamento stabilisci se è o non è valida. In caso affermativo, scrivi se è stato applicato il *modus ponens* o il *modus tollens*.

75

Se guardi la televisione, allora non fai i compiti.
Non fai i compiti. Guardi la televisione.

76

Se l'acqua è gelata, allora la temperatura è sotto zero. L'acqua è gelata. La temperatura è sotto zero.

77

Se il trapezio è isoscele, allora i lati obliqui sono congruenti. I lati obliqui non sono congruenti. Il trapezio non è isoscele.

78

Per ognuna delle seguenti forme di ragionamento indica se è o non è valida. In caso affermativo scrivi se è stato applicato lo schema del *modus ponens* o quello del *modus tollens*.

- a) «Se studio, prendo 9».

«Non studio».

«Non prendo 9».

- b) «Se mangio troppo, ingrasso».

«Non ingrasso».

«Non mangio troppo».

- c) «Se ho sete, bevo».

«Ho sete».

«Bevo».

79

Per ciascuna delle seguenti forme di ragionamento indica se è o non è valida. In caso affermativo scrivi se è stato applicato lo schema del *modus ponens* o quello del *modus tollens*.

- a) «Se esco, vado in piscina».

«Esco».

«Vado in piscina».

- b) «Se vado in vacanza, vado in montagna».

«Non vado in montagna».

«Non vado in vacanza».

- c) «Se piove, resto a casa».

«Non piove».

«Non resto a casa».

80

Considera gli enunciati aperti:

$A(x)$: «x è numero naturale pari, minore o uguale a 30»;

$B(x)$: «x è numero naturale divisore di 30».

Scrivi l'insieme universo U e gli insiemi di verità di A , B , $A \wedge B$, e rappresentali con un diagramma di Eulero-Venn.

81

Considera gli enunciati aperti:

- $A(x)$: « x è numero naturale minore di 9»;
 $B(x)$: « x è numero naturale primo minore di 20».

Stabilisci l'insieme universo U e rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme di verità degli enunciati $A, B, A \wedge B, A \vee B$.

Trasforma i seguenti enunciati in proposizioni utilizzando i quantificatori \forall e \exists . Scrivi a fianco di ciascuna proposizione il suo valore di verità.

82

Nell'insieme $U = \mathbb{N}$ considera l'enunciato:

- $A(x)$: « x è multiplo di 5».

83

Nell'insieme $U = \{\text{animali}\}$ considera l'enunciato:

- $A(x)$: « x è un carnivoro».

84

Nell'insieme $U = \mathbb{N}$ considera l'enunciato:

- $A(x)$: « x è un quadrato perfetto».

85

Nell'insieme $U = \mathbb{Z}$ considera l'enunciato:

- $A(x)$: « x è multiplo di 7».

86

Nell'insieme $U = \{\text{parallelogrammi}\}$ considera l'enunciato:

- $B(x)$: « x è un rettangolo».

METTITI ALLA PROVA

91

L'intersezione di due insiemi A e B contiene 24 elementi, e la loro unione ne contiene 102. Sapendo che gli elementi che appartengono solamente ad A sono il doppio degli elementi che appartengono solo a B , determina quanti elementi stanno solo in A e quanti in B . [52 e 50]

92

TEST 100 delegati sono riuniti in congresso. Non tutti portano la cravatta, ma si sa che, comunque se ne scelgano due, almeno uno dei due la porta. Quanti sono i congressisti con cravatta?

- A Almeno 2, ma possono essere meno di 50.
- B Esattamente 50.
- C Più di 50, ma non si può dire esattamente quanti.
- D La situazione descritta è impossibile.
- E Nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

(Olimpiadi della matematica, Gara provinciale, 1997)

87

Scrivi sotto forma di equivalenza logica le seguenti affermazioni: «Il prodotto di due numeri razionali è negativo se e solo se uno dei due fattori è negativo» e «Il quoziente di due numeri razionali è positivo se e solo se il divisore è diverso da zero e dividendo e divisore hanno segni concordi».

88

Considera gli enunciati aperti $P(x, y)$: « $x + 2y = 16$ » e $Q(x, y)$: « $x \cdot y = 24$ », con $x, y \in \mathbb{N}$. Dopo aver scritto gli insiemi di verità dei due enunciati, determina l'insieme di verità della congiunzione di $P(x, y)$ e $Q(x, y)$. [P \wedge Q = \{(12; 2), (4; 6)\}]

89

Considera gli enunciati aperti $P(a, b)$: « a è maggiore di b » e $T(a, b)$: «Il reciproco di a è maggiore del reciproco di b », con $a, b \in \mathbb{Q}_0$ (insieme dei numeri razionali diversi da zero).

Qual è l'insieme delle coppie di razionali a, b per le quali è vero $P(a, b) \wedge T(a, b)$? Spiega la tua risposta. [\{a, b \in \mathbb{Q} \mid a > 0 \wedge b < 0\}]

90

Sono dati gli enunciati aperti:

$$P: \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1,6 \wedge x < 4,2\};$$

$$Q: \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2 \vee x > 3\}.$$

Individua l'insieme verità della loro congiunzione e stabilisci se appartengono a esso i seguenti numeri: $-1,5; 1,9; 2,13$.

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid 1,6 < x < 2 \vee 3 < x < 4,2\}; \text{ no; sì; no}$$

Nel sito: ► 18 esercizi in più

**93**

TEST Anna, Barbara, Chiara e Donatella si sono sfidate in una gara di nuoto fino alla boa. All'arrivo non ci sono stati ex aequo. Al ritorno: Anna dice «Chiara è arrivata prima di Barbara»; Barbara dice «Chiara è arrivata prima di Anna»; Chiara dice «Io sono arrivata seconda».

Sapendo che una sola di esse ha detto la verità:

- A si può dire solo chi ha vinto.
- B si può dire solo chi è arrivata seconda.
- C si può dire solo chi è arrivata terza.
- D si può dire solo chi è arrivata ultima.
- E non si può stabilire la posizione in classifica di nessuna.

(Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede, 2000)

94

Semplifica, applicando le proprietà, la seguente proposizione logica composta, poi dimostra che si tratta di una tautologia:

$$\{\bar{Q} \wedge [(P \vee \bar{P}) \wedge Q]\} \rightarrow P.$$

95

TEST Cinque persone non si trovano d'accordo sulla data.

- Carlo dice che oggi è lunedì 16 agosto.
- Franco dice che oggi è martedì 16 agosto.
- Marco dice che oggi è martedì 17 settembre.
- Roberto dice che oggi è lunedì 17 agosto.
- Tullio dice che oggi è lunedì 17 settembre.

Uno ha ragione, ma nessuno ha «completamente» torto, nel senso che ciascuno dice correttamente almeno una cosa (o il giorno della settimana, o il giorno del mese, o il mese). Chi ha ragione?

- A Carlo. D Roberto.
 B Franco. E Tullio.
 C Marco.

(Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede, 1996)

96

TEST Nel registrare le dichiarazioni dei tre imputati a un processo, il cancelliere è stato piuttosto trascurato, e dal verbale risulta quanto segue:
 Carlo: il colpevole è ...ario.
 Dario: il colpevole è Dario.
 Mario: il colpevole è ...ario.
 Sapendo che il colpevole ha mentito e almeno uno degli innocenti ha detto la verità, che cosa si può concludere?

- A Il colpevole è Dario.
 B Non si può determinare il colpevole.
 C Carlo ha accusato Dario.
 D Mario ha accusato Dario.
 E Mario ha accusato Mario.

(Olimpiadi della matematica, Gara provinciale, 2000)



TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ► 14 esercizi in più



97

Mr. Day's advisees consist of 16 students enrolled in algebra, 20 in geometry, and 12 in history. Six of this group are in both algebra and geometry, 4 are in both geometry and history, 5 are in both algebra and history, and 3 are enrolled in all three courses. Assuming that each of his advisees is enrolled in at least one of three classes, determine the number of Mr. Day's advisees.

(USA Southeast Missouri State University: Math Field Day, 2005)

[36]

98

TEST There are 29 people in a room. Of these, 11 speak French, 24 speak English, and 3 speak neither French nor English. How many people in the room speak both French and English?

- A 3 D 8
 B 4 E 9
 C 6

(USA University of South Carolina: High School Math Contest, 2001)

99

Politician A lies on Mondays, Tuesdays, and Wednesdays and tells the truth on the other days of the week. Politician B lies on Thursdays, Fridays, and Saturdays, and tells the truth on the other days of the week. One day both of them say: «Yesterday was one of my lying days». What day is it when they say this?

(USA Lehigh University: High School Math Contest, 2001)

[Thursday]

100

TEST Each of the following five statements is either true or false.

1. Statements 3 and 4 are both true.
2. Statements 4 and 5 are not both false.
3. Statement 1 is true.
4. Statement 3 is false.
5. Statements 1 and 3 are both false.

How many statements (1-5) are true?

- A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

(USA University of South Carolina: High School Math Contest, 2001)

GLOSSARY

advisees: studenti seguiti da

at least: almeno

both: entrambi

to enroll: iscriversi

false: falso

to lie-lied-lied: mentire

politician: uomo politico

statement: frase

true: vero

truth: verità

Le relazioni e le funzioni



Acqua ed energia

Le centrali idroelettriche forniscono un quarto dell'elettricità prodotta nel mondo: sfruttano la potenza dell'acqua, raccolta a monte in un bacino grazie a una diga e poi fatta precipitare a valle all'interno di grosse tubature.

Più acqua scorre all'interno delle condutture, maggiore è l'energia prodotta nell'impianto...

...di quanto si deve aumentare il diametro di una conduttura per dimezzare il tempo di svuotamento di un certo volume d'acqua?

→ La risposta a pag. 248

1. Le relazioni binarie

Sono dati gli insiemi:

$$A = \{\text{Irene, Cristina, Sara}\} \quad e \quad B = \{\text{Giovanni, Ugo, Marta}\}.$$

Il loro prodotto cartesiano è:

$$A \times B = \{(\text{Irene; Giovanni}), (\text{Irene; Ugo}), (\text{Irene; Marta}), \\ (\text{Cristina; Giovanni}), \dots, (\text{Sara; Giovanni}), \dots\}.$$

Consideriamo l'enunciato aperto « a è madre di b ». Se Irene è madre di Marta e Sara è madre di Ugo e di Giovanni, le coppie del prodotto $A \times B$ che soddisfano l'enunciato sono:

$$\{(\text{Irene; Marta}), (\text{Sara; Ugo}), (\text{Sara; Giovanni})\}.$$

Queste coppie formano un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

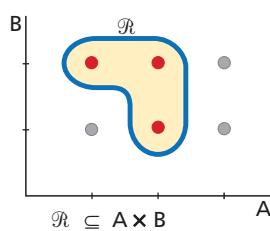
L'enunciato « a è madre di b » stabilisce una *relazione* fra gli insiemi A e B .

DEFINIZIONE

Relazione binaria

Si dice relazione binaria fra gli insiemi A e B un qualunque sottoinsieme di $A \times B$.

Per indicare la relazione « x è madre di y », sarebbe più preciso dire: « x è in relazione con y se e solo se x è madre di y ». Tuttavia, per semplicità, scriveremo le relazioni nel primo modo.



▲ Figura 1

► L'insieme \mathcal{R} è un sottoinsieme di $A \times B$.

► L'aggettivo **sagittale** deriva dal latino *sagitta* che significa «freccia».

Indicheremo con \mathcal{R} , indifferentemente, sia il sottoinsieme di $A \times B$, sia la relazione. Se a è in relazione con b , scriveremo

$$a \mathcal{R} b \quad \text{oppure} \quad (a; b) \in \mathcal{R}$$

e diremo anche che b è **immagine** di a .

ESEMPIO

Dati i due insiemi $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$, determiniamo le coppie della relazione « x è metà di y ».

L'insieme \mathcal{R} delle coppie in relazione è: $\mathcal{R} = \{(1; 2), (3; 6)\}$.

■ La rappresentazione di una relazione

Possiamo rappresentare le relazioni in quattro modi, tramite:

- elencazione;
- rappresentazione **sagittale** (o diagramma a frecce);
- tabella a doppia entrata;
- grafico cartesiano.

Sono dati i due insiemi $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ e la relazione « x è doppio di y ».

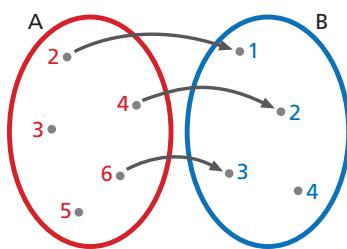
Possiamo rappresentare la relazione **per elencazione**, cioè scriviamo l'insieme delle coppie ordinate degli elementi che sono in relazione:

$$\mathcal{R} = \{(2; 1), (4; 2), (6; 3)\}.$$

La figura 2 illustra le altre tre rappresentazioni.

▼ Figura 2

RAPPRESENTAZIONE SAGITTALE



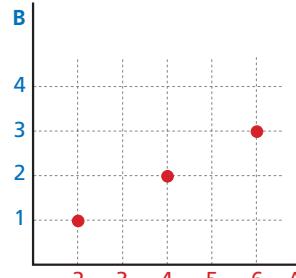
a. Nella rappresentazione sagittale ogni freccia parte dal primo elemento di una coppia della relazione e arriva al secondo.

TABELLA A DOPPIA ENTRATA

A	B	1	2	3	4
2	X				
3					
4			X		
5					
6				X	

b. Nella tabella a doppia entrata gli elementi del primo insieme vengono disposti in verticale, quelli del secondo in orizzontale. Le coppie in relazione vengono segnate con una crocetta.

GRAFICO CARTESIANO



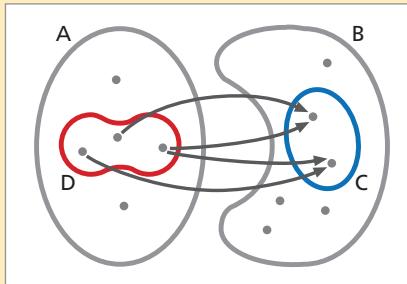
c. Nel grafico cartesiano gli elementi del primo insieme vengono disposti sulla semiretta orizzontale e quelli del secondo insieme sulla semiretta verticale.

■ Il dominio e il codominio

DEFINIZIONE

Dominio e codominio

Data una relazione definita in $A \times B$, chiamiamo **dominio** l'insieme di tutti gli elementi di A che hanno almeno una immagine in B . Chiamiamo **codominio** l'insieme di tutti gli elementi di B che sono immagini di almeno un elemento di A .



► È sempre vero che $D \subseteq A$ e $C \subseteq B$.
Il dominio D è un sottoinsieme dell'insieme di partenza; il codominio C è un sottoinsieme dell'insieme di arrivo.

ESEMPIO

Consideriamo gli insiemi

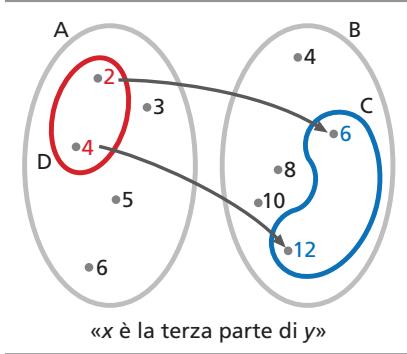
$$\begin{aligned} A &= \{2, 3, 4, 5, 6\}, \\ B &= \{4, 6, 8, 10, 12\}, \end{aligned}$$

e la relazione

« x è la terza parte di y ».

Utilizziamo la rappresentazione saggittale (figura 3).

Il dominio è $D = \{2, 4\}$, il codominio è $C = \{6, 12\}$.



◀ Figura 3 Da ciascun elemento del dominio parte almeno una freccia; a ciascun elemento del codominio arriva almeno una freccia.

■ La relazione inversa

Data una relazione tra gli insiemi A e B , ne esiste un'altra tra B e A che si può ricavare dalla prima invertendo l'ordine in tutte le coppie e considerando le nuove coppie così ottenute.

ESEMPIO

Consideriamo i due insiemi

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ e } B = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

e la relazione « a è quadrato di b » (figura 4a).

L'insieme \mathcal{R} delle coppie in relazione è:

$$\mathcal{R} = \{(1; 1), (4; 2), (9; 3)\}.$$

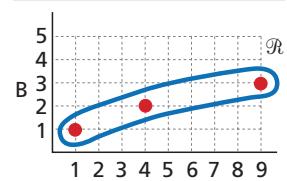
Se invertiamo gli elementi di ogni coppia, otteniamo il sottoinsieme \mathcal{R}' di $B \times A$ dato da:

$$\mathcal{R}' = \{(1; 1), (2; 4), (3; 9)\}.$$

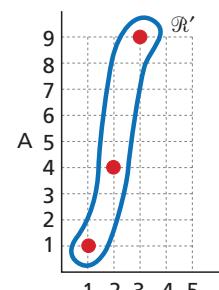
Nell'insieme \mathcal{R}' gli elementi delle coppie sono legati dalla relazione:

« b è radice quadrata di a » (figura 4b).

Questa è la relazione inversa della relazione di partenza.



a. « a è quadrato di b ».



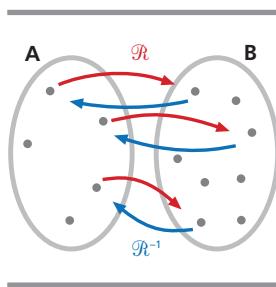
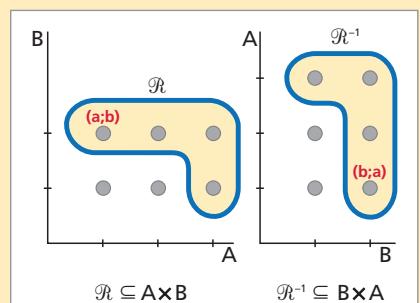
b. « b è radice quadrata di a ».

◀ Figura 4

DEFINIZIONE

Relazione inversa

Data una relazione \mathcal{R} definita in $A \times B$, la sua relazione inversa è il sottoinsieme di $B \times A$ formato dalle coppie $(b; a)$ tali che $a \mathcal{R} b$.



▲ Figura 5

Indichiamo con \mathcal{R}^{-1} la relazione inversa di \mathcal{R} .

Per definizione, scriviamo:

$$b \mathcal{R}^{-1} a \text{ se e solo se } a \mathcal{R} b.$$

Nella rappresentazione sagittale, per ottenere la relazione inversa, basta tracciare una freccia in senso inverso per ogni freccia della relazione iniziale.

2. Le relazioni definite in un insieme e le loro proprietà

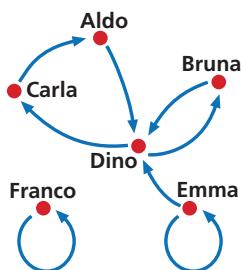
Se in una relazione l'insieme di partenza e l'insieme di arrivo coincidono con uno stesso insieme A , allora la relazione è definita in $A \times A$. In tal caso diremo per semplicità che la relazione è *definita in A*.

ESEMPIO Se consideriamo l'insieme

$$A = \{\text{Carla, Aldo, Franco, Dino, Bruna, Emma}\},$$

in $A \times A$ può essere definita la relazione:

«Durante un pranzo x versa da bere a y ».



▲ Figura 6 Il grafo descrive la relazione «Durante un pranzo x versa da bere a y . Chi si versa da bere da solo?»

Il grafo

Abbiamo, nel caso di una relazione definita in un insieme, un ulteriore modo di rappresentare la relazione. Disegniamo dei punti, detti **nodi**, che rappresentano gli elementi dell'insieme A una volta sola e senza racchiuderli in una linea chiusa (figura 6). Disegniamo poi una freccia per ogni coppia di elementi in relazione, che colleghi il primo elemento con il secondo. Una rappresentazione di questo tipo si chiama **grafo**.

Se un elemento è in relazione con se stesso, si disegna un *cappio* intorno al nodo che lo rappresenta.

Le relazioni definite in un insieme possono godere di varie proprietà.

■ La proprietà riflessiva

In un qualunque insieme di persone, la relazione

« a ha la stessa età di b »

ha una proprietà particolare: ogni persona ha la stessa età di se stessa. Quindi ogni elemento è in relazione con se stesso.

DEFINIZIONE

Relazione riflessiva

Una relazione in un insieme A è riflessiva quando **ogni** elemento di A è in relazione con se stesso:

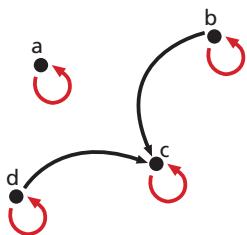
$$\forall a \in A, a \mathcal{R} a.$$

ESEMPIO In un insieme di persone la relazione « a ha la stessa statura di b » è riflessiva, mentre la relazione « a è più basso di b » **non** è riflessiva.

La figura 7 illustra le rappresentazioni grafiche di una relazione riflessiva.

▼ Figura 7

GRAFO



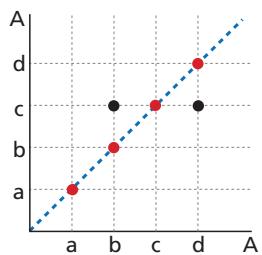
Ogni elemento è **collegato** con se stesso.

TABELLA A DOPPIA ENTRATA

A\A	a	b	c	d
a	X			
b		X		
c			X	
d				X

Tutte le caselle che si trovano sulla diagonale sono occupate.

GRAFICO CARTESIANO



Tutti i punti della bisettrice del quadrante sono evidenziati.

■ La proprietà simmetrica

Nell'insieme degli studenti di una classe, consideriamo la relazione:

« x è compagno di banco di y ».

Comunque si scelgano due studenti a e b , se « a è compagno di banco di b », siamo sicuri che anche « b è compagno di banco di a ».

Questo non è sempre vero per tutte le relazioni. Per esempio, questa proprietà **non** vale per la relazione: « a siede davanti a b ».

DEFINIZIONE

Relazione simmetrica

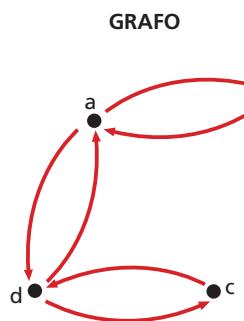
Una relazione in un insieme A è simmetrica quando per ogni elemento a che è in relazione con b , anche b è in relazione con a :

$$\text{se } a \mathcal{R} b, \text{ allora } b \mathcal{R} a.$$

ESEMPIO Nell'insieme delle rette di un piano, la relazione « a è perpendicolare a b » è simmetrica perché, se una retta è perpendicolare a una seconda retta, allora la seconda è perpendicolare alla prima.

▼ Figura 8

La figura 8 illustra le rappresentazioni grafiche di una relazione simmetrica.



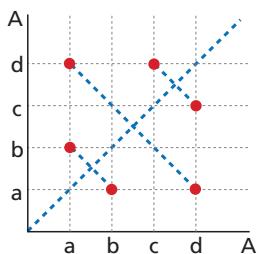
Per ogni freccia che collega un elemento con un altro c'è anche la freccia che collega il secondo al primo.

TABELLA A DOPPIA ENTRATA

A	a	b	c	d
a		X		X
b	X			
c				X
d	X		X	

Per ogni casella occupata è occupata anche la casella simmetrica rispetto alla diagonale.

GRAFICO CARTESIANO



Per ogni punto della relazione compare anche il punto simmetrico rispetto alla bisettrice.

■ La proprietà transitiva

Stiamo ordinando per altezza un gruppo di bambini e abbiamo queste due informazioni: «Mario è più alto di Lucia»; «Lucia è più alta di Barbara».

Allora, anche senza confrontare direttamente Mario e Barbara, possiamo anche affermare: «Mario è più alto di Barbara».

Una relazione con queste caratteristiche gode della *proprietà transitiva*.

■ DEFINIZIONE

Relazione transitiva

Una relazione in un insieme A è transitiva quando, per tutti gli elementi a, b e c di A , se a è in relazione con b e b è in relazione con c , anche a è in relazione con c :

se $a \mathcal{R} b$ e $b \mathcal{R} c$, allora $a \mathcal{R} c$.

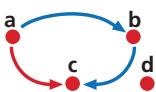
ESEMPIO In un qualunque insieme di persone la relazione « a è sorella di b » è transitiva.

Ci sono relazioni che non godono della proprietà transitiva: per esempio, la relazione « a è madre di b » **non** è transitiva. Infatti se Sara è madre di Annalisa e Annalisa è madre di Giulia, Sara è la nonna di Giulia, non la madre.

La rappresentazione grafica di una relazione transitiva si può fare in modo efficace solo con un grafo.

Se ci sono due frecce che collegano tre elementi, il primo con il secondo e il secondo con il terzo, deve esserci anche la freccia che collega «direttamente» il primo elemento con il terzo.

▼ Figura 9 La relazione rappresentata è transitiva.



Le tabelle a doppia entrata e i grafici cartesiani non forniscono informazioni per capire immediatamente se una relazione è transitiva.

■ La proprietà antiriflessiva

Consideriamo la relazione

« a è più giovane di b »,

definita in un insieme di persone. Possiamo affermare che nessuna persona può essere in relazione con se stessa.

DEFINIZIONE

Relazione antiriflessiva

Una relazione in un insieme A è antiriflessiva quando **nessun** elemento di A è in relazione con se stesso:

$$\forall a \in A, a \not\sim a.$$

ESEMPIO In un qualunque insieme di persone, la relazione

« a è nonno di b »

è antiriflessiva, perché nessuno è nonno di se stesso.

Osservazione. Non è detto che una relazione non antiriflessiva sia riflessiva o viceversa.

■ La proprietà antisimmetrica

Abbiamo visto che la relazione

« a è più giovane di b »

è antiriflessiva. Essa gode anche di un'altra proprietà: se una persona è più giovane di una seconda, non è mai vero il contrario, cioè che la seconda è più giovane della prima.

DEFINIZIONE

Relazione antisimmetrica

Una relazione in un insieme A è antisimmetrica quando, per ogni elemento a che è in relazione con b (b diverso da a), non è mai vero che b è in relazione con a :

$$\text{se } a \sim b \text{ con } a \neq b, \text{ allora } b \not\sim a.$$

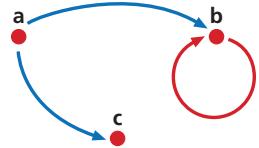
ESEMPIO Nell'insieme dei nomi degli studenti di una classe, la relazione

« a precede b nell'elenco alfabetico del registro»

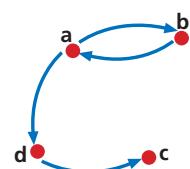
è antisimmetrica.

Osservazione. Non è detto che una relazione non antisimmetrica sia simmetrica o viceversa.

Per esempio, la relazione rappresentata nella figura 11 non è antisimmetrica e nemmeno simmetrica.



▲ Figura 10 Relazione non riflessiva e non antiriflessiva.



▲ Figura 11 Relazione non simmetrica e non antisimmetrica.

3. Le relazioni di equivalenza

DEFINIZIONE

Relazione di equivalenza

Una relazione in un insieme è una relazione di equivalenza quando è riflessiva, simmetrica e transitiva.

- La relazione « x è perpendicolare a y » non è riflessiva né transitiva, ma solo simmetrica: quindi non è una relazione di equivalenza.

ESEMPIO Nell'insieme delle rette di un piano, la relazione « x è parallela a y » è una relazione di equivalenza perché è riflessiva (due rette sono parallele anche quando coincidono), è simmetrica ed è transitiva.

Alcune relazioni di equivalenza che possono essere definite in un insieme di persone sono:

- « a è nato nello stesso anno di b »;
- « x abita nella stessa via di y »;
- « a è alto come b ».

Mediante una relazione di equivalenza si può ottenere una delle possibili partizioni di un insieme.

Figura 12 Immagina di voler comunicare a una persona che non parla la tua lingua il concetto di «blu». Puoi ripartire un insieme di oggetti come nella figura. A questo punto, se prendi in mano un qualunque oggetto blu, il tuo interlocutore capisce che non vuoi riferirti a quell'oggetto particolare, ma alla proprietà caratteristica del sottoinsieme. Entrambi non vedete più un insieme di oggetti, ma un insieme di tre sottoinsiemi, ognuno collegato a un colore.

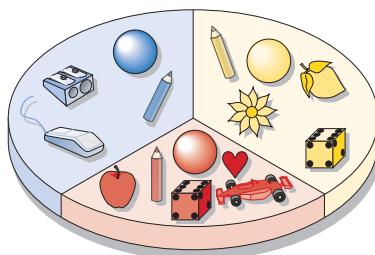
- Nell'esempio, il sottoinsieme degli oggetti blu è la «classe di equivalenza degli oggetti blu» e l'insieme quoziante è formato da tre elementi: il sottoinsieme degli oggetti rossi, quello degli oggetti gialli e quello degli oggetti blu.

ESEMPIO Consideriamo un insieme A di oggetti di colore rosso, giallo e blu (figura 12), e la relazione:

« a è dello stesso colore di b ».

Questa è una relazione di equivalenza, perché è riflessiva, simmetrica e transitiva, e permette di suddividere gli oggetti di A in base al colore.

I sottoinsiemi ottenuti non sono vuoti, sono fra loro disgiunti e la loro unione coincide con A . In ogni sottoinsieme ci sono oggetti equivalenti, ossia tutti rossi o tutti gialli o tutti blu. Ogni oggetto appartiene a un sottoinsieme e a uno soltanto.



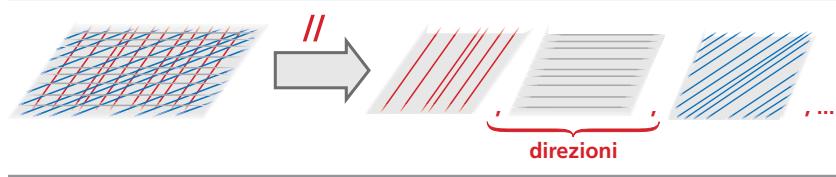
Ognuno dei sottoinsiemi che costituiscono la partizione si chiama **classe di equivalenza** e si può prendere come rappresentante di una classe uno qualsiasi dei suoi elementi.

Ogni relazione di equivalenza, mediante la partizione in classi di equivalenza, permette di **classificare** gli oggetti in base a una loro proprietà.

L'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza si chiama **insieme quoziante**. Dunque l'insieme quoziante è un insieme di sottoinsiemi.

Il passaggio dall'insieme iniziale all'insieme quoziente avviene attraverso un procedimento di «astrazione». Vengono «dimenticate» le caratteristiche particolari di ciascun oggetto per considerare *soltanto* la proprietà individuata dalla relazione di equivalenza: in questo caso il «colore».

ESEMPIO La relazione di parallelismo fra rette del piano permette di suddividere le rette in classi di equivalenza. In geometria si chiama «direzione» ciascuna classe di equivalenza.



◀ Figura 13 Tutte le rette di un piano possono essere suddivise in classi di equivalenza mediante la relazione « x è parallela a y ». Ogni classe di equivalenza si chiama «direzione». L'insieme quoziente è l'insieme delle direzioni ed è un insieme con infiniti elementi.

4. Le relazioni d'ordine

■ Ordine largo e ordine stretto

■ DEFINIZIONE

Relazione di ordine largo

Una relazione in un insieme è di ordine largo se è **riflessiva, antisimmetrica e transitiva**.

ESEMPIO Nell'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali, la relazione « x è multiplo di y » è di ordine largo. Infatti è:

- riflessiva (ogni numero è multiplo di se stesso secondo il fattore 1);
- antisimmetrica (presi due numeri diversi x e y , se x è multiplo di y , allora y non può essere multiplo di x);
- transitiva (se x è multiplo di y e y è multiplo di z , allora x è multiplo di z ; per esempio, se $x = 2y$ e $y = 3z$, $x = 2 \cdot 3z = 6z$).

■ DEFINIZIONE

Relazione di ordine stretto

Una relazione in un insieme è di ordine stretto se è **antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva**.

► L'ordine è largo o stretto a seconda che valga la proprietà riflessiva o quella antiriflessiva.

ESEMPIO Nell'insieme degli studenti di una classe, la relazione

« a corre più veloce di b »

è una relazione d'ordine stretto. Infatti è:

- antiriflessiva (ogni studente non può correre più veloce di se stesso);
- antisimmetrica (se uno studente corre più veloce di un altro, non può succedere che quest'ultimo corra più veloce del primo);
- transitiva (se a corre più veloce di b e b corre più veloce di c , allora a corre più veloce anche di c).

► Nell'insieme \mathbb{N} la relazione « $a < b$ » è di ordine totale, perché è possibile confrontare tutti gli elementi tra loro.

2 3 4 9 36

La relazione in \mathbb{N} « a è divisore di b » è una relazione d'ordine parziale, perché, per esempio, 2 non è confrontabile con 9.



■ Ordine totale e ordine parziale

Possiamo anche distinguere le relazioni a seconda della loro capacità di creare un ordine su un intero insieme o solo su una sua parte.

■ DEFINIZIONE

Relazione d'ordine totale

Una relazione d'ordine (largo o stretto) in un insieme è totale quando, **comunque scelti** due elementi distinti a e b nell'insieme, risulta sempre che a è in relazione con b oppure che b è in relazione con a .

Una relazione d'ordine che non è di ordine totale si chiama relazione d'**ordine parziale**.

5. Le funzioni

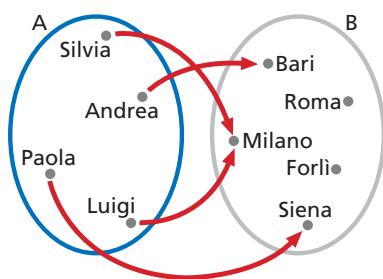
Consideriamo l'insieme dei nomi di alcuni amici che si incontrano in vacanza, $A = \{\text{Silvia, Paola, Luigi, Andrea}\}$, e l'insieme dei nomi di alcune città, $B = \{\text{Bari, Forlì, Milano, Roma, Siena}\}$.

Rappresentiamo la relazione

« x abita a y »

nella figura 14.

Tale relazione gode di una particolarità: a ogni ragazza o ragazzo è associata una e una sola città. Una relazione di questo tipo si chiama **funzione**.



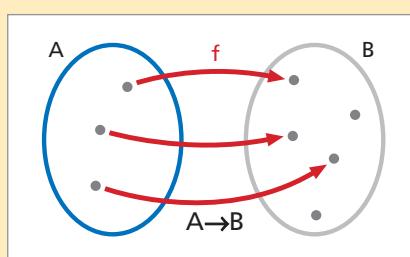
► Figura 14 Da ogni elemento del primo insieme parte una e una sola freccia.

► Poiché una funzione fa corrispondere a ogni elemento di A un *unico* elemento di B , essa viene anche chiamata **corrispondenza univoca**.

■ DEFINIZIONE

Funzione

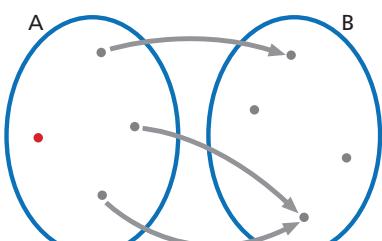
Una relazione fra due insiemi A e B è una funzione se a **ogni** elemento di A associa **uno e un solo** elemento di B .



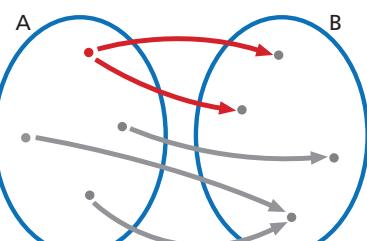
L'espressione «*uno e un solo*» della definizione sottolinea che devono essere soddisfatte due condizioni:

- per **ogni** elemento di A esiste un elemento di B associato;
- tale elemento è **unico**.

Se anche soltanto una di queste due condizioni non è verificata, la relazione non è una funzione (figura 15).

ESEMPIO

a. La relazione **non** è una funzione, perché c'è un elemento di A che non ha corrispondente in B .



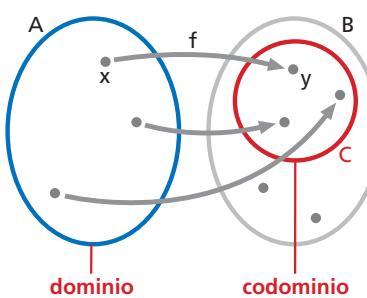
b. La relazione **non** è una funzione, perché c'è un elemento di A a cui sono associati due elementi di B .

Per indicare una funzione si usa una lettera minuscola (spesso la lettera f):

$f: A \rightarrow B$, che si legge « f è una funzione da A a B ».

Si può utilizzare una notazione simile anche per indicare che a un elemento x di A corrisponde un elemento y di B :

$f: x \mapsto y$; y è detto l'**immagine** di x mediante la funzione f .



L'insieme A è detto **dominio** della funzione, il sottoinsieme di B formato dalle immagini degli elementi di A è detto **codominio**. Indichiamo il codominio con la lettera C . Vale la relazione $C \subseteq B$.

Per indicare una funzione si utilizza anche la scrittura:

$y = f(x)$,
che si legge: « y uguale a f di x ».

◀ Figura 15 Esempi di relazioni che **non** sono funzioni.

▶ Si dice che A è l'**insieme di partenza** della funzione e B l'**insieme di arrivo**.

▶ x è chiamato **controimmagine** di y .

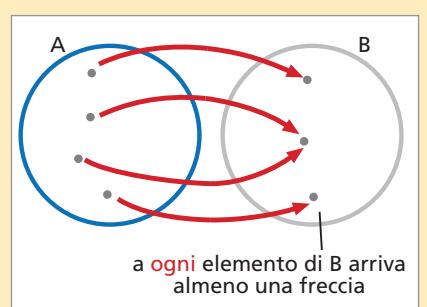
◀ Figura 16

■ Le funzioni suriettive, iniettive e biiettive

DEFINIZIONE

Funzione suriettiva

Una funzione da A a B si dice **suriettiva** quando ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A .

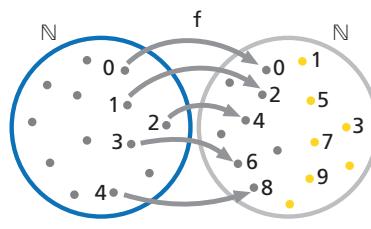


▶ In simboli:
 f è suriettiva se
 $\forall y \in B \exists x \in A$
tale che $f(x) = y$.

In una funzione suriettiva il codominio coincide con l'insieme di arrivo.

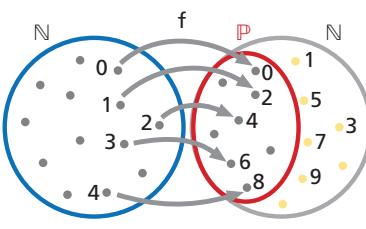
Il fatto che una funzione sia suriettiva o meno dipende da come viene scelto l'insieme di arrivo. È sempre possibile, infatti, rendere una funzione suriettiva restringendo l'insieme di arrivo all'insieme delle immagini (cioè al codominio).

- Figura 17 Rappresentazione della funzione f che a x associa $2x$.
- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ non è suriettiva.
 - $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$ è suriettiva.

ESEMPIO

f: «y è il doppio di x»

- a. La funzione f non è suriettiva, perché 1, 3, 5 ecc. non sono immagini di alcun elemento del dominio \mathbb{N} .



f: «y è il doppio di x»

- b. Restringendo l'insieme di arrivo al codominio \mathbb{P} , insieme dei naturali pari, la funzione risulta suriettiva.

► Se una funzione è iniettiva, non accade mai che a due elementi di A corrisponda uno stesso elemento di B .

► In simboli:
 f è iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.



f: «x ha come madre y»

► Figura 18 La funzione f non è iniettiva, perché Ugo e Sara hanno la stessa madre.

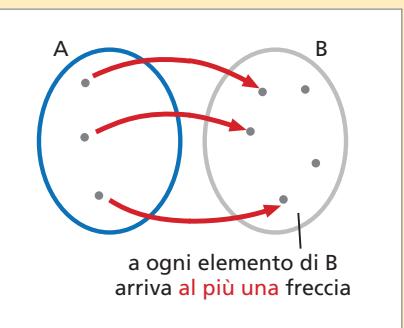
► Una funzione biiettiva viene anche chiamata **biiezzerone** o **corrispondenza biunivoca** fra A e B . In simboli:

 $f: A \leftrightarrow B$.

In una funzione biiettiva c'è una corrispondenza «uno a uno» fra gli elementi di A e quelli di B . Ogni elemento di B è l'immagine di uno e un solo elemento di A e viceversa.

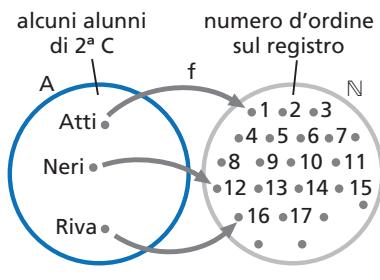
DEFINIZIONE**Funzione iniettiva**

Una funzione da A a B si dice iniettiva se ogni elemento di B è immagine al più di un elemento di A .

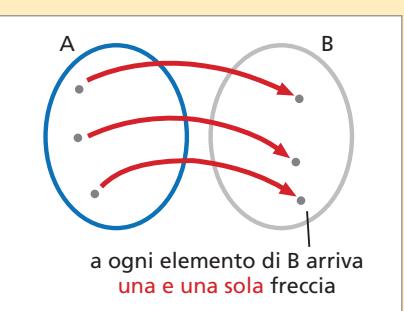
a ogni elemento di B
arriva al più una freccia

► ESEMPIO Consideriamo l'insieme di alcuni alunni di una classe e l'insieme dei numeri naturali. La funzione che associa a ogni alunno il suo numero d'ordine del registro è iniettiva. Infatti due alunni diversi non possono avere lo stesso numero. La funzione f è iniettiva perché ad ogni alunno è associato uno e un solo numero d'ordine.

► Figura 19

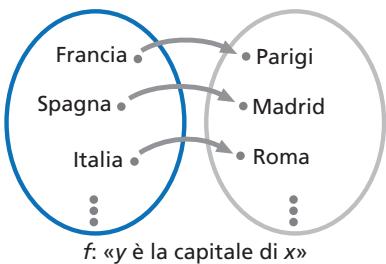
f: «x ha come numero
d'ordine sul registro y»**DEFINIZIONE****Funzione biiettiva (o biunivoca)**

Una funzione da A a B è biiettiva quando è sia iniettiva sia suriettiva.

a ogni elemento di B arriva
una e una sola freccia

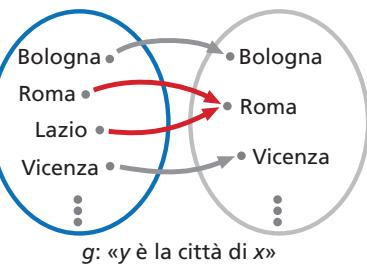
ESEMPIO

$$A = \{\text{Paesi europei}\} \quad B = \{\text{capitali}\}$$



a. La funzione f è biiettiva, perché ogni Paese europeo ha una sola capitale.

$$A = \{\text{squadre di calcio}\} \quad B = \{\text{città che hanno una squadra di calcio}\}$$



b. g non è biiettiva, perché non è iniettiva. La Roma e la Lazio sono entrambe squadre di Roma.

◀ Figura 20

a) Funzione biiettiva.

b) Funzione non biiettiva.

La funzione inversa

Una funzione è un particolare tipo di relazione e sappiamo già che per ogni relazione è possibile definire la relazione **inversa**.

Ci chiediamo: la relazione inversa di una funzione è ancora una funzione? La risposta è affermativa solo se la funzione è biiettiva.

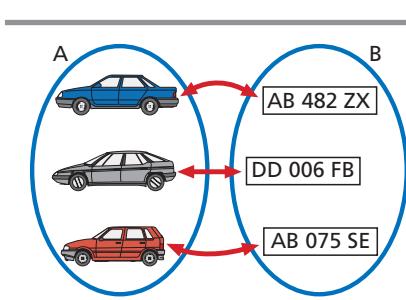
► Nella rappresentazione sagittale, la relazione inversa si ottiene rovescianando il verso di percorrenza delle frecce.

ESEMPIO Consideriamo l'insieme A delle automobili e l'insieme B delle relative targhe.

La funzione $f: A \rightarrow B$ associa a ogni automobile la sua targa.

Tale funzione è biiettiva, perché stabilisce una corrispondenza «uno a uno» fra automobili e targhe.

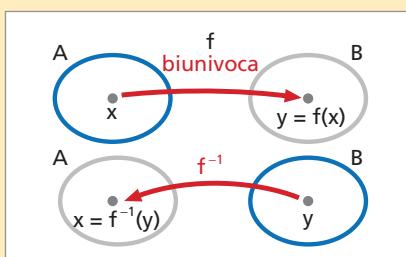
La relazione inversa, da B ad A , è tale che ogni elemento di A è immagine di un elemento di B (poiché f è suriettiva) e uno solo (poiché f è iniettiva), quindi essa è una funzione.



◀ Figura 21 A ogni automobile corrisponde un solo numero di targa e, viceversa, a ogni numero di targa corrisponde una sola automobile.

DEFINIZIONE**Funzione inversa**

Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione biiettiva. La funzione inversa di f è la funzione biiettiva $f^{-1}: B \rightarrow A$, che a ogni y in B associa x in A tale che $y = f(x)$.

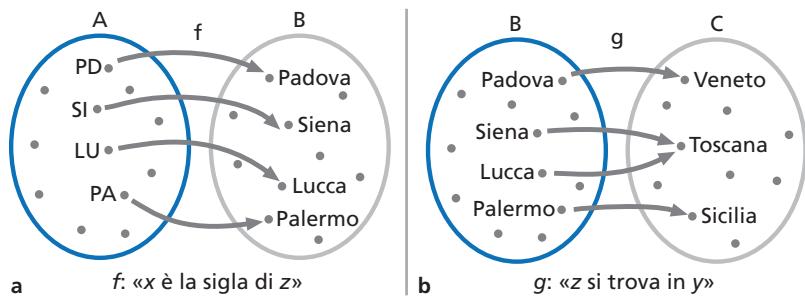


► Nota che f^{-1} indica la funzione inversa di f e non $\frac{1}{f}$!

■ La composizione di due funzioni

Consideriamo l'insieme A delle sigle dei capoluoghi di provincia, l'insieme B delle province e l'insieme C delle regioni e consideriamo la funzione $f: A \rightarrow B$ che associa a ogni sigla la relativa provincia e la funzione $g: B \rightarrow C$ che associa a ogni provincia la regione di appartenenza (figura 22).

► **Figura 22** L'insieme B è l'insieme di arrivo della funzione f (figura a) e al tempo stesso è il dominio della funzione g (figura b).



Se applichiamo una dopo l'altra le due funzioni f e g , otteniamo la funzione da A a C che associa a una sigla x la regione y corrispondente. La funzione ottenuta si dice funzione composta dalle due funzioni f e g .

Date due funzioni,

$$f: A \rightarrow B \quad \text{e} \quad g: B \rightarrow C,$$

comporre le due funzioni significa considerare una terza funzione, detta **funzione composta** mediante f e g , che associa a ogni elemento di A un elemento di C nel seguente modo:

- all'elemento $x \in A$ corrisponde, mediante f , l'elemento $f(x) \in B$;
- all'elemento $f(x) \in B$ corrisponde, mediante g , l'elemento $g(f(x)) \in C$.

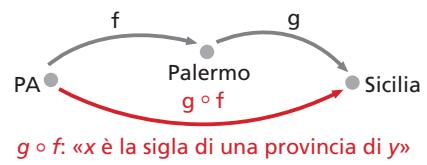
La funzione composta viene indicata con la scrittura $g \circ f$, che si legge « g composto f »:

$$g \circ f: A \rightarrow C.$$

Tuttavia, spesso scriveremo

$$y = g(f(x)),$$

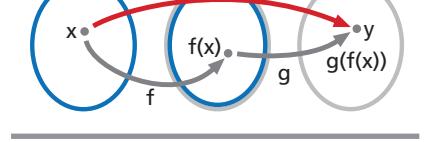
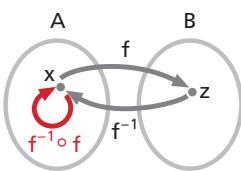
che si legge « y uguale a g di f di x ».



▲ Figura 23

► Se si compone una funzione $f: A \rightarrow B$ con la sua inversa $f^{-1}: B \rightarrow A$ si ottiene la funzione **identità**, che associa a ogni elemento di un insieme se stesso. In simboli si scrive:

$$f^{-1} \circ f: A \rightarrow A; \\ f^{-1} \circ f: x \mapsto x.$$



▲ Figura 24

6. Le funzioni numeriche

Finora abbiamo parlato di funzioni in generale, considerando due insiemi generici A e B . Quando i due insiemi A e B sono numerici, allora le funzioni vengono dette **funzioni numeriche**.

ESEMPIO Consideriamo l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali e la funzione:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 3x - 2.$$

La funzione f è descritta da una legge, $y = 3x - 2$, che permette di associare a ogni numero reale x la relativa immagine y .

Per esempio, per $x = 5$ il valore di y è 13, quindi l'immagine di 5 è 13.

Il valore che assume y dipende da quello attribuito a x . Per questo motivo y prende il nome di **variabile dipendente** e x di **variabile indipendente**.

▶ Spesso una funzione numerica è esprimibile mediante una legge che contiene operazioni matematiche. Tale legge viene anche chiamata **espressione analitica** della funzione.

■ Il dominio naturale di una funzione

Se la funzione f viene assegnata senza specificare il dominio e il codominio, si assume per convenzione che:

- il **dominio** (D) è l'insieme di tutti i numeri reali per i quali le operazioni indicate nella legge che descrive la funzione si possono eseguire. In questo caso, il dominio si chiama **dominio naturale** o **campo di esistenza**;
- il **codominio** è l'insieme \mathbb{R} o un suo sottoinsieme.

▶ Il dominio può anche essere chiamato *insieme di definizione*.

ESEMPIO Consideriamo la funzione definita dalla legge:

$$y = \frac{x-2}{x}.$$

Se sostituissimo a x il valore 0, la frazione perde di significato; diciamo che la funzione **non è definita** per $x = 0$ e scriviamo $D: x \neq 0$.

▶ Si può anche scrivere $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

■ La tabella e il grafico

Poiché una funzione è una relazione, possiamo rappresentarla con un grafico cartesiano. In particolare vediamo più in dettaglio come si costruisce il *grafico cartesiano di una funzione numerica* quando è nota la sua espressione analitica $y = f(x)$.

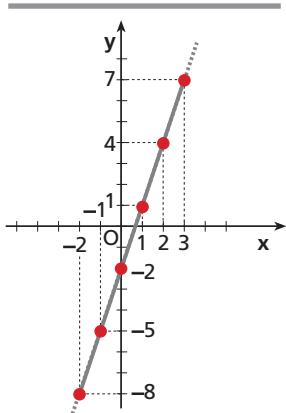
Rappresentiamo, per esempio, la funzione $y = 3x - 2$. Innanzitutto compiliamo una tabella che riporti alcuni valori di x e i corrispondenti valori di y . Ogni riga della tabella è formata da un numero x del dominio e dal corrispondente valore y del codominio.

Disegniamo poi due rette perpendicolari (una orizzontale e una verticale), che chiamiamo **assi**. Sugli assi fissiamo un'unità di misura e un verso di percorrenza, in modo da poter far corrispondere su ciascuna retta a ogni numero reale un punto di tale retta.

L'asse orizzontale viene detto **asse delle x** o **asse delle ascisse**, l'asse verticale **asse delle y** o **asse delle ordinate**.

x	y
-2	-8
-1	-5
0	-2
1	1
2	4
3	7
...	...

$y = 3 \cdot 3 - 2 = 7$



▲ Figura 25 Rappresentiamo tutte le coppie della tabella e congiungiamo i punti ottenuti.

Rappresentiamo la prima coppia della tabella ($x = -2, y = -8$). Sulla retta orizzontale consideriamo il punto corrispondente a -2 , sulla retta verticale quello corrispondente a -8 .

Mandiamo ora le parallele agli assi: esse si intersecano in un punto del piano che facciamo corrispondere alla coppia $(-2; -8)$. Diciamo che il punto ha **coordinate cartesiane** $(-2; -8)$. Si dice che -2 è l'**ascissa** del punto, -8 è l'**ordinata**.

Ripetendo questo procedimento per ogni coppia di numeri reali, viene creata una corrispondenza biunivoca fra coppie di numeri e punti del piano. In particolare, alla coppia $(0; 0)$ corrisponde il punto di intersezione degli assi, che è chiamato **origine** e indicato con O .

Un piano su cui si introduca un sistema di coordinate cartesiane viene detto **piano cartesiano**.

Ogni riga della tabella ricavata dalla funzione è una coppia di numeri $(x; y)$ che rappresenta così un certo punto del piano cartesiano, cioè un punto del **grafico** della funzione (figura 25).

Il **grafico** di una funzione f è l'insieme di tutte le coppie $(x; y)$ del piano tali che x è un numero reale nel dominio di f e $y = f(x)$ (cioè y si calcola sostituendo il valore di x nell'espressione di f).



PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Alberi in più, alberi in meno



Nel sito: ► Scheda di lavoro

Un impresario ha acquistato una piantagione di 5400 alberi da carta. Decide di tagliare, alla fine di ogni anno, il 30% degli alberi presenti per destinarli alla produzione di carta. Inoltre, per ripopolare la piantagione, stabilisce di piantare dopo ogni taglio 810 nuovi alberi. Nel tempo, gli alberi aumentano o diminuiscono?

MARCELLO: «Se ogni anno tagliano il 30% degli alberi, vuol dire che ne levano sempre la stessa quantità».

ALICE: «A me non sembra: tagliano il 30% di una quantità che cambia...».

► Rappresenta il numero degli alberi in funzione degli anni, con una tabella e con un grafico.

■ La composizione di due funzioni numeriche

Consideriamo le funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} :

$$f: x \mapsto x + 3 \quad \text{e} \quad g: x \mapsto x^2.$$

La funzione f associa a un generico numero x di \mathbb{R} il numero $x + 3$. Per esempio, a 2 associa $2 + 3 = 5$.

Se a questo numero applichiamo la funzione g , otteniamo $(x + 3)^2$.
Nel nostro esempio:

$$(2 + 3)^2 = (5)^2 = 25.$$

In questo modo, applicando prima f e poi g , abbiamo ottenuto la funzione composta $g \circ f$:

$$x \xrightarrow{f} (x + 3) \xrightarrow{g} (x + 3)^2, \quad g \circ f: x \mapsto (x + 3)^2.$$

Se invece applichiamo prima g e poi f , otteniamo una funzione diversa dalla precedente:

$$x \xrightarrow{g} x^2 \xrightarrow{f} x^2 + 3, \quad f \circ g: x \mapsto x^2 + 3.$$

La composizione di due funzioni non è commutativa, cioè, in generale,

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

7. Particolari funzioni numeriche

■ La proporzionalità diretta

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla legge $y = 2x$.

Costruiamo la tabella della funzione e osserviamo che:

- se x raddoppia anche y raddoppia, se x triplica anche y diventa il triplo ecc.;
- se si esclude la coppia $(0; 0)$, per ogni coppia di punti, $(1; 2)$, $(2; 4)$, $(3; 6)$ ecc., il rapporto $\frac{y}{x}$ è sempre uguale a 2.

■ DEFINIZIONE

Proporzionalità diretta

Una funzione si dice di proporzionalità diretta se può essere scritta nella forma $y = kx$, con k costante reale ($k \neq 0$).

Le variabili x e y legate da una funzione di proporzionalità diretta si dicono **direttamente proporzionali**.

Scrivendo la funzione $y = kx$ nella forma

$$\frac{y}{x} = k,$$

possiamo anche affermare che

due variabili direttamente proporzionali hanno **rapporto costante**.

Il grafico di una funzione di proporzionalità diretta è sempre rappresentato da una retta passante per l'origine degli assi $(0; 0)$.

- Possiamo anche scrivere:

$$\begin{aligned} y &= f(x) = x + 3, \\ y &= g(x) = x^2, \\ y &= g(f(x)) = (x + 3)^2. \end{aligned}$$

- Possiamo anche scrivere:

$$y = f(g(x)) = x^2 + 3.$$

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
...	...

- È preferibile la scrittura $y = kx$ della funzione, perché la forma $\frac{y}{x} = k$ perde significato quando $x = 0$.

► La proprietà del grafico che abbiamo evidenziato ci dà un buon criterio per stabilire se una funzione è di proporzionalità diretta o meno.

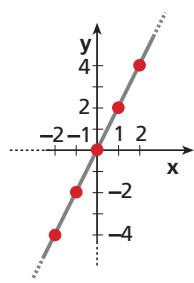
► Figura 26

x	y
-6	-5
-3	-10
-2	-15
-1	-30
-2	15
-3	10
-6	5
...	...

ESEMPIO

$y = 2x$

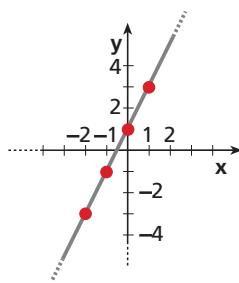
x	y
0	0
1	2
-1	-2
2	4
-2	-4
...	...



a. $y = 2x$ è una funzione di proporzionalità diretta. Infatti la retta passa per $(0; 0)$.

$y = 2x + 1$

x	y
0	1
1	3
-1	-1
-2	-3
...	...



b. Anche la funzione $y = 2x + 1$ è rappresentata da una retta, tuttavia **non** è di proporzionalità diretta, infatti la retta non passa per $(0; 0)$.

■ La proporzionalità inversa

Studiamo mediante una tabella la funzione $y = \frac{30}{x}$, $D: x \neq 0$.
Osserviamo che:

- se leggiamo la tabella in verticale, quando x raddoppia y diventa metà, quando x triplica y diventa un terzo e così via;
- se leggiamo la tabella in orizzontale, per ogni coppia di punti, per esempio $(1; 30)$, $(2; 15)$, $(3; 10)$ ecc., il prodotto $x \cdot y$ è sempre uguale a 30.

■ DEFINIZIONE**Proporzionalità inversa**

Una funzione si dice di proporzionalità inversa se può essere scritta nella forma $y = \frac{k}{x}$, con k costante reale ($k \neq 0$).

Le variabili legate da una funzione di proporzionalità inversa si dicono **inversamente proporzionali**.

Scrivendo la funzione $y = \frac{k}{x}$ nella forma

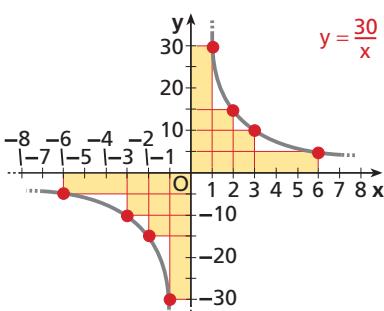
$$x \cdot y = k,$$

possiamo anche affermare che

due variabili inversamente proporzionali hanno **prodotto costante**.

Il grafico di una funzione di proporzionalità inversa è rappresentato da una particolare curva, detta **iperbole equilatera**.

Ogni punto $(x; y)$ di questa curva rappresenta il vertice di un rettangolo che ha il vertice opposto nell'origine, base x sull'asse delle ascisse e altezza y sull'asse delle ordinate.



► Tutti i rettangoli evidenziati nel grafico hanno area che ha la stessa misura k , infatti $x \cdot y = k$.

► Figura 27 Il grafico della funzione $y = \frac{30}{x}$ è un'iperbole equilatera. La misura dell'area di ogni rettangolo è 30.

■ La funzione lineare

Studiamo mediante una tabella la funzione $y = 3x + 2$.

Presi due punti, per esempio $(1; 5)$, $(2; 8)$, se calcoliamo la differenza delle loro ordinate e quella delle loro ascisse, troviamo rispettivamente i valori $5 - 8 = -3$ e $1 - 2 = -1$, il cui rapporto vale 3; analogamente, per i punti $(-4; -10)$, $(-2; -4)$, otteniamo -6 e -2 , il cui rapporto è ancora uguale a 3.

In generale, per ogni coppia di punti $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ si ha che:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 3.$$

Considerato un punto qualsiasi $(x; y)$, con $x \neq 0$, e, per esempio, il punto $(0; 2)$, il rapporto vale:

$$\frac{y - 2}{x} = 3.$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per x , con $x \neq 0$. Otteniamo

$$\frac{y - 2}{x} = 3 \rightarrow y - 2 = 3x \rightarrow y = 3x + 2,$$

che è l'espressione analitica della funzione.

Diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Funzione lineare

Una funzione si dice lineare se può essere scritta nella forma:

$$y = ax + b, \quad \text{con } a \text{ e } b \text{ costanti reali.}$$

Dall'uguaglianza $y = ax + b$ possiamo ottenere

$$y - b = ax,$$

che dice che le variabili x e y , legate da una funzione lineare, sono tali che, se $a \neq 0$, $y - b$ è direttamente proporzionale a x secondo la costante di proporzionalità a .

Le variabili x e y sono quindi legate da una legge riconducibile a una proporzionalità diretta; il grafico di una funzione lineare è ancora una retta che però, diversamente dal caso della proporzionalità diretta tra x e y , non passa per l'origine.

Nella figura 28 è riportato il grafico di $y = 3x + 2$.

x	y
-4	-10
-3	-7
-2	-4
-1	-1
0	2
1	5
2	8
3	11

L'EQUAZIONE DI UNA RETTA

Si può dimostrare che, nel piano cartesiano, il grafico di una funzione lineare è sempre una retta e, viceversa, che ogni retta del piano cartesiano, che non sia parallela all'asse y , è rappresentata da un'equazione del tipo:

$$y = ax + b.$$

Il coefficiente a è detto **coefficiente angolare**, in quanto dipende dall'angolo che la retta forma con l'asse x .

Se due rette sono parallele, hanno lo stesso coefficiente angolare.

Il coefficiente b è detto **ordinata all'origine** e rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y .

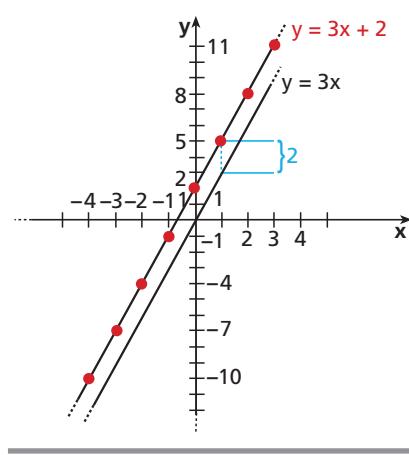
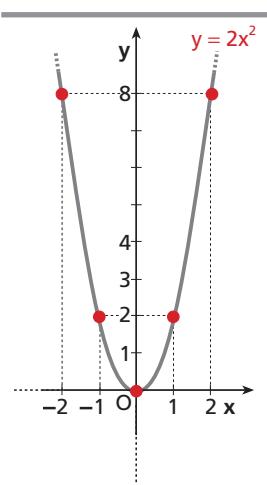


Figura 28

x	y
0	0
1	2
2	8
3	18
-1	2
-2	8
...	...



▲ Figura 29 Il grafico della funzione $y = 2x^2$ è una parabola il cui vertice è nell'origine degli assi $(0; 0)$.

Osserviamo che questo grafico si può ottenere da quello della retta che rappresenta la funzione di proporzionalità diretta $y = 3x$ aggiungendo 2 all'ordinata di ogni suo punto.

■ La proporzionalità quadratica

Studiamo mediante una tabella la funzione $y = 2x^2$.

Osserviamo che:

- se x raddoppia, y diventa quattro volte più grande; se x triplica, y diventa nove volte più grande; se x viene moltiplicato per n , allora y risulta moltiplicato per n^2 ;
- se si esclude la coppia $(0; 0)$, per ogni coppia di punti $(1; 2)$, $(2; 8)$, $(3; 18)$, ..., i rapporti del tipo $\frac{y}{x^2}$ sono sempre uguali a 2.

(3; 18), ..., i rapporti del tipo $\frac{y}{x^2}$ sono sempre uguali a 2.

■ DEFINIZIONE

Proporzionalità quadratica

Una funzione si dice di proporzionalità quadratica se può essere scritta nella forma $y = kx^2$, con k costante reale ($k \neq 0$).

Il grafico di una funzione di proporzionalità quadratica è rappresentato da una particolare curva che si chiama **parabola**. Il vertice della parabola si trova nell'origine $(0; 0)$.

Nella figura 29 è riportato il grafico della funzione $y = 2x^2$.

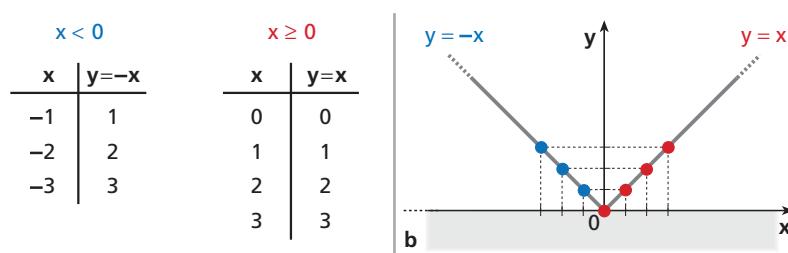
■ La funzione valore assoluto

La funzione **valore assoluto** è definita nel seguente modo:

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Per qualunque valore di x , il valore corrispondente di y è sempre positivo o nullo, quindi nel grafico della funzione tutti i punti hanno ordinata positiva o nulla.

► Figura 30 La funzione è rappresentata soltanto da punti con y positiva (o nulla), ossia da punti che si trovano tutti sopra l'asse x . Le due semirette $y = -x$ per $x < 0$ e $y = x$ per $x \geq 0$ hanno l'origine in comune nel punto $(0; 0)$.



8. Le funzioni goniometriche

■ La misura degli angoli

La misura in gradi

Nel *sistema sessagesimale*, l'unità di misura degli angoli è il **grado sessagesimale**, definito come la 360° parte dell'angolo giro.

Il grado sessagesimale viene indicato con un piccolo cerchio in alto a destra della misura:

$$1^{\circ} = \frac{1}{360} \text{ dell'angolo giro.}$$

Il grado viene suddiviso a sua volta in *60 primi*, indicati con un apice:

$$1' = 60''.$$

Ogni primo viene suddiviso in *60 secondi*, indicati con due apici:

$$1' = 60''.$$

La misura in radianti

■ DEFINIZIONE

Radiante

Data una circonferenza, si chiama radiente l'angolo al centro che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.

L'unità di misura viene indicata con rad, ma generalmente, se si esprime un angolo in radianti, si è soliti trascurare l'indicazione dell'unità di misura.

Per calcolare la misura in radianti di un angolo, si divide la misura dell'arco sotteso dall'angolo per quella del raggio.

Poiché sottende l'intera circonferenza, l'angolo giro misura $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$.

L'angolo piatto, che corrisponde a metà circonferenza, misura π , l'angolo retto misura $\frac{\pi}{2}$ ecc.

Riportiamo in una tabella le misure in radianti e in gradi di alcuni angoli.

MISURE DEGLI ANGOLI									
GRADI	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
RADIANTI	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

▲ Tabella 1

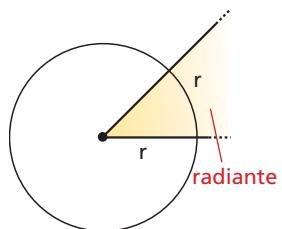
■ Gli angoli orientati

La definizione di angolo come parte del piano non è adatta per descrivere tutte le situazioni. Per esempio, nell'avvitare o svitare una vite si descrive un angolo che può essere maggiore di un angolo giro.

È utile quindi collegare il concetto di angolo a quello di *rotazione*, cioè al movimento che porta uno dei lati dell'angolo a sovrapporsi all'altro.

► Un angolo di 32 gradi, 10 primi e 47 secondi viene scritto così:

$$32^{\circ} 10' 47''.$$



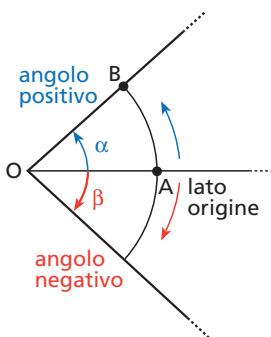
► Vale la proporzione:
 $\alpha^{\circ} : \alpha_{\text{rad}} = 360^{\circ} : 2\pi$.

Per esempio, 30° equivale a $\frac{\pi}{6}$ radianti, perché:

$$30^{\circ} : \alpha_{\text{rad}} = 360^{\circ} : 2\pi$$

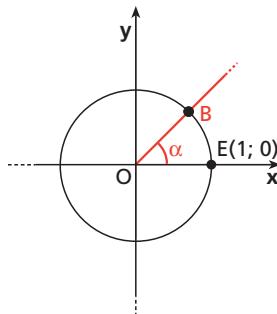
$$\alpha_{\text{rad}} = \frac{\pi}{6}.$$

Un radiante corrisponde a circa 57° .



Per indicare in forma sintetica un angolo α minore di un angolo giro e tutti gli infiniti angoli orientati che da α differiscono di un angolo giro, si scrive:

- $\alpha + k \cdot 360^\circ$, con $k \in \mathbb{Z}$, se α è in gradi;
- $\alpha + k \cdot 2\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, se α è in radianti.



La circonferenza goniometrica

▼ Figura 32

Consideriamo la semiretta OA che ruota in senso antiorario intorno al vertice O , fino a sovrapporsi alla semiretta OB , generando l'angolo $\alpha = A\hat{O}B$. La semiretta OA si chiama **lato origine** dell'angolo α , la semiretta OB si chiama **lato termine**.

DEFINIZIONE

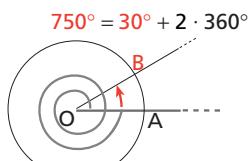
Angolo orientato

Un angolo si dice orientato quando sono stati scelti uno dei due lati come lato origine e un senso di rotazione.

Un angolo orientato è **positivo** quando è descritto mediante una rotazione in senso antiorario; è **negativo** quando la rotazione è in senso orario. Un angolo orientato può anche essere maggiore di un angolo giro.

ESEMPIO

Poiché $750^\circ = 30^\circ + 2 \cdot 360^\circ$, l'angolo di 750° si ottiene con la rotazione della semiretta OA di due giri completi e di 30° .



◀ Figura 31 L'angolo di 750° si ottiene con una rotazione della semiretta OA di 30° e 2 angoli giro.

La circonferenza goniometrica

Nel piano cartesiano, per **circonferenza goniometrica** intendiamo la circonferenza di centro l'origine O degli assi e raggio di lunghezza 1.

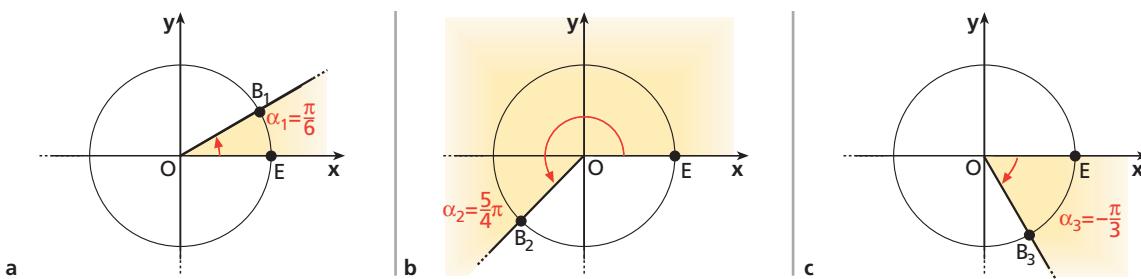
Il punto $E(1; 0)$ si dice **origine degli archi**.

Utilizzando la circonferenza goniometrica, si possono rappresentare gli angoli orientati, prendendo come lato origine l'asse x . In questo modo, a ogni angolo corrisponde un punto di intersezione B fra la circonferenza e il lato termine.

ESEMPIO

Rappresentiamo gli angoli $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$, $\alpha_2 = \frac{5}{4}\pi$, $\alpha_3 = -\frac{\pi}{3}$.

Essi individuano sulla circonferenza i punti B_1 , B_2 e B_3 della figura 32.



Le funzioni seno, coseno e tangente

Introduciamo alcune **funzioni goniometriche** che alla misura della ampiezza di ciascun angolo associano un numero reale.

DEFINIZIONE

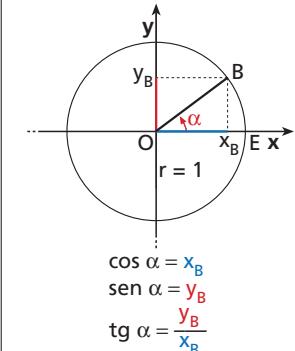
Seno, coseno e tangente

Consideriamo la circonferenza goniometrica e un angolo orientato α , e sia B il punto della circonferenza associato ad α .

Definiamo coseno e seno di α , e indichiamo con $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$, le funzioni che ad α associano, rispettivamente, il valore dell'ascissa e quello dell'ordinata di B .

Definiamo tangente di α , e indichiamo con $\tan \alpha$, la funzione che ad α associa il rapporto, quando esiste, fra l'ordinata e l'ascissa di B .

$$\sin \alpha = y_B, \quad \cos \alpha = x_B, \quad \tan \alpha = \frac{y_B}{x_B}.$$



Seno e coseno di un angolo α sono funzioni che hanno come dominio \mathbb{R} , perché per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste uno e un solo punto sulla circonferenza.

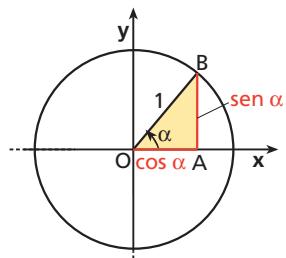
Il rapporto $\frac{y_B}{x_B}$ non esiste quando $x_B = 0$, ossia il dominio della funzione tangente è $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Dalle definizioni date si ricava che:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Notiamo inoltre che nel triangolo rettangolo OAB l'ipotenusa misura 1 e i cateti $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$, quindi per il teorema di Pitagora:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

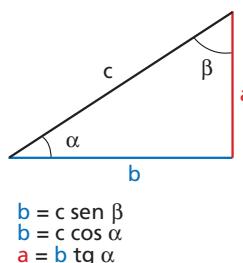


FUNZIONI GONIOMETRICHE E CALCOLATRICE

Per determinare il valore di una funzione goniometrica di un angolo possiamo impiegare la calcolatrice. I tasti da utilizzare sono $\langle \sin \rangle$ per la funzione seno, $\langle \cos \rangle$ per il coseno e $\langle \tan \rangle$ per la tangente. Per esempio $\sin(30) = 0,5$. Se la misura dell'angolo è in gradi, sul display deve comparire la scritta DEG (dall'inglese *degree*). È possibile scegliere anche l'opzione RAD per la misura in radianti.

Se invece è l'angolo a essere incognito, possiamo utilizzare i tasti $\langle \sin^{-1} \rangle$, $\langle \cos^{-1} \rangle$ e $\langle \tan^{-1} \rangle$, indicati talvolta anche con $\langle \text{asin} \rangle$, $\langle \text{acos} \rangle$ e $\langle \text{atan} \rangle$. Per esempio $\sin^{-1}(0,5) = 30$.





■ Funzioni goniometriche e triangoli rettangoli

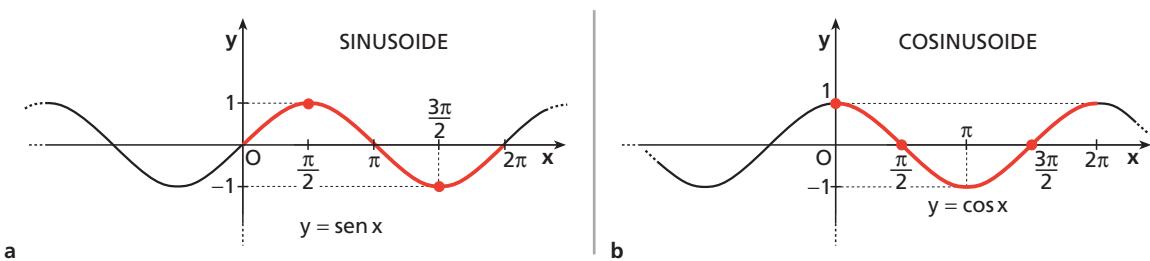
Si può dimostrare che in un triangolo rettangolo la misura di un cateto si calcola come:

- la misura dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto;
- la misura dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente al cateto.

Inoltre, la misura del cateto opposto a un angolo è uguale a quella del cateto adiacente per la tangente dell'angolo.

■ Il grafico delle funzioni goniometriche

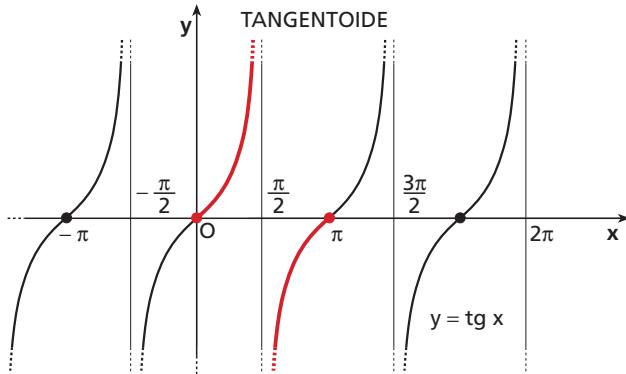
Osserviamo i grafici delle funzioni seno e coseno.



▲ Figura 33 Grafici delle funzioni seno e coseno. I grafici vengono detti **sinusoide** e **cosinusoide**.

I valori del seno e del coseno sono compresi fra -1 e 1 . I grafici si ripetono con le stesse caratteristiche a intervalli di ampiezza 2π . Si dice allora che le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π .

La tangente è invece una funzione periodica di periodo π . Osserviamo il suo grafico.



► Figura 34 Il grafico della tangente, che viene detto **tangentoide**.

Notiamo come, man mano che x si avvicina a $\frac{\pi}{2}$:

- con valori minori di $\frac{\pi}{2}$, il valore della funzione tende a diventare sempre più grande; diremo che tende a $+\infty$;
- con valori maggiori di $\frac{\pi}{2}$, il valore della funzione è negativo e tende a diventare sempre più grande in valore assoluto; diremo che tende a $-\infty$.

Lo stesso comportamento si ha vicino agli altri valori di x che non fanno parte del dominio della funzione.

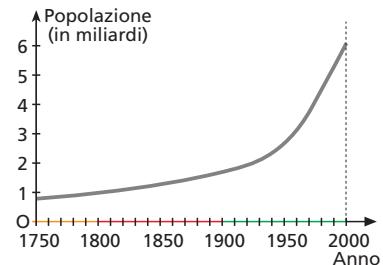
ESPLORAZIONE: 5, 6, 7, ... MILIARDI

Nel secolo scorso la popolazione mondiale ha subito un rapido aumento, come puoi vedere nella tabella a lato.

I problemi connessi a questa recente «esplosione» demografica hanno spinto gli studiosi a formulare dei modelli matematici per prevedere l'evoluzione futura della popolazione.

Oggi siamo circa 6,8 miliardi; in quanti saremo nel 2025? E nel 2050? Proviamo a rispondere a queste domande con un modello semplificato.

ANNO	POPOLAZIONE (in miliardi)
1900	1,6
1927	2
1960	3
1974	4
1987	5
1999	6



Nel grafico puoi confrontare la crescita dell'ultimo secolo con quella dei precedenti.

UN SEMPLICE MODELLO

Consideriamo come popolazione iniziale i 6 miliardi di persone del 1999, con un incremento annuo con un tasso costante dell'1,3%.

Nel nostro modello, l'aumento nel primo anno, espresso in miliardi di persone, è $6 \cdot \frac{1,3}{100} = 6 \cdot 0,013$,

quindi la popolazione dopo un anno è $6 + 6 \cdot 0,013 = 6 \cdot (1 + 0,013) = 6 \cdot 1,013$. Si può ragionare in modo analogo nel secondo anno, tenendo conto che la popolazione all'inizio dell'anno non è più 6 ma $6 \cdot 1,013$. La popolazione alla fine del secondo anno è allora $(6 \cdot 1,013) \cdot 1,013 = 6 \cdot 1,013^2$.

Ripetendo lo stesso calcolo, si ottiene $6 \cdot 1,013^3$ per il terzo anno, $6 \cdot 1,013^4$ per il quarto e così via. In generale, la popolazione dopo x anni è $6 \cdot 1,013^x$.

La crescita avviene mediante il fattore $1,013^x$, che è un esempio di *funzione esponenziale*, in quanto la variabile indipendente x compare come esponente.

In generale, la funzione esponenziale ha la forma $y = a^x$, dove a è un numero positivo.

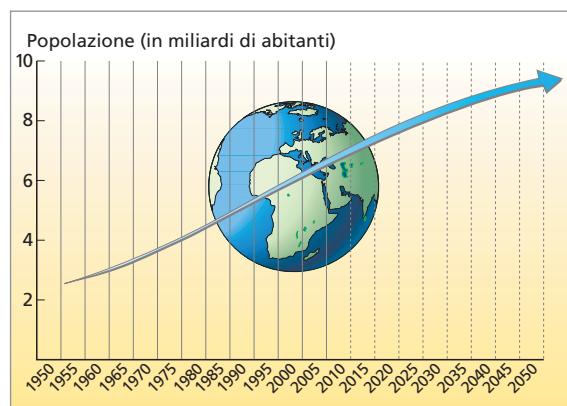
Se $a > 1$, il valore di y cresce al crescere di x ; se $0 < a < 1$, y decresce al crescere di x . Se $a = 1$, la funzione esponenziale diventa una funzione costante, con $y = 1$.

Calcoliamo il valore della popolazione per $x = 26$ e $x = 51$:

$$6 \cdot 1,013^{26} = 8,39 \text{ e } 6 \cdot 1,013^{51} = 11,59.$$

Dopo 26 anni dal 1999, ossia nel 2025, il nostro modello prevede circa 8,39 miliardi di abitanti. In modo analogo, gli abitanti previsti per l'anno 2050 sono circa 11,59 miliardi.

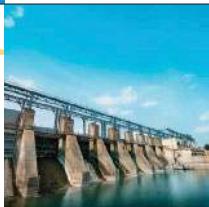
Le nostre stime non concordano però con quelle degli esperti, che prevedono circa 7,8 miliardi di abitanti nel 2025 e intorno ai 9 miliardi nel 2050. Questo è dovuto al fatto che il tasso di crescita della popolazione, dopo aver raggiunto il suo picco del 2% negli anni fra il 1965 e il 1970, è ora in calo, mentre nel nostro modello è supposto costante.



IN DIESCI RIGHE

La crescita della popolazione è diversa a seconda dei continenti. Cerca su Internet i valori previsti dall'ONU nel 2025 e nel 2050. Determina poi la percentuale di ognuna delle popolazioni rispetto alla popolazione mondiale nel 2010 e nel 2025. Cosa osservi? Scrivi una relazione con il computer, allegando la tabella.

Cerca nel web: world population data, reference bureau.



Acqua ed energia

...di quanto si deve aumentare il diametro di una conduttura per dimezzare il tempo di svuotamento di un certo volume d'acqua?

→ Il quesito completo a pag. 223

Prima di tutto, è meglio ricordare come funziona una centrale idroelettrica: un corso d'acqua viene sbarrato a una certa altitudine attraverso una diga che forma un lago artificiale. Da questo bacino principale l'acqua viene convogliata in vasche di raccolta da cui partono grosse tubature, chiamate «condotte forzate». Se le valvole sono aperte, l'acqua scende verso valli ad alta velocità e arriva nell'impianto dove mette in moto le pale di una turbina.



A questa è collegata un'altra macchina, chiamata alternatore, che trasforma in energia elettrica l'energia di movimento delle pale. Maggiore è la quantità d'acqua che arriva, maggiore è la velocità con cui gira la ruota della turbina. Quindi, più acqua scorre nelle condutture, maggiore è l'energia prodotta nell'impianto.

Supponiamo che la vasca di raccolta di una centrale idroelettrica contenga un volume V di acqua e

indichiamo con t il tempo di svuotamento della vasca.

Le condotte forzate sono dotate di dispositivi che consentono di regolare la portata di acqua: per semplicità, possiamo immaginare che le imboccature delle tubature si restringano o si allarghino a seconda della potenza richiesta (per esempio, durante la notte essa è inferiore rispetto alle ore diurne).

Studiamo il caso di una sola tubatura di sezione circolare. Sia p la sua portata, ovvero il

Vogliamo ora capire quale sia la relazione tra il tempo di svuotamento t e il diametro d del foro. Esprimiamo la superficie S in funzione di d :

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \pi \frac{d^2}{4}.$$

Pertanto:

$$t = k \cdot \frac{V}{\pi d^2} = k \cdot \frac{4V}{\pi d^2} \cdot \frac{1}{4}.$$

Abbiamo così trovato che il tempo di svuotamento della vasca è inversamente proporzionale al quadrato del diametro del foro. La domanda iniziale era però: di quanto bisogna aumentare il diametro d del foro per dimezzare il tempo di svuotamento t ? Per semplicità supponiamo che sia $V = 1$ e consideriamo che la durata dello svuotamento si dimezzi passando da $t = 2$ a $t' = 1$. Applichiamo la formula sopra per i due tempi:

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{4k}{\pi} \cdot \frac{1}{d^2}, \\ 1 &= \frac{4k}{\pi} \cdot \frac{1}{d'^2}. \end{aligned}$$

Dividendo membro a membro otteniamo:

$$\frac{2}{1} = \frac{\cancel{4k}}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{1}{d^2} \cdot \frac{1}{\cancel{4k}} \cdot \frac{1}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{1}{d'^2}, \text{ da cui}$$

$$2 = \frac{d'^2}{d^2}.$$

Moltiplicando ambo i membri per d^2 otteniamo

$$d'^2 = 2d^2,$$

ed estraendo la radice:

$$d' = \sqrt{2}d.$$

LA TEORIA IN SINTESI

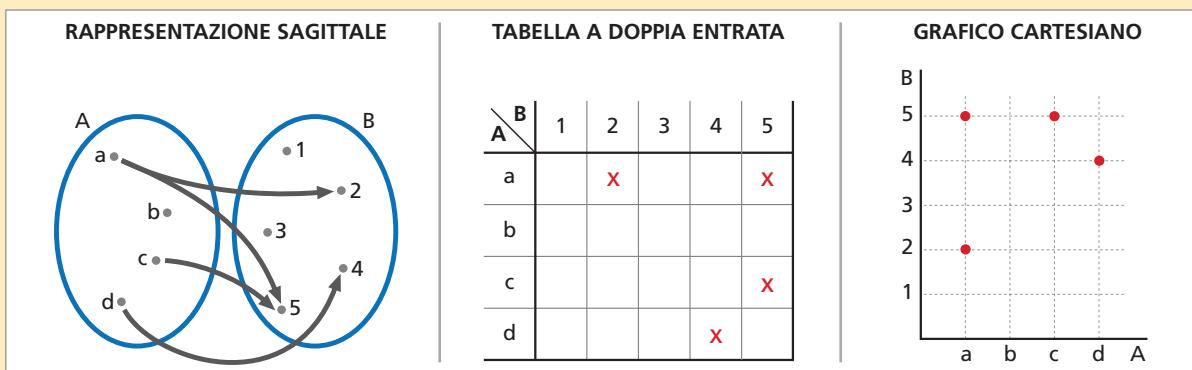
Le relazioni e le funzioni

1. Le relazioni binarie

Una relazione binaria \mathcal{R} fra gli insiemi A e B è un sottoinsieme di $A \times B$.

Se $a \mathcal{R} b$, diciamo che b è immagine di a .

Una relazione può essere descritta per **elencazione**, mediante una **rappresentazione sagittale** (o diagramma a frecce), una **tabella a doppia entrata** o un **grafico cartesiano**.



Ogni relazione \mathcal{R} definita in $A \times B$ ha come **relazione inversa** \mathcal{R}^{-1} , l'insieme delle coppie $(b; a) \in B \times A$ e tali che $a \mathcal{R} b$.

ESEMPIO Consideriamo gli insiemi $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$.

La relazione inversa di $\mathcal{R} = \{(a; 3), (i; 2), (o; 1)\}$ è $\mathcal{R}^{-1} = \{(3; a), (2; i), (1; o)\}; \mathcal{R}^{-1} \subseteq B \times A$.

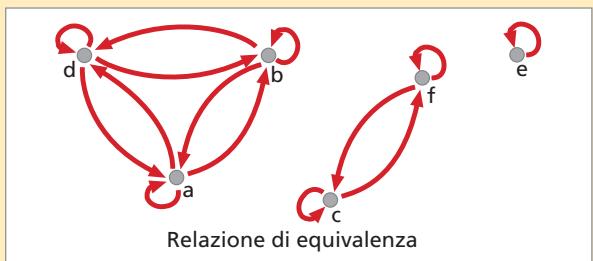
2. Le relazioni definite in un insieme e le loro proprietà

Una relazione \mathcal{R} definita in un insieme A è un sottoinsieme di $A \times A$ e può essere:

- **riflessiva**: $a \mathcal{R} a$ per ogni $a \in A$;
- **simmetrica**: se $a \mathcal{R} b$, allora $b \mathcal{R} a$;
- **transitiva**: se $a \mathcal{R} b$ e $b \mathcal{R} c$, allora $a \mathcal{R} c$;
- **antiriflessiva**: $a \not\mathcal{R} a$ per ogni $a \in A$;
- **antisimmetrica**: con $a \neq b$, se $a \mathcal{R} b$, allora $b \not\mathcal{R} a$.

3. Le relazioni di equivalenza

Quando una relazione in un insieme è riflessiva, simmetrica e transitiva, si chiama **relazione di equivalenza**. Essa determina nell'insieme una **partizione in classi di equivalenza**. Ogni classe di equivalenza può essere rappresentata con uno qualsiasi dei suoi elementi. L'insieme delle classi di equivalenza è detto **insieme quoziente**.



ESEMPIO

La relazione della figura precedente è di equivalenza. Le classi di equivalenza sono $\{a, b, d\}, \{e\}, \{c, f\}$.

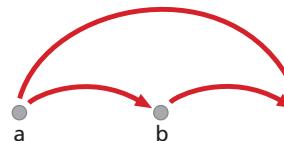
4. Le relazioni d'ordine

Una relazione in un insieme è:

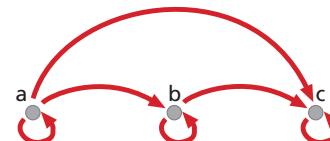
- **d'ordine largo** se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva;
- **d'ordine stretto** se è antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Una relazione d'ordine in un insieme è:

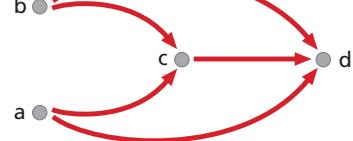
- **d'ordine totale** se due elementi qualsiasi dell'insieme sono in relazione;
- **d'ordine parziale** in caso contrario.



a. Relazione d'ordine stretto totale.



b. Relazione d'ordine largo totale.



c. Relazione d'ordine stretto parziale.

5. Le funzioni

Una **funzione** dall'insieme A all'insieme B è una relazione che a **ogni** elemento di A associa **uno e un solo** elemento di B . L'insieme A è detto **dominio** della funzione, il sottoinsieme di B formato dalle **immagini** degli elementi di A , cioè degli elementi corrispondenti, è detto **codominio**.

Una funzione da A a B è:

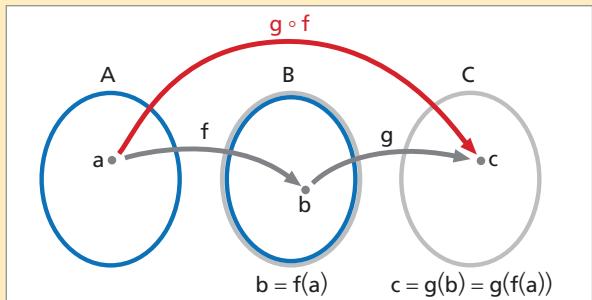
- **iniettiva** se due qualunque elementi **distinti** di A hanno due immagini distinte in B ;
- **suriettiva** quando **tutti** gli elementi di B sono immagini di almeno un elemento di A , ossia quando il codominio coincide con l'insieme di arrivo;
- **biiettiva** quando è **iniettiva e suriettiva**; in questo caso viene detta anche **biiezione** o **corrispondenza biunivoca**.

L'**inversa** di una funzione biiettiva $f: A \rightarrow B$ è la funzione biiettiva $f^{-1}: B \rightarrow A$, che a ogni y in B associa x in A tale che $y = f(x)$.

Date le funzioni $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$, si può definire la **funzione composta** $g \circ f: A \rightarrow C$, che associa a ogni elemento a di A un elemento c di C così ottenuto:

- ad a si associa $b \in B$ tale che $b = f(a)$;
- a b si associa $c \in C$ tale che $c = g(b)$.

In generale, non è vero che $g \circ f = f \circ g$.



6. Le funzioni numeriche

Una **funzione numerica** ha come dominio e come codominio due sottoinsiemi di \mathbb{R} .

Data la funzione numerica $f: x \mapsto y = f(x)$, x si chiama **variabile indipendente** e y **variabile dipendente**. Il **dominio naturale** o di una funzione numerica è il più ampio sottoinsieme di \mathbb{R} nel quale la funzione può essere definita.

ESEMPIO

$y = \frac{5x - 3}{x + 2}$ è una funzione numerica,

con x variabile indipendente e y variabile dipendente; $D: x \neq -2$.

7. Particolari funzioni numeriche

Alcune funzioni numeriche esprimono proporzionalità fra le variabili x e y .

Dato $k \in \mathbb{R} - \{0\}$:

- $y = kx$ esprime la **proporzionalità diretta**;
- $y = \frac{k}{x}$ esprime la **proporzionalità inversa**;
- $y = kx^2$ esprime la **proporzionalità quadratica**;
- $y = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ esprime la **funzione lineare**.

La funzione **valore assoluto**: $y = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

8. Le funzioni goniometriche

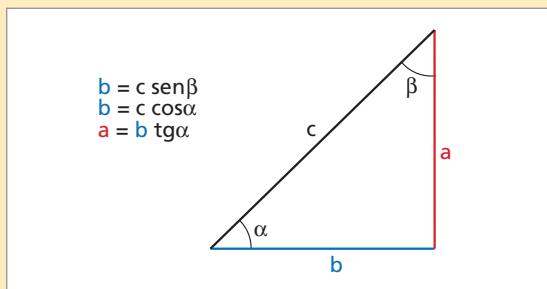
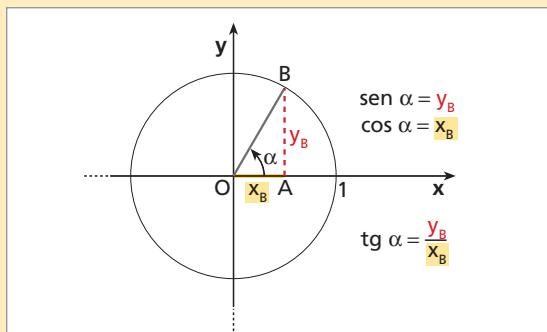
Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il suo lato termine e la circonferenza goniometrica. Si dice:

- **seno** di α ($\sin \alpha$) il valore dell'ordinata di B ;
- **coseno** di α ($\cos \alpha$) il valore dell'ascissa di B ;
- **tangente** di α ($\tan \alpha$) il rapporto fra l'ordinata e l'ascissa di B ;

Le **relazioni fondamentali** della goniometria sono:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ e } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Per il **seno**, il **coseno** e la **tangente** degli angoli acuti di un **triangolo rettangolo**, valgono le relazioni della figura, dove a , b e c sono le misure dei cateti e dell'ipotenusa.



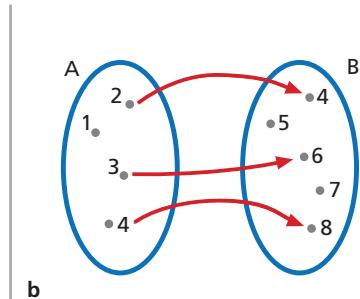
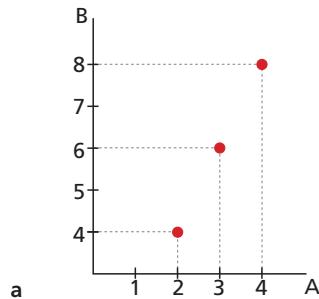
1. Le relazioni binarie

→ Teoria a pag. 223

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 *B* è l'insieme dei calciatori della Juventus. La frase «Il calciatore x è più alto del calciatore y » individua una relazione \mathcal{R} nell'insieme B , mentre la frase «Il calciatore x è più bravo di y » non individua alcuna relazione. Perché?

2 Fra i tre grafici, solo due rappresentano in maniera corretta la relazione $\mathcal{R} = \{(2; 4), (3; 6), (4; 8)\}$. Individua i grafici corretti. Cosa c'è che non va nel grafico sbagliato?



A	B	1	2	3	4
4			X		
5					
6				X	
7					
8					X

3 Esiste sempre la relazione inversa di una data? È unica oppure no?

4 Come sono legati dominio e codominio di una relazione \mathcal{R} con dominio e codominio dell'inversa \mathcal{R}^{-1} ?

ESERCIZI

■ Le relazioni binarie

5 VERO O FALSO?

Sono dati i due insiemi $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ e la relazione \mathcal{R} da A a B :

« x è la metà di y ».

Indica quali affermazioni sono vere e quali false.

a) $4 \mathcal{R} 8$.

b) $1 \mathcal{R} 2$.

c) L'immagine di 8 è 4.

d) L'insieme delle immagini di \mathcal{R} è $\{2, 4, 6\}$.

e) $0 \mathcal{R} 1$.

f) $\forall y \in B$, si ha $0 \mathcal{R} y$.

6 Dati gli insiemi $A = \{\text{Po, Adige, Arno, Tevere}\}$ e $B = \{x \mid x \text{ è una regione italiana}\}$, determina il sottoinsieme di $A \times B$ relativo alla relazione « a scorre in b ».

7

Dati gli insiemi $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, riconosci quali, fra i seguenti insiemi, sono relazioni definite in $B \times A$. Indica il motivo per cui gli altri non lo sono.

$\mathcal{R} = \{(0; 0), (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4)\}$;

$\mathcal{R} = \{(0; 1), (0; 2), (0; 3), (1; 2), (2; 3)\}$;

$\mathcal{R} = \{(1; 2), (2; 1), (3; 2)\}$;

$\mathcal{R} = \{(2; 1), (3; 0)\}$;

$\mathcal{R} = \{(1; 1), (2; 0), (0; 2)\}$.

Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, scrivi le coppie di ognuna delle seguenti relazioni da A a B .

8 \mathcal{R}_1 : « $x + y = 4$ ».

9 \mathcal{R}_2 : « $x = 2y$ ».

10 \mathcal{R}_3 : « x è minore o uguale a y ».

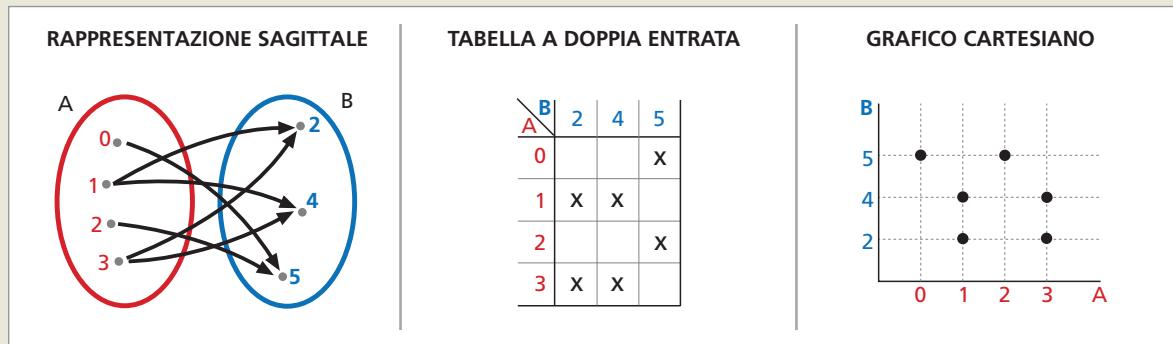
■ La rappresentazione di una relazione

■ ESERCIZIO GUIDA

- 11** Dati $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 5\}$, rappresentiamo nei vari modi possibili la relazione da A a B : «La somma di x e y è dispari».

$$\mathcal{R} = \{(0; 5), (1; 2), (1; 4), (2; 5), (3; 2), (3; 4)\}.$$

Rappresentiamo la relazione.



- 12** Rappresenta in forma sagittale e cartesiana la seguente relazione.

		4	5	6	7
		A	B		
Pippo			x		x
Pluto				x	
Paperino	x	x			x

Dato $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\}$, rappresenta mediante grafici cartesiani le seguenti relazioni in $A \times A$.

13 $x = y$.

14 $x > y$.

15 $x < y$.

16 $x \leq y$.

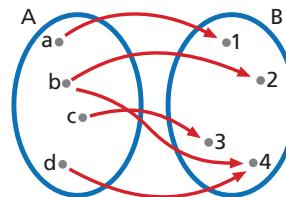
17 «Il prodotto di x e y è dispari».

18 «La somma di x e y è pari».

19 « x e y hanno un divisore comune diverso da 1».

20 « x e y sono primi tra loro».

- 21** Data la relazione binaria in figura, scrivi le coppie in relazione e poi rappresenta la relazione in forma cartesiana e con una tabella a doppia entrata.



Considerato l'insieme $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 4\}$, rappresenta le seguenti relazioni in $A \times A$ per elencazione e mediante una tabella a doppia entrata.

22 «Il prodotto tra x e y è positivo».

23 «Il prodotto fra x e y è 0».

24 «La somma di x e y è 0».

25 «La somma di x e y è negativa».

26 «La somma di x e y è uguale a 1».

27 «La somma di x e y è minore di 1».

28 «La somma di x e y è maggiore di 1».

Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$, per ognuna delle seguenti relazioni definite in $A \times B$, disegna la rappresentazione in forma sagittale e il grafico cartesiano, e scrivi dominio e codominio.

29 « x è multiplo di y ».

30 « x è divisore di y ».

31 « x è il successivo di y ».

32 « x è il quadrato di y ».

33 $\{(x; y) \mid (x; y) \in A \times B \text{ e } x = \frac{1}{2}y\}$.

34 $\{(x; y) \mid (x; y) \in A \times B \text{ e } x = y - 1\}$.

35 $\{(x; y) \mid (x; y) \in A \times B \text{ e } x = 3y\}$.

36 $\{(x; y) \mid (x; y) \in A \times B \text{ e } x = \sqrt{y}\}$.

37 Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 12\}$, dai la rappresentazione cartesiana di ognuna delle relazioni in $A \times A$ definite qui di seguito e, di ciascuna, determina dominio e codominio.

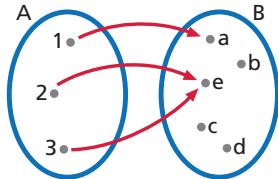
a) «la somma di x e y è dispari», con $(x; y) \in A \times A$;

b) «il prodotto di xy è pari», con $(x; y) \in A \times A$.

■ La relazione inversa

38 La rappresentazione in figura indica la relazione \mathcal{R} .

Scrivi le coppie della relazione inversa e fai la rappresentazione cartesiana.



■ ESERCIZIO GUIDA

39 Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 6\}$, rappresentiamo in forma sagittale la relazione definita in $A \times B$: $\mathcal{R} = \{(x; y) \mid 2x + y = 10\}$.

Scriviamo le coppie, dominio e codominio di \mathcal{R}^{-1} . Determiniamo la relazione inversa, scriviamo le coppie, dominio e codominio di \mathcal{R}^{-1} .

Ad A appartengono i numeri 2, 3, 4; a B i numeri 2, 3, 4, 5, 6.

Rappresentiamo \mathcal{R} in forma sagittale.

Per ogni elemento x di A dobbiamo calcolare $2x$ e cercare un y in B tale che $2x + y = 10$.

Per esempio, il corrispondente di $x = 2$ è $y = 6$, perché $2 \cdot 2 + 6 = 10$.

Le coppie di \mathcal{R} sono:

$$\mathcal{R} = \{(2; 6), (3; 4), (4; 2)\}.$$

Il dominio di \mathcal{R} è:

$$D = \{2, 3, 4\}.$$

Il codominio di \mathcal{R} è:

$$C = \{6, 4, 2\}.$$

Rappresentiamo \mathcal{R}^{-1} :

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(6; 2), (4; 3), (2; 4)\}.$$

La relazione inversa, definita in $B \times A$, è:

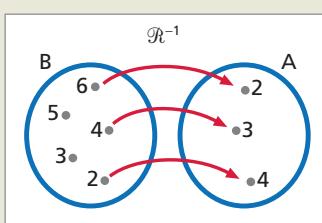
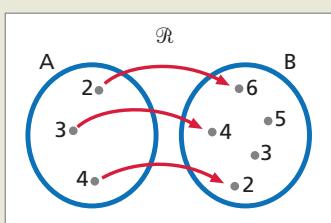
$$x + 2y = 10.$$

Il dominio di \mathcal{R}^{-1} è:

$$D' = \{6, 4, 2\}.$$

Il codominio di \mathcal{R}^{-1} è:

$$C' = \{2, 3, 4\}.$$



Dati gli insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 7\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 8 < x < 14\},$$

per ognuna delle seguenti relazioni in $A \times B$:

- esegui la rappresentazione sagittale;
- determina la relazione inversa;
- scrivi l'insieme delle coppie di \mathcal{R} e di \mathcal{R}^{-1} ;
- scrivi dominio e codominio di \mathcal{R} e di \mathcal{R}^{-1} .

40 $\{(x; y) \mid x \text{ è divisore di } y\}$.

41 $\{(x; y) \mid x = y - 4\}$.

42 $\{(x; y) \mid x + y = 18\}$.

43 $\{(x; y) \mid x - y < 0\}$.

44 $\{(x; y) \mid xy > 10\}$.

45 $\{(x; y) \mid x \text{ è la metà di } y\}$.

46 $\{(x; y) \mid x = y\}$.

47 $\{(x; y) \mid x + y > 5\}$.

48 $\{(x; y) \mid x + y > 0\}$.

49 $\{(x; y) \mid xy \text{ è pari}\}$.

50 $\left\{ (x; y) \mid \frac{x}{y} \text{ è una frazione propria} \right\}$.

2. Le relazioni definite in un insieme e le loro proprietà

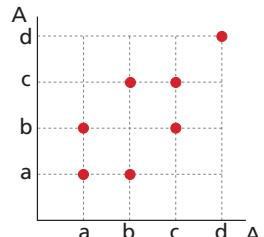
→ Teoria a pag. 226

RIFLETTI SULLA TEORIA

- 51** Verifica che la relazione definita in \mathbb{N} : « x è maggiore di y » non è né riflessiva né simmetrica. Scrivi poi una relazione in \mathbb{N} che goda di entrambe le proprietà.

- 52 TEST** Della relazione rappresentata in figura possiamo dire che:

- A è riflessiva e simmetrica.
- B è antiriflessiva.
- C non è riflessiva e non è simmetrica.
- D è solo riflessiva.
- E è solo simmetrica.



- 53** La relazione definita in \mathbb{N} : « x è divisore di y » gode della proprietà riflessiva? E della proprietà antisimmetrica?

ESERCIZI

- 54** Scrivi cinque relazioni nell'insieme dei segmenti, disegnando per ognuna alcune coppie.

- 55** Scrivi cinque relazioni nell'insieme delle città italiane. Di almeno due costruisci la rappresentazione sagittale.

- 56** Scrivi tre relazioni nell'insieme formato da dieci studenti della tua classe e rappresenta ognuna con una tabella a doppia entrata.

- 57** Scrivi tre relazioni definite nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Rappresenta le relazioni seguenti in forma sagittale, con una tabella a doppia entrata e con un grafico cartesiano.

58 \mathcal{R} : « x è il triplo di y », $A = \{1, 3, 6, 9, 12\}$.

59 \mathcal{R} : « $xy > 0$ », $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 2\}$.

60 \mathcal{R} : « x è minore di y », $A = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{7} \right\}$.

61 \mathcal{R} : « x è multiplo di y », $A = \{2, 4, 5, 7, 14, 30\}$.

62 \mathcal{R} : « x è divisore di y », $A = \{2, 4, 5, 7, 14, 30\}$.

63 \mathcal{R} : « x è il quadrato di y », $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 12, 16\}$.

64 \mathcal{R} : « $x + y$ è un numero pari», $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq 8\}$.

■ Proprietà delle relazioni definite in un insieme

■ ESERCIZIO GUIDA

65 Dato l'insieme $A = \{a, b, c, d\}$, stabiliamo di quali proprietà gode la relazione in $A \times A$:

$$\mathcal{R} = \{(a; a), (c; a), (b; b), (c; c), (d; d)\}.$$

La relazione \mathcal{R} :

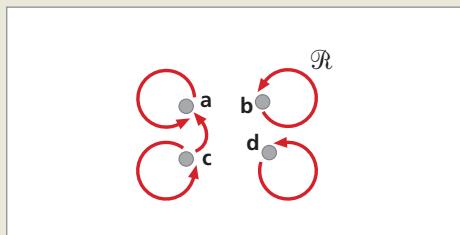
- è riflessiva, perché contiene *tutte* le coppie del tipo $(x; x)$;
- è antisimmetrica, perché l'unica coppia con i due elementi diversi è $(c; a)$ e manca la coppia simmetrica $(a; c)$;
- è transitiva perché:

$$(c; a), (a; a) \in \mathcal{R} \text{ e } (c; a) \in \mathcal{R}; \\ (c; c), (c; a) \in \mathcal{R} \text{ e } (c; a) \in \mathcal{R};$$

non esistono altri casi del tipo

$$(x; y), (y; z) \in \mathcal{R}.$$

Per comprendere meglio le proprietà illustrate, rappresentiamo la relazione con un grafo.



Ogni elemento ha una freccia che lo congiunge con se stesso; dunque \mathcal{R} è riflessiva. \mathcal{R} è antisimmetrica, perché esiste una freccia da c ad a ma non una da a a c . Ogni percorso percorribile con due frecce è percorribile anche con una sola freccia. Per esempio, si può andare da c a c e da c ad a con due frecce, e direttamente da c ad a con una freccia. La relazione \mathcal{R} è quindi transitiva.

Dato l'insieme $A = \{a, b, c, d\}$, stabilisci di quali proprietà gode ognuna delle seguenti relazioni definite in A .

66 $\mathcal{R} = \{(a; a), (a; b), (b; a), (c; d), (b; d), (d; b), (d; c)\}$

67 $\mathcal{R} = \{(a; a), (b; b), (c; c), (b; c)\}$

68 $\mathcal{R} = \{(a; b), (b; a), (b; c)\}$

69 $\mathcal{R} = \{(b; b), (b; c), (c; b), (d; a), (a; a)\}$

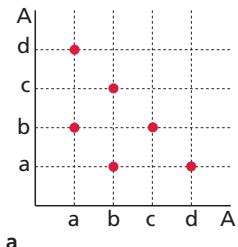
70 $\mathcal{R} = \{(a; a), (b; b), (c; c), (c; b), (d; d)\}$

71 $\mathcal{R} = \{(a; b), (a; c), (a; d), (b; c), (b; d), (c; d)\}$

72 $\mathcal{R} = \{(a; b), (a; d), (b; c), (b; d), (c; d), (b; a), (d; a), (c; b), (d; b), (d; c)\}$

73

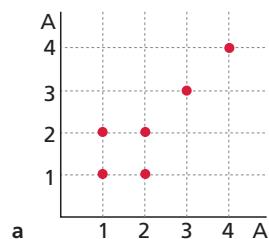
Di quali proprietà godono le relazioni che hanno le seguenti rappresentazioni?



$\diagdown A$	1	2	3	4
1		X		X
2				
3		X		
4			X	

74

Di quali proprietà godono le relazioni che hanno le seguenti rappresentazioni?



$\diagdown A$	a	b	c	d
a	X			X
b			X	X
c			X	X
d				X

75

COMPLETA la relazione rappresentata in figura, aggiungendo le coppie che mancano affinché la relazione sia riflessiva.

$\diagdown A$	a	b	c	d
a	X			X
b			X	
c				
d				

76

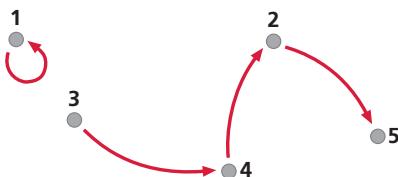
COMPLETA la figura dell'esercizio precedente in modo che la relazione sia simmetrica.

77

COMPLETA la figura dell'esercizio 75 in modo che la relazione sia transitiva.

78

COMPLETA la figura in modo che la relazione rappresentata sia riflessiva, simmetrica e transitiva.

**79**

Considera l'insieme

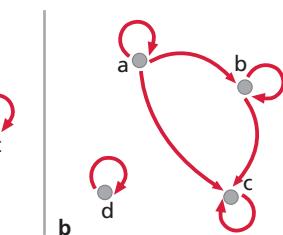
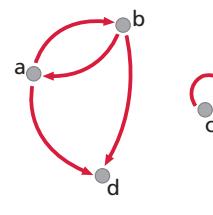
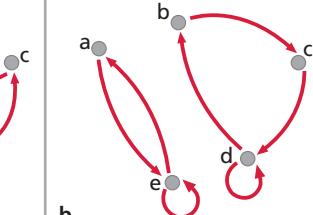
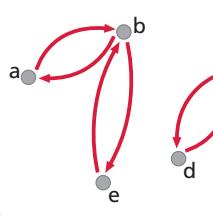
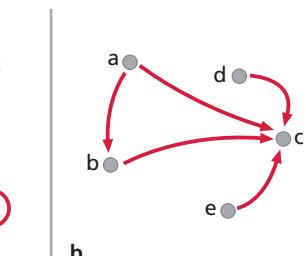
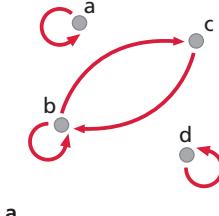
$A = \{\text{Molise, Campania, Puglia, Basilicata}\}$

e scrivi le coppie della relazione definita in A :

« x confina con y ».

Supponi di voler comunicare a una persona che non conosce la geografia dell'Italia quali sono le coppie in relazione. Non è necessario comunicarle tutte! Sottolinea le coppie sufficienti e spiega perché esse sono la metà di quelle della relazione.

Per ognuna delle relazioni rappresentate dai seguenti grafi indica di quali proprietà gode.

80**81****82****83**

Dato l'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$, costruisci il grafo di una relazione che abbia almeno la proprietà e il numero di frecce indicati:

- a) riflessiva, 6 frecce;
- b) simmetrica, 4 frecce;
- c) simmetrica, 3 frecce;
- d) transitiva, 3 frecce;
- e) transitiva, 5 frecce.

Scrivi le proprietà delle seguenti relazioni definite nell'insieme A indicato.

84 $A = \mathbb{N}$.

- a) « x è il doppio di y »;
- b) « x è il successivo di y »;
- c) « x e y sono divisori dello stesso numero».

85 A è un insieme di persone.

- a) « x abita in un quartiere diverso da quello di y »;
- b) « x è nipote di y »;
- c) « x frequenta la stessa scuola di y ».

86 A è l'insieme degli studenti della tua scuola.

- a) « x è più giovane di y »;
- b) « x pratica lo stesso sport di y »;
- c) « x non pratica lo stesso sport di y ».

87 A è l'insieme degli studenti della tua classe.

- a) « x è compagno di banco di y »;
- b) « x è più alto di y »;
- c) « x ha lo stesso colore degli occhi di y ».

88 A è l'insieme dei Paesi dell'Unione europea.

- a) « x esporta prodotti in y »;
- b) « x e y sono nello stesso continente»;
- c) « x e y hanno gli stessi colori nella bandiera».

89 A è l'insieme delle squadre di calcio italiane.

- a) « x ha vinto più scudetti di y »;
- b) « x è della stessa regione di y »;
- c) « x ha giocato con y nell'ultimo anno».

90 A è l'insieme delle rette di un piano.

- a) « a e b hanno un punto in comune»;
- b) « a e b sono perpendicolari»;
- c) « a e b sono parallele fra loro».

91 A è l'insieme degli angoli di un piano.

- a) « α è congruente a β »;
- b) « α è complementare di β »;
- c) « α è consecutivo a β ».

92 A è l'insieme dei lati di un esagono regolare:

- a) « x ha un vertice in comune con y »;
- b) « x non ha un vertice in comune con y »;
- c) « x è opposto a y ».

93 Considera i quattro insiemi A , B , C e D e la relazione \subseteq : « x è sottoinsieme di y ». Si sa che $B \subseteq A$, $B \subseteq C$, $B \not\subseteq D$. Disegna gli insiemi con un diagramma di Eulero-Venn che soddisfi le condizioni poste, poi costruisci la tabella a doppia entrata della relazione.

Esiste una sola soluzione del problema?

Studia le proprietà della relazione.

94 Considera i quattro insiemi A , B , C , D e la relazione \mathcal{R} : « x e y non sono disgiunti». Si sa che:

$A \mathcal{R} C$, $C \mathcal{R} D$, $B \mathcal{R} C$, $A \mathcal{R} B$, $D \mathcal{R} B$, $D \mathcal{R} A$.

Disegna un diagramma di Eulero-Venn che soddisfi le condizioni poste, poi costruisci la tabella a doppia entrata della relazione.

Studia le proprietà della relazione.

95 Fra cinque rette di un piano, a , b , c , d , e , sono definite le relazioni:

- « x è parallela a y » ($x \parallel y$);
- « x è perpendicolare a y » ($x \perp y$).

Si sa che $a \parallel d$, $c \parallel d$, $b \parallel e$, $a \perp b$.

Disegna le cinque rette e scrivi le coppie relative alle due relazioni. Per ogni relazione studia le eventuali proprietà.

96 Scrivi le proprietà delle relazioni definite fra insiemi.

- a) « x e y sono disgiunti»;
- b) «l'unione di x e y è uguale a x »;
- c) «l'intersezione di x e y è uguale a x ».

97 Scrivi le proprietà delle relazioni definite nell'insieme \mathbb{N} .

- a) « $x < y$ »;
- b) « x e y hanno un divisore comune diverso da 1»;
- c) « $x \leq y$ ».

3. Le relazioni di equivalenza

→ Teoria a pag. 230

RIFLETTI SULLA TEORIA

98

VERO O FALSO?

Sono di equivalenza le seguenti relazioni:

a) «parallelismo» nell'insieme delle rette del piano.

V F

b) «perpendicolarità» nell'insieme delle rette del piano.

V F

c) «avere lo stesso perimetro» nell'insieme dei poligoni regolari.

V F

d) «avere segno opposto» nell'insieme dei numeri interi relativi.

V F

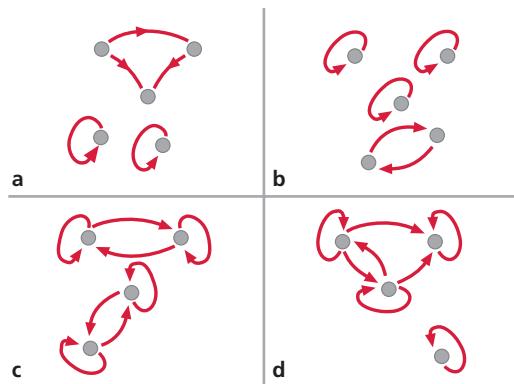
e) «avere almeno una cifra in comune» nell'insieme dei numeri naturali.

V F

ESERCIZI

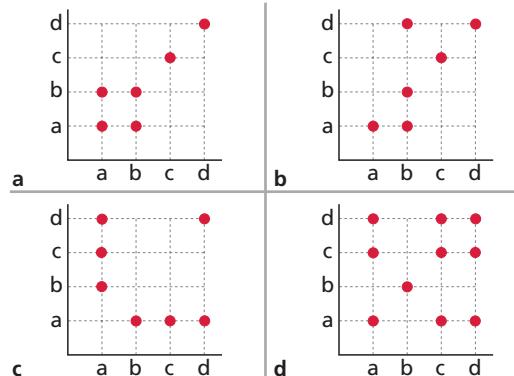
99

Stabilisci se i seguenti grafi rappresentano relazioni di equivalenza.



100

Stabilisci se le relazioni rappresentate nei seguenti diagrammi cartesiani sono di equivalenza.



101

COMPLETA le rappresentazioni dei due esercizi precedenti, in modo da rendere tutte le relazioni di equivalenza.

102

Negli esercizi dall'84 al 92 stabilisci quali sono le relazioni di equivalenza.

■ Le classi di equivalenza e l'insieme quoziante

ESERCIZIO GUIDA

103 Nell'insieme dei giocatori di calcio di serie A, la relazione « x gioca nella stessa squadra di y » è una relazione di equivalenza.

Stabiliamo quali sono le classi di equivalenza e l'insieme quoziante.

La relazione dà la possibilità di suddividere l'insieme dei giocatori in tanti sottoinsiemi, ognuno dei quali è una squadra. Ogni squadra è una classe di equivalenza.

L'insieme quoziante è pertanto l'insieme delle squadre di calcio di serie A.

Stabilisci l'insieme quoziante per ogni relazione di equivalenza indicata nel relativo insieme.

- 104** « x frequenta la stessa scuola di y », nell'insieme degli studenti di una città.
- 108** « x ha la stessa cittadinanza di y », nell'insieme delle persone.
- 105** « x pratica lo stesso sport di y », nell'insieme degli studenti della tua scuola.
- 109** « x risiede nello stesso comune di y », nell'insieme delle persone residenti in Italia.
- 106** « x e y sono nello stesso continente», nell'insieme delle nazioni.
- 110** « x e y sono dello stesso sesso», nell'insieme delle persone.
- 107** « r e s sono parallele fra loro», nell'insieme delle rette del piano.
- 111** « x ha la stessa area di y », nell'insieme dei poligoni del piano.

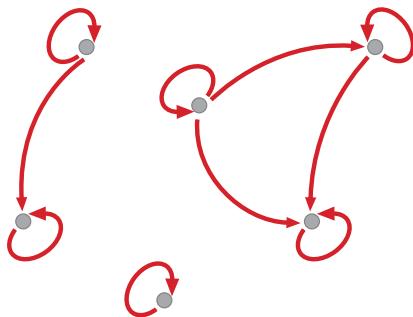
4. Le relazioni d'ordine

→ Teoria a pag. 231

RIFLETTI SULLA TEORIA

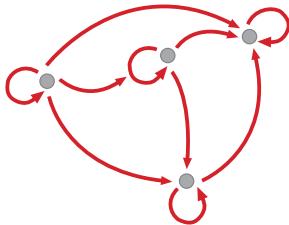
TEST

- 112** La relazione illustrata dal seguente grafo è:



- A** di ordine totale.
B di ordine largo.
C di ordine stretto.
D di equivalenza.
E solo riflessiva.

- 113** La relazione definita dal seguente grafo è:



- A** riflessiva e simmetrica.
B di equivalenza.
C di ordine largo totale.
D di ordine stretto totale.
E di ordine stretto parziale.

ESERCIZI

- 114** Cinque studentesse hanno gareggiato nei 100 metri. Bruno, un loro compagno un po' pasticcione, deve scrivere un articolo per il giornale scolastico. Purtroppo ha smarrito l'ordine d'arrivo. Tuttavia riesce a ricordare che:

- Daniela ha preceduto Elena e Barbara;
- Carla è arrivata prima;
- Anna ha preceduto Daniela;
- Elena ha preceduto Barbara.

Aiuta Bruno, scrivendo l'ordine d'arrivo. Elenca le coppie della relazione « x ha preceduto y » che puoi ricavare dalle quattro informazioni fornite, utilizzando per semplicità le lettere iniziali dei nomi. Indica la proprietà che hai utilizzato per stendere l'ordine d'arrivo.

115 Cerca le relazioni d'ordine fra quelle degli esercizi 84, 85 e 86, precisando se sono di ordine stretto o largo, totale o parziale.

116 Come nell'esercizio precedente ma per gli esercizi 87, 88, 89 e 90.

117 Cerca le relazioni d'ordine parziale nell'esercizio 91.

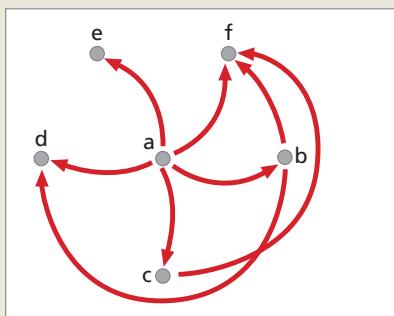
ESERCIZIO GUIDA

118 Nell'insieme $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ è data la relazione definita dall'insieme:

$$\mathcal{R} = \{(a; b), (a; c), (a; d), (a; e), (a; f), (b; d), (b; f), (c; f)\}.$$

Verifichiamo se è una relazione d'ordine e in caso affermativo ordiniamo gli elementi di A . La relazione è di ordine largo o stretto? Totale o parziale?

Costruiamo il grafo della relazione.



Verifichiamo le proprietà delle relazioni d'ordine.

a) Vale la proprietà transitiva:

- se $a \mathcal{R} b$ e $b \mathcal{R} f$, allora $a \mathcal{R} f$;
- se $a \mathcal{R} c$ e $c \mathcal{R} f$, allora $a \mathcal{R} f$;
- se $a \mathcal{R} b$ e $b \mathcal{R} d$, allora $a \mathcal{R} d$;

non ci sono altre terne in cui possa essere verificata la condizione della proprietà transitiva.

b) Vale la proprietà antiriflessiva:

nessun elemento è in relazione con se stesso.

c) Vale la proprietà antisimmetrica:

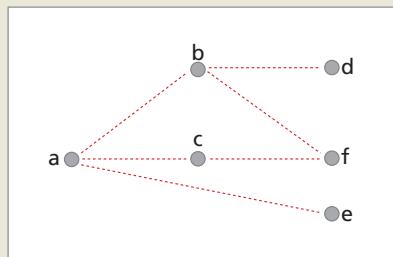
se un elemento è in relazione con un secondo, il secondo non è in relazione con il primo; per esempio, $a \mathcal{R} b$ ma $b \not\mathcal{R} a$.

Poiché la relazione è antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva, allora è una relazione d'ordine stretto.

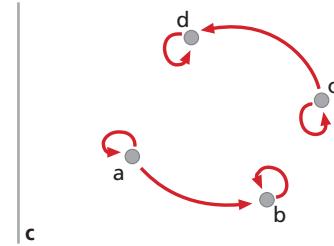
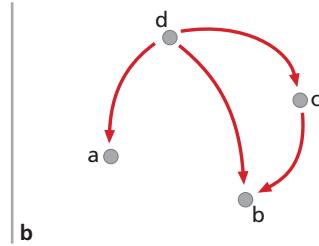
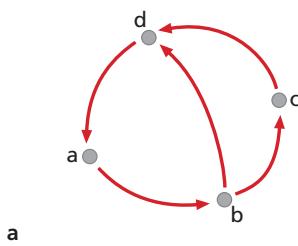
Verifichiamo se è d'ordine totale o parziale.

Mettiamo in ordine gli elementi da sinistra verso destra iniziando con a , che ha solo frecce in partenza, e terminando con e, f, d , che hanno solo frecce in arrivo.

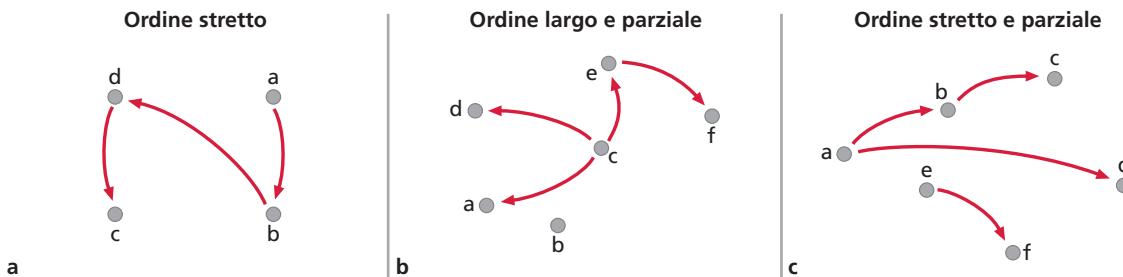
Gli elementi che risultano non collegati (come b e c o come e, f, d) non sono confrontabili. La relazione è dunque d'ordine parziale.



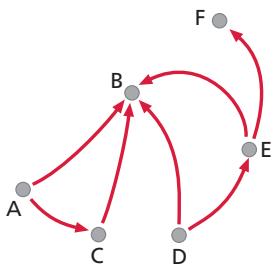
119 Fra i grafici illustrati in basso individua quelli che rappresentano una relazione d'ordine. In tal caso metti in ordine gli elementi con uno schema simile a quello dell'esercizio guida.



120 COMPLETA con il numero minimo di frecce i seguenti grafi, in modo da ottenere la relazione d'ordine indicata.

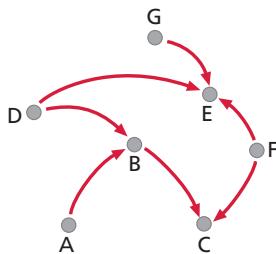


121 Nel seguente grafo è descritta la relazione \subseteq fra alcuni insiemi.



Disegna un diagramma di Eulero-Venn con insiemi tali da soddisfare la relazione.

122 Ripeti l'esercizio precedente, con il grafo rappresentato in figura.



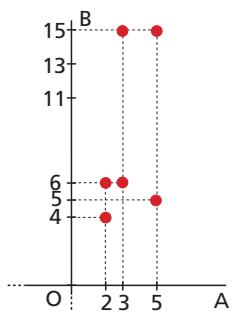
RIEPILOGO

LE RELAZIONI

Nel sito: ▶ 6 esercizi di recupero



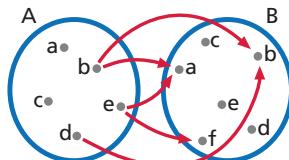
123 Il grafico in figura illustra una relazione. Se $x \in A$ e $y \in B$, di quale relazione si tratta?



Il dominio coincide con A ? E il codominio coincide con B ? Quali sono le coppie della relazione inversa?

124 Nell'insieme dei segmenti, la lunghezza è una classe di equivalenza generata da una partizione in base a una relazione. Di quale relazione si tratta?

125 Dato il diagramma della figura, determina l'insieme delle coppie della relazione, il dominio e il codominio, e fai la rappresentazione con tabella a doppia entrata.

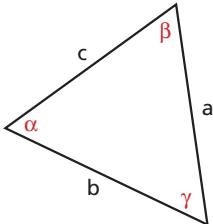


126 Data la tabella in figura, scrivi le coppie relative alla relazione, il dominio e il codominio e fai la rappresentazione sagittale.

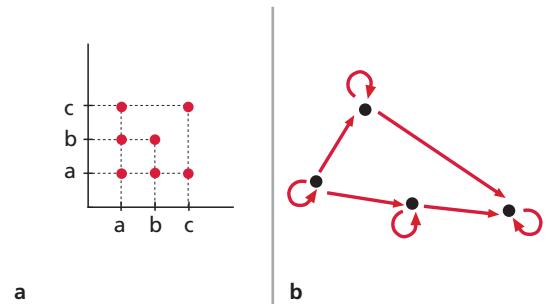
	B	a	b	c	d
A					
c	x			x	
d					
e			x		
f	x	x	x		

127

Osserva il triangolo in figura, di lati a , b , c e angoli α , β , γ . Se consideri la relazione «essere opposti», quali sono le coppie della relazione? Esiste la relazione inversa?

**128**

Le relazioni illustrate dai grafici in figura sono entrambe riflessive. Perché? Sono pure entrambe simmetriche?



Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$, per ognuna delle seguenti relazioni definite in $A \times B$, fai la rappresentazione sagittale e scrivi dominio e codominio.

129 « y è il doppio di x ».**130** « x è uguale a y ».**131** « x è il precedente di y ».**132** « y è il cubo di x ».**133** $\{(x; y) \mid (x; y) \in A \times B \text{ e } x = \frac{1}{4}y + 1\}$.**134** $\{(x; y) \mid (x; y) \in A \times B \text{ e } x = y - 2\}$.**135** $\{(x; y) \mid (x; y) \in A \times B \text{ e } y = 2x - 1\}$.**136** $\{(x; y) \mid (x; y) \in A \times B \text{ e } y = x + 2\}$.**137** Nell'insieme delle persone la relazione « x è padre di y » è la relazione inversa di « x è figlio di y »? Motiva la risposta.**138** Scrivi le proprietà delle seguenti relazioni definite nell'insieme delle nazioni.

- « x confina con y »;
- « x ha una densità di popolazione non inferiore a y »;
- « x è in pace con y ».

139 Nell'insieme dei numeri naturali verifica che la relazione « x e y danno lo stesso resto se sono divisi per 5» è di equivalenza e stabilisci l'insieme quoziante.**140**

Dati gli insiemi A e B , precisa se \mathcal{R} definisce una relazione in $A \times B$, motivando la risposta. In caso affermativo, scrivi dominio, codominio e fai la rappresentazione nei tre modi.

$$A = \{\text{cane, gatto}\};$$

$$B = \{\text{abbaia, miagola}\};$$

$$\mathcal{R} = \{(\text{cane; miagola}), (\text{gatto; abbaia})\}.$$

141

Scrivi le proprietà delle seguenti relazioni definite nell'insieme delle rette dello spazio.

- « a e b hanno un punto in comune».
- « a e b passano per un dato punto dello spazio».
- « a e b sono sghembe (non hanno punti in comune e non sono parallele)».

142

Stabilisci l'insieme quoziante per ciascuna delle due seguenti relazioni di equivalenza indicate nel relativo insieme.

- « x abita nella stessa via di y » nell'insieme delle persone.
- « x ha la stessa lunghezza di y » nell'insieme dei segmenti.

143

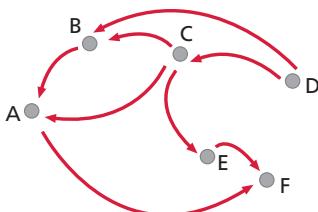
In un sottoinsieme degli studenti della tua classe definisci tre relazioni di equivalenza. Per ognuna descrivi la partizione ottenuta e l'insieme quoziante.

144

Nell'insieme $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \leq 15\}$ verifica che la relazione « x e y danno lo stesso resto se sono divisi per 3» è di equivalenza e rappresenta la relativa partizione. La classe di equivalenza [1] come può anche essere indicata?

Problemi**145**

In una sala giochi, sei amici devono decidere chi giocherà l'ultima partita. Decidono che userà l'unico gettone rimasto chi ha vinto il maggior numero di volte a quel gioco. Il grafo qui sotto descrive la relazione « x ha vinto più partite di y », ma è incompleto. Disegna le frecce mancanti utilizzando le proprietà della relazione e rispondi alle domande. Chi giocherà l'ultima partita? Chi ha vinto il minor numero di volte? [D; F]

**146**

Considera l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e rappresenta $A \times A$.

Evidenzia gli elementi del prodotto cartesiano che soddisfano la relazione «m.c.m.(x, y) = 12».

Tale relazione gode della proprietà simmetrica? Qual è la caratteristica della proprietà simmetrica in una rappresentazione cartesiana?

147

Dato l'insieme $B = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$, rappresenta il prodotto cartesiano $B \times B$.

Determina le coppie che soddisfano la relazione « x è multiplo di y ». Tale relazione gode della proprietà riflessiva? Qual è la caratteristica della proprietà riflessiva in un diagramma cartesiano?

148

Considera la relazione «avere la stessa altezza», definita nell'insieme delle persone. Dimostra che è una relazione di equivalenza.

Considera ora la relazione, definita nello stesso insieme, «non avere la stessa altezza». È ancora una relazione di equivalenza? Di quali proprietà gode?

[no; è antiriflessiva e simmetrica (ma non più transitiva)]

149

Nell'insieme $P = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ rappresenta le seguenti relazioni e studiane le proprietà:

- a) $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (x \text{ è minore di } y) \vee (x \text{ è multiplo di } y)$;
- b) $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (x + y = 20) \wedge (x \text{ è pari})$.

150

Nell'insieme delle parti dell'insieme $A = \{2, 4, 6\}$ considera la seguente relazione:

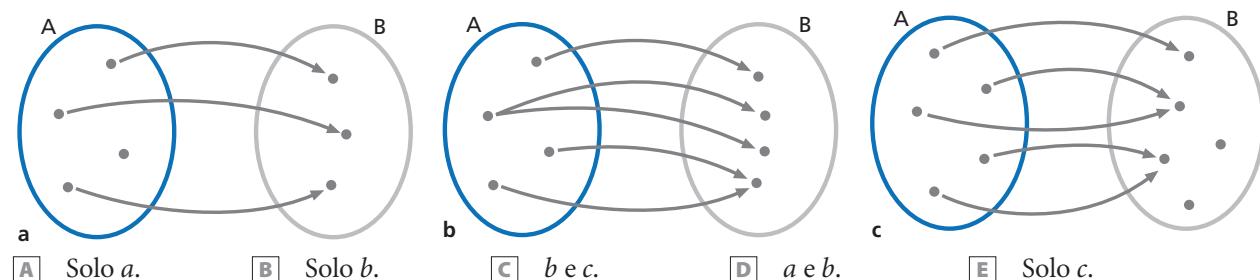
- $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \text{ è equipotente a } Y$.
- a) Rappresenta tale relazione mediante un grafo.
 - b) Dimostra che si tratta di una relazione di equivalenza.
 - c) Quali sono le classi di equivalenza? Quante sono?
 - d) Come puoi caratterizzare l'insieme quoziante?

5. Le funzioni

→ Teoria a pag. 232

RIFLETTI SULLA TEORIA**151**

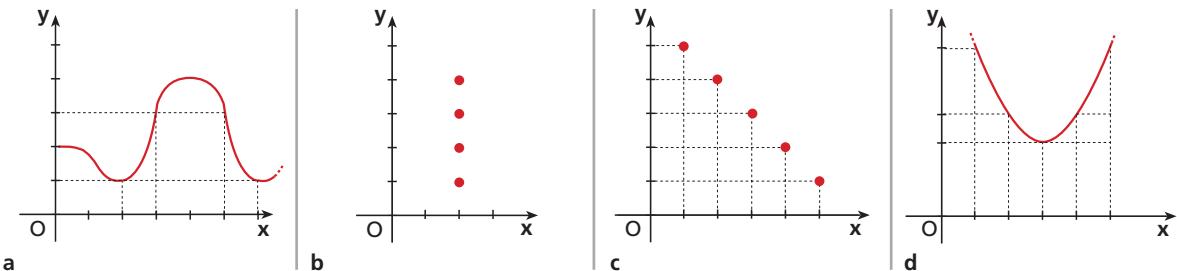
TEST Fra i seguenti diagrammi, quali rappresentano una funzione?



152 VERO O FALSO?

- a) Una relazione tra due insiemi, A e B , è una funzione se associa elementi di A a elementi di B .
- b) Perché una relazione tra due insiemi, A e B , sia una funzione è sufficiente che per ogni elemento di A esista un elemento di B associato.
- c) Una relazione tra due insiemi, A e B , è una funzione se a ogni elemento di A si associa soltanto un elemento di B .
- d) Il codominio è un sottoinsieme dell'insieme di arrivo B .
- e) L'insieme di partenza di una funzione coincide con il dominio.

153 Fra i seguenti diagrammi cartesiani, uno solo non rappresenta una funzione. Quale? Quale dei tre rimanenti rappresenta una funzione iniettiva?



154 TEST È data una funzione da un insieme A a un insieme B suriettiva ma non iniettiva. Della relazione inversa possiamo dire che:

- A è una funzione non iniettiva e non suriettiva.
- B non è una funzione.
- C è una funzione iniettiva.
- D è una funzione suriettiva.
- E è una funzione biiettiva.

155 Dopo aver individuato dominio e codominio di ciascuna relazione, determina se la relazione inversa è una funzione.

- a) « x intero positivo è in relazione con $-x$ ».
- b) « x intero è in relazione con x^2 ».
- c) « x intero è in relazione con $x + 1$ ».
- d) « n naturale è in relazione con n^2 ».

ESERCIZI

Considera le seguenti relazioni e stabilisci se sono funzioni oppure non lo sono, motivando le risposte.

156 \mathcal{R} associa agli studenti della tua classe i voti dell'ultimo compito di matematica. È importante sapere se il giorno del compito c'erano assenti?

157 \mathcal{R} associa agli studenti della tua classe i computer che utilizzano nel laboratorio di informatica.

158 \mathcal{R} associa a ogni materia i testi in adozione nella tua classe.

159 \mathcal{R} associa alle capitali degli stati europei le relative nazioni.

160 \mathcal{R} associa ai fiumi di una nazione le città che essi bagnano.

161 \mathcal{R} associa alle città italiane le regioni a cui appartengono.

162 \mathcal{R} associa ai laghi italiani la loro superficie.

163 \mathcal{R} associa ai punti di un piano gli angoli di cui essi sono vertici.

164 \mathcal{R} associa alle coppie di punti di un piano i segmenti di cui sono estremi.

165 \mathcal{R} associa alle misure di lunghezza in cm i triangoli di un piano i cui perimetri hanno tale misura.

166 \mathcal{R} associa ai triangoli di un piano le loro altezze.

167

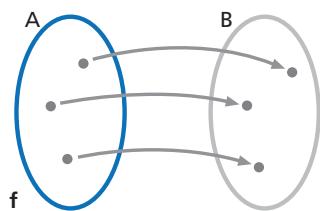
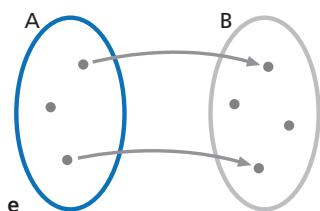
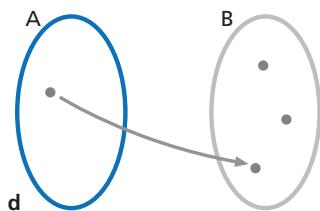
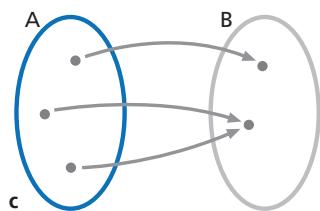
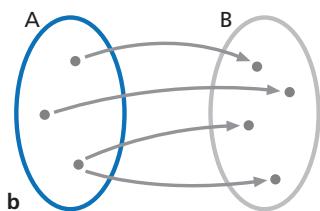
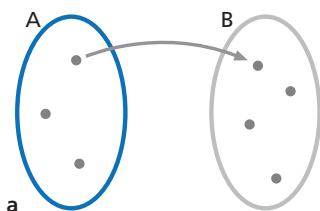
VERO O FALSO?

Se f è una funzione da A a B , allora:

- a) f è una relazione. V F
- b) A è il dominio. V F
- c) B è il codominio. V F
- d) per ogni elemento di A esiste almeno un elemento di B associato. V F
- e) un elemento di B può essere associato a molti elementi di A . V F

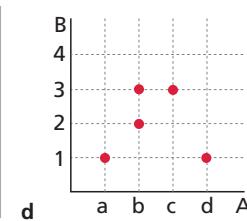
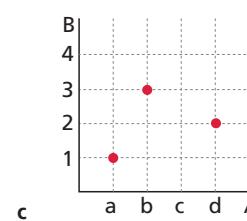
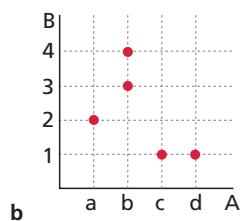
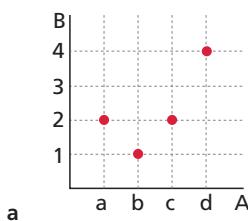
168

Indica per ogni figura se la relazione rappresentata è una funzione da A a B , giustificando la risposta.



169

Stabilisci per ogni diagramma cartesiano se la relazione rappresentata è una funzione da A a B , giustificando la risposta.



170

Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{a, b, c\}$, rappresenta tre funzioni diverse da A a B .

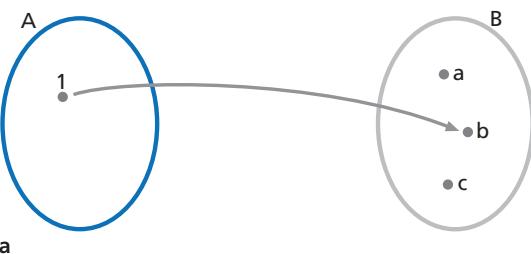
171

Sono dati i due insiemi $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a\}$. Quante funzioni è possibile definire da A a B ? Rappresentale. E quante funzioni è possibile definire da B ad A ? Rappresentale.

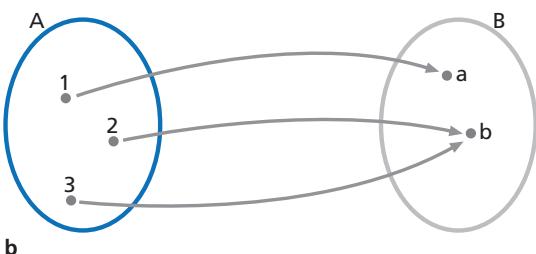
■ La rappresentazione di una funzione

Rappresenta con un diagramma cartesiano le seguenti funzioni, definite mediante rappresentazione sagittale.

172

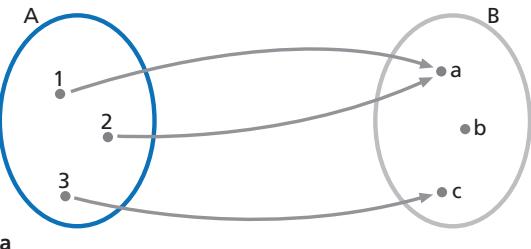


a

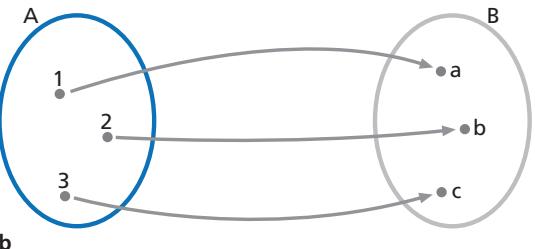


b

173



a



b

Utilizza i tre modi diversi (sagittale, con grafico cartesiano, con tabella a doppia entrata) per rappresentare le funzioni indicate fra i due insiemi A e B .

- 174 $A = \{\text{Luca, Gianni, Eva}\}$, $B = \{\text{I, II, III, IV, V}\}$;
 $f(\text{Luca}) = \text{III}$; $f(\text{Gianni}) = \text{IV}$; $f(\text{Eva}) = \text{I}$.

- 176 $A = \{\text{Van Gogh, Renoir, Picasso, Rembrandt}\}$,
 $B = \{\text{Olanda, Francia, Italia, Spagna}\}$;
 $f(\text{Van Gogh}) = \text{Olanda}$;
 $f(\text{Renoir}) = \text{Francia}$;
 $f(\text{Picasso}) = \text{Spagna}$;
 $f(\text{Rembrandt}) = \text{Olanda}$.

- 175 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$;
 $f(a) = 3$; $f(b) = 1$; $f(c) = 1$.

Per ognuna delle seguenti relazioni \mathcal{R} , definite in $A \times B$, indica se è una funzione e, in caso affermativo, scrivi il codominio.

- 177 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$;
 $\mathcal{R} = \{(a; 1), (b; 3), (c; 2)\}$.

- 179 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$;
 $\mathcal{R} = \{(1; c), (2; b), (3; a), (1; e), (4; d)\}$.

- 178 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$;
 $\mathcal{R} = \{(a; 2), (b; 3), (d; 1)\}$.

- 180 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$;
 $\mathcal{R} = \{(1; b), (3; d), (2; b), (4; b)\}$.

Rappresenta in forma sagittale le funzioni seguenti e scrivi gli elementi del codominio C , precisando se è un sottoinsieme proprio dell'insieme di arrivo B .

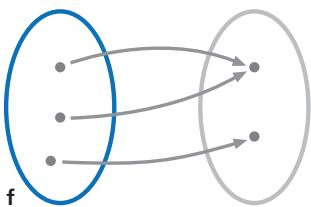
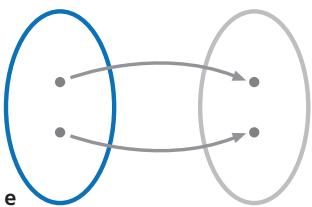
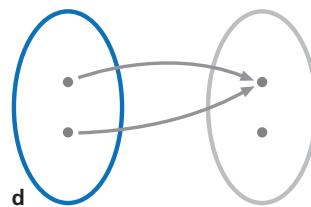
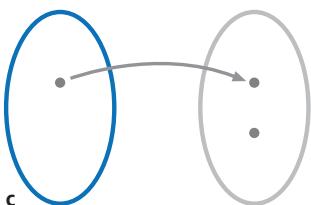
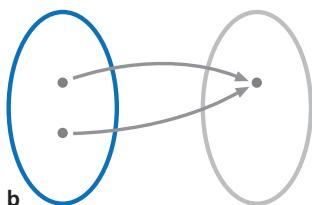
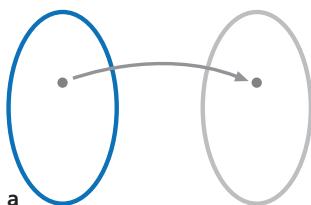
- 181 $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, -1, i, -i\}$; $f(0) = 1$; $f(1) = i$.

- 182 $A = \{a, e, i\}$, $B = \{\bullet, \star\}$; $f(a) = \bullet$; $f(e) = \bullet$; $f(i) = \star$.

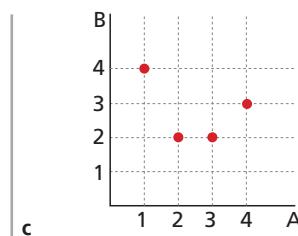
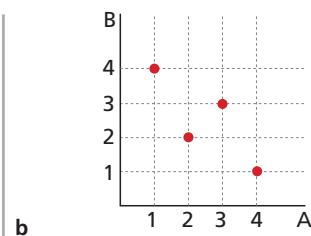
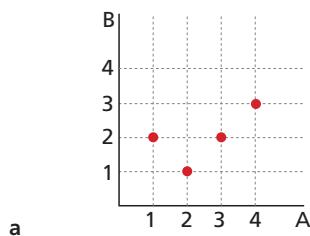
- 183 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$; $f(a) = 1$; $f(b) = 2$; $f(c) = 3$; $f(d) = 4$.

■ Le funzioni suriettive

184 Stabilisci se le seguenti funzioni definite mediante rappresentazione sagittale sono suriettive. Poi modifica le figure aggiungendo o togliendo frecce o elementi, in modo da ottenere funzioni diverse ma suriettive.



185 Fra le seguenti funzioni, rappresentate con diagramma cartesiano, indica quelle suriettive.

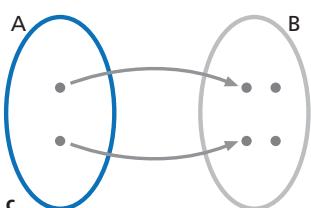
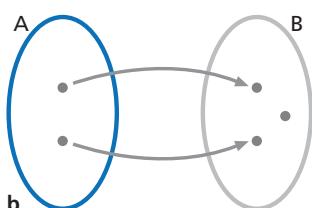
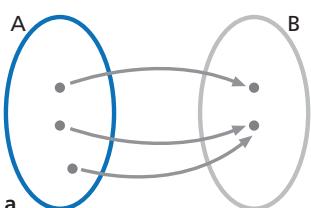


186 Indica quali delle seguenti funzioni da A a B sono suriettive.

- | | |
|--|---|
| a) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$;
$f(-1) = 0$; $f(0) = 2$; $f(1) = 1$. | c) $A = \{-2, 0, 5\}$, $B = \{1, 2, 6\}$;
$f(-2) = 6$; $f(0) = 1$; $f(5) = 1$. |
| b) $A = \{-3, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 4\}$;
$f(-3) = 4$; $f(1) = 1$; $f(2) = 4$. | d) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$;
$f(1) = -1$; $f(3) = -1$; $f(5) = 1$; $f(7) = 1$. |

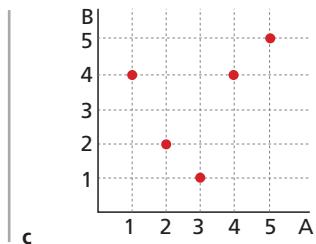
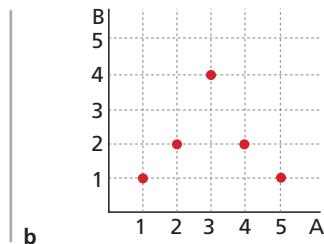
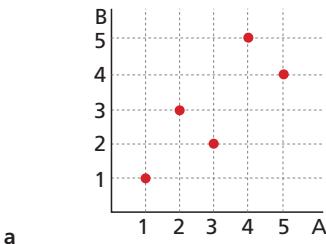
■ Le funzioni iniettive

187 Stabilisci se sono iniettive le seguenti funzioni definite mediante rappresentazione sagittale.



188 Nelle figure dell'esercizio precedente, fai il minimo numero di correzioni, aggiungendo o togliendo frecce oppure elementi, in modo da ottenere funzioni diverse ma iniettive.

189 Fra le seguenti funzioni, rappresentate con diagramma cartesiano, due non sono iniettive. Quali?

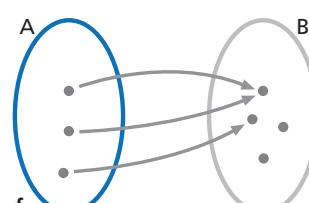
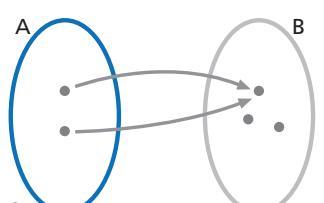
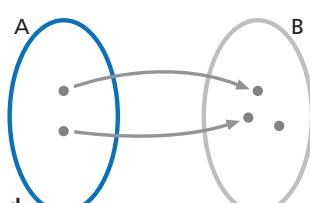
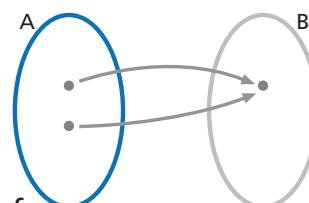
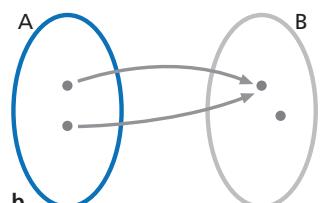
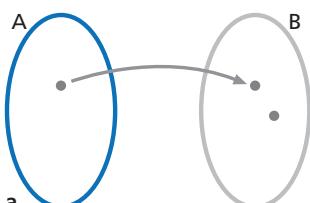


190 Indica quali delle seguenti funzioni da A a B sono iniettive.

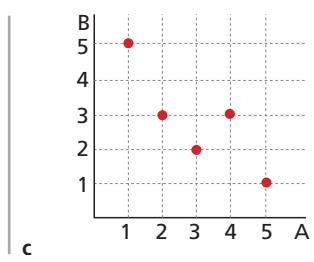
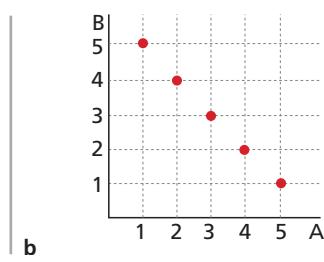
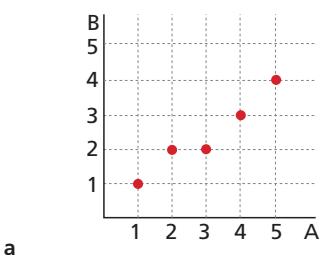
- a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$; $f(1) = 2$; $f(2) = 0$; $f(3) = 2$; $f(4) = -1$.
- b) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, c\}$; $f(a) = c$; $f(b) = a$; $f(c) = b$; $f(d) = c$.
- c) $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$; $f(-2) = 2$; $f(-1) = 0$; $f(0) = -1$; $f(1) = 3$.

Le funzioni biiettive

191 Modifica ogni figura, in modo che dalla funzione rappresentata si ottenga una funzione diversa che sia biiettiva.



192 Riconosci le funzioni biiettive fra quelle rappresentate con i seguenti diagrammi cartesiani.



Per ogni coppia di insiemi è descritta una funzione. Stabilisci se essa è suriettiva, iniettiva, biiettiva.

193 $Q = \{\text{quadrati di un piano}\};$

$P = \{\text{punti dello stesso piano}\};$

$f: Q \rightarrow P$, associa a ogni quadrato il suo centro.

194 $R = \{\text{punti di una retta } r\};$

$R' = \{\text{punti di una retta } r', \text{ complanare di } r\};$

$f: R \rightarrow R'$, associa a ogni punto di r la sua proiezione ortogonale su r' .

Distingui i due casi: a) r e r' sono perpendicolari; b) r e r' non sono perpendicolari.

■ La funzione inversa

195 Negli esercizi dal numero 177 al numero 180, la relazione inversa a quella data è una funzione?

196 Consideriamo gli insiemi $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$ e la funzione che associa:

$0 \mapsto b; 1 \mapsto c; 2 \mapsto a; 3 \mapsto e.$

Quale elemento di B va associato a 4 affinché la funzione risulti invertibile? [d]

■ La composizione di due funzioni

In ogni esercizio, rappresenta le due funzioni con un diagramma a frecce e stabilisci se sono possibili le due composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

197 $A = \{a\}, B = \{e\}, C = \{i\};$

$f: a \mapsto e; g: e \mapsto i.$

198 $A = \{m\}, B = \{i\}, C = \{o\};$

$f: i \mapsto o; g: m \mapsto i.$

199 $A = \{u\}, B = \{t\}, C = \{o\};$

$f: t \mapsto u; g: u \mapsto o.$

200 Considera l'insieme $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e la funzione

$f: A \rightarrow A$ così definita:

$$f(0) = 3, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 0, \quad f(3) = 1.$$

Trova l'immagine di A attraverso $f \circ f$.

201 Considera gli insiemi $A = \{1, 3\}, B = \{2, 4\}, C = \{0, 1\}$ e le funzioni f e g così definite:

$$f: A \rightarrow B; \quad f(1) = 4, \quad f(3) = 2;$$

$$g: B \rightarrow C; \quad g(2) = 0, \quad g(4) = 1.$$

Trova le immagini di 1 e 3 nella funzione $g \circ f$ e la controimmagine di 1 in $g \circ f$.

202 Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}$ e $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e le funzioni:

$$f: A \rightarrow B; \quad 1 \mapsto b, \quad 2 \mapsto c, \quad 3 \mapsto a;$$

$$g: B \rightarrow C; \quad a \mapsto 2, \quad b \mapsto 2, \quad c \mapsto 0.$$

La funzione $g \circ f$ che valore fa corrispondere a 1? [2]

6. Le funzioni numeriche

→ Teoria a pag. 237

RIFLETTI SULLA TEORIA

203 La funzione $y = x$ ha come dominio naturale \mathbb{R} , mentre $y = \frac{1}{x}$ no. Perché?

204 Individua quali fra le seguenti funzioni hanno il dominio naturale diverso da \mathbb{R} .

a) $y = x^4 - 2;$

c) $y = 2x + \frac{1}{2};$

e) $y = \frac{3x}{4-x};$

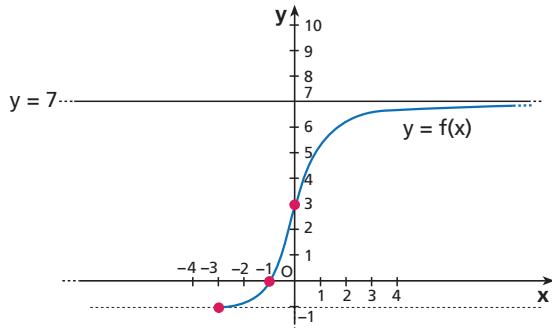
b) $y = \frac{2}{x-2};$

d) $y = \frac{x+1}{2};$

f) $y = \frac{1}{x^2+1}.$

205 COMPLETA, quando è possibile, osservando la figura.

- a) $f(-3) = \dots$
- b) $f(\dots) = 3$
- c) $f(-4) = \dots$
- d) $f(\dots) = 0$
- e) $f(\dots) = 7$
- f) $f(\dots) = -2$



ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

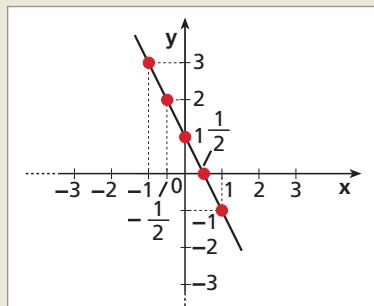
206 Data la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto -2x + 1$, costruiamo una tabella x, y assegnando cinque valori a x (positivi e negativi), poi tracciamo il grafico della funzione.

Scriviamo una tabella attribuendo a x dei valori scelti in modo da ottenere valori interi di y (più facili da rappresentare) e calcolando i corrispondenti valori di y . Per esempio:

$$\begin{aligned}f(0) &= -2 \cdot 0 + 1 = 1; \\f(1) &= -2 \cdot 1 + 1 = -1.\end{aligned}$$

Rappresentiamo i punti e tracciamo il grafico.

x	y
0	1
1	-1
-1	3
$\frac{1}{2}$	0
$-\frac{1}{2}$	2



Per ogni funzione costruisci una tabella assegnando cinque valori (positivi e negativi) a x e rappresentane il grafico.

- | | | | | | |
|----------------------|------------|--------------------------------|----------------------|---------------------------|---------------|
| 207 $y = x;$ | $y = -x.$ | 209 $y = \frac{1}{2}x;$ | $y = -\frac{1}{2}x.$ | 211 $y = -x + 2;$ | $y = -x - 2.$ |
| 208 $y = 2x;$ | $y = -2x.$ | 210 $y = x + 1;$ | $y = x - 1.$ | 212 $y = -3x + 2;$ | $y = 3x - 2.$ |

Rappresenta in uno stesso diagramma le seguenti funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} .

- | | | | | | |
|----------------------|-----------|--------------------------------|----------------------|----------------------|---------------|
| 213 $y = 2x;$ | $y = 3x.$ | 214 $y = \frac{1}{3}x;$ | $y = -\frac{1}{4}x.$ | 215 $y = 4x;$ | $y = 4x - 1.$ |
|----------------------|-----------|--------------------------------|----------------------|----------------------|---------------|

Per ogni funzione costruisci una tabella scegliendo almeno dieci valori (positivi e negativi) di x e rappresentane il grafico.

- | | | | | | |
|----------------------------------|----------------|----------------------------|-----------------|---------------------------|-----------------|
| 216 $y = x^2;$ | $y = 2x^2.$ | 218 $y = -x^2;$ | $y = x^2 - 1.$ | 220 $y = x^2 - 2;$ | $y = -x^2 + 2.$ |
| 217 $y = \frac{1}{2}x^2;$ | $y = x^2 + 1.$ | 219 $y = -x^2 + 1;$ | $y = -x^2 - 1.$ | 221 $y = 3x^2;$ | $y = 3x^2 + 1.$ |

COMPLETA le uguaglianze, per ogni funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, scrivendo il valore mancante al posto dei puntini.

222 $y = 2x \dots = f(0);$

$\dots = f(-2);$

$8 = f(\dots);$

$\frac{1}{2} = f(\dots).$

224 $y = -3x \dots = f(2);$

$\dots = f(-3);$

$6 = f(\dots);$

$-\frac{1}{2} = f(\dots).$

226 $y = \frac{2}{3}x \dots = f(0);$

$\dots = f\left(\frac{3}{5}\right);$

$5 = f(\dots);$

$-1 = f(\dots).$

223 $y = x + 1 \dots = f(-5);$

$\dots = f(-1);$

$2 = f(\dots);$

$-2 = f(\dots).$

225 $y = 2x^2 \dots = f(-2);$

$\dots = f(1);$

$\frac{2}{9} = f(\dots);$

$\frac{1}{2} = f(\dots).$

227 $y = -3x^2 \dots = f\left(\frac{5}{3}\right);$

$\dots = f(-3);$

$-12 = f(\dots);$

$0 = f(\dots).$

228 Considera la funzione $f(x) = 3x + 4$ definita nell'insieme $A = \left\{ \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -1, 0, \frac{1}{3}, 1 \right\}$. Trova l'insieme delle immagini.

■ Il dominio naturale di una funzione

■ ESERCIZIO GUIDA

229 Determiniamo il dominio naturale della seguente funzione definita in \mathbb{R} :

$$y = \sqrt{\frac{1}{x}}.$$

Per l'esistenza della frazione $\frac{1}{x}$ dobbiamo porre il denominatore diverso da 0: $x \neq 0$.

Per l'esistenza della radice quadrata dobbiamo porre il radicando maggiore o uguale a 0.

$$\frac{1}{x} \geq 0, \text{ ossia } x > 0.$$

Pertanto il dominio naturale è:

$$D: x > 0.$$

Determina il dominio naturale delle seguenti funzioni definite in \mathbb{R} .

230 $y = 2x;$

$y = \frac{2}{x};$

$y = 2x + 3;$

$y = \sqrt{2x}.$

231 $y = x;$

$y = \sqrt{x};$

$y = \frac{1}{x+1};$

$y = \frac{5}{x-3}.$

232 $y = x - 1;$

$y = \frac{1}{x-1};$

$y = \frac{1}{x^2-1};$

$y = \frac{1}{(x+1)^2}.$

233 $y = \frac{x}{x+2};$

$y = \frac{x}{x-4};$

$y = \sqrt{\frac{1}{3x}};$

$y = \sqrt{\frac{1}{x-5}}.$

234 $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$;

$$y = \frac{2x}{3-2x};$$

$$y = \frac{x-3}{2};$$

$$y = \frac{2}{x^2}.$$

235 $y = \frac{1}{2x^2 + 5}$;

$$y = \sqrt{\frac{5}{x-1}};$$

$$y = \frac{\sqrt{3x}}{4};$$

$$y = \sqrt{x^2 + 1}.$$

236 $y = \frac{2+x}{x-\frac{x}{2}}$;

$$y = \frac{\sqrt{x-3}}{x+1};$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{x+4};$$

$$y = \frac{2+x}{2-x}.$$

237 $y = 1 - \sqrt{1-x}$;

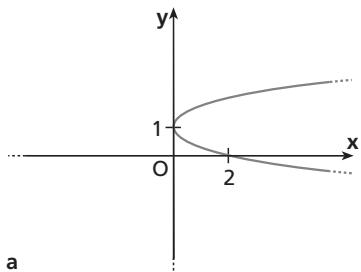
$$y = \frac{3-x}{1-x^2};$$

$$y = \frac{5}{2x};$$

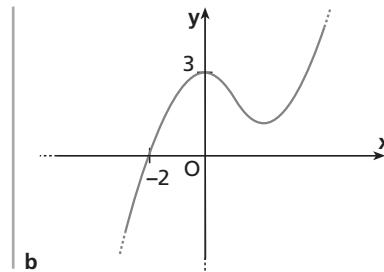
$$y = \sqrt{x+3}.$$

Indica quali dei seguenti sono grafici di funzioni e per essi determina il dominio e il codominio della funzione rappresentata.

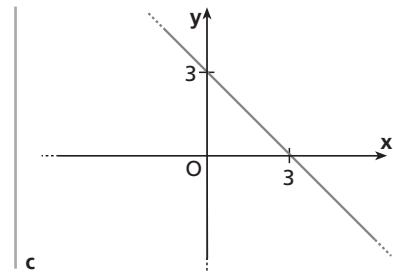
238



a

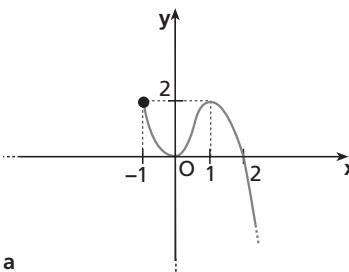


b

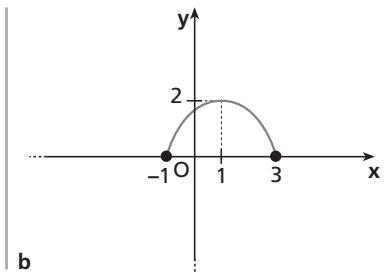


c

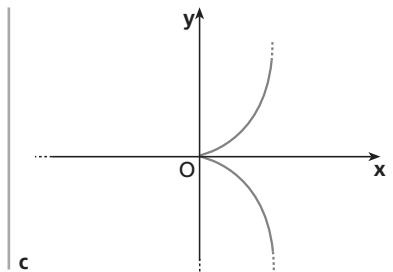
239



a



b

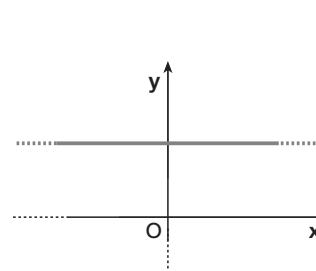


c

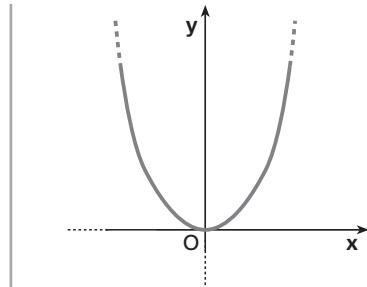
■ Le funzioni numeriche iniettive, suriettive, biettive

240 Ogni grafico rappresenta una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

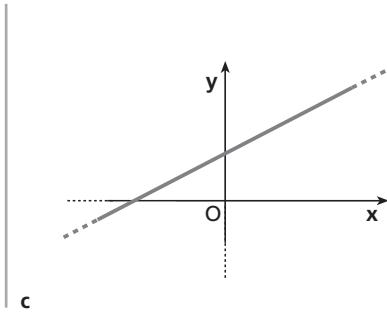
Indica per ognuno se si tratta di una funzione iniettiva, suriettiva, biettiva.



a

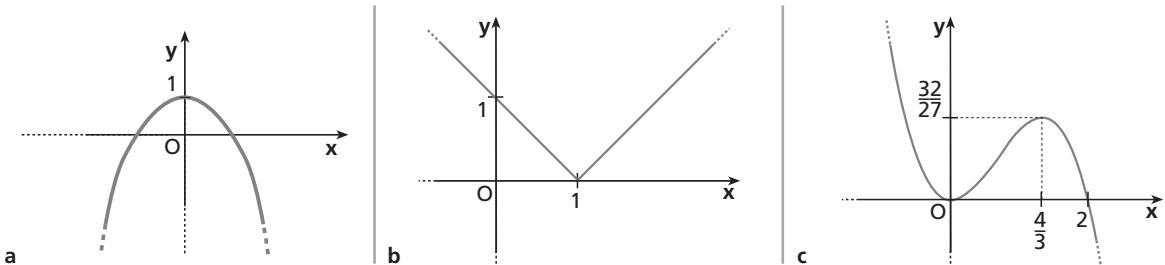


b



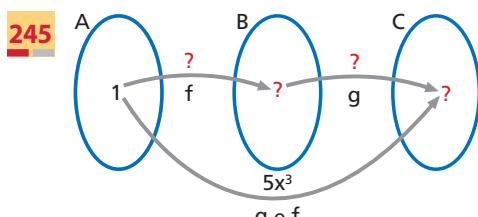
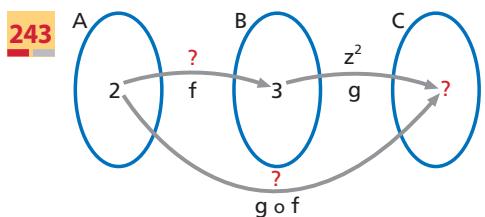
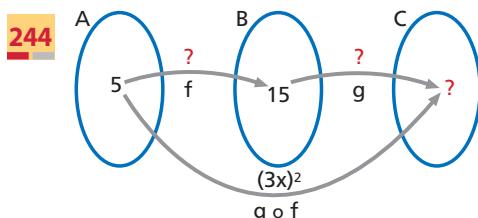
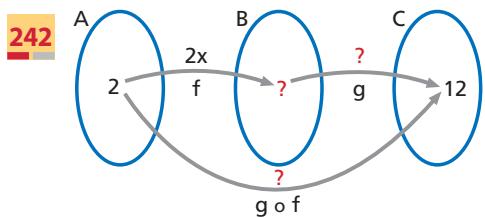
c

241 Per ognuna delle seguenti funzioni, indica quali sottoinsiemi di \mathbb{R} si devono prendere come insieme di arrivo e di partenza se si vuole che la funzione sia biunivoca. C'è una sola soluzione?



■ La composizione di due funzioni numeriche

COMPLETA i seguenti diagrammi.



246 Componi la funzione identità $f: x \mapsto z = x$ con ognuna delle seguenti funzioni $g: z \mapsto y$:

- a) $y = 3z$; c) $y = \frac{1}{2}z + 1$;
 b) $y = 2z^2$; d) $y = z^2 - 1$.

Cosa puoi affermare sulla composizione della funzione identità con un'altra funzione?

247 Componi la funzione f con la sua inversa f^{-1} in ognuno dei seguenti casi:

- a) $f: x \mapsto z = 2x$; b) $f: x \mapsto z = x - 1$;
 $f^{-1}: z \mapsto x = \frac{z}{2}$; $f^{-1}: z \mapsto x = z + 1$.

Cosa puoi affermare sulla composizione $f^{-1} \circ f$?

Date le seguenti funzioni, determina $f \circ g$ e $g \circ f$.

248 $f: x \mapsto 2x$; $g: x \mapsto x^2$.

251 $f: x \mapsto x^2$; $g: x \mapsto x^3$.

249 $f: x \mapsto 2x$; $g: x \mapsto 5x$.

252 $f: x \mapsto x - 3$; $g: x \mapsto \frac{2}{x}$.

250 $f: x \mapsto x + 1$; $g: x \mapsto x^3$.

253 $f: x \mapsto x^3$; $g: x \mapsto \sqrt[3]{x + 1}$.

254

Date le funzioni $f: x \mapsto x + 1$, $g: x \mapsto x + 4$, determina $f(g(3))$ e $g(f(-2))$.

Per ognuna delle seguenti funzioni, cerca due funzioni dalla cui composizione si ottenga la funzione data.

255 $y = 6x^2$; $y = (x + 1)^2$.**256** $y = 5x^2 + 2$; $y = \sqrt{x + 3}$.**257** $y = \frac{x - 3}{2}$; $y = \frac{3}{x - 4}$.

7. Particolari funzioni numeriche

→ Teoria a pag. 239

RIFLETTI SULLA TEORIA

TEST

258

Quale tra le seguenti leggi è una funzione di proporzionalità inversa?

A $y - x = 3$

D $xy = x - 2$

B $y = \frac{1}{5}x$

E $y = \frac{3}{x}$

C $\frac{x}{y} = 4$

259

Fra le seguenti funzioni, una sola è di proporzionalità quadratica. Quale?

A $y = \frac{1}{2}x^2$

D $y = x^3 - x^2$

B $y = \frac{1}{3}x^3$

E $y = \frac{3}{4}x^4 + x^2$

C $y = \frac{1}{x^2}$

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 7 esercizi di recupero



■ La proporzionalità diretta

■ ESERCIZIO GUIDA

260 Consideriamo le seguenti tabelle e stabiliamo se i valori di x e y riportati sono direttamente proporzionali. In caso affermativo, scriviamo la funzione di proporzionalità diretta che lega x e y .

a)

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-3	0	$\frac{3}{2}$	3	6

b)

x	-1	0	2	3	4
y	-1	1	5	7	9

a) Aggiungiamo nella tabella la colonna $\frac{y}{x}$:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-3	0	$\frac{3}{2}$	3	6
$\frac{y}{x}$	3	0	3	3	3

Tranne che per la coppia $(0; 0)$, $\frac{y}{x}$ è uguale al valore costante 3: $\frac{y}{x} = 3$.

D'altra parte, anche la coppia $(0; 0)$ soddisfa l'equazione $y = 3x$. Pertanto, la funzione di proporzionalità relativa alla tabella è $y = 3x$.

b) Dalla tabella osserviamo che:

- l'immagine di 0 è 1 e non 0;
- se si raddoppia il valore di x , passando da 2 a 4, il valore di y non raddoppia, in quanto passa da 5 a 9.

Ognuna di queste osservazioni è sufficiente per affermare che la tabella non è relativa a una funzione di proporzionalità diretta.

Considera le seguenti tabelle e stabilisci se x e y sono direttamente proporzionali. In caso affermativo, scrivi la funzione di proporzionalità diretta che lega x e y .

261	x	y
-2	-8	
-1	-4	
0	0	
1	4	
2	8	

262	x	y
0	0	
1	1	
2	4	
3	9	
4	16	

263	x	y
-2	2	
0	1	
4	5	
6	6	
8	7	

264	x	y
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
2	$\frac{2}{3}$	
$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{9}$	
6	2	

Disegna in un diagramma cartesiano i grafici delle seguenti funzioni di proporzionalità diretta.

265 $y = 3x; y = 4x.$

266 $y = 6x; y = 7x.$

267 $y = \frac{1}{2}x; y = \frac{1}{3}x.$

268 $y = \frac{3}{4}x; y = \frac{2}{5}x.$

■ La proporzionalità inversa

ESERCIZIO GUIDA

269 Consideriamo le seguenti tabelle e stabiliamo se x e y sono inversamente proporzionali. In caso affermativo, scriviamo la funzione di proporzionalità inversa che lega x e y .

a)	x	-3	-1	$\frac{1}{2}$	1	2
	y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$

b)	x	1	2	3	4	5
	y	6	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{25}$

a) Aggiungiamo alla tabella la riga $x \cdot y$:

x	-3	-1	$\frac{1}{2}$	1	2
y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$
$x \cdot y$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

$x \cdot y$ ha valore costante $\frac{3}{2}$, ossia $x \cdot y = \frac{3}{2}$.

b) Dalla tabella osserviamo che:

- il prodotto xy non è costante, per esempio: $1 \cdot 6 \neq 2 \cdot 1$;
- se raddoppia il valore di x , passando da 2 a 4, il corrispondente valore di y non si dimezza, in quanto passa da 1 a $\frac{1}{8}$ e non a $\frac{1}{2}$.

Ognuna delle precedenti osservazioni è sufficiente per affermare che la tabella non è relativa a una funzione di proporzionalità inversa.

Stabilisci se x e y nelle seguenti tabelle sono inversamente proporzionali. In caso affermativo, scrivi la funzione di proporzionalità inversa che lega x e y .

270	x	y
-3	-4	
-2	-6	
1	12	
2	6	
3	4	

271	x	y
-5	$-\frac{2}{5}$	
-4	$-\frac{1}{2}$	
-3	$-\frac{2}{3}$	
-2	-1	
-1	-2	

272	x	y
1	1	
2	$\frac{1}{3}$	
4	$\frac{1}{6}$	
6	$\frac{1}{9}$	

273	x	y
1	$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	

Riconosci, fra le seguenti tabelle, quali possono essere relative a funzioni di proporzionalità diretta o inversa, scrivendo, quando è possibile, la funzione.

274	x	y
1	$\frac{1}{3}$	
3	1	
6	2	

275	x	y
1	$\frac{1}{3}$	
3	$\frac{1}{9}$	
6	$\frac{1}{18}$	

276	x	y
1	$\frac{1}{3}$	
3	3	
6	12	

277	x	y
1	$\frac{1}{3}$	
3	$\frac{1}{27}$	
6	$\frac{1}{108}$	

Disegna in un diagramma cartesiano i grafici delle seguenti funzioni di proporzionalità inversa.

$$\text{278} \quad y = \frac{2}{x}; \quad y = \frac{3}{x}.$$

$$\text{280} \quad y = \frac{3}{2x}; \quad y = \frac{1}{2x}.$$

$$\text{279} \quad y = \frac{4}{x}; \quad y = \frac{6}{x}.$$

$$\text{281} \quad y = \frac{3}{4x}; \quad y = \frac{8}{3x}.$$

■ La funzione lineare

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più



■ ESERCIZIO GUIDA

- 282** Data la tabella, stabiliamo se tra i valori di x e y c'è dipendenza lineare. In caso affermativo, scriviamo la funzione corrispondente e rappresentiamola nel piano cartesiano.

x	-3	-1	0	2	3
y	-3	1	3	7	9

Dato che per $x = 0$ si ha $y = 3$, aggiungiamo nella tabella le righe relative a $y - 3$ e $\frac{y-3}{x-0}$, ossia $\frac{y-3}{x}$:

x	-3	-1	0	2	3
y	-3	1	3	7	9
$y - 3$	-6	-2	0	4	6
$\frac{y-3}{x}$	2	2	2	2	2

Tranne che per la coppia $(0; 3)$, troviamo che $\frac{y-3}{x}$ è uguale al valore costante 2:

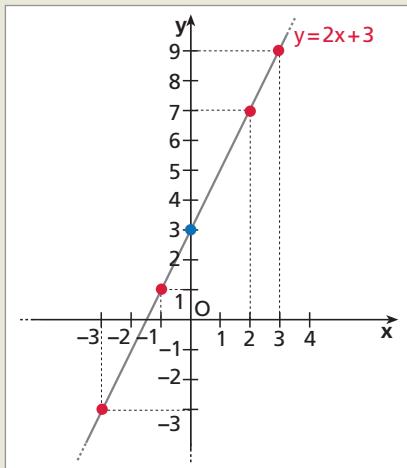
$$\frac{y-3}{x} = 2, \quad x \neq 0,$$

da cui ricaviamo l'espressione della funzione lineare

$$y = 2x + 3,$$

valida per tutte le coppie, compresa $(0; 3)$.

Considerata tale funzione da \mathbb{R} a \mathbb{R} , rappresentiamo nel piano cartesiano il suo grafico, una retta che interseca l'asse y nel punto $(0; 3)$.



Date le seguenti tabelle, stabilisci se tra x e y c'è una dipendenza lineare. In caso affermativo, scrivi la corrispondente funzione e rappresentala nel piano cartesiano.

283	x	y
0	1	
1	2	
2	3	
4	5	
6	7	

284	x	y
-4	6	
-3	5	
-1	3	
0	2	
2	0	

285	x	y
-2	7	
-1	6	
0	5	
3	2	
4	9	

286	x	y
-4	-3	
-2	-2	
0	-1	
1	-\$\frac{1}{2}\$	
4	1	

287	x	y
0	-5	
1	-\$\frac{14}{3}\$	
2	-\$\frac{13}{3}\$	
3	-4	
6	-3	

$$[y = x + 1]$$

$$[y = -x + 2]$$

[no]

$$\left[y = \frac{x}{2} - 1 \right]$$

$$\left[y = \frac{x}{3} - 5 \right]$$

Disegna in un diagramma cartesiano i grafici delle seguenti funzioni lineari.

$$288 \quad y = x - 5; \quad y = -x - 5.$$

$$289 \quad y = 3x + 1; \quad y = -3x + 1.$$

$$290 \quad y = \frac{x}{4} - 3; \quad y = -\frac{2}{3}x + 4.$$

291 Nel mercato economico, la domanda d (quantità richiesta) di un bene dipende dal prezzo p secondo la tabella a lato.

- Rappresenta i dati graficamente.
- Determina l'espressione analitica della funzione che lega le due variabili. Di che tipo di funzione si tratta?
- Calcola, secondo tale funzione, la domanda prevista al prezzo di 40 euro.

PREZZO p (euro) DOMANDA d (numero pezzi)

0	150
15	105
34	48
46	12
50	0

$$[b) d = 150 - 3p; c) 30]$$

■ La proporzionalità quadratica

■ ESERCIZIO GUIDA

- 292** Consideriamo le seguenti tabelle e stabiliamo se tra i valori di x e y c'è proporzionalità quadratica. In caso affermativo, scriviamo la funzione di proporzionalità quadratica che lega x con y .

a)	x	-1	0	1	2	3
	y	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$

b)	x	-1	0	1	2	3	4
	y	4	0	4	8	12	16

- a) Aggiungiamo alla tabella le righe relative a x^2 e $\frac{y}{x^2}$:

x	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$
x^2	1	0	1	4	9
$\frac{y}{x^2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\frac{y}{x^2}$ ha valore costante $\frac{1}{2}$, ossia $\frac{y}{x^2} = \frac{1}{2}$, tranne che per la coppia $(0; 0)$, per la quale non esiste.

D'altra parte, anche tale coppia soddisfa l'ugualanza $y = \frac{1}{2}x^2$. La tabella è relativa alla funzione di proporzionalità quadratica $y = \frac{1}{2}x^2$.

- b) Raddoppiando il valore di x , da 1 a 2, il valore di y , passando da 4 a 8, raddoppia e non quadruplica: la funzione non è di proporzionalità quadratica.

Stabilisci se tra x e y nelle seguenti tabelle c'è proporzionalità quadratica. In caso affermativo, scrivi la funzione di proporzionalità quadratica che lega x e y .

293	x	y
-1	-2	
0	0	
$\frac{1}{2}$	1	
1	2	
3	6	

294	x	y
-1	-2	
0	0	
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
1	2	
3	-18	

295	x	y
-1	-2	
0	0	
$\frac{1}{2}$	1	
2	4	
1	2	
2	16	

296	x	y
-1	$\frac{1}{3}$	
0	0	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{27}$	
3	3	

Disegna in un diagramma cartesiano i grafici delle seguenti funzioni di proporzionalità quadratica.

297 $y = x^2$; $y = 3x^2$.

299 $y = -x^2$; $y = \frac{x^2}{3}$.

298 $y = 4x^2$; $y = 6x^2$.

300 $y = \frac{3x^2}{4}$; $y = \frac{3x^2}{2}$.

■ La funzione valore assoluto

- 301** Per ogni funzione costruisci una tabella con cinque valori di x (positivi, negativi o nulli) e rappresenta il grafico.

a) $y = 2 \cdot |x|$; $y = \frac{1}{2} \cdot |x|$; $y = 3 \cdot |x|$; $y = -2 \cdot |x|$.

b) $y = 1 + |x|$; $y = |x| - 1$; $y = 2 \cdot |x| + 3$; $y = -2 \cdot |x| - 3$.

8. Le funzioni goniometriche

→ Teoria a pag. 243

RIFLETTI SULLA TEORIA

302 VERO O FALSO?

a) Se $\alpha = \frac{9}{4}\pi$, allora $\alpha = 45^\circ$.

V F

b) Se $\alpha = 300^\circ$, allora $\alpha = \frac{5}{3}\pi$.

V F

c) Sulla circonferenza goniometrica gli angoli che misurano 45° e 405° corrispondono allo stesso arco.

V F

d) Sulla circonferenza goniometrica

gli angoli che misurano $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{4}{3}\pi$ corrispondono allo stesso arco.

V F

e) Il dominio naturale della funzione seno è l'insieme dei numeri reali compresi fra -1 e 1 .

V F

f) Il codominio della funzione tangente, considerata nel suo dominio naturale, è \mathbb{R} .

V F

ESERCIZI

■ Gli angoli e le funzioni goniometriche

303 COMPLETA la seguente tabella scrivendo la misura mancante, in gradi o in radianti.

Gradi	90°	0°	180°	30°	270°
Radiani	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$

304 Disegna i seguenti angoli, facendo riferimento alla circonferenza goniometrica.

135° ; 210° ; -180° ; -45° ; 270° ; 390° ; 765° ; -420° ; 450° ; 1200° .

305 Disegna i seguenti angoli, misurati in radianti, facendo riferimento alla circonferenza goniometrica.

$\frac{\pi}{4}$; $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{11}{4}\pi$; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{2}\pi$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{17}{6}\pi$.

Disegna, utilizzando la circonferenza goniometrica, gli angoli a cui corrispondono i seguenti valori.

306 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$

309 $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, $\sin \beta = -\frac{1}{2}$.

307 $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$

310 $\sin \alpha = 1$, $\sin \beta = \frac{1}{2}$, $\cos \gamma = -\frac{1}{4}$.

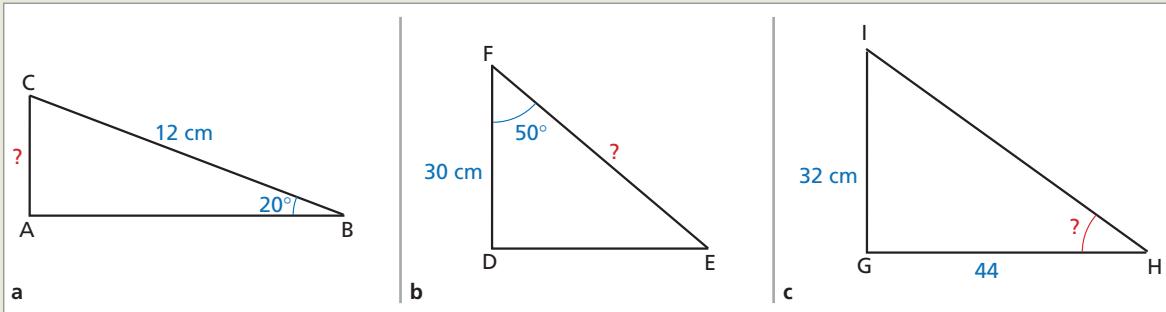
308 $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$

311 $\cos \alpha = -1$, $\sin \beta = -1$, $\cos \gamma = -\frac{1}{2}$.

■ Funzioni goniometriche e triangoli rettangoli

■ ESERCIZIO GUIDA

312 A partire dalle misure indicate nelle figure, determiniamo quelle richieste.



- a) La misura del cateto AC , che indichiamo con \overline{AC} , è uguale a quella dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto:

$$\overline{AC} = \overline{CB} \cdot \sin \hat{B} = 12 \cdot \sin 20^\circ.$$

Con la calcolatrice otteniamo un valore approssimato di $\sin 20^\circ$:

$$\overline{AC} \approx 12 \cdot 0,34 = 4,08.$$

La lunghezza di AC è circa uguale a 4,1 cm.

- b) La misura del cateto FD è uguale a quella dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente:

$$\overline{FD} = \overline{FE} \cdot \cos \hat{F}.$$

Per determinare \overline{FE} , dividiamo i due membri dell'uguaglianza per $\cos \hat{F}$ e otteniamo:

$$\frac{\overline{FD}}{\cos \hat{F}} = \frac{\overline{FE}}{\cos \hat{F}} \rightarrow \frac{\overline{FD}}{\cos \hat{F}} = \frac{\overline{FE}}{\cos \hat{F}}.$$

Sostituendo i valori noti e utilizzando la calcolatrice per conoscere il valore del coseno, otteniamo la misura di FE .

$$\overline{FE} = \frac{30}{\cos 50^\circ} \approx \frac{30}{0,64} \approx 46,9.$$

La lunghezza di FE è circa uguale a 46,9 cm.

- c) La misura del cateto GI , opposto all'angolo \hat{H} , è uguale a quella del cateto GH , adiacente a \hat{H} , per la tangente dell'angolo \hat{H} :

$$\overline{GI} = \overline{GH} \cdot \tan \hat{H}.$$

Dividiamo i due membri dell'uguaglianza per \overline{GH} :

$$\frac{\overline{GI}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{GH} \cdot \tan \hat{H}}{\overline{GH}} \rightarrow \frac{\overline{GI}}{\overline{GH}} = \tan \hat{H}.$$

Sostituendo i valori noti, calcolando il quoziente:

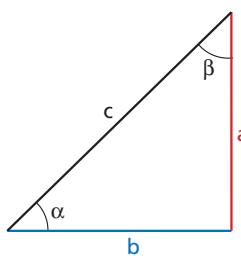
$$\tan \hat{H} = \frac{32}{44} \approx 0,7272.$$

Utilizziamo nella calcolatrice la funzione inversa della tangente (può essere indicata, per esempio, con \tan^{-1} oppure con atan):

$$\hat{H} \approx 36^\circ.$$

L'angolo \hat{H} misura circa 36°.

Con riferimento alla figura, utilizzando le misure date determina quelle incognite. (Le misure di lunghezza sono riferite al centimetro.)



313 $c = 38, \beta = 46^\circ; a = ?, b = ?.$

[26,4; 27,3]

314 $b = 18, \alpha = 27^\circ; a = ?, c = ?.$

[9,2; 20,2]

315 $b = 7, c = 10; \alpha = ?.$

[45,6°]

316 $a = 36, \alpha = 22^\circ; b = ?, c = ?.$

[89,1; 96,1]

317 $a = 36, c = 55; \alpha = ?.$

[40,9°]

318 $a = 12, b = 20; c = ?, \beta = ?.$

[23,3; 59°]

LABORATORIO DI MATEMATICA

Le funzioni numeriche con Excel

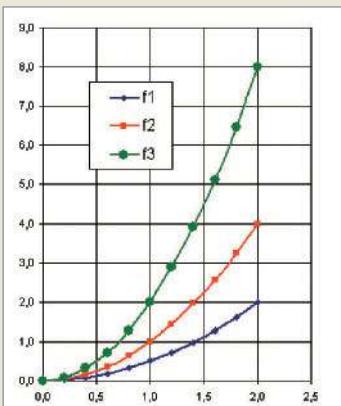
ESERCITAZIONE GUIDATA

Per esaminare alcune caratteristiche della funzione $y = kx^2$, con $k \in \mathbb{R}$, costruiamo con Excel un foglio elettronico che

- permetta di inserire tre valori per il coefficiente k ,
- chieda gli estremi di variazione di x ,
- mostri nel medesimo riferimento cartesiano i grafici delle tre funzioni corrispondenti ai valori assegnati di k .

- Scriviamo le indicazioni per inserire i dati come in figura 1.
- Prepariamo una tabella. Per i valori di x , digitiamo $= (B11-B10)/10$ in C13 (l'incremento di x), $= B10$ in A16, $= A16+C$13$ in A17 e la copiamo sino alla A26.
- Per i valori delle tre funzioni digitiamo in B16, in C16 e in D16 rispettivamente $= B\$5*A16^2$, $= B\$6*A16^2$ e $= B\$7*A16^2$ e copiamo la zona B16:D16 sino alla riga 26.
- Assegniamo a k i valori 0,5, 1 e 2 e scegliamo per la variazione di x l'intervallo [0; 2].
- Evidenziamo la zona A15:D26 e usiamo gli strumenti grafici di Excel per ottenere il grafico di figura 2.

A	B	C	D	
1	La funzione $f: R_0^+ \rightarrow R$, $x \rightarrow k \cdot x^2$ con $k \in R$			
2				
3	Assegniamo tre valori al coefficiente di proporzionalità k :			
5	$k =$	0,50		
6	$k =$	1,00		
7	$k =$	2,00		
8				
10	$x_1 =$	0,00		
11	$x_2 =$	2,00		
12				
13	L'incremento di $x =$	0,20		
14				
15	x	f1	f2	f3
16	0,00	0,00	0,00	0,00
17	0,20	0,02	0,04	0,08
18	0,40	0,08	0,16	0,32
19	0,60	0,18	0,36	0,72
20	0,80	0,32	0,64	1,28
21	1,00	0,50	1,00	2,00
22	1,20	0,72	1,44	2,88
23	1,40	0,98	1,96	3,92
24	1,60	1,28	2,56	5,12
25	1,80	1,62	3,24	6,48
26	2,00	2,00	4,00	8,00



▲ Figura 2

▲ Figura 1

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 12 esercitazioni in più



Esercitazioni

Per ognuna delle seguenti funzioni, con $k \in \mathbb{R}$, opera in modo simile all'esercitazione guidata.

1 $y = kx$

2 $y = \frac{k}{x}$

3 $y = kx + 3$

4 $y = kx^2 - 4$

5 $y = \frac{1}{2}x + k$

6 $y = \frac{k}{x-2}$

Matematica per il cittadino

ALBERO GENEALOGICO

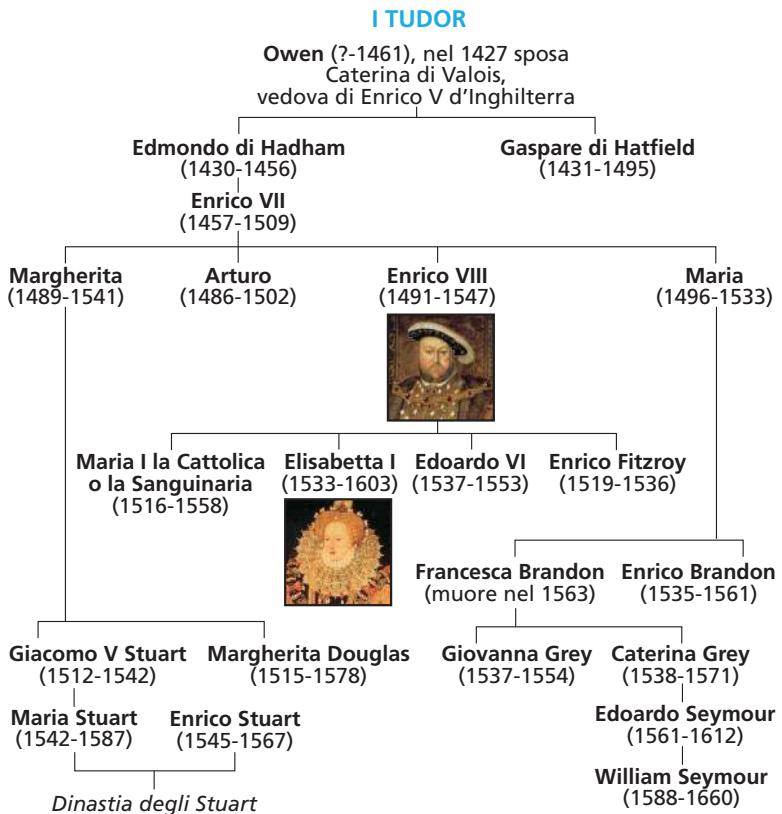
L'albero genealogico è una rappresentazione grafica delle relazioni tra i membri di una famiglia. Quello riportato a lato si riferisce a un'importante famiglia che ha regnato in Inghilterra tra il XV e il XVI secolo.

1. Rispondi alle seguenti domande.

- Chi era il nonno della regina Elisabetta I?
- Quanti figli ha avuto Enrico VII, e quanti nipoti?
- Chi è il bisnonno di Francesca Brandon?
- Che relazione di parentela c'è tra Giacomo V Stuart ed Edoardo VI?
- Che relazione di parentela c'è tra Margherita Douglas ed Enrico VIII?
- Che relazione di parentela c'è tra Enrico Stuart e Maria Stuart?

2. Osservando l'albero genealogico, stabilisci quanti sono i genitori e quanti i nonni.

3. COMPLETA la tabella con delle crocette, valutando le seguenti relazioni. Considera che in questo contesto per «fratelli» si intendono persone (maschi o femmine) che hanno gli stessi genitori e che per «parenti» non si considerano quelli acquisiti con il matrimonio.



4. COMPLETA la tabella con delle crocette, valutando le seguenti relazioni.

RELAZIONE	RELAZIONE D'ORDINE PARZIALE	RELAZIONE D'ORDINE TOTALE
fratelli		
cugini		
genitori		
discendenti		
parenti		

5. Nelle relazioni di equivalenza che hai identificato nella risposta 3, quali sono le classi di equivalenza?

Verifiche di fine capitolo

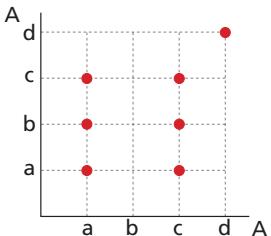
TEST

Nel sito: ► questi test interattivi ► 30 test interattivi in più



1

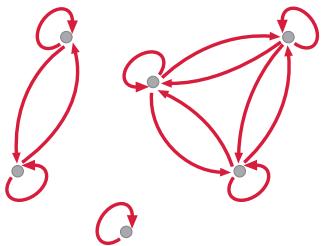
Della relazione rappresentata in figura possiamo dire che:



- [A] è antiriflessiva.
- [B] è riflessiva e simmetrica.
- [C] non è riflessiva e non è simmetrica.
- [D] è solo simmetrica.
- [E] è solo riflessiva.

2

La relazione illustrata dal seguente grafo è:



- [A] di ordine totale.
- [B] di ordine largo.
- [C] di ordine stretto.
- [D] di equivalenza.
- [E] solo riflessiva.

3

Quale delle relazioni seguenti definite su un insieme di persone è di equivalenza?

- [A] « x è più basso di y ».
- [B] « x è alto come y ».
- [C] « x è più alto di y ».
- [D] « x è meno basso di y ».
- [E] « x è meno alto di y ».

4

Il dominio della funzione $f(x) = \frac{x-5}{x+1}$ definita da \mathbb{R} in \mathbb{R} è dato da:

- [A] $x \neq 5$.
- [B] $x \neq -1 \wedge x \neq 5$.
- [C] $x \neq -1$.
- [D] $x \neq -1 \vee x \neq 5$.
- [E] \mathbb{R} .

5

Considera le seguenti funzioni da \mathbb{Z} in \mathbb{Z} :

$$f(x) = 3x; \quad g(x) = x + 5.$$

La funzione composta $f \circ g$ è data da:

- [A] $f(g(x)) = 3x + 5$.
- [B] $f(g(x)) = 3x + 15$.
- [C] $f(g(x)) = 15x$.
- [D] $f(g(x)) = 4x + 5$.
- [E] nessuna delle precedenti.

6

Considera la funzione da \mathbb{Q} in \mathbb{Q} :

$$f(x) = 8 - x.$$

La funzione composta $f \circ f$ è data da:

- [A] $f(f(x)) = x$.
- [B] $f(f(x)) = 8 - 2x$.
- [C] $f(f(x)) = 16 - x$.
- [D] $f(f(x)) = 16 - 2x$.
- [E] $f(f(x)) = (8 - x)^2$.

7

Considera la seguente tabella associata a una funzione numerica $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

x	2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
y	4	9	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

La funzione f potrebbe essere di proporzionalità:

- [A] diretta.
- [B] inversa.
- [C] diretta e inversa.
- [D] quadratica.
- [E] nessuna delle precedenti.

SPIEGA PERCHÉ

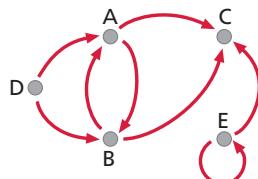
- 8** Dimostra che, se una relazione \mathcal{R} è riflessiva o simmetrica, allora il suo dominio coincide con il suo codominio.
- 9** Date due funzioni f e g , è sempre possibile trovare $f \circ g$? Motiva la risposta.
- 10** Spiega perché le potenze pari $y = x^{2n}$ ($n = 1, 2, \dots$) definite in \mathbb{R} non sono invertibili, mentre le potenze dispari $y = x^{2n+1}$ lo sono.
- 11** Spiega perché le funzioni definite in \mathbb{R} , $y = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x}}$ e $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, hanno lo stesso dominio naturale.

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 27 esercizi in più

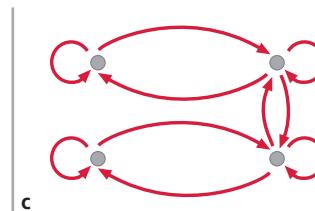
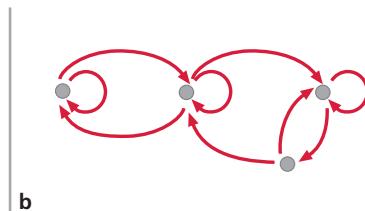
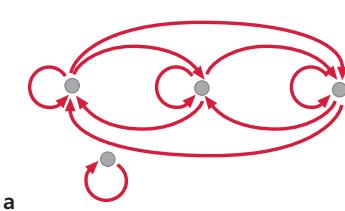


- 12** Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq 7\}$, per ognuna delle seguenti relazioni \mathcal{R} in $A \times B$ dai la rappresentazione sagittale, scrivi le coppie, il dominio e il codominio. Determina poi la relazione inversa e scrivi le coppie, il dominio e il codominio di \mathcal{R}^{-1} .
- a) $\{(x; y) \mid x + y = 9\}$; b) $\{(x; y) \mid xy \leq 20\}$.
- 13** Scrivi le proprietà delle seguenti relazioni definite nell'insieme dei segmenti di un piano.
- a) « a è congruente a b ». b) « a è consecutivo a b ». c) « a è doppio di b ».
- 14** In figura è rappresentata una relazione mediante un grafo.
- a) Completa il grafo, aggiungendo opportune frecce, in modo che la relazione descritta risulti riflessiva.
- b) Ricopia la figura originale e completa il grafo in modo che la relazione descritta risulti simmetrica.
- c) Ricopia nuovamente la figura originale e completa il grafo in modo che la relazione descritta risulti transitiva.



Determina se le relazioni seguenti godono delle proprietà: riflessiva, simmetrica, transitiva, antiriflessiva, antisimmetrica.

- 15** Se P è l'insieme dei poligoni del piano, « x ha lo stesso numero di lati di y » con $(x; y) \in P \times P$.
[riflessiva, transitiva, simmetrica]
- 16** «La somma di x con y è uguale a 7», con $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
[antiriflessiva, simmetrica]
- 17** Stabilisci quale fra i seguenti grafi rappresenta una relazione di equivalenza.



[a]

18

Rappresenta con un diagramma a frecce la relazione binaria data dalla seguente tabella e scrivi le coppie in relazione.

A	B	3	5	7	9
1	X	X	X	X	
2		X			X
3				X	
4			X		
5	X				X

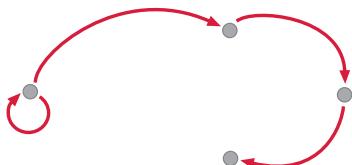
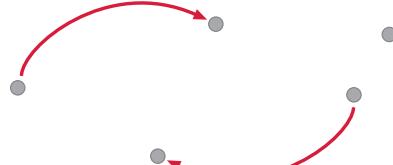
19

Dato l'insieme $A = \{1, 2, 4, 5, 6, 12\}$, dai la rappresentazione cartesiana di ognuna delle relazioni in $A \times A$ definite qui di seguito e determina di ciascuna dominio e codominio.

- « x è divisore di y », con $(x; y) \in A \times A$.
- « x è multiplo di y », con $(x; y) \in A \times A$.
- «la somma di x e y è 6», con $(x; y) \in A \times A$.

20

COMPLETA i seguenti due grafi in modo da ottenere, nel primo caso, una relazione di ordine largo e, nel secondo caso, una relazione di ordine stretto totale.

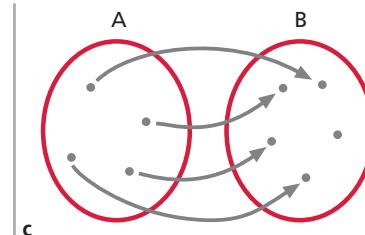
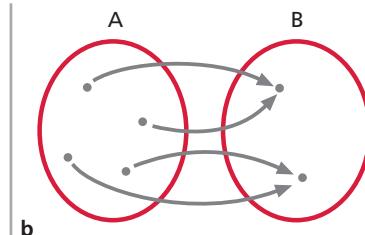
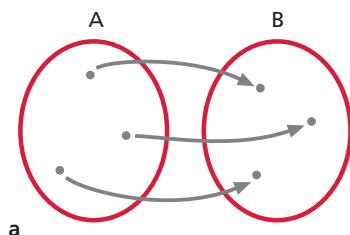
a**b****21**

Rappresenta con un diagramma a frecce ognuna delle seguenti relazioni \mathcal{R} , definite in $A \times B$, e stabilisci se \mathcal{R} è una funzione. Motiva la risposta.

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|--|
| a) $A = \{x, y, z\}$, | $B = \{1, 3, 5, 7\}$, | $\mathcal{R} = \{(x; 2), (z; 5), (y; 7), (x; 1)\}$. |
| b) $A = \{a, b, c, d\}$, | $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, | $\mathcal{R} = \{(a; 2), (b; 5), (d; 4), (c; 5)\}$. |
| c) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, | $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, | $\mathcal{R} = \{(1; 3), (2; 4), (4; 1)\}$. |
| d) $A = \{u, v, w\}$, | $B = \{a, e, i, o, u\}$, | $\mathcal{R} = \{(u; a), (v; i), (w; a), (w; u)\}$. |
| e) $A = \{1, 2, 3\}$, | $B = \{0, 10\}$, | $\mathcal{R} = \{(1; 0), (2; 10), (3; 10)\}$. |
| f) $A = \{0, 1, 2, 3\}$, | $B = \{-3, -2, -1\}$, | $\mathcal{R} = \{(1; -1), (2; -2), (3; -3)\}$. |

22

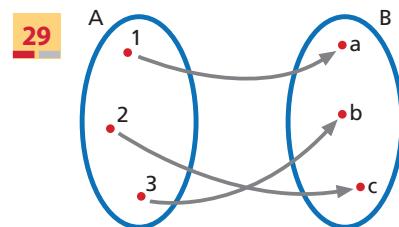
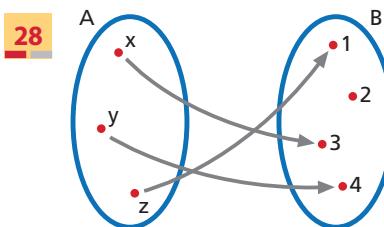
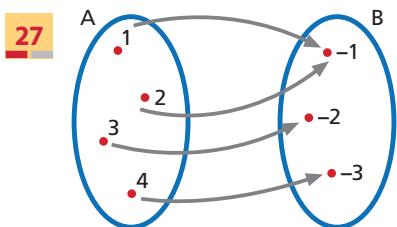
Sono date le funzioni rappresentate dai seguenti diagrammi sagittali.



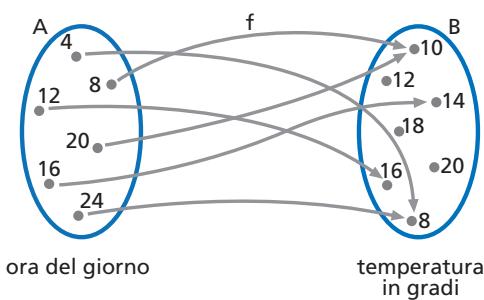
- Stabilisci se tali funzioni sono suriettive. In caso contrario, fai il numero minimo di correzioni, aggiungendo o togliendo frecce o elementi, in modo da ottenere funzioni diverse ma suriettive.
- Come al punto a), sostituendo la parola «suriettive» con la parola «iniettive».

- 23** Le due funzioni $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$ e $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$ sono la stessa funzione? Sono entrambe iniettive?
- 24** Esiste la funzione $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tale che $f(x) = \frac{1}{x}$?
- 25** La funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto 3x$ ammette l'inversa?
- 26** Qual è la funzione inversa della funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 4x - 3$?

Stabilisci se le seguenti funzioni sono iniettive, suriettive o biiettive.



- 30** È data la funzione f rappresentata in figura. Scrivi il legame fra gli elementi di A e gli elementi di B mediante scritture del tipo: $y = f(x)$, con $x \in A$ e $y \in B$.



- 31** Per ogni funzione costruisci una tabella con cinque valori e rappresentane il grafico.
- a) $y = 5x$; $y = -3x$.
 b) $y = x^2 + 3$; $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$.
 c) $y = |x| + 3$; $y = |x| \cdot x$.

- 32** Disegna il grafico delle seguenti funzioni.
- a) $y = 5$; $y = 2x$.
 b) $y = 2x - 2$; $y = \frac{8}{x}$.
 c) $y = -2x + 1$; $y = \frac{1}{2}x^2$.

- 33** Traccia il grafico della funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x) = x - 3$. Completa le seguenti uguaglianze, scrivendo il valore mancante al posto dei puntini.

$$\dots = f(0); \quad \dots = f(-1); \quad 5 = f(\dots); \quad -11 = f(\dots).$$

- 34** Traccia il grafico della funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ e stabilisci se è suriettiva, iniettiva, biiettiva. Motiva la risposta.

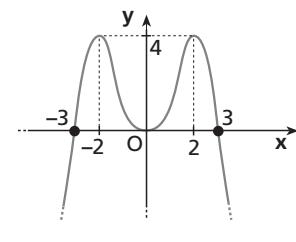
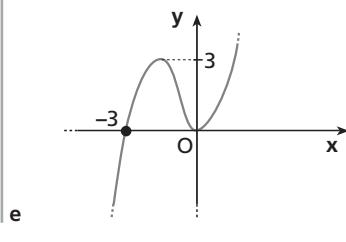
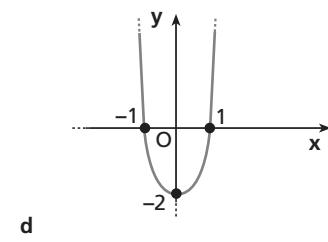
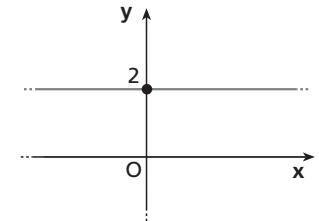
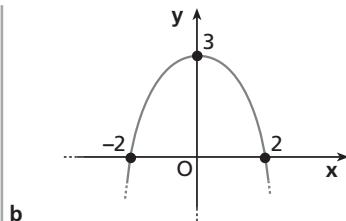
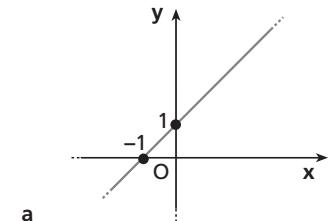
- 35** Traccia il grafico della funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x) = -x^2 + 2$. Completa le seguenti uguaglianze, scrivendo i valori mancanti al posto dei puntini:

$$\dots = f(0); \quad \dots = f(-1); \quad -7 = f(\dots).$$

Stabilisci inoltre se la funzione è suriettiva, iniettiva o biiettiva, motivando la risposta.

36

Per ognuna delle seguenti funzioni indica quale sottoinsieme di \mathbb{R} si deve prendere come insieme di arrivo se si vuole che la funzione sia suriettiva.



Disegna il grafico delle seguenti funzioni.

37 $y = 2x - 1$

38 $y = \frac{3}{x}$

39 $y = \frac{1}{4}x^2$

40 Determina il dominio naturale delle seguenti funzioni.

a) $y = 4$; $y = 2x - 1$.

b) $y = \frac{1}{x+3}$; $y = \frac{1-x}{(x-1)(x-2)}$.

c) $y = \frac{1}{x^2+4}$; $y = \sqrt{x+2}$.

42 Disegna il grafico delle seguenti funzioni.

a) $y = 2x - 3$; $y = -5$.

b) $y = x^2 + 2$; $y = -2x^2 + 2$.

c) $y = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$

41 Determina il dominio naturale delle seguenti funzioni.

a) $y = 12$; $y = \frac{3}{x-6}$.

b) $y = x^2 + 2$; $y = \sqrt{x+4}$.

c) $y = 2x + 5$; $y = \frac{5}{x+2}$.

43 Per ogni coppia di funzioni f e g determina $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$.

a) $f: x \mapsto 5x$; $g: x \mapsto x^2$.

b) $f: x \mapsto x - 3$; $g: x \mapsto \frac{2}{x}$.

c) $f: x \mapsto x^3$; $g: x \mapsto \sqrt{x+1}$.

44 Per ognuna delle funzioni dell'esercizio 42, scegli due sottoinsiemi A e B di \mathbb{R} in modo che la funzione da A a B sia biiettiva.

45 Disegna il grafico delle seguenti funzioni e verifica che siano biiettive. Traccia poi il grafico delle loro funzioni inverse.

a) $y = 5x$; $y = 2x - 1$.

b) $y = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Disegna il grafico delle seguenti funzioni e stabilisci se sono biiettive.

Traccia poi il grafico delle loro funzioni inverse dopo aver eventualmente modificato il loro dominio per renderle invertibili.

46 $y = \frac{x}{4};$

$$y = 3x + 1.$$

48 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4};$

$$y = \frac{1}{3}x - 1.$$

47 $y = x + 2;$

$$y = x^2 + 2.$$

49 $y = 1 - x^2;$

$$y = \frac{1}{3}x^2 - 1.$$

50 Scrivi l'espressione analitica della funzione inversa $y = f^{-1}(x)$ della funzione $y = f(x) = 3x + 1$. Quanto vale $f^{-1}(0)$?

51 Traccia il grafico di una funzione che abbia come dominio $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, come codominio $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$ e non sia iniettiva.

52 Traccia il grafico di una funzione che abbia come dominio $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 7\}$, come codominio $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 4\}$ e sia iniettiva.

53 Per ogni coppia di funzioni f e g determina $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ e $g \circ g$.

a) $f: x \mapsto 3x; \quad g: x \mapsto x^3.$ b) $f: x \mapsto x + 2; \quad g: x \mapsto x - 3.$ c) $f: x \mapsto |x|; \quad g: x \mapsto x + 1.$

Per ognuna delle seguenti funzioni, cerca due funzioni dalla cui composizione si ottenga la funzione data.

54 $y = (x - 1)^3$

56 $y = \sqrt{3x + 1}$

58 $y = \frac{2}{x + 1}$

55 $y = 2x - 3$

57 $y = \sqrt{\frac{1}{x}}$

59 $y = \left(\frac{7}{x - 3}\right)^2$

60 Considera la seguente tabella e stabilisci se x e y sono direttamente o inversamente proporzionali. In caso affermativo, scrivi la funzione di proporzionalità che lega x e y .

x	-4	-2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	3
y	-3	-6	36	24	4

61 Considera le seguenti tabelle e stabilisci se tra x e y c'è proporzionalità quadratica. In caso affermativo, scrivi la funzione di proporzionalità quadratica che lega x e y .

a)

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$

b)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1
y	-20	-5	0	$\frac{5}{4}$	5

62 Disegna il grafico delle seguenti funzioni.

a) $y = x + 1; \quad y = |x + 1|.$ b) $y = 2 + x; \quad y = 2 + |x|.$ c) $y = x^2 - 4; \quad y = |x^2 - 4|.$

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 7 esercizi in più



- 63** Una centralina di controllo della qualità dell'aria ha rilevato queste concentrazioni di polveri (esprese in microgrammi al metro cubo) in una settimana di maggio: $45 \mu\text{g}/\text{m}^3$ lunedì, martedì e sabato; $80 \mu\text{g}/\text{m}^3$ mercoledì e giovedì; $70 \mu\text{g}/\text{m}^3$ venerdì e $55 \mu\text{g}/\text{m}^3$ domenica. Rappresenta graficamente la relazione fra i giorni della settimana e le concentrazioni di polveri e, viceversa, fra le concentrazioni di polveri e i giorni della settimana. Sono entrambe funzioni? Motiva la risposta. [la prima sì, la seconda no]

- 64** Sono dati due insiemi, A e B , entrambi sottoinsiemi di \mathbb{N} , e una funzione $f: A \rightarrow B$.
Le coppie della funzione sono $(2; 3)$, $(3; 5)$, $(a; 13)$, $(9; 17)$, $(10; b)$.
Determina la legge che descrive la funzione f e calcola i valori di a e di b . $[f(x) = 2x - 1; a = 7; b = 19]$

- 65** Sono dati l'insieme $A = \{2, h, 4, k, 12\}$ e la funzione $f: x \mapsto x^2 + 1$.
Se il codominio della funzione è $B = \{5, 10, 17, 82, 145\}$, quali devono essere i valori di h e di k in \mathbb{N} , affinché A sia il dominio di f ? [3; 9]

- 66** **TEST** La grandezza x è inversamente proporzionale al quadrato di y . È noto che se $x = 10$, allora $y = 2$. Quale valore di x corrisponde a $y = 1$?

- A** 5 **B** 20 **C** 40 **D** $\frac{1}{5}$ **E** $\frac{1}{10}$

(Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede, 1994)

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 6 esercizi in più



- 67** Suppose $f(x) = 2x^5 + 7x^3 + x - 5$, and let $g(x)$ be the inverse of $f(x)$. Find a value of x for which $g(x) = 1$. [5]

(USA Bay Area Math Meet, BAMM, Bowl Sampler, 1995)

- 68** **TEST** Suppose that $f(x) = ax + b$, where a and b are real numbers. Given that $f(f(f(x))) = 8x + 21$, what is the value of $a + b$?

- A** 2 **D** 5
B 3 **E** 6
C 4

(USA North Carolina State High School Mathematics Contest, 2004)

- 69** **TEST** Find, if possible, the inverse of $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$.
A $\frac{6x+2}{x-1}$, $x \neq 1$. **D** $\frac{6x-2}{x+2}$, $x \neq -2$.
B $\frac{3x-2}{x+2}$, $x \neq -2$. **E** No inverse exists.
C $\frac{3x+2}{x-1}$, $x \neq 1$.

(USA North Carolina State High School Mathematics Contest, 2003)

- 70** **TEST** If y varies inversely as x , and $y = 15$ when $x = 8$, find y when $x = 20$.

- A** $\frac{2}{75}$ **B** $\frac{1}{6}$ **C** 6 **D** $\frac{32}{3}$ **E** $\frac{75}{2}$

(USA Tennessee Mathematics Teachers Association: 39th Annual Mathematics Contest, 1995)

- 71** Find $f(f(f(f(\dots f(10)\dots))))$, where the above expression contains 97 f s and $f(x) = \frac{5}{x}$. [$\frac{1}{2}$]

(USA Bay Area Math Meet, BAMM, Bowl Sampler, 1997)

- 72** The function f is defined by $f: x \mapsto 4x - 5$, $x \in \mathbb{R}$. Find $f(3)$. Hence find the value of k for which $k \cdot f(3) = f(10)$. [7; k = 5]

(IR Leaving Certificate Examination, Ordinary Level, 1994)

- 73** A function $f(x)$ has the following properties:

- a) $f(1) = 1$;
b) $f(2x) = 4f(x) + 6$;
c) $f(x+2) = f(x) + 12x + 12$.

Calculate $f(6)$. [106]

(CAN Canadian Open Mathematics Challenge, 2004)

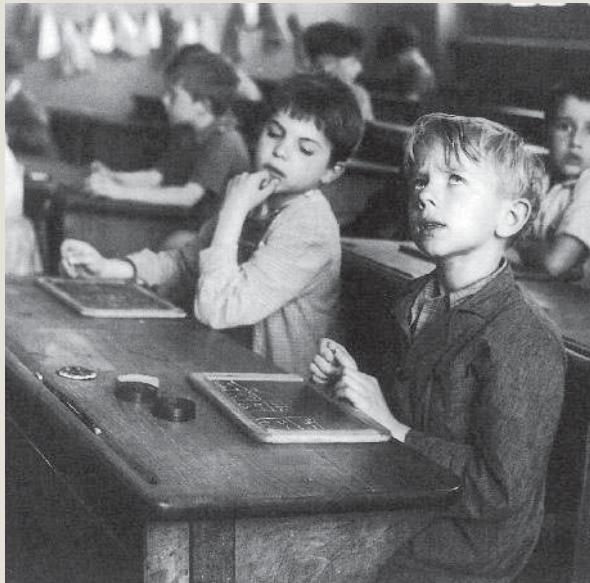
GLOSSARY

expression: espressione
hence: quindi, inoltre

inverse: inverso
to suppose: supporre

value: valore
to vary: variare

I monomi e i polinomi



Calcolatrici

Un tempo erano enormi, rumorose e pesanti. Oggi tutti ne hanno almeno una portatile. Ma a volte capita che non si trovi proprio quando serve e allora si devono fare i conti a mente. E anche quando si ha, conviene saper controllare i risultati che si ottengono...

...come si può calcolare a mente 63^2 ?

→ La risposta a pag. 318

1. Che cosa sono i monomi

I *monomi* sono le espressioni letterali più semplici. Li troviamo spesso in leggi matematiche, fisiche o economiche che legano grandezze di tipo diverso.

Per esempio, se indichiamo con b la base di un triangolo e con h la sua altezza, la sua area A è data dalla formula $A = \frac{1}{2}bh$. Il prodotto $\frac{1}{2}bh$ è un monomio.

DEFINIZIONE

Monomio

Un monomio è un'espressione letterale in cui, fra le lettere, compaiono solo moltiplicazioni e potenze. Gli esponenti delle lettere sono numeri naturali.

La parola **monomio** deriva dall'unione del prefisso greco *mónos*, che significa «unico», e della parola latina *nomen*, che significa «nome», «termine». Vuole dire dunque «formato da un solo termine».

$3a^5b^3$ è un monomio

$3a^5 + b^3$ non è un monomio

ESEMPIO

Sono monomi:

$$2aba^3, \quad \frac{1}{2}a^6, \quad -bx^2b^2, \quad -3x^2y^5y, \quad \left(5 + \frac{3}{4}\right)a.$$

ESEMPIO

Non sono monomi:

$$3 \frac{x}{y}, \quad 2(a+b), \quad 4a^3 - b^2, \quad \frac{x-y}{2a}.$$

Monomi particolari

Qualunque numero può essere considerato un monomio.

Per esempio, possiamo scrivere il numero 7 anche in tanti altri modi: $7a^0$ (con $a \neq 0$), $7b^0$ (con $b \neq 0$), $7a^0b^0x^0$ (con $a, b, x \neq 0$), ... Quindi 7 è un monomio.

In particolare, 0 è il **monomio nullo**.

La riduzione di un monomio a forma normale**DEFINIZIONE****Forma normale**

Un monomio è ridotto a forma normale quando è scritto come prodotto fra un numero e una o più lettere, diverse fra loro, con eventuali esponenti.

$6x^4y^6$ è ridotto a forma normale

$6x^3y^6$ non è ridotto a forma normale

► Sono monomi ridotti a forma normale:

$$\frac{4}{3}a^2b, \quad -3xz^4, \quad a^3b^4.$$

I monomi $6a^3ab$ e $12a^2b^3(-2)a^3$ non sono ridotti a forma normale.

Per ridurre a forma normale un monomio, si applicano le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione e la prima proprietà delle potenze.

ESEMPIO

Riduciamo a forma normale il monomio $2ab^23b^3a^2$:

$$2ab^23b^3a^2 =$$

Applichiamo la proprietà commutativa della moltiplicazione:

$$= 2 \cdot 3aa^2b^2b^3 =$$

Applichiamo la proprietà associativa della moltiplicazione:

$$= (2 \cdot 3)(aa^2)(b^2b^3) =$$

Calcoliamo il prodotto dei numeri e applichiamo la prima proprietà delle potenze:

$$= 6a^3b^5.$$

► Prima proprietà delle potenze:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

► D'ora in poi, parlando di monomi, intenderemo monomi ridotti a forma normale.

DEFINIZIONE**Coefficiente e parte letterale**

In un monomio ridotto a forma normale, il fattore numerico è il coefficiente, le lettere sono la parte letterale.

6 a⁸bc² —— parte letterale
coefficiente

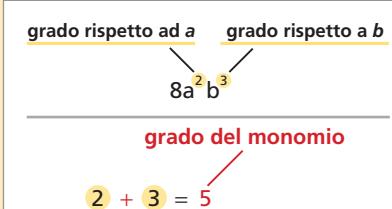
ESEMPIO

MONOMIO	COEFFICIENTE	PARTE LETTERALE
$\frac{4}{3}a^2b$	$\frac{4}{3}$	a^2b
a^3b^2	1	a^3b^2
2	2	qualunque lettera con esponente 0
$-xz^4$	-1	xz^4

- Se il coefficiente di un monomio è uguale a 1 o a -1, il numero 1 non si scrive e viene sottinteso.

■ Il grado di un monomio**DEFINIZIONE****Grado**

Il *grado* di un monomio è la somma di tutti gli esponenti delle lettere. L'esponente con cui compare ogni lettera è detto *grado rispetto alla lettera*.

**ESEMPIO**

MONOMIO	GRADO	GRADO RISPETTO AD <i>a</i>	GRADO RISPETTO A <i>b</i>
$\frac{4}{3}a^2b$	3	2	1
$-a^4$	4	4	0
b	1	0	1
10	0	0	0
0	nessuno	nessuno	nessuno

- Se un monomio è costituito soltanto da un numero, il suo grado è 0. Per esempio, 8 è un monomio di grado 0. Al monomio nullo non si attribuisce alcun grado.

2. Le operazioni con i monomi**■ L'addizione e la sottrazione di monomi**

Consideriamo l'addizione:

$$2a^2 + 5a^2.$$

Se raccogliamo a fattore comune a^2 , otteniamo:

$$(2 + 5)a^2 = 7a^2.$$

Il risultato è un monomio.

Invece, l'addizione

$$2a^2 + 5a$$

non può essere semplificata in modo che il risultato sia un monomio.



BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V06a



Si ottiene un monomio solo quando i monomi addendi hanno la stessa parte letterale.

DEFINIZIONE

Monomi simili

Monomi che hanno la stessa parte letterale si dicono simili.

$3a^5$ e $4a^5$ sono simili

$3a^5$ e $5a^4$ non sono simili

- Anche per i monomi, come per i numeri relativi, le operazioni di addizione e sottrazione possono essere indicate sinteticamente con *addizione algebrica* e il loro risultato con *somma algebrica*.

ESEMPIO

$$4a^2b + 6a^2b - 8a^2b =$$

Raccogliamo la parte letterale a fattore comune:

$$= (4 + 6 - 8)a^2b =$$

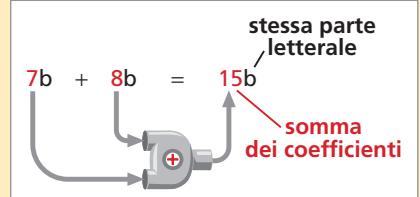
Calcoliamo la somma algebrica dei coefficienti:

$$= 2a^2b.$$

REGOLA

Somma di monomi simili

La somma algebrica di due o più monomi simili è un monomio simile a quelli dati, che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.



- Per esempio, $2a$ e $-2a$ sono monomi opposti.

Due monomi simili sono **opposti** se sono opposti i loro coefficienti. La somma di due monomi opposti è 0.

ESEMPIO

$$5ab + (-5ab) = 5ab - 5ab = (5 - 5)ab = 0.$$

La moltiplicazione di monomi

Consideriamo la moltiplicazione fra monomi:

$$2a^2 \cdot 7a^3.$$

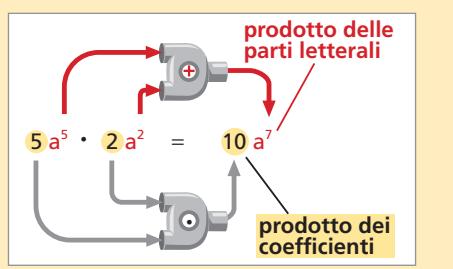
Possiamo applicare le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione e la prima proprietà delle potenze. Otteniamo:

$$2a^2 \cdot 7a^3 = 2 \cdot 7 \cdot a^2 a^3 = 14a^5.$$



REGOLA**Prodotto fra monomi**

Il prodotto fra monomi è un monomio che ha per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale il prodotto delle parti letterali.



- Il prodotto di monomi è sempre un monomio.

La potenza di un monomio

Per eseguire la potenza di un monomio basta applicare le proprietà delle potenze.

ESEMPIO

$$(7a^3)^2 = 7^2(a^3)^2 = 49a^{3 \cdot 2} = 49a^6.$$

REGOLA**Potenza di un monomio**

La potenza di un monomio è un monomio che ha per coefficiente la potenza del coefficiente dato e per parte letterale la potenza della parte letterale.

$$(5b^5)^2 = \underbrace{5^2}_{\text{potenza del coefficiente}} \underbrace{b^{10}}_{\text{potenza della parte letterale}}$$



BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V07a

ESEMPIO

$$\left(-\frac{3}{2}a^2b^5\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3(a^2b^5)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3a^{2 \cdot 3}b^{5 \cdot 3} = -\frac{27}{8}a^6b^{15}.$$

La divisione fra due monomi

Consideriamo la divisione fra monomi:

$$4a^2b^3 : 2b^2.$$

Possiamo eseguire la divisione fra i coefficienti e la divisione fra le parti letterali e poi applicare la seconda proprietà delle potenze:

$$(4 : 2)(a^2b^3 : b^2) = 2a^2b^{3-2} = 2a^2b.$$

Il risultato è ancora un monomio.

Ripetiamo le stesse operazioni in un altro caso:

$$4a^2b^3 : 2b^5 = (4 : 2)(a^2b^3 : b^5) = 2a^2b^{3-5} = 2a^2b^{-2}.$$

Il risultato non è un monomio, perché l'esponente di b è negativo.

- Applicando la proprietà invariantiva della divisione e la proprietà commutativa della moltiplicazione si dimostra che:

$$mx : ny = (m : n) \cdot (x : y).$$

- Per dividere due potenze che hanno la stessa base si esegue la sottrazione fra gli esponenti:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

► Il monomio divisore non può essere il monomio nullo. Per esempio, la divisione $3a^2b : 0$ non ha significato.

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V07b

Divisibilità fra monomi

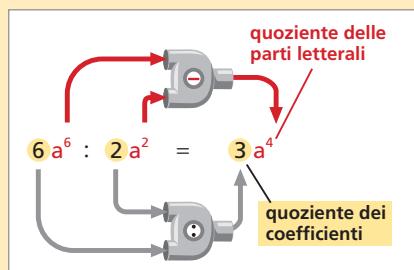
Un monomio (dividendo) è **divisibile** per un altro monomio (divisore) quando in esso compaiono tutte le lettere del divisore, con gli esponenti maggiori o uguali.

Per esempio, $5a^3b^2c^5$ è divisibile per $-4a^2b^2$, perché $a^3 : a^2 = a^{3-2} = a$ e $b^2 : b^2 = b^{2-2} = b^0 = 1$, mentre non è divisibile per $2a^5b^2c^4$, perché $a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$.

REGOLA

Quoziente fra monomi

Dati due monomi, il secondo non nullo e il primo divisibile per il secondo, il loro quoziente è un monomio che ha come coefficiente il quoziente dei coefficienti e come parte letterale il quoziente delle parti letterali.



ESEMPIO

$$6a^5b^4 : 5a^3b = (6 : 5)(a^5 : a^3)(b^4 : b) = \frac{6}{5}a^{5-3}b^{4-1} = \frac{6}{5}a^2b^3.$$

► È possibile dividere un monomio per un qualunque numero (*diverso da 0*). Per esempio:

$$\frac{3}{2}a : 5 = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5}\right)a = \frac{3}{10}a.$$

Un numero, infatti, è un particolare monomio in cui la parte letterale ha esponente 0.

3. Massimo comune divisore e minimo comune multiplo fra monomi

I concetti di massimo comune divisore e minimo comune multiplo che abbiamo visto per i numeri naturali si possono estendere anche ai monomi. Esaminiamo le regole che servono per calcolarli.

Massimo comune divisore

REGOLA

M.C.D.

Il massimo comune divisore (M.C.D.) fra due o più monomi è un monomio che ha:

- per **coefficiente**
 - il M.C.D. dei valori assoluti dei coefficienti, se sono tutti interi,
 - 1 se i coefficienti non sono tutti interi;
- per **parte letterale**
il prodotto delle sole lettere comuni a tutti i monomi, ognuna presa una sola volta e con l'esponente minimo.

ESEMPIO

Per trovare il M.C.D. fra i monomi

$$\frac{3}{2}x^4y^2c, \quad x^6y, \quad \frac{2}{5}x^3y^3c^4,$$

possiamo trascurare i coefficienti e organizzare le lettere in colonna:

$$\begin{array}{l} x^4 y^2 c \\ x^6 y \\ x^3 y^3 c^4. \end{array}$$

La lettera c non può comparire nel M.C.D., perché non è comune a tutti e tre i monomi; nella colonna delle x , x^3 ha l'esponente minimo; nella colonna delle y , y ha l'esponente più piccolo. Il M.C.D. è x^3y .

■ Minimo comune multiplo

■ REGOLA

m.c.m.

Il minimo comune multiplo (m.c.m.) fra due o più monomi è un monomio che ha:

- per **coefficiente**
 - il m.c.m. dei valori assoluti dei coefficienti, se sono tutti interi,
 - 1 se i coefficienti non sono tutti interi;
- per **parte letterale**
il prodotto di tutte le lettere dei monomi, ognuna presa una sola volta e con l'esponente massimo.

ESEMPIO Per trovare il m.c.m. fra i monomi $\frac{3}{2}x^4y^2c$, x^6y , $\frac{2}{5}x^3y^3c^4$,

possiamo trascurare i coefficienti e organizzare le lettere in colonna:

$$\begin{array}{l} x^4 y^2 c \\ x^6 y \\ x^3 y^3 c^4. \end{array}$$

Nel m.c.m. devono comparire tutte le lettere, ognuna con l'esponente più alto, perché il monomio ottenuto deve essere multiplo di tutti gli altri.

Il m.c.m. è $x^6y^3c^4$.

4. Che cosa sono i polinomi

■ I polinomi

Non sempre l'addizione fra monomi ha come risultato un monomio. Per esempio, $3a + 2b + 5a - 6b = 8a - 4b$, e $8a - 4b$ non è un monomio.

Diamo allora la seguente definizione.

■ DEFINIZIONE

Polinomio

Si chiama polinomio ogni somma algebrica di monomi.

► **Polinomio** deriva dall'unione del prefisso greco *polys*, che significa «molto», e del sostantivo latino *nomen*, che significa «parola», «termine». I molti termini che formano un polinomio sono monomi.

► Non sono polinomi:

$$\frac{a+b}{a}; \quad \frac{2x}{y} - 1.$$

► 0, oltre che monomio nullo, è considerato anche **polinomio nullo**.

ESEMPIO Sono polinomi:

$$a + 5b; \quad 3x^2 - 2ax + 7; \quad 2cy^3 + 4m^2x - cy^3.$$

Ogni monomio può essere visto come la somma algebrica di se stesso con il monomio nullo:

$$ab^2c = ab^2c + 0.$$

Quindi **ogni monomio è un polinomio**.

I monomi che compongono un polinomio si dicono anche **termini** del polinomio. Per comodità consideriamo solo polinomi che hanno come termini monomi ridotti a forma normale.

ESEMPIO

$$2a^2 + 5b^2 - \frac{1}{2}$$

è un polinomio formato da tre termini, ossia da tre monomi non simili i cui coefficienti sono 2, 5 e $-\frac{1}{2}$.

■ La riduzione a forma normale

Un polinomio può anche contenere monomi simili:

$$6a^4b^2 - 3a^3b^5 + 2a^4b^2.$$

In tal caso si sommano i monomi simili. Il polinomio che si ottiene,

$$8a^4b^2 - 3a^3b^5,$$

si dice **ridotto a forma normale** (o semplicemente **ridotto**).

ESEMPIO

$$8x^3y + x^2y^2 - 3x^4 \text{ è un polinomio ridotto a forma normale.}$$

► $7 + 4a^2 + 3ab - a^2 + 5ab$ non è ridotto a forma normale.

Per ridurlo sommiamo i termini simili, ottenendo:

$$7 + 3a^2 + 8ab.$$

$$► 3a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{2}{5}b^2$$

$$\text{e } \frac{2}{5}b^2 + 3a^2 - \frac{1}{2}ab$$

sono due polinomi uguali.

Due polinomi ridotti a forma normale, e non nulli, sono **uguali** quando i monomi del primo polinomio sono uguali ai monomi del secondo polinomio, indipendentemente dall'ordine in cui sono scritti.

I polinomi ridotti a forma normale con 1, 2, 3 e 4 termini hanno nomi particolari. Si chiamano, rispettivamente, *monomi*, *binomi*, *trinomi* e *quadrinomi*.

ESEMPIO

$$a^2 - 3ab^5 \text{ è un binomio; } 2a^3 - a^2 + 4a + 1 \text{ è un quadrinomio.}$$

Il grado di un polinomio ridotto

Per definire il grado di un polinomio, lo si riduce a forma normale, poi si prende in esame il grado dei singoli monomi da cui è formato.

DEFINIZIONE

Grado di un polinomio ridotto

Si chiama grado di un polinomio ridotto il grado maggiore fra i gradi dei suoi termini.

Inoltre, il **grado** di un polinomio **rispetto a una lettera** è il maggiore dei gradi dei suoi termini rispetto a tale lettera.

ESEMPIO

$$6a^4b^2 - 3a^3b^5 + 2a^2b$$

è di grado 8. Il grado rispetto ad a è 4, rispetto a b è 5.

Un polinomio ridotto è **omogeneo** se tutti i suoi termini hanno lo stesso grado.

ESEMPIO

$$8x^3y + x^2y^2 - 3x^4$$

è un polinomio omogeneo, in quanto tutti i termini che lo compongono sono di quarto grado.

Un polinomio è **ordinato** rispetto a una lettera se i suoi termini sono disposti in modo tale che gli esponenti di quella lettera sono in ordine crescente o decrescente.

ESEMPIO

- Il polinomio $3x^4 + 7x^2 - x$ è ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera x .
- Il polinomio $-5a^3b + a^2b^2 - 3ab^4$ è ordinato secondo le potenze decrescenti di a e anche secondo le potenze crescenti di b .

Un polinomio è **completo** rispetto a una lettera se per tale lettera presenta tutte le potenze, dal grado massimo fino al grado 0.

Il termine di grado 0 di un polinomio, ossia quello in cui non compare nessuna lettera, viene detto **termine noto**.

ESEMPIO

$2a^3 - a^2 + 4a + 1$ è un polinomio completo.

Infatti, la lettera a è presente dal grado 3 al grado 0 (a^3, a^2, a^1, a^0). Il termine noto è 1.

D

Il polinomio
 $2a^4 - a^2b - 2a^4 - 6ab$
non è di quarto grado. Infatti, riducendolo diventa:
 $-a^2b - 6ab$.

Dunque è un polinomio di terzo grado.

D $8x^3y + 1$ **non** è un polinomio omogeneo.

D

Il polinomio
 $6ab^2 + 8a^2b^3 - a^5b$
è ordinato rispetto alla lettera a , ma **non** è ordinato rispetto a b .

D Se un polinomio in una sola lettera ha grado n ed è completo, ha $n + 1$ termini.

5. Le operazioni con i polinomi

L'addizione

La **somma di due polinomi** è un polinomio che ha per termini tutti i termini dei polinomi addendi.

In generale, il polinomio somma non è ridotto a forma normale.

ESEMPIO Addizioniamo due polinomi:

$$(5x^3 + 6x^2 - 3) + (7 - 2x + 4x^2 - 6x^3) =$$

Il polinomio somma è formato da tutti i termini dei polinomi addendi:

$$= 5x^3 + 6x^2 - 3 + 7 - 2x + 4x^2 - 6x^3 =$$

Il polinomio somma non è ridotto; riduciamo i monomi simili:

$$= -x^3 + 10x^2 - 2x + 4.$$

► La somma di due polinomi opposti è 0.

► Anche per i polinomi parliamo di **somme algebriche** per indicare sinteticamente somme e differenze di polinomi.

Cambiando il segno a tutti i termini di un polinomio, si ottiene il **polinomio opposto**.

ESEMPIO L'opposto del polinomio $3x^2 + 2b^2 - 1$ è $-3x^2 - 2b^2 + 1$.

La sottrazione

La **differenza di due polinomi** è un polinomio che si ottiene addizionando al primo (minuendo) l'opposto del secondo (sottraendo).

ESEMPIO Eseguiamo la sottrazione fra due polinomi:

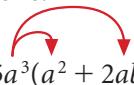
$$\begin{aligned} (3a^3 + 3a^2b + 5b^2) - (5a^4 + 3a^2b - b^2) &= \\ &= (3a^3 + 3a^2b + 5b^2) + (-5a^4 - 3a^2b + b^2) = \\ &= 3a^3 + 3a^2b + 5b^2 - 5a^4 - 3a^2b + b^2 = \\ &= 3a^3 + 6b^2 - 5a^4. \end{aligned}$$

La moltiplicazione di un monomio per un polinomio

Consideriamo la moltiplicazione:

$$5a^3(a^2 + 2ab).$$

Applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:



$$5a^3(a^2 + 2ab) = 5a^3a^2 + 5a^32ab = 5a^5 + 10a^4b.$$



REGOLA**Prodotto di un monomio per un polinomio**

Il prodotto di un monomio per un polinomio è un polinomio che ha come termini i prodotti del monomio per ciascun termine del polinomio dato.

$$\textcolor{red}{\Delta} \cdot (\textcolor{gray}{\square} + \textcolor{blue}{\bullet} - \textcolor{gray}{\diamond}) = \textcolor{red}{\Delta} \cdot \textcolor{gray}{\square} + \textcolor{red}{\Delta} \cdot \textcolor{blue}{\bullet} - \textcolor{red}{\Delta} \cdot \textcolor{gray}{\diamond}$$

$$A \cdot (B + C - D) = A \cdot B + A \cdot C - A \cdot D$$

- Con le lettere A, B, C, D indichiamo dei generici monomi.

La moltiplicazione di due polinomi

Consideriamo la seguente moltiplicazione:

$$(2a^2 - a)(3a^2 - a + 2).$$

Applichiamo la proprietà distributiva, distribuendo il fattore $3a^2 - a + 2$ fra i termini della somma $2a^2 - a$:

$$(2a^2 - a)(3a^2 - a + 2) = 2a^2(3a^2 - a + 2) - a(3a^2 - a + 2) = \\ = 6a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 3a^3 + a^2 - 2a = 6a^4 - 5a^3 + 5a^2 - 2a.$$

REGOLA**Prodotto di due polinomi**

Il prodotto di due polinomi è un polinomio che si ottiene moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo e addizionando tutti i prodotti ottenuti.

$$\textcolor{red}{(\Delta + \bullet)}(\textcolor{gray}{\square} + \textcolor{gray}{\bullet}) = \textcolor{red}{\Delta} \cdot \textcolor{gray}{\square} + \textcolor{red}{\Delta} \cdot \textcolor{gray}{\bullet} + \textcolor{blue}{\bullet} \cdot \textcolor{gray}{\square} + \textcolor{blue}{\bullet} \cdot \textcolor{gray}{\bullet}$$

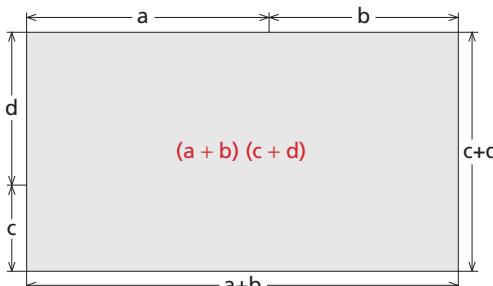
$$(A+B)(C+D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$$

- Prima eseguiamo le moltiplicazioni seguendo le frecce sopra, poi seguiamo le frecce sotto.

- Il grado del polinomio prodotto è la somma dei gradi dei polinomi fattori.

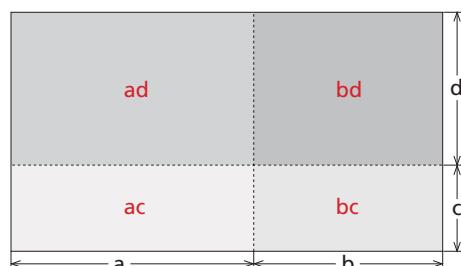
Interpretazione geometrica

▼ Figura 1 Possiamo dare un'interpretazione geometrica del prodotto fra polinomi.



- a. La base del rettangolo è la somma di due segmenti di misure a e b ; l'altezza è la somma di due segmenti di misure c e d .

L'area del rettangolo è: $S = (a+b)(c+d)$.



- b. Il rettangolo può essere visto come l'unione di quattro rettangoli, le cui aree sono ac , ad , bc , bd :

$$S = ac + ad + bc + bd.$$

Risulta $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.



PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Un campo da rifare



Nel sito: ► Scheda di lavoro

Dopo una delle periodiche inondazioni del Nilo, il campo rettangolare di Mehi, completamente distrutto, doveva essere ricostruito. Mehi pensò che se lo avesse rifatto, sempre rettangolare, ma aumentando del 50% una dimensione e diminuendo del 50% l'altra, avrebbe riottenuto la stessa superficie coltivabile. Aveva ragione?

ANDREA: «Direi di sì: se aumenti tanto quanto diminuisci, il risultato non cambia».

FEDERICA: «Non ne sono poi tanto sicura. Proviamo con qualche esempio?».

► Oltre che con degli esempi, aiutati con il calcolo letterale.

6. I prodotti notevoli

La moltiplicazione fra polinomi presenta alcuni casi particolari i cui risultati vengono detti **prodotti notevoli** perché permettono di scrivere il risultato della moltiplicazione senza passaggi intermedi.

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ► V09a

■ Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza: $(A + B)(A - B)$

Indichiamo con A e B due monomi generici e consideriamo il prodotto della loro somma per la loro differenza: $(A + B)(A - B)$.

LA SOMMA DI DUE MONOMI PER LA LORO DIFFERENZA

A	B	$(A + B)(A - B)$	SVILUPPO DEI CALCOLI	RISULTATO
x	3	$(x + 3)(x - 3)$	$x^2 - 3x + 3x - 9$	$x^2 - 9$
$2yz$	$\frac{1}{3}c$	$(2yz + \frac{1}{3}c)(2yz - \frac{1}{3}c)$	$4y^2z^2 - \frac{2}{3}yzc + \frac{2}{3}yzc - \frac{1}{9}c^2$	$4y^2z^2 - \frac{1}{9}c^2$
$3x$	y	$(3x + y)(3x - y)$	$9x^2 - 3xy + 3xy - y^2$	$9x^2 - y^2$
2	$4a$	$(2 + 4a)(2 - 4a)$	$4 - 8a + 8a - 16a^2$	$4 - 16a^2$

Quali che siano i monomi A e B , il risultato è sempre del tipo $A^2 - B^2$. Possiamo infatti scrivere:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + AB + B^2 = A^2 - B^2.$$

REGOLA**La somma di due monomi per la loro differenza**

Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza è il binomio costituito dalla differenza fra il quadrato del primo e il quadrato del secondo.

$$(\bullet + \blacksquare)(\bullet - \blacksquare) = \bullet^2 - \blacksquare^2$$

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

ESEMPIO

$$(3a + 5b^3)(3a - 5b^3) = (3a)^2 - (5b^3)^2;$$

infatti:

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2.$$

Se riconosciamo questo prodotto notevole, possiamo quindi giungere al risultato senza calcoli intermedi, applicando la regola.

ESEMPIO

$$1. (a - 1)(a + 1) = a^2 - 1.$$

$$2. \left(\frac{1}{5}x^3 + y^2 \right) \left(\frac{1}{5}x^3 - y^2 \right) = \frac{1}{25}x^6 - y^4.$$

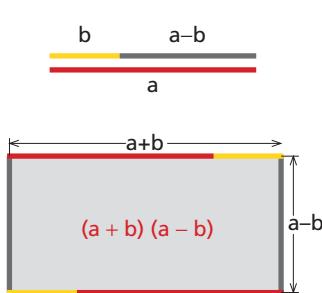
► Per la proprietà commutativa della moltiplicazione, non importa se viene prima la somma o la differenza dei monomi.

Interpretazione geometrica

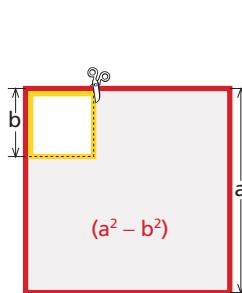
Interpretiamo geometricamente le espressioni

$$(a + b)(a - b) \text{ e } a^2 - b^2.$$

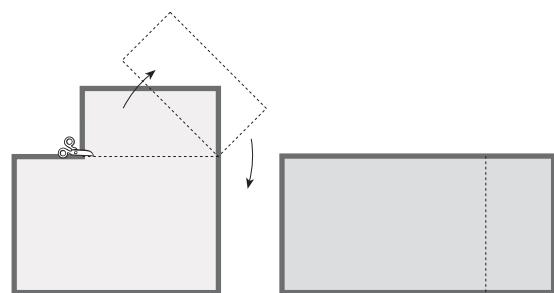
▼ Figura 2



a. L'espressione $(a + b)(a - b)$ rappresenta la misura dell'area di un rettangolo avente i lati che misurano $a + b$ e $a - b$.



b. L'espressione $a^2 - b^2$ rappresenta la misura dell'area della figura che si ottiene «tagliando via» da un quadrato di lato a un quadrato di lato b .



c. Se tagliamo, come indicato, una parte della figura di area $a^2 - b^2$ e la facciamo ruotare e poi traslare, riotteniamo il rettangolo della figura a. Dunque $(a + b)(a - b) = (a^2 - b^2)$.

■ Il quadrato di un binomio: $(A + B)^2$

Il quadrato di un numero è il prodotto del numero per se stesso. Il quadrato di un binomio è il prodotto del binomio per se stesso.

IL QUADRATO DI UN BINOMIO

A	B	$(A + B)^2$	$(A + B)(A + B)$	SVILUPPO DEI CALCOLI	RISULTATO
b	5	$(b + 5)^2$	$(b + 5)(b + 5)$	$b^2 + 5b + 5b + 25$	$b^2 + 10b + 25$
$3x$	$-2y$	$(3x - 2y)^2$	$(3x - 2y)(3x - 2y)$	$9x^2 - 6xy - 6xy + 4y^2$	$9x^2 - 12xy + 4y^2$
$-2a$	$-\frac{1}{2}x$	$\left(-2a - \frac{1}{2}x\right)^2$	$\left(-2a - \frac{1}{2}x\right)\left(-2a - \frac{1}{2}x\right)$	$4a^2 + ax + ax + \frac{1}{4}x^2$	$4a^2 + 2ax + \frac{1}{4}x^2$

Quali che siano i monomi A e B, il risultato è del tipo $A^2 + 2AB + B^2$.

Infatti:

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V10a

REGOLA

Quadrato di un binomio

Il quadrato di un binomio è un trinomio che ha come termini il quadrato del primo termine, il doppio prodotto del primo termine per il secondo e il quadrato del secondo.

$$(\bullet + \blacksquare)^2 = \bullet^2 + 2\bullet\blacksquare + \blacksquare^2$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

ESEMPIO

$$1. (2x + y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + (y)^2; \text{ infatti:}$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2.$$

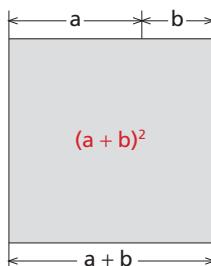
$$2. (a^3 - 3)^2 = (a^3)^2 + 2a^3 \cdot (-3) + (-3)^2 = a^6 - 6a^3 + 9.$$

Interpretazione geometrica

Risale ai Greci l'interpretazione geometrica dell'uguaglianza

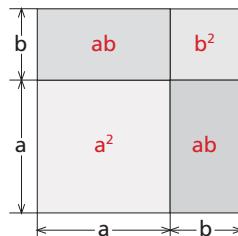
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

► Figura 3



a. Il quadrato di lato $a + b$ ha area:

$$S = (a + b)^2.$$



b. Il quadrato precedente è l'unione di:

- un quadrato di lato a (area a^2);
- due rettangoli di lati a e b (area ab);
- un quadrato di lato b (area b^2).

Quindi l'area è:

$$S = a^2 + 2ab + b^2.$$

■ Il quadrato di un trinomio: $(A + B + C)^2$

Per ricavare il quadrato di un trinomio utilizziamo un metodo analogo a quello usato per il quadrato di un binomio:

$$\begin{aligned}(A + B + C)^2 &= (A + B + C)(A + B + C) = \\ &= A^2 + AB + AC + BA + B^2 + BC + CA + CB + C^2 = \\ \text{Sommiamo i termini simili:} \\ &= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC.\end{aligned}$$

REGOLA

Quadrato di un trinomio

Il quadrato di un trinomio è un polinomio che ha come termini i quadrati dei tre termini e il doppio prodotto di ciascun termine per ogni termine che lo segue.

$$\begin{aligned}(\bullet + \blacksquare + \blacktriangle)^2 &= \bullet^2 + \blacksquare^2 + \blacktriangle^2 + 2\bullet\blacksquare + 2\bullet\blacktriangle + 2\blacksquare\blacktriangle \\ (A + B + C)^2 &= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC\end{aligned}$$

BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V10b



► **Quesito.** Prova a ricavare una regola per il quadrato di un quadrinomio. Confrontala con quella del quadrato di un trinomio. C'è qualcosa di analogo? Puoi arrivare a una regola generale per il quadrato di un polinomio?

ESEMPIO

$$\begin{aligned}(3a - b - 2c)^2 &= \\ &= 9a^2 + b^2 + 4c^2 + 2 \cdot (3a) \cdot (-b) + 2(3a) \cdot (-2c) + 2 \cdot (-b) \cdot (-2c) = \\ &= 9a^2 + b^2 + 4c^2 - 6ab - 12ac + 4bc.\end{aligned}$$

■ Il cubo di un binomio: $(A + B)^3$

Per calcolare il cubo di un binomio possiamo moltiplicare il binomio per il suo quadrato:

$$\begin{aligned}(A + B)^3 &= (A + B)^2(A + B) = \\ &= (A^2 + 2AB + B^2)(A + B) = \\ &= A^3 + A^2B + 2A^2B + 2AB^2 + AB^2 + B^3 = \\ &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.\end{aligned}$$

REGOLA

Cubo di un binomio

Il cubo di un binomio è un quadrinomio che ha come termini il cubo del primo termine, il triplo del quadrato del primo termine per il secondo, il triplo del primo termine per il quadrato del secondo, il cubo del secondo termine.

$$\begin{aligned}(\bullet + \blacksquare)^3 &= \bullet^3 + 3\bullet^2\blacksquare + 3\bullet\blacksquare^2 + \blacksquare^3 \\ (A + B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3\end{aligned}$$

BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V11a



ESEMPIO

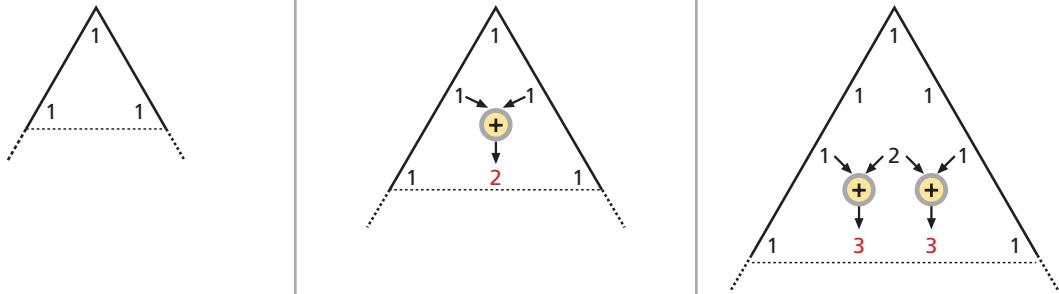
$$(2x^2 - y^2)^3 = (2x^2)^3 + 3(2x^2)^2(-y^2) + 3(2x^2)(-y^2)^2 + (-y^2)^3 = \\ = 8x^6 - 12x^4y^2 + 6x^2y^4 - y^6.$$

■ La potenza di un binomio: $(A + B)^n$

► Per esempio:

$$(A + B)^4 = \\ = (A + B)^3(A + B) = \\ = \dots$$

▼ Figura 4



a. I numeri 1 rappresentano i vertici di un triangolo.

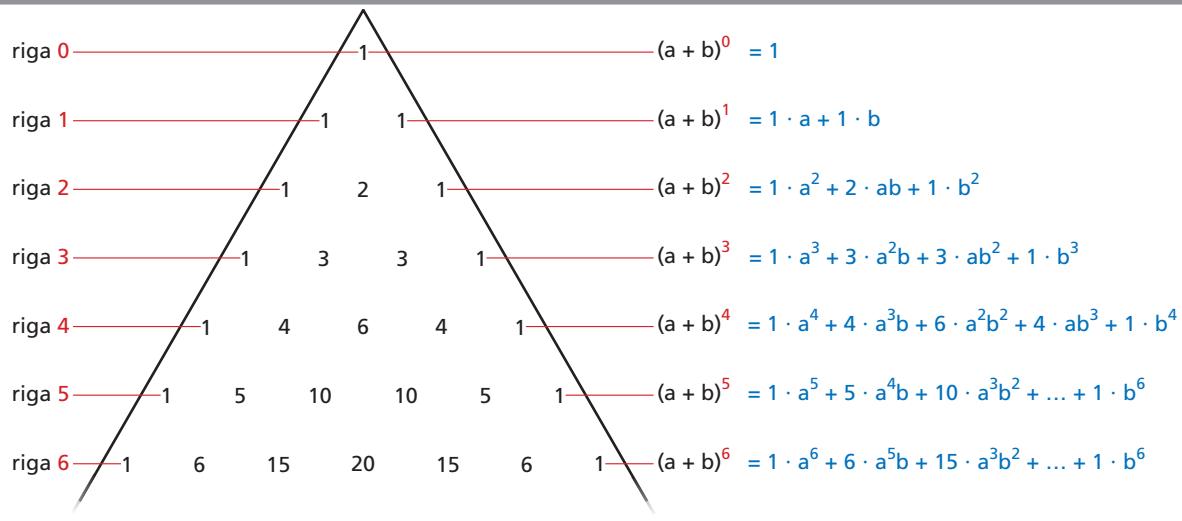
b. Ingrandiamo il triangolo verso il basso:

- nei vertici mettiamo sempre 1;
- sotto la coppia di numeri consecutivi della riga precedente, scriviamo la loro somma.

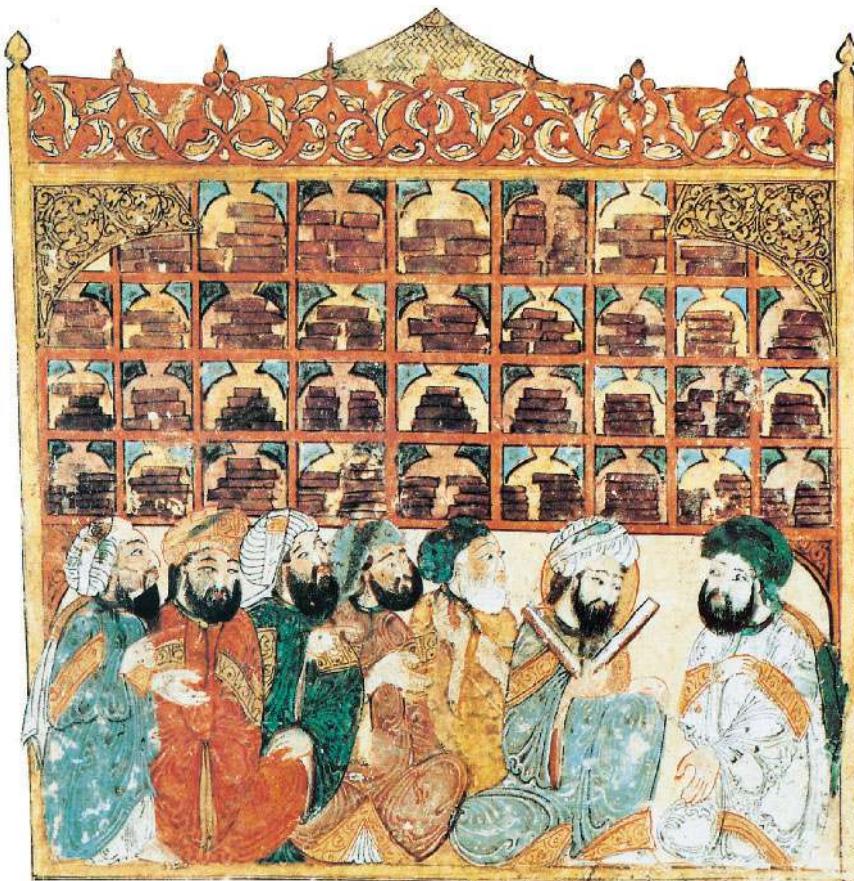
c. Aggiungiamo un'altra riga, seguendo lo stesso procedimento. Sotto ogni coppia di numeri consecutivi della riga precedente, scriviamo la loro somma.

Questa rappresentazione si chiama **triangolo di Tartaglia**. Il triangolo fornisce i coefficienti dello sviluppo delle potenze dei binomi del tipo $a + b$, come indicato nella figura 5.

▼ Figura 5



ESPLORAZIONE: IL PADRE DEI POLINOMI



◀ Un professore e i suoi assistenti nella biblioteca pubblica di Holwan (Iraq). Alle loro spalle nicchie piene di manoscritti, disposti orizzontalmente per una migliore conservazione. Questa miniatura del 1237 di al-Wasiti illustra una delle *Maqamat* di al-Hariri (Bassora, 1054-1122), cinquanta brevi componimenti in prosa rimata, ricchi di fantasia e invenzioni, su episodi di vita realmente accaduti. Ispirandosi a queste *maqamat*, il musicista Robert Schumann compose nel 1848 i suoi sei Improvvisi intitolati *Quadri d'Oriente*. La miniatura è conservata nella Bibliothèque Nationale di Parigi.

Il primo matematico che si occupò in modo approfondito dell'algebra dei polinomi fu il persiano al-Karaji (953-1029 circa). Egli ebbe l'idea di applicare le operazioni aritmetiche alle potenze delle variabili, giungendo così ai monomi. Nella sua opera principale, intitolata *Al-Fakhri*, enunciò esplicitamente la formula per ottenere il prodotto di monomi (quella che noi indichiamo con $x^n x^m = x^{m+n}$).

Chiamò x^5 quadrato-cubo (noi scrivemmo $x^5 = x^2 \cdot x^3$) e x^6 cubo-cubo ($x^6 = x^3 \cdot x^3$).

Dopo aver studiato la moltiplicazione e la divisione di monomi, al-Karaji si dedicò ai polinomi e stabilì le regole di addizione, sottrazione e moltiplicazione. Calcolò il quadrato e il cubo di un binomio e costruì una tabella per ricavare i coefficienti delle potenze di $(a + b)^n$ fino a $n = 12$.

Quasi duecento anni dopo, al-Samawal, che apparteneva alla scuola dedicata allo studio della mate-

matica fondata da al-Karaji, scrisse il *Libro luminoso sull'aritmetica* (a soli 19 anni di età!). Il trattato è ricco di idee originali e prezioso per le informazioni sui contributi dei matematici arabi.

Al-Samawal continuò l'opera di al-Karaji e in particolare definì $x^0 = 1$ (con x diverso da 0) ed eseguì divisioni fra polinomi.

IN DIECI RIGHE

I matematici arabi non furono i primi a individuare i coefficienti per lo sviluppo delle potenze di un binomio.

Ricostruisci la storia del triangolo di Tartaglia e scrivi una relazione con il computer.

 **Cerca nel web:** triangolo di Tartaglia, Pascal's triangle, arithmetic triangle, binomial coefficients.

7. Le funzioni polinomiali

Consideriamo il polinomio in x , con $x \in \mathbb{R}$:

$$x^3 + x^2 - 8x - 12.$$

Se $x = 2$, il polinomio assume il valore reale:

$$2^3 + 2^2 - 8 \cdot 2 - 12 = 8 + 4 - 16 - 12 = -16.$$

In generale, sostituendo alla variabile x un qualsiasi numero reale, il polinomio assume uno e un solo valore, che dipende da quello assegnato a x , quindi esso è una funzione che chiamiamo **funzione polinomiale**. La indichiamo con l'espressione $y = P(x)$. Nel nostro esempio:

$$P(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12.$$

Osserviamo che per $x = 0$ la funzione vale $y = -12$, cioè il valore del termine noto del polinomio: questa è una proprietà generale che vale per ogni funzione polinomiale.

Possiamo studiare il grafico di una funzione polinomiale per punti attraverso la compilazione di una tabella.

ESEMPIO

Disegniamo il grafico di $y = x^3 + x^2 - 8x - 12$, dopo aver compilato la tabella.

x	y
-4	-28
-3	-6
-2	0
-1	-4
0	-12
1	-18
2	-16
3	0
4	36

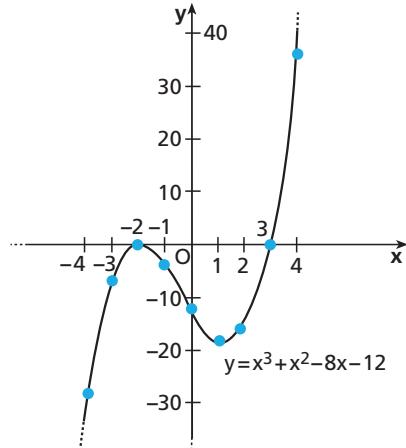


Figura 6

Gli zeri di una funzione polinomiale

I valori della x per i quali un polinomio $P(x)$ si annulla si chiamano **zeri** del polinomio.

Per una funzione polinomiale $y = P(x)$ gli zeri del polinomio $P(x)$ corrispondono a quei punti della funzione per i quali $y = 0$. Dal punto di vista grafico, si tratta dei punti di intersezione del grafico della funzione con l'asse delle x , che è l'insieme di tutti i punti con ordinata nulla.

- La funzione dell'esempio precedente ha due zeri: -2 e 3.

ESEMPIO

1. Data la funzione polinomiale

$$y = x^2 - 3x + 2,$$

sostituendo a x il valore 1 otteniamo

$$y = 1 - 3 + 2 = 0,$$

quindi 1 è uno zero della funzione.

2. Consideriamo la funzione polinomiale:

$$y = \frac{x}{2} - 3.$$

Troviamo gli zeri della funzione ponendo $y = 0$.

Otteniamo l'equazione di primo grado:

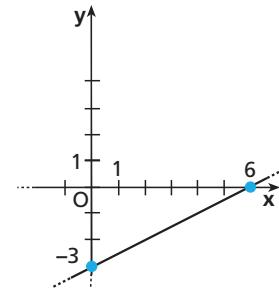
$$\frac{x}{2} - 3 = 0 \rightarrow x = 6.$$

6 è quindi l'unico zero della funzione.

Rappresentiamo il grafico di $y = \frac{x}{2} - 3$ (figura 7).

Osserviamo che per $x = 6$, lo zero della funzione, la retta interseca l'asse delle ascisse.

▼ Figura 7



■ Il principio di identità dei polinomi

Un'**identità** è un'uguaglianza fra due espressioni letterali che è vera per ogni valore attribuito alle lettere che compaiono nelle espressioni.

Consideriamo due polinomi P_1 e P_2 nella variabile indipendente x .

Se riusciamo a trasformare le loro espressioni in modo che $P_1 = P_2$, i polinomi sono identici e assumono lo stesso valore per tutti i valori attribuiti alle loro variabili.

ESEMPIO

$$P_1(x) = 1 - x^2, P_2(x) = -(x^2 - 1).$$

$P_1 = P_2$. Infatti:

$$P_2(x) = -(x^2 - 1) = -x^2 + 1 = 1 - x^2 = P_1(x).$$

Poiché i due polinomi sono identici, per ogni valore di x assumono lo stesso valore. Per esempio,

$$P_1(3) = 1 - 9 = -8, P_2(3) = -(9 - 1) = -8.$$

Vale anche l'inverso, che ci limitiamo a enunciare.

Principio di identità dei polinomi

Se due polinomi assumono lo stesso valore per tutti i valori attribuiti alle loro variabili, allora sono identici.

► Se troviamo che due polinomi sono diversi anche per un solo valore della variabile, allora possiamo affermare che i polinomi sono diversi.

$$P_1(x) = 1 - x^2,$$

$$P_3(x) = x^2 - 1.$$

$$P_1(3) = -8, P_3(3) = 8,$$

$$P_1 \neq P_3.$$

8. La divisione fra polinomi

► 6 è divisibile per 3 perché $3 \cdot 2$ dà come prodotto 6.

Nell'insieme dei numeri naturali la divisione è possibile se il dividendo è un multiplo del divisore; si dice allora che il dividendo è divisibile per il divisore.

Procediamo in modo analogo per i polinomi, fornendo prima la definizione di **divisibilità** e poi il **procedimento di calcolo**.

■ La divisione di un polinomio per un monomio

Un polinomio è divisibile per un monomio (non nullo) se esiste un polinomio che, moltiplicato per il monomio divisore, dà il polinomio iniziale.

ESEMPIO Il polinomio

$$4ab^2 - 6a^2b$$

è divisibile per il monomio

$$2ab.$$

Infatti, esiste il polinomio

$$2b - 3a$$

tale che

$$(2b - 3a)2ab = 4ab^2 - 6a^2b.$$

In questo caso, per eseguire la divisione, possiamo applicare la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione.

$$(4ab^2 - 6a^2b) : 2ab = (4ab^2 : 2ab) - (6a^2b : 2ab) = 2b - 3a.$$

Un polinomio è **divisibile** per un monomio se ogni suo termine è divisibile per tale monomio.

Quando un polinomio è divisibile per un monomio, il quoziente è il polinomio che si ottiene dividendo ciascun termine del polinomio per il monomio.

ESEMPIO

$$(5a^6 - 6a^4 + 2a^3) : 2a^2 = \frac{5}{2}a^4 - 3a^2 + a;$$

$$\left(\frac{7}{3}a^3b^2 + \frac{1}{2}a^2b - 5b \right) : b = \frac{7}{3}a^3b + \frac{1}{2}a^2 - 5.$$

Ci sono casi in cui un polinomio non è divisibile per un monomio.

ESEMPIO

$a^2 + a + 1$ **non** è divisibile per a^3 .

■ La divisione esatta fra due polinomi

DEFINIZIONE

Divisibilità fra polinomi

Un polinomio A è divisibile per un polinomio B se esiste un polinomio Q che, moltiplicato per B , dà come prodotto A .

$$A : B = Q \text{ se e solo se } B \cdot Q = A.$$

A è il dividendo, B il divisore, Q il quoziente.

ESEMPIO

Il polinomio

$$A = 2x^7 + x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 3x + 4$$

è divisibile per il polinomio

$$B = 2x^2 + 1.$$

Infatti, esiste il polinomio

$$Q = x^5 - 3x + 4$$

tale che

$$(2x^2 + 1)(x^5 - 3x + 4) = 2x^7 - 6x^3 + 8x^2 + x^5 - 3x + 4.$$

- Quando vogliamo indicare un polinomio generico, senza precisare le variabili, utilizziamo lettere maiuscole (P, Q, A, B, R, \dots).

■ Il grado del polinomio quoziente

Sappiamo che il grado del polinomio prodotto è la somma dei gradi dei polinomi fattori: dunque, poiché $B \cdot Q = A$, se A è di grado n e B è di grado p , il grado di Q deve essere $n - p$, con $n \geq p$.

Nell'esempio precedente, il grado di A è 7, il grado di B è 2, il grado del polinomio quoziente Q è 5, cioè $7 - 2$.

- Il grado di $B \cdot Q$ è la somma del grado di B e del grado di Q .

■ La divisione con resto fra due polinomi

Possiamo eseguire la divisione fra due polinomi anche se uno non è divisibile per l'altro.

Dati due polinomi A e B nella variabile x , con il grado di B minore o uguale al grado di A , si può dimostrare che è sempre possibile ottenere due polinomi Q e R tali che:

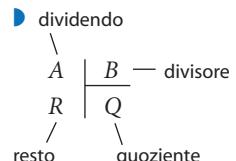
$$A = B \cdot Q + R,$$

dove Q è il polinomio quoziente e R il polinomio resto.

Il grado di Q è la differenza fra il grado di A e il grado di B ; il grado di R è minore del grado di B .

Nel caso particolare in cui $R = 0$, si ha $A = B \cdot Q$, ossia A è divisibile per B .

Vediamo ora con un esempio qual è la tecnica per eseguire la divisione tra due polinomi.



ESEMPIO Dividiamo il polinomio di terzo grado

$$A = 13x^3 + 6x^2 + 5x + 6$$

per il polinomio di secondo grado

$$B = 2 - x + 3x^2.$$

Per eseguire la divisione bisogna ordinare i due polinomi secondo le potenze decrescenti della variabile:

$$(6x^3 + 13x^2 + 5x + 6) : (3x^2 - x + 2).$$

Il quoziente sarà un polinomio di primo grado.

La figura 8 mostra i passaggi della divisione.

$$\overbrace{6x^3 + 13x^2 + 5x + 6}^A$$

$$\overbrace{3x^2 - x + 2}^B$$

$$\overbrace{2x}^{Q_1}$$

$$6x^3 + 13x^2 + 5x + 6$$

$$- 6x^3 + 2x^2 - 4x$$

$$- Q_1 \cdot B$$

$$3x^2 - x + 2$$

$$2x$$

$$6x^3 + 13x^2 + 5x + 6$$

$$- 6x^3 + 2x^2 - 4x$$

$$" 15x^2 + x + 6$$

$$R_1$$

$$3x^2 - x + 2$$

$$2x$$

a. Dividiamo $6x^3$ per $3x^2$ e scriviamo il quoziente $2x$, che rappresenta il quoziente parziale Q_1 .

b. Moltiplichiamo $2x$ per ogni termine di B e scriviamo con il segno cambiato i risultati al di sotto di A , incolumnati, rispetto al grado, con i termini di A .

c. Sommiamo in colonna i termini, ottenendo un primo resto parziale, R_1 . Questo resto è tale che $A = B \cdot Q_1 + R_1$.

$$\begin{array}{r} 6x^3 + 13x^2 + 5x + 6 \\ - 6x^3 + 2x^2 - 4x \\ " 15x^2 + x + 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3x^2 - x + 2 \\ 2x + 5 \\ Q_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x^3 + 13x^2 + 5x + 6 \\ - 6x^3 + 2x^2 - 4x \\ " 15x^2 + x + 6 \\ - 15x^2 + 5x - 10 \\ - Q_2 \cdot B \end{array} \quad \begin{array}{r} 3x^2 - x + 2 \\ 2x + 5 \\ " 15x^2 + x + 6 \\ - 15x^2 + 5x - 10 \\ " 6x - 4 \end{array}$$

d. Ripetiamo il procedimento considerando R_1 . Dividiamo $15x^2$ per $3x^2$, ottenendo 5 come secondo quoziente parziale Q_2 .

e. Moltiplichiamo 5 per tutti i termini di B e scriviamo i prodotti, con il segno cambiato, in colonna sotto R_1 .

$$\begin{array}{r} 6x^3 + 13x^2 + 5x + 6 \\ - 6x^3 + 2x^2 - 4x \\ " 15x^2 + x + 6 \\ - 15x^2 + 5x - 10 \\ " 6x - 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3x^2 - x + 2 \\ 2x + 5 \\ Q \\ R \end{array}$$

f. Eseguiamo l'addizione dei termini in colonna e otteniamo il resto $6x - 4$. Poiché il grado di $6x - 4$ è minore del grado di B , la divisione è terminata e $6x - 4$ è il resto R .

$$A = B \cdot Q + R$$

▲ Figura 8

Verifica

La definizione di divisione con resto, in base alla quale si ha $A = B \cdot Q + R$, permette di verificare l'esattezza del risultato.

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} B \cdot Q + R &= (3x^2 - x + 2)(2x + 5) + (6x - 4) = \\ &= 6x^3 + 15x^2 - 2x^2 - 5x + 4x + 10 + 6x - 4 = \\ &= 6x^3 + 13x^2 + 5x + 6. \end{aligned}$$

Il risultato ottenuto coincide con il dividendo:

$$A = 6x^3 + 13x^2 + 5x + 6.$$

9. La regola di Ruffini

BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ▶ V12a



Quando il **polinomio divisore** è un binomio del tipo $x - a$, dove a è un numero reale qualunque, per determinare Q e R possiamo utilizzare un procedimento rapido, detto *regola di Ruffini*, che permette di calcolare i coefficienti del polinomio quoziante Q e il resto R .

ESEMPIO

Vogliamo eseguire la divisione

$$(-10x - 9 + 3x^2) : (x - 4),$$

dove il divisore è del tipo $x - a$.

La regola di Ruffini

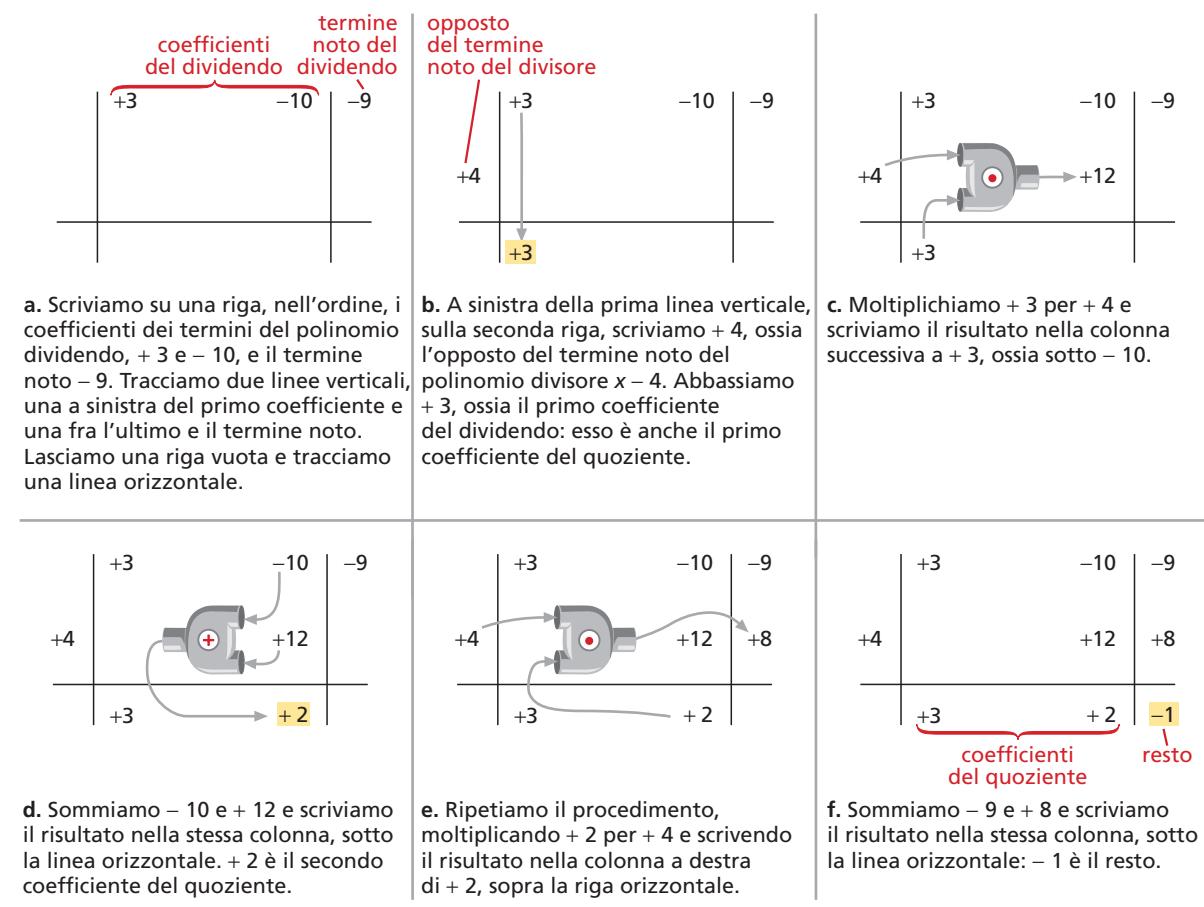
Scriviamo i polinomi ordinati in senso decrescente:

$$(3x^2 - 10x - 9) : (x - 4).$$

La figura 9 illustra come si applica la regola di Ruffini.

► La regola e il teorema di Ruffini prendono il nome dal matematico Paolo Ruffini. Nato nei pressi di Roma nel 1765, nei primi anni dell'infanzia si trasferì con il padre a Modena, dove restò fino alla morte, avvenuta nel 1822.

▼ Figura 9



► Dividendo un polinomio $A(x)$ di grado n per il binomio $x - a$, di primo grado, otteniamo per quoziente un polinomio $Q(x)$ di grado $n - 1$.

Scrittura del quoziente

I coefficienti del polinomio quoziente sono 3 e 2. Tenendo conto che il dividendo ha grado 2 e il divisore ha grado 1, il quoziente deve avere grado 1. Quindi possiamo scrivere:

$$Q = 3x + 2; \quad R = -1.$$

Verifica

Per verificare che il risultato è esatto, possiamo controllare che sia valida l'uguaglianza $A = B \cdot O + R$:

$$3x^2 - 10x - 9 = (x - 4)(3x + 2) + (-1).$$

Se il divisore è del tipo $x + a$, osserviamo che:

$$x + a = x - (-a).$$

ESEMPIO

$$(8x^2 + 2x - 3) : (x + 2) = (8x^2 + 2x - 3) : [x - (-2)].$$

Si può dunque applicare la regola di Ruffini.

Osservazione. Nella tabella costruita nella figura 9 abbiamo messo in riga i coefficienti del polinomio dividendo:

$3x^2 - 10x - 9$, cioè $3, -10$ e -9 .

Se il polinomio dividendo fosse stato incompleto, al posto dei coefficienti mancanti avremmo dovuto inserire alcuni 0. Per esempio, per il polinomio dividendo $2x^4 - x^2 - 1$, i coefficienti da disporre in riga sono:

$$2, 0, -1, 0, -1,$$

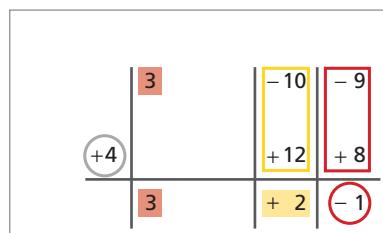
CONFRONTO FRA DUE TIPI DI DIVISIONE

Riprendiamo il primo esempio e mostriamo che la regola di Ruffini non è altro che uno schema semplificato della divisione ordinaria tra polinomi.

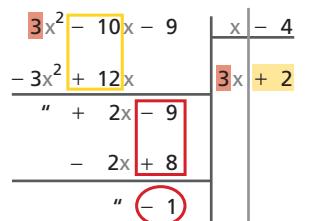
I numeri che si sommano colonna per colonna sono gli stessi, anche se sono disposti secondo due schemi diversi.

La regola di Ruffini funziona per due motivi.

- Il divisore ha grado 1, quindi il quoziente ha il grado del dividendo abbassato di 1. Di conseguenza, il quoziente ha un numero di coefficienti pari a quello del dividendo meno 1.
 - Nel divisore $x - a$, il coefficiente della x è 1, quindi il primo coefficiente del quoziente è uguale al primo coefficiente del dividendo.



a. La regola di Ruffini.



b. La divisione «classica».

10. Il teorema del resto

Eseguiamo mediante la regola di Ruffini la seguente divisione:

$$(5x^2 - 3x + 7) : (x - 2).$$

$$\begin{array}{r|rrr} & +5 & -3 & +7 \\ +2 & & +10 & +14 \\ \hline & +5 & +7 & +21 \end{array}$$

Il resto della divisione è 21.

Calcoliamo il valore che assume il polinomio $5x^2 - 3x + 7$ per $x = 2$, cioè per x uguale all'opposto del termine noto del divisore:

$$5(2)^2 - 3(2) + 7 = 21.$$

Il resto della divisione coincide con il valore assunto dal polinomio per $x = 2$, cioè, nella formula generale, per $x = a$.

Non si tratta di un caso fortunato, ma di una proprietà valida sempre, grazie alla quale, per calcolare il resto, non è necessario eseguire la divisione.

Indichiamo il polinomio dividendo con $A(x)$ per mettere in evidenza che il polinomio A è una funzione della variabile x .

TEOREMA

Teorema del resto

Data la divisione $A(x) : (x - a)$, il resto è dato dal valore che assume $A(x)$ quando alla variabile x si sostituisce il valore a : $R = A(a)$.

BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V12b



DIMOSTRAZIONE

Data la divisione $A(x) : (x - a)$, possiamo scrivere:

$$A(x) = (x - a)Q(x) + R.$$

Sostituendo a x il valore a , otteniamo:

$$A(a) = (a - a)Q(a) + R.$$

Essendo $a - a = 0$, il prodotto $(a - a)Q(a)$ si annulla, quindi

$$A(a) = R.$$

► Se il divisore è $x - 3$, il valore di a da sostituire a x è 3; se il divisore è $x + 2$, allora $a = -2$.

► Illustriamo la dimostrazione con il seguente esempio.

Data la divisione

$$(3x^3 - 2x^2 - 5) : (x - 2),$$

$$(3x^3 - 2x^2 - 5) = (x - 2) \cdot Q(x) + R;$$

$$3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 5 = (2 - 2) \cdot Q(2) + R;$$

$$3 \cdot 8 - 2 \cdot 4 - 5 = R;$$

$$R = 11.$$

ESEMPIO Calcoliamo il resto della divisione $(-x^4 + 3x^2 - 5) : (x + 2)$.

Poiché $x + 2 = x - (-2)$, possiamo sostituire il valore -2 a x . Abbiamo quindi $R = A(-2)$:

$$R = -(-2)^4 + 3(-2)^2 - 5 = -9.$$

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V12c

11. Il teorema di Ruffini

Esaminiamo il seguente ragionamento.

Se il polinomio $A(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ è divisibile per $x + 5$, allora la divisione

$$(x^3 + 2x^2 - 13x + 10) : (x + 5)$$

dà resto 0; quindi, per il teorema del resto, $A(-5) = 0$.

Il ragionamento è invertibile.

Dato il polinomio $A(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$, se $A(-5) = 0$, allora la divisione

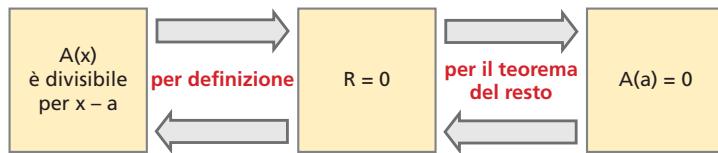
$$(x^3 + 2x^2 - 13x + 10) : (x + 5)$$

dà resto 0, per il teorema del resto; quindi $x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ è divisibile per $x + 5$.

Generalizzazione

Schematizziamo i due ragionamenti, considerando un generico polinomio $A(x)$ e un generico polinomio divisore del tipo $x - a$.

▶ Figura 10

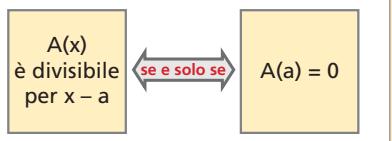


L'utilità del ragionamento inverso (da destra verso sinistra nella figura 10) consiste nel fatto che si può verificare se un polinomio è divisibile per un generico divisore $x - a$ senza dover eseguire la divisione! Queste considerazioni portano a dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA

Teorema di Ruffini

Un polinomio $A(x)$ è divisibile per un binomio $x - a$ se e soltanto se $A(a)$ è uguale a 0.



ESEMPIO

Il polinomio $A(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ è divisibile sia per $x - 1$ sia per $x + 2$; infatti:

$$A(1) = 2 + 1 - 5 + 2 = 0;$$

$$A(-2) = 2(-8) + 4 - 5(-2) + 2 = -16 + 4 + 10 + 2 = 0.$$

■ Due casi particolari

La differenza di due cubi: $x^3 - a^3$

Indichiamo con $A(x)$ il binomio $x^3 - a^3$ e sostituiamo alla variabile x il valore a . Otteniamo:

$$A(a) = a^3 - a^3 = 0.$$

Poiché il resto è 0, il binomio considerato è divisibile per $x - a$.

Calcoliamo il quoziente, applicando la regola di Ruffini.

	1	0	0	- a^3
a	a	a^2	a^3	
	1	a	a^2	0

$$Q(x) = x^2 + ax + a^2.$$

Dunque, il binomio $x^3 - a^3$ può essere scritto come prodotto nel seguente modo:

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2).$$

La somma di due cubi: $x^3 + a^3$

Procedendo allo stesso modo si dimostra che il binomio $x^3 + a^3$ è divisibile per $x + a$. Si ottiene quindi:

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2).$$

In sintesi:

$$\begin{aligned} x^3 + a^3 &= (x + a)(x^2 - ax + a^2); \\ x^3 - a^3 &= (x - a)(x^2 + ax + a^2). \end{aligned}$$

ESEMPIO

$$x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9);$$

$$a^6 + 1 = (a^2)^3 + 1 = (a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1).$$

Osservazione. I termini $x^2 + ax + a^2$ e $x^2 - ax + a^2$ vengono anche detti *falsi quadrati*, perché assomigliano al quadrato di un binomio, avendo come termini due quadrati e un prodotto.

Questo prodotto non è però il doppio prodotto che compare nel quadrato di un binomio!

► Nella prima riga 0 e 0 sono i coefficienti dei termini di secondo e primo grado (x^2 e x):

$$\begin{aligned} x^3 - a^3 &= \\ &= x^3 + 0x^2 + 0x - a^3. \end{aligned}$$

► **Quesito.** Quale fra i seguenti trinomi è un falso quadrato e quale un quadrato di binomio?

$$4x^2 + 2xy + y^2;$$

$$4x^2 + 4xy + y^2.$$



Calcolatrici

...come si può calcolare a mente 63²?

Un modo rapido per fare le operazioni a mente è ricorrere al calcolo polinomiale e alle sue proprietà. Per poter calcolare per esempio 63^2 si può interpretare il numero 63 come $60 + 3$, ovvero come un binomio.

L'operazione da effettuare diventa allora $(60 + 3)^2$, che si può facilmente calcolare utilizzando lo sviluppo del quadrato di un binomio.

Valendo in generale

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

nel nostro caso avremo:

$$\begin{aligned} 63^2 &= (60 + 3)^2 = \\ &= 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 3 + 3^2 = \\ &= 3600 + 360 + 9 = 3969. \end{aligned}$$

Ovviamente questo funziona per qualsiasi coppia di numeri la cui somma sia 63, come per esempio 37 e 26. Infatti:

$$\begin{aligned} 63^2 &= (37 + 26)^2 = \\ &= 37^2 + 2 \cdot 37 \cdot 26 + 26^2 = \\ &= 1369 + 1924 + 676 = \\ &= 3969. \end{aligned}$$

Una questione che interessò gli uomini fin dall'antichità fu quella di compiere i calcoli nel modo più semplice e rapido possibile. Benché la sua origine sia incerta, si può considerare l'*abaco* come la prima macchina calcolatrice costruita dall'uomo. Esso, in diverse varianti, appare in antiche civiltà, come quella babilonese, egiziana, greca, romana, cinese, e in alcune civiltà precolombiane del Centro America. Tale strumento permetteva di eseguire le operazioni sui numeri rappresentandoli con oggetti (sassolini o noccioli di frutta forati) che scorrevano lungo dei bastoncini fissati a un supporto. Ancora oggi questa semplice calcolatrice è utilizzata dai commercianti nei mercati rurali della Russia e della Cina.

Nulla vieta quindi di utilizzare questa o altre scomposizioni, se non il fatto che il calcolo che ne deriva è più impegnativo da eseguire a mente rispetto all'operazione di partenza $(60 + 3)^2$. L'efficacia del metodo sta pertanto nel trovare il binomio più opportuno con cui esprimere la base.

Utilizziamo una tecnica simile per il calcolo rapido di 38^2 . Scriviamo 38 come $40 - 2$ e applichiamo di nuovo il prodotto notevole del quadrato di un binomio:

$$\begin{aligned} 38^2 &= (40 - 2)^2 = \\ &= 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2 = \\ &= 1600 - 160 + 4 = 1444. \end{aligned}$$

Il calcolo rapido del quadrato di un numero non è la sola operazione per la quale si rivelano utili i prodotti notevoli. Per esempio, determiniamo a mente il risultato della moltiplicazione $18 \cdot 22$.

→ Il quesito completo a pag. 291

Scomponiamo il prodotto nel seguente modo:

$$18 \cdot 22 = (20 - 2)(20 + 2).$$

Ricordando la regola della somma per la differenza tra due monomi,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

risolviamo:

$$\begin{aligned} 18 \cdot 22 &= (20 - 2)(20 + 2) = \\ &= 400 - 4 = 396. \end{aligned}$$

In maniera simile ricaviamo con un calcolo rapido il valore di 12^3 . Scriviamo 12 come $10 + 2$ e ricorriamo allo sviluppo del cubo di un binomio,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3:$$

$$\begin{aligned} 12^3 &= (10 + 2)^3 = \\ &= 10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot 2 + \\ &\quad + 3 \cdot 10 \cdot 2^2 + 2^3 = \\ &= 1000 + 600 + 120 + 8 = \\ &= 1728. \end{aligned}$$

Prova a calcolare rapidamente il valore di 1005^3 .

L'ABACO



▲ La cassiera di un ristorante del villaggio di Yichang, in Cina, utilizza l'abaco per fare i conti (anni '80).

LA TEORIA IN SINTESI

I monomi e i polinomi

1. Che cosa sono i monomi

Un **monomio** è un'espressione letterale formata dal prodotto di numeri e potenze che hanno per base una lettera e per esponente un numero naturale. Però, fra le lettere, **non compaiono addizioni, sottrazioni o divisioni**.

$\frac{3a^4}{2}$ è un monomio $\frac{4a^3}{b^2}$ non è un monomio

Un monomio in **forma normale** è scritto come prodotto fra un numero (il **coefficiente**) e una o più lettere diverse fra loro, con i relativi esponenti (la **parte letterale**).

Il **grado** di un monomio è la somma degli esponenti della parte letterale.

$5 a^4 b^6$ ↓ coefficiente	parte letterale grado: $4 + 6 = 10$
---	---

2. Le operazioni con i monomi

Due monomi sono **simili** quando hanno la stessa parte letterale.

La **somma** o la **differenza** di due monomi simili è un monomio che si ottiene *summando algebricamente i coefficienti e lasciando invariata la parte letterale*.

$2a - 5a = -3a$ ↓ somma algebrica dei coefficienti	stessa parte letterale
---	-------------------------------

Nel **prodotto**, per i **coefficienti** si usano le regole relative ai *numeri*, mentre per le *lettere* si utilizzano le *proprietà delle potenze*.

$3a^3 \cdot 2a^2 = 3 \cdot 2a^{3+2} = 6a^5$ ↓ prodotto dei coefficienti	somma degli esponenti
--	------------------------------

Lo stesso per il **quoziente** o la **potenza** di monomi.

■ **ESEMPIO** $12a^{12} : 3a^3 = (12 : 3)a^{12-3} = 4a^9$;
 $(2a^2)^3 = 2^3 a^{2 \cdot 3} = 8a^6$.

3. M.C.D. e m.c.m. fra monomi

- La parte letterale del **massimo comune divisore (M.C.D.)** fra monomi è il prodotto delle sole *lettere comuni* a tutti i monomi, ognuna presa una sola volta e *con l'esponente minimo*.
- La parte letterale del **minimo comune multiplo (m.c.m.)** fra monomi è il prodotto di *tutte le lettere* presenti nei monomi, ognuna presa una sola volta e *con l'esponente massimo*.
- Il coefficiente è rispettivamente il M.C.D. e il m.c.m. dei valori assoluti dei coefficienti, se sono tutti interi; in caso contrario, il coefficiente è 1.

ab^2 a^2b abc^3	a a² a	b² b b	c³	M.C.D. = ab lettere comuni con l'esponente minimo m.c.m. = $a^2b^2c^3$ tutte le lettere con l'esponente massimo
-----------------------------	--	--	----------------------	---

■ **ESEMPIO** M.C.D. $\left(\frac{1}{2}x^3yz^4, \frac{3}{5}x^2y^3 \right) = x^2y$;
 $M.C.D.(10x^4y^3z, 12xy^2z^2) = 2xy^2z$;
 $m.c.m.(10x^4y^3z, 12xy^2z^2) = 60x^4y^3z^2$.

4. Che cosa sono i polinomi

Un **polinomio** è la somma algebrica di più monomi. Anche ogni monomio viene considerato un polinomio.

■ **ESEMPIO** $3a + b$ e $3ab$ sono polinomi; $\frac{3a}{b}$ non è un polinomio.

Un polinomio è **ridotto** a forma normale se lo sono i suoi termini e se fra di essi non ci sono monomi simili.

ESEMPIO $2a^2b - 3a$ è ridotto a forma normale; non lo sono $2a^2 - 3a + a$ ($-3a$ e a sono simili) e $5ab - 2a^2ba$ ($-2a^2ba$ non è ridotto).

I polinomi ridotti con uno, due, tre e quattro termini si chiamano rispettivamente **monomi**, **binomi**, **trinomi** e **quadrinomi**.

Il **grado** di un polinomio ridotto è il grado maggiore dei suoi termini. Il **grado rispetto a una lettera** è il maggiore dei gradi dei suoi termini rispetto a quella lettera.

Un polinomio è:

- **omogeneo** quando tutti i suoi termini sono dello stesso grado;
- **ordinato rispetto a una lettera** se i suoi termini sono disposti con gli esponenti di quella lettera in ordine decrescente o crescente;
- **completo** rispetto a una lettera se questa compare con tutte le potenze dal grado massimo al grado 0.

Il **termine noto** è il termine formato soltanto da un numero, ossia il monomio di grado 0.

ESEMPIO $2x^2y - \frac{1}{2}x^3 + 3xy^2$

è un trinomio omogeneo di terzo grado; il grado rispetto a x è 3, quello rispetto a y è 2; non è ordinato e non è completo; il termine noto è 0.

$$3a^4 - 2a^3 - a + 2$$

è un quadrinomio completo e ordinato di quarto grado; non è omogeneo; il termine noto è + 2.

5. Le operazioni con i polinomi

La **somma** di due polinomi è un polinomio che ha per termini tutti i termini dei polinomi addendi; la **differenza** è un polinomio ottenuto addizionando al primo l'opposto del secondo. In generale, parliamo di **somma algebrica** di polinomi.

ESEMPIO $(5x + 4y) + (2x - y) - (x + 8y) = 5x + 4y + 2x - y - x - 8y = 6x - 5y$.

Per ottenere il **prodotto** di due polinomi si moltiplica ogni termine del primo per ogni termine del secondo e si addizionano i prodotti. In particolare, il prodotto di un monomio per un polinomio si ottiene addizionando i termini ottenuti moltiplicando il monomio per ogni termine del polinomio.

$$\begin{aligned} a(a+b) &= a^2 + ab \\ (a+b)(a+1) &= a^2 + a + ab + b \end{aligned}$$

6. I prodotti notevoli

Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2.$$

Il quadrato di un binomio:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Il quadrato di un trinomio:

$$\begin{aligned} (A + B + C)^2 &= \\ &= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC. \end{aligned}$$

Il cubo di un binomio:

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$$

Invece dei calcoli...

$$\begin{aligned} (2a+b)^3 &= (2a+b)(2a+b)(2a+b) = \\ &= (4a^2 + 2ab + 2ab + b^2)(2a+b) = \dots \end{aligned}$$

...i prodotti notevoli.

$$(2a+b)^3$$

$$(\textcolor{blue}{O} + \square)^3 = \textcolor{blue}{O}^3 + 3\textcolor{blue}{O}^2\square + 3\textcolor{blue}{O}\square^2 + \square^3$$

$$\begin{aligned} (2a+\textcolor{blue}{b})^3 &= 2a^3 + 32a^2\textcolor{blue}{b} + 32a\textcolor{blue}{b}^2 + \textcolor{blue}{b}^3 = \\ &= 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

7. Le funzioni polinomiali

Dato un polinomio $P(x)$, si chiama **funzione polinomiale** la funzione $y = P(x)$. Il suo dominio è \mathbb{R} . I valori della variabile indipendente x per i quali un polinomio si annulla sono gli **zeri** del polinomio. Per tali valori la funzione polinomiale $y = P(x)$ assume il valore $y = 0$.

ESEMPIO

$y = -2x^2 - 5x + 3$ è una funzione polinomiale.

$x = -3$ e $x = \frac{1}{2}$ sono zeri della funzione perché

$$P(-3) = 0 \text{ e } P\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

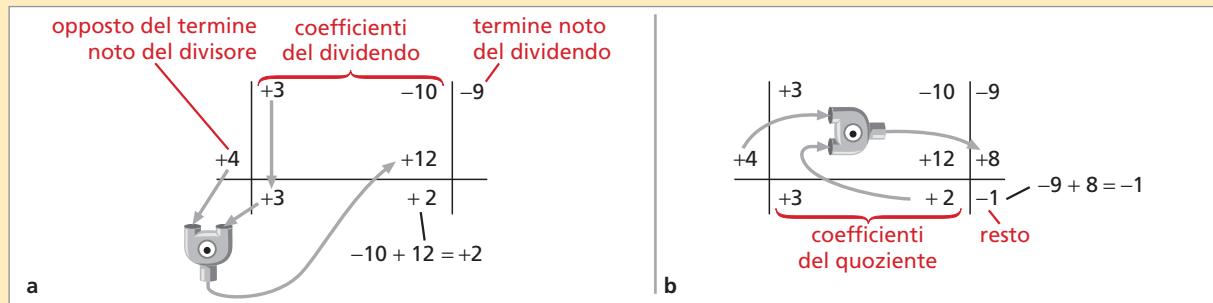
Un'**identità** è un'uguaglianza fra due espressioni letterali che è vera per ogni valore attribuito alle lettere che compaiono nelle espressioni.

9. La regola di Ruffini

Se il divisore di un polinomio è un binomio del tipo $x - a$, possiamo utilizzare la **regola di Ruffini**. Se il divisore è del tipo $x + a$, possiamo scriverlo nella forma $x - (-a)$ e applicare la stessa regola.

ESEMPIO

$(3x^2 - 10x - 9) : (x - 4)$.



10. Il teorema del resto

Il resto della divisione di un polinomio $A(x)$ per un binomio $x - a$ è $A(a)$.

$$\begin{aligned} & \overbrace{(x^3 + 7x^2 + x - 2)}^{A(x)} : (x + 3) \quad a = -3 \\ & A(-3) = [-3^3 + 7(-3)^2 + (-3) - 2] = -27 + 63 - 3 - 2 = 31 \\ & \mathbf{R = 31} \end{aligned}$$

8. La divisione fra polinomi

Un polinomio è **divisibile per un monomio** se lo sono tutti i suoi termini. In tal caso il quoziente si ottiene dividendo ogni termine per il monomio.

ESEMPIO

$$(6x^4 + 3x^3 - 4x^2) : 2x^2 = 3x^2 + \frac{3}{2}x - 2.$$

Nella **divisione** fra due polinomi, $A : B$, se Q è il polinomio quoziente e R il polinomio resto, allora: $A = B \cdot Q + R$.

ESEMPIO

$(3x^2 - x - 1) : (x + 2)$.

$$\underbrace{3x^2 - x - 1}_{A} : \underbrace{(x + 2)}_{B} = \underbrace{(x + 2)(3x - 7)}_{Q} + \underbrace{13}_{R}$$

Un polinomio A è **divisibile** per un polinomio B se e solo se $R = 0$, ossia $A : B = Q \Leftrightarrow A = B \cdot Q$.

11. Il teorema di Ruffini

Un polinomio $A(x)$ è divisibile per un binomio $x - a$ se e soltanto se $A(a) = 0$.

$$\begin{array}{c} x^2 - 3x - 10 \text{ è divisibile per } x - 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{se e solo se} \\ 5^2 - 3 \cdot 5 - 10 = 0 \end{array}$$

→ Teoria a pag. 291

1. Che cosa sono i monomi

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 L'espressione $\frac{2m}{n}$ non è un monomio, mentre $\frac{2m}{3}$ lo è. Perché?

2 L'espressione $3x^{2-n}y^n$ è un monomio soltanto se $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq n \leq 2$. Perché?

3 TEST Fra le seguenti espressioni solo una rappresenta un monomio. Quale?

- A** $\frac{3ab}{x}$
B 2
C $x - 2$

- D** $2ab^{-1}$
E $-xy + a$

4 Perché il monomio $+3aba^3$ non è ridotto a forma normale?

5 Fra le espressioni

$$2xyx^2, \quad 3x^3y, \quad \frac{4xy}{3},$$

solo la seconda e la terza sono monomi ridotti in forma normale. Perché?

6 TEST Fra le seguenti espressioni, solo una rappresenta un monomio di terzo grado. Quale?

- A** $5x^2yx^3$
B $2abx^2$
C $-2x^{-3}$

- D** abc
E $2ax^2y$

7 Perché il grado del monomio $2\pi ab^2$ è 3?

VERO O FALSO?

- a) Il prodotto tra un numero e una lettera è un monomio.
V **F**
- b) Il coefficiente del monomio $-2xy$ è il numero 2.
V **F**
- c) Il grado del monomio $2^3a^2b^4$ è 6.
V **F**
- d) Nel monomio $5xy^2$ il grado rispetto a x è 1.
V **F**
- e) Nel monomio ax^2y^3 il coefficiente è 0.
V **F**
- f) Nel monomio $2x^2y^3$ il grado rispetto alla lettera z è 0.
V **F**

VERO O FALSO?

- a) Il monomio a^3 non ha coefficiente.
V **F**
- b) L'espressione $\frac{3}{4}a^2b$ non è un monomio.
V **F**
- c) Un monomio ha sempre il coefficiente intero.
V **F**
- d) Un monomio non può avere lettere con esponenti negativi.
V **F**
- e) Il grado di un monomio è il prodotto degli esponenti delle lettere.
V **F**
- f) Qualunque numero è un monomio.
V **F**

ESERCIZI

Fra le seguenti espressioni indica quelle che sono monomi e spiega perché hai escluso le altre.

10 $3^{-2}a^2b^3x; \quad 4a^2xy^{-1}; \quad a^0b^0x^0; \quad 0x^2y^2; \quad 0a.$

11 $\frac{ax}{2}; \quad \frac{x}{2}; \quad \frac{1}{3}a; \quad \frac{3}{a}; \quad \frac{2}{ax}.$

12 $ab^2; \quad -4ab; \quad -2a^{-2}b; \quad (x+z)^3; \quad 4^{-3}x^2y^2.$

13 $b(-y)z; \quad a-bz; \quad (a-b) \cdot 2; \quad \frac{a+2}{3}; \quad \frac{a}{3}.$

■ La riduzione a forma normale

ESERCIZIO GUIDA

14 Riduciamo a forma normale il monomio:

$$a^4 b \left(-\frac{1}{2}\right)^3 a^2 \left(\frac{5}{2}\right) b^3 (-4) a^2.$$

Eseguiamo le operazioni fra i numeri.

Applichiamo la proprietà commutativa e la proprietà associativa della moltiplicazione, in modo da avvicinare i coefficienti e le lettere uguali fra loro:

$$\left(-\frac{1}{8}\right) \left(+\frac{5}{2}\right) (-4) a^4 a^2 a^2 b b^3 =$$

Calcoliamo il coefficiente come prodotto dei valori numerici e per ogni lettera applichiamo la prima proprietà delle potenze $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, sommando gli esponenti:

$$= + \frac{5}{4} a^8 b^4.$$

Riduci a forma normale i seguenti monomi, giustificando ogni passaggio.

15 $2a^2bx^2 \frac{1}{2}ax^4 \left(-\frac{4}{3}b\right); \left(-\frac{1}{4}\right)x^2(-3)xy^32y^2.$

16 $\frac{a}{2}yc^3 \left(-\frac{1}{5}\right)by^2a^2; 4a^3 \left(-\frac{1}{4}\right)a^42(-a^8).$

Riduci a forma normale i seguenti monomi indicandone poi la parte letterale e il coefficiente.

17 $\frac{6}{5}a \left(-\frac{10}{3}\right)ca^2x^2 \left(-\frac{1}{2}\right)a^4; -1abxa^2b^33x.$

18 $-\frac{6}{7}a \frac{7}{2}x^2; -1,\bar{3}a^2x^2yxy^2 \left(-\frac{3}{4}\right)a.$

19 $-\frac{1}{3}b^2c3^0bc^3; \left(-\frac{1}{5}\right)ab \frac{15}{2}b^2 \left(-\frac{2}{3}\right)^2a.$

20 $0,\bar{3}a \left(-\frac{3}{2}\right)^2a^2ab; (-2)x^3 \left(-\frac{1}{4}\right)x^2xx^4(-2)^3.$

21 $2a^23^0b^0; 5a \frac{1}{2}b \frac{c}{3}ca; a^2(5-7).$

22 $(-4+6)a^2b(1:2)b; \frac{a}{5}b \frac{1}{5}ab^3c^2c.$

■ Il grado di un monomio

23 Esistono monomi di terzo grado in a e in b nei quali nessuna delle due lettere ha esponente dispari? Ed esponente pari?

24 Quali sono i monomi di sesto grado in x e in y le cui lettere non hanno esponenti dispari?

25 Un monomio può essere di grado negativo?

26 Considera il monomio $2a$ e un monomio di grado minore: indica il grado dei due monomi.

Per i seguenti monomi indica il coefficiente, la parte letterale, il grado complessivo e quello rispetto a ciascuna lettera.

27 $3^2b^7a^3c; 2^2abd^4; -3b^4c^2d^6; \frac{3}{7}a^5b.$

28 $12; 24cd; -\frac{12}{5}c^3d^4; 8abcd.$

29 $3xy^4; -2^2x^2y^3; -5ab^2x^3.$

30 Usando le lettere x e y , scrivi tutti i possibili monomi di quarto grado con coefficiente -3 .

31 Scrivi due monomi di grado complessivo 6 che siano di terzo grado rispetto alla lettera x e di primo grado rispetto alla lettera y .

2. Le operazioni con i monomi

→ Teoria a pag. 293

RIFLETTI SULLA TEORIA

32 TEST Fra le seguenti espressioni solo una è un monomio simile a $-2ab^3c^2$. Quale?

- A** $5a^2bc^3a$ **B** $2abc^2b$ **C** $-2x^3$ **D** $+3abcb^2c$ **E** $+2ab^2c^3$

33

Che differenza c'è tra monomi simili e monomi uguali?

34

Che cosa manca al monomio $-\frac{8}{3}ab$ per essere simile a $\frac{2}{3}a^3b^2$?

35

VERO O FALSO?

- a) I monomi $2a$ e $-3a$ sono simili.
- b) Due monomi simili sono uguali.
- c) Due monomi simili hanno gradi diversi.
- d) Due monomi opposti sono simili.

 V F V F

36

I monomi a^n e a^{2n} sono simili? Perché? E a^n e b^n ?

37

In quale caso è possibile calcolare la somma algebrica di due monomi?

38

La somma di due monomi di primo grado non sempre è un monomio di primo grado. Perché?

39

Il prodotto di due monomi opposti diversi da 0 è sempre negativo. Perché?

40

Come si calcola il prodotto tra due monomi?

41

Moltiplicando un monomio per se stesso si ottiene un monomio di grado doppio. Perché?

42

VERO O FALSO?

- a) La somma di due monomi può non essere un monomio.
- b) Il quadrato di un monomio di terzo grado è un monomio di sesto grado.
- c) Il prodotto di due monomi simili è uguale al quadrato di uno dei due monomi.
- d) Due monomi simili sono divisibili fra loro.
- e) Due monomi fra loro divisibili sono simili.

 V F V F V F

43

Il monomio $4x^2y^3$ non è divisibile per $3x^4y$. Perché?

44

Non esiste alcun monomio che elevato al quadrato dia come risultato il monomio $4x^3y^2$. Perché?

45

Qualsiasi monomio elevato a 0 non ha parte letterale. Perché?

ESERCIZI**I monomi simili**

Individua i monomi simili nei seguenti gruppi.

46 $xy^3; -\frac{1}{3}axz^2; -2y^3x; -az^2x; \frac{1}{2}xy^2.$

47 $-\frac{1}{2}a^2b; -bx^2; \frac{1}{4}ba^2; \frac{2}{3}x^2b; -12a^2x^2.$

48 $5a^n; -3a^{2n}; 6a^n; b^{2n}; -\frac{1}{3}a^{2n}, \text{ con } n \in \mathbb{N}.$

49 $a^{2n}; a^{n+1}; 3a^{2n}; 2a^{n+1}, \text{ con } n \in \mathbb{N}.$

50 $x^{2m}; 5y^m; -4y^{2m}; -4x^{2m}; y^m, \text{ con } m \in \mathbb{N}.$

51 $2a^mbc; \frac{1}{3}b^nx^2y; -5bca^m; 2x^2b^ny; -\frac{1}{4}yb^nx^2, \text{ con } m, n \in \mathbb{N}.$

I monomi opposti

52 TEST Sono dati due monomi opposti. Una soltanto delle seguenti proposizioni è *vera*. Quale?

- A** La loro somma esiste, la loro differenza non esiste.
- B** La loro somma e la loro differenza sono entrambe uguali al monomio nullo.

C La loro differenza è uguale al doppio del monomio sottraendo e la loro somma è uguale al monomio nullo.

D La loro somma è uguale a 1, la loro differenza è uguale al monomio nullo.

E La loro differenza è il doppio del monomio minuendo, la loro somma è uguale al monomio nullo.

53**TEST** L'opposto del monomio $3^{-2} ab$ è:

A $-\frac{1}{9} ab$.

D $\frac{1}{3^2 ab}$.

B $-3ab$.

E $-\frac{1}{9} a^{-1} b^{-1}$.

C $3^2 a^{-1} b^{-1}$.

56

$$(-3)^2 a^2 b^3; \quad 9(-a)^2 (-b)^3; \quad (-2)^3 a^2 b^3.$$

57

$$a^2 b; \quad (-a^2)(-b); \quad (-3^0)a^2(-b); \quad (-a^2)(-b).$$

58

$$3a^0 x; \quad 3x; \quad -3xy^0; \quad \frac{1}{3} x.$$

59

$$b; \quad -3a^2 b; \quad -b; \quad -6b; \quad 3a^2 b.$$

60

$$\frac{15}{3} x^m; \quad -5a^0 x^m; \quad \frac{30}{6} x^m y^0; \quad \frac{40}{8} x^m,$$

con $m \in \mathbb{N}$.**61**

$$\frac{9}{2} x^m y^{2n}; \left(1 + \frac{7}{2}\right) x^m y^{2n}; \left(\frac{9}{2} - 9\right) x^m y^{2n} z^0,$$

con $m, n \in \mathbb{N}$.

Tra i seguenti monomi stabilisci quali sono opposti e quali sono uguali.

54

$$xy; \quad (-3)^0 xy; \quad (-1)xy; \quad (-1)^5 xy.$$

55

$$2ax^2; \quad (-2)^0 ax^2; \quad 2a(-x)^2; \quad -\frac{2}{3^0} ax^2.$$

L'addizione e la sottrazione di monomi

ESERCIZIO GUIDA

62 Eseguiamo le seguenti addizioni algebriche di monomi:

a) $3y + \frac{2}{5}y - y + 17y - \frac{2}{5}y;$ b) $2a - b + \frac{7}{2}b + a - \frac{1}{2}b;$

c) $2a^n b^{2m} - (-3a^2 b^m) + 2a^n b^{2m} - 3a^2 b^m + a^2 b^m$ (con $n, m \in \mathbb{N}$).

a) $3y + \frac{2}{5}y - y + 17y - \frac{2}{5}y =$

Tutti i monomi presenti sono simili tra loro.
Cancelliamo i monomi opposti, la cui somma
è 0:

$$= 3y + \cancel{\frac{2}{5}y} - y + 17y - \cancel{\frac{2}{5}y} =$$

Raccogliamo la parte letterale e calcoliamo il coefficiente (facciamo attenzione a non dimenticare il coefficiente -1):

$$= (3 - 1 + 17)y = 19y.$$

b) $2a - b + \frac{7}{2}b + a - \frac{1}{2}b =$

Segniamo in modo diverso i monomi simili fra loro:

$$= 2a - b + \underline{\frac{7}{2}b} + a - \underline{\frac{1}{2}b} =$$

Raccogliamo la parte letterale.

Quando introduciamo una parentesi, mettiamole sempre davanti il segno +, evitando così di sbagliare i segni:

$$= (2 + 1)a + (-1 + \frac{7}{2} - \frac{1}{2})b = \\ = 3a + 2b.$$

Il risultato non è un monomio, poiché contiene un'addizione di monomi non simili.

c) Procediamo come se gli esponenti fossero numeri. Eliminiamo la parentesi e sottolineiamo i monomi simili fra loro:

$$\underline{2a^n b^{2m}} + \underline{3a^2 b^m} + \underline{2a^n b^{2m}} + \\ - \underline{3a^2 b^m} + \underline{a^2 b^m} =$$

Raccogliamo a fattore comune:

$$= (2 + 2)a^n b^{2m} + (3 - 3 + 1)a^2 b^m = \\ = 4a^n b^{2m} + a^2 b^m.$$

Il risultato non è un monomio, perché contiene un'addizione di monomi non simili.

Esegui le seguenti addizioni algebriche di monomi.

- 63** $9x + 5x - 10x + x$ [5x]
- 64** $-\frac{2}{3}a + \frac{1}{6}a + \frac{4}{3}a - a + 5a$ $\left[\frac{29}{6}a \right]$
- 65** $-ab + 4ab - 12ab + \frac{1}{3}ab + 2ab$ $\left[-\frac{20}{3}ab \right]$
- 66** $\frac{3}{4}b^3 - 0,2b^3 - 1,5b^3 + \frac{1}{5}b^3$ $\left[-\frac{3}{4}b^3 \right]$
- 67** $-\frac{1}{4}a + 2b^2 + 6a - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b^2 - 6a$ $\left[-\frac{3}{4}a + \frac{7}{3}b^2 \right]$
- 68** $\frac{5}{6}ab - \frac{1}{2}a + 2ab - \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}a - ab$ $\left[\frac{11}{6}ab - \frac{1}{3}a \right]$
- 69** $5x^2 - 7x^2 + \frac{1}{4}x^2 - 8x^2 - \frac{3}{8}x^2 - x^2 + \frac{9}{8}x^2$ $[-10x^2]$
- 70** $-\frac{1}{2}y + y - \left(-\frac{1}{4}y \right) - (7y) + \frac{3}{4}y$ $\left[-\frac{11}{2}y \right]$
- 71** $-\frac{1}{4}xy + 3x^2 + 5y - \frac{1}{2}xy - \frac{3}{2}x^2 - 5y$ $\left[-\frac{3}{4}xy + \frac{3}{2}x^2 \right]$
- 72** $-\frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{1}{3}ab^2 - \left(+\frac{2}{3}a^2b^2 \right) - ab^2 + \left(+\frac{2}{3}ab^2 \right)$ $\left[-\frac{7}{6}a^2b^2 \right]$
- 73** $-\frac{3}{2}a + b - \left(-\frac{1}{4}a \right) - (-2b) - \frac{4}{3}b$ $\left[-\frac{5}{4}a + \frac{5}{3}b \right]$
- 74** $\frac{3}{2}x^3y^2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}xy - x^3y^2 - 3 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}x^3y^2 + 2xy$ $\left[x^3y^2 - \frac{5}{2} \right]$
- 75** $3a^2 - 5b^2 - 5b^2 - 3a^2 + \frac{19}{2}b^2 + \frac{5}{3}a^2 - 2a^2 + 4b^2 + \frac{1}{3}a^2 - \frac{5}{2}b^2$ $[b^2]$
- 76** $2a^2 - (-3a^2) + (-5a^2) - a - (-a)$ [0]
- 77** $\frac{1}{2}xy - (-x^2) - x^2 - y^2 + \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{3}xy$ $\left[\frac{1}{6}xy - \frac{2}{3}y^2 \right]$
- 78** $-4y^2 - 6x^3 + \frac{2x^2y}{3} - y + 4y^2 + 4x^3 - \frac{x^2y}{3} + y$ $\left[\frac{x^2y}{3} - 2x^3 \right]$
- 79** $- \left[4a^2b + \frac{1}{2}a^2b - \left(-\frac{1}{2}a^2b \right) \right] + 5a^2b - 3ab^2$ $[-3ab^2]$
- 80** $ax^3 + x^3 - (2x^2 - 3x^2) - (5x^3 - 4x^3) - [-(-2ax^3)]$ $[x^2 - ax^3]$

81 $a^m + \frac{1}{2}a^m - 3a^m$, con $m \in \mathbb{N}$.

$$\left[-\frac{3}{2}a^m \right]$$

82 $y^{2n} - \frac{5}{2}x^{2n} - \left(-\frac{3}{4}x^ny^n \right) - x^{2n} - \left(\frac{1}{2}x^ny^n \right) - (y^{2n})$, con $n \in \mathbb{N}$.

$$\left[\frac{1}{4}x^ny^n - \frac{7}{2}x^{2n} \right]$$

COMPLETA inserendo nella casella vuota $\boxed{}$ il monomio mancante in modo che l'uguaglianza risulti vera.

83 $-7a + 10a + 15a + \boxed{} = -4a$

87 $\frac{3}{4}a^4b^2 - \boxed{} = 0$

84 $3xy - 5xy + \boxed{} + \frac{1}{3}xy = \frac{2}{3}xy$

88 $\frac{7}{2}a^3 + \boxed{} + a^3 = \frac{14}{5}a^3$

85 $6a^3b^4 + \boxed{} = -5a^3b^4$

89 $-\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{3}x^2y + \boxed{} = \frac{7}{6}x^2y$

86 $\boxed{} - 3ab^5 + 5ab^5 = 0$

90 $\frac{3}{4}x^2y^3 - \boxed{} = \frac{1}{2}x^2y^3$

■ ESERCIZIO GUIDA

91 Dati i monomi $A = \frac{3}{4}a^2b$ e $B = -\frac{1}{2}a^2b$, semplifichiamo le espressioni $A + B$ e $A - B$.

Sostituiamo alle lettere A e B i monomi. Se un monomio è preceduto dal segno di operazione, scriviamo il monomio fra parentesi:

$$A + B = \frac{3}{4}a^2b + \left(-\frac{1}{2}a^2b \right) =$$

$$A - B = \frac{3}{4}a^2b - \left(-\frac{1}{2}a^2b \right) =$$

Togliamo le parentesi:

$$= \frac{3}{4}a^2b - \frac{1}{2}a^2b = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right)a^2b = \frac{1}{4}a^2b.$$

Togliamo le parentesi:

$$= \frac{3}{4}a^2b + \frac{1}{2}a^2b = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right)a^2b = \frac{5}{4}a^2b.$$

Semplifica le seguenti espressioni, dove A , B e C sono i monomi:

$$A = \frac{1}{2}x^2y; \quad B = -2x^2y; \quad C = -\frac{1}{3}x^2y.$$

92 $-(A + B); A - C.$

93 $B - (B - A) - A; B + C - 2A.$

94 $[(A + B) - C] - A + C.$

■ La moltiplicazione di monomi

95 VERO O FALSO?

- a) Il prodotto fra due monomi è sempre un monomio.
- b) Moltiplicando un monomio per una frazione non si ottiene un monomio.

- c) Il monomio prodotto di più monomi ha come grado la somma dei gradi dei monomi.

- d) Il prodotto di due monomi di primo grado è un monomio di primo grado.

96

TEST Quale delle seguenti espressioni è equivalente al monomio $-24a^2b^2x$?

- A** $6ab \cdot (-2bx) \cdot (3ab)$ **D** $2a \cdot \left(-\frac{3}{2}ab\right) \cdot (-12x)$
B $\frac{2}{3}a^2b^2 \cdot (-36x)$ **E** $4a^2b \cdot \left(\frac{4}{3}b^2\right) \cdot (6x)$
C $3a \cdot \left(-\frac{2}{3}bx\right) \cdot (12a)$

ESERCIZIO GUIDA

97 Eseguiamo le seguenti moltiplicazioni:

a) $\left(-\frac{3}{4}a^3b^2\right) \cdot (-2ab^3) \cdot \left(+\frac{4}{3}a^2\right); \quad$ b) $-3a^2b^m c \cdot (5a^n b^{3m} c^{2n})$, con $m, n \in \mathbb{N}$.

a) $\left(-\frac{3}{4}a^3b^2\right) \cdot (-2ab^3) \cdot \left(+\frac{4}{3}a^2\right) =$

Per procedere rapidamente, svolgiamo i calcoli a mente, distinguendo le tre regole da applicare:

1. Calcoliamo il segno.

2. Moltiplichiamo i valori assoluti dei coefficienti.

3. Sommiamo gli esponenti di ciascuna lettera.

$$= (- \cdot - \cdot +) \left(\frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \right) a^{3+1+2} b^{2+3} = + 2a^6b^5.$$

b) $-3a^2b^m c \cdot (5a^n b^{3m} c^{2n}) =$

Applichiamo le proprietà commutativa e associativa:

$$= -15a^2a^n b^m b^{3m} c c^{2n} =$$

Applichiamo la proprietà delle potenze $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$:

$$= -15a^{2+n} b^{4m} c^{1+2n}.$$

Esegui le seguenti moltiplicazioni di monomi. Le lettere a esponente rappresentano numeri naturali.

- 98** $2a^2 \cdot (-4a^5b^3); \quad -4xy^3 \cdot \frac{1}{2}x^3y^2. \quad [-8a^7b^3; -2x^4y^5]$
- 99** $-\frac{3}{4}a^3b^4c \cdot \left(-\frac{1}{2}ab^2c^5\right); \quad \frac{10}{7}ab^5c^7 \cdot \frac{7}{5}a^2b^5c. \quad \left[+\frac{3}{8}a^4b^6c^6; 2a^3b^{10}c^8\right]$
- 100** $-2a^2 \cdot (-3a^5b^3) \cdot \frac{1}{2}a^2; \quad -4a^5b^3 \cdot (-ab^3) \cdot \frac{3}{2}a^2b^2. \quad [+3a^9b^3; 6a^8b^8]$
- 101** $-\frac{3}{4}a^3b^4c \cdot \left(-\frac{1}{2}ab^2c^5\right) \cdot 10ab^2c^5 \cdot \frac{1}{5}a^3b^2c \quad \left[+\frac{3}{4}a^8b^{10}c^{12}\right]$
- 102** $2a^2 \cdot (-2a^4b^2) \cdot \left(-\frac{3}{4}a^3b^5c\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}ab^2c^5\right) \cdot 4ab^5c^7 \quad [-6a^{11}b^{14}c^{13}]$
- 103** $-3a^2x \cdot \left(\frac{5}{6}x^2a^2\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}a^2x^4\right) \cdot \left(-\frac{5}{8}ab^2x\right) \quad \left[-\frac{5}{8}a^7b^2x^8\right]$
- 104** $\frac{1}{4}b \cdot (-8a^3b^4) \cdot 3a^0 \cdot \frac{5}{4}a^2b \cdot \left(-\frac{1}{5}a\right) \quad \left[\frac{3}{2}a^6b^6\right]$

105 $\frac{4}{7}b^3 \cdot (-0,7a^3b) \cdot (-ab^3) \cdot \left(+\frac{3}{2}a^2b^2\right)$

$$\left[+\frac{2}{3}a^6b^9 \right]$$

106 $\frac{5}{11}xy \cdot (-0,2x^3)\left(\frac{11}{3}x^2y^2\right)\left(-\frac{1}{2}xy^3\right) \cdot 1,3x$

$$\left[\frac{2}{9}x^8y^6 \right]$$

107 $a^{2n} \cdot a^n \cdot a^{n^2}; \quad b^2 \cdot b^x \cdot b^x; \quad a^{x-2} \cdot a^4 \cdot a^y \cdot a^{2y}, \text{ con } x \geq 2.$

$$[a^{n^2+3n}; b^{2x+2}; a^{x+3y+2}]$$

108 $x^{m-n}x^n x^{m+n}, \text{ con } m \geq n.$

$$[x^{2m+n}]$$

109 $-2x^n y^n (-x^{2n}) \cdot (-2y^{2n}) \cdot \left(\frac{1}{10}x^2y^2\right)$

$$\left[-\frac{2}{5}x^{3n+2}y^{3n+2} \right]$$

110 $3a^m b^m \cdot a^{2m} \cdot \left(-\frac{1}{9}b^2\right) \cdot \frac{3}{2}a^3b^{3m}$

$$\left[-\frac{1}{2}a^{3m+3}b^{4m+2} \right]$$

COMPLETA le seguenti tabelle di moltiplicazione.

111

.	$-a$	$3b$
$2a$		
$-\frac{1}{2}y$		

112

.	-2	$-x$	$+2y$
-3			
$-4x$			
$\frac{1}{2}y$			

113

.	a	-4	$-b^2$
$-\frac{1}{4}$			
ab			
a^2			

114 **COMPLETA** la tabella come indicato nell'esempio svolto nella prima riga. Devi sostituire alle lettere a e b presenti nei monomi della prima colonna i rispettivi monomi posti nella seconda e terza colonna. Nell'ultima colonna scrivi il monomio prodotto in forma normale.

MONOMIO	a	b	MONOMIO PRODOTTO	FORMA NORMALE
$5ab^2$	$3x^2y$	$2y^3$	$5(3x^2y)(2y^3)^2$	$60x^2y^7$
$3a^2b^3$	$2xy^2$	xy		
$2a^3b^2$	$10x^2y^3$	$4y^2$		
$\frac{1}{2}a^2b$	$-\frac{1}{4}t^4$	$62yt$		
ab	xy	$-xy$		

COMPLETA inserendo il monomio mancante in modo che l'uguaglianza sia vera.

115 $2a \cdot \boxed{} = -8a^2b^2$

120 $2ab \cdot \left(-\frac{1}{2}a^2b\right) \cdot \boxed{} = a^4b^3$

116 $\boxed{} \cdot 3s^2t^4 = 12s^3t^5$

121 $3xy^2 \cdot \left(-\frac{1}{5}xy^2\right) \cdot \boxed{} = -3x^5y^5$

117 $4a^6b^8 \cdot \boxed{} = \frac{1}{2}a^8b^{12}$

122 $\boxed{} \cdot (-6a^2b) \left(-\frac{1}{4}ab\right) = 9a^4b^5$

118 $4a^3 - 2a \boxed{} = -5a^3$

123 $-2xy \cdot \left(\frac{2}{3}xy\right) \cdot \boxed{} = -\frac{1}{2}x^7y^5$

119 $(3a^5b^2) \boxed{} = 9a^{10}b^4$

124 $\left(-\frac{1}{3}x^2y^2\right)(6x) \cdot \boxed{} = 8x^6y^8$

125 $\left(-\frac{7}{3}a^2b\right)\left(-x^2y^2\right) \cdot \left(\frac{3}{5}ab^2\right) \cdot \boxed{\quad} = a^3b^4x^2y^3$

126 $\frac{3}{4}a^{2n} \cdot (-2a^{2n}) \cdot \boxed{\quad} \cdot \frac{1}{9}a^n = \frac{2}{3}a^{5n+1}$

127 $\frac{3}{10}c^3x^3y^2 - \boxed{\quad} = \left(-\frac{13}{3}cx^3y\right) \cdot \left(\frac{1}{30}c^2y\right)$

■ La semplificazione di espressioni con somme e prodotti di monomi

■ ESERCIZIO GUIDA

128 Semplifichiamo la seguente espressione:

$$\left(\frac{3}{8}ab\right)\left(-\frac{4}{3}a\right)(-6b) + b^2\left(\frac{1}{2}a\right) - ab^2.$$

L'espressione è la somma algebrica di tre termini formati da prodotti di monomi:

$$\boxed{\left(\frac{3}{8}ab\right)\left(-\frac{4}{3}a\right)(-6b)} \quad \boxed{+} \quad \boxed{b^2\left(\frac{1}{2}a\right)} \quad \boxed{-} \quad \boxed{ab^2} =$$

Eseguiamo le moltiplicazioni fra i monomi di ciascun termine:

$$= + \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) a^2b^2 + \frac{1}{2}ab^2 - ab^2 =$$

Calcoliamo i coefficienti ed evidenziamo i monomi simili:

$$= 3a^2b^2 + \frac{1}{2}ab^2 - ab^2 =$$

Sommiamo i monomi simili:

$$= 3a^2b^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)ab^2 = 3a^2b^2 - \frac{1}{2}ab^2.$$

Il risultato non è un monomio ma la somma di due monomi.

Semplifica le seguenti espressioni.

129 $a^2x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) + \left(\frac{1}{2}ax\right) \cdot \left(\frac{2}{3}a\right) - \frac{2}{3}a^2x^2 \quad \left[-\frac{1}{6}a^2x^2 + \frac{1}{3}a^2x \right]$

130 $(-2x)\left(-\frac{1}{2}y\right) + (-2y)x + xy + y(-x) + 2xy + y(-x) \quad [0]$

131 $x^2 + 7x^2 - 2(-x^2) + 2(-4)x^2 + 2x^2 - 2x^2 + x^2 - x(2x) + 4x^2 - 2(2x^2) \quad [x^2]$

132 $2x^2y^2(3x^2y^2) - (-xy)(5x^3y^3) - (-4x^2y^2)2x^2y^2 - 7x^4y^4 \quad [12x^4y^4]$

133 $-\frac{7}{2}x(-x^2) + (-x)\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{4}{5}x^2(-5x) + x^3 \quad [x^3]$

134 $\left(x^2 + \frac{2}{5}x^2\right) \cdot a + \left(a - \frac{13}{5}a\right)\left(\frac{7}{8}x^2 - x^2\right) \quad \left[\frac{8}{5}ax^2\right]$



135 $\frac{1}{2}a^2(-4b) - \left(-\frac{7}{6}a^2b\right)(ab) - \frac{1}{3}a(-a^2b)\frac{5}{2}b - \frac{a}{4}(-2ab)$

136 $\frac{2}{3}ab \cdot (-2a^2b) - \left(-\frac{1}{6}a^3\right) \cdot b^2 + \left(-\frac{1}{2}ab^2\right)3a + \frac{3}{4}a^2b \cdot (2b)$

$$\left[-\frac{7}{6}a^3b^2 \right]$$

137 $3,5x\left(\frac{1}{7}bx^2\right) + 3b(-x^3) - x^2b\left(-\frac{1}{2}x\right) + \left(-\frac{1}{2}x^2\right)(-xb)$

$$\left[-\frac{3}{2}bx^3 \right]$$

138 $(+y^4) - 3y(-y^3) + 6xy(-x^3y^3) - 4xy^3\left(-\frac{3}{2}x^3y\right)$

$$[4y^4]$$

139 $\left(-\frac{2}{3}x\right)\left(-\frac{6}{5}y\right) - \frac{4}{5}xy + \left(-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{4}xy\right) + xy - 2xy$

$$\left[-\frac{3}{2}xy \right]$$

140 $x^4y^2 - \left(-\frac{5}{4}x^3y\right)\left(-\frac{1}{5}xy\right) + 8x^3\left(-\frac{1}{8}xy^2\right) - \frac{3}{2}x^4y^2$

$$\left[-\frac{7}{4}x^4y^2 \right]$$

141 $3(-x^2y)\left(-\frac{1}{2}\right) - 2x^2(2y) + (-y)(2x^2) + x^2y\left(1-\frac{3}{4}\right)$

$$\left[-\frac{17}{4}x^2y \right]$$

142 $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}x^2y\right) + \left(-\frac{1}{5}xy\right)\left(\frac{5}{2}x\right) + \frac{1}{2}x^2y - x^2y + 2x^2y$

$$\left[\frac{3}{2}x^2y \right]$$

143 $x^2 - \left(\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{2}{3}x\right) + \left(\frac{1}{5}x\right)\left(-\frac{5}{2}x\right) - x^2 + \frac{2}{3}x^2 + x^2\left(-\frac{1}{4}\right)$

$$\left[-\frac{1}{4}x^2 \right]$$

144 $\left(-\frac{5}{2}b\right)(-b^2) + \left(-\frac{4}{3}b^2\right)\left(\frac{5}{2}b\right) + \frac{3}{2}b(b^2) + \left(-\frac{1}{3}b^2\right)\left(\frac{3}{2}b\right) + \left(-\frac{1}{2}b^2\right)\left(\frac{5}{2}b\right) + b^3$

$$\left[-\frac{1}{12}b^3 \right]$$

145 $\frac{1}{2}x^4 + \left(-\frac{3}{2}x^2\right)\left(\frac{9}{4}x^2\right) + \left(\frac{2}{9}x^2\right)\left(\frac{3}{2}x^2\right) - \left(-\frac{9}{4}x^2\right)\left(\frac{3}{2}x^2\right) + \left(-\frac{1}{3}x\right)\left(\frac{9}{4}x^3\right) - \frac{3}{4}x^4$

$$\left[-\frac{2}{3}x^4 \right]$$

146 $\left(\frac{3}{4}xy^2\right)\left(\frac{2}{3}x\right) + \left(-\frac{1}{2}x^2y\right)y + \frac{1}{3}y\left(-\frac{3}{2}x^2y\right) + \frac{4}{5}x^2y^2 - x^2y^2$

$$\left[-\frac{7}{10}x^2y^2 \right]$$

147 $\frac{4}{3}xy^2 + (-y^2)\left(\frac{4}{3}x\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)(xy^2 - 2xy^2) + 2xy^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)2xy^2 + \frac{2}{3}xy^2 + xy^2$

$$\left[\frac{10}{3}xy^2 \right]$$

■ La potenza di un monomio

■ ESERCIZIO GUIDA

148 Calcoliamo le seguenti potenze di un monomio:

a) $(-3a^3)^2$; b) $(-2ab^{3n}c^n)^2$, $n \in \mathbb{N}$; c) $(-2x^3y^{2n^2}z^n)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Applichiamo la terza proprietà delle potenze, $(ab)^n = a^n b^n$:

$$(-3a^3)^2 = (-3)^2(a^3)^2 =$$

Calcoliamo il coefficiente e applichiamo la quinta proprietà delle potenze, $(a^m)^n = a^{mn}$:

$$= +9a^6.$$

In questi esercizi è importante fare attenzione al segno. Osserva questi esempi:

$$(-3a^3)^2 = +9a^6;$$

$$(-3a^3)^3 = -27a^9;$$

$$-(-3a^3)^3 = -(-27a^9) = +27a^9.$$

b) Applichiamo le proprietà delle potenze:

$$(ab)^n = a^n b^n; (a^n)^m = a^{nm};$$

$$(-2)^2 (a)^2 (b^{3n})^2 (c^n)^2 = 4a^2 b^{6n} c^{2n}.$$

c) Per stabilire il segno, dobbiamo distinguere i due casi: n pari o n dispari.

Moltiplichiamo poi ciascuno degli esponenti per n :

- n pari: $+ 2^n x^{3n} y^{2n^3} z^{n^2}$;

- n dispari: $- 2^n x^{3n} y^{2n^3} z^{n^2}$.

Calcola le seguenti potenze di monomi. Le lettere a esponente rappresentano numeri naturali.

149 $(-ax)^2;$

$$\left(-\frac{1}{2}xy\right)^3;$$

$$(2a^2b)^3;$$

$$(a^2b)^0.$$

150 $(-ab^2)^3;$

$$-(ab^2)^3;$$

$$(-3a^2b^5c^3)^3;$$

$$\left(-\frac{2}{3}a^6b^2c^3\right)^4.$$

151 $\left(-\frac{1}{2}a^3b^2c\right)^5;$

$$\left(\frac{3}{4}x^2y^3\right)^0;$$

$$\left(-\frac{3}{2}a^2bc^4\right)^2;$$

$$(3a^2b^5c^3)^3.$$

152 $(3a^2b^5c^3)^2;$

$$(-5ab^5)^3;$$

$$(-2a^2b^2c^2)^4.$$

153 $2(a^3c^2)^2;$

$$-3(a^b)^2;$$

$$(-x^3y)^3.$$

154 $(-5x^ay^{5a})^2;$

$$-(3a^3bx^b)^2;$$

$$(5a^{2n}b^{3n})^3.$$

155 $(a^mb^{3m})^2;$

$$(2a^mb^n)^3;$$

$$(-x^ay^b)^2.$$

156 $\left(\frac{1}{2}x^my^{2m}\right)^n;$

$$(6a^by^c)^0;$$

$$(-x^2y^n)^n.$$

COMPLETA in modo da rendere vera l'uguaglianza.

157 $(4a^2xy)^{\dots} = 16a^4x^2y^2$

158 $(\dots\dots a^3b^4)^{\dots} = 36a^6b^8$

159 $\left(-\frac{1}{2}bc^2\right)^{\dots} = -\frac{1}{32}b^5c^{10}$

160 $(\dots\dots x^{\dots}y^2)^3 = -8x^9y^6$

161 $(7x^ny^{\dots})^2 = 49x^{2n}y^{4n}, \text{ con } n \in \mathbb{N}.$

Calcola i quadrati e i cubi dei seguenti monomi (con $n \in \mathbb{N}$).

162 $ab^3; -3a^2b; \frac{1}{2}a^3b^2; -2xy.$

163 $-\frac{3}{5}x^2y^3; -\frac{1}{3}x^2y^2; \frac{2}{3}ab^4.$

164 $a^nb^2; -\frac{1}{2}a^{2n}b; 3a^nb^{2n}.$

165 $\frac{1}{2}x^{n+1}; -4a^3c^n.$

Dalla potenza al monomio

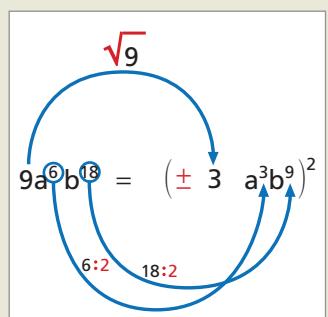
ESERCIZIO GUIDA

166 Scriviamo i monomi il cui quadrato è $9a^6b^{18}$.

I monomi richiesti sono due monomi opposti, perché entrambi, elevati al quadrato, forniscono lo stesso risultato.

Calcoliamo il valore assoluto del coefficiente, e cioè la radice quadrata di 9. Determiniamo la parte letterale. Se per elevare al quadrato una lettera dobbiamo moltiplicare il suo esponente per 2, nell'operazione inversa dovremo dividere l'esponente per 2: quindi dobbiamo dividere per 2 gli esponenti 6 e 18.

I monomi richiesti sono $+3a^3b^9$ e $-3a^3b^9$.



Scrivi i monomi i cui quadrati sono i monomi seguenti (con $n \in \mathbb{N}$).

167 a) $4a^2b^4$; $25x^6y^2$; $\frac{1}{16}z^8$; $\frac{a^2}{4}$.

b) $\frac{4}{25}x^6y^8$; $81x^2y^{12}$; $a^6b^4c^{12}$.

168 a) $100a^2b^{10}$; $\frac{b^{16}}{9}$; $\frac{25}{16}x^{10}y^8$.

b) $\frac{4}{81}a^2b^4c^6$; $25a^{10}b^{14}$; $\frac{49}{9}a^{36}b^{100}$.

169 a) $\frac{81}{100}x^2y^{2n}$; $49x^{2n}y^{16}$; $9x^{2n}$.

b) $\frac{16}{25}x^8y^{36n}$; $\frac{1}{9}a^6b^6$; $36a^{4n}$.

Scrivi i monomi i cui cubi sono i monomi seguenti (con $n \in \mathbb{N}$).

170 a) $27a^3b^3$; x^6y^9 ; $\frac{1}{8}a^{12}$.

b) $-\frac{8}{27}a^9b^6c^3$; $0,008a^6b^{12}$; $125a^3x^9$.

171 $27a^6$; $-8b^{3n+6}$; $\frac{1}{64}a^{9n}b^{3n}$.

COMPLETA quando è possibile.

172 a) $x^6y^6 = (\dots)^2 = (\dots)^3$;

b) $y^{12} = (\dots)^2 = (\dots)^3$.

173 a) $-4a^2y^2 = (\dots)^2 = (\dots)^3$;

b) $-x^6y^6 = (\dots)^2 = (\dots)^3$.

Calcola le seguenti potenze di monomi (con $n \in \mathbb{N}$).

174 Con n pari: $(-2a^2b)^n$;

$$\left(\frac{1}{3}xa^n\right)^n; \quad (-x^2y^{n^2})^n.$$

175 Con n dispari:

$$\left(-\frac{1}{2}a^nb^2\right)^n; \quad [-(-2ab)^n]^n.$$

COMPLETA le seguenti uguaglianze.

176 $\left(\dots\right)^2 = \frac{1}{4}a^2b^4c^6$

177 $\left(\dots\right)^4 = 16a^8b^{16}$

178 $\left(\dots\right)^4 = \frac{1}{16}a^8b^4$

179 $27b^{27} = \left(\dots\right)^3$

180 $x^6y^{18} = \left(\dots\right)^2 = \left(\dots\right)^3$

181 $\frac{1}{5}\left(\dots\right)^5 = -\frac{a^{10}b^{25}}{160}$

182 $\left(-\frac{3}{2}a^2b^4\right)^{\dots} = 1$

183 $\frac{4}{5}x^2y^4z^2 - \frac{19}{25}x^2y^4z^2 = (\dots)^2$

184 $\left(\dots\right)^3 \cdot \frac{1}{2}xy = -\frac{27}{2}x^4y$

185 $-\frac{1}{3}a^2y\left(\dots\right)^2 = -\frac{4}{27}a^4y^5$

186 $-\frac{3}{4}a^3b\left(\dots\right)^2 = -\frac{1}{3}a^5b^5$

187 $\left(\dots\right)^2 \cdot \frac{1}{6}b = \frac{2}{3}a^4b^3$

188 $\left(\dots\right)^3 \frac{2}{27}x^2y^2 = -\frac{1}{4}x^5y^8$

189 $\frac{2}{3}xy^2\left(\dots\right)^2 = +\frac{3}{2}x^3y^6$

190 $\left(\dots\right)^4 \left(\dots\right)^3 = a^{12}b^9$

191 $\left(\dots\right)^2 \left(\dots\right)^5 = a^8y^{15}$

192 $[(-2x^2b^{\dots})^2]^{\dots} = 64x^{12}b^{18}$

■ La semplificazione di espressioni con potenze di monomi

■ ESERCIZIO GUIDA

193 Semplifichiamo la seguente espressione:

$$\left(-\frac{1}{2}a^6x^3\right)^2 + \left(\frac{5}{4}a^2\right)\left(-\frac{1}{2}a^4x\right)^2(-2a^2x^4) - \left(-\frac{3}{2}a^4x^2\right)^3.$$

L'espressione è la somma algebrica di tre termini formati da potenze e prodotti di monomi:

$$\boxed{\left(-\frac{1}{2}a^6x^3\right)^2} + \boxed{\left(\frac{5}{4}a^2\right)\left(-\frac{1}{2}a^4x\right)^2(-2a^2x^4)} - \boxed{\left(-\frac{3}{2}a^4x^2\right)^3} =$$

In ciascun termine eseguiamo innanzitutto l'elevamento a potenza:

$$= + \frac{1}{4}a^{12}x^6 + \left(\frac{5}{4}a^2\right)\left(+\frac{1}{4}a^8x^2\right)(-2a^2x^4) - \left(-\frac{27}{8}a^{12}x^6\right) =$$

Proseguiamo come in una normale espressione con moltiplicazioni di monomi:

$$= + \frac{1}{4}a^{12}x^6 - \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \cancel{2}\right)a^{2+8+2}x^{2+4} + \frac{27}{8}a^{12}x^6 =$$

$$= + \frac{1}{4}a^{12}x^6 - \frac{5}{8}a^{12}x^6 + \frac{27}{8}a^{12}x^6 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{8} + \frac{27}{8}\right)a^{12}x^6 = \frac{2-5+27}{8}a^{12}x^6 = \frac{24}{8}a^{12}x^6 = 3a^{12}x^6.$$

Semplifica le seguenti espressioni con potenze. Le lettere a esponente rappresentano numeri naturali.

194 $(-xy^2)^3 + \frac{1}{5}xy^4\left(\frac{10}{3}x^2y^2\right); \quad (3a^3b^2)^2 \cdot (-2a^4b^3) - (a^2b)^3(-4a^4b^4).$ $\left[-\frac{1}{3}x^3y^6; -14a^{10}b^7\right]$

195 $(2x+3x)^2(-x)^3 - 2x^3(-2x)^2; \quad (-3a^2)\left(\frac{1}{2}ab\right)^2 - \left(\frac{2}{3}a^2\right)^2(-3b^2).$ $\left[-33x^5; \frac{7}{12}a^4b^2\right]$

196 $\left(-\frac{1}{2}ab^3\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}ab^2\right)\left(-\frac{3}{2}ab\right)(-2b)^3; \quad \left(-\frac{2}{3}a^2b^4\right)^2 - (-2ab^3)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}ab\right)^2.$ $\left[-\frac{23}{4}a^2b^6; 0\right]$

197 $2a\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3 - ab(-a^3b)^2 + (a^2+2a^2)^4 - (-9a^4)^2$ $\left[-\frac{5}{4}a^7b^3\right]$

198 $[3a(-ab^2)^2]^2 - \left[\left(-\frac{1}{2}a\right)^3(-2ab^3)\right]^2$ $\left[9a^6b^8 - \frac{1}{16}a^8b^6\right]$

BRAVI SI DIVENTA ► E09



199 $6\left(-\frac{1}{3}a^2x^3\right)^3 - \left(\frac{1}{2}x^4\right)\left(-\frac{1}{3}a^2x\right)^2(-2a^2x^3) - \left[(-a)^2\left(-\frac{2}{3}x^3\right)\right]^3$

200 $- \left[2(3a^2b - 4a^2b)^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{2}a^2\right)^2\right]^0(2a^2)^3$ [se $a \neq 0$ e $b \neq 0, -8a^6]$

201 $\left(\frac{4}{5}a^3\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{16}b^2\right) + \frac{4}{5} \cdot (a^3b)^2 - 2(a^2)^3 \cdot (-b)^2 + a^6b^2$ [0]

202 $\left[\left(-\frac{3}{4}a^3 \right)^2 \cdot \left(\frac{16}{3}b^4 \right)^3 - 3(a^2)^3(b^3)^4 \right]^0 - 2$ [se $a \neq 0$ e $b \neq 0, -1$]

203 $(-2x^3y)^4 + [-(-x^3y)^2]^2 - y\left(\frac{1}{2}x^3y\right)^3(-2x)^3 - (4x^6y^2)^2 + (-2x)^4\left(\frac{1}{2}y\right)^2$ $[2x^{12}y^4 + 4x^4y^2]$

204 $a^{c+b} + a^c \cdot (2a^b) + x^{2a} - (x^2)^a$ $[3a^{c+b}]$

205 $(x^{2a})^3 - (x^6)^a + 2(x^2)^a(x^a)^4$ $[2x^{6a}]$

206 $(-a^x)^2 \cdot (b^2)^y - 2(a^xb^y)^2 + 4(a^2)^x \cdot (b^2)^y$ $[3a^{2x}b^{2y}]$

207 $(2a)^2 \cdot a^m + (-a)(a^{m+1}) + (3a)(a^2)(a^{m-1}), \quad \text{con } m \geq 1.$ $[6a^{m+2}]$

■ La divisione fra due monomi

208 VERO O FALSO?

- a) Se due monomi sono divisibili, il grado del primo è maggiore del grado del secondo.
- b) Se due monomi sono divisibili, i loro coefficienti sono numeri interi.
- c) Se due monomi sono divisibili, il coefficiente del primo deve essere divisibile per il coefficiente del secondo.
- d) Se due monomi sono divisibili, il primo deve contenere tutte le lettere del secondo.

209 VERO O FALSO?

- a) Dato il monomio $3a^2b$, i monomi a e b sono suoi divisori.
- b) Dato il monomio $7a$, il monomio $9a^2$ è un suo multiplo.
- c) Il monomio quoziante di due monomi ha come coefficiente la differenza dei coefficienti dei due monomi.
- d) Il quoziante di due monomi che hanno la stessa parte letterale è un monomio di grado 1.

■ ESERCIZIO GUIDA

210 Eseguiamo, quando è possibile, le seguenti divisioni di monomi:

- | | |
|---------------------|---|
| a) $-24a^7 : 6a^3;$ | d) $9a^3 : 2a^2b;$ |
| b) $3ab : 4b;$ | e) $10x^{2t}y^{7m}z^{4n+1} : (-2x^ty^{3m}z^{4n}), \text{ con } m, n, t \in \mathbb{N}.$ |
| c) $10a^3b : 2a^4;$ | |

a) $-24a^7 : 6a^3 =$

Osserviamo gli esponenti di a nel dividendo e nel divisore (ricordiamo che a^m è divisibile per a^n se e solo se $m \geq n$).

$7 \geq 3$, pertanto la divisione è possibile.

Applichiamo la proprietà delle potenze $a^m : a^n = a^{m-n}$:

$$= -\frac{24}{6}a^{7-3} = -4a^4.$$

b) $3ab : 4b = 3a^1b^1 : 4a^0b^1 =$

Osserviamo gli esponenti delle due lettere nel dividendo e nel divisore.

Riguardo agli esponenti di a , $1 \geq 0$; riguardo agli esponenti di b , $1 \geq 1$. Pertanto la divisione è possibile.

$$= \frac{3}{4} a^{1-0} b^{1-1} = \frac{3}{4} a.$$

c) $10a^3b : 2a^4$.

Considerando gli esponenti della lettera a , abbiamo $3 < 4$, pertanto la divisione non è possibile.

d) $9a^3 : 2a^2b = 9a^3b^0 : 2a^2b^1$.

Riguardo agli esponenti di b , $0 < 1$, pertanto la divisione non è possibile.

e) $10x^{2t}y^{7m}z^{4n+1} : (-2x^ty^{3m}z^{4n}) =$

Gli esponenti del risultato sono dati, per ciascuna lettera della base (x, y, z) , dalla differenza fra gli esponenti:

$$= -5x^{2t-t}y^{7m-3m}z^{4n+1-4n} = -5x^ty^{4m}z.$$

Esegui, quando è possibile, le seguenti divisioni fra monomi. Le lettere a esponente rappresentano numeri naturali.

211 $4a^2bc^5 : 2abc; -3a^4b^7c : (-3a^4b^5).$

212 $a : \frac{1}{4}; ab^2 : \frac{1}{7}a^2b.$

213 $\frac{5}{2}ax^4 : (-ax^4); x^{10}y^9 : \frac{3}{7}x^{10}y^9.$

214 $\frac{1}{5}ab^6c^2 : \left(-\frac{3}{10}b^4c\right); -5x^2y^3 : (5xy^2).$

215 $-\frac{3}{4}a^2b^5 : \left(-\frac{1}{4}a^2b^3\right); \frac{1}{2}ab^3 : (-2a^2b^3).$

216 $-\frac{2}{3}(ab^2)^3 : (ab^2)^2; (a^2b^4)^3 : (-2a^2b^3)^2.$

217 $(-15x^3yc^2) : (-2xy^2z^3); \left(-\frac{2}{5}a^3b^2c\right) : \left(-\frac{2}{5}a^2bc\right)^3.$

218 $\frac{2}{7}x^3y : \left(-\frac{1}{2}x^3y\right); \left(-\frac{2}{8}a^3b^4\right)^2 : \left(\frac{1}{3}a^2b^3\right).$

219 $\left(-\frac{2}{5}a^2b^3c^5\right) : \left(\frac{4}{15}ab^2c^3\right);$

$$\left(\frac{1}{5}ab^2c^3\right)^2 : \left(-\frac{2}{5}ab^2c^5\right).$$

220 $\left(-\frac{3}{4}x^3y^2\right)^2 : \left(-\frac{3}{2}xy\right)^2;$
 $\left[-\left(-\frac{3}{2}a^3\right)^3\right]^4 : \left[\left(-\frac{3}{2}a^2\right)^2\right]^6.$

221 $\left(-\frac{2}{3}a^{2m}b^{n+1}c^2\right) : \left(\frac{4}{9}a^mbc^2\right);$

$$\left(\frac{2}{35}a^{n+1}b^{2m}c^3\right) : \left(-\frac{4}{7}a^nb^mc^2\right).$$

222 $\left(-\frac{3}{5}a^nb^mc^p\right)^2 : \left(\frac{3}{5}a^nb^mc^p\right);$

$$(-2a^{2m}b^{3p}c^{2n}) : (0,2a^mb^pc^n)^2.$$

223 $\left(\frac{7}{4}a^mb^2c\right)^2 : \left(-\frac{21}{2}a^mb^3c\right);$

$$\left(-\frac{4}{3}a^{2m}b^{2s+1}c^2\right) : \left(-\frac{2}{9}a^mb^{s+1}c\right).$$

224 $(3a^{2n}b^mc) : (-5a^nb^c), \text{ con } m \geq 1;$

$$(-a^{3m}b^{5p}) : 0,1a^{2m}b^{2p}.$$

225 $(-a^{n+5}b^n) : \left(-\frac{1}{2}a^{n+3}b\right), \text{ con } n \geq 1;$

$$6a^{n+1}b^{n+1} : 2a^n.$$

226 $\left[\frac{1}{3}\left(axy^2z^3\right)^s\right] : \left(-\frac{4}{9}ax^sy^sz^{2s}\right), \text{ con } s \geq 1;$

$$\left(-\frac{5}{3}a^tb^{2t}c^2\right) : \left(\frac{1}{3}ab^tc\right), \text{ con } t \geq 1.$$

COMPLETA inserendo il monomio mancante in modo che l'uguaglianza sia vera.

227 $(3a^4b) : \boxed{} = 2a$

234 $\left(\frac{2}{3}abx^2\right)^4 = \boxed{} : (9axb^4)^2$

228 $(4a^3b^2) : \boxed{} = \frac{1}{2}a$

235 $\left(\frac{13}{4}a^4b^3x^2\right) = \left(\frac{13}{2}a^6b^3x\right)^2 : \boxed{}$

229 $2xy : \boxed{} = 1$

236 $\left(-\frac{3}{7}x^3y^2z\right)^2 : \boxed{}^2 = \frac{225}{196}x^4z^2$

230 $12a^3b^5 : \boxed{} = 24a^2b^3$

237 $\frac{1}{2}a^n : \boxed{} = \frac{3}{4}a^{n-2}$

231 $\left(\frac{2}{5}a^8b^3\right) : \boxed{} = \frac{5}{2}a^4b$

238 $\frac{2}{5}a^n \cdot (-10a^2) : \boxed{} = -8a^2$

232 $\left(\frac{4}{3}x^7b^5\right) : \boxed{} = 6x^3b^2$

239 $\boxed{} : \frac{2}{3}a^{n+3} = 2a^n$

233 $\boxed{}^3 = \frac{4}{9}a^6b^8c^9 : \frac{3}{2}a^3b^2c^3$

■ La semplificazione di espressioni con divisioni di monomi

■ ESERCIZIO GUIDA

240 Semplifichiamo la seguente espressione:

$$(3a^2b^2)^2 : 3a^3b - 2a(3b)^2 + 5a^2b^4 : 2ab^4 + 5bab^2.$$

L'espressione è la somma algebrica di quattro termini formati da divisioni e moltiplicazioni di monomi:

$$(3a^2b^2)^2 : 3a^3b - 2a(3b)^2 + 5a^2b^4 : 2ab^4 + 5bab^2 =$$

Eseguiamo le operazioni all'interno di ciascun termine:

$$= 9a^4b^4 : 3a^3b - 2a \cdot 9b^2 + \frac{5}{2}a + 5ab^3 = 3ab^3 - 18ab^2 + \frac{5}{2}a + 5ab^3 = 8ab^3 - 18ab^2 + \frac{5}{2}a.$$

Semplifica le seguenti espressioni. Le lettere a esponente rappresentano numeri naturali.

241 $[(2ab - 3ab)^2 : (2ab)] \cdot a^2b - 3a^3b^2$

$$\left[-\frac{5}{2}a^3b^2 \right]$$

242 $(5x^3 + 3x^3)^2 : (-2x)^2 + (x + x) \cdot (-x)^3$

$$[14x^4]$$

243 $\left[\frac{1}{13}(a^8b^7)^2 : \left(-\frac{1}{2}a^2b \right) \right] : (a^3b^2)^4 - 2a^2b^5$

$$\left[-\frac{28}{13}a^2b^5 \right]$$

244 $\left(\frac{1}{2}a^5y^5 \right) : (-5a^2y^2) + (a^3y)\left(\frac{1}{4}y^2 \right) - (3a^4y^3) : (-2a)$

$$\left[\frac{33}{20}a^3y^3 \right]$$

245 $\left(-\frac{2}{3}a^7b^6 \right) : \left(\frac{4}{15}a^5b^5 \right) - 2a^2b + (3ab)[-2a + 3(4a)] + \frac{3}{2}a^2b$

$$[27a^2b]$$

BRAVI SI DIVENTA ▶ E10

246 $\left(-\frac{3}{2}b^7x^2 \right) : \left(\frac{21}{8}b^3x \right) - \left[(-2b^6x^3) : \left(-\frac{1}{2}bx \right)^2 + 4b^4x \right] + (b^2x)^4 : b^4x^3$



- 247** $\left[\left(\frac{1}{3}x^2 \right) \cdot (-xy)^2 - \left(-\frac{2}{3}x^2y \right)^3 : \left(\frac{2}{3}xy \right)^2 (-y) \right] + x^4y^2$ $\left[\frac{2}{3}x^4y^2 \right]$
- 248** $\left\{ (-3x^2yz) : \left[2x^2 + \frac{1}{4}(-x)^2 + \frac{1}{3}x^2 \right] \right\} \cdot 31 - \frac{1}{4}yz$ $\left[-\frac{145}{4}yz \right]$
- 249** $(-2xy)^3 \cdot (y) + (-3xy) \left(-\frac{1}{3}x^2y^3 \right) + [(2x^2y^3)^2 : (-2xy^2)] + (-5x^3y)(-2y^3)$ $[x^3y^4]$
- 250** $12a^2 \cdot a^m b^n + 6a^{m+2}b^{n+1} : b$ $[18a^{m+2}b^n]$
- 251** $(x^6y^4)^{2a} : x^{6a}y^{4a} + (-x^3y^2)^{2a}$ $[2x^{6a}y^{4a}]$
- 252** $[(-3x^my^n)^2 \cdot (-3x^2y^n) + 7x^{2m+2}y^{3n}] : x$ $[-20x^{2m+1}y^{3n}]$
- 253** $\left[(2a^t b^{2s+3}) : \left(\frac{4}{3}a^t b^s \right) + b^{s+3} \right] : b^2$ $\left[\frac{5}{2}b^{s+1} \right]$

RIEPILOGO**LE ESPRESSIONI CON I MONOMI**

Nel sito: ► 13 esercizi di recupero



Semplifica le seguenti espressioni. Le lettere a esponente rappresentano numeri naturali.

- 254** $\left(-\frac{4}{3}ab \right) \left(-\frac{9}{4}a^2b \right) : (-2ab)^2$ $\left[\frac{3}{4}a \right]$
- 255** $\left(-\frac{25}{9}x^3y^2z \right) : \left(-\frac{10}{3}xy^2z \right) \cdot (6xy)^2$ $[30x^4y^2]$
- 256** $(-3a)^3 \cdot \left[\frac{4}{3}a^2b^4 : (-4a^2b) \right]^2$ $[-3a^3b^6]$
- 257** $[(-2xy)^2]^3 : (-2xy^2)^3 - 2(-x)^3$ $[-6x^3]$
- 258** $(-ax)^3 : (-2x)^2 + x \left(-\frac{1}{2}a \right)^3 + x(-a^2)^3 : a^3$ $\left[-\frac{11}{8}a^3x \right]$
- 259** $2ab \left(\frac{1}{2}a - a \right) + (-4a)^2 \cdot b + 2 \left(\frac{1}{2}b - b \right) a^2 + a^2b$ $[15a^2b]$
- 260** $-4xy(-x^2yt) + 2xt(-2xy)^2 + (-x)^3y^2t$ $[11x^3y^2t]$
- 261** $[-a(-a)^2 + a^5 : (-a^2)] + (-a)^3 + 2a^2(-a)$ $[-5a^3]$
- 262** $\left(xy - \frac{2}{3}xy \right) y^3 - x(-y^2)^3 : \left(-\frac{1}{3}y \right)^2 + \frac{2}{3}xy^4$ $[10xy^4]$
- 263** $-a^2(a^5 : a^3) + (-3a^2)^2 + (2a^3)^2 : \left(-\frac{1}{2}a \right)^2 + 2a^4 - (-a^2)^2$ $[25a^4]$
- 264** $\frac{1}{4} \cdot \left[(3a^3b^3)^2 : \left(\frac{1}{9}ab \right)^2 \right] : [a^4b^4 : (-2ab)^2] + (-9ab)^2$ $[810a^2b^2]$

- 265** $\left[-3xy\left(\frac{1}{9}x^2y\right) - y^2(-x)^3 \right] : (-x)^2 + 2x^2y^2 : (-x)$ $\left[-\frac{4}{3}xy^2 \right]$
- 266** $\left[\left(\frac{5}{2}ab - ab\right)^2 \cdot (-a^2b) \right] - (3a^3b^3)^2 : (9ab^2)^2 + \left(-\frac{3}{2}a^2\right)^2 b^3$ $\left[-\frac{1}{9}a^4b^2 \right]$
- 267** $[a^2b - (-2a^2b)] \cdot (-3ab^2) + (-2a^2b^2)^2 : \frac{1}{2}ab$ $[-a^3b^3]$
- 268** $3ab(-2a)^2 + \left(4ab^2c : \frac{1}{4}bc\right) \cdot a^2 - 6a^3b$ $[22a^3b]$
- 269** $\{x^2y^4 - 3(-y^4x)x - [x^7y^2 \cdot (-x^3y^5)] : (-x^8y^3) + 12y^5x^2 : (-3y)\}^2$ $[x^4y^8]$
- 270** $-(-a)^2 + [(-ay^3) \cdot (-5a^3y) : (-ay)^2]^2 : \left(-\frac{5}{3}ay^2\right)^2$ $[8a^2]$
- 271** $\left[\left(\frac{5}{3}a^3b\right)^5 : \left(\frac{5}{6}a^2\right)^5 - ab(-2a^2b^2)^2 \right] : (-2a) + (4a^2b^3)^2 : \frac{8}{7}b$ $[0]$
- 272** $\left[\frac{3}{4}a^3b^6c^3 - \left(\frac{3}{4}ab^2\right)^2 \left(\frac{1}{36}ab^2c^3\right) - \left(-\frac{1}{4}ab^2c\right)^3 \right] : \left(-\frac{3}{4}ab^2c^2\right)$ $[-a^2b^4c]$
- 273** $[(-5x^2y)(-x^2y^3) : (-xy)^2]^2 : (-5x^2y)^2 - y^2 + (-2y)^2$ $[4y^2]$
- 274** $\left\{ \left[(-2xy^2)^3 : (-6xy^2)^2 + \frac{5}{9}xy^2 \right] (-3x^2) : (+x^3y^2) \right\}^3$ $[-1]$
- 275** $\left[\frac{1}{2}x(-4x)^2 + 4x^3 \right] : (+2x)^2 + \left\{ \left[-\frac{1}{3}y(-3x)^2 \right]^2 \right\}^2 : \left[\left(-\frac{9}{2}x^5y^3 \right) (-6x^2y) \right]$ $[6x]$
- 276** $\left[\left(-\frac{2}{3}x^3y^2 \right)^2 : \left(+\frac{2}{3}x^2y \right)^3 + \left(+\frac{1}{6}x^3y^2 \right)^2 : \left(-\frac{1}{3}x^2y \right)^3 \right] \left(-\frac{4}{3}x \right) - (-2)^3xy$ $[7xy]$
- 277** $\left\{ \left[-y^2 \left(-\frac{2}{3}x^2y \right)^2 + \frac{7}{9}x^4y^4 \right] : \left(-\frac{2}{3}x^2y^3 \right) + y(-x)^2 \right\}^2 : \left[\left(-\frac{1}{2}x \right)^3 (-y)^2 \right] + 2x$ $[0]$
- 278** $2x^3 - (3x^5) : (-2x)^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{9}x\right) + [2x^5 + (-x^2)^2x] : (-3x^2)$ $\left[\frac{3}{4}x^3 \right]$
- 279** $\left[(+x^3y^3)^3 + \left(-\frac{2}{7}x^2y^2 \right)^3 \left(-\frac{7}{2}xy \right)^3 \right] : (-2x^2y^2)^3 + \frac{3}{2}x^3y^3$ $\left[\frac{5}{4}x^3y^3 \right]$
- 280** $\left\{ a^2b^2c + \left[-\left(-\frac{3}{2}a^2b^2c \right) - \frac{1}{2}a^2b^2c \right] \right\} : \left\{ - \left[-\left(-\frac{1}{8}abc \right) + \left(-\frac{1}{2}abc \right) \right] \right\}$ $\left[\frac{16}{3}ab \right]$
- 281** $(-2a) \cdot \left(-\frac{3}{4}by \right) \cdot (0,6ab^2y) \cdot \left(-\frac{5}{4}b^3xy \right)$ $\left[-\frac{5}{4}a^2b^6xy^3 \right]$
- 282** $\left[2z - \left(-\frac{4}{3}z \right) + \left(\frac{3}{2}z \right) \right] - \left(-\frac{3}{4}x \right) - \left(-\frac{1}{3}z \right) + \left(-0,5x - \frac{1}{4}x \right)$ $\left[\frac{31}{6}z \right]$
- 283** $0,3x^3y \cdot \left(\frac{3}{5}x \right) + \left(\frac{2}{5}y \right) \left(-\frac{1}{2}x^2 \right) \cdot x^2 + xy \cdot \left(-\frac{1}{5}y \right) y + 3xy^2$ $\left[\frac{14}{5}xy^2 \right]$
- 284** $\left\{ a^2b^2c + \left[-\frac{1}{2}a^2b^2c - \left(-\frac{3}{2}a^2b^2c \right) \right] \right\} : \left\{ - \left[-(abc) + \left(-\frac{1}{8}abc \right) \right] \right\}$ $\left[\frac{16}{9}ab \right]$

- 285** $-\frac{2}{3}a^2b(-0,2bc) \cdot \left(-\frac{5}{4}b^3c^2\right) - \frac{3}{4}b^2c\left(-\frac{2}{3}b^3c^2\right)(-a^2)$ $\left[-\frac{2}{3}a^2b^5c^3\right]$
- 286** $[(-2abx^3) \cdot (-5abx) : (-bx)^2] : \left[\frac{5}{3}a^3b^2x : \left(-\frac{1}{3}ab\right)^2\right]$ $\left[\frac{2}{3}ax\right]$
- 287** $\left[\left(-\frac{7}{5}bx^3\right)^2 : (-2x^2)^3\right] \cdot \left[-\left(-\frac{5}{7}\right)^2\right] + (-b^2) - \left(-\frac{4}{7}b^4x^2\right) : \left(-\frac{8}{21}b^2x^2\right)$ $\left[-\frac{19}{8}b^2\right]$
- 288** $a^6x - x \cdot \{[-(a^4y^7)^3]^2 : a^{18}y^{42}\} - x^2y^3 : [2bx^6y : b(x^2)^3] + \frac{1}{2}x^2y^2$ [0]
- 289** $\left(-\frac{5}{4}x^2y\right)^3 (0,8x^2)^2 - (-2x^2)^3 \left(\frac{1}{3}x^2y\right) \left(-\frac{3}{2}xy\right)^2$ $\left[\frac{19}{4}x^{10}y^3\right]$
- 290** $\left(\frac{1}{2}xy^3 - 2xy^3\right)^2 : (13x^2y^4 - 4x^2y^4) + \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{4}{5}y^2\right)^2 : \left(-\frac{1}{10}y^2\right)$ $\left[-\frac{13}{20}y^2\right]$
- 291** $2,\bar{6}a^4b + 3,4ab^4 - 3,\bar{6}a^4b + 1,\bar{3}a^4b + 4,6ab^4 - 9,\bar{3}ab^4$ $\left[\frac{1}{3}a^4b - \frac{4}{3}ab^4\right]$
- 292** $\left(-\frac{3}{2}ax^2y\right)^2 : \left\{\left(-\frac{2}{5}a^2b\right) : \left(\frac{1}{5}ab\right) - [-6a^3b^3 : (-b)^2] : (3a^2b)\right\}$ [impossibile]
- 293** $-abc(-4ac) \cdot \left(-\frac{1}{2}a^2b^3\right) + 14ab^2(-2a^2bc^2) \cdot \left(-\frac{3}{7}ab\right) - (4a^2b^2c)^2$ [-6a^4b^4c^2]
- 294** $\left(-\frac{1}{2}a^3xy\right) - \left(\frac{1}{3}a^3xy\right) - (0,\bar{4}a^2x^2) + \left(\frac{5}{6}a^3xy\right) - \left(-\frac{5}{9}a^2x^2\right)$ $\left[\frac{1}{9}a^2x^2\right]$
- 295** $[(0,\bar{3}a^3b - 0,\bar{2}a^3b) \cdot (-b^3 + 0,5b^3) \cdot (ab^2 + 4ab^2)] : (-0,\bar{3}a^3b + 0,\bar{4}a^3b)$ $\left[-\frac{5}{2}ab^5\right]$
- 296** $\left[\left(\frac{7}{9}x^2y^3\right)^4 \cdot \left(\frac{6}{7}x^3y\right)^4 : \left(\frac{4}{3}x^3y^3\right)^4 - \left(-\frac{x^3y^2}{2}\right)^2 \cdot (-x^2)\right] : \left(-\frac{5}{4}x^2y\right)^3$ $\left[-\frac{4}{25}x^2y\right]$
- 297** $\left[(+x)^2 \left(-\frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{3}xy^2 - \frac{1}{6}xy^2\right)^2 : (-xy)^3 - \frac{3}{2}(-x^6y^2) : (x^5y)\right] \left[5x^2 \left(-\frac{1}{2}y\right) + \frac{5}{2}x^2y\right]$ [0]
- 298** $(2mnp)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}m\right) + m^3n^2p^2 + (-3m^3np^2)(2n) - (5m^5n^4p^3) : (-2m^2n^2p) + \left(\frac{1}{2}m^2p^2\right)(-3mn^2)$ [-2m^3n^2p^2]
- 299** $-3ab\left(-\frac{2}{3}ab^2\right)^2 : \left(+\frac{2}{3}a^3b^3\right) - \left[+\frac{4}{3}ab^2 : \left(-\frac{2}{3}a\right)\right] + (-3a^2b)^3 : \left(\frac{3}{2}a^2b + \frac{3}{4}a^2b\right)$ [-12a^4b^2]
- 300** $\left[-(-2ax^2)^2 : \left(-\frac{5}{2}ax^2\right) - \frac{3}{5}(-a^2x)^3 : (-a^5x)\right]^2 : \left(-\frac{1}{2}x\right)^3 + 50x\left(-\frac{1}{5}a\right)^2$ [-6a^2x]
- 301** $\left\{\left[3 - \frac{7}{2}\right]x^3y^2z\right\}^2 : \left(+\frac{1}{2}x^2y\right)^3 + 3y(-z)^2\right\} : (+2z^2) \left[\left(\frac{7}{6}x^3y - \frac{1}{6}x^3y\right) : (-x)^3\right]$ $\left[-\frac{5}{2}y^2\right]$
- 302** $\left\{\left(-\frac{3}{2}xy^2\right)\left(+\frac{4}{9}x^2y^2\right) - \left[\left(-\frac{1}{5}x^4y^6\right) : \left(-\frac{3}{5}xy^2\right) + \frac{4}{3}y(xy - 2xy)^3\right]\right\} : \left[-\frac{1}{9}(-xy)^3\right]$ [3y]
- 303** $\left\{\left(-\frac{9}{2}x^3\right)\left[\left(-\frac{2}{3}xy^2\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}xy^4\right)\left(-\frac{2}{3}xy\right)^2\right] + \frac{1}{3}x^6y^6\right\} : \left[(-xy^2)\left(\frac{5}{3}x^3y^2 - \frac{2}{3}x^3y^2\right)\right]$ [-x^2y^2]
- 304** $\left\{\left[-\left(-\frac{3}{2}a^2x\right)^2\right]^2 : \left[\left(-\frac{3}{2}a^3\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}x^2\right)^2\right] - \left(\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{2}a^2\right)\right\} : \left[-\left(-\frac{1}{2}a\right)^2\right]$ [+ 5]

- 305** $\left[-\frac{5}{2}x(-x^2y)^3 - x^3y^3 \left(\frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^4 \right) \right] : \left[\left(-\frac{3}{2}x^2y \right) \left(-\frac{1}{4}x^3y^2 \right) \right] + \frac{1}{3}x^2 + (-2x)^2$ [5x²]
- 306** $\left\{ \left(\frac{3}{7}xy^3 + \frac{5}{21}xy^3 \right) \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2y \right) : \left[\left(-\frac{2}{3}xy \right)^2 + \frac{5}{9}x^2y^2 \right] + \frac{3}{4}xy^2 \right\} (-2x^2y) + \frac{1}{2}x^3y^3$ [0]
- 307** $[(xy)^2 \cdot x - 2x^3y^2] : (-x^2) + \left[2x^2y^3 + (-3x^4y^5) : \left(-\frac{1}{2}xy \right)^2 \right] : [(-3x^3y^3) : (2xy)^2 + 2xy]$ [-7xy²]
- 308** $\frac{1}{2}x^6y^3 + \left(\frac{2}{3}x^3y^2 \right) \cdot \left(\frac{3}{4}x^3y \right) + \left[\left(-\frac{7}{4}x^3y^2 \right)^2 : \left(-\frac{7}{2}xy \right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x^2y \right)^2 \right]^3 : \left(-\frac{1}{2}x^2y \right)^3$ [0]
- 309** $\frac{1}{9}a^2(-27b^3) + 3a^2b^3 - 12a^2b^3 - \frac{1}{3}a^2b^3 + a^2(-2b^3) + a^2b^3 + \left(-\frac{1}{3}b^3 \right)a^2 - \frac{1}{3}a^2b^3 + \frac{1}{4}a^2b^3 \left[-\frac{55}{4}a^2b^3 \right]$
- 310** $\left[(2xy - 3xy)^3 - (5xy - 3xy)^4 : (-4xy) + (-2x^5y^5) : \left(\frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}xy \right)^2 \right] : \left(-\frac{1}{2}x \right)^3$ [-8y³]
- 311** $(3x)^2 : (-5x) + \left\{ \left[(2xy) \left(-\frac{1}{2}x \right) (-x)^2 - \left(\frac{1}{5}x^5y^2 \right) : (-2xy) \right] : \left(\frac{1}{2}x \right) \right\} : (-2x^2y)$ [-9/10x]
- 312** $\left[\left(-\frac{2}{3}ab^3 \right)^2 \cdot a^2b - \left(\frac{1}{3}a^6b^8 \right) : \left(-\frac{3}{2}a^2b \right) \right] : \left(\frac{2}{3}a^3b^5 \right) + (-2ab) \left(-\frac{1}{3}b \right) + \left(\frac{5}{6}a^4b^5 \right) : \left(-\frac{5}{6}a^3b^3 \right)$ [2/3ab²]
- 313** $\left\{ \left[\left(-\frac{6}{7}a^2b \right)^3 \cdot \left(-\frac{6}{7}a^2b \right)^5 \cdot \left(-\frac{6}{7}a^2b \right)^0 \right]^4 : \left[\left(-\frac{6}{7}a^2b \right)^2 \right]^{11} \right\} : \left(-\frac{6}{7}a^2b \right)^8$ [36/49a⁴b²]
- 314** $\{ [(-ab^3c)^2 \cdot (ab^3c)^5 \cdot (-ab^3c)]^7 \}^8 : \{ [(-ab^3c)^8]^7 \}^8 - \left[\left(-\frac{2}{3}a^3 \right)^2 \cdot (-a)^2 \right] : \left(\frac{2}{3}a^4 \right)^2$ [0]
- 315** $\left(-\frac{3}{5}ab \right)^2 \cdot (-b)^2 \cdot \left(-\frac{5}{3}a^4c^4 \right)^3 - \left[\left(-\frac{2}{3}ac^2 \right)^3 \right]^2 \cdot (-3a^2b)^4 - (-2a^7bc)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}bc^5 \right)^2 \left[-\frac{95}{9}a^{14}b^4c^{12} \right]$
- 316** $2x^2 + [(-3x)^{12} : (-27x^2)^4 - (x^2y)^4 : (-2xy)^4] : (-x)^2 + \left(-\frac{1}{4}x \right)^2 + 3(-x)^2$ [6x²]
- 317** $\frac{1}{2}a^2b - (-a)^2 \cdot (2b) + (6a^4b^3) : (-2a^2b^2) + (2a^6b^3) : (a^4b^2) - 3ab \left(-\frac{1}{2}a \right)$ [-a²b]
- 318** $(-2ab)^4 : (2a) - \frac{3}{2}a^3b^4 + \left(-\frac{1}{2}ab^3 \right) (5a^2b) - (14a^4b^6) : (-7ab^2) + (3ab)(-a^2b^3)$ [3a³b⁴]
- 319** $(-2mn)^2 : (-mn^2) + (-4m^2) : (-2m) + \left[\left(-\frac{2}{5}m^3n^2 \right) : \left(-\frac{2}{5}mn \right)^2 - \frac{1}{2}m \right]^2 : (-2m)$ [-13/2m]
- 320** $\left[\frac{2}{3} \left(ax^2y^3 \right)^s \right] : \left(-\frac{8}{9}a^2x^sy^{2s} \right), \quad \text{con } s \geq 2; \quad \left(-\frac{4}{5}a^3b^{2t}c^4 \right) : \left(-\frac{2}{5}a^2b^tc^3 \right).$ [-3/4a^{s-2}x^sy^s; 2ab^tc]
- 321** $\left(-\frac{1}{8}b^nc^n \right) \cdot (2b^{n+1}c); \quad \frac{1}{5}x^{n+3}y^n(-10xy^{n+2}).$ $\left[-\frac{1}{4}b^{2n+1}c^{n+1}; -2x^{n+4}y^{2n+2} \right]$
- 322** $\frac{1}{4}a^mb^{2n} : \frac{1}{16}a^2b^n - 3a^{m-2}b^n, \quad \text{con } m \geq 2.$ [a^{m-2}bⁿ]
- 323** $\left(\frac{2}{3}a^nb^{2m+2} \right) : \left(\frac{4}{9}a^nb^{m+1} \right) + \frac{1}{2}b^{m+1}$ [2b^{m+1}]
- 324** $(3a^2 \cdot a^{m+1}b^3 - 2a^{m+3}b^3) : (a^mb^2)$ [a³b]

- 325** $2a^p b^{2m} : (-b^m)^2 - \{ [(-2a^{p-1}b^m)^2]^3 : (-a^{p-3}b^{3m})^2 \} : (-4a^p)^3, \quad \text{con } p \geq 3.$ [$3a^p$]
- 326** $\{a^{6n}(-2)^{-3} - [(a^n)^{-3}]^{-2}\} - [3a^{3n} - (-a^n)^3]^2 + [(-a^n)^2 - 2^{-1}a^{2n}]^3$ [- $17a^{6n}$]
- 327** $(2a \cdot a^{t-1}b^2 + 4a^t b^2) \cdot \left(\frac{1}{2}a^t b\right), \quad \text{con } t \geq 1.$ [$3a^{2t}b^3$]
- 328** $[(a^b)^m x^m - 2(a^b \cdot x)^m]^2 + (a^m)^{2b} (x)^{2m} - 2a^{2bm} x^{2m}$ [0]
- 329** $\left(-\frac{3}{2}a\right)^2 (x^m)^2 + \frac{1}{4}(ax^m)^2 - 2a^2(x^2)^m$ [$\frac{1}{2}a^2 x^{2m}$]
- 330** $\{[a^{m+2}b^m - a^2b(-a^m b^{m-1})] - 4a^{m-2}b^m(-a^4)\}^0, \quad \text{con } m \geq 2.$ [se $a \neq 0, b \neq 0$, la soluzione è 1]
- 331** $[(x^a y^b)^c + 2(y^c)^b (x^a)^c - 3x^{ac} y^{bc}]^0$ [impossibile]
- 332** $4z^{2k} - (+3,6z^{2k}) - (-2t^2) - (+zt) - (-3zt) - \frac{2}{5}z^{2k} + (-2zt)$ [$2t^2$]
- 333** $[(x^{2n+1} : x^{5n-1}) \cdot x^{3n+2} + (x^{2n+1} \cdot x^{n+2}) : x^{3n-1}]^3 : x^8, \quad \text{con } n > 0.$ [$8x^4$]

CACCIA ALL'ERRORE Non tutte le uguaglianze proposte sono vere. Trova gli errori e correggili.

- 334** $-2a + 4b = 2ab$ **341** $3y \cdot 2y = 6y; \quad a^3 \cdot a^3 = a^6.$
- 335** $-6ab + 3ab = -3ab$ **342** $-(-a^3)^2 = -a^6; \quad -(-a^2)^3 = -a^6.$
- 336** $\frac{5}{3}a^3b \left(-\frac{3}{2}a^2b^3\right) = -\frac{5}{2}a^5b^3$ **343** $(15x^3y) : \left(\frac{1}{5}x\right) = +3x^2y$
- 337** $5xy - xy = 5$ **344** $3a^2b^3 : 2ab^2 = 3a^2b^3 \cdot \frac{1}{2}ab^2$
- 338** $-\frac{4}{5}b^2 + \frac{9}{5}b^2 = b^2$ **345** $-6ab : 3ab = -2; \quad (2ab)^3 \cdot (2ab)^3 = (2ab)^9.$
- 339** $10a^3b : 10a^3b = 0;$
 $(18x^2y^3) : (-6x^2y^3) = -3x^2y^3.$ **346** $\frac{1}{2}x^2y : \frac{1}{2}x^2y = 0;$
 $15a^2b^2 : 15ab = 15ab; (-y^2)^4 \cdot (xy)^4 = -x^4y^{12}.$
- 340** $a^5 \cdot 3 = a^{15}; \quad -4ab \cdot 4ab = 0.$

Dalle parole alle espressioni

Scrivi le seguenti espressioni sotto forma di monomi e, se è necessario, riduci a forma normale.

- 347** Il doppio prodotto tra il quadrato di a e $b.$
- 348** Il prodotto tra il quadrato di un numero e il doppio del cubo dello stesso numero.
- 349** Il triplo prodotto tra i quadrati di due numeri.

ESERCIZIO GUIDA

350 Traduciamo le seguenti frasi mediante l'uguaglianza fra due espressioni con monomi:

- «Il quadrato del prodotto di due numeri è uguale al prodotto dei loro quadrati»;
- «L'opposto della somma di due numeri è uguale alla somma degli opposti dei numeri».

a) Indichiamo con a e con b i due numeri.

Traduciamo passo passo la frase nell'uguaglianza richiesta.

$$\text{«quadrato del prodotto di } a \text{ per } b \text{»} = \text{«prodotto dei quadrati di } a \text{ e di } b \text{»};$$

$$\begin{aligned} \text{«quadrato di } a \cdot b \text{»} &= \text{«prodotto di } a^2 \text{ e } b^2 \text{»}; \\ (a \cdot b)^2 &= a^2 \cdot b^2. \end{aligned}$$

b) Procediamo come nell'esercizio a):

$$\text{«opposto della somma di } a \text{ e di } b \text{»} = \text{«somma degli opposti di } a \text{ e di } b \text{»};$$

$$\begin{aligned} \text{«opposto di } a + b \text{»} &= \text{«somma di } -a \text{ e } -b \text{»}; \\ -(a + b) &= (-a) + (-b). \end{aligned}$$

Traduci le seguenti frasi mediante l'uguaglianza fra due espressioni con monomi.

351 Il prodotto di due numeri è uguale al prodotto dei loro opposti.

352 Il prodotto dei doppi di due numeri è uguale al quadruplo del loro prodotto.

353 Il quadrato del doppio di un numero è uguale al quadruplo del quadrato del numero stesso.

354 Se al quintuplo di un numero si sottrae il suo triplo, si ottiene il suo doppio.

355 Il prodotto del quadrato di un numero per il quadrato del suo opposto è uguale alla quarta potenza del numero stesso.

356 Il triplo del prodotto di un numero e del suo opposto è uguale all'opposto del triplo del quadrato del numero.

357 Il doppio del prodotto del doppio di un primo numero per l'opposto di un secondo numero è uguale all'opposto del quadruplo del prodotto dei due numeri.

358 Il doppio prodotto del quadrato di un primo numero per un secondo è uguale al quadrato del prodotto dei due numeri diviso per la metà del secondo numero.

359 Il quoziente fra il quadrato del doppio del prodotto di due numeri e il doppio del quadrato del secondo è uguale al doppio del quadrato del primo numero.

360 Moltiplicando il quadrato di un numero per il doppio di un secondo numero e dividendo il risultato per il semiprodotto dei due numeri, si ottiene il quadruplo del primo numero.

■ Monomi e geometria

■ ESERCIZIO GUIDA

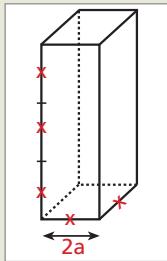
- 361** Rappresentiamo con un monomio il volume di un prisma a base quadrata il cui spigolo di base è $2a$ e la cui altezza è il triplo dello spigolo di base.

Disegniamo la figura riportando dati e relazioni del problema.

Il volume V di un prisma è dato dalla formula $V = A_b \cdot h$, dove A_b indica l'area di base e h l'altezza.

Poiché la base è un quadrato di lato $2a$, l'area di base è:

$$A_b = (2a)^2 = 4a^2.$$



L'altezza del prisma è il triplo del lato del quadrato di base, quindi:

$$h = 3 \cdot (2a) = 6a.$$

Il volume del prisma è:

$$V = 4a^2 \cdot 6a = 24a^3.$$

Il monomio che esprime il volume è $24a^3$.

Scrivi la formula che permette di calcolare la grandezza indicata e stabilisci se l'espressione è un monomio.

- 362** L'area di un quadrato di lato $3x$.

- 363** L'area di un rettangolo di base $3a$ e altezza a .

- 364** L'area di un rettangolo di base a e altezza uguale a $\frac{1}{4}$ della base.

- 365** L'area di un triangolo di base b e altezza h .

- 366** L'area di un triangolo di base $\frac{3}{4}x$ e altezza $\frac{4}{9}x$.

- 367** L'area di un rombo con le diagonali uguali a x e $6x$.

- 368** Il volume di un cilindro il cui raggio di base misura $2a$ e l'altezza è quadrupla del raggio.

- 369** Il perimetro di un parallelogramma di lati $2a$ e b .

- 370** La superficie totale di un cubo di spigolo $4a$.

- 371** La superficie laterale di un cilindro di altezza h e raggio di base r .

- 372** La superficie totale del cilindro precedente.

- 373** L'area di un rombo di diagonali $3a$ e $2b$.

- 374** Il volume di un parallelepipedo rettangolo di dimensioni $2a$, $3b$, $2c$.

- 375** Scrivi le formule per il calcolo delle seguenti grandezze:

a) perimetro di un triangolo isoscele di base $2x$ e lato $3x$;

b) area di un quadrato di lato $3x^2y$;

c) area di un triangolo di base $3ab$ e altezza $4ab$;

d) perimetro di un rettangolo di base $\frac{1}{2}xy$ e altezza $\frac{3}{2}xy$;

e) volume di un cilindro di raggio $3r$ e altezza $2h$.

■ Problemi vari con i monomi

■ ESERCIZIO GUIDA

- 376** La base di un rettangolo è $6a$ e l'altezza è $4b$.

a) Calcoliamo il perimetro e l'area del rettangolo.

b) Se si aumenta la base di $3a$ e si diminuisce l'altezza di $2b$, quanto valgono il perimetro e l'area del nuovo rettangolo?

a) Il perimetro P è la somma dei lati:

$$P = 6a + 4b + 6a + 4b = 12a + 8b.$$

L'area A è il prodotto della base per l'altezza:

$$A = 6a \cdot 4b = 24ab.$$

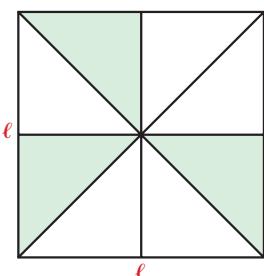
b) La base del nuovo rettangolo è:

$$6a + 3a = 9a.$$

377

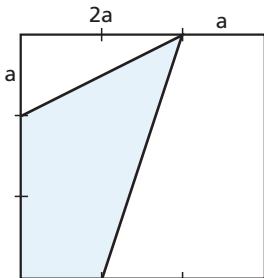
Il quadrato in figura ha per lato il monomio l . Determina a quale monomio corrisponde l'area della parte colorata.

$$\left[\frac{3}{8} l^2 \right]$$

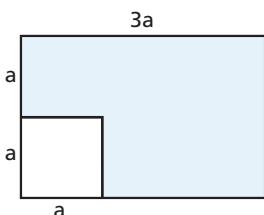
**378**

Utilizzando i dati della figura, trova l'area della parte colorata del quadrato.

$$\left[\frac{7}{2} a^2 \right]$$

**379**

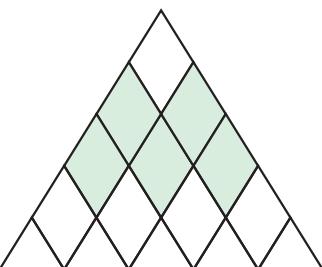
Con i dati della figura, trova il perimetro e l'area della zona colorata del rettangolo.



$$[10a; 5a^2]$$

380

Dato il triangolo in figura, se la sua area è il monomio $\frac{1}{2} bh$, quale monomio rappresenta l'area della parte colorata?



$$\left[\frac{1}{5} bh \right]$$

L'altezza del nuovo rettangolo è:

$$4b - 2b = 2b.$$

Calcoliamo il perimetro P' del nuovo rettangolo:

$$P' = 9a + 2b + 9a + 2b = 18a + 4b.$$

Calcoliamo l'area A' :

$$A' = 9a \cdot 2b = 18ab.$$

381

In un rettangolo il lato maggiore è x , quello minore è i $\frac{2}{3}$ del maggiore diminuiti dei $\frac{3}{5}$ sempre del maggiore. Calcola il perimetro del rettangolo.

$$\left[\frac{32}{15} x \right]$$

382

In un triangolo la base è $6a$ e l'altezza relativa è $\frac{9}{2} b$. Si aumenta la base di $2a$ e si diminuisce l'altezza di $3b$. Qual è la differenza fra l'area del triangolo nuovo e quella del triangolo dato?

$$\left[-\frac{15}{2} ab \right]$$

383

Due triangoli isosceli hanno la base coincidente uguale a $2b$ e, rispetto a essa, giacciono nello stesso semipiano. L'altezza del primo misura $\frac{3}{5}$ della base e l'altezza del secondo il doppio dell'altezza del primo. Trova l'area S della figura compresa tra i lati obliqui dei due triangoli. L'espressione di S è un monomio?

$$\left[\frac{6}{5} b^2; \text{sì} \right]$$

384

In un triangolo isoscele la base è $3a$ e il lato obliquo è $\frac{10}{3} a$. Si aumenta la base di $\frac{1}{2} a$ e il lato obliquo di $\frac{1}{3} a$. Di quanto cambia il perimetro del triangolo?

$$\left[\frac{7}{6} a \right]$$

385

La base di un rettangolo è $4a$ e l'altezza è $\frac{3}{4} a$.

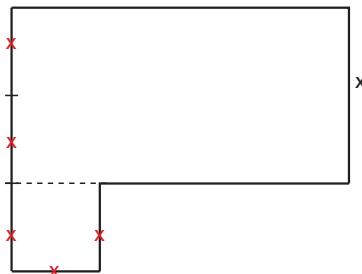
a) Calcola il perimetro del rettangolo.

b) Se si diminuisce la base di $\frac{1}{2} a$ e si aumenta l'altezza di $2a$, qual è la differenza fra il perimetro del nuovo rettangolo e il perimetro di quello di partenza?

$$\left[\text{a)} \frac{19}{2} a; \text{b)} 3a \right]$$

386

L'area totale della figura equivale al monomio $\frac{9}{4}x^2$, mentre l'area del quadrato più piccolo è rappresentata dal monomio $\frac{1}{4}x^2$.



- Sapendo che l'altezza del rettangolo è uguale a x , scrivi il monomio che esprime il perimetro della figura.
- Disegna una figura diversa dalla precedente il cui perimetro sia espresso dallo stesso monomio ricavato al punto a). [a) $7x$]

389

Considera la figura costituita da un triangolo rettangolo di cateti $3x$ e $4x$ e dal quadrato avente un lato coincidente con l'ipotenusa. Calcola l'area S della figura ottenuta. L'espressione di S è un monomio? Trova il valore di S per $x = 2$ cm.

[$31x^2; 124 \text{ cm}^2$]**390**

Un rettangolo ha base $2c$ e altezza $3a$; se si dimezza la base e si raddoppia l'altezza quale sarà la sua area? Calcola inoltre la differenza fra il nuovo perimetro e il precedente.

[$6ac; 6a - 2c$]**391**

I tre lati di un triangolo sono rispettivamente $4b$, $6b$ e $8b$. Si aumenta il primo lato di $2b$, il secondo lato di $\frac{1}{2}b$ e si diminuisce il terzo lato di $\frac{2}{3}b$.

- Qual è la differenza fra il perimetro del nuovo triangolo e quello del triangolo dato? [a) $\frac{11}{6}b$; b) 11 cm]
- Calcola la differenza nel caso: $b = 6$ cm.

392

Una piramide retta a base quadrata, con lo spigolo di base uguale a $3a$ e l'altezza uguale a $\frac{2}{3}$ dello spigolo di base, è appoggiata su un cubo che ha una faccia coincidente con la base della piramide. Trova l'area totale S della figura. L'espressione di S è un monomio? Trova il valore di S per $a = 2$ cm.

[$60a^2; \text{sì}; 240 \text{ cm}^2$]**393**

Quanto vale $8b^3$ se $(+2b) \cdot (3a) = -6a^2$?

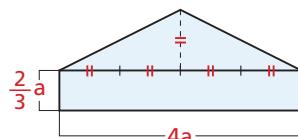
[$-8a^3$]**394**

È data la seguente espressione: $\frac{1}{2}ab^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{1}{4}xy$.

- In che modo occorre cambiare la parte letterale del secondo e terzo monomio affinché il risultato dell'addizione sia un monomio?
- Quale coefficiente deve avere ora il terzo monomio affinché il risultato sia l'opposto del precedente?

[b) $\frac{7}{4}$]**387**

Un triangolo isoscele ha l'altezza uguale a $\frac{1}{4}$ della base, che è $4a$. Un rettangolo con base coincidente con la base del triangolo ha altezza uguale a $\frac{2}{3}a$. Trova l'area S della figura. L'espressione di S è un monomio? Trova il valore di S per $a = 3$ cm.

[$\frac{14}{3}a^2; 42 \text{ cm}^2$]**388**

Due rettangoli aventi la medesima base $3a$ hanno rispettivamente altezza $\frac{2}{3}b$ e $\frac{4}{3}b$. Calcola area e perimetro di ciascun rettangolo. La somma delle aree è un monomio? La somma dei perimetri è un monomio?

[somma aree: $6ab$; sì;somma perimetri: $12a + 4b$; no]

395 Indica con A l'insieme dei monomi divisori di $6a^2b$, e con B l'insieme dei monomi divisori di $5a^2$. Gli insiemi A e B sono finiti? Determina $A \cap B$ e $A \cup B$. Utilizzando i risultati ottenuti, scrivi la relazione che sussiste fra i due insiemi.

[no; B ; A ; $B \subset A$]

396 Considera la relazione \mathcal{R} così definita:

$$(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}:$$

$m \mathcal{R} n \Leftrightarrow$ il monomio a^{m+1} è divisibile per il monomio a^{n+1} .

Determina di quali proprietà gode questa relazione. È una relazione d'ordine? Se sì, di che tipo?

[riflessiva, antisimmetrica, transitiva; sì, largo]

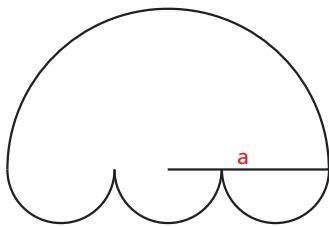
397 In a giorni 16 operai costruiscono un prefabbricato; in quanti giorni farebbero lo stesso lavoro 12 operai?

$$\left[\frac{4}{3}a \right]$$

398 Abbiamo tre spese: la prima di $\€ c$, la seconda pari al triplo della prima aumentata di $\€ \frac{2}{3}c$, la terza pari al doppio della somma delle prime due. Quanto si è speso in tutto? Quanti euro se c vale 1000?

[$\€ 18c$; $\€ 18\,000$]

402 In figura è rappresentata una semicirconferenza di raggio a , sul cui diametro si appoggiano gli estremi di tre semicirconferenze uguali.



a) Scrivi il monomio che esprime la lunghezza dell'intera curva. Che cosa osservi?

b) Scrivi il monomio corrispondente all'area racchiusa dalla curva. È ancora valida la precedente osservazione?

$$\left[\text{a)} 2\pi a; \text{b)} \frac{2}{3}\pi a^2 \right]$$

399 Lucia possiede una quantità di francobolli pari a $2x$, Marco ne possiede $\frac{2}{3}x$, e Benedetta $2x$ più di Lucia. Se Lucia cede una quantità di francobolli pari a $\frac{1}{2}x$ a Benedetta, quanto vale la differenza tra i francobolli di Benedetta e di Marco ora?

$$\left[\frac{23}{6}x \right]$$

400 Il nonno ha lasciato in eredità una somma S divisa fra quattro nipoti. Aldo riceve $\€ 20a$, Baldo il doppio di Aldo, Carlo invece la semisomma di quanto hanno avuto gli altri due fratelli. Calcola quanto riceverà Donato. Si può esprimere come monomio? Rispondi alle stesse domande se l'eredità è di $\€ 100a$.

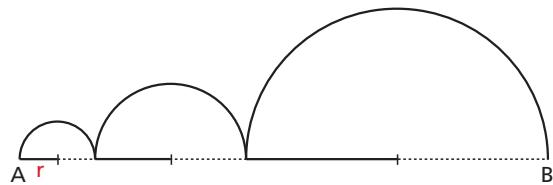
[$S - 90a$, no; $10a$, sì]

401 Un'automobile percorre il tragitto fra due città in a ore alla velocità media di 70 km/h; quanto impiega a percorrere lo stesso tragitto alla velocità media di 50 km/h?

(Ricorda che la formula che lega lo spazio percorso s , il tempo impiegato t , e la velocità media v è: $s = v \cdot t$)

$$\left[\frac{7}{5}a \right]$$

403 Le tre semicirconferenze in figura hanno ciascuna il raggio doppio della semicirconferenza che la precede. La prima semicirconferenza ha raggio r .



a) Qual è il monomio che corrisponde alla lunghezza del segmento AB ?

b) Scrivi il monomio che esprime la lunghezza della curva formata dalle tre semicirconferenze.

c) Scrivi il monomio corrispondente all'area racchiusa dalle tre curve.

$$\left[\text{a)} 14r; \text{b)} 7\pi r; \text{c)} \frac{21}{2}\pi r^2 \right]$$

3. Massimo comune divisore e minimo comune multiplo fra monomi

→ Teoria a pag. 296

RIFLETTI SULLA TEORIA

I divisori di monomi

404 TEST Fra le seguenti espressioni, una sola è un divisore comune dei monomi $5xy^2$ e $-10xy^3z^2$. Quale?

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> A $10xy^4$
<input type="checkbox"/> B $5xyz$
<input type="checkbox"/> C $-5x^2$ | <input type="checkbox"/> D xy
<input type="checkbox"/> E $5y^3$ |
|--|--|

VERO O FALSO?

- a) $2a$ è un divisore di $4a$.
- b) $-3a^2$ è un divisore di $3ab$.
- c) $8ab$ è un divisore di a^2b^3 .
- d) a^2b^3 è un divisore di $6a^4b^6c^2$.
- e) 5 è un divisore di $10b$.



406 TEST Fra le seguenti espressioni, solo una è un multiplo comune dei monomi $3xy^3$, $5x^2$ e $-3xy^2$. Quale?

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> A $15xy$
<input type="checkbox"/> B $15x^3y^3$
<input type="checkbox"/> C $-15x^3y^2$ | <input type="checkbox"/> D xy^4
<input type="checkbox"/> E $15x^2y^2$ |
|--|--|

VERO O FALSO?

- a) $-2a$ è multiplo di $2a$.
- b) $2a$ è multiplo di 4 .
- c) $6a$ è multiplo di $12a^2$.
- d) $3ab$ è multiplo di b .
- e) $-\frac{1}{5}ab^2c^3$ è multiplo di $a^2b^2c^2$.



M.C.D. e m.c.m. fra monomi

408 Dati i monomi $3x^2y$ e $3xy^2$ esistono solo tre divisori comuni, a meno del coefficiente, e infiniti multipli comuni. Perché?

409 Il M.C.D. fra due monomi ha sempre il grado minore o uguale a quello dei due monomi. Perché?

VERO O FALSO?

- a) Il m.c.m. fra monomi è divisibile per tutti i monomi dati.
- b) Il M.C.D. fra monomi è divisibile per tutti i monomi dati.
- c) Il M.C.D. fra monomi è divisore di tutti i monomi dati.
- d) Il m.c.m. fra monomi è divisore di tutti i monomi dati.
- e) Dati più monomi, ogni monomio si ottiene dal loro M.C.D. moltiplicando quest'ultimo per un altro monomio intero.



411 VERO O FALSO?

- a) Il m.c.m. fra due monomi ha il grado uguale alla somma dei gradi dei due monomi.
- b) Il M.C.D. fra due monomi simili è simile al loro m.c.m.
- c) Il m.c.m. fra due monomi opposti è il quadrato di uno dei due monomi.
- d) Il M.C.D. fra due monomi simili è simile ai due monomi.



ESERCIZI

412 Per ogni monomio scrivi cinque monomi divisori.

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{4}a; & -\frac{3}{5}a^2; & \frac{1}{6}ab; \\ -a^2b^2; & \frac{5}{8}a^2bc; & \frac{1}{9}a^3b^5c^2. \end{array}$$

413 Per ogni monomio scrivi cinque suoi multipli.

$$\begin{array}{lll} 8; & 8a; & -8a^2; \\ \frac{1}{4}ab; & 3ab^2; & \frac{1}{3}x^2y^3. \end{array}$$

414

- Dati i monomi $3ab^2$, $7a^2b^3$, $-abc^3$, determina:
- un divisore comune di grado 0;
 - un divisore comune di grado 1;
 - un divisore comune di grado 2.

415

- Fra i monomi $4xy$, $2x^2y$, $-2axy^3$, scrivi, se è possibile:
- un multiplo comune di grado 6;
 - un multiplo comune di grado 5;
 - un multiplo comune di grado 2 rispetto alla lettera a .

416

- TEST** Fra i seguenti monomi, soltanto uno *non* è multiplo di $\frac{5}{3}ac^2$. Quale?

[A] $15a^2b^3c^2$ [B] $-\frac{4}{3}a^2c^2$ [C] $\frac{5}{3}b^2c^2$ [D] $\frac{3}{5}ab^2c^2$ [E] $\frac{5}{3}ab^2c^2$

417

- TEST** Fra i seguenti monomi, soltanto uno *non* è divisore di $\frac{4}{5}x^3yz^4$. Quale?

[A] $\frac{4}{3}x^2yz^4$ [B] $2xyz^3$ [C] $\frac{1}{2}yz^4$ [D] $\frac{2}{5}x^3$ [E] $\frac{4}{5}x^4yz^3$

ESERCIZIO GUIDA

- 418** Determiniamo il M.C.D. e il m.c.m. dei seguenti gruppi di monomi:

a) $\frac{3}{4}a^4bc^3$, $\frac{1}{2}a^3c^2d$, $-7a^2b^3c^5$;

b) $12x^3y$, $-27xy^3$, $42y^2$.

a) I coefficienti non sono interi, quindi consideriamo solo le parti letterali e mettiamo le lettere uguali nella stessa colonna:

a^4	b	c^3	
a^3		c^2	
a^2	b^3	c^5	d

Il M.C.D. ha per parte letterale tutti i fattori comuni (in questo caso a e c) elevati all'esponente minore:

$$\text{M.C.D.} = a^2c^2.$$

Il m.c.m. ha per parte letterale tutti i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente:

$$\text{m.c.m.} = a^4b^3c^5d.$$

b) Poiché i coefficienti (tralasciando i segni) sono numeri naturali, conviene calcolare anche per essi il M.C.D. e il m.c.m.; scomponiamoli dunque in fattori primi:

$$12 = 2^2 \cdot 3; \quad 27 = 3^3; \quad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

Calcoliamo ora il M.C.D. e il m.c.m. con la stessa tecnica dell'esercizio a), aggiungendo una colonna per ogni fattore primo dei coefficienti:

2^2	3		x^3	y
	3^3		x	y^3
2	3	7		y^2

$$\text{M.C.D.} = 3y;$$

$$\text{m.c.m.} = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7x^3y^3 = 756x^3y^3.$$

- Determina il M.C.D. e il m.c.m. fra i seguenti monomi.

419

a^4 ; a^{10} ; a^{16} .

422

$3a^3b^9$; $12a^4b^6$; $6a^6b^4$.

420

$5a$; $20a$; $16a$.

423

$15a^3b$; $6a^2b^3c$; $10a^2c^2$.

421

$4a^4$; $10a^{10}$; $12a^{12}$.

424

$-2xy^3z$; $6x^3yz$; $8x^3z$.

425 $72a^3b^2; \quad 18a^2b^3x^2; \quad 15a^4b^4x.$

426 $\frac{1}{4}ab^2c^2; \quad -3a^2b^2c^2; \quad -\frac{1}{2}a^3b^2c^2.$

427 $\frac{2}{5}x^2y^2; \quad \frac{1}{3}x^2yz^3; \quad \frac{1}{2}x^3y^2z^2.$

428 $\frac{1}{4}a^3bc^2; \quad -\frac{1}{2}ab^2d; \quad 3a^2b^3cd.$

429 Il M.C.D. fra $2x^2y^3z$ e il monomio A è $2xy^2$. Qual è il monomio A ? È univocamente determinato? Perché?
[$2xy^2$; no, infatti...]

430 TEST Considera i monomi $\frac{1}{2}x^3y, \frac{2}{3}xy^2z^3$ e $3x^2yz$.

Sulle due affermazioni «il loro M.C.D. è xy » e «il loro m.c.m. è $x^3y^2z^3$ » puoi dire che:

- A sono entrambe vere.
- B la prima è vera e la seconda è falsa.
- C la prima è falsa e la seconda è vera.

- D sono entrambe false.
- E sono vere solo per particolari valori di x, y e z .

431 COMPLETA la seguente tabella scrivendo nella terza colonna il prodotto dei due monomi posti nelle prime due colonne e nelle successive il loro M.C.D. e m.c.m.

1° MONOMIO	2° MONOMIO	PRODOTTO	M.C.D.	m.c.m.
$2a^4b$	$3ab^2$	$6a^5b^3$	ab	$6a^4b^2$
$18a^5b^2c$	$12ab^3c^2$	$216a^6b^5c^3$	$6ab^2c$	$36a^5b^3c^2$
$8ab^2c$	$2bc^2$			
$7a^7b^3$	$21a^6b^3$			
$15a^4b^3c^3$	$45a^2b^4c^2$			
$18a^2b^3c$	$30a^4b^3c^2$			
$8a^8b^4$	$12a^6b^3c^4$			
$10a^2b^7c^4$	$25ab^3c^2$			

Controllando le ultime tre colonne, sei in grado di ricavare una relazione?

(Suggerimento. Chiama A il primo monomio e B il secondo monomio. Se $A \cdot B$ è il prodotto dei due monomi, la relazione richiesta è: m.c.m. = $A \cdot B$: oppure $A \cdot B$ = ·)

4. Che cosa sono i polinomi

→ Teoria a pag. 297

RIFLETTI SULLA TEORIA

I polinomi

432 Riconosci fra le seguenti espressioni quelle che sono polinomi e spiega il motivo della scelta.

a) $2a + \frac{1}{2}a; \quad x^2 + 3x; \quad \left(\frac{1}{2}x\right)8ay; \quad b; \quad 0.$

b) $5a^2x : 3a^3; \quad 2 + \frac{a}{b}; \quad \frac{8}{5}xt - \frac{8}{5}yt; \quad a^2 + \frac{3}{a^2}; \quad \frac{a}{3} + 2b^2 - 1.$

433

VERO O FALSO?

- a) Ogni monomio è un polinomio.
- b) La somma di due monomi non è sempre un polinomio.
- c) Il prodotto di due monomi è sempre un polinomio.
- d) Il quoziente fra due monomi è sempre un polinomio.
- e) Il numero 7 è un polinomio.
- f) $a^3 + (a^2 + b^2)$ è un polinomio.

 V F V F V F

434

In quali casi l'addizione fra monomi dà come risultato un polinomio?

435

Perché un monomio può essere considerato anche un polinomio?

436

Un numero è un polinomio. Perché?

 V F V F V FI polinomi ridotti e il grado di un polinomio

437

VERO O FALSO?

- a) I polinomi di grado 0 sono numeri.
- b) Il grado di un polinomio è la somma dei gradi dei suoi termini.
- c) Il grado di un polinomio è l'esponente maggiore al quale sono elevate le lettere che lo compongono.
- d) Il grado di un polinomio è il maggiore fra i gradi dei monomi che lo compongono.
- e) Se i monomi di un polinomio con le lettere a e b hanno tutti grado diverso, il polinomio è ridotto.
- f) Non esistono polinomi di grado 0.

 V F V F V F V F V F V F

438

Il polinomio $a - b + 3a$ non è ridotto a forma normale. Perché?

439

Il polinomio $a^2 - b^2$ ha lo stesso grado del polinomio $ab - b^2$?

440

Il polinomio $3x^2 - 2x$ non è completo. Perché? E non è neppure omogeneo. Perché?

441

TEST Quale delle seguenti espressioni è un polinomio ma non un monomio?

 A $2a^3b^3a$ B $8a^3 + 4a^2$ C $\frac{2xyz}{t}$ D $\left(\frac{3}{4} - 2\right)x^2y$ E \sqrt{xy}

442

TEST Qual è il grado del polinomio

$$\frac{1}{2}x^7y^5 - 2x^4y^4 + 3xy^2?$$

 A 23 B 6 C 16 D -1 E 12**ESERCIZI****■ La riduzione a forma normale****ESERCIZIO GUIDA**

443 Riduciamo a forma normale il polinomio $\frac{1}{2}a - 2a^2 + \frac{2}{3}a - a + \frac{1}{2}a^2 + b$.

Sottolineiamo i monomi simili:

$$\underline{\frac{1}{2}a} - \underline{2a^2} + \underline{\frac{2}{3}a} - \underline{a} + \underline{\frac{1}{2}a^2} + \underline{b} =$$

Sommiamo i monomi simili:

$$= \frac{1}{6}a - \frac{3}{2}a^2 + b.$$

444

Riconosci i polinomi ridotti a forma normale e riduci quelli che non sono ridotti.

$$5b^2 - 2 + b^2 - c;$$

$$\frac{3}{5}x^5y^6 + x^4 - 2y^2;$$

$$\frac{1}{2}a^2b^3c^4 - \frac{1}{4}a^2b^3 + c^4;$$

$$\frac{1}{2}ax^2 + bx^2 - \frac{2}{3}ax^2;$$

$$6a^2x - 2a^2 + 3a^2x + a^2x - a^2;$$

$$8ab - 3a^2 + 4a - b + 6a^2 - 9ab + ab.$$

Riduci a forma normale i seguenti polinomi.

445

$$a^2b^2 + a^2 - b^2 - 2a^2b^2 + a^2;$$

446

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3}a^2 + 1 + \frac{1}{6}a - \frac{2}{3}a^2 - a;$$

$$5ab - 2a^2 + ab - a^2; xy - 3x^2y + 2xy + x^2y;$$

$$\frac{4}{5}ab^2 - \frac{2}{5}ab + \frac{1}{5}ab - \frac{2}{3}ab^2;$$

$$1 - 2a + b + 3 + a - 4b;$$

$$\frac{1}{2}ax - 3a + 2x + a - \frac{1}{4}ax + 2a - \frac{1}{4}ax + x;$$

$$2a - b^2 + \frac{1}{3}b^2 - a + \frac{1}{3}a;$$

$$15ay - \frac{1}{2} + 7ay + 4 - 5a + y.$$

$$\frac{1}{5}ab - 2a + 1 + \frac{1}{3}a - 5 + \frac{4}{5}ab.$$

■ Il grado di un polinomio ridotto

■ ESERCIZIO GUIDA

447 Stabiliamo il grado del seguente polinomio:

$$2a^4 + 2ab^2 - 3a^4 + b^2 + a^4 + ab.$$

Il polinomio $2a^4 + 2ab^2 - 3a^4 + b^2 + a^4 + ab$ non è ridotto a forma normale, quindi occorre ridurlo prima di determinarne il grado:

$$\cancel{2a^4} + 2ab^2 - \cancel{3a^4} + b^2 + \cancel{a^4} + ab = 2ab^2 + b^2 + ab.$$

Il polinomio è formato dai monomi:

$2ab^2$ di grado 3; b^2 di grado 2; ab di grado 2.

Poiché il termine di grado più alto è $2ab^2$, il polinomio $2ab^2 + b^2 + ab$ è di terzo grado.

Stabilisci il grado di ciascuno dei seguenti polinomi e indica il grado rispetto a ogni lettera.

448 $a + b + 1; -x^2 + ax + 7; \frac{1}{3}a^4 + 2a^2b^4 + \frac{1}{2}; a^3 - 8; 2 + 3a^2 + 5a - a^4; x^3 - a; 4ab - 1.$

449 $a + 1; a^2 - b^2; 3ab^2 - 2b^2 + a; 2a - b^3 + \frac{1}{5}a + 2b^3 - 1 + b^3 + \frac{1}{2}.$

450 $5a^2b^2 - 2a^8 + a^2b^2 + a^8 - \frac{1}{2}a^2b^2 + a^8; \frac{6}{5}x^6 - \frac{1}{2}x^2y + 2x^2y - \frac{1}{5}x^6 + x^2y - x^6.$

451 $x^3 + \frac{1}{4}ax^2 - \frac{1}{2}a^3 - 4a^2x + \frac{2}{3}x^5 + 5; -7a + 5b^2 - \frac{1}{2}x^2ab^3 - 3a^3b^2 + x.$

452

TEST Sui polinomi $3a^3b^4 - 2a^6b + 5$ e $3a^4b^3 + 2ab^6 + 5a^3b^3$, possiamo affermare che:

- A hanno lo stesso grado.
- B il primo ha grado 7 e il secondo 6.
- C il primo ha grado 5 e il secondo 7.
- D hanno entrambi grado 6.
- E hanno entrambi grado 3.

453

Sono dati i polinomi:

$$3x^m - 7x^{m-2} + 3x^{m-3} \quad (m \in \mathbb{N}, m \geq 3),$$

$$y^{n-2} + 5y^{n-4} - 11 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 4).$$

- a) Per quale valore di m il primo polinomio ha il termine noto non nullo?
- b) Per quale valore di n il secondo polinomio è di sesto grado?
- c) Quale relazione deve sussistere fra m e n affinché i due polinomi siano dello stesso grado?

Riduci a forma normale i seguenti polinomi, scrivi di che tipo sono e determinane il grado rispetto a ciascuna lettera e quello complessivo.

454

$$3a - 2b^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{3}a + \frac{2}{5}b^2;$$

$$\frac{4}{5}ab^2 - \frac{1}{3}ab^2 + \frac{2}{3}ab + \frac{3}{5}ab^2 - ab + \frac{1}{3}ab.$$

$$\left[\frac{8}{3}a - \frac{11}{10}b^2 \right]$$

$$\left[\frac{16}{15}ab^2 \right]$$

455

$$\frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{2}x^2y^2 - 4x^2y^2 + 10x^2 - \frac{29}{3}x^2;$$

$$\frac{7}{6}ax^2 - \frac{3}{2}ax + \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}ax^2 - \frac{3}{2}a + \frac{19}{2}ax.$$

[0]

$$[ax^2 + 8ax - a]$$

■ Polinomi omogenei

456

Indica tra i seguenti polinomi quali sono omogenei.

- | | | |
|----------------------------|---------------------|------------------------|
| a) $a^2 + \frac{1}{2}ab$; | $x^3 + 2ax^2 + 3$; | $y^4 + xy^3 + 2x^4a$. |
| b) $a + x$; | $2x^2 + 3xy$; | $t^2 + 2t - 2$. |

457

TEST Fra i seguenti polinomi uno solo è omogeneo. Quale?

- A $a^3 - 1$
- B $x^2 - xy + x$
- C $x^n - 3x^{n-2}y + y^n \quad (n > 2)$
- D $a^n + 3x^{n-2}y^2 + 5y^n \quad (n > 2)$
- E $a^3b^3 + 2a^2b^3 - 5b^3a + 4b^5$

458

TEST Solo uno dei seguenti polinomi *non* è omogeneo. Quale?

- | | |
|--|---|
| A $5a^3 - 2ab^2$ | D $x^8 - y^8$ |
| B $\frac{3}{7}a^2 - \frac{3}{7}$ | E $-\frac{7}{8}a^5 - \frac{8}{7}a^2b^3$ |
| C $\frac{12}{5}x^2y - \frac{3}{4}ab^2$ | |

COMPLETA inserendo i termini mancanti al posto dei puntini, in modo che il polinomio risulti omogeneo. La risposta è unica!

459

$$3a^8 - 5a^6 \dots + 3 \dots b - \dots b^2c^3 + 2 \dots c^2$$

460

$$\frac{1}{5}a^6b^4 - \frac{3}{8}a^5b^5 + \dots - \dots$$

461 $4a^3b - 3a^2 \dots - \frac{1}{2} \dots b^2c + \frac{3}{4} \dots c^2$

462 $\frac{7}{8}x^5y - \frac{1}{5}c^2 \dots + \frac{2}{3}x^3c \dots - \frac{1}{2}xy \dots$

463 $\frac{2}{5}a^5b^3 - \frac{1}{3}c^2 + 4bc \dots - 2a^3 \dots$

464 Scrivi un binomio omogeneo di secondo grado con le lettere a e b .

465 Scrivi un polinomio omogeneo di grado n servendoti delle variabili a, b, c .

466 Dato il polinomio $5x^n - 3x^{n-1}y + 2x^4y^2$, per quale valore di $n \in \mathbb{N}$ il polinomio è omogeneo?

[6]

467 Determina il grado di un polinomio ottenuto moltiplicando un trinomio omogeneo di secondo grado, in x e y , con un trinomio omogeneo di terzo grado, sempre nelle variabili x e y . Il polinomio ottenuto è omogeneo? Nel polinomio ottenuto è univocamente determinata la parte letterale del termine di grado massimo in y ?

[5; sì; no... (perché potrebbe essere y^5 o xy^4)]

■ Polinomi ordinati rispetto a una lettera

Fra i seguenti polinomi riconosci quelli ordinati, specificando rispetto a quale lettera.

468 $4x^3 - 2x + 1; \quad y^3 - \frac{1}{2}y + 2y^2; \quad b - b^2 + b^7; \quad 4a^4 - a^3 + 2a; \quad a - 1; \quad a + b; \quad a^2 - b.$

469 $a^2b + a; \quad x - x^2y - \frac{1}{2}x^3y^2; \quad a^3 + a^2b + 2ab^2 + b^3; \quad a^2b^3 + ab - b^2; \quad 1 - a + a^2b^4.$

470 Ordina i seguenti polinomi rispetto a x .

$$5xy^3 - 5x^3y^2 + 2 - 3x^2y; \quad 2x^4 - a^4 + ax^3 + 3a^3x; \quad -x^4y + 5x^5 - 9x^2y^3 + 2xy^4.$$

Ordina i seguenti polinomi rispetto a ciascuna lettera secondo le potenze decrescenti.

471 $3x^2y + 4y^2 - x^3; \quad 2xy^3 - 4yx^3 - 4x^2y^2 + 4x^4; \quad 2xy^3 - y^4 + x - 4.$

472 $2 + ab^2x - 3a^2bx^2; \quad x^4 - ax^2 + 2a^4 + 2a^2x; \quad a^2b^2 - a + ba^3.$

■ Polinomi completi

COMPLETA con termini scelti da te i seguenti polinomi, in modo che siano completi.

473 $3a + \dots; \quad a^2 + \dots - \dots; \quad 1 - a^3 + \dots + \dots; \quad x + \frac{1}{2}x^2 \dots;$
 $b^4 \dots - 3b^2 \dots; \quad b^3 - 2^3 \dots.$

474 $6a^3 \dots + a^2b \dots; \quad \frac{1}{2}ab^2 \dots; \quad -a^2b^2 + \dots; \quad \frac{1}{9}x^3y^3 \dots.$

475 VERO O FALSO?

- a) Un polinomio ordinato non può essere omogeneo.
- b) Un polinomio omogeneo non può essere completo rispetto a una lettera.
- c) Un polinomio omogeneo non può essere di primo grado.
- d) Un polinomio ordinato può essere completo.

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

TEST

476 Fra i seguenti polinomi, soltanto uno è completo. Quale?

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> A $a^2 - 2a$ | <input type="checkbox"/> D $2a^2 + 2$ |
| <input type="checkbox"/> B $a^2 + 2$ | <input type="checkbox"/> E $a + 2$ |
| <input type="checkbox"/> C $2a^2 - a$ | |

477 I seguenti polinomi sono tutti completi, tranne uno. Quale?

- | | |
|--|--------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> A $x^2 - 2x + 1$ | <input type="checkbox"/> D $x^2 + 1$ |
| <input type="checkbox"/> B $x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ | <input type="checkbox"/> E $x - 1$ |
| <input type="checkbox"/> C $x + 1$ | |

478 Dati i polinomi

1. $a^2 - 2ab + b^2$, 2. $ab - 1$, 3. $a^2 - b^2$,

possiamo affermare che:

- A sono tutti e tre dello stesso grado.
- B sono tutti e tre omogenei.
- C solo 1 e 3 sono ordinati rispetto ad a .
- D solo 1 è completo rispetto ad a e a b .
- E solo 2 è ordinato rispetto a b .

COMPLETA Scrivi al posto dei puntini i termini mancanti, scegliendoli a tuo piacimento, in modo che ogni polinomio risulti completo e ordinato rispetto a una delle lettere.

479 $6x^3 - \dots + \frac{1}{2}x - \dots;$

$$1 - \frac{3}{5}y + \dots - \frac{1}{6}y^6.$$

480 $2a^4 + \dots + 5; \quad b^2 + \dots - 1.$

481 $3a^5 - 2a^4b + \dots;$

$$2b^3 - \frac{5}{3}ab^2 + \dots.$$

482 $7 - \dots + \frac{1}{2}x^3y^3;$

$$- 5x^3y^3z^3 + \dots + 5.$$

483 $- 6z^3 + \dots + a^3b^3;$

$$a^4b^3x^2 + \dots + a + 1.$$

484

Fra i seguenti polinomi, indica quali sono omogenei e quali completi; scrivi inoltre il grado complessivo e il grado rispetto a ciascuna lettera:

$$6x^3y - x^2y^2 + 4x^4; \quad 6a + 3b + c;$$

$$3a^3 + a^2 - 4a + 1;$$

$$4x^4y - x^3y^2 + 3x^2y^3 - 2xy^4.$$

485

Qual è il numero minimo di termini che deve avere un polinomio di quinto grado per essere completo?

486

Scrivi un polinomio ordinato e completo di quarto grado rispetto alla lettera x e di grado zero rispetto a qualunque altra lettera.

487

Scrivi un polinomio omogeneo di terzo grado, nelle variabili x e y , ordinato secondo le potenze decrescenti di x e completo.

488

Scrivi un polinomio completo di quarto grado, ordinato secondo le potenze crescenti di x e decrescenti di y .

489

Determina per quale valore di $n \in \mathbb{N}$ il polinomio $x^n - 3x + 4$ ha lo stesso grado del polinomio $x^3y^2 - 5x^2y + 6$. [5]

Ordina i seguenti polinomi secondo le potenze decrescenti di x e indica se sono completi.

490

$$3x^2 - 5x^3 + x^5 - 7x;$$

$$2 - 3x^4 + 7x^2 - x^3 + 5x;$$

$$5x + 2 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 + x^3;$$

$$ax^6 - bx^5 + 3x^8 - x^7 - 6.$$

491

$$\frac{5}{2}a^2x - \frac{2}{3}ax^2 + 4a^3 - 6x^3;$$

$$x^5 - 3x^2y + \frac{1}{2}x^4 + 5x - 8y;$$

$$xy + 3x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{5}{2}x^2;$$

$$b + x + bx + 13x^3 - x^4.$$

492

$$9x^4 - 2xy^2 - 3x^2y + 2y^3 - 2x^3;$$

$$- \frac{1}{2}x^3 + 4a^2x - 5x^2 + 2;$$

$$y^3 + yx^2 + 2x + \frac{1}{2}x^4 + x^3;$$

$$25a^2x^2 + 10ax + 1 + a.$$

Indica quali polinomi sono omogenei, quali completi e quali ordinati, specificando rispetto a quale lettera.

493 $\frac{7}{3}a^2 - \frac{5}{4}b^2; \quad a^2b + ab + b; \quad -2a^3 + 4ab^2 - 5a^2b.$

494 $\frac{2}{3}x^2 - xy + y^2; \quad a^2 + b^2 - 2ab; \quad ax^3 - a^4 + 3a^3x - 2x^4.$

495 $\frac{1}{2} - 3a + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{3}a^3; \quad -4x^3 + 3x^2y - y^3; \quad a^3 - 2a^2 - a.$

496 È data l'espressione:

$$2x^n - 3x^{n-1} + 5x^{n-2} - 7x^{n-3} + 9x^{n-4},$$

con $n \in \mathbb{N}$.

- a) Scrivi per quali valori di n l'espressione è un polinomio.
- b) Determina il valore di n per cui il polinomio ha termine noto diverso da 0.
- c) Per $n = 5$ il polinomio è completo?
- d) Esiste un valore di n per cui il termine noto è diverso da 9?

[a) $n \geq 4$; b) $n = 4$]

497 È dato il trinomio $2a^2b^2 + ab^3 - 4a^kb^h$.

- a) Quali valori puoi attribuire alle lettere k e h affinché risultino un binomio?
- b) Quali valori puoi attribuire alle lettere k e h affinché risultino omogeneo?
- c) Quali valori puoi attribuire alle lettere k e h affinché il termine noto risultino diverso da 0?
- d) Quale valore devi attribuire a k affinché risultino completo rispetto ad a ?

[a) $(k = 2 \wedge h = 2) \vee (k = 1 \wedge h = 3)$;

b) tutte le coppie di naturali h e k che hanno per somma 4: $(0; 4)(1; 3)(2; 2)(3; 1)(4; 0)$; c) $h = k = 0$; d) $k = 0$]

5. Le operazioni con i polinomi

→ Teoria a pag. 300

RIFLETTI SULLA TEORIA

498 Nella somma di due polinomi occorre applicare le proprietà delle potenze?

VERO O FALSO?

- a) La somma di due polinomi uguali è il polinomio nullo.
- b) Il prodotto di due polinomi opposti è il polinomio nullo.
- c) Un polinomio P ha grado m e un polinomio Q ha grado n . Il polinomio prodotto ha grado $m + n$.
- d) Per eseguire la differenza fra due polinomi, basta aggiungere al primo polinomio tutti i termini del secondo polinomio.

500 In quale caso la somma di due polinomi è uguale al polinomio nullo?

501 Nel prodotto di due polinomi occorre applicare alcune proprietà delle potenze? Se sì, quali?

502 Il prodotto di due polinomi è il polinomio nullo. Cosa puoi dire sui polinomi fattori di tale prodotto?

503 È possibile che il prodotto di un monomio per un quadrinomio sia uguale a un trinomio? Motiva la tua risposta.

504 La somma di due polinomi può essere un monomio? Perché?

505 La differenza tra un quadrinomio e un monomio è un trinomio? Perché?

ESERCIZI

■ L'addizione e la sottrazione

■ ESERCIZIO GUIDA

506 Eseguiamo le seguenti operazioni fra polinomi:

$$\text{a)} \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 \right) + \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} - x^2 \right); \quad \text{b)} (a^2 - ab - a^2b) - (a^2b + 2ab - a^2).$$

a) Scriviamo l'addizione dei due polinomi, togliendo le parentesi:

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} - x^2.$$

Riduciamo a forma normale il polinomio somma:

$$\begin{aligned} & \underline{\frac{1}{3}x^2} - \underline{\frac{1}{2}x} - 1 + \underline{\frac{2}{3}x} + \underline{\frac{2}{3}} - x^2 = \\ & = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

b) Scriviamo la sottrazione, togliendo le parentesi. Dobbiamo cambiare segno a tutti i termini del secondo polinomio, perché le parentesi sono precedute dal segno $-$:

$$a^2 - ab - a^2b - a^2b - 2ab + a^2 =$$

Riduciamo a forma normale il polinomio differenza:

$$= \underline{a^2} - \underline{ab} - \underline{a^2b} - \underline{a^2b} - \underline{2ab} + \underline{a^2} =$$

$$= 2a^2 - 3ab - 2a^2b.$$

Esegui le seguenti addizioni e sottrazioni fra polinomi.

507 $(4x^3 - 5x^2 + 2) + (-3x^2 + 2x^2 - 2)$ $[4x^3 - 6x^2]$

508 $(-8a^5 + 6a^3 + 3a - 2) + (5a^5 - 3a^3 + 2a)$ $[-3a^5 + 3a^3 + 5a - 2]$

509 $(3a^3 + 5a^2 - 2a + 1) - (3a^3 - 2a^2 + 5a - 7)$ $[7a^2 - 7a + 8]$

510 $(3x^3 - 4y^2) + (5y^2 - 4x^3) + (x^3 - y^3)$ $[y^2 - y^3]$

511 $(10a^2b + 5ab^2 + 3ab) + (7ab^2 - 5a^2b + 2a^2b)$ $[7a^2b + 12ab^2 + 3ab]$

512 $\left(\frac{2}{3}x^2y + \frac{3}{4}xy^3 - \frac{2}{5}x^4 \right) - \left(-\frac{1}{4}xy^3 - \frac{1}{3}x^2y + \frac{3}{5}x^4 \right)$ $[x^2y + xy^3 - x^4]$

513 $\left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 \right) + \left(\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{1}{2} \right)$ $\left[\frac{8}{15}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{2} \right]$

514 $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{5} \right) - \left(4 + \frac{1}{3}x - \frac{3}{5}x^2 \right)$ $\left[\frac{11}{10}x^2 - 2x - \frac{18}{5} \right]$

515 $(5a^3b^2 - ab^3 + a^2b^3) - (a^2b^3 + ab^3 - a^3b^2)$ $[6a^3b^2 - 2ab^3]$

516 $(2x^2 + y^2 - 3xy) + \left(y^2 - 2xy - \frac{1}{3}x^2 \right) + \left(3xy - \frac{2}{3}x^2 - 2y^2 \right)$ $[x^2 - 2xy]$

517 $(2,5 - 0,5y^2 - 1,2y^3) - (0,3 - 2y^3 - 1,3y^2)$ $\left[\frac{4}{5}y^3 + \frac{5}{6}y^2 + \frac{13}{6} \right]$

- 518** $2a - [-(2a + 7y) + 5a - 4y - (2y + 6a)]$ $[5a + 13y]$
- 519** $(3x - 2) - (3x + 2) - (-2x + 1) - (-3x - 1)$ $[5x - 4]$
- 520** $-(x^2 - y^2) - [(-x^2 - y^2) + (2x^2 + xy - y^2)] + (-2x^2)$ $[-6x^2 + y^2 - xy]$
- 521** $2a^4 - [a^2b^2 + 2 - (b^4 - 2a^2b^2 + a^4) - 2b^4] + (3a^2b^2 - 3b^4)$ $[3a^4 - 2]$
- 522** $-\frac{1}{10}x^2y + \left[x^2y^2 - \left(\frac{1}{3}x^3y - \frac{1}{10}x^2y\right)\right] - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^3y\right)$ $\left[x^2y^2 - \frac{1}{3}x^3\right]$
- 523** $2x^2 + \left[\frac{1}{3}x - \left(\frac{2}{3}x^2 + x - \frac{1}{3}x^2\right) + \frac{1}{2}x^2\right] + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}x^2$ $[2x^2]$
- 524** $\frac{1}{2}x^2y^2 + 0,5x^3y - 2xy + \left\{-\left[-\left(-\frac{1}{2}x^3y + \frac{1}{3}x^2y^2\right)\right]\right\} - \frac{5}{6}x^2y^2$ $[-2xy]$
- 525** $-\frac{2}{3}a^2 - \left[-\frac{3}{4}a^2 - \left(\frac{4}{3}a^3 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{5}a^3 - a^2\right)\right] - \frac{14}{15}a^3$ $\left[\frac{4}{3}a^2 - \frac{1}{3}\right]$
- 526** $(a^{2n} - 4a^3b^n - 3b^{n+1}) - (a^3b^n - 2a^{2n} - b^{n+1}) - 3a^{2n}$, con $n \in \mathbb{N}$. $[-5a^3b^n - 2b^{n+1}]$

TEST

527 Sono dati i due polinomi $x^{2k} - 1$ e $x^{2k} + 1$ (con $k \in \mathbb{N}$). L'addizione e la sottrazione fra i due polinomi forniscono come risultati, nell'ordine:

- A $2x^{2k}$ e 2.
- B x^{2k} e -2.
- C $2x^{2k}$ e 0.
- D $2x^{2k}$ e -2.
- E $2x^{2k}$ e $2x^{2k} + 2$.

528 È data la seguente addizione:

$$\left(4a - \frac{1}{2}ab\right) + a(k-4) - \frac{1}{2}ab.$$

Quale espressione occorre sostituire a k affinché il risultato sia il monomio $2a$?

- A $2b$
- B $b + 2$
- C $b - 2$
- D $2b + 1$
- E $b + 1$

Lettere che rappresentano polinomi

Dati i tre polinomi A , B e C , determina e semplifica le espressioni

$$-A, -B, -C, 2-A, B-C, 1-(A+B)$$

nei casi seguenti.

529 $A = 1 - x$, $B = 1 + 2x$, $C = 6y^2 - 3$.

530 $A = 2a^2 - 3a + 1$, $B = a^2 - 2b$, $C = b^2 - 1$.

531 $A = a^2 - 1$, $B = 2a^2 + 4$, $C = \frac{1}{3}a - \frac{5}{3}b^2$.

Semplifica le espressioni

$$A + B + C, A - (B + C),$$

$$A - (B - C), B - A - C$$

nei casi seguenti.

532 $A = 3a^2 + 2a + 1$, $B = a + 2$, $C = a^2 - 5a + 7$.

533 $A = \frac{1}{3}x^3 + y^3$, $B = \frac{1}{3}y^3 - x^3$,

$$C = \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}x^3.$$

CACCIA ALL'ERRORE Le seguenti uguaglianze contengono degli errori. Individuali e correggili.

534 $a - (2b + a) = a - 2b + a = 2a - 2b$

535 $a + (3b + a) - (a^2 + b) = a + 3b + a - a^2 - b = a^2 - 2b - a^2 = - 2b$

536 $2x^2 - [xy + 2 - (x^2 - 2xy + y^2) + 2y^2] = 2x^2 - xy - 2 - x^2 + 2xy - y^2 - 2y^2 = x^2 + xy - 3y^2 - 2$

537 $x^2 + \frac{2}{5}x - 2 - \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{5}x + 2 \right) = x^2 + \frac{2}{5}x - 2 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{5}x + 2 = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{5}x$

538 $a^{2n} + a^{n+1} + \left(2a^n - \frac{1}{2}a^{n+1} \right) = a^{2n} + a^{n+1} + 2a^n - \frac{1}{2}a^{n+1} = 3a^{3n} + \frac{1}{2}a^{n+1}$, con $n \in \mathbb{N}$.

Calcolo rapido

539 Senza svolgere calcoli scritti, indica il risultato delle seguenti espressioni.

- a) $[(x - 3y) + z] - [(x - 3y) - z]$;
 b) $(a^3 - b^3) + (a^3 - b^3)$;
 c) $(6a^2b + 2b - 3a^2) - (6a^2b + 2b - 3a^2)$;

- d) $(a^2 + 4ab) - (4a^2 + 4ab)$;
 e) $(b^0 + b^2) + (b^0 - b^2)$, con $b \neq 0$.

■ La moltiplicazione di un monomio per un polinomio

■ ESERCIZIO GUIDA

540 Eseguiamo le seguenti moltiplicazioni fra un monomio e un polinomio:

a) $(5a^3 + 2ab - 3b^2)(-3a^2b^2)$;
 b) $\frac{3}{8}xy(16xy^2 - 3x^2y^2)$.

a) $(5a^3 + 2ab - 3b^2)(-3a^2b^2) =$
 ↓
 3 termini

b) $\frac{3}{8}xy(16xy^2 - 3x^2y^2) =$
 ↓
 2 termini

Applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:

$$= 5a^3(-3a^2b^2) + 2ab(-3a^2b^2) + \\ - 3b^2(-3a^2b^2) =$$

Eseguiamo le moltiplicazioni:

$$= -15a^5b^2 - 6a^3b^3 + 9a^2b^4.$$

↓
3 termini

Il numero dei termini del polinomio prodotto è lo stesso di quelli del polinomio di partenza.

Per rendere più veloce il calcolo, evitiamo di indicare le moltiplicazioni. Facciamo però attenzione a moltiplicare il coefficiente del monomio (con il suo segno) per tutti i coefficienti dei termini del polinomio:

$$= 6x^2y^3 - \frac{9}{8}x^3y^3.$$

↓
2 termini

Esegui le seguenti moltiplicazioni di un monomio per un polinomio.

541 $6(x^2 - 2y)$;
 (-2) · (-3xy + 2).

$[6x^2 - 12y; 6xy - 4]$

542 $-\frac{1}{6}(2a - 3x)$;
 $3\left(\frac{1}{9}x^2 - 2x\right)$.

$\left[-\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}x; \frac{1}{3}x^2 - 6x \right]$

- 543** $a(x+a)$; $b(by-1)$. $[ax + a^2; b^2y - b]$
- 544** $(-xy) \cdot (-2x+y)$; $2a(-a^3 + 8ax)$. $[2x^2y - xy^2; -2a^4 + 16a^2x]$
- 545** $(-4x^2y) \cdot (-x^3 + 2xy - y)$; $(a^3 - 2a^2 + 1)2a^2$. $[4x^5y - 8x^3y^2 + 4x^2y^2; 2a^5 - 4a^4 + 2a^2]$
- 546** $(-2x^2) \cdot \left(-x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}x + 4 \right)$ $[2x^6 + 4x^4 - x^3 - 8x^2]$
- 547** $(a^2 - 3a - 1)(+2a)$; $(-3x^3 + 2x - 4)(-3x^2)$. $[2a^3 - 6a^2 - 2a; 9x^5 - 6x^3 + 12x^2]$
- 548** $-\frac{1}{3}x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + 6\right)$; $4a^3\left(\frac{1}{8}a^2 - \frac{3}{2}a + 2\right)$. $\left[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 2x^2; \frac{1}{2}a^5 - 6a^4 + 8a^3 \right]$
- 549** $\frac{3}{4}ab\left(\frac{2}{3}a^2b - \frac{16}{9}ab^2\right)$ $\left[\frac{1}{2}a^3b^2 - \frac{4}{3}a^2b^3 \right]$
- 550** $\frac{5}{4}x^3y\left(2x^2 - \frac{1}{5}xy + y^2\right)$ $\left[\frac{5}{2}x^5y - \frac{1}{4}x^4y^2 + \frac{5}{4}x^3y^3 \right]$
- 551** $-\frac{2}{5}x^2y^3\left(\frac{5}{4}x^2y^4 - 0,5x^3y^2 + \frac{1}{2}x^2y\right)$ $\left[-\frac{1}{2}x^4y^7 + \frac{1}{5}x^5y^5 - \frac{1}{5}x^4y^4 \right]$
- 552** $-3,5ab\left(-1 + \frac{2}{3}a^2b^2 - \frac{2}{7}a^3b - \frac{1}{14}ab^2\right)$ $\left[\frac{7}{2}ab - \frac{7}{3}a^3b^3 + a^4b^2 + \frac{1}{4}a^2b^3 \right]$
- 553** $3x^3y(4x^n y^m - 3y^{m+1} + 2x^{n+3}y^2)$, con $m, n \in \mathbb{N}$. $[12x^{n+3}y^{m+1} - 9x^3y^{m+2} + 6x^{n+6}y^3]$
- 554** $\left(a^n - \frac{1}{2}a^{n+1} + 3a^{2n} - \frac{1}{4}a\right) \cdot \frac{2}{9}a^n$, con $n \in \mathbb{N}$. $\left[\frac{2}{9}a^{2n} - \frac{1}{9}a^{2n+1} + \frac{2}{3}a^{3n} - \frac{1}{18}a^{n+1} \right]$

Semplifica le seguenti espressioni.

- 555** $x^2(x+y-1) - x(x-y) - y(x^2-2) - xy$ $[x^3 - 2x^2 + 2y]$
- 556** $[-2a(3a-2)-a] \cdot (-2a^2) - (-2a^3) \cdot (3a-1) - 2a(9a^3)$ $[-8a^3]$
- 557** $(-x^3)[(-x^2) \cdot (2a-3x) - 3x^3] - 2ax(x^4-1)$ $[2ax]$
- 558** $[a^2(2a^3-a-2) - 2a^5] \cdot (-a) + (-6a) \cdot \left(a + \frac{1}{3}a^2\right) - (-a^2)^2$ $[-6a^2]$
- 559** $-4x(2x+3y) - 3y(-4x+y) - 2(4x^2+3y^2)$ $[-16x^2 - 9y^2]$
- 560** $-3ab(a^2+b^2) + ab(a^2-b^2) + 2ab(a^2+2b^2)$ $[0]$
- 561** $(3a-2b)\frac{1}{3}a - a^2 + \frac{2}{3}b(2a-3b) - 4\left(b^2 - \frac{1}{3}ab\right)$ $[2ab - 6b^2]$
- 562** $-\frac{2}{3}a^2\left(-\frac{2}{3}a + \frac{3}{2}\right) - \left(5a^2 + \frac{5}{2}a\right)\left(-\frac{2}{5}a\right)$ $\left[\frac{22}{9}a^3\right]$
- 563** $\frac{5}{4}a\left(\frac{8}{15}x^3 - \frac{8}{5}x^2y\right) + (xa^2-5)x - \frac{2}{3}x^2a\left(x-3y + \frac{3}{2}a\right)$ $[-5x]$

564 $(a^2 - 2ab) \left(-\frac{3}{2}a \right) + (-2a + 3b) \left(-\frac{1}{2}a^2 \right) + \frac{1}{4}a(5ab - 8a^2)$ $\left[\frac{11}{4}a^2b - \frac{5}{2}a^3 \right]$

565 $\left(\frac{1}{2}x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - \frac{1}{2}y^3 \right) \left(-\frac{1}{3}xy \right)^2 - 3x^3y^3 \left(\frac{1}{9}x + \frac{2}{9}y \right)$ $\left[\frac{1}{18}x^5y^2 - \frac{1}{18}x^2y^5 \right]$

566 $\left(\frac{2}{3}ab \right) \left(3ab^2 - b^3 + \frac{3}{2}a^2b \right) \left(-\frac{1}{2}a^2 \right) - (-a)^3 \left(ab^3 + 2b^4 - \frac{1}{2}b \right)$ $\left[\frac{7}{3}a^3b^4 - \frac{1}{2}a^5b^2 - \frac{1}{2}a^3b \right]$

567 $1,5x^2(x^2 + y^2 - 1) + 0,2y^2(1,5x^2 - 3y^2 + 5) + \frac{1}{2}(1,2y^4 - 3x^4) - 9x^2 \left(\frac{1}{5}y^2 \right)$ $\left[y^2 - \frac{3}{2}x^2 \right]$

TEST

568 Fra i seguenti polinomi, solo uno è equivalente al prodotto $2a^2 \cdot (ab - b^2)$. Quale?

- A** $2a^2b - 2a^2b^2$ **D** $2a^2 - b^3$
B $2a^3b^3 - 2a^2$ **E** $2a^3 - 2b^3$
C $2a^3b - 2a^2b^2$

569 Il prodotto del monomio $3ab^2$ per il polinomio P dà come risultato il polinomio $3a^4b^2 - 6ab^3 + 12a^2b^3$. Qual è il polinomio P ?

- A** $a^3 - 2b + 4ab$ **D** $a^3 - 2b^2 + 4a$
B $3a^3 - 2b + 4ab$ **E** $a^3 - 2b^2 + 4b$
C $a^3 - 2b^2 + 4ab$

570 Le seguenti espressioni sono fra loro equivalenti, tranne una. Quale?

- A** $a(ab - b^2 + b)$ **D** $ab(a - b) + 1$
B $a^2b - ab^2 + ab$ **E** $b(a^2 - ab + a)$
C $ab(a - b + 1)$

571 Data l'espressione $2xy^3 - 3x^2y^2 + xy^2$, quale fra le seguenti è a essa equivalente?

- A** $xy^2(2y - 3x)$
B $xy^2(2y - 3x + 1)$
C $xy^2(2y^2 - 3x + 1)$
D $xy^2(2y - 3x^2 + 1)$
E $xy^2(2y^2 - 3x^2)$

572 Solo uno dei seguenti polinomi è equivalente al prodotto $(5ax^2 - 2bx + 1) \cdot 5ab$. Quale?

- A** $5ab(5ax^2 - 2bx) + 1$
B $5ax^2 + 5ab(-2bx + 1)$
C $25a^2bx^2 - 10abx + 5ab$
D $25a^2bx^2 - 10ab^2x + 5ab$
E $25a^2bx^2 - (2bx + 1) \cdot 5ab$

L'espressione mancante**ESERCIZIO GUIDA**

573 Scriviamo nel riquadro il monomio o il binomio mancante.

$$\boxed{} \cdot (2a^2b + 4ab^2) = 4a^3b^3 + 8a^2b^4.$$

Poiché sia il risultato sia il secondo fattore sono binomi, il primo fattore deve essere un monomio, che chiamiamo M .

Deve essere $M \cdot 2a^2b = 4a^3b^3$ e $M \cdot 4ab^2 = 8a^2b^4$

Il monomio mancante è $2ab^2$.

Verifica: $\boxed{2ab^2} \cdot (2a^2b + 4ab^2) = 4a^3b^3 + 8a^2b^4$.

COMPLETA mettendo il monomio o il binomio mancante nel riquadro.

574 $\boxed{\quad} \cdot (ab + 3a) = 2a^2b^2 + 6a^2b$

578 $(x + 3b) \cdot \boxed{\quad} = \frac{1}{2}bx^2 + \frac{3}{2}b^2x$

575 $(a^2 - a + 2) \cdot \boxed{\quad} = -2a^4 + 2a^3 - 4a^2$

579 $\frac{2}{3}a^2b\left(\frac{3}{4}a \cdot \boxed{\quad}\right) = \frac{3}{2}a^3b^2 + \frac{1}{2}a^3b$

576 $3a^2b\left(a^2b + \boxed{\quad}\right) = 3a^4b^2 - 6a^5b^2$

580 $-2xy\left(x \cdot \boxed{\quad}\right) = -x^3y + 4x^2y^2$

577 $\boxed{\quad} \cdot \left(-\frac{2}{3}x^2y + xy\right) = 2x^4y - 3x^3y$

581 $2x^2 \cdot (-x)^3 \cdot \boxed{\quad} = -x^7 + \frac{1}{2}x^5y^2$

■ La moltiplicazione di due polinomi

■ ESERCIZIO GUIDA

582 Eseguiamo la moltiplicazione:

$$(3x^2 - 2y^2)(x^2 + 4y^2).$$

$$(3x^2 - 2y^2)(x^2 + 4y^2) =$$

Moltiplichiamo ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo:

$$= 3x^4 + 12x^2y^2 - 2x^2y^2 - 8y^4 =$$

Sommiamo i monomi simili:

$$= 3x^4 + 10x^2y^2 - 8y^4.$$

Esegui le seguenti moltiplicazioni di polinomi.

583 $(2a - 3b)(5a + 4b); \quad (x - 3y)(5x + y).$

584 $\left(x + \frac{1}{2}y\right)(x^2 - 2y^2); \left(\frac{2}{3}a + b\right)\left(\frac{1}{3}b - \frac{4}{3}a\right).$

585 $\left(\frac{3}{2}a^2 - 2\right)\left(\frac{1}{3}a^3 - 1\right); \quad (a^2 - 5b^2)(-3a^2 - 4b^2).$

586 $(a - 1)(2a^2 + a + 1); \quad (2x + 1)(3x^2 - x - 1).$

587 $(2x + y)(4x^2 + 2xy + y^2);$

$$(a^3 - 3a + 2)\left(\frac{1}{2}a + 1\right).$$

588 $\left(a + \frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{4}a^2 - ab + b^2\right);$

$$(2x^2 + y^2)\left(x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2\right).$$

589 $(a + b + c)(a + b - c); \quad (a + b)(-a - b).$

590 $(2a^2 - ab + 3b^2)(2a^2 + ab - 3b^2);$

$$(2x^3 - x^2 + 1)(3x^2 - x).$$

591 $(0,5x^2y - 2xy^2 - xy)(0,4xy - 0,5x^2y - xy^2)$

Semplifica le seguenti espressioni.

592 $(3a + 2)(a - 3) + (4a - 1)(a + 2)$

$$[7a^2 - 8]$$

593 $(2a - 1)(a + 1) - (a - 1)(2a - 3)$

$$[6a - 4]$$

594 $(a^3 + 2b)(a^3 - 2b) - (a^5 + a)(a - 1)$ $[a^5 - a^2 + a - 4b^2]$

595 $(4x^2 + 9y^2)(4x^2 - 9y^2) - y^3(16x^2 - 81y)$ $[16x^4 - 16x^2y^3]$

596 $(a + b)(a + c) - (b + c)(a + b) - (a - b)(a + b)$ $[0]$

597 $(x - y)(x^2 + xy + y^2) + (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ $[2x^3]$

598 $\left(\frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{3}a\right)\left(\frac{9}{4}a^4 + \frac{1}{9}a^2\right) - \left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{3}a\right)\left(\frac{9}{4}a^4 - \frac{1}{9}a^2\right)$ $\left[\frac{1}{3}a^4 - \frac{3}{2}a^5\right]$

599 $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) + (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$ $[2a^4 + a^2b^2]$

600 $(x^n + y^n)(x + y)$, con $n \in \mathbb{N}$.

601 $(a^n + b^n)(a^n - b^n)$, con $n \in \mathbb{N}$.

602 $(2x^n - y^{2n})(x^{2n} + 2y^n)$, con $n \in \mathbb{N}$.

603 $(x^n - xy^n)(x^n + xy^n - y)$, con $n \in \mathbb{N}$. $[x^{2n} - x^n y - x^2 y^{2n} + x y^{n+1}]$

CACCIA ALL'ERRORE Verifica se sono esatti i calcoli eseguiti e correggi gli errori che trovi.

604 $(a + 3b)(b - 3a) = ab + 3b^2 - 3a^2 + 9ab = 10ab + 3b^2 - 3a^2;$
 $a - 3b(a + 7b) = a - (3ab + 21b^2) = a - 3ab - 21b^2.$

605 $(x + 1)(x^2 - x + 1) = (x + 1)(x^2 - x) + 1 = x^3 + x^2 - x^2 - x + 1 = x^3 - x;$
 $\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y\right)\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y\right) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}xy + \frac{9}{4}xy + \frac{3}{4}y^2 = \frac{3}{4}x^2 + 2xy + \frac{3}{2}.$

606 $(x^2 + 4y^2)(x^2 - 2y^2) = x^2(x^2 - 2y^2) + 4y^2(x^2 - 2y^2) = x^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2 - 8y^4 = x^4 + 2x^2y^2 - 8y^4;$
 $\left(5y + \frac{1}{3}x\right)\left(5y + \frac{1}{7}x\right) - x\left(2y - \frac{1}{21}x\right) = 25y^2 - \frac{1}{21}x^2 - 2xy + \frac{1}{21}x^2 = 25y^2 - 2xy.$

607 $(x^{n-1} - y^{n+1})(2x - y^{n+1}) = 2x^n - 2xy^n - x^{n-1}y^{n+1} + y^{2n+1}$, con $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

■ La moltiplicazione fra più polinomi

ESERCIZIO GUIDA

608 Eseguiamo la moltiplicazione $(2x + 3)(y - 1)(x + 2)$.

Nella moltiplicazione fra più polinomi, in base alle proprietà commutativa e associativa, possiamo moltiplicare per primi i fattori che ci sembrano più opportuni:

$$(2x + 3)(y - 1)(x + 2) =$$

Eseguiamo la moltiplicazione fra il primo e il terzo fattore, perché darà luogo a termini simili da ridurre:

$$= (2x^2 + 4x + \underline{3x} + 6)(y - 1) =$$

Sommiamo i termini simili:

$$= (2x^2 + 7x + 6)(y - 1) =$$

Eseguiamo la moltiplicazione:

$$= 2x^2y + 7xy + 6y - 2x^2 - 7x - 6.$$

Abbiamo eseguito sei moltiplicazioni fra monomi. Quante ne avremmo eseguite se avessimo calcolato per primo il prodotto $(2x + 3)(y - 1)$?

Esegui le seguenti moltiplicazioni di più fattori.

609 $(x + 1)(2x + 3)(x - 4)$

$$[2x^3 - 3x^2 - 17x - 12]$$

610 $(a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$

$$[a^4 - b^4]$$

611 $(2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)(4x^4 - 1)$

$$[16x^8 - 1]$$

612 $(a - 2b)(a + 2b)(a^4 + 4a^2b^2 + 16b^4)$

$$[a^6 - 64b^6]$$

613 $\left(\frac{1}{2}x + 2a\right)(0,5x - 2a)\left(\frac{1}{4}x^2 + 4a^2\right)\left(\frac{1}{16}x^4 + 16a^4\right)$

$$\left[\frac{1}{256}x^8 - 256a^8\right]$$

RIEPILOGO

LE ESPRESSIONI CON I POLINOMI

Nel sito: ► 20 esercizi in più
► 10 esercizi di recupero



Semplifica le seguenti espressioni (con $n \in \mathbb{N}$).

614 $3a(a + 2)5a - 2a(a + 3)(a - 1)$

$$[13a^3 + 26a^2 + 6a]$$

615 $(3x - 2y)(x - 4y) - (5x + 3y)(2x - 5y)$

$$[-7x^2 + 23y^2 + 5xy]$$

616 $\frac{3}{2}a(1 + 3a)(3a - 1) + 3\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}\right)\left(a + \frac{1}{3}\right)$

$$\left[\frac{27}{2}a^3 + \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{3}\right]$$

617 $\left(2x + \frac{1}{3}y\right)(x - 3y) - (2x + y)\left(\frac{1}{2}x - y\right)$

$$\left[x^2 - \frac{25}{6}xy\right]$$

618 $(x^2 - 6 - 2x) + (2x^2 - 3x + 7) + (4x - 3x^2 + 5)$

$$[6 - x]$$

619 $(2a^2 - b^2 - ab) + \left(\frac{1}{3}b^2 - 3a^2 - \frac{1}{4}ab\right) + \left(a^2 - \frac{4}{3}b^2\right)$

$$\left[-2b^2 - \frac{5}{4}ab\right]$$

620 $(x + 3)(2x - 5) + (1 - 3x)(4 - x) + (2 - 5x)(4 - x)$

$$[10x^2 - 34x - 3]$$

- 621** $(a + b + 1)(a + b - 1) - a(a + 2b) - (b - 1)(b + 1)$ [0]
- 622** $(a^2 - 2a^3) + \left[3 - 3a^2 - \left(a^3 + \frac{1}{2} \right) \right] + \left(3a^3 - \frac{5}{2} \right)$ $[-2a^2]$
- 623** $(2x - y + 3)\left(\frac{2}{3}xy\right) - (x + y - 2)\left(-\frac{5}{3}xy\right) - 3(x^2y - xy^2)$ $\left[-\frac{4}{3}xy + 4xy^2 \right]$
- 624** $a^3(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)(-b)^3 - a^3b^7$ $[-a^7b^3]$
- 625** $(b^2 - 3)(a^2 + b^2) - 2b^2(1 - a^2) - (a^2 - 1)(b^2 - 1) - b^4 + 1$ $[-4b^2 - 2a^2 + 2a^2b^2]$
- 626** $x(x + x^2 + x) - \frac{1}{2}x(x^2 + 2) + x^2\left(-\frac{1}{2}x - 1\right)$ $[x^2 - x]$
- 627** $(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^3 - b^3) - a^6$ $[-b^6]$
- 628** $(x + 1)\left(-0,5x + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\left(-\frac{1}{3}x - 0,3\right)$ $\left[-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{6} \right]$
- 629** $(a^2 + 3a + 2)(a + 3) - (a + 1)(a + 2) - a^2(a + 5)$ $[8a + 4]$
- 630** $(2a + 3b)(-2b)\left(-\frac{1}{3}a\right) - \frac{3}{4}ab(2a + b) - ab\left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b\right)$ $\left[-\frac{2}{3}a^2b + \frac{1}{2}ab^2 \right]$
- 631** $\left(3a^2 + \frac{1}{2}ab + b^2\right)\left(b - \frac{1}{2}a\right) + \left(a - \frac{1}{2}b\right)\left(\frac{3}{2}a^2 - 3ab\right)$ $\left[-a^2b + \frac{3}{2}ab^2 + b^3 \right]$
- 632** $(x + y)\left(4x^2 + \frac{1}{9}y^2 - \frac{4}{3}xy\right) - x\left(2x - \frac{1}{3}y\right)\left(x + \frac{2}{3}y\right)$ $\left[2x^3 + \frac{5}{3}x^2y - xy^2 + \frac{1}{9}y^3 \right]$
- 633** $(a - 3b)(2a^2 - ab - b^2) - (a^2 - ab - 3b^2)(2a - b)$ $[-4a^2b + 7ab^2]$
- 634** $x(xy - 3)(xy + 1) - 2x(1 - x^2y^2) + 3x(1 - xy)(1 + xy)$ $[-2x^2y - 2x]$
- 635** $a(a + b)(2a - b) - (2a + b)(a^2 - b) - (a + 1)(-b)^2$ $[-2ab^2 + 2ab]$
- 636** $\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{6}ab\right) + \left[-\left(ab - \frac{1}{2}b^2 + a^2\right) - \left(\frac{2}{3}ab - b^2 - \frac{3}{4}a^2\right) \right]$ $\left[b^2 - \frac{3}{2}ab \right]$
- 637** $\left(0,75y^4 - \frac{1}{4}xy^3 + x^3y + 0,25x^4\right) + \left(x^3y - \frac{3}{4}y^4 - \frac{1}{4}x^4 + 4xy^3\right)$ $\left[2x^3y + \frac{15}{4}xy^3 \right]$
- 638** $a\{3a^3 - [(-ab + b^2 - 2a^2)a + ab(a - b) - b^3]\} - a(5a^3 + b^3)$ [0]
- 639** $\left\{ \left[0,3y^2 + 0,5xy - y\left(\frac{1}{3}y - x\right) \right] (2x + 4y) - 6xy^2 \right\} \left(-\frac{2}{3}y \right)$ $[-2x^2y^2]$
- 640** $3x^3(-xy)^2 - \left[27x^3\left(-\frac{1}{3}xy\right)^2 - \left(-\frac{5}{4}x^3y^2\right)^2 \right] + 3x^5(-2y)^2$ $\left[\frac{25}{16}x^6y^4 + 12x^5y^2 \right]$
- 641** $(1 + a^n)(1 - a^{3n})(1 - a^n + a^{2n})$ $[1 - a^{6n}]$

642 $(x^{n+1} + 2y) \left(\frac{1}{2}x^{n+1} - y \right) (x^{n+1} + y)$

$$\left[\frac{1}{2}x^{3n+3} + \frac{1}{2}x^{2n+2}y - 2x^{n+1}y^2 - 2y^3 \right]$$

$$\left[\frac{1}{3}x^{n+3} - \frac{1}{2}x^n + \frac{4}{3}x^4 \right]$$

643 $\frac{2}{3}x^3 \left(\frac{1}{2}x^n - \frac{3}{4}x^{n-3} + 2x \right)$, con $n \geq 3$.

644 $(a^{n+2} - b^{n-2})(a^2 + b^n)$, con $n \geq 2$.

$$[a^{n+4} - a^2b^{n-2} + a^{n+2}b^n - b^{2n-2}]$$

645 $(x^n + 2x^{n-1} - 5x^{n-2})(4x^{n+3} + 3x^{n+2})$, con $n > 1$.

$$[4x^{2n+3} + 11x^{2n+2} - 14x^{2n+1} - 15x^{2n}]$$

646 $(x^ny^{n-1} + x^{2n})(y^{n-2} - x^n)$, con $n \geq 2$.

$$[x^ny^{2n-3} - x^{2n}y^{n-1} + x^{2n}y^{n-2} - x^{3n}]$$

647 $\frac{1}{4}y^{n+2}(2y^n - 3y^{n-1} + y)$, con $n \geq 1$.

$$\left[\frac{1}{2}y^{2n+2} - \frac{3}{4}y^{2n+1} + \frac{1}{4}y^{n+3} \right]$$

648 $(2x^n - 3x^{n-2} + 5x^{n-3})(4x^{n+3} - 7x^{n+1})$, con $n > 2$.

$$[8x^{2n+3} - 26x^{2n+1} + 20x^{2n} + 21x^{2n-1} - 35x^{2n-2}]$$

649 $x^ny^{2n} - \frac{4}{5}x^{2n}y^n - \left(x^{2n}y^n + \frac{1}{2} \right) - \left[0,5 + \left(\frac{1}{2}x^ny^{2n} - 1 \right) \right]$

$$\left[\frac{1}{2}x^ny^{2n} - \frac{9}{5}x^{2n}y^n \right]$$

650 $(4y^{n+1} - 0,3y^2 + 2y^{2n}) + \left(3y^{2n} - \frac{2}{3}y^2 + 2y^{n+1} \right) + (y^2 - 5y^{2n} - 6y^{n+1})$

[0]

651 $(x^n - x^{n-1}y + x^{n-2}y^n)(x - y)$, con $n > 1$.

$$[x^{n+1} + x^{n-1}y^n + x^{n-1}y^2 - x^{n-2}y^{n+1} - 2x^n y]$$

652 $(a^{2n} + 4a^n b^n + 3b^{2n})(b^n - 2a^n)$

$$[-2a^{3n} - 7a^{2n}b^n - 2a^n b^{2n} + 3b^{3n}]$$

653 $(x^{2n} - 5x^n + 6)(x^{2n} + 5x^n + 6)$

$$[x^{4n} - 13x^{2n} + 36]$$

654 $(a^{2n} - a^n b^n + b^{2n})(a^n + b^n)$

$$[a^{3n} + b^{3n}]$$

Lettere che rappresentano polinomi

Posti $A = \frac{1}{3}x + 2y$, $B = y^2 - x^2$, $C = 2x^2 + y^2$, semplifica le espressioni seguenti.

655 $2AC - AB$ $\left[\frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{3}xy^2 + 10yx^2 + 2y^3 \right]$

658 $A(3B - C) - 2C\left(-\frac{1}{2}A\right)$
 $[6y^3 - x^3 + xy^2 - 6x^2y]$

656 $A(C - B) + AC$ $\left[\frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{3}xy^2 + 10yx^2 + 2y^3 \right]$

659 $(A + B)C - B(A + C) + A(B - C)$ [0]

657 $BC - (AB + BC)\left[\frac{1}{3}x^3 - 2y^3 + 2x^2y - \frac{1}{3}xy^2\right]$

660 $A(B - C) - AB\left[-\frac{2}{3}x^3 - 2y^3 - \frac{1}{3}xy^2 - 4x^2y\right]$

661 COMPLETA la seguente tabella e giustifica perché i risultati della quinta e settima colonna sono uguali.

A	B	C	A + B	A - C	B + C	(A + B) - (B + C)
$2x^n + 3$	$x^n - 1$	$3x^n - 2$				
$a^{2m} - 1$	$a^{2m} + 1$	$5a^{2m} + 1$				

Dalle parole alle espressioni

ESERCIZIO GUIDA

- 662** Dati i tre polinomi $3x^2 + 5x - 6$, $1 - x^2$ e $x^2 - 5x$, aggiungiamo al secondo polinomio la differenza fra l'ultimo polinomio e il primo.

Indicando con A il primo polinomio, con B il secondo e con C il terzo, si tratta di scrivere la seguente espressione:

$$B + (C - A).$$

Eseguiamo la sostituzione:

$$\begin{aligned} 1 - x^2 + (x^2 - 5x - 3x^2 - 5x + 6) &= \\ &= 1 - x^2 + (-2x^2 - 10x + 6) = \\ &= 1 - \underline{x^2} - \underline{2x^2} - 10x + 6 = \\ &= -3x^2 - 10x + 7. \end{aligned}$$

- 663** Dati i polinomi

$$5a^2 - 2a + 1, \quad 3a + a^2 - 2, \quad a^2 - 1 + 2a;$$

- a) sottrai al primo la somma del secondo e del terzo;
b) aggiungi al terzo la differenza tra il secondo e il primo.

- 664** Come nell'esercizio precedente, ma con i seguenti polinomi:

$$\frac{1}{3}a - \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}.$$

- 665** Quale polinomio si deve sommare a

$$5x^3 + 2x^2 + x + 7$$

per ottenere il polinomio $2x^3 - 3x - 1$?

- 666** Dati i polinomi

$$\begin{aligned} a^2 - b^2, \quad a^2 - 2ab + b^2, \\ a^2 + 2ab + b^2, \quad a^2 + b^2, \end{aligned}$$

sottrai alla differenza tra il primo e il secondo la differenza fra il terzo e il quarto.

- 667** Dati i polinomi dell'esercizio precedente, all'opposto del secondo aggiungi la somma degli altri tre.

- 668** Determina quale polinomio, sommato a

$$\frac{1}{2}x^2 - x - 5,$$

dà come risultato $\frac{1}{2}x - 1$.

- 669** Determina quale polinomio, sommato a

$$3b^3 - 2b^2 - \frac{1}{2}b + 3,$$

dà come risultato $b^2 - 3b + 1$.

- 670** Svolgi i due esercizi precedenti, ma con «sottrarre» al posto di «sommare» e «sottratto» al posto di «sommato».

- 671** Al polinomio $5x^2 - 3y^2$ aggiungi l'opposto dei suoi $\frac{4}{5}$. $\left[x^2 - \frac{3}{5}y^2\right]$

- 672** Aggiungi al triplo del polinomio $4x^2 - 2x$ il doppio di $x - 6x^2$. $[-4x]$

- 673** Al polinomio $3a^3 - \frac{1}{2}a - 1$ aggiungi l'opposto di $\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a^3$. $\left[\frac{7}{2}a^3 - 2a - 1\right]$

- 674** Al triplo della somma dei polinomi

$$\frac{1}{2}x^3 - 2x + \frac{1}{2} \text{ e } 2x^3 - 3x^2 - x - 1$$

aggiungi l'opposto di $5x^3 - 9x^2 - 9x - 1$.

$$\left[\frac{5}{2}x^3 - \frac{1}{2}\right]$$

- 675** Sottrai dai $\frac{2}{3}$ del polinomio

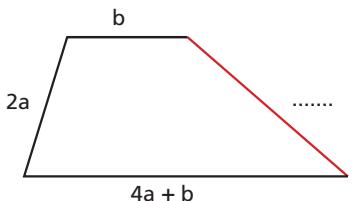
$$x^2 + x + \frac{9}{2}$$

il doppio di $x^2 + \frac{1}{3}x - 6$. $\left[-\frac{4}{3}x^2 + 15\right]$

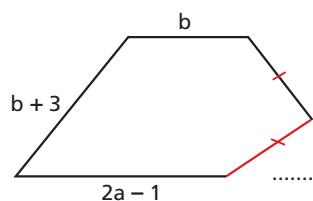
■ Polinomi e geometria

676

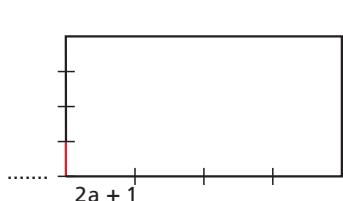
COMPLETA scrivendo l'elemento mancante per ogni figura, conoscendo di ognuna il perimetro.



a. $2p = 7a + 3b + 1$



b. $2p = 4a + 4b + 8$



c. $2p = 16a + 8b$

[$a+b+1; a+b+3; b-1$]

Rappresenta attraverso un polinomio ridotto le seguenti grandezze geometriche.

677

L'area di un rettangolo di base $x+6$ e altezza $2y-1$.

678

Il perimetro di un parallelogramma di lati $6a+3$ e $4a-2$.

679

L'area di un rombo di diagonali $4x+1$ e $2y+4$.

680

Il volume di un parallelepipedo rettangolo di spigoli $a+1$, $2a+2$, $a+4$.

681

La superficie totale del parallelepipedo precedente.

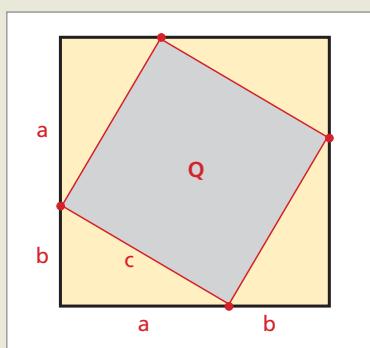
682

Il volume di un cilindro di altezza $x+2$ e raggio di base $4x$.

■ Problemi vari con i polinomi

ESERCIZIO GUIDA

- 683 Date le misure a e b dei segmenti indicati nella figura, troviamo l'espressione che esprime la misura dell'area del quadrato Q .



L'area di Q è la differenza fra l'area del quadrato in cui è contenuto e l'area dei quattro triangoli congruenti; quindi:

$$A = (a+b) \cdot (a+b) - 4 \cdot \left(\frac{1}{2} ab \right).$$

Sviluppando i calcoli, si ottiene:

$$A = a^2 + b^2.$$

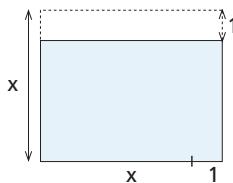
Se c è la misura del lato del quadrato Q ,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

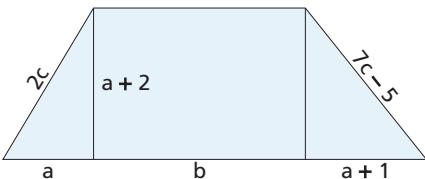
Quale teorema esprime questa relazione?

Esprimi mediante polinomi ridotti la misura dell'area e del perimetro delle figure colorate.

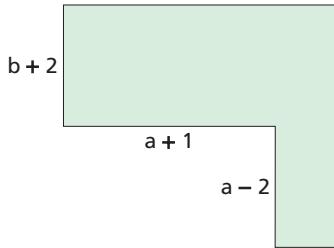
684



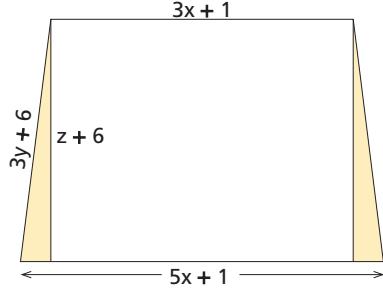
685



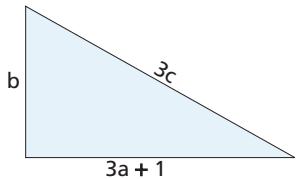
686



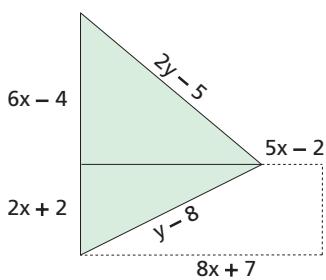
687



688



689



690

Un rettangolo ha la base che supera di 5 cm il doppio dell'altezza. Indica con x la misura dell'altezza. Esprimi con un polinomio ridotto la misura del perimetro e dell'area.

691

I lati di un rettangolo misurano il doppio e il triplo di una quantità x . Se il primo viene aumentato della metà della quantità y e il secondo della differenza fra x e y (con $x > y$), di quanto aumenta la misura del perimetro? E di quanto aumenta la misura dell'area?

692

In un trapezio rettangolo la base minore misura x , il lato perpendicolare alle basi supera di 3 la misura della base minore, il lato obliquo misura y ed è la metà della base maggiore. Esprimi con un polinomio ridotto la misura dell'area e del perimetro del trapezio.

693

Dato un quadrato di lato $(2x + 3)$, unendo i punti medi dei lati si ottiene un quadrato. Che relazione c'è tra l'area del primo e del secondo quadrato? Esprimi la misura delle due aree con polinomi ridotti.

694

Determina, esprimendole con un polinomio ridotto, la misura dell'area e quella del perimetro del rettangolo formato da tre rettangoli di basi rispettivamente di misura $2x$, $\frac{1}{2}x$, $3y$ e aventi l'altezza di misura $2y + 3x$.

695

Dato un numero z , intero dispari, determina la somma di tale numero con l'intero dispari che lo precede e con l'intero pari successivo. In modo analogo, dato un numero y , intero pari, calcola la somma di tale numero con il suo triplo e con l'intero pari successivo. I risultati ottenuti rappresentano numeri pari o dispari?

$$[3z - 1; 5y + 2; \text{entrambi pari}]$$

696

In un rombo di lato x la diagonale maggiore supera di 3 il doppio del lato e la diagonale minore supera di 1 la metà del lato. Esprimi con un polinomio ridotto la misura dell'area del rombo e la misura del perimetro del rettangolo avente le diagonali come dimensioni.

697

In una famiglia il padre ha ora x anni, la madre ha 3 anni meno del padre e il figlio ha la metà degli anni del padre. Fra 2 anni quale sarà la somma delle loro età?

$$\left[\frac{5}{2}x + 3 \right]$$

6. I prodotti notevoli

RIFLETTI SULLA TEORIA

698 VERO O FALSO?

- a) Il prodotto $(5a + x)(5a - x)$ è notevole.
- b) Il prodotto $(5a + x)(5 - x)$ è notevole.
- c) Il quadrato del binomio $(a + 3b)$ è uguale ad $a^2 + 9b^2$.
- d) Due binomi opposti hanno lo stesso quadrato.
- e) Il quadrato di un polinomio è dato dal prodotto del polinomio per se stesso.
- f) Due binomi opposti hanno cubi opposti.



699 Il trinomio $a^2 + b^2 + c^2$ può essere il quadrato di $a + b + c$?

700 Perché un prodotto viene detto «notevole»?

701 Il quadrato del binomio $x - 1$ è uguale al quadrato del binomio $1 - x$. Perché? Succede lo stesso anche per i cubi?

702 Lo sviluppo del quadrato di un trinomio formato da tre termini negativi è un polinomio i cui termini sono tutti positivi. Come mai?

703 Se sviluppi il cubo di due binomi opposti, ottieni due polinomi opposti? Succede la stessa cosa se elevi i due binomi alla quarta?

704 È dato il prodotto $(2a^2b + 3a^3) \cdot (2a^2b + 3ka^3)$. Per quali valori di k il prodotto è notevole? Sostituisci tali valori e sviluppa i prodotti.

$$[k = 1; k = -1]$$

ESERCIZI

■ Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza: $(A + B)(A - B)$

ESERCIZIO GUIDA

705 Calcoliamo i seguenti prodotti di polinomi:

$$\text{a) } \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}y^3 \right) \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}y^3 \right); \quad \text{b) } (-a^2 + 3b)(a^2 + 3b); \quad \text{c) } (-2x - 5y)(5y - 2x).$$

Teniamo conto della regola: $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

$$\text{a) } \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}y^3 \right) \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}y^3 \right) = \left(\frac{1}{3}x^2 \right)^2 - \left(\frac{1}{4}y^3 \right)^2 = \frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{16}y^6.$$

$$\text{b) } (-a^2 + 3b)(a^2 + 3b) = (3b - a^2)(3b + a^2) = (3b)^2 - (a^2)^2 = 9b^2 - a^4.$$

$$\text{c) } (-2x - 5y)(5y - 2x) = (-2x - 5y) \cdot (-2x + 5y) = (-2x)^2 - (5y)^2 = 4x^2 - 25y^2.$$

Calcola i seguenti prodotti.

706 $(6a + b)(6a - b); \quad (x + 3)(x - 3); \quad (xy + 1)(xy - 1); \quad (-a + 3)(-a - 3).$

707 $(5x + 3y)(3y - 5x); \quad (2a - 7b)(7b + 2a); \quad (x^2 - 3y)(x^2 + 3y); \quad \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right).$

708 $(a - b^2)(b^2 + a); \quad \left(x^3 - \frac{3}{2}y^5\right)\left(x^3 + \frac{3}{2}y^5\right); \quad \left(\frac{1}{2}x^2 - b^3\right)\left(\frac{1}{2}x^2 + b^3\right).$

709 $(5ab + b^2)(5ab - b^2); \quad \left(\frac{3}{2}a - b^2\right)\left(\frac{3}{2}a + b^2\right); \quad \left(\frac{3}{5}ab - 1\right)\left(\frac{3}{5}ab + 1\right).$

710 $\left(\frac{3}{5}a - \frac{1}{3}b\right)\left(\frac{3}{5}a + \frac{1}{3}b\right); \quad \left(-2a - \frac{4}{5}b\right)\left(2a - \frac{4}{5}b\right); \quad \left(-6x + \frac{1}{8}y\right)\left(\frac{1}{8}y + 6x\right).$

711 $\left(\frac{ab}{2} - 1\right)\left(-\frac{ab}{2} - 1\right); \quad (-2x^3 + a)(2x^3 + a); \quad \left(-\frac{1}{3}by - x\right)\left(-\frac{1}{3}by + x\right).$

712 $(a^2x^3 - 1)(a^2x^3 + 1); \quad \left(-\frac{x^4}{4} - 2\right)\left(-\frac{x^4}{4} + 2\right); \quad (x^3 - 1)(x^3 + 1).$

713 $(3a - b)(b + 3a); \quad (y^3 + 8a) \cdot (-y^3 + 8a); \quad \left(\frac{ax}{3} - \frac{1}{2}y\right)\left(\frac{ax}{3} + \frac{1}{2}y\right).$

714 $(2x - a)(2x + a)(4x^2 + a^2)(16x^4 + a^4); \quad (a^2 + 4)(a - 2)(a^4 + 16)(a + 2).$

715 $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1); \quad \left(\frac{1}{2}y - 2\right)\left(\frac{1}{2}y + 2\right)\left(\frac{1}{4}y^2 + 4\right)\left(\frac{1}{16}y^4 + 16\right).$

716 $(x^2 - 3)(x^2 + 3)(x^4 + 9); \quad (a^4 + 81b^4)(a - 3b)(a^2 + 9b^2)(a + 3b).$

717 $\left(y^2 + \frac{1}{4}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right)\left(y^4 + \frac{1}{16}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right); \quad (x^n + y^n)(x^n - y^n), \text{ con } n \in \mathbb{N}.$

718 $(x^{n+1} - y^{2n})(x^{n+1} + y^{2n}), \text{ con } n \in \mathbb{N}; \quad (2^n + 5^n)(2^n - 5^n), \text{ con } n \in \mathbb{N}.$

Semplifica le seguenti espressioni.

719 $3x(x + 2) - (x - 1) - (x + 3)(x - 3) - 2x^2 \quad [5x + 10]$

720 $3a^2 + (2a - 5b)(2a + 5b) - b(a - 3b) + 22b^2 + ab \quad [7a^2]$

721 $(xy + 1)(1 - xy) + (xy + 5)[(xy + 3)(-3 + xy) - (x^2y^2 - xy - 4)] \quad [-24]$

722 $(1 + 2a)(1 - 2a)(1 + 4a^2) - (a + 2)(2 - a)(a^2 + 4) + 15 \quad [-15a^4]$

BRAVI SI DIVENTA ▶ E11



723 $9x^2 \left(\frac{2}{3}a - x\right)\left(\frac{2}{3}a + x\right) - 9(x^2 + 2)(-x^2 - 2) - (1 + 2ax)(-1 + 2ax)$

724 $\left(-\frac{1}{2} - a\right)\left(\frac{1}{2} - a\right)\left(a^2 + \frac{1}{4}\right) + (1 - a^2)(a^2 + 1) \quad \left[\frac{15}{16}\right]$

725 $\left(x^2 + \frac{3}{2}y\right)\left(\frac{3}{2}y - x^2\right)\left(\frac{9}{4}y^2 + x^4\right) \quad \left[-x^8 + \frac{81}{16}y^4\right]$

726 $(a^2 - 2)(a^2 + 2)(4 + a^4)(a^8 + 16) \quad [a^{16} - 256]$

COMPLETA le seguenti uguaglianze, relative al prodotto della somma di due monomi per la loro differenza.

727 $(x - 2y)(x \dots) = x^2 - 4y^2$

732 $(\dots)\left(\frac{1}{2} + 2x\right) = 4x^2 - \frac{1}{4}$

728 $(-y + 2a)(\dots) = y^2 - 4a^2$

733 $(a \dots)\left(\frac{1}{3}b \dots\right) = \frac{1}{9}b^2 - a^2$

729 $(-3a - x)(\dots) = 9a^2 - x^2$

734 $\left(\frac{1}{3}a - 1\right)\left(\frac{1}{3}a + 1\right) = \dots - 1$

730 $(4 - a)(a \dots) = 16 - a^2$

735 $\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}y\right)(\dots) = \frac{4}{25}x^2 - \frac{1}{9}y^2$

731 $(-5a^2b + \dots)(\dots + \dots) = 4a^6x^2 - 25a^4b^2$

736 $\left(\frac{7}{4}a \dots\right)(\dots) = \frac{49}{16}a^2 - 16$

Calcolo rapido

■ ESERCIZIO GUIDA

737 Calcoliamo alcuni prodotti di numeri che possono essere scritti come somma e differenza di due numeri.

a) $29 \cdot 31 = (30 - 1)(30 + 1) = 30^2 - 1^2 = 900 - 1 = 899;$

b) $48 \cdot 52 = (50 - 2)(50 + 2) = 50^2 - 2^2 = 2500 - 4 = 2496;$

c) $95 \cdot 105 = (100 - 5)(100 + 5) = 100^2 - 5^2 = 10\,000 - 25 = 9975.$

Calcola rapidamente.

738 $32 \cdot 28; \quad 43 \cdot 37; \quad 19 \cdot 21; \quad 64 \cdot 56.$

739 $41 \cdot 39; \quad 107 \cdot 93; \quad 54 \cdot 46; \quad 75 \cdot 65.$

■ Il quadrato di un binomio: $(A + B)^2$

■ ESERCIZIO GUIDA

740 Calcoliamo i seguenti quadrati di binomi:

a) $(3a - 2b)^2; \quad$ b) $(-a^2 - 3ab^3)^2.$

Teniamo conto della regola $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$

a) $(3a - 2b)^2.$

Per applicare la regola:

$A = 3a, B = -2b.$

Calcoliamo il quadrato:

$$(3a - 2b)^2 = (\underline{3a})^2 + 2(3a)(\underline{-2b}) + (-2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2.$$

A B quadrato del doppio quadrato del
 1° termine: prodotto: 2° termine:
 A^2 $2AB$ B^2

b) $(-a^2 - 3ab^3)^2$.

Per applicare la regola:

$$A = -a^2, B = -3ab^3.$$

Calcoliamo il quadrato:

$$(-a^2 - 3ab^3)^2 = (-a^2)^2 + 2(-a^2)(-3ab^3) + (-3ab^3)^2 = a^4 + 6a^3b^3 + 9a^2b^6.$$

Osservazione. Il binomio $-a^2 - 3ab^3$ è l'opposto del binomio $a^2 + 3ab^3$. Pertanto:

$$(-a^2 - 3ab^3)^2 = (a^2 + 3ab^3)^2.$$

Calcola i seguenti quadrati di binomi. Le lettere negli esponenti rappresentano numeri naturali.

741 $(3x + y)^2$;

$(5a + 7b)^2$;

$(2ab + 3)^2$.

742 $(x - 3y)^2$;

$(6a - 2b)^2$;

$(2 + 3ab)^2$.

743 $(-x + y^2)^2$;

$\left(\frac{1}{2}x^2y + xy^2\right)^2$

$\left(-2a - \frac{1}{3}b\right)^2$.

744 $\left(-\frac{3}{2}a^2b + 4b^2\right)^2$;

$\left(-\frac{1}{2}x^3 - 2y^3\right)^2$

$(b^5 + 2b)^2$.

745 $(-x + x^0y)^2$, con $x \neq 0$;

$\left(\frac{2}{7} + \frac{3}{4}x\right)^2$

$(a^6 - b^6)^2$.

746 $\left(-2a - \frac{4}{5}b\right)^2$;

$\left(1,2a^2b^2 - \frac{3}{5}ab\right)^2$

$\left(\frac{a^2}{4} + \frac{1}{2}\right)^2$.

747 $\left(\frac{1}{2}a - 1\right)^2$;

$(3 - x^4)^2$;

$(-x - 2a)^2$.

748 $(a^3 - 2x)^2$;

$(a^4 - b^4)^2$;

$\left(-\frac{1}{2}y - 2\right)^2$.

749 $(-2 + 3y)^2$;

$(-x + 8)^2$;

$\left(-a^3 - \frac{1}{2}\right)^2$.

750 $(3x - y^3)^2$;

$\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}x\right)^2$;

$\left(4x^3 - \frac{1}{4}\right)^2$.

751 $(0,3x^2y^3 - 0,3x^3y^2)^2$;

$(0,5a^2b - 0,2b^2)^2$;

$(-0,1x + 0,1)^2$.

752 $(x^n - 1)^2$;

$(a^n + b^n)^2$;

$(2^n - 3^n)^2$.

753 $\left(x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}\right)^2$;

$(4^{2n} - a^n)^2$;

$(a^n + 3a^n)^2$.

754 $(1 + 2a^{2n})^2$;

$(-3x^ny^{n+1} - 2x^{n+1})^2$;

$(2x^n + x^2)^2$.

755 $(a^{n-2} + b^n)^2$, con $n \geq 2$;

$(-a^{2n} - b^{n-1})^2$, con $n \geq 1$;

$(a^{3n}b^n - a^{2n}b^n)^2$.

ESERCIZIO GUIDA

756 Calcoliamo il seguente prodotto: $(a + 2b + x)(a + 2b - x)$.

Applichiamo la proprietà associativa dell'addizione:

$$[(a + 2b) + x] \cdot [(a + 2b) - x] =$$

Usiamo la regola $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$:

$$= (a + 2b)^2 - x^2 =$$

Sviluppiamo il quadrato:

$$= a^2 + 4b^2 + 4ab - x^2.$$

Calcola i seguenti prodotti.

757 $(x + a - 1)(x + a + 1); \quad (x^2 - a - 1)(x^2 - a + 1).$

758 $(2y - 1 + 3a)(2y - 3a - 1); \quad (-2 + 2x - y^2)(2x - 2 + y^2).$

759 $\left(x^2 - \frac{1}{2}xy + y^2\right)\left(x^2 + y^2 + \frac{1}{2}xy\right); \quad (a - a^2 - a^3)(a^3 - a^2 + a).$

Semplifica le seguenti espressioni.

760 $(1 - 2x)^2 + (x + 2)^2 - 5(x^2 - 2) \quad [15]$

761 $\left(\frac{1}{2} - a\right)^2 - 3\left(a - \frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{1}{2}\right) + 2(a - 1)^2 \quad [3 - 5a]$

762 $(y^2 - x)^2 + y^2(2x - y^2) - (-x - 3)^2 \quad [-9 - 6x]$

763 $[(x + 1)(x - 1)]^2 - (2 + x^2)^2 + \frac{3}{2}(2x - 3)(2x + 3) \quad \left[-\frac{33}{2}\right]$

764 $(x - 2y)^2 + (2x + y)(x - 2y) - 3x(x - 3y) \quad [2xy + 2y^2]$

765 $\left(\frac{3}{2}a - 2b\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}a + 3b\right)^2 - 2(-a)^2 \quad [-3ab - 5b^2]$

BRAVI SI DIVENTA ► E12



766 $(3y^2 - 5a^2)^2 + \frac{1}{4}(2a - y)^2(2a + y)^2 - \left[-4\left(\frac{1}{2}a^2 - 2y^2\right)\right]^2 + (8y^2)^2$

767 $(a - 1)^2 - (a - 1)(a + 1)(a^2 - 1) + (a^2 + 1)^2 \quad [5a^2 - 2a + 1]$

768 $[(2a - b)^2 + 4ab]^2 - 7a^2(2a^2 + b^2) + (2a^2 + b^2)(2a^2 - b^2) \quad [6a^4 + a^2b^2]$

769 $(a + y - 2)(a + y + 2) - (a - y)^2 - 4(ay - 1) + 1 \quad [1]$

770 $(2 - x)^2 + (x - 2)(-2 - x) + (x - 1 + y)(x - 1 - y) - x(x - 6) \quad [9 - y^2]$

771 $(x + 3)^2 - (6 + x)(x - 6) - (1 - x)^2 + x(x - 8) \quad [44]$

CACCIA ALL'ERRORE Correggi gli errori nei seguenti esercizi.

772 $(2x + y)^2 = 4x^2 + y^2$

773 $(3x^3 - a)^2 = 9x^9 - 6ax^3 + a^2$

774 $\left(\frac{3}{2}xy - \frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{9}{4}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^3y$

775 $\left(\frac{1}{2}a - y^3\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 - ay^3 - y^6$

COMPLETA in modo da ottenere un trinomio che derivi dallo sviluppo del quadrato di un binomio.

776 $a^2 + 6ab + \dots ; \quad 4x^2 - 4x \dots .$

777 $4a^2b^2 - 12a^2b + \dots ; \quad 9a^2 - 6a \dots .$

778 $9x^2 + 2xy \dots ; \quad \frac{9}{4}a^2 - 3a^3b \dots .$

779 $x^8 - 4x^4y^2 + \dots ; \quad 1 - 3xy \dots .$

780 $x^4y^6 + x^5y^5 + \dots ; \quad \frac{1}{4}a^2x^2 - 2ax + \dots .$

781 $4 - y^2 + \dots ; \quad 0,25x^2y^2 + 4xy \dots .$

782 $x^{2n+1} + x^{2n} \dots ; \quad a^{2n} - \frac{1}{2}a^{n+m} \dots .$

(con $n, m \in \mathbb{N}$).

COMPLETA in modo da ottenere un trinomio che derivi dallo sviluppo del quadrato di un binomio. Esiste un solo modo di completare?

783 $x^6 + y^6 \dots ; \quad 4a^4 + 9b^4 \dots .$

784 $(\dots + 1)^2 = 25x^2 + \dots + \dots .$

785 $(-2a - \dots)^2 = \dots + \frac{16}{5}ab + \dots .$

786 $\frac{25}{4}a^2 + \frac{1}{25} \dots ; \quad a^6 + 16b^4 \dots .$

787 $(3 - 5x)^2 = 9 - \dots + 25x^2$

788 $81x^{4n^2} + \frac{9}{4} \dots ; \quad 6,25 + y^{12n} + \dots .$
(con $n \in \mathbb{N}$).

789 $a^{4n} + a^{2n+2} \dots ; \quad x^{2n} + 9y^{4n} \dots .$
(con $n \in \mathbb{N}$).

790 $(x^n + \dots)^2 = \dots + \dots + 9y^{4n}$
(con $n \in \mathbb{N}$).

791 $\left(\dots - \frac{1}{4}b\right)^2 = \dots - \frac{5}{2}ab^2 + \dots ;$
 $\left(\frac{2}{5}x^m + \dots\right)^2 = \dots + \frac{12}{5}x^m + \dots .$
(con $m \in \mathbb{N}$).

■ Il quadrato di un trinomio: $(A + B + C)^2$

■ ESERCIZIO GUIDA

792 Sviluppiamo $(5a - 3b + c)^2$.

Teniamo conto della regola $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$.

Per applicare la regola:

$$A = 5a, B = -3b, C = c.$$

Calcoliamo il quadrato:

$$(5a - 3b + c)^2 = (5a)^2 + (-3b)^2 + c^2 + \underbrace{2(5a)(-3b) + 2(5a)c + 2(-3b)c}_{\text{quadrati dei tre monomi}} = \\ = 25a^2 + 9b^2 + c^2 - 30ab + 10ac - 6bc.$$

Sviluppa i seguenti quadrati di trinomi.

793 $(3a + 2b + c)^2; \quad (a - 3b + 4c)^2.$

794 $(4a^2 - 3ab + b^2)^2; \quad (-3a^2 + 2a - 1)^2.$

795 $(-a^2 - b^2 - 2)^2; \quad (x^3y - 3xy^2 + 1)^2.$

796 $(2x + y - 1)^2; \quad \left(3x - \frac{1}{2}y + 4\right)^2.$

797 $\left(x - \frac{1}{2}y + 2z\right)^2; \quad (a + bc + c^2)^2.$

798 $(-x + y - 2xy)^2; \quad \left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y + \frac{1}{3}\right)^2.$

799 $(-a^3 - 3a^2 - 2a)^2; \quad \left(-3x^3 + \frac{3}{2}x - 2\right)^2.$

800 $(2xy^3 + 3x^2 - y)^2; \quad \left(x - \frac{1}{2}y - 2\right)^2.$

COMPLETA in modo da ottenere un polinomio che derivi dallo sviluppo del quadrato di un trinomio.

801 $4x^2 + y^2 + 9 - 4xy + 12x \dots$

804 $a^8 + \frac{1}{4}b^4 + 6a^4c^3 - 3c^3b^2 \dots$

802 $25a^2 + 20ab - 12b + 4b^2 - 30a \dots$

805 $9a^6 + 4a^4 - a^2 - 12a^5 - 6a^4 \dots$

803 $x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \dots$

806 $x^{2n} + 4 - 4y^n - 2x^n y^n \dots, \text{ con } n \in \mathbb{N}.$

COMPLETA in modo da ottenere un polinomio che derivi dal calcolo del quadrato di un trinomio. Esiste un solo modo di completare?

807 $a^6 + 9b^6 + 16c^6 \dots$
 $x^4 + x^2 + 1 \dots$

$4x^4 + y^4 + 36z^4 \dots$
 $a^2 + b^2 + 1 \dots$

808 $9x^2 + 9y^2 + z^2 \dots$
 $\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{9}b^2 + 25 \dots$

$a^2 + 4b^2 + 49c^2 \dots$
 $\frac{9}{4} + 16x^4 + y^6 \dots$

809 $4x^{12} + y^4 + \frac{1}{16} \dots$
 $x^2y^2 + 1 + y^4 \dots$

$4a^2 + \frac{1}{4}b^4 + 9c^8 \dots$
 $4 + a^6 + a^6b^2 \dots$

810 $\frac{1}{9}x^2 + 4y^2 + 25 \dots$
 $x^{2n} + y^{4n} + z^2 \dots$

$16 + \frac{4}{25}x^2y^6 + \frac{16}{49}x^6y^2 \dots$
 $\frac{4}{9}x^{2n+2} + \frac{1}{4}x^{2n} + \frac{25}{16} \dots, \text{ con } n \in \mathbb{N}.$

Semplifica le seguenti espressioni.

811 $(x + a + 2)^2 - (x + a)^2 - 4(2 + x + a) \quad [-4]$

812 $(a + 1 + 2y)^2 - (a - 1)(a + 1) - (1 + 2y)^2 - 2a \quad [1 + 4ay]$

813 $4(y-x) + (x-y)^2 - (2-x+y)^2$ [−4]

814 $(x^3 - y^3 + 3xy)^2 - (x^3 + y^3 + 3xy)^2 + 4xy^3(x^2 + 3y)$ [0]

815 $(a^2 - 3ab + b^2)^2 - (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - 11a^2b^2 + 6ab(a^2 + b^2)$ $[2b^4]$

816 $(a^2 + 4ab + 3b^2)^2 - (a+b)(a-3b)(a-b)(a+3b) - 4ab(2a^2 + 7ab + 6b^2)$ $[4a^2b^2]$

■ Il cubo di un binomio: $(A + B)^3$

■ ESERCIZIO GUIDA

817 Calcoliamo i seguenti cubi di binomi.

a) $(8 - 2b)^3$;

b) $\left(-a - \frac{1}{3}b\right)^3$.

Teniamo conto della regola $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

a) $(8 - 2b)^3$.

Per applicare la regola:

$$A = 8, B = -2b.$$

Calcoliamo il cubo:

$$(8 - 2b)^3 = \underbrace{8^3}_{A^3} + \underbrace{3 \cdot 8^2}_{A^2} \underbrace{(-2b)}_{B} + \underbrace{3 \cdot 8}_{A} \underbrace{(-2b)^2}_{B^2} + \underbrace{(-2b)^3}_{B^3} = 512 - 384b + 96b^2 - 8b^3.$$

b) $\left(-a - \frac{1}{3}b\right)^3$.

Per applicare la regola:

$$A = -a, B = -\frac{1}{3}b.$$

Calcoliamo il cubo:

$$\begin{aligned} \left(-a - \frac{1}{3}b\right)^3 &= \underbrace{(-a)^3}_{\text{cubo del 1° termine}} + \underbrace{3(-a)^2 \left(-\frac{1}{3}b\right)}_{\text{2 tripli prodotti}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3}b\right)^3}_{\text{cubo del 2° termine}} = \\ &= -a^3 - a^2b - \frac{1}{3}ab^2 - \frac{1}{27}b^3. \end{aligned}$$

Osservazione. Il binomio $-a - \frac{1}{3}b$ è l'opposto del binomio $a + \frac{1}{3}b$. Pertanto:

$$\left(-a - \frac{1}{3}b\right)^3 = -\left(a + \frac{1}{3}b\right)^3.$$

818

COMPLETA la tabella, che fornisce il segno di ogni termine del quadrinomio derivante dallo sviluppo di $(a + b)^3$, al variare dei segni di a e di b .

a	b	a^3	$3a^2b$	$3ab^2$	b^3
+	+			+	
+	-		+	-	
-	+				
-	-				-

Calcola i seguenti cubi di binomi (con $n \in \mathbb{N}$).

819

$$(a + 2)^3; \quad (1 + y)^3; \quad (x - 2)^3; \quad (3a^6 b^9 + 2)^3.$$

820

$$\left(xy - \frac{1}{3}\right)^3; \quad (a^2 + 3ab)^3; \quad (x^3 - 1)^3; \quad (-5x^3y - 3x^4)^3.$$

821

$$\left(\frac{1}{2}xy - 2\right)^3; \quad (2x + 3)^3; \quad \left(-a^2 - \frac{1}{3}\right)^3; \quad (4x^3 - y^3)^3.$$

822

$$(x^2 + 3y^2)^3; \quad \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y\right)^3; \quad (x^2y - y^2x)^3; \quad \left(\frac{1}{3}a^2 - ab\right)^3.$$

823

$$(x^5 + 0,2)^3; \quad \left(-\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}y\right)^3; \quad \left(-3a - \frac{1}{9}ab\right)^3; \quad \left(-3y + \frac{x}{3}\right)^3.$$

824

$$(x^n + y)^3; \quad \left(a^n - \frac{2}{3}\right)^3; \quad (2x^{n-1} - 3y^{n+1})^3, \text{ con } n \geq 1.$$

825

$$(a^n - b^n)^3; \quad (2^n - 3^n)^3; \quad \left(x^n y^{n+1} + \frac{1}{3}x^n y^{n-1}\right)^3, \text{ con } n \geq 1.$$

826

Semplifica l'espressione $(A - B)^3 + (A + B)^3 - A(3B^2 + 2A^2)$, dove A e B sono i binomi:

$$A = 2xy^2 + x^2, \quad B = y^2 - xy.$$

$$[3x^2y^4 + 6x^3y^4 + 6xy^6 - 12x^2y^5 + 3x^4y^2 - 6x^3y^3]$$

Semplifica le seguenti espressioni.

827

$$a^3 - (-b)^3 - (a + b)^3 - \frac{1}{3}a(3b + 1)(1 - 3b) \quad \left[-3a^2b - \frac{1}{3}a \right]$$

828

$$(x - 2y)^3 - (2x - y)^3 - 6xy(x + y) + 7y^3 + 8x^3 \quad [x^3]$$

829

$$[(x + 1)^2 - 2x]^3 - (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1) + 2x^2(x^2 - 1) - (4x^4 + 2) \quad [x^6 + x^2]$$

830

$$(4xy - y)^3 - (xy - 4y)^3 - 9y^3[x^2(7x - 4) - (4x - 7)] \quad [0]$$

COMPLETA in modo da ottenere un quadrinomio che derivi dallo sviluppo del cubo di un binomio.

831

$$8a^6 - 60a^4 - 125 \dots \quad 834 \quad 12x^2y^2 + 8 + 6x^4y^4 \dots$$

$$x^3 - x^6 + 3x^5 \dots$$

$$x^9 - x^7 + \frac{1}{3}x^5 \dots$$

832

$$27x^3 + 9xy^2 + y^3 \dots$$

$$6xy^2 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2y \dots$$

$$a^3 - 3a^2 \dots$$

833

$$-8y^3 - 27x^3 - 54x^2y \dots \quad \frac{1}{27}a^3 + ab^2 + b^3 \dots$$

$$8a^6 + 6a^2b^4 - b^6 \dots$$

COMPLETA in modo da ottenere un quadrinomio che derivi dallo sviluppo del cubo di un binomio. Esiste un solo modo di completare?

836 $\frac{1}{8}a^6 + b^6 \dots$

$x^9 - \frac{1}{27}y^9 \dots$

837 $x^9 + 27x^6y^3 \dots$

$x^3 + \frac{3}{2}x^2y \dots$

838 $1 - 9a \dots$

$-36x^2y^2 + 54xy^4 \dots$

■ La potenza di un binomio: $(A + B)^n$

■ ESERCIZIO GUIDA

839 Utilizzando il triangolo di Tartaglia, sviluppiamo la potenza:

$$\left(\frac{1}{2}a - b\right)^4.$$

La quarta riga del triangolo di Tartaglia è:

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1;$$

quindi applichiamo la regola:

$$(A + B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4.$$

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{1}{2}a\right) + (-b)\right]^4 &= \left(\frac{1}{2}a\right)^4 + 4\left(\frac{1}{2}a\right)^3(-b) + 6\left(\frac{1}{2}a\right)^2(-b)^2 + 4\left(\frac{1}{2}a\right)(-b)^3 + (-b)^4 = \\ &= \frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{2}a^3b + \frac{3}{2}a^2b^2 - 2ab^3 + b^4. \end{aligned}$$

Utilizzando il triangolo di Tartaglia, sviluppa le seguenti potenze di binomi.

840 $(2a + 1)^5;$ $(x - 2y)^4;$ $(x - 1)^7.$ 842 $(a^2 - 1)^7;$ $(0,3a^3 - b^3)^4;$ $(a - b)^6.$

841 $(-a^2b - ab^2)^5;$ $\left(-2ab + \frac{1}{2}\right)^4;$ $(x - 1)^{10}.$ 843 $(2 - x^3)^6;$ $\left(x^2 + \frac{1}{2}y\right)^5;$ $(a - b)^{10}.$

RIEPILOGO

I PRODOTTI NOTEVOLI

Nel sito: ► 20 esercizi in più
► 23 esercizi di recupero



844 COMPLETA

a) $\frac{1}{9}y^2 - \dots + \dots = \left(\dots - \frac{1}{2}x\right)^2$

b) $4 - 4x + x^2 - \frac{1}{4}y^2 = (2 - \dots - \dots)(2 - \dots + \dots)$

c) $x^3 - 3x^2 + \dots - \dots = (x \dots \dots)^3$

d) $a^2 + 9 + \dots - \dots = (a + 3 - b)(a + \dots + \dots)$

e) $x^2 + \dots + \dots - a^2 - b^2 + 2ab = [(x + 2) - (a - b)] \cdot [(x + 2) \dots \dots]$

f) $a^{2n} - 2a^{\dots} + 1 = (a^{\dots} - 1)^2$

g) $x^{2k} - 9y^{6h} = (x^k + \dots y^{\dots h}) \cdot (x^k - \dots y^{\dots h})$

CACCIA ALL'ERRORE Non tutte le uguaglianze proposte sono vere. Trova gli errori e correggili.

- 845** a) $(a + b)(a + b) = a^2 + b^2$
 b) $(b - a)(a - b) = b^2 - a^2$
 c) $(a + b)^2 = (-b - a)^2$
 d) $(a - b)^2 = (b - a)^2$
 e) $(a + b)^2 = -(a - b)^2$

- 846** a) $(-a + b)(a - b) = -(a - b)^2$
 b) $(-a + b)(b - a) = (a - b)^2$
 c) $a^3 + b^3 = (a + b)^3$
 d) $(a - b)^3 = (b - a)^3$
 e) $(-a + b)^3 = -(a - b)^3$

Semplifica le seguenti espressioni.

- 847** $(2a - b)^2 - (3a + b)(a - 2b) + 5a^2 - ab$ $[6a^2 + 3b^2]$
848 $(x + y)^2 - 2y(x - y) - (x + y)(y - x)$ $[2x^2 + 2y^2]$
849 $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) - (a^2 + b^2)^2 + 2a^2(a^2 + b^2)$ $[2a^4 - 2b^4]$
850 $(x + 1)^3 + 3(x + 1)^2 + 3(x + 1) + 1$ $[(x + 2)^3]$
851 $2(y - 3x)^2 + 2(2x + y)(y - 2x) - 9x^2 - 2xy - (2y - x)^2$ $[-10xy]$
852 $(x^2 - 3y^2)(2x^2 + y^2) - (x^2 + 2y^2)(x^2 - 2y^2) - (x^2 + y^2)^2$ $[-7x^2y^2]$

BRAVI SI DIVENTA ► E13



- 853** $[(2 - a)(2 + a) - 2]^3 - (2a^2 - b + 1)^2 + a^2(a^2 + 4)^2 + (b - 2a^2)^2$
854 $(-x + y^2)(-x - y^2) + (-2y)^2(x - y)^2 + 8xy^3 - 4x^2(1 + y^2)$ $[3y^4 - 3x^2]$
855 $(x + 2)^2 - 3(x + 2)(x - 2) + (x - 2)^3 - x^2(x - 8)$ $[16x + 8]$
856 $(x - 2y)^3 - x(x - 2y)(x + 2y) + 2xy(3x + 4y) - (-2y)^3$ $[24xy^2]$
857 $a(a^2 - 3) + (1 + 6a + a^3) - (a - 1)^3 + (-a - 1)^3$ $[1 - 3a]$
858 $\{[x^3 - y^3 + (x + y)^3 + 2x^2y - x(2x + 3y)(x + y)]^2 - 2\}^3$ $[-8]$
859 $[a + 3 + (b - 1)(2b + a + 3) + b(b + 2a - 1)]a - (b + a)^3$ $[-a^3 - b^3]$
860 $(x^2 - 2xy + 3y^2)(x^2 + 2xy + 3y^2) - 2(xy - x^2)^2 - 4x^3y + x^4$ $[9y^4]$
861 $[(x - y)^2(x + y)^2 - x^2(x^2 - 2y^2)] : \frac{(-y)^2}{2} \cdot (x + y)$ $[2y^3 + 2xy^2]$
862 $\left[(x + 3a)^2 + (2x - 3a)^2 + 4\left(x - \frac{3}{2}a\right)(3a + x) \right] : (-3)^2 - (x - 2)^2$ $[4x - 4]$
863 $(1 - 2a^2)(1 + 2a^2) + (5a^2 - 1)^2 - 2(1 - 4a^2)^2 - [-2a^4 - (3a^2 - 1)^2]$ $[1]$
864 $[(x + y)^3 - (x + y)(x^2 - xy + y^2)]^2 - 2xy(-3xy)^2$ $[9x^4y^2 + 9x^2y^4]$
865 $[x^2 - (x - y)(x + y) + y^3]^3 - (1 + y)^3 \cdot [(y^3 + 1)(y^3 - 1) + (y^2 + x^2)^0]$, con $x \neq 0$ o $y \neq 0$. $[0]$

- 866** $(x^2 - xy + y^2) \cdot (x^2 + xy - y^2) - x(x - y)^3 - 3xy(x^2 + y^2)$ $[-4x^2y^2 - y^4]$
- 867** $\left(1 - \frac{2}{3}a^3\right)^3 + \left(2a + \frac{1}{2}a^2\right)^2 - \frac{1}{3}(-a)^4\left(\frac{3}{4} - \frac{8}{9}a^5\right) - \frac{4}{3}a^6$ $[1 + 4a^2]$
- 868** $[(-x - 2y)(-x + 2y)(x^2 + 4y^2) + 17y^4]^3 - (x^6 + y^6)^2 - 3x^4y^8$ $[3x^8y^4 - 2x^6y^6]$
- 869** $x + 1 + (2x + y + 3)^2 - (2x + y)^2 - 2(3y + 5)$ $[13x]$
- 870** $\left(\frac{1}{2}a^2 - b^2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right)^2 + (-3ab)^2$ $[7a^2b^2]$
- 871** $(a + b + 2)^2 + (a - b)(a + b) - 2(a + 1)(a + b)$ $[2(2 + a + b)]$
- 872** $(a^2 + 4b^2)(2b + a)(a - 2b)(16b^4 + a^4)$ $[-256b^8 + a^8]$
- 873** $a^2(b^2 + ab + a^2)(b^2 - ab + a^2) - (a^2 + b^2)^3$ $[-2a^2b^4 - 2a^4b^2 - b^6]$
- 874** $\left[(y^2 - 0,3)^3 + \left(y^2 + \frac{1}{3}\right)^3\right]\left(2y^6 - \frac{2}{3}y^2\right) + \frac{4}{9}y^4$ $[4y^{12}]$
- 875** $(5x - 2y)^2(5x + 2y)^2 + (25x^2 - 4y^2)^2 + (-20xy)^2$ $[1250x^4 + 32y^4]$
- 876** $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) + 2(8x^3 + 1) - 24x^3 + x^2 + 4x + 1$ $[x^2 + 4x + 4]$
- 877** $(4x^2 - y^2)^2 - (2x - y)^2(2x + y)^2$ $[0]$
- 878** $(a - 2)(a^2 + 2a + 4) - 3(a^3 - 8) + 2a^3 - 16$ $[0]$
- 879** $(2a + 1)^3 - (a - 2)^3 - 7(a^3 - 1) - 2(a^2 + a - 1)(a^2 - a - 1) + 2a^4$ $[24a^2 - 6a + 14]$
- 880** $(a^2 - 2ab + b^2)(a + b)^2 - 2(a - b)^2(a + b)^2$ $[2a^2b^2 - a^4 - b^4]$
- 881** $(a + b + c)(a - b - c) + (b - c - a)(b - c + a) + (2b + c)^2$ $[4b^2 + c^2]$
- 882** $\left[\left(a - b - \frac{1}{2}\right)\left(-a + b - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\right] \cdot (a + b)^2 + (a^2 - b^2)^2$ $[0]$
- 883** $(x + y)^2(x - y) - \left(\frac{2}{3}x - y\right)^3 + \left(\frac{2}{3}x + y\right)^3 + xy\left(y - \frac{11}{3}x\right)$ $[x^3 + y^3]$
- 884** $(x^2 - 1)^4 - (x^2 - 1)^3(x^2 + 1) + 2(x^2 - 1)^3$ $[0]$
- 885** $(x - 2y)^3 - (x + 2y)^3 + 3(2xy)^2 : (-y) + y(4y - 3)(4y + 3)$ $[-24x^2y - 9y]$
- 886** $(2a + x - 2)^2 + 4a(2 - x) - (x - 3)^2 - [(-2a)^2 - 5]$ $[2x]$
- 887** $(-x + 2y)(x + 2y) + [x(y - x)(x + y) - xy^2] : (-x) - (1 - 2y)^2$ $[4y - 1]$
- 888** $\left[\left(a^2 + \frac{1}{2}b\right)\left(-a^2 + \frac{1}{2}b\right) + \left(a^2 - \frac{1}{3}b\right)\left(a^2 + \frac{1}{3}b\right)\right][(2b - a^2)(2b + a^2) + (a^2 - 3b)(a^2 + 3b)]$ $\left[-\frac{25}{36}b^4\right]$

889 $\left(\frac{1}{2}a + ab\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - a^2[(b+1)^2 - (b+1)] + \frac{2}{3}a[b(a+b)(a-b) + b^3]$ $\left[\frac{2}{3}a^3b\right]$

890 $\left[\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right)^3 - \frac{1}{9}xy(2x+4y) - \frac{8}{27}y^3\right] \cdot 3x + \left(\frac{1}{3}x^2 + y^2\right)\left(y^2 - \frac{1}{3}x^2\right)$ $[y^4]$

891 $\left(\frac{2}{3}a^2 + b^2\right)^3 + \left(\frac{2}{3}a^2 - b^2\right)^3 - \frac{4}{3}a^2\left(\frac{2}{3}a^2 + b^2\right)\left(\frac{2}{3}a^2 - b^2\right) - \frac{10}{3}a^2b^4$ $[2a^2b^4]$

892 $\left[(x+y+1)(x+y-1) - \left(x+y - \frac{2}{3}\right)\left(x+y + \frac{2}{3}\right)\right](3x^2 - 2y)(2y - 3x^2)$ $\left[\frac{5}{9}(3x^2 - 2y)^2\right]$

893 $(a-2b)^3(a+2b)^3 + (a^3+8b^3)^2 - 4a^2b^2(-3a^2+12b^2+4ab)$ $[2a^6]$

894 $(1-2x)^3 - x\left[6\left(2x - \frac{1}{2}\right) - 2(-2x)^2\right] + (x-1)(x+1) + 3x$ $[x^2]$

895 $(x+1+a)(x+1-a) - [(2-x)^2 - (a+2-x)^2 - 2a(x-2)] - (-x)^2$ $[2x+1]$

896 $(3^n - 4^n)(4^n + 3^n)(3^{2n} - 4^{2n})$, con $n \in \mathbb{N}$. $[3^{4n} - 2 \cdot 3^{2n} \cdot 4^{2n} + 4^{4n}]$

897 $(x^n - 3y^n)^2 - (x^n - 3y^n)(x^n + 3y^n) + 6y^n(x^n - y^{n+1})$, con $n \in \mathbb{N}$. $[18y^{2n} - 6y^{2n+1}]$

898 Posto $A = \frac{2}{3}a - 1$, semplifica:

a) $(A-1)^3 + 3A(A-1)$; b) $2(A+1)^3 - 2A(A^2 + 3)$.

[a) $\frac{8}{27}a^3 - \frac{4}{3}a^2 + 2a - 2$; b) $\frac{8}{3}a^2 - 8a + 8$]

899 Posti $A = x + 2y$, $B = 2x - \frac{1}{4}y$, semplifica:

a) $(A-B)(A+B) - (A+B)^2 + 2B^2$;

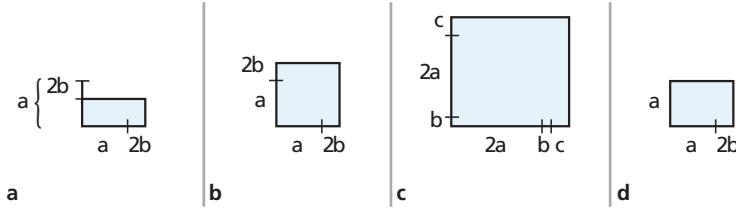
b) $(A-4B)^2 + 2(A-4B)(A+4B) + (A+4B)^2 - B^2$. [a) $-4x^2 - \frac{15}{2}xy + y^2$; b) $17xy + \frac{255}{16}y^2$]

900 Posti $A = 2 - x$, $B = 3x - 5$, $C = 6x^2 - 15x + 16$, semplifica:

a) $(2AB + C)^2$; b) $(A+B)^3 - AC + 59$.

[a) $49x^2 - 56x + 16$; b) $100x - 63x^2 + 14x^3$]

901 Scrivi i polinomi che rappresentano le aree delle seguenti figure e indica quale di questi non è un prodotto notevole.



$[(a+2b)(a-2b); (a+2b)^2; (2a+b+c)^2; a(a+2b); \text{l'ultimo}]$

902 Un quadrato di lato $x > 3$ cm viene trasformato in un rettangolo aumentando un lato di 3 cm e diminuendo l'altro lato della stessa quantità. Qual è il rapporto fra i perimetri delle due figure? Fra le due aree, qual è la minore?

$[1; \text{area del rettangolo}]$

Dalle parole alle espressioni

Traduci in espressioni le frasi seguenti e sviluppa i calcoli.

- 903** Dati i numeri a e b , moltiplica la somma dei loro opposti per la somma dei due numeri e sottrai il doppio del prodotto dei due numeri.
- 904** Dati i numeri a e b , al quadrato della loro somma togli il doppio del prodotto fra la loro somma e la loro differenza.
- 905** Al quadrato della somma del cubo di un numero x e del suo doppio togli il cubo della somma del quadrato del numero e $\frac{4}{3}$.
- 906** Dati i numeri x e y , al cubo della loro differenza aggiungi il cubo della loro somma e togli il doppio del prodotto del primo per il quadrato del secondo.
- 907** Al cubo della somma di 1 e del quadrato di un numero b sottrai il quadrato della stessa somma e aggiungi l'opposto del triplo del quadrato di b .

7. Le funzioni polinomiali

→ Teoria a pag. 308

RIFLETTI SULLA TEORIA

TEST

- 908** Considera il polinomio:

$$P(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x + 1.$$

I valori $P(2)$ e $P(-2)$ sono:

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> A 1 e 1. | <input type="checkbox"/> D 1 e -7. |
| <input type="checkbox"/> B -1 e -1. | <input type="checkbox"/> E 2 e -2. |
| <input type="checkbox"/> C -7 e 1. | |

- 909** Dato il polinomio $P(x) = 2x^2 - 3x - 3$, $P(1)$ vale:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| <input type="checkbox"/> A 4. | <input type="checkbox"/> D -2. |
| <input type="checkbox"/> B -4. | <input type="checkbox"/> E 0. |
| <input type="checkbox"/> C 2. | |

- 910** Uno degli zeri del polinomio

$$\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{2}$$

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> A 0. | <input type="checkbox"/> D $\frac{1}{3}$. |
| <input type="checkbox"/> B $\frac{1}{2}$. | <input type="checkbox"/> E -1. |
| <input type="checkbox"/> C $-\frac{1}{2}$. | |

- 911** Il valore di un polinomio $A(x)$ per $x = 0$ è -4. Fra i seguenti polinomi, quale potrebbe essere $A(x)$?

- | | |
|---------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> A $-4x + 2$ | <input type="checkbox"/> D $-4x^2 + 4$ |
| <input type="checkbox"/> B $x^2 - 4x$ | <input type="checkbox"/> E $x^2 - 2x - 4$ |
| <input type="checkbox"/> C $-4x^2$ | |

- 912** Per quale valore di k i due polinomi

$$3a - 2b + c \text{ e } ka + 2b + \frac{1}{3}kc$$

sono opposti?

- | | |
|-------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> A -1 | <input type="checkbox"/> D $-\frac{1}{3}$ |
| <input type="checkbox"/> B -2 | <input type="checkbox"/> E $-\frac{2}{3}$ |
| <input type="checkbox"/> C -3 | |

- 913** Data la funzione polinomiale $P(x) = 2x - 6$, il valore 3 è uno zero della funzione, mentre il valore -2 non è uno zero. Perché?

- 914** Sono dati i due polinomi:

$$2a^2 - 3a + 5 \text{ e } (k-1)a^2 - 3a + k + 2.$$

- Per quale valore di k i due polinomi sono uguali? Esiste un valore di k che rende i due polinomi opposti? Perché? [k = 3; no]

ESERCIZI

■ Il valore di una funzione polinomiale**■ ESERCIZIO GUIDA**

915 Data la funzione polinomiale

$$A(x) = -3x^2 + 2x + 1,$$

calcoliamo $A(-1)$, $A(0)$ e $A(2)$, ossia i valori che assume il polinomio quando a x si sostituiscono i valori $-1, 0$ e 2 .

Sostituiamo a x i tre valori:

$$A(-1) = -3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = -3 - 2 + 1 = -4;$$

$$A(0) = -3 \cdot (0)^2 + 2 \cdot (0) + 1 = 1;$$

$$A(2) = -3 \cdot (2)^2 + 2 \cdot (2) + 1 = -12 + 4 + 1 = -7.$$

Per ogni funzione polinomiale calcola il valore che essa assume se sostituisce alla variabile i valori scritti a fianco.

916 $A(x) = 2x^2 - x;$ $-1, 0, \frac{1}{2}, 1.$ [3; 0; 0; 1]

917 $B(x) = x^3 - x + 1;$ $-2, 0, 1, 3.$ [-5; 1; 1; 25]

918 $C(a) = -a^3 + 2a;$ $-\frac{1}{2}, -1, 1, 2.$ \left[-\frac{7}{8}; -1; 1; -4\right]

919 $D(y) = -y^4 - y + 2;$ $-2, -\frac{1}{2}, 0, 1.$ \left[-12; \frac{39}{16}; 2; 0\right]

920 $A(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3};$ $0, 1, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}.$ \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]

921 $P(a) = 3 - \frac{2}{3}a;$ $3, -2, -9, 0.$ \left[1; \frac{13}{3}; 9; 3\right]

922 $B(x) = 1 - x^2;$ $0, -\frac{1}{2}, 2, -3.$ \left[1; \frac{3}{4}; -3; -8\right]

923 $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x;$ $2, -1, 4, \frac{4}{3}.$ \left[\frac{5}{2}; \frac{1}{4}; 9; \frac{11}{9}\right]

924 ASSOCIA a ogni funzione polinomiale il punto che appartiene al suo grafico.

- | | |
|-----------------------------|--------------|
| 1. $y = 2x^2 + x$ | A. $(3; -3)$ |
| 2. $y = -x^3 + x^2 + x - 2$ | B. $(-1; 1)$ |
| 3. $y = -2x^4 - x^2 + 8$ | C. $(2; -4)$ |
| 4. $y = -3x + 6$ | D. $(1; 5)$ |

■ Il valore di una funzione polinomiale in due variabili

■ ESERCIZIO GUIDA

925 Calcoliamo il valore della funzione polinomiale in due variabili

$$P(a; b) = 2ab - (4a^2 + ab - a^2) + \frac{1}{3}ab$$

nei seguenti casi:

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = -\frac{1}{2}; \quad a = -2, \quad b = 5.$$

Non conviene sostituire subito i valori numerici alle lettere nel polinomio; prima è opportuno semplificarlo:

$$\begin{aligned} P(a; b) &= 2ab - (4a^2 + ab - a^2) + \frac{1}{3}ab = 2ab - (3a^2 + ab) + \frac{1}{3}ab = \\ &= 2ab - 3a^2 - ab + \frac{1}{3}ab = \frac{4}{3}ab - 3a^2. \end{aligned}$$

Nell'espressione ottenuta, che è equivalente a quella iniziale, sostituiamo i valori numerici:

- se $a = \frac{2}{3}, b = -\frac{1}{2}$, l'espressione è:

$$P\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9} - \frac{4}{3} = -\frac{16}{9};$$

- se $a = -2, b = 5$, l'espressione è:

$$P(-2; 5) = \frac{4}{3}(-2)(5) - 3(-2)^2 = -\frac{40}{3} - 12 = -\frac{76}{3}.$$

926 Calcola il valore del polinomio

$$P(a; b) = 5a - (3b - 7a) - (4b + 8a) - b$$

nei seguenti casi:

$$a = -1, \quad b = -1; \quad a = -3, \quad b = \frac{1}{2}; \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = -3.$$

[4; -16; 26]

927 Calcola il valore del polinomio

$$P(a; b) = \left(\frac{1}{2}a^2 - 2ab + \frac{1}{3}b^2\right) - \left(-a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{3}b^2\right) - \left(\frac{3}{2}a^2 - \frac{5}{3}b^2\right)$$

nei seguenti casi:

$$a = 1, \quad b = 0; \quad a = -1, \quad b = \frac{1}{2}; \quad a = 0, \quad b = -\frac{1}{2}.$$

$\left[0; \frac{7}{6}; \frac{1}{3}\right]$

■ I polinomi identici

■ ESERCIZIO GUIDA

928 Verifichiamo se le espressioni

$$(a + b)^3 - 3ab(a + b) \quad \text{e} \quad a^2(a + 9b) + b(b - 3a)(b + 3a)$$

si trasformano in polinomi identici.

Eseguiamo i calcoli nella prima espressione:

$$(a + b)^3 - 3ab(a + b) = a^3 + \cancel{3a^2b} + \cancel{3ab^2} + b^3 - \cancel{3a^2b} - \cancel{3ab^2} = a^3 + b^3.$$

Eseguiamo i calcoli nella seconda espressione:

$$a^2(a + 9b) + b(b - 3a)(b + 3a) =$$

Poiché $(b - 3a)(b + 3a)$ è un prodotto notevole:

$$= a^3 + 9a^2b + b(b^2 - 9a^2) = a^3 + \cancel{9a^2b} + b^3 - \cancel{9a^2b} = a^3 + b^3.$$

Poiché le espressioni forniscano come risultato lo stesso polinomio, $a^3 + b^3$, esse sono identiche.

Verifica se le coppie di espressioni si trasformano in polinomi identici.

- | | | | | |
|------------|--|---|---|------|
| 929 | $x^3 + a^3$ | e | $(x - a)(x^2 + ax + a^2)$ | [no] |
| 930 | $x^6 - 1$ | e | $(x^3 - 2x^2 + 2x - 1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)$ | [sì] |
| 931 | $(ab^2 + b^3)^2 - ab(ab^3 - 2b^4)$ | e | $(a + b)^2 \cdot b^4 - 2ab^5$ | [no] |
| 932 | $(x + y + z)^2 + (x - y + z)^2$ | e | $3x^2 + 2y^2 + 6z^2 - (x - 2z)^2$ | [sì] |
| 933 | $(x^2 - a^2)^2 + (x^2 + a^2)^2$ | e | $(x + a)(2x - 2a)(x^2 + a^2)$ | [no] |
| 934 | $(4a^3b^3)(-b^2)(2a^2b)$ | e | $\left(-\frac{4}{3}a^2b\right)\left(\frac{1}{3}ab\right)(18a^2b^4)$ | [sì] |
| 935 | $-a + b^2 + 2(a - b) + (a - b)(a + b)$ | e | $a + b^2 - (2b - a^2 + b^2)$ | [sì] |
| 936 | $\left(\frac{a - b}{2} - \frac{a + b}{2}\right)^2$ | e | $\frac{(a + b)^2}{2} - \frac{(a - b)^2}{2}$ | [no] |

8. La divisione fra polinomi

→ Teoria a pag. 310

RIFLETTI SULLA TEORIA

937 TEST Le seguenti espressioni sono tutte polinomi, tranne una. Quale?

- | | | | |
|----------|---------------------------|----------|-----------------------|
| A | $(3a^5 + a^2) : 2a^2$ | D | $(3a^3 + a^2) : 2a^4$ |
| B | $(3a^4 + 2a^3) : (-2a^3)$ | E | $(a^3 - 2a^2) : 3a$ |
| C | $(a^3 - 2a^2) : 3$ | | |

938 TEST In quale caso è possibile la divisione fra il polinomio $6a^2b^3 - 2a^3b^4$ e uno dei seguenti monomi?

- | | | | |
|----------|------------|----------|-----------|
| A | $3ab$ | D | $2a^4b^3$ |
| B | $6a^2b^4$ | E | $5a^3b^4$ |
| C | $12a^3b^2$ | | |

939 VERO O FALSO?

- a) La divisione fra un polinomio e un monomio è sempre possibile. V F
- b) La divisione fra un monomio e un polinomio è sempre possibile. V F
- c) Non è possibile eseguire divisioni fra polinomi se il divisore è il monomio nullo o il polinomio nullo. V F
- d) Se si divide il polinomio nullo per un monomio non nullo, il risultato è uguale a 0. V F
- e) Se la divisione fra il polinomio A e il polinomio B dà come quoziente Q e come resto R , allora è valida la relazione $A = B \cdot Q + R$. V F

940**TEST** L'espressione

$$(9a^2x^2 - 6ab^2x + 12abx) : 6ax$$

è equivalente a una delle seguenti. Quale?

- A** $\frac{3}{2}ax - b(b+2)$ **D** $\frac{2}{3}ax - b(b+2)$
B $\frac{3}{2}ax - b(b-2)$ **E** $\frac{2}{3}ax - b(b-2)$
C $\frac{3}{2}a^3x^2 - a^2b^2x^2 + 2a^2bx^2$

941**TEST** Considera la divisione

$$(12x^3y^5 + 6x^6y^2) : (-2x^ny^m).$$

In uno dei seguenti casi non è possibile. Quale?

- A** $n = 4; m = 3.$
B $n = 2; m = 2.$
C $n = 3; m = 2.$
D $n = 1; m = 1.$
E $n = 1; m = 2.$

ESERCIZI**■ La divisione di un polinomio per un monomio****■ ESERCIZIO GUIDA****942** Eseguiamo, se possibile, le seguenti divisioni:

a) $(12x^4y^3 - 3x^3y^4 + 2x^2y) : (2x^2y);$ b) $(5ab^2 + 3a^3b^3 - 3a^4) : (2a^2b^2).$

a) La divisione $(12x^4y^3 - 3x^3y^4 + 2x^2y) : (2x^2y)$ è possibile, perché ogni termine del dividendo contiene le variabili del divisore, con esponente maggiore o uguale.

Non è necessario, invece, che i coefficienti dei termini del dividendo siano multipli del coefficiente del divisore.

Dividiamo per $2x^2y$ ogni termine del polinomio dividendo:

$$\begin{aligned} 12x^4y^3 : (2x^2y) &= 6x^{4-2}y^{3-1} = 6x^2y^2; \\ -3x^3y^4 : (2x^2y) &= -\frac{3}{2}x^{3-2}y^{4-1} = -\frac{3}{2}xy^3; \\ 2x^2y : (2x^2y) &= 1. \end{aligned}$$

Il risultato è quindi:

$$(12x^4y^3 - 3x^3y^4 + 2x^2y) : (2x^2y) = 6x^2y^2 - \frac{3}{2}xy^3 + 1.$$

Verifica:

$$\underbrace{\left(6x^2y^2 - \frac{3}{2}xy^3 + 1\right)}_{\text{quoziente}} \cdot \underbrace{2x^2y}_{\text{divisore}} = \underbrace{12x^4y^3 - 3x^3y^4 + 2x^2y}_{\text{dividendo}}$$

b) La divisione $(5ab^2 + 3a^3b^3 - 3a^4) : 2a^2b^2$ non è possibile per due motivi:

- $5ab^2$ ha grado rispetto ad a minore di $2a^2b^2$;
- $-3a^4$ ha grado rispetto a b minore di $2a^2b^2$ (il grado rispetto a b di $-3a^4$ è 0).

Esegui, se è possibile, le seguenti divisioni di un polinomio per un monomio e fai la verifica.

943

$$(20a^4 - 12a^3 + 6a^2) : (+2a^2)$$

$$[10a^2 - 6a + 3]$$

944

$$(x^3 - x^2 + x) : \left(-\frac{1}{2}x\right)$$

$$[-2x^2 + 2x - 2]$$

945 $\left(a^4 + a^3b - \frac{1}{5}ab^3 + a^2b^2 \right) : \left(-\frac{1}{5}a \right)$

$$[-5a^3 - 5a^2b + b^3 - 5ab^2]$$

946 $(7x^4 - 3x^2y^3 + 5x^3y^2) : (-3x^2)$

$$\left[-\frac{7}{3}x^2 + y^3 - \frac{5}{3}xy^2 \right]$$

947 $\left(2a^3b^3 + \frac{1}{4}a^4b^4 - 2a^3b^2 \right) : \left(\frac{2}{3}a^2b^3 \right)$

[impossibile]

948 $\left(-\frac{2}{3}a^6 + \frac{1}{3}a^4 + \frac{4}{15}a^3 \right) : \left(-\frac{2}{9}a^3 \right)$

$$\left[3a^3 - \frac{3}{2}a - \frac{6}{5} \right]$$

949 $\left(\frac{2}{5}y^5z^3 - \frac{3}{4}y^3z^2 + \frac{1}{2}y^2z^5 \right) : \left(-\frac{2}{3}y^2z^2 \right)$

$$\left[-\frac{3}{5}y^3z + \frac{9}{8}y - \frac{3}{4}z^3 \right]$$

950 $\left(1,2x^6y^6 - 1,4x^4y^4 + \frac{1}{5}x^2y^2 \right) : (-0,2xy^2)$

$$[-6x^5y^4 + 7x^3y^2 - x]$$

951 $\left(x^{2n+5} - \frac{4}{3}x^{n+4} + \frac{1}{3}x^{2n+2} \right) : \left(\frac{2}{3}x^{n+1} \right)$, con $n \in \mathbb{N}$.

$$\left[\frac{3}{2}x^{n+4} - 2x^3 + \frac{1}{2}x^{n+1} \right]$$

ESERCIZIO GUIDA

- 952** Completiamo la divisione, scrivendo i termini mancanti al posto dei puntini, supponendo che il dividendo sia un polinomio ordinato in ordine decrescente:

$$(3a^6b^9 \dots) : (\dots) = -a^4b^7 - \frac{4}{3}a^3b^4 + \frac{1}{6}a^2.$$

dividendo divisore quoziente

Cerchiamo il **divisore**.

Abbiamo $3a^6b^9 : \dots = -a^4b^7$; pertanto basta eseguire la divisione $3a^6b^9 : (-a^4b^7) = -3a^2b^2$. Si ha quindi:

$$(3a^6b^9 \dots) : (-3a^2b^2 \dots) = -a^4b^7 - \frac{4}{3}a^3b^4 + \frac{1}{6}a^2.$$

Completiamo ora il **dividendo**.

Poiché il quoziente è un trinomio, anche il dividendo è un trinomio, di cui conosciamo il primo termine. Dobbiamo determinare gli altri due termini.

Per avere il dividendo, moltiplichiamo il quoziente per il divisore:

$$\left(-a^4b^7 - \frac{4}{3}a^3b^4 + \frac{1}{6}a^2 \right) \cdot (-3a^2b^2) = 3a^6b^9 + 4a^5b^6 - \frac{1}{2}a^4b^2.$$

I termini mancanti sono:

$$\left(3a^6b^9 + 4a^5b^6 - \frac{1}{2}a^4b^2 \right) : (-3a^2b^2) = -a^4b^7 - \frac{4}{3}a^3b^4 + \frac{1}{6}a^2.$$

COMPLETA le seguenti divisioni.

953 $(\dots) : (3a) = a + \frac{5}{3}b - \frac{7}{3}a^2b$

954 $(12x^5 - 6x^4 + 18x^3) : (\dots) = 4x^3 \dots$

955 $(4a^4b^6 \dots) : (\dots) = 2a^2b^4 + 3ab^2 - 1$

956 $(\dots - 6a^4b^3 + \dots) : (\dots) = \frac{5}{2}ab - a^2b^2 + \frac{1}{6}b$

957 $(x^2y^2 + 2xy + \dots) : (\dots) = -2xy^2 - \dots - \frac{1}{2}x^4$

958 $(-\dots + \dots + 7x^4y^2) : (\dots) = -\frac{2}{9}y + 3y^2 + \frac{7}{4}xy$

959 $(a^{2n+1} - \dots + a^{n+2}) : (-a^n) = \dots + a - \dots$, con $n \in \mathbb{N}$.

Semplifica le seguenti espressioni.

960 $[(3x^3 + 6x^2) : 2x - x] : x$

$$\left[\frac{3}{2}x + 2 \right]$$

961 $\{(a+b)^3 - (a-b)^3\} : (6b) : \left(-\frac{3}{2}\right)$

$$\left[-\frac{2}{3}a^2 - \frac{2}{9}b^2 \right]$$

962 $(-2x^2y + 4x^4y^2 - x^4y) : [(x+y)^2 - (x+y)(x-y) - 2y^2]$

$$\left[-x + 2x^3y - \frac{1}{2}x^3 \right]$$

963 $\{[b(2a-b)(2a+b) + b^2(b+4ab)] : (-2ab) + 2(a+b^2)\} : \frac{1}{2}b$

$$[0]$$

964 $[(2x+1)(2x-1)(4x^2+1) + 1] : (-2x)^3 + 3x + y$

$$[x+y]$$

965 $[(3x-y)^3 + y^3] : (3x) - (3x-y)^2$

$$[2y^2 - 3xy]$$

966 $[(x^2 - y^2)^3 - (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)y^2 - x^6] : (x^2y)$

$$[-4x^2y + 3y^3]$$

967 $\left[2a^3b\left(\frac{1}{4}a^2b + \frac{3}{2}ab - b\right) - b^2(3a^4 - 2a^3)\right]^3 : \left[a^2b\left(\frac{1}{2}a^3b + 1\right) - a^2b\right]$

$$\left[\frac{1}{4}a^{10}b^4 \right]$$

968 $[(2x^2y - 4xy^2)^3 - 8y^3(-2xy)^3] : (-2x^2y)^2$

$$[2x^2y - 12xy^2 + 24y^3]$$

969 $[(2a-b)^2 - (b+4a^2)^2 + 4a(b+4a^3) - 4a^2(1-2b)] : [b^2 - (b-2a)(b+2a)]$

$$[0]$$

970 $\left\{[x^6 + 1 - (x^3 + 1)^2(x^3 - 1)^2] : \left(\frac{1}{2}x^2\right)\right\} : \left(-\frac{2}{3}x\right)$

$$[-9x^3 + 3x^9]$$

971 $[(x-y)(x+y)^2 - (x+y)(x-y)^2] : [x^3 + (x^2y)^3 : (-xy)^3]$

$$[\text{impossibile}]$$

972 $[(3a-2b)^2(3a+2b)^2 - (9a^2 - 4b^2 - ab)^2 + 8ab^3] : [(a^2 - 3b)^2 - a^4 - 9b^2]$

$$\left[\frac{1}{6}b - 3a \right]$$

973 $\left\{[(a+2b)(a-2b)(a^2 + 4b^2) + (a^2 - 4b^2)^2] : (4a^2) - \frac{1}{2}(a+2b)(a-2b)\right\} : (-b^3)$

$$[0]$$

974 $[(x^n - y^n)^3 - (x^n + y^n)(x^n - y^n)y^n - x^{3n}] : (x^ny)$, con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

$$[-4x^ny^{n-1} + 3y^{2n-1}]$$

■ La divisione fra polinomi a coefficienti numerici

975 In una divisione tra polinomi il divisore è $x-4$, il quoziente è $x^2 - 6x + 2$ e il resto è -1 . Qual è il dividendo?

$$[x^3 - 10x^2 + 26x - 9]$$

976 Trova il polinomio dividendo di una divisione in cui il divisore è $x^2 - 1$, il quoziente è $2x^2 - x + 1$ e il resto è $x + 2$.

$$[2x^4 - x^3 - x^2 + 2x + 1]$$

ESERCIZIO GUIDA

977 Eseguiamo la divisione $(x^3 - 8) : (x - 2)$.

$$\begin{array}{r} x^3 \quad 0 \quad 0 \quad -8 \\ \hline x - 2 \end{array}$$

a. Mettiamo 0 nella posizione di x^2 e di x .
Dividiamo x^3 per x .

$$\begin{array}{r} x^3 \quad -0 \quad 0 \quad -8 \\ -x^3 + 2x^2 \\ \hline " \quad 2x^2 \quad 0 \quad -8 \\ -2x^2 + 4x \\ \hline 4x - 8 \end{array}$$

c. Dividiamo $2x^2$ per x , moltiplichiamo il risultato $2x$ per $x - 2$, cambiamo segno, incolonniamo e sommiamo.

$$\begin{array}{r} x^3 \quad 0 \quad 0 \quad -8 \\ -x^3 + 2x^2 \\ \hline " \quad 2x^2 \quad 0 \quad -8 \end{array}$$

b. Moltiplichiamo x^2 per $x - 2$, cambiamo segno, incolonniamo sotto il dividendo e sommiamo.

$$\begin{array}{r} x^3 \quad 0 \quad 0 \quad -8 \\ -x^3 + 2x^2 \\ \hline " \quad 2x^2 \quad 0 \quad -8 \\ -2x^2 + 4x \\ \hline 4x - 8 \\ -4x + 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

d. Dividiamo $4x$ per x , moltiplichiamo il risultato 4 per $x - 2$, cambiamo segno e sommiamo.
Il resto è 0.

Calcola quoziente e resto delle seguenti divisioni fra polinomi.

978 $(x^4 + 3x^2 - 4) : (x^2 - 4)$

$[Q = x^2 + 7; R = 24]$

979 $(15a^3 - 8a^2 - 9a + 2) : (3a + 2)$

$[Q = 5a^2 - 6a + 1; R = 0]$

980 $(7a - a^3 + 2 + a^2) : (a^2 + 2)$

$[Q = -a + 1; R = 9a]$

981 $(8x^3 - 4x + 1) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$

$[Q = 8x^2 + 4x - 2; R = 0]$

982 $(16x^5 - 8x^3 + 2x - 1) : (x^3 - 1)$

$[Q = 16x^2 - 8; R = 16x^2 + 2x - 9]$

983 $\left(-y^2 + \frac{3}{2}y^3 - 2\right) : (3y^2 + 2y)$

$\left[Q = \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}; R = \frac{4}{3}y - 2\right]$

984 $(2a^3 - 4a^2 + a + 2) : (2a^2 + a - 1)$

$\left[Q = a - \frac{5}{2}; R = \frac{9}{2}a - \frac{1}{2}\right]$

985 $(a^4 + 6a^2 - 4a^3 - 4a + 1) : \left(-\frac{2}{3} + a^3\right)$

$\left[Q = a - 4; R = 6a^2 - \frac{10}{3}a - \frac{5}{3}\right]$

986 $(x^5 - x^3 + 1) : (x^2 + 1)$

$[Q = x^3 - 2x; R = 2x + 1]$

987 $(x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 6x - 10) : (x^3 - 2)$

$[Q = x^2 - 3x + 5; R = 0]$

988 $\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2\right) : (x^2 - 2)$

$\left[Q = \frac{1}{4}x^2 + 1; R = -2x\right]$

989 $\left(9b^4 - 6b^3 + \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{3}{4}b - \frac{1}{2}\right)$

$$\left[Q = 12b^3; R = +\frac{2}{3} \right]$$

990 $(0,5x^3 + 1,5x - x^2 - 1) : (1 - 3x + 2x^2)$

$$\left[Q = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}; R = \frac{7}{8}x - \frac{7}{8} \right]$$

991 $(-3y^4 + 14y^3 - 13y^2 + 2) : (3y^2 - 2y - 1)$

$$[Q = -y^2 + 4y - 2; R = 0]$$

992 $(4x^3 + 18 - 3x) : \left(-x + \frac{1}{2}\right)$

$$[Q = -4x^2 - 2x + 2; R = 17]$$

993 $\left(a^4 + \frac{1}{3}a^3 + 6a + 2\right) : \left(2a^3 + \frac{2}{3}\right)$

$$\left[Q = \frac{1}{2}a + \frac{1}{6}; R = \frac{17}{3}a + \frac{17}{9} \right]$$

994 $(24y^5 - 4y^4 - 18y^2 + 15y - 2) : (6y - 1)$

$$[Q = 4y^4 - 3y + 2; R = 0]$$

995 $(x^{4n} - 2x^{3n} + x^{2n}) : (x^{2n} - x^n)$, con $n \in \mathbb{N}$.

$$[Q = x^{2n} - x^n; R = 0]$$

996 $(3a^{5n} - 9a^{3n} - 6a^{2n}) : (3a^{2n} - 6a^n)$, con $n \in \mathbb{N}$.

$$[Q = a^{3n} + 2a^{2n} + a^n; R = 0]$$

997 $(a^{2n+1} - a^{2n} + a^{n+1} - a^n) : (a^{2n} + a^n)$, con $n \in \mathbb{N}$.

$$[Q = a - 1; R = 0]$$

998 $(b^{2n-1} - b^{n+1} + b^n - b^2) : (b + b^n)$, con $n \in \mathbb{N}, n > 2$.

$$[Q = b^{n-1} - b; R = 0]$$

Calcola quoziente e resto delle seguenti divisioni fra polinomi. Esegui la verifica.

999 $(y^3 - 5y^2 + 3y - 6) : (y^2 + 1 - 2y)$

$$[Q = y - 3; R = -4y - 3]$$

1000 $(-3y^3 + 11y^2 - 9y - 2) : (3y^2 - 5y - 1)$

$$[Q = 2 - y; R = 0]$$

1001 $(2x^4 - 14x^2 + 12x - 5) : (2x^2 - x)$

$$\left[Q = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{27}{4}; R = \frac{21}{4}x - 5 \right]$$

1002 $(4a^2 - 3a + 6a^3 - 2) : (1 + 2a)$

$$\left[Q = 3a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{7}{4}; R = -\frac{1}{4} \right]$$

■ La divisione fra polinomi a coefficienti letterali

■ ESERCIZIO GUIDA

1003 Eseguiamo la divisione $(5a^2b + a^3 - 2ab^2 + b^3) : (a^2 - 4ab + b^2)$ considerando come variabile la lettera a .

Ordiniamo i polinomi secondo le potenze decrescenti della variabile a :

$$(a^3 + 5a^2b - 2ab^2 + b^3) : (a^2 - 4ab + b^2).$$

Eseguiamo la divisione:

$$\begin{array}{r} a^3 + 5a^2b - 2ab^2 + b^3 \\ -a^3 + 4a^2b - ab^2 \\ \hline + 9a^2b - 3ab^2 + b^3 \\ - 9a^2b + 36ab^2 - 9b^3 \\ \hline + 33ab^2 - 8b^3 \end{array} \quad \begin{array}{c} a^2 - 4ab + b^2 \\ \hline a + 9b \\ \hline a^3 : a^2 \quad 9a^2b : a^2 \end{array}$$

$$Q = a + 9b; \quad R = 33ab^2 - 8b^3.$$

Esegui le seguenti divisioni fra polinomi, considerando come variabile quella indicata a fianco.

- 1004** $(a^2 - 3b^2 - 2ab) : (b + a)$ [variabile: a] $[Q = a - 3b]$
- 1005** $(x^6 - y^4) : (3x^3 + 3y^2)$ [variabile: x] $\left[Q = \frac{1}{3}(x^3 - y^2) \right]$
- 1006** $(x^3 - 2x^2y + xy^2) : (x^2 - 2xy + y^2)$ [variabile: x] $[Q = x]$
- 1007** $(4b^3 - 20ab^2 - 9a^2b + 45a^3) : (b - 5a)$ [variabile: b] $[Q = 4b^2 - 9a^2]$
- 1008** $\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2y - 4xy^2 - 3y^3 \right) : (2x - 3y)$ [variabile: x] $\left[Q = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + y^2 \right]$
- 1009** $(a^6 - b^6 + a^4b^2 - a^2b^4) : (a^4 + 2a^2b^2 + b^4)$ [variabile: a] $[Q = a^2 - b^2]$
- 1010** $(2x^3y - 9x^2y + 8y + 2xy) : (xy - 4y)$ [variabile: x] $[Q = 2x^2 - x - 2]$
- 1011** $(-b^2 - 1 + a^2 - 2b) : (a - 1 - b)$ [variabile: a] $[Q = a + 1 + b]$
- 1012** $(a^3 - 2a^2b - 14ab^2 + 3b^3) : (a^2 - 5ab + b^2)$ [variabile: a] $[Q = a + 3b]$
- 1013** $\left(4x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 9 - 2xy + 12x - 3y \right) : \left(2x - \frac{1}{2}y + 3 \right)$ [variabile: x] $\left[Q = 2x - \frac{1}{2}y + 3 \right]$

Esegui le seguenti divisioni fra polinomi indicando quoziente e resto. Scegli come variabile prima una lettera, poi l'altra (con $n \in \mathbb{N}$).

- 1014** $(x^3 - y^3) : (x^2 - xy + y^2)$ $[Q(x) = x + y; R(x) = -2y^3. Q(y) = -y - x; R(y) = 2x^3]$
- 1015** $(2a^4 + a^3b - ab^3 + 2b^4) : (a^2 - ab + 2b^2)$ $\left[Q(a) = 2a^2 + 3ab - b^2; R(a) = -8ab^3 + 4b^4. Q(b) = b^2 - \frac{1}{2}a^2; R(b) = \frac{1}{2}a^3b + \frac{5}{2}a^4 \right]$
- 1016** $(4x^3 - 3x^2y + 7xy^2 + 2y^3) : (4x + y)$ $[Q(x) = x^2 - xy + 2y^2; R(x) = 0. Q(y) = 2y^2 - xy + x^2; R(y) = 0]$
- 1017** $(x^{3n} + 2x^{2n}y^n - 5y^{2n}) : (x^n - y^n)$ $[Q(x) = x^{2n} + 3x^n y^n + 3y^{2n}; R(x) = -5y^{2n} + 3y^{3n}. Q(y) = 5y^n + 5x^n - 2x^{2n}; R(y) = -5x^{2n} + 3x^{3n}]$
- 1018** $(2x^{2n+1} - x^{n+1}y^n - 2x^n + y^n) : (2x^n - y^n)$ $[Q(x) = Q(y) = x^{n+1} - 1]$
- 1019** $(2a^{4n} - 3a^{2n}b^n + 3a^n b^{2n} - 5b^{3n}) : (a^{3n} + b^{2n})$ $[Q(a) = 2a^n; R(a) = -3a^{2n}b^n + a^n b^{2n} - 5b^{3n}. Q(b) = -5b^n + 3a^n; R(b) = 5a^{3n}b^n - 3a^{2n}b^n - a^{4n}]$

RIEPILOGO

LA DIVISIONE FRA POLINOMI

1020 TEST È data la divisione:

$$(5a^3 - 6a^2 - 3a + 4) : (ka + 4).$$

Per quale valore di k il quoziente è $a^2 - 2a + 1$?

- AB** - 3 **C** 0 **D** 5 **E** - 5

1021 TEST È data la divisione:

$$(2a^3 + 3a^2 - 2a - 3) : (ka + 3).$$

Per quale valore di k il quoziente è $a^2 - 1$?

- A** 1 **B** 2 **C** 3 **D** - 2 **E** - 3

1022 Il quoziente fra due polinomi è il polinomio nullo. Come possono essere i due polinomi?**1023** In quale caso il resto di una divisione fra due polinomi è uguale a 0?**1024** Il grado del resto di una divisione fra polinomi può essere uguale o maggiore del grado del divisore? Fornisci un esempio.**1025** Dati i polinomi

- A) $a^2 + 4a$, D) $a + 3$,
 B) 4, E) $a + 4$,
 C) $a^2 + 3a$,

è possibile, scelto uno come polinomio di partenza, ricavarli uno dall'altro utilizzando, nell'ordine, le seguenti operazioni: $\cdot a$, $+ a$, $: a$, $- a$. Sapresti mettere nel giusto ordine i cinque polinomi?

Due di essi sono divisibili per $a + 3$ e altri due per $a + 4$. Quali? [D, C, A, E; B; D, C; E, A]

Esegui, se possibile, le seguenti divisioni calcolando il quoziente e il resto (nelle divisioni in cui compaiono polinomi in più variabili, esegui la divisione rispetto alla variabile indicata a fianco). Le lettere a esponente rappresentano numeri naturali.

1026 $(x^2 - 6x + 3) : (1 - x^3)$

[impossibile]

1027 $(5a^6 + 15a^5 + 20 + 5a) : (a + 3)$

[Q = 5a^5 + 5; R = 5]

1028 $(3y^4 + 3y^3 - 2y + 1) : (y + 5)$

[Q = 3y^3 - 12y^2 + 60y - 302; R = 1511]

1029 $\left(-\frac{1}{2}b^3 - b^2c^2 + 3bc^4 - c^6\right) : (b - c^2)$

[variabile: b] [Q = -\frac{1}{2}b^2 - \frac{3}{2}bc^2 + \frac{3}{2}c^4; R = \frac{1}{2}c^6]

1030 $(3y^3 - 14ay^2 + 21a^2y - 12a^3) : (3y - 8a)$

[variabile: y] [Q = y^2 - 2ay + \frac{5}{3}a^2; R = \frac{4}{3}a^3]

1031 $(36x^2y + 12xy^2 + y^3) : (6x + y)$

[variabile: x] [Q = 6xy + y^2]

1032 $\left(a^4b - \frac{1}{3}a^3b^2 - 2b^3 + 6ab^2\right) : \left(\frac{2}{3}b - 2a\right)$

[variabile: a] [Q = -\frac{1}{2}a^3b - 3b^2]

1033 $\left(b^6 + \frac{4}{3}b^3 + \frac{3}{4}b^4 - \frac{2}{3}b^2 - \frac{1}{6}\right) : \left(-\frac{2}{3}b^2 - \frac{1}{2}\right)$

[Q = -\frac{3}{2}b^4 - 2b + 1; R = -b + \frac{1}{3}]

1034 $(6a^4 - 2a^3b - 24a^2b + 20ab^2 - 4b^3) : (3a - b)$

[variabile: a] [Q = 2a^3 - 8ab + 4b^2]

1035 $\left(\frac{9}{4}ab^2 + 27a^3 + \frac{27}{2}a^2b + \frac{1}{8}b^3\right) : (b + 6a)$

[variabile: b] [Q = \frac{1}{8}b^2 + \frac{3}{2}ab + \frac{9}{2}a^2]

1036 $\left[-x^4 + x^3\left(\frac{3}{2}a + 4a^2\right) - 6a^3x^2 - 6a^3x + 9a^4\right] : (2x - 3a)$

[variabile: x] [Q = -\frac{1}{2}x^3 + 2a^2x^2 - 3a^3]

- 1037** $\left(a^3 + \frac{5}{2}a^2b - 4ab^2 - 3b^3 \right) : (2a - 3b)$ [variabile: a]
$$\left[Q = \frac{1}{2}a^2 + 2ab + b^2 \right]$$
- 1038** $(x^4 - 4x^3y + 5x^2y^2 - 3xy^3 + 2y^4) : (-2y^2 + x^2)$ [variabile: x]
$$\left[Q = x^2 - 4xy + 7y^2; R = -11xy^3 + 16y^4 \right]$$
- 1039** $\left(3a^4 + \frac{2}{3}ab^3 - 2a^2b^2 + b^4 \right) : (a^2 + 2ab + b^2)$ [variabile: a]
$$\left[Q = 3a^2 - 6ab + 7b^2; R = -\frac{22}{3}ab^3 - 6b^4 \right]$$
- 1040** $(2x^{n+3} - 5x^{n+2}) : (2x^n + 5)$
$$\left[Q = x^3 - \frac{5}{2}x^2; R = -5x^3 + \frac{25}{2}x^2 \right]$$
- 1041** $(2b^{2n} - 7b^n - 15) : (b^n - 5)$
$$[Q = 2b^n + 3]$$
- 1042** $(-3x^{2n} + 2x^{3n} - x^n + 2) : (x^n - 1)$
$$[Q = 2x^{2n} - x^n - 2]$$
- 1043** $(5x^{4n} + 13x^{3n} - 6x^{2n} + 12) : (x^{2n} + 3x^n)$
$$[Q = 5x^{2n} - 2x^n; R = 12]$$
- 1044** $(6y^{2n+1} - 6y^{2n} + 7y^n - y^{n-1}) : (6y^n - 1)$, con $n > 1$.
$$\left[Q = 1 + \frac{1}{6}y - y^n + y^{n+1}; R = -y^{n-1} + 1 + \frac{1}{6}y \right]$$
- 1045** $(a^{5n} + a^{2n} - a^{4n} - a^n) : (a^n - 1)$
$$[Q = a^{4n} + a^n; R = 0]$$
- 1046** $(a^{n+2} + a - 2a^{n+1}b - 2b) : (a - 2b)$ [variabile: a]
$$[Q = a^{n+1} + 1; R = 0]$$
- 1047** $(a^{3n} - b^{3n}) : (a^{2n} - a^n b^n + b^{2n})$ [variabile: a]
$$[Q = a^n + b^n; R = -2b^{3n}]$$
- 1048** $(x^{2n+1} + y^{2n+1}) : (x^n + y^n)$, con $n > 1$. [variabile: x]
$$[Q = x^{n+1} - xy^n; R = xy^{2n} + y^{2n+1}]$$

9. La regola di Ruffini

→ Teoria a pag. 313

RIFLETTI SULLA TEORIA

- 1049** È possibile eseguire la divisione $(x^3 - 8) : (x - 2)$ mediante la regola di Ruffini, mentre non è possibile utilizzare questa regola nella divisione $(x^3 - 8) : (x^2 + 4x - 2)$. Perché?
- 1050** Per quale valore di $m \in \mathbb{N}$ la divisione $(2x^m + 3x^{m-1} + 6) : (x + 3)$ dà come quoziente un polinomio di secondo grado?
- 1051** È data la divisione $(4x^3 - 5x^2 + 2x - 1) : (x^n + 1)$, con $n \in \mathbb{N}$. Per quali valori di n è possibile la divisione? Per un solo valore di n è possibile eseguire la divisione, applicando la regola di Ruffini. Quale?
- 1052** Dividendo un polinomio $P(x)$ di grado n per il binomio $x - a$, si ottiene il polinomio $Q(x)$ come quoziente. Qual è il grado di $Q(x)$?
- 1053** Per quale valore di $m \in \mathbb{N}$ la divisione $(x^m + 1) : (x - 1)$ ha quoziente 1 e resto 2?

ESERCIZI

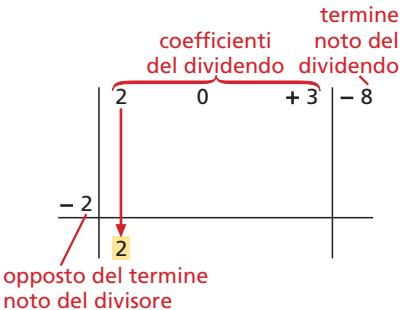
Nel sito: ▶ 10 esercizi di recupero



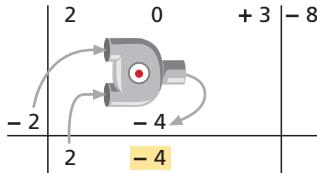
■ La divisione fra polinomi a coefficienti numerici

■ ESERCIZIO GUIDA

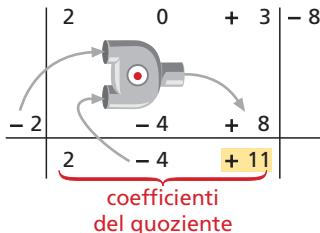
- 1054** Eseguiamo la divisione $(2x^3 + 3x - 8) : (x + 2)$, applicando la regola di Ruffini.



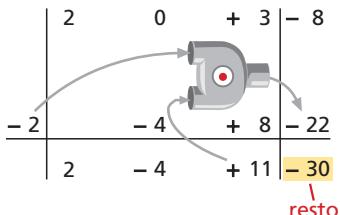
a. Costruiamo lo schema e abbassiamo il 2.



b. Moltiplichiamo 2 per -2 , scriviamo il risultato nella colonna a fianco di 2 e sommiamo.



c. Moltiplichiamo -4 per -2 e completiamo la terza colonna: abbiamo trovato i coefficienti del quoziente.



d. Moltiplichiamo $+11$ per -2 , scriviamo il risultato sotto -8 e sommiamo: abbiamo trovato il resto.

I coefficienti del quoziente sono $2, -4$ e 11 . Poiché il dividendo è di terzo grado, il polinomio quoziente è di secondo grado. $Q(x) = 2x^2 - 4x + 11$; $R = -30$.

Esegui le seguenti divisioni, applicando la regola di Ruffini. Indica il resto R se diverso da 0.

- 1055** $(a^2 - a - 12) : (a - 4)$ [Q = a + 3]
- 1056** $(2x^3 - 9x + 1) : (x - 3)$ [Q = 2x² + 6x + 9; R = 28]
- 1057** $(3x^3 + x^2 - 8x + 4) : (x + 2)$ [Q = 3x² - 5x + 2]
- 1058** $(b^3 + b^2 - b + 15) : (b + 3)$ [Q = b² - 2b + 5]
- 1059** $(-3x^2 + 2x^3 - x + 2) : (x - 1)$ [Q = 2x² - x - 2]
- 1060** $(x^5 + x^2 - x^4 - x) : (x - 1)$ [Q = x⁴ + x]
- 1061** $\left(2b^3 - \frac{11}{3}b^2 - \frac{1}{3} + 2b\right) : \left(b - \frac{1}{3}\right)$ [Q = 2b² - 3b + 1]
- 1062** $\left(\frac{1}{2}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - 2x^2 + 3\right) : (x - 2)$

BRAVI SI DIVENTA ▶ E14



- 1063** $(a^5 - 10a - 12) : (a - 2)$ $[Q = a^4 + 2a^3 + 4a^2 + 8a + 6]$
- 1064** $(2a^3 - 3a^2 - 1) : (a + 3)$ $[Q = 2a^2 - 9a + 27; R = -82]$
- 1065** $\left(-\frac{3}{2}b^3 + 9b^2 - 17b + 20\right) : (b - 4)$ $\left[Q = -\frac{3}{2}b^2 + 3b - 5\right]$
- 1066** $\left(a^4 - \frac{1}{25}a^2 + a + \frac{2}{5}\right) : \left(a + \frac{1}{5}\right)$ $\left[Q = a^3 - \frac{1}{5}a^2 + 1; R = \frac{1}{5}\right]$
- 1067** $\left(2x^5 - 4x^3 - \frac{5}{8}x + \frac{3}{4}\right) : \left(x + \frac{3}{2}\right)$ $\left[Q = 2x^4 - 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right]$
- 1068** $\left(2y^5 + 2y^3 - y^2 + \frac{7}{8}y - 4y^4 - \frac{1}{4}\right) : \left(y - \frac{1}{2}\right)$ $\left[Q = 2y^4 - 3y^3 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{4}y + \frac{1}{2}\right]$

■ La divisione fra polinomi a coefficienti letterali

■ ESERCIZIO GUIDA

1069 Eseguiamo la divisione

$$(2a^2x - 3ax^2 - 2a^3 + x^3) : (x - 2a)$$

applicando la regola di Ruffini.

Poiché il divisore è del tipo $x - a$, se ordiniamo il polinomio dividendo rispetto alla variabile x , possiamo applicare la regola di Ruffini:

$$(x^3 - 3ax^2 + 2a^2x - 2a^3) : (x - 2a).$$

	+ 1	- 3a	+ 2a ²	- 2a ³
2a		2a	- 2a ²	0
	+ 1	- a	0	- 2a ³

Otteniamo quindi:

$$Q = x^2 - ax; \quad R = -2a^3.$$

Esegui le seguenti divisioni, applicando la regola di Ruffini e considerando come variabile la prima lettera che compare al dividendo. Indica il resto R se diverso da 0.

- 1070** $(a^3 + 2a^2b - 4ab^2 - 8b^3) : (a + 2b)$ $[Q = a^2 - 4b^2]$
- 1071** $(y^4 + x^3y - 9x^2y^2 + 3x^4) : (y + 3x)$ $[Q = y^3 - 3xy^2 + x^3]$
- 1072** $(2x^4 + 5x^3y + 2x^2y^2 + x + 2y) : (x + 2y)$ $[Q = 2x^3 + x^2y + 1]$
- 1073** $\left(-b^3 + 4x^2b - \frac{21}{8}x^3\right) : \left(b - \frac{3}{2}x\right)$ $\left[Q = -b^2 - \frac{3}{2}xb + \frac{7}{4}x^2\right]$
- 1074** $(y^3 - 8x^3 - y^2 + 2xy) : (y - 2x)$ $[Q = y^2 + 2xy - y + 4x^2]$

1075 $\left(4y^3 + 7y^2b + 3yb^2 + \frac{1}{2}yb + \frac{15}{2}b^2 - b\right) : (y + b)$ $[Q = 4y^2 + 3by + \frac{1}{2}b; R = 7b^2 - b]$

1076 $(2x^4 - 5a^2x^2 + 4ax^3 - 3a^3x + 2a^5) : (x - a)$ $[Q = 2x^3 + 6ax^2 + a^2x - 2a^3; R = 2a^5 - 2a^4]$

1077 $(a^6 - 3a^2b^4 - 4a^4b^2 + 12b^6) : (a + 2b)$ $[Q = a^5 - 2a^4b - 3ab^4 + 6b^5]$

1078 $(x^3 - xy^2 + x^2y - y^3 + 2x^2 - 2y^2) : (x + y)$ $[Q = x^2 + 2x - y^2 - 2y]$

1079 $[y^4a - (a^2 + 1)y^3 + (a^2 + 1)y - a] : (y - a)$ $[Q = ay^3 - y^2 - ay + 1]$

1080 $[-y^5(b - 1) - b^2y^3 + (b^4 + 4)y^2 - 4by] : (y - b)$ $[Q = (1 - b)y^4 - (b^2 - b)y^3 - b^3y^2 + 4y]$

1081 $(2b^{3n} + 3a^2b^n - 5ab^{2n}) : (a - b^n)$, con $n \in \mathbb{N}$. $[Q = 3ab^n - 2b^{2n}]$

1082 $(yx^n + y^2 + x^n + y) : (y + x^n)$, con $n \in \mathbb{N}$. $[Q = y + 1]$

1083 Un rettangolo ha l'altezza pari a $x - 2$. Qual è la misura della base, se l'area del rettangolo è uguale a $2x^2 + (3a - 4)x - 6a^2$? $[2x + 3a]$

■ Il divisore $cx - b$

ESERCIZIO GUIDA

1084 Calcoliamo il quoziente e il resto della divisione $(3x^2 + 2x - 5) : (2x - 1)$ mediante la regola di Ruffini.

Per applicare la regola di Ruffini occorre che il divisore sia della forma $x - a$, con $a \in \mathbb{R}$.

Sappiamo poi che, se in una divisione dividiamo sia il dividendo sia il divisore per uno stesso numero, anche il resto viene diviso per lo stesso numero, mentre il quoziente non cambia. In generale, vale cioè:

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline R & Q \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} A : n & B : n \\ \hline R : n & Q \end{array}$$

Nel nostro esempio, poiché il divisore è $2x - 1$, dividiamo dividendo e divisore per 2 per applicare la regola di Ruffini:

$$\left(\frac{3}{2}x^2 + x - \frac{5}{2}\right) : \left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Applichiamo la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|cc|c} & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ + \frac{1}{2} & \hline & \frac{3}{4} & \frac{7}{8} \\ \hline & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} & -\frac{13}{8} \\ & \underbrace{}_{\text{coefficienti}} & & \cancel{R : 2} \\ & & & \end{array}$$

$$Q(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$

Il resto si ottiene moltiplicando per 2 il resto $-\frac{13}{8}$ trovato:

$$R = -\frac{13}{4}.$$

Esegui le seguenti divisioni applicando la regola di Ruffini.

- 1085** $(12x^3 - 54x^2 + 21x - 3) : (3x - 12)$ $[Q = 4x^2 - 2x - 1; R = -15]$
- 1086** $(12y^3 + 36y^2 - 38y + 42) : (2y + 8)$ $[Q = 6y^2 - 6y + 5; R = 2]$
- 1087** $(6a^4 - 24a^3 + 24a^2 + 12a - 19) : (6a - 12)$ $[Q = a^3 - 2a^2 + 2; R = 5]$
- 1088** $(6b^5 + 30b^4 - 14b^2 - 4b^3 - 49 + 20b) : (2b + 10)$ $[Q = 3b^4 - 2b^2 + 3b - 5; R = 1]$
- 1089** $(5x^4 - 50x + 85x^2 - 40x^3 + 3) : (5x - 25)$ $[Q = x^3 - 3x^2 + 2x; R = 3]$
- 1090** $\left(5a^3 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{13}{12}a + \frac{1}{3}\right) : \left(2a + \frac{1}{2}\right)$ $\left[Q = \frac{5}{2}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}; R = 0\right]$
- 1091** $\left(\frac{4}{5}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{19}{4}x + \frac{5}{2}\right) : (2x - 5)$ $\left[Q = \frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}; R = 0\right]$
- 1092** $(-3x^2 - 4xy + 4y^2) : (3x - 2y)$ $[Q = -x - 2y; R = 0]$
- 1093** $\left(-3a^3 + 4ab^2 - \frac{1}{2}b^3\right) : (2a - b)$ $\left[Q = -\frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{4}ab + \frac{13}{8}b^2; R = \frac{9}{8}b^3\right]$
- 1094** $(2a^3 - ba^2 - b^3 + b^2a) : (-a - b)$ $[Q = -2a^2 + 3ab - 4b^2; R = -5b^3]$
- 1095** $(3b^4a^{n+1} + 9ba^{n-1} - b^3a^{2n+1} - 3a^{2n-1}) : (3b - a^n)$, con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. $[Q = b^3a^{n+1} + 3a^{n-1}; R = 0]$

RIEPILOGO

LA REGOLA DI RUFFINI

1096 TEST Nella divisione $(4x^2 - 15x - 2) : (4x + 1)$ il quoziente è $x - 4$ e il resto è 2. Nella divisione

$$\left(x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{1}{2}\right) : \left(x + \frac{1}{4}\right)$$

il quoziente e il resto sono, rispettivamente:

- A** $\frac{1}{4}x - 1$ e $\frac{1}{2}$. **D** $x - 4$ e $\frac{1}{2}$.
- B** $\frac{1}{4}x - 1$ e 2. **E** $x + \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$.
- C** $x - 4$ e 2.

1097 TEST Fra le seguenti divisioni, quale si può eseguire mediante la regola di Ruffini?

- A** $(3a^3 - 2a^2 + 1) : (a^2 - 1)$
B $(2b^2 + 2) : (b^2 + 1)$
C $(4x^2 - 2x + 3) : (2x - 1)$
D $(a^4 - 1) : (a^3 - a^2)$
E $(x^3 - 2x^2) : (2x^2 - 1)$

Esegui, se possibile, le seguenti divisioni con la regola di Ruffini (nelle divisioni in cui compaiono polinomi in più variabili, esegui la divisione rispetto alla variabile indicata a fianco). Indica il resto R se diverso da 0.

- 1098** $(b^4 - 2b^2 + 3) : (b - 2)$ $[Q = b^3 + 2b^2 + 2b + 4; R = 11]$
- 1099** $(5x^3 - 3x^2 + 4x - 2) : (x - 1)$ $[Q = 5x^2 + 2x + 6; R = 4]$
- 1100** $(x^3 - 3x + 2) : (x + 2)$ $[Q = x^2 - 2x + 1]$
- 1101** $(2x^3 - 13x^2 + 4 + 19x) : (x - 4)$ $[Q = 2x^2 - 5x - 1]$

- 1102** $\left(7a^3 + \frac{27}{2}a^2 + \frac{3}{2} + \frac{11}{2}a\right) : \left(a + \frac{3}{2}\right)$ [Q = $7a^2 + 3a + 1$]
- 1103** $(12a^2 + 5a - 2) : (4a - 1)$ [Q = $3a + 2$]
- 1104** $\left(\frac{1}{4}x^5 - 4x^3 + 8x + 2\right) : (x - 2)$ $\left[Q = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - 6x - 4; R = -6\right]$
- 1105** $\left(4a^4 + 2a^2 + 4a^3 + a + \frac{1}{4}\right) : \left(a + \frac{1}{2}\right)$ $\left[Q = 4a^3 + 2a^2 + a + \frac{1}{2}\right]$
- 1106** $(9x^5 - 21x^3 - 27x + 24) : (3x + 6)$ [Q = $3x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 10x + 11; R = -42$]
- 1107** $(4y^4 - 6y^3 - 18y^2 - 10) : (2y - 6)$ [Q = $2y^3 + 3y^2; R = -10$]
- 1108** $\left(\frac{1}{2}a^5 - \frac{1}{2}a^4 - a^2 - \frac{2}{9}a^3 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{18}\right) : \left(a + \frac{1}{3}\right)$ $\left[Q = \frac{1}{2}a^4 - \frac{2}{3}a^3 - a - \frac{1}{6}\right]$
- 1109** $[2x^2 - 2x(a - 2) - 4a] : (x - a)$ [variabile: x] [Q = $2x + 4$]
- 1110** $\left(a^3 - \frac{27}{8}b^6\right) : \left(a - \frac{3}{2}b^2\right)$ [variabile: a] $\left[Q = a^2 + \frac{3}{2}ab^2 + \frac{9}{4}b^4\right]$
- 1111** $(x^6 + x^2y^2 - x^4y - y^3) : (y - x^2)$ [variabile: y] [Q = $-y^2 - x^4$]
- 1112** $[y^4 + (a - 4)y^2 - 4a^2] : (y - 2)$ [variabile: y] [Q = $y^3 + 2y^2 + ay + 2a; R = 4a - 4a^2$]
- 1113** $[(x - 2)y^2 + (4x - x^2)y - x^3] : (y - 2x)$ [variabile: y] [Q = $(x - 2)y + x^2; R = x^3$]
- 1114** $\left(a^3 + \frac{1}{2}a^2 - 3a^2x + ax^2 - \frac{3}{2}ax + \frac{1}{2}x^2\right) : \left(a + \frac{1}{2}\right)$ [variabile: a] [Q = $a^2 - 3ax + x^2$]

10. Il teorema del resto

→ Teoria a pag. 315

RIFLETTI SULLA TEORIA

TEST

- 1115** Per calcolare il resto della divisione

$$(x^3 - 2x + 5) : (x + 2),$$

occorre sostituire a x, nel dividendo, il valore:

- A** 2. **B** -2. **C** $-\frac{1}{2}$. **D** 5. **E** $\frac{1}{2}$.

- 1116** Il resto della divisione $P(x) : (x + 2)$ è 3. Quale, fra i seguenti polinomi, può essere $P(x)$?

- | | |
|------------------------|------------------------|
| A $x^2 + x - 2$ | D $x^2 + 3$ |
| B $x^2 + 1$ | E $x^2 + x + 3$ |
| C $x^2 + x + 1$ | |

1117

Il resto della divisione fra il polinomio $x^2 - 2x + 4$ e il binomio $B(x)$ è uguale a 3. Quale, tra i seguenti binomi, potrebbe essere $B(x)$?

- | | |
|------------------|------------------|
| A $x - 1$ | D $x - 4$ |
| B $x + 3$ | E $x - 3$ |
| C $x + 1$ | |

1118

Per quale valore di k la divisione

$$[(k - 1)x^3 + kx^2 + 10x + 8] : (x + 3)$$

ha resto -1?

- | | | | | |
|------------|------------------------|-------------|-------------------------|-------------|
| A 3 | B $\frac{1}{3}$ | C -3 | D $-\frac{1}{3}$ | E -1 |
|------------|------------------------|-------------|-------------------------|-------------|

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

1119 Calcoliamo il resto della divisione $(x^3 - 1) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Scriviamo il divisore nella forma $x - a$:

$$x - \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_a.$$

Dunque $a = -\frac{1}{2}$.

Possiamo applicare il teorema del resto: nel dividendo $x^3 - 1$ sostituiamo la variabile con il valore di a , cioè $-\frac{1}{2}$, e otteniamo il resto della divisione:

$$R = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 1 = -\frac{1}{8} - 1 = -\frac{9}{8}.$$

Calcola il resto delle seguenti divisioni.

1120 $(2x^3 - 9x + 1) : (x - 3)$

1121 $(a^2 - a + 3 - 2a^3) : (a - 1)$

1122 $(5b^6 + 15b^5 + 20 + 5b) : (b + 3)$

1123 $\left(2x^3 - \frac{11}{3}x^2 + 2x - \frac{1}{3}\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$

1124 $(2x^3 - 5x + 4) : (x + 1)$

1125 $(2x^4 + x^3 - 6x + 1) : (x - 1)$

1126 $(-x^3 + 2x^2 - 2) : (x + 2)$

1127 $(2y^5 + y^2 - y - 26) : (y - 2)$

1128 $\left(a^4 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2} + \frac{7}{4}a - 2a^2\right) : (a + 2)$

1129 $(x^3 + 4x^2y - x + 3xy^2 - 3y) : (x + 3y)$

1130 $(15a - 5b - 9a^2 - b^2 + 6ab) : (b - 3a)$

1131 $(2x^4 - 5a^2x^2 + 4ax^3 - 3a^3x + 2a^5) : (x - a)$

1132 Trova per quale valore di b la divisione $(4x^4 - 5x^2 + x + b - 1) : (x - 1)$ ha resto 0. [1]

1133 Determina a in modo che il polinomio $x^3 + ax - 2$ diviso per $(x + 1)$ dia resto -3 . [0]

1134 Stabilisci per quale valore di k il polinomio $x^3 + 2x^2 + x + k - 1$ diviso per $(x + 2)$ dà come resto -4 . [-1]

1135 TEST Per quale valore di m il polinomio

$$P(x) = (m - 1)x^2 + 2x - 3m$$

è divisibile per il binomio $x + 3$?

A 2

B -2

C $-\frac{5}{2}$

D $\frac{5}{2}$

E $\frac{2}{5}$

1136 TEST Per quale valore di m il polinomio

$$(m + 2)x^3 - (m - 1)x^2 + mx - 2$$

è divisibile per $x - 2$?

A 0

B 2

C -2

D 3

E -3

11. Il teorema di Ruffini

→ Teoria a pag. 316

RIFLETTI SULLA TEORIA

TEST

1137 Il polinomio $2x^3 - 5x^2 + x + 2$ è divisibile per uno solo dei seguenti binomi. Quale?

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> A $x + 2$ | <input type="checkbox"/> D $2x + 1$ |
| <input type="checkbox"/> B $x - 3$ | <input type="checkbox"/> E $2x - 5$ |
| <input type="checkbox"/> C $2x - 1$ | |

1138 Il polinomio $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ è divisibile per ognuno dei seguenti binomi, tranne uno. Quale?

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> A $x - 1$ | <input type="checkbox"/> D $x - 2$ |
| <input type="checkbox"/> B $x + 1$ | <input type="checkbox"/> E $x - 3$ |
| <input type="checkbox"/> C $x + 2$ | |

1139 Il binomio $x^n + 1$, con $n \in \mathbb{N}$, è divisibile per $x + 1$:

- | |
|---|
| <input type="checkbox"/> A per ogni valore di n . |
| <input type="checkbox"/> B solo se n è dispari. |
| <input type="checkbox"/> C solo se n è pari. |
| <input type="checkbox"/> D solo se $n = 3$. |
| <input type="checkbox"/> E solo se $n = 2$. |

ESERCIZI

Determina, senza eseguire la divisione, se i seguenti polinomi sono divisibili per i binomi scritti a fianco.

1140 $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$	$x + 1;$	$x - 1;$	$x + 2;$	$x - 3.$
1141 $a^5 + y^5$	$a - 2y;$	$a + 2y;$	$a - y;$	$a + y.$
1142 $x^2 - 4y^2 - x^3 - 8y^3$	$x + 2y;$	$x - 2y;$	$x - y;$	$x + y.$
1143 $2a^2 + 7a - 4$	$a + 2;$	$2a + 1;$	$a - 1;$	$2a - 1.$
1144 $2a^4 - 3a^2 + 2a - 1$	$2a + 1;$	$a - \frac{1}{2};$	$3a + 2;$	$a - 1.$
1145 $\frac{1}{27}x^3 - 1 - \frac{1}{3}x^2 + 4x$	$x + 3;$	$x - 1;$	$\frac{1}{3}x - 1;$	$x + 1.$
1146 $a^2 - 2ab + a^2b - 4b^3$	$a + b;$	$a - 2b;$	$a - b;$	$2a + b.$
1147 $a^6 + a^4 - 2a^5 - 1 - a^2 - 2a$	$a + \frac{1}{2};$	$a + 1;$	$a - 2;$	$2a - 1.$
1148 $2x^3 + \frac{19}{2}xy^2 + 5y^3$	$2x - y;$	$x + y;$	$x - 2y;$	$x + \frac{9}{2}.$

ESERCIZIO GUIDA

1149 Dato il polinomio $A(x) = 5x^3 + 2ax^2 - 3x - a + 1$, determiniamo per quale valore della lettera a esso è divisibile per il binomio $x - 1$.

Per il teorema di Ruffini deve risultare $A(1) = 0$; per il teorema del resto sappiamo che $R = A(1)$. Pertanto calcoliamo:

$$R = A(1) = 5 + 2a - 3 - a + 1 = a + 3.$$

Poniamo:

$$R = 0, \text{ ossia } a + 3 = 0; \text{ dunque } a = -3.$$

Per $a = -3$ il resto si annulla e il polinomio

$$5x^3 - 6x^2 - 3x + 4 \text{ è divisibile per } x - 1.$$

Determina per quale valore della lettera a i seguenti polinomi sono divisibili per i binomi scritti a fianco.

1150 $y^2 + 4y - 2a$ $(y - 2)$ $[a = 6]$

1151 $x^3 - ax^2 - ax + 1$ $(x + 1)$ $[\forall a \in \mathbb{R}]$

1152 $x^3 + 3ax^2 - \frac{3}{2}ax + a$ $(x + 2)$ $\left[a = \frac{1}{2} \right]$

1153 $x^3 + 4ax^2 - 4a + 3$ $(x - 1)$ $[\exists a \in \mathbb{R}]$

1154 $3ax^2 - 2x - 2a$ $(3x - 2)$ $[a = -2]$

1155 $5ay^2 + y - 3a$ $(4y - 3)$ $[a = 4]$

1156 $y^4 - 5y^2 + ay - 26a$ $(y - 4)$ $[a = 8]$

1157 $ax^3 + 2ax^2 + x - \frac{10}{9}$ $\left(x + \frac{2}{3} \right)$ $[a = 3]$

1158 Determina il polinomio che, moltiplicato per il binomio $(a - 1)$, dà come risultato il quadrinomio $a^3 - 6a^2 + 11a - 6$.

Tale polinomio è divisibile per $(a - 3)$?

Scrivi il quadrinomio sotto forma di prodotto tra i divisori e il quoziente.

$[a^2 - 5a + 6; \text{sì}; (a - 1)(a - 2)(a - 3)]$

1159 Verifica che il trinomio $a^2 + 7a + 10$ è divisibile per $(a + 2)$, qualunque sia il valore attribuito ad a .

Verifica se i seguenti binomi sono divisibili per i binomi di primo grado scritti a fianco.

1160 a) $x^3 - 125$, $x - 5$;

b) $x^3 - 1$, $x + 1$;

c) $x^3 + 8$, $x + 2$.

1161 a) $x^3 + 64$, $x + 8$;

b) $27x^3 - 1$, $3x - 1$;

c) $8x^3 + 27$, $2x + 3$.

1162 a) $\frac{1}{27}a^3 + 1$, $\frac{1}{3}a + 1$;

b) $b^3 - 8$, $b + 2$;

c) $125a^3 - 64$, $5a - 4$.

1163 a) $y^3 - \frac{27}{64}$, $y + \frac{3}{4}$;

b) $\frac{8}{125}x^3 - 1$, $\frac{4}{5}x - 1$;

c) $\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{27}$, $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}$.

Trova i binomi di primo grado divisori dei seguenti binomi somma o differenza di cubi.

1164 $a^3 + 1$; $x^3 - 8$; $a^3 - 64$.

1165 $8x^3 + 1$; $a^3 + 125$; $x^3 - 27$.

COMPLETA

1166 $x^3 - \frac{1}{8} = (x - \dots) \cdot (\dots \dots \dots \dots)$

1167 $a^3 + 27 = (\dots \dots 3) \cdot (\dots \dots \dots \dots)$

1168 $27x^3 - 8 = (\dots \dots \dots) \cdot (\dots \dots \dots \dots)$

1169 $64b^3 - 1 = (\dots \dots \dots) \cdot (\dots \dots \dots \dots)$

1170 $\frac{1}{27}y^3 - 8 = (\dots \dots \dots) \cdot (\dots \dots \dots \dots)$

1171 $125x^3 + 8 = (\dots \dots \dots) \cdot (\dots \dots \dots \dots)$

1172 $\frac{1}{8}a^3 - b^3 = (\dots \dots \dots) \cdot (\dots \dots \dots \dots)$

1173 $a^3x^3 - 1 = (\dots \dots \dots) \cdot (\dots \dots \dots \dots)$

1174 $8 - b^6 = (\dots \dots \dots) \cdot (\dots \dots \dots \dots)$

1175 $27x^9 + \frac{1}{8}y^3 = (\dots \dots \dots) \cdot (\dots \dots \dots \dots)$

LABORATORIO DI MATEMATICA

I monomi con Wiris

ESERCITAZIONE GUIDATA

Dati i tre monomi $\frac{21}{20}a^2bc^3$, $-\frac{7}{12}ac^2$, $\frac{14}{5}abc$, sommiamo il terzo al quoziente del primo per il secondo.

Sostituendo poi, nei monomi iniziali $-\frac{1}{2}$ alla lettera a , $\frac{4}{5}$ alla b , $-\frac{10}{3}$ alla c , svolgiamo le medesime

operazioni sulle frazioni ottenute, operiamo le stesse sostituzioni nel risultato, lo semplifichiamo e confrontiamo i valori finali.

- Immettiamo i tre monomi (figura 1).
- Impostiamo con l'aiuto dei tasti *Ctrl + C* (*copia*) e *Ctrl + V* (*incolla*) le operazioni indicate.
- Con *Calcola* svolgiamo le operazioni e troviamo il risultato.
- Impostiamo e poi con *Calcola* svolgiamo (figura 2):
 - le sostituzioni richieste nei monomi iniziali,
 - le operazioni indicate sulle frazioni ottenute,
 - le medesime sostituzioni nel risultato semplificato.
- Osserviamo la coincidenza dei due risultati.

Operazioni con i monomi

$$\begin{aligned} & \frac{21}{20}a^2 \cdot b \cdot c^3; \\ & -\frac{7}{12}a \cdot c^2; \\ & \frac{14}{5}a \cdot b \cdot c; \\ & \frac{21}{20}a^2 \cdot b \cdot c^3 + \frac{14}{5}a \cdot b \cdot c \rightarrow a \cdot b \cdot c \\ & -\frac{7}{12}a \cdot c^2 \end{aligned}$$

▲ Figura 1

$$\begin{aligned} & \text{sostituire}(\text{sostituire}(\text{sostituire}(\frac{21}{20}a^2 \cdot b \cdot c^3, a, -\frac{1}{2}), b, \frac{4}{5}), c, -\frac{10}{3}) \rightarrow -\frac{70}{9} \\ & \text{sostituire}(\text{sostituire}(\text{sostituire}(-\frac{7}{12}a \cdot c^2, a, -\frac{1}{2}), b, \frac{4}{5}), c, -\frac{10}{3}) \rightarrow \frac{175}{54} \\ & \text{sostituire}(\text{sostituire}(\text{sostituire}(\frac{14}{5}a \cdot b \cdot c, a, -\frac{1}{2}), b, \frac{4}{5}), c, -\frac{10}{3}) \rightarrow \frac{56}{15} \\ & -\frac{70}{9} + \frac{56}{15} \rightarrow \frac{4}{3} \\ & \text{sostituire}(\text{sostituire}(\text{sostituire}(a \cdot b \cdot c, a, -\frac{1}{2}), b, \frac{4}{5}), c, -\frac{10}{3}) \rightarrow \frac{4}{3} \end{aligned}$$

▲ Figura 2

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata sui monomi con Derive ▶ 7 esercitazioni in più
 ▶ 1 esercitazione guidata sui polinomi con Excel ▶ 10 esercitazioni in più



Esercitazioni

Con il computer, trova il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo fra i seguenti gruppi di monomi, poi dividi ogni monomio per il massimo comune divisore trovato e dividi il minimo comune multiplo trovato per ogni monomio.

1 $10a^2b^3c$; $15a^2b$; $6a^2b$.

2 $\frac{3}{5}x^2yz$; $\frac{1}{15}x^3y^2$; $\frac{2}{3}xz$.

Semplifica le seguenti espressioni. Con il computer sostituisci poi $\frac{2}{3}$ alla x e $-\frac{4}{3}$ alla y sia nell'espressione iniziale sia nel risultato e semplifica.

3 $-\frac{1}{2}xy^2 \cdot \frac{4}{5}xy^3$

4 $\left[\left(\frac{3}{2}xy^3 \right)^2 \right]^3$

Matematica per il cittadino

TAXI A NEW YORK



Su un taxi di New York appare la seguente targa con i prezzi per una corsa in città.



Vi sono riportate le seguenti informazioni:

- qualunque percorso costa \$ 2,50 iniziali;
- vengono addebitati \$ 0,40:
 - ogni quinto di miglio di percorso (o frazione inferiore a un quinto di miglio);
 - ogni due minuti di fermata (o frazione inferiore a due minuti);
 - ogni due minuti in condizioni di rallentamenti forzati per traffico (o frazione inferiore a due minuti);
- nei giorni festivi viene applicato un sovrapprezzo di \$ 1,00 dalle 16:00 alle 20:00;
- durante la notte, dalle 20:00 alle 6:00, viene applicato un sovrapprezzo di \$ 0,50.

1. Martedì mattina devi fare un percorso di 4,9 miglia, fermandoti 5 minuti per un veloce acquisto in un negozio. Quanto ti costa la corsa in taxi?

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> A \$ 11,30 | <input type="checkbox"/> C \$ 13,30 |
| <input type="checkbox"/> B \$ 13,70 | <input type="checkbox"/> D \$ 10,00 |

2. Vuoi fare lo stesso percorso della domanda precedente verso mezzanotte e non hai necessità di effettuare alcuna sosta. Quanti dollari spenderai in più o in meno?

3. Una famiglia costituita da due adulti e un bambino deve fare un percorso di 8,3 miglia per andare a trovare i parenti in un'altra zona della città. Quanto spendono per fare il viaggio di domenica alle 18:00? Quanto spendono per il ritorno, sempre di domenica, alle 22:00?

4. Indicati con

- F il costo fisso iniziale di una corsa in \$,
- M il numero di miglia percorse (arrotondato al quinto di miglio successivo),
- S il numero di minuti di sosta (arrotondato al minuto pari successivo),
- R il numero di minuti dovuti a rallentamenti (arrotondato al minuto pari successivo),

quale delle seguenti formule esprime il costo totale T in \$ di un viaggio diurno in un giorno feriale?

- | |
|--|
| <input type="checkbox"/> A $T = F + 0,40 \cdot \left(\frac{M + 10S + 10R}{5} \right)$ |
| <input type="checkbox"/> B $T = F + 0,20 \cdot (M + S + R)$ |
| <input type="checkbox"/> C $T = F + 0,20 \cdot (10M + S + R)$ |
| <input type="checkbox"/> D $T = 0,40 \cdot (F + M + S + R)$ |

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ► questi test interattivi ► 30 test interattivi in più



1

Sono dati i monomi:

$$5x^2y^3, -2x^2y^3, -3x^3y^2.$$

Possiamo dire che la loro somma:

- [A] è uguale a 0.
- [B] non è un monomio.
- [C] è uguale a $-30x^7y^8$.
- [D] è uguale a $0 \cdot x^2y^3$.
- [E] è uguale a $-25x^3y^2$.

2

Fra le seguenti coppie di monomi, soltanto una ha per prodotto a^3b^3c . Quale?

- | | |
|----------------------------|----------------------|
| [A] $\frac{1}{2}abc$, | $-2a^2b^2$. |
| [B] $-4a^2$, | $\frac{1}{4}ab^3c$. |
| [C] $-\frac{5}{7}a^3b^3$, | $-\frac{7}{5}c$. |
| [D] a^3b^3c , | a^3b^3 . |
| [E] $3b^3c$, | $-\frac{1}{3}a^3$. |

3

Fra i seguenti monomi, solo uno *non* è divisore di $-\frac{7}{8}a^3b^2c^3$. Quale?

- | | |
|------------------------|------------------|
| [A] $-5a^3b^3$ | [D] $2a^3b^2c^3$ |
| [B] $\frac{7}{8}a^2bc$ | [E] $-4abc$ |
| [C] $-\frac{7}{8}ac^3$ | |

4

Il m.c.m. dei monomi

$$2a, -6ab, 4a^2, 8b^2$$

è:

- [A] 2.
- [B] $8a^2b^2$.
- [C] $-2a$.
- [D] $2a$.
- [E] $24a^2b^2$.

5

È data la seguente espressione:

$$(3a^3b^2)^3 : (-2ab^2)^3.$$

Dopo che si sono eseguiti i calcoli, a quale risultato si perviene?

- | | |
|--------------------------|------------------------|
| [A] $\frac{27}{8}a^6b^6$ | [D] $-\frac{8}{27}a^6$ |
| [B] $-\frac{3}{2}a^9b^6$ | [E] $-\frac{3}{2}a^2$ |
| [C] $-\frac{27}{8}a^6$ | |

6

Una soltanto delle seguenti uguaglianze è *falsa*. Quale?

- | |
|---|
| [A] $\frac{5}{7}a^2 - \frac{7}{5}a^2 = -\frac{24}{35}a^2$ |
| [B] $-\frac{3}{2}a^3 : \left(-\frac{3}{2}a^3\right) = 0$ |
| [C] $\left(-\frac{2}{5}a^2\right)^3 = -\frac{8}{125}a^6$ |
| [D] $\frac{15}{7}a^2b \cdot \frac{21}{5}ab^2 = 9a^3b^3$ |
| [E] $(a^2)^5 : (a^2)^2 = a^6$ |

7

La differenza fra i polinomi $b^3 - 2a^2b - 3ab^2$ e $4ab^2 + 2a^2b + b^3$ è:

- | | |
|-----------------------------|------------------------|
| [A] $12b^3 - 7ab^2$. | [D] $-4a^2b - 7ab^2$. |
| [B] $2b^3 - 4ab^2 + a^2b$. | [E] a^3b^3 . |
| [C] $4a^2b - ab^2$. | |

8

Moltiplicando il polinomio $5a^2x - 3a^3x^2y - 2abx$ per il monomio M si ottiene come risultato il polinomio:

$$\frac{1}{6}a^3x^2 - \frac{1}{10}a^4x^3y - \frac{1}{15}a^2bx^2.$$

Qual è il monomio M ?

- | | |
|----------------------|------------------------|
| [A] $30ab$ | [D] $-\frac{1}{30}abx$ |
| [B] $\frac{1}{30}ab$ | [E] $\frac{1}{30}ax$ |
| [C] $-30ax$ | |

9

L'espressione $(2ab - 5ab)a^2 + (6a^3b^2) : (3b)$ si riduce a:

- A** $6a^3b^2$. **D** $-a^3b$.
B $-a^2b^3$. **E** $-5a^2b^2$.
C $2ab$.

10

Gli sviluppi dei quadrati $(a - b)^2$ e $(-a - b)^2$ danno come risultati due polinomi:

- A** opposti.
B che hanno opposto solo il doppio prodotto.
C che hanno opposto solo il quadrato di a .
D uguali.
E che hanno opposti i quadrati di a e di b .

11

Una delle seguenti espressioni *non* è equivalente a $(3x - y)^3$. Quale?

- A** $27x^3 - 9xy(3x - y) - y^3$
B $(3x - y)(9x^2 - 6xy + y^2)$
C $27x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - y^3$
D $3x(3x - y)^2 - y(3x - y)^2$
E $27x^3 + 9xy(3x - y) + y^3$

12

Il prodotto $(a + b)(a^2 + b^2)$ è uguale a:

- A** $a^3 + b^3$.
B $a + a^2b + b^3$.
C $(a + b)^3$.
D $a^2(a + b) + b^2(a + b)$.
E $a^3 + a^2b + b^2$.

13

Quale delle seguenti espressioni è equivalente a $(a - b)^4$?

- A** $a^4 - b^4$
B $(a^2 - b^2)^2$
C $a^4 - a^3b + a^2b^2 - a^3b + b^4$
D $(a - b)^2(a - b)^2$
E $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

14

Qual è il resto della divisione

$$\left(4x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) : (2x - 1)?$$

- A** $\frac{1}{2}$ **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $-\frac{3}{4}$ **D** $\frac{3}{2}$ **E** 0

15

Qual è il resto della divisione

$$(2x^2 - 3x + 2) : (x + 3)?$$

- A** 0 **B** -11 **C** 11 **D** -29 **E** 29

16

La divisione

$$(x^2 + x - a^2 - 1) : (x - a)$$

ha resto 0 se a è uguale a:

- A** 1. **D** 2.
B -1. **E** -2.
C 0.

17

Il polinomio $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x - 3$ è divisibile per il binomio:

- A** $x - 1$. **D** $x + 2$.
B $x + 1$. **E** $x + 3$.
C $x - 2$.

18

Il polinomio

$$P(x) = 2x^3 - \frac{13}{2}x + k$$

è divisibile per $(x + 2)$ se k è uguale a:

- A** +1. **D** -3.
B -2. **E** +3.
C 0.

19

Per quale dei seguenti binomi è divisibile il polinomio $2x^3 + x^2 - 5x + 2$?

- A** $2x + 1$ **D** $x + 1$
B $3x + 2$ **E** $x - 2$
C $x + 2$

SPIEGA PERCHÉ

20

Due monomi che hanno i coefficienti uguali e uguale grado sono necessariamente uguali?

21

Due monomi che si differenziano solo per il coefficiente hanno lo stesso grado?

22

Che differenza c'è fra monomio nullo e monomio di grado zero?

23

Perché il polinomio $2a^2b - 3a^2 + a^2b$ non è ridotto a forma normale?

24 Qual è il numero massimo di termini di un polinomio omogeneo ridotto di terzo grado in due lettere? E in tre lettere?

25 Spiega perché è sbagliato eseguire la divisione indicata nel seguente modo:

$$(9x^3) : (3x^2 + 9) = (9x^3) : (3x^2) + (9x^3) : 9 = 3x + x^3.$$

Calcola il risultato nel modo corretto.

26 Il binomio $27x^3 + 8$ è divisibile per $x + 2$? Perché?

ESERCIZI

I monomi

Semplifica le seguenti espressioni.

27 $\frac{1}{2}xy^2(-x^3y) + x^2y\left(-\frac{3}{2}x^2y^2\right) - x^4(-y^3) + 2x^2y^2(x^2y)$ $[x^4y^3]$

28 $\frac{1}{2}(-2ab^2)^2 - (ab^2)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 a^2b \cdot (-4b^3) - \frac{1}{5}a^5b^6 : \left(-\frac{1}{3}a^3b^2\right)$ $\left[\frac{11}{10}a^2b^4\right]$

29 $\left[\left(-\frac{4}{3}x^2y\right)^2 : \left(\frac{8}{3}x^2y\right)\right]^2 - \left[\left(-\frac{1}{2}x\right)^2 \cdot \left(-\frac{8}{3}y\right)\right]^2$ $[0]$

30 $a(ab)^2 - \frac{1}{3}(a^2b)^2 : a + \frac{2}{5}ab^2 \cdot (2a)^2$ $\left[\frac{34}{15}a^3b^2\right]$

31 $-\left[-\left(\frac{1}{2}xy^2\right)\right] - (-4x^2) - \frac{4}{3}y^4 - \left\{-\left[-\left(\frac{1}{3}xy^2\right) - \frac{1}{2}y^4 - \left(-\frac{1}{6}xy^2\right) + \left(-\frac{1}{6}y^4\right)\right]\right\}$ $[4x^2 - 2y^4 + xy^2]$

32 $-xy \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right) \cdot 2x^2y \cdot \frac{2}{3}xy^3; \quad 3x^3 \cdot \left(-\frac{1}{6}x^2y\right) \cdot \frac{2}{5}xy^2 \cdot 5xy^3.$ $\left[\frac{2}{3}x^5y^5; -x^7y^6\right]$

33 $-5x \cdot (-2xy)^3 + 4(xy^2)^2 - 4y(-2x^2y)^2 - 5x^2(-3y^2)^2 + 3x(-2xy)^3$ $[-41x^2y^4]$

34 $[-4a^3b^3 : (-b)^2] : (+2a^2b) - \left(-\frac{2}{3}a^2b\right) : \left(\frac{1}{3}ab\right)$ $[0]$

35 $x \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2y\right) \cdot (yx)^3 + \frac{1}{4} \cdot (2xy^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 : (2y^2)$ $\left[-\frac{3}{8}x^6y^4\right]$

36 $\left[-a^2 + \left(\frac{1}{5}a^3b^2\right) : \left(-\frac{2}{5}ab^2\right)\right] : (-6a) + [(-2ab)^4 : (+2ab^2)^2] : (+4a)$ $\left[\frac{5}{4}a\right]$

37 $[-(-a^3x)^2]^2 \cdot \left\{\left[\left(\frac{1}{5}a^6x^9\right)^5\right]^0\right\}^3 - x\left(\frac{1}{2}a^3x\right)^3 \cdot (-2a^3) + (-2a^3x)^4$ $\left[\frac{69}{4}a^{12}x^4\right]$

Calcola M.C.D. e m.c.m. fra i seguenti monomi.

38 $3x^2y; \quad 15a^3x^2; \quad 9ax^2y^2.$ $[\text{M.C.D.} = 3x^2; \text{m.c.m.} = 45a^3x^2y^2]$

39 $\frac{1}{4}ab^2x; \quad -\frac{2}{3}a^2bx^3; \quad \frac{1}{2}a^3b^3x^3.$ $[\text{M.C.D.} = abx; \text{m.c.m.} = a^3b^3x^3]$

40

$$2a^2x; \quad 4ax^3; \quad 12a^3x^2b^2.$$

[M.C.D. = $2ax$; m.c.m. = $12a^3x^3b^2$]**41**

$$4a^3bc^2; \quad 16ac^3; \quad 8b^2c.$$

[M.C.D. = $4c$; m.c.m. = $16a^3b^2c^3$]**42**

$$15x^5y^4z^6; \quad 5x^3y^2z^3; \quad 10x^2y^4z^4.$$

[M.C.D. = $5x^2y^2z^3$; m.c.m. = $30x^5y^4z^6$]**43**

$$6a^2b^3; \quad 2a^3xy^2; \quad 8abc.$$

[M.C.D. = $2a$; m.c.m. = $24a^3b^3cxy^2$]

Problemi

44

Sottrai alla terza parte di un numero a , aumentata di 4, la metà dello stesso numero, aumentata di 6.

- Che numero devi aggiungere per ottenere un monomio con parte letterale a ?
- Quale monomio aggiunto al precedente dà un monomio con coefficiente 1?

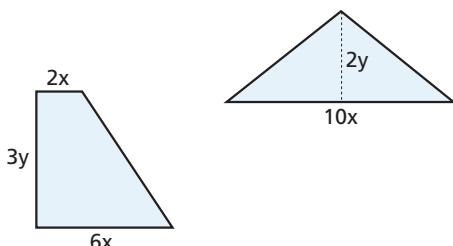
$$\left[\text{a) } 2; \text{ b) } \frac{7}{6}a \right]$$

45

Nelle figure a lato, le misure indicate sono multipli interi delle misure dei due segmenti indicati, rispettivamente, con x e y .



- Determina il monomio corrispondente all'area di ciascuna figura.
- Sono monomi simili?
- Calcola il M.C.D. di questi monomi.
- Disegna almeno due figure la cui area abbia per misura il M.C.D. calcolato e con dimensioni che abbiano per misure dei multipli di x e di y .



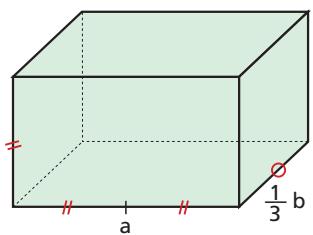
$$[\text{a) } 24xy, \text{ b) sì; c) } 2xy]$$

46

È dato il parallelepipedo rettangolo in figura.

- Scrivi il monomio che ne esprime il volume.
- Disegna altri due parallelepipedi rettangoli che abbiano lo stesso volume del precedente ma le tre dimensioni diverse.

$$\left[\text{a) } \frac{1}{6}a^2b \right]$$



I polinomi

Semplifica le seguenti espressioni.

47

$$\left(\frac{1}{3}a^2 + 2b \right)(3a^2 - b) - \left(\frac{1}{2}a^2 - b \right)(a^2 + 2b)$$

$$\left[\frac{1}{2}a^4 + \frac{17}{3}a^2b \right]$$

48

$$\left(\frac{1}{6}x^2 + xy - \frac{3}{2}y^2 \right) \left(x - \frac{1}{3}y \right) - xy \left(x - \frac{1}{3}y \right) - \frac{1}{6}x^3$$

$$\left[\frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{18}x^2y - \frac{3}{2}xy^2 \right]$$

49

$$\{(x-1)(x+3)+3](x-x^2+1)-2x\} : x^2+x(x+2)$$

$$[x+3]$$

50 $2x^3 - \left\{ \frac{1}{2}xy(2x+3y) - \left[\frac{1}{2}x^2(2y-3x) + \frac{1}{2}x(x^2+3y^2) \right] \right\}$ $[x^3]$

51 $\{(a-3)(a+2)+6](a^2+a-1)-a\}\left(\frac{1}{4}a\right) + \frac{1}{2}a^3$ $\left[\frac{1}{4}a^5\right]$

52 $\left[\left(\frac{3}{2}x+y \right) \left(\frac{4}{3}y+2x \right) - xy \right] \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}y^2 \right) + \frac{2}{3}y \left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{27}{8}x^3 \right)$ $\left[\frac{9}{4}x^4 - xy^3 \right]$

53 $6a^3 - \{2ab(2a-3b) - [2a^2(2b-3a) + 2a(a^2-3b^2)]\}$ $[2a^3]$

54 $\{(m-1)(m+2)+2](m+m^2-1)+m\}\left(-\frac{1}{2}m\right) + m^4$ $\left[-\frac{1}{2}m^5\right]$

55 $\left[\left(\frac{1}{2}x+y \right) \left(\frac{2}{3}y-2x \right) + \frac{4}{3}xy \right] \left(\frac{2}{3}y^2+x^2 \right) + \left(\frac{5}{9}y^4+x^4+\frac{1}{3}x^3y \right)$ $\left[y^4 - \frac{2}{9}xy^3 \right]$

I prodotti notevoli

Utilizza i prodotti notevoli per semplificare le seguenti espressioni.

56 $\left(3x-\frac{1}{2}\right)\left(3x+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{9}(x^2+9) + \left(\frac{1}{3}x-1\right)^2$ $\left[9x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\right]$

57 $(x^2-3)^2 + (x^2-3)(x^2+3) - 2x^2(x^2+3)$ $[-12x^2]$

58 $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y\right) + \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}y\right)^2 - \frac{1}{3}y^2 + x^2y$ $\left[\frac{13}{16}x^4\right]$

59 $(xy+x+1)^2 - xy(xy+2x) - x(2y+x+2)$ $[1]$

60 $\left(\frac{1}{2}x+3y\right)^3 - \left(3y-\frac{1}{2}x\right)^3 - 27xy^2 - \frac{1}{4}x^3$ $[0]$

61 $3(a+b+1)^2 - 2(a+1)^3 + (2a^3-3b^2)$ $[1-3a^2+6ab+6b]$

62 $(2x-y)(2x+y) + (2x-y)^2 + 4xy$ $[8x^2]$

63 $x(x^2+3) - (x+1)^3 + (x-1)(x+1)$ $[-2x^2-2]$

64 $(m+n-1)^2 - (m+n)^2 + 2(m+n)$ $[1]$

65 $[(x+y)^3 - (x-y)(x^2+y^2+xy) - 3xy(x+y)]^2 - (2y^2)^3$ $[-4y^6]$

66 $\left[\left(x + \frac{1}{3}y \right) \left(x - \frac{1}{3}y \right) \left(x^2 + \frac{1}{9}y^2 \right) + \left(x^2 - \frac{1}{9}y^2 \right)^2 \right] : \left(-\frac{1}{3}x \right)^2$ $[18x^2 - 2y^2]$

67 $\left[\left(x - \frac{1}{2}y \right)^3 + \frac{3}{2}xy \left(x - \frac{1}{2}y \right) \right] \left(\frac{1}{8}y^3 + x^3 \right) - \left(-\frac{1}{4}y^2 \right)^3$ $[x^6]$

- 68** $(x+y)^2 - (x-y)(x+y) - 2y^2$ [2xy]
- 69** $[(m+n)^2 - 2mn](m+n) - (m+n)^3$ $[-2m^2n - 2mn^2]$
- 70** $[(x^2 - 2y)^2 + (x^3 + 2y)(x^3 - 2y)] : \left(\frac{1}{2}x^2\right) - 2x^2$ $[2x^4 - 8y]$
- 71** $[2ab(-a+b) + 6a^2b] : (-2ab) + [2a(a-b) - 6ab] : [ax + a(1-x)]$ $[-9b]$
- 72** $[x(x-y)(x+y) - 2xy^2] : \left(\frac{1}{3}x\right) + 9y^2 + [x^2(x-2) - 4x^2] : (-x^5 : 2x^4)$ $[x^2 + 12x]$
- 73** $(a^2x - 2a^4y + a^2xy) : (a^5 : a^3 - 2a^2) + x(1+y) + (a^3y - ax) : (-a)$ $[a^2y + x]$
- 74** $2(2a^2 + 1)[(a-2)(a+2) + 4 + 2a^4] : \left(-a^2 + \frac{a^2}{2}\right) - [(x-2a)^2 - 4a^2] : (-x)$ $[4a - x]$

Problemi

Nel sito: ► 10 esercizi in più



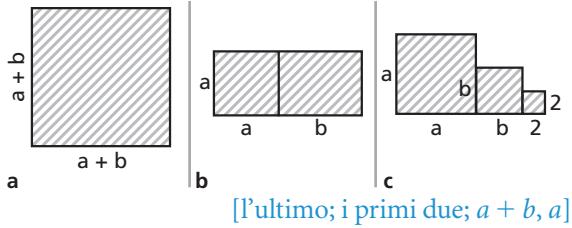
75 Dati due numeri x e y , al cubo della loro somma sottrai la somma dei loro cubi e aggiungi il prodotto del quadrato del primo per il secondo.

76 Dati due numeri a e b , alla differenza dei loro quadrati aggiungi il quadrato della loro somma e dividi tale risultato per il doppio del primo numero.

77 In un rettangolo la base supera di 10 cm il doppio dell'altezza. Indica con x la misura dell'altezza ed esprimi con un polinomio ridotto la misura dell'area e del perimetro.

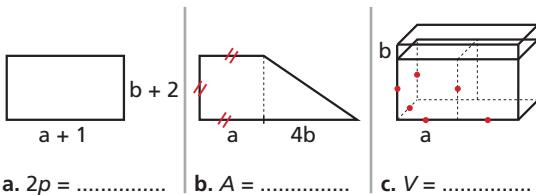
78 Dimostra che la differenza dei quadrati di due numeri naturali consecutivi è sempre dispari e che la differenza fra i quadrati di due numeri naturali dispari consecutivi è sempre pari.

79 L'area di ogni figura è rappresentata da un polinomio. Solo uno dei tre non è un polinomio omogeneo. Quale? Due sono divisibili per $(a+b)$. Quali? Scrivi i due quozienti.



80 In un trapezio rettangolo l'altezza misura x e la base minore è pari alla sua metà. Il lato obliquo misura $2y+1$, mentre la misura della base maggiore è uguale alla somma tra quella della base minore e del doppio dell'altezza. Esprimi con un polinomio ridotto la misura dell'area e del perimetro.

81 **COMPLETA** Scrivi sotto ogni figura il polinomio che ne rappresenta, rispettivamente, il perimetro, l'area, il volume.



Fra i polinomi trovati, quali sono divisibili per a ? E per $a+2b$?

[$2a + 2b + 6; a^2 + 2ab; 2a^3 + 2a^2b$; il secondo e il terzo; solo il secondo]

82 Un recinto ha forma rettangolare e le sue misure sono 4 m e 6 m. Si aumenta la misura di ciascun lato del recinto di un segmento lungo x . Che cosa rappresenta per il nuovo recinto il polinomio $x^2 + 10x + 24$? [l'area]

Esegui le seguenti divisioni tra polinomi, determinando quoziente e resto.

83 $(2x^5 - 5x - x^3 - 4) : (x^2 - 2x + 1)$ $[Q = 2x^3 + 4x^2 + 5x + 6; R = 2x - 10]$

84 $\left(\frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x - 2\right) : (2x^2 - 1)$ $\left[Q = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}; R = \frac{11}{4}x - \frac{11}{6}\right]$

85 $\left(2x^{n+4} - \frac{1}{4}x^{n+2}\right) : (2x^n - 1)$ (con $n \in \mathbb{N}$) $\left[Q = x^4 - \frac{1}{8}x^2; R = x^4 - \frac{1}{8}x^2\right]$

Esegui le seguenti divisioni tra polinomi, determinando quoziente e resto mediante la regola di Ruffini.

86 $(x^2 - x + 3 - 2x^3) : (x - 1)$ $[Q = -2x^2 - x - 2; R = 1]$

87 $(b^4 - 3b^2 + 2) : (b - 2)$ $[Q = b^3 + 2b^2 + b + 2; R = 6]$

88 $(3y^2 - 22 + 5y) : (3y + 11)$ $[Q = y - 2; R = 0]$

89 $(12x^4 + 5x^3 + 2x + 1) : (2x + 1)$ $\left[Q = 6x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{7}{8}; R = \frac{1}{8}\right]$

90 $\left(4a^3 - \frac{7}{3}a^2 + \frac{1}{3} - a\right) : \left(a - \frac{1}{2}\right)$ $\left[Q = 4a^2 - \frac{1}{3}a - \frac{7}{6}; R = -\frac{1}{4}\right]$

91 $\left(2x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x\right) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$ $[Q = 2x^3 - 2x^2 + x - 2; R = 1]$

92 $(x^4 - 2bx^3 + 3b^3x + 5b^4) : (x + b)$ $[Q = x^3 - 3bx^2 + 3b^2x; R = 5b^4]$

93 $(6a^4 + 3a^3 - 24a^2b^2 - 12ab^2) : (a + 2b)$ $[Q = 6a^3 + 3a^2 - 12ba^2 - 6ab; R = 0]$

Per ogni polinomio calcola il valore che esso assume sostituendo alla variabile i valori scritti a fianco.

94 $P(x) = 3x^2 + 4x - 1$ $x = 0, \quad x = 1, \quad x = -2.$

95 $Q(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + 4$ $x = \frac{3}{2}, \quad x = 2, \quad x = -\frac{1}{2}.$

96 $R(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x$ $x = 0, \quad x = -1, \quad x = -\frac{1}{2}.$

Determina il resto senza eseguire la divisione.

97 $(2x^3 + 4x^2 + 3x - 1) : (x + 2)$ $[R = -7]$

98 $\left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 4x - 1\right) : (x + 1)$ $[R = 4]$

99 $\left(x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 2x + 1\right) : \left(x - \frac{2}{3}\right)$ $\left[R = \frac{5}{9}\right]$

100 $(a^4 - 4a^3 - 2a^2 + 3a) : (a - 2)$ $[R = -18]$

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 8 esercizi in più



101

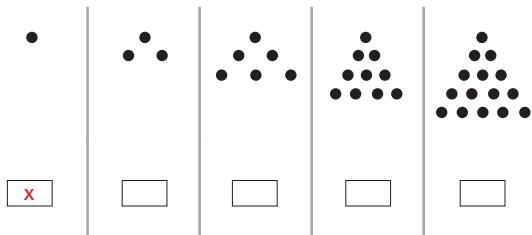
TEST Un numero di due cifre viene sommato al numero ottenuto invertendo le sue cifre. Si divide quindi la somma ottenuta per la somma delle cifre del numero dato e si eleva al quadrato il risultato. Che numero si ottiene?

A 36**B** 49**C** 100**D** 121**E** Dipende dalle cifre del numero dato.

(Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede, 2002)

102

In figura sono disegnati dei pallini, ognuno dei quali è indicato col monomio x .



- Scrivi sotto ogni triangolo il monomio corrispondente al numero dei pallini.
- Scrivi il monomio che rappresenta il sesto triangolo della sequenza.
- Individua il criterio che permette di scrivere i successivi «monomi triangolari».

TEST YOUR SKILLS

106

For the two polynomials below, do two things:
 1. under each term, write the degree of that term;
 2. find the degree of the polynomial.

- $5t^6 - 14t^5 + t^2 - t^7 + t$
- $4a^2b + 2b^4 + a^2b^3 - 4a + 1$.

(USA Tacoma Community College, Review for Test, 2002)

[a] 7; b) 5

107

TEST What is the value of k in the polynomial identity below?

$$(x^3 - x^2 - 5x - 2)(x^4 + x^3 + kx^2 - 5x + 2) = \\ = x^7 - 4x^5 - 14x^4 - 5x^3 + 19x^2 - 4.$$

A - 2. **B** - 1. **C** 0. **D** 1. **E** 2.

(USA University of South Carolina: High School Math Contest, 2000)

GLOSSARY

below: sotto**degree:** grado**height:** altezza**identity:** identità**lung capacity:** capacità polmonare**polynomial:** polinomio**value:** valore

103

Verifica che le espressioni

$$(1 + x + y)^2 \text{ e } 2(1 + x)(1 + y)$$

forniscono lo stesso risultato se è valida la relazione $x^2 + y^2 = 1$.

104

Un'azienda, in un momento di congiuntura, abbassa lo stipendio di tutti i dipendenti dell'8%; superate le difficoltà, l'azienda alza gli stipendi dell'8%.

- Se Giovanni, dipendente dell'azienda, ha uno stipendio x prima della congiuntura, qual è il suo stipendio dopo la riduzione?
- Com'è lo stipendio di Giovanni dopo il nuovo aumento?
- Quale fra i due stipendi, iniziale e finale, è il maggiore? Spiega perché non sono uguali.

$$\left[\begin{array}{l} \text{a)} \frac{92}{100}x; \text{ b)} \frac{9936}{10\,000}x \end{array} \right]$$

105

Qual è la somma algebrica dei coefficienti del polinomio:

$$(x^{21} + 4x^2 - 3)^{2001} + \\ - (x^{21} + 4x^2 + 3)^{667} + x^{21} + 4x^2?$$

(Olimpiadi della matematica, Gara provinciale, 2001)

(Suggerimento. Dato un polinomio, la somma dei coefficienti si ottiene sostituendo...)

Nel sito: ▶ 8 esercizi in più



108

The lung capacity (in litres) for a woman can be estimated by the polynomial:

$$0,041h - 0,018A - 2,69,$$

where h is the height in centimeters and A is the age.

Find your lung capacity (if you are a boy, find the lung capacity of your mother).

109

TEST If $a \otimes b = a^2 - ab$, find $(x + 1) \otimes (x - 1)$.

A - 2. **C** $x^2 - 1$. **E** $2(x + 1)$.**B** 2. **D** $-2(x - 1)$.

(USA Tennessee Mathematics Teachers Association: 39th Annual Mathematics Contest, 1995)

La scomposizione in fattori e le frazioni algebriche



1729

Salire su un taxi numero 1729 lascerebbe indifferente la maggior parte delle persone. Ma per il matematico indiano Srinivasa Ramanujan un episodio apparentemente banale fu l'occasione di una celebre scoperta...

...che cosa ha di speciale un numero così?

→ La risposta a pag. 425

1. La scomposizione in fattori dei polinomi

Scomporre in fattori un polinomio significa scriverlo sotto forma di prodotto di polinomi di grado inferiore.

ESEMPIO

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1).$$

$(x^2 - 1)$ può essere scomposto ulteriormente in $(x + 1)(x - 1)$. Quindi:

$$x^4 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1).$$

Invece, $x^2 + 1$ non è scomponibile. Puoi verificarlo applicando il teorema di Ruffini.

► La scomposizione in fattori viene anche chiamata *fattorizzazione*.

► Se leggi da destra verso sinistra, ritrovi un prodotto notevole.

DEFINIZIONE

Polinomio riducibile, polinomio irriducibile

Un polinomio in una o più variabili è riducibile quando può essere scomposto nel prodotto di polinomi, tutti di grado minore.

Un polinomio non riducibile si chiama irriducibile.

► $x^4 - 1$, scomponibile in fattori, è riducibile, mentre $(x + 1)$, $(x - 1)$, $(x^2 + 1)$ sono irriducibili.

► Possiamo fare un'analogia fra i polinomi irriducibili e i numeri primi.

Come la scomposizione di un numero naturale in fattori primi è unica (a meno dell'ordine), così anche la scomposizione di un polinomio in polinomi irriducibili è unica (a meno dell'ordine).

ESEMPIO

Il polinomio $x^2 - 2x + 1$ è riducibile. Infatti:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2.$$

Sono irriducibili i polinomi: $x^2 + 25$, $x + 4$, $2x^2 + 5$.

I metodi per la scomposizione dei polinomi

Purtroppo non esiste un metodo generale per ottenere la scomposizione di un polinomio riducibile.

Studiamo allora alcuni dei metodi più comuni di fattorizzazione, basati su regole algebriche che conosciamo. I metodi sono:

- raccogliere a fattore comune;
- raccogliere parzialmente;
- individuare prodotti notevoli;
- riconoscere particolari trinomi di secondo grado;
- utilizzare la regola di Ruffini.

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ► V13a

► Il raccoglimento a fattore comune si basa sulla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

ESEMPIO

$$ab + ac + ad = a(b + c + d);$$

$$5x^4 - 10x^3 - 35x^2 = 5x^2(x^2 - 2x - 7);$$

$$3(a + b) + x(a + b) = (a + b)(3 + x).$$

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Ragionar con lettere



Nel sito: ► Scheda di lavoro

Che cosa si può dire, rispetto alla divisibilità, della somma tra il quadrato di un numero pari e il doppio di quel numero?

GIORGIA: «Non male come problema! Sicuramente è pari, quindi è divisibile per 2».

ALESSANDRO: «A me sembra divisibile per 4. E forse c'è anche qualche cosa in più...».

► Prova con qualche esempio, poi dimostra con il calcolo letterale la congettura che formuli.



■ Il raccoglimento parziale

Consideriamo il seguente polinomio P :

$$P = ac + bc + ad + bd + ae + be.$$

I primi due termini hanno in comune il fattore c , il terzo e il quarto il fattore d , il quinto e il sesto il fattore e .

Raccogliamo i fattori comuni:

$$P = c(a + b) + d(a + b) + e(a + b).$$

Il polinomio è ora formato da una somma di tre termini, che hanno in comune il fattore $(a + b)$. Raccogliamo $(a + b)$:

$$P = (a + b)(c + d + e).$$

Siamo giunti al prodotto di due fattori. Questo metodo di scomposizione viene detto **raccoglimento parziale**.

ESEMPIO $\underline{5ab} - \underline{10b^2} + \underline{3a^2b} - \underline{6ab^2} =$

$$= \underline{5b}(a - 2b) + \underline{3ab}(a - 2b) = (a - 2b)(5b + 3ab).$$

BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V13b



- Il metodo che applichiamo percorre in verso contrario i passaggi che utilizziamo nella moltiplicazione di due polinomi.

■ La scomposizione riconducibile a prodotti notevoli

Riscriviamo le uguaglianze che esprimono le regole dei prodotti notevoli già incontrati, ma scambiamo il primo con il secondo membro:

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B);$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2;$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2;$$

$$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A + B + C)^2;$$

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3;$$

$$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3.$$

BRAVI SI DIVENTA

Videolezioni ► V14a
► V14b
► V15a
► V15b



Analogamente, per la differenza o la somma di due cubi abbiamo:

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2);$$

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2).$$

Questo modo di scrivere le uguaglianze fornisce delle regole di scomposizione in fattori. Infatti, nel primo membro di ogni uguaglianza troviamo la somma algebrica di più termini, nel secondo un prodotto di più fattori.

ESEMPIO $9x^2 - y^4 =$

$$= (3x)^2 - (y^2)^2 = (3x - y^2)(3x + y^2).$$

Quindi: $9x^2 - y^4 = (3x - y^2)(3x + y^2)$.

- Si ha anche
 $9x^2 = (-3x)^2$ e
 $y^4 = (-y^2)^2$,
perciò possiamo anche scrivere:

$$9x^2 - y^4 = (-3x + y^2)(-3x - y^2).$$

■ La scomposizione di particolari trinomi di secondo grado

Consideriamo il trinomio di secondo grado:

$$x^2 + 8x + 15.$$

Esso è particolare per due motivi:

- il coefficiente di x^2 è 1;
- i numeri 8 e 15 sono, rispettivamente, la somma e il prodotto di 3 e 5:

$$8 = 3 + 5 \quad \text{e} \quad 15 = 3 \cdot 5.$$

Ebbene, se proviamo a moltiplicare i due binomi $(x + 3)$ e $(x + 5)$, otteniamo proprio il trinomio $x^2 + 8x + 15$.

In generale, un trinomio di secondo grado del tipo $x^2 + sx + p$ è scomponibile nel prodotto $(x + a)(x + b)$ se $s = a + b$ e $p = ab$.

In altri termini:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b).$$

Dimostriamo questa uguaglianza mediante i seguenti passaggi:

$$x^2 + sx + p =$$

$$= x^2 + (a + b)x + ab =$$

$$= x^2 + ax + bx + ab =$$

Operiamo un raccoglimento parziale:

$$= x(x + a) + b(x + a) = (x + a)(x + b).$$

ESEMPIO

$$y^2 - 3y - 10 = (y - 5)(y + 2).$$

$$s = -5 + 2 \quad p = (-5)(+2)$$

■ La scomposizione mediante il teorema e la regola di Ruffini

Il teorema di Ruffini permette spesso di scomporre in fattori un polinomio. Sappiamo infatti che se un polinomio $A(x)$ assume il valore 0 quando alla variabile x si sostituisce un valore a , allora il polinomio è divisibile per $x - a$.

Eseguendo la divisione $A(x) : (x - a)$, otteniamo il polinomio quoziente $Q(x)$ e, poiché il resto è zero, scriviamo $A(x)$ come prodotto di due fattori:

$$A(x) = (x - a) Q(x).$$

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V16a

ESEMPIO

$$2x^3 - 5x^2 + 5x - 6$$

assume il valore 0 per $x = 2$, quindi è divisibile per $x - 2$. Calcoliamo il quoziente applicando la regola di Ruffini.

2	2	-5	5	-6
2	4	-2	6	
2	-1	3	0	

$$Q(x) = 2x^2 - x + 3.$$

$$(2x^3 - 5x^2 + 5x - 6) : (x - 2) = 2x^2 - x + 3.$$

$$\text{Quindi: } 2x^3 - 5x^2 + 5x - 6 = (x - 2)(2x^2 - x + 3).$$

Il polinomio iniziale è stato scomposto nel prodotto di due fattori.

► 2 è uno zero del polinomio iniziale.

Dunque, se troviamo uno **zero a di un polinomio** $A(x)$, cioè un valore a tale che $A(a) = 0$, sappiamo anche scomporre il polinomio di partenza nel prodotto di due fattori.

Ma come trovare gli zeri di un polinomio? Per farlo può essere utile considerare la seguente regola.

REGOLA**Zeri interi di un polinomio**

Se un numero intero annulla un polinomio a coefficienti interi, allora esso è divisore del termine noto.

Dalla regola possiamo dedurre un metodo per la ricerca degli zeri interi di un polinomio: se esistono, essi sono fra i divisori del termine noto.

ESEMPIO Dato il polinomio:

$$A(x) = 5x^2 - x - 4,$$

i divisori di -4 sono: 1, 2, 4, -1 , -2 , -4 .

Sostituendo a x il valore 1, otteniamo:

$$A(1) = 5 - 1 - 4 = 0,$$

quindi 1 è uno zero di $A(x)$, perciò il polinomio è divisibile per $x - 1$.

Calcoliamo il quoziente applicando la regola di Ruffini.

1	5	-1	-4
1	5	4	
1	5	4	0

$$Q(x) = 5x + 4.$$

$$\text{Pertanto, } 5x^2 - x - 4 = (x - 1)(5x + 4).$$

► Non è vero che *tutti* i divisori del termine noto sono zeri del polinomio. Per esempio:

$$A(2) = 5 \cdot 4 - 2 - 4 = 20 - 6 = 14 \neq 0.$$

Più in generale si ha la seguente regola.

► Nell'esempio precedente tutti i possibili casi sono:

$$\pm \frac{1}{5}, \pm \frac{2}{5}, \pm \frac{4}{5}, \\ \pm \frac{1}{1}, \pm \frac{2}{1}, \pm \frac{4}{1}.$$

REGOLA

Zeri razionali di un polinomio

Tutti gli zeri razionali di un polinomio a coefficienti interi possono essere cercati tra le frazioni $\pm \frac{m}{n}$, dove m è un divisore del termine noto e n è un divisore del coefficiente del termine di grado massimo.

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V17a

2. Il M.C.D. e il m.c.m. fra polinomi

DEFINIZIONE

M.C.D. fra polinomi

Si dice massimo comune divisore (M.C.D.) fra due o più polinomi il polinomio di grado massimo che è divisore di tutti i polinomi dati.

ESEMPIO

$$\text{M.C.D.}[(x - 3)(x + 1)^3, (x - 3)^2(x + 1)^2] = (x - 3)(x + 1)^2.$$

DEFINIZIONE

m.c.m. fra polinomi

Si dice minimo comune multiplo (m.c.m.) fra due o più polinomi il polinomio di grado minimo che è divisibile per tutti i polinomi dati.

ESEMPIO

$$\text{m.c.m.}[(x - 3)(x + 1)^3, (x - 3)^2(x + 1)^2] = (x - 3)^2(x + 1)^3.$$

Per calcolare il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo fra polinomi, utilizziamo il procedimento già illustrato per i numeri naturali e per i monomi.

Scomponiamo innanzitutto i polinomi in fattori irriducibili, raccogliendo anche gli eventuali coefficienti numerici in comune.

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V17b

Il calcolo del M.C.D.

Il M.C.D. fra due o più polinomi è il prodotto dei loro **fattori irriducibili comuni**, presi una sola volta, con l'esponente minore.

ESEMPIO Determiniamo il M.C.D. fra i seguenti polinomi:

$$a^2b - b^3, \quad a^3 - b^3, \quad a^3 - 2a^2b + ab^2.$$

Scomponiamo in fattori:

$$a^2b - b^3 = b(a^2 - b^2) = b(a - b)(a + b);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 - 2a^2b + ab^2 = a(a^2 - 2ab + b^2) = a(a - b)^2.$$

Mettiamo in colonna i fattori:

b	$a - b$	$a + b$
	$a - b$	$a^2 + ab + b^2$
a	$(a - b)^2$	

L'unico fattore in comune è $(a - b)$, che prendiamo con l'esponente minore:

$$\text{M.C.D.} = a - b.$$

■ Il calcolo del m.c.m.

Il m.c.m. fra due o più polinomi è il prodotto dei loro **fattori irriducibili comuni e non comuni**, presi una sola volta, con l'esponente maggiore.

ESEMPIO

Determiniamo il m.c.m. fra i tre polinomi dell'esempio precedente.

Dopo avere incolonnato i fattori, scegliamo quelli comuni e non comuni, ciascuno preso con l'esponente maggiore.

b	$a - b$	$a + b$
	$a - b$	$a^2 + ab + b^2$
a	$(a - b)^2$	

Pertanto: m.c.m. = $a \cdot b \cdot (a - b)^2(a + b)(a^2 + ab + b^2)$.

BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ▶ V17c



3. Le frazioni algebriche

Abbiamo già osservato che, nella divisione fra polinomi, non sempre il risultato è un polinomio.

Per esempio, $\frac{x-1}{x}$, $\frac{x}{2x+1}$, $\frac{3x^2}{x^2-1}$ non sono polinomi.

È quindi necessario introdurre un nuovo tipo di espressione letterale, che chiameremo *frazione algebrica*.

■ DEFINIZIONE

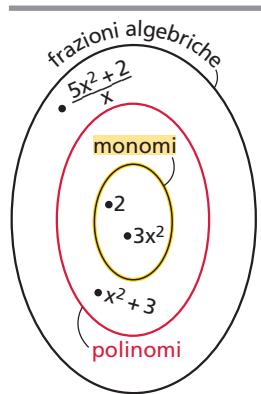
Frazione algebrica

Dati i polinomi A e B , con B diverso dal polinomio nullo,

la frazione $\frac{A}{B}$ viene detta frazione algebrica.

Ogni monomio o polinomio può essere considerato una frazione algebrica il cui denominatore è il monomio 1. Dunque l'insieme delle frazioni algebriche include l'insieme dei polinomi.

Per esempio, $4a + b$ si identifica con la frazione algebrica $\frac{4a + b}{1}$.



▲ Figura 1 L'insieme delle frazioni algebriche è un ampliamento dell'insieme dei polinomi.

■ Le condizioni di esistenza delle frazioni algebriche

Una frazione algebrica assume valori che dipendono da quelli assegnati alle lettere che vi compaiono, quindi è una funzione rispetto alle variabili contenute nei suoi polinomi.

Essa può perdere significato per particolari valori dati alle lettere. Per esempio, la frazione:

$$\frac{x-3}{x-2}$$

non ha significato per $x = 2$, poiché non può avere denominatore nullo.

Una frazione algebrica perde significato per tutti e soli quei valori delle lettere che annullano il denominatore.

Le **condizioni di esistenza** di una frazione algebrica sono tutte le disuguaglianze che le variabili devono verificare affinché il denominatore non sia nullo.

Indichiamo le condizioni di esistenza con la sigla «C.E.».

ESEMPIO

La frazione $\frac{x-1}{x(x-4)}$ perde significato quando $x = 0$ e $x = 4$.

Scriviamo:

$$\text{C.E.: } x \neq 0 \wedge x \neq 4.$$

► Per operare con le frazioni algebriche dobbiamo sempre scrivere le condizioni di esistenza.

4. Il calcolo con le frazioni algebriche

► Per esempio, sono equivalenti le frazioni $\frac{4}{5}$ e $\frac{8}{10}$ perché $8 \cdot 5 = 10 \cdot 4$.

Nel capitolo 2 abbiamo definito *equivalenti* due frazioni numeriche nelle quali risultano uguali i due prodotti «in croce».

Analogamente, diciamo che anche due frazioni algebriche sono equivalenti se sono uguali i due prodotti «in croce».

EQUIVALENZA

	FRAZIONI NUMERICHE	FRAZIONI ALGEBRICHE
definizione di equivalenza	$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ a, b, c, d rappresentano numeri interi	$\frac{A}{B} \sim \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC$ A, B, C, D rappresentano polinomi
esempio	$\frac{3}{5} \sim \frac{21}{35}$, infatti: $3 \cdot 35 = 105$; $5 \cdot 21 = 105$.	$\frac{a-b}{a} \sim \frac{a^2 - b^2}{a^2 + ab}$, infatti: $(a-b)(a^2 + ab) = a^3 + a^2b - a^2b - ab^2 = a^3 - ab^2$; $a(a^2 - b^2) = a^3 - ab^2$.

■ La semplificazione delle frazioni algebriche

Se dividiamo il numeratore e il denominatore di una frazione algebrica per lo stesso polinomio (diverso da 0), otteniamo una frazione algebrica equivalente. Vale, cioè, anche per le frazioni algebriche la **proprietà invariantiva**. La semplificazione di una frazione algebrica si ottiene pertanto dividendo numeratore e denominatore per uno stesso polinomio, con la condizione che esso sia diverso da 0.

La tabella seguente illustra il procedimento, che è lo stesso che si segue per semplificare una frazione numerica.

BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V18a



SEMPLIFICAZIONE		
PROCEDIMENTO	FRAZIONE NUMERICA	FRAZIONE ALGEBRICA
la frazione data è	$\frac{126}{54}$	$\frac{a^3b + 2a^2b^2 + ab^3}{a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3}$
scomponiamo in fattori numeratore e denominatore e poniamo le C.E.	$\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 7}{2 \cdot 3^3}$	$\frac{ab(a^2 + 2ab + b^2)}{a(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)} = \frac{ab(a+b)^2}{a(a+b)^3}$ C.E.: $a \neq 0$ e $a+b \neq 0$
dividiamo numeratore e denominatore per i fattori comuni	$\frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3}^2 \cdot 7}{\cancel{2} \cdot \cancel{3}^3}$	$\frac{\cancel{ab}(a+b)^2}{\cancel{a}(a+b)^3}$
la frazione semplificata è	$\frac{7}{3}$	$\frac{b}{a+b}$

Nella semplificazione occorre fare attenzione a semplificare solo i fattori, **mai gli addendi**.

Non possiamo semplificare $\frac{b}{a+b}$. **SAGLIATO!**

Care $\frac{b}{a+b}$.

Se hai dei dubbi, prova a sostituire alle lettere dei numeri. Per esempio, se

$$a = 2 \text{ e } b = 9:$$

$$\frac{9}{2+9} = \frac{9}{11},$$

mentre $\frac{9}{2+9} =$

$$= \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

■ L'addizione e la sottrazione di frazioni algebriche

DEFINIZIONE

Somma algebrica di frazioni algebriche

La somma algebrica di due o più frazioni algebriche, che hanno lo stesso denominatore, è la frazione algebrica che ha per denominatore lo stesso denominatore e per numeratore la somma algebrica dei numeratori:

$$\frac{A}{D} + \frac{B}{D} - \frac{C}{D} = \frac{A+B-C}{D}.$$

ESEMPIO

$$\frac{3a}{a-2} + \frac{5a}{a-2} - \frac{7a}{a-2} = \frac{3a+5a-7a}{a-2} = \frac{a}{a-2}.$$

C.E.: $a \neq 2$.

Per sommare due o più frazioni con denominatore diverso bisogna prima ridurle allo stesso denominatore, poi sommare i numeratori, come avviene per le frazioni numeriche.

BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V19a



La tabella seguente riassume i vari passaggi, affiancando un esempio numerico a uno algebrico.

SOMMA ALGEBRICA		
PROCEDIMENTO	FRAZIONI NUMERICHE	FRAZIONI ALGEBRICHE
la somma data è	$\frac{5}{6} + \frac{3}{28} - \frac{1}{21}$	$\frac{5}{a^2 + ab} + \frac{a+b}{a^2 b} - \frac{1}{ab + b^2}$
scomponiamo in fattori i denominatori e poniamo le C.E.	$\frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{3}{2^2 \cdot 7} - \frac{1}{3 \cdot 7}$	$\frac{5}{a(a+b)} + \frac{a+b}{a^2 b} - \frac{1}{b(a+b)}$
		C.E.: $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a + b \neq 0$
riduciamo le frazioni allo stesso denominatore, cioè al m.c.m. fra i denominatori	$\frac{2 \cdot 7 \cdot 5 + 3 \cdot 3 - 2^2 \cdot 1}{2^2 \cdot 3 \cdot 7}$	$\frac{5ab + (a+b)(a+b) - a^2}{a^2 b(a+b)}$
eseguiamo le moltiplicazioni al numeratore	$\frac{70 + 9 - 4}{2^2 \cdot 3 \cdot 7}$	$\frac{5ab + a^2 + 2ab + b^2 - a^2}{a^2 b(a+b)}$
eseguiamo le somme algebriche al numeratore	$\frac{75}{2^2 \cdot 3 \cdot 7}$	$\frac{7ab + b^2}{a^2 b(a+b)}$
scomponiamo in fattori il numeratore, per semplificare la frazione	$\frac{\cancel{3} \cdot 5^2}{2^2 \cdot \cancel{3} \cdot 7}$	$\frac{\cancel{b}(7a+b)}{a^2 \cancel{b}(a+b)}$
scriviamo il risultato	$\frac{25}{28}$	$\frac{7a+b}{a^2(a+b)}$

■ La moltiplicazione di frazioni algebriche

■ DEFINIZIONE

Prodotto di due frazioni algebriche

Il prodotto di due o più frazioni algebriche è una frazione algebrica che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}.$$



MOLTIPLICAZIONE		
PROCEDIMENTO	FRAZIONI NUMERICHE	FRAZIONI ALGEBRICHE
la moltiplicazione data è	$\frac{25}{21} \cdot \frac{14}{40}$	$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{ab - b^2} \cdot \frac{a^2 - ab}{a^4 + a^3 b}$
scomponiamo in fattori i numeratori e i denominatori e poniamo le C.E.	$\frac{5^2}{3 \cdot 7} \cdot \frac{2 \cdot 7}{2^3 \cdot 5}$	$\frac{(a+b)^2}{b(a-b)} \cdot \frac{a(a-b)}{a^3(a+b)}$
		C.E.: $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a + b \neq 0 \wedge a - b \neq 0$
semplifichiamo	$\frac{5^{\cancel{2}}}{3 \cdot \cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{7}}{2^{\cancel{3}} \cdot \cancel{5}}$	$\frac{(a+b)^{\cancel{2}}}{b(a-b)} \cdot \frac{\cancel{a}(a-b)}{a^{\cancel{3}}(a+b)}$
moltiplichiamo numeratori e denominatori	$\frac{5}{12}$	$\frac{a+b}{a^2 b}$

ESPLORAZIONE: L'ALGEBRA SINCOPATA



◀ Jacopo de' Barbari, *Ritratto di Fra Luca Pacioli*, Napoli, Museo e Gallerie Nazionali di Capodimonte.

La Summa de arithmeticā, geometriā, proportioni et proportionalitā di Luca Pacioli, la prima opera stampata in Italia nel 1494, dopo l'invenzione di Gutenberg, è un trattato di algebra, aritmetica e geometria.

Qui l'autore fa uso di notazioni abbreviate di algebra, per esempio:

co per cosa (x),
ce per censo (x^2),
ae per aequalis (uguale).

Per descrivere le espressioni algebriche gli antichi utilizzavano unicamente parole e non simboli. Fu soltanto con Diofanto, vissuto ad Alessandria d'Egitto intorno al 250 a.C., che si iniziò a usare simboli al posto delle parole. Ma fu soprattutto in Europa, ad opera in particolare di Luca Pacioli (1445-1514) e di Raffaele Bombelli (1526-1572), che si diffuse l'*algebra sincopata*, con parole abbreviate (*synkóptein* in greco significa *spezzare*) al posto delle variabili e delle operazioni.

▼ Esempio di scrittura sincopata dall'*Algebra* di Bombelli.

	<u>Fà</u>	indica
	<u>R.q.4.</u>	()
	<u>R.q.1</u>	=
	<u>R.c.</u>	$\sqrt{ }$
	<u>p.</u>	$\sqrt[3]{ }$
	<u>m.</u>	+
		-

	<u>R.c.L</u>	indica
	<u>5</u>	x
	<u>72</u>	x^2
	<u>m.R.q.1088.I</u>	x^3

	<u>Somma.</u>	indica
	<u>R.c.L 232.p R.q.53312.I</u>	$x + x^2 + x^3$

$\sqrt[3]{232 + \sqrt{53312}}$

Nelle righe della figura, tratte dall'*Algebra* di Bombelli, puoi notare l'uso di abbreviazioni.

	<u>Fà</u>	indica
	<u>R.q.4.</u>	()
	<u>R.q.1</u>	=
	<u>R.c.</u>	$\sqrt{ }$
	<u>p.</u>	$\sqrt[3]{ }$
	<u>m.</u>	+
		-

Bombelli usò poi una convenzione particolare per indicare l'incognita e le sue potenze. Per esempio, per indicare $3x^2 + 2x - 4x^3$ avrebbe scritto:

$$3 \circ p. 2 \cup m. 4 \circ$$

IN CINQUE SLIDE

Indica come Bombelli avrebbe scritto le seguenti espressioni:

$$5x^2 + 2 - x, \sqrt[3]{9x^3 + 1}, \sqrt{127 - \sqrt[3]{x + 31}}.$$

Cerca in Internet altri esempi di algebra sincopata e realizza una presentazione multimediale.



Cerca nel web: Diofanto, Bombelli, Pacioli, algebra sincopata, syncopated algebra.

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V20b

■ La divisione di frazioni algebriche

■ DEFINIZIONE

Quoziente di frazioni algebriche

Il quoziente di due frazioni algebriche è la frazione algebrica che si ottiene moltiplicando la prima frazione per la reciproca della seconda:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}.$$

Le condizioni di esistenza sono $B \neq 0$ e $D \neq 0$ per l'esistenza delle frazioni algebriche, $C \neq 0$ perché sia possibile eseguire la divisione.

■ ESEMPIO

$$1. \frac{6a^2b}{5cd} : \frac{8a^2}{d^2} = \frac{\cancel{6}a^2b}{\cancel{5}cd} \cdot \frac{d^2}{\cancel{8}a^2} = \frac{3db}{20c}; \quad \text{C.E.: } c \neq 0 \wedge d \neq 0 \wedge a \neq 0.$$

$$2. \frac{x+y}{x^2y - xy^2} : \frac{xy}{x^2 - y^2} =$$

$$= \frac{x+y}{xy(x-y)} : \frac{xy}{(x+y)(x-y)} =$$

C.E.: $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x \neq y \wedge x \neq -y$,

$$= \frac{x+y}{xy(x-y)} \cdot \frac{(x+y)(x-y)}{xy} = \frac{(x+y)^2}{x^2y^2}.$$

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V20c

■ La potenza di frazioni algebriche

■ DEFINIZIONE

Potenza di una frazione algebrica

La potenza di una frazione algebrica è la frazione algebrica che ha per numeratore la potenza del numeratore e per denominatore la potenza del denominatore:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}.$$

■ ESEMPIO

$$1. \left(\frac{a+b^2}{a^2-2b}\right)^3 = \frac{(a+b^2)^3}{(a^2-2b)^3}.$$

$$2. \left(\frac{3a^2}{2b}\right)^2 = \frac{9a^4}{4b^2}.$$



1729

...che cosa ha di speciale un numero così?

→ Il quesito completo a pag. 413

Il numero 1729 è al centro di un aneddoto che vide protagonisti due matematici del secolo scorso, l'indiano Srinivasa Ramanujan e l'inglese Godfrey Hardy. Un giorno del 1917 Hardy fece visita all'amico, ricoverato per malattia all'ospedale londinese di Putney. Gli raccontò di aver preso il taxi 1729, un numero che suonava piuttosto insulso alle sue orecchie. Era forse di cattivo augurio? Ramanujan tranquillizzò il collega, replicando: «Ma no, Hardy! È un numero molto interessante. È il più piccolo numero intero esprimibile in due modi diversi come somma di due cubi positivi». Ramanujan faceva riferimento alla seguente uguaglianza: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. Non sappiamo come il matematico l'abbia scoperta, ma noi, al suo posto, avremmo potuto utilizzare la scomposizione della somma di due cubi:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

Sapendo che gli unici fattori di 1729 sono 7, 13, 19 (ovvero: $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$), il problema si traduce in:

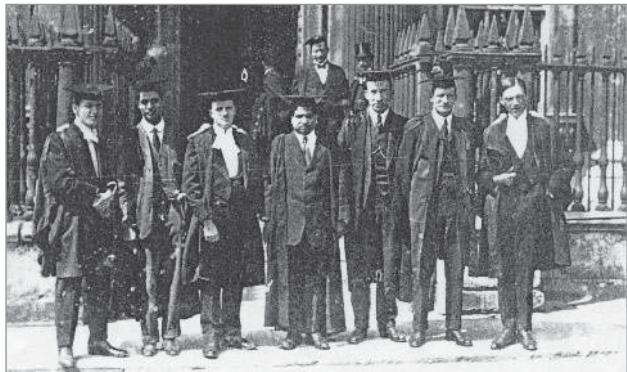
$$\begin{aligned} 1729 &= x^3 + y^3 = \\ &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) = \\ &= 7 \cdot 13 \cdot 19. \end{aligned}$$

Si tratta di trovare due numeri naturali x e y tali che: $(x + y)$ sia uguale a 7, 13 o 19 e $(x^2 - xy + y^2)$ al prodotto dei due numeri rimanenti. Le possi-

bili scelte di x e y tali che il primo fattore $(x + y)$ sia uguale al numero 7 sono: $(6 + 1)$, $(5 + 2)$, $(4 + 3)$. Nessuna di queste copie dà come somma di cubi 1729. Passiamo al numero 13. Le possibilità di esprimere il 13 come somma di due numeri naturali sono: $(12 + 1)$, $(11 + 2)$, $(10 + 3)$, $(9 + 4)$, $(8 + 5)$, $(7 + 6)$. Elevando al cubo e sommando i termini, si può vedere che solo per la coppia 12 e 1 la somma dei cubi è 1729. Ecco la prima soluzione. Analogamente si procede per il numero 19, scoprendo, dopo un po' di calcoli, che 9 e 10 sono la seconda soluzione del problema.

Ma Ramanujan ha detto qualcosa in più: 1729 è il più piccolo numero intero esprimibile come somma di due cubi positivi in due modi diversi. Esiste una dimostrazione di questa affer-

mazione, ma è decisamente laboriosa. E probabilmente il giovane matematico non ne era a conoscenza. Era, infatti, praticamente privo di formazione universitaria. Nato in un piccolo villaggio indiano nel 1887 da una famiglia molto povera, aveva dimostrato fin da bambino uno straordinario talento per i numeri ed era arrivato a «intuire» da autodidatta risultati complessi, pur non possedendo il formalismo per dimostrarli. Grazie all'interessamento del matematico Hardy, che riconobbe le sue intrinseche abilità, Ramanujan riuscì a ottenere la laurea all'Università di Cambridge senza dare alcun esame. La scoperta delle proprietà del numero 1729 è solo un esempio delle sue eccezionali capacità di calcolo. Purtroppo morì molto giovane, stroncato dalla tubercolosi a soli 32 anni.



▲ Srinivasa Ramanujan (al centro) e G.H. Hardy (all'estrema destra), con altri colleghi, al Trinity College, Cambridge.

CITAZIONI FAMOSE

Il numero 1729 compare in diversi episodi della serie televisiva *Futurama*, ideata da Matt Groening, padre dei *Simpson*. In un episodio, per esempio, 1729 è il numero della navicella spaziale *Nimbus*; in un altro, il messaggio di una cartolina natalizia inviata al robot *Bender*. Un riferimento al numero 1729 è presente anche nel film *Proof*, dove Anthony Hopkins interpreta la parte di un genio matematico ai limiti della follia.

LA TEORIA IN SINTESI

La scomposizione in fattori e le frazioni algebriche

1. La scomposizione in fattori dei polinomi

Scomporre un polinomio in fattori significa scriverlo come prodotto di polinomi. Se un polinomio si può scomporre, diciamo che è **riducibile**. Altrimenti è **irriducibile**.

Abbiamo esaminato i seguenti **metodi di scomposizione**.

- Il raccoglimento a fattore comune.

ESEMPIO $ab + ac = a(b + c)$.

- Il raccoglimento parziale.

ESEMPIO $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$.

- La scomposizione riconducibile a prodotti notevoli:

– la **differenza di due quadrati**:
 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

ESEMPIO $9a^2 - 1 = (3a + 1)(3a - 1)$.

– il **quadrato di un binomio**:
 $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

ESEMPIO $25x^2 - 30x + 9 = (5x - 3)^2$.

– il **quadrato di un trinomio**:
 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$.

ESEMPIO $x^2 + 1 + 4y^2 + 2x - 4xy - 4y = (x + 1 - 2y)^2$.

– il **cubo di un binomio**:
 $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$.

ESEMPIO $a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = (a - 2)^3$.

– la **somma o la differenza di due cubi**:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2); \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

ESEMPIO $27 - y^3 = (3 - y)(9 + 3y + y^2)$.

- La scomposizione di **particolari trinomi di secondo grado**:

$$x^2 + sx + p = (x + x_1)(x + x_2),$$

$$\text{essendo } s = x_1 + x_2, \quad p = x_1 \cdot x_2.$$

ESEMPIO $a^2 + 7a + 6 = (a + 1)(a + 6)$.

- La scomposizione mediante **il teorema e la regola di Ruffini**.

ESEMPIO Dato il polinomio

$$P(a) = 3a^2 + a - 2,$$

cerchiamo i suoi zeri fra i divisori del termine noto, ossia $+1, -1, +2, -2$, e fra le frazioni

$$\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}.$$

$$P(1) = 3(1)^2 + 1 - 2 = 2 \neq 0;$$

$$P(-1) = 3(-1)^2 + (-1) - 2 = 0.$$

-1 è uno zero di $P(a)$, quindi $P(a)$ è divisibile per $a + 1$.

	3	+ 1	- 2	
- 1		- 3	+ 2	
		3	- 2	0

$3a - 2$ è il quoziante della divisione, quindi:

$$3a^2 + a - 2 = (a + 1)(3a - 2).$$

2. Il M.C.D. e il m.c.m. fra polinomi

La ricerca del **M.C.D.** e del **m.c.m.** fra polinomi avviene in modo analogo a quello visto per i monomi. I polinomi devono essere scomposti in fattori irriducibili.

POLINOMI	FATTORI
$a^2 - 1$	$(a + 1)(a - 1)$
$a^2 + 2a + 1$	$(a + 1)^2$
$a^2 + 3a + 2$	$(a + 1)(a + 2)$

- M.C.D. = $a + 1$;
è il prodotto di tutti i fattori comuni, presi ciascuno con l'esponente minore.
- m.c.m. = $(a + 1)^2(a - 1)(a + 2)$;
è il prodotto di tutti i fattori irriducibili, comuni e non comuni, presi ciascuno con l'esponente maggiore.

3. Le frazioni algebriche

Una **frazione algebrica** è una frazione che ha dei polinomi al numeratore e al denominatore. Il polinomio al denominatore non può essere il polinomio nullo. Una frazione algebrica non esiste per quei valori delle lettere che annullano il denominatore.

Le **condizioni di esistenza** (C.E.) sono tutte le disugaglianze che le variabili devono verificare affinché il denominatore non sia nullo.

ESEMPIO

$\frac{2x+3}{x-5}$ ha come condizione di esistenza

C.E.: $x \neq 5$, perché per $x = 5$: $\frac{2(5) + 3}{(5) - 5} = \frac{13}{0}$,

e $\frac{13}{0}$ non ha significato.

4. Il calcolo con le frazioni algebriche

È possibile semplificare le espressioni con frazioni algebriche facendo uso di **regole di calcolo** analoghe a quelle delle frazioni numeriche.

ESEMPIO

$$1. \frac{a^2 + ab}{ab - b^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2} + \frac{b}{a} =$$

Scomponiamo in fattori e semplifichiamo:

$$= \frac{a(a+b)}{b(a-b)} \cdot \frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2} + \frac{b}{a} =$$

C.E.: $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq b \wedge a \neq -b$.

Moltiplichiamo:

$$= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} =$$

Addizioniamo:

$$= \frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

$$2. \frac{x+y}{x^2-y^2} : \frac{x^2y-x^2}{x^3-yx^2} - \frac{1}{x} =$$

Scomponiamo in fattori e semplifichiamo:

$$= \frac{x+y}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{x^2(y-1)}{x^2(x-y)} - \frac{1}{x} =$$

C.E.: $x \neq -y \wedge x \neq y \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 1$.

Moltiplichiamo la prima frazione per la reciproca della seconda e semplifichiamo:

$$= \frac{1}{x-y} \cdot \frac{x-y}{y-1} - \frac{1}{x} =$$

Moltiplichiamo:

$$= \frac{1}{y-1} - \frac{1}{x} =$$

Sottraiamo:

$$= \frac{x-y+1}{(y-1)x} = \frac{x-y+1}{xy-x}.$$

1. La scomposizione in fattori dei polinomi

→ Teoria a pag. 413

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 TEST I seguenti polinomi sono tutti scomposti in fattori, *tranne uno*. Quale?

- [A] $(x+1)(x-1)$
- [B] $ab(x-2)$
- [C] $ax^2(a+2)$
- [D] $a+2b(a-2b)$
- [E] $(a-b)(a+b)$

2

VERO O FALSO?

a) Ogni binomio è scomponibile in fattori.

V F

b) Il polinomio $7x + a(x+1)$ è scomposto in fattori.

V F

c) La scomposizione in fattori di un polinomio è unica, a meno dell'ordine.

V F

d) Tutti i binomi di primo grado sono irriducibili.

V F

ESERCIZI

■ Il raccoglimento a fattore comune

■ ESERCIZIO GUIDA

3 Quando è possibile, scomponiamo in fattori i seguenti polinomi, raccogliendo a fattore comune:

- a) $14a^4 - 8a^2b^2$;
- b) $\frac{2}{3}x^2y + \frac{2}{9}y$;
- c) $a(2a - b) + (2a - b)^2$;
- d) $x(a - b) + (b - a)$;
- e) $b^{2n+1} - b^n$, con $n \in \mathbb{N}$.

a) Scomponiamo $14a^4 - 8a^2b^2$.

Calcoliamo il M.C.D. fra i termini del polinomio:

$$\text{M.C.D.}(14a^4, 8a^2b^2) = 2a^2.$$

Raccogliamo $2a^2$ nel polinomio dato:

$$14a^4 - 8a^2b^2 = 2a^2(\dots\dots\dots).$$

Dividiamo il primo termine per il M.C.D.:

$$14a^4 : 2a^2 = 7a^2$$

$$\underline{14a^4} - 8a^2b^2 = \underline{2a^2}(7a^2 \dots\dots).$$

Dividiamo il secondo termine per il M.C.D.:

$$-8a^2b^2 : 2a^2 = -4b^2$$

$$14a^4 - \underline{8a^2b^2} = \underline{2a^2}(7a^2 - \underline{4b^2}).$$

Dunque si ha:

$$14a^4 - 8a^2b^2 = 2a^2(7a^2 - 4b^2).$$

b) Scomponiamo $\frac{2}{3}x^2y + \frac{2}{9}y$.

$$\text{M.C.D.}\left(\frac{2}{3}x^2y, \frac{2}{9}y\right) = y.$$

Raccogliamo $\frac{2}{3}y$ nel polinomio dato: $\frac{2}{3}x^2y + \frac{2}{9}y = \frac{2}{3}y\left(x^2 + \frac{1}{3}\right)$.

Avremmo anche potuto raccogliere $\frac{2}{9}y$, ottenendo: $\frac{2}{3}x^2y + \frac{2}{9}y = \frac{2}{9}y(3x^2 + 1)$.

c) Scomponiamo $a(2a - b) + (2a - b)^2$. In questo caso non c'è bisogno di calcolare il M.C.D., perché il binomio scritto fra parentesi è già messo in evidenza ed è comune ai due termini del polinomio.

Raccogliamo $(2a - b)$:

$$a(2a - b) + (2a - b)^2 = \cancel{a}(\cancel{2a - b}) \cdot [\cancel{a} + (\cancel{2a - b})] = (2a - b)(3a - b).$$

$\cancel{a}(\cancel{2a - b}) : \cancel{2a - b}$ $(\cancel{2a - b})^2 : \cancel{2a - b}$

d) Scomponiamo $x(a - b) + (b - a)$.

I due termini entro parentesi sono $(a - b)$ e $(b - a)$. Essi sono opposti, pertanto possiamo raccogliere in uno dei due, per esempio in $b - a$, il fattore -1 e scrivere $(b - a) = -(a - b)$.

Raccogliamo $(a - b)$:

$$x(a - b) - (a - b) = \cancel{x}(\cancel{a - b})(x - 1).$$

$\cancel{x}(\cancel{a - b}) : \cancel{a - b}$ $-(\cancel{a - b}) : (\cancel{a - b})$

e) Per la prima proprietà delle potenze ($a^n \cdot a^m = a^{n+m}$):

$$b^{2n+1} = b^{2n} \cdot b^1 = b^n \cdot b^n \cdot b^1.$$

Si ha, raccogliendo b^n :

$$b^{2n+1} - b^n = b^n \cdot b^n \cdot b^1 - b^n = \cancel{b^n}(b^{n+1} - 1).$$

COMPLETA

- | | | | |
|----------|--|---|---------------------------------------|
| 4 | $2a^2 + 8x^2 = 2(\dots + \dots);$ | $-5a + 25b = -5(\dots - \dots);$ | $3x^3 - 9x^9 = 3x^3(\dots - 3\dots).$ |
| 5 | $-4ax - 4x = -4x(a + \dots);$ | $5x^2 + 5y^2 = \dots (x^2 + \dots);$ | $-2a + \dots = -2(\dots - 2b).$ |
| 6 | $-y - 9y^2 = \dots (\dots + 9y);$ | $-10x^2 + 20xy = -10x(\dots - \dots);$ | $9a^2 - 3ax = \dots (3a - \dots).$ |
| 7 | $by^2 + 2b^2y - by = \dots (\dots + \dots - 1);$ | $-a^2x^4 - a^3x^3 + 2a^4x^2 = -a^2x^{\dots} (x^{\dots} + \dots - \dots).$ | |
| 8 | $3\dots + 9x^{\dots} - x^{\dots} = x(3 + 9x - x^2);$ | $\frac{2}{7}xy + \frac{4}{21}x^2 = \dots x(\dots + \dots).$ | |

Quando è possibile, scomponi in fattori, raccogliendo a fattore comune (con $n \in \mathbb{N}$).

- | | | | |
|-----------|-------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|
| 9 | $3x + 6y;$ | $a^3x^2 - a^3y;$ | $x^3 + 4x.$ |
| 10 | $8a^4 - 4a^3 + 2a^2;$ | $3xy + 6x^2 - 9y^2;$ | $a^2b - ab.$ |
| 11 | $2ab - 4a^2;$ | $\frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}a;$ | $2ax - 4a + 2a^2.$ |
| 12 | $2x^2y + 6xy^2 + 4y^3;$ | $-3x^2 - 15x - 21;$ | $a^3x^3 - x + ax^2.$ |
| 13 | $-2a^2 - 4a - 8;$ | $a^2x + 12ax + 9ax^2;$ | $-5y^2 + 15xy^2 - 25y.$ |
| 14 | $x^4 + x^7 + x^5;$ | $2x^2y^2 + 2x^2y^3 - 4xy^2;$ | $\frac{1}{4}x^2y - \frac{1}{16}x^2.$ |

- 15** $5x - 10xy + 15y;$ $-27a^2 + 9ay - 18a;$ $-6a^3 + 9a^2b + 3a^2.$
- 16** $-2a^2 + 4ab - 2a^3;$ $cx^2 - 4cx + c^2x^2;$ $6xy^2 - 4x^2 + 10xy.$
- 17** $3a + 9b - 15;$ $4a^4 - 2a^3 - 2a^6;$ $-3a^5 + 12a^3b - 6a^2.$
- 18** $6ax + 2a - 4a^2x^2;$ $125x^2 - 25x + 25xy;$ $12a^2b^3 + 30a^3b + 6ab.$
- 19** $\frac{2}{3}a^2y^3 + \frac{1}{3}ay^2;$ $4x - 2x^2 - 2;$ $\frac{2}{5}ax^2 + \frac{4}{5}a.$
- 20** $18a^3y - 4a^4y^3 + 10a^5y^2;$ $4x^3 + 3x^2y;$ $\frac{1}{9}y^3 - 3y^2.$
- 21** $\frac{1}{3}x^2y - \frac{1}{9}x^3y^2;$ $5x^3 - 15x^2y + 20x^4;$ $4x^2y^5 - 12xy^6 - 6xy^5.$
- 22** $\frac{1}{2}a^2bc - \frac{1}{4}a^4bc + \frac{1}{8}a^3b^3;$ $\frac{1}{3}a^4 - 3a^3;$ $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{3}{2}xy^4.$
- 23** $\frac{5}{2}a^2b - \frac{15}{4}ab^2 + \frac{3}{4}ab;$ $\frac{4}{9}x^{18} - \frac{2}{3}x^6 + x^3;$ $-2a^9 + 8a^4 + 2a^3.$
- 24** $15a^4 + 6a^2b + 3a;$ $2ac + 14ab;$ $\frac{2}{3}a^2b + \frac{10}{9}ab^2.$
- 25** $3z^2 - 27y^3z + 12y^2z^2;$ $12x^3y^2 + 3x^2y^2;$ $a^3 - a^2 - a + 2a^2.$
- 26** $a(x+y) + b(x+y);$ $4a(x+2y) - 2(x+2y);$ $x(a+b) - (a+b).$
- 27** $(x+3y) - (x+3y)^2;$ $(a-b)^2 - (a-b);$ $(2x-3y^2)^3 + (2x-3y^2)^2.$
- 28** $(a+1)(a+2) + (-a-1)(a+3);$ $2(x+y)(a+b) + \frac{1}{2}(x+y).$
- 29** $(a^2-b)^4 + 2(a^2-b)^3 - (a^2-b)^2;$ $(a+b)^2(2b-3) - 2(a+b)(2b-3)^2.$
- 30** $(2a+b)^2 - 3(b+2a);$ $x(a-1) - y(1-a);$ $3(a-2x) - 2y(2x-a).$
- 31** $x^{2n} + 2x^n - \frac{1}{2}x^{3n+1};$ $-a^n + \frac{1}{3}a^{2+n};$ $\frac{3}{2}x^ny^{2n} + \frac{5}{2}x^{2n}y^n.$
- 32** $3x^n + 6x^{n-2}, \text{ con } n \geq 2;$ $x^{n+1} - x^{2n} + x^{n+2};$ $xa^{n+2} - ya^{n+1} + za^n.$
- 33** $(a+2)^n - (a+2)^{n+1};$ $(x+3)^{2+n} - (x+3)^n.$
- 34** $(b+1)^{n+3} - b^3(b+1)^n - 3b^2(b+1)^n;$ $(a-3)^{2n} - (3-a)^{2n+1}.$

35

TEST Sui due binomi di primo grado $5a - 40$ e $3b + 1$, possiamo affermare che:

- [A] sono entrambi irriducibili.
- [B] il secondo è riducibile e il primo è irriducibile.
- [C] sono entrambi scomponibili mediante raccoglimento a fattore comune.
- [D] solo il primo è scomponibile mediante raccoglimento a fattore comune.
- [E] solo il secondo è scomponibile mediante raccoglimento a fattore comune.

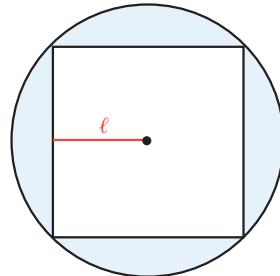
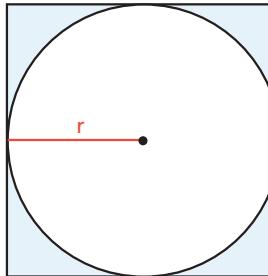
36

TEST Una delle seguenti uguaglianze è *falsa*. Quale?

- [A] $mx + my = (x + y)m$
- [B] $ax + bx + x = x(a + b + 1)$
- [C] $x^2 + x = x(x + 1)$
- [D] $am + mb + m = m(a + b)$
- [E] $ax^2 + bx^2 = (a + b)x^2$

37

Trova l'area della parte colorata usando il dato inserito nella figura e scrivi il risultato come prodotto di fattori.



38

Considera i due polinomi $2x^n + 3x^2$ e $3x^3 - 2x^n$.

- Determina per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ è possibile raccogliere sia il fattore x^2 nel primo polinomio sia il fattore x^3 nel secondo e scrivi la scomposizione.
- Sostituisci nei due polinomi il più piccolo valore di n tra quelli trovati nel punto a), esegui la somma e la scomposizione in fattori.

$$[a) n \geq 3, x^2(2x^{n-2} + 3), x^3(3 - 2x^{n-3}); b) 3x^2(x + 1)]$$

39

Per quale valore di $k \in \mathbb{N}$ il polinomio $x^{2k+3} - x^{k+1}$ è scomponibile in $x^4(x^5 - 1)$?

$$[k = 3]$$

■ Il raccoglimento parziale

■ ESERCIZIO GUIDA

40 Scomponiamo in fattori i seguenti polinomi:

$$a) 3bc + 2ab - 2a - 3c; \quad b) 2bx^3 - 2bx^2 - x^3 + x^2; \quad c) 3x^{n+1}y^2 + (x-1)^2 - 3x^ny^2, \text{ con } n \in \mathbb{N}.$$

a) Scomponiamo $3bc + 2ab - 2a - 3c$.

Possiamo procedere in due modi alternativi:

1. 3bc + 2ab - 2a - 3c =

Raccogliamo fra i termini sottolineati rispettivamente in blu e in rosso i monomi $3c$ e $2a$:

$$= 3c(\underline{b} - 1) + 2a(\underline{b} - 1) =$$

Raccogliamo il binomio $(b - 1)$:

$$= (b - 1)(3c + 2a).$$

2. 3bc + 2ab - 2a - 3c =

Raggruppiamo diversamente i termini e raccogliamo b e -1 :

$$= b(3c + 2a) - 1(3c + 2a) =$$

Conviene indicare il fattore 1 per rendere più facile il raccoglimento finale:

$$= (3c + 2a)(b - 1).$$

b) Scomponiamo $2bx^3 - 2bx^2 - x^3 + x^2$.

Raccogliamo prima il monomio x^2 nel polinomio dato:

$$= x^2(2bx - 2b - x + 1) =$$

Nel polinomio tra parentesi raccogliamo poi $2b$ fra i primi due termini e -1 fra gli altri due:

$$= x^2[2b(x - 1) - 1(x - 1)] =$$

Raccogliamo il binomio $(x - 1)$:

$$= x^2(2b - 1)(x - 1).$$

c) Raccogliamo nel primo e nell'ultimo termine il monomio in comune $3x^n y^2$:

$$3x^n y^2(x - 1) + (x - 1)^2 =$$

Raccogliamo tra i due termini il binomio $(x - 1)$:

$$= (x - 1)(3x^n y^2 + x - 1).$$

COMPLETA

41 $3ab + ax + 3by + xy = a(\dots + \dots) + y(\dots + \dots) = (3b + \dots)(\dots + \dots)$

42 $x^4 + x^3 + 4x + 4 = x^3(\dots + \dots) + \dots(x + 1) = (\dots + \dots)(\dots + \dots)$

43 $ax - 4x - \dots a + \dots = x(a - 4) - 5(a - 4) = (x - \dots)(a - \dots)$

44 $\frac{1}{3}a + ax^2 - \frac{2}{3} - 2x^2 = \frac{1}{3}(\dots - 2) + x^2(a - \dots) = (\dots + \dots)(\dots - \dots)$

Scomponi in fattori mediante il metodo del raccoglimento parziale (con $m, n \in \mathbb{N}$).

45 $5ay - y - 5a + 1$

59 $\frac{3}{4}xy + \frac{1}{2}y + 3x + \frac{1}{8}y^2$

46 $x^2y^2 + 1 + x^2 + y^2$

60 $3(a + b) + x(a - b) - 3(a - b) - x(a + b)$

47 $3a^2b - 2a + 12ab - 8$

61 $y^4 - y^3 - 2y + 2$

48 $x^3 + 12x^2 + 6x + 72$

62 $ax + 6x + ay + 6y$

49 $5ax + 2ay + 5bx + 2by$

63 $\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}xy - 3a + ay$

50 $9ax - 6a + 12bx - 8b$

64 $x^2 + xy + x + y$

51 $(a - b)y - b + a$

65 $ay - 4a - 3y + 12$

52 $5ax + ay^2 - y^2 - 5x$

66 $2ax + 4x - 3a - 6$

53 $x^3y^2 + 2x^3y - ay - 2a$

67 $ax - 4a + x - 4 + xy - 4y$

54 $3ab - 6ac + b^2 - 2bc$

68 $3ax^2 - 6x^2 + 3a - 6$

55 $12a^2 - 21b^3 - 28ab^2 + 9ab$

69 $x^4 + 4x^2 - x^3y - 4xy$

56 $(a + b)^2 - ax - bx$

70 $a^2bx + a^2b + bxy^2 + by^2$

57 $\frac{3}{4}xy - \frac{3}{2}yz - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}z$

58 $\frac{4}{3}x^2y + \frac{2}{3}x - 4xy - 2$

71 $12a^2 - 4a - 3a + 1$

72 $x^3y - x^2y^2 + 2x - 2y$

73 $2a^3b^2 - 12a^2b^4 + 4ab^6 - 24b^8$

74 $2(6a - 15b) - 2a^2 + 5ab$

75 $(5 - x)(5 + x) + (x - 5)^2 + (2x - 10)(x + 3)$

76 $(a + 3b)^2 - 2a^2 - 6ab - 9b - 3a$

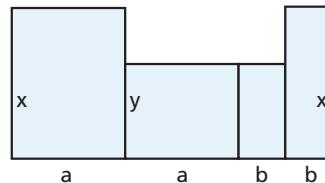
77 $-8x^2y + 4xy^2 + 6ax^2y - 3axy^2; \quad (2a + x)^2 - 4x^3 - 8ax^2.$

78 $x^n y^n - y^{2n} + x^n - y^n; \quad a^{n+1} - a^n - a + 1.$

79 $x^{2n} - 2x^n + 2x^m - x^{n+m}; \quad 2x^{n+1} - 2xy^n + x^n y - y^{n+1}.$

80 $2a^{n+1} + 2a^n b + (a + b)^2; \quad 3x^{n+2} + (x^2 - 3 - 9x^n).$

81 Trova l'area della figura ed esprimila come prodotto di fattori.



$$[(a+b)(x+y)]$$

■ La scomposizione mediante la differenza di due quadrati

$$\mathbf{A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)}$$

■ ESERCIZIO GUIDA

82 Scomponiamo in fattori, riconoscendo la differenza di due quadrati:

a) $25a^2 - 9;$ b) $16a^4 - 1;$ c) $5x^3 - 45xy^2;$ d) $(5x - 2)^2 - 4x^2.$

quadrato quadrato
 di $5a$ di 3
 a) $25a^2 - 9 = (5a + 3)(5a - 3).$

quadrato quadrato quadrato quadrato
 di $4a^2$ di 1 di $2a$ di 1
 b) $16a^4 - 1 = (4a^2 + 1)(4a^2 - 1) =$
 $= (4a^2 + 1)(2a + 1)(2a - 1).$

c) $5x^3 - 45xy^2 =$

Raccogliamo $5x:$

$$= 5x(x^2 - 9y^2) = 5x(x + 3y)(x - 3y).$$

d) $(5x - 2)^2 - 4x^2 = [(5x - 2) + 2x][(5x - 2) - 2x] =$
 $= (5x - 2 + 2x)(5x - 2 - 2x) = (7x - 2)(3x - 2).$

COMPLETA

83 $81x^2y^4 - 25 = (\dots xy^2)^2 - (\dots)^2; \quad x^2 - \dots = (\dots + 2a)(\dots - 2a).$

84 $16a^2x^6 - 9 = (\dots)^2 - (\dots)^2; \quad \dots - \dots = (3a + \dots) \left(\dots - \frac{1}{2} \right).$

85 $\dots - y^8 = (x^3 - \dots)(\dots + \dots); \quad 4a^6 - \dots = (2a^{\dots} - b^2)(\dots + \dots).$

Scomponi in fattori, riconoscendo la differenza di due quadrati (con $n \in \mathbb{N}$).

86	$x^2 - 49y^2;$	$9 - a^2b^2.$	94	$2a^4 - 8;$	$3x^3y^2 - 27x.$
87	$4x^2 - 9y^2;$	$25a^6b^8 - \frac{1}{4}.$	95	$121y^8 - 49x^2y^4;$	$x^3 - \frac{49}{9}a^2x.$
88	$81 - a^2;$	$16x^2 - a^4.$	96	$\frac{5}{4}b - 125b^3;$	$\frac{3}{2}x^5y^3 - \frac{27}{8}x^3y^5.$
89	$a^4 - 16b^2;$	$-y^2 + 64x^6.$	97	$(ab - 1)^2 - 1;$	$25(a - b)^2 - 16(a + b)^2.$
90	$a^2 - (a + b)^2;$	$x^6 - 4.$	98	$(a + 3b)^2 - 25b^2;$	$25x^6 - \frac{1}{9}x^2y^4.$
91	$x^4 - 49;$	$9 - 4y^2.$	99	$(-3x - 2)^2 - (-5x + 2)^2;$	$-\frac{16}{9}x^{10} + 1.$
92	$16a^2 - 1;$	$9x^6 - 4.$	100	$x^{2n} - 1;$	$a^{2n} - b^{6n}.$
93	$\frac{1}{81} - x^2y^4;$	$4a^8 - \frac{1}{16}.$	101	$9x^{2n} - 4y^{8n};$	$\frac{1}{16}a^{16n} - 25b^{10n}.$

Scomponi in fattori (con $n, m \in \mathbb{N}$).

102	$5z^2 - 5;$	$x^3 - 9xy^2;$	$25a^5b^3 - a^3b.$
103	$100x^6 - 16x^2y^8;$	$12a^4 - 12;$	$7x^{12} - 7y^8.$
104	$2(2a^2 - 3)^2 - 8;$	$3xy^2 - 3x^3;$	$5b^2(b - 3) - b^2 + 9.$
105	$-a^4 - 16b^4 + 16 + a^4b^4;$	$1 - x^2 - y^2 + x^2y^2;$	$12x^4 + 4x^3 - 3x^2 - x.$
106	$\left(\frac{7}{4} + x\right)^2 + \frac{21}{4} + 3x;$	$\frac{1}{2}ax - x - \left(\frac{3}{2}ac - 3c\right);$	$6(x - 2)^2 - a(2 - x)^2.$
107	$x^4y^4 - 81 + 81x^4 - y^4;$	$3(a + 2b)^2 - 3a^2;$	$(x^2 + a) + 4(3x^2 + 3a)^2.$
108	$6a^2(x + y) - 6a^2(x - y);$	$ax - 2ay + bx - 2by + 2x - 4y;$	$75 - 3(a + 2y)^2.$
109	$a^2x - b^2x + a^2y - b^2y - a^2 + b^2;$	$(3a - x)^3 - 4(3a - x);$	$12(a + b)^3 - 27(a + b)(a - 6b)^2.$
110	$16a^4x - 36b^2x;$	$(a - 3x)^2 + 2(a - 3x)(a + 3x);$	$b^6 - b^4 + 2b^2 - 2.$
111	$(xy + 2)^2 - 4;$	$x^7 - 25x^3y^2;$	$5ax + 25x - 5a - 25.$
112	$6ab - 16ax;$	$2a^3 + 4a^2 - 3a - 6;$	$\left(3a - \frac{1}{2}x\right)^2 - 15a + \frac{5}{2}x.$
113	$2(a - 1)^2 - 8(x + 3)^2;$	$4a - 4b - ab^2 + b^3;$	$\frac{4}{27}x^3 - \frac{1}{3}x.$
114	$4a^3 - 4a^2 - 4a + 4;$	$\frac{x^4}{5} - \frac{16}{5};$	$9b - 18 - (b^2 - 4).$
115	$x^{15} - 16x^7;$	$(2 - x)^2 + 4 - x^2 + (10 - 5x)(2 + x);$	$2b^{12} - 32b^8.$
116	$\frac{4}{49}x^3 - \frac{16}{25}xy^2;$	$-\frac{8}{125}a^2y^5 + \frac{16}{25}a^2y^4 + \frac{1}{10}y - 1;$	$8a^5b^2 - 12a^5 + 48a^3b^2 - 32a^3b^4.$
117	$(x - y^2) + 6(2x - 2y^2)^2;$	$\frac{3}{5}x^2y - \frac{1}{5}xy^2 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy;$	$a^3 - a^2 - a + 1.$

- 118** $\left(-\frac{3}{2}a + \frac{3}{4}b\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b\right)^2; \quad 27(x+y)^3 - 12(2x-y)^2(x+y); \quad a - 4 - ax^4 + 4x^4.$
- 119** $x^{2n}y^{3n} - 2x^{2n+1}y^n; \quad 9x^9y^n + 12x^6y^{n+2}; \quad a^{2n}b^n - (ab)^n + (a^n b^n)^2.$
- 120** $x^{2n} - y^{2n+2}; \quad -x^6y^2 + 16x^{2n+6}; \quad x^ny^{2n} - x^n - 2y^{2n} + 2.$
- 121** $a^{12n} - a^{6n}; \quad 3a^{3n+1} - 2ab^{6n} - 3a^{3n}b + 2b^{6n+1}; \quad x^{4n+2}y - 16x^2y^{2n+3}.$
- 122** $5a^{2n+1} - 20ab^{2n}; \quad a^{2n}b^{m+n} - a^nb^m - a^nb^n + 1; \quad 2^{3n} + 6^{2n} - 2^n - 3^{2n}.$

■ Polinomio scomponibile nel quadrato di un binomio

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

■ ESERCIZIO GUIDA

123 Quando è possibile, scomponiamo in fattori, riconoscendo in modo opportuno il quadrato di un binomio:

- a) $25a^2 + 30ab + 9b^2;$ b) $x^2y^2 - 2xy + 1;$ c) $a^4 + 2a^2b^2 + 4b^4;$
 d) $6x^2 - x^4 - 9;$ e) $(a + b)^2 - 2c(a + b) + c^2.$

a) Individuiamo i due termini del trinomio che possono essere dei quadrati e ricaviamone le basi:

quadrato di $5a$	quadrato di $3b$
$25a^2$	$9b^2$

Controlliamo che il doppio prodotto delle basi trovate sia uguale all'altro termine del trinomio:

$$2(5a \cdot 3b) = 30ab.$$

Allora possiamo scrivere il trinomio come:

$$25a^2 + 30ab + 9b^2 = (5a + 3b)^2.$$

b) $x^2y^2 - 2xy + 1 = (xy - 1)^2$

Nota che avremmo potuto anche scrivere $(1 - xy)^2.$

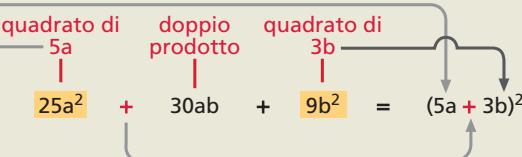
c) $a^4 + 2a^2b^2 + 4b^4$ non è il quadrato di un binomio, perché il doppio prodotto di a^2 e $2b^2$ non è $2a^2b^2$, ma $4a^2b^2.$

d) $6x^2 - x^4 - 9.$

È riconducibile a un quadrato di binomio raccolgendo il segno – nel trinomio dato:

$$-(- 6x^2 + x^4 + 9) = -(x^2 - 3)^2.$$

e) $(a + b)^2 - 2c(a + b) + c^2 =$
 $= [(a + b) - c]^2 = (a + b - c)^2.$



COMPLETA

124 $9x^2 - 30x + 25 = (\dots x - \dots)^2; \quad a^2 + 8ay + \dots = (\dots + 4y)^2.$

125 $x^4 + \dots + 9 = (\dots + 3)^2; \quad x^8 + 2x^4 + \dots = (x^{\dots} + \dots)^2.$

126 $\frac{1}{9}x^2 + \dots + 9 = (\dots + 3)^2; \quad \dots - \dots + 4 = (x^2 - 2)^2.$

CACCIA ALL'ERRORE Trova gli errori e spiega perché le uguaglianze sono sbagliate.

127 $x^2 + y^2 = (x + y)^2$

128 $a^2 + 4x^2 + 2ax = (a + 2x)^2$

129 $x^2 - 4y^2 - 4xy = (x - 2y)^2$

130 $x^2 - 4a^2 = (x - 2a)^2$

131 $x^4 + 4x^2y^2 + 4y^2 = (x^2 + 2y^2)^2$

132 $\frac{1}{4}a^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}a - y\right)^2$

Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un binomio.

133 $9x^2 + 6x + 1;$

$a^2 + 4ab + 4b^2;$

$x^2 - 10x + 25.$

134 $y^2 - 6y + 9;$

$4 + 9b^2 - 12b;$

$6ab^3 + b^6 + 9a^2.$

135 $x^2 - 4x + 4;$

$25x^2 - 60x + 36;$

$a^2 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}ax.$

136 $4a - 4a^2 - 1;$

$9y^2 + \frac{1}{4} - 3y;$

$25x^2 + 49y^2 - 35xy.$

137 $\frac{4}{25}y^2 - 2y + \frac{25}{4};$

$-x^4 - 16x^2 - 64;$

$25 - 15b + 9b^2.$

138 $\frac{4}{9}a^6 - \frac{4}{3}a^3 + 1;$

$1 + 2(x - 2) + (x - 2)^2;$

$(m^2 + 2)^2 - 12(m^2 + 2) + 36.$

139 $\frac{4}{9}b^2 + \frac{9}{4}a^2 - 2ab;$

$a^4 + 4a^2x^2 + 4x^4;$

$x^2 + 6ax + 9a^2.$

140 $16x^2 - 8x + 1;$

$4a^2 + 9 - 12a;$

$x^2 - 6xy + 9y^2.$

141 $a^3 - 8a^2b + 16ab^2;$

$7x^2 + 14xy + 7y^2;$

$x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2.$

142 $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{9};$

$a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2;$

$5bc^3 - \frac{25}{4}b^2 - c^6.$

143 $x^3 + 14x^2y + 49xy^2;$

$\frac{9}{7}a^2b^2c^2 + \frac{6}{7}a^2b^2c + \frac{1}{7}a^2b^2.$

144 $0,1y^4 + 0,3xy^2 + 0,25x^2;$

$3x^2y^4 - 12xy^2 + 12;$

$(x - 4y)^2 + 6xy^2(x - 4y) + 9x^2y^4.$

145 $(3a + b)^2 + \frac{1}{4}x^2 - x(3a + b);$

$a^{2n}b^6 + 4 - 4a^n b^3;$

$x^{2n} + 9 + 6x^n \quad (n \in \mathbb{N}).$

146 $2^{2n} - 2^{n+2} + 4;$

$4^n + 2^{n+1} + 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$

COMPLETA in modo che il polinomio che si ottiene sia il quadrato di un binomio.

147 $x^2 - 2ax + \dots;$

$y^2 + 9 + \dots;$

$a^2 - ab + \dots$

148 $\frac{1}{4}a^2 + 2ax + \dots;$

$a^2 - 3ab + \dots;$

$x^2 + xy + \dots$

149 $4x^2y^2 + y^4 + \dots = (2x^2 + \dots)^2;$

$1 + 4x^2 + \dots = (\dots + 2x^2)^2.$

■ La differenza di quadrati quando almeno un quadrato non è un monomio

ESERCIZIO GUIDA

150 Riconducendoci alla differenza di due quadrati, scomponiamo in fattori i seguenti polinomi:

a) $a^2 + 2ab - c^2 + b^2$; b) $x^2 - y^2 - 1 - 2y$; c) $(a + b)^2 + 4(a + b) + 4 - b^2$.

a) Segniamo i termini che corrispondono al quadrato di un binomio:

$$\underline{a^2} + \underline{2ab} - \underline{c^2} + \underline{b^2}$$

Notiamo una differenza di quadrati:

$$(a + b)^2 - (\underline{c})^2 =$$

$$= (\underline{a + b} + \underline{c})(\underline{a + b} - \underline{c}).$$

b) $x^2 - y^2 - 1 - 2y$.

Raccogliamo un segno – tra gli ultimi tre monomi:

$$\begin{aligned} x^2 - (y^2 + 1 + 2y) &= \\ &= x^2 - (y + 1)^2 = [x - (y + 1)][x + (y + 1)] = \\ &= (x - y - 1)(x + y + 1). \end{aligned}$$

c) $(a + b)^2 + 4(a + b) + 4 - b^2 =$

$$= [(a + b) + 2]^2 - b^2 =$$

$$= [(a + b) + 2 - b] \cdot [(a + b) + 2 + b] =$$

$$= (a + 2)(a + 2b + 2).$$

Scomponi in fattori mediante la differenza di due quadrati.

151 $4a^2 + 4ab + b^2 - c^2$; $25x^2 - y^2 - 10x + 1$; $a^2 - x^2 + 2xy - y^2$.

152 $x^4 - 4x^2y^2 - 1 - 4xy$; $\frac{1}{4}x^2 + 25y^2 - 5xy - 16$; $1 - a^8 + 16b^4 - 8b^2$.

153 $b^2 + 10b + 25 - a^2$; $9x^2 - a^2 - 4a - 4$; $x^4 + 4x^2 - y^2 + 4$.

154 $x^4y^6 - x^6y^4 + 1 - 2x^2y^3$; $25 + 9a^2b^2 - \frac{81}{4}b^4 - 30ab$; $x^2 + 4y^2 - 4xy - 9z^2$.

155 $(3y - 1)^2 + 4(3y - 1) + 4 - 9x^2$; $-(a - 2b)^2 + 9a^2 + 6ab + b^2$; $9a^2x^2 - 4a^2 - 32ax - 64x^2$.

156 $4a^2b^2 + \frac{1}{16} - ab - b^6$; $\frac{4}{9} - \frac{9}{4}y^4 - 4x^2y^2 - \frac{16}{9}x^4$; $9z^2 - 12yz + 4y^2 - 16(ax - 1)^2$.

157 $-y^4 - 16b^4 + 16 + 8y^2b^2$; $x^2 + 2x(x + 3y) + (x + 3y)^2 - 9$; $a^2 - 2ab + b^2 - (a + b)^4$.

158 $x^{2n} + 2^{n+1}x^n + 2^{2n} - 1$; $4b^2 - 4b^6 + 16b^{2n+2} + 16b^{n+2}$ ($n \in \mathbb{N}$).

RIEPILOGO

LA SCOMPOSIZIONE MEDIANTE RACCOGLIMENTO, DIFFERENZA DI DUE QUADRATI E QUADRATO DI BINOMIO

TEST

159 Tra i seguenti polinomi solo uno è lo sviluppo di un quadrato di binomio.
Quale?

- A** $x^2 + x + 1$
- D** $x^4 + 1 - 2x^2$
- B** $x^4 - 4x^2 - 4$
- E** $y^9 + 1 + 2y^3$
- C** $y^2 + 1 + 4y$

160 Solo una delle seguenti espressioni è la scomposizione in fattori del polinomio $x^2 - x - ax + a$. Quale?

- A** $x(x - 1) - a(x - 1)$
- D** $(x + 1)(x - a)$
- B** $(x - 1)(x + a)$
- E** $(x + 1)(x + a)$
- C** $(x - 1)(x - a)$

161

Solo una delle seguenti espressioni è una corretta scomposizione di $16x^6 - 4x^{16}$. Quale?

- A $(8x^3 + 2x^8)(8x^3 - 2x^8)$
- B $(4x^3 + 2x^4)(4x^3 - 2x^4)$
- C $(8x^3 + 2x^4)(8x^3 - 2x^4)$
- D $(4x^3 - 2x^8)^2$
- E $(4x^3 + 2x^8)(4x^3 - 2x^8)$

162

Solo una delle seguenti uguaglianze è vera. Quale?

- A $m^4 - n^9 = (m^2 + n^3)(m^2 - n^3)$
- B $9a + 9b - ac + bc = (a + b)(9 - c)$
- C $1 - x^2 = (x + 1)(1 - x)$
- D $m^2n + m - mn + 1 = (mn + 1)(m - 1)$
- E $m^4 - 4 = (m^2 - 2)^2$

Scomponi in fattori ($n \in \mathbb{N}$).

163 $(2x + y - 8)^2 - (2x + y)^2;$ $4y^4 - 12y^3 - y^2 + 6y - 9.$ $[-16(2x + y - 4); (y - 3)(4y^3 - y + 3)]$

164 $a^2 - 4b - b^2 - 4;$ $x^{10} - 6x^7 + 9x^4.$ $[(a + b + 2)(a - b - 2); x^4(x^3 - 3)^2]$

165 $9x^2y^2 + 6xy(1 - 2xy) + (1 - 2xy)^2;$ $\frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}a^2b + \frac{4}{9}b^2 - \frac{1}{9}a^6.$
 $\left[(1 + xy)^2; \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a^3 \right) \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}a^3 \right) \right]$

166 $b^2 - 2b + 1 - (a + b)^2;$ $32a^4(b + 1)^2 - 2x^4(b^2 + 2b + 1).$
 $[-(a + 1)(a + 2b - 1); 2(b + 1)^2(2a + x)(2a - x)(4a^2 + x^2)]$

167 $5bx - 25by - 2ax^2 + 50ay^2;$ $(x + y)(x + 2y) - x(x + y)^2 - x^2 + y^2.$
 $[(x - 5y)(5b - 2ax - 10ay); (x + y)(3y - xy - x^2)]$

168 $\frac{2}{3}x^4 + \frac{32}{3}x^2y^2 + \frac{128}{3}y^4;$ $(2 - x)^2 - 9;$ $(a - 1)^2 + 8a - 8 + 5(a^2 - 1).$

BRAVI SI DIVENTA ► E16



169 $27a^2x^2y + 90ax^2y + 75x^2y - 6a - 10;$ $20m^3t + 60m^2t^2 + 45mt^3 - 5mt;$ $\frac{1 + a^2b^2 - 2ab}{4} + 2 - ab.$
 $\left[(3a + 5)(9ax^2y + 15x^2y - 2); 5mt(2m + 3t + 1)(2m + 3t - 1); \left(\frac{ab - 1}{2} - 1 \right)^2 \right]$

170 $x + y - x^2 - 2xy - y^2;$ $a^6 - a^2 - 3a^4 + 3;$ $a^2 - x^2 - 7(a - x)^2.$
 $[(x + y)(1 - x - y); (a^2 - 3)(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1); 2(a - x)(-3a + 4x)]$

171 $b^5 - 5b^4 - b^2 + 10b - 25;$ $\frac{a^4}{64} + \frac{a^2}{4} + 1;$ $x^2 - 12bx + 36b^2.$
 $\left[(b - 5)(b^4 - b + 5); \left(\frac{a^2}{8} + 1 \right)^2; (x - 6b)^2 \right]$

172 $a^4 + 4a^3y + 4a^2y^2;$ $x^2 - 4x + 4 - (a + 2)^2;$ $4a + 4b + a^2 + 2ab + b^2.$
 $[a^2(a + 2y)^2; (x - a - 4)(x + a); (a + b)(4 + a + b)]$

- 173** $4x^4 + 9a^2 - 36x^2 - a^2x^2;$ $x^9 - x - 3x^8 + 3;$ $\frac{1}{4}a^3 - a^2b + ab^2.$
- $\left[(2x-a)(2x+a)(x-3)(x+3); (x-3)(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1); a\left(\frac{1}{2}a-b\right)^2 \right]$
- 174** $-\frac{x^6}{9} - 9a^2 - 2ax^3;$ $2b(a-x)^2 - 2a^2b;$ $(x+2c)^2 - (4x+8c)(x+c).$
- $\left[-\frac{1}{9}(x^3+9a)^2; -2bx(2a-x); (x+2c)(-3x-2c) \right]$
- 175** $2x^n + 2y^n + x^{2n} + y^{2n} + 2x^ny^n;$ $a^n x^{2n} + 2a^n x^n + a^n + x^n + 1.$
- $\left[(x^n+y^n)(2+x^n+y^n); (x^n+1)(a^n x^n + a^n + 1) \right]$
- 176** $16x^{n+2} + 9x^n - 24x^{n+1} + (4x-3)^2;$ $x^{2n} + 2x^n + 1 + (x^n+1)^3.$ $\left[(x^n+1)(4x-3)^2; (x^n+1)^2(x^n+2) \right]$

Problemi

- 177** È dato il polinomio $3x^2 + 3x + ax^{n-2} + a.$ a) Stabilisci per quale valore di $n \in \mathbb{N}$ esso è scomponibile, mediante raccoglimento parziale. b) Scrivi il polinomio scomposto in fattori. [a) $n = 3$; b) $(3x+a)(x+1)$]
- 178** Determina per quali valori di n il binomio $x^{n+1} - y^4$, con $n \in \mathbb{N}$, è scomponibile come differenza di due quadrati. [$\forall n$ dispari]
- 179** Considera il quadrinomio $x^2a^2 - x^2 - 4a^2 + 4.$ a) Scomponilo in fattori. b) Per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ il polinomio può essere scritto nella forma $(2-x)(2+x)?$ [a) $(x-2)(x+2)(a-1)(a+1)$; b) $a = 0$]

■ Polinomio scomponibile nel quadrato di un trinomio

$$\mathbf{A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A + B + C)^2}$$

■ ESERCIZIO GUIDA

- 180** Scomponiamo in fattori, se possibile, i seguenti polinomi, riconoscendo il quadrato di un trinomio:
- a) $9a^2 + 4b^2 + 1 - 12ab + 6a - 4b;$ b) $4a^2 + 4b^2 + c^2 + 4ab + 4ac + 4bc.$

- a) Individuiamo i tre termini del polinomio che possono essere dei quadrati e ricaviamone le basi:

quadrato di 3a	quadrato di 2b	quadrato di 1
9a ²	4b ²	1

$$9a^2 + 4b^2 + 1 - 12ab + 6a - 4b.$$

Controlliamo che i valori assoluti dei doppi prodotti corrispondano ai valori assoluti dei termini rimanenti:

2(3a · 2b)	2(3a · 1)	2(2b · 1)
12ab	6a	4b

$$9a^2 + 4b^2 + 1 - 12ab + 6a - 4b.$$

Analizziamo allora i segni dei doppi prodotti:

3a e 2b discordi	3a e 1 concordi	2b e 1 discordi	
9a ²	- 12ab	+ 6a	- 4b.

Dunque 3a e 1 hanno lo stesso segno, mentre 2b ha segno opposto. Abbiamo perciò due soluzioni possibili:

$$9a^2 + 4b^2 + 1 - 12ab + 6a - 4b = (3a - 2b + 1)^2$$

oppure

$$9a^2 + 4b^2 + 1 - 12ab + 6a - 4b = (-3a + 2b - 1)^2.$$

b) Individuiamo i due termini del quadrinomio che possono essere dei cubi e ricaviamone le basi:

$$\begin{array}{c} \text{cubo di } 2a \\ | \\ 8a^3 - 6a^2b + 6ab^2 - b^3. \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{cubo di } -b \\ | \\ -b^3 \end{array}$$

Verifichiamo la presenza dei relativi tripli prodotti:

$$3 \cdot (2a)^2 \cdot (-b) = -12a^2b \neq \\ 8a^3 - 6a^2b + 6ab^2 - b^3.$$

Dunque il quadrinomio **non** è riconducibile al cubo di un binomio.

COMPLETA

197 $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = (\dots + 1)^3;$

$$8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1 = (\dots x^{\dots} + \dots)^3.$$

198 $y^3 - \dots + \dots - 8 = (y - 2)^3;$

$$27 + 9a + \dots + \frac{1}{27}a^3 = (\dots + \dots)^3.$$

199 $8b^3 - \dots + 6b - \dots = (\dots - \dots)^3;$

$$x^3y^3 + \dots + 3x^5y + x^6 = (\dots + \dots)^3.$$

200 **CACCIA ALL'ERRORE** Trova gli errori e spiega perché le uguaglianze sono sbagliate.

$$a^3 - 8b^3 = (a - 2b)^3;$$

$$a^3 + 3a^2x^2 + x^3 = (a + x)^3;$$

$$\frac{1}{8}x^3 + 8 + 3x^2 + 3x = \left(\frac{1}{2}x + 2\right)^3;$$

$$x^3y^3 - 9x^2y^2 - 27xy - 27 = (xy - 3)^3;$$

$$1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 = (1 - 2x)^3;$$

$$a^3 - 1 + 3a^2 + 3a = (a - 1)^3.$$

Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il cubo di un binomio ($n \in \mathbb{N}$).

201 $27x^3y^3 + 27x^2y^2 + 9xy + 1; \quad a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3.$

202 $-a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3; \quad \frac{1}{8} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{27}x^3.$

203 $x^6 + 1 + 3x^4 + 3x^2; \quad a^3b^3 + 3a^2b^2 + 3ab - 1.$

204 $x^3 + 15x^2 + 75x + 125; \quad -1 - 3a - 3a^2 - a^3.$

205 $6a + 8a^3 - 1 - 12a^2; \quad y^3 + y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{27}.$

206 $x^3 - 3x^2y^2 - y^6 + 3xy^4; \quad a^6x^9 - 6a^4x^6 + 12a^2x^3 - 8.$

207 $2x^6 + 12x^4 + 24x^2 + 16; \quad \frac{1}{5}a^3 - \frac{6}{5}a^2 + \frac{12}{5}a - \frac{8}{5}.$

208 $-27a^3 - 36ab^4 - 54a^2b^2 - 8b^6; \quad 81 - 81x + 27x^2 - 3x^3.$

209 $\frac{1}{5}a^3 + \frac{6}{5}a^2 + \frac{12}{5}a + \frac{8}{5}; \quad \frac{1}{8}a^6 - \frac{1}{2}a^4x - \frac{8}{27}x^3 + \frac{2}{3}a^2x^2; \quad a^3 + \frac{1}{27}b^3 + a^2b + \frac{1}{9}ab^2.$

210 $(x+1)^3 - 3(x+1)^2y + 3(x+1)y^2 - y^3; \quad 0,6x^2 - 1 - 0,12x^4 + 0,008x^6.$

211 $x^{3n} - 3x^{2n}y^{n+1} - y^{3n+3} + 3x^ny^{2n+2}; \quad a^{3n}x^9 - 6a^{2n}x^6 + 12a^nx^3 - 8.$

212 $-a^6b^{3n} - a^{3n}b^6 - 3a^{4+n}b^{2n+2} - 3a^{2n+2}b^{4+n}; \quad a^{3n} - 0,125 - 1,5a^{2n} + 0,75a^n.$

COMPLETA in modo che il polinomio che si ottiene sia il cubo di un binomio ($n \in \mathbb{N} - \{0\}$).

213 $-a^3 + 3a^2x - \dots + x^3; \quad 8a^3 - \dots + 6a - 1; \quad 1 + 3x^2 + \dots + x^6.$

214 $\dots + 12a^2b + 6ab^2 + b^3; \quad 1 - 0,3a + \dots - 0,001a^3; \quad \frac{1}{27}x^3 + x^2y + \dots + 27 \dots.$

215 $a^{3n} - \dots + \dots - 1; \quad b^{3n+3} - \dots + \dots - b^3; \quad x^{6n} - \dots + 3x^{2n}y^{6n} - \dots.$

■ La scomposizione mediante la somma o la differenza di due cubi

$$\mathbf{A^3 \pm B^3 = (A \pm B) \cdot (A^2 \mp AB + B^2)}$$

■ ESERCIZIO GUIDA

216 Scomponiamo in fattori, riconoscendo la somma o la differenza di due cubi:

a) $8a^3 + b^3;$ b) $27x^3 - 1;$ c) $(a - b)^3 + (a + b)^3;$ d) $27x^{3n} - 8y^{12n+3},$ con $n \in \mathbb{N}.$

a) $8a^3 + b^3.$

Abbiamo i cubi di $A = 2a, B = b:$

$$(2a)^3 + b^3 = (2a + b)[(2a)^2 - 2ab + b^2] = (2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2).$$

b) $27x^3 - 1.$

Abbiamo i cubi di $A = 3x, B = 1:$

$$(3x)^3 - 1^3 = (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1).$$

c) $(a - b)^3 + (a + b)^3.$

Abbiamo i cubi dei binomi $A = (a - b), B = (a + b):$

$$(a - b)^3 + (a + b)^3 = [(a - b)^2 - (a - b)(a + b) + (a + b)^2] = \\ = 2a(a^2 - 2ab + b^2 - a^2 + b^2 + a^2 + 2ab + b^2) = 2a(a^2 + 3b^2).$$

d) $27x^{3n} - 8y^{12n+3}.$

Scriviamo $27x^{3n}$ e $8y^{12n+3}$ come potenze con esponente 3.

$$27x^{3n} = 3^3 x^{3n} = (3x^n)^3. \quad 8y^{12n+3} = 2^3 y^{3(4n+1)} = (2y^{4n+1})^3.$$

Abbiamo i cubi di $A = 3x^n$ e $B = 2y^{4n+1}$:

$$(3x^n)^3 - (2y^{4n+1})^3 = (3x^n - 2y^{4n+1})[(3x^n)^2 + (3x^n)(2y^{4n+1}) + (2y^{4n+1})^2] = \\ = (3x^n - 2y^{4n+1})(9x^{2n} + 6x^n y^{4n+1} + 4y^{8n+2}).$$

Scomponi in fattori, riconoscendo la somma o la differenza di due cubi.

- | | | | | |
|------------|---------------------------|--------------------------------------|-----------------------|--|
| 217 | $x^3 + 27;$ | $a^3b^3 + 1;$ | $125a^3 + 8b^3;$ | $\frac{8}{27}a^3 - 1.$ |
| 218 | $x^3 + 64y^3;$ | $\frac{1}{8}a^3b^3 + x^3;$ | $y^9 - 8;$ | $\frac{1}{27} - b^6y^6.$ |
| 219 | $x^6 + 64;$ | $x^6 + a^3;$ | $3x^4 + 81x;$ | $2a^5 - 250a^2.$ |
| 220 | $3m^3x^6 - 3;$ | $27a^3 + b^6c^9;$ | $5y^3 - 40x^6;$ | $\frac{27}{8}t^9p^6 - 125.$ |
| 221 | $-a^3b^3 - 27;$ | $81a^{10} - 24a;$ | $1 + (1 + b)^3;$ | $2x + 16x^4.$ |
| 222 | $\frac{3}{8} + 81y^3;$ | $\frac{1}{2}b^3 + \frac{27}{16}c^6;$ | $x^6 + y^3;$ | $\frac{3}{125}x^8 - \frac{24}{27}x^5.$ |
| 223 | $(a - 2b)^3 + (a + b)^3;$ | $125b^3 - (b - 3)^3;$ | $27y^3 - (x - 4y)^3;$ | $(x + 2y)^3 + x^3.$ |
| 224 | $27 - a^{3n};$ | $a^{6n} - b^{3n};$ | $64x^3 + 27y^{3n+6}$ | $(n \in \mathbb{N}).$ |
| 225 | $8a^{3n}b^6 - 27;$ | $8y^{3n+2} - \frac{1}{8}y^2x^3$ | $(n \in \mathbb{N}).$ | |

RIEPILOGO**LA SCOMPOSIZIONE MEDIANTE
RACCOGLIMENTO E PRODOTTI NOTEVOLI**

Nel sito: ▶ 20 esercizi in più
▶ 26 esercizi di recupero

**TEST**

- 226** Le seguenti uguaglianze sono ottenute applicando le regole della scomposizione di polinomi riconducibili a prodotti notevoli. Sono tutte errate, tranne una. Quale?

- [A] $x^3 + 1 = (x + 1)^3$
- [B] $x^3 + x^2 + x - 1 = (x - 1)^3$
- [C] $x^6 + 8x^3 + 16 = (x^3 + 4)^2$
- [D] $1 + 8h^6 = (1 + 2h^3)(1 + 4h^6 + 2h^3)$
- [E] $1 - c^3 = (1 - c)(1 + 2c + c^3)$

- 227** Le seguenti affermazioni sono tutte esatte, tranne una. Quale?

- [A] $x^2 + x + 1$ non è lo sviluppo di un quadrato perché manca il doppio prodotto.
- [B] $x^6 + 3x^2$ non è la somma di due cubi.
- [C] $x^9 + 3x^3 + 3x^3 + 27$ è lo sviluppo di un cubo di binomio.
- [D] $x^4 + 4x^2 + 16$ è un falso quadrato.
- [E] $m^9 - 9$ non è la differenza di quadrati.

Scomponi in fattori, utilizzando i metodi finora incontrati.

228 $\frac{125}{8}x^6y^3 - 8$

229 $a^6 - 3a^4b + 3a^2b^2 - b^3$

230 $24x^7 - 3x$

$[3x(2x^2 - 1)(4x^4 + 2x^2 + 1)]$

231 $2x^9 + x^6 - 2x^3 - 1$

$[(2x^3 + 1)(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)]$

232 $-\frac{1}{27}a^3 - y^3$

$\left[\left(-\frac{1}{3}a - y \right) \left(\frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}ay + y^2 \right) \right]$

233 $2a^2 + 2b^2 + 12a + 12b + 4ab + 18$

$[2(a + b + 3)^2]$

234 $\frac{2}{27} - 2x^3y^3 - \frac{2}{3}xy + 2x^2y^2$

$\left[2\left(\frac{1}{3} - xy\right)^3 \right]$

235 $x^4 + 2x^3 - x - 2$

$[(x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 1)]$

236 $x^4 + x^2 + a^4 + a^2 + 2a^2x^2 + \frac{1}{4}$

$\left[\left(x^2 + a^2 + \frac{1}{2} \right)^2 \right]$

237 $x^{10} - 64x; \quad a^5 - 9a^3 + 8a^2 - 72.$

$[x(x^3 - 4)(x^6 + 4x^3 + 16); (a + 2)(a - 3)(a + 3)(a^2 - 2a + 4)]$

BRAVI SI DIVENTA ► E17



238 $12x^4y + 16x^2y^3 - 2x^5 - 24x^3y^2; \quad \frac{3}{4}a^2x^6 - \frac{81}{4}a^2; \quad 4a^2x^2 + 4y^4 + 4a^4 + x^4 + 4x^2y^2 + 8a^2y^2.$

239 $x^3 - 2x^2 - 9x + 18; \quad 5x^4y^4 - 10x^2y^2 + 5.$

$[(x + 3)(x - 3)(x - 2); 5(xy + 1)^2(xy - 1)^2]$

240 $\frac{2}{3}x^2y^2(3x - y)^3(4x + y) + \frac{1}{3}x^2y^2(3x - y)^3(x - 5y); \quad 2x(2y - 3z)^2 - 8x^3.$

$[x^2y^2(3x - y)^4; 2x(2y - 3z + 2x)(2y - 3z - 2x)]$

241 $\frac{1}{64}x^6y^3 - \frac{27}{8}x^3y^6 + \frac{27}{16}x^4y^5 - \frac{9}{32}x^5y^4$

$\left[\frac{1}{8}x^3y^3\left(\frac{1}{2}x - 3y\right)^3 \right]$

242 $\frac{25}{4}a^3 + \frac{4}{9}ab^2 + \frac{9}{25}a + 3a^2 - \frac{4}{5}ab - \frac{10}{3}a^2b$

$\left[a\left(\frac{5}{2}a - \frac{2}{3}b + \frac{3}{5}\right)^2 \right]$

243 $(x + y)^2 + 4z(x + y) - 6(x + y) + 4z^2 - 12z + 9$

$[(x + y + 2z - 3)^2]$

Problemi

244 Un quadrato ha area $A = 9x^{2n} + 42x^n + 49$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $x \geq 0$.

a) Qual è la misura del suo lato?

b) Qual è il suo perimetro?

[a) $3x^n + 7$; b) $12x^n + 28$]

245 È dato il polinomio $a^{2n}b^{3n} + a^{2n} + 16b^{3n} - 16$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $x \geq 0$.

a) Scomponilo in fattori raccogliendo i due fattori $(b^n + 1)$ e $(a^n - 4)$.

b) Se n è pari, quale dei due fattori risulta sempre scomponibile?

c) E se n è dispari?

d) Per quale valore di $n < 10$ i due fattori sono entrambi scomponibili? Come?

[a) $(b^n + 1)(b^{2n} - b^n + 1)(a^n - 4)(a^n + 4)$; b) $(a^n - 4)$; c) $(b^n + 1)$; d) $n = 6, (b^2 + 1)(b^4 - b^2 + 1), (a^3 + 2)(a^3 - 2)$]

■ La scomposizione di trinomi del tipo $x^2 + sx + p$

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più



■ ESERCIZIO GUIDA

246 Scomponiamo in fattori i seguenti trinomi:

a) $x^2 + x - 6$; b) $y^4 - 5y^2 - 6$; c) $a^2 - 7ab + 12b^2$; d) $2x^2 + 5x - 3$.

a) Per scomporre in fattori, cerchiamo due numeri x_1 e x_2 tali che:

$$x_1 + x_2 = +1, \quad x_1 \cdot x_2 = -6.$$

Le coppie di numeri interi che hanno come somma $+1$ (o qualsiasi altro numero) sono infinite, mentre quelle che hanno come prodotto -6 (o qualsiasi altro numero diverso da 0) sono finite. Conviene perciò partire dal prodotto, compilando la tabella seguente fino a trovare i valori cercati:

MOLTIPLICAZIONI CON PRODOTTO $p = -6$	SOMMA s DEI FATTORI
(+1)(-6)	-5
(-1)(+6)	+5
(+2)(-3)	-1
(-2)(+3)	+1

Dunque $x_1 = -2$ e $x_2 = +3$, quindi:

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3).$$

b) Il trinomio $y^4 - 5y^2 - 6$ è di quarto grado. Cerchiamo di trasformarlo in un trinomio di secondo grado:

$$y^4 - 5y^2 - 6 = (y^2)^2 - 5y^2 - 6.$$

Ponendo $y^2 = t$, otteniamo: $t^2 - 5t - 6$.

Possiamo proseguire come nel caso a). Cerchiamo t_1 e t_2 tali che: $t_1 + t_2 = -5$, $t_1 \cdot t_2 = -6$.

Osservando la prima riga della tabella del caso a), vediamo che $t_1 = +1$ e $t_2 = -6$. Dunque:

$$t^2 - 5t - 6 = (t + 1)(t - 6).$$

Sostituendo nuovamente $t = y^2$, si ha:

$$y^4 - 5y^2 - 6 = (y^2 + 1)(y^2 - 6).$$

c) Cerchiamo due monomi x_1 e x_2 tali che: $x_1 + x_2 = -7b$ e $x_1 \cdot x_2 = +12b^2$.

Completiamo la seguente tabella:

MOLTIPLICAZIONI CON PRODOTTO $p = 12b^2$	SOMMA s DEI FATTORI
(+6b)(+2b)	+8b
(-6b)(-2b)	-8b
(+3b)(+4b)	+7b
(-3b)(-4b)	-7b

Dunque $x_1 = -3b$ e $x_2 = -4b$, quindi:

$$a^2 - 7ab + 12b^2 = (a - 3b)(a - 4b).$$

d) Il trinomio $2x^2 + 5x - 3$ ha il coefficiente di x^2 diverso da 1. Per scomporlo occorre trovare due numeri che abbiano come somma il coefficiente di x , cioè + 5, e come prodotto il prodotto del coefficiente di x^2 con il termine noto, cioè $2 \cdot (-3) = -6$.

Osservando la seconda riga della tabella nel caso a), vediamo che $x_1 = -1$ e $x_2 = +6$.

Riscriviamo il polinomio.

Evidenziamo la somma: $2x^2 + 5x - 3 = 2x^2 + (6 - 1)x - 3 = 2x^2 + 6x - x - 3$.

Raccogliamo parzialmente: $2x(x + 3) - (x + 3) = (2x - 1)(x + 3)$.

Dunque otteniamo: $2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$.

247

COMPLETA le seguenti tabelle.

POLINOMIO	SCOMPOSIZIONE
$x^2 + 10x + 9$	$(x + \dots)(x + \dots)$
$x^2 - \dots x + 9$	$(x - 9)(x - \dots)$
$x^2 + 15x - \dots$	$(x + 16)(x - \dots)$

POLINOMIO	SCOMPOSIZIONE
$a^2 - 2a - 15$	$(a - \dots)(a + \dots)$
$y^2 - 15y + \dots$	$(y - \dots)(y - 6)$
$b^2 + \dots b - 7$	$(b - 1)(b + \dots)$

Scomponi in fattori i seguenti trinomi.

248 $a^2 + 8a + 15$; $a^2 + 4a - 21$; $a^2 - 14a + 48$; $-x^2 + 7x - 12$.

249 $-x^2 + 4x + 5$; $a^2 + a - 20$; $y^2 + 3y - 40$; $b^2 + 2b - 8$.

250 $x^2 + 21x + 80$; $x^2 - 5x - 14$; $a^4 - a^2 - 20$; $x^4 + x^2 - 2$.

251 $x^6 + 5x^3 - 14$; $-y^6 + 7y^3 - 10$; $x^2 - 6ax - 16a^2$; $2x^2 + 7x + 3$.

252 $z^2 - 7x^3z + 6x^6$; $a^2 - 2ab - 3b^2$; $3x^2 - 7x + 2$; $4x^2 + 3x - 1$.

253 $x^2 - 4ax - 12a^2$; $5x^2 - 13x - 6$; $2x^8 - x^4 - 1$; $3x^4 + x^2 - 2$.

Nel sito: ► 8 esercizi di recupero



■ La scomposizione mediante il teorema e la regola di Ruffini

ESERCIZIO GUIDA

254 Scomponiamo il polinomio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 17x - 30$, utilizzando la regola di Ruffini.

Cerchiamo, se ci sono, dei numeri che annullano il polinomio. Tali numeri vanno cercati fra i divisori del termine noto, ossia
 $+1, -1, +2, -2, +3, -3, +5, -5, \dots$

e fra le frazioni

$$+ \frac{1}{2}, - \frac{1}{2}, + \frac{3}{2}, - \frac{3}{2}, + \frac{5}{2}, - \frac{5}{2}, \dots$$

$$\begin{aligned}P(+1) &= 2 + 3 - 17 - 30 = -42 \neq 0; \\P(-1) &= -2 + 3 + 17 - 30 = -12 \neq 0; \\P(+2) &= 16 + 12 - 34 - 30 = -36 \neq 0; \\P(-2) &= -16 + 12 + 34 - 30 = 0.\end{aligned}$$

Il polinomio è divisibile per $x + 2$.

Calcoliamo il quoziente con la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 3 & -17 & -30 \\ \hline -2 & & -4 & +2 & +30 \\ \hline & 2 & -1 & -15 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned}2x^3 + 3x^2 - 17x - 30 &= \\&= (x+2)(2x^2 - x - 15).\end{aligned}$$

Ripetendo il procedimento con il polinomio $2x^2 - x - 15$, troviamo che esso non è divisibile per $x + 2$, mentre lo è per $x - 3$.

Nota che non è necessario ripetere il procedimento per 1 e per -1, perché se $(x-1)$ e $(x+1)$ dividessero $2x^2 - x - 15$, dividerebbero anche il polinomio originale, mentre abbiamo già verificato che non succede.

Applichiamo di nuovo la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|cc|c} & 2 & -1 & -15 \\ \hline +3 & & +6 & +15 \\ \hline & 2 & +5 & 0 \end{array}$$

$$2x^2 - x - 15 = (x-3)(2x+5).$$

La scomposizione richiesta è quindi:

$$\begin{aligned}2x^3 + 3x^2 - 17x - 30 &= (x+2)(2x^2 - x - 15) = \\&= (x+2)(x-3)(2x+5).\end{aligned}$$

Scomponi in fattori, utilizzando la regola di Ruffini.

255 $5x^2 - 4x - 1$

$[(x-1)(5x+1)]$

256 $2x^2 + 3x - 2$

$[(x+2)(2x-1)]$

257 $2a^3 - a^2 - 5a - 2$

$[(a+1)(a-2)(2a+1)]$

258 $x^3 - x^2 - 3x - 9$

$[(x-3)(x^2 + 2x + 3)]$

259 $2b^3 + 5b^2 - 4b - 3$

$[(b-1)(b+3)(2b+1)]$

260 $3b^3 - 4b^2 + 5b - 4$

$[(b-1)(3b^2 - b + 4)]$

261 $t^3 - 39t + 70$

$[(t-2)(t-5)(t+7)]$

262 $3a^3 - 2a^2 - 5a - 6$

$[(a-2)(3a^2 + 4a + 3)]$

263 $x^3 - 3x - 2$

$[(x+1)^2(x-2)]$

264 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$[(x-1)(x+2)(x-3)]$

265 $4b + 16 + b^4 - 2b^3 - 10b^2$

$[(b+2)(b-4)(b^2-2)]$

266 $y^4 - 4y^3 - 2y^2 + 9y - 4$

$[(y-4)(y-1)(y^2+y-1)]$

267 $a^5 + 32$

$[(a+2)(a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 8a + 16)]$

268 $x^5 - x^4 - 10x^3 - 8x^2$

BRAVI SI DIVENTA ▶ E18



269 $6x^4 - 5x^3 - 2x^2 + x$

$[x(x-1)(2x+1)(3x-1)]$

270 $a^3 - a^2b - 3ab^2 - b^3$

$[(a+b)(a^2 - 2ab - b^2)]$

271 $b^3 - 5ab^2 + 7a^2b - 2a^3$

$[(b-2a)(b^2 - 3ab + a^2)]$

RIEPILOGO

LA SCOMPOSIZIONE DEI POLINOMI

Guida alla scomposizione

Dato un polinomio da scomporre:

1. Quando è possibile, raccogliamo a fattore comune.
2. Contiamo il numero dei termini e proviamo le strade riassunte nella tabella seguente.

SE IL POLINOMIO HA:	PUÒ ESSERE RICONDUCIBILE A:
due termini	differenza di due quadrati differenza di due cubi somma di due cubi
tre termini	quadrato di binomio trinomio del tipo $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$
quattro termini	cubo di binomio raccoglimento parziale differenza di due quadrati (se tre termini sono il quadrato di un binomio)

3. Applichiamo il teorema e la regola di Ruffini.

272 Determina due numeri razionali la cui somma sia s e il cui prodotto sia p , per i valori di s e p assegnati:

- a) $s = 3$ e $p = -4$
 - b) $s = -5$ e $p = -6$
 - c) $s = -15$ e $p = 14$
- [a) 4 e -1; b) -6 e 1; c) -1 e -14]

CACCIA ALL'ERRORE Trova l'eventuale errore e spiega perché l'uguaglianza è sbagliata.

273 $a^4 + a^3 + a^2 = a^2(a^2 + a)$

274 $3a^3 + 9a = 3a(a^2 + 6)$

275 $9a^4 - b^9 = (3a^2 - b^3)(3a^2 + b^3)$

276 $a^3 - 8 = (a - 2)(a^2 + 2a + 4) = (a - 2)(a + 2)^2$

277 $x^2 - 9a - 20 = (a - 5)(a - 4)$

278 $a^3b^3 + 1 = (ab + 1)(a^2b^2 + ab + 1)$

279 $-x^2 - 4y^2 - 4xy = (-x - 2y)^2$

280 $8a^2b - 5ab^2 + ab = ab(8a - 5b)$

281 $16x^2y^2 + 9z^4 = (4xy + 3z^2)^2$

282 $b^4 - 20b^2 + 25 = (b^2 - 5)^2$

283 $a^2 + 11a - 12 = (a + 1)(a - 12)$

ASSOCIA a ogni polinomio la sua scomposizione.

- | | | |
|------------|----------------|----------------|
| 284 | 1. $xy + y^2$ | A. $y(x + 1)$ |
| | 2. $xy + y$ | B. $y(x + y)$ |
| | 3. $x^2 + xy$ | C. $xy(x + 1)$ |
| | 4. $x^2y + xy$ | D. $x(y + 1)$ |
| | 5. $xy + x$ | E. $x(x + y)$ |

- | | | |
|------------|---------------------------|----------------------------|
| 285 | 1. $x^3 + 9x + 3x^2$ | A. $(x - 3)(x + 9)$ |
| | 2. $x^3 - 27$ | B. $x(x^2 + 3x + 9)$ |
| | 3. $x^2 - 6x + 9$ | C. $(x - 3)^2$ |
| | 4. $x^2 + 6x - 27$ | D. $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ |
| | 5. $x^2 - 9$ | E. $(x - 3)(x + 3)$ |
| | 6. $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$ | F. $(x - 3)(x^2 + 9)$ |

Calcola mentalmente i seguenti quozienti, utilizzando le scomposizioni in fattori.

286 $(a^2 - b^2) : (a - b)$

287 $(x^3 + 8) : (x + 2)$

288 $(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : (x + 1)$

289 $(a^4 - 25a^2) : (a + 5)$

290 $(x^8 - 2x^4 + 1) : (x^2 + 1)$

291 $(a^{2n} - b^{2n}) : (a^n + b^n)$ $(n \in \mathbb{N})$

292 $(x^{2n} - 4x^n + 4) : (x^n - 2)$ $(n \in \mathbb{N})$

306 $\frac{x^4}{4} + x^2 + 1$

307 $a^2 + b^2 + 4c^2 - 2ab - 4ac + 4bc$

308 $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

309 $x^2 - 2x - 35$

310 $\frac{4}{9} + y^2 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{4}{3}y + 2x - 3xy$

311 $\frac{9}{16}a^2b^2 + \frac{16}{9} + 2ab$

312 $3ax + 3xy + 2a + 2y$

Scomponi in fattori.

293 $30a^2b^3 - 25a^3b^2$

294 $25x^2 - 1$

295 $4x^2 + 25 - 20x$

296 $-7x^2y^2 + 14x^5y^6$

297 $8x^3 + 27 + 36x^2 + 54x$

298 $bx - ax + a - b$

299 $27x^3 + 64$

300 $x^2 - 12x - 13$

301 $9y^2 - 4$

302 $9y^2 + 4 + 12y$

303 $8 - 60y - 125y^3 + 150y^2$

304 $16x^2 + \frac{1}{4} + 4x$

305 $\frac{y^3}{8} - 1 - \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{2}y$

313 $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

314 $(2x - y)^2 - \frac{1}{25}$

315 $\frac{8}{125}x^3 - y^3$

316 $\frac{1}{27}a^3b^3 - \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{9}{4}ab - \frac{27}{8}$

317 $4x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 + 2xy - 4xz - yz$

318 $y^3z^{12} - a^9$

319 $3b^2 + b - 10$

320 $x^2 - 4x - 77$

321 $\frac{1}{4} + t^2 + z^2 - t + z - 2tz$

322 $125a^3 - 27b^9$

323 $2a^2b - 6a$

324 $2a^{45} + 4a^{15}$

325 $2a^4 - 2a^3 - 12a^2$

- 326** $3a^3 - 2b^2 + 2a^2b - 3ab$ $[(3a + 2b)(a^2 - b)]$
- 327** $1 - (1 + a)^2$ $[-a(a + 2)]$
- 328** $10a^2 - 4ab + 15a - 6b$ $[(5a - 2b)(2a + 3)]$
- 329** $a^2(x + y + z) - a(x + y + z)$ $[a(x + y + z)(a - 1)]$
- 330** $x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ $[(x - 1)(x^2 - x + 3)]$
- 331** $32x - 12x^2 - 16$ $[-4(x - 2)(3x - 2)]$
- 332** $\frac{9}{4}abc^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{3}{2}c^2 - 1$ $\left[\left(\frac{3}{2}ab + 1 \right) \left(\frac{3}{2}c^2 - 1 \right) \right]$
- 333** $8ab - ax + 2a^2 - 4bx$ $[(4b + a)(2a - x)]$
- 334** $3x^5 - 81x^2$ $[3x^2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)]$
- 335** $\frac{1}{4}x^2y^2z^2 + \frac{2}{3}xy - \frac{1}{4}xyz^2 - \frac{2}{3}$ $\left[\left(\frac{1}{4}xyz^2 + \frac{2}{3} \right) (xy - 1) \right]$
- 336** $y - 2 - x^2y + 2x^2$ $[(x + 1)(1 - x)(y - 2)]$
- 337** $(a + 1)(a^2 + 1) - (a + 1)(a^2 - 1)$ $[2(a + 1)]$
- 338** $(2x + y)^2 - (3y - x)^2$ $[(3x - 2y)(x + 4y)]$
- 339** $\frac{1}{4}(4x - y)(4x + y) + (4x + y)^2$ $\left[(4x + y) \left(5x + \frac{3}{4}y \right) \right]$
- 340** $9x^2 - (x - 5)^2$ $[(2x + 5)(4x - 5)]$
- 341** $x^6 - x^4 + x^2 - 1$ $[(x + 1)(x - 1)(x^4 + 1)]$
- 342** $x^2 - 4x^2y + 4xy^2 - y^2$ $[(x - y)(x + y - 4xy)]$
- 343** $ax^2 + bx^2 - 4ay^2 - 4by^2$ $[(a + b)(x + 2y)(x - 2y)]$
- 344** $(4 - a^2)(2 - b) + (2 - a)(4 - b^2)$ $[(4 + a + b)(2 - a)(2 - b)]$
- 345** $(a + b)3x^2 - (a - b)3x^2$ $[6bx^2]$
- 346** $3ax - 3bx - 6ay + 6by$ $[3(x - 2y)(a - b)]$
- 347** $\frac{2}{3}ax - x - \left(\frac{4}{3}ab - 2b \right) \left[(x - 2b) \left(\frac{2}{3}a - 1 \right) \right]$
- 348** $\left(3x + \frac{1}{2}y \right)^2 + 3x + \frac{1}{2}y$ $\left[\left(3x + \frac{1}{2}y \right) \left(3x + \frac{1}{2}y + 1 \right) \right]$
- 349** $x(x - 2y^3)^2 - (2y^3 - x)^2$ $[(x - 2y^3)^2(x - 1)]$
- 350** $(2b - c)^3 - 9(2b - c)$ $[(2b - c)(2b - c + 3)(2b - c - 3)]$
- 351** $12(a + b) - 6(a^2 - b^2)$ $[6(a + b)(2 - a + b)]$
- 352** $24 - 6(x - y)^2$ $[6(2 - x + y)(2 + x - y)]$
- 353** $x^3 + 4x^2 - 9x - 36$ $[(x + 4)(x - 3)(x + 3)]$
- 354** $x^4 - 4x^2y^2 + 4y^6 - x^2y^4$ $[(x + 2y)(x - 2y)(x + y^2)(x - y^2)]$
- 355** $(a + 2)^2 - 1$ $[(a + 1)(a + 3)]$
- 356** $3x^4 - 12ax^2 + 12a^2$ $[3(x^2 - 2a)^2]$
- 357** $-49a^3 - 14a^2b - ab^2$ $[-a(7a + b)^2]$
- 358** $-2xb^2 - 4xb - 2x$ $[-2x(b + 1)^2]$
- 359** $x^5 - 10x^4 + 25x^3$ $[x^3(x - 5)^2]$
- 360** $a^2(x + 1) - 2a(x + 1) + x + 1$ $[(x + 1)(a - 1)^2]$
- 361** $4a^4 + 4 - 8a^2$ $[4(a + 1)^2(a - 1)^2]$
- 362** $2x + 2y + x^2 + 2xy + y^2$ $[(x + y)(2 + x + y)]$
- 363** $a^3 - a^2b - ab - a$ $[a(a + 1)(a - b - 1)]$
- 364** $(2a + 3b)^2 - (4a + 6b)(a + b)$ $[b(2a + 3b)]$
- 365** $(a^2 + 2b)(2x - y) - b(b + 2)(2x - y)$ $[(2x - y)(a + b)(a - b)]$

366 $x^2 - y^2 - 3(x - y)^2$

$[2(2y - x)(x - y)]$

367 $x^5 - x - 2x^4 + 2$

$[(x - 2)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)]$

368 $a - b - a^2 + 2ab - b^2$

$[(a - b)(1 - a + b)]$

369

$a^6 + a^4b^2 - a^2b^4 - b^6$

$[(a^2 + b^2)^2(a + b)(a - b)]$

370

$(x - 3y)(2x - y)^2 + 27y - 9x$

$[(x - 3y)(2x - y + 3)(2x - y - 3)]$

371

$2a^3 - 2a^3b - 18a + 18ab$

$[2a(1 - b)(a + 3)(a - 3)]$

372

$a^9 - 3a^6 + 3a^3 - 1$

$[(a - 1)^3(a^2 + a + 1)^3]$

373

$2ax^3 - bx^3 - 2ay^3 + by^3$

$[(2a - b)(x - y)(x^2 + xy + y^2)]$

374

$x^3y^3 - x^6y^3 - z^3 + x^3z^3$

$[(1 - x)(1 + x + x^2)(xy - z)(x^2y^2 + xyz + z^2)]$

375

$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x - 2$

$[(x - 1)(x - 2)(x^2 - x - 1)]$

376

$\frac{1}{8}a^7 - \frac{3}{2}a^8 + 6a^9 - 8a^{10}$

$\left[a^7\left(\frac{1}{2} - 2a\right)^3\right]$

377

$y^2 - (x + 2)y + 2x$

$[(y - x)(y - 2)]$

378

$\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}xy + \frac{1}{27}y^2$

$\left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}y\right)^2\right]$

379

$16a^2b - \frac{1}{9}b$

$\left[b\left(4a - \frac{1}{3}\right)\left(4a + \frac{1}{3}\right)\right]$

380

$x^6 + 16x^3 + 64$

$[(x + 2)^2(x^2 - 2x + 4)^2]$

381

$a^4(x^2 + 1) - 2a^4$

$[a^4(x + 1)(x - 1)]$

382

$x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64$

$[(x + 2)^3(x - 2)^3]$

383

$\frac{3}{8}x^5 - \frac{24}{125}x^2y^3$

$\left[3x^2\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{5}y\right)\left(\frac{x^2}{4} + \frac{4}{25}y^2 + \frac{xy}{5}\right)\right]$

384

$x^3 + x^2y - x - y$

$[(x - 1)(x + 1)(x + y)]$

385

$7x^4 - 7$

$[7(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)]$

386

$3(a^2 + b^2) - 9(a^2 + b^2)^2$

$[3(a^2 + b^2)(1 - 3a^2 - 3b^2)]$

387

$x^4 - 4x^2 + 5x^3 - 20x$

$[(x - 2)(x + 2)(x + 5)]$

388

$6a^2b^4 - 4ab^2 + 4a^2b - 6a^3b^3$

$[2ab(b - a)(3ab^2 - 2)]$

389

$a^4 - 5a^2 + 4$

$[(a - 1)(a + 1)(a - 2)(a + 2)]$

390

$\frac{1}{4}a^4 + a^2 + 1 - b^2$

$\left[\left(\frac{1}{2}a^2 + 1 - b\right)\left(\frac{1}{2}a^2 + 1 + b\right)\right]$

391

$a^5 - a - 2 + 2a^4$

$[(a + 2)(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)]$

392

$a^3 - 6a^2 - a + 30$

$[(a + 2)(a - 3)(a - 5)]$

393

$x^8 + 2x^6 - x^4 - 2x^2$

$[x^2(x^2 + 1)(x^2 + 2)(x - 1)(x + 1)]$

394

$3x^4 - 4x^3 - 17x^2 + 6x$

$[(x + 2)(x - 3)(3x - 1)]$

395

$x^4 - y^4 + 2x^3y - 2xy^3$

$[(x + y)^3(x - y)]$

396

$x^6 - 9x^3 + 8$

$[(x - 2)(x - 1)(x^2 + 2x + 4)(x^2 + x + 1)]$

397

$2t^5 + 4t^4 - 10t^3 - 12t^2$

$[2t^2(t + 1)(t + 3)(t - 2)]$

398

$a^8 - 2a^4 + 1$

$[(a^2 + 1)^2(a + 1)^2(a - 1)^2]$

399

$x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

$[(x - 2)^2(x - 3)]$

400

$a^2b - 9ab^2 + 20b^3$

$[b(a - 5b)(a - 4b)]$

401

$x^2 - 9 + 6a - a^2$

$[(x - a + 3)(x + a - 3)]$

402

$2ab^4 - 2ab^3c + xb^4 - xb^3c$

$[b^3(b - c)(2a + x)]$

403

$2ax^2(3a - x)^2 - 2a$

$[2a(3ax - x^2 + 1)(3ax - x^2 - 1)]$

- 404** $(2x+1)^2 - 4(4x^2-1)$ $[(2x+1)(5-6x)]$
- 405** $36x^4 + y^2 - 9x^2 - 4x^2y^2$ $[(2x+1)(2x-1)(3x+y)(3x-y)]$
- 406** $xy^2 + \frac{16}{81}xy^6 - \frac{8}{9}xy^4$ $\left[xy^2 \left(\frac{2}{3}y+1 \right)^2 \left(\frac{2}{3}y-1 \right)^2 \right]$
- 407** $x^2 - 4x + 4 - 16a^4$ $[(x-2+4a^2)(x-2-4a^2)]$
- 408** $(2x-y)^2 - (x^2 + 6xy + 9y^2)$ $[(3x+2y)(x-4y)]$
- 409** $a^3 - 8 + 3a^2 + 6a + 12$ $[(a^2 + 2a + 4)(a + 1)]$
- 410** $6a^4 - 24a^2b^2 + 3a^3 - 12ab^2$ $[3a(a+2b)(a-2b)(2a+1)]$
- 411** $2a^2 - 4ab + 2b^2 - 50x^2$ $[2(a-b+5x)(a-b-5x)]$
- 412** $16 + 4x + x^2 - (x^3 - 64)$ $[(x^2 + 4x + 16)(5 - x)]$
- 413** $a^2 - a - 20 + 2ax + 8x$ $[(a+4)(a-5+2x)]$
- 414** $(1+x)^2 + x^2(1+x)^2 + 2x(1+2x+x^2)$ $[(1+x)^4]$
- 415** $(3a-b)^2 - (a+b)(3a-b) - 9a^2 + b^2$ $[-(3a-b)(a+3b)]$
- 416** $12x^3 - 14x^4 + 2x^6$ $[2x^3(x-1)(x-2)(x+3)]$
- 417** $y^4 - z^4 + 2y^3z - 2yz^3$ $[(y+z)^3(y-z)]$
- 418** $x^2 - 1 - 2(x^2 + 4x + 3)$ $[-(x+1)(x+7)]$
- 419** $3x^3 - 9x^2 - 18x + 24$ $[3(x-1)(x-4)(x+2)]$
- 420** $x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 7x + 10$ $[(x^2+1)(x-5)(x-2)]$
- 421** $a^2 + ab + b^2 + a^3 - b^3$ $[(a-b+1)(a^2+ab+b^2)]$
- 422** $a^2 - 4ax + 4x^2 - (a-2x)^2y^4$ $[(a-2x)^2(1+y^2)(1-y)(1+y)]$
- 423** $6y^3 - 9y^2 - 9y + 6$ $[3(y+1)(2y-1)(y-2)]$
- 424** $(x-y)^2 - 3xy^2 + 3y^3$ $[(x-y)(x-y-3y^2)]$
- 425** $y^2 + (2-a)y - 2a$ $[(y+2)(y-a)]$
- 426** $b^4 + 4$ (aggiungi e togli $4b^2$) $[(b^2 - 2b + 2)(b^2 + 2b + 2)]$
- 427** $a^2 + a(5-2b) - 10b$ $[(a+5)(a-2b)]$
- 428** $(x+2y)^3 + (x-2y)^3$ $[2x(x^2 + 12y^2)]$
- 429** $\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + b - b^2$ $\left[\left(\frac{2}{3}x + b \right) \left(\frac{2}{3}x - b + 1 \right) \right]$
- 430** $ax^2 + (a-3)ax - 3a^2$ $[a(x-3)(x+a)]$
- 431** $b^8 + b^4 + 1$ (aggiungi e togli b^4) $[(b^4 + 1 + b^2)(b^4 + 1 - b^2)]$
- 432** $x^2(y+z) + 2ax(y+z) + a^2(y+z) - b^2(y+z)$ $[(x+a+b)(x+a-b)(y+z)]$
- 433** $(x^2 - 3)(3 - x^2) + 2x^4 - x^2 - 15$ $[(x^2 - 3)(x^2 + 8)]$
- 434** $(a^2 - a - 6)(a - 4) - (a - 9)(a^2 - 2a - 8)$ $[6(a+2)(a-4)]$
- 435** $3a^4 - 4 + a^5 - a^3 - 11a^2 - 12a$ $[(a+1)^3(a+2)(a-2)]$
- 436** $x^2 + y^2 + 2xy - z^2 - x - y + z$ $[(x+y-z)(x+y+z-1)]$
- 437** $(a-5)^2 + 25 - a^2 + (2a-10)(a+3)$ $[2(a-5)(a-2)]$
- 438** $a^4 + a^2b^2 + b^4$ (aggiungi e togli a^2b^2) $[(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)]$
- 439** $x^4 - 5x^2 + 4 + 3x^3 - 3x$ $[(x+1)(x-1)^2(x+4)]$
- 440** $x^2 + 4y^2 + 25 - 4xy + 10x - 20y - y^4$ $[(x-2y+5+y^2)(x-2y+5-y^2)]$

- 441** $\frac{1}{16}(x+y)^4 - \frac{1}{2}(x+y)^2 + 1$ $\left[\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 \right)^2 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 1 \right)^2 \right]$
- 442** $x^4y - 3x^3y^2 - 3x^2y^3 + 5xy^4$ $[xy(x-y)(x^2 - 2xy - 5y^2)]$
- 443** $2(x-2)^2 + x(x-2) + 4 - 3x$ $[(3x-4)(x-3)]$
- 444** $x^3 - (2y+1)x^2 - x + 2y + 1$ $[(x-2y-1)(x+1)(x-1)]$
- 445** $2a^n - 4a^{2n-2}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) $[2a^n(1 - 2a^{n-2})]$
- 446** $x^{6n} + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) $[(x^{2n} + 1)(x^{4n} - x^{2n} + 1)]$
- 447** $x^{4n+1} - 16x^{4m+1}$ ($m, n \in \mathbb{N}$) $[x(x^n + 2x^m)(x^n - 2x^m)(x^{2n} + 4x^{2m})]$
- 448** $4a^{n+1} - 2a^{2n+1} - 4b^n + 2a^n b^n$ ($n \in \mathbb{N}$) $[2(2-a^n)(a^{n+1} - b^n)]$
- 449** $8x^{3n}y + 12x^{2n}y^{n+1} + 6x^ny^{2n+1} + y^{3n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) $[y(2x^n + y^n)^3]$

Calcola rapidamente il valore dei seguenti polinomi per i valori indicati a fianco, usando la scomposizione in fattori.

450 $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 4$.

451 $a^5 + 8a^4 + 16a^3$, $a = -4$.

452 $\frac{1}{4}a^2 + \frac{2}{3}ab + \frac{4}{9}b^2$, $a = 2$, $b = \frac{3}{2}$.

453 $9x^2 + y^2 + 4 - 6xy - 12x + 4y$, $x = -\frac{1}{3}$, $y = -1$.

454 $-x^3 + 9x^2 - 27x + 27$, $x = 2$.

455 $5a^2 - 25a + 30$, $a = 5$.

456 $a^2b + 2ab + b - b^3$, $a = -1$, $b = -\frac{1}{3}$.

Problemi

457 Determina per quale valore di $a \in \mathbb{Z}$ il polinomio $x^3 + ax - 2$ può essere scomposto in $(x+1)^2(x-2)$. Motiva la risposta. $[a = -3]$

458 Trova il più piccolo valore $m \in \mathbb{Q}$, per cui $x^{2m+1} - 9$ è scomponibile nella differenza di quadrati. Dimostra che per tale valore il binomio dato può essere scritto nella forma $(-x-3)(3-x)$. Esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che il binomio dato sia la differenza di quadrati? Motiva la risposta. $\left[m = \frac{1}{2}; \text{non esiste} \right]$

459 Le misure della base e dell'altezza di un rettangolo sono rappresentate da due polinomi a coefficienti interi. L'area del rettangolo vale $3a^2 + 14ab + 8b^2$, con $a, b > 0$.

- Quanto misurano base e altezza?
- Qual è la misura del perimetro del rettangolo?

[a) $(3a+2b), (a+4b)$; b) $4(2a+3b)$]

2. Il M.C.D. e il m.c.m. fra polinomi

→ Teoria a pag. 418

RIFLETTI SULLA TEORIA

- 460** TEST Il M.C.D. di una coppia di polinomi è x . Quali sono i due polinomi?
- A** $x^2 + x^3$ e $x^3 - x^2$
B $4x^2 - 4x$ e $2x(x+1)$
C $x^2 + x$ e $3x^2 + 3x$
D $x^3 + 2x^2 - x$ e $4x^2 + 8x$
E $x^3 + 2x^2 + x$ e $x^2 + x$
- 461** TEST Quale delle seguenti coppie di polinomi ha per M.C.D. il polinomio $x^n - 1$, con $n \in \mathbb{N}$?
- A** $x^{2n} - 1$ e $2 - 2x^n$
B $x^{2n} - 1$ e $x^{2n} + 2x^n + 1$
C $x^{3n} + 1$ e $x^{2n} - 1$
D $4x^n - 4$ e $8x^n - 8$
E $16x^{2n} - 16$ e $8x^n + 8$
- 462** Il M.C.D. di polinomi è sempre un polinomio? Il M.C.D. fra due polinomi è sempre divisibile per entrambi i polinomi?
- 463** Dato il polinomio $9x^2 - 9$, scrivi:
a) due divisori di grado 1;
b) 3 divisori di grado 0;
c) un divisore di grado 2.
[a) $(x-1)$ e $(x+1)$; b) 1, 3 e 9; c) $x^2 - 1$]
- 464** Dati i polinomi $a^2 + 4a + 4$ e $a^2 - 4$, determina un divisore comune di maggior grado possibile. È univocamente determinato? Coincide con il M.C.D.? [(a+2); sì; sì]
- 465** TEST Quale dei seguenti polinomi è il M.C.D. dei polinomi A , B , C ?
- $A(x) = 6a^2x - 3ax^2$,
 $B(x) = 16a^2x - 16ax^2 + 4x^3$,
 $C(x) = 4a^2 - x^2$
- A** $3x(2a-x)$. **D** $2a+x$.
B $4x(2a-x)$. **E** $3x(2a-x)^2$.
C $2a-x$.
- 466** TEST Il m.c.m. tra due polinomi è $12(x-3)^2$. Quali possono essere i due polinomi?
- A** $2(x-3)$ e $6(x-3)^2$
B $2x-6$ e $6x-18$
C $4(3-x)^2$ e $3x-9$
D $2(x-3)^2$ e $6x-18$
E $x^2 + 6x + 9$ e $12(x-3)$
- 467** TEST Il m.c.m. e il M.C.D. di $3(x+1)^3$ e $9(x+1)^2$ sono:
- A** $3(x+1)^3$ e $9(x+1)^2$
B $9(x+1)^3$ e $3(x+1)^2$
C $9(x+1)^2$ e $3(x+1)^3$
D $9(x+1)$ e $3(x+1)$
E $9(x+1)^5$ e $3(x+1)$
- 468** VERO O FALSO?
- a) Il m.c.m. fra due polinomi ha sempre grado maggiore di entrambi i polinomi. **V** **F**
- b) Il m.c.m. di polinomi può essere un monomio. **V** **F**
- c) Il M.C.D. fra polinomi può essere 1. **V** **F**
- d) Il M.C.D. e il m.c.m. di $3x - 3$ e $5x - 5$ differiscono per un fattore numerico. **V** **F**
- 469** Dato il polinomio $2y^2 + 6y + 8$, scrivi:
a) un multiplo di grado 3;
b) due multipli di grado 2;
c) un multiplo di grado 1.
[a) per esempio $2(y+1)(y^2 + 3y + 4)$;
b) $2y^2 + 6y + 8$ e $3(2y^2 + 6y + 8)$; c) impossibile]
- 470** Dati i polinomi $3a + 3$ e $5a + 5$, determina un loro multiplo comune di minor grado possibile. È univocamente determinato?
[per esempio $30(a+1)$; no]

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più



ESERCIZIO GUIDA

471 Determiniamo il M.C.D. e il m.c.m. fra i polinomi: $a^3 + 2a^2 - 3a$; $5a^3 - 5a$; $a^2 - a^3$.

Scomponiamo in fattori i tre polinomi:

$$1. \ a^3 + 2a^2 - 3a = a(a^2 + 2a - 3) =$$

Non possiamo fermarci qui, perché il secondo fattore è ancora scomponibile:

$$= a(a-1)(a+3);$$

$$2. \ 5a^3 - 5a = 5a(a^2 - 1) =$$

Il secondo fattore è ancora scomponibile:

$$= 5a(a+1)(a-1);$$

$$3. \ a^2 - a^3 = a^2(1-a) =$$

Poiché nelle scomposizioni precedenti abbiamo incontrato il fattore $(a-1)$, raccogliamo -1 nel secondo fattore:

$$= -a^2(a-1).$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \text{M.C.D.}(a^3 + 2a^2 - 3a; 5a^3 - 5a; a^2 - a^3) &= \\ &= a(a-1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{m.c.m.}(a^3 + 2a^2 - 3a; 5a^3 - 5a; a^2 - a^3) &= \\ &= 5a^2(a-1)(a+3)(a+1). \end{aligned}$$

Determina M.C.D. e m.c.m. fra i seguenti polinomi.

472 $3a^2b + 3ab^2$; $6a^3 + 6a^2b$; $2a^2b^2 + 2ab^3$.

[M.C.D. = $a(a+b)$; m.c.m. = $6a^2b^2(a+b)$]

473 $2x - 2$; $x^2 - 1$; $3x + 3$.

[M.C.D. = 1; m.c.m. = $6(x-1)(x+1)$]

474 $2x^2 - x$; $4x^2 - 4x + 1$; $6x - 3$.

[M.C.D. = $2x - 1$; m.c.m. = $3x(2x-1)^2$]

475 $6x^3$; $3x^4 - 27x^2$; $2x^3 + 6x^2$.

[M.C.D. = x^2 ; m.c.m. = $6x^3(x-3)(x+3)$]

476 $x^2 - xy$; $xy - y^2$; $x^2 - y^2$.

[M.C.D. = $x - y$; m.c.m. = $xy(x-y)(x+y)$]

477 $2x + 2y$; $x^2 - y^2$; $x^2 + y^2 + 2xy$.

[M.C.D. = $x + y$; m.c.m. = $2(x+y)^2(x-y)$]

478 $x^4 - 2x^2 + 1$; $x^3 + x^2 - x - 1$; $x^2 - 1$.

[M.C.D. = $(x+1)(x-1)$; m.c.m. = $(x+1)^2(x-1)^2$]

479 $8 - x^3$; $6x^2 - x^3 - 12x + 8$; $x^2 - 4x + 4$.

[M.C.D. = $2 - x$; m.c.m. = $(2-x)^3(4+2x+x^2)$]

480 $a^3b - 2a^2b^2$; $a^3 - 4a^2b + 4ab^2$; $a^2b^2 - 4b^4$.

[M.C.D. = $a - 2b$; m.c.m. = $a^2b^2(a-2b)^2(a+2b)$]

BRAVI SI DIVENTA ▶ E19



481 $3x^2 - 3x - 18$; $4x^5 - 16x^3$; $x^2 + 4x + ax + 2a + 4$

482 $3a^3 - 18a^2b + 27ab^2$; $9a^3 - 81ab^2$; $18a^2b - 6a^3$. [M.C.D. = $3a(a-3b)$; m.c.m. = $18a^2(a-3b)^2(a+3b)$]

483 $8x^3 - 2x + 1 - 4x^2$; $4x^2 - 4x + 1$; $1 - 4x^2$. [M.C.D. = $1 - 2x$; m.c.m. = $(1-2x)^2(1+2x)$]

484 $a^2 - ab - 2a + 2b$; $b^2 - 2b - ab + 2a$; $4 - 2a + ab - 2b$. [M.C.D. = 1; m.c.m. = $(a-b)(a-2)(b-2)$]

485 $(x^2 - 4)(x^2 + 9)$; $(x^3 + 9x)(x^2 + 4x + 4)$; $x^3 - 4x$. [M.C.D. = $(x+2)$; m.c.m. = $x(x+2)^2(x^2+9)(x-2)$]

486 $6 - x - x^2$; $x^3 - 7x + 6$; $x^2 - 3x + 2$. [M.C.D. = $2 - x$; m.c.m. = $(x+3)(1-x)(2-x)$]

487 $(x - y)(x^2 - 4y^2)$; $x^2 - 3xy + 2y^2$; $x^2 + xy - 2y^2$. [M.C.D. = $x - y$; m.c.m. = $(x-y)(x-2y)(x+2y)$]

488 $2x^3 - 50x$; $x^4 - 125x$; $x^4 - 2x^3 - 15x^2$. [M.C.D. = $x(x-5)$; m.c.m. = $2x^2(x-5)(x+5)(x+3)(x^2+5x+25)$]

3. Le frazioni algebriche

→ Teoria a pag. 419

RIFLETTI SULLA TEORIA

489 VERO O FALSO?

- a) I polinomi sono frazioni algebriche.
- b) Una frazione algebrica con numeratore nullo è uguale a 1.
- c) L'espressione $2x^{-1}(x+2)$ è una frazione algebrica.
- d) Le condizioni di esistenza di una frazione algebrica sono tutte le uguaglianze che le variabili devono verificare affinché il denominatore sia nullo.
- e) Una frazione algebrica con denominatore uguale a un numero è un polinomio.

490 La frazione algebrica $\frac{x+2}{x-3}$ perde significato per $x = 3$? E per $x = -2$?

491 VERO O FALSO?

La frazione algebrica $\frac{x-1}{4x}$:

- a) si annulla per $x = 1$ e per $x = 0$.
- b) perde significato per $x = -4$;
- c) assume valore $+\frac{1}{8}$ per $x = 2$;
- d) assume valori reali per $x \neq 0$.

492 VERO O FALSO?

La frazione $\frac{a-4}{a^2-4}$:

- a) perde significato per $a = -2$.
- b) si annulla per $a = 4$.
- c) ha come C.E.: $a \neq \pm 2$.
- d) per $a = 1$ assume il valore -1 .
- e) per $a = 0$ vale 1.

ESERCIZI

■ Le condizioni di esistenza delle frazioni algebriche

■ ESERCIZIO GUIDA

493 Determiniamo le condizioni di esistenza delle seguenti frazioni algebriche:

$$\text{a)} \frac{x+y}{2xy}; \quad \text{b)} \frac{5x-1}{2x+3}; \quad \text{c)} \frac{2x-5}{x^2-4}; \quad \text{d)} \frac{4a}{a^2+1}; \quad \text{e)} \frac{a-4}{a^5-27a^2}; \quad \text{f)} \frac{3a+2b}{a+b}.$$

a) Dobbiamo porre il denominatore diverso da 0: $2xy \neq 0$.

Per la legge di annullamento del prodotto, nessuno dei fattori deve essere uguale a 0, quindi:

C.E.: $x \neq 0 \wedge y \neq 0$.

$$\text{b)} 2x+3 \neq 0 \rightarrow \text{C.E.: } x \neq -\frac{3}{2}.$$

$$\text{c)} x^2-4 \neq 0 \rightarrow (x+2)(x-2) \neq 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto, il prodotto è 0 se e soltanto se almeno uno dei due fattori è 0, quindi deve essere:

$x+2 \neq 0 \wedge x-2 \neq 0$, ossia
C.E.: $x \neq -2 \wedge x \neq +2$.

In modo equivalente scriviamo:

C.E.: $x \neq \pm 2$.

$$\text{d)} a^2+1 \neq 0.$$

Questo è vero per ogni numero reale a , infatti essendo a^2 sempre ≥ 0 , la somma a^2+1 è sempre un numero positivo.

C.E.: $\forall a \in \mathbb{R}$.

e) Scomponiamo in fattori il denominatore:

$$\begin{aligned} a^5 - 27a^2 &= a^2(a^3 - 27) = \\ &= a^2(a - 3)(a^2 + 9 + 3a). \end{aligned}$$

Per la legge di annullamento del prodotto, nessuno dei fattori deve essere uguale a 0, quindi:

$$a^2 \neq 0 \wedge a - 3 \neq 0 \wedge a^2 + 9 + 3a \neq 0.$$

Poiché un numero al quadrato è uguale a 0 solo se il numero è 0, allora $a \neq 0$.

Inoltre $a^2 + 9 + 3a$, essendo un falso quadrato, non è nullo per qualsiasi valore di a . In conclusione,

$$\text{C.E.: } a \neq 0 \wedge a \neq 3.$$

f) $a + b \neq 0$, ossia C.E.: $a \neq -b$.

La scrittura $a \neq -b$ significa che i valori di a e di b non devono essere opposti. Per esempio, sono escluse le coppie:

$$\begin{cases} a = +1 \\ b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -0,5 \\ b = +0,5 \end{cases} \quad \begin{cases} a = +100 \\ b = -100 \end{cases} \quad \text{ecc.}$$

Determina le condizioni di esistenza delle seguenti frazioni algebriche.

494 $\frac{5}{a}; \frac{1}{x}; \frac{a+b}{2a}; \frac{2a}{a-1}; \frac{3a+x}{x-3}.$

495 $\frac{x+1}{6xy}; \frac{3}{2(x-1)}; \frac{a+1}{5a^3x}.$

496 $\frac{2}{xy^3t}; \frac{4}{9(x+3)}; \frac{x}{a^2b^2}.$

497 $\frac{2a}{3x+6}; \frac{1}{2x-2}; \frac{2x+3}{2x+4}; \frac{a^2x}{3x+1}.$

498 $\frac{x+2}{2x-3}; \frac{4x^2}{3x+2}; \frac{4ab}{2b-1}; \frac{2}{a^3x}.$

499 $\frac{2}{(x-1)(x+5)}; \frac{x}{a(a+6)}; \frac{b}{3x^2}.$

500 $\frac{6}{x^2+x}; \frac{1}{ax^2y}; \frac{5}{2a^2-4a}; \frac{b}{ax+2x}.$

501 $\frac{3}{b+1}; \frac{3a+b}{x}; \frac{3ax}{x^2+1}; \frac{4a^2-3}{4a^2-16}.$

502 $\frac{4a^2}{a+5}; \frac{5x}{4x^2+3}; \frac{2b-b^2}{9b^2+1}; \frac{1}{1-x^2}.$

503 $\frac{3x}{2x+1}; \frac{4a+b}{3a^3-75a}; \frac{4}{5a}; \frac{2a-1}{x^4-81}.$

504 $\frac{5-x}{6x-9}; \frac{1-x}{2x^2+1}; \frac{1}{y^2-25}.$

505 $\frac{2a}{a^2-1}; \frac{a-1}{a^2-6a+9}; \frac{6}{5x^2-45}.$

506 $\frac{2}{a^2-a}; \frac{3b}{2b-b^2}; \frac{2a-1}{(a^2-1)(a+7)}.$

507 $\frac{1}{3x^2-12x+12}; \frac{1}{x^2-x-2}; \frac{6}{a^3+4a^2}.$

508 $\frac{2}{(x-1)^3}; \frac{x}{a(a^2-4)}; \frac{a+1}{27x^3}.$

509 $\frac{6ax}{x^2+2x}; \frac{1}{y^3+1}; \frac{a-3}{(a^2-4)(a^3-a^2)}.$

510 $\frac{2a}{a-b}; \frac{1}{x-y}; \frac{a+b}{2a+b}.$

511 $\frac{2ax}{x-a}; \frac{3x+b}{x^2-b^2}; \frac{ax^2+1}{x^2-4a^2}.$

Indica per quali valori di x le seguenti frazioni si annullano e per quali perdono significato.

512 $\frac{x^2+3x}{x+1}; \frac{2x}{x^2-4}; \frac{x+1}{x^2+1}; \frac{x-2}{x^2+9}; \frac{7x^3}{1-x}; \frac{2x^2+10x}{(x+5)(3x-1)}.$

513 $\frac{x-6}{x^2-6x}; \frac{x^2-1}{x^2+3x}; \frac{x}{-x^2-4}; \frac{8-2x^2}{x+2}; \frac{(x^2+1)^3}{3x}; \frac{8x^2+1}{2x-1}.$

4. Il calcolo con le frazioni algebriche

→ Teoria a pag. 420

RIFLETTI SULLA TEORIA

Le frazioni equivalenti

514 Una frazione algebrica può essere equivalente a un polinomio?

515 La frazione $\frac{x+2}{2}$ è equivalente a x ?

516 Perché il prodotto di una frazione algebrica per la sua reciproca è equivalente a 1?

517 VERO O FALSO?

- a) La somma di due frazioni algebriche è una frazione che ha per denominatore la somma dei denominatori.
- b) La differenza di due frazioni algebriche equivalenti è nulla.
- c) Il rapporto fra due frazioni equivalenti è uguale a 1.
- d) La potenza di una frazione algebrica ha le stesse C.E. della frazione base.

ESERCIZI

Dalle frazioni con segno – alle frazioni equivalenti con segno +

ESERCIZIO GUIDA

518 Trasformiamo in una frazione equivalente preceduta dal segno + la frazione:

$$-\frac{x+y}{(x-y)(a-1)}.$$

Poiché $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$, otteniamo:

$-\frac{x+y}{(x-y)(a-1)}$ equivalente a $\frac{-x-y}{(x-y)(a-1)}$ oppure a $\frac{x+y}{(-x+y)(a-1)}$ oppure a $\frac{x+y}{(x-y)(-a+1)}$.

Trasforma le seguenti frazioni con segno – in equivalenti frazioni con segno +.

519 $-\frac{1}{a-2}; \quad -\frac{1}{2a+1}; \quad -\frac{3a}{x-a}; \quad -\frac{3a-5}{-a^2-b^2}.$

520 $-\frac{2x-a^2}{ab-1}; \quad -\frac{ax+b}{-x-1}; \quad -\frac{5x-a^2}{3-x^2}; \quad -\frac{2x-a^2-b^2+1}{3a^2-6a}.$

521 $-\frac{+x+y}{2y}; \quad -\frac{20+27x}{+9x+9}; \quad -\frac{40x-19}{4ax^2}; \quad -\frac{2a-c}{(a-1)(a+1)^2}.$

Quali di queste frazioni valgono 1 per ogni valore del campo di esistenza?

522 $\frac{x-2}{2-x}; \quad -\frac{(a-1)^2}{-(1-a)^2}; \quad -\frac{6+x}{-x-6}.$

523 $-\frac{-a+2b}{2b-a}; \quad -\frac{-2a}{2a}; \quad \frac{(x-2)^2}{-(2-x)^2}.$

■ La semplificazione delle frazioni algebriche

Nel sito: ► 10 esercizi in più
► 7 esercizi di recupero



■ ESERCIZIO GUIDA

524 Dopo aver determinato le condizioni di esistenza, semplifichiamo le frazioni algebriche

a) $\frac{15a^3b^5}{3a^4b^2}, \quad$ b) $\frac{x^2 - 4x + 4}{3x^2 - 12}, \quad$ c) $\frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + x - 6}.$

a) Una frazione con denominatore nullo non è definita. Dunque dobbiamo impostare $3a^4b^2 \neq 0$, ottenendo le seguenti condizioni di esistenza:

C.E.: $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

Semplifichiamo i coefficienti numerici:

$$\frac{5}{3} \frac{a^3b^5}{a^4b^2}.$$

$$\frac{1}{a^4} \frac{5a^3b^5}{b^2}.$$

Dividiamo per a^3 , M.C.D. di a^3 e a^4 :

$$\frac{5}{a} \frac{b^5}{b^2}.$$

Dividiamo per b^2 , M.C.D. di b^2 e b^5 :

$$\frac{5}{a} \frac{b^3}{1}.$$

In sintesi: $\frac{15a^3b^5}{3a^4b^2} = \frac{5}{a} \frac{b^3}{1}$.

b) C.E.: $3x^2 - 12 \neq 0$.

Scomponiamo $3x^2 - 12$ raccogliendo 3 fra i termini del polinomio e riconoscendo la differenza di due quadrati:

$$3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2).$$

Imponendo $3(x-2)(x+2) \neq 0$ si ottiene:

C.E.: $x \neq 2 \wedge x \neq -2$.

Scomponiamo il numeratore $x^2 - 4x + 4$:

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2.$$

Riscriviamo la frazione data e semplifichiamo:

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{3x^2 - 12} = \frac{(x-2)^2}{3(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{3(x+2)}.$$

c) C.E.: $x^2 + x - 6 \neq 0$.

Scomponiamo il trinomio $x^2 + x - 6$. Poiché $-2 + 3 = +1$ e $(-2) \cdot (+3) = -6$, si ha:

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3).$$

$$(x-2)(x+3) \neq 0 \begin{cases} x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2 \\ x+3 \neq 0 \rightarrow x \neq -3 \end{cases}$$

C.E.: $x \neq 2 \wedge x \neq -3$.

Inoltre, applicando la regola di Ruffini:

$$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6).$$

Riscriviamo la frazione data e semplifichiamo:

$$\frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + x - 6} = \frac{(x-1)(x^2 + x - 6)}{x^2 + x - 6} = x-1.$$

Quando è possibile, semplifica le seguenti frazioni algebriche dopo avere determinato le condizioni di esistenza, che per brevità non scriviamo nei risultati (con $n \in \mathbb{N}$).

525 $\frac{a^3b^2c}{ac^2}; \quad \frac{5x^2y}{10x^3y}; \quad -\frac{9y^4z^5}{12yz^7}; \quad \frac{6x^6}{3x^3}.$

527 $\frac{6a^5b^4c^6}{12a^4c^6}; \quad \frac{26x^2y^2}{13x^3y}; \quad -\frac{5ax^2}{125x^2}; \quad -\frac{3a^2xy^5}{6ax^3y^7}.$

526 $-\frac{2abc}{a^2b^3c^4}; \quad \frac{7a^2x}{a^2x^2}; \quad -\frac{4bx^2}{6b}; \quad \frac{12b^2y^2}{6b^2y^4}.$

528 $\frac{2a^6b^4}{4a^6b^3}; \quad -\frac{3a^5y^3}{27a^5y^4}; \quad -\frac{5x^2y^3}{10x^3y^3}; \quad \frac{4a^3b^2}{4a^4}.$

529 $\frac{2x-2y}{y-x}; \quad \frac{x^2-x}{x-1}; \quad \frac{x^2+3x}{3x}.$

$$\left[-2; x; \frac{x+3}{3} \right]$$

530 $\frac{2a-2}{5a-5}; \quad \frac{-x-y}{x+y}; \quad \frac{4x^2-2x}{4x^2}.$

$$\left[\frac{2}{5}; -1; \frac{2x-1}{2x} \right]$$

531 $\frac{6a-3b}{6a}; \quad \frac{2x-2y}{2x+2y}; \quad \frac{a+b}{a^2+ab}.$

$$\left[\frac{2a-b}{2a}; \frac{x-y}{x+y}; \frac{1}{a} \right]$$

532 $\frac{a^2-2a}{a-2}; \quad \frac{x}{2x^2-x}; \quad \frac{x^3-x^2}{4x^2y}.$

$$\left[a; \frac{1}{2x-1}; \frac{x-1}{4y} \right]$$

533 $\frac{y-y^2}{a-ay}; \quad \frac{ax}{x^2-ax}; \quad \frac{4xy}{2x^2y-2xy}.$

$$\left[\frac{y}{a}; \frac{a}{x-a}; \frac{2}{x-1} \right]$$

534 $\frac{a+ax}{y+xy}; \quad \frac{2a^2-10a}{ax-5x}; \quad \frac{xy}{x^2-xy}.$

$$\left[\frac{a}{y}; \frac{2a}{x}; \frac{y}{x-y} \right]$$

535 $\frac{6x^2-12x+6}{x^2-1}; \quad \frac{xy^2-x}{1-y}; \quad \frac{4a^2-4}{2a+2}.$

$$\left[\frac{6(x-1)}{x+1}; -x(1+y); 2(a-1) \right]$$

536 $\frac{6ax-6a^2}{x^2-a^2}; \quad \frac{12a-3a^2}{4y-ay}; \quad \frac{2x^6+2x^2}{2x^2}.$

$$\left[\frac{6a}{x+a}; \frac{3a}{y}; x^4+1 \right]$$

537 $\frac{-24abx}{8ax-12bx}; \quad \frac{4a^2-b^2}{b^3-2b^2a}; \quad \frac{x^3-y^3}{x^3y^3}.$

$$\left[\frac{-6ab}{2a-3b}; -\frac{2a+b}{b^2}; \text{non semplif.} \right]$$

538 $\frac{a^3-8}{a^2+2a+4}; \quad \frac{a^2-5a+6}{2a-6}; \quad \frac{3xy+3y^2}{x^2-y^2}.$

$$\left[a-2; \frac{a-2}{2}; \frac{3y}{x-y} \right]$$

539 $\frac{3x^5}{12x+12x^2}; \quad \frac{8a^3+4a}{4a^2+1}; \quad \frac{b^2+3b+2}{b^2+2b+1}; \quad \frac{y^2-2y-3}{y^2-1}.$

$$\left[\frac{x^4}{4(1+x)}; \text{non semplif.}; \frac{b+2}{b+1}; \frac{y-3}{y-1} \right]$$

540 $\frac{x^4+16}{x^4+16-8x^2}; \quad \frac{14a-7b}{4a^2-b^2}; \quad \frac{4x-4y+(x-y)^2}{(x-y)^2}.$

$$\left[\text{non semplif.}; \frac{7}{2a+b}; \frac{4+x-y}{x-y} \right]$$

541 $\frac{a^4-1}{a^3-1}; \quad \frac{ax+2x-a-2}{ax-2x-a+2}; \quad \frac{a^2-4}{a^2-4a+4}.$

$$\left[\frac{(a+1)(a^2+1)}{a^2+a+1}; \frac{a+2}{a-2}; \frac{a+2}{a-2} \right]$$

542 $\frac{9a^2-9}{3a+3}; \quad \frac{ay+ax+2y+2x}{4ay+4ax}; \quad \frac{9-3y}{3a^2-a^2y}.$

$$\left[3(a-1); \frac{a+2}{4a}; \frac{3}{a^2} \right]$$

543 $\frac{x^2-9}{6a+2ax}; \quad \frac{a^2x+2ax+x}{2x+2ax}; \quad \frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+9}.$

$$\left[\frac{x-3}{2a}; \frac{a+1}{2}; \frac{x+1}{x-3} \right]$$

- 544** $\frac{4x^2 - 4x + 1}{2ax + 2x - a - 1}; \quad \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}; \quad \frac{a^4 - 16}{2a^2 + 8}.$ $\left[\frac{2x - 1}{a + 1}; \frac{x + 2}{x + 1}; \frac{a^2 - 4}{2} \right]$
- 545** $\frac{ax - x + 3a - 3}{x^2 + 4x + 3}; \quad \frac{y^2 - 9}{y^3 - 3y^2}; \quad \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{4 - x^2}.$ $\left[\frac{a - 1}{x + 1}; \frac{y + 3}{y^2}; \frac{x(x + 2)}{2 - x} \right]$
- 546** $\frac{x^2y - 4y}{-2y - xy}; \quad \frac{a^2 - 10a + 25}{a^2 - 25}; \quad \frac{6x^3 - 6xy^2}{x^2 + xy}.$ $\left[2 - x; \frac{a - 5}{a + 5}; 6(x - y) \right]$
- 547** $\frac{2a^2 - a^2x}{4y - 2xy}; \quad \frac{6x^2y - 12xy}{9x^4y - 18x^3y}; \quad \frac{x^3 - a^3}{3x - 3a}.$ $\left[\frac{a^2}{2y}; \frac{2}{3x^2}; \frac{x^2 + ax + a^2}{3} \right]$
- 548** $\frac{2a^4 - 2x^4}{4a^2 + 4x^2}; \quad \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x - 8}; \quad \frac{6ax^2 - 6ay^2}{3x^3 - 3y^3}.$ $\left[\frac{a^2 - x^2}{2}; \frac{x}{x + 4}; \frac{2a(x + y)}{x^2 + xy + y^2} \right]$
- 549** $\frac{4a^3 - 4a^2}{a^3 - 2a^2 + a}; \quad \frac{(x - 2)^2 + 2x}{2(x^3 + 8)}; \quad \frac{30a^2b^2}{a^2b - ab^2}.$ $\left[\frac{4a}{a - 1}; \frac{1}{2(x + 2)}; \frac{30ab}{a - b} \right]$
- 550** $\frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x^2 - 2x + 1)}; \quad \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}; \quad \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}.$ $\left[\frac{1}{x - 1}; \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}; \frac{x}{x - 1} \right]$
- 551** $\frac{y^2 - 3y + 2}{y^2 - y - 2}; \quad \frac{16a^2 - 24ab + 9b^2}{28ab - 21b^2}; \quad \frac{1 - 4b^2}{1 + 4b + 4b^2}.$ $\left[\frac{y - 1}{y + 1}; \frac{4a - 3b}{7b}; \frac{1 - 2b}{1 + 2b} \right]$
- 552** $\frac{x^2 + 10xy + 25y^2}{x^4 + 10x^3y + 25x^2y^2}; \quad \frac{a^5 - 16a}{a^3 - 4a}; \quad \frac{a^2 + ab - 2b^2}{8a^2 - 32b^2}.$ $\left[\frac{1}{x^2}; a^2 + 4; \frac{a - b}{8(a - 2b)} \right]$
- 553** $\frac{4x^2 + 3x}{4x^3 - x^2 - 3x}; \quad \frac{2x^2 + x - 10}{(x^2 - 4)(2x^2 + 5x)}; \quad \frac{y^3 - 9y}{y^3 + 4y^2 + 3y}.$ $\left[\frac{1}{x - 1}; \frac{1}{x(x + 2)}; \frac{y - 3}{y + 1} \right]$
- 554** $\frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 - x}; \quad \frac{x^2 - 2xy + y^2}{9x - 9y}.$ $\left[\frac{x^2 + 5x + 6}{x}; \frac{x - y}{9} \right]$
- 555** $\frac{2x^2 + 2x - 12}{x^3 - 7x + 6}; \quad \frac{8y^2 - 8}{4ay + 12y + 4a + 12}.$ $\left[\frac{2}{x - 1}; \frac{2(y - 1)}{a + 3} \right]$
- 556** $\frac{2x^5 + 6x^4 - 36x^3}{2ax^3 - x^3 - 18ax + 9x}; \quad \frac{(x^2 + 4x^4 - 4x^3)(2x + 1)}{64x^6 - 1}.$
- 557** $\frac{2x^3 + 2}{x^3 + x^2 + x + 1}; \quad \frac{a^3 - 3a^2 + 4}{a^2 - a - 2}.$ $\left[\frac{2(x^2 - x + 1)}{x^2 + 1}; a - 2 \right]$
- 558** $\frac{3x^{n+2}b^{n+1}}{2x^n b}; \quad \frac{x^n y}{x^{n-1}} \quad (n \geq 1).$ $\left[\frac{3x^2 b^n}{2}; xy \right]$
- 559** $\frac{x^{n^2} y}{x^n}; \quad \frac{4a^{2n} - 12a^n + 9}{4a^{2n} - 9}.$ $\left[x^{n^2 - n} y; \frac{2a^n - 3}{2a^n + 3} \right]$

BRAVI SI DIVENTA ► E20



560 $\frac{x^{2n} - y^{2n}}{x^{2n} + 2x^n y^n + y^{2n}}$; $\frac{2a^{n+1} + a^{n+2} + a^n}{a^2 - 1}$.

$$\left[x^n \neq -y^n, \frac{x^n - y^n}{x^n + y^n}; a \neq \pm 1, \frac{a^n(a+1)}{a-1} \right]$$

561 $\frac{24a^{2n} - 24}{8a^{4n} - 8}$; $\frac{x^n + x^{n-1}}{x^{n+1} - x^{n-1}}$ ($n \geq 1$).

$$\left[a \neq \pm 1, \frac{3}{a^{2n} + 1}; x \neq 0 \text{ e } x \neq \pm 1, \frac{1}{x-1} \right]$$

562 ASSOCIA a ogni frazione della prima riga la sua frazione equivalente scelta nella seconda riga, tenendo conto delle condizioni di esistenza.

1. $\frac{a-x}{3a^2-3ax}$; A. $-\frac{1}{3a}$;

2. $\frac{3a+9}{3a}$; B. $\frac{a+3}{a}$;

3. $\frac{9a-81}{a-9}$; C. $\frac{1}{3a}$;

4. $\frac{-9a-9}{27a^2+27a}$. D. 9.

563 CACCIA ALL'ERRORE

Trova l'eventuale errore e, nel caso ci sia, spiega perché l'uguaglianza è falsa.

a) $\frac{\cancel{x}+y}{\cancel{x}} = y$;

d) $\frac{4x^2 - ax}{x^2} = \frac{\cancel{x}(4x-a)}{\cancel{x}^2} = \frac{4\cancel{x}-a}{\cancel{x}} = 4-a$;

g) $\frac{a^6 b^4}{a^3 b^2} = a^2 b^2$;

b) $\frac{\cancel{x}(1+y)}{\cancel{x}} = 1+y$;

e) $\frac{x^{\cancel{2}} y}{y^{\cancel{2}}} = x^2 y$;

h) $\frac{(x-y)^3}{(y-x)^3} = 1$;

c) $\frac{x^{\cancel{2}} - 1}{\cancel{x}^2} = x - 1$;

f) $\frac{x(x+\cancel{y}) - 1}{(x+y)^{\cancel{2}}} = \frac{x-1}{x+y}$;

i) $\frac{\cancel{x}+\cancel{y}}{\cancel{x}-\cancel{y}} = -1$.

Frazioni equivalenti con denominatori opposti

ESERCIZIO GUIDA

564 Trasformiamo la frazione $\frac{5x^2 - a - 2}{1 - a^2}$ in una equivalente con il denominatore opposto.

Se cambiamo segno al denominatore per avere una frazione equivalente alla data, dobbiamo cambiare segno anche al numeratore $\left(\frac{-N}{-D}\right)$; in alternativa, lasciamo il numeratore invariato e cambiamo segno davanti alla linea di frazione $\left(-\frac{N}{-D}\right)$.

Quindi $\frac{N}{D} = \frac{-N}{-D} = -\frac{N}{-D}$.

$$\frac{5x^2 - a - 2}{1 - a^2} = \frac{-5x^2 + a + 2}{a^2 - 1} = -\frac{5x^2 - a - 2}{a^2 - 1}.$$

Trasforma le seguenti frazioni in frazioni equivalenti con il denominatore opposto.

565 $\frac{1}{2-a}; \quad \frac{4-a}{a^2-b^2}; \quad \frac{ax^2+b}{-a-b};$
 $\frac{2b+1}{b^2+1}; \quad \frac{a^2-b^2}{a^3+1}; \quad \frac{bx+5}{2x-b}.$

566 $\frac{3a+b}{b-a}; \quad \frac{1}{y^2-xy}; \quad \frac{3a-b}{a-b};$
 $\frac{x-3}{x-x^3}; \quad \frac{b}{1-b}; \quad \frac{x-1}{9x^2-9}.$
567 $\frac{3x^2-1}{1-x^3}; \quad \frac{2-2x^2}{x^2+9}; \quad \frac{6a-b}{a(a-b)};$
 $\frac{7a^2-12}{b^2(a-2)}; \quad \frac{4-2x}{(x+2)(x-2)}; \quad \frac{b-a}{a^3-b^3}.$

Equivalenze da completare

ESERCIZIO GUIDA

568 Completiamo la seguente uguaglianza:

$$\frac{3a^2-2b}{a+b} = \frac{?}{ab+b^2}.$$

- Il denominatore $ab + b^2$ si scomponе in $b(a + b)$. Ciò significa che la seconda frazione ha il denominatore uguale a quello della prima frazione, moltiplicato per b .
C.E.: $a \neq -b \wedge b \neq 0$.
- Per ottenere una frazione equivalente dobbiamo moltiplicare per b anche il numeratore:

$$\frac{3a^2-2b}{a+b} = \frac{b(3a^2-2b)}{b(a+b)} = \frac{3a^2b-2b^2}{ab+b^2}.$$

COMPLETA le seguenti uguaglianze.

569 $\frac{2a+3}{4a} = \frac{?}{4a^2}; \quad \frac{3x+2}{x-1} = \frac{3x^2+2x}{?}.$

570 $\frac{x-2}{x+4} = \frac{x^2-4}{?}; \quad \frac{a-3b}{3b^2} = \frac{?}{3ab^3}.$

571 $\frac{x+y}{4y} = \frac{?}{4xy-4y^2}; \quad \frac{3b^3-a^3}{3a+b} = \frac{?}{(3a+b)^2}.$

572 $\frac{b-a}{a+b} = \frac{?}{(a+b)^2}; \quad \frac{3x^2+5}{3x^2} = \frac{9x^4+15x^2}{?}.$

573 $\frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{?}{x^3-1}; \quad \frac{x-2y}{x+2y} = \frac{4x^2-8xy}{?}.$

574 $\frac{3x}{x+4} = \frac{?}{x^2+3x-4}; \quad \frac{xy+1}{1-xy} = \frac{?}{1-x^2y^2}.$

575 $\frac{a+b-c}{3a^2} = \frac{(a+b)^2-c^2}{?}; \quad \frac{2a-3}{3a-2} = \frac{?}{27a^3-8}.$

576 $\frac{a-b}{a+b} = \frac{a^3-b^3}{?}; \quad \frac{x+y}{x^2-2xy+y^2} = \frac{?}{(x-y)^3}.$

577 $\frac{x+2}{x-3} = \frac{x^2+5x+6}{?}; \quad \frac{2a-9}{a-3} = \frac{?}{2a^3-6a^2}.$

Una delle frazioni non è equivalente alle altre. Trovala.

578 $\frac{a^2}{b^2}; \quad \frac{a^3}{b^3}; \quad \frac{a^3}{ab^2}; \quad \frac{a^4}{a^2b^2}; \quad \frac{a^2b^2}{b^4}.$

579 $\frac{2}{a+b}; \quad \frac{2a}{a^2+ab}; \quad \frac{2a+2b}{(a+b)^2};$

$$\frac{2a-2b}{a^2-b^2}; \quad \frac{6a^2}{3a^2+3b}.$$

580 $\frac{4x^2+8xy}{4x^2-8xy}; \quad \frac{x+2y}{x-2y}; \quad \frac{(x+2y)^2}{(x-2y)^2};$

$$\frac{x^2-4y^2}{(x-2y)^2}; \quad \frac{(x+2y)^2}{x^2-4y^2}.$$

581 $\frac{9x^2-y^2}{3x^2y+xy^2}; \quad \frac{6xy^4-2y^5}{2xy^4}; \quad \frac{3x-y}{xy};$

$$\frac{3x^3y^3-x^2y^4}{x^3y^4}; \quad \frac{(3x-y)^2}{3x^2y-xy^2}.$$

582 $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}; \quad -\frac{y^3-xy^2}{y^3+xy^2}; \quad -\frac{xy-x^2}{xy+x^2};$

$$-\frac{xy^2-x^2y}{x^2y-xy^2}; \quad -\frac{y^2-x^2}{(y+x)^2}.$$

■ La riduzione di frazioni algebriche allo stesso denominatore

■ ESERCIZIO GUIDA

- 583** Riduciamo allo stesso denominatore le seguenti frazioni algebriche:

$$\frac{a+1}{5ab}, \quad \frac{6a-b}{4b^2}, \quad ax.$$

Le condizioni di esistenza delle frazioni sono C.E.: $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

Riscriviamo le frazioni date, ponendo il numeratore fra parentesi ed esplicitando il denominatore; in questo modo il procedimento risulta più chiaro:

$$\frac{(a+1)}{5ab}, \quad \frac{(6a-b)}{4b^2}, \quad \frac{(ax)}{1}.$$

Il denominatore comune sarà il m.c.m. fra i denominatori. Calcoliamolo:

$$\text{m.c.m.}(5ab, 4b^2, 1) = 20ab^2.$$

Ciascuna frazione è equivalente alla frazione che ha come *denominatore* il m.c.m. appena trovato e come *numeratore* il prodotto fra il suo numeratore e il quoziente fra il m.c.m. e il suo denominatore.

Dunque le tre frazioni, ridotte allo stesso denominatore, sono rispettivamente:

$$\frac{4b(a+1)}{20ab^2}, \quad \frac{5a(6-b)}{20ab^2}, \quad \frac{20ab^2(ax)}{20ab^2}.$$

Riduci allo stesso denominatore le seguenti frazioni algebriche.

584	$\frac{a}{b}$;	b ;	$\frac{1}{a}$.	593	$\frac{1}{(a+b)^2}$;	$\frac{1}{(a-b)^2}$;	$\frac{2}{a^2 - b^2}$.
585	$\frac{1}{2x}$;	x ;	$\frac{1}{6x^2}$.	594	$\frac{x-y}{xy + x^2y^2}$;	$\frac{5}{xy + 1}$;	$\frac{3x}{xy}$.
586	$\frac{2}{3x^2}$;	$\frac{3}{4x^3}$;	x^2 .	595	$\frac{2}{a^3 - ab^2}$;	$\frac{1}{(a+b)^2}$;	$\frac{5}{a}$.
587	$\frac{5}{3x}$;	$\frac{2}{xy}$;	$\frac{1}{2y}$.	596	$\frac{a^2 - 4b^2}{2a - 4b}$;	$\frac{a}{a+2b}$;	$\frac{5a + 3b}{8a^2 + 16ab}$.
588	$\frac{3}{x^2y}$;	$\frac{1}{2xy^2}$;	$\frac{7}{5x^2y^3}$.	597	$\frac{a(a+2)}{a^2 + a - 2}$;	$\frac{2a^2}{a^2 - 1}$;	$\frac{a-1}{a^2 - 2a + 1}$.
589	$\frac{11}{2ax^2}$;	1 ;	$\frac{3}{4a^2x}$.	598	$\frac{a^2}{2a - 6a^2}$;	$\frac{1+3a}{9a^2 - 1}$;	$\frac{8a - 5}{a^4 - 3a^5}$.
590	$\frac{1}{a}$;	$\frac{1}{a+b}$;	$\frac{1}{b}$.	599	$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 - 1}$;	$\frac{y - xy}{3x^2y - 3y}$;	$\frac{6x^2y}{x+1}$.
591	$\frac{x}{3x - 3y}$;	$\frac{y}{2x - 2y}$;	$\frac{x + 4y}{6y - 6x}$.	600	$\frac{x + 3}{x^2 - 7x + 10}$;	$\frac{x + 1}{2x - x^2}$;	$\frac{3x}{x^3 - 5x^2}$.
592	$\frac{1}{xy^2 - x^3}$;	$\frac{1}{x}$;	$\frac{1}{y-x}$.				

608 $\frac{2}{a+1} - \frac{5}{a+1};$

$$\frac{2x}{3x+1} - \frac{1-x}{3x+1}.$$

$$\left[-\frac{3}{a+1}; \frac{3x-1}{3x+1} \right]$$

609 $\frac{x-3}{x+5} - \frac{2x-7}{x+5};$

$$\frac{a+9}{a+3} - \frac{6-a}{a+3}.$$

$$\left[\frac{-x+4}{x+5}; \frac{2a+3}{a+3} \right]$$

610 $2a - \frac{3-4a}{a-2};$

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+x} + \frac{1}{2}.$$

$$\left[\frac{2a^2-3}{a-2}; \frac{3}{2} \right]$$

611 $x-y - \frac{x^2}{x+y};$

$$\frac{3a-b}{3a+b} - \frac{3a+b}{3a-b}.$$

$$\left[-\frac{y^2}{x+y}; -\frac{12ab}{9a^2-b^2} \right]$$

612 $\frac{2}{3x+3} - \frac{x-1}{9-9x^2} - 3;$

$$\frac{2a}{b-a} + \frac{5a^2-ab}{a^2-b^2} - \frac{3a}{b+a}.$$

$$\left[-\frac{27x+20}{9(x+1)}; 0 \right]$$

613 $\frac{x}{3x-3y} + \frac{y}{2x-2y} + \frac{x+4y}{6y-6x};$

$$\frac{4y^2+4y+1}{4y-8y^2} - \frac{4y^2+1}{4y} + y.$$

$$\left[\frac{1}{6}; \frac{2y+3}{2-4y} \right]$$

614 $\frac{a^2}{ab-b^2} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{b^2}{ab+b^2};$

$$\frac{a+1}{ab^2} - \frac{a-1}{a^2b} + \frac{a^2b-a^3+a+b}{a^2b^2(a-1)}.$$

$$\left[\frac{a}{b}; \frac{2}{ab(a-1)} \right]$$

615 $\frac{a+2}{a^2+a} - \frac{1}{a} + \frac{a+1}{-a^2-2a-1};$

$$\frac{3x}{y+3x} - \frac{y^2}{3xy-9x^2} + \frac{y^2+9x^2}{y^2-9x^2}.$$

$$\left[\frac{1-a}{a(a+1)}; -\frac{y}{3x} \right]$$

616 $\frac{2+x}{x+3} - \frac{3x-1}{x^2+x-6} - \frac{x}{x+3};$

$$\frac{a-1}{1+a} - \frac{2a^3+6}{a^3-a^2-a+1} + \frac{a^2+2a+1}{a^2-2a+1}.$$

$$\left[\frac{1}{2-x}; \frac{6}{a^2-1} \right]$$

617 $\frac{2x-5}{x+7} + \frac{2x+4}{x-9} - \frac{3x^2+13x-8}{x^2-2x-63};$

$$\frac{1}{y+5} - \frac{y^2-5y}{y^3+125} - \frac{5-y}{y^2-5y+25}.$$

$$\left[\frac{x-9}{x+7}; \frac{y^2}{y^3+125} \right]$$

618 $\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y} + \frac{6xy}{x^2-y^2};$

$$\frac{4a+4a^2+1}{4a-8a^2} + a - \frac{4a^2+1}{4a}.$$

$$\left[\frac{2xy}{x^2-y^2}; \frac{2a+3}{2-4a} \right]$$

619 $\frac{x+2}{x^2+x-2} + \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x-1};$

$$2x + \frac{x}{x^2-3x+2} - \frac{x^2-x}{x-2}.$$

$$\left[\frac{x}{x+2}; \frac{x(x-2)}{x-1} \right]$$

620 $\frac{x+3}{x^2-xy} + \frac{y-3}{xy-y^2} - \frac{2}{x-y};$

$$\frac{2}{x^2-2x-3} + \frac{1}{x^2-4x+3} - \frac{1}{x-3}.$$

$$\left[-\frac{3}{xy}; -\frac{x}{x^2-1} \right]$$

621 $\frac{1}{(a-b)(a-x)} + \frac{1}{(b-a)(b-x)} + \frac{1}{(x-a)(x-b)}$

$$[0]$$

622 $\frac{x^2}{x^2-y^2} + \frac{y^2}{y^2-x^2} - \frac{xy-y^2}{2xy-x^2-y^2}$

$$\left[\frac{x}{x-y} \right]$$

623 $x^2+2x+1 - \frac{1}{x^2-2x+1} + \frac{2x^2(x-1)}{x^3-3x^2+3x-1}$

$$\left[\frac{x^4}{(x-1)^2} \right]$$

624 $\frac{2}{x+3} + \frac{2-4x}{2x^2+5x-3} + \frac{1}{-x^2-3x}$

BRAVI SI DIVENTA ► E21



625 $\frac{2}{x+2} + \frac{9x^2-3x}{3x^2+5x-2} + \frac{1}{-x-2}$

$$\left[\frac{3x+1}{x+2} \right]$$

- 626** $\frac{a-1}{(a-2)^2 - (a-3)^2} + \frac{3a-6}{2a-5} - \frac{6a-15}{25+4a^2-20a}$ [2]
- 627** $\frac{a^2+2b^2}{a^3+b^3} - \frac{1}{a} + \frac{a+2b}{a^2+b^2-ab} + \frac{b^2-4ab}{a^3+ab^2-a^2b}$ $\left[\frac{1}{a+b} \right]$
- 628** $\frac{2}{a^n} + \frac{3}{a^n-2}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\left[\frac{5a^n-4}{a^{2n}-2a^n} \right]$
- 629** $\frac{a^{2n}}{a^{2n}+b^{2n}} + \frac{b^{2n}}{b^{2n}+a^{2n}} + \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\left[\frac{3}{2} \right]$
- 630** $-\frac{2a^n}{1-a^{2n}} + \frac{1}{1+a^n} + \frac{1}{1-a^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\left[\frac{2}{1+a^n} \right]$
- 631** $\frac{bx^n-ax^n}{x^{2n}-1} - \frac{b}{x^n-1} + \frac{a}{x^n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\left[\frac{a+b}{1-x^{2n}} \right]$
- 632** $\frac{x^n+2}{x^{2n}+x^n} - \frac{1}{x^n} + \frac{x^n+1}{-x^{2n}-2x^n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\left[\frac{1-x^n}{x^n(1+x^n)} \right]$

633 TEST Fra le seguenti frazioni algebriche, solo una è equivalente alla somma di $\frac{a+x}{ax}$ e $\frac{1-a}{a^2}$. Quale?

A $\frac{a^3-ax}{a^3x}$

D $\frac{a^2+2ax+x}{a^2x}$

B $\frac{a^2+x}{a^2x}$

E $-\frac{1}{a}$

C $\frac{x+1}{a^3ax}$

634 TEST La somma algebrica di due frazioni è $\frac{2a+3}{a-2}$. Quali sono le frazioni?

A $\frac{a+3}{a-2}$ e $\frac{a}{2-a}$ **D** $\frac{a}{a-2}$ e $\frac{-3-a}{2-a}$

B $\frac{a}{a-2}$ e $\frac{3-a}{a-2}$ **E** $\frac{a^2+a-6}{(2-a)^2}$ e $\frac{a+3}{a-2}$

C $\frac{a^2+a-6}{(2-a)^2}$ e $\frac{a}{2-a}$

CACCIA ALL'ERRORE Trova gli errori e spiega perché le uguaglianze sono sbagliate.

635 a) $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} = \frac{2}{a+b}$; b) $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$; c) $\frac{a}{2} - \frac{1}{b} = \frac{a-1}{2b}$; d) $1 + \frac{2}{x} = \frac{3}{x}$.

636 a) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{5x}$; b) $\frac{2a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{2ab}{a+b}$; c) $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-a} = \frac{2}{a-b}$; d) $\frac{2a-1}{b^2} - \frac{1-2a}{b^2} = 0$.

■ La moltiplicazione di frazioni algebriche

■ ESERCIZIO GUIDA

637 Eseguiamo le seguenti moltiplicazioni:

a) $\frac{a}{3b^3} \cdot \frac{9b^9}{2a^2}$; b) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4} \cdot \frac{2x-x^2}{2x} \cdot \frac{x}{2x+x^2}$; c) $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}\right) \cdot \frac{a}{a-1}$.

a) Dividiamo i coefficienti 3 e 9 per il fattore comune 3; dividiamo le parti letterali per i fattori comuni eseguendo la *differenza* degli esponenti:

$$\frac{4}{3b^5} \cdot \frac{9b^6}{2a^3} = \frac{3b^6}{2a},$$

C.E.: $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

b) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} \cdot \frac{2x - x^2}{2x} \cdot \frac{x}{2x + x^2} =$

Scomponiamo e semplifichiamo:

$$= \frac{(x+2)^2}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x(2-x)}{2x} \cdot \frac{x}{x(2+x)} =$$

C.E.: $x \neq 0 \wedge x \neq \pm 2$,

$$= \frac{2-x}{2(x-2)} = -\frac{x-2}{2(x-2)} = -\frac{1}{2}.$$

c) Occorre svolgere prima i calcoli dentro le parentesi tonde e, in ultimo, la moltiplicazione:

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \right) \cdot \frac{a}{a-1} = \\ = \left(\frac{\cancel{a}^1 - 1}{\cancel{a}^1} \right) \cdot \frac{1}{\cancel{a}^1 - 1} = \frac{1}{a},$$

C.E.: $a \neq 0 \wedge a \neq 1$.

Esegui le seguenti moltiplicazioni di frazioni algebriche (con $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$).

638 $\frac{5a^2b}{3} \cdot \frac{6}{10a^3b^2};$

$$\frac{2a^2x^3}{3xy^2} \cdot \frac{12b^4y}{a^5b}.$$

$$\left[\frac{1}{ab}; \frac{8x^2b^3}{a^3y} \right]$$

639 $\frac{25x^3y}{81y^2} \cdot \left(-\frac{54y^2}{75x^4} \right);$

$$\frac{7x^2y}{8a} \cdot \left(-\frac{16a^2b}{28x^3y^3} \right) \cdot \frac{6xy^2}{5ab}.$$

$$\left[-\frac{2y}{9x}; -\frac{3}{5} \right]$$

640 $\frac{0,5x^3y^3}{3ab^2} \cdot \frac{15a^3y}{7x^4y^2} \cdot \frac{x^3}{5a^2y};$

$$-9b^3y^2 \cdot \frac{3ax^2}{2by} \cdot \frac{2y}{45a^2x^2}.$$

$$\left[\frac{x^2y}{14b^2}; -\frac{3b^2y^2}{5a} \right]$$

641 $\frac{12a^2b^4}{-5x^3y^4} \cdot \left(-\frac{1}{2a} \right) \cdot \left(-\frac{10x^2y^3}{ab^3} \right);$

$$\left(-\frac{5b^4}{a^3} \right) \cdot 10a^3b^3 \cdot \frac{1}{15b^{12}}.$$

$$\left[-\frac{12b}{xy}; -\frac{10}{3b^5} \right]$$

642 $\frac{3y - 3x}{2b - a} \cdot \frac{a^2 - 4b^2}{2x - 2y};$

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x^4 - y^4}{x + y}.$$

$$\left[\frac{3(2b+a)}{2}; (x+y)(x-y)^2 \right]$$

643 $\frac{4a^2}{a^2 - x^2} \cdot \frac{x + a}{2a};$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{y^2} \cdot \frac{3y^3 - 3xy^3}{(1-x)^3}.$$

$$\left[\frac{2a}{a-x}; 3y \right]$$

644 $\frac{x-1}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+x-6}{3x-3};$

$$\frac{2a^2 + 2a}{2a-1} \cdot \frac{6-12a}{a^2-a-2}.$$

$$\left[\frac{x+3}{3x+6}; \frac{12a}{2-a} \right]$$

645 $3x \cdot \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{2xy - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 2xy};$

$$\frac{b^3 - 8}{8+b^3} \cdot \frac{b+2}{4+2b+b^2}.$$

$$\left[\frac{3x(y-x)}{x+y}; \frac{b-2}{4-2b+b^2} \right]$$

646 $\frac{13xy}{32(9a^2 - b^2)} \cdot (24ax - 8xb);$

$$\frac{x^2 + 9y^2 - 6xy}{xy + y^2} \cdot \frac{xy^2 + y^3}{3xy - x^2}.$$

$$\left[\frac{13x^2y}{4(3a+b)}, \frac{y(3y-x)}{x} \right]$$

647 $\frac{b^2 - 2b - 3}{b^2 - 15 + 2b} \cdot \frac{b^2 + 4 - 4b}{b+2} \cdot \frac{b^2 + 10 + 7b}{b^2 - b - 2};$

$$\frac{2x}{1-4x^2} \cdot \frac{4x+1+4x^2}{2x-6}.$$

$$\left[b-2; \frac{x(1+2x)}{(1-2x)(x-3)} \right]$$

648 $\frac{5a^{2n}b^n}{3} \cdot \frac{6}{10a^{3n}b^{2n}};$

$$\frac{2a^{2n}x^{3n}}{x^ny^{2n}} \cdot \frac{3b^{4n}y^n}{4a^{5n}b^n}.$$

$$\left[\frac{1}{a^n b^n}; \frac{3x^{2n}b^{3n}}{2a^{3n}y^n} \right]$$

649 $(-x^{2n}) \cdot \frac{y}{x^n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{y^{2n+1}};$

$$7x^ny^{n+2} \cdot \frac{3}{14x^{n-1}y^2} \left(-\frac{6y^n}{x} \right).$$

$$\left[-\frac{x^{3n+1}}{y^{2n}}; -9y^{2n} \right]$$

Semplifica le seguenti espressioni.

Nel sito: ► 10 esercizi in più



- 650** $\left(\frac{x+2a}{a} + \frac{4a}{x-2a}\right) \cdot \frac{ax-3a^2}{x^3};$ $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{1-x^2}\right) \cdot \left[\frac{x-3a}{x(x-2a)}; \frac{x}{x-1}\right]$
- 651** $\left(3a + \frac{3a-1}{2}\right) \cdot \left(3a - \frac{3a}{1-3a}\right) \cdot \frac{6a-2}{9a-1};$ $\left(\frac{1}{3}a - 2b + \frac{3b^2}{a}\right) \cdot \frac{12ab}{a-3b}. [9a^2; 4b(a-3b)]$
- 652** $\frac{2a^3}{a+b} \cdot \frac{a^2+2ab+b^2}{4ab} \cdot \left(-\frac{2b}{b^2-a^2}\right);$ $\left(a - \frac{a-1}{a+3}\right) \cdot \frac{a^2-9}{a+1}. \left[\frac{a^2}{a-b}; (a+1)(a-3)\right]$
- 653** $\left(b - \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{2}{b}\right) \cdot \frac{b^2}{b^2+2+3b};$ $\frac{x^2-4y^2}{x} \cdot \left(\frac{1}{x-2y} + \frac{1}{2y+x}\right). [b-1; 2]$
- 654** $\left(x - \frac{1}{y}\right)\left(x + \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{y^2}{x^2y^2+2xy+1};$ $\left(x - 2 + \frac{6}{x+3}\right) \cdot \frac{x^2+6x+9}{2x+6} \cdot \frac{1}{x+x^2} \cdot \left[\frac{xy-1}{xy+1}; \frac{1}{2}\right]$
- 655** $\left(\frac{2a}{a-3} - \frac{12}{a^2-8a+15}\right) \cdot \frac{a-5}{a-6};$ $\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{ab}\right) \cdot \frac{a^3b^2}{a^3+b^3}. \left[\frac{2(a+1)}{a-3}; \frac{a}{a+b}\right]$
- 656** $\left(1 + \frac{2x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) \cdot \frac{y^3}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3};$ $\left(\frac{x}{x^2-1} - \frac{x}{1+x^2}\right) \cdot \frac{x^3-x^2+x-1}{3x+1}.$
 $\left[\frac{y}{x+y}; \frac{2x}{(x+1)(3x+1)}\right]$
- 657** $\left(\frac{4}{x^3-3x^2} + \frac{1}{x^3+3x^2}\right) \cdot \frac{x^4-9x^2}{25x^2-81};$ $\left(\frac{xy}{x+y}-x\right)\left(\frac{xy}{x+y}-y\right)\left(\frac{x^2+2xy+y^2}{xy}\right) \cdot \left[\frac{1}{5x-9}; xy\right]$
- 658** $(x^4-2x^3)\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x};$ $\left(x + \frac{4}{x} + 4\right)\left(2x - \frac{x^2+x}{x+2}\right) \cdot \frac{1}{x+3}. [x^3-8; (x+2)]$
- 659** $\left(\frac{4}{b-3} - \frac{3b-5}{b^2-4b+3}\right) \cdot \frac{b^3+3b-4b^2}{b^2+3b};$ $4z^2y\left(1 - \frac{z-y}{2z} - \frac{2y}{z+y}\right) \cdot \left(\frac{z^2+3zy}{zy-y^2} - 1\right).$
 $\left[\frac{b+1}{b+3}; 2z(z^2-y^2)\right]$
- 660** $\left(\frac{a+2}{a^2+a} - \frac{1}{a} - \frac{a+1}{a^2+2a+1}\right)(1+a);$ $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x} - x\right)\left(1 - \frac{x^2+3x+1}{x^2+1}\right) \cdot \left[\frac{1-a}{a}; \frac{3(x^2-1)^2}{x^2}\right]$
- 661** $\left(\frac{1}{x-x^2} + \frac{2x}{1-x^2} - \frac{1}{1-x}\right) \cdot \frac{x^2+1+2x}{x^2+1} \cdot \frac{x}{x+1};$ $1 + \frac{2ab}{a^2-ab+b^2} \cdot \frac{a^3+b^3}{a^2+ab}.$
 $\left[\frac{1}{1-x}; 1+2b\right]$
- 662** $\left(x+y - \frac{x^2+y^2}{x+y}\right)\left(\frac{1}{2y^2} - \frac{1}{2x^2}\right);$ $\frac{a^4-b^4}{a^3+a^2} \cdot \frac{a}{a^3+ab^2-b^2-a^2} \cdot \frac{1-a^2}{b-a}.$
 $\left[\frac{x-y}{xy}; \frac{a+b}{a}\right]$
- 663** $\left(x^2+x+1 + \frac{1}{x-1}\right)\left(x^2-x+1 - \frac{1}{x+1}\right);$ $\left[\left(\frac{1}{3}b-2+\frac{3}{b}\right) \cdot \frac{6b}{b-3}\right] \cdot \frac{b-2}{b^2-b-6}.$
 $\left[\frac{x^6}{x^2-1}; 2 \cdot \frac{b-2}{b+2}\right]$
- 664** $\left(\frac{a+1}{2a^2+a-3} + \frac{1}{2a-2}\right) \cdot \frac{8a+12}{a} - \frac{4a+10}{a^2-a}$
 $\left[\frac{4}{a-1}\right]$

- 665** $\left(\frac{x^2}{4x^2 - 7x - 2} + \frac{x}{4x - 8} \right) \cdot \left(\frac{-4x}{8x + 1} + 1 \right) - \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{1}{2x + 4}$ $\left[\frac{1}{4} \right]$
- 666** $\left(\frac{1}{3a^n} + 3a^n \right) \cdot \frac{6a^n}{9a^{2n} + 1}; \left(\frac{2}{x^n - 3} - \frac{2}{3 - x^n} \right) \left(\frac{x^{2n} + 9 - 6x^n}{8} \right)$ ($n \in \mathbb{N}$). $\left[2; \frac{x^n - 3}{2} \right]$
- 667** $\frac{3a^n}{b^n + 3a^n} - \frac{b^{2n}}{3a^n b^n - 9a^{2n}} + \frac{b^{2n} + 9a^{2n}}{b^{2n} - 9a^{2n}}$ ($n \in \mathbb{N}$) $\left[\frac{-b^n}{3a^n} \right]$

Problemi

- 668** Sono date le due frazioni algebriche: $\frac{a^3 - 8}{a^2 + 2a + 4}$ e $\frac{a^2 + 4}{a + 2}$.
- Per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la prima frazione è uguale a zero?
 - Esiste un valore di a per cui la seconda frazione è nulla?
 - Quale valore assume la loro somma per $a = 2$?
 - E il loro prodotto per $a = -1$?
- [a) $a = 2$; b) no; c) 2; d) -15]
- 669** Considera le due frazioni algebriche: $\frac{b+1}{b+2}$ e $\frac{2b}{b+2}$.
- Per quale valore di $b \in \mathbb{R}$ la loro somma e la loro differenza assumono lo stesso valore?
 - Quali sono i valori di b che rendono nullo il prodotto delle due frazioni?
 - Quale valore assume il prodotto per $b = 1$? E per $b = -3$?
- [a) $b = 0$; b) $b = 0, b = -1$; c) $\frac{4}{9}, 12$
- 670** È data l'addizione $\frac{4t}{t^2 - 1} + k - \frac{t+1}{t-1}$.
- Per quali valori di t l'addizione perde di significato?
 - Quale espressione occorre sostituire a k affinché il risultato sia il polinomio nullo?
- [a) 1, -1; b) $k = \frac{t-1}{t+1}$
- 671** La base di un triangolo misura $4ax^2$ e la sua altezza $7x^2$, con $a > 0$ e $x \neq 0$; se diminuisci la base di $4a$ e aumenti l'altezza di 7, qual è il rapporto fra l'area del triangolo così ottenuto e l'area del triangolo dato? Determina poi, per quale valore di a la differenza tra l'area del triangolo dato e quella del triangolo ottenuto vale 7.
- [$\frac{(x^4 - 1)}{x^4}; a = \frac{1}{2}$]

■ La divisione di frazioni algebriche**ESERCIZIO GUIDA**

- 672** Eseguiamo le seguenti divisioni e determiniamo le condizioni di esistenza:

a) $\frac{a^2 + 3a}{a - 3} : \frac{a}{a^2 - 9}$; b) $\frac{a^2 - b^2}{6ab} : \frac{a + b}{12a} : \frac{4a^2 - 8ab + 4b^2}{3b^2}$.

a) $\frac{a^2 + 3a}{a - 3} : \frac{a}{a^2 - 9} =$

Scomponiamo in fattori numeratori e denominatori:

$$= \frac{a(a + 3)}{a - 3} : \frac{a}{(a + 3)(a - 3)}.$$

Le frazioni algebriche hanno le seguenti condizioni di esistenza: C.E.: $a \neq \pm 3$.

Inoltre il numeratore della seconda frazione deve essere diverso da 0:

C.E.: $a \neq \pm 3 \wedge a \neq 0$.

Eseguiamo la divisione, cioè moltiplichiamo per il reciproco del divisore e semplifichiamo:

$$\frac{\cancel{a}(a+3)}{\cancel{a}-3} \cdot \frac{(a+3)(\cancel{a}-3)}{\cancel{a}} = (a+3)^2.$$

L'espressione $(a+3)^2$ esiste per ogni valore di a , ma essa è quoziente delle frazioni iniziali solo se:

$$a \neq \pm 3 \wedge a \neq 0.$$

Per esempio, per $a = 5$ il quoziente vale $(5+3)^2 = 64$, ma per $a = 0$, pur essendo

$(0+3)^2 = 9$, il quoziente non esiste. Controlla quanto abbiamo ottenuto, sostituendo ad a rispettivamente i valori 5 e 0 nell'espressione iniziale.

- b) Le divisioni devono essere eseguite da sinistra verso destra, come se la prima divisione fosse racchiusa fra parentesi:

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{6ab} : \frac{a+b}{12a} \right) : \frac{4a^2 - 8ab + 4b^2}{3b^2} = \\ = \left(\frac{\cancel{(a+b)(a-b)}}{\cancel{6ab}} \cdot \frac{\cancel{12a}}{\cancel{a+b}} \right) : \frac{4(a-b)^2}{3b^2} =$$

C.E.: $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -b \wedge a \neq b$.

$$= \frac{\cancel{X(a-b)}}{\cancel{b}} \cdot \frac{3b^2}{\cancel{X(a-b)^2}} = \frac{3b}{2(a-b)}.$$

Se la divisione fosse stata

$$\frac{a^2 - b^2}{6ab} : \left(\frac{a+b}{12a} : \frac{4a^2 - 8ab + 4b^2}{3b^2} \right),$$

avremmo dovuto eseguire per primi i calcoli all'interno delle parentesi tonde.

Esegui le seguenti divisioni di frazioni algebriche.

673 $\frac{1}{x} : \frac{3y}{2x};$

$$\frac{a+b}{a-5} : \frac{a-b}{2a-10}.$$

$$\left[\frac{2}{3y}; \frac{2(a+b)}{a-b} \right]$$

674 $\frac{2}{a} : \frac{a-1}{a+1};$

$$\frac{5a-5b}{3ab} : \frac{a^2}{a-b}.$$

$$\left[\frac{2(a+1)}{a(a-1)}; \frac{5(a-b)^2}{3a^3b} \right]$$

675 $\frac{a^4b^2}{3} : \frac{ab^3}{6};$

$$\frac{a^3x}{by^2} : \frac{a^4x^2}{b^2y}.$$

$$\left[\frac{2a^3}{b}; \frac{b}{axy} \right]$$

676 $-12ab : \left(-\frac{2}{3}ab \right);$

$$\frac{7bx}{2ay} : \frac{5bx}{4ay}.$$

$$\left[18; \frac{14}{5} \right]$$

677 $1 : \frac{1}{z-t};$

$$\frac{3a^2b^3}{2c^2} : (-2ab^2).$$

$$\left[z-t; -\frac{3ab}{4c^2} \right]$$

678 $\left(-\frac{3x^2y}{2z} \right) : \left(\frac{9xy^2}{4z} \right);$

$$\frac{x^0}{y^0} : \frac{x}{y}.$$

$$\left[-\frac{2x}{3y}; \frac{y}{x} \right]$$

679 $\frac{x-2y}{x+2y} : \frac{x-2y}{x+2y};$

$$10x^3y^3 : \left(-\frac{5y^4}{x^3} \right).$$

$$\left[1; -\frac{2x^6}{y} \right]$$

680 $\frac{54(b-3)^2}{7(b+3)} : 36(b-3);$

$$\frac{3x}{2x-2} : \frac{7x}{3x-3}.$$

$$\left[\frac{3(b-3)}{14(b+3)}; \frac{9}{14} \right]$$

681 $\frac{4x^3y^2}{15ab} : \left(\frac{16x^4y^4}{35a^3y^2} : \frac{8x^2y^2}{49ab} \right);$

$$\frac{4x^3y^2}{15ab} : \frac{16x^4y^4}{35a^3y^2} : \frac{8x^2y^2}{49ab}.$$

$$\left[\frac{2axy^2}{21b^2}; \frac{343a^3}{96x^3y^2} \right]$$

682 $\frac{x^2 - 1}{15x} : \left(\frac{x - 1}{6x^3} : \frac{x^2 + x}{12} \right); \quad \frac{x^2 - 1}{15x} : \frac{x - 1}{6x^3} : \frac{x^2 + x}{12}.$ $\left[\frac{x^3(x+1)^2}{30}; \frac{24}{5}x \right]$

683 $\frac{4x^2y^3}{5x - 5} : \frac{8x^5y^3}{10x - 10} : \frac{y}{x^4}; \quad \frac{4x^2y^3}{5x - 5} : \left(\frac{8x^5y^3}{10x - 10} : \frac{y}{x^4} \right).$ $\left[\frac{x}{y}; \frac{y}{x^7} \right]$

684 $\frac{3x}{x - 5} : \frac{x - 1}{2x - 10} : \frac{6x}{x^2 - 1}; \quad \frac{3x}{x - 5} : \left(\frac{x - 1}{2x - 10} : \frac{6x}{x^2 - 1} \right).$ $\left[x + 1; \frac{36x^2}{(x-1)^2(x+1)} \right]$

685 $\frac{(x+2y^2)^3}{(1-x)^2}$ $\left[\frac{x^2+x}{x+5} \right]$

686 $\frac{1 + \frac{2}{x-1}}{\frac{x^2+x}{2x-2}}$ **688** $\frac{\frac{x^3+1+3x^2+3x}{x^2+5x}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$

687 $\frac{\frac{z}{z^2-a^2} \cdot (z-a)}{\left(1-\frac{a}{z}\right) \cdot \frac{az}{z^2-a^2}}$ **689** $\frac{x^{n+1}}{y} : \frac{x^n}{y^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N})$ $[xy^n]$

690 $\frac{3a^{n+2}}{3b^{n-1}} : \frac{4a^3}{9b^2} : \frac{a^n}{b^{2n}} \quad (n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 1)$ $\left[\frac{9b^{n+3}}{4a} \right]$

691 $\frac{3a^{n+2}}{3b^{n-1}} : \left(\frac{4a^3}{9b^2} : \frac{a^n}{b^{2n}} \right) \quad (n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 1)$ $\left[\frac{9a^{2n-1}}{4b^{3n-3}} \right]$

■ Espressioni con addizioni, moltiplicazioni e divisioni

TEST

- 692** Quale fra le seguenti divisioni ha per risultato -1 ? **693** Sulla divisione $\frac{y^2 - 1}{3y - 3} : \frac{y^2 + 3y + 2}{3}$ possiamo affermare che è uguale a:
- A** $\frac{(a+4)^2}{a+1} : \frac{a+1}{(a-4)^2}$ **A** $y+2, \forall y \neq \pm 1.$
- B** $\frac{a+2}{a-2} : \frac{a-2}{a+2}$ **B** $\frac{1}{y+2}, \forall y \neq \pm 1 \wedge y \neq -2.$
- C** $\frac{(a-1)^2}{a+1} : \frac{(1-a)^2}{a+1}$ **C** $\frac{1}{y+2}, \forall y \in \mathbb{R}.$
- D** $\frac{(a-2)^2}{1-b} : \frac{(2-a)^2}{b-1}$ **D** $\frac{1}{y-2}, \forall y \neq -1.$
- E** $\frac{a}{a+b} : \frac{a}{a-b}$ **E** $y+2, \forall y \neq \pm 1 \wedge y \neq -2.$
-

Semplifica le seguenti espressioni.

694 $\frac{3ab - b}{2a} : (9a^2 - 3a); \quad \frac{3x^2 - 6xy}{2y^4} : \frac{x^2 - 4y^2}{y^3}.$ $\left[\frac{b}{6a^2}; \frac{3x}{2y(x+2y)} \right]$

695 $\frac{(x+2y^2)^3}{(1-x)^2} : \frac{(2y^2+x)^2}{(x-1)^3}; \quad (4x^2 - 2x) : \frac{4x^2 + 1 - 4x}{x}.$ $\left[(x+2y^2)(x-1); \frac{2x^2}{2x-1} \right]$

696 $\frac{x^2 - x}{x^2 + 4x + 4} : \frac{2x^2 + 6x}{x^2 - 4}; \quad \frac{x^3 + 1 + 3x^2 + 3x}{x^2 + 5x} : \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right). \quad \left[\frac{(x-1)(x-2)}{2(x+2)(x+3)}; \frac{x^2+x}{x+5} \right]$

697 $\left(\frac{3a}{2b} - 1\right) : \left(\frac{9a^2}{4b^2} - 1\right); \quad \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) : \frac{x^2+x}{2x-2}. \quad \left[\frac{2b}{3a+2b}; \frac{2}{x} \right]$

698 $\frac{a^3 - ab^2}{a^2 + 2ab + b^2} : \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2b - b^3} : ab; \quad \frac{a^3 - ab^2}{a^2 + 2ab + b^2} : \left(\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2b - b^3} : ab\right). \quad [1; a^2b^2]$

699 $\left(\frac{1}{a} - \frac{a}{b}\right) : \left(1 - \frac{b - a^2 + 2ab}{2ab}\right) : \left(-\frac{1}{a}\right); \quad \left(1 - \frac{x-3y}{x+y}\right) : \left(\frac{3x+y}{x-y} - 3\right). \quad \left[2a; \frac{x-y}{x+y} \right]$

700 $\left(\frac{2y^2}{1+y} - y + 1\right) : \frac{y^2 + y^4}{4yz^2 + 4z^2}; \quad \left(x - \frac{y^2 + x^2}{x}\right) : \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right). \quad \left[\frac{4z^2}{y^2}; \frac{y^3}{y-x} \right]$

701 $3 : \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}; \quad 3 : \left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}\right). \quad \left[\frac{4(x-y)}{(x+y)}; \frac{3(x^2-y^2)}{2(x^2+y^2)} \right]$

702 $\frac{2x^3}{x+y} : \frac{4xy}{x^2 + 2xy + y^2} : \frac{x^2 - y^2}{yx - y^2}; \quad \frac{2x^3}{x+y} : \left(\frac{4xy}{x^2 + 2xy + y^2} : \frac{x^2 - y^2}{yx - y^2}\right). \quad \left[\frac{x^2}{2}; \frac{x^2(x+y)^2}{2y^2} \right]$

703 $\frac{2}{a} \left(\frac{a+b}{2b} + \frac{b}{a-b} \right) : \frac{a^2 + b^2}{ab - b^2}; \quad \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x} : (x^2 - 4). \quad \left[\frac{1}{a}; \frac{1}{x(x-2)} \right]$

704 $\frac{z}{z^2 - a^2} \cdot (z-a) : \left[\left(1 - \frac{a}{z}\right) \frac{az}{z^2 - a^2} \right]; \quad \left(\frac{a+3}{a-3} : \frac{a^2 + 2a - 3}{a^2 - 2a - 3} + 1 \right) : (a-1). \quad \left[\frac{z}{a}; \frac{2a}{(a-1)^2} \right]$

705 $\frac{1}{x} : \left(\frac{x-3y}{xy} + \frac{x+y}{x^2} - \frac{y^3 - 2xy^2}{x^2y^2} \right) \quad \left[\frac{y}{x} \right]$

706 $\left[\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \right] : \frac{x+y}{xy} \quad [1]$

707 $\frac{a}{a+1} : \left(\frac{2a-1}{a+3} - \frac{2a-5}{a+1} - \frac{14}{a^2+4a+3} \right) \quad [\text{impossibile, perché...}]$

708 $x(2x-1) : \left(2x + \frac{1}{2x-2} + \frac{2x-1}{2x-2}\right) \quad [x-1]$

BRAVI SI DIVENTA ► E22



709 $\left(1 - \frac{4}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{x+1} + \frac{4}{x^2 - x - 2}\right) : \frac{x^3 - x^4 + 8 - 8x}{2 - 2x}$

710 $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 1} : \left(\frac{x}{x+1} - \frac{2x}{3x-3} + \frac{9-x}{3x^2-3}\right) \quad \left[\frac{3x}{x-3} \right]$

711 $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 1} : \frac{x}{x+1} - \frac{2x}{3x-3} + \frac{9-x}{3x^2-3} \quad \left[\frac{x(x-9)}{3(x^2-1)} \right]$

Problemi

712 Verifica che le due espressioni $\frac{x+1}{x-1} + \frac{2x-1}{x-1} \cdot \frac{(x-2)^2}{(2-x)^2}$ e $\left(\frac{x+1}{x-1} + \frac{2x-1}{x-1}\right) \cdot \frac{(x-2)^2}{(2-x)^2}$ forniscono lo stesso risultato. Puoi affermare in generale che $A + B \cdot C$ e $(A + B) \cdot C$, con A, B e C frazioni algebriche qualsiasi, danno sempre lo stesso risultato? Perché? [in generale no, ma in questo caso sì perché...]

713 È data l'espressione $\left(1 + \frac{1}{s}\right)\left(1 - \frac{1}{1-s^2}\right)$.

- Per quali valori di s l'espressione è priva di significato?
- Può essere nullo il secondo fattore dell'espressione? Perché?
- Semplifica l'espressione e determina per quale valore di $s \in \mathbb{R}$ il risultato vale 2.
- Per quale frazione algebrica occorre dividere il risultato dell'espressione, affinché il quoziente sia uguale a 3?

$$\boxed{\text{a) } 0, -1, 1; \text{ b) no; c) } s = 2; \text{ d) } \frac{s}{3(s-1)}}$$

714 La base AB di un rettangolo $ABCD$ misura $5a$ e l'altezza BC supera di $(a+3b)$ la base. Detti M un punto della base AB tale che $\overline{AM} = \frac{2}{5} \overline{AB}$ e N il punto di BC tale che $\overline{CN} = 2\overline{NB}$, dimostra che $\forall a, b \in \mathbb{Q}^+$ sono equivalenti le due espressioni:

$$\frac{\overline{MN}^2 - (\overline{NB} - \overline{MB})^2}{\frac{1}{2} \overline{CN}} \text{ e } \frac{6}{5} \overline{DC}.$$

■ La potenza di frazioni algebriche**ESERCIZIO GUIDA**

715 Semplifichiamo le seguenti potenze di frazioni algebriche:

$$\text{a) } \left(-\frac{3ab^5}{2a^2c^3}\right)^2; \quad \text{b) } \left(-\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}\right)^3.$$

a) L'esponente è pari, quindi il risultato è positivo. Eleviamo al quadrato il numeratore e il denominatore, dopo aver semplificato la frazione algebrica:

$$\left(\frac{-3ab^5}{2a^2c^3}\right)^2 = + \frac{(3b^5)^2}{(2ac^3)^2} = \frac{9b^{10}}{4a^2c^6},$$

C.E.: $a \neq 0 \wedge c \neq 0$.

b) L'esponente è dispari, quindi resta il segno della base. Prima di eseguire la potenza, semplifichiamo la frazione algebrica:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}\right)^3 &= \left(-\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}\right)^3 = \\ &= -\frac{(a-b)^3}{(a+b)^3}, \end{aligned}$$

C.E.: $a \neq -b$.

Semplifica le seguenti frazioni algebriche.

716 $\left(\frac{3a^2b^3}{4c^4}\right)^2; \quad \left(-\frac{2xy^2}{3z^3}\right)^3.$

$$\boxed{\left[\frac{9a^4b^6}{16c^8}; -\frac{8x^3y^6}{27z^9}\right]}$$

717 $\left(-\frac{27a^4b^5c^8}{9a^2b^6c^5}\right)^2; \quad \left(\frac{6x^3y^2z}{12xy^5z^7}\right)^3.$

$$\boxed{\left[\frac{9a^4c^6}{b^2}; \frac{x^6}{8y^9z^{18}}\right]}$$

- 718** $\left(\frac{2a+2b}{a^2+2ab+b^2} \right)^3; \quad \left(\frac{4a^2-4b^2}{2b-2a} \right)^3.$ $\left[\frac{8}{(a+b)^3}; -8(a+b)^3 \right]$
- 719** $\left(x - \frac{xy}{x+y} \right)^3; \quad \left[2pq^3 \cdot \left(-\frac{1}{2p^2q} \right) \right]^5.$ $\left[\frac{x^6}{(x+y)^3}; -\frac{q^{10}}{p^5} \right]$
- 720** $\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2} \right)^2; \quad \left(\frac{x^2-10xy+25y^2}{10y-2x} \right)^2.$ $\left[(x-y)^2; \frac{(x-5y)^2}{4} \right]$
- 721** $\left(\frac{x^3+x^2y}{x^2+2xy+y^2} \right)^3; \quad \left(\frac{2a^2b^3-2ab^4}{2a^2b^2-2a^3b} \right)^5.$ $\left[\frac{x^6}{(x+y)^3}; -\frac{b^{10}}{a^5} \right]$
- 722** $\left(\frac{a^2+1}{a^2-3a-4} - \frac{a+1}{a-4} \right)^2; \quad \left(\frac{b}{b-1} \right)^2 \cdot \left(b - \frac{1}{b} \right)^2.$ $\left[\frac{4a^2}{(a-4)^2(a+1)^2}; (b+1)^2 \right]$
- 723** $\left(\frac{a+b}{b} - 1 : \frac{b}{a+b} \right)^0; \quad \left(1 - \frac{x^2-2x}{x^2-2x+1} \right)^2.$ $\left[\text{impossibile perché...}; \frac{1}{(x-1)^4} \right]$
- 724** $\left(\frac{3x^{n+1}}{y^{2n}} \right)^2; \quad \left(-\frac{2x^{n+3}}{3x^ny^3} \right)^3 \quad (n \in \mathbb{N}).$ $\left[\frac{9x^{2n+2}}{y^{4n}}; -\frac{8x^9}{27y^9} \right]$
- 725** $\left(\frac{2ab-6b}{a^2-8a+15} \right)^n : \frac{b}{(a-5)^n}; \quad \left(\frac{a^n}{b^n} - \frac{b^n}{a^n} \right)^2 : \left(\frac{b^n}{a^n} + \frac{a^n}{b^n} - 2 \right) \quad (n \in \mathbb{N}).$ $\left[2^n b^{n-1}; \frac{(a^n+b^n)^2}{a^n b^n} \right]$

Potenze con esponente intero negativo

■ ESERCIZIO GUIDA

726 Semplifichiamo la seguente espressione:

$$\left(\frac{5xy}{a^2} \right)^{-2}.$$

C.E.: $a \neq 0.$

Poiché, per definizione, $x^{-n} = \frac{1}{x^n},$

possiamo scrivere:

$$\left(\frac{5xy}{a^2} \right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{5xy}{a^2} \right)^2} = \left(\frac{a^2}{5xy} \right)^2.$$

Dobbiamo aggiungere nuove C.E.:

$x \neq 0 \wedge y \neq 0.$

Dunque:

$$\left(\frac{5xy}{a^2} \right)^{-2} = \frac{a^4}{25x^2y^2}; \text{ C.E.: } a \neq 0, x \neq 0, y \neq 0.$$

Semplifica le seguenti espressioni.

- 727** $\left(-\frac{2ac^2}{3b^4} \right)^{-2}; \quad \left(\frac{a-3}{a^2-4a+3} \right)^{-1}.$ $\left[\frac{9b^8}{4a^2c^4}; a-1 \right]$
- 728** $\left[-\frac{1}{2(a+2b)^3} \right]^{-3}; \quad \left[\left(\frac{x+3}{x^2-2x-15} \right)^{-1} \right]^{-2}.$ $\left[-8(a+2b)^9; \frac{1}{(x-5)^2} \right]$
- 729** $\left(-\frac{a^2b^3}{1-2a+a^2} \right)^{-3}; \quad \left[\left(\frac{a+b}{a^2-b^2} \right)^2 \right]^{-1}.$ $\left[-\frac{(1-a)^6}{a^6b^9}; (a-b)^2 \right]$

730 $\left(\frac{x-y}{x+y} - 1 \right) \left(1 + \frac{x+y}{x-y} \right)^{-1}; \quad \left[\left(\frac{b^2+3b+9}{b^3-27} \right)^{-2} \right]^3.$ $\left[-\frac{y(x-y)}{x(x+y)}; (b-3)^6 \right]$

731 $\left(\frac{x^2-y^2}{x+y} \right)^3 \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{x+y} \right)^{-4}; \quad \left(\frac{a^3}{a^2-2a+4} \right)^2 \cdot (a^2+2a)^{-3} \cdot \left(\frac{a^3+8}{a} \right)^2.$ $\left[\frac{1}{x-y}; \frac{a}{a+2} \right]$

RIEPILOGO**LE ESPRESSIONI CON
LE FRAZIONI ALGEBRICHE**

Nel sito: ▶ 17 esercizi di recupero

**TEST**

732 Solo una tra le seguenti espressioni è equivalente a $\left(\frac{-1}{a-1} \right)^{-1}$, con $a \neq 1$. Quale?

- A** $a-1$ **D** $1-a$
B $\frac{1}{a-1}$ **E** 1
C $\frac{1}{1-a}$

733 La divisione tra $\left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{-2}$ e $\left(\frac{x+2}{1-x} \right)^3$ ha come

- A** $\frac{x+2}{1-x}.$ **D** $-\frac{x+1}{x+2}.$
B $\frac{x-1}{x+2}.$ **E** $-\frac{x+2}{x-1}.$
C $\frac{1-x}{2+x}.$

734 La divisione tra una frazione F e $\frac{x+1}{x^2-1}$ dà

- A** $\frac{x+1}{x-1}$ **D** $\frac{(x-1)^2}{x+1}$
B $\frac{(x+1)^2}{x-1}$ **E** $\frac{x+1}{(x-1)^2}$
C $\frac{(x+1)^2}{1-x}$

735 Data la frazione algebrica $\frac{x^4y^4-2x^3y^3+x^2y^2}{x^2y^2-xy}$,

- il valore che essa assume per $x=a+1$ e $y=a-1$ è:
A $(a^4-1).$
B $(a^2-1)^2(a^2+2).$
C $(a^2-2)(a^2-1).$
D $a^2(a^2-1).$
E $a^4+2.$

Semplifica le seguenti espressioni dopo aver determinato le condizioni di esistenza, che per brevità non scriviamo nei risultati.

736 $\frac{a^3-2}{4a^2y} + \frac{1}{2} - \frac{a}{4y} + \frac{1}{2a^2y}$ $\left[\frac{1}{2} \right]$

737 $\frac{z^3+t^3}{z^2-t^2} : \frac{z^3-z^2t+zt^2}{2z-2t}$ $\left[\frac{2}{z} \right]$

738 $\frac{(a-1)(a+1)}{a^2b^2} - \frac{1+2a^2}{a^2} + \frac{b^2+1}{a^2b^2}$ $\left[\frac{1-2b^2}{b^2} \right]$

739 $1 - \frac{1}{x^2} - \frac{x}{3y^2} + \frac{2x^3+y^3}{6x^2y^2} - \frac{y}{6x^2}$ $\left[\frac{x^2-1}{x^2} \right]$

740 $\frac{x^3-4x}{x^2+4x+4} : \frac{x^2-4x+4}{2x^2-8} : 4x^2$ $\left[\frac{1}{2x} \right]$

741 $\frac{(x+y)^2}{2x^2y} + 3 - \frac{(x-y)^2}{2x^2y} - \frac{1}{x}$ $\left[\frac{1+3x}{x} \right]$

- 742** $\frac{2b+2}{b^4+b^3+8b+8} \cdot \left(\frac{4}{b^2}-1 \right) \left(b+\frac{4}{b-2} \right)$ $\left[-\frac{2}{b^2} \right]$
- 743** $\frac{1}{2} \left(\frac{a-x}{m} \right) + \frac{11}{5x} + \frac{5x^2-2m}{10mx} - \frac{a}{2m}$ $\left[\frac{2}{x} \right]$
- 744** $\frac{a+3b}{2a} - \frac{2a-b}{3b} - \frac{4a^2+9b^2}{6ab} + \frac{a-b}{b}$ $\left[-\frac{2a+b}{6b} \right]$
- 745** $\left(\frac{2a+2b}{a} + \frac{a^2-b^2}{ab} - \frac{(a+b)^2}{ab} \right) : \frac{a+1}{9-9a^2}$ [0]
- 746** $\frac{4b^2+1}{2b^3} - \frac{1}{12a^2} + \frac{b-36a^4}{12a^2b} - \frac{1}{2b^3}$ $\left[\frac{2-3a^2}{b} \right]$
- 747** $\frac{x^2-4}{y^3-4y^2-5y} : \frac{2y-10-xy+5x}{y+y^2}$ $\left[-\frac{x+2}{(y-5)^2} \right]$
- 748** $\frac{(k+x)(k-x)}{5k^2x^2} - \frac{2-kx}{7x^2} + \frac{4}{35k^2} - \frac{k}{7x}$ $\left[-\frac{3(k^2+x^2)}{35k^2x^2} \right]$
- 749** $\frac{2a^4-3b^2}{12a^4b^2} - \frac{2a^2-3}{12a^2b^2} - \left(\frac{3}{6a^2} \right)^2$ $\left[\frac{a^2-2b^2}{4a^4b^2} \right]$
- 750** $\left[\left(\frac{z}{t} + \frac{m}{y} \right) : \frac{mt+zy}{t^2y^2} + \frac{1}{z} \right] - ty$ $\left[\frac{1}{z} \right]$
- 751** $\left[\frac{(a+2)^2}{a^2+2a+4} : \left(\frac{a^3-8}{a+2} \right)^{-1} \right]^2$ $[(a^2-4)^2]$
- 752** $\frac{x^2-y^2}{16y^4-(y+1)^2} \cdot \frac{4y^2+y+1}{3x-3y} \cdot \frac{4y^2-y-1}{x+y}$ $\left[\frac{1}{3} \right]$
- 753** $\frac{2}{a} + \frac{a^2+a}{a^2+4a+3} + \frac{4a+3}{a^2+3a}$ $\left[\frac{a+3}{a} \right]$
- 754** $\left(1 - \frac{t-y}{t} \right) : \left(\frac{t+1}{t^2-ty} + \frac{y+1}{y^2-ty} + \frac{1}{ty} \right)$ [priva di senso perché...]
- 755** $\left(1 - \frac{x^3}{y^3} \right) \cdot \frac{y}{y-x} - \frac{y^2+2xy+x^2}{y^2}$ $\left[-\frac{x}{y} \right]$
- 756** $\frac{8x^3}{x^3-y^3} : \frac{4x^2y}{x^2+xy+y^2} : \frac{2x}{xy-y^2}$ [1]
- 757** $\frac{8x^3}{x^3-y^3} : \left(\frac{4x^2y}{x^2+xy+y^2} : \frac{2x}{xy-y^2} \right)$ $\left[\frac{4x^2}{y^2(x-y)^2} \right]$
- 758** $\left(\frac{1}{a+b} - \frac{b}{a^2-ab} + \frac{b^2}{a^3-ab^2} \right) : \left(\frac{1}{a+b} + \frac{b}{a^2-b^2} \right)$ $\left[\frac{a-2b}{a} \right]$

- 759** $\frac{3x}{x^3 - x^2 - x + 1} - \frac{3x}{2 - 2x^2} + \frac{x - 2}{4x - 2x^2 - 2}$ $\left[\frac{x+1}{(x-1)^2} \right]$
- 760** $\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 1 \right) \left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} + 1 \right)$ $\left[\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{y^4} \right]$
- 761** $\left[\frac{2(x-y)^2}{(x+y)} \cdot \frac{28}{3(y-x)} \cdot \left(-\frac{x+y}{8} \right) - \frac{x-y}{3} \right] : (x-y)$ [2]
- 762** $\frac{1}{x-y} - \frac{x-y}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^2}{y^3 - x^3}$ $\left[\frac{y(3x-y)}{x^3 - y^3} \right]$
- 763** $\left(1 + \frac{1}{a^2 + a} \right) \left(1 + \frac{1}{a^2 - a} \right) : \left(\frac{a+1}{a^2} + 1 \right) : \frac{1}{a^2 - 1}$ [$a^2 - a + 1$]
- 764** $\frac{5}{a^2 - 2a + 1} - \frac{a^2 - 14a - 7}{2a^2 - a^4 - 1} - \frac{2}{a^2 + 2a + 1}$ $\left[\frac{4}{(a+1)(a-1)} \right]$
- 765** $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 7x + 12} : \frac{2x + 2}{3x + 9} : \frac{14x + 14y}{9}$ $\left[\frac{27}{28(x+y)} \right]$
- 766** $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 7x + 12} : \left(\frac{2x + 2}{3x + 9} : \frac{14x + 14y}{9} \right)$ $\left[\frac{7}{3}(x+y) \right]$
- 767** $\frac{2a}{a^2b - b^3} - \frac{a-b}{2a^2b + 2ab^2} - \frac{a+b}{2a^2b - 2ab^2}$ $\left[\frac{1}{ab} \right]$
- 768** $\left(\frac{y}{x^2 + xy} + \frac{x^2 + xy}{x^2y - y^3} - \frac{1}{x} \right) \left(1 - \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \right)$ $\left[\frac{1}{y} \right]$
- 769** $\left(\frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2} \right) : \frac{4}{a^2 - a - 2} : \frac{a^2 - 1}{a^2 + a - 2}$ [a]
- 770** $\frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2} : \frac{4}{a^2 - a - 2} : \frac{a^2 - 1}{a^2 + a - 2}$ $\left[\frac{a^2(4-a)}{4(a-2)} \right]$
- 771** $\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} : \frac{1+x}{1-x} - \left(1 - \frac{1}{1+x} \right)$ $\left[\frac{3x^3 + 5x}{(1-x)(1+x)^2} \right]$
- 772** $\left(\frac{4}{2z+1} + \frac{2}{1+z-2z^2} \right) \cdot \frac{2z^2 + 3z + 1}{3 + z - 2z^2}$ $\left[\frac{2}{1-z} \right]$
- 773** $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \right) \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} \right) \cdot \frac{b^3 - ab^2}{2a + 2b}$ [-b]
- 774** $\frac{6}{1-m^2} + \frac{2}{m^2 - 3m + 2} - \frac{6}{m^2 - m - 2}$ $\left[\frac{10}{1-m^2} \right]$
- 775** $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} \cdot \left(\frac{4-x}{x-3} + 2 \right)$ $\left[\frac{1}{x-2} \right]$
- 776** $\frac{2a+7}{a^3 + 2a^2 - a - 2} - \frac{3}{a^2 + a - 2} + \frac{2}{a^2 + 3a + 2}$ $\left[\frac{1}{a^2 - 1} \right]$

- 777** $\left(\frac{a+1}{a-2} + \frac{3a-5}{a+3} - \frac{3a^2+7}{a^2+a-6} \right) \frac{a^2+4a+3}{a^2-4a-12}$ $\left[\frac{a^2-1}{a^2-4} \right]$
- 778** $\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2-2ab} : \frac{a^2+ab}{a-b} : \left(a + \frac{b^2}{a} \right)$ [1]
- 779** $\left[\left(\frac{1}{1+b} + \frac{b}{1-b} \right) : \left(\frac{1}{1-b} - \frac{b}{1+b} \right) - a \right] : (1-a^2)$ $\left[\frac{1}{1+a} \right]$
- 780** $\left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right) : \left[\left(\frac{1+x}{1-x} - 1 \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) \right]$ $\left[\frac{2}{x} \right]$
- 781** $\left[\left(\frac{a}{b} - 1 \right) : \left(1 - \frac{b}{a} \right) \right] : \left[\left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) : \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \right] - \frac{a}{b}$ $\left[\frac{b^2-a^2}{ab} \right]$
- 782** $\left(\frac{6a}{a^2-9} + \frac{a}{a+3} + \frac{3}{3-a} \right)^3 : \left(\frac{b}{b-2} + \frac{8}{4-b^2} - \frac{2}{b+2} \right)^4$ [1]
- 783** $\left[\left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) (x+y) \right]^2$ $\left[\frac{16x^2y^2}{(x-y)^2} \right]$
- 784** $\frac{2y+2}{y^2-4} + \frac{3y}{y^2-4y+4} - \frac{4y^2+4y}{y^3-2y^2-4y+8}$ $\left[\frac{1}{y-2} \right]$
- 785** $\left[ab \left(1 - \frac{a-b}{a+b} \right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]^2 : \left[b^2 \left(1 - \frac{a+b}{a-b} \right) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right]^2$ $\left[\frac{a^2}{b^2} \right]$
- 786** $\left(y^2 + 2y + 1 - \frac{1}{y^2-2y+1} \right) : \left(\frac{y}{y-1} + y \right)$ $\left[\frac{y^2-2}{y-1} \right]$
- 787** $\frac{y-1}{y+1} + \frac{2y-y^2-1}{1+2y+y^2} + \frac{3+3y+y^2+y^3}{y^3+1+3y^2+3y}$ [1]
- 788** $\left(\frac{1}{2x} - \frac{2x}{y^2} \right) : \left(1 + \frac{y^2+4x^2+2xy}{2xy} \right) : \left(1 - \frac{2x}{y} \right)$ $\left[\frac{1}{2x+y} \right]$
- 789** $\frac{x^2}{1-x^3} + \frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} + \frac{x^3+x^2}{x^4+x^3-x-1}$ $\left[\frac{1}{1-x^2} \right]$
- 790** $\left(\frac{x+5}{x^2+5x+6} + \frac{2}{x+3} - \frac{2}{x+2} \right)^2 : \left(\frac{1}{x+2} \right)^3$ [x+2]
- 791** $\left(y^2 + 2y + 1 - \frac{1}{y^2-2y+1} \right) : \left(\frac{y}{y-1} + y \right)$ $\left[\frac{y^2-2}{y-1} \right]$
- 792** $\left(\frac{2x^2+2xy}{4y^2-4xy} \cdot \frac{24y^3-8xy^2}{6x^3+6x^2y} \right) : \left(\frac{y}{2x-2y} + \frac{x}{3x-3y} - \frac{4x+3y}{6y-6x} - \frac{x+y}{x-y} \right)$ [impossibile]
- 793** $\left[\left(1 - \frac{x}{x+1} \right)^2 - \left(1 - \frac{x}{x-1} \right)^2 - 4(x^2-1)^{-2} \right] : \left(\frac{2x}{x-1} - 1 \right)^2$ $\left[-\frac{4}{(x+1)^3} \right]$
- 794** $\left(\frac{t^2+p^2}{2tp} + 1 \right) \cdot \frac{tp}{t^2+p^2} \cdot \left(\frac{t+p}{t-p} + \frac{t-p}{t+p} \right)$ $\left[\frac{t+p}{t-p} \right]$

- 795** $\frac{x+2y}{2x-4y} + \frac{2y-x}{4y+2x} + \frac{8y^2}{x^2-4y^2} : \frac{8y}{x-2y}$ $\left[\frac{y(5x-2y)}{x^2-4y^2} \right]$
- 796** $\left(\frac{x+2y}{2x-4y} + \frac{2y-x}{4y+2x} + \frac{8y^2}{x^2-4y^2} \right) : \frac{8y}{x-2y}$ $\left[\frac{1}{2} \right]$
- 797** $\left(\frac{x-8}{x^2+5x-6} - \frac{2}{x+6} + \frac{2}{x-1} \right) : \frac{1}{x^2-1}$ $[x+1]$
- 798** $\left[\left(\frac{2a-b}{a^2-b^2} - \frac{2}{a+b} \right)^2 : \left(\frac{a^2}{a^2-b^2} - 1 \right)^2 \right]^2$ $\left[\frac{1}{b^4} \right]$
- 799** $\left[\left(\frac{x}{y} + 1 \right)^2 : \left(\frac{x}{y} - 1 \right) \right] \cdot \left(\frac{x}{y} - 1 \right)^2 : \left(\frac{x}{y} + 1 \right) + 2 + \frac{2x}{y}$ $\left[\left(\frac{x+y}{y} \right)^2 \right]$
- 800** $\left[\left(x + \frac{1}{x+2} \right)^2 - \left(x - \frac{1}{x+2} \right)^2 \right] \cdot \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right)$ $\left[\frac{4}{x^2} \right]$
- 801** $\left(\frac{a-4}{a^2-5a+6} - \frac{a+2}{a^2+a-12} \right) : \frac{12}{a^2+2a-8}$ $\left[-\frac{1}{a-3} \right]$
- 802** $\left(1 + \frac{2y}{x-y} \right) \cdot \left[\left(1 - \frac{2xy}{x^2+xy+y^2} \right) : \frac{x^3+y^3}{x^3-y^3} \right]^2$ $\left[\frac{x-y}{x+y} \right]$
- 803** $\left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 \right) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]^2 : \left(\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} \right)^2$ $[1]$
- 804** $\left[\left(\frac{a}{2} - \frac{2a}{b^2} \right)^{-2} : \left(\frac{a}{2} - \frac{2a}{b^2} \right)^{-1} \right] : \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{b^2-4} \right)$ $[2b]$
- 805** $\left[\frac{4(x+2y)^2}{2xy-x^2} + \frac{4x}{x-2y} - \frac{8y}{x} \right]^{-1} : \left(\frac{24y}{2y-x} \right)^{-3}$ $\left[\frac{576y^2}{(2y-x)^2} \right]$
- 806** $\left\{ \left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{a+b} \right) : \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \right]^2 - \frac{2}{(a+b)^2} \right\}^3$ $\left[-\frac{1}{(a+b)^6} \right]$
- 807** $\left[\left(\frac{x-2y}{x^2-y^2} - \frac{2}{x+y} \right) : \left(\frac{x}{x+y} - 1 \right) \right]^2 : \left(1 + \frac{y}{x-y} \right)$ $\left[\frac{x}{(x-y)y^2} \right]$
- 808** $\left(\frac{2xy}{x^2+y^2+2xy} - 1 \right) \cdot \left[\left(\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x} \right) : \left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x} \right) + 1 \right]^{-1}$ $\left[-\frac{1}{2} \right]$
- 809** $\left[\left(\frac{2a}{2a-b} - \frac{b}{2a+b} \right) \cdot \frac{4a^2-2ab}{16a^4-b^4} \cdot \left(1 + \frac{b}{2a} \right) \right] : \frac{1}{2ab-b^2} - 1$ $\left[-\frac{2a}{2a+b} \right]$
- 810** $\left[\left(\frac{3x^2-2}{x-1} + \frac{6x-2}{x-3} \cdot \frac{9-x^2}{3x-1} \right) \cdot \frac{1}{x-2} + 1 \right]^2 \cdot \left(1 + \frac{x-2}{x-1} \right)^{-3}$ $\left[\frac{x-1}{2x-3} \right]$
- 811** $\left(\frac{1}{a-3} + \frac{1}{2a^2-3a-9} \right) \cdot \frac{2a+3}{a^2+2a} + \left(\frac{1}{a^2-9} - \frac{1}{a^2-3a} \right) : \frac{1}{a+3}$ $\left[\frac{-1}{a(a-3)} \right]$

812 $\left[\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3-x} \right) : \frac{5-2x}{x^2+3-4x} + \left(\frac{x-2}{1-x} \right)^{-2} \right] : \left[\left(\frac{x-1}{x-2} \right)^2 - \frac{x-1}{4+x^2-4x} \right]$ $\left[\frac{1}{x-2} \right]$

813 $\left\{ \left[\left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{1-x} \right) (x^2 - 4x + 3) - \frac{4}{3x-1} \right] \cdot \frac{1}{6} \right\}^2 : \frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 4x + 1}$ $\left[\frac{x-1}{3x-1} \right]$

814 $\left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{a} \right)^2 : \left(1 + \frac{1}{a} \right) \right] \left(1 + \frac{1}{a} \right)^2 : \left(1 - \frac{1}{a} \right) + \frac{2}{a^2} - \frac{2}{a} \right\} : \left[\left(1 - \frac{1}{a} \right) \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \right) - \frac{3(a-1)}{a^2} \right]$ $\left[\frac{a}{a-1} \right]$

815 $\left(a + \frac{a}{a+3} + \frac{4}{a+3} \right) \cdot \left[\left(\frac{2}{a+1} - 1 + a \right)^2 : \left(\frac{2+3a+a^2}{a^2+2a-3} \right)^2 \right] : \left(\frac{2}{a+1} + a - 1 \right)^2$ $\left[\frac{(a+3)(a-1)^2}{(a+1)^2} \right]$

816 $\left[\frac{1}{x+2y} - \frac{1}{x^2+4y^2+4xy} \left(x - \frac{12y^2-2x^2-2xy}{x-2y} \right) \right] : \left(\frac{1}{2y-x} + \frac{6y-x}{x^2-4y^2} \right)$ [1]

817 $\left(\frac{8a^2}{1+2a} - 2a \right) \left(2a + \frac{1+4a-8a^3}{4a^2-1} \right) \left(\frac{2}{2a-1} + \frac{4}{2a+1} - 2 \right)^{-1} : \left(a - \frac{2a}{2a+1} \right)$ $\left[\frac{2a+1}{2a(3-2a)} \right]$

818 $\left(\frac{2x+y}{x-y} - \frac{x^2+5xy}{x^2-y^2} \right)^3 : \frac{x^6+y^6-2x^3y^3}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3} + \frac{y-x}{(x^2+xy+y^2)^2}$ [0]

819 $\left(\frac{a}{b} + \frac{4b}{a} + 4 \right) \cdot \left(\frac{a^3-2a^2b+4ab^2}{a^3-8b^3} : \frac{a^3+8b^3}{a^3+2a^2b+4ab^2} \right) \cdot \frac{b}{a}$ $\left[\frac{a+2b}{a-2b} \right]$

820 $\left[\left(\frac{a+b}{a-b} \right)^3 + 3 \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 + 3 \left(\frac{a+b}{a-b} \right) + 1 \right] : \left[\left(\frac{a-b}{a+b} \right)^3 + 1 + 3 \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 + 3 \left(\frac{a-b}{a+b} \right) \right]$ $\left[\frac{(a+b)^3}{(a-b)^3} \right]$

821 $\left[\frac{2a^2+ab-3b^2}{a^2-ab-2b^2} : \left(\frac{2a^2+3ab}{3a^2-3ab-6b^2} \cdot \frac{a^2-2ab+b^2}{3a} \right) \right]^{-2}$ $\left[\frac{(a-b)^2}{81} \right]$

822 $\left\{ \left[(2b-1)^3 - \frac{1}{2b-1} \right] : \frac{8b^2-8b}{2b-1} - b^2 \right\} \cdot \left(1 - \frac{b^2-2b}{b^2-2b+1} \right)$ [1]

823 $1 - \left\{ \left[\left(\frac{2y^3+y^2-2y-1}{1+y-2y^2} + 3 \right)^3 - 6y \left(y - \frac{1}{y} \right) \right] : \frac{12y-14+y^3}{y^3-1} \right\}$ $[y^3]$

824 $\left(\frac{2x}{x+y} + \frac{4y}{x-y} - \frac{4y^2}{x^2-y^2} \right) : \left[\left(2 - \frac{y}{x+y} \right) \cdot \frac{(2+x-2y)(x+y)}{x(2x+y)} \right]$ $\left[\frac{2x^2}{(x-y)(2+x-2y)} \right]$

825 $\frac{a^{2n}}{a^n b^n - b^{2n}} - \frac{a^{2n} + b^{2n}}{a^{2n} - b^{2n}} - \frac{b^{2n}}{a^n b^n + b^{2n}}$ ($n \in \mathbb{N}$) $\left[\frac{a^n}{b^n} \right]$

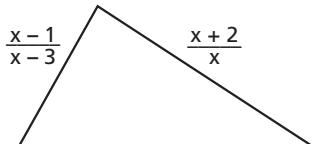
826 $\left(\frac{x^{2n}+y^{2n}}{2x^n y^n} + 1 \right) \left(\frac{x^n+y^n}{x^n-y^n} + \frac{x^n-y^n}{x^n+y^n} \right) : \frac{x^{2n}+y^{2n}}{x^{n-1} y^n} (x^{n+1}-xy^n) - 2x^n$ ($n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$) $[y^n - x^n]$

827 $\left(\frac{y^n}{y^n-2} + \frac{2}{y^n+2} - \frac{8}{4-y^{2n}} \right) \cdot \frac{y^n-2}{y^n+2}$ ($n \in \mathbb{N}$) [1]

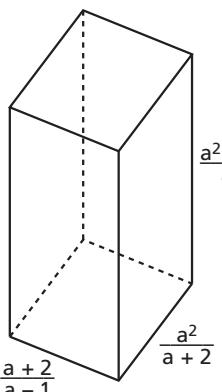
Problemi**828**

Il perimetro del triangolo in figura è $\frac{2(x-1)}{x-3}$.

Trova il lato mancante.



$$\left[\frac{6}{x(x-3)} \right]$$

829

Trova il volume del parallelepipedo utilizzando i dati della figura.

Se a è un numero razionale positivo, quali sono i valori che non può assumere affinché esista il volume?

[$a(a+1)$; se $0 < a \leq 1$, il volume non esiste]

830

È data l'espressione $1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{A}}$.

- a) Per quali valori di A l'espressione perde di significato?
- b) Determina il valore che assume l'espressione per $A = b - 1$.
- c) Per $A = b - 1$, quale valore devi attribuire a $b \in \mathbb{R}$ affinché l'espressione valga $\frac{1}{2}$?
- d) Per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ l'espressione perde significato?

$$\left[\text{a) } A = 0 \vee A = -1; \text{b) } \frac{1}{b}; \text{c) } b = 2; \text{d) } b = 0 \vee b = 1 \right]$$

831

Considera le due frazioni algebriche $\frac{k+1}{k}$ e $\frac{1-k}{k^2-1}$.

- a) Per quali valori di k esse perdono significato?
- b) Determina il valore di $k \in \mathbb{Q}$ tale che il prodotto delle due frazioni sia uguale a 4.
- c) Esiste un valore di k per il quale il prodotto delle due frazioni è uguale a 1?

$$\left[\text{a) } 0, \pm 1; \text{b) } -\frac{1}{4}; \text{c) } k = -1 \text{ non accettabile} \right]$$

832

È data l'espressione $\left(\frac{2y}{y^2-1} - F \right) + \frac{y}{1+y}$.

- a) Determina la frazione F da sostituire nell'espressione affinché il risultato sia 1.
- b) Per quale valore di $y \in \mathbb{R}$ la frazione F trovata perde significato?
- c) Per quale valore di $y \in \mathbb{R}$ F si annulla?

$$\left[\text{a) } F = \frac{1}{y-1}; \text{b) } y = 1; \text{c) } \exists y \in \mathbb{R} \right]$$

833

La base di un rettangolo è lunga $\frac{a}{b}$, con $a, b > 1$, mentre l'altezza supera la base di 1.

- a) Qual è l'area del rettangolo?
- b) Qual è il suo perimetro?

Un secondo rettangolo, con la base sempre uguale ad $\frac{a}{b}$, con $a, b > 1$, ha l'altezza la cui misura si ottiene dalla base aumentando di 1 sia a sia b .

- c) Trova area e perimetro di questo secondo rettangolo.
- d) Quale dei due rettangoli ha area maggiore?

$$\left[\text{a) } \frac{a(a+b)}{b^2}; \text{b) } \frac{2(2a+b)}{b}; \text{c) } \frac{a(a+1)}{b(b+1)}, \frac{2(2ab+a+b)}{b(b+1)}; \text{d) il primo} \right]$$

LABORATORIO DI MATEMATICA

Le frazioni algebriche con Derive

■ ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Derive determiniamo la somma delle frazioni algebriche:

$$\frac{a+1}{a^3 - 3a^2 + 2a} \text{ e } \frac{3}{a^2 - a - 2}.$$

Per verifica sostituiamo il valore $a = -\frac{3}{2}$ alla lettera a nelle due frazioni e nella somma, operiamo le semplificazioni e confrontiamo i risultati.

- Attiviamo Derive, assegniamo un nome alle due frazioni e le immettiamo nella zona algebrica (figura 1).
- Impostiamo ed eseguiamo la loro somma.
- Determiniamo i valori della prima frazione e della seconda frazione per $a = -\frac{3}{2}$ (figura 2).
- Operiamo la somma di tali valori.
- Nella frazione somma che si trova in #4 sostituiamo $a = -\frac{3}{2}$ ad a e semplifichiamo, ottenendo il medesimo risultato.

```

Le frazioni algebriche con Derive

#1: FR1(a) := (a + 1) / (a^3 - 3*a^2 + 2*a)
#2: FR2(a) := 3 / (a^2 - a - 2)
#3: FR1(a) + FR2(a)
#4: (2*a^2 - a + 1) / (a*(a - 1)*(a^2 - a - 2))

```

◀ Figura 1

#5:	$\text{FR1}\left(-\frac{3}{2}\right)$
#6:	$\frac{4}{105}$
#7:	$\text{FR2}\left(-\frac{3}{2}\right)$
#8:	$\frac{12}{7}$
#9:	$\frac{4}{105} + \frac{12}{7}$
#10:	$\frac{184}{105}$
#11:	$\frac{184}{105}$

▲ Figura 2

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata con Derive ▶ 10 esercitazioni in più



■ Esercitazioni

Assegna un nome alle seguenti frazioni algebriche, effettua su di esse le operazioni indicate, svolgi una verifica con una sostituzione numerica scelta da te. Determina quali condizioni devono soddisfare i numeri da sostituire alle lettere affinché le frazioni esistano.

1 $\frac{a}{a-2}, \frac{a-3}{a^3 - 3a^2 + 2a}.$

- Somma il quadrato della prima con la seconda.
- Sottrai dal cubo della prima il quoziente della seconda per la prima.
- Somma il cubo della prima con la reciproca della seconda.

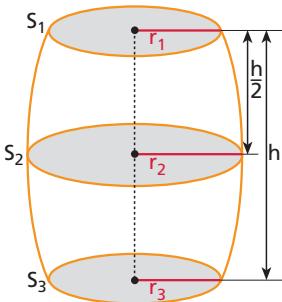
2 $\frac{k^3 - k^2 + k - 1}{k^2 - 4}, \frac{k^3 - 1}{k^4 - 4k^2}, \frac{k - 2}{k}.$

- Somma i quozienti della prima per la seconda e della prima per la terza.
- Sottrai al prodotto della prima per la seconda il quadrato della terza.
- Dividi la somma della seconda e della terza per la prima.

Matematica per il cittadino

LA BOTTE DI VINO

Non è facile calcolare esattamente il volume di una botte di vino. Probabilmente il primo che ci provò, volendo quantificare il vino presente nella sua cantina, fu l'astronomo tedesco Johannes Kepler (1571-1630), che nel 1615 scrisse il libro *Nova stereometria doliorum vinariorum*, in cui presentò alcune formule utili per determinare il volume delle botti.



Una formula sufficientemente approssimata considera le superfici S_1 , S_2 e S_3 , dove S_1 e S_3 sono le superfici delle basi della botte e S_2 è quella del cerchio massimo (solitamente a metà dell'altezza della botte), e l'altezza h .

Il volume V della botte è dato dalla relazione:

$$V = \frac{1}{6} h(S_1 + 4S_2 + S_3).$$

- 1.** Considerando che le superfici S_1 , S_2 e S_3 sono cerchi la cui area è data dalla relazione $S = \pi r^2$, dove il raggio r è metà del diametro d , $r = \frac{d}{2}$, quale delle seguenti non è una formula equivalente a quella del volume V sopra citata?

A $V = \frac{1}{6} \pi h \cdot \left(\frac{d_1^2}{4} + d_2^2 + \frac{d_3^2}{4} \right)$

B $V = \frac{1}{24} \pi h \cdot \left(\frac{d_1^2}{4} + d_2^2 + \frac{d_3^2}{4} \right)$

C $V = \frac{1}{6} \pi h \cdot (r_1^2 + 4 \cdot r_2^2 + r_3^2)$

D $V = \frac{\pi h}{24} \cdot (d_1^2 + 4 \cdot d_2^2 + d_3^2)$

- 2.** Una botte di altezza h ha le due basi identiche di raggio r , mentre il cerchio massimo è di raggio R . Scrivi la formula più semplice che permette di calcolare il volume della botte, una volta noti i valori r , R , h .

- 3.** Una botte realizzata da un costruttore abruzzese ha le due basi identiche di diametro d , mentre il cerchio massimo ha diametro $D = \frac{5}{4}d$. Il volume di questa botte è dato dalla formula $V = K\pi hd^2$, dove il numero K è una frazione che si può determinare in base alle formule precedentemente considerate. Determina il valore di K e scrivi la formula del volume valida in questo caso.

- 4.** Un costruttore di botti realizza solo recipienti di uguali basi, il cui cerchio massimo ha diametro D pari a $\frac{6}{5}$ del diametro d delle basi.

Applicando le formule precedenti, scopre che il volume delle sue botti può essere determinato con l'espressione $V = \frac{97}{300} \pi hd^2$, o con la formula approssimata $V = 1,016 \cdot hd^2$.

Posto che l'altezza sia $h = \frac{3}{2}d$, quali devono essere, rispettivamente, i diametri delle basi, se si vogliono realizzare botti di volume $V_1 = 80 \text{ dm}^3$, $V_2 = 120 \text{ dm}^3$, $V_3 = 160 \text{ dm}^3$?

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ► questi test interattivi ► 30 test interattivi in più

**1**

Uno soltanto dei seguenti polinomi è irriducibile. Quale?

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> A $4b^2x^2 + 6ax$ | <input type="checkbox"/> D $4b^2x^2 + 8b^2$ |
| <input type="checkbox"/> B $4b^2x^2 - x^2$ | <input type="checkbox"/> E $4b^2x^2 + 4bx$ |
| <input type="checkbox"/> C $4b^2x^2 + y^2$ | |

2

Considera i polinomi

- a) $3x - 3y$, b) $x - y$, c) $bx + by$.

Sono riducibili:

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> A soltanto a) e b). | <input type="checkbox"/> D nessuno dei tre. |
| <input type="checkbox"/> B soltanto a) e c). | <input type="checkbox"/> E soltanto b) e c). |
| <input type="checkbox"/> C tutti e tre. | |

3

Se -2 e $+1$ sono zeri del polinomio $P(x)$, allora nella scomposizione di $P(x)$ si hanno i fattori:

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> A $x - 2$ e $x + 1$. | <input type="checkbox"/> D $x + 2$ e $x + 1$. |
| <input type="checkbox"/> B $x + 2$ e $x - 1$. | <input type="checkbox"/> E $2 - x$ e $1 - x$. |
| <input type="checkbox"/> C $x - 2$ e $x - 1$. | |

4

Nel polinomio $2x^2y^3 - 8x^2y^4$ si può raccogliere a fattore comune al più:

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> A 2. | <input type="checkbox"/> D $8x^2y^4$. |
| <input type="checkbox"/> B xy . | <input type="checkbox"/> E $2x^2y^2$. |
| <input type="checkbox"/> C $2x^2y^3$. | |

5

L'espressione

$$\frac{4}{3}ab\left(a^2b - \frac{1}{2}xy^2\right)$$

è una possibile scomposizione di uno dei polinomi seguenti. Quale?

- | |
|--|
| <input type="checkbox"/> A $\frac{4}{3}a^2b^2 - \frac{1}{2}xy^2$ |
| <input type="checkbox"/> B $\frac{4}{3}a^2b - \frac{1}{2}abxy^2$ |
| <input type="checkbox"/> C $a^2b - \frac{2}{3}xy^2$ |
| <input type="checkbox"/> D $\frac{4}{3}a^3b^2 - \frac{2}{3}abxy^2$ |
| <input type="checkbox"/> E $\frac{4}{3}a^3b^2 + \frac{2}{3}abxy^2$ |

6

Utilizzando il raccoglimento parziale, è possibile scomporre il polinomio $2x + 6y - 5ax - 15ay$ in uno solo dei seguenti modi. Quale?

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> A $(x + 3y)(2 + 5a)$ | <input type="checkbox"/> D $(x - 3y)(2 - 5a)$ |
| <input type="checkbox"/> B $(x + 3y)(2 - 5a)$ | <input type="checkbox"/> E $(x + 3y)(5a - 2)$ |
| <input type="checkbox"/> C $(x - 3y)(2 + 5a)$ | |

7

La scomposizione in fattori del binomio

$$4x^2 - \frac{9}{25}a^2$$

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> A $\left(2x - \frac{3}{5}a\right)^2$. | <input type="checkbox"/> D $\left(\frac{3}{5}a + 2x\right)\left(\frac{3}{5}a - 2x\right)$. |
| <input type="checkbox"/> B $\left(\frac{3}{5}a - 2x\right)^2$. | <input type="checkbox"/> E $\left(\frac{6}{5}xa\right)^2$. |
| <input type="checkbox"/> C $\left(2x - \frac{3}{5}a\right)\left(2x + \frac{3}{5}a\right)$. | |

8

La scomposizione in fattori del trinomio $4x^2 - 8xy + 4y^2$ è:

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> A $(4x + 4y)^2$. | <input type="checkbox"/> D $(2x + 2y)^2$. |
| <input type="checkbox"/> B $4(x - y)^2$. | <input type="checkbox"/> E $2(x - y)^2$. |
| <input type="checkbox"/> C $4(x^2 + y^2) - 8xy$. | |

9

Quale dei seguenti trinomi *non* è il quadrato di un binomio?

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> A $4x^2 + 9a^2 + 12ax$ | <input type="checkbox"/> D $25 + 20a + 4a^2$ |
| <input type="checkbox"/> B $a^4 + 16x^4 + 4a^2x^2$ | <input type="checkbox"/> E $9x^2 + 4 + 12x$ |
| <input type="checkbox"/> C $4a^2 + x^2 - 4ax$ | |

10

Il binomio

$$27a^3x^3 - 8a^3$$

è scomponibile in uno solo dei seguenti modi. Quale?

- | |
|---|
| <input type="checkbox"/> A $(3ax - 2a)^3$ |
| <input type="checkbox"/> B $(-3ax + 2a)^3$ |
| <input type="checkbox"/> C $(3ax - 2a) \cdot (9a^2x^2 + 4a^2)$ |
| <input type="checkbox"/> D $(3ax - 2a) \cdot (9a^2x^2 - 12a^2x + 4a^2)$ |
| <input type="checkbox"/> E $a^3(3x - 2) \cdot (9x^2 + 6x + 4)$ |

11 $(x + 1)$ è un fattore del polinomio

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x + k$$

se k è uguale a:

- A** 0. **B** -1. **C** 1. **D** -2. **E** 2.

12 La condizione di esistenza della frazione algebrica

$$\frac{b+1}{2b-3}$$

- A** $b \neq \frac{3}{2}$. **C** $b \neq -1$. **E** $b \neq 3$.

- B** $b \neq 2$. **D** $b \neq -\frac{3}{2}$.

13 La divisione $\frac{5a+b}{a^2} : \frac{5a^2+a+5ab+b}{a-b}$

è eseguibile se:

- A** $a \neq 0$. **D** $a \neq 0 \wedge a \neq b$.
B $a \neq 0 \wedge b \neq 0$. **E** $a \neq 0 \wedge a \neq -b$.
C $a \neq 0 \wedge a \neq \pm b \wedge a \neq -\frac{1}{5}$.

14 Il risultato della divisione

$$\frac{3x+yx}{x+2} : \frac{x-xy^2}{x+2+xy+2y}$$

(con $x \neq -2 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq \pm 1$) è:

- A** $\frac{3+y}{x+2}$. **C** $\frac{1-y^2}{y+2}$. **E** $\frac{1-y}{x+2}$.
B $\frac{1-y}{3+y}$. **D** $\frac{3+y}{1-y}$.

15 La somma delle frazioni $\frac{1}{a+b} + \frac{2b}{a^2-b^2}$ (con $a \neq \pm b$) è:

A $\frac{2b+1}{a^2-b^2}$.

D $\frac{a+b}{a-b}$.

B $\frac{1}{a-b}$.

E $\frac{1+2b}{(a+b)(a^2-b^2)}$.

C $\frac{a^2-b^2+2b}{(a+b)(a^2-b^2)}$.

16 La somma di due frazioni è:

$$\frac{2x-3b}{bx}, \text{ con } b \neq 0 \wedge x \neq 0.$$

Le frazioni sono:

A $\frac{2}{b}$ e $-\frac{3}{x}$.

D $\frac{2}{b}$ e $\frac{3}{x}$.

B $\frac{2x}{b}$ e $-\frac{3b}{x}$.

E $\frac{2x}{b}$ e $\frac{3b}{x}$.

C $\frac{2b}{x}$ e $\frac{3x}{b}$.

17 Il prodotto di due frazioni è:

$$\frac{a-1}{ax}, \text{ con } a \neq 0 \wedge x \neq 0.$$

Le frazioni sono:

A $\frac{a-1}{a}$ e x .

D $\frac{a}{x}$ e $-\frac{1}{a}$.

B $\frac{a-1}{x}$ e $\frac{1}{a}$.

E $\frac{3a-3}{a}$ e $\frac{x}{3a}$.

C $\frac{1}{x}$ e $\frac{a}{x}$.

SPIEGA PERCHÉ

18 Esiste un valore di a per cui $x^2 + a^2x + a^2$ si può scomporre in fattori come quadrato di binomio?

19 Se al quadrato di un numero naturale aggiungiamo 1 e il doppio del numero stesso, troviamo il quadrato del suo successivo. Spiega perché.

20 Considera l'uguaglianza $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = (x+a)(x+b)(x+c)$. Che relazione esiste tra i valori di D e a, b, c ? Come deve essere A? Spiega perché.

21 I polinomi $x^4 + 3x^2 - 28$ e $x^2 + 7x + 10$ hanno un binomio fattore comune. Quale?

22 La frazione algebrica $\frac{a+1}{a^2+1}$ ha significato $\forall a \in \mathbb{R}$. Perché?

23 Perché il polinomio $4x^2 - 3x + 2$ può essere visto come una frazione algebrica?

24 Il risultato della divisione $(x^2 - 3x - 4) : (x + 1)$ è una frazione algebrica? Perché?

25 Sono equivalenti due frazioni algebriche se non hanno le stesse C.E.? Motiva la risposta.

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 20 esercizi in più



Scomponi in fattori i seguenti polinomi.

- 26** $\frac{1}{25}a^2b^2 - \frac{25}{4}; \quad b^2 - 7b + 10; \quad 8x^3 + y^6.$
- 27** $\frac{1}{4}x^4y^4 - \frac{4}{9}; \quad 4a^2b + a^4 + 4b^2; \quad x^2 + 4z^2 + y^2 + 2xy - 4xz - 4zy.$
- 28** $\frac{1}{8} + \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}x^2 + x^3; \quad \frac{1}{4}a^2 + 9b^2 - 3ab; \quad \frac{2}{3}a^2b^2 + \frac{1}{9}a^4 + b^4.$
- 29** $x^3 - 6x^2 + 12x - 8; \quad \frac{1}{729}y^6 - x^6z^6; \quad x^2 - 2x - 15.$
- 30** $2a^5x^4 - 32a; \quad x^3 + x^2 - 17x + 15; \quad x^3 - 4xy^2 + 3x^2 - 12y^2.$
 $[2a(ax - 2)(ax + 2)(a^2x^2 + 4); (x - 1)(x - 3)(x + 5); (x + 3)(x - 2y)(x + 2y)]$
- 31** $2x^2y + 16xy + 32y; \quad 2x + 6y + ax + 3ay; \quad x^3(x + 1) - y^3(x + 1).$
 $[2y(x + 4)^2; (2 + a)(x + 3y); (x + 1)(x - y)(x^2 + xy + y^2)]$
- 32** $8ax^2 + 2ay^2 + 8axy; \quad 3a^2b^4 - 12; \quad 2ax - 4ay + bx - 2by.$
 $[2a(2x + y)^2; 3(ab^2 - 2)(ab^2 + 2); (2a + b)(x - 2y)]$
- 33** $2a^2b - 4ab + 8ab^2; \quad (x + 2y)(2x - y) + (x + 2y)(2y - 3x); \quad 3ax + 6bx + 2ay + 4by.$
 $[2ab(a - 2 + 4b); (x + 2y)(y - x); (a + 2b)(3x + 2y)]$
- 34** $3x^2y + 18xy^2 + 27y^3; \quad 8a^3 + \frac{1}{27}a^3b^3 + 4a^3b + \frac{2}{3}a^3b^2; \quad x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6.$
 $\left[3y(x + 3y)^2; a^3\left(2 + \frac{1}{3}b\right)^3; (x + y)^3(x - y)^3 \right]$
- 35** $x^3 + 3x^2 - 4x - 12; \quad 2x^4 - 20x^2 - 2x^3 + 20x; \quad 5a^3 + 10a^2 - 25a + 10.$
 $[(x - 2)(x + 2)(x + 3); 2x(x - 1)(x^2 - 10); 5(a - 1)(a^2 + 3a - 2)]$
- 36** $\frac{1}{3}x^4y^2 - \frac{1}{27}; \quad x^6y^6 - \frac{1}{16}x^2y^2; \quad a^3 + 2a^2 - 9a - 18.$
 $\left[\frac{1}{3}\left(x^2y - \frac{1}{3}\right)\left(x^2y + \frac{1}{3}\right); x^2y^2\left(x^2y^2 + \frac{1}{4}\right)\left(xy - \frac{1}{2}\right)\left(xy + \frac{1}{2}\right); (a - 3)(a + 3)(a + 2) \right]$
- 37** $2x^4 + 54x; \quad a^3 + 6a^2 - 7a; \quad 4a^3 + ax^2 + 4a^2x. \quad [2x(x + 3)(x^2 - 3x + 9); a(a - 1)(a + 7); a(2a + x)^2]$
- 38** $\frac{3}{4}b^3 - 3bx^2; \quad 3b^3 - 3b^2 - 27b + 27; \quad 2x^2 + 2x - 40.$
 $\left[3b\left(\frac{1}{2}b - x\right)\left(\frac{1}{2}b + x\right); 3(b - 3)(b + 3)(b - 1); 2(x + 5)(x - 4) \right]$
- 39** $4x^2 - 4x - 8; \quad 2x^5 + 16x^3 + 32x; \quad 1250a^2 - 2a^2x^4.$
 $[4(x + 1)(x - 2); 2x(x^2 + 4)^2; 2a^2(5 + x)(5 - x)(25 + x^2)]$
- 40** $a^3 - 5a^2 - 24a; \quad -2x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 16x; \quad (x^2 + 4)^2 - 16x^2.$
 $[a(a + 3)(a - 8); 2x(2 - x)^3; (x - 2)^2(x + 2)^2]$
- 41** $a^4 + b^4 - 2a^2b^2 - c^4 + a^2 - b^2 + c^2; \quad 4x^2 + 12x - 4y^2 - 12y; \quad x^8 + 64.$
 $[(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 - b^2 - c^2 + 1); 4(x - y)(x + y + 3); (x^4 - 4x^2 + 8)(x^4 + 4x^2 + 8)]$

42 $t^4 + t^2y + y^2 + t^6 - y^3; \quad 3c^2 - 27d^2 - 6c + 12; \quad a^2 + 2ax - a + x^2 - x.$
 $[(t^4 + t^2y + y^2)(t^2 - y + 1); 3(c + 3d - 2)(c - 3d - 2); (a + x)(a + x - 1)]$

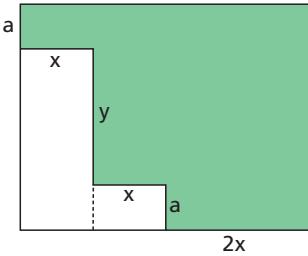
43 $a^2 - b^2 + b - \frac{1}{4}; \quad 3a^2 - 3b^2 + a^2x - 2abx + b^2x; \quad 3by^2 + 27b - 18by.$
 $\left[\left(a - b + \frac{1}{2}\right)\left(a + b - \frac{1}{2}\right); (a - b)(3a + 3b + ax - bx); 3b(y - 3)^2 \right]$

44 $x^4 + 2x^3 + 27x + 54; \quad (2x + ab)^2 + (bx - 2a)^2; \quad a^6 - 2a^4 + a^2.$
 $[(x + 2)(x + 3)(x^2 - 3x + 9); (a^2 + x^2)(b^2 + 4); a^2(a - 1)^2(a + 1)^2]$

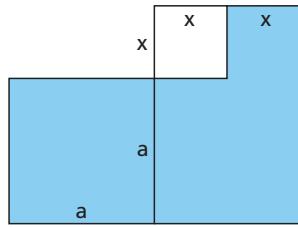
45 $4a^3 - 4ax^2 + 8a^2 + 8ax; \quad (a^2 - 2)^2 - a^4; \quad a^2b - 9b - a - 3.$
 $[4a(a + x)(a - x + 2); -4(a - 1)(a + 1); (a + 3)(ab - 3b - 1)]$

46 $27x^3 + 9x^2 - 3xy^2 - y^2; \quad x^3 - 4x^2 - 19x - 14; \quad 3x^2y - 6xy^3 - 9xy.$
 $[(3x + 1)(3x - y)(3x + y); (x + 1)(x + 2)(x - 7); 3xy(x - 2y^2 - 3)]$

47 Esprimi l'area della figura colorata mediante il prodotto di due fattori. **48** Determina il lato del quadrato che ha l'area equivalente a quella della figura colorata.



$$[3x(2a + y)]$$



$$[x + a]$$

Semplifica le seguenti frazioni algebriche dopo aver determinato le condizioni di esistenza.

49 $\frac{30a^2x}{5ax^2}; \quad \frac{2x^2 + x}{2ax + a}; \quad \frac{6b^3}{3ab^2 - 3b^3}.$
 $\left[\frac{6a}{x}; \frac{x}{a}; \frac{2b}{a - b} \right]$

50 $\frac{x^2 - x}{ax - a}; \quad \frac{4a^2b^2}{2a^2b^2 - 2ab}; \quad \frac{y^2 - 4}{y^2 + 4y + 4}.$
 $\left[\frac{x}{a}; \frac{2ab}{ab - 1}; \frac{y - 2}{y + 2} \right]$

51 $\frac{16x^2 - 9y^2}{8x^2 - 6xy}; \quad \frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 + 4a + 3}; \quad \frac{a^2b + 9b - 6ab}{a^2b - 9b}.$
 $\left[\frac{4x + 3y}{2x}; \frac{a + 1}{a + 3}; \frac{a - 3}{a + 3} \right]$

52 $\frac{a^2 - a - 6}{a^2 - 2a - 8}; \quad \frac{a^2 - 4ay + ax}{-4xy + x^2 + ax}; \quad \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 8x + 15}.$
 $\left[\frac{a - 3}{a - 4}; \frac{a}{x}; \frac{x - 5}{x - 3} \right]$

53 $\frac{36x^2 - 4}{36x^3 - 24x^2 + 4x}; \quad \frac{x^2 + a^2 + 1 + 2ax + 2x + 2a}{x^2 - a^2 - 2a - 1}.$
 $\left[\frac{3x + 1}{x(3x - 1)}; \frac{x + a + 1}{x - a - 1} \right]$

54 $\frac{x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2}{x^5 + x^4 - x^3 - x^2}; \quad \frac{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}{9x - x^3}.$
 $\left[\frac{x + 1}{x - 1}; \frac{(x + 3)^2}{x(3 - x)} \right]$

55 $\frac{y^5 + xy^4 - x^4y - x^5}{y^3 - xy^2 + x^2y - x^3}; \quad \frac{x^2 - 7x + 12}{x^3 - 27}; \quad \frac{x^2 - (x - y)^2}{4x^2y^3 - 4xy^4 + y^5} \cdot \left[(x + y)^2; \frac{x - 4}{x^2 + 3x + 9}; \frac{1}{y^2(2x - y)} \right]$

56 $\frac{m^2 - m + mn - n}{3m^2 + 3mn}; \quad \frac{a^3 + 8}{a^2 + 4a + 4}; \quad \frac{x^2y - 8xy + 16y}{x^2y - 16y}. \quad \left[\frac{m - 1}{3m}; \frac{a^2 - 2a + 4}{a + 2}; \frac{x - 4}{x + 4} \right]$

57 $\frac{a^2 + 7a + 10}{a^2 + 4a + 4}; \quad \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{yx - y + 2x - 2}; \quad \frac{x^3 - x^2 - 5x + 21}{xy + 3y}. \quad \left[\frac{a + 5}{a + 2}; \frac{x^2 - 2x + 1}{y + 2}; \frac{x^2 - 4x + 7}{y} \right]$

58 $\frac{x^2 - 2ax + a^2}{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}; \quad \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{x^3 - 1}. \quad \left[\frac{1}{x - a}; -\frac{(1 - x)^2}{x^2 + x + 1} \right]$

Semplifica le seguenti espressioni dopo aver determinato le condizioni di esistenza.

59 $\frac{1}{a - b} + \frac{b}{ab - a^2} \quad \left[\frac{1}{a}; \text{C.E.: } a \neq b \wedge a \neq 0 \right]$

60 $\frac{b}{b + 2x} + \frac{4bx}{b^2 - 4x^2} + \frac{2x}{b - 2x} \quad \left[\frac{b + 2x}{b - 2x}; \text{C.E.: } b \neq \pm 2x \right]$

61 $\frac{x + 1}{x^2 - x} - \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1 - x}{x^2 + x} \quad \left[\frac{3}{x^2 - 1}; \text{C.E.: } x \neq \pm 1 \wedge x \neq 0 \right]$

62 $\frac{a^2 - 6a + 9}{a^2 - 9} \cdot \frac{1}{3a - a^2} : \frac{3a}{3a + a^2} \quad \left[-\frac{1}{3a}; \text{C.E.: } a \neq 0 \wedge a \neq \pm 3 \right]$

63 $(a + b) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1 \right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \cdot \frac{a^2b^2}{a^3 + b^3} \quad \left[\frac{a^2b^2}{b - a}; \text{C.E.: } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq \pm b \right]$

64 $\left(\frac{a - 1}{a + 1} - \frac{2a^2}{a^2 - 1} - \frac{a + 1}{1 - a} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) : \left(1 + \frac{a}{2 - a} \right) \quad \left[\frac{2 - a}{a^2} \right]$

65 $\frac{1}{x^2 + 2xy + y^2} - \frac{1}{x^2 - y^2} + \frac{2y}{(x + y)^2(x - y)} \quad [0]$

66 $\frac{2}{b^2 - b - 2} + \frac{1}{b^2 + 3b + 2} + \frac{1}{b^3 + b^2 - 4b - 4} \quad \left[\frac{3}{b^2 - 4} \right]$

67 $\left(\frac{a^2}{4a^2 + 4ab + b^2} - \frac{a - b}{6a + 3b} \right) : \frac{a^3 - b^3}{12a + 6b} \quad \left[\frac{2}{(a - b)(2a + b)} \right]$

68 $\left(\frac{2}{a - 2} - \frac{2}{a + 3} - \frac{5a}{a^2 + a - 6} \right) \cdot \left(1 + \frac{3}{a} \right) \quad \left[-\frac{5}{a} \right]$

69 $\left(\frac{2 + xy}{3x + y + 3x^2 + xy} - \frac{x}{x + 1} \right) \cdot \frac{3x + y}{6x^2 - 4} : \left(\frac{y}{2} + 1 \right) \quad \left[-\frac{1}{(x + 1)(y + 2)} \right]$

Problemi

- 70** Un rettangolo ha l'altezza lunga $x - 2$, con $x > 2$. Qual è la misura della base, se l'area del rettangolo è uguale a $2x^2 + (3a - 4)x - 6a$? $[2x + 3a]$
- 71** Per quali valori di $k \in \mathbb{Z}$ il trinomio $x^2 - kx - 7$ è scomponibile in fattori di primo grado? $[k = \pm 6]$

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 11 esercizi in più



- 72** Utilizzando i polinomi, dimostra che:
- la somma di due numeri pari è un numero pari;
 - la somma di un numero pari e un numero dispari è un numero dispari;
 - la somma di due numeri dispari è un numero pari.

- 73** Considera i due trinomi $x^2 + kx + 12$ e $x^2 + hx + 15$ con $h, k \in \mathbb{Z}$. Indica con A l'insieme dei valori di k che rendono scomponibile il primo trinomio e con B l'insieme dei valori di h che rendono scomponibile il secondo trinomio, poi determina $A \cup B$ e $A \cap B$.

$$[A \cup B = \{\pm 7, \pm 8, \pm 13, \pm 16\}; A \cap B = \{\pm 8\}]$$

- 74** Dimostra che per ogni numero naturale n , il numero $n^3 - n$ è divisibile per 6.
(Suggerimento. Osserva che nella successione dei naturali, ogni tre numeri consecutivi uno è sempre multiplo di 3; poi scomponi in fattori...)

- 75** Verifica le seguenti uguaglianze numeriche:

$$3 = \frac{2^2 + 2}{2}; \quad 4 = \frac{3^2 + 3}{3}; \quad 5 = \frac{4^2 + 4}{4},$$

poi scrivi la frazione algebrica corrispondente al numero naturale $n + 1$ e dimostra che l'uguaglianza ottenuta è vera per qualunque n naturale maggiore di 0.

$$\left[n + 1 = \frac{n^2 + n}{n} \right]$$

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 5 esercizi in più



- 76** Factor completely:
- $x^2 - 11xy + 30y^2$
 - $4x^5 - 12x^4 - 40x^3$
 - $x^2 - 2x + 5x - 10$

(CAN John Abbott College, Final Exam, 2000)

$$[(x - 6y)(x - 5y); 4x^3(x - 5)(x + 2); (x + 5)(x - 2)]$$

- 77** TEST Which is a factor of $5x^4 - 135xy^3$?
- | | | | |
|----------------------------|--------------------|----------------------------|--------------------|
| <input type="checkbox"/> A | $x^2 + 6xy + 9y^2$ | <input type="checkbox"/> D | $x^2 + 3xy + 9y^2$ |
| <input type="checkbox"/> B | $x^2 - 6xy - 9y^2$ | <input type="checkbox"/> E | $x^2 - 6xy + 9y^2$ |
| <input type="checkbox"/> C | $x^2 - 3xy + 9y^2$ | | |

(USA Tennessee Mathematics Teachers Association: 39th Annual Mathematics Contest, 1995)

- 78** Factor completely
 $x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16$.

(USA Southeast Missouri State University: Math Field Day, 2005)
 $[(x - 2)^2(x - 1)(x^2 + 4)]$

- 79** Simplify: $\left(\frac{25x^{-9}y^8z^3}{5x^{-3}y^{-8}z^3} \right)^{-2}$.

(Write your answer without negative exponents.)
(USA Southeast Missouri State University: Math Field Day, 2005)

$$\left[\frac{1}{25} \frac{x^{12}}{y^{32}} \right]$$

- 80** Let
 $f(x) = (x^5 - 1)(x^3 + 1)$ and
 $g(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x + 1)$.
If $h(x)$ is a polynomial such that $f(x) = g(x)h(x)$, then what is the value of $h(1)$?

(USA Lehigh University: High School Math Contest, 2001)
[5]

- 81** TEST Let $\frac{2x - 11}{x^2 - 5x - 14} = \frac{B}{x - 7} + \frac{C}{x + 2}$ be an identity in x . The value of $B + C$ is:

- A 4 B -2 C 5 D 2 E -4

(USA North Carolina State High School Mathematics Contest, 2003)

GLOSSARY

to factor: scomporre in fattori
identity: identità

polynomial: polinomio
such that: tale che

Le equazioni lineari



Un po' d'equilibrio

Una bilancia a bracci uguali è in equilibrio quando su entrambi i piatti sono posti oggetti di uguale peso. Per stabilire quanto pesano gli oggetti che confrontiamo, è necessario avere a disposizione qualche peso noto. Per questo le bilance vengono vendute con pesi d'ottone di 5, 10, 20, 40, 50, 100, 200, 500 g...

**...hai una bilancia e due pesi, da 10 g e da 40 g.
Come puoi separare con tre sole pesate 1800 g di mais in due mucchi, da 400 g e da 1400 g?**

→ La risposta a pag. 508

1. Le identità

DEFINIZIONE

Identità

Un'identità è un'uguaglianza dove compaiono espressioni letterali verificata per qualunque valore attribuito alle lettere contenute nelle espressioni.

Sono esempi di identità:

$$a + a = 2a; ab^2 \cdot a^3b = a^4b^3; (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Ciascuna delle due espressioni che costituiscono l'uguaglianza viene detta **membro** dell'identità.

In particolare, l'espressione di sinistra è detta **primo membro**, quella di destra **secondo membro**.

Per stabilire se una relazione di uguaglianza rappresenta un'identità occorre eseguire per entrambe le espressioni i calcoli indicati, sommando poi i termini simili ed eventualmente semplificando le frazioni algebriche.

A questo punto si confrontano i due membri dell'uguaglianza: si può affermare di avere un'identità se essi contengono gli stessi termini.

►
$$\underbrace{a(b - c)}_{\substack{\text{primo} \\ \text{membro}}} = \underbrace{ab - ac}_{\substack{\text{secondo} \\ \text{membro}}}$$

► L'uguaglianza $a \cdot a = 2a$ non è un'identità. Per verificarlo è sufficiente trovare anche un solo numero (per esempio -1) che, sostituito alla variabile, non rende vera l'uguaglianza.

ESEMPIO L'uguaglianza

$$4a(a + b) = (a + 2b)^2 + 3a^2 - 4b^2$$

è un'identità; infatti, eseguendo i calcoli, si ha

$$4a^2 + 4ab = a^2 + 4b^2 + 4ab + 3a^2 - 4b^2$$

e, sommando i termini simili, si ottiene

$$4a^2 + 4ab = 4a^2 + 4ab,$$

dove ogni termine presente al primo membro è presente anche al secondo e viceversa.

■ Le condizioni di esistenza di un'identità

Se, per alcuni valori attribuiti alle lettere, uno o entrambi i membri dell'identità non hanno significato, anche l'identità non ha significato.

È necessario quindi precisarne le **condizioni di esistenza** (C.E.).

ESEMPIO

1. La frazione algebrica $\frac{ab}{a}$ ha significato **solo se** $a \neq 0$, in quanto una frazione non può avere denominatore nullo.

Possiamo quindi dire che l'uguaglianza

$$\frac{ab}{a} = b$$

è un'identità **solo se** $a \neq 0$, ossia C.E.: $a \neq 0$.

$$2. \frac{1}{b-1} + \frac{1}{b-1} = \frac{2}{b-1}, \quad \text{C.E.: } b \neq 1.$$

In generale, se il concetto di identità viene applicato a espressioni contenenti frazioni algebriche, si deve tener conto che i loro denominatori devono essere diversi da 0.

2. Le equazioni

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V21a

■ Che cos'è un'equazione

Consideriamo l'uguaglianza $2 + 3x = 5x$.

Essa non è un'identità, perché esistono valori di x per i quali l'uguaglianza non è verificata: per esempio, $x = -1, x = 0, x = \frac{1}{2}, \dots$

Si può dimostrare che esiste un solo valore che, sostituito a x , la rende vera. Questo valore è il numero 1: infatti $2 + 3 \cdot 1 = 5 \cdot 1$.

In generale, data un'uguaglianza fra due espressioni in cui compaiono delle variabili, ci si può chiedere per quali valori delle variabili essa è vera.

DEFINIZIONE

Equazione

Un'equazione è un'uguaglianza dove compaiono espressioni letterali per le quali si cercano i valori da attribuire a una o più lettere che rendono vera l'uguaglianza.

$$2 \cdot (\textcolor{red}{x}) + 1 = 3 \cdot (\textcolor{red}{x}) - 2$$

$$2 \cdot (\textcolor{red}{3}) + 1 = 3 \cdot (\textcolor{red}{3}) - 2$$

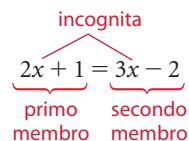
VERA per $x = 3$

- **Equazione** deriva da *aquare*, che in latino significa «rendere uguale».

Le due espressioni a sinistra e a destra del segno di uguaglianza si chiamano membri dell'equazione; quella a sinistra è il primo membro, quella a destra il secondo membro.

Le lettere per le quali si cercano i valori che rendono vera l'uguaglianza sono dette **incognite** dell'equazione.

ESEMPIO $2 - 3y = 5$ è un'equazione nell'incognita y ;
 $x + 3y = 7$ è un'equazione in due incognite, x e y .



- In questo capitolo ci occuperemo di equazioni con una sola incognita.

Le soluzioni di un'equazione

I valori che rendono vera l'uguaglianza si chiamano **soluzioni** o **radici** dell'equazione. Si può anche dire che tali valori «verificano» (o anche «soddisfano») l'equazione.

ESEMPIO L'equazione $y - 9 = 1$ ha per soluzione 10, perché $10 - 9 = 1$.

Diciamo che la soluzione è $y = 10$.

Risolvere un'equazione significa determinare **tutte** le sue soluzioni, cioè tutti i valori che verificano l'uguaglianza. Tali valori costituiscono l'**insieme delle soluzioni** dell'equazione.

ESEMPIO L'equazione $x^2 = 4$ ha due soluzioni: $x = 2$ e $x = -2$.

Infatti, $(2)^2 = 4$ e $(-2)^2 = 4$.

- A volte indicheremo con S l'insieme delle soluzioni. Nell'esempio,

$$S = \{2, -2\}.$$

Un'equazione può avere soluzione in un insieme numerico, ma non averla in un insieme più ristretto.

ESEMPIO L'equazione $2x - 1 = 0$ ha soluzione nell'insieme \mathbb{Q} , ma non ha soluzione nell'insieme \mathbb{N} .

Infatti, la soluzione dell'equazione, $x = \frac{1}{2}$, è un numero razionale, non un numero naturale.

Quando non daremo indicazioni diverse, cercheremo le soluzioni di un'equazione nell'insieme dei numeri reali \mathbb{R} .

EQUAZIONI E LOGICA

Consideriamo l'enunciato « x è la capitale d'Italia». Esso non è né vero né falso: è un enunciato aperto. Scelto un insieme universo U , possiamo sostituire alla variabile un elemento dell'insieme. In tal modo l'enunciato diventa una proposizione o vera o falsa. Per esempio, «Torino è la capitale d'Italia» è falsa, mentre «Roma è la capitale d'Italia» è vera.

Le equazioni non sono altro che *enunciati aperti*: $2x - 1 = 0$ è un enunciato, né vero né falso. Sosti-

tuendo un valore scelto in un insieme (l'insieme universo), giungiamo a una proposizione. Per esempio:

$2(3) - 1 = 0$ è falsa;

$2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$ è vera.

Le soluzioni di un'equazione sono quindi i valori dell'insieme universo per cui l'enunciato diventa una proposizione vera. Il loro insieme è l'insieme di verità dell'enunciato.

I diversi tipi di equazioni

In un'equazione possono comparire delle frazioni. L'equazione è:

- **intera** se l'incognita è presente soltanto nei numeratori; per esempio:

$$\frac{x}{2} = 1 + 7x;$$

- **fratta** se l'incognita compare anche in uno o più denominatori; per esempio:

$$\frac{1}{x-3} = \frac{x}{4} - 1.$$

Considerando le **lettere**, un'equazione è:

- **numerica** se oltre all'incognita contiene solo numeri; per esempio:

$$2x - \frac{3}{2} = \frac{1}{3x};$$

- **letterale** se oltre all'incognita contiene altre lettere che indicano coefficienti; per esempio, è letterale l'equazione nell'incognita x :

$$(1 - 2a)x = 3a + \frac{1}{4}.$$

Considerando le **soluzioni**, un'equazione è:

- **determinata** se ha un numero finito di soluzioni;

per esempio: $x + 5 = 8$;

- **indeterminata** se ha infinite soluzioni;

per esempio: $x + x = 2x$;

- **impossibile** se non ha soluzioni;

per esempio: $x + 1 = x$.

• $x + 5 = 8$

ha per soluzione 3.

- Per l'equazione

$$x + x = 2x$$

l'insieme delle soluzioni è:

$$S = \mathbb{R},$$

cioè l'uguaglianza è vera per ogni valore reale di x . In simboli:

$$x + x = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

• $x + 1 = x$

non ha soluzioni, perché la somma fra un numero e 1 non può essere il numero stesso.

La forma normale di un'equazione e il suo grado

Consideriamo il polinomio $P = 3x^2 - 2x + 5$, ridotto in forma normale, ovvero nella forma in cui non compaiono monomi simili fra loro.

Se poniamo $P = 0$, otteniamo un'equazione scritta in **forma normale** (o **forma canonica**):

$$3x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Il termine senza l'incognita si chiama **termine noto**.

Il **grado** dell'equazione è il grado del polinomio ridotto, ossia il massimo esponente con cui l'incognita compare nell'equazione in forma normale: l'equazione considerata sopra è di secondo grado.

ESEMPIO

1. $3x - 6 = 0$ è un'equazione di primo grado.
2. $4x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = 0$ è un'equazione di terzo grado.
3. L'equazione $3x^2 + 5x - 1 - 3x - 2x^2 - x^2 = 0$ non è di secondo grado.
Infatti, l'equazione non è scritta in forma normale e, se riduciamo i termini simili, diventa:

$$2x - 1 = 0.$$

Essa è quindi un'equazione di primo grado.

► $a^3x^2 + ax = 0$ può essere considerata un'equazione di secondo grado rispetto all'incognita x , oppure un'equazione di terzo grado rispetto all'incognita a .

In questo capitolo ci occuperemo soltanto della risoluzione di equazioni di primo grado. Esse vengono anche dette **equazioni lineari**.

3. I principi di equivalenza

■ Le equazioni equivalenti

Consideriamo le equazioni $4x - 2 = 10$ e $4x = 12$.

Entrambe hanno come unica soluzione $x = 3$. Diciamo che le due equazioni sono *equivalenti*.

■ DEFINIZIONE

Equazioni equivalenti

Due equazioni contenenti la stessa incognita si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Le equazioni

$$x - 1 = 4 \text{ e } 2x - 3 = -1$$

non sono equivalenti, perché la soluzione della prima equazione è $x = 5$ e la soluzione della seconda è $x = 1$.

Le equazioni

$$3x - 2 = 4 \text{ e } x^2 - 4 = 0$$

non sono equivalenti, pur avendo una soluzione in comune. Infatti la prima equazione ha come unica soluzione $x = 2$, mentre la seconda ha due soluzioni, $x = 2$ e $x = -2$.

Per risolvere un'equazione cercheremo di trasformarla in equazioni equivalenti, via via più semplici, fino a giungere a un'equazione in cui sia immediato trovare l'insieme delle soluzioni.

Le regole di trasformazione di un'equazione in altre equazioni a essa equivalenti sono stabilite da due principi, chiamati **principi di equivalenza**.



BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V21b

► L'equivalenza tra equazioni è una relazione di equivalenza nell'insieme delle equazioni perché gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Proprietà riflessiva: ogni equazione è equivalente a se stessa.

Proprietà simmetrica: se $3x - 6 = 0$ è equivalente a $x - 2 = 0$, anche $x - 2 = 0$ è equivalente a $3x - 6 = 0$.

Proprietà transitiva: se $2x - 4 = 0$ è equivalente a $x - 2 = 0$ e $x - 2 = 0$ è equivalente a $x = 2$, allora $2x - 4 = 0$ è equivalente a $x = 2$.

► Indicheremo il passaggio da un'equazione a una equivalente con una freccia. Per esempio:

$$4x - 2 = 0 \rightarrow 4x = 2.$$

► Il primo principio di equivalenza si basa sulla prima legge di monotonia.

■ Il primo principio di equivalenza

■ PRINCIPIO

Primo principio di equivalenza

Data un'equazione, se si addiziona ai due membri uno stesso numero o una stessa espressione, si ottiene un'equazione equivalente.

$$\text{I membro} = \text{Il membro}$$

equivalente a

$$\text{I membro} + \text{●} = \text{Il membro} + \text{●}$$

ESEMPIO Consideriamo l'equazione $2x = 6$ che ha come soluzione $x = 3$.

Addizioniamo a entrambi i membri 5 e otteniamo $2x + 5 = 6 + 5$, ossia $2x + 5 = 11$. La soluzione di questa equazione è $x = 3$, quindi è equivalente a quella data.

Osservazione. Quando si addiziona un'espressione contenente l'incognita, bisogna fare attenzione!

Per esempio, se addizioniamo a entrambi i membri dell'equazione precedente, $2x = 6$, la frazione algebrica $\frac{1}{x-3}$, otteniamo: $2x + \frac{1}{x-3} = 6 + \frac{1}{x-3}$.

La soluzione di quest'ultima equazione non può essere $x = 3$, perché per tale valore dell'incognita la frazione $\frac{1}{x-3}$ perde significato. L'equazione ottenuta *non* è quindi *equivalente* a quella data.

In generale, il primo principio può essere applicato solo se le espressioni che si addizionano soddisfano le condizioni di esistenza dell'equazione.

► Per **condizioni di esistenza** di un'equazione intendiamo le condizioni da porre sull'incognita affinché abbiano significato entrambi i membri dell'equazione.

■ Le applicazioni del primo principio

Dal primo principio derivano due regole pratiche utili nella risoluzione delle equazioni.

ESEMPIO Risolviamo l'equazione:

$$7x - 2 = 6x + 1.$$

Per eliminare il termine $+6x$ dal secondo membro, addizioniamo a entrambi i membri il termine $-6x$:

$$7x - 2 - 6x = 6x + 1 - 6x \quad \rightarrow \quad 7x - 2 - 6x = +1.$$

Svolgiamo i calcoli al primo membro e otteniamo l'equazione:

$$x - 2 = 1.$$

Per eliminare -2 dal primo membro, addizioniamo ai due membri $+2$:

$$x - 2 + 2 = 1 + 2.$$

Otteniamo l'equazione:

$$x = 3.$$

Poiché le equazioni

$$7x - 2 = 6x + 1 \quad \text{e} \quad x = 3$$

sono equivalenti, il valore 3, soluzione immediata della seconda equazione, è anche soluzione della prima.

- Per il primo principio anche questa equazione è equivalente alle precedenti.

Si può rendere più rapido il procedimento notando che, quando si elimina da un membro un termine, grazie al primo principio di equivalenza, esso ricompare nell'altro con il segno cambiato. Si può quindi formulare la seguente regola.

REGOLA

Il trasporto

Data un'equazione, se ne ottiene una equivalente se si trasporta un termine da un membro all'altro, cambiandolo di segno.

$$\begin{aligned} 7x + 2 &= 6x + 1 \\ 7x &= 6x + 1 - 2 \end{aligned}$$

Con considerazioni analoghe si giunge alla seguente regola.

REGOLA

La cancellazione

Termini uguali presenti in entrambi i membri di un'equazione possono essere soppressi, ottenendo un'equazione equivalente.

$$4 + 5x = 2x + 4 + x$$

ESEMPIO

$$x + 9 = 4 + 9 \quad \rightarrow \quad x + 9 = 4 + 9 \quad \rightarrow \quad x = 4.$$

L'origine del termine «algebra»

Che cosa significa «algebra»? Il termine deriva da *al-jabr*, che il matematico arabo al-Khuwarizmi (IX sec. d.C.) utilizzava per indicare il procedimento che abbiamo chiamato «regola del trasporto». In seguito il termine venne usato in senso più ampio, come «scienza delle equazioni», per indicare i metodi di calcolo e le regole utili per risolverle.

■ Il secondo principio di equivalenza

PRINCIPIO

Secondo principio di equivalenza

Data un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente se si moltiplicano o si dividono i due membri per uno stesso numero, o espressione, diverso da 0.

I membro = II membro

equivalente a

$\bullet \cdot$ I membro = $\bullet \cdot$ II membro

- Per cancellare il termine + 9 dai due membri, abbiamo applicato il primo principio, aggiungendo - 9 a entrambi i membri.

- Il secondo principio di equivalenza si basa sulla seconda legge di monotonia delle uguaglianze.

ESEMPIO

$\frac{2}{3}x = 10$ ha come soluzione $x = 15$, perché $\frac{2}{3} \cdot 15 = 10$.

Moltiplichiamo i due membri per 3 e otteniamo l'equazione:

$$3 \cdot \frac{2}{3}x = 3 \cdot 10, \quad \text{ossia} \quad 2x = 30.$$

La soluzione di questa equazione è 15, quindi è equivalente a quella data.

Osservazione. Non possiamo dividere i membri di un'equazione per 0 perché la divisione per 0 non ha significato. Potremmo invece moltiplicare entrambi i membri per 0, ma che cosa succede?

Prendiamo, per esempio, l'equazione $3x = 6$, che ha come soluzione 2. Moltiplichiamo per 0 i due membri:

$$0 \cdot 3x = 0 \cdot 6 \rightarrow 0 \cdot x = 0.$$

Questa equazione ha come soluzione tutti i numeri reali. L'equazione ottenuta **non** è quindi equivalente a quella data.

ESEMPIO

Data l'equazione $2 = \frac{4}{x-1}$, la soluzione è $x = 3$, perché $2 = \frac{4}{3-1}$.

Moltiplichiamo i due membri per $x-1$, ponendo la condizione $x-1 \neq 0$. Otteniamo l'equazione:

$$2(x-1) = \frac{4}{x-1}(x-1), \quad \text{cioè} \quad 2x-2 = 4.$$

La soluzione è ancora $x = 3$; quindi l'equazione ottenuta è equivalente all'equazione data.

■ Le applicazioni del secondo principio

Applicando il secondo principio, è possibile ricavare altre due regole utili.

REGOLA

La divisione per un fattore comune diverso da 0

Se tutti i termini di un'equazione hanno un fattore numerico comune (*diverso da 0*), si ottiene un'equazione equivalente dividendo tutti i termini per quel fattore.

$$3x + 3 \cdot 5 = 3 \cdot 7$$

equivalente a

$$\underline{\underline{3}}x + \underline{\underline{3}} \cdot 5 = \underline{\underline{3}} \cdot 7$$

► Altro esempio:
nell'equazione

$$2x + 4 = 0$$

possiamo dividere per 2 e otteniamo

$$x + 2 = 0,$$

perché $0 : 2 = 0$.

ESEMPIO Nell'equazione

$$3x + 9 = 24 - 3$$

i termini $3x$, 9, 24 e 3 sono tutti divisibili per 3; pertanto possiamo dividere ciascun termine per 3, ottenendo l'equazione $x + 3 = 8 - 1$, equivalente alla data.

REGOLA**Il cambiamento di segno**

Cambiando segno a tutti i termini di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente.

$$-2x + 6 = -3$$

equivalente a

$$+2x - 6 = +3$$

- Cambiare il segno a tutti i termini dell'equazione equivale a *moltiplicare i due membri dell'equazione per -1 !*

ESEMPIO

$$-5x + 8 = -23 \rightarrow 5x - 8 = 23;$$

Osservazione. Il secondo principio è particolarmente utile per eliminare, passando a un'equazione equivalente, i denominatori nei coefficienti di un'equazione.

ESEMPIO Data l'equazione:

$$\frac{x}{2} = x + \frac{5}{3},$$

scriviamo i termini con denominatore 6:

$$\frac{3x}{6} = \frac{6x + 10}{6}.$$

Applichiamo il secondo principio, moltiplicando i due membri per 6:

$$\frac{3x}{6} \cdot 6 = \frac{6x + 10}{6} \cdot 6.$$

Otteniamo l'equazione equivalente:

$$3x = 6x + 10.$$

- 6 è il m.c.m. fra i denominatori che compaiono nei due membri.

4. Le equazioni numeriche intere

Le **equazioni numeriche intere** sono le equazioni a coefficienti numerici in cui l'incognita non è presente in alcun denominatore.

ESEMPIO

$$\frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{5}.$$

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ► V21c

- L'aggettivo «intere» è riferito all'incognita e non ai coefficienti, che possono essere frazionari.

► L'equazione

$$\frac{1}{x} - 3 = 0$$

è numerica ma **non** intera, perché x è al denominatore.

L'equazione

$$ax - \frac{3}{2} = 0$$

è intera ma **non** numerica, per la presenza del coefficiente letterale a .

$$ax = b,$$

ossia tale che il primo membro contenga il termine con l'incognita e il secondo membro contenga il termine noto. Se $a \neq 0$, per risolvere un'equazione scritta in questa forma, grazie al secondo principio di equivalenza basta dividere entrambi i membri per il coefficiente di x , ottenendo:

$$x = \frac{b}{a}.$$

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione:

$$4x - 9 + (x - 1)(x + 1) = (x - 3)^2 + 2x + 5.$$

Svolgiamo i calcoli:

$$4x - 9 + x^2 - 1 = x^2 - 6x + 9 + 2x + 5.$$

Cancelliamo i termini uguali presenti in entrambi i membri:

$$4x - 9 - 1 = -6x + 9 + 2x + 5.$$

Riduciamo i termini simili:

$$4x - 10 = -4x + 14.$$

Trasportiamo nel primo membro i termini con l'incognita e nel secondo membro i termini noti, ricordando di cambiare segno a ogni termine che viene trasportato da una parte all'altra dell'uguale:

$$4x + 4x = 14 + 10.$$

Sommiamo i termini simili:

$$8x = 24.$$

Siamo giunti a un'equazione di primo grado scritta nella forma $ax = b$.

Per risolverla, dividiamo i due membri per 8, cioè per il coefficiente di x :

$$\frac{8x}{8} = \frac{24}{8} \quad \rightarrow \quad x = 3$$

La soluzione è $x = 3$.

**PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI****Il principe e il messaggero**

Nel sito: ► Scheda di lavoro

«Partito per esplorare il regno di mio padre, percorrevo 40 leghe al giorno. Già all'inizio del secondo giorno di viaggio mi preoccupai di poter comunicare con i miei cari. Fra i cavalieri scelsi il migliore, Alessandro, e gli chiesi di fare la spola tra la nostra posizione e il castello. Ogni giorno Alessandro percorreva 80 leghe... Oggi partirà di nuovo per il castello. Ho calcolato che lo potrei rivedere solo fra più di trent'anni.» Quando il principe pronuncia questa frase, quanti giorni sono trascorsi dalla partenza?

(Liberamente ispirato al racconto *I sette messaggeri*, Dino Buzzati, *Sessanta racconti*, Mondadori, 2001)

GIORGIA: «Forse la risposta ce la può dare la legge matematica che regola i successivi incontri fra il principe e il messaggero».

MATTEO: «Potremmo rappresentare la situazione con una tabella...».

► Metti in pratica l'idea di Matteo e utilizza anche una rappresentazione grafica. Se un incontro avviene a una certa distanza dal castello, a quale distanza avviene l'incontro successivo?

■ Le equazioni determinate, indeterminate, impossibili

Data un'equazione numerica nella forma

$$ax = b,$$

a seconda dei valori assunti da a e da b , l'equazione può essere determinata, indeterminata, impossibile.

Equazione determinata

$$\text{Se } a \neq 0, x = \frac{b}{a}.$$

Poiché il risultato della divisione è unico, l'equazione ha **una e una sola soluzione**.

Equazione indeterminata

Se si verificano entrambe le condizioni $a = 0$ e $b = 0$, abbiamo $0x = 0$.

Sostituendo a x un qualunque numero, l'uguaglianza è verificata. Infatti, moltiplicando qualsiasi numero per 0 si ottiene 0. Poiché l'equazione $0x = 0$ ha **infinte soluzioni**, l'equazione è **indeterminata** e l'insieme delle soluzioni è \mathbb{R} .

ESEMPIO Risolviamo l'equazione:

$$4x - 12 - 3x = 5 + x - 17 \rightarrow 4x - 3x - x = 12 + 5 - 17 \rightarrow 0x = 0.$$

L'equazione è indeterminata.

Equazione impossibile

Se si verificano le due condizioni $a = 0$ e $b \neq 0$, abbiamo $0x = b$, con $b \neq 0$.

Questa equazione non ha soluzioni, poiché non esiste un numero che, moltiplicato per 0, dia come risultato un numero diverso da 0.

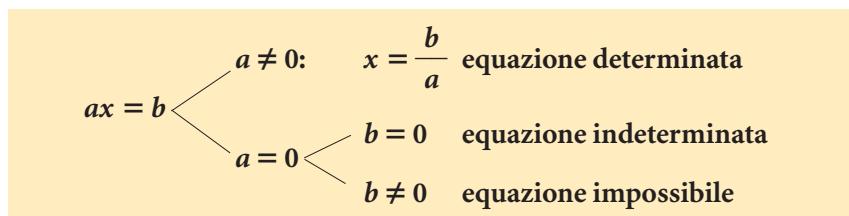
Poiché **non ha soluzioni**, l'equazione è **impossibile** e l'insieme delle soluzioni è l'insieme vuoto: $S = \emptyset$.

ESEMPIO Risolviamo la seguente equazione:

$$2(x - 1) - 2x = 0 \rightarrow 2x - 2 - 2x = 0 \rightarrow 0x - 2 = 0 \rightarrow 0x = 2.$$

Poiché nessun numero, moltiplicato per 0, può dare 2, l'equazione è impossibile.

In sintesi:

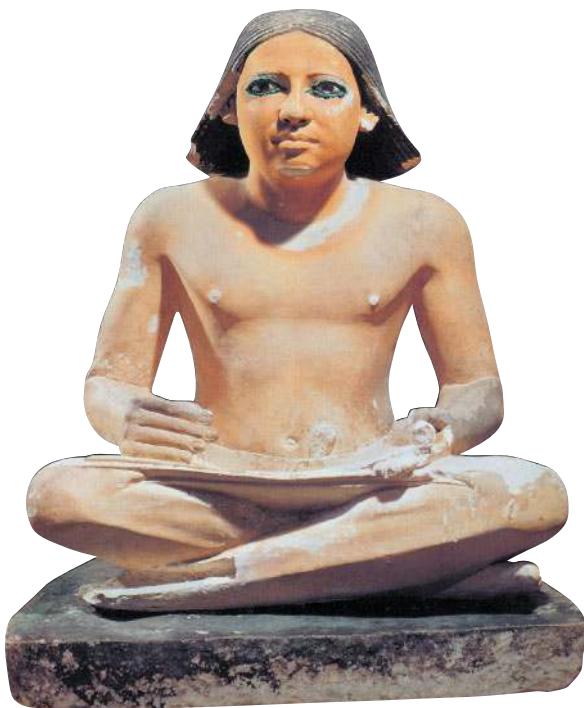


BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V21d



ESPLORAZIONE: LA FALSA POSIZIONE



IL PAPIRO DI AHMES

Il primo documento con un problema la cui soluzione richiede un'equazione di primo grado si trova su un papiro egiziano del 1700 a.C. circa, il Papiro di Ahmes, conservato al British Museum di Londra.

L'incognita viene indicata con il termine *aha*, che significa «mucchio».

Problema 25 del Papiro di Ahmes.

Qual è il valore del mucchio, se il mucchio sommato alla sua metà diventa 16?

Anziché indicare il «mucchio» con x , come faremmo noi, Ahmes lo pone uguale a un numero vero e proprio, in questo caso 2.

Se sommiamo 2 alla sua metà, il risultato è:

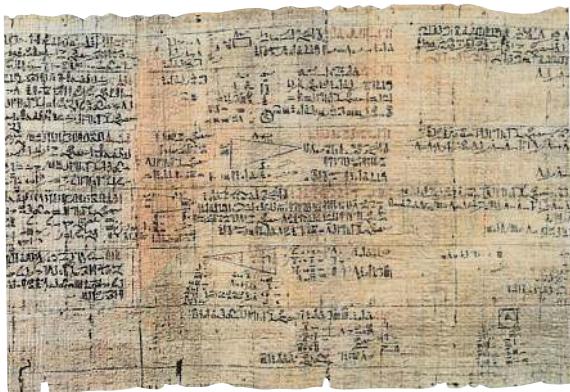
$$2 + 1 = 3 \quad \text{e non } 16.$$

Se si attribuisce il valore 2 all'incognita, si ottiene 3; quale valore le si deve attribuire per avere 16, come richiesto? Nel papiro si ricorre all'uso di una proporzione.

Scriviamo la proporzione con i simboli moderni:

$$2 : 3 = x : 16,$$

◀ Saqqara. Statua di uno scriba in calcare dipinto (V dinastia, seconda metà del III millennio a.C.), Il Cairo, Museo Egizio. La conoscenza della scrittura era una condizione indispensabile per poter accedere alla casta dei funzionari che reggevano l'amministrazione dell'Antico Egitto. Gli scribi imparavano, oltre alla scrittura, numerose altre discipline in apposite scuole annesse ai templi.



◀ Un particolare del Papiro di Ahmes. Il papiro era stato acquistato da un antiquario scozzese, Henry Rhind, ed è conosciuto come Papiro di Rhind, oppure Papiro di Ahmes, in onore dello scriba che lo trascrisse.

da cui

$$x = \frac{2 \cdot 16}{3} = \frac{32}{3} = 10 + \frac{2}{3}.$$

Poiché il metodo è basato sulla sostituzione dell'incognita con un particolare valore diverso dalla soluzione, il procedimento è detto *metodo della falsa posizione*.

IN CINQUE SLIDE

Anche gli Arabi (in particolare Abu Kamil, vissuto alla fine del IX secolo) utilizzarono il metodo della falsa posizione. Nel Medioevo, attraverso lo studio della matematica araba, questo metodo passò nella cultura europea.

Cerca notizie relative ai principali contributi della matematica araba e realizza una presentazione multimediale. Inserisci anche una linea del tempo nella quale, oltre ai matematici arabi, siano presenti significativi riferimenti storici di quell'epoca.



Cerca nel web: matematica araba, matematica islamica, algebra, retorica, arabic math.

5. Le equazioni fratte

Un'equazione è **fratta** se l'incognita compare in almeno un denominatore. Un'equazione fratta è **numerica** se *tutti* i coefficienti sono numerici, è **letterale** se *almeno* un coefficiente contiene una o più lettere.

ESEMPIO

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1} \quad \text{e} \quad 3 + \frac{2x}{x+1} = 0$$

sono equazioni numeriche fratte. L'equazione, nell'incognita x ,

$$\frac{a}{x} + \frac{1}{a} = 1$$

è letterale fratta.

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ► V21e

► L'equazione letterale, nell'incognita x ,

$$\frac{1}{a}x + \frac{3x}{a-1} = \frac{x+1}{a+1}$$

non è fratta ma intera, perché nessun denominatore contiene x .

► Ci limitiamo a esaminare la soluzione delle equazioni fratte numeriche.

Negli esercizi troverai anche esempi relativi alle equazioni fratte letterali.

La risoluzione di un'equazione numerica fratta

Prima di risolvere un'equazione numerica fratta, dobbiamo determinare le condizioni di esistenza delle frazioni algebriche presenti.

Poi possiamo procedere alla risoluzione applicando i principi di equivalenza. La soluzione trovata sarà accettabile solo se rispetta le condizioni di esistenza.

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione:

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}.$$

Le due frazioni algebriche hanno significato solo se $x - 1 \neq 0$, cioè se $x \neq 1$:

C.E.: $x \neq 1$.

Moltiplichiamo entrambi i membri per $x - 1$:

$$\frac{x}{x-1}(x-1) = \frac{1}{x-1}(x-1).$$

Otteniamo la soluzione:

$$x = 1.$$

È ora necessario il **controllo della soluzione**.

Poiché la soluzione $x = 1$ è incompatibile con la condizione $x \neq 1$, la soluzione non può essere accettata, quindi l'equazione è impossibile.

In sintesi, per risolvere un'equazione numerica fratta dobbiamo:

- determinare le **condizioni di esistenza** delle frazioni algebriche presenti;
- portare tutte le frazioni algebriche a **denominatore comune**;
- moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per tale denominatore, in modo da ottenere un'**equazione intera**;
- calcolare le **soluzioni** dell'equazione intera;
- controllare che tali soluzioni siano **accettabili**, cioè che rispettino le C.E.: in caso affermativo, esse sono soluzioni dell'equazione fratta.

► Applichiamo il secondo principio di equivalenza delle equazioni.

- L'equazione, nell'incognita x ,

$$\frac{2a}{x-a} = \frac{x+1}{3}$$

è letterale ma non è intera, perché contiene l'incognita x al denominatore.

BRAVI SI DIVENTA



Videolezione ▶ V22a

6. Le equazioni letterali

Le equazioni letterali presentano una o più lettere oltre all'incognita.

- **ESEMPIO** L'equazione, nell'incognita x ,

$$\frac{(a+1)x}{2a} = \frac{5a(b-3)}{6b} \quad \text{è letterale intera.}$$

■ La risoluzione di un'equazione letterale intera

Nella soluzione delle equazioni letterali intere è necessario discutere per quali valori delle lettere presenti l'equazione è determinata, indeterminata o impossibile.

- **ESEMPIO** Risolviamo l'equazione, nell'incognita x :

$$ax - 3a = 2x.$$

- Portiamo al primo membro i termini con l'incognita e al secondo gli altri:
- $$ax - 2x = 3a.$$
- Raccogliamo x :

$$(a-2)x = 3a.$$

Discussione

Prima di dividere i due membri per $(a-2)$ dobbiamo porre la condizione:

$$a-2 \neq 0, \quad \text{ossia} \quad a \neq 2.$$

Se questa condizione è verificata, possiamo dividere i due membri per $a-2$. In tal caso l'equazione è determinata e la soluzione è:

$$x = \frac{3a}{a-2}.$$

Per analizzare il caso $a=2$, sostituiamo 2 ad a nell'equazione $(a-2)x = 3a$. Troviamo:

$$0x = 3 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad 0x = 6 \quad \rightarrow \quad \text{l'equazione è impossibile.}$$

In sintesi:

- se $a \neq 2$, l'equazione è determinata e la soluzione è $x = \frac{3a}{a-2}$;
- se $a = 2$, l'equazione è impossibile.

■ La risoluzione di un'equazione letterale fratta

Anche nella soluzione delle equazioni letterali fratte è necessaria la discussione.

- **ESEMPIO** Risolviamo la seguente equazione, nell'incognita x :

$$\frac{a+1}{ax-a} = \frac{1}{2a}.$$

$$\frac{a+1}{a(x-1)} = \frac{1}{2a} \quad \text{C.E.: } a \neq 0 \wedge x \neq 1.$$

$$2(a+1) = x - 1 \quad \rightarrow \quad x = 2a + 2 + 1 \quad \rightarrow \quad x = 2a + 3$$

Osservando le condizioni di esistenza dobbiamo porre:

$$2a + 3 \neq 1 \quad \rightarrow \quad 2a \neq -2 \quad \rightarrow \quad a \neq -1.$$

Per $a = -1$, l'equazione è impossibile.

In sintesi:

- se $a = 0$, l'equazione perde di significato;
- se $a = -1$, l'equazione è impossibile;
- se $a \neq 0 \wedge a \neq -1$, l'equazione è determinata e la soluzione è $x = 2a + 3$.

7. Equazioni e problemi

■ Un problema numerico

Un mattone pesa 1 kg più mezzo mattone. Quanto pesa il mattone?

Poiché un mattone è costituito da due mezzi mattoni, 1 kg corrisponde al peso di mezzo mattone: quindi il mattone pesa 2 kg.

Dal problema all'equazione

Possiamo risolvere il problema anche scrivendo un'equazione. È sufficiente tradurre il testo del problema in un'uguaglianza in cui figura l'incognita.

Indichiamo con x il peso di un mattone, scriviamo l'equazione e risolviamola mediante le tecniche incontrate:

$$x = 1 + \frac{1}{2}x \quad \rightarrow \quad 2x - x = 2 \quad \rightarrow \quad x = 2.$$

Pertanto il mattone pesa 2 kg.

In generale, le equazioni aiutano a risolvere problemi come questo o anche molto più complicati in modo relativamente semplice.

La scelta dell'incognita

Dalla scelta dell'incognita dipende spesso la maggiore o minore difficoltà dell'equazione.

Il problema precedente può essere risolto scegliendo un'incognita diversa. Per esempio, possiamo indicare con x il peso di mezzo mattone. Il peso di un mattone è allora $2x$. L'equazione che risolve il problema diventa:

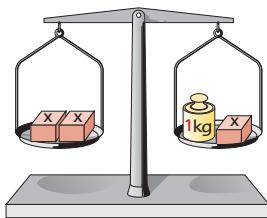
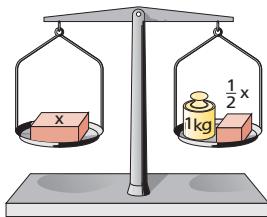
$$2x = 1 + x \quad \rightarrow \quad x = 1.$$

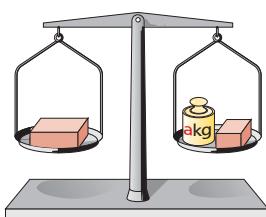
Mezzo mattone pesa 1 kg, un mattone pesa 2 kg.



BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V23a





► In generale, quando risolviamo un problema che, oltre all'incognita, contiene una o più lettere, non risolviamo un singolo problema numerico, ma tutti i problemi che si ottengono sostituendo alle lettere dei valori numerici.

► Si dice anche che il problema è **impossibile**.

■ Un problema letterale

Nel problema esaminato è presente un solo dato numerico: 1 kg. Rendiamo più generale il problema sostituendolo con la lettera *a*.

«Un mattone pesa *a* kg più mezzo mattone. Quanto pesa il mattone?».

La lettera *a* non è un'incognita, ma rappresenta un valore noto.

Se indichiamo con *x* il peso di mezzo mattone, l'equazione che risolve il problema è un'equazione letterale:

$$2x = a + x.$$

La soluzione è:

$$x = a.$$

Mezzo mattone pesa *a* kg, quindi un mattone pesa $2a$ kg.

■ Il controllo della soluzione

Un problema può anche non ammettere soluzione.

ESEMPIO

Problema. Trovare due numeri *naturali*, sapendo che il primo è il triplo del secondo e che la loro somma è 25.

Soluzione. Se indichiamo il numero più piccolo con *x*, il più grande è $3x$; quindi l'equazione che risolve il problema è:

$$x + 3x = 25 \quad \rightarrow \quad x = \frac{25}{4}.$$

Il numero più piccolo è $\frac{25}{4}$; il più grande è $3 \cdot \frac{25}{4} = \frac{75}{4}$.

Tuttavia questi numeri non rappresentano la soluzione del problema in quanto non sono numeri naturali: il problema non ammette soluzione.



PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Occhio al trucco!



Nel sito: ► Scheda di lavoro

Riccardo propone più volte ai suoi compagni un gioco con un mazzo da 54 carte. Scrive su un foglio una carta e fa scegliere a un compagno un numero maggiore di 10 e minore di 20. Poi prende una alla volta, togliendole dalla cima del mazzo e mettendole una sopra l'altra, tante carte quante dice il numero scelto. Mette via le altre e afferma che quella indicata nel foglio si trova nel mazzetto che ha in mano, nel punto indicato dalla somma delle cifre del numero scelto. Non sbaglia mai!

(Da un'idea di Ennio Peres)

DAVIDE: «Ma perché Riccardo azzecca sempre la previsione?».

AMANDA: «L'ho osservato attentamente: all'inizio Riccardo mette una carta nel mazzo al decimo posto. Forse si tratta della carta scritta sul foglio?».

► Spiega perché il trucco scoperto da Amanda funziona.

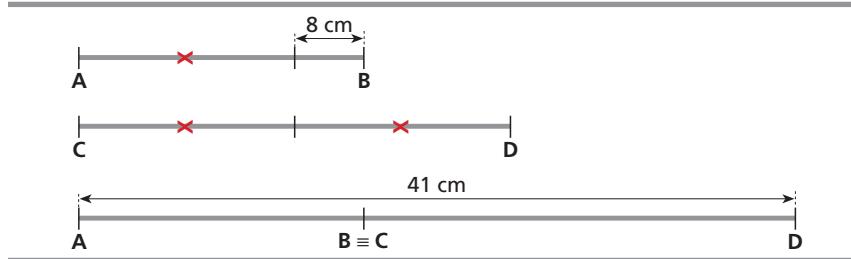
Equazioni e problemi geometrici

Problema

La somma delle lunghezze di due segmenti AB e CD è 41 cm. Il segmento AB supera di 8 cm la metà del segmento CD . Quanto misurano i due segmenti?

Soluzione

Di solito, nei problemi geometrici è consigliabile disegnare una figura.



▲ Figura 1

1. Le richieste: le misure delle lunghezze di AB e di CD .

2. Scegliamo l'incognita:

$$x = \overline{AB}.$$

3. Scriviamo le relazioni fornite dal problema:

$$\overline{AB} + \overline{CD} = 41 \quad \text{e} \quad \overline{AB} = \frac{1}{2} \overline{CD} + 8.$$

Sostituiamo ad \overline{AB} l'incognita x :

$$x + \overline{CD} = 41 \quad x = \frac{1}{2} \overline{CD} + 8.$$

Determiniamo \overline{CD} in funzione di x dalla prima relazione:

$$\overline{CD} = 41 - x.$$

4. Sostituiamo l'espressione trovata nella seconda relazione, ottenendo l'**equazione risolvente**:

$$x = \frac{1}{2} (41 - x) + 8.$$

5. Scriviamo a quali **condizioni** è accettabile la soluzione.

Poiché x è la misura della lunghezza di un segmento, si deve avere $x > 0$.

6. Risolviamo l'**equazione**:

$$\begin{aligned} x &= \frac{41}{2} - \frac{x}{2} + 8 \rightarrow 2x = 41 - x + 16 \rightarrow 3x = 57 \\ x &= \frac{57}{3}, \quad \text{ossia} \quad x = 19. \end{aligned}$$

7. Il **controllo**: la soluzione è accettabile, poiché $x > 0$.

8. Scriviamo la **risposta** al problema:

$$\overline{AB} = 19, \quad \overline{CD} = 41 - 19 = 22.$$

Possiamo anche scrivere:

$$\overline{AB} = 19 \text{ cm}, \quad \overline{CD} = 22 \text{ cm}.$$

▶ Segmenti, lunghezze e misure

Spesso, nei problemi geometrici che affronteremo applicando le equazioni, scriveremo, per brevità, frasi del tipo:

«Il segmento AB supera di 3 cm il segmento BK ».

In realtà, per essere più precisi, dovremmo scrivere:

«La lunghezza del segmento AB supera di 3 cm la lunghezza del segmento BK ».

Per distinguere poi la lunghezza di un segmento dalla sua misura, useremo due simboli diversi.

Con AB indicheremo sia un segmento sia la sua lunghezza, mentre con \overline{AB} indicheremo la misura della sua lunghezza.

Per esempio:

$$\overline{AB} = 5 \text{ cm}$$

indica che la lunghezza di AB è 5 rispetto al centimetro;

$$\overline{AB} = 5$$

indica che il numero 5 è la misura della lunghezza di AB .



Un po' d'equilibrio

...hai una bilancia e due pesi, da 10 g e da 40 g. Come puoi separare con tre sole pesate 1800 g di mais in due mucchi, da 400 g e da 1400 g?

→ Il quesito completo a pag. 491

La prima operazione da fare è versare il mais in parte su un piatto, in parte sull'altro.

Ovviamente la bilancia non sarà in equilibrio. A questo punto devi spostare del mais dal piatto più basso a quello più alto fino a che i due piatti sono allo stesso livello. In questo modo hai ottenuto due mucchi da 900 g ciascuno.

Ne metti uno in una pentola e lavori solo col secondo.

Ripetendo la stessa operazione di prima, dividi questo mucchio di mais da 900 g in due mucchietti più piccoli, ciascuno da 450 g. Senza togliere nulla dai due piatti, aggiungi a uno dei due i tuoi pesi d'ottone (che assieme fanno 10 g + 40 g = 50 g).

Il piatto con i pesi verrà a trovarsi più in basso.

Togli da questo piatto tanto mais quanto serve a far tornare la situazione in equilibrio.

Quando i due piatti sono di nuovo allo stesso livello, hai tolto esattamente 50 g di mais. Versa in una scodella quello che rimane sul piatto con i due pesi: si tratta esattamente di 400 g di mais.

Versa i 50 g tolti e il contenuto del piatto ancora pieno nella pentola usata in precedenza: in essa ci saranno ora esattamente 1400 g. La tecnica che hai usato per dividere il mais è proprio quella che si utilizza per risolvere le equazioni lineari applicando il primo principio di equivalenza: aggiungere e togliere a destra e a sinistra dell'uguale – cioè sui due piatti della bilancia – quantità uguali.

Così facendo, partendo da una situazione di equilibrio, non rompi mai l'equilibrio; se avevi quantità uguali prima della somma (o della sottrazione),

continuerai ad avere quantità uguali anche dopo.

Inoltre, se su una bilancia in equilibrio raddoppi quello che hai sul piatto destro e raddoppi quello che hai sul piatto sinistro, continui ad avere equilibrio. Allo stesso modo, se in un'equazione lineare moltiplichi i termini a destra e a sinistra per uno stesso numero, continui ad avere quantità uguali (secondo principio di equivalenza).

Fai attenzione! Se moltiplicherai per 0 due espressioni A e B , ottieni $0 \cdot A = 0 \cdot B$, cioè $0 = 0$, ma non puoi trarre conclusioni sulla loro uguaglianza. Moltiplicare per 0 è infatti come togliere tutto dalla bilancia. Se togli due pesi dai piatti e li lasci vuoti, è evidente che la bilancia è in equilibrio, ma non puoi certo dire che i pesi tolti erano uguali.

SPESE EQUILIBRATE

In una libreria c'è una promozione: tutte le nuove uscite hanno lo stesso prezzo e lo stesso vale per tutti i tascabili. Con € 80 puoi comprare quattro nuove uscite e quattro tascabili. Sapendo che se rinunci ad acquistare due nuove uscite puoi comprare tre tascabili, calcola il prezzo di una singola nuova uscita e di un singolo tascabile.



LA TEORIA IN SINTESI

Le equazioni lineari

1. Le identità

Un'**identità** è un'uguaglianza fra due espressioni letterali che risulta verificata per qualunque valore attribuito alle lettere contenute nelle espressioni.

ESEMPIO $(x - 1)^2 = (x - 1)(x - 1)$
è vera per qualunque valore di x .

$$\frac{ax}{a} = x \quad \text{C.E.: } a \neq 0$$

è vera per qualunque valore di a diverso da 0.

2. Le equazioni

Un'**equazione** è un'uguaglianza fra due espressioni letterali per la quale si cercano i valori da attribuire alle lettere per renderla vera. Tali valori sono le **solutions** o **radici** dell'equazione.

ESEMPIO $x - 1 = 0$

incognita
soluzione dell'equazione
è verificata solo se $x = 1$.

Un'equazione $P = 0$ è in **forma normale** se il polinomio P , nella variabile x , non contiene termini simili. Il **grado** dell'equazione è il grado del polinomio ridotto.

Un'**equazione lineare** è un'equazione di primo grado. Le equazioni possono essere **numeriche** o **letterali** a seconda che, oltre all'incognita, contengano soltanto numeri o anche altre lettere; possono essere **interi** o **fratte** a seconda che l'incognita sia presente solo nei numeratori oppure anche nei denominatori.

Un'equazione è **determinata** se ha un numero finito di soluzioni; è **indeterminata** se ha infinite soluzioni; è **impossibile** se non ha soluzioni.

Tipi di equazioni			
numerica intera	numerica fratta	letterale intera	letterale fratta
$\frac{1}{2}x - 1 = \frac{x+3}{5}$	$\frac{1}{x} = 2 - x$	$ax = \frac{1}{2}$	$\frac{a}{x} = b$

3. I principi di equivalenza

Due equazioni contenenti la stessa incognita sono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

ESEMPIO $x + 5 = 9$ e $x - 4 = 0$ sono equivalenti.
Entrambe hanno come unica soluzione 4.

Primo principio di equivalenza delle equazioni. Data un'equazione, se si addiziona (o si sottrae) ai due membri uno stesso numero o una stessa espressione, si ottiene un'equazione equivalente.

ESEMPIO $3x + 2 = 7$ è equivalente a
 $3x + 2 - 2 = 7 - 2$.

Dal primo principio discendono due regole.

- **Regola del trasporto.** È possibile spostare un termine da un membro all'altro, purché lo si cambi di segno, ottenendo un'equazione equivalente.

$$2x - 5 = x + 6$$

$$2x = x + 6 + 5$$

- **Regola di cancellazione.** È possibile eliminare dai due membri due termini uguali, ottenendo un'equazione equivalente.

ESEMPIO $2x - 4 + 2 = x + 2$.

Secondo principio di equivalenza delle equazioni.
Data un'equazione, se si moltiplicano o si dividono i due membri per uno stesso numero o espressione diversi da 0, si ottiene un'equazione equivalente.

■ **ESEMPIO** $\frac{1}{2}x = 7$ è equivalente a

$$2 \cdot \frac{1}{2}x = 2 \cdot 7, \text{ ossia } x = 14.$$

$$3x = 5 \text{ è equivalente a } \frac{3x}{3} = \frac{5}{3},$$

$$\text{ossia } x = \frac{5}{3}.$$

Dal secondo principio discendono due regole.

- **Regola della divisione per un fattore comune.** Se tutti i termini di un'equazione hanno un fattore numerico comune, si possono dividere tutti i termini per tale fattore, ottenendo un'equazione equivalente.

■ **ESEMPIO** $6x - 10 = 12 \xrightarrow{:2} 3x - 5 = 6.$

- **Regola del cambiamento di segno.** Moltiplicando entrambi i membri di un'equazione per -1 è possibile cambiare segno a **tutti** i termini, ottenendo un'equazione equivalente.

■ **ESEMPIO** $\begin{array}{r} -3x + 2 = +5 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ +3x - 2 = -5. \end{array}$

4. Le equazioni numeriche intere

È sempre possibile scrivere un'equazione di primo grado nella forma $ax = b$.

- Se $a \neq 0$, allora $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$:
la soluzione è $x = \frac{b}{a}$,
l'equazione è **determinata**.
- Se $a = 0$ e $b = 0$, allora $0 \cdot x = 0$:
l'equazione è **indeterminata**.
- Se $a = 0$ e $b \neq 0$, allora $0 \cdot x = b$:
l'equazione è **impossibile**.

5. Le equazioni fratte

Prima di risolvere un'**equazione numerica fratta**, dobbiamo determinare le **condizioni di esistenza** delle frazioni algebriche presenti.

Al termine della risoluzione dobbiamo **controllare se le soluzioni sono accettabili**.

■ **ESEMPIO**

$$\frac{3x - 1}{x} = 2;$$

C.E.: $x \neq 0$. controllo
della soluzione:
accettabile

$$3x - 1 = 2x \rightarrow 3x - 2x = 1 \rightarrow x = 1.$$

6. Le equazioni letterali

Quando risolviamo un'**equazione letterale intera**, dobbiamo eseguire la discussione.

■ **ESEMPIO**

$$ax = 2.$$

Discussione

- Se $a \neq 0$, $x = \frac{2}{a}$: l'equazione è determinata.
- Se $a = 0$, $0 \cdot x = 2$: l'equazione è impossibile.

Anche quando risolviamo le **equazioni letterali fratte**, dobbiamo eseguire la discussione.

■ **ESEMPIO**

$$\frac{a+2}{x} = 1.$$

C.E.: $x \neq 0$.

$$\frac{a+2}{x} = 1 \rightarrow x = a+2.$$

Poniamo $a+2 \neq 0 \rightarrow a \neq -2$.

Discussione

- Se $a \neq -2$, $x = a+2$: l'equazione è determinata.
- Se $a = -2$, l'equazione è impossibile.

7. Equazioni e problemi

SCHEMA DI RISOLUZIONE DEI PROBLEMI

1. Richieste	Scrivere quali sono le richieste del problema.
2. Incognita	Porre $x = \dots$
3. Relazioni	Scrivere le relazioni fornite dal problema, utilizzando x .
4. Equazione risolvente	A partire dalle relazioni, ricavare l'equazione risolvente in x .
5. Condizioni	Porre poi le condizioni di accettabilità dei risultati.
6. Risoluzione	Risolvere l'equazione.
7. Controllo	Controllare se la soluzione è accettabile o no in base alle condizioni precedenti.
8. Risposta	Determinare i valori dei risultati richiesti al punto 1.

1. Le identità

→ Teoria a pag. 491

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 VERO O FALSO?

- a) Un'identità è sempre un'uguaglianza fra due espressioni che contengono gli stessi termini.
- b) Se un'uguaglianza fra due espressioni letterali è valida per qualunque valore venga attribuito alle lettere, allora è un'identità.
- c) Due espressioni di grado diverso non possono essere i due membri di una stessa identità.

V F

V F

V F

2

- Quando si devono porre le condizioni di esistenza di un'identità?

3

TEST Le seguenti uguaglianze sono tutte identità, *tranne* una. Quale?

A $a(2b + c) = 2ab + ac$

B $-\frac{ab}{b} = \frac{1}{b}(-ab)$

C $(a + 2b)^3 = a^3 + 6a^2b + 6ab^2 + 8b^3$

D $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

E $(a - b)^2 = (b - a)^2$

4

Scrivi un'identità che abbia significato per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

- 5** Stabiliamo se la seguente uguaglianza è un'identità:

$$(a + b)^2 - 8ab = a^2 + b(b - 6a).$$

Semplifichiamo l'espressione al primo membro:

$$a^2 + b^2 + 2ab - 8ab = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 6ab}}.$$

Semplifichiamo l'espressione al secondo membro:

$$a^2 + b(b - 6a) = \underline{a^2 + b^2 - 6ab}.$$

L'uguaglianza è un'identità perché il primo e il secondo membro, semplificati, forniscono la stessa espressione.

Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono identità.

- 6** $[4a^3b^3 : (-b^2)] : (2a^2b) = \left(-\frac{2}{3}a^2b\right) : \left(\frac{1}{3}ab\right)$ [sì]
- 7** $-a + b^2 + 2(a - b) + (a - b)(a + b) = a + b^2 - (2b - a^2 + b^2)$ [sì]
- 8** $\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{5}a\right)3a + a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{2}{5}a^2$ [sì]
- 9** $3(a - 2)^2 - 3a(a - 4) = 3a(2a - a) + 12(1 - 6a)$ [no]
- 10** $3(a + b)^2 - 6ab + (a - b)(a + b) = 4(a^2 - 1) + 2(2 - b^2)$ [no]
- 11** $(x - 2)^3 + 8 - x^3 + 6(x - 2)(x + 2) = 12(x - 2) + x$ [no]
- 12** $\left[\left(1 - \frac{1}{5}\right)a^3b^4c : \left(-\frac{2}{5}ab^2\right)\right]^2 = -24a^4b^4c^2 - (-2a^2bc)^2(-7b^2)$ [sì]
- 13** $\left(\frac{1}{3}a - b\right)^3 + \frac{1}{3}b(a - b)(a + b) = \frac{1}{27}(a^3 - 4b)$ [no]

■ Le condizioni di esistenza di un'identità

■ ESERCIZIO GUIDA

14 Stabiliamo se l'uguaglianza

$$\frac{1}{a - 1} + 2a = \frac{2a^2}{a - 1} - \frac{2a - 1}{a - 1}$$

è un'identità e, in caso affermativo, scriviamo sotto quali condizioni ha significato.

Semplifichiamo il primo membro:

$$\frac{1}{a - 1} + 2a = \frac{1 + 2a(a - 1)}{a - 1} = \frac{1 + 2a^2 - 2a}{a - 1} = \frac{2a^2 - 2a + 1}{a - 1}.$$

Semplifichiamo il secondo membro:

$$\frac{2a^2}{a - 1} - \frac{2a - 1}{a - 1} = \frac{2a^2 - 2a + 1}{a - 1}.$$

Affinché le frazioni algebriche nei due membri abbiano significato, bisogna che il denominatore sia diverso da 0, cioè che $a - 1 \neq 0$, quindi $a \neq 1$.

Se $a \neq 1$, l'uguaglianza è un'identità, poiché i due membri risultano uguali.

Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono identità e, in caso affermativo, scrivi sotto quali condizioni hanno significato.

15 $\frac{a+2}{2a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}$

[sì; $a \neq 0$]

19 $1 - \frac{2a+b}{a-b} = \frac{a+b}{b-a} - \frac{b}{a-b}$ [sì; $a \neq b$]

16 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$

[sì; $a \neq 0 \wedge b \neq 0$]

20 $\frac{a}{bx} - \frac{a+1}{x} + b = -\frac{1}{x} - \frac{a-b^2}{b} + 1$ [no]

17 $\frac{1}{b} + \frac{b+1}{2b^2} = \frac{b-2}{2b} + \frac{1}{b^2}$

[no]

21 $\frac{a}{a-2} + \frac{1}{a} = -\frac{2}{a^2-2a} + \frac{a+1}{a-2}$ [sì; $a \neq 0 \wedge a \neq 2$]

18 $\frac{1}{a} + a(a+1) = \frac{1+a^2(a+1)}{a}$

[sì; $a \neq 0$]

22 $\frac{2y}{y^2-9} - 1 = \frac{y-1}{y-3} - \frac{3}{y+3}$ [no]

2. Le equazioni

→ Teoria a pag. 492

RIFLETTI SULLA TEORIA

23 VERO O FALSO?

- a) Le equazioni sono identità particolari.
- b) Le incognite sono le variabili presenti in un'equazione.
- c) $y=3$ è soluzione dell'equazione $\frac{2}{5}(y+2)=y-1$.
- d) L'equazione $x^2-9=0$ ha grado 2.
- e) L'equazione $2x+x=4x-x$ ha infinite soluzioni.

25 VERO O FALSO?

- a) In un'equazione intera non compaiono denominatori.
- b) Un'equazione lineare determinata ha un'unica soluzione.
- c) L'equazione $x^2-9=x^2-3x=0$ è di secondo grado.
- d) L'equazione $4x=0$ è impossibile.

24 TEST

Quale, fra le seguenti, è soluzione dell'equazione $x^2-4x+4=0$?

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| <input type="checkbox"/> A $x=1$ | <input type="checkbox"/> D $x=-1$ |
| <input type="checkbox"/> B $x=2$ | <input type="checkbox"/> E $x=-2$ |
| <input type="checkbox"/> C $x=3$ | |

26 TEST

Fra le seguenti uguaglianze solo *una* è un'equazione lineare intera. Quale?

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> A $x^2+2x+1=0$ | <input type="checkbox"/> D $\frac{3}{x}+1=4x$ |
| <input type="checkbox"/> B $\frac{x+1}{x-1}=2$ | <input type="checkbox"/> E $2x-3=3^2(1-x)$ |
| <input type="checkbox"/> C $\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3}$ | |

ESERCIZI

Di fianco a ogni equazione sono scritti due valori; verifica se sono soluzioni dell'equazione.

27 $1-x=2x+7$

$x=3$; $x=-2$.

28 $2x+1-6x=13$

$x=-4$; $x=-3$.

29 $(y-2)^2+14=8y-3y$

$y=3$; $y=-2$.

30 $4t + 5 = 7t - 2(t - 4) - 2t$

$$t = -1; \quad t = 3.$$

31 $2x^2(x - 1) - x = x^2 + 10x - 6$

$$x = \frac{1}{2}; \quad x = -\frac{1}{3}.$$

32 $(x - 1)^2 + 3(x - 1) = -2x + (x + 2)^2$

$$x = 2; \quad x = -6.$$

I diversi tipi di equazioni

ESERCIZIO GUIDA

33 Indichiamo per ogni equazione nell'incognita x il tipo al quale essa appartiene.

$$\frac{3}{2}x - \frac{1}{5} = 6x \text{ equazione numerica intera.}$$

$$\frac{x}{a} - \frac{2}{a-1} = 8ax \text{ equazione letterale intera.}$$

$$\frac{3}{2x} - \frac{1}{5x} = 6 \text{ equazione numerica fratta.}$$

$$\frac{2}{ax+b} = \frac{3ax}{x+1} \text{ equazione letterale fratta.}$$

Indica per ogni equazione nell'incognita x il tipo al quale essa appartiene.

34 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = 6;$

$$ax - 2 + x = 5 - 3(ax + 1);$$

$$\frac{3}{2}x - 3 + \frac{2}{3}x = \frac{1}{2}x + 1.$$

35 $\frac{1}{a} = x + 1;$

$$\frac{x}{-a} - \frac{2x}{b} = \frac{3}{ab};$$

$$\frac{1}{x} = 6x + 3.$$

36 $\frac{1}{x-1} = \frac{3a}{2x-2};$

$$\frac{2}{a} = \frac{5}{x};$$

$$\frac{2ax}{a+b} = \frac{a-b}{x}.$$

La forma normale di un'equazione e il suo grado

Fra le seguenti equazioni nell'incognita x , riconosci quelle scritte in forma normale e, per ognuna di queste, scrivi il grado e il termine noto.

37 $x = 1;$

$$x^2 - 1 = 0;$$

$$3x + 2 = 1 - 5x;$$

$$6x - x^3 = 0;$$

$$(2x - 3)^2 + 4x = 0;$$

$$a^3 + x^2 = 0.$$

38 $x^2 - 5x + 6 = 0;$

$$ax + x - 1 = 0;$$

$$x^3 - 3x^2 = 2x + 1;$$

$$4x^2 - 6x = 2;$$

$$b^2 + bx + x = 0;$$

$$\frac{3}{5}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2} = 0.$$

39 $a^3x + x^2 + a - 1 = 0;$

$$4x + 2x^2 - x - x^2 + 1 = 0;$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{1}{2}x = 0;$$

$$5x - 8x + 1 - 6x + 10 = 0;$$

$$1 - 3x^2 + 2x = 0.$$

Riduci a forma normale le seguenti equazioni numeriche e scrivi il grado e il termine noto di ciascuna.

40 $(2x - 3)^2 - x(4x^2 + 3) - 9 = 0$

44 $10 - 6x + (x - 4)(x + 4) - (x - 4)^2 = 0$

41 $2x - 1 + x(x + 1) - x^2 + 8x = 0$

45 $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 - \left(4x + \frac{3}{8}\right) = 0$

42 $(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right) - x^2 + \frac{3}{2}x = 0$

46 $(1 - x)^3(x + 2) - x(3 - x^5) + 2 = 0$

43 $(1 + 2x)(1 - 2x) + (2x - 1)^2 = 0$

47 $-4x(2x - 3)^3 + 35x^4 - 30x^3 + 19 = 0$

48

Qual è il grado dell'equazione $4x^2 - x + x(7 + 4x) = 6$? E di $4x^2 - x - x(7 + 4x) = 6$?

49

COMPLETA la seguente tabella.

EQUAZIONE	FORMA NORMALE	GRADO	TERMINE NOTO
$x + 2 + \frac{1}{3}x + 4 = 0$
$x^2 + 3x \dots + 4 + \frac{1}{2} = 0$...	3	...
$\dots x^2 + 2x - 2x^2 + 3 = 0$	$5x^2 + 2x + 3 = 0$
$4x + 7 - \dots = 0$	10

Quale delle seguenti equazioni può essere considerata un'equazione di primo grado rispetto a ciascuna lettera che vi compare?

50

$$5 - 3t = v^2 + 2t + 1;$$

$$\textcolor{red}{51} \quad \frac{1}{2}ax + 2a^2 - 3a + ax = 0;$$

$$4xy - 3y^3 = 2x + y + 1;$$

$$y^2x + bx^2 = y + b;$$

$$-3x^2 + 2z + 3 - x = 0.$$

$$a - 1 - b(a - b) = 1b^2 - 3ab.$$

■ ESERCIZIO GUIDA

52 Riduciamo a forma normale l'equazione letterale nell'incognita x

$$a(x^2 + 1) + x(a + x) + x^2 - 2 = 0$$

e scriviamo il grado e il termine noto.

Svolgiamo i calcoli:

$$ax^2 + a + ax + x^2 + x^2 - 2 = 0$$

$$ax^2 + a + ax + 2x^2 - 2 = 0.$$

Raccogliamo x^2 e ordiniamo rispetto a x :

$$(a + 2)x^2 + ax + a - 2 = 0.$$

L'equazione è di secondo grado nell'incognita x e il termine noto è $a - 2$.

Riduci a forma normale le seguenti equazioni letterali nell'incognita x e scrivi il grado e il termine noto di ciascuna.

53

$$ax + a^2 - x - a = 0$$

58

$$ax(x + 3) - (ax - 1)(x + 5) = 0$$

54

$$2ax - 5x + a - x = 0$$

59

$$(a - x)(a + x) - 2x(x^2 - a) + 1 = 0$$

55

$$bx + 2b - b^2 - x = 0$$

60

$$(-2bx)^2 + (b - 2x)^2 = 0$$

56

$$(4ax - 2)\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) - 2ax^3 = 0$$

61

$$(1 - a)x^3 - (1 - x)^3a - 1 = 0$$

57

$$4ax(x - x^5 + 6x^2) - 3ax^2 - 4ax^2 + 7a = 0$$

3. I principi di equivalenza

→ Teoria a pag. 495

RIFLETTI SULLA TEORIA

62

VERO O FALSO?

- a) Due equazioni aventi i primi e i secondi membri rispettivamente uguali sono equivalenti.
- b) Due equazioni equivalenti hanno i primi e i secondi membri rispettivamente uguali.
- c) Se due equazioni hanno almeno una soluzione in comune, allora sono equivalenti.
- d) Due equazioni che hanno lo stesso insieme di soluzioni sono equivalenti solo se hanno la stessa incognita.
- e) Le equazioni impossibili sono tutte fra loro equivalenti.

63

VERO O FALSO?

- a) Per il primo principio di equivalenza possiamo sommare ai membri di un'equazione una qualunque espressione.
- b) La regola del trasporto è sempre valida.
- c) La regola di cancellazione è valida solo se i termini cancellati contengono l'incognita.

64

VERO O FALSO?

- a) Per il secondo principio di equivalenza possiamo moltiplicare i due membri di un'equazione per una qualunque espressione diversa da 0.
- b) Per cambiare i segni a tutti i termini di un'equazione, applichiamo il secondo principio di equivalenza.
- c) Applicando il secondo principio di equivalenza all'equazione $2x = 4$, si ottiene $x = \frac{1}{2}$.

ESERCIZI

65

Le equazioni equivalenti

ASSOCIA ogni equazione a sinistra a quella equivalente a destra.

- | | |
|-----------------|----------------------|
| 1. $2x + 1 = 1$ | A. $x = 2$ |
| 2. $2x - 1 = 0$ | B. $x = -2$ |
| 3. $x - 2 = 0$ | C. $x = \frac{1}{2}$ |
| 4. $-x - 2 = 0$ | D. $x = 0$ |

66

TEST Le seguenti equazioni sono equivalenti a $x = -2$, tranne una. Quale?

- | | |
|----------------------|---------------------------|
| [A] $x + 1 = 2x + 3$ | [D] $2x + 3 = 0$ |
| [B] $-x = 2$ | [E] $3(x + 2) = 2(x + 2)$ |
| [C] $2x + 1 = -3$ | |

Stabilisci se le seguenti coppie di equazioni sono equivalenti, sapendo che hanno una sola soluzione, che è uguale a uno dei numeri scritti a fianco.

67 $3x - 15 = 0$ e $-3x + 15 = 0$; $-5, 5, \frac{1}{5}$.

68 $2x + 10 = 0$ e $x + 10 = 0$; $-5, 5, -10$.

69 $5x + 10 = 0$ e $15x + 30 = 0$; $2, -2, 3$.

70 $2x + 8 = 0$ e $-2x + 8 = 0$; $4, 0, -4$.

71 $3x - 2 = 0$ e $6x - 4 = 0$; $-1, 2, \frac{2}{3}$.

72 $-8x + \frac{1}{4} = 0$ e $32x - 1 = 0$; $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{32}$.

■ Il primo principio di equivalenza

TEST

73

È data l'equazione $\frac{3}{2}x + 1 = x + \frac{1}{2}$. Quale, fra le seguenti equazioni, è stata ricavata applicando in modo corretto il primo principio di equivalenza?

- A $\frac{3}{2}x + 1 - x - 1 = x + \frac{1}{2} - x - 1$
- B $\frac{3}{2}x + 1 + x = \frac{1}{2}$
- C $\frac{3}{2}x + x = \frac{1}{2} + 1$
- D $3x + 2 = 2x + 1$
- E $\frac{3}{2}x + 1 - 1 = x + \frac{1}{2} - x$.

74

È data l'equazione

$$7 + 2(x - 1) - x^2 = 2x - 1 + 7 - x^2.$$

Solo una delle seguenti equazioni *non* è stata ottenuta applicando in modo corretto la regola di cancellazione. Quale?

- A $2(x - 1) - x^2 = 2x - 1 - x^2$
- B $7 + 2(x - 1) = 2x - 1 + 7$
- C $2(x - 1) = 2x - 1$
- D $7 + 2(-1) = 2 - 1 + 7$
- E $2x - 2 = 2x - 1$

Per ogni equazione proposta, scrivine altre due a essa equivalenti, applicando il primo principio di equivalenza.

75

$$6x + 10 = 8x + 6; \quad 3x + 7 = x - 5.$$

76

$$x^2 - 3x + 1 = x^2 + 5 - 6x;$$

$$\frac{3}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2} = 0.$$

77

$$2ax - 3b = -3b; \quad 6ax - \frac{1}{3}ab = \frac{1}{3}ab.$$

78

$$\frac{x-1}{2a} - \frac{a}{b} = \frac{ax}{2b}; \quad \frac{1}{x} - \frac{3a}{x-1} = 1 + \frac{2}{x}.$$

È data l'equazione $2ax + b = 8a + b - 6a$. Riconosci fra le seguenti equazioni quelle equivalenti alla data.

79

$$2ax + b + 5 = 8a + b - 6a + 4;$$

$$2ax + b - b = 8a + b - 6a - b;$$

$$2ax + b - \frac{1}{2} = 8a + b - 6a - \frac{1}{2}.$$

80

$$2ax + b - 2a = 8a + b - 6a - 2b;$$

$$2ax + b - 4b = 8a + b - 6a - 4b;$$

$$2ax + b + a = 8a + b - 6a + a^2.$$

■ ESERCIZIO GUIDA

81 Data l'equazione $4x - 2 = 3x + 5$, applichiamo due volte il primo principio di equivalenza, nel seguente modo:

a) aggiungiamo 2 ai due membri;

b) sottraiamo $3x$ da entrambi i membri. Troveremo la soluzione dell'equazione.

a) Aggiungiamo 2:

$$4x - 2 + 2 = 3x + 5 + 2$$

$$4x = 3x + 7.$$

b) Sottraiamo $3x$:

$$4x - 3x = 3x + 7 - 3x$$

$$x = 7.$$

Per risolvere ogni equazione applica due volte il primo principio di equivalenza, seguendo le indicazioni scritte a fianco.

82

$$6 - 8x = 3 - 9x$$

1. aggiungi $9x$;

2. sottrai 6.

$$[x = -3]$$

83

$$2x - 3x + 1 + 8x = 2x + 5 + 4x - 3$$

1. sottrai $6x$;

2. sottrai 1.

$$[x = 1]$$

- 84** $10x - 8 - 3x = 4x + 2 + 2x$ 1. aggiungi 8; 2. sottrai $6x$. $[x = 10]$
- 85** $-8x + 6 + 5x - 1 = 3 - 14x - 7 + 10x$ 1. aggiungi $4x$; 2. sottrai 5. $[x = -9]$

■ Le applicazioni del primo principio

ESERCIZIO GUIDA

- 86** Risolviamo l'equazione $(4x - 1)^2 - x(1 - 2x) = 2x[5x - (5 - 4x)]$. Scriviamo quando utilizziamo la regola del trasporto o la regola di cancellazione.

Eseguiamo i calcoli per eliminare le parentesi:

$$\underline{16x^2} - \underline{8x} + 1 - \underline{x} + \underline{2x^2} = 2x(5x - 5 + 4x).$$

Sommiamo i termini simili e completiamo i calcoli:

$$18x^2 - 9x + 1 = 18x^2 - 10x.$$

Applichiamo la **regola di cancellazione**:

$$\cancel{18x^2} - 9x + 1 = \cancel{18x^2} - 10x.$$

Trasportiamo al primo membro i termini con l'incognita, al secondo membro quelli senza:

$$-9x + 10x = -1 \quad \text{regola del trasporto.}$$

La soluzione dell'equazione è $x = -1$.

Risovi le seguenti equazioni nell'incognita x , scrivendo quando utilizzi la regola del trasporto o quella di cancellazione.

- | | |
|--|--|
| 87 $3x - 2 = 2(x - 1) + 8$
[8] | 90 $5 - x [4 - (1 - x)5] = 5(1 - x)(x + 1)$
[0] |
| 88 $10x + 7 - 6(x - 1) = 3(x + 3)$
[−4] | 91 $(x + 1)(1 + a) = 2ax - a(x - 3)$
[2a − 1] |
| 89 $3(2 - x) + 2 + 4x = 1 - [x - (2 + x) - 1]$
[−4] | 92 $5a(x + 2) + 3(x + a) = 4(x + 3a) - 5(1 - ax)$
[5 + a] |

■ Il secondo principio di equivalenza

- 93 TEST** È data l'equazione $2x - 1 = 3x - \frac{1}{3}$. Solo una delle seguenti equazioni è stata ottenuta applicando in modo corretto il secondo principio di equivalenza.
Quale?
- A** $3(2x - 1) = 9x$
- B** $6x - 3 = 9x - 1$
- C** $\frac{1}{3}(2x - 1) = \frac{1}{3}(3x - 1)$
- D** $2x - 1 + \frac{1}{3} = 3x$
- E** $2x - 3x = -\frac{1}{3} + 1$
- 94 TEST** Considera l'equazione $1 + 3x = \frac{3}{5}x - 2$. Quale, fra le seguenti equazioni, non è stata ottenuta applicando correttamente i principi di equivalenza?
- A** $3x - \frac{3}{5}x = -2 - 1$
- B** $5(1 + 3x) = 3x - 10$
- C** $-1 - 2 = 3x - \frac{3}{5}x$
- D** $-1 - 3x = 2 - \frac{3}{5}x$
- E** $5 + 15x = 15x - 10$

Per ogni equazione proposta scrivine altre due a essa equivalenti, applicando il secondo principio di equivalenza.

95

$$-x - 3 = 4; \quad -10x = 2;$$

$$-\frac{1}{2}x = -2.$$

96

$$\frac{x-5}{6} = \frac{1}{6};$$

$$1 + \frac{x-5}{6} = \frac{1}{6};$$

$$1 + \frac{x-5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}.$$

Per ogni equazione proposta scrivine altre due a essa equivalenti, applicando entrambi i principi di equivalenza.

97

$$-3x + 5 = -4;$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 1;$$

$$1 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}.$$

98

$$\frac{x-5}{2} = \frac{1-3x}{4};$$

$$2 + \frac{x-5}{2} = \frac{1-3x}{4} - 1;$$

$$\frac{6x+1}{3} = 1 - \frac{1-2x}{6}.$$

99

È data l'equazione $a^2x + 3ab = a(a + 3b)$. Riconosci fra le seguenti equazioni quelle equivalenti ad essa.

$$a^2x + 3ab \cdot 2 = a(a + 3b) \cdot 2;$$

$$-a^2x - 3ab = -a(a + 3b);$$

$$(a^2x + 3ab) \cdot (-5) = a(a + 3b) \cdot (-5);$$

$$-a^2x - 3ab = -a(a - 3b);$$

$$\frac{a^2x + 3ab}{4} = \frac{a(a + 3b)}{4};$$

$$a^2x + 3ab \cdot \frac{1}{2} = a(a + 3b) \cdot \frac{1}{2}.$$

$$\frac{a^2x + 3ab}{3} = \frac{a(a + 3b)}{2};$$

Per risolvere le seguenti equazioni applica il secondo principio di equivalenza seguendo e completando le indicazioni scritte a fianco.

100

$$2x = 10$$

dividi per 2.

$$\textcolor{red}{104} \quad \frac{3}{2}x = -\frac{1}{5}$$

moltiplica per $\frac{2}{3}$.

101

$$-x = 15$$

moltiplica per -1 .

$$\textcolor{red}{105} \quad -\frac{6}{11}x = \frac{12}{11}$$

moltiplica per $-\frac{11}{6}$.

102

$$\frac{1}{3}x = \frac{6}{5}$$

moltiplica per 3.

$$\textcolor{red}{106} \quad \frac{1}{3}a^2x = \frac{1}{2}b$$

1. moltiplica per 3;
2. dividi per $a^2 \neq 0$.

103

$$-\frac{2}{3}x = 5$$

1. moltiplica per -1 ;
2. moltiplica per 3;
3. dividi per

$$\textcolor{red}{107} \quad (a+1)x = 3a$$

dividi per $a+1 \neq 0$.

■ Le applicazioni del secondo principio

■ ESERCIZIO GUIDA

108 Risolviamo l'equazione $4x - 12 = 24x + 8$, scrivendo quali regole applichiamo.

$$4x - 12 = 24x + 8.$$

$$-3 - 2 = 6x - x \quad \text{regola del trasporto}$$

Dividiamo entrambi i membri per 4:

$$-5 = 5x.$$

$$x - 3 = 6x + 2 \quad \text{secondo principio}$$

Dividiamo entrambi i membri per 5:

Trasportiamo x al secondo membro, per avere il coefficiente di x positivo, e i termini numerici al primo membro:

$$-1 = x \quad \text{secondo principio}$$

La soluzione è $x = -1$.

Risovi le seguenti equazioni, scrivendo quali regole applichi.

- 109** $8x - 24 = 48x + 16;$ $5(1 - x) + 10(2 - 2x) = 15 - 20x.$ $[-1; 2]$
- 110** $27x - 9 = 18(x - 1) + 45x;$ $6(x + 2) - 12(1 - x) = 18(4 - 2x) + 24.$ $\left[\frac{1}{4}; \frac{16}{9}\right]$

4. Le equazioni numeriche intere

→ Teoria a pag. 499

RIFLETTI SULLA TEORIA

111 VERO O FALSO?

- a) $\frac{0,2\bar{4}}{x} = 3$ non è un'equazione numerica intera perché compare il numero decimale $0,2\bar{4}.$
- b) Le equazioni lineari e intere sono sempre numeriche.
- c) Un'equazione numerica intera può non ammettere soluzioni.
- d) La soluzione di un'equazione numerica intera, se esiste, deve essere un numero intero.

- 112 TEST** Quale, fra le seguenti equazioni, *non* è numerica intera?

- A** $\frac{1}{3}x - \frac{1}{4} = \sqrt{2}$ **D** $(\sqrt{5} + 1)^2 x = \frac{1}{\sqrt{5}}$
- B** $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$ **E** $(x - 1)^2 = \sqrt{3}$
- C** $\sqrt{2}x - 1 = x$

- 113 TEST** Considera l'equazione:

$$2(5x - 3) = 7x + 3.$$

Quale, fra le seguenti, è la soluzione?

- A** Impossibile. **D** Indeterminata.
- B** $x = 0$ **E** $x = 3$
- C** $x = 1$

Le equazioni determinate, indeterminate, impossibili

114 VERO O FALSO?

- a) Un'equazione numerica intera indeterminata è verificata anche per $x = -\frac{2}{9}.$
- b) Un'equazione numerica intera impossibile è equivalente all'equazione $0x = 1.$
- c) Se un'equazione numerica intera ammette infinite soluzioni, allora è impossibile.
- d) Un'equazione numerica intera a coefficienti interi è sempre determinata.

- 115 TEST** Fra le quattro equazioni numeriche intere

1. $0 = 2x + 1,$ 2. $x = x + x + 1,$
3. $x = x + 2,$ 4. $2x = x + 1,$

quali sono impossibili?

- A** La 1 e la 2. **D** Solamente la 2.
B La 2 e la 4. **E** Solamente la 3.
C Solamente la 1.

- 116 TEST** Fra le quattro equazioni numeriche intere

1. $x + 1 = 2x + 2,$ 2. $2x + 1 = 2x + 1,$
3. $x + 1 = 2x + 1,$ 4. $2x + 2 = 2x + 1,$

quali sono indeterminate?

- A** La 1 e la 3. **D** La 4 e la 1.
B La 2 e la 1. **E** Solamente la 2.
C La 3 e la 4.

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 12 esercizi di recupero

**Le equazioni numeriche intere**

COMPLETA Ti proponiamo le seguenti equazioni già risolte. Scrivi di fianco a ogni passaggio le operazioni eseguite o le proprietà e i principi di equivalenza utilizzati per ottenere il passaggio successivo.

117 $(2x - 3)(2x + 3) + 4(2 - x) = -(x - 9) + 4x(x - 2)$

$$4x^2 - 9 + 8 - 4x = -x + 9 + 4x^2 - 8x$$

$$-9 + 8 - 4x = -x + 9 - 8x$$

$$-1 - 4x = -9x + 9$$

$$-4x + 9x = 1 + 9$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

118 $3\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - (1 + x) + \frac{1}{3}\left(2x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}x + 1$

$$\frac{3}{2}x - 3 - 1 - x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}x + 1$$

$$9x - 18 - 6 - 6x + 4x + 1 = 3x + 6$$

$$7x - 23 = 3x + 6$$

$$7x - 3x = 6 + 23$$

$$4x = 29$$

$$x = \frac{29}{4}$$

CACCIA ALL'ERRORE

Trova gli errori commessi nella risoluzione delle seguenti equazioni e correggili.

119 $6x - 6 = 0 \rightarrow 6x = 6 \rightarrow x = 0; \quad 4x = 4 - 1 \rightarrow \cancel{x} = \cancel{x} - 1 \rightarrow x = -1.$

120 $\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} = 2 \rightarrow x - 1 = 2 \rightarrow x = 3; \quad \frac{1}{3}x = 0 \rightarrow x = 3.$

121 TEST Considera l'equazione:

$$2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = 3x^2 - \frac{5}{2}x - 2.$$

Qual è la soluzione, fra le seguenti alternative?

A $x = 0$

D Indeterminata.

B $x = \frac{1}{2}$

E Impossibile.

C $x = \frac{3}{2}$

122 TEST Solo una, fra le seguenti equazioni, è impossibile.

Quale?

A $\frac{7t - 1}{4} - \frac{7t + 1}{3} = 0$

B $(w + 2)^2 - (w - 2)^2 = 0$

C $2x + 3 = 3(x - 2) - x + 9$

D $2y + 6(1 - y) + 1 = 4(1 - y)$

E $z + 3 = 3(1 - 2z) + z$

123 TEST Le seguenti equazioni sono tutte fra loro equivalenti, *tranne* una. Quale?

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> A $x - 3 = 0$ | <input type="checkbox"/> D $x^2 + 9 = 0$ |
| <input type="checkbox"/> B $(x - 3)^2 = 0$ | <input type="checkbox"/> E $x^3 - 27 = 0$ |
| <input type="checkbox"/> C $(x - 3)^3 = 0$ | |

124 TEST Quale, fra le seguenti, è una soluzione dell'equazione:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) - 3x^2 = \frac{3}{4}x - 1 - 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 ?$$

- | | | | | |
|---|--------------------------------|--|--------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> A $-\frac{3}{4}$ | <input type="checkbox"/> B 0 | <input type="checkbox"/> C $\frac{3}{5}$ | <input type="checkbox"/> D 1 | <input type="checkbox"/> E $\frac{3}{2}$ |
|---|--------------------------------|--|--------------------------------|--|

125 TEST È data l'equazione

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}$$

nell'incognita x .

Quale, fra le seguenti affermazioni, è *falsa*?

- A È un'equazione numerica intera.
- B Non è un'identità.
- C In \mathbb{N} ha soluzione.
- D In \mathbb{Z} ha soluzione.
- E In \mathbb{Q} ha soluzione.

126 COMPLETA inserendo un numero in modo che l'equazione $4x + \dots = 5$ abbia soluzione:

- a) in \mathbb{N} ;
- b) in \mathbb{Z} ma non in \mathbb{N} ;
- c) in \mathbb{Q} ma non in \mathbb{Z} .

ESERCIZIO GUIDA

131 Risolviamo le seguenti equazioni nell'insieme dei numeri reali ed eseguiamo la verifica di quelle determinate:

- a) $\frac{2}{3}\left[x - \frac{1}{4}(3 - x)\right] + \frac{1}{4}(1 - x) + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}(1 + 6x);$
- b) $4x - 5 = 2(x - 2) + 2x - 1;$
- c) $5(x - 2) + 1 - 2x = 2 + 3(x - 2).$

a) Eseguiamo i calcoli per eliminare le parentesi:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{3} &= \frac{1}{12} + \frac{1}{2}x \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{3} &= \frac{1}{12} + \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Possiamo evitare di eseguire addizioni e sottrazioni di frazioni se «eliminiamo» i denominatori.

Calcoliamo il m.c.m. fra i denominatori:

$$\text{m.c.m.}(2, 3, 4, 6, 12) = 12.$$

127 Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme dei numeri naturali.

- a) $2x = 10x + 8;$
- b) $3(1 - x) = 2x - 2;$
- c) $6x - 1 = 2(x - 3).$

[a) impossibile; b) 1; c) impossibile]

128 Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme dei numeri interi.

- a) $x - 1 = 6x + 9;$
- b) $-(1 + x) = 2x - 6;$
- c) $-x + 6 = 2(x - 1).$

[a) -2; b) impossibile; c) impossibile]

129 Data l'equazione

$$6(x - 5) + 2x = 2(3x - 5);$$

- a) verifica che $x = 4$ e $x = 5$ non sono soluzioni;
- b) stabilisci se si tratta di un'identità, motivando la risposta.

130 Data l'equazione

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (x + 1)^2 - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 - 1;$$

- a) stabilisci se $x = 0, x = 1, x = 2$ sono soluzioni;
- b) verifica se si tratta di un'identità, motivando la risposta.

Riduciamo tutte le frazioni allo stesso denominatore:

$$\frac{8x - 6 + 2x + 3 - 3x + 4}{12} = \frac{1 + 6x}{12}.$$

Applichiamo il secondo principio di equivalenza moltiplicando per 12 i due membri:

$$8x - 6 + 2x + 3 - 3x + 4 = 1 + 6x.$$

Riduciamo i termini simili e applichiamo i principi di equivalenza:

$$7x + 1 = 6x + 1 \rightarrow 7x - 6x = 0 \rightarrow x = 0.$$

La soluzione è $x = 0$.

L'equazione è determinata.

Eseguiamo la verifica sostituendo alla x il valore 0 e confrontiamo i due membri.

Primo membro

$$\begin{aligned} & \cancel{\frac{1}{3}} \left[0 - \cancel{\frac{1}{4}}(3 - 0) \right] + \frac{1}{4}(1 - 0) + \frac{1}{3} = \quad \frac{1}{12}(1 + 6 \cdot 0) = \\ & = \frac{2}{3} \left(-\frac{3}{4} \right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \quad = \frac{1}{12}. \\ & = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \\ & = \frac{-6 + 3 + 4}{12} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Secondo membro

L'uguaglianza è verificata.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 4x - 5 = 2(x - 2) + 2x - 1 \rightarrow 4x - 5 = 2x - 4 + 2x - 1 \rightarrow \\ & \rightarrow 4x - 5 = 4x - 5 \rightarrow 4x - 4x = 5 - 5 \rightarrow 0x = 0. \end{aligned}$$

L'equazione è indeterminata.

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & 5(x - 2) + 1 - 2x = 2 + 3(x - 2) \rightarrow 5x - 10 + 1 - 2x = 2 + 3x - 6 \rightarrow \\ & \rightarrow 3x - 9 = 3x - 4 \rightarrow 3x - 3x = 9 - 4 \rightarrow 0x = 5. \end{aligned}$$

L'equazione è impossibile; infatti, nessun numero moltiplicato per 0 dà come risultato 5.

Risovi le seguenti equazioni numeriche intere nell'insieme dei numeri reali ed esegui la verifica di quelle determinate.

- | | | |
|--|--|---|
| 132 $3x - 1 = 2x + 5;$
133 $-6x + 7 = 7 - 6x;$
134 $8x - 3 + 2x = 6x + 1 + 4x;$
135 $\frac{1}{6}(x - 1) = 0;$
136 $8(x - 1) - 2(x + 3) = 3(2x - 1) - 5 - 17x$ | $4(1 - x) - 2x = 3x + 1.$
$2x - 5 = x + 4 + x.$
$-3(x + 1) - 2 - 4x = 2.$
$\frac{x}{4} - x = 0.$
$8(x - 1) - 2(x + 3) = 3(2x - 1) - 5 - 17x$ | $\left[6; \frac{1}{3} \right]$
[inindeterminata; impossibile]
[impossibile; -1]
[1; 0]
$\left[\frac{6}{17} \right]$ |
|--|--|---|

- 137** $3(2x - 1) + (2x - 7) = 3(x + 1) - (-3x - 1) + 3x + 2$ [− 16]
- 138** $1 - [2 - 3(x + 1)] = 2(2 + x) - 4x$ $\left[\frac{2}{5}\right]$
- 139** $2x^2 - 2 - x = x(2x - 3) + 6$ [4]
- 140** $7 + 3x - [1 - x + x(x - 3)] = x(1 - x)$ [− 1]
- 141** $6 - (1 - 2x) + x(4 - x) = 1 - x(2 + x)$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$
- 142** $3[x - 6 - (2 - x)] + 1 = -[-(-2 + 6x)]$ [impossibile]
- 143** $(x - 2)^2 - 8 + x = x(x - 6)$ $\left[\frac{4}{3}\right]$
- 144** $(2x + 1)(x - 3) - 2x = 2(x - 1)^2 + 1$ [− 2]
- 145** $(x - 3)(x + 3) - [-(2 - x) + 5] = 2 + x(x + 1)$ [− 7]
- 146** $6 - 2x - (2 - x^2) = 1 + (x - 3)^2$ $\left[\frac{3}{2}\right]$
- 147** $x(x + 7) + 9 = x + (x + 3)^2$ [indeterminata]
- 148** $4x^2 - x(x - 3) - (1 - x)(1 + x) = 1 - 2[1 - 2x(x - 1)]$ [0]
- 149** $x(x^2 - 2) - (x + 1)^3 = 3x(1 - x) - 2$ $\left[\frac{1}{8}\right]$
- 150** $\frac{3}{5}x - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5}x + \left(1 + \frac{2}{3}\right)$ [3]
- 151** $\frac{1}{8}[(x - 2)(x - 3)] - \frac{15}{4} = \frac{1}{4}\left[(x^2 - 6x) - \frac{1}{2}x(x + 1)\right] - 1$ [2]
- 152** $\frac{x + 1}{3} - \frac{2(x - 1)}{5} + \frac{2}{3} = \frac{x - 4}{5} - \frac{4}{15}x$ [impossibile]
- 153** $(3x - 1)^2 + 2x(1 - x) + 2 = x - 7(1 - x)x$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$
- 154** $3\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - (1 + x) + \frac{1}{3}\left(2x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}x + 1$ $\left[\frac{29}{4}\right]$
- 155** $\frac{1}{2}(1 + 2x) - x + \frac{2}{5}(x + 2) = \frac{3}{10}x - \frac{1}{2}$ [− 18]
- 156** $2(x - 1)(1 + x) + (2 - x)^3 + 12x = 2(2x - 1)(1 + 2x) - x^3 + 8$ [indeterminata]
- 157** $2(x + 1) - 3(x - 1) = (x + 1)^2 - x(x + 2) + 6$ [− 2]
- 158** $(x + 3)^2 - 10 - (x - 2)^2 = (x - 1)^2 - (x - 5)^2 + 4 + x$ [− 15]

- 159** $\frac{x+1}{2} - 3x(x-1) = \frac{-6(x-1)(x+1)-5}{2}$ [0]
- 160** $\frac{1}{3}(x-3) - \left(\frac{x+1}{3} - \frac{3+x}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{2-x}{3} + \frac{x}{3} + 1$ [-3]
- 161** $x + \frac{1-6x}{15} + 2 = \frac{3(1-x)}{5} - \frac{2(x-1)}{3}$ $\left[-\frac{3}{7}\right]$
- 162** $x + \frac{x(x+2)}{2} - \frac{1}{4}(1-x)(2x+1) = \frac{1}{2}(3x+1) + x^2$ [3]
- 163** $\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(2x + \frac{1}{4}\right) - x^2 - \frac{x(2+3x)}{3} = \frac{7}{4} + \frac{x+2}{3}$ $\left[-\frac{33}{41}\right]$
- 164** $\frac{4}{3} - 10x + 4 - \left[\frac{2}{3}(x-4) + 2x + \frac{1}{3}\right] = -5x + \frac{2}{3}(x-1)$ [1]
- 165** $\frac{2}{3}\left[(2x-1)(x-4) + 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3} + x\right)\right] = \frac{2}{3}(5x^2 - x) + \frac{14}{9}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$
- 166** $\left(\frac{x}{2} + 2\right)(x-1) + \frac{8}{5} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5}(4x+1) - \frac{3}{10}(x-1) - \frac{2}{5}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$
- 167** $\frac{7}{3}[(1-x)(1+x)] + 3x^2 + 2 = \frac{2}{3}x(1+x) + \frac{1}{3}(x+4)$ [3]
- 168** $\frac{1}{2}(x-2) - \left(\frac{1}{2}x + 3\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{7}{2}\right) - \frac{3}{4}(2x+1) + \frac{3}{4}x$ [6]
- 169** $\frac{1}{3} - \left[\frac{x}{3} - \frac{1}{3}(2+x) - \frac{1}{3}(1-3x)\right] = (2-x) - \frac{1}{3}(x-2)$ [4]
- 170** $\frac{1}{5}x\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{10}(1-x) - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{5} - \frac{7}{5}\right)$ [1]
- 171** $\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{x-3}{2} - \frac{x+2}{3} - \frac{x}{4}\right) = \frac{1}{12}(1-3x) - \frac{11}{24}$ [-5]
- 172** $\left(\frac{3}{4} - 3x\right)\left(\frac{4}{3} - 2x\right) = 4x\left(3x + \frac{1}{2}\right) - \left(2x - \frac{3}{2}\right)\left(3x - \frac{1}{2}\right)$ $\left[\frac{7}{52}\right]$
- 173** $\frac{1}{2}\left[3x + \frac{1}{3}\left(2-x + \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{8}(x-3) + \frac{1}{3} - \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}x$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$
- 174** $\frac{5x-42}{3} + \frac{2x+1}{8} = \frac{x+13}{12} - \frac{3-x}{4} - \frac{1}{3}(38x+1)$ $\left[\frac{37}{38}\right]$
- 175** $\frac{(3-2x)(3x-2)}{6} = \frac{-3x^2-7}{3} - \frac{3}{2}(4-3x) - \frac{2(x-10)}{6}$ [2]
- 176** $\frac{2x-1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left[x^2 + x\left(x - \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{4}\left(x + \frac{2}{3}\right)$ $\left[-\frac{1}{13}\right]$
- 177** $\frac{2}{5}(x-1)(2x-3) + \frac{x-1}{7} - \frac{1}{5}(x-3)(2x-3) = \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{7}$ $\left[-\frac{31}{2}\right]$

- 178** $\frac{1}{5}(x - 11) - 2x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{4}x - 2 - x - \frac{1}{60}x$ [1]
- 179** $\frac{2}{5}\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(2x - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3}(x+3)(x-3) = \frac{7}{15}x^2 + \frac{2}{3}(x-3)$ $\left[\frac{148}{7}\right]$
- 180** $\frac{3x+2}{5} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}\left[x+2 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)\right] = \frac{3x+1}{10} + \frac{2}{3}x$ [5]
- 181** $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}\right) + x^3 - \left(\frac{2}{5}x + 1\right)(2x - 1) = 2x^3 + \frac{1}{5}x(1 - 4x)$ $\left[\frac{95}{243}\right]$
- 182** $\frac{1-2x}{2} - \frac{(1-4x)(1-2x)}{6} = \frac{5}{6} - \frac{(2x-1)^2}{3}$ $\left[-\frac{1}{8}\right]$
- 183** $\frac{5}{3} + x - \frac{x+2}{3} + \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x+1)^2 - \frac{9}{4}$ [0]
- 184** $\frac{1}{10}(x+2)(x-2) - \frac{3x-2}{10} = \frac{(x-3)^2}{10} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}$ $\left[-\frac{9}{2}\right]$
- 185** $\frac{1+x^2}{5} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{20} = \frac{(x-1)^2}{5} + \frac{3}{2} - 1$ $\left[\frac{11}{3}\right]$
- 186** $\frac{1}{3}(x-2)(x+2) - \frac{3x-2}{3} = \frac{(x-3)^2}{3} - \frac{2-5x}{3}$ $\left[-\frac{9}{2}\right]$
- 187** $\frac{2}{3}x + \frac{(3-2x)^2}{18} - \frac{(2x-1)(2x+1)}{18} = \frac{x-5}{3} + \frac{x+4}{6} - \frac{5}{9}x$ [- 28]
- 188** $\frac{x}{10} + \frac{(2-3x)^2}{30} + \frac{x}{10}(1-x) + \frac{2}{15}(1+5x) = \frac{x}{5}(3+x) - \frac{x-2}{6}$ [2]
- 189** $\frac{(2x^2+3)-x(2x-1)}{2} + \frac{5(x-1)(x+1)-5(x+1)^2}{15} = x+2 - \frac{4}{3}x$ [7]
- 190** $\frac{x}{6} + \left[\left(3x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(3x - \frac{1}{3}\right)\left(3x + \frac{1}{3}\right)\right] + \frac{7}{3}x = \frac{3x-1}{6} - \frac{7}{18}$ [impossibile]
- 191** $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(2x + \frac{1}{3}\right)\left(2x - \frac{1}{3}\right) + 5x\left(x - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{144} = \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(2x - \frac{5}{2}\right) + \frac{2}{3}$ [- 4]
- 192** $\frac{1}{2}\left[-\frac{x-1}{3}\left(\frac{1}{2}-2\right) + \frac{1-2x}{6}\right] : 3 = 2\left(\frac{1}{6} - \frac{x}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(5x - \frac{1}{6}\right) + x - \frac{41}{36}x$ [impossibile]
- 193** $x - 3\left[\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = (-2)\left[\frac{5}{2} + \frac{x}{4}(x-2) - \frac{1}{4}x\right] + \frac{7}{4}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}$ [10]
- 194** $\frac{13}{48} + \frac{x}{2} - \frac{2x+1}{6} = 1 - \left(\frac{1}{4} - x\right)\left(x + \frac{1}{4}\right) - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ $\left[\frac{1}{2}\right]$
- 195** $\left(2x - \frac{1}{3}\right)^2 + (2-x)\left(2x - \frac{1}{2}\right) - \frac{7}{6}x - 2x(x+1) = 0$ [impossibile]

- 196** $\frac{(2x+2)(1-x)}{3} = \frac{2(1-2x)^2 - 6(x-1)^2}{2} - 3 + \frac{1}{3}(17 - 5x^2) - 2x$ [indeterminata]
- 197** $\frac{2[(x-2)3+5]}{4} - \frac{2(x-1)^2 + 2(3+x)(3-x)}{3} = \frac{3}{4} - 2\left(x + \frac{1}{3}\right)$ $\left[\frac{3}{2}\right]$
- 198** $\frac{2[(x-4)(2x-1)+7]}{3} - \left(x - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4} + x\right) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{22}{3} - x + \frac{17}{16}$ $\left[-\frac{1}{5}\right]$
- 199** $\left(2x - \frac{3}{4}\right)^2 + 2x\left(\frac{1}{5} - 2x\right) + \frac{5}{3} = \frac{x^2 + 1}{4} - 3x\left(2 + \frac{1}{12}x\right) - \frac{3}{5}(2 - 5x) + \frac{2}{5}x$ [impossibile]
- 200** $\left[\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right) \cdot \frac{6}{5} + \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) : 6^{-1}\right]^2 = -3(x+1)\left(-\frac{4}{3}x - 2\right)$ $\left[-\frac{3}{5}\right]$
- 201** $(x-2)^3 + (x+2)(x+1)(x-2) + 13x^2 = 2x(x+2)^2 - 12$ [indeterminata]
- 202** $\left[\left(2 - \frac{1}{2}x\right)\left(-2 - \frac{1}{2}x\right) + (x-2)^2\right] \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{1}{5}x = 1 - x(x-5)$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$
- 203** $\left(x - \frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{5}x - 1\right)(2-x) - x\left(\frac{2}{5}x + 3\right) = x^2(x-1) - \frac{1}{3}(2-x) - \frac{1}{27}$ $\left[\frac{5}{9}\right]$
- 204** $-\frac{x^2}{4} - 1 + \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + 3x = x^2 - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{16}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$
- 205** $\frac{2}{3}(x-7)^2 + 5\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{6} = \frac{2}{3}(x-1)(x+1) + \frac{129}{6}$ $\left[\frac{5}{2}\right]$
- 206** $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}x - 2\right)^2 + 3x\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 + 6x(x-4) = \frac{3}{4}x(x^2 - 2)$ [0]
- 207** $\frac{4}{3}\left[(4+3x)(4-3x) - 6x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right] - \frac{7+4x}{3} - 25 + 2(1-8x) = \frac{1-(6x+4)^2}{3}$ [impossibile]
- 208** $\left[\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)^3 - \frac{2}{9}x(x+2) - \frac{8}{27}\right] \cdot 3x = 1 - [x - (0,3x^2 + 1)(0,3x^2 - 1)]$ [0]
- 209** $\frac{\left(2x - \frac{1}{4}\right)}{1 - \frac{2}{3}} : \left(\frac{3 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{3}}\right) \cdot \frac{11}{2} - \frac{x - \frac{2}{3}}{3 - \frac{1}{4}} \cdot \left[5\left(2 - \frac{3}{2}\right) + 3\right] = \frac{(x-1)}{3 - \frac{3}{2}}$ [0]
- 210** $\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x + \frac{3}{2}}{1 - \frac{5}{2}}\right) : \left(3 - \frac{43}{15}\right) = \frac{3 - \frac{1}{3}x}{2 - \frac{1}{3}} \cdot \left[\left(5 + \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2}\right]$ $\left[\frac{6}{5}\right]$
- 211** $\frac{2x - \frac{5}{3}}{2 - \frac{7}{4}} \cdot \left[\left(2 - \frac{1}{3}\right) : \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right] - \frac{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2}{5 - \frac{8}{3}} \cdot \frac{7}{9} = \frac{\left(\frac{2}{3} - x\right)^2}{\frac{2}{5} - \frac{17}{5}} + \frac{156}{9}x - \frac{134}{9}$ [indeterminata]

212

$$\frac{2x - \frac{1}{4}}{\frac{3}{2} - 1} \left[\frac{\frac{1}{5} \left(2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{2}{3}}{1 - \frac{3}{4}} \right] : 4 + \frac{(x+2)^2}{1 - \frac{2}{3}} - 3x^2 = \frac{x + \frac{4}{5}}{2 + \frac{1}{3}} \cdot \frac{7}{6} + \frac{8}{5}$$
[- 1]

213

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{x - \frac{55}{22} + \frac{10}{8}x}{3 - \frac{9}{4}} = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} - \frac{5\left(\frac{x}{3} - 3\right)}{9}$$
[$\frac{522}{83}$]

214

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{x + \frac{1}{5}}{2 - \frac{4}{3}} \cdot \frac{3}{19} \left[\frac{2}{5} : \left(1 - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{3} \right] - \frac{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2}{6} + \frac{\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)}{1 - \frac{5}{6}} + \frac{2}{3} = 0$$
[$-\frac{99}{295}$]

■ Le equazioni di grado superiore al primo

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più



■ ESERCIZIO GUIDA

215 Risolviamo le seguenti equazioni:

a) $3x^2 - 24x = 0$; b) $x^2 - 4x + 4 = 0$; c) $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$.

a) $3x^2 - 24x = 0$.

Raccogliamo il fattore comune $3x$:

$$3x(x - 8) = 0.$$

Il primo membro può essere visto come il prodotto di due fattori: $3x$ e $x - 8$. Per la legge di annullamento del prodotto, il prodotto è nullo se e solo se almeno uno dei fattori è nullo.

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Il primo membro è il quadrato di un binomio, quindi:

$$(x - 2)^2 = 0.$$

Possiamo vederlo anche come il prodotto di due fattori uguali,

$$(x - 2)(x - 2) = 0,$$

e, applicando la legge di annullamento del prodotto, otteniamo che ognuno dei fattori è nullo se $x = 2$. Si può dire che l'equazione ha due soluzioni coincidenti, entrambe pari a 2.

Quindi dobbiamo avere:

$$3x = 0 \quad \text{oppure} \quad x - 8 = 0.$$

Risolviamo separatamente le due equazioni:

$$3x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0,$$

$$x - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 8.$$

Le soluzioni dell'equazione sono due: 0 e 8.

c) $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$.

Scomponiamo il primo membro in fattori:

$$x(x^2 + 2x - 3) = 0$$

$$x(x + 3)(x - 1) = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto poniamo ognuno dei tre fattori uguale a 0:

$$x = 0;$$

$$x + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -3;$$

$$x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1.$$

Le soluzioni dell'equazione sono tre: 0, -3 e 1.

Risovi le seguenti equazioni utilizzando la legge di annullamento del prodotto.

216 $(x - 3)(x + 6) = 0$

[$-6; 3$ **]**

[$-\frac{1}{2}; 0$ **]**

217 $2x(x + 5) = 0$

[$-5; 0$ **]**

[$-3; \pm 1$ **]**

218 $x(x^2 - 36) = 0$

[$0; \pm 6$ **]**

[$\pm 2; 0$ **]**

219 $x^3 - 9x = 0$

[$0; \pm 3$ **]**

[$0; \frac{1}{4}; \frac{3}{8}$ **]**

220 $(x - 2)^2(4x + x^2) = 0$

[$-4; 0; 2$ **]**

[$-4; 5$ **]**

221 $6x - x^2 = 0$

[$0; 6$ **]**

[$-2; 0; 4$ **]**

222 $(2x - 1)(2x^3 - 50x) = 0$

[$\pm 5; 0; \frac{1}{2}$ **]**

[$-3; -1; 2$ **]**

223 $x^2 - 5x + 6 = 0$

[$2; 3$ **]**

[$-1; -\frac{2}{3}$ **]**

224 $2x^4 - 162 = 0$

[± 3 **]**

[$-1; 0; 3$ **]**

225 $3a^2 - a^3 = 0$

[$0; 3$ **]**

[$-3; 0; 4$ **]**

226 $b^2 - 10b + 25 = 0$

[5 **]**

Risovi le seguenti diseguaglianze.

237 $3a \neq 0;$

$4b \neq 0;$

$-6a \neq 0;$

$x + 2 \neq 0.$

238 $a - 1 \neq 0;$

$2a^2 - 3a \neq 0;$

$1 - 2x \neq 0;$

$2x \neq 0.$

239 $5b^2 - 15b \neq 0;$

$b^2 - 1 \neq 0;$

$5b^2 - 5 \neq 0;$

$a^2 + 4a \neq 0.$

240 $4x^2 - 12x + 9 \neq 0;$

$x^2 - 4 \neq 0;$

$x^2 - x + \frac{1}{4} \neq 0;$

$4a^2 - 4a + 1 \neq 0.$

241 $5x - 7 \neq 0;$

$6a^2 - 2a \neq 0;$

$b^2 + 2b - 3 \neq 0;$

$a^2 - 2a + 1 \neq 0.$

5. Le equazioni fratte

→ Teoria a pag. 503

RIFLETTI SULLA TEORIA

242 VERO O FALSO?

- a) Un'equazione numerica si dice fratta se sono presenti dei denominatori.
- b) In un'equazione fratta si possono eliminare i denominatori solo dopo aver posto le condizioni di esistenza.
- c) Un'equazione numerica fratta deve avere delle frazioni in entrambi i membri.

- d) Le diseguaglianze con il simbolo \neq si risolvono applicando gli stessi principi delle equazioni.
- e) Un'equazione numerica fratta può essere impossibile solo quando la soluzione è incompatibile con le condizioni di esistenza.

243 TEST Considera l'equazione:

$$\frac{2x+1}{2x} - \frac{2x-1}{x-1} + \frac{x}{x^2-4} = 0.$$

Quali sono le sue condizioni di esistenza?

- [A] $4x \neq 0, x \neq 1$
- [B] $x \neq 0, x \neq 1, x \neq 4$
- [C] $x \neq -2, x \neq 1$
- [D] $x \neq -\frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{2}, x \neq 0$
- [E] Nessuna delle precedenti.

244 TEST È data l'equazione:

$$\frac{x+2}{x-2} = \frac{32}{x^2-4} + \frac{x-2}{x+2}.$$

Qual è la sua soluzione?

- [A] $x = -2$
- [B] $x = 3$
- [C] $x = 2$
- [D] $x = 4$
- [E] $x = 0$

245 ASSOCIA ogni equazione alle corrispondenti condizioni di esistenza.

1. $\frac{x}{x+2} - 1 = 0$ 2. $1 + \frac{x-1}{x+1} - \frac{2x}{x-2} = 0$ 3. $\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2} = 0$ 4. $\frac{x^2}{(x-2)^2} = \frac{x}{x-2}$

- A. $x \neq -1, x \neq 2$ B. $x \neq -1, x \neq 0$ C. $x \neq -2$ D. $x \neq 2$

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 11 esercizi di recupero



Trova le condizioni di esistenza per le seguenti equazioni fratte.

246 $\frac{2}{9x} + \frac{1}{6x^2} = 1$

251 $\frac{3x}{x^2-4x+4} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} = 0$
[$x \neq 0, x \neq 2$]

247 $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} + \frac{5}{4x} = 2$

252 $\frac{7}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{2x-4} = 0$
[$x \neq +1, x \neq -1, x \neq 2$]

248 $\frac{x-1}{x+3} - \frac{2}{x} = \frac{5}{x-1}$

[$x \neq -3, x \neq 0, x \neq 1$]

253 $\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{x^3+x^2+4x+4} = \frac{1}{x^3}$

[$x \neq 0, x \neq -1$]

249 $\frac{1}{x^2+4x} + \frac{4}{5x^2} = 3$

[$x \neq 0, x \neq -4$]

254 $\frac{1}{x^2-2x-3} + \frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{x^2+x} = 0$

[$x \neq -3, x \neq +3, x \neq 0, x \neq -1$]

250 $\frac{6}{3x-1} - \frac{1}{2x+3} = \frac{1}{2x}$

$\left[x \neq 0, x \neq -\frac{3}{2}, x \neq \frac{1}{3} \right]$

255 Scrivi un'equazione numerica fratta in cui le condizioni di esistenza siano $x \neq \frac{1}{2}, x \neq -1$.

256 Analizza e discuti la seguente equazione: $\frac{1}{x-1} = 0$.

■ Le equazioni numeriche fratte

Nel sito: ▶ 20 esercizi in più



ESERCIZIO GUIDA

257 Risolviamo l'equazione fratta $\frac{3}{x^2 - x - 6} + \frac{5}{x^2 + 2x} = \frac{2}{x + 2} - \frac{2}{x - 3}$.

Scomponiamo i denominatori: $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$; $x^2 + 2x = x(x + 2)$. Riscriviamo l'equazione con i denominatori scomposti:

$$\frac{3}{(x + 2)(x - 3)} + \frac{5}{x(x + 2)} = \frac{2}{x + 2} - \frac{2}{x - 3}.$$

Determiniamo le condizioni di esistenza: C.E.: $x \neq -2, x \neq 3, x \neq 0$.

Per eliminare i denominatori dobbiamo:

1. determinare il m.c.m.: m.c.m. = $x(x + 2)(x - 3)$;

2. ridurre le frazioni allo stesso denominatore e moltiplicare per il m.c.m.:

$$\cancel{x(x+2)(x-3)} \frac{3x + 5(x-3)}{\cancel{x(x+2)(x-3)}} = \frac{2x(x-3) - 2x(x+2)}{\cancel{x(x+2)(x-3)}} \cancel{x(x+2)(x-3)}.$$

Otteniamo:

$$\underline{3x} + \underline{5x} - 15 = \cancel{2x^2} - \cancel{6x} - \cancel{2x^2} - \cancel{4x}$$

$$8x - 15 = -10x \rightarrow 8x + 10x = 15 \rightarrow 18x = 15 \rightarrow 6x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{6}.$$

Eseguiamo il controllo della soluzione.

Il valore $\frac{5}{6}$ è diverso da 0, -2 e 3; quindi la soluzione $x = \frac{5}{6}$ è accettabile e l'equazione è determinata.

Risovi le seguenti equazioni numeriche fratte (nelle soluzioni sono omesse le condizioni di esistenza).

258 $2 + \frac{3}{x} = 0$

265 $\left[-\frac{3}{2} \right] \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = 2$

$\left[\frac{2}{3} \right]$

259 $\frac{9}{x-2} = 3$

266 $[5] \quad \left[\frac{1}{4x} + 1 - \frac{1}{6x} = 0 \right]$

$\left[-\frac{1}{12} \right]$

260 $\frac{x-1}{x+5} - 4 = 0$

267 $[-7] \quad \left[\frac{2(x-1)}{x+2} = 1 \right]$

$[4]$

261 $\frac{6x+9}{x-1} = 0$

268 $\left[-\frac{3}{2} \right] \quad \left[\frac{2(x-4)}{x} = 0 \right]$

$[4]$

262 $\frac{2x-8}{3x^2} = 0$

269 $[4] \quad \left[\frac{3x-1}{3x} - \frac{x+2}{4x} = 0 \right]$

$\left[\frac{10}{9} \right]$

263 $\frac{3x-9}{2x-6} = 0$

270 $[impossibile] \quad \left[\frac{6}{x-5} + \frac{x}{5-x} = 1 \right]$

$\left[\frac{11}{2} \right]$

264 $\frac{3(x-1)}{2x-2} = 1$

271 $[impossibile] \quad \left[\frac{1}{4-x} - \frac{2x}{x-4} = 0 \right]$

$\left[-\frac{1}{2} \right]$

272 $\frac{2}{x-9} + 1 = 0$

[7] **290** $\frac{2x}{x-3} - \frac{5}{x} = \frac{6x}{3x-9} + \frac{2}{3x}$ [impossibile]

273 $\frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{x} \right) - 6 = \frac{3}{x}$

291 $\frac{3x}{x+2} + \frac{2x}{x-7} = \frac{5x+6}{x+2}$ $\left[-\frac{7}{2} \right]$

274 $2 \left[\frac{1}{3}(x-2) + \frac{5}{x} \right] = \frac{1+2x}{3}$

[6] **292** $\frac{1}{1+3x} - \frac{2x-1}{x+4} = \frac{2-3x}{1+3x} - \frac{x-4}{x+4}$ [7]

275 $\frac{x^2}{x+4} - 2 = x$

293 $\frac{1}{x} + \frac{3x}{3x+4} - \frac{1}{2} = \frac{x+4}{2x} - \frac{18}{x(3x+4)}$ [2]

276 $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x-2}$

294 $\frac{6x+3}{(x-2)^2} + \frac{20x-32}{4x} = 6 + \frac{1-x^2}{x(x-2)}$ [1]

277 $\frac{3}{x+3} - \frac{2}{4-x} = 0$

295 $\frac{2}{1-x} = \frac{1}{x-x^2} + \frac{1}{x}$ $\left[\frac{2}{3} \right]$

278 $\frac{x^2}{x-3} - x - 1 = \frac{1}{2}$

296 $\frac{4}{x^2-4} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{3}{x^2+2x}$ [-4]

279 $\frac{x}{2x+2} + x + 1 = \frac{x^2}{x+1}$

297 $\frac{x-1}{2x-6} + \frac{6}{x^2-9} - \frac{x}{2x+6} = 0$ $\left[-\frac{9}{5} \right]$

280 $x + \frac{4}{4-x} = \frac{x}{4-x} + x + 4$

[impossibile] **298** $\frac{1}{2x-4} - \frac{2}{x+2} = \frac{x+5}{3x^2-12}$ $\left[\frac{20}{11} \right]$

281 $\frac{x+1}{x-1} - 2 = \frac{2x}{x-1}$

[impossibile] **299** $\frac{2}{x^2-1} + \frac{7}{x-1} = \frac{1}{x+1}$ $\left[-\frac{5}{3} \right]$

282 $\frac{2x-3}{2x+4} = \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x}$

[4] **300** $\frac{6x+1}{x^2-4} - \frac{6}{x} = \frac{3}{x^3-4x}$ [-21]

283 $3 - \frac{1}{2x} = \frac{6+10x}{2x+4} - 2$

301 $\frac{4}{3x} + \frac{1}{3x+12} - \frac{x-1}{2x^2+8x} = 0$ [-5]

284 $\frac{3}{x} + \frac{1}{2} = \frac{2x-1}{x}$

302 $\frac{x-1}{x^2-25} + \frac{4}{5+x} = \frac{2}{5-x}$ $\left[\frac{11}{7} \right]$

285 $\frac{-1}{x-3} = \frac{2}{x+1}$

303 $\frac{2x}{x^2+6x+9} + \frac{1}{x+3} - \frac{3x-1}{x^2+3x} = 0$ $\left[\frac{3}{5} \right]$

286 $\frac{x+1}{3x} = \frac{x}{3x+1}$

304 $\frac{1}{2} \left[\frac{2x}{x^2-4} - \left(\frac{x}{x+2} - 1 \right) \right] = \frac{6}{2-x}$ $\left[-\frac{5}{4} \right]$

287 $\frac{1+3x}{4x+4} - \frac{5-x}{x+1} = 2$

[-27] **305** $\frac{x-1}{x+3} - \frac{2}{x^2+4x+3} = \frac{x+3}{x+1}$ [-2]

288 $\frac{5}{2-2x} - \frac{x}{x^2-2x+1} = 0$

306 $\frac{2+2x^2}{x^3+1} + \frac{1-x^2}{x^2-x+1} + \frac{x}{x+1} = 0$ $\left[-\frac{3}{2} \right]$

289 $\frac{x-1}{x^2+3x} + \frac{2}{x} + \frac{9}{2x+6} = 0$

307 $\frac{x-1}{x^2+4x+4} + \frac{1}{2+x} = \frac{5}{4x+8}$ [2]

- 308** $\frac{7x-10}{x^2+x-6} + \frac{6}{x-2} = \frac{5}{x+3}$ $\left[-\frac{9}{4} \right]$
- 309** $\frac{2}{x^2-x} - \frac{4}{x^2-1} = \frac{1}{x^2+x}$ [impossibile]
- 310** $\frac{x+5}{2x-8} + \frac{x-2}{x} = \frac{3x+1}{2x} + \frac{x+1}{x(x-4)}$ [-9]
- 311** $\frac{x}{x+4} - \frac{3x+4}{2(x-3)} = -\frac{7+4x}{8+2x} + \frac{3}{2}$ $\left[-\frac{1}{30} \right]$
- 312** $\left(\frac{1}{3}x+1\right) : (x+1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{x} : \left(1+\frac{1}{x}\right)$ [-2]
- 313** $\frac{2}{3x+7} + \frac{5x+2}{x-1} = \frac{5+3x}{x} + \frac{6x+2}{3(x-1)}$ $\left[-\frac{21}{5} \right]$
- 314** $3-2x-\frac{1}{5x-1}=2-\frac{x(1+6x)}{3x+2}$ $\left[\frac{4}{7} \right]$
- 315** $\frac{7x+2}{2x-3} + \frac{5x+4}{x} = \frac{34x^2+43x-2}{4x^2-9} + \frac{10-x}{2x^2-3x}$ $\left[-\frac{11}{9} \right]$
- 316** $\frac{3(4x+1)}{3x+2} - \frac{6x+2}{3x-1} = \frac{6x+4}{3x-1} - \frac{15}{9x+6}$ [impossibile]
- 317** $\frac{2(3x+6)}{2x+1} - \frac{x}{3x+6} + 2 = \frac{3x+10}{x+2} + \frac{5x+4}{3x+6}$ $\left[-\frac{50}{19} \right]$
- 318** $\frac{2}{2x+1} + \frac{6x-2}{3} - \frac{1}{3x} = 2x - \frac{4(x+1)}{3(2x+1)}$ $\left[\frac{1}{6} \right]$
- 319** $\frac{2x-1}{5x+6} + \frac{3x^2}{3x+1} + 2x = \frac{10x^2+14x-3}{5x+6} + \frac{3x^2+2}{3x+1}$ $\left[-\frac{5}{2} \right]$
- 320** $\frac{3}{x} + (6x+5) - \frac{6x+1}{3x-1} = 3x + \frac{9x+6}{3x-1} + \frac{3x^2+1}{x}$ $\left[-\frac{1}{3} \right]$
- 321** $\left(\frac{x^3-x^2}{1-x^2} + x - 1\right) : \left(1 - \frac{x}{x+1}\right) = x^2(-x)^{-1} - 2$ [impossibile]
- 322** $\frac{5x+2}{2(x^2-4)} + \frac{x}{2x+3} = \frac{x+4}{2x+3} + \frac{1}{2(x-2)}$ $\left[-\frac{8}{3} \right]$
- 323** $\frac{2x^2+1}{x^2-x-20} + 6x + 2 = \frac{6x^2-26x-15}{x-5}$ [7]
- 324** $\frac{128x+16}{x^2+12x} - 6 + \frac{8x^2+2}{x} = 8x + \frac{10-6x}{x}$ $\left[\frac{2}{3} \right]$
- 325** $\frac{2x^3+4x^2+18}{x^2+8x+15} + \frac{2x+2}{x+3} = -1 + \frac{15-9x}{x+5} + 2x$ [1]
- 326** $\left(\frac{6x+2}{x^2-4x+4} + \frac{2}{2x-x^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{x}\right) = \frac{6x-1}{x^2-2x}$

BRAVI SI DIVENTA ▶ E23



- 327** $\left(\frac{x+2}{x} + \frac{x+2}{2} \right) : \left(\frac{x-2}{x} + \frac{1}{2}x - 1 \right) - 1 = \frac{16}{x^2-4} - \frac{4}{x+2}$ [impossibile]
- 328** $\left(\frac{x-6}{x^2-9} + \frac{2x+6}{x^2+3x-18} - \frac{6-2x}{x^2+9x+18} \right) : \frac{2x}{x^2+3x-18} = \frac{7x+3}{2x+6}$ $\left[-\frac{3}{2} \right]$
- 329** $\left[\left(\frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x-1}{x} + \left(\frac{x^2}{1-x^2} - \frac{2x}{x-1} \right) : \frac{x^2}{1-x} \right] \cdot (x+1) = \frac{1}{x}$ $[\forall x \neq 0 \wedge x \neq \pm 1]$
- 330** $\frac{2}{x} + \frac{x^2-3}{2x+2} - \frac{1}{5x} = + \frac{\left(-\frac{5}{2} \right)x + \left(\frac{21}{10} \right)}{x+1} + \frac{1}{2}x + 2$ $\left[\frac{9}{19} \right]$
- 331** $\frac{3x+4}{x(x+2)} + \frac{-\frac{11}{4}x^2+6x+6}{x+2} = \frac{12x+18}{x} - \frac{11}{4}x - \frac{1}{2}$ $[-1]$
- 332** $\left\{ \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} \left[x - \frac{12-2x(x+1)}{x-2} \right] \right\} : \left(\frac{1}{2-x} + \frac{6-x}{x^2-4} \right) = 2x$ $\left[\frac{1}{2} \right]$
- 333** $\frac{3x+5}{6x^2+3x} + \frac{4x^2+9}{4x^2-1} = \frac{x+\frac{3}{2}}{3x} - \frac{8}{3} \frac{x^2}{(1-4x^2)}$ $\left[\frac{1}{10} \right]$
- 334** $3x^2+5x+7 + \frac{2x^3+3x+16}{x^2+x} = \frac{10x^3+12x+4}{x} - \frac{2+7x^3}{x+1}$ [3]
- 335** $\frac{3x+2}{x^2-4} + \frac{4x^2+5x+1}{x^2-5x+6} = \frac{x+17}{x-3} + \frac{3x+2}{x-2}$ $\left[-\frac{19}{7} \right]$
- 336** $\frac{3x+3}{2x} + \frac{5x^2+4x+1}{(x-2)} = \frac{61x-116}{2(x-2)^2} + 5x + \frac{31}{2}$ [1]
- 337** $x \left[\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3x} + \frac{1}{9} \right) : \frac{x+3}{3x} \right] : \left(\frac{x+6}{2x^2-3x-9} - \frac{x}{2x^2+9x+9} - \frac{6}{x^2-9} + 1 \right) = 3$ [6]

6. Le equazioni letterali

→ Teoria a pag. 504

RIFLETTI SULLA TEORIA

338 VERO O FALSO?

- Tutte le equazioni in cui compaiono almeno due incognite sono letterali.
- Le equazioni intere possono anche essere letterali.
- Nelle equazioni letterali intere, la discussione riguarda solamente le lettere diverse dall'incognita.
- In tutte le equazioni letterali intere, si devono porre delle condizioni sui valori che possono assumere le lettere.

TEST

339 È data l'equazione $(a - 1)x = b - 1$. Se $a \neq 1$, allora $x = \frac{b - 1}{a - 1}$, mentre se $a = 1$, allora:

- A l'equazione è impossibile per $b = 1$.
- B l'equazione è indeterminata per $b = 1$.
- C $x = \frac{b}{a}$.
- D se $b \neq 1$, $x = 1$.
- E nessuna delle precedenti risposte è corretta.

340 Quale, fra le seguenti equazioni, ha come condizioni di esistenza $a \neq 0$, $b \neq 0$?

- A $ax = \frac{a}{b}$
- B $(b + a)x = a$
- C $\frac{x - 1}{2a} + \frac{x}{b} = 0$
- D $\frac{1}{a} - \frac{x - 1}{a - 1} = \frac{b - 1}{b}$
- E $bx = \frac{1}{a}$

341 Quale, fra le seguenti equazioni, ha come soluzione $x = 1$ se $a \neq 0$ ed è indeterminata se $a = 0$?

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> A $ax = 1$ | <input type="checkbox"/> D $ax - x = 0$ |
| <input type="checkbox"/> B $ax = a$ | <input type="checkbox"/> E $ax = a - 1$ |
| <input type="checkbox"/> C $x - 1 = a$ | |

342

Una sola fra le seguenti equazioni ha come soluzione $x = a$, se $b \neq 1$. Quale?

- A $abx = 2ab$
- B $(b - 1)x = ab - a$
- C $a + b = (a + b)(x - a)$, $b \neq -a$
- D $\frac{a + x}{ab} + x - a = 0$
- E $4x = a + 3(x - 2a) + 4(x + 2a)$

343

Considera l'equazione letterale nell'incognita x :

$$2a(x - b) + ab = 3a(x + b).$$

Fra le seguenti affermazioni solo una è falsa. Quale?

- A È un'equazione di primo grado.
- B Ridotta in forma normale è $-ax - 4ab = 0$.
- C La soluzione è $x = -4b$, per $a \neq 0$.
- D Per $a = 0$, è un'equazione indeterminata.
- E Per $b = 0$, è un'equazione indeterminata.

344

Sulle tre equazioni

1. $a^2(x - 1) = ab(2 - x) + b^2$,
2. $2(ax + 1) = ax + 3$,
3. $(a - b)x - 2a + (a + b)x = 0$,

nell'incognita x , puoi affermare che:

- A 1 e 3 sono ridotte a forma normale.
- B 2 e 3 sono identità.
- C 1 non è un'equazione di primo grado.
- D 3 ha come soluzione $x = 1$, per $a \neq 0$.
- E 2 è un'identità per $a = 0$.

ESERCIZI

Nel sito: ► 10 esercizi di recupero



Le equazioni letterali intere

ESERCIZIO GUIDA

345 Risolviamo l'equazione nell'incognita x : $ax + 4 = x + 4a^2$.

Scriviamo l'equazione nella forma $Ax = B$:

$$ax - x = 4a^2 - 4 \quad \rightarrow \quad (a - 1)x = 4a^2 - 4.$$

Consideriamo il coefficiente $a - 1$ di x .

Discussione

- Se $a - 1 \neq 0 \rightarrow a \neq 1$, dividiamo entrambi i membri per $a - 1$:

$$\frac{(a - 1)x}{a - 1} = \frac{4a^2 - 4}{a - 1} \quad \rightarrow \quad x = \frac{4(a - 1)(a + 1)}{a - 1}$$

$x = 4(a + 1)$: **equazione determinata.**

- Se $a - 1 = 0 \rightarrow a = 1$, sostituendo 1 ad a otteniamo:
 $(1 - 1)x = 4 \cdot 1 - 4$
 $0x = 0$: **equazione indeterminata.**

Risultati

- Se $a \neq 1, x = 4(a + 1)$.
- Se $a = 1$, equazione indeterminata.

346 COMPLETA la seguente tabella.

EQUAZIONE	SE	SOLUZIONE	SE	SOLUZIONE
$ax + 1 = 0$	$a \neq 0$	$x = \frac{-1}{a}$	$a = 0$	impossibile
$(a + 1)x = 0$				
$(a - 1)x = a$				
$(a - 2)x = a - 2$				
$2ax = a^2 - a$				

347 VERO O FALSO?

- L'equazione letterale $2ax = 6x - 1$ è impossibile per $a = 3$.
- L'equazione $3ax = 3a$ ha sempre come soluzione $x = 1$.
- L'equazione $ax - 3 = 0$ ammette la soluzione $x = 2$ per $a = \frac{3}{2}$.
- L'equazione $4x = a + 3$ è impossibile per $a = -3$.

Risovi e discuti, quando è necessario, le seguenti equazioni letterali intere nell'incognita x .

348 $bx + b = 0$

$[b \neq 0, x = -1; b = 0, \text{indet.}]$

358 $2x - 4(3x - a) = 6(a - 2x) + 6a$

$[x = 4a]$

349 $ax - 3a^2 = 0$

$[a \neq 0, x = 3a; a = 0, \text{indet.}]$

350 $ax = x + a$

$\left[a \neq 1, x = \frac{a}{a-1}; a = 1, \text{imp.} \right]$

359 $2bx = 2b - 1$

$\left[b \neq 0, x = \frac{2b-1}{2b}; b = 0, \text{imp.} \right]$

351 $bx - 2 = 0$

$\left[b \neq 0, x = \frac{2}{b}; b = 0, \text{imp.} \right]$

360 $(a+1)x = 3$

$\left[a \neq -1, x = \frac{3}{a+1}; a = -1, \text{imp.} \right]$

352 $2ax - a = 0$

$\left[a \neq 0, x = \frac{1}{2}; a = 0, \text{indet.} \right]$

361 $ax + 2x = 2a + 4$

$[a \neq -2, x = 2; a = -2, \text{indet.}]$

353 $ax + 2 - a = 0$

$\left[a \neq 0, x = \frac{a-2}{a}; a = 0, \text{imp.} \right]$

362 $(a^2 - 3a)x = a(a^2 - 9)$

$[a \neq 0 \wedge a \neq 3, x = a+3; a = 0, a = 3, \text{indet.}]$

354 $2a - 3x = 7a - 5x$

$\left[x = \frac{5a}{2} \right]$

363 $2b(b-2)x = b^2 - 4b + 4$

$\left[b \neq 0 \wedge b \neq 2, x = \frac{b-2}{2b}; b = 0, \text{imp.}; b = 2, \text{indet.} \right]$

355 $b(x-2) + b + 1 = 0$

$\left[b \neq 0, x = \frac{b-1}{b}; b = 0, \text{imp.} \right]$

356 $6x - 3(x + 2a) = a + 4(x - 2a)$

$[x = a]$

357 $ax = ab$

$[a \neq 0, x = b; a = 0, \text{indet.}]$



364 $a^2(a-1)x = a^2 + a + 2ax$

365 $b^2x + b^2 = b^4 + bx$

$[b \neq 0 \wedge b \neq 1, x = b(b+1); b = 0, b = 1, \text{indet.}]$

366 $a(5-4x) = 4 + a^2(1-x)$

$$\left[a \neq 0 \wedge a \neq 4, x = \frac{a-1}{a}; a = 0, \text{imp.}; a = 4, \text{indet.} \right]$$

367 $3x(a-2b) + a(2-b) = 2x + 2ax + x(a-6b)$

$$\left[x = -\frac{a(b-2)}{2} \right]$$

368 $-a - x = 1 - a^2x$

$$\left[a \neq \pm 1, x = \frac{1}{a-1}; a = -1, \text{indet.}; a = 1, \text{imp.} \right]$$

369 $k^2x - 2kx - k = 0$

$$\left[k \neq 0 \wedge k \neq 2, x = \frac{1}{k-2}; k = 0, \text{indet.}; k = 2, \text{imp.} \right]$$

370 $a(x-a-1) + bx(2+x) - 3bx^2 = 2(x-3) - 2bx(x-1)$

$[a \neq 2, x = a+3; a = 2, \text{indet.}]$

371 $abx = b$

$$\left[b \neq 0 \wedge a \neq 0, x = \frac{1}{a}; b = 0, \text{indet.}; b \neq 0 \wedge a = 0, \text{imp.} \right]$$

372 $2ab^2x = ab + a$

$$\left[a \neq 0 \wedge b \neq 0, x = \frac{b+1}{2b^2}; a = 0, \text{indet.}; a \neq 0 \wedge b = 0, \text{imp.} \right]$$

373 $3x - 2a(1+x) = x(1+2b) - 2x(b-1)$

$[a \neq 0, x = -1; a = 0, \text{indet.}]$

374 $2[3 + (b+3)x] + 2bx = 3 - 3(2x-1)$

$[b \neq -3, x = 0; b = -3, \text{indet.}]$

375 $x^2(3b+x) - (b+x)^3 + b^2(4+b-x) = 0$

$[b \neq 0, x = 1; b = 0, \text{indet.}]$

376 $2 + 2x = 3ax + a - a^2x$

$$\left[a \neq 2 \wedge a \neq 1, x = \frac{1}{a-1}; a = 2, \text{indet.}; a = 1, \text{imp.} \right]$$

377 $a^3x - a^2 - 4ax + 4 = 0$

$$\left[a \neq 0 \wedge a \neq \pm 2, x = \frac{1}{a}; a = 0, \text{imp.}; a = \pm 2, \text{indet.} \right]$$

378 $(a-b+2)x + a^2 = 2x + b^2 - bx$

$$\left[a \neq 0, x = \frac{b^2 - a^2}{a}; a = 0 \wedge b = 0, \text{indet.}; a = 0 \wedge b \neq 0, \text{imp.} \right]$$

379 $a^2 - ax = bx - b^2 - 2ab$

$[a \neq -b, x = a+b; a = -b, \text{indet.}]$

380 $a(ax - a - 3) = x(6 - a)$

$$\left[a \neq -3 \wedge a \neq 2, x = \frac{a}{a-2}; a = -3, \text{indet.}; a = 2, \text{imp.} \right]$$

381 $\frac{1}{2}a^2bx + abx - a^2 = 0$

$$\left[a \neq 0 \wedge a \neq -2 \wedge b \neq 0, x = \frac{2a}{b(a+2)}; a = 0, \text{indet.}; a = -2, \text{imp.}; a \neq 0 \wedge b = 0, \text{imp.} \right]$$

382 $\left(\frac{2}{5} + a\right)x + 3x^2 - x(x+5a) = 1 + 2x(x-2b) + x(4b-5a) \quad \left[a \neq -\frac{2}{5}, x = \frac{5}{5a+2}; a = -\frac{2}{5}, \text{imp.} \right]$

383 $(a-x)(a+x) + a(x+2b) + 2bx = 3a(a+b+x) - x^2 - 2a^2$

$$\left[a \neq b, x = -\frac{ab}{2(a-b)}; a = b \wedge a = 0, \text{indet.}; a = b \wedge a \neq 0, \text{imp.} \right]$$

384 $a(2x - 5b) + \frac{3}{2}bx - 3ab = 3b\left(\frac{1}{2}x - a\right) + b(x - 3b) + 2a^2$ $[b \neq 2a, x = a + 3b; b = 2a, \text{indet.}]$

385 $ax - 2b + a - 4(bx - 2b + a) = x(2a - b) + 3a - b(1 + 3x)$

$$\left[a \neq 0, x = \frac{7b - 6a}{a}; a = 0 \wedge b \neq 0, \text{imp.}; a = 0 \wedge b = 0, \text{indet.} \right]$$

386 $\left[\left(x + \frac{1}{4}a\right)\left(x - \frac{1}{4}a\right) - x^2 - \frac{1}{16}a^2\right]a + \left(x + \frac{1}{2}a\right)^3 = x^2\left(\frac{3}{2}a + x\right) + a \left[a \neq 0, x = \frac{4}{3a}; a = 0, \text{indet.} \right]$

Problemi

387 Stabilisci per quali valori reali dei parametri a e b l'equazione $(x - 1)^2 + a = x^2 - 4x + 5 + bx$ risulta:

- a) determinata, e in tal caso trova la soluzione;
- b) indeterminata;
- c) impossibile.

$$\left[a) b \neq 2, x = \frac{4-a}{2-b}; b) a = 4, b = 2; c) a \neq 4, b = 2 \right]$$

388 Trova per quali valori di a l'equazione $(a - 1)x = a^2 + 2a - 3$ risulta:

- a) indeterminata;
- b) impossibile;
- c) determinata, e in tal caso trova la soluzione.

$$[a) a = 1; b) \text{per nessun valore di } a; c) a \neq 1, x = a + 3]$$

389 Determina per quali $a, b \in \mathbb{R}$ l'equazione $abx = a - b$ risulta:

- a) indeterminata;
- b) impossibile;
- c) determinata.

$$[a) a = 0, b = 0; b) (a \neq 0 \wedge b = 0) \vee (a = 0 \wedge b \neq 0); c) a \neq 0; b \neq 0]$$

390 Calcola per quali valori dei parametri a e b l'equazione $a(a - x) - b(x + a) = a(a - b) - 2$ risulta:

- a) indeterminata;
- b) impossibile;
- c) determinata, e in tal caso trova la soluzione.

$$\left[a) \text{mai}; b) a = -b; c) a \neq -b, x = \frac{2}{a+b} \right]$$

391 Considera l'equazione $k(x - 2) = 1 - x$ nell'incognita x e determina per quale valore di k tale equazione:

- a) ammette come soluzione $x = 1$;
- b) ammette come soluzione $x = 2$;
- c) è impossibile.

$$[a) k = 0; b) \text{per nessun valore di } k; c) k = -1]$$

392 È data l'equazione $a(b^n x - a) = b(a - a^n x)$ nell'incognita x , con $a \neq -b$ e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$:

- a) risovi l'equazione per $a = 0$;
- b) risovi l'equazione per $b = 0$;
- c) discuti e risovi l'equazione per $1 \leq n \leq 2$.

$$\left[a) \text{indet.}; b) \text{imp.}; c) \text{per } n = 1: \text{indet. se } a = 0, \text{imp. se } b = 0, x = \frac{a+b}{2b} \text{ se } a \neq 0 \wedge b \neq 0; \right.$$

$$\left. \text{per } n = 2: \text{indet. se } a = 0, \text{imp. se } b = 0, x = \frac{1}{b} \text{ se } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \right]$$

■ Equazioni letterali intere in cui le lettere sono presenti al denominatore

■ ESERCIZIO GUIDA

393 Risolviamo la seguente equazione nell'incognita x : $\frac{2x - 1}{3a} + \frac{x}{3} = \frac{2}{a}$.

Per l'esistenza delle frazioni abbiamo la condizione:

C.E.: $a \neq 0$.

Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{2x - 1 + ax}{3a} = \frac{6}{3a}$$

$$2x + ax = 6 + 1.$$

Raccogliamo x a fattore comune:

$$(2 + a)x = 7.$$

Discussione

- Se $2 + a \neq 0 \rightarrow a \neq -2$, dividiamo entrambi i membri per $2 + a$:

$$\frac{(2 + a)x}{2 + a} = \frac{7}{2 + a} \rightarrow x = \frac{7}{2 + a}.$$

Tenendo conto della C.E., diciamo che, per $a \neq 0 \wedge a \neq -2$, l'**equazione è determinata**.

- Se $2 + a = 0 \rightarrow a = -2$, sostituiamo -2 ad a :

$$(2 - 2)x = 7$$

$0x = 7$: **equazione impossibile**.

Risultati

- Se $a = 0$, equazione priva di significato.
- Se $a = -2$, equazione impossibile.
- Se $a \neq 0 \wedge a \neq -2$, $x = \frac{7}{2 + a}$, equazione determinata.

Risovi le seguenti equazioni nell'incognita x (nelle soluzioni talvolta le discussioni sono omesse o non riportate per intero).

394 $\frac{4}{a} - \frac{x+1}{2} = 0$

$$\left[\begin{array}{l} a = 0, \text{senza significato}; a \neq 0, x = \frac{8-a}{a} \end{array} \right]$$

395 $\frac{1-x}{6} = \frac{2}{a}$

$$\left[\begin{array}{l} a = 0, \text{senza significato}; a \neq 0, x = \frac{a-12}{a} \end{array} \right]$$

396 $\frac{1-ax}{a} + \frac{x}{2} = x$

$$\left[\begin{array}{l} a = 0, \text{senza significato}; a \neq 0, x = \frac{2}{3a} \end{array} \right]$$

397 $\frac{x+1}{2a} - 1 = \frac{x}{4}$

$$\left[\begin{array}{l} a = 0, \text{senza significato}; a \neq 0 \wedge a \neq 2, x = \frac{2(2a-1)}{2-a}; a = 2, \text{imp.} \end{array} \right]$$

398 $\frac{x-1}{b} + \frac{2x+3}{4b} = \frac{x}{4}$

$$\left[\begin{array}{l} b = 0, \text{senza significato}; b \neq 0 \wedge b \neq 6, x = \frac{1}{6-b}; b = 6, \text{imp.} \end{array} \right]$$

399 $\frac{2-(x+a)}{a} + 1 = \frac{2}{a} - \frac{x}{b} - 1$

$$\left[\begin{array}{l} a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq b, x = -\frac{ab}{a-b}; a = b \wedge a \neq 0, \text{imp.} \end{array} \right]$$

400 $\frac{2x+16b}{(b^2-16)} - \frac{3x+1}{b+4} = \frac{5-3x}{b-4}$

$$\left[\begin{array}{l} b \neq 4 \wedge b \neq -4, x = \frac{8-5b}{13} \end{array} \right]$$

401 $\frac{3+b^3x}{7b^2-b^3} + \frac{(2b^2+b)x+1}{b(b-7)} = \frac{3b^2x+1}{b^2} - 2x$

$$\left[\begin{array}{l} b \neq 0 \wedge b \neq 7, x = -\frac{1}{2b^2} \end{array} \right]$$

402 $\frac{x}{a} + \frac{2x}{2-a} = \frac{a-x+2}{2a-a^2}$

$$\left[\begin{array}{l} a \neq 0 \wedge a \neq 2 \wedge a \neq -3, x = \frac{a+2}{a+3}; a = -3, \text{imp.} \end{array} \right]$$

403 $\frac{x}{a-3} + \frac{a+3}{(a-3)^2} = +(2-a)(a+2) + a^2 - 3$

$$\left[\begin{array}{l} a \neq 3, x = \frac{(a-1)(a-6)}{a-3} \end{array} \right]$$

404 $\frac{3x}{a^2-1} = \frac{2-x}{1-a}$

$$\left[\begin{array}{l} a \neq 2 \wedge a \neq \pm 1, x = \frac{2(a+1)}{a-2}; a = 2, \text{imp.}; a = \pm 1, \text{senza significato} \end{array} \right]$$

405
$$\frac{bx+2}{b-2} = \frac{2-x}{2b-b^2}$$

$$\left[b \neq \pm 1 \wedge b \neq 0 \wedge b \neq 2, x = \frac{-2}{b-1}; b=1, \text{imp.}; b=-1, \text{indet.}; b=0 \vee b=2, \text{senza significato} \right]$$

406
$$\frac{x+4b}{b^2+2b+1} = \frac{x}{b+1}$$
 $[b \neq 0 \wedge b \neq -1, x=4; b=0, \text{indet.}; b=-1, \text{senza significato}]$

407
$$\frac{ax+4}{a^2-4a+4} + \frac{x}{2a-a^2} = \frac{x-1}{a-2}$$
 $[a \neq \pm 2 \wedge a \neq 0, x=-a; a=-2, \text{indet.}; a=0 \vee a=2, \text{senza significato}]$

408
$$\frac{ax-1}{a} = \frac{1-a}{a^2-a} + \frac{x-a}{1-a}$$
 $[a \neq 0 \wedge a \neq 1, x=1; a=0 \vee a=1, \text{senza significato}]$

409
$$\frac{2-a-2x}{4a-a^2} + \frac{3x}{a} = \frac{-4x}{4-a}$$

$$\left[a \neq -10 \wedge a \neq 0 \wedge a \neq 4, x = \frac{a-2}{a+10}; a=-10, \text{imp.}; a=0 \vee a=4, \text{senza significato} \right]$$

410
$$\frac{5a+14}{a^3-8} + \frac{x-2}{a-2} = \frac{1-x}{a^2+2a+4}$$

$$\left[a \neq \pm 2 \wedge a \neq -1, x = \frac{2(a-2)}{a+1}; a=-2, \text{indet.}; a=-1, \text{imp.}; a=2, \text{senza significato} \right]$$

411
$$\frac{x+1}{b+2} + \frac{bx-1}{b-3} = \frac{b-3x-6}{b^2-b-6}$$

$$\left[b \neq 0 \wedge b \neq -3 \wedge b \neq 3 \wedge b \neq -2, x = \frac{b-1}{b(b+3)}; b=0 \vee b=-3, \text{imp.}; b=3 \vee b=-2, \text{senza significato} \right]$$

412
$$\frac{x^2}{a^2+b^2} + \frac{x}{a+b} = \frac{x^2}{a^2+b^2} + 1$$
 $[a=-b, \text{senza significato}; a \neq -b, x=a+b]$

413
$$\frac{x-1}{2a+1} + \frac{x-x^2-2}{4a^2-1} = \frac{x(1-x)}{(2a-1)(2a+1)}$$
 $\left[a = \pm \frac{1}{2}, \text{senza significato}; a \neq \pm \frac{1}{2}, x = \frac{2a+1}{2a-1} \right]$

414
$$\frac{ax+2b}{a^2+2a+1} + \frac{6bx+a-1}{a+1} = \frac{2b^2+abx}{a^2b+2ab+b}$$
 $\left[a \neq -1 \wedge b \neq 0, x = \frac{1-a}{6b} \right]$

415
$$\frac{x(7+x)}{(3b+5)(b-2)} = \frac{1}{b-2} + \frac{(x+3)^2-9}{(3b+5)(b-2)}$$
 $[b \neq 2 \wedge b \neq -\frac{5}{3}, x=3b+5]$

416
$$\frac{6a+3ax}{a+1} - \frac{9(a^2x+1+a^2)}{a^2-1} = 6 - 6x - \frac{6x+3}{a-1}$$

$[a \neq 0 \wedge a \neq \pm 1, x=3a+1; a=0, \text{indet.}; a=\pm 1, \text{senza significato}]$

417
$$\frac{-x}{a} + \frac{2x(a-b)}{b} = \frac{3-x(ab+b)}{ab}$$

$$\left[a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge b \neq 2a, x = \frac{3}{a(2a-b)};$$

$$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge b = 2a, \text{imp.} \right]$$

418 $\frac{x(x+2a)}{4a} - \frac{bx^2+4}{2ab} + \frac{a(x+4b)}{ab} = \frac{b(12a-x^2)-8}{4ab}$

$$\left[\begin{array}{l} a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge b \neq -2, x = -\frac{2b}{b+2}; \\ a \neq 0 \wedge b = -2, \text{imp.} \end{array} \right]$$

419 $\frac{2a+3}{b^2-a^2} = \frac{(b-a)x}{a^2+2ab+b^2} - \frac{x}{a+b} - \frac{3}{a^2-b^2}$

$$\left[x = \frac{a+b}{a-b} \text{ se...} \right]$$

420 $\frac{a}{b} - \frac{(a+b)^2-2ab}{ab} = \frac{2(a-x)}{b} - \frac{2x-b}{a}$

$$\left[\begin{array}{l} a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -b, x = \frac{a^2+b^2}{a+b}; \\ a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a = -b, \text{imp.} \end{array} \right]$$

421 $\frac{b^2}{6+b} + \frac{(b-bx)(6+b)}{b^2+12b+36} = \frac{6(b+1-x)}{b+6}$

$$[b \neq \pm 6, x = b+1; b = -6, \text{senza significato}; b = 6, \text{indet.}]$$

422 $\frac{3(a-x)+6b}{1-3a} - \frac{2-x}{a} = 1 + \frac{6ab(1+b)}{ab-3a^2b}$

$$\left[\begin{array}{l} a \neq \frac{1}{3} \wedge a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq \frac{1}{6}, x = \frac{6a^2-a-2}{6a-1}; \\ b \neq 0 \wedge a = \frac{1}{6}, \text{imp.} \end{array} \right]$$

423 $ax+1 + \frac{3ax+a}{a-4} = \frac{(a+2)^2-4(1+ax)-7}{a^2-16}$

$$\left[\begin{array}{l} a \neq \pm 4 \wedge a \neq 0 \wedge a \neq -3, x = \frac{3-a}{a^2}; \\ a = 0, \text{imp.}; a = -3, \text{indet.} \end{array} \right]$$

424 $\frac{x+2a}{b} + \frac{2-x(1+a)}{ab+3a} = \frac{3(x-2)+3ax}{ab^2+3ab}$

$$[a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge b \neq -3, x = 2a^2+2]$$

425 $\frac{a^2+x}{a} - \frac{3x+4a}{a+3} + 4 - \frac{3}{a^2+3a} = \frac{ax+13}{a+3}$

$$[a \neq -3 \wedge a \neq 1 \wedge a \neq 0, x = 1+a; a = 1, \text{indet.}, a = -3 \vee a = 0, \text{senza significato}]$$

426 $\frac{16x}{1-9b^2} + \frac{x}{b-3b^2} + \frac{3bx}{b+3b^2} = \frac{x}{b} + \frac{1}{1+3b}$

$$\left[b \neq 0 \wedge b \neq \pm \frac{1}{3}, x = \frac{1-3b}{22}; b = 0 \vee b = \pm \frac{1}{3}, \text{senza significato} \right]$$

427 $\frac{x}{b+1} = \frac{3}{1-2b} + \frac{1}{(1-2b)(b+1)}$

$$\left[b \neq \frac{1}{2} \wedge b \neq -1, x = \frac{3b+4}{1-2b}; b = -1 \vee b = \frac{1}{2}, \text{senza significato} \right]$$

428 $\frac{2(x+3)}{2-5a} + \frac{2+xa}{2a} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{a^2+3ax}{10a^2-4a}$

$$\left[a \neq \frac{2}{5} \wedge a \neq 0, x = \frac{-9a^2+2a-4}{a} \right]$$

429 $\frac{x+6a-k+(x-5)(x+1)-x^2+4(1+x)+1}{12a} = \frac{3a+x}{4k}$

$$\left[\begin{array}{l} a \neq 0 \wedge k \neq 0 \wedge k \neq 3a, x = k-3a; \\ a \neq 0 \wedge k \neq 0 \wedge k = 3a, \text{indet.} \end{array} \right]$$

430 $\frac{x-2}{3a} + \left(\frac{2}{3}x - a\right)\left(\frac{2}{3}x + a\right) = \frac{9x+3+8x^2}{18} - \frac{2a^3+1}{2a}$
 $\left[a \neq 0 \wedge a \neq \frac{2}{3}, x = \frac{a+1}{2-3a}; a = \frac{2}{3}, \text{imp.}; a = 0, \text{senza significato} \right]$

431 $x^2\left(\frac{4}{a} + 5\right) - \frac{4x(x+1)}{a} = \frac{3}{a} + x(1+5x)$
 $\left[a \neq 0 \wedge a \neq -4, x = \frac{-3}{a+4}; a = -4, \text{imp.} \right]$

432 $\frac{3bx}{b(4b^2-9)} + \frac{6}{b} = \frac{x-3}{3-2b} + \frac{9}{2b+3}$
 $\left[b \neq \frac{3}{2} \wedge b \neq -\frac{3}{2} \wedge b \neq 0 \wedge b \neq -3, x = \frac{9(3-b)}{b(3+b)}; b = -3, \text{imp.} \right]$

433 $\frac{x-a}{2b} + (x-2)^2 - x^2 = \frac{x+a-b}{4a} + 4(1-x)$
 $[a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge b \neq 2a, x = a+b; b \neq 0 \wedge b = 2a, \text{indet.}]$

434 $\frac{x+b^2}{a} - a - b = -\frac{a^2+x}{b}$
 $[a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -b, x = -(a-b)^2; a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a = -b, \text{indet.}]$

435 $\frac{(1-b)(1+b)}{6b} + \frac{bx-1}{2b} - \frac{2+x}{6b} = \frac{1}{3b} - \frac{b^2+2b}{6b}$
 $\left[b \neq 0 \wedge b \neq \frac{1}{3}, x = \frac{6-2b}{3b-1}; b = \frac{1}{3}, \text{imp.} \right]$

436 $\frac{x}{b+3} + 1 = \frac{9}{(3+2b)(b+3)} + \frac{4b}{3+2b}$
 $\left[b \neq -\frac{3}{2} \wedge b \neq -3, x = b \right]$

437 $\frac{2(b-x)}{a-b} + \frac{x-a}{a+b} = \frac{x+b}{a+b} + \frac{x+a}{b-a}$
 $[a \neq \pm b, x = 3b]$

438 $\frac{x}{3(b-1)} = \frac{3a}{3a+b} + \frac{b}{3a+b}$
 $[b = 1 \vee b = -3a, \text{senza significato}; b \neq 1 \wedge b \neq -3a, x = 3(b-1)]$

439 $\frac{x}{a-1} = \frac{1}{a-2} - \frac{x}{a^2+a-2}$
 $\left[x = \frac{(a-1)(a+2)}{(a+3)(a-2)} \text{ se...} \right]$

440 $\frac{a-2x}{a-b} - \frac{x+b}{a+b} + \frac{x}{a-b} = \frac{x-a}{a^2-b^2} - 1$
 $[x = a \text{ se...}]$

441 $\frac{x+2a}{2+a} - \frac{x-6}{a+4} + \frac{x-4}{-2-a} = 3$
 $[a = -2 \vee a = -4, \text{senza significato}; a \neq -2 \wedge a \neq -4, x = 2-a]$

442 $\frac{x+1}{4a} = \frac{x-1}{12ab} + \frac{1}{6b}$
 $\left[x = \frac{2a-3b-1}{3b-1} \text{ se...} \right]$

443 $\frac{2x+4}{b} - \frac{2}{a}(1+3x) = \frac{3}{b} - \frac{9}{a} + \frac{2}{b}\left(\frac{2a-b}{a}\right)$
 $\left[a = 0 \vee b = 0, \text{senza significato}; a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq 3b, x = \frac{3}{2}; a = 3b \wedge a \neq 0, \text{indet.} \right]$

444 $\frac{3ax+2b}{a^2} + \frac{8b-2b^3}{a^2(b^2-4b+4)} = \frac{6ax+10b}{2a^2-a^2b}$

$$\left[a \neq 0 \wedge b \neq 2 \wedge b \neq 0, x = -\frac{2}{3a}; a \neq 0 \wedge b = 0, \text{indet.} \right]$$

445 $\frac{4bx+b+3}{b^2-25} + \frac{x+2}{5-b} = \frac{3x-1}{5+b} + \frac{2}{b}$

$$\left[b \neq 0 \wedge b \neq \pm 5, x = \frac{b^2+6b-25}{5b} \right]$$

446 Considera l'equazione $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{x}{a^2-b^2} = 0$ nell'incognita x . Rispondi alle seguenti domande.

a) Per quali valori di a e di b l'equazione perde di significato?

b) Se $a = 0$, l'esistenza della soluzione dipende dal valore di b ?

c) Qual è la soluzione se $a \neq \pm b$? $\left[\text{a) } a = \pm b; \text{b) sì, } x = 1 \text{ se } b \neq 0, \text{senza significato se } b = 0; \text{c) } x = -\frac{a+b}{a-b} \right]$

447 Considera l'equazione $\frac{x-b}{b-1} = \frac{1-b}{b}$ nell'incognita x . Rispondi ai seguenti quesiti.

a) Quali valori non può assumere b ?

b) Quale valore deve assumere b , affinché risulti $x = 1$?

c) Quali sono le soluzioni rispetto alla variabile b ?

$$\left[\text{a) } b = 0 \vee b = 1; \text{b) } \exists b \in \mathbb{R}; \text{c) se } x \neq 1 \wedge x \neq 2, b = \frac{1}{2-x}; \text{se } x = 2 \vee x = 1, \text{impossibile} \right]$$

448 Verifica l'identità

$$\frac{a^2+3a+2}{a+2} + \frac{2-a}{a-1} = \frac{a^2-a-2}{a-2} - \frac{a+2}{a-1} - \frac{4}{1-a}$$

e chiama A l'insieme dei valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali l'identità perde di significato.

Considera ora l'equazione $b(bx-1) = 3x(b-1) + x$ e chiama B l'insieme dei valori di $b \in \mathbb{R}$ per i quali tale equazione è impossibile. Determina $A \cap B$ e $A \cup B$. $[A \cap B = \{2, 1\}; A \cup B = \{2, 1, -2\}]$

Le equazioni letterali fratte

Nel sito: ▶ 10 esercizi di recupero



449 TEST Considera l'equazione $\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a} = 0$ nell'incognita x . Una fra le seguenti affermazioni è falsa. Quale?

- A È un'equazione letterale fratta.
- B Le C.E. sono $x \neq a \wedge x \neq -a$.
- C È equivalente a $(x+a) - (x-a) = 0$.
- D Per $a \neq 0$, l'equazione è impossibile.
- E Per $a = 0$, $x = 0$ non è soluzione dell'equazione.

450 TEST Osserva l'equazione nell'incognita x :

$$\frac{1}{ab} - \frac{1}{x} = 0.$$

Che cosa puoi affermare su di essa?

- A È letterale intera.
- B È impossibile.
- C È indeterminata.
- D La soluzione è $x = ab, \forall a, b \in \mathbb{R}$.
- E Nessuna delle precedenti risposte è vera.

ESERCIZIO GUIDA

451 Risolviamo la seguente equazione nell'incognita x :

$$\frac{2(a-4)}{(x-1)(3x-1)} = \frac{3ax}{x-1} \cdot \frac{a-4}{3x-1}.$$

Le condizioni di esistenza sono: $x \neq 1 \wedge x \neq \frac{1}{3}$.

Eliminiamo i denominatori e scriviamo l'equazione con la x a primo membro:

$$2(a - 4) = 3ax(a - 4) \quad \rightarrow \quad 3a(a - 4)x = 2(a - 4).$$

Discussione

- Se $a = 0$, $0x = -8$, allora l'equazione è impossibile.
- Se $a - 4 = 0$, ossia $a = 4$, $0x = 0$, allora l'equazione è indeterminata, ma con $x \neq 1$ e $x \neq \frac{1}{3}$.
- Se $a \neq 0 \wedge a \neq 4$, $x = \frac{2}{3a}$, la soluzione trovata è accettabile solo se $x \neq 1 \wedge x \neq \frac{1}{3}$, quindi solo se:

$$\frac{2}{3a} \neq 1 \quad \rightarrow \quad a \neq \frac{2}{3};$$

$$\frac{2}{3a} \neq \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad a \neq 2.$$

Risultati

- Se $a = 0$, l'equazione è impossibile.
- Se $a = \frac{2}{3}$, $x = \frac{2}{3a} = 1$, la soluzione non è accettabile.
- Se $a = 2$, $x = \frac{2}{3a} = \frac{1}{3}$, la soluzione non è accettabile.
- Se $a = 4$, l'equazione è indeterminata, con $x \neq 1 \wedge x \neq \frac{1}{3}$.
- Se $a \neq 0 \wedge a \neq \frac{2}{3} \wedge a \neq 2 \wedge a \neq 4$, $x = \frac{2}{3a}$, l'equazione è determinata.

Risovi le seguenti equazioni letterali fratte nell'incognita x (nelle soluzioni talvolta sono omesse le discussioni).

452 $\frac{2}{2-x} - 1 = \frac{bx}{2-x}$

[$b = 1$, indet. con $x \neq 2$; $b \neq 1, x = 0$]

453 $\frac{ax}{x^2 - 2x + 1} - \frac{2a}{x-1} = 0$

[$a \neq 0, x = 2, a = 0$, indet. con $x \neq 1$]

454 $x + \frac{x+1}{x-2b} = -\left(\frac{1}{x-2b} - x\right)$

[$b \neq -1, x = -2; b = -1$, imp.]

455 $x + \frac{x-a}{x-2} = -\left(\frac{2a}{x-2} - x\right)$

[$a \neq -2, x = -a; a = -2$, imp.]

456 $\frac{x}{x+b} - \frac{x^2}{x^2-b^2} = \frac{b}{x-b}$

$\left[b \neq 0, x = -\frac{b}{2}; b = 0, \text{indet. con } x \neq 0 \right]$

457 $\frac{2a}{x-4} + \frac{2b}{x+4} = \frac{16a}{x^2-16}$

[$a = -b$, indet. con $x \neq \pm 4; a \neq -b$, imp.]

458 $\frac{1-2a}{x} + \frac{a-2}{x} = \frac{a-1}{x-1}$

$\left[a \neq -1 \wedge a \neq 1 \wedge a \neq 0, x = \frac{a+1}{2a}; a = 0 \vee a = -1 \vee a = 1, \text{imp.} \right]$

459 $\frac{2m-2(m-1)}{1-mx} = -\frac{1}{2+mx}$

$\left[m \neq 0, x = -\frac{5}{m}; m = 0, \text{imp.} \right]$

- 460** $\frac{a}{x+2} = \frac{a+4}{x^2+x-2} - \frac{1}{x-1}$ $[a \neq -1, x = 2; a = -1, \text{indet. con } x \neq -2 \wedge x \neq 1]$
- 461** $3\left(1 - \frac{b}{x}\right) - 1 = \frac{1}{3}\left(b - \frac{1}{x}\right)$ $\left[b \neq 6 \wedge b \neq \frac{1}{9}, x = \frac{9b-1}{6-b}; b = 6 \vee b = \frac{1}{9}, \text{imp.} \right]$
- 462** $\frac{x^4 - a^4}{(x+a)^2} : \frac{x^2 - ax}{x+a} = x + \frac{a^2}{x}$ $[\forall x \neq 0 \wedge x \neq \pm a]$
- 463** $\frac{a}{x} - \frac{b}{x-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x}$ $\left[x = \frac{b-a}{2b} \text{ se...} \right]$
- 464** $\frac{(a^2 - a)x}{x^2 - 4} = \frac{a}{x+2} \cdot \frac{6}{x-2}$ $\left[a \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge a \neq 4 \wedge a \neq -2, x = \frac{6}{a-1}; a = 0, \text{indet. con } x \neq \pm 2; a = 1 \vee a = 4 \vee a = -2, \text{imp.} \right]$
- 465** $\frac{2b-10}{x^2+2x-3} - \frac{2bx}{x+3} \cdot \frac{b-5}{x-1} = 0$ $\left[b \neq 0 \wedge b \neq -\frac{1}{3} \wedge b \neq 1 \wedge b \neq 5, x = \frac{1}{b}; b = 5, \text{indet. con } x \neq 1, x \neq -3; b = 1 \vee b = -\frac{1}{3} \vee b = 0, \text{imp.} \right]$
- 466** $\frac{1-b}{x-1} + \frac{2b}{b+2} = \frac{3b+1}{x-1}$ $\left[b \neq 0 \wedge b \neq -2, x = 2b+5; b = 0, \text{indet. con } x \neq 1; b = -2, \text{senza significato} \right]$
- 467** $\left(\frac{x+b}{x} - \frac{x-b}{b} + \frac{2x}{b}\right) : \left(\frac{x}{b} + \frac{b}{x} + 2\right) = x - b$ $\left[b \neq 0 \wedge b \neq -1 \wedge b \neq -\frac{1}{2}, x = b+1; b = -1 \vee b = -\frac{1}{2}, \text{imp.}; b = 0, \text{senza significato} \right]$
- 468** $\frac{x^2}{x-a} + \frac{3x-3x^2+2ax-2a}{x^2-ax-x+a} - \frac{4x-x^2}{a-x} = \frac{3a}{x-a}$ $[\text{imp.}]$
- 469** $\frac{1-2a}{x} + \frac{a-2}{x} = \frac{2(a+1)}{a-1}$ $\left[a \neq \pm 1, x = \frac{1-a}{2}; a = -1, \text{indet. con } x \neq 0; a = 1, \text{senza significato} \right]$
- 470** $\frac{2a-6(a-1)}{1-3x} = \frac{a}{2+3x}$ $\left[x = \frac{3a-4}{3(2-a)} \text{ se...} \right]$
- 471** $\frac{2}{2b-x} - 1 = \frac{bx}{2b-x}$ $[b \neq \pm 1, x = -2; b = 1, \text{indet.}; b = -1, \text{imp.}]$
- 472** $a\left(\frac{x-a}{x}\right) - 1 = -\frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ $[a \neq 0 \wedge a \neq -1, x = a+1; a = -1, \text{imp.}; a = 0, \text{senza significato}]$
- 473** $\frac{b(ax+1)+1}{x} - \frac{a+2b}{2x+3} = \frac{2abx-a+2}{2x+3}$ $\left[x = -\frac{b+1}{ab} \text{ se...} \right]$
- 474** $\frac{ax(a-2)-2a}{x+4} + 2a - 1 = \frac{x^2(a+1)(a-1)+16}{x^2-16} + \frac{6a}{x-4}$ $\left[x = -\frac{12}{a} \text{ se...} \right]$
- 475** $\frac{(x+3)^2+b+a}{x^2+8} = 1 + \frac{ab}{abx^2+8ab}$ $\left[a \neq 0, b \neq 0, x = -\frac{a+b}{6} \right]$

476
$$\frac{(2x+1)(2a^2+1)}{a^2} - \frac{(2a+3)(2x-3)}{(4x+1)a} = 2 + \frac{(2a^2+1)(8x^2+3)}{(4x+1)a^2}$$

$$\left[a \neq \frac{1}{3} \wedge a \neq 0 \wedge a \neq 1, x = \frac{2-9a}{6(1-a)}; a = 1 \vee a = \frac{1}{3}, \text{imp.} \right]$$

477
$$\frac{4x^2+4bx}{x^2+2bx+b^2} \cdot \left(1 + \frac{b}{x}\right) = 4 + b(x-2)$$

$$[b \neq 0 \wedge b \neq -2, x = 2; b = 0, \forall x \neq 0; b = -2, \text{imp.}]$$

478
$$\frac{12ax-6(a+2)^2}{ax} + \frac{5a^2x(a+6)+48}{a^2x^2+2ax} = \frac{12ax-(a-4)^2}{ax+2}$$

$$\left[a \neq 0 \wedge a \neq 8 \wedge a \neq -4 \wedge a \neq -\frac{8}{3} \wedge a \neq -1, x = \frac{6(a+4)}{8-a}; a = 8 \vee a = -4 \vee a = -\frac{8}{3}, \text{imp.} \right]$$

479
$$\frac{x}{a(x^2-2x+1)} - \frac{2a}{ax-a} = 0$$

$$\left[a \neq \frac{1}{2} \wedge a \neq 0, x = \frac{2a}{2a-1}; a = \frac{1}{2}, \text{imp.}; a = 0, \text{senza significato} \right]$$

480
$$\frac{a(x+2)+6}{3x} - \frac{6x+x^2}{3(x^2+2)} = \frac{2ax+6}{3(x^2+2)} + \frac{a-1}{3}$$

$$[x = a+3 \text{ se...}]$$

481
$$\left(\frac{x^2}{x^2-a^2} - \frac{x-a}{x+a}\right) \cdot \frac{x-a}{2ax-a^2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{a+x} + \frac{x-a}{x^2+ax}\right) \cdot \frac{ax(x+3)}{x^2-a^2}$$

$$[a \neq 0 \wedge a \neq -4 \wedge a \neq \pm 2, x = -2; a = -4 \vee a = \pm 2, \text{imp.}; a = 0, \text{senza significato}]$$

482
$$\frac{ax+ab+x+b}{ax-ab+x-b} : \left(\frac{x+b}{x-b} - \frac{x-b}{x+b}\right) = \frac{x}{4b}$$

$$\left[a \neq -1 \wedge b \neq 0, x = -\frac{b}{2}; a = -1 \vee b = 0, \text{senza significato} \right]$$

483
$$\left(\frac{x+a}{x^2-a^2} + \frac{2x+2a}{x^2+2ax+a^2}\right) \cdot \frac{3x^3+ax^2-3a^2x-a^3}{(3x+a)(9x^2-a^2)} = \frac{x}{3x+a}$$

$$[a \neq \pm 1 \wedge a \neq \pm 3, x = 1; a = \pm 1 \vee a = \pm 3, \text{imp.}]$$

Problemi

484 È data l'equazione $\frac{1}{b-a} - \frac{x}{x-a} = 0$ nell'incognita x . Rispondi alle seguenti domande.

- a) Se $b = -1$, per quale valore di a la soluzione è $x = 2$?
b) Per quali valori di a e b la soluzione è $x = 1$?

[a) $a = -4$; b) $b = 1$, con $a \neq 1$]

485 Perché, per $a > 0$, l'equazione $\frac{a}{x} + x = 0$ è impossibile?

486 È data l'equazione fratta $\frac{2}{x+1} + \frac{k}{x} = 0$ nell'incognita x .

- a) Per quali valori di k l'equazione è impossibile?
b) Per quale valore di k la soluzione è $x = 3$?

[a) $k = -2$, $k = 0$; b) $k = -\frac{3}{2}$]

487 Considera $\frac{k}{x} = \frac{2k+1}{x+1}$, equazione fratta nell'incognita x , e determina l'insieme A dei valori della variabile letterale $k \in \mathbb{R}$ che rendono impossibile l'equazione.

$$[A = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0\right\}]$$

Risolvere un'equazione rispetto a una lettera indicata

488 Considera l'equazione letterale $ax + by + c = 0$.

- Se l'incognita è x , per quali valori di a l'equazione è determinata?
- Se l'incognita è y , per quali valori di b l'equazione è impossibile o indeterminata?
- Se l'incognita è c , l'equazione può risultare indeterminata?

Risovi le seguenti equazioni rispetto a ogni lettera che vi compare.

489 $2x - 4y + 1 = 0; \quad x = 3 + 2a.$

494 $\frac{1}{2}x - 3a = 0; \quad 2x + \frac{2}{5}a = -\frac{1}{5}a.$

490 $y = 2x + 6 - 2y; \quad 2kx + \frac{x}{2} = 0.$

495 $3ax - x + 3a = 1; \quad 2x - \frac{2}{3}ax = 1.$

491 $a = \frac{a}{2b} + 1; \quad \frac{2}{a} + \frac{b+1}{2} = 1.$

496 $ax - \frac{1}{2}k = 2kx; \quad 6(x-1) = 2ax - 6 + a.$

492 $\frac{b}{x} - 2b = 1; \quad \frac{ax}{2} + 1 = a.$

497 $b(x-1) = 2ab; \quad \frac{1}{3}(x+1) = 2bx - \frac{2}{3}.$

493 $ab + x = 5ab; \quad 3ax - a + b = 2a.$

498 $x(x-1) = x(x+1) + a; \quad a(2x-1) = 2a - x - x(1-2a).$

499 $a + (a-2)x = (a-3)x - 2x; \quad x(x+a) = x(x-a) + a - 1.$

500 $\frac{ax}{x+1} = a + 1; \quad \frac{2a}{x} = \frac{2a-1}{x-1}; \quad \frac{2a}{x-1} - \frac{2a+1}{x} = 0.$

501 $\frac{2a}{x-2} + \frac{a-1}{x} = 0; \quad \frac{a-3x}{2a} + x = 2a-1; \quad \frac{ax}{x-2} - a = \frac{2x}{x-2}.$

502 Scrivi un'equazione che sia fratta rispetto alla variabile t , con le C.E. $t \neq -1 \wedge t \neq 2$, e letterale intera rispetto alla variabile v . Risolvila e discutila per entrambe le variabili.

503 Data l'equazione $2tvx^m - 3v^2x = \frac{1}{t^n}$, per quali valori di m e di n (con $m, n \in \mathbb{N}$) può essere considerata:

- lineare letterale intera nell'incognita t ?
- lineare letterale intera nell'incognita v ?
- lineare letterale intera nell'incognita x ?

[a] $n = 0$ e $\forall m$; b) nessun valore; c) $\forall n, m = 0 \vee m = 1$

504 La formula dell'area del trapezio è:

$$A = \frac{(b+B) \cdot h}{2}.$$

Trova la base minore b supponendo note le altre grandezze.

505 Risovi l'equazione

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2},$$

che esprime l'area di un rombo, rispetto a d_2 .

506

La formula dell'area totale del cilindro è:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Trova h conoscendo le altre grandezze.

507

Nel moto uniforme, la formula $s = vt + s_0$ esprime la posizione s in funzione del tempo t , della velocità v e della posizione iniziale s_0 .

Trova v conoscendo le altre grandezze.

508

La formula

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

esprime il volume del cono in funzione del raggio di base r e dell'altezza h .

Trova h sapendo che V e r sono noti.

7. Equazioni e problemi

→ Teoria a pag. 505

RIFLETTI SULLA TEORIA

509

VERO O FALSO?

- a) Per risolvere un problema mediante un'equazione si deve innanzitutto individuare l'incognita.
- b) L'equazione che risolve un problema non può mai contenere più di una lettera.
- c) L'incognita di un problema è sempre individuabile univocamente.
- d) Le soluzioni dei problemi sono sempre numeri naturali o interi.
- e) Ogni problema richiede delle condizioni di accettabilità.

ESERCIZI

Dal problema all'incognita

ESERCIZIO GUIDA

- 510** Scegliendo opportunamente un'incognita x , traduciamo le seguenti frasi, che compaiono molto spesso nei problemi.

- a) «Determina due numeri consecutivi tali che...»
Il primo numero si indica con x , il secondo con $x + 1$.
- b) «Determina due numeri pari (o dispari) consecutivi...»
Il primo numero si indica con x , il secondo con $x + 2$.
- c) «Dividi il numero 30 in due parti tali che...»
La prima parte si indica con x , la seconda con $30 - x$, perché la somma delle due parti deve dare 30.
- d) «La terza parte di un numero equivale al suo doppio diminuito di...»
La terza parte del numero si indica con $\frac{x}{3}$ (o $\frac{1}{3}x$), il doppio con $2x$; «equivale a» si traduce con il simbolo di uguale $=$, «diminuito di» con il simbolo $-$. Si ottiene: $\frac{x}{3} = 2x - \dots$
- e) «Calcola due numeri sapendo che il primo supera di 10 il secondo e che...»
Il primo numero è x , il secondo numero è $x - 10$; oppure il secondo è x e il primo $x + 10$.

Traduci le seguenti frasi mediante un'incognita.

511 Scrivi due numeri pari consecutivi.

512 Scrivi tre numeri consecutivi.

513 Scrivi due numeri dispari consecutivi.

514 Aggiungi a un numero il suo triplo.

515 Sottrai da un numero la sua metà.

516 Scrivi il prodotto di un numero per il suo precedente.

517 Scrivi il prodotto di un numero per il suo successivo.

518 Dividi il numero 60 in due parti.

519 Scrivi il quadrato del precedente di un numero aumentato di 10.

520 Dividi il numero 140 in tre parti tali che la prima sia doppia della seconda e la seconda sia doppia della terza. (Indica la terza parte con x .)

521 TEST Considera l'equazione $2(x - 5) + x = 8$. Solo una, fra le seguenti affermazioni, è la frase che traduce in modo corretto l'equazione. Quale?

- A Il doppio della differenza tra un numero e 5, sommato al numero stesso, dà 8.
- B Il doppio di un numero meno 5, sommato al numero stesso, dà 8.
- C Sottraendo 5 al doppio di un numero e aggiungendo il numero stesso, si ottiene 8.
- D È dato un numero. Aggiungendo allo stesso il suo doppio e sottraendo 5 si ottiene 8.
- E È dato un numero tale che il doppio della sua differenza con 5 è uguale a 8.

■ Le equazioni di primo grado e la risoluzione dei problemi

Nel sito: ▶ 12 esercizi di recupero



■ ESERCIZIO GUIDA

522 Problema. Nel giorno del suo compleanno Mario annuncia: «Da oggi non fumo più! Nel primo quinto della mia vita non ho fumato; per i successivi $\frac{2}{3}$ ho fumato sigarette e da 10 anni fumo la pipa». Quanti anni compie Mario?

SCHEMA DI RISOLUZIONE

1. Richieste	Quali sono i risultati richiesti?	Anni di Mario
2. Incognita	Scegliamo un'incognita:	$x = \text{anni di Mario}$
3. Relazioni	Scriviamo le relazioni fornite dal problema:	$\frac{1}{5}x$ (non ha fumato) $\frac{2}{3}x$ (ha fumato sigarette) 10 (ha fumato la pipa)
4. Equazione risolvente	Scriviamo l'equazione...	Gli anni di Mario, x , sono dati dalla somma degli anni in cui non ha fumato, più quelli in cui ha fumato le sigarette, più quelli in cui ha fumato la pipa. $x = \frac{1}{5}x + \frac{2}{3}x + 10$

5. Condizioni	...e le eventuali condizioni:	$x > 0$
6. Risoluzione	Risolviamo l'equazione...	m.c.m.(5, 3) = 15 Eliminiamo i denominatori: $15x = 3x + 10x + 150$ $15x - 13x = 150 \rightarrow 2x = 150 \rightarrow x = 75$
7. Controllo	...e controlliamo che la soluzione sia accettabile:	$x = 75$ è > 0 , quindi è accettabile.
8. Risposta	Forniamo i valori dei risultati richiesti al punto 1:	Mario compie 75 anni.

Problemi sui numeri

Risovi i seguenti problemi tramite equazioni.

BRAVI SI DIVENTA ▶ E25



523 Qual è quel numero che sommato alla sua metà è uguale a 21? [14]

524 Se moltiplico un numero per 7 e aggiungo la sua quinta parte, ottengo 72. Determina il numero. [10]

525 Se a un numero si aggiunge il suo quadruplo e si sottrae la sua quarta parte, si ottiene 38. Determina il numero. [8]

526 Sommando un numero con la sua metà e con i $\frac{3}{5}$ della sua metà, si ottiene 9. Qual è il numero? [5]

527 La somma di due numeri pari consecutivi è 26. Calcola i due numeri. [12; 14]

528 La somma di tre numeri consecutivi è 72. Calcola i tre numeri. [23; 24; 25]

529 La somma di due numeri dispari consecutivi è 84. Calcola i due numeri. [41; 43]

530 Se a un numero si aggiunge il suo triplo e si sottrae la sua metà, si ottiene 28. Qual è il numero? [8]

531 Se a un numero si aggiunge la sua terza parte e si sottrae 4, si ottiene 40. Qual è il numero? [33]

532 Se al triplo di un numero si somma 3, si ottiene il quadruplo del numero stesso diminuito di 4. Trova il numero. [7]

533 Determina due numeri, sapendo che la loro somma vale 43 e la loro differenza è 19. [31; 12]

534 In un numero di due cifre, la cifra delle decine supera di 5 quella delle unità. Scambiando le cifre, si ottiene un numero il cui doppio diminuito di 6 è uguale ai $\frac{2}{3}$ del numero iniziale. Trova il numero iniziale.

535 La somma di un numero con il suo consecutivo sta alla somma del triplo del numero con 17 come 1 sta a 2. Determina il numero. [15]

536 Determina due numeri, sapendo che la loro somma vale 39 e la loro differenza è 17. [11; 28]

537 Dividi il numero 35 in tre parti tali che la prima sia doppia della seconda e la seconda sia doppia della terza. [5; 10; 20]

538 Determina due numeri, sapendo che la loro somma aumentata di 3 vale 55 e la loro differenza diminuita di 6 è 32. [45; 7]

539 Dividi il numero 50 in due parti tali che una sia $\frac{2}{3}$ dell'altra. [20; 30]

540 Dividi il numero 34 in tre parti tali che la prima superi di 6 la seconda e la seconda superi di 2 la terza. [16; 10; 8]

541 Trova tre numeri naturali consecutivi tali che il loro prodotto sia uguale al cubo del secondo diminuito di 3. [2; 3; 4]

542 La somma della quarta parte di un numero con il doppio del numero stesso equivale al numero aumentato di 15. Determina il numero. [12]

543 Dividendo un numero per 4 o sottraendo 7 alla metà del numero, si ottiene lo stesso risultato. Determina il numero. [28]

544 Il prodotto tra un numero diminuito di 3 e lo stesso numero aumentato di 2 equivale al quadrato del numero stesso diminuito di 30. Determina il numero. [24]

545 La somma della metà di un numero con la sua quinta parte equivale al numero stesso diminuito di 6. Determina il numero. [20]

546 Determina un numero, sapendo che il prodotto tra il numero stesso e il suo precedente equivale al quadrato del suo successivo diminuito di 22. [7]

547 Sottrarre 21 alla metà di un numero equivale a calcolare la quinta parte del numero stesso. Determina il numero. [70]

548 Dividendo un numero per 3, o sottraendo $\frac{5}{4}$ al numero, si ottiene lo stesso risultato. Qual è il numero? $\left[\begin{array}{l} 15 \\ 8 \end{array} \right]$

549 Determina due numeri naturali consecutivi tali che la differenza dei loro quadrati sia 13. [6; 7]

550 Se moltiplico un numero per il suo successivo, ottengo il quadrato del suo precedente aumentato di 26. Qual è il numero? [9]

551 Determina due numeri naturali consecutivi, sapendo che la differenza dei loro quadrati è uguale a 31. [15; 16]

552 Calcola un numero, sapendo che il suo quadruplo equivale al doppio della somma tra 45 e la metà del numero stesso. [30]

553 Calcola un numero, sapendo che la sua quarta parte equivale al triplo della differenza fra il numero stesso e 33. [36]

554 Calcola due numeri, sapendo che la loro somma vale 70 e che il secondo supera di 16 il doppio del primo. [18; 52]

555 Determina due numeri, sapendo che il secondo supera di 17 il triplo del primo e che la loro somma è 101. [21; 80]

556 La somma di due numeri è 46. Dividendo il primo per il secondo, si ottengono come quoziente 3 e come resto 6. Calcola i due numeri. [36; 10]

557 La somma di due numeri vale 63. Dividendo il primo per il secondo, si ottengono come quoziente 4 e come resto 3. Calcola i due numeri. [51; 12]

558 Calcola due numeri la cui somma vale $\frac{78}{35}$ e il cui rapporto è $\frac{5}{21}$. $\left[\frac{3}{7}; \frac{9}{5} \right]$

559 In un numero di due cifre, la cifra delle unità supera di 5 la cifra delle decine e il numero è il triplo della somma delle due cifre. Trova il numero. [27]

560 In un numero di due cifre, la cifra delle unità supera di 7 quella delle decine. Scambiando le cifre, si ottiene un numero la cui metà aumentata di 12 è uguale al doppio del numero di partenza. Determina il numero di partenza. [29]

561 In un numero di due cifre, la cifra delle decine è la metà di quella delle unità. Scambiando le cifre, si ottiene un numero la cui differenza da quello dato è 27. Determina il numero di partenza. [36]

562 Un numero intero è formato da due cifre la cui somma è 7. Se si sottrae al triplo della cifra delle decine la metà della cifra delle unità, si ottiene 14. Qual è il numero? [52]

563 Luisa dice a Carlo: «Pensa a un numero; aggiungi 4; raddoppialo; togli 8; aggiungi il numero che hai pensato, poi dividi per 3. Che numero ottieni? Sì, è proprio il numero che avevi pensato!». Come può Luisa affermare questo? (Suggerimento. Detto x il numero pensato, scrivi l'equazione $\frac{(x+4) \cdot 2 - 8 + x}{3} = x$ e verifica che è un'identità.)

Problemi e realtà

564 È possibile distribuire 38 palline in due scatole in modo che in una ce ne sia un numero triplo rispetto all'altra? [no]

565 Distribuisci 25 persone in due stanze in modo che nella prima ve ne sia il doppio che nella seconda. [impossibile, perché...]

566 In un albergo per animali ci sono al momento dei cani e alcuni pappagalli: le teste sono 27 e le zampe 100. Quanti sono i cani e quanti i pappagalli? [23; 4]

567 Luca ha 53 anni e sua figlia ne ha 21. Fra quanti anni l'età di Luca sarà $i \frac{5}{3}$ dell'età di sua figlia? [27]

568 In un parcheggio ci sono scooter e automobili. Sapendo che le ruote sono 94 e che in tutto ci sono 36 veicoli, calcola il numero degli scooter e quello delle auto. [25; 11]

569 Luca e Andrea posseggono rispettivamente € 200 e € 180; Luca spende € 10 al giorno e Andrea € 8. Dopo quanti giorni avranno la stessa somma? [10 giorni]

570 Trecento persone, tra uomini, donne, ragazzi e ragazze, partecipano a una festa in discoteca. Il numero delle donne è $\frac{6}{5}$ di quello degli uomini e sia i ragazzi sia le ragazze sono ciascuno $\frac{1}{3}$ delle donne. Determina il loro rispettivo numero. [120; 100; 40; 40]

571 In una palestra ci sono 40 studenti divisi in tre gruppi; determina il numero degli allievi del primo gruppo, sapendo che sono 3 in più del secondo e che nel terzo gruppo ci sono 5 alunni in meno che nel secondo. [17]

572 In una classe, metà degli allievi preferisce la matematica, $\frac{1}{4}$ preferisce l'italiano e $\frac{1}{7}$ l'inglese, mentre tre alunni preferiscono attività sportive. Determina il numero degli alunni. [28]

573 Un libro costa $i \frac{2}{3}$ del prezzo di un CD. Sapendo che la spesa totale è di € 30, quanto costa il CD? [€ 18]

574 La differenza fra l'età di Paolo e quella di Marco è di 15 anni. Quanti anni ha Paolo, sapendo che Marco ne ha il doppio? [15]

575 Una pista da sci lunga 7 km ha tre gradi di difficoltà. Quanti chilometri di pista di difficoltà media ci sono, sapendo che il tratto difficile è la metà del medio e il doppio di quello facile? [4]

576 La somma delle età di Sara, Elisa e Silvia è 45. Sapendo che Sara ha 3 anni in più di Elisa e che Silvia ha $i \frac{2}{3}$ degli anni di Sara, determina le loro età. [15; 18; 12]

577 All'inizio dell'anno Elena decide di investire nella sua banca € 48 000. Alla fine dello stesso anno il deposito raggiunge il valore di € 49 305,6. Durante l'anno, la banca ha diminuito il tasso di interesse iniziale portandolo dal 3,2% al 2,4%. Per quanti giorni è stato applicato il primo tasso? [146]

578 I dipendenti di un'azienda ricevono uno stipendio medio mensile di € 1300. Poiché l'azienda aumenta la produzione, vengono assunti nuovi dipendenti in numero pari al 14% del personale e viene concesso un aumento di stipendio del 4% a tutti. Se mensilmente l'azienda spende ora € 231 192, quanti erano inizialmente i dipendenti? [150]

579 A una gita in barca partecipano 48 persone. Il prezzo del biglietto è € 15 per gli adulti e ridotto di $\frac{2}{5}$ per i bambini. Se l'incasso è di € 576, quanti sono gli adulti e i bambini? [32; 16]

580 Nicola, che deve allenarsi per una gara ciclistica, decide di effettuare un percorso in tre tappe: nella prima percorre $i \frac{2}{5}$ del numero complessivo di chilometri, nella seconda $i \frac{5}{8}$ del tratto rimanente, nella terza gli ultimi 27 km. Quanto è lungo il percorso complessivo? [120 km]

581

Una banca mi offre il 2% di interesse all'anno sui capitali depositati. L'interesse viene accreditato alla fine di ogni anno.

- Quanto dovrei investire ora per avere € 12 500 fra un anno?
- Quale dovrebbe essere il tasso d'interesse per ricevere € 13 000 fra un anno, investendo sempre lo stesso capitale iniziale? [a) € 12 254,90; b) 6,08%]

582

Il prezzo di listino di una maglia è stato scontato dal fornitore del 20%. In epoca di saldi, il negoziante applica un ulteriore ribasso del 25%. Il cliente che acquista la maglia la paga € 55,80. Qual era il prezzo di listino della maglia? (Suggerimento: ponendo x il prezzo di listino della maglia, pervieni all'equazione risolvente

$$x \left(1 - \frac{20}{100}\right) \left(1 - \frac{25}{100}\right) = 55,80. \quad [93 \text{ €}]$$

583

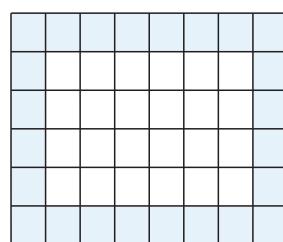
La distanza fra due località è stata percorsa da un autotreno in 9 ore, fra andata e ritorno, escluse le soste. Nell'andata la velocità media è stata di 56 km/h e nel ritorno di 70 km/h. Ricordando dalla fisica che $d = v \cdot t$, dove v è la velocità e t il tempo, qual è la distanza d fra le due località? [280 km]

584

Un ragazzo vuole preparare un tabellone come in figura per un gioco, utilizzando quadrati azzurri per il contorno e bianchi per l'interno e avendo a disposizione lo stesso numero di quadrati bianchi e azzurri.

Indica con a il numero dei quadrati che costituiscono l'altezza e con b quello della base.

Qual è la relazione fra il numero di quadrati nella base del rettangolo e il numero degli stessi posti sull'altezza? Riuscirà il ragazzo a costruire il tabellone con $a = 5$? E con $a = 10$? [4a + 4b = ab + 8]

**585**

Una gelateria in una via del centro si trova tra la casa di un bambino e quella dei suoi nonni. Per mangiare un gelato, il bambino percorre ogni volta 170 m, perché prima deve passare a prendere i soldi dai nonni. La distanza fra la casa dei nonni e la gelateria supera di 8 m il triplo della distanza tra la gelateria e la casa del bambino. Calcola la strada che dovrebbe fare il bambino per mangiare un gelato se non dovesse passare dai suoi nonni. [22 m]

586

Ricordando che la legge oraria di un moto rettilineo a velocità costante è $d = v \cdot t$, dove d è la distanza percorsa, v la velocità e t è il tempo impiegato a percorrerla, risovi il seguente problema.

Due motociclisti percorrono la stessa strada, partendo con un'ora di differenza. Quello che parte prima decide di andare alla velocità media di circa 70 km/h, mentre quello che parte un'ora dopo viaggia a una media di circa 90 km/h. Dopo quanto tempo l'uno raggiungerà l'altro? Quanta strada hanno percorso? [t = 4,5 h; 315 km]

587

Ogni giorno ingeriamo, con il cibo, grassi e proteine. Un grammo di grassi produce 4 kcal e un grammo di proteine 9 kcal. Indica con x i grammi di grassi ingeriti e con y quelli delle proteine.

- Esprimi la quantità di kilocalorie introdotte in funzione di x e y .
- Se in un cibo ci sono 200 g di proteine e 27 g di grassi, quante kilocalorie contiene?
- Essendo il fabbisogno giornaliero di 1590 kcal e di 60 g di grassi, quanti grammi di proteine sono necessari per soddisfarlo? [a) 4x + 9y; b) 1908 kcal; c) 150 g]

588

Giulia compra un paio di scarpe a € 80. Con la metà dei soldi che le sono rimasti acquista un cappotto sul quale c'è uno sconto del 20%; compra poi una maglietta con $\frac{1}{10}$ dei soldi che ha ancora nel portafoglio.

Infine spende € 66 per 3 CD e scopre che le mancano € 25 per acquistare l'abbonamento a teatro, che costa € 175. Qual era il prezzo originale del cappotto prima che il negoziante vi applicasse lo sconto? [€ 300]

■ Equazioni e problemi geometrici

Problemi di geometria piana

■ ESERCIZIO GUIDA

- 589** Un segmento è lungo i $\frac{3}{5}$ di un altro segmento e la somma delle loro lunghezze è di 30 cm.
Quanto misurano i due segmenti?

Risolviamo il problema in due modi diversi. La differenza sta nella scelta dell'incognita.

Primo modo

1. Richieste: \overline{AB} e \overline{CD} .

2. Incognita:

$$x = \frac{1}{3} \overline{AB} = \frac{1}{5} \overline{CD}.$$

3. Relazioni:

$$\overline{AB} = 3x; \quad \overline{CD} = 5x; \quad \overline{AB} + \overline{CD} = 30.$$

4. Equazione risolvente:

$$3x + 5x = 30.$$

5. Condizione: $x > 0$, perché rappresenta la misura di una lunghezza.

6. Risoluzione:

$$8x = 30 \rightarrow x = \frac{30}{8} = 3,75.$$

7. Controllo: Soluzione accettabile perché è maggiore di 0.

8. Risposta:

Poiché $\overline{AB} = 3x$, risulta $\overline{AB} = 3 \cdot 3,75 = 11,25$; poiché $\overline{CD} = 5x$, risulta $\overline{CD} = 5 \cdot 3,75 = 18,75$. La lunghezza del segmento AB è 11,25 cm e quella del segmento CD è 18,75 cm.

Secondo modo

1. Richieste: \overline{AB} e \overline{CD} .

2. Incognita:

$$x = \overline{AB}.$$

3. Relazioni:

$$x = \frac{3}{5} \overline{CD}; \quad x + \overline{CD} = 30.$$

4. Equazione risolvente:

$$\overline{CD} = 30 - x;$$

$$x = \frac{3}{5} (30 - x).$$

5. Condizione: $x > 0$.

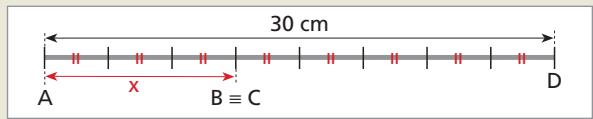
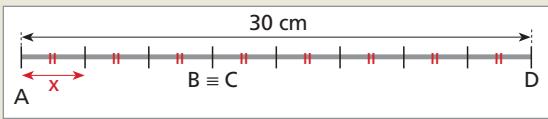
6. Risoluzione:

$$5x = 90 - 3x \rightarrow 8x = 90; \\ x = \frac{90}{8} = 11,25.$$

7. Controllo: Soluzione accettabile.

8. Risposta:

Se $\overline{AB} = 11,25$, risulta $\overline{CD} = 30 - 11,25 = 18,75$. Le lunghezze dei due segmenti AB e CD sono rispettivamente 11,25 cm e 18,75 cm.



590 Due segmenti sono uno i $\frac{5}{3}$ dell'altro e la loro differenza è pari a 16 cm. Determina la lunghezza dei due segmenti. [24 cm; 40 cm]

591 Sono dati due segmenti, di cui uno supera l'altro di 6 cm e il maggiore è il triplo del minore. Calcola la lunghezza dei due segmenti. [3 cm; 9 cm]

592 Calcola la lunghezza dei segmenti AB e CD , sapendo che la loro differenza è 4 cm e la loro somma è 26 cm. [11 cm; 15 cm]

593 La differenza tra le ampiezze di due angoli complementari è di 36° . Calcola l'ampiezza di ciascun angolo. [27°; 63°]

594 Determina l'ampiezza di due angoli adiacenti, sapendo che uno è i $\frac{2}{3}$ dell'altro. [72°; 108°]

595 La somma delle lunghezze di tre segmenti è 78 dm. Sapendo che il segmento maggiore è doppio del minore e che il terzo segmento è i $\frac{4}{3}$ della differenza degli altri due, calcola la lunghezza dei tre segmenti. [18 dm; 36 dm; 24 dm]

596 Dividi il segmento AB , lungo 42 cm, in due parti AC e CB , tali che il loro rapporto sia uguale a $\frac{5}{2}$. [30 cm; 12 cm]

597 Dividi in tre parti un segmento lungo 33 cm. La prima è i $\frac{2}{5}$ della seconda e la seconda i $\frac{5}{4}$ della terza. Calcola la lunghezza dei tre segmenti. [6 cm; 15 cm; 12 cm]

598 Trova la lunghezza di due segmenti tali che la loro differenza sia di 5 cm e che il triplo del primo superi di 20 cm il doppio del secondo. La soluzione è unica? Motiva la risposta.

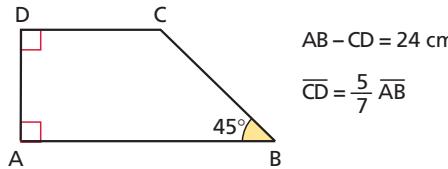
[No, perché...; 10 cm; 5 cm; 35 cm; 30 cm]

599 Determina le lunghezze dei segmenti AB e CD , sapendo che AB supera CD di 18 cm e che $5AB = 11CD$.

[33 cm; 15 cm]

Nei seguenti esercizi considera le figure geometriche disegnate e determina gli elementi richiesti, utilizzando le informazioni fornite.

600



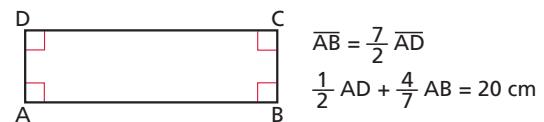
$$AB - CD = 24 \text{ cm}$$

$$\overline{CD} = \frac{5}{7} \overline{AB}$$

Area?

[1728 cm²]

601



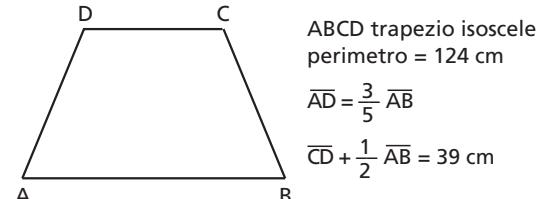
$$\overline{AB} = \frac{7}{2} \overline{AD}$$

$$\frac{1}{2} \overline{AD} + \frac{4}{7} \overline{AB} = 20 \text{ cm}$$

Perimetro? Area?

[72 cm; 224 cm²]

602



ABCD trapezio isoscele
perimetro = 124 cm

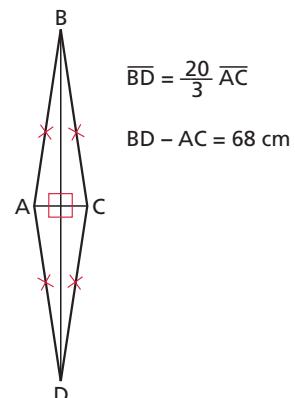
$$\overline{AD} = \frac{3}{5} \overline{AB}$$

$$\overline{CD} + \frac{1}{2} \overline{AB} = 39 \text{ cm}$$

Area?

[768 cm²]

603



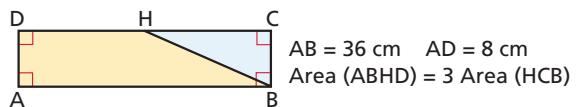
$$\overline{BD} = \frac{20}{3} \overline{AC}$$

$$\overline{BD} - \overline{AC} = 68 \text{ cm}$$

Area? Perimetro?

[480 cm²; 161,8 cm]

604



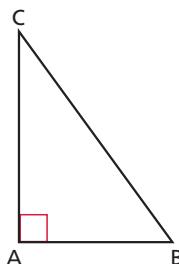
$$\overline{AB} = 36 \text{ cm} \quad \overline{AD} = 8 \text{ cm}$$

$$\text{Area (ABHD)} = 3 \text{ Area (HCB)}$$

Perimetro (ABHD)?

[81,7 cm]

605



$$\overline{AC} = \frac{4}{5} \overline{CB}$$

perimetro = 288 cm

Area?

Raggio del cerchio circoscritto?

[3456 cm²; 60 cm]

606

In un triangolo isoscele, ciascuno degli angoli alla base è pari ai $\frac{2}{5}$ dell'angolo al vertice. Determina l'ampiezza di ciascun angolo del triangolo.

[40°; 40°; 100°]

607

Il perimetro di un triangolo è di 580 cm. Determina la lunghezza dei tre lati, sapendo che: la lunghezza del lato minore è uguale ai $\frac{7}{13}$ di quella del lato maggiore; la lunghezza del terzo lato supera di 60 cm la differenza tra la lunghezza del lato maggiore e quella del lato minore.

[140 cm; 180 cm; 260 cm]

608

In un rombo, la somma delle due diagonali è di 84 cm. Sapendo che la differenza tra la diagonale minore e i $\frac{5}{12}$ della maggiore è uguale a 16 cm, trova il perimetro e l'area del rombo.

[120 cm; 864 cm²]

609

Un trapezio rettangolo ha il perimetro di 108 cm e l'altezza è pari ai $\frac{4}{3}$ della proiezione del lato obliquo sulla base maggiore. Se la somma dell'altezza e della proiezione è uguale a 49 cm, trova l'area del trapezio.

[630 cm²]

610

Un angolo piatto $A\hat{O}B$ viene diviso, da due semirette con origine in O , in tre angoli: \hat{C} , \hat{D} , \hat{E} . Sapendo che i $\frac{3}{5}$ di \hat{D} equivalgono ai $\frac{2}{5}$ di \hat{C} e che l'ampiezza di \hat{E} supera la metà di \hat{C} di 50°, calcola l'ampiezza di \hat{C} , \hat{D} ed \hat{E} .

[60°; 40°; 80°]

611

Determina l'area di un rettangolo il cui perimetro è di 144 cm, sapendo che la lunghezza di una dimensione è i $\frac{5}{7}$ di quella dell'altra. [1260 cm²]

612

La somma di un angolo e del supplementare del proprio complementare ha un'ampiezza di 120°. Calcola l'ampiezza dell'angolo.

[15°]

613

Calcola l'ampiezza di due angoli, sapendo che l'ampiezza della loro somma è di 240° e che il supplementare del primo angolo è equivalente al doppio del supplementare del secondo.

[100°; 140°]

614

In un triangolo ABC , l'ampiezza dell'angolo \hat{A} supera di 20° quella dell'angolo \hat{C} , e l'angolo esterno all'angolo \hat{B} ha un'ampiezza uguale ai $\frac{5}{3}$ di quella di \hat{A} . Calcola l'ampiezza dei tre angoli del triangolo.

[60°; 80°; 40°]

615

Calcola la lunghezza dell'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo ABC , sapendo che la somma delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è uguale a 25 dm e che la differenza delle stesse proiezioni è uguale a 7 dm. (Ricorda il secondo teorema di Euclide...)

[12 dm]

616

Due angoli adiacenti sono uno i $\frac{2}{7}$ dell'altro. Determina l'ampiezza dell'angolo formato dalle loro bisettrici. Il risultato ottenuto può essere generalizzato per qualsiasi coppia di angoli adiacenti?

[90°; sì perché...]

617

Nel triangolo isoscele ABC , il rapporto tra la lunghezza del lato AB e quella della base BC è $\frac{3}{2}$, e la lunghezza del lato AB supera di 3 cm quella della base BC . Determina l'area del quadrato isoperimetrico al triangolo.

[36 cm²]

618

Determina le lunghezze delle diagonali e dei lati obliqui di un trapezio isoscele, di altezza 8 cm, sapendo che l'area vale 160 cm² e che la differenza delle basi è di 12 cm.

[21,5 cm; 10 cm]

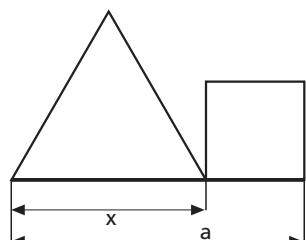
619 Un angolo α viene diviso da due semirette, uscenti dal vertice di α , in tre angoli: \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} . L'ampiezza di \hat{A} supera di $20^\circ \frac{1}{6}$ dell'ampiezza dell'angolo iniziale, l'ampiezza di \hat{B} equivale ai $\frac{2}{5}$ dell'ampiezza dell'angolo $\alpha - \hat{A}$ e infine \hat{C} ha un'ampiezza corrispondente ai $\frac{2}{5}$ dell'angolo α . Qual è l'ampiezza di α ? [120°]

620 Sulla base AB di un rettangolo $ABCD$ considera un punto E tale che l'area del trapezio $AECD$ risulti i $\frac{3}{2}$ dell'area del triangolo CEB . Sapendo che la lunghezza della base AB è di 20 cm e che la lunghezza dell'altezza CB è di 9 cm, calcola la lunghezza del segmento EB . [16 cm]

621 Un angolo giro viene diviso, da quattro semirette aventi la stessa origine, negli angoli: \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} , \hat{E} . Sapendo che: \hat{A} e \hat{D} sono opposti al vertice, l'ampiezza di \hat{B} equivale ai $\frac{7}{5}$ di quella di \hat{A} , il triplo dell'ampiezza di \hat{A} supera di 90° quella di \hat{C} , e infine i $\frac{2}{5}$ dell'ampiezza di \hat{E} superano di 2° quella di \hat{D} , determina l'ampiezza dei cinque angoli. [50°; 70°; 60°; 50°; 130°]

626 Su un segmento di misura a si costruiscono un triangolo equilatero di lato x e un quadrato, come indicato in figura. Qual è la condizione affinché i due poligoni abbiano uguale perimetro? In tale situazione, come deve essere a perché x risulti un numero intero?

$$[7x = 4a; a \text{ multiplo di } 7]$$



627 Nel piano cartesiano xOy disegna il punto $A(4; 0)$. Detto B un punto di ascissa 3 e O l'origine degli assi, determina l'ordinata di B affinché l'area del parallelogramma che ha come tre vertici consecutivi i punti A , O e B superi di 6 l'area del triangolo AOB . [y = \pm 3]

628 In un rombo, la diagonale maggiore supera di 10 cm i $\frac{6}{7}$ della minore e la somma delle due diagonali è uguale a 36 cm. Determina il perimetro e l'area del rombo. Congiungi i punti medi dei lati consecutivi del rombo. Che tipo di quadrilatero ottieni? Calcola il suo perimetro e la sua area.

$$[52,15 \text{ cm}, 154 \text{ cm}^2; \text{un rettangolo}; 36 \text{ cm}, 77 \text{ cm}^2]$$

622 Un trapezio rettangolo di area 144 cm^2 ha un'altezza di 8 cm. Sapendo che il triplo della lunghezza della base minore è inferiore di 2 cm alla lunghezza del doppio della base maggiore, determina la lunghezza delle basi. [14 cm; 22 cm]

623 In un trapezio rettangolo $ABCD$ la lunghezza della differenza delle basi è di 36 cm; essa corrisponde ai $\frac{9}{25}$ della lunghezza della base maggiore AB . Sapendo che la diagonale minore AC è perpendicolare al lato obliquo BC , calcola il perimetro del trapezio e la lunghezza della diagonale AC . [272 cm; 80 cm]

624 Calcola l'area e il perimetro di un triangolo rettangolo ABC , sapendo che la mediana AM relativa all'ipotenusa è i $\frac{5}{6}$ del cateto AB e che la somma di questo e dell'ipotenusa è di 64 cm. [384 cm²; 96 cm]

625 Nel triangolo ABC , rettangolo in A , il rapporto tra le misure dei cateti è $\frac{3}{4}$ e la lunghezza della somma dei cateti è di 42 dm. Calcola:
a) il perimetro del triangolo;
b) la lunghezza della mediana AM relativa all'ipotenusa e la lunghezza delle distanze di M dai cateti. [a) 72 dm; b) 15 dm, 9 dm, 12 dm]

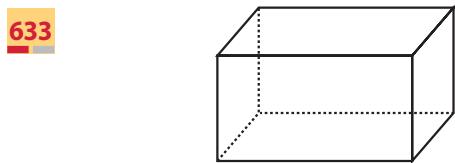
- 629** In un trapezio rettangolo $ABCD$, la base maggiore AB è i $\frac{5}{4}$ della diagonale minore AC e questa è perpendicolare al lato obliquo CB . Se il doppio di AB supera di 36 cm la diagonale AC , trova:
 a) perimetro e area del trapezio;
 b) la distanza di D da AC ;
 c) il perimetro e l'area del quadrilatero $PQCR$, dove P , Q e R sono i punti medi di AC , BC e DC . Di che tipo di quadrilatero si tratta?
 [a) 81,6 cm, 354,24 cm²; b) 11,52 cm; c) 40,8 cm, 88,56 cm²]

- 630** Nel rettangolo $ABCD$, il perimetro è di 168 cm e la base supera di 12 cm l'altezza.
 a) Determina l'area del rettangolo.
 b) Considera le proiezioni P e Q di D e B sulla diagonale AC e il punto medio M del lato AB . Calcola l'area del triangolo PQM .
 [a) 1728 cm²; b) 120,96 cm²]

Problemi di geometria solida

- 631** In un cilindro, la differenza tra l'altezza e il raggio di base è di 12 cm, mentre il loro rapporto è $\frac{7}{3}$.
 Calcola il volume del cilindro. [1701 π cm³]

- 632** In un cilindro, il rapporto tra l'altezza e il raggio di base è $\frac{7}{4}$, mentre $\frac{1}{4}$ della loro somma è uguale a 11 cm. Trova l'area della superficie totale e il volume del cilindro. [1408 π cm²; 7168 π cm³]

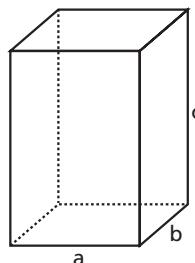


Nella scatola della figura, a forma di parallelepipedo, la somma delle tre dimensioni è di 41 cm. Il lato minore differisce di 3 cm dal secondo, mentre il maggiore è uguale ai $\frac{5}{3}$ del secondo.

Se verso nella scatola 2 litri di acqua, questa fuoriesce? [no]

Nei seguenti esercizi determina gli elementi richiesti, utilizzando le informazioni fornite.

634



$$a + b + c = 95 \text{ cm}$$

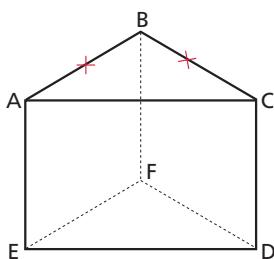
$$a = \frac{7}{12} b$$

c uguale a $\frac{3}{4}$ del perimetro di base

Superficie totale?

$$[5004 \text{ cm}^2]$$

635



$$\overline{AB} = \overline{BC}$$

$$\overline{AB} = \frac{5}{8} \overline{AC}$$

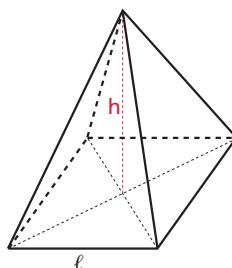
$$CD = 20 \text{ cm}$$

$$AB + AC = 39 \text{ cm}$$

Superficie totale? Volume?

$$[1296 \text{ cm}^2; 2160 \text{ cm}^3]$$

636



Piramide a base quadrata

$$\ell + h = 135 \text{ cm}$$

$$\ell = \frac{4}{5} h$$

Volume?

$$[90\,000 \text{ cm}^3]$$

637

In una piramide retta a base quadrata il lato di base è pari a $\frac{8}{15}$ dell'altezza. Sapendo che la loro somma è di 138 cm, calcola il volume e la superficie totale della piramide.

$$[69\,120 \text{ cm}^3; 11\,245,92 \text{ cm}^2]$$

638

Un cono ha l'apotema uguale a 9 cm e l'area di base è i $\frac{2}{3}$ dell'area laterale. Trova il volume del cono.

$$[252,77 \text{ cm}^3]$$

639 In un triangolo rettangolo ABC , il cateto AB è i $\frac{3}{4}$ del cateto AC . Si sa inoltre che $\frac{1}{2} AC + \frac{1}{4} AB = 5$ cm.

Determina la superficie totale S e il volume V del solido che si ottiene facendo ruotare il triangolo intorno ad AB . $[S \approx 373,68 \text{ cm}^2; V \approx 301,97 \text{ cm}^3]$

640 In un rombo, una diagonale è i $\frac{2}{5}$ dell'altra e la loro somma è di 28 cm.

Trova il volume del solido che si ottiene facendo ruotare il rombo intorno alla diagonale maggiore.

$$\left[\frac{320}{3} \pi \text{ cm}^3 \right]$$

Problemi che si risolvono con equazioni fratte

ESERCIZIO GUIDA

641 La somma del numeratore e del denominatore di una frazione è 28. Aggiungendo 1 al numeratore e togliendo 9 al denominatore, si ottiene una frazione equivalente a $\frac{1}{4}$. Qual è la frazione?

1. Richieste:

Numeratore e denominatore che, per brevità, indichiamo con Num e Den .

2. Incognita:

$x = Den$.

3. Relazioni:

$$x + Num = 28;$$

$$\frac{Num + 1}{x - 9} = \frac{1}{4}.$$

4. Equazione risolvente:

$$Num = 28 - x;$$

$$\frac{28 - x + 1}{x - 9} = \frac{1}{4}.$$

5. Condizioni:

$x \neq 0$ perché denominatore della frazione cercata, con $x \in \mathbb{Z}$;

$x \neq 9$ per l'esistenza della frazione

$$\text{algebrica } \frac{28 - x + 1}{x - 9}.$$

6. Risoluzione:

$$\frac{29 - x}{x - 9} = \frac{1}{4};$$

$$\text{m.c.m.} = 4(x - 9).$$

$$\frac{(29 - x)}{x - 9} \cdot 4(x - 9) = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (x - 9)$$

$$116 - 4x = x - 9$$

$$-4x - x = -9 - 116$$

$$5x = 125$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{125}{5}$$

$$x = 25.$$

7. Controllo: La soluzione $x = 25$ è accettabile perché è diversa sia da 0 sia da 9.

8. Risposta:

La frazione cercata ha il denominatore uguale a 25 e il numeratore uguale a $28 - 25 = 3$, pertanto è $\frac{3}{25}$.

642 Quale numero si deve sottrarre a ciascun termine della frazione $\frac{3}{2}$ per ottenere una frazione equivalente a $\frac{21}{24}$? [10]

643 La somma di un numero con il suo consecutivo sta al numero aumentato di 5 come 5 sta a 7. Determina il numero. [2]

644 La somma di un numero con il suo doppio, divisa per la differenza fra il triplo del numero stesso e 4, vale $\frac{6}{5}$. Qual è il numero? [8]

645 Il rapporto fra la somma di tre numeri consecutivi e la differenza fra il primo numero e 5 è uguale a 9. Determina i tre numeri. [8; 9; 10]

646 La somma di due numeri è 19; determina i due numeri, sapendo che, aggiungendo a entrambi 3, il rapporto tra i numeri ottenuti è $\frac{3}{2}$. [12; 7]

647 La somma di numeratore e denominatore di una frazione è 12; sottraendo 2 a entrambi, si ottiene $\frac{3}{5}$.

Calcola numeratore e denominatore. [5; 7]

648 La somma di numeratore e denominatore di una frazione è 16; sommando 3 a entrambi, si ottiene $\frac{5}{6}$.

Calcola numeratore e denominatore. [7; 9]

649 La somma di due numeri è 26.
Calcola i due numeri, sapendo che il rapporto tra il primo numero diminuito di 4 e il secondo numero aumentato di 4 è il reciproco del rapporto tra il primo e il secondo. [15; 11]

650 Il rapporto tra i $\frac{2}{5}$ di un numero aumentati di 4 e la metà del numero diminuita di 1 è uguale a 1. Determina il numero. [50]

651 Quale numero si deve sottrarre a ciascun termine della frazione $\frac{19}{23}$ per ottenere una frazione equivalente a $\frac{3}{4}$? [7]

652 La somma di numeratore e denominatore di una frazione è 31; sottraendo 10 a entrambi, si ottiene $\frac{12}{21}$.

Calcola numeratore e denominatore. [14; 17]

653 La differenza tra due numeri è 8.
Calcola i due numeri, sapendo che il rapporto tra il maggiore diminuito di 5 e il minore aumentato di 13 è uguale al reciproco del rapporto tra il maggiore e il minore. [12; 20]

654 In un numero di due cifre, la cifra delle unità è 6. Il rapporto tra il numero e quello ottenuto scambiando tra loro le due cifre è $\frac{23}{32}$.

Trova il numero. [46]

655 In un rettangolo, la base è i $\frac{4}{3}$ dell'altezza e il rapporto tra il perimetro e l'altezza aumentata di 4 cm è $\frac{14}{5}$.

Calcola l'area del rettangolo. [48 cm²]

656 In un triangolo isoscele ABC, il lato supera la base AB di 6 cm. Determina il perimetro del triangolo sapendo che:

$$\frac{\overline{CB} + 5\overline{AB}}{2\overline{AB}} = \frac{10}{3}. \quad [39 \text{ cm}]$$

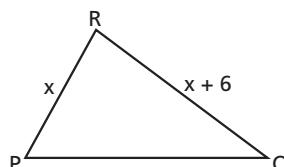
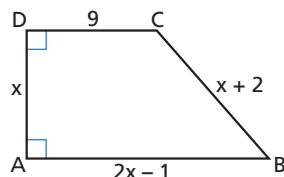
657 In un rombo, la somma delle diagonali è di 42 cm. Trova il perimetro e l'area del rombo, sapendo che il rapporto della somma della diagonale maggiore con i $\frac{2}{5}$ della minore e il doppio della maggiore è $\frac{13}{20}$. [60 cm; 216 cm²]

658 In un triangolo rettangolo ABC, il cateto AB supera di 1 cm i $\frac{2}{3}$ del cateto AC.

Calcola perimetro e area del triangolo sapendo che:

$$\frac{\overline{AB} + 2\overline{AC}}{3\overline{AC} - \overline{AB}} = \frac{11}{9}. \quad [36 \text{ cm}; 54 \text{ cm}^2]$$

659



Utilizzando i dati della figura e sapendo che

- $\overline{PQ} = 2\overline{AB} - 9$,

- $\frac{\text{perimetro } (ABCD)}{\text{perimetro } (PQR)} = \frac{42}{43}$,

determina il valore di x . [x = 8]

LABORATORIO DI MATEMATICA

Le equazioni lineari con Excel

■ ESERCITAZIONE GUIDATA

Tre artigiani compiono un lavoro. Il primo ha lavorato 16 ore e ha sostenuto spese di 5 euro per ogni ora di lavoro, il secondo ha lavorato 12 ore e ha sostenuto una spesa globale di 40 euro, il terzo ha lavorato 9 ore senza spese. Le paghe orarie del secondo e del terzo artigiano sono i $\frac{5}{6}$ e i $\frac{2}{3}$ di quella del primo.

Desideriamo conoscere quale sia il guadagno orario del primo artigiano, corrispondente a diversi importi del ricavo totale del lavoro. Costruiamo, pertanto, una tabella, nella prima colonna della quale immettiamo i valori in euro degli eventuali ricavi che partono da 0 e aumentano con passo da inserirsi e nella seconda colonna i conseguenti importi delle paghe orarie del primo artigiano.

Indichiamo con x la paga oraria del primo artigiano e con r il ricavo totale del lavoro. Scriviamo un'equazione dedotta dai dati del problema:

$$16(x + 6) + 12 \cdot \frac{5}{6}x + 40 + 9 \cdot \frac{2}{3}x = r, \text{ da cui otteniamo } x = \frac{r - 136}{32}.$$

- Entriamo in Excel e per ottenere la tabella richiesta:
 - scriviamo le didascalie al dato e ai risultati;
 - indichiamo al sistema di considerare i valori in euro;
 - digitiamo 0 in A6, =A6 + \$B\$3 in A7 e la copiamo sino alla A16, per avere la colonna dei ricavi;
 - digitiamo =SE(A6-136 > 0; (A6-136)/32; "") in B6 e la copiamo sino alla B16 per avere la colonna delle paghe orarie.
- Inseriamo 200, l'incremento, in B3 e otteniamo la tabella richiesta.

A	B
1	Un problema
2	
3	L'incremento
4	200,00 €
5	Il ricavo
6	La paga oraria
7	0,00 €
8	=
9	200,00 €
10	2,00 €
11	400,00 €
12	8,25 €
13	600,00 €
14	14,50 €
15	800,00 €
16	20,75 €
	1.000,00 €
	27,00 €
	1.200,00 €
	33,25 €
	1.400,00 €
	39,50 €
	1.600,00 €
	45,75 €
	1.800,00 €
	52,00 €
	2.000,00 €
	58,25 €

▲ Figura 1

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 12 esercitazioni in più



■ Esercitazioni

Dai dati di ognuno dei seguenti problemi deduci un'equazione nell'incognita x e risolvila. Costruisci poi con Excel una tabella, operando in modo analogo a quello dell'esercitazione guidata.

- 1 Per installare un pavimento in legno un montatore lavora per 12 ore a 30 euro all'ora e spende per collanti 150 euro; un levigatore lavora per 6 ore a 25 euro all'ora spendendo per usura macchinari x euro all'ora. Calcola x dopo aver assegnato la spesa totale r . Nella prima colonna immetti i valori di r che variano da 600 a 800 euro con passo 20 euro, nella seconda i valori di x .
- 2 In un triangolo ABC il lato AB è lungo 40 m, la misura del lato AC supera la misura x del lato BC di 2 m. Determina x dopo aver assegnato la misura del perimetro. Nella prima colonna immetti le misure in metri del perimetro, partendo da 60 sino a 120 con passo 5, nella seconda i valori di x , nella terza le misure di AC . Indica per quali misure del perimetro ottieni un triangolo isoscele.

Matematica per il cittadino

LALENTE DI INGRANDIMENTO



Il nonno di Luca non riesce a leggere i piccoli caratteri del quotidiano nemmeno con gli occhiali; chiede perciò al nipote di procurargli una lente di ingrandimento. Luca trova in casa una vecchia lente e la fa provare al nonno; si accorge che l'immagine che si ottiene varia al variare della distanza della lente dal giornale. Fenomeni ottici di questo tipo si possono trattare matematicamente.

Ogni lente, infatti, ha una propria caratteristica di costruzione, detta *distanza focale*.

Inoltre, se p indica la distanza tra l'oggetto e la lente, e q la distanza tra la lente e l'immagine da essa formata, esiste una legge fisica, detta *formula delle lenti sottili*, che lega queste due

grandezze alla distanza focale f . Essa ha la seguente forma: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$.

In figura è rappresentato il modo in cui si forma l'immagine di una matita tramite una lente di ingrandimento. I punti F e F' sono detti *fuochi* e il punto O si chiama *centro ottico della lente*. Poiché in questo caso l'immagine si trova dalla stessa parte dell'oggetto rispetto alla lente, per convenzione si considera la grandezza q negativa.

- 1.** La distanza focale della lente trovata da Luca è pari a 10 cm. Supponendo di voler formare l'immagine a una distanza di 30 cm dalla lente, a che distanza da essa bisogna tenere l'oggetto?

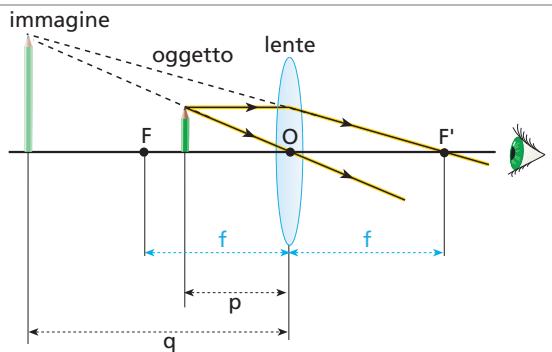
Completa i seguenti passaggi.

$$\dots = 10 \text{ cm}, \quad \dots = 30 \text{ cm},$$

\dots = elemento incognito.

L'equazione da risolvere è: \dots

L'oggetto deve essere posto a \dots cm dalla lente.



- 2.** Luca trova una seconda lente con cui riesce a formare un'immagine tenendo l'oggetto a 30 cm dall'immagine stessa e la lente a 15 cm dall'oggetto. Che distanza focale ha questa seconda lente?

Basandoti sulla figura precedente, completa i seguenti passaggi.

Per trovare q , si sommano le distanze \dots e \dots e si cambia segno al risultato. Si ricava $q = \dots$

Inoltre risulta: $\dots = 15 \text{ cm}$, \dots = elemento incognito.

L'equazione da risolvere è: \dots

La distanza focale è: \dots

- 3.** Dalla relazione $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ ricava una volta q e una volta f .

- 4.** Gli ottici misurano la capacità della lente di rifrangere la luce (detta *potere diottrico*) in diottrie, che corrispondono al reciproco della distanza focale f della lente, espressa in metri. Combinando due lenti di distanza focale f_1 e f_2 , una vicino all'altra, si ottiene l'effetto di una lente di distanza focale f tale che vale la relazione: $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}$. Se si ha una lente da 2,5 diottrie e la distanza focale della sua combinazione con una seconda lente è di 8 cm, qual è l'equazione corretta da risolvere? Scegli tra le seguenti possibilità e poi ricalca la distanza focale e il potere diottrico della seconda lente.

A $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{0,08} - \frac{1}{2,5}$ **B** $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{0,08} + 2,5$ **C** $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{8} - 2,5$ **D** $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{0,08} - 2,5$

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ► questi test interattivi ► 30 test interattivi in più

**1**

Solo una delle seguenti equazioni *non* ammette soluzioni in \mathbb{Z} . Quale?

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> A $3x = -6$ | <input type="checkbox"/> D $-\frac{3}{8}x = 11$ |
| <input type="checkbox"/> B $-12x + 4 = -8$ | <input type="checkbox"/> E $-3x = 0$ |
| <input type="checkbox"/> C $-\frac{3}{8}x = \frac{9}{4}$ | |

6

Il triplo della somma di due numeri consecutivi vale 15. Quali sono i due numeri?

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| <input type="checkbox"/> A 1; 2. | <input type="checkbox"/> D 2; 3. |
| <input type="checkbox"/> B 4; 5. | <input type="checkbox"/> E 5; 6. |
| <input type="checkbox"/> C 3; 5. | |

2

Solo una delle seguenti equazioni ammette soluzioni in \mathbb{N} . Quale?

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> A $5x = -10$ | <input type="checkbox"/> D $3x + 2 = 7$ |
| <input type="checkbox"/> B $-\frac{4}{3}x = \frac{2}{5}$ | <input type="checkbox"/> E $ax = 5$, con $a = 2$ |
| <input type="checkbox"/> C $\frac{x-12}{2} = 22$ | |

7

Le equazioni

a) $5x - 3 = 7$, b) $\frac{3x - 1}{5} = 1$,

c) $\frac{x-3}{x-2} = -\frac{1}{x-2}$:

- A sono tutte e tre equivalenti.
- B a) è equivalente a b) ma non a c).
- C a) è equivalente a c) ma non a b).
- D b) è equivalente a c) ma non ad a).
- E nessuna è equivalente a un'altra.

3

Tra le seguenti equazioni, una soltanto è equivalente a $3x - 4 = 5$. Quale?

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> A $6x = 18$ | <input type="checkbox"/> D $1 = 3x$ |
| <input type="checkbox"/> B $3x + 4 = -5$ | <input type="checkbox"/> E $\frac{x}{3} + 7 = 6$ |
| <input type="checkbox"/> C $3x - 4 = 4 - 3x$ | |

8

Quale tra le seguenti equazioni *non* è equivalente a $x - 3 = 5 - 2x$?

- A $ax - 3a = 5a - 2ax$, con $a \neq 0$
- B $x - 3 - (5 - 2x) = 0$
- C $\frac{x-3}{b} = \frac{5-2x}{b}$, con $b \neq 0$
- D $2x - 6 = 15 - 6x$
- E $3x - 3 = 5$

4

L'equazione $\frac{5}{3} - \frac{a}{x} = 7$ nell'incognita x è:

- A intera a coefficienti interi.
- B intera a coefficienti frazionari.
- C letterale e intera.
- D fratta e letterale.
- E fratta e non letterale.

9

Le condizioni di esistenza

$$x \neq -3 \wedge x \neq \frac{1}{2}$$

sono necessarie per una delle seguenti equazioni. Quale?

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> A $\frac{x+3}{2x-1} = 5$ | <input type="checkbox"/> D $\frac{3}{2x-1} = \frac{5}{x+3}$ |
| <input type="checkbox"/> B $\frac{2x-1}{3} = \frac{5}{x+3}$ | <input type="checkbox"/> E $\frac{3x-2}{2x-1} = \frac{4}{2x-1}$ |
| <input type="checkbox"/> C $2x-1 = x+3$ | |

5

L'equazione, nell'incognita x ,

$$\frac{3x-2}{a} = 2x - 7$$

- A intera a coefficienti interi.
- B intera a coefficienti frazionari.
- C letterale e intera.
- D fratta e letterale.
- E fratta e non letterale.

10

L'equazione $(a - 2)x = b$ nell'incognita x è indeterminata se:

- A $a \neq 2$.
- D $a = 2 \wedge b \neq 0$.
- B $a \neq 2 \wedge b \neq 0$.
- E $a \neq 2 \wedge b = 0$.
- C $a = 2 \wedge b = 0$.

11

Considera l'equazione $a(b - 1)x = b^2 - 1$, nell'incognita x .

Quale delle seguenti proposizioni è *vera*?

- A Se $a \neq 0 \wedge b \neq -1$, l'equazione è determinata.
- B Se $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, l'equazione è determinata.
- C Se $a = 0 \wedge b = 1$, l'equazione è impossibile.
- D Se $a = 0 \wedge b = 1$, l'equazione è indeterminata.
- E Se $a \neq 0 \wedge b \neq 1$, l'equazione è impossibile.

12

Considera l'equazione, nell'incognita x ,

$$(3a - 1)x = b.$$

Una delle seguenti proposizioni è *falsa*. Quale?

- A Se $a \neq 3 \wedge b \neq 0$, l'equazione è determinata.
- B Se $a = \frac{1}{3} \wedge b \neq 0$, l'equazione è impossibile.
- C Se $a = \frac{1}{3} \wedge b = 0$, l'equazione è indeterminata.
- D Se $a \neq \frac{1}{3} \wedge b \neq 0$, l'equazione è determinata.
- E Se $a = 3 \wedge b = 2$, l'equazione è determinata.

SPIEGA PERCHÉ

13

Per cambiare i segni a entrambi i membri di un'equazione si applica il 2° principio di equivalenza. Spiega perché. Questo vale anche nel caso dell'equazione $-2x = 0$? Perché?

14

Dimostra che se i membri di un'equazione $A(x) = B(x)$, dove $A(x)$ e $B(x)$ sono espressioni che contengono l'incognita x , vengono moltiplicati per l'espressione $C(x)$, l'equazione ottenuta non è sempre equivalente all'equazione data.

15

Dimostra che per le equazioni la relazione «avere lo stesso insieme di soluzioni» è una relazione di equivalenza.

16

Due equazioni impossibili possono considerarsi equivalenti? Spiega perché.

17

Che cosa si intende per «equazione indeterminata»? Stabilisci se l'equazione letterale, nell'incognita x , $ax + 4 = 2ax + 6a$ risulta indeterminata per $a = 0$.

18

Date le equazioni,

- a) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$,
- b) $3x - 7 = 3(x - 2)$,
- c) $2x + \frac{1}{3} = x - \frac{5}{3}$,

solamente c) è equivalente all'equazione $x + 2 = 0$. Perché?

19

Che cosa si intende per «equazione impossibile»? Stabilisci se l'equazione letterale nell'incognita x $2ax + 5 = 4x - a$ risulta impossibile per $a = 0$.

20

VERO O FALSO?

L'equazione

$$\frac{1}{2}(x - 1)(x + 1) - x(x - 3) = 3x - \frac{x^2 + 1}{2}:$$

- a) è di secondo grado. V F
- b) non è ridotta in forma normale. V F
- c) non è indeterminata. V F
- d) è impossibile. V F
- e) ammette soluzione $x = 0$. V F

21

Qual è il grado dell'equazione

$$\left(\frac{1}{3} + x\right)x - 3\left(\frac{x + 3}{15}\right) = \frac{x - 4}{5} + x^2?$$

Perché?

22

Considera l'equazione letterale $\frac{a}{x} + \frac{y}{b} + c = 0$.

- a) Se l'incognita è x , quando l'equazione è determinata?
- b) Se l'incognita è y , quando l'equazione è determinata?
- c) Se l'incognita è c , l'equazione è sempre determinata?

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 19 esercizi in più



Verifica che le seguenti uguaglianze sono delle identità, specificando le eventuali condizioni di esistenza.

23 $\frac{2}{3} \left(\frac{2a}{3} - 1 \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}a - 1 \right) = 5 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{5}{9}a$

24 $\frac{(x+4)(x-4)}{4x} + \frac{4}{x} - \frac{x}{4} - 2x = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(x + \frac{1}{2} \right)^2$ $[x \neq 0]$

25 $\left(\frac{1}{a+b} + \frac{4}{a-b} \right) \cdot (b^2 - a^2) = -3(a+b) - 2a$ $[a \neq \pm b]$

Risovi le seguenti equazioni numeriche intere.

26 $(x+6) - (x-1)^2 = 6 - x(x-1)$ $\left[\frac{1}{2} \right]$

27 $(2x+3)^2 - 2x(x+3) = 5x - 2(1-x)x$ $[-3]$

28 $\frac{1}{2}(x-2)(x+2) - \frac{2}{3}(x-1) = x \left(\frac{1}{2}x - 3 \right)$ $\left[\frac{4}{7} \right]$

29 $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{x-4}{12} = \frac{5x(x+1)}{36} + \frac{(x+2)^2}{9}$ $\left[\frac{5}{6} \right]$

30 $\frac{9}{5}x - 1 - \frac{7}{5}x - \frac{2}{3} = x + \frac{4}{3} - \frac{8}{5}x$ $[3]$

31 $x - (x-3)^2 - 8 = 2(1-x) - (x-4)^2$ $[3]$

32 $x(x+1) - 2(x+4)(x-3) + 2x = (2-x)(x+1)$ [impossibile]

33 $(6x-1)^2 + 70x - 11(x+2)^2 = (5x+2)^2 - 7x$ $[47]$

34 $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}(5-x) + \frac{1}{2}(2x+1) = \frac{1}{2}(x+7) - \frac{1}{3}(4-3x)$ $[27]$

35 $\frac{3x-1}{4} \left(x - \frac{1}{3} \right) - x^2 + \frac{2}{3} \left(x - \frac{1}{4} \right) - \frac{4}{5}x = -\frac{1}{4}x^2 + 2 \left(x + \frac{1}{3} \right)$ $\left[-\frac{45}{158} \right]$

36 $\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{5} = 3 - 2x + \frac{(x^2-x+1)(x+1)}{3} + \frac{x^3-11}{15}$ $\left[\frac{3}{2} \right]$

37 $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} = \left[\frac{1-x}{3} + \left(\frac{x}{3} + \frac{2-6x}{3} \right) - \frac{x+1}{2} \right] + \frac{1}{3}x$ $[0]$

38 $x(1-2x) - \left(\frac{4x+2}{2} \right)(1-x) + 2 \left[3 \left(x - \frac{1}{3} \right) - \frac{2x+1}{2} \right] = 4x - 4$ [indeterminata]

39 $(x+1)^3 + 2(x-3) = x^2(3+x) + 5(x-1)$ [indeterminata]

40 $\frac{4}{3} \cdot \left\{ x - 3 \cdot \left[1 - x + \frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{5}{2} \right) - 2 \cdot \left(2x + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} = 21x + \frac{10}{3}$ $[0]$

41

$$3 \cdot (x - 1)^2 - 2 \cdot [(x - 2) \cdot (x + 2) - 2x] = (3 - x)^2 - 3 \cdot (2x - 1)$$

$$\left[\frac{1}{10} \right]$$
42

$$\frac{7}{20}x + \frac{x-2}{15} + \frac{1}{12}x^2 = \frac{1}{12}(x+3)^2 - \frac{1}{20}(2x+3)$$

[44]

43

$$\frac{(x+5)(x-5)}{9} - \frac{3x-2}{5} = \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{2-5x}{5} - \frac{1}{9}$$

[- 2]

44

$$8x + 20 + (x-2)^3 - x^2(x-6) = x - 10 + 18(x+2)$$

[14]

45

$$\frac{8}{9}x - \frac{2}{3} + \left(x - \frac{1}{3}\right)^3 = x^2\left(x - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3}x\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

$$\left[\frac{19}{27} \right]$$
46

$$(x+1)^3 - x^2 \cdot (x+3) = 3 \cdot (x+1)$$

[impossibile]

47

$$2x \cdot (x+1) + (x-2) \cdot \left(2x - \frac{1}{2}\right) = \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{6}x$$

$$\left[-\frac{9}{8} \right]$$
48

$$\frac{x - \frac{3x-1}{2}}{0,2 + \frac{8}{15}} - \frac{1-x}{1+0,1} - \frac{5}{11} \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = 0$$

[impossibile]

49

$$\frac{x-2 - \frac{x-1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = 1 - \frac{x - \frac{x}{2}}{2 - \frac{1}{2}}$$

[3]

Risovi le seguenti equazioni numeriche fratte.

50

$$\left[\frac{(x-1)(x+1)}{3x} - \frac{1-2x}{x} \right] \cdot (-2) + \frac{2x}{3} = 1$$

$$\left[\frac{8}{15} \right]$$
51

$$\frac{4}{x+1} = \frac{2}{x}$$

[1]

52

$$\frac{2-x}{3x+6} + \frac{1-3x}{2+x} = 2$$

$$\left[-\frac{7}{16} \right]$$
53

$$\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} = \frac{5x}{x^2-9}$$

[0]

54

$$1 + \frac{x+1}{x-2} = \frac{2(x^2+2)}{x^2-4}$$

$$[x = 2, \text{non accettabile}]$$
55

$$\frac{1}{x^2+2x-3} + \frac{1}{(x-2) \cdot (x+3)} = \frac{1}{x^2-3x+2}$$

[6]

56

$$\frac{(x-1)^3 + 8}{(x^2+7x+6)} - x + 1 = \frac{-9x+67}{x}$$

[impossibile]

57 $\frac{2x^2 + 4x + 7}{x^2 + 5x + 6} + 3x + 6 = \frac{x + 10}{x + 2} + \frac{3x^2 + 16x + 8}{x + 3}$ [impossibile]

58 $\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) : \left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} \right) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ [$\forall x \neq \pm 1$]

Risovi e discuti le seguenti equazioni letterali nell'incognita x .

59 $ax - a = a^2$ [$a = 0$, indeterminata; $a \neq 0$, $x = a + 1$]

60 $kx - x = k^2 - 1$ [$k \neq 1$, $x = k + 1$; $k = 1$, indeterminata]

61 $a^2x - ax - a + 1 = 0$ $\left[a \neq 1 \wedge a \neq 0, x = \frac{1}{a}; a = 1, \text{indeterminata}; a = 0, \text{impossibile} \right]$

62 $\frac{x}{a} - \frac{x-1}{2} = \frac{1-x}{1-a} + \frac{1-a}{2}$ [$a \neq 0 \wedge a \neq 1, x = a$]

63 $3x(a+1) + 3(a+1) - 2(x+1) = -(3a-1)(3a+1)$ $\left[a \neq -\frac{1}{3}, x = -3a; a = -\frac{1}{3}, \text{indeterminata} \right]$

64 $(x-1) \cdot (a+1) - (2x-1) \cdot (a-1) = 2$ $\left[a \neq 3, x = \frac{4}{3-a}; a = 3, \text{impossibile} \right]$

65 $\frac{3x+a}{a^2-4} + \frac{6x}{a-2} = \frac{5x}{a+2}$ $\left[a \neq 2 \wedge a \neq -2 \wedge a \neq -25, x = \frac{-a}{a+25}; a = -25, \text{impossibile} \right]$

66 $\frac{3x}{3-a} = \frac{a-x+2}{3a-a^2} - \frac{x}{a}$ [$a \neq -2 \wedge a \neq 0 \wedge a \neq 3, x = \frac{1}{2}; a = -2, \text{indeterminata}$]

67 $\frac{x}{a+\frac{1}{a}} + \frac{x}{a-\frac{1}{a}} = \frac{4}{a^2-\frac{1}{a^2}}$ $\left[a \neq 0 \wedge a \neq \pm 1, x = \frac{2}{a} \right]$

68 $\left[\left(\frac{2x^2-1}{a+1} + \frac{2x^2+1}{1-a} \right) (a-1) + \frac{4x^2-1}{a-1} \right] : \frac{a-1}{a+1} = \frac{8x^2-2a^2}{(a-1)^2}$ [$a \neq \pm 1$, impossibile; $a = \pm 1$, senza significato]

69 $\frac{x+1}{1-b} - \frac{x+b}{1+b} = \frac{b(x-b)}{1-b} - \frac{x-1}{1+b}$ $\left[b \neq \pm 1, x = \frac{b(b+1)}{b-1} \right]$

70 $\frac{x}{x-2a} - \frac{x^2}{x^2-4a^2} = -\frac{2a}{x+2a}$ [$a \neq 0, x = a; a = 0, \text{indeterminata}$]

71 $\frac{b}{x^2-x} + \frac{2-3b}{x} = \frac{1-b}{1-x}$ $\left[b \neq \frac{3}{4} \wedge b \neq \frac{1}{2}, x = \frac{2-4b}{3-4b}; b = \frac{3}{4} \vee b = \frac{1}{2}, \text{impossibile} \right]$

72 $\left(\frac{ax}{a^2-9} : \frac{b-3}{3a+9} - \frac{ax}{9-3b-3a+ab} \right) \cdot \frac{b-3}{2} = 0$ [$a \neq 0 \wedge a \neq \pm 3 \wedge b \neq 3, x = 0; a = 0 \wedge b \neq 3, \text{indeterminata}$]

73 $\frac{3(b+x+2)}{2bx+2b} - \frac{b-x}{2x+2} = \frac{x+b^2}{bx+b}$

$$\left[b \neq 0 \wedge b \neq -1 \wedge b \neq \frac{5}{3}, x = 3(b-2); b = -1, \text{indet. con } x \neq -1; b = \frac{5}{3}, \text{impossibile} \right]$$

74 $\left(\frac{x^2+2bx+b^2}{xb} - \frac{xb+b^2}{x^2+xb} - \frac{x^2+xb}{xb+b^2} - 2 \right) : \frac{x}{x^2b+xb^2} - \left(\frac{x}{b} - \frac{b}{x} - 2 \right) + \frac{x}{b} = 0 \quad \left[b \neq 0, x = -\frac{b}{2} \right]$

Problemi

75 Determina due numeri naturali consecutivi, sapendo che la differenza dei loro quadrati è 17. [8; 9]

76 Trova un numero, sapendo che, sommando 2 alla sua metà, si ottiene il doppio del numero stesso diviso per 3. [12]

77 Qual è il numero che elevato al quadrato equivale al quadrato del suo successivo diminuito di 53? [26]

78 Marco e Andrea guardano un piccolo sciame di api che si è posato su un cespuglio fiorito. Una folata di vento ne fa volare via la metà, ma poi ritorna la metà di quelle volate via. Un rumore ne fa allontanare 5. Marco dice che ne sono rimaste 7. Quante erano le api sul cespuglio? [16]

79 Un ragazzo alle 17:50 vuole telefonare a un amico, ma ha solo € 1. La sua compagnia telefonica gli propone le seguenti tariffe: tariffa diurna dalle 8 alle 18, il primo minuto è gratis, poi paga € 0,01 ogni 4 secondi; tariffa notturna e festivi, € 0,01 ogni 10 secondi.

Per parlare più a lungo, gli conviene telefonare subito o aspettare le 18? Quanto tempo parlerebbe nei due casi con le diverse tariffe? [notturna; diurna, 7:40, notturna, 16:40]

80 Determina la misura del lato di un quadrato, sapendo che, aumentando di 3 cm la lunghezza del lato, l'area aumenta di 51 cm². [7 cm]

81 In un trapezio la somma delle due basi è di 97 cm; la base maggiore supera la minore di 47 cm e l'altezza è la metà della base maggiore. Trova la misura dell'area del trapezio. [1746 cm²]

82 In un rettangolo la base supera l'altezza di 26 cm. Sapendo che la differenza tra il doppio della base e il triplo dell'altezza è di 34 cm, trova la misura del perimetro e l'area del rettangolo. [124 cm; 792 cm²]

83 Data l'espressione $2 - x - a + 6x + \frac{1-a}{2}$, determina per quale valore di a l'espressione vale 6 quando x vale -1. $\left[a = -\frac{17}{3} \right]$

84 Calcola per quale valore di x le due espressioni $(x-1)(x+1) - 6x$ e $3(x-3) + x(x-1)$ hanno lo stesso valore. [$x = 1$]

85 Se moltiplico un numero per 4 e sottraggo la sua terza parte, ottengo 22. Determina il numero. [6]

86 Se a un numero si aggiunge il suo doppio e si sottrae la sua terza parte, si ottiene 24. Determina il numero. [9]

87 Determina il valore di $k \in \mathbb{R}$ tale che il polinomio $P(x) = (k^2 + 3k + 2)x^3 + (k-2)x^2 + 2k$ abbia grado minore del polinomio $Q(x) = (k^2 + 4k + 3)x^3 + (k-1)x + 5k$. [$k = -2$]

88 Determina il valore della variabile letterale a affinché l'equazione $\frac{1}{a} + \frac{x}{a+2} = \frac{1}{a^2-4}$ ammetta soluzione $x = -1$. [4]

89

Un gruppo di 54 tifosi organizza un viaggio in pullman per seguire la squadra del cuore in trasferta. Per coprire i costi del viaggio, si fanno pagare € 11 agli adulti e € 5 ai bambini. All'ultimo momento disdicono la prenotazione tre adulti e due bambini, perciò gli organizzatori decidono di far pagare € 1 in più agli adulti e € 0,50 in più ai bambini. Così facendo, però, mancano ancora € 4 per coprire le spese.

Quanti adulti avevano inizialmente prenotato il viaggio?

[32]

90

Andrea acquista un'automobile convenendo di pagare subito il 32% e dopo un anno i $\frac{2}{5}$ del rimanente (senza interessi). Restano così da versare € 14 688 per saldare il debito. Quanto costa l'auto? [€ 36 000]

91

Oggi pomeriggio Mattia e Luca devono recuperare lo studio di 85 pagine di storia. Prima di cena Mattia riesce a studiare i $\frac{4}{7}$ in più di Luca, ma gli restano ancora 8 pagine.

Quante pagine è riuscito a studiare Luca nel pomeriggio?

[49]

92

Negli ultimi giorni dei saldi invernali, Giovanna decide di acquistare un cappotto che in vetrina risulta scontato del 24%. Dato che è l'ultimo pezzo, il proprietario del negozio pratica sul prezzo scontato un ulteriore sconto del 7%, così Giovanna spende € 176,7. Quanto costava il cappotto prima dei saldi? [€ 250]

93

Come ogni mattina, alle 7:45 Luca parte per andare a scuola in bicicletta, mantenendo una velocità media di 6 km/h. Dopo 7 minuti la mamma si accorge che Luca ha dimenticato lo zaino a casa, così prende il motorino e lo segue, per la stessa strada, con una velocità media di 20 km/h. A che ora lo raggiunge? [7:55]

94

Un allevatore decide di allevare conigli. Ne compra un certo numero. Dopo una settimana ne muore l'8%. Da quel giorno ad oggi, considerate le nascite, gli animali sono aumentati del 50% e sono in totale 69. Quanti conigli erano stati comprati inizialmente? Qual è stato l'incremento percentuale? [50; 38%]

95

Il corso per ottenere il brevetto di pilota di 1° grado costa € 5200 ed è costituito da un pacchetto di lezioni teoriche e pratiche. Ogni ora di volo eccedente quelle del pacchetto costa € 160. Paolo ha conseguito il brevetto spendendo € 6800. Quante ore extra di volo ha effettuato? [10]

96

Un trapezio rettangolo ha il perimetro che misura 50 cm. Si sa che la base minore è $\frac{2}{3}$ della maggiore, l'altezza $\frac{6}{5}$ della base minore e, aggiungendo 8 cm a $\frac{1}{3}$ della base maggiore, si ottiene il lato obliquo. Determina l'area del trapezio. [150 cm²]

97

In un trapezio isoscele la base minore è la metà di quella maggiore, i $\frac{6}{5}$ del lato obliquo e i $\frac{3}{2}$ dell'altezza. Sapendo che il perimetro misura 140 cm, determina l'area del trapezio. [900 cm²]

98

È dato il rettangolo ABCD tale che $AD = 20a$ e AB superi di $10a$ il lato AD. Detti M e N, rispettivamente, i punti medi di AB e CD, determina la posizione di un punto P preso su DN tale che risulti $\frac{13S(DAP) + 4S(PNM)}{15} = S(ABC) - S(PBC)$, dove S indica la superficie.

Quanto deve valere a affinché la superficie del triangolo DAP misuri 400 m²? [PD = 10a; a = 2 m]

99

Trova tre numeri naturali consecutivi sapendo che, aggiungendo al doppio del primo la metà del secondo, si ottiene il triplo del terzo diminuito di $\frac{25}{2}$. [14, 15, 16]

100

Un ipermercato ha acquistato lo scorso anno una certa quantità di pantaloni. Ne ha venduto ogni mese, per i primi quattro mesi dell'anno, il 15%; nei mesi successivi ne ha venduti 140 ogni mese e alla fine dell'anno ha avuto una rimanenza di $\frac{2}{19}$ dei pantaloni acquistati. Quanti erano i pantaloni all'inizio? [3800]

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 5 esercizi in più



- 101** **TEST** La nonna Lucia ha portato un cestino con 120 ciliegie ai suoi tre nipoti, Jacopo di 4 anni, Martino di 7 anni e Duccio di 9 anni. La nonna distribuisce tutte le ciliegie ai nipoti secondo questo criterio: dà a ciascun nipote un numero di ciliegie ottenuto moltiplicando l'età del nipote per un certo fattore, e questo fattore è lo stesso per tutti e tre i nipoti. Quante ciliegie vengono date a Jacopo?

- A** 20 **B** 21 **C** 22 **D** 23 **E** 24

(Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede, 2005)

- 102** **TEST** Un padre ha 46 anni e la somma delle età dei suoi tre figli è 22. Entro quanti anni l'età del padre sarà uguale alla somma delle età dei figli?

- A** 6 **B** 8 **C** 10 **D** 12 **E** Mai

(Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede, 1990)

- 103** Due candele della stessa altezza vengono accese simultaneamente.

La prima si consuma completamente in 4 ore, la seconda in 3 ore.

Supponendo che le candele brucino uniformemente, dopo quanto tempo, dal momento dell'accensione, la prima candela è alta il doppio della seconda?

(Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede, 1994)

[2 ore e 24 minuti]

- 104** **TEST** Paolo ha acquistato un oggetto ottenendo lo sconto del 15% sul prezzo originale e lo ha pagato € 106,25.

Qual era il prezzo originale?

- A** Meno di € 123
B € 124
C € 125
D € 127
E Più di € 128

(Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede, 2006)

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 3 esercizi in più



- 105** The world's largest sheep ranch is located in Australia. There are three times as many sheep as kangaroos on the ranch, for a total of 87,000 animals. How many sheep are there on this ranch?

(CAN John Abbott College, Final Exam, 2000)

[65 250]

- 106** **TEST** Cindy was asked by her teacher to subtract 3 from a certain number and then divide the result by 9. Instead, she subtracted 9 and then divided the result by 3, giving an answer of 43. What would her answer have been had she worked out the problem correctly?

- A** 15 **B** 34 **C** 43 **D** 51 **E** 138

(USA American Mathematics Contest 10, AMC 10, Sample Questions, 2002)

- 107** **TEST** Tim buys apples at three for \$ 1. He resells them at five for \$ 2. Assuming that he resells every apple that he buys, how many apples must Tim buy in order to make a profit of \$ 10?

- A** 75 **B** 150 **C** 225 **D** 300 **E** 375

(USA University of South Carolina: High School Math Contest, 2005)

- 108** The ages, in years, of a group of pupils in a school are as follows:

14, 11, 13, 12, 11, x , 13, 14.If the average age of the group is 12.5 years, find the value of x .(IR Leaving Certificate Examination, Alternative-Ordinary Level, 1994)
[$x = 12$]

GLOSSARY

age: età**apple:** mela**average:** media**to buy-bought-bought:** comperare**in order to:** allo scopo di**instead:** invece**kangaroo:** canguro**pupil:** alunno**to resell-resold-resold:** rivendere**sheep:** pecora, pecore**to subtract:** sottrarre**times:** volte, per

Le disequazioni lineari



Ad alta quota!

Non sempre un'equilibrata uguaglianza è una condizione desiderabile. Nel mondo fisico, solo le disuguaglianze possono produrre movimento ed energia: dislivelli, variazioni, tensioni, spinte verso il basso e controspinte verso l'alto...

...fino a che quota può volare una mongolfiera?

→ La risposta a pag. 587

1. Le disuguaglianze numeriche

Scritture del tipo $5 > -2$ o $3 < 7$ indicano delle **disuguaglianze**, la prima indica che 5 è maggiore di -2 e la seconda che 3 è minore di 7.

Due disuguaglianze con lo stesso simbolo ($<$ o $>$) sono dello **stesso verso** (o dello **stesso senso**); altrimenti sono di **verso** (o di **senso**) **contrario**.

ESEMPIO

$-2 < 5$ e $12 < 27$ sono dello stesso verso,
 $-3 > -8$ e $0 < 10$ sono di verso contrario.

▶ Anche nelle disuguaglianze, come nelle uguaglianze, il **primo membro** è l'espressione che sta a sinistra del simbolo di disuguaglianza e il **secondo membro** è l'espressione che sta a destra.

Qualunque disuguaglianza può essere scritta usando il segno $<$ oppure il segno $>$. Per esempio, possiamo scrivere $7 < 8$ oppure $8 > 7$.

Le disuguaglianze numeriche godono di cinque proprietà fondamentali.

PROPRIETÀ

Monotonia dell'addizione

Aggiungendo uno stesso numero, positivo o negativo, a entrambi i membri di una disuguaglianza numerica si ottiene una disuguaglianza dello stesso verso.

$$\begin{aligned} a &< b \\ \Updownarrow \\ a + c &< b + c \end{aligned}$$

ESEMPIO

Consideriamo la diseguaglianza: $-9 < 5$.

Aggiungiamo $+10$ a entrambi i membri:

$$-9 + 10 < 5 + 10, \text{ cioè } 1 < 15.$$

► $a < b$
↓

se $c > 0$:
 $ac < bc$;

se $c < 0$:
 $ac > bc$.

► La proprietà **non** vale se si moltiplica o si divide per zero. Partendo da $2 < 5$ si avrebbe

$2 \cdot 0 < 5 \cdot 0$,
cioè $0 < 0$, che è una diseguaglianza non vera, oppure $\frac{2}{0} < \frac{5}{0}$, diseguaglianza priva di significato.

► La proprietà dei reciproci **non** è vera se i numeri sono **discordi**. Per esempio, da

$$-4 < 8$$

si ottiene:

$$-\frac{1}{4} < \frac{1}{8}.$$

► Una proprietà analoga **non** è vera per la **sottrazione**. Per esempio:

$$3 < 7 \quad \text{e} \quad 4 < 9$$

$$3 - 4 < 7 - 9,$$

$-1 < -2$, falsa!

PROPRIETÀ**Moltiplicazione (divisione) per un numero**

Moltiplicando (o dividendo) entrambi i membri di una diseguaglianza per uno stesso numero:

- se è positivo, si ottiene una diseguaglianza dello stesso verso;
- se è negativo, si ottiene una diseguaglianza di verso contrario.

ESEMPIO

Consideriamo la diseguaglianza: $2 < 5$.

Moltiplichiamo per $+3$ entrambi i membri: $2 \cdot 3 < 5 \cdot 3$, cioè $6 < 15$.

Moltiplicando invece per -4 , dobbiamo cambiare il verso della diseguaglianza: $2 \cdot (-4) > 5 \cdot (-4)$, cioè $-8 > -20$.

Caso particolare. Data la diseguaglianza $a < b$, se moltiplichiamo entrambi i membri per -1 , otteniamo: $-a > -b$. Per esempio:

$$9 > 4 \rightarrow -9 < -4.$$

Possiamo quindi cambiare i segni nei due membri di una diseguaglianza, ma dobbiamo anche cambiare il verso.

PROPRIETÀ**Proprietà dei reciproci di numeri concordi**

Dati due numeri concordi e diversi da 0, la diseguaglianza fra i loro reciproci ha verso contrario rispetto a quella fra i numeri stessi.

ESEMPIO

$$2 < 3 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{3}; \quad -2 < -1 \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2} > -1.$$

PROPRIETÀ**Addizione di diseguaglianze dello stesso verso**

Se sommiamo membro a membro due diseguaglianze dello stesso verso, otteniamo una diseguaglianza ancora dello stesso verso.

ESEMPIO

Consideriamo le diseguaglianze: $6 > 4$ e $2 > 1$.

Sommiamo membro a membro: $6 + 2 > 4 + 1$.

La diseguaglianza è vera, perché: $8 > 5$.

PROPRIETÀ**Prodotto di disuguaglianze dello stesso verso fra numeri positivi**

Se moltiplichiamo membro a membro due disuguaglianze dello stesso verso fra numeri positivi, otteniamo una disuguagliaza dello stesso verso.

► La proprietà **non** è valida se le disuguaglianze sono fra numeri **negativi**. Per esempio:

$$-2 < -1 \text{ e } -5 < -3$$

$$-2(-5) < -1(-3)$$

$10 < 3$ falsa!

ESEMPIO

Consideriamo le disuguaglianze: $2 < 5$ e $6 < 9$.

Moltiplichiamo membro a membro: $2 \cdot 6 < 5 \cdot 9$.

La disuguagliaza è vera, perché: $12 < 45$.

2. Le disequazioni di primo grado

■ Che cos'è una disequazione

Consideriamo una disuguaglianza in cui compare una variabile.

Per esempio: $x - 3 < 5$.

Procedendo per tentativi, attribuiamo alla lettera x alcuni valori e verifichiamo se la disuguaglianza che otteniamo è vera o falsa:

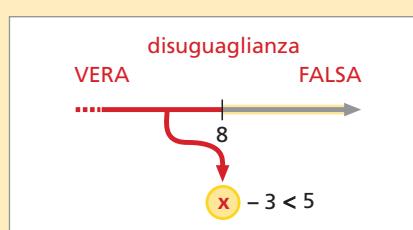
$$x = 1: \quad 1 - 3 < 5 \text{ vera,} \quad x = 5: \quad 5 - 3 < 5 \text{ vera,}$$

$$x = 8: \quad 8 - 3 < 5 \text{ falsa,} \quad x = 9: \quad 9 - 3 < 5 \text{ falsa,} \quad \dots$$

Come si può intuire, la disuguaglianza è vera per tutti i valori di x minori di 8, mentre è falsa per i valori di x maggiori o uguali a 8.

DEFINIZIONE**Disequazione**

Una disequazione è una disuguaglianza in cui compaiono espressioni letterali per le quali cerchiamo i valori di una o più lettere che rendono la disuguaglianza vera.



Le lettere per le quali si cercano i valori che rendono vera la disuguaglianza sono le **incognite** della disequazione.

Tutti i valori che soddisfano una disequazione costituiscono l'**insieme delle soluzioni**. Di solito, cercheremo le soluzioni nell'insieme \mathbb{R} dei numeri reali.

In questo capitolo ci occupiamo soltanto della risoluzione di **disequazioni di primo grado**, dette anche **disequazioni lineari**, a una incognita.

► Per esempio, nella disequazione

$$x - 3 < 5$$

l'insieme delle soluzioni è $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 8\}$, che per brevità indicheremo con:

$$x < 8.$$

I simboli usati

Nelle disequazioni può comparire uno di questi simboli:

- | | |
|---------------|---------------------------|
| $<$ minore; | \leq minore o uguale; |
| $>$ maggiore; | \geq maggiore o uguale. |

I simboli \leq e \geq indicano condizioni meno restrittive.

Per esempio, la disequazione $x + 4 \leq 6$ è verificata da tutti i numeri minori di 2 e anche dal numero 2, mentre la disequazione $x + 4 < 6$ è verificata soltanto da tutti i numeri minori di 2. In quest'ultimo caso, il numero 2 non è soluzione della disequazione.



▲ Figura 1 A ogni punto della retta corrisponde un numero reale e viceversa. I simboli $-\infty$ (meno infinito) e $+\infty$ (più infinito) non corrispondono ad alcun numero reale. Essi indicano soltanto che la retta è illimitata da entrambe le parti.

▼ Figura 2

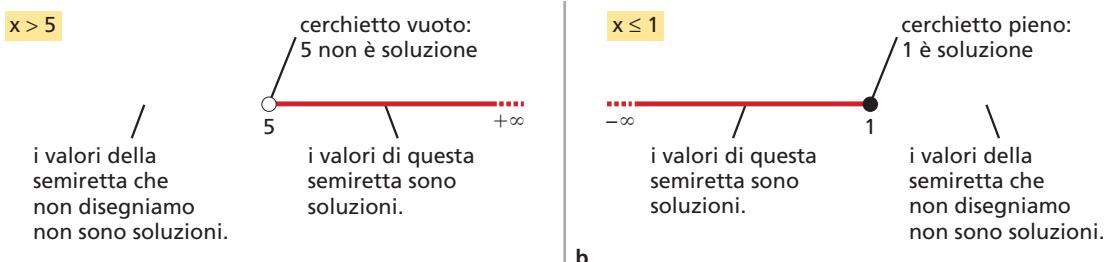
La rappresentazione delle soluzioni

Per rappresentare graficamente le soluzioni di una disequazione, possiamo utilizzare la retta orientata, i cui punti corrispondono ai numeri reali.

Sulla retta orientata faremo uso delle seguenti convenzioni:

- una *linea continua* rappresenta l'insieme delle soluzioni della disequazione;
- *non disegniamo* le parti della retta che non corrispondono a soluzioni;
- un *cerchietto pieno* su un punto indica che il valore corrispondente è una soluzione;
- un *cerchietto vuoto* su un punto indica che il valore corrispondente **non** è una soluzione.

ESEMPIO Rappresentiamo graficamente le soluzioni $x > 5$ e $x \leq 1$.



Spesso le soluzioni sono sottoinsiemi di \mathbb{R} costituiti da tutti i valori che precedono un certo numero, o da quelli che lo seguono, o dai valori compresi fra due numeri. Insiemi di questo tipo vengono detti **intervalli**. Parleremo quindi di **intervallo delle soluzioni**.

L'intervallo può essere indicato dalla coppia degli estremi, ordinati dal più piccolo al più grande, separati da un punto e virgola e racchiusi fra parentesi quadre. Per esempio, l'intervallo comprendente gli estremi a e b , con $a < b$, si indica $[a; b]$.

L'orientamento delle parentesi indica se gli estremi sono inclusi o esclusi:

$[a; b]$ indica che gli estremi sono inclusi;

$]a; b[$ indica che gli estremi sono esclusi;

$[a; b[$ indica che l'estremo di sinistra è incluso, mentre è escluso quello di destra;

$]a; b]$ indica che l'estremo di sinistra è escluso, mentre è incluso quello di destra.

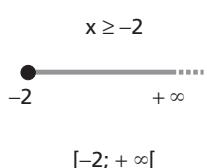
ESEMPIO L'intervallo $x > 5$ si può rappresentare così:

$$]5; +\infty[.$$

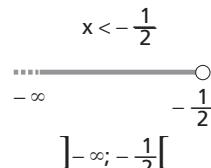
Infatti, sia 5 sia $+\infty$ sono esclusi.

► $-\infty$ e $+\infty$ non sono numeri, quindi, come estremi di intervalli, vanno **sempre esclusi**. L'intervallo $]-\infty; +\infty[$ è l'insieme \mathbb{R} .

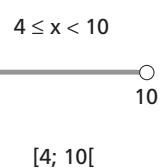
Consideriamo, in ognuno degli esempi della figura, i tre modi di rappresentare le soluzioni della rispettiva disequazione.



a. -2 è compreso fra le soluzioni: sulla retta è rappresentato da un cerchietto pieno; la parentesi quadra è rivolta verso -2 .



b. $-\frac{1}{2}$ non è soluzione: sulla retta è rappresentato da un cerchietto vuoto; la parentesi è rivolta dalla parte opposta a $-\frac{1}{2}$.



c. La scrittura $4 \leq x < 10$ significa che devono essere contemporaneamente vere le due condizioni $4 \leq x$ e $x < 10$. Le soluzioni sono comprese fra 4 (incluso) e 10 (escluso).

Un intervallo è **aperto** se non comprende i suoi estremi, è **chiuso** se li comprende.

▲ Figura 3

ESEMPIO

$\left[1; \frac{3}{2}\right]$ è un intervallo chiuso; $] -1; 0[$ è un intervallo aperto;

$\left[\frac{1}{3}; 5\right[$ è un intervallo chiuso a sinistra, aperto a destra;

$] -8; 0]$ è un intervallo aperto a sinistra, chiuso a destra.

► Per scrivere le seguenti soluzioni

$$\dots \circ \quad \circ \dots$$

possiamo usare due scritture:

$$x < 2 \vee x > 5,$$

dove \vee è il simbolo di disgiunzione logica;

$$]-\infty; 2[\cup]5; +\infty[,$$

dove \cup è il simbolo di unione di insiemi.

I vari tipi di disequazioni

Buona parte della terminologia e delle definizioni usate per le disequazioni è analoga a quella usata per le equazioni.

Una disequazione è:

- **lineare** se l'incognita è di primo grado;
- **numerica** se non compaiono altre lettere oltre all'incognita;
- **intera** se l'incognita compare soltanto nei numeratori delle eventuali frazioni presenti;
- **fratta** se l'incognita compare in almeno un denominatore delle eventuali frazioni presenti.

ESEMPIO

Disequazione numerica intera: $2x > \frac{3+x}{2}$.

Disequazione letterale intera: $\frac{x}{b} - \frac{3}{a} > \frac{2}{a}$.

Disequazione numerica frazionaria, o fratta: $\frac{5x-3}{1-x} > 0$.

Disequazione letterale fratta: $\frac{1}{x} > a$.

► Per risolvere le disequazioni utilizziamo concetti e principi analoghi a quelli già visti per le equazioni, tenendo conto delle proprietà delle disuguaglianze fra numeri che abbiamo esaminato nel paragrafo 1.

► Questo principio discende dalla proprietà di monotonia dell'addizione di una disuguaglianza numerica.

► Nell'esempio, possiamo anche dire che il termine x è stato *trasportato* al primo membro con il segno cambiato.

► Questo principio discende dalla proprietà di moltiplicazione di una disuguaglianza numerica per un numero positivo o negativo.

► Questa operazione corrisponde alla moltiplicazione per -1 dei membri della disequazione.

Le disequazioni equivalenti**DEFINIZIONE****Disequazioni equivalenti**

Due disequazioni sono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

ESEMPIO La disequazione $x + 1 < 3$ è equivalente alla disequazione $x < 2$.

Infatti sono entrambe soddisfatte per tutti i valori di x minori di 2.

Per risolvere le disequazioni, si usano regole che derivano dalle proprietà delle disuguaglianze numeriche.

PRINCIPIO**Primo principio di equivalenza**

Data una disequazione, si ottiene una disequazione a essa equivalente aggiungendo a entrambi i membri uno stesso numero o espressione.

ESEMPIO La disequazione $2x - 3 > x + 5$ è equivalente alla disequazione $x - 3 > 5$, ottenuta aggiungendo $-x$ a entrambi i membri.

In generale, **un termine può essere trasportato da un membro all'altro di una disequazione cambiandolo di segno**.

PRINCIPIO**Secondo principio di equivalenza**

Per trasformare una disequazione in una equivalente si può:

- moltiplicare (o dividere) entrambi i membri per uno stesso numero positivo;
- moltiplicare (o dividere) entrambi i membri per uno stesso numero negativo e cambiare il verso della disequazione.

In particolare, **se si cambia il segno di tutti i termini di una disequazione e si inverte il suo verso, si ottiene una disequazione equivalente**.

3. Le disequazioni intere

■ Le disequazioni numeriche intere

La strategia risolutiva delle disequazioni intere è del tutto simile a quella utilizzata per le equazioni.

ESEMPIO

1. Risolviamo la disequazione:

$$\frac{1}{3}x - 4 + 2x > \frac{3+x}{2}.$$

Eliminiamo i denominatori, moltiplicando entrambi i membri per 6 (il m.c.m. dei denominatori); dato che moltiplichiamo per un numero positivo, il verso della disequazione non cambia:

$$2x - 24 + 12x > 9 + 3x.$$

Trasportiamo i termini con l'incognita al primo membro, quelli noti al secondo membro e poi sommiamo i termini simili:

$$11x > 33.$$

Dividiamo i due membri per 11, cioè per il coefficiente di x :

$$x > 3.$$

L'intervallo delle soluzioni è $]3; +\infty[$.

2. Risolviamo la seguente disequazione:

$$\frac{3}{2}x - 4 < \frac{(x-2)}{2} + \frac{(5x+3)}{5}.$$

$$15x - 40 < 5x - 10 + 10x + 6$$

$$0 \cdot x < 36.$$

Qualunque valore sostituiamo a x , il prodotto $0 \cdot x$ vale sempre 0. Poiché la diseguaglianza $0 < 36$ è vera, la disequazione di partenza risulta **sempre verificata**. In tal caso, l'intervallo delle soluzioni è tutto \mathbb{R} ; come soluzione, scriviamo: $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. Risolviamo la disequazione:

$$3x - 2 - x > 4 + 2x + 1$$

$$2x - 2 > 5 + 2x$$

$$2x - 2x > 5 + 2$$

$$0 \cdot x > 7.$$

Qualunque valore sostituiamo a x , otteniamo sempre $0 > 7$, che è una diseguaglianza falsa, quindi la disequazione di partenza non risulta **mai verificata**.

L'intervallo delle soluzioni è l'insieme vuoto; la disequazione è **impossibile** e come soluzione scriviamo: $\nexists x \in \mathbb{R}$.

BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V24a



► Anche nelle disequazioni letterali, se non diamo indicazioni diverse, intendiamo che l'incognita sia la x .

■ Le disequazioni letterali intere

Anche nelle disequazioni letterali, come nelle equazioni dello stesso tipo, è spesso necessaria la discussione.

In generale, è sempre possibile trasformare ogni disequazione letterale di primo grado in una disequazione del tipo:

$$ax < b, \quad ax \leq b, \quad ax > b, \quad ax \geq b.$$

Risolviamo la disequazione $ax < b$ discutendo i seguenti tre casi:

$$a > 0; \quad a < 0; \quad a = 0.$$

- Se $a > 0$, si ottiene $x < \frac{b}{a}$.
- Se $a < 0$, si ottiene $x > \frac{b}{a}$.
- Se $a = 0$, la disequazione $0 \cdot x < b$ è sempre verificata se $b > 0$; non è mai verificata se $b \leq 0$.

Per gli altri tipi di disequazione valgono considerazioni analoghe.

ESEMPIO

La disequazione, nell'incognita x ,

$$k(x - 3) < 2x + 1$$

è intera perché l'incognita non compare al denominatore; è letterale perché presenta altre lettere oltre all'incognita.

Svolgiamo i calcoli:

$$kx - 3k < 2x + 1 \rightarrow kx - 2x < 3k + 1 \rightarrow (k - 2)x < 3k + 1.$$

Il segno del coefficiente di x dipende dal valore di k ; pertanto è necessaria la discussione, distinguendo i tre casi: $k - 2 > 0$, $k - 2 = 0$, $k - 2 < 0$.

- Se $k - 2 > 0$, ossia se $k > 2$, possiamo dividere entrambi i membri per $k - 2$, ottenendo una disequazione dello stesso verso:

$$x < \frac{3k + 1}{k - 2}.$$

- Se $k - 2 = 0$, ossia se $k = 2$, otteniamo:

$$x(2 - 2) < 3 \cdot 2 + 1$$

$$0 \cdot x < 7;$$

la disequazione è sempre verificata, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Se $k - 2 < 0$, ossia se $k < 2$, dividendo i due membri per una quantità negativa, dobbiamo invertire il senso della disequazione:

$$x > \frac{3k + 1}{k - 2}.$$

► La disequazione $(k - 2)x < 3k + 1$ è del tipo $ax < b$, in cui $a = k - 2$ e $b = 3k + 1$.

► Uno stesso valore numerico può essere soluzione della disequazione per un valore di k e non esserlo per un altro. Per esempio, se $k = 0$, il numero 11 è soluzione della disequazione? E se $k = 3$?



PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Pensieri e parole



Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Le società RapidMail e VeloPost offrono il servizio di recapito telegrammi all'estero a due diverse tariffe:

Tariffa RM: 0,3 euro a parola e in più costo fisso di 7 euro;
Tariffa VP: 0,8 euro a parola.

ALESSANDRO: «Davvero passi le vacanze in Francia? Se ti mando il telegramma TVTB ALESSANDRO, con VP spendo davvero poco».

LUISA: «Ma se vuoi essere romantico e mi mandi venti parole, ti conviene RM!».

▶ Qual è il numero di parole oltre il quale conviene la tariffa RM?

■ Lo studio del segno di un prodotto

Consideriamo la disequazione seguente, in cui il primo membro è un prodotto di binomi:

$$(x - 3)(2x + 5) > 0.$$

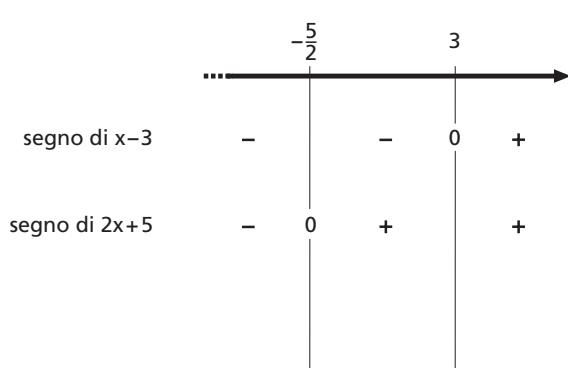
Per risolverla bisogna **studiare il segno** del prodotto al variare dell'incognita x .

Studiamo il segno dei due fattori singolarmente e rappresentiamo i risultati in uno schema grafico:

$$x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$$

$$2x + 5 > 0 \rightarrow x > -\frac{5}{2}.$$

▼ Figura 4



a. Rappresentiamo i valori $-\frac{5}{2}$ e 3 sulla retta orientata e, per indicare il segno di $x-3$ e di $2x+5$, mettiamo il segno + negli intervalli con segno positivo e il segno - negli intervalli con segno negativo. Scriviamo 0 dove i binomi si annullano.

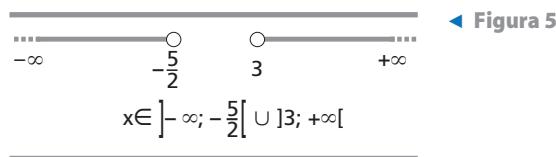
b. Applichiamo la regola dei segni in ognuno degli intervalli. Per esempio, per $x < -\frac{5}{2}$, si ha $- \cdot - = +$. Per $x = -\frac{5}{2}$ e $x = 3$, il prodotto è 0.

La disequazione richiede che il prodotto sia positivo, quindi l'insieme delle soluzioni è dato da:

$$x < -\frac{5}{2} \vee x > 3.$$

Possiamo rappresentare le soluzioni anche negli altri due modi che conosciamo (figura 5), mediante:

- *rappresentazione grafica*: ricordiamo che un cerchietto pieno indica che il valore corrispondente è soluzione, uno vuoto che non lo è;
- *rappresentazione con intervalli*: ricordiamo che la parentesi è rivolta verso l'interno se il valore estremo dell'intervallo è soluzione, verso l'esterno, come in questo caso, se non lo è.



◀ Figura 5

4. Le disequazioni fratte

Le disequazioni sono fratte (o frazionarie) quando contengono l'incognita in almeno un denominatore.

■ Le disequazioni numeriche fratte

Le disequazioni fratte sono sempre trasformabili in una forma del tipo:

$$\frac{N(x)}{D(x)} < 0, \quad \frac{N(x)}{D(x)} > 0, \quad \text{oppure} \quad \frac{N(x)}{D(x)} \leq 0, \quad \frac{N(x)}{D(x)} \geq 0,$$

dove $N(x)$ e $D(x)$ rappresentano due polinomi nella variabile x .

ESEMPIO

Scriviamo la disequazione $\frac{2x-4}{1-x} > 1$ nella forma $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$:

$$\frac{2x-4}{1-x} - 1 > 0.$$

Riduciamo allo stesso denominatore:

$$\frac{2x-4-1+x}{1-x} > 0$$

$$\frac{3x-5}{1-x} > 0.$$

La disequazione è scritta nella forma $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$, con:

$$N(x) = 3x - 5 \quad \text{e} \quad D(x) = x - 1.$$

Quando abbiamo una disequazione nella forma $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$, non possiamo eliminare il denominatore, come quando operiamo con le equazioni, perché il segno complessivo della frazione dipende anche dal segno del denominatore.

Per risolvere la disequazione dobbiamo determinare per quali valori di x la frazione è positiva, nulla o negativa.

Questa parte della risoluzione prende il nome di *studio del segno della frazione*.

■ Lo studio del segno di una frazione

Per esaminare il segno di una frazione del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$, occorre studiare separatamente il segno del numeratore e quello del denominatore.

Studiare il segno di un polinomio nella variabile x vuol dire cercare per quali valori di x il polinomio è positivo, per quali è negativo, per quali si annulla.

■ La risoluzione di una disequazione fratta

Per risolvere la disequazione

$$\frac{N(x)}{D(x)} > 0,$$

si può porre $N(x) > 0$ e $D(x) > 0$, e controllare in quali intervalli risultano concordi i segni di $N(x)$ e $D(x)$.

ESEMPIO Risolviamo la seguente disequazione:

$$\frac{3x - 5}{1 - x} > 0.$$

Studiamo il segno del numeratore N , ponendo $N > 0$:

$$N > 0 \Leftrightarrow 3x - 5 > 0 \rightarrow x > \frac{5}{3}.$$

Analogamente, studiamo il segno del denominatore D , ponendo $D > 0$:

$$D > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \rightarrow x < 1.$$

Rappresentiamo i risultati con uno schema grafico (figura 6), che ci permette di studiare facilmente il segno di $\frac{N}{D}$.

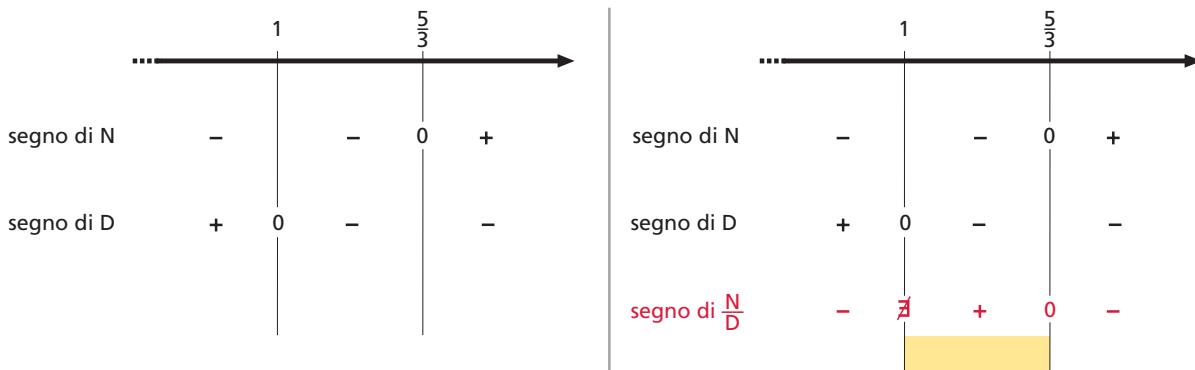


BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ► V25a

► Per brevità indichiamo $N(x)$ con N e $D(x)$ con D .

► Per studiare il segno, è del tutto equivalente porre $N < 0$ e $D < 0$.



a. Rappresentiamo sulla retta orientata i valori di x per i quali $N = 0$, cioè $\frac{5}{3}$, e $D = 0$, cioè 1. Mettiamo il segno + negli intervalli con segno positivo e il segno - negli intervalli con segno negativo. Scriviamo 0 dove si annullano N e D .

b. Applichiamo le regole dei segni in ognuno degli intervalli. Per esempio, per $x < 1$ si ha $- \cdot + = -$. Poiché per $x = 1$ si ha $D = 0$, $\frac{N}{D}$ non esiste. Per $x = \frac{5}{3}$, $N = 0$, quindi anche $\frac{N}{D} = 0$. L'intervallo di soluzioni è $\left]1; \frac{5}{3}\right[$.

▲ Figura 6

La disequazione richiede che la frazione sia positiva, quindi l'intervallo delle soluzioni è:

$$\left]1; \frac{5}{3}\right[.$$

■ Le disequazioni letterali fratte

Per imparare a risolvere le disequazioni letterali fratte, consideriamo un esempio.

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $\frac{1}{x} > a$ nell'incognita x .

Essa è equivalente alla disequazione $\frac{1 - ax}{x} > 0$.

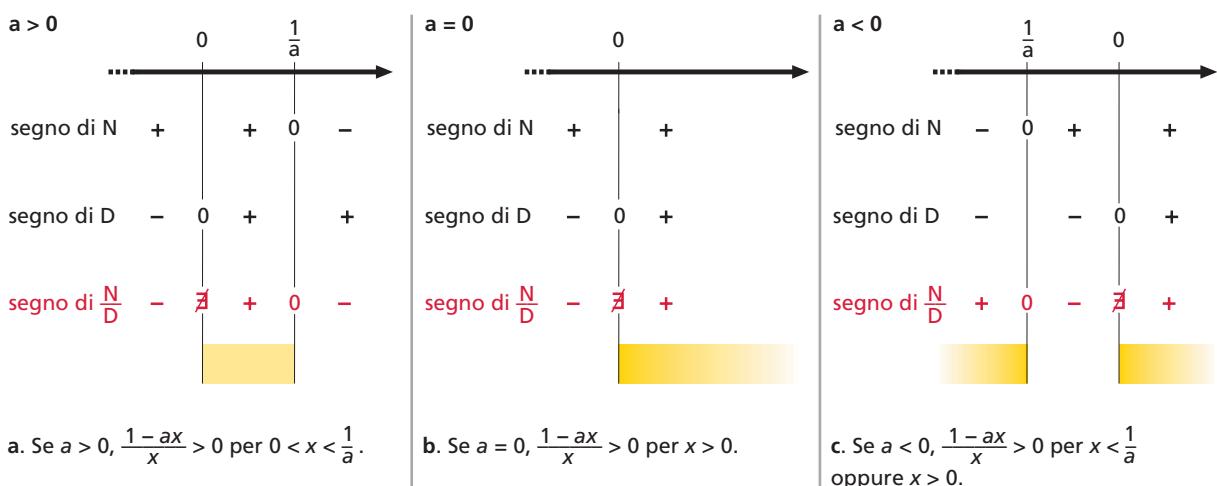
Per lo studio del segno poniamo $N > 0$ e $D > 0$, tenendo conto che i segni variano al variare di a e che quindi è necessaria la discussione.

$$N > 0 \Leftrightarrow 1 - ax > 0 \rightarrow ax < 1.$$

- Se $a > 0$, $N > 0$ quando $x < \frac{1}{a}$.
- Se $a = 0$, si ha $0 \cdot x < 1$, quindi $N > 0$ per qualsiasi valore di x .
- Se $a < 0$, $N > 0$ quando $x > \frac{1}{a}$.

$$D > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Prepariamo tre schemi, a seconda dei valori di a .



Dunque lo stesso numero può essere o non essere soluzione dell'equazione, a seconda del valore di a .

▲ Figura 7

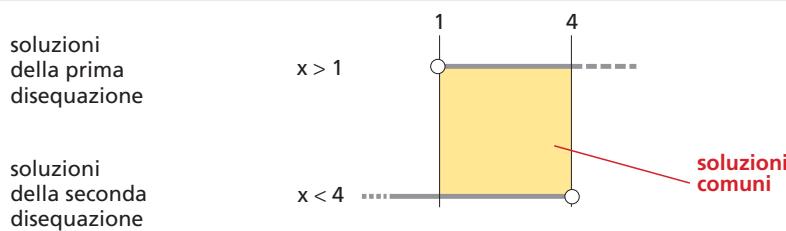
5. I sistemi di disequazioni

Consideriamo le disequazioni:

$$x - 1 > 0 \quad \text{e} \quad 4 - x > 0.$$

Esistono valori di x che soddisfano contemporaneamente le due disequazioni. Per esempio: $2, \frac{3}{2}, 3, \frac{7}{3}, \dots$

Per cercare le soluzioni comuni, risolviamo le due disequazioni: la prima è soddisfatta per $x > 1$, la seconda per $x < 4$.



Le due disequazioni sono soddisfatte contemporaneamente nell'intervallo aperto $]1; 4[$.

Diremo che i valori di x tali che $1 < x < 4$ risolvono il **sistema** formato dalle due disequazioni.

DEFINIZIONE

Sistema di disequazioni

Un sistema di disequazioni è un insieme di due o più disequazioni in cui compaiono le stesse incognite, per il quale si cercano i valori da attribuire alle incognite che verificano contemporaneamente tali disequazioni.



BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ▶ V26a

◀ Figura 8 La semiretta di origine 1 rappresenta le soluzioni della prima disequazione; la semiretta di origine 4 rappresenta le soluzioni della seconda. Sottointendiamo i simboli $-\infty$ e $+\infty$. Le soluzioni comuni alle due disequazioni sono rappresentate dal tratto comune alle due semirette, cioè dall'intervallo aperto $]1; 4[$.

► Un sistema per il quale non esistono soluzioni è detto **impossibile**.

► **Problemi e disequazioni**

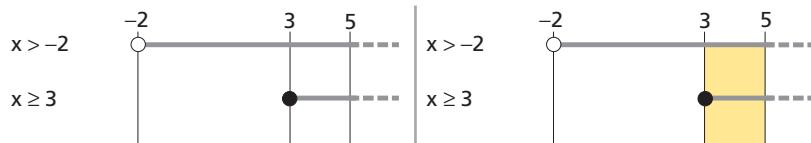
Negli esercizi, a pagina 618, trovi esempi di problemi che si risolvono mediante le disequazioni lineari.

► **Figura 9** Per trovare le soluzioni di un sistema si rappresentano le soluzioni di ogni disequazione in modo da poter individuare gli intervalli di soluzioni comuni a tutte le disequazioni.

ESEMPIO

Per risolvere il seguente **sistema di tre disequazioni** determiniamo le soluzioni di ognuna delle disequazioni:

$$\begin{cases} 2x + 4 > 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ 5 - x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \geq 3 \\ x < 5 \end{cases}$$



a. Rappresentiamo le soluzioni.

b. Coloriamo la parte che rappresenta le soluzioni comuni.

Le soluzioni del sistema di disequazioni sono date dall'intervallo $[3; 5[$, ossia dai valori di x tali che $3 \leq x < 5$.

ESPLORAZIONE: SPESE E RICAVI NELLA PRODUZIONE

Quando un'impresa produce qualcosa – bulloni o automobili, libri o pizze – deve cercare di avere un utile da questa produzione. Deve cioè evitare di andare in perdita.

In generale, quali sono i limiti che deve tenere in considerazione? Sostanzialmente sono di due tipi. C'è un vincolo dovuto alle risorse: se ho un quintale di tela per aquiloni e per un aquilone ne servono 50 grammi, non ne posso produrre più di un certo numero. Inoltre devo tenere conto che nella produzione ci sono sempre degli scarti: diciamo, per esempio, che $\frac{1}{100}$ della tela va sprecata.

Se x è il numero di aquiloni prodotti, il vincolo delle risorse si scrive, in grammi, come:

$$100\,000 \geq 50x + 1000.$$

C'è poi un secondo vincolo dovuto all'avviamento delle macchine per la produzione. È evidente che non conviene far partire una macchina per produrre un solo aquilone, né accendere il forno di una pizzeria per cuocere una sola pizza. Ogni imprenditore sa qual è il numero minimo di aquiloni o di pizze che deve produrre perché la messa in moto delle sue macchine non sia uno spreco.

Questa seconda condizione è nella forma:

$$x > x_{\min},$$

dove x_{\min} è proprio il numero minimo di pezzi che deve produrre.

La soluzione del sistema formato dalle due disequazioni lineari ci dice quanti pezzi si devono produrre per non avere una perdita. Naturalmente il modello matematico che abbiamo descritto è molto semplificato rispetto a quelli effettivamente utilizzati nella realtà. Tuttavia, serve per capire il ruolo importante che le disequazioni giocano in modelli come questi.

IN CINQUE SLIDE



Il film *A Beautiful Mind* racconta la vita del matematico John Nash.

John Nash ha vinto il premio Nobel nel 1994, grazie ai suoi studi relativi a modelli matematici applicati all'economia. Cerca notizie sulla sua vita e sul film e realizza una presentazione multimediale.

Cerca nel web: John Nash, A Beautiful Mind.

6. Equazioni e disequazioni con valori assoluti

Dalla definizione della funzione valore assoluto si ricava che il valore assoluto di un'espressione letterale coincide con l'espressione se questa è positiva o nulla, con il suo opposto se è negativa.

ESEMPIO Studiamo il valore assoluto dell'espressione $|x - 1|$.

Se $x - 1 \geq 0$, ossia se $x \geq 1$, il valore assoluto è $|x - 1| = x - 1$; se $x - 1 < 0$, ossia se $x < 1$, il valore assoluto è l'opposto dell'espressione, cioè $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1 = 1 - x$. In sintesi (figura 10):

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Utilizziamo questa proprietà per risolvere un'equazione che contiene il valore assoluto della variabile o di un'espressione con la variabile.

ESEMPIO Risolviamo l'equazione:

$$|4x - 8| - 3 = 2x - 9.$$

Studiamo il segno dell'espressione all'interno del valore assoluto (figura 11):

$$4x - 8 \geq 0 \rightarrow 4x \geq 8 \rightarrow x \geq 2.$$

Pertanto, $|4x - 8| = -(4x - 8) = -4x + 8$ se $x < 2$; $|4x - 8| = 4x - 8$ se $x \geq 2$.

L'equazione ha come soluzioni quelle dei due sistemi, che risolviamo:

Primo sistema

$$\begin{cases} x < 2 \\ -4x + 8 - 3 = 2x - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ -4x - 2x = -9 - 8 + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ -6x = -14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \end{cases}$$

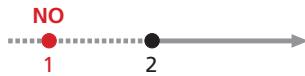
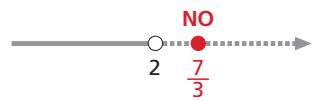
Secondo sistema

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 4x - 8 - 3 = 2x - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 4x - 2x = -9 + 8 + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

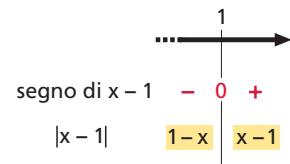


▶ Nella funzione

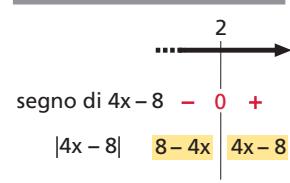
$$y = |x|$$

y vale:

$$\begin{aligned} x &\text{ se } x \geq 0, \\ -x &\text{ se } x < 0. \end{aligned}$$



▲ Figura 10



▲ Figura 11

Nel primo sistema, $\frac{7}{3}$ non è accettabile, perché non è minore di 2.

Nel secondo sistema, 1 non è accettabile, perché non è maggiore o uguale a 2.

Nessuno dei due sistemi ha soluzione; quindi, l'equazione data è impossibile.

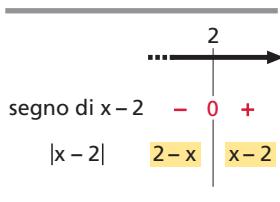
■ La risoluzione delle disequazioni con valori assoluti

Anche per risolvere le disequazioni nelle quali compare il valore assoluto dell'incognita, o di un'espressione contenente l'incognita, si esamina il segno di ogni espressione all'interno di un modulo.

ESEMPIO Risolviamo la seguente disequazione:

$$|x - 2| < 3x + 6.$$

Al solito, studiamo il segno all'interno del modulo (figura 12):



▲ Figura 12

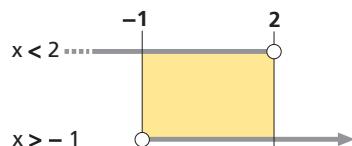
La disequazione ha come soluzioni quelle dei due sistemi, che risolviamo:

Primo sistema

$$\begin{cases} x < 2 \\ -x + 2 < 3x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ -4x < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x > -1 \end{cases}$$



▲ Figura 13

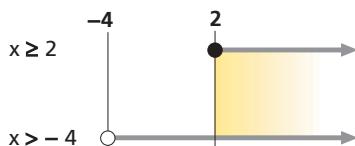
La soluzione è $-1 < x < 2$.

Secondo sistema

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x - 2 < 3x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ -2x < 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x > -4 \end{cases}$$

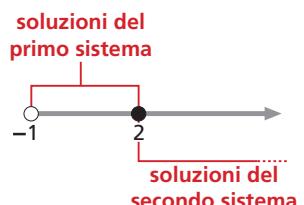


▲ Figura 14

La soluzione è $x \geq 2$.

Uniamo le soluzioni ottenute, rappresentandole insieme sulla stessa retta.

La soluzione della disequazione data è $x > -1$.



► Figura 15



Ad alta quota!

...fino a che quota può volare una mongolfiera?

Si può studiare il comportamento di una mongolfiera posta nell'atmosfera ricordando il principio di Archimede: *un corpo immerso in un fluido è soggetto a una forza diretta verso l'alto uguale al peso del volume di fluido spostato.*

Poiché anche l'aria è un fluido, ogni corpo nell'atmosfera è sottoposto a una forza di Archimede, detta in questo caso «spinta aerostatica». Si deduce quindi che una mongolfiera di peso P_M , che sposta un volume V di aria di peso P_A , sale verso l'alto quando la spinta aerostatica di intensità P_A è maggiore della forza peso P_M della mongolfiera, cioè: $P_A > P_M$.

Poiché ogni corpo ha massa direttamente proporzionale al proprio volume secondo la densità d del materiale di cui è costituito, ovvero $m = d \cdot V$, l'ultima diseguaglianza, $m_A > m_M$, si può riscrivere come:

$$d_A \cdot V > d_M \cdot V \rightarrow d_A > d_M.$$

In conclusione, la mongolfiera vola in alto solamente se ha una densità minore di quella dell'aria. Nel 1783, i fratelli Jacques Étienne e Joseph Michel Montgolfier realizzarono questa condizione riscaldando l'aria contenuta in un pallone aerostatico. Questo risali nell'aria circostante più fredda, quindi più densa, per più di un chilometro, inaugu-

→ Il quesito completo a pag. 571

alla quale la densità dell'aria sarà uguale a quella della mongolfiera e la spinta di Archimede uguale al peso del pallone. In tale situazione la salita si arresta. Cerchiamo di valutare le quote x permesse a una mongolfiera di densità d_M .

Immaginiamo per semplicità che la diminuzione della densità dell'aria sia di tipo lineare in x , cioè:

$$d_A(x) = d_0 - kx \quad (\text{con } x \geq 0),$$

dove d_0 è la densità a quota $x = 0$ e k è un'opportuna costante positiva.

Sostituendo l'espressione di $d_A(x)$ nella relazione $d_A \geq d_M$ (tenendo così conto anche del caso in cui $d_A = d_M$):

$$d_0 - kx \geq d_M \quad (\text{con } x \geq 0).$$

Si tratta di una disequazione di primo grado in x le cui soluzioni rappresentano le altezze x consentite alla mongolfiera. Risolviamola:

$$x \leq \frac{d_0 - d_M}{k}.$$

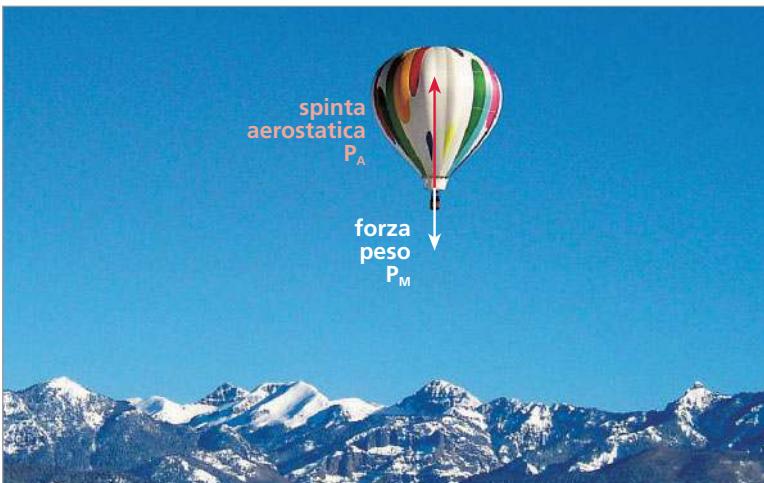
L'altezza massima raggiungibile è il valore $x_{\max} = \frac{d_0 - d_M}{k}$.

Per esempio, data la densità dell'aria a livello del mare $d_0 = 1,29 \text{ kg/m}^3$ e la costante $k = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}^4$, se la mongolfiera ha una densità $d_M = 1,22 \text{ kg/m}^3$, la quota massima che quest'ultima può raggiungere è:

$$x_{\max} =$$

$$= \frac{(1,29 - 1,22) \text{ kg/m}^3}{4,5 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}^4} \approx 1556 \text{ m.}$$

In questo caso, il pallone può alzarsi fino a circa 1,5 km di quota.



I termini di tale diseguaglianza possono essere espressi ricordando che la forza peso di un qualsiasi corpo è direttamente proporzionale alla sua massa tramite la costante $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$, cioè $P = m \cdot g$:

$$P_A > P_M \rightarrow m_A \cdot g > m_M \cdot g \rightarrow m_A > m_M.$$

rando l'epoca del volo umano. Osserviamo ora che la densità dell'atmosfera d_A non è una grandezza costante, ma diminuisce con l'altitudine x fino a diventare praticamente nulla intorno ai 30 km d'altezza. Per quanto la mongolfiera possa avere una bassa densità, ci sarà quindi una quota massima x_{\max}

LA TEORIA IN SINTESI

Le disequazioni lineari

1. Le disuguaglianze numeriche

Proprietà delle disuguaglianze, valide $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

- monotonia dell'addizione:

$$a < b \rightarrow a + k < b + k \quad (\forall k \in \mathbb{R});$$

- moltiplicazione per un numero positivo:

$$a < b \rightarrow ak < bk \quad (\forall k \in \mathbb{R}^+);$$

- moltiplicazione per un numero negativo:

$$a < b \rightarrow ak > bk \quad (\forall k \in \mathbb{R}^-);$$

- reciproci concordi:

$$a < b \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \quad (\forall a, b \text{ concordi, non nulli}).$$

2. Le disequazioni di primo grado

Una disequazione è una disuguaglianza in cui compaiono espressioni letterali per le quali cerchiamo i valori di una o più lettere che rendono la disuguaglianza vera. Tutti i valori che soddisfano una disequazione costituiscono l'insieme delle **soluzioni** della disequazione, che può essere rappresentato in diversi modi.

ESEMPIO L'insieme delle soluzioni della disequazione $x - 3 > 0$ è:

$$x > 3 \quad \text{oppure} \quad]3; +\infty[$$

Per risolvere le disequazioni applichiamo i **principi di equivalenza**, trasformando la disequazione data in disequazioni a essa equivalenti, via via più semplici. Se in una disequazione moltiplichiamo (o dividiamo) ambedue i membri per uno stesso numero negativo, dobbiamo cambiare il verso della disequazione.

ESEMPIO

$$5 - x > 3 \rightarrow -x > 3 - 5 \rightarrow -x > -2 \rightarrow x < 2.$$

3. Le disequazioni intere

Una disequazione è intera se non contiene l'incognita al denominatore. Può avere soluzioni, oppure no. In alcuni casi può essere sempre verificata.

ESEMPIO L'intervallo delle soluzioni di

$$x + 3 > 0 \text{ è } x > -3;$$

$0 \cdot x < 2$ è sempre verificata;

$0 \cdot x < -2$ non è mai verificata.

4. Le disequazioni fratte

In una disequazione fratta **non** si possono eliminare i denominatori contenenti l'incognita, come si fa nelle equazioni. Bisogna invece:

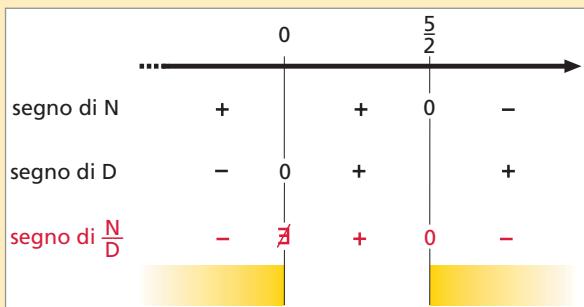
- trasformare la disequazione in modo che il primo membro sia una frazione del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$, in cui $N(x)$ e $D(x)$ sono polinomi in x , e il secondo membro sia 0;
- risolvere $N(x) > 0$ e $D(x) > 0$ per studiare il segno del numeratore e del denominatore;
- studiare graficamente il segno della frazione, come nell'esempio seguente.

ESEMPIO

$$\frac{5}{x} - 2 < 0 \rightarrow \frac{5 - 2x}{x} < 0$$

$$N(x) > 0 \text{ se } 5 - 2x > 0 \rightarrow x < \frac{5}{2};$$

$$D(x) > 0 \text{ se } x > 0.$$



Soluzioni: $x < 0 \vee x > \frac{5}{2}$

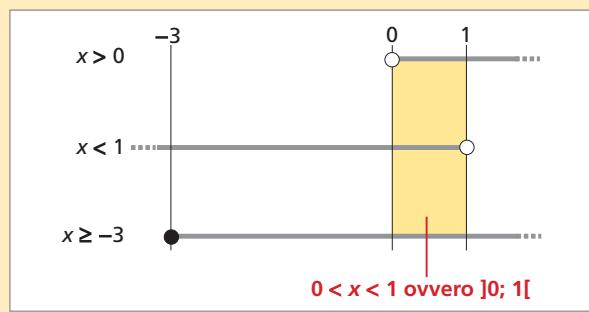
Se una disequazione fratta è letterale, si procede come per le disequazioni fratte numeriche, però occorre aggiungere la discussione quando si risolvono le due disequazioni $N(x) > 0$ e $D(x) > 0$.

5. I sistemi di disequazioni

Un **sistema di disequazioni** è un insieme di due o più disequazioni in cui compaiono le stesse incognite, per il quale si cercano i valori da attribuire alle incognite che rendono tali disequazioni verificate contemporaneamente.

Per trovare le soluzioni di un sistema di disequazioni si rappresentano su rette orizzontali le soluzioni di ogni disequazione. Le soluzioni del sistema sono date dagli intervalli comuni a tutte le soluzioni.

ESEMPIO $\begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \\ x \geq -3 \end{cases}$



Un sistema che non ha soluzioni si dice **impossibile**.

6. Equazioni e disequazioni con valori assoluti

Il **valore assoluto** di un'espressione è uguale all'espressione stessa se è positiva o nulla, mentre è uguale all'opposto dell'espressione se è negativa.

ESEMPIO

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x + 2 \geq 0 \\ -(x + 2) & \text{se } x + 2 < 0 \end{cases}$$

Un'equazione contenente un valore assoluto è equivalente all'unione di due (o più) sistemi misti, formati da una disequazione e da un'equazione.

ESEMPIO

$|x + 2| = 7x$ equivale a:

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x + 2 = 7x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < -2 \\ -x - 2 = 7x \end{cases}$$

Risolviamo:

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < -2 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzione $\frac{1}{3}$, il secondo è impossibile, quindi l'equazione ha soluzione $\frac{1}{3}$.

Una disequazione contenente un valore assoluto è equivalente all'unione di due (o più) sistemi di disequazioni.

ESEMPIO

$|x - 1| < 6x + 2$ equivale a:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x - 1 < 6x + 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 1 \\ -x + 1 < 6x + 2 \end{cases}$$

Risolviamo:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x > -\frac{3}{5} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 1 \\ x > -\frac{1}{7} \end{cases}$$

$$x \geq 1 \quad \vee \quad -\frac{1}{7} < x < 1$$

Unendo le soluzioni, otteniamo come soluzioni della disequazione iniziale:

$$x > -\frac{1}{7}.$$

1. Le disuguaglianze numeriche

RIFLETTI SULLA TEORIA

1

VERO O FALSO?

- a) Se due disuguaglianze hanno lo stesso verso, allora hanno entrambe il simbolo $<$ o $>$.
- b) Aggiungendo un numero negativo a entrambi i membri di una disuguaglianza, si ottiene una disuguaglianza di verso opposto.
- c) Moltiplicando entrambi i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero si ottiene una disuguaglianza dello stesso verso.
- d) Dividendo entrambi i membri di una disuguaglianza per un numero positivo si ottiene una disuguaglianza dello stesso verso.
- e) La disuguaglianza fra i reciproci di due numeri negativi ha verso contrario rispetto a quella fra i numeri stessi.

2

È data la disuguaglianza $-2 < 3$.

- a) Trova un numero che, sommato a entrambi i membri della disuguaglianza, consenta l'applicazione della proprietà dei reciproci.
- b) Determina un numero che, sottratto a entrambi i membri della disuguaglianza, non consenta di applicare la proprietà dei reciproci.

3

TEST Se fra tre numeri $x, y, z \in \mathbb{R}$ vale la relazione $0 < x < y < z$, quale delle seguenti affermazioni è falsa?

- [A] $\frac{1}{z} < \frac{1}{x}$ [B] $z - y > 0$ [C] $x^2 < y^2$ [D] $2z - y - x > 0$ [E] $x - 2y > 0$

ESERCIZI

COMPLETA inserendo i simboli $<$, $>$.

4 $\frac{7}{3} \dots 2$; $0 \dots -4$; $\frac{1}{4} \dots \frac{1}{3}$; $-\frac{2}{5} \dots 1$.

5 $-8 \dots -3$; $-6 \dots 0$; $\frac{6}{7} \dots \frac{5}{8}$; $-3 \dots -5$.

6 Se $a > b$: $-3a \dots -3b$; $-a \dots -b$; $a - 4 \dots b - 4$.

7 Se $a < b$: $\frac{1}{5}a \dots \frac{1}{5}b$; $a + 9 \dots b + 9$; $-a \dots -b$.

Scrivi ogni disuguaglianza in verso contrario. (Per esempio, se $3 > -10$, scrivi $-10 < 3$.)

8 $-2 < 5$; $4 > 1$; $0 > -\frac{1}{2}$; $3 > 2$.

9 $\frac{1}{2} < 4$; $-\frac{1}{8} > -\frac{1}{2}$; $0 < 6$; $0 > -6$.

Per ogni diseguaglianza fra due numeri concordi, scrivi quella soddisfatta dai reciproci dei numeri. Verifica le due diseguaglianze posizionando i quattro numeri su una stessa retta.

10 $1 < 2;$

$-8 > -10.$

11 $10 < 100;$

$-4 > -5.$

Somma membro a membro le seguenti coppie di diseguaglianze dello stesso verso e verifica che si ottiene ancora una diseguaglianza dello stesso verso.

12 $7 > 5;$

$3 > 2.$

14 $8 - 1 < 8 \cdot 2;$

$-5 \cdot 2 < -6 - 2.$

13 $15 < 20;$

$-5 < -1.$

15 $5 + 2 \cdot 3 > 1 + 2 \cdot 4;$

$9 > -9.$

Moltiplica membro a membro le seguenti coppie di diseguaglianze fra numeri positivi e verifica che ottieni ancora diseguaglianze dello stesso verso.

16 $4 > 1;$

$7 > 5.$

18 $\frac{3}{2} > 1;$

$\frac{17}{8} > 2.$

17 $2 < 7;$

$6 < 10.$

19 $\frac{3}{2} < \frac{7}{3};$

$\frac{7}{3} < \frac{16}{5}.$

2. Le disequazioni di primo grado

→ Teoria a pag. 573

RIFLETTI SULLA TEORIA

20 VERO O FALSO?

- a) Se in una diseguaglianza è presente una lettera variabile, allora si ha una disequazione.
- b) Nelle disequazioni non valgono le proprietà delle diseguaglianze.
- c) In generale, le disequazioni di primo grado hanno come soluzione un unico valore.
- d) Le disequazioni possono essere intere, numeriche, letterali o fratte, analogamente alle equazioni.
- e) L'intervallo delle soluzioni di una disequazione lineare contiene un numero infinito di valori.

21

TEST Solamente uno dei seguenti numeri appartiene all'insieme delle soluzioni della disequazione $-x < -6$. Quale?

- A** 10 **B** 6 **C** $\frac{1}{6}$ **D** $-\frac{1}{6}$ **E** -6

Le disequazioni equivalenti

22 VERO O FALSO?

- a) Due disequazioni si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.
- b) Due disequazioni con le stesse soluzioni possono non essere equivalenti.
- c) Se moltiplico entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero diverso da 0, ottengo una disequazione a essa equivalente.
- d) Due disequazioni equivalenti hanno lo stesso verso.

23

ASSOCIA ogni disequazione della prima riga con la sua equivalente della seconda riga.

1. $2x - 1 < 1$ 2. $2x < 1$ 3. $-2x < -1$ 4. $-1 > 2x$

A. $x < -\frac{1}{2}$ B. $x > \frac{1}{2}$ C. $x < 1$ D. $x < \frac{1}{2}$

24

COMPLETA le seguenti affermazioni.

- Applicando il principio di equivalenza, la disequazione $3x + 4 \leq 2$ diventa $3x \leq \dots$.
- Applicando il principio di equivalenza, la disequazione $-x \leq 3$ diventa $x \geq \dots$.
- Applicando il primo principio di equivalenza e poi il secondo, la disequazione $-2x + 3 \leq 2$ diventa $-2x \leq \dots$ e poi $x \dots$.
- Applicando il secondo principio di equivalenza e poi il primo, la disequazione $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \leq 1$ diventa $x - 2 \leq \dots$ e poi $x \leq \dots$.

25

TEST Sono date le tre disequazioni:

a) $3(x - 3) > 7x + 5$; b) $3(x - 3) > 7$; c) $3(3 - x) > 7(x - 3)$.

Fra le seguenti, qual è l'unica affermazione *vera*?

- [A] $x = 0$ appartiene alle soluzioni di a).
- [B] $x = 5$ appartiene alle soluzioni di b).
- [C] $x = 4$ non appartiene né alle soluzioni di a), né a quelle di b), né a quelle di c).
- [D] a) e b) sono equivalenti perché hanno il primo membro uguale.
- [E] a) e c) sono equivalenti perché hanno lo stesso verso.

ESERCIZI

■ Le soluzioni di una disequazione

Di fianco a ogni disequazione sono scritti alcuni valori. Determina quali sono soluzioni e quali non lo sono.

26 $a - 3 > 5$ $a = 8$; $a = \frac{9}{2}$; $a = \frac{17}{2}$; $a = \frac{28}{3}$.

27 $y + 4 \leq 6$ $y = 2$; $y = \frac{3}{2}$; $y = \frac{1}{3}$; $y = 0$.

28 $\frac{3x - 2}{4} - \frac{x}{2} > 2x - 3$ $x = 1$; $x = \frac{3}{2}$; $x = -2$; $x = 0$.

29 $-x + \frac{3}{2} \leq \frac{2x}{5} - \frac{1}{3} + 2x$ $x = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{1}{2}$; $x = 1$; $x = \frac{3}{4}$.

30 $x + 3 \geq -\frac{3}{2} + \frac{x}{5} - 6x$ $x = -\frac{1}{2}$; $x = 2$; $x = -1$; $x = 0$.

La rappresentazione degli intervalli

■ ESERCIZIO GUIDA

31 Scriviamo i seguenti intervalli (o unioni di intervalli) utilizzando le parentesi quadre e rappresentiamoli graficamente:

- $x > 1$;
- $0 < x < 2$;
- $-1 \leq x \leq 1$;
- $x \leq 3 \vee x \geq 5$.

a) $] 1; +\infty[$ 

L'estremo 1 è **escluso**: abbiamo scritto $] 1; +\infty[$; graficamente, 1 è rappresentato da un cerchietto vuoto.

Poiché $+\infty$ non è un numero reale, ma un simbolo che rappresenta una quantità «più grande» di qualsiasi numero reale, abbiamo scritto $] 1; +\infty[$.

b) $] 0; 2[$ 

I due estremi sono **esclusi**: abbiamo scritto $] 0; 2[$ e i due cerchietti sono vuoti.

c) $[-1; 1]$ 

Gli estremi -1 e 1 sono **inclusi**: abbiamo scritto $[-1; 1]$ e i due cerchietti sono pieni.

d) $x \leq 3 \vee x \geq 5$ è l'unione dei due intervalli $x \leq 3$ e $x \geq 5$:

 $]-\infty; 3] \cup [5; +\infty[$ 

Anche in questo caso i numeri 3 e 5 sono inclusi nell'intervallo e i cerchietti sono pieni. Il simbolo \cup indica l'unione di insiemi.

Rappresenta graficamente gli insiemi dei valori di $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano le seguenti diseguaglianze. Scrivili poi mediante le parentesi quadre.

32 $0 < x < 1$; $-3 \leq x \leq 1$; $\frac{4}{5} < x \leq \frac{5}{4}$; $-\frac{1}{2} \leq x < 6$.

33 $x > 3$; $x \leq 0$; $x \geq \frac{7}{5}$; $x < \frac{7}{5}$.

34 $x \leq a$; $x > b$; $b < x \leq c$; $x \geq b$.

35 $x < -\frac{1}{2} \vee x > 0$; $x \leq 0 \vee x > 1$; $x \leq -\frac{1}{2} \vee x > 3$; $x < 7 \vee x > 9$.

36 $x < 3 \vee x \geq \frac{10}{3}$; $x \leq -1 \vee x \geq 1$; $x < \frac{3}{2} \vee x > 3$; $x < a \vee x > \frac{b}{2}$.

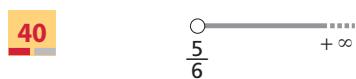
Correggi la notazione dei seguenti intervalli, scritti mediante parentesi quadre, in modo che siano corrispondenti alle diseguaglianze poste a fianco.

37 $] 1; +\infty[$, $x > 1$; $]-\infty; 2[$, $x \leq 2$; $\left] \frac{3}{4}; \frac{1}{2} \right]$, $\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}$.

38 $] 1; +\infty[\cup \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$, $x < 1 \vee x > \frac{3}{2}$; $[3; +\infty[$, $x > 3$; $[0; 1[$, $0 < x \leq 1$.

39 È dato un intervallo di estremi -2 e 3 , dove -2 è escluso e 3 è incluso. Rappresenta l'intervallo mediante le parentesi quadre e poi graficamente.

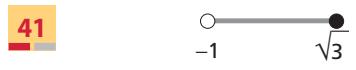
COMPLETA scrivendo accanto a ogni grafico l'intervallo corrispondente.



.....



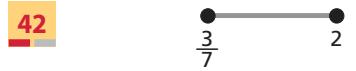
.....



.....



.....

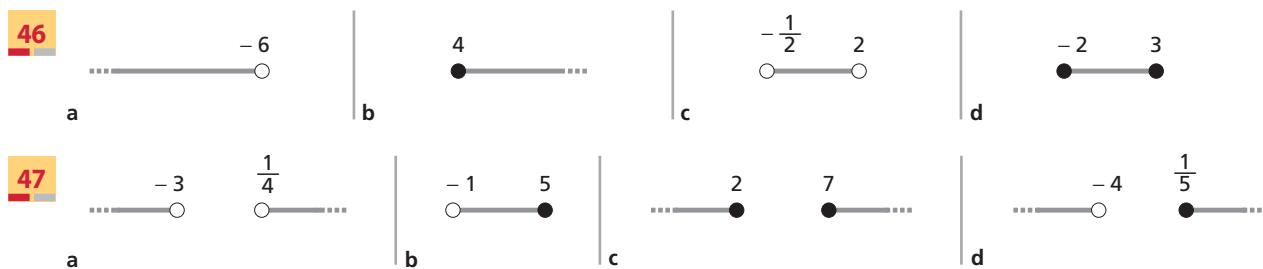


.....



.....

Per ogni rappresentazione grafica scrivi il corrispondente intervallo sia mediante le parentesi quadre sia mediante le diseguaglianze.



■ Le disequazioni equivalenti

Indica in base a quale principio le seguenti coppie di disequazioni sono equivalenti.

48 $-2x < 3$	$x > -\frac{3}{2}$	51 $-x < 6$	$2x > -12$
49 $\frac{1}{3} + x > 0$	$x > -\frac{1}{3}$	52 $9x > 0$	$2x - 1 > -1$
50 $6 + x \geq -1$	$x \geq -7$	53 $6x + 2 < 0$	$x < -\frac{1}{3}$

54 VERO O FALSO?

- | | | | |
|--|--|---|--|
| a) Se $-2x > 0$, allora $x < 2$. | <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> | d) Se $\frac{1}{2}x < 3$, allora $x < 6$. | <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> |
| b) Se $4x > \frac{1}{3}$, allora $x > \frac{1}{12}$. | <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> | e) Se $-6x < -18$, allora $3 < x$. | <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> |
| c) Se $-x < 4$, allora $2x < -8$. | <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> | f) Se $3x > 0$, allora $x > \frac{1}{3}$. | <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> |

3. Le disequazioni intere

→ Teoria a pag. 577

RIFLETTI SULLA TEORIA

Le disequazioni numeriche intere

55 VERO O FALSO?

- | | |
|---|--|
| a) Se una disequazione è equivalente a $2 > 0$, allora x deve essere uguale a 0. | <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> |
| b) Una disequazione che non è verificata per alcun valore di x è detta impossibile. | <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> |
| c) La disequazione $x < x$ è impossibile. | <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> |
| d) La disequazione $x \geq x$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$. | <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> |

56 TEST

Le seguenti disequazioni sono tutte verificate $\forall x \in \mathbb{R}$, tranne una. Quale?

- A** $x < x + 1$ **B** $x \leq x + 1$ **C** $2x > 1 - 2(1 - x)$ **D** $2x \geq 1 - 2(1 - x)$ **E** $3(x + 1) < 2(x + 1)$

57

ASSOCIA ogni disequazione della prima riga con l'intervallo delle sue soluzioni sulla seconda riga.

1. $4x > 6$

2. $-x - 4 < 6$

3. $-4x < +6$

4. $-x + 4 > -6$

A. $\left] -\frac{3}{2}; +\infty \right[$

B. $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$

C. $] -10; +\infty [$

D. $] -\infty; 10[$

Le disequazioni letterali intere

58

VERO O FALSO?

a) La disequazione letterale, in x , $ax > b$ ha come soluzione $x < \frac{b}{a}$ se $a < 0$.

 V F

b) La disequazione, in x , $3x > a$ ha come soluzione $x < \frac{a}{3}$ se $a < 0$.

 V F

c) Le disequazioni letterali richiedono la discussione solo se, quando sono scritte in forma normale, la variabile è moltiplicata per una lettera.

 V F

d) La disequazione, in x , $ax \geq a$ non può essere impossibile.

 V F

e) La disequazione, in x , $(k-1)x > (k-1)$ non richiede la discussione perché si può semplificare il coefficiente $(k-1)$.

 V F**59**

TEST È data la disequazione in x :

$$a + x \leq ax - 2.$$

Per quale valore di a risulta impossibile?

A. $a = -2$

D. $a = 1$

B. $a = 0$

E. $a = 2$

C. $a = -1$

60

TEST È data la disequazione in x :

$$ax \leq a^2 + a.$$

Se $a < 0$, qual è l'intervallo delle soluzioni?

A. $]-\infty; a+1]$

D. $[a^2; +\infty[$

B. $[a+1; +\infty[$

E. Nessuno dei precedenti.

C. $]-\infty; a^2]$

ESERCIZI

Nel sito: ► 12 esercizi di recupero

**■ 61**

TEST Quale, fra le seguenti disequazioni, ha come

soluzione $\left[\frac{2}{3}; +\infty \right[$?
 A. $2 - 3x > 0$ D. $3 \leq 2x$
 B. $2 \leq 3x$ E. Nessuna delle precedenti.
 C. $3 - 2x < 0$

62

TEST Quale, fra le seguenti disequazioni, *non* ha come soluzione $\left[-\frac{1}{2}; +\infty \right[$?

A. $-2x < 1$ D. $-2 < 4x$
 B. $x > -\frac{1}{2}$ E. $2x < -1$
 C. $x > -(x+1)$

63

CACCIA ALL'ERRORE Qual è l'errore nella seguente sequenza di passaggi? Motiva la risposta.

$$(x+1)(3x-2) < x^2 - 1 \rightarrow (x+1)(3x-2) < (x-1)(x+1) \rightarrow 3x-2 < x-1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x-x < 2-1 \rightarrow 2x < 1 \rightarrow x < \frac{1}{2}$$

[nel secondo passaggio i due membri sono stati divisi per $x+1$, ma...]

ESERCIZIO GUIDA

64 Risolviamo la seguente disequazione:

$$\frac{x-5}{3} - \frac{2x+7}{2} \leq 6x-8 - \frac{3x-2}{4}.$$

Eliminiamo i denominatori, moltiplicando entrambi i membri per il loro minimo comune multiplo:
m.c.m.(2, 3, 4) = 12.

$$4(x-5) - 6(2x+7) \leq 12 \cdot 6x - 12 \cdot 8 - 3(3x-2)$$

$$4x - 20 - 12x - 42 \leq 72x - 96 - 9x + 6$$

$$-8x - 62 \leq 63x - 90 \quad \rightarrow \quad -8x - 63x \leq -90 + 62 \quad \rightarrow \quad -71x \leq -28.$$

Cambiamo segno, invertendo il verso della disequazione:

$$71x \geq 28$$

$$x \geq \frac{28}{71} \quad \text{oppure} \quad \left[\frac{28}{71}; +\infty \right[$$



Risovi le seguenti disequazioni numeriche intere.

65 $3x - 5 < -2$

$[x < 1]$

75 $x - 4(x+2) \leq 2x - [x - (3-4x)]$

$[\forall x \in \mathbb{R}]$

66 $x - 2 < 7x$

$\left[x > -\frac{1}{3} \right]$

76 $x\left(1 - \frac{1}{3}x\right) < -\frac{1}{3}x^2 + 2$

$[x < 2]$

67 $5(x-1) < 2(x-3)$

$\left[x < -\frac{1}{3} \right]$

77 $6x + 7 > \frac{1}{3}(9x - 3)$

$\left[x > -\frac{8}{3} \right]$

68 $4[2(1-x)-3] > 5x+1$

$\left[x < -\frac{5}{13} \right]$

78 $\frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) > 2\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$[\text{impossibile}]$

69 $-x - \frac{1}{2} + \frac{x+1}{2} > 0$

$[x < 0]$

79 $x - \frac{1}{3} < 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$

$\left[x > \frac{8}{3} \right]$

70 $4x - 3 > 5x + 1$

$[x < -4]$

80 $3\left[(x+3) + \frac{1}{3}x\right] < 7x$

$[x > 3]$

71 $7x - 2 > 3x - 1$

$\left[x > \frac{1}{4} \right]$

81 $\frac{7x-1}{2} > -\frac{2x+1}{4}$

$\left[x > \frac{1}{16} \right]$

72 $2(x-1) + 3(x-2) < -7$

$\left[x < \frac{1}{5} \right]$

82 $\frac{x-3}{10} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right) > \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

73 $\frac{1}{2}x - (1+x) > \frac{3}{2}$

$[x < -5]$

$\left[x < -\frac{9}{2} \right]$

74 $4x - 3 < -\frac{2}{3}x + 3$

$\left[x < \frac{9}{7} \right]$

83 $(x-1)(x+2) + (1-x)(2x+3) \leq 2 - x^2$
 $[\forall x \in \mathbb{R}]$

- 84** $5(3 - 4x) + 14x - \frac{11}{6} < -10x - \frac{10}{3} \left(\frac{8x - 15}{20} \right)$ $[x < -2]$
- 85** $(x - 1)(x + 1) - (x - 3)^2 < 3$ $\left[x < \frac{13}{6} \right]$
- 86** $(x - 1)^2 - 3x < (x - 3)(x + 3)$ $[x > 2]$
- 87** $4(5x - 1) + 2(3x + 1)^2 > 3x(6x + 5) - 2x - 3$ $\left[x > -\frac{1}{19} \right]$
- 88** $(2x - 1)^2 - 3(2 + x) \leq (2x + 3)(2x - 3) + 2(x + 3)$ $\left[x \geq -\frac{2}{9} \right]$
- 89** $(3x - 1)(3x + 1) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{1}{4}(x + 1)^2 - 9x^2 < 0$ $\left[x < \frac{7}{6} \right]$
- 90** $x^2(2 - x) + (x - 2)^3 \leq -5(1 - 2x) + (2x + 1)(1 - 2x)$ $[x \leq 2]$
- 91** $\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 - (x + 1)^2 < -\left[1 - \left(\frac{2x + 1}{6}\right)\right] + \frac{1 + 2x}{3}$ $\left[x > -\frac{1}{16} \right]$
- 92** $\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{3}x\right)^2 < \frac{5}{9}x(x - 2) + \left(x - \frac{4}{9}x\right)4x$ [impossibile]
- 93** $\frac{(x - 1)(x + 1)}{2} + \left[\frac{x - 5}{4} - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\right] - \frac{(x - 3)^2}{2} > 0$ $\left[x > \frac{29}{11} \right]$
- 94** $\frac{1}{2}\left(x - \frac{4}{3}\right) + \left(3 - \frac{x}{2}\right)^2 < \frac{x^2}{4} + \frac{x - 1}{3} - \frac{2x + 5}{2} + 2$ $[x > 5]$
- 95** $\frac{4}{9}\left[x + \frac{3(x - 1)}{4}\right] + \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 \geq \frac{1}{3} + \left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2)$ $\left[x \leq \frac{1}{2} \right]$
- 96** $2(2x - 1)(2x + 1) - 6(x - 2)^2 \leq (x - 3)^2 - [3(3 + x)(3 - x) - 2(x + 1)(1 - x)]$ $\left[x \leq \frac{1}{3} \right]$
- 97** $3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) + (5x - 1)^2 < 9x\left(\frac{1}{3}x - 1\right) + 40 + (5x + 1)^2$ $[x > -7]$
- 98** $\frac{1}{3}\left(9 - \frac{3x}{2}\right) - \frac{2}{5}\left(\frac{15 + 5x}{2}\right) > (3 - 2x)^2 - (2x + 1)(2x - 1) - 6$ $\left[x > \frac{8}{21} \right]$
- 99** $(x + 3)^3 - 4[x + 5 - (x + 8)]^3 > (x - 3)^2(x + 3) + 12(x + 1)^2$ $[x > -8]$
- 100** $(x - 1)^3 - (x + 1)^3 > 2x - 2 - 6x^2 + 2(x + 1)(x - 1) - 2(x - 2)^2$ $[x < 1]$
- 101** $3(x - 1) - 1 < \frac{x - 2}{3} - \left(x - \frac{x - 1}{3}\right)$ $\left[x < \frac{9}{10} \right]$
- 102** $\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{3}\right) < \frac{1}{3} - 2\left(x + \frac{1}{3}\right)$ $[x < 0]$
- 103** $\frac{5}{2}x + \frac{2x - 2}{3} - \frac{1 - x}{3} - \left(\frac{3x + 1}{2} + 2x\right) \geq \frac{3}{2}$ [impossibile]

- 104** $\frac{2}{3} \left(x - 2 - \frac{x-1}{2} \right) \geq 1 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \left(x - \frac{x}{2} \right) + 2 \left(\frac{2}{3}x - 1 \right)$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- 105** $\frac{1}{4}(3x-5) + \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{3} - x \right) < \frac{2}{3}(x-7) - \frac{1}{3} \left(x - \frac{1+x}{4} \right)$ [impossibile]
- 106** $\frac{1-x}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1-\frac{2x}{3}}{1+\frac{1}{3}} > 7x + (1-x)^2 - (x+1)(x-1)$ $x < \frac{1}{28}$
- 107** $\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{x^2-6x}{4} \geq \left(\frac{x-1}{2} \right)^2 - 2$ $x \geq -\frac{9}{4}$
- 108** $\left(\frac{1}{2} - x \right)^2 - \frac{1-2x}{3} \leq (1+x)^2 - \left(1 - \frac{3x-1}{6} \right)$ $x \geq \frac{1}{34}$
- 109** $2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{1}{4} \right) - x(x+2) \leq \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2}$ $x \geq 0$
- 110** $\left(\frac{3}{2}x - \frac{2}{3} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2} \right)^{-1} - \left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} \right)^{-1} + x + 1 < 0$ $x < \frac{4}{9}$
- 111** $(x-1)^3 - (x+1)^3 + 6x \left(x - \frac{1}{2} \right) < (x-1)^2 - (x+1)^2$ $x < 2$
- 112** $\left[\frac{1}{2}x - \left(\frac{1}{4}x + 1 \right)^2 + \left(1 + \frac{1}{4}x \right) \left(-\frac{1}{4}x + 1 \right) \right] x + \left(1 + \frac{1}{2}x \right)^3 - \left(\frac{3}{4}x^2 - 1 \right) > 0$ $x > -\frac{4}{3}$
- 113** $x(x-2)(x-3) - (1+x)(x-1) \geq \frac{3}{2} [(2x+1)^2 - (2x-1)^2] - (2-x)^3$ $x \leq \frac{1}{2}$

■ Le disequazioni letterali intere

Nel sito: ► 10 esercizi in più



ESERCIZIO GUIDA

114 Risolviamo la seguente disequazione nell'incognita x , con $a \in \mathbb{R}$:

$$2(x+1)(a-2) + 3a < 3x(a-4).$$

Eseguiamo i calcoli che ci permettono di arrivare alla forma $ax < b$:

$$2(ax-2x+a-2) + 3a < 3ax-12x$$

$$\underline{2ax} - \underline{4x} + \underline{2a} - \underline{4} + \underline{3a} < \underline{3ax} - \underline{12x}$$

$$8x - ax < 4 - 5a$$

$$x(8-a) < 4 - 5a.$$

Discussione

- Se $8-a > 0$, ossia $-a > -8$, $a < 8$, allora possiamo dividere per $8-a$ senza cambiare

il verso della disequazione e troviamo le soluzioni:

$$x < \frac{4-5a}{8-a}.$$

- Se $a = 8$, sostituendo, otteniamo $x \cdot 0 < -36$, che non è mai verificata: la disequazione è *impossibile* e come soluzione possiamo scrivere: $\emptyset \in \mathbb{R}$.
- Se $a > 8$, dividiamo per $8-a < 0$ cambiando il verso della disequazione, e troviamo le soluzioni:

$$x > \frac{4-5a}{8-a}.$$

Risovi le seguenti disequazioni letterali intere nell'incognita x con $a \in \mathbb{R}$.

115 $3ax - a - 6a > -2 + 4ax$

$$\begin{cases} a > 0, x < \frac{2-7a}{a}; a < 0, x > \frac{2-7a}{a}; a = 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

116 $a(x-1) > 1 + 2x$

$$\begin{cases} a > 2, x > \frac{a+1}{a-2}; a < 2, x < \frac{a+1}{a-2}; a = 2, \text{impossibile} \end{cases}$$

117 $ax - a^2 \geq 3x - 9$

$$[a > 3, x \geq a+3; a < 3, x \leq a+3; a = 3, \forall x \in \mathbb{R}]$$

118 $(a-2)x < 3$

$$\begin{cases} a < 2, x > \frac{3}{a-2}; a = 2, \forall x \in \mathbb{R}; a > 2, x < \frac{3}{a-2} \end{cases}$$

119 $4x - a \leq a(x+2)$

$$\begin{cases} a < 4, x \leq \frac{3a}{4-a}; a = 4, \forall x \in \mathbb{R}; a > 4, x \geq \frac{3a}{4-a} \end{cases}$$

120 $(a-1)x - (1-a)(1+a) < 0$

$$[a > 1, x < -(a+1); a = 1, \forall x \in \mathbb{R}; a < 1, x > -(a+1)]$$

121 $(1-a)(x+1) \leq x-2 + a(x-1)$

$$\begin{cases} a > 0, x \geq \frac{3}{2a}; a = 0, \forall x \in \mathbb{R}; a < 0, x \leq \frac{3}{2a} \end{cases}$$

122 $a(x-3) < x-1$

$$\begin{cases} a > 1, x < \frac{3a-1}{a-1}; a = 1, \forall x \in \mathbb{R}; a < 1, x > \frac{3a-1}{a-1} \end{cases}$$

123 $b(2x-1) \geq -2x+4+b$

$$\begin{cases} b > -1, x \geq \frac{b+2}{b+1}; b = -1, \forall x \in \mathbb{R}; b < -1, x \leq \frac{b+2}{b+1} \end{cases}$$

124 $3x - a(x-a) < (a-1)(a+1) + a+4$

$$\begin{cases} a > 3, x > \frac{a+3}{3-a}; a < 3, x < \frac{a+3}{3-a}; a = 3, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

125 $(x+a)(x-a) + 1 - x^2 > 2(1-a^2) - ax$

$$\begin{cases} a > 0, x > \frac{1-a^2}{a}; a < 0, x < \frac{1-a^2}{a}; a = 0, \text{imp.} \end{cases}$$

126 $(2x+3)a - (2a-x)^2 > (a-x)(a+x) + 2x + 4a^2$

$$\begin{cases} a > \frac{1}{3}, x > \frac{3}{2}a; a < \frac{1}{3}, x < \frac{3}{2}a; a = \frac{1}{3}, \text{imp.} \end{cases}$$

127 $(a+x)^2 - a^2 > x(x-1) + 3$

$$\begin{cases} a > -\frac{1}{2}, x > \frac{3}{2a+1}; a < -\frac{1}{2}, x < \frac{3}{2a+1}; a = -\frac{1}{2}, \text{imp.} \end{cases}$$

128 $a^2(x-2) + x \geq -a(2x+1) - 3$

$$\begin{cases} a \neq -1, x \geq \frac{2a-3}{a+1}; a = -1, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

129 $a(1-x) > 2x-1$

$$\begin{cases} a < -2, x > \frac{a+1}{a+2}; a > -2, x < \frac{a+1}{a+2}; a = -2, \text{impossibile} \end{cases}$$

130 $x(1+bx) + x(x-b) < (x^2+1)(1+b)$

$$\begin{cases} b < 1, x < \frac{1+b}{1-b}; b > 1, x > \frac{1+b}{1-b}; b = 1, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

131 $(x+a)^3 - 4ax(a-x) > 2x(x+a)^2 + (a-x)^3$

[impossibile]

132 $(5x-a)(x-2a) + (a+x)^2 \leq (x-a)(x+a) + (x-a)(5x+4a)$

$$[a < 0, x \leq a; a > 0, x \geq a; a = 0, \forall x \in \mathbb{R}]$$

133 $x - a(x-1) > x(1+a)$

$$\begin{cases} a < 0, x > \frac{1}{2}; a = 0, \forall x \in \mathbb{R}; a > 0, x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

134 $bx^2 + 4 + x(2b-1) > b(2+x)(b+x) - 2b(b+1)$

$$\left[x < \frac{2b+4}{b^2+1} \right]$$

135 $(x+2)^2 + 4(a-3) < (x+a+2)(x+a-2)$

$$\begin{cases} a < 2, x < \frac{2-a}{2}; a = 2, \forall x \in \mathbb{R}; a > 2, x > \frac{2-a}{2} \end{cases}$$

ESERCIZIO GUIDA

136 Risolviamo la seguente disequazione nell'incognita x :

$$\frac{(a-2)x-2}{a} > 0.$$

Distinguiamo tre casi.

- Se $a < 0$, moltiplichiamo ambedue i membri per a e, essendo a negativo, cambiamo il verso della disequazione:

$$(a-2)x - 2 < 0 \rightarrow (a-2)x < 2.$$

Poiché $a < 0$, allora, a maggior ragione, $a-2 < 0$; quindi, dividendo ambedue i membri per $a-2$, numero negativo, otteniamo:

$$x > \frac{2}{a-2}.$$

- Se $a = 0$, la disequazione è priva di significato, perché abbiamo una frazione con denominatore nullo.
- Se $a > 0$, moltiplicando ambedue i membri per a , ricaviamo:

$$(a-2)x - 2 > 0 \rightarrow (a-2)x > 2.$$

Distinguiamo tre casi:

- se $a > 2$, il coefficiente di x è positivo, quindi $x > \frac{2}{a-2}$;
- se $a = 2$, $0x > 2$, quindi la disequazione è impossibile;
- se $0 < a < 2$, il coefficiente di x è negativo, quindi $x < \frac{2}{a-2}$.

Riassumendo:

$$a < 0 \vee a > 2, x > \frac{2}{a-2}; a = 0, \text{ disequazione priva di significato}; 0 < a < 2, x < \frac{2}{a-2}; a = 2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Risovi le seguenti disequazioni nell'incognita x .

137 $\frac{ax-3}{a-1} > 0$, con $a > 1$

$$\left[x > \frac{3}{a} \right]$$

138 $\frac{(a-1)x-1}{2a} < 0$, con $a > 0$

$$\left[0 < a < 1, x > \frac{1}{a-1}; a = 1, \forall x \in \mathbb{R}; a > 1, x < \frac{1}{a-1} \right]$$

139 $\frac{x-2a}{a-2} \geq 0$

$$[a < 2, x \leq 2a; a = 2, \text{ senza significato}; a > 2, x \geq 2a]$$

140 $\frac{x-2}{a-4} > 0$

$$[a < 4, x < 2; a = 4, \text{ senza significato}; a > 4, x > 2]$$

141 $\frac{x}{2a} - \frac{2a-x}{a} > \frac{x-1}{2}$

$$\left[a < 0 \vee a > 3, x < \frac{3a}{3-a}; a = 0, \text{ senza sign.}; 0 < a < 3, x > \frac{3a}{3-a}; a = 3, \text{ imp.} \right]$$

142 $\frac{a-2x}{2a} - \frac{1}{a} \leq 0$

$$\left[a < 0, x \leq \frac{a-2}{2}; a = 0, \text{ senza sign.}; a > 0, x \geq \frac{a-2}{2} \right]$$

143 $\frac{(b-2)x+b}{b} \geq 0$ $\left[b < 0 \vee b > 2, x \geq -\frac{b}{b-2}; b = 0, \text{senza sign.}; 0 < b < 2, x \leq -\frac{b}{b-2}; b = 2, \forall x \in \mathbb{R} \right]$

144 $x + \frac{1}{2a} - \frac{1}{2} < \frac{x}{a}$ $\left[a < 0 \vee a > 1, x < \frac{1}{2}; a = 0, \text{senza sign.}; 0 < a < 1, x > \frac{1}{2}; a = 1, \text{imp.} \right]$

145 $\left(\frac{x+6}{2} + \frac{3}{a-1} \right) : \frac{1}{a-1} - 3a \leq \frac{x(1+2a)}{2}$
 $[a < -2, x \leq 0; -2 < a < 1 \vee a > 1, x \geq 0; a = -2, \forall x \in \mathbb{R}; a = 1, \text{senza sign.}]$

146 $\frac{2x+1}{4} + \frac{ax}{1-a} > -\frac{x+3}{2}$ $\left[a < 1, x > \frac{7(a-1)}{4}; a > 1, x < \frac{7(a-1)}{4}; a = 1, \text{senza sign.} \right]$

147 TEST È data la disequazione in x :

$$\frac{x-b}{b-1} \geq \frac{x-b}{a}.$$

In uno dei seguenti casi è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$: quale?

- A** Per nessun valore di a .
- B** $\forall a \in \mathbb{R}$
- C** $a = b - 1$, con $b \neq 1$
- D** $a < b - 1$, con $a \neq 0$
- E** $a \leq b + 1$

148 TEST È data la disequazione $\frac{2kx-1}{3} < \frac{k-x}{2}$ in x .

Quali, fra le seguenti, sono le soluzioni complete, al variare di k ?

- A** Se $k < -\frac{3}{4}$, $x < \frac{2+3k}{3+4k}$
- B** Se $k > -\frac{3}{4}$, $x < \frac{2+3k}{3+4k}$
- C** Se $k < -\frac{3}{4}$, $x > \frac{2+3k}{3+4k}$
- D** Se $k = -\frac{3}{4}$, impossibile
- E** Nessuna delle precedenti.

149 Scrivi una disequazione letterale che abbia le seguenti soluzioni:

$$\text{se } b > a, x > \frac{a^2}{b-a};$$

$$\text{se } b < a, x < \frac{a^2}{b-a};$$

se $b = a$, impossibile.

150 Risovi la disequazione letterale intera, in x ,

$$\frac{ax}{a-1} - \frac{bx}{b-1} \geq 0$$

nei seguenti casi:

- a) $a < 1 < b$;
- b) $b < 1 < a$;
- c) $a = b$.

[a] $x \leq 0$; b) $x \geq 0$; c) $a \neq 1, \forall x \in \mathbb{R}$]

151 Sono dati i due polinomi:

$$P(x) = ax^3 + 2x^2 - 3x - 1,$$

$$Q(x) = x^3 + 2ax^2 + 5x + 2.$$

Supponiamo di dividere entrambi i polinomi per $x + 1$. Per quali valori di a il polinomio $P(x)$ fornisce resto maggiore di $Q(x)$?

$$\left[a < \frac{8}{3} \right]$$

152 Stabilisci se le seguenti affermazioni sulla disequazione $ax - 7 > b$, nell'incognita x , sono vere o false, motivando la risposta.

a) Se $a > 0$, le soluzioni sono $\left] \frac{b+7}{a}; +\infty \right[$.

b) Se $a > 0 \wedge a = b + 7$,

le soluzioni sono $]1; +\infty[$.

c) Se $a < 0 \wedge b = a - 7$,

le soluzioni sono $] -\infty; 1[$.

d) Se $a < 0 \wedge b < 0$,

le soluzioni sono $\left] -\infty; \frac{7-b}{a} \right[$.

[a] vera; b) vera; c) vera; d) falsa]

■ Lo studio del segno di un prodotto

■ ESERCIZIO GUIDA

153 Studiamo il segno del seguente prodotto:

$$(x + 1)(5 - x).$$

Dal risultato ottenuto, deduciamo il segno del polinomio quando la variabile x assume i valori: $-2, -1, 0, 7$.

Studiamo il segno dei due fattori:

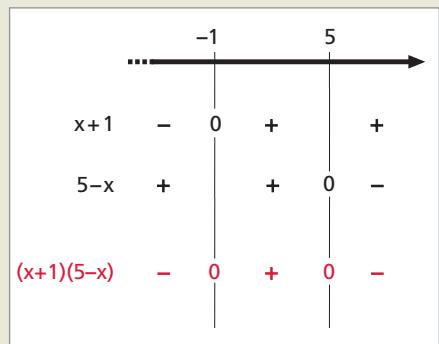
- $x + 1 > 0 \rightarrow x > -1$;
- $5 - x > 0 \rightarrow -x > -5 \rightarrow x < 5$.

Compiliamo il quadro applicando la regola dei segni.

Detto p il prodotto:

- per $x < -1 \vee x > 5$, $p < 0$;
- per $-1 < x < 5$, $p > 0$;
- per $x = -1 \vee x = 5$, $p = 0$.

Quindi, in particolare, per $x = -2$ e $x = 7$, $p < 0$;
per $x = -1$, $p = 0$; per $x = 0$, $p > 0$.



Studia il segno dei seguenti prodotti. Dai risultati ottenuti, deduci il segno per i valori indicati a fianco. Verifica l'esattezza della deduzione, almeno in qualche caso.

154 $x(x + 8)$, $x = -3, 0, 3$.

155 $(x - 4)(6x + 1)$, $x = -1, 0, 1$.

156 $\left(x + \frac{1}{3}\right)(2x - 1)$, $x = -1, 0, 1$.

157 $(3x + 2)(x + 6)$, $x = -7, -1, 2$.

158 $5(x + 3)(2x - 1)$, $x = -4, 0, 4$.

159 $-7(2 - x)(1 - x)$, $x = -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$.

160 $(x - 5)(x + 1)(x - 2)$, $x = 0, 3, 6$.

161 $(3 - 2x)(4x - 1)(2x - 3)$, $x = 0, 1, 2$.

■ ESERCIZIO GUIDA

162 Risolviamo la seguente disequazione:

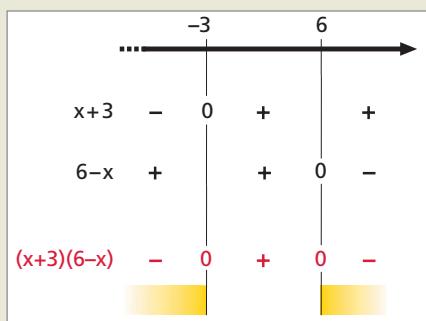
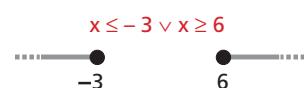
$$(x + 3)(6 - x) \leq 0.$$

Studiamo il segno di ognuno dei fattori, cercando i valori di x per i quali ciascun fattore è positivo:

- $x + 3 > 0 \rightarrow x > -3$;
- $6 - x > 0 \rightarrow -x > -6 \rightarrow x < 6$.

Compiliamo il quadro dei segni (figura a lato).

Poiché si richiede che il prodotto sia negativo o nullo, le soluzioni della disequazione sono le seguenti.



Risovi le seguenti disequazioni.

163 $(x - 2)(x + 2) > 0$

$[x < -2 \vee x > 2]$

165 $(x - 5)(x + 2) > 0$

$[x < -2 \vee x > 5]$

164 $(4x - 2)(3x + 2) \leq 0$

$$\left[-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{1}{2} \right]$$

166 $x(7x - 2) \geq 0$

$$\left[x \leq 0 \vee x \geq \frac{2}{7} \right]$$

167 $3x(2x - 6) < 0$

$[0 < x < 3]$

168 $2x\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2) > 0$

$$\left[-\frac{1}{2} < x < 0 \vee x > 2 \right]$$

169 $(x - 1)(x + 6)(x - 6) \leq 0$

$[x \leq -6 \vee 1 \leq x \leq 6]$

170 $\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right)(x + 1) \geq 0$

$$\left[-\frac{3}{2} \leq x \leq -1 \vee x \geq -\frac{3}{4} \right]$$

171 $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{5}\right) < 0$

$$\left[x < \frac{2}{5} \vee \frac{1}{2} < x < \frac{2}{3} \right]$$

172 $x(x - 1)(x + 1) > 0$

$[-1 < x < 0 \vee x > 1]$

173 $(x - 3)(2x + 8)(5x - 1) < 0$

$$\left[x < -4 \vee \frac{1}{5} < x < 3 \right]$$

174 $\frac{1}{2}(x + 1)(2x - 3)(2 - x)x \geq 0$

$$\left[-1 \leq x \leq 0 \vee \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \right]$$

175 $-6x(5x - 2)(x + 4)(x - 2) < 0$

$$\left[x < -4 \vee 0 < x < \frac{2}{5} \vee x > 2 \right]$$

Disequazioni intere e scomposizioni in fattori

Nel sito: ▶ 20 esercizi in più



ESERCIZIO GUIDA

176 Risolviamo le seguenti disequazioni.

a) $x^3 - 9x > 0$; b) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$; c) $x^4 - 81 < 0$; d) $x^3 - 3x + 2 \leq 0$.

a) $x^3 - 9x > 0$.

Scomponiamo in fattori il polinomio al primo membro:

$$x(x^2 - 9) > 0 \rightarrow x(x - 3)(x + 3) > 0.$$

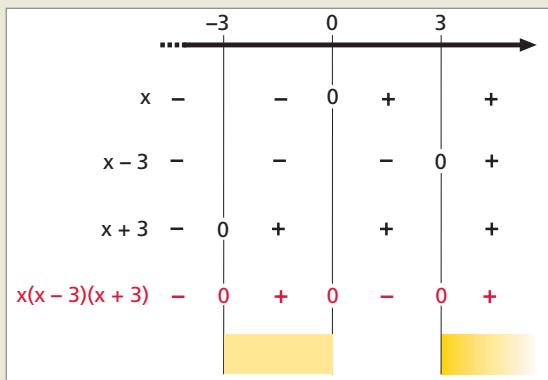
Studiamo il segno dei fattori:

- $x > 0$;
- $x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$;
- $x + 3 > 0 \rightarrow x > -3$.

La disequazione ha per soluzione gli intervalli in cui il polinomio è positivo:

$$-3 < x < 0 \vee x > 3.$$

Questo è il quadro dei segni:



b) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

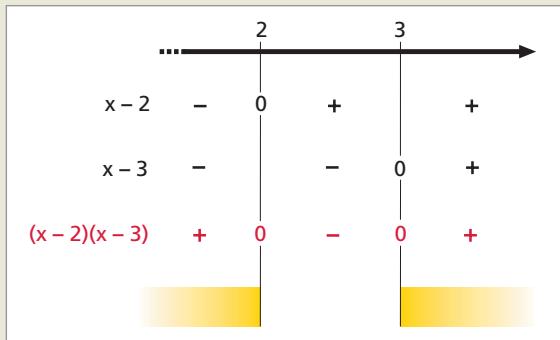
Scomponiamo in fattori:

$$(x - 2)(x - 3) \geq 0.$$

Studiamo il segno dei fattori:

- $x - 2 > 0 \rightarrow x > 2;$
- $x - 3 > 0 \rightarrow x > 3.$

Compiliamo il quadro dei segni.



La disequazione ha per soluzione gli intervalli in cui il polinomio è positivo o vale 0:

$$x \leq 2 \vee x \geq 3.$$

c) $x^4 - 81 < 0$.

Scomponiamo in fattori:

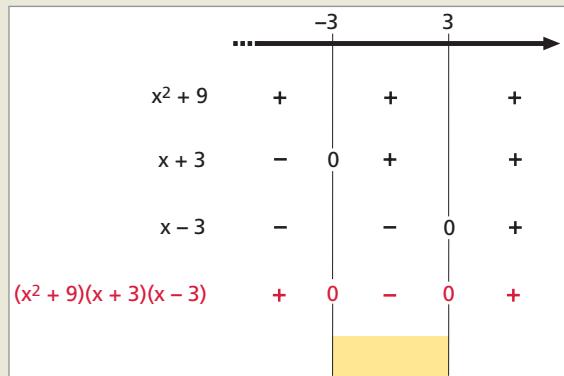
$$(x^2 + 9)(x^2 - 9) < 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x^2 + 9)(x + 3)(x - 3) < 0.$$

Studiamo il segno dei fattori:

- $x^2 + 9 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, perché somma del termine x^2 , positivo o nullo, e di 9, numero positivo;
- $x + 3 > 0 \rightarrow x > -3;$
- $x - 3 > 0 \rightarrow x > 3.$

Compiliamo il quadro dei segni.



La disequazione ha per soluzione l'intervallo in cui il polinomio è negativo: $-3 < x < 3$.

d) $x^3 - 3x + 2 \leq 0$.

Scomponiamo il polinomio

$$P(x) = x^3 - 3x + 2, \text{ con la regola di Ruffini.}$$

Troviamo che:

$$P(1) = 1 - 3 + 2 = 0.$$

1	0	-3	2
1	1	1	-2
1	1	-2	0

$$(x^2 + x - 2)(x - 1) \leq 0 \rightarrow$$

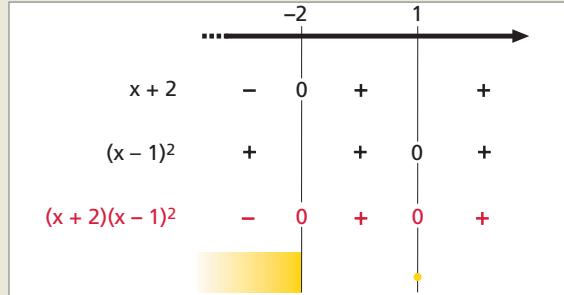
$$\rightarrow (x + 2)(x - 1)(x - 1) \leq 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x + 2)(x - 1)^2 \leq 0.$$

Studiamo il segno dei fattori e compiliamo il quadro dei segni.

- $x + 2 > 0 \rightarrow x > -2;$

- $(x - 1)^2 > 0 \rightarrow x \neq 1.$



La disequazione ha per soluzioni i valori per cui il polinomio è negativo o nullo:

$$x \leq -2 \vee x = 1.$$

Risovi le seguenti disequazioni.

177 $x^2 - 64 \geq 0$

$[x \leq -8 \vee x \geq 8]$

188 $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 \leq 0$

$[x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 5]$

178 $4x^2 - 4x + 1 > 0$

$\left[x \neq \frac{1}{2} \right]$

189 $(x^2 - 6x + 9)(x + 2) \geq 0$

$[x \geq -2]$

179 $x^2(x^2 - 25) < 0$

$[-5 < x < 0 \vee 0 < x < 5]$

190 $2x(x - 1)^2(x^2 + 4) \leq 0$

$[x \leq 0 \vee x = 1]$

180 $\frac{1}{4}x^2 - 4x \geq 0$

$[x \leq 0 \vee x \geq 16]$

191 $x^3 - 4x^2 \geq 4x - 16$

$[-2 \leq x \leq 2 \vee x \geq 4]$

181 $4x^4 - 64 \leq 0$

$[-2 \leq x \leq 2]$

192 $x^4 - 5x^3 + 6x^2 < 0$

$[2 < x < 3]$

182 $x^3 + x^2 - 25x - 25 > 0$

$[-5 < x < -1 \vee x > 5]$

193 $3x(x^4 - 16) \geq (x^2 - 4)(x^2 + 4)$

183 $2x^4 - 4x^3 \geq 0$

$[x \leq 0 \vee x \geq 2]$

$\left[-2 \leq x \leq \frac{1}{3} \vee x \geq 2 \right]$

184 $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 > 0$

$[x > -2]$

194 $(x^2 - 1)(4x^2 - 6x) < 0$

$\left[-1 < x < 0 \vee 1 < x < \frac{3}{2} \right]$

185 $x^3 - 7x^2 + 11x - 5 \leq 0$

$[x \leq 5]$

195 $(x^4 + x^2)(x^2 + 8x) \geq 0$

$[x \leq -8 \vee x \geq 0]$

186 $16x^4 \leq 0$

$[x = 0]$

196 $x^3 + 5x^2 + 2x > 8$

$[-4 < x < -2 \vee x > 1]$

187 $6x^2 + 3x^4 > 0$

$[x \neq 0]$

4. Le disequazioni fratte

→ Teoria a pag. 580

RIFLETTI SULLA TEORIA

Le disequazioni numeriche fratte

197 VERO O FALSO?

- a) Una disequazione si dice numerica fratta se contiene l'incognita sia al numeratore sia al denominatore.

V F

- b) Studiare il segno di una frazione vuol dire cercare per quali valori dell'incognita la frazione è positiva, negativa o nulla.

V F

- c) Studiando le disequazioni $P(x) > 0$ e $Q(x) > 0$, è possibile risolvere la disequazione fratta

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0.$$

V F

- d) Conoscendo le soluzioni di $P(x) < 0$ e $Q(x) < 0$, non è possibile risolvere la disequazione

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0.$$

V F

198 TEST Qual è l'insieme delle soluzioni della disequazione $\frac{-1}{x} \geq 0$?

- [A] $x < 0$ [D] \emptyset
 [B] $x < -1$ [E] Nessuno dei precedenti.
 [C] $x > 1$

199 TEST È data la disequazione $\frac{x-1}{x} \leq 0$.

Qual è l'insieme delle soluzioni?

- [A] $x \leq 1$ [D] $0 < x \leq 1$
 [B] $x < 0 \vee x \geq -1$ [E] $x > 0$
 [C] $x < 0 \vee x \geq 1$

Le disequazioni letterali fratte

200 VERO O FALSO?

- a) Le disequazioni letterali fratte devono avere al denominatore una lettera diversa dall'incognita. [V] [F]
- b) La disequazione $\frac{1+x}{a} < 0$ è una disequazione letterale fratta in x . [V] [F]
- c) La disequazione, in x , $\frac{a}{x} \geq 0$ ha come soluzione $a \geq 0 \vee x > 0$. [V] [F]
- d) La disequazione, in x , $\frac{a-1}{x} < 0$, se $a < 1$, ha come soluzione $x < 0$. [V] [F]
- e) La disequazione, in x , $\frac{x}{x+a} \geq 0$, se $a > 0$, ha come soluzione $x < -a$. [V] [F]

ESERCIZI

Nel sito: ► 10 esercizi in più



■ Le disequazioni numeriche fratte

■ ESERCIZIO GUIDA

201 Risolviamo la seguente disequazione fratta:

$$\frac{2x+3}{4x+4} - 1 \leq \frac{x-1}{x+1}.$$

Scomponiamo in fattori il primo denominatore e calcoliamo:

$$\text{m.c.m.}[4(x+1), (x+1)] = 4(x+1)$$

C.E.: $x \neq -1$.

Dobbiamo scrivere la disequazione in modo da avere una sola frazione al primo membro e 0 al

secondo membro, ossia $\frac{N}{D} \leq 0$:

$$\frac{2x+3}{4(x+1)} - 1 - \frac{x-1}{x+1} \leq 0$$

$$\frac{2x+3 - 1 \cdot (4x+4) - 4(x-1)}{4(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{\cancel{2x+3} - \cancel{4x} - \cancel{4} - \cancel{4x} + \cancel{4}}{4(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{-6x + 3}{4(x+1)} \leq 0.$$

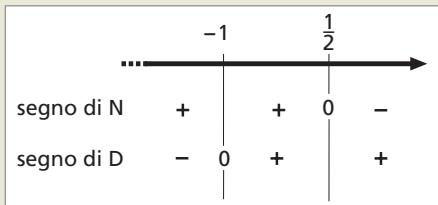
Per studiare il segno della frazione, studiamo i segni del numeratore N e del denominatore D , ponendo $N > 0$ e $D > 0$, tenendo presente che la frazione è uguale a 0 solo se $N = 0$:

$$N > 0 \Leftrightarrow -6x + 3 > 0 \rightarrow -6x > -3 \rightarrow$$

$$\rightarrow x < \frac{3}{6} \rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$D > 0 \Leftrightarrow 4(x+1) > 0 \rightarrow x > -1.$$

Riportiamo su due rette i risultati trovati.



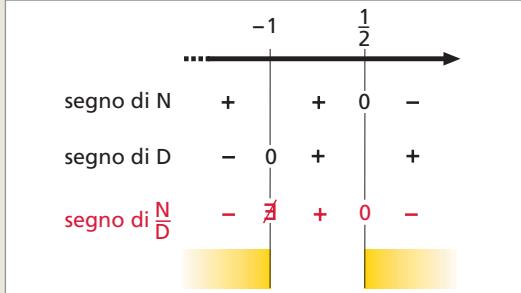
Il numeratore è positivo per $x < \frac{1}{2}$, è nullo per $x = \frac{1}{2}$, è negativo per $x > \frac{1}{2}$.

Il denominatore è negativo per $x < -1$, è nullo per $x = -1$, è positivo per $x > -1$.

Aggiungiamo al grafico una terza retta che porta il segno della frazione $\frac{-6x+3}{4(x+1)}$.

La frazione è negativa se $x < -1$ o se $x > \frac{1}{2}$, non esiste se $x = -1$, è positiva se

$-1 < x < \frac{1}{2}$, è nulla se $x = \frac{1}{2}$.



Abbiamo applicato le regole di segno della moltiplicazione fra numeratore e denominatore.

La disequazione richiede che la frazione sia negativa o nulla, quindi scegliamo le zone evidenziate in giallo.

Le soluzioni si ottengono dall'unione di due intervalli:

$$x < -1 \vee x \geq \frac{1}{2}.$$

-1 è escluso perché annulla il denominatore, quindi la frazione non esiste in corrispondenza di tale valore dell'incognita x .

Risovi le seguenti disequazioni numeriche fratte.

202 $\frac{1}{x} < 0$

$[x < 0]$

203 $\frac{1}{x-1} > 0$

$[x > 1]$

204 $\frac{x+1}{x} > 0$

$[x < -1 \vee x > 0]$

205 $\frac{1-x}{2x} \geq 0$

$[0 < x \leq 1]$

206 $\frac{3x-6}{2x+1} \geq 0$

$\left[x < -\frac{1}{2} \vee x \geq 2 \right]$

207 $\frac{1}{x} \leq 1$

$[x < 0 \vee x \geq 1]$

208 $\frac{8}{3x} \leq -16$

$\left[-\frac{1}{6} \leq x < 0 \right]$

209 $\frac{3}{2x} \leq \frac{1-2x}{6x}$

$[-4 \leq x < 0]$

210 $\frac{7}{6} > \frac{4x+2}{x-7}$

$\left[-\frac{61}{17} < x < 7 \right]$

211 $\frac{1}{5}x - \frac{1}{x-5} > \frac{x+1}{5} - \frac{x-1}{x-5}$

$\left[x < \frac{5}{4} \vee x > 5 \right]$

212 $\frac{5x}{11} - \frac{3}{22} > \frac{15x^2 - 18}{33x}$

$[0 < x < 4]$

213 $\frac{x-3}{x} > 0$

$[x < 0 \vee x > 3]$

214 $\frac{x}{x+1} \geq 0$

$[x < -1 \vee x \geq 0]$

215 $\frac{1-x}{1+x} \leq 0$

$[x < -1 \vee x \geq 1]$

216 $\frac{5-2x}{2+x} < 0$

$\left[x < -2 \vee x > \frac{5}{2} \right]$

217 $\frac{4}{x} < \frac{1}{2}$

$[x < 0 \vee x > 8]$

218 $\frac{10}{7x} > \frac{5}{14}$

$[0 < x < 4]$

219 $\frac{6x}{x-1} < 1$

$\left[-\frac{1}{5} < x < 1 \right]$

220 $\frac{x+1}{x-1} > \frac{3}{4}$

$[x < -7 \vee x > 1]$

221 $\frac{3x-1}{2-5x} < 0$

$\left[x < \frac{1}{3} \vee x > \frac{2}{5} \right]$



222 $\frac{6x}{1 - \frac{1}{3}x} > 0$

$$[0 < x < 3]$$

223 $\frac{3x + 2}{3} < \frac{2x^2 - 6}{2x + 1}$

$$\left[-\frac{20}{7} < x < -\frac{1}{2} \right]$$

224 $\frac{x - 3}{3x} + \frac{x}{6} \leq \frac{x^2 + 9}{6x} - \frac{x + 3}{x}$

$$\left[-\frac{3}{8} \leq x < 0 \right]$$

225 $1 - \frac{3}{x + 2} < \frac{3x}{6 + 3x}$

$$[x > -2]$$

226 $\frac{x - 3}{2x - 1} + 1 \leq \frac{3}{2}$

$$\left[x > \frac{1}{2} \right]$$

227 $\frac{6 + (3 - x)^2}{x + 2} - 1 \geq \frac{2 - x^2}{-x - 2}$

$$\left[-2 < x \leq \frac{15}{7} \right]$$

228 $\frac{2}{3x} > \frac{4}{9}$

$$\left[0 < x < \frac{3}{2} \right]$$

229 $\frac{3x^2 + x - 3}{2 - 6x} + \frac{x}{2} \geq \frac{x}{3x - 1}$

230 $x - \frac{1}{2 - 3x} > \frac{2x - 1}{2} + \frac{6x + 1}{3x - 2}$

$$\left[-\frac{2}{9} < x < \frac{2}{3} \right]$$

231 $\frac{2x - 1}{2x + 1} \leq 0$

$$\left[-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} \right]$$

232 $\frac{x - 1}{x - 2} \geq \frac{3}{4 - 2x}$

$$\left[x \leq -\frac{1}{2} \vee x > 2 \right]$$

233 $\frac{3}{2} \cdot \frac{2x - 1}{6 - x} \geq \frac{3}{2(x - 6)}$

$$[0 \leq x < 6]$$

234 $\frac{5x - 1}{2x - 4} - \frac{x - 1}{3x - 6} > 2 + \frac{1}{2 - x}$

$$[x < -29 \vee x > 2]$$

235 ASSOCIA ogni disequazione a sinistra con l'intervallo delle sue soluzioni a destra.

1. $\frac{1}{x} \geq 0$ A. $x < 0 \vee x \geq 1$

2. $\frac{1}{x} < 0$ B. $x < 0$

3. $\frac{x}{x - 1} \geq 0$ C. $x > 0$

4. $\frac{x - 1}{x} \geq 0$ D. $x \geq 0$

5. $\frac{x}{x^2 + 1} \geq 0$ E. $x \leq 0 \vee x > 1$

236 Per quali valori di k l'equazione

$$(k - 1)x - k - 2 = 0$$

ammette soluzione minore di 2? $[k < 1 \vee k > 4]$

237 Due polinomi di secondo grado, $P(x)$ e $Q(x)$, sono tali che:

$$\begin{aligned} P(x) \leq 0 &\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2, \\ Q(x) \geq 0 &\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Determina per quali valori di $x \in \mathbb{R}$:

a) $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0;$

b) $Q(x) \cdot P(x) \geq 0;$

c) $\frac{P(x)}{Q^2(x)} \geq 0.$

[a] $(x \leq 2 \vee x > 3) \wedge x \neq 1$; b) $2 \leq x \leq 3 \vee x = 1$;
c) $(x < 1 \vee x \geq 2) \wedge x \neq 3$

238 Determina il valore di k perché l'equazione

$$(1 + 2k)(x - 1) - 2k(2 + x) = k(2 - 2x)$$

abbia soluzione minore di 1.

$$\left[-\frac{1}{2} < k < 0 \right]$$

Risovi le seguenti disequazioni fratte utilizzando le scomposizioni in fattori.

239 $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1} \geq 0$ $[x < -1 \vee 0 \leq x < 1 \vee x \geq 2]$

241 $x + \frac{6}{x} \geq 5$

$$[0 < x \leq 2 \vee x \geq 3]$$

240 $\frac{x^2 + 4x + 4}{x} < 0$ $[x < 0 \wedge x \neq -2]$

242 $x - 3 \leq \frac{5}{3 - x}$

$$[x < 3]$$

243 $\frac{4x^2}{(2x-3)^2} > 0$

$$\left[x \neq 0 \wedge x \neq \frac{3}{2} \right]$$

246 $\frac{x(x^2+1)}{(x-3)(x+1)} \leq 0$

$$[x < -1 \vee 0 \leq x < 3]$$

244 $\frac{x^3-7x+6}{x+1} < 0$ $[-3 < x < -1 \vee 1 < x < 2]$

247 $\frac{16-x^4}{x^3+x^2} \geq 0$

$$[x \leq -2 \vee -1 < x \leq 2 \wedge x \neq 0]$$

245 $\frac{x^3-4x^2-9x+36}{x^3-9x} \geq 0$

$$[x < 0 \vee x \geq 4 \wedge x \neq -3]$$

248 $\frac{(x-3)(4-x^2)}{x^2-6x+9} > 0$

$$[x < -2 \vee 2 < x < 3]$$

■ Le disequazioni letterali fratte

ESERCIZIO GUIDA

249 Risolviamo la seguente disequazione nell'incognita x :

$$\frac{3}{2a} - \frac{2}{x+a} \leq 0.$$

Riduciamo allo stesso denominatore e svolgiamo i calcoli:

$$\frac{3(x+a) - 4a}{2a(x+a)} \leq 0 \rightarrow \frac{3x + 3a - 4a}{2a(x+a)} \leq 0 \rightarrow \frac{3x - a}{2a(x+a)} \leq 0.$$

Mettiamo in evidenza il fattore $\frac{1}{2a}$ e distinguiamo tre casi: $\frac{1}{2a} \cdot \frac{3x-a}{x+a}$.

- Se $a = 0$, la disequazione è priva di significato.
- Se $a > 0$, applicando il secondo principio di equivalenza, otteniamo:

$$\frac{3x-a}{x+a} \leq 0.$$

Studiamo il segno della frazione:

$$N > 0 \quad 3x - a > 0 \rightarrow x > \frac{a}{3};$$

$$D > 0 \quad x + a > 0 \rightarrow x > -a.$$

Compiliamo il quadro dei segni (figura a) tenendo conto che

$$-a < \frac{a}{3}, \text{ poiché } a > 0.$$

La disequazione è verificata per $-a < x \leq \frac{a}{3}$.

- Se $a < 0$, applicando il secondo principio di equivalenza, otteniamo:

$$\frac{3x-a}{x+a} \geq 0.$$

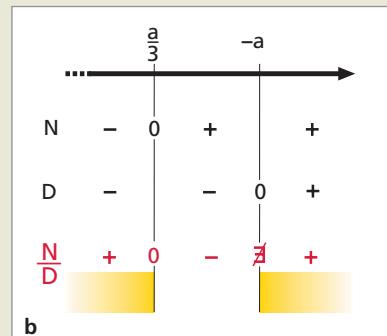
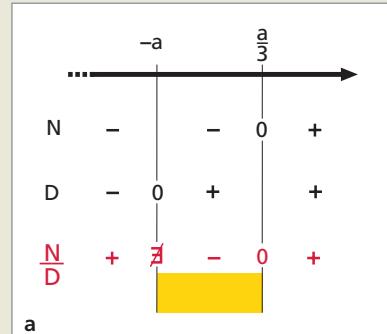
Studiamo il segno della frazione:

$$N > 0 \quad 3x - a > 0 \rightarrow x > \frac{a}{3};$$

$$D > 0 \quad x + a > 0 \rightarrow x > -a.$$

Compiliamo il quadro dei segni (figura b) tenendo conto che, essendo $a < 0$, risulta $\frac{a}{3} < -a$.

La disequazione è verificata per $x \leq \frac{a}{3} \vee x > -a$.



Riassumendo:

- se $a < 0$, $x \leq \frac{a}{3} \vee x > -a$;
- se $a = 0$, la disequazione è priva di significato;
- se $a > 0$, $-a < x \leq \frac{a}{3}$.

Risovi le seguenti disequazioni nell'incognita x .

- 250** $\frac{-5a}{a+x} > 0$ $[a > 0, x < -a; a < 0, x > -a; a = 0, \text{imp.}]$
- 251** $\frac{2a}{x+1} \geq 0$ $[a > 0, x > -1; a < 0, x < -1; a = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ con } x \neq -1]$
- 252** $\frac{1}{(a-1)(x-3)} > 0$ $[a > 1, x > 3; a < 1, x < 3; a = 1, \text{senza significato}]$
- 253** $\frac{a}{-3a(2x-1)} \leq 0$ $\left[a = 0, \text{senza significato}; a \neq 0, x > \frac{1}{2} \right]$
- 254** $\frac{a(x-a)}{x+2a} \leq 0$ $[a > 0, -2a < x \leq a; a < 0 x \leq a \vee x > -2a; a = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ con } x \neq 0]$
- 255** $\frac{a+1}{ax} > 0$ $[a < -1 \vee a > 0, x > 0; a = -1, \nexists x \in \mathbb{R}; -1 < a < 0, x < 0; a = 0, \text{senza sign.}]$
- 256** $\frac{1}{a} > \frac{1}{x}$ $[a > 0, x < 0 \vee x > a; a < 0, a < x < 0; a = 0, \text{senza sign.}]$
- 257** $\frac{2ax}{(a+1)(x-2)} \leq 0$ $[a < -1 \vee a > 0, 0 \leq x < 2; -1 < a < 0, x \leq 0 \vee x > 2; a = -1, \text{senza sign.}; a = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ con } x \neq 2]$
- 258** $\frac{a-x}{-4a-3x} > 0$ $\left[a > 0, x < -\frac{4}{3}a \vee x > a; a < 0, x < a \vee x > -\frac{4}{3}a; a = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ con } x \neq 0 \right]$
- 259** $\frac{3a}{a+x} < \frac{3b}{a+x}, \quad \text{con } a > 0, b > 0$ $[a > b, x < -a; a < b, x > -a; a = b, \text{imp.}]$
- 260** $\frac{10+7a}{x-a} + \frac{5(2+x)}{a-x} < 3$ $\left[a > 0, x < a \vee x > \frac{5}{4}a; a < 0, x < \frac{5}{4}a \vee x > a; a = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ con } x \neq 0 \right]$
- 261** $\frac{1}{a-x} - \frac{a+x}{ax-a^2} > 0$ $[a > 0, -2a < x < a; a < 0, x < a \vee x > -2a; a = 0, \text{senza sign.}]$
- 262** $\frac{2}{a-2} \geq \frac{6}{x}$ $[a > 2, x < 0 \vee x \geq 3(a-2); a < 2, 3(a-2) \leq x < 0; a = 2, \text{senza sign.}]$
- 263** $\frac{x-a-2}{x-2a+1} > 0$ $[a > 3, x < a+2 \vee x > 2a-1; a < 3, x < 2a-1 \vee x > a+2; a = 3, \forall x \in \mathbb{R} \text{ con } x \neq 5]$
- 264** $\frac{x+1}{x} > \frac{a+1}{a}$ $[a > 0, 0 < x < a; a < 0, x < a \vee x > 0; a = 0, \text{senza sign.}]$
- 265** $\frac{a}{x+1} < \frac{1}{x+a}, \quad \text{con } a > 0$ $[a > 1, x < -(a+1) \vee -a < x < -1; a < 1, -(a+1) < x < -1 \vee x > -a; a = 1, \text{imp.}]$
- 266** $\frac{x+2}{x-a} < \frac{x-2}{x+a}$ $[a < -2, a < x < 0 \vee x > -a; -2 < a < 0, x < a \vee 0 < x < -a; a = -2, \text{imp.}; a = 0, x < 0]$

Problemi

267 Per $a \neq 0$, le soluzioni della disequazione $\frac{a}{x} > 0$ e di $ax > 0$ sono le stesse. Perché? E se le due disequazioni sono $\frac{a}{x} \geq 0$ e $ax \geq 0$, hanno ancora le stesse soluzioni?

268 Rispondi alle seguenti domande, relative alla disequazione in x : $\frac{b}{a(x+1)} > \frac{b}{a}$.

- A quale disequazione diventa equivalente se a e b sono concordi?
- A quale disequazione diventa equivalente se a e b sono discordi?
- L'unione delle soluzioni delle due disequazioni trovate coincide con \mathbb{R} ? Perché?

$$\left[\text{a) } \frac{1}{x+1} > 1; \text{b) } \frac{1}{x+1} < 1; \text{c) no, } x \neq -1, x \neq 0 \right]$$

269 È data la disequazione in x : $\frac{a-b}{abx} < 0$.

Risovi e discuti la disequazione nei seguenti casi:

- $a > b > 0$; $b < a < 0$; $c < a < 0 < b$.
[a) $x < 0$; b) $x > 0$; c) $x < 0$]

270 È data la disequazione in x : $\frac{x^2 + 1}{bx + 2} < \frac{x}{b}$.

- Se $x = -1$, per quali valori di b il primo membro della disequazione è positivo?
- Risovi la disequazione nell'incognita x .

$$\left[\text{a) } b < 2; \text{b) se } b > 0, x < -\frac{2}{b} \vee x > \frac{b}{2}; \text{se } b < 0, x < \frac{b}{2} \vee x > -\frac{2}{b} \right]$$

271 Considera la frazione $\frac{a}{b}$, $a > 0 \wedge b > 0$.

Aumenta numeratore e denominatore della stessa quantità x . Per quali valori di x la prima frazione risulta maggiore della seconda?

$$\begin{aligned} &\text{[se } a > b, x < -b \vee x > 0; \\ &\text{se } a < b, -b < x < 0; \text{ se } a = b, \text{imp.}] \end{aligned}$$

272 È data la disequazione in x : $\frac{a}{(b-1)x} < 0$.

- Per quale relazione fra a e b la disequazione ha come soluzione $x < 0$?
- E per quale relazione fra a e b si ha come soluzione $x > 0$?

$$\left[\text{a) } \frac{a}{b-1} > 0; \text{b) } \frac{a}{b-1} < 0 \right]$$

273 È data la disequazione nell'incognita x :

$$x > \frac{a+1}{3a}.$$

- Per quali valori del parametro a la disequazione è verificata per $x > 2$?
- Esistono valori del parametro a per cui $x = 5$ è una soluzione della disequazione?
- Esistono valori del parametro a per cui la disequazione è verificata per $x < 3$?
- Per quali valori di a la disequazione non ammette soluzioni?
- Esistono valori di a per cui la disequazione dà ammette come soluzione un unico numero?

$$\left[\text{a) } a = \frac{1}{5}; \text{b) } a < 0 \vee a > \frac{1}{14}; \text{c) no; d) } a = 0; \text{e) no} \right]$$

274 Considera la disequazione, nell'incognita x ,

$$\frac{1}{ax-1} + 1 > 0.$$

- Per quali valori di a la disequazione è impossibile?
- Quali sono le soluzioni per $a > 0$?
- Quali sono le soluzioni per $a < 0$?

$$\left[\text{a) } a = 0; \text{b) } x < 0 \vee x > \frac{1}{a}; \text{c) } x < \frac{1}{a} \vee x > 0 \right]$$

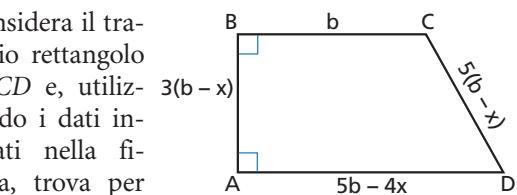
275 È data la disequazione nell'incognita x :

$$\frac{(a+1)x}{a} < 2x.$$

- Per quali valori di a la disequazione ha come soluzione $x < 0$?
- Quali sono le soluzioni per $a > 1$?
- Esistono valori di a per cui la disequazione non ammette soluzioni?
- Qual è la soluzione per $a = -3$?

$$\left[\text{a) } 0 < a < 1; \text{b) } x > 0; \text{c) } a = 0, a = 1; \text{d) } x > 0 \right]$$

276 Considera il trapezio rettangolo $ABCD$ e, utilizzando i dati indicati nella figura, trova per quali valori di x :



a) il perimetro è maggiore di 24;

b) il rapporto fra la base minore e la base maggiore è maggiore di $\frac{1}{2}$.

$$\left[\text{a) } x < \frac{7}{6}b - 2; \text{b) } \frac{3}{4}b < x < b \right]$$

→ Teoria a pag. 583

5. I sistemi di disequazioni

RIFLETTI SULLA TEORIA

La risoluzione dei sistemi di disequazioni numeriche intere e frazionarie

277 VERO O FALSO?

- a) In un sistema di due disequazioni è possibile che queste abbiano soluzioni e che il sistema non ne abbia.
- b) Le soluzioni di un sistema di disequazioni devono soddisfare ogni disequazione che lo compone.
- c) Le soluzioni di un sistema di disequazioni sono un sottoinsieme delle soluzioni di ogni singola disequazione.

278 La disequazione $\frac{x-1}{x+2} > 0$ e il sistema $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases}$ hanno le stesse soluzioni? Perché?

La risoluzione dei sistemi di disequazioni letterali

279 TEST Quale dei seguenti sistemi ha l'insieme vuoto come insieme delle soluzioni?

A $\begin{cases} ax \leq 0 \quad (\text{con } a > 0) \\ x \geq 0 \end{cases}$

B $\begin{cases} bx \leq b \quad (\text{con } b > 0) \\ x > 0 \end{cases}$

C $\begin{cases} ax \leq 0 \quad (\text{con } a > 0) \\ x > 0 \end{cases}$

D $\begin{cases} bx > 0 \quad (\text{con } b < 0) \\ x < 0 \end{cases}$

E $\begin{cases} bx \leq 0 \quad (\text{con } b = 0) \\ x < 0 \end{cases}$

280 VERO O FALSO?

Le seguenti affermazioni si riferiscono al sistema

$$\begin{cases} ax > 0 \\ bx < 0 \end{cases}$$

- a) È impossibile se $a > 0 \wedge b > 0$.
- b) È indeterminato se $a > 0 \wedge b = 0$.
- c) È sempre verificato se $a = 1 \wedge b = -2$.
- d) È impossibile $\forall a \in \mathbb{R} \wedge b = 0$.
- e) Una sua soluzione è:

$$x = 2 \text{ se } a < 0 \wedge b > 0.$$

ESERCIZI

Nel sito: ► 15 esercizi in più
► 12 esercizi di recupero



■ La risoluzione dei sistemi di disequazioni numeriche

ESERCIZIO GUIDA

281 Risolviamo i seguenti sistemi di disequazioni.

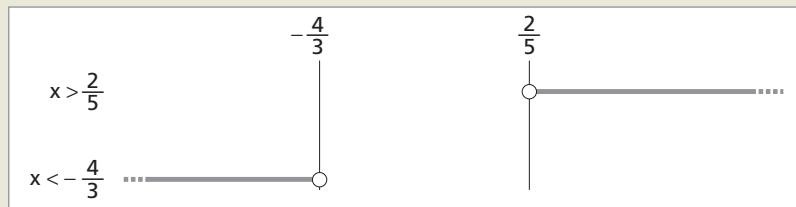
a) $\begin{cases} 3(1-x) < 2x + 1 \\ 2x - 6 > 5x - 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{4}{3} + 5x \leq \frac{1}{2}x + 11 - \frac{1}{3} \\ \frac{6}{5}x + 1 - x < 2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{10}x \end{cases}$

a) Svolgiamo i calcoli:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 3 - 3x < 2x + 1 \\ 2x - 5x > -2 + 6 \end{array} \right. &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3x - 2x < 1 - 3 \\ -3x > 4 \end{array} \right. \rightarrow \\ &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -5x < -2 \\ -3x > 4 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x > 2 \\ 3x < -4 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{2}{5} \\ x < -\frac{4}{3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Rappresentiamo le soluzioni delle disequazioni:



Non esistono valori di x per cui le due disequazioni sono verificate contemporaneamente, quindi il sistema è impossibile. L'insieme delle soluzioni è vuoto.

b) Risolviamo le due disequazioni:

$$\begin{array}{l} \textcircled{6} \quad \left\{ \begin{array}{l} 9x - 8 + 30x \leq 3x + 66 - 2 \\ 12x + 10 - 10x < 20 + 5x + 7x \end{array} \right. \\ \textcircled{10} \quad \left\{ \begin{array}{l} 39x - 3x \leq 64 + 8 \\ 2x - 12x < 20 - 10 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 39x - 3x \leq 64 + 8 \\ 2x - 12x < 20 - 10 \end{array} \right. &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 36x \leq 72 \\ -10x < 10 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{72}{36} \\ 10x > -10 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq 2 \\ x > -1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Rappresentiamo le soluzioni delle disequazioni:



La soluzione è: $-1 < x \leq 2$, ossia $]-1; 2]$.

Risovi i seguenti sistemi di disequazioni.

282 $\left\{ \begin{array}{l} x - 1 > 0 \\ x - 6 > 0 \end{array} \right.$

[$x > 6$]

284 $\left\{ \begin{array}{l} x + 4 < 0 \\ 3x < 1 \end{array} \right.$

[$x < -4$]

283 $\left\{ \begin{array}{l} 4x + 6 < 0 \\ 6x \geq 0 \end{array} \right.$

[impossibile]

285 $\left\{ \begin{array}{l} x + 1 > 0 \\ -2x \geq 0 \\ 3x + 2 > 0 \end{array} \right.$

$\left[-\frac{2}{3} < x \leq 0 \right]$

286 $\begin{cases} x - 4 < 0 \\ 2 - x > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$ $[-3 < x < 2]$

287 $\begin{cases} 3x + 9 + 2 < x - 1 \\ 2x - 3 > x + 7 \end{cases}$ [impossibile]

288 $\begin{cases} x - 6 - x(x - 1) > 2 - x^2 \\ 2x - 1 < 3 \end{cases}$ [impossibile]

289 $\begin{cases} x + 7 - 3x \geq -x(x + 1) + x^2 - 3 - 2x \\ 2x + 3 < 7 \end{cases}$ $[-10 \leq x < 2]$

290 $\begin{cases} \frac{1}{3}(9x + 12) - 10 > 12 \\ 4x(x - 1) + 10 < 4x(x + 1) - 6 \end{cases}$ $[x > 6]$

291 $\begin{cases} 2x(x - 1) - 2x^2 + x < 2 - x \\ 7x - 1 - 6x > x - 3 \end{cases}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

292 $\begin{cases} \frac{x+3}{2} - \frac{2}{3} < \frac{x-1}{6} - 1 \\ 2x - 2 > x + 1 \end{cases}$ [impossibile]

293 $\begin{cases} 3x - 5 < 2x + 4 \\ -4x > 2 + 8\left(x - \frac{5}{8}\right) - 6x \end{cases}$ $\left[x < \frac{1}{2}\right]$

294 $\begin{cases} 7x - 1 + x(x - 3) + 6 \leq x^2 - 7x + 1 \\ 4x - 7 < 8x + 2 \end{cases}$ $\left[-\frac{9}{4} < x \leq -\frac{4}{11}\right]$

295 $\begin{cases} 6x - 1 + 2x(x - 2) - x^2 \geq x^2 + 1 \\ 2x - 6 > x + 1 \end{cases}$ $[x > 7]$

296 $\begin{cases} \frac{1}{2}(2 + x) - 1 > -\frac{1}{3}(x - 1) \\ \frac{1}{5}(x + 10) < \frac{1}{3}(x + 6) \end{cases}$ $\left[x > \frac{2}{5}\right]$

297 $\begin{cases} 2x(x - 1) - x^2 + x - 3 \leq x(x - 2) + 7 \\ 2x + 3 - x + x^2 > x(x + 2) - 3 \end{cases}$ $[x < 6]$

298 $\begin{cases} 2x + (x - 1)^2 + x > x^2 + 3 \\ 6x - 3 < x + 2 \end{cases}$ [impossibile]

BRAVI SI DIVENTA ► E27



299 $\begin{cases} \frac{(2x-1)(2x+1)}{4} - (x+2)^2 \geq \frac{9}{2}x \\ \frac{3x-1}{x-4} \leq 1 \end{cases}$

300 $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x < 8 + x - \frac{x+3}{3} \\ 3x + 2 \geq 2x + 1 \end{cases}$ $[-1 \leq x < 12]$

301 $\begin{cases} (2x-1)(x+2) - 2x^2 < x + 7 \\ 3x - 1 > x + 3 \end{cases}$ $\left[2 < x < \frac{9}{2}\right]$

302 $\begin{cases} (x+2)^2 - x(x+2) - 7 \leq 4 \\ 2x - 3 > 1 \end{cases}$ $\left[2 < x \leq \frac{7}{2}\right]$

303 $\begin{cases} 2x - 3 < (x+1)^2 - x(x-1) \\ x + 3 - 2x \geq 4 \end{cases}$ $[-4 < x \leq -1]$

304 $\begin{cases} (x-1)^2 + 2x - 7 < 1 + x^2 \\ 7x + 1 < 7 + x(x-2) - x^2 + 9x \end{cases}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

305 $\begin{cases} x^2 + 6x - 3 < 2x(x+2) - x^2 \\ (x-2)^2 + 3x - 3 > -2x + 1 + x^2 \end{cases}$ $\left[0 < x < \frac{3}{2}\right]$

306 $\begin{cases} (x+3)^2 - x^2 - 7 < x + 2 \\ 2x > x(x+1) + 4 - x^2 \end{cases}$ [impossibile]

307 $\begin{cases} (x-5)(x+3) > x^2 + 2x - 5 \\ \frac{1}{9}(8-x) + 1 < 2\left(\frac{1}{3}x + 1\right) \end{cases}$ [impossibile]

308 $\begin{cases} 4\left(\frac{1}{8}x - 2\right) - \frac{x}{4} \leq -\frac{x+3}{3} \\ \frac{1}{3}x + 2 > \frac{1}{2}x - \frac{x-5}{6} + 1 \end{cases}$ $[x \leq 12]$

309 $\begin{cases} 9x - 15 - 2(x+1) \geq -2(x-3) - 20 \\ \frac{1-x}{2} + 1 \geq \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \end{cases}$ $\left[\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{17}{7}\right]$

310 $\begin{cases} 2\left(\frac{2}{5}x - 1\right) + \frac{1}{2}x > \frac{2}{5}x - 1 \\ x^2 + x\left(\frac{1}{3}x - 4\right) > x(x-2) + \frac{x^2}{3} \end{cases}$ [impossibile]

- 311**
$$\begin{cases} \frac{1}{4}[1+x(x^2-1)] + \frac{1}{4} > \left(3 + \frac{1}{2}\right)x - \frac{1-x^3}{4} - \frac{1}{2} \\ 3x - \frac{1}{2} \geq x + 2 - \frac{5}{2} \end{cases} \quad \left[0 \leq x < \frac{1}{3}\right]$$
- 312**
$$\begin{cases} \frac{2}{3}x(x-1) - 2\left[\frac{1}{3}x(x-1) + 1\right] < \frac{1}{3} + x \\ 2x + \frac{1}{4} \leq x - \frac{1}{3} + 1 \end{cases} \quad \left[-\frac{7}{3} < x \leq \frac{5}{12}\right]$$
- 313**
$$\begin{cases} \left(2x - \frac{1}{3}\right)\left(2x + \frac{1}{3}\right) - 3x^2 + \frac{x-1}{3} \leq x^2 + \frac{5}{9} \\ \frac{2x+1}{3} - \frac{7x+1}{2} > x - \frac{2}{3} - \frac{1}{4}x \end{cases} \quad \left[x < \frac{6}{43}\right]$$
- 314**
$$\begin{cases} \frac{3}{2}\left[x - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{15}\right] - \frac{3}{4} > x(x-1) - x^2 \\ (2x-1)^2 - 4x(x-1) + x < 1 \end{cases} \quad [\text{impossibile}]$$
- 315**
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{2x(x+1)}{3} < \frac{1-2x^2}{3} + 1 \\ \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{6} - (x-1)(x+1) \leq 1 - x^2 \end{cases} \quad [-11 \leq x < 0]$$
- 316**
$$\begin{cases} \left[\frac{1}{4}(x+2)^2 - 4 - x\right]4 < x^2 - 2x \\ \frac{3}{4}x - \frac{2}{3} > \frac{1}{2}x + 1 \end{cases} \quad [\text{impossibile}]$$
- 317**
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{11}{4}(6x-1) - 3\left(x - \frac{1}{4}\right)\right] + 2x > 11x \\ \frac{x}{2} + 3(x-6) - x + 1 > \frac{5(x-7)}{2} \end{cases} \quad \left[x < -\frac{4}{9}\right]$$
- 318**
$$\begin{cases} \frac{1}{3}\left(x+2 - \frac{x+5}{2}\right) < \frac{x+4}{5} - \frac{x+3}{4} \\ 4[(4x-1)^2 + x] + (6x-1)^2 \leq 4x + (10x-1)^2 \end{cases} \quad \left[\frac{1}{6} \leq x < 1\right]$$
- 319**
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{x+10}{3} - \frac{x+3}{4} - \frac{2x+11}{6}\right) \leq -\frac{2x+7}{3} \\ \left(x - \frac{2}{3}\right) : 2 > \frac{3-x}{10} + \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad [x \leq -5]$$
- 320**
$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} + \frac{1-x}{2} \geq \frac{2x+1}{4} + x - \frac{3}{2} \\ 2x - 3 < 5 - 3x \\ (x-1)^2 + x > (x+2)(x-3) + 2 \end{cases} \quad \left[x \leq \frac{6}{5}\right]$$
- 321**
$$\begin{cases} 3\left(\frac{1}{4}x - 1\right) \geq -\left(\frac{3}{4}x - 3 \cdot \frac{x-2}{2}\right) \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - x > (1-x)^2 \end{cases} \quad \left[x > \frac{3}{4}\right]$$

- 322** $\begin{cases} (2-x)(x+1) + \frac{(x+2)^2}{3} > x \cdot \frac{3-2x}{3} + x + 2 \\ \frac{x+1}{5} - 3(2x+1) < \frac{3-2x}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$ $[x > -1]$
- 323** $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+2) + 2 \geq \left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 + x \\ \frac{x+1}{x-1} + 1 < 3\left(\frac{x+1}{x-1} - 1\right) \end{cases}$ $\left[1 < x \leq \frac{3}{2}\right]$
- 324** $\begin{cases} \frac{3x-2}{5} - \frac{x-4}{2} > \frac{3}{4} - \frac{2x-1}{10} \\ \frac{3}{2} - \frac{x}{1-x} \leq 3 \end{cases}$ $\left[-\frac{5}{2} < x < 1 \vee x \geq 3\right]$
- 325** $\begin{cases} 2 + \frac{1}{x} < \frac{2}{5x} \\ \frac{2x-1}{2} \cdot \frac{x}{4} + \frac{6x-1}{4} \leq \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 + \frac{3}{8}x \end{cases}$ $\left[-\frac{3}{10} < x < 0\right]$
- 326** $\begin{cases} \frac{5-x}{3-x} > 1 \\ \frac{1}{4} - x \left(2x - \frac{1}{3}\right) \geq 2 \left(\frac{1}{2} - x\right) \left(\frac{1}{2} + x\right) \end{cases}$ $\left[\frac{3}{4} \leq x < 3\right]$

■ La risoluzione dei sistemi di disequazioni letterali

Nel sito: ▶ 15 esercizi in più



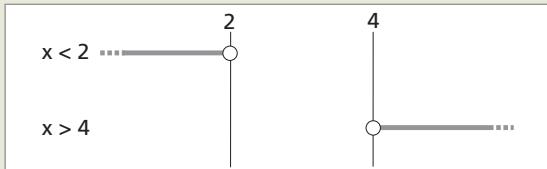
ESERCIZIO GUIDA

327 Risolviamo i sistemi nell'incognita x : a) $\begin{cases} 5ax < 10a \\ 3x > 12 \end{cases}$ (con $a \neq 0$); b) $\begin{cases} 3bx > 1 \\ 2bx < 4 \end{cases}$ (con $b \neq 0$).

a) Per risolvere la prima disequazione dobbiamo dividere i due membri per $5a$, quindi occorre esaminare i due casi: $a > 0$ e $a < 0$.

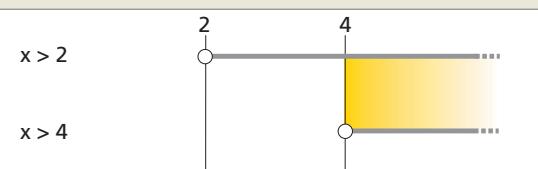
Primo caso. $a > 0$.

$$\begin{cases} \frac{5ax}{5a} < \frac{10a}{5a} \\ \frac{3x}{3} > \frac{12}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2 \\ x > 4 \end{cases}$$



Secondo caso. $a < 0$.

$$\begin{cases} x > 2 \\ x > 4 \end{cases}$$



Conclusione

Il sistema ammette soluzioni solo se $a < 0$ e l'insieme delle soluzioni è dato da $x > 4$.

b) Poiché per risolvere le due disequazioni occorre dividere per b , esaminiamo i due casi: $b > 0$ e $b < 0$.

Primo caso. $b > 0$.

$$\begin{cases} \frac{3bx}{3b} > \frac{1}{3b} \\ \frac{2bx}{2b} < \frac{4}{2b} \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{3b} \\ x < \frac{2}{b} \end{cases}$$

Confrontiamo le due soluzioni $\frac{1}{3b}$ e $\frac{2}{b}$, riducendo le frazioni allo stesso denominatore $3b$:

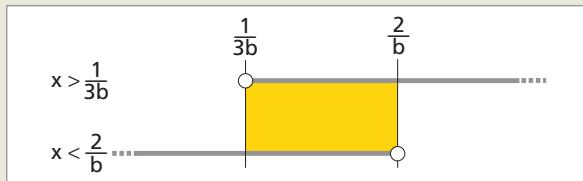
$$\frac{2}{b} = \frac{2 \cdot 3}{3b} = \frac{6}{3b};$$

pertanto:

$$\frac{1}{3b} < \frac{6}{3b}; \quad \frac{1}{3b} < \frac{2}{b}.$$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{3b} \\ x < \frac{2}{b} = \frac{6}{3b} \end{cases}$$

Rappresentiamo le soluzioni su due rette:

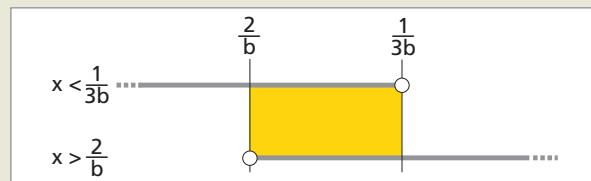


Le soluzioni comuni sono per $\frac{1}{3b} < x < \frac{2}{b}$.

Secondo caso. $b < 0$.

$$\begin{cases} 3bx > 1 \\ 2bx < 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{1}{3b} \\ x > \frac{2}{b} = \frac{6}{3b} \end{cases}$$

Se $b < 0$, $\frac{1}{3b} > \frac{2}{b}$; quindi il quadro risulta:



Le soluzioni comuni sono per $\frac{2}{b} < x < \frac{1}{3b}$.

Conclusione

Il sistema ammette soluzioni e precisamente:

- se $b > 0$, $\frac{1}{3b} < x < \frac{2}{b}$;
- se $b < 0$, $\frac{2}{b} < x < \frac{1}{3b}$.

Risovi i seguenti sistemi di disequazioni nell'incognita x .

328 $\begin{cases} 2ax < 6a \\ 2x > 12 \end{cases}$ (con $a \neq 0$) $[a > 0, \text{impossibile}; a < 0, x > 6]$

329 $\begin{cases} a(2x + 1) > ax \\ 2x - 6 < x \end{cases}$ (con $a \neq 0$) $[a > 0, -1 < x < 6; a < 0, x < -1]$

330 $\begin{cases} 3bx > 2 \\ 12bx < 16 \end{cases}$ (con $b \neq 0$) $\left[b > 0, \frac{2}{3b} < x < \frac{4}{3b}; b < 0, \frac{4}{3b} < x < \frac{2}{3b} \right]$

331 $\begin{cases} 3a(x + 2) < 2a(x + 3) - a \\ 2(x + 3) > 6 - (2 - x) \end{cases}$ (con $a \neq 0$) $[a > 0, -2 < x < -1; a < 0, x > -1]$

332 $\begin{cases} 15 + 3x < x(6a + 3) \\ x(a - 1) < 5 - x \end{cases}$ (con $a \neq 0$) $\left[a > 0, \frac{5}{2a} < x < \frac{5}{a}; a < 0, \frac{5}{a} < x < \frac{5}{2a} \right]$

333 $\begin{cases} 3bx > 15b \\ 2(x - 1) < 8 + x \end{cases}$ (con $b < 0$) $[x < 5]$

334 $\begin{cases} (x - 1)^2 + a - 2 + 2x > (x - 2)(x + 2) + 2(a - 1) - a \\ 3x - 2a \leq 1 \end{cases}$ $\left[x \leq \frac{2a + 1}{3} \right]$

335 $\begin{cases} 2x - 1 \leq (m + 1)^2 - 2 - 2m + 1 \\ 2x - (m - 1)(m + 1) > (1 + x)^2 - x(x + 2) \end{cases}$ $\left[\frac{m^2}{2} < x \leq \frac{m^2 + 1}{2} \right]$

336
$$\begin{cases} (a-1)^2 - a - 2 + (x+1)^2 - x(x+1) < 1 + a^2 \\ (a-1)(a-2) - 2 - x(x-1) \geq a^2 + (2-x)(2+x) - 4 \end{cases}$$
 [$3a \leq x < 3a + 1$]

337
$$\begin{cases} (x+1)^2 + x + 2a - 3 \leq 5a + x^2 + 2(a-1) \\ (x-2)(1+x) - x^2 + x \geq \frac{5}{3}a - x \end{cases}$$
 [impossibile]

338
$$\begin{cases} x(1-x) - x^2 + 2a < 6a - 2x^2 - a \\ (x-1)^2 - x(x-1) \geq 3a - \frac{2}{3} - 2x + 1 \end{cases}$$
 $\left[3a - \frac{2}{3} \leq x < 3a \right]$

339
$$\begin{cases} 3x - (x+1)^2 \geq a - (x-2)(x+2) - 5 \\ 5x + 2 - a(1-a) < (a+2)^2 - 4 \end{cases}$$
 [impossibile]

340
$$\begin{cases} x(3b-1) + 2b > 2(1+b) - x \\ 3(1-b) + 2x < 2x(b+1) - 3b \end{cases}$$
 (con $b \neq 0$) $\left[b > 0, x > \frac{3}{2b}; b < 0, x < \frac{3}{2b} \right]$

341
$$\begin{cases} x(x+1) + x^2 + 3a \leq 7a + 2x^2 - 2a \\ (x+1)^2 - x(x+1) \leq 2a + 3\left(x + \frac{1}{3}\right) \end{cases}$$
 [$a > 0, -a \leq x \leq 2a; a = 0, x = 0; a < 0, \text{ impossibile}$]

La risoluzione dei problemi mediante le disequazioni lineari

■ ESERCIZIO GUIDA

342 La somma di tre numeri naturali dispari consecutivi è minore di 27. Determiniamo il massimo valore possibile dei tre numeri.

- Indichiamo con x il minore di tre numeri dispari.
- Il secondo numero, dispari consecutivo di x , è: $x + 2$.
- Il terzo numero, dispari consecutivo di $x + 2$, è: $x + 4$.
- La somma dei tre numeri è minore di 27:

$$x + (x + 2) + (x + 4) < 27$$

$$3x + 6 < 27$$

$$3x < 21$$

$$x < 7.$$

Il più grande numero naturale dispari minore di 7 è 5; quindi, i tre numeri richiesti sono 5, 7 e 9.

Problemi vari**343**

Aggiungendo alla somma di due numeri pari consecutivi il triplo del maggiore dei due numeri, si ottiene una quantità maggiore di 108. Calcola quali sono i valori più piccoli che possono assumere i due numeri.

[22; 24]

344

La somma di due numeri naturali, di cui uno è il quadruplo dell'altro, è minore di 75. Determina il massimo valore possibile dei due numeri.

[14; 56]

345

La somma di due numeri dispari consecutivi è maggiore di 45. Trova quali sono i due numeri naturali più piccoli che soddisfano la relazione.

[23; 25]

346

Per quali valori di $x \in \mathbb{N}$ la frazione

$$\frac{4x - 3}{3x + 2}$$

diventa impropria?

[$x > 5$]**347**

Nella risoluzione di quattro test, Simone ha riportato i seguenti punteggi: 78, 81, 79, 76. Quale punteggio deve riportare nel quinto test per avere complessivamente una media maggiore di 80?

[punteggio > 86]

348

Per noleggiare un'automobile, una compagnia di noleggi offre due opzioni. Con l'opzione A si pagano € 15,00 di quota fissa più € 0,20 per km percorso. L'opzione B prevede € 10,00 di quota fissa e € 0,25 per km. Per quale tipo di viaggi è più conveniente l'opzione B?

[per viaggi di percorrenza inferiore ai 100 km]

349

Determina per quali valori di k l'equazione

$$(3 - k)x - 5 = 0$$

ammette soluzione positiva.

[$k < 3$]**350**

Luca ha guadagnato negli ultimi tre mesi: € 700, € 800, € 550. Quanto deve guadagnare in questo mese per poter guadagnare mediamente nei quattro mesi almeno € 850?

[almeno € 1350]

351

Il noleggio di una tavola e di un paio di scarponi da snowboard costa € 11,00 per un'intera mattina fino a mezzogiorno. Ogni mezz'ora in più costa € 0,80. Matteo ha € 15,00; fino a che ora può fare snowboard?

[fino alle 14:30]

352

È dato il seguente problema: «Un triangolo isoscele ha il perimetro di 30 cm. Il lato obliquo è maggiore dei $\frac{5}{3}$ della base. Determina la lunghezza della base». Considera le tre disequazioni seguenti:

a) $\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}x + x < 30$,

b) $\frac{30 - x}{2} > \frac{5}{3}x$,

c) $x + x + \frac{5}{3}x > 30$.

Solo due di queste disequazioni soddisfano il problema. Quali? In ciascuna indica se l'incognita x rappresenta la base oppure il lato obliquo.

[a) x = base; b) x = base]**353**

Sono dati tre numeri interi consecutivi, $x < y < z$, tutti diversi da 0.

- a) Il loro prodotto è multiplo di 6? Perché?
- b) Se $x < 0$, il loro prodotto è positivo o negativo? Perché?
- c) Se la loro somma è maggiore di 55, che valori può assumere y ?

[a) sì; b) negativo; c) $y \geq 19$]**354**

In una fabbrica di giocattoli, si producono pupazzi che vengono rivenduti a € 7,00 ciascuno. Sapendo che i costi fissi mensili ammontano a € 2100,00 e che il costo del materiale per ogni pupazzo è di € 3,50, determina quanti pupazzi devono essere prodotti perché il bilancio non vada in perdita.

[almeno 600]

355

Quali sono quei numeri interi la cui metà è maggiore della terza parte del loro successivo?

[$n > 2$]**356**

Per telefonare in alcuni Paesi esteri, due compagnie telefoniche applicano, rispettivamente, le seguenti tariffe.

- A) € 1,20 per il primo minuto di conversazione, € 0,90 per i successivi.
- B) € 1,00 per ogni minuto di conversazione.

Quanti minuti deve durare una telefonata perché convenga la tariffa A?

[più di 3 min.]

357 Mi fermo al distributore per mettere nel motore della mia auto mezzo litro di olio, che costa € 17,60 al litro, e per fare benzina, che costa € 1,28 al litro.

Quanti litri di benzina posso mettere al massimo nel serbatoio se ho soltanto € 28? [15]

358 Andrea, per andare in piscina, può scegliere tra due diverse possibilità:

- € 140 di iscrizione annuale più € 2 per ogni ingresso.
- € 20 per la tessera di socio più € 8 per ogni ingresso.

Per quanti ingressi risulta preferibile la seconda possibilità? [meno di 20]

Problemi di geometria

361 Un'aiuola rettangolare deve essere costruita con un perimetro minore o uguale a 18 m. Sapendo che la lunghezza dovrà superare di 3 m la larghezza, determina quale può essere la larghezza massima dell'aiuola. [3 m]

362 I lati di un triangolo misurano, in metri, rispettivamente $2x$, $x + 2$ e 8. Per quali valori di x il triangolo ha perimetro minore di 100 m? [0 < $x < 30$]

363 I lati di un rettangolo misurano, in centimetri, rispettivamente $2x$ e $x + 1$. Se il perimetro del rettangolo deve risultare maggiore di 42 cm, come deve essere scelto il valore di x ? $\left[x > \frac{20}{3}\right]$

364 In un triangolo isoscele, la lunghezza della base è $\frac{1}{3}$ di quella del lato diminuita di 2 cm.

Quale valore deve assumere la misura x del lato affinché il perimetro sia minore di 19 cm? [6 < $x < 9$]

365 Le diagonali di un rombo sono lunghe rispettivamente $(6x - 2)$ cm e $(5x + 10)$ cm. Quali valori può assumere x affinché la prima diagonale sia maggiore della metà della seconda?

$$\left[x > 2\right]$$

359 Per percorrere in autostrada 630 km, voglio impiegare al massimo 6 ore, con una sosta di 10 minuti. Quale velocità media dovrò mantenere?

$$[v \geq 108 \text{ km/h}]$$

360 In una lotteria a premi, ogn i biglietto costa € 2. I premi in totale costano € 1580, le spese di organizzazione ammontano a € 260; inoltre, a chi vende i biglietti, viene dato un compenso di € 4 per ogni blocchetto da 20 biglietti venduto. Quanti biglietti è necessario vendere perché ci sia un guadagno di almeno € 500?

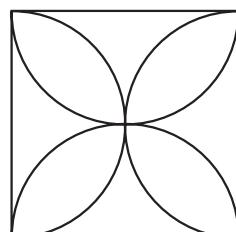
$$[\text{almeno } 1300]$$

366 Sono dati due percorsi: il primo lungo un triangolo equilatero di lato $(3x + 1)$ cm; il secondo lungo un triangolo isoscele di base 5 cm e lato $(2x + 1)$ cm. Stabilisci per quale valore di x il primo percorso è più lungo del secondo.

$$\left[x > \frac{4}{5}\right]$$

367 Un giardiniere costruisce un recinto quadrato, che poi deve modificare in rettangolo, aumentando un lato di 3 m e diminuendo l'altro di 2 m. Quanta rete deve comperare se il recinto rettangolare ha area maggiore di quello quadrato? [più di 26 m]

368 Per ricamare un quadrato con dentro quattro semicirconferenze, come riportato in figura, sono disponibili 5 m di filo colorato.



Quali possibili dimensioni deve avere il quadrato affinché sia realizzabile il ricamo? Qual è l'area del quadrato ricamato con dimensioni massime?

$$[\text{lato} \leq 48,6 \text{ cm}; \approx 2365,67 \text{ cm}^2]$$

6. Equazioni e disequazioni con valori assoluti

→ Teoria a pag. 585

RIFLETTI SULLA TEORIA

Le equazioni con i valori assoluti

369 VERO O FALSO?

- a) Non si può determinare il valore assoluto di $x - 1$, se $x > 3$. V F
- b) Le espressioni $|x + 2|$ e $x + 2$ sono equivalenti solo se $x \geq 2$. V F
- c) Le espressioni $|5 - x|$ e $x - 5$ sono equivalenti se $x \geq 5$. V F
- d) Un'equazione di primo grado con il valore assoluto può avere due soluzioni distinte. V F
- e) Un'equazione di primo grado con il valore assoluto ha sempre almeno una soluzione. V F

370 TEST Quale delle seguenti equazioni è impossibile?

- A $x - 1 = |x - 1|$
- B $|2x + 1| - 2 = 3$
- C $\frac{-1}{2}|x - 2| = -3$
- D $-\frac{2}{3}|3x + 1| = 2$
- E $\left|x - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

371 TEST Una sola delle seguenti equazioni *non* ha due soluzioni. Quale?

- A $|x + 3| = 1$
- B $|x| + 1 = 4$
- C $|x + 5| = 0$
- D $|x + 1| = |-1|$
- E $|x + 1| + |-3| = 5$

Le disequazioni con i valori assoluti

372 VERO O FALSO?

- a) Le disequazioni con il valore assoluto devono avere sempre il segno $>$. V F
- b) Se una disequazione contiene il valore assoluto di un'espressione con la variabile, allora, in generale, si devono risolvere almeno due sistemi di disequazioni per trovare le soluzioni della disequazione. V F
- c) In una disequazione con valori assoluti, se uno dei sistemi risolventi è impossibile, allora la disequazione è impossibile. V F
- d) La soluzione di una disequazione con valori assoluti è data dall'intersezione dei sistemi in cui viene scomposta. V F

ESERCIZI

■ Le equazioni con i valori assoluti

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più



■ ESERCIZIO GUIDA

- 373 Risolviamo l'equazione $2|x| - 1 = 5$.

Analizziamo il segno all'interno del valore assoluto.

L'insieme delle soluzioni dell'equazione è l'**unione** degli insiemi delle soluzioni dei due sistemi seguenti. Per questo fra i due sistemi mettiamo il simbolo \vee (*vel*):

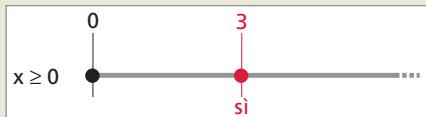
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x - 1 = 5 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ 2(-x) - 1 = 5 \end{cases}$$

I due sistemi sono formati da una disequazione e da un'equazione. Sistemi di questo tipo sono chiamati **sistemi misti**. Risolviamoli entrambi.

Primo sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

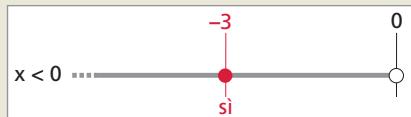


La soluzione $x = 3$ è accettabile.

Secondo sistema

$$\begin{cases} x < 0 \\ -2x - 1 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x = -3 \end{cases}$$



La soluzione $x = -3$ è accettabile.

Poiché entrambe le soluzioni sono accettabili, l'equazione data ha due soluzioni:

$$x = 3 \quad \text{e} \quad x = -3.$$

Risovi le seguenti equazioni con valori assoluti.

374 $1 + |x| = 5$

$[x = -4; x = 4]$

$\left[x = 4; x = -\frac{8}{5} \right]$

375 $|4x| - 1 = 11$

$[x = 3; x = -3]$

$\left[x = \frac{1}{5}; x = -\frac{5}{3} \right]$

376 $|1 + x| = 5$

$[x = 4; x = -6]$

383 $3\left(|x| - \frac{1}{3}\right) = 6x - 1$ $[x = 0]$

377 $|x| + 1 = 2x - 3$

$[x = 4]$

384 $\left|\frac{1}{2} - x\right| = \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}$ $\left[x = \frac{7}{16}; x = \frac{5}{8} \right]$

378 $|x + 1| = 2x - 3$

$[x = 4]$

385 $\left|\frac{3}{4}(x - 1)\right| = \frac{1}{2}x + 2$ $[x = 11; x = -1]$

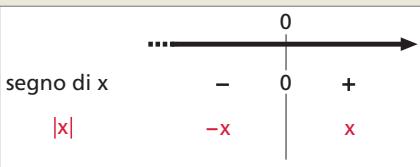
379 $1 - x + |1 - x| = 0$

$[x \geq 1]$

380 $|2x - 5| = 7 - 8x$

$\left[x = \frac{1}{3} \right]$

386 $\frac{1}{|x - 3|} = \frac{3}{2}$ $\left[x = \frac{11}{3}; x = \frac{7}{3} \right]$



■ Le disequazioni con i valori assoluti

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più



■ ESERCIZIO GUIDA

387 Risolviamo la seguente disequazione:

$$|3x - 6| - 1 > 2(x + 2) - x - 2.$$

Scriviamo la disequazione nella forma $|A| > B$:

$$|3x - 6| > 2x + 4 - x - 2 + 1 \rightarrow |3x - 6| > x + 3.$$

$$\text{Analizziamo il segno di } 3x - 6: 3x - 6 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{6}{3} \rightarrow x \geq 2.$$

La disequazione si scinde in due sistemi:

Primo sistema

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 3x - 6 > x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 3x - x > 3 + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x > 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x > \frac{9}{2} \end{cases}$$

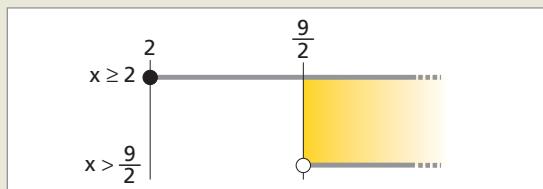
Secondo sistema

$$\begin{cases} x < 2 \\ -3x + 6 > x + 3 \end{cases}$$

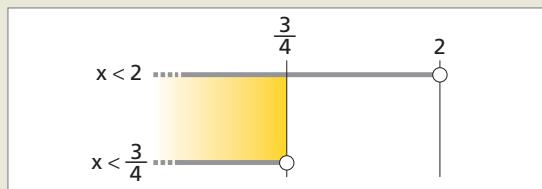
$$\begin{cases} x < 2 \\ -3x - x > 3 - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ -4x > -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x < \frac{3}{4} \end{cases}$$

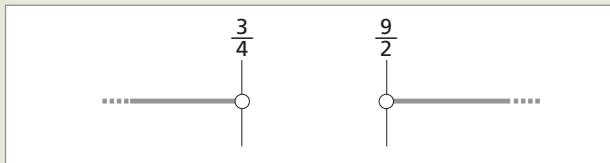


Le soluzioni comuni si hanno per $x > \frac{9}{2}$.



Le soluzioni comuni si hanno per $x < \frac{3}{4}$.

Uniamo le soluzioni dei due sistemi, rappresentandole su una stessa retta:



La disequazione data ha per soluzioni:

$$x < \frac{3}{4} \vee x > \frac{9}{2}, \text{ ossia } \left[-\infty; \frac{3}{4} \right] \cup \left[\frac{9}{2}; +\infty \right]$$

Risovi le seguenti disequazioni.

388 $|x| - 1 > 5$

$[x < -6 \vee x > 6]$

397 $\left| \frac{4}{3}x - \frac{1}{4} \right| > -\frac{13}{12} + \frac{x}{4}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

389 $|x - 1| > 5$

$[x < -4 \vee x > 6]$

398 $1 - x + |1 - x| \geq 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

390 $|1 - x| < 6$

$[-5 < x < 7]$

399 $1 - |x| < 4x - 3$ $\left[x > \frac{4}{5} \right]$

391 $3 - |x + 8| \leq 2x - 1$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{4}{3} \\ x > -\frac{5}{9} \end{cases}$$

400 $|2x - 3| < 6 + 7x$ $\left[x > -\frac{1}{3} \right]$

392 $|2x| - 4 < 1 + 7x$

$$\left[-\frac{10}{13} < x < 2 \right]$$

401 $|5x - 15| < \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ $\left[\frac{63}{22} < x < \frac{19}{6} \right]$

393 $\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{12}x + \frac{4}{3}$

$$\left[x > \frac{5}{18} \right]$$

402 $|5 - 10x| - 2 \geq 2x + 5$ $\left[x \leq -\frac{1}{6} \vee x \geq \frac{3}{2} \right]$

394 $2\left(\frac{1}{3} - |x|\right) < 4x - 1$

$$\left[-\frac{7}{5} < x < 9 \right]$$

403 $\frac{1}{2}x - \frac{5}{4} \leq \left| \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) \right|$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

395 $\frac{1}{2}x + 2 > \left| \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right) \right|$

$$\left[x > \frac{5}{2} \right]$$

396 $\frac{23}{24}x - \frac{1}{2} > \left| \frac{5}{8}x + \frac{1}{3} \right|$

$$\left[x > \frac{5}{2} \right]$$

404 TEST Le soluzioni della disequazione $|x - 1| \geq -1$ sono:

- A** $x \geq 1$. **B** $-2 \leq x \leq -1$. **C** $x \leq 4$. **D** $1 \leq x \leq 2$. **E** $\forall x \in \mathbb{R}$.

405 Discussi e risovi l'equazione, nell'incognita x , $|ax - 3| = (a + 2)(x - 3)$ per i seguenti valori di a :

- a) $a = -2$; b) $a = 0$; c) $a = -3$.

$$\left[\text{a) } x = -\frac{3}{2}; \text{b) } x = \frac{9}{2}; \text{c) } x = 0 \vee x = -3 \right]$$

Problemi

406 Scrivi un'equazione con valore assoluto le cui soluzioni siano $x = 1$ e $x = 3$.

407 Scrivi una disequazione con valore assoluto che abbia come soluzioni gli intervalli $x \leq -1 \vee x \geq 1$.

408 Perché puoi affermare che l'equazione $\left| \frac{2}{3}x - 1 \right| + 2 = 1$ è impossibile, senza effettuare alcun calcolo?

409 Le disequazioni $\left| \frac{x}{x+1} \right| \geq 1$ e $\frac{|x|}{|x+1|} \geq 1$ sono equivalenti? Risolvile entrambe e verifica la tua risposta.

$$\left[\text{sì; } x \leq -\frac{1}{2} \wedge x \neq -1 \right]$$

410 Risovi la disequazione, nell'incognita x , $(a - 1) \cdot |2x + 3| < b$, nei seguenti casi:

- a) $a > 1, b < 0$; c) $a < 1, b = 1$;
b) $a > 1, b = 0$; d) $a = 2, b = 1$.

$$[\text{a) impossibile; b) impossibile; c) } \forall x \in \mathbb{R}; \text{d) } -2 < x < -1]$$

411 Quali sono le soluzioni della disequazione, nell'incognita x , $|ax| \geq a + b$, se $a > 0 \wedge b = 1$?

E quali invece se $-1 < a < 0 \wedge b = 1$?

$$\left[x \leq -\frac{a+1}{a} \vee x \geq \frac{a+1}{a}; x \leq \frac{a+1}{a} \vee x \geq -\frac{a+1}{a} \right]$$

LABORATORIO DI MATEMATICA

Le disequazioni lineari con Wiris

■ ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di Wiris discutiamo le soluzioni della seguente disequazione a coefficienti letterali:

$$\frac{x-1}{(h-2)x+2} \geq 0.$$

Osserviamo che:

- la disequazione è fratta con numeratore e denominatore lineari,
- il simbolo di diseguaglianza è maggiore in senso lato,
- il secondo membro è 0.

Essa, pertanto, è soddisfatta:

- per i valori esterni all'intervallo di estremi x_N , lo zero del numeratore (compreso), e x_D , quello del denominatore (escluso), se i coefficienti di x hanno segni concordi;
 - per i valori interni, se i coefficienti di x hanno segni discordi.
- Entriamo in ambiente Wiris e assegniamo alla lettera d la disequazione data (figura 1).
- Stabiliamo per quali valori del parametro h i segni dei coefficienti di x sono concordi.
 - Cerchiamo gli zeri x_N e x_D del numeratore e del denominatore in funzione di h .
 - Valutiamo per quali valori di h abbiamo $x_N > x_D$.
 - Risolviamo la disequazione per i valori estremi di h : -4 e -2 .

```

d = (x-1) / ((h+2) * x + 2) ≥ 0;
risolvere_disequazione(h+2>0,h) → h>-2
risolvere(x-1=0) → {{x=1}}
risolvere((h+2)*x+2=0,x) → {x = -2/h+2}
risolvere_disequazione(1 > -2/(h+2),h) → h>-2|h<-4
risolvere_disequazione(sostituire(d,h,-4)) → falso
risolvere_disequazione(sostituire(d,h,-2)) → x≥1

```

▲ Figura 1

Interpretiamo e riportiamo in una tabella i risultati algebrici ottenuti:

se $h < -4$,	valori interni e $x_N > x_D$, quindi
se $h = -4$,	$x_N = x_D$ e Wiris ci dice che la disequazione
se $-4 < h < -2$,	valori interni e $x_N < x_D$, quindi
se $h = -2$,	x_D non esiste e Wiris ci indica
se $h > -2$,	valori esterni e $x_N > x_D$, quindi

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{h+2} < x \leq 1; \\
 & \text{non ha soluzioni;} \\
 & 1 \leq x < -\frac{2}{h+2}; \\
 & x \geq 1; \\
 & x < -\frac{2}{h+2} \vee x \geq 1.
 \end{aligned}$$

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata con Derive ▶ 11 esercitazioni in più



■ Esercitazioni

Discuti le soluzioni delle seguenti disequazioni a coefficienti letterali. Sostituisci, poi, in esse un valore del parametro h per ogni intervallo risultato dalla discussione e risovi, per verifica, la disequazione corrispondente.

1 $\frac{2h - (2h-1)x}{3} + \frac{(h-2)x - 1}{2} > \frac{h}{6}$

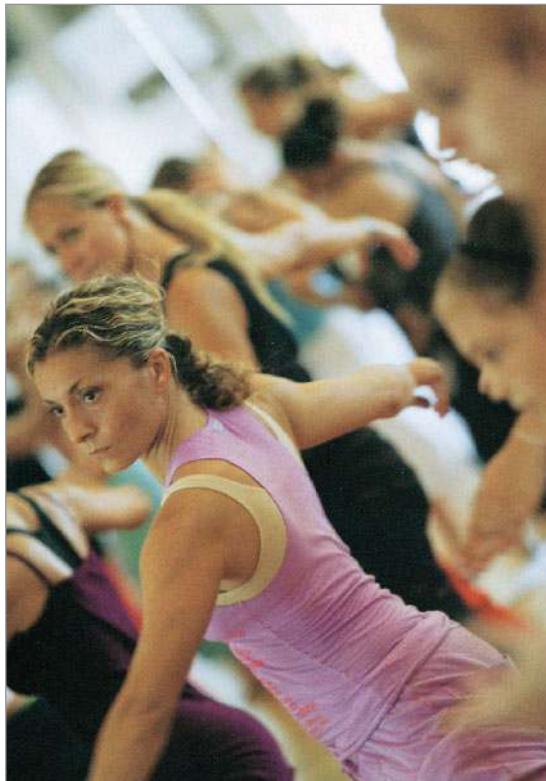
2 $\frac{x+h-1}{(h-2)x-2} \leq 0$

Matematica per il cittadino

LA PALESTRA

Sara ha deciso di frequentare una palestra tutti i giorni, esclusi il sabato e la domenica. Dopo aver consultato le palestre della zona, che rimangono chiuse la domenica, fissa l'attenzione sulle tre proposte che le sembrano più convenienti e che offrono un servizio equivalente.

- La palestra *Performance* propone abbonamenti bimestrali, semestrali, annuali, rispettivamente a € 100, € 260, € 470. Richiede inoltre una quota annuale di € 60, comprensiva di tesseramento e assicurazione.
- La palestra *City gym* ha una tariffa settimanale di € 23 (non è possibile considerare frazioni di settimana). A questa cifra vanno aggiunti € 50 di iscrizione e € 20 di assicurazione, che hanno durata annuale.
- La palestra *New fitness* costa € 6 al giorno più un contributo forfettario di € 20. Se si presenta un amico, che si iscrive per un periodo superiore a 40 giorni, la palestra effettua uno sconto del 5% sulla tariffa giornaliera e regala 5 giorni di frequenza all'amico.



1. Volendo frequentare la palestra *City gym* per 38 giorni, quanto sarebbe il costo da sostenere?

- A € 216 B € 944 C € 248 D € 254

2. Supponendo, per semplicità, che ogni mese sia costituito da quattro settimane, quale palestra è più conveniente se Sara frequenta per due mesi?

3. Sara si accorge che mancano meno di due mesi alle vacanze estive. Al variare del numero dei giorni di frequenza varia anche il costo totale di ogni palestra. Per alcuni periodi complessivi è più conveniente scegliere una palestra, mentre per periodi differenti può convenire sceglierne un'altra.

Individua questi periodi e completa la seguente tabella (il numero delle colonne potrebbe essere sovrabbondante) scrivendo la palestra più conveniente per una frequenza minore di due mesi.

	Periodo 1	Periodo 2	Periodo 3	Periodo 4
Giorni	da 1 giorno a giorni	da giorni a giorni	da giorni a giorni	da giorni a giorni
Palestra

4. Se Sara ha a disposizione solo € 150, per quanti giorni al massimo può andare in palestra e quale palestra le conviene scegliere?

5. Sara ha convinto il suo amico Andrea ad andare insieme in palestra dall'inizio di gennaio alla fine di giugno. Pensando che non ci siano aumenti, quale palestra è più conveniente per lei?

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ► questi test interattivi ► 30 test interattivi in più

**1**

È data la disequazione: $5x + 3 > 2x - 4$.

Soltanto una delle seguenti *non* è equivalente a essa. Quale?

- A $5x + 4 + \frac{1}{x} > 2x - 4 + \frac{1}{x}$
- B $3x > -7$
- C $5x + 3 - 2x > 2x - 4 - 2x$
- D $\frac{5x + 3}{5} > \frac{2x - 4}{5}$
- E $\frac{5x + 3}{2} > x - 2$

2

È data la disequazione:

$$\frac{3}{x} > 1.$$

Soltanto *una* delle seguenti è equivalente a essa. Quale?

- A $\frac{x - 3}{x} < 0$
- B $\frac{x}{3} > 1$
- C $\frac{3 - 1}{x} > 0$
- D $3 - x > 0$
- E $x - 3 > 0$

3

È data la disequazione $-3x - 5 \geq 3$. Moltiplicando i due membri per -1 , si ottiene:

- A $3x + 5 \geq -3$.
- B $3x + 5 \leq -3$.
- C $-3x - 5 \leq 3$.
- D $-3x + 5 \leq -3$.
- E $3x - 5 \leq 3$.

4

Osserva la figura.



Essa rappresenta l'insieme delle soluzioni di una delle seguenti disequazioni. Quale?

- A $\frac{x + 1}{x - 2} > 0$
- B $\frac{x + 1}{x - 2} < 0$
- C $\frac{x - 2}{x + 1} \geq 0$
- D $\frac{x - 2}{x + 1} \leq 0$
- E $\frac{x + 2}{x - 1} \leq 0$

5

Osserva la figura.



Essa rappresenta l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni *eccetto una*. Quale?

- A $2 \geq \frac{6}{x}$
- B $3x - 1 > 2 + 2x$
- C $3 - x < 0$
- D $\frac{1}{3 - x} \leq 0$
- E $2x > 6$

6

Due disequazioni hanno le seguenti soluzioni:

$$-2 < x \leq 3 \vee x \geq 7;$$

$$x < -4 \vee \frac{3}{5} < x < \frac{15}{2}.$$

Del sistema costituito da tali disequazioni possiamo dire che:

- A ha per soluzioni $-4 < x < -2 \vee 7 \leq x < \frac{15}{2}$.
- B è impossibile.
- C ha per soluzioni $\frac{3}{5} < x \leq 3 \vee 7 \leq x < \frac{15}{2}$.
- D ha per soluzioni $\frac{3}{5} < x < 3 \vee 7 < x < \frac{15}{2}$.
- E ha per soluzioni $-2 < x < 3 \vee x \geq 7$.

7

L'intervallo $]-2; 1[$ è soluzione di uno dei seguenti sistemi. Quale?

- A $\begin{cases} 3x \geq -6 \\ 5x < 5 \end{cases}$
- B $\begin{cases} 3x < 6 \\ 5x < 5 \end{cases}$
- C $\begin{cases} 3x > -6 \\ 5x < 5 \end{cases}$
- D $\begin{cases} -3x \leq -6 \\ 5x < 5 \end{cases}$
- E $\begin{cases} 3x < 6 \\ 5x > 5 \end{cases}$

8

È data la disequazione $3x - 2 < 7$. Fra i seguenti valori, uno solo non la soddisfa. Quale?

- A 0
- B $\frac{1}{2}$
- C 2
- D 1
- E 4

SPIEGA PERCHÉ

- 9** La disequazione $-x > 0$ è equivalente a $x < 0$? Perché? E la disequazione $-2x < 0$ è equivalente a $x > 2$?
- 10** Perché puoi dire che la disequazione $\frac{1}{2(3x-1)^2} \leq -1$ è impossibile, senza effettuare alcun calcolo?
- 11** Le disequazioni $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$ e $N(x) \cdot D(x) > 0$ hanno le medesime soluzioni? Perché?
- 12** Che cosa si intende per disequazioni equivalenti? Stabilisci se sono equivalenti le disequazioni

$$\frac{x-5}{2x+3} \leq 0 \quad \text{e} \quad (x-5)(2x+3) \leq 0,$$
motivando la risposta.
- 13** Spiega perché una disequazione fratta è equivalente all'unione di due opportuni sistemi di disequazioni, fornendo un paio di esempi.
- 14** Qual è l'errore nella seguente sequenza di passaggi? Motiva la risposta.

$$\begin{aligned} ax - 2 &\leq 5x + 7a - 37 \\ ax - 5x &\leq 7a - 35 \\ (a-5)x &\leq 7(a-5) \\ x &\leq 7. \end{aligned}$$

ESERCIZI

Nel sito: ► 13 esercizi in più



Risovi le seguenti disequazioni numeriche intere.

- 15** $\frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right) > 3\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(5x - \frac{1}{3}\right)$ [impossibile]
- 16** $\frac{(3x-1)^2}{3} + \frac{x+3}{6} > 3x(x-1) - \frac{2-7x}{4}$ $\left[x < \frac{16}{7} \right]$
- 17** $(3x+1)(1-3x) + 2(1-3x) \geq (x-1)^3 - x^2(6+x)$ $\left[x \leq \frac{4}{9} \right]$
- 18** $\frac{2-x}{4} - \left[2 - \left(\frac{x-1}{8} \right) \right] > \left(\frac{1}{2} + x \right)^2 - (1-x)^2$ $\left[x < -\frac{7}{25} \right]$
- 19** $2x\left(x - \frac{2}{9}x\right) - \frac{x}{3}\left(\frac{10}{3}x + 4\right) > \left(1 - \frac{2}{3}x\right)^2$ [impossibile]
- 20** $\frac{(x-2)^2}{4} - \left[\frac{1-x}{2} - \left(\frac{1}{4}x - 1 \right) \right] + \frac{(3-x)(3+x)}{4} > 0$ $[x < 7]$
- 21** $\frac{1}{3}\left(x - \frac{9}{2}\right) + \left(2 - \frac{x}{3}\right)^2 < \frac{x^2}{9} - \frac{3x-1}{3} + 2 + \frac{x-2}{2}$ $\left[x > \frac{7}{3} \right]$
- 22** $\frac{1}{4} + (x-1)\left(x - \frac{1}{4}\right) \leq \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{16} \left[2x + \frac{4(x-2)}{3} \right]$ $\left[x \geq -\frac{2}{13} \right]$
- 23** $\frac{1-2x}{3} + \frac{1}{2} < 2x + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 8$ $[x > -3]$
- 24** $\frac{2}{3}(3x+2) + 8x^2 \leq \frac{32}{9} + (3x+2)(3x-2) - \left(x + \frac{2}{3}\right)^2$ $\left[x \leq -\frac{2}{3} \right]$

Risovi le seguenti disequazioni numeriche fratte.

25 $\frac{2x+1}{x-5} < 0$

$$\left[-\frac{1}{2} < x < 5 \right]$$

26 $\frac{3-2x}{x+3} > 0$

$$\left[-3 < x < \frac{3}{2} \right]$$

27 $\frac{3x-6}{x+3} \geq \frac{1}{2}$

$$[x < -3 \vee x \geq 3]$$

28 $\frac{(x-3)(x+6)-(x-8)}{x+4} \geq x+1$

$$\left[-\frac{14}{3} \leq x < -4 \right]$$

29 $\frac{4}{x-3} \geq 2 - \frac{5x-4}{x-3}$

$$[x \leq -2 \vee x > 3]$$

30 $\frac{x-2}{2x+1} + \frac{2}{4x+2} \geq 0$

$$\left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup [1; +\infty[$$

31 $\frac{4x}{1-x} > \frac{2}{x-1} - 2$

$$[-2; 1[$$

Risovi le seguenti disequazioni letterali nell'incognita x .

32 $(x-2a)(x+2a) + 1 - x^2 > 3(1-a^2) - 2ax$

$$\left[a > 0, x > \frac{a^2+2}{2a}; a = 0, \text{impossibile}; a < 0, x < \frac{a^2+2}{2a} \right]$$

33 $\frac{1}{2}x - a(2-x) > a\left(-x - \frac{1}{2}\right)$

$$\left[a > -\frac{1}{4}, x > \frac{3a}{1+4a}; a < -\frac{1}{4}, x < \frac{3a}{1+4a}; a = -\frac{1}{4}, \forall x \in \mathbb{R} \right]$$

34 $(x+a)^2 - b^2 \leq (x+b)(x-b) - a^2 \quad [a > 0, x \leq -a; a < 0, x \geq -a; a = 0, \forall x \in \mathbb{R}]$

35 $(1+a)x - 3 < ax - 3a - a(2x-1) \quad \left[a > -\frac{1}{2}, x < \frac{3-2a}{1+2a}; a < -\frac{1}{2}, x > \frac{3-2a}{1+2a}; a = -\frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R} \right]$

36 $\frac{x-a}{bx} > \frac{x-b}{ax}, \text{ con } a > 0 \text{ e } b > 0 \quad [a > b, x < 0 \vee x > a+b; a < b, 0 < x < a+b; a = b, \text{imp.}]$

Risovi i seguenti sistemi di disequazioni nell'incognita x .

37 $\begin{cases} x-1 > 3 \\ 2x-6 < 4 \end{cases}$

$$[4 < x < 5]$$

38 $\begin{cases} (2x-1)^2 < 2(2x+1)(x-3) \\ (x-1)(x+1) > 2+x^2-2(x-1) \end{cases}$

$$[\text{impossibile}]$$

39 $\begin{cases} (x+1)^2 + 2(x^2-2) \leq 3(x+1)(x-1) \\ 2x(x-3) + (x+2)^2 > 5+3x^2 \end{cases}$

$$\left[x < -\frac{1}{2} \right]$$

- 40** $\begin{cases} 3x - (x+1)^2 \geq 1 - (x-2)(x+2) \\ 5x + 2 - x(1-x) < (x+2)^2 - 4 \end{cases}$ [impossibile]
- 41** $\begin{cases} \frac{4(x-1)}{3} - 2x(x-1) \geq -2(x^2+3) \\ \frac{2}{3}x - (1-x)(1+x) \leq x^2 + 1 \end{cases}$ $\left[-\frac{7}{5} \leq x \leq 3 \right]$
- 42** $\begin{cases} (x+3)(x-2) < (x+1)^2 + 1 \\ \frac{3x-1}{9} - \frac{6x-2}{6} + \frac{3x-1}{6} > x - \frac{1}{3} \end{cases}$ $\left[-8 < x < \frac{1}{3} \right]$
- 43** $\begin{cases} x+1 \geq \frac{x-1}{2} + \frac{2x+4}{3} \\ 10x\left(x-\frac{1}{5}\right) \geq \frac{7x-1}{4} + 10x^2 - 3 + \frac{2x-3}{2} \end{cases}$ $[x \leq 1]$
- 44** $\begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{3-4x}{2} < \frac{5x-4}{6} + \frac{x-5}{2} \\ \frac{7(x-2)}{6} + \frac{5(3x-2)}{4} - \frac{1}{2}(4x+1) < \frac{11}{12}x - \frac{2(x+4)}{3} \end{cases}$ [impossibile]
- 45** $\begin{cases} \frac{x+10}{3} - \left[\frac{(3x-2)(3-2x)}{6} - \frac{3(3x-4)}{2} \right] > x^2 + \frac{11}{3} \\ 4x-9+(x-1)(x+1) < x(x-3)+7x-10 \end{cases}$ [impossibile]
- 46** $\begin{cases} x^2 - 1 - \frac{2x+11}{6} \geq \frac{(3-2x)^2 - 1}{4} \\ \frac{(2x-1)^3 + (6x-1)(2x+3)}{4} - \frac{40x-5}{6} \leq \frac{1-2x}{3} + \frac{2x(3x^2-1)}{3} \end{cases}$ $\left[\frac{29}{16} \leq x \leq 3 \right]$
- 47** $\begin{cases} \frac{2-x}{x+3} \geq 1 \\ 8 - x(x+1) < (2-x)(2+x) + 6 \end{cases}$ $\left[-2 < x \leq -\frac{1}{2} \right]$
- 48** $\begin{cases} 2(a-2)x - 2a > 2(1-a) - 4x \\ 3x + 2(a-1) < 3(a+1)x + 2a \end{cases}$ $\left[a < 0, x < \frac{1}{a}; a = 0, \text{impossibile}; a > 0, x > \frac{1}{a} \right]$
- 49** $\begin{cases} 2x - 3a \geq x + 8a \\ 3x - 8a < 10a + 2x + 3a \end{cases}$ $[a \leq 0, \text{impossibile}; a > 0, 11a \leq x < 21a]$
- Risovi le seguenti equazioni e disequazioni con un valore assoluto.
- 50** $|x| + 5 = 2x + 1$ $[x=4]$
- 51** $|x-1| = 3x+1$ $[x=0]$
- 52** $2+x - |2+x| = 0$ $[x \geq -2]$
- 53** $|x+1| - 2 < 5$ $[-8 < x < 6]$
- 54** $\frac{1}{2} + |x| \geq 2x - 3$ $\left[x \leq \frac{7}{2} \right]$
- 55** $|x-2| \leq 2x+5$ $[x \geq -1]$
- 56** $|x+3| > 3x + \frac{1}{2}$ $\left[x < \frac{5}{4} \right]$

Problemi

57 La terza parte della somma di due numeri consecutivi è minore di 7. Qual è il maggior valore possibile dei due numeri? **[9; 10]**

58 In un rettangolo la base è lunga $(2x + 1)$ cm e l'altezza 6 cm. Determina x in modo che il rettangolo abbia area minore di quella di un quadrato di lato 4 cm.

$$\left[-\frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{6} \right]$$

59 Determina per quali valori di a l'equazione

$$(5 - a)(x - 1) = 2x + 4$$

ha soluzione negativa.

$$\left[3 < a < 9 \right]$$

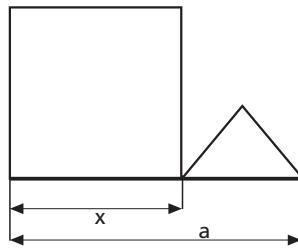
60 Il noleggio di un'automobile costa € 60 al giorno più € 1 per ogni chilometro percorso. Qual è il numero massimo di chilometri da percorrere quotidianamente per non spendere più di € 180 al giorno? **[120 km]**

61 In un triangolo, la base è lunga $(2 + 4x)$ cm e l'altezza 20 cm. Determina x in modo tale che il triangolo abbia area minore di quella del quadrato che ha per lato la metà dell'altezza.

$$\left[-\frac{1}{2} \leq x < 2 \right]$$

66 Su un segmento di lunghezza a si costruisce un quadrato di lato x e un triangolo isoscele col lato obliquo pari ai $\frac{3}{5}$ della base. Quale è la condizione affinché il quadrato abbia il perimetro maggiore del triangolo? Per quali valori di a il lato del quadrato risulta maggiore di 2?

$$\left[\frac{11}{31} a < x < a; a \geq \frac{62}{11} \right]$$



67 Dati due numeri espressi nella forma $2k + 1$ e $k - 1$, con $k \in \mathbb{R}$, determina per quali valori di k :

- i due numeri sono uguali e la loro somma è minore di 3;
- il loro rapporto è positivo o la loro somma è negativa;
- il loro prodotto e la loro differenza sono entrambi positivi.

$$\left[\text{a) } k = -2; \text{ b) } k < 0 \vee k > 1; \text{ c) } -2 < k < -\frac{1}{2} \vee k > 1 \right]$$

68 Su una retta orientata prendi i punti A di ascissa 2 e B di ascissa 10. Considera un punto P di ascissa x mobile sulla retta. La distanza fra due punti distinti è sempre positiva; per esempio, se P precede A la distanza è $2 - x$, mentre se P segue A la distanza è $x - 2$. Come deve essere l'ascissa di P affinché la distanza di P da A sia maggiore della distanza di P da B ? **[$x > 6$]**

69 Due compagnie telefoniche offrono le seguenti tariffe: la compagnia A offre il primo minuto gratis, poi € 0,01 ogni 4 secondi di telefonata. La compagnia B offre le telefonate a € 0,01 ogni 6 secondi più il costo di € 0,02 alla risposta. Quale deve essere la durata di una telefonata affinché la compagnia A sia più conveniente della B ? **[durata < 3'24"]**

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 6 esercizi in più



70

In un lavoro a cottimo il compenso consiste in € 8 per ogni pezzo perfettamente realizzato e nella richiesta di un risarcimento di € 2 per ogni pezzo che risulterà difettoso. Dopo 100 pezzi realizzati, il lavoratore si trova a non riscuotere nulla. Quanti sono i pezzi risultati difettosi?

Quanto devono essere al massimo questi ultimi affinché egli guadagni almeno € 500? [80; 30]

71

Date le due equazioni $k(k-2)x = 2k + k^2$ e $k^2x - 2kx - k = 0$, determina per quali valori di k la differenza fra la soluzione della prima e quella della seconda equazione è minore o uguale a 2.

$$[(k < 2 \wedge k \neq 0) \vee k \geq 5]$$

72

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 3 esercizi in più



Solve the simultaneous inequalities:

$$\begin{cases} -4x - 2 \leq -2x + 3 \\ \frac{2}{3}x + 9 \geq x + 6 \end{cases}$$

Graph the solution set on a number line.

$$\left[-\frac{5}{2} \leq x \leq 9 \right]$$

73

Solve the given inequalities, graph the solution set on a number line, and write the solution in interval notation.

- $2x - 3 \geq 9 + 3x$.
- $2x + 5 > 10$ or $2x + 5 \leq -10$.
- $-3 \leq 4x + 1 < 5$.

(USA Tacoma Community College, Review for Test, 2002)

$$[\text{a})] -\infty, -12]; \text{b}) \left[-\infty, -\frac{15}{2} \right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty \right); \text{c}) [-1, 1[$$

74

Solve the inequality:

$$\frac{(x+1)(x-\sqrt{2})}{(x+5)^2} \geq 0$$

Express your answer in interval notation or graph your solution on the number line.

(USA Southern Illinois University Carbondale, Final Exam, 2001)

$$[-\infty, -5] \cup [-5, -1] \cup [\sqrt{2}, +\infty]$$

GLOSSARY

consultant: consulente
to graph: rappresentare graficamente

inequality: disequazione
number line: retta numerica
plan: piano, progetto

solution set: insieme delle soluzioni
statement: enunciato

72

Il proprietario di un albergo di 50 stanze ha speso € 78 000 per ammodernamenti e € 48 000 per manutenzione di inizio anno; inoltre, prevede di spendere € 15 per le pulizie di ogni stanza occupata quotidianamente. La stagione turistica durerà 120 giorni e, grazie a convenzioni con agenzie turistiche, il 70% delle stanze sarà sempre occupato. Qual è la cifra minima, da far pagare giornalmente per ogni stanza, per coprire almeno le spese sostenute? [€ 45]

73

La superficie totale di un cilindro misura 18π cm². Il suo raggio r di base può misurare 4 cm? Quali valori può assumere r ? [no; $0 < r < 3$]

Nel sito: ▶ 3 esercizi in più



77

A consultant can be paid in two manners.

Plan A: \$ 30 per hour;

Plan B: \$ 400 plus \$ 20 per hour.

Suppose the job takes n hours. For what values of n is Plan A better for the consultant than Plan B?

$$[n > 40]$$

78

TEST Solve for y : $\frac{y}{9} + 4 < \frac{y-5}{5} + 1$.

- [A] $y < 45$
- [B] $y > 45$
- [C] $y < -1$
- [D] $y > -1$
- [E] $y < 9$

(CAN Canadian Open Mathematics Challenge, 1996)

79

TEST If $a < b$ and $c < d$, which of the following statements is *always* true?

- | | |
|---------------------------------|---------------------|
| [A] $ac < bd$ | [D] $a - b < d - c$ |
| [B] $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ | [E] $a + b > c + d$ |
| [C] $a + b < c + d$ | |

(USA Tennessee Mathematics Teachers Association: 39th Annual Mathematics Contest, 1995)



Introduzione alla statistica



Partite di calcio

Il calcio è lo sport più seguito e amato in Italia. Le partite del campionato appassionano migliaia di tifosi, spesso disposti ad andare anche in trasferta pur di seguire la propria squadra del cuore...

...è vero che è più facile vincere una partita in casa che in trasferta?

→ La risposta a pag. α20

1. I dati statistici

■ La statistica induttiva e la statistica descrittiva

Immagina di parlare con uno sconosciuto e di raccogliere informazioni sulle sue abitudini, i suoi gusti, il suo stato di salute. Potresti dedurre un ritratto significativo di questa persona.

Se raccogliessi le stesse informazioni per molte persone, diciamo mille, potresti fare, in qualche modo, un ritratto del gruppo?

Può essere vantaggioso *raggruppare e sintetizzare i dati*: in questo modo si rinuncia a parte dell'informazione che essi contengono, ma si guadagna in leggibilità e facilità di interpretazione. In particolare si possono elaborare tanti dati relativi a individui singoli per trarne informazioni sulla popolazione nel suo complesso. A seconda poi di come questi dati vengono raggruppati è possibile studiare aspetti diversi del problema in esame.

La statistica si occupa proprio dei modi di raccogliere e analizzare **dati** relativi a un certo gruppo di persone (gli studenti di una scuola, gli abitanti di un quartiere, gli elettori di una regione ecc.) o di oggetti (le automobili, i dischi, i libri ecc.), per trarne conclusioni e fare previsioni.

► La statistica ha questo nome perché all'inizio essa studiava principalmente i dati utili al governo degli Stati.

► A volte anche molte informazioni possono essere inutili, se non sono ben organizzate.

► Il campione deve essere attendibile: per esempio, se si sta eseguendo un'indagine per verificare o meno il successo di una trasmissione televisiva, l'intervistato non deve essere qualcuno che lavora per quella trasmissione.

Le fasi fondamentali di un'indagine statistica sono quindi:

- il rilevamento dei dati;
- l'elaborazione dei dati.

Il gruppo preso in considerazione viene anche detto **popolazione** o **universo**. Se la rilevazione dei dati viene effettuata su tutta la popolazione, si definisce **censimento**. Spesso viene presa in esame soltanto una parte della popolazione, detta **campione**, scelta in modo che rappresenti l'intero gruppo. La raccolta di tipo globale è più significativa di quella campionaria, ma può essere molto lunga e costosa nel caso di popolazioni numerose. Per questo la maggior parte delle raccolte dati è di tipo campionario. Le tecniche utilizzate per la raccolta dei dati possono essere l'intervista diretta o indiretta. Nel caso di intervista indiretta, si possono ottenere le informazioni volute facendo compilare un questionario che viene poi spedito o consegnato a un incaricato dall'intervistato (pensa, per esempio, al censimento).

Si propongono di solito questionari anonimi con la sola richiesta dell'indicazione del sesso e dell'età.

Una volta raccolti i questionari compilati,

- li si conta per sapere il numero effettivo delle unità che costituiscono il campione;
- si contano le diverse risposte date a ciascuna domanda predisponendo tabelle di spoglio;
- si rappresentano graficamente i dati;
- si elaborano i dati con i metodi matematici più opportuni;
- si interpretano i dati e si traggono conclusioni che possano essere valide per tutta la popolazione.

I metodi per ottenere risultati soddisfacenti nel delicato procedimento di passaggio dal campione alla popolazione sono studiati da quella parte della statistica detta **statistica induttiva** (o inferenza statistica).

In questo capitolo ci limiteremo a studiare alcuni degli strumenti matematici utilizzati per descrivere i dati relativi a un certo gruppo scelto come popolazione. In questo caso si parla di **statistica descrittiva**.

■ I caratteri qualitativi e i caratteri quantitativi

Gli elementi di una popolazione si chiamano anche **unità statistiche**. È possibile studiare diverse caratteristiche di tali unità, e ogni caratteristica rappresenta un **carattere** della popolazione.

Ogni carattere viene descritto mediante le **modalità** con cui esso si può manifestare.

I caratteri possono essere di due tipi:

- **qualitativi**, se le loro modalità sono descritte da attributi;
- **quantitativi**, se le loro modalità sono descritte da numeri.

ESEMPIO

- Il carattere «sesso» ha due modalità: «maschile» e «femminile». Si tratta di un carattere qualitativo.
- Il carattere «mezzo di trasporto» ha più modalità: «treno», «autobus», «motorino», ... Si tratta di un carattere qualitativo.
- Il carattere «età» ha più modalità: 14, 15, 16, ... (se espresso in anni). Si tratta di un carattere quantitativo.

DAI CENSIMENTI AI SONDAGGI D'OPINIONE

L'utilizzo di dati statistici per ottenere informazioni utili per il governo degli Stati, quali il numero di abitanti, di soldati, di addetti ai vari mestieri ecc., risale ai popoli antichi, in particolare ai Cinesi e agli Egizi.

Nella Bibbia sono descritti diversi censimenti fra gli Ebrei, tra i quali il più noto è quello di Mosè nel deserto del Sinai. Anche i Romani fecero diversi censimenti, uno di questi è quello durante il quale nacque Gesù.

Un passo avanti nell'elaborazione statistica si ebbe in Inghilterra, intorno alla metà del Seicento, con l'«aritmetica politica», principalmente a opera del matematico John Graunt (1620-1674).

A causa delle pestilenze a Londra venivano pubblicate settimanalmente le liste delle morti e quelle delle nascite. Graunt utilizzò quel materiale osser-

vando, attraverso il calcolo di percentuali, regolarità come il maggior numero di nascite maschili rispetto a quelle femminili, il legame fra suicidi e professioni, la diminuzione delle nascite nei periodi di carestia. Era la prima volta che venivano cercate *relazioni* fra i dati raccolti.

Un altro momento importante nella storia della statistica si ebbe quando, nell'Ottocento, i matematici trovarono un collegamento con la probabilità.

Infine, è dell'ultimo secolo lo sviluppo sempre più ampio della statistica come scienza matematica a sé stante. L'applicazione di tale scienza, mediante indagini a campione, investe i campi più diversi, dai fenomeni sociali a quelli meteorologici. L'Istituto nazionale di Statistica (ISTAT) è dal 1926 l'organo ufficiale italiano per le informazioni statistiche (www.istat.it).

■ Le tabelle di frequenza**DEFINIZIONE**

La **frequenza** di una modalità è il numero di volte in cui si presenta.

ESEMPIO In un questionario abbiamo chiesto ai 28 studenti di una classe di indicare con le seguenti lettere i mezzi di trasporto con cui vanno di solito a scuola:

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| A: automobile; | M: motorino o scooter; |
| P: a piedi; | C: bicicletta; |
| B: autobus o pullman; | |

Abbiamo ottenuto i seguenti risultati:

A, B, M, M, P, A, A, B, P, B, C, A, B, B, C, P, B, A, C, C, A, M, B, M, B, A, C.

Contiamo quante volte si presenta ciascuna modalità, ovvero la sua frequenza. Costruiamo la seguente tabella di frequenza.

► Tabella 1

- L'insieme delle coppie ordinate di cui il primo elemento è la modalità e il secondo la frequenza corrispondente viene detto **distribuzione di frequenza**.

DISTRIBUZIONE DELLE FREQUENZE	
MODALITÀ	FREQUENZA
automobile	7
a piedi	3
autobus/pullman	9
motorino/scooter	4
bicicletta	5
<i>totale delle unità statistiche</i>	28

Spesso interessa il valore della frequenza confrontato con il numero totale delle unità statistiche. Infatti siamo in situazioni diverse se, per esempio, la frequenza di una modalità è 7 rispetto a un totale di 28 o se, invece, è 7 rispetto a un totale di 280. Per questo motivo viene calcolata la **frequenza relativa**, di cui diamo la definizione.

DEFINIZIONE

Frequenza relativa

La frequenza relativa di una particolare modalità è il rapporto fra la frequenza della modalità stessa e il numero totale delle unità statistiche.

$$f = \frac{F}{T}$$

frequenza relativa frequenza totale delle unità statistiche

Nell'esempio precedente la frequenza della modalità «automobile» è 7, ossia 7 studenti su 28 raggiungono la scuola in automobile; pertanto la frequenza relativa è

$$f = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

La frequenza relativa può essere espressa anche in **percentuale**, moltiplicandola per 100: la frequenza percentuale della modalità automobile è 25%. Questo significa che, in una distribuzione con le stesse caratteristiche di quella data, su un campione di 100 studenti 25 vanno a scuola in automobile.

► Tabella 2

- Le frequenze relative percentuali delle tabelle sono approssimate alle unità.

DISTRIBUZIONE DELLE FREQUENZE RELATIVE			
MODALITÀ	FREQUENZA	FREQUENZA RELATIVA	FREQUENZA RELATIVA PERCENTUALE
automobile	7	1/4	25%
a piedi	3	3/28	11%
autobus/pullman	9	9/28	32%
motorino/scooter	4	1/7	14%
bicicletta	5	5/28	18%
<i>totale</i>	28	1	100%

La somma delle frequenze relative alle diverse modalità è 1, in percentuale è 100%.

■ Le classi di frequenza

Studiamo l'altezza di un gruppo di studentesse di 15 anni (tabella 3).

In casi come questo, è utile raggruppare le modalità in **classi**, determinando la frequenza di ogni classe. Nella tabella seguente consideriamo cinque classi.

▼ Tabella 4

CLASSI DI FREQUENZA		
CLASSE	FREQUENZA	FREQUENZA RELATIVA PERCENTUALE
1,55-1,60	2	11%
1,60-1,65	5	26%
1,65-1,70	7	37%
1,70-1,75	4	21%
1,75-1,80	1	5%

Di solito l'estremo inferiore di ciascuna classe viene considerato escluso dalla classe, mentre quello superiore incluso. Per esempio, nella tabella 4 il valore 1,60 è relativo alla classe 1,55-1,60 e non alla classe 1,60-1,65.

Il raggruppamento in classi fornisce meno informazioni (per esempio, non sappiamo quanto misurano esattamente le 7 altezze comprese fra 1,65 e 1,70 m), però fornisce una sintesi più leggibile del fenomeno.

Di ogni classe è spesso utile calcolare il **valore centrale**, che si ottiene dividendo per 2 la somma degli estremi della classe. Per esempio, il valore centrale della classe 1,60-1,65 è $(1,60 + 1,65)/2$, ossia 1,625.

■ Dalle frequenze relative alle frequenze

Se vengono forniti le frequenze relative f e il numero totale T delle unità statistiche, è possibile calcolare le frequenze F di ogni modalità:

$$F = f \cdot T.$$

La frequenza di una modalità è il prodotto tra la frequenza relativa e il numero totale delle unità statistiche.

ESEMPIO Se sappiamo che, in un campione di 3500 persone, il 27% ha guardato una certa trasmissione televisiva, il numero delle persone del campione che ha guardato la trasmissione è $0,27 \cdot 3500 = 945$.

▼ Tabella 3

GRUPPO A: ALTEZZA

NUMERO D'ORDINE	MISURA ALTEZZA (in metri)
1	1,56
2	1,64
3	1,62
4	1,68
5	1,69
6	1,76
7	1,75
8	1,72
9	1,61
10	1,69
11	1,65
12	1,73
13	1,68
14	1,67
15	1,66
16	1,60
17	1,64
18	1,67
19	1,74

► Infatti, essendo $f = \frac{F}{T}$, conoscendo f e T , possiamo ricavare F .

► $27\% = 27 : 100 = 0,27$.

■ Le serie statistiche

Le tabelle che riportano nella prima colonna le modalità di un carattere *qualitativo* vengono dette **serie statistiche**.

Nella seconda colonna può comparire o il *numero di volte in cui una modalità si presenta (frequenza)* o la sua *misura (intensità)*. Anche l'intensità, infatti, può essere considerata come un tipo particolare di frequenza.

► La tabella 5 riporta, per ogni tipo di scuola, il numero di iscritti nell'anno scolastico 2006-2007 (*frequenza*).

La tabella 6 riporta, per quattro famiglie, il reddito annuo nel 2008 (*intensità*).

PREZZO DI UN PRODOTTO

ANNO	PREZZO (€)
2006	5,81
2007	6,41
2008	6,61
2009	6,21
2010	6,81

▲ Tabella 7

DISTRIBUZIONE DI FREQUENZA

NUMERO DIPENDENTI	FREQUENZA
2	2
3	8
4	6
5	2
<i>totale</i>	18

▲ Tabella 8

► Tabella 9

► Se vogliamo sapere quanti studenti hanno 7 in Tedesco e 8 in Inglese, leggiamo il valore che si trova all'incrocio fra la terza riga e la seconda colonna, ossia 1.

► Tabella 10

ESEMPIO

NUMERO DI ISCRITTI PER SCUOLA (2006-2007)

TIPO DI SCUOLA	NUMERO ISCRITTI
Scuole materne	1 652 689
Scuole elementari	2 820 150
Scuole medie	1 730 031
Scuole superiori	2 735 135

▲ Tabella 5

REDDITO ANNUO PER FAMIGLIA (2008)

FAMIGLIA	REDDITO (€)
Rossi	27 000
Bruni	41 050
Bianchi	37 820
Neri	29 400

▲ Tabella 6

Un tipo particolare di serie statistiche è costituito dalle **serie storiche**. Le serie storiche mostrano la successione dei valori che un fenomeno assume in tempi successivi. Hai un esempio nella tabella 7.

■ Le seriazioni statistiche

Le tabelle che riportano nella prima colonna un carattere *quantitativo* vengono dette **seriazioni statistiche**. Le modalità di un carattere quantitativo possono essere *discrete* (se possono assumere soltanto valori ben definiti) o *continue* (se possono assumere un qualsiasi valore all'interno di un intervallo preso nell'insieme dei numeri reali). Nella seconda colonna compare la frequenza, cioè il numero di volte in cui si presenta la relativa modalità. Hai un esempio nella tabella 8.

■ Le tabelle a doppia entrata

Nella tabella 9 riportiamo il voto finale in Inglese e in Tedesco dei quindici alunni promossi di una classe.

NUMERO D'ORDINE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
VOTO IN INGLESE	7	6	8	6	8	7	7	8	8	6	6	6	7	7	7
VOTO IN TEDESCO	8	6	6	6	6	7	8	7	9	6	7	6	7	6	8

Per interpretare l'andamento dei due voti possiamo procedere alla costruzione di una tabella che può essere letta sia nel senso delle righe sia nel senso delle colonne (tabella 10).

Questa **tabella a doppia entrata** permette di conoscere quanti sono gli alunni che hanno un determinato voto in Inglese e in Tedesco, ma anche di leggere immediatamente quanti sono gli alunni che hanno un certo voto in Tedesco e contemporaneamente un altro voto in Inglese.

		VOTO IN TEDESCO			
		6	7	8	9
VOTO IN INGLESE	6	4	1		
	7		1	2	3
	8	2	1		1

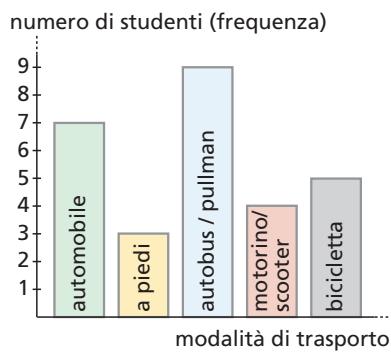
Le tabelle a doppia entrata ci permettono l'osservazione delle unità statistiche sotto due modalità. Quando entrambe le modalità sono quantitative, come nell'esempio precedente, si hanno **tabelle di correlazione**. Se almeno una delle modalità è qualitativa, si hanno **tabelle di contingenza**.

2. La rappresentazione grafica dei dati

L'ortogramma

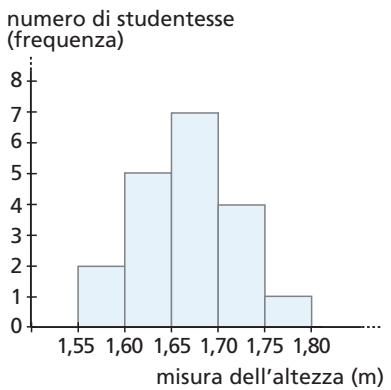
Riportiamo le frequenze della tabella 2 su un asse verticale. Sull'asse orizzontale segniamo tanti segmenti quante sono le modalità, tutti della stessa lunghezza. Per ogni segmento tracciamo un rettangolo che ha per altezza la corrispondente frequenza (figura 1).

La rappresentazione che otteniamo è detta **ortogramma**. In esso a ogni frequenza corrisponde un rettangolo che ha l'*altezza proporzionale alla frequenza stessa*.

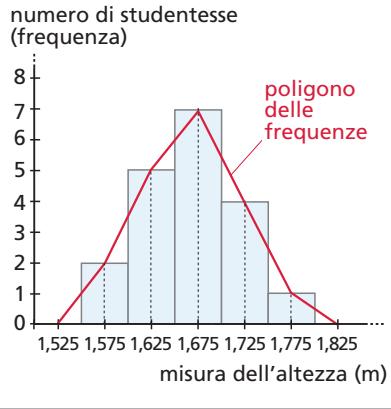


▲ Figura 1 Un ortogramma.

▼ Figura 2 Un istogramma.



◀ Figura 3



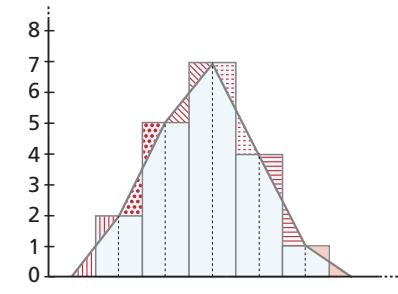
► Il termine «poligono», per indicare il poligono delle frequenze, è usato impropriamente, perché indica una spezzata aperta (e non chiusa).

► Per esempio, nell'istogramma della figura 3, consideriamo anche 1,525 e 1,825.

Se le classi hanno la stessa ampiezza, di solito si considerano come vertici della spezzata anche i punti corrispondenti ai valori centrali delle classi immediatamente precedenti e immediatamente successive a quelle per le quali la frequenza è diversa da 0. Queste classi hanno frequenza 0.

Si può verificare che in tal modo la somma delle aree dei rettangoli dell'istogramma è uguale all'area delimitata dall'asse orizzontale e dal poligono delle frequenze (figura 4).

► Figura 4 La somma delle aree dei rettangoli di un istogramma è uguale all'area sottostante il poligono delle frequenze.



L'areogramma

Questo tipo di grafico, detto anche **diagramma circolare** o **diagramma a torta**, è particolarmente utile per rappresentare le frequenze relative percentuali.

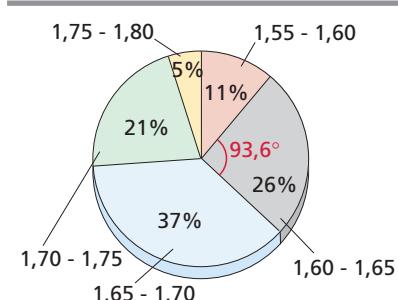
Un cerchio viene suddiviso in tanti settori circolari, ognuno dei quali corrisponde a una classe.

Gli angoli al centro dei diversi settori hanno ampiezza proporzionale alle frequenze percentuali.

► Figura 5 Frequenze relative percentuali dell'altezza delle studentesse.

ESEMPIO Consideriamo le frequenze relative percentuali dell'altezza delle studentesse nella tabella 4. Per determinare l'ampiezza x del settore corrispondente alla frequenza 26% scriviamo la seguente proporzione:

$$\begin{aligned} x : 360^\circ &= 26 : 100 \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad x &= \frac{360^\circ \cdot 26}{100} = 93,6^\circ. \end{aligned}$$



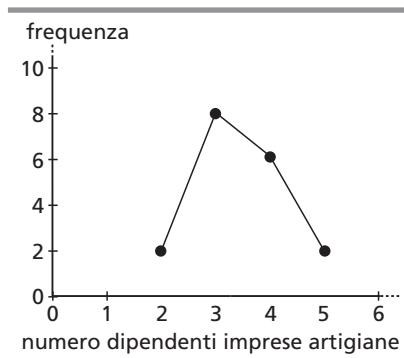
Il settore ha l'angolo al centro di $93,6^\circ$. allo stesso modo si ricavano le ampiezze degli altri settori.

I diagrammi cartesiani

Consideriamo la seguente distribuzione di frequenze, che descrive quante imprese artigiane, fra quelle scelte come campione, hanno un certo numero di dipendenti (tabella 11). Riportiamo sull'asse delle ascisse il numero dei dipendenti delle imprese artigiane e sull'asse delle ordinate le frequenze. Dopo aver segnato i punti, li colleghiamo, e la spezzata che otteniamo mette in risalto la **forma della distribuzione** delle frequenze.

NUMERO DIPENDENTI IMPRESE ARTIGIANE	FREQUENZE
2	2
3	8
4	6
5	2

▲ Tabella 11

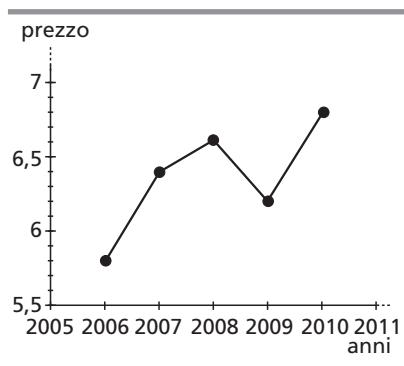


◀ Figura 6 La spezzata descrive la forma della distribuzione delle frequenze.

Con i diagrammi cartesiani si rappresentano spesso i fenomeni storici, dove la spezzata evidenzia l'andamento di un fenomeno nel tempo.

ANNI	PREZZO (€)
2006	5,81
2007	6,41
2008	6,61
2009	6,21
2010	6,81

▲ Tabella 12



◀ Figura 7 La spezzata mette in evidenza l'andamento dei prezzi di un prodotto in tempi successivi.

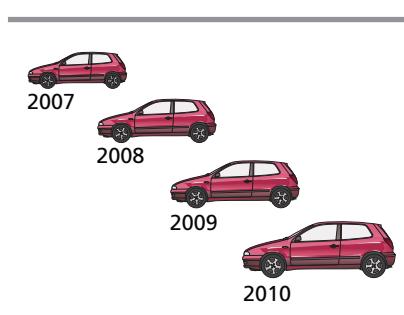
Gli ideogrammi e i cartogrammi

Gli **ideogrammi** utilizzano figure che richiamano il contenuto del fenomeno e ne danno una visione immediata. Le figure hanno dimensioni diverse, con aree proporzionali ai dati che rappresentano.

Consideriamo la serie storica della tabella 13, che riporta il numero di automobili vendute da un concessionario. Possiamo così disegnare il seguente ideogramma.

AUTOMOBILI VENDUTE	
ANNO	NUMERO AUTOMOBILI VENDUTE
2007	161
2008	194
2009	215
2010	257

▲ Tabella 13



◀ Figura 8 Gli ideogrammi permettono una percezione immediata del fenomeno. Si nota subito che il numero di automobili vendute è stato sempre in aumento.

I **cartogrammi** sono grafici utilizzati per rappresentare dati relativi ad aree geografiche. Si costruiscono utilizzando una carta geografica del territorio considerato e segnando le varie aree con segni convenzionali o colori diversi. I cartogrammi sono frequentissimi sui libri di geografia e sugli atlanti. Ecco un esempio.

► Figura 9 I colori (o i segni grafici) diversi indicano una diversa intensità o frequenza del fenomeno secondo una legenda convenzionale.

- fino a 100
- da 101 a 200
- da 201 a 300
- oltre 300



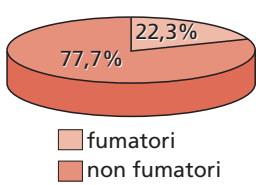
ESPLORAZIONE: IL FUMO FA MALE?

Il fumo rappresenta uno dei principali fattori di rischio nell'insorgenza di numerose patologie cronico-degenerative che colpiscono in primo luogo l'apparato respiratorio e quello cardiovascolare.

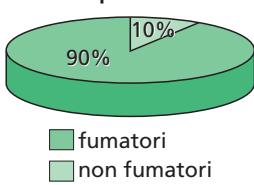
In chi smette di fumare, il rischio si riduce progressivamente fino ad avvicinarsi a quello dei non fumatori.

Da un'indagine ISTAT (dicembre 2004 - marzo 2005) risulta che i fumatori sono il 22,3% della popolazione dai 14 anni in su. Sono il 28,5% dei maschi e il 16,6% delle femmine. Se il fumo non avesse nessuna incidenza sull'insorgenza del cancro al polmone, dovremmo aspettarci di trovare le stesse percentuali di fumatori e di non fumatori anche tra i morti per tumore al polmone. Osserviamo invece i dati riassunti nei grafici in basso. Tra le persone che muoiono ogni anno di cancro al polmone, i fumatori sono circa il 90%. Si può quindi dedurre che il fumo è un fattore di rischio che favorisce l'insorgenza di questa malattia.

Popolazione totale



Morti per cancro al polmone



▲ Percentuali di fumatori e non fumatori nella popolazione totale e tra i morti per cancro al polmone.



IN CINQUE SLIDE

Il tabagismo è diffuso in maniera differente tra uomini e donne. Cerca dati in Internet, in particolare sulla mortalità per tumore al polmone nei malati di sesso maschile e in quelli di sesso femminile. Sintetizza le informazioni trovate in grafici da mostrare ai tuoi compagni in una presentazione multimediale.



Cerca nel web: diffusione fumo, uomini, donne, mappe mortalità, prevenzione.

3. Gli indici di posizione centrale

In statistica si cerca di riassumere una serie di dati con un valore medio (compreso tra il minimo e il massimo valore della distribuzione) che possa esprimere sinteticamente il fenomeno.

Esistono *medie di calcolo*, che si calcolano tenendo conto di tutti i valori della distribuzione (media aritmetica, media ponderata, media geometrica, media armonica e media quadratica), e *medie di posizione*, che si calcolano tenendo conto solo di alcuni valori (mediana e moda).

■ La media aritmetica

Supponiamo di voler confrontare l'altezza del gruppo A di studentesse del paragrafo 1 con quella delle studentesse di un secondo gruppo (chiamiamolo gruppo B), di cui riportiamo i valori nella tabella 14.

Affiancando le tabelle delle frequenze dei due gruppi (tabella 15), scopriamo che non è facile effettuare un confronto.

▼ Tabella 15

CONFRONTO DELLE FREQUENZE		
CLASSE	FREQUENZA GRUPPO B	FREQUENZA GRUPPO A
1,55-1,60	0	2
1,60-1,65	2	5
1,65-1,70	7	7
1,70-1,75	4	4
1,75-1,80	3	1

Calcolando, invece, la *media aritmetica* relativa ai due gruppi di dati, otteniamo un'informazione sintetica della distribuzione dei dati.

■ DEFINIZIONE

Media aritmetica

La media aritmetica M di n numeri x_1, x_2, \dots, x_n è il quoziente fra la loro somma e il numero n .

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

media
aritmetica somma
dei valori
n numero
dei valori

La media aritmetica M_A del gruppo A è

$$M_A = \frac{1,56 + 1,64 + 1,62 + \dots + 1,64 + 1,67 + 1,74}{19} \simeq 1,672,$$

mentre la media aritmetica dei dati del gruppo B è

$$M_B = \frac{1,77 + 1,69 + 1,69 + \dots + 1,77 + 1,73 + 1,66}{16} \simeq 1,704.$$

Poiché $M_B > M_A$, possiamo dire che le studentesse del gruppo B hanno mediamente un'altezza maggiore di quelle del gruppo A.

▼ Tabella 14

GRUPPO B: ALTEZZA	
NUMERO D'ORDINE	MISURA DELL'ALTEZZA IN METRI
1	1,77
2	1,69
3	1,69
4	1,73
5	1,62
6	1,70
7	1,68
8	1,64
9	1,76
10	1,68
11	1,72
12	1,75
13	1,68
14	1,77
15	1,73
16	1,66

► La media aritmetica di n numeri è quel numero che, sostituito a ciascuno di essi, lascia invariata la somma totale.

La media aritmetica viene anche detta semplicemente **media**, in quanto è il tipo di media più semplice che si può definire.

Negli esempi precedenti abbiamo utilizzato la media come **valore di sintesi**, ossia come un valore che riassume una caratteristica di un insieme di dati. Inoltre possiamo notare che, in questi esempi, la media si trova proprio nella zona della distribuzione dove si addensano maggiormente i risultati. Quando un valore di sintesi ha questa proprietà, diciamo che è un buon **indice di posizione centrale**. Come vedremo, non sempre la media è un buon indice di posizione centrale.



PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Tasse



Nel sito: ► Scheda di lavoro

Le aliquote IRPEF determinano l'imposta progressiva sul reddito che un cittadino deve pagare all'erario. Nel 2004 il sistema di aliquote era: per il reddito fino a 15 000 euro, aliquota del 23%; da 15 001 a 29 000 euro, aliquota del 29%; da 29 001 a 32 600 euro, aliquota del 31%; da 32 601 a 70 000, aliquota del 39%; per i redditi superiori, aliquota del 45%. Quanto ha pagato all'erario un cittadino che nel 2004 ha guadagnato 40 000 euro? Qual è stata la sua aliquota media?

BARBARA: «La prima domanda è davvero facile! Basta calcolare il 39% di 40 000 euro».

ALDO: «Ma perché allora parla di aliquota media?».

► La soluzione proposta da Barbara non è equa. Mostralo con degli esempi. Com'è possibile rispondere alle domande proposte?

■ La media ponderata

Consideriamo la tabella 16, relativa al numero di reti per partita nelle prime due giornate di un campionato di calcio di serie A in cui si giocano 10 partite per ogni giornata. Calcoliamo la media:

$$M = \frac{0+0+2+2+2+2+2+2+2+3+3+3+4+4+4+4+5+5+6+6}{20}.$$

Nel numeratore possiamo anche scrivere $0 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2$: ogni numero di reti viene moltiplicato per la sua frequenza. La media è allora:

$$M = \frac{0 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2}{2 + 7 + 3 + 4 + 2 + 2} \approx 3,05.$$

Le frequenze rappresentano i diversi «pesi» che devono avere i singoli valori nel calcolo della media. Più grande è la frequenza di un valore, maggiore è l'influenza che esso ha sul valore medio.

▼ Tabella 16

NUMERO DELLE RETI NELLE PRIME DUE GIORNATE DI CAMPIONATO

RETI	FREQUENZA
0	2
1	0
2	7
3	3
4	4
5	2
6	2

La media calcolata in questo modo può essere considerata come caso particolare di un più generale tipo di media.

DEFINIZIONE

Media aritmetica ponderata

Dati i numeri x_1, x_2, \dots, x_n e associati a essi i numeri p_1, p_2, \dots, p_n , detti *pesi*, chiamiamo media aritmetica ponderata P il quoziente fra la somma dei prodotti dei numeri per i loro pesi e la somma dei pesi stessi.

$$P = \frac{\text{somma dei prodotti dei valori per i loro pesi}}{\text{media aritmetica ponderata} \quad \text{somma dei pesi}}$$

$$P = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

► La media aritmetica è un caso particolare di media ponderata in cui tutti i pesi sono uguali a 1.

Se calcoliamo la media aritmetica ponderata nel caso di dati raggruppati in classi, possiamo assumere come valori x_1, x_2, \dots, x_n i valori centrali di ogni classe e come pesi le frequenze. In questo caso il valore ottenuto per la media aritmetica ponderata può essere diverso dalla media aritmetica dei dati.

ESEMPIO

Calcoliamo la media aritmetica ponderata relativa alla tabella 15, gruppo A:

$$P = \frac{1,575 \cdot 2 + 1,625 \cdot 5 + 1,675 \cdot 7 + 1,725 \cdot 4 + 1,775 \cdot 1}{2 + 5 + 7 + 4 + 1} \approx 1,667.$$

Il valore ottenuto è diverso, anche se di poco, dalla media aritmetica 1,672, in quanto in ogni classe abbiamo sostituito ai valori della classe il valore centrale moltiplicato per la relativa frequenza.

► 1,672 si ottiene facendo la somma delle singole altezze e dividendo per 19.

La media ponderata tuttavia è particolarmente significativa quando i pesi servono per indicare l'*importanza* dei diversi valori.

ESEMPIO

Ai cinque quesiti di una prova sommativa viene attribuita una diversa importanza.

I punti ottenuti per ogni quesito da uno studente sono quelli della tabella 17, dove sono anche riportati i pesi da attribuire a ciascun quesito.

Calcoliamo la media ponderata:

$$P = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 2,5 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 8 \cdot 2,5}{1 + 2,5 + 1 + 1 + 2,5} = 4,75.$$

Il valore che otteniamo è maggiore di quello della media aritmetica semplice ($M = 4$), perché i punteggi più alti sono stati conseguiti nei quesiti ai quali è stata data maggiore importanza.

PUNTI OTTENUTI PESATI

PUNTI	PESO
2	1
4	2,5
4	1
2	1
8	2,5

▲ Tabella 17

■ La mediana

Consideriamo i sette valori seguenti: 8, 12, 7, 9, 4, 10, 55.
Calcoliamo la media aritmetica:

$$M = \frac{8 + 12 + 7 + 9 + 4 + 10 + 55}{7} = 15.$$

15 non è un buon indice di posizione centrale in quanto tutti i numeri, tranne 55, sono minori di 15. È proprio la presenza del numero 55, molto maggiore degli altri, che «sposta» il valore medio rispetto alla posizione centrale.

Preferiamo allora scegliere un indice di posizione centrale nel seguente modo:

- disponiamo i numeri in ordine crescente (o decrescente):

4, 7, 8, 9, 10, 12, 55;

- scegliamo il valore 9, che sta al centro. Tale valore è detto **mediana**.

Si può determinare la mediana anche nel caso in cui il numero dei dati è pari. Cerchiamo, per esempio, la mediana degli otto valori seguenti:

36, 22, 41, 8, 33, 46, 38, 44.

Dopo averli disposti in ordine crescente, 8, 22, 33, 36, 38, 41, 44, 46, prendiamo come mediana la media dei due valori centrali, 36 e 38.

La mediana è: $\frac{36 + 38}{2} = 37$.

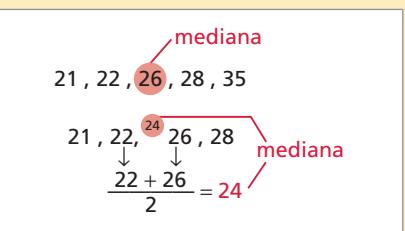
► La mediana di una sequenza dispari di numeri suddivide la sequenza in due gruppi contenenti lo stesso numero di elementi.

■ DEFINIZIONE

Mediana

Data la sequenza ordinata di n numeri x_1, x_2, \dots, x_n , la mediana è:

- il valore centrale, se n è dispari;
- la media aritmetica dei due valori centrali, se n è pari.



■ La moda

Consideriamo i valori

3, 8, 2, 3, 5, 1, 7, 3, 5, 3, 15, 2, 10, 3, 12, 4

e ordiniamoli in senso crescente:

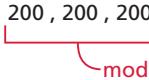
1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 7, 8, 10, 12, 15.

Osserviamo che il 3 ha una frequenza molto maggiore rispetto agli altri e che vicino al 3 si trovano molti degli altri valori presenti. In questo caso si preferisce assumere come indice di posizione centrale tale numero, che viene chiamato **moda**.

DEFINIZIONE

Moda

Dati i numeri x_1, x_2, \dots, x_n , si chiama moda il valore a cui corrisponde la frequenza massima.

50 , 100 , 200 , 200 , 200 , 300 , 300


La moda indica il valore più «presente» nella distribuzione. Ci sono serie di dati che hanno più di una moda. Consideriamo, per esempio, i risultati di un compito in classe riportati nella tabella 18.

La distribuzione risulta *bimodale*, avendo per moda sia 5 sia 7. Ciò significa che nella classe si possono distinguere due gruppi di studenti: uno ha ben compreso gli argomenti del compito, l'altro ha bisogno di studiarli ancora! Questo tipo di informazione sarebbe andato perso se avessimo riassunto i risultati del compito con la media o la mediana, che, come puoi verificare, valgono entrambe 6.

Possiamo calcolare la moda anche nel caso di distribuzioni di frequenze i cui valori sono raggruppati in classi. In tal caso si parla di **classe modale**.

VOTI DI UN COMPLESSO

VOTI	4	5	6	7	8
FREQUENZA	2	9	3	9	1

▲ Tabella 18

► **Bimodale** significa «che ha due mode».

4. Gli indici di variabilità

Consideriamo due sequenze di valori:

- a. 12, 24, 32, 43, 56, 74, 88;
- b. 42, 43, 44, 46, 49, 52, 53.

Esse sono costituite dallo stesso numero di valori e, per entrambe, la media è 47. Tuttavia, la distribuzione dei valori intorno al valore medio 47 è diversa per le due sequenze: i valori della seconda sequenza sono più vicini al valore medio, mentre quelli della prima sono più sparsi.

In statistica, per indicare questo fatto, si dice che le due sequenze hanno diversa **dispersione** o **variabilità**.

Per misurare la variabilità si usano **indici di variabilità** quali il campo di variazione, lo scarto semplice medio e la deviazione standard.

Il campo di variazione

DEFINIZIONE

Campo di variazione

Il campo di variazione di una sequenza di numeri è la differenza fra il numero maggiore e quello minore.

$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$
 $x_n - x_1$ — campo di variazione

► Nella sequenza a il campo di variazione è $88 - 12 = 76$, nella sequenza b è $53 - 42 = 11$.

■ Lo scarto semplice medio

Il campo di variazione non è un indice molto accurato, in quanto tiene conto soltanto del primo e dell'ultimo valore e non di quelli intermedi.

Consideriamo altre due sequenze di numeri:

c. 1, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 12;

d. 1, 1, 1, 1, 2, 10, 10, 11, 11, 12.

Esse hanno lo stesso numero di valori, lo stesso valore medio, 6, e lo stesso campo di variazione, 11. Tuttavia i valori della sequenza *d* sono più lontani dal 6 di quelli della sequenza *c*.

Cerchiamo un indice che permetta di rilevare questa differenza.

Per ogni valore di *c* calcoliamo lo **scarto assoluto dalla media**, che è la differenza in valore assoluto fra il valore stesso e la media. Indichiamo con S_1 il primo scarto, con S_2 il secondo e così via.

$$S_1 = |1 - 6| = 5, \quad S_6 = |6 - 6| = 0,$$

$$S_2 = |4 - 6| = 2, \quad S_7 = |7 - 6| = 1,$$

$$S_3 = |5 - 6| = 1, \quad S_8 = |7 - 6| = 1,$$

$$S_4 = |5 - 6| = 1, \quad S_9 = |7 - 6| = 1,$$

$$S_5 = |6 - 6| = 0, \quad S_{10} = |12 - 6| = 6.$$

Calcoliamo ora la media aritmetica degli scarti, che chiamiamo **scarto semplice medio**. Lo indichiamo con S_c , poiché è riferito alla sequenza *c*:

$$S_c = \frac{5 + 2 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 6}{10} = 1,8.$$

Il valore dello scarto semplice medio di 1,8 ci dice che, mediamente, i valori della sequenza si discostano di 1,8 dalla media.

Ripetendo il procedimento per *d*, calcoliamo lo scarto semplice medio S_d :

$$S_d = \frac{5 + 5 + 5 + 5 + 4 + 4 + 4 + 4 + 5 + 6}{10} = 4,8.$$

Osserviamo che S_d è maggiore di S_c : in *d* i valori sono mediamente più lontani dalla loro media.

■ DEFINIZIONE

Scarto semplice medio

Si chiama scarto semplice medio S di una sequenza di numeri x_1, x_2, \dots, x_n la media aritmetica dei valori assoluti degli scarti dei numeri stessi dalla loro media aritmetica M .

$$S = \frac{|x_1 - M| + |x_2 - M| + \dots + |x_n - M|}{n}$$

scarto
semplice
medio
media dei
valori assoluti
degli scarti

Osservazione. Gli scarti dalla media vanno presi in valore assoluto, perché ciò che interessa è lo scostamento di ogni dato dalla media e non se il dato è minore o maggiore del valore medio stesso. D'altra parte, la **media aritmetica degli scarti, non considerati in valore assoluto, vale sempre 0**.

Infatti, indicati con x_1, x_2, \dots, x_n i diversi dati e con M la loro media aritmetica, la media degli scarti è:

$$\begin{aligned} & \frac{(x_1 - M) + (x_2 - M) + \dots + (x_n - M)}{n} = \\ & = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - \overbrace{M + M + \dots + M}^{n \text{ volte}}}{n} = \\ & = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - nM}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - M = \\ & = M - M = 0. \end{aligned}$$

■ La deviazione standard

Invece dello scarto semplice medio, si utilizza molto più spesso la **deviazione standard**, perché è un indice più sensibile del precedente, anche per piccole variazioni nella distribuzione dei dati intorno alla media.

Consideriamo la sequenza di otto valori 4, 7, 9, 13, 14, 18, 21, 34, la cui media aritmetica è 15.

Per ogni valore calcoliamo lo scarto e lo eleviamo al quadrato. I valori che si ottengono vengono detti **scarti quadratici**.

$$\begin{aligned} (4 - 15)^2 &= 121; (7 - 15)^2 = 64; (9 - 15)^2 = 36; (13 - 15)^2 = 4; \\ (14 - 15)^2 &= 1; (18 - 15)^2 = 9; (21 - 15)^2 = 36; (34 - 15)^2 = 361. \end{aligned}$$

Calcoliamo poi la media degli scarti quadratici, chiamata **varianza**:

$$\frac{121 + 64 + 36 + 4 + 1 + 9 + 36 + 361}{8} = 79.$$

Otteniamo la deviazione standard eseguendo la radice quadrata della varianza. Lo indichiamo con la lettera greca σ (si legge «sigma»).

$$\sigma = \sqrt{79} \approx 8,8882.$$

■ DEFINIZIONE

Deviazione standard

La deviazione standard σ di una sequenza di numeri

x_1, x_2, \dots, x_n è la radice quadrata della media aritmetica dei quadrati degli scarti dei numeri stessi dalla loro media aritmetica.

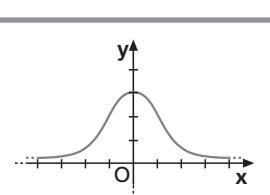
$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \dots + (x_n - M)^2}{n}}$$

deviazione standard

media dei quadrati degli scarti

- Si può dimostrare che la somma dei quadrati degli scarti dalla media aritmetica è minima rispetto alla somma dei quadrati degli scarti da un qualsiasi altro numero.

- La deviazione standard viene anche detta **scarto quadratico medio**.



▲ Figura 10 La curva di Gauss. Sull'asse x ci sono i valori, sull'asse y le relative frequenze.

► Per raggiungere il 99,99% si deve considerare 3,29 volte σ .

► In modo analogo si ricava che il 2,28% dei valori è maggiore di $M + 2\sigma$ (o minore di $M - 2\sigma$).

► È ovvio che il risultato va considerato in modo approssimato perché la popolazione non segue rigorosamente una distribuzione gaussiana, ma di solito ciò che si ottiene è abbastanza attendibile.

■ La distribuzione gaussiana

Consideriamo ancora la distribuzione relativa all'altezza di un gruppo di studentesse. Il suo poligono delle frequenze ha una forma particolare, detta anche «a campana». Se aumentassimo il numero dei risultati, prendendo in considerazione, per esempio, tutte le studentesse di una stessa scuola o quelle di più scuole, il poligono delle frequenze si avvicinerebbe sempre di più a una particolare curva teorica detta **curva normale o gaussiana o di Gauss** (figura 10).

Il calcolo della deviazione standard assume particolare importanza nelle distribuzioni gaussiane, perché è collegato al modo con cui le frequenze si distribuiscono intorno al valore medio.

Si può infatti dimostrare che se M è la media aritmetica di una distribuzione gaussiana e σ la sua deviazione standard, il 68,27% dei valori è compreso fra $M - \sigma$ e $M + \sigma$, il 95,45% fra $M - 2\sigma$ e $M + 2\sigma$, e infine il 99,74% fra $M - 3\sigma$ e $M + 3\sigma$.

Da queste informazioni, essendo la distribuzione simmetrica rispetto alla media, se ne possono ricavare altre. Per esempio, è vero che il 15,87% dei valori è maggiore di $M + \sigma$. Infatti, i valori maggiori di $M + \sigma$ o minori di $M - \sigma$ sono in percentuale 100 – 68,27, e quindi, per la simmetria della distribuzione, quelli maggiori di $M + \sigma$ sono:

$$\frac{100 - 68,27}{2} = 15,87.$$

ESEMPIO La statura in una popolazione adulta composta da 24 000 000 di persone ha una distribuzione gaussiana. Sapendo che nella popolazione studiata la media è $h_M = 1,75$ m e la deviazione standard $\sigma = 0,05$ m, quante persone hanno un'altezza compresa tra 1,70 m e 1,80 m?

Poiché $1,70 = 1,75 - 0,05$ e $1,80 = 1,75 + 0,05$, la domanda chiede quante sono le persone con altezza compresa tra $h_M - \sigma$ e $h_M + \sigma$; sappiamo che sono il 68,27%:

$$24\,000\,000 \cdot \frac{68,27}{100} = 16\,384\,800.$$

■ L'incertezza delle statistiche e l'errore standard

Nella statistica induttiva con l'elaborazione dei dati di un campione si cercano informazioni su tutta la popolazione. In particolare, la **media aritmetica campionaria**, ossia la media aritmetica del campione, fornisce una stima appropriata della media aritmetica dell'intera popolazione, di cui è uno **stimatore corretto**.

È intuitivo che campioni estratti dalla stessa popolazione, anche se presi in modo da essere tutti rappresentativi, possano avere medie diverse. Questo è un esempio di come il passaggio dal campione alla popolazione comporti un'incertezza.

Nel caso della media, questa incertezza è valutata con un indice di variabilità chiamato **errore standard**. La formula utilizzata per questo indice è:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}.$$

ESEMPIO In un magazzino, per un campione di 60 forme di Parmigiano-Reggiano si sono ottenuti, relativamente al peso in kilogrammi, i seguenti valori: $\bar{x} = 21,4$; $s = 0,987$. Calcoliamo l'errore standard $s_{\bar{x}}$:

$$s_{\bar{x}} = \frac{0,987}{\sqrt{59}} \approx 0,128.$$

Per stimare il valore della media della popolazione si può individuare un intervallo che lo contenga con una certa probabilità.

Se al valore della media campionaria aggiungiamo e togliamo 3 volte il valore dell'errore standard, otteniamo un intervallo, detto **intervallo di confidenza**, che contiene il valore della media della popolazione con una probabilità del 99,74%.

ESEMPIO Nell'esempio precedente l'intervallo di confidenza è:

$$]21,4 - 3 \cdot 0,128; 21,4 + 3 \cdot 0,128[=]21,02; 21,78[.$$

Nel magazzino, il valore medio del peso di una forma è compreso fra 21,02 e 21,78 kilogrammi con una probabilità del 99,74%.

Si procede in modo analogo se si vuole stimare una percentuale di una caratteristica della popolazione. In questo caso, se f è la percentuale rilevata da un campione, l'errore standard è dato dalla formula:

$$s_f = \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}.$$

ESEMPIO Dopo lo spoglio dei voti in 800 seggi elettorali, un partito ha ottenuto il 12% dei voti e viene effettuata una proiezione sul risultato finale costruendo un intervallo di confidenza.

$$s_f = \sqrt{\frac{0,12 \cdot (1 - 0,12)}{800}} \approx 0,011,$$

$$]0,12 - 3 \cdot 0,011; 0,12 + 3 \cdot 0,011[=]0,087; 0,153[.$$

È quindi molto probabile che la percentuale reale di voti per quel partito sia compresa fra l'8,7% e il 15,3%. Con il procedere dello spoglio, il numero dei seggi aumenta e, poiché nella formula dell'errore standard il numero di unità del campione è a denominatore, l'errore standard diminuisce, l'ampiezza dell'intervallo di confidenza si restringe e la percentuale diventa più attendibile.

► Indichiamo con \bar{x} la media aritmetica campionaria, con s la relativa deviazione standard e con n il numero di unità del campione.

► Il simbolo s si usa per deviazioni standard di campioni, σ per quelle di intere popolazioni.

► Si può dimostrare che le medie di tutti i campioni possibili hanno una distribuzione di tipo gaussiano. Se costruiamo l'intervallo con 2 volte l'errore standard, esso contiene il valore medio della popolazione con una probabilità del 95,45%; con 3,29 volte, la probabilità sale al 99,99%.

► In casi come questo, per indicare l'intervallo di confidenza, si parla spesso di *forbice*. Per esempio, si dice: «La forbice è ancora troppo alta».



Partite di calcio

...è vero che è più facile vincere una partita in casa che in trasferta?

→ Il quesito completo a pag. $\alpha 1$

Per rispondere alla domanda osserviamo la tabella a doppia entrata relativa a un campionato di serie A a venti squadre.

Goal segnati dalla squadra ospite

Goal segnati dalla squadra che gioca in casa	Goal segnati dalla squadra ospite								totale
	0	1	2	3	4	5	6	7	
0	39	26	15	5	2	0	0	0	87
1	50	48	21	7	2	0	0	0	128
2	29	26	22	8	2	2	0	0	89
3	14	22	8	5	3	0	0	0	52
4	6	6	2	4	0	0	0	0	18
5	1	3	0	1	0	0	0	0	5
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	1
totale	140	131	68	30	9	2	0	0	380

Sulla diagonale è riportata la frequenza delle partite finite in parità: per esempio, quelle finite 0-0 sono 39. Nel triangolo inferiore sono indicate le partite in cui ha vinto la squadra che giocava in casa, nel triangolo superiore quelle in cui ha perso. Calcoliamo le frequenze.

ESITO PARTITA	FREQUENZA	FREQUENZA RELATIVA PERCENTUALE
parità	114	30
vittoria in casa	173	45,5
vittoria in trasferta	93	24,5
totale partite	380	100

L'analisi statistica dice che nel campionato in esame le partite in casa hanno una percentuale di vittorie quasi doppia rispetto a quelle in trasferta.

Si può fare di più: calcolare il numero medio di goal per partita delle squadre che giocano in casa e quello delle squadre ospiti. Consideriamo i totali di colonna e di riga della tabella a doppia entrata: i primi indicano la frequenza delle partite in base al numero di goal segnati dalla squadra che gioca in casa, i secondi quella in base ai goal segnati dalla squadra ospite (e quindi subìti dalla squadra di casa). Per esempio, 87 partite sono finite con 0 reti per la squadra di casa, 128 con una rete e così via. Per la squadra che gioca in casa, si ricava il numero medio P_g di goal segnati e quello P_r di goal subìti utilizzando la media ponderata:

$$P_g = \frac{0 \cdot 87 + 1 \cdot 128 + 2 \cdot 89 + 3 \cdot 52 + 4 \cdot 18 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 1}{87 + 128 + 89 + 52 + 18 + 5 + 0 + 1} = \frac{566}{380} \approx 1,489;$$

$$P_r = \frac{0 \cdot 140 + 1 \cdot 131 + 2 \cdot 68 + 3 \cdot 30 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 0}{140 + 131 + 68 + 30 + 9 + 2 + 0 + 0} = \frac{403}{380} \approx 1,061.$$

Si osserva che in casa il numero medio di goal segnati è superiore a quello dei goal subìti.

LA TEORIA IN SINTESI

Introduzione alla statistica

1. I dati statistici

Un carattere di una **popolazione** statistica è descritto mediante **modalità** che possono essere di tipo **qualitativo** o **quantitativo**. In una **distribuzione di dati**, la **frequenza** di una modalità è il numero di volte in cui si è presentata tale modalità. La **frequenza relativa** è il quoziente tra la frequenza e il numero totale delle **unità statistiche**. Essa può anche essere espressa in **percentuale**.

ESEMPIO

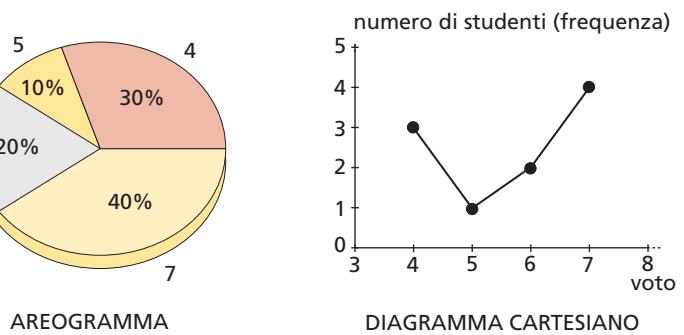
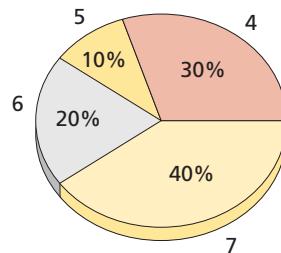
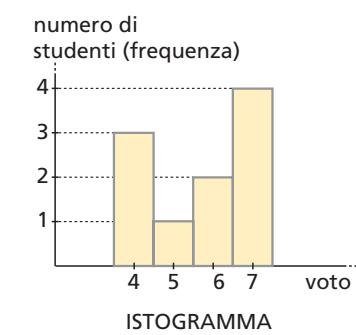
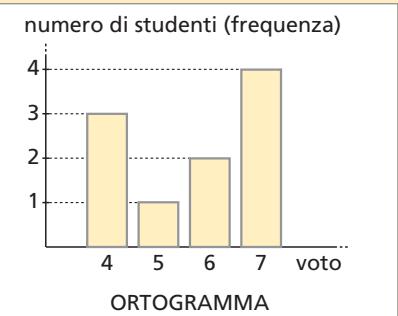
carattere	popolazione	FREQUENZA	FREQUENZA RELATIVA PERCENTUALE
Numero dei componenti del nucleo familiare degli studenti di una classe			
2		3	11%
3		11	41%
4	modalità	10	37%
5		2	7%
6		1	4%
totale		27	100%

2. La rappresentazione grafica dei dati

Esistono vari tipi di grafici per rappresentare i dati statistici e le loro frequenze, fra i quali l'**ortogramma**, l'**istogramma**, l'**areogramma**, il **diagramma cartesiano**.

ESEMPIO

VOTI	FREQUENZA	FREQUENZA RELATIVA PERCENTUALE
4	3	30%
5	1	10%
6	2	20%
7	4	40%



3. Gli indici di posizione centrale

Indici di posizione centrale sono la media, la media-moda e la moda.

La **media aritmetica** di n numeri è il quoziente fra la loro somma e il numero n .

La **media ponderata** di n numeri è il quoziente fra la somma dei prodotti di ciascun numero per il proprio peso e la somma dei pesi. Se i numeri sono disposti in una sequenza ordinata, la **mediana** è il valore centrale quando n è dispari, o la media aritmetica dei due valori centrali quando n è pari.

La **moda** è il valore a cui corrisponde la frequenza massima.

4. Gli indici di variabilità

Il campo di variazione, lo scarto semplice medio, la deviazione standard sono **indici di variabilità**.

Il **campo di variazione** di una sequenza di numeri è la differenza fra il maggiore e il minore.

Lo **scarto semplice medio** è la media aritmetica dei valori assoluti degli scarti dei numeri dalla loro media aritmetica.

La **deviazione standard** è la radice quadrata della media aritmetica dei quadrati degli scarti dei numeri dalla loro media aritmetica.

Per la stima della media di una caratteristica della popolazione per mezzo della media di un campione, si valuta l'incertezza mediante l'**errore standard** e l'**intervallo di confidenza**, che è l'intervallo in cui la media della popolazione è contenuta con una certa probabilità.

Se n è la numerosità di un campione, \bar{x} la sua media e s la deviazione standard, l'errore standard $s_{\bar{x}}$ è

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

e l'intervallo $[\bar{x} - 3 \cdot s_{\bar{x}}, \bar{x} + 3 \cdot s_{\bar{x}}]$ contiene il valore della media della popolazione con la probabilità del 99,74%.

Per stimare la percentuale di una caratteristica della popolazione, se f è la percentuale relativa al campione, l'errore standard è

$$s_f = \sqrt{\frac{f \cdot (1-f)}{n}} .$$

1. I dati statistici

→ Teoria a pag. α1

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 Gli alunni di una classe sono stati classificati secondo il mezzo di trasporto con cui vanno a scuola. Abbiamo quindi utilizzato un carattere qualitativo. Perché?

2 Fai almeno tre esempi di serie statistiche e tre di seriazioni statistiche.

VERO O FALSO?

- a) In una serie storica la successione degli anni è una modalità quantitativa.
- b) La frequenza è il numero delle unità statistiche che sono raggruppate secondo un determinato carattere.
- c) Se 396 consumatori, cioè il 33% del campione, hanno comprato il prodotto A, le unità statistiche esaminate sono 1800.
- d) La frequenza cumulata del valore considerato è la somma delle frequenze di tutti i valori successivi a quello considerato.
- e) Le tabelle a doppia entrata permettono anche l'osservazione delle unità statistiche sotto una sola modalità.

ESERCIZI**Popolazione, unità statistiche, carattere, modalità****ESERCIZIO GUIDA**

- 4** In una biblioteca viene effettuata un'indagine sulla durata del prestito dei libri. Quali sono la popolazione, le unità statistiche, il carattere e le modalità?

Possiamo assumere come popolazione di questa indagine le persone che frequentano la biblioteca; quindi l'unità statistica è il singolo utente della biblioteca. Il carattere da rilevare è la durata di un prestito; tale carattere è di tipo quantitativo. Le modalità potrebbero essere: da 1 a 7 giorni, da 8 a 15 giorni, da 16 a 30 giorni, oltre 30 giorni.

In ognuna delle seguenti indagini statistiche indica quali sono la popolazione, le unità statistiche e il carattere. Indica, inoltre, se il carattere è di tipo qualitativo o quantitativo e fai esempi di modalità possibili.

- 5** In una scuola viene svolta un'indagine sul peso degli studenti iscritti.
- 6** All'Università di Bologna è stata effettuata una rilevazione sui diversi tipi di scuola superiore da cui provenivano gli iscritti al primo anno.
- 7** A Milano è stata effettuata un'indagine sull'età delle persone che si sono recate allo stadio per il derby cittadino.
- 8** In un comune si svolge un'indagine sull'uso dei diversi mezzi di trasporto.
- 9** All'interno di un parco naturale viene fatta un'indagine sul tipo di uccelli presenti.
- 10** Un'indagine rileva il numero di partite pareggiate ogni anno nel campionato di calcio di serie A negli ultimi trent'anni.
- 11** In un'azienda viene fatta un'indagine sul tipo di abitazione dei dipendenti.
- 12** In una provincia è stata effettuata una rilevazione sul numero delle abitazioni occupate dai rispettivi proprietari.

Le tabelle di frequenza

Nel sito: ► 8 esercizi di recupero

**ESERCIZIO GUIDA**

- 13** I dati che seguono si riferiscono all'età, in anni compiuti, di persone che hanno conseguito la patente presso un'autoscuola in un certo periodo. Compiliamo la tabella di frequenza e calcoliamo le frequenze relative, esprimendole anche in percentuale: 18, 20, 18, 19, 21, 24, 18, 30, 31, 24, 19, 20, 19, 18, 18, 18, 25, 22, 25, 24, 18, 19, 27, 21, 32, 28, 18, 21, 24, 23, 25, 30, 18, 23.

Raggruppiamo i dati in tre classi (estremi inclusi):

18-22, 23-27, 28-32.

Contiamo poi il numero delle persone per ogni classe e compiliamo la tabella.

CLASSI	NUMERO DI PERSONE
18-22	19
23-27	10
28-32	5
<i>totale</i>	34

Ovviamente avremmo potuto anche scegliere classi diverse.

Per calcolare le frequenze relative, dividiamo il numero di persone di ogni classe per il numero totale.

Otteniamo i seguenti valori (approssimati):

$$\text{età: } 18-22: \frac{19}{34} = 0,56;$$

$$23-27: \frac{10}{34} = 0,29;$$

$$28-32: \frac{5}{34} = 0,15.$$

Le frequenze percentuali si ottengono moltiplicando per 100 le frequenze relative appena calcolate:

$$\text{età: } 18-22: 0,56 \cdot 100 = 56\%;$$

$$23-27: 0,29 \cdot 100 = 29\%;$$

$$28-32: 0,15 \cdot 100 = 15\%.$$

Per ognuno dei seguenti esercizi raggruppa i dati in classi, compila la tabella di frequenza, poi calcola le frequenze relative e percentuali.

14 Statura di un gruppo di ragazzi iscritti a un corso di nuoto, espressa in centimetri: 160, 165, 165, 162, 163, 165, 168, 168, 166, 161, 162, 166, 168, 165, 165, 165, 163, 168, 162, 161, 163, 165, 165, 161, 168, 165, 163, 165.

15 Pioggia caduta quotidianamente nel mese di marzo in una certa località, espressa in millimetri: 2, 3, 3, 4, 6, 8, 5, 5, 0, 0, 0, 1, 1, 4, 2, 5, 1, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 0, 1, 0, 1, 2, 4, 0, 3.

16 Numero delle autovetture noleggiate quotidianamente da una società nel corso di un mese: 4, 10, 12, 25, 20, 22, 25, 13, 12, 12, 10, 20, 25, 25, 10, 10, 13, 10, 10, 22, 22, 20, 13, 12, 10, 14, 13, 2, 5, 8.

17 Altezze di un gruppo di giocatori di calcio, espresse in centimetri: 178, 180, 180, 181, 181, 182, 175, 178, 176, 180, 180, 181, 184, 200, 181, 182, 173, 175, 176, 176, 177, 170, 170, 201, 200, 170.

18 Le età degli spettatori di una proiezione cinematografica sono: 17, 45, 34, 16, 33, 45, 17, 17, 12, 33, 42, 56, 45, 34, 71, 16, 45, 43, 57, 15, 71, 38, 40, 65, 23, 57, 72, 14. Raggruppa i dati in classi e compila la tabella delle frequenze relative e percentuali. Ripeti l'esercizio cambiando l'ampiezza delle classi.

COMPLETA le tabelle degli esercizi seguenti.

19 In una biblioteca sono presenti 1200 volumi.

GENERE	QUANTITÀ	PERCENTUALE
Gialli	...	30%
Fantascienza	180	...
Narrativa	...	35%
Avventura	240	...

20 Sulla rotta Milano-Londra nel 2006 sono transitati 1600 aerei di 4 compagnie.

COMPAGNIA	NUMERO VOLI	PERCENTUALE
Fly 99	120	...
Eurotravel	...	22,5%
JKB	400	...
Big Jumbo	720	...

21 Un negozio di abbigliamento ha venduto un modello di cappotto nelle varie taglie.

TAGLIA	NUMERO	PERCENTUALE
46	...	10%
48	15	25%
50	21	...
52

22 Consideriamo la lunghezza e il peso di 12 neonati. Si hanno le seguenti coppie ordinate di dati in cui il primo valore indica il peso in kg, il secondo la lunghezza in cm: (3,2; 48), (2,6; 51), (2,9; 49), (2,4; 47), (2,8; 50), (2,9; 49), (2,7; 48), (3,5; 52), (3,3; 52), (3,1; 51), (3,0; 49), (2,9; 47). Raggruppa i dati in classi e compila un'opportuna tabella a doppia entrata.

2. La rappresentazione grafica dei dati

→ Teoria a pag. α7

RIFLETTI SULLA TEORIA

23 VERO O FALSO?

- a) Negli istogrammi l'altezza dei rettangoli è proporzionale alla frequenza.
- b) Il poligono delle frequenze mette in risalto la forma della distribuzione del fenomeno.
- c) I diagrammi cartesiani sono utilizzati solo per rappresentare seriazioni statistiche con modalità quantitative continue.
- d) In un cartogramma le frequenze o le intensità di un fenomeno vengono fatte corrispondere a segni convenzionali o a colori diversi secondo una legenda convenzionale.
- e) L'areogramma è utilizzato solo per rappresentare serie storiche.

ESERCIZI

In ognuno dei seguenti esercizi, dopo aver compilato la tabella di frequenza e calcolato le percentuali, rappresenta graficamente i dati.

24 Età dei partecipanti a un convegno di agenti di commercio: 38, 40, 41, 40, 43, 40, 40, 40, 42, 43, 45, 43, 48, 46, 45, 48, 50, 51, 40, 42, 40, 40, 42, 45, 43, 43, 46, 48, 48, 41, 50, 48, 46, 46, 43, 44, 44, 46.

25 La crescita di piante ornamentali, espressa in centimetri al mese:
10, 12, 11, 8, 9, 8, 8, 10, 11, 12, 15, 15, 8, 20, 20, 10, 16, 16, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 11, 12, 12, 12, 18, 18, 18, 9, 9, 15, 15, 16, 16, 15, 16, 16, 15, 16, 16, 16, 9, 9, 8, 11, 16, 12, 20, 18, 18, 18, 20, 22, 20.

26 Voti conseguiti nell'ultimo compito di matematica in una classe:
6, 7, 6, 7, 5, 7, 4, 5, 5, 5, 6, 8, 8, 5, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 5, 8, 5, 6, 7, 8, 9.

27 Le consonanti presenti nei nomi di 5 dei tuoi compagni di classe.

28 Le altezze di un gruppo di giocatori di pallacanestro, espresse in centimetri:
190, 185, 195, 190, 192, 195, 198, 186, 198, 197, 191, 200, 201, 192, 193, 195, 196.

Fai la rappresentazione grafica che ritieni più opportuna per i dati contenuti nelle seguenti tabelle.

29 Numero di abitanti di un quartiere suddivisi per titolo di studio.

TITOLO DI STUDIO	NUMERO
Licenza elementare	350
Licenza di scuola media	620
Diploma di maturità	550
Laurea	102

30 Studenti di una classe suddivisi per statura.

STATURA (cm)	STUDENTI
140-145	4
146-150	8
151-155	6
156-160	4
161-165	2
oltre 165	1

31

Produttori di vino di una provincia suddivisi per quantitativo prodotto.

PRODUZIONE (hl)	PRODUTTORI
0-30	40
30-60	160
60-120	80
120-200	30
200 e oltre	10

32

Numeri di contravvenzioni per eccesso di velocità effettuate su una strada di rilevante traffico nel corso di un anno, suddivise in base al mese in cui sono state notificate.

MESE	gen.	feb.	mar.	apr.
N. CONTRAVVENZIONI	15	18	30	20
MESE	mag.	giu.	lug.	ago.
N. CONTRAVVENZIONI	15	40	16	10
MESE	set.	ott.	nov.	dic.
N. CONTRAVVENZIONI	14	18	20	23

33

COMPLETA la tabella seguente, dove sono riportate le risorse di un Paese; poi rappresenta i dati mediante un areogramma.

ATTIVITÀ	PERCENTUALE	AMPIEZZA DEL SETTORE
Industria	45%	
Agricoltura	30%	
Servizi	15%	
Altro	10%	

34

Rappresenta in un piano cartesiano i due grafici relativi ai dati della pressione sanguigna minima e massima di un paziente sotto osservazione medica per 4 giorni.

GIORNO	PRESSIONE MINIMA (mmHg)	PRESSIONE MASSIMA (mmHg)
1	105	135
2	105	140
3	100	135
4	95	125

3. Gli indici di posizione centrale

→ Teoria a pag. α11

RIFLETTI SULLA TEORIA

35

La media aritmetica ponderata è applicata alle seriazioni statistiche o quando ai singoli valori si attribuisce un'importanza diversa. Perché?

36

Inventa una sequenza di numeri tali che abbiano media, moda e mediana diverse tra loro e una sequenza con moda e mediana coincidenti.

37

In una seriazione a classi di intervallo la mediana occupa il 32º posto e si trova all'interno della classe 10-25 avente come frequenza cumulata 41. Sapendo che la frequenza cumulata della classe precedente è 29, la mediana ha valore 13,75. Perché?

ESERCIZI

Nel sito: ► 7 esercizi di recupero



■ La media aritmetica

38

Determina la media aritmetica delle seguenti sequenze di numeri.

- | | | | | | | | | |
|------------------------|---------------------|---------------------|------|----|--------|-----|-----|-----------------|
| a) 6; | 14; | 8; | 23; | 4. | d) 2; | 0; | 2; | 0. |
| b) $3 \cdot 10^{-2}$; | $5 \cdot 10^{-3}$; | $2 \cdot 10^{-2}$. | | | e) -2; | -1; | 0; | 1; 2. |
| c) 2,4; | 1,3; | 5,6; | 4,9. | | f) -7; | 3; | -4; | -1,3; 5,4; 6,3. |

[a) 11; b) $1,83 \cdot 10^{-2}$; c) 3,55; d) 1; e) 0; f) 0,4]

39

Sono dati i seguenti numeri: 3, 6, 9, 12, 15.

- Calcola la media aritmetica, indicandola con M .
- Se ogni numero viene aumentato di 3, anche il valore di M risulta aumentato di 3?
- Che cosa succede alla media M se ogni numero viene diminuito di 3?

[a] $M = 9$; b) sì, $M = 12$; c) $M = 6$

40

Uno studente universitario ha ottenuto nei suoi primi esami i seguenti voti: 24, 28, 25, 29, 30, 18.

- Qual è la media dello studente?
- Quale voto avrebbe dovuto ottenere nell'ultimo esame affinché la media fosse 26?
- Quale voto dovrà ottenere nel prossimo esame per portare la media a 26?

[a] 25,6; b) 20; c) 28]

41

Alcuni amici hanno conseguito nello scrutinio finale i voti riportati nella tabella a lato.

- Calcola la media aritmetica dei voti di ogni studente.
- Calcola la media aritmetica dei voti per ogni materia.

ALUNNI	ITALIANO	STORIA	MATEMATICA	FISICA	SCIENZE
Luca	7	6	8	6	5
Sara	4	5	6	6	5
Marco	5	6	6	7	7
Elisa	6	6	7	7	8

■ La media ponderata

■ ESERCIZIO GUIDA

- 42** Due amici, che indichiamo con A e B , partecipano a un concorso sostenendo quattro prove. A ogni prova vengono assegnati un punteggio e un peso diverso, come indicato nelle tabelle seguenti. Per superare il concorso bisogna riportare una media ponderata superiore a 18. Quale dei due amici supera il concorso?

A	PROVA 1	PROVA 2	PROVA 3	PROVA 4
Punteggio	27	22	25	16
Peso	2	4	1	3

Media ponderata del candidato A :

$$M_A = \frac{27 \cdot 2 + 22 \cdot 4 + 25 \cdot 1 + 16 \cdot 3}{2 + 4 + 1 + 3} = 21,5.$$

Entrambi i candidati superano il concorso.

B	PROVA 1	PROVA 2	PROVA 3	PROVA 4
Punteggio	24	26	27	18
Peso	2	4	1	3

Media ponderata del candidato B :

$$M_B = \frac{24 \cdot 2 + 26 \cdot 4 + 27 \cdot 1 + 18 \cdot 3}{2 + 4 + 1 + 3} = 23,3.$$

43

COMPLETA In ciascuna riga della tabella determina la media ponderata dei numeri, a fianco dei quali abbiamo scritto i rispettivi pesi.

NUMERI	PESI	MEDIA PONDERATA
2; 7; 9; 1.	1; 4; 4; 1.	
2; 7; 9; 1.	4; 1; 1; 4.	
3; 6; 9; 12; 24.	8; 6; 4; 2; 1.	
3; 6; 9; 12; 24.	1; 2; 4; 6; 8.	
1; -2; 2; 0; -1.	3; 1; 7; 5; 2.	

44

COMPLETA la tabella che segue e calcola la media ponderata per gli studenti di una classe suddivisi secondo il loro peso in kilogrammi.

CLASSI DI PESO	FREQUENZA	VALORE CENTRALE
50-55	7	
55-60	10	
60-65	8	
65-70	3	

[58,75]

45

Dati i tre numeri 20, 25, 41:

- calcola la media ponderata attribuendo, nell'ordine, i pesi 2, 3, 4;
- calcola la media ponderata con i pesi dimezzati;
- confronta le due medie ponderate.

[a) 31; b) 31]

46

Ripeti l'esercizio precedente per i tre numeri generici x, y, z .

$$\left[\text{a)} \frac{(2x + 3y + 4z)}{9}; \text{b)} \frac{(2x + 3y + 4z)}{9} \right]$$

47

Sono dati i numeri 10, 12, 15, 13, 20 e i rispettivi pesi 1, 2, 3, 4, 5.

- Calcola la media ponderata.
- Aggiungi 20 a ogni numero, poi calcola nuovamente la media ponderata.
- Confronta le due medie ponderate.

[a) 15,4; b) 35,4]

48

Un'azienda spende per gli stipendi del personale le seguenti quote mensili: 920 € per 12 operai, 1240 € per 8 tecnici, 1350 € per 4 impiegati e 1950 € per 2 dirigenti.

Qual è lo stipendio medio pagato dall'azienda?

[1163,85 €]

■ La mediana

49

Determina la mediana dei seguenti gruppi di numeri:

- 4; 1; 4; 1; 3; 8; 10.
- 21; 3; 18; 7; 15; 12; 1.
- 2; 3; -5; 0; 1; 4; 7.
- 22; 28; 30; 40.

[a) 4; b) 12; c) 1; d) 29]

50

Scrivi sei numeri tali che la loro media aritmetica sia 10 e la loro mediana 8.

51

Scrivi tre numeri tali che la loro media sia 8 e la loro mediana 10.

■ La moda

Determina la moda delle seguenti sequenze di numeri.

52

- 1; 4; 3; 1; 1; 2; 4; 1; 3; 5; 3.
 - 21; 18; 16; 21; 19; 16; 18; 16; 21; 18; 16.
- [a) 1; b) 16]

53

- 18; 19; 21; 18; 19; 18; 17; 19; 20; 19.
 - 5; 0; 1; -2; -3; 0; 1; -2; -2.
- [a) 19; b) -2]

■ Media, mediana, moda

54

COMPLETA la seguente tabella.

DATI	MEDIA	MODA	MEDIANA
2, 4, 5, 7, 5, 3, 8			
13, 15, 12, 13, 20, 9			

55

Nella gara dei 100 metri maschili disputata durante le Olimpiadi di Sydney nel 2000, i finalisti hanno registrato i seguenti tempi (in secondi): 9,87, 9,99, 10,04, 10,08, 10,09, 10,13, 10,17. Calcola la media aritmetica e la mediana.

[10,0529 s; 10,08 s]

Per ognuna delle seguenti serie di dati, calcola la media aritmetica, la mediana e la moda.

56

Numero di biglietti venduti in un cinema nei diversi giorni della settimana:
250, 280, 300, 320, 250, 500, 600. [357,1; 300; 250]

57

Numero di scooter venduti in ciascuna delle ultime dieci settimane da un concessionario:
10, 20, 6, 8, 4, 6, 6, 8, 10, 10. [8,8; 8; 10 e 6]

58

Tempo (in minuti) impiegato da alcuni ragazzi a percorrere un tracciato di corsa campestre:
10, 8, 8, 9, 9, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 8. [8,6; 9; 9]

59

Considera la distribuzione relativa al numero di libri di testo che ogni studente della tua classe ha portato a scuola in un certo giorno. Calcola la media, la mediana e la moda. Confronta i tre valori e spiega a parole il loro significato.

60

Come nell'esercizio precedente, ma con il numero di quaderni che ogni studente ha portato a scuola in un certo giorno.

61

Come nell'esercizio 59, ma con il numero di quaderni che tu hai portato a scuola nei 6 giorni della settimana.

62

Il resoconto mensile delle vendite di quattro negozi di elettrodomestici, facenti parte della stessa catena commerciale, è il seguente:

NEGOZIO	LAVATRICI	LAVASTOGLIE	TELEVISORI	FORNI
A	25	15	20	8
B	5	10	15	2
C	12	18	12	10
D	18	8	32	6

Calcola la media aritmetica dei prodotti venduti:

- a) per ogni negozio;
- b) per ogni tipo di prodotto.

[a] 17; 8; 13; 16; b) 15; 12,75; 19,75; 6,5]

63

Gli stipendi di 20 dipendenti di un'azienda sono stati suddivisi in classi (tabella a lato). Rappresenta i dati attraverso un istogramma e determina la media ponderata.

CLASSI DI STIPENDIO (€)	FREQUENZA
750-1000	6
1000-1250	8
1250-1500	4
1500-1750	2

[1150]

4. Gli indici di variabilità

→ Teoria a pag. α15

RIFLETTI SULLA TEORIA

64

VERO O FALSO?

- a) Il campo di variazione di una sequenza di valori è la differenza fra l'ultimo numero e il primo.
- b) In una distribuzione gaussiana la media e il valore di σ permettono la costruzione di intervalli che contengono una percentuale delle frequenze prefissata.

c) La media degli scarti dalla media ha valore nullo.

d) La somma dei quadrati degli scarti dalla media aritmetica è minore rispetto alla somma dei quadrati degli scarti da qualsiasi altro valore.

65

La deviazione standard è definita come la media quadratica degli scarti. Perché?

ESERCIZI

■ Il campo di variazione

66

Determina il campo di variazione delle seguenti sequenze di numeri.

- a) 10; 4; 1; 7; 9; 6. d) -5; -7; -1; -2.
- b) 27; 12; 37; 48; 15. e) 4; 1; 3; 1; 3; 5.
- c) 0; 3; -4; 5; -8. f) -5; -5; -5.

[a] 9; b) 36; c) 13; d) 6; e) 4; f) 0]

67

Confronta, insieme ai tuoi compagni di classe, i campi di variazione dei voti degli ultimi tre compiti di matematica.

68

Come nell'esercizio precedente, ma per i voti dell'ultimo compito in classe di almeno tre materie diverse.

69

La quantità di mele (in kg) venduta in una settimana da un negoziante è la seguente:

GIORNO	Lu	Ma	Me	Gi	Ve	Sa
kg DI MELE	18	23	28	25	25	38

Calcola il peso medio giornaliero di mele vendute e il campo di variazione.

[26,16 kg; 20 kg]

■ Lo scarto semplice medio

Nel sito: ▶ 5 esercizi di recupero



70

Determina lo scarto semplice medio nelle seguenti sequenze di numeri.

a) 2; 4; 7; 12; 21. c) 3; 3; 3; 3; 3; 3.

e) -20; -12; -5; 0; 2; 8; 34.

b) 2; 0; 1; 1; 2; 0.

d) -1; -2; -4; 1; 5; 4.

f) 3; 5; 3; 6; 3; 1.

[a) 5,84; b) 0,6; c) 0; d) 2,83; e) 11,71; f) 1,3]

71

Nelle seguenti sequenze di numeri, verifica che la media aritmetica degli scarti, non in valore assoluto, è uguale a 0.

a) 5; 3; 4; 6; 8; 1. b) -3; -4; 1; -7; 2; 9.

72

Calcola la media e lo scarto semplice medio del numero di viaggiatori che hanno utilizzato il treno nel corso di una settimana in un determinato tratto della linea ferroviaria.

GIORNO	Lu	Ma	Me	Gi	Ve	Sa	Do
VIAGGIATORI	205	200	270	280	320	180	88

[220; 59,57]

73

Nella tabella seguente è riportata la distribuzione del numero dei figli dei dipendenti di un'impresa; calcola lo scarto semplice medio.

FIGLI	0	1	2	3	4
FREQUENZA	5	18	11	4	2

[0,825]

74 Si è rilevato il consumo di pane in kg in un campione di 30 persone; calcola lo scarto semplice medio.

CONSUMO PANE (kg)	0-0,2	0,2-0,4	0,4-0,6	0,6-0,8	0,8-1
N. PERSONE	4	18	4	3	1

[0,141 kg]

■ La deviazione standard

Nel sito: ▶ 6 esercizi di recupero



■ ESERCIZIO GUIDA

75 In un'impresa di confezioni si sono impiegati i seguenti tempi, espressi in minuti, per effettuare il controllo di qualità della produzione:

12, 14, 13, 10, 17, 11, 19, 15, 16, 18.

Considerando i tempi impiegati, determiniamo:

- a) il tempo medio;
- b) il campo di variazione;
- c) lo scarto semplice medio;
- d) la deviazione standard.

a) Il tempo medio è la media aritmetica M dei tempi impiegati:

$$M = \frac{12 + 14 + 13 + 10 + 17 + 11 + 19 + 15 + 16 + 18}{10} = \frac{145}{10} = 14,5.$$

Il tempo medio è di 14,5 minuti.

b) Il campo di variazione è la differenza fra il valore massimo e il valore minimo:

$$19 - 10 = 9.$$

c) Per rispondere a questa domanda e alla successiva, disponiamo i dati nella prima colonna di una tabella, poi completiamo la tabella calcolando gli scarti, gli scarti in valore assoluto, i quadrati degli scarti.

Lo scarto semplice medio è:

$$S = \frac{25}{10} = 2,5.$$

d) La deviazione standard è:

$$\sigma = \sqrt{\frac{82,50}{10}} \simeq 2,87.$$

TEMPO	SCARTO	SCARTO ASSOLUTO	SCARTO AL QUADRATO
12	-2,5	2,5	6,25
14	-0,5	0,5	0,25
13	-1,5	1,5	2,25
10	-4,5	4,5	20,25
17	+2,5	2,5	6,25
11	-3,5	3,5	12,25
19	+4,5	4,5	20,25
15	+0,5	0,5	0,25
16	+1,5	1,5	2,25
18	+3,5	3,5	12,25
<i>totale 145</i>	<i>0</i>	<i>25</i>	<i>82,50</i>

76

Calcola la deviazione standard delle seguenti sequenze di numeri:

- a) 5; 7; 9; 11.
- b) 0,3; 1,2; 3,2; 4,5; 6,3.
- c) 1; 1; 1; 1.
- d) 22; 25; 27; 30; 31.
- e) -2; -3; -4; -7.
- f) -1; 1; -2; 2; -3; 3.

[a) 2,24; b) 2,18; c) 0; d) 3,29; e) 1,87; f) 2,16]

77

La distribuzione del tempo medio di vita delle batterie per macchine fotografiche è approssimativamente una gaussiana, con media $t_M = 1420$ s e deviazione standard 192 s. Su un campione di 2500 batterie, per quante ci si aspetta una durata compresa tra 1228 s e 1612 s? In media quante di quelle batterie dureranno più di 1804 s? Quante meno di 844 s?

[1706,8; 56,88; 3,38]

78

Durante una settimana di misurazioni, una stazione di monitoraggio del campo elettromagnetico situata a Bologna ha rivelato i seguenti dati (il valore di riferimento normativo è 6 V/m):

VALORE MASSIMO MISURATO (V/m)	0,67	0,68	0,78	0,69
FREQUENZA	1	4	1	1

Calcola la deviazione standard della distribuzione descritta dalla tabella.

[0,0357 V/m]

79

Abbiamo rilevato il prezzo del pane di tipo comune in sei panetterie. I valori al kg, in euro, sono: 3,50, 3,45, 3,53, 3,48, 3,54, 3,51. Calcola la deviazione standard.

[€ 0,03]

80 In occasione della finale dei 10 000 metri maschili dei Mondiali di Atletica 2007, si sono registrati i seguenti tempi a ogni passaggio ai 1000 metri:

2:44,15; 5:27,32; 8:12,93; 10:57,82; 13:42,98; 16:28,83; 19:12,74; 21:54,58; 24:35,57; 27:05,90.

Calcola il tempo medio impiegato per percorrere 1000 metri e la deviazione standard. (Suggerimento. I tempi sono espressi in minuti:secondi,centesimi di secondo. Per svolgere i calcoli può esserti utile trasformare tutti i tempi in centesimi di secondo. Ricorda che in un secondo ci sono 100 centesimi e in un minuto ci sono 60 secondi.)

[2:42,59; 0:04,35]

RIEPILOGO

GLI INDICI DI POSIZIONE CENTRALE E DI VARIABILITÀ

81

All'esame di maturità sei amici hanno ottenuto i seguenti risultati:

78, 91, 84, 98, 69, 90.

- Qual è la media dei punteggi?
- Quale punteggio avrebbe dovuto ottenere l'ultimo candidato affinché la media fosse 86?

[a) 85; b) 96]

82

In un'azienda i valori relativi al numero di dipendenti per quattro anni successivi sono i seguenti: 178, 183, 185, 191.

Calcola il tasso medio di variazione del numero di dipendenti.

[2,36%]

83

Un capitale è stato investito per 6 anni ai seguenti tassi: 4% per il primo anno, 3% per ognuno dei due anni successivi e 5% per ciascuno degli ultimi tre anni. Calcola il tasso medio di investimento.

[4,16%]

84

Nel campionato di calcio 2003/04 il Parma ha giocato 34 partite, realizzando 58 punti. I goal segnati sono stati 57, quelli subiti 46.

- Calcola la media dei punti a partita.
- Calcola la media dei goal segnati per partita e quella dei goal subiti.

[a) 1,71; b) 1,68; 1,35]

88

La seguente tabella riporta le variazioni della temperatura in gradi Celsius, relative ad alcuni giorni di una settimana, rispetto alla temperatura media stagionale. Calcola il valore della variazione media.

GIORNI	Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì	Venerdì
VARIAZIONE	- 1,8	2,5	0,4	- 2,1	- 1,5
					[1,81]

89 Dato il tasso di incremento percentuale del prodotto nazionale lordo (PIL) di un certo Paese, determina il tasso medio di incremento.

ANNO	2003	2004	2005	2006	2007
TASSO INCREMENTO	2,3	2,1	2,9	2,6	2,9

[2,56%]

85

La tabella illustra la suddivisione per età dei partecipanti a un esame.

ETÀ	NUMERO
19	11
20	8
21	4

Calcola l'età media dei partecipanti e confrontala con la media dei valori delle età.

[19,7; 20]

86

La tabella riporta i voti nelle prove scritte di matematica di tre studenti.

STUDENTE	VOTI
A	4; 5; 7; 5,5
B	4,5; 6; 7; 6
C	7; 8; 6,5; 7

Calcola il campo di variazione e la media aritmetica per ogni studente.

[A: 3; 5,375; B: 2,5; 5,875; C: 1,5; 7,125]

Abbiamo investito per quattro giorni consecutivi € 10 000 nell'acquisto di azioni della Società Alfa. Il costo di un'azione nei quattro giorni è stato di € 8,25, € 7,92, € 7,88 e € 7,95.

Calcola il costo medio pagato per azione.

[€ 7,997]

90

COMPLETA la tabella che segue e calcola la media ponderata. Gli studenti di una classe sono suddivisi secondo la loro altezza in centimetri.

CLASSE DI ALTEZZA	FREQUENZA	VALORE CENTRALE
150-155	6	
155-160	11	
160-165	9	
165-170	4	

[159,3]

91

Gli studenti di una classe sono stati suddivisi secondo il tempo settimanale dedicato allo sport.

NUMERO ORE	NUMERO STUDENTI
0-2	6
2-3	8
3-4	6
4-5	2
oltre 5	2

Ponendo la chiusura dell'ultima classe a 7, calcola la media aritmetica, la mediana e la moda.

[2,83; 2,8125; classe modale 2-3]

92

Data la seguente tabella, relativa ai voti di una classe ottenuti in un compito, determina il voto medio della classe.

VOTO	4	5	6	7	8
FREQUENZA	2	7	8	3	2

[5,82]

93

Scrivi l'età degli alunni della tua classe, poi determina il campo di variazione.

94

Il prezzo del gas GPL subisce piccole variazioni a seconda della compagnia che lo distribuisce: 0,616, 0,641, 0,640, 0,629, 0,639 (tutti i prezzi sono espressi in €/l). Calcola il costo medio del gas GPL al litro.

[€ 0,633]

95

Due tuffatori, che indichiamo con A e B, partecipano a una gara compiendo ciascuno quattro tuffi dal trampolino. A ogni tuffo vengono assegnati un punteggio e un peso diverso (in funzione della sua difficoltà), come indicato nelle tabelle seguenti.

Per qualificarsi al turno successivo, bisogna riportare una media ponderata superiore a 7,5. Chi dei due supera il turno?

A	TUFFO 1	TUFFO 2	TUFFO 3	TUFFO 4
Punteggio	8,5	9	7,5	6
Peso	4	1	2	3

B	TUFFO 1	TUFFO 2	TUFFO 3	TUFFO 4
Punteggio	9	7,5	8	9,5
Peso	2	1	4	3

[A: 7,6; B: 8,6; entrambi superano il turno]

96

Un «lunedì nero» in Borsa ha fatto registrare in chiusura le seguenti perdite in percentuale:

Tokyo -4,84%, Hong Kong -3,60%, Parigi -2,73%, Francoforte -2,85%, Zurigo -3,19%, Londra -2,29%, Milano -2,07%, New York -1,30%.

Determina il campo di variazione e la variazione media.

[3,54%; -2,86%]

97

Data la tabella, relativa all'andamento dei prezzi di un prodotto, determina il tasso medio di variazione.

[4,31%]

ANNO	PREZZO (€)
2004	5,31
2005	5,66
2006	5,80
2007	6,45
2008	6,68
2009	6,22
2010	6,84

98

In una certa località, nel corso di una giornata estiva sono state rilevate le seguenti temperature in gradi Celsius: 19,0; 22,5; 26,0; 28,0; 26,0; 21,0; 24,0; 27,5; 28,0; 24,0. Determina: la temperatura media, il campo di variazione (escursione termica), lo scarto semplice medio, la deviazione standard.

[24,6 °C; 9,0 °C; 2,5 °C; 2,91 °C]

L'incertezza delle statistiche e l'errore standard

ESERCIZIO GUIDA

- 99** In un campione di 40 studenti, il tempo medio impiegato a raggiungere la scuola è di 15 minuti, con una deviazione standard $s = 10$. Inoltre, gli studenti che impiegano meno di 10 minuti sono 16. Determiniamo, al 99,74%, gli intervalli di confidenza relativi al tempo medio di tutti gli alunni della scuola e alla frequenza degli alunni che impiegano meno di 10 minuti.

Per l'errore standard relativo alla media utilizziamo la formula $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}$:

$$s_{\bar{x}} = \frac{10}{\sqrt{40-1}} = \frac{10}{\sqrt{39}} \approx 1,6$$

e l'intervallo di confidenza risulta $]15 - 3 \cdot 1,6; 15 + 3 \cdot 1,6[=]10,2; 19,8[$.

È molto probabile che il tempo medio degli studenti dell'intera scuola sia compreso fra 10,2 e 19,8 minuti.

Per l'errore standard della frequenza utilizziamo la formula $s_f = \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$:

$$f = \frac{16}{40} = 0,4 \quad \rightarrow \quad s_f = \sqrt{\frac{0,4 \cdot (1-0,4)}{40}} \approx 0,077.$$

L'intervalllo di confidenza è: $]0,4 - 3 \cdot 0,077; 0,4 + 3 \cdot 0,077[=]0,169; 0,631[$.

Nel campione la percentuale degli studenti che impiegano meno di 10 minuti per arrivare a scuola è del 40%, ma nella popolazione complessiva è un valore compreso fra circa il 17% e il 63%. Se si vuole avere un intervallo di confidenza più ridotto, bisogna aumentare il numero di studenti intervistati.

- 100** Viene effettuata una ricerca statistica per determinare per quante ore quotidianamente un bambino di 10 anni guarda la televisione. Un campione di 80 bambini ha permesso di calcolare una media di 1 ora e 45 minuti, con una deviazione standard di 30 minuti. Determina l'intervalllo di confidenza della media al 99,74%.

[1^h35^m ; 1^h55^m]

- 101** Viene ipotizzato che il 35% delle casalinghe utilizzi additivi anticalcare quando usa la lavatrice. Vengono intervistate 160 casalinghe e di queste 48 dichiarano di impiegare prodotti con quelle caratteristiche. Determina se la percentuale ipotizzata può essere accettata a un livello di confidenza del 99,74%.

[$0,192$; $0,408$; accettabile]

- 102** Si vuole stimare il tempo medio di attesa in un ufficio postale. Un campione di 50 persone ha fornito un tempo medio di 8,4 minuti, con una deviazione standard di 5,04 minuti. Determina l'intervalllo di confidenza della media al 99,74%.

[$6,24$; $10,56$]

- 103** Un quotidiano afferma che il numero medio di automobili per ogni famiglia è 2,8. Da un campione di 250 famiglie si rileva che il numero medio di automobili per famiglia è 2,3, con una deviazione standard di 0,6. Determina se il campione conferma l'affermazione del quotidiano esaminando l'intervalllo di confidenza al 99,74%.

[$2,19$; $2,41$, no]

- 104** Dai 28 300 abitanti di un comune si è estratto un campione di 400 persone e di queste 162 hanno dichiarato che ogni sei mesi effettuano una visita di controllo da un dentista. Determina l'intervalllo di confidenza al 99,74% degli abitanti del comune.

[9381 ; 13542]

- 105** Gli studenti iscritti in un'università sono 5430. Si estrae un campione di 500 studenti dal quale si rileva che l'età media è 22,6 anni con una deviazione standard di 3,5 anni. Determina l'intervalllo di confidenza dell'età media di tutti gli studenti al 99,99%.

[$22,1$; $23,1$]

LABORATORIO DI MATEMATICA

La statistica con Excel

ESERCITAZIONE GUIDATA

Costruiamo un foglio elettronico per:

- registrare le valutazioni, espresse in numeri interi compresi fra 1 e 100, di sei prove di un candidato a un concorso;
- calcolare ogni volta la media dei voti;
- indicare prima dell'ultima prova quale voto deve riportare il candidato per raggiungere una data media m ;
- segnalare dopo l'ultimo voto se la media ipotizzata è stata raggiunta;
- tracciare l'istogramma dei voti e delle medie aggiornate.

Usiamo il foglio nel caso che i primi cinque voti risultino 60, 70, 90, 70, 80, la media ipotizzata sia $m = 75$ e il sesto voto riportato sia 100.

- Entriamo in ambiente Excel e scriviamo le intestazioni alle colonne della tabella come in figura; immettiamo i numeri romani nella prima colonna; inseriamo i primi cinque voti nelle celle da B2 a B6 e la media ipotizzata in C11; digitiamo $= SE(VAL.NUMERO(B2); MEDIA(B$2:B2); "")$ in C2 e la copiamo sino alla C7 per mostrare la media aggiornata dei voti; digitiamo $= SE(E(VAL.NUMERO(B6); VAL.NUMERO(C11)); SE(6*C11 - SOMMA(B2:B6) < 0; "è già raggiunta."); SE(6*C11-SOMMA(B2:B6) > 100; "non è raggiungibile."); "è raggiungibile con"); "")$ in A12 e $= SE(A12 = "è raggiungibile con"; 6*C11-SOMMA(B2:B6); "")$ in C12 per ottenere l'indicazione sul voto dell'ultimo esame; digitiamo $= SE(O(VAL.VUOTO(B7); VAL.VUOTO(C11)); ""; SE(C11 > C7; "non è stata raggiunta."); "è stata raggiunta."))$ in A15 per ricavare la segnalazione conclusiva.
- In B7 immettiamo 100, il voto ottenuto nella sesta prova, e il foglio appare come in figura 1.
- Per tracciare l'istogramma, evidenziamo la zona A1:C7 e facciamo clic sul menu di Excel *Inserisci* e poi sull'icona *Iistogramma*.

	A	B	C
1	Le prove	I voti	La media
2	I	60	60
3	II	70	65
4	III	90	73,33333
5	IV	70	72,5
6	V	80	74
7	VI	100	78,33333
8			
9	Prima di sostenere la VI prova		
10	Il candidato, è informato che		
11	una media di		
12	è raggiungibile con		
13			
14	La media ipotizzata		
15	è stata raggiunta.		

▲ Figura 1

Nel sito: ► 1 esercitazione guidata ► 12 esercitazioni in più

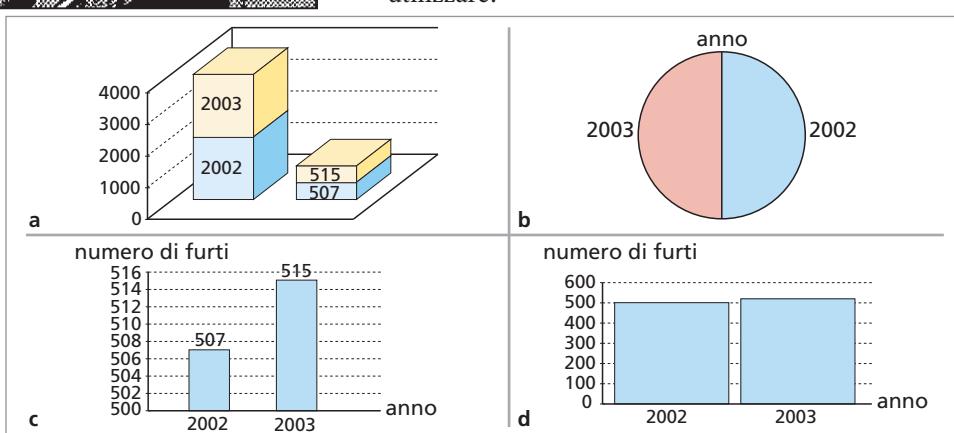
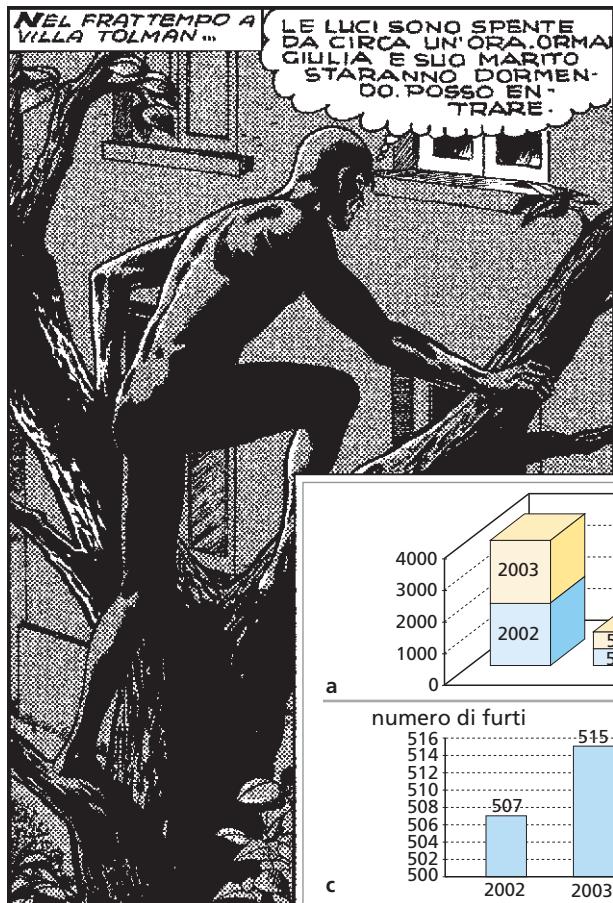


Esercitazioni

Costruisci un foglio elettronico per soddisfare le richieste di ognuno dei seguenti problemi.

- Determina il campo di variazione, la media aritmetica, la moda, la mediana, lo scarto semplice medio, la deviazione standard di dieci numeri interi casuali compresi nell'intervallo [1; 10]. Traccia l'istogramma dei dieci numeri.
- Un candidato affronta cinque prove con valutazioni in trentesimi, di peso rispettivamente 4, 2, 3, 3, 5. Dopo aver sostenuto le prime quattro prove e registrato le valutazioni, desidera sapere il voto minimo che deve riportare nella quinta prova per raggiungere un'ipotetica media m . Prepara un prospetto che dia questa informazione.
- In una gara di tuffatori, ognuno degli otto giudici dà una valutazione compresa fra 1 e 10 per ogni prestazione. Prepara un prospetto per registrare le valutazioni degli otto giudici, lo scarto dalla media di ognuno degli otto voti dei giudici, lo scarto semplice medio e la media calcolata dopo aver eliminato il voto maggiore e quello minore.
- Prepara un prospetto per registrare il numero dei voti ottenuti alle elezioni scolastiche dalle tre liste A, B, C, le schede nulle e quelle bianche, e per calcolare le percentuali corrispondenti. Traccia l'areogramma corrispondente.

Matematica per il cittadino



2. Nell'articolo vengono forniti anche i seguenti dati:

- tra il 2003 e il 2004 i furti sono diminuiti di 35 unità;
- nel 2005 e nel 2006 ci sono stati complessivamente 1012 furti;
- il numero di furti del 2006 è stato identico a quello del 2003.

Completa la seguente tabella, che sintetizza queste informazioni.

ANNO	NUMERO FURTI
2002	507
2003	515
2004	...
2005	...
2006	...

I FURTI

In una regione italiana, in due anni successivi, è avvenuto il seguente numero di furti:

ANNO	NUMERO FURTI
2002	507
2003	515

Devi scrivere un articolo per un giornale sull'aumento dei furti.

- 1.** Per comunicare con maggior efficacia i dati della tabella, decidi di inserire un grafico all'interno dell'articolo. Quale dei seguenti grafici è più opportuno utilizzare?

- 3.** Utilizzando esclusivamente i dati della tabella precedente, determina quali fra le seguenti affermazioni sono vere e quali sono false.

- a) Nel quinquennio considerato, ogni anno sono avvenuti in media più di 500 furti.
- b) Il numero di furti aumenta ogni anno rispetto al precedente.
- c) Nel 2004 ci sono stati pochi furti perché i ladri che avevano rubato nel 2003 erano in prigione.
- d) Il numero di furti di ogni anno non si è mai discostato più del 5% dalla media del numero di furti del quinquennio.

- 4.** Costruisci un grafico che rappresenti i dati relativi al numero di furti del quinquennio considerato, tenendo conto che il diagramma deve essere:

- coerente con i dati disponibili e sufficientemente preciso;
- facilmente leggibile.

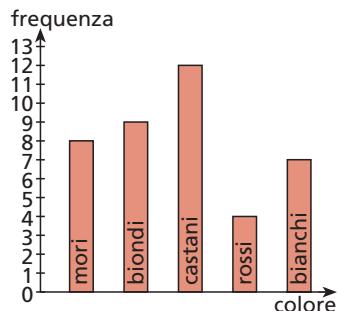
Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ► questi test interattivi ► 30 test interattivi in più

**1**

I risultati di un'indagine sul colore dei capelli, raccolti su un campione di 40 persone, sono riportati nel seguente ortogramma. Qual è la frequenza relativa del carattere «capelli biondi»?



- A 18,59%
- B 12%
- C 40%
- D 22,5%
- E 9%

5

È data la serie di numeri ordinata: 1, 5, 5, 7, 8, 9. Il numero 6 rappresenta:

- A la moda.
- D la media ponderata.
- B la mediana.
- E nessuna delle precedenti.
- C la media aritmetica.

6

Dati due numeri generici x e y , attribuendo nell'ordine i pesi y e x , la media ponderata risulta:

- A $\frac{x+y}{xy}$.
- C $\frac{2xy}{x+y}$.
- E $\frac{xy}{2(x+y)}$.
- B $\frac{xy}{x+y}$.
- D $\frac{x+y}{2}$.

7

Della serie di dati 7, 5, 4, 2, 7, la media, la moda e la mediana sono rispettivamente:

- A 5, 5, 5.
- C 5, 7, 4.
- E 7, 5, 4.
- B 5, 7, 5.
- D 5, 5, 7.

8

La deviazione standard è:

- A il quadrato dello scarto semplice medio.
- B la somma dei quadrati degli scarti dalla media.
- C la radice quadrata dello scarto semplice medio.
- D la radice quadrata della varianza.
- E la radice quadrata della media.

9

Nella serie di dati 10, 12, 15, 8, 5, 10, lo scarto semplice medio e la deviazione standard sono rispettivamente:

- A 2,34 e 2,38.
- D 2,33 e 3,12.
- B 3,12 e 2,34.
- E 2,33 e 3,11.
- C 2 e 3.

10

Su un campione di 10000 persone, è stata fatta una ricerca statistica. Il peso delle persone intervistate è risultato una distribuzione gaussiana, il peso medio $M_m = 52,5$ kg e la deviazione standard $\sigma = 0,5$ kg. Quante persone del campione hanno un peso compreso tra 51,5 kg e 53,5 kg?

- A 9545
- B 9973
- C 6827
- D 5254
- E 9245

2

In una classe sono presenti 20 maschi e 5 femmine. Quale fra le seguenti affermazioni è vera?

- A Le frequenze, relativa e percentuale, dei maschi sono rispettivamente 0,8 e 0,2%.
- B Le frequenze, relativa e percentuale, delle femmine sono rispettivamente 0,2 e 20%.
- C La frequenza relativa dei maschi è uguale a quella delle femmine.
- D La somma delle frequenze percentuali dei maschi e delle femmine è 1.
- E La frequenza percentuale dei maschi è 20%, mentre quella delle femmine è 80%.

3

In una stanza ci sono cinque persone che hanno un'età media di 32 anni. Se le età di quattro persone sono rispettivamente 25, 35, 40, 26, qual è l'età della quinta persona?

- A 26
- B 30
- C 34
- D 38
- E 42

4

Un esame consiste in una prova di laboratorio, una prova orale e una prova scritta. Ai voti delle tre prove vengono assegnati rispettivamente i pesi 2, 3, 5. Un candidato riceve 8 nella prova di laboratorio, 6 nella prova orale e 7 nella prova scritta. Quanto vale la media aritmetica ponderata dei voti?

- A 6,9
- B 7,2
- C 6,5
- D 7,4
- E 6,7

SPIEGA PERCHÉ

- 11** In un areogramma a una frequenza relativa del 37,5% corrisponde un angolo al centro di 135° . Perché?
- 12** La media aritmetica è un buon indice di posizione centrale quando il suo valore è molto prossimo a quello della moda. Perché?
- 13** Data una sequenza di valori, oltre al valore medio, si prendono in esame gli scarti dal valore medio. Perché?
- 14** Perché nel calcolo dello scarto semplice medio si utilizzano i valori assoluti degli scarti?
- 15** Che cosa si intende per distribuzione gaussiana dei dati? Considerata una distribuzione gaussiana di 12 000 valori con media aritmetica $M = 80,5$ e deviazione standard $\sigma = 0,5$, stabilisci quanti dati sono compresi fra $M - \sigma$ e $M + \sigma$.

ESERCIZI

Nel sito: ► 13 esercizi in più



- 16** Un gruppo di 16 studenti è stato intervistato sulle attività sportive praticate. I risultati sono i seguenti: calcio, tennis, ciclismo, calcio, pallacanestro, ciclismo, tennis, pallavolo, ciclismo, pallacanestro, calcio, tennis, pallavolo, pallacanestro, ciclismo, tennis.

Raggruppa i dati e compila la tabella di frequenza; poi calcola le frequenze relative e percentuali.

- 17** Osserva la seguente tabella e rappresenta graficamente i dati utilizzando un istogramma.

COLORE DEL TAVOLO DA CUCINA	Bianco	Noce	Faggio	Nero
FREQUENZA	5	7	3	2

- 18** Gli iscritti alla facoltà di scienze politiche provengono per il 40% dal liceo classico, per il 20% dal liceo scientifico e per la parte restante da altre scuole. Rappresenta graficamente la situazione utilizzando un areogramma.

- 19** Le preferenze sul formato della pasta di 10 persone intervistate sono state riportate nella seguente tabella.

FORMATO	Pasta lunga	Pasta corta	Pastina
FREQUENZA	50%	30%	20%

Rappresenta graficamente, utilizzando un ortogramma, la situazione emersa dai dati.

- 20** Calcola la media dei voti che uno studente ha riportato nello scrutinio finale: italiano: 8; storia: 6; matematica: 6; fisica: 7; educazione fisica: 9; scienze: 6; inglese: 7; diritto: 6.

Che voto avrebbe dovuto prendere in matematica per avere la media del 7? [6,875; 7]

- 21** Un gruppo di operai è stato intervistato sul tempo impiegato per recarsi da casa al lavoro. I dati raccolti, espressi in minuti, sono: 30, 15, 10, 25, 30, 15, 20, 60, 15, 120, 30, 15, 60, 30, 30. Calcola la media, la moda e la mediana dei tempi.

[33,67; 30; 30]

- 22** Considera i mesi dell'anno non bisestile e a ogni mese associa il numero dei giorni. Determina la media, la moda e la mediana della sequenza di numeri così ottenuta. [30,42; 31; 31]

- 23** Considera i seguenti valori: 12, 17, 19, 8, 21, 14, 19, 12, 13. Calcola:

- la media aritmetica;
- il campo di variazione;
- lo scarto semplice medio e la deviazione standard.

[a) 15; b) 13; c) 3,5; 4]

24

L'andamento della produzione di un'azienda è riepilogato nella seguente tabella. Calcola il campo di variazione della produzione e lo scarto semplice medio.

ANNO	PEZZI PRODOTTI
2005	1500
2006	1750
2007	1600
2008	1550
2009	1700
2010	1750

[250; 91,67]

25

La quantità di pioggia caduta nei diversi mesi dell'anno, espressa in mm, è: 12, 13, 10, 15, 15, 12, 9, 2, 5, 6, 9, 10. Calcola il campo di variazione, la media e la deviazione standard.

[13; 9,8; 3,8]

26

Il numero di copie di un quotidiano vendute nei diversi giorni della settimana è, in migliaia: 250, 245, 310, 245, 250, 245, 260. Calcola il numero medio di copie vendute ogni giorno e la deviazione standard.

[257,86; 21,9]

27

La seguente tabella riporta la produzione di grano e di mais, espressa in tonnellate, di tre aziende agricole nell'anno 2007.

AZIENDA AGRICOLA	PRODUZIONE GRANO (t)	PRODUZIONE MAIS (t)
Belstare	85	45
Coltivatori	31	15
Naturasole	46	40

Effettua un'opportuna rappresentazione grafica che metta contemporaneamente in evidenza le due produzioni di cereali.

31

I voti riportati da uno studente universitario sono:

VOTO	18	23	25	26	28	30
FREQUENZA	2	2	8	4	7	1

Determina tutti i possibili indici di variabilità.

[campo variazione = 12; $S = 2$; $\sigma = 2,8$]

28

Le età dei giocatori titolari di una squadra di rugby sono le seguenti: 23, 24, 24, 25, 23, 22, 29, 24, 26, 28, 25, 26, 26, 22, 22.

Determina: l'età media, il campo di variazione, lo scarto semplice medio, la deviazione standard.

[24,6; 7; 1,71; 2,059]

29

Gli studenti di una classe sono suddivisi secondo il numero di libri letti annualmente.

NUMERO LIBRI	NUMERO STUDENTI
0-2	3
2-4	5
4-6	8
6-8	4
oltre 8	2

Calcola le frequenze relative percentuali e, ponendo la chiusura dell'ultima classe di frequenza a 10, la media aritmetica e la deviazione standard.

[4,73; 2,28]

30

Date le età dei genitori ai quali è nato il primo figlio nel 2007 in un Comune del Piemonte, si hanno le seguenti coppie ordinate, dove il primo dato è l'età della madre e il secondo l'età del padre: (25; 36), (29; 38), (27; 32), (24; 25), (27; 25), (23; 26), (32; 33), (18; 26), (33; 37), (24; 23), (28; 34), (22; 24), (27; 27), (27; 32), (32; 30).

Raggruppa i dati in cinque classi e compila la relativa tabella a doppia entrata. Ricava da essa le seriazioni relative all'età delle madri e dei padri e calcola le medie aritmetiche e le deviazioni standard.

[25,9, 29,5; 3,6, 4,7]

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 8 esercizi in più



- 32** Per determinare la varianza è possibile sottrarre dalla media dei quadrati dei termini la loro media al quadrato. Dimostra questa relazione nel caso di tre termini:

$$\frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + (x_3 - M)^2}{3} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3} - M^2.$$

- 33** **TEST** Michele si prepara all'ultimo compito in classe di matematica dell'anno; lo affronta con tranquillità, sapendo che se prenderà 10 avrà la media del 9, mentre prendendo 5 la media diverrà 8. Quanti compiti ha già fatto quest'anno Michele?

- A** 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** I dati non sono sufficienti per dare la risposta.

(Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede, 2004)

- 34** Secondo una recente statistica, in Italia una persona ogni 76 è allergica alle fragole e, tra quelle che lo sono, 2 su 3 sono donne. Sulla base di queste informazioni, e supponendo che in Italia il numero di donne sia uguale a quello degli uomini, si può concludere che è allergico alle fragole un uomo ogni X uomini. Determinare X .

(Olimpiadi della matematica, Gara provinciale, 2004)

[114]

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 9 esercizi in più



- 35** a) Define three measures of location of a set of data, and three essentially different measures of spread.
b) Calculate all six measures you have defined in part a) for the following data, showing your working: 7, 8, 7, 12, 2, 5, 4.

(UK University of Essex, First Year Examination, 2003)

[a) mode = 7, median = 7, mean = 6,43;
b) range = 10, absolute deviation = 2,37, standard deviation = 2,97]

- 36** Thirty students were asked to attempt a maths problem. The time it took them to complete the problem (to the nearest second) is given in the table:

SECS	0 ≤ t < 10	10 ≤ t < 15	15 ≤ t < 20	20 ≤ t < 30	30 ≤ t < 50
STUDENTS	3	7	10	6	4

- a) explain why representing these data on a histogram is appropriate;
b) represent the data on a histogram.

- 37** **TEST** Johnny figures that since the final exam counts as two tests, he only needs a 28 to have a 70 average. Even if he makes a 100 he will still only have an 88 average. What is the lowest score Johnny can make on the final and still have an 80 average?

- A** 65 **B** 66 **C** 68 **D** 70 **E** 72

(USA North Carolina State High School Mathematics Contest, 2002)

GLOSSARY

absolute deviation: scarto semplice medio
to attempt: tentare, provare
average: media
data: dati

to figure: calcolare, immaginarsi
histogram: istogramma
mean: media aritmetica
measure of location: indice di posizione
measure of spread: indice di variabilità

median: mediana
mode: moda
score: punteggio, voto
table: tabella

I vettori

Gli algoritmi



RGB e CMYK, i vettori dello «spazio colore»

Sono sigle che si trovano spesso tra le caratteristiche di computer, macchine fotografiche digitali, stampanti...

... quando si parla di colori, che cosa indicano le scritte RGB e CMYK?

→ La risposta a pag. α54

I VETTORI

1. I vettori del piano

■ Le grandezze scalari e le grandezze vettoriali

Esistono grandezze determinate dal numero che le misura rispetto a una prefissata unità, come per esempio la lunghezza, l'area, il volume, il tempo. Queste grandezze sono dette **grandezze scalari**.

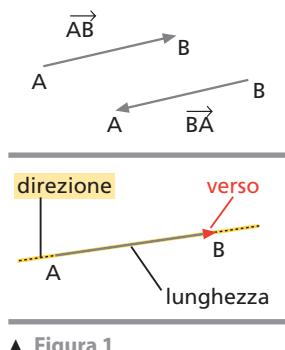
Altre grandezze, come per esempio lo spostamento e la velocità, sono rappresentate da un *numero*, una *direzione* e un *verso*.

Tali grandezze vengono chiamate **grandezze vettoriali** e vengono descritte mediante **vettori**.

■ Segmenti orientati e vettori

Un segmento AB può essere percorso in due modi: da A verso B oppure da B verso A . Nel primo caso, lo indichiamo con \overrightarrow{AB} e diciamo che A è il primo estremo e B il secondo estremo; nell'altro caso, indichiamo il segmento con \overrightarrow{BA} e diciamo che B è il primo estremo e A il secondo estremo.

In generale, un **segmento orientato** \overrightarrow{AB} è caratterizzato dalla **lunghezza** del segmento AB , dalla **direzione** della retta AB e da un **verso**, ossia dal senso di percorrenza dal primo estremo A al secondo estremo B (figura 1).



▲ Figura 1

Due segmenti orientati hanno **verso opposto**, o **contrario**, se hanno la stessa direzione ma non lo stesso verso.

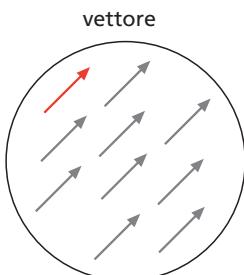
DEFINIZIONE

Segmenti equipollenti

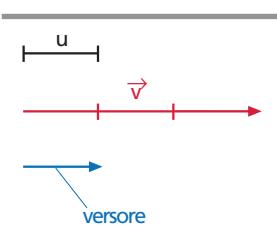
Due segmenti orientati \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} si dicono equipollenti, e scriviamo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, se hanno:

- la stessa lunghezza, cioè sono congruenti;
- la stessa direzione, cioè appartengono a rette parallele;
- lo stesso verso.

► Data una relazione di equivalenza su un insieme S , preso un elemento $x \in S$, la *classe di equivalenza* di x è l'insieme di tutti gli elementi di S che sono in relazione con x .



► Figura 2 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{EF} e \overrightarrow{GH} sono segmenti orientati equipollenti, cioè rappresentanti dello stesso vettore: ciascuno di essi è un vettore applicato.



▲ Figura 3 $\|\vec{v}\| = 3$.

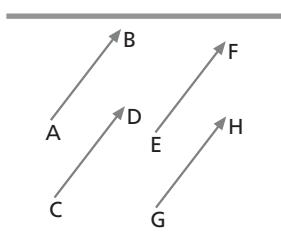


Indichiamo con S l'insieme dei segmenti orientati del piano. Nell'insieme S l'equipollenza è una relazione di equivalenza perché gode delle proprietà *riflessiva* (ogni segmento orientato è equipollente a se stesso), *simmetrica* (se \overrightarrow{MN} è equipollente a \overrightarrow{PQ} , allora \overrightarrow{PQ} è equipollente a \overrightarrow{MN}) e *transitiva* (se \overrightarrow{MN} è equipollente a \overrightarrow{PQ} e \overrightarrow{PQ} è equipollente a \overrightarrow{RS} , allora \overrightarrow{MN} è equipollente a \overrightarrow{RS}). Quindi, la relazione di equipollenza induce in S una partizione in classi di equivalenza.

DEFINIZIONE

Vettore

Si chiama vettore libero, o semplicemente vettore, ogni classe di equivalenza relativa alla relazione di equipollenza fra segmenti orientati.



Indichiamo con V l'insieme dei vettori liberi del piano.

Per indicare un vettore libero usiamo una lettera minuscola sormontata da una freccia (\vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , ...), oppure uno dei segmenti orientati (\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} , ...).

Ogni segmento orientato appartenente a una medesima classe di equivalenza è, infatti, un particolare **rappresentante** di quella classe, cioè del vettore, e si dice **vettore applicato**. Il primo estremo di un vettore applicato si chiama **punto di applicazione**. Un vettore \overrightarrow{AB} è caratterizzato da:

- il **modulo**, ossia la misura della lunghezza del segmento AB rispetto a un'unità prefissata;
- la **direzione**, cioè la direzione della retta a cui appartiene il segmento;
- il **verso**.

Il modulo di un vettore \vec{v} si indica con uno dei seguenti simboli:

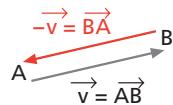
$$\|\vec{v}\|; \quad v; \quad |\vec{v}|.$$

Per esempio, il vettore della figura 3 ha modulo 3 rispetto all'unità u . Scriviamo $\|\vec{v}\| = 3$ oppure $v = 3$ o anche $|\vec{v}| = 3$.

Si chiama **versore** del vettore \vec{v} un vettore di modulo unitario con la stessa direzione e verso di \vec{v} .

Si chiama **vettore nullo** la classe di equivalenza dei segmenti con estremi coincidenti. La sua direzione e il suo verso sono indeterminati. Il vettore nullo si rappresenta mediante un punto e si indica con $\vec{0}$ oppure con $\mathbf{0}$.

Dato un vettore $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, si chiama **vettore opposto** di \vec{v} , e si indica con $-\vec{v}$, il vettore avente lo stesso modulo e la stessa lunghezza e direzione ma verso opposto di \vec{v} , cioè la classe di equivalenza del segmento orientato \overrightarrow{BA} .



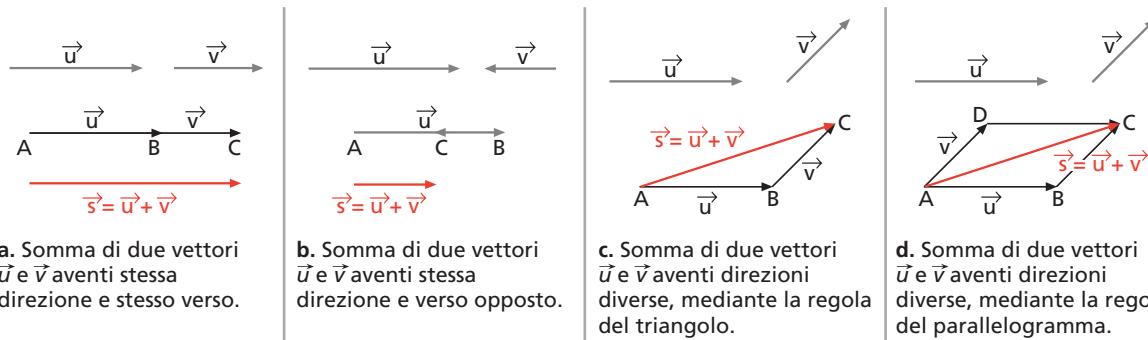
■ Prime operazioni con i vettori

Addizione di vettori

Dati due vettori \vec{u} e \vec{v} , la loro **somma** $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ è un vettore che si ottiene nel modo descritto di seguito; rappresentiamo \vec{u} con il segmento \overrightarrow{AB} e \vec{v} con il segmento \overrightarrow{BC} consecutivo al primo.

- Se i vettori \vec{u} e \vec{v} hanno la stessa direzione e verso (figura 4a), il vettore somma \vec{s} ha la stessa direzione e lo stesso verso di \vec{u} e \vec{v} e modulo uguale alla somma dei moduli.
- Se i vettori \vec{u} e \vec{v} hanno la stessa direzione ma verso opposto (figura 4b), il vettore somma \vec{s} ha la stessa direzione di \vec{u} e \vec{v} , verso uguale a quello del vettore con modulo maggiore e modulo pari alla differenza dei moduli.
- Se i vettori \vec{u} e \vec{v} hanno direzioni diverse (figura 4c), il vettore somma \vec{s} è rappresentato dal segmento \overrightarrow{AC} che ha lunghezza e direzione del terzo lato del triangolo individuato dai vettori \vec{u} e \vec{v} (**regola del triangolo**). È equivalente considerare la diagonale \overrightarrow{AC} del parallelogramma determinato dai due rappresentanti \overrightarrow{AB} di \vec{u} e \overrightarrow{AD} di \vec{v} applicati entrambi in A (**regola del parallelogramma**) (figura 4d).

► Diciamo che due segmenti orientati sono *consecutivi* quando il secondo estremo del primo segmento coincide con il primo estremo del secondo segmento.



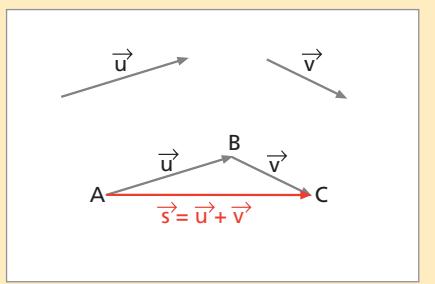
Riassumendo, possiamo dare la seguente definizione.

▲ Figura 4

DEFINIZIONE

Somma di due vettori

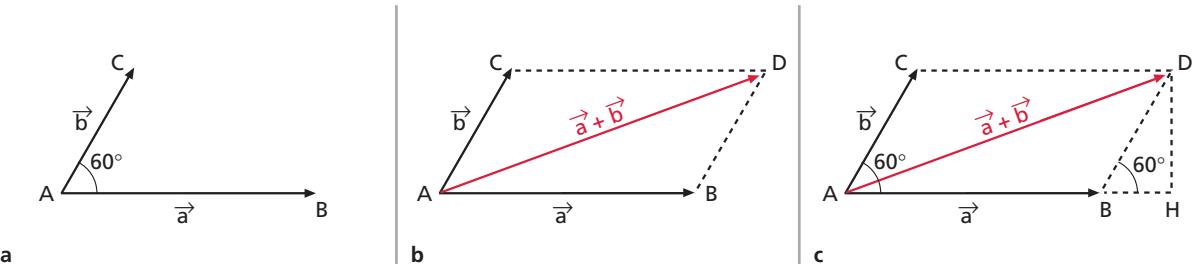
Il vettore somma \vec{s} di due vettori \vec{u} e \vec{v} è rappresentato da un segmento orientato che si ottiene raffigurando consecutivamente i vettori dati e considerando come primo estremo il primo estremo di \vec{u} e come secondo il secondo estremo di \vec{v} .



► Il vettore somma \vec{s} si chiama anche **risultante**.

ESEMPIO

Troviamo il vettore somma dei due vettori \vec{a} e \vec{b} della figura, aventi i moduli $a = 48$ e $b = 20$ (figura 5a).



▲ Figura 5

Consideriamo il parallelogramma formato dai due vettori (figura 5b).

Calcoliamo il modulo di \overline{AD} .

Consideriamo la proiezione H del punto D sulla retta AB (figura 5c). Nel triangolo rettangolo BDH , poiché $\overline{BD} = 20$ e $\widehat{DBH} = 60^\circ$, si ha $\overline{BH} = 10$ e $\overline{DH} = 10\sqrt{3}$.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo AHD :

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HD}^2} = \sqrt{58^2 + (10\sqrt{3})^2} = \sqrt{3664} \simeq 60,5.$$

► Il teorema di Carnot o del coseno afferma che in un triangolo il quadrato della misura a di un lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure b e c degli altri due lati, diminuita del doppio prodotto delle misure di questi due lati per il coseno dell'angolo α che essi formano:

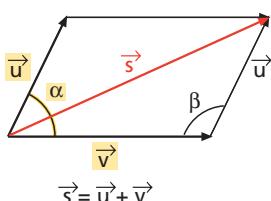
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.$$

● In generale, per calcolare il modulo della somma di due vettori \vec{u} e \vec{v} si applica il teorema del coseno. Osservando la figura 6, abbiamo

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{u^2 + v^2 - 2u \cdot v \cdot \cos \beta},$$

ed essendo $\beta = \pi - \alpha$, e quindi $\cos \beta = -\cos \alpha$, otteniamo:

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{u^2 + v^2 + 2u \cdot v \cdot \cos \alpha}.$$



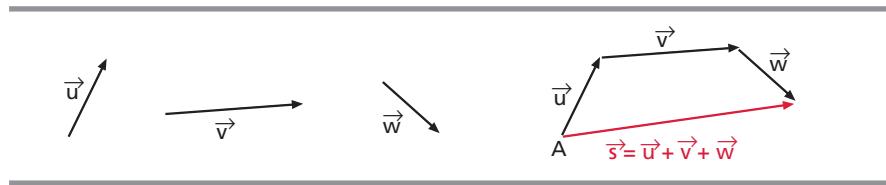
◀ Figura 6

L'operazione che a due vettori associa la loro somma si dice **addizione**. Si può dimostrare che l'addizione di vettori gode delle seguenti **proprietà**:

- *proprietà commutativa*: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$;
- *proprietà associativa*: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$;
- il vettore nullo $\vec{0}$ è l'*elemento neutro*: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$, $\forall \vec{v} \in V$;
- per ogni $\vec{v} \in V$ esiste il vettore *opposto* $-\vec{v}$: $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$.

► Il simbolo \forall significa *per ogni*.

Dati tre o più vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$, la loro somma si ottiene sommando i primi due e poi sommando al vettore ottenuto $\vec{u} + \vec{v}$ il terzo \vec{w} e così via. Graficamente il vettore risultante si ottiene riportando di seguito, a partire da un punto A , i segmenti orientati che rappresentano i vettori da sommare (figura 7).



◀ Figura 7

Si ottiene una poligonale il cui lato che congiunge A con l'ultimo estremo della poligonale rappresenta il vettore somma.

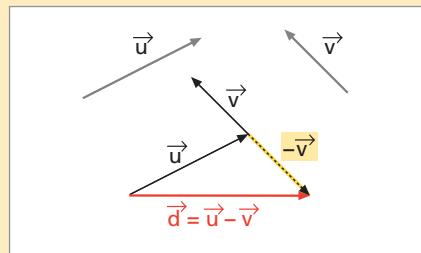
Sottrazione di vettori

L'esistenza dell'opposto di un qualsiasi vettore permette di definire la *differenza* di due vettori riconducendola a una somma.

DEFINIZIONE

Differenza di due vettori

Si chiama differenza di due vettori, scelti in un dato ordine, la somma del primo con l'opposto del secondo.



L'operazione che a due vettori associa la loro differenza si dice **sottrazione**.

Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Dato un vettore \vec{v} , possiamo determinare i vettori $3\vec{v}, -2\vec{v}, \dots$, mediante addizioni ripetute. Per esempio:

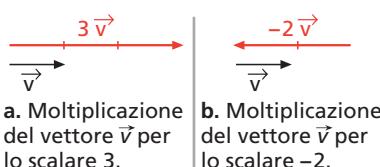
$$\begin{aligned} 3\vec{v} &= \vec{v} + \vec{v} + \vec{v}, \\ -2\vec{v} &= -\vec{v} + (-\vec{v}). \end{aligned}$$

In generale vale la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Prodotto di un vettore per uno scalare

Dato un vettore \vec{v} e un numero reale k , si chiama prodotto di k per \vec{v} il vettore $k \cdot \vec{v}$ che ha la stessa direzione di \vec{v} , modulo uguale al prodotto del valore assoluto di k per il modulo di \vec{v} e lo stesso verso di \vec{v} se $k > 0$, verso opposto se $k < 0$.



◀ Figura 8

L'operazione che ha come risultato questo prodotto viene detta **moltiplicazione di un vettore per uno scalare**. Essa gode delle seguenti proprietà:

- **proprietà distributiva** rispetto all'addizione dei numeri reali:

$$(k + p) \cdot \vec{v} = k \cdot \vec{v} + p \cdot \vec{v}, \quad \forall k, p \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \vec{v} \in V;$$

► Per semplicità, utilizziamo per le operazioni fra vettori gli stessi simboli di quelle fra numeri reali. Tali simboli assumono quindi significato diverso a seconda del contesto in cui sono usati. Per esempio, il segno + fra due numeri reali denota l'addizione dei due numeri, il segno + fra vettori indica l'addizione di vettori.

- **proprietà distributiva** rispetto all'addizione dei vettori:

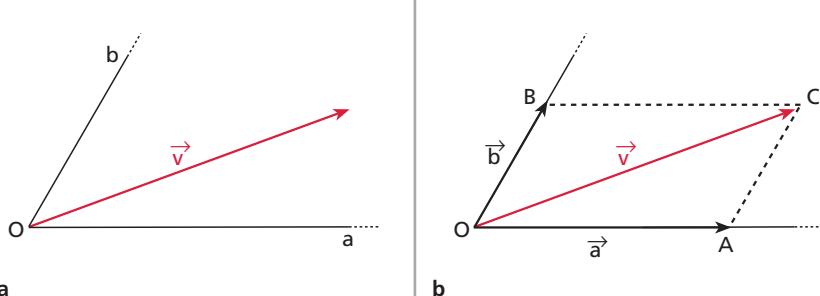
$$k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}, \quad \forall k \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \vec{u}, \vec{v} \in V;$$

- **proprietà associativa mista:** $k(p \cdot \vec{v}) = (kp) \cdot \vec{v}, \quad \forall k, p \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \vec{v} \in V;$

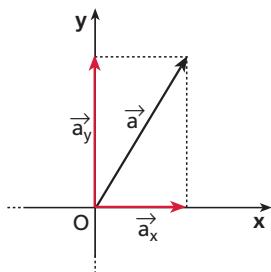
- il numero 1 è l'**elemento neutro**: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot 1 = \vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in V.$

■ La scomposizione di un vettore

Consideriamo il vettore \vec{v} e le semirette Oa e Ob della figura 9a.



► Figura 9



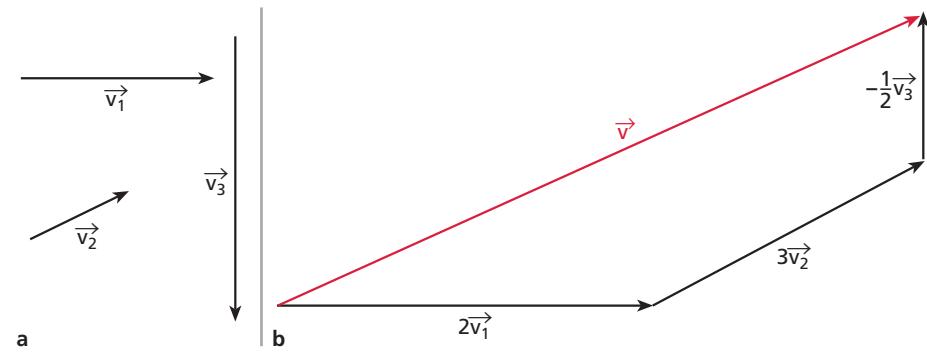
2. I vettori linearmente dipendenti e indipendenti

■ La combinazione lineare

Consideriamo i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ della figura 10a e i numeri reali $2, 3, -\frac{1}{2}$. Determiniamo il risultato (figura 10b) della seguente espressione:

$$2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 - \frac{1}{2}\vec{v}_3.$$

► Figura 10



Il vettore \vec{v} ottenuto è detta combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ di coefficienti 2, 3, $-\frac{1}{2}$.

Cambiando la terna di numeri reali o il loro ordine, otteniamo differenti combinazioni lineari dei vettori dati.

In generale, diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Combinazione lineare

Si dice che il vettore \vec{v} è combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, \dots, v_n , non tutti nulli, se risulta

$$\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n,$$

dove i coefficienti c_1, c_2, \dots, c_n sono numeri reali.

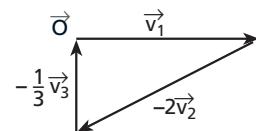
Una combinazione lineare di vettori con coefficienti tutti nulli ha per risultato il vettore nullo.

Questo può accadere anche se i coefficienti non sono tutti nulli.

Per esempio, con i vettori considerati prima, scegliendo i coefficienti 1, -2 , $-\frac{1}{3}$, otteniamo il vettore nullo.

In questo caso i vettori v_1, v_2, v_3 si dicono *linearmente dipendenti*.

In generale, diamo la seguente definizione.



DEFINIZIONE

Vettori linearmente dipendenti

I vettori v_1, v_2, \dots, v_n sono linearmente dipendenti se esistono n numeri reali c_1, c_2, \dots, c_n non tutti nulli tali che:

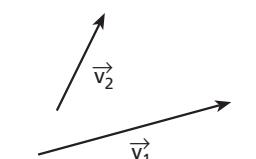
$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n = \vec{0}.$$

Consideriamo ora due vettori del piano \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , non paralleli (figura a).

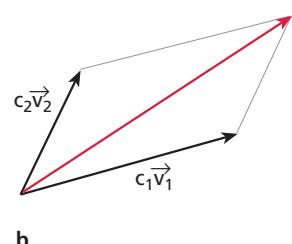
Qualsiasi combinazione lineare $c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2$ dei due vettori con coefficienti non tutti nulli non dà mai il vettore nullo, perché la somma di $c_1 \vec{v}_1$ e $c_2 \vec{v}_2$ al variare di c_1 e c_2 è sempre rappresentata dalla diagonale del parallelogramma formato dai due vettori.

Tale diagonale può essere nulla solo se $c_1 = c_2 = 0$.

I due vettori \vec{v}_1 e \vec{v}_2 si dicono *linearmente indipendenti*.



a



b

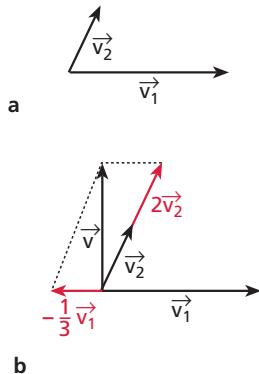
DEFINIZIONE

Vettori linearmente indipendenti

I vettori v_1, v_2, \dots, v_n sono linearmente indipendenti se l'unica combinazione lineare di questi vettori che ha come risultato il vettore nullo è quella con i coefficienti tutti nulli.

Se due vettori del piano \vec{a} e \vec{b} sono paralleli, allora sono linearmente dipendenti. Infatti, se $\vec{a} \parallel \vec{b}$, si può scrivere:

$$\vec{a} = k \vec{b} \quad \rightarrow \quad \vec{a} - k \vec{b} = \vec{0}.$$



Viceversa, se due vettori sono linearmente dipendenti, allora sono paralleli. Si può dimostrare che nel *piano* il numero massimo di vettori linearmente indipendenti è *due*, mentre nello spazio è *tre*.

Se due vettori \vec{v}_1 e \vec{v}_2 del piano sono linearmente indipendenti, allora ogni altro vettore \vec{v} del piano si può scrivere come una combinazione lineare di \vec{v}_1 e \vec{v}_2 . Diciamo allora che \vec{v}_1 e \vec{v}_2 sono una **base** del piano.

ESEMPIO

I vettori della figura *a*, poiché non sono paralleli, costituiscono una base del piano.

Ogni vettore del piano si può ottenere come combinazione lineare di \vec{v}_1 e \vec{v}_2 .

Per esempio, il vettore \vec{v} nella figura *b* si ottiene con la somma $-\frac{1}{3}\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$.

In particolare, nel piano cartesiano, due vettori \vec{x} e \vec{y} con le direzioni degli assi cartesiani costituiscono una base.

Analogamente, per lo spazio, tre vettori non complanari $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, con le direzioni degli assi cartesiani, costituiscono una base.

3. Il prodotto scalare e il prodotto vettoriale

■ Il prodotto scalare

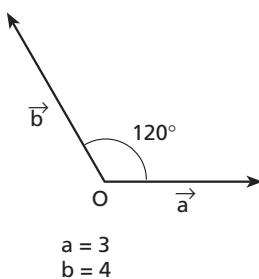
Consideriamo due vettori \vec{a} e \vec{b} non nulli e sia α l'angolo che essi formano.

■ DEFINIZIONE

Prodotto scalare

Il prodotto scalare di due vettori \vec{a} e \vec{b} è il numero $ab \cos \alpha$.

Si indica con $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



ESEMPIO

Il prodotto scalare dei due vettori della figura a lato è:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos 120^\circ = 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -6.$$

Il prodotto scalare di due vettori \vec{a} e \vec{b} non nulli può essere positivo, negativo o nullo a seconda dell'angolo che essi formano. In particolare:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{se} \quad \alpha = 90^\circ$$

e viceversa.

Possiamo allora scrivere la seguente **condizione di perpendicolarità**.

Due vettori \vec{a} e \vec{b} non nulli sono perpendicolari se e solo se il loro prodotto scalare è nullo:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Se due vettori \vec{a} e \vec{b} sono paralleli e hanno lo stesso verso, si ha $\alpha = 0^\circ$, quindi $\cos \alpha = 1$ e il prodotto scalare risulta:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab.$$

Per il prodotto scalare valgono le seguenti proprietà:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

proprietà commutativa;

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c},$$

proprietà distributiva.

■ Il prodotto vettoriale

Consideriamo due vettori \vec{a} e \vec{b} non nulli che formano un angolo α .

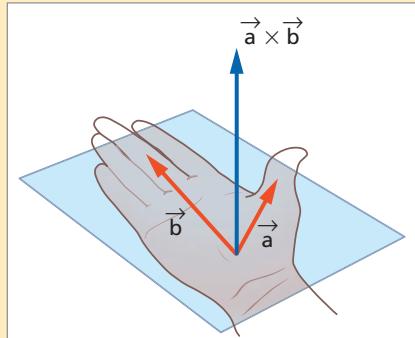
DEFINIZIONE

Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale di due vettori \vec{a} e \vec{b} è il vettore \vec{c} che ha:

- **modulo** uguale ad $ab \sin \alpha$;
- **direzione** perpendicolare al piano individuato dai due vettori;
- **verso** dato dalla regola della mano destra, illustrata nella figura.

Si indica con $\vec{a} \times \vec{b}$.



Il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa,

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a},$$

ma gode della proprietà distributiva:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Se due vettori sono paralleli, il loro prodotto vettoriale è nullo:

$$\text{se } \vec{a} \parallel \vec{b}, \text{ allora } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

In particolare, $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

► Per il prodotto vettoriale si ha:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

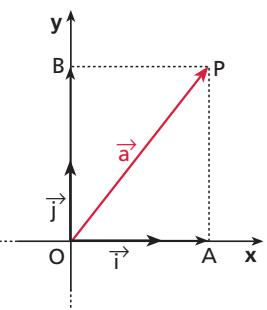
4. La rappresentazione cartesiana dei vettori

■ I vettori nel piano

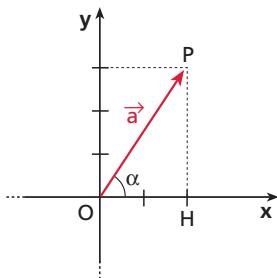
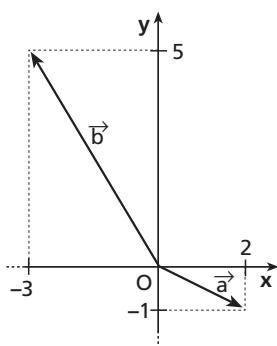
Le componenti cartesiane

Consideriamo il piano cartesiano xOy e disegniamo un vettore \vec{a} che parte dall'origine.

Indichiamo con \vec{i} il versore avente la direzione e il verso dell'asse x e con \vec{j} il versore avente la direzione e il verso dell'asse y .



► I versori \vec{i} e \vec{j} sono una base per il piano cartesiano. Ogni vettore può infatti essere scritto come combinazione lineare dei due versori, secondo le sue componenti cartesiane.



Se dal punto P mandiamo le parallele agli assi cartesiani, otteniamo i punti A e B che individuano i segmenti orientati \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} . Se i moduli di OA e OB sono rispettivamente a_x e a_y , possiamo scrivere:

$$\overrightarrow{OA} = a_x \vec{i} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OB} = a_y \vec{j}.$$

Riassumendo, se scomponiamo il vettore \vec{a} lungo gli assi cartesiani, otteniamo:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}.$$

a_x e a_y sono le **componenti cartesiane** del vettore \vec{a} . Per identificare il vettore con le sue componenti cartesiane scriviamo anche

$$\vec{a} = (a_x; a_y).$$

ESEMPIO

I vettori $\vec{a} = (2; -1)$ e $\vec{b} = (-3; 5)$ nel piano cartesiano hanno la rappresentazione della figura a lato.

In particolare, per i versori \vec{i} e \vec{j} : $\vec{i} = (1; 0)$ e $\vec{j} = (0; 1)$.

Il modulo e la direzione

Se consideriamo il vettore $\vec{a} = (2; 3)$, possiamo trovare il suo modulo applicando il teorema di Pitagora al triangolo OPH :

$$a = \sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{PH}^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

Possiamo anche determinare l'angolo α che il vettore forma con la direzione positiva dell'asse x , ricordando le relazioni valide in un triangolo rettangolo,

$$\overline{OH} = \overline{OP} \cos \alpha \quad \text{e} \quad \overline{PH} = \overline{OP} \sin \alpha,$$

e cioè

$$2 = \sqrt{13} \cos \alpha \quad \text{e} \quad 3 = \sqrt{13} \sin \alpha,$$

da cui:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad \text{e} \quad \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Con la calcolatrice, usando il tasto \sin^{-1} o il tasto \cos^{-1} , otteniamo $\alpha \approx 56,3^\circ$.

In generale, dato un vettore $\vec{a} = (a_x; a_y)$, il modulo di a è

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

mentre l'angolo che \vec{a} forma con la direzione positiva dell'asse x si ottiene con le formule:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a} \quad \text{e} \quad \sin \alpha = \frac{a_y}{a}.$$

Riscriviamo tali formule e otteniamo le componenti cartesiane di \vec{a} in funzione del modulo a e dell'angolo α con la direzione positiva dell'asse x :

$$a_x = a \cos \alpha \quad \text{e} \quad a_y = a \sin \alpha.$$

Consideriamo $\vec{a} = (a_x; a_y)$ e $\vec{b} = (b_x; b_y)$ ed esprimiamo mediante le componenti cartesiane i risultati delle operazioni con i vettori.

Somma

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) = \\ &= (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j}.\end{aligned}$$

Quindi:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y).$$

ESEMPIO

Dati i vettori $\vec{a} = (-4; 2)$ e $\vec{b} = (2; -1)$, il vettore somma \vec{s} è:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (-4 + 2; 2 - 1) = (-2; 1).$$

Differenza

$$\begin{aligned}\vec{a} - \vec{b} &= \vec{a} + (-\vec{b}) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + (-b_x \vec{i} - b_y \vec{j}) = \\ &= (a_x - b_x) \vec{i} + (a_y - b_y) \vec{j}.\end{aligned}$$

Quindi:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y).$$

ESEMPIO

Dati i vettori $\vec{a} = (-3; 2)$ e $\vec{b} = (5; -8)$, il vettore differenza \vec{d} è:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (-3 - 5; 2 + 8) = (-8; 10).$$

Prodotto di un vettore per uno scalare

Dati il vettore $\vec{a} = (a_x; a_y)$ e lo scalare k , si ha:

$$k\vec{a} = k(a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) = ka_x \vec{i} + ka_y \vec{j}.$$

Quindi:

$$k\vec{a} = (ka_x; ka_y).$$

ESEMPIO

Dato il vettore $\vec{a} = \left(2; -\frac{1}{2}\right)$, si ha:

$$-8\vec{a} = \left(-8 \cdot 2; -8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = (-16; 4).$$

Prodotto scalare

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) = \\ &= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j}.\end{aligned}$$

► Applichiamo la proprietà distributiva.

Poiché:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \quad \text{perché versori paralleli con stesso verso,}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{perché vettori perpendicolari,}$$

allora il prodotto scalare di \vec{a} e \vec{b} diventa:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

ESEMPIO

Dati i vettori $\vec{a} = (2; -3)$ e $\vec{b} = (5; -1)$, il prodotto scalare è:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot (-1) = 10 + 3 = 13.$$

È possibile determinare l'angolo α formato da due vettori $\vec{a} = (a_x; a_y)$ e $\vec{b} = (b_x; b_y)$ considerando che:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}.$$

Essendo $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$:

$$\cos \alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{ab}.$$

ESEMPIO

Troviamo l'angolo formato dai vettori $\vec{a} = (1; 2)$ e $\vec{b} = (3; -1)$.

$$\text{Calcoliamo } a = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \text{ e } b = \sqrt{9+1} = \sqrt{10};$$

Quindi:

$$\cos \alpha = \frac{1 \cdot 3 + 2(-1)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{3 - 2}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

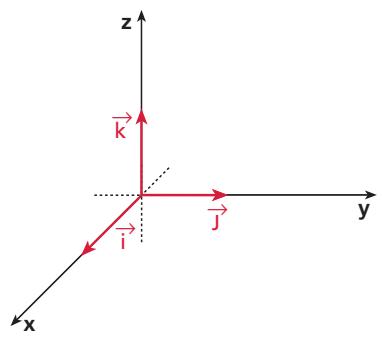
Con la calcolatrice, si ottiene $\alpha \simeq 82^\circ$.

I vettori nello spazio

Consideriamo un sistema cartesiano $Oxyz$ e indichiamo con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ i versori degli assi x, y, z . Un vettore \vec{a} si può così scrivere in forma cartesiana,

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

e le sue componenti sono $(a_x; a_y; a_z)$.



► Figura 11

Forniamo i risultati delle operazioni principali per i vettori nello spazio, considerando i vettori

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z) \text{ e } \vec{b} = (b_x; b_y; b_z).$$

Somma

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}.$$

Prodotto scalare

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Prodotto vettoriale

Per i versori degli assi cartesiani, si ha:

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0, \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0, \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0,$$

perché vettori paralleli;

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j};$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

Se consideriamo ora i due vettori

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

e calcoliamo il prodotto vettoriale, otteniamo:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}. \end{aligned}$$

ESEMPIO

Determiniamo il prodotto vettoriale di $\vec{a} = (1; -1; 0)$ e $\vec{b} = (-2; 0; 1)$:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} - (2\vec{k} + 0\vec{i} + 1\vec{j}) = \\ &= -\vec{i} - 2\vec{k} - \vec{j}. \end{aligned}$$

Si ha allora:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}.$$



RGB e CMYK, i vettori dello «spazio colore»

... quando si parla di colori, che cosa indicano le scritte RGB e CMYK?

→ Il quesito completo a pag. α41

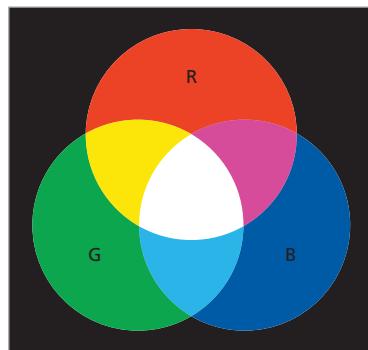
RGB è l'acronimo di Red (rosso), Green (verde) e Blue (blu), mentre CMYK sta per Cyan (ciano), Magent (magenta), Yellow (giallo) e blacK (nero). Queste due sigle indicano i modelli standard per la rappresentazione grafica dei colori. Anche se può sembrare strano, dietro a una stampante o a un monitor c'è moltissima matematica.

Infatti, per riprodurli su un apparecchio digitale, i colori sono stati pensati come vettori di uno spazio vettoriale di dimensione tre.

Nel sistema RGB il vettore $(1; 0; 0)$ rappresenta un rosso, $(0; 1; 0)$ rappresenta un verde e $(0; 0; 1)$ un blu. Tutti gli altri colori si ottengono come vettori generati dalla base costituita dai tre vettori precedenti. Un vettore moltiplicato per uno scalare positivo è un vettore corrispondente allo stesso colore, ma con intensità diverse al variare dello scalare. Per esempio, $5 \cdot (0; 1; 0) = (0; 5; 0)$ è ancora un verde, ma più intenso. Se si sommano due vettori corrispondenti a colori diversi, si ottiene il vettore corrispondente a un terzo colore che deriva dal «mescolamento» dei primi due. Per esempio,

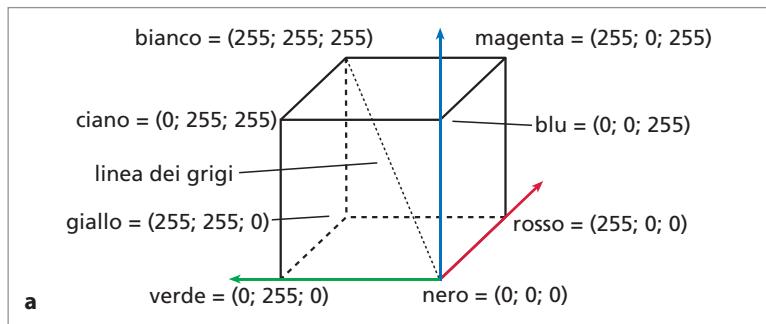
$(1; 0; 0) + (0; 0; 1) = (1; 0; 1)$ è un magenta, ottenuto dalla somma del rosso e del blu della base.

Il sistema RGB è quello utilizzato sugli schermi in modo *additivo*, cioè aggiungendo energia al nero.



Che cosa significa? In ogni punto dello schermo, inizialmente nero, ci sono tre celle fosforescenti che emettono luce se colpite da un fascio di elettroni, ovvero se si aggiunge energia. Ognuna delle celle corrisponde a uno dei tre colori primari: rosso, verde o blu. Al valore massimo di intensità luminosa, prodotta da tutte e tre le celle contemporaneamente, corrisponde il bianco; alla minima, ossia a celle spente, il nero. Tutti gli altri colori si ottengono da combinazioni di intensità diverse dei tre colori primari.

In genere, l'intensità di ognuno dei tre colori può assumere valori variabili fra i naturali da 0 a 255. Quindi, dello spazio vettoriale esaminato si considera un sottoinsieme costituito da 256^3 vettori, corrispondenti a oltre 16 milioni di colori! Graficamente, per darne un'idea, possiamo utilizzare un cubo (figura a).



Il grigio è il colore che si ottiene, nelle sue varie intensità, con i vettori che stanno sulla diagonale che va dal nero al bianco. Invece, i vettori che rappresentano il giallo stanno nella diagonale che unisce il nero al giallo più intenso, in quanto tutti i «gialli» hanno la componente rossa uguale a quella verde e quella blu nulla. Si dice anche che il giallo è il complementare del blu. Analogamente, il ciano è il complementare del rosso e il magenta è il complementare del verde. Da un punto di vista cromatico, il tutto è rappresentabile con il cubo della figura b.

Lo spazio CMYK

Nello spazio CMYK, utilizzato soprattutto nelle stampanti, i colori di base sono il ciano, il magenta e il giallo. Il nero è presente nella sigla, ma non corrisponde a una reale quarta dimensione; può essere infatti ottenuto combinando gli altri tre colori. Anche nel sistema CMYK ogni colore è rappresentato da una terna di numeri, che vanno questa volta da 0 a 100. Ogni valore indica la percentuale di inchiostro di ciascun colore della base, necessario per realizzare sulla carta il colore cercato. Per esempio, un colore descritto con il vettore $(20; 15; 10)$ è stampato depositando sulla carta il 20% di ciano, il 15% di magenta e il 10% di giallo.



1. I vettori del piano

→ Teoria a pag. α41

1

VERO O FALSO?

- a) Il vettore $-4\vec{u}$ ha modulo -4 .
- b) Se due vettori hanno lo stesso versore, allora hanno la stessa direzione e lo stesso verso.
- c) Se due segmenti orientati hanno la stessa lunghezza, sono equipollenti.
- d) Il vettore opposto di $\frac{4}{5}\vec{u}$ è $\frac{5}{4}\vec{u}$.
- e) Ogni punto del piano rappresenta il vettore nullo.

2

Indica quale o quali tra le seguenti grandezze è rappresentata da un vettore:

temperatura, massa, forza, età, area, volume.

3

Dato il versore \vec{u} , indica modulo, direzione e verso di $-5\vec{u}$.

4

Rappresenta un vettore \vec{u} a tuo piacimento e i seguenti vettori:

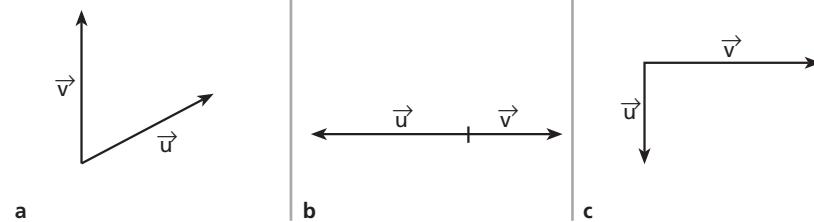
$$2\vec{u}; \quad -\frac{1}{2}\vec{u}; \quad -4\vec{u}; \quad \frac{3}{2}\vec{u}.$$

■ Le operazioni con i vettori

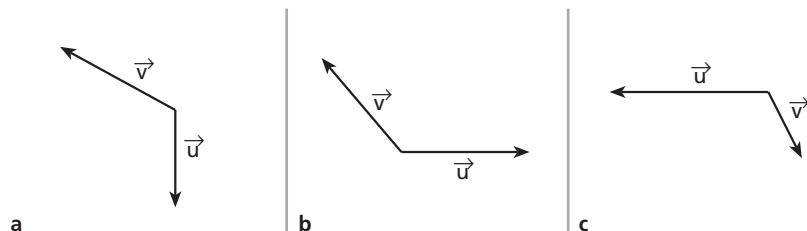
Addizione di vettori

Traccia il vettore somma dei vettori disegnati nelle figure.

5



6



7

Dati i vettori \vec{a} e \vec{b} , aventi modulo $a = 16$, $b = 12$, rappresenta il vettore somma e determina il suo modulo nel caso che l'angolo α da essi formato sia:

- a) 90° ; b) 180° ; c) 0° ; d) 60° .

[a) 20; b) 4; c) 28; d) $\simeq 24,3$]

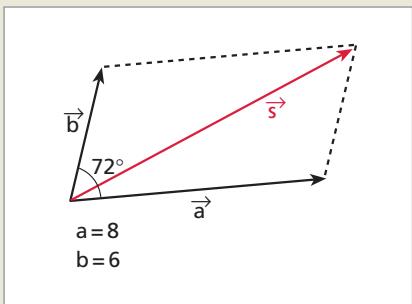
8

Se due vettori \vec{a} e \vec{b} consecutivi e il loro vettore somma hanno lo stesso modulo, uguale a 10, quanto vale l'angolo formato da \vec{a} e \vec{b} ?

$[120^\circ]$

■ ESERCIZIO GUIDA

- 9 Disegniamo la somma \vec{s} dei due vettori della figura e calcoliamo il modulo di \vec{s} .



Il vettore $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ è la diagonale del parallelogramma formato da \vec{a} e \vec{b} .

Il modulo di \vec{s} si ottiene con il teorema del coseno:

$$s = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos 72^\circ}.$$

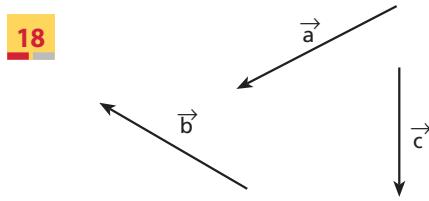
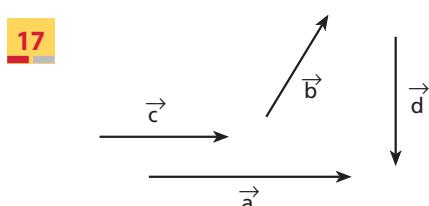
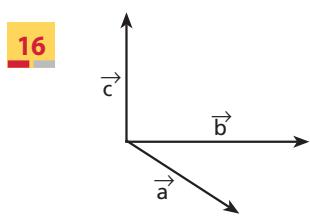
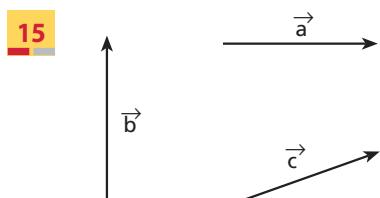
Sostituiamoci i valori di a e b e calcoliamo:

$$s = \sqrt{64 + 36 + 2 \cdot 8 \cdot 6 \cos 72^\circ} \simeq \sqrt{100 + 96 \cdot 0,3} = \sqrt{128,8} \simeq 11,3.$$

Disegna il vettore somma \vec{s} dei due vettori \vec{a} e \vec{b} di cui è assegnato il modulo e l'angolo α che formano. Calcola il modulo di \vec{s} .

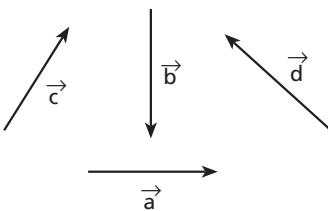
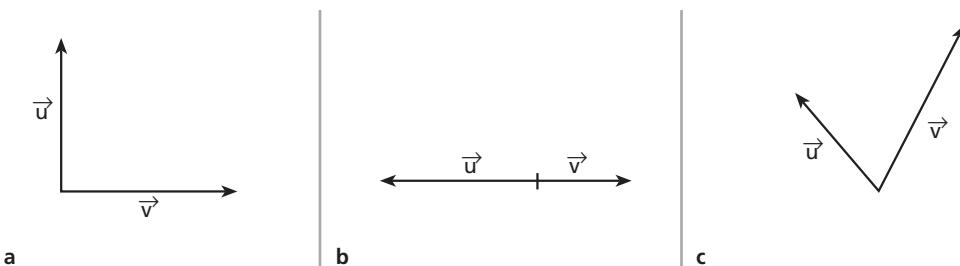
- 10** $a = 3, \quad b = 5, \quad \alpha = 120^\circ. \quad [s \simeq 4,4]$
- 11** $a = 4, \quad b = 12, \quad \alpha = 150^\circ. \quad [s \simeq 8,8]$
- 12** $a = 10, \quad b = 6, \quad \alpha = 80^\circ. \quad [s \simeq 12,5]$
- 13** $a = 12, \quad b = 9, \quad \alpha = 90^\circ. \quad [s \simeq 15]$
- 14** $a = 15, \quad b = 8, \quad \alpha = 105^\circ. \quad [s \simeq 15,1]$

Trova graficamente il vettore somma dei vettori indicati.



Sottrazione di vettori**19**

Disegna i vettori opposti dei vettori indicati.

**20**Traccia il vettore differenza $\vec{u} - \vec{v}$ dei vettori \vec{u} e \vec{v} disegnati in figura.**21**

Se la somma e la differenza di due vettori hanno lo stesso modulo, quanto misura l'angolo tra i due vettori?

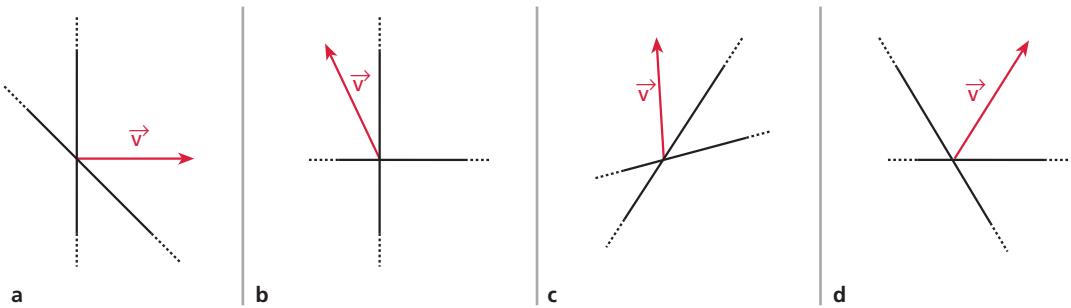
[90°]**Moltiplicazione di un vettore per uno scalare****22**Disegna un vettore \vec{a} e rappresenta poi i vettori: $-2\vec{a}$, $\frac{1}{4}\vec{a}$, $3\vec{a}$.**23**I vettori \vec{a} e \vec{b} , con modulo $a = 8$ e $b = 6$, formano un angolo di 90° . Determina il modulo dei vettori:

$$\vec{a} - 2\vec{b}; \quad \frac{1}{2}(\vec{a} + 3\vec{b}); \quad -3(-2\vec{a} + 4\vec{b}).$$

[$\simeq 14,4; \simeq 9,8; \simeq 86,5$]**24**Disegna due vettori \vec{u} e \vec{v} e verifica le proprietà:

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}, \quad \text{con } k = 3;$$

$$(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}, \quad \text{con } a = 4 \text{ e } b = -2.$$

■ La scomposizione di un vettore**25**Scomponi il vettore \vec{v} lungo le due direzioni assegnate.

2. I vettori linearmente dipendenti e indipendenti

→ Teoria a pag. α46

26

Scrivi la combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ secondo i numeri $-2, 4, \frac{1}{2}$.

27

VERO O FALSO?

- a) Due vettori linearmente dipendenti hanno come somma il vettore nullo.
- b) Due vettori che hanno come somma il vettore nullo sono linearmente dipendenti.
- c) Due vettori perpendicolari tra loro sono linearmente indipendenti.
- d) I vettori $3\vec{a}$ e $-2\vec{a}$ sono linearmente dipendenti.

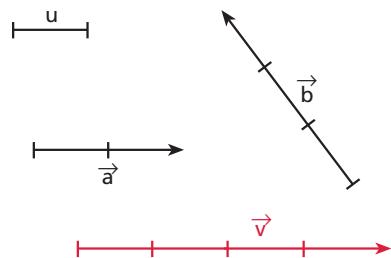
28

VERO O FALSO?

- a) Nel piano, due vettori qualsiasi costituiscono una base.
- b) Nello spazio, i versori aventi le direzioni degli assi cartesiani formano una base.
- c) Una base del piano è una coppia di vettori che genera tutti i vettori del piano.
- d) Due vettori con direzioni che formano fra loro un angolo di 45° costituiscono una base del piano.

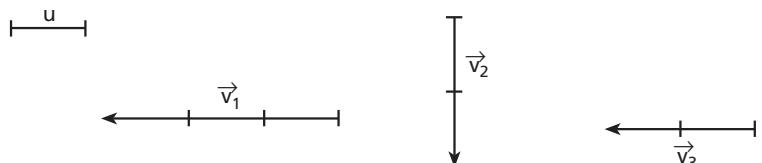
29

Dati i vettori \vec{a} e \vec{b} della figura, indica quale loro combinazione lineare permette di ottenere il vettore \vec{v} .



30

Dati i vettori della figura, rappresenta il vettore \vec{v} , combinazione lineare di coefficienti $-1, -2, 3$. Determina il modulo di \vec{v} .



[5]

3. Il prodotto scalare e il prodotto vettoriale

→ Teoria a pag. α48

31

VERO O FALSO?

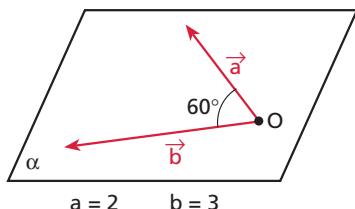
- a) Se due vettori sono perpendicolari, il prodotto scalare è nullo.
- b) Il prodotto scalare di due vettori è un vettore.
- c) Se due vettori opposti hanno lo stesso modulo, il prodotto scalare è nullo.
- d) Se il prodotto scalare di due vettori è nullo, i vettori hanno la stessa direzione.

32

VERO O FALSO?

- a) Se due vettori sono perpendicolari, il loro prodotto vettoriale è nullo.
 V F
- b) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$.
 V F
- c) Il risultato di $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ è un numero.
 V F
- d) Se il prodotto vettoriale di due vettori è nullo, i vettori hanno la stessa direzione e verso.
 V F

33

Considera i vettori della figura, che si trovano nel piano α .Determina $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e $\vec{a} \times \vec{b}$.

$$[3; |\vec{a} \times \vec{b}| = 3\sqrt{3}]$$

34

Calcola il prodotto scalare e il prodotto vettoriale dei vettori \vec{a} e \vec{b} che hanno $a = 9$ e $b = 15$ e che formano un angolo di 30° .

$$\left[\frac{135\sqrt{3}}{2}; |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{135}{2} \right]$$

35

Dati i vettori \vec{a} e \vec{b} , con $a = 6$ e $b = 8$, calcola $\vec{a} \cdot \vec{b}$, sapendo che l'angolo α fra essi compreso è:

- a) 0° ; b) 180° ; c) 90° ; d) 60° .

$$[a) 48; b) -48; c) 0; d) 24]$$

36

Dati i vettori \vec{a} e \vec{b} , con $a = 10$ e $b = 6$, calcola $\vec{a} \times \vec{b}$, sapendo che l'angolo α fra essi compreso è:

- a) 90° ; b) 0° ; c) 45° ; d) 30° .

$$[|\vec{a} \times \vec{b}| : a) 60; b) 0; c) 30\sqrt{2}; d) 30]$$

37

Calcola $\vec{a} \cdot \vec{a}$ e $\vec{a} \times \vec{a}$, sapendo che $a = 6$.

$$[36; \vec{0}]$$

I vettori \vec{a} e \vec{b} , con $a = 4$ e $b = 12$, formano un angolo di 60° . Calcola le seguenti espressioni.

38

$$(-\vec{a}) \cdot \vec{b}; \quad (2\vec{a}) \times \vec{b}; \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}.$$

$$[-24; |2\vec{a} \times \vec{b}| = 48\sqrt{3}; 0]$$

39

$$\vec{b} \cdot 3\vec{a}; \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{a}); \quad \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}).$$

$$[72; -1728; 0]$$

40

I vettori \vec{a} e \vec{b} , di moduli $a = 3$ e $b = 8$, hanno prodotto scalare -12 . Determina l'angolo α formato dai vettori.

$$[120^\circ]$$

41

Il prodotto scalare dei vettori \vec{v} e \vec{w} , che formano un angolo di 150° , è -90 . Sapendo che il modulo di \vec{v} è 10, trova il modulo di \vec{w} .

$$[6\sqrt{3}]$$

42

Spiega perché il prodotto vettoriale di due vettori ha modulo uguale all'area del parallelogramma che ha per lati i due vettori.

43

Dimostra che per ogni vettore \vec{a} è vero che $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$ e $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

4. La rappresentazione cartesiana dei vettori

→ Teoria a pag. α49

I vettori nel piano

44

Rappresenta i vettori $\vec{a} = (-4; 2)$, $\vec{b} = (-3; -1)$, $\vec{c} = (8; 6)$ nel piano cartesiano.

ESERCIZIO GUIDA

45 Dato il vettore $\vec{v} = (-6; 2)$, determiniamo il modulo e la direzione di v .

Rappresentiamo \vec{v} nel piano cartesiano e calcoliamo il modulo v con la formula $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$:

$$v = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Determiniamo la direzione di \vec{v} calcolando l'angolo α che \vec{v} forma con la direzione positiva dell'asse x .

Utilizziamo le formule:

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v} \quad \text{e} \quad \sin \alpha = \frac{v_y}{v}.$$

Otteniamo:

$$\cos \alpha = -\frac{6}{2\sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

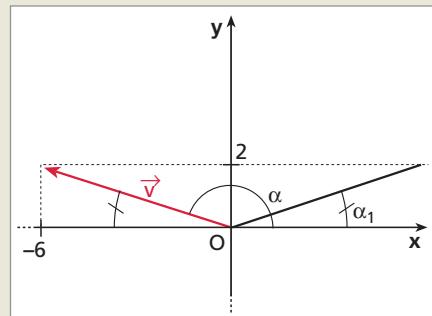
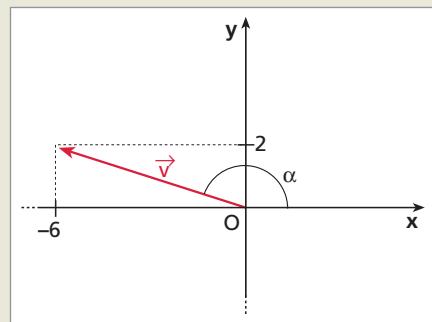
Con la funzione \cos^{-1} della calcolatrice, otteniamo $\alpha \simeq 161^\circ$.

Osserviamo che, utilizzando la formula del seno, abbiamo

$$\sin \alpha = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

e con la funzione \sin^{-1} della calcolatrice otteniamo il valore dell'angolo α_1 , con seno che vale $\frac{1}{\sqrt{10}}$, del primo quadrante; per ottenere α dobbiamo calcolare:

$$\alpha = 180^\circ - \alpha_1.$$



Trova il modulo e la direzione dei seguenti vettori.

46

$$\vec{a} = (3; 4); \quad \vec{b} = (-5; 5);$$

$$\vec{c} = (2; 4).$$

$$\|\vec{a}\| = 5, \alpha \simeq 53^\circ; \|\vec{b}\| = 5\sqrt{2}, \alpha = 135^\circ; \|\vec{c}\| = 2\sqrt{5}, \alpha \simeq 63^\circ$$

47

$$\vec{a} = (-3\sqrt{3}; 3); \quad \vec{b} = (4; -5);$$

$$\vec{c} = (9; 6).$$

$$\|\vec{a}\| = 6, \alpha = 150^\circ; \|\vec{b}\| = 6,4, \alpha \simeq 309^\circ; \|\vec{c}\| = 10,8, \alpha \simeq 34^\circ$$

48

$$\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}; \quad \vec{b} = -\vec{i} - \vec{j};$$

$$\vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}.$$

$$\|\vec{a}\| = 5, \alpha \simeq 127^\circ; \|\vec{b}\| = \sqrt{2}, \alpha = 225^\circ; \|\vec{c}\| \simeq 2\sqrt{10}, \alpha = 72^\circ$$

Con i dati forniti, determina ciò che è richiesto.

- 49** $a = 8$; $\alpha = 30^\circ$. $a_x?$ $a_y?$ $[4\sqrt{3}, 4]$
- 50** $a = 6$; $\alpha = 135^\circ$. $a_x?$ $a_y?$ $[-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$
- 51** $a_x = 12$; $\alpha = 60^\circ$. $a?$ $a_y?$ $[24, 12\sqrt{3}]$
- 52** $a_y = -10$; $\alpha = 210^\circ$. $a?$ $a_x?$ $[20, -10\sqrt{3}]$

Dati i vettori $\vec{a} = (2; -5)$, $\vec{b} = (1; -2)$, $\vec{c} = (-6; 3)$, esegui le seguenti operazioni.

- 53** $\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{b} + \vec{c}$. $[(3; -7); (1; -3); (-5; 1)]$
- 54** $2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{c}$; $\vec{a} + 4\vec{b}$; $2(\vec{b} - \vec{c})$. $[(6; -11); (6; -13); (14; -10)]$
- 55** $2\vec{b} + 2\vec{c}$; $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $-4\vec{c} + \vec{b}$. $[(-10; 2); (-5; 0); (25; -14)]$
- 56** Dati i vettori $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$ e $\vec{b} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$, trova modulo e direzione dei vettori \vec{a} , \vec{b} , $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$.
 $|\vec{a}| = 5$, $\alpha \simeq 143^\circ$; $|\vec{b}| = 10$, $\alpha \simeq 53^\circ$; $|\vec{a} + \vec{b}| = 5\sqrt{5}$, $\alpha \simeq 80^\circ$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 5\sqrt{5}$, $\alpha \simeq 207^\circ$

Il prodotto scalare

ESERCIZIO GUIDA

- 57** Dati i vettori $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{b} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$, determiniamo il loro prodotto scalare e l'angolo α formato dai due vettori.

Rappresentiamo \vec{a} e \vec{b} nel piano cartesiano e calcoliamo $\vec{a} \cdot \vec{b}$ con la formula $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(-4) + (-1)(-3) = -8 + 3 = -5.$$

Per calcolare l'angolo α , utilizziamo la formula:

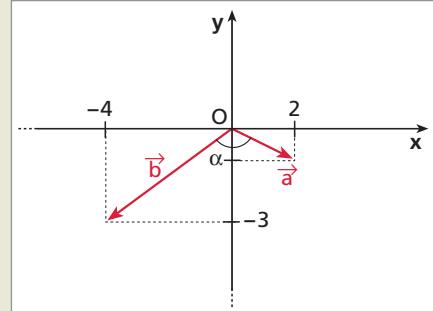
$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}.$$

Calcoliamo i moduli dei due vettori:

$$a = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}, \quad b = \sqrt{16+9} = 5,$$

e sostituiamo:

$$\cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{5} \cdot 5} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow \alpha \simeq 117^\circ.$$



Calcola il prodotto scalare delle seguenti coppie di vettori.

- 58** $\vec{a} = -\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$. $[-2]$
- 59** $\vec{a} = (2; 4)$, $\vec{b} = (8; -2)$. $[8]$
- 60** $\vec{a} = (-1; 5)$, $\vec{b} = (-6; -3)$. $[-9]$

61 $\vec{a} = -2\vec{i}$,

$$\vec{b} = 5\vec{j}.$$

[0]

62 $\vec{a} = 9\vec{i}$,

$$\vec{b} = -\frac{1}{3}\vec{i}.$$

[-3]

Calcola l'angolo formato dalle seguenti coppie di vettori.

63 $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$,

$$\vec{b} = \vec{j}.$$

[45°]

64 $\vec{a} = 5\vec{i}$,

$$\vec{b} = -6\vec{i}.$$

[180°]

65 $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$,

$$\vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j}.$$

[131°]

66 $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$,

$$\vec{b} = -2\vec{i} - 3\vec{j}.$$

[177°]

67 I vettori

$$\vec{a} = (12; 3) \text{ e } \vec{b} = \left(-2; -\frac{1}{2}\right)$$

sono paralleli? Motiva la risposta.

[sì]

I vettori nello spazio

68 Trova la somma dei vettori:

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \text{ e } \vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{k}.$$

$$[\vec{s} = -\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}]$$

69 Trova i moduli dei seguenti vettori:

$$\vec{a} = (1; -1; 4); \quad \vec{b} = (-2; 0; 1); \quad \vec{c} = (3; 1; -2).$$

$$[3\sqrt{2}; \sqrt{5}; \sqrt{14}]$$

70 Calcola il prodotto scalare dei vettori $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$ e $\vec{b} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

[-5]

Il prodotto vettoriale

ESERCIZIO GUIDA

71 Dati i vettori $\vec{a} = (2; 0; -4)$ e $\vec{b} = (0; 1; 2)$, calcoliamo $\vec{a} \times \vec{b}$.

Sappiamo che, in generale, per due vettori \vec{a} e \vec{b} :

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}.$$

Sostituiamo e otteniamo:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} - (0\vec{k} - 4\vec{i} + 4\vec{j}) = 2\vec{k} + 4\vec{i} - 4\vec{j}.$$

Il vettore $\vec{a} \times \vec{b}$ ha come componenti $(4; -4; 2)$.

Calcola il prodotto vettoriale delle seguenti coppie di vettori.

72 $\vec{a} = (0; 1; 3)$, $\vec{b} = (0; -1; 2)$. $[5\vec{i}]$

73 $\vec{a} = (4; 0; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$. $[4\vec{k}]$

74 $\vec{a} = -\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i}$. $[2\vec{k}]$

75 $\vec{a} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k}$. $[-\vec{i}]$

76 $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. $[2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}]$

77 Dati i vettori

$$\vec{a} = (2; -4) \text{ e } \vec{b} = (-5; 1),$$

determina:

- a) i moduli dei due vettori;
- b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$;
- c) l'angolo formato dai due vettori;
- d) il modulo del prodotto vettoriale $\vec{a} \times \vec{b}$.

[a) $2\sqrt{5}$; b) $-\sqrt{26}$; c) $\simeq 128^\circ$; d) 18]

78 Assegnati i vettori

$$\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} \text{ e } \vec{b} = 4\vec{i} - 4\vec{j},$$

calcola:

- a) i moduli di \vec{a} e \vec{b} ;
- b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$;
- c) $\vec{a} \times \vec{b}$.

[a) $\sqrt{5}$; b) $4\sqrt{2}$; c) $-4\vec{k}$]

79 Dati i vettori

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}, \vec{b} = -\vec{i} - \vec{k} \text{ e } \vec{c} = 3\vec{k},$$

calcola:

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $\vec{a} \cdot \vec{c}$; $\vec{b} \cdot \vec{c}$;
- b) $\vec{a} \times \vec{b}$; $\vec{b} \times \vec{c}$;
- c) $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}$; $(\vec{a} \times \vec{c}) \times \vec{b}$;
- d) $(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{c}$; $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

[a) $-2; 0; -3$; b) $3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}; 3\vec{j}$; c) $9; 6\vec{i} - 9\vec{j} - 6\vec{k}$; d) $-9\vec{i} - 9\vec{j}; 3$]

GLI ALGORITMI

1. Gli algoritmi

Un **algoritmo** è la descrizione del percorso risolutivo di un problema per giungere dai dati iniziali ai risultati finali.

Scriviamo l'algoritmo pensando di rivolgerci a un **esecutore**, capace di svolgere azioni descritte da **istruzioni**, scritte in un particolare **linguaggio**. Ipotizziamo poi che l'esecutore sia a disposizione di un **utente** (non necessariamente chi ha scritto l'algoritmo) che si serve dell'esecuzione dell'algoritmo.

SUPPONIAMO CHE L'ESECUTORE SAPPIA COMPRENDERE ED ESEGUIRE

Istruzioni di	per
input	ricevere dati (numeri, espressioni, testi....)
output	mandare messaggi e comunicare risultati
assegnazione	memorizzare un dato associandolo al nome di una variabile
calcolo	svolgere operazioni fra dati

ESEMPIO

1. Un modo di comunicare a un esecutore un possibile algoritmo relativo al **calcolo del perimetro di un rettangolo**, note le misure b della base e h dell'altezza, è il seguente.

Inizia; acquisisci il valore di b e quello di h ; calcola il doppio di b e assegna a $D1$; calcola il doppio di h e assegna a $D2$; somma i valori di $D1$ e $D2$ e assegna il risultato a P ; rendi noto il valore di P ; hai finito.

2. Una possibile descrizione dell'algoritmo per ottenere la **misura di un cateto c** in un triangolo rettangolo, conoscendo quelle dell'ipotenusa a e dell'altro cateto b , è la seguente.

Inizia; acquisisci a e b ; controlla se a è maggiore di b : se è vero calcola $\sqrt{a^2 - b^2}$, assegna il valore dell'espressione a c e comunica il suo valore, se è falso scrivi un messaggio di errore; hai finito.

3. Algoritmo per trovare il **massimo fra quattro numeri**.

Inizia; leggi il primo numero e memorizzalo nella variabile M ; ripeti queste istruzioni per 3 volte: [leggi un numero e memorizzalo nella variabile N , se N è maggiore di M , assegna il valore di N a M]; comunica M ; hai finito.

Abbiamo scritto gli algoritmi precedenti nel linguaggio di tutti i giorni, ma è opportuno utilizzare un linguaggio convenzionale, eliminare le possibili ambiguità del linguaggio comune e mettere in evidenza la struttura degli algoritmi.

Nel sito: ► I diagrammi a blocchi



2. Il linguaggio di progetto

Esaminiamo gli algoritmi degli esempi precedenti, scritti in un **linguaggio di progetto**.

ESEMPIO**1. Calcolo del perimetro di un rettangolo**

◀ Figura 1

Inizio

SCRIVI "Fornisci la misura della base"

LEGGI b

SCRIVI "Fornisci la misura dell'altezza"

LEGGI h $D1 := 2 \cdot b$ $D2 := 2 \cdot h$ $P := D1 + D2$

SCRIVI "La misura del perimetro è"

SCRIVI P

Fine

Notiamo che:

- il simbolo $:=$ indica l'assegnazione;
- con le istruzioni del tipo SCRIVI "..." chiediamo all'esecutore di rivolgersi all'utente;
- le tre istruzioni di assegnazione possono essere sostituite da un'unica istruzione, $P := 2 \cdot b + 2 \cdot h$, se l'esecutore sa utilizzare le espressioni.

In questo algoritmo le istruzioni sono da eseguire sempre e una sola volta, nell'ordine in cui si presentano. Una struttura come questa è detta *sequenza*.

2. La misura di un cateto

◀ Figura 2

Inizio

SCRIVI "Dai la misura dell'ipotenusa"

LEGGI a

SCRIVI "Dai la misura di un cateto"

LEGGI b SE $a > b$

ALLORA

$c := \sqrt{a^2 - b^2}$

SCRIVI "L'altro cateto misura"

SCRIVI c

ALTRIMENTI

SCRIVI "Errore"

Fine

In questo algoritmo l'istruzione $c := \sqrt{a^2 - b^2}$ è eseguita soltanto se la condizione $a > b$ è vera, l'istruzione SCRIVI "Errore" solo se la condizione è falsa.

Una struttura come questa è detta *selezione*.

3. Il massimo fra quattro numeri

Possiamo scrivere l'algoritmo in due modi diversi.

```

Inizio
SCRIVI "Fornisci il primo numero"
LEGGI M
CONT := 1
RIPETI
    CONT := CONT + 1
    SCRIVI "Fornisci un altro numero"
    LEGGI N
    SE N > M
        ALLORA M := N
    FINCHÉ CONT = 4
    SCRIVI "Il massimo è"
    SCRIVI M
Fine

```

a

```

Inizio
SCRIVI "Fornisci il primo numero"
LEGGI M
CONT := 1
MENTRE CONT < 4 FAI
    CONT := CONT + 1
    SCRIVI "Fornisci un altro numero"
    LEGGI N
    SE N > M
        ALLORA M := N
FINE MENTRE
SCRIVI "Il massimo è"
SCRIVI M
Fine

```

b

▲ Figura 3

Notiamo che:

- RIPETI *istruzioni* FINCHÉ *condizione*
continua a far eseguire le *istruzioni* fintanto che la *condizione* è falsa; quando la *condizione* diventa vera l'esecutore prosegue con l'istruzione successiva alla riga di FINCHÉ;
- MENTRE *condizione* FAI *istruzioni* FINE MENTRE
continua a far eseguire le *istruzioni* fintanto che la *condizione* è vera; quando la *condizione* diventa falsa l'esecutore non esegue le *istruzioni*, ma passa all'istruzione successiva alla riga di FINE MENTRE;
- CONT ha la funzione di variabile contatore: assume i valori 1, 2, 3, 4.

Una struttura descritta da RIPETI...FINCHÉ... o da MENTRE...FAI..., in cui una o più istruzioni vengono eseguite in modo ciclico, viene detta *iterazione*.

In linguaggio di progetto lo stesso algoritmo può anche essere scritto come nella figura 4.

```

Inizio
SCRIVI "Fornisci il primo numero"
LEGGI M
PER i CHE VA DA 1 A 3 CON PASSO 1 FAI
    SCRIVI "Fornisci un altro numero",
    LEGGI N
    SE N > M
        ALLORA M := N
    PROSSIMO i
    SCRIVI "Il massimo è"
    SCRIVI M
Fine

```

◀ Figura 4

In questo caso supponiamo che l'esecutore abbia la capacità di gestire un contatore in modo autonomo.

Una struttura descritta da PER... CHE VA DA... A... CON PASSO... è detta **iterazione enumerativa**.

In generale, abbiamo le seguenti strutture.

Sequenza

```
Inizio
<istruzione>
<istruzione>
<istruzione>
...
Fine
```

Selezione

```
SE <condizione>
    ALLORA
        <istruzioni1>
    ALTRIMENTI
        <istruzioni2>
```

dove il blocco <istruzioni1> viene eseguito se <condizione> è vera, il blocco <istruzioni2> viene eseguito se <condizione> è falsa.

È possibile anche la seguente struttura di selezione in cui non è presente ALTRIMENTI:

```
SE <condizione>
    ALLORA
        <istruzioni1>
```

Iterazione

```
RIPETI
    <istruzioni>
FINCHÉ <condizione>
```

dove si esegue il blocco <istruzioni>, se <condizione> è vera si esce dal ciclo, se invece <condizione> è falsa si continua il ciclo, tornando a eseguire <istruzioni>; e così via.

```
MENTRE <condizione> FAI
    <istruzioni>
FINE MENTRE
```

dove se <condizione> è vera si esegue <istruzioni>, se invece <condizione> è falsa esce dal ciclo.

Per comprendere meglio la differenza delle due strutture puoi farne un confronto nel seguente esempio.

-
- ▶ Nella struttura RIPETI... FINCHÉ... il blocco <istruzioni> viene eseguito almeno una volta, anche se <condizione> è già vera all'inizio del ciclo.
-

► Figura 5

ESEMPIO

RIPETI
mangia un biscotto
FINCHÉ sei sazio

MENTRE non sei sazio FAI
mangia un biscotto
FINE MENTRE

PER <indice> CHE VA DA <iniziale> A <finale> CON PASSO <delta> FAI
<istruzioni>
PROSSIMO <indice>

dove la variabile indicata in <indice>, partendo dal valore espresso in <iniziale>, aumenta della quantità <delta> per ogni ciclo; quando <indice> supera il valore indicato da <finale> si esce dal ciclo.

3. L'algoritmo di Euclide

Nell'insieme dei numeri naturali, cerchiamo il massimo comune divisore fra due numeri m e n che indichiamo con M.C.D.(m, n). Sfruttiamo il seguente teorema.

TEOREMA

Supposto $m \geq n$, se m e n hanno un divisore d comune, d è divisore anche di $m - n$.

DIMOSTRAZIONE

Poiché d è divisore sia di m sia di n , abbiamo che

$$m = kd \quad e \quad n = hd.$$

La differenza $m - n$ è allora:

$$m - n = kd - hd.$$

Raccogliamo d al secondo membro:

$$m - n = d(k - h).$$

Quindi anche $m - n$ ha d come divisore.

Per il teorema precedente, i divisori comuni a m e n sono gli stessi comuni a $m - n$ e n e quindi:

$$\text{M.C.D.}(m, n) = \text{M.C.D.}(m - n, n).$$

Possiamo allora determinare il M.C.D. fra due numeri per sottrazioni successive. Iniziamo confrontando i due numeri, se il primo è più piccolo scambiamo il primo con il secondo, quindi eseguiamo la sottrazione fra i due numeri. Confrontiamo poi il secondo numero con la differenza, se è necessario li scambiamo, eseguiamo la sottrazione... Proseguiamo ottenendo una sequenza di numeri che hanno il medesimo M.C.D. e, per come sono calcolati, sono numeri naturali sempre più piccoli. Giungiamo quindi a 0 e a quel punto, essendo $\text{M.C.D.}(0, n) = n$, diciamo che il numero precedente è il M.C.D. cercato.

Scriviamo questo **algoritmo per la ricerca del M.C.D. con le sottrazioni successive**, sia con RIPETI... FINCHÉ... sia con MENTRE... FAI.

Nel sito: ► L'algoritmo per la ricerca del M.C.D. con le divisioni successive



Inizio
 SCRIVI "PRIMO NUMERO:"
 LEGGI m
 SCRIVI "SECONDO NUMERO:"
 LEGGI n
 RIPETI
 SE $m < n$
 ALLORA
 $temp := m$
 $m := n$
 $n := temp$
 $m := m - n$
 FINCHÉ $m = 0$
 SCRIVI n
 Fine

Inizio
 SCRIVI "PRIMO NUMERO:"
 LEGGI m
 SCRIVI "SECONDO NUMERO:"
 LEGGI n
 MENTRE $m > 0$ FAI
 SE $m < n$
 ALLORA
 $temp := m$
 $m := n$
 $n := temp$
 $m := m - n$
 SCRIVI n
 Fine

Osserva che:

- per effettuare lo scambio fra i numeri m e n abbiamo bisogno di una terza variabile che chiamiamo $temp$;
- l'istruzione $m := m - n$ richiede il calcolo della differenza fra m e n e la memorizzazione del risultato in m . Il precedente valore di m va perso.

■ La tavola di traccia

Per capire meglio quali azioni fa compiere un algoritmo e in quale sequenza, possiamo compilare la **tavola di traccia**, cioè una tabella dei valori assunti dalle variabili e dei risultati dei test logici legati alle condizioni, percorrendo l'algoritmo passo a passo.

Compiliamo la tavola di traccia dell'algoritmo precedente, utilizzando la versione con RIPETI... FINCHÉ..., e commentiamola.

Passo	m	n	$m < n$	$temp$	m	n	$m := m - n$	$m = 0$	M.C.D.
1	15	9	Falso				6	Falso	
2	6	9	Vero	6	9	6	3	Falso	
3	3	6	Vero	3	6	3	3	Falso	
4	3	3	Falso				0	Vero	3

Passo 1 Partiamo con i numeri $m = 15$ e $n = 9$. La condizione $m < n$ è falsa, quindi calcoliamo la differenza e l'assegniamo a m . La condizione $m = 0$ è falsa, quindi ripetiamo le istruzioni del ciclo.

Passo 2 La condizione $m < n$ è vera, pertanto scambiamo i valori di m e di n . Effettuiamo la differenza e l'assegniamo a m . Poiché m è diverso da 0, ripetiamo il ciclo.

Passo 3 Proseguiamo in modo simile.

Passo 4 Troviamo che m vale 0, quindi usciamo dal ciclo e scriviamo il valore contenuto in n , che è il M.C.D. cercato.

▲ Figura 6

Nel sito:

- L'algoritmo di Euclide con il diagramma a blocchi
- L'algoritmo di Euclide con GeoGebra



Nel sito:

- Dall'algoritmo al programma



Algoritmi e linguaggio di progetto

→ Teoria a pag. α64

Per ognuno dei seguenti problemi, relativi a numeri naturali:

- svolgi l'analisi matematica per pervenire alla sua soluzione,
- scrivi con le convenzioni del linguaggio di progetto l'algoritmo risolutivo,
- compila la tavola di traccia dell'algoritmo con i valori d'ingresso indicati.

1

Dato un numero n , stabilisci il numero v dei suoi divisori, compresi 1 e il numero stesso.

Prova con $n = 19$, con $n = 54$.

[2, 8]

2

Dato un numero n , stabilisci il numero φ dei numeri minori di n e primi con n , unità inclusa.

Prova con $n = 4$, con $n = 7$, con $n = 15$.

[2, 6, 8]

3

Dati due numeri n e f , con f numero primo, trova la molteplicità m con la quale f appare fra i divisori di n .

Prova con $n = 162$ e con $f = 3$, con $n = 162$ e con $f = 6$.

[4, f non è primo]

4

Scrivi un algoritmo che, dati 5 numeri, calcoli la loro somma. Prova con 4, 2, 6, 7, 3.

[22]

5

Tre rappresentanti di commercio di una medesima ditta partono contemporaneamente dalla sede e impiegano per completare il loro giro, il primo p giorni, il secondo s giorni, il terzo g giorni. Dopo aver assegnato rispettivamente un valore a p e uno a s , stabilisci, per ogni valore di g da 1 a 6, il numero dei giorni che passano affinché si ritrovino tutti assieme nella località di partenza.

Prova con $p = 3$ giorni e $s = 5$ giorni.

6

Nella successione dei numeri di Fibonacci i primi due sono 1 e 1 e gli altri si ottengono ognuno come somma dei due che lo precedono, trova:

- il numero n di posto i ,
- l'indice i del primo numero della successione che supera il numero i^2 ,
- il numero s della successione che sia il p -esimo a essere primo.

Prova con $i = 8$ e con $p = 4$.

[$n = 21$, $i = 13$, $s = 13$]

Per verificare che l'addizione e la moltiplicazione godono della proprietà associativa e che la sottrazione e la divisione non godono di tale proprietà, assegna n valori equidistanti fra loro ai parametri a e b e mostra in colonne affiancate i valori che assumono in corrispondenza le seguenti coppie di espressioni. Prova con a variabile in $\{8, 9, 10\}$ e b variabile in $\{3, 6, 9\}$. Descrivi il procedimento con un algoritmo.

7

$(a + b) + 7$ e $a + (b + 7)$.

8

$(a \cdot 324) \cdot b$ e $a \cdot (b \cdot 324)$.

9

$(877 - a) - b$ e $877 - (a - b)$.

10

$(a : b) : 3$ e $a : (b : 3)$.

11

Se inserisci i valori indicati, quali uscite dà il seguente algoritmo? A quale domanda potrebbe rispondere l'algoritmo? L'operatore logico *or* fornisce il risultato VERO se almeno una delle due condizioni che lega è vera.

Inizio

LEGGI d SE $d < 0$ or $d > 90$

ALLORA

SCRIVI "Il dato non è accettabile"

ALTRIMENTI

 $\alpha := (90 + d)/2$ $\beta := 90 - \alpha$ SCRIVI α e β

Fine

Prova con $d = 0, d = 10, d = 90, d = 30, d = 120$.[45 e 45; 50 e 40; 90 e 0; 60 e 30; d non è acc.; trova due angoli complementari la cui differenza è d]

A quale quesito rispondono i seguenti algoritmi? Segui la traccia partendo dai valori sotto indicati.

12

Inizio

LEGGI n $flag = 1$ $cont = 0$

RIPETI

SE $\text{mod}(n, 3) = 0$

ALLORA

 $cont := cont + 1$ $n := n/3$

ALTRIMENTI

 $flag = 0$ FINCHÉ $flag = 0$ SCRIVI $cont$

Fine

Prova con $n = 162$ e con $n = 223$.[dato il numero n , stabilisci la molteplicità del divisore 3; 4, 0]**13**

Inizio

LEGGI n PER i CHE VA DA 1 a n CON PASSO 1 FAILEGGI a_i PROSSIMO i $cont = 0$ PER i CHE VA DA 1 a n CON PASSO 1 FAISE $\text{mod}(a_i, 2) = 0$

ALLORA

 $cont := cont + 1$ PROSSIMO i SCRIVI $cont$

Fine

Prova con $n = 5$ e $a_i = \{4, 8, 3, 7, 11\}$.[determina quanti numeri pari appaiono in un insieme di n numeri dati; 2]

Che cosa c'è che non va nelle seguenti descrizioni di algoritmi?

14

Inizio
LEGGI a
 $d := a - b$
SE $d > 0$
ALLORA
SCRIVI a , “è maggiore di”, b
ALTRIMENTI
SCRIVI a , “non è maggiore di”, b
Fine

[il numero b non è noto all'esecutore]

15

Inizio
LEGGI a e b
RIPETI
 $m := a - b$
 $n := a + b$
 $a := a + 1$
 $b := b + 1$
FINCHÉ $m > n$
SCRIVI m, n
Fine

[il ciclo prosegue all'infinito se $b > 0$]

.....

Trova e correggi gli errori sostanziali contenuti nei seguenti algoritmi, in relazione a quello che il commento promette.

16 L'algoritmo trova il perimetro di un triangolo isoscele di lato l e altezza h .

Inizio
SCRIVI “Dai la misura del lato obliquo”
LEGGI l
SCRIVI “Dai la misura dell'altezza”
LEGGI h
 $b := 2 \cdot \sqrt{l^2 - h^2}$
 $duep := 2 \cdot b + l$
SCRIVI $duep$
Fine

[occorre fare un controllo su l e h ;
il calcolo del perimetro è sbagliato]

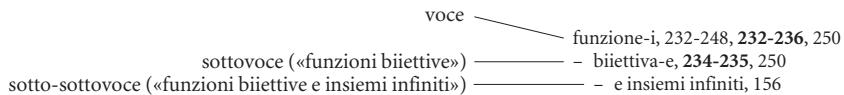
17 L'algoritmo calcola l'area di un rettangolo di base b e diagonale d .

Inizio
SCRIVI “Dai la misura della base”
LEGGI b
SCRIVI “Dai la misura della diagonale”
LEGGI d
 $h := \sqrt{b^2 + d^2}$
 $S := b \cdot h$
SCRIVI S
Fine

[occorre fare un controllo su b e d ;
il calcolo di h è sbagliato]

INDICE ANALITICO

- Le pagine evidenziate in neretto (per esempio, 572) sono quelle in cui un termine viene definito.
 - I termini preceduti dal trattino indicano una sottovoce; quelli preceduti dal trattino e rientrati indicano una sotto-sottovoce.
- Per esempio:



A

- addizione
 - algebrica, 24
 - di disugualanze dello stesso verso, proprietà della, 572, 588
 - di frazioni algebriche, 421-422
 - di monomi, 293-294
 - di numeri
 - interi, 22-23
 - naturali, 2
 - razionali, 85-86
 - di polinomi, 300
 - proprietà dell', 8, 9, 22-23, 30, 86
- Ahmes, papiro di, 502
- al-Karaji, 378
- al-Khuwarizmi, 497
- al-Samawal, 378
- alberi, piantagione di, 238
- algebra, 497
 - sincopata, 423
 - algebrica-he
 - addizione, 24
 - frazioni, 419-422, 424, 427
 - aliquote, tasse e, 12
 - ampiezza di una classe, α 7- α 8
 - analitica, espressione, 237
- AND (v. congiunzione di due proposizioni)
- angolare, coefficiente, 241
- angolo-i
 - coseno di un, 245
 - misura degli, 243
 - orientato-i, 243-**244**
 - negativo, 244
 - positivo, 244
 - seno di un, 245
 - tangente di un, 245
- annullamento del prodotto, legge di, 4, 87
- antecedente-i
 - di una proporzione, 91
 - proposizione, 168
- antiperiodo, 95
- antiriflessiva, relazione, 229, 249
- antisimmetrica, relazione, 229, 249
- aperto-i
 - enunciati, 173, 178-179
 - intervallo, 575

- apparenti, frazioni, 78, 101
- approssimato, calcolo, 97-99, 102
- approssimazione-i
 - di un numero, 97, 102
 - nelle operazioni, 99
- arabi, matematici, 307
- archi, origine degli, 244
- Archimede, principio di, 587
- areogramma, 90, **α8**, α 21
- aritmetica, media, **α11-α12**, α 22
- arrivo, insieme di, 233
- arrotondamento, 97
- ascissa-e
 - asse delle, 237
 - di un punto, 238
- assi cartesiani, 237
 - origine degli, 238
- associativa, proprietà, 8-9, 23, 25, 30, 86, 87
- assoluto-i
 - errore, 98, 102
 - numeri razionali, **80-81**
 - valore, 20, 32, **242**, 585-586, 589
- assorbente, elemento, 4
- astrazione, procedimento di, 231
- atomica, proposizione (v. proposizione semplice)
- aut (v. disgiunzione esclusiva di due proposizioni)

B

- base
 - di un sistema di numerazione, 17
 - di una potenza, 6
- biciletta, 77, 100
- biiettiva, funzione, **234-235**, 250
 - (v. anche funzione biiettiva), 234
- bilancia a bracci uguali, 491, 508
- bimodale, distribuzione, α 15
- binarie, relazioni, 223-226, 249
- binomio
 - cubo di un, 305, 320, 415, 426
 - potenza di un, **306**
 - quadrato di un, 304, 320, 415, 426

- biunivoca, corrispondenza (v. anche funzione biiettiva), 234
- Bombelli, Raffaele, 423
- bracci uguali, bilancia a, 491, 508

C

- calcio, α 1, α 20
- calcolatrice, 291, 318
 - e funzioni goniometriche, 245
- calcolo
 - approssimato, 97-99, 102
 - letterale, 414
 - medie di, α 11
 - mentale, 291, 318
- cambiamento di segno, regola del
 - nelle disequazioni, 576
 - nelle equazioni, **499**, 510
- campionaria, media aritmetica, α 18
- campione, **α2**
- campo
 - di esistenza di una funzione, 237, 251
 - di variazione, α 15, α 22
 - superficie di un, 302
- cancellazione
 - leggi di, 28
 - regola di, **497**, 509
- cancro al polmone, α 10
- Cantor, Georg, 156
- carattere-i, **α2-α3**, α 21
 - qualitativi, α 2- α 3, α 21
 - quantitativi, α 2- α 3, α 21
- caratteristica, proprietà, 154
- cartesiana-o-e-i
 - assi, 237
 - coordinate, 238
 - diagramma o grafico, 162-163, **α8-α9**, α 21
 - piano, 238
 - prodotto, **161-163**, 177
 - rappresentazione, 224, 249
 - cartogrammi, **α9-α10**
 - casa, vittorie in, α 1, α 20
 - cavalieri e furfanti, 167
 - censimento, α 2, α 3
 - centrale idroelettrica, 223, 248
- chiuso
 - insieme, rispetto a un'operazione, 2
 - intervallo, **575**
- ciccale, 1, 29
- cifre, 17
- circolare, diagramma, **α8**
- circonferenza goniometrica, 244
- classe-i
 - di equivalenza, 81, **230-231**, 249
 - direzione come, 231
 - rappresentazione di una, 230
 - di frazioni, 81
 - di frequenza, **α5**
 - modale, α 15
- codominio
 - di una funzione, 233, 250
 - di una relazione, 225
- coefficiente
 - angolare, 241
 - di un monomio ridotto a forma normale, **292**, 319
- commutativa, proprietà, 8, 23, 25, 26, 30, 86, 87
- commutatività, prodotto cartesiano e, 163
- complementare, insieme, **161**, 177
 - negazione e, 174
- completo, polinomio, 299, 320
- comporre, proprietà del, 92, 102
- composizione di due funzioni, **236**, 250
 - numeriche, 238-239
- composta
 - funzione, **236**, 250
 - proposizione, **165-166**, 169-171, 178
- comune, raccoglimento a fattore, 414, 426
- conclusione di un ragionamento, 171
- concordi, numeri interi, **20**, 32
- condizioni di esistenza
 - di un'identità, 492
 - di una frazione algebrica, **420**, 427
- confidenza, intervallo di, **α19**, α 22
- confronto
 - tra frazioni, 83

confronto (*continua*)

- tra numeri
 - interi, 22
 - naturali, 1
 - razionali, 83, 101

congettura, 16

congiunzione di due proposizioni, 166-167, 178

- e intersezione tra insiemi, 174

connettivi logici, 165-169, 178

- e operazioni tra insiemi, 174, 179

- priorità dei, 169-170

conseguente-i

- di una proporzione, 91

- proposizione, 168

contingenza, tabelle di, 17

continuo, potenza del, 156

contraddizione, 170, 178

controimmagine, 233

controllo delle soluzioni

- di un'equazione, 503

- in un problema, 506, 507

coordinate cartesiane, 238

coppia-e, 161-162

- di numeri e punti del piano, relazione tra, 238

correlazione, tabelle di, 17

corrispondenza

- biunivoca (*v. anche* funzione biettiva), 234

- tra un insieme e un suo sottointerseme proprio, 156

- univoca (*v. funzione*)

coseno, funzione, 245-246, 251

cosinusoide, 246

costante

- magica, 23

- prodotto, 240

- rapporto, 239

crescita della popolazione, 247

criteri di divisibilità, 5

cubo-i

- di un binomio, 305, 320, 415, 426

- differenza di due, 317, 415, 426

- somma di due, 317, 415, 426

curva gaussiana (o normale), 18

D

\mathbb{D} , insieme, 152

dati

- elaborazione dei, $\alpha 1-\alpha 2$
- rappresentazione grafica dei, 17- $\alpha 10$, $\alpha 21$

- rilevamento dei, $\alpha 1-\alpha 2$

- statistici, $\alpha 1-\alpha 2$, $\alpha 21$

decimale-i

- frazioni, 93-94, 102

- numeri, 93-96, 102

- rappresentazione, 93-96, 102

- sistema di numerazione, 17

Dedekind, Julius Wilhelm Richard, 156

deduzione logica, 171

- e implicazione materiale, 172

definizione, insieme di, 237

denominatore, 77, 101

- comune

- minimo, 80

- riduzione di frazioni a, 80

denso, insieme, 84

Derive, 70

- frazioni algebriche con, 483
- numeri naturali con, 70

descrittiva, statistica, $\alpha 2$

determinata, equazione, 494, 501, 509, 510

deviazione standard, $\alpha 17$, $\alpha 22$

- di una distribuzione gaussiana, 18

diagramma-i

- a torta, 90, $\alpha 8$

- cartesiano (*v. anche* grafico cartesiano), 162-163, $\alpha 8-\alpha 9$, $\alpha 21$

- circolare, $\alpha 8$

- di Eulero-Venn, 153, 177

difetto, approssimazione per, 97, 102

differenza

- di due cubi, 317, 415, 426

- di due numeri

- - interi, 24, 32

- - naturali, 2, 30

- - razionali, 85, 99, 102

- di due polinomi, 300, 320

- di due quadrati, 302-303, 320, 415, 426

- - tra insiemi, 160, 177

dipendente, variabile, 237, 251

diretta

- intervista, $\alpha 2$

- proporzionalità, 239-240, 251

direttamente proporzionali, variabili, 239

direzione, 231

discordi, numeri interi, 20, 32

discreto, insieme, 2, 22

discussione

- di disequazioni letterali

- - frazioni, 582-583

- - intere, 578

- - di equazioni letterali, 504-505

disequazione-i, 573-586, 588

- con i valori assoluti, 586, 589

- di primo grado (lineari), 575, 577-578

- - con Wiris, 625

- - letterali intere, 578

- - numeriche fratte, 581-582, 588-589

- - numeriche intere, 577, 588

- - spese e ricavi nella produzione, 584

- - equivalenti, 576, 588

- - frazioni, 575, 580-583

- - impossibile, 577

- - indeterminata (*v. disequazione sempre verificata*)

- - intere, 575

- - letterali

- - fratte, 582-583, 588-589

- - intere, 578

- - lineari (*v. anche* disequazioni di primo grado), 575, 577-578

- - problemi e, 584, 589

- - mai verificata, 577

- - numeriche, 575

- - - frazioni, 581-582, 588-589

- - - intere, 577, 588

- - principi di equivalenza delle, 576, 588

- - sempre verificata, 577

- - sistemi di, 583-584, 589

disequazione-i (*continua*)

- soluzioni di una, 573, 574-575, 588

- - tipi di, 575

disgiunti, insiemi, 158, 177

disgiunzione di due proposizioni

- esclusiva, 168, 178

- inclusiva, 167-168, 178

- - e unione tra insiemi, 174

dispersione, $\alpha 15$

distributiva, proprietà, 9-10, 25, 30, 87

distribuzione

- bimodale, $\alpha 15$

- di frequenza, $\alpha 4$, $\alpha 8-\alpha 9$

- forma della, $\alpha 8$

- gaussiana, $\alpha 18$

- - deviazione standard di una, $\alpha 18$

- - media aritmetica di una, $\alpha 18$

- - simmetrica, $\alpha 18$

disugualanza-e, 571-573, 588

- dello stesso senso, 571

- di senso contrario, 571

- leggi di cancellazione per le, 28

- leggi di monotonia per le, 27-28, 86, 87

- - numeriche, proprietà delle, 571-573, 588

divisibile per un monomio, polinomio, 310, 321

divisibilità

- criteri di, 5

- fra monomi, 296

- fra polinomi, 311

divisione

- di un polinomio per un monomio, 310

- per il numero 0, 4

- per un fattore comune diverso da 0, regola della, 498, 510

- proprietà della, 10-11, 25, 31

- tra frazioni algebriche, 424

- tra monomi, 295-296

- tra numeri

- - interi, 25

- - naturali, 3

- - razionali, 87-88

- tra polinomi, 310-312, 314, 385

- - con resto, 311-312, 321

- - esatta, 311

divisore di un numero, 5, 30

dominio

- della funzione

- - coseno, 245

- - seno, 245

- - tangente, 245

- di una funzione, 233, 250

- di una relazione, 225

- naturale, 237, 251

donatori universali, 151, 176

doppia

- entrata, tabella a, 163, 224, 249, $\alpha 6-\alpha 7$

- implicazione, 169, 178

Dürer, Albrecht, 23

E

e (*v. congiunzione di due proposizioni*)

eccesso, approssimazione per, 97, 102

economia, modelli matematici applicati all', 584

elaborazione dei dati, $\alpha 1-\alpha 2$

elementare, proposizione (*v. proposizione semplice*)

elemento

- assorbente della moltiplicazione, 4

- di un insieme, 152, 177

- neutro

- dell'addizione, 3-4, 23, 86

- della moltiplicazione, 4, 25, 87

entrata, tabella a doppia, $\alpha 7$

enunciato-i, 164

- aperti, 173, 178-179

- chiusi, 173, 178-179

- negativi, 173, 178-179

- aperti, 173, 178-179

- chiusi, 173, 178-179

- negativi, 173, 178-179

- aperti, 173, 178-179

- chiusi, 173, 178-179

- negativi, 173, 178-179

- aperti, 173, 178-179

- chiusi, 173, 178-179

- negativi, 173, 178-179

- aperti, 173, 178-179

- chiusi, 173, 178-179

- negativi, 173, 178-179

- aperti, 173, 178-179

- chiusi, 173, 178-179

- negativi, 173, 178-179

- aperti, 173, 178-179

- chiusi, 173, 178-179

- negativi, 173, 178-179

- aperti, 173, 178-179

- chiusi, 173, 178-179

- negativi, 173, 178-179

- aperti, 173, 178-179

- chiusi, 173, 178-179

- negativi, 173, 178-179

- errore-i (*continua*)
 - del quoziente di due numeri, 99, 102
 - della differenza di due numeri, 99, 102
 - della somma di due numeri, 99, 102
 - propagazione degli, 99, 102
 - relativo, 98, 102
 - standard, **α19**, **α22**
- esclusivo, o, 158
- esistenza di una frazione algebrica, condizione di, 420, 427
- esistenziale, quantificatore, 175, 179
- esponente di una potenza, **6**
- esponenziale, funzione, 247
- espressione-i
 - analitica di una funzione numerica, 237
 - con i numeri naturali, 6-7, 30
 - logiche, 165, 169-171, 178
- estremi di una proporzione, 91
- et (v. congiunzione di due proposizioni)
- Euler, Leonhard (Eulero), 16, 153
- Venn, diagrammi di, 153, 177
- Excel
 - equazioni lineari con, 561
 - funzioni con, 282
 - numeri razionali con, 143
 - statistica con, **α35**

F

- falsa-o
 - posizione, metodo della, 502
 - quadrato, 317
- fattore-i
 - comune, raccoglimento a, 10, **414**, 426
 - primi, 14-15, 31
 - scomposizione di un polinomio in, **413-418**, 426
- Fermat, Pierre de, 16
- finito, insieme, 152
- fundamentale-i
 - proprietà delle proporzioni, **92**, 102
 - relazioni trigonometriche, **245**, 251
- forma
 - della distribuzione, **α8**
 - normale
 - equazione scritta in, 494-495, 509
 - monomio ridotto a, **292-293**, 319
 - polinomio ridotto a, **298**, 319
 - polinomiale di un numero, 17, 32
- fratta-e
 - disequazioni, **575**, **580-583**
 - equazioni, 494, 503-505, 510
- frazione-i, **77**-**82**, 101
 - algebrica-he, **419-422**, 424, 427
 - con Derive, 483
 - equivalenti, 420-421
 - operazioni con le, **421-422**, 424, 427
 - potenza di una, **424**
 - proprietà invariantiva per le, 421
 - semplificazione delle, 421
 - decimali, **93-94**, 102

- frazione-i (*continua*)
 - e numeri
 - decimali finiti, **93-94**, 102
 - decimali periodici, **95-96**, 102
 - razionali, 80-82, 101
 - equivalenti, 78, 101
 - generatrici, **96**
 - proporzioni e, 91
 - proprietà invariantiva delle, **79**, 101
 - ridotta ai minimi termini, **79**, 101
 - studio del segno di una, 581
- frequenza-e, **α3-α4**, **α5**, **α21**
 - classi di, **α5**
 - distribuzione di, **α4**, **α8-α9**
 - poligono delle, **α7**
 - relativa, **α4**, **α5**, **α21**
 - percentuale, **α4**, **α21**
 - tabelle di, **α3-α4**
- fumo, effetti del, 10
- funzione-i, 232-248, **232-236**, 250
 - biettiva-e, **234-235**, 250
 - e insiemi infiniti, 156
 - campo di esistenza di una, **237**, 251
 - codominio di una, **233**, 250
 - composizione di due, **236**, 250
 - composta, **236**, 250
 - coseno, **245-246**, 251
 - dominio della, 245
 - grafico della, 246
 - di proporzionalità
 - diretta, **239-240**, 251
 - inversa, **240**, 251
 - quadratica, **242**, 251
 - dominio di una, **233**, 250
 - dominio naturale di una, **237**, 251
 - esponenziale, 247
 - goniometriche, **243-246**, **245**, 251
 - calcolatrice e, 245
 - triangoli rettangoli e, **246**, 251
 - grafico di una, 238
 - identità, 236
 - iniettiva, **234**, 250
 - insieme di arrivo di una, 233
 - insieme di definizione di una, 237
 - insieme di partenza di una, 233
 - inversa, **235**, 236, 250
 - lineare, **241-242**, 251
 - notazione per le, 233
 - numerica-he, **237-242**, 251
 - composizione di, 238-239
 - con Excel, 282
 - espressione analitica di una, 237
 - grafico cartesiano di una, **237-238**
 - polinomiali, 308-309, 321
 - seno, **245-246**, 251
 - dominio della, 245
 - grafico della, 246
 - suriettiva, **233-234**, 250
 - tangente, **245-246**, 251
 - dominio della, 245
 - grafico della, 246
 - valore assoluto, **242**
 - grafico della, 242

G

- Galilei, Galileo, 156
- Gauss, curva di, **α18**

- gaussiana, curva, **α18**
 - grafico della, **α18**
- generatrice, frazione, **96**
- geometrici, problemi, 507
- Goldbach, 16
- goniometrica-he
 - circonferenza, 244
 - funzioni, 243-246, **245**, 251
- grado
 - del polinomio quoziante, 311
 - di un monomio, **293**, 319
 - di un polinomio
 - ridotto, **299**, 320
 - rispetto a una lettera, 299
 - di un'equazione, **495**, 509
 - sessagesimale, **243**
- grafica, rappresentazione, di un insieme, 153, 177
- grafico cartesiano
 - del prodotto cartesiano, 162-163
 - di una funzione, 238
 - numerica, 237-238
 - di una relazione, 224, 249
 - riflessiva, 227
 - simmetrica, 228
- grafo di una relazione, **226**
 - antiriflessiva, 229
 - antisimmetrica, 229
 - riflessiva, 227
 - simmetrica, 228
 - transitiva, 228
- gruppi sanguigni, 151, 176
- H**

Hardy, Godfrey, 425

I

identità, **491-492**, 509

 - condizioni di esistenza di una, 492
 - dei polinomi, principio di, **309**
 - funzione, 236

- ideogrammi, **α9**
- idroelettrica, centrale, 223, 248
- immagine
 - in una funzione, 233
 - in una relazione, **224**, 249
- implicazione
 - doppia, **169**, 178
 - materiale, **168-169**, 178
 - deduzione e, 172
- impossibile
 - disequazione, **577**
 - equazione, **494**, **501**, 509, 510
- improprio-e
 - frazioni, 78, 101
 - sottoinsieme, 155, 177
- incertezza delle statistiche, **α18-α19**, **α22**
- inclusione stretta, **155**
- inclusivo, o, 158
- incognita
 - di un'equazione, 493
 - scelta dell', 505, 507
- indeterminata
 - disequazione (v. disequazione sempre verificata)
 - equazione, **494**, **501**, 509, 510
- indici
 - di posizione centrale, **α11-α15**, **α22**
 - di variabilità, **α15-α17**, **α22**
- indipendente, variabile, 237, 251
- indiretta, intervista, **α2**
- induttiva, statistica, **α2**
- inferenza statistica, **α2**
- infinito, insieme, 152, 156
- iniettiva, funzione, **234**, 250
- insieme-i, 151-164, **151-152**, 177
 - appartenenza a un, 152
 - chiuso rispetto a un'operazione, 2
 - complementare, **161**, 177
 - negazione e, **174**
 - con Wiris, 213
 - concetto matematico di, **151-152**, 177
 - connettivi logici e, 174
 - **D**, 152
 - dei numeri
 - interi **Z**, 20-21, 32, 152
 - naturali **N**, 1-2, 152
 - razionali **Q**, 82, 84, 101, 152
 - reali **R**, 152
 - delle parti, **163**, 177
 - delle soluzioni
 - di una disequazione, **573**, **574-575**, 588
 - di una equazione, **493**
 - denso nella retta, 84
 - di arrivo di una funzione, 233
 - di definizione di una funzione, 237
 - di partenza di una funzione, 233
 - di verità, 173, 179
 - differenza tra, **160**, 177
 - discreto, 2, 22
 - disgiunti, **158**, 177
 - elemento di un, 152
 - equipotenti, 156
 - finito, 152
 - gruppi sanguigni e, 176
 - infinito-i, 152, 156
 - funzioni biettive e, 156
 - intersezione di, **157-159**, 177
 - **N**, 1-2, 152
 - numerico-i, 152
 - ampliamento di un, 20-21
 - operazioni con gli, 157-163, 177
 - ordinato, 22
 - **P**, 152
 - partizione di un, **163-164**, 177, 230-231
 - prodotto cartesiano di, **161-163**, 177
 - **Q**, 82, 84, 101, 152
 - come ampliamento dell'insieme **Z**, 82
 - quoziante, **230-231**, 249
 - **R**, 152
 - rappresentazione-i di un, **153-154**, 177
 - grafica, 153, 177
 - mediante la proprietà caratteristica, 154, 177
 - per elencazione, 153, 177
 - tabulare, 153, 177
 - uguali, **154-155**, 177
 - unione di, **158-159**, 177
 - universo, 161, 173
 - vuoto, **152**, 177

3

Bergamini, Trifone, Barozzi **Algebra.blu con Statistica** © Zanichelli 2011 Volume 1

insieme-i (*continua*)

- \mathbb{Z} , 20-21, 152
 - come ampliamento dell'insieme \mathbb{N} , 20-21
- intensità, $\alpha_5\text{-}\alpha_6$
- intera-e-i
 - disequazioni, 575, 577-580
 - equazione-i, 494
 - letterali, 504, 510
 - numeriche, 499-501, 510
 - numeri, 20, 22-28, 32
- interna, operazione, 3, 23, 26, 30, 88
- interpretazione geometrica
 - del prodotto
 - della somma di due monomi per la loro differenza, 303
 - di due polinomi, 301
 - del quadrato di un binomio, 304
- intersezione tra insiemi, 157-158, 177
- congiunzione e, 174
- proprietà dell', 159
- intervallo, 574-575
 - aperto, 575
 - chiuso, 575
 - delle soluzioni di una disequazione, 574-575
 - di confidenza, α_{19} , α_{22}
- intervista
 - diretta, α_2
 - indiretta, α_2
- invariantiva, proprietà, 10-11, 25, 31, 79, 86, 101, 421
- inversa
 - funzione, 235, 236, 250
 - operazione, 2
 - proporzionalità, 240, 251
 - relazione, 225-226, 249
- invertire, proprietà dell', 92, 102
- iperbole egilatera, 240
- IRPEF, α_{12}
- irrazionali, numeri, 96-97
- irriducibile, polinomio, 413
- isola dei cavalieri e dei furfanti, 167
- Istituto nazionale di statistica (ISTAT), α_3
- istogramma, α_7 , α_{21}

K

Kronecker, Leopold, 156

L

- largo, ordine, 231, 250
- lato
 - origine di un angolo, 244
 - termine di un angolo, 244
- legge-i
 - di annullamento del prodotto, 4, 87
 - di cancellazione, 28
 - di monotonia, 27-28, 32, 86, 87
- letterale-i
 - calcolo, 414
 - disequazioni, 578, 582-583
 - equazioni, 494, 504-505, 510
 - problemi, 506
- lettere, espressioni e, 7
- linea di frazione, 77, 101

lineare-i

- disequazioni, 575, 577-578
- equazioni, 495, 591-592
- funzione, 241-242, 251
- Lo Shu*, 23
- logica, 164-175
 - equazioni e, 494
- logica-he-i
 - connettivi, 165-169, 178
 - deduzione, 171
 - espressioni, 165, 169-171, 178
 - ragionamenti, 171-172, 178
 - variabili, 164-165
- lunghezza di un segmento, 507

M

magica-o

- costante, 23
- quadrato, 23
- mai verificata, disequazione, 577
- massimo comune divisore (v. M.C.D.)

matriciale, implicazione, 168-169, 178

- maya, sistema di numerazione, 19
- M.C.D.
 - fra monomi, 296-297, 319
 - fra numeri naturali, 14-15, 31
 - fra polinomi, 418-419, 427
- m.c.m.
 - fra monomi, 297, 319
 - fra numeri naturali, 15, 31
 - fra polinomi, 418-419, 427
- media-e, $\alpha_{11}\text{-}\alpha_{12}$, α_{22}
 - aritmetica, $\alpha_{11}\text{-}\alpha_{12}$, α_{22}
 - campionaria, α_{18}
 - degli scarti, α_{17}
 - di una distribuzione gaussiana, α_{18}
 - ponderata, $\alpha_{12}\text{-}\alpha_{13}$, α_{22}
 - di calcolo, α_{11}
 - di posizione, α_{11}
 - scarso assoluto dalla, α_{16}
- mediana, α_{14} , α_{22}
- medio-i
 - di una proporzione, 91
 - proporzionale, 92
 - scarso quadratico, α_{17}
 - scarso semplice, $\alpha_{16}\text{-}\alpha_{17}$, α_{22}
 - valore, α_{11}
- membri
 - di un'equazione, 493
 - di un'identità, 491
 - di una diseguaglianza, 571
- messaggero, principe e, 500
- minimo-i
 - comune multiplo (v. m.c.m.)
 - termini, frazione ridotta ai, 79, 101
- misura
 - di un angolo, 243
 - di un segmento, 507
- moda, $\alpha_{14}\text{-}\alpha_{15}$, α_{22}
- modale, classe, α_{15}
- modalità, α_2 , α_{21}
 - qualitative, $\alpha_2\text{-}\alpha_3$, α_5 , α_{21}
 - quantitative, $\alpha_2\text{-}\alpha_3$, α_6 , α_{21}
- modelli matematici applicati all'economia, 584
- modus*
 - *ponens*, 171-172, 178
 - *tollens*, 172, 178

molecolare, proposizione (v. proposizione composta)

moltiplicazione

- di diseguaglianze dello stesso verso tra numeri positivi, proprietà della, 573
- di due polinomi, 301
- di frazioni algebriche, 422
- di monomi, 294-295
- di numeri
 - interi, 24-25
 - naturali, 2, 4
 - razionali, 86-87
- di un monomio per un polinomio, 300-301
- di una diseguaglianza
 - per un numero negativo, proprietà della, 572, 588
 - per un numero positivo, proprietà della, 572, 588
- proprietà della, 8, 9-10, 24-25, 30, 87
- mongolfiera*, 571, 587
- monomio-i, 291-297, 291-293, 319
 - divisione di un polinomio per un, 310
 - grado di un, 293, 319
 - M.C.D. fra, 296-297, 319
 - m.c.m. fra, 297, 319
 - nullo, 292
 - operazioni con i, 293-296
 - opposti, 294
 - prodotto di un polinomio per un, 301
 - ridotto a forma normale, 292-293, 319
 - simili, 294, 319
- monotonía
 - dell'addizione, proprietà di, 571, 588
 - leggi di, 27-28, 32, 86, 87
- motocicletta, 100
- multipli di un numero, 5, 30
- musica e numeri razionali, 91

N

\mathbb{N} , insieme, 1-2, 152

- naturale-i
 - dominio, 237, 251
 - numeri, 1-15, 1-2, 30
- negativo
 - angolo orientato, 244
 - esponente, potenze con, 89, 102
 - numero, 20
- negazione di una proposizione, 166, 178
- complementare di un insieme e, 174
- neutro, elemento, 3, 23, 25, 86, 87
- nodi di un grafo, 226
- non (v. negazione)
- normale
 - curva, α_{18}
 - forma, 292-293, 298, 494-495
- notazione
 - per indicare le funzioni, 233
 - scientifica, 94
- note musicali, 91
- notevoli, prodotti, 302-306, 320, 415, 426
- nullo

nullo

- monomio, 292
- polinomio, 298
- numerabile, potenza del, 156
- numeratore, 77, 101
- numerazione, sistemi di, 17-19, 32
- numerica-he-i
 - disequazione, 575, 577, 580-582
 - equazione, 494
 - funzioni, 237-242, 251
 - insiemi, 152
 - problemi, 505
 - variabile, 4
- numero-i
 - approssimati, operazioni fra, 99
 - decimali
 - finiti, 94, 102
 - periodici, frazioni e, 95-96, 102
 - forma polinomiale di un, 17, 32
 - interi, 20, 22-28, 32
 - operazioni nell'insieme dei, 22-26, 24-28, 32
 - irrazionali, 96-97
 - naturali, 1-15, 2, 30
 - con Derive, 70
 - espressioni con i, 6-7, 30
 - operazioni nell'insieme dei, 2-4, 30
 - negativo, 20
 - pari, 5
 - positivo, 20
 - primi, 1, 14, 16, 31
 - cicale e, 29
 - tra loro, 15
 - razionali, 80-88, 81-82, 101
 - assoluti, 80-81
 - con Excel, 143
 - confronto tra, 83, 101
 - frazioni e, 80-82, 101
 - operazioni nell'insieme dei, 85-88, 102
 - reali, 97

O

o (v. anche disgiunzione di due proposizioni), 158

- omogeneo, polinomio, 299, 320
- operando, 2
- operatore, 2
- operazione-i
 - approssimazioni nelle, 99
 - con gli insiemi, 157-163, 177
 - con i monomi, 293-296
 - con i polinomi, 300-301
 - con le frazioni algebriche, 421-422, 424, 427
 - interna, 2, 23, 26, 88
 - inversa, 2
 - nell'insieme dei numeri
 - interi, 22-26, 24-28, 32
 - naturali, 2-4, 30
 - razionali, 85-88, 102
 - proprietà delle, 8-11, 22-23, 30-31
- opposto-i
 - di un numero
 - intero, 23
 - razionale, 86
 - monomi, 294
 - numeri interi, 20, 32
 - polinomi, 300

OR (v. disgiunzione inclusiva di due proposizioni)
 ordinata-e
 - all'origine, 241
 - asse delle, 237
 - di un punto, 238
 ordinato
 - insieme, 22
 - rispetto a una lettera, polinomio, 299
 ordine
 - di grandezza di un numero, 94
 - in una coppia, 162
 - largo, relazioni di, 231, 250
 - nell'insieme dei numeri
 - interi, 22, 32
 - naturali, 1-2, 30
 - relazioni di, 231-232
 - parziale, 232, 250
 - stretto, 231, 250
 - totale, 232, 250
 orientata-i
 - angoli, 243-244
 - retta, 21, 32, 84
 - semiretta, 1-2, 30
 origine
 - degli archi, 244
 - lato, 244
 - ordinata all', 241
 ortogramma, α 7, α 21

P

\mathbb{P} , insieme, 152
 Pacioli, Luca, 423
 papiro di Ahmes, 502
 parabola, 242
 parentesi, espressioni e, 7
 pari, numeri, 5
 parte-i
 - insieme delle, 163, 177
 - letterale di un monomio ridotto a forma normale, 292, 319
 - problema delle, 93
 partenza, insieme di, 233
 partizione di un insieme, 163-164, 177
 - in classi di equivalenza, 230-231, 249
 parziale
 - ordine, 232, 250
 - raccoglimento, 415, 426
 percentuale, frequenza relativa, α 4, α 21
 percentuali, 90-91, 102
 periodici, numeri decimali, 95-96, 102
 periodo, 95
 permutare, proprietà del, 92, 102
 pesi, α 12
 piano cartesiano, 238
 piantagione di alberi, 238
 poligono delle frequenze, α 7
 polinomiale-i
 - forma, numero scritto in, 17
 - funzioni, 308-309, 321
 polinomio-i, 297-317, 297-299, 319-321
 - completo, 299, 320
 - divisibile per un monomio, 310, 321
 - divisibilità fra, 311

polinomio-i (*continua*)
 - divisione per un monomio di un, 310, 321
 - divisione tra, 310-312, 314, 321
 - irriducibile, 413
 - M.C.D. fra, 418-419, 427
 - m.c.m. fra, 418-419, 427
 - nullo, 298
 - omogeneo, 299, 320
 - operazioni con i, 300-301, 310-312
 - opposti, 300
 - ordinato rispetto a una lettera, 299, 320
 - principio di identità dei, 309
 - ridotto
 - a forma normale, 298, 319
 - grado di un, 299, 320
 - riducibile, 413
 - scomposizione in fattori di un, 413-418, 426
 - uguali, 298
 - zeri di un, 308, 321, 417-418
 ponderata, media aritmetica, α 12- α 13, α 22
 popolazione, α 2, α 21
 - mondiale, crescita della, 247
 positivo
 - angolo orientato, 244
 - numero, 20
 posizionale
 - scrittura, 94, 102
 - sistema di numerazione, 17
 posizione, medie di, α 11
 potenza-e
 - con base ed esponente naturale, 6, 31
 - con base intera ed esponente naturale, 26, 32
 - con esponente
 - intero negativo, 89, 102
 - uno, 6, 26
 - zero, 6, 26
 - del continuo, 156
 - del numerabile, 156
 - di uguale base, 11-12
 - di uguale esponente, 13
 - di un binomio, 306
 - di un monomio, 295, 319
 - di una frazione
 - algebrica, 424
 - con esponente naturale, 88, 102
 - di una potenza, 12, 31
 - proprietà delle, 11-14, 26, 31
 precedente di un numero
 - intero, 22
 - naturale, 1
 predicato, 165
 premessa di un ragionamento, 171
 primo-i
 - fattori, 14-15, 31
 - grado
 - disequazioni di, 575, 577-578
 - equazioni di, 495, 499-501, 510
 - numeri, 1, 14, 16, 31
 - tra loro, 15
 - principio di equivalenza delle equazioni, 496-497, 509
 principe e messaggero, 500
 principio-i
 - di Archimede, 587

principio-i (*continua*)
 - di equivalenza
 - delle disequazioni, 576, 588
 - delle equazioni, 496-499, 509-510
 - di identità dei polinomi, 309
 priorità dei connettivi logici nelle espressioni logiche, 169-170
 probabilità, α 3
 problema-i
 - delle parti, 93
 - disequazioni e, 584, 589
 - equazioni e, 505-507, 511
 procedimento di astrazione, 231
 prodotto-i
 - cartesiano, 161-163, 177
 - di un insieme per se stesso, 163
 - e commutatività, 163
 - costante, 240
 - della somma di due monomi per la loro differenza, 302-303, 320, 415, 426
 - di due frazioni algebriche, 422
 - di due monomi, 295, 319
 - di due numeri
 - interi, 24-25, 32
 - naturali, 2, 30
 - razionali, 86, 99, 102
 - di due polinomi, 301, 320
 - di potenze
 - di uguale base, 11, 31
 - di uguale esponente, 13, 31
 - di un monomio per un polinomio, 301
 - in croce, 83
 - legge di annullamento del, 4
 - notevoli, 302-306, 320
 - scomposizione riconducibile a, 415, 426
 - studio del segno di un, 579-580
 propagazione degli errori, 99, 102
 proporzionale, medio, 92
 proporzionalità
 - diretta, 239-240, 251
 - inversa, 240, 251
 - quadratica, 242, 251
 proporzioni, 91-93, 102
 proposizione-i
 - antecedente, 168
 - atomica (v. proposizione logica semplice)
 - composta, 165-166, 169-171, 178
 - congiunzione di due, 166-167, 178
 - conseguente, 168
 - disgiunzione di due
 - esclusiva, 168, 178
 - inclusiva, 167-168, 178
 - elementare, 165
 - equivalenti, 171, 178
 - logica-he, 164-165, 178
 - molecolare, 165
 - negazione di una, 166, 178
 - semplice, 165
 proprie, frazioni, 78, 101
 proprietà
 - antiriflessiva, 229
 - antisimmetrica, 229
 - associativa, 8-9, 30
 - caratteristica, rappresentazione di un insieme mediante la, 154
 - commutativa, 8, 30
 - dell'intersezione fra insiemi, 159

proprietà (*continua*)
 - dell'unione di insiemi, 159
 - delle diseguaglianze numeriche, 571-573, 588
 - delle operazioni, 8-11, 22-23, 30-31
 - delle potenze, 11-14, 26, 31
 - delle proporzioni, 92, 102
 - delle relazioni definite in un insieme, 227-229
 - invariantiva delle frazioni, 79, 101
 - algebriche, 421
 - riflessiva, 227
 - simmetrica, 227-228
 - transitiva, 228-229
 proprio, sottoinsieme, 155, 177
 punto-i del piano
 - ascissa di un, 238
 - coppie di numeri reali e, 238
 - ordinata di un, 238

Q

\mathbb{Q} , insieme, 82, 84, 101, 152
 quadratico-i
 - proporzionalità, 242, 251
 - scarto-i, α 17
 - medio, α 17
 quadrato-i
 - di un binomio, 304, 320, 415, 426
 - di un trinomio, 305, 320, 415, 426
 - differenza di due, 302-303, 320, 415, 426
 - falso, 317
 - magico, 23
 qualitative-i
 - caratteri, α 2- α 3, α 21
 - modalità, α 2- α 3, α 5, α 21
 quantificatore-i, 175, 179
 - esistenziale, 175, 179
 - universale, 175, 179
 quantitative-i
 - caratteri, α 2- α 3, α 21
 - modalità, α 2- α 3, α 6, α 21
 questionario, α 2
 quoziente
 - di due frazioni algebriche, 424
 - di due monomi, 296, 319
 - di due numeri
 - interi, 25-26, 32
 - naturali, 2, 3, 30, 78
 - razionali, 87, 99, 102
 - di due polinomi, 311
 - di due potenze
 - di uguale base, 12, 31
 - di uguale esponente, 13, 31
 - insieme, 230-231, 249
 - polinomio, 311

R

\mathbb{R} , insieme, 152
 raccoglimento
 - a fattore comune, 10
 - scomposizione mediante, 414, 426
 - parziale, scomposizione mediante, 415, 426
 radiante, 243

radice (*v. soluzioni*)
 ragionamento logico, 171-172, 178
 - valido (*v. anche deduzione*), 171-172
 Ramanujan, Srinivasa, 413, 425
 rapporto-i, 77, 100
 - costante, 239
 rappresentazione
 - decimali, 93-96, 102
 - dei numeri
 - interi, 21, 32
 - naturali, 1-2, 30
 - razionali, 84
 - del prodotto cartesiano, 162-163
 - della relazione inversa, 226
 - delle soluzioni di una disequazione, 574-575
 - di un insieme, 153-154, 177
 - grafica, 153, 177
 - mediante la proprietà caratteristica, 154, 177
 - per elencazione, 153, 177
 - tabulare, 153, 177
 - di una classe dell'insieme quoziente, 230
 - di una relazione, 224, 249
 - cartesiana, 224, 249
 - sagittale (*v. anche grafo di una relazione*), 224, 249
 - grafica dei dati, $\alpha 7-\alpha 10$, $\alpha 21$
 razionali, numeri, 80-88, **81-82**, 101
 reali, numeri, **97**
 reciproco-i
 - di numeri concordi, proprietà dei, **572**, 588
 - di un numero razionale, **87**, 102
 regola
 - del cambiamento di segno, **499**, 510
 - per le disequazioni, 576
 - per le equazioni, **499**, 510
 - del trasporto
 - per le equazioni, **497**, 509
 - per le disequazioni, 576
 - della divisione per un fattore comune diverso da 0, **498**, 510
 - di cancellazione, **497**, 509
 - di Ruffini, **313-314**, 321, 416-418, 426
 - divisione tra polinomi e, 314
 - scomposizione mediante la, 416-418, 426
 relativa-o
 - errore, **98**, 102
 - frequenza, **44**, $\alpha 5$, $\alpha 21$
 relazione-i, 223-232
 - antiriflessiva, **229**, 249
 - antisimmetrica, **229**, 249
 - binarie, **223-226**, 249
 - rappresentazione delle, 224, 249
 - definite in un insieme, 226-232
 - di equivalenza, **230-231**, 249
 - di ordine, 231-232
 - largo, 231, 250
 - parziale, 232, 250
 - stretto, 231, 250
 - totale, 232, 250
 - fondamentali trigonometriche, **245**, 251
 - grafo di una, **226**
 - inversa, **225-226**, 249
 - rappresentazione sagittale della, 226

relazione-i (*continua*)
 - riflessiva, 227, 249
 - simmetrica, **227-228**, 249
 - transitiva, **228-229**, 249
 resto
 - divisione con, 3
 - polinomio, **311**
 - teorema del, **315**, 321
 retta
 - equazione di una, 241
 - orientata, 21, 32, 84
 rettangoli, triangoli, 246, 251
 riceventi universali, 151, 176
 riducibile, polinomio, **413**
 riduzione
 - a forma normale
 - di un monomio, 292-293
 - di un polinomio, 298, 319
 - di frazioni a denominatore comune, **80**
 - di una frazione ai minimi termini, **79**
 riflessiva
 - proprietà, 227
 - relazione, **227**, 249
 rilevamento dei dati, $\alpha 1-\alpha 2$
 risoluzione
 - di disequazioni
 - con i valori assoluti, 588, 589
 - letterali fratte, 582-583, 588-589
 - letterali intere, 578
 - numeriche fratte, 581-582, 588-589
 - numeriche intere, 577, 588
 - di equazioni
 - con i valori assoluti, 585-586, 589
 - letterali fratte, 504-505, 510
 - letterali intere, 504, 510
 - numeriche fratte, 503, 510
 - numeriche intere, 499-501, 510
 risolvente, equazione, 507
 Ruffini, Paolo, 313
 - regola di, **313-314**, 321, 416-418, 426
 - teorema di, **316**, 321, 416-418, 426

S

sagittale, rappresentazione (*v. anche grafo*), 224, 249
 sanguigni, gruppi, 176
 scala musicale, 91
 scarto-i
 - assoluto dalla media, $\alpha 16$
 - media aritmetica degli, $\alpha 17$
 - quadratico, $\alpha 17$
 - medio, $\alpha 17$
 - semplice medio, **16-17**, $\alpha 22$
 scelta dell'incognita in un problema, 506, 507
 scientifica, notazione, **94**
 scomporre, proprietà dello, **92**, 102
 scomposizione in fattori
 - di un polinomio, **413-418**, 426
 - primi di un numero naturale, 14, 31
 scrittura posizionale, 94, 102

secondo
 - grado, scomposizione di trinomi di, 426, **496-497**
 - principio di equivalenza delle equazioni, **497-499**, 510
 segmento, 507
 segno
 - del prodotto di numeri interi, 25
 - regola del cambiamento di, **499**, 510
 - nelle disequazioni, **499**, 510
 - nelle equazioni, 576
 studio del
 - di un prodotto, 579-580
 - di una frazione, 581
 semiretta orientata, 1-2
 semplice
 - medio, scarso, **16-17**, $\alpha 22$
 - proposizione, 165
 semplificazione
 - di frazioni, **79**
 - algebriche, **421**
 - di un'espressione, 7
 sempre verificata, disequazione, **577**
 seno, funzione, **245-246**, 251
 senso di una disegualianza, 571
 sequenza, valore centrale di una, $\alpha 14$
 seriazioni statistiche, $\alpha 6$
 serie
 - statistiche, **55-56**
 - storica, **6**
 sessagesimale, grado, **243**
 simboli usati nelle disequazioni, 574
 simili, monomi, **294**, 319
 simmetrica
 - distribuzione, 29
 - proprietà, **227-228**
 - relazione, **227-228**, 249
 sincopata, algebra, 423
 sintesi, valore di, $\alpha 12$
 sinusoidi, 246
 sistema
 - di disequazioni, **583-584**, 589
 - lineari, 583-584
 - di numerazione, 17-19, 32
 - in base dieci (o decimale), 17, 32
 - in base diversa da dieci (polinomiale), 17, 32
 - maya, 19
 soggetto, 165
 soluzioni
 - controllo delle, 505, 507
 - di un sistema di disequazioni, 583-584
 - di una disequazione
 - insieme delle, **573**, 574-575, 588
 - intervallo delle, 574-575
 - rappresentazione delle, 574-575
 - di una equazione, **493**, 509
 somma
 - algebrica
 - di frazioni algebriche, **421**
 - di monomi simili, **294**, 319
 - di polinomi, **300**, 320
 - di due cubi, 317, 415, 426
 - di due monomi, **294**, 319
 - prodotto per la loro differenza della, **302-303**, 320, 415, 426

T

tabagismo, $\alpha 10$
 tabella-e
 - a doppia entrata, 163, $\alpha 6-\alpha 7$
 - per una relazione, 224, 249
 - per una relazione riflessiva, 227
 - per una relazione simmetrica, 228
 - di contingenza, $\alpha 7$
 - di correlazione, $\alpha 7$
 - di frequenza, $\alpha 3-\alpha 4$
 tangente, funzione, **245-246**, 251
 tangentode, 246
 Tartaglia, triangolo di, 306
 tasse, aliquote e, $\alpha 12$
 tautologia, **170**, 178
 tavole di verità, 166, 178
 - dell'implicazione materiale, 168, 178
 - della congiunzione, 167, 178
 - della disgiunzione
 - esclusiva, 168, 178
 - inclusiva, 168, 178

- tavole di verità (*continua*)
 - della doppia implicazione, 169, 178
 - della negazione, 166, 178
 temperata, scala, 91
 teorema, 16
 - del resto, 315, 321
 - della propagazione degli errori, 99, 102
 - di Ruffini, 316, 321, 416-418, 426
 - scomposizione mediante il, 416-418, 426
 termine-i
 - di un polinomio, 298
 - lato, 244
 - noto
 - di un polinomio, 299, 320
 - di un'equazione, 495
 testa o croce, 93
tétrakys, 91
 torta, diagramma a, 90, **α8**
 totale, ordine, 232, 250
 transitiva
 - proprietà, 228-229
 - relazione, 228-229
 trasferta, vittorie in, $\alpha 1$, $\alpha 20$
 trasporto, regola del, 497, 509, 576
 triangolo-i
 - di Tartaglia, 306
 - rettangoli e funzioni goniometriche, 246, 251

- trigonometriche, relazioni fondamentali, 245, 251
 trinomio-i
 - di secondo grado, scomposizione di particolari, 416, 426
 - quadrato di un, 305, 320, 415, 426
- U**
- uguaglianza-e
 - di insiemi, 154-155
 - leggi di cancellazione per le, 28
 - leggi di monotonia per le, 27, 86, 87
 uguali
 - insiemi, 154-155, 177
 - polinomi, 298
 unione tra insiemi, 158, 177
 - disgiunzione e, 174
 - proprietà dell', 159
 unità statistiche, **α2**, **α21**
 universale, quantificatore, 175, 179
 universo
 - insieme, 161, 173
 - statistico, **α2**
 univoca, corrispondenza (*v. funzione*)
 uno, 4

- V**
- valore-i
 - assoluto-i
 - di un numero, 20, 32
 - di una variabile, 585, 589
 - disequazioni con i, 586, 589
 - equazioni con i, 585-586, 589
 - funzione, 242
 - centrale
 - di una classe, $\alpha 5$
 - di una sequenza, $\alpha 14$
 - di sintesi, $\alpha 12$
 - di verità, 164-165, 178
 - medio, $\alpha 11$
 variabile-i, 173
 - dipendente, 237, 251
 - direttamente proporzionali, 249
 - indipendente, 237, 251
 - inversamente proporzionali, 240
 - logiche, 164-165
 - numerica, 3
 variabilità, $\alpha 15$
 - indici di, $\alpha 15$ - $\alpha 17$, $\alpha 22$
 varianza, $\alpha 17$
 variazione, campo di, **α15**, **α22**
 vel (*v. disgiunzione inclusiva di due proposizioni*)
 Venn, John, 153
 - diagrammi di, 153

- verità
 - insiemi di, 173, 179
 - tavole di, 166, 167, 168, 169, 170, 178
 - valore di, 164-165, 178
 vuoto, insieme, 152, 177
- W**
- Wiris, 213
 - disequazioni di primo grado con, 625
 - insiemi con, 213
- X**
- XOR (*v. disgiunzione esclusiva di due proposizioni*)
- Z**
- \mathbb{Z} , insieme, 20-21, 32, 152
 zero-i, 3-4
 - di un polinomio a coefficienti interi, 418
 - di una funzione polinomiale, 308, 321
 - interi di un polinomio a coefficienti interi, 417

FONTI DELLE ILLUSTRAZIONI

- II, 1, 29 (a): Dave Allen Photography/Shutterstock;
III (a), 77, 100 (a): *L'uomo a due ruote. Avventura, storia e passione*, Electa, Milano, 1987;
III (b), 151, 177: NCI/Photo Researchers, Inc.;
IV (a), 225, 248 (a): Alexandru Chiriac/Shutterstock;
IV (b), 291, 318 (a): Robert Doisneau, 1956;
V (a), 413, 425 (a): Topical Press;
VI (a), 491, 508 (a): Steve Burger/iStockphoto;
VI (b), 571, 587 (a): R. Gino Santa Maria/Shutterstock;
VII (a), α1, α20: Comstock, Sports in motion, New York, 2001;
VII (b): Yuri Arcurs/Shutterstock;
VII (c): David Meharey/iStockphoto;
IX (a), IX (b): Andresr/Shutterstock;
X: Serp/Shutterstock;
XI (b): Jocicalek/Shutterstock;
XI (c): Willem Dijkstra/Shutterstock;
XII: Rui Vale de Sousa/Shutterstock;
XIII: M. E. Mulder/Shutterstock;
XIV: Roland Rehak/Shutterstock;
XVI (a): Yuri Arcurs/Shutterstock;
XVI (b): Sascha Burkard/Shutterstock;
XVI (c): Steve Byland/Shutterstock;
19 (a): E. Porter, 1979;
19 (b): Colin Monteath, 1996;
19 (c): G. Bearzi, 1991;
28 (a), 28 (c), 28 (d): Giuseppe Ferrari, 2006;
28 (b): Michael Whitehouse;
29 (c): Brand X Pictures, Complete Produce Library 1, Bruke/Triolo Productions, Culver City, CA, 2001;
29 (d): Zaichenko Olga/Shutterstock;
29 (e): Photodisc, Objects of Nature n. 38, Seattle, WA 1998;
100 (b): Photodisc, Sporting Goods OS 25, Seattle, WA 1997;
100 (c): Shimano;
100 (d): www.powercrossracing.com;
144 (a): Brand X Pictures, Complete Produce Library 2, Bruke/Triolo Productions, Culver City, CA, 2001;
144 (b): *Microonde. Manuale pratico*, Giunti Demetra, Firenze, 2006;
216: Photodisc, Supporting Cast: Teens n.39, Seattle, WA 1998;
245: Xiao Li/Shutterstock;
248 (b): Pichugin Dmitry/Shutterstock;
281 (a): *Henry VIII*, Hans Holbein the Younger;
281 (b): *Elizabeth I*, Armada Portrait;
307: *TDC 686*, Dicembre 1994, Centre National de Documentation Pédagogique, Paris;
318 (b): M. Bertinetti, 1982;
404 (a): Nick Wood, 2003;
404 (b): Giuseppe Ferrari, 2006;
484: Don Bayley/iStockphoto;
502 (a): Bridgeman/Alinari, Firenze;
502 (b): Marjorie Caygill, *The British Museum A-Z-Companion*, London, British Museum Press, 1999;
508 (b): Lourdes Place;
562: PhotoDisc Volumes 8, Backgrounds and Objects;
587 (b): www.city-data.com;
626: Barbara Zonzin, 2005;
α10: World Health Organization;
α36: Diabolik Swiss, A. e L. Giussani. *Disegni di F. Bozzoli e E. Facciolo*, 2006.

Massimo Bergamini Anna Trifone Graziella Barozzi

1

Algebra.blu con Statistica

Un libro di matematica a colori, che illustra con fotografie il legame tra matematica e realtà, e mette in evidenza a colpo d'occhio ciò che è importante imparare.



Nel libro

- **Esercizi** suddivisi in due livelli di difficoltà.
- **Esercizi per il potenziamento** (*Mettiti alla prova*) ed **esercizi in inglese** (*Test your skills*) che, insieme agli esercizi di recupero, consentono di sperimentare una didattica su misura.
- **Aperture di capitolo** con domande su **matematica e realtà** (per esempio, come funziona il cambio della bicicletta, come fa una mongolfiera a volare) e risposte alla fine della teoria.
- Rubrica **Matematica per il cittadino**, con problemi simili a quelli delle prove internazionali PISA (*Programme for International Student Assessment*) che valutano le competenze matematiche degli studenti di 15 anni.
- Schede di **Esplorazione** su matematica e storia, musica, arte, medicina, con esercizi di comunicazione e ricerca su Internet.
- **Problemi, ragionamenti, deduzioni**: problemi insoliti, enigmi e sfide intellettuali per imparare a ragionare.