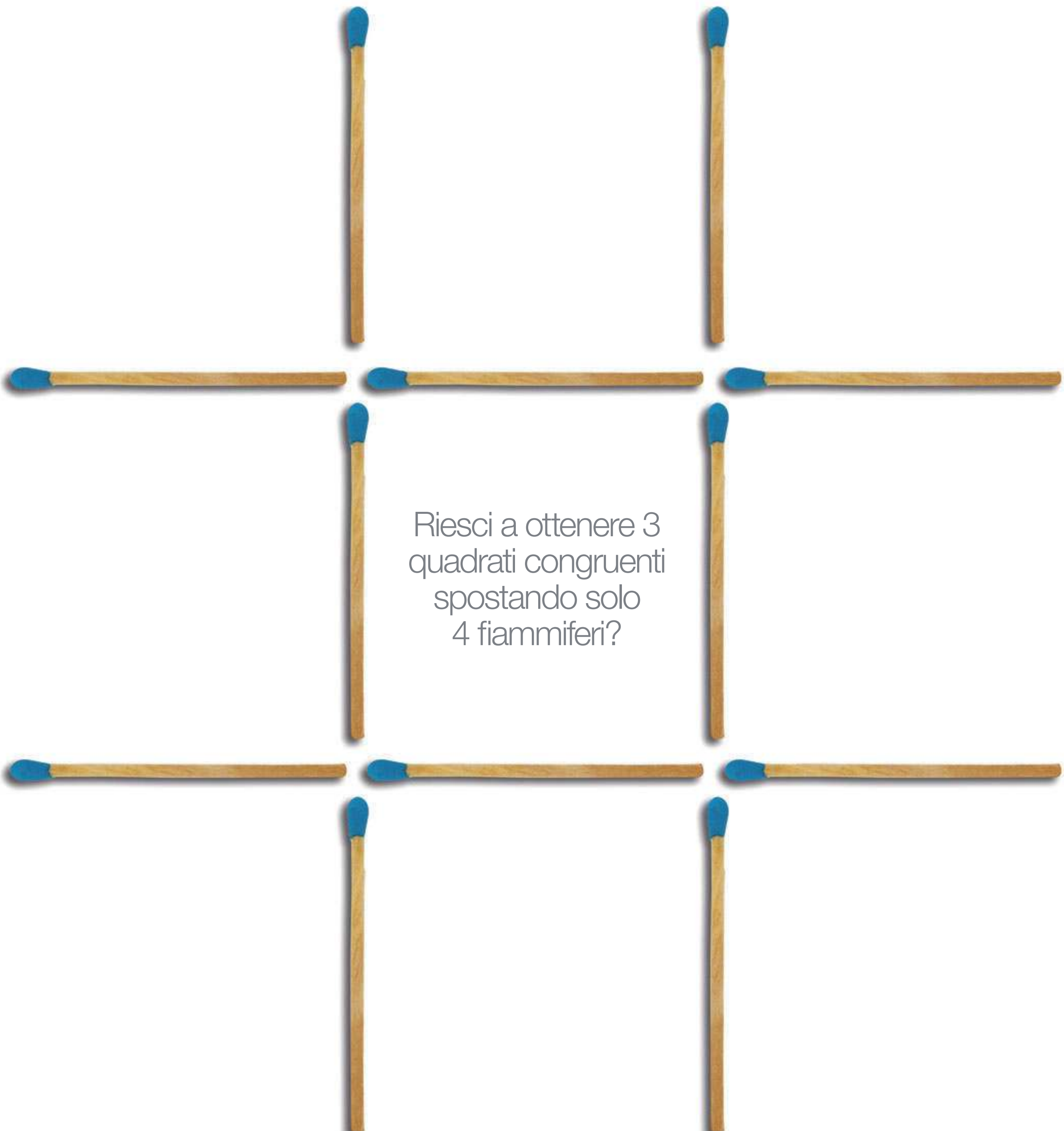
Massimo Bergamini
Anna Trifone   Graziella Barozzi

3

Matematica.blu 2.0



ZANICHELLI

Formule di algebra

Valore assoluto (modulo)

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Proprietà delle potenze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$ $\quad (a \neq 0)$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\quad (b \neq 0)$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad (a \neq 0)$

Proprietà dei logaritmi

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ $\quad (b > 0, c > 0)$

$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ $\quad (b > 0, c > 0)$

$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$ $\quad (b > 0)$

Prodotti notevoli

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Scomposizione in fattori

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

Radicali

$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$

$\sqrt[m]{a:b} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}$ $\quad (b \neq 0)$ $\quad \begin{cases} \text{se } m \text{ pari,} \\ a, b \geq 0 \end{cases}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ $\quad (a \geq 0)$

$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ $\quad (a > 0)$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{se } n \text{ dispari} \\ |a| & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Equazioni

Secondo grado

$ax^2 + bx + c = 0$

se $a \neq 0$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Biquadratica

$ax^4 + bx^2 + c = 0$,

$x^2 = z \to az^2 + bz + c = 0$

Equazioni e disequazioni con il valore assoluto

$$|A(x)| = a \begin{cases} \nexists \text{ soluzione} & \text{se } a < 0 \\ A(x) = \pm a & \text{se } a \geq 0 \end{cases}$$

$$|A(x)| < k \begin{cases} \nexists \text{ soluzione} & \text{se } k < 0 \\ -k < A(x) < k & \text{se } k \geq 0 \end{cases}$$

$$|A(x)| > k \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & \text{se } k < 0 \\ A(x) < -k \vee A(x) > k & \text{se } k \geq 0 \end{cases}$$

Equazioni e disequazioni irrazionali

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \begin{cases} A(x) = [B(x)]^n & \text{se } n \text{ dispari} \\ \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \begin{cases} A(x) < [B(x)]^n & \text{se } n \text{ dispari} \\ \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^n \end{cases} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x) \begin{cases} A(x) > [B(x)]^n & \text{se } n \text{ dispari} \\ \begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^n \end{cases} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

Disequazioni esponenziali e logaritmiche

$$a^x > a^y \begin{cases} x > y & \text{se } a > 1 \\ x < y & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\log_a x > \log_a y \begin{cases} x > y & \text{se } a > 1 \\ x < y & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Alfabeto greco

alfa	α	ni,nu	ν
beta	β	xi	ξ
gamma	γ	òmicron	o
delta	δ	pi	π
èpsilon	ε	ro	ρ
zeta	ζ	sigma	σ, ς
eta	η	tau	τ
teta	θ, ϑ	ipsilon	υ
iota	ι	fi	φ
cappa	κ	chi	χ
lambda	λ	psi	ψ
mi, mu	μ	omèga	ω

Massimo Bergamini
Anna Trifone Graziella Barozzi

Matematica.blu 2.0

3

con Maths in English

Realizzazione editoriale:
– Coordinamento redazionale: Marinella Lombardi
– Redazione: Valentina Franceschi, Isabella Malacari, Elena Meucci
– Collaborazione redazionale: Massimo Armenzoni, Parma
– Segreteria di redazione: Deborah Lorenzini
– Progetto grafico: Byblos, Faenza
– Progetto grafico delle pagine IX-XVI: Roberto Marchetti
– Composizione e impaginazione: Litoincisa, Bologna
– Ricerca iconografica e realizzazione delle aperture di capitolo, di *Realtà e modelli* e di *Maths in English*: Byblos, Faenza
– Disegni: Graffito, Cusano Milanino
– Correzione di bozze: T2, Bologna

Contributi:
– Stesura delle aperture: Andrea Betti (*Il segmento parabolico*), Daniela Cipolloni (*Made in…*), Daniele Gouthier (*La rete di Sant'Antonio*, *I tronchi degli alberi*, *Lo spazio di frenata*, *L'ellisse del giardiniere*, *Le torri di raffreddamento*, *Rotolare per misurare*), Stefania Varano (*I chicchi e la scacchiera*)
– Stesura delle schede di *Esplorazione*: Daniela Cipolloni (*Le fibre ottiche*), Daniele Gouthier (*Noleggiare film*, *I robot cartesiani*, *Eratostene e il meridiano terrestre*, *L'ellisse in architettura)*, Chiara Manzini (*Astri, seni, coseni, tangenti*), Elisa Menozzi (*Proietti, satelliti e comete*, *L'inafferrabile pi greco*, *Da quantità silvestri a numeri immaginari*), Ilaria Pellati (*La crittografia*, *Le coniche di Apollonio*)
– Stesura dei testi: Andrea Betti (*Le sezioni coniche: il punto di vista sintetico*)
– Stesura dei testi e degli esercizi del *Laboratorio di matematica*: Antonio Rotteglia
– Stesura e revisione degli esercizi in lingua inglese: Andrea Betti
– Revisioni dei testi e degli esercizi: Chiara Ballarotti, Luca Malagoli, Elisa Menozzi, Monica Prandini
– Rilettura dei testi: Marco Giusiano, Emilia Liviotti, Luca Malagoli, Francesca Anna Riccio
– Risoluzione degli esercizi: Silvano Baggio, Francesco Benvenuti, Davide Bergamini, Angela Capucci, Elisa Capucci, Lisa Cecconi, Elisa Garagnani, Daniela Giorgi, Erika Giorgi, Cristina Imperato, Francesca Incensi, Chiara Lugli, Francesca Lugli, Elisa Menozzi, Monica Prandini, Francesca Anna Riccio, Elisa Targa, Ambra Tinti
– Stesura degli esercizi: Graziella Barozzi, Anna Maria Bartolucci, Davide Bergamini, Cristina Bignardi, Francesco Biondi, Lisa Cecconi, Chiara Cinti, Paolo Maurizio Dieghi, Daniela Favaretto, Rita Fortuzzi, Ilaria Fragni, Lorenzo Ghezzi, Chiara Lucchi, Mario Luciani, Chiara Lugli, Francesca Lugli, Armando Magnavacca, Elisa Menozzi, Luisa Morini, Monica Prandini, Tiziana Raparelli, Laura Recine, Daniele Ritelli, Antonio Rotteglia, Giuseppe Sturiale, Renata Tolino, Maria Angela Vitali, Alessandro Zagnoli, Alessandro Zago, Lorenzo Zordan
– Stesura dei problemi di *Realtà e modelli*: Daniela Boni, Maria Falivene, Nadia Moretti
– Revisione di *Maths in English* e stesura di *Maths Talk*: Anna Baccaglini-Frank
– Revisione didattica del testo (*Diary revision*): Eleonora Basile, Maria Alberta Bulgaro, Laura Caliccia, Anna Maria Logoteta, Alvisia Marcantonio, Lucia Nasoni, Mariapia Riva

L'intera opera è frutto del lavoro comune di Massimo Bergamini e Anna Trifone. Hanno collaborato alla realizzazione di questo volume Davide Bergamini, Enrico Bergamini e Lisa Cecconi.

Copertina:
– Progetto grafico: Miguel Sal & C., Bologna
– Realizzazione: Roberto Marchetti
– Immagine di copertina: Artwork Miguel Sal & C., Bologna

Prima edizione: febbraio 2012

L'impegno a mantenere invariato il contenuto di questo volume per un quinquennio (art. 5 legge n. 169/2008) è comunicato nel catalogo Zanichelli, disponibile anche online sul sito www.zanichelli.it, ai sensi del DM 41 dell'8 aprile 2009, All. 1/B.

File per diversamente abili
L'editore mette a disposizione degli studenti non vedenti, ipovedenti, disabili motori o con disturbi specifici di apprendimento i file pdf in cui sono memorizzate le pagine di questo libro. Il formato del file permette l'ingrandimento dei caratteri del testo e la lettura mediante software screen reader.
Le informazioni su come ottenere i file sono sul sito www.zanichelli.it/diversamenteabili

Suggerimenti e segnalazione degli errori
Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi. L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli. Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro scrivere al seguente indirizzo:

lineauno@zanichelli.it

Le correzioni di eventuali errori presenti nel testo sono pubblicate nel sito www.zanichelli.it/aggiornamenti

Zanichelli editore S.p.A. opera con sistema qualità certificato CertiCarGraf n. 477 secondo la norma UNI EN ISO 9001:2008

Massimo Bergamini
Anna Trifone Graziella Barozzi

Matematica.blu 2.0

3

con Maths in English

ZANICHELLI

SOMMARIO

CAPITOLO 1
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

Quando è più conveniente importare un bene dall'estero anziché produrlo?

▶ **La risposta a pag. 25**

CAPITOLO 2
LE FUNZIONI

Perché il re di Persia fece mozzare la testa all'inventore del gioco degli scacchi?

▶ **La risposta a pag. 105**

Con la geometria analitica puoi comprendere il funzionamento della TAC?

▶ La risposta a pag. 184

Come si può conoscere il diametro di un grosso tronco con molta precisione?

▶ La risposta a pag. 258

In quanto spazio si ferma un'automobile in corsa?

▶ La risposta a pag. 329

Come può fare un giardiniere per creare un'aiuola a forma di ellisse?

▶ La risposta a pag. 401

Perché le torri di raffreddamento hanno forma iperbolica?

▶ La risposta a pag. 454

Com'è possibile ottenere parabole, ellissi e iperboli proiettando un fascio di luce su una sfera?

▶ La risposta a pag. 513

CAPITOLO 6
L'ELLISSE

CAPITOLO 7
L'IPERBOLE

CAPITOLO 8
LE CONICHE

Perché le catene di Sant'Antonio non funzionano?

▶ La risposta a pag. 576

CAPITOLO 9

ESPONENZIALI E LOGARITMI

Quanto sono attendibili i risultati dei sondaggi?

▶ La risposta a pag. β45

CAPITOLO β1

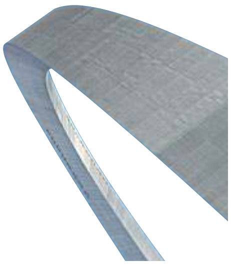
LA STATISTICA

…com'è possibile cercare eventuali correlazioni tra un fattore di rischio e una malattia?

▶ La risposta a pag. β103

CAPITOLO β2

L'INTERPOLAZIONE, LA REGRESSIONE LA CORRELAZIONE



Quale porzione della superficie del quadrato rosso è occupata dal segmento parabolico del Gateway Arch di St. Louis, Missouri?

▶ La risposta a pag. C7

CAPITOLO C1
COLLEGAMENTI

MATHS IN ENGLISH

FONTI DELLE ILLUSTRAZIONI

IX: Picsfive/Shutterstock;
XII: Bianka Hagge/Shutterstock;
XIV: pcandweb.myblog.it;
XV (a): Frans Hals, Cartesio. ca. 1649-1700. Parigi, Musée du Louvre;
XV (b): mathdl.maa.org;
XV (c): Klaus Wohlfahrt, owpdb.mfo.de;
XVI: Vasilij Kandinskij, Improvvisazione 33, 1913. Amsterdam, Stedelijk Museum;
1, 25 (a): Ronald Sumners/Shutterstock, Luminis/Shutterstock, Hfng/ Shutterstock;
15 (a): Bentley Smith, 2005;
15 (b): Losevsky Pavel/Shutterstock;
15 (c): *Albert Einstein a Pasadena*, courtesy of the Archives, California Institute of Technology, Pasadena, California;
25 (b): Luisa Fernanda Gonzales/ Shutterstock;
73 (a): Ilya Andriyanov/Shutterstock;
73 (b): optus.com.au;
77, 105 (a): Gala_Kan/Shutterstock;
93: IVN Mark & Donge, 2007;
105 (b): Correggio, *Assunzione di Maria*, 1530, Parma;
148 (a): spaxiax/Shutterstock;
148 (b): bkp/Shutterstock;
148 (c): Nathan Till/Shutterstock;
148 (d): Yuri Arcurs/Shutterstock;
153, 184 (a): Photomak/Shutterstock;
165 (a): Yurij Castelfranchi, Oliviero Stock, *Macchine come noi. La scommessa dell'intelligenza artificiale*, Editore Laterza;
165 (b): Nicola Nosengo, *L'estinzione dei tecnosauri*, Sironi editore;
184 (b): Petukhov Anton/Shutterstock;
236 (a): Homydesign/Shutterstock;
236 (b): Arti_Zav/Shutterstock;
241, 258 (a): Sergieiev/Shutterstock, Prism_68/Shutterstock;
258 (b): Mikhail Olykainen/Shutterstock;
258 (c): Vasilij Kandinskij, *Alcuni cerchi*, 1926;
307, 329 (a): Fred Goldstein/Shutterstock;
324: Holly Miller, 2008;
329 (b): Jose AS Reyes/Shutterstock;
379 (a): Tomasz Trojanowski/Shutterstock;
379 (b): www.yamaha-motor.com;
385, 401 (a): Milos Luzanin/Shutterstock;
393 (a): Adam & Jade, 2008;
393 (b): Tine Strange, 2007;
430: www.grandpamohawk.com;
435, 454 (a): Kameel4u/Shutterstock; Thad/ iStockphoto;
454 (b): Jlqf/Shutterstock;
488 (a): Roberto Marinello/Shutterstock;
488 (b): NASA;
501, 513 (a): Myrthe Krook/Shutterstock;
546: Xtrekx/Shutterstock;
553, 576 (a): Lars Christensen/Shutterstock, Ljupco Smokovski/Shutterstock;
576 (b): Tiziano, *Miracolo del neonato parlante*, Scoletta del Santo, Padova;
628 (a): www.camlab.co.uk;
628 (b): Kiyok;
β1, β45 (a): Denis Vrublevski/Shutterstock;
β45 (b): Jose Valdislav/Shutterstock;
β45 (c): James Group Studios/iStockphoto;
β84 (a): Andresr/Shutterstock;
β89, β103 (a): Gualtiero Boffi/Shutterstock;
β89, β103 (b): Tonobalaguerf/Shutterstock;
β115 (a): Marcel Jancovic/Shutterstock;
β115 (b): Alex Koloskov/Shutterstock;
β115 (c): Colour/Shutterstock;
C1, C7 (a): Steve Collender/Shutterstock;
C1, C7 (b): Ffooter/Shutterstock;
C17 (a): Yurchyks/Shutterstock;
C17 (b): Aaron Amat/Shutterstock;
E1: Jan Baptist Weenix, *Ritratto di Cartesio* (1647-1649), Centraal Museum, Utrecht;
E5: The Rhind Mathematical Papyrus. The British Museum, London.

Le geometrie

? **Ci sono diversi modi per affrontare un problema di geometria?**
In geometria, che cosa garantisce la verità?

Una geometria, due approcci

Negli *Elementi* di Euclide (vissuto intorno al 300 a.C.), i postulati erano le proposizioni poste a fondamento della teoria e non oggetto di dimostrazione e avevano l'obiettivo di garantire, con la loro evidenza, la verità e l'esistenza dei contenuti della geometria, che aveva il compito di descrivere il mondo reale.
Le dimostrazioni facevano poi discendere logicamente dai postulati proposizioni, dette teoremi, in modo tale da portare l'interlocutore ad accettarne la verità.
Questa concezione subisce, dal punto di vista metodologico, una profonda modifica nel XVII secolo. Cartesio, Torricelli, Pascal e altri contestano agli antichi di non chiarire quasi mai *come* sono arrivati alle dimostrazioni.
In particolare, Arnauld e Nicole, esponenti di quella corrente nota come *Logica di Port Royal*, nella *Logica o arte di pensare*, del 1662, lamentano che gli antichi si preoccupavano «più di convincere che di illuminare lo spirito». Essi ricordano che vi sono due modi di produrre una dimostrazione:

- il primo è quello tipico delle dimostrazioni euclidee e avviene per *sintesi*;
- il secondo avviene per *analisi*, ossia per scomposizione del problema in sottoproblemi sempre più semplici a partire dall'oggetto da determinare.

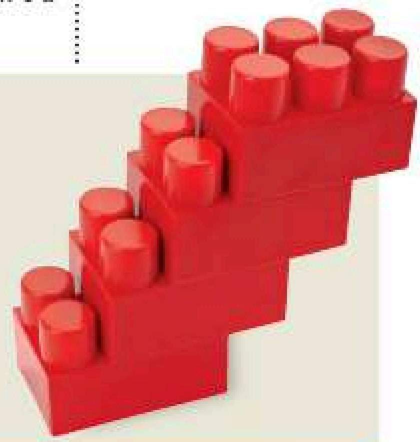
L'analisi consente di seguire passo passo la dimostrazione o la risoluzione del problema, in modo tale che chi la segue ha l'impressione di averla trovata egli stesso. Per i matematici del XVII secolo, Cartesio in primis, l'analisi è preferibile alla sintesi, perché permette di sviluppare *metodi* che aiutano a *risolvere problemi* e a *scoprire proprietà*.

Spesso, nella matematica moderna, per indicare un postulato, si usa il termine **assioma**.

Nella geometria di Euclide e in quella di Cartesio sono vere le stesse proprietà. Quello che cambia è il metodo con cui si affrontano i problemi geometrici. In realtà, in entrambi gli approcci sono presenti sia l'analisi, sia la sintesi, ma il loro ruolo è diverso.

Nel *Discorso sul metodo*, del 1637, Cartesio descrive quattro regole, trovate utilizzando la matematica, per abituare la «mente a nutrirsi di verità e a non accontentarsi di false ragioni». A noi interessano soprattutto la seconda e la terza, che parlano di analisi e sintesi. Consistono nel:

«– dividere ogni problema preso in esame in tante parti quanto fosse possibile e richiesto per risolverlo più agevolmente»;
– condurre ordinatamente i [...] pensieri cominciando dalle cose più semplici e facili da conoscere, per salire a poco a poco, come per gradi, sino alla conoscenza delle più complesse».



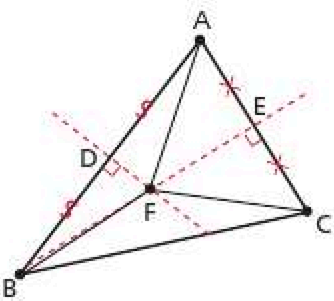
Attività

Com'è possibile determinare la circonferenza circoscritta a un triangolo?

Euclide risolve questo problema nella proposizione 5 del quarto libro degli Elementi. Lo hai già affrontato se nei tuoi studi precedenti hai dimostrato il teorema: «Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza»

Il metodo sintetico

Dato il triangolo ABC, disegna gli assi di AB e AC, tracciati per i loro punti medi D ed E, che si incontrino in F (figura 1). Il punto F può trovarsi, a seconda di come è fatto il triangolo, all'interno o all'esterno del triangolo, oppure sul lato BC. Considera soltanto il caso di F interno (negli altri la dimostrazione è analoga). Dimostra che F è il centro della circonferenza circoscritta.

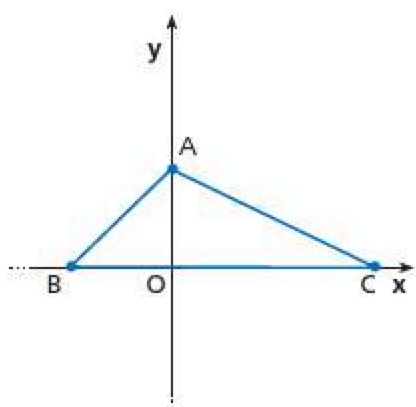


◀ Figura 1

Esponiamo il metodo con un esempio, ma il problema si può generalizzare considerando un triangolo qualsiasi e scegliendo un sistema di assi cartesiani in cui l'asse x passi per i punti B e C e l'asse y passi per il punto A. In generale quindi, come vertici del triangolo, si hanno i punti $A(0; y_A)$ $B(x_B; 0)$ $C(x_C; 0)$

Il metodo analitico

Nel piano cartesiano, considera il triangolo di vertici $A(0; 2)$, $B(-2; 0)$ e $C(4; 0)$, come in figura 2.



◀ Figura 2

Dimostra che una circonferenza, indicato con $P(x; y)$ un suo generico punto e detti $G(x_G; y_G)$ il suo centro e r il suo raggio, ha equazione:

$$(x - x_G)^2 + (y - y_G)^2 = r^2.$$

Per trovare l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo, puoi ora procedere in due modi diversi.

1. Determina:
   - le coordinate del centro $G(x_G; y_G)$ come punto di incontro degli assi di due dei lati del triangolo, per esempio BC e AC; per farlo, scrivi le equazioni dei due assi e poi mettile a sistema determinando le coordinate di G;
   - la misura del raggio r, che è la distanza di G da uno dei vertici, per esempio GC.

2. Imponi che le coordinate dei vertici soddisfino l'equazione della circonferenza. Ottieni tre equazioni nelle incognite x_G, y_G e r. Risolvi il sistema.

Tante geometrie

Le geometrie non euclidee

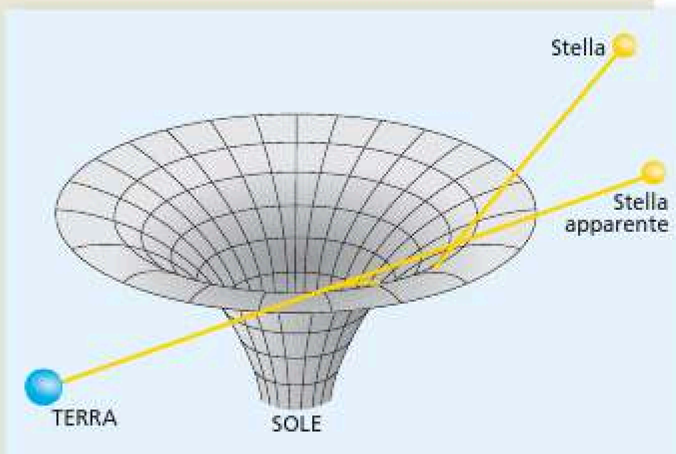
Nella prima metà del XIX secolo, János Bolyai e Nikolaj Ivanovič Lobačevskij, occupandosi del quinto postulato di Euclide, che afferma l'unicità della parallela condotta da un punto esterno a una retta, giunsero a negarlo costruendo una geometria in cui per un punto esterno a una retta data passano almeno due parallele.

In seguito Bernhard Riemann considerò una geometria nella quale per un punto esterno a una retta data non passa alcuna parallela.
La costruzione di modelli di tali geometrie dimostrava che, almeno dal punto di vista logico, le geometrie non euclidee avevano lo stesso diritto di quella euclidea di esistere e di essere studiate.

A lungo si tentò di dimostrare il quinto postulato, partendo dagli altri, ma inutilmente.
Farkas Bolyai, che aveva dedicato la propria vita a cercare la dimostrazione, scrisse al figlio János:
«Ti imploro, lascia in pace la teoria delle parallele, è una cosa da temere come le passioni»,
ma János continuò i suoi studi, dando una soluzione inaspettata al problema.

Spazio fisico e geometria

Le geometrie non euclidee minavano alla base l'idea di Euclide che i postulati, per poter essere considerati tali, dovessero essere evidenti. I matematici continuavano, però, a considerare la geometria euclidea come l'unica adatta a descrivere lo spazio fisico.
Nei primi anni del XX secolo Albert Einstein utilizzò i risultati di Riemann per realizzare la sua idea di spazio collegata alla relatività generale, descritto da una geometria variabile determinata dalla presenza e dalla distribuzione di masse. In tal modo i postulati della geometria euclidea persero non solo la proprietà dell'evidenza, ma anche quella di essere le uniche proposizioni a descrivere realmente come è fatto lo spazio fisico.



Secondo la relatività generale, la presenza di una massa modifica la geometria dello spazio-tempo che, metaforicamente, si incurva, come suggerisce il reticolato presente nell'immagine, dove è rappresentata la deviazione dalla linea retta dei raggi luminosi provenienti da una stella dovuta alla presenza del campo gravitazionale del Sole.
G. B. Shaw, in un pranzo in onore di Einstein, si espresse in questi termini nei confronti della relatività generale:

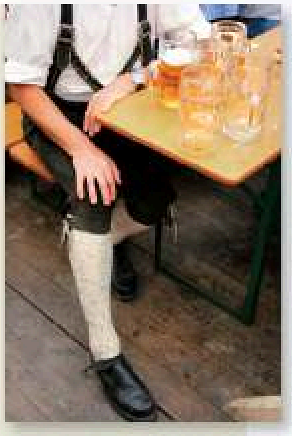
«Newton inventò una linea retta, e così fu la legge di gravitazione. [...] Per 300 anni noi credemmo […] in quell'universo newtoniano. [...] Poi venne un giovane professore. Disse un sacco di cose e noi lo chiamammo un blasfemo. [...] che il mondo non è un mondo rettilineo; è un mondo curvo. I corpi celesti si muovono lungo curve perché quello è per loro il modo naturale di procedere, e così l'intero universo newtoniano crollò e fu sostituito dall'universo di Einstein».

Hilbert e il formalismo

Parliamo di formalismo, nel volumetto *Le geometrie non euclidee e la crisi dei fondamenti*.

Abbiamo visto che per Euclide una dimostrazione è un ragionamento che partendo dai postulati, ossia da premesse *vere* perché *evidenti*, arriva a conclusioni ancora *vere*. Le geometrie non euclidee portano all'esigenza di liberare gli enti geometrici dal loro tradizionale significato. David Hilbert, uno dei più grandi matematici del secolo XX, è il principale esponente di una nuova corrente di pensiero che prende il nome di *formalismo*. Nel 1899, in *Grundlagen der Geometrie* (*Fondamenti di Geometria*), Hilbert sostituisce la teoria di Euclide con un sistema formale molto diverso da un punto di vista concettuale: gli enti primitivi sono indefiniti e le loro proprietà sono caratterizzate esclusivamente dalle relazioni fra essi stabilite dagli assiomi. Per Hilbert la verità degli assiomi e l'esistenza degli enti geometrici è garantita non dall'evidenza, ma dalla non contradditorietà degli assiomi stessi e degli enunciati che da essi si ricavano mediante le regole logiche.

In una lettera a Frege Hilbert scrive: «Se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora essi sono veri, allora esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi. Questo è per me il criterio della verità e dell'esistenza».



Si racconta che Hilbert, in una discussione con altri matematici in una sala d'aspetto di una stazione, abbia spiegato il suo punto di vista dicendo: «Si deve poter dire ogni volta al posto di "punti, rette, piani": "tavoli, sedie, boccali di birra"».
Lo scrittore Raymond Queneau si è divertito, nel suo *Fondamenti della letteratura secondo David Hilbert* del 1976, a sostituire "punti, rette, piani" con "parole, frasi, paragrafi", e vedere quali frasi del linguaggio parlato potevano soddisfare gli assiomi. Per esempio, una frase costituita da una sola parola, come «Sì» oppure «Pstt», non soddisfa l'assioma «In una frase ci sono almeno due parole», che corrisponde a quello di Hilbert «Su una retta ci sono almeno due punti».
Prova a riformulare il quinto postulato di Euclide delle parallele alla maniera di Queneau.

Attività

La nascita delle geometrie non euclidee e le loro caratteristiche: sviluppa questo tema e riassumi i risultati della tua ricerca in una presentazione multimediale.

Da leggere:

- Dario Palladino, Claudia Palladino, *Le geometrie non euclidee*, Carocci, 2008;
- Renato Betti, *Lobačevskij. L'invenzione delle geometrie non euclidee*, Bruno Mondadori, 2005;
- Herbert Meschkowski, *Mutamenti nel pensiero matematico*, Bollati Boringhieri, 1999, seconda edizione.

Cerca nel Web:
geometrie non euclidee, quinto postulato, geometria spazio fisico, geometria sferica

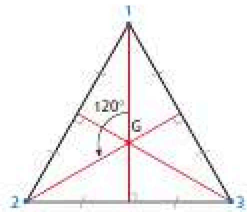
Dai numeri alle strutture algebriche

? Le proprietà delle operazioni fra numeri possono essere estese a enti diversi?

Algebra: non solo numeri

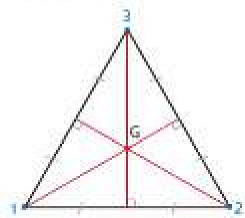
Le trasformazioni del triangolo equilatero in sé

Consideriamo un triangolo equilatero di vertici 1, 2, 3 e il suo centro G, punto di intersezione degli assi (figura 1).



▲ Figura 1

Muoviamo il triangolo con una rotazione antioraria R_1 di 120° intorno a G: il vertice 3 si sposta nel vertice 1, il vertice 1 in 2 e 2 in 3 (figura 2). R_1 trasforma il triangolo equilatero in sé e può essere indicata mediante la permutazione dei vertici che la caratterizza con la scrittura:



▲ Figura 2

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora tutte le trasformazioni geometriche che mutano il triangolo equilatero in sé:

- S_1 = simmetria rispetto all'asse del lato 2-3;
- S_2 = simmetria rispetto all'asse del lato 3-1;
- S_3 = simmetria rispetto all'asse del lato 2-1;
- R_1 = rotazione in senso antiorario di 120° intorno a G;
- R_2 = rotazione in senso antiorario di 240° intorno a G;
- I = identità (o rotazione di 360° intorno a G).

Le sei trasformazioni corrispondono alle sei permutazioni dei vertici del triangolo equilatero.

Il concetto di permutazione non riguarda soltanto i numeri, ma si può definire per oggetti qualsiasi. Le permutazioni di n oggetti distinti sono tutti i possibili ordinamenti di quegli oggetti.

Attività

Con un cartoncino realizza un triangolo equilatero come quello della figura e fai un po' di pratica nell'ottenere le trasformazioni elencate. Scrivi poi la permutazione relativa, nella forma che abbiamo utilizzato per quella di R_1.

Per esempio, verifica che $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ corrisponde a R_2.

Un esempio di permutazioni sono gli anagrammi. Gli anagrammi della parola EVA sono EVA, EAV, VEA, VAE, AEV, AVE. Le permutazioni di tre elementi sono 6

Un'operazione fra trasformazioni

Consideriamo l'operazione di composizione $\circ$ tra le trasformazioni elencate. Indichiamo con T l'insieme delle sei trasformazioni.
È possibile verificare che $\circ$ è un'operazione interna: comunque si compongano due elementi di T, si ottiene ancora un elemento di T.

Attività

Considera ancora il triangolo di figura 1 ed esegui prima la simmetria S_1 e poi applica al triangolo ottenuto la rotazione R_2, ossia esegui $R_2 \circ S_1$.
$R_2 \circ S_1$ è uguale a un'altra delle sei trasformazioni. Quale?
Completa la tabella dell'operazione $\circ$.

$\circ$	I	R_1	R_2	S_1	S_2	S_3
I	I	R_1	R_2	S_1	S_2	S_3
R_1	R_1	R_2				
R_2	R_2					
S_1	S_1					
S_2	S_2					
S_3	S_3					

La struttura di gruppo, insieme ai concetti di simmetria e di permutazione, venne utilizzata per la prima volta da Évariste Galois (1811-1832) per studiare le soluzioni delle equazioni polinomiali. Tuttavia soltanto alla fine del XIX secolo, Arthur Cayley diede la definizione generale di gruppo.

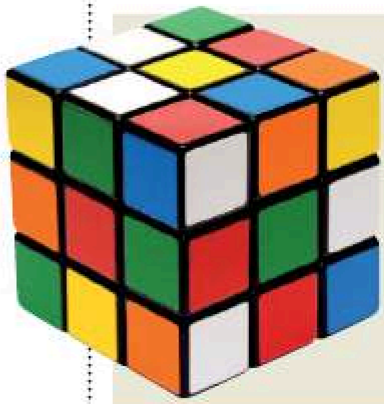
La struttura di gruppo

Dato un insieme A e una legge di composizione interna #, definita fra gli elementi di A, si dice che $(A, \#)$ è una struttura di gruppo se:

a) # è *associativa*, cioè $(a \# b) \# c = a \# (b \# c)$ per ogni a, b, c di A;
b) esiste l'elemento neutro e di A tale che $a \# e = e \# a = a$ per ogni a di A;
c) per ogni a di A esiste l'elemento inverso a^{-1} di A tale che $a \# a^{-1} = a^{-1} \# a = e$.

Attività

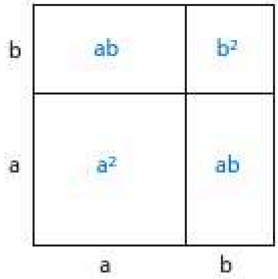
- Verifica che $(\mathbb{Z}, +)$, dove $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi e $+$ l'operazione di addizione, è una struttura di gruppo. In particolare: qual è l'elemento neutro? Assegnato un numero intero a, qual è il suo inverso?
- Verifica che la struttura $(T, \circ)$, dove T è l'insieme delle trasformazioni del triangolo equilatero in sé e $\circ$ la loro legge di composizione, è una struttura di gruppo. In particolare, determina l'elemento neutro della struttura e, per ogni trasformazione, la sua inversa. Per esempio, l'inversa di S_3 è ancora S_3, perché $S_3 \circ S_3 = I$.



Il cubo di Rubik può essere studiato matematicamente. Chiamiamo *mossa base* la rotazione di 90° in senso orario di una faccia: le mosse base sono in totale sei. Si può passare da una all'altra delle 43 252 003 274 489 856 000 permutazioni possibili del cubo mediante la composizione di un numero finito di mosse base. In questo caso si dice che le mosse base *generano* l'insieme M di tutte le possibili mosse del cubo. L'insieme delle mosse M e l'operazione di composizione fra mosse costituiscono una struttura di gruppo.

Una matematica in evoluzione

I Greci Per i Greci l'algebra aveva senso soltanto se era interpretabile geometricamente. Ecco come Euclide (vissuto intorno al 300 a.C.) scrive l'identità $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, che noi interpretiamo geometricamente come nella figura 3:
«Se si taglia a caso una linea retta, il quadrato del tutto è uguale alla somma dei quadrati delle parti e del doppio del rettangolo contenuto dalle parti».



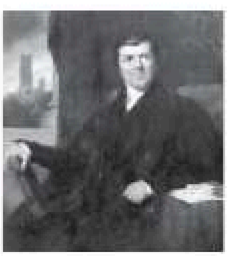
◀ Figura 3

Gli Arabi Insieme ai Cinesi e agli Indiani, gli Arabi hanno dato un grosso contributo allo sviluppo dell'algebra. Al-Khuwarizmi (vissuto nel IX secolo d.C.) ha fornito una trattazione dettagliata delle equazioni di secondo grado e l'uso sistematico di passaggi algebrici nel suo testo *Hisab al-jabr w'al-muqabala*. Come vedi dal titolo, la parola algebra è proprio di origine araba. Altri contributi sono di Al-Karaji (953-1029) e Al-Samawal (duecento anni dopo) che si dedicarono, in particolare, allo studio dei monomi e dei polinomi.

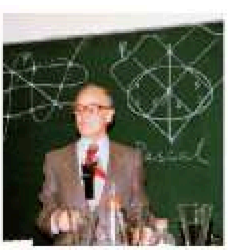
Gli Italiani Importante è anche il contributo degli algebristi italiani del Cinquecento e in particolare di Girolamo Cardano e Nicolò Tartaglia, che affrontarono la risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado, e di Raffaele Bombelli, che contribuì alla diffusione dell'*algebra sincopata* (un'algebra con parole abbreviate al posto delle variabili e delle operazioni).

Cartesio Solo con Cartesio (1596-1650) l'algebra inizia ad affrancarsi dall'interpretazione geometrica, riuscendo, in tal modo, a dare nuove idee alla stessa geometria. Cartesio scrive che, volendo studiare le matematiche, si rese conto che per «studiarle in particolare» doveva «raffigurarle in forma di linee», ma per «comprenderne molte insieme» doveva invece «esprimerle con qualche cifra fra le più brevi possibili».

Nel XVIII secolo inizia a farsi strada l'idea di un'algebra come scienza di quantità generiche, una sorta di aritmetica generalizzata, quindi utile a rappresentare e dimostrare proprietà fra numeri e proprietà delle operazioni fra essi.



Peacock Nel XIX secolo, il matematico inglese Peacock afferma che l'algebra non deve essere ridotta a una semplice generalizzazione dell'aritmetica: «Nell'algebra aritmetica le definizioni delle operazioni determinano le regole; nell'algebra simbolica le regole determinano il significato delle operazioni». Questa impostazione apre definitivamente la strada all'algebra come scienza astratta.



Noether e Van der Waerden Nel 1930 il matematico Van der Waerden, allievo di Emmy Noether, scrive il libro *Modern Algebra* in cui afferma che «l'indirizzo astratto, formale o assiomatico, cui l'algebra deve il suo rinnovato sviluppo, ha condotto a una serie di concetti nuovi e alla considerazione di nuove connessioni e di fecondi risultati».

Per il carattere innovativo dei suoi studi di algebra, la matematica tedesca di origini ebree Emmy Noether viene spesso chiamata «la mamma dell'algebra moderna»

Dai numeri alle strutture algebriche

Bourbaki Lo sviluppo delle conoscenze matematiche nel secolo XX è stato talmente imponente che alcuni matematici hanno avvertito il bisogno di cercare di individuare concetti unificanti che potessero aiutare a gestire la complessità e l'eccessiva ricchezza dei diversi campi di ricerca. Proprio quell'idea espressa da van der Waerden, ossia la considerazione di «nuove connessioni» fra le varie teorie, porta, intorno agli anni '30 del secolo XX, un gruppo di giovani e brillanti matematici, che si presentano con lo pseudonimo collettivo di Bourbaki, a individuare nel concetto di struttura uno strumento per trattare in modo unitario le conoscenze matematiche. Capire la matematica vuol dire, secondo i bourbakisti, coglierne il suo aspetto strutturale: la ricerca matematica diventa quindi ricerca di strutture nascoste, sempre più generali e astratte.

Nel XX secolo anche altre discipline hanno percorso la strada dello studio delle relazioni indipendenti dagli oggetti descritti. Un giorno, a Monaco, racconta Kandinsky,

«aprendo la porta dello studio, vidi dinnanzi a me un quadro indescrivibilmente bello. All'inizio rimasi sbalordito, ma poi mi avvicinai a quel quadro enigmatico, assolutamente incomprensibile nel suo contenuto e fatto esclusivamente di macchie di colore. Finalmente capii: era un quadro che avevo dipinto io e che era stato appoggiato al cavalletto capovolto […] Quel giorno mi fu perfettamente chiaro che l'oggetto non aveva posto, anzi era dannoso ai miei quadri».

Vassily Kandinsky, Improvvisazione 33, 1913.

Attività

Il concetto di struttura in matematica e le sue applicazioni in altre discipline: sviluppa questo tema, realizzando, come sintesi, una presentazione multimediale.

Le forme dei cerchioni dei pneumatici delle automobili possono essere studiati mediante i concetti di simmetria e di gruppo. Ne puoi trovare esempi come quello della figura in www.matematita.it.

Da leggere:

- Giuliano Spirito, *Matematica senza numeri*, Newton Compton, 2004.
- Ian Stewart, *L'eleganza della verità*, Einaudi, 2008.
- Keith Devlin, *Il linguaggio della matematica*, Bollati Boringhieri, 2002; capitolo: La matematica della bellezza.

Cerca nel Web:

algebra astratta, strutture algebriche, algebra Boole, Klein programma Erlangen, gruppo rosoni, cristalli

CAPITOLO 1

١ [numerazione araba]

१ [numerazione devanagari]

一 [numerazione cinese]

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

MADE IN... Negli ultimi anni i prodotti «made in China» hanno invaso il mercato mondiale e spinto gli altri Paesi a trovare nuove strategie per restare competitivi.

Quando è più conveniente importare un bene dall'estero anziché produrlo?

La risposta a pag. 25

1. LE DISEQUAZIONI E LE LORO PROPRIETÀ

DEFINIZIONE

Disequazione

Una disequazione è una disuguaglianza in cui compaiono espressioni letterali per le quali cerchiamo i valori di una o più lettere che rendono la disuguaglianza vera.

Le lettere per le quali si cercano valori sono le **incognite**. I valori delle incognite che rendono vera la disuguaglianza sono le **soluzioni** della disequazione.

Ci occuperemo, per il momento, di disequazioni a una sola incognita e cercheremo di determinare l'**insieme delle soluzioni** nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

ESEMPIO

La disequazione

$$5 - x > 0$$

ha come insieme delle soluzioni $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$, che indichiamo, per brevità, con $x < 5$.

Una disequazione è **numerica** se nell'equazione non compaiono altre lettere oltre all'incognita. È **letterale** se invece contiene altre lettere, che possono anche essere chiamate *parametri*.

Una disequazione è **intera** se l'incognita compare soltanto nei numeratori delle eventuali frazioni presenti nella disequazione. Se invece l'incognita è contenuta nel denominatore di qualche frazione, allora la disequazione è **fratta**.

ESEMPIO

La disequazione

$$\frac{2}{x+5} > 3x - 1$$

è fratta e ha senso solo quando $x + 5 \neq 0$, cioè per ogni $x \neq -5$.
Diciamo anche che la sua condizione di esistenza è $x \neq -5$.

DEFINIZIONE

Condizioni di esistenza

Le condizioni di esistenza di una disequazione sono quelle condizioni che le variabili devono soddisfare affinché tutte le espressioni scritte abbiano significato.

Gli intervalli

Spesso gli insiemi delle soluzioni delle disequazioni che studieremo saranno particolari sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ chiamati **intervalli**.

DEFINIZIONE

Intervallo limitato

Dati due numeri reali a e b, con $a < b$, si chiama intervallo limitato l'insieme dei numeri reali x compresi fra a e b.

- Le disuguaglianze sono enunciati fra espressioni che confrontiamo mediante le seguenti relazioni d'ordine:
$<$ (minore),
$>$ (maggiore),
$\leq$ (minore o uguale),
$\geq$ (maggiore o uguale).
Per esempio:
$2 + 1 < 5$,
$3a + 1 \geq b$.

- Se una disequazione è scritta nella **forma normale** $P(x) > 0$, con $P(x)$ polinomio nell'incognita x ridotto in forma normale, il **grado della disequazione** è il grado di $P(x)$. Analoga definizione si ha con $<, \leq, \geq$.

- Non esistono frazioni con denominatore nullo.

- Per brevità, indicheremo le condizioni di esistenza con C.E.

- Gli insiemi delle soluzioni potranno anche essere unioni di intervalli.

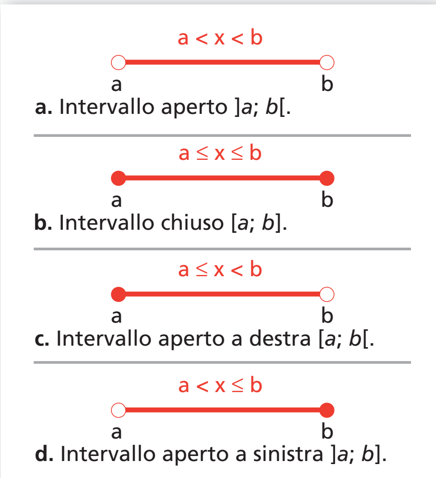
DEFINIZIONE

Intervallo illimitato

Dato un numero reale a, si chiama intervallo illimitato l'insieme dei numeri reali x che precedono a, oppure l'insieme dei numeri reali x che seguono a.

Distinguiamo i seguenti casi, dove rappresentiamo gli intervalli in tre modi diversi: con una disuguaglianza, mediante parentesi quadre o con una rappresentazione grafica.

Intervalli limitati



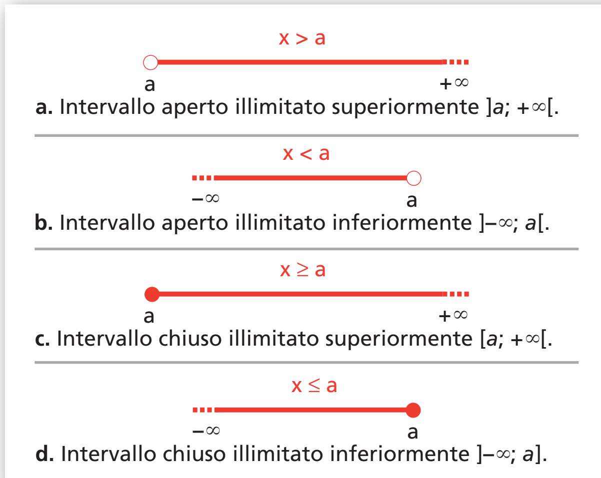
a. Intervallo aperto]a; b[.

b. Intervallo chiuso [a; b].

c. Intervallo aperto a destra [a; b[.

d. Intervallo aperto a sinistra]a; b].

Intervalli illimitati



a. Intervallo aperto illimitato superiormente]a; $+\infty$[.

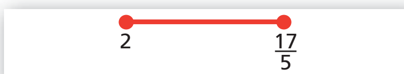
b. Intervallo aperto illimitato inferiormente]$-\infty$; a[.

c. Intervallo chiuso illimitato superiormente [a; $+\infty$[.

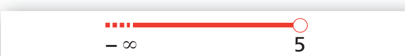
d. Intervallo chiuso illimitato inferiormente]$-\infty$; a].

ESEMPIO

1. $\left[2; \frac{17}{5}\right]$, ossia $2 \leq x \leq \frac{17}{5}$, è un intervallo limitato chiuso; 2 è l'estremo inferiore, $\frac{17}{5}$ l'estremo superiore.



2. $]-\infty; 5[$, ossia $x < 5$, è un intervallo aperto illimitato inferiormente.



Un intervallo si dice **chiuso** quando include i propri estremi, in caso contrario si dice **aperto**.

Le disequazioni equivalenti

DEFINIZIONE

Disequazioni equivalenti

Due disequazioni si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

ESEMPIO

$x - 3 > 0$ e $x - 2 > 1$ sono disequazioni equivalenti perché hanno per soluzioni i valori dell'intervallo $x > 3$.

Valgono i seguenti princìpi.

PRINCIPIO

Primo principio di equivalenza

Data una disequazione, si ottiene una disequazione a essa equivalente aggiungendo a entrambi i membri uno stesso numero o espressione.

● I **membri** di una disequazione sono le due espressioni che si trovano a sinistra (primo membro) e a destra (secondo membro) del segno di disuguaglianza.

ESEMPIO

La disequazione $x^2 - 3 < x$ è equivalente alla disequazione $x^2 - x - 3 < 0$, ottenuta sommando $-x$ a entrambi i membri.

Nell'esempio precedente, dopo l'applicazione del primo principio, il termine x sparisce dal secondo membro e compare al primo con il segno cambiato.
In questo senso possiamo dire che **un termine può essere trasportato da un membro all'altro della disequazione cambiandogli il segno**.

PRINCIPIO

Secondo principio di equivalenza

Data una disequazione, si ottiene una disequazione a essa equivalente:
- moltiplicando o dividendo entrambi i membri per uno stesso numero (o espressione) *positivo*.
- moltiplicando o dividendo entrambi i membri per un numero (o espressione) *negativo* e *cambiando il verso* della disuguaglianza.

● Questa operazione equivale a moltiplicare per -1 i membri della disequazione e a invertire il verso.

In particolare, **se si cambia il segno di tutti i termini di una disequazione e si inverte il verso della disuguaglianza, si ottiene una disequazione equivalente**.

ESEMPIO

1. La disequazione $\frac{5x}{2} > 1$ è equivalente alla disequazione $5x > 2$. La seconda si ottiene dalla prima moltiplicando entrambi i membri per 2.
2. $-x^2 > -9$ è equivalente a $x^2 < 9$. La seconda disequazione si ottiene dalla prima moltiplicando entrambi i membri per -1 (ovvero cambiando il segno di tutti i termini) e invertendo il verso della disuguaglianza.

2. LE DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Le disequazioni intere di primo grado possono sempre essere scritte in una delle seguenti forme, dopo aver opportunamente applicato i princìpi di equivalenza:

$$ax > b, \quad ax \geq b, \quad ax < b, \quad ax \leq b, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Risolvendo $ax > b$, otteniamo, a seconda dei valori di a:

- se $a > 0$, $\quad x > \frac{b}{a}$;
- se $a = 0$, $\quad 0 \cdot x > b$ $\begin{cases} \text{se } b > 0,\ S = \varnothing; \\ \text{se } b = 0,\ S = \varnothing; \\ \text{se } b < 0,\ S = \mathbb{R}; \end{cases}$
- se $a < 0$, $\quad x < \frac{b}{a}$.

● Con S indichiamo l'insieme delle soluzioni.

Bergamini, Trifone, Barozzi **MATEMATICA.BLU - Vol. 3** © Zanichelli 2012 *con Maths in English*

Un ragionamento analogo vale anche per le altre tre disequazioni.
Un esempio di disequazione numerica intera è

$$2 + \frac{x}{4} \leq 1 + x,$$

che, risolta, ha come soluzione $x \geq \frac{4}{3}$, mentre un esempio di disequazione letterale è $ax - 1 \geq 2a$. Per risolvere una disequazione di questo tipo occorre discutere le sue soluzioni al variare di a.

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione

$$x - 3 < a(x + 1),$$

discutendo le sue soluzioni al variare di a.

Svolgiamo i calcoli e portiamo a sinistra i termini in cui compare l'incognita e a destra gli altri:

$$x - ax < a + 3.$$

Raccogliamo x al primo membro:

$$x(1 - a) < a + 3.$$

Distinguiamo tre casi.

- Se $1 - a > 0$, ossia se $\boldsymbol{a < 1}$, il coefficiente dell'incognita è positivo. Perciò dividiamo entrambi i membri per $1 - a$ e *non* cambiamo il verso della disuguaglianza:

$$x < \frac{a + 3}{1 - a}.$$

- Se $1 - a = 0$, ossia $\boldsymbol{a = 1}$, sostituiamo il valore 1 ad a nella disequazione $x(1 - a) < a + 3$:

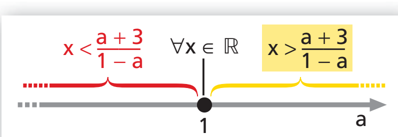
$$x(1 - 1) < 1 + 3, \quad \text{ossia} \quad 0 < 4.$$

La disequazione è sempre verificata, per qualsiasi valore di x.

- Se $1 - a < 0$, ossia $\boldsymbol{a > 1}$, il coefficiente dell'incognita è negativo. Quindi, in questo caso, dividiamo entrambi i membri per $1 - a$ e cambiamo il verso della disuguaglianza:

$$x > \frac{a + 3}{1 - a}.$$

In sintesi l'insieme delle soluzioni della disequazione è:



per $a < 1$, $\quad x < \frac{a + 3}{1 - a}$;

per $a = 1$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}$;

per $a > 1$, $\quad x > \frac{a + 3}{1 - a}$.

● Se $1 - a > 0$, allora $-a > -1$, ossia $a < 1$.

◀ **Figura 1** Rappresentazione delle soluzioni al variare di a.

Discutere le soluzioni di una disequazione letterale permette di ottenere le soluzioni di infinite disequazioni numeriche, quelle che si hanno sostituendo nell'equazione data valori particolari alla lettera (o alle lettere).

Per esempio, nella disequazione precedente, $x - 3 < a(x + 1)$, possiamo sostituire alla lettera a il valore -7 e ottenere la seguente disequazione numerica:

$$x - 3 < -7(x + 1).$$

Senza eseguire i calcoli, utilizzando il quadro delle soluzioni e tenendo conto che $-7 < 1$, ricaviamo:

$$x < \frac{-7 + 3}{1 + 7} \quad \rightarrow \quad x < -\frac{1}{2}.$$

Lo studio del segno di un prodotto

Consideriamo una disequazione costituita da un prodotto di binomi di primo grado messo a confronto con il numero 0, per esempio:

$$(x - 1)(3x + 2)(x + 4) > 0.$$

Per risolverla possiamo **studiare il segno** del prodotto al variare di x.

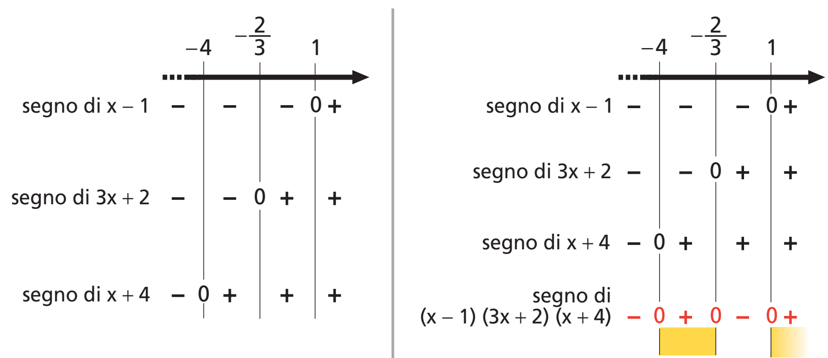
Studiamo il segno dei singoli fattori e rappresentiamo i risultati in uno schema grafico (figura 2):

$$x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1,$$

$$3x + 2 > 0 \quad \rightarrow \quad x > -\frac{2}{3},$$

$$x + 4 > 0 \quad \rightarrow \quad x > -4.$$

► **Figura 2**



a. Disegniamo una retta orientata e segniamo su di essa i valori per cui i fattori si annullano. Sotto alla retta, usando una riga per ogni fattore, scriviamo 0 nei punti in cui i fattori si annullano, dei segni + dove sono positivi, dei segni – dove sono negativi.

b. Aggiungiamo una riga per il prodotto. I punti in cui si annulla sono quelli in cui uno dei fattori è nullo. Il segno si ricava applicando «in verticale» la regola dei segni. Per finire, evidenziamo in giallo gli intervalli in cui la disequazione è verificata.

La disequazione richiede che il prodotto sia positivo, quindi l'insieme delle soluzioni è:

$$-4 < x < -\frac{2}{3} \quad \vee \quad x > 1.$$

3. LE DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Ogni disequazione intera di secondo grado nell'incognita x può essere ricondotta alla **forma normale**

$$ax^2 + bx + c > 0, \qquad \text{con } a \neq 0,$$

o alle analoghe che si ottengono con i segni $<$, $\leq$ o $\geq$.

Possiamo sempre fare riferimento ai casi in cui il coefficiente a è positivo. Infatti, se a è negativo, basta cambiare segno a tutti i termini e invertire il senso della disuguaglianza.

Per determinare le soluzioni di una disequazione di secondo grado si considera l'*equazione associata*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

e si distinguono tre casi, a seconda del segno del discriminante Δ:

$$\Delta > 0, \qquad \Delta = 0 \qquad \text{e} \qquad \Delta < 0.$$

● $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'equazione associata ha $\Delta > 0$

● Il segno del trinomio $ax^2 + bx + c$ quando $\Delta > 0$

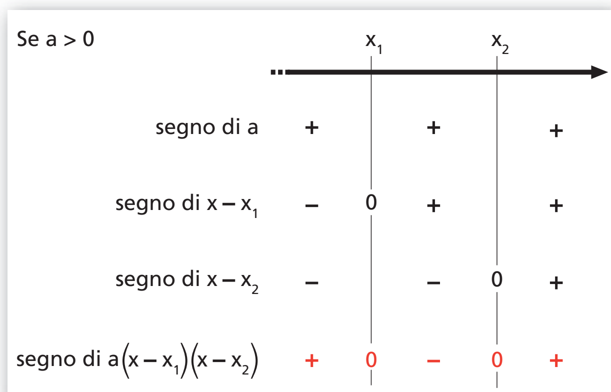
Se $\Delta > 0$, l'equazione associata al trinomio ha due radici distinte x_1 e x_2. Possiamo scrivere:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Il segno del trinomio dipende dal segno dei tre fattori:

$$a,\ (x - x_1),\ (x - x_2).$$

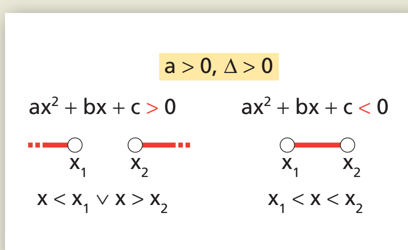
Supponiamo $a > 0$ e $x_1 < x_2$.
Otteniamo il quadro dei segni della figura.
Il prodotto $a(x - x_1)(x - x_2)$ è positivo, ossia concorde con a, per valori di x esterni all'intervallo che ha per estremi le radici, è negativo per valori interni.
Studiando il caso di $a < 0$, si trova che vale la stessa regola: il segno del polinomio è concorde con a (cioè negativo) per valori di x esterni all'intervallo delle radici.



REGOLA

Se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha $\Delta > 0$, ossia due soluzioni reali distinte $x_1 < x_2$, allora:

- la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ (con $a > 0$) è verificata per $x < x_1 \vee x > x_2$, ossia per *valori esterni* all'intervallo di estremi x_1, x_2;
- la disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ (con $a > 0$) è verificata per $x_1 < x < x_2$, ossia per *valori interni* all'intervallo di estremi x_1, x_2.



● $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione:

$$3x^2 - x - 2 < 0.$$

L'equazione associata è $3x^2 - x - 2 = 0$, con $\Delta = 25 > 0$; le sue radici sono:

$$x_1 = -\frac{2}{3}; \qquad x_2 = 1.$$

La disequazione è verificata per valori interni all'intervallo delle radici:

$$-\frac{2}{3} < x < 1.$$

- $\Delta = 1 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25$ e $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{6}$.

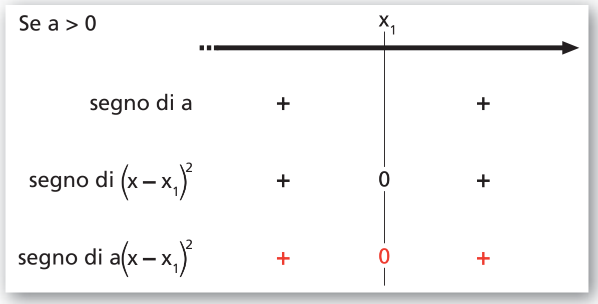
L'equazione associata ha $\Delta = 0$

Il segno del trinomio $ax^2 + bx + c$ quando $\Delta = 0$

Se $\Delta = 0$, l'equazione associata ha una radice doppia $x_1 = x_2$. Possiamo scrivere:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

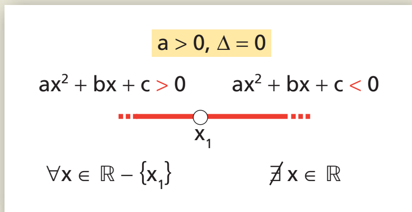
Considerando $a > 0$, otteniamo il quadro della figura. Essendo $(x - x_1)^2 \geq 0$, il prodotto $a(x - x_1)^2$ risulta concorde con a (quindi positivo) per qualunque valore di x, escluso il valore x_1, in cui si annulla. Vale lo stesso risultato nel caso di $a < 0$, ossia $a(x - x_1)^2$ risulta concorde con a (quindi negativo) per qualunque valore di $x \neq x_1$.



REGOLA

Se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha $\Delta = 0$, ossia ha due soluzioni reali coincidenti $x_1 = x_2$:

- la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ (con $a > 0$) è verificata per qualunque valore di x diverso da x_1;
- la disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ (con $a > 0$) non è mai verificata.



ESEMPIO

Risolviamo la disequazione:

$$25x^2 - 20x + 4 > 0.$$

L'equazione associata $25x^2 - 20x + 4 = 0$ ha $\Delta = 0$, quindi ha due soluzioni coincidenti:

$$x_1 = x_2 = \frac{2}{5}.$$

La disequazione è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq \dfrac{2}{5}$.

- $\Delta = 400 - 4 \cdot 4 \cdot 25 =$ $= 400 - 400 = 0$ e $x_{1,2} = \dfrac{20}{50}$.

L'equazione associata ha $\Delta < 0$

Il segno del trinomio $ax^2 + bx + c$ quando $\Delta < 0$

Consideriamo il trinomio $ax^2 + bx + c$.
Raccogliamo a ($a \neq 0$):

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Consideriamo il termine $\frac{b}{a}x$ come il doppio prodotto $2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a}$; aggiungiamo e togliamo entro parentesi il quadrato di $\frac{b}{2a}$:

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right].$$

Poiché $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, otteniamo:

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right].$$

Sommiamo le due frazioni $+\frac{c}{a}$, $-\frac{b^2}{4a^2}$:

$$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac - b^2}{4a^2} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{-\Delta}{4a^2}.$$

Abbiamo trasformato il trinomio $ax^2 + bx + c$ nel seguente prodotto:

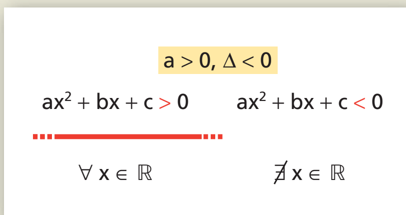
$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right].$$

Essendo $\Delta < 0$, l'espressione $\frac{-\Delta}{4a^2}$ è positiva. Anche la somma dentro le parentesi quadre è allora positiva per ogni valore di x.
Pertanto, quando $\Delta < 0$, il trinomio $ax^2 + bx + c$ assume sempre lo stesso segno del coefficiente a.

REGOLA

Se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha $\Delta < 0$, ossia non ha soluzioni reali:

- la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ (con $a > 0$) è verificata per qualunque valore di x;
- la disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ (con $a > 0$) non è mai verificata.



ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $12x^2 - 3x + 1 < 0$.
L'equazione associata $12x^2 - 3x + 1 = 0$ ha $\Delta < 0$. La disequazione non è mai verificata.

$\Delta = 9 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = -39$.

L'interpretazione grafica delle disequazioni di secondo grado

Le soluzioni di $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$)

Per dare un'interpretazione grafica della disequazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad a > 0$$

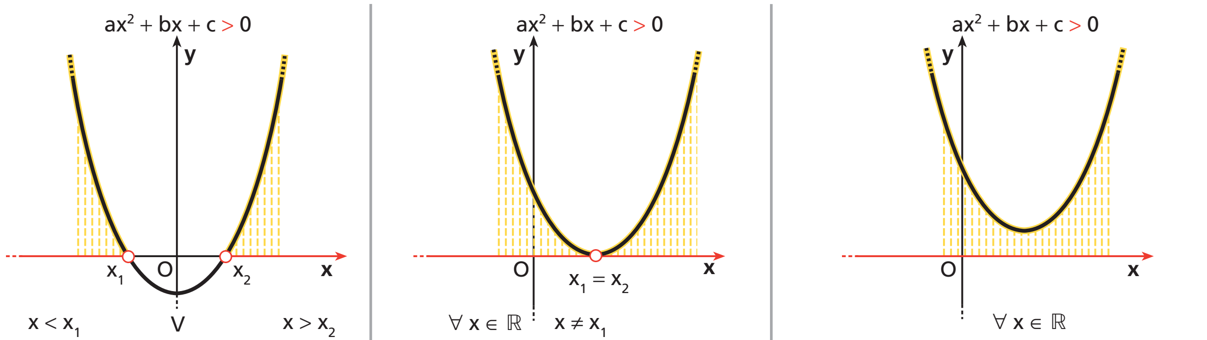
- si considera la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ tenendo conto che per $a > 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto;
- si cercano gli eventuali punti di intersezione della parabola con l'asse x, ponendo $y = 0$, ovvero $ax^2 + bx + c = 0$;
- si considera la parte di parabola che sta nel semipiano dei punti di ordinata positiva ($y > 0$).

Le soluzioni della disequazione sono date dalle ascisse dei punti della parabola che hanno ordinata positiva.

Studiamo solo il caso di $a > 0$, perché se $a < 0$ basta cambiare segno a tutti i termini e verso alla disuguaglianza.

● I casi corrispondono a $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$.

Si possono presentare tre casi diversi, ossia che la parabola $y = ax^2 + bx + c$ intersechi l'asse x in due punti, in un punto o in nessun punto (figura 3).



a. La parabola interseca l'asse x in due punti: x_1 e x_2. Le soluzioni della disequazione sono $x < x_1 \vee x > x_2$.

b. La parabola interseca l'asse x in un solo punto, ossia è tangente all'asse x nel vertice; x_1 e x_2 sono coincidenti. La disequazione è verificata per ogni valore reale $x \neq x_1$.

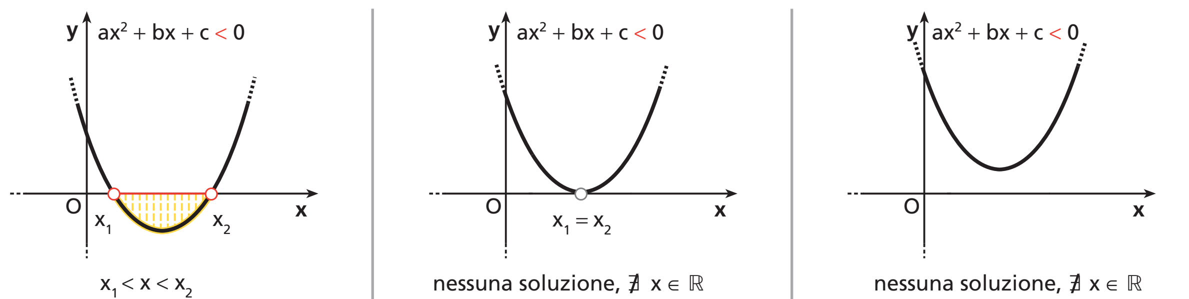
c. La parabola non interseca l'asse x. Tutti i suoi punti hanno ordinata positiva. La disequazione è sempre verificata.

▲ **Figura 3**

Le soluzioni di $ax^2 + bx + c < 0$ $(a > 0)$

Nel caso della disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ si procede scegliendo la parte di parabola che sta nel semipiano delle y negative (figura 4).

▼ **Figura 4**

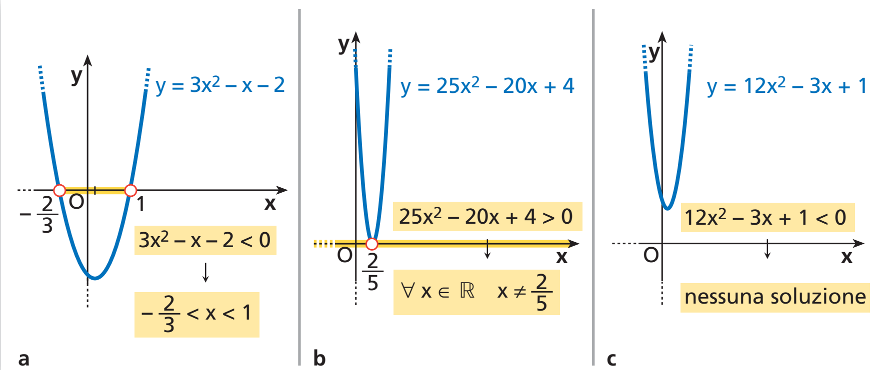


a. La parabola interseca l'asse x in due punti: x_1 e x_2. Le soluzioni sono $x_1 < x < x_2$.

b. La parabola interseca l'asse x in un solo punto, ossia è tangente all'asse x nel vertice. Poiché non ci sono suoi punti con ordinata negativa, la disequazione non è mai verificata.

c. La parabola non interseca l'asse x. Non ci sono suoi punti con ordinata negativa: anche in questo caso la disequazione non è mai verificata.

ESEMPIO



► **Figura 5**

4. LE DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO E LE DISEQUAZIONI FRATTE

Le disequazioni di grado superiore al secondo

IN PRATICA
▶ Videolezione 1

Dato un polinomio $P(x)$ di grado maggiore di 2, le disequazioni del tipo $P(x) < 0$ o $P(x) > 0$ sono di grado superiore al secondo e possono essere risolte scomponendo in fattori di primo e secondo grado il polinomio $P(x)$ e studiando il segno del prodotto di polinomi che si ottiene.
In particolari casi di disequazioni, possiamo utilizzare metodi specifici, che esaminiamo negli esempi 2, 3 e 4.

ESEMPIO

1. Risolviamo la disequazione $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 > 0$.
Scomponiamo $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ in fattori mediante la regola di Ruffini.

Se sostituiamo nel polinomio i divisori del termine noto 6, scopriamo che 1 è uno zero del polinomio. Applichiamo la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array} \quad \to \quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - x - 6).$$

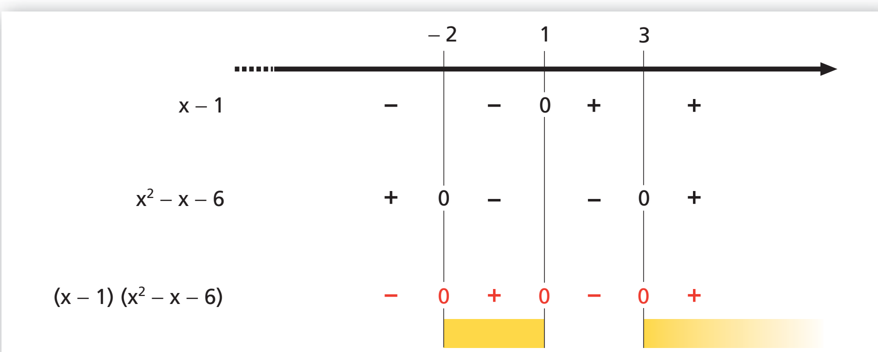
La disequazione iniziale è equivalente a:

$$(x-1)(x^2 - x - 6) > 0.$$

Studiamo il segno del polinomio iniziale esaminando il segno dei due polinomi fattori:

$$x - 1 > 0 \qquad \text{per} \qquad x > 1;$$

$$x^2 - x - 6 > 0 \qquad \text{per} \qquad x < -2 \ \vee \ x > 3.$$



◀ **Figura 6** Il quadro dei segni.

Dal quadro della figura 6 ricaviamo che la disequazione è verificata per

$$-2 < x < 1 \ \vee \ x > 3, \qquad \text{ossia} \qquad]-2; 1[\cup]3; +\infty[.$$

● Ricorda che se un polinomio ha zeri in $\mathbb{Z}$, questi devono essere divisori del termine noto. Perciò i possibili zeri interi del polinomio sono $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

● La disequazione $x^2 - x - 6 > 0$ è verificata per valori di x esterni all'intervallo delle radici $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$ dell'equazione associata.

2. Risolviamo la **disequazione biquadratica** $x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0$.

L'equazione associata $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ è un'*equazione biquadratica*.

Per risolverla, introduciamo l'incognita ausiliaria z e poniamo $x^2 = z$:

$$z^2 - 13z + 36 = 0 \quad \to \quad z_1 = 4, z_2 = 9.$$

La disequazione di quarto grado, nell'incognita x, è equivalente alla disequazione di secondo grado, nell'incognita ausiliaria z. Otteniamo

$$z^2 - 13z + 36 \geq 0 \quad \text{per} \quad z \leq 4 \ \vee \ z \geq 9,$$

da cui

$$x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0 \quad \text{per} \quad x^2 \leq 4 \ \vee \ x^2 \geq 9,$$

ossia:

$$-2 \leq x \leq 2 \ \vee \ (x \leq -3 \ \vee \ x \geq 3).$$

● In generale, un'**equazione biquadratica** nell'incognita x è riconducibile alla forma:

$ax^4 + bx^2 + c = 0$,
$a \neq 0$.

● Essendo $x^2 = z$, sostituiamo a z i due valori trovati e otteniamo:

$x^2 = 4, x^2 = 9$.

3. Risolviamo la **disequazione binomia** $x^3 - 8 \leq 0$.

L'equazione associata $x^3 - 8 = 0$ è un'*equazione binomia*, con esponente $n = 3$ dispari.

La sua soluzione è:

$$x^3 = 8, \quad \text{da cui} \quad x = \sqrt[3]{8} = 2.$$

La disequazione è verificata per:

$$x \leq 2, \quad \text{ossia} \quad]-\infty; 2].$$

Osservazione. Per giustificare il risultato precedente, ricordiamo che $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Quindi $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$. Inoltre il trinomio $x^2 + 2x + 4$, che ha $\frac{\Delta}{4} = 1 - 4 < 0$, assume sempre segno positivo, e questo spiega perché il segno di $x^3 - 8$ dipende solo dal segno del fattore $(x - 2)$.

● In generale, un'**equazione binomia** è riconducibile alla forma:

$ax^n + b = 0$,

con $a \neq 0$ e n intero positivo.

4. Risolviamo la **disequazione trinomia** $x^6 - 3x^3 + 2 > 0$.

L'equazione associata $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$ è un'*equazione trinomia*.

Per risolverla, introduciamo l'incognita ausiliaria z e poniamo $x^3 = z$:

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \quad \text{per} \quad z_1 = 1, z_2 = 2.$$

Procediamo in maniera analoga all'esempio 2.

La disequazione di sesto grado, nell'incognita x, è equivalente alla disequazione di secondo grado, nell'incognita ausiliaria z.

● In generale, un'**equazione trinomia** nell'incognita x è riconducibile alla forma:

$ax^{2n} + bx^n + c = 0$,

con $a \neq 0$ e n intero positivo.

● Osserva che le equazioni biquadratiche sono particolari equazioni trinomie: quelle nelle quali $n = 2$.

Ricaviamo

$$z^2 - 3z + 2 > 0 \quad \text{per} \quad z < 1 \lor z > 2,$$

da cui

$$x^6 - 3x^3 + 2 > 0 \quad \text{per} \quad x^3 < 1 \lor x^3 > 2,$$

vale a dire:

$$x < 1 \lor x > \sqrt[3]{2}.$$

Le disequazioni fratte

Una disequazione è **fratta** se contiene l'incognita al denominatore. Può essere sempre trasformata in una disequazione del tipo

$$\boldsymbol{\frac{A(x)}{B(x)} > 0}$$

o in altre analoghe con i diversi segni di disuguaglianza.

Per risolvere una disequazione fratta dobbiamo studiare il segno della frazione $\frac{A(x)}{B(x)}$, esaminando quelli di $A(x)$ e di $B(x)$. Dobbiamo imporre $B(x) \neq 0$ per la condizione di esistenza della frazione.

IN PRATICA
▶ Videolezione 2

● Per ottenere una qualsiasi disequazione fratta in questa forma, trasportiamo tutti i termini al primo membro e li scriviamo con denominatore comune. Può succedere che $A(x)$ sia una costante. In questo caso il numeratore è sempre positivo o sempre negativo.

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione:

$$\frac{x^2 - 1}{2x^2 - 7x - 4} \geq 0.$$

Il denominatore deve essere non nullo, perciò:

$$\text{C.E.: } 2x^2 - 7x - 4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq -\frac{1}{2} \quad \land \quad x \neq 4.$$

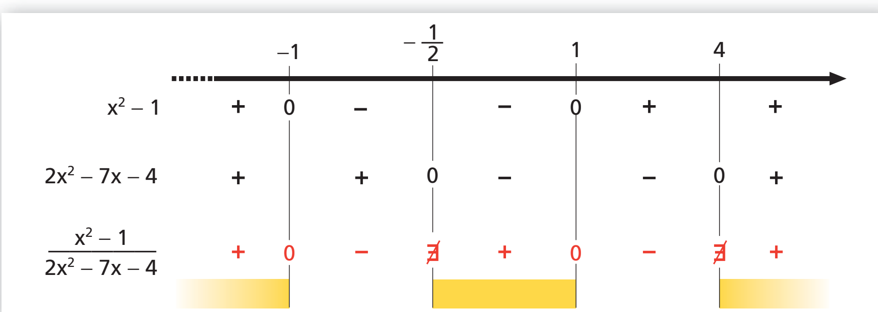
● Con C.E. indichiamo le condizioni di esistenza della frazione. Si ottengono ponendo il denominatore diverso da 0.

Studiamo il segno del numeratore.
Si ha $x^2 - 1 > 0$ per $x < -1 \lor x > 1$.

Studiamo il segno del denominatore: risolviamo $2x^2 - 7x - 4 > 0$.

Le radici dell'equazione associata sono $-\frac{1}{2}$ e 4, quindi:

$$2x^2 - 7x - 4 > 0 \quad \text{per} \quad x < -\frac{1}{2} \lor x > 4.$$



◀ **Figura 7** Rappresentazione grafica delle soluzioni. Il simbolo ∄ indica che la frazione non esiste quando il denominatore è 0.

La disequazione è verificata per:

$$x \leq -1 \lor -\frac{1}{2} < x \leq 1 \lor x > 4.$$

● Una frazione è uguale a 0 quando il suo numeratore è uguale a 0.
Pertanto $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ nel caso in cui $A(x) = 0$.

IN PRATICA
▶ Videolezione 3

5. I SISTEMI DI DISEQUAZIONI

DEFINIZIONE

Sistema di disequazioni

Un sistema di disequazioni è un insieme di più disequazioni nella stessa incognita, per le quali cerchiamo le soluzioni comuni.

In un sistema con due disequazioni, se chiamiamo S_1 e S_2 gli insiemi delle soluzioni delle due disequazioni e S quello delle soluzioni del sistema, abbiamo:

$S = S_1 \cap S_2$.

Le **soluzioni** del sistema sono quei numeri reali che soddisfano *contemporaneamente* tutte le disequazioni.

ESEMPIO

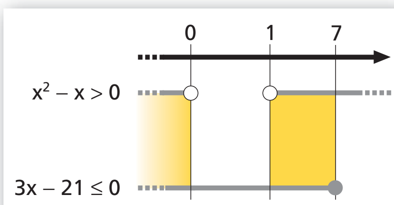
1. Risolviamo il seguente sistema di due disequazioni:

$$\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ 3x - 21 \leq 0 \end{cases}$$

Risolvendo separatamente le due disequazioni, otteniamo:

$x^2 - x > 0 \quad$ per $\quad x < 0 \ \vee \ x > 1;$

$3x - 21 \leq 0 \quad$ per $\quad x \leq 7.$



▶ **Figura 8** In ognuna delle rette la parte segnata rappresenta l'insieme delle soluzioni della disequazione. Un pallino pieno indica che il relativo valore è una soluzione, un pallino vuoto che il valore non è una soluzione.

Per ogni disequazione rappresentiamo su una retta orientata gli intervalli delle soluzioni (figura 8). Coloriamo poi la parte che rappresenta le soluzioni comuni alle due disequazioni.

Le soluzioni del sistema sono:

$x < 0 \ \vee \ 1 < x \leq 7, \quad$ ossia $\quad]-\infty; 0[\cup]1; 7].$

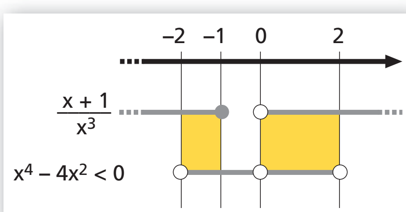
2. Risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x^3} \geq 0 \\ x^4 - 4x^2 < 0 \end{cases}$$

Risolvendo le due disequazioni, abbiamo:

$\dfrac{x+1}{x^3} \geq 0 \quad$ per $\quad x \leq -1 \vee x > 0;$

$x^4 - 4x^2 < 0 \quad$ per $\quad -2 < x < 2 \ \wedge \ x \neq 0.$



Rappresentiamo le soluzioni delle disequazioni e coloriamo la parte relativa alle soluzioni comuni.

◀ **Figura 9**

Le soluzioni del sistema sono:

$-2 < x \leq -1 \vee 0 < x < 2, \quad$ ossia $\quad]-2; -1] \cup]0; 2[.$

ESPLORAZIONE

Noleggiare film

Quando un commerciante decide di aprire un videonoleggio, deve valutare il numero x di film che può comprare con il suo capitale C. Non è detto che a un numero maggiore di film corrisponda un maggior guadagno.
Supponiamo che un film costi al noleggiatore una media di a euro. Allora il numero di film che può comprare soddisfa la disequazione

$$C - ax \geq 0,$$

che è come dire che non può comprarne più di quelli che il suo capitale gli permette.
Inoltre, un commerciante avveduto stima quanti film vengono noleggiati. Se ogni DVD viene preso in media N volte e se un film viene noleggiato ai clienti in media a b euro, deve risultare

$$Nbx - C \geq 0,$$

altrimenti il noleggiatore non recupera il suo capitale.
Del resto, il numero medio di noleggi N di un singolo DVD si può pensare proporzionale al numero di DVD presenti nel distributore: $N = px$. Una grande varietà di film, infatti, attrae maggiormente i clienti.

Sostituendo a N il valore px, otteniamo:

$$pbx^2 - C \geq 0.$$

Ebbene, il numero di film che è conveniente tenere nel distributore è una delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ C - ax \geq 0 \\ pbx^2 \geq C \end{cases}$$

La soluzione del sistema è:

$$\sqrt{\frac{C}{pb}} \leq x \leq \frac{C}{a}.$$

Il commerciante non potrà comprare più di $\frac{C}{a}$ DVD perché il suo capitale di partenza non glielo permette, ma dovrà acquistarne più di $\sqrt{\frac{C}{pb}}$ per avere un guadagno.

Attività

Auto o bici?

- Il professore di matematica per venire a scuola può usare la bicicletta o l'automobile. In bicicletta va a una velocità di 20 kilometri all'ora. In automobile va a 30 kilometri all'ora, ma ha bisogno di venti minuti per parcheggiare. Che mezzo gli conviene prendere?
- I problemi che abbiamo esaminato sono esempi semplificati di problemi di ottimizzazione della Ricerca operativa. Cerca notizie su questa parte della matematica.

Cerca nel Web:
ricerca operativa, operation research

6. LE EQUAZIONI E LE DISEQUAZIONI CON IL VALORE ASSOLUTO

● Il *valore assoluto* di un numero è per definizione *sempre positivo o nullo*.

● Il simbolo { usato per definire il valore assoluto non ha il significato di sistema di equazioni, ma serve solo per distinguere i due casi possibili del valore assoluto.

Il **valore assoluto** di un numero è uguale al numero stesso se il numero è positivo o nullo, è l'opposto del numero se questo è negativo. In generale:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ESEMPIO

$|+5| = 5;\quad |0| = 0;\quad |-5| = 5.$

Elenchiamo alcune utili proprietà del valore assoluto:

1. $|x| = |-x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R};$
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R};$
3. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0;$
4. $|x| = |y| \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R};$
5. $|x| \leq |y| \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq y^2 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R};$
6. $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$

IN PRATICA
▶ Videolezione 4

Le equazioni con il valore assoluto

Risolviamo ora equazioni nelle quali compaiono valori assoluti dell'incognita, o espressioni che la contengono.

● Vedremo negli esercizi come si possa utilizzare il metodo di questo esempio per risolvere anche equazioni con più di un valore assoluto.

ESEMPIO

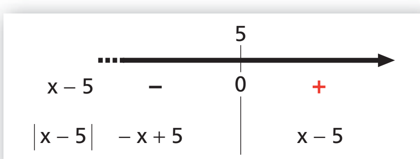
Risolviamo l'equazione:

$$|x - 5| = 3x - 1.$$

Studiamo il segno dell'espressione all'interno del valore assoluto:

$$x - 5 \geq 0 \quad \text{per} \quad x \geq 5.$$

Quindi $|x - 5| = \begin{cases} x - 5 & \text{se } x \geq 5 \\ -x + 5 & \text{se } x < 5. \end{cases}$



◀ **Figura 10** Quadro dei segni. Il valore assoluto coincide con $x - 5$ quando $x - 5$ è positivo; è l'opposto di $x - 5$, ossia $-(x - 5)$, quando $x - 5$ è negativo.

Pertanto dobbiamo risolvere:

$$x - 5 = 3x - 1 \qquad \text{quando } x \geq 5,$$
$$-x + 5 = 3x - 1 \qquad \text{quando } x < 5.$$

Questo significa che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è l'unione degli insiemi delle soluzioni dei seguenti sistemi.

Primo sistema

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x - 5 = 3x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ -2x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

Secondo sistema

$$\begin{cases} x < 5 \\ -x + 5 = 3x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 5 \\ -4x = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 5 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

La soluzione $x = -2$ non è accettabile perché non è maggiore di 5, mentre $x = \frac{3}{2}$ è accettabile perché minore di 5.

Le equazioni del tipo $|A(x)| = a$, con $a \in \mathbb{R}$

ESEMPIO

1. Risolviamo l'equazione:

$$|3 - x| = 2.$$

Possiamo utilizzare la quarta proprietà del valore assoluto

$$|x| = |y| \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

e quindi scrivere:

$$3 - x = \pm 2.$$

Otteniamo allora

$$3 - x = 2 \quad \vee \quad 3 - x = -2,$$

cioè:

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 5.$$

2. Risolviamo l'equazione:

$$|7 + x| = -3.$$

Questa equazione non ha soluzioni perché il valore assoluto non può essere un numero negativo.

Possiamo pensare $2 = |2|$.

In generale, se dobbiamo risolvere l'equazione

$$|A(x)| = a, \qquad \text{con } a \in \mathbb{R},$$

se $a \geq 0$, si risolve $A(x) = \pm a$;
se $a < 0$, l'equazione non ha soluzione.

IN PRATICA
▶ Videolezione 5

Le disequazioni con il valore assoluto

Per le disequazioni con valore assoluto si procede in modo simile alle equazioni.

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione:

$$|x-4| > -2x+1.$$

Studiamo il segno all'interno del valore assoluto:

$$x-4 \geq 0 \qquad \text{per } x \geq 4.$$

Quindi:

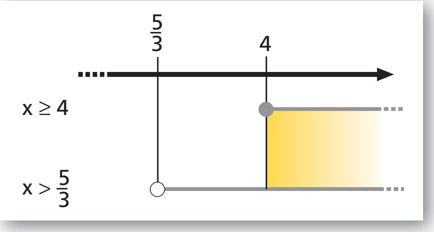
$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{se } x \geq 4; \\ -x+4 & \text{se } x < 4. \end{cases}$$

La disequazione ha come soluzioni i valori appartenenti all'unione degli insiemi delle soluzioni dei seguenti sistemi.

Primo sistema

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x-4 > -2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x > \dfrac{5}{3} \end{cases}$$



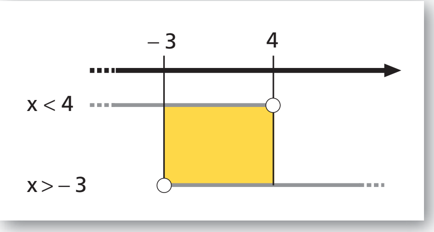
▲ **Figura 11**

$x \geq 4$ (figura 11);

Secondo sistema

$$\begin{cases} x < 4 \\ -x+4 > -2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 4 \\ x > -3 \end{cases}$$



▲ **Figura 12**

$-3 < x < 4$ (figura 12).

Le soluzioni della disequazione sono quindi:

$$-3 < x < 4 \quad \vee \quad x \geq 4, \qquad \text{cioè } x > -3.$$

Particolari disequazioni con il valore assoluto

Le disequazioni del tipo $|A(x)| < k$ (con k numero reale positivo)

ESEMPIO

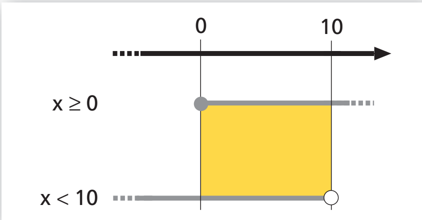
Risolviamo la disequazione:

$$|x| < 10.$$

Dobbiamo risolvere i seguenti sistemi e poi unire le soluzioni trovate.

Primo sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 10 \end{cases}$$

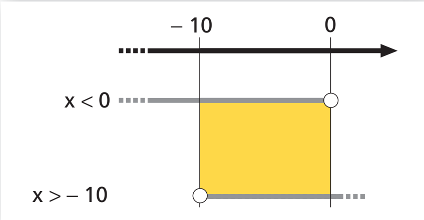


▲ Figura 13

$0 \leq x < 10$ (figura 13);

Secondo sistema

$$\begin{cases} x < 0 \\ -x < 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > -10 \end{cases}$$



▲ Figura 14

$-10 < x < 0$ (figura 14).

L'unione delle soluzioni dei due sistemi dà le soluzioni della disequazione assegnata:

$$|x| < 10 \quad \text{per} \quad -10 < x < 10.$$

In generale, con lo stesso procedimento, se $A(x)$ è una qualsiasi espressione contenente x, si può ricavare che la disequazione

$$|A(x)| < k, \quad \text{con} \quad k > 0,$$

è equivalente a:

$$-k < A(x) < k, \quad \text{ossia al sistema} \quad \begin{cases} A(x) > -k \\ A(x) < k \end{cases}$$

● Nei casi con $k < 0$ o $k = 0$ la disequazione non ha soluzione in quanto, essendo $|A(x)| \geq 0$, non si può mai verificare che un numero ≥ 0 sia minore di un numero negativo o nullo.

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione:

$$|x^2 - 9| < 7.$$

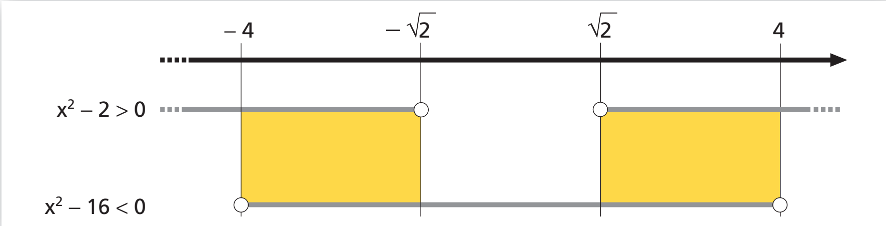
Essa è equivalente a

$$-7 < x^2 - 9 < 7, \text{ ossia al sistema } \begin{cases} -7 < x^2 - 9 \\ x^2 - 9 < 7 \end{cases}$$

Risolviamolo:

$$\begin{cases} x^2 - 2 > 0 \\ x^2 - 16 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2} \\ -4 < x < 4 \end{cases}$$

Compiliamo il quadro del sistema (figura 15).



◀ Figura 15

Le soluzioni della disequazione sono:

$$-4 < x < -\sqrt{2} \quad \vee \quad \sqrt{2} < x < 4.$$

Le disequazioni del tipo $|A(x)| > k$ (con k numero reale positivo)

ESEMPIO

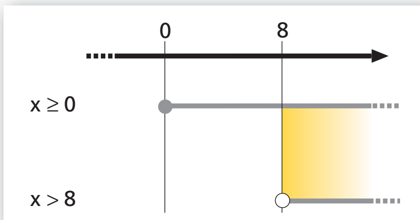
Risolviamo la disequazione:

$$|x| > 8.$$

Cerchiamo le soluzioni dei seguenti sistemi.

Primo sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 8 \end{cases}$$

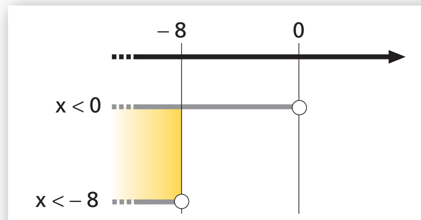


▲ Figura 16

$x > 8$ (figura 16);

Secondo sistema

$$\begin{cases} x < 0 \\ -x > 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < -8 \end{cases}$$



▲ Figura 17

$x < -8$ (figura 17).

L'unione delle soluzioni dei due sistemi dà le soluzioni della disequazione:

$$|x| > 8 \quad \text{per} \quad x < -8 \ \vee \ x > 8.$$

● Con $k < 0$, invece, la disequazione risulta sempre verificata in quanto $|A(x)| \geq 0$.
Per $k = 0$ la disequazione è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$ tranne che per i valori per cui $A(x) = 0$.

In generale, con lo stesso procedimento, si può ricavare che la disequazione

$$|A(x)| > k, \text{ con } k > 0, \quad \text{è equivalente ad} \quad A(x) < -k \ \vee \ A(x) > k,$$

ossia l'insieme delle sue soluzioni è l'unione degli insiemi delle soluzioni delle due disequazioni: $A(x) < -k$ e $A(x) > k$.

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione:

$$|x^2 - x| > 6.$$

Per farlo, dobbiamo risolvere le seguenti disequazioni.

Prima disequazione

$$x^2 - x < -6$$
$$x^2 - x + 6 < 0$$

Nell'equazione associata $x^2 - x + 6 = 0$ è $\Delta = 1 - 24 < 0$; la disequazione non è mai verificata.

Seconda disequazione

$$x^2 - x > 6$$
$$x^2 - x - 6 > 0$$

Nell'equazione associata $x^2 - x - 6 = 0$ è $\Delta = 25$; le radici sono -2 e 3.
La disequazione è verificata per:

$$x < -2 \ \vee \ x > 3.$$

Le soluzioni della disequazione iniziale sono date dall'unione delle soluzioni delle due disequazioni e, in questo caso, coincidono con quelle della seconda disequazione:

$$x < -2 \ \vee \ x > 3.$$

7. LE EQUAZIONI E LE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Un'**equazione** o **disequazione** è **irrazionale** se in essa ci sono radicali contenenti l'incognita.

Le equazioni irrazionali

Consideriamo l'equazione del tipo

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x),$$

con $n \geq 2$ intero.

- Se n è *dispari*, l'equazione si risolve elevando alla potenza n-esima entrambi i membri, cioè:

  $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$ è equivalente ad $A(x) = [B(x)]^n$ (se n è dispari).

- Se n è *pari*, è necessario porre alcune condizioni.
  La condizione di esistenza del radicale:

  $$A(x) \geq 0.$$

  La condizione di concordanza di segno per $B(x)$ (poiché un radicale con indice pari è sempre uguale a un numero positivo o nullo, affinché sia vera l'uguaglianza deve essere positivo o nullo anche il secondo membro):

  $$B(x) \geq 0.$$

  Per risolvere l'equazione possiamo poi elevare alla potenza n-esima entrambi i membri.

In sintesi, se n è pari, l'equazione $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases}$$

ESEMPIO

1. Risolviamo l'equazione:

$$\sqrt[3]{4 + x - x^3} = -x.$$

Poiché $n = 3$ è dispari, l'equazione è equivalente a

$$4 + x - x^3 = -x^3, \quad \text{cioè} \quad 4 + x = 0,$$

e quindi ha soluzione $x = -4$.

2. Risolviamo l'equazione:

$$\sqrt{2x^2 + x + 4} = 2x - 1.$$

$\sqrt{x-1} = x$ è un'equazione irrazionale.
$2\sqrt[3]{x} - x > 0$ è una disequazione irrazionale.
$\sqrt{2}\,x + x^2 = 0$ **non** è un'equazione irrazionale.

IN PRATICA
▶ Videolezione 6

Se n è dispari:
$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$,
$\forall a, b \in \mathbb{R}$.
Se n è pari:
$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$,
solo se a e b sono numeri reali non negativi.

Osserva che la condizione $A(x) \geq 0$ è implicita nella terza equazione e quindi si potrebbe tralasciare.

Negli esercizi considereremo anche **equazioni irrazionali con più radicali**.

Poiché $n = 2$ è pari, l'equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 2x^2 + x + 4 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 + x + 4 = (2x-1)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R} \\ x \geq \dfrac{1}{2} \\ 2x^2 + x + 4 = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 2x^2 - 5x - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \;\vee\; x = 3 \end{cases}$$

Il valore $x = -\frac{1}{2}$ non soddisfa la disequazione del sistema, per cui non è accettabile, mentre $x = 3$ è soluzione accettabile.

- Nell'equazione associata alla prima disequazione $\Delta < 0$, e quindi ogni $x \in \mathbb{R}$ è soluzione della disequazione.
- L'equazione $2x^2 - 5x - 3 = 0$ ha discriminante $\Delta = 25 + 24 = 49$, per cui ha soluzioni: $x = \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

Le disequazioni irrazionali

IN PRATICA ▶ Videolezione 7

Esaminiamo disequazioni del tipo

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \quad \text{oppure} \quad \sqrt[n]{A(x)} > B(x),$$

con $n \geq 2$ intero.

- Se n è *dispari*, sia la prima sia la seconda disequazione si risolvono elevando alla potenza n-esima entrambi i membri, ottenendo così una disequazione equivalente a quella data, cioè:

se n è dispari,

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \quad \text{è equivalente a} \quad A(x) < [B(x)]^n;$$
$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x) \quad \text{è equivalente a} \quad A(x) > [B(x)]^n.$$

- Il verso della disuguaglianza non cambia.

- Se n è *pari*, consideriamo il caso $n = 2$ e applichiamo il seguente principio.

Se a e b sono due numeri reali positivi o nulli, la relazione di disuguaglianza che c'è fra i due numeri è la stessa che c'è fra i loro quadrati:

$$\forall\, a, b \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a < b \quad \Leftrightarrow \quad a^2 < b^2.$$

La relazione enunciata nel principio può non essere valida se i due numeri non sono entrambi positivi o nulli.

Questo principio sarà utile perché ci permetterà di scrivere una disequazione irrazionale in forma razionale equivalente, elevando i due membri della disequazione al quadrato.

- Il principio è ancora valido se, invece di elevare al quadrato, eleviamo a una qualsiasi potenza con esponente pari.
- $-5 < 3$ ma non è vero che $25 < 9$.

Le disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} < B(x)$

Data la disequazione

$$\sqrt{A(x)} < B(x),$$

affinché sia soddisfatta, dobbiamo porre la condizione di esistenza del radicale:

$$A(x) \geq 0.$$

Inoltre, poiché il radicale aritmetico è un numero positivo o nullo, perché sia vera la disuguaglianza deve essere:

$$B(x) > 0.$$

Poste queste due condizioni, i due membri della disequazione sono entrambi positivi o nulli, quindi, per il principio che abbiamo illustrato sopra, possiamo elevarli al quadrato, ottenendo la relazione:

$$A(x) < [B(x)]^2.$$

In sintesi, la disequazione $\sqrt{A(x)} < B(x)$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}$$

● Se $B(x) \leq 0$, la disequazione non ha soluzione perché un numero positivo o nullo non può essere minore di un numero negativo o nullo.

● Se la disequazione ha il segno $\leq$, ossia è del tipo

$$\sqrt{A(x)} \leq B(x),$$

si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq [B(x)]^2 \end{cases}$$

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione:

$$\sqrt{x^2 + 2x - 15} < x - 1.$$

Essa è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 15 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ x^2 + 2x - 15 < x^2 + 1 - 2x \end{cases}$$

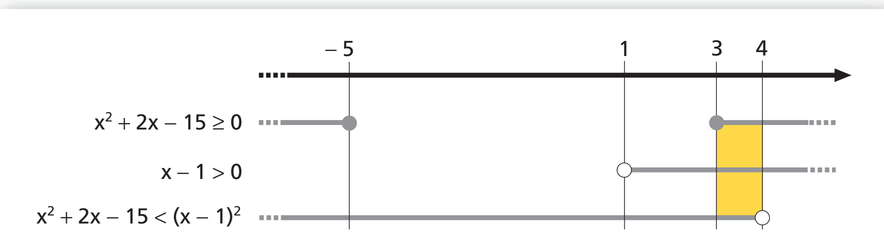
$$\begin{cases} x \leq -5 \quad \vee \quad x \geq 3 \\ x > 1 \\ 4x < 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq -5 \quad \vee \quad x \geq 3 \\ x > 1 \\ x < 4 \end{cases}$$

● Equazione associata alla prima disequazione:

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + 15 = 16$$

$$x = -1 \pm 4 = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -5 \end{matrix} \right.$$



◄ Figura 18

Le soluzioni del sistema, e quindi della disequazione, sono:

$$3 \leq x < 4.$$

Le disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} > B(x)$

Anche per una disequazione del tipo

$$\sqrt{A(x)} > B(x)$$

dobbiamo porre la condizione di esistenza del radicale:

$$A(x) \geq 0.$$

Dobbiamo poi risolvere due sistemi, distinguendo il caso in cui $B(x)$ è minore di 0 e quello in cui è maggiore o uguale a 0.

- Se $B(x) < 0$, la disequazione è senz'altro soddisfatta, perché il secondo membro è negativo ed è minore del primo, che è positivo o nullo. Quindi una parte delle soluzioni della disequazione irrazionale è data da quelle di un primo sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

- Se $B(x) \geq 0$, entrambi i membri della disuguaglianza sono positivi o nulli, quindi, se li eleviamo al quadrato, otteniamo una disuguaglianza con lo stesso verso:

$$A(x) > [B(x)]^2.$$

Otteniamo pertanto le restanti soluzioni della disequazione iniziale da un secondo sistema:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

Osserviamo che se è verificata la relazione $A(x) > [B(x)]^2$, allora $A(x)$, essendo maggiore di un quadrato, è positivo: quindi la condizione di esistenza del radicale, $A(x) \geq 0$, è superflua.

In sintesi, l'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{A(x)} > B(x)$ è l'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione:

$$\sqrt{x-1} > x-3.$$

Otteniamo:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 > (x-3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x < 3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 10 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x < 3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ 2 < x < 5 \end{cases}$$

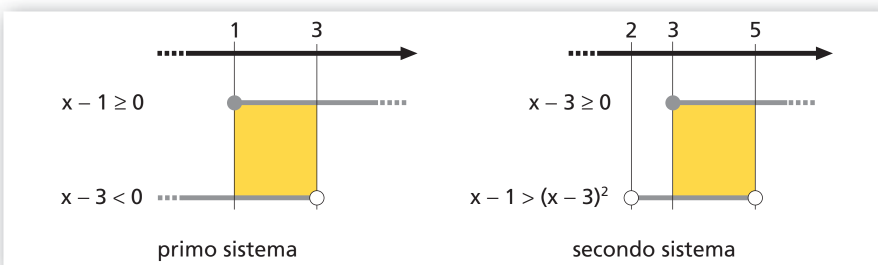
Equazione associata:

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$\Delta = 49 - 40 = 9$

$$x = \frac{7 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

▶ Figura 19



Il primo sistema ha come soluzioni $1 \leq x < 3$, il secondo $3 \leq x < 5$. L'unione dei due intervalli dà l'insieme delle soluzioni della disequazione:

$$1 \leq x < 5.$$

MADE IN...

Quando è più conveniente importare un bene dall'estero anziché produrlo?

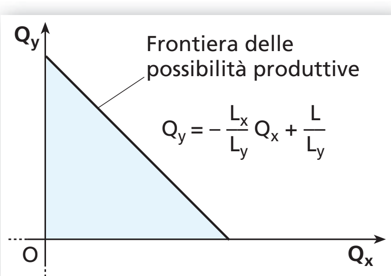
▶ Il quesito completo a pag. 1

Il boom cinese ha messo in allarme le economie dei Paesi più industrializzati, spingendo alcuni a invocare il ricorso al protezionismo.
Secondo la teoria dei vantaggi comparati (o modello ricardiano) formulata da David Ricardo nel 1817, questa scelta è sbagliata. In base a questo modello, tutti i Paesi traggono beneficio dagli scambi commerciali se esportano i beni per i quali hanno un vantaggio comparato.

Uno schema per capire
Consideriamo Cina e Italia, due Paesi che producono entrambi il bene x (magliette) e il bene y (lavastoviglie). Se L è la quantità totale di lavoro, L_x sono le ore-lavoro necessarie a un Paese per produrre una maglietta, L_y le ore-lavoro necessarie a produrre una lavastoviglie, Q_x il numero di magliette prodotte e Q_y il numero di lavastoviglie prodotte, si ha che:

$$L_x Q_x + L_y Q_y \leq L.$$

Sul piano cartesiano (Q_x, Q_y), lo spazio delimitato dalla disequazione rappresenta la produttività del Paese. La retta che delimita questo luogo di punti, la cosiddetta «frontiera delle possibilità produttive», mette in relazione la produttività dei due beni. Se si sfruttano tutte le risorse economiche disponibili, per produrre una quantità maggiore di x è necessario rinunciare a parte della produzione di y (nell'ipotesi di assenza di scambi commerciali). La frontiera è una retta di coefficiente angolare $-\frac{L_x}{L_y}$.



$\frac{L_x}{L_y}$ è detto costo-opportunità di x in termini di y. Per fare un esempio numerico, se in Cina sono necessarie 1 ora per produrre una maglietta ($L_x = 1$) e 8 ore per produrre una lavastoviglie ($L_y = 8$), il costo-opportunità delle magliette rispetto alle lavastoviglie è pari a $\frac{1}{8} = 0,125$; viceversa, il costo-opportunità delle lavastoviglie rispetto alle T-shirt è 8.
Va considerato anche il costo di produzione. L'economia tenderà a specializzarsi nella produzione del bene x se il suo prezzo di vendita relativo $\frac{P_x}{P_y}$ è maggiore del suo costo-opportunità, cioè se $\frac{L_x}{L_y} < \frac{P_x}{P_y}$, perché questo assicura guadagni più elevati.

Che cosa accade se i due Paesi iniziano a commerciare fra loro?
Secondo Ricardo, lo Stato che ha il costo-opportunità di un bene più basso rispetto all'altro ha un vantaggio comparato nella produzione di quel bene. Tenderà quindi a specializzarsi in questa produzione, esportandone di più e importando il secondo bene che non è riuscito a produrre. Ipotizziamo, proseguendo il nostro esempio, che in Cina (Paese A) la quantità di lavoro per realizzare una maglietta sia un trentesimo rispetto all'Italia (Paese B), cioè $L_x(B) = 30 \cdot L_x(A) = 30$, mentre il lavoro per realizzare una lavastoviglie sia pari a un decimo, cioè $L_y(B) = 10 \cdot L_y(A) = 80$.
Allora l'economia della Cina è più efficiente nella produzione di magliette che in quella di lavastoviglie rispetto all'Italia, avendo un costo-opportunità di questo bene inferiore:

$$\frac{1}{8} = \frac{L_x(A)}{L_y(A)} < \frac{L_x(B)}{L_y(B)} = \frac{3}{8}.$$

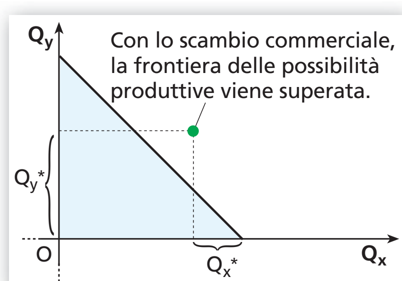
Pertanto, se

$$\frac{L_x(A)}{L_y(A)} < \frac{P_x}{P_y} < \frac{L_x(B)}{L_y(B)}$$

(dove P è il prezzo internazionale), il Paese A (Cina) si specializzerà nella produzione di magliette, mentre il Paese B (Italia) si specializzerà nella produzione di lavastoviglie. La Cina potrà quindi vendere una quantità Q_x^* del bene x (per produrre il quale sono servite $L = L_x \cdot Q_x^*$ ore-lavoro); col ricavato $Q_x^* \cdot P_x$ potrà acquistare una quantità Q_y^* di y pari a

$$Q_y^* = Q_x^* \cdot \frac{P_x}{P_y} > Q_x^* \cdot \frac{L_x}{L_y} = \frac{L}{L_y} = Q_y;$$

una quantità quindi maggiore rispetto alla quantità Q_y che avrebbe potuto produrre nelle stesse ore-lavoro L.



LABORATORIO DI MATEMATICA
LE DISEQUAZIONI

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Derive determiniamo per quali valori del parametro reale h la disequazione $(3h+3)x^2-3hx-8h-3>0$ ammette soluzioni esterne all'intervallo delle radici.

```
La disequazione data

                        2
#1:   (3·h + 3)·x   - 3·h·x - 8·h - 3 > 0

Il coefficiente di x^2

#2:   a := 3·h + 3

Il discriminante

                      2
#3:   Δ := (- 3·h)   - 4·(3·h + 3)·(- 8·h - 3)

                      2
#4:   Δ := 3·(35·h   + 44·h + 12)

Il caso richiesto

#5:   SOLVE([a > 0, Δ > 0], [h])

         ⎡          6        2⎤
#6:      ⎢-1 < h < - —, h > - —⎥
         ⎣          7        5⎦
```

▲ Figura 1

- Attiviamo Derive e immettiamo la disequazione data nell'etichetta #1 della zona algebrica (figura 1).
- Assegniamo il nome a all'espressione in h che rappresenta il coefficiente di x^2.
- Impostiamo il calcolo dell'espressione in h che rappresenta il discriminante della disequazione, assegnandogli il nome Δ.
- Con *Semplifica_Sviluppa* semplifichiamo l'espressione.
- Le disequazioni di secondo grado, poste maggiori di 0, ammettono soluzioni esterne all'intervallo delle radici quando il coefficiente di x^2 e il discriminante sono entrambi positivi. Impostiamo e risolviamo pertanto il corrispondente sistema di disequazioni nella variabile h, trovando che i valori richiesti dal problema sono quelli che appartengono agli intervalli $-1<h<-\frac{6}{7} \vee h>-\frac{2}{5}$.

Nel sito: ▶ 3 esercitazioni guidate ▶ 37 esercitazioni in più

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer discuti il tipo delle soluzioni delle seguenti disequazioni in relazione ai valori del parametro h e svolgi delle verifiche.

1 $3x-h>2h(1-x)$

2 $\frac{6x}{5}<\frac{1}{h}-\frac{h(h-1)}{10}$

3 $x^2-2\leq hx^2+5x-10$

4 $(h^4-10h^2)x^2-6x-1\leq 0$

5 $\frac{x^2}{h-1}>(h-3)x$

6 $x^2+\frac{2h-1}{h+1}x+9>0$

7 $\frac{x+1}{(h-2)x+2}<0$

8 $\frac{x^2-h}{x^2-1}\geq 0$

9 $x^3+2(h-2)x^2+x\geq 0$

10 $(h+1)x^3-hx<0$

LA TEORIA IN SINTESI

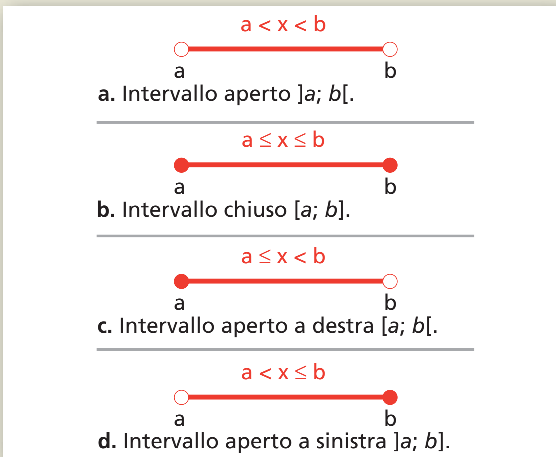
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

1. LE DISEQUAZIONI E LE LORO PROPRIETÀ

- **Disequazione**: è una disuguaglianza fra due espressioni letterali per la quale si cercano i valori di una o più lettere (le **incognite**) che la rendono vera.
  Tali valori sono le **soluzioni** della disequazione.

- **Intervalli**

Intervalli limitati



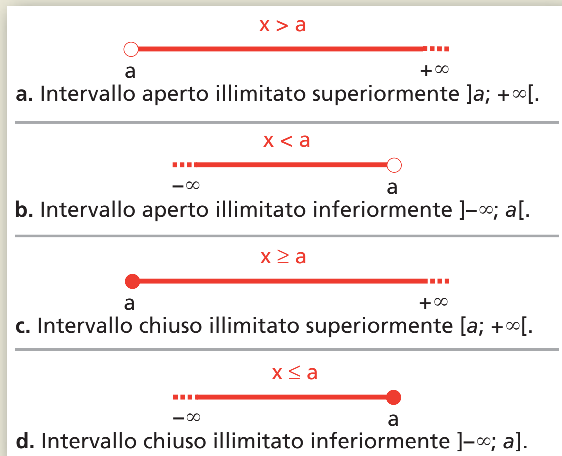
a. Intervallo aperto]*a*; *b*[.

b. Intervallo chiuso [*a*; *b*].

c. Intervallo aperto a destra [*a*; *b*[.

d. Intervallo aperto a sinistra]*a*; *b*].

Intervalli illimitati



a. Intervallo aperto illimitato superiormente]*a*; +∞[.

b. Intervallo aperto illimitato inferiormente]−∞; *a*[.

c. Intervallo chiuso illimitato superiormente [*a*; +∞[.

d. Intervallo chiuso illimitato inferiormente]−∞; *a*].

- **Princìpi di equivalenza**
  Data una disequazione, si ottiene una a essa equivalente:
  - aggiungendo a entrambi i membri uno stesso numero (o espressione);
  - moltiplicando o dividendo entrambi i membri per uno stesso numero (o espressione) *positivo*;
  - moltiplicando o dividendo entrambi i membri per uno stesso numero (o espressione) *negativo* e *cambiando il verso* della disuguaglianza.

2. LE DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

- Risoluzione della **disequazione di primo grado intera** $\boldsymbol{ax > b}$:

  - se $a > 0$, $\quad x > \dfrac{b}{a}$;
  - se $a = 0$, $\quad 0 \cdot x > b$ $\begin{cases} \text{se } b \geq 0, & \nexists x \in \mathbb{R}; \\ \text{se } b < 0, & \forall x \in \mathbb{R}; \end{cases}$
  - se $a < 0$, $\quad x < \dfrac{b}{a}$.

ESEMPIO: $3x > 5 \rightarrow x > \dfrac{5}{3}$;

$5x > 5x - 3 \rightarrow 0x > -3 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$;

$-5x > 12 \rightarrow x < -\dfrac{12}{5}$.

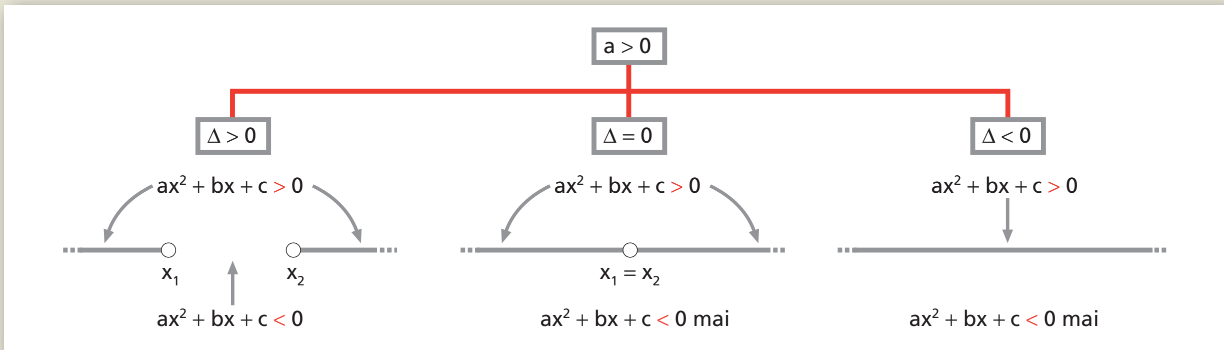
3. LE DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

- **Disequazione intera di secondo grado**: può essere ricondotta alla forma

  $ax^2 + bx + c > 0, \qquad \text{con } a > 0,$

  o alle analoghe che si ottengono con i segni $<$, $\leq$ o $\geq$.

- Per risolverla consideriamo l'*equazione associata* $ax^2 + bx + c = 0$, di cui chiamiamo x_1 e x_2 le soluzioni (quando esistono).



ESEMPIO: La disequazione $2x^2 - 5x - 3 > 0$ ha per soluzione $x < -\frac{1}{2} \vee x > 3$.

4. LE DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO E LE DISEQUAZIONI FRATTE

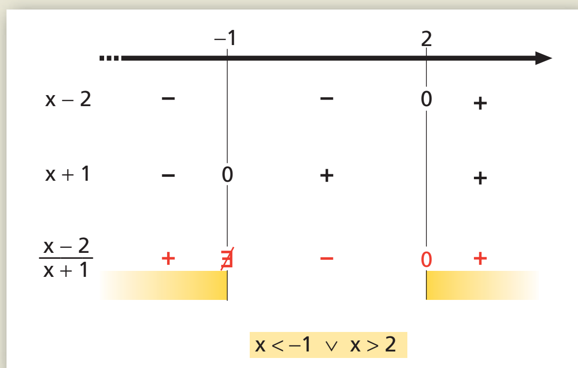
- Una disequazione del tipo $P(x) > 0$, con $P(x)$ polinomio di grado maggiore di 2, può essere risolta scomponendo in fattori di primo e secondo grado il polinomio $P(x)$ e **studiando il segno** del prodotto.
  Analogamente, per risolvere una **disequazione fratta** del tipo:

  $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$, posto $B(x) \neq 0$,

  dobbiamo studiare il segno della frazione $\frac{A(x)}{B(x)}$.

  ESEMPIO: $\frac{x-2}{x+1} > 0$.

  Compiliamo il quadro della figura.

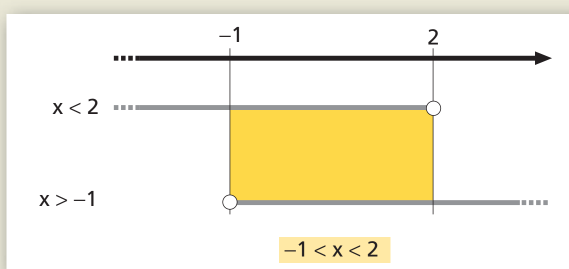


5. I SISTEMI DI DISEQUAZIONI

- **Sistema di disequazioni**: è un insieme di più disequazioni nella stessa incognita, per le quali cerchiamo le soluzioni comuni.

  ESEMPIO: $\begin{cases} x < 2 \\ x > -1 \end{cases}$

  Compiliamo il quadro della figura.



6. LE EQUAZIONI E LE DISEQUAZIONI CON IL VALORE ASSOLUTO

- Per risolvere **equazioni** o **disequazioni con il valore assoluto** di espressioni contenenti l'incognita, si esamina il segno di ogni espressione che sia all'interno di un valore assoluto.
- L'equazione $|\boldsymbol{A(x)}| = \boldsymbol{a}$ non ha soluzione se $a < 0$, altrimenti si risolve ponendo $A(x) = \pm a$.
- La disequazione $|\boldsymbol{A(x)}| < \boldsymbol{k}$, con $k > 0$, è equivalente a $-k < A(x) < k$, ossia al sistema:
  $\begin{cases} A(x) > -k \\ A(x) < k \end{cases}$

  ESEMPIO: $|x-2| < 5$ è equivalente a $-5 < x-2 < 5$, ossia
  $\begin{cases} -5 < x-2 \\ x-2 < 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x < 7 \end{cases} \rightarrow -3 < x < 7.$
- Le soluzioni della disequazione $|\boldsymbol{A(x)}| > \boldsymbol{k}$, con $k > 0$, sono date dall'unione delle soluzioni di $A(x) < -k$ e di $A(x) > k$.

  ESEMPIO: $|x-6| > 1$ è equivalente all'unione delle disequazioni $x-6 < -1 \vee x-6 > 1$, ossia $x < 5 \vee x > 7$.

7. LE EQUAZIONI E LE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

- Un'**equazione** o **disequazione** è **irrazionale** se contiene radicali con l'incognita nel radicando.

Equazioni irrazionali		
L'equazione	**equivale a**	
$\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$	• $A(x) = [B(x)]^n$	se n è dispari
	• $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases}$	se n è pari

Disequazioni irrazionali		
La disequazione	**equivale a**	
$\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$	• $A(x) < [B(x)]^n$	se n è dispari
	• $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^n \end{cases}$	se n è pari
$\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$	• $A(x) > [B(x)]^n$	se n è dispari
	• $\begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^n \end{cases}$	se n è pari

1. LE DISEQUAZIONI E LE LORO PROPRIETÀ

▶ Teoria a pag. 2

1 **VERO O FALSO?**

a) La disequazione $2x^3 - \frac{k}{x} + 2k < 0$ nell'incognita x è di terzo grado. V F

b) La disequazione $\sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{3}\,x > 1$ è irrazionale. V F

c) La disequazione $\frac{x-1}{k+3} > 0$ è letterale fratta nell'incognita x. V F

d) L'insieme delle soluzioni di una disequazione è l'insieme dei valori che soddisfano le condizioni di esistenza. V F

2 **TEST** If $a < b$ and $c < d$, which of the following statements is *always* true?

A $ac < bd$ B $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ C $a + b < c + d$ D $a - b < d - c$ E $a + b > c + d$

(USA *Tennessee Mathematics Teachers Association: 39th Annual Mathematics Contest*, 1995)

Gli intervalli

Stabilisci se i seguenti insiemi sono intervalli e, in caso affermativo, stabilisci se sono aperti o chiusi. Rappresentali sulla retta orientata e utilizzando la notazione con le parentesi quadre.

3 $\{x | x \in \mathbb{R};\ 3 \leq x \leq 7\}$ $[[3; 7]]$

4 $\{x | x \in \mathbb{R};\ -5 \leq x < 8\}$ $[[-5; 8[]$

5 $\{7, 9\}$ [non è un intervallo]

6 $\{x | x \in \mathbb{R};\ x \geq 7\}$ $[[7; +\infty[]$

7 $\{x | x \in \mathbb{R};\ -3 < x < -2\}$ $[]-3; -2[]$

8 $\{x | x \in \mathbb{R};\ x > 5\} \cup \{6, 7\}$ $[]5; +\infty[]$

Rappresenta graficamente, con le disuguaglianze e con le parentesi quadre, i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

9 Numeri compresi tra -2 e 9, estremi inclusi.

10 Numeri compresi tra $-\frac{1}{2}$ e 2, estremi esclusi.

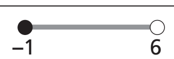
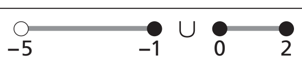
11 Numeri compresi tra -4 e 5, con -4 incluso e 5 escluso.

12 Numeri minori o uguali a 4.

13 Numeri non negativi.

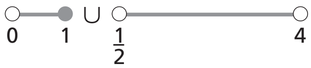
14 Numeri minori o uguali a -3 o maggiori di 1.

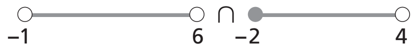
15 **COMPLETA** fornendo le rappresentazioni mancanti dei seguenti intervalli.

		
		$]-3; +\infty[$
	$x \leq -2 \vee x > 8$	
		
	$x < -3 \vee -2 < x \leq 1$	
		$]-\infty; 4]$

Rappresenta su una retta orientata l'unione o l'intersezione dei seguenti insiemi e scrivi il risultato anche con le disuguaglianze e con le parentesi quadre.

16  $[x \geq -4; [-4; +\infty[]$

17  $[0 < x < 4;]0; 4[]$

18  $[-1 < x < 4;]-1; 4[]$

19  $[x = 0]$

20 $\mathbb{R} \cup \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$ $[\mathbb{R}]$

21 $\varnothing \cup \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$ $[x \geq 1; [1; +\infty[]$

22 $\mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 3\}$ $[1 \leq x \leq 3; [1; 3]]$

23 $]1; 9] \cap [-4; 3[$ $[1 < x < 3;]1; 3[]$

Le disequazioni equivalenti

24 **VERO O FALSO?**

a) La disequazione $x - 2x^2 < -x + 5$ è equivalente a $2x^2 - 2x + 5 > 0$. V F

b) La disequazione $\frac{x^2 + 2}{x} < \frac{3}{x}$ è equivalente a $x^2 + 2 < 3$. V F

c) Le due disequazioni $\frac{x + 1}{x^2} > \frac{2}{x^2}$ e $x + 1 > 2$ sono equivalenti. V F

Risolvi le seguenti disequazioni, applicando il primo o il secondo principio di equivalenza. Per ogni passaggio indica quale principio hai applicato.

25 $x - 5 < 7$; $2x > 10$; $-3x < 4$; $2x > x + 3$; $9 > x + 1$; $3x + 2 < 1 + 2x$.

26 $9 < -3x$; $12x > 4x$; $\frac{1}{3}x > 2$; $5x - 7 < 6x$; $\frac{9}{2}x > 1$; $12x - 4 < 7$.

2. LE DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

▶ Teoria a pag. 4

Le disequazioni intere numeriche

27 **VERO O FALSO?**

a) La disequazione $(1 - \sqrt{3})x > 1$ ha come soluzione $x > \frac{1}{1 - \sqrt{3}}$. V F

b) La disequazione $\frac{x - 2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} > \frac{4}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ ha come soluzione $x < 6$. V F

c) La soluzione della disequazione $x > \frac{4 + x}{-3}$ è $x > -1$. V F

28 Find the solution set E of $2x+7 \leq 19$, $x \in \mathbb{R}$. Find the solution set H of $3-2x \leq 11$, $x \in \mathbb{R}$. Find $E \cap H$.
(IR *Leaving Certificate Examination*, Ordinary Level, 1995)
$[E \cap H = \{-4 \leq x \leq 6\}]$

Risolvi le seguenti disequazioni intere numeriche.

29 $\frac{3x+5}{2} - \frac{8x-5}{7} < \frac{x-1}{14}$ $\left[x < -\frac{23}{2}\right]$

30 $(x+1)(x^2-x+1)+(x+1)^2-5x > 5(1-x)+x^2(1+x)+2$ $\left[x > \frac{5}{2}\right]$

31 $(x-3)^2+3(3x+4) > (x+6)(x+3)+12$ $\left[x < -\frac{3}{2}\right]$

32 $x\left(\frac{1}{4}x+1\right)+\frac{1}{3}x > -\frac{1}{4}(4x-3)(4x+3)-\frac{1}{4}(9-x^2)+4x\left(x+\frac{1}{3}\right)-1$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

33 $\frac{x+4}{12} - \frac{x+2}{8} + \frac{5(x-1)}{24} > \frac{x-1}{4} - \frac{x-6}{24}$ $[x < -3]$

34 $x^2+3(x+1) > (x+3)^2-3(x+2)$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

35 $\frac{3x-2}{5} + \frac{5x-6}{15} + \frac{x-3}{10} - \frac{x-3}{30} \geq 0$ $[x \geq 1]$

36 $x(x-2) > (x-1)^2+2$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

37 $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}(x+3) - 2\left(\frac{15}{4}+3x\right) > (x-3)^2$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

38 $\left(2x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right) - 2\left(x^2-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{72} > 0$ $\left[x > -\frac{11}{24}\right]$

39 $\frac{x}{3-\sqrt{5}} + \frac{2-x}{3+\sqrt{5}} + 1 > -\frac{2\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$ $[x > -\sqrt{5}]$

40 $(x-\sqrt{2})^2-(x+\sqrt{2})^2 < \sqrt{2}(-4x+\sqrt{2})$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

41 $x^2+1+\sqrt{3}(x+\sqrt{2})-\sqrt{2}(x+\sqrt{3}) < -\sqrt{3}x+(x+\sqrt{3})^2$ $[x > -\sqrt{2}]$

42 $(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)-(2\sqrt{7}+x)(x-\sqrt{7})+(2x+1)(x-3) < x(1-\sqrt{7})$ $\left[x > \frac{7}{3}\right]$

43 $12\left[12\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x\right)^2+(3-4x)\left(1+\frac{4}{3}x\right)\right] > 7(10-7x)+2$ $[x < 0]$

44 $[x^2+2(x-1)-x(1+x)][(x-2)^2+6x] > (x-2)[x(x+2)+4]$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

Le disequazioni intere letterali

45 VERO O FALSO?

a) La disequazione $ax > a$ ha come soluzione $x > 1$. V F

b) La disequazione $ax - 1 > x$, se $a < 1$, ha come soluzione $x < \frac{1}{a-1}$. V F

c) La disequazione $\frac{x}{a} - 2 < x$, se $a < 1$, è verificata per $x < \frac{2a}{1-a}$. V F

46 COMPLETA La disequazione $2 - bx < x$:

a) se $b = -1$, ha come insieme delle soluzioni $S =$ .... ;

b) se $b < -1$, ha come soluzione x ....

47 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo la seguente disequazione intera letterale:

$$(x + a)^2 - (x - a)(x + a) \leq 0.$$

Eseguiamo i calcoli che permettono di arrivare alla forma $ax < b$:

$$x^2 + 2ax + a^2 - x^2 + a^2 \leq 0 \quad \rightarrow \quad 2ax + 2a^2 \leq 0 \quad \rightarrow \quad ax \leq -a^2.$$

Discussione

Abbiamo casi diversi a seconda del segno del coefficiente a di x.

- Se $a > 0$, possiamo dividere per a senza cambiare verso alla disequazione e troviamo le soluzioni:

  $$x \leq -a.$$

- Se $a = 0$, sostituendo, otteniamo $0x \leq 0$, vera per qualunque valore della x: la disequazione è sempre verificata. Scriviamo: $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Se $a < 0$, dividiamo per una quantità negativa, quindi cambiamo il verso alla disequazione; le soluzioni sono:

  $$x \geq -a.$$

Risolvi le seguenti disequazioni intere letterali.

48 $ax - 2 < a$ $\quad \left[a > 0, x < \frac{a+2}{a}; a = 0, \forall x \in \mathbb{R}; a < 0, x > \frac{a+2}{a}\right]$

49 $a(x - 1) < 3(1 - a)$ $\quad \left[a > 0, x < \frac{3-2a}{a}; a = 0, \forall x \in \mathbb{R}; a < 0, x > \frac{3-2a}{a}\right]$

50 $1 - ax \geq -2(a - 1)$ $\quad \left[a > 0, x \leq \frac{2a-1}{a}; a = 0, \forall x \in \mathbb{R}; a < 0, x \geq \frac{2a-1}{a}\right]$

51 $m(x + 1) - m(m - x) > 0$ $\quad \left[m < 0, x < \frac{m-1}{2}; m > 0, x > \frac{m-1}{2}; m = 0, \nexists x \in \mathbb{R}\right]$

52 $x(3a + 2x) + 2a(x - 1) < 2x^2$ $\quad \left[a > 0, x < \frac{2}{5}; a < 0, x > \frac{2}{5}; a = 0, \nexists x \in \mathbb{R}\right]$

53 $(x - a)(a + 1) < (x + 2)(a - 1) + 4 - ax$ $\quad [a < -2, x > a + 1; a = -2, \nexists x \in \mathbb{R}; a > -2, x < a + 1]$

54 $(m + 2)x - (m^2 + 5m + 6) \geq 0$ $\quad [m > -2, x \geq m + 3; m < -2, x \leq m + 3; m = -2, \forall x \in \mathbb{R}]$

55 $bx - 1 < 2(x - 2b)$ $\quad \left[b < 2, x > \frac{1-4b}{b-2}; b = 2, \nexists x \in \mathbb{R}; b > 2, x < \frac{1-4b}{b-2}\right]$

56 $2a(x + a) - a(x - a) - 3a^2 < a - 2x$ $\quad \left[a > -2, x < \frac{a}{a+2}; a < -2, x > \frac{a}{a+2}; a = -2, \nexists x \in \mathbb{R}\right]$

57 $3x - a \leq 2a(1 - x)$ $\quad \left[a > -\frac{3}{2}, x \leq \frac{3a}{3+2a}; a < -\frac{3}{2}, x \geq \frac{3a}{3+2a}; a = -\frac{3}{2}, \nexists x \in \mathbb{R}\right]$

58 $(kx + 1)(1 - kx) + k^2x(x + 3) + 3k > 2(1 + k)$ $\quad \left[k \neq 0, x > \frac{1-k}{3k^2}; k = 0, \nexists x \in \mathbb{R}\right]$

59 $\frac{1-x}{2} + \frac{3bx-1}{4} - b < 0$ $\quad \left[b > \frac{2}{3}, x < \frac{4b-1}{3b-2}; b = \frac{2}{3}, \forall x \in \mathbb{R}; b < \frac{2}{3}, x > \frac{4b-1}{3b-2}\right]$

60 $(x - 2a)^2 - (2ax - 1)^2 > 2a(1 - x) + x^2(1 - 4a^2) - 1$
$[a > 0, x > 1 - 2a; a < 0, x < 1 - 2a; a = 0, \nexists x \in \mathbb{R}]$

61 $x(1 - 2m^2) + 2mx(m + x) > (3x - 1)(mx + 1) - mx^2 + x$
$\left[m < 3, x < \frac{1}{3-m}; m > 3, x > \frac{1}{3-m}; m = 3, \forall x \in \mathbb{R}\right]$

62 $a(a+x)+x>2(a^2-a-2)+2+a$ $\quad[a<-1, x<a-2; a=-1, \nexists x\in\mathbb{R}; a>-1, x>a-2]$

63 $\frac{kx-2}{k}\geq\frac{x}{2}+1$ $\quad\left[k\neq 0, x\geq\frac{2k+4}{k}; k=0, \text{priva di significato}\right]$

64 $\frac{ax+2}{a-1}<3x$

$\left[a<1\vee a>\frac{3}{2}, x>\frac{2}{2a-3}; a=1, \text{priva di significato}; 1<a<\frac{3}{2}, x<\frac{2}{2a-3}; a=\frac{3}{2}, \nexists x\in\mathbb{R}\right]$

65 $1-2x>\frac{x}{a}$

$\left[a<-\frac{1}{2}\vee a>0, x<\frac{a}{1+2a}; a=-\frac{1}{2}, \forall x\in\mathbb{R}; -\frac{1}{2}<a<0, x>\frac{a}{1+2a}; a=0, \text{priva di significato}\right]$

66 $\frac{x+1}{2b}\leq\frac{2bx-4}{b}$

$\left[b<0\vee b>\frac{1}{4}, x\geq\frac{9}{4b-1}; b=0, \text{priva di significato}; 0<b<\frac{1}{4}, x\leq\frac{9}{4b-1}; b=\frac{1}{4}, \nexists x\in\mathbb{R}\right]$

67 $\frac{1-ax}{a+2}>x-\frac{1}{2}$

$\left[a<-2\vee a>-1, x<\frac{a+4}{4(a+1)}; a=-2, \text{priva di significato}; -2<a<-1, x>\frac{a+4}{4(a+1)}; a=-1, \forall x\in\mathbb{R}\right]$

68 $\frac{2x(a-x+3)}{a}-1>-\frac{x}{a}(2x+1)$

$\left[a<-\frac{7}{2}\vee a>0, x>\frac{a}{2a+7}; a=-\frac{7}{2}, \nexists x\in\mathbb{R}; -\frac{7}{2}<a<0, x<\frac{a}{2a+7}; a=0, \text{priva di significato}\right]$

69 $\frac{x}{a-1}+\frac{x+1}{2}<\frac{x+3}{2a-2}$

$\left[a<0\vee a>1, x<\frac{4-a}{a}; a=0, \nexists x\in\mathbb{R}; 0<a<1, x>\frac{4-a}{a}; a=1, \text{priva di significato}\right]$

70 $\frac{x+2}{k+2}\leq x+\frac{k}{2k+4}$

$\left[k<-2\vee k>-1, x\geq\frac{4-k}{2(k+1)}; k=-2, \text{priva di significato}; -2<k<-1, x\leq\frac{4-k}{2(k+1)}; k=-1, \nexists x\in\mathbb{R}\right]$

71 $\frac{2}{a-2}-x\leq\frac{ax}{4-2a}$

$\left[a<2\vee a>4, x\geq\frac{4}{a-4}; a=2, \text{priva di significato}; 2<a<4, x\leq\frac{4}{a-4}; a=4, \nexists x\in\mathbb{R}\right]$

72 $\frac{2x}{k}>3-x$

$\left[k<-2\vee k>0, x>\frac{3k}{k+2}; k=-2, \nexists x\in\mathbb{R}; -2<k<0, x<\frac{3k}{k+2}; k=0, \text{priva di significato}\right]$

73 Dati i tre numeri a, $a+x$, $a+2x$, trova per quali valori di x il prodotto dei primi due è maggiore del terzo al variare di a. Utilizzando i risultati ottenuti, analizza i casi particolari di $a=-1$, $a=5$, $a=3$.

$\left[a>2, x>\frac{a(1-a)}{a-2}; a=2, \forall x\in\mathbb{R}; a<2, x<\frac{a(1-a)}{a-2}; a=-1, x<\frac{2}{3}; a=5, x>-\frac{20}{3}; a=3, x>-6\right]$

74 Un rettangolo ha i lati che misurano $2b$ e $b+x$. Trova per quali valori di x:
a) il perimetro è maggiore di 4;
b) l'area è minore di 2.

$\left[\text{a) } 0\leq b\leq 1, x>2-3b; b>1, x\geq -b; \text{ b) } b=0, x\geq 0; b>0, -b\leq x<\frac{1-b^2}{b}\right]$

Lo studio del segno di un prodotto

75 **ESERCIZIO GUIDA**

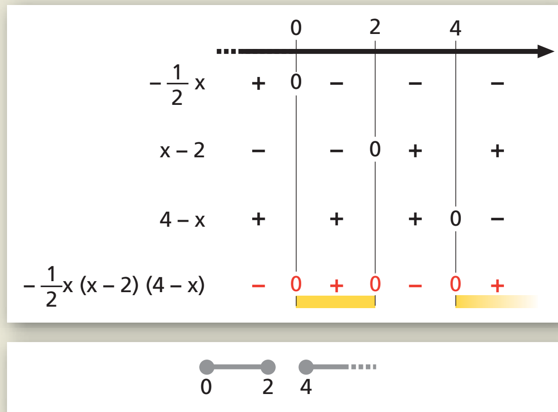
Risolviamo la disequazione $-\frac{1}{2}x(x-2)(4-x) \geq 0$.

Studiamo il segno di ognuno dei fattori, cercando i valori di x per i quali ciascun fattore è positivo:

$$-\frac{1}{2}x > 0 \quad \rightarrow \quad x < 0$$
$$x - 2 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 2$$
$$4 - x > 0 \quad \rightarrow \quad x < 4.$$

Compiliamo il quadro dei segni.
Poiché si richiede che il prodotto sia positivo o nullo, le soluzioni della disequazione sono:

$$0 \leq x \leq 2 \ \vee \ x \geq 4.$$



Risolvi le seguenti disequazioni.

76 $3(2x-1)(1+x) > 0$ $\left[x < -1 \vee x > \frac{1}{2}\right]$

77 $(x-8)(2-4x) \leq 0$ $\left[x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 8\right]$

78 $(-x-3)\left(\frac{1}{2}x-1\right) < 0$ $[x < -3 \vee x > 2]$

79 $6x(10x+2) \leq 0$ $\left[-\frac{1}{5} \leq x \leq 0\right]$

80 $-\frac{1}{3}(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right) > 0$ $\left[-2 < x < \frac{1}{3}\right]$

81 $-(2x+5)(1-x) < 0$ $\left[-\frac{5}{2} < x < 1\right]$

82 $x(1-x)(1+4x) > 0$ $\left[x < -\frac{1}{4} \vee 0 < x < 1\right]$

83 $(x-4)(x+6)(x+5) \geq 0$ $[-6 \leq x \leq -5 \vee x \geq 4]$

84 $\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{4}+x\right)\left(\frac{1}{8}-x\right) \geq 0$ $\left[-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{8} \vee x \geq \frac{1}{2}\right]$

85 $x(x-1)(6+2x)(4x-8) < 0$ $[-3 < x < 0 \vee 1 < x < 2]$

86 Se la disequazione $A(x) \geq 0$ ha come soluzioni $x \leq 4$, che soluzioni ha la disequazione $A(x) \cdot x(x-4) \geq 0$? $[x \leq 0 \vee x = 4]$

87 Considera la disequazione $-A(x) \cdot B(x) \cdot (2x-3) > 0$. Che soluzioni ha se $A(x) > 0$ per $x < -1$ e $B(x) > 0$ per $x > -\frac{1}{2}$? $\left[-1 < x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{3}{2}\right]$

3. LE DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

▶ Teoria a pag. 7

Le disequazioni di secondo grado numeriche

88 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo le seguenti disequazioni numeriche intere:

a) $6x^2 - 5x + 1 < 0$; b) $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$; c) $x^2 + 10x + 35 < 0$.

a) Risolviamo l'equazione associata $6x^2 - 5x + 1 = 0$; determiniamo Δ:

$$\Delta = 25 - 24 = 1.$$

Essendo $\boldsymbol{\Delta > 0}$, le soluzioni sono:

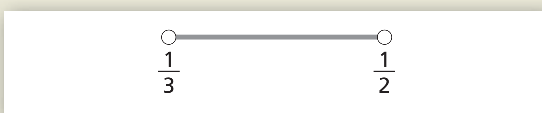
$$x = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

Continuiamo la soluzione in due modi:
- con la regola del segno del trinomio;
- con il metodo grafico della parabola.

La regola del segno del trinomio
Se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a > 0$) ha $\Delta > 0$, la disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ è verificata dai valori della x interni all'intervallo delle radici dell'equazione.

L'intervallo delle soluzioni di $6x^2 - 5x + 1 < 0$ è:

$$\left]\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right[, \quad \text{ovvero} \quad \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}.$$



Il metodo grafico della parabola
Associamo la disequazione alla parabola di equazione:

$$y = 6x^2 - 5x + 1.$$

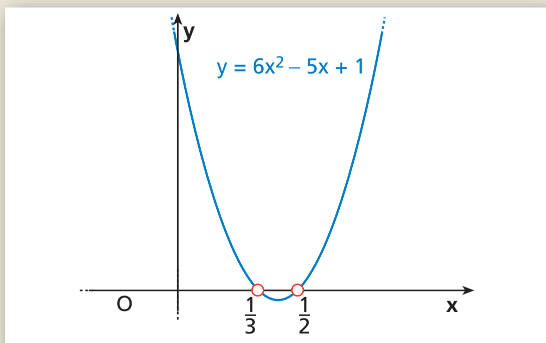
La parabola ha la concavità rivolta verso l'alto (il coefficiente a è positivo) e interseca l'asse x nei punti che sono le soluzioni dell'equazione associata, cioè nei punti di ascissa:

$$x_1 = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

I punti della parabola che hanno ordinata negativa sono quelli disposti «sotto l'asse x», sono cioè quelli che hanno ascissa maggiore di $\frac{1}{3}$ e minore di $\frac{1}{2}$.

Le soluzioni della disequazione sono:

$$\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}.$$



b) $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$.

Risolviamo l'esercizio in due modi.

La regola del segno del trinomio
Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata $4x^2 - 12x + 9 = 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = 36 - 36 = 0.$$

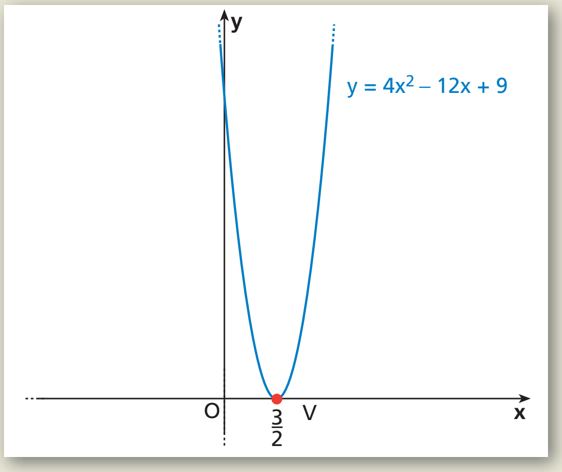
Poiché il coefficiente di x^2 è positivo e $\boldsymbol{\Delta = 0}$, la disequazione $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$ è verificata solo per $x = \frac{3}{2}$, valore in corrispondenza del quale il trinomio $4x^2 - 12x + 9$ si annulla.

Il metodo grafico della parabola
Associamo la disequazione alla parabola di equazione:

$$y = 4x^2 - 12x + 9.$$

La parabola ha la concavità rivolta verso l'alto (il coefficiente a è positivo) ed è tangente all'asse x nel vertice V, la cui ascissa $x = \frac{3}{2}$ è l'unica soluzione dell'equazione associata.
Gli altri punti della parabola hanno tutti ordinata positiva, per cui l'unica soluzione della disequazione è:

$$x = \frac{3}{2}.$$



c) $x^2 + 10x + 35 < 0$.

La regola del segno del trinomio
Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata $x^2 + 10x + 35 = 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = 25 - 35 = -10.$$

Poiché il coefficiente di x^2 è positivo e $\mathbf{\Delta < 0}$, la disequazione non è mai verificata.
Scriviamo pertanto:

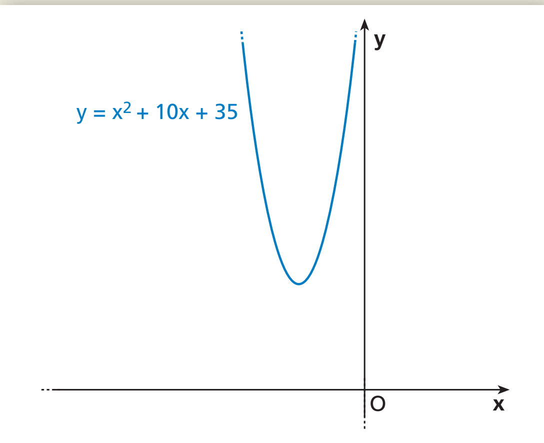
$$\nexists x \in \mathbb{R}.$$

Il metodo grafico della parabola
Associamo la disequazione alla parabola di equazione:

$$y = x^2 + 10x + 35.$$

La parabola ha la concavità rivolta verso l'alto (il coefficiente a è positivo) e non interseca l'asse x.

I punti della parabola hanno tutti ordinata positiva, per cui la disequazione non ha soluzioni.



Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado.

89 $3x^2 - 12 > 0$ $[x < -2 \vee x > 2]$

90 $9x^2 - 12x + 4 < 0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

91 $3x^2 + 2x + 5 > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

92 $\frac{1}{9}x^2 + x + 9 \leq 0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

93 $3x^2 - 2x - 5 > 0$ $\left[x < -1 \vee x > \frac{5}{3}\right]$

94 $10x^2 + 4x - \frac{1}{2} \leq 0$ $\left[-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{10}\right]$

95 $x^2 - 4x + 16 > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

96 $4x^2 + \frac{1}{4} - 2x \geq 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

97 $-\frac{1}{4}x^2 + 5x - 25 > 0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

98 $x(2 - x) < 6$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

99 $3(4x - 3) \geq 4x^2$ $\left[x = \frac{3}{2}\right]$

100 $x^2 - 1 > \frac{15}{4}x$ $\left[x < -\frac{1}{4} \vee x > 4\right]$

101 $-x^2 + 8x \geq 0$ $[0 \leq x \leq 8]$

102 $-x^2 + 1 > 0$ $[-1 < x < 1]$

103 $-\frac{1}{4}x^2 \leq 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

104 $3x(x - 1) + (x^2 + 1) < 0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

105 $-x^2 + 14x - 49 < 0$ $[x \neq 7]$

106 $-2x^2 + 7x - 3 < 0$ $\left[x < \frac{1}{2} \vee x > 3\right]$

107 $2(x-1)(x+3) \geq 0$ $[x \leq -3 \vee x \geq 1]$

108 $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2 \leq 0$ $[x = \sqrt{2}]$

ESERCIZI VARI Le disequazioni di 2° grado numeriche intere

109 **VERO O FALSO?**

a) Se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ non ha soluzioni, allora anche la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ non ha soluzioni. V F

b) Se la disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ non ha soluzioni, allora significa che l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ è impossibile. V F

c) $x^2 \geq 16$ ha come soluzione $x \geq \pm 4$. V F

d) $(x+2)^2 > (x+2)(3-x)$ è equivalente a $(x+2) > (3-x)$. V F

110 Scrivi una disequazione di secondo grado la cui soluzione è $-1 < x < 4$ e una disequazione verificata per $x \leq -1 \vee x \geq 5$. $[x^2 - 3x - 4 < 0;\ x^2 - 4x - 5 \geq 0]$

111 **COMPLETA**

a) $x^2 \ldots 1 > 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $x^2 \ldots 1 < 0$ $\quad$ per $-1 < x < 1$.

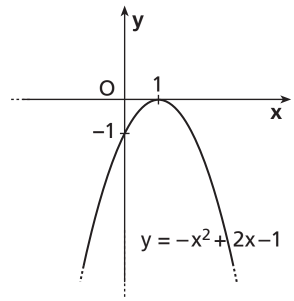
c) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ $\quad$ per … .

d) $-x^2 + 2x - 10 > 0$ $\quad$ per … .

e) $x^2 \ldots 9 < 0$ $\quad$ per nessun valore di x.

f) $x(x-3) < 0$ $\quad$ per … .

112 **TEST** Osservando il grafico in figura puoi dedurre che il segno del trinomio $-x^2 + 2x - 1$ *non* è negativo:



A $\forall x \in \mathbb{R}$.

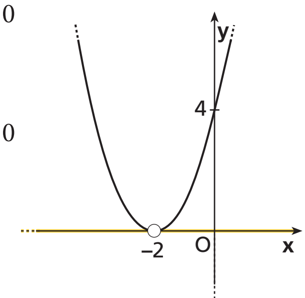
B $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

C $\nexists x \in \mathbb{R}$.

D per $x > -1$.

E per $x = 1$.

113 **TEST** In figura sono rappresentate le soluzioni di *una sola* fra le seguenti disequazioni. Quale?



A $x^2 + 4x + 4 < 0$

B $x^2 + 2x > 0$

C $x^2 - 2x < 0$

D $x^2 + 4x + 4 > 0$

E $2x^2 + 4 > 0$

114 **VERO O FALSO?**

a) Se $ax^2 + bx + c \geq 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$, allora $a > 0$, $\Delta = 0$. V F

b) Se $ax^2 + bx + c \geq 0$ non ha soluzioni, allora $a < 0$, $\Delta < 0$. V F

c) Se $ax^2 + bx + c \leq 0$ ha una sola soluzione, allora $a < 0$, $\Delta = 0$. V F

d) Se $ax^2 + bx + c \leq 0$ non ha soluzioni, allora $a > 0$, $\Delta < 0$. V F

e) Se $ax^2 + bx + c < 0$ ha $\Delta < 0$ e $a < 0$, allora ha per soluzioni l'insieme $\mathbb{R}$. V F

f) Se $ax^2 + bx + c > 0$ ha $\Delta = 0$ e $a < 0$, allora non ha soluzioni. V F

115 Risolvi senza svolgere calcoli le seguenti disequazioni.

a) $-5 - (x+1)^2 \geq 0$;

b) $(x-3)^2 \geq -2$;

c) $8x^2 \geq -(x+2)^2$;

d) $(x-4)^2 + 2(x-1)^2 > 0$;

e) $(x-3)^2 + x^2 - 4x \geq -4$;

f) $-(3x-1)^2 \geq 0$.

Risolvi le seguenti disequazioni.

116 $(x+3)^2+12(2-x)>3(3-4x)$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

117 $2x(x+1)+4(x-2)+3(1-3x)>0$ $\left[x<-1 \vee x>\frac{5}{2}\right]$

118 $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+2(8+x)<\frac{1}{4}(49+8x)$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

119 $(x-1)^2+10x-7(x+1)>0$ $[x<-3 \vee x>2]$

120 $2x(x+1)-(x^2+1)<2x^2$ $[x \neq 1]$

121 $4(x^2-1)+(x+1)(x-3)<0$ $\left[-1<x<\frac{7}{5}\right]$

122 $\frac{x(x+3)}{3}+\frac{x(2x-1)}{2}>-\frac{3}{2}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

123 $(1-x)+(x+4)^2<x+2(8-x)$ $[-\sqrt{15}-4<x<\sqrt{15}-4]$

124 $\frac{1}{2}(x-1)+5\left(\frac{1}{2}x-7\right)>-\frac{1}{2}x^2$ $[x>4\sqrt{5}-3 \vee x<-4\sqrt{5}-3]$

125 $8(x^2+2-x)<x(16-x)$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

---

126 $\frac{5}{2}x(x+1)+\frac{3}{2}\left(-x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{24}\right)>0$ $\left[x \neq -\frac{1}{4}\right]$

127 $(2x+3)\left(x+\frac{3}{2}\right)-7x>2\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{2}x\right)$ $[x<-2 \vee x>-1]$

128 $\frac{19}{30}+\frac{x-3}{5}+\frac{2x^2+1}{2}>2\left(\frac{7x^2-1}{15}\right)$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

129 $(x+1)^3>x(x^2-2)+(x-2)(x+1)$ $\left[x<\frac{-3-\sqrt{3}}{2} \vee x>\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right]$

130 $1+(3x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}(14-9x)<1-3x$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

131 $3(x-3)(x+1)+3(x^2+6x-1)-2(x^2-11)>1$ $\left[x \neq -\frac{3}{2}\right]$

132 $\frac{7}{3}x(x+3)+\frac{2(x^2+18)}{3}+5x>x+2$ $\left[x<-2 \vee x>-\frac{5}{3}\right]$

133 $x(x^2-3)+x(-3x+2)+2(2x-1)-4(x-2)>x(x^2-4)+14$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

134 $x\left(x+\frac{11}{7}\right)+(2-x)(4+x^2+2x)+x\left(x^2+\frac{3}{7}\right)+1>0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

135 $x(x+2\sqrt{2})+2(\sqrt{2}x-6)<3\sqrt{2}x$ $[-3\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}]$

136 $\frac{9}{16}+x\left(x+\frac{1}{2}\right)+4\left(x^2+\frac{1}{64}\right)>\left(x+\frac{3}{4}\right)^2$ $\left[x \neq \frac{1}{8}\right]$

137 $2\left(x^2+\frac{1}{12}\right)+x[6(x-1)+x]>x(x-1)-\frac{3}{4}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

138 $x^2+\left(\frac{1}{2}+3x\right)(-x+8)-\frac{1}{4}\geq x\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{207}{4}$ $[x=4]$

139 $\frac{2-\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}+\frac{x^2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1+x}{\sqrt{6}}>0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

140 $\frac{7}{3}\left(x^2+\frac{75}{28}\right)+x\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}x\right)-\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)>2\left(\frac{16}{5}x-\frac{1}{4}\right)$ $[x \neq 3]$

141 $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+(x-1)(x+1)\geq\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

142 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(1+x)(1-x)<\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}+x\right)$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

143 $2x\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{5}\right)+\frac{4}{3}\left(x^2+\frac{33}{16}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}-3x\right)-\frac{11}{10}x>4(1-x)$ $\left[x<-\frac{9}{10}\vee x>0\right]$

144 $2(1+2\sqrt{3}\,x)+x(x-\sqrt{2})+x^3-\sqrt{2}\,(-1+x^2+4\sqrt{3})>x^2(x-\sqrt{2})+\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)$ $[x<-4\sqrt{3}\vee x>\sqrt{2}]$

145 $\sqrt{2}\,x\left(1+\sqrt{2}\,x-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+x>\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}\,x$ $\left[x<-\frac{1}{2}\vee x>\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

146 $\frac{1}{7}(x+21)^2+5x\left(\frac{x}{7}+\frac{1}{3}\right)+\frac{13}{4}>\frac{3-40x}{12}$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

Le disequazioni intere letterali di secondo grado

147 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo la seguente disequazione intera letterale di secondo grado:

$$(x-3)(x+3)+2k(1-x)>-12.$$

Sviluppiamo i calcoli:

$$x^2-9+2k-2kx+12>0$$
$$x^2-2kx+(2k+3)>0.$$

Determiniamo il discriminante dell'equazione associata:

$$\Delta=4k^2-4(2k+3)=4k^2-8k-12.$$

Discussione

Abbiamo casi diversi a seconda del segno di Δ.

- $\Delta=0$, cioè $k^2-2k-3=0$, per $k=-1$ e $k=3$; poiché il coefficente a di x^2 è positivo, la disequazione è verificata per ogni $x\in\mathbb{R}$, esclusa la radice dell'equazione associata:

  $k=-1 \quad\to\quad x\neq-1,$
  $k=3 \quad\to\quad x\neq 3.$

- $\Delta<0$ per $-1<k<3$; poiché $a>0$, la disequazione è sempre verificata.
- $\Delta>0$ per $k<-1$ e $k>3$; allora l'equazione associata ha due soluzioni,

  $$x_1=k-\sqrt{k^2-2k-3},\quad x_2=k+\sqrt{k^2-2k-3},$$

  e, poiché $a>0$, la disequazione è verificata per valori di x esterni all'intervallo di estremi x_1 e x_2.

Riassumendo, le soluzioni della disequazione sono le seguenti:

- se $-1<k<3$, $\quad\forall x\in\mathbb{R}$;
- se $k=-1$, $\quad x\neq-1$;
- se $k=3$, $\quad x\neq3$;
- se $k<-1\vee k>3$, $\quad x<k-\sqrt{k^2-2k-3}\ \vee x>k+\sqrt{k^2-2k-3}$.

Risolvi le seguenti disequazioni intere letterali di secondo grado.

148 $(x-a)(x+a)+(3+a)x+a(a-1)\leq 0$ $\quad(-9<a<-1)$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

149 $x(x+2a)-3bx-6ab<0$ $\quad(a>0, b>0)$ $[-2a<x<3b]$

150 $\frac{x(x+a)}{2a}-\frac{(2-ax)x}{3a}<0$ $\quad\left(a<-\frac{3}{2}\right)$ $\left[\frac{4-3a}{3+2a}<x<0\right]$

151 $ax^2+(a^2-b)x-ab\leq 0$ $\quad(a>0, b>0)$ $\left[-a\leq x\leq\frac{b}{a}\right]$

152 $2a^2x^2 + 5ax - 3 < 0$ $\left[a < 0, \frac{1}{2a} < x < -\frac{3}{a}; a = 0, \forall x \in \mathbb{R}; a > 0, -\frac{3}{a} < x < \frac{1}{2a}\right]$

153 $-3x^2 + 2a(a + x) - 3ax \geq 0$ $\left[a < 0, \frac{2}{3}a \leq x \leq -a; a = 0, x = 0; a > 0, -a \leq x \leq \frac{2}{3}a\right]$

154 $a^2x^2 + 3ax - 10 \geq 0$ $\left[a < 0, x \leq \frac{2}{a} \vee x \geq -\frac{5}{a}; a = 0, \nexists x \in \mathbb{R}; a > 0, x \leq -\frac{5}{a} \vee x \geq \frac{2}{a}\right]$

155 $x^2 + 4ax + 5a^2 > 0$ $[a \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}; a = 0, x \neq 0]$

156 $x^2 - (a + 1)x + a < 0$ $[a < 1, a < x < 1; a = 1, \nexists x \in \mathbb{R}; a > 1, 1 < x < a]$

157 $ax^2 + x(a^2 - 1) - a < 0$ $\left[a < 0, x < \frac{1}{a} \vee x > -a; a = 0, x > 0; a > 0, -a < x < \frac{1}{a}\right]$

158 $(3a - x)(5ax + 3) < 0$ $\left[a < 0, 3a < x < -\frac{3}{5a}; a = 0, x > 0; a > 0, x < -\frac{3}{5a} \vee x > 3a\right]$

159 $4ax^2 + 9 < 0$ $\left[a < 0, x < -\frac{3}{2\sqrt{-a}} \vee x > \frac{3}{2\sqrt{-a}}; a \geq 0, \nexists x \in \mathbb{R}\right]$

160 $x(x - a) \leq 2(a - x)$ $[a < -2, a \leq x \leq -2; a = -2, x = -2; a > -2, -2 \leq x \leq a]$

161 $x^2 - 4 + a(4 - x) < 3x$ $[a < 5, a - 1 < x < 4; a = 5, \nexists x \in \mathbb{R}; a > 5, 4 < x < a - 1]$

162 $3x^2 + a(1 - 2x) \geq 1 - x^2$ $\left[a < 2, x \leq \frac{a-1}{2} \vee x \geq \frac{1}{2}; a = 2, \forall x \in \mathbb{R}; a > 2, x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq \frac{a-1}{2}\right]$

163 $(x + 2a)(x - 2a) \geq 1 - 4a$ $\left[a \neq \frac{1}{2}, x \leq -|2a - 1| \vee x \geq |2a - 1|; a = \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}\right]$

164 $ax^2 + (3 - a^2)x - 3a \geq 0$ $\left[a < 0, a \leq x \leq -\frac{3}{a}; a = 0, x \geq 0; a > 0, x \leq -\frac{3}{a} \vee x \geq a\right]$

165 $ax^2 + (a - 2)x - 2a - 4 > 0$ $\left[a < -\frac{2}{3}, -2 < x < \frac{a+2}{a}; a = -\frac{2}{3}, \nexists x \in \mathbb{R}; -\frac{2}{3} < a < 0, \frac{a+2}{a} < x < -2;\right.$
$\left. a = 0, x < -2; a > 0, x < -2 \vee x > \frac{a+2}{a}\right]$

166 $3(x - 1)(x + 1) + 2x < -3 - \frac{1}{a}$
$\left[0 < a \leq 3, \nexists x \in \mathbb{R}; a < 0 \vee a > 3, -\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{a-3}{a}} + 1\right) < x < \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{a-3}{a}} - 1\right)\right]$

167 $x - 4a < \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(x - 1)^2$ $\left[a \leq -\frac{1}{4}, \nexists x \in \mathbb{R}; a > -\frac{1}{4}, -\sqrt{8a + 2} < x < \sqrt{8a + 2}\right]$

168 $kx(k - x) \geq -x(1 - 2k)$
$\left[k < 0, x \leq \frac{(k-1)^2}{k} \vee x \geq 0; k = 0, x \geq 0; k > 0 \wedge k \neq 1, 0 \leq x \leq \frac{(k-1)^2}{k}; k = 1, x = 0\right]$

169 $(x + k)^2 - 2k(x - 2) - 4(x + k) < 0$ $[k \leq -2 \vee k \geq 2, \nexists x \in \mathbb{R}; -2 < k < 2, 2 - \sqrt{4 - k^2} < x < 2 + \sqrt{4 - k^2}]$

170 $x(x + 4) - k(k + 6) - 5 > 0$ $[k < -3, x < k + 1 \vee x > -k - 5; k = -3, x \neq -2; k > -3, x < -k - 5 \vee x > k + 1]$

171 $2x(x - 1) - k(x + 2) + 3k \geq 0$ $\left[k < 2, x \leq \frac{k}{2} \vee x \geq 1; k = 2, \forall x \in \mathbb{R}; k > 2, x \leq 1 \vee x \geq \frac{k}{2}\right]$

172 $2ax^2 + a(x - 1) - (x + 1) < 0$ $\left[a < -\frac{1}{3}, x < -1 \vee x > \frac{a+1}{2a}; a = -\frac{1}{3}, x \neq -1; -\frac{1}{3} < a < 0,\right.$
$\left. x < \frac{a+1}{2a} \vee x > -1; a = 0, x > -1; a > 0, -1 < x < \frac{a+1}{2a}\right]$

173 Determina per quali valori del parametro a la disequazione $x^2 + (a-1)x + a + \frac{1}{4} > 0$ risulta verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$. $[0 < a < 6]$

174 Trova per quali valori di a l'equazione $(a-2)x^2 + ax - a - 2 = 0$ risulta impossibile.
$\left[-\frac{4}{5}\sqrt{5} < a < \frac{4}{5}\sqrt{5}\right]$

175 Trova per quali valori di k la disequazione $x^2 - 2kx + 2k + 3 < 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$.
$[-1 \leq k \leq 3]$

4. LE DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO E LE DISEQUAZIONI FRATTE

▶ Teoria a pag. 11

Le disequazioni di grado superiore al secondo

IN PRATICA
▶ Videolezione 1

Le disequazioni binomie

176 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo le seguenti disequazioni:

a) $x^3 + 125 < 0$; **b)** $x^5 + 32 > 0$; **c)** $x^6 - 64 \geq 0$.

a) Per scomporre il binomio $x^3 + 125$, ricordiamo il prodotto notevole

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

dove $a^2 - ab + b^2$ è un trinomio con $\Delta < 0$.
Nel nostro caso è

$$x^3 + 125 = (x+5)(x^2 - 5x + 25),$$

da cui:

$$x^3 + 125 < 0 \quad \text{per} \quad x + 5 < 0.$$

La disequazione è verificata per $x < -5$.

b) Risolviamo l'equazione binomia associata:

$$x^5 + 32 = 0 \ \rightarrow \ x^5 = -32 \ \rightarrow \ x = \sqrt[5]{-32} = -2.$$

Il segno del binomio $x^5 + 32$ coincide con il segno del binomio $x + 2$.
La disequazione è verificata per $x > -2$.

c) Scomponiamo il binomio $x^6 - 64$, ricordando il prodotto notevole:

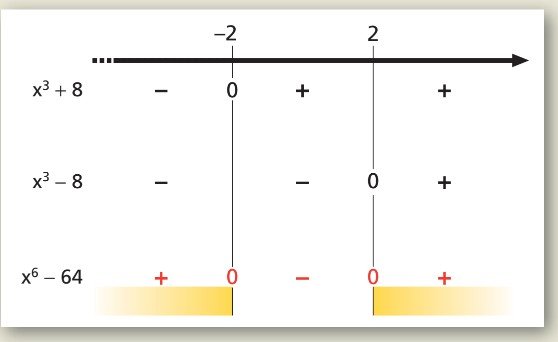
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Nel nostro caso è:

$$x^6 - 64 = (x^3 + 8)(x^3 - 8).$$

Studiamo il segno di ciascun fattore binomio:

$x^3 + 8 > 0$ per $x > -2$;
$x^3 - 8 > 0$ per $x > 2$.



La disequazione è verificata per $x \leq -2 \vee x \geq 2$.

Risolvi le seguenti disequazioni binomie.

177 $x^4 + 3 \geq 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

178 $x^3 + 1 \leq 0$ $[x \leq -1]$

179 $5x^5 - 1 > 0$ $\left[x > \frac{1}{\sqrt[5]{5}}\right]$

180 $2x^6 + 1 \geq 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

181 $x^4 - 81 < 0$ $[-3 < x < 3]$

182 $4x^8 + 1 \geq 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

Le disequazioni trinomie

183 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo la seguente disequazione:

$$x^8 - 15x^4 - 16 \geq 0.$$

Consideriamo l'equazione associata:

$$x^8 - 15x^4 - 16 = 0.$$

Si tratta di un'equazione trinomia e la risolviamo ponendo:

$$x^4 = z$$

$$z^2 - 15z - 16 = 0 \to z_1 = -1, z_2 = 16.$$

La disequazione di ottavo grado, nella variabile x, è equivalente alla disequazione di secondo grado, nella variabile ausiliaria z, ricavata ponendo $x^4 = z$. Otteniamo

$$z^2 - 15z - 16 \geq 0 \text{ per } z \leq -1 \vee z \geq 16,$$

vale a dire

$$x^8 - 16x^4 - 16 \geq 0 \text{ per } x^4 \leq -1 \vee x^4 \geq 16.$$

Essendo

$$x^4 + 1 \leq 0 \quad \text{impossibile,}$$
$$x^4 - 16 \geq 0 \quad \text{per} \quad x \leq -2 \vee x \geq 2,$$

la disequazione $x^8 - 15x^4 - 16 \geq 0$ ha per soluzioni:

$$x \leq -2 \vee x \geq 2.$$

Risolvi le seguenti disequazioni trinomie.

184 $x^6 + x^3 + 1 < 0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

185 $x^4 + x^2 + 1 > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

186 $4x^6 + 8x^3 + 4 > 0$ $[x \neq -1]$

187 $x^4 + 2x^2 - 15 > 0$ $[x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}]$

188 $2x^8 + x^4 - 3 > 0$ $[x < -1 \vee x > 1]$

189 $16x^4 - 24x^2 + 9 \leq 0$ $\left[x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Le disequazioni risolubili con scomposizioni in fattori

190 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo la disequazione di terzo grado:

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 20 > 0.$$

Cerchiamo di scomporre il polinomio

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 20$$

tentando un raccoglimento parziale. Selezioniamo, per esempio, il primo e il secondo termine, il terzo e il quarto. Si ha:

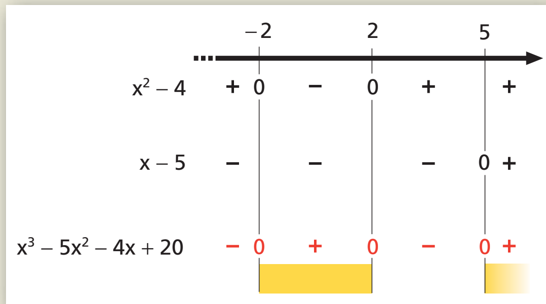
$$x^2(x - 5) - 4(x - 5) > 0.$$

Mediante il successivo raccoglimento si arriva a:

$$(x^2 - 4)(x - 5) > 0.$$

Consideriamo separatamente i due fattori e li poniamo maggiori di 0, per studiarne il segno.

- Primo fattore: $x^2 - 4 > 0$.
  Consideriamo l'equazione associata:
  $x^2 - 4 = 0$.
  Le soluzioni sono:
  $x = \pm 2$.
  L'insieme delle soluzioni di $x^2 - 4 > 0$ è:
  $x < -2 \lor x > 2$.
- Secondo fattore: $x - 5 > 0$ per $x > 5$.



Compiliamo il quadro dei segni e determiniamo il segno di $x^3 - 5x^2 - 4x + 20$ con la regola del prodotto dei segni.
La disequazione è verificata per $-2 < x < 2 \lor x > 5$.

Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo, scomponendo in fattori.

191 $x^2(x^2 + 2) - 2x^2 - (x - 1)(1 + x) \geq 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

192 $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 < 0$ $[x < -3 \lor -2 < x < 3]$

193 $3(x^3 + x^2 - 1) + x(x^2 + 9x - 1) \leq 0$ $\left[x \leq -3 \lor -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right]$

194 $x^3(1 + x) < 2x^2(x^2 - 2x - 3)$ $[x < -1 \lor x > 6]$

195 $2x(2x^2 + 3) + 4x^2 - 3(2x^2 + 1) > 0$ $\left[x > \frac{1}{2}\right]$

196 $x^3 - 7x + 6 \geq 0$ $[-3 \leq x \leq 1 \lor x \geq 2]$

197 $x^3 + 4x^2 + x < 6$ $[x < -3 \lor -2 < x < 1]$

ESERCIZI VARI Le disequazioni di grado superiore al secondo

TEST

198 How many natural numbers n satisfy $n^2 < 9n < 50n < n^3$?

A 0
B 1
C 2
D 3
E None of the above.

(USA *Furman University Wylie Mathematics Tournament*, 2005)

199 Detto S_a l'insieme delle soluzioni della disequazione $\frac{x^2 - 1}{-9} > 0$ e S_b l'insieme delle soluzioni della disequazione $4x - 4x^3 \geq 0$, puoi affermare che:

A $S_a = S_b - \{0\}$.
B $S_a = S_b$.
C $S_a = S_b \cup \{\pm 1\}$.
D $S_a \subset S_b$.
E $S_a \cap S_b = [0; 1[$.

200 Per quali valori di k la disequazione letterale $\frac{-kx^4 + 1}{3} > 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$?

A Solo per $k = -1$.
B $k \geq 0$.
C $\forall k \in \mathbb{R}$.
D $\nexists k \in \mathbb{R}$.
E $k \leq 0$.

201 Quale fra le seguenti affermazioni è *vera*?

A $(2x - 4)^2 + (x^2 - 8x + 12)^2 \leq 0$ non ammette alcuna soluzione reale.
B $x^6 - 28x^3 + 27 > 0$ ammette come soluzione l'insieme $S = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 1 \lor x > 3\}$.
C $9x^4 - x^2 \geq 0$ ammette come soluzione l'insieme $S = \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq -\frac{1}{3} \lor x \geq \frac{1}{3}\right\}$.
D $x^6 - 64 < 0$ ammette come soluzione l'insieme $S = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 2\}$.
E $x^4 + (x^2 - 3x)^4 \leq 0$ ammette come soluzione l'insieme $S = \{0, 3\}$.

202 Determina le soluzioni di ciascuna delle seguenti disequazioni:

a) $\frac{x^6+5b}{b} \geq 0$, con $b > 0$; b) $\frac{ax^3+ax}{2a} > 0$, con $a \neq 0$; c) $kx^4 + kx^2 < 0$, con $k < 0$.

203 **TEST** Quali delle seguenti disuguaglianze sono verificate per ogni valore reale positivo di x?

a) $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$; b) $x^2 \geq 2x - 2$; c) $x^4 - 2x^3 + x^2 \geq 0$.

A Tutte e tre. B Solo a e b. C Solo b e c. D Solo a. E Solo c.

(*Olimpiadi di Matematica, Giochi di Archimede*, 2003)

Risolvi le seguenti disequazioni.

204 $4x^6 + 5 \leq 0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

205 $x^6 - 5x^3 + 6 > 0$ $[x < \sqrt[3]{2} \vee x > \sqrt[3]{3}]$

206 $5x^2 + 7x^4 \leq 0$ $[x = 0]$

207 $x^5 + 8 < 0$ $[x < -\sqrt[5]{8}]$

208 $x^6 - 8 \leq 0$ $[-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}]$

209 $27x^6 - 1 \geq 0$ $\left[x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

210 $x^4 - 5x^2 \geq 0$ $[x \leq -\sqrt{5} \vee x \geq \sqrt{5} \vee x = 0]$

211 $x^6 + 2x^3 - 15 < 0$ $[-\sqrt[3]{5} < x < \sqrt[3]{3}]$

212 $x^6 + 8x^3 \geq 0$ $[x \leq -2 \vee x \geq 0]$

213 $8x^3 \geq x^2 + 7$ $[x \geq 1]$

214 $x^4 - 5x^3 - x + 5 < 0$ $[1 < x < 5]$

215 $x^4 - 4 \leq 0$ $[-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}]$

216 $4x^7 + 12 < 0$ $[x < -\sqrt[7]{3}]$

217 $2x^3 - 5x^2 + 8x - 20 < 0$ $\left[x < \frac{5}{2}\right]$

218 $76x^2 - 3x^4 - 25 \geq 0$ $\left[-5 \leq x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee \frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq 5\right]$

219 $x(x^2 - 11) < 7x(1 - x)$ $[x < -9 \vee 0 < x < 2]$

220 $x^3(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 14) < 0$ $[x < -\sqrt{7} \vee 0 < x < \sqrt{7}]$

221 $(x^2 - 3)^2 > 4x^2$ $[x < -3 \vee -1 < x < 1 \vee x > 3]$

222 $x^4(1 - x^2) + (x^3 - 5x^4)(x^3 + 5x^4) < 0$ $\left[x < -\frac{\sqrt{5}}{5} \vee x > \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$

223 $x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x + 4 \leq 0$ $[x \leq -1 \vee 1 \leq x \leq 2]$

224 $16x^2\left(x - \frac{5}{4}\right)\left(x + \frac{5}{4}\right) + 25(x - 5)(x + 5) > 0$ $\left[x < -\frac{5}{2} \vee x > \frac{5}{2}\right]$

225 $7\left(\frac{1}{3}x^4 + x^2 + 1\right) - \frac{1}{3}x^4 - 2(x^2 + 2) > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

226 $(x + 1)^4(x^5 + 1)(x^6 + x^4 - x^2 - 1) \geq 0$ $[x \geq 1 \vee x = -1]$

227 $[x(x + 1) - 3x]x(x + 2) < 4 - x^2$ $[-2 < x < 2]$

228 $2x(x^2 + 1) + x^3(x - 1) - (3x + 1) > 0$ $[x < -1 \vee x > 1]$

229 $x^2(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) - 5 < (x^2 + 3)3x$ $[-1 < x < 5]$

230 $x^5 + \frac{1}{2}x(3x^3 - 1) - \frac{1}{2}x(x^3 + 1) > x^4$ $[-1 < x < 0 \vee x > 1]$

231 $x^3(x + 2) > x^5(7 - x)$ $[x < -1 \vee 0 < x < 4 \vee x > 4]$

232 $(x^2+2)^2+2(x^2+3-x)+2(2+x) \leq 0$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

233 $\frac{5}{3}(x^3-1)+4x^2\left(\frac{x}{3}+1\right)-\frac{1}{3}(x+1)<\frac{2}{3}x$ $\left[x<-1 \vee -1<x<\frac{2}{3}\right]$

234 $x^2(1-x)+x^2(x-2)(x+2)-x^2-(x-1)(x-2)+4<0$ $[-2<x<1-\sqrt{2} \vee 1<x<1+\sqrt{2}]$

235 $2x\left(\frac{1}{3}+32x^6\right)+\frac{1}{2}(1-2x^2)+\frac{3}{2}>x\left(x^2+\frac{2}{3}\right)+(2-x^2)$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}<x<0 \vee x>\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

Le disequazioni fratte

IN PRATICA
▶ Videolezione 2

236 VERO O FALSO?

a) Le disequazioni $A(x)\cdot B(x)>0$ e $\frac{A(x)}{B(x)}>0$ sono equivalenti. V F

b) Le disequazioni $A(x)\cdot B(x)\geq 0$ e $\frac{A(x)}{B(x)}\geq 0$ sono equivalenti. V F

c) La disequazione $\frac{-x^2}{(x+1)^2}\geq 0$ non è mai verificata. V F

d) La disequazione $\frac{2x}{x+1}>\frac{3}{x+1}$ è equivalente a $2x>3$. V F

e) La disequazione $\frac{x-1}{x^2+9}\geq 0$ è equivalente a $x-1\geq 0$. V F

237 COMPLETA

a) $\frac{x^2+9}{-2x}>0$ per x ..... .

b) $\frac{x^2}{x-3}\leq 0$ per x ..... .

c) $\frac{(x+1)^4(x-4)^5}{x^2}>0$ per x ..... .

d) $\frac{x^2 \ldots}{x-1}<0$ per $x<-2 \vee 1<x<2$.

238 Risolvi le seguenti disequazioni senza eseguire calcoli:

a) $\frac{x^2+4}{x-1}\geq 0$;

b) $\frac{2x^2}{x^2-9}\leq 0$;

c) $\frac{x^2-x}{(x+2)^4}\geq 0$;

d) $\frac{(x-1)^3}{x^3}\leq 0$.

239 ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo la seguente disequazione fratta numerica:

$$\frac{x^2-10x+24}{2x^2-7x-15}>0.$$

- Studiamo il segno del numeratore:

$$x^2-10x+24>0.$$

Equazione associata:

$$x^2-10x+24=0;$$

$$\frac{\Delta}{4}=25-24=1; \quad x=5\pm 1=\begin{cases}6\\4\end{cases}$$

Il numeratore è positivo per valori esterni all'intervallo di estremi 4 e 6:

$$x<4 \ \vee\ x>6.$$

- Studiamo il segno del denominatore:

$$2x^2-7x-15>0.$$

Equazione associata:

$$2x^2-7x-15=0;$$

$$\Delta=49+120=169; \quad x=\frac{7\pm 13}{4}=\begin{cases}5\\-\frac{3}{2}\end{cases}$$

Il denominatore è positivo per valori esterni all'intervallo di estremi $-\frac{3}{2}$ e 5:

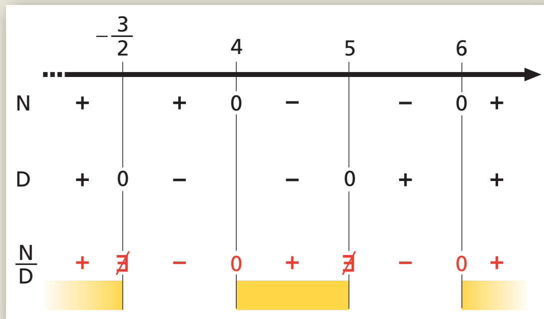
$$x<-\frac{3}{2} \ \vee\ x>5.$$

Compiliamo il quadro dei segni.

La disequazione è verificata per:

$$x < -\frac{3}{2} \ \vee\ 4 < x < 5 \ \vee\ x > 6.$$

Osservazione
Per brevità, non abbiamo scritto la condizione di esistenza, segnando direttamente nel quadro i valori per cui la frazione non esiste.



Risolvi le seguenti disequazioni fratte numeriche.

240 $\frac{3x-2}{x}-4\le 0$ $[x\le -2 \vee x>0]$

241 $3-\frac{2}{5x}+2+\frac{5x-3}{5x}<0$ $\left[0<x<\frac{1}{6}\right]$

242 $\frac{5x-1}{x-3}\ge 1$ $\left[x\le -\frac{1}{2}\vee x>3\right]$

243 $\frac{x(x+4)-5(x-1)-x^2}{3(x^2+1)-x(1+3x)}<0$ $[3<x<5]$

244 $\frac{(x-4)(x+2)}{x(x^2+1)}\ge 0$ $[-2\le x<0 \vee x\ge 4]$

245 $\frac{(1-x)^4(x-2)^3}{x(x-3)^2}>0$ $[x<0\vee x>2,\ x\ne 3]$

246 $\frac{x}{x-3}+\frac{7x+4}{(x-3)^2}<0$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

247 $\frac{(4x+1)^2}{4-2x}\ge 0$ $[x<2]$

248 $\frac{x^2+4x+4}{12x-4-9x^2}\ge 0$ $[x=-2]$

249 $\frac{x^2-4}{x^2+5x-14}<0$ $[-7<x<-2]$

250 $\frac{x+3}{x-2}<\frac{x-2}{x+3}$ $\left[x<-3\vee -\frac{1}{2}<x<2\right]$

251 $\frac{1}{x}<\frac{x-1}{x^2+x+1}$ $\left[-\frac{1}{2}<x<0\right]$

---

252 $\frac{x(-x+8)-(2x+9)}{x^2-4}\le 0$ $[x<-2\vee x>2]$

253 $\frac{x^2-x-6}{x^2+3x-4}>0$ $[x<-4\vee -2<x<1\vee x>3]$

254 $\frac{-x^2+7x-12}{2x^2-7x+3}>0$ $\left[\frac{1}{2}<x<3\vee 3<x<4\right]$

255 $1+\frac{2x}{x^2-1}+\frac{x}{x+1}<0$ $\left[\frac{1}{2}<x<1\right]$

256 $\frac{(x+1)(x+3)(x-6)}{x^2}<0$ $[x<-3\vee -1<x<6,\ x\ne 0]$

257 $\frac{-x^2(x^2-1)}{4x^2-9}>0$ $\left[-\frac{3}{2}<x<-1\vee 1<x<\frac{3}{2}\right]$

258 $\frac{(1-4x^2)(x^2-4x-5)}{(x+3)^2(x-5)^3}\le 0$ $\left[-1\le x\le -\frac{1}{2}\vee x\ge \frac{1}{2},\ x\ne 5\right]$

259 $\frac{x^3-3x^2+2x}{x+1}\le 0$ $[-1<x\le 0\vee 1\le x\le 2]$

260 $\frac{x^3+x^2+1}{x^3-1}\le 1$ $[x<1]$

261 $\frac{2x^2+3x+5}{x^2-x+3}<-1$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

262 $\frac{1}{x-1}\ge \frac{x+1}{x^2-1}$ $[x\ne 1,\ x\ne -1]$

263 $\frac{3(x^2-5x+6)}{x-3}+\frac{x+5}{2+x}<1$ $[x<-2\vee -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}]$

Bergamini, Trifone, Barozzi MATEMATICA.BLU - Vol. 3 © Zanichelli 2012 con Maths in English

264 $\frac{1}{3} - \frac{2}{1-x^2} > \frac{1}{2+2x}$ $[x < -1 \vee x > 1]$

265 $\frac{6-4x}{x^2+2x-3} + \frac{x+3}{x-1} \leq \frac{2}{x+3}$ $[-3 < x < 1]$

266 $\frac{100x-1000}{100x-100} \geq \frac{-4x}{(x-1)^2}$ $[x \leq 2 \vee x \geq 5, x \neq 1]$

267 $\frac{x-2}{3x} - \frac{x+3}{2x-1} \leq \frac{7x^2-2x-6}{6x^2-3x}$ $\left[x \leq -2 \vee x > 0, x \neq \frac{1}{2}\right]$

268 $\frac{x}{x^2+4+2x} - \frac{4x^2}{x^3-8} + \frac{3x+1}{x^2-4} < 0$ $[x < -2 \vee 5-\sqrt{29} < x < 2 \vee x > 5+\sqrt{29}]$

269 $\frac{x-2}{x-3} - \frac{5x+1}{x-2} - \frac{3x^2-2x-14}{-x^2+5x-6} \leq 0$ $[x \leq 1 \vee 2 < x < 3 \vee x \geq 7]$

270 $\frac{(x-2)(x+1)(4+x^2)}{(2x^2+4)(2-3x)} \leq 0$ $\left[-1 \leq x < \frac{2}{3} \vee x \geq 2\right]$

271 $-1 - \frac{(2x-3)^2}{16x-3x^2-5} > 0$ $\left[x < \frac{1}{3} \vee x > 5, x \neq -2\right]$

272 $\frac{x^3-4x^2-x+4}{x^4+3x^2-4} \geq 0$ $[x \geq 4]$

273 $\frac{x^4-5x^2+4}{x^2+4} \leq 0$ $[-2 \leq x \leq -1 \vee 1 \leq x \leq 2]$

274 $\frac{x^3+x^2-3x-3}{(x^4-1)(x^3+8)} < 0$ $[-2 < x < -\sqrt{3} \vee 1 < x < \sqrt{3}]$

275 $\frac{(x^6-1)(x^4+1)(x^2-2)}{(x^4-3x^2+2)(x^5+1)} \geq 0$ $[x > -1, x \neq 1, x \neq \sqrt{2}]$

276 $\frac{2x^2}{x^3+1} - \frac{x}{x^2-x+1} \leq \frac{1}{x-1}$ $[x < -1 \vee x > 1]$

277 $2\left(1+\frac{1}{x}\right)^4 + \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 - 3 > 0$ $\left[-\frac{1}{2} < x < 0 \vee x > 0\right]$

278 $\frac{2x}{2x+2} + \frac{3x-2}{x^2+2x+1} + \frac{2-x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} < 0$ $[-\sqrt{3}-2 < x < -1 \vee -1 < x < \sqrt{3}-2]$

279 $\frac{2(3-x)}{(x-1)(x-5)} + \frac{6}{x-5} - \frac{x}{1-x} - \frac{4x}{(x-1)(x-5)} > 0$ $[x < 0 \vee 1 < x < 5 \vee x > 5]$

280 $\frac{6}{x-3} + \frac{x+2}{x+1} + \frac{18}{(x+1)(x-3)} < \frac{x+3}{x-3}$ $[x < -15 \vee -1 < x < 3]$

281 $\frac{x}{x+3} + \frac{2(7x+9)}{(x-2)(x+3)} > \frac{x+4}{x-2}$ $\left[-3 < x < -\frac{6}{5} \vee x > 2\right]$

282 $\frac{3x}{x-5} - \frac{2(x-5)}{x-2} > \frac{21(x-3)-1}{(x-2)(x-5)}$ $[x < 2 \vee x > 5]$

283 $\frac{x^2-2}{x+1} + \frac{2}{x} \leq \frac{x^2-x+1}{x} + \frac{1}{x^2+x} - 1$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

284 $-\frac{4}{x+2} + \frac{x-1}{3+x} - \frac{8}{-5x-x^2-6} < \frac{x-2}{x+2}$ $[-3 < x < -2 \vee x > 0]$

285 $\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{9x}{x+3}\right) > \left(\frac{4x^2+1+x}{x^2}\right)\frac{1}{x+1}$ $\left[-3 < x < -1 \vee x > \frac{3}{5}\right]$

286 $\frac{3x+1}{2x-4} + \frac{2}{x-5} > -\frac{2x^2+13}{2x^2-14x+20}$ $[x < 0 \vee x > 5]$

287 $\frac{7(x+2)}{x+3} + \frac{5x}{3-2x} + \frac{2(x^2+x-17)}{9-2x^2-3x} \leq 0$ $\left[-3 < x \leq -\frac{4}{7} \vee \frac{3}{2} < x \leq 2\right]$

288 $\frac{x}{x^3+x^2-4x-4} \leq \frac{2}{x^2-x-2} + \frac{1}{x^2+x}$ $[x \leq -\sqrt{3}-1 \vee -2 < x < -1 \vee 0 < x \leq \sqrt{3}-1 \vee x > 2]$

Le disequazioni fratte letterali

289 ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo la seguente disequazione fratta letterale:

$$\frac{(a^2+1)x^2-2x+1}{3ax+5} \geq 0.$$

- Studiamo il segno del numeratore:

  $(a^2+1)x^2-2x+1 \geq 0.$

  Il coefficiente di x^2 è sempre positivo per ogni $a \in \mathbb{R}$; $\Delta = 4-4(a^2+1) = -4a^2$, per cui $\Delta = 0$ se $a=0$, $\Delta < 0$ se $a \neq 0$.
  In entrambi i casi la disequazione di secondo grado è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

  $\forall a \in \mathbb{R}$, il numeratore è maggiore o uguale a 0 $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Studiamo il segno del denominatore:

  $3ax+5>0.$

  La disequazione è di primo grado, per cui si distinguono tre casi a seconda del segno del coefficiente di x:

  $a>0 \;\rightarrow\; x > -\dfrac{5}{3a}$;

  $a=0 \;\rightarrow\; 0 > -5$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$;

  $a<0 \;\rightarrow\; x < -\dfrac{5}{3a}$.

Poiché il numeratore è positivo $\forall a \in \mathbb{R} \wedge \forall x \in \mathbb{R}$, il segno della disequazione fratta è dato dal denominatore, cioè le soluzioni coincidono con le soluzioni della disequazione $3ax+5>0$.

In sintesi:

se $a>0$, $x>-\dfrac{5}{3a}$;

se $a<0$, $x<-\dfrac{5}{3a}$;

se $a=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

290 COMPLETA

a) La disequazione $\dfrac{ax^2}{x-a}>0$, se $a<0$, è verificata per x ......

b) La disequazione $\dfrac{b(x^2-4)}{x+b}<0$, se $b>2$, è verificata per x ......

291 Per quali valori di k la disequazione $\dfrac{x^2-kx+k}{x^2-2x+9}>0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$? $[0<k<4]$

Risolvi e discuti le seguenti disequazioni letterali fratte.

292 $\dfrac{k^2x}{x-k}>0$ $[k=0, \nexists\, x \in \mathbb{R}; k>0, x<0 \vee x>k; k<0, x<k \vee x>0]$

293 $\dfrac{a(x-a)}{x+3a} \geq 0$ $[a<0, a \leq x < -3a; a=0, \forall x \neq 0; a>0, x<-3a \vee x \geq a]$

294 $\dfrac{x^2-bx}{x+b}<0$ $[b=0, x<0; b>0, x<-b \vee 0<x<b; b<0, x<b \vee 0<x<-b]$

295 $\dfrac{3ax-2}{x^2-2x}<\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{1}{x}$ $\left[a>\dfrac{5}{3}, x<2 \wedge x \neq 0; a<\dfrac{5}{3}, x>2; a=\dfrac{5}{3}, \nexists\, x \in \mathbb{R}\right]$

296 $\dfrac{a^2x^2-4(ax-1)}{(ax-2)x} \geq 0$ $\left[a<0, \dfrac{2}{a}<x<0; a=0, x<0; a>0, x<0 \vee x>\dfrac{2}{a}\right]$

297 $\dfrac{2x+2a}{a(2x-a)} \geq 0$ $\left[a<0, \dfrac{a}{2}<x \leq -a; a=0, \text{priva di significato}; a>0, x \leq -a \vee x>\dfrac{a}{2}\right]$

298 $\dfrac{(a-1)x}{ax+2a^2} > 0$ $\quad [a<0,\ x<0 \vee x>-2a;\ a=0,\ \text{priva di significato};\ 0<a<1,\ -2a<x<0;\ a=1,\ \nexists\, x\in\mathbb{R};\ a>1,\ x<-2a \vee x>0]$

299 $\dfrac{x+2}{ax^2} < \dfrac{2-a}{x} \quad (a \neq 0)$ $\quad \left[a<0,\ x>-\dfrac{2}{(1-a)^2} \wedge x\neq 0;\ a>0 \wedge a\neq 1,\ x<-\dfrac{2}{(1-a)^2};\ a=1,\ \nexists\, x\in\mathbb{R}\right]$

300 $\dfrac{ax^2-(x-1)^2+1}{ax} - 1 \leq 0 \quad (a\neq 0)$ $\quad \left[a<0 \vee a>1,\ x\leq \dfrac{a-2}{a-1} \wedge x\neq 0;\ 0<a<1,\ x\geq \dfrac{a-2}{a-1};\ a=1,\ \nexists\, x\in\mathbb{R}\right]$

301 $\dfrac{x}{k} - 1 > \dfrac{1-k}{kx} \quad (k>1)$ $\quad [1<k<2,\ 0<x<k-1 \vee x>1;\ k=2,\ x>0 \wedge x\neq 1;\ k>2,\ 0<x<1 \vee x>k-1]$

302 $\dfrac{ax-1}{x+3} \geq 0$ $\quad \left[a>0,\ x<-3 \vee x\geq \dfrac{1}{a};\ a=0,\ x<-3;\ -\dfrac{1}{3}<a<0,\ \dfrac{1}{a}\leq x<-3;\ a=-\dfrac{1}{3},\ \nexists\, x\in\mathbb{R};\ a<-\dfrac{1}{3},\ -3<x\leq \dfrac{1}{a}\right]$

303 $\dfrac{2x+4a-1}{1-a-x} \leq 8$ $\quad \left[a<-\dfrac{1}{2},\ x<1-a \vee x\geq \dfrac{9-12a}{10};\ a=-\dfrac{1}{2},\ x\neq \dfrac{3}{2};\ a>-\dfrac{1}{2},\ x\leq \dfrac{9-12a}{10} \vee x>1-a\right]$

5. I SISTEMI DI DISEQUAZIONI

Teoria a pag. 14

I sistemi di disequazioni numeriche

IN PRATICA
Videolezione 3

304 VERO O FALSO?

a) I due sistemi $\begin{cases} 10-5x\geq 0 \\ 1-x\leq 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x-2\leq 0 \\ x\geq 1 \end{cases}$ sono equivalenti. V F

b) La disequazione $(1+x)(4-x)\leq 0$ è equivalente al sistema $\begin{cases} 1+x\leq 0 \\ 4-x\leq 0 \end{cases}$. V F

c) La disequazione $-1\leq x\leq 3$ è equivalente al sistema $\begin{cases} x\geq -1 \\ x\leq 3 \end{cases}$. V F

305 ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo il seguente sistema di disequazioni numeriche:

$$\begin{cases} \dfrac{1-x^3}{x}\geq 0 \\ x^4-5x^2+4>0 \end{cases}$$

Prima disequazione

Il numeratore è positivo per $1-x^3>0 \ \rightarrow\ x<1$.

Il denominatore è positivo per $x>0$.

Compiliamo il quadro dei segni.

$$\frac{1-x^3}{x}\geq 0 \text{ per } 0<x\leq 1.$$

		0		1	
$1-x^3$	+		+	0	−
x	−	0	+		+
$\dfrac{1-x^3}{x}$	−	∄	+	0	−

Seconda disequazione
Scomponendo in fattori otteniamo:

$$(x^2-4)(x^2-1)>0.$$

Il primo fattore è positivo per $x^2-4>0 \quad \rightarrow \quad x<-2 \vee x>2$.

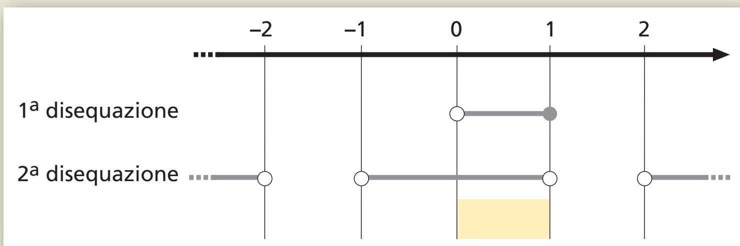
Il secondo fattore è positivo per $x^2-1>0 \quad \rightarrow \quad x<-1 \vee x>1$.

Compiliamo il quadro dei segni.

		−2		−1		0		1		2	
x^2-4	+	0	−			−			−	0	+
x^2-1	+		+	0		−		0	+		+
$(x^2-4)(x^2-1)$	+	0	−	0		+		0	−	0	+

$$(x^2-4)(x^2-1)>0 \quad \text{per} \quad x<-2 \vee -1<x<1 \vee x>2.$$

Compiliamo il quadro delle soluzioni.



Le soluzioni del sistema sono:

$$0<x<1.$$

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni numeriche.

306 $\begin{cases} 2x-7\geq 0 \\ 3x+1>0 \\ 2x-7<(3x+1)^2 \end{cases}$ $\left[x\geq \frac{7}{2}\right]$

307 $\begin{cases} x^3-1>x^2-2x+1 \\ \frac{x+4}{2}+\frac{x+18}{3}>\frac{2x-1}{3} \end{cases}$ $[x>1]$

308 $\begin{cases} x^2+12x+35>0 \\ x^2-x-6>0 \end{cases}$ $[x<-7 \vee -5<x<-2 \vee x>3]$

309 $\begin{cases} \frac{x-2}{x+3}\geq 0 \\ 7+2x>-\frac{x^2}{7} \end{cases}$ $[x<-7 \vee -7<x<-3 \vee x\geq 2]$

310 $\begin{cases} (x+1)^2\leq 16 \\ x(x-7)\geq 4(5-2x) \end{cases}$ $[x=-5]$

311 $\begin{cases} \sqrt{2}\,x^2+x-\sqrt{2}<0 \\ 2x^2+\sqrt{3}\,x+1>0 \end{cases}$ $\left[-\sqrt{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

312 $\begin{cases} (x+2)\left(1-\frac{1}{x}\right)+x<3-\frac{2}{x} \\ (\sqrt{3}+1)x^2>2x-1 \end{cases}$ $[x<1, x\neq 0]$

313 $\begin{cases} 2x>\sqrt{8} \\ (x+1)^2+1\leq 2(x+2) \\ \frac{x^2}{\sqrt{2}}+x(\sqrt{3}-1)\leq\sqrt{6} \end{cases}$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

314 $\begin{cases} \dfrac{1+x^2}{3x} \le 0 \\ x < (x+2)(3-x) \end{cases}$ $[-\sqrt{6} < x < 0]$

315 $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+2} \le \dfrac{-1}{x-3} \\ 3 - \dfrac{4-x}{3} + \dfrac{3-x}{2} \ge 2 \end{cases}$ $[-2 < x < 3]$

316 $\begin{cases} x^2+4x+4 > 0 \\ \dfrac{1}{x^2} \ge 0 \\ \dfrac{(2x-1)^2}{2x^2+2x+1} > 0 \end{cases}$ $\left[x \ne -2,\, x \ne 0,\, x \ne \dfrac{1}{2}\right]$

317 $\begin{cases} (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \ge 2(-x-1)-1 \\ \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x-7} > 0 \end{cases}$ $[x < -1 \vee 2 < x < 3 \vee x > 7]$

318 $\begin{cases} (x-1)^3-(2x+1)^2 < x^3+4 \\ \dfrac{x}{x-2} < 1 \end{cases}$ $[x < 2]$

319 $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-2} < 1 \\ (x^5-x^3)(x^2+4)(x+1) < 0 \end{cases}$ $[0 < x < 1]$

320 $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x+1} \ge 2 \\ x^4+3x^2-4 \ge 0 \end{cases}$ $[-4 \le x < -1]$

321 $\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2+4} \le 0 \\ \dfrac{x^2}{x-1} \le 0 \\ x^4+x^2+1 \ge 0 \end{cases}$ $[0 \le x < 1]$

322 $\begin{cases} \dfrac{x}{2(x-1)} - \dfrac{5-2x}{6-6x} > 0 \\ (x^2-3)^2+4x^2 < 0 \end{cases}$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

323 $\begin{cases} x^4-13x^2+36 > 0 \\ x^2 < -3x \end{cases}$ $[-2 < x < 0]$

324 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{x+1} \ge -2 \\ x^4-4x^2 \le 0 \\ x^2-(2+\sqrt{3})x+2\sqrt{3} > 0 \end{cases}$ $[-1 < x < \sqrt{3}]$

325 $\begin{cases} \dfrac{1}{x} > \dfrac{2}{x} \\ (x-1)(x-2)(x-3) < (x+1)(x+2)(x+3) \end{cases}$ $[x < 0]$

326 $\begin{cases} \sqrt{3}\,x^3-3x^2-\sqrt{3}\,x+3 > 0 \\ \dfrac{x-1}{x^2-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}} > 0 \end{cases}$ $[x > \sqrt{3}]$

327 $\begin{cases} x^5 \ge 8x^2 \\ (x+1)(x-1) \le (x+2)(x-1) \\ \dfrac{1}{x} < x \end{cases}$ $[x \ge 2]$

328 $\begin{cases} \dfrac{x}{x-2} < 1 \\ \dfrac{4-2x-2x^2}{x^3+x^2+x} < 0 \end{cases}$ $[-2 < x < 0 \vee 1 < x < 2]$

329 $\begin{cases} x^3-8x^2+13x-6 \le 0 \\ \dfrac{1}{x^2-2x+1} \ge 0 \\ \dfrac{x-6}{x^2-2x-3} < 0 \end{cases}$ $[x < -1 \vee 3 < x < 6]$

330 $\begin{cases} x^3+2x^2 > 2x-3 \\ 3-2x-x^2 > 0 \\ \dfrac{1}{x^3+27} > 0 \end{cases}$ $[-3 < x < 1]$

331 $\begin{cases} x^4-5x^2+4 \ge 0 \\ \dfrac{x}{1-\sqrt{2}} < 0 \\ x\sqrt{3}+1 \ge x\sqrt{2}-1 \end{cases}$ $[0 < x \le 1 \vee x \ge 2]$

332 $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{3-2x} > \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4+x^2} \le \dfrac{1}{16-x^4} \end{cases}$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

333 $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2-x} > \dfrac{x^3}{x^2-x} \\ \dfrac{(x-2)(x^2-3x+2)}{x^4+x^3-x-1} \le 0 \end{cases}$ $[x < -1]$

334 $\begin{cases} \dfrac{2x^4}{6-x} \ge 6+x \\ (2x+3)^2+3 < 2x^2-x-3 \end{cases}$ $[-5 < x \le -2]$

335 $\begin{cases} 1 + \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x-1}{x-2} \ge \dfrac{x+1}{x+2} \\ \dfrac{x+1}{x^2} > 0 \end{cases}$ $[0 < x < 2]$

336 $\begin{cases} (4x-1)^2 \ge 36 \\ \dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{7}x + \dfrac{1}{21} \end{cases}$ $\left[-\dfrac{10}{3} < x \le -\dfrac{5}{4} \vee x > 2\right]$

337 $\begin{cases} \dfrac{x^2-6x-3}{1-2x} \geq 0 \\ \dfrac{x+2-6x^2}{(3x-2)^2} \geq 0 \end{cases}$ $\left[-\frac{1}{2} \leq x \leq 3-2\sqrt{3} \vee \frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}\right]$

338 $\begin{cases} \dfrac{7+3x^2(x-4)}{x-3} < x+3 \\ -\dfrac{5}{(3x-4)^3} > 0 \end{cases}$ $\left[-1 < x < \frac{4}{3}\right]$

339 $\begin{cases} \dfrac{\frac{5}{2}x-1}{x} \leq \dfrac{8}{x+2} \\ 2x^3-4x-x^2+3 < 0 \end{cases}$ $\left[-2 < x < -\frac{3}{2}\right]$

340 $\begin{cases} \dfrac{2-x}{3x}+\dfrac{1+x}{2x+1} > \dfrac{x^2+8}{4x^2+2x} \\ x^3-8 \leq 0 \\ \dfrac{3x+4}{x-2} < -\dfrac{3}{2}x \end{cases}$ $\left[-\frac{1}{2} < x < 0\right]$

341 $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{10}+\dfrac{x}{x-6} \geq 0 \\ \dfrac{5}{1-x} < \dfrac{8-5x}{x^2-1} \end{cases}$ $[x < -1 \vee 2 \leq x \leq 3 \vee x > 6]$

342 $\begin{cases} \dfrac{x^2-6x}{x^3+x^2-2x} \leq 0 \\ \dfrac{2}{x+1} > \dfrac{1}{x-3} \end{cases}$ $[1 < x < 3]$

343 $\begin{cases} \dfrac{2+x}{x^2-x} > \dfrac{1}{x+2} \\ x^4+5x^2-36 \geq 0 \end{cases}$ $[x < -2 \vee x \geq 2]$

344 $\begin{cases} (x+1)(x+2)(x+3) > (x-1)(x-2)(x+3) \\ \dfrac{1}{2x^2-4x} \geq \dfrac{x-2}{8x} \end{cases}$ $[2 < x \leq 4]$

345 $\begin{cases} \dfrac{x^5+x+2}{x^2+5} > 0 \\ \dfrac{x-x^3}{2(x^3-4x+3)} \leq 0 \\ x^2 \leq 0 \end{cases}$ $[x = 0]$

346 $\begin{cases} \dfrac{1-5x+4x^2}{1-3x+2x^2} > 1 \\ x^8 \geq 10^{-8} \end{cases}$ $\left[x \leq -\frac{1}{10} \vee \frac{1}{2} < x < 1 \vee x > 1\right]$

347 $\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{2} \geq \dfrac{2}{x^2-1} \\ \dfrac{x^2+1}{2} \geq \dfrac{2}{x^2+1} \end{cases}$ $[x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3}]$

348 Determina i valori di b per i quali la soluzione dell'equazione $bx-2-x=(1-b)x$ è un numero positivo minore di 1. $[b > 2]$

349 Un rettangolo ha la base lunga $5-2x$ e l'altezza lunga $3x-1$. Trova i valori che si possono assegnare a x affinché esista il rettangolo e inoltre la base sia sempre maggiore dell'altezza. $\left[\frac{1}{3} < x < \frac{6}{5}\right]$

350 Trova per quali valori di a il trinomio $(a-1)x^2+ax+a$ risulta positivo per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$. $\left[a > \frac{4}{3}\right]$

351 Determina per quali valori di k l'equazione $x^2-(k+2)x-2k+1=0$ ha soluzioni reali distinte discordi. $\left[k > \frac{1}{2}\right]$

352 Trova i valori di k per i quali l'equazione $kx^2-(2k-1)x+k+2=0$ ha radici reali distinte concordi. $\left[k < -2 \vee 0 < k < \frac{1}{12}\right]$

353 Determina per quali valori di a nell'equazione $ax^2-2(a+3)x+a-6=0$ le soluzioni sono:

a) reali e discordi;

b) entrambe positive. [a) $0 < a < 6$; b) $a > 6$]

I sistemi di disequazioni letterali

354 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo il seguente sistema di disequazioni letterali:

$$\begin{cases} ax - 3a^2 \leq 0 \\ x^2 - ax - 2a^2 < 0, \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Consideriamo la prima disequazione:

$$ax - 3a^2 \leq 0.$$

È una disequazione intera letterale di primo grado. La scriviamo nella forma $ax < b$:

$$ax \leq 3a^2.$$

Discussione

- Se $a > 0$, si ha la soluzione $x \leq 3a$.
- Se $a = 0$, sostituendo, otteniamo $0x \leq 0$, vera per qualunque valore della x. Quindi, la soluzione della disequazione è: $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Se $a < 0$, si ha la soluzione $x \geq 3a$.

Risolviamo ora la seconda disequazione:

$$x^2 - ax - 2a^2 < 0.$$

È una disequazione letterale di secondo grado. Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata:

$$x^2 - ax - 2a^2 = 0;$$

$$\Delta = a^2 - 4(-2a^2) = a^2 + 8a^2 = 9a^2.$$

Discussione

- Se $a = 0$, si ha $\Delta = 0$. Poiché il coefficiente di x^2 è positivo e $\Delta = 0$, la disequazione $x^2 - ax - 2a^2 < 0$ non è verificata per nessun valore di x. Scriviamo:

  $$\nexists\, x \in \mathbb{R}.$$

- Se $a \neq 0$, si ha $\Delta > 0$.

Determiniamo le radici:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{9a^2}}{2} = \frac{a \pm 3a}{2} = \begin{cases} 2a \\ -a \end{cases}$$

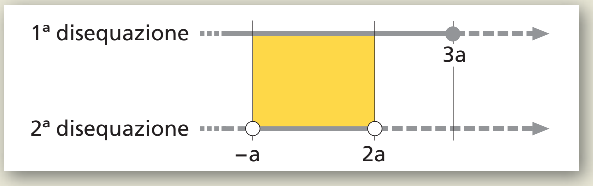
La disequazione $x^2 - ax - 2a^2 < 0$ è verificata dai valori di x interni all'intervallo delle radici dell'equazione. È necessario distinguere due casi:

se $a > 0$, la soluzione è $-a < x < 2a$;

se $a < 0$, la soluzione è $2a < x < -a$.

Troviamo ora le soluzioni del sistema.

- Per $a > 0$ compiliamo il quadro delle soluzioni.

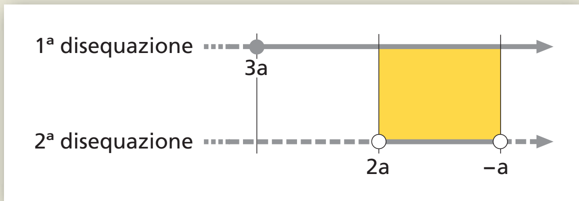


Le soluzioni del sistema sono $-a < x < 2a$.

- Per $a = 0$ il quadro delle soluzioni è:

Il sistema non ammette soluzione.

- Per $a < 0$ il quadro delle soluzioni è:



Le soluzioni del sistema sono $2a < x < -a$.

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni letterali.

355 $\begin{cases} x^2 - (a-2)x - 2a < 0 \\ (x+1)(x-2) < 0 \end{cases}$ $\quad (a > 2)$ $\quad [-1 < x < 2]$

356 $\begin{cases} kx - 2 > 0 \\ x + \dfrac{k}{3} < 0 \end{cases}$ $\quad \left[k < 0, x < \dfrac{2}{k}; k \geq 0, \nexists\, x \in \mathbb{R}\right]$

357 $\begin{cases} x^2 < b(-2x+3b) \\ x(2x-b) < b^2 \\ 2x^2+7bx+3b^2 > 0 \end{cases}$ $\quad (b>0)$ $\quad \left[-\frac{b}{2} < x < b\right]$

358 $\begin{cases} 2x^2+ax > 0 \\ \frac{x-a}{2a^2} \geq 0 \end{cases}$ $\quad [a<0, x \leq a; a=0, \text{ priva di significato}; a>0, x \geq a]$

359 $\begin{cases} \frac{x+4a}{4a} \geq 0 \\ x^2-2ax > 0 \end{cases}$ $\quad [a<0, x<2a \vee 0<x \leq -4a; a=0, \text{ priva di significato}; a>0, -4a \leq x < 0 \vee x > 2a]$

360 $\begin{cases} x(2x-k) \geq k^2-2kx \\ x^2+4kx+3k^2 \leq 0 \end{cases}$ $\quad [k<0, -k \leq x \leq -3k; k=0, x=0; k>0, -3k \leq x \leq -k]$

361 $\begin{cases} x^2 < (k-3)x \\ x^2-10x+25 \leq 0 \end{cases}$ $\quad [k \leq 8, \nexists\, x \in \mathbb{R}; k>8, x=5]$

362 $\begin{cases} x-b > 0 \\ x^2+b \geq 0 \end{cases}$ $\quad (b \geq -1)$ $\quad [-1 \leq b < 0, x \geq \sqrt{-b}; b \geq 0, x > b]$

363 $\begin{cases} ax+1 > 0 \\ ax^2+4 \geq 0 \end{cases}$ $\quad \left(a > -\frac{1}{4}\right)$ $\quad \left[-\frac{1}{4} < a < 0, -\frac{2}{\sqrt{-a}} \leq x \leq \frac{2}{\sqrt{-a}}; a=0, \forall x \in \mathbb{R}; a>0, x > -\frac{1}{a}\right]$

364 $\begin{cases} x^2+(3-a)x+2(1-a) > 0 \\ (x-a)(x+a) \geq 2ax-2a^2 \end{cases}$ $\quad [a \leq -1, x < a-1 \vee x > -2; a > -1, x < -2 \vee x > a-1]$

365 $\begin{cases} \frac{(x+2a)(x-a)}{a} \geq 0 \\ \frac{x-2a}{ax} \leq 0 \end{cases}$ $\quad [a<0, 0<x \leq -2a; a=0, \text{ priva di significato}; a>0, a \leq x \leq 2a]$

366 $\begin{cases} x^2+(a-1)x-a \leq 0 \\ a(x-1)(x-2) \geq 0 \end{cases}$ $\quad [a<-2, 1 \leq x \leq 2; -2 \leq a < -1, 1 \leq x \leq -a; -1 \leq a < 0, x=1; a \geq 0, -a \leq x \leq 1]$

6. LE EQUAZIONI E LE DISEQUAZIONI CON IL VALORE ASSOLUTO

▶ Teoria a pag. 16

Le equazioni con il valore assoluto

IN PRATICA
▶ Videolezione 4

367 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $|x-4| = -3$ è impossibile. V F

b) $|x-9| = |9-x|$. V F

c) L'equazione $|1-x|+2=0$ è impossibile. V F

d) Se $|x-6| = 4$, allora $x-6 = \pm 4$. V F

e) Se $|x-1| = |2x|$, allora $x-1 = \pm 2x$. V F

f) $|x^2-2x+1| + |x-1| = 0$ per $x = 1$. V F

368 COMPLETA

a) $|x| + |x^2 - 2x| = 0$ se $x =$ ..... .

b) $|x - 1| = -|x^2 - 1|$ se x ..... .

c) $|x + 7| =$ ..... se $x = -6$ e $x = -8$.

d) $\dfrac{|x| - 3}{x - 3} = 0$ per x ..... .

e) $|-1 - x^2 + 2x| = 0$ per x ..... .

369 TEST Quante soluzioni reali ha l'equazione

$$|\,||a| + 3| - 2\,| = 1?$$

A Nessuna.

B Una.

C Due.

D Tre.

E Otto.

(*Olimpiadi di Matematica*, *Giochi di Archimede*, 2006)

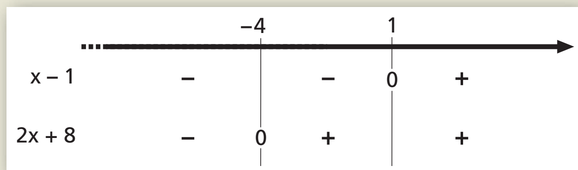
370 ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo le equazioni: a) $|x - 1| - 3x = |2x + 8|$; b) $|2x + 1| = |x - 6|$.

a) Studiamo il segno delle espressioni all'interno dei valori assoluti:

$x - 1 \geq 0$ se $x \geq 1$,

$2x + 8 \geq 0$ se $x \geq -4$.



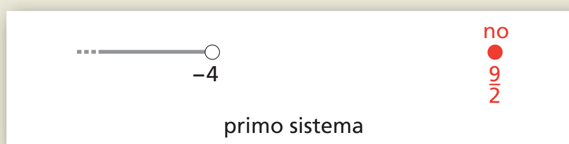
Quindi:

- se $x < -4$, allora $|x - 1| = -x + 1$ e $|2x + 8| = -2x - 8$;
- se $-4 \leq x < 1$, allora $|x - 1| = -x + 1$ e $|2x + 8| = 2x + 8$;
- se $x \geq 1$, allora $|x - 1| = x - 1$ e $|2x + 8| = 2x + 8$.

L'equazione ha come soluzioni quelle dei tre seguenti sistemi, che risolviamo.

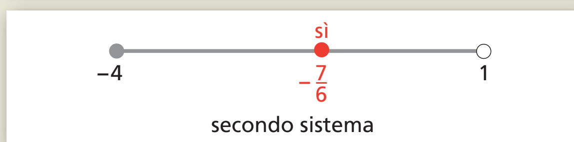
Primo sistema

$$\begin{cases} x < -4 \\ -x + 1 - 3x = -2x - 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$



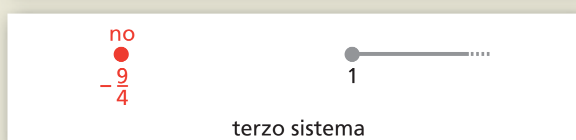
Secondo sistema

$$\begin{cases} -4 \leq x < 1 \\ -x + 1 - 3x = 2x + 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4 \leq x < 1 \\ x = -\dfrac{7}{6} \end{cases}$$



Terzo sistema

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x - 1 - 3x = 2x + 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = -\dfrac{9}{4} \end{cases}$$



Il primo e il terzo sistema non hanno soluzioni, quindi l'unica soluzione dell'equazione è $x = -\dfrac{7}{6}$.

b) Per la definizione di valore assoluto: $|2x + 1| = |x - 6| \rightarrow 2x + 1 = \pm(x - 6)$.

Quindi si ottengono le due equazioni: $2x + 1 = x - 6 \rightarrow x = -7$; $2x + 1 = -x + 6 \rightarrow x = \dfrac{5}{3}$.

Le soluzioni dell'equazione data sono -7 e $\dfrac{5}{3}$.

Risolvi le seguenti equazioni che contengono valori assoluti.

371 $|x^2-1|=-5$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

372 $|x^2-x|=6$ $[x=-2, x=3]$

373 $|3x-5|=2x+1$ $\left[x=\frac{4}{5}, x=6\right]$

374 $\left|3x+\frac{5}{2}\right|=7x-\frac{1}{2}$ $\left[x=\frac{3}{4}\right]$

375 $|4x+5|=(2-x)(2+x)+3+x^2$ $\left[x=\frac{1}{2}, x=-3\right]$

376 $|5x-3|=2(2x-7)-2(x+3)$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

377 $|2x+5|=\frac{3}{2}(x+1)+\frac{1}{2}(x-9)$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

378 $|(x+4)(x-1)-x^2|=2(2-x)+1$ $\left[x=\frac{9}{5}, x=-1\right]$

379 $\left|\frac{1}{3}x-3\right|=\left(2+\frac{1}{3}x\right)-5\left(\frac{2}{3}+x\right)$ $[x=-1]$

380 $\frac{1}{4+x^2}=-1-|x^2-4x+3|$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

381 $\frac{1}{|x-2|}=\frac{x+1}{2}$ $\left[x=0, x=1, x=\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right]$

382 $|2x+1|+|-x+1|=x+4$ $[x=-1,\ x=2]$

383 $|-x^2+2x+3|=|-x+3|$ $[x=-2, x=0, x=3]$

384 $|x-1|-2|x+3|=7x$ $\left[x=-\frac{1}{2}\right]$

385 $\frac{|x^3+3x^2-x-3|}{x+1}=0$ $[x=-3, x=1]$

386 $|x-1|+3|x|=2x+4$ $\left[x=\frac{5}{2}, x=-\frac{1}{2}\right]$

387 $2-|x^2-9|-x-6=3x$ $[x=2-\sqrt{17}, x=-5]$

388 $|x^4-4x^3|=-3|x|$ $[x=0]$

389 $\frac{1}{2}x-|x-6|=1-3x$ $\left[x=\frac{14}{9}\right]$

390 $|x-3|=\frac{1}{2}(x-4)-6x$ $\left[x=-\frac{10}{9}\right]$

391 $2|x-1|=x-\frac{1}{3}+|2-x|$ $\left[x=\frac{1}{6}, x=\frac{11}{6}\right]$

392 $\frac{x-3}{x}+|x|-5=x+\frac{1}{2}$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

393 $1-\frac{13}{x}+|x-3|=9-x$ $\left[x=\frac{13}{2}, x=-\frac{13}{5}\right]$

394 $|1+2x-|x+2||=x-1$ $[x \geq 1]$

395 $\frac{1}{3}-\frac{|x-1|+x}{1-|x|}=0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

396 $|2x-3a|=2$ $\left[x=\frac{3a+2}{2}, x=\frac{3a-2}{2}\right]$

397 $|4x-a|=2a$ $\left[a<0, \nexists x \in \mathbb{R}; a \geq 0, x=\frac{3}{4}a, x=-\frac{1}{4}a\right]$

398 $\frac{1}{2}|1-x|+|x-3|-2|x|=2$ $\left[x=-3, x=\frac{3}{7}\right]$

399 $\left|\frac{x^4-x^2}{x+1}\right|-x^3=0$ $\left[x=0, x=\frac{1}{2}\right]$

400 $|x|+\frac{1}{|x-1|}=|x+2|-1$ $[x=0, x=2]$

401 $|x^3-2x^2|=2-x$ $[x=\pm 1, x=2]$

402 $|1-|x||=\frac{1}{2}$ $\left[x=\pm\frac{1}{2}, x=\pm\frac{3}{2}\right]$

403 $\frac{|x-3|}{1-x}=\frac{1-x}{|x|}$ $\left[x=-1, x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}\right]$

404 $\left|\frac{x+1}{2-x}\right|-\frac{1}{2}=\frac{x}{x-2}$ $[x=0, x=4]$

405 $\frac{x+4}{x}=\frac{x}{2}+\left|\frac{x^2-4}{2x}\right|$ $[x=-2, x=3]$

406 $\frac{|x^2+3|}{|x-1|}-|x-2|=0$ $\left[x=-\frac{1}{3}\right]$

407 $\frac{1}{2}|4x-1|-\frac{1}{|x|}=2|x|+3$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

408 $\frac{|x^2-1|}{x}=3-\frac{2-|2x^2+x+3|}{x}$ $[x=-2-\sqrt{2}]$

409 $\frac{|2x^2-3x+1|}{x-2}=1$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

410 Per quali valori di a l'equazione $|2a + x| + |x^2 - 4| = 0$ ha soluzione? $[a = 1, a = -1]$

411 Risolvi al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$|x^2 - 2x| = k.$$

$[k < 0, \nexists x \in \mathbb{R}; 0 \leq k \leq 1, x = 1 \pm \sqrt{1-k} \vee x = 1 \pm \sqrt{k+1}; k > 1, x = 1 \pm \sqrt{k+1}]$

412 **TEST** Al variare del parametro reale a, qual è il numero massimo di soluzioni per l'equazione

$$||x-1| - 4| + x = a?$$

A 1
B 2
C 3
D 4
E Può averne infinite.

(*Olimpiadi di Matematica, Gara di 2° livello*, 2005)

Le disequazioni con il valore assoluto

IN PRATICA
▶ Videolezione 5

413 **VERO O FALSO?** La disequazione:

a) $|x-1| \leq 0$ è impossibile. V F
b) $|-x^2 - 4| \geq 0$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$. V F
c) $|x+3| > 0$ è verificata per ogni $x \neq -3$. V F
d) $|x| > -|x+9|$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$. V F
e) $|x^2 - 16| > -1$ è verificata per ogni $x \neq \pm 4$. V F
f) $|x+1| + |x^2 + x| \leq 0$ è impossibile. V F

414 **COMPLETA**

a) $\dfrac{1}{|x| + |x-1|} > 0$ se x ......

b) $|4 - x^2| > 0$ se x ......

c) $\dfrac{1}{|x-2| + |x^2-4|} > 0$ per x ......

d) $|4x^2| \leq 0$ se x ......

e) $\left|\dfrac{x}{x+2}\right| + 2 > 0$ se x ......

415 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo le seguenti disequazioni:

a) $|3 - x| < 2x - 4$; b) $|x-1| < |x-3|$.

a) Studiamo il segno all'interno del valore assoluto:

$$3 - x \geq 0 \qquad \text{se } x \leq 3.$$

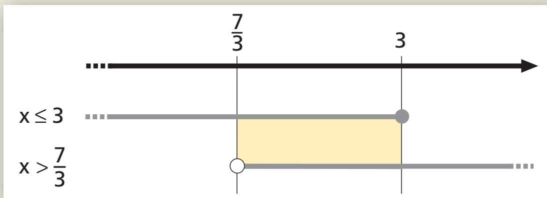
Quindi:

$$|3-x| = \begin{cases} 3 - x & \text{se } x \leq 3 \\ x - 3 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

La disequazione ha per soluzioni quelle dei due seguenti sistemi.

Primo sistema

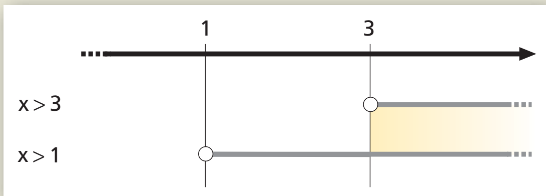
$$\begin{cases} x \leq 3 \\ 3 - x < 2x - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x > \dfrac{7}{3} \end{cases}$$



$$\frac{7}{3} < x \leq 3$$

Secondo sistema

$$\begin{cases} x > 3 \\ x - 3 < 2x - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > 1 \end{cases}$$



$$x > 3$$

La disequazione iniziale è soddisfatta per $x > \frac{7}{3}$, ovvero nell'intervallo $\left]\frac{7}{3}; +\infty\right[$.

b) Per evitare lo studio del segno all'interno dei valori assoluti, poiché i membri della disequazione sono sempre positivi, possiamo elevarli al quadrato e ottenere una disequazione equivalente:

$$(x-1)^2 < (x-3)^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2 - 6x + 9 \rightarrow 4x - 8 < 0 \rightarrow x < 2.$$

La disequazione iniziale è soddisfatta per $x < 2$, ossia in $]-\infty; 2[$.

Risolvi le seguenti disequazioni e i seguenti sistemi che contengono valori assoluti.

416 $|2x+5| < -3$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

417 $|x-4| \leq 3$ $[1 \leq x \leq 7]$

418 $2|x| \geq |3-2x|$ $\left[x \geq \frac{3}{4}\right]$

419 $|3x-4| \geq 2x+5$ $\left[x \leq -\frac{1}{5} \vee x \geq 9\right]$

420 $|x^2+x| \leq |x|$ $[-2 \leq x \leq 0]$

421 $|3x+1| - 3(x+5) > 2$ $[x < -3]$

422 $|-2x+5| < x-3$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

423 $\left|\frac{1}{2}x - 3\right| > 2x - \frac{5}{2}$ $\left[x < \frac{11}{5}\right]$

424 $|x| > x^2 - 4x + 6$ $[2 < x < 3]$

425 $|2x^2 - 3x| - |7x| \geq 0$ $[x \leq -2 \vee x = 0 \vee x \geq 5]$

426 $|2(x+3)+3(x-2)| < (3x+7) - 5(x+2)$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

427 $\begin{cases} |x-3| < 2x \\ |2x+5| > 3 \end{cases}$ $[x > 1]$

428 $|2x+3| - |3x-2| < 4$ $\left[x < \frac{3}{5} \vee x > 1\right]$

429 $\left|\frac{3-2x}{x+1}\right| < 1$ $\left[\frac{2}{3} < x < 4\right]$

430 $\begin{cases} \left|2x - \frac{1}{2}\right| < 7x - \frac{5}{2} \\ \left|\frac{1}{2}x + 3\right| > 3x + 1 \end{cases}$ $\left[\frac{2}{5} < x < \frac{4}{5}\right]$

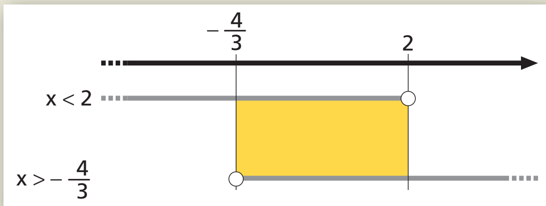
Particolari disequazioni con il valore assoluto

431 ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo le disequazioni: a) $|3x-1| < 5$; b) $|3x+5| > 10$.

a) La disequazione è nella forma $|A(x)| < k$, con $k > 0$, che è equivalente a $-k < A(x) < k$. Quindi la disequazione data è equivalente a $-5 < 3x - 1 < 5$, ossia al sistema:

$$\begin{cases} 3x - 1 < 5 \\ 3x - 1 > -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x < 6 \\ 3x > -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$



Le soluzioni della disequazione data sono:

$-\frac{4}{3} < x < 2.$

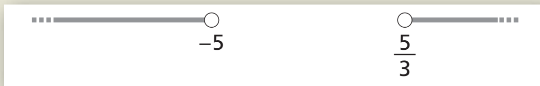
b) La disequazione è nella forma $|A(x)| > k$, con $k > 0$, che è equivalente ad $A(x) < -k \vee A(x) > k$. Quindi la disequazione data è equivalente a:

$3x + 5 < -10 \ \vee \ 3x + 5 > 10 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ 3x < -15 \vee 3x > 5 \ \rightarrow \ x < -5 \vee x > \frac{5}{3}.$

Le soluzioni della disequazione data sono:

$x < -5 \vee x > \frac{5}{3}.$



Risolvi le seguenti disequazioni.

432 $\left|5 - \frac{x}{3}\right| < 3$ $[6 < x < 24]$

433 $1 - |2x - 7| < 0$ $[x < 3 \vee x > 4]$

434 $3|x| + \frac{2}{5} > 2|x| - \frac{1}{10}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

435 $|x^2 - 9| + 5 < 0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

436 $\left|\frac{2x-1}{x-4}\right| + 2 > 0$ $[x \neq 4]$

437 $\frac{1-|x|}{2} + \frac{1}{4} > 1 - \frac{|x|+1}{4}$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

438 $|3x - 4| < -8 - |3x - 4|$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

439 $\frac{|x|-2}{3} + \frac{1}{2} > 1 - \frac{|x|-1}{6}$ $\left[x < -\frac{8}{3} \vee x > \frac{8}{3}\right]$

440 $3 - |4x + 1| > |8x + 2| + 5$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

441 $11 - |3x + 5| < 0$ $\left[x < -\frac{16}{3} \vee x > 2\right]$

442 $3 - |2x + 1| < |6x + 3| + 5$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

443 $\frac{1}{7}|4x^2 - 5| < 1$ $[-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}]$

444 $|4x - 3| > 9$ $\left[x < -\frac{3}{2} \vee x > 3\right]$

445 $3 + |x - 2| > 8 - |x - 2|$ $\left[x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{9}{2}\right]$

446 $|x^2 + 2x - 3| < 3$ $[-1 - \sqrt{7} < x < -2 \vee 0 < x < -1 + \sqrt{7}]$

447 $-1 + |x^2 - x| < 0$ $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

448 $3(1 - x) - x^2 > -|x - 1| - x(x + 3) + 8$ $[x < -4 \vee x > 6]$

449 $|-2x+10|-6>3x+3(1-x)$ $\left[x < \frac{1}{2} \vee x > \frac{19}{2}\right]$

450 $|-2x^2 + 4x| < 2$ $[1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}, x\neq 1]$

451 $|4x^2 - 12x + 10| > 1$ $\left[x \neq \frac{3}{2}\right]$

452 $\left|\frac{x+3}{x-2}\right| < 4$ $\left[x < 1 \vee x > \frac{11}{3}\right]$

453 $|x^2 + 2x| > 3$ $[x < -3 \vee x > 1]$

454 $4 - \left|\frac{x-2}{x}\right| \leq 0$ $\left[-\frac{2}{3} \leq x < 0 \vee 0 < x \leq \frac{2}{5}\right]$

455 $\left|\frac{2-5x}{2x+3}\right| > 7$ $\left[-\frac{23}{9} < x < -1, x \neq -\frac{3}{2}\right]$

ESERCIZI VARI Le disequazioni con il valore assoluto

TEST

456 Una sola fra le seguenti disequazioni ammette un unico numero reale come soluzione. Quale?

A $|x + 3| > 0$

B $2|x^2 - 6| \leq 0$

C $|x - 1| - |1 - x| > 0$

D $-3|x + 1| \geq 0$

E $|2x + 5| < 0$

457 Il polinomio di secondo grado $P(x)$ è positivo se e solo se $x \in]0; 2[$. Per quali valori di x è verificata la disequazione $|P(x)| > 0$?

A $\forall x \in \mathbb{R}$

B Per $x \in]0; 2[$

C Non è possibile rispondere.

D $\nexists x \in \mathbb{R}$

E $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$

Risolvi le seguenti disequazioni e i seguenti sistemi.

458 $-|-x+6|\geq 0$ $[x=6]$

459 $\frac{|x|-1}{x+3}\geq 0$ $[-3<x\leq -1 \vee x\geq 1]$

460 $\frac{2|x|-6}{1-x}>0$ $[x<-3 \vee 1<x<3]$

461 $\frac{|x|-2}{|x-2|}\leq 0$ $[-2\leq x<2]$

462 $\left|\frac{2+5x}{1-2x}\right|+2>7$ $\left[\frac{1}{5}<x<\frac{7}{5}, x\neq\frac{1}{2}\right]$

463 $\left|\frac{x-3}{x+2}\right|>6$ $\left[-3<x<-\frac{9}{7}, x\neq -2\right]$

464 $\frac{1}{|x+3|}>1$ $[-4<x<-3 \vee -3<x<-2]$

465 $\left|\frac{x+1}{2-x}\right|>2$ $[1<x<5, x\neq 2]$

466 $\frac{|x|-9}{x^2-9}\geq 0$ $[x\leq -9 \vee -3<x<3 \vee x\geq 9]$

467 $(1+|x|)^2-2x-3\leq 0$ $[2-\sqrt{6}\leq x\leq\sqrt{2}]$

468 $|3x+2|>|x-5|$ $\left[x<-\frac{7}{2} \vee x>\frac{3}{4}\right]$

469 $\left|\frac{x^2-2x}{x+1}\right|<2$ $[2-\sqrt{6}<x<2+\sqrt{6}]$

470 $\left|\frac{1}{x}+\frac{x-3}{x+1}\right|-1>0$ $\left[x<\frac{1}{3}\wedge x\neq -1\wedge x\neq 0\right]$

471 $\frac{-|x|}{|x-1|}\geq 0$ $[x=0]$

472 $\begin{cases} x^2-6x+9>0 \\ |x^2-6x|>9 \end{cases}$ $[x<3-3\sqrt{2} \vee x>3+3\sqrt{2}]$

473 $|x-1|-\left|\frac{1}{2}x-8\right|<x$ $\left[x>-\frac{14}{3}\right]$

474 $\frac{|2x+5|-7}{|x|}<0$ $[-6<x<1, x\neq 0]$

475 $|x^2-4|>4x-8$ $[x\neq 2]$

476 $\begin{cases} |5x-1|<3x+2 \\ |2x-1|>7x+3 \end{cases}$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

477 $\begin{cases} |x+5|<7 \\ -x<|x+2|-1 \end{cases}$ $\left[-\frac{1}{2}<x<2\right]$

478 $\begin{cases} \frac{4x^2-x}{x^2-4}\geq 0 \\ |x+8|<2 \end{cases}$ $[-10<x<-6]$

479 $\frac{|4x-1|-3x-1}{x^2+4x+16}>0$ $[x<0 \vee x>2]$

480 $|3x-|2-x||\leq 2$ $[0\leq x\leq 1]$

481 $\frac{|x-2|}{|x+|x||}<1$ $\left[x>\frac{2}{3}\right]$

482 $|x^2-2x|\leq 2|x|-3$ $[\sqrt{3}\leq x\leq 3]$

483 $|x^2-5x+6|\leq|x-2|$ $[2\leq x\leq 4]$

484 $\frac{|x+2|}{3x-2}+\frac{1}{2}x\geq 0$ $\left[x>\frac{2}{3}\right]$

485 $\frac{x-2}{x-3}\leq\frac{9}{|x^2-5x+6|}$ $[-1\leq x\leq 5, x\neq 2, x\neq 3]$

486 $\left|\frac{x^2}{x-1}\right|+x>3$ $\left[\frac{3}{4}<x<1 \vee x>1\right]$

487 $\left|\frac{x-4}{3-2x}\right|\geq\frac{4x+7}{3-2x}-2$ $\left[x\leq\frac{1}{3} \vee x>\frac{3}{2}\right]$

488 $2|x+3|+|x-2|-|1-x|\leq 4$ $\left[-\frac{9}{2}\leq x\leq -\frac{3}{2}\right]$

489 $|x^2-4|+|x^2-1|>1$ $[\forall\, x\in\mathbb{R}]$

490 $\frac{|x^2-2x+3|}{x^2-1}>1$ $[x<-1 \vee 1<x<2]$

491 $\frac{|2x-3|-1}{|x|-2}\geq 0$ $[x<-2 \vee x\geq 1, x\neq 2]$

492 $\frac{|x+3|+|2-x|}{x^2-2|x|-3}\geq 0$ $[x<-3 \vee x>3]$

493 $\frac{|x-2|-10}{16-|x^2-8x|}\leq 0$ $[x\leq -8, 4-4\sqrt{2}<x<4+4\sqrt{2}, x\neq 4, x\geq 12]$

494 $\frac{2(x+4)-x^2}{|x-4|}>-x-3$ $\left[x>-\frac{5}{2}, x\neq 4\right]$

495 $\frac{1}{(x-3)(x+2)}\leq\frac{1}{|x-3|}+\frac{1}{|x+2|}$ $[x\neq -2, x\neq 3]$

Risolvi e discuti al variare di *a* le seguenti disequazioni.

496 $|2x+a|<3a$ $[a\leq 0, \nexists\, x\in\mathbb{R}; a>0, -2a<x<a]$

497 $|x-2a|>-7x+3a$ $\left[a<0, x>\frac{5}{8}a; a\geq 0, x>\frac{a}{6}\right]$

7. LE EQUAZIONI E LE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

▶ Teoria a pag. 21

498 Scrivi le condizioni di esistenza per i seguenti radicali.

$\sqrt{1-x^2}$; $\quad \sqrt[3]{\dfrac{2}{x}}$; $\quad \sqrt{x}+\sqrt{4-x}$; $\quad \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; $\quad \sqrt[5]{x^2-4}$; $\quad \sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}$.

$[-1 \leq x \leq 1;\ x \neq 0;\ 0 \leq x \leq 4;\ x \neq \pm 1;\ \forall x \in \mathbb{R};\ -1 \leq x < 2]$

Le equazioni irrazionali

IN PRATICA
▶ Videolezione 6

499 VERO O FALSO?

a) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-2}=\sqrt{x(x-2)}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. V F

b) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}$ per $x \neq 3$. V F

c) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. V F

d) $\sqrt{4x^2}=\pm 2x$. V F

Spiega perché ciascuna delle seguenti equazioni non ha soluzione.

500 $\sqrt{2x+3}=-4$; $\quad \sqrt{-x^2}=2$.

501 $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x^2}=-2$; $\quad \sqrt{-x^2-1}=x$.

502 $\sqrt{2x}+\sqrt{6x+1}=0$; $\quad -\sqrt{3+x}=x^4$.

503 $\sqrt{x}=-\sqrt{1-x}$; $\quad \sqrt{-|2+x|}=4$.

504 ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo le equazioni:

a) $\sqrt[3]{2x+x^3+1}=1+x$; **c)** $\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{x-3}$;

b) $\sqrt{x^2-3x+2}=2-x$; **d)** $2\sqrt{2+x}-\sqrt{x-3}=4$.

a) Poiché l'esponente del radicale è dispari, la radice è sempre definita. Quindi, per risolvere l'equazione, basta elevare entrambi i membri al cubo per eliminare la radice:

$$2x+x^3+1=(1+x)^3 \to 2x+x^3+1=1+x^3+3x^2+3x \to 3x^2+x=0 \to x(3x+1)=0.$$

L'equazione ha due soluzioni: $x_1=-\dfrac{1}{3}$ e $x_2=0$.

b) Poiché l'esponente del radicale è pari, l'equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x^2-3x+2\geq 0 \\ 2-x\geq 0 \\ x^2-3x+2=(2-x)^2 \end{cases} \to \begin{cases} x\leq 1 \vee x\geq 2 \\ x\leq 2 \\ x^2-3x+2=4+x^2-4x \end{cases} \to \begin{cases} x\leq 1 \vee x\geq 2 \\ x\leq 2 \\ x=2 \end{cases}$$

La soluzione $x=2$ è accettabile.

c) L'equazione ha due radicali contenenti l'incognita, quindi occorre elevare a potenza più volte. Poiché gli indici sono dispari, non ci sono condizioni di esistenza dei radicali da porre.
Eleviamo al cubo i due membri e semplifichiamo:

$$2+x-5-3\sqrt[3]{(2+x)^2\cdot 5}+3\sqrt[3]{(2+x)25}=x-3 \to \sqrt[3]{(2+x)^2\cdot 5}=\sqrt[3]{(2+x)\cdot 25}.$$

Eleviamo nuovamente al cubo:

$$5(2+x)^2=25(2+x) \to (2+x)^2-5(2+x)=0 \to (2+x)(2+x-5)=0 \to$$
$$\to (2+x)(x-3)=0 \to x_1=-2,\ x_2=3.$$

d) Essendo gli indici pari, poniamo le condizioni di esistenza dei radicali:

$$\begin{cases} 2+x \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 3 \end{cases} \rightarrow x \geq 3.$$

Riscriviamo l'equazione nella forma $2\sqrt{2+x} = \sqrt{x-3} + 4$, per avere entrambi i membri positivi, ed eleviamo al quadrato: $4(2+x) = x - 3 + 16 + 8\sqrt{x-3}$.

Isoliamo il radicale: $8\sqrt{x-3} = 3x - 5$.

Poniamo la condizione $3x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{5}{3}$, che è compresa nella condizione $x \geq 3$, per elevare di nuovo al quadrato:

$$64(x-3) = 9x^2 + 25 - 30x \rightarrow 9x^2 - 94x + 217 = 0 \rightarrow x_1 = 7, x_2 = \frac{31}{9}.$$

Entrambi i valori soddisfano la condizione $x \geq 3$, quindi sono accettabili.

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali.

505 $\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = \frac{1}{2}$ $\left[x = \frac{5}{2}\right]$

506 $\sqrt{3x+4} = 2 + x$ $[x = -1, x = 0]$

507 $\sqrt[3]{x} = x$ $[x = -1, x = 0, x = 1]$

508 $\sqrt[4]{x+1} - x - 1 = 0$ $[x = -1, x = 0]$

509 $\sqrt[3]{x^3 - 2} = 1 + x$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

510 $3 - 4x - \sqrt{x^2 - 1} = 4 - 3x$ $[x = -1]$

511 $\frac{4\sqrt{5x} + 10}{\sqrt{5x} + 1} = 6$ $\left[x = \frac{4}{5}\right]$

512 $\sqrt{x^2 - 1 - 5(x-1)} + 3x = 3$ $\left[x = 1, x = \frac{5}{8}\right]$

513 $\sqrt{(x-2)\left(2 - \frac{1}{2}x\right)} + 2 = x$ $\left[x = 2, x = \frac{8}{3}\right]$

514 $\sqrt{4x + x^2 - 4} + \frac{1}{x} = 1 - x$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

515 $\sqrt{5 + 4x - x^2} - 2\sqrt{5 - x} = 0$ $[x = 3, x = 5]$

516 $-x + 1 = \sqrt[3]{7 - x^3}$ $[x = 2, x = -1]$

517 $\sqrt[3]{4x+8} - 2 - x = 0$ $[x = -4, x = -2, x = 0]$

518 $\sqrt[3]{x^2 - x} = \sqrt{x}$ $\left[x = 0, x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

519 $\sqrt{x} - 3 = \sqrt{3} - \sqrt{12 - x}$ $[x = 3, x = 9]$

520 $\frac{2\sqrt{x+3} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{x+8}} = 1$ $[x = 1]$

521 $\sqrt{2x-1} = 2\sqrt{x+4} - 3$ $[x = 5]$

522 $-\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 3x} = 2$ $[x = 1]$

523 $2\sqrt{x+5} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{3x-3}$ $[x = 4]$

524 $\sqrt{x+3} = \sqrt{x+12} - \sqrt{3-x}$ $\left[x = -\frac{12}{5}, x = 0\right]$

525 $\sqrt{3} - \sqrt{\frac{x}{4} + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{2-x}$ $[x = -1]$

526 $\frac{\sqrt[3]{x^3 - 2} + 2}{x} = 1$ $[x = 1]$

527 $\sqrt{6x^2 - 2x} = |x - 3|$ $\left[x = -\frac{9}{5}, x = 1\right]$

528 $\sqrt{|2x - 6|} = |x| - x$ $\left[x = -\frac{3}{2}, x = 3\right]$

529 $\sqrt{2x-1} = -1 + \sqrt{3x+1}$ $[x = 1, x = 5]$

530 $\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x} = \frac{12}{\sqrt{5+x}}$ $[x = 3, x = 4]$

531 $\frac{\sqrt{3x-5}}{2 + |x|} = 2$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

532 $\sqrt{3x+13} - \sqrt{3(x+2)} = \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$ $[x = 1]$

533 $\frac{2}{\sqrt{4x+5}} = \frac{9}{\sqrt{4x^2+x-5}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ $[x = 5]$

534 **TEST** How many real solutions does the following equation have?

$$\sqrt{1 + x + \sqrt{x}} = \sqrt{x + \sqrt{x+7}}$$

A 4 B 3 C 2 D 1 E 0

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2003)

Le disequazioni irrazionali

IN PRATICA
▶ Videolezione 7

535 VERO O FALSO?

a) Se $A(x) < B(x)$, allora $[A(x)]^2 < [B(x)]^2$. V F

b) Se $\sqrt{A(x)} < B(x)$, allora $A(x) < [B(x)]^2$. V F

c) Se $\sqrt{x-1} < x$, allora $x - 1 < x^2$. V F

d) Se $\sqrt{x+3} > -2$, allora $x + 3 > 4$. V F

e) Se $\sqrt{A(x)} < |B(x)|$, allora $A(x) < [B(x)]^2$. V F

536 Quando le due disequazioni $\sqrt{A(x)} \geq 0$ e $\sqrt{A(x)} \leq 0$ possono essere entrambe vere? Quando entrambe impossibili?

Risolvi le seguenti disequazioni senza eseguire calcoli.

537 $\sqrt{-x^2} \geq 0$; $\quad \sqrt{x^2+2} > -2$.

538 $\sqrt{x^2} > 0$; $\quad \sqrt{-x} \geq 0$.

539 $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} > 0$; $\quad \sqrt{2x} + \sqrt{x^2-2x} \geq 0$.

540 $\sqrt[3]{-x^2-1} < 0$; $\quad \sqrt[4]{-x-1} \geq 0$.

Le disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} < B(x)$

541 ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo la disequazione: $\sqrt{4x^2+5x-6} < 4x - 3$.

La disequazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 + 5x - 6 \geq 0 \\ 4x - 3 > 0 \\ 4x^2 + 5x - 6 < (4x-3)^2 \end{cases}$$

Risolviamo le disequazioni separatamente.

- Prima disequazione.

  È verificata per $x \leq -2 \vee x \geq \dfrac{3}{4}$.

- Seconda disequazione.

  $4x - 3 > 0 \rightarrow x > \dfrac{3}{4}$.

- Terza disequazione.

  Svolgiamo i calcoli:

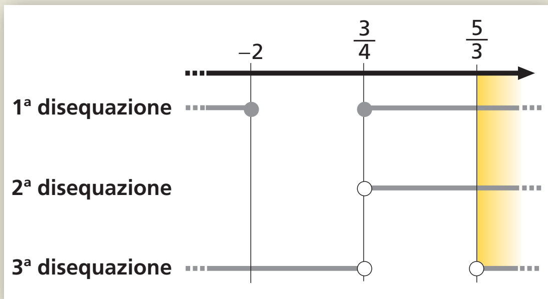
  $4x^2 + 5x - 6 < (4x-3)^2$
  $4x^2 + 5x - 6 < 16x^2 + 9 - 24x$
  $12x^2 - 29x + 15 > 0$.

  È verificata per: $x < \dfrac{3}{4} \vee x > \dfrac{5}{3}$.

Abbiamo dunque:

$$\begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq \dfrac{3}{4} \\ x > \dfrac{3}{4} \\ x < \dfrac{3}{4} \vee x > \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Compiliamo il quadro delle soluzioni.



Le soluzioni del sistema, e quindi della disequazione iniziale, sono:

$x > \dfrac{5}{3}$.

Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali.

542 $\sqrt{16+x^2}-x\leq -3$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

543 $2\sqrt{1-x+x^2}<1-2x$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

544 $\sqrt{x-3}<2x-1$ $[x\geq 3]$

545 $1>\sqrt{x^2-2x}-x$ $\left[-\frac{1}{4}<x\leq 0 \vee x\geq 2\right]$

546 $\sqrt{x^2+3x+3}<x-2$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

547 $\sqrt{x^2-4}<4-x$ $\left[x\leq -2 \vee 2\leq x<\frac{5}{2}\right]$

548 $\sqrt{|x|+1}<1-x$ $[x<0]$

549 $2\sqrt{x^2-5x+7}\leq 2x-4$ $[x\geq 3]$

Le disequazioni irrazionali del tipo $\sqrt{A(x)}>B(x)$

550 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo la disequazione:

$$\sqrt{x^2-4x-21}>x-3.$$

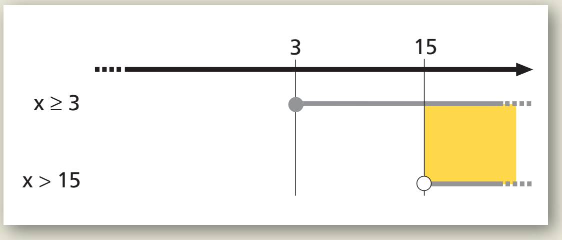
Dobbiamo risolvere i seguenti sistemi.

Primo sistema

$$\begin{cases} x-3\geq 0 \\ x^2-4x-21>(x-3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3\geq 0 \\ x^2-4x-21>x^2+9-6x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 3 \\ 2x>30 \rightarrow x>15 \end{cases}$$



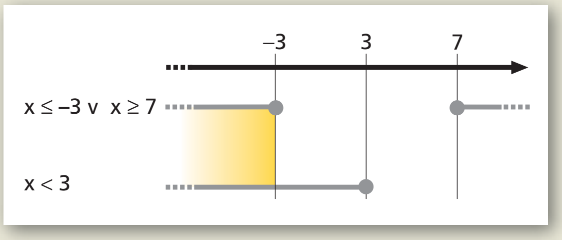
Il primo sistema è verificato per $x>15$.

Secondo sistema

$$\begin{cases} x^2-4x-21\geq 0 \\ x-3<0 \end{cases}$$

Consideriamo $x^2-4x-21\geq 0$. La disequazione è soddisfatta per $x\leq -3 \;\vee\; x\geq 7$.

$$\begin{cases} x\leq -3 \;\vee\; x\geq 7 \\ x<3 \end{cases}$$



Il secondo sistema è verificato per $x\leq -3$.

Unendo i due intervalli, otteniamo le soluzioni della disequazione $x\leq -3 \;\vee\; x>15$.

Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali.

551 $\sqrt{x^2+2x+9}-1\geq x$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

552 $\sqrt{-x+3}>x-3$ $[x<3]$

553 $\sqrt{4(1+x^2)}>5-x+\sqrt{1+x^2}$ $\left[x>\frac{12}{5}\right]$

554 $\sqrt{4x+x^2}>1+x$ $\left[x\leq -4 \vee x>\frac{1}{2}\right]$

555 $\sqrt{x^2-9}>5-x$ $\left[x>\frac{17}{5}\right]$

556 $2\sqrt{x+x^2}+x>\sqrt{x+x^2}+6$ $\left[x>\frac{36}{13}\right]$

557 $x\leq -1+\sqrt{1+2x}$ $[x=0]$

558 $\sqrt{x(x-4)+4}>2x+1$ $\left[x<\frac{1}{3}\right]$

ESERCIZI VARI Le disequazioni irrazionali

559 La disequazione $\sqrt{x+1} < 3$ è equivalente a $x+1 < 9$? Perché?

560 Perché la disequazione $\sqrt{x^2-1} > x-2$ *non* è equivalente a $(x^2-1) > (x-2)^2$?

561 **TEST** La disequazione $\sqrt{x^2-1} \geq 1$ è equivalente a tutte le seguenti, *tranne* una. Quale?

- **A** $x^2-1 \geq 1$
- **B** $x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2}$
- **C** $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2-1 \geq 1 \end{cases}$
- **D** $x^2-1 \geq 0$
- **E** $x^2-1 > 1 \vee x^2-1 = 1$

562 **TEST** Se $P(x)$ è un polinomio che assume valori non negativi solo per $x \geq 0$, allora l'insieme delle soluzioni di $\sqrt{P(x)} \leq 0$ è:

- **A** $\forall x \in \mathbb{R}$.
- **B** $\{0\}$.
- **C** $x \geq 0$.
- **D** $\varnothing$.
- **E** nessuno dei precedenti.

563 Determina tutti i numeri reali x che soddisfano la disequazione:

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1} > \frac{1}{2}. \qquad \left[-1 \leq x < 1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right]$$

(*International Mathematical Olympiad, IMO*)

Risolvi le seguenti disequazioni e i seguenti sistemi di disequazioni irrazionali.

564 $\sqrt{x^2-x} < x+1$ $\left[-\frac{1}{3} < x \leq 0 \vee x \geq 1\right]$

565 $\sqrt{x^2+x+1}-x > -1$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

566 $2\sqrt{x(x+4)-4(x+1)} > 3(x+1)-x-2$ $[x \leq -2]$

567 $\frac{\sqrt{1-x}}{2} > \frac{\sqrt{1+x}}{3}$ $\left[-1 \leq x < \frac{5}{13}\right]$

568 $\sqrt{26-17x} > 2x-5$ $\left[x \leq \frac{26}{17}\right]$

569 $x-3 < \sqrt{x^2+x+4}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

570 $\sqrt{x^2-5x+6} > x-1$ $\left[x < \frac{5}{3}\right]$

571 $\sqrt[3]{x^3+8} \geq x+2$ $[-2 \leq x \leq 0]$

572 $2(\sqrt{x+9}-4x+7) \leq 8$ $\left[x \geq \frac{25}{16}\right]$

573 $\sqrt[4]{x^4-16} > x$ $[x \leq -2]$

574 $\sqrt[3]{x+6} > x$ $[x < 2]$

575 $\sqrt{2x^2-3x+4}+1 > 2x$ $\left[x < \frac{3}{2}\right]$

576 $\sqrt{(4x^2+1)(2x-3)}-\sqrt{(2x-1)^3} \leq 0$ $\left[x \geq \frac{3}{2}\right]$

577 $\frac{\sqrt{1-x}}{2} > \frac{\sqrt{1+x}}{3}$ $\left[-1 \leq x < \frac{5}{13}\right]$

578 $\frac{1}{\sqrt{1-x}} > \frac{2}{\sqrt{1+x}}$ $\left[\frac{3}{5} < x < 1\right]$

579 $\sqrt{3x+5} < \frac{3x+1}{\sqrt{3x-5}}$ $\left[x > \frac{5}{3}\right]$

580 $\frac{|3-2x|+|4x+1|}{\sqrt[3]{x+2}} \leq 0$ $[x < -2]$

581 $\sqrt{5x^2-1}+1 \leq (1-x)(1+x)$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

582 $\sqrt{7+3(x+2)-2(2x-3)} < -1-x$ $[x < -6]$

583 $\sqrt{-x-3} < \sqrt{x^2-5x}$ $[x \leq -3]$

584 $\sqrt{x^2-4}+1 < 2x$ $[x \geq 2]$

585 $\sqrt{x^2-3x-28} \leq \sqrt{x^2+x-6}$ $\left[-\frac{11}{2} \leq x \leq -4 \vee x \geq 7\right]$

586 $\sqrt{2x^2-5x} > -x^2+2x-1$ $\left[x \leq 0 \vee x \geq \frac{5}{2}\right]$

587 $\sqrt{4x^2-3} < 2x+4$ $\left[-\frac{19}{16} < x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

588 $\sqrt{x^2-3} < 4x - 3\sqrt{x^2-3} - 1$ $\left[\sqrt{3} \le x < \frac{49}{8}\right]$

589 $\sqrt{x^2+5x-14} > \sqrt{x^2+4x+3}$ $[x > 17]$

590 $\sqrt{x(x+6)} - x + 6 + 2x > 3x - 1$ $[x \le -3 \vee x \ge -2]$

591 $\sqrt{2(x+15)} + 2x^2 > x(1-x) + 3(1+x^2)$ $[-15 \le x < 3]$

592 $\begin{cases}\sqrt{x^2-1} - x < 0\\ \sqrt{9x^2-6x+1} < 3x\end{cases}$ $[x \ge 1]$

593 $\begin{cases}\sqrt{|x|+1} > 3\\ \sqrt{x^2-4} < x+1\end{cases}$ $[x > 8]$

594 $\begin{cases}\sqrt{2x-1} \le x+3\\ \sqrt{x^2+5x+6} \le x+2\end{cases}$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

595 $\begin{cases}\sqrt{2x+1} > 1-2x\\ \sqrt{x^2-1} > x+3\end{cases}$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

596 $\begin{cases}\sqrt{3x-4} \le x+1\\ \sqrt{x^2+x-6} \le x-2\end{cases}$ $[x = 2]$

597 $\begin{cases}\sqrt{3x-1} > x-2\\ \sqrt{4-x} > -x+2\end{cases}$ $\left[\frac{1}{3} \le x \le 4\right]$

598 $\sqrt[4]{x^2-9} < \sqrt{2-x}$ $[x \le -3]$

599 $\begin{cases}\sqrt{x-2} + \dfrac{2}{\sqrt{x-1}} > 0\\ \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} \le \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}\end{cases}$ $[x > 2]$

600 $\begin{cases}\sqrt{9x^2+6x+1} \ge \dfrac{3}{2}(-2x+5)\\ 3 > \sqrt{2+|x-1|^2}\end{cases}$ $\left[\frac{13}{12} \le x < 1+\sqrt{7}\right]$

601 $\sqrt{x+1} < \sqrt[3]{x-1}$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

602 $\sqrt{\dfrac{81x^3-3}{x+2}} < 9x+1$ $\left[x \ge \frac{1}{3}\right]$

603 $\sqrt{x-2} > \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$ $\left[x > \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$

604 $\sqrt{x} + \sqrt{x-4} > \sqrt{2x-1}$ $\left[x > \frac{9}{2}\right]$

605 $3x \le \dfrac{\sqrt{9x^4+6|x|+36}}{x}$ $[x > 0]$

606 $\sqrt{\dfrac{(2x-1)(x+3)}{x^2+4}} > \sqrt{3}$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

607 $\dfrac{5x}{\sqrt{-5x}-1} < 2$ $\left[x < -\frac{1}{5}\right]$

608 $\dfrac{2+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-4}-2x+3} \le 0$ $[x \ge 2]$

609 $\sqrt{x-7} \ge \dfrac{2\sqrt{3x}}{\sqrt{3x^2-21x}}$ $[x \ge 9]$

610 $\dfrac{1-x}{2} > -1 - \sqrt{\dfrac{2-3x}{2}}$ $\left[x \le \frac{2}{3}\right]$

611 $\sqrt[3]{\dfrac{2x+3}{-1-x}} \ge \sqrt[3]{\dfrac{-2x^2-1}{2x^2-3x-5}}$ $\left[-2 \le x < -1 \vee \frac{5}{2} < x \le 4\right]$

612 $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x(x-1)} < 0$ $\left[x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

613 $\dfrac{\sqrt{x^2+6x+2}}{2x+1-\sqrt{4x}} \le 0$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

614 $\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1} > 1$ $\left[x \ge \frac{1}{2}\right]$

615 $\sqrt{\dfrac{x^2-16}{x^2+16}} < \sqrt{\dfrac{x^2+4}{x^2-4}}$ $[x \le -4 \vee x \ge 4]$

616 $\sqrt{9+x^2} \ge |x|+1$ $[-4 \le x \le 4]$

617 $\sqrt{1+x^2} < 2-|x|$ $\left[-\frac{3}{4} < x < \frac{3}{4}\right]$

618 $\sqrt{\left|x+\dfrac{4}{x}\right|} \ge |x|$ $[-2 \le x < 0 \vee 0 < x \le 2]$

619 $|x+1| < \sqrt[3]{x^3+1}$ $[-1 < x < 0]$

620 $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+|x|}{\sqrt{|x-9|}+\sqrt{|x^2-9x|}} > 0$ $[x \ne 9]$

621 $\dfrac{\sqrt{6x-x^2}}{3-2x} \ge 1$ $\left[\frac{3}{5} \le x < \frac{3}{2}\right]$

622 $\sqrt{(1-x)^2} + \sqrt{1-x} \ge 1-x$ $[x \le 1]$

623 $\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+3x}-x-1}{\sqrt{5x-x^2-4}-x+1} \ge 0$ $\left[\frac{5}{2} < x \le 4\right]$

624 $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x+5}} \ge 0$ $[x > 2]$

625 $\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{4}} \geq 0$ $\left[x \geq \frac{1}{2}\right]$

626 $\frac{\sqrt{2(x^2+8)}}{x+1} > (2x-3)(2x+3) + 5 - (2x)^2$ $\left[x < -\frac{16}{7} \vee x > -1\right]$

627 $\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}} < \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}} + \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ $[x > 3]$

628 $\sqrt{2x} - \sqrt{3+x} > \sqrt{2x-1} - \sqrt{x+4}$ $\left[x \geq \frac{1}{2}\right]$

629 $\frac{\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+1}}{x-2} \geq 0$ $[x < 2]$

630 $\sqrt[4]{x^4 - 5x^2 + 4} > x$ $\left[x \leq -2 \vee -1 \leq x < \frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$

631 $\sqrt[4]{x^2 - 9} < \sqrt{7-x}$ $\left[x \leq -3 \vee 3 \leq x < \frac{29}{7}\right]$

632 $\frac{\sqrt{2x^2-3x+1}-1}{x-3-\sqrt{x^2+2x}} > 0$ $\left[0 < x \leq \frac{1}{2} \vee 1 \leq x < \frac{3}{2}\right]$

ESERCIZI VARI Le disequazioni

633 **VERO O FALSO?** Le seguenti coppie di disequazioni (o sistemi di disequazioni) sono equivalenti:

a) $A(x) < B(x)$, $A^2(x) < B^2(x)$. V F

b) $A(x) < B(x)$, $\sqrt{A(x)} < \sqrt{B(x)}$. V F

c) $A(x) < B(x)$, $A^3(x) < B^3(x)$. V F

d) $|A(x)| \leq |B(x)|$, $A^2(x) \leq B^2(x)$. V F

e) $\sqrt{A(x)} > |B(x)|$, $\begin{cases} A(x) > B^2(x) \\ A(x) \geq 0 \end{cases}$. V F

TEST

634 Un numero positivo x soddisfa la disuguaglianza $\sqrt{x} < 3x$ se e solo se:

A $x > \frac{1}{9}$.

B $x > 3$.

C $x > 9$.

D $x < \frac{1}{9}$.

E $x < 9$.

(*Olimpiadi di Matematica, Giochi di Archimede*, 2001)

635 Senza fare calcoli, si stabilisca quale delle seguenti disequazioni non è equivalente alla disequazione $|2x-3|>5$:

A $|6-4x| > 10$.

B $\sqrt{4x^2-12x+9} > 5$.

C $|10x-15| > 25$.

D $x < -1 \vee x > 4$.

E $(2x-3)^2 > 5(2x-3)$.

(*CISIA, Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso*, 2005)

636 La disequazione $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ è verificata se e solo se:

A $1 < x < 2$ oppure $x > 3$.

B $x > 3$.

C $x > 1$.

D x è diverso da 1, da 2 e da 3.

E $x < 1$ oppure $x > 3$.

(*CISIA, Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso*, 2000)

637 La disequazione $x^3 \leq x^4$ è verificata se e solo se:

A x è un numero reale qualunque.

B $x \geq 1$.

C $x \geq 0$.

D $x \leq 0$ oppure $x \geq 1$.

E $x \leq -1$ oppure $x \geq 1$.

(*CISIA, Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso*, 2000)

Risolvi le seguenti disequazioni e i seguenti sistemi di disequazioni.

638 $3\left(\frac{x^2}{2}-1\right)+\frac{1}{2}x(-x+1)\geq 0$ $\left[x\leq -2 \vee x\geq \frac{3}{2}\right]$

639 $x^2(x^2+1)+7x(x+1)-7(x-2)<2$ $[\nexists x\in\mathbb{R}]$

640 $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4}\leq 0$ $[-4<x<-1 \vee 2\leq x\leq 3]$

641 $\frac{x(5x+1)+5(1-x^2)}{x(x+4)-(x-2)}<0$ $[x<-5 \vee -2<x<-1]$

642 $\frac{2x}{x-5}-\frac{x+3}{x+2}>0$ $[x<-2 \vee x>5]$

643 $(2x+1)^2<\frac{4x+13}{(x+2)^2}+4x(x+1)$ $[-3<x<-2 \vee -2<x<3]$

644 $\begin{cases}\frac{x-2}{x+1}\geq 0\\ x^2-5x+6<0\end{cases}$ $[2<x<3]$

645 $\begin{cases}x^2+x-6<0\\ x^2+x-12<0\\ x^2+x-2<0\end{cases}$ $[-2<x<1]$

646 $\begin{cases}1+\frac{x-4}{x+3}\geq 0\\ -x^2+2(x^4+1)\geq x^2(x^2+4)-2\end{cases}$ $\left[x<-3 \vee \frac{1}{2}\leq x\leq 1 \vee x\geq 2\right]$

647 $\left|\frac{x^2-3x}{\sqrt{\pi x^2(x-3)}}\right|\leq -6$ $[\nexists x\in\mathbb{R}]$

648 $\frac{\sqrt{x}\,(8-x)}{|x^2-6x|}>0$ $[0<x<8 \wedge x\neq 6]$

649 $\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}}>1$ $[x>0]$

650 $\frac{x^2+1-(x-2)(x+1)}{|2x^2+x-15|}\geq 0$ $\left[x>-3 \wedge x\neq \frac{5}{2}\right]$

651 $4(x^2+x)(x^2-x)+2x^2\geq (x^2+3)^2+7$ $[x\leq -2 \vee x\geq 2]$

652 $x+2>\sqrt{x^2-6x}$ $\left[-\frac{2}{5}<x\leq 0 \vee x\geq 6\right]$

653 $\frac{x^2-6}{x^2+2}+\frac{x^2+2}{x^2-2}\leq \frac{x^4-6x^2-18}{x^4-4}$ $[-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}]$

654 $\frac{\sqrt{x^2-1}-x-2}{|x-1|}<0$ $\left[-\frac{5}{4}<x\leq -1 \vee x>1\right]$

655 $\frac{\sqrt[3]{x+4}}{|5x-6|+\sqrt{x^2+3}}\leq 0$ $[x\leq -4]$

656 $\frac{\sqrt{x}}{1-|x-6|}\leq 0$ $[0\leq x<5 \vee x>7]$

657 $\sqrt{x+2}>\sqrt[3]{2x+1}$ $[x\geq -2]$

658 $\begin{cases}\sqrt{4x^2-11x+5}>2x\\ \sqrt{x^2-7x+10}-x+4<0\end{cases}$ $[5\leq x<6]$

659 $\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\geq 0\\ \frac{-2|x+1|-3x}{\sqrt{x-2}}<0\end{cases}$ $[\nexists x\in\mathbb{R}]$

660 $|x^2-5x+6|+x^2-4x+4>0$ $[x\neq 2]$

661 $\sqrt{3(x^2-1)}\geq x^2-1$ $[-2\leq x\leq -1 \vee 1\leq x\leq 2]$

662 $\sqrt[3]{x^3-27}<x-3$ $[0<x<3]$

663 $\frac{5-x-\sqrt{2x-7}}{x^2+\sqrt{6-x}}\leq 0$ $[4\leq x\leq 6]$

664 $\begin{cases}x-\sqrt[3]{x^3+x^2+2x}\geq 0\\ \frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x}<5\end{cases}$ $[-2\leq x\leq -1]$

665 $\frac{|x^2-3x|-10}{|x|}\leq 3$ $[-\sqrt{10}\leq x\leq 3+\sqrt{19} \wedge x\neq 0]$

666 $\begin{cases}\frac{3\sqrt{x+3}-\sqrt{12-x}}{8\sqrt{x}+x^2}\geq 0\\ |5-\sqrt{5x-1}|\geq 3\end{cases}$ $\left[\frac{1}{5}\leq x\leq 1\right]$

667 $\sqrt{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}-1}\geq 2$ $\left[-\frac{\sqrt{39}}{6}\leq x<-1 \vee 1<x\leq \frac{\sqrt{39}}{6}\right]$

668 $\begin{cases}\frac{3}{2}x\left(\frac{x}{2}+3\right)+5\left(\frac{x}{2}+1\right)+\frac{1}{4}(x^2+28)>0\\ x(x^2-5x+6)>(x-2)(x-3)\end{cases}$ $[1<x<2 \vee x>3]$

669 $(2x+1)(3-5x)\geq \frac{2x^2(11x^2+6)}{-3(x-3)}+\frac{10}{3}x^3$ $\left[-\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2} \vee x>3\right]$

670 $\sqrt{|2x^2+3x+1|} > -\sqrt{2}\,x$ $\left[x > -\frac{1}{3}\right]$

671 $\left|\frac{3x-1}{2} + \frac{2x-1}{3} - \frac{4x-5}{6}\right| > \frac{x^2-x+6}{3}$ $\left[\frac{3}{2} < x < 4\right]$

672 $\frac{x^2-4x+4}{x-\sqrt{x^2-1}} > 0$ $[x \geq 1 \wedge x \neq 2]$

673 $\sqrt{\frac{x^2-4}{2x^2}} \leq \frac{1}{x}$ $[2 \leq x \leq \sqrt{6}]$

674 $\begin{cases} \sqrt{x+4} > 1 \\ \frac{x^2-5x+6}{1-x} \geq 0 \end{cases}$ $[-3 < x < 1 \vee 2 \leq x \leq 3]$

675 $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{x^2-1}} \geq 0 \\ \frac{x^2+x+7}{x^3-4x} \geq 0 \end{cases}$ $[-1 < x < 0 \vee x > 2]$

676 $\begin{cases} \frac{2x^2+x-4}{x-3} + \frac{x}{3+x} \geq -\frac{2x^3}{9-x^2} \\ \frac{(2-x)^2}{|2-x|} > 1 \end{cases}$ $[x < -3 \vee -1 \leq x < 1 \vee x > 3]$

677 $\sqrt[3]{x\sqrt{x-1}} - \sqrt[3]{x-1} > 0$ $[x > 1]$

678 $\frac{\sqrt{x^2+5}-2x}{x^2-4x+3} \leq 0$ $\left[1 < x \leq \frac{\sqrt{15}}{3} \vee x > 3\right]$

679 $|2x-1| - |x+3| \leq 2-3x$ $\left[x \leq \frac{3}{2}\right]$

680 $\begin{cases} -x-\sqrt{5x-8} \leq \frac{9}{5} \\ 5x^3-8x^2+5x \leq 8 \end{cases}$ $\left[x = \frac{8}{5}\right]$

681 $\begin{cases} \frac{x^4-6x^2+9}{x-1} \leq 0 \\ \frac{|x-8|-1}{\sqrt{x+2}} > 0 \end{cases}$ $[-2 < x < 1 \vee x = \sqrt{3}]$

682 $\begin{cases} \frac{|x-1|-|x|}{2-\sqrt[3]{x+4}} < 0 \\ \frac{\sqrt{6-x}-6+4x}{2x-2+\sqrt{9-x}} \leq 0 \end{cases}$ $\left[\frac{1}{2} < x \leq \frac{15}{16}\right]$

683 $\begin{cases} \sqrt{5x-2} > \frac{x}{2} - \frac{1}{5} \\ 3 + \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} - \frac{x}{x-2} > 1 \end{cases}$ $\left[\frac{2}{5} < x < 2 \vee 5 + \frac{\sqrt{73}}{4} < x < \frac{102}{5}\right]$

684 $\begin{cases} \frac{1-2x-\sqrt{2-x}}{x^2+5x+15} \geq 0 \\ \frac{3-|4x+3|}{x+7+\sqrt{x+2}} < 0 \end{cases}$ $\left[-2 \leq x < -\frac{3}{2}\right]$

685 $\frac{|x^2|-2x-8}{|6x-9|} > -2x+5$ $\left[x > \frac{37}{13}\right]$

686 $\frac{\sqrt[4]{x^2-9}}{\sqrt{\frac{x^2}{3}-3}} > 1$ $[-3\sqrt{2} < x < 3 \vee 3 < x < 3\sqrt{2}]$

687 $\sqrt{10-6|x-2|} \leq 3-|x-2|$ $\left[\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \vee 3 \leq x \leq \frac{11}{3}\right]$

688 $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3} < \sqrt{2x-1}$ $\left[x \geq \frac{1}{2}\right]$

689 $\frac{-|x|+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{x^3-1}} \leq 0$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

690 $\frac{\sqrt{4x^2-4x+1}-\sqrt{9x^2+2x+2}}{\sqrt[3]{8-x^3}} \leq 0$ $\left[x \leq -1 \vee -\frac{1}{5} \leq x < 2\right]$

691 $\frac{\sqrt{x^2+6x+9}-3x+1}{2-\sqrt[3]{x^2-1}} > 0$ $[-3 < x < 2 \vee x > 3]$

692 $\sqrt{|x^2-4|-1} + \sqrt{\frac{-|x-5|}{x^4-1}} \geq 0$ $[-1 < x < 1 \vee x = 5]$

693 $\sqrt{\left|\frac{x+1}{x+6}\right|-3} > 0$ $\left[-\frac{53}{8} < x < -\frac{11}{2} \wedge x \neq -6\right]$

694 $\begin{cases} \frac{3-|x^2-5x+3|}{|x^2-4x|+|x-4|} \geq 0 \\ \sqrt[3]{4x} < x \end{cases}$ $[3 \leq x \leq 5 \wedge x \neq 4]$

695 $\begin{cases} \frac{x^4+3x^2+5}{|x-1|} > 0 \\ \sqrt{x^2-4x+3} < 3-2x \end{cases}$ $[x < 1]$

696 $\begin{cases} \frac{4-\sqrt{x^2+7x+10}}{x} < -2 \\ x^4-16x^2 \leq 0 \end{cases}$ $[-1 < x < 0]$

697 $\sqrt{x+2} < 8-\sqrt{3x+4}$ $\left[-\frac{4}{3} \leq x < 7\right]$

698 $|3-\sqrt{-2x-12}| - \sqrt{x+9} > 0$ $[-9 \leq x \leq -6 \wedge x \neq -8]$

699 $\begin{cases} \sqrt{2x+11} < x+4 \\ 2(x^2-x+1) + \frac{7(x^2+x)}{x+1} \geq 0 \end{cases}$ $\left[x \geq -\frac{1}{2}\right]$

700 $\left|\frac{2x-5}{x+3}\right| > \frac{x+3}{2x-5}$ $\left[x < -3 \vee -3 < x < \frac{5}{2} \vee x > 8\right]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **MATEMATICA.BLU - Vol. 3** © Zanichelli 2012 *con Maths in English*

701 $\dfrac{|3x^2-4|-\sqrt{9x^4+10}}{6x^2-5x+1} \leq 0$ $\left[x \leq -\dfrac{1}{2} \vee x > \dfrac{1}{3}, x \neq \dfrac{1}{2}\right]$

702 $\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{6-x}}{\sqrt{x-1}} \geq 1$ $[5 \leq x \leq 6]$

703 $\begin{cases} \dfrac{x^5+2x^4-8x^3}{x^6+7x^3-8} < 0 \\ \left|\dfrac{3x}{x+4}\right| \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\left[x < -4 \vee -2 < x < -\dfrac{4}{7} \vee 1 < x < 2\right]$

704 $\begin{cases} |3x+|5x^2+2\|\geq 3x \\ \sqrt{1+\sqrt[3]{x-2}} \geq \sqrt{2} \\ \dfrac{3}{x^2-12x+36} > 0 \end{cases}$ $[x \geq 3 \wedge x \neq 6]$

705 $\begin{cases} \dfrac{x+3-\sqrt{x^2+x}}{x^3+x^2-x-1} \geq 0 \\ \dfrac{\sqrt{16-x^2}+2}{|x|-|x+3|} < 0 \end{cases}$ $[1 < x \leq 4]$

706 $\begin{cases} \dfrac{x^2-3}{x^2+2x} + \dfrac{3x+8}{4-x^2} > \dfrac{1+x^2}{x^2-2x} \\ \dfrac{|2x^2+5x+2|-2}{\sqrt{x}} > 0 \end{cases}$ $\left[\dfrac{2}{7} < x < 2\right]$

707 $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+4}+x-2}{3x+2-\sqrt{3x^2+2x-8}} > 0 \\ \dfrac{\sqrt[3]{3x-1}-2}{2-|x|} \leq 0 \end{cases}$ $\left[\dfrac{4}{3} \leq x < 2 \vee x \geq 3\right]$

Risolvi le seguenti disequazioni, nell'incognita x, discutendo al variare del parametro a.

708 $\sqrt{x^2+4} \geq a-2$ $[a \leq 4, \forall x \in \mathbb{R}; a > 4, x \leq -\sqrt{a^2-4a} \vee x \geq \sqrt{a^2-4a}]$

709 $|x-2a| \leq a-1$ $[a < 1, \nexists x \in \mathbb{R}; a \geq 1, a+1 \leq x \leq 3a-1]$

710 Determina per quali valori di a l'equazione

$$x^4+2ax^2-5a+6=0$$

ha quattro soluzioni reali distinte. $[a < -6]$

711 Dimostra che vale la seguente disuguaglianza, detta *disuguaglianza triangolare*:

$$|a+b| \leq |a|+|b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

(Suggerimento. Eleva entrambi i membri al quadrato.)

712 Sia data la disuguaglianza triangolare:

$$|a+b| \leq |a|+|b|.$$

a) Come devono essere a e b affinché sia:

$$|a+b| < |a|+|b|?$$

b) E affinché sia:

$$|a+b| = |a|+|b|?$$

c) Risolvi: $|8x+x^2-1| < |8x|+|x^2-1|$.

[a) discordi ed entrambi non nulli; b) concordi o uno dei due nullo; c) $x < -1 \vee 0 < x < 1$]

713 Dimostra che:

$$||a|-|b|| \leq |a-b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

714 Dimostra che:

$$|x^3-2x^2-2x-4| \leq |x^3|+2x^2+2x+4, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

715 TEST Siano x e y numeri reali tali che $xy < x$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente falsa?

A $x^2y > x^2$ B $y \geq 1$ C $xy^2 > xy + 3$ D $xy^2 = xy$ E $x^2 + y^2 \leq 4(y-1)$

(*Olimpiadi di Matematica, Giochi di Archimede*, 1998)

716 TEST a, b, c sono tre numeri reali positivi tali che $a + b + c = 1$. Quale delle seguenti condizioni è equivalente a imporre che a, b, c siano le misure dei lati di un triangolo non degenere?

A $0 < |b-a| < \frac{1}{2}, 0 < |c-b| < \frac{1}{2}, 0 < |c-a| < \frac{1}{2}$.

B $a < \frac{1}{2}, b < \frac{1}{2}, c < \frac{1}{2}$.

C $a + b < \frac{1}{2}, b + c < \frac{1}{2}, c + a < \frac{1}{2}$.

D $a \leq \frac{1}{3}, b \leq \frac{1}{3}, c \leq \frac{1}{3}$.

E Nessuna delle precedenti.

(*Olimpiadi di Matematica, Gara di 2° livello*, 2005)

Problemi con le disequazioni

717 La somma fra il triplo di un numero e 4 è maggiore della radice quadrata della somma tra tale numero e 16 e minore del quadrato della differenza tra il triplo del numero stesso e 2. Quali condizioni soddisfa tale numero? (Indica con x il numero richiesto.) $\left[x > \frac{5}{3}\right]$

718 TEST Alberto, Barbara e Clara giocano in un grande piazzale dove ci sono 2008 birilli. Alberto butta giù il triplo dei birilli buttati giù da Barbara, che a sua volta butta giù il doppio dei birilli buttati giù da Clara. Quanti birilli al massimo può aver buttato giù Alberto?

A 1321 B 1338 C 1342 D 1353 E 1362

(*Olimpiadi di Matematica, Giochi di Archimede*, 2008)

719 a) Determina per quale valore del parametro reale a le seguenti disequazioni sono equivalenti:

$$\sqrt{\frac{1}{x} - 1} + \sqrt{5 - \frac{1}{x}} \geq 2\sqrt{2}; \quad |4ax(ax+2)+4| \leq 0.$$

b) Trova per quale valore di a la seconda disequazione ha come soluzione $x = 5$. $\left[\text{a) } a=-3;\ \text{b) } a=-\frac{1}{5}\right]$

720 Il numero degli alunni di una classe non è superiore a 35 e il numero delle femmine è $\frac{1}{4}$ del quadrato di quello dei maschi. Determina la composizione della classe sapendo che la differenza tra il numero delle femmine e il doppio del numero dei maschi non è inferiore a 5. [10 maschi, 25 femmine]

721 Determina per quali valori del parametro $a \geq 0$ la disequazione $(2a-1)^2x^2 - a(2a+3)x + 2x > 0$ è equivalente alla disequazione a) oppure alla disequazione b):

a) $\sqrt{x^2+1} - 2x < 1$; b) $\frac{|3x+3| - 3(-x+1)}{-x+3} < 0$. [a) nessun valore di a; b) $a = 1$]

722 Sull'arco AB, quarta parte di una circonferenza di centro O e raggio 2, considera un punto P e la sua proiezione H sul raggio OA. Determina $x = \overline{PH}$ in modo che:

a) l'area del quadrilatero $OAPB$ sia maggiore di $\frac{5}{2}$;

b) risulti $PB \leq PH$.

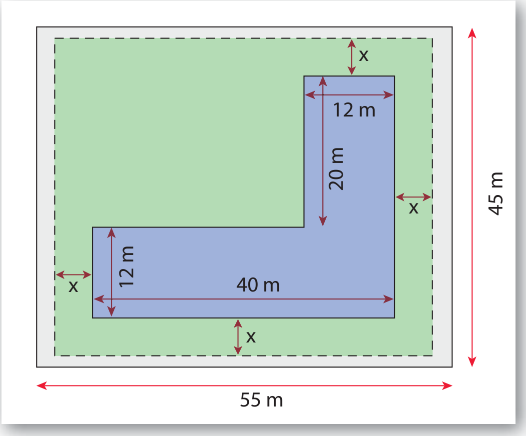
$\left[\text{a) } \frac{5-\sqrt{7}}{4} < x < \frac{5+\sqrt{7}}{4};\ \text{b) } 2(\sqrt{3}-1) \leq x \leq 2\right]$

REALTÀ E MODELLI

1 **Il caseggiato**

Un'amministrazione comunale emana una gara d'appalto per la costruzione di un caseggiato su un terreno rettangolare di 55×45 m. Il bando prevede che il caseggiato a forma di L sia circondato da una zona verde di area almeno doppia rispetto a quella occupata dalla casa, se questa ha al massimo due piani; se la casa ha da tre a cinque piani, l'area della zona verde deve essere tre volte quella del fabbricato. Le dimensioni della casa sono quelle indicate in figura.

- ▶ Trova l'intervallo dei valori di x per i quali sono rispettate le condizioni poste.
- ▶ È possibile costruire una casa di cinque piani?



2 **Scatola di cioccolatini**

Anna vuole costruire con un cartoncino colorato di 12×9 cm una scatoletta da riempire con almeno 10 cioccolatini preparati da lei. Per far questo, ritaglia dai quattro angoli del cartoncino quattro quadratini, per poi ripiegare i lembi laterali. I cioccolatini hanno la forma di parallelepipedi rettangoli di dimensioni $4 \times 2 \times 1$ cm.

- ▶ Quale misura deve avere il lato del quadratino da ritagliare perché la scatola abbia il volume corrispondente ad almeno 10 cioccolatini?
- ▶ Con le soluzioni limite trovate, quanti cioccolatini possono stare effettivamente nella scatola? Qual è la soluzione migliore?

3 **Altezza del satellite**

La terza legge di Keplero afferma:

«I quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite: $d^3 = KT^2$».

Il semiasse maggiore d può essere inteso anche come il raggio medio dell'orbita.
I satelliti geostazionari, che costituiscono la maggior parte dei satelliti per comunicazioni, hanno un periodo di rotazione di circa 24 ore, per cui restano sempre allineati al di sopra dello stesso punto della Terra.

- ▶ Sapendo che $K = \frac{GM}{4\pi^2}$, dove $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^{3}s^{2}kg^{-1} è la costante di gravitazione universale, $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg è la massa della Terra, e che il periodo di rotazione T deve essere pari al giorno siderale, ovvero 23 h 56 min 4,09 s, determina a quale distanza dalla Terra deve ruotare un satellite geostazionario.
- ▶ Un altro satellite di osservazione deve passare su ogni punto della Terra almeno ogni ora e mezza. Qual è la distanza massima dalla Terra a cui deve viaggiare?

4 **Lattine per bibite**

Il contenuto di una lattina di bibita deve essere di 33 cl, con una tolleranza del 10%. Si vuole che l'altezza della lattina sia il doppio del diametro di base.

- ▶ Quali sono i limiti massimo e minimo per il diametro di base?

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 La soluzione dell'equazione $|x^2 + 2x| = 2x + 1$ è l'unione delle soluzioni dei sistemi:

A $\begin{cases} x^2 + 2x \geq 0 \\ x^2 + 2x = 2x + 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + 2x < 0 \\ -x^2 - 2x = 2x + 1 \end{cases}$

B $\begin{cases} x^2 + 2x \geq 0 \\ x^2 + 2x = 2x + 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + 2x < 0 \\ x^2 + 2x = 2x + 1 \end{cases}$

C $\begin{cases} x^2 + 2x \geq 0 \\ -x^2 - 2x = 2x + 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + 2x < 0 \\ x^2 + 2x = 2x + 1 \end{cases}$

D $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 2x = 2x + 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ -x^2 - 2x = 2x + 1 \end{cases}$

E $\begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 2x = 2x + 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ -x^2 - 2x = 2x + 1 \end{cases}$

2 Per quali valori del parametro a la disequazione $(a + 2)x < a - 3$ ammette come soluzione un intervallo illimitato a destra?

A $a = -2$

B $a < -2$

C $a > -2$

D $a = 3$

E $a > 3$

3 Se una disequazione di secondo grado $ax^2 + bx + c \leq 0$ ha equazione associata con discriminante nullo, allora:

A la disequazione non è mai verificata.

B la disequazione è verificata per qualunque valore di x.

C se $a > 0$, la disequazione è verificata per qualunque valore di x.

D se $a > 0$, la disequazione non è mai verificata.

E se $a < 0$, la disequazione è verificata per qualunque valore di x.

4 Quali sono le soluzioni della disequazione:

$$\frac{x^2 + 4}{(x + 2)^2} \geq 0?$$

A La disequazione non ammette soluzioni.

B La disequazione è verificata per ogni valore reale di x.

C La disequazione è verificata per ogni valore reale di x diverso da -2.

D $x > 2$.

E $-2 < x < 2$.

5 La disequazione $x^8 - 4 > 0$ è verificata:

A soltanto per $x > \sqrt[4]{2}$.

B per $x < -\sqrt[4]{2} \vee x > \sqrt[4]{2}$.

C $\forall x \in \mathbb{R}$.

D per $x > \sqrt{2}$.

E per nessun valore di x reale.

6 A che cosa è equivalente la disequazione:

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} > 3x + 1?$$

A $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ 3x + 1 > 0 \\ x^2 + 2x - 3 > 3x + 1 \end{cases}$

B $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ 3x + 1 > 0 \\ x^2 + 2x - 3 < (3x + 1)^2 \end{cases}$

C $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ 3x + 1 > 0 \\ x^2 + 2x - 3 > (3x + 1)^2 \end{cases}$

D $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ 3x + 1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 > (3x + 1)^2 \end{cases}$

E $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ 3x + 1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x + 1 \leq 0 \\ x^2 + 2x - 3 > (3x + 1)^2 \end{cases}$

QUESITI

7 Dati i numeri $a, b > 0$, definiamo: media quadratica $M_Q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$; media geometrica $M_G = \sqrt{ab}$; media aritmetica $M = \frac{a+b}{2}$. Dimostra che $M_Q \geq M \geq M_G$.

8 **TEST** Considerati i numeri reali a, b, c, d, comunque scelti, se $a > b$ e $c > d$, allora:

A $a + b > b + c$. **B** $a - d > b - c$. **C** $ad > bc$. **D** $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria,* 2002, *quesito* 3)

9 Dire se è vero che risulta $\sqrt{x^2 + 2x\sqrt{3} + 3} = x + \sqrt{3}$ per ogni x reale e giustificare la risposta.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione straordinaria,* 2003, *quesito* 4)

10 Come si risolve un'equazione del tipo $\sqrt[n]{A(x)} = \sqrt[m]{B(x)}$? Considera i casi: a) n, m entrambi pari; b) n pari, m dispari; c) n, m entrambi dispari.
E una disequazione del tipo $\sqrt[n]{A(x)} > \sqrt[m]{B(x)}$?
Considera ancora i casi precedenti.

11 Si calcoli il numero delle soluzioni dell'equazione $|x^2 - x| = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero* (*Americhe*), *Sessione ordinaria,* 2008, *quesito* 5)

12 Dimostrate che la somma di qualsiasi numero reale positivo e del suo reciproco è almeno 2.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria,* 2005, *quesito* 8)

PROBLEMI

13 Nel triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa BC, $\overline{AB} = 8$ e $\overline{CB} = 10$. Considerato un punto P sull'ipotenusa e le sue proiezioni H su AC e K su AB, determina $\overline{HP} = x$ in modo che:

a) il perimetro $HPKA$ sia minore del doppio del perimetro di PKB;
b) l'area di $HPKA$ sia minore dell'area di PKB.

$\left[\text{a) } 0 \leq x < \frac{72}{13}; \text{ b) } 0 \leq x < \frac{8}{3}\right]$

14 Nella semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 4$, dal punto B traccia la corda BC e il raggio OD parallelo a BC. Posto $\overline{CB} = 2x$, trova per quali valori di x il perimetro di $OBCD$ è minore o uguale a 7.

$\left[0 \leq x \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right]$

15 Data la circonferenza di raggio 4, sul diametro AB considera un punto C e poni $\overline{CB} = x$.
Siano P e Q le intersezioni con la circonferenza della perpendicolare ad AB tracciata per C, e H e K le proiezioni di P e Q sulla retta tangente alla circonferenza in B.
Determina x in modo che il perimetro di $PQKH$ sia maggiore di 16.

$\left[\frac{8}{5} < x < 8\right]$

16 Considera il triangolo isoscele ABC di vertice C e inscritto alla semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 8$. Una parallela ad AB incontri la semicirconferenza in D ed E, AC in P e CB in Q. Posto $\overline{PQ} = 2x$, determina x in modo che:

$$\overline{DE} + \overline{PQ} < 6.$$

$\left[0 \leq x < \frac{7 - \sqrt{31}}{2}\right]$

17 In una circonferenza di centro O e raggio 10, traccia una corda AB che disti 6 da O. Sul prolungamento di AB, dalla parte di B, considera un punto P e la sua proiezione Q sulla tangente per B alla circonferenza. Trova $x = \overline{BP}$ in modo che:

$$\frac{\overline{BP}^2 + \overline{BQ}^2}{\overline{OP}^2} \leq 1.$$

$[0 \leq x \leq 50]$

18 Si considerino le lunghezze seguenti:

$$[1]\; a + 2x,\ a - x,\ 2a - x,$$

dove a è una lunghezza nota non nulla e x è una lunghezza incognita.
Determinare per quali valori di x le lunghezze [1] si possano considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2002, *problema* 2, *punto a*)

$\left[0 < x < \frac{a}{2}\right]$

19 Un rettangolo ha i lati lunghi $\sqrt{k}$ e $\sqrt{1-2k}$ $(k \in \mathbb{R})$. Trova per quali valori di k:
a) esiste il rettangolo;
b) il perimetro risulta uguale a 2;
c) l'area è minore di $\frac{1}{4}$;
d) il rettangolo diventa un quadrato (in tal caso calcola l'area).

$\left[\text{a)}\ 0 \leq k \leq \frac{1}{2};\ \text{b)}\ k = 0, k = \frac{4}{9};\ \text{c)}\ 0 \leq k < \frac{2-\sqrt{2}}{8} \vee \frac{2+\sqrt{2}}{8} < k \leq \frac{1}{2};\ \text{d)}\ k = \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

20 Data l'equazione

$$kx^2 - (2k+1)x + k = 0, \quad k \in \mathbb{R},$$

trova per quali valori di k:
a) le soluzioni sono reali e distinte;
b) non ci sono soluzioni;
c) la differenza delle soluzioni è maggiore di 2;
d) il valore assoluto della somma delle soluzioni è minore del loro prodotto.

$\left[\text{a)}\ k > -\frac{1}{4};\ \text{b)}\ k < -\frac{1}{4};\ \text{c)}\ 0 < k < \frac{1+\sqrt{2}}{2};\ \text{d)}\ -1 < k < -\frac{1}{3}\right]$

21 Discuti la disequazione

$$(2a - 3)x - a > a$$

al variare del parametro a in $\mathbb{R}$.
a) Per quale valore di a le soluzioni della disequazione sono rappresentate da $x < \frac{1}{4}$?
b) Esiste un valore di a per cui la disequazione è verificata per qualsiasi valore di x?
c) Trova per quale valore di a la disequazione è equivalente a $|x+1| > \sqrt{x|x-1|}$.

$\left[a = \frac{3}{2}, \nexists\, x \in \mathbb{R};\ a > \frac{3}{2}, x > \frac{2a}{2a-3};\ a < \frac{3}{2}, x < \frac{2a}{2a-3};\ \text{a)}\ a = -\frac{1}{2};\ \text{b)}\ \nexists\, a \in \mathbb{R};\ \text{c)}\ \nexists\, a \in \mathbb{R}\right]$

22 a) Verifica che le disequazioni

$$\frac{\sqrt{6x+1} - \sqrt{2x^2-8}}{\sqrt{6x+1} + \sqrt{2x^2-8}} < 1,$$

$$\sqrt{x^2 - 1 + \sqrt{x-1}} \geq x$$

hanno lo stesso insieme soluzione.
b) Trova per quale valore di a la disequazione $ax - x \leq 4a$ ha come soluzione l'insieme soluzione delle due disequazioni date.
c) Discuti la disequazione del punto precedente al variare di a.

$\left[\text{a)}\ x \geq 2;\ \text{b)}\ a = -1;\ \text{c)}\ a < 1, x \geq \frac{4a}{a-1};\ a = 1, \forall x \in \mathbb{R};\ a > 1, x \leq \frac{4a}{a-1}\right]$

23 Data l'equazione

$$(a+1)x^2 - 2ax + a - 3 = 0, \ \ a \in \mathbb{R},$$

trova per quali valori di a:
a) le soluzioni sono reali;
b) la somma delle soluzioni è maggiore di 3;
c) la soluzione maggiore è positiva;
d) il valore assoluto della differenza delle due soluzioni è minore di 2.

$\left[\text{a)}\ a \geq -\frac{3}{2};\ \text{b)}\ -\frac{3}{2} \leq a < -1;\ \text{c)}\ a > -\frac{3}{2} \wedge a \neq -1;\ \text{d)}\ -\frac{3}{2} \leq a < -\sqrt{2} \vee a > \sqrt{2}\right]$

CAPITOLO

2

٢ [numerazione araba]

२ [numerazione devanagari]

二 [numerazione cinese]

LE FUNZIONI

I CHICCHI E LA SCACCHIERA Secondo un'antica leggenda orientale, l'inventore degli scacchi, Sissa Nassir, chiese al proprio re una ricompensa a prima vista assai modesta: un chicco di riso per la prima casella della scacchiera, due per la seconda, quattro per la terza e così via, raddoppiando la quantità dei chicchi per ognuna delle caselle. Il re accettò senza pensarci…

Perché il re di Persia fece mozzare la testa all'inventore del gioco degli scacchi?

La risposta a pag. 105

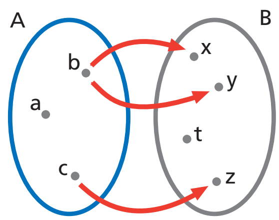
1. LE FUNZIONI E LE LORO CARATTERISTICHE

Relazioni e funzioni

DEFINIZIONE

Relazione

Dati due insiemi A e B, si dice che tra essi è definita una relazione $\mathcal{R}$ quando è indicata una legge che associa a *qualche* elemento di A *uno* o *più* elementi di B.

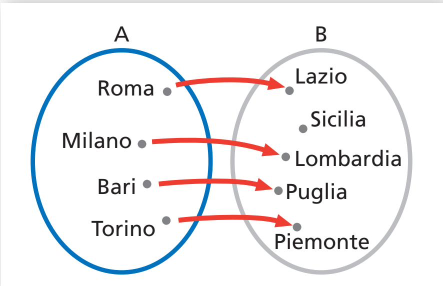


Il prodotto cartesiano $A \times B$ di due insiemi è l'insieme di tutte le coppie ordinate di elementi di cui il primo appartiene ad A e il secondo appartiene a B.

Una relazione è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ e viene individuata dalle coppie ordinate di elementi che si corrispondono.

Per esempio, la seguente è la relazione la cui rappresentazione con i diagrammi a frecce è data nella figura a lato:

$$\mathcal{R} = \{(b; x), (b; y), (c; z)\}.$$



► **Figura 1** La relazione «*x* è capoluogo della regione *y*» è una funzione. Nel suo diagramma da *ogni* elemento del primo insieme parte *una e una sola* freccia.

La relazione rappresentata in figura 1 soddisfa due condizioni:

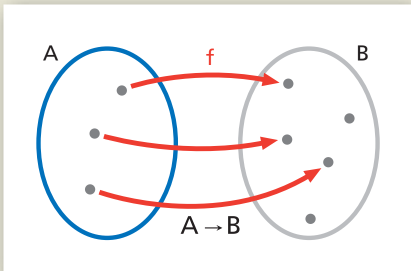
- **per ogni** elemento di A **esiste un** elemento di B a esso associato;
- tale elemento di B è **unico**.

Una relazione di questo tipo si chiama *funzione*.

DEFINIZIONE

Funzione

Una relazione fra due insiemi A e B è una funzione se a *ogni* elemento di A associa *uno e un solo* elemento di B.



Non si ha una funzione se anche a un solo elemento di A non è associato un elemento di B, oppure ne sono associati più di uno.

Poiché una funzione fa corrispondere a ogni elemento di A un *unico* elemento di B, essa viene anche chiamata **corrispondenza univoca**.

Per indicare una funzione si usa una lettera minuscola (spesso la lettera f) nel seguente modo:

$$f\colon A \to B, \qquad \text{oppure} \qquad A \xrightarrow{f} B,$$

che si legge: «f è una funzione da A a B».

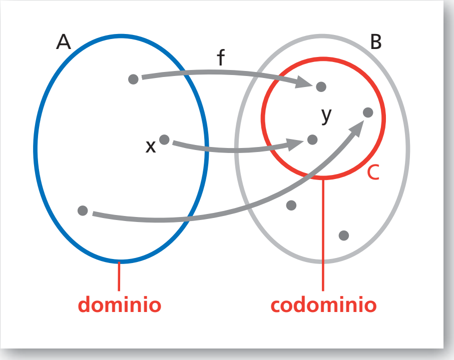
Si dice che A è l'*insieme di partenza* della funzione e B l'*insieme di arrivo*.

L'insieme B può coincidere con A.

Si può utilizzare una notazione simile anche per indicare che a un elemento x di A corrisponde un elemento y di B: $f\colon x \mapsto y$.

y è detta l'**immagine** di x mediante la funzione f.

L'insieme di partenza A è detto **dominio** della funzione; il sottoinsieme di B formato dalle immagini degli elementi di A è detto **codominio**. Indichiamo il codominio con la lettera C. Vale la relazione $C \subseteq B$.



● Analogamente, x è detta **controimmagine** di y.

● Spesso il dominio di una funzione viene indicato con la lettera D.

◄ Figura 2

Per indicare una funzione si utilizza anche la scrittura

$$y = f(x),$$

che si legge: «y uguale a effe di x».

Le funzioni numeriche

Quando i due insiemi A e B sono numerici, le funzioni vengono dette **funzioni numeriche**.

In seguito, quando parleremo di funzioni numeriche, sarà sottinteso che esse sono definite per valori reali, cioè il loro dominio sarà $\mathbb{R}$ o un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e l'insieme di arrivo sarà $\mathbb{R}$ stesso. Tali funzioni si chiamano **funzioni reali di variabile reale**. Inoltre esse saranno in genere descrivibili mediante un'**espressione analitica**, ossia mediante una formula matematica.

● Esistono anche funzioni numeriche che non sono di questo tipo. Per esempio, se associ a ogni ora del giorno la temperatura di una stanza, hai una funzione che in genere non è descrivibile con una formula.

ESEMPIO

Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descritta dalla legge matematica

$$x \mapsto 2x + 5, \qquad \text{ovvero} \qquad y = 2x + 5.$$

A ogni valore di x la legge fa corrispondere uno e un solo valore di y. Per esempio, per $x = 3$ il valore di y è $y = 2 \cdot 3 + 5 = 11$. Possiamo anche dire che 11 è l'immagine di 3, cioè $f(3) = 11$.

Il valore che assume y dipende da quello attribuito a x. Per questo motivo y prende il nome di **variabile dipendente** e x di **variabile indipendente**.

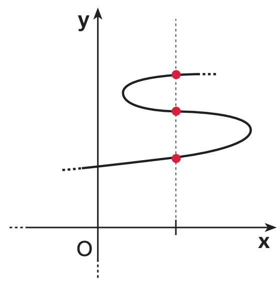
I valori della x sono quindi gli elementi del dominio, mentre quelli assunti dalla y sono gli elementi del codominio.

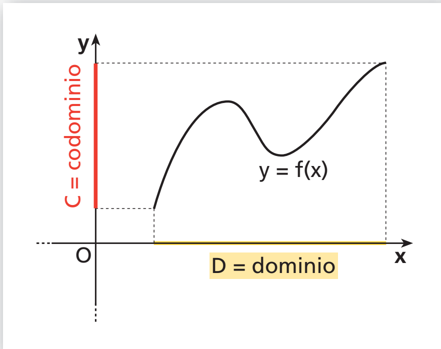
Di una funzione numerica si cerca spesso di studiare il **grafico**, ossia l'insieme dei punti $P(x; y)$ del piano cartesiano tali che x è un numero reale nel dominio di f e y è l'immagine di x, ossia $y = f(x)$.

● Il grafico viene anche detto **diagramma cartesiano**.

Se la funzione f è definita da un'equazione $y = f(x)$, il suo grafico è una curva γ, luogo di tutti i punti del piano che soddisfano l'equazione.

● Quello che segue **non** è il grafico di una funzione. Spiega perché.





Alcuni grafici possono essere tracciati conoscendo anche pochi elementi, se si sanno le loro caratteristiche. Per esempio, il grafico di una funzione del tipo $y = mx + q$ è una retta e per rappresentarla è sufficiente determinare due suoi punti.

◀ **Figura 3** Il grafico di una funzione $y = f(x)$.

Le funzioni definite per casi

● Si chiamano anche **funzioni definite a tratti**.

Esistono funzioni definite da espressioni analitiche diverse a seconda del valore attribuito alla variabile indipendente. Tali funzioni sono dette **funzioni definite per casi**.

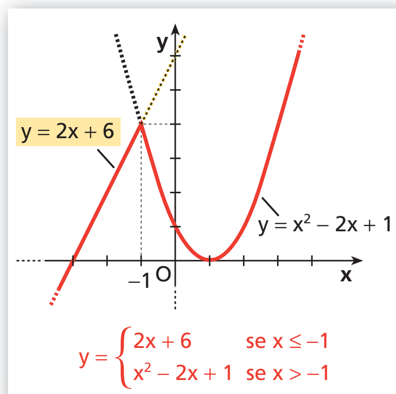
ESEMPIO

La funzione

$$y = \begin{cases} 2x + 6 & \text{se } x \leq -1 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

è una funzione definita per casi. Il suo grafico è rappresentato nella figura 4.

▶ **Figura 4** Un esempio di grafico di una funzione definita per casi.



● Il grafico di una funzione del tipo

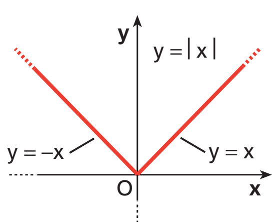
$y = ax^2 + bx + c$

(con $a \neq 0$) è una parabola con asse parallelo all'asse y.

Anche la funzione **valore assoluto** può essere definita per casi:

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Il suo grafico è rappresentato nella figura a lato.



Il dominio naturale di una funzione

DEFINIZIONE

Dominio naturale

Il dominio naturale della funzione $y = f(x)$ è l'insieme più ampio dei valori reali che si possono assegnare alla variabile indipendente x affinché esista il corrispondente valore reale y.

● Per brevità, chiamiamo il dominio naturale anche soltanto **dominio** e lo indichiamo con D.
Il dominio naturale viene anche chiamato **campo di esistenza**.

Normalmente il dominio naturale non viene assegnato esplicitamente, perché può essere ricavato dall'espressione analitica della funzione.

Per esempio, consideriamo la funzione:

$$y = \sqrt{x - 2}.$$

Se sostituiamo a x un valore minore di 2, la radice perde significato.

Il dominio naturale di tale funzione è l'intervallo $x \geq 2$, con $x \in \mathbb{R}$. In forma abbreviata scriviamo:

$$D: x \geq 2.$$

Quando viene assegnata una funzione senza indicare esplicitamente il dominio, si sottointende che esso sia il dominio naturale.

- Potremmo considerare la funzione anche in un dominio diverso, per esempio solo per $x \geq 6$. In tal caso si parla di *dominio ristretto*.

Funzioni uguali

Due funzioni f e g sono **uguali** se hanno lo stesso dominio D e $f(x) = g(x)$ per ogni x appartenente a D.

ESEMPIO

1. $y = \dfrac{x(x^2+4)}{x^2+4}$ e $y = x$ sono uguali in $\mathbb{R}$, dominio naturale di entrambe.

2. $y = \dfrac{x(x^2-4)}{x^2-4}$ e $y = x$, considerate nel loro dominio naturale, **non** sono uguali perché non hanno lo stesso dominio.

- $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$ **non** sono uguali.

Gli zeri di una funzione e il suo segno

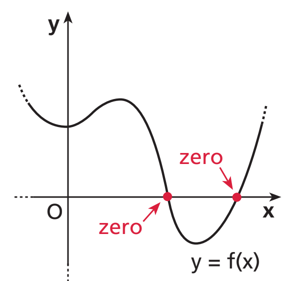
Un numero reale a è uno **zero della funzione** $y = f(x)$ se $f(a) = 0$.

Gli zeri di una funzione sono le ascisse dei punti di intersezione del grafico della funzione con l'asse x, quindi si determinano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \quad \to \quad f(x) = 0.$$

Di una funzione $y = f(x)$ possiamo anche **studiare il segno**, risolvendo la disequazione:

$$f(x) > 0.$$



◀ **Figura 5**

ESEMPIO

Studiamo il segno della funzione

$$y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$$

Risolviamo la disequazione:

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 > 0.$$

Scomponendo il polinomio con la regola di Ruffini, otteniamo:

$$(x+3)(x+1)(x-2) > 0.$$

		−3		−1		2	
x+3	−	0	+		+		+
x+1	−		−	0	+		+
x−2	−		−		−	0	+
(x+3)(x+1)(x−2)	−	0	+	0	−	0	+

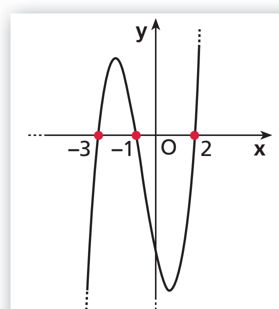
Compiliamo il quadro dei segni dal quale ricaviamo che:

$y > 0$ se $-3 < x < -1 \vee x > 2$;

$y = 0$ se $x = -3 \vee x = -1 \vee x = 2$;

$y < 0$ se $x < -3 \vee -1 < x < 2$.

Possiamo verificare questi risultati osservando il grafico della funzione; -3, -1 e 2 sono gli zeri della funzione.



▲ **Figura 6**

La classificazione delle funzioni

L'espressione analitica che descrive una funzione può avere due forme:

- **forma esplicita**, del tipo $y = f(x)$; per esempio, $y = 2x^2 - 1$;
- **forma implicita**, del tipo $F(x; y) = 0$; per esempio, $2x^2 - y - 1 = 0$.

Se l'espressione $y = f(x)$ contiene soltanto operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza o estrazione di radice, la funzione è **algebrica**.

Una funzione algebrica in forma esplicita può essere:

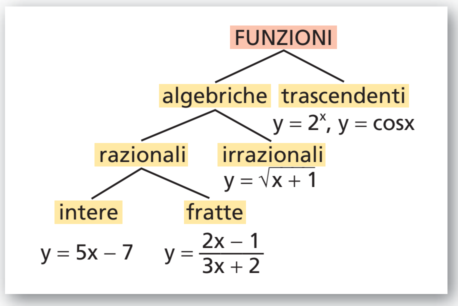
- **razionale intera** (o polinomiale) se è espressa mediante un polinomio; in particolare, se il polinomio è di primo grado rispetto alla variabile x, la funzione si dice **lineare**, se il polinomio in x è di secondo grado, la funzione è detta **quadratica**;
- **razionale fratta** se è espressa mediante quozienti di polinomi;
- **irrazionale** se la variabile indipendente compare sotto il segno di radice.

Il grafico di una funzione lineare è una retta, quello di una funzione quadratica è una parabola.

ESEMPIO

1. Le funzioni $y = 5x - 7$ e $y = -x^2 + 3x - 8$ sono razionali intere. La prima è lineare, la seconda è quadratica.
2. $y = \dfrac{5x - 1}{x^2}$ è una funzione razionale fratta.
3. $y = \sqrt[4]{x^3 - 9}$ è una funzione irrazionale.

Se una funzione non è algebrica, si dice **trascendente**. Studieremo in seguito alcune funzioni trascendenti, per esempio la funzione logaritmica e la funzione esponenziale.



▶ **Figura 7** La classificazione delle funzioni reali di variabile reale della forma $y = f(x)$ e alcuni esempi.

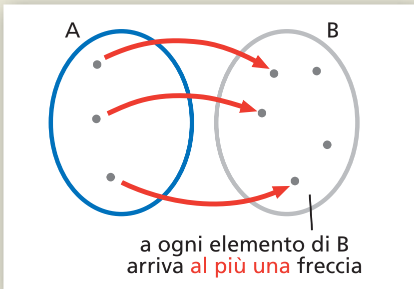
2. LE PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI E LE FUNZIONI COMPOSTE

Le funzioni iniettive, suriettive e biiettive

DEFINIZIONE

Funzione iniettiva

Una funzione da A a B si dice iniettiva se ogni elemento di B è immagine di al più un elemento di A.



Dicendo *al più* intendiamo che ci possono essere elementi di B che non sono immagini di elementi di A, ma non possono esserci elementi di B che sono immagini di più di un elemento di A.

Se una funzione è iniettiva, non è detto che l'insieme B di arrivo coincida con il codominio.

Se una funzione è iniettiva, a due elementi distinti del dominio non corrisponde mai lo stesso elemento del codominio, cioè:

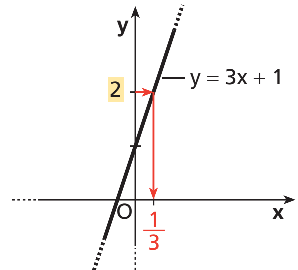
$$\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

ESEMPIO

1. La funzione

$$y = 3x + 1$$

è iniettiva perché ogni valore assunto da y è immagine di un solo valore di x.



2. La funzione

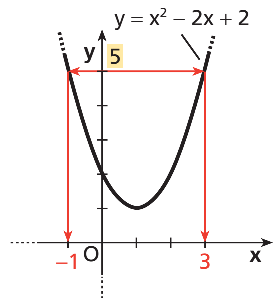
$$y = x^2 - 2x + 2$$

non è iniettiva.
Scegliamo, per esempio, $y = 5$. Sostituendo, otteniamo:

$$x^2 - 2x + 2 = 5 \quad \to \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \to \quad x = \begin{cases} \dfrac{2-4}{2} = -1 \\[2ex] \dfrac{2+4}{2} = 3 \end{cases}$$

Il valore 5 della y è immagine di due diversi valori della x,

$x = -1$ e $x = 3$.

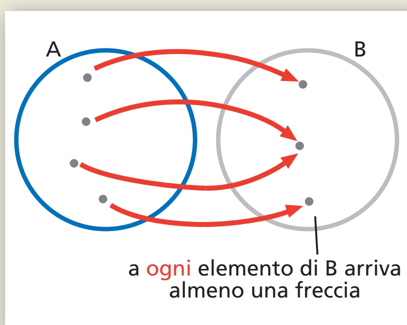


● Se una funzione non è iniettiva, esiste almeno una retta parallela all'asse x che interseca il grafico della funzione in più di un punto.

DEFINIZIONE

Funzione suriettiva

Una funzione da A a B si dice suriettiva quando ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A.



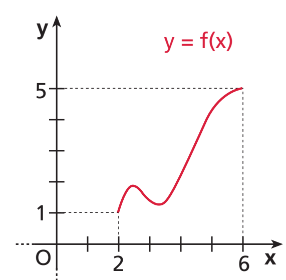
● Dicendo *almeno* intendiamo che un elemento di B può essere l'immagine di più elementi di A.

● Se una funzione è suriettiva, l'insieme di arrivo B coincide con il codominio.

Il fatto che una funzione sia o non sia suriettiva dipende da come si sceglie l'insieme di arrivo. Se lo si sceglie coincidente con il codominio, la funzione è suriettiva.

ESEMPIO

La funzione rappresentata nella figura a fianco è suriettiva se l'insieme d'arrivo è costituito dagli y tali che $1 \leq y \leq 5$.
Se invece consideriamo l'insieme di arrivo $0 \leq y \leq 5$, **non** è suriettiva.

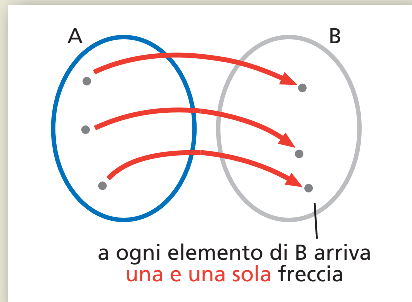


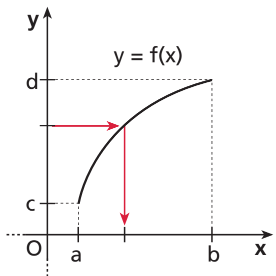
D'ora in poi, se non daremo diversa indicazione, considereremo funzioni con il codominio coincidente con l'insieme di arrivo, quindi funzioni suriettive.

DEFINIZIONE

Funzione biiettiva (o biunivoca)

Una funzione da A a B è biiettiva quando è sia iniettiva sia suriettiva.



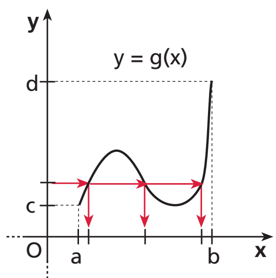


a

Una funzione biiettiva viene anche chiamata **biiezione** o **corrispondenza biunivoca** fra A e B. In simboli:

$$f\colon A \leftrightarrow B.$$

In una funzione biiettiva c'è una corrispondenza «uno a uno» fra gli elementi di A e quelli di B. Ogni elemento di A è l'immagine di uno e un solo elemento di B e *viceversa*.



b

ESEMPIO

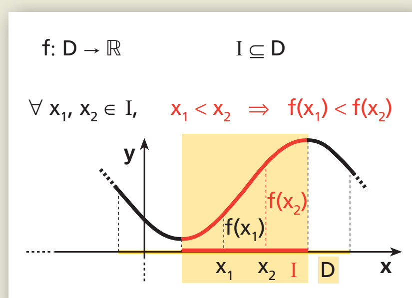
1. La funzione $f\colon [a; b] \to [c; d]$ rappresentata nella figura a a fianco è biiettiva. Ogni valore di y è il corrispondente di uno e un solo valore di x.
2. La funzione $g\colon [a; b] \to [c; d]$ della figura b **non** è biiettiva. Ci sono valori di y che sono corrispondenti di più valori di x.

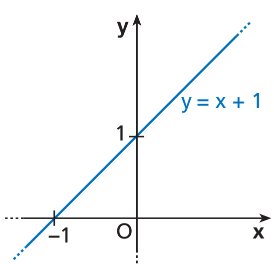
Le funzioni crescenti, le funzioni decrescenti

DEFINIZIONE

Funzione crescente in senso stretto

Una funzione $y = f(x)$ di dominio D si dice crescente in senso stretto in un intervallo I, sottoinsieme di D, se comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) < f(x_2)$.





ESEMPIO

La funzione $y = x + 1$ è crescente in senso stretto in $\mathbb{R}$. Infatti:

$$x_1 < x_2 \;\to\; x_1 + 1 < x_2 + 1 \;\to\; y_1 < y_2.$$

Se nella definizione precedente sostituiamo la relazione $f(x_1) < f(x_2)$ con $f(x_1) \leq f(x_2)$, otteniamo la definizione di funzione **crescente in senso lato**, o anche **non decrescente**.

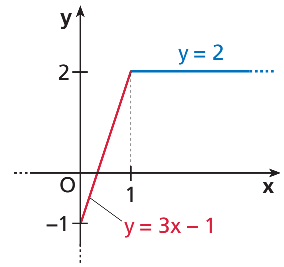
● Si può anche dire che la funzione è **debolmente crescente**.

ESEMPIO

La funzione

$$y = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

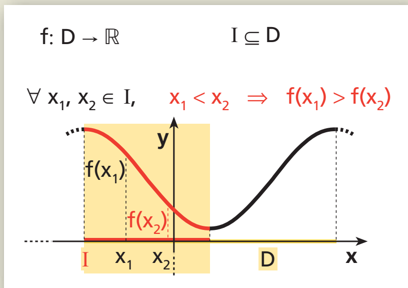
è crescente in senso lato nel suo dominio, mentre è crescente in senso stretto in $0 \leq x \leq 1$.



DEFINIZIONE

Funzione decrescente in senso stretto

Una funzione $y = f(x)$ di dominio D si dice decrescente in senso stretto in un intervallo I, sottoinsieme di D, se comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) > f(x_2)$.



Se nella definizione precedente sostituiamo la relazione $f(x_1) > f(x_2)$ con $f(x_1) \geq f(x_2)$, otteniamo la definizione di funzione **decrescente in senso lato**, o anche **non crescente**.

In questo caso la funzione si può anche dire **debolmente decrescente**.

In seguito, se diremo che una funzione è crescente (o decrescente), senza aggiungere altro, sarà sottinteso che lo è in senso stretto.

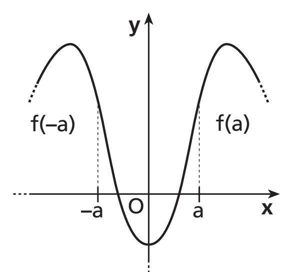
Una funzione si dice **monotòna** in un intervallo I del suo dominio se in I è sempre crescente o sempre decrescente.

Le funzioni pari, le funzioni dispari

DEFINIZIONE

Funzione pari

Indichiamo con D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che, se $x \in D$, allora $-x \in D$. Una funzione $y = f(x)$ si dice pari in D se $f(-x) = f(x)$ per qualunque x appartenente a D.



$\forall a \in D, f(a) = f(-a)$

ESEMPIO

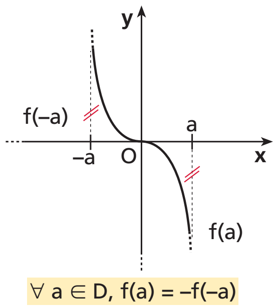
La funzione $y = f(x) = 3x^6 + 2$ è pari in $\mathbb{R}$ perché, sostituendo a x il suo opposto $-x$, si ottiene ancora $f(x)$:

$$f(-x) = 3(-x)^6 + 2 = 3x^6 + 2 = f(x).$$

Verifica che la funzione $y = f(x) = 3x^6 + 2x$ **non** è pari perché, sostituendo a x il suo opposto, si ha $f(-x) \neq f(x)$.

In generale, se una funzione ha espressione analitica contenente soltanto potenze della x con *esponente pari*, allora è pari.

Se una funzione è pari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Infatti, se il punto $P(x; y)$ appartiene al grafico, vi appartiene anche il punto $P'(-x; y)$.



DEFINIZIONE

Funzione dispari

Indichiamo con D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che, se $x \in D$, anche $-x \in D$. Una funzione $y = f(x)$ si dice dispari in D se $f(-x) = -f(x)$ per qualunque x appartenente a D.

ESEMPIO

La funzione $y = f(x) = x^3 + x$ è dispari in $\mathbb{R}$ perché, sostituendo a x il suo opposto $-x$, si ottiene $-f(x)$:

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x).$$

● Verifica che la funzione $y = f(x) = x^3 + 1$ **non** è dispari perché, sostituendo a x il suo opposto $-x$, si ha $f(-x) \neq -f(x)$.

Una funzione con espressione analitica contenente solo potenze della x con *esponente dispari* è una funzione dispari.

Se una funzione è dispari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi. Infatti, se il punto $P(x; y)$ appartiene al grafico, vi appartiene anche il punto $P'(-x; -y)$.

● Una funzione che non è pari non è necessariamente dispari (e viceversa). Per esempio, la funzione $y = f(x) = x^2 + x$ non è né pari né dispari. Infatti:

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq -f(x) \wedge \neq f(x).$$

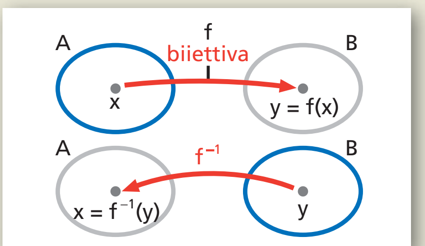
● $-f(x) = -x^2 - x$.

La funzione inversa

DEFINIZIONE

Funzione inversa

Sia $f: A \to B$ una funzione biiettiva. La funzione inversa di f è la funzione biiettiva $f^{-1}: B \to A$ che associa a ogni y di B il valore x di A tale che $y = f(x)$.



● Nota che f^{-1} indica la funzione inversa di f e non $\frac{1}{f}$!

Si ha quindi

$$x = f^{-1}(y),$$

● y è la variabile indipendente, x quella dipendente.

ma per poter rappresentare questa funzione nello stesso piano cartesiano di $y = f(x)$, operiamo la sostituzione:

$$x \to y \quad \text{e} \quad y \to x.$$

ESEMPIO

Consideriamo la funzione biiettiva $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = y = 2x - 1.$$

Possiamo ottenere la sua inversa $f^{-1}(x)$ nel seguente modo:

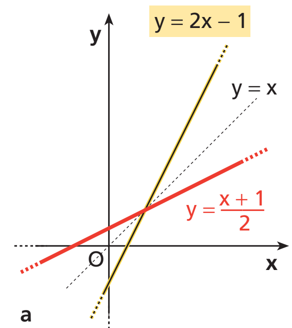
- ricaviamo x in funzione di y dalla relazione precedente:

$$x = \frac{y+1}{2};$$

- indichiamo con y la variabile dipendente e con x quella indipendente, ossia scambiamo x con y:

$$f^{-1}(x) = y = \frac{x+1}{2}.$$

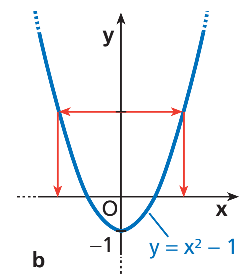
Rappresentiamo la funzione e la sua inversa nello stesso piano cartesiano (figura *a*). I grafici sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



Se f non è biiettiva, e quindi non è invertibile, possiamo operare una **restrizione del dominio** a un sottoinsieme in cui f risulti biiettiva.

ESEMPIO

La funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = y = x^2 - 1$ non ammette la funzione inversa perché non è biiettiva (figura *b*).



Possiamo dedurre che la funzione non è biiettiva anche per via analitica, ricavando x dalla relazione che esprime $f(x)$:

$x^2 = y + 1$ è soddisfatta per $x = \sqrt{y+1}$ e $x = -\sqrt{y+1}$.

Osserviamo che le espressioni che definiscono x hanno significato se e solo se $y \geq -1$, pertanto, per $y < -1$ non si ricava alcun valore di x: la funzione non è suriettiva. Inoltre, ciascun valore di $y > -1$ è immagine di due diversi valori di x, uno positivo e uno negativo: $x = \sqrt{y+1}$, $x = -\sqrt{y+1}$. Quindi la funzione non è nemmeno iniettiva.

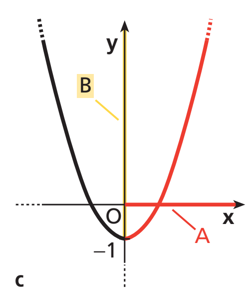
Consideriamo allora la restrizione A del dominio e la funzione:

$$f\colon A \to B,$$

con $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$ e $B = \{y \mid y \in \mathbb{R} \wedge y \geq -1\}$.

● Possiamo leggere così: «A è l'insieme dei reali x tali che $x \geq 0$; B è l'insieme dei reali y tali che $y \geq -1$».

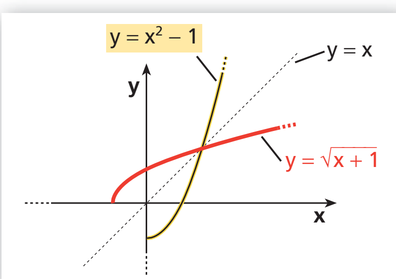
Il grafico della funzione così definita è quello disegnato in colore rosso nella figura *c*: la funzione è biiettiva e quindi invertibile.



Il valore di x dato da $\sqrt{y+1}$ appartiene al dominio A, mentre $-\sqrt{y+1}$ non appartiene ad A. Quindi l'espressione $y = x^2 - 1$ si inverte in $x = \sqrt{y+1}$.

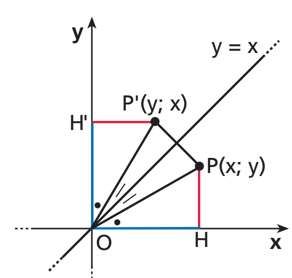
Scambiando i ruoli di x e y otteniamo la funzione inversa:

$$f^{-1}\colon B \to A, \qquad f^{-1}(x) = y = \sqrt{x+1}.$$



◀ **Figura 8** **I grafici della funzione $y = x^2 - 1$ e della sua inversa $y = \sqrt{x+1}$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.**

● Il grafico di una funzione e quello della sua inversa sono sempre simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Se un punto $P(x; y)$ appartiene al grafico della funzione, il punto $P'(y; x)$ appartiene al grafico della funzione inversa e, osservando la figura a lato, notiamo che tali punti individuano i triangoli rettangoli POH e $P'OH'$ congruenti.
Allora il triangolo POP' è isoscele, la bisettrice del primo e terzo quadrante è bisettrice, altezza e mediana del triangolo e P e P' sono simmetrici rispetto a tale retta.



ESPLORAZIONE

La crittografia

Messaggi in codice

La crittografia (dal greco *kryptós*, «nascosto», e *gráphein*, «scrivere») è la scienza delle «scritture segrete» o «in codice».

La si usa per fare in modo che le informazioni comunicate non siano comprese da tutti, ma soltanto da coloro che conoscono il codice utilizzato in fase di scrittura e sono perciò in grado di decifrarlo.

Ipotizziamo che Alice voglia spedire un messaggio segreto a Bob. Dovrà prima trasformarlo mediante un algoritmo, una **funzione**, in un testo cifrato. Poi Bob, una volta ricevuto il messaggio, dovrà decifrarlo con la **funzione inversa** di quella usata da Alice per cifrarlo.

Se Alice, per cifrare l'informazione, sostituisce mediante la funzione f ogni elemento x del suo testo con $f(x)$, allora Bob potrà decrittare il messaggio solo conoscendo l'inversa della funzione f. Perciò chiamiamo «chiave di crittazione» la funzione f usata per cifrare il testo, e la sua inversa **chiave di decrittazione.**

Il cifrario di Cesare

Il primo vero e proprio sistema per la cifratura, secondo il racconto scritto da Svetonio in *Vite dei Cesari*, fu usato da Giulio Cesare durante la guerra contro i Galli. Il cifrario di Cesare opera per traslazione. Se per esempio la traslazione è di tre lettere, ogni lettera del messaggio in chiaro viene sostituita da quella che occupa il terzo posto successivo nell'alfabeto: la A diventa D, la B diventa E e così via, finché la Z diventa C.

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & \dots & Z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ D & E & F & \dots & C \end{array}$$

Così facendo, il messaggio in chiaro *SERVONO RINFORZI* diventa il messaggio in codice: VHUBRQR ULQIRUCL.

La chiave di decrittazione qui è il valore della traslazione. Si hanno quindi solo 26 cifrari distinti (perché 26 sono le lettere dell'alfabeto internazionale, quindi le possibilità di traslazione). Uno di questi cifrari è in realtà inutilizzabile perché banale: è l'identità che trasforma l'alfabeto in se stesso e quindi produce un messaggio cifrato identico a quello in chiaro.

◄ Nel corso della Seconda guerra mondiale, gli inglesi, con l'aiuto essenziale del matematico Alan Turing (1912-1954) e grazie alla macchina *Colossus*, sono riusciti a interpretare i messaggi che si scambiavano i servizi segreti tedeschi. I tedeschi usavano una macchina per cifrare, *Enigma*, considerata all'epoca del tutto sicura. In realtà non lo era, e questo fatto è risultato decisivo per le sorti della guerra.

Attività

Il cifrario di Vigènere

Il cifrario pubblicato nel 1586 da Blaise de Vigènere è molto simile a quello di Cesare, ma introduce in più l'utilizzo di una parola chiave.

- Cerca in Internet come funziona questo cifrario e poi ottieni il messaggio cifrato corrispondente a «PROVA DI CIFRATURA» mediante la chiave «GAMBO».
- Prova poi a decrittare il seguente messaggio cifrato sapendo che la parola chiave è «DOMANI». Ricordati di usare l'alfabeto inglese.

DHFAPKDFQ GYQ LFDIQCFWNIYQ JOXLV IOZM OEI VSETN

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

Cerca nel Web:

cifrario, Vigènere, cipher

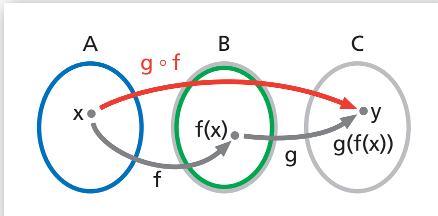
La composizione di due funzioni

Comporre le due funzioni

$$f\colon A \to B \quad \text{e} \quad g\colon B \to C$$

significa considerare una terza funzione, detta **funzione composta** $g \circ f$, che associa a ogni elemento di A un elemento di C nel seguente modo:

- all'elemento $x \in A$ corrisponde, mediante f, l'elemento $f(x) \in B$;
- all'elemento $f(x) \in B$ corrisponde, mediante g, l'elemento $g(f(x)) \in C$.



► Figura 9

$g \circ f$ si legge «g composto f». $g(f(x))$ si legge «g di f di x».

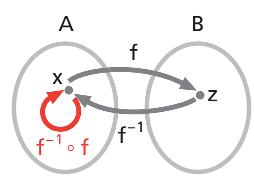
Se $C = A$, possiamo considerare contemporaneamente sia $g \circ f$ sia $f \circ g$, ma in generale si ha:

$$g \circ f \neq f \circ g,$$

ossia **la composizione delle funzioni non è commutativa**.

La composizione di una funzione e della sua inversa. Se si compone una funzione $f\colon A \to B$ con la sua inversa $f^{-1}\colon B \to A$, si ottiene la funzione **identità**, che associa a ogni elemento di un insieme se stesso.
In simboli si scrive:

$$f^{-1} \circ f\colon A \to A;$$
$$f^{-1} \circ f\colon x \mapsto x.$$



ESEMPIO

Consideriamo le funzioni f e g da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ così definite:

$$f(x) = 2x - 1, \quad g(x) = -x^2 + 3.$$

- Per ottenere l'espressione analitica della funzione composta $g \circ f$, consideriamo un generico valore x e applichiamo g al valore $2x-1$ di f:

$$g(f(x)) = g(2x-1) = -(2x-1)^2 + 3 = -4x^2 - 1 + 4x + 3 =$$
$$= -4x^2 + 4x + 2.$$

- Per ottenere $f \circ g$ applichiamo f al valore $-x^2 + 3$ di g:

$$f(g(x)) = f(-x^2+3) = 2(-x^2+3) - 1 = -2x^2 + 6 - 1 = -2x^2 + 5.$$

Le espressioni ottenute per $g \circ f$ e per $f \circ g$ sono diverse, quindi:

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

3. LE SUCCESSIONI NUMERICHE

DEFINIZIONE

Successione numerica

Una successione numerica a è una funzione che associa a ogni numero naturale n un numero reale a_n:

$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a_n.$$

a_n si legge «a con n» e sostituisce il simbolo $a(n)$.

n è la variabile indipendente e si dice **indice della successione**. a_n è la variabile dipendente e si dice **termine della successione**.

In particolare, quando non si specifica il numero n, a_n si chiama **termine generico**.

Una successione è costituita da un insieme di numeri ordinato e infinito:

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

ESEMPIO

La successione costituita da tutti i quadrati dei numeri naturali è una funzione a che associa a ogni numero naturale il suo quadrato.

$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$0 \mapsto a_0 = 0 \qquad 1 \mapsto a_1 = 1 \qquad 2 \mapsto a_2 = 4 \qquad 3 \mapsto a_3 = 9 \qquad \ldots$$

L'insieme immagine di questa successione, cioè il codominio, è proprio l'insieme dei quadrati dei numeri naturali.

● In generale l'indice, o pedice, è un numero naturale che si pone in basso a destra, rispetto a una lettera. Esso indica la posizione che occupa il termine nella successione: a_0 è il primo termine, a_1 il secondo e così via.

La rappresentazione di una successione

I numeri naturali sono infiniti; sarebbe dunque impossibile descrivere la successione tramite tutte le assegnazioni. Da questo nasce l'esigenza di scrivere in modo chiaro e sintetico i termini. In alcuni casi è possibile rappresentare una successione come una lista ordinata.
Per rappresentare una successione, a volte si possono indicare i primi cinque o sei termini seguiti dai puntini di sospensione, sottintendendo che l'indice equivale alla posizione. Questo tipo di rappresentazione prende il nome di **rappresentazione per enumerazione**.

● Questa rappresentazione è consigliabile soltanto se, leggendo i primi termini, si possono dedurre gli altri senza ambiguità.

ESEMPIO

$$0, \quad 10, \quad 20, \quad 30, \quad 40, \quad 50, \quad 60, \quad \ldots$$

è la successione dei multipli di 10.

Il modo più comune di rappresentare una successione numerica (per non dare luogo ad ambiguità) consiste nello scrivere esplicitamente la relazione che lega l'indice n e il termine a_n. Questo tipo di rappresentazione si chiama **rappresentazione mediante espressione analitica**.

ESEMPIO

1. $a_n = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N}$.
Volendo scrivere i primi termini della successione basta sostituire alla lettera n, nell'espressione $2n + 1$, i valori 0, 1, 2, 3, …
Si ha $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, …
Si vede facilmente che si tratta della successione dei numeri naturali dispari.

2. Consideriamo la seguente successione definita tramite espressione analitica:

$$a_n = \frac{2n+1}{3+n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sostituendo a n i valori 0, 1, 2, 3, 4, …, si ottengono i seguenti termini:

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{7}{12}, \frac{9}{19}, \ldots$$

In questo caso non è facile capire quali sono i termini successivi, dunque la rappresentazione per enumerazione può essere inefficace.

● A volte si indica il primo termine di una successione con a_1, oppure con a_k se la successione non è definita per numeri minori di k.
Consideriamo la successione:

$$a_n = \frac{n+1}{n-1}, n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}.$$

L'espressione analitica del termine generico a_n perde significato per $n = 1$, pertanto i termini della successione partono da a_2.

● In alcuni casi è preferibile, comunque, rappresentare la successione per enumerazione. Per esempio, la successione

$$0, \quad 0{,}6, \quad 0{,}66, \quad 0{,}666, \quad 0{,}6666, \ldots$$

non ha una rappresentazione mediante espressione analitica facile da ricavare.

Un ulteriore tipo di rappresentazione di una successione consiste nel fornire il primo termine della successione a_0 e una relazione che lega il termine generale a_n a quello precedente a_{n-1}:

$$\begin{cases} a_0 \\ a_n = f(a_{n-1}) \qquad \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Questo tipo di rappresentazione si chiama **rappresentazione ricorsiva** o **per ricorsione**.

ESEMPIO

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \qquad \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Ogni termine si ottiene dal precedente sommando 2. A partire dal primo termine, si determinano quelli successivi:

$$a_1 = a_0 + 2 = 1 + 2 = 3,$$

$$a_2 = a_1 + 2 = 3 + 2 = 5,$$

$$a_3 = a_2 + 2 = 5 + 2 = 7,$$

$$\ldots$$

Osserviamo che abbiamo riottenuto la successione dei numeri dispari.

● A volte la rappresentazione ricorsiva è data fornendo i primi k termini della successione e una relazione che lega il termine generale ai k termini precedenti. Per esempio:

$$\begin{cases} a_0 = 0,\ a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{se } n > 1 \end{cases}$$

$$a_2 = a_1 + a_0 = 1,$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2,$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 3,$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 5,$$

$$\ldots$$

Come vedremo nell'Esplorazione a pagina 93, questa successione è detta **successione di Fibonacci**.

Il principio di induzione

La definizione delle successioni mediante ricorsione suggerisce anche un metodo per la dimostrazione di particolari proprietà che dipendono da un numero naturale n.

IN PRATICA
▶ Videolezione 8

ESEMPIO

Consideriamo la somma delle prime n potenze di 2, a partire da 2^0. Si può dimostrare che è uguale a $2^n - 1$.

Per esempio, se $n = 3$: $2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7$, $\quad 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$.

In generale: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

Per dimostrare la proprietà, procediamo mediante due passi.

Primo passo
Dimostriamo che la proprietà è vera per $n = 1$. Infatti, per $n = 1$, la somma si riduce a

$$2^0 = 1,$$

e anche $2^n - 1$ vale:

$$2^1 - 1 = 1.$$

● In modo sintetico la proprietà si scrive:

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1.$$

Il simbolo $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i$ si legge «sommatoria in i da 0 a $n - 1$ di 2^i» e indica la somma di tutte le potenze 2^i, con i che varia da 0 a $n - 1$.

Secondo passo
Dimostriamo che, supponendo vera la proprietà per un generico valore n, essa risulta vera anche per $n + 1$, ossia per il valore successivo. Consideriamo quindi vera l'uguaglianza:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Aggiungiamo a entrambi i membri 2^n e riscriviamo:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n,$$
$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} + 2^{(n+1)-1} = 2 \cdot 2^n - 1,$$
$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{(n+1)-1} = 2^{(n+1)} - 1.$$

Abbiamo dimostrato che la proprietà è vera per $n + 1$.

Conclusione
Se la proprietà è vera per $n = 1$ (primo passo), essa è vera anche per il valore successivo (secondo passo), ossia per $n = 2$; se è vera per $n = 2$, allora è vera per $n = 3$ e così via. Possiamo concludere che la proprietà è vera per n qualsiasi.

Questo metodo di dimostrazione si basa sul **principio di induzione**:

data una proposizione $P(n)$, il cui enunciato dipende da n, con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$, se
1. è vera per $n = 1$,
2. supposta vera per n, è vera anche per $n + 1$,
allora la proposizione è vera per ogni $n \geq 1$.

Più in generale, il principio di induzione è così formulato:
data una proposizione $P(n)$, con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq k$, se
1. è vera $P(k)$,
2. supposta vera $P(n)$, è vera anche $P(n + 1)$,
allora $P(n)$ è vera per ogni $n \geq k$.

IN PRATICA
▶ Videolezione 9

Le successioni monotòne

Una successione si dice:

- **crescente** se ogni termine è maggiore del suo precedente, ossia:
  $a_n < a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$
- **decrescente** se ogni termine è minore del suo precedente, ossia:
  $a_n > a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$
- **non decrescente** (o **crescente in senso lato**) se: $a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$
- **non crescente** (o **decrescente in senso lato**) se: $a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$
- **costante** se ogni termine è uguale al suo precedente, ossia:
  $a_n = a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

In generale, una successione per cui vale una di queste proprietà si dice **monotòna**.

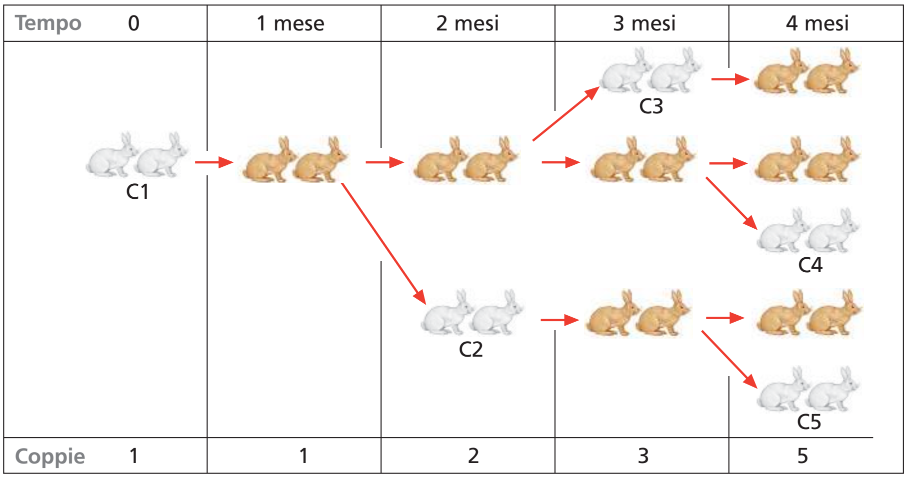
ESEMPIO

1. La successione 0, 3, 6, 9, 12, … è monotòna crescente.
2. La successione 20, 12, 4, −4, −12, −20, −28, … è monotòna decrescente.
3. La successione 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, … è monotòna non decrescente.
4. La successione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots$ è monotòna non crescente.
5. La successione 5, 5, 5, 5, 5, 5, … è costante.

ESPLORAZIONE

I conigli di Fibonacci

Nel suo *Liber Abaci*, pubblicato nel 1202 e considerato la prima grande opera matematica di origine europea, Leonardo Fibonacci dedica una parte alla «matematica divertente»: problemi che prendono spunto dalla realtà e che richiedono un po' di intuito e fantasia. Vediamo un esempio con le parole dell'autore.
«Un tale mise una coppia di conigli in un luogo completamente circondato da pareti, per scoprire quante coppie di conigli discendessero da questa in un anno: per natura ogni mese le coppie di conigli generano un'altra coppia e cominciano a procreare nel secondo mese dalla nascita.»



◄ La prima coppia (C1) impiega un mese a diventare fertile e, poiché la gestazione dura un mese, alla fine del secondo genera un'altra coppia (C2). Alla fine del terzo mese solo C1 genera un'altra coppia (C3), mentre C2 diventa fertile. Finito il quarto mese, sia C1 sia C2 generano una coppia (C4 e C5), mentre C3 diventa fertile e così via…

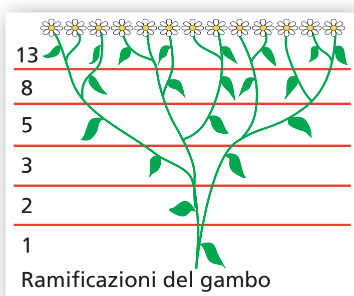
Da questo problema nasce la **successione di Fibonacci**: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, …
A partire dal terzo, ogni termine si può ottenere dalla somma dei due precedenti. La successione si può quindi definire in modo ricorsivo: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$.

Attività

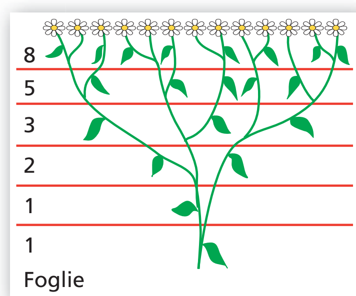
I numeri della natura e dell'arte

- Fai una ricerca su come i numeri di Fibonacci si presentano in natura, ma anche nell'arte.

▲ *Achillea ptarmica*



▲ Il gambo dell'*Achillea ptarmica* si ramifica seguendo la successione di Fibonacci.



▲ Anche la distribuzione delle foglie nei vari livelli segue la successione di Fibonacci.

@ **Cerca nel Web:**
Fibonacci, natura, fiori, nature, flowers, Merz, Mole Antonelliana

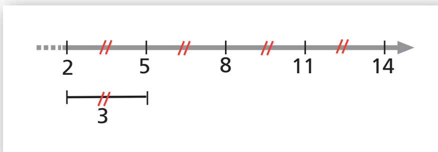
IN PRATICA
▶ Videolezione 10

4. LE PROGRESSIONI ARITMETICHE

Consideriamo la successione:

$$2, \quad 5, \quad 8, \quad 11, \quad 14, \quad \ldots$$

Ogni termine si ottiene dal precedente aggiungendo 3. Possiamo anche dire che la differenza fra ogni termine e il suo precedente è uguale a 3.



◀ **Figura 10** Disponendo i termini su una retta si può vedere che la distanza fra due punti consecutivi è sempre uguale a 3.

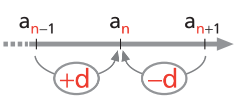
Diciamo in questo caso che la successione data è una *progressione aritmetica*.

DEFINIZIONE

Progressione aritmetica

Una successione numerica si dice progressione aritmetica quando la differenza fra ogni termine e il suo precedente è costante; tale differenza si dice **ragione**.

● Di solito la ragione di una progressione aritmetica si indica con d. Nell'esempio precedente $d = 3$.



In una progressione aritmetica di ragione d ogni termine è uguale al suo precedente aumentato della ragione oppure al suo successivo diminuito della ragione:

$$a_n = a_{n-1} + d \qquad \text{oppure} \qquad a_n = a_{n+1} - d.$$

A volte si considera un numero finito di termini consecutivi di una progressione. In tal caso il primo e l'ultimo termine di questo insieme ordinato sono detti **estremi** della progressione.

Una progressione aritmetica di ragione d è:

- **crescente** se $d > 0$;
- **decrescente** se $d < 0$;
- **costante** se $d = 0$.

ESEMPIO

1. La progressione 20, 26, 32, 38, 44, 50, … è crescente; la sua ragione è 6.
2. La progressione 20, 16, 12, 8, 4, … è decrescente; la sua ragione è − 4.
3. La progressione 2, 2, 2, 2, 2, … è costante; la sua ragione è 0.

Il calcolo del termine a_n di una progressione aritmetica

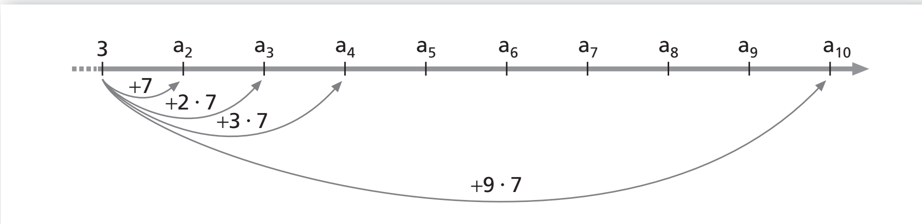
Consideriamo la progressione aritmetica di ragione 7 e di primo termine 3. Qual è il decimo termine?

Per rispondere alla domanda scriviamo i termini della progressione, utilizzando il primo termine e la ragione.

$a_1 = 3$
$a_2 = 3 + 7$
$a_3 = 3 + 7 + 7 = 3 + 2 \cdot 7$
$a_4 = 3 + 7 + 7 + 7 = 3 + 3 \cdot 7$
$a_5 = 3 + 7 + 7 + 7 + 7 = 3 + 4 \cdot 7$
$\ldots$
$a_{10} = 3 + 9 \cdot 7 = 66$

In simboli:
$a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_1 + 2d$
$a_4 = a_1 + 3d$
$a_5 = a_1 + 4d$
$\ldots$
$a_{10} = a_1 + (10 - 1)d$

● In questo paragrafo e nel successivo definiremo le successioni con $n \geq 1$.



◀ **Figura 11** **Il terzo termine si ottiene dal primo aggiungendo 2 volte la ragione; il quarto termine si ottiene dal primo aggiungendo 3 volte la ragione; il decimo termine si ottiene dal primo aggiungendo 9 volte la ragione.**

Vale il seguente teorema.

TEOREMA

In una progressione aritmetica, il termine a_n è uguale alla somma del primo termine a_1 con il prodotto della ragione d per $(n - 1)$:

$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d}$, con $n \geq 1$.

DIMOSTRAZIONE

Poiché in una progressione aritmetica la differenza tra ogni termine e quello precedente è uguale alla ragione d, si ha:

$a_2 - a_1 = d,$
$a_3 - a_2 = d,$
$\ldots$
$a_n - a_{n-1} = d.$

Sommiamo membro a membro le $n - 1$ uguaglianze e semplifichiamo:

$$a_n - a_1 = (n - 1)d \quad \rightarrow \quad a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Il teorema precedente mette in relazione i quattro numeri:

$$a_1, \quad n, \quad a_n, \quad d.$$

Conoscendo tre di essi, è possibile ricavare il quarto numero.

ESEMPIO

Calcoliamo il numero n dei termini estratti dalla progressione aritmetica di ragione 6, avente per estremi 9 e 45.
I dati sono: $d = 6$, $a_1 = 9$, $a_n = 45$.
Sostituiamo nella formula $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ e ricaviamo n. Si ha:

$$45 = 9 + (n - 1) \cdot 6 \quad \rightarrow \quad 6n - 6 = 36 \quad \rightarrow \quad n = 7.$$

L'insieme è formato da 7 termini: 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45.

La relazione fra due termini di una progressione aritmetica

Consideriamo la seguente progressione di ragione 3 e primo termine $a_1 = 7$:

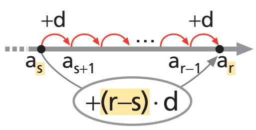
$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & \dots \\ 7 & 10 & 13 & 16 & 19 \underbrace{\;\;}_{3} & 22 \underbrace{\;\;}_{3} & 25 & 28 & \end{array}$$

Vogliamo sapere se è possibile trovare una relazione fra due termini qualunque, per esempio fra il quinto e il settimo, e cioè 19 e 25.

Possiamo scrivere $25 = 19 + 2 \cdot 3$, ossia:

$$a_7 = a_5 + (7 - 5) \cdot d.$$

In generale, se a_r e a_s sono due termini qualunque di una progressione aritmetica, risulta:



$$\boxed{a_r = a_s + (r - s) \cdot d.}$$

L'inserimento di medi aritmetici fra due numeri dati

Vogliamo scrivere la progressione aritmetica di primo termine 7 e di sesto termine 27.
Scriviamo la progressione nel seguente modo:

$$7, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad 27, \quad \dots$$

Determiniamo la ragione d che si ottiene dalla formula $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{27 - 7}{6 - 1} = \frac{20}{5} = 4.$$

Scriviamo dunque i termini mancanti tra 7 e 27:

- $x_1 = 7 + 4 = 11$,
  $x_2 = 7 + 2 \cdot 4 = 15$,
  $x_3 = 7 + 3 \cdot 4 = 19$,
  $x_4 = 7 + 4 \cdot 4 = 23$.

$$7, \quad 11, \quad 15, \quad 19, \quad 23, \quad 27, \quad \dots$$

In generale, dati due numeri a e b, per inserire tra essi altri k numeri, in modo da scrivere i primi $k + 2$ termini di una progressione aritmetica, basta determinare la ragione della progressione $a, x_1, \dots, x_k, b$.
Poiché $a_1 = a$, $a_n = b$, $n = k + 2$, si ha:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{b - a}{(k + 2) - 1} = \frac{b - a}{k + 1}.$$

In particolare, dati due numeri a e b, se si vuole inserire tra essi un numero c in modo che si formi una progressione aritmetica, si deve prendere come ragione:

$$d = \frac{b - a}{2} \qquad \text{(essendo } k = 1\text{)}.$$

Allora:

$$c = a + d = a + \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

c coincide con la media aritmetica dei numeri a e b.

Questa proprietà è valida in generale: *ogni termine di una progressione aritmetica è la media aritmetica tra il precedente e il successivo.*
Questo è il motivo per cui la progressione viene chiamata «aritmetica».

La somma di due termini equidistanti dagli estremi

Scriviamo i primi sei termini di una progressione aritmetica di estremi 10 e 25 e ragione 3:

10, 13, 16, 19, 22, 25.

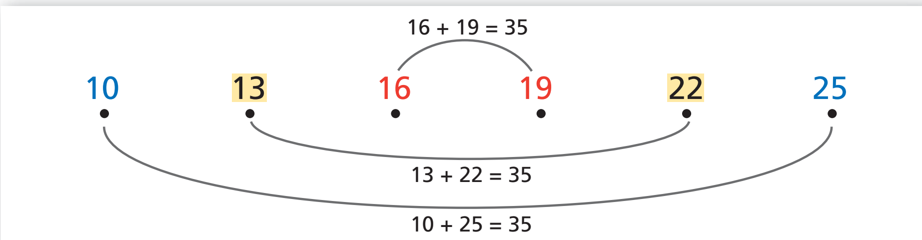
Diciamo che 13 e 22 sono equidistanti dagli estremi, perché il numero dei termini che precedono 13 è uguale al numero dei termini che seguono 22. Così pure sono equidistanti dagli estremi 16 e 19.
Osserviamo che la somma di due termini equidistanti è costante e uguale alla somma dei termini estremi.

La **distanza fra due termini** a_r e a_s di una successione è data dal valore assoluto della differenza degli indici:

$$|r - s|.$$

Per esempio, a_4 dista $|4 - 6| = 2$ da a_6 e $|4 - 1| = 3$ da a_1.
Due termini sono **equidistanti** rispetto a un termine se hanno la stessa distanza da esso.

◀ **Figura 12**



TEOREMA

Nei primi k termini di una progressione aritmetica, la somma di due termini equidistanti dagli estremi è costante e uguale alla somma dei termini estremi.

Se consideriamo un numero k dispari di termini, il termine centrale, che è equidistante dagli estremi, va considerato raddoppiato. Per esempio, se prendiamo 1, 4, 7, 10, 13, abbiamo:

$$7 + 7 = 1 + 13.$$

DIMOSTRAZIONE

Indichiamo con x e y i due termini equidistanti dagli estremi e con c il numero dei termini che precedono x e seguono y.
Scriviamo x in funzione di a_1, aggiungendo c volte la ragione, ossia:

$$x = a_1 + c \cdot d.$$

Scriviamo y in funzione di a_n, sottraendo c volte la ragione, ossia:

$$y = a_n - c \cdot d.$$

Sommiamo membro a membro le due uguaglianze,

$$x + y = a_1 + c \cdot d + a_n - c \cdot d \quad \rightarrow \quad x + y = a_1 + a_n.$$

La somma di termini consecutivi di una progressione aritmetica

TEOREMA

La somma S_n dei primi n termini di una progressione aritmetica è uguale al prodotto di n per la semisomma dei due termini estremi a_1 e a_n.

$$\boldsymbol{S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}}.$$

La somma di n termini $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ si può indicare anche con

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

DIMOSTRAZIONE

Scriviamo per esteso la somma dei primi n termini della progressione e poi la stessa somma con i termini scritti in ordine inverso:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Sommiamo termine a termine i due membri delle uguaglianze:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

In questo modo otteniamo un risultato in cui compaiono, sommate tra loro, le n somme dei termini equidistanti dagli estremi.

Per il teorema precedente possiamo sostituire la somma dentro ogni parentesi con $a_1 + a_n$:

$$2 \cdot S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ addendi}} = n \cdot (a_1 + a_n) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \boxed{S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo la somma dei primi 10 termini della progressione aritmetica di primo termine 1 e ragione 2:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \ldots$$

Poiché $n = 10$, $a_1 = 1$, $a_{10} = 19$, calcoliamo S_{10}:

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{1 + 19}{2} = 10 \cdot 10 = 10^2.$$

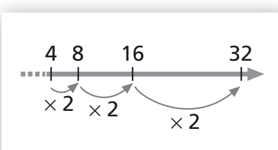
● La progressione che abbiamo considerato nell'esempio è quella dei numeri dispari. La somma dei primi 10 numeri dispari è quindi uguale a 10^2.
In generale, la somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2.

5. LE PROGRESSIONI GEOMETRICHE

IN PRATICA
▶ Videolezione 11

Consideriamo la successione:

$$4, \quad 8, \quad 16, \quad 32, \quad 64, \quad \ldots$$



▲ **Figura 13** Disponendo i termini della successione su una retta, si può vedere che la distanza fra un termine e il suo successivo raddoppia a ogni passo.

Osserviamo che ogni termine si ottiene dal precedente moltiplicandolo per 2. Possiamo anche dire che il quoziente fra ogni termine e il suo precedente è uguale a 2. Le successioni di questo tipo sono chiamate *progressioni geometriche*.

DEFINIZIONE

Progressione geometrica
Una successione numerica si dice progressione geometrica quando il quoziente fra ogni termine e il suo precedente è costante; tale rapporto si dice **ragione**.

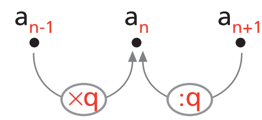
La ragione, che di solito si indica con q, non può essere mai uguale a 0.

● Nessun termine di una progressione geometrica può essere uguale a 0, perché non ha significato una divisione del tipo $\frac{n}{0}$.

Se consideriamo un numero finito di termini consecutivi di una progressione geometrica, il primo e l'ultimo termine sono detti **estremi** della progressione.

In una progressione geometrica di ragione q ogni termine si calcola da quello precedente moltiplicandolo per q, oppure dal successivo dividendolo per q:

$$\boxed{a_n = q \cdot a_{n-1}} \quad \text{oppure} \quad \boxed{a_n = \frac{a_{n+1}}{q}}.$$



Possiamo dedurre da queste proprietà che in una progressione geometrica:

- se $q > 0$, i termini sono tutti o **positivi** o **negativi**;
- se $q < 0$, i termini sono **alternativamente** di **segno opposto**.

Se $a_1 > 0$ e $q < 0$,
$a_2 = a_1 \cdot q < 0$,
$a_3 = a_2 \cdot q > 0$...
Se $a_1 > 0$ e $q > 0$,
$a_2 = a_1 \cdot q > 0$,
$a_3 = a_2 \cdot q > 0$...

ESEMPIO

1. $q > 0$
Date le progressioni geometriche, di ragione $q = 2$,

$-6, \quad -12, \quad -24, \quad -48, \quad \ldots$

$6, \quad 12, \quad 24, \quad 48, \quad \ldots$

nella prima i termini sono tutti negativi, nella seconda tutti positivi.

2. $q < 0$
Nella progressione geometrica, con $q = -2$,

$-6, \quad 12, \quad -24, \quad 48, \quad \ldots$

i termini sono alternativamente negativi e positivi.

Una progressione geometrica di ragione q positiva è:

- **crescente** se $q > 1$ e i termini sono positivi, oppure se $0 < q < 1$ e i termini sono negativi;
- **decrescente** se $0 < q < 1$ e i termini sono positivi, oppure se $q > 1$ e i termini sono negativi;
- **costante** se $q = 1$.

Se la ragione è negativa, la progressione geometrica ha segno alterno, per cui non è né crescente né decrescente.

ESEMPIO

1. La progressione $2, \quad 12, \quad 72, \quad 432, \ \ldots$ è crescente; la sua ragione è 6, maggiore di 1.

2. La progressione $432, \quad 72, \quad 12, \quad 2, \ \ldots$ è decrescente; la sua ragione è $\frac{1}{6}$, minore di 1.

3. La progressione $12, \quad 12, \quad 12, \quad 12, \quad 12, \ \ldots$ è costante; la sua ragione è 1.

4. La progressione $-2, \quad -1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{4}, \ \ldots$ è crescente; la sua ragione è $\frac{1}{2}$, minore di 1.

5. La progressione $-\frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{2}, \quad -1, \quad -2, \ \ldots$ è decrescente; la sua ragione è 2, maggiore di 1.

6. La progressione $-1, \quad -1, \quad -1, \quad -1, \ \ldots$ è costante; la sua ragione è 1.

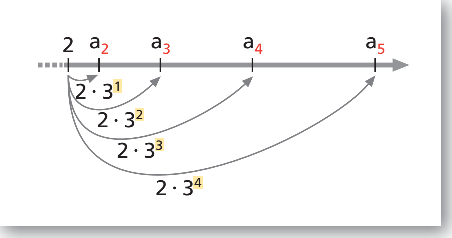
Il calcolo del termine a_n di una progressione geometrica

Consideriamo la progressione geometrica di ragione 3 e primo termine 2. Qual è il valore del quinto termine?

Per rispondere alla domanda possiamo calcolare i termini della progressione fino ad a_5 utilizzando il primo termine e la ragione.

	In simboli:
$a_1 = 2$	
$a_2 = 2 \cdot 3$	$a_2 = a_1 \cdot q$
$a_3 = (2 \cdot 3) \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$	$a_3 = a_1 \cdot q^2$
$a_4 = (2 \cdot 3^2) \cdot 3 = 2 \cdot 3^3$	$a_4 = a_1 \cdot q^3$
$a_5 = (2 \cdot 3^3) \cdot 3 = 2 \cdot 3^4$	$a_5 = a_1 \cdot q^4$

► **Figura 14** **Il terzo termine si ottiene moltiplicando il primo per la ragione al quadrato; il quarto termine si ottiene dal primo moltiplicato per la ragione al cubo.**



Il quinto termine è $2 \cdot 3^4 = 162$. La progressione è 2, 6, 18, 54, 162, …
Vale il seguente teorema.

TEOREMA

In una progressione geometrica il termine a_n è uguale al prodotto del primo termine a_1 per la potenza della ragione con esponente $(n - 1)$.

$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$, con $n \geq 1$.

DIMOSTRAZIONE

Poiché in una progressione geometrica ogni termine è uguale al prodotto del precedente per la ragione q, si ha:

$$a_2 = a_1 \cdot q,$$
$$a_3 = a_2 \cdot q,$$
$$a_4 = a_3 \cdot q,$$
$$\ldots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q.$$

Moltiplichiamo membro a membro le $n - 1$ uguaglianze, e semplifichiamo:

$$\cancel{a_2} \cdot \cancel{a_3} \cdot \cancel{a_4} \cdot \ldots \cdot a_n = a_1 \cdot \cancel{a_2} \cdot \cancel{a_3} \cdot \ldots \cdot \cancel{a_{n-1}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-1 \text{ termini}},$$

da cui $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

● In modo equivalente si può osservare che:

$a_2 = a_1 \cdot q$,
$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$,
$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$,
…
$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Partendo dalla formula $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, si può ricavare ciascuno dei valori a_n, a_1, q, n, noti gli altri.

ESEMPIO

1. Calcoliamo il primo termine della progressione geometrica di ragione 3, sapendo che il settimo termine vale 3645.
Poiché $q = 3$, $n = 7$, $a_n = 3645$, si ha:

$$3645 = a_1 \cdot 3^6 \to 5 \cdot 3^6 = a_1 \cdot 3^6 \to a_1 = 5.$$

Il primo termine è uguale a 5.

La progressione è: 5, 15, 45, 135, 405, 1215, 3645, …

2. Calcoliamo la ragione della progressione geometrica di primo termine 1 e quarto termine 64.
I dati sono: $a_1 = 1$; $a_n = 64$; $n = 4$.

Si ha $64 = 1 \cdot q^3$, da cui $q = 4$.
La progressione è: 1, 4, 16, 64, …

3. Consideriamo ora la progressione geometrica di primo termine 1 e quinto termine 16. Ricaviamo q:

$$16 = 1 \cdot q^4 \to q = \pm 2.$$

Scriviamo i primi cinque termini delle progressioni con $a_1 = 1$ e ragione $q = 2$ o $q = -2$:

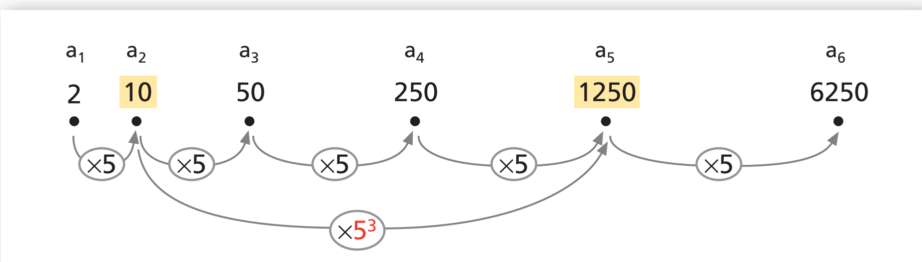
1, 2, 4, 8, 16, … oppure 1, −2, 4, −8, 16, …

La relazione fra due termini di una progressione geometrica

Consideriamo la progressione di ragione 5,

2, 10, 50, 250, 1250, 6250, …,

e cerchiamo una relazione fra due termini, per esempio 10 e 1250.



◄ **Figura 15** Ogni termine si ottiene dal precedente moltiplicato per 5. Il termine a_5 si ottiene da a_2 moltiplicandolo per la ragione 5 elevata a $3 = 5 - 2$.

Possiamo scrivere $1250 = 10 \cdot 5^3$, ossia:

$$a_5 = a_2 \cdot q^{5-2}.$$

In generale, se a_r e a_s sono due termini qualunque di una progressione geometrica, risulta:

$$a_s = a_r \cdot q^{s-r}.$$

L'inserimento di medi geometrici fra due numeri dati

Vogliamo scrivere la progressione geometrica a termini positivi con primo termine 2 e sesto termine 486.
Scriviamo la progressione nel seguente modo:

$$2, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad 486, \quad \dots$$

Determiniamo la ragione q applicando la formula $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Sostituiamo i dati $n = 6$, $a_1 = 2$, $a_n = 486$:

$$486 = 2 \cdot q^5 \quad \rightarrow \quad q^5 = 243 \quad \rightarrow \quad q = 3.$$

Conoscendo il valore di q possiamo ottenere i termini intermedi.

La progressione è la seguente:

$$2, \quad 6, \quad 18, \quad 54, \quad 162, \quad 486, \quad \dots$$

In generale, dati due numeri positivi a e b, per inserire tra essi altri k numeri positivi, in modo da ottenere i primi $k + 2$ termini di una progressione geometrica, si ricava la ragione della progressione $a, x_1, \dots, x_k, b$. Poiché $a_n = b$, $a_1 = a$, $n = k + 2$, si ha $b = a \cdot q^{k+1}$, cioè:

$$q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}.$$

In particolare, dati due numeri positivi a e b, se si vuole inserire tra essi un numero c in modo che si formi una progressione geometrica, si ha:

$$q = \sqrt{\frac{b}{a}} \qquad \text{(essendo } k = 1\text{)}.$$

Allora:

$$c = a \cdot q = a \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{a \cdot b}.$$

● Per **media geometrica** di due numeri si intende la radice quadrata del prodotto dei due numeri.

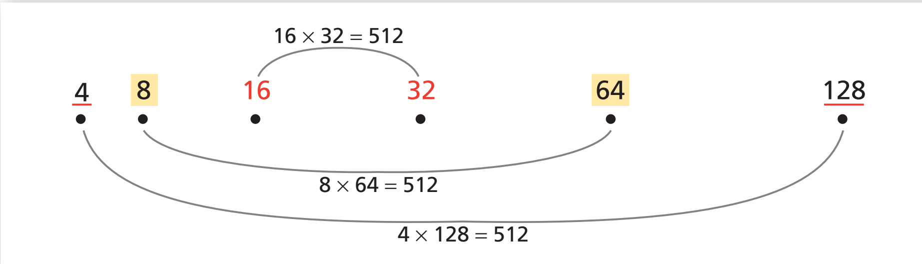
c coincide con la media geometrica dei numeri a e b.
Questa proprietà è valida in generale: *ogni termine di una progressione geometrica è la media geometrica tra il precedente e il successivo.*
Questo è il motivo per cui la progressione viene chiamata «geometrica».

Il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi

Scriviamo i primi sei termini della progressione geometrica di ragione 2 e di primo estremo 4:

$$4, 8, 16, 32, 64, 128.$$

Osserviamo che il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi rimane costante.
Tale costante è uguale al prodotto dei due termini estremi 4 e 128.



◀ **Figura 16** Le coppie di elementi equidistanti dagli estremi sono: 8 e 64, 16 e 32. Il prodotto fra 8 e 64 è uguale a 512, come pure il prodotto fra 16 e 32.

TEOREMA

Nei primi n termini di una progressione geometrica il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi è costante e risulta uguale al prodotto dei termini estremi.

● Se consideriamo un numero n dispari di termini della progressione, il termine centrale x ha uguale distanza dal primo e ultimo termine e va considerato elevato al quadrato. Per esempio, con 3, 6, 12, 24, 48, si ha $12 \cdot 12 = 3 \cdot 48$.

DIMOSTRAZIONE

Indichiamo con x e y i due termini equidistanti dagli estremi.
Scriviamo x in funzione di a_1, moltiplicando a_1 per la ragione elevata al numero dei termini che precedono x, numero che indichiamo con c:

$$x = a_1 \cdot q^c.$$

Scriviamo y in funzione di a_n, dividendo a_n per la ragione elevata al numero c (che è anche il numero dei termini che seguono y):

$$y = \frac{a_n}{q^c}.$$

Moltiplichiamo membro a membro le due uguaglianze:

$$x \cdot y = a_1 \cdot q^c \cdot \frac{a_n}{q^c} \quad \rightarrow \quad x \cdot y = a_1 \cdot a_n.$$

Il prodotto di termini consecutivi di una progressione geometrica

Il teorema precedente permette di calcolare il prodotto dei primi n termini di una progressione geometrica.
Consideriamo la progressione:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots$$

Calcoliamo il prodotto P_n dei primi n termini:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n,$$
$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1.$$

Moltiplichiamo membro a membro le due uguaglianze e associamo opportunamente i termini:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1).$$

Tutti i prodotti indicati tra parentesi sono uguali ad $a_1 \cdot a_n$ perché ognuno è il prodotto di termini equidistanti dagli estremi. Tali prodotti sono n per cui:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n \quad \rightarrow \quad \boxed{P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}.$$

Questa formula permette di calcolare il prodotto di n termini consecutivi di una progressione geometrica.

ESEMPIO

Calcoliamo il prodotto dei primi 4 termini della progressione geometrica $3, 9, 27, 81, \ldots$

Poiché $a_1 = 3$ e $a_4 = 81$, calcoliamo P_4:

$$P_4 = \sqrt{(3 \cdot 81)^4} = (3 \cdot 81)^2 = 59049.$$

La somma di termini consecutivi di una progressione geometrica

TEOREMA

La somma S_n dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione q diversa da 1 è:

$$\boldsymbol{S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}.$$

● Se fosse $q = 1$, il denominatore si annullerebbe.

DIMOSTRAZIONE

Scriviamo la somma S_n dei primi n termini della progressione:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Poiché $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, abbiamo:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1}.$$

● a_1
$a_2 = a_1 \cdot q$
$a_3 = a_1 \cdot q^2$
…
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Moltiplichiamo S_n e il secondo membro per la ragione q:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^n.$$

Eseguiamo la sottrazione membro a membro fra quest'ultima uguaglianza e la precedente:

$$S_n \cdot q - S_n = \cancel{a_1 \cdot q} + \cancel{a_1 \cdot q^2} + \ldots + \cancel{a_1 \cdot q^{n-1}} + a_1 \cdot q^n + \\ - a_1 - \cancel{a_1 \cdot q} - \cancel{a_1 \cdot q^2} - \ldots - \cancel{a_1 \cdot q^{n-1}}.$$

Eliminando i termini opposti otteniamo:

$$S_n \cdot q - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1.$$

Raccogliamo S_n nel primo membro e a_1 nel secondo membro:

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot (q^n - 1).$$

Essendo $q \neq 1$ per ipotesi, dividiamo entrambi i membri per $(q - 1)$:

$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}.$$

● Se cambiamo segno al numeratore e al denominatore, otteniamo

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

formula che è preferibile se $q < 1$.

ESEMPIO

Calcoliamo la somma dei primi 5 termini della progressione geometrica

$$2, \quad 8, \quad 32, \quad 128, \quad 512, \quad \ldots$$

Poiché $q = 4$, $a_1 = 2$, calcoliamo S_5:

$$S_5 = 2 \cdot \frac{4^5 - 1}{4 - 1} = 2 \cdot \frac{1024 - 1}{3} = 682.$$

I CHICCHI E LA SCACCHIERA

Perché il re di Persia fece mozzare la testa all'inventore del gioco degli scacchi?

▶ Il quesito completo a pag. 77

L'inventore chiese come ricompensa al re un chicco di riso per la prima casella della scacchiera, due per la seconda, 4 per la terza e così via…
Il re pensò che il premio fosse giusto e onesto, ma dovette ricredersi. Vediamo perché.
I chicchi per le diverse caselle erano:

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$$

Considerato che in una scacchiera ci sono 8 righe e 8 colonne e le caselle sono 64 (da 0 a 63), abbiamo

$$1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{63} \text{ chicchi,}$$

corrispondenti ai primi 64 termini di una progressione geometrica di ragione 2.
Utilizzando la formula

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ con } a_1 = 1, q = 2 \text{ e } n = 64,$$

otteniamo la somma di tutti i chicchi:

$$S_{64} = 1 \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

È senza dubbio un numero molto grande; ma quanto grande?

Se i chicchi diventano monete

Leonardo Fibonacci nel suo *Liber Abaci* suggerisce di sostituire i chicchi con delle monete d'oro.
Con le 65 535 monete che si ottengono con le prime due righe si riempie una cassa.
Con la terza riga si riempiono 2, 4, 8, 16, … casse. Alla fine della quarta riga si saranno riempite 65 536 casse, tanto quanto una casa.
Procedendo allo stesso modo la quinta e la sesta riga danno 65 536 case, ossia una città intera, e la settima e ottava riga danno 65 536 città!

Un finale tragico

Tornando ai chicchi, la quantità di riso era così grande da impedire al re di mantenere la propria promessa e accontentare Sissa Nassir. Quando il re se ne accorse, si sentì imbrogliato dall'abile inventore e invece di dargli un premio, seppur un po' ridimensionato, gli fece tagliare la testa.

La luce del Paradiso

Anche Dante doveva conoscere la leggenda di Sissa Nassir. Nella *Divina Commedia* (*Paradiso*, XXVIII, vv. 91-93) troviamo questi versi:

L'incendio suo seguiva ogne scintilla;
ed eran tante, che'l numero loro
più che 'l doppiar de li scacchi s'inmilla.

Dante si riferisce alla luce emanata dagli angeli del Paradiso: per dare una stima del numero di *scintille* sprigionate dice che, invece di raddoppiare, si deve *inmillare*, ossia moltiplicare per mille, per ogni casella della scacchiera. Dunque l'ordine di grandezza della luce del Paradiso descritto da Dante è quello della somma dei primi 64 termini di una progressione geometrica di ragione 1000!

▲ **Antonio Allegri, detto Correggio, *Assunzione della Vergine*, Cupola del Duomo di Parma, 1526-1530.**

Vecchie, muli, sacchi…

Nel *Liber Abaci* di Fibonacci si trova anche il seguente quesito: «Sette vecchie vanno a Roma; ognuna ha sette muli, ogni mulo ha sette sacchi, in ogni sacco ci sono sette pani, ogni pane ha sette coltelli, ogni coltello sette guaine. Si chiede la somma di tutti».
Il problema era rimasto irrisolto per secoli, se si considera che un quesito analogo si trova nel papiro di Rhind, il più completo testo matematico egizio giunto fino a noi, che risale al 1650 a.C.
Oggi possiamo ottenere la soluzione considerando una progressione geometrica di ragione 7:

$$S_6 = 7 \cdot \frac{7^6 - 1}{7 - 1} = 137\,256.$$

LABORATORIO DI MATEMATICA
LE FUNZIONI

ESERCITAZIONE GUIDATA

Data la funzione $f(x) = \sqrt{ax+b} - 2$, con $a \neq 0$, con Excel costruiamo un foglio elettronico che, dopo aver letto i valori dei coefficienti a e b, stabilisca il dominio e determini le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani del grafico corrispondente.

L'analisi del problema

Il dominio è dato dai valori di x per cui si ha $ax + b \geq 0$, ossia: se $a > 0$, $x \geq -\frac{b}{a}$; se $a < 0$, $x \leq -\frac{b}{a}$.

Se $b \geq 0$, l'intersezione con l'asse y è in $(0; \sqrt{b} - 2)$, altrimenti non esiste.

Notiamo che l'intersezione con l'asse x esiste sempre e che si trova in $\left(\frac{4-b}{a}; 0\right)$.

La costruzione del foglio

- Apriamo il foglio elettronico Excel e scriviamo i testi per indicare dove immettere i dati e dove leggere i risultati, come vediamo in figura 1.
- Controlliamo il coefficiente a, digitando in B5 la formula = SE(B4 = 0;"Il dato non è accettabile";"").
- Per mostrare il dominio, digitiamo = SE(B4 > 0; "x ≥";"x ≤") in A9 e = − B6/B4 in B9.
- Per indicare l'intersezione della funzione con l'asse x, digitiamo per l'ascissa = (4 − B6)/B4 in A12 e per l'ordinata 0 in B12.
- Determiniamo l'eventuale intersezione con l'asse y digitando per l'ascissa = SE(B6 < 0; "non esiste"; 0) in A15 e per l'ordinata = SE(B6 < 0;""; RADQ(B6) − 2) in B15.
- Proviamo il foglio ponendo $a = -1$ e $b = 2$, digitando − 1 in B4 e 2 in B6 (figura 1).

	A	B
1	$f(x)$ = RADQ(a*x + b) -2	
2		
3	I valori dei coefficienti	
4	a =	-1,0000
5		
6	b =	2,0000
7		
8	Il dominio	
9	$x \leq$	2,0000
10		
11	L'intersezione con l'asse x	
12	-2,0000	0,0000
13		
14	L'intersezione con l'asse y	
15	0,0000	-0,5858

▲ Figura 1

Nel sito: ► 2 esercitazioni guidate ► 28 esercitazioni in più

Esercitazioni

Per ognuna delle seguenti funzioni opera come nell'esercitazione guidata.

1 $f(x) = a - \sqrt{x+b}$

2 $f(x) = \frac{1}{ax^2 - b}$

3 $f(x) = ax^2 + bx + 1$

4 $f(x) = a\sqrt{bx+3}$

Per ognuna delle seguenti funzioni determina, con l'aiuto del computer, i coefficienti a e b in modo che i punti C e D appartengano al grafico della funzione. Rappresenta tale grafico.

5 $f(x) = ax + b$, $C(-4; 2)$ e $D(-3; 5)$. $[3, 14]$

6 $f(x) = ax^2 - b$, $C(0; -4)$ e $D(1; -3)$. $[1, -4]$

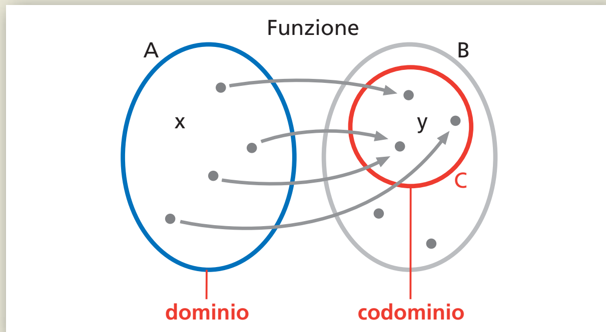
7 $f(x) = ax^3 + b$, $C(-1; 0)$ e $D(2; 9)$. $[-1, 8]$

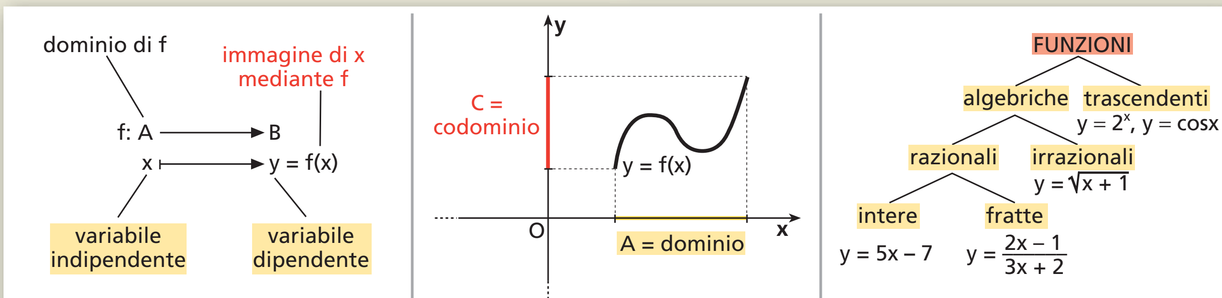
8 $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$, $C(-2; 4)$ e $D(0; -2)$ $[-2, 1]$

LA TEORIA IN SINTESI
LE FUNZIONI

1. LE FUNZIONI E LE LORO CARATTERISTICHE

- **Funzione** dall'insieme *A* all'insieme *B*: è una relazione che a *ogni* elemento di *A* associa *uno e un solo* elemento di *B*.
- **Funzioni numeriche**: hanno come dominio e codominio due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Sono anche dette **funzioni reali di variabile reale**.





a. Terminologia delle funzioni numeriche.

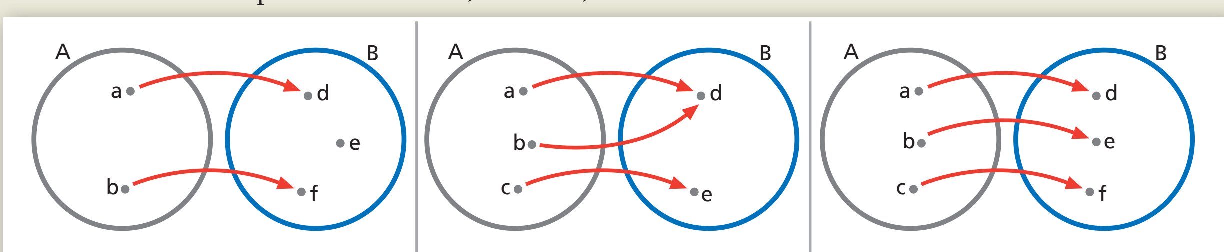
b. Rappresentazione grafica di $f(x)$, del dominio $D = A$ e del codominio $C = \{f(x) \mid x \in A\}$.

c. Classificazione delle funzioni reali di variabile reale.

- **Dominio naturale di una funzione**: è il più ampio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che può essere preso come dominio. È costituito da tutti i valori per i quali non perde significato l'espressione analitica che definisce la funzione. È anche detto **campo di esistenza**.
- **Valore assoluto**: $y = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$. È un esempio di **funzione definita per casi**.
- a è **zero** di una funzione $y = f(x)$ se $f(a) = 0$.

2. LE PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI E LE FUNZIONI COMPOSTE

- Una funzione da *A* a *B* può essere iniettiva, suriettiva, biiettiva.



a. Funzione **iniettiva**: a *ogni* elemento di *B* arriva *al più una* freccia.

b. Funzione **suriettiva**: a *ogni* elemento di *B* arriva *almeno una* freccia.

c. Funzione **biiettiva**: a *ogni* elemento di *B* arriva *una e una sola* freccia.

- Una funzione $y = f(x)$, di dominio D, si dice:
  - **crescente in senso stretto** in un intervallo $I \subseteq D$, se $\forall x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) < f(x_2)$;
  - **decrescente in senso stretto** in un intervallo $I \subseteq D$, se $\forall x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) > f(x_2)$.
  - Se la funzione è crescente o decrescente **in senso lato**, le considerazioni sono analoghe, ma valgono rispettivamente le relazioni $f(x_1) \leq f(x_2)$ e $f(x_1) \geq f(x_2)$.

- Una funzione si dice **monotòna** in un intervallo del suo dominio se in esso è sempre crescente o sempre decrescente.

- Una funzione $y = f(x)$, di dominio D, si dice:
  - **pari** se $f(-x) = f(x), \ \forall x \in D$;
  - **dispari** se $f(-x) = -f(x), \ \forall x \in D$.

  ESEMPIO: $y = x^2$ è una funzione pari, $y = x^3$ è una funzione dispari.

- **Funzione inversa**: se indichiamo con f una funzione e con f^{-1} la sua inversa, si ha:

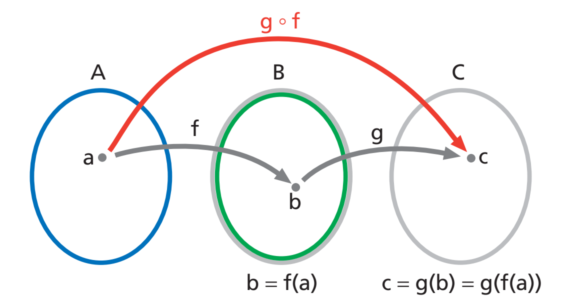
  $$b = f^{-1}(a) \quad \Leftrightarrow \quad a = f(b).$$

  ESEMPIO: La funzione inversa di $f(x) = 5x - 7$ è: $f^{-1}(x) = \dfrac{x+7}{5}$.

  Una funzione ammette la funzione inversa se e solo se è biiettiva.

- **Funzione composta**: date le funzioni $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$, la funzione composta $g \circ f\colon A \to C$ associa a ogni elemento $a \in A$ un elemento $c \in C$ così ottenuto:
  - ad a si associa $b \in B$ tale che $b = f(a)$;
  - a b si associa $c \in C$ tale che $c = g(b)$.

  Se $C = A$, possiamo definire sia $g \circ f$ che $f \circ g$.
  In generale, $g \circ f \neq f \circ g$.



Funzione composta

3. LE SUCCESSIONI NUMERICHE

- **Successione numerica**: è una funzione a che associa a ogni numero naturale un numero reale:

  $$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n.$$

  n si chiama **indice della successione** e a_n **termine della successione**.

  ESEMPIO: $a_n = 2n + 1$: $1, 3, 5, 7, \ldots$

- **Principio di induzione**
  Data una proposizione $P(n)$, il cui enunciato dipende da n, con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$, se
  1. è vera per $n = 1$,
  2. supposta vera per n, è vera anche per $n + 1$,

  allora la proposizione è vera per ogni $n \geq 1$.

- Una successione è detta:
  - **crescente** se $a_n < a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
  - **decrescente** se $a_n > a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
  - **costante** se $a_n = a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
  - **crescente in senso lato** se $a_n \leq a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
  - **decrescente in senso lato** se $a_n \geq a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

4. LE PROGRESSIONI ARITMETICHE

- Una successione a_n si dice **progressione aritmetica di ragione *d*** se $a_{n+1} - a_n = d, \forall n \in \mathbb{N}$.

  ESEMPIO: $9, 12, 15, 18, 21, \ldots; d = 3$.

  Se consideriamo n numeri consecutivi di una progressione aritmetica, il primo e l'ultimo termine sono detti **estremi** della progressione.

- Una progressione aritmetica di ragione d è:
  - **crescente** se $d > 0$;
  - **decrescente** se $d < 0$;
  - **costante** se $d = 0$.

- In una progressione aritmetica di ragione d:
  - $a_n = a_{n-1} + d$ e $a_n = a_{n+1} - d$;
  - $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d, n \geq 1$;
  - $a_r = a_s + (r - s) \cdot d$.

- Dati due numeri a e b, per inserire tra essi altri k numeri, in modo da ottenere i primi $k + 2$ termini di una progressione aritmetica, basta determinare la ragione:

$$d = \frac{b-a}{k+1}.$$

- **Teorema.** Considerati i primi k termini consecutivi di una progressione aritmetica, la somma di due termini equidistanti dagli estremi è costante e uguale alla somma dei termini estremi.

- **Teorema.** La somma S_n dei primi n termini di una progressione aritmetica è:

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

5. LE PROGRESSIONI GEOMETRICHE

- Una successione a_n si dice **progressione geometrica di ragione *q*** se $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \forall n \in \mathbb{N}$.

  ESEMPIO: $1, 2, 4, 8, 16, \ldots; q = 2$.

  Se consideriamo n numeri consecutivi della progressione geometrica, il primo e l'ultimo termine sono detti **estremi**.

- In una progressione geometrica di ragione q:
  - $a_n = a_{n-1} \cdot q$ e $a_n = \frac{a_{n+1}}{q}$;
  - $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 1$;
  - $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$.

- Se la ragione di una progressione geometrica è positiva, la progressione è:
  - **crescente** se $q > 1$ e $a_n > 0$, $0 < q < 1$ e $a_n < 0$;
  - **decrescente** se $0 < q < 1$ e $a_n > 0$, $q > 1$ e $a_n < 0$;
  - **costante** se $q = 1$.

- Per inserire k numeri positivi fra due numeri dati a e b, in modo da ottenere i primi $k + 2$ termini di una progressione geometrica a termini positivi, si ricava q mediante la formula:

$$q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}.$$

- **Teorema.** Considerati i primi n termini consecutivi di una progressione geometrica, il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi è costante e uguale al prodotto dei termini estremi.

- **Teorema.** La somma S_n dei primi n termini di una progressione geometrica, di ragione $q \neq 1$, è:

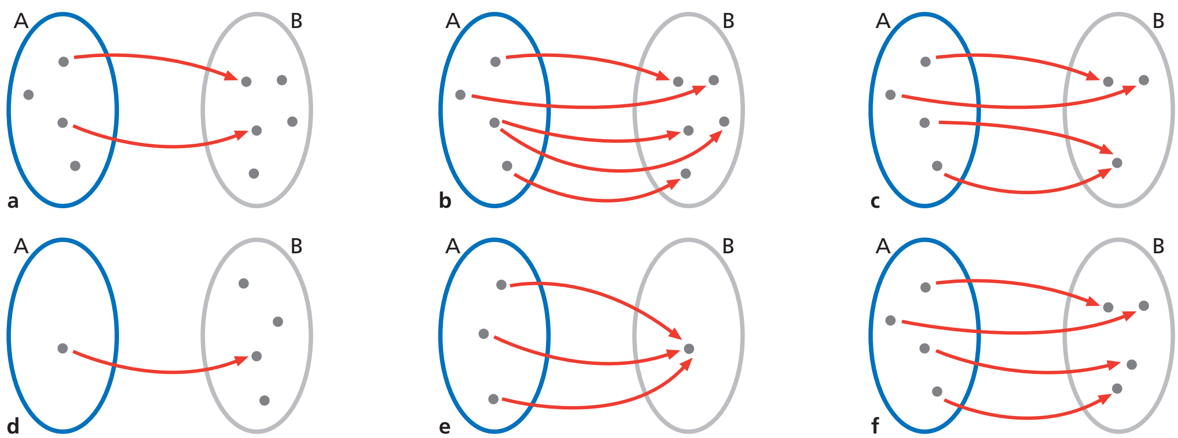
$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

1. LE FUNZIONI E LE LORO CARATTERISTICHE

Teoria a pag. 78

Relazioni e funzioni

1 Indica per ogni figura se la relazione è una funzione da A a B. Se non è una funzione, scrivine il motivo.



Negli esercizi seguenti, R è un sottoinsieme di $A \times B$ che definisce una relazione da A a B. Indica se si tratta di una funzione, motivando la risposta. In caso affermativo scrivi il codominio.

2 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$R = \{(a; 2), (c; 3), (d; 3), (b; 2), (e; 3)\}$.

3 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a\}$, $R = \{(a; a), (b; a), (c; a)\}$.

4 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a\}$, $R = \{(a; a)\}$.

5 $A = \{a\}$, $B = \{a, b, c\}$, $R = \{(a; a), (a; b), (a; c)\}$.

Le funzioni numeriche

6 Dati gli insiemi $A = \{4, 9, 25\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e la relazione R da A a B così definita: $x\,R\,y$ se $y = \sqrt{x}$:
a) scrivi le coppie degli elementi che sono in relazione;
b) R è una funzione? [a) (4; 2), (9; 3), (25; 5); b) sì]

7 Quali di queste equazioni rappresentano delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$?
a) $4x - 2y = 3$, b) $x^2 - 4y = 0$, c) $x - y^2 = 1$, d) $y = \sqrt{x^2 - 1}$. [a), b), d)]

8 L'equazione $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ non rappresenta una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Perché?

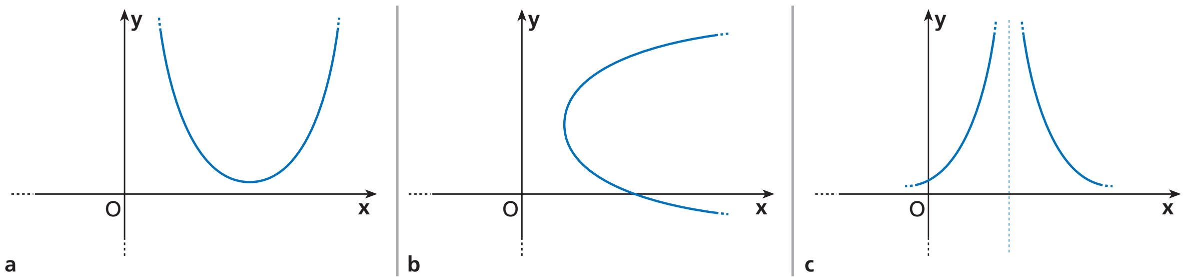
9 L'espressione $y = \dfrac{x + 1}{3}$ definisce una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$? E da $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$?

10 Data la funzione f da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ tale che $f: x \mapsto 4x^2 - 2x$, trova $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$. [0, 2, 6]

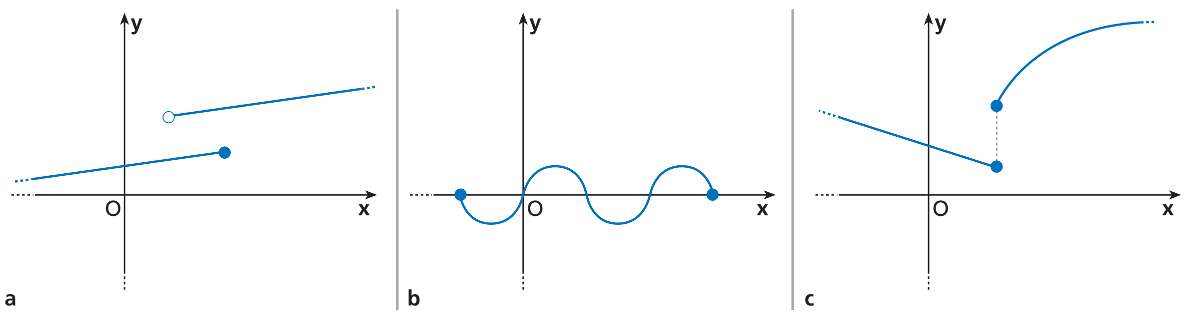
11 Data la funzione $y = -x^2 + 4x + 1$, trova le immagini di -1 e 1 e le controimmagini di -4.
[-4, 4; -1, 5]

Osserva i seguenti grafici e stabilisci quali di essi rappresentano una funzione.

12



13



14 Data la funzione $y = \dfrac{2x^4 - 6}{x}$, indica quale dei seguenti punti appartiene al suo grafico.

$A(1; -4)$, $B(-1; 8)$, $C(0; 2)$, $D\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{47}{4}\right)$.

15 Quale dei punti $P(1; 0)$, $Q(-2; -1)$ e $R(3; 0)$ appartiene al grafico di $y = x^2 - 4x + 3$?

16 Trova per quale valore di a il grafico della funzione $y = x + \sqrt{2x - a}$ passa per il punto $A(6; 9)$. [3]

17 Determina a e b in modo che il grafico della funzione $y = ax^2 + bx + 2$ passi per $(1; 3)$ e per $(-1; -1)$. [$a = -1, b = 2$]

COMPLETA le uguaglianze per ogni funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, scrivendo il valore mancante (se esiste) al posto dei puntini.

18 $y = -\dfrac{2x}{3}$, $\quad \ldots = f(12)$; $\quad \ldots = f\left(\dfrac{7}{5}\right)$; $\quad \dfrac{4}{3} = f(\ldots)$; $\quad 8 = f(\ldots)$.

19 $y = 2x - 5$, $\quad \ldots = f\left(-\dfrac{2}{5}\right)$; $\quad \ldots = f\left(-\dfrac{7}{4}\right)$; $\quad 5 = f(\ldots)$; $\quad \dfrac{9}{2} = f(\ldots)$.

20 $y = -12x^2$, $\quad -7 = f(\ldots)$; $\quad 3 = f(\ldots)$; $\quad -\dfrac{16}{9} = f(\ldots)$; $\quad \dfrac{50}{9} = f(\ldots)$.

21 $y = x^3$, $\quad 8 = f(\ldots)$; $\quad -27 = f(\ldots)$; $\quad \ldots = f(1)$; $\quad \ldots = f(4)$.

22 $y = -2x^2 + x + 1$, $\quad f(-1) = \ldots$; $\quad f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ldots$; $\quad f(\ldots) = -14$; $\quad f(\ldots) = -\dfrac{1}{4}$.

23 $y = \dfrac{2x - 1}{x - 3}$, $\quad f(2) = \ldots$; $\quad f\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \ldots$; $\quad f(\ldots) = 1$; $\quad f(\ldots) = \dfrac{1}{8}$.

24 $y = \dfrac{x}{\sqrt{x + 2}}$, $\quad f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \ldots$; $\quad f(4) = \ldots$; $\quad f(\ldots) = -\dfrac{7}{20}$; $\quad f(\ldots) = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

25 Date le funzioni $f(x) = 5x - 4$ e $g(x) = \frac{2}{3}x$, determina, se esiste, il valore (o i valori) di x per cui hanno la stessa immagine. $\left[\frac{12}{13}\right]$

26 Come nell'esercizio precedente, ma per le funzioni $f(x) = -\frac{2}{5}x^2 - 2$ e $g(x) = 3x^2 + 1$. [impossibile]

27 Trova il codominio della funzione $f: A \to \mathbb{R}$, con $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $f(x) = 2x^2 + 1$. $[C = \{1, 3, 9\}]$

28 Data la funzione $y = 6x - 1$, determina il suo codominio se il dominio è $D = \{-3, -4, 1, 5, 8\}$. $[C = \{-19, -25, 5, 29, 47\}]$

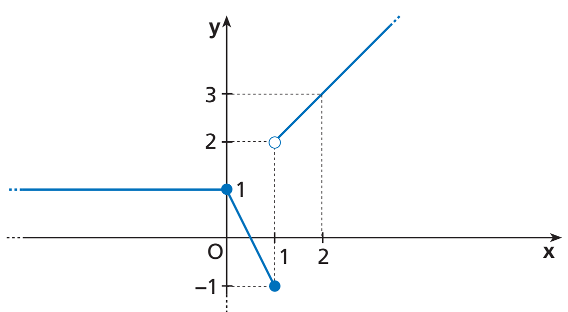
29 Come nell'esercizio precedente, ma con la funzione $y = x^3$ e la funzione $y = x^4$ e come dominio comune alle due funzioni $D = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. $\left[C = \left\{-1, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{8}, 1\right\}; C = \left\{0, \frac{1}{16}, 1\right\}\right]$

30 Trova i valori di a e b per la funzione $f(x) = ax^2 - b$, sapendo che $f(0) = -2$ e $f(1) = 4$. $[a = 6, b = 2]$

31 Determina la funzione che associa a ogni numero reale x il doppio del suo quadrato aumentato di 3 e indica il suo codominio. $[y = 2x^2 + 3; C = \{y \geq 3\}]$

32 Una funzione $y = f(x)$ associa al numero reale x la differenza tra il cubo del numero e il cubo della somma tra il numero e 2. Scrivi $f(x)$ e trova il suo codominio C se il dominio è $D = \{-2, -1, 0, 1\}$. $[y = -6x^2 - 12x - 8; C = \{-26, -8, -2\}]$

33



Considera la funzione $y = f(x)$ rappresentata dal grafico a lato.

a) Indica il dominio e il codominio di $f(x)$.

b) Trova $f(0), f(1), f(-1), f(2)$ e completa:

$f(\ldots) = 1, f(\ldots) = 3, f(\ldots) = -1$.

[a) D: $\mathbb{R}$, C: $\{-1 \leq y \leq 1\} \cup \{y > 2\}$; b) $1, -1, 1, 3$]

34 Data la funzione $f(x) = x^2 - 4$, calcola $f(2x), 2f(x), f(x^2), [f(x)]^2$. $[4x^2 - 4; 2x^2 - 8; x^4 - 4; x^4 - 8x^2 + 16]$

35 È assegnata la funzione $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$. Trova $f(x + 1), f(-1), f(\sqrt{x})$. $[\sqrt{x^2 + 2x}; 0; \sqrt{x - 1}]$

36 Per la funzione $f(x) = \frac{x - 3}{x}$ calcola $f(3x), f(x + 2), f\left(\frac{1}{x}\right)$. $\left[\frac{x - 1}{x}; \frac{x - 1}{x + 2}; 1 - 3x\right]$

37 Date le due funzioni $f(x) = x^2 - 4x$ e $g(x) = 24 - 6x$, risolvi la disequazione $f(x - 2) < g(2x)$. $[-6 < x < 2]$

Traccia per punti i grafici delle seguenti funzioni.

38 $y = 2x$; $\quad y = \frac{1}{3}x$.

39 $y = 3x + 1$; $\quad y = -x + 1$.

40 $y = \frac{1}{9}x^2$; $\quad y = -x^2$.

41 $y = 4x^2 - 1$; $\quad y = x^2 - 2x$.

Le funzioni definite per casi

42 L'espressione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 2 \\ \sqrt{x-1} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

non indica una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Perché?

43 Data la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{se } x < -1 \\ -2x+1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

trova $f(-5)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$. [-3; 3; 1; -1]

44 Data la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -2 \\ x & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2+2x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

a) calcola

$$f(-3),\ f(-2),\ f\left(-\frac{1}{2}\right),\ f(0),\ f(1),\ f(2);$$

b) trova i valori di x per cui $f(x) = -1$ e quelli per cui $f(x) = 0$.

[a) $-1, -2, -\frac{1}{2}, 0, 1, 0$;
b) $x < -2 \vee x = -1 \vee x = 1 + \sqrt{2}$; $x = 0 \vee x = 2$]

45 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } |x| < 1 \\ -2x+1 & \text{se } |x| \geq 2 \end{cases}$$

a) calcola le immagini di -2, 0, 1 e 3;

b) calcola le controimmagini di $-\frac{1}{2}$ e 7;

c) indica gli intervalli in cui la funzione non è definita.

[a) $5, 0, \nexists, -5$; b) $-\frac{1}{2}, -3$; c) $-2 < x \leq -1 \vee 1 \leq x < 2$]

46 Data la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 1 \\ (x-1)^2+3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

a) completa, scrivendo il valore mancante: $f(1) = \ldots$, $f(\ldots) = 4$, $f(-1) = \ldots$, $f(\ldots) = 2$, $f(3) = \ldots$;

b) trova il codominio di $f(x)$. [a) $2, 2, 2, \{x \leq 1\}, 7$; b) C: $\{2\} \cup \{y > 3\}$]

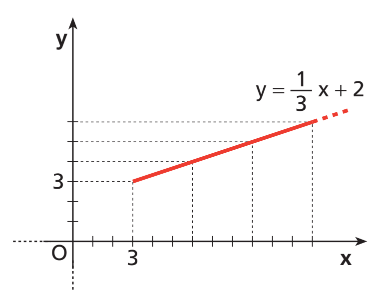
47 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo il grafico della funzione y: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 2 & \text{se} \quad x \geq 3 \\ x - 1 & \text{se} \quad x < 3 \end{cases}$$

Per disegnare la funzione $y = \frac{1}{3}x + 2$, in tabella scegliamo valori di x maggiori o uguali a 3. Poiché dobbiamo calcolare $\frac{1}{3}x + 2$, per comodità scegliamo multipli di 3, in modo da ottenere valori interi.

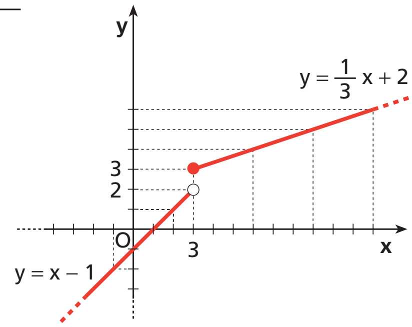
x	y
3	3
6	4
9	5
12	6



a

Per disegnare la funzione $y = x - 1$, in tabella scegliamo valori di x minori di 3. Calcoliamo anche il valore di y per $x = 3$, solo per verificare se le due funzioni sono «attaccate» oppure il grafico presenta un salto.

x	y
3	2
2	1
1	0
0	–1
–1	–2



b

Disegna il grafico delle seguenti funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e indica il codominio.

48 $y = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{1}{2}x & \text{se } x < 2 \end{cases}$

49 $y = \begin{cases} 3x & \text{se } x \geq 1 \\ -5x - 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

50 $y = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

51 $y = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \leq 0 \\ -x - 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

52 $y = |2x - 1|$; $\quad y = |5 - x|$.

53 $y = |x^2 - 4|$; $\quad y = |1 - x|$.

54 $y = |x| + 3$; $\quad y = |x^2 - x|$.

55 $y = |x + 3|$; $\quad y = -|x| + 3$.

56 $y = |x^2 - 1| - 1$; $\quad y = 2|x| + 3$.

57 $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 + 1 & \text{se } -2 < x < 0 \\ \frac{1}{2}x - 4 & \text{se } x \leq -2 \end{cases}$

58 $y = \begin{cases} -6 & \text{se } x < -2 \\ -2x^2 + 2 & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ 2x - 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

59 $y = \frac{1}{2}||x| + 2|$; $\quad y = -2(x + 3)^2 - 1$.

Il dominio naturale di una funzione

60 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo il dominio delle seguenti funzioni:

a) $y = \dfrac{5 - x}{2x - 9}$; $\quad$ c) $y = 12 - \sqrt[3]{x - 1}$; $\quad$ e) $y = \dfrac{2 - x}{|x + 3| - 5}$.

b) $y = 5\sqrt{x^2 - 7}$; $\quad$ d) $y = \sqrt{x + 5} + \sqrt{x - 3}$;

a) L'espressione $\dfrac{5 - x}{2x - 9}$ ha significato per ogni valore di x che non renda nullo il denominatore, ossia:

$$2x - 9 \neq 0 \quad \rightarrow \quad D: x \neq \frac{9}{2},$$

cioè $D: \mathbb{R} - \left\{\frac{9}{2}\right\}$.

b) L'indice della radice $\sqrt{x^2 - 7}$ è pari, quindi l'espressione esiste soltanto se:

$$x^2 - 7 \geq 0 \quad \rightarrow \quad D: x \leq -\sqrt{7} \vee x \geq \sqrt{7}.$$

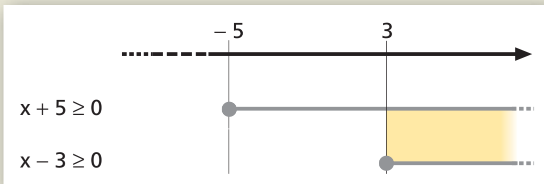
c) L'indice della radice $\sqrt[3]{x - 1}$ è dispari, quindi l'espressione esiste per ogni valore reale di x:

$D: \mathbb{R}$.

d) Affinché esista l'espressione $\sqrt{x+5}+$ $+\sqrt{x-3}$, il valore di x deve rendere *contemporaneamente* non negative le espressioni $x+5$ e $x-3$, quindi dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

D: $x \geq 3$.



e) La funzione è razionale fratta, quindi esiste solo se il denominatore è diverso da 0:

$$|x+3|-5 \neq 0.$$

Risolviamo l'equazione:

$$|x+3|-5=0.$$

Si ha

$$|x+3|=5 \quad \rightarrow \quad x+3=\pm 5, \text{ ossia}$$

$$x+3=5 \quad \vee \quad x+3=-5$$

$$x=2 \quad \vee \quad x=-8$$

e perciò:

D: $x \neq -8 \;\wedge\; x \neq 2$.

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

61 $y=3x^4-4x^2$ $[\mathbb{R}]$

62 $y=\sqrt{x-5}$ $[x \geq 5]$

63 $y=\sqrt[4]{6-|x+4|}$ $[-10 \leq x \leq 2]$

64 $y=\sqrt{1-\sqrt[3]{x-6}}$ $[x \leq 7]$

65 $y=\dfrac{3x-2}{(x-3)^3}$ $[x \neq 3]$

66 $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x-1}{x^2-9}$ $[x \neq \pm 3 \wedge x \neq 0]$

67 $y=\dfrac{1}{2x^2+5x-3}$ $\left[x \neq -3 \wedge x \neq \dfrac{1}{2}\right]$

68 $y=\dfrac{x-1}{x^4-8x}$ $[x \neq 0 \wedge x \neq 2]$

69 $y=\dfrac{5-x}{|2x|-8}$ $[x \neq \pm 4]$

70 $y=\sqrt{x^2-7x}$ $[x \leq 0 \vee x \geq 7]$

71 $y=\dfrac{2-x}{\sqrt{7+x^2}}$ $[\mathbb{R}]$

72 $y=\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2+3}+2x}$ $[-2 \leq x \leq 2 \wedge x \neq -1]$

73 $y=\sqrt{\dfrac{3x-7}{3-|x|}}$ $\left[x<-3 \vee \dfrac{7}{3} \leq x<3\right]$

74 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x}{5x-3}}$ $\left[x \neq \dfrac{3}{5}\right]$

75 $y=\dfrac{2x}{3x^2+12}+\dfrac{1}{3x^2}$ $[x \neq 0]$

76 $y=\dfrac{2+|x|}{|2x^2-1|}$ $\left[x \neq \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

77 $y=\dfrac{4x}{x^2-5x+6}$ $[x \neq 2 \wedge x \neq 3]$

78 $y=\sqrt[4]{9-x^2}$ $[-3 \leq x \leq 3]$

79 $y=\dfrac{2x-7}{x^2-x+3}$ $[\mathbb{R}]$

80 $y=\dfrac{1}{|x|-|x^2-x|}$ $[x \neq 0 \wedge x \neq 2]$

81 $y=\dfrac{1}{|x^3-x^2+x|}$ $[x \neq 0]$

82 $y=\sqrt{x^3-3x^2}$ $[x \geq 3]$

83 $y=\sqrt{3x+2}+\sqrt{4x}$ $[x \geq 0]$

84 $y=\dfrac{1}{x^2-4x}+\dfrac{3}{\sqrt{x-2}}$ $[x>2 \wedge x \neq 4]$

85 $y=\sqrt{\dfrac{x+3}{x^2-2x+1}}$ $[x \geq -3 \wedge x \neq 1]$

86 $y=\sqrt{2x-3}+4\sqrt{1-x}$ $[\varnothing]$

87 $y=\dfrac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x+2}}$ $\left[x \geq \dfrac{1}{3}\right]$

88 $y=\sqrt{x^2-x}+\sqrt{-x}$ $[x \leq 0]$

89 $y = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}}$ $[-1 < x \leq 1]$

90 $y = \dfrac{5x+2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$ $[x \neq -2; 1; 3]$

91 $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{|2-x^2|}$ $[x \geq 1]$

92 $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-16}} + \sqrt{4+x}$ $[x > 4]$

93 $y = \dfrac{5x}{\sqrt[5]{x-2}}$ $[x \neq 2]$

94 $y = \dfrac{8x}{\sqrt{3x-7}} + \sqrt{5x^2+7}$ $\left[x > \dfrac{7}{3}\right]$

95 $y = \dfrac{3x+2}{\sqrt{5-x}} - \dfrac{4x-2}{\sqrt{x-7}}$ $[\varnothing]$

96 $y = \sqrt{|16-x^2|}$ $[\mathbb{R}]$

97 $y = \sqrt{\dfrac{2-x}{x+6}}$ $[-6 < x \leq 2]$

98 $y = \sqrt{|x+4| - |2x|}$ $\left[-\dfrac{4}{3} \leq x \leq 4\right]$

99 $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} + \sqrt[3]{x^3-1}$ $[x \neq 0]$

100 $y = \dfrac{1}{x^4 - 5x^2 + 4}$ $[x \neq \pm 2 \wedge x \neq \pm 1]$

101 $y = \dfrac{9x^2}{\sqrt{2x-3}} + \dfrac{3x}{\sqrt{4-x}}$ $\left[\dfrac{3}{2} < x < 4\right]$

102 $y = \sqrt{\dfrac{x-x^2}{x^2+3}}$ $[0 \leq x \leq 1]$

103 $y = \dfrac{5x^2+3x-2}{x^3-3x^2-4x+12}$ $[x \neq 3 \wedge x \neq \pm 2]$

104 $y = \sqrt{\dfrac{3x-1}{x+2}}$ $\left[x < -2 \vee x \geq \dfrac{1}{3}\right]$

105 $y = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{3x^2-1}$ $\left[\dfrac{1}{2} \leq x < \dfrac{\sqrt{3}}{3} \vee x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$

106 $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 1 \\ x+4 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $[x \neq 0 \wedge x \neq 1]$

107 $y = \begin{cases} \sqrt{2+x} & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x-4} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $[x \geq -2 \wedge x \neq 4]$

108 $y = \sqrt{\dfrac{x}{x^2-9}}$ $[-3 < x \leq 0 \vee x > 3]$

109 $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x+5}-4}$ $[-5 \leq x < 11 \vee x > 11]$

110 $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-8x}}$ $[-1 \leq x < 0 \vee x > 8]$

111 $y = \sqrt{\dfrac{x-4x^2}{x^2-1}}$ $\left[-1 < x \leq 0 \vee \dfrac{1}{4} \leq x < 1\right]$

112 $y = \sqrt{5-x} + \dfrac{1}{|x^2-1|}$
$[x < -1 \vee -1 < x < 1 \vee 1 < x \leq 5]$

113 $y = \dfrac{3}{\sqrt{x^2-8}} + \sqrt{-x^2+6}$ $[\varnothing]$

114 $y = \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x^2-6x+9}$ $[-4 \leq x < 3 \vee 3 < x \leq 4]$

115 $y = \dfrac{\sqrt{4x-6}}{\sqrt[3]{x^3-8x^2}}$ $\left[\dfrac{3}{2} \leq x < 8 \vee x > 8\right]$

116 $y = \dfrac{1}{|x^2-4|-3}$ $[x \neq \pm 1 \wedge x \neq \pm\sqrt{7}]$

117 $y = \sqrt{1-\sqrt{x}}$ $[0 \leq x \leq 1]$

118 $y = \sqrt{x - \sqrt{2x+3}}$ $[x \geq 3]$

119 $y = \dfrac{\sqrt{4-|x|}}{x}$ $[-4 \leq x \leq 4 \wedge x \neq 0]$

120 $y = \sqrt{\dfrac{x^2-2x}{1-x}} + \sqrt{2+x-x^2}$
$[-1 \leq x \leq 0 \vee 1 < x \leq 2]$

121 $y = \sqrt{4+3x^2-x^4}$ $[-2 \leq x \leq 2]$

122 $y = \sqrt{x+6-\sqrt{4x-x^2}}$ $[0 \leq x \leq 4]$

123 $y = \sqrt{\sqrt{4-9x^2}-x-2} + \sqrt{5x+1}$ $\left[-\dfrac{1}{5} \leq x \leq 0\right]$

---

124 $y = \sqrt[n]{-|x+3|-8x}$ $\left[n \text{ pari: } x \leq -\dfrac{1}{3};\ n \text{ dispari: } \forall x \in \mathbb{R}\right]$

125 $y = \sqrt[n]{2 - \dfrac{x-8}{2-x}}$ $[n \text{ pari: } x < 2 \vee x \geq 4;\ n \text{ dispari: } x \neq 2]$

126 $y = \sqrt[n]{3 - \dfrac{2x+1}{x-1} + \left|\dfrac{x-3}{1-x}\right|}$ $\left[n \text{ pari: } x < 1 \vee x \geq \dfrac{7}{2};\ n \text{ dispari: } x \neq 1\right]$

Il codominio di una funzione

127 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo il codominio della funzione $y = x^2 - 4x + 2$.

Dobbiamo trovare l'insieme dei valori di y immagini di qualche valore x del dominio, che in questo caso coincide con $\mathbb{R}$.
Riscriviamo l'equazione esplicitandola rispetto a x.

$$x^2 - 4x + 2 - y = 0.$$

Ricaviamo x:

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - 2 + y} = 2 \pm \sqrt{2 + y}.$$

x esiste per: $2 + y \geq 0 \quad \rightarrow \quad y \geq -2$.

Il codominio è pertanto l'insieme $C = [-2; +\infty[$.

Trova il codominio delle seguenti funzioni.

128 $y = \dfrac{x - 4}{3}$ $[\mathbb{R}]$

129 $y = \sqrt{1 - x^2}$ $[0 \leq y \leq 1]$

130 $y = \dfrac{x}{2x - 1}$ $\left[y \neq \dfrac{1}{2}\right]$

131 $y = x^2 - 6x + 8$ $[y \geq -1]$

132 $y = 1 - \sqrt{x^2 + 4}$ $[y \leq -1]$

133 $y = \sqrt{x^2 - 9} - 3$ $[y \geq -3]$

Gli zeri di una funzione e il suo segno

134 **VERO O FALSO?**

a) La funzione $y = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x}$ ha come zeri 0, 1, 4. V F

b) La funzione $y = \dfrac{2x^2 + 1}{x + 1}$ non ha zeri. V F

c) La funzione $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ non ha zeri. V F

d) La funzione $y = \dfrac{x^4 - 6x^3 + 8x^2}{1 - x}$ ha come zeri 0, 2, 4. V F

135 **TEST** Una sola delle seguenti funzioni ha il grafico che appartiene alle zone colorate della figura. Quale?

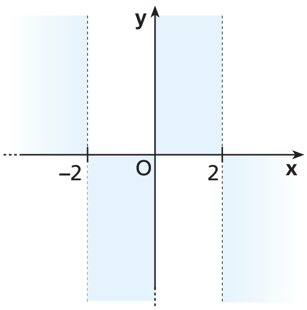
A $y = -2x^3 + 8x$

B $y = 2x^3 - 8x$

C $y = x^3 + 4x$

D $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

E $y = x\sqrt{x^2 - 4}$



Studia il segno delle seguenti funzioni dopo aver determinato il dominio e rappresenta graficamente le zone a cui appartiene il grafico.

136 $y = \dfrac{x^2 - 9}{x}$ $[D: x \neq 0;\ y > 0 \text{ per } -3 < x < 0 \vee x > 3]$

137 $y = x^7 - x^3$ $[D: \mathbb{R};\ y > 0 \text{ per } -1 < x < 0 \vee x > 1]$

138 $y = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(2x+1)}$ $\left[D: x \neq -\dfrac{1}{2} \wedge x \neq 2;\ y > 0 \text{ per } x < -3 \vee -\dfrac{1}{2} < x < 1 \vee x > 2\right]$

139 $y = \sqrt{1 - \sqrt{x-2}}$ $[D: 2 \leq x \leq 3;\ y > 0\ \forall x \in D \wedge x \neq 3]$

140 $y = \sqrt[3]{x^4 - 8x}$ $[D: \mathbb{R};\ y > 0 \text{ per } x < 0 \vee x > 2]$

141 $y = \dfrac{x-8}{\sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 6x}}$ $[D: x \geq 6;\ y > 0 \text{ per } x > 8]$

142 $y = \dfrac{|x| - |x-4|}{2x-9}$ $\left[D: x \neq \dfrac{9}{2};\ y > 0 \text{ per } x < 2 \vee x > \dfrac{9}{2}\right]$

143 $y = \sqrt{4x^2 - 1} - 2x + 6$ $\left[D: x \leq -\dfrac{1}{2} \vee x \geq \dfrac{1}{2};\ y > 0\ \forall x \in D\right]$

La classificazione delle funzioni

144 Scrivi in forma esplicita le seguenti funzioni:

a) $xy - 2x + 1 = 0$; b) $y - y\sqrt{x} + x = 0$; c) $x^2y - y + x = 0$; d) $x^4y = x^2y - 1$.

145 Data l'equazione $x^2 + y^2 + 2xy + y - 1 = 0$, ricava y in funzione di x. L'espressione ottenuta rappresenta una funzione?

Nelle seguenti equazioni ricava y in funzione di x, indica quali di esse rappresentano delle funzioni e determina il loro dominio e codominio.

146 a) $x^2 + y^2 = 4$; b) $x^2 + xy - y = 0$; c) $\sqrt{y} - 2x = 0$.

147 a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4}$; b) $4x + y^2 - 2y = 0$; c) $x\sqrt{y-1} = 2$.

Per ognuna delle seguenti funzioni indica se è razionale (intera o fratta) o irrazionale o trascendente.

148 $y = x^3 - x$; $y = \dfrac{1}{x} - 1$; $y = \dfrac{3^x + 2}{\sqrt{x}}$; $y = x + 2^x$.

149 $y = \sqrt{10^x + 1}$; $y = x^3 2^{\sqrt{3}}$; $y = 5\sqrt{x^4 - 7}$; $y = \sqrt{2}x - 3$.

150 $y = \dfrac{x+9}{2}$; $y = \dfrac{2 - \sqrt{7}}{x}$; $y = 2^{x-7}$; $y = 2\pi x$.

ESERCIZI VARI Le funzioni e le loro caratteristiche

151 Se $f(x) = \dfrac{x - 3a}{x - 5}$ e $f(2) = -\dfrac{8}{3}$, qual è il valore di a? $[-2]$

152 Se $f(x) = \dfrac{2x + a}{x - b}$, $f(-2) = 0$ e $f(1)$ non esiste, quali sono i valori di a e b? $[a = 4, b = 1]$

153 È data la funzione

$$f(x) = (k-2)x^3 - (k+2)x^2 + (k-1)x + k + 5,$$

con $k \in \mathbb{R}$.

a) Determina k in modo che il grafico di f intersechi l'asse delle x nel punto di ascissa 2.
b) Calcola eventuali altri punti di intersezione della funzione trovata con l'asse delle ascisse.
c) Per quali valori di x la funzione è positiva?

$[\text{a) } k = 3; \text{ b) } (-1; 0), (4; 0); \text{ c) } -1 < x < 2 \vee x > 4]$

154 Se $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x + c}$, $f(-1) = -6$, $f(1) = 6$ e $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 9$, quali sono i valori di a, b e c? $[a = 2, b = 4, c = 0]$

155 Su un foglio rettangolare, che ha dimensioni 26 cm e 42 cm, viene stampato un testo lasciando in ognuno dei lati un bordo bianco di x cm. Scrivi una formula che fornisca la misura A dell'area della parte stampata al variare della misura x del bordo. Indica il dominio della funzione e quale valore essa assume per $x = 2$. Se si vuole che l'area sia 897 cm^2, quanto deve misurare x? $[A = 1092 - 136x + 4x^2;\ D: [0; 13];\ 836;\ x = 1,5]$

156 Una speciale finestra ha la forma di un rettangolo sormontato da un triangolo equilatero. Il perimetro deve essere di 324 cm.

a) Scrivi la misura dell'area A in funzione di quella della base x della finestra.
b) Scrivi il dominio della funzione A.
c) Se la base è di 1 m, quanto misura l'area? $\left[A = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{3}{2}\right)x^2 + 162x;\ D:]0; 108[;\ (1200 + 2500\sqrt{3})\ \text{cm}^2\right]$

157 Una porta ha un vetro formato da un rettangolo sormontato da un semicerchio. Se il perimetro del vetro è 514 cm, esprimi la misura dell'area A del vetro in funzione di quella della larghezza $2x$.
Quanto misura l'area A se il vetro è largo 56 cm? E quanto è alto complessivamente il vetro?
$\left[A = -\left(2 + \dfrac{\pi}{2}\right)x^2 + 514x;\ \simeq 11\,593\ \text{cm}^2;\ \simeq 213\ \text{cm}\right]$

158 Si sa che il prezzo p di un abito ha subito una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%: non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito? (*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria,* 2007, *quesito* 6)

159 Se la funzione g è tale che $g\left(\dfrac{x}{2}\right) = x(x-1) + 3$, qual è l'espressione di $g(2x)$? E quanto valgono $g(2)$ e $g(3)$? E quanto vale $g\left(\dfrac{2}{3}\right)$? $\left[16x^2 - 4x + 3;\ 15,\ 33,\ \dfrac{31}{9}\right]$

160 Data la funzione $y = \dfrac{2x^2 + ax - 1}{2x - b}$, determina a e b in modo che il dominio sia $\mathbb{R} - \{4\}$ e il grafico passi per il punto $\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$. $[a = -4, b = 8]$

161 Nella funzione $y = \dfrac{3}{kx^2 + 6x + 3}$ determina k in modo che il dominio sia $\mathbb{R} - \{-1\}$. $[k = 3]$

162 Let f be a function satisfying $f(xy) = \dfrac{f(x)}{y}$ for all positive real numbers x and y.
If $f(500) = 3$, what is the value of $f(600)$? (USA *American Mathematics Contest 12*, *AMC 12*, Sample Problem)
$\left[\dfrac{5}{2}\right]$

163 **TEST** Let F be a function for which $F\left(\dfrac{x}{2}\right) = x^2 + x + 3$. Find the sum of all values of w for which $F(3w) = 9$.

A $-\dfrac{1}{3}$ B $\dfrac{1}{9}$ C $-\dfrac{1}{6}$ D $-\dfrac{2}{3}$ E 6

(USA *North Carolina State High School, NCSHS*, *Mathematics Contest*, Finals 2003)

164 È data la funzione $f(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+4} & \text{se } x \leq -2 \\ x - 3 & \text{se } x > -2 \end{cases}$

a) Calcola $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$.
b) Determina il dominio e il codominio di $f(x)$.
c) Il punto $(3; 1)$ appartiene al grafico della funzione? $\left[\text{a) } -4 \notin D,\ \dfrac{1}{2},\ -3,\ -1;\ \text{b) } D: \mathbb{R} - \{-4\};\ C: \mathbb{R};\ \text{c) no}\right]$

165 **VERO O FALSO?**

a) La funzione $y = \dfrac{2x+2}{x+1}$ è uguale alla funzione $y = 2$. V F

b) Le due funzioni $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-4}}$ e $y = \sqrt{\dfrac{x}{x-4}}$ sono uguali. V F

c) Il dominio della funzione $y = \sqrt{-x^2} + \sqrt{2x}$ è l'insieme vuoto. V F

d) Il codominio della funzione $y = |x| + 1$ è l'insieme $\mathbb{R}$. V F

166 Date le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{se } x < 4 \\ \sqrt{x^2 - 4x} & \text{se } x \geq 4 \end{cases}, \qquad g(x) = \sqrt{x^2 + 9},$$

risolvi $f(|x|) \leq g(-2x)$. $\left[x \leq -4 \vee -\dfrac{18}{5} \leq x \leq \dfrac{18}{5} \vee x \geq 4\right]$

167 Una funzione $f(x)$ ha le seguenti proprietà:
i) $f(1) = 1$; ii) $f(2x) = 4f(x) + 6$; iii) $f(x+2) = f(x) + 12x + 12$. Calcola $f(6)$.

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge*, 2004)

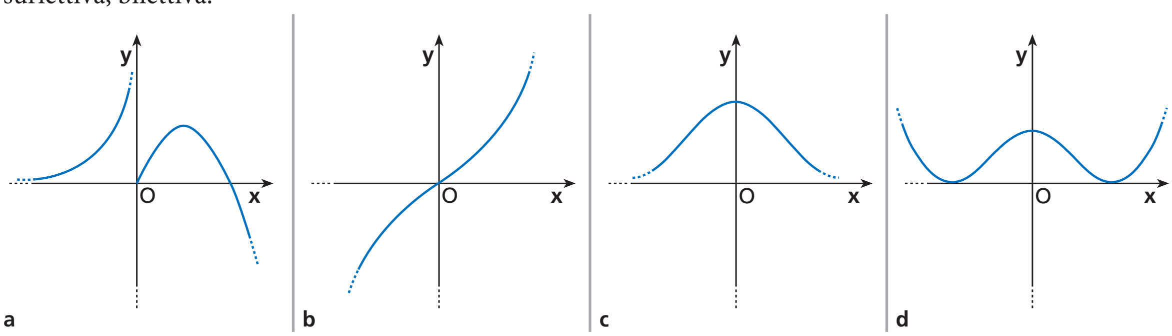
[106]

2. LE PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI E LE FUNZIONI COMPOSTE

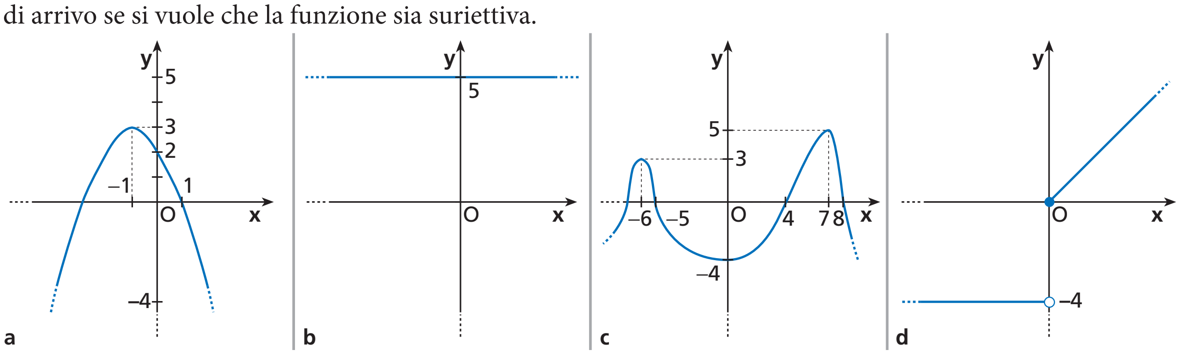
▶ Teoria a pag. 82

Le funzioni iniettive, suriettive e biiettive

168 Ogni grafico rappresenta una funzione f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Indica per ognuno se si tratta di una funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva.

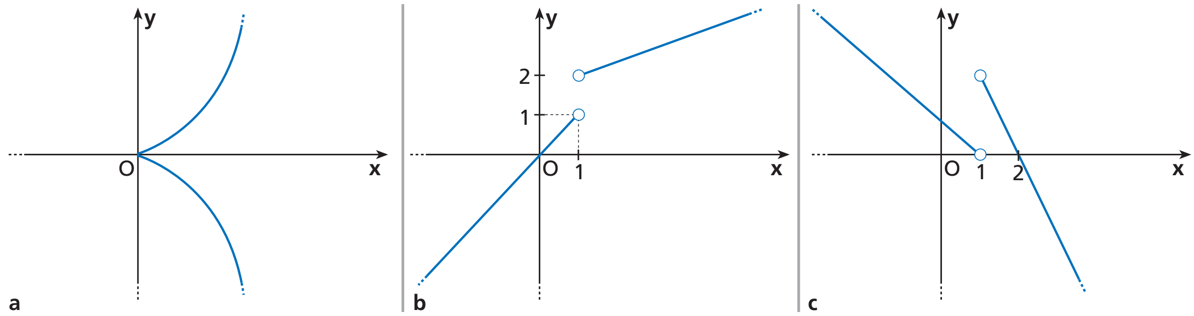


169 Per ognuna delle seguenti funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, indica quale sottoinsieme di $\mathbb{R}$ si deve prendere come insieme di arrivo se si vuole che la funzione sia suriettiva.

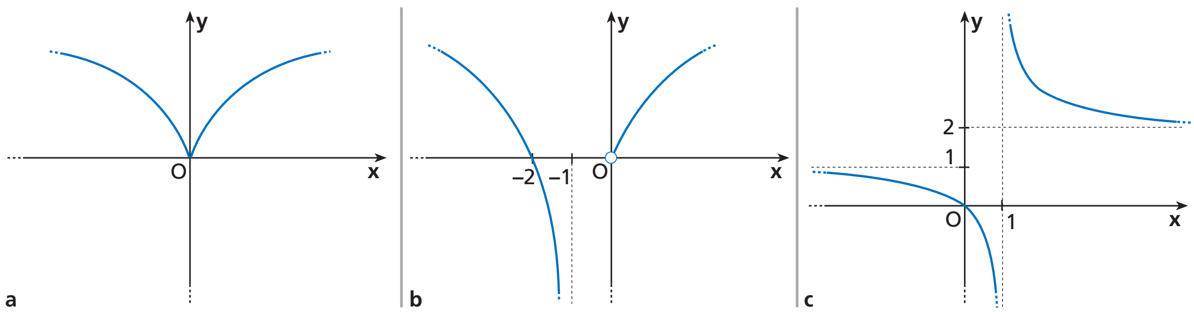


Indica quale dei seguenti grafici rappresenta una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Per ogni funzione indica se è una funzione iniettiva, suriettiva, biettiva, scrivi qual è il suo dominio, il codominio ed evidenzia per quali valori di x la funzione è positiva.

170



171



172 Data la funzione $f(x) = x^2 + 4$, indica se è iniettiva, suriettiva o biiettiva considerando come insiemi di arrivo e partenza: a) $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, b) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, c) $\mathbb{R} \to B$, con $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \geq 4\}$.

[a) né iniettiva né suriettiva; b) iniettiva, non suriettiva; c) suriettiva]

173 **ESERCIZIO GUIDA**

Stabiliamo se le seguenti funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ sono iniettive, suriettive, biiettive:

a) $y = 2x^2 - 1$; b) $y = \dfrac{3x + 2}{x}$.

a) Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$.
Poiché per due valori diversi di x si ha la stessa immagine, per esempio per $x = \pm 1$ si ha $y = 1$, la funzione non è iniettiva.
Non è suriettiva perché il codominio non è $\mathbb{R}$.

Infatti si ha:

$$2x^2 = y + 1 \to x = \pm\sqrt{\frac{y+1}{2}}, \text{ con } y \geq -1.$$

La funzione non può essere biiettiva.

b) Il dominio D è $\mathbb{R} - \{0\}$.
Se la funzione è iniettiva, significa che $\forall\, x_1, x_2 \in D$, allora se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Considerati x_1, x_2, si ha $f(x_1) = f(x_2)$ se $\dfrac{3x_1 + 2}{x_1} = \dfrac{3x_2 + 2}{x_2} \to \cancel{3x_1x_2} + 2x_2 = \cancel{3x_1x_2} + 2x_1 \to x_1 = x_2$.

La funzione è quindi iniettiva.

Verifichiamo ora se è suriettiva.
Scelto un qualunque $y \in \mathbb{R}$, ricaviamo x:

$$xy - 3x - 2 = 0 \rightarrow x(y-3) = 2 \rightarrow x = \frac{2}{y-3}.$$

Ogni $y \neq 3$ ha controimmagine x. Il codominio è $\mathbb{R} - \{3\}$.
La funzione non è suriettiva. Possiamo però affermare che è una corrispondenza biunivoca da $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$.

Stabilisci se le seguenti funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ sono iniettive, suriettive, biiettive.

174 $y = 4x + 1$

175 $y = -x^2 - 2$

176 $y = x^2 - 6x$

177 $y = \frac{1}{2x}$

178 $y = \frac{1}{x-1}$

179 $y = x^3 + 3$

180 $y = \frac{2x-1}{x+2}$

181 $y = \sqrt{x-4}$

182 Data la funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ $f(x) = \frac{2-x}{3x+1}$:

a) determina il dominio D e il codominio C;

b) dimostra che è biiettiva da D a C;

c) risolvi l'equazione $f(|x|) = f(-x)$;

d) risolvi la disequazione: $\sqrt{f(x)+1} \leq \frac{1}{2}$.

$\left[\text{a) } D: \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}, C: \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}; \text{c) } x \leq 0; \text{d) } -\frac{11}{5} \leq x \leq -\frac{3}{2}\right]$

Le funzioni crescenti, le funzioni decrescenti

183 **ESERCIZIO GUIDA**

Dimostriamo che la funzione $f(x) = 4\sqrt{x} - 1$ è crescente in senso stretto.

Il dominio D della funzione $f(x)$ è: $x \geq 0$.
Verifichiamo la definizione: $\forall\, x_1, x_2 \in D$, se $x_1 < x_2$, deve essere $f(x_1) < f(x_2)$.
Poiché x_1 e x_2 sono numeri positivi o nulli:

$$x_1 < x_2 \rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \rightarrow 4\sqrt{x_1} < 4\sqrt{x_2} \rightarrow 4\sqrt{x_1} - 1 < 4\sqrt{x_2} - 1.$$

Quindi $f(x_1) = 4\sqrt{x_1} - 1 < 4\sqrt{x_2} - 1 = f(x_2)$.

184 Dimostra che la funzione $f(x) = -\frac{x}{2} + 4$ è decrescente.

185 Dimostra che la funzione $f(x) = \sqrt{x} - 3$ è crescente.

186 Considera la funzione $y = x^2 + 5$ e dimostra che è crescente per $x > 0$.

187 Dimostra che la funzione $y = -x^3 + 5$ è strettamente decrescente in $\mathbb{R}$.

188 Indica se le seguenti funzioni sono crescenti o decrescenti nel loro dominio:

a) $y = -4x + 1$; b) $y = -|x| + 3$; c) $y = \frac{1}{4}x^3 - 2$; d) $y = \sqrt{x-2} - 3$.

189 Considera la funzione $y = ax + 6$ e studia al variare di a quando è crescente, decrescente o costante.

$[a > 0; a < 0; a = 0]$

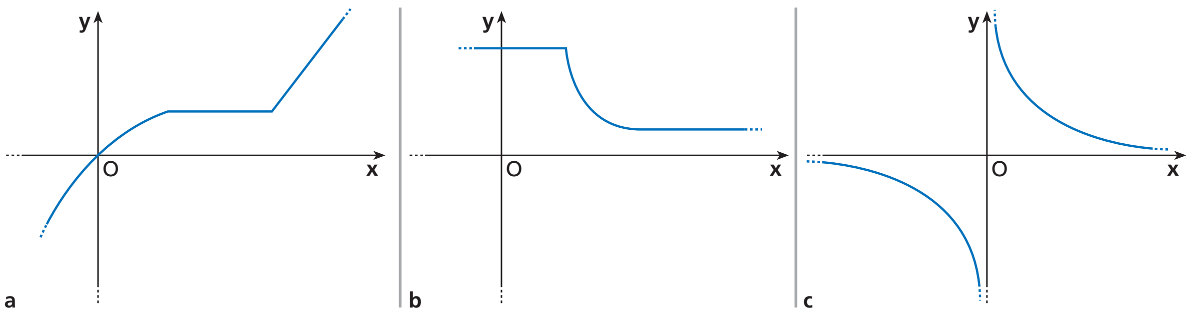
190 Dimostra che la funzione $y = \frac{x-2}{4x}$ è crescente per $x < 0$ e per $x > 0$.

191 Dimostra che la funzione $f(x) = -\sqrt{1+x}$ è una funzione biunivoca verificando che è decrescente e risolvi la disequazione:

$$f(4x) - x \geq f(0).$$

$\left[-\frac{1}{4} \leq x \leq 2 - \sqrt{5}\right]$

192 Indica per ogni funzione se è crescente o decrescente (in senso stretto o in senso lato) in $\mathbb{R}$.



193 **COMPLETA** utilizzando i dati del grafico:

a) il dominio è ……;

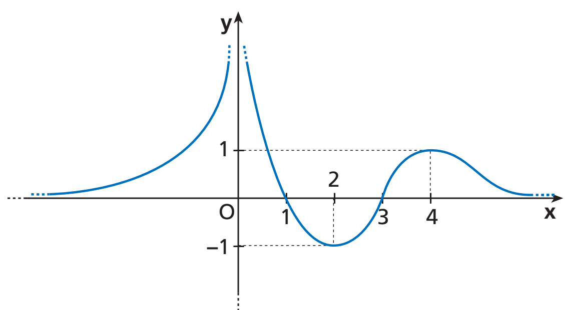
b) il codominio è ……;

c) $f(1) = \ldots$, $f(2) = \ldots\ldots$;

d) $f(\ldots) = 1$, $f(\ldots) = 0$;

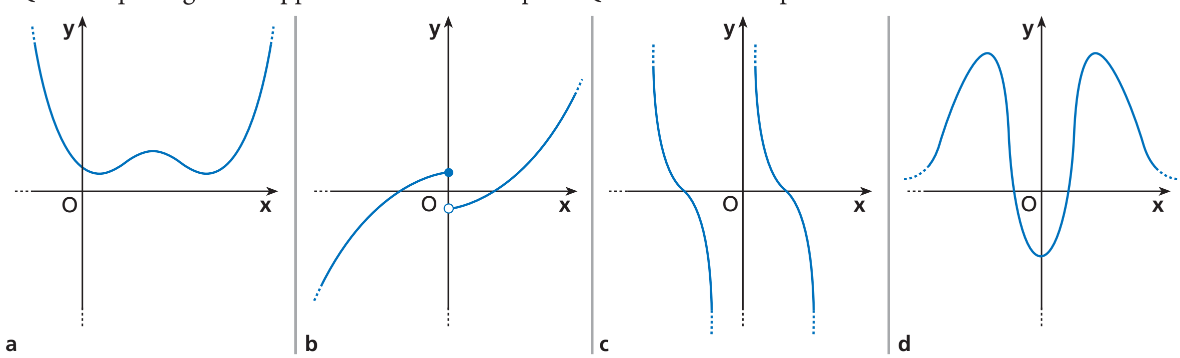
e) la funzione è crescente negli intervalli ………;
è decrescente in ………;

f) $f(x) > 0$ per x ……….



Le funzioni pari, le funzioni dispari

194 Quali di questi grafici rappresentano funzioni pari? Quali funzioni dispari?



Stabilisci se le seguenti funzioni sono pari o dispari.

195 $y = 2|x| - x$

196 $y = -|x| + \frac{x^2}{3}$

197 $y = -x^2 - 9$

198 $y = \frac{|x-5|}{x^3}$

199 $y = \dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{x}$

200 $y = -2x|x| + 1$

201 $y = \dfrac{\sqrt[3]{-x}}{2x^2+3}$

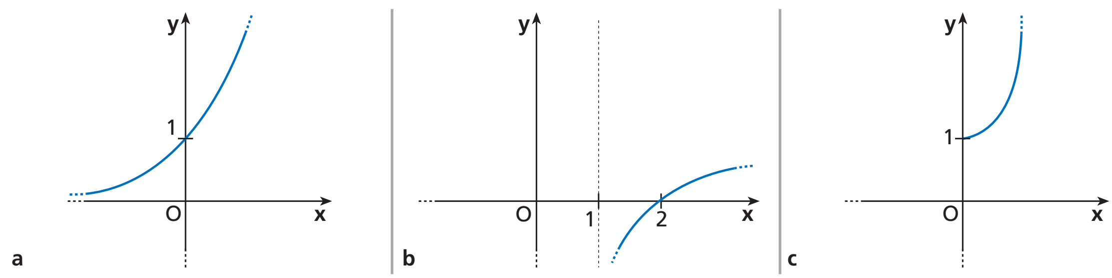
202 $y = x^2 - 2|x| + 6$

203 $y = \dfrac{x^4 - 4x^2}{x^3 - 1}$

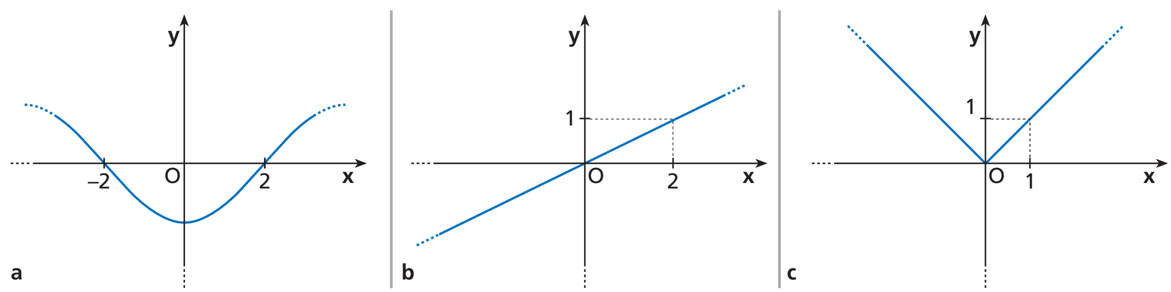
204 $y = \sqrt{-x^2 - 6x} + \sqrt{-x^2 + 6x}$

La funzione inversa

205 Ognuno dei seguenti grafici rappresenta una funzione. Indica il dominio e il codominio. Spiega perché ogni funzione ammette la funzione inversa e traccia il suo grafico.



206 Ogni grafico rappresenta una funzione. Considera opportuni insiemi di partenza e di arrivo in modo che la funzione ammetta la funzione inversa e disegnane il grafico.



207 Data la funzione $f(x) = \dfrac{2x-4}{5}$, trova $f^{-1}(x)$ e calcola $f^{-1}(2)$. $\left[f^{-1}(x) = \dfrac{5x+4}{2};\ f^{-1}(2) = 7\right]$

208 Dimostra che la funzione $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$ è biunivoca. Trova la funzione inversa $f^{-1}(x)$ e traccia i grafici di $f(x)$ e $f^{-1}(x)$. $\left[f^{-1}(x) = 2x - 2\right]$

209 Verifica che la funzione $y = \dfrac{6}{x}$ è uguale alla sua inversa.

210 Considera la funzione $f(x) = \sqrt{x+1}$, dimostra che è invertibile e poi risolvi l'equazione $f^{-1}(x) = f(8)$. $[x = 2]$

211 Data l'uguaglianza $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}$, ricava y in funzione di x. Dimostra che ottieni una funzione invertibile e trova la funzione inversa. $\left[y = \dfrac{2x}{x-2}\right]$

212 Considera le funzioni che rappresentano il perimetro $2p$ e l'area A di un quadrato di lato $2a$. Rappresenta tali funzioni graficamente, dopo averne indicato il dominio e il codominio. Determina, se è possibile, le loro funzioni inverse e rappresentale graficamente.

$\left[D\text{: } a > 0; C = \mathbb{R}^+; (2p)^{-1}(x) = \frac{1}{8}x, A^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} \text{ con } x > 0\right]$

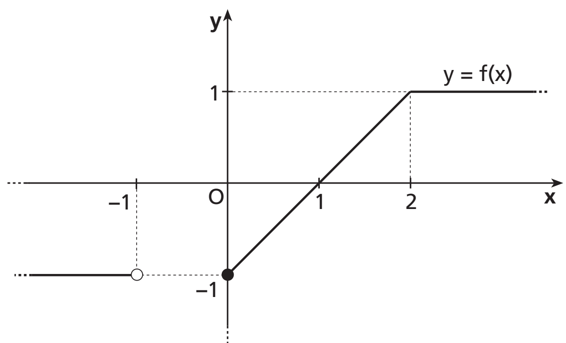
213 Dimostra che la funzione $f(x) = \frac{x^3}{3} - 1$ è invertibile. Determina $f^{-1}(x)$, ricava $f(3)$, $f^{-1}(3)$ e risolvi $f^{-1}(x) = 4$.

$\left[f^{-1}(x) = \sqrt[3]{3x+3}; f(3) = 8; f^{-1}(3) = \sqrt[3]{12}; x = \frac{61}{3}\right]$

214 Considera la funzione f rappresentata dal grafico della figura.

a) Trova il dominio e il codominio di f;
b) indica se f è iniettiva, biiettiva, invertibile, crescente;
c) trova $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ e completa $f(\dots) = -1$, $f(\dots) = 1$, $f(\dots) = 0$;
d) l'espressione analitica della funzione è la seguente?

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 0 \\ x-1 & \text{se } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$



[a) D: $x < -1 \vee x \geq 0$; C: $-1 \leq y \leq 1$; b) non decrescente; c) -1, $\nexists\, f(-1)$, -1, 0, 1; d) no]

215 **VERO O FALSO?**

a) Una funzione crescente è invertibile. V F
b) Una funzione invertibile è biunivoca e viceversa. V F
c) Una funzione invertibile è strettamente crescente o decrescente. V F
d) Una funzione pari non è invertibile. V F
e) Una funzione dispari è invertibile. V F

In un diagramma cartesiano disegna le seguenti funzioni e le loro inverse, dopo aver considerato, se necessario, opportuni insiemi di partenza e di arrivo, tali che le funzioni siano biiettive. Scrivi l'espressione analitica della funzione inversa.

216 $y = -2x + 7$; $y = x$; $y = -x$; $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$. $\left[y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}; y = x; y = -x; x \geq 0, y = \sqrt{2x+10}\right]$

217 $y = \frac{1}{3}x$; $y = -2x$; $y = \frac{x^2}{9}$; $y = -\frac{2}{5}x^2$. $\left[y = 3x; y = -\frac{1}{2}x; x \geq 0, y = 3\sqrt{x}; x \leq 0, y = \sqrt{-\frac{5}{2}x}\right]$

218 Data la funzione $f(x) = 2x^3 - 1$, trova la funzione inversa f^{-1} e dimostra che f e f^{-1} sono funzioni crescenti.

$\left[f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right]$

219 Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ \frac{-x^2}{4} & 0 \leq x \end{cases}$$

Dire se f è una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, e in caso positivo, dire se f è [...] iniettiva o suriettiva. Esiste la funzione inversa di f? In caso affermativo, trovare f^{-1}.

(*Università di Verona, Laurea in Informatica, Corso di Matematica di base*, 2006)

220 **TEST** La funzione $f(x) = \sqrt{|x-1|+2x}$:

A è iniettiva.
B è definita su $\mathbb{R}$.
C è suriettiva su $\mathbb{R}$.
D non è invertibile.

(*Politecnico di Torino, Test di autovalutazione*)

221 **TEST** L'inversa della funzione $f(x) = x^2 - x + 2$:

A non esiste.
B è la funzione $g(x) = \dfrac{1+\sqrt{4x-7}}{2}$.
C è la funzione $x = y^2 - y + 2$.
D è la funzione $h(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{4x-7}}{2}$.

(*Politecnico di Torino, Test di autovalutazione*)

222 **TEST** Il più grande intervallo in cui la funzione $f(x) = \sqrt{|x+1| - |2x-1|}$ è invertibile:

A è $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$.
B è $\mathbb{R}$.
C f non è invertibile su nessun intervallo.
D è contenuto nell'intervallo $[-1; 1]$.

(*Politecnico di Torino, Test di autovalutazione*)

La composizione di due funzioni

COMPLETA

223 Se $f: x \mapsto x - 1$ e $g: x \mapsto \sqrt{|x|} + 2$,

$-3 \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{g} \ldots$

$10 \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{g} \ldots$

224 Se $f: x \mapsto -\dfrac{x}{2}$ e $g: x \mapsto \dfrac{1}{x}$,

$2 \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{g} \ldots$

$-\dfrac{1}{4} \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{g} \ldots$

225 **ESERCIZIO GUIDA**

Date le seguenti funzioni f e g, entrambe da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, determiniamo $f \circ g$ e $g \circ f$:

$$f(x) = \frac{x-1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{2}x - 4.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{\frac{1}{2}x - 4 - 1}{\frac{1}{2}x - 4} = \frac{\frac{1}{2}x - 5}{\frac{1}{2}x - 4} = \frac{x-10}{x-8};$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right) - 4 = \frac{x-1}{2x} - 4 = \frac{x-1-8x}{2x} = \frac{-7x-1}{2x}.$$

Date le seguenti funzioni f e g, determina $f \circ g$ e $g \circ f$, dopo aver individuato gli opportuni domini e codomini che permettono la composizione.

226 $f(x) = 2 - x$; $g(x) = 3x + 2$. $[(f \circ g)(x) = -3x; (g \circ f)(x) = 8 - 3x]$

227 $f(x) = 3x^2 - 2x$; $g(x) = x - 3$. $[(f \circ g)(x) = 3x^2 - 20x + 33; (g \circ f)(x) = 3x^2 - 2x - 3]$

228 $f(x) = x^3 - 1$; $g(x) = 1 - 3x$. $[(f \circ g)(x) = -27x^3 + 27x^2 - 9x; (g \circ f)(x) = -3x^3 + 4]$

229 $f(x) = \frac{1}{2x}$; $\quad g(x) = 3x^2$. $\quad \left[(f \circ g)(x) = \frac{1}{6x^2}; (g \circ f)(x) = \frac{3}{4x^2}\right]$

230 $f(x) = \sqrt{x}$; $\quad g(x) = x^2 - 1$. $\quad \left[(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1}; (g \circ f)(x) = x - 1\right]$

231 Considera le funzioni $f(x) = x^2 + x + 1$ e $g(x) = 2x - 1$. Trova $g(f(x))$. $\quad [g(f(x)) = 2x^2 + 2x + 1]$

232 Assegnate le funzioni $f(x) = x^4$ e $g(x) = x^3$, verifica che $f \circ g = g \circ f \ \forall x \in \mathbb{R}$.

233 Date le funzioni $f(x) = -x + 2$ e $g(x) = 3x - 1$, verifica che $f \circ g \neq g \circ f \ \forall x \in \mathbb{R}$.

234 Considera le funzioni $f(x) = 2x^2$ e $g(x) = \frac{1}{x} + 3$. Determina $f \circ g$ e $g \circ f$.
$\left[(f \circ g)(x) = 2\left(\frac{1}{x} + 3\right)^2; (g \circ f)(x) = \frac{1}{2x^2} + 3\right]$

235 Considera le funzioni $f(x) = |x + 4|$ e $g(x) = 2x - 1$.
Determina la funzione $h(x) = (f \circ g)(x)$ e risolvi la disequazione $h(x) < 7$. $\quad [-5 < x < 2]$

236 Siano f, g, h le funzioni $f(x) = -x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$, $h(x) = \frac{1}{2} - x$. Determina $h \circ (g \circ f)$ e trova l'immagine di -1 tramite $h \circ (g \circ f)$.
$\left[(h \circ (g \circ f))(x) = -\frac{1}{2} - \sqrt{-x^2 + 5}; -\frac{5}{2}\right]$

237 Considera le funzioni $f(x) = x - 1$ e $g(x) = 2x + 3$, calcola f^{-1}, g^{-1}, $f \circ g$, $(f \circ g)^{-1}$ e verifica che $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
$\left[f^{-1}(x) = x + 1; g^{-1}(x) = \frac{x - 3}{2}; (f \circ g)(x) = 2x + 2; (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x - 2}{2}\right]$

238 Assegnate le funzioni $f(x) = x^3 - 3$ e $g(x) = 3x - 1$, trova $f \circ g$, $g \circ f$, $g(f(1))$ e $f(g(1))$ e risolvi l'equazione $g(f(x)) - 3f(x) = g(2x) + 6$.
$[(f \circ g)(x) = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 4; (g \circ f)(x) = 3x^3 - 10; g(f(1)) = -7; f(g(1)) = 5; x = -1]$

239 Date le funzioni $f(x) = 4 - 7x$ e $g(x) = \frac{x - 9}{2}$:

a) trova per quali x si ha $f \circ g = g \circ f$;
b) risolvi l'equazione $f(g(x + 1)) + f(x) = g(f(x)) + g(2x)$. $\quad \left[\text{a) } \nexists\, x \in \mathbb{R}; \text{ b) } x = \frac{43}{8}\right]$

240 Data la funzione $f(x) = \frac{x + a}{bx}$:

a) trova a e b in modo che $f(3) = \frac{1}{3}$ e $f(-1) = 1$;
b) dimostra che è invertibile;
c) trova f^{-1};
d) verifica che $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = x$. $\quad \left[\text{a) } a = -1, b = 2; \text{ c) } y = \frac{1}{1 - 2x}\right]$

241 È assegnata la funzione $f(x) = \frac{2}{x - 1} + 1$:

a) trova il dominio e il codominio di f;
b) dimostra che f è invertibile e trova f^{-1} verificando che $f^{-1} = f$;
c) trova $f(2)$ e le controimmagini di 3 e -6;
d) calcola $(f \circ f)(x)$ e risolvi la disequazione $(f \circ f)(x) + f(2x) > 1$.
$\left[\text{a) } D = \mathbb{R} - \{1\}, C = \mathbb{R} - \{1\}; \text{ c) } 3, 2, \frac{5}{7}; \text{ d) } (f \circ f)(x) = x; x > \frac{1}{2}\right]$

242 Sono date le funzioni: $f: x \mapsto \dfrac{3}{x-5}$, $g: x \mapsto x+2$.

a) Trova le espressioni delle funzioni composte $f \circ g$, $g \circ f$.
b) Determina i loro domini M, N e i loro codomini U, V.
c) Scrivi le espressioni delle funzioni $f(g(|x|))$ e $g(f(-x))$.
d) Risolvi la disequazione $(g \circ f)(x) \geq g(f(-x))$.

$\left[\text{a) } (f\circ g)(x) = \dfrac{3}{x-3}, (g \circ f)(x) = \dfrac{2x-7}{x-5}; \text{ b) } M = \mathbb{R} - \{3\}, N = \mathbb{R} - \{5\}, U = \mathbb{R} - \{0\}, V = \mathbb{R} - \{2\}; \right.$
$\left. \text{c) } f(g(|x|)) = \dfrac{3}{|x|-3}, x \neq \pm 3, g(f(-x)) = \dfrac{2x+7}{x+5}, x \neq -5; \text{ d) } -5 < x \leq 0 \vee x > 5\right]$

243 Date le funzioni $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, $g(x) = x + |x|$,

a) determina il loro dominio A, B e la loro intersezione C;
b) stabilisci per quali $x \in C$ risulta $f(x) \geq g(x)$;
c) trova $f \circ g$ e $g \circ f$ e verifica che $f \circ g = g \circ f$ solo per $x = -2\sqrt{3}$.

$\left[\text{a) } A = [-4; 4], B = \mathbb{R}, C = A; \text{ b) } x \in \left[-4; \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right]; \text{ c) } f(g(x)) = \sqrt{16 - (x+|x|)^2}, g(f(x)) = 2\sqrt{16-x^2}\right]$

244 Let $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x^3 + 1$.

a) Sketch the graph of $g^{-1}(x)$.
b) Evaluate $(f \circ g)(-2)$.
c) Let $h(x) = (g \circ f)(x)$. Solve $h(x) = 0$.

(USA *Southern Illinois University Carbondale,* Final Exam, Fall 2001)

$\left[\text{b) } -\sqrt[3]{7}; \text{ c) } x = -1\right]$

245 Data la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x} - x$, trova il dominio di $(f \circ f)(x)$ senza calcolare la sua espressione algebrica.

$\left[x \leq -\dfrac{4}{3} \vee x = 0 \vee x \geq 4\right]$

246 Date le funzioni $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & \text{se } x \geq 2 \\ x & \text{se } x < 2 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geq 0 \\ x-2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$,

trova $f \circ g$ e $g \circ f$.

$\left[f \circ g: \begin{cases} \sqrt{2x-1} & \text{se } x \geq \dfrac{1}{2} \\ 2x+1 & \text{se } 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ x-2 & \text{se } x < 0 \end{cases}; \; g \circ f: \begin{cases} 2\sqrt{x-2}+1 & \text{se } x \geq 2 \\ 2x+1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ x-2 & \text{se } x < 0 \end{cases}\right]$

3. LE SUCCESSIONI NUMERICHE

▶ Teoria a pag. 89

La rappresentazione di una successione

La rappresentazione per enumerazione
Rappresenta per enumerazione le seguenti successioni.

247 La successione costituita dai multipli di 4.

248 La successione costituita dai quadrati dei numeri dispari.

249 La successione costituita dai reciproci dei numeri pari.

250 La successione costituita dalle potenze di 2 con esponente intero positivo.

251 La successione costituita dai quadrati dei numeri interi negativi.

252 La successione costituita dagli opposti dei cubi dei numeri interi negativi.

La rappresentazione mediante espressione analitica

Scrivi i primi cinque termini delle seguenti successioni.

253 $a_n = 3^n, n \in \mathbb{N}$; $\quad a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$; $\quad a_n = 2n(-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

254 $a_n = \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}$; $\quad a_n = \frac{1}{2n+1}, n \in \mathbb{N}$; $\quad a_n = \frac{n+2}{n+1}, n \in \mathbb{N}$.

255 $a_n = 2n - 4, n \in \mathbb{N}$; $\quad a_n = \frac{1}{2}n + 2, n \in \mathbb{N}$; $\quad a_n = \frac{n^2}{2} + 1, n \in \mathbb{N}$.

256 $a_n = \frac{2}{n+2}, n \in \mathbb{N}$; $\quad a_n = \frac{(-2)^n}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}$; $\quad a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}$.

257 $a_n = \frac{n-1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$; $\quad a_n = \sqrt{2+n} - 1, n \in \mathbb{N}$; $\quad a_n = \frac{n^2}{n+1}, n \in \mathbb{N}$.

258 $a_n = \frac{n(n-1)}{n+1}, n \in \mathbb{N}$; $\quad a_n = \frac{1}{n(n+1)}, n \in \mathbb{N} - \{0\}$; $\quad a_n = (-1)^n\sqrt{1+n^2}, n \in \mathbb{N}$.

259 **ESERCIZIO GUIDA**

Rappresentiamo mediante una possibile espressione analitica la seguente successione:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{10}{5}, \frac{17}{6}, \frac{26}{7}, \ldots$$

Possiamo notare che in ogni frazione il numeratore si ottiene aggiungendo 1 al quadrato di ogni numero naturale, cioè $n^2 + 1$, infatti:

$$1 = 0^2 + 1, \quad 2 = 1^2 + 1, \quad 5 = 2^2 + 1, \quad 10 = 3^2 + 1, \quad 17 = 4^2 + 1, \quad 26 = 5^2 + 1, \quad \ldots$$

I denominatori invece rappresentano tutti i numeri naturali a partire da 2, cioè $n + 2$.

Possiamo allora scrivere il termine generico della successione:

$$a_n = \frac{n^2+1}{n+2}, n \in \mathbb{N}.$$

Rappresenta mediante espressione analitica le seguenti successioni numeriche.

260 $0, \; 3, \; 6, \; 9, \; 12, \; 15, \; 18, \; 21, \; 24, \; 27, \; 30, \; \ldots$ $\quad [a_n = 3n, n \in \mathbb{N}]$

261 $-1, \; 1, \; 3, \; 5, \; 7, \; 9, \; 11, \; 13, \; 15, \; 17, \; 19, \; \ldots$ $\quad [a_n = 2n - 1, n \in \mathbb{N}]$

262 $1, \; \frac{1}{2}, \; \frac{1}{3}, \; \frac{1}{4}, \; \frac{1}{5}, \; \frac{1}{6}, \; \frac{1}{7}, \; \frac{1}{8}, \; \frac{1}{9}, \; \frac{1}{10}, \; \frac{1}{11}, \; \ldots$ $\quad \left[a_n = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right]$

263 $1, \; -3, \; 9, \; -27, \; 81, \; -243, \; \ldots$ $\quad [a_n = (-3)^n, n \in \mathbb{N}]$

264 $2, \ \frac{3}{2}, \ \frac{4}{3}, \ \frac{5}{4}, \ \frac{6}{5}, \ \frac{7}{6}, \ \dots$ $\left[a_n = \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right]$

265 $\frac{1}{2}, \ \frac{4}{3}, \ \frac{9}{4}, \ \frac{16}{5}, \ \frac{25}{6}, \ \frac{36}{7}, \ \dots$ $\left[a_n = \frac{n^2}{n+1}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right]$

266 $1, \ \sqrt{3}, \ 3, \ 3\sqrt{3}, \ 9, \ 9\sqrt{3}, \ \dots$ $[a_n = \sqrt{3^n}, n \in \mathbb{N}]$

267 $3, \ \frac{4}{2}, \ \frac{5}{3}, \ \frac{6}{4}, \ \frac{7}{5}, \ \frac{8}{6}, \ \dots$ $\left[a_n = \frac{n+3}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right]$

268 $2, \ \sqrt{3}, \ \sqrt[3]{4}, \ \sqrt[4]{5}, \ \sqrt[5]{6}, \ \sqrt[6]{7}, \ \dots$ $[a_n = \sqrt[n]{n+1}, n \in \mathbb{N} - \{0\}]$

269 $2, \ 5, \ 8, \ 11, \ 14, \ 17, \ \dots$ $[a_n = 3n - 1, n \in \mathbb{N} - \{0\}]$

270 $1, \ 6, \ 11, \ 16, \ 21, \ 26, \ \dots$ $[a_n = 5n + 1, n \in \mathbb{N}]$

271 $0, \ -2, \ 4, \ -6, \ 8, \ -10, \ \dots$ $[a_n = 2n(-1)^n, n \in \mathbb{N}]$

272 $\frac{2}{3}, \ 2, \ 6, \ 18, \ 54, \ 162, \ \dots$ $[a_n = 2 \cdot 3^{n-1}, n \in \mathbb{N}]$

273 $\frac{1}{2}, \ \frac{2}{9}, \ \frac{3}{28}, \ \frac{4}{65}, \ \frac{5}{126}, \ \dots$ $\left[a_n = \frac{n}{n^3+1}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right]$

274 $-\frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \ -\frac{1}{6}, \ \frac{1}{8}, \ -\frac{1}{10}, \ \frac{1}{12}, \ \dots$ $\left[a_n = \frac{(-1)^n}{2n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right]$

275 $\sqrt{2}, \ 1+\sqrt{3}, \ 4, \ 3+\sqrt{5}, \ 4+\sqrt{6}, \ 5+\sqrt{7}, \ 6+\sqrt{8}, \ 10, \ \dots$ $[a_n = n + \sqrt{n+2}, n \in \mathbb{N}]$

Data la successione il cui termine generale è a_n, scrivi in funzione di n i termini indicati.

276 $a_n = \frac{2n-1}{1+n}$ con $n \in \mathbb{N}$; $\quad a_{n+1}, a_{n-2}$. $\left[a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+2}, a_{n-2} = \frac{2n-5}{n-1}\right]$

277 $a_n = \frac{3(n+1)}{n}$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$; $\quad a_{n-1}, a_{n+1}$. $\left[a_{n-1} = \frac{3n}{n-1}, a_{n+1} = \frac{3(n+2)}{n+1}\right]$

La rappresentazione per ricorsione

Scrivi i primi cinque termini delle seguenti successioni definite ricorsivamente.

278 $\begin{cases} a_0 = -1 \\ a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{3} \end{cases}$

279 $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} + a_n = 6 \end{cases}$

280 $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 6 \end{cases}$

281 $\begin{cases} a_0 = 5, a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \end{cases}$

282 $\begin{cases} a_0 = 3 \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{1}{2} \end{cases}$

283 $\begin{cases} a_0 = -1 \\ a_{n+1} - 3a_n = 1 \end{cases}$

284 $\begin{cases} a_0 = -2 \\ 2a_n - a_{n+1} = 2 \end{cases}$

285 $\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} - a_n = 4 \end{cases}$

Scrivi in forma analitica le seguenti successioni.

286 $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} \end{cases}$ $[a_n = 2^n, n \in \mathbb{N}]$

287 $\begin{cases} a_0 = -2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n \end{cases}$ $\left[a_n = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n, n \in \mathbb{N}\right]$

288 $\begin{cases} a_0 = -3 \\ a_{n-1} - a_n = 2 \end{cases}$ $[a_n = -3 - 2n, n \in \mathbb{N}]$

289 $\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_{n+1} - 6 = a_n \end{cases}$ $[a_n = 6n + 4, n \in \mathbb{N}]$

Il principio di induzione

IN PRATICA
▶ Videolezione 8

290 **ESERCIZIO GUIDA**

Dimostriamo, applicando il principio di induzione, che:

$$\mathbf{1 + 6 + 11 + 16 + \ldots + (5n - 4) = \frac{n}{2}(5n - 3),\ n \in \mathbb{N} - \{0\}.}$$

Per $n = 1$ la proposizione è vera, infatti per $n = 1$ il primo membro è 1 e il secondo membro è $\frac{1}{2}(5 - 3) = 1$.

Supponiamo che la proposizione sia vera per n, dimostriamo allora che è vera anche per $n + 1$.
Infatti il primo membro per $n + 1$ diventa:

$$\underline{1 + 6 + 11 + 16 + \ldots + (5n - 4)} + [5(n + 1) - 4] = \underline{\frac{n}{2}(5n - 3)} + [5n + 5 - 4] =$$

$$= \frac{5}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 5n + 1 = \frac{5n^2 - 3n + 10n + 2}{2} = \frac{5n^2 + 7n + 2}{2}.$$

Il secondo membro per $n + 1$ è:

$$\frac{n + 1}{2}[5(n + 1) - 3] = \frac{n + 1}{2}(5n + 2) = \frac{5n^2 + 7n + 2}{2}.$$

La proposizione è quindi vera per $n + 1$.

Poiché la proposizione è vera per $n = 1$ e, supposta vera per n, è vera anche per $n + 1$, allora, per il principio di induzione, la proposizione è vera per ogni $n \geq 1$.

Dimostra, mediante il principio di induzione, che sono vere le seguenti uguaglianze per $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

291 $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

292 $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$

293 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$

294 $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3}n(2n - 1)(2n + 1)$

295 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$

296 $2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3 = 2n^2(n + 1)^2$

297 $5 + 10 + 15 + \ldots + 5n = \frac{5}{2}n(n + 1)$

298 $3 + 6 + 9 + \ldots + 3n = \frac{3}{2}n(n + 1)$

299 $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + (3n - 1) = \frac{n}{2}(3n + 1)$

300 $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \ldots + n(2n + 1) = \frac{1}{6}n(n + 1)(4n + 5)$

301 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1) \cdot n = \frac{1}{3} n (n^2 - 1)$

302 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

303 $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

304 $1 + 4 + 16 + 64 + \ldots + 4^{n-1} = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

305 $\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \ldots + \frac{1}{7^n} = \frac{7^n - 1}{6 \cdot 7^n}$

306 $5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 5}{4}$

307 $\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1$

308 $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2(2^n - 1)$

309 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$

310 $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, $x \neq 1$.

Le sommatorie

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

311 $\sum_{k=1}^{6} (2k - 3)$, $\sum_{k=1}^{4} k^2$, $\sum_{k=1}^{3} (k+1)^3$.

312 $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i(i+3)}$, $\sum_{i=3}^{7} (3i - 6)^2$, $\sum_{i=-3}^{2} (2 - i)^i$.

313 Scrivi per esteso: $\sum_{i=1}^{n} (i^3 + 1)$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$, $\sum_{k=1}^{n} k(3k+1)$, $\sum_{i,k=1}^{n} ik$.

Esprimi le seguenti somme con il simbolo di sommatoria.

314 a) $\frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \frac{7}{6} + \ldots + \frac{41}{40}$; b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{94} - \frac{1}{95}$.

315 a) $2 + \frac{4}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{8}{x^6} + \ldots + \frac{88}{x^{86}}$; b) $3^1 + 4^2 + 5^3 + 6^4 + \ldots + 90^{88}$.

Le sommatorie e l'induzione

Dimostra che per $n \geq 1$:

316 $\sum_{i=1}^{n} i(2i+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$.

317 $\sum_{k=1}^{n} 3^k = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 3)$.

318 $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right)$.

319 $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

320 $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{5^n - 1}{4 \cdot 5^n}$.

321 **ESERCIZIO GUIDA**

Dimostriamo che $5^{2n} - 2^n$ è multiplo di 23, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Per $n = 1$ la proposizione è vera, infatti $5^{2n} - 2^n$ in questo caso diventa $25 - 2 = 23$.
Supponiamo che essa sia vera per n, cioè supponiamo che esista $k \in \mathbb{N}$ tale che:

$$5^{2n} - 2^n = k \cdot 23, \qquad \text{ossia} \qquad 5^{2n} = 23 \cdot k + 2^n;$$

dimostriamo allora che la proposizione è vera anche per $n + 1$. Infatti:

$$\begin{aligned} 5^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 25 \cdot 5^{2n} - 2 \cdot 2^n = 25 \cdot (23 \cdot k + 2^n) - 2 \cdot 2^n = 25 \cdot 23k + 25 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n = \\ &= 2^n \cdot (25 - 2) + 23 \cdot k \cdot 25 = 23 \cdot 2^n + 23 \cdot k \cdot 25 = 23 \cdot (2^n + 25 \cdot k). \end{aligned}$$

Ma $m = 2^n + 25 \cdot k$ è un numero naturale, per cui possiamo dire che $5^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ è un multiplo di 23.
Allora, per il principio di induzione, la proposizione è vera per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Applicando il principio di induzione dimostra le seguenti proprietà.

322 $4^{2n} - 3^n$ è multiplo di 13 per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

323 $9^n - 1$ è divisibile per 8 per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

324 $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ è divisibile per 9 per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

325 $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ è multiplo di 7 per ogni $n \in \mathbb{N}$.

326 $2n \leq 2^n, n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

327 $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

328 Dimostra che $n^2 > 2n + 1$ per ogni $n > 2$.

329 Utilizzando anche il risultato dell'esercizio precedente dimostra che $2^n > n^2$ per ogni $n > 4$.

330 Dimostra che $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x > -1$.

Le successioni monotòne

IN PRATICA
▶ Videolezione 9

Per ogni successione scrivi i primi dieci termini, rappresentali su una retta orientata e stabilisci se si tratta di una successione crescente, decrescente o costante, oppure crescente in senso lato o decrescente in senso lato.

331 $a_n = 2n;$ $\quad a_n = -2n;$ $\quad a_n = 2n - 1.$

332 $a_n = 2n + 1;$ $\quad a_n = 1 - 2n;$ $\quad a_n = (+1)^n.$

333 $a_n = \frac{2}{3n}, n > 0;$ $\quad a_n = -\frac{1}{n}, n > 0;$ $\quad a_n = (-1)^{2n}.$

334 **ESERCIZIO GUIDA**

Dimostriamo che la successione il cui termine generale è $a_n = \frac{2n - 3}{n + 1}, n \in \mathbb{N}$, è crescente.

Dobbiamo dimostrare che

$$a_n < a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Risolviamo la disequazione

$$\frac{2n-3}{n+1} < \frac{2(n+1)-3}{(n+1)+1} \quad \to \quad \frac{2n-3}{n+1} < \frac{2n-1}{n+2} \quad \to$$

$$\to \quad \frac{(2n-3)(n+2)-(2n-1)(n+1)}{(n+1)(n+2)} < 0 \quad \to$$

$$\to \quad \frac{2n^2+4n-3n-6-2n^2-2n+n+1}{(n+1)(n+2)} < 0 \quad \to \quad \frac{-5}{(n+1)(n+2)} < 0.$$

La disequazione è verificata $\forall n \in \mathbb{N}$, quindi la successione è crescente.

335 Dimostra che la successione il cui termine generale è $a_n = \dfrac{2n-1}{n}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, è crescente.

336 Dimostra che la successione con il termine $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, è decrescente.

337 Dimostra che la successione con il termine $a_n = n - \dfrac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, è crescente.

338 Dimostra che la successione con il termine $a_n = 3n - 2n^2$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, è decrescente.

Fra le seguenti successioni indica quali sono monotòne, specificando di quale tipo sono, e quali non sono monotòne.

339 $a_n = \dfrac{n-1}{n}$, $n > 0$; $\quad a_n = \dfrac{2n+1}{n}$, $n > 0$.

340 $a_n = \dfrac{1-n}{2n}$, $n > 0$; $\quad a_n = n^{-2}$, $n > 0$.

341 $a_n = 2^n$; $\quad a_n = (-1)^n \cdot 2^n$; $\quad a_n = 2^n + (-1)^n$.

342 $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; $\quad a_n = (-1)^n \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; $\quad a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + (-1)^n$.

4. LE PROGRESSIONI ARITMETICHE

▶ Teoria a pag. 94

Le progressioni aritmetiche

IN PRATICA ▶ Videolezione 10

Determina se le seguenti successioni numeriche sono o non sono progressioni aritmetiche e, nel caso lo siano, determina la ragione e indica se si tratta di una progressione crescente, decrescente o costante.

343 11, 14, 17, 20, 23, 26, … [progressione crescente, $d = 3$]

344 $3, \ \dfrac{5}{2}, \ 2, \ \dfrac{3}{2}, \ 1, \ \dfrac{1}{2}, \ \ldots$ $\left[\text{progressione decrescente, } d = -\dfrac{1}{2}\right]$

345 4, 7, 10, 14, 18, 22, … [non è una progressione]

346 $\dfrac{1}{2}, \ \dfrac{3}{4}, \ 1, \ \dfrac{5}{4}, \ \dfrac{3}{2}, \ \dfrac{7}{4}, \ \ldots$ $\left[\text{progressione crescente, } d = \dfrac{1}{4}\right]$

347 6, 6, 6, 6, 6, 6, … [progressione costante, $d = 0$]

348 20, 18, 16, 14, 12, 10, … [progressione decrescente, $d = -2$]

Il calcolo dei termini di una progressione aritmetica

349 ESERCIZIO GUIDA

a) Calcoliamo il sesto termine a_6 di una progressione aritmetica di ragione $d = 4$ il cui primo termine è $a_1 = 5$.
b) Calcoliamo la ragione d di una progressione aritmetica il cui primo termine è $a_1 = 32$ e il cui sesto termine è $a_6 = 42$.

a) Utilizziamo la formula:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d.$$

Essendo $n = 6$, $a_1 = 5$ e $d = 4$, otteniamo:

$$a_6 = 5 + (6 - 1) \cdot 4 = 25.$$

b) Sostituendo in $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$, abbiamo:

$$42 = 32 + (6 - 1) \cdot d \rightarrow 10 = 5 \cdot d \rightarrow d = 2.$$

La progressione è la seguente:

32, 34, 36, 38, 40, 42, …

Date le seguenti informazioni relative a una progressione aritmetica, determina ciò che è richiesto.

350 $a_1 = 3$ e $d = 7$, calcola a_8. [52]

351 $a_1 = \frac{15}{2}$ e $d = -\frac{3}{2}$, calcola a_5. $\left[\frac{3}{2}\right]$

352 $a_4 = 5$ e $d = 3$, calcola a_1. [-4]

353 $a_4 = 50$ e $a_1 = 32$, calcola d. [6]

354 $a_6 = 69$ e $d = 3$, calcola a_1. [54]

355 $a_5 = -8$ e $a_1 = 28$, calcola d. [-9]

356 $a_4 = -5$ e $d = -3$, calcola a_1. [4]

357 $a_8 = \frac{37}{6}$ e $a_1 = \frac{1}{3}$, calcola d. $\left[\frac{5}{6}\right]$

358 $a_9 = \frac{31}{3}$ e $d = \frac{1}{6}$, calcola a_1. [9]

359 $a_1 = 4$, $a_n = 39$ e $d = 5$, calcola n. [8]

360 $a_n = 59$, $a_1 = 3$ e $d = 7$, calcola n. [9]

361 $a_1 = -10$, $a_n = -43$ e $d = -11$, calcola n. [4]

La relazione fra due termini di una progressione aritmetica

362 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo il dodicesimo termine di una progressione aritmetica di ragione 4, sapendo che il sesto termine è 43.

I dati a disposizione sono: $d = 4$, $a_6 = 43$, $r = 12$.
Per eseguire questo calcolo utilizziamo la formula:

$$a_r = a_s + (r - s) \cdot d.$$

Essendo $d = 4$, $s = 6$, $r = 12$ e $a_6 = 43$, otteniamo:

$$a_{12} = 43 + (12 - 6) \cdot 4 = 67.$$

Date le seguenti informazioni relative a una progressione aritmetica, determina ciò che è richiesto.

363 $a_7 = 34$ e $d = 5$, calcola a_{13}. [64]

364 $a_6 = 2$ e $a_{10} = \frac{14}{3}$, calcola d. $\left[\frac{2}{3}\right]$

365 $a_4 + a_{14} = 40$ e $d = 3$, calcola a_4 e a_{14}. [5, 35]

366 $a_7 = 39$ e $d = 7$, calcola a_3. [11]

367 $a_4 = \frac{15}{2}$ e $d = \frac{3}{2}$, calcola a_{10}. $\left[\frac{33}{2}\right]$

368 $a_5 = 3\sqrt{7}$ e $d = 5\sqrt{7}$, calcola a_8. [$18\sqrt{7}$]

L'inserimento di medi aritmetici fra due numeri dati

369 ESERCIZIO GUIDA

Inseriamo tre numeri fra 11 e 23 in modo da ottenere i primi termini di una progressione aritmetica.

Determiniamo la ragione d applicando la formula $d = \frac{b-a}{k+1}$.

Sostituiamo i nostri dati: $k = 3, a = 11, b = 23$.

Otteniamo: $d = \frac{23-11}{3+1} = \frac{12}{4} = 3$. A partire da $a_1 = 11$ e $d = 3$ calcoliamo i termini richiesti.

$$a_2 = 11 + 3 = 14, \quad a_3 = 14 + 3 = 17, \quad a_4 = 17 + 3 = 20.$$

La progressione aritmetica cercata è: 11, 14, 17, 20, 23, …

370 Inserisci fra 18 e 42 cinque numeri in modo da ottenere i primi sette termini di una progressione aritmetica. [22, 26, 30, 34, 38]

371 Inserisci fra -37 e -13 sette numeri in modo da ottenere i primi nove termini di una progressione aritmetica. $[-34, -31, -28, -25, -22, -19, -16]$

372 Inserisci fra $\frac{7}{2}$ e $\frac{1}{2}$ cinque numeri in modo da ottenere i primi sette termini di una progressione aritmetica. $\left[3, \frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, 1\right]$

373 Trova quanti termini sono compresi tra -2 e 12 nella progressione aritmetica di ragione $\frac{1}{3}$. [41]

La somma dei termini consecutivi di una progressione aritmetica

374 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo la somma dei primi sei multipli di 5 diversi da 0.

I numeri di cui vogliamo conoscere la somma sono i primi sei termini della progressione aritmetica di primo termine 5 e ragione 5: 5, 10, 15, 20, 25, 30.

Possiamo applicare la formula $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$.

Sostituendo i nostri dati, $n = 6$, $a_1 = 5$, $a_6 = 30$, otteniamo: $S_6 = 6 \cdot \frac{5+30}{2} = 105$.

375 Calcola la somma dei primi dieci termini di una progressione aritmetica di ragione $d = 3$, il cui primo estremo è $a_1 = 5$. [185]

376 Calcola la somma dei primi otto multipli di 4 diversi da 0. [144]

377 Calcola la somma dei primi cento numeri naturali diversi da 0. Quanto vale la somma dei primi n numeri naturali diversi da 0? $\left[5050; \frac{n \cdot (n+1)}{2}\right]$

378 Calcola la somma dei primi dieci numeri pari diversi da 0. Quanto vale la somma dei primi n numeri pari diversi da 0? $[110; n \cdot (n+1)]$

379 Calcola la somma dei primi dieci numeri dispari. Trova la somma dei primi n numeri dispari. $[100; n^2]$

Date le seguenti informazioni relative a una progressione aritmetica, determina ciò che è richiesto.

380 $a_6 = 40$ e $d = -\frac{1}{2}$, calcola S_6. $\left[\frac{495}{2}\right]$

381 $a_1 = \frac{1}{2}$ e $a_6 = 9$, calcola S_6. $\left[\frac{57}{2}\right]$

382 $a_7 = 42$ e $S_7 = \frac{149}{2}$, calcola a_1. $\left[-\frac{145}{7}\right]$

383 $a_1 = 9$ e $S_8 = 200$, calcola d. $\left[\frac{32}{7}\right]$

384 $a_3 = -8$ e $a_8 = 27$, calcola S_8. $[20]$

385 $a_2 = -2$ e $a_{10} = 18$, calcola S_{10}. $\left[\frac{135}{2}\right]$

386 $a_3 = 1$ e $a_{12} = 4$, calcola S_{15}. $[40]$

387 $a_5 = \frac{1}{2}$ e $a_{13} = 10$, calcola S_{20}. $\left[\frac{1125}{8}\right]$

ESERCIZI VARI Le progressioni aritmetiche

TEST

388 In una progressione aritmetica $a_{16} = 23$ e $a_4 = 5$, allora la ragione d e a_{10} valgono rispettivamente:

A $\frac{7}{3}; 19$.
B $\frac{3}{2}; -4$.
C $\frac{2}{3}; 9$.
D $\frac{3}{2}; 14$.
E $-\frac{7}{5}; -\frac{17}{5}$.

389 In un moto rettilineo uniformemente accelerato le velocità calcolate per $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$ secondi sono in progressione aritmetica, la cui ragione vale:

A v_0. B s_0. C t. D a. E v.

390 In una progressione aritmetica di ragione 5 il primo termine è 2. Quanto vale il settimo termine?

A 10 B 70 C 32 D 37 E 17

391 Il primo termine di una progressione aritmetica è 2, il sesto è 17. Quanto vale la ragione della progressione?

A 3 B $\frac{5}{2}$ C 15 D $\frac{1}{3}$ E $\frac{7}{2}$

392 a, b, c, d, e sono cinque numeri in progressione aritmetica. Si sa che $b = 5{,}5$ e $e = 10$. Quanto vale a?

A 0,5 B 3 C 4 D 4,5 E 5

(*Kangourou Italia, livello student,* 2006)

393 Siano $a_0, a_1, a_2, \ldots$ numeri interi tali che $a_0 = 19$, $a_1 = 25$ e per ogni $n \geq 0$ valga $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. Qual è il più piccolo $i > 0$ per cui a_i è multiplo di 19?

A 19 B 25 C 38 D 44 E 50

(*Olimpiadi di Matematica, Gara di 2° livello,* 2008)

Date le seguenti informazioni relative a una progressione aritmetica, determina ciò che è richiesto.

394 $a_1 = 39$ e $d = -5$, calcola a_7. $[9]$

395 $a_{40} = 500$ e $d = 0$, calcola a_1. $[500]$

396 $a_6 = 12\sqrt{3}$ e $a_1 = 2\sqrt{3}$, calcola d. $[2\sqrt{3}]$

397 $a_1 = 4\sqrt{2}$, $a_n = 53\sqrt{2}$, $d = 7\sqrt{2}$, calcola n. $[8]$

398 $a_1 = -2$ e $d = 3$, calcola S_8. $[68]$

399 $a_1 = -8$, $a_n = 28$ e $S_n = 100$, trova n. $[10]$

400 La somma dei primi n termini di una progressione aritmetica è $77\sqrt{3}$. Il primo termine vale $2\sqrt{3}$, mentre il termine n-esimo vale $20\sqrt{3}$. Quanto valgono la ragione e n? $[3\sqrt{3}; 7]$

401 Calcola il numero dei termini e la ragione di una progressione aritmetica di cui si sa che il primo termine vale 1, il secondo estremo vale 19 e la somma di tutti i termini è 70. [7; 3]

402 Le età di 5 fratelli sono in progressione aritmetica. Il minore ha 7 anni e il maggiore 19. Quanti anni ha il fratello di mezzo? E gli altri due? [13; 10; 16]

403 In una progressione aritmetica i primi n termini sono tali che i due estremi sono opposti. Determina la somma S_n. [0]

404 Gli estremi dei primi mille termini di una progressione aritmetica sono 3 e 21 524. Quanto vale la somma del terzo termine con il novecentonovantottesimo? [21 527]

405 Calcola le misure dei lati di un triangolo rettangolo, sapendo che appartengono a una progressione aritmetica la cui ragione è 6. [18; 24; 30]

406 Un triangolo ha gli angoli in progressione aritmetica, e uno di essi misura 100°; calcola la misura degli altri angoli. [20°; 60°]

407 Calcola le misure dei lati di un triangolo rettangolo di perimetro 96 cm, sapendo che sono in progressione aritmetica. [24 cm; 32 cm; 40 cm]

408 Determina l'ultimo termine di una progressione aritmetica di otto termini il cui primo termine è -6, sapendo che la somma degli otto termini è 120. [36]

409 In una progressione aritmetica $a_1 = -2$ e la somma dei primi sette termini è 49. Trova la ragione. [3]

410 Per quali valori di a i tre termini $2a - 3$, $a + 1$, $3a + 7$ sono in progressione aritmetica? $\left[-\frac{2}{3}\right]$

411 Determina tre numeri in progressione aritmetica tali che il rapporto tra il terzo e il primo sia 5 e che il terzo superi di 2 la somma dei primi due. (Suggerimento. Indica con x il termine medio e con y la ragione.) [2; 6; 10]

412 Trova i lati di un triangolo rettangolo di area uguale a 216, sapendo che sono in progressione aritmetica. [18; 24; 30]

413 La somma di quattro numeri in progressione aritmetica è 36. Calcola i quattro numeri, sapendo che il maggiore supera di 12 il minore. [3; 7; 11; 15]

414 In una progressione aritmetica $a_1 = -2$ e $a_4 = 0$, calcola la somma dei primi dieci termini. [10]

415 In una progressione aritmetica di ragione -2, il primo termine è $\frac{1}{4}$ e l'ultimo è $-\frac{191}{4}$. Quanti sono i termini? Quanto vale la somma di tutti i termini? E la somma dei primi cinque? $\left[25; -\frac{2375}{4}; -\frac{75}{4}\right]$

416 Trova tre numeri in progressione aritmetica, sapendo che la loro somma è 18 e che la somma dei loro quadrati è 116. [4; 6; 8]

417 In una progressione aritmetica di n numeri si conosce $a_3 = 7$, $a_9 = 25$ e l'ultimo termine è 43. Trova S_n. [330]

418 Scrivi una progressione aritmetica in cui il quinto termine è 19 e il tredicesimo è 51. [3, 7, 11, 15, ...]

419 In an arithmetic sequence t_1, t_2, t_3, …, t_{47}, the sum of the odd numbered terms is 1272. What is the sum of all 47 terms in the sequence?
(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge, COMC*, 1998)
[2491]

420 In una progressione aritmetica crescente i primi 5 termini sono tali che gli estremi sono uno il reciproco dell'altro e S_5 vale $\frac{25}{3}$. Determina la progressione. $\left[\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \ldots\right]$

421 Trova quale posto occupa il termine 131 nella progressione 5, 11, 17, 23, … e poi calcola la somma dei termini fino al 131. [22°; 1496]

422 La somma dei primi n termini di una progressione aritmetica è 18. Il primo termine vale -1 e la ragione vale $\frac{3}{4}$. Calcola il numero dei termini della progressione e il valore dell'ultimo termine. [9; 5]

423 I lati di un triangolo rettangolo sono in progressione aritmetica. Sapendo che il cateto minore è 15, trova gli altri lati del triangolo. [20; 25]

424 In un trapezio isoscele la base minore, il lato obliquo e la base maggiore sono in progressione aritmetica, l'altezza misura $12\sqrt{3}$ e la base minore è $\frac{1}{3}$ della maggiore. Trova il perimetro. [96]

425 Calcola i lati di un triangolo rettangolo di perimetro uguale a 84 con i lati in progressione aritmetica.
[21; 28; 35]

5. LE PROGRESSIONI GEOMETRICHE

Teoria a pag. 98

IN PRATICA
Videolezione 11

Determina se le seguenti successioni sono o non sono progressioni geometriche e, nel caso lo siano, determina la ragione e indica se si tratta di una progressione crescente, decrescente o costante.

426 $-2, \quad -6, \quad -18, \quad -54, \quad -162, \ldots$ [progressione decrescente, $q = 3$]

427 $4, \quad 4, \quad 4, \quad 4, \quad 4, \quad 4, \ldots$ [progressione costante, $q = 1$]

428 $4, \quad 6, \quad 9, \quad \frac{27}{2}, \quad \frac{81}{4}, \ldots$ $\left[\text{progressione crescente, } q = \frac{3}{2}\right]$

429 $4, \quad 16, \quad 64, \quad 320, \quad 1280, \quad 5120, \ldots$ [non è una progressione]

430 $9, \quad 3, \quad 1, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{9}, \ldots$ $\left[\text{progressione decrescente, } q = \frac{1}{3}\right]$

431 $\frac{2}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{9}{32}, \quad \frac{27}{128}, \ldots$ $\left[\text{progressione decrescente, } q = \frac{3}{4}\right]$

Il calcolo dei termini di una progressione geometrica

432 ESERCIZIO GUIDA

a) Calcoliamo il sesto termine, a_6, di una progressione geometrica di ragione $q = 2$ il cui primo termine è $a_1 = 5$.
b) Calcoliamo la ragione di una progressione geometrica di 6 termini i cui estremi sono, nell'ordine, 5 e 160.
c) Calcoliamo il numero n dei primi termini di una progressione geometrica di ragione 6 avente per estremi 5 e 38 880.

a) Per calcolare il sesto termine utilizziamo la formula generale $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.
Essendo $n = 6$, $a_1 = 5$ e $q = 2$, otteniamo: $a_6 = 5 \cdot 2^{6-1} = 5 \cdot 32 = 160$.
La progressione è 5, 10, 20, 40, 80, 160, …

b) Per risolvere il problema utilizziamo la relazione $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.
Sostituiamo nella formula i valori del problema: $n = 6$, $a_1 = 5$ e $a_6 = 160$, e otteniamo:

$$160 = 5 \cdot q^5 \quad \to \quad q^5 = 32 \ \to \ q = 2.$$

La progressione è: 5, 10, 20, 40, 80, 160, …

c) I dati del problema sono: $q = 6$, $a_1 = 5$, $a_n = 38\,880$. Calcoliamo n sostituendo i dati nella formula $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$:

$$38\,880 = 5 \cdot 6^{n-1} \quad \to \quad 7776 = 6^{n-1} \quad \to \quad 6^5 = 6^{n-1} \quad \to \quad n = 6.$$

Date le seguenti informazioni relative a una progressione geometrica, determina ciò che è richiesto.

433 $a_1 = -6$ e $q = -\frac{1}{4}$, calcola a_5. $\left[-\frac{3}{128}\right]$

434 $a_1 = 256$ e $q = \frac{1}{2}$, calcola a_8. [2]

435 $a_1 = 32$ e $q = 1$, calcola a_{15}. [32]

436 $a_5 = 1701$ e $q = 3$, calcola a_1. [21]

437 $a_5 = -8$ e $a_1 = -\frac{1}{2}$, calcola q. [2 oppure − 2]

438 $a_1 = 16$, $a_n = 2$ e $q = \frac{1}{2}$, calcola n. [4]

439 $a_4 = 5$ e $q = -5$, calcola a_1. $\left[-\frac{1}{25}\right]$

440 $a_4 = -216$ e $a_1 = 8$, calcola q. [− 3]

441 $a_{40} = 500$ e $q = -1$, calcola a_1. [− 500]

442 $a_6 = \frac{5}{243}$ e $a_1 = 5$, calcola q. $\left[\frac{1}{3}\right]$

443 $a_4 = -192$ e $q = 2$, calcola a_1. [− 24]

444 $a_1 = -1$, $a_n = -1000$ e $q = 10$, calcola n. [4]

445 $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_n = \frac{1}{36}$ e $q = \frac{1}{3}$, calcola n. [4]

446 $a_1 = 4\sqrt{2}$, $a_n = 324\sqrt{2}$ e $q = 3$, calcola n. [5]

La relazione fra due termini di una progressione geometrica

447 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il sesto termine di una progressione geometrica di ragione 4, sapendo che il terzo termine è 24.

I dati del problema sono: $q = 4$, $a_3 = 24$. Per ricavare il termine a_6 utilizziamo la formula:

$$a_s = a_r \cdot q^{s-r}.$$

Sostituiamo i valori corrispondenti e otteniamo:

$$a_6 = 24 \cdot 4^{6-3} = 24 \cdot 4^3 = 24 \cdot 64 = 1536.$$

Calcola il termine indicato della progressione geometrica di cui sono noti un termine e la ragione.

448 $a_2 = 12$ e $q = 3$, calcola a_5. [324]

449 $a_7 = 39$ e $q = 3$, calcola a_4. $\left[\frac{13}{9}\right]$

450 $a_4 = 8\sqrt{2}$ e $q = \sqrt{2}$, calcola a_7. [32]

L'inserimento di medi geometrici fra due numeri dati

451 ESERCIZIO GUIDA

Vogliamo inserire tre numeri fra 9 e 2304 in modo da ottenere i primi 5 termini di una progressione geometrica.

Per calcolare i termini mancanti determiniamo la ragione q applicando la formula: $q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$.

Sostituiamo i valori opportuni nella formula: $k = 3$, $a = 9$, $b = 2304$. Otteniamo:

$$q = \sqrt[3+1]{\frac{2304}{9}} = \sqrt[4]{256} = 4.$$

Calcoliamo i tre termini mancanti:

$$a_2 = a_1 \cdot 4 = 36; \quad a_3 = a_2 \cdot 4 = 144; \quad a_4 = a_3 \cdot 4 = 576.$$

La progressione è: 9, 36, 144, 576, 2304, …

452 Inserisci fra 3 e 48 tre numeri in modo da ottenere i primi cinque termini di una progressione geometrica. [6, 12, 24]

453 Inserisci fra -7 e -1701 quattro numeri in modo da ottenere i primi sei termini di una progressione geometrica. $[-21, -63, -189, -567]$

454 Inserisci fra $\frac{16}{3}$ e $\frac{1}{24}$ sei numeri in modo da ottenere i primi otto termini di una progressione geometrica. $\left[\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right]$

455 Inserisci fra 2 e $8\sqrt{2}$ quattro numeri in modo da ottenere i primi sei termini di una progressione geometrica. $[2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8]$

Il prodotto dei termini consecutivi di una progressione geometrica

456 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo il prodotto dei primi sei termini della progressione geometrica di ragione $\frac{1}{2}$ e avente come primo termine 2.

Il prodotto dei primi n termini consecutivi è dato dalla formula: $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$.

Quindi sostituendo $n = 6$, $a_1 = 2$ e $a_6 = a_1 \cdot q^5 = \frac{1}{16}$, otteniamo:

$$P_6 = \sqrt{\left(2 \cdot \frac{1}{16}\right)^6} = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^6} = \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}.$$

457 In una progressione geometrica il primo termine è 4 e il quarto termine è $\frac{1}{9}$. Calcola il prodotto dei primi quattro termini. $\left[\frac{16}{81}\right]$

458 Calcola il prodotto dei primi cinque termini di una progressione geometrica in cui il primo termine è $\frac{1}{2}$ e il quinto è 18. [243]

459 Calcola il prodotto dei primi cinque termini di una progressione geometrica in cui il primo termine è -1 e la ragione è 2. [1024]

460 In una progressione geometrica si ha: $a_1 = -\frac{1}{6}$ e $a_4 = -\frac{9}{2}$. Calcola P_6. $\left[\frac{19\,683}{64}\right]$

La somma dei termini consecutivi di una progressione geometrica

461 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo la somma delle prime sei potenze di 3 con esponente diverso da 0.

I numeri di cui vogliamo calcolare la somma sono i primi sei termini della progressione geometrica di ragione 3 e primo termine 3:

3, 9, 27, 81, 243, 729.

La formula che possiamo usare per risolvere il problema è $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Sostituendo i valori nella formula, cioè $n = 6$, $a_1 = 3$, $q = 3$, otteniamo:

$$S_6 = 3 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 3 \cdot \frac{729 - 1}{2} = 3 \cdot \frac{728}{2} = 1092.$$

462 Calcola la somma delle prime dieci potenze di 2 con esponente diverso da 0. [2046]

463 Determina la somma dei primi sei termini di una progressione geometrica, di ragione $q = -\frac{1}{2}$, il cui primo termine è $a_1 = \frac{3}{4}$. $\left[\frac{63}{128}\right]$

464 Calcola la somma dei primi cinque termini di una progressione geometrica, di ragione $q = 3$, il cui primo termine è $a_1 = -1$. [-121]

465 Determina il primo termine di una progressione geometrica di ragione $q = 3$, sapendo che la somma dei primi sei termini è 91. $\left[\frac{1}{4}\right]$

466 Calcola quanti sono i termini di una progressione geometrica di ragione $q = 2$, sapendo che la loro somma è 51 e che il primo termine è $\frac{1}{5}$. [8]

Calcola le seguenti somme.

467 $1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^7$. [21 845]

468 $1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^7$. $\left[\frac{6305}{2187}\right]$

469 $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^6}$. $\left[\frac{n^7 - 1}{n^6(n-1)}\right]$

Date le seguenti informazioni relative a una progressione geometrica, determina ciò che è richiesto.

470 $a_4 = 3$ e $q = \frac{1}{2}$, calcola S_4. [45]

471 $a_2 = 12$ e $a_5 = 324$, calcola S_5. [484]

472 $a_3 = 24$ e $a_6 = 1536$, calcola S_3. $\left[\frac{63}{2}\right]$

473 $a_1 = -3$, $q = 2$ e $S_n = -93$, calcola n. [5]

474 $S_6 = \frac{126}{5}$ e $q = 2$, calcola a_1. $\left[\frac{2}{5}\right]$

475 $a_5 = 18$ e $q = \frac{1}{2}$, calcola S_4. [540]

476 $a_2 = 6$ e $a_7 = 192$, calcola S_3. [21]

477 $a_4 = \frac{3}{5}$ e $q = 3$, calcola S_5. $\left[\frac{121}{45}\right]$

ESERCIZI VARI Le progressioni geometriche

478 **TEST** Nella progressione geometrica di ragione $q = \frac{1}{3}$, fra i termini 9 e $\frac{1}{27}$ sono presenti:

- **A** 3 termini.
- **B** 5 termini.
- **C** 4 termini.
- **D** 6 termini.
- **E** non si hanno abbastanza informazioni per poter rispondere.

479 **TEST** Data una progressione geometrica con $a_2 = 16$, $q = \frac{1}{2}$ e $a_n = \frac{1}{8}$, n è uguale a:

A -7. **B** 9. **C** 16. **D** 7. **E** -3.

480 **VERO O FALSO?** Se a_1 e a_n sono il primo e l'n-esimo termine di una progressione geometrica di ragione q e $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, allora:

a) $a_1 = S_n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}$. V F

b) $a_n = a_1 + (n-1)q$. V F

c) $q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$. V F

d) $a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}$. V F

e) $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$. V F

481 **TEST** Il primo termine di una progressione geometrica è 2, il sesto è 0,0625. Allora il quinto termine è:

- **A** 0,125.
- **B** 0,0125.
- **C** 0,5.
- **D** 0,05.
- **E** nessuna della precedenti risposte è corretta.

(*Facoltà di Ingegneria, Simulazione di test d'ingresso*)

482 **TEST** In una successione geometrica a_1, a_2, a_3, …, si hanno le seguenti disuguaglianze: $a_3 < a_2 < a_4$. Allora sicuramente:

- **A** $a_3 \cdot a_4 > 0$.
- **B** $a_2 \cdot a_3 < 0$.
- **C** $a_2 \cdot a_4 < 0$.
- **D** $a_2 < 0$.
- **E** $a_2 \cdot a_3 > 0$.

(*Kangourou Italia, livello student*, 2004)

483 **TEST** Le lunghezze degli spigoli di un parallelepipedo rettangolo, misurate in centimetri, sono numeri interi e formano una progressione geometrica di ragione $q = 2$. Quale delle seguenti misure, in centimetri cubi, può rappresentare il volume del solido?

- **A** 120
- **B** 188
- **C** 350
- **D** 500
- **E** Nessuna.

(*Kangourou Italia, livello student*, 2008)

Date le seguenti informazioni relative a una progressione geometrica, determina ciò che è richiesto.

484 $a_4 = 686$ e $q = -7$, calcola a_1. $[-2]$

485 $a_6 = 3072$ e $a_1 = 3$, calcola q. [4]

486 $a_1 = \frac{3}{4}$ e $a_4 = \frac{1}{36}$, calcola S_3. $\left[\frac{13}{12}\right]$

487 $a_1 = -\frac{1}{2}$ e $a_5 = -8$, calcola S_4. $\left[-\frac{15}{2}\right]$

488 $a_3 = 9$ e $a_6 = \frac{1}{9}$, calcola P_6. [6561]

489 La somma fra il primo e il secondo termine di una progressione geometrica è 30, mentre la differenza fra il terzo e il primo è -15. Determina la ragione della progressione. $\left[\frac{1}{2}\right]$

490 Calcola la misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo sapendo che i lati sono in progressione geometrica e che il cateto più corto misura 2 cm. (Suggerimento. Indica con x la ragione della progressione.) $[(\sqrt{5}+1)\,\text{cm}]$

491 Determina tre numeri positivi in progressione geometrica tali che la loro somma sia 86 e che la differenza tra il terzo e il primo sia 70. [2; 12; 72]

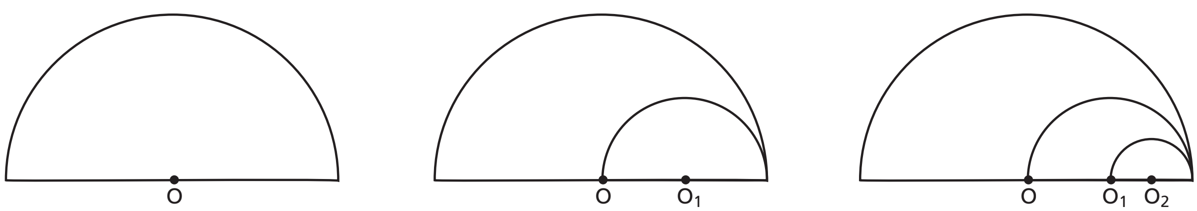
492 In un trapezio rettangolo altezza, base minore, lato obliquo e base maggiore sono in progressione geometrica. Determina il lato obliquo nell'ipotesi che l'altezza sia 3 cm. $[3(\sqrt{2}+1)\,\text{cm}]$

493 Un quadrilatero convesso ha gli angoli in progressione geometrica e il più piccolo misura 24°. Calcola la misura degli altri angoli. [48°; 96°; 192°]

494 Determina tre numeri, sapendo che sono in progressione geometrica decrescente, che la loro somma è 84 e che la differenza fra il primo e il terzo è 36. [48; 24; 12]

495 In un trapezio isoscele le misure della base minore, dell'altezza e della base maggiore sono in progressione geometrica. La base maggiore è tripla dell'altezza e il perimetro è 80 cm. Determina le lunghezze delle basi e dell'altezza e l'area. [4 cm; 36 cm; 12 cm; 240 cm^2]

496 Considera le infinite semicirconferenze generate con il procedimento illustrato in figura.



Sapendo che il primo raggio è lungo 4 cm, determina la somma delle misure delle prime cinque semicirconferenze e quella delle aree dei corrispondenti semicerchi. $\left[\frac{31}{4}\pi\,\text{cm}; \frac{341}{32}\pi\,\text{cm}^2\right]$

497 Per quale valore di a i tre numeri $a-3$, a, $a+4$ sono in progressione geometrica? Scrivi il decimo termine della progressione individuata dai tre numeri. $\left[12; \frac{262144}{2187}\right]$

498 Determina le lunghezze delle dimensioni di un parallelepipedo, sapendo che sono in progressione geometrica, che la loro somma è 21 cm e che il volume del parallelepipedo è 216 cm^3. [3 cm; 6 cm; 12 cm]

499 Trova quattro numeri in progressione geometrica crescente, sapendo che la loro somma è 160 e che la somma tra i primi due è 16. [4; 12; 36; 108]

500 In una progressione geometrica la somma dei primi tre termini è $\frac{9}{2}$, mentre la differenza tra il primo e il quarto termine è $\frac{27}{4}$. Trova i quattro termini. $\left[6; -3; \frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right]$

501 In una progressione geometrica si conoscono i termini $a_3=-4$ e $a_6=\frac{1}{2}$. Trova la somma e il prodotto dei primi otto termini e scrivi i termini della progressione fino all'ottavo. $\left[-\frac{85}{8}; 16; -16, 8, -4, 2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right]$

502 La somma di tre numeri in progressione geometrica crescente è 21. Trova i numeri, sapendo che la somma dei loro reciproci è $\frac{7}{12}$. [3; 6; 12]

503 Calcola la somma dei primi sei termini della progressione $a_n = -3(-5)^n$, con $n \in \mathbb{N}$. [7812]

504 Calcola la somma dei primi sette termini della seguente successione: $3, -12, 48, -192, \ldots$ [9831]

505 Calcola le misure dei lati di un triangolo sapendo che essi sono in progressione geometrica, che il perimetro è 48 cm e che il rapporto tra il lato maggiore e la somma degli altri due è $\frac{9}{10}$.

$\left[\frac{192}{19}\text{ cm}; \frac{288}{19}\text{ cm}; \frac{432}{19}\text{ cm}\right]$

506 Determina tre numeri in progressione geometrica tali che la loro somma sia 91 e che la differenza tra il terzo e il secondo sia 42. $\left[7, 21, 63; \frac{343}{3}, \frac{-98}{3}, \frac{28}{3}\right]$

507 In una progressione geometrica i primi cento termini hanno come estremi 3 e 100 000; quanto vale il prodotto del quarto termine con il novantasettesimo? [300 000]

ESERCIZI VARI Le progressioni

508 Data la successione definita da $a_n = 9\left(-\frac{1}{3}\right)^{2n}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$:

a) stabilisci se è una progressione aritmetica o geometrica e determina la ragione;

b) trova la somma dei primi dieci termini;

c) determina quale posto occupa il termine $\frac{1}{729}$.

$\left[\text{a) geometrica, } q = \frac{1}{9}\text{; b) } S_{10} = \frac{435\,848\,050}{387\,420\,489}\text{; c) } 4°\right]$

509 Date le progressioni geometriche

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \quad \text{e} \quad b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots,$$

con i termini di b_n tutti non nulli, dimostra che anche la successione

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots$$

è una progressione geometrica.

510 Date le progressioni aritmetiche

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \quad \text{e} \quad b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots,$$

dimostra che anche la successione

$$a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots, a_n + b_n, \ldots$$

è una progressione aritmetica.

511 **TEST** La somma S_n delle prime n potenze di k, a partire da k, vale:

A $\frac{k^{n+1} - k}{k - 1}$.

B $n\frac{k^n - 1}{k - 1}$.

C $\frac{k^n - 1}{k - 1}$.

D $k\frac{n^n - 1}{n - 1}$.

E $k\frac{n^k - 1}{n - 1}$.

512 Data la progressione 3, 7, 11, 15, …, scrivila in forma analitica e ricorsiva e trova S_{10}.

$\left[a_n = 3 + (n-1)\cdot 4; \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 4 \end{cases}; S_{10} = 210\right]$

513 Data la successione definita per ricorrenza in $\mathbb{N} - \{0\}$ da $\begin{cases} a_1 = 3 \\ 2a_n = a_{n-1} + 1 \end{cases}$

a) scrivi a_2, a_3, a_4, a_5;

b) considera la successione b_n definita da $b_n = a_n - 1$ e dimostra che è geometrica, precisandone il primo termine e la ragione;

c) esprimi b_n in funzione di n e calcola la somma dei primi 12 termini.

$\left[\text{a) } 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}; \text{ b) } b_1 = 2; q = \frac{1}{2}; \text{ c) } b_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}; S_{12} = \frac{4095}{1024}\right]$

514 È data la successione così definita:

$$\begin{cases} a_3 = 3 \\ a_{n+1} = a_n - \frac{2}{5} a_n, \ n \in \mathbb{N} - \{0\}. \end{cases}$$

a) Calcola a_2 e a_1.

b) Esprimi il termine generale a_n in funzione di n, dimostrando che si tratta di una progressione geometrica decrescente.

c) Trova che posto occupa il termine $\frac{243}{625}$.

$\left[\text{a) } a_2 = 5, a_1 = \frac{25}{3}; \text{ b) } a_n = \frac{25}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}; \text{ c) } 7°\right]$

515 Every year the Queen presents special coins (Mandy Money) to a number of selected people. The number of people receiving the coins in a year is equal to twice the Queen's age in years. Given that in 1952, the first year of the Queen's reign, her age was 26:

a) find an expression for the number of people receiving the coins in the n-th year of her reign;

b) calculate the total number of people receiving the coins from 1952 to 1998 inclusive.

(UK *Northern Examination Assessment Board, NEAB*, 1998)

516 Posto che: i) $a, b > 0$, ii) a, A_1, A_2, b è una progressione aritmetica, iii) a, G_1, G_2, b è una progressione geometrica, dimostra che $A_1A_2 \geq G_1G_2$.

(CAN *Canadian Mathematical Olympiad*, 1979)

517 In un trapezio rettangolo le misure della base minore, dell'altezza e della base maggiore sono in progressione geometrica crescente. La base minore è $\frac{1}{9}$ della base maggiore e l'area è 2160 cm^2.

a) Trova il perimetro del trapezio.

b) Considera la progressione di cui le tre misure sono i primi termini e calcola la somma e il prodotto dei primi 6 termini.

c) Calcola che posto occupa il termine 8748.

[a) $(156 + 12\sqrt{73})$ cm; b) $S_6 = 4368$, $P_6 \simeq 4{,}2 \cdot 10^{13}$; c) 7°]

518 Paola acquista una motocicletta a rate con la formula «interesse zero». Il pagamento avviene in questa forma: € 150 il primo mese, € 158 il secondo e così via: ogni mese i pagamenti crescono di € 8 finché il debito è estinto. Sapendo che l'ultimo pagamento è di € 318:

a) dimostra che per estinguere il debito occorrono 22 mesi;

b) trova quanto è costata la moto;

c) determina in quale mese vengono pagati € 230.

[b) € 5148; c) 11°]

519 In una successione a_n sono noti i termini $a_1 = \frac{1}{30}$, $a_7 = -\frac{4}{15}$; in una seconda successione b_n sono noti i termini $b_1 = \frac{1}{30}$, $b_7 = \frac{4}{15}$.

a) Dimostra che a_n non è una progressione geometrica.

b) Dimostra che nel caso di b_n esistono due progressioni geometriche che hanno come primo e settimo elemento rispettivamente b_1 e b_7.

c) Dai una generalizzazione del caso precedente.

$\left[\text{b) } q = \pm\sqrt{2}\right]$

520 La superficie di un lago è di 25 600 m^2. Le ninfee che si trovano nel lago impiegano un giorno per raddoppiare la loro superficie. Sapendo che le ninfee dopo 7 giorni occupano metà della superficie del lago:

a) determina quanti giorni occorrono per ricoprire tutta la superficie del lago;

b) esprimi la legge che descrive l'accrescimento dimostrando che si tratta di una progressione geometrica crescente;

c) trova la superficie iniziale occupata dalla ninfee. [a) 8 giorni; b) $a_n = 100 \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$; c) $a_0 = 100$]

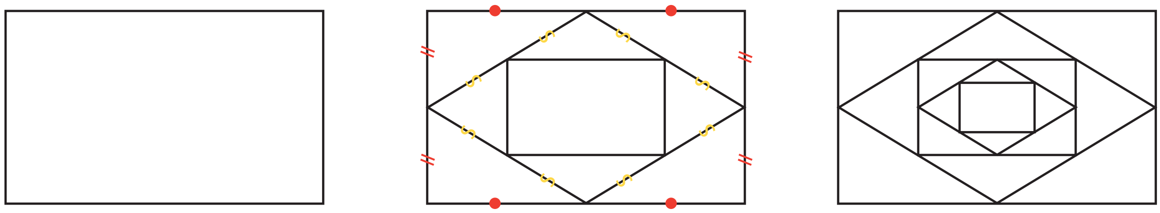
521 Dato un rettangolo di dimensioni 32 cm e 24 cm, considera gli infiniti rettangoli che si ottengono con il procedimento illustrato in figura.

a) Determina le successioni delle misure delle aree e dei perimetri.

b) Indica se sono successioni geometriche o aritmetiche e determina le ragioni.

c) Trova il perimetro e l'area del dodicesimo rettangolo.

d) Calcola le somme delle aree e dei perimetri dei primi 15 rettangoli.



$\left[\text{a) } 2p_n = 112 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, A_n = 768 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}; \text{ b) geometriche, } q_A = \frac{1}{4}, q_P = \frac{1}{2};\right.$

$\left.\text{c) } 2p_{12} = \frac{7}{128}, A_{12} = \frac{3}{16\,384}; \text{ d) } \frac{229\,369}{1024}, \frac{1\,073\,741\,823}{1\,048\,576}\right]$

522 Il quarto e il nono termine di una progressione geometrica sono:

$$a_4 = \frac{1}{54}, \quad a_9 = \frac{1}{419\,904}.$$

a) Calcola la ragione q e il termine iniziale a_1.

b) Determina l'espressione S_n della somma dei primi n termini consecutivi.

c) Verifica che per $n \geq 7$ risulta $a_n \leq 10^{-4}$.

$\left[\text{a) } q = \frac{1}{6}, a_1 = 4; \text{ b) } S_n = \frac{24}{5}\left[1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right]\right]$

523 La ragione di una progressione aritmetica è data dalla seguente espressione.

$$d = \frac{\sqrt{x+2}}{|x| - x - 2}.$$

a) Determina l'insieme dei valori di x per i quali esiste la progressione.

b) Determina per quali x la ragione è negativa.

c) Stabilisci per quali x risulta:

$a_7 = 22, \quad S_{50} = 3875.$

$\left[\text{a) } x \geq -2 \wedge x \neq -1; \text{ b) } x > -1; \text{ c) } d = 3, x = \frac{-71 - \sqrt{145}}{72}\right]$

524 Sono dati tre numeri: $(k-6)$, 6, $(k-1)$, $k \in \mathbb{R}$.

a) Calcola per quali valori di k formano una progressione aritmetica e la corrispondente ragione d.

b) Calcola per quali valori di k formano una progressione geometrica e la corrispondente ragione q.

c) Posto $a_5 = 6$ calcola, per ciascuna delle progressioni trovate, il termine a_2.

$\left[\text{a) } k = \frac{19}{2}, d = \frac{5}{2}; \text{ b) } k_1 = -3 \text{ e } q_1 = -\frac{2}{3}, k_2 = 10 \text{ e } q_2 = \frac{3}{2}; \text{ c) } -\frac{3}{2}, -\frac{81}{4}, \frac{16}{9}\right]$

REALTÀ E MODELLI

1 **Bagaglio a mano**

Le regole per il bagaglio a mano di diverse compagnie aeree stabiliscono che la valigia (o borsa) deve avere un peso massimo di 5 kg e che la somma dei lati non deve superare i 115 cm. In molti modelli le borse per bagaglio a mano hanno una larghezza che supera di 15 cm la profondità.

- ▶ Approssimando la forma della valigia a un parallelepipedo, esprimi il volume in funzione della profondità e studia il segno della funzione volume.
- ▶ Costruisci per punti una rappresentazione grafica approssimata della funzione volume e stabilisci con quali dimensioni (all'incirca) si ottiene la capienza massima della borsa.

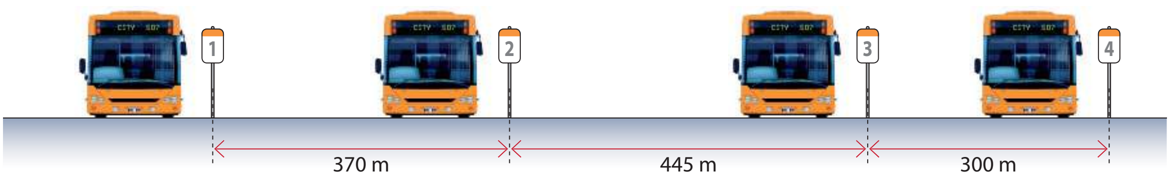
2 **Stivali di qualità**

Un calzaturificio produce un modello di stivali con una spesa fissa mensile di 4500 € e un costo unitario di 85 € al paio, che aumenta a 98 € per ciascun paio prodotto dopo i primi 500 nel mese. Il prezzo di vendita è fissato in 220 €, ma la vendita comporta un ulteriore costo complessivo pari a 20 volte il quantitativo mensile di produzione. La capacità produttiva mensile dell'azienda è di 1000 paia di stivali.

- ▶ Esprimi le funzioni costo, ricavo e guadagno in funzione del numero di stivali prodotti e rappresentale sul piano cartesiano.
- ▶ Individua il dominio di tali funzioni e stabilisci in quali intervalli sono crescenti e decrescenti.
- ▶ Calcola il numero di paia di stivali che l'azienda deve produrre (e vendere) per non essere in perdita e il massimo guadagno.

3 **Rivendita dei biglietti**

Supponi che in una via periferica di Milano vengano predisposte quattro fermate di autobus che distano l'una dall'altra 370 m, 445 m, 300 m. Nella zona manca una rivendita di biglietti che possa essere raggiunta abbastanza comodamente a piedi da chi si trova a una delle fermate.



- ▶ Dov'è più opportuno posizionare la rivendita, sulla stessa via, in modo che la distanza complessiva dalle quattro fermate alla rivendita sia la minima possibile?

4 **La roulette**

Nel gioco della roulette, la giocata sul singolo numero prevede, se vincente, un compenso di 35 : 1 (per ogni euro puntato, si incassa l'euro giocato più altri 35); la giocata sul rosso o sul nero, invece, viene pagata 1 : 1.
Alan ha deciso di tentare la fortuna giocando sempre sul rosso. Punta inizialmente 10 € e raddoppia la giocata in caso di perdita, altrimenti incassa la vincita e si ritira dal tavolo.
Barney, invece, gioca sul singolo numero: punta inizialmente 50 € e aumenta di una certa quota fissa a ogni giocata successiva in caso di perdita, altrimenti anche lui incassa la vincita e si ritira.

- ▶ Sapendo che il rosso esce alla quarta giocata, quanto avrà guadagnato o perso Alan? E se il rosso fosse uscito alla dodicesima tornata?
- ▶ Di quanto deve essere la quota fissa massima che rilancia a ogni puntata Barney, se vuole garantirsi almeno 30 giocate e il suo budget per la serata è di 20 000 €?

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Il dominio della funzione $y=\sqrt{x+\sqrt{|x|}}$ è:

A $[0; +\infty[$.

B $\mathbb{R}$.

C $[-1; +\infty[$.

D $]-1; +\infty[$.

E uguale a quello della funzione $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{|x|}}$.

2 Il codominio della funzione $y = \sqrt{|x|-1}$ è l'insieme:

A $]0; +\infty[$.

B $[-1; +\infty[$.

C $[0; +\infty[$.

D $[1; +\infty[$.

E $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

3 Date le due funzioni: $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = (3 + x)^2$, quale delle seguenti funzioni è la funzione composta $y = f(g(x))$?

A $y = (1 + 3x)^2$

B $y = 3(3 + x)^2 - 2$

C $y = (3x - 2)^2$

D $y = 3x^2 - 2$

E $y = (3 + 3x)^2$

4 La funzione $y = |x|^3 + 2$ si ottiene con la seguente composizione:

A $f \circ g \circ h$, dove $f(x) = |x|$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x + 2$.

B $f \circ g$, dove $f(x) = |x|$, $g(x) = x^3 + 2$.

C $f \circ g$, dove $f(x) = (x + 2)^3$, $g(x) = |x|$.

D $f \circ g \circ h$, dove $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = |x|$.

E $f \circ g$, dove $f(x) = |x| + 4$, $g(x) = x^3 - 2$.

5 Data la funzione biiettiva da $\mathbb{R} - \{0\}$ a $\mathbb{R}$

$$y = \frac{x-2}{x},$$

la sua funzione inversa è:

A $y = -\dfrac{x-2}{x}$.

B $y = \dfrac{x-2}{x}$.

C $xy - x + 2 = 0$.

D $y = \dfrac{2}{1-x}$.

E $y = \dfrac{-2}{1-x}$.

6 Una progressione aritmetica ha come primo termine 2 e come ottavo termine 23. Quanto vale la somma dei primi otto termini della progressione?

A 84.

B 3.

C 25.

D 200.

E 100.

7 In una progressione geometrica di ragione 3 il quarto termine è 324. Quanto vale il primo termine?

A 4.

B 12.

C 108.

D 27.

E 81.

8 Sulla successione

$$a_1 = 12, a_2 = 36, a_3 = 108, a_4 = 324, \ldots$$

possiamo dire che:

A la somma dei primi 9 termini è 118 092.

B il quindicesimo termine è 172 186 884.

C la somma dei primi 8 termini è 13 116.

D il centesimo termine si calcola con la formula: $a_{100} = 4 \cdot \dfrac{1-3^{100}}{1-3}$.

E nessuna delle affermazioni precedenti è vera.

9 Riguardo ai numeri naturali espressi dalla formula $k_n = 5^{n+1} + 2^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$, possiamo dire che:

A sono *tutti* divisibili per 5.

B sono *tutti* divisibili per 3.

C sono *tutti* divisibili per 7.

D sono *tutti* divisibili per 2.

E nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

QUESITI

10 Dimostra che se f è biiettiva da A in B e g è biiettiva da B in C, allora la funzione composta $g \circ f$ è biiettiva da A in C ($A, B, C \subseteq \mathbb{R}$). Fornisci un esempio.

11 Un titolo di borsa ha perso ieri l'x% del suo valore. Oggi quel titolo, guadagnando l'y%, è ritornato al valore che aveva ieri prima della perdita. Esprimere y in funzione di x.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2002, *quesito* 5)

$\left[y = \frac{100x}{100 - x}\right]$

12 Un'azienda, in un momento di crisi, abbassa gli stipendi di tutti i dipendenti del 7%. Superata la delicata fase, aumenta tutti gli stipendi del 7%. Come è, dopo di ciò, la situazione dei dipendenti?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2002, *quesito* 2)

13 S_n rappresenta la somma dei primi n numeri naturali dispari. La successione di termine generale a_n tale che:

$$a_n = \frac{S_n}{2n^2} \text{ è:}$$

A) costante; B) crescente; C) decrescente.
Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2002, *quesito* 8)

14 Si consideri la successione di termine generale a_n tale che:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ a_{n-1} + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Calcolare a_{100}.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione straordinaria*, 2003, *quesito* 6)

15 Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

scriverla in forma ricorsiva.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione straordinaria*, 2003, *quesito* 5)

16 Calcolare il valore della seguente somma:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2.$$

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione straordinaria*, 2004, *quesito* 8)

17 Enunciare il principio d'induzione matematica e applicarlo alla dimostrazione della seguente relazione:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2,$$

la quale esprime una proprietà dei numeri naturali conosciuta come «*teorema di Nicomaco*» (da Nicomaco di Gerasa, filosofo e matematico ellenico, vissuto intorno all'anno 100 d.C.).

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione straordinaria*, 2005, *quesito* 5)

18 Se $q \in \mathbb{R} - \{1\}$, mediante il principio di induzione dimostra la formula:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

PROBLEMI

19 Data la funzione $f(x) = \frac{1}{9x^2 + 2kx - k}$, con $k \in \mathbb{R}$:

a) trova per quali valori di k la funzione ha come dominio l'insieme $\mathbb{R}$;
b) determina il valore di k per cui il grafico di $f(x)$ passa per $(0; 1)$;
c) per il valore di k trovato completa $f(2) = \ldots$ e $f(\ldots) = \frac{3}{4}$;
d) risolvi la disequazione $2f(2x) - \frac{f(x)}{2} > 0$.

$\left[\text{a) } -9 < k < 0; \text{ b) } k = -1; \text{ d) } x < \frac{3}{4}\right]$

20 Date le due funzioni $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ e $g(x) = 9 - x^2$:

a) determina il dominio e il codominio di ciascuna;
b) trova quale delle due funzioni è invertibile e scrivi l'equazione della funzione inversa;
c) verifica che $f \circ g \neq g \circ f$;
d) risolvi la disequazione $f\left(\dfrac{|x|}{2}\right) \cdot g(x-3) \geq 0$;
e) trova $(f \circ g)(3)$ e la controimmagine di -1 mediante $f \circ g$.

$\left[\text{a) } D_f = \mathbb{R} - \{3\}, C_f = \mathbb{R} - \{0\}; D_g = \mathbb{R}, C_g = \{y \leq 9\}; \text{ b) } f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{x};\right.$
$\left.\text{c) } (f \circ g)(x) = \dfrac{2}{6-x^2}, (g \circ f)(x) = 9 - \dfrac{4}{(x-3)^2}; \text{ d) } -6 < x \leq 0; \text{ e) } -\dfrac{2}{3}; \pm 2\sqrt{2}\right]$

21 Sono date le funzioni $f(x) = -x + 3$ e $g(x) = 6 + 4x$.

a) Dimostra che f è una funzione decrescente, mentre g è crescente.
b) Trova le funzioni inverse f^{-1} e g^{-1}.
c) Determina $f \circ g, (f \circ g)^{-1}$ e verifica se $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
d) Risolvi $f(\sqrt{x+1}) > 3$.
e) Risolvi $\dfrac{f(|x|) + f(2x)}{3g(-x)} > 0$.

$\left[\text{b) } f^{-1}(x) = -x + 3, g^{-1}(x) = \dfrac{x-6}{4}; \text{ c) } (f \circ g)(x) = -4x - 3, (f \circ g)^{-1}(x) = -\dfrac{x+3}{4};\right.$
$\left.\text{d) } \nexists\, x \in \mathbb{R}; \text{ e) } x < \dfrac{3}{2} \vee x > 2\right]$

22 Considera la funzione $y = \sqrt{x^2 + ax + 2}, \quad a \in \mathbb{R}$.

a) Determina il dominio E al variare di a.
b) Dimostra che i grafici di tutte le funzioni hanno un punto in comune e trova le sue coordinate.
c) Traccia per punti i grafici delle funzioni con $a = \pm 2\sqrt{2}$ e determina i corrispondenti codomini C_1 e C_2.

$\left[\text{a) } E = \mathbb{R} - \left]\dfrac{-a-\sqrt{a^2-8}}{2}; \dfrac{\sqrt{a^2-8}-a}{2}\right[\text{ per } a < -2\sqrt{2} \vee a > 2\sqrt{2},\right.$
$\left.E = \mathbb{R} \text{ per } -2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}; \text{ b) } (0; \sqrt{2}); \text{ c) } y = |x \pm \sqrt{2}|, C_1 = C_2 = [0; +\infty[\right]$

23 Considera la relazione $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{a}$, dove a è un parametro reale positivo.

a) Esprimi y in funzione di x e, indicata con f la funzione trovata, determina il dominio, il codominio e gli intervalli in cui f è positiva.
b) Dopo aver posto $a = 1$, considera $g(x) = -x + 4$ e determina le espressioni di $f \circ g$ e $g \circ f$.
c) Dimostra che $f \circ g$ è una funzione crescente in $\mathbb{R}$.

$\left[\text{a) } y = \dfrac{ax}{x-a}, D = \mathbb{R} - \{0, a\}, C = \mathbb{R} - \{0, a\},]-\infty; 0[\cup]a; +\infty[; \text{ b) } (f \circ g)(x) = \dfrac{x-4}{x-3}, (g \circ f)(x) = \dfrac{3x-4}{x-1}\right]$

24 Data la successione $a_n = \dfrac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$:

a) dimostra che è crescente;
b) verifica che per ogni numero k reale positivo è possibile determinare almeno un a_n tale che $1 - a_n < k$;
c) dimostra, per induzione, la seguente uguaglianza:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}.$$

$\left[\text{a) } a_{n+1} - a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ oppure } \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1\ \forall n \in \mathbb{N}; \text{ b) } n > \dfrac{1}{k} - 1\right]$

25 Considera la successione: $a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

a) Calcolane i primi cinque termini.
b) Scrivi la successione in forma ricorsiva.
c) Stabilisci se è una progressione aritmetica o geometrica e determina la ragione.
d) Calcola la somma S_n dei primi n termini.
e) Dimostra che $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} = a_1 + \frac{1}{10} S_n$.

$\left[\text{a) } \frac{1}{2}, \frac{1}{20}, \frac{1}{200}, \frac{1}{2000}, \frac{1}{20\,000}; \text{ b) } a_1 = \frac{1}{2}, a_n = \frac{a_{n-1}}{10}; \text{ c) geometrica, } q = \frac{1}{10}; \text{ d) } S_n = \frac{5}{9}\left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right]\right]$

26 Considera la seguente successione:

$4^2 - 2^2, 6^2 - 4^2, 8^2 - 6^2, 10^2 - 8^2, \ldots$

a) Deduci un'espressione per il termine generale a_n.
b) Dimostra che i termini di tale successione sono in progressione aritmetica.
c) Calcola, in modo diretto e con la formula delle progressioni, la somma dei primi n termini consecutivi e verifica che si ottiene il medesimo risultato.

$[\text{a) } a_n = [2(n+1)]^2 - (2n)^2 = 4(2n+1); \text{ b) } d = 8]$

27 È definita la successione:

$a_0 = 2, \quad 3a_n = a_{n-1} + 6.$

a) Calcola i termini a_1, a_2, a_3, a_4.
b) Trova a_n in funzione di n.
c) Posto $b_n = a_n - 3$, dimostra che i termini b_n sono in progressione geometrica crescente.

$\left[\text{a) } a_1 = \frac{8}{3}, \ldots; \text{ b) } a_n = \frac{3^{n+1} - 1}{3^n}, n \in \mathbb{N}; \text{ c) } b_n = -\frac{1}{3^n}, q = \frac{1}{3}\right]$

28 Dato un quadrato $ABCD$ di lato l costruisci il quadrato inscritto di vertici A', B', C', D' sui lati AB, BC, CD, DA, con i vertici a distanza $\frac{1}{3}l$ da A, B, C, D. In modo analogo costruisci il quadrato $A''B''C''D''$ inscritto in, A', B', C', D', il quadrato $A'''B'''C'''D'''$ inscritto in $A''B''C''D''$ e così via fino a ottenere una successione di quadrati inscritti l'uno nell'altro.

a) Determina le successioni delle misure dei perimetri p_n e delle aree A_n dei quadrati.
b) Stabilisci se sono successioni aritmetiche o geometriche e calcola le ragioni.
c) Calcola l'area del decimo quadrato della successione e la somma dei perimetri dei primi venti.

(Indica con p_1 e A_1 le misure del perimetro e dell'area del quadrato $ABCD$.)

$\left[\text{a) } p_n = 4l\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n-1}, A_n = l^2\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}; \text{ b) geometriche, } q_p = \frac{\sqrt{5}}{3}, q_A = \frac{5}{9};\right.$
$\left.\text{c) } A_{10} = \left(\frac{5}{9}\right)^9 \cdot l^2, S_{20} = 3(3+\sqrt{5})\left[1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{20}\right] \cdot l\right]$

CAPITOLO

3

٣

[numerazione araba]

३

[numerazione devanagari]

三

[numerazione cinese]

IL PIANO CARTESIANO E LA RETTA

LE RETTE E LA TAC La tomografia (o stratigrafia) assiale computerizzata (TAC) è una tecnica che sfrutta i raggi X per ricostruire, grazie al computer, immagini tridimensionali di tessuti e organi. Mentre nella radiografia classica il paziente rimane fermo rispetto alla sorgente, nel caso della TAC si ha un movimento relativo tra sorgente di raggi X e organo di cui si vuole ottenere l'immagine. In questo modo si possono scegliere diversi punti di vista e varie sezioni, ottenendo informazioni utili a ricostruire l'immagine.

Con la geometria analitica puoi comprendere il funzionamento della TAC?

▶ **La risposta a pag. 184**

1. LE COORDINATE DI UN PUNTO SU UN PIANO

Il riferimento cartesiano ortogonale

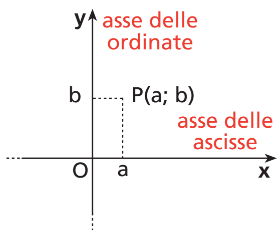
Fissiamo un sistema di assi cartesiani ortogonali considerando due rette orientate e tra loro perpendicolari, e per comodità scegliamo la prima orizzontale e la seconda verticale. Chiamiamo tali rette **assi** del riferimento e il loro punto di intersezione O **origine**.

● Un sistema cartesiano con la stessa unità di misura sui due assi si dice **monometrico**. Se le unità sono diverse, il sistema è detto **dimetrico**. Di solito useremo un sistema monometrico.

Fissata un'unità di misura su entrambi gli assi, possiamo rappresentare un punto mediante una coppia *ordinata* di numeri reali. Viceversa, fissato un punto Q, a esso corrisponde una coppia di numeri reali.

A ogni punto del piano corrisponde una e una sola coppia di numeri; viceversa, a ogni coppia di numeri corrisponde uno e un solo punto del piano.

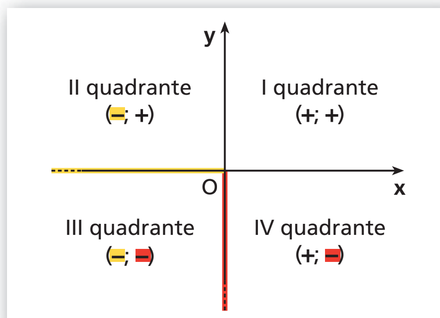
Si è così creata *una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie ordinate dei numeri reali.*



In ogni coppia di numeri, che vengono detti **coordinate** del punto, il primo numero si chiama **ascissa** e il secondo **ordinata**. Si usa la scrittura $P(x; y)$, che si legge «il punto P di coordinate x e y». L'asse orizzontale è detto **asse delle ascisse**, o anche **asse *x***; l'asse verticale è detto **asse delle ordinate** o anche **asse *y***.

Gli assi dividono il piano in quattro angoli retti, detti **quadranti** (figura 1).

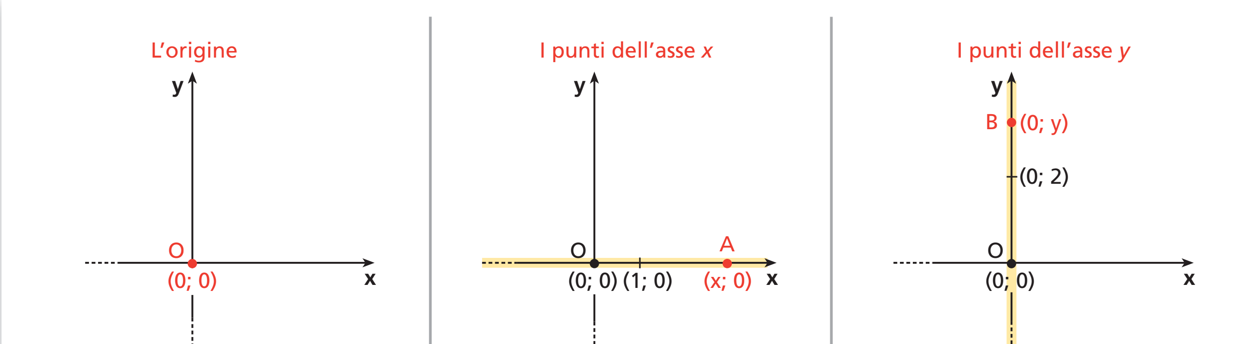
Le coordinate dei punti del piano sono positive o negative a seconda del quadrante in cui i punti si trovano.



► **Figura 1** Nel primo e nel terzo quadrante, un punto ha ascissa e ordinata dello stesso segno; nel secondo e nel quarto quadrante, ha coordinate di segno opposto.

Punti particolari

▼ **Figura 2**



a. L'origine O è il punto di intersezione degli assi x e y: ha coordinate (0; 0).

b. Tutti i punti dell'asse x hanno come ordinata 0. Un generico punto dell'asse x è quindi del tipo $A(x; 0)$.

c. Tutti i punti dell'asse y hanno come ascissa 0. Un generico punto dell'asse y è quindi del tipo $B(0; y)$.

2. LA LUNGHEZZA E IL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO. IL BARICENTRO DI UN TRIANGOLO

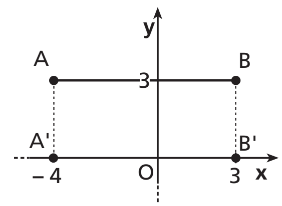
La distanza fra due punti

Determiniamo la distanza fra due punti A e B, ossia la **lunghezza di *AB***.

I punti hanno la stessa ordinata
Consideriamo i punti $A(-4; 3)$ e $B(3; 3)$.

Essi hanno la stessa ordinata e stanno quindi su una retta parallela all'asse x.

Le parallele all'asse y passanti per A e per B incontrano l'asse x rispettivamente nei punti A' e B'. Poiché $A'B'BA$ è un rettangolo, risulta $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e inoltre $x_{A'} = x_A = -4$ e $x_{B'} = x_B = 3$.



Quindi nel nostro caso:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} = |x_{B'} - x_{A'}| = |x_B - x_A| = |3 - (-4)| = 7.$$

In generale, la distanza fra due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ che hanno la stessa ordinata $\boldsymbol{y_A = y_B}$ è:

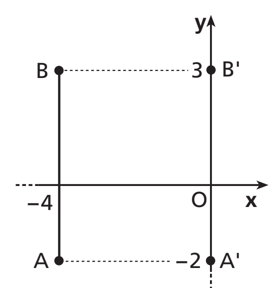
$$\boldsymbol{\overline{AB} = |x_B - x_A|}.$$

La misura di AB deve essere positiva, quindi utilizziamo il valore assoluto in modo da non doverci preoccupare se $x_A > x_B$ o viceversa.

I punti hanno la stessa ascissa
Se i punti di cui dobbiamo calcolare la distanza hanno la stessa ascissa, valgono considerazioni analoghe a quelle del caso precedente, ma riferite all'asse y: infatti i punti in questione si trovano su una retta parallela a questo asse.

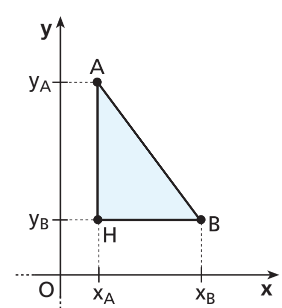
La distanza fra due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ che hanno la stessa ascissa $\boldsymbol{x_A = x_B}$ è:

$$\boldsymbol{\overline{AB} = |y_B - y_A|}.$$



Il caso generale
Studiamo ora il caso generale e determiniamo la distanza fra due punti che non abbiano necessariamente la stessa ascissa o la stessa ordinata.

Consideriamo il segmento AB non parallelo agli assi.
Per calcolare la distanza fra A e B applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABH (figura a lato):



$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{AH}^2}.$$

Poiché $\overline{AH} = |y_A - y_B|$ e $\overline{BH} = |x_B - x_A|$, otteniamo:

$$\boldsymbol{\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}.$$

Nella formula, le ascisse di A e di B (oppure le loro ordinate) si possono scambiare perché le loro differenze elevate al quadrato non cambiano.

ESEMPIO

Consideriamo i due punti $A(2; 6)$ e $B(5; 10)$. Calcoliamo la distanza $\overline{AB}$. Otteniamo:

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-2)^2 + (10-6)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

La formula comprende anche i casi particolari studiati precedentemente.

Per esempio, se $x_A = x_B$, si ha $\overline{AB} = \sqrt{(y_A - y_B)^2} = = |y_A - y_B|$.

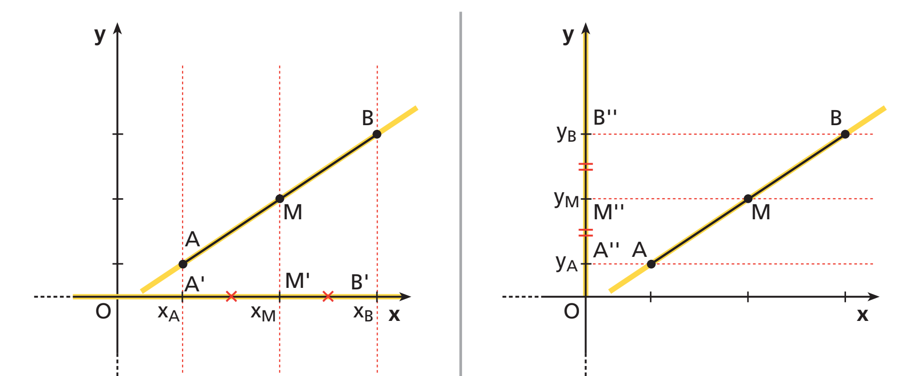
Se poi vogliamo calcolare la distanza di un punto $P(x; y)$ dall'origine O, abbiamo:

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Il punto medio di un segmento

Consideriamo i punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$. Vogliamo calcolare le coordinate del punto medio M del segmento AB.

▶ Figura 3



a. Dai tre punti *A*, *B*, *M* tracciamo le parallele all'asse *y*. Otteniamo così tre rette parallele tagliate da due trasversali: l'asse *x* e la retta passante per *A* e per *B*. Se *M* dimezza *AB*, *M*' dimezza *A*'*B*', per il teorema del fascio di rette parallele.

b. Dai tre punti *A*, *B*, *M* tracciamo le parallele all'asse *x*. Otteniamo di nuovo tre rette parallele tagliate da due trasversali: l'asse *y* e la retta passante per *A* e per *B*. Se *M* divide a metà il segmento *AB*, allora anche *M*'' dimezza *A*''*B*'', sempre per il teorema del fascio di rette parallele.

Il teorema del fascio di rette parallele afferma che, dato un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale.

Dopo aver tracciato le parallele agli assi passanti per i punti A, B e M, applichiamo il teorema del fascio di rette parallele.

Se $AM \cong MB$, allora $A'M' \cong M'B'$ e $A''M'' \cong M''B''$, quindi M' è il punto medio di $A'B'$ e M'' quello di $A''B''$.

$$\overline{A'M'} = \overline{M'B'}, \qquad \text{quindi} \qquad |x_M - x_A| = |x_B - x_M|.$$

Poiché $x_A < x_M$ e $x_M < x_B$, scriviamo le differenze senza il valore assoluto:

$$x_M - x_A = x_B - x_M.$$

Ricaviamo x_M:

$$x_M + x_M = x_A + x_B \rightarrow 2x_M = x_A + x_B \rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Questa formula vale anche se A segue B. Infatti la relazione $\overline{B'M'} = \overline{M'A'}$ diventa $|x_M - x_B| = |x_A - x_M|$, da cui si ricava

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Applichiamo nuovamente il procedimento al segmento $A''B''$:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Dati due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$, il punto medio M del segmento AB ha quindi le seguenti coordinate:

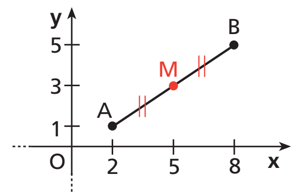
$$\boldsymbol{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}}, \qquad \boldsymbol{y_M = \frac{y_A + y_B}{2}}.$$

semisomma delle ascisse — semisomma delle ordinate

ESEMPIO

Dati i punti $A(2; 1)$ e $B(8; 5)$, determiniamo il punto medio M del segmento AB. Utilizzando le due formule per il calcolo delle coordinate di M, si ha:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+8}{2} = 5; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3.$$



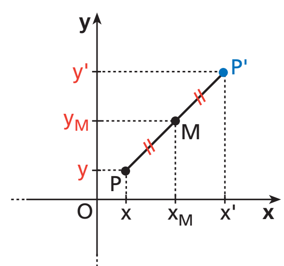
La simmetria centrale

La simmetria centrale è una **trasformazione geometrica**, ossia una corrispondenza biunivoca che a ogni punto P del piano fa corrispondere un punto P' del piano. P' è detto **immagine** di P.

Fissato un punto $M(x_M; y_M)$, la **simmetria centrale** di centro M è quella trasformazione geometrica che a ogni punto $P(x; y)$ del piano fa corrispondere il punto $P'(x'; y')$ tale che M sia il punto medio di PP'.

Ricaviamo le **equazioni** che permettono di passare dalle coordinate di $P(x; y)$ a quelle di $P'(x'; y')$ e viceversa:

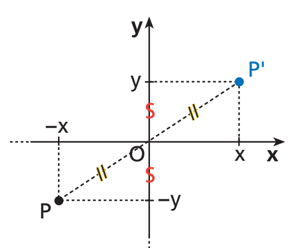
$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x + x'}{2} \\ y_M = \dfrac{y + y'}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x' = 2x_M - x} \\ \boldsymbol{y' = 2y_M - y} \end{cases}$$



Utilizziamo le formule del punto medio.

In particolare, se il **centro di simmetria** è l'**origine degli assi**:

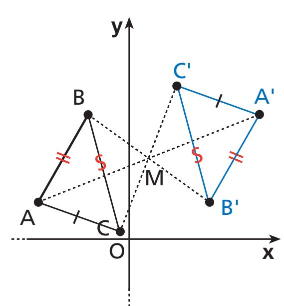
$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = -x} \\ \boldsymbol{y' = -y} \end{cases}$$



Se O è il centro di simmetria, nelle equazioni precedenti: $x_M = y_M = 0$.

Una simmetria di centro M si indica con S_M, una di centro O con S_O.
Il centro M è l'unico **punto unito** della simmetria centrale, ossia l'unico punto che ha se stesso come immagine.

La simmetria centrale è un'**isometria**, cioè una trasformazione geometrica in cui la distanza tra due punti qualsiasi A e B è uguale alla distanza fra le loro immagini A' e B'.
Le isometrie trasformano figure geometriche in figure congruenti. Nella figura a lato, il triangolo ABC e il suo trasformato $A'B'C'$ sono congruenti.



ABC ≅ A'B'C'

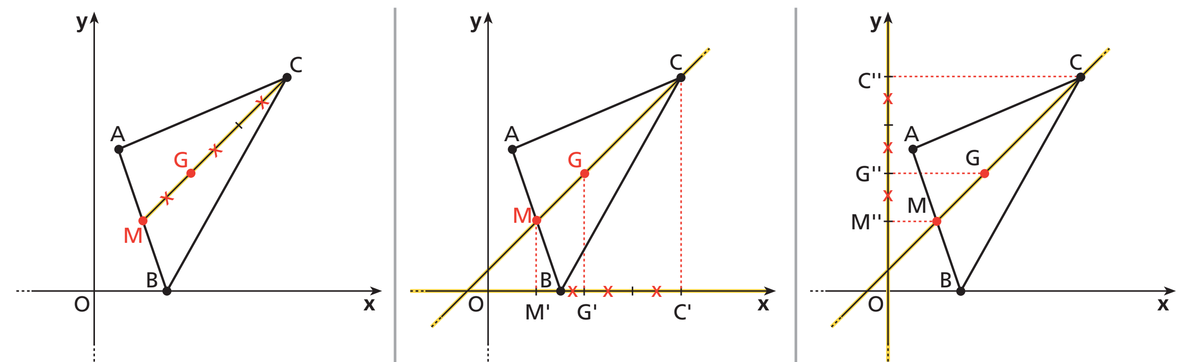
Il baricentro di un triangolo

● Il baricentro di un triangolo è il punto di incontro delle tre mediane; ognuna di esse è divisa dal baricentro in due parti tali che quella avente un estremo nel vertice è doppia dell'altra.

Consideriamo i punti $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Vogliamo calcolare le coordinate del baricentro G del triangolo ABC, cioè determinare il punto di incontro delle mediane del triangolo.

Determiniamo le coordinate di M, punto medio del lato AB, con le formule del punto medio:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$



a. Nel triangolo *ABC* congiungiamo il punto medio *M* del lato *AB* con il vertice opposto *C* e consideriamo su *MC* il baricentro *G*. Per la proprietà del baricentro, la mediana *MC* è divisa da *G* in due parti, delle quali quella contenente il vertice è doppia dell'altra, cioè $CG \cong 2GM$.

b. Dai tre punti *M*, *G* e *C* tracciamo le rette parallele all'asse *y*. Otteniamo tre rette parallele tagliate da due trasversali: l'asse *x* e la retta *MC*. Essendo il segmento *GC* doppio di *MG*, allora anche *G'C'* è doppio di *M'G'*, per il teorema di Talete.

c. Analogamente, se dai tre punti *M*, *G* e *C* tracciamo le rette parallele all'asse *x*, il segmento *G''C''* risulta doppio di *M''G''*, sempre per il teorema di Talete.

▲ **Figura 4**

Consideriamo il punto G, baricentro del triangolo ABC. Per la proprietà del baricentro, vale la relazione: $CG \cong 2GM$.
Dopo aver tracciato le parallele agli assi passanti per M, G e C, utilizziamo questa relazione sugli assi cartesiani, applicando il teorema di Talete.

● Il teorema di Talete afferma che, se un fascio di rette parallele è intersecato da due trasversali, i segmenti che si formano sulla prima trasversale sono direttamente proporzionali ai segmenti che si formano sulla seconda trasversale.

Poiché $CG \cong 2GM$, allora:

$$C'G' \cong 2G'M' \quad \text{e} \quad C''G'' \cong 2G''M''.$$

Indichiamo con $(x_G; y_G)$ le coordinate di G.
Determiniamo le misure dei segmenti $C'G'$ e $G'M'$ sull'asse x, per poi applicare la prima relazione e ricavare l'ascissa di G:

$$\overline{C'G'} = x_C - x_G, \qquad \overline{G'M'} = x_G - x_M.$$

Poiché $\overline{C'G'} = 2\overline{G'M'}$, sostituendo, otteniamo:

$$x_C - x_G = 2(x_G - x_M).$$

Ricaviamo x_G:

$$x_C - x_G = 2x_G - 2x_M \quad \rightarrow \quad 3x_G = x_C + 2x_M \quad \rightarrow \quad x_G = \frac{x_C + 2x_M}{3}.$$

Sostituendo $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, si ottiene:

$$x_G = \frac{x_C + 2x_M}{3} = \frac{x_C + 2\frac{x_A + x_B}{2}}{3} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}.$$

Analogamente, si trova $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

Dato un triangolo di vertici $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, le coordinate del suo baricentro G sono espresse dalle formule:

$$\boldsymbol{x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}}, \quad \boldsymbol{y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}}.$$

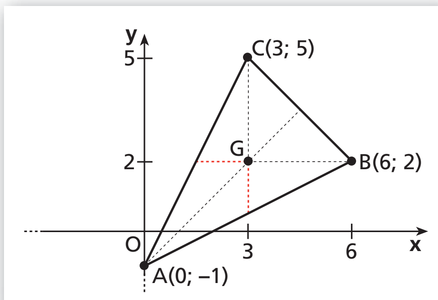
Leggiamo le formule: l'ascissa del baricentro di un triangolo è un terzo della somma delle ascisse dei vertici; l'ordinata del baricentro è un terzo della somma delle ordinate dei vertici.

ESEMPIO

Il triangolo ABC ha per vertici i punti $A(0; -1)$, $B(6; 2)$, $C(3; 5)$.
Il suo baricentro G ha coordinate:

$$x_G = \frac{0 + 6 + 3}{3} = 3,$$

$$y_G = \frac{-1 + 2 + 5}{3} = 2.$$



◀ Figura 5

3. L'EQUAZIONE DI UNA RETTA

Le equazioni lineari in due variabili

Un'equazione lineare in due variabili x e y è un'equazione di primo grado per entrambe le incognite. Può essere scritta nella forma:

$\boldsymbol{ax + by + c = 0}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ (a e b non entrambi nulli).

Una soluzione dell'equazione è una coppia $(x_0; y_0)$ di numeri reali che la soddisfa.

Per esempio, data l'equazione $3x + 2y - 6 = 0$, per $x = 1$ otteniamo $y = \frac{3}{2}$.

La coppia $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ è soluzione dell'equazione ed è rappresentata da un punto A del piano cartesiano.

Le soluzioni sono infinite: infatti, per ottenerne una, è sufficiente sostituire a x un qualsiasi numero reale e determinare il corrispondente valore di y.

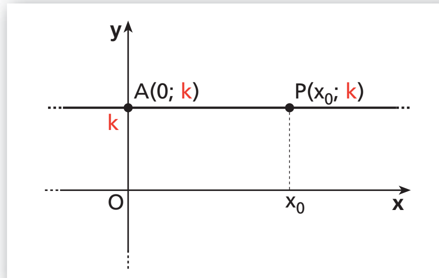
Data un'equazione lineare in due variabili, a ogni soluzione corrisponde un punto del piano cartesiano, mentre, dato un punto, non sempre le sue coordinate sono una delle soluzioni dell'equazione.
Vedremo ora che queste soluzioni corrispondono ai punti di una retta e soltanto a essi.

A ogni retta corrisponde un'equazione lineare

Considerata una retta del piano cartesiano, vogliamo mostrare che questa è sempre rappresentata da un'equazione lineare in due variabili, detta **equazione cartesiana** della retta.
Esaminiamo i casi possibili.

a. Retta parallela all'asse *x*

▶ Figura 6 Retta parallela all'asse *x*.



Detto $A(0; k)$ il punto di intersezione con l'asse y di una retta parallela all'asse x:

- tutti i punti della retta hanno ordinata k;
- ogni punto di ordinata k appartiene alla retta.

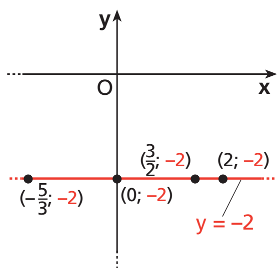
Quindi *tutti e soli* i punti della retta soddisfano l'equazione:

$y = k$, ossia $y - k = 0$ **equazione di una retta parallela all'asse *x*.**

In particolare, se $k = 0$ la retta coincide con l'asse x, che ha quindi equazione:

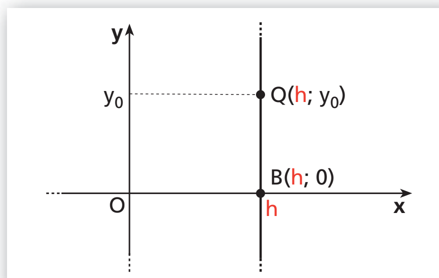
$y = 0$ **equazione dell'asse *x*.**

● Per esempio:



b. Retta parallela all'asse *y*

▶ Figura 7 Retta parallela all'asse *y*.



Detto $B(h; 0)$ il punto di intersezione con l'asse x di una retta parallela all'asse y:

- tutti i punti della retta hanno ascissa h;
- ogni punto di ascissa h appartiene alla retta.

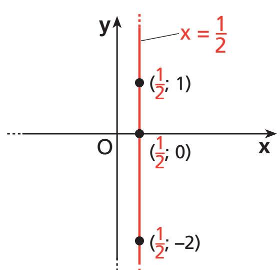
Quindi *tutti e soli* i punti della retta soddisfano l'equazione:

$x = h$, ossia $x - h = 0$ **equazione di una retta parallela all'asse *y*.**

In particolare, se $h = 0$ la retta coincide con l'asse y, che ha quindi equazione:

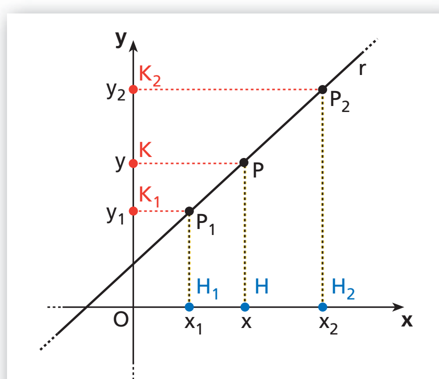
$x = 0$ **equazione dell'asse *y*.**

● Per esempio:



c. Retta non parallela agli assi

- Consideriamo due punti distinti $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$ che individuano una retta r non parallela agli assi (figura 8). Consideriamo poi un altro generico punto $P(x; y)$ su r e le proiezioni dei punti P_1, P_2, P sugli assi (rispettivamente H_1, H_2, H sull'asse x e K_1, K_2, K sull'asse y).



▶ Figura 8 Consideriamo tre punti della retta e le loro proiezioni sugli assi.

Per il teorema di Talete abbiamo:

$$\frac{\overline{H_1H}}{\overline{H_1H_2}} = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_1P_2}}; \qquad \frac{\overline{K_1K}}{\overline{K_1K_2}} = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_1P_2}}.$$

Confrontando le uguaglianze otteniamo: $\frac{\overline{H_1H}}{\overline{H_1H_2}} = \frac{\overline{K_1K}}{\overline{K_1K_2}}$.

Scritta mediante le coordinate cartesiane di P_1, P_2, P, l'uguaglianza diventa:

$$\boldsymbol{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}},$$

relazione detta **condizione di allineamento** di tre punti.

Le coordinate di tre punti qualsiasi del piano che siano allineati devono soddisfare questa relazione.

Da questa relazione otteniamo:

$$x \cdot (y_2 - y_1) - x_1 \cdot (y_2 - y_1) = y \cdot (x_2 - x_1) - y_1 \cdot (x_2 - x_1),$$

$$x \cdot (y_2 - y_1) + y \cdot (x_1 - x_2) - x_1y_2 + x_2y_1 = 0,$$

Ridotte le frazioni a denominatore comune, nell'uguaglianza possiamo eliminare il denominatore comune essendo:

$x_2 - x_1 \neq 0$ e $y_2 - y_1 \neq 0$.

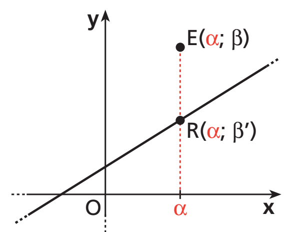
che è un'equazione lineare nelle due incognite x e y. Ponendo $y_2 - y_1 = a$, $x_1 - x_2 = b$ e $- x_1y_2 + x_2y_1 = c$, otteniamo la forma:

$$\boldsymbol{ax + by + c = 0}.$$

Poiché le coordinate $(x; y)$ di un generico punto P della retta soddisfano l'uguaglianza, concludiamo che *tutti* i punti di r verificano l'equazione lineare determinata.

- Dimostriamo ora che *solo* i punti della retta soddisfano tale equazione.
Consideriamo un punto $E(\alpha; \beta)$ che non appartiene alla retta (figura a lato). Esiste allora un punto R della retta che ha la stessa ascissa di E e ordinata diversa $R(\alpha; \beta')$. Le coordinate di R, per quanto abbiamo visto finora, verificano l'equazione lineare $ax + by + c = 0$, e quindi si ha:

$$a\alpha + b\beta' + c = 0.$$



Poiché $\beta \neq \beta'$, l'uguaglianza $a\alpha + b\beta + c = 0$ è falsa. Se fosse vera, sottraendo una relazione dall'altra otterremmo $b(\beta' - \beta) = 0$, da cui risulterebbe $\beta' = \beta$, che contraddice l'ipotesi posta. Poiché l'uguaglianza è falsa, le coordinate del punto E esterno alla retta non verificano l'equazione lineare di r.

- Concludiamo che *tutti e soli* i punti della retta r soddisfano l'equazione lineare:

$$ax + by + c = 0.$$

C'è quindi una *corrispondenza biunivoca* fra i punti di una retta e le soluzioni della corrispondente equazione lineare.

A ogni equazione lineare corrisponde una retta

Quanto detto finora non esclude che esistano equazioni lineari le cui soluzioni non corrispondono ai punti di una retta. Dimostriamo che ciò non è possibile.
Consideriamo l'equazione $ax + by + c = 0$ e analizziamo i seguenti casi.

1. $\boldsymbol{a = 0 \wedge b \neq 0}$
L'equazione $ax + by + c = 0$ diventa

$$by + c = 0 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{c}{b}$$

e corrisponde a una retta parallela all'asse x.

Se $c = 0$, la retta è l'asse x.

2. $\boldsymbol{a \neq 0 \wedge b = 0}$
L'equazione diventa

$$ax + c = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{c}{a}$$

e corrisponde a una retta parallela all'asse y.

Se $c = 0$, la retta è l'asse y.

3. $\boldsymbol{a \neq 0 \wedge b \neq 0}$
L'equazione rimane nella forma $ax + by + c = 0$.
Consideriamo tre soluzioni qualsiasi $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ dell'equazione.
Si ha:

$$ax_1 + by_1 + c = 0,$$
$$ax_2 + by_2 + c = 0,$$
$$ax_3 + by_3 + c = 0.$$

Sottraendo la terza uguaglianza dalla prima e dalla seconda, otteniamo

$$a(x_1 - x_3) + b(y_1 - y_3) = 0 \rightarrow \frac{x_1 - x_3}{y_1 - y_3} = -\frac{b}{a},$$

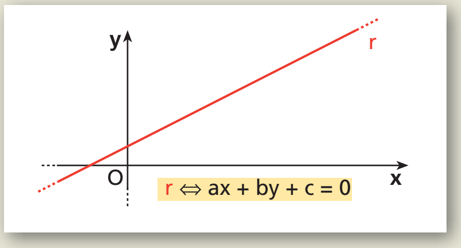
$$a(x_2 - x_3) + b(y_2 - y_3) = 0 \rightarrow \frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3} = -\frac{b}{a},$$

da cui, confrontando, si ha:

$$\frac{x_1 - x_3}{y_1 - y_3} = \frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3} \rightarrow \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3}.$$

Abbiamo ottenuto la condizione di allineamento, quindi le soluzioni dell'equazione lineare devono essere le coordinate dei punti di una retta.
I risultati finora ottenuti permettono di enunciare il seguente teorema.

TEOREMA
A ogni retta del piano cartesiano corrisponde un'equazione lineare in due variabili e, viceversa, a ogni equazione lineare in due variabili corrisponde una retta del piano cartesiano.



C'è quindi una *corrispondenza biunivoca* fra i punti di una retta e le soluzioni della corrispondente equazione lineare.

Cartesio
La geometria analitica si basa sulla corrispondenza biunivoca fra enti geometrici ed enti algebrici.
Il grande matematico e filosofo francese René Descartes (1596-1650), in italiano Cartesio, è stato l'ideatore di tale approccio. Per questo la geometria analitica è anche detta *geometria cartesiana*.
In *La geometria* Cartesio scriveva delle «scienze matematiche»: «pensai che per meglio studiarle in particolare, dovevo raffigurarle in forma di linee […] e per ricordarle e per comprenderne molte insieme, dovevo invece esprimerle con qualche cifra tra le più brevi possibili. In questo modo avrei colto tutto il meglio dell'analisi geometrica e dell'algebra e corretto i difetti dell'una e dell'altra».

La retta passante per due punti

La condizione di allineamento fornisce l'equazione di una retta, note le coordinate di due suoi punti.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

equazione della retta passante per i punti $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$.

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione della retta passante per i punti $A(-2; 5)$ e $B(1; -4)$:

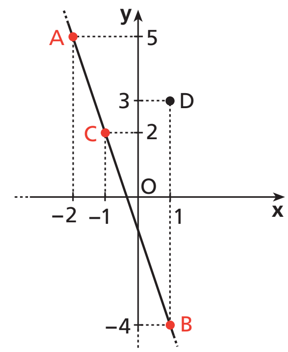
$$\frac{y-5}{-4-5} = \frac{x+2}{1+2} \quad \rightarrow \quad y - 5 = -3x - 6 \quad \rightarrow \quad y + 3x + 1 = 0.$$

Il punto $C(-1; 2)$ appartiene alla retta e le sue coordinate soddisfano l'equazione:

$$2 + 3 \cdot (-1) + 1 = 0.$$

Il punto $D(1; 3)$ non appartiene alla retta, le sue coordinate non soddisfano l'equazione:

$$3 + 3 \cdot 1 + 1 \neq 0.$$



4. LA FORMA ESPLICITA E IL COEFFICIENTE ANGOLARE

IN PRATICA
▶ Videolezione 12

Dalla forma implicita alla forma esplicita

L'equazione della retta che abbiamo determinato è scritta in forma implicita:

$\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ **equazione della retta in forma implicita.**

Se la retta non è parallela all'asse y, cioè $b \neq 0$, l'equazione esprime una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Esplicitiamo rispetto a y:

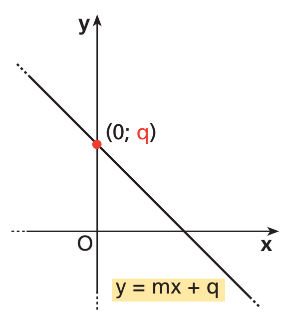
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Poniamo $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$. Otteniamo:

$\boldsymbol{y = mx + q}$ **equazione della retta in forma esplicita.**

Per $x = 0$ si ha $y = q$, quindi il coefficiente q è l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y e viene anche detto **ordinata all'origine**.
Il coefficiente m è detto **coefficiente angolare**, e vedremo fra poco perché.

- Nella forma implicita nessuna delle variabili è ricavata in funzione dell'altra.
- x è la variabile indipendente, y è la variabile dipendente.



ESEMPIO

Scriviamo in forma esplicita l'equazione $9x + 3y - 2 = 0$.
Ricaviamo y:

$$3y = -9x + 2 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{9}{3}x + \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad y = -3x + \frac{2}{3}.$$

Il coefficiente angolare è -3, il termine noto $\frac{2}{3}$.

A differenza dell'equazione in forma implicita, *l'equazione della retta in forma esplicita non è un'equazione generale*, in quanto, al variare di m e q, non si ottengono tutte le rette del piano: sono escluse le rette parallele all'asse y.

ESPLORAZIONE

I robot cartesiani

I robot cartesiani sono macchine della famiglia dei cosiddetti *sistemi cartesiani di movimento* (Cartesian Motion Systems) e permettono di realizzare processi industriali di precisione. Sono utilizzati in situazioni standard della lavorazione industriale.
Per tagliare, forare o sagomare metalli (ma anche altri tipi di materiali), è necessario essere in grado di seguire esattamente il profilo che si deve ottenere o realizzare un foro nella posizione giusta.
Allo stesso modo, in un processo del tipo *pick-and-place*, i robot collocano con precisione degli oggetti in una posizione determinata.
Per fare queste operazioni, i robot agiscono attraverso il movimento di due bracci tra loro perpendicolari che possono traslare indipendentemente: l'uno in orizzontale e verticale, l'altro a destra e sinistra.
Le istruzioni che vengono date al robot, pertanto, sono espresse in termini di coordinate cartesiane dei punti del piano nei quali il robot deve fare l'operazione a cui è predisposto. Da qui il nome di **robot cartesiano**.
Il robot sa di essere in un sistema cartesiano formato dai due bracci perpendicolari, che sono quindi rispettivamente i suoi assi delle ascisse e delle ordinate. In questo sistema descrive ogni punto per mezzo di due coordinate, che sono le distanze dai due bracci. Se, per esempio, il robot deve effettuare un taglio in una lamiera, gli vengono forniti l'equazione della retta sulla quale giace il taglio e i punti iniziale e finale che limitano il segmento di fenditura. Il robot solleva quindi lo strumento rispetto al piano di lavoro, lo cala nel punto iniziale e si muove in linea retta fino al punto finale, leggendo delle istruzioni date sotto forma di equazione cartesiana.

Attività

Coordinate in aula

- Definisci un sistema di riferimento cartesiano per mezzo di due pareti della tua aula e trova le coordinate di alcuni punti nella stanza. Scrivi poi l'equazione della retta che si ottiene prolungando uno dei lati lunghi del tuo banco. Come puoi descrivere con le coordinate cartesiane la superficie della cattedra?

Da leggere

- Yurij Castelfranchi, Oliviero Stock, *Macchine come noi*, Laterza, 2000.
- Nicola Nosengo, *L'estinzione dei tecnosauri*, Sironi, 2003.

Cerca nel Web:
equazioni lineari, disequazioni lineari, rappresentazione cartesiana

Il coefficiente angolare note le coordinate di due punti

Consideriamo la retta di equazione $y = 2x - 1$ e due suoi punti, $A(2; 3)$ e $B(3; 5)$. Calcoliamo il rapporto fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse dei due punti:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-3}{3-2} = 2.$$

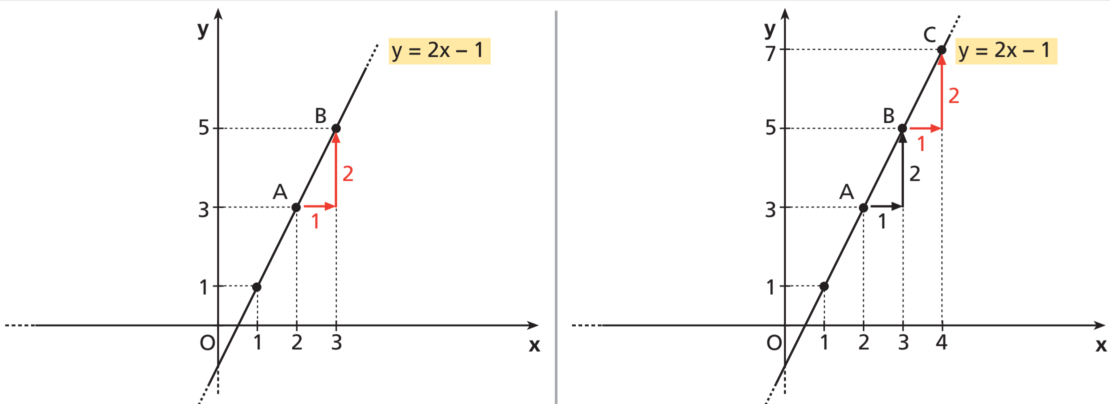
Anche i punti $B(3; 5)$ e $C(4; 7)$ appartengono alla retta. Eseguiamo lo stesso calcolo.

$$\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{7-5}{4-3} = 2.$$

In ambedue i casi il rapporto calcolato è uguale al coefficiente angolare 2 della retta.

Interpretiamo questo risultato dicendo che il coefficiente angolare dà informazioni sulla «pendenza» della retta. Osserviamo a questo proposito la figura 9.

Avremmo ottenuto lo stesso risultato scegliendo una qualsiasi altra coppia di punti appartenenti alla retta.

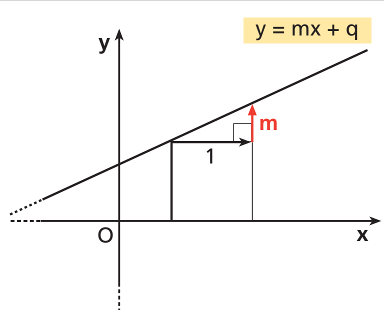


a. I punti $A(2; 3)$ e $B(3; 5)$ appartengono alla retta $y = 2x - 1$. Per andare dal punto A al punto B, possiamo spostarci prima verso destra di 1 unità, poi verso l'alto di 2 unità.

b. Per andare dal punto $B(3; 5)$ al punto $C(4; 7)$ possiamo di nuovo spostarci prima verso destra di 1 unità, poi verso l'alto di 2 unità. È come se salissimo una scala con gradini profondi 1 e alti 2, cioè alti quanto il coefficiente angolare.

▲ **Figura 9**

Se due punti sulla retta nella figura 10 hanno ascisse che differiscono di una unità, per passare dal punto di ascissa minore a quello di ascissa maggiore occorre aumentare l'ordinata di una quantità uguale al coefficiente angolare.



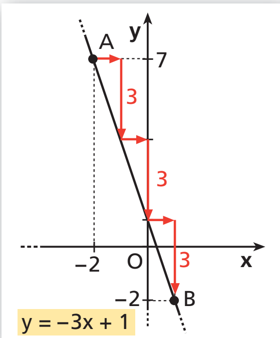
► **Figura 10** Quando l'ascissa aumenta di 1 unità, l'ordinata aumenta di *m*.

Il coefficiente angolare può essere un numero negativo e il suo significato è analogo a quello del coefficiente angolare positivo.

ESEMPIO

Consideriamo la retta di equazione $y = -3x + 1$ (figura 11) e i suoi due punti $A(-2; 7)$ e $B(1; -2)$.

▼ **Figura 11** Quando l'ascissa aumenta di 1, l'ordinata aumenta di m. Poiché $m = -3$, un aumento di -3 equivale a una diminuzione di 3.



Osserviamo che anche in questo caso il coefficiente angolare è dato dal rapporto $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-7}{1-(-2)} = \frac{-9}{3} = -3.$$

Ricaviamo ora in generale il coefficiente angolare m di una retta di equazione $y = mx + q$ in funzione delle coordinate di due suoi punti distinti, $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$.

Essendo A un punto della retta, le sue coordinate soddisfano l'equazione

$$y_1 = mx_1 + q;$$

analogamente, per B, $y_2 = mx_2 + q$.
Sottraendo membro a membro la prima equazione dalla seconda:

$$y_2 - y_1 = mx_2 - mx_1 \quad \rightarrow \quad y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \quad \rightarrow \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

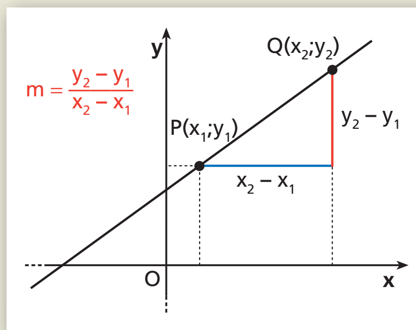
● Se una retta è parallela all'asse y, si ha $x_1 = x_2$, quindi m non esiste.

PROPRIETÀ

Coefficiente angolare e coordinate di due punti

Il coefficiente angolare di una retta non parallela all'asse y è il rapporto fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di due punti distinti della retta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



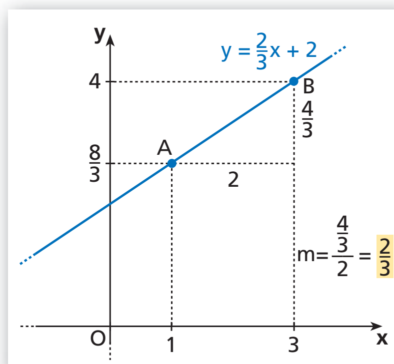
ESEMPIO

I punti $A\left(1; \dfrac{8}{3}\right)$ e $B(3; 4)$ appartengono alla retta di equazione:

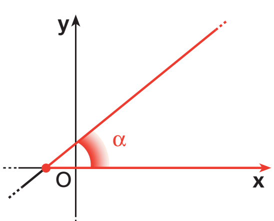
$$y = \frac{2}{3}x + 2.$$

Il coefficiente angolare $\dfrac{2}{3}$ può essere calcolato con il rapporto:

$$m = \frac{4 - \frac{8}{3}}{3-1} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

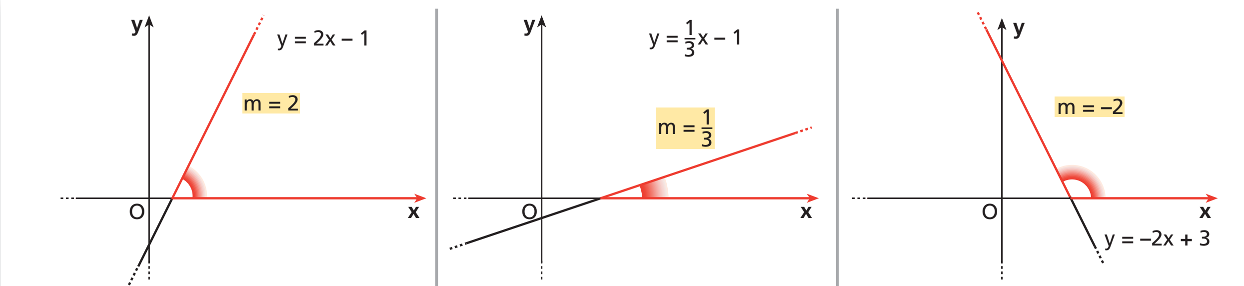


▲ **Figura 12** Il coefficiente angolare è il rapporto fra $y_B - y_A$ e $x_B - x_A$.



Il coefficiente angolare e la pendenza

Chiamiamo **angolo fra retta e asse *x*** l'angolo α che ha per vertice il loro punto di intersezione e come lati la semiretta costituita dai punti della retta con ordinata positiva o nulla e la semiretta sull'asse x di verso positivo (figura a lato).
Il coefficiente angolare fornisce informazioni su tale angolo, ossia sulla «pendenza» della retta rispetto all'asse x (figura 13).



a. $m=2>0$. L'angolo fra retta e asse x è acuto.

b. $m=\frac{1}{3}<2$. L'angolo fra retta e asse x è ancora acuto ma minore del precedente.

c. $m=-2<0$. L'angolo fra retta e asse x è ottuso.

▲ **Figura 13** Il coefficiente angolare e la pendenza di una retta.

L'equazione di una retta passante per un punto e di coefficiente angolare noto

Scrivendo l'equazione della retta passante per due punti $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ nella forma $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$, si ha:

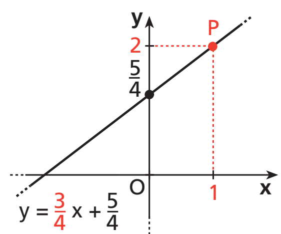
$$y-y_1=m\cdot(x-x_1)$$ **equazione della retta di coefficiente angolare m passante per $P(x_1; y_1)$.**

- Basta moltiplicare entrambi i membri per y_2-y_1.
- Abbiamo definito $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

ESEMPIO

L'equazione della retta di coefficiente angolare $m=\frac{3}{4}$ e passante per $P(1; 2)$ è:

$$y-2=\frac{3}{4}\cdot(x-1) \quad \rightarrow \quad y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}.$$



L'equazione di una retta passante per l'origine

Se $q=0$, l'equazione $y=mx+q$ diventa $y=mx$, che è soddisfatta dalle coordinate dell'origine $O(0; 0)$. Abbiamo quindi:

$$y=mx$$ **equazione di una retta passante per l'origine.**

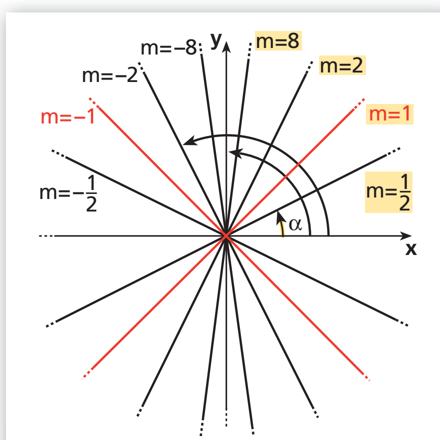
- In forma implicita l'equazione generica di una retta passante per l'origine è $ax+by=0$.

Dall'equazione possiamo ricavare

$$m=\frac{y}{x},$$

cioè il coefficiente angolare di una retta passante per l'origine è il rapporto costante fra l'ordinata e l'ascissa di un suo punto qualsiasi diverso dall'origine stessa.

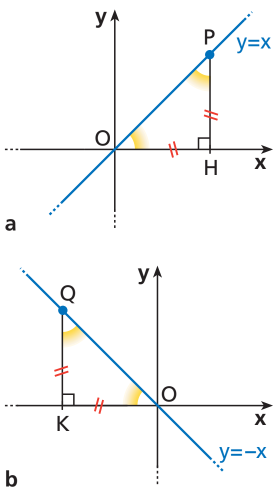
- Due variabili che hanno rapporto costante si dicono **direttamente proporzionali**.



▶ **Figura 14** Il coefficiente angolare m al variare dell'angolo α.

Nella figura 14 possiamo osservare l'andamento di m al variare dell'angolo α mediante alcuni esempi:

- se l'angolo è acuto, m cresce rapidamente al crescere dell'angolo assumendo valori sempre maggiori quando α si avvicina all'angolo retto;
- se l'angolo è retto, non esiste un corrispondente valore di m in quanto l'equazione $x = 0$ dell'asse y non è esprimibile nella forma $y = mx$;
- se l'angolo è ottuso, m è negativo e assume valori sempre minori all'avvicinarsi di α all'angolo retto.



Casi particolari

Se $m = 1$, i punti della retta hanno l'ascissa uguale all'ordinata (figura *a*). Il triangolo OHP è rettangolo e isoscele, quindi $H\widehat{O}P$ è metà dell'angolo retto:

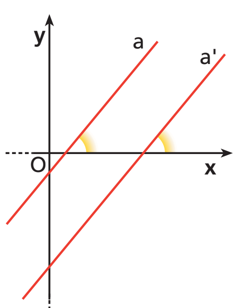
$y = x$ **equazione della bisettrice del I e III quadrante.**

Analogamente, se $m = -1$ (figura *b*), il triangolo OKQ è rettangolo e isoscele e l'angolo $K\widehat{O}Q$ è metà dell'angolo retto:

$y = -x$ **equazione della bisettrice del II e IV quadrante.**

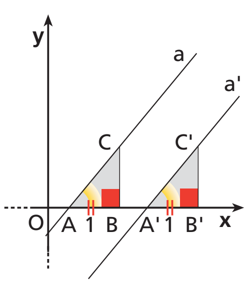
5. LE RETTE PARALLELE E LE RETTE PERPENDICOLARI

Le rette parallele



Abbiamo visto che il coefficiente angolare indica la «pendenza» di una retta rispetto all'asse x.
Poiché due rette parallele formano con l'asse x due angoli congruenti, ci aspettiamo allora che due rette parallele abbiano lo stesso coefficiente angolare.

Consideriamo le rette parallele a e a', come nella figura a lato. Dimostriamo che hanno lo stesso coefficiente angolare m.



DIMOSTRAZIONE

Consideriamo il punto di intersezione A della retta a con l'asse x; prendiamo sullo stesso asse il punto B distante 1 da A. Consideriamo poi sulla retta a il punto C con la stessa ascissa di B.

In modo analogo, consideriamo A' intersezione di a' con l'asse x, B' distante 1 da A' e C' su a' con la stessa ascissa di B'.

I triangoli rettangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti perché hanno $AB \cong A'B'$ e $\hat{A} \cong \hat{A}'$ (perché angoli corrispondenti formati dalle parallele a e a' tagliate dall'asse x, trasversale).

In particolare,

$$BC \cong B'C'.$$

La misura di BC dà l'aumento dell'ordinata corrispondente all'aumento di una unità dell'ascissa, quindi il suo valore m è il coefficiente angolare di a.

Essendo $BC \cong B'C'$, è anche $\overline{B'C'} = m$.
La misura di $B'C'$ dà l'aumento dell'ordinata corrispondente all'aumento di una unità dell'ascissa, ossia il coefficiente angolare della retta a', quindi le due rette hanno coefficiente angolare uguale.

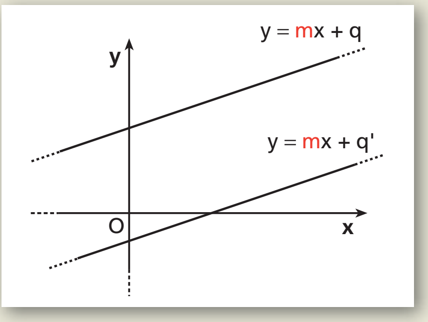
È possibile dimostrare che, viceversa, se due rette hanno lo stesso coefficiente angolare, allora sono parallele. Vale pertanto il seguente teorema.

TEOREMA

Rette parallele

Due rette (non parallele all'asse y) sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare:

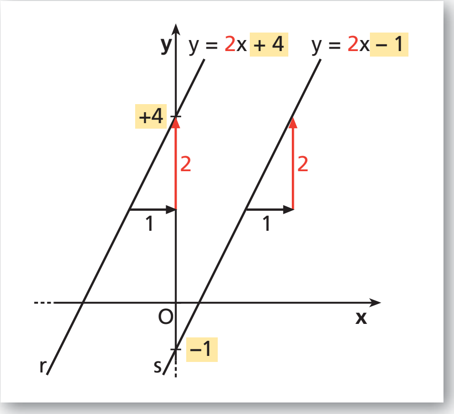
$$m = m'.$$



ESEMPIO

Sono parallele le due rette di equazioni

$$r: \quad y = 2x + 4,$$
$$s: \quad y = 2x - 1.$$



▶ **Figura 15** Le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare 2 e differiscono solo per il valore di q. La retta r interseca l'asse y in (0; 4), la retta s lo interseca in (0; − 1).

Se le rette r e s, non parallele agli assi, hanno equazioni in forma implicita:

$$r: ax + by + c = 0, \qquad s: a'x + b'y + c' = 0,$$

i loro coefficienti angolari sono:

$$m = -\frac{a}{b}; \quad m' = -\frac{a'}{b'}.$$

Quindi, r e s sono parallele se e solo se:

$$m = m' \Leftrightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab' = a'b \Leftrightarrow ab' - a'b = 0.$$

In conclusione:

$$\boldsymbol{r \,//\, s \quad \Leftrightarrow \quad m = m' \quad \Leftrightarrow \quad ab' - a'b = 0.}$$

● Per la dimostrazione del teorema inverso, essendo $m = m'$ per ipotesi, $BC \cong B'C'$, quindi i triangoli sono congruenti e, in particolare, $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$, da cui $a \,//\, a'$.

● Per le rette parallele all'asse y il teorema non vale, perché il coefficiente angolare non è definito.

ESEMPIO

Le rette di equazioni

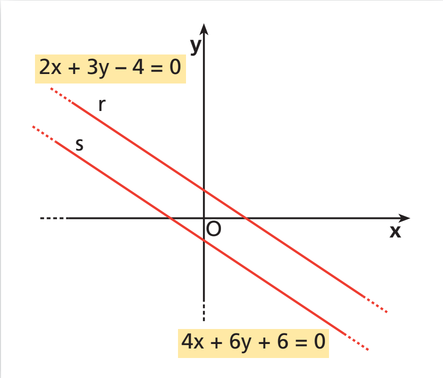
$$r:\ 2x + 3y - 4 = 0,$$

$$s:\ 4x + 6y + 6 = 0$$

sono parallele perché:

$$ab' - a'b = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 0.$$

▶ Figura 16



La condizione di parallelismo $ab' - a'b = 0$ è valida anche per rette parallele agli assi cartesiani.

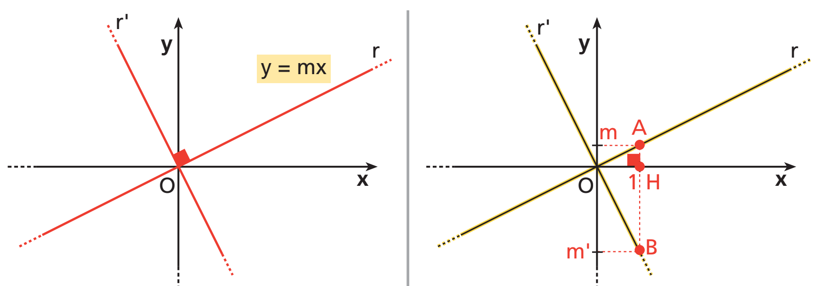
Le rette perpendicolari

Consideriamo due rette perpendicolari r e r', passanti per l'origine, come in figura 17*a*, e supponiamo che il coefficiente angolare di r sia m.

Dimostriamo che il coefficiente angolare m' di r' è $m' = -\dfrac{1}{m}$.

DIMOSTRAZIONE

▶ Figura 17



a. Tracciamo la retta *r*: *y* = *mx* e la sua perpendicolare *r*' passante per l'origine.

b. Scegliamo su *r* il punto *A*(1; *m*). Tracciamo da *A* la perpendicolare all'asse *x* che incontra l'asse stesso nel punto *H*(1; 0) e la retta *r*' nel punto *B*(1; *m*').

Il triangolo OAB è un triangolo rettangolo in O perché r è perpendicolare per ipotesi a r'.

Per costruzione il segmento OH è perpendicolare al lato AB, quindi è l'altezza relativa all'ipotenusa. Scriviamo la relazione che esprime il secondo teorema di Euclide:

$$\overline{OH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{BH}.$$

Poiché

$$\overline{OH} = 1,\ \overline{AH} = |m| \text{ e } \overline{BH} = |m'|,$$

allora:

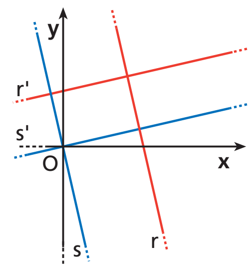
$$1 = |m \cdot m'|.$$

● Secondo teorema di Euclide: in un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Se la retta r appartiene al primo e terzo quadrante, la sua perpendicolare r' appartiene al secondo e al quarto quadrante o viceversa, e quindi i coefficienti angolari di tali rette hanno segno opposto. Il prodotto dei coefficienti angolari deve essere negativo, e pertanto possiamo scrivere:

$$m \cdot m' = -1 \to m' = -\frac{1}{m}.$$

Poiché vale anche l'inverso del secondo teorema di Euclide, è vero anche l'inverso del teorema appena dimostrato: due rette aventi i coefficienti angolari l'uno antireciproco dell'altro sono perpendicolari.



Questi teoremi valgono anche se le rette r e r' non passano per l'origine. In tal caso, infatti, ci possiamo ricondurre al caso di rette per l'origine come segue.

Consideriamo le rette s e s' per l'origine e parallele rispettivamente a r e r'. Le rette r e r' sono perpendicolari se e solo se lo sono le rette s e s'.

Se r ha equazione $y = mx + q$ e r' ha equazione $y = -\frac{1}{m}x + q'$, allora s ha equazione $y = mx$ e s' ha equazione $y = -\frac{1}{m}x$. Poiché s è perpendicolare a s', anche r è perpendicolare a r'.

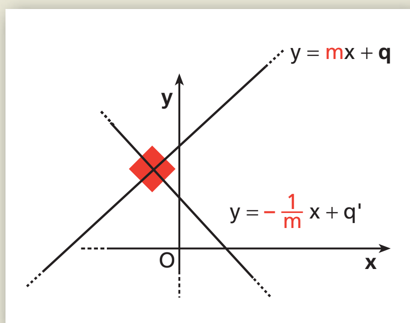
Vale dunque il seguente teorema.

TEOREMA

Rette perpendicolari

Due rette (non parallele agli assi) sono perpendicolari se e solo se il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1:

$$mm' = -1.$$



● Il teorema non vale per rette parallele agli assi, poiché per le rette parallele all'asse y il coefficiente angolare non è definito.

ESEMPIO

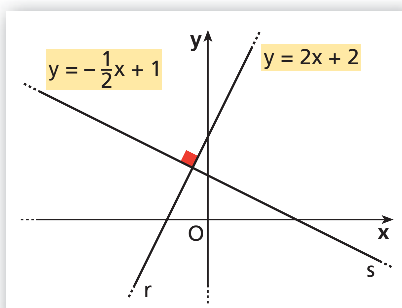
Le rette di equazioni

$$r\text{: } y = 2x + 2, \qquad s\text{: } y = -\frac{1}{2}x + 1$$

sono perpendicolari perché:

$$m \cdot m' = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

▶ Figura 18



Se le rette r e s, non parallele agli assi, hanno equazioni in forma implicita

$$r\text{: } ax + by + c = 0, \qquad r'\text{: } a'x + b'y + c' = 0,$$

i loro coefficienti angolari sono:

$$m = -\frac{a}{b}; \qquad m' = -\frac{a'}{b'}.$$

Quindi r e r' sono perpendicolari se e solo se:

$$m = -\frac{1}{m'} \Leftrightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{1}{-\frac{a'}{b'}} \Leftrightarrow -\frac{a}{b} = \frac{b'}{a'} \Leftrightarrow aa' + bb' = 0.$$

In conclusione:

$$\boldsymbol{r \perp s \quad \Leftrightarrow \quad m = -\frac{1}{m'} \quad \Leftrightarrow \quad aa' + bb' = 0.}$$

ESEMPIO

Le rette di equazioni

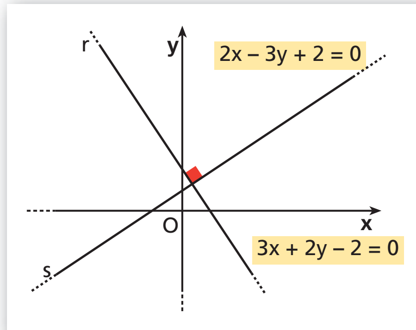
r: $3x + 2y - 2 = 0$,

s: $2x - 3y + 2 = 0$

sono perpendicolari perché:

$aa' + bb' = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0.$

► Figura 19



La condizione di perpendicolarità $aa' + bb' = 0$ è valida anche per rette parallele agli assi cartesiani.

6. LA POSIZIONE RECIPROCA DI DUE RETTE

● Dalla geometria euclidea sappiamo che due rette complanari possono essere:
- incidenti in un punto;
- parallele e distinte;
- coincidenti.

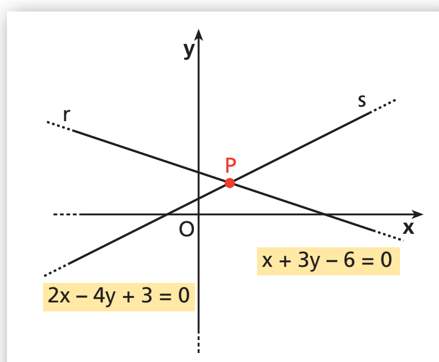
Consideriamo le rette r e s di equazioni:

$$r: x + 3y - 6 = 0, \qquad s: 2x - 4y + 3 = 0.$$

Stabiliamo la loro posizione reciproca.

Ricerchiamo il punto P di intersezione delle due rette.
Le coordinate del punto P devono soddisfare entrambe le equazioni, ossia devono essere soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ 2x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$



► **Figura 20** Disegniamo le due rette. Le rette non sono parallele perché $1 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 \neq 0$, e quindi si incontrano in un punto P.

● Un sistema lineare di due equazioni in due incognite può avere una sola soluzione (sistema determinato), nessuna soluzione (sistema impossibile) o infinite soluzioni (sistema indeterminato).

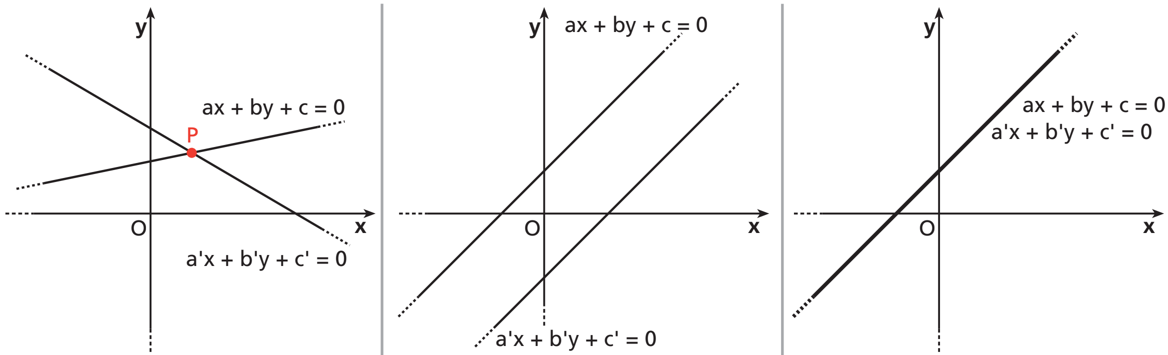
Risolviamo il sistema per sostituzione.

$$\begin{cases} x = -3y + 6 \\ 2 \cdot (-3y + 6) - 4y + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3 \cdot \frac{3}{2} + 6 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Le rette r e s si intersecano nel punto $P\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

In generale, la posizione reciproca di due rette *r* e *s* è collegata al sistema formato dalle equazioni delle due rette:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$



a. Le rette sono **incidenti**: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Leftrightarrow m \neq m'$. Il sistema è **determinato** e ammette per soluzione le coordinate di P.

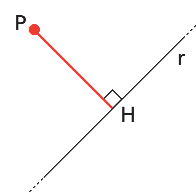
b. Le rette sono **parallele e distinte**: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Leftrightarrow (m = m') \wedge (q \neq q')$. Il sistema è **impossibile**.

c. Le rette sono **coincidenti**: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow (m = m') \wedge (q = q')$. Il sistema è **indeterminato**.

▲ Figura 21

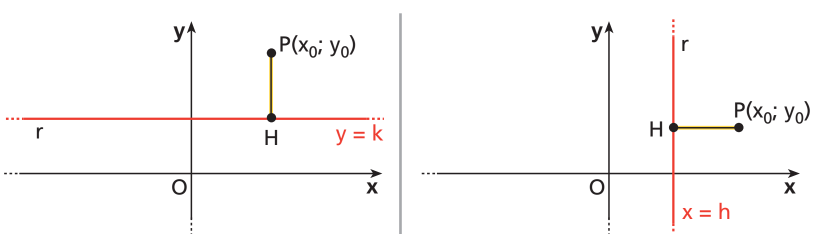
7. LA DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA

Mandiamo da un punto P la perpendicolare a una retta r. Chiamiamo H la proiezione ortogonale di P su r, ossia il punto di intersezione fra la retta stessa e la perpendicolare. La misura del segmento di perpendicolare PH è la **distanza del punto *P* dalla retta *r***.



Consideriamo un punto $P(x_0; y_0)$ e una retta r. Esaminiamo due casi.

1. La retta r è parallela all'asse x o all'asse y. In questo caso la distanza di P da r è il valore assoluto della differenza delle ordinate o delle ascisse di P e H.



a. $\overline{PH} = |y_0 - k|$.

b. $\overline{PH} = |x_0 - h|$.

◄ Figura 22

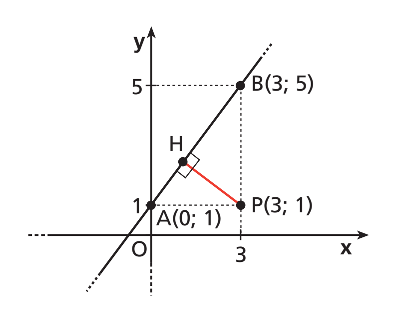
2. La retta r non è parallela agli assi.

ESEMPIO

Dato il punto $P(3; 1)$, calcoliamo la sua distanza $\overline{PH}$ dalla retta di equazione $4x - 3y + 3 = 0$ (figura 23).

Per farlo, tracciamo da P le parallele agli assi fino a incontrare la retta nei punti A e B. Individuiamo così il triangolo rettangolo APB, di cui PH è l'altezza relativa all'ipotenusa.

Il punto A ha la stessa ordinata di P. Sostituendola nell'equazione della retta, possiamo determinare la sua ascissa:



▶ Figura 23

$$4x - 3(1) + 3 = 0 \rightarrow x = 0.$$

In modo analogo, poiché l'ascissa di B è uguale a quella di P, si può ricavare l'ordinata di B, che è 5.

Otteniamo quindi:

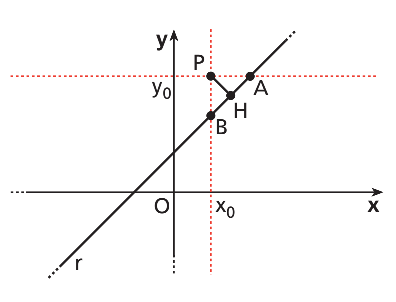
$$A(0; 1), \qquad B(3; 5).$$

Il doppio dell'area di APB si può ottenere moltiplicando le misure dei due cateti AP e PB. Se dividiamo poi per la misura dell'ipotenusa AB, otteniamo la misura dell'altezza PH relativa all'ipotenusa, ossia la misura cercata:

$$\overline{PH} = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

Utilizzando lo stesso procedimento dell'esempio, cerchiamo una formula generale che permetta di calcolare la distanza di un punto $P(x_0; y_0)$ da una retta r di equazione:

$$ax + by + c = 0, \qquad \text{con } a, b \neq 0.$$



▶ **Figura 24** Dal punto $P(x_0; y_0)$ tracciamo le parallele all'asse x e all'asse y, che incontrano la retta r rispettivamente nei punti A e B. Indichiamo con PH l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo PAB.

Determiniamo $\overline{PH}$ mediante la formula $\overline{PH} = \dfrac{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}{\overline{AB}}$.

Il punto A ha la stessa ordinata y_0 di P. Sostituendola nell'equazione di r, determiniamo la sua ascissa:

$$ax + by_0 + c = 0 \rightarrow ax = -by_0 - c \rightarrow x = -\frac{by_0 + c}{a}.$$

Le coordinate del punto A sono $\left(-\dfrac{by_0 + c}{a}; y_0\right)$.

In modo analogo, poiché l'ascissa di B è uguale a quella di P, ricaviamo l'ordinata di B:

$$ax_0 + by + c = 0 \rightarrow by = -ax_0 - c \rightarrow y = -\frac{ax_0 + c}{b}.$$

Le coordinate del punto B sono $\left(x_0; -\frac{ax_0 + c}{b}\right)$.

Calcoliamo la misura dei segmenti $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ e $\overline{AB}$:

$$\overline{PA} = \left| x_0 - \left(-\frac{by_0 + c}{a}\right)\right| = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{a}\right|$$

$$\overline{PB} = \left| y_0 - \left(-\frac{ax_0 + c}{b}\right)\right| = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{b}\right|$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\left[x_0 - \left(-\frac{by_0 + c}{a}\right)\right]^2 + \left[y_0 - \left(-\frac{ax_0 + c}{b}\right)\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{ax_0 + by_0 + c}{a}\right)^2 + \left(\frac{ax_0 + by_0 + c}{b}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2} + \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{b^2}} =$$

$$= \sqrt{(ax_0 + by_0 + c)^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} = |ax_0 + by_0 + c| \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}} =$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|ab|} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Sostituiamo nella formula di $\overline{PH}$ le espressioni trovate e semplifichiamo:

$$\overline{PH} = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{\left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{a}\right| \cdot \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{b}\right|}{\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|ab|} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{\cancel{|ax_0 + by_0 + c|}}{|\cancel{a}|} \cdot \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|\cancel{b}|} \cdot \frac{|\cancel{a}| \cdot |\cancel{b}|}{\cancel{|ax_0 + by_0 + c|} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ricorda che $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ e che $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

In generale, la **distanza di un punto $P(x_0; y_0)$ da una retta di equazione $ax + by + c = 0$** è data dalla formula:

$$\boxed{d = \overline{PH} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.}$$

Si utilizza l'equazione della retta in forma implicita.

ESEMPIO

Calcoliamo la distanza già determinata nell'esempio precedente usando la formula appena enunciata.

Poiché abbiamo $P(3; 1)$ e la retta di equazione $4x - 3y + 3 = 0$, otteniamo:

$$d = \frac{|4 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|12 - 3 + 3|}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}.$$

IN PRATICA
▶ Videolezione 13

8. I LUOGHI GEOMETRICI E LA RETTA

Un **luogo geometrico** è l'insieme di *tutti e soli* i punti che godono di una proprietà, detta **proprietà caratteristica** del luogo.

Per studiare nel piano cartesiano un luogo geometrico si cerca un'equazione in due incognite $f(x; y) = 0$ le cui soluzioni sono le coordinate di tutti e soli i punti del luogo:

$$\boldsymbol{P(x_0; y_0) \text{ appartiene al luogo} \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0; y_0) = 0.}$$

L'equazione $f(x; y) = 0$ è detta **equazione del luogo**.

Una retta può essere vista come il luogo dei punti che godono della proprietà di allineamento. Come abbiamo dimostrato, l'equazione di questo luogo è un'equazione lineare.

L'asse di un segmento

L'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento stesso passante per il suo punto medio.

ESEMPIO

Scriviamo l'equazione dell'asse del segmento di estremi $A(-1; 5)$ e $B(3; 1)$.
La retta AB ha equazione:

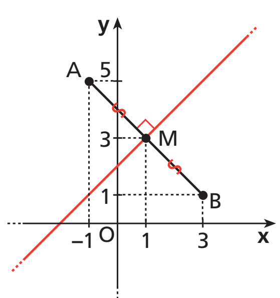
$$\frac{y-5}{1-5} = \frac{x+1}{3+1} \quad \rightarrow \quad y = -x + 4.$$

L'asse perpendicolare ad AB, quindi, ha coefficiente angolare 1.
Il punto medio M di AB ha coordinate:

$$x_M = \frac{-1+3}{2} = 1; \qquad y_M = \frac{5+1}{2} = 3.$$

L'asse è la retta passante per M e di coefficiente angolare 1 (figura *a*):

$$y - 3 = 1 \cdot (x - 1) \quad \rightarrow \quad y = x + 2.$$



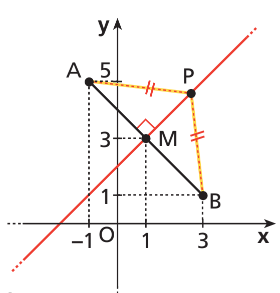
a

L'equazione dell'asse può anche essere ricavata ricordando che **l'asse è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento**.

ESEMPIO

Ricaviamo l'equazione dell'asse del segmento AB dell'esempio precedente considerando che l'asse è il luogo dei punti $P(x; y)$ tali che $\overline{PA} = \overline{PB}$.
Determiniamo le due distanze e uguagliamo:

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}.$$



b

Poiché i due radicali sono positivi, eleviamo al quadrato entrambi i membri e svolgiamo i calcoli:

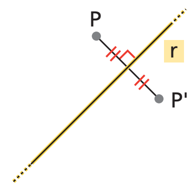
$$\cancel{x^2} + 2x + \cancel{1} + \cancel{y^2} - 10y + 25 = \cancel{x^2} - 6x + 9 + \cancel{y^2} - 2y + \cancel{1}$$

$$y = x + 2.$$

La simmetria assiale

Fissata nel piano una retta r, la **simmetria assiale rispetto alla retta r** è quella isometria che a ogni punto del piano P fa corrispondere il punto P' del semipiano opposto rispetto a r, in modo che r sia l'asse del segmento PP', ossia:

- r passa per il punto medio di PP';
- PP' è perpendicolare alla retta r.

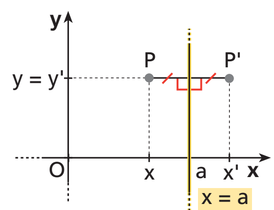


La retta r è detta **asse di simmetria**.

Nel piano cartesiano prendiamo in esame le seguenti simmetrie assiali, fornendo (senza dimostrarle) le relative equazioni.

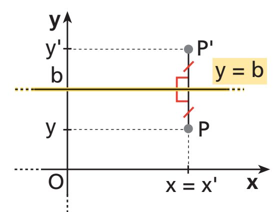
a. Simmetria con asse $x = a$ (asse parallelo all'asse y)

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$$



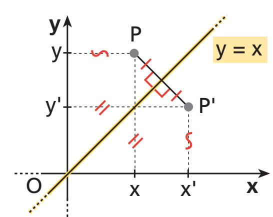
b. Simmetria con asse $y = b$ (asse parallelo all'asse x)

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$



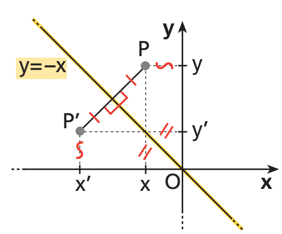
c. Simmetria con asse $y = x$ (bisettrice del primo e terzo quadrante)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$



d. Simmetria con asse $y = -x$ (bisettrice del secondo e quarto quadrante)

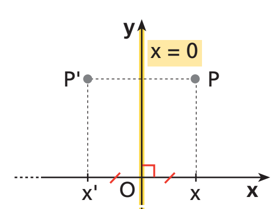
$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$



e. Simmetria con asse $x = 0$ (asse y)

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Due punti simmetrici rispetto all'asse y hanno ascisse opposte e la stessa ordinata.

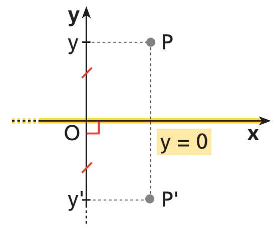


I casi *e* e *f* sono casi particolari: si ottengono dai primi due ponendo rispettivamente a e b uguali a 0.

f. Simmetria con asse $y = 0$ (asse x)

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Due punti simmetrici rispetto all'asse x hanno la stessa ascissa e ordinate opposte.



● In una trasformazione geometrica i punti uniti sono quelli che hanno per immagine se stessi.

Punti uniti

Si può dimostrare che **in una simmetria assiale i punti uniti sono tutti e soltanto quelli dell'asse**.

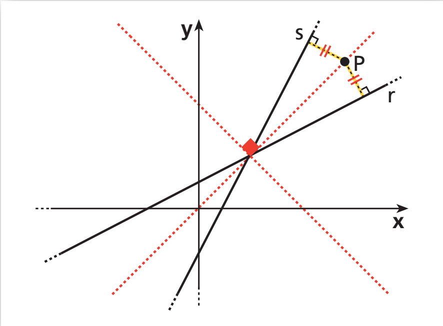
Le bisettrici degli angoli formati da due rette

La bisettrice di un angolo è la semiretta uscente dal vertice che divide l'angolo in due angoli congruenti; essa è **il luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo**.

Consideriamo due rette r e s, non parallele tra loro, di equazioni:

$$r: \quad ax + by + c = 0,$$

$$s: \quad a'x + b'y + c' = 0.$$



▶ **Figura 25** Le rette r e s si intersecano formando quattro angoli a due a due opposti al vertice. Tracciamo le bisettrici di tali angoli. Si ottengono due rette perpendicolari tra loro.

Per determinare l'equazione delle due bisettrici, consideriamo un generico punto $P(x; y)$. Esso appartiene a una bisettrice se e solo se ha la stessa distanza dalle rette r e s.

Utilizzando la formula della distanza di un punto da una retta, si ha

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}, \text{ cioè:}$$

$$\boldsymbol{\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}}.$$

● Due numeri reali, a e b, hanno lo stesso valore assoluto se sono uguali oppure opposti, cioè:

$$|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b.$$

Svolgendo i calcoli si ottengono le equazioni delle due rette bisettrici.

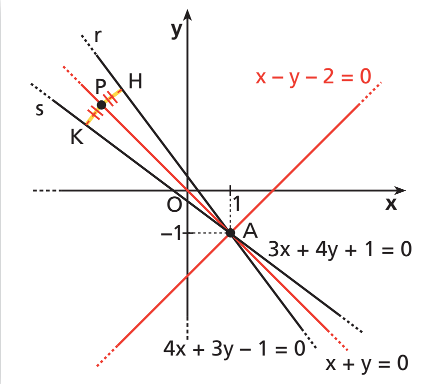
ESEMPIO

Consideriamo le rette r e s di equazioni

$$r: 4x + 3y - 1 = 0,$$

$$s: 3x + 4y + 1 = 0.$$

Vogliamo determinare l'equazione delle bisettrici degli angoli formati dalle due rette.



▶ **Figura 26** Tracciamo le rette r e s che si intersecano nel punto $A(1; -1)$. Tali rette formano quattro angoli a due a due opposti al vertice. Un punto P su una bisettrice è equidistante dalle due rette.

Se il punto $P(x; y)$ è un generico punto di una bisettrice, allora deve avere la stessa distanza dalle rette r e s, cioè: $\overline{PH} = \overline{PK}$. Si ha:

$$\frac{|4x + 3y - 1|}{5} = \frac{|3x + 4y + 1|}{5} \to |4x + 3y - 1| = |3x + 4y + 1|.$$

Questa equazione ha per soluzioni quelle delle due equazioni

$4x + 3y - 1 = \pm(3x + 4y + 1)$, cioè:

$4x + 3y - 1 = -(3x + 4y + 1) \vee 4x + 3y - 1 = 3x + 4y + 1$

$x + y = 0 \vee x - y - 2 = 0.$

Le bisettrici degli angoli formati da r e s hanno per equazioni:

$x + y = 0,\ x - y - 2 = 0.$

Dalle equazioni ottenute, osserviamo che le due bisettrici sono perpendicolari. Questo è sempre vero? Perché?

9. I FASCI DI RETTE

IN PRATICA
▶ Videolezione 14

Il fascio proprio

L'insieme di tutte le rette del piano che passano per uno stesso punto P si chiama **fascio proprio** di rette per P.

Il punto P comune a tutte le rette del fascio si chiama **centro del fascio**.

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione del fascio di rette di centro $P(2; 4)$.

Se una retta generica $y = mx + q$ deve passare per P, occorre che le coordinate di P soddisfino l'equazione, ossia

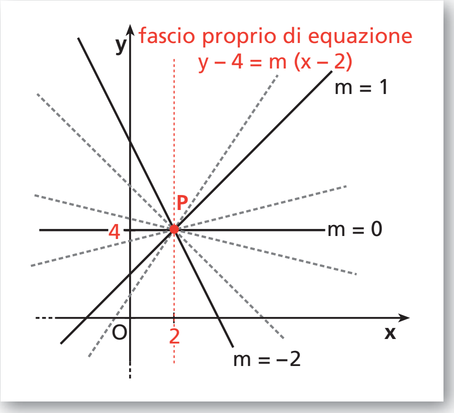
$4 = m \cdot 2 + q.$

Ricaviamo q:

$q = 4 - m \cdot 2.$

Sostituendo tale espressione a q nell'equazione generica, otteniamo:

$y = mx + 4 - 2m.$



◀ **Figura 27** Nel fascio di rette $y - 4 = m(x - 2)$, al variare di m, otteniamo tutte le rette che passano per $P(2; 4)$, tranne quella parallela all'asse y, perché per essa non c'è un corrispondente valore di m.

Così facendo, abbiamo già ottenuto l'equazione in forma esplicita di una generica retta del fascio. Tuttavia la riscriviamo nella forma

$y - 4 = m(x - 2),$

per mettere in evidenza, nell'equazione, le coordinate (2; 4) del centro.
Abbiamo trovato l'equazione del fascio di rette di centro $P(2; 4)$. Per ogni valore reale che attribuiamo a m otteniamo una retta del fascio:

- per $m = 1$ abbiamo la retta $y - 4 = x - 2$, cioè $y = x + 2$;
- per $m = -2$ la retta $y - 4 = -2x + 4$, cioè $y = -2x + 8$;
- per $m = 0$ la parallela all'asse x, $y = 4$ e così via.

L'equazione della parallela all'asse y è $x = 2$, ma non esiste alcun valore di m che, sostituito nell'equazione del fascio, fornisca tale equazione.
Pertanto, per avere tutte le rette del fascio proprio per P, dobbiamo aggiungere all'equazione del fascio l'equazione della parallela all'asse y per P:

$y - 4 = m(x - 2)$ (rette non parallele all'asse y);

$x = 2$ (retta parallela all'asse y).

In generale, dato un punto P di coordinate $(x_1; y_1)$, il **fascio di rette di centro P** ha equazione:

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}.$$

Al variare di m si ottengono tutte le rette del fascio passanti per P, tranne la parallela all'asse y, che ha equazione $x = x_1$.
Pertanto, il **fascio completo** è descritto dalle equazioni:

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1) \vee x = x_1}, \quad \text{con } m \in \mathbb{R}.$$

Il fascio improprio

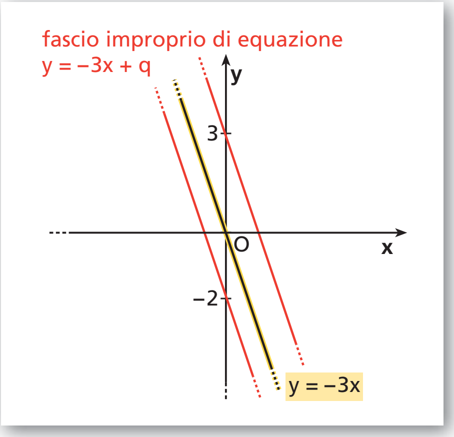
Consideriamo una retta r del piano: l'insieme formato da r e da tutte le rette a essa parallele si chiama **fascio improprio** di rette parallele a r.
r si chiama retta **base** del fascio.

ESEMPIO

L'equazione

$$y = -3x + q$$

rappresenta, al variare di q, tutte le rette del piano che hanno coefficiente angolare -3, cioè è l'**equazione di un fascio improprio** di rette.



► **Figura 28** Ogni retta del fascio è parallela alla retta base, passante per l'origine, $y = -3x$. A seconda del valore di q cambia l'intersezione della retta con l'asse y.

Se $q = 0$, abbiamo la retta del fascio passante per l'origine:

$$y = -3x.$$

Per ottenere altre rette del fascio basta attribuire dei valori a q e sostituirli, di volta in volta, nell'equazione del fascio: infatti, per $q = 3$ abbiamo la retta $y = -3x + 3$, per $q = -2$ la retta $y = -3x - 2$, …

- Se r è in forma esplicita,

$$y = mx + q,$$

l'equazione del fascio improprio si scrive:

$$y = mx + k, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

- Se r è in forma implicita,

$$ax + by + c = 0,$$

l'equazione del fascio si scrive:

$$ax + by + k = 0, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

- Casi particolari:

$x = k$, con $k \in \mathbb{R}$, fascio di rette parallele all'asse y,

$y = k$, con $k \in \mathbb{R}$, fascio di rette parallele all'asse x.

Fasci generati da due rette

La combinazione lineare di due equazioni

Date due equazioni $A(x; y) = 0$ e $B(x; y) = 0$, chiamiamo **combinazione lineare** delle due equazioni ogni equazione del tipo:

$$p \cdot A(x; y) + q \cdot B(x; y) = 0, \qquad \text{con } p, q \in \mathbb{R} \text{ non entrambi nulli.}$$

p e q sono detti **parametri** della combinazione lineare.

Se p e q fossero entrambi nulli, otterremmo l'uguaglianza non significativa $0 = 0$.

ESEMPIO

Date le equazioni $3x - 5y - 4 = 0$ e $x - 2y + 1 = 0$, la combinazione lineare delle due equazioni è:

$$p \cdot (3x - 5y - 4) + q \cdot (x - 2y + 1) = 0.$$

Se una coppia $(c; d)$ è soluzione di entrambe le equazioni date, allora è anche soluzione di ogni loro combinazione lineare.
Infatti, se $(c; d)$ è soluzione delle due equazioni, abbiamo:

$$A(c; d) = 0, \qquad B(c; d) = 0,$$

da cui consegue che:

$$p \cdot A(c; d) + q \cdot B(c; d) = p \cdot 0 + q \cdot 0 = 0.$$

Verifica che le equazioni dell'esempio precedente e la loro combinazione lineare hanno come soluzione comune (13; 7).

Studiamo ora i fasci di rette le cui equazioni si possono ottenere dalla combinazione lineare delle equazioni di due rette.

Il fascio è proprio

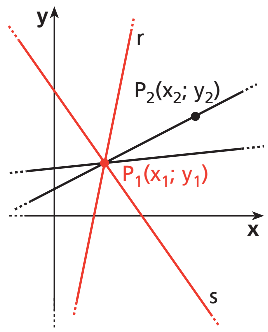
Il punto P comune a tutte le rette del fascio si chiama **centro del fascio**.

Date le equazioni di due rette r: $ax + by + c = 0$ e s: $a'x + b'y + c' = 0$ che si incontrano nel punto $P_1(x_1; y_1)$, le equazioni di tutte le rette del fascio proprio per P_1 si ottengono dalla combinazione lineare:

$$\boldsymbol{p \cdot (ax + by + c) + q \cdot (a'x + b'y + c') = 0},$$

con $p, q \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli.

Per dimostrarlo osserviamo che una generica retta del fascio è individuata dal punto P_1 e da un punto $P_2(x_2; y_2)$ del piano.
Le coordinate di $P_1(x_1; y_1)$ soddisfano l'equazione della combinazione lineare per qualsiasi valore di p e q, poiché soddisfano le equazioni delle rette r e s.



- Vogliamo scrivere la combinazione lineare con un solo parametro perché è più semplice utilizzarla nelle applicazioni.

- In particolare, per $k = 0$ si ottiene l'equazione della retta r.

- Possiamo scrivere l'equazione anche così: $(2 + k)x + (k - 1)y + - 1 - 5k = 0$.

- Per quale valore di k ottieni la retta passante per l'origine?

Affinché anche le coordinate di $P_2(x_2; y_2)$ soddisfino l'equazione della combinazione lineare basta considerare p e q in modo che:

$$p \cdot (ax_2 + by_2 + c) + q \cdot (a'x_2 + b'y_2 + c') = 0.$$

Per ogni retta P_1P_2 del fascio possiamo quindi trovare, per particolari valori di p e q, l'equazione corrispondente come combinazione lineare di quelle di r e s.

Le rette r e s vengono dette **generatrici** del fascio.
Le loro equazioni si ottengono, rispettivamente, per $q = 0$ e per $p = 0$.

Poiché p e q non sono entrambi nulli, supposto $p \neq 0$, possiamo dividere entrambi i membri della combinazione lineare per p e, ponendo $k = \frac{q}{p}$, otteniamo:

$$\boldsymbol{ax + by + c + k \cdot (a'x + b'y + c') = 0}, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

Nell'equazione, a ogni valore di k corrisponde l'equazione di una retta del fascio.

Non è invece vero l'inverso in quanto *l'equazione della retta s non corrisponde ad alcun valore di k.* Tuttavia, la retta s è l'unica retta esclusa.

ESEMPIO

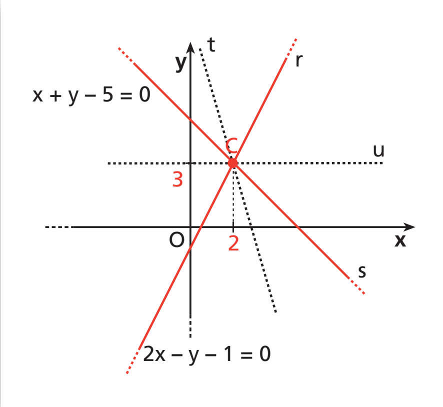
Consideriamo le rette r e s di equazioni:

r: $2x - y - 1 = 0$,
s: $x + y - 5 = 0$.

Se combiniamo linearmente le equazioni delle due rette, introducendo un parametro reale k, otteniamo:

$$2x - y - 1 + k(x + y - 5) = 0.$$

Questa equazione rappresenta, al variare di k, le infinite rette passanti per il punto di intersezione C delle due rette date, ossia il fascio proprio di rette di centro C. Per esempio per $k = 2$ si ottiene la retta t: $4x + y - 11 = 0$, per $k = -2$ si ottiene la retta u: $y = 3$ e così via. La retta r si ottiene per $k = 0$, mentre la retta s è l'unica che non si ottiene dall'equazione. Tuttavia, man mano che k diventa sempre più grande (in valore assoluto), le rette del fascio si avvicinano sempre più a s. Diciamo anche che la retta s si ha per $k \to \infty$ (si legge: «k tendente a infinito»).



▶ **Figura 29** Le due rette si incontrano nel punto $C(2; 3)$.

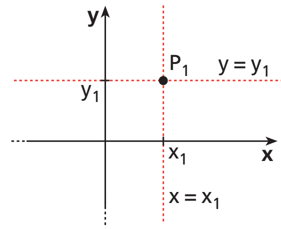
Le generatrici del fascio possono essere due rette qualsiasi del fascio. In particolare, se consideriamo le due rette parallele agli assi passanti per P_1, di equazioni $x - x_1 = 0$ e $y - y_1 = 0$, otteniamo

$$p \cdot (x - x_1) + q \cdot (y - y_1) = 0,$$

da cui, con $q \neq 0$ e posto $-\dfrac{p}{q} = m$, si ha:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1),$$

ossia la retta passante per un punto e di coefficiente angolare m che abbiamo già ricavato in altro modo.



Il fascio è improprio

Si può dimostrare che anche le equazioni di tutte le rette di un fascio improprio si possono ottenere dalla combinazione lineare di quelle di due rette del fascio.

ESEMPIO

Consideriamo due rette parallele, a e b, di equazioni:

$$a: x - y + 1 = 0, \qquad b: x - y - 3 = 0.$$

Se combiniamo linearmente le equazioni delle due rette, introducendo un parametro reale k, otteniamo l'equazione:

$$x - y + 1 + k(x - y - 3) = 0.$$

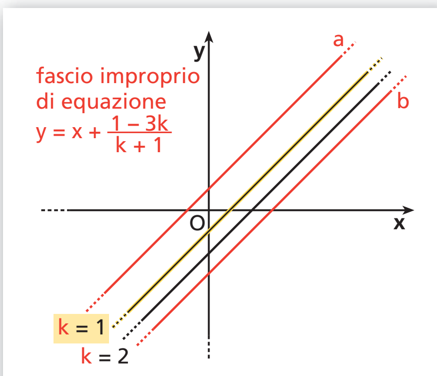
Esplicitiamo la y:

$$x - y + 1 + kx - ky - 3k = 0$$

$$(k + 1)y = (k + 1)x + 1 - 3k$$

$$y = x + \frac{1 - 3k}{k + 1}.$$

Otteniamo, al variare di k (con $k \neq -1$), una retta parallela alle generatrici, quindi l'equazione è relativa a un fascio improprio.



▲ **Figura 30** Attribuendo dei valori a k diversi da -1 otteniamo delle rette parallele alle rette a e b.

In generale, date due rette distinte, r e s, di equazioni

$$r: ax + by + c = 0, \qquad s: a'x + b'y + c' = 0,$$

il fascio di rette generato da r e s ha equazione

$$ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0, \text{ ossia}$$

$$(a + ka')x + (b + kb')y + c + kc' = 0.$$

Esse sono le equazioni di un fascio proprio o improprio a seconda che:

$$\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'} \qquad \text{o} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

In entrambi i casi l'equazione rappresenta tutte le rette del fascio tranne la retta s.

Se $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$, le generatrici sono parallele, quindi il fascio è improprio.

LE RETTE E LA TAC

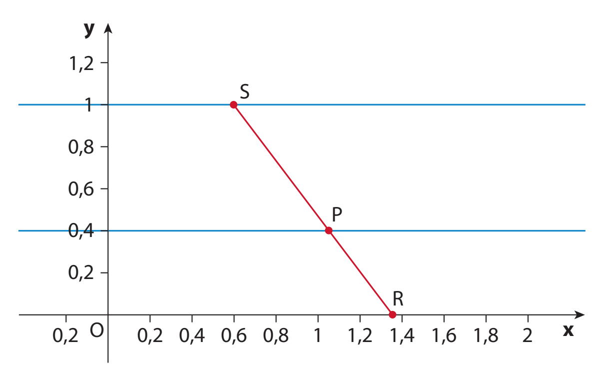
Con la geometria analitica puoi comprendere il funzionamento della TAC?

▶ Il quesito completo a pag. 153

Nel piano cartesiano, consideriamo:

a) un punto S che si muove con velocità costante v su una retta s di equazione $y = 1$;
b) un punto P che si muove con velocità costante v' su una retta p di equazione $y = p$, con $0 < p < 1$;
c) un punto R situato sull'asse x e tale che, a ogni istante t, risulti allineato con S e P.

Supponiamo inoltre che all'istante $t = 0$ l'ascissa di S sia 0 e quella di P sia $x_P > 0$.
Determiniamo la relazione che deve esistere fra le due velocità v e v' affinché il punto R non si muova.



Nelle ipotesi fatte, le posizioni di S e di P dipendono dal tempo t; in particolare, in ogni istante t, i due punti hanno coordinate:

$$S(vt; 1),\ P(x_P + v't; p).$$

Per calcolare le coordinate di R possiamo pensare R come intersezione della retta SP con l'asse x. Il coefficiente angolare della retta SP è $\frac{p-1}{x_P + (v'-v)t}$, quindi l'equazione della retta SP è del tipo $y = \frac{p-1}{x_P+(v'-v)t}x + q$. Possiamo determinare q imponendo la condizione di appartenenza di $S(vt; 1)$ e otteniamo: $q = \frac{x_P + (v'-vp)t}{x_P + (v'-v)t}$.

Quindi la retta SP ha equazione

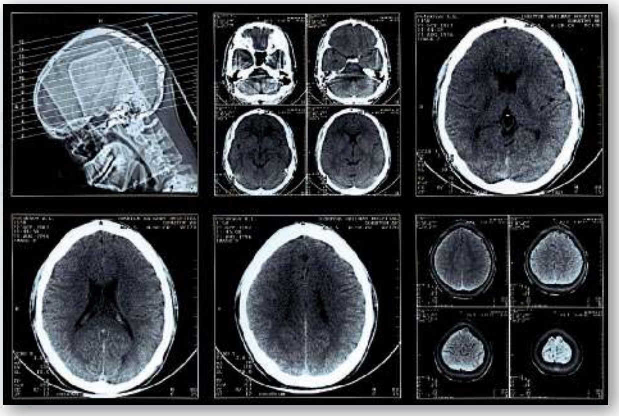
$$y = \frac{p-1}{x_P+(v'-v)t}x + \frac{x_P + (v'-vp)t}{x_P + (v'-v)t}.$$

Calcoliamo l'ascissa del punto R ponendo $y = 0$ nell'equazione della retta SP:

$$x_R = -\frac{x_P+(v'-vp)t}{x_P+(v'-v)t}\cdot\frac{x_P+(v'-v)t}{p-1} = \frac{x_P+(v'-vp)t}{1-p}.$$

Notiamo che in generale x_R varia al variare del tempo; se però $v' = vp$, allora l'ascissa di R è indipendente dal tempo: $x_R = \frac{x_P}{1-p}$. Ciò equivale a dire che il punto $R\left(\frac{x_P}{1-p}; 0\right)$ sta fermo.

Vediamo ora perché l'esercizio appena svolto può dare un'idea del funzionamento delle tecniche di tomografia.
Il principio su cui si basa la tomografia è che le strutture di un tessuto o di un organo assorbono i raggi X in modo diverso. Per esempio, quelle più dense, come le ossa, assorbono più facilmente la radiazione rispetto a quelle meno dense, come la pelle. Raccogliendo la radiazione non assorbita su una lastra, si ottiene un'immagine che può essere considerata un po' come l'ombra dell'organo o del tessuto sul quale è stata inviata la radiazione.
Basta allora pensare al punto S come a una sorgente di radiazione, al punto P come l'oggetto di cui si vuole ottenere l'immagine e al punto R come l'ombra di P. In ogni istante t, la radiazione emessa da S proietta l'immagine di P sul punto R di una lastra sensibile ai raggi X. Il movimento relativo di sorgente e paziente portano al risultato che solo i punti P appartenenti a una certa sezione piana del tessuto o dell'organo danno luogo a un'immagine ferma e quindi chiara e nitida sulla lastra.
Notiamo, infine, che la condizione che porta all'immagine ferma ($v' = vp$) non dipende dall'ascissa del punto P, ma solo dalla sua ordinata e dalle velocità di S e P. Ciò vuol dire che tutti i punti della retta di equazione $y = p$ proiettano sull'asse x un'immagine ferma.
Questo permette di ottenere in modo nitido l'immagine di una sezione precisa del paziente.

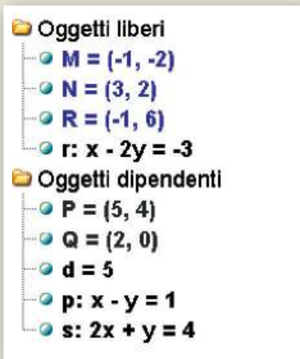


LABORATORIO DI MATEMATICA
LA RETTA

ESERCITAZIONE GUIDATA

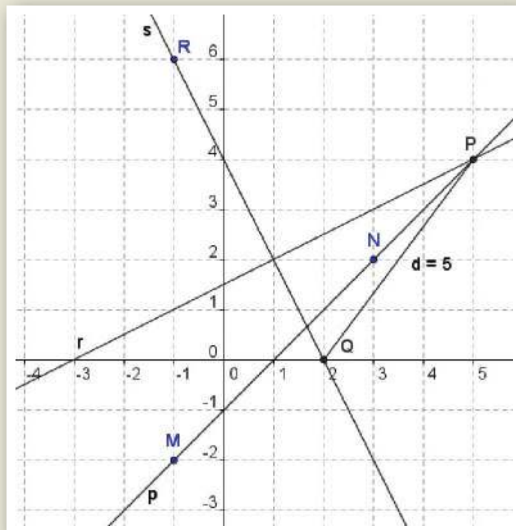
Con GeoGebra determiniamo la lunghezza d del segmento PQ, sapendo che:
- **il punto P è l'intersezione fra la retta r, di equazione $x - 2y + 3 = 0$, e la retta p, passante per i punti $M(-1; -2)$ e $N(3; 2)$;**
- **il punto Q è l'intersezione con l'asse x della retta s, perpendicolare alla retta r e passante per il punto $R(-1; 6)$.**

- Entriamo in ambiente GeoGebra e per mezzo della riga di inserimento immettiamo nella finestra algebrica i dati del problema: l'equazione della retta r e le coordinate dei punti M, N e R (figura 1), ottenendo contemporaneamente la loro rappresentazione geometrica (figura 2).
- Impieghiamo lo strumento *Retta per due punti* sui punti M e N, ricavando l'equazione e il grafico della retta p.
- Con *Retta perpendicolare*, applicato al punto R e alla retta r, ricaviamo la s.



► Figura 1

- Usiamo *Intersezione di due oggetti* sulle rette p e r, ottenendo le coordinate del punto P, e poi sulla retta s e sull'asse x, ottenendo quelle del punto Q.
- Applichiamo *Segmento per due punti* a P e a Q, evidenziando nel grafico il segmento PQ e ottenendo nella finestra algebrica la sua lunghezza, $d = 5$.



▲ Figura 2

Nel sito: ► 2 esercitazioni guidate ► 32 esercitazioni in più

Esercitazioni

Risolvi con il computer i seguenti problemi.

1 Determina le coordinate dei vertici B e C del triangolo isoscele BCV, di vertice $V(4; 0)$ e di area 5, sapendo che la retta BC ha equazione $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. $[B(1; 1), C(5; 3)]$

2 Determina l'equazione della retta r (la retta di Eulero) passante per il baricentro e per il circocentro del triangolo ABC, i cui vertici hanno coordinate $A(-1; 2)$, $B(-2; -2)$ e $C(3; 4)$ e controlla che r passi per l'ortocentro. $[y = -0,81\ldots x + 1,33\ldots]$

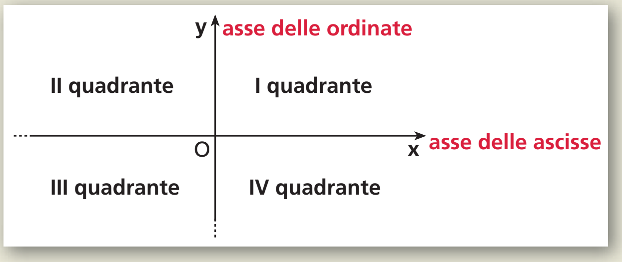
3 Trova le equazioni delle bisettrici e le coordinate dell'incentro del triangolo i cui vertici hanno coordinate $A(1; 1)$, $B(-2; 4)$, $C(-3; -3)$. $[y = 1; y = -3x - 2; y = 2x + 3; (-1; 1)]$

4 Determina le coordinate dei vertici del rettangolo $ABCD$, sapendo che la diagonale AC è lunga 10, il punto medio M di AC ha coordinate $(2; 2)$ e il lato BC ha equazione $y = -3x + 23$. $[A(-2; -1), B(7; 2), C(6; 5), D(-3; 2)]$

LA TEORIA IN SINTESI
IL PIANO CARTESIANO E LA RETTA

1. LE COORDINATE DI UN PUNTO SU UN PIANO

- Il **piano cartesiano** è suddiviso dai due assi in quattro angoli retti chiamati **quadranti**.
- Ogni punto del piano è individuato da una coppia di numeri reali, detti **coordinate**. La prima coordinata si chiama **ascissa** e la seconda **ordinata**.
- L'**origine *O*** degli assi ha coordinate (0; 0).



2. LA LUNGHEZZA E IL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO. IL BARICENTRO DI UN TRIANGOLO

- **Distanza fra due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$**

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

- **Punto medio del segmento *AB***

$$M(x_M; y_M), \quad \text{con } x_M = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

- **Baricentro di un triangolo di vertici $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$**

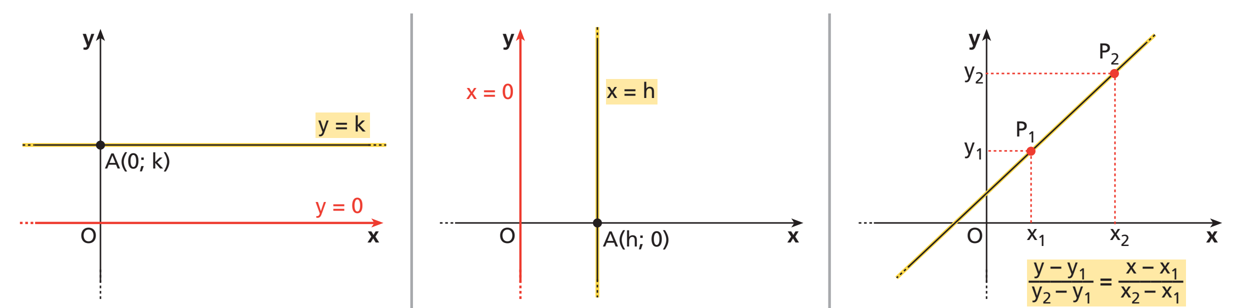
$$G(x_G; y_G), \quad \text{con } x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3},$$
$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

3. L'EQUAZIONE DI UNA RETTA

- A ogni **retta** del piano cartesiano corrisponde un'**equazione lineare** in due variabili del tipo $ax + by + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a e b non entrambi nulli, e viceversa.
- Le coordinate di tre punti $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P(x; y)$ di una retta non parallela agli assi soddisfano la relazione

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

detta **condizione di allineamento** o **equazione di una retta passante per due punti noti**.



a. Retta parallela all'asse *x*.

b. Retta parallela all'asse *y*.

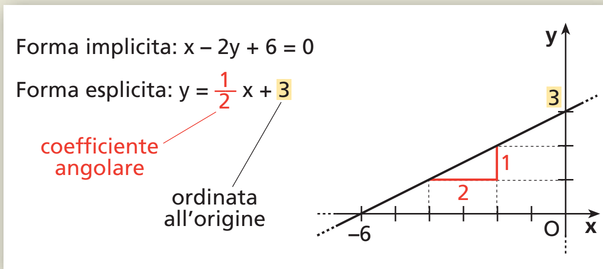
c. Retta non parallela agli assi passante per i punti $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$.

4. LA FORMA ESPLICITA E IL COEFFICIENTE ANGOLARE

- Equazione di una retta:
  - in **forma implicita**: $ax + by + c = 0$;
  - in **forma esplicita**: $y = mx + q$.

  q è l'**ordinata all'origine**.
  m è il **coefficiente angolare** della retta:

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}.$$



- **Angolo fra una retta e l'asse x**: è **acuto se $m > 0$**, **ottuso se $m < 0$**. Se $m = 0$, la retta è parallela all'asse x. Il coefficiente angolare non esiste se la retta è parallela all'asse y.

- **Equazione di una retta di coefficiente angolare m e passante per $P(x_1; y_1)$**

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1).$$

- **Equazione di una retta passante per l'origine $O(0; 0)$**

$$y = mx.$$

5. LE RETTE PARALLELE E LE RETTE PERPENDICOLARI

- Due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$ sono fra loro:
  - **parallele** quando hanno lo stesso coefficiente angolare: $\boldsymbol{m = m'}$;
  - **perpendicolari** quando il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1: $\boldsymbol{mm' = -1}$.
- Se le rette hanno equazioni in forma implicita r: $ax + by + c = 0$ e s: $a'x + b'y + c' = 0$, allora:

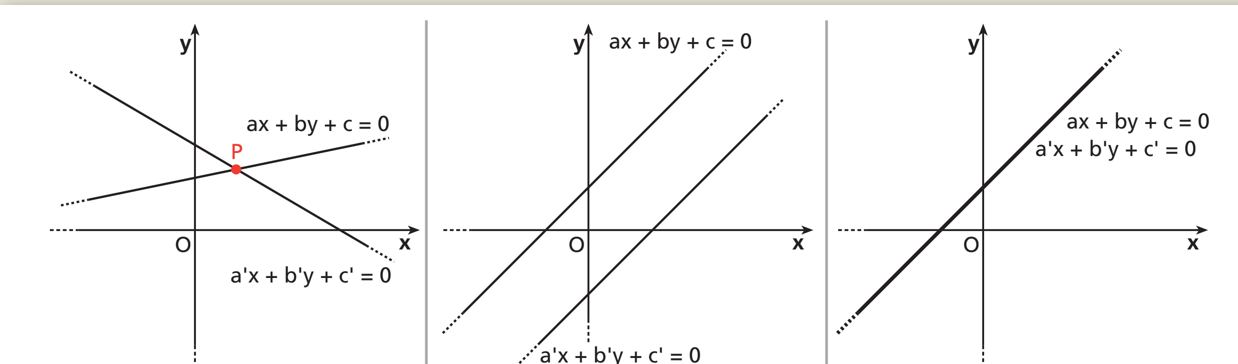
$$\boldsymbol{r \,/\!/\, s \Leftrightarrow ab' - a'b = 0}; \qquad \boldsymbol{r \perp s \Leftrightarrow aa' + bb' = 0}.$$

6. LA POSIZIONE RECIPROCA DI DUE RETTE

- Date le rette di equazioni $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$, considerato il sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

sono possibili i tre casi della figura.



a. Le rette sono **incidenti**:
$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Leftrightarrow m \neq m'$.
Il sistema è **determinato** e ammette per soluzione le coordinate di P.

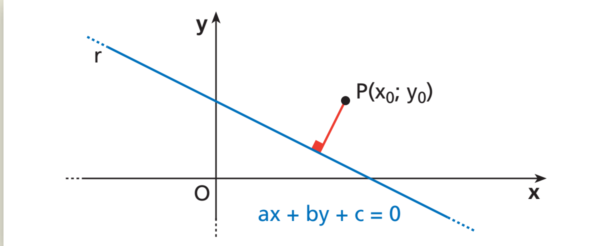
b. Le rette sono **parallele e distinte**:
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Leftrightarrow (m = m') \wedge (q \neq q')$.
Il sistema è **impossibile**.

c. Le rette sono **coincidenti**:
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow (m = m') \wedge (q = q')$.
Il sistema è **indeterminato**.

7. LA DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA

- **Distanza di un punto $P(x_0; y_0)$ da una retta r di equazione $ax + by + c = 0$**: misura del segmento che ha per estremi il punto P e il piede della perpendicolare a r passante per P. Si calcola con:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



ESEMPIO: La distanza di $P(-1; 2)$ dalla retta di equazione $4x - 3y + 1 = 0$ è:

$$d = \frac{|4(-1) - 3(2) + 1|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|-9|}{5} = \frac{9}{5}.$$

8. I LUOGHI GEOMETRICI E LA RETTA

- **Luogo geometrico**: l'insieme di tutti e soli i punti che godono di una proprietà.
- **Asse di un segmento**: la retta perpendicolare al segmento passante per il suo punto medio; è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento.
- **Bisettrice di un angolo**: luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo.
Date due rette non parallele di equazioni $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$, le equazioni delle bisettrici degli angoli che formano sono:

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}} \quad \to \quad \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}.$$

9. I FASCI DI RETTE

- Date due rette distinte, r e r', di equazioni

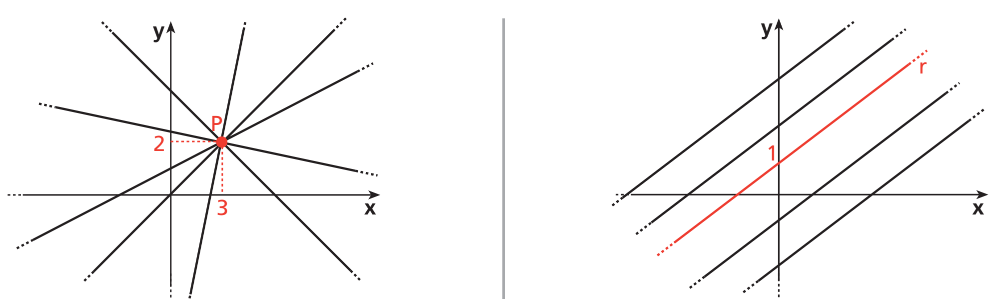
$$r: ax + by + c = 0, \qquad r': a'x + b'y + c' = 0,$$

il **fascio di rette generato da r e r'** ha equazione:

$$ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0.$$

  - Se r e r' si intersecano in un punto C, il fascio è **proprio** con centro in C.
  - Se r e r' sono parallele, il fascio è **improprio**.

In entrambi i casi l'equazione rappresenta tutte le rette del fascio tranne la retta r'.



a. Fascio proprio di rette per un punto P: insieme di tutte le rette del piano passanti per P. P è detto **centro del fascio**. Esempio: fascio proprio di centro $P(3; 2)$: $y-2=m(x-3) \vee x=3$.

b. Fascio improprio di rette parallele a una retta r. Esempio: r: $y=2x+1$, fascio improprio: $y=2x+q$.

1. LE COORDINATE DI UN PUNTO SU UN PIANO

Teoria a pag. 154

1 Disegna la poligonale aperta che si ottiene unendo, nell'ordine, i punti $A(5; -3)$, $B(3; 3)$, $C(2; -2)$, $D(-1; 1)$, $E\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $F(-4; 5)$.
Rispondi alle seguenti domande.
a) Quale punto ha l'ordinata maggiore?
b) Quale punto ha l'ascissa minore?
c) Quali punti hanno ascissa negativa?
d) Quali punti appartengono al IV quadrante?

2 Indica in quale quadrante può trovarsi un punto se:
a) l'ascissa è negativa e l'ordinata positiva;
b) le sue coordinate sono entrambe positive;
c) le sue coordinate sono tali che $xy > 0$;
d) le sue coordinate sono tali che $xy < 0$;
e) le sue coordinate sono entrambe nulle;
f) l'ascissa è uguale all'ordinata;
g) il prodotto delle coordinate è nullo.

3 Dato il punto $P(3a; a + 2)$, le cui coordinate variano al variare di a nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, determina per quali valori di a il punto appartiene al II quadrante. $[-2 \leq a \leq 0]$

4 Trova per quali valori di k il punto $A\left(2 - |k|; \frac{1-2k}{k^2-4}\right)$ appartiene al I quadrante. $\left[\frac{1}{2} \leq k < 2\right]$

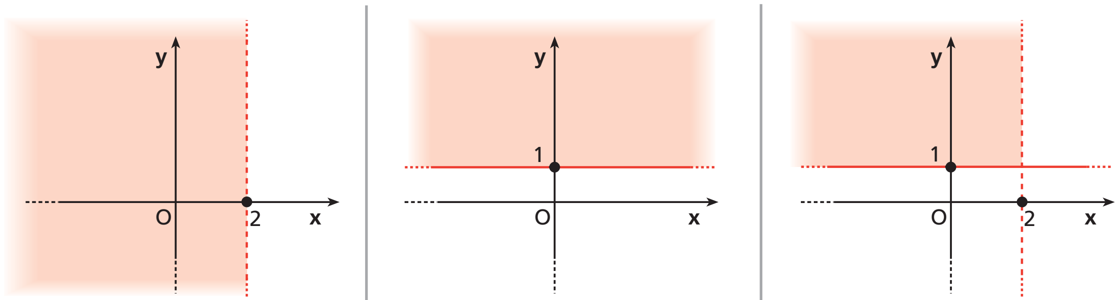
5 Stabilisci per quali valori di k il punto $P(2k - 5; k^2 - 5k + 6)$ è un punto dell'asse x e calcola il valore corrispondente dell'ascissa. $[k = 2, x = -1;\ k = 3, x = 1]$

6 Determina per quali valori di a il punto $P(a - a^2; 3|a| - 6)$ appartiene al IV quadrante. $[0 \leq a \leq 1]$

Le coordinate di insiemi di punti

7 **ESERCIZIO GUIDA**

In un riferimento cartesiano coloriamo:
a) l'insieme A dei punti $(x; y)$ con ascissa $x < 2$;
b) l'insieme B dei punti $(x; y)$ con ordinata $y \geq 1$;
c) l'insieme $A \cap B$.



a. Coloriamo l'insieme A dei punti $(x; y)$ del piano cartesiano con $x < 2$. I punti di ascissa $x = 2$ (cioè della retta tratteggiata in rosso) sono esclusi.

b. Coloriamo l'insieme B dei punti $(x; y)$ del piano cartesiano con $y \geq 1$. I punti di ordinata $y = 1$ (cioè della retta disegnata in rosso) sono inclusi.

c. Coloriamo $A \cap B$. I punti della retta rossa tratteggiata sono esclusi, i punti della retta rossa continua sono inclusi, il punto di intersezione delle due rette è escluso.

8 In un riferimento cartesiano, A è l'insieme dei punti che hanno ascissa $x \geq 1$, B è l'insieme dei punti che hanno ordinata $y > 3$. Disegna $A \cap B$.

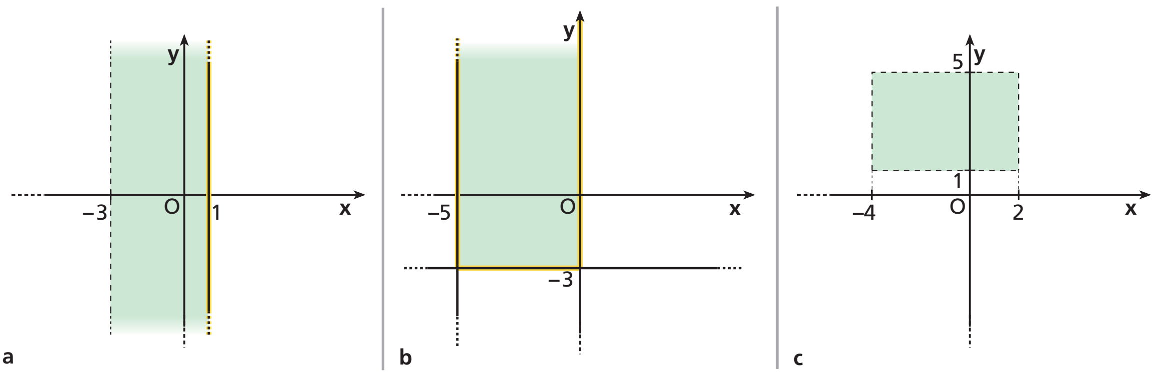
9 In un riferimento cartesiano, A è l'insieme dei punti che hanno ascissa x tale che $|x-1| < 6$ e B è l'insieme dei punti che hanno ordinata y tale che $-1 \leq y < 8$. Disegna $A \cap B$.

10 Dato il punto $A\left(\sqrt{a-1}; \frac{a}{2} - 1\right)$, trova per quali valori di a il punto è interno al quadrato che ha i lati paralleli agli assi cartesiani e ha due vertici di coordinate $(-1; 0)$ e $(3; 4)$. $[2 < a < 10]$

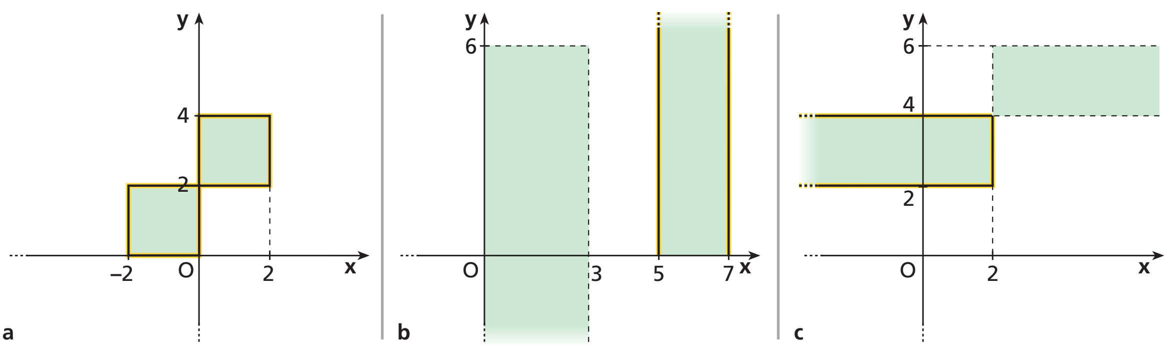
11 Calcola per quali valori di a il punto $P(|a+1|; a-4)$ appartiene alla striscia individuata dalle parallele all'asse y passanti per $A(-2; 0)$ e $B(4; 0)$. $[-5 \leq a \leq 3]$

Descrivi gli insiemi disegnati nelle seguenti figure, usando opportune disequazioni.

12



13



Rappresenta nel piano cartesiano gli insiemi di punti $P(x; y)$ le cui coordinate soddisfano le seguenti condizioni.

14 $\begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ -3 \leq y < 0 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} x = 4 \\ 1 \leq y < 7 \end{cases}$.

15 $\begin{cases} x < -2 \\ y < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 3 \\ y^2 \leq 16 \end{cases}$

16 $\begin{cases} |x-2| < 3 \\ |y| \leq 2 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} |3-x| \geq 1 \\ |y-1| < 2 \end{cases}$.

17 $\begin{cases} |x-4| < 2 \\ 1 + y^2 < 5 \end{cases}$

18 Rappresenta i punti dell'asse x la cui ascissa verifica la condizione:

a) $|x| \geq 3$; b) $|2x-1| = 3$; c) $|3x+2| < 1$.

19 Rappresenta i punti dell'asse y la cui ordinata verifica la condizione:

a) $|y^2 - 3| \leq 1$; b) $|1 - 3y| = 6$; c) $|y - 4| > 2$.

20 **VERO O FALSO?**

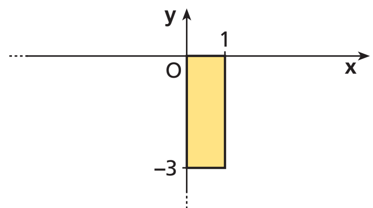
a) Un punto con coordinate discordi appartiene al secondo o al quarto quadrante. V F

b) Due punti simmetrici rispetto all'origine hanno coordinate $(x; y)$ e $(y; x)$. V F

21 **VERO O FALSO?**

a) Il rettangolo della figura può essere individuato da

$$\left\{(x;\, y) \mid x^2 - x \le 0 \wedge \left| y + \frac{3}{2} \right| \le \frac{3}{2}\right\}.$$ V F



b) La disequazione $x^2 - 4x \le 0$ nel piano cartesiano è verificata dai punti del segmento di estremi $(0; 0)$ e $(4; 0)$. V F

c) I punti che verificano il sistema

$$\begin{cases} |x| \le 1 \\ |y| \le 3 \end{cases}$$ appartengono a un rettangolo

che ha centro nell'origine e un vertice di coordinate $(1; 3)$. V F

22 **TEST** The point $(a; b)$ is reflected over the y-axis to the point $(c; d)$, which is then reflected over the x-axis to the point $(e; f)$. Compute the value of $ab - ef$.

A $2ab$
B $ab + b^2$
C -1
D 0
E 1

(USA *Wolsborn-Drazovich Memorial Math Contest*, 2006)

2. LA LUNGHEZZA E IL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO. IL BARICENTRO DI UN TRIANGOLO

Teoria a pag. 155

La distanza fra due punti nel piano cartesiano

Calcola la distanza fra i punti indicati.

23 $A(2; 1)$, $B(2; 6)$.

24 $A(3; 8)$, $B\left(3; \frac{19}{2}\right)$.

25 $A\left(-4; \frac{4}{3}\right)$, $B\left(-4; \frac{7}{2}\right)$.

26 $A(-4; -4)$, $B\left(\frac{1}{2}; -4\right)$.

27 $A(-2; 0)$, $B(8; 0)$.

28 $A(2; 5)$, $B(5; 6)$.

29 $A(-2; -1)$, $B(4; 12)$.

30 $A\left(-\frac{3}{4}; 4\right)$, $B\left(\frac{17}{4}; 2\right)$.

31 $A\left(2; \frac{3}{2}\right)$, $B\left(9; \frac{31}{2}\right)$.

32 $A(\sqrt{3} + 1; 2\sqrt{3})$, $B(1; \sqrt{3})$.

33 $A(2 + \sqrt{2}; 0)$, $B(2; \sqrt{7})$.

34 $A\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; 3\right)$, $B\left(0; 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

35 Determina il perimetro del triangolo i cui vertici sono $A(2; 4)$, $B(2; 1)$, $C(6; 3)$.

36 Calcola il perimetro del quadrilatero i cui vertici sono $A(-5; 6)$, $B(0; 6)$, $C(2; 2)$, $D(-3; -3)$.

37 Stabilisci se il triangolo ABC di vertici $A(-5; 6)$, $B(-1; 4)$, $C(4; -1)$ è isoscele.

38 Verifica che il triangolo di vertici $A(-3; 0)$, $B(5; 0)$, $C(1; 4\sqrt{3})$ è equilatero.

39 Verifica che il quadrilatero di vertici $A(2; 1)$, $B(8; 2)$, $C(11; 7)$, $D(5; 6)$ è un parallelogramma. (Suggerimento. Basta verificare che i lati opposti sono congruenti.)

40 Stabilisci se il triangolo ABC di vertici $A(1; -2)$, $B(-1; 2)$, $C(-1; -3)$ è un triangolo rettangolo (è sufficiente verificare se le misure dei lati soddisfano il teorema di Pitagora).

41 Determina il punto P sull'asse x equidistante da $A(-5; 5)$ e da $B(0; 2)$. $\left[P\left(-\frac{23}{5}; 0\right)\right]$

42 Individua il punto P che ha ordinata uguale all'ascissa ed è equidistante da $A(-2; 2)$ e $B(5; 4)$. $\left[P\left(\frac{11}{6}; \frac{11}{6}\right)\right]$

43 Verifica che il triangolo di vertici $A(2; 2)$, $B\left(6; \frac{3}{2}\right)$, $C(4; 5)$ è isoscele e calcola la misura del suo perimetro.

44 Verifica che il triangolo di vertici $A(3; 0)$, $B\left(\frac{18}{5}; \frac{9}{5}\right)$ e $C\left(\frac{24}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ è rettangolo isoscele. Determina poi il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo. $\left[\frac{3}{5}\sqrt{5}\right]$

45 Trova per quali valori di k il punto $P(k+2; k+1)$ è equidistante dai punti $A(-2; 1)$ e $B(4; -2)$. $\left[-\frac{1}{2}\right]$

46 Determina per quali valori di a la distanza tra i punti $A(2a+3; 2)$ e $B(1; 2a)$ è uguale a 4. $[\pm 1]$

47 Calcola per quali valori di k il segmento che congiunge i punti $P(2; 1+k)$ e $Q\left(\frac{k}{2}; 0\right)$ misura 5. $[\pm 4]$

48 Dati i punti $A(2k; -1)$, $B(-2; -k+3)$, $C(4; 3)$, trova k in modo che risulti $\overline{AB} = \overline{CO}$, essendo O l'origine degli assi cartesiani. $[\pm 1]$

49 Trova a e b in modo che il punto $P(a; b)$ sia equidistante da $A(-4; 0)$, $B(0; 3)$ e $C(1; 0)$. $\left[a = -\frac{3}{2}, b = \frac{5}{6}\right]$

50 Individua il punto P equidistante dai punti $A(1; 4)$, $B(6; 1)$ e $C(2; -4)$. $\left[P\left(\frac{151}{74}; \frac{5}{74}\right)\right]$

51 Dati i punti $A(3; 7)$, $B(9; -1)$ e $C(1; k)$, trova k in modo che il triangolo ABC sia rettangolo in C. $[3]$

52 Verifica che il quadrilatero $AOBC$ di vertici $A(-1; -1)$, $O(0; 0)$, $B(-2; 2)$, $C(-3; 1)$ è un rettangolo. (Suggerimento. Verifica che i lati opposti sono congruenti e che le diagonali sono congruenti.)

53 Stabilisci se il quadrilatero di vertici consecutivi $I(0; 2)$, $L(3; -3)$, $M(8; 0)$, $N(5; 4)$ è un rettangolo. [no]

54 Verifica che il quadrilatero $ABCD$ di vertici $A(3; 0)$, $B(0; -1)$, $C(1; 2)$, $D(4; 3)$ è un rombo. (Suggerimento. Verifica che i lati sono congruenti e le diagonali non lo sono.)

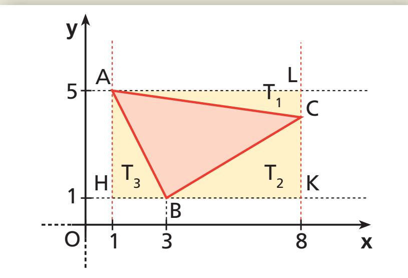
55 Determina il circocentro del triangolo ABC con $A(7; 1)$, $B(2; 7)$, $C(-2; -2)$. (Suggerimento. Ricorda che il circocentro di un triangolo è il centro della circonferenza circoscritta ed è quindi equidistante dai tre vertici del triangolo.) $\left[\left(\frac{81}{46}; \frac{79}{46}\right)\right]$

L'area di triangoli e poligoni

56 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'area del triangolo di vertici $A(1; 5)$, $B(3; 1)$, $C(8; 4)$.

Tracciamo le parallele all'asse x passanti per A e per B e le parallele all'asse y passanti per A e per C. Le quattro parallele, incontrandosi, determinano un rettangolo $AHKL$.
Il rettangolo è formato dal triangolo ABC e dai triangoli rettangoli T_1, T_2, T_3. Quindi possiamo determinare l'area del triangolo ABC sottraendo all'area del rettangolo l'area dei tre triangoli T_1, T_2, T_3.



Calcoliamo l'area $\mathcal{A}$ del rettangolo $AHKL$:

$$\mathcal{A} = \overline{AH} \cdot \overline{HK} = 4 \cdot 7 = 28.$$

Calcoliamo l'area di T_1, T_2, T_3:

$$\mathcal{A}_{T_1} = \frac{\overline{LC} \cdot \overline{LA}}{2} = \frac{1 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2};$$

$$\mathcal{A}_{T_2} = \frac{\overline{CK} \cdot \overline{KB}}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2};$$

$$\mathcal{A}_{T_3} = \frac{\overline{AH} \cdot \overline{BH}}{2} = \frac{4 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 4.$$

L'area del triangolo ABC è

$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(AHKL) - (\mathcal{A}_{T_1} + \mathcal{A}_{T_2} + \mathcal{A}_{T_3}),$$

ossia:

$$\mathcal{A}(ABC) = 28 - \left(\frac{7}{2} + \frac{15}{2} + 4\right) = 13.$$

Calcola l'area dei triangoli che hanno i vertici indicati.

57 $A(6; 0)$, $B(4; 3)$, $O(0; 0)$.

58 $A\left(-3; \frac{3}{2}\right)$, $B\left(7; \frac{3}{2}\right)$, $C(1; -5)$.

59 $A(-5; -4)$, $B\left(-5; \frac{1}{3}\right)$, $C(6; 4)$.

60 $A\left(5; -\frac{1}{2}\right)$, $B\left(5; \frac{9}{2}\right)$, $C(-8; -5)$.

Negli esercizi seguenti, dato il poligono che ha per vertici i punti indicati, determina la misura della sua area.

61 $A(2; 0)$, $B(6; -1)$, $C(5; 3)$, $D(3; 4)$.

62 $A(-3; 3)$, $B(-6; 2)$, $C(-4; -4)$, $D(-1; -3)$.

63 $A(2; 0)$, $B(6; -2)$, $C(10; 1)$, $D(10; 4)$, $E(6; 6)$, $F(2; 4)$.

Il punto medio di un segmento

Determina le coordinate del punto medio del segmento AB che ha per estremi i punti con le seguenti coordinate.

64 $A\left(\frac{1}{2}; -5\right)$, $B(6; 4)$.

65 $A\left(\frac{1}{3}; -4\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

66 $A\left(-3; \frac{1}{4}\right)$, $B\left(6; \frac{3}{4}\right)$.

67 $A\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

68 Il segmento AB ha come punto medio $M\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{12}\right)$. Trova le coordinate del punto B, sapendo che A ha coordinate $\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{6}\right)$. $\left[B\left(1; -\frac{2}{3}\right)\right]$

69 Il punto medio M del segmento PQ ha coordinate $(-\sqrt{3}; 4)$. Noto il punto $Q(-3\sqrt{3} + 1; 5)$, trova le coordinate di P. $[P(\sqrt{3} - 1; 3)]$

70 Nel triangolo ABC, di vertici $A(-2; 4)$, $B(0; 2)$, $C(4; 6)$, determina i punti medi dei lati e la misura delle mediane. $[(-1; 3), (2; 4), (1; 5); \sqrt{34} \simeq 5{,}83; 4; \sqrt{10} \simeq 3{,}16]$

71 Dato il triangolo ABC con $A(1; 3)$, $B(6; 1)$ e $C(3; -5)$, considera i punti medi M e N dei lati AC e BC e verifica che $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

72 Dati i punti $A(2k - 1; 2)$ e $B(3; 2k + 5)$, trova k in modo che il punto medio del segmento AB abbia ascissa doppia dell'ordinata. $[k = -6]$

73 Il segmento AB ha per estremi i punti $A(1; 2a + 1)$ e $B(a - 2; -a)$. Trova a sapendo che il punto medio di AB dista $\sqrt{5}$ dall'origine O. $[a = \pm 3]$

74 I punti $A(2; 1)$ e $B(5; 5)$ sono vertici del triangolo ABC. Sapendo che $M\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ è il punto medio del lato AC, determina le coordinate di C e il perimetro del triangolo. $[C(-1; -3); 20]$

75 I punti $A(-2; 3)$ e $B(3; 4)$ sono vertici del triangolo ABC. Sapendo che $M(1; 1)$ è il punto medio del lato BC, determina le coordinate di C, verifica che il triangolo è isoscele e calcolane l'area. $[C(-1; -2); 13]$

76 I punti $A(3; 6)$, $B(-3; 3)$ e $C(-2; 2)$ sono vertici consecutivi del parallelogramma $ABCD$. Calcola le coordinate del quarto vertice D. (Ricorda che le diagonali di un parallelogramma si tagliano scambievolmente a metà.) $[D(4; 5)]$

77 I punti $A(0; 4)$ e $B(-1; 0)$ sono vertici consecutivi del parallelogramma $ABCD$. Sapendo che il punto $M(2; 1)$ è il punto di intersezione delle diagonali, trova le coordinate dei vertici C e D del parallelogramma. $[C(4; -2), D(5; 2)]$

78 Verifica che il triangolo ABC di vertici $A(1; 3)$, $B(4; 1)$, $C\left(3; \frac{11}{4}\right)$ è isoscele e trova la misura dell'altezza relativa alla base. $\left[\frac{\sqrt{13}}{4}\right]$

79 Individua il vertice C di un triangolo isoscele di base AB con $A(-1; 1)$ e $B(2; 0)$, sapendo che l'altezza relativa ad AB misura $\frac{\sqrt{10}}{2}$. $[C_1(1; 2), C_2(0; -1)]$

80 Un parallelogramma $ABCD$ ha due vertici consecutivi in $A(1; 2)$ e $B(7; -1)$ e il punto di intersezione delle diagonali è $P(4; 3)$. Determina i vertici C e D, il perimetro e l'area del parallelogramma. $[C(7; 4), D(1; 7); 2p = 10 + 6\sqrt{5}; \text{area} = 30]$

La simmetria centrale

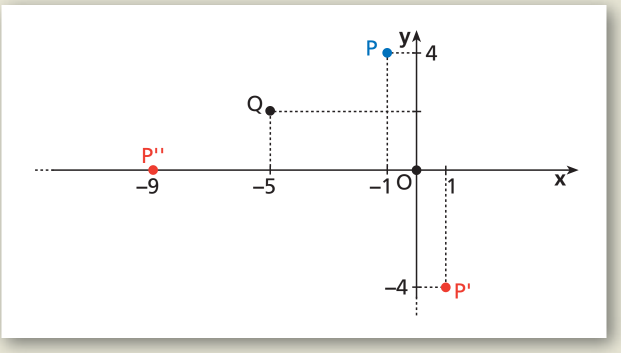
81 **ESERCIZIO GUIDA**

Dato il punto $P(-1; 4)$, troviamo il suo simmetrico P' rispetto all'origine O e il suo simmetrico P'' rispetto a $Q(-5; 2)$.

Le coordinate del punto P' simmetrico di $P(x; y)$ rispetto all'origine sono $(-x; -y)$.
Quindi le coordinate di P' sono $(1; -4)$.
Le equazioni della simmetria di centro $Q(-5; 2)$ sono:

$$\begin{cases} x' = 2x_Q - x \\ y' = 2y_Q - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = -10 - x \\ y' = 4 - y \end{cases}$$

Quindi le coordinate di P'' sono $(-9; 0)$.



82 Trova le coordinate dei punti simmetrici rispetto all'origine O dei punti $A(-3; 1)$, $B\left(\frac{1}{2}; -1\right)$, $C(4; -3)$, $D(2; 0)$. $\left[A'(3; -1), B'\left(-\frac{1}{2}; 1\right), C'(-4; 3), D'(-2; 0)\right]$

83 Determina le coordinate dei punti simmetrici rispetto a $P(-1; 3)$ dei punti $A(4; 0)$, $B(-1; -3)$, $C(6; -2)$, $D(2; -5)$. $[A'(-6; 6), B'(-1; 9), C'(-8; 8), D'(-4; 11)]$

84 Individua il triangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC, con $A(-1;-2)$, $B(3;0)$, $C(0;2)$, rispetto al punto $P(1;4)$.
$[A'(3;10), B'(-1;8), C'(2;6)]$

85 I due punti $P\left(\frac{1}{2};5\right)$ e $P'\left(\frac{3}{2};-1\right)$ si corrispondono in una simmetria di centro C. Trova le coordinate di C e scrivi le equazioni della simmetria. $[C(1;2);\ x'=2-x,\ y'=4-y]$

86 Nella simmetria di centro C, il punto $A\left(-1;\frac{1}{4}\right)$ corrisponde ad $A'\left(-\frac{1}{2};3\right)$. Determina le coordinate di C, le equazioni della simmetria e trova il corrispondente B' del punto $B\left(-\frac{7}{2};2\right)$.
$\left[C\left(-\frac{3}{4};\frac{13}{8}\right);\ x'=-\frac{3}{2}-x,\ y'=\frac{13}{4}-y;\ B'\left(2;\frac{5}{4}\right)\right]$

87 Determina i simmetrici, rispetto all'origine degli assi, dei punti $A(-1;3)$ e $B(3;3)$ e indicali con A' e B'. Verifica che il quadrilatero $ABA'B'$ è un parallelogramma.

88 Dato il segmento di estremi $A(-1;1)$ e $B(4;-2)$, trova il segmento simmetrico $A'B'$ rispetto al punto $P(1;2)$ e determina sull'asse x un punto C in modo che il triangolo $A'B'C$ sia isoscele sulla base $A'B'$.
$\left[A'(3;3), B'(-2;6); C\left(-\frac{11}{5};0\right)\right]$

89 Determina i punti P' e Q' simmetrici rispettivamente di $P(-4;1)$ e $Q(-2;-2)$, rispetto all'origine O degli assi, e determina un punto R sull'asse y in modo che il triangolo $P'Q'R$ sia rettangolo con ipotenusa RP'.
$\left[P'(4;-1), Q'(2;2); R\left(0;\frac{2}{3}\right)\right]$

90 Dato il triangolo ABC di vertici $A(\sqrt{3};1)$, $B(2\sqrt{3};4)$, $C(0;4)$, verifica che esso è equilatero. Considera il centro P del triangolo e trova le coordinate del triangolo simmetrico rispetto al punto P.
$[P(\sqrt{3};3);\ A'(\sqrt{3};5), B'(0;2), C'(2\sqrt{3};2)]$

Il baricentro di un triangolo

91 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo le coordinate del baricentro del triangolo di vertici $A(-3;6)$, $B(1;-4)$, $C(5;4)$.

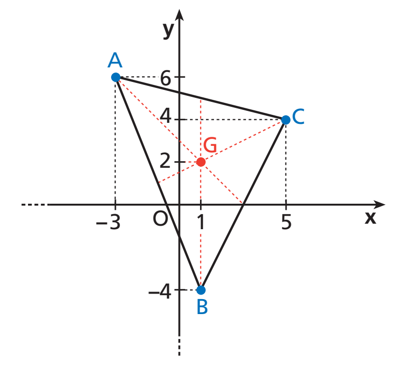
Disegniamo il triangolo e calcoliamo le coordinate del baricentro, utilizzando le formule:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Si ha che:

$$x_G = \frac{-3+1+5}{3} = 1 \quad \text{e} \quad y_G = \frac{6-4+4}{3} = 2.$$

Il baricentro del triangolo ABC è il punto $G(1;2)$.



Determina le coordinate del baricentro del triangolo ABC.

92 $A(2;4)$, $B(-1;-5)$, $C(5;-2)$.

93 $A(-3;7)$, $B(0;1)$, $C(6;6)$.

94 $A(-3;0)$, $B\left(\frac{1}{2};-3\right)$, $C\left(\frac{5}{2};3\right)$.

95 $A(1;0)$, $B\left(\frac{2}{3};-7\right)$, $C\left(-\frac{5}{3};-1\right)$.

96 $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $B(3\sqrt{2}; 1)$, $C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right)$.

97 $A\left(\sqrt{3}; \frac{1}{3}\right)$, $B\left(2\sqrt{3}; \frac{2}{3}\right)$, $C(\sqrt{27}; 5)$.

98 Un triangolo ABC con $A(-3; 2)$ e $B(4; 1)$ ha come baricentro $G(1; 3)$. Calcola le coordinate di C. [(2; 6)]

99 Trova le coordinate del terzo vertice C di un triangolo, sapendo che due vertici sono $A(3; 8)$ e $B(-1; 2)$ e il baricentro è $G(2; 3)$, e trova il simmetrico di G rispetto a C. [$C(4; -1)$; $(6; -5)$]

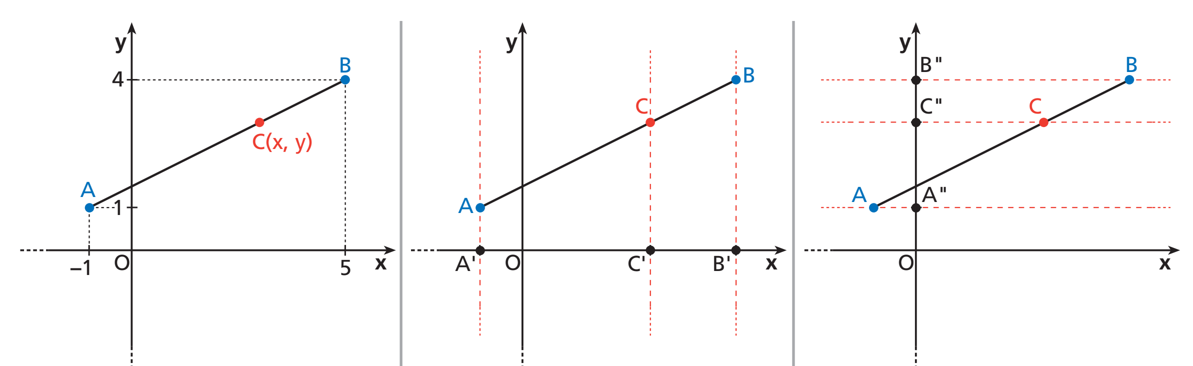
100 È dato il triangolo ABC di vertici $A(k-1; 3)$, $B(2k; h-2)$ e $C(4; -2h)$. Trova k e h in modo che il baricentro del triangolo sia l'origine degli assi. [$k = -1$, $h = 1$]

101 Il triangolo ABC ha come vertici i punti $A(4a+1; 2)$, $B(3-a; a^2-6)$ e $C(5; 0)$. Per quali valori di a il baricentro del triangolo appartiene al secondo quadrante? [$a \leq -3$]

Parti proporzionali in un segmento

102 **ESERCIZIO GUIDA**

Dato il segmento di estremi $A(-1; 1)$ e $B(5; 4)$, determiniamo le coordinate del punto C su AB tale che AC sia il doppio di BC.



a. Disegniamo il segmento AB e fissiamo approssimativamente il punto C.

b. Tracciamo da A, B e C le rette parallele all'asse y.

c. Tracciamo da A, B e C le rette parallele all'asse x.

Poiché $AC \cong 2CB$, valgono le due relazioni $A'C' \cong 2C'B'$ e $A''C'' \cong 2C''B''$ (figura b e figura c).
Indichiamo con $(x; y)$ le coordinate di C.
Determiniamo le lunghezze dei segmenti $A'C'$ e $C'B'$ sull'asse x, per applicare la prima relazione e ricavare l'ascissa di C:

$$\overline{A'C'} = x - x_A = x - (-1) = x + 1,$$
$$\overline{C'B'} = x_B - x = 5 - x.$$

Ricaviamo x:

$$x + 1 = 2(5 - x) \quad \rightarrow \quad x + 1 = 10 - 2x \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad 3x = 9 \quad \rightarrow \quad x = 3.$$

In modo analogo determiniamo l'ordinata di C:

$$\overline{A''C''} = y - y_A = y - 1,$$
$$\overline{C''B''} = y_B - y = 4 - y.$$

Ricaviamo y:

$$y - 1 = 2(4 - y) \quad \rightarrow \quad y - 1 = 8 - 2y \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad 3y = 9 \quad \rightarrow \quad y = 3.$$

Il punto cercato è $C(3; 3)$.

103 Nel segmento di estremi $A(-2; -4)$ e $B(4; -1)$ determina le coordinate di un punto C tale che AC sia doppio di BC. $[C(2; -2)]$

104 Nel segmento di estremi $A(-3; 4)$ e $B(3; -2)$ individua le coordinate di un punto C tale che AC sia triplo di BC. $\left[C\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)\right]$

105 Dato il segmento di estremi $A(-4; 0)$ e $B(6; 5)$, quali sono le coordinate di un punto C tali che AC sia un quarto di BC? $[C(-2; 1)]$

106 Dato il segmento di estremi $A(0; 6)$ e $B(7; 1)$, determina le coordinate dei punti che lo dividono in due parti proporzionali ai numeri 4 e 3. $\left[\left(3; \frac{27}{7}\right), \left(4; \frac{22}{7}\right)\right]$

107 Dato il segmento di estremi $A(-2; 9)$ e $B(14; 1)$, trova le coordinate dei punti che lo dividono in due parti proporzionali ai numeri 5 e 3. $[(4; 6), (8; 4)]$

108 Calcola le coordinate dei punti del segmento di estremi $A(4; 4)$ e $B(-2; -5)$ che lo suddividono in tre parti congruenti. $[(2; 1), (0; -2)]$

109 Individua le coordinate dei punti del segmento di estremi $A(-1; 3)$ e $B(7; -5)$ che lo suddividono in quattro parti congruenti. $[(3; -1), (1; 1), (5; -3)]$

110 I punti $A(6; 1)$ e $M(1; 0)$ sono gli estremi della mediana AM di un triangolo ABC. Trova il baricentro G del triangolo. $\left[G\left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right)\right]$

ESERCIZI VARI La distanza, il punto medio e il baricentro

TEST

111 Il triangolo di vertici $A(-1; -2)$, $B(6; 5)$ e $C(k; -3)$ ha area 28. Qual è il valore di k?

A 6.
B 6 o -10.
C 10.
D $-\frac{3}{2}$.
E -6 o 10.

112 Se G è il baricentro del triangolo di vertici $A(-2; 3)$, $B(-3; 1)$ e $C(8; -1)$, allora il simmetrico di A rispetto a G è il punto:

A $(-4; 1)$.
B $(-5; 5)$.
C $(5; -5)$.
D $(4; -1)$.
E $(4; -5)$.

113 Nel triangolo ABC la mediana AM ha per estremi i punti $A(-3; 5)$ e $M(-3; -1)$. Quali sono le coordinate del baricentro del triangolo ABC?

A $(-3; 1)$.
B $(-3; 3)$.
C $(-3; 0)$.
D $(-3; 2)$.
E I dati non sono sufficienti per determinarle.

114 Il triangolo di vertici $A(1; 2)$, $B(1-3a; -4)$ e $C(1; b-4)$ ha per baricentro il punto $G(-1; -1)$ se:

A $a = 1 \wedge b = 3$.
B $a = 3 \wedge b = 2$.
C $a = 2 \wedge b = 3$.
D $a = 1 \wedge b = 1$.
E $a = 2 \wedge b = 1$.

115 Un insetto nel piano xy parte dal punto $(1; 9)$. Si muove dapprima fino al punto $(2; 10)$, poi al punto $(3; 11)$ e così via. Continua a muoversi in questo modo fino a che raggiunge un punto la cui coordinata y è il doppio della sua coordinata x. Quali sono le coordinate di questo punto?

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge*, 2004)

116 **TEST** Un triangolo ha due vertici nei punti di coordinate $(-4; 1)$ e $(2; -1)$ e il terzo vertice nel punto di coordinate $(1; k)$. Per quanti valori reali di k tale triangolo risulta isoscele?

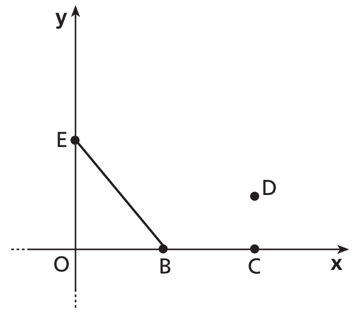
A Nessuno.
B 1.
C 4.
D 5.
E Infiniti.

(*Olimpiadi di Matematica, Giochi di Archimede*, 2003)

117 Nel grafico, il punto E ha coordinate $(0; 2)$ e B giace sul semiasse x positivo così che $\overline{BE} = \sqrt{7}$. Inoltre, il punto C giace sul semiasse x positivo così che $\overline{BC} = \overline{OB}$. Se il punto D si trova nel primo quadrante in modo che $C\widehat{B}D = 30°$ e $B\widehat{C}D = 90°$, qual è la lunghezza di ED?

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge*, 2004)

$[\sqrt{13}]$



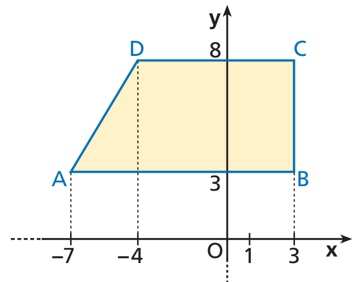
118 **TEST** Considera il piano cartesiano. Quanti sono i quadrati aventi un vertice in $(-1; -1)$ e tali che uno degli assi coordinati sia asse di simmetria del quadrato stesso?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

(*Kangourou Italia, Categoria Student*, 2004)

119 Calcola la misura del perimetro e dell'area del trapezio in figura. Congiungi C e B con il punto medio M del lato AD e dimostra che il triangolo MCB è isoscele e ha area uguale alla metà di quella del trapezio.

$\left[22 + \sqrt{34}; \frac{85}{2}\right]$



120 Verifica che il triangolo di vertici $A(-3; -1)$, $B\left(2; \frac{3}{2}\right)$, $C(-9; 11)$ è rettangolo e poi verifica che la mediana relativa all'ipotenusa è congruente alla metà dell'ipotenusa stessa.

121 Verifica che il quadrilatero di vertici $A(11; -5)$, $B(16; 7)$, $C(3; 7)$, $D(-2; -5)$ è un rombo. Determina la misura dell'area del rombo e la misura del raggio della circonferenza in esso inscritta. $[156; 6]$

122 Del rombo $ABCD$ sono noti i vertici $A(1; 0)$, $B(5; 3)$ e il punto di incontro delle diagonali $M(1; 3)$. Trova le coordinate degli altri vertici C e D e il perimetro del rombo. Sul segmento AB determina un punto Q tale che $2\overline{AQ} = 3\overline{QB}$.

$\left[C(1; 6), D(-3; 3); 2p = 20; Q\left(\frac{17}{5}; \frac{9}{5}\right)\right]$

123 Un triangolo ha vertici $A(-3; 2)$ e $B(5; 2)$ e area $\mathcal{A} = 16$. Determina le coordinate del terzo vertice C, sapendo che appartiene al semiasse delle ordinate positive. Determina poi le coordinate del circocentro del triangolo e il raggio della circonferenza circoscritta.

$\left[C(0; 6); D\left(1; \frac{17}{8}\right); \frac{5}{8}\sqrt{41}\right]$

124 Determina le coordinate di un punto P avente ascissa uguale all'ordinata ed equidistante dai punti $A(2; 0)$ e $B(0; 4)$ e trova il perimetro, l'area e il baricentro del triangolo APB.

$\left[P(3; 3); \sqrt{10}\,(2 + \sqrt{2}); 5; G\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right)\right]$

125 Dato il triangolo ABC di vertici $A(0; 4)$, $B(1; -3)$ e $C(5; 0)$, calcola il perimetro e l'area. Trova poi il baricentro G e il circocentro P del triangolo.

$\left[5\sqrt{2} + \sqrt{41} + 5; \frac{31}{2}; G\left(2; \frac{1}{3}\right), P\left(\frac{87}{62}; \frac{39}{62}\right)\right]$

126 Considerati i punti $A(-2a; -1)$ e $B(a - 5; -1)$, con a numero positivo, individua a in modo che $\overline{AB}$ sia uguale a 7. Determina poi il punto C di ascissa 5, in modo che il triangolo ABC abbia area che misura 35.

$[a = 4; C_1(5; 9), C_2(5; -11)]$

127 Del parallelogramma $ABCD$ sono noti i vertici consecutivi $A(1; 5)$, $B(-4; -7)$, $C(2; 1)$. Calcola le coordinate del vertice D e il perimetro. Verifica che il quadrilatero che si ottiene congiungendo i punti medi dei lati del parallelogramma è ancora un parallelogramma che ha il perimetro uguale alla somma delle diagonali di $ABCD$.
[(7; 13); 46]

128 Se $M(2; 2)$ è il punto di incontro delle diagonali di un quadrato $ABCD$ di lato $l = 2\sqrt{2}$, determina le coordinate dei vertici del quadrato, sapendo che le diagonali sono perpendicolari agli assi coordinati.
[$A(4; 2)$, $B(2; 4)$, $C(0; 2)$, $D(2; 0)$]

129 Considera i punti $A(a+2; 1)$ e $B(3; b-1)$, con a e b numeri reali. Calcola a e b in modo che $\overline{AB}$ sia uguale a 1 e che il punto medio M del segmento AB abbia ordinata $\frac{1}{2}$. Trova poi i punti C sull'asse y la cui distanza da A è $3\sqrt{10}$.
[$a = 1$, $b = 1$; $A(3; 1)$, $B(3; 0)$; $C_1(0; 10)$, $C_2(0; -8)$]

130 Determina i vertici del quadrato che ha come diagonale il segmento di estremi $P(1; -3)$ e $R(-5; 1)$.
[$Q(0; 2)$; $S(-4; -4)$]

131 I punti $A(4; 6)$, $B(9; 3)$ e $C(6; -2)$ sono tre vertici consecutivi di un quadrilatero $ABCD$ avente le diagonali perpendicolari che si intersecano nel punto M, punto medio della diagonale AC. M divide la diagonale BD in due parti tali che MD è doppio di MB. Determina le coordinate del vertice D e l'area di $ABCD$.
[$D(-3; 0)$, 51]

132 I punti $A(-2; 4)$ e $B(0; 1)$ sono due vertici del parallelogramma $ABCD$ e il punto $M\left(2; \frac{9}{2}\right)$ è il punto di intersezione delle diagonali.

a) Determina le coordinate dei vertici C e D del parallelogramma.
b) Verifica che il parallelogramma è un rettangolo.
c) Calcolane il perimetro e l'area.
$\left[\text{a) } C(6; 5), D(4; 8); \text{ c) } 2p = 6\sqrt{13}, \text{ area} = 26\right]$

133 I vertici di un triangolo sono $A(3; h+k+1)$, $B(h-k; 2)$ e $C(h; h+2k+1)$. Per quali valori dei parametri h e k il baricentro è $G(1; 4)$? Rappresenta il triangolo ottenuto e, dopo aver verificato che è isoscele, determina il raggio della circonferenza in esso inscritta. (Suggerimento. La misura del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo è uguale al rapporto delle misure della doppia area e del perimetro.)
$\left[h = 1, k = 2; \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}\right]$

134 Trova i punti A' e B' simmetrici dei punti $A(-2; 1)$ e $B(1; 4)$, rispetto all'origine O degli assi, e determina nel quarto quadrante il punto C in modo che il triangolo $A'B'C$ sia rettangolo, con ipotenusa $A'C$, e abbia area uguale a 12.
[$A'(2; -1)$, $B'(-1; -4)$; $C(3; -8)$]

135 Dopo aver verificato che il quadrilatero $ABCD$ di vertici $A(1; -1)$, $B(3; -4)$, $C(6; -6)$ e $D(4; -3)$ è un rombo, dimostra che, congiungendo i punti medi dei lati, si ottiene un rettangolo.

136 Un triangolo isoscele ABC ha i vertici della base $A(-2; 1)$ e $B(6; -1)$ e la misura dell'area è $\frac{85}{2}$.

a) Trova il vertice C.
b) Determina il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo.
$\left[\text{a) } C_1\left(\frac{9}{2}; 10\right), C_2\left(-\frac{1}{2}; -10\right); \text{ b) } \frac{\sqrt{493} - 2\sqrt{17}}{5}\right]$

137 In un triangolo di vertici $A(0; 5)$, $B(3; -1)$ e $C(6; 3)$ conduci da un punto P del lato AB la retta parallela al lato BC fino a incontrare il lato AC nel punto Q. Quali coordinate deve avere P affinché le aree dei triangoli PAQ e BAC stiano fra loro come 4 sta a 9?
[$P(2; 1)$]

138 I vertici del triangolo ABC sono $A(-1; 4)$, $B(2; 3)$ e $C(-7; 1)$. Individua il triangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC rispetto all'origine degli assi, determina le coordinate del baricentro, il perimetro e l'area del triangolo $A'B'C'$. Trova poi la distanza tra i circocentri dei due triangoli.

$$\left[A'(1; -4), B'(-2; -3), C'(7; -1); G\left(2; -\frac{8}{3}\right); \sqrt{5}(3+\sqrt{2}+\sqrt{17}); \frac{15}{2}; \sqrt{34}\right]$$

139 Verifica che il triangolo di vertici $A(4; 2)$, $B(9; 4)$ e $C\left(8; -\frac{3}{4}\right)$ è isoscele e calcola la sua area.

Trova le coordinate dei punti che dividono l'altezza CH del triangolo in tre segmenti congruenti.

$$\left[\frac{87}{8}; P\left(\frac{15}{2}; \frac{1}{2}\right), Q\left(7; \frac{7}{4}\right)\right]$$

140 Dati i punti $A(-4; 0)$ e $B(2; 2)$, trova per quali valori di k il punto $C(2k-1; k+3)$ è il vertice del triangolo isoscele ABC di base AB. Determina poi un punto P del lato AC tale che $\frac{\overline{AP}}{7} = \overline{PC}$.

$$\left[-\frac{2}{7}; P\left(-\frac{15}{8}; \frac{19}{8}\right)\right]$$

141 Un triangolo ABC ha per vertici i punti $A(k^2-1; 2)$, $B(-4; 2k)$ e $C(5; 1-3k)$. Trova k in modo che il triangolo $A'B'C'$, simmetrico di ABC rispetto al punto $P(-1; 2)$, abbia per baricentro il punto $G'\left(-\frac{10}{3}; \frac{11}{3}\right)$. Calcola poi il perimetro e l'area del triangolo ABC.

$$\left[k = 2; 2\sqrt{53}+9\sqrt{2}; \frac{45}{2}\right]$$

142 Dato il triangolo ABC di vertici $A(-2; 0)$, $B(1; -3)$ e $C(-1; 4)$, trova il baricentro G del triangolo $A'B'C'$, simmetrico di ABC rispetto al punto $P(2; 1)$. Trova poi l'area di $A'B'C'$ e il circocentro D.

$$\left[G\left(\frac{14}{3}; \frac{5}{3}\right); \frac{15}{2}; D\left(\frac{19}{10}; \frac{9}{10}\right)\right]$$

143 Del triangolo ABC sono noti il vertice $B(4; 5)$ e il punto medio $M(1; 1)$ del lato AC. Trova:

a) il baricentro G del triangolo;
b) le coordinate del vertice A sapendo che si trova sull'asse y, con ordinata minore di 5, e che il lato AB misura $2\sqrt{5}$;
c) le coordinate del vertice C;
d) il perimetro e l'area del triangolo.

$$\left[\text{a) } G\left(2; \frac{7}{3}\right); \text{ b) } A(0; 3); \text{ c) } C(2; -1); \text{ d) } 2\sqrt{5}(2+\sqrt{2}), 10\right]$$

144 Dati i punti $A(-2; 2)$ e $B(1; 8)$, determina:

a) il punto C di ordinata -1 in modo che il triangolo ABC sia rettangolo in A;
b) il punto D di ascissa -1 in modo che il triangolo ABD sia isoscele con la base su AB;
c) il rapporto tra le aree dei triangoli ABC e ABD;
d) il circocentro dei triangoli ABC e ABD.

$$\left[\text{a) } C(4; -1); \text{ b) } D\left(-1; \frac{21}{4}\right); \text{ c) } 12; \text{ d) } P\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right), P'\left(\frac{33}{4}; \frac{5}{8}\right)\right]$$

145 Considera un triangolo rettangolo qualsiasi e, fissato un opportuno sistema di riferimento, dimostra che il punto medio dell'ipotenusa è equidistante dai tre vertici.

146 Dato un trapezio qualsiasi, fissa un opportuno sistema di riferimento e verifica che il segmento congiungente i punti medi dei lati obliqui è congruente alla semisomma delle due basi.

3. L'EQUAZIONE DI UNA RETTA

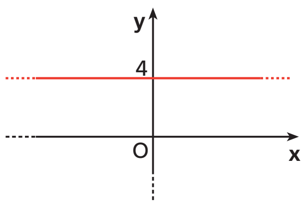
▶ Teoria a pag. 159

Dal grafico all'equazione

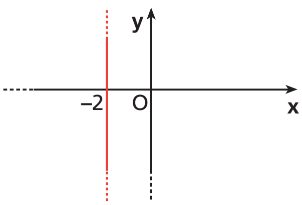
Rette parallele agli assi

Per ogni grafico scrivi l'equazione della retta relativa.

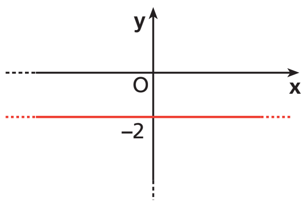
147



148



149



150 Disegna la retta che passa per il punto $P(1; -5)$ parallela all'asse x e trova la sua equazione.

151 Traccia la retta parallela all'asse y passante per il punto $A(-2; 1)$ e scrivi la sua equazione.

152 Scrivi l'equazione del luogo dei punti del piano di ascissa -4.

153 Dato il punto $A(4; -6)$, disegna le rette parallele agli assi passanti per A e scrivi le loro equazioni.

Rette non parallele agli assi. L'equazione di una retta passante per due punti

154 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo l'equazione della retta passante per i punti $A(1; 4)$ e $B(-1; 3)$ e verifichiamo che il punto $C(-5; 1)$ è allineato con A e B.

Applichiamo la formula generale per l'equazione di una retta passante per due punti:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Sostituiamo a $(x_1; y_1)$ le coordinate di A e a $(x_2; y_2)$ le coordinate di B:

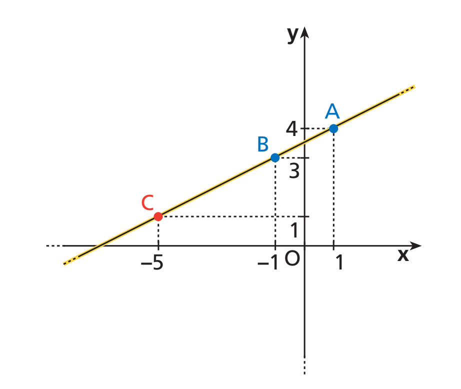
$$\frac{y-4}{3-4} = \frac{x-1}{-1-1} \to -(y-4) = -\frac{1}{2}(x-1) \to$$

$$\to y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}.$$

L'equazione richiesta è $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

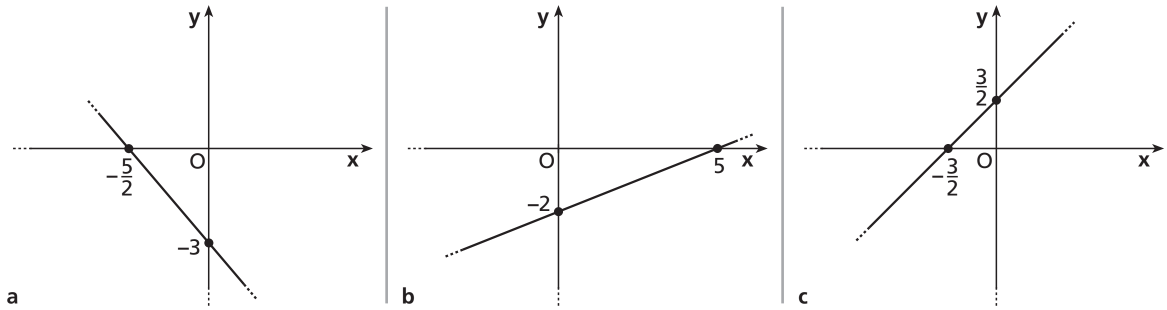
Il punto $C(-5; 1)$ è allineato con A e B perché appartiene alla retta passante per A e B, infatti le coordinate di C verificano l'equazione di tale retta:

$$y = \frac{1}{2}(-5) + \frac{7}{2} = 1.$$

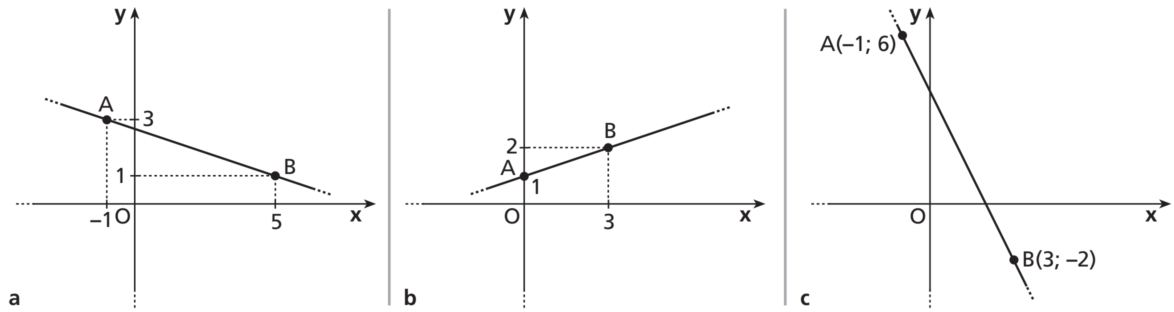


Scrivi le equazioni delle rette rappresentate, utilizzando le informazioni fornite dal grafico.

155



156



Scrivi l'equazione della retta passante per la coppia di punti indicata.

157 $A(3; 0)$, $B(0; 5)$.

158 $A(-5; 0)$, $B(0; -2)$.

159 $A\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$, $B\left(2; -\frac{3}{2}\right)$.

160 $A\left(\frac{1}{3}; -1\right)$, $B\left(2; \frac{2}{3}\right)$.

161 $A(1; 1)$, $B(-1; -1)$.

162 $A(0; 0)$, $B(5; 4)$.

163 $A(-3; 7)$, $B(6; 2)$.

164 $A(5; 2)$, $B(-3; 2)$.

165 $A(8; 8)$, $B(2; -2)$.

Stabilisci se le seguenti terne di punti sono costituite da punti allineati e, nel caso lo siano, scrivi l'equazione della retta su cui giacciono.

166 $A(1; -1)$, $B(5; -7)$, $C(-1; 2)$. $[3x + 2y - 1 = 0]$

167 $A(-1; -1)$, $B(-6; -3)$, $C(1; 1)$. [non allineati]

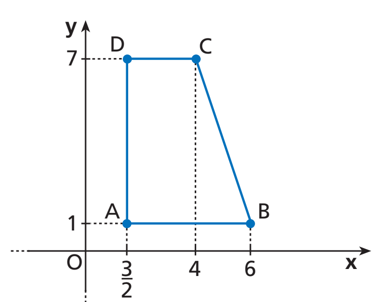
168 $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, $B(1; -1)$, $C(-1; 0)$. [non allineati]

169 $A(-9; 1)$, $B(-3; 0)$, $C(3; -1)$. $[x + 6y + 3 = 0]$

170 $A\left(\frac{5}{4}; 0\right)$, $B\left(0; -\frac{5}{3}\right)$, $C(2; 1)$. $[4x - 3y - 5 = 0]$

171 Utilizzando i dati della figura a lato, scrivi le equazioni dei lati del trapezio e quelle delle due diagonali.

$\left[y = 1,\ y = 7,\ x = \frac{3}{2},\ y = -3x + 19;\ 12x - 5y - 13 = 0,\ 4x + 3y - 27 = 0\right]$



172 Scrivi l'equazione della retta passante per $A\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ e $B\left(4; -\frac{3}{2}\right)$ e trova l'ordinata del punto C della retta avente ascissa -1.

$\left[14x + 18y - 29 = 0;\ y_C = \frac{43}{18}\right]$

Dall'equazione al grafico

Rappresenta in un grafico cartesiano le rette che hanno le seguenti equazioni.

173 $x = -3$; $y = 2$.

174 $2x - 1 = 0$; $y - 5 = 0$.

175 $2x - y = 0$; $4y + 1 = 0$.

176 $y = 2x - 2$; $y = -4$.

177 $y = -\frac{2}{3}x + 1$; $x = \frac{5}{2}$.

178 $2x + 7 = 0$; $4x - y + 4 = 0$.

179 $y = -x + 4$; $y = \frac{1}{4}x - 1$.

180 $x = 4$; $x - y + 3 = 0$.

181 $4x - 3 = 0$; $2x + y - 1 = 0$.

182 $y - 5x = 0$; $1 + x = 0$.

183 $2 - 3x = 0$; $4 + 6y = 0$.

184 $y - x + 1 = 0$; $2x - 3y + 6 = 0$.

185 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $ax + 1 = 0$ rappresenta, per $a \neq 0$, l'equazione di una retta parallela all'asse x. V F

b) L'equazione $ax + by + c = 0$ rappresenta sempre, al variare di a, b, c, una retta del piano cartesiano. V F

c) $x = 2$ nel piano cartesiano rappresenta il punto $(2; 0)$ dell'asse x. V F

d) La retta $2x - ky + 3 = 0$ passa per il punto $P(-3; 6)$ solo se $k = -\frac{1}{2}$. V F

Rappresenta ogni retta assegnata e stabilisci se i punti A e B le appartengono.

186 $2x - 6y - 1 = 0$, $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, $B\left(1; \frac{1}{6}\right)$. [$A$ no; B sì]

187 $y = \frac{1}{5}x + 2$, $A(-5; 3)$, $B(10; 4)$. [A no; B sì]

188 $7x - 8y - 11 = 0$, $A\left(1; -\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{7}; -\frac{4}{5}\right)$. [$A$ sì; B no]

189 Sulla retta $2x + y - 3 = 0$ determina il punto A di ascissa -1 e il punto B di ordinata 7.

190 È data la retta di equazione $2x + y - 5 = 0$.

a) Stabilisci se i punti $A(2; 1)$ e $B(1; 1)$ appartengono a essa.
b) Determina l'ordinata del suo punto C di ascissa 1 e l'ascissa del suo punto D di ordinata 4.

[a) A sì, B no; b) $C(1; 3)$, $D\left(\frac{1}{2}; 4\right)$]

191 Data la retta r di equazione $2x - y + 2 = 0$, stabilisci se i punti $P\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$ e $Q(1; -7)$ appartengono a r. Trova il punto R della retta di ascissa 4 e rappresenta r, P, Q, R. [P no, Q no; $R(4; 10)$]

192 Determina per ciascuna delle rette di equazioni $x - 4y + 7 = 0$, $2x + 6y - 7 = 0$ e $2y - x - 4 = 0$ il relativo punto di ordinata $\frac{4}{3}$. $\left[\left(-\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right), \left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)\right]$

193 Determina l'equazione della retta passante per l'origine e per il punto $A\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$. Verifica poi che la retta passa anche per i punti $B(3; 4)$, $C(-6; -8)$, $D\left(1; \frac{4}{3}\right)$. $\left[y = \frac{4}{3}x\right]$

I punti dei seguenti gruppi appartengono tutti a una stessa retta, tranne uno. Scrivi l'equazione della retta e individua il punto che non appartiene alla retta.

194 $A(-1; -5)$, $B(2; 10)$, $C(-3; -15)$, $D(-10; -2)$. [D]

195 $A(3; 9)$, $B(-2; 6)$, $C(4; 12)$, $D(1; 3)$. [B]

196 $A\left(\frac{1}{3}; 3\right)$, $B\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$, $C(3; 1)$, $D(6; 2)$. [A]

197 Scrivi l'equazione della retta r che passa per l'origine e per il punto $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$. Stabilisci poi se i punti $B(-3; 15)$ e $C(1; 6)$ appartengono alla retta r. [$y = -5x$; $B \in r$, $C \notin r$]

198 Dati la retta di equazione $2x - y + 3 = 0$ e il punto $A(h + 2; 3 - 2h)$, per quale valore di h il punto appartiene alla retta? [$h = -1$]

199 Determina il valore del parametro h affinché il punto $A(4h - 2; 1 + h)$ appartenga alla retta passante per i punti $P\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ e $Q\left(3; \frac{5}{3}\right)$. $\left[h = \frac{8}{5}\right]$

200 Trova il valore del parametro k affinché l'equazione $(k + 1)x - ky + 2 = 0$ sia l'equazione di una retta passante per il punto $A(1; -2)$ e disegna tale retta. [$k = -1$]

201 Calcola il valore del parametro k affinché la retta di equazione $(2k - 1)x - (k + 1)y + k = 0$ passi per il punto $A(0; 3)$ e disegna tale retta. Esiste un valore di k per cui l'equazione rappresenta una retta parallela all'asse y? $\left[k = -\frac{3}{2}; k = -1\right]$

202 Dati i punti $A(-2; 1)$ e $B(3; 3)$, trova le coordinate di tre punti appartenenti al segmento AB.

203 Trova, se esiste, per quale valore di k l'equazione lineare in x, y

$$(k^2 + k - 2)x + (k^2 - k)y + k^2 - 1 = 0:$$

a) non rappresenta una retta;
b) rappresenta una retta parallela all'asse y;
c) rappresenta una retta passante per $P(1; 0)$. $\left[\text{a) } k = 1; \text{ b) } k = 0; \text{ c) } k = -\frac{3}{2}\right]$

204 Trova, se esiste, una costante c tale che la retta di equazione $x + cy = 1$:

a) sia parallela all'asse x;
b) passi per $(3; 1)$;
c) sia parallela all'asse y;
d) passi per il punto dell'asse y di ordinata $-\frac{1}{2}$. [a) no; b) $c = -2$; c) $c = 0$; d) $c = -2$]

205 The equation of the line L is $2x - y + 4 = 0$. L intersects the x-axis at P and the y-axis at Q. Find the coordinates of P and the coordinates of Q. Show L on a diagram.

(IR *Leaving Certificate Examination*, Ordinary Level, 1995)

[$P(-2; 0)$; $Q(0; 4)$]

206 Let $P = (x; y)$ be a point on the line $x + y = 4$. Express the square of the distance from P to the origin $(0; 0)$ as a function of x. Find the value of x that minimizes this distance. Find the shortest distance from the line $x + y = 4$ to the origin.

(USA *Southern Illinois University Carbondale*, Final Exam, Spring 2002)

[$\overline{PO}^2 = 2x^2 - 8x + 16$; $x = 2$; $\overline{PO} = 2\sqrt{2}$]

4. LA FORMA ESPLICITA E IL COEFFICIENTE ANGOLARE

Teoria a pag. 163

IN PRATICA
Videolezione 12

Scrivi in forma esplicita le seguenti equazioni, specificando quali sono il coefficiente angolare e il termine noto.

207 $-2x+5y-1=0$; $\quad -y+2=0$; $\quad -x+3y=0$; $\quad 2y-3=0$; $\quad 2x+2y+5=0$.

Scrivi in forma implicita le seguenti equazioni.

208 $y=x-\frac{1}{2}$; $\quad y=-\frac{4}{5}x+3$; $\quad y=\frac{1}{4}-2x$; $\quad y=-\frac{5}{2}x$; $\quad y=-\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}$.

Il coefficiente angolare note le coordinate di due punti

209 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo, quando è possibile, il coefficiente angolare delle rette AB, CD, EF, conoscendo le coordinate dei punti $A(-1; 3)$, $B(3; 5)$, $C(4; 3)$, $D(2; 3)$, $E(-3; -2)$, $F(-3; -1)$.

Calcoliamo $m(AB)$, applicando la formula $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$:

$$m(AB)=\frac{5-3}{3-(-1)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Calcoliamo $m(CD)$, sempre con la stessa formula:

$$m(CD)=\frac{3-3}{2-4}=\frac{0}{-2}=0;$$ la retta è parallela all'asse x e la sua equazione è $y=3$.

Cerchiamo di calcolare $m(EF)$ allo stesso modo:

$$m(EF)=\frac{-1-(-2)}{-3-(-3)}=\frac{+1}{0};$$ la frazione non esiste, quindi non ha significato parlare di coefficiente angolare; la retta è parallela all'asse y e la sua equazione è $x=-3$.

Determina, quando è possibile, il coefficiente angolare della retta passante per ogni coppia di punti indicata.

210 $A(0; 3)$, $\quad B(2; 4)$.

211 $A(1; 5)$, $\quad B(3; 6)$.

212 $C(2; 5)$, $\quad D(4; 5)$.

213 $A\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$, $\quad B\left(\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right)$.

214 $E(0; 2)$, $\quad F(0; -2)$.

215 $A(3; -1)$, $\quad B(3; -3)$.

Nei seguenti esercizi sono dati il coefficiente angolare di una retta, le coordinate di un suo punto A e l'ascissa, oppure l'ordinata, di un altro suo punto B. Determina la coordinata mancante di B.

216 $m=3$, $\quad A(1; 2)$, $\quad B(3; ?)$.

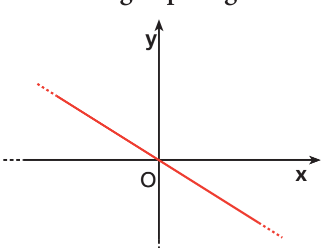
217 $m=-4$, $\quad A(5; 9)$, $\quad B(6; ?)$.

218 $m=-3$, $\quad A(-6; -6)$, $\quad B(?; -2)$.

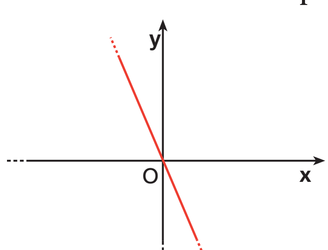
219 $m=-\frac{1}{4}$, $\quad A(2; -1)$, $\quad B\left(?; -\frac{3}{2}\right)$.

Scrivi una delle seguenti relazioni, riferite al coefficiente angolare della retta disegnata: $m>0$, $m=0$, $m<0$, m non definito. Disegna per ogni retta l'angolo che forma con la semiretta positiva dell'asse x.

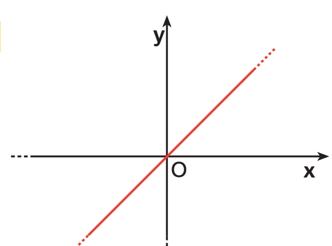
220



221

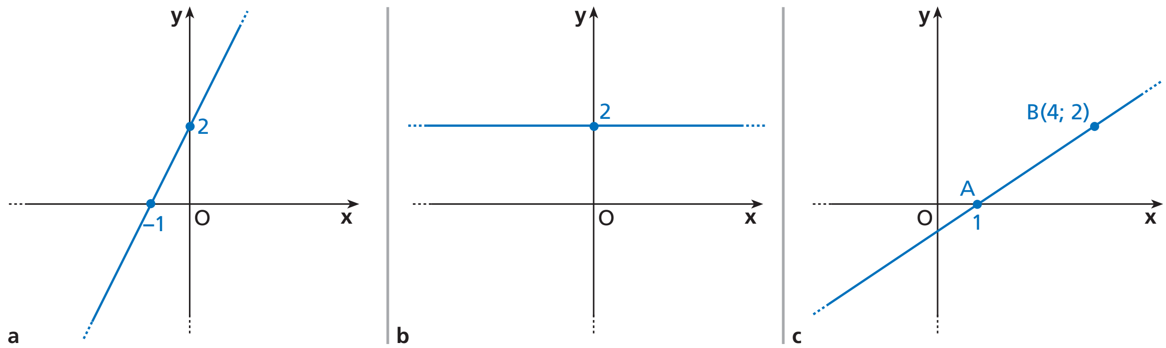


222



Scrivi il coefficiente angolare delle rette rappresentate nei seguenti grafici.

223



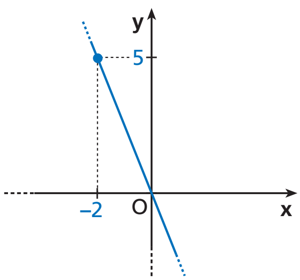
Determina il coefficiente angolare delle rette che formano con l'asse x l'angolo indicato.

224 30°; 45°; 60°. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; 1; \sqrt{3}\right]$

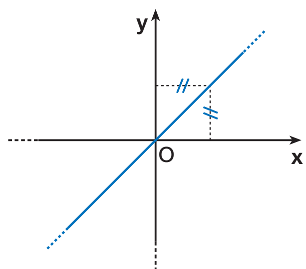
225 120°; 135°; 150°. $\left[-\sqrt{3}; -1; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

In base alle indicazioni date in ogni figura, ricava m e q e scrivi l'equazione della retta rappresentata.

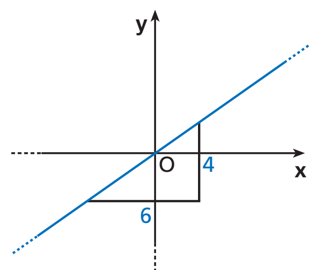
226



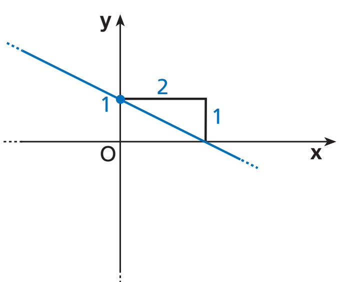
229



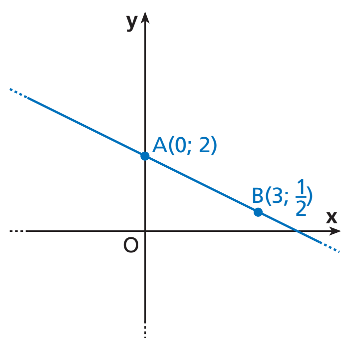
232



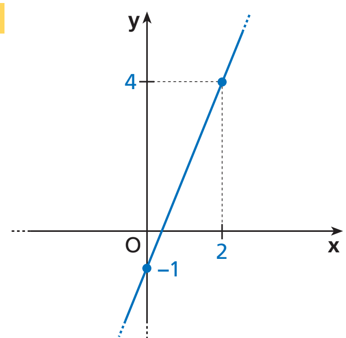
227



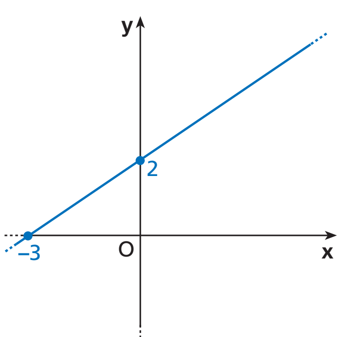
230



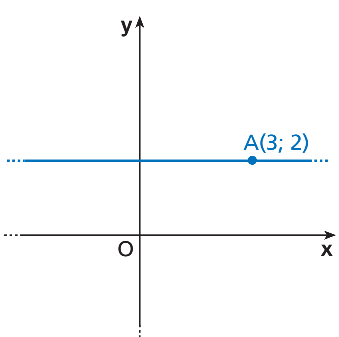
233



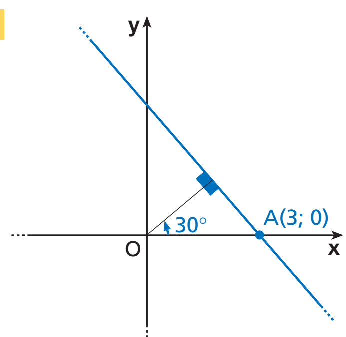
228



231



234



235 VERO O FALSO?

a) L'equazione $y = mx + q$ rappresenta tutte le rette del piano al variare di m e q. V F

b) L'equazione $y = mx + q$ è una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ solo se $m \neq 0$. V F

c) L'asse x non ha coefficiente angolare. V F

d) L'ordinata all'origine della retta $y - 5 = \frac{1}{2}(x + 1)$ è $\frac{11}{2}$. V F

236 VERO O FALSO?

a) L'asse y non ha coefficiente angolare. V F

b) L'equazione $y - 1 = m(x - 2)$ rappresenta tutte le rette passanti per il punto $P(2; 1)$. V F

c) Tutte le rette di equazione $y - 1 = m(x - 2)$ passano per il punto $P(2; 1)$. V F

d) L'equazione $y = mx + q$ rappresenta una retta che dista $|q|$ dall'origine. V F

237 VERO O FALSO? Considera le due rette di equazioni r: $ax + by + c = 0$ e s: $y = mx + q$.

a) Se $m = -\frac{a}{b}$ e $q = \frac{c}{b}$, con $b \neq 0$, r e s sono coincidenti. V F

b) r e s coincidono con la bisettrice del I e III quadrante se $a = b$ e $m = 1$. V F

c) Se $q = 4$, la retta s rappresenta tutte le rette passanti per $(0; 4)$, compreso l'asse y. V F

d) r e s passano per l'origine se $c = 0$ e $q = 0$. V F

e) Se $m = 0$, la retta s è parallela all'asse y. V F

f) Se $m = 0$, la retta r coincide con s solo se $a = 0$, $b \neq 0$ e $\frac{c}{b} = q$. V F

L'equazione di una retta passante per un punto e di coefficiente angolare noto

238 ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione della retta passante per il punto $P(2; -5)$ e di coefficiente angolare $m = -3$.

Utilizziamo la formula $y - y_1 = m(x - x_1)$. Sostituendo, si ha:

$$y + 5 = -3\,(x - 2) \;\rightarrow\; y = -3x + 1.$$

Scrivi l'equazione della retta passante per il punto indicato e di coefficiente angolare assegnato e rappresentala.

239 $A(-1; 2)$, $m = -1$.

240 $A\left(3; -\frac{1}{2}\right)$, $m = 3$.

241 $A(-2; -3)$, $m = \frac{1}{2}$.

242 $A(0; -2)$, $m = -5$.

243 $A\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{2}\right)$, $m = -\frac{3}{2}$.

244 $A(3; 0)$, $m = 4$.

245 Trova l'equazione della retta passante per l'origine e di coefficiente angolare $-\frac{2}{3}$ e poi calcola l'ascissa del punto P della retta che ha ordinata 6. $\left[y = -\frac{2}{3}x;\, x = -9\right]$

246 Scrivi l'equazione della retta che passa per il punto $P(0; 5)$ e ha coefficiente angolare uguale a quello della retta di equazione $2x - 3y + 1 = 0$. $\left[y = \frac{2}{3}x + 5\right]$

247 Determina l'equazione della retta che passa per $C(-1; 2)$ e con il coefficiente angolare uguale a quello della retta che passa per $A(2; 2)$ e $B(1; -4)$. $[y = 6x + 8]$

248 Trova l'equazione della retta r che forma con l'asse x un angolo di 45° e passa per il punto P di ascissa 2 appartenente alla bisettrice del secondo e quarto quadrante. $[y = x - 4]$

249 Scrivi le equazioni dei lati del triangolo equilatero che ha un lato sull'asse x e il centro nel punto $\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. $[y = 0,\ y = -\sqrt{3}\,x + \sqrt{3},\ y = \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}]$

I grafici di particolari funzioni

250 **ESERCIZIO GUIDA**

Rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \le 0 \\ -1 & \text{se } 0 < x \le 4 \\ x & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

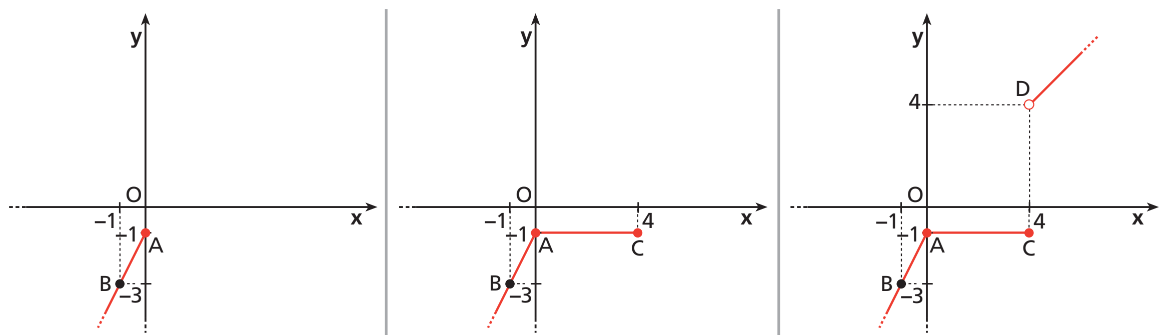
La funzione è definita per casi.

- Per $x \le 0$, la funzione ha equazione $y = 2x - 1$, che è l'equazione di una retta. Per $x = 0$ abbiamo $y = -1$, quindi per $x \le 0$ la funzione è rappresentata da una semiretta avente come origine il punto $A(0; -1)$.

Per disegnare tale semiretta cerchiamo un altro punto appartenente a essa, per esempio $B(-1; -3)$.

- Per $0 < x \le 4$ la funzione è costante ed è uguale a -1.
- Per $x > 4$ la funzione ha equazione $y = x$, che è l'equazione della bisettrice del primo e terzo quadrante. Per $x > 4$ la funzione è quindi rappresentata da una semiretta privata dell'origine $D(4; 4)$ e che forma con l'asse x un angolo di 45°.

Disegniamo il grafico.



a. Rappresentiamo nel piano cartesiano la semiretta avente come origine $A(0; -1)$ passante per $B(-1; -3)$.

b. Tracciamo il segmento di estremi $A(0; -1)$ e $C(4; -1)$.

c. Per $x > 4$, tracciamo la semiretta $y = x$ privata dell'origine $D(4; 4)$, che forma un angolo di 45° con l'asse x.

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

251 $y = \begin{cases} -x + 7 & \text{se } x \le 0 \\ 7 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

252 $y = \begin{cases} -5x + 1 & \text{se } x \le 1 \\ 2x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

253 $y = \begin{cases} -1 & \text{se } x < \frac{2}{3} \\ 3x + 2 & \text{se } x \ge \frac{2}{3} \end{cases}$

254 $y = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x \le 1 \\ -2x + 7 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

255 $y = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq 3 \\ 2x & \text{se } x > 3 \end{cases}$

256 $y = \begin{cases} -x-1 & \text{se } x \leq 0 \\ -1 & \text{se } 0 < x \leq 5 \\ x-6 & \text{se } x > 5 \end{cases}$

257 $y = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \leq -2 \\ -x-5 & \text{se } -2 < x < 1 \\ x-6 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

258 $y = \begin{cases} -3x+2 & \text{se } x < -1 \\ 3x+8 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -3x+11 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

259 $y = |x| + 1$

260 $y = 2|x| + 1$

261 $y = |x-4|$

262 $y = -|x-2|$

263 $y = |x+1| - 1$

264 $y = |2x+3| - 3$

265 $y = \dfrac{|x+1|}{x+1}$

266 $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} + 1$

267 $y = |x+3| + x + 3$

268 $y = |x| - 3$

269 $y = |3-x| + |x|$

270 $y = ||x|-1| + 2$

271 $y = |x-1| + |x-2|$

272 $y = |2x-1| - |x+4|$

273 $y = 2|x| - |2x-1| + |x+3|$

274 $y = -x + \sqrt{(x-1)^2}$

275 $y = \sqrt{x^2} + \sqrt{(1-x)^2} + |x|$

276 $y = 2 + \dfrac{|x|}{x} - x$

277 $y = \sqrt{x^2-6x+9} + |x| + 3$

278 $y = |2x + |x-1| + 2|$

279 $y = \dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}}{x-1} + 2$

280 $y = |x+1| + \dfrac{|x-2|}{2-x}$

281 $y = x + 2|x| - |1-x|$

282 $y = \dfrac{|x+1|}{x+1} + |x-2| + 2$

283 $y = \dfrac{x^2-7x+6}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

284 $y = \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{|x+1|(x+2)}$

285 $y = \dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-2x^2-x+2}$

286 $y = \dfrac{2x^2+5x+3}{|x+1|} - |x|$

287 $y = \dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{3-x} + |x-1| + 2$

Traccia i grafici che rappresentano le soluzioni delle seguenti equazioni. Si tratta di funzioni?

288 $|x| - x = 2$

289 $y + 2|y| = 3$

290 $|x| + |y| = 2$

291 $||x-1| + 2| + |y + |y+1| - 2| - 3 = 0$

292 $|x + |x| - 1| = |y-3|$

293 $|x+2| + |y-2| - 4 = 0$

294 $2|x-1| - 3|y+2| = 5$

295 $|x+4| - |y-5| = 9$

296 $x = \dfrac{2y}{|y|} - 1$

297 $x = \sqrt{y^2-4y+4} + y$

Disegna il grafico delle seguenti funzioni e trova il loro dominio e codominio.

298 $f(x) = \begin{cases} -3x - 1 & \text{se } x \leq -1 \\ 2x - \dfrac{1}{2} & \text{se } x > -1 \end{cases}$

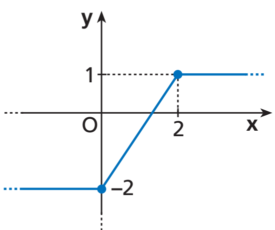
299 $f(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{se } x < -3 \\ |x| - 1 & \text{se } x \geq -3 \end{cases}$

300 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}x + 1 & \text{se } x < -2 \\ \dfrac{2|x-1|}{x-1}x & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$

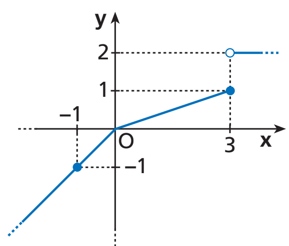
301 $f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{|x-4|}{x-4} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Esprimi analiticamente le funzioni rappresentate dai seguenti grafici.

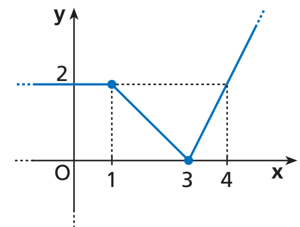
302



303



304

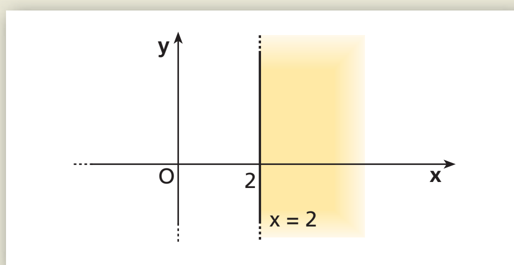


Le disequazioni in due variabili

305 **ESERCIZIO GUIDA**

Rappresentiamo nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni:
a) $x \geq 2$; b) $6x + 3y - 2 \geq 0$.

a) Tracciata la retta di equazione $x = 2$, osserviamo che le soluzioni sono rappresentate dai punti del semipiano costituito dalla retta e dai punti che hanno ascissa maggiore di 2.

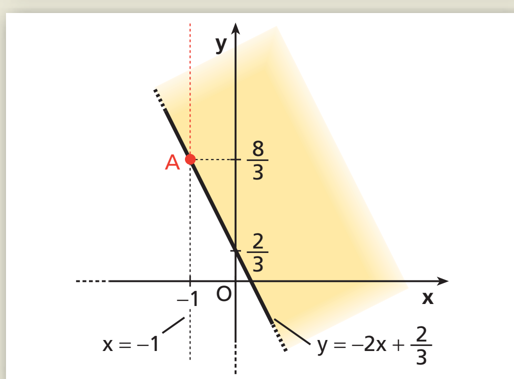


b) **Primo metodo**
Esplicitiamo rispetto alla y:

$$6x + 3y - 2 \geq 0 \rightarrow y \geq -2x + \frac{2}{3}.$$

Disegniamo nel piano cartesiano la retta di equazione $y = -2x + \dfrac{2}{3}$.

Le soluzioni della disequazione sono rappresentate da tutti i punti del semipiano in cui, a parità di ascissa, l'ordinata è maggiore o uguale all'ordinata del punto che si trova sulla retta.



Secondo metodo
Per evitare di esplicitare la disequazione rispetto a y, si può procedere mediante un **punto di prova**. Sostituiamo nella disequazione le coordinate di un punto che non si trovi sulla retta.
Se le coordinate del punto soddisfano la disequazione, il semipiano a cui appartiene il punto è il semipiano cercato. In caso contrario il semipiano da considerare è quello opposto.
Per comodità consideriamo come punto di prova l'origine O. Sostituiamo le sue coordinate nella disequazione.

Si ottiene $-2 \geq 0$, che è falso, quindi O non appartiene al semipiano cercato.

Il semipiano che rappresenta l'insieme delle soluzioni della disequazione è quello opposto al semipiano a cui appartiene O.

Rappresenta nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni.

306 $y \leq 4, \qquad 2x + 3 \geq 0.$

307 $y > x + 4, \qquad x + 6 > 0.$

308 $x < y, \qquad y \geq 2x.$

309 $x \geq 0, \qquad y \geq 2|x|.$

310 $y + x + 5 \geq 0, \qquad x + y > 2.$

311 $-1 \leq y < 2, \qquad y \leq |x + 1|.$

312 $y - x - 1 > 0, \qquad y \leq 6.$

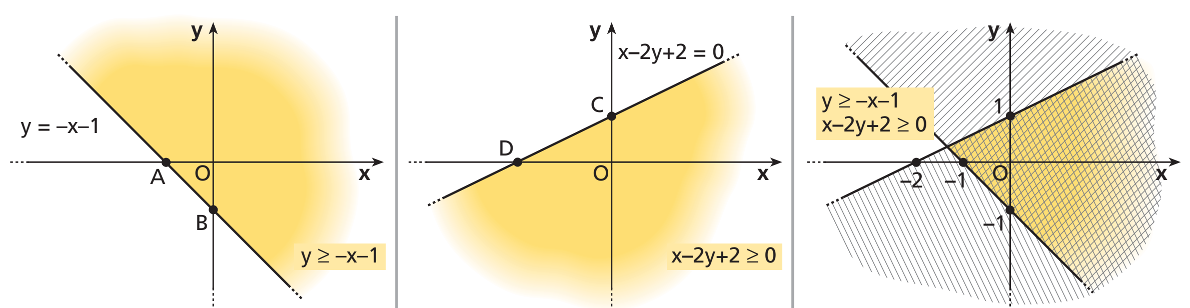
313 $2y + x \geq 4, \qquad x < y + 8.$

314 ESERCIZIO GUIDA

Rappresentiamo nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} y \geq -x - 1 \\ x - 2y + 2 \geq 0 \end{cases}$$

Il sistema rappresenta l'intersezione di due semipiani. Per individuarli disegniamo le rette di equazioni $y = -x - 1$ e $x - 2y + 2 = 0$, poi applichiamo il metodo del punto di prova.



a. Disegniamo la retta di equazione $y = -x-1$, utilizzando i suoi punti di intersezione con gli assi: $A(-1; 0)$ e $B(0; -1)$. Osserviamo che le coordinate dell'origine soddisfano la disequazione, infatti $0 \geq -0-1$.
Quindi le soluzioni della disequazione $y \geq -x-1$ sono date dai punti del semipiano individuato dalla retta contenente O.

b. Disegniamo la retta di equazione $x-2y+2 = 0$, utilizzando i suoi punti di intersezione con gli assi: $C(0; 1)$ e $D(-2; 0)$. Le coordinate dell'origine soddisfano la disequazione $x-2y+2 \geq 0$. Quindi le soluzioni sono date dai punti del semipiano individuato dalla retta contenente O.

c. Le soluzioni del sistema
$\begin{cases} y \geq -x-1 \\ x-2y+2 \geq 0 \end{cases}$
sono rappresentate dai punti della parte di piano intersezione dei due semipiani precedenti.

Rappresenta nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni dei seguenti sistemi di disequazioni.

315 $\begin{cases} y \geq 2 \\ y \leq x+6 \end{cases}$

316 $\begin{cases} y \leq 3x \\ y \geq x \end{cases}$

317 $\begin{cases} y - x - 1 \leq 0 \\ x < 0 \\ y + 3 \geq 0 \end{cases}$

318 $\begin{cases} 2y + 3x - 4 \leq 0 \\ 3y - 4x + 3 \geq 0 \end{cases}$

319 $\begin{cases} x > \frac{3}{4}y - 3 \\ x \leq 2 - 2y \end{cases}$

320 $\begin{cases} y \geq |x| \\ y \leq 4 \end{cases}$

321 $\begin{cases} |x| < 2 \\ |x+y| < 2 \end{cases}$

322 $\begin{cases} 2x - 3y + 6 \geq 0 \\ 9y + 4x - 36 \leq 0 \\ y > 1 \end{cases}$

323 $\begin{cases} |y - 2x| \leq 1 \\ |y + x| < 1 \end{cases}$

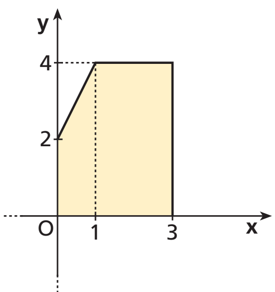
Trova l'area della figura individuata nel piano cartesiano dai seguenti sistemi di disequazioni.

324 $\begin{cases} 2y \geq 3x - 3 \\ 3y \leq 2x + 3 \\ y \geq -x + 1 \end{cases}$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

325 $\begin{cases} y + x \geq 0 \\ y - 2 \leq 0 \\ 4y \geq x - 5 \\ y \leq 5 - x \end{cases}$ $\left[\frac{25}{2}\right]$

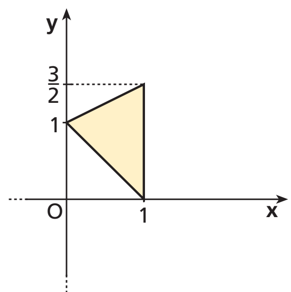
Scrivi un sistema di disequazioni le cui soluzioni sono i punti indicati in figura.

326



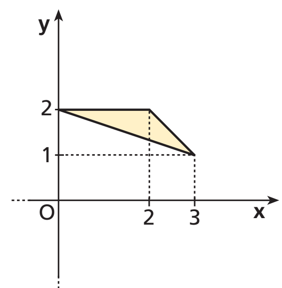
$\left[\begin{cases} x \geq 0,\ x \leq 3 \\ y \geq 0,\ y \leq 4 \\ y \leq 2x + 2 \end{cases}\right]$

327



$\left[\begin{cases} x \leq 1 \\ y \geq 1 - x \\ y \leq \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}\right]$

328



$\left[\begin{cases} y \leq 2 \\ y \geq -\frac{1}{3}x + 2 \\ y \leq 4 - x \end{cases}\right]$

329 Nel sistema di disequazioni $\begin{cases} x - y + 1 \leq 0 \\ x + y \geq 0 \\ 3y - x + k \leq 0 \end{cases}$ trova:

a) per quali valori di k il sistema ammette soluzione;

b) i valori di k per cui la regione di piano soluzione del sistema sia un triangolo rettangolo che ha ipotenusa lunga $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

$\left[\text{a) } k \leq -2;\ \text{b) } k = -\frac{12}{5}\right]$

5. LE RETTE PARALLELE E LE RETTE PERPENDICOLARI

▶ Teoria a pag. 168

330 **TEST** Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ il punto $P(-1; k)$ determina con l'origine O una retta parallela alla retta $y = 2x + 3$?

A -2
B -1
C 0
D 1
E 2

331 **ASSOCIA** a ciascuna retta r, della prima colonna, la retta s nella seconda colonna, che passa per l'origine ed è perpendicolare a r.

Retta r	Retta s
1) $5x + 2y - 6 = 0$	a) $2x + 5y = 0$
2) $5x - 2y = 5$	b) $5y - 2x = 0$
3) $2x + 5y - 3 = 0$	c) $2y = 5x$

332 Find the equation of the line that contains the point $(4; -3)$ and is perpendicular to the line $-2x + 3y - 10 = 0$.

(USA *Southern Illinois University Carbondale*, Final Exam, 2003)

$\left[y = -\frac{3}{2}x + 3\right]$

333 A straight line passes through the points $(2; 2)$ and $(4; 8)$.
a) Find an equation of the line.
b) Find the y-intercept.
c) Find an equation of a line perpendicular to this one, crossing through it at $(4; 8)$.

(USA *Southern Illinois University Carbondale*, Final Exam, 2001)

$\left[\text{a) } y = 3x - 4; \text{ b) } (0; -4); \text{ c) } y = -\frac{1}{3}x + \frac{28}{3}\right]$

Considera le rette di ciascuno dei seguenti gruppi, determina il loro coefficiente angolare e infine stabilisci quali sono parallele e quali perpendicolari.

334 $y = -3x + 1,\quad y - 3x - 2 = 0,\quad y = -2x + 1,\quad 2y + 6x - 5 = 0.$

335 $y = -3x + \frac{1}{3},\quad y = \frac{1}{3}x,\quad y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3},\quad y = \frac{1}{3}.$

Per ogni retta scrivi l'equazione di una retta a essa parallela e l'equazione di una retta a essa perpendicolare.

336 $y = -x;\quad y = 3x;\quad y = 2x + 1;\quad 7x + y + 3 = 0.$

337 $y = -\frac{1}{3}x + 5;\quad y = 2;\quad y = \frac{1}{5}x;\quad 4x - 2y + 1 = 0;\quad 3x + 1 = 0.$

338 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la retta r di equazione $2y + x - 8 = 0$, determiniamo l'equazione della parallela e quella della perpendicolare passanti per $A(1; -1)$.

Scriviamo in forma esplicita l'equazione di r e ricaviamo il coefficiente angolare m:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4, \quad \text{con } m = -\frac{1}{2}.$$

Utilizziamo l'equazione della retta di coefficiente angolare m, passante per un punto $(x_1; y_1)$:

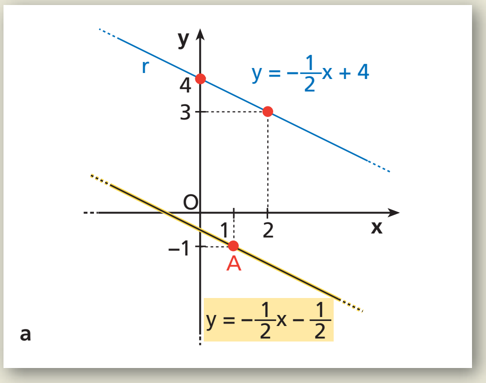
$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

La **parallela** a r ha lo stesso coefficiente angolare di r.

Poniamo, cioè, $m = -\frac{1}{2}$:

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Disegniamo la retta iniziale e la parallela ottenuta (figura *a*).

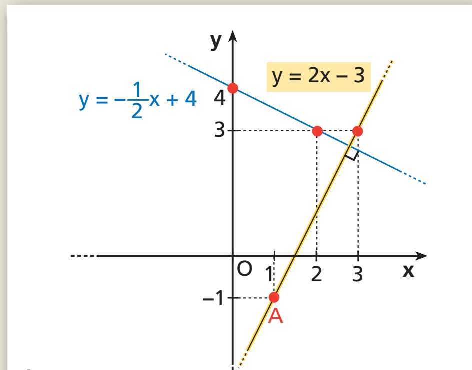


a

Cerchiamo ora la **perpendicolare** a r, cioè quella retta che ha come coefficiente angolare m l'antireciproco del coefficiente angolare di r, ossia $m = 2$:

$$y + 1 = 2(x - 1) \quad \rightarrow \quad y = 2x - 3.$$

Disegniamo la retta iniziale e la perpendicolare (figura b).



b

Per ciascuna retta, scrivi l'equazione della parallela e quella della perpendicolare passanti per il punto A.

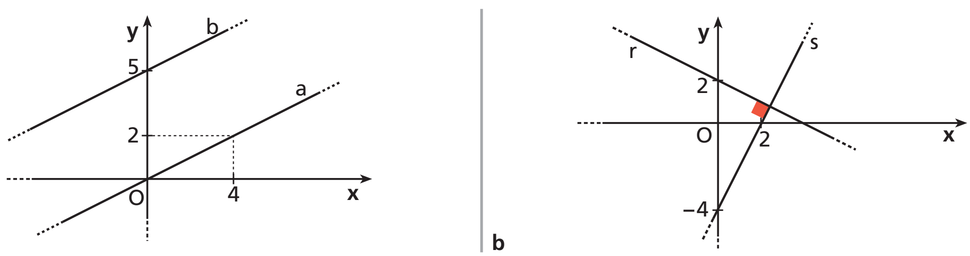
339 $2x + 3y - 1 = 0, \quad A(-3; 0).$ $\left[y = -\frac{2}{3}x - 2; y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}\right]$

340 $2x + 2y - 1 = 0, \quad A(-4; -3).$ $[x + y + 7 = 0; x - y + 1 = 0]$

341 $4x + 3y + 2 = 0, \quad A(-2; 0).$ $[4x + 3y + 8 = 0; 3x - 4y + 6 = 0]$

342 $y = \frac{1}{2}x + 2, \quad A(-1; 3).$ $[x - 2y + 7 = 0; 2x + y - 1 = 0]$

343 Dalle informazioni fornite dal grafico ricava le equazioni delle due rette parallele a e b e le equazioni delle due rette r e s perpendicolari fra loro.

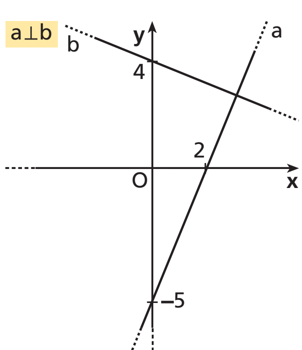


a b

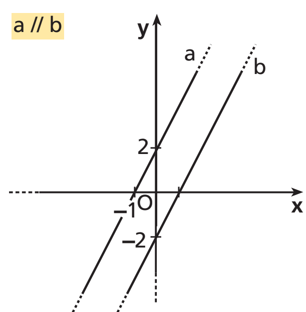
$\left[y = \frac{1}{2}x, y = \frac{1}{2}x + 5; y = 2x - 4, y = -\frac{1}{2}x + 2\right]$

Scrivi le equazioni delle rette disegnate.

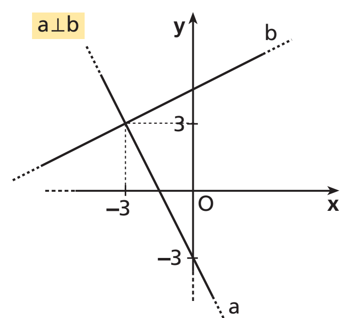
344 a⊥b



345 a // b



346 a⊥b



347 Scrivi l'equazione della retta r passante per l'origine degli assi e perpendicolare alla retta s, sapendo che s passa per i punti $A(2; 0)$ e $B(0; -5)$. $[2x + 5y = 0]$

348 Scrivi l'equazione della retta passante per il punto $C(-2; 3)$ e perpendicolare alla retta passante per $A(2; 5)$ e $B(-3; -1)$. $[5x + 6y - 8 = 0]$

349 Fra le rette perpendicolari alla retta s di equazione $3x - 6y + 1 = 0$, determina:
a) la retta a che passa per il punto $A(1; 3)$;
b) la retta b che passa per l'origine. [a) $2x + y - 5 = 0$; b) $2x + y = 0$]

350 Fra le rette passanti per il punto $Q(-3; -5)$, individua l'equazione della retta parallela alla retta che congiunge i punti $A(3; 2)$ e $B(1; 1)$. $\left[y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right]$

351 Dati la retta r di equazione $3x - y + 4 = 0$ e il punto $A(-1; 3)$, scrivi:
a) l'equazione della retta parallela a r e passante per A;
b) l'equazione della retta perpendicolare a r e passante per A. [a) $3x - y + 6 = 0$; b) $x + 3y - 8 = 0$]

352 Scrivi l'equazione della retta r passante per $A(-1; 1)$ e $B(1; 2)$. Determina l'equazione della retta parallela a r, passante per $C(1; -4)$, e della retta perpendicolare a r, passante per $D(6; 1)$. $[x - 2y + 3 = 0; x - 2y - 9 = 0; 2x + y - 13 = 0]$

353 Scrivi le equazioni delle rette contenenti i lati del quadrilatero $ABCD$, $A(-3; 3)$, $B(-3; -1)$, $C(2; -2)$, $D(2; 2)$. Verifica che il quadrilatero è un parallelogramma. $[x + 3 = 0; x + 5y + 8 = 0; x - 2 = 0; x + 5y - 12 = 0]$

354 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo per quale valore di k le due rette $x - ky + 1 = 0$ e $(k - 1)x - 2ky - 5 = 0$ sono:
a) parallele; b) perpendicolari.

a) Le rette sono parallele se $ab' - a'b = 0$.
Utilizziamo tale relazione perché permette di trovare anche le rette parallele all'asse y, che risultano escluse se consideriamo la relazione $m = m'$. Deve essere:

$$-2k + k(k-1) = 0 \quad \rightarrow \quad k(-2 + k - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad k = 0 \lor k = 3.$$

Per $k = 0$ le rette hanno equazioni $x + 1 = 0$ e $x + 5 = 0$.
Per $k = 3$ le rette hanno equazioni $x - 3y + 1 = 0$ e $2x - 6y - 5 = 0$.

b) Le rette sono perpendicolari se $aa' + bb' = 0$:

$$k - 1 + 2k^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 2k^2 + k - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad k = -1 \lor k = \frac{1}{2}.$$

Per $k = -1$ le rette hanno equazioni $x + y + 1 = 0$ e $-2x + 2y - 5 = 0$.
Per $k = \frac{1}{2}$ le rette hanno equazioni $x - \frac{1}{2}y + 1 = 0$ e $-\frac{1}{2}x - y - 5 = 0$.

355 Trova per quale valore di a le due rette $ax + 2y - 3 = 0$ e $(2a + 1)x + y - 1 = 0$ sono parallele. $\left[a = -\frac{2}{3}\right]$

356 Determina per quale valore di a le due rette $2x + 4y - 3 = 0$ e $(2 - a)x + (a + 1)y + 1 = 0$ risultano perpendicolari. $[a = -4]$

357 Stabilisci per quale valore di a le due rette $4x + (a - 1)y = 0$ e $2ax + 2(a - 1)y + 1 = 0$ risultano:
a) parallele;
b) perpendicolari. [a) $a = 1$; $a = 4$; b) $a = -1$]

358 Trova per quale valore di k le due rette di equazioni $y = (k-2)x + 2k$ e $4ky + 3(k+1)x = 0$ sono:
a) parallele;
b) perpendicolari.
Rappresenta le rette per i valori di k trovati. $\left[\text{a) } \nexists\, k \in \mathbb{R};\ \text{b) } k = 3,\ k = -\frac{2}{3}\right]$

359 Determina per quale valore di k la retta di equazione $(k+2)\,x + (k+3)\,y - 1 = 0$ risulta:
a) parallela all'asse x;
b) parallela all'asse y;
c) parallela alla retta di equazione $x - 2y = 0$;
d) perpendicolare alla retta di equazione $4x - 2y + 1 = 0$. $\left[\text{a) } k = -2;\ \text{b) } k = -3;\ \text{c) } k = -\frac{7}{3};\ \text{d) } k = -1\right]$

360 Determina per quale valore di a la retta di equazione $(a+1)x + (2a-3)y + 2a = 0$ risulta:
a) parallela alla retta $3x - 1 = 0$;
b) parallela alla retta $2y + 5 = 0$;
c) perpendicolare alla retta $9x - 3y + 1 = 0$;
d) parallela alla retta passante per $(-1; 3)$ e $(2; 0)$. $\left[\text{a) } a = \frac{3}{2};\ \text{b) } a = -1;\ \text{c) } a = -6;\ \text{d) } a = 4\right]$

6. LA POSIZIONE RECIPROCA DI DUE RETTE

▶ Teoria a pag. 172

Stabilisci la posizione relativa delle coppie di rette e rappresentale graficamente.

361 $2x + y - 2 = 0,\quad 3x - y - 3 = 0.$ [rette incidenti nel punto $P(1; 0)$]

362 $4x - 3y - 2 = 0,\quad -8x + 6y - 1 = 0.$ [rette parallele e distinte]

363 $x + 3y - 4 = 0,\quad 2x + 6y - 8 = 0.$ [rette coincidenti]

364 $-x + y - 6 = 0,\quad x - y + 6 = 0.$ [rette coincidenti]

365 $y - 2 = 0,\quad 3x - 2 = 0.$ $\left[\text{rette incidenti nel punto } P\left(\frac{2}{3}; 2\right)\right]$

366 Find the coordinates of the point of intersection of the lines $x-2y-3=0$ and $-2x+3y+4=0$.
(CAN *University of New Brunswick,* Final Exam, 2000)
[$(-1; -2)$]

Discuti al variare di a la posizione reciproca delle rette r e s.

367 r: $2ax + 2y - 3 = 0$; s: $(a-2)y - x + 2 = 0$. [$a = 1$: $r // s$; $a \neq 1$: r e s incidenti]
r: $(a^2 - a)x - y + a^2 = 0$; s: $(2a-2)x - y + 1 = 0$. [$a = 1$: $r \equiv s$; $a = 2$: $r // s$; $a \neq 1 \wedge a \neq 2$: r e s incidenti]

368 Trova per quale valore di k le rette di equazioni $(k-1)x + 2ky + 6 = 0$ e $x - y + 2 = 0$ si intersecano sull'asse x. [4]

369 Le rette r e s, rispettivamente di equazioni $y = 2x + 3$ e $y = 2x - 1$, staccano sulla retta t di equazione $2x - 3y + 9 = 0$ un segmento AB. Calcola la misura di AB. [$\sqrt{13}$]

370 Determina le coordinate dei vertici A, B, C del triangolo i cui lati appartengono alle rette di equazioni $2x - 6 = 0$, $y = 2$ e $y = -2x + 10$. Calcola poi l'area e il perimetro del triangolo.
[$A(3; 4)$, $B(3; 2)$, $C(4; 2)$; area $= 1$; $2p = 3 + \sqrt{5}$]

371 Sia M il punto medio del segmento di estremi $A(3; 2)$ e $B(1; 6)$. Scrivi l'equazione della retta r passante per M e parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Determina poi il punto di intersezione tra la retta r e la retta s di equazione $y = 3x - 2$. $[y = x + 2; M(2; 4)]$

372 Calcola a in modo che la retta di equazione

$(a + 3)\,x + y - 2 = 0$, con $a \in \mathbb{R}$:

a) sia parallela all'asse x;
b) sia parallela all'asse y;
c) intersechi la retta $y + x - 1 = 0$ in un punto del primo quadrante;
d) formi con gli assi cartesiani un triangolo di area $\frac{1}{4}$.

[a) $a = -3$; b) $\nexists\, a \in \mathbb{R}$; c) $a > -1$; d) $a = -11$, $a = 5$]

373 Dato il quadrilatero $ABCD$ di vertici $A(0; -1)$, $B(-1; 0)$, $C\left(0; \frac{1}{3}\right)$, $D(3; 0)$, verifica che si tratta di un trapezio, calcola la sua area e determina il punto di incontro delle diagonali. $\left[\frac{8}{3}; (0; 0)\right]$

374 Scrivi l'equazione della retta r passante per $A(1; 3)$ e perpendicolare alla retta $y = -\frac{1}{2}x + 4$. Trova l'equazione della retta s passante per $B(2; 8)$ e $C(5; 5)$. Determina infine il punto di intersezione tra r e s. $[r: y = 2x + 1; s: y = -x + 10; (3; 7)]$

375 I lati di un quadrilatero $ABCD$ appartengono alle rette di equazioni:

$x - y = 0,\; x + y - 2 = 0,\; x + y - 6 = 0,\; x - y - 4 = 0.$

Determina le coordinate dei vertici, verifica che $ABCD$ è un quadrato e calcolane area e perimetro.

$\left[A(1; 1), B(3; 3), C(5; 1), D(3; -1); \text{area} = 8; 2p = 8\sqrt{2}\right]$

376 Un parallelogramma $ABCD$ ha i lati AB, BC e DA che si trovano rispettivamente sulle rette di equazioni $2x + y - 2 = 0$, $4x - 7y - 4 = 0$ e $4x - 7y + 14 = 0$. Sapendo che C ha coordinate $(8; 4)$, determina le coordinate degli altri vertici del parallelogramma e del punto di incontro delle diagonali.

$[A(0; 2), B(1; 0), D(7; 6), M(4; 3)]$

377 Trova le coordinate dell'ortocentro del triangolo di vertici $A(3; 5)$, $B(1; 0)$, $C(9; 8)$. (Ricorda che l'ortocentro in un triangolo è il punto di incontro delle altezze.) $[(-6; 14)]$

378 Da un punto $A(-5; -4)$ conduci la parallela r e la perpendicolare s alla retta t di equazione $y = 2x + 1$. Detto B il punto di intersezione di s e t e detti C e D i punti di intersezione rispettivamente di t e r con l'asse delle ordinate, stabilisci che tipo di quadrilatero è $ABCD$ e calcolane l'area. [trapezio rettangolo; 20]

379 Scrivi l'equazione della retta r passante per $A(-3; 0)$ e $B(1; 2)$. Determina l'equazione della retta s parallela a r passante per $C(2; -5)$ e della retta t perpendicolare a r passante per $D(6; 2)$.
Indica poi con R e S le intersezioni di t con r e s e determina l'area del quadrilatero $ACSR$.

$\left[r: x - 2y + 3 = 0; s: x - 2y - 12 = 0; t: 2x + y - 14 = 0; \frac{105}{2}\right]$

380 Determina le intersezioni tra le rette di equazioni $2x - (k - 3)y + 8k - 2 = 0$ e $x + (k + 1)y + k = 0$, al variare di k.

$\left[\text{rette parallele per } k = \frac{1}{3}; (-3k - 2; 2) \text{ per } k \neq \frac{1}{3}\right]$

381 Dati due punti $A(2; 3)$, $B(4; 1)$ e la retta r di equazione $3x - y + 5 = 0$, determina su r un punto C in modo che il triangolo ABC sia isoscele sulla base AB e calcola l'area del triangolo ABC. $[C(-3; -4); 12]$

7. LA DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA

▶ Teoria a pag. 173

382 Determina la distanza di $B(2; -4)$ dalla retta di equazione $y = 2x + 1$. $\left[\frac{9}{5}\sqrt{5}\right]$

383 Calcola la distanza di $P(0; 6)$ dalla retta che passa per i punti $A(2; 3)$ e $B\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. $\left[\frac{17}{5}\right]$

384 Considera il triangolo ABC di vertici $A(-3; 3)$, $B(2; -1)$, $C(3; 1)$. Trova l'altezza relativa al lato AB e l'area del triangolo. $\left[\frac{14}{41}\sqrt{41}; 7\right]$

385 Determina l'area del triangolo di vertici $A(4; 0)$, $B(-2; 6)$ e $C(8; 8)$. $[36]$

386 Determina la distanza fra le rette parallele di equazione $y = 3x + 5$ e $y = 3x - 3$. (Suggerimento. Considera un punto a piacere di una retta e poi…) $\left[\frac{4}{5}\sqrt{10}\right]$

387 Calcola la distanza tra le due rette parallele di equazioni $2x - 4y + 1 = 0$ e $y = \frac{1}{2}x + 2$. $\left[\frac{7\sqrt{5}}{10}\right]$

388 Calcola la distanza tra le due rette parallele $2x = 3(y - 1)$ e $6x - 9y + 5 = 0$. $\left[\frac{4\sqrt{13}}{39}\right]$

389 Calcola la lunghezza delle altezze del triangolo di vertici $A(4; 3)$, $B(11; 4)$ e $C(7; 8)$. $\left[\frac{16}{5}\sqrt{2}; \frac{16}{17}\sqrt{34}; \sqrt{32}\right]$

390 Per quali valori del parametro k la distanza del punto $P(1 - 2k; 3 + k)$ dalla retta di equazione $12x - 5y - 2 = 0$ è $\frac{24}{13}$? $\left[k = \frac{19}{29} \vee k = -1\right]$

391 Data la retta di equazione $(2 + 3k)x + (1 - k)y - 3 - 2k = 0$, trova per quali valori di k la sua distanza dal punto $P(4; 4)$ è uguale a $\frac{9}{5}\sqrt{5}$. $\left[k = 0 \vee k = -\frac{3}{7}\right]$

392 Calcola le coordinate dei punti della retta di equazione $x - 3y - 2 = 0$ che hanno distanza $2\sqrt{5}$ dalla retta di equazione $y = 2x + 1$. $[(-7; -3), (5; 1)]$

393 Fra tutti i triangoli ABC di base AB, con $A(1; 0)$ e $B(0; 3)$, considera quelli per i quali il vertice C appartiene alla retta $3y - x = 0$ e la cui area vale $\frac{19}{6}$. Trova le coordinate di C. $\left[C_1\left(-1; -\frac{1}{3}\right), C_2\left(\frac{14}{5}; \frac{14}{15}\right)\right]$

8. I LUOGHI GEOMETRICI E LA RETTA

▶ Teoria a pag. 176

IN PRATICA ▶ Videolezione 13

394 Scrivi l'equazione del luogo dei punti per i quali la somma dei quadrati delle distanze dai due punti $A(1; 1)$ e $B(1; -1)$ è doppia rispetto al quadrato della distanza dall'origine O. $[x = 1]$

395 Dati i punti $A(2; 5)$ e $B(6; 5)$, determina il luogo dei punti P tali che l'area del triangolo ABP sia 8. $[y = 1 \vee y = 9]$

396 Sono dati i punti $A(0; 1)$, $B(1; 0)$ e $C(4; 2)$. Determina e rappresenta l'equazione del luogo dei punti P del piano tali che: $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2\overline{PC}^2$. $[7x + 3y - 19 = 0]$

397 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione del luogo descritto dai punti $P(k-3; 2k-1)$ al variare di k.

Le equazioni

$$\begin{cases} x = k - 3 \\ y = 2k - 1 \end{cases}$$

si chiamano **equazioni parametriche** del luogo.
Per determinare la sua equazione cartesiana, eliminiamo il parametro k:

$$\begin{cases} k = x + 3 \\ y = 2(x+3) - 1 \end{cases} \quad \to \quad y = 2x + 5.$$

Il luogo è la retta di equazione $y = 2x + 5$.

Determina l'equazione del luogo descritto dal punto P al variare di k.

398 $P(k-9; -1)$ $[y = -1]$

399 $P\left(2k+3; 1-\dfrac{k}{2}\right)$ $[x + 4y - 7 = 0]$

400 $P\left(\dfrac{k-4}{3}; 2|k| + 8\right)$ $[y = 2\cdot|3x+4| + 8]$

401 $P\left(\dfrac{4}{3}k; -k-5\right)$ $[3x + 4y + 20 = 0]$

402 $P(2k-3; |k-1|)$ $[|x+1| - 2y = 0]$

403 $P\left(\dfrac{2k-1}{k}; \dfrac{k+3}{k}\right)$ $[y + 3x - 7 = 0, x \neq 2]$

404 $P\left(\dfrac{1-k}{1+k}; \dfrac{k}{2(1+k)}\right)$ $[4y + x - 1 = 0, x \neq -1]$

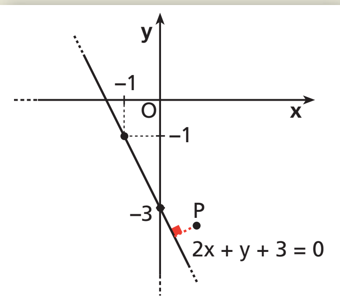
405 Considera il triangolo ABC con $A(2; 0)$, $B(6; 0)$ e C variabile sulla retta di equazione $y = 3x$.
Trova l'equazione del luogo geometrico descritto, al variare di C, dal baricentro G di ABC. Quando il triangolo è isoscele, quali sono le coordinate di C e di G? $[y = 3x - 8; C(4; 12), G(4; 4)]$

406 Determina il luogo geometrico descritto dal baricentro del triangolo di vertici $A(2; k-3)$, $B(2k+1; 6)$, $C(-5k+1; 2k)$ al variare di k. $[3x + 3y - 7 = 0]$

407 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ dalla retta di equazione $2x + y + 3 = 0$ e rappresentiamola nel piano cartesiano.

Indichiamo con $(x; y)$ le coordinate di un generico punto P del luogo cercato.
La distanza di P dalla retta di equazione $2x + y + 3 = 0$ è:



$$\overline{PH} = \frac{|2\cdot x + 1\cdot y + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2x + y + 3|}{\sqrt{5}}.$$

Poiché $\overline{PH} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$, allora:

$$\frac{|2x + y + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

L'equazione del luogo risulta perciò:

$$|2x + y + 3| = 3.$$

Osserviamo che:

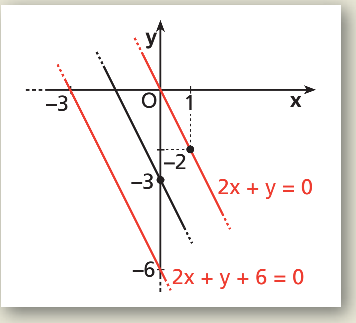
$$|2x + y + 3| = 3 \quad \rightarrow \quad 2x + y + 3 = \pm 3 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 2x + y + 3 = -3 \quad \vee \quad 2x + y + 3 = 3 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 2x + y + 6 = 0 \quad \vee \quad 2x + y = 0.$$

Il luogo cercato è costituito dalle due rette, parallele alla retta data, di equazioni:

$$2x + y + 6 = 0 \text{ e } 2x + y = 0.$$



408 Determina e rappresenta l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza 1 dalla retta di equazione $3x + 4y + 5 = 0$. $[|3x + 4y + 5| = 5]$

409 Data la retta di equazione $2x + 3 = 0$, scrivi e rappresenta l'equazione del luogo geometrico dei punti che distano 2 da tale retta. $\left[x = -\frac{7}{2} \vee x = \frac{1}{2}\right]$

410 Scrivi l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dalle rette di equazione $y = -3$ e $y = 5$. $[y = 1]$

411 Date le rette parallele di equazioni $x - 3y + 2 = 0$ e $x - 3y + 6 = 0$, scrivi l'equazione del luogo geometrico dei punti equidistanti dalle due rette. $[x - 3y + 4 = 0]$

412 Determina l'equazione delle due rette del piano che delimitano la striscia che ha ampiezza $2\sqrt{5}$ e che ha per bisettrice la retta r di equazione $x - 2y - 1 = 0$. $[x - 2y + 4 = 0; x - 2y - 6 = 0]$

L'asse di un segmento

413 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione dell'asse del segmento di estremi $A(-2; 1)$ e $B(4; 3)$.

Primo metodo

L'asse del segmento è la retta perpendicolare al segmento passante per il punto medio.
Determiniamo le coordinate del punto medio M di AB:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1, \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2.$$

Il punto medio di AB è $M(1; 2)$.
Calcoliamo il coefficiente angolare della retta AB:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 1}{4 + 2} = \frac{1}{3}.$$

Il coefficiente angolare di una retta perpendicolare ad AB è $m = -3$.
L'equazione dell'asse è quindi:

$$y - 2 = -3(x - 1) \quad \rightarrow \quad y = -3x + 3 + 2 \quad \rightarrow \quad y = -3x + 5.$$

Secondo metodo
L'asse del segmento AB è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da A e da B.
Indichiamo con $P(x; y)$ un punto dell'asse. Vale l'uguaglianza:

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2.$$

Calcoliamo le distanze di P da A e da B:

$$\overline{PA} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5},$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25}.$$

Uguagliamo i quadrati delle distanze:

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 4x - 2y + 5 = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 8x - 6y + 25 \quad \to \quad 12x + 4y - 20 = 0 \quad \to \quad 3x + y - 5 = 0.$$

L'equazione dell'asse è $y = -3x + 5$.

Determina l'equazione dell'asse del segmento che ha per estremi le seguenti coppie di punti.

414 $A(2; 3)$, $B(4; 5)$.

415 $A(1; 1)$, $B(-1; 3)$.

416 $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$, $B\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

417 $A(1; 8)$, $B(2; 7)$.

418 $A(-2; -3)$, $B(2; 0)$.

419 $A(0; -6)$, $B(4; -6)$.

420 $A(2; -4)$, $B\left(\frac{1}{4}; 0\right)$.

421 $A(-1; -5)$, $B(1; 2)$.

422 Calcola il perimetro del triangolo isoscele che ha la base di estremi $B(-1; -2)$ e $C(2; -5)$ e il vertice di ordinata nulla. $[2\sqrt{29} + 3\sqrt{2}]$

423 Determina sulla retta di equazione $3x + y = 0$ il punto equidistante dai punti $A(2; -1)$ e $B(4; 3)$. $[(-1; 3)]$

424 Individua le coordinate del vertice A di un triangolo isoscele ABC sapendo che A appartiene alla retta di equazione $2x - y + 1 = 0$ e che gli estremi della base hanno coordinate $B(2; 0)$ e $C(-2; 4)$. $[(1; 3)]$

425 Sia C il punto in cui l'asse del segmento avente per estremi i punti $A(-3; 3)$ e $B(1; 5)$ incontra l'asse x. Determina le coordinate del punto D, vertice del parallelogramma $ABCD$. $[(-3; -2)]$

426 Calcola l'area del triangolo isoscele ABC di base BC, sapendo che $B(-4; 1)$, $C(0; -1)$ e che il vertice A appartiene alla retta di equazione $3x + 2y - 15 = 0$. $[15]$

427 Calcola le coordinate del circocentro del triangolo di vertici $A(-1; 1)$, $B(5; -1)$, $C(5; 7)$. $[(3; 3)]$

428 Trova per quali valori di k il punto $P(k - 5; 1 - 2k)$ appartiene all'asse del segmento di estremi $A(-2; 4)$ e $B(1; -2)$. $\left[k = \frac{9}{10}\right]$

429 Il segmento AB ha per estremi il punto $A(1; -2)$ e il punto B che si trova sull'asse x. Trova l'ascissa di B, sapendo che l'asse del segmento AB interseca l'asse y nel punto di ordinata 11. $[B_1(-7; 0), B_2(7; 0)]$

Le simmetrie assiali

430 **ESERCIZIO GUIDA**

Date le equazioni

1. $\begin{cases} x' = -4 - x \\ y' = y \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = -6 + x \\ y' = y \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 8 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$

riconosciamo quali tra queste rappresentano una simmetria assiale, individuando le simmetrie rispetto a rette parallele all'asse x o all'asse y, o rispetto alla bisettrice del I e III quadrante o rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante.

Le equazioni delle simmetrie assiali da individuare sono del tipo:

$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$ Simmetria rispetto alla retta $x = a$ parallela all'asse y.

$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$ Simmetria rispetto alla retta $y = b$ parallela all'asse x.

$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ Simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$.

$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$ Simmetria rispetto alla bisettrice $y = -x$.

Le equazioni 1 rappresentano una simmetria rispetto alla retta $x = -2$.
Le equazioni 2 non rappresentano una simmetria, ma una traslazione di vettore $\vec{v}(-6; 0)$.
Le equazioni 3 rappresentano una simmetria rispetto alla retta $y = 4$.
Le equazioni 4 non rappresentano una simmetria.

Riconosci fra le seguenti equazioni quali rappresentano una simmetria assiale, individuandone il tipo.

431 $\begin{cases} x' = x \\ y' = -4 + y \end{cases}$; $\begin{cases} x' = -x + 6 \\ y' = y \end{cases}$; $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$; $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$.

432 $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$; $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -y \end{cases}$; $\begin{cases} x' = -6 - x \\ y' = y \end{cases}$.

433 $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$; $\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = 6 - y \end{cases}$; $\begin{cases} x' = -x \\ y' = 4y \end{cases}$; $\begin{cases} x' = 8 - x \\ y' = y \end{cases}$.

434 $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$; $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = -4 + y \end{cases}$; $\begin{cases} x' = x \\ y' = -4 - y \end{cases}$; $\begin{cases} x' = -x - 1 \\ y' = y \end{cases}$.

Le seguenti coppie di punti si corrispondono in una simmetria assiale. Individua l'asse di simmetria e le equazioni della trasformazione.

435 $P(2; -4)$, $P'(2; 4)$.

436 $A(4; 5)$, $A'(10; 5)$.

437 $A(6; -9)$, $A'(-9; 6)$.

438 $A(-2; 4)$, $A'\left(\frac{5}{2}; 4\right)$.

439 Trova i punti simmetrici di $A(2; -4)$ rispetto:

a) all'asse y;
b) alla retta $y + 2 = 0$;
c) alla bisettrice del primo e terzo quadrante. [a) $(-2; -4)$; b) $(2; 0)$; c) $(-4; 2)$]

440 Dati i punti $A(1; 2)$, $B(-2; 0)$, $C(-3; 8)$, determina i vertici dei triangoli $A'B'C'$ e $A''B''C''$, simmetrici di ABC rispetto all'asse x e rispetto all'asse y, e calcola l'area del triangolo $AB'C''$.
[$A'(1; -2)$, $B'(-2; 0)$, $C'(-3; -8)$; $A''(-1; 2)$, $B''(2; 0)$, $C''(3; 8)$; 7]

441 Considera il triangolo di vertici $A(1; -4)$, $B(4; 0)$, $C(-4; 0)$, trova i triangoli simmetrici rispetto alle rette $y = 4$ e $2x + 7 = 0$ e calcola la distanza tra i loro baricentri.
$\left[A'(1; 12), B'(4; 8), C'(-4; 8); A''(-8; -4), B''(-11; 0), C''(-3; 0); \frac{\sqrt{1553}}{3}\right]$

442 Un triangolo ABC ha i vertici in $A(0; 3)$, $B(4; 1)$ e in C, punto simmetrico di $D(1; -10)$ rispetto alla retta $y + 2 = 0$. Trova l'area di ABC. [7]

Date le seguenti rette, determina le equazioni delle loro simmetriche rispetto alla retta indicata.

443 $x - 2 = 0$, $x + y = 0$, $y = 3$, $y = -2x + 8$, rispetto all'asse x.
$[x - 2 = 0; x - y = 0; y = -3; y = 2x - 8]$

444 $2x + 3 = 0$, $2y = 1$, $y = 4x + 2$, $y + 2x = 0$, rispetto all'asse y.
$[2x - 3 = 0; 2y - 1 = 0; y = -4x + 2; y - 2x = 0]$

445 $3y - 2 = 0$, $x = 4$, $x - y - 2 = 0$, $x + y = 0$, rispetto alla retta $y - 2 = 0$.
$[3y - 10 = 0; x = 4; x + y - 6 = 0; x - y + 4 = 0]$

446 $4x - 3 = 0$, $y + 1 = 0$, $2x + 5y = 0$, $y = -3x + 3$, rispetto alla retta $x = -3$.
$[4x + 27 = 0; y + 1 = 0; 2x - 5y + 12 = 0; y = 3x + 21]$

447 $x - 1 = 0$, $2y + 3 = 0$, $y = -2x$, $2y - 4x + 1 = 0$,
rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.
$[y - 1 = 0; 2x + 3 = 0; x + 2y = 0; 2x - 4y + 1 = 0]$

448 $3 - x = 0$, $y + 2 = 0$, $5x - 8y = 0$, $6x + 2y - 1 = 0$,
rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante.
$[y + 3 = 0; x - 2 = 0; 8x - 5y = 0; 2x + 6y + 1 = 0]$

449 Considera la retta $y = 2x - 1$ e trova le rette simmetriche rispetto a $y = 2$, $x = -1$ e $y = x$.
$[y = -2x + 5; y = -2x - 5; x - 2y + 1 = 0]$

450 Scrivi l'equazione della retta che congiunge $A(-2; -1)$ e $B(4; 1)$ e l'equazione della sua simmetrica rispetto alla retta $y - 3 = 0$. $[x - 3y - 1 = 0; x + 3y - 19 = 0]$

Le bisettrici degli angoli formati da due rette

451 **ESERCIZIO GUIDA**

Consideriamo le rette r e s, rispettivamente di equazione:

$$r:\ x + 2y - 1 = 0; \quad s:\ 2x + y + 2 = 0.$$

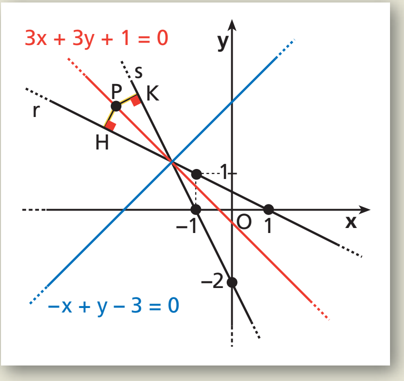
Scriviamo l'equazione delle bisettrici degli angoli formati dalle due rette.

Se il punto $P(x; y)$ è un generico punto di una bisettrice, allora deve avere la stessa distanza dalle rette r e s, cioè deve valere l'uguaglianza

$$\overline{PH} = \overline{PK}.$$

Calcoliamo le distanze di P da r e da s:

$$\overline{PH} = \frac{|x + 2y - 1|}{\sqrt{5}}; \qquad \overline{PK} = \frac{|2x + y + 2|}{\sqrt{5}}.$$



Uguagliamo le due distanze:

$$\frac{|x + 2y - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x + y + 2|}{\sqrt{5}} \to |x + 2y - 1| = |2x + y + 2|.$$

Questa equazione è equivalente alle due equazioni

$$x + 2y - 1 = \pm(2x + y + 2),$$

cioè:

$$x + 2y - 1 = -(2x + y + 2) \vee x + 2y - 1 = 2x + y + 2 \to$$

$$\to \quad 3x + 3y + 1 = 0 \qquad \vee \ -x + y - 3 = 0.$$

Le bisettrici degli angoli formati da r e s hanno le seguenti equazioni:

$$3x + 3y + 1 = 0 \quad \text{e} \quad -x + y - 3 = 0.$$

Scrivi le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle coppie di rette.

452 $2x + 3y - 1 = 0, \qquad 2x - 3y + 3 = 0.$ $\left[x = -\frac{1}{2}; y = \frac{2}{3}\right]$

453 $x + 6y + 2 = 0, \qquad 6x + y - 1 = 0.$ $[5x - 5y - 3 = 0; 7x + 7y + 1 = 0]$

454 $3x + 5y - 3 = 0, \qquad 5x - 3y + 1 = 0.$ $[2x - 8y + 4 = 0; 8x + 2y - 2 = 0]$

455 $x + y + 3 = 0, \qquad x = 0.$ $[(1 \pm \sqrt{2})x + y + 3 = 0]$

456 Determina le bisettrici degli angoli formati dalle rette passanti per l'origine aventi coefficienti angolari 2 e 3. $[(3 - 2\sqrt{2})x + (\sqrt{2} - 1)y = 0; (3 + 2\sqrt{2})x - (\sqrt{2} + 1)y = 0]$

457 Calcola le coordinate dell'incentro del triangolo di vertici $A(0; 8)$, $B(8; 0)$ e $C(0; 0)$. (Ricorda che l'incentro di un triangolo è il punto di intersezione delle bisettrici.) $[(4(2 - \sqrt{2}); 4(2 - \sqrt{2}))]$

458 Dato il triangolo ABC di vertici $A(0; 3)$, $B(6; 1)$, $C(5; 8)$, trova la bisettrice dell'angolo $A\widehat{C}B$ e verifica che è anche mediana e altezza. $[y = 3x - 7]$

459 Un triangolo ABC ha i lati di equazioni $x - 3 = 0$, $x + 2y = 15$ e $3x - 4y - 5 = 0$. Calcola le coordinate dell'incentro di ABC. $\left[\left(\frac{11 - \sqrt{5}}{2}; 6 - \sqrt{5}\right)\right]$

460 Dopo aver verificato che il triangolo di vertici $A(1; 2)$, $B(7; 2)$, $C(4; 5)$ è un triangolo isoscele, trova le coordinate dell'incentro. $[(4; 3\sqrt{2} - 1)]$

461 Determina le coordinate dell'incentro del triangolo di vertici $A(0; 4)$, $B(-3; 0)$ e $C\left(\frac{16}{3}; 0\right)$. $\left[\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)\right]$

ESERCIZI VARI Problemi con la retta

462 **ASSOCIA** a ciascuna coppia di rette la proprietà soddisfatta da entrambe le rette.

1) $x + y - 2 = 0$ e $y = -x - 2$.
2) $\sqrt{3}x - 2y + 4 = 0$ e $2\sqrt{3}x + 3y - 6 = 0$.
3) $2y - x - 1 = 0$ e $y = 2x + 2$.

a) Intersecano l'asse x nel punto di ascissa uguale a -1.
b) Sono perpendicolari.
c) Hanno la medesima distanza dall'origine.

463 **COMPLETA** Date le rette di equazioni

$3x - 6h = 0$ e $2y - x + k = 0$,

il loro punto di intersezione coincide con:

$A(2; -1)$ se $h =$ ……… e $k =$ ……… ;

$B(-3; -2)$ se $h =$ ……… e $k =$ ……… .

$\left[h = 1 \text{ e } k = 4;\ h = -\frac{3}{2} \text{ e } k = 1\right]$

464 **COMPLETA** La retta di equazione

$(k-1)x + hy = 2$

passa per $A(2; 1)$ ed è parallela all'asse x se $h =$ ……… e $k =$ ……… ;

passa per $B(2; 3)$ ed è parallela a $y = x$ se $h =$ ……… e $k =$ ……… .

465 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $|x| + |y| = 2$ individua nel piano cartesiano un quadrato di area 8. V F

b) Le due rette di equazioni $x + 2y + 1 = 0$ e $x - 2y + 1 = 0$ sono simmetriche rispetto all'asse x. V F

c) La bisettrice degli angoli acuti formati dalle due rette di equazioni $4x - 3y + 1 = 0$ e $3x = 4y + 2$ è la retta $x + y + 3 = 0$. V F

d) Le due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = -mx + q$ sono simmetriche rispetto all'asse y $\forall\, m, q \in \mathbb{R}$. V F

466 **TEST** La retta passante per i punti $A(1; 3)$ e $B(2; 5)$ e la retta di equazione $y = 2x$:

A hanno come unico punto di intersezione l'origine.
B coincidono.
C non hanno alcun punto di intersezione.
D hanno come unico punto di intersezione il punto A.
E nessuna delle altre risposte è esatta.

(*Università di Roma La Sapienza, Facoltà di Ingegneria, Test propedeutico,* 2008)

467 **TEST** La retta di equazione $-\sqrt{3}x + 3y + 1 = 0$:

A è parallela alla retta di equazione $y - \sqrt{3}x + 3 = 0$.
B è perpendicolare alla retta di equazione $y = -\sqrt{3}x + 3$.
C la retta passante per l'origine e a essa parallela ha equazione $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$.
D interseca la retta $y = \sqrt{3}x + 1$ in $P\left(\sqrt{3}; \frac{2}{3}\right)$.

(*Università di Modena, Corso di laurea in Matematica,* 2003)

468 **TEST** In un piano cartesiano sono dati i punti seguenti: $A(0; 15)$; $B(20; 0)$; $C(0; 0)$. Qual è la larghezza minima di una striscia rettilinea che contiene tutti e tre i punti? (Chiamiamo striscia rettilinea la porzione di piano compresa tra due rette parallele, comprese le due rette.)

A 8
B 10
C 12
D 15
E 20

(*Olimpiadi di Matematica, Giochi di Archimede,* 1997)

469 Il quadrato $ABCD$ ha vertici $A(0; 0)$, $B(0; 8)$, $C(8; 8)$ e $D(8; 0)$. I punti $P(0; 5)$ e $Q(0; 3)$ appartengono al lato AB, e il punto $F(8; 1)$ appartiene al lato CD.

a) Qual è l'equazione della retta per Q parallela alla retta passante per P e F?
b) Se la retta del punto a) interseca AD nel punto G, qual è l'equazione della retta passante per F e G?
c) Il centro del quadrato è il punto $H(4; 4)$. Determina l'equazione della retta per H perpendicolare a FG.

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge*, 2002)

$\left[\text{a) } y = -\frac{1}{2}x + 3; \text{ b) } y = \frac{1}{2}x - 3; \text{ c) } y = -2x + 12\right]$

470 Due triangoli congruenti hanno ciascuno area 24. I loro vertici sono determinati dalle intersezioni delle rette aventi equazioni $y = -4$, $x = 0$ e $y = \frac{3}{4}x + b$. Determina i due possibili valori di b.

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge*, 2002)

$[b = 2, b = -10]$

471 Considera la retta passante per $A(0; 5)$ e $B(-2; -3)$. Determina su tale retta un punto C la cui ascissa è tripla dell'ordinata. Considera la retta parallela all'asse x passante per A e la retta parallela all'asse y passante per B. Determina il punto D di intersezione di queste due rette e calcola l'area del triangolo DAC.

$\left[C\left(-\frac{15}{11}; -\frac{5}{11}\right); D(-2; 5); \frac{60}{11}\right]$

472 Determina il terzo vertice A di un triangolo di cui sono noti due vertici $B(3; -1)$, $C(-1; -3)$ e l'ortocentro $H\left(\frac{21}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

$\left[A\left(\frac{87}{4}; -\frac{129}{4}\right)\right]$

473 Dati i punti $A(-4; 2)$, $B(-1; -4)$ e la retta r di equazione $x + 2y - 1 = 0$, determina su r i punti C e D tali che il quadrilatero $ABCD$ sia un trapezio rettangolo in A e B. Calcola poi l'area di $ABCD$.

$\left[C\left(4; -\frac{3}{2}\right), D\left(-\frac{7}{2}; \frac{9}{4}\right), \frac{165}{8}\right]$

474 Dati i punti $A(1; 5)$, $B(5; -3)$ e la retta r di equazione $2x + 3y - 5 = 0$:

a) determina un punto C su r equidistante da A e da B;
b) determina un punto D in modo che il quadrilatero $ACBD$ sia un parallelogramma;
c) calcola l'area di $ACBD$.

$\left[\text{a) } C\left(\frac{13}{7}; \frac{3}{7}\right); \text{ b) } D\left(\frac{29}{7}; \frac{11}{7}\right); \text{ c) } \frac{80}{7}\right]$

475 Data la retta s di equazione $3x - 2y - 6 = 0$:

a) scrivi le equazioni delle rette r_1 e r_2 distanti $\sqrt{13}$ dal punto $P(1; 3)$ e parallele a s;
b) detta t la retta per P perpendicolare a s, trova le coordinate dei punti A, B e C intersezioni di t con r_1, r_2 e s;
c) determina il punto D simmetrico di C rispetto a P e verifica che appartiene alla retta t.

$\left[\text{a) } r_1\text{: } 3x - 2y - 10 = 0, r_2\text{: } 3x - 2y + 16 = 0; \text{ b) } A(4; 1), B(-2; 5), C\left(\frac{40}{13}; \frac{21}{13}\right); \text{ c) } D\left(-\frac{14}{13}; \frac{57}{13}\right)\right]$

476 Data la retta r di equazione $3x - 2ay + a - 2 = 0$, determina a in modo che:

a) r passi per l'origine;
b) abbia coefficiente angolare positivo;
c) sia parallela alla retta passante per $A(1; 1)$, $B(5; -7)$;
d) abbia distanza dall'origine minore di 1;
e) formi con la direzione positiva dell'asse x un angolo compreso tra 45° e 60°.

$\left[\text{a) } a = 2; \text{ b) } a > 0; \text{ c) } a = -\frac{3}{4}; \text{ d) } \forall a \in \mathbb{R}; \text{ e) } \frac{\sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}\right]$

477 È dato il triangolo di vertici $A(-1;0)$, $B(3;2)$, $C(1;3)$.

a) Determina le coordinate del baricentro G, del circocentro D, dell'ortocentro H.

b) Verifica che G, D, H sono allineati e che G divide il segmento DH in due parti tali che $GH \cong 2DG$ (teorema di Eulero).

$\left[\text{a) } G\left(1;\frac{5}{3}\right), D\left(\frac{9}{8};\frac{3}{4}\right), H\left(\frac{3}{4};\frac{7}{2}\right)\right]$

478 Un triangolo rettangolo ABC ha i cateti AB e AC che misurano rispettivamente 15 e 20. Posto il triangolo in un opportuno sistema di riferimento cartesiano:

a) calcola le coordinate del baricentro G, del circocentro D, dell'ortocentro H;

b) verifica che i tre punti G, D e H sono allineati determinando l'equazione della retta di allineamento.

$\left[\text{a) posto } B(0;0), BC \text{ asse } x \text{ e } y_A > 0\text{: } G\left(\frac{34}{3};4\right), D\left(\frac{25}{2};0\right), H \equiv A\text{; b) } 24x+7y-300=0\right]$

479 Sono dati i punti $A(-3;-1)$, $B(1;1)$ e $C\left(1;-\frac{3}{2}\right)$. Determina le coordinate del punto P, simmetrico di C rispetto alla retta AB, e l'area del quadrilatero $ACBP$.

$\left[P\left(-1;\frac{5}{2}\right); 10\right]$

480 Data la funzione $f(x) = a|x-3| + b$, trova per quali valori di a e di b il grafico di $f(x)$ passa per i punti $(5;1)$ e $(-2;4)$. Rappresenta $f(x)$, indicandone il dominio e il codominio. Trova i punti di intersezione di $f(x)$ con gli assi cartesiani, calcola l'area del triangolo da essi formato e il raggio r della circonferenza circoscritta.

$[a=1, b=-1; D: \mathbb{R}, C: y \geq -1; A(2;0), B(4;0), C(0;2); \text{area} = 2; r = \sqrt{10}]$

481 Verifica che il quadrilatero di vertici $A(3;0)$, $B(13;4)$, $C(9;6)$, $D(4;4)$ è un trapezio e che il segmento che congiunge i punti medi dei lati obliqui è parallelo alle due basi e congruente alla loro semisomma.

482 Determina i vertici e l'area del parallelogramma $ABCD$ che ha due lati consecutivi sulle rette di equazioni $3x+y-5=0$, $5x-y-11=0$ e un vertice nel punto $A(4;1)$.

$[B(3;-4), C(2;-1), D(3;4); 8]$

483 Conoscendo i due vertici $A(2;-1)$, $B(4;3)$ di un triangolo isoscele di base AB e il suo circocentro $D\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$, determina il terzo vertice C.

$\left[C_1(-3;4), C_2\left(\frac{11}{3};\frac{2}{3}\right)\right]$

484 Siano dati i punti $A(-2;1)$, $B(1;-1)$, $D(2;7)$ e la retta r di equazione $2x-y-7=0$.

a) Verifica che il triangolo ABD è rettangolo in A.

b) Trova un punto C su r in modo che il quadrilatero $ABCD$ sia un trapezio avente BC e AD come basi.

c) Calcola l'area del trapezio trovato.

[b) $C(9;11)$; c) 39]

485 Un rombo ha centro nell'origine degli assi cartesiani e i vertici su di essi. Si sa che un lato appartiene alla retta $4x+3y-12=0$. Verifica che il raggio della circonferenza inscritta nel rombo misura $\frac{12}{5}$. Determina la misura delle diagonali e le equazioni delle rette sulle quali giacciono gli altri lati del rombo.

$\left[d_1 = 8, d_2 = 6; 4x-3y+12=0, y=-\frac{4}{3}x-4, y=\frac{4}{3}x-4\right]$

486 Calcola la distanza tra la retta r di equazione $y=3x+5$ e la retta s di equazione $3x-y+2=0$. Determina poi il luogo dei punti del piano la cui distanza da r è tripla di quella da s, verificando che tale luogo è l'unione di due rette.

$\left[\frac{3\sqrt{10}}{10}; 6x-2y+1=0 \vee 12x-4y+11=0\right]$

487 Del triangolo ABC sono noti i vertici $A(1;1)$ e $B(15;8)$ e l'incentro $F(3;7)$. Determina le coordinate del punto C (suggerimento: l'incentro è equidistante dai lati del triangolo). Verifica poi che il triangolo è rettangolo e trova il circocentro D.

$\left[C\left(-\frac{17}{3};\frac{43}{3}\right); D\left(\frac{14}{3};\frac{67}{6}\right)\right]$

488 Sono date le rette di equazioni:

$$r\colon\ y = -x + 3, \qquad s\colon y = \frac{1}{3}x - 1, \qquad t\colon\ 3y + x - 9 = 0.$$

Considera il triangolo ABC individuato dai loro punti di intersezione e determinane il perimetro, l'area, il baricentro e il circocentro. Verifica inoltre che il triangolo che si ottiene congiungendo i punti medi dei lati ha il perimetro uguale alla metà di quello di ABC.
$\left[3(\sqrt{10} + \sqrt{2}); 6; \left(3; \frac{4}{3}\right); \left(\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right)\right]$

489 Dato il triangolo ABC di vertici $A(1; 1)$, $B(4; 7)$, $C(-5; 4)$:

a) verifica che è un triangolo rettangolo;
b) scrivi le equazioni dei lati;
c) determina l'ortocentro;
d) determina il circocentro;
e) determina i raggi delle circonferenze circoscritta e inscritta nel triangolo.

$\left[\text{b) } 2x - y - 1 = 0, x - 3y + 17 = 0, x + 2y - 3 = 0; \text{c) } (1; 1); \text{d) } \left(-\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right); \text{e) } \frac{3}{2}\sqrt{10}, \frac{6\sqrt{5} - 3\sqrt{10}}{2}\right]$

490 Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-3; 0)$, $B(-1; 4)$, $C(5; 1)$, $D(3; -3)$ è un rettangolo. Calcolane l'area e calcola l'area di ciascuno dei quattro triangoli che si formano tracciando le due diagonali. Per un punto P della diagonale AC traccia la parallela al lato AB del rettangolo che incontra i lati AD in Q e BC in R. Determina le coordinate di P in modo che l'area di $AQRB$ sia doppia di quella di $QDCR$.
$\left[\text{area del rettangolo} = 30; \text{area dei triangoli} = \frac{15}{2}; P\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right)\right]$

491 Siano $A(1; 3)$, $B(4; 1)$, $C(3; 5)$ i vertici di un triangolo. Determina le coordinate del baricentro, del circocentro e l'area del triangolo. Determina sul lato AB un punto P in modo che il rapporto tra l'area dei triangoli APC e PBC sia $\frac{4}{5}$.
$\left[\left(\frac{8}{3}; 3\right); \left(\frac{31}{10}; \frac{29}{10}\right); \text{area} = 5; P\left(\frac{7}{3}; \frac{19}{9}\right)\right]$

492 Un quadrato ha un vertice in $A(1; 2)$, un lato che giace sulla retta di equazione $x - 2y + 3 = 0$ e perimetro di lunghezza $4\sqrt{5}$. Individua le coordinate dei vertici del quadrato, sapendo che uno di essi sta sull'asse x, mentre gli altri sono interni al primo quadrante.
$[(2; 0), (4; 1), (3; 3)]$

493 Dato il triangolo di vertici $A(-1; 2)$, $B(-9; 2)$, $C(-5; -1)$, verifica che è un triangolo isoscele e determina il baricentro, l'incentro, il circocentro e l'ortocentro.
$\left[(-5; 1), \left(-5; \frac{2}{3}\right), \left(-5; \frac{19}{6}\right), \left(-5; -\frac{10}{3}\right)\right]$

494 Il vertice A di un triangolo ABC ha coordinate $(-2; 3)$; si sa che l'altezza uscente dal vertice C ha equazione $x - y - 2 = 0$ e che l'equazione del lato BC è $2x - 3y - 2 = 0$. Calcola le coordinate degli altri due vertici del triangolo e la sua area.
$\left[C(4; 2), B(1; 0); \frac{15}{2}\right]$

495 Determina per quale valore del parametro m la retta passante per i punti $A(m + 1; 2)$ e $B(1; m)$ è parallela alla retta $y = 3x + 1$. Trova poi il perimetro del triangolo ABC con C punto di intersezione tra l'asse x e la retta $y = x + 1$.
$\left[m = \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(\sqrt{10} + \sqrt{41} + \sqrt{17})\right]$

496 Verifica che nel triangolo di vertici $A(-3; 3)$, $B(3; 4)$, $C(0; -8)$ il segmento che unisce i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato e congruente a metà di questo. Verifica la proprietà per un triangolo di vertici qualsiasi. (Suggerimento. Considera un triangolo e scegli un opportuno sistema di riferimento, per esempio con base sull'asse x e con un vertice nell'origine...)

497 Siano r, s, t rispettivamente le rette di equazioni $y = 2$, $4x - 3y + 2 = 0$ e $x + y - 10 = 0$. Si sa che r e s rappresentano le rette sulle quali giacciono i lati di un parallelogramma e che t è la retta alla quale appartiene una diagonale. Determina i vertici, il perimetro e l'area del parallelogramma. Verifica inoltre che congiungendo i punti medi dei lati si ottiene un parallelogramma e calcola la sua area.

[(1; 2), (8; 2), (11; 6), (4; 6); 24; 28; 14]

498 Sono dati i punti $A(2; 3)$ e $B(4; 0)$. Determina l'equazione del luogo geometrico dei punti P tali che $\left|\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2\right| = 2$ e calcola il perimetro e l'area del trapezio che il luogo forma con gli assi cartesiani.

$\left[4x - 6y - 5 = 0 \vee 4x - 6y - 1 = 0; \frac{3\sqrt{13} + 10}{6}; \frac{1}{2}\right]$

499 Rappresenta nello stesso piano cartesiano le due funzioni $f(x) = |x - 2| + 3$ e:

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{3}(-x + 19) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Trova poi i vertici, il perimetro e l'area del quadrilatero che si forma dall'intersezione dei grafici di $f(x)$ e $g(x)$.

$\left[(1; 6), (4; 5), (2; 3), \left(\frac{1}{3}; \frac{14}{3}\right); \frac{3\sqrt{10} + 11\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{3}; \frac{17}{3}\right]$

500 Dati il punto $P(-3; 2)$ e la retta r di equazione $y + 1 = 2x$, trova il punto P' simmetrico di P rispetto a r. Trova poi sulla retta r un punto Q in modo che il triangolo $PP'Q$ abbia area uguale a 18.

$\left[P'\left(\frac{21}{5}; -\frac{8}{5}\right); Q_1\left(-\frac{7}{5}; -\frac{19}{5}\right), Q_2\left(\frac{13}{5}; \frac{21}{5}\right)\right]$

501 Un rombo ha due lati che si trovano sulle rette di equazioni $3x - 4y + 12 = 0$ e $x + 2 = 0$, il raggio della circonferenza inscritta è $\frac{13}{4}$ e il suo centro ha coordinate positive. Determina i vertici del rombo, il perimetro e l'area.

$\left[A\left(-2; \frac{3}{2}\right), B\left(\frac{9}{2}; \frac{51}{8}\right), C\left(\frac{9}{2}; \frac{29}{2}\right), D\left(-2; \frac{77}{8}\right); \frac{65}{2}; \frac{845}{16}\right]$

502 Disegna i grafici delle funzioni di equazioni $y = |x - 1| + |x + 4| - 2$ e $y = x - 2|x - 2| + 4$ e trova i loro punti comuni.

$\left[A(1; 3), B\left(\frac{7}{3}; \frac{17}{3}\right)\right]$

503 Dati i punti $A\left(\frac{5 - h}{5}; \frac{10 + 7h}{5}\right)$, $B(1 - 2h; 2 - h)$ e $C(1 + 3h; 2 - h)$, con $h \in \mathbb{R}$:

a) verifica che il triangolo ABC è rettangolo in A;
b) determina i valori di h affinché il triangolo abbia area pari a 24;
c) verifica che, scelti due valori distinti di h, i due triangoli che si ottengono sono simili.

[b) $h = \pm 2$]

504 Data la retta r di equazione $x - 2y + 6 = 0$ e il punto $A(5; 1)$, sia B il punto in cui r incontra la retta s per A parallela all'asse delle ascisse e P un generico punto su r. Indicato con M il punto medio di AP e con H la proiezione di P su s, determina le posizioni di P affinché si abbia:

$$\overline{PH}^2 + \overline{HM}^2 = \frac{9}{16}\overline{BP}^2.$$

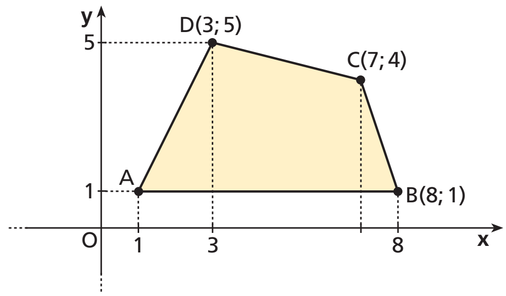
[due soluzioni: $P_1(0; 3)$ e $P_2(-40; -17)$]

505 Dati i punti $A(1; 1)$, $B(4; 3)$ e la retta r di equazione $x = 2$, sia C un generico punto di r. Indicate con p la retta per A perpendicolare ad AC e con q la retta per B perpendicolare a BC, sia D il punto di intersezione di p e q.

a) Determina le posizioni C_1 e C_2 di C, in modo che D appartenga a r.
b) Calcola l'area del quadrilatero AC_1BC_2.

$\left[\text{due soluzioni: } C_{1,2}\left(2; \frac{11 \pm \sqrt{65}}{4}\right); \frac{\sqrt{65}}{2}\right]$

506 Descrivi con un sistema di disequazioni la parte di piano evidenziata nella figura e poi calcolane l'area. Traccia le diagonali AC e DB e calcola le coordinate del loro punto di intersezione. Tracciata per C la parallela a DA che interseca il lato AB in E, calcola il rapporto tra le aree di $AECD$ e EBC.



$\left[y \geq 1 \wedge y \leq -3x + 25 \wedge y \leq -\frac{1}{4}x + \frac{23}{4} \wedge y \leq 2x - 1; \frac{39}{2}; \left(\frac{69}{13}; \frac{41}{13}\right); \frac{21}{5}\right]$

9. I FASCI DI RETTE

▶ Teoria a pag. 179

IN PRATICA
▶ Videolezione 14

Il fascio proprio

Scrivi l'equazione del fascio di rette passante per ciascun punto indicato e disegna le rette aventi coefficiente angolare $m = 0$, $m = 2$, $m = -3$.

507 $A(2; -3)$

508 $B(-3; -8)$

509 $C\left(\frac{1}{2}; -2\right)$

510 $D\left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$

Determina per ogni fascio proprio il relativo centro.

511 $mx + y - 2m + 1 = 0$

512 $6mx - 6y - 10m + 3 = 0$

513 $3y - mx + 2 = 0$

514 $6kx + 10k - 3y = 0$

515 $3y - 6m + mx + 3 = 0$

516 $5y + 5m + 2 - 5mx = 0$

Il fascio improprio

517 Scrivi l'equazione del fascio improprio contenente la retta di equazione $4x - 3y + 1 = 0$ e disegna tre rette del fascio.

518 Disegna tre rette del fascio di equazione $y = -3x + k - 2$. Determina la retta del fascio che passa per l'origine e quelle che distano dall'origine $\frac{3}{2}\sqrt{10}$.

519 Scrivi l'equazione del fascio di rette parallele alla retta di equazione $y = -4x + 5$ e l'equazione del fascio di rette perpendicolari alle precedenti. Rappresenta alcune rette di ciascun fascio.

I fasci generati da due rette

520 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo l'equazione del fascio generato dalle rette r e s di equazioni $x - 2y + 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$; stabiliamo di che tipo di fascio si tratta e determiniamo la retta del fascio passante per il punto $P(3; -2)$.

Scriviamo l'equazione del fascio generato dalle rette r e s combinando linearmente le loro equazioni:

$$x - 2y + 1 + k(x + y - 2) = 0 \rightarrow x - 2y + 1 + kx + ky - 2k = 0.$$

Raccogliamo x e y:

$$(1 + k)x + (k - 2)y + 1 - 2k = 0.$$

Per stabilire di che tipo di fascio si tratta analizziamo le equazioni di r e di s; le rette non sono parallele perché:

$$ab' - a'b = 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 = 3 \neq 0.$$

Il fascio è proprio e il centro è il punto C di intersezione tra r e s.

Calcoliamo le coordinate del centro:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 2y - 1 + y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 3y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Le rette r e s generano un fascio proprio di centro $C(1; 1)$.

Per determinare l'equazione della retta del fascio passante per $P(3; -2)$ sostituiamo le coordinate di P alla x e alla y nell'equazione del fascio:

$$(1 + k)3 + (k - 2)(-2) + 1 - 2k = 0.$$

Calcoliamo k risolvendo l'equazione ottenuta:

$$3 + 3k - 2k + 4 + 1 - 2k = 0 \rightarrow k = 8.$$

Sostituiamo nell'equazione del fascio il valore di k trovato e otteniamo

$$9x + 6y - 15 = 0 \rightarrow 3x + 2y - 5 = 0,$$

che è l'equazione della retta cercata.

521 Scrivi l'equazione del fascio di rette le cui generatrici hanno equazioni $3x + 2y - 1 = 0$ e $6x + 4y + 3 = 0$, stabilisci di che fascio si tratta e determina l'equazione della retta del fascio che interseca l'asse y nel punto di ordinata 1. [fascio improprio; $3x + 2y - 2 = 0$]

522 Scrivi l'equazione del fascio generato dalle rette di equazioni $3x + y - 1 = 0$ e $x + 2y + 3 = 0$, stabilisci se è proprio o improprio e individua l'equazione della retta del fascio che passa per $P(4; 1)$. [fascio proprio di centro $C(1; -2)$; $x - y - 3 = 0$]

523 Dopo aver scritto l'equazione del fascio generato dalle rette di equazioni $3x - 2y + 4 = 0$ e $2x + y - 2 = 0$, stabilisci se è proprio o improprio e determina l'equazione della retta del fascio parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante. [fascio proprio di centro $C(0; 2)$; $x - y + 2 = 0$]

524 Nel fascio di rette, le cui generatrici hanno equazioni $2x + 3y - 7 = 0$ e $x + 4y - 1 = 0$, determina la retta di coefficiente angolare $m = -4$. [$y = -4x + 19$]

525 Determina l'equazione della retta che interseca l'asse y nel punto di ordinata -3 appartenente al fascio generato dalle rette di equazioni $2x - y + 2 = 0$ e $-2x + y = 0$. [$2x - y - 3 = 0$]

526 Fra le rette del fascio le cui generatrici hanno equazioni $x - 2y + 1 = 0$ e $3x - 4y = 0$, determina quella parallela alla retta di equazione $3x + 4y + 2 = 0$. [$3x + 4y - 12 = 0$]

Lo studio di un fascio di rette

527 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo il fascio di rette di equazione $(3 + k)\,x + (1 + k)\,y + 2k = 0$, individuandone le generatrici e il centro se il fascio è proprio. Calcoliamo le equazioni delle rette del fascio parallele agli assi cartesiani e troviamo anche come ruotano le rette del fascio intorno al centro al variare di k.

Svolgiamo le moltiplicazioni nell'equazione del fascio:

$$3x + kx + y + ky + 2k = 0.$$

Separiamo i termini che contengono k da quelli che non lo contengono:

$$3x + y + kx + ky + 2k = 0 \;\rightarrow\; 3x + y + k(x + y + 2) = 0.$$

Le equazioni delle generatrici sono:

s: $3x + y = 0$, per $k = 0$;
r: $x + y + 2 = 0$, $\nexists\, k \in \mathbb{R}$, per $k \rightarrow \infty$.

Poiché le generatrici non sono parallele, il fascio è proprio. Determiniamo il centro.

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ x - 3x + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ -2x = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

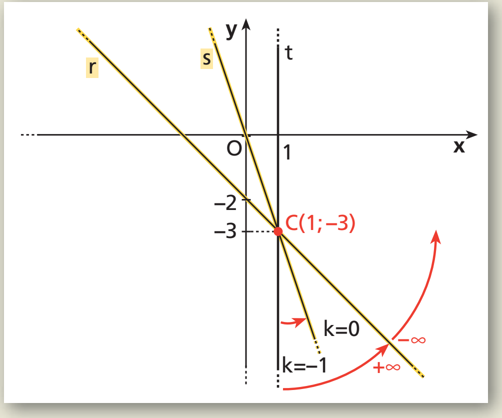
Il centro del fascio è $C(1; -3)$ e le equazioni delle rette per C, parallele agli assi, sono:

$$x = 1 \text{ e } y = -3.$$

Tali equazioni si ottengono annullando i coefficienti della x e della y nell'equazione del fascio:

- per $k = -3$, si ha la retta parallela all'asse x: $y = -3$;
- per $k = -1$, si ha la retta parallela all'asse y: $x = 1$.

Per vedere come ruotano le rette del fascio al crescere di k, basta assegnare a k un valore a piacere e rappresentare la retta corrispondente. Per esempio, per $k = -1$ si ha la retta $x = 1$, mentre per $k = 0$ si ha la retta s, di equazione $3x + y = 0$.
Osservando la figura si può notare che, al crescere di k in $\mathbb{R}$, si ottengono delle rette che ruotano intorno al centro C in senso antiorario. La retta r non corrisponde a nessun valore di k, ma si può dire che ci si avvicina a r man mano che k assume valori sempre maggiori ($k \rightarrow +\infty$) o sempre minori ($k \rightarrow -\infty$).



Studia i seguenti fasci di rette, individuandone le generatrici e, se si tratta di un fascio proprio, determina il centro e il senso di rotazione delle rette del fascio al crescere di k.

528 $kx - (k - 2)\,y + 4k - 6 = 0$

529 $(2k - 1)\,x - ky - 8k + 2 = 0$

530 $(3 - k)\,x + (k + 1)\,y + 4k - 8 = 0$

531 $ky + 2 = (k - 1)\,x$

532 $(2k + 2)\,x - (k + 1)\,y - k = 0$

533 $4kx + 2(1 - k)\,y + 5k - 1 = 0$

534 $kx + 3ky + 1 - k = 0$

535 $y = 2kx + 4k - 1 + ky$

ESERCIZI VARI Problemi con i fasci di rette

536 Dato il fascio di rette di equazione $(k + 1)x + 2(k + 1)y - 2 = 0$:
a) stabilisci se si tratta di un fascio proprio o improprio, individuando l'eventuale centro;
b) determina la retta del fascio passante per $A(1; 0)$;
c) determina la retta che, incontrando l'asse x, forma con l'origine un segmento lungo $\frac{1}{3}$.

[a) fascio improprio; b) $x + 2y - 1 = 0$; c) due soluzioni: $k = -7$, $k = 5$]

537 Dato il fascio di rette di equazione $(k - 3)x + (2k + 2)y + 1 - 3k = 0$, determina:
a) le equazioni delle generatrici e il centro;
b) le rette del fascio che incontrano l'asse x in un punto A tale che $\overline{AO} = 3$;
c) il valore di k corrispondente alla retta parallela all'asse x.

[a) $-3x + 2y + 1 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$, $C(1; 1)$; b) $x - 4y + 3 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$; c) $k = 3$]

538 Dimostra che le equazioni $(x - y + 6) + k(x + y + 4) = 0$ e $(2x - y + 11) + h(x + 5) = 0$ rappresentano (a meno delle rette escluse) lo stesso fascio. Quali sono, nei due casi, le equazioni delle rette escluse? Sia r_k la retta che si ottiene per un generico valore di k con la prima equazione. Calcola, in funzione di k, il valore da assegnare a h nella seconda equazione per ottenere la stessa retta.

$\left[x + y + 4 = 0, x + 5 = 0; h = \frac{3k - 1}{1 - k}\right]$

539 Scrivi l'equazione della retta appartenente al fascio proprio di rette di centro $(1; 1)$ che forma con le rette $x + y + 1 = 0$ e $x = 2$ un triangolo di area 2.

[$y = -2x + 3$; $y = -10x + 11$]

540 Determina la retta comune ai due fasci di equazioni $y = mx - 2m + 1$ e $(2 - k)x - (k + 1)y - 3 = 0$, e indica i relativi valori di m e k.

[$y = 2x - 3$, $m = 2$, $k = 0$]

541 Trova l'equazione della retta t comune ai due fasci r: $(3h - 1)x + 2hy - 6 = 0$ e s: $hx + (h - 1)y - h = 0$, con $h \in \mathbb{R}$, e calcola l'area del triangolo formato da t e dagli assi coordinati. Verifica poi che l'ortocentro, il baricentro e il circocentro del triangolo sono allineati.

$\left[9x + 7y - 9 = 0, \frac{9}{14}\right]$

542 Considera il triangolo individuato dai centri A, B, C dei tre fasci di rette di equazioni:

$$y = m(x - 1), \qquad kx - y + 3k - 1 = 0, \qquad y = hx - 4h - 3.$$

a) Determina l'area di ABC.
b) Trova per quali valori di m le rette del primo fascio intersecano il triangolo.
c) Determina il valore di m corrispondente alla retta del primo fascio che passa per il baricentro di ABC.

$\left[\text{a) } \frac{15}{2}; \text{ b) } m \leq -1 \vee m \geq \frac{1}{4}; \text{ c) } 4\right]$

543 Scrivi l'equazione del fascio generato dalle rette $2x + y - 1 = 0$, $4x + 2y + 3 = 0$ e trova:
a) l'equazione della retta che passa per il punto $P(2; 0)$;
b) l'equazione delle rette che incontrano gli assi in due punti A e B tali che l'area del triangolo AOB sia 1;
c) l'equazione della retta perpendicolare alla retta $x - 3y - 1 = 0$.

[a) $2x + y - 4 = 0$; b) $2x + y - 2 = 0$, $2x + y + 2 = 0$; c) non esiste]

544 Studia il fascio di rette di equazione $(k + 1)x + (2 - 3k)y - 7 + 3k = 0$ e determina:
a) le rette parallele agli assi cartesiani;
b) la retta del fascio parallela alla retta di equazione $y = x - 3$;
c) la retta passante per il punto $A(4; 1)$;
d) le rette che hanno distanza dall'origine uguale a $\frac{4}{5}\sqrt{5}$.

[a) $y = 2$; $x = 3$; b) $x - y - 1 = 0$; c) $x + y - 5 = 0$; d) $2x - y - 4 = 0$, $2x - 29y + 52 = 0$]

545 Studia il fascio di rette di equazione $(k+2)x+(2-k)y+3-k=0$ e determina per quali valori del parametro k la retta del fascio:

a) passa per l'origine;
b) è parallela alla retta $y=3$;
c) è perpendicolare alla retta $2x+3y-4=0$;
d) incontra la retta di equazione $x+4y-1=0$ nel punto di ordinata 1;
e) è parallela alla retta passante per $(-1;1)$ e $(2;-1)$.

$\left[\text{a) } 3;\ \text{b) } -2;\ \text{c) } 10;\ \text{d) } -\frac{1}{5};\ \text{e) } -\frac{2}{5}\right]$

546 Tra le rette del fascio di equazione $kx+(k+1)y+2=0$, determina:

a) le rette che intersecano l'asse y in punti di ordinata positiva;
b) la retta r parallela alla retta $4y-3=0$;
c) la retta s perpendicolare alla retta passante per $\left(0;\frac{1}{4}\right)$ e $(1;1)$;
d) le bisettrici degli angoli formati da r e s.

$[\text{a) } k<-1;\ \text{b) } y+2=0;\ \text{c) } 4x+3y-2=0;\ \text{d) } 2x-y-6=0,\ x+2y+2=0]$

547 Determina per quali valori di m del fascio proprio di rette di equazione $mx-y+m+2=0$ si hanno rette che intersecano il segmento di estremi $A(3;6)$ e $B(-2;-4)$. Calcola poi l'area del triangolo ABC, con C centro del fascio, e i valori di m che individuano nel fascio la mediana CM e l'altezza CH del triangolo.

$\left[m\leq 1 \vee m\geq 6;\ \text{area}=10;\ -\frac{2}{3};\ -\frac{1}{2}\right]$

548 Siano dati i due fasci di rette r: $hx-y+3h=0$ e s: $x-2hy+h=0$.

a) Determina la retta comune ai due fasci.
b) Scrivi, al variare di h, le coordinate del punto di intersezione P tra le rette r e s.
c) Trova il valore di h per cui il punto P coincide con l'origine degli assi.
d) Detti A e B i rispettivi centri dei fasci, trova l'area del triangolo ABO.

$\left[\text{a) } x-6y+3=0;\ \text{b) } P\left(\frac{-6h^2+h}{2h^2-1};\ \frac{h^2-3h}{2h^2-1}\right);\ \text{c) } 0;\ \text{d) } \frac{3}{4}\right]$

549 Studia il fascio di rette di equazione $(2k+1)x+(3+k)y+1-2k=0$, determinando le equazioni delle generatrici e le coordinate del centro C; inoltre calcola il valore di k corrispondente alla retta:

a) parallela alla retta di equazione $x+y-1=0$;
b) passante per $P(5;1)$;
c) passante per Q, essendo Q un punto del primo quadrante, vertice del triangolo isoscele PCQ di base PC e area $\frac{441}{40}$.

$\left[x+3y+1=0,\ 2x+y-2=0;\ C\left(\frac{7}{5};-\frac{4}{5}\right);\ \text{a) } 2;\ \text{b) } -1;\ \text{c) } -\frac{67}{18}\right]$

550 Considera i due fasci di rette $kx-(y-1)=0$ e $x+k(y+1)=0$ e determina i loro centri A e B. Dimostra che, per qualsiasi valore di k, si ottengono nei due fasci due rette tra loro perpendicolari. Calcola per quali valori del parametro k il punto P di intersezione delle due rette giace nel primo quadrante.

$[A(0;1),\ B(0;-1);\ -1<k<0]$

551 Scrivi l'equazione del fascio generato dalle rette $3x+y-2=0$, $x+2y+1=0$ e determina:

a) il simmetrico del centro del fascio rispetto al punto $(-2;3)$;
b) la retta del fascio passante per $A(2;-2)$;
c) la retta del fascio perpendicolare alla retta $x-4y-1=0$;
d) la retta del fascio che ha distanza dall'origine uguale a $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$[\text{a) } (-5;7);\ \text{b) } x+y=0;\ \text{c) } 4x+y-3=0;\ \text{d) } 2x+y-1=0]$

552 a) Studia le caratteristiche del fascio di rette di equazione $(2+k)x-(1+k)y-5-k=0$ e individua la retta r del fascio che non viene rappresentata da alcun valore del parametro k.

b) Determina per quale valore del parametro k si ottiene la retta s del fascio perpendicolare alla retta di equazione $x-2y+5=0$.

c) Individua la retta del fascio che forma un angolo di 135° con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.

d) Stabilisci per quali valori del parametro k le rette del fascio dato intersecano il segmento di estremi $A(1;6)$ e $B(4;5)$.

[a) fascio proprio di centro $C(4;3)$, r: $x-y-1=0$; b) $k=-\frac{4}{3}$, s: $y=-2x+11$; c) $y=-x+7$; d) $-\frac{3}{2}\leq k\leq -1$]

553 a) Studia il fascio di rette di equazione $(k+2)x-(1-2k)y+5=0$, indicando con a la retta del fascio che non viene rappresentata da alcun valore di k.

b) Determina la retta r del fascio che interseca l'asse y nel punto avente per ordinata la soluzione positiva dell'equazione $t^4-4t^2=0$.

c) Individua la retta s del fascio di equazione $x+(k+1)y-3+k=0$ perpendicolare alla retta r.

d) Calcola l'area del quadrilatero individuato dalle rette r, s, a e dalla retta b del secondo fascio che non corrisponde ad alcun valore di k.

[a) fascio proprio di centro $(-2;1)$, a: $x+2y=0$; b) r: $x-2y+4=0$; c) s: $2x+y-7=0$; d) 12]

554 Nel fascio di rette di equazione $(2+k)x-3y+15+3k=0$, individua le generatrici del fascio e trova il centro del fascio C.

a) Determina la retta a del fascio parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

b) Trova la retta b del fascio che forma con gli assi cartesiani nel terzo quadrante un triangolo di area $\frac{6}{5}$.

c) Sia c la retta di equazione $x+3y+6=0$. Calcola l'area del triangolo formato dalle rette a, b e c.

[$2x-3y+15=0$, $x+3=0$, $C(-3;3)$; a) $x-y+6=0$; b) $5x+3y+6=0$; c) 12]

555 a) Nel fascio di rette di equazione $2x+5y+k=0$ individua le rette r e s ($k_r<k_s$) che passano per i punti dell'asse y, le cui ordinate sono soluzioni dell'equazione $t^2-2t-8=0$.

b) Determina i punti di intersezione A e B della retta $8x+5y+10=0$ con le rette r e s.

c) Determina, nel quarto quadrante, il punto C appartenente alla retta s, tale che il segmento BC abbia lunghezza $\sqrt{29}$.

d) Individua il quarto vertice D del parallelogramma $ABCD$ e calcolane perimetro e area.

[a) $2x+5y-20=0$, $2x+5y+10=0$; b) $A(-5;6)$, $B(0;-2)$; c) $C(5;-4)$; d) $D(0;4)$, $2p=2(\sqrt{29}+\sqrt{89})$, area $=30$]

556 a) Studia il fascio di rette di equazione $(2k+1)x+(k-1)y+8k+7=0$ e individua la retta r del fascio che non viene rappresentata da alcun valore del parametro reale k.

b) Determina la retta s del fascio parallela alla retta di equazione $5x+y=0$.

c) Trova le rette t_1 e t_2 del fascio che formano con gli assi cartesiani nel secondo quadrante un triangolo di area 36.

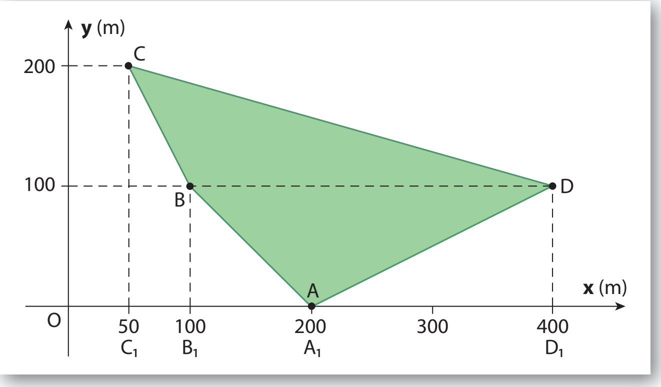
d) Stabilisci per quali valori del parametro k le rette del fascio dato intersecano il segmento di estremi $A(-8;0)$ e $B(-3;5)$.

[a) fascio proprio di rette di centro $(-5;2)$, $2x+y+8=0$; b) $k=2$, $5x+y+23=0$; c) $k=\frac{1}{4}$, t_1: $2x-y+12=0$; $k=-\frac{23}{52}$, t_2: $2x-25y+60=0$; d) $k\leq-\frac{1}{8}\vee k\geq\frac{1}{7}$]

REALTÀ E MODELLI

1 **Il giardiniere**

Un giardiniere ha l'incarico di tagliare e curare l'erba di un giardino il cui modello cartesiano è indicato in figura.



- Supponendo che il tosaerba inizi a funzionare nel punto A verso B, quale sarà l'angolo iniziale di partenza rispetto all'asse delle ascisse (inteso come retta orientata verso destra)?
- Quanto tempo è necessario per tosare il giardino se mediamente il giardiniere impiega 2 min per fare 100 m^2?
- Quale sarebbe il preventivo di spesa se il giardiniere volesse piantare delle piccole betulle lungo tutto il perimetro del giardino a una distanza di 2,5 m l'una dall'altra, sapendo che il costo medio è di € 4,50 ciascuna? (Calcola il perimetro usando due metodi: l'usuale formula della distanza nel piano cartesiano, approssimando il risultato con la calcolatrice, e il metodo diretto, misurando i lati della figura con un righello e trasformando le lunghezze con il rapporto di scala.)
- Il giardiniere vuole installare una fontana in corrispondenza del baricentro del triangolo ACD. Dove andrà collocata la fontana?

2 **Piastrelle**

I motivi decorativi delle piastrelle presentano generalmente molte regolarità perché devono essere accostate per produrre un motivo ornamentale omogeneo.
Nella figura sono rappresentate 4 piastrelle quadrate, ognuna di lato 30 cm.

- Disegna una piastrella nel primo quadrante di un sistema di riferimento cartesiano, con l'unità di misura corrispondente a 1 cm, in modo che un vertice coincida con l'origine e due lati giacciano sugli assi.
- Scrivi le equazioni di tutti gli assi di simmetria presenti nel disegno della piastrella.
- Il disegno della piastrella è simmetrico rispetto a un punto: scrivi l'equazione della simmetria centrale corrispondente.
- Estendi, sempre nel primo quadrante, la piastrellatura in modo da coprire un pavimento rettangolare di 4,2 m lungo l'asse x per 3,3 m lungo l'asse y, quindi scrivi le equazioni degli assi di simmetria delle piastrelle così individuate.

3 **Noleggio dell'automobile**

Per il noleggio giornaliero di un'automobile si può scegliere fra tre diverse tariffe:

- la tariffa A comporta una quota fissa di € 30 e costa € 0,25 a kilometro percorso;
- la tariffa B comporta una quota fissa di € 10 e costa € 0,60 a kilometro percorso;
- la tariffa C non ha quota fissa, costa € 0,40 a kilometro percorso, però ha un vincolo minimo di 150 km, ovvero la spesa ha un costo minimo corrispondente a un percorso di 150 km.

- Dopo aver rappresentato i grafici del costo del noleggio in funzione dei kilometri percorsi, stabilisci qual è la tariffa più conveniente nei diversi casi.

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Considera il triangolo ABC di vertici $A(2; 1)$, $B(0; 5)$, $C(6; 3)$. Soltanto una delle seguenti proposizioni è *vera*. Quale?

A Il baricentro ha coordinate $\left(4; \frac{9}{2}\right)$.

B Il punto medio di BC è $\left(3; \frac{8}{3}\right)$.

C Il triangolo è rettangolo.

D Il lato AB ha coefficiente angolare 2.

E Il lato BC ha equazione $x - 3y + 15 = 0$.

2 L'equazione del fascio proprio di rette di centro $P(-1; 2)$ è:

A $y = -2x + q$.

B $y = mx + 2 + m$.

C $y = mx + 2 - m$.

D $y = 2x + q$.

E $y = mx + m - 2$.

3 È *vera* soltanto una delle seguenti proposizioni relative al punto $P\ (1; -2)$ e alle rette r e s, rispettivamente di equazione $2x + y = 0$ e $x + y - 2 = 0$. Quale?

A P è equidistante da r e da s.

B La distanza di P da r è maggiore della distanza di P da s.

C $P \in s$

D $P \in r$

E $P \in (r \cap s)$

4 Solo una delle seguenti proposizioni relative al fascio di rette $3y - 6m + mx + 3 = 0$ è *falsa*. Quale?

A Il centro è $C\ (6; -1)$.

B La retta che non si ottiene per nessun valore di m è $x - 6 = 0$.

C Al crescere di m le rette ruotano in senso orario.

D Per $m = 0$ si ottiene una generatrice del fascio.

E La retta che passa per l'origine si ottiene per $m = \frac{1}{2}$.

5 La distanza fra le due rette parallele di equazioni $x + 2y = 0$ e $2x + 4y - 5 = 0$ è:

A $\sqrt{5}$.

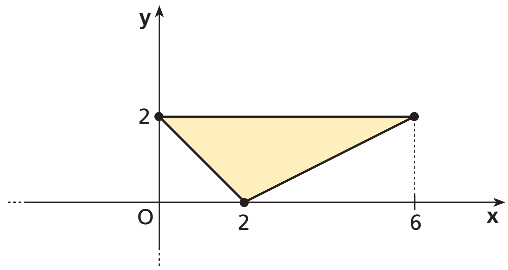
B $2\sqrt{5}$.

C $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

D $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

E $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

6 L'insieme dei punti del triangolo della figura è rappresentato dal sistema:



A $\begin{cases} y - 2 \leq 0 \\ y + x \leq 2 \\ 2x \geq y - 2 \end{cases}$

B $\begin{cases} y \leq 2 \\ y + x - 2 \geq 0 \\ 2y \geq x - 2 \end{cases}$

C $\begin{cases} x - y \leq 2 \\ y > 2 \\ x \leq 2y + 2 \end{cases}$

D $\begin{cases} x + y \geq 2 \\ 2y \geq x + 2 \\ y \leq 2 \end{cases}$

E $\begin{cases} x \geq 2 \\ x + y \geq 2 \\ 2y \geq x - 2 \end{cases}$

7 La retta di equazione $x - 2y + 4 = 0$ ha come simmetrica rispetto al punto $P(2; -1)$ la retta di equazione:

A $-x + 2y + 4 = 0$.

B $x - 2y - 6 = 0$.

C $y = 2x - 12$.

D $x - 2y - 12 = 0$.

E $y = x - 6$.

8 L'area della figura individuata dal sistema $\begin{cases} |x| \leq 2 \\ y < 5, \quad y + 2x \geq 0 \end{cases}$ è:

A 8.

B 16.

C 10.

D 9.

E 20.

QUESITI

9 Dimostra che la distanza tra due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ di una retta di equazione $y = mx + q$ è indipendente da q.

10 Si determini la distanza delle due rette parallele $3x + y - 3\sqrt{10} = 0$ e $6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0$.
(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2008, *quesito* 1)
$\left[\frac{11}{2}\right]$

11 L'equazione di una retta che non passa per l'origine e non è parallela agli assi può sempre essere scritta nella forma $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, detta *equazione segmentaria* della retta.
Spiega il significato dei coefficienti p e q dell'equazione e indica la loro relazione con i coefficienti a, b e c dell'equazione della retta in forma implicita $ax + by + c = 0$.

12 Dimostra che la distanza tra due rette parallele, r: $ax + by + c = 0$ e r': $a'x + b'y + c' = 0$, con $a = a'$ o $b = b'$, è data da: $d(r, r') = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
Calcola la distanza tra le due rette $4x + y - 10 = 0$ e $y = -4x + 28$. $\left[\frac{18\sqrt{17}}{17}\right]$

13 Considera i segmenti OP di estremi $O(0; 0)$ e $P(k; k + 1)$. Al variare di k l'insieme degli assi dei segmenti OP forma un fascio di rette? Giustifica la risposta e in caso sia affermativa scrivi l'equazione del fascio. [no]

14 Nel piano riferito a coordinate cartesiane è dato un triangolo di vertici A, B, C. Costruire un algoritmo per stabilire se un punto assegnato P si trova all'interno, sul bordo o all'esterno del triangolo.
Risolvere effettivamente il problema nel caso in cui i punti segnati abbiano, rispettivamente, le coordinate $A(1; 3)$, $B(6; 7)$, $C(5; -1)$, $P(3; 3)$. (*U.M.I. Syllabus*)
[P è interno]

15 Dimostra che il triangolo formato da una retta $ax + by + c = 0$ (con $a \neq 0$ e $b \neq 0$) con gli assi cartesiani ha sempre area uguale a $\frac{c^2}{2|ab|}$.

16 Dato un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) in un piano, si dica che cosa rappresenta l'insieme dei punti $P(1 + t^2; 1 + t^2)$, ottenuto al variare di t nei reali.
(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2008, *quesito* 10)

PROBLEMI

17
a) Nel fascio di rette di equazione $2(k + 1)x + (k - 1)y - 11k - 1 = 0$, individua le rette che hanno generato il fascio e indica con C il centro del fascio.
b) Scrivi l'equazione della retta r del fascio, relativa ad un valore positivo del parametro k, che forma con gli assi cartesiani nel primo quadrante un triangolo di area $\frac{98}{3}$.
c) Determina la retta s del fascio perpendicolare alla retta r.
d) Sia D l'intersezione della retta s con l'asse delle ordinate. Sia CD il lato di un quadrato, tutto situato nel I quadrante. Trova gli altri vertici A e B del quadrato.
e) Calcola il perimetro e l'area del quadrato $ABCD$.

[a) $2x - y - 1 = 0$, $2x + y - 11 = 0$, $C(3; 5)$; b) $3x + y - 14 = 0$; c) $x - 3y + 12 = 0$; d) $A(1; 1)$, $B(4; 2)$; e) $2p = 4\sqrt{10}$, area $= 10$]

18 Rappresenta graficamente la funzione di equazione $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + |x + 1|$.

a) Determina le coordinate dei punti A, B, C $(x_A < x_B < x_C)$ del grafico dato le cui ascisse sono soluzioni dell'equazione $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$.

b) Individua il punto D in modo tale che il quadrilatero $ABCD$ sia un trapezio isoscele.

c) Calcola il perimetro e l'area del trapezio $ABCD$.

d) Verifica che congiungendo i punti medi dei lati si ottiene un rombo che ha l'area uguale alla metà di quella del trapezio. [a) $A(-3; 7)$, $B(-1; 3)$, $C(2; 3)$; b) $D(4; 7)$; c) $2p = 2(5 + 2\sqrt{5})$, area $= 20$]

19 Date le rette di equazione $2x + 2ay + 1 - a = 0$ e $(a + 1)x - ay + 1 = 0$:

a) discuti al variare di a le posizioni reciproche delle due rette;

b) determina i centri C_1 e C_2 dei fasci individuati da ciascuna equazione;

c) considera il punto P di ascissa 3 sull'asse del segmento C_1C_2 e determina i raggi r e R delle circonferenze inscritta e circoscritta al triangolo C_1C_2P.

[a) $a = 0 \lor a = -2$: rette parallele, $a \neq 0 \land a \neq -2$: rette incidenti;
b) $C_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $C_2(-1; -1)$; c) $P\left(3; -\frac{3}{2}\right)$, $r = \frac{2\sqrt{65} - \sqrt{10}}{20}$, $R = \frac{13}{20}\sqrt{10}$]

20 Nel triangolo ABC, con $A(0; 3)$ e $B(-4; -1)$, il baricentro è $G\left(1; -\frac{2}{3}\right)$.

a) Determina C.

b) Considera la retta, passante per C, di equazione $x - y - 11 = 0$, che interseca l'asse x in E e l'asse y in D. Dimostra che il quadrilatero $ABDE$ è un trapezio e trova la sua area.

c) Congiungi i punti medi M e N dei lati obliqui del trapezio. Verifica che il segmento ottenuto è parallelo alle basi e congruente alla loro semisomma.

d) Determina l'equazione della bisettrice b di $B\widehat{A}C$ e le coordinate del punto R in cui b interseca MN.

[a) $C(7; -4)$; b) $E(11; 0)$, $D(0; -11)$, 105; d) $x = 0$, $R(0; -4)$]

21 a) Rappresenta graficamente la curva di equazione $\frac{1}{2}|x| - |y| + 2 = 0$.

b) Nello stesso sistema di riferimento rappresenta anche la curva di equazione $2|x| - |y| - 4 = 0$.

c) Indica con A, B, C, D i punti di intersezione tra i due grafici.

d) Calcola l'area della parte di piano racchiusa dai due grafici.

e) Indica come il grafico del punto b) può essere ottenuto a partire dal grafico del punto a).

[c) $A(4; 4)$, $B(-4; 4)$, $C(-4; -4)$, $D(4; -4)$; d) 32; e) simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante]

22 a) Scrivi l'equazione della retta r passante per i punti $A(4; 0)$ e $B(0; 6)$.

b) Individua la retta s parallela alla bisettrice del I e III quadrante e passante per il punto $C(-1; 0)$.

c) Nel fascio di rette generato da r e da s determina l'equazione della retta t parallela alla retta $x - 2y + 5 = 0$.

d) Sia D l'intersezione della retta del fascio avente coefficiente angolare $-\frac{7}{8}$ con la retta $x + 5y + 10 = 0$. Calcola il perimetro e l'area del quadrilatero $ABCD$.

e) Verifica che il triangolo ABD è isoscele e che è simile al triangolo AME, dove E è il punto di ordinata -2 del segmento AD e M è il punto medio del segmento AB. Calcola il rapporto di similitudine tra ABD e AME.

[a) $3x + 2y - 12 = 0$; b) $x - y + 1 = 0$; c) $x - 2y + 4 = 0$;
d) $D(10; -4)$, $2p = \sqrt{37} + \sqrt{137} + 4\sqrt{13}$, area $= 25$; e) 2]

23 In un triangolo ABC il vertice B ha coordinate $(6; -1)$, la mediana CM e l'altezza CD hanno equazione rispettivamente $y + 8x = 16$ e $y = 4x + 4$. Determina:

a) le coordinate di A e C;
b) l'ortocentro H e il baricentro G del triangolo;
c) il perimetro e l'area del triangolo;
d) l'equazione della retta parallela al lato AB che, intersecando i due lati AC e CB, individua con il vertice C un triangolo che ha area uguale a $\frac{1}{4}$ di quella di ABC. (Suggerimento. Ricorda che in due triangoli simili il rapporto tra le aree è il quadrato del rapporto tra le altezze.)

$\left[\text{a) } A(-2; 1), C(1; 8); \text{ b) } H\left(-\frac{17}{31}; \frac{56}{31}\right), G\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right); \text{ c) } \sqrt{58} + 2\sqrt{17} + \sqrt{106}, 31; \text{ d) } y = -\frac{x}{4} + \frac{35}{8}\right]$

24 a) Nel fascio di rette di equazione $2(k+1)x - (k-1)y + k + 3 = 0$ individua il centro C e indica con r e s le rette che hanno generato il fascio.
b) Determina le equazioni delle rette a e b parallele all'asse delle ordinate che passano per i punti dell'asse x le cui ascisse sono soluzioni dell'equazione $x^2 + x - 2 = 0$.
c) Dimostra che le rette a e b formano con le rette r e s due triangoli simili e calcola il rapporto di similitudine.
d) Calcola per quali valori del parametro k le rette del fascio intersecano il segmento di estremi $F(1; 0)$ e $G(4; -2)$.

$\left[\text{a) } C(-1; -1), r\text{: } 2x - y + 1 = 0, s\text{: } 2x + y + 3 = 0; \text{ b) } a\text{: } x + 2 = 0, b\text{: } x - 1 = 0; \text{ c) } 2; \text{ d) } -\frac{5}{3} \le k \le -\frac{9}{11}\right]$

25 Sono dati i punti $A(-5; -2)$, $B(0; 1)$ e $H\left(-\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)$.

a) Trova il terzo vertice C del triangolo ABC di cui H è l'ortocentro.
b) Determina sul segmento BC il punto P tale che $\overline{PA}^2 = \frac{6}{5}\overline{PB}^2 + 4\overline{BO}^2$, essendo O l'origine degli assi cartesiani.
c) Da P traccia la parallela ad AB che interseca in Q il lato AC. Trova l'ortocentro R del triangolo QPC.

$\left[\text{a) } C(-2; -5); \text{ b) } P(-1; -2); \text{ c) } R\left(-\frac{11}{4}; -\frac{15}{4}\right)\right]$

26 È dato il triangolo ABC, con $A(1; 0)$, $B(5; 0)$ e C variabile sulla retta di equazione $2x - y = 0$.

a) Determina C nel I quadrante in modo che $\overline{AC} = \sqrt{17}$ e trova l'ortocentro H di ABC.
b) Determina l'equazione del luogo geometrico descritto dall'ortocentro del triangolo ABC quando C varia nel I quadrante.
c) Utilizzando l'equazione del luogo determina le coordinate di C per cui l'ortocentro ha ordinata $\frac{2}{3}$.

$\left[\text{a) } C(2; 4), H\left(2; \frac{3}{4}\right); \text{ b) } y = \frac{(5-x)(x-1)}{2x}, x > 0; \text{ c) } C_1(3; 6), C_2\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}\right)\right]$

27 a) Studia il fascio di rette di equazione $(k-1)x + (1-k)y + 2 - k = 0$.
b) Determina la retta r del fascio che non viene rappresentata da nessun valore del parametro k.
c) Individua le coordinate dei vertici C_1 e C_2 dei due triangoli isosceli, di area 24, aventi base AB con A e B appartenenti alla retta r e con l'ascissa che è soluzione dell'equazione $x^2 - 2x - 3 = 0$.
d) Calcola l'area del quadrilatero AC_1BC_2.

[a) fascio improprio di rette parallele alla bisettrice del I e III quadrante;
b) $x - y - 1 = 0$; c) $C_1(-5; 6)$, $C_2(7; -6)$; d) 48]

CAPITOLO

4

٤ [numerazione araba]

४ [numerazione devanagari]

四 [numerazione cinese]

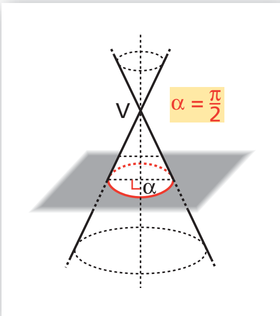
LA CIRCONFERENZA

I TRONCHI DEGLI ALBERI Chi si occupa di piante ha bisogno di misurarne la dimensione del tronco per conoscerne, per esempio, lo stato di salute e l'andamento della crescita. È importante quindi avere un metodo semplice e preciso per misurare il diametro di un albero. Senza abbatterlo!

Come si può conoscere il diametro di un grosso tronco con molta precisione?

▶ **La risposta a pag. 258**

1. LA CIRCONFERENZA E LA SUA EQUAZIONE



▲ **Figura 1** Consideriamo un cono e tagliamolo con un piano perpendicolare al suo asse. La figura che otteniamo come intersezione fra il piano e la superficie del cono è una circonferenza.

In questo capitolo affrontiamo lo studio della *circonferenza*, che fa parte di un insieme di curve chiamate **coniche** perché si possono ottenere tagliando un cono con un piano. Nei prossimi capitoli studieremo le altre coniche: la *parabola*, l'*ellisse* e l'*iperbole*.

Definiamo ciascuna curva come luogo geometrico e deduciamo poi l'equazione algebrica che la rappresenta nel piano cartesiano.

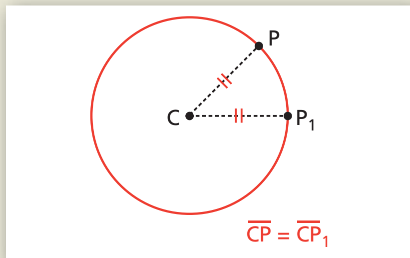
La circonferenza come luogo geometrico

DEFINIZIONE

Circonferenza

Assegnato nel piano un punto C, detto **centro**, si chiama circonferenza la curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da C:

$$\overline{PC} = \text{costante.}$$



La distanza fra ognuno dei punti della circonferenza e il suo centro è il **raggio** della circonferenza.

L'equazione della circonferenza

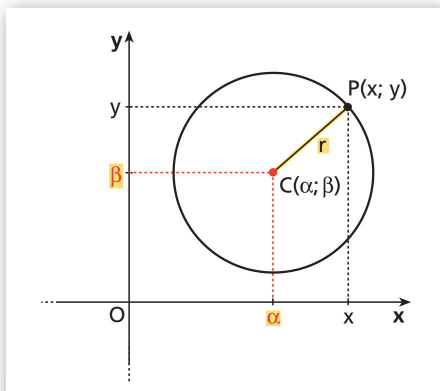
Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali e determiniamo l'equazione della circonferenza di centro $C(\alpha; \beta)$ e raggio r assegnati.

Un generico punto $P(x; y)$ del piano appartiene alla circonferenza se e solo se:

$$\overline{PC} = r, \quad \text{ossia} \quad \overline{PC}^2 = r^2.$$

Per la formula della distanza fra due punti, abbiamo:

$$\overline{PC}^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2.$$



▲ **Figura 2**

Sostituendo nella relazione precedente, otteniamo

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

che è l'equazione cercata. Possiamo scrivere tale equazione anche in altro modo.

Svolgiamo i calcoli:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0.$$

● α, β, r sono numeri reali noti.

Ponendo

$$a = -2\alpha, \qquad b = -2\beta, \qquad c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2,$$

otteniamo l'equazione scritta in modo più semplice:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}.$$

L'equazione trovata è di secondo grado nelle incognite x e y. Osserviamo che non è completa perché manca il termine con il prodotto xy e che i coefficienti di x^2 e di y^2 sono uguali a 1.

ESEMPIO

Dato nel piano cartesiano il punto $C(2; -1)$, ricaviamo l'equazione della circonferenza di centro C e raggio 3.

Se un punto $P(x; y)$ appartiene alla circonferenza, è vero che:

$$\overline{PC} = 3, \qquad \text{ossia} \qquad \overline{PC}^2 = 9.$$

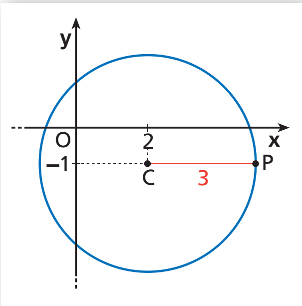
Per la formula della distanza tra due punti, si ha:

$$\overline{PC}^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2.$$

Quindi:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$
$$x^2 + 4 - 4x + y^2 + 1 + 2y = 9$$
$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0.$$

Questa è l'equazione della circonferenza cercata.



▲ Figura 3

● Per avere l'equazione di una circonferenza, non è necessario che x^2 e y^2 abbiano coefficiente 1. È sufficiente che i loro coefficienti siano entrambi uguali a un qualunque numero n. In tal caso, infatti, è possibile riottenere i coefficienti uguali a 1 dividendo tutti i termini per n.
Per esempio:

$$4x^2 + 4y^2 - 2x + 3y - 8 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - 2 = 0.$$

Per ottenere la seconda equazione dalla prima, basta dividere entrambi i membri per 4.

La condizione di realtà

Ci chiediamo se, viceversa, un'equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

rappresenti sempre una circonferenza. La risposta è «no».
In altre parole, che l'equazione sia del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ è una condizione necessaria per avere l'equazione di una circonferenza, ma non sufficiente.

ESEMPIO

$$x^2 + y^2 + 4 = 0,$$

pur essendo un'equazione del tipo che abbiamo descritto, non è l'equazione di una circonferenza perché **non ha soluzioni reali**. Infatti, due numeri reali elevati al quadrato e sommati danno come risultato un numero sempre positivo o nullo, quindi non può mai essere:

$$x^2 + y^2 = -4.$$

Questo significa che nessun punto del piano ha coordinate $(x; y)$ che soddisfano l'equazione data.

Cerchiamo una condizione per stabilire quando un'equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

rappresenta una circonferenza.

Aggiungiamo a entrambi i membri dell'equazione i termini $\frac{a^2}{4}$ e $\frac{b^2}{4}$:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}.$$

Riscriviamo l'equazione in modo da evidenziare nel primo membro due quadrati di un binomio:

$$\left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4}\right) + \left(y^2 + by + \frac{b^2}{4}\right) = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c.$$

Il primo membro rappresenta il quadrato della distanza $\overline{PC}$ di un punto $P(x; y)$ del piano dal punto $C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$.

- Deve risultare:
$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \geq 0.$$

Di conseguenza, il secondo membro deve essere un numero maggiore o uguale a 0.

Quindi, **l'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rappresenta una circonferenza di centro C se e solo se**:

$$\boldsymbol{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c \geq 0}.$$

Le coordinate del *centro* e il *raggio* della circonferenza sono rispettivamente:

$$\boldsymbol{C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right), \quad r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}}.$$

- Possiamo considerare un punto come una circonferenza di raggio uguale a 0, che è una **circonferenza degenere**.

Se $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c = 0$, allora $r = 0$ e la circonferenza degenera nel suo centro C.

ESEMPIO

L'equazione $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ rappresenta una circonferenza?
Poiché

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c = 1 + 4 + 11 > 0,$$

l'equazione è quella di una circonferenza.

Dall'equazione al grafico

Per disegnare una circonferenza è sufficiente conoscere le coordinate del centro e la misura del raggio.

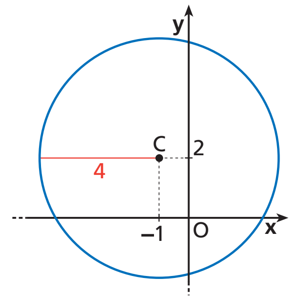
ESEMPIO

Disegniamo la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$.
Determiniamo il centro C:

$$\alpha = -\frac{a}{2} = -\frac{2}{2} = -1, \quad \beta = -\frac{b}{2} = -\frac{-4}{2} = 2 \rightarrow C(-1; 2).$$

Il raggio misura: $\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \sqrt{1 + 4 + 11} = \sqrt{16} = 4$.

Nella figura a lato è rappresentato il grafico della circonferenza.



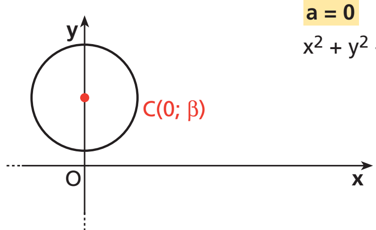
Alcuni casi particolari

Consideriamo l'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Esaminiamo i casi particolari in cui uno o due coefficienti o il termine noto siano nulli.

▼ Figura 4

a = 0

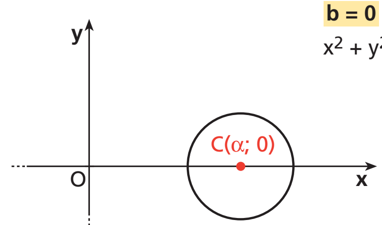
$x^2 + y^2 + by + c = 0$



a. Si ha $\alpha = 0$, quindi $C(0; \beta)$: **il centro appartiene all'asse *y*.**

b = 0

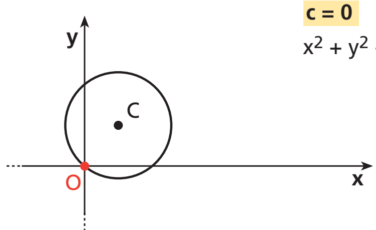
$x^2 + y^2 + ax + c = 0$



b. Si ha $\beta = 0$, quindi $C(\alpha; 0)$: **il centro appartiene all'asse *x*.**

c = 0

$x^2 + y^2 + ax + by = 0$

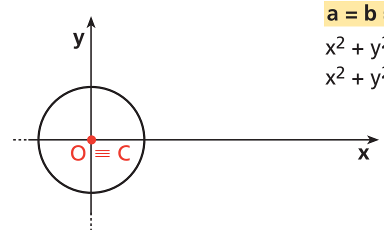


c. Le coordinate di $O(0; 0)$ verificano l'equazione, quindi **la circonferenza passa per l'origine degli assi**.

a = b = 0

$x^2 + y^2 + c = 0$

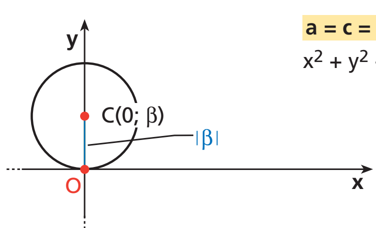
$x^2 + y^2 = r^2 \quad (r = \sqrt{-c})$



d. Si ha $\alpha = \beta = 0$, quindi $C(0; 0)$.
La circonferenza ha il centro nell'origine.

a = c = 0

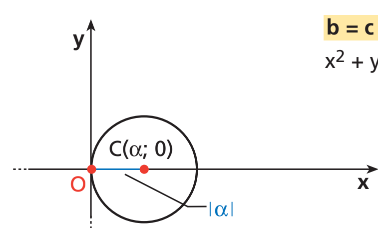
$x^2 + y^2 + by = 0$



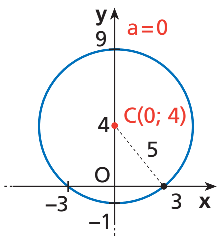
e. La circonferenza ha centro sull'asse *y* e passa per l'origine. Il raggio misura $r = \sqrt{\beta^2} = |\beta|$.

b = c = 0

$x^2 + y^2 + ax = 0$



f. La circonferenza ha centro sull'asse *x* e passa per l'origine. Il raggio misura $r = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$.



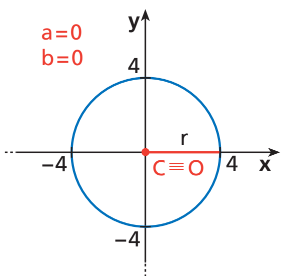
ESEMPIO

Rappresentiamo $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$.
Poiché $a = 0$ e $b = -8$, si ha:

$$\alpha = 0,\ \beta = 4, \quad \text{ossia} \quad C(0; 4).$$

Il raggio misura:

$$r = \sqrt{0 + 16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$



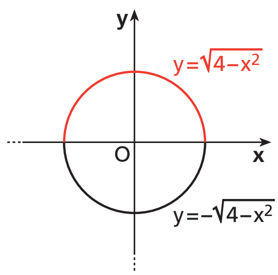
ESEMPIO

Rappresentiamo $x^2 + y^2 - 16 = 0$. Poiché $a = b = 0$, si ha:

$$\alpha = 0,\ \beta = 0, \quad \text{ossia} \quad C(0; 0).$$

Il raggio misura: $r = \sqrt{-c} = \sqrt{16} = 4$.

Altrimenti, si può procedere scrivendo l'equazione nella forma $x^2 + y^2 = r^2$, ossia $x^2 + y^2 = 16$, e ricavare immediatamente $C(0; 0)$ e $r = 4$.



L'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ non rappresenta una funzione perché a ogni valore $x \in \mathbb{R}$ corrispondono due valori di y.
Infatti, se per esempio consideriamo l'equazione $x^2 + y^2 = 4$ ed esplicitiamo rispetto a y, otteniamo: $y^2 = 4 - x^2 \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{4 - x^2}$.
Il grafico della circonferenza può essere visto come l'unione dei grafici di due semicirconferenze di equazioni $y = \sqrt{4 - x^2}$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$, che invece rappresentano delle funzioni.

2. RETTA E CIRCONFERENZA

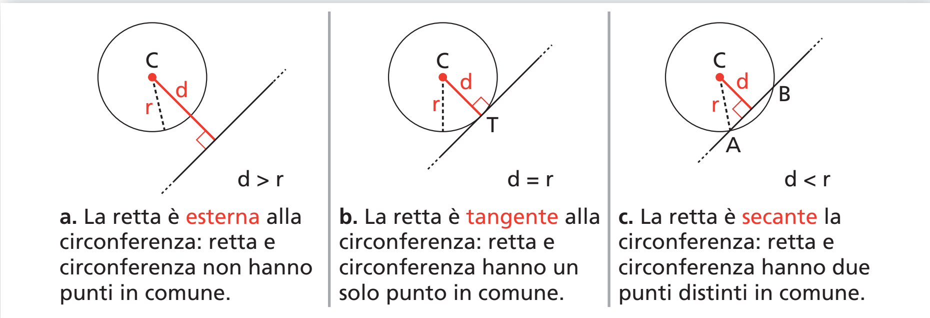
La posizione di una retta rispetto a una circonferenza dipende dalla distanza d della retta dal centro della circonferenza.

Ricordiamo che la distanza di un punto da una retta è la misura del segmento che ha per estremi il punto e il piede della perpendicolare condotta dal punto alla retta.

Considerando una circonferenza di raggio r, le relazioni che legano la distanza d alla posizione che assume la retta rispetto alla circonferenza sono:

- $\boldsymbol{d > r}$, la retta è **esterna**, cioè non ha punti in comune con la circonferenza (figura 5*a*);
- $\boldsymbol{d = r}$, la retta è **tangente** e ha un solo punto in comune con la circonferenza (figura 5*b*);
- $\boldsymbol{d < r}$, la retta è **secante** e ha due punti distinti in comune con la circonferenza (figura 5*c*).

▶ **Figura 5**



a. La retta è esterna alla circonferenza: retta e circonferenza non hanno punti in comune.

b. La retta è tangente alla circonferenza: retta e circonferenza hanno un solo punto in comune.

c. La retta è secante la circonferenza: retta e circonferenza hanno due punti distinti in comune.

Se vogliamo studiare la posizione di una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rispetto a una retta di equazione $a'x + b'y + c' = 0$, dobbiamo determinare quante sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Infatti, le soluzioni $(x; y)$ del sistema danno le coordinate dei punti in comune a retta e circonferenza, cioè dei loro punti di intersezione.
Applicando il metodo di sostituzione e studiando il segno del discriminante Δ dell'equazione risolvente si hanno tre casi:

- $\boldsymbol{\Delta < 0}$, il sistema non ha soluzioni reali: non ci sono punti di intersezione, quindi **la retta è esterna** alla circonferenza;
- $\boldsymbol{\Delta = 0}$, il sistema ha due soluzioni reali e coincidenti: c'è un solo punto di intersezione, quindi **la retta è tangente** alla circonferenza;
- $\boldsymbol{\Delta > 0}$, il sistema ha due soluzioni reali e distinte: ci sono due punti di intersezione, quindi **la retta è secante** la circonferenza.

Ricaviamo la x (o, indifferentemente, la y) dall'equazione della retta e sostituiamo l'espressione trovata nell'altra equazione. Otteniamo così un'equazione di secondo grado detta **equazione risolvente**.

ESEMPIO

Studiamo la posizione della retta $3x - 2y + 1 = 0$, rispetto alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 3x - 3y - 2 = 0$.
Risolviamo il sistema:

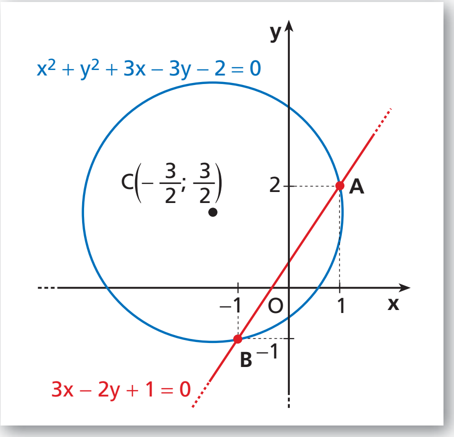
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3x - 3y - 2 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo la y nell'equazione di primo grado, sostituiamo in quella di secondo grado e svolgiamo i calcoli. Otteniamo l'equazione:

$$13x^2 - 13 = 0.$$

Non è necessario calcolare il discriminante, in quanto l'equazione si risolve immediatamente. Dividendo per 13, abbiamo:

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1; \quad x_2 = -1.$$



◀ **Figura 6** La retta $3x - 2y + 1 = 0$ è secante la circonferenza $x^2 + y^2 + 3x - 3y - 2 = 0$ nei punti $A(1; 2)$ e $B(-1; -1)$.

Sostituendo i due valori di x nell'equazione della retta, otteniamo rispettivamente:

$$y_1 = 2 \text{ e } y_2 = -1.$$

Il sistema ha due soluzioni, quindi la retta è secante la circonferenza. I punti di intersezione sono $A(1; 2)$ e $B(-1; -1)$.

3. LE RETTE TANGENTI

IN PRATICA
▶ Videolezione 15

Dati un punto $P(x_0; y_0)$ e una circonferenza qualsiasi di equazione

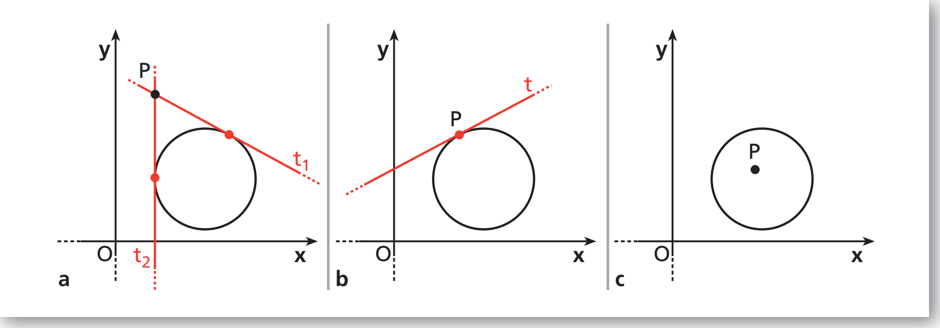
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

si possono presentare i tre seguenti casi.

1. P è esterno alla circonferenza (figura 7*a*);
2. P appartiene alla circonferenza (figura 7*b*);
3. P è interno alla circonferenza (figura 7*c*).

Nel primo caso le rette passanti per P e tangenti alla circonferenza sono due, nel secondo caso è una sola, nel terzo caso non esistono rette tangenti passanti per P.

► Figura 7



Per determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti passanti per P, nei casi 1 e 2 è possibile seguire due metodi.

Primo metodo: $\Delta = 0$

- Si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per P, $y - y_0 = m(x - x_0)$.
- Si scrive il sistema delle equazioni del fascio e della circonferenza:

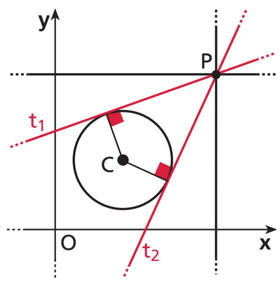
$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases}$$

- Si ricava la y nell'equazione del fascio di rette e si sostituisce nell'equazione della circonferenza, ottenendo un'equazione di secondo grado nella variabile x i cui coefficienti sono funzioni del parametro m.
- Si pone la *condizione di tangenza*, ossia $\Delta = 0$, in quanto, affinché la retta per P sia tangente alla circonferenza, è necessario che l'equazione risolvente ammetta due soluzioni coincidenti.
- Si risolve l'equazione di secondo grado rispetto a m, ottenuta ponendo $\Delta = 0$.

Se il punto P è esterno alla circonferenza, si ha $m_1 \neq m_2$ e le rette tangenti sono due.
Se il punto P appartiene alla circonferenza, si ha $m_1 = m_2$ e la retta tangente è una sola (o due coincidenti).

● Il sistema fornisce i punti di intersezione della retta per P con la circonferenza al variare di m.

● Negli esercizi esamineremo anche il caso in cui una delle due rette è parallela all'asse y. Come sappiamo, una retta di questo tipo non ha coefficiente angolare.



Secondo metodo: distanza retta-centro uguale al raggio

- Si determinano le coordinate del centro C e il raggio r della circonferenza.
- Si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per P in forma implicita: $y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow mx - y + y_0 - mx_0 = 0$.
- Si applica la formula della distanza di un punto da una retta per esprimere la distanza del centro C da una generica retta del fascio.
- Si pone tale distanza uguale al raggio e si risolve l'equazione in m.
- Si sostituisce il valore o i valori trovati di m nell'equazione del fascio di rette.

ESEMPIO

Determiniamo le equazioni delle eventuali rette passanti per $P\left(\frac{9}{4}; 0\right)$ e tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

- Determiniamo le coordinate del centro C e il raggio r della circonferenza:

  $C(1; 0), \quad r = 1.$

- Scriviamo l'equazione del fascio di rette passanti per $P\left(\frac{9}{4}; 0\right)$:

  $y - 0 = m\left(x - \frac{9}{4}\right)$, cioè, in forma implicita, $4mx - 4y - 9m = 0$.

- Determiniamo la distanza fra le rette e il centro C:

  $$d = \frac{|4m(1) - 4(0) - 9m|}{\sqrt{16m^2 + 16}} = \frac{|-5m|}{\sqrt{16m^2 + 16}}.$$

- Poniamo tale distanza uguale al raggio e risolviamo l'equazione rispetto a m:

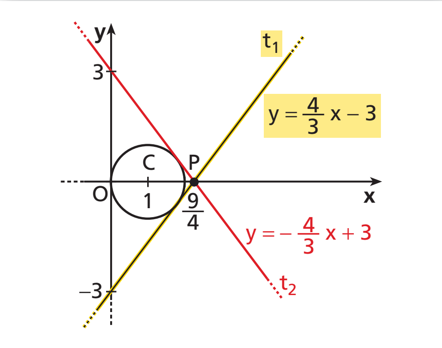
  $$\frac{|-5m|}{\sqrt{16m^2 + 16}} = 1 \quad \rightarrow \quad |-5m| = \sqrt{16m^2 + 16}.$$

  Eleviamo entrambi i membri al quadrato:

  $$25m^2 = 16m^2 + 16 \quad \rightarrow \quad 9m^2 = 16 \quad \rightarrow \quad m^2 = \frac{16}{9} \rightarrow m = \pm\frac{4}{3}.$$

- Sostituiamo i valori di m nell'equazione del fascio di rette e troviamo le equazioni delle due tangenti:

  $$t_1\!: y = \frac{4}{3}x - 3, \qquad t_2\!: y = -\frac{4}{3}x + 3.$$



◀ Figura 8

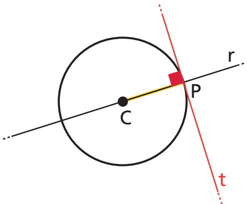
● La formula della distanza di un punto $P(x_0; y_0)$ da una retta di equazione $ax + by + c = 0$ è:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

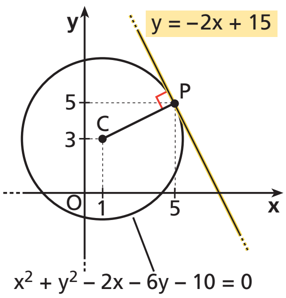
Se il punto P appartiene alla circonferenza, oltre ai due metodi indicati, possiamo applicare anche i seguenti.

Terzo metodo: **retta tangente in P come perpendicolare al raggio PC**

- Si determinano le coordinate del centro C della circonferenza.
- Si trova il coefficiente angolare m della retta r passante per P e per C.
- Si calcola il coefficiente angolare $m' = -\frac{1}{m}$ della retta perpendicolare a r.
- Si scrive l'equazione della tangente: $y - y_0 = m'(x - x_0)$.



● La retta tangente t in P è perpendicolare al raggio passante per P.



ESEMPIO

Determiniamo l'equazione della tangente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 10 = 0$ nel suo punto $P(5; 5)$.

Il centro della circonferenza ha coordinate $C(1; 3)$.
Determiniamo il coefficiente angolare m della retta CP e quello $m_\perp$ della perpendicolare:

$$m = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} = \frac{5-3}{5-1} = \frac{1}{2},$$

$$m_\perp = -\frac{1}{m} = -2.$$

Scriviamo l'equazione della retta tangente in P, che è perpendicolare a CP:

$$y - 5 = -2(x-5),$$
$$y = -2x + 15.$$

Quarto metodo: formule di sdoppiamento

- Si scrive l'equazione della circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
- Se P ha coordinate $(x_0; y_0)$, si eseguono le sostituzioni

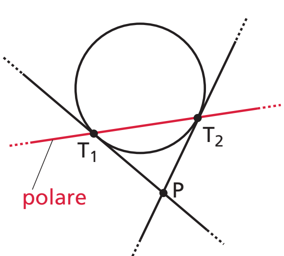
$$x^2 \to xx_0, \qquad y^2 \to yy_0,$$
$$x \to \frac{x+x_0}{2}, \qquad y \to \frac{y+y_0}{2}.$$

- Si può dimostrare che l'equazione della retta tangente è:

$$\boldsymbol{xx_0 + yy_0 + a\frac{x+x_0}{2} + b\frac{y+y_0}{2} + c = 0}.$$

In generale, queste formule si usano per tutte le coniche.

Se applichiamo le formule di sdoppiamento quando il punto P non appartiene alla circonferenza, otteniamo l'equazione della **polare**, la retta che passa per i due punti T_1 e T_2 di contatto delle tangenti condotte da P alla circonferenza.



ESEMPIO

La tangente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ nel suo punto $P(4; 6)$ ha equazione:

$$4x + 6y - 2\frac{x+4}{2} - 4\frac{y+6}{2} - 20 = 0 \;\to$$

$$\to\; 4x + 6y - x - 4 - 2y - 12 - 20 = 0 \;\to\; 3x + 4y - 36 = 0.$$

Se la circonferenza passa per l'origine, cioè ha equazione del tipo $x^2 + y^2 + ax + by = 0$, applicando le formule di sdoppiamento, otteniamo che l'equazione della retta tangente nell'origine è:

$$x \cdot 0 + y \cdot 0 + a \cdot \frac{x+0}{2} + b \cdot \frac{y+0}{2} = 0 \;\to\; ax + by = 0,$$

che è il gruppo dei termini di primo grado dell'equazione della circonferenza uguagliato a 0.
Per esempio, l'equazione della tangente nell'origine alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 5y = 0$ è $-2x + 5y = 0$.

4. DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA CIRCONFERENZA

IN PRATICA
▶ Videolezione 16

Poiché nell'equazione della circonferenza

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

sono presenti tre coefficienti a, b e c, per poterli determinare occorrono tre informazioni geometriche, indipendenti tra loro, sulla circonferenza, dette *condizioni*, che si traducono poi in tre equazioni algebriche nelle incognite a, b, c.

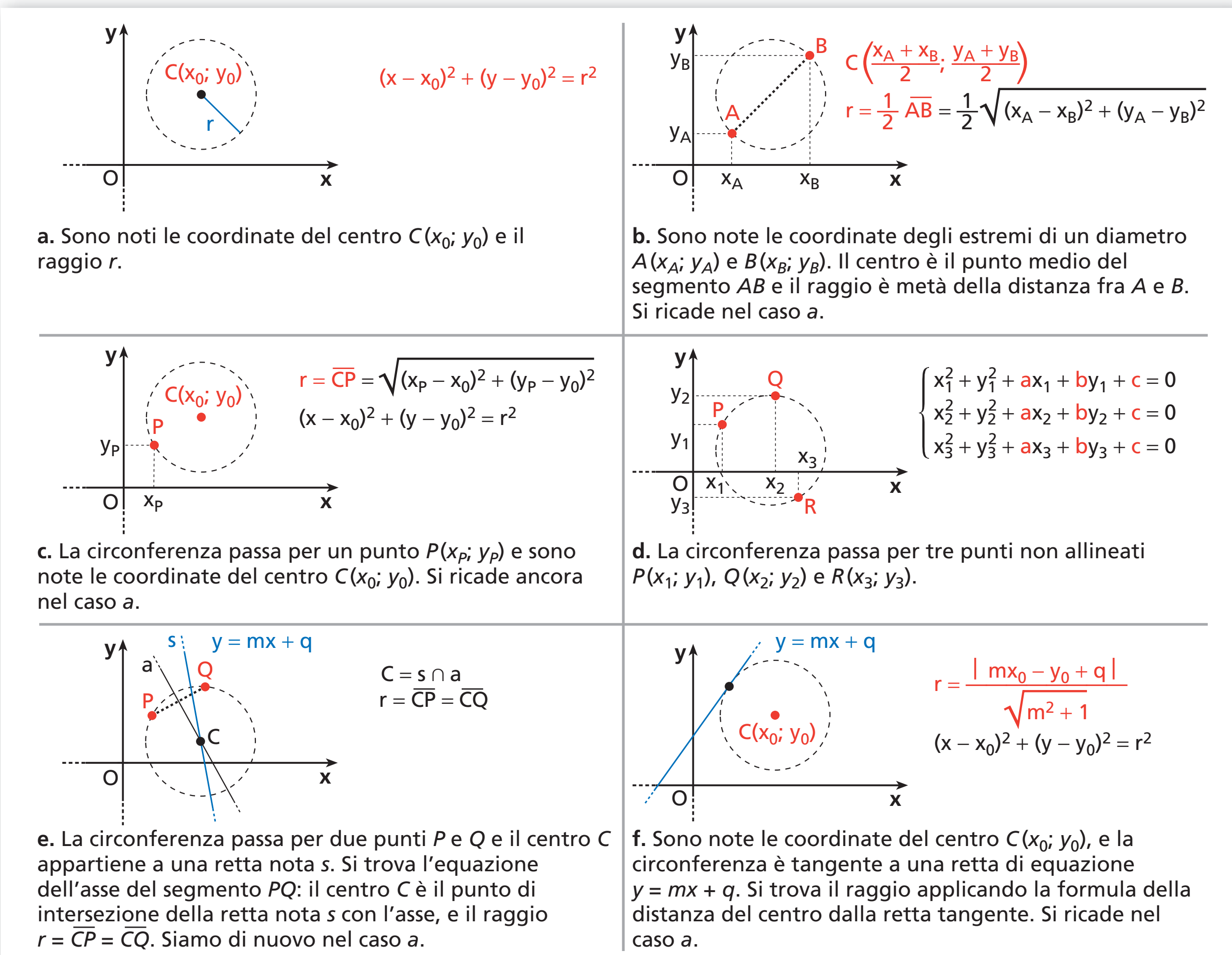
Forniamo l'elenco di alcune possibili condizioni:

- sono noti le coordinate del centro e il raggio;
- sono note le coordinate degli estremi di un diametro;
- la circonferenza passa per un punto e sono note le coordinate del centro;
- la circonferenza passa per tre punti non allineati;
- la circonferenza passa per due punti e il centro appartiene a una retta di equazione nota;
- sono note le coordinate del centro e la circonferenza è tangente a una retta di equazione nota.

La figura 9 riassume tutti i sei casi elencati.

● Le coordinate note di un punto della circonferenza corrispondono a una condizione, perché permettono di scrivere un'equazione in a, b e c; le coordinate del centro corrispondono a due condizioni, perché possiamo determinare sia a sia b; il raggio corrisponde a una condizione.

▼ **Figura 9**



a. Sono noti le coordinate del centro $C(x_0; y_0)$ e il raggio r.

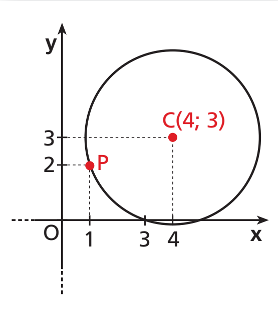
b. Sono note le coordinate degli estremi di un diametro $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$. Il centro è il punto medio del segmento AB e il raggio è metà della distanza fra A e B. Si ricade nel caso *a*.

c. La circonferenza passa per un punto $P(x_P; y_P)$ e sono note le coordinate del centro $C(x_0; y_0)$. Si ricade ancora nel caso *a*.

d. La circonferenza passa per tre punti non allineati $P(x_1; y_1)$, $Q(x_2; y_2)$ e $R(x_3; y_3)$.

e. La circonferenza passa per due punti P e Q e il centro C appartiene a una retta nota s. Si trova l'equazione dell'asse del segmento PQ: il centro C è il punto di intersezione della retta nota s con l'asse, e il raggio $r = \overline{CP} = \overline{CQ}$. Siamo di nuovo nel caso *a*.

f. Sono note le coordinate del centro $C(x_0; y_0)$, e la circonferenza è tangente a una retta di equazione $y = mx + q$. Si trova il raggio applicando la formula della distanza del centro dalla retta tangente. Si ricade nel caso *a*.



▲ Figura 10

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione della circonferenza di centro $C(4; 3)$ e passante per il punto $P(1; 2)$.

Le condizioni sono analoghe al caso della figura 9*c*:

$$r = \overline{CP} = \sqrt{(4-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 10.$$

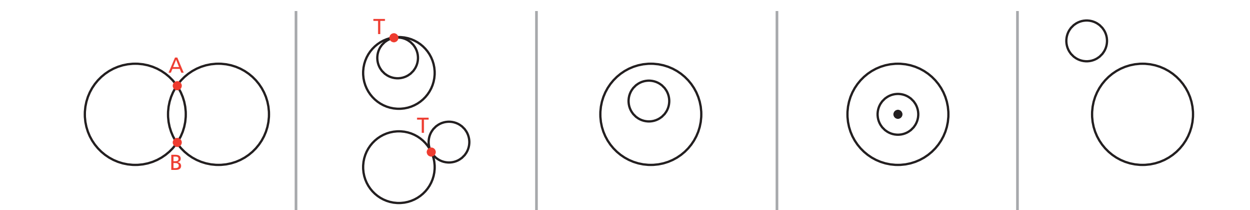
L'equazione della circonferenza richiesta è:

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0.$$

5. LA POSIZIONE DI DUE CIRCONFERENZE

Due circonferenze possono essere secanti in due punti, tangenti in uno stesso punto (esternamente o internamente), una interna all'altra (non concentriche oppure concentriche), esterne (figura 11).

▼ Figura 11



a. Circonferenze secanti. **b.** Circonferenze tangenti. **c.** Circonferenze una interna all'altra. **d.** Circonferenze concentriche. **e.** Circonferenze esterne.

Per determinare gli eventuali punti di intersezione o il punto di tangenza, occorre risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due circonferenze:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Se $a \neq a'$ o $b \neq b'$, è possibile applicare il metodo di riduzione, sottraendo membro a membro:

$$\ominus \begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad (a-a')x + (b-b')y + (c-c') = 0 \qquad}$$

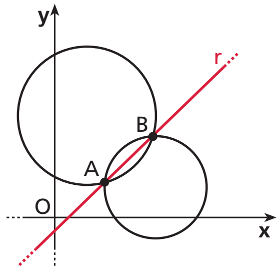
L'equazione ottenuta è lineare in x e y, perciò rappresenta una retta. Tale retta viene chiamata **asse radicale** delle due circonferenze.

● Se $a = a'$ e $b = b'$, le circonferenze sono concentriche e quindi non si intersecano (se $c \neq c'$) oppure sono coincidenti (se anche $c = c'$).

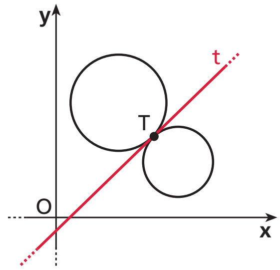
Il sistema iniziale è equivalente al sistema formato dall'equazione di una delle due circonferenze e dall'equazione dell'asse radicale:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ (a-a')x + (b-b')y + (c-c') = 0 \end{cases}$$

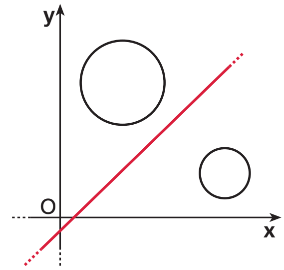
Se le due circonferenze si intersecano in due punti A e B, l'asse radicale passa per essi (figura 12*a*); se le circonferenze sono tangenti in un punto T, l'asse radicale passa per T (figura 12*b*).



a. L'asse radicale è la retta r passante per i punti di intersezione delle due circonferenze.



b. L'asse radicale è la retta t passante per il punto di tangenza delle due circonferenze.



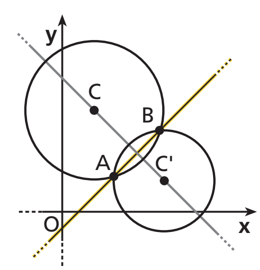
c. L'asse radicale esiste anche se le circonferenze non sono secanti.

▲ **Figura 12**

Il coefficiente angolare m_a dell'asse radicale è $-\dfrac{a-a'}{b-b'}$. Il coefficiente angolare m_c della retta passante per i centri $C\left(-\dfrac{a}{2}; -\dfrac{b}{2}\right)$ e $C'\left(-\dfrac{a'}{2}; -\dfrac{b'}{2}\right)$ è:

$$m_c = \frac{-\dfrac{b}{2}+\dfrac{b'}{2}}{-\dfrac{a}{2}+\dfrac{a'}{2}} = \frac{-b+b'}{-a+a'} = \frac{-(b-b')}{-(a-a')} = \frac{b-b'}{a-a'}.$$

Poiché $m_a \cdot m_c = -\dfrac{a-a'}{b-b'} \cdot \dfrac{b-b'}{a-a'} = -1$, *l'asse radicale risulta perpendicolare alla retta passante per i centri delle due circonferenze* (figura 13).
Si deduce, quindi, che nel caso di circonferenze tangenti (figura 12*b*) l'asse radicale coincide con la retta tangente alle circonferenze nel loro comune punto di tangenza T.



▲ **Figura 13** L'asse radicale è perpendicolare alla retta che passa per i centri delle due circonferenze.

Se si conosce l'equazione dell'asse radicale, si possono trovare gli eventuali punti di intersezione di due circonferenze.

ESEMPIO

Determiniamo gli eventuali punti di intersezione delle due circonferenze di equazioni:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0 \text{ e } x^2 + y^2 + 2x - 16y + 13 = 0.$$

Troviamo l'equazione dell'asse radicale sottraendo membro a membro le due equazioni:

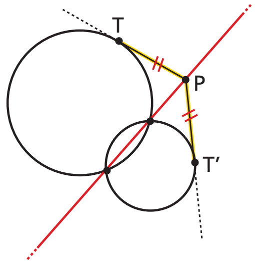
$$\ominus \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 16y + 13 = 0 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad 12y - 24 = 0 \;\rightarrow\; y = 2}$$

L'asse radicale è una retta parallela all'asse x.

Determiniamo i punti di intersezione, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 15 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

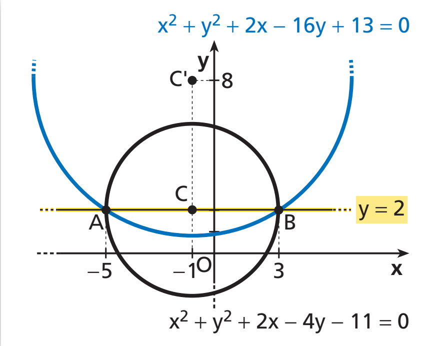
▶ **Figura 14** La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ ha centro $C(-1; 2)$ e raggio $r = 4$; la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x - 16y + 13 = 0$ ha centro $C'(-1; 8)$ e raggio $r' = \sqrt{52}$. L'asse radicale è perpendicolare alla retta CC' e ha equazione $y = 2$.



da cui, risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$\begin{cases} x = -1 \pm 4 = \begin{cases} -5 \\ 3 \end{cases} \\ y = 2 \end{cases}$$

Le due circonferenze si intersecano nei punti $A(-5; 2)$ e $B(3; 2)$.



● Si può dimostrare che l'asse radicale gode della seguente proprietà: *se per ogni punto P dell'asse si conducono i segmenti di tangente PT e PT' alle due circonferenze, risulta sempre $PT \cong PT'$*.

IN PRATICA
▶ Videolezione 17

6. I FASCI DI CIRCONFERENZE

Come generare un fascio di circonferenze

Sono date le circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ di equazione:

$$\mathscr{C}: \quad x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10 = 0,$$

$$\mathscr{C}': \quad x^2 + y^2 - 8y - 10 = 0.$$

Combiniamo linearmente le due equazioni, introducendo due parametri reali p e q non entrambi nulli, ossia scriviamo l'equazione:

$$p \cdot (x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10) + q \cdot (x^2 + y^2 - 8y - 10) = 0.$$

Tale equazione rappresenta infinite circonferenze al variare di p e q.
L'insieme costituito da queste infinite circonferenze viene detto **fascio di circonferenze con generatrici $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$**.

● L'equazione del fascio con 2 parametri (p e q) comprende **tutte** le circonferenze del fascio, **incluse** $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$, che si ottengono per $q = 0$ o $p = 0$.

Se $p = 0$ e $q \neq 0$, si ha l'equazione della circonferenza $\mathscr{C}'$, mentre se $p \neq 0$ e $q = 0$ otteniamo quella di $\mathscr{C}$.
Poiché p e q non sono entrambi nulli, supposto per esempio $p \neq 0$, dividiamo entrambi i membri dell'equazione precedente per p, in modo da ottenere un'equazione con un solo parametro, $k = \frac{q}{p}$:

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10 + k(x^2 + y^2 - 8y - 10) = 0.$$

● L'equazione del fascio con un solo parametro k descrive anch'essa **tutte** le circonferenze del fascio, **eccetto** $\mathscr{C}'$, che non corrisponde ad alcun valore di k.

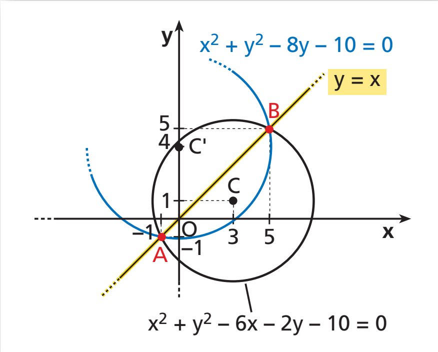
Per ogni valore di k si ottiene l'equazione di una circonferenza particolare.

Per $k = 0$ si ottiene la circonferenza $\mathscr{C}$, mentre non esiste alcun valore di k che fornisca l'equazione della circonferenza $\mathscr{C}'$.

Per $k = -1$, l'equazione diventa

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 6x - 2y - 10 - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} + 8y + 10 = 0 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad -6x + 6y = 0 \quad \rightarrow \quad -x + y = 0 \quad \rightarrow \quad y = x$$

ossia otteniamo l'asse radicale delle circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ (figura 15).



◀ **Figura 15** Le due circonferenze, di centri $C(3; 1)$ e $C'(0; 4)$ e raggi $r = 2\sqrt{5}$ e $r' = \sqrt{26}$, si intersecano nei punti $A(-1; -1)$ e $B(5; 5)$, e l'asse radicale è la bisettrice del primo e terzo quadrante, di equazione $y = x$.

In generale, diamo la seguente definizione.

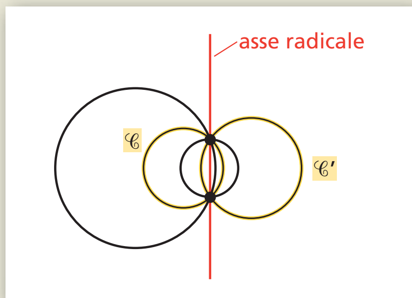
DEFINIZIONE

Fascio di circonferenze

Date due circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$, rispettivamente di equazioni

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ e}$$
$$x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0,$$

si chiama *fascio di circonferenze definito da* $\mathscr{C}$ *e* $\mathscr{C}'$ l'insieme della circonferenza $\mathscr{C}'$ e di tutte le circonferenze rappresentate dall'equazione:



$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0, \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

● $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ si dicono **generatrici del fascio**.

Svolgendo i calcoli, possiamo anche scrivere l'equazione del fascio nella forma:

$$(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 + (a + ka')x + (b + kb')y + c + kc' = 0.$$

● Si può dimostrare che si ottiene lo stesso fascio se a $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ si sostituiscono altre due circonferenze del fascio, dove una delle due può anche essere l'asse radicale.

Per k diverso da -1, otteniamo l'equazione:

$$x^2 + y^2 + \frac{a + ka'}{k + 1}x + \frac{b + kb'}{k + 1}y + \frac{c + kc'}{k + 1} = 0.$$

Per $k = -1$, otteniamo invece l'equazione della retta

$$(a - a')x + (b - b')y + c - c' = 0,$$

che rappresenta l'**asse radicale del fascio**.

L'asse radicale può essere considerato come una particolare circonferenza con un raggio infinitamente grande, ossia come una *circonferenza degenere*.

● Una **circonferenza degenere** può essere una retta (circonferenza di raggio infinitamente grande) oppure un punto (circonferenza di raggio nullo).

Se le due circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$:

- si intersecano nei punti A e B, tutte le circonferenze del fascio passano per A e B, che vengono detti **punti base del fascio**, e l'asse radicale è la retta AB (figura 16a);
- sono tangenti nel punto A, allora tutte le circonferenze del fascio passano per A, che è l'**unico punto base**, e l'asse radicale è la retta tangente in A alle circon-

ferenze (figura 16*b*); in questo caso, al fascio appartiene anche la circonferenza degenere di centro A e raggio nullo: se $(x_0; y_0)$ sono le coordinate del punto A, questa circonferenza ha equazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0,$$

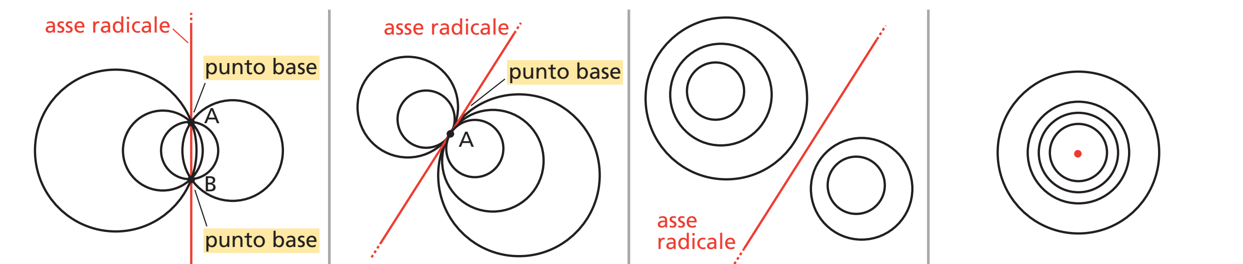
e il fascio di circonferenze tangenti in A alla retta t di equazione

$$ax + by + c = 0$$

si può scrivere nel seguente modo:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + k(ax + by + c) = 0;$$

- non si intersecano e non sono concentriche, non esistono punti comuni alle circonferenze del fascio e l'asse radicale è esterno alle circonferenze (figura 16*c*);
- sono concentriche, allora tutte le circonferenze del fascio sono concentriche e, dato che $a = a'$, $b = b'$, l'asse radicale non esiste (figura 16*d*).



a. Fascio di circonferenze per due punti.
b. Fascio di circonferenze per un punto.
c. Fascio di circonferenze senza punti comuni.
d. Fascio di circonferenze concentriche.

▲ **Figura 16** I diversi tipi di fasci di circonferenze.

Il luogo dei centri delle circonferenze del fascio è una retta perpendicolare all'asse radicale e si chiama **asse centrale**.

Lo studio di un fascio di circonferenze

Per **studiare un fascio di circonferenze** occorre trovare:

a) centro e raggio in funzione del parametro k;
b) le due generatrici;
c) gli eventuali punti base;
d) l'asse radicale e l'asse centrale;
e) eventuali circonferenze degeneri.

Come esempio, nell'esercizio guida 272 a pagina 289 studieremo il fascio di equazione:

$$(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 + (2 - 4k)x - 6y - 1 + 2k = 0.$$

Bergamini, Trifone, Barozzi **MATEMATICA.BLU - Vol. 3** © Zanichelli 2012 *con Maths in English*

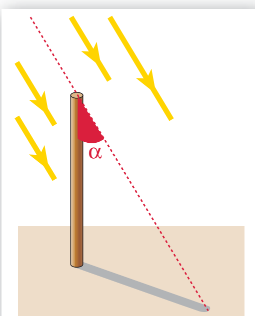
ESPLORAZIONE

Eratostene e il meridiano terrestre

Eratostene, fondatore della Biblioteca di Alessandria e grande scienziato dell'epoca, nel terzo secolo avanti Cristo ipotizzò che la Terra fosse una sfera e ne calcolò il raggio misurando un arco di meridiano da Alessandria a Siene (l'attuale Assuan).

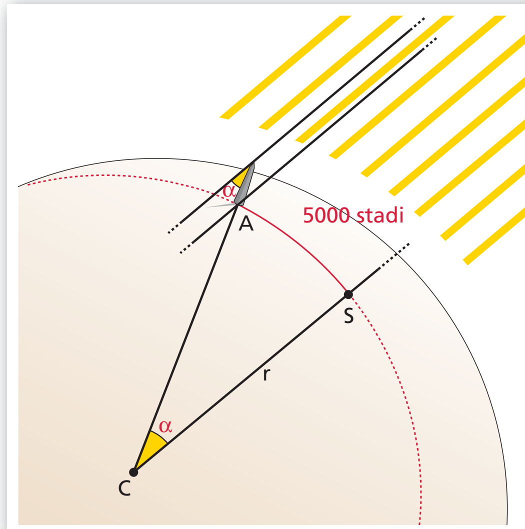
Secondo le misure di Eratostene, le due città erano sullo stesso meridiano (in realtà oggi sappiamo che tra loro c'è una differenza di tre gradi di longitudine), quindi il percorso più breve dall'una all'altra era un arco di meridiano, cioè di una circonferenza terrestre. Si stimava che questa distanza fosse di circa 5000 *stadi*.

Eratostene osservò poi che a mezzogiorno del solstizio d'estate a Siene il Sole illuminava il fondo dei pozzi. Ciò significava che i suoi raggi cadevano perpendicolari alla superficie terrestre. Ad Alessandria invece, nello stesso momento, i raggi formavano con la verticale un cinquantesimo dell'angolo giro, ossia 7,2°.



◀ **Eratostene utilizzò il metodo dello *gnomone* per misurare l'angolo formato dai raggi del Sole con la verticale. Misurò infatti l'angolo che un bastone conficcato nel terreno (gnomone) formava con la retta congiungente la cima del bastone e l'estremità della sua ombra.**

Supponendo che i raggi del Sole siano paralleli, puoi osservare nella figura grande che anche l'angolo α con vertice nel centro della Terra e con i lati che passano per Alessandria e Siene ha ampiezza 7,2°.



L'angolo α e l'angolo formato dai raggi del Sole con la verticale ad Alessandria sono infatti *alterni interni* se si considerano due raggi paralleli passanti per Alessandria e Siene tagliati dalla trasversale che dal centro della Terra passa per Alessandria.
Vale allora la proporzione:

$$7{,}2 : 360 = 5000 : x \rightarrow x = 5000 \cdot \frac{360}{7{,}2} = 250\,000.$$

Si stima che lo *stadio* dovesse essere lungo 157,5 metri. Accettando questo valore, la lunghezza della circonferenza calcolata da Eratostene è di 39 375 km, valore molto vicino a quello che oggi conosciamo di 40 009 km.

Attività

Eratostene in rete

- Trovate una scuola, italiana o meglio europea, che stia sul vostro stesso meridiano e con una delle sue classi misurate allo stesso istante l'angolo che i raggi del Sole formano con la verticale. Da qui ricavate il raggio della Terra. In Internet potete consultare il sito *Rete di Eratostene*, che si occupa di collegare e aiutare le scuole che vogliono realizzare l'esperienza.

Per saperne di più

- D. Guedj, *La chioma di Berenice*, Longanesi, 2003. Un romanzo su Eratostene e la misura del Mondo.

Cerca nel Web:
rete, Eratostene, meridiano

I TRONCHI DEGLI ALBERI

Come si può conoscere il diametro di un grosso tronco con molta precisione?

▶ Il quesito completo a pag. 241

Il metodo della corda

Consiste nell'avvolgere una corda intorno al tronco a un'altezza predefinita e misurare la circonferenza.
La sezione di un tronco non è esattamente un cerchio, ma per misurarne il diametro possiamo pensare che sia così.
Se non serve essere troppo precisi, per ottenere il diametro basta dividere la circonferenza per 3 oppure, se si vuole essere più esatti, per 3,14.
L'errore relativo che si commette usando 3 al posto di π è del 4,5%, accettabile per esempio nel caso in cui si voglia vendere il legname.

Per essere più precisi...

Chi cura grandi alberi vuole monitorare costantemente il loro stato di salute, perché improvvisi arresti nella crescita del diametro del tronco sono indicatori di stress dovuti alla mancanza d'acqua o a qualche malattia.
La crescita di un grande albero nel corso di un mese è certamente inferiore all'errore che si può avere con il metodo della corda.
È necessario quindi trovare altre soluzioni. Su alcune piante vengono inseriti dei sensori elettronici che misurano la crescita del diametro. Non tutti gli alberi però sopportano che si impianti un sensore nel loro tronco. E così si ricorre a un metodo geometrico.

Il metodo delle tre aste

Con tre aste di legno (una corta, una lunga un metro e la terza piuttosto lunga) si fa la seguente costruzione.

- Si appoggia la prima asta tangente al tronco.
- La seconda, lunga un metro, viene messa perpendicolare alla prima a partire dal punto di contatto col tronco: in questo modo la seconda asta, se prolungata idealmente all'interno del tronco, passa per il centro della circonferenza.
- Infine, si posiziona la terza asta con un'estremità a contatto col punto della seconda più lontano dal tronco, e le si fa toccare il tronco tangenzialmente (vedi figura).

Ora non resta che misurare la parte della terza asta tra l'estremità e il punto di contatto col tronco.
Diciamo che sia lunga C. Poiché l'estremità della terza asta, il suo punto di tangenza e il centro della circonferenza formano un triangolo rettangolo, vale la relazione

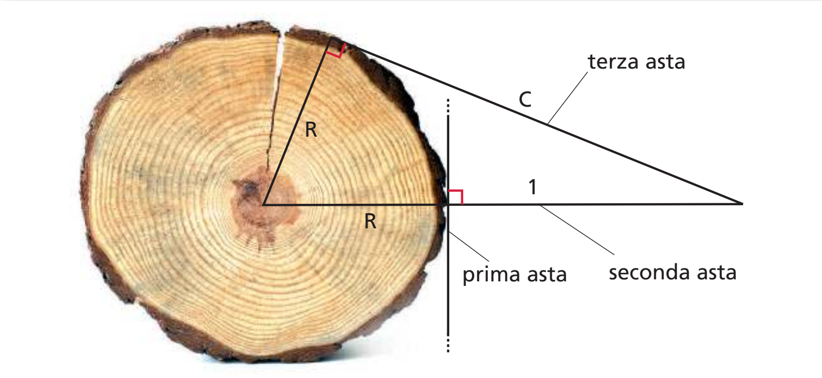
$$(1 + R)^2 = R^2 + C^2,$$

dove 1 è la lunghezza della seconda asta e R è il raggio, che possiamo quindi ricavare:

$$R = \frac{1}{2}(C^2 - 1).$$

Le tre aste eliminano due problemi che si hanno usando la corda:

- la sezione del tronco non è un cerchio perfetto;
- la corda potrebbe essere tesa diversamente nelle misure fatte a distanza di tempo.



I cerchi di Kandinskij

Nella sua sperimentazione verso la pittura astratta Kandinskij sceglie il cerchio come una delle forme fondamentali. Nel dipinto che proponiamo (*Alcuni cerchi*, 1926, Solomon R. Guggenheim Museum, New York) egli pensa il cerchio come «un legame con il cosmico», come «la forma più modesta, che si afferma con prepotenza, precisa ma variabile, stabile e allo stesso tempo instabile, silenziosa e contemporaneamente sonora» e ancora come «una tensione che porta in sé infinite tensioni».
Kandinskij afferma: «Oggi amo il cerchio come prima amavo il cavallo e forse di più, perché nel cerchio trovo maggiori possibilità interiori».

LABORATORIO DI MATEMATICA
LA CIRCONFERENZA

ESERCITAZIONE GUIDATA

Costruiamo con l'aiuto di Excel le coordinate degli eventuali punti di intersezione fra la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e la retta di equazione $y = q$, dopo aver letto i valori dei loro coefficienti. Proviamo il foglio con i seguenti valori: $a = -4$, $b = -2$, $c = -20$ e $q = 6$.

- Attiviamo Excel e scriviamo i messaggi per indicare dove immettere i dati e le didascalie per illustrare la soluzione del problema, come vediamo in figura 1.
- Nella cella C3 digitiamo la formula che controlla l'esistenza della circonferenza: = SE(B2^2 + D2^2 > 4*F2; "rappresenta una circonferenza"; "non rappresenta una circonferenza").
- In C8 scriviamo la formula che calcola il discriminante del sistema formato dalle equazioni della circonferenza e della retta: = B2^2 − 4*(B6^2 + B6*D2 + F2).
- Inseriamo le risposte al problema condizionate dai valori assunti dal discriminante: in A11 = SE(C8 > 0; "nei punti"; SE(C8 = 0; "nel punto"; "in nessun punto")), in B11 = SE(C8 >= 0; (− B2 − RADQ(C8))/2); ""), in C11 = SE(C8 >= 0; B6; ""), in D11 = SE(C8 > 0; "e"; ""), in E11 = SE(C8 > 0; (− B2 + RADQ(C8))/2); "") e in F11 = SE(C8 > 0; B6; "").
- Inseriamo i dati proposti: − 4 in B2, − 2 in D2, − 20 in F2 e 4 in B6 e al termine vediamo il foglio della figura 1.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Assegna i valori dei coefficienti della circonferenza						
2	x^2+y^2+	-4,00	* x +	-2,00	* y +	-20,00	= 0
3	L'equazione		rappresenta una circonferenza				
4							
5	Assegna il valore del coefficiente della retta						
6	y =	4,00					
7							
8	Il discriminante vale		64,00				
9							
10	Le intersezioni fra la circonferenza e la retta si trovano						
11	nei punti	-2,00	4,00	e	6,00	4,00	
12							

▲ Figura 1

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 8 esercitazioni in più

Esercitazioni

Per ognuno dei seguenti problemi costruisci un foglio elettronico che legga i dati e determini gli eventuali risultati. Prova il foglio con i dati proposti.

1 Dopo aver assegnato le coordinate dei punti $M(x_M; y_M)$ e $N(x_N; y_N)$, determina l'equazione della circonferenza di diametro MN.
Prova il foglio con $M(2; 3)$ e $N(-4; 5)$; con $M(2; 3)$ e $N(2; 5)$; con $M(2; 3)$ e $N(2; 3)$.
[$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$; $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$; la circonferenza non esiste]

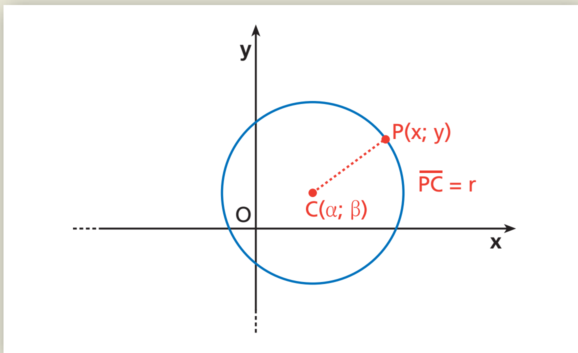
2 Trova l'equazione della circonferenza avente il centro nel punto dato $C(x_C; y_C)$ e passante per il punto dato $P(x_P; y_P)$.
Prova il foglio con $C(2; 3)$ e $P(1; 3)$, con $C(3; -5)$ e $P(-1; -2)$, con $C(-3; 1)$ e $P(-3; 1)$.
[$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$; $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$; la circonferenza non esiste]

3 Determina le coordinate delle intersezioni con gli assi cartesiani di una circonferenza, date la misura r del raggio e le coordinate del centro C.
Prova il foglio con $r = \sqrt{5}$ e $C(1; 1)$, con $r = 5$ e $C(5; 3)$, con $r = 2$ e $C(-3; 4)$.
[$(-1; 0)$, $(3; 0)$, $(0; -1)$, $(0; 3)$; $(1; 0)$, $(9; 0)$, $(0; 3)$; le intersezioni non esistono]

LA TEORIA IN SINTESI
LA CIRCONFERENZA

1. LA CIRCONFERENZA E LA SUA EQUAZIONE

- **Circonferenza**: curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto C, detto **centro**.
- **Raggio della circonferenza**: distanza fra ognuno dei punti della circonferenza e il suo centro.



- **Equazione della circonferenza**
Note le coordinate del centro $(\alpha; \beta)$ e la misura r del raggio, l'equazione della circonferenza è:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

L'equazione può anche essere scritta nella forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

dove a, b e c soddisfano le seguenti relazioni:

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \quad \beta = -\frac{b}{2},$$

$$r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c},$$

con $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c \geq 0$.

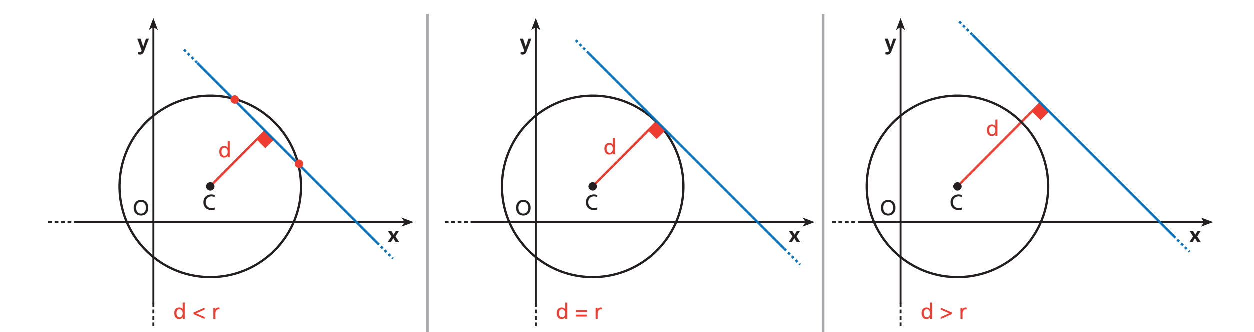
Se:
$a = 0$, il centro appartiene all'asse y;
$b = 0$, il centro appartiene all'asse x;
$c = 0$, la circonferenza passa per l'origine degli assi.

2. RETTA E CIRCONFERENZA

- **Retta secante, retta tangente e retta esterna alla circonferenza**
Dato il sistema formato dalle equazioni della circonferenza e della retta:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

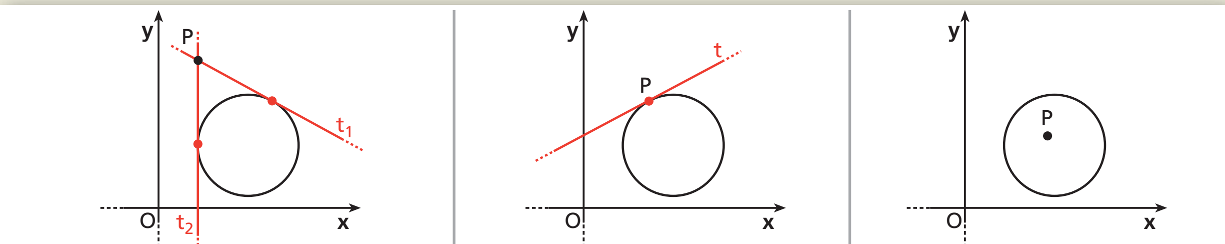
se nell'equazione di secondo grado risolvente abbiamo:
- $\Delta > 0$, la retta è **secante**;
- $\Delta = 0$, la retta è **tangente**;
- $\Delta < 0$, la retta è **esterna**.



a. Retta secante la circonferenza. **b.** Retta tangente alla circonferenza. **c.** Retta esterna alla circonferenza.

3. LE RETTE TANGENTI

■ Dati un punto $P(x_0; y_0)$ e una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$,
- se P è esterno alla circonferenza, le **rette per *P* tangenti alla circonferenza** sono due;
- se P appartiene alla circonferenza, la retta tangente è una sola;
- se P è interno alla circonferenza, non esistono rette tangenti passanti per P.



a. Due distinte tangenti alla circonferenza condotte per *P*.
b. Una sola tangente alla circonferenza.
c. Nessuna retta tangente.

■ **Equazioni delle rette tangenti**
Per determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti, è possibile seguire vari metodi.
- **Primo metodo**: nell'equazione di secondo grado nella variabile x, risolvente il sistema

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases}$$

si impone $\Delta = 0$.
- **Secondo metodo**: si impone che la distanza tra il centro C e le rette passanti per P, che hanno equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$, sia uguale al raggio.

Con entrambi i metodi si ottiene un'equazione di secondo grado in m le cui soluzioni reali sono i coefficienti angolari delle rette tangenti.

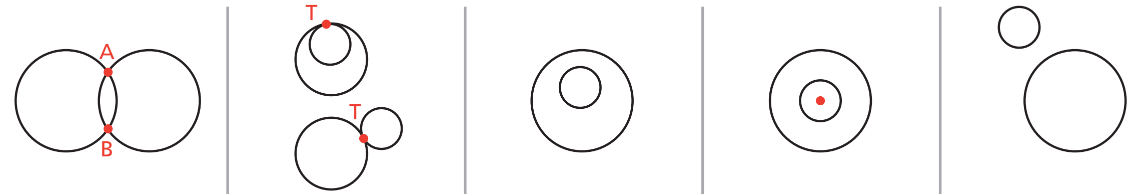
Se ***P* appartiene alla circonferenza**, ci sono ancora altri due metodi.
- **Terzo metodo**: si determina l'equazione della retta PC e si scrive l'equazione della perpendicolare a questa passante per P.
- **Quarto metodo**: si ottiene l'equazione della tangente con la **formula di sdoppiamento**:

$$x \cdot x_0 + y \cdot y_0 + a \cdot \frac{x + x_0}{2} + b \cdot \frac{y + y_0}{2} + c = 0.$$

4. DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA CIRCONFERENZA

■ Per determinare l'equazione di una circonferenza sono necessarie **tre condizioni**.
Per esempio:
- sono noti le coordinate del centro (due condizioni) e il raggio;
- sono note le coordinate degli estremi di un diametro;
- la circonferenza passa per un punto e sono note le coordinate del centro;
- la circonferenza passa per tre punti non allineati;
- la circonferenza passa per due punti e il centro appartiene a una retta nota;
- sono note le coordinate del centro e la circonferenza è tangente a una retta nota.

5. LA POSIZIONE DI DUE CIRCONFERENZE



a. Circonferenze secanti. b. Circonferenze tangenti. c. Circonferenze una interna all'altra. d. Circonferenze concentriche. e. Circonferenze esterne.

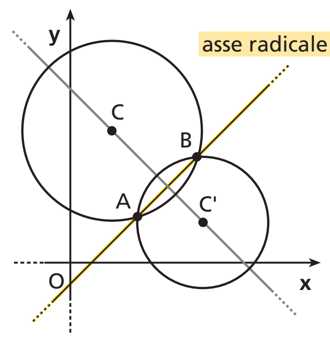
- **Asse radicale**
  Poniamo a sistema le equazioni delle circonferenze:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Se $a \neq a'$ o $b \neq b'$, sottraendo membro a membro si ottiene l'equazione dell'**asse radicale**:

$$(a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0.$$

L'asse è perpendicolare alla retta passante per i centri delle due circonferenze.

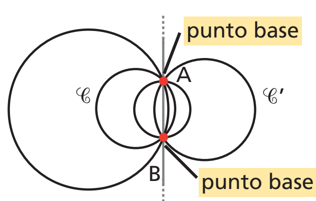


- **Punti di intersezione e di tangenza fra circonferenze**
  Per determinarli si pone a sistema l'equazione dell'asse radicale con una delle equazioni delle circonferenze.

6. I FASCI DI CIRCONFERENZE

- **Fascio di circonferenze**
  Date due circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ di equazioni

$$\mathscr{C}: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$
$$\mathscr{C}': x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0,$$



Fascio di circonferenze

si chiama **fascio di circonferenze con generatrici** $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ l'insieme della circonferenza $\mathscr{C}'$ e di tutte le circonferenze rappresentate dall'equazione:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0, \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

Per $k = -1$, si ottiene l'equazione dell'asse radicale: $(a - a')x + (b - b')y + c - c' = 0$.

- **Punti base**: punti per i quali passano tutte le circonferenze del fascio.
- **Asse centrale**: retta perpendicolare all'asse radicale sulla quale si trovano i centri delle circonferenze del fascio.
- Per **studiare un fascio di circonferenze** occorre trovare: centro e raggio; le due generatrici; gli eventuali punti base; l'asse radicale e l'asse centrale; eventuali circonferenze degeneri.

1. LA CIRCONFERENZA E LA SUA EQUAZIONE

▶ Teoria a pag. 242

L'equazione della circonferenza

1 Scrivi il luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza $\sqrt{5}$ dal punto $(-3; 1)$.
$[x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0]$

2 Individua l'equazione della circonferenza con centro l'origine e raggio $\sqrt{\frac{3}{2}}$. $[2x^2 + 2y^2 = 3]$

3 Scrivi l'equazione della circonferenza con centro $C(2; -3)$ e raggio 4. $[x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0]$

4 Determina l'equazione della circonferenza avente centro $C(3; 4)$ e raggio di lunghezza uguale a quella del segmento di estremi $\left(-2; \frac{3}{2}\right)$ e $\left(1; -\frac{5}{2}\right)$. $[x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0]$

5 Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $C(0; 3)$ e passante per $P(2; -1)$. $[x^2 + y^2 - 6y - 11 = 0]$

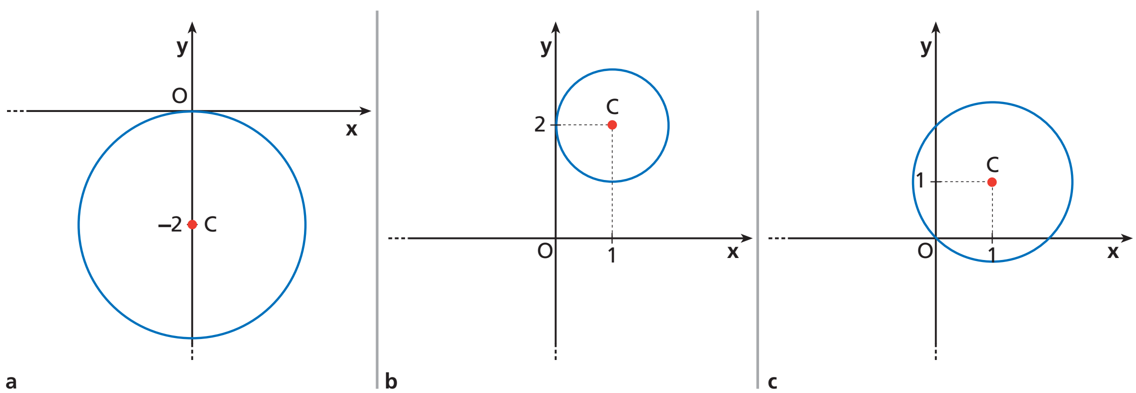
6 Determina l'equazione della circonferenza di centro $C(-1; 1)$ e passante per $A(0; -2)$.
$[x^2 + y^2 + 2x - 2y - 8 = 0]$

7 Scrivi l'equazione della circonferenza di raggio 3 il cui centro sia il punto $P\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}\right)$.
$[36x^2 + 36y^2 - 96x + 36y - 251 = 0]$

8 Find the equation of the circle that has a diameter with endpoints $(1; 1)$ and $(7; 5)$.
(USA *Southern Illinois University Carbondale*, Final Exam, 2003)
$[x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0]$

9 Trova l'equazione della circonferenza di raggio $2\sqrt{3}$ avente il centro nel punto in cui la retta di equazione $2x + 3y = 5$ interseca la bisettrice del I quadrante. $[x^2 + y^2 - 2x - 2y - 10 = 0]$

10 Scrivi le equazioni delle circonferenze rappresentate nei seguenti grafici.



Dall'equazione al grafico

11 **ESERCIZIO GUIDA**

Indichiamo quale, fra le seguenti equazioni, è quella di una circonferenza:

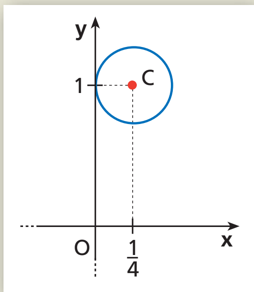
a) $x^2 + y^2 - x + y + 5 = 0$; **b)** $2x^2 + 2y^2 - x - 4y + 2 = 0$; **c)** $x^2 - y^2 + 5x = 0$.

a) Poiché la misura del raggio deve essere un numero reale, nella formula $r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ il radicando deve essere positivo.
Sostituendo i valori $a = -1$, $b = 1$, $c = 5$, otteniamo per il radicando:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 5 = -\frac{18}{4} < 0 \quad \rightarrow \quad \text{l'equazione non è quella di una circonferenza.}$$

b) Dividiamo entrambi i membri per 2:

$$x^2 + y^2 - \frac{x}{2} - 2y + 1 = 0.$$



Sostituiamo $a = -\frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = 1$ nell'espressione $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c$:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 - 1 = \frac{1}{16} > 0.$$

L'equazione data, quindi, è quella di una circonferenza. Il raggio misura $\frac{1}{4}$.

Le coordinate del centro sono $x_C = -\frac{a}{2} = \frac{1}{4}$ e $y_C = -\frac{b}{2} = 1$ (figura sopra).

c) $x^2 - y^2 + 5x = 0$ non è l'equazione di una circonferenza perché il coefficiente 1 di x^2 non è uguale al coefficiente -1 di y^2.

Indica quali delle seguenti equazioni corrispondono a una circonferenza e in caso affermativo rappresentala graficamente dopo aver determinato le coordinate del centro e il raggio.

12 a) $x^2 + y^2 + 2xy + 3 = 0$; b) $3x^2 - 3y^2 + x + y + 1 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 1 = 0$.

13 a) $x^2 + y^2 + 1 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 1 = 0$; c) $6x^2 + 6y^2 - 2 = 0$.

14 a) $5x^2 + 5y^2 - x - 2y + 2 = 0$; b) $(x - 1)^2 + y^2 = 4$; c) $x^2 + (y - 2)^2 + 9 = 0$.

15 a) $x^2 + 2y^2 + x + 3y - 5 = 0$; b) $x^2 + y^2 - x + y + 1 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.

16 a) $x^2 + y^2 + xy = x(4 + y)$; b) $x^2 + y^2 - x = 0$; c) $-2x^2 - 2y^2 = x - 2y$.

17 a) $x^2 + y^2 + x - y = 0$; b) $x^2 + y^2 - 14x + 8y + 16 = 0$; c) $x^2 = y(2 - y)$.

ESERCIZI VARI L'equazione della circonferenza

Trova per quali valori di k ognuna delle seguenti equazioni rappresenta una circonferenza.

18 $x^2 + y^2 - 2kx + y - 4 = 0$ $[\forall k \in \mathbb{R}]$

19 $x^2 + y^2 + (k - 2)x + ky - 2 = 0$ $[\forall k \in \mathbb{R}]$

20 $x^2 + y^2 + x - 2y + k + 3 = 0$ $\left[k \leq -\frac{7}{4}\right]$

21 $kx^2 + ky^2 - 2kx + 4y + 8 + k = 0$ $\left[k \leq \frac{1}{2} \wedge k \neq 0\right]$

22 $(k+1)x^2 + (k+1)y^2 + 2kx + 2y + 4k + 3 = 0$ $\left[-2 \leq k \leq -\frac{1}{3} \wedge k \neq -1\right]$

23 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $-2x^2 - 2y^2 + 1 = 0$ non rappresenta una circonferenza. V F

b) Le due circonferenze $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ e $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$ hanno lo stesso centro. V F

c) La circonferenza $2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y - 5 = 0$ ha raggio $\sqrt{5}$. V F

d) L'equazione $x^2 + y^2 + (k+1)x = 0$ ha il centro di ascissa positiva se $k > -1$. V F

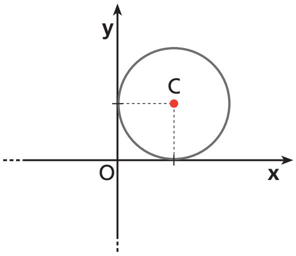
24 **VERO O FALSO?**

Nell'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ della circonferenza rappresentata in figura:

a) a e b sono uguali; V F

b) c è nullo; V F

c) la misura del raggio è uguale ad a. V F



25 Stabilisci se i punti $P\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ e $Q(-1; -1)$ appartengono alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$ ed esegui la rappresentazione grafica. [no; sì]

26 Verifica che i punti $A(3; 1)$ e $B(1; -5)$ non appartengono alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Sono interni o esterni alla circonferenza? Fornisci la risposta senza disegnare la figura. (Suggerimento. Se un punto è interno, la sua distanza dal centro è minore del...) [A interno; B esterno]

27 Stabilisci se i punti $A(1; 0)$, $B\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$, $D(0; -1)$, $E(-1; 1)$ sono interni, esterni o appartengono alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - x + 2y + 1 = 0$. [$A$ esterno; B interno; D appartenente; E esterno]

28 What is the y-component of the center of the circle which passes through $(-1; 2)$, $(3; 2)$, and $(5; 4)$?

(USA *Lehigh University: High School Math Contest*, 2001)

[6]

Le curve dedotte dalla circonferenza

29 **ESERCIZIO GUIDA**

Rappresentiamo graficamente la curva di equazione:

$$x^2 + y^2 - 4|x| - 4 = 0.$$

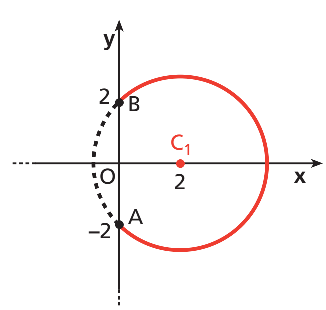
Poiché

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

allora l'equazione data risulta equivalente all'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0 \end{cases}$$

La rappresentazione delle soluzioni del primo sistema è costituita dai punti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$ contenuti nel semipiano delle $x \geq 0$.

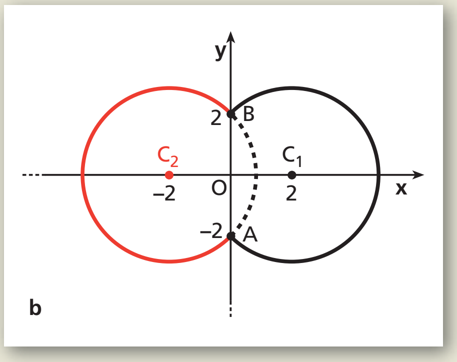


a

La circonferenza ha centro $C_1(2; 0)$ e raggio $r = 2\sqrt{2}$ e passa per i punti $A(0; -2)$ e $B(0; 2)$.
Disegniamo solo l'arco di circonferenza contenuto nel semipiano delle $x \geq 0$ (figura *a*).

La rappresentazione delle soluzioni del secondo sistema è costituita dai punti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0$ contenuti nel semipiano delle $x < 0$.

Tale circonferenza ha centro $C_2(-2; 0)$ e raggio $r = 2\sqrt{2}$ e passa per i punti $A(0; -2)$ e $B(0; 2)$. Disegniamo solo l'arco di circonferenza contenuto nel semipiano delle $x < 0$ (figura *b*).



Rappresenta graficamente le curve descritte dalle seguenti equazioni.

30 $x^2 + y^2 - 2|x| - 4 = 0$

31 $x^2 + y^2 - 2|x| + 2y = 0$

32 $x^2 + y^2 + |2x - 2| + 4y = 0$

33 $x^2 + y^2 + |y + 1| - 9 = 0$

34 $x^2 + y^2 - 2x + 2|y| = 0$

35 $x^2 + y^2 - |4x - 4| + 2y + 4 = 0$

36 $x^2 + y^2 + \sqrt{y^2 - 4y + 4} = 0$

37 $x^2 + y^2 + |2x - 2y - 2| = 0$

38 $x^2 + y^2 - 2|x| + 2|y| = 0$

39 $x^2 + y^2 - 4|x + 1| - 4|y + 1| = 0$

40 $x^2 + y^2 - 4|x + y| = 0$

41 $x^2 + y^2 - 2|x + y| - 2 = 0$

42 $x^2 + y^2 - 2|x - 2y| + 4 = 0$

43 $x^2 + y^2 + 2|x - y| - 4|x + y| = 0$

44 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo il dominio e tracciamo il grafico della seguente funzione:

$$y = 2 + \sqrt{4 - x^2}.$$

Per determinare il dominio occorre porre il radicando maggiore o uguale a 0, cioè:

$$4 - x^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$.

Tracciamo nel piano cartesiano le rette $x = -2$ e $x = 2$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ascissa minore di -2 o maggiore di 2 (figura *a*).

Per rappresentare la funzione isoliamo la radice:

$$y - 2 = \sqrt{4 - x^2}.$$

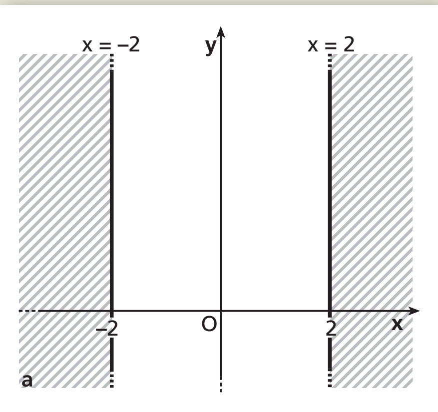
Questa equazione è equivalente al sistema:

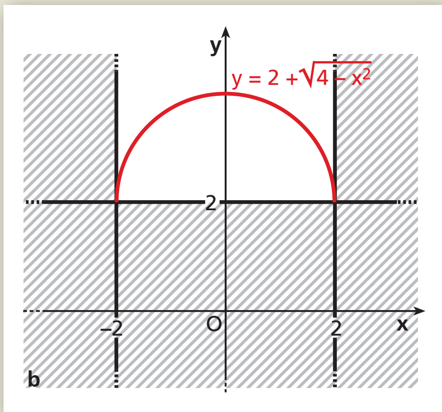
$$\begin{cases} y - 2 \geq 0 \\ (y - 2)^2 = 4 - x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ y^2 - 4y + 4 - 4 + x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

Tracciamo nel piano cartesiano la retta $y = 2$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ordinata minore di 2.

$x^2 + y^2 - 4y = 0$ è l'equazione di una circonferenza con centro $C(0; 2)$ e raggio $r = 2$.

Tracciamo la semicirconferenza contenuta nella parte di piano che non abbiamo eliminato. Il grafico della funzione è rappresentato dalla linea continua rossa (figura b).





Rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

45 $y = 2 + \sqrt{9 - x^2}$

46 $y = \sqrt{1 - x^2}$

47 $y = 3 - \sqrt{4 - x^2}$

48 $y = -\sqrt{16 - x^2}$

49 $y = 2 - \sqrt{1 - x^2}$

50 $y = 3 - \sqrt{3 + 2x - x^2}$

51 $y = 1 + \sqrt{2x - x^2}$

52 $y = 5 - \sqrt{12 - 4x - x^2}$

53 $y = 2 - \sqrt{6|x| - x^2}$

54 $y = \sqrt{4|x| - x^2}$

55 $y = \left|-3 + \sqrt{25 - x^2}\right|$

56 $y = 1 - \sqrt{8 + 2|x| - x^2}$

Traccia il grafico delle curve aventi le seguenti equazioni.

57 $x = \sqrt{4 - y^2}$

58 $x = -\sqrt{9 - y^2}$

59 $x = 1 + \sqrt{25 - y^2}$

60 $x = -2 - \sqrt{4y - y^2}$

61 $x = -1 - \sqrt{16 - y^2}$

62 $x = 4 - \sqrt{10y - y^2 - 21}$

63 $\sqrt{2y - y^2} = x + 2$

64 $x = -3 + \sqrt{6|y| - y^2}$

65 $x = \left|-2 + \sqrt{4 - y^2}\right|$

66 $|x| = -2 + \sqrt{8y - y^2}$

67 $\sqrt{|y| - y^2} = x - 1$

68 $x = \sqrt{4|y| - y^2}$

Scrivi in forma esplicita l'equazione della circonferenza assegnata, ricavando y in funzione di x. Ottieni una funzione?

69 $x^2 + y^2 - 6x = 0$

70 $x^2 + y^2 = 4$

71 $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$

72 $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$

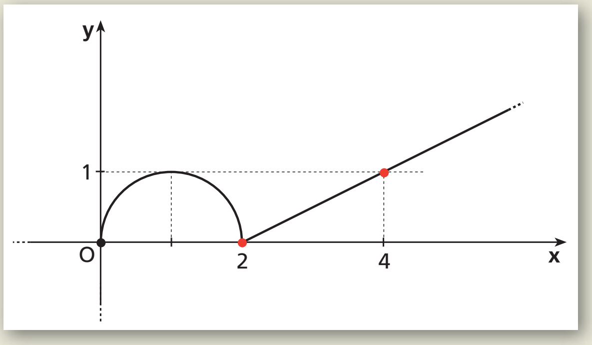
73 $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 1$

74 $x^2 + y^2 + x - 2y - 1 = 0$

Dal grafico all'equazione

75 **ESERCIZIO GUIDA**

Troviamo l'equazione corrispondente al grafico utilizzando i dati della figura.



Osserviamo che la curva è costituita da una semicirconferenza nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$ e da una semiretta nell'intervallo $x > 2$.
La semicirconferenza è costituita dai punti di ordinata y positiva della circonferenza di centro $C(1; 0)$ e raggio 1, che ha equazione:

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = 1$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Poiché i punti della semicirconferenza hanno $y \geq 0$, ricaviamo y:

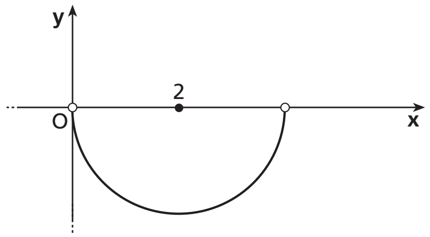
$$y^2 = 2x - x^2 \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{2x - x^2} \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{2x - x^2}.$$

La semiretta passa per i punti $(2; 0)$ e $(4; 1)$ per cui ha equazione: $\dfrac{y-0}{1-0} = \dfrac{x-2}{4-2} \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x - 1.$

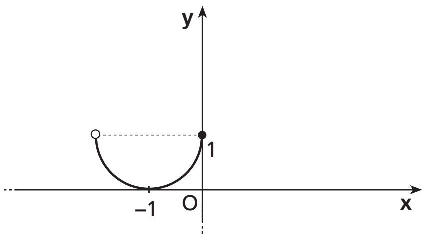
Quindi la curva in figura rappresenta il grafico della funzione: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x - x^2} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{1}{2}x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

Trova le equazioni corrispondenti ai seguenti grafici utilizzando i dati delle figure.

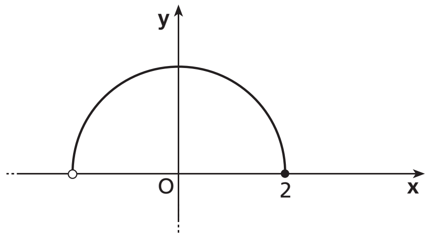
76



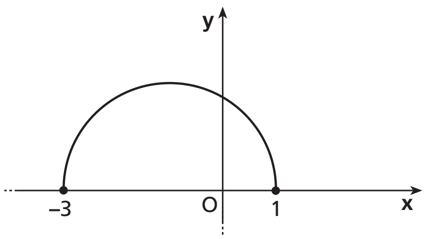
79



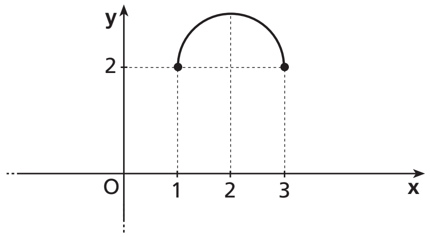
77



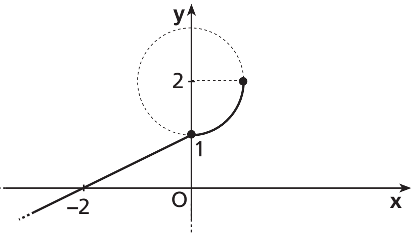
80



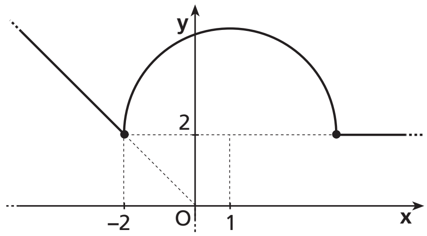
78



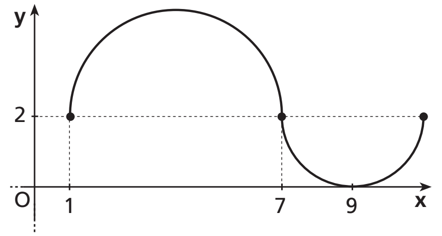
81



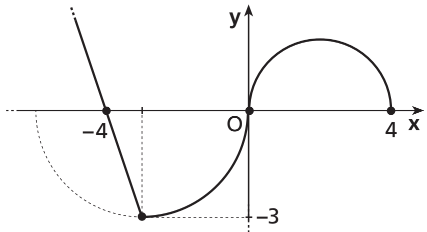
82



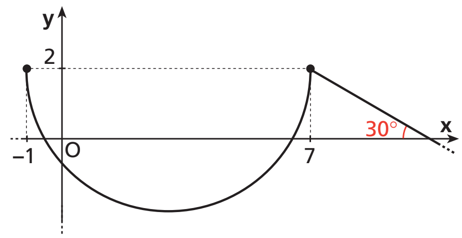
84



83



85



86 Scrivi l'equazione della semicirconferenza che ha diametro OB, con O origine degli assi, $B(0; 4)$, e che si trova nel I quadrante. $\left[x = \sqrt{4y - y^2}\right]$

87 Trova l'equazione della semicirconferenza che ha centro in $C(2; 0)$, raggio $\frac{3}{2}$, e che si trova nel IV quadrante. $\left[y = -\sqrt{-x^2 + 4x - \frac{7}{4}}\right]$

Le disequazioni di secondo grado in due variabili

88 **ESERCIZIO GUIDA**

Rappresentiamo i punti del piano corrispondenti alle soluzioni delle seguenti disequazioni:

a) $x^2 + y^2 < 2x$; **b)** $x^2 + y^2 > 4$.

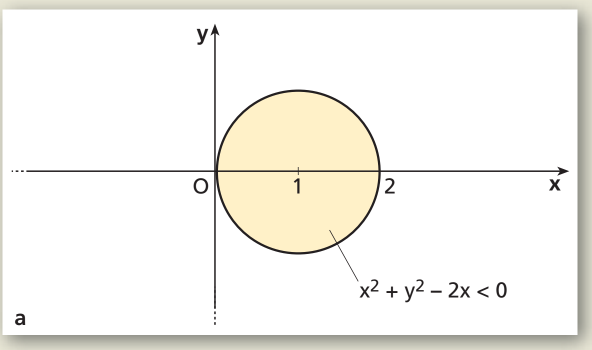
a) $x^2 + y^2 < 2x \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x < 0$.

La curva di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$ è una circonferenza di centro

$$x_C = -\frac{a}{2} = 1, \qquad y_C = -\frac{b}{2} = 0$$

e raggio

$$r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c} = 1.$$



Ricordando che $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$, l'equazione della circonferenza è

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

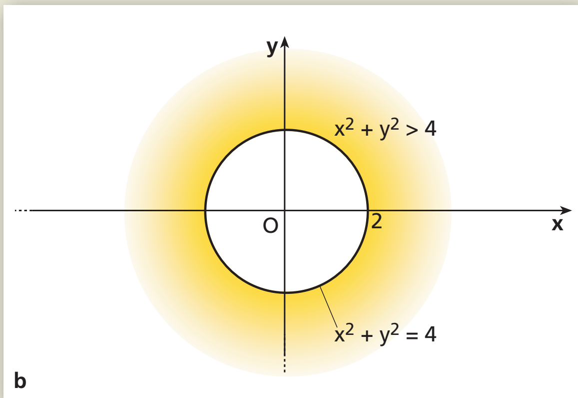
e la corrispondente disequazione è:

$$(x - 1)^2 + y^2 < 1.$$

I punti le cui coordinate soddisfano questa relazione sono tutti quelli che hanno distanza dal centro minore del raggio, cioè tutti i punti interni alla circonferenza.

b) $x^2 + y^2 > 4$.

La curva di equazione $x^2 + y^2 = 4$ è una circonferenza con centro nell'origine e raggio 2.
L'insieme delle soluzioni della disequazione è rappresentato dai punti con distanza dal centro maggiore del raggio, cioè i punti esterni alla circonferenza.



Rappresenta i punti del piano corrispondenti alle soluzioni delle seguenti disequazioni.

89 $x^2 + y^2 > 1$

90 $x^2 + y^2 + 2x - 4y \leq 0$

91 $x^2 + y^2 - 6x > 0$

92 $x^2 + y^2 < 8x$

93 $|x^2 + y^2 + 4x| < 3$

94 $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$

Trova l'area delle regioni individuate dai seguenti sistemi di disequazioni.

95 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$ [8π]

96 $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2x \\ y^2 < 9 - (x-2)^2 \end{cases}$ [8π]

97 $\begin{cases} x^2 + y^2 > 4x \\ x^2 + y^2 - 8x < 0 \end{cases}$ [12π]

2. RETTA E CIRCONFERENZA

▶ Teoria a pag. 246

Nelle seguenti coppie di equazioni, stabilisci la posizione della retta rispetto alla circonferenza e, nei casi in cui la retta non sia esterna, determina le coordinate dei punti di intersezione o quelle del punto di tangenza.

98 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$, $x - 4 = 0$. [secante: $(4; 0)$, $(4; 2)$]

99 $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 25 = 0$, $y + 9 = 0$. [tangente: $(4; -9)$]

100 $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$, $x + 3y + 4 = 0$. [secante: $(-4; 0)$, $(-1; -1)$]

101 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$, $x - y - 4 = 0$. [secante: $(3; -1)$, $(6; 2)$]

102 $x^2 + y^2 - 50 = 0$, $3x + 4y + 40 = 0$. [esterna]

103 $x^2 + y^2 - 6x - 16y + 60 = 0$, $3x - 2y - 6 = 0$. [tangente: $(6; 6)$]

104 Determina la lunghezza della corda che la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 12x + 2y - 37 = 0$ stacca sulla retta di equazione $y = 2x + 4$. $\left[\frac{18}{5}\sqrt{5}\right]$

105 Determina il valore del parametro k affinché la retta di equazione $x = k$ incontri la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$ in due punti A e B tali che $\overline{AB} = 4$. [-6; 2]

106 Scrivi l'equazione della retta parallela all'asse x sulla quale la circonferenza di equazione $x^2+y^2+2x+8y=0$ stacca una corda di lunghezza $4\sqrt{2}$. $[y=-7; y=-1]$

107 Nel fascio di rette di equazione $y=-2x+k$, determina le rette sulle quali la circonferenza di equazione $x^2+y^2-x+y-2=0$ stacca delle corde di lunghezza $\sqrt{5}$. $[k=-2; k=3]$

Trova per quali valori di *k* la circonferenza assegnata interseca la retta indicata a fianco.

108 $x^2+y^2-2y=0$, $\quad y=kx-1$. $[k\leq -\sqrt{3} \vee k\geq\sqrt{3}]$

109 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$, $\quad y=kx+4$. $[k\geq 0]$

110 $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ is the equation of a circle. Two lines, L and M, intersect at $(2;-2)$. The distance from the center of the circle to each line is $2\sqrt{5}$. Find the equation of L and the equation of M.

(IR *Leaving Certificate Examination*, Higher Level, 1995)

$\left[L\text{: } y=2x-6; M\text{: } y=\frac{2}{11}x-\frac{26}{11}\right]$

La risoluzione grafica di equazioni e disequazioni irrazionali

111 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo graficamente la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt{-x^2+2x+8}+4\geq 2x.$$

Isoliamo la radice a sinistra del segno di disuguaglianza:

$$\sqrt{-x^2+2x+8}\geq 2x-4.$$

Dai due membri della disequazione ottenuta ricaviamo le equazioni di due funzioni:

$$y=\sqrt{-x^2+2x+8},$$
$$y=2x-4.$$

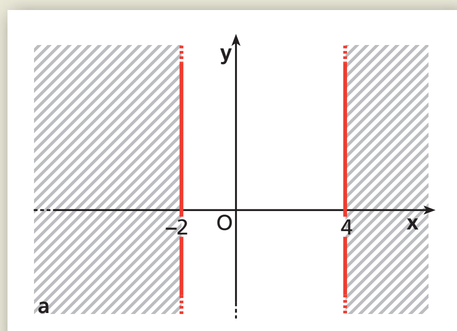
Per disegnare il grafico della prima funzione,

$$y=\sqrt{-x^2+2x+8},$$

determiniamo il suo dominio ponendo il radicando maggiore o uguale a 0:

$$-x^2+2x+8\geq 0 \quad\rightarrow\quad -2\leq x\leq 4.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme $D=\{x\in\mathbb{R}\,|-2\leq x\leq 4\}$ (figura *a*).



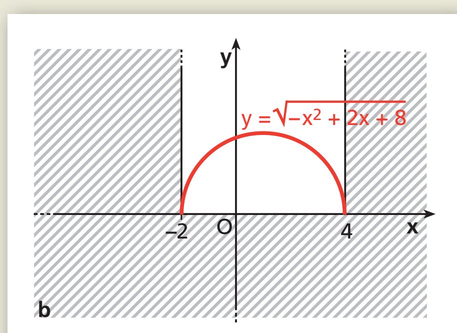
L'equazione della prima funzione,

$$y=\sqrt{-x^2+2x+8},$$

è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} y\geq 0 \\ y^2=-x^2+2x+8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y\geq 0 \\ x^2+y^2-2x-8=0 \end{cases}$$

che rappresenta una semicirconferenza di centro $(1; 0)$ e raggio 3 (figura *b*).



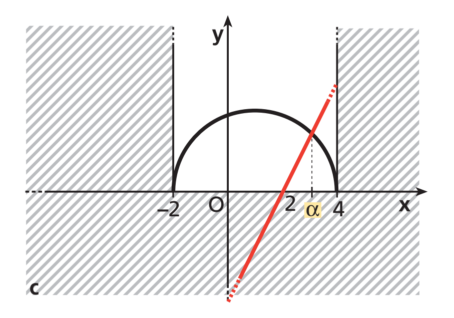
La seconda funzione corrisponde alla retta di equazione

$$y = 2x - 4,$$

che interseca l'asse x in $(2; 0)$ (figura c).

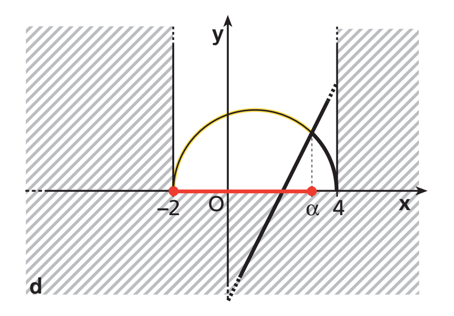
Dal grafico leggiamo, in modo approssimato, l'ascissa α del punto di intersezione tra la retta e la circonferenza, nella parte di piano in cui la disequazione ha significato:

$$\alpha \simeq 3{,}1.$$



Osserviamo nel grafico tracciato che la disequazione $\sqrt{-x^2 + 2x + 8} \geq 2x - 4$ mette a confronto l'ordinata di un punto della circonferenza con l'ordinata di un punto della retta con la stessa ascissa.

Evidenziamo sul grafico la zona in cui i punti della circonferenza hanno ordinate maggiori o uguali rispetto alle ordinate dei punti corrispondenti della retta (figura d).



Le ascisse di questi punti sono le soluzioni della disequazione data:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq \alpha, \alpha \simeq 3{,}1\}.$$

Osservazione. Se dobbiamo risolvere un'**equazione irrazionale**, per esempio $\sqrt{-x^2 + 2x + 8} + 4 = 2x$, procediamo allo stesso modo, ma terminiamo la risoluzione dopo la determinazione dell'ascissa (o delle ascisse) dei punti di intersezione. (In questo caso la soluzione allora è $x = \alpha \simeq 3{,}1$.)

Risolvi graficamente le seguenti equazioni e disequazioni irrazionali.

112 $\sqrt{-x^2 + 9} = -x - 1$ $[x \simeq -2{,}6]$

113 $\sqrt{4 - x^2} \leq -2x + 2$ $[-2 \leq x \leq 0]$

114 $\sqrt{-x^2 - 2x + 3} = x + 3$ $[x_1 = -3;\ x_2 = -1]$

115 $\sqrt{-x^2 + 2x} < x$ $[1 < x \leq 2]$

116 $-\sqrt{-(x-2)^2 + 1} > \frac{2}{3}x$ $[S = \varnothing]$

117 $\sqrt{-x^2 + 25} \geq x + \frac{1}{2}$ $[-5 \leq x \leq \alpha, \alpha \simeq 3{,}3]$

118 $-\sqrt{1 - x^2} \leq -\frac{1}{4}x$ $[-1 \leq x \leq \alpha, \alpha \simeq 0{,}97]$

119 $-\sqrt{-x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}} < \frac{x-1}{4}$ $\left[\frac{9}{17} < x < 1\right]$

120 $\sqrt{4x - x^2 + 12} > -2x + 5$ $[\alpha < x < 6, \alpha \simeq 0{,}6]$

121 $\sqrt{16 - x^2} > 4 - x$ $[0 < x < 4]$

122 $\sqrt{4x - x^2} < \sqrt{3}\,(x - 2)$ $[3 < x \leq 4]$

123 $x \leq \sqrt{8x - x^2}$ $[0 \leq x \leq 4]$

124 $\sqrt{2 - x^2} > |x|$ $[-1 < x < 1]$

125 $-\sqrt{-x^2 + 8x - 12} > -1$ $[2 \leq x < \alpha_1;\ \alpha_2 < x \leq 6, \alpha_1 \simeq 2{,}3, \alpha_2 \simeq 5{,}7]$

126 $-\sqrt{-x^2 - 4x} \leq -\frac{x}{2} - 2$ $\left[-4 \leq x \leq -\frac{4}{5}\right]$

127 $\frac{1}{2}\sqrt{1 - 16x^2} \geq -x$ $\left[\alpha \leq x \leq \frac{1}{4}, \alpha \simeq -0{,}2\right]$

128 $\sqrt{\frac{1}{4} - (x-1)^2} < 3x - \frac{3}{2}$ $\left[\frac{3}{5} < x \leq \frac{3}{2}\right]$

129 $\sqrt{6x - x^2} + 1 \geq x$ $[0 \leq x \leq \alpha, \alpha \simeq 3{,}9]$

Risolvi graficamente i seguenti sistemi.

130 $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y+1 \le 0 \\ y+x-2 \ge 0 \end{cases}$

131 $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y-2x+2 \le 0 \end{cases}$

132 $\begin{cases} x^2+y^2+4x+2y \le 0 \\ y+x>0 \\ y<0 \end{cases}$

133 $\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y \le 0 \\ y+2x-8 \le 0 \\ x \ge 1 \end{cases}$

134 $\begin{cases} x^2+y^2-4y=0 \\ 2y+x-2 \ge 0 \end{cases}$

135 $\begin{cases} x^2+y^2<8x \\ y+x<4 \\ x \le 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Trova l'area delle regioni individuata dai seguenti sistemi di disequazioni.

136 $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ x^2+y^2-1 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ $\left[\frac{3}{4}\pi\right]$

137 $\begin{cases} x^2+y^2<2x \\ x+y>1 \end{cases}$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

138 $\begin{cases} x^2+y^2-2x-3<0 \\ y-2x+2>0 \end{cases}$ $[2\pi]$

139 $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y+1 \ge 0 \\ 3y+4x-12 \le 0 \\ x \ge 0 \\ |y-1| \le 1 \end{cases}$ $\left[\frac{9}{2}-\pi\right]$

3. LE RETTE TANGENTI

Teoria a pag. 247

Le rette tangenti da un punto esterno

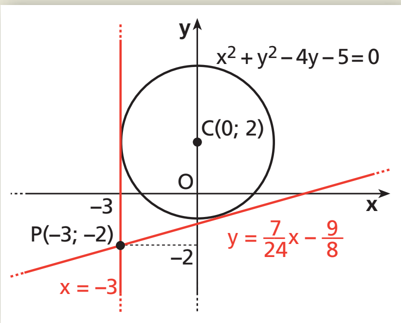
140 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza $x^2+y^2-4y-5=0$ condotte dal punto $P(-3; -2)$.

Rappresentiamo la circonferenza e il punto P. La circonferenza ha centro $(0; 2)$ e raggio 3. Il punto P è esterno alla circonferenza, quindi le tangenti sono due.

- Utilizziamo il I metodo ($\Delta = 0$). L'equazione di una retta generica per P è $y+2=m(x+3)$ e cioè $y=mx+3m-2$ con esclusione della retta $x=-3$ parallela all'asse y.
  Mettiamola a sistema con l'equazione della circonferenza:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4y-5=0 \\ y=mx+3m-2 \end{cases}$$



Troviamo l'equazione risolvente e riduciamo a forma normale:

$$x^2(1+m^2)-2m(4-3m)x+9m^2-24m+7=0.$$

Poniamo la condizione di tangenza $\frac{\Delta}{4}=0$:

$$m^2(4-3m)^2-(1+m^2)(9m^2-24m+7)=0$$

$$\cancel{16m^2}+\cancel{9m^4}-\cancel{24m^3}-\cancel{9m^2}+24m-7-\cancel{9m^4}+\cancel{24m^3}-\cancel{7m^2}=0$$

$$24m-7=0 \to m=\frac{7}{24}.$$

Otteniamo **un solo** valore di m a cui corrisponde la retta di equazione:

$$y+2=\frac{7}{24}(x+3) \rightarrow y=\frac{7}{24}x-\frac{9}{8}.$$

L'altra tangente deve essere parallela all'asse y e ha equazione $x=-3$.

- Applichiamo il II metodo (distanza retta-centro uguale al raggio).
  Consideriamo il fascio di rette per P, $mx-y+3m-2=0$, che esclude la retta $x=-3$, e applichiamo la formula della distanza fra le rette e il centro C:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-2+3m-2|}{\sqrt{m^2+1}}.$$

Poniamo tale distanza uguale al raggio e risolviamo l'equazione rispetto a m:

$$\frac{|3m-4|}{\sqrt{1+m^2}}=3 \quad\rightarrow\quad (3m-4)^2=9(1+m^2) \quad\rightarrow\quad \cancel{9m^2}+16-24m=9+\cancel{9m^2} \quad\rightarrow\quad m=\frac{7}{24}.$$

Otteniamo la retta di equazione:

$$y=\frac{7}{24}x-\frac{9}{8}.$$

Possiamo osservare che con il secondo metodo i calcoli sono meno laboriosi rispetto al primo.

141 Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-6x-4y+9=0$ condotte dal punto $P(9; 0)$. $[y=0; 3x+4y-27=0]$

142 Determina le equazioni delle tangenti alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-6x+16y+37=0$ parallele agli assi cartesiani. $[y=-2; y=-14; x=-3; x=9]$

143 Conduci dal punto $P\left(\frac{2}{3}; 4\right)$ le tangenti alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-18x-8y+72=0$. $[3x-4y+14=0; 3x+4y-18=0]$

144 Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-3=0$ condotte dal punto $P(-1; 3)$. $\left[x=-1; y=-\frac{5}{12}x+\frac{31}{12}\right]$

145 Conduci dal punto $P(-3; 0)$ le tangenti alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-6y-6=0$ e scrivine le equazioni. $\left[x=-3; y=-\frac{7}{24}(x+3)\right]$

La retta tangente in un punto della circonferenza

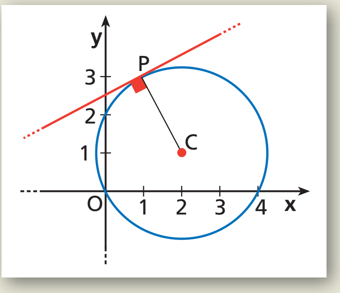
IN PRATICA ▶ Videolezione 15

146 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione della retta tangente alla circonferenza $x^2+y^2-4x-2y=0$ nel suo punto $P(1; 3)$.

- Applichiamo il III metodo esaminato nella teoria, sfruttando il fatto che il raggio è sempre perpendicolare alla retta tangente nel punto di tangenza.

  Le coordinate del centro sono $C(2; 1)$ e il coefficiente angolare del raggio PC è $m=\frac{3-1}{1-2}=-2$.



Per la condizione di perpendicolarità la retta tangente ha coefficiente angolare $\frac{1}{2}$:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \quad \to \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

- Utilizziamo il IV metodo (formula di sdoppiamento). La formula della tangente è:

$$xx_0 + yy_0 + a\frac{x + x_0}{2} + b\frac{y + y_0}{2} + c = 0,$$

dove x_0 e y_0 sono le coordinate del punto di tangenza e a, b, c sono i coefficienti dell'equazione della circonferenza. Otteniamo:

$$x + 3y - 4\frac{x+1}{2} - 2\frac{y+3}{2} = 0 \to x + 3y - 2x - 2 - y - 3 = 0 \to 2y - x - 5 = 0 \to y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}.$$

147 Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$:
1) verifica che è tangente all'asse x;
2) determina l'equazione della tangente alla circonferenza nel suo punto $A(2; -6)$. $[y = -6]$

148 Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$, verifica che il punto $P(2; -3)$ appartiene alla circonferenza e scrivi l'equazione della retta tangente alla circonferenza in P. $[y = -3]$

149 Scrivi le equazioni delle tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$, nei suoi punti di intersezione con l'asse y. $[4x - 3y = 0; 4x + 3y - 18 = 0]$

150 Scrivi e rappresenta nel piano cartesiano le equazioni della circonferenza di centro $C(3; -1)$, passante per $P(4; 3)$, e della sua tangente in P. $\left[x^2 + y^2 - 6x + 2y - 7 = 0,\ y = -\frac{1}{4}x + 4\right]$

ESERCIZI VARI Le rette tangenti

151 Trova le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ condotte dal punto $P(2; 3)$. $[y = 3; 3y - 4x - 1 = 0]$

152 Trova le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 5x - \frac{75}{4} = 0$ condotte dal punto $P\left(\frac{5}{2}; -4\right)$. $\left[x = \frac{5}{2}; y = \frac{9}{40}x - \frac{73}{16}\right]$

153 Determina per quali valori di k la retta $y = k(x - 4)$ è tangente alla circonferenza rappresentata dall'equazione $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$. $\left[k = \pm\frac{2}{5}\sqrt{5}\right]$

154 Scrivi i valori di k per cui la retta $y + 2x + k = 0$ è tangente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2y = 0$. $[k = -1 \pm \sqrt{5}]$

155 Trova le tangenti comuni alle due circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 6x = 0$ e $x^2 + y^2 + 2x = 0$. (Suggerimento. Le distanze delle rette tangenti dai due centri devono essere uguali ai rispettivi raggi.) $\left[y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}; y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}; x = 0\right]$

156 Trova le tangenti comuni alle due circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ e $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$. $[y = 0; 2\sqrt{2}x + y - 6\sqrt{2} + 4 = 0; 2\sqrt{2}x - y - 6\sqrt{2} - 4 = 0]$

157 Trova tra le rette del fascio di centro $P\,(0; 2)$ quelle secanti, tangenti, esterne alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.
$\left[\text{tangenti per } m = 0 \text{ e } m = -\frac{4}{3}; \text{ secanti per } -\frac{4}{3} < m < 0; \text{ esterne per } m < -\frac{4}{3} \vee m > 0, \text{ oltre alla retta } x = 0\right]$

158 Scrivi l'equazione della tangente nell'origine alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.
$\left[y = \frac{2}{3}x\right]$

159 Trova i punti di intersezione tra la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ e la retta di equazione $y = x - 2$ e poi determina le equazioni delle rette tangenti in tali punti.
$[(4; 2), (1; -1); 2x + y - 10 = 0; x + 2y + 1 = 0]$

160 Disegna la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$, trova le equazioni delle tangenti nei suoi punti di intersezione A e B con l'asse y e calcola l'area del quadrilatero $CABT$, essendo C il centro della circonferenza e T il punto di intersezione delle due tangenti.
$\left[y = -\frac{1}{3}x + 5; y = \frac{1}{3}x - 1; 30\right]$

161 Determina le coordinate del centro e il raggio della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$. Verifica poi che le tangenti nei suoi punti di ordinata 4 si intersecano nel punto $A(2; 13)$. $[(2; 3), \sqrt{10}]$

4. DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA CIRCONFERENZA

Teoria a pag. 251

IN PRATICA
Videolezione 16

L'equazione della circonferenza, noti il centro e un punto

162 Determina l'equazione della circonferenza di centro $C\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ e passante per $P(6; -1)$.
$[x^2 + y^2 + 3x - y - 56 = 0]$

163 Scrivi l'equazione della circonferenza passante per l'origine e avente il centro nel punto di ordinata 2 della retta di equazione $y = 3x - 4$. $[x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0]$

164 Scrivi l'equazione della circonferenza concentrica a quella di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ e passante per $A\,(1; -8)$. $[x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0]$

165 Determina l'equazione della circonferenza avente come centro il punto di intersezione delle rette r e t, rispettivamente di equazione $x - 2y + 2 = 0$ e $2x + 2y - 5 = 0$, e avente in comune con r un punto dell'asse x.
$[x^2 + y^2 - 2x - 3y - 8 = 0]$

166 Due circonferenze sono concentriche. Una ha equazione $4x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 23 = 0$, l'altra passa per $P\left(\frac{7}{4}; -2\right)$. Determina l'equazione della seconda circonferenza. $[16x^2 + 16y^2 - 24x + 32y - 7 = 0]$

L'equazione della circonferenza, noto il diametro

167 Determina l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento di estremi $(-3; 1)$ e $(2; 5)$.
$[x^2 + y^2 + x - 6y - 1 = 0]$

168 Scrivi l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento AB, dove A e B sono i punti di intersezione della retta di equazione $3x + 2y + 1 = 0$ con le rette di equazioni $x + y - 1 = 0$ e $2x + y = 0$.
$[x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11 = 0]$

169 Determina l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento ottenuto congiungendo i punti medi dei lati AB e AC del triangolo ABC, essendo $A(3; 5)$, $B(-5; -1)$, $C(4; 3)$.
$[2x^2 + 2y^2 - 5x - 12y + 9 = 0]$

170 Scrivi l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento individuato dagli assi coordinati sulla retta di equazione $5x - y + 6 = 0$. Verifica se la circonferenza passa per l'origine. Questo risultato era prevedibile?
$[5x^2 + 5y^2 + 6x - 30y = 0]$

171 I punti $A(2; 1)$, $B(5; 2)$, $C(3; 0)$ sono tre vertici consecutivi di un parallelogramma $ABCD$. Dopo aver determinato le coordinate del quarto vertice D del parallelogramma, scrivi l'equazione della circonferenza che ha diametro CD.
$[D(0; -1); x^2 + y^2 - 3x + y = 0]$

L'equazione della circonferenza, noti tre punti

L'appartenenza di un punto

172 Determina il valore da attribuire al parametro c affinché la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4cx - y + c - 1 = 0$ passi per il punto $P(-1; 2)$.
$\left[\frac{2}{3}\right]$

173 Trova il valore da attribuire a k affinché il punto $P(k - 1; 2k)$ appartenga alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 10 = 0$.
$\left[\pm\sqrt{\frac{7}{5}}\right]$

174 Dopo aver determinato il valore da attribuire a h affinché il punto $P(6; 8)$ appartenga alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - (h + 3)x + (-3h + 1)y + h - 3 = 0$, rappresenta la curva e trova l'equazione della tangente in P.
$[3; 4y + 3x - 50 = 0]$

L'appartenenza di tre punti

175 Trova l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo rettangolo di vertici $(0; 0)$, $(3; \sqrt{3})$, $(4; 0)$.
$[x^2 + y^2 - 4x = 0]$

176 Determina l'equazione della circonferenza passante per i punti $(3; 4)$, $(0; -5)$ e $(-2; -1)$.
$[x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0]$

177 Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti $(9; -1)$, $(1; 5)$ e $(10; 2)$.
$[x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0]$

178 Determina l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo di vertici $(-3; 4)$, $(1; 1)$, $(-3; 1)$.
$[x^2 + y^2 + 2x - 5y + 1 = 0]$

L'equazione della circonferenza, noti due punti e con il centro su una retta

179 ESERCIZIO GUIDA

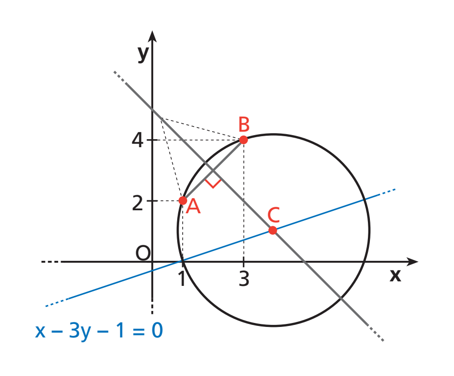
Scriviamo l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(1; 2)$ e $B(3; 4)$ e avente centro sulla retta di equazione $x - 3y - 1 = 0$.

Poiché AB è una corda della circonferenza, allora l'asse di AB passa per il centro.

Determiniamo l'equazione dell'asse di AB sapendo che è la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio. Le coordinate del punto medio M di AB sono $(2; 3)$.

Il coefficiente angolare di AB è $m = 1$, quindi il coefficiente angolare dell'asse è $m_1 = -1$.
L'equazione dell'asse è $y - y_M = m_1(x - x_M)$, ossia:

$$y - 3 = -1(x - 2) \rightarrow y + x - 5 = 0.$$



Determiniamo le coordinate del centro intersecando l'asse di AB con la retta data:

$$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y + 5 \\ -y + 5 - 3y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -y + 5 \\ -4y = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Il centro è $C(4; 1)$.

Calcoliamo la misura del raggio:

$$r = \overline{CA} = \sqrt{(4-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

Quindi l'equazione della circonferenza è:

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{10})^2 \rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 10 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0.$$

180 Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(-1; 2)$ e $B(2; 5)$ e avente il centro sulla retta di equazione $y = 2x - 2$. $[x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0]$

181 Trova l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(-1; 3)$ e $B(3; 1)$ e avente il centro sulla retta di equazione $3x - 2y + 3 = 0$. $[x^2 + y^2 - 6x - 12y + 20 = 0]$

182 Determina l'equazione della circonferenza passante per i punti di ascissa 2 e 5 appartenenti alla retta di equazione $x + 3y - 11 = 0$ e avente il centro sulla retta di equazione $2x - 5y - 1 = 0$. $[x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0]$

183 Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti di intersezione della retta di equazione $y = -3x - 3$ con gli assi cartesiani e avente il centro sulla bisettrice del II e IV quadrante. $[x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0]$

184 Dopo aver determinato i punti A e B in cui la retta di equazione $x - 3y - 10 = 0$ incontra le rette di equazioni $y = -2x - 1$ e $y = -2x + 6$, scrivi l'equazione della circonferenza passante per A e B e avente centro di ordinata uguale a -1. $[x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0]$

L'equazione della circonferenza e la condizione di tangenza

185 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione della circonferenza di centro $C(-2; -3)$ e tangente alla retta di equazione $y = 3x - 1$.

Essendo la retta tangente, allora il raggio della circonferenza coincide con la distanza di C dalla retta.

Scriviamo l'equazione della retta in forma implicita:

$$-3x + y + 1 = 0.$$

Calcoliamo la distanza di C dalla retta:

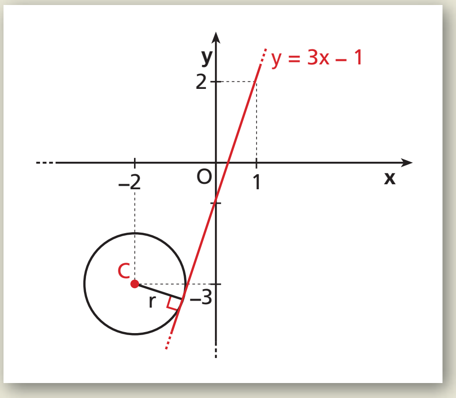
$$r = \frac{|-3\cdot(-2)+1\cdot(-3)+1|}{\sqrt{(-3)^2+1^2}} = \frac{|6-3+1|}{\sqrt{9+1}} = \frac{4}{\sqrt{10}}.$$

Quindi l'equazione della circonferenza è:

$$(x+2)^2+(y+3)^2=\left(\frac{4}{\sqrt{10}}\right)^2$$

$$x^2+4x+4+y^2+6y+9=\frac{16}{10}$$

$$x^2+y^2+4x+6y+\frac{57}{5}=0.$$



186 Determina l'equazione della circonferenza con centro $C(-2;-5)$ e tangente all'asse delle x.
$[x^2+y^2+4x+10y+4=0]$

187 Determina la circonferenza con centro $C(2;-2)$ e tangente alla retta di equazione $y=2x+3$.
$\left[x^2+y^2-4x+4y-\frac{41}{5}=0\right]$

188 Trova l'equazione della circonferenza di centro $C(3;2)$ e tangente alla retta passante per i punti $A(-1;0)$ e $B(-5;3)$.
$[x^2+y^2-6x-4y-3=0]$

189 Sono date le rette r: $3x+2y+4=0$, s: $x+3y-1=0$, t: $x-y-3=0$.
Determina la circonferenza con centro nel punto di intersezione di r con s e tangente alla retta t.
$[x^2+y^2+4x-2y-13=0]$

190 Determina l'equazione della circonferenza situata nel quarto quadrante, tangente agli assi cartesiani e avente raggio 3.
$[x^2+y^2-6x+6y+9=0]$

191 Scrivi l'equazione della circonferenza tangente agli assi cartesiani e avente centro $(-5;-5)$.
$[x^2+y^2+10x+10y+25=0]$

192 Trova l'equazione della circonferenza situata nel secondo quadrante, tangente agli assi cartesiani e avente il centro sulla retta di equazione $3x-7y+20=0$.
$[x^2+y^2+4x-4y+4=0]$

193 Determina le equazioni delle circonferenze tangenti agli assi cartesiani, con il centro sulla retta di equazione $x-5y+12=0$.
$[x^2+y^2-6x-6y+9=0;\ x^2+y^2+4x-4y+4=0]$

194 Scrivi l'equazione delle circonferenze tangenti agli assi cartesiani e passanti per il punto $\left(3;\frac{2}{3}\right)$.
$[9x^2+9y^2-30x-30y+25=0;\ 9x^2+9y^2-102x-102y+289=0]$

195 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione della circonferenza passante per i punti $P(1;2)$ e $Q(3;4)$ e tangente alla retta di equazione $y=-3x+3$.

Imponiamo alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ il passaggio per i punti P e Q:

$$\begin{cases} a + 2b + c = -5 & \text{passaggio per } P \\ 3a + 4b + c = -25 & \text{passaggio per } Q \end{cases}$$

Ricaviamo due incognite in funzione della terza. Usiamo il metodo di riduzione, sottraendo membro a membro:

$$2a + 2b = -20 \rightarrow a + b = -10.$$

Sostituiamo $b = -a - 10$ nella prima equazione e ricaviamo c in funzione di a:

$$c = a + 15.$$

L'equazione della circonferenza diventa:

$$x^2 + y^2 + ax - (a + 10)y + a + 15 = 0.$$

Ora imponiamo che la retta $y = -3x + 3$ sia tangente alla circonferenza:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax - (a + 10)y + a + 15 = 0 \\ y = -3x + 3 \end{cases}$$

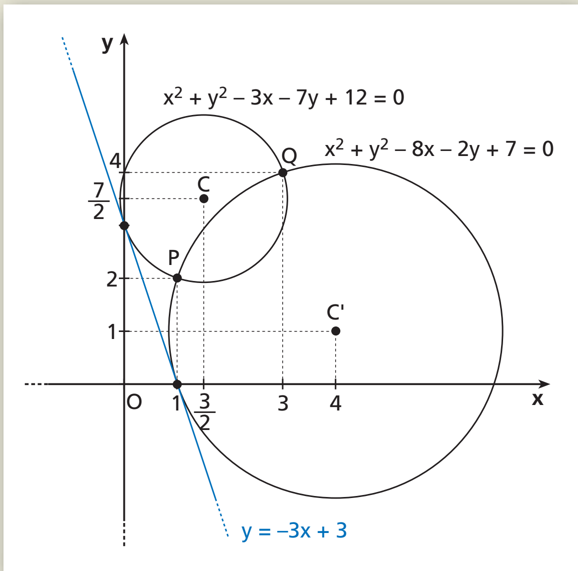
Giungiamo all'equazione risolvente,

$$5x^2 + 2(a + 3)x - (a + 3) = 0,$$

e imponiamo la condizione di tangenza, cioè $\Delta = 0$:

$$(a + 3)^2 + 5(a + 3) = 0,$$

da cui $a = -3$, $a = -8$.



Riprendiamo il sistema

$$\begin{cases} b = -a - 10 \\ c = a + 15 \end{cases}$$

e calcoliamo b e c in corrispondenza dei valori $a = -3$, $a = -8$.

Le circonferenze che soddisfano le condizioni richieste hanno le seguenti equazioni:

$$x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0.$$

In ognuno dei seguenti esercizi sono indicate le coordinate di due punti, P e Q, e l'equazione di una retta r. Determina l'equazione della circonferenza passante per i due punti e tangente alla retta r.

196 $P(5; 1)$; $Q(0; 2)$; $r: 2x - 3y + 6 = 0$. $[x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0]$

197 $P(-5; 1)$; $Q(-1; 3)$; $r: x + 2y + 4 = 0$. $[x^2 + y^2 + 6x - 4y + 8 = 0;\ 4x^2 + 4y^2 + 39x - 46y + 137 = 0]$

198 $P(5; -1)$; $Q(3; 1)$; $r: x - y - 2 = 0$. $[x^2 + y^2 - 8x + 14 = 0]$

199 $P(1; -4)$; $Q(3; 0)$; $r: 2x + y + 3 = 0$. $[x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0;\ 4x^2 + 4y^2 - 46x + 31y + 102 = 0]$

ESERCIZI VARI Determinare l'equazione della circonferenza

200 TEST In quale dei seguenti casi è univocamente determinata la circonferenza che soddisfa le condizioni date? La circonferenza:

A passa per i punti $A(3; 2)$ e $B(1; 3)$.

B ha centro $C(1; 4)$.

C passa per $A(1; 3)$ e ha raggio 8.

D passa per $P(0; 1)$ ed è tangente alla retta di equazione $y = x$.

E ha centro $O(0; 0)$ ed è tangente alla retta di equazione $x - y - 9 = 0$.

201 TEST L'equazione della circonferenza avente centro nel punto $C(-2; 3)$ e tangente alla retta $x - 1 = 0$ è:

A $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 3 = 0$.

B $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 9 = 0$.

C $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 - 9 = 0$.

D $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 9 = 0$.

E $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + 3 = 0$.

202 TEST L'equazione $2x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 7 = 0$:

A rappresenta una circonferenza con centro $C(3; -2)$.

B rappresenta una circonferenza con raggio $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

C non rappresenta una circonferenza.

D rappresenta una circonferenza ridotta al solo centro di coordinate $\left(\frac{3}{2}; -1\right)$.

E rappresenta una circonferenza con centro $C(3; -2)$ e raggio $\sqrt{6}$.

203 TEST Consider the circles with radii $4\sqrt{5}$ and which are tangent to the line $x - 2y = 20$ at the point $(6; -7)$. The sum of the x-coordinates of the centers of the circles is

A 12.

B -14.

C 3.

D -5.

E 2.

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2004)

204 Scrivi l'equazione della circonferenza avente il centro di ordinata uguale a 3 e passante per i punti $A(8; 9)$ e $B(12; 1)$. $[x^2 + y^2 - 12x - 6y + 5 = 0]$

205 Scrivi l'equazione della retta parallela alla retta $x - 3y + 1 = 0$, condotta per il centro della circonferenza passante per i punti $(0; 2)$, $(1; 1)$, $(1; 3)$, e trova l'area del triangolo che questa retta forma con gli assi cartesiani. $\left[x - 3y + 5 = 0; \text{area} = \frac{25}{6}\right]$

206 Trova la misura della corda staccata sulla retta di equazione $x + y - 3 = 0$ dalla circonferenza tangente all'asse y che ha il centro di ordinata 3 appartenente alla retta di equazione $y = 2x - 5$. $[4\sqrt{2}]$

207 Determina le equazioni delle circonferenze che hanno il centro di ascissa -3, il raggio uguale a $3\sqrt{\frac{5}{2}}$ e sono tangenti alla retta di equazione $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

$[2x^2 + 2y^2 + 12x - 32y + 101 = 0; 2x^2 + 2y^2 + 12x + 8y - 19 = 0]$

208 Scrivi l'equazione della circonferenza che ha il centro sulla retta $2x - y = 5$ e passa per i punti A e B in cui la retta $x - y + 2 = 0$ interseca gli assi cartesiani. $[3x^2 + 3y^2 - 10x + 10y - 32 = 0]$

209 Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $O(0; 0)$ e raggio $r = \sqrt{10}$, poi determina le equazioni delle rette a essa tangenti, parallele alla retta $x + 3y + 5 = 0$. $[x^2 + y^2 = 10; x + 3y + 10 = 0; x + 3y - 10 = 0]$

210 Una circonferenza di raggio $\sqrt{5}$, avente il centro sulla retta di equazione $y = 2x - 3$ e passante per $A(3; -1)$, interseca la retta $x + 2y - 4 = 0$. Determina i punti di intersezione. $[(0; 2), (4; 0)]$

211 I punti $A(1; -3)$, $B(3; -5)$ e $C(4; 4)$ sono i vertici di un triangolo. Determina l'equazione della circonferenza di centro C e avente il raggio coincidente con l'altezza relativa al lato AB del triangolo.
$[x^2 + y^2 - 8x - 8y - 18 = 0]$

212 Dopo aver determinato l'equazione della circonferenza di centro $C(-2; -4)$ e passante per il punto $A(1; 2)$, determina per quale valore del parametro k il punto $B(2k + 1; k + 5)$ le appartiene.
$[x^2 + y^2 + 4x + 8y - 25 = 0; k = -3]$

213 Una circonferenza, il cui centro appartiene alla retta di equazione $y = \frac{7}{6}$, interseca l'asse x nei punti di ascissa -1 e 2. Trova la misura della corda che la circonferenza individua sulla retta di equazione $y = 3x$.
$\left[\frac{6}{5}\sqrt{10}\right]$

214 Determina l'equazione della circonferenza di centro $C(6; -1)$ e passante per $P(9; 3)$ e scrivi l'equazione della retta tangente a essa nel suo punto di ascissa 3 appartenente al I quadrante.
$[x^2 + y^2 - 12x + 2y + 12 = 0; 3x - 4y + 3 = 0]$

215 Dopo aver verificato che il triangolo di vertici $A(14; 2)$, $B(6; -2)$ e $C(10; 10)$ è un triangolo rettangolo, determina l'equazione della circonferenza circoscritta ad ABC.
$[x^2 + y^2 - 16x - 8y + 40 = 0]$

216 Una circonferenza taglia l'asse x nei punti di ascissa -1 e 4 e passa per $A(3; 2)$. Determina l'equazione della circonferenza e l'equazione della retta tangente nel punto A.
$[x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0; 3x + 4y - 17 = 0]$

217 Determina l'equazione della circonferenza passante per l'origine e per i punti di intersezione della retta di equazione $y = -2x + 2$ con l'asse delle ordinate e con la bisettrice del II e IV quadrante.
$[x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0]$

218 Determina le equazioni delle circonferenze passanti per i punti $A(1; 3)$ e $B(5; -3)$ e aventi raggio $r = \sqrt{26}$.
$[x^2 + y^2 - 12x - 4y + 14 = 0; x^2 + y^2 + 4y - 22 = 0]$

219 Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(0; 10)$ e $B(4; 8)$ e tangente all'asse delle ascisse (il problema ha due soluzioni).
$[x^2 + (y - 5)^2 = 25; (x - 40)^2 + (y - 85)^2 = 85^2]$

220 I lati del triangolo ABC si trovano sulle rette di equazione $x = 0$, $\sqrt{3}x - 3y = 0$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 6$. Verifica che il triangolo è equilatero e trova le equazioni delle circonferenze inscritta e circoscritta.
$[x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x - 6y + 9 = 0, x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x - 6y = 0]$

221 Fra le circonferenze di centro $C(-2; 3)$ determina quella:
a) passante per il punto $P(1; 1)$;
b) tangente alla bisettrice del primo e terzo quadrante;
c) avente il raggio lungo 5.
$\left[\text{a) } c = 0; \text{ b) } c = \frac{1}{2}; \text{ c) } c = -12\right]$

222 Determina l'equazione della circonferenza passante per i punti $(-3; 2)$, $(1; -2)$, $(1; 2)$. Trova poi la distanza tra il centro della circonferenza e la retta r passante per il punto $(3; 4)$ e parallela alla retta $y = -x + 1$.
$[x^2 + y^2 + 2x - 7 = 0; d = 4\sqrt{2}]$

223 Determina l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(4; -2)$ e $B(-2; 1)$ e avente il centro sulla retta $6x - 2y - 7 = 0$. Trova poi l'equazione delle rette tangenti alla circonferenza e parallele ad AB, dopo aver verificato che A e B sono estremi di un diametro.
$\left[x^2 + y^2 - 2x + y - 10 = 0; y = -\frac{1}{2}x \pm \frac{15}{4}\right]$

224 Determina le equazioni delle circonferenze di raggio 5, passanti per l'origine degli assi cartesiani e per il punto $P(7; 7)$. Trova le intersezioni A e B, con l'asse x, diverse dall'origine, delle due circonferenze. Scrivi le equazioni delle tangenti in A e in B alle corrispondenti circonferenze.

$$\left[x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0;\ x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0;\ A(6; 0);\ B(8; 0);\ y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2};\ y = \frac{4}{3}x - \frac{32}{3}\right]$$

225 Trova per quali valori di k l'equazione

$$x^2 + y^2 - 2(k-3)x + 4ky + 9 = 0$$

rappresenta una circonferenza e poi calcola per quali valori di k la circonferenza:

a) ha centro sulla retta di equazione $y + 4 = 0$;
b) passa per $(2; -1)$;
c) ha raggio uguale a $2\sqrt{2}$;
d) ha centro sulla retta di equazione $y = -x + 1$.

$$\left[k \leq 0 \vee k \geq \frac{6}{5};\ \text{a) } k = 2;\ \text{b) } k = \frac{13}{4};\ \text{c) } k = 2 \vee k = -\frac{4}{5};\ \text{d) } k = -4\right]$$

226 Scrivi le equazioni delle circonferenze passanti per l'origine degli assi cartesiani, aventi il centro sulla retta di equazione $y = 2x$ e raggio $r = 3\sqrt{5}$. $[x^2 + y^2 - 6x - 12y = 0;\ x^2 + y^2 + 6x + 12y = 0]$

227 Determina le equazioni delle circonferenze che hanno centro sulla retta $y = 2$, passano per $A(5; -2)$ e staccano sull'asse delle x una corda lunga 8. $[x^2 + y^2 - 6x - 4y - 7 = 0;\ x^2 + y^2 - 14x - 4y + 33 = 0]$

228 Scrivi le equazioni delle circonferenze che staccano sull'asse delle y una corda di lunghezza uguale a 6 e hanno per tangente nel suo punto A di ordinata -4 la retta di equazione $x - 3y - 12 = 0$.
$[x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0;\ x^2 + y^2 - 2x + 14y + 40 = 0]$

229 Scrivi l'equazione della circonferenza avente il centro sulla retta di equazione $x - 3y + 10 = 0$ e tangente in O alla retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x$. $[x^2 + y^2 - 4x - 8y = 0]$

230 Scrivi le equazioni delle rette secanti la circonferenza di centro $C(2; 1)$ e raggio $r = 1$, sapendo che tali rette sono parallele all'asse y e individuano una corda lunga $\sqrt{3}$. $\left[x = \frac{3}{2};\ x = \frac{5}{2}\right]$

5. LA POSIZIONE DI DUE CIRCONFERENZE

Teoria a pag. 252

I punti di intersezione di due circonferenze

231 ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo gli eventuali punti di intersezione delle due circonferenze di equazioni:

$$x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0.$$

Troviamo l'equazione dell'asse radicale sottraendo membro a membro le due equazioni:

$$\ominus \begin{cases} x^2 + y^2 \qquad\quad + 2y - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad 8x + 4y - 16 = 0 \qquad}$$

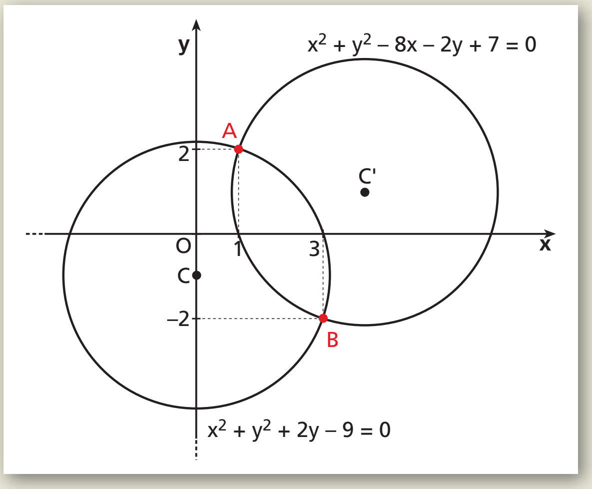
L'asse radicale ha equazione $y = -2x + 4$.

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

Le due circonferenze si intersecano nei punti:

$A(1; 2)$ e $B(3; -2)$.



Determina gli eventuali punti di intersezione delle due circonferenze assegnate.

232 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 12 = 0,$ $x^2 + y^2 - 8x + 14y - 20 = 0.$ $[A(2; 2); B(-3; -1)]$

233 $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 8 = 0,$ $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0.$ [nessuna intersezione]

234 $x^2 + y^2 - 2x + 5y - 3 = 0,$ $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 3 = 0.$ $\left[A(-1; 0); B\left(-\frac{21}{25}; \frac{3}{25}\right)\right]$

235 $x^2 + y^2 - 2x = 0,$ $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0.$ $[A(2; 0)]$

236 $4x^2 + 4y^2 + 16x - 9y - 43 = 0,$ $3x^2 + 3y^2 + 14x - 79 = 0.$ [nessuna intersezione]

237 Determina l'equazione della circonferenza avente come diametro la corda comune alle circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 6 = 0$ e $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 10 = 0$. $[x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0]$

238 Calcola l'area del triangolo individuato dall'asse delle y, dalla retta dei centri delle circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 + 6x - 1 = 0$ e $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 5 = 0$ e dal loro asse radicale. [15]

239 Determina l'area del quadrilatero i cui vertici sono i centri delle circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 8 = 0$ e $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 16 = 0$ e i loro punti di intersezione. $[6\sqrt{13}]$

240 Verifica che le circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$ e $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 35 = 0$ sono tangenti internamente e trova il punto di tangenza. $[(4; -1)]$

241 Verifica che le due circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 40 = 0$ e $x^2 + y^2 - 9x + - 18y + 100 = 0$ sono tangenti esternamente e determina il punto di tangenza. $[(4; 8)]$

242 Determina i punti A e B di intersezione delle due circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 = 25$ e $x^2 + y^2 - 20x + 10y + 25 = 0$ e indica con C il punto di coordinate $(-2; 2)$. Calcola l'area del triangolo ABC. [area = 22]

243 What is the radius of the smallest circle that contains both of the circles $x^2 + y^2 = 1$ and $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$?

(USA *Lehigh University: High School Math Contest*, 2005)

$\left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right]$

244 VERO O FALSO?

a) Le circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 4y = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ sono tangenti internamente. V F

b) Le circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e $x^2 + y^2 + 6x + 12y = 0$ sono tangenti esternamente. V F

c) Le circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 2x = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ non hanno punti in comune. V F

d) L'asse radicale delle due circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$ e $2x^2 + 2y^2 + 4x - 1 = 0$ è la retta $2y - 8x + 1 = 0$. V F

6. I FASCI DI CIRCONFERENZE

▶ Teoria a pag. 254

IN PRATICA ▶ Videolezione 17

Come generare un fascio di circonferenze

245 ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione del fascio di circonferenze definito dalle circonferenze di equazioni

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 = 0 \text{ e } x^2 + y^2 - 4x = 0;$$

scriviamo l'equazione dell'asse radicale del fascio e della retta dei centri.

Combiniamo linearmente le equazioni delle due circonferenze mediante un parametro reale k:

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 + k(x^2 + y^2 - 4x) = 0.$$

Quella ottenuta è l'equazione del fascio generato dalle due circonferenze, ma poiché abbiamo utilizzato un solo parametro, in questo fascio non è rappresentata la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Riscriviamo l'equazione in forma canonica:

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 + kx^2 + ky^2 - 4kx = 0 \rightarrow (1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 - (4k + 10)x - 6y + 24 = 0.$$

L'equazione dell'asse radicale si ottiene ponendo $k = -1$:

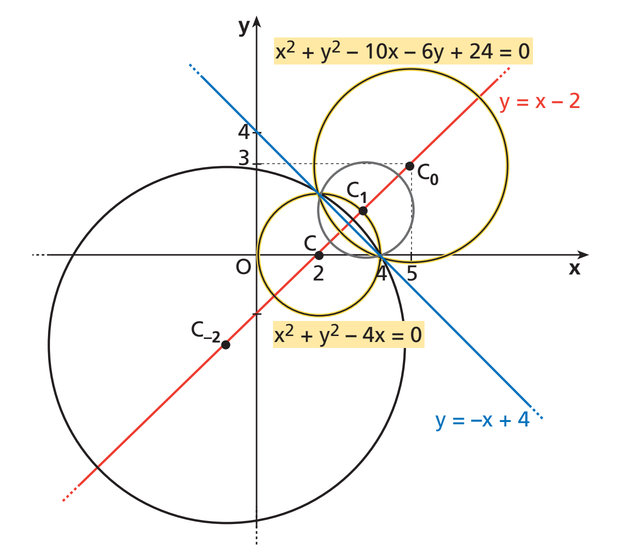
$$-6x - 6y + 24 = 0 \rightarrow y = -x + 4.$$

La retta dei centri è perpendicolare all'asse radicale, quindi il suo coefficiente angolare è $m = 1$. Il centro della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x = 0$ è $C(2; 0)$. La retta dei centri ha equazione:

$$y = 1 \cdot (x - 2) \rightarrow y = x - 2.$$

Disegniamo alcune circonferenze del fascio, attribuendo alcuni valori a k:

$$k = -2 \rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 6y - 24 = 0,$$
$$C_{-2}(-1; -3), \quad r_{-2} = \sqrt{34};$$
$$k = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 = 0,$$
$$C_0(5; 3), \quad r_0 = \sqrt{10};$$
$$k = 1 \rightarrow x^2 + y^2 - 7x - 3y + 12 = 0, \quad C_1\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right), \quad r_1 = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$



Per ciascuna delle seguenti coppie di circonferenze scrivi l'equazione del fascio da esse generato. Determina, se esiste, l'asse radicale e rappresenta qualche circonferenza del fascio.

246 $x^2+y^2-x-y=0$, $\quad x^2+y^2+4x+2y=0$. $\quad [-5x-3y=0]$

247 $x^2+y^2-2x=0$, $\quad x^2+y^2-42x+y-8=0$. $\quad [y=40x+8]$

248 $x^2+y^2-2x-3=0$, $\quad x^2+y^2+8x+7=0$. $\quad [x=-1]$

249 $x^2+y^2-6x-6y+1=0$, $\quad x^2+y^2-6x-6y-6=0$. $\quad$ [non esiste]

250 Date le circonferenze di equazioni $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ e $x^2+y^2+2y=0$, scrivi l'equazione del fascio da esse determinato, quindi trova l'asse radicale e la retta dei centri.
$[(1+k)x^2+(1+k)y^2-2x+(2k-2)y+1=0;\ 2x+4y-1=0;\ y=2x-1]$

251 Nel fascio individuato dalle circonferenze di equazioni $x^2+y^2-4x+2y=0$ e $x^2+y^2+2x-3=0$, determina:
a) l'equazione dell'asse radicale;
b) l'equazione della retta dei centri;
c) l'equazione della circonferenza passante per il punto $P(-1;0)$.
[a) $6x-2y-3=0$; b) $x+3y+1=0$; c) $9x^2+9y^2-6x+8y-15=0$]

252 Due circonferenze con i centri $C_1(2;3)$ e $C_2\left(\frac{7}{2};6\right)$ sono tangenti esternamente. Determina le loro equazioni sapendo che γ_1 passa per il punto $(0;2)$. Scrivi poi l'equazione del fascio individuato da γ_1 e γ_2 e l'equazione della retta tangente comune.
$[\gamma_1: x^2+y^2-4x-6y+8=0;\ \gamma_2: x^2+y^2-7x-12y+47=0;\ x+2y-13=0]$

253 Scrivi l'equazione del fascio individuato dalle due circonferenze γ_1 e γ_2, aventi lo stesso raggio lungo $\sqrt{10}$, sapendo che i loro centri si trovano sulla retta di equazione $y=2$ e che il centro di γ_1 ha ascissa -3, mentre quello di γ_2 appartiene alla bisettrice del I e III quadrante. Rappresenta γ_1 e γ_2 e determina:
a) l'equazione dell'asse radicale;
b) la circonferenza passante per $(0;4)$;
c) le circonferenze tangenti all'asse x.
$\left[\text{a) } x=-\frac{1}{2};\ \text{b) } x^2+y^2-4y=0;\ \text{c) } x^2+y^2-4y=0 \text{ e } x^2+y^2+2x-4y+1=0\right]$

254 Dopo aver rappresentato le circonferenze di equazioni $x^2+y^2+4x-2y-18=0$ e $x^2+y^2-9=0$, scrivi l'equazione del fascio da esse individuato. Determina e rappresenta:
a) l'equazione dell'asse radicale;
b) l'equazione della retta dei centri;
c) la circonferenza passante per l'origine. [a) $4x-2y-9=0$; b) $x+2y=0$; c) $x^2+y^2-4x+2y=0$]

La determinazione di particolari fasci di circonferenze

Circonferenze secanti

255 ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione del fascio di circonferenze passanti per i punti $A(-1;2)$ e $B(3;0)$.

Per determinare l'equazione del fascio, occorre combinare linearmente l'equazione di due circonferenze passanti per A e B.

Come prima circonferenza prendiamo quella che ha AB come diametro.

Bergamini, Trifone, Barozzi MATEMATICA.BLU - Vol. 3 © Zanichelli 2012 con Maths in English

Il centro è il punto medio $M(1;\,1)$ di AB e il raggio è:

$$r = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(3+1)^2 + (-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}.$$

L'equazione della circonferenza è:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 - 5 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0.$$

Come seconda circonferenza possiamo prendere la retta per A e B, immaginandola come una circonferenza di raggio infinito, cioè la circonferenza degenere che è l'asse radicale.
Determiniamo l'equazione della retta AB utilizzando la formula della retta per due punti:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \rightarrow \frac{y-2}{-2} = \frac{x+1}{4} \rightarrow 2y = -x + 3 \rightarrow x + 2y - 3 = 0.$$

Combiniamo linearmente le equazioni ottenute con un parametro reale k:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 + k(x + 2y - 3) = 0.$$

L'equazione del fascio è $x^2 + y^2 + (k-2)x + (2k-2)y - 3k - 3 = 0$.

Determina l'equazione del fascio di circonferenze passanti per le seguenti coppie di punti.

256 $A(-2;\,1)$, $B(2;\,1)$. $[x^2 + y^2 + (k-2)y - k - 3 = 0]$

257 $A(2;\,3)$, $B(2;\,7)$. $[x^2 + y^2 + (k-4)x - 10y - 2k + 25 = 0]$

258 $A(0;\,0)$, $B(4;\,4)$. $[x^2 + y^2 + (k-4)x - (k+4)y = 0]$

259 $A(1;\,0)$, $B(3;\,-4)$. $[x^2 + y^2 + (2k-4)x + (k+4)y - 2k + 3 = 0]$

260 Nel fascio di circonferenze passanti per i punti $A(-2;\,-2)$ e $B(2;\,2)$, determina la circonferenza:
a) passante per $P(1;\,2)$;
b) di raggio $\sqrt{10}$.
[a) $x^2 + y^2 - 3x + 3y - 8 = 0$; b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 8 = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 8 = 0$]

261 Fra le circonferenze passanti per i punti $A(-1;\,-2)$ e $B(-1;\,4)$, determina quella:
a) passante per l'origine;
b) passante per $P(-1;\,6)$;
c) tangente alla retta di equazione $x = 2$.
[a) $x^2 + y^2 + 9x - 2y = 0$; b) non esiste; c) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$]

262 Nel fascio di circonferenze passanti per i punti $A(-2;\,2)$ e $B(4;\,2)$, determina la circonferenza:
a) passante per il punto $P(-4;\,0)$;
b) di raggio $\sqrt{10}$;
c) tangente all'asse x.
[a) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 24 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$; c) $x^2 + y^2 - 2x - \frac{13}{2}y + 1 = 0$]

263 Fra le circonferenze del fascio avente come punti base $A(1;\,2)$ e $B(3;\,6)$, determina quella:
a) che ha centro in $C(0;\,5)$;
b) tangente alla retta di equazione $y = -3x + 5$;
c) di raggio $5\sqrt{2}$.
[a) $x^2 + y^2 - 10y + 15 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 16x - 2y + 15 = 0$ e $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 15 = 0$]

Circonferenze tangenti

264 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione del fascio di circonferenze tangenti nel punto T di ascissa 1 alla retta t di equazione $3x - y - 2 = 0$.

Per determinare l'equazione del fascio, occorre combinare linearmente le equazioni di due circonferenze tangenti nel punto T alla retta t.

Calcoliamo l'ordinata del punto T:

$$y = 3 \cdot 1 - 2 = 1.$$

Come prima circonferenza prendiamo quella degenere che ha centro $T(1; 1)$ e raggio nullo:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \ \rightarrow \ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 0 \ \rightarrow \ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0.$$

Come seconda circonferenza prendiamo la retta t, immaginandola come una circonferenza di raggio infinito.
Combiniamo linearmente le equazioni ottenute con un parametro reale k:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 + k(3x - y - 2) = 0.$$

L'equazione del fascio è:

$$x^2 + y^2 + (3k-2)x - (k+2)y - 2k + 2 = 0.$$

Determina l'equazione del fascio di circonferenze tangenti nel punto assegnato alla retta data.

265 $T(1; 2)$, $y = 2x$. $[x^2 + y^2 + (2k-2)x - (k+4)y + 5 = 0]$

266 $T(0; 3)$, $y = -5x + 3$. $[x^2 + y^2 + 5kx + (k-6)y - 3k + 9 = 0]$

267 $T(1; 4)$, $2x - y + 2 = 0$. $[x^2 + y^2 + (2k-2)x - (k+8)y + 17 + 2k = 0]$

268 $T(-2; 1)$, $2x + 3y + 1 = 0$. $[x^2 + y^2 + (2k+4)x + (3k-2)y + 5 + k = 0]$

269 Fra tutte le circonferenze tangenti nel punto $T(1; 1)$ alla bisettrice del I e III quadrante, determina quelle che sono tangenti alla bisettrice del II e IV quadrante. $[x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0; x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0]$

270 Nel fascio di circonferenze tangenti alla retta di equazione $y = 2$ nel punto di ascissa -1, determina la circonferenza:
a) passante per $P(1; -4)$;
b) con centro di ordinata -5;
c) di raggio uguale a 4.
[a) $3x^2 + 3y^2 + 6x + 8y - 25 = 0$; b) $x^2 + y^2 + 2x + 10y - 23 = 0$; c) $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 21 = 0$ e $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 11 = 0$]

271 Nel fascio di circonferenze tangenti alla retta di equazione $y = x + 3$ nel punto di ascissa nulla, determina la circonferenza:
a) passante per l'origine;
b) con centro di ascissa 4;
c) che stacca sull'asse delle y una corda di lunghezza 3 e non passante per l'origine.
[a) $x^2 + y^2 - 3x - 3y = 0$; b) $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 15 = 0$; c) $x^2 + y^2 + 3x - 9y + 18 = 0$]

Lo studio di un fascio di circonferenze

272 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo il fascio di circonferenze di equazione:

$$(1+k)x^2+(1+k)y^2+(2-4k)x-6y-1+2k=0.$$

Scriviamo l'equazione del fascio di circonferenze in forma canonica, dividendo entrambi i membri per $1+k$ (perché ciò abbia senso, poniamo $1+k \neq 0$, ossia $k \neq -1$):

$$x^2+y^2+\frac{2-4k}{k+1}x-\frac{6}{1+k}y+\frac{2k-1}{1+k}=0.$$

- Le coordinate dei centri, al variare di k, sono:

$$C\left(\frac{2k-1}{1+k};\frac{3}{1+k}\right).$$

- Determiniamo la misura del raggio, sempre in funzione di k:

$$r=\sqrt{\frac{(2k-1)^2}{(k+1)^2}+\frac{9}{(1+k)^2}-\frac{2k-1}{1+k}}=\frac{\sqrt{2k^2-5k+11}}{|k+1|}.$$

  Tale espressione è reale quando il radicando è positivo o nullo, cioè quando:

$$2k^2-5k+11 \geq 0.$$

  Dato che $\Delta = 25-88<0$, il trinomio è positivo $\forall k \in \mathbb{R}$ e non si annulla mai.

- Troviamo le due circonferenze generatrici e gli eventuali punti base del fascio.

  Raccogliamo il parametro k nell'equazione del fascio assegnato:

$$kx^2+x^2+ky^2+y^2-4kx+2x-6y-1+2k=0$$
$$x^2+y^2+2x-6y-1+k(x^2+y^2-4x+2)=0.$$

  Le due circonferenze generatrici sono:

$$x^2+y^2+2x-6y-1=0 \quad \text{e} \quad x^2+y^2-4x+2=0.$$

  Risolviamo il sistema, formato dalle due equazioni, per trovare i punti base:

$$\ominus\begin{cases}x^2+y^2+2x-6y-1=0\\ x^2+y^2-4x\qquad\;\;+2=0\end{cases}$$
$$\overline{\qquad\qquad +6x-6y-3=0} \;\rightarrow\; 2x-2y-1=0$$

$$\begin{cases}x^2+y^2-4x+2=0\\ 2x-2y-1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}8x^2-20x+9=0\\ 2x-2y-1=0\end{cases} \qquad x=\frac{10\pm\sqrt{28}}{8}=\frac{5\pm\sqrt{7}}{4}$$

  I punti base del fascio sono $A\left(\frac{5+\sqrt{7}}{4};\frac{3+\sqrt{7}}{4}\right)$ e $B\left(\frac{5-\sqrt{7}}{4};\frac{3-\sqrt{7}}{4}\right)$.

- $2x-2y-1=0$ è l'equazione dell'asse radicale e si ottiene anche ponendo $k=-1$ nell'equazione del fascio.

Disegniamo alcune circonferenze del fascio, attribuendo alcuni valori a k:

$k = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0$, $C_0(-1; 3)$, $r_0 = \sqrt{11}$ (è la prima circonferenza generatrice);

$k = 1 \rightarrow x^2 + y^2 - x - 3y + \frac{1}{2} = 0$,

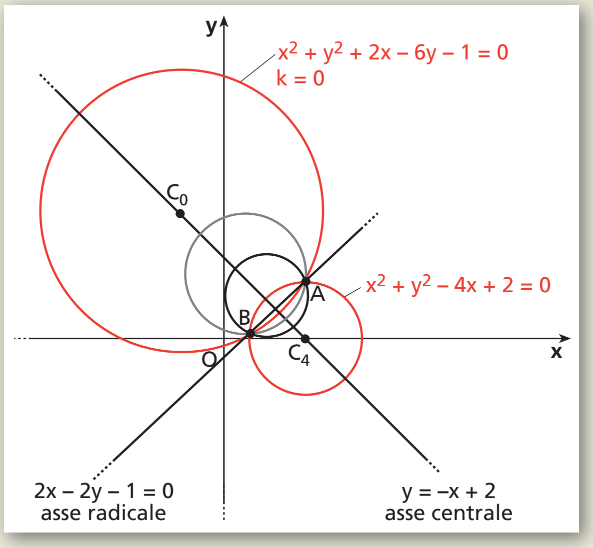
$C_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $r_1 = \sqrt{2}$;

$k = 2 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$,

$C_2(1; 1)$, $r_2 = 1$.

La seconda circonferenza generatrice ha centro $C_4(2; 0)$ e raggio $r_4 = \sqrt{2}$.

- L'asse centrale è $y = -x + 2$ (è la retta passante per C_1 e C_2).



Studia i seguenti fasci di circonferenze.

273 $x^2 + y^2 - (4k + 3)y = 0$ [circonferenze tangenti in $O(0; 0)$]

274 $x^2 + y^2 + (2k - 3)x + (2k - 7)y = 0$ [circonferenze secanti in $O(0; 0)$ e $A(-2; 2)$]

275 $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 2k - 1 = 0$ [circonferenze concentriche]

276 $x^2 + y^2 - 4kx + (k - 4)y + 4 - 2k = 0$ [circonferenze tangenti in $T(0; 2)$]

277 $(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 - (k + 9)x - 2(5k - 1)y + 9k + 5 = 0$ [circonferenze secanti in $A(1; 1)$ e $B(4; 3)$]

278 $(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 + 2(1 - 4k)x - 2y + 15k = 0$ [circonferenze non secanti]

279 $(1 + k)(x^2 + y^2) - 4ky = 4(y + 3x)$ [circonferenze secanti in $O(0; 0)$ e $A(0; 4)$]

280 $x^2 + y^2 + 2(1 + k)x + (2 - k)y + 2 + k = 0$ [circonferenze tangenti in $T(-1; -1)$]

281 $(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 + 2(1 + k)x - 4(1 + k)y - 1 + 2k = 0$ [circonferenze concentriche]

282 $x^2 + y^2 + kx + (k - 2)y - 7 - k = 0$ [circonferenze secanti in $A(2; -1)$ e $B(-2; 3)$]

ESERCIZI VARI I fasci di circonferenze

TEST

283 Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le circonferenze del fascio $(k - 1)x^2 + (k - 1)y^2 - 2kx + ky - 8 = 0$ hanno il centro nel quarto quadrante?

- A $k > 0$.
- B $k < 0 \vee k > 1$.
- C $0 < k < 2$.
- D $-1 < k < 0$.
- E $-1 < k < 1$.

284 L'asse radicale del fascio di circonferenze generato da $x^2 + y^2 - 2x + y - 3 = 0$ e $2x^2 + 2y^2 + 4x - 6 = 0$ è la retta di equazione:

- A $2x + y - 9 = 0$.
- B $y = 6$.
- C $2x - 9 = 0$.
- D $y = 4x$.
- E $y = 6x - 3$.

285 **ASSOCIA** a ogni equazione di fascio di circonferenze la posizione delle circonferenze nel fascio.

1) $kx^2 + ky^2 + x - 2 - 4k = 0$.
2) $(1 + a)x^2 + (1 + a)y^2 - (3 + 3a)x + (1 + a)y - 5a + 1 = 0$.
3) $bx^2 + by^2 + 2bx + y - 3b - 4 = 0$.

a) Circonferenze secanti.
b) Circonferenze concentriche.
c) Circonferenze tangenti.
d) Circonferenze esterne.

286 Studia il fascio di circonferenze individuato dalle due circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2 = 0$ e $x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$ e calcola per quale valore del parametro si ha la circonferenza con il centro sulla retta di equazione $y = -8x$. Determina poi il luogo descritto dai centri delle circonferenze del fascio e trova il raggio della circonferenza che ha il centro di ascissa 2.

[circonferenze non secanti; $k = -2$; $y = -5x + 3$; $\sqrt{57}$]

287 Studia il fascio di circonferenze di equazione $kx^2 + ky^2 - (2k + 1)x + (2k + 1)y + k + 1 = 0$ indicando gli eventuali punti base, l'asse radicale e l'asse centrale. Trova poi per quale valore di k si ha la circonferenza:

a) che ha il centro sulla retta di equazione $y = -2x + 3$;
b) tangente alla retta $y - x = 0$;
c) che stacca sull'asse x una corda lunga 4.

$\left[\text{circonferenze secanti in } (0; -1) \text{ e } (1; 0); \text{ a) } k = \frac{1}{4}; \text{ b) } k = -1; \text{ c) } k = \pm\frac{1}{4}\right]$

288 Considera il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + 4kx - (4 + k)y + 4 + 2k = 0$ e studia le sue caratteristiche. Trova per quale valore di k si ha la circonferenza:

a) che ha il centro di ascissa uguale a 4;
b) che interseca l'asse y nel punto di ordinata -1;
c) che stacca sulla retta di equazione $y = 1$ una corda lunga $8\sqrt{2}$.

$\left[\text{circonferenze tangenti in } T(0; 2); \text{ a) } k = -2; \text{ b) } k = -3; \text{ c) } k = -\frac{11}{4}, k = 3\right]$

289 Studia il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 2ky - 2 = 0$ e calcola per quale valore di k la circonferenza del fascio:

a) passa per l'origine $O(0; 0)$;
b) passa per il punto $P(-3; 4)$;
c) ha raggio uguale a 6;
d) ha il centro sulla retta di equazione $x - y = 0$.

$\left[\text{circonferenze secanti; a) } k \text{ non esiste; b) } k = -\frac{35}{8}; \text{ c) } k = \pm\sqrt{30}; \text{ d) } k = -2\right]$

290 Sono dati il punto $C(-1; 1)$ e la retta s di equazione $2x + y - 4 = 0$.

a) Determina i punti di intersezione della circonferenza di centro C e raggio $r = \sqrt{10}$ con la retta s e indicali con A e B.
b) Scrivi l'equazione del fascio di circonferenze passanti per A e B.
c) Trova nel fascio l'equazione della circonferenza passante per C.
d) Determina l'equazione della circonferenza passante per A e B e avente raggio uguale a $\sqrt{50}$.

[a) $A(0; 4)$, $B(2; 0)$; b) $x^2 + y^2 + (2k + 2)x + (k - 2)y - 4k - 8 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$; d) $x^2 + y^2 + 10x + 2y - 24 = 0$ e $x^2 + y^2 - 14x - 10y + 24 = 0$]

291 Dopo aver studiato il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 - 6x + (k - 2)y + 6 - 2k = 0$, trova per quali valori di k si ha una circonferenza:

a) di raggio uguale a 2;
b) che racchiude un'area uguale a 7π;
c) con il centro che ha distanza dalla retta di equazione $x + 2y - 1 = 0$ minore di $2\sqrt{5}$.

[circonferenze secanti; a) $k = 0$ e $k = -4$; b) $k = -6$ e $k = 2$; c) $-6 < k < 14$]

292 Considera il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + 2x - 4y + k = 0$ e studia le sue caratteristiche. Trova poi per quali valori di k si ha una circonferenza che:
a) ha raggio minimo;
b) passa per il punto $P(-2; 1)$;
c) ha raggio uguale a 5;
d) è tangente alla retta di equazione $2x + y - 1 = 0$.

$\left[\text{circonferenze concentriche; a) } k = 5; \text{ b) } k = 3; \text{ c) } k = -20; \text{ d) } k = \frac{24}{5}\right]$

293 Dato il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 - 4kx - 2(k-1)y + 2 = 0$, determina:
a) il centro C delle circonferenze del fascio e il luogo descritto dai centri;
b) per quali valori di k si hanno circonferenze di raggio $r = \sqrt{6}$;
c) per quale valore di k il centro C appartiene alla bisettrice del I e III quadrante.

$\left[\text{a) } C(2k; k-1), 2y - x + 2 = 0; \text{ b) } k = \frac{7}{5}, k = -1; \text{ c) } k = -1\right]$

294 Studia il fascio di circonferenze $x^2 + y^2 - 2x + 4y + k(x + y - 20) = 0$. Quale circonferenza del fascio ha il centro nell'origine degli assi? Scrivi l'equazione del fascio di circonferenze simmetrico al fascio dato rispetto all'asse x e trova per quali valori di k si hanno nei due fasci le circonferenze con il centro rispettivamente sull'asse y e sull'asse x.

[circonferenze senza punti comuni; nessuna; $x^2 + y^2 - 2x - 4y + k(x - y - 20) = 0$; $k = 2$, $k = -4$]

295 Studia il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 - (2 + k)x + (k - 2)y + 2 = 0$ indicando le sue caratteristiche. Trova poi la circonferenza del fascio:
a) tangente all'asse x;
b) che racchiude un'area 8π;
c) il cui centro appartiene alla retta $y = 2x - 5$;
d) tangente alla retta $y = x - 4$.

$\left[\text{circonferenze tangenti; a) } k = 2(-1 \pm \sqrt{2}); \text{ b) } k = \pm 4; \text{ c) } k = \frac{8}{3}; \text{ d) } k = 2\right]$

296 Considera il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + (2 - k)x + (k - 8)y - 3 + k = 0$ e studia le sue caratteristiche. Trova per quali valori di k si ha la circonferenza:
a) passante per l'origine;
b) di raggio uguale a $\sqrt{3}$;
c) tangente all'asse y;
d) con il centro che ha distanza dall'origine minore di $\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

[circonferenze secanti; a) $k = 3$; b) $k = 6 \pm \sqrt{2}$; c) $k = 10 \pm 2\sqrt{6}$; d) $1 < k < 9$]

297 Fra tutte le circonferenze tangenti alla retta t di equazione $2x - y = 0$ nell'origine O del sistema di riferimento, determina quelle tangenti alla retta s di equazione $2x + y - 4 = 0$.
Rappresenta le due circonferenze trovate, determina l'ulteriore tangente comune e calcola l'area del triangolo che si forma con l'intersezione delle tre tangenti.

$\left[x^2 + y^2 - 2x + y = 0; x^2 + y^2 + 8x - 4y = 0; 2x - 11y - 20 = 0, \frac{20}{3}\right]$

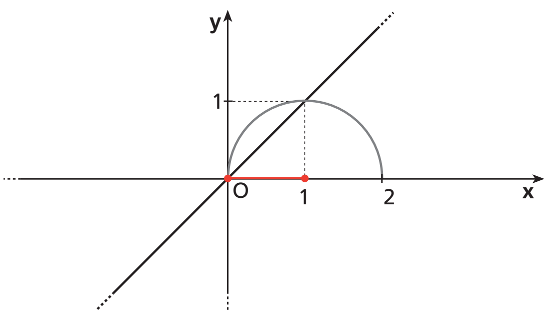
298 Determina l'equazione della circonferenza γ tangente alla retta t passante per $A(0; 3)$ e $B(6; 1)$ e avente centro sull'asse del segmento AB e con ascissa 2. Trova poi il fascio di circonferenze individuato da γ e avente per asse radicale la retta t. Tra le circonferenze del fascio individua quella che stacca sull'asse x una corda lunga 3 e non interseca l'asse y. [$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$; $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$]

299 Nel fascio di circonferenze passanti per $A(-2; 1)$ e $B(0; 5)$ determina quelle:
a) aventi raggio minimo;
b) circoscritte al quadrato di lato AB;
c) tangenti all'asse x, indicando il punto di tangenza;
d) aventi centro di ascissa 4.

[a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$; $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 5y = 0$, $T(0; 0)$; $x^2 + y^2 + 10x - 10y + 25 = 0$, $T(-5; 0)$; d) $x^2 + y^2 - 8x - y - 20 = 0$]

ESERCIZI VARI La circonferenza

300 **TEST** Il grafico illustra le soluzioni di una soltanto delle seguenti disequazioni irrazionali. Quale?



A $\sqrt{2x - x^2} \geq x$.
B $\sqrt{2x - x^2} \geq 2x$.
C $\sqrt{x^2 - 2x} \geq x$.
D $\sqrt{x^2 - 2x} \leq 2x$.
E $\sqrt{x^2 - x} \geq x$.

301 **ASSOCIA** a ciascuna delle seguenti equazioni il luogo geometrico corrispondente.

1) $x^2 + y^2 - 4 = 0$.
2) $x^2 + y^2 + 4 = 0$.
3) $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$.
4) $x^2 + y^2 + 2xy = 0$.
5) $x^2 - 4y^2 = 0$.
6) $x^2 + (|y| - 1)^2 = 0$.

a) Un punto.
b) Due punti.
c) Una retta.
d) Due rette.
e) Una circonferenza.
f) Nessun punto.

302 **TEST** Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy siano γ e γ' le due circonferenze rispettivamente di equazione $x^2 + y^2 = 9$ e $(x + 1)^2 + y^2 = 1$. Quante sono le rette tangenti comuni a γ e γ'?

A Due.
B Infinite.
C Più di due, ma in numero finito.
D Nessuna.
E Una.

(*CISIA, Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso*, 2007)

303 **TEST** Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, quale delle seguenti è l'equazione di una circonferenza?

A $x^2 + y^2 - 2xy - 1 = 0$
B $4x^2 - 3x + 4y^2 - 5y - 1 = 0$
C $x^2 + y^2 + 1 = 0$
D $(x - 1)^2 - (y - 2)^2 - 1 = 0$
E $x^4 + y^4 - 1 = 0$

(*CISIA, Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso*, 2000)

304 **TEST** In quale dei seguenti casi *non* è possibile determinare l'equazione di una circonferenza che soddisfi le condizioni date? La circonferenza:

A è inscritta nel triangolo di vertici $A(1; 1)$, $B(-1; 3)$ e $O(0; 0)$.
B è tangente alla retta $y = x + 2$, con il centro nell'origine degli assi cartesiani.
C passa per $A(1; 2)$, $B(3; 6)$ ed è tangente alla retta di equazione $y = -3x + 6$.
D è circoscritta al triangolo di vertici $A(1; -3)$, $B(0; 2)$ e $C(1; 1)$.
E passa per $A(1; 2)$ e ha centro nell'origine $O(0; 0)$.

305 **TEST** Sia D il dominio del piano cartesiano determinato dal sistema di disequazioni a fianco. Qual è l'area di D?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 \geq 1 \end{cases}$$

A $\sqrt{2}\,\pi$ **B** $\frac{\pi}{2}$ **C** 2 **D** $\sqrt{2}$ **E** $4 - \pi$

(*Olimpiadi di Matematica*, *Giochi di Archimede*, 1996)

306 **TEST** Sia A l'area del sottoinsieme del piano costituito dai punti $(x; y)$ che verificano le due relazioni $x^2 + y^2 \leq 100$, $\pi x + \sqrt{17}\,y \leq 0$. Allora:

A $A < 100$. **B** $100 \leq A < 150$. **C** $150 \leq A < 200$. **D** $200 \leq A < 250$. **E** $A \geq 250$.

(*Olimpiadi di Matematica*, *Gara di 2° livello*, 2000)

307 Ciascuno dei punti $P(4; 1)$, $Q(7; -8)$ e $R(10; 1)$ è il punto medio di un raggio della circonferenza C. Determina la lunghezza del raggio della circonferenza C.

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge*, 2003)

[10]

308 Una circonferenza di raggio 1 è centrata nell'origine. Due particelle cominciano a muoversi nello stesso istante dal punto (1; 0) e percorrono la circonferenza in direzioni opposte. Una delle particelle si muove in senso antiorario con velocità costante v e l'altra si muove in senso orario con velocità costante $3v$. Dopo aver lasciato il punto (1; 0), le due particelle si incontrano una prima volta nel punto P e continuano a muoversi fino a incontrarsi di nuovo nel punto Q. Determina le coordinate del punto Q.

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge*, 2003)

$[Q(-1; 0)]$

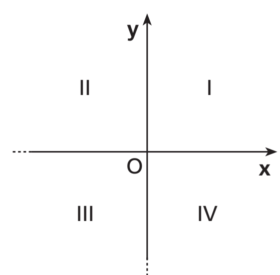
309 **TEST** Determinare l'area della parte di piano definita da:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \leq 0 \end{cases}$$

A $\frac{2}{3}\pi - 2$ **B** $\pi - \sqrt{3}$ **C** $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ **D** $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ **E** Nessuna delle precedenti.

(*Olimpiadi di Matematica, Gara di 2° livello*, 1999)

310 **TEST** Tre circonferenze passano per l'origine. Il centro della prima circonferenza sta nel primo quadrante, il centro della seconda sta nel secondo quadrante, il centro della terza sta nel terzo quadrante. Se P è un punto interno alle tre circonferenze, allora:



A P sta nel secondo quadrante.
B P sta nel primo o nel terzo quadrante.
C P sta nel quarto quadrante.
D non può esistere un punto P siffatto.
E non si può dire nulla.

(*Olimpiadi di Matematica, Gara di 2° livello*, 2003)

311 Disegna il triangolo avente per vertici i punti $A(1; 3)$, $B(-3; 3)$ e il punto C di intersezione della bisettrice del secondo e quarto quadrante con la retta $x - y - 2 = 0$. Determina l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo. Traccia le tangenti alla circonferenza nei punti A, B, C, in modo che, detti D, E i loro punti di intersezione, D sia nel I quadrante. Determina l'area del quadrilatero $BCDE$. Infine sulla diagonale BD trova un punto P tale che $\overline{BP} = 2\overline{PD}$.

$\left[x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0; 16; P\left(1; \frac{5}{3}\right)\right]$

312 Determina l'equazione della circonferenza γ passante per i punti $(-3; 4)$, $(1; 0)$, $(1; 4)$ e quella di γ' che ha per diametro il segmento di estremi $(-4; -2)$ e $(2; 6)$. Dopo aver verificato che γ e γ' sono concentriche, determina l'area della corona circolare. $[x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0; x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0; \text{area} = 17\pi]$

313 Scrivi l'equazione della circonferenza che ha il centro C sull'asse x e passa per i punti $A(0; 2)$ e $B\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. Calcola l'ascissa del punto D di intersezione della circonferenza con il semiasse positivo delle ascisse e, dopo aver trovato le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza in A e D, determina le coordinate del loro punto di intersezione P e l'area del quadrilatero $APDC$. Tra le rette parallele alla bisettrice del II e IV quadrante trova quelle su cui la circonferenza, intersecandole, stacca una corda lunga $\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

$\left[x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0; D(4; 0); x = 4, y = \frac{3}{4}x + 2; P(4; 5); \text{area} = \frac{25}{2}; y = -x + 4, y = -x - 1\right]$

314 Dato il triangolo di vertici $A(-4; 3)$, $B(-6; -3)$ e $C(0; -5)$, determina:
a) l'equazione della circonferenza circoscritta;
b) le equazioni delle tangenti alla circonferenza perpendicolari alla retta di equazione $x - 2y - 9 = 0$;
c) l'area del parallelogramma individuato dalle tangenti precedenti e dalle rette di equazioni $y = 3$ e $y = -7$.

[a) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$; b) $2x + y + 15 = 0$ e $2x + y - 5 = 0$; c) 100]

315 Determina l'equazione della circonferenza passante per $A(5; 1)$, $B(6; 4)$ e avente il centro C sulla retta di equazione $y = 2x - 5$. Scrivi poi le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti in A e in B alla circonferenza. Indicato con D il punto di intersezione di t_1 e t_2, calcola l'area del quadrilatero $ADBC$.

$[x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0; x - 2y - 3 = 0; 2x + y - 16 = 0; D(7; 2); \text{area} = 5]$

316 Trova l'equazione della circonferenza γ_1, di centro $(2; 1)$ e tangente alla retta di equazione $4x - 3y = 0$, e l'equazione della circonferenza γ_2 passante per l'origine degli assi, per il punto $(\sqrt{3}; 1)$ e con un diametro che si trova sulla retta di equazione $y = x + 2$. Considera poi il punto $P(-1; 3)$ e, indicati con Q e R i punti di intersezione di γ_1 e γ_2, determina l'area del triangolo PQR.

$\left[x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0; x^2 + y^2 - 4y = 0; \frac{14}{5}\right]$

317 Determina le equazioni delle due circonferenze che hanno il centro appartenente alla bisettrice del I e III quadrante, sono tangenti alla retta $y = 3x + 1$ e hanno raggio uguale a $\frac{\sqrt{10}}{20}$. Verifica inoltre che il punto medio del segmento che congiunge i due centri coincide con il punto di intersezione delle rette $y = 2x + \frac{1}{2}$ e $y = 4x + \frac{3}{2}$.

$\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{40}; \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{40}\right]$

318 È dato il triangolo ABC rettangolo in C, con $\overline{AB} = 4\sqrt{10}$ e appartenente alla retta $y = 3x - 14$ e con CB appartenente alla retta $x - 5y + 14 = 0$. Determina l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo sapendo che A ha ordinata negativa.

$[x^2 + y^2 - 8x + 4y - 20 = 0]$

319 a) Disegna il grafico della curva γ di equazione $x^2 + y^2 - 4|x| - 4|y| = 0$.
b) Trova l'area della superficie delimitata da γ.
c) Determina l'equazione della circonferenza circoscritta a γ.

[b) area $= 32 + 16\pi$; c) $x^2 + y^2 = 32$]

320 Considera la circonferenza $x^2 + y^2 - 8x - 20 = 0$ e la sua simmetrica rispetto all'asse y. Inscrivi nella parte di piano intersezione delle due circonferenze un rettangolo con il perimetro uguale a $4(1 + \sqrt{11})$ e trova le coordinate dei suoi vertici.

$[A(1; \sqrt{11}), B(1; -\sqrt{11}), C(-1; \sqrt{11}), D(-1; -\sqrt{11})]$

321 Scrivi le equazioni delle tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 9y - 9 = 0$, condotte dal punto $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$, e verifica che sono perpendicolari. Determina poi le coordinate dei punti di tangenza e la misura della corda che li congiunge.

$\left[2x - 3y + 6 = 0; 6x + 4y - 21 = 0; (-3; 0), \left(\frac{9}{2}; -\frac{3}{2}\right); \frac{3\sqrt{26}}{2}\right]$

322 Considera le circonferenze di equazioni γ_1: $x^2 + y^2 = 2$ e γ_2: $x^2 + y^2 = 4$. Verifica che le tangenti a γ_1 mandate da un qualsiasi punto di γ_2 sono sempre perpendicolari tra loro.

323 Trova l'equazione della circonferenza che passa per i punti $A(0;-1)$ e $B(-3;0)$ e ha il centro C sulla retta di equazione $6x-y+4=0$. Traccia per il punto D di intersezione della circonferenza con l'asse x positivo la corda DE parallela all'asse y e trova le equazioni delle tangenti in D e in E alla circonferenza che si intersecano in F. Calcola l'area del quadrilatero $CDFE$ e trova l'equazione della circonferenza ad esso circoscritta. $\left[x^2+y^2-8y-9=0;\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{41}{4};\ y=\frac{3}{4}x-\frac{9}{4};\ \text{area}=\frac{100}{3};\ 3x^2+3y^2-25x-24y+48=0\right]$

324 Trova l'equazione della circonferenza tangente nell'origine alla bisettrice del II e IV quadrante e con il centro sulla retta di equazione $y=5x-8$.
Considera poi i due triangoli equilateri OAB e OAC aventi un lato sul diametro OA della circonferenza. Trova le coordinate dei vertici B e C (con $x_B<x_C$), il perimetro e l'area del quadrilatero $OCAB$.
$\left[x^2+y^2-4x-4y=0;\ B(2-2\sqrt{3};2+2\sqrt{3}),\ C(2+2\sqrt{3};2-2\sqrt{3});\ 16\sqrt{2};\ 16\sqrt{3}\right]$

325 a) Determina le equazioni delle circonferenze γ_1 e γ_2 di centro $A(4;0)$ e passanti rispettivamente per i punti $B(7;0)$ e $C(1;-4)$.
b) Individua le equazioni delle tangenti alla circonferenza γ_1 condotte dal punto D di intersezione della circonferenza γ_2 con il semiasse positivo delle ascisse. Siano E e F i punti di tangenza.
c) Calcola l'area del quadrilatero $AFDE$.
$\left[\text{a) } \gamma_1\text{: } x^2+y^2-8x+7=0;\ \gamma_2\text{: } x^2+y^2-8x-9=0;\ \text{b) } y=\pm\frac{3}{4}(x-9);\ \text{c) } 12\right]$

326 Scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo di vertici $A(9;-1)$, $B(1;5)$ e $C(10;2)$. Tracciate le tangenti alla circonferenza nei punti A, B, C e detti D ed E i loro punti di intersezione, trova il perimetro e l'area del quadrilatero $ABDE$ formato dalle tangenti e dal segmento AB.
$\left[x^2+y^2-10x-4y+4=0;\ \frac{130}{3},\ \frac{250}{3}\right]$

327 Trova l'equazione della circonferenza tangente all'asse y nel punto $(0;3)$ e con il centro C sulla retta di equazione $y=x-1$. Determina poi la misura della corda AB staccata dalla circonferenza sulla retta di equazione $x+y-3=0$ e l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo ABC.
$\left[x^2+y^2-8x-6y+9=0;\ 4\sqrt{2};\ x^2+y^2-4x-2y-3=0\right]$

328 a) Nel fascio di circonferenze tangenti alla retta $4x+3y-23=0$ nel suo punto di ascissa 2 determina le circonferenze γ_1 e γ_2 di raggio 5 e 10, aventi centro rispettivamente nel secondo e primo quadrante.
b) Determina la circonferenza γ_3 simmetrica della circonferenza γ_2 rispetto al punto $(2;5)$.
c) Calcola l'area della parte di cerchio individuata da γ_3 eliminando il cerchio individuato da γ_1.
[a) γ_1: $x^2+y^2+4x-4y-17=0$; γ_2: $x^2+y^2-20x-22y+121=0$
b) γ_3: $x^2+y^2+12x+2y-63=0$; c) area $=75\pi$]

329 a) Scrivi l'equazione della circonferenza di raggio 5, con centro C sulla bisettrice del I e III quadrante ($x_C>0$) e che stacca sull'asse x una corda AB lunga 8 ($x_A<x_B$).
b) Dopo aver calcolato le coordinate dei punti A e B, cerca la tangente alla circonferenza parallela alla retta AC e il relativo punto di tangenza D di ordinata positiva.
c) Calcola l'area del quadrilatero $ACDE$, dove E è il punto di intersezione della retta tangente con l'asse x. Di quale quadrilatero si tratta?
d) Per quali valori di h il punto $P(h-1;h)$ è interno alla circonferenza?
$\left[\text{a) } x^2+y^2-6x-6y-7=0;\ \text{b) } 4y-3x-28=0,\ D(0;7);\ \text{c) } \frac{125}{3};\ \text{d) } 0<h<7\right]$

330 Calcola l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo i cui lati giacciono sulle rette di equazioni $y=3x-7$, $y=x+1$ e $y=-2x-2$. Indicato con A il vertice del triangolo che si trova nel I quadrante e con B quello che si trova sull'asse x, determina sul minore degli archi $\overset{\frown}{AB}$ un punto P in modo che l'area di PBC sia gli $\frac{8}{15}$ dell'area di ABC. $\left[x^2+y^2-8x-9=0;\ P(1;4)\right]$

331 Dato il triangolo di vertici $A(1; 2)$, $B(-7; 6)$ e $C(-1; 0)$, determina l'equazione della circonferenza circoscritta e quella della circonferenza con centro in C e tangente alla retta AB.
$[x^2 + y^2 + 6x - 8y + 5 = 0; 5x^2 + 5y^2 + 10x - 31 = 0]$

332 Dopo aver verificato che il triangolo di vertici $A(0; 2)$, $B(4; -6)$ e $C(6; 0)$ è un triangolo isoscele, determina l'equazione della circonferenza:
a) circoscritta ad ABC;
b) con centro in C e passante per A e B;
c) con centro in C e tangente ad AB.
[a) $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 12 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 12x - 4 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 12x + 16 = 0$]

333 Una circonferenza ha il centro nel punto di intersezione delle rette di equazioni $y = -x + 5$ e $2x - y - 7 = 0$ e raggio $r = \sqrt{10}$.
Trova l'area del triangolo ABC, dove A e B sono i punti di intersezione della circonferenza con l'asse x e C è il punto di intersezione delle tangenti alla circonferenza condotte da A e B. [27]

334 Una circonferenza di centro $C(1; 2)$ e diametro $d = 2\sqrt{10}$ interseca l'asse y nei punti P e Q. Trova l'area del quadrilatero $PCQR$, con R punto di intersezione delle tangenti alla circonferenza condotte da P e Q. [30]

335 Sono date le circonferenze γ_1 e γ_2 rispettivamente di centri $C_1(-2; 0)$ e $C_2(2; 0)$ e raggi $r_1 = t$ e $r_2 = 2t$, dove $t > 0$.
a) Determina per quali valori di t le circonferenze sono tangenti esternamente e calcola le equazioni delle tangenti comuni.
b) Trova per quali valori di t le due circonferenze sono secanti ed esprimi in funzione di t la lunghezza della corda che ha per estremi i punti di intersezione.
c) Determina il valore di t affinché la corda misuri $\sqrt{15}$.
[a) $t = \frac{4}{3}$, $3x + 2 = 0$, $\sqrt{2}\,x \pm 4y + 6\sqrt{2} = 0$; b) $\frac{4}{3} < t < 4$, $\frac{\sqrt{-9t^4 + 160t^2 - 256}}{4}$; c) $t = 2$, $t = \frac{2}{3}\sqrt{31}$]

336 Considera i punti $A(0; 4)$, $B(0; -2)$, $C(5; 0)$ e un punto generico $P(h; k)$, dove $h, k \in \mathbb{R}$; siano A', B' e C' le proiezioni di P rispettivamente sulle rette BC, AC e AB.
a) Calcola l'equazione della circonferenza γ passante per A, B e C.
b) Verifica che il punto P appartiene a γ se e solo se i tre punti A', B' e C' sono allineati.
c) Determina l'area del triangolo ABP quando P appartiene al minore degli archi $\overset{\frown}{AB}$; trova la posizione di P affinché detta area sia massima.
[a) $5x^2 + 5y^2 - 17x - 10y - 40 = 0$; c) $3|h|$, $P\left(\frac{17 - \sqrt{1189}}{10}; 1\right)$]

337 Dati i punti $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(4; 0)$, considera il punto $P(0; 2t)$ e indica con D il punto medio del segmento AP, con E il punto di intersezione tra la retta CD e la retta PB.
a) Calcola le equazioni delle circonferenze passanti per le terne di punti P, A, B e C, A, D.
b) Trova il loro ulteriore punto di intersezione Q e determina il luogo descritto dal punto Q al variare di P sull'asse delle ordinate.
c) Determina la posizione del punto P, non coincidente con l'origine degli assi, affinché Q appartenga alla bisettrice del I e del III quadrante.
[a) $x^2 + y^2 - 2x - 2ty = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - ty = 0$; b) $Q\left(\frac{6t^2}{t^2+4}; \frac{12t}{t^2+4}\right)$, $x^2 + y^2 - 6x = 0$; c) $P(0; 4)$]

338 Considera i punti $P(0; 3)$, $B(-2; 1)$ e la retta r di equazione $11x - 3y + 25 = 0$.
a) Dopo aver verificato che B appartiene a r, trova l'equazione della circonferenza γ passante per P e tangente in B alla retta r.
b) Trova la retta s tangente a γ nel suo punto D di ascissa 3 e ordinata positiva.
c) Detti C il centro di γ e A il punto di intersezione di r e s, verifica che il quadrilatero $ABCD$ è circoscrivibile e determina l'equazione della circonferenza circoscritta.
d) Calcola l'area di $ABCD$.
[a) $2x^2 + 2y^2 - 3x - y - 15 = 0$; b) $9x + 7y - 41 = 0$; c) $4x^2 + 4y^2 - x - 27y + 5 = 0$; d) $\frac{65}{4}$]

339 Considera i punti $A(-2; 2)$ e $B(1; 4)$, la retta r di equazione $x - 2y - 3 = 0$ e un generico punto C su r.
a) Determina il luogo dei centri delle circonferenze passanti per A e B.
b) Trova la posizione di C per cui BC è un diametro e indica con C_1 tale punto.
c) Trova la posizione di C per cui AC è un diametro e indica con C_2 tale punto.
d) Calcola l'area del quadrilatero AC_1C_2B.
$\left[\text{a) } 6x + 4y - 9 = 0; \text{ b) } C_1\left(\frac{1}{4}; -\frac{11}{8}\right); \text{ c) } C_2\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{4}\right); \text{ d) } \frac{247}{16}\right]$

340 Considera il punto $P\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}; \frac{2k}{1+k^2}\right)$, con $k \in \mathbb{R}$.
a) Dimostra che al variare di k il punto P descrive la circonferenza di raggio unitario e centro nell'origine degli assi.
b) Scrivi, in funzione di k, l'equazione della tangente t alla circonferenza in P.
c) Siano A e B i punti in cui la circonferenza incontra rispettivamente il semiasse delle ordinate positive e quello delle ascisse positive, e siano C e D i punti di intersezione di t con l'asse x e l'asse y nel I quadrante. Trova il valore di k affinché il quadrilatero $ABCD$ sia un trapezio.
d) Calcola l'area del trapezio $ABCD$.
$\left[\text{b) } (1-k^2)x + 2ky - (1+k^2) = 0; \text{ c) } \sqrt{2} - 1; \text{ d) } \frac{1}{2}\right]$

341 Nel piano cartesiano Oxy considera il punto $A(0; 4)$.
a) Scrivi l'equazione del luogo dei punti P che soddisfano la relazione

$$\overline{PO}^2 + 2\overline{PA}^2 = 32,$$

verificando che si tratta di una circonferenza, e traccia il suo grafico.
b) Detto T il punto della circonferenza appartenente al I quadrante con la stessa ordinata di A, trova l'equazione della tangente t alla circonferenza in T.
c) Considera il punto B di intersezione di t con l'asse x, trova la misura dell'angolo $B\widehat{T}O$ e determina le coordinate dell'ortocentro del triangolo OBT.
$\left[\text{a) } x^2 + y^2 - \frac{16}{3}y = 0; \text{ b) } y = -\sqrt{3}\,x + 8; \text{ c) } 60°; \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}; \frac{4}{3}\right)\right]$

342 Dati i punti $A(3; 3)$ e $B(1; -1)$, determina:
a) l'equazione della circonferenza γ passante per A e B e con il centro sulla retta di equazione $y = 2x - 3$;
b) l'equazione della retta tangente a γ in A;
c) l'equazione della circonferenza tangente in A a γ che ha centro sulla retta di equazione $4x + y - 18 = 0$;
d) l'equazione della retta PQ, essendo P e Q i vertici del triangolo equilatero APQ inscritto in γ.
$[\text{a) } x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0; \text{ b) } x + 2y - 9 = 0; \text{ c) } x^2 + y^2 - 7x - 8y + 27 = 0; \text{ d) } 4y + 2x - 3 = 0]$

343 Determina l'equazione della circonferenza che passa per i punti $A(3; -4)$ e $B(-4; -3)$ e che ha il centro sulla retta di equazione $2x - 3y = 0$.
Considerato poi un punto C sulla semicirconferenza che si trova sopra all'asse x, determina il luogo descritto dal baricentro del triangolo ABC al variare di C.
$\left[x^2 + y^2 = 25; 9x^2 + 9y^2 + 6x + 42y + 25 = 0, \text{ con } y > -\frac{7}{3}\right]$

344 Scrivi l'equazione della circonferenza γ passante per l'origine O e tangente alla retta di equazione $-3x + 2y - 13 = 0$ nel suo punto di ascissa -1.
Detti A e B i punti di intersezione di γ con gli assi cartesiani, determina un punto P sulla semicirconferenza che non contiene l'origine in modo che l'area del quadrilatero $OAPB$ sia uguale a 17.
$\left[x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0; P_1(5; 1), P_2\left(\frac{17}{13}; \frac{85}{13}\right)\right]$

345 a) Scrivi l'equazione della circonferenza che passa per $A(0; -1)$, ha il centro con ordinata positiva sulla retta di equazione $4x - 2y + 3 = 0$ e ha il raggio lungo $\frac{5}{2}$.

b) Tra le rette del fascio per A determina quelle che staccano sulla circonferenza una corda lunga $2\sqrt{5}$.

c) Dal punto $B\left(\frac{5}{2}; -6\right)$ manda le tangenti alla circonferenza e trova le loro equazioni, i punti di tangenza C e D, il perimetro e l'area del triangolo BCD.

$\left[\text{a) } x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0; \text{ b) } y = -2x - 1, y = 2x - 1; \text{ c) } 2x - 5 = 0, 4x + 3y + 8 = 0, C(-2; 0), D\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right), 15 + \frac{3}{2}\sqrt{10}, \frac{135}{8}\right]$

I sistemi parametrici e la circonferenza

346 **ESERCIZIO GUIDA**

Troviamo graficamente le soluzioni del seguente sistema parametrico, al variare di k in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0 \\ y = kx - 3k - 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta una circonferenza di centro $C(-1; 0)$ e raggio $r = 3$.

La seconda equazione rappresenta un fascio di rette che possiamo scrivere così:

$$y + 1 + k(-x + 3) = 0.$$

Le generatrici del fascio sono le rette $y = -1$ e $x = 3$ e il centro è $P(3; -1)$.

Le soluzioni del sistema sono date dalle coordinate dei punti di intersezione tra le rette del fascio e la semicirconferenza contenuta nel semipiano delle y positive, in quanto il sistema pone la condizione $y \geq 0$.

Determiniamo quindi per quali valori di k le rette del fascio intersecano la semicirconferenza che ha per estremi i punti $A(-4; 0)$ e $B(2; 0)$.

Le rette del fascio che intersecano la semicirconferenza sono comprese fra la retta s passante per il punto A e la retta t tangente alla circonferenza (vedi figura).

- La retta s passante per A corrisponde al parametro k ottenuto sostituendo le coordinate $(-4; 0)$ nell'equazione del fascio:

$$1 + k(4 + 3) = 0 \quad \rightarrow \quad k = -\frac{1}{7}.$$

- La retta t tangente corrisponde al parametro k ottenuto imponendo che la distanza della retta $y = kx - 3k - 1$ dal centro $C(-1; 0)$ della circonferenza sia uguale al raggio $r = 3$. Applicando la formula $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ si ha:

$$\frac{|1 + k + 3k|}{\sqrt{1 + k^2}} = 3,$$

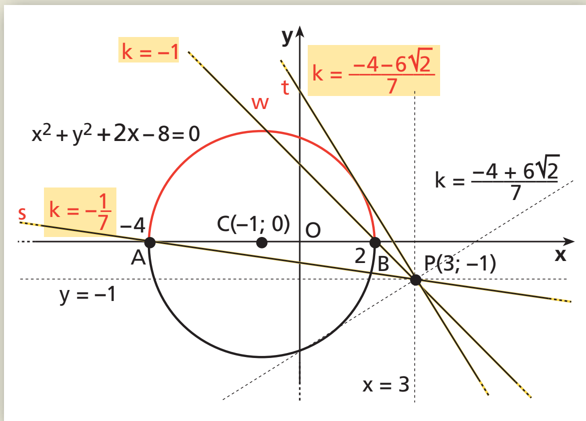
da cui, svolgendo i calcoli:

$$(4k + 1)^2 = 9(1 + k^2) \quad \rightarrow \quad 16k^2 + 8k + 1 = 9 + 9k^2 \quad \rightarrow \quad 7k^2 + 8k - 8 = 0$$

$$k = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 56}}{7} = \frac{-4 \pm 6\sqrt{2}}{7}.$$

Esistono due rette tangenti corrispondenti ai due valori di k trovati.

Dalla figura vediamo che la retta t deve avere coefficiente angolare negativo, quindi, poiché k è il coefficiente angolare, scegliamo $k = \frac{-4-6\sqrt{2}}{7}$.



- Sia w la retta del fascio passante per $B(2; 0)$. Il corrispondente valore di k si trova sostituendo le coordinate di B nell'equazione del fascio:

$$1 + k(-2+3) = 0 \rightarrow k = -1.$$

Le rette comprese tra t e w intersecano la semicirconferenza in due punti, quindi per $\frac{-4-6\sqrt{2}}{7} \le k \le -1$ ci sono due soluzioni.

Le rette comprese tra w e s intersecano la semicirconferenza in un solo punto, quindi per $-1 < k \le -\frac{1}{7}$ si ha una soluzione.

Al variare di k si hanno i seguenti risultati:

per $k < \frac{-4-6\sqrt{2}}{7}$,	nessuna soluzione;
per $k = \frac{-4-6\sqrt{2}}{7}$,	2 soluzioni coincidenti;
per $\frac{-4-6\sqrt{2}}{7} < k < -1$,	2 soluzioni;
per $k = -1$,	2 soluzioni (di cui una limite: $x = 2$);
per $-1 < k < -\frac{1}{7}$,	1 soluzione;
per $k = -\frac{1}{7}$,	1 soluzione limite: $x = -4$;
per $k > -\frac{1}{7}$,	nessuna soluzione.

In sintesi, il sistema ammette:

2 soluzioni per $\frac{-4-6\sqrt{2}}{7} \le k \le -1$;

1 soluzione per $-1 < k \le -\frac{1}{7}$.

Risolvi graficamente i seguenti sistemi parametrici, al variare di k in $\mathbb{R}$.

347 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y + 2x + k = 0 \\ x \ge 0, \quad y > 0 \end{cases}$ [1 sol. per $-4 \le k \le -2$; 2 sol. per $-2\sqrt{5} \le k < -4$]

348 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 0 \\ y - x + 2k = 0 \\ x > 0 \end{cases}$ [1 sol. per $-2 < k \le 0$; 2 sol. per $0 < k \le \sqrt{2} - 1$]

349 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0 \\ 3x + y + k = 0 \\ x \geq 0, \quad y > 0 \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } -12 \leq k \leq -2\sqrt{2};\ 2 \text{ sol. per } -3(1+\sqrt{10}) \leq k < -12]$

350 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \\ y = kx + 2k + 2 \\ y < 0 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -2 \leq k < -\frac{2}{7};\ 2 \text{ sol. per } \frac{-8-3\sqrt{11}}{7} \leq k < -2\right]$

351 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0 \\ kx - y - 5k + 9 = 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } 1 \leq k < 4;\ 2 \text{ sol. per } k \leq \frac{-6\sqrt{5}}{5} - 2 \vee k \geq 4\right]$

352 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 8y + 5 = 0 \\ (2k-1)x - y + 8k - 1 = 0 \\ 1 \leq x \leq 5, \quad y \geq 0 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } \frac{1}{5} \leq k < \frac{1}{3};\ 2 \text{ sol. per } \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{-10+\sqrt{390}}{29}\right]$

353 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0 \\ y = kx + k + 6 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -\frac{3}{2} < k \leq 0;\ 2 \text{ sol. per } -\frac{24}{7} \leq k \leq -\frac{3}{2}\right]$

354 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0 \\ (k+1)x + 8ky - 6k + 2 = 0 \\ x > 0, \quad y \leq 4 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } k \leq -\frac{1}{4} \vee k \geq \frac{1}{3};\ 2 \text{ sol. per } \frac{3}{13} \leq k < \frac{1}{3}\right]$

355 $\begin{cases} y = \sqrt{9 - x^2} \\ x + ky - 4k = 0 \\ -\sqrt{5} \leq x \leq 3 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -\frac{\sqrt{5}}{2} < k < \frac{3}{4};\ 2 \text{ sol. per } -\frac{3}{7}\sqrt{7} \leq k \leq -\frac{\sqrt{5}}{2} \vee \frac{3}{4} \leq k \leq \frac{3}{7}\sqrt{7}\right]$

356 $\begin{cases} y = \sqrt{4x - x^2} \\ x - ky - k + 1 = 0 \\ 0 < x \leq 3 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } 1 \leq k \leq 2(\sqrt{3} - 1);\ 2 \text{ sol. per } \frac{2}{3}\sqrt{6} - 1 \leq k < 1\right]$

357 $\begin{cases} y = \sqrt{16 - x^2} \\ y + 3x = k \\ x \geq 0 \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } 4 \leq k < 12;\ 2 \text{ sol. per } 12 \leq k \leq 4\sqrt{10}]$

358 $\begin{cases} x = \sqrt{2y - y^2} \\ (k-1)x - y + k - 1 = 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } \frac{3}{2} \leq k \leq 3\right]$

359 $\begin{cases} y = 3 - \sqrt{-x^2 + 6x - 5} \\ y + x(k-1) + k - 5 = 0 \\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } \frac{7}{6} \leq k < \frac{3}{2};\ 2 \text{ sol. per } \frac{3}{2} \leq k \leq \frac{8+\sqrt{13}}{6}\right]$

REALTÀ E MODELLI

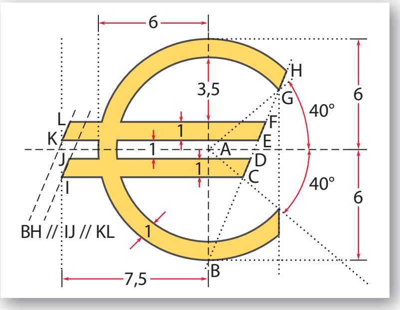
1 **Anelli olimpici**

I cinque anelli e la bandiera olimpica furono presentati ufficialmente da Pierre de Coubertin al Congresso Olimpico di Parigi nel 1914. Gli ideali di universalità e fratellanza simboleggiati dai cinque anelli intrecciati (che nel loro complesso rappresentano i cinque continenti) erano una proposta molto innovativa per l'epoca, l'inizio del XX secolo, in un clima mondiale sempre più teso e segnato da forti nazionalismi.

- ▶ Disponi i cinque anelli in un sistema di riferimento cartesiano in modo che il centro della circonferenza nera coincida con l'origine e l'asse x sia tangente alle circonferenze gialle e verdi. Supponi gli anelli di spessore nullo, di raggio unitario e poni uguale a $\frac{1}{4}$ la distanza tra due circonferenze successive della stessa fila (attento, la distanza è data fra due circonferenze, non fra i rispettivi centri).
- ▶ Trova le equazioni delle cinque circonferenze.
- ▶ Partendo dall'anello nero, quali trasformazioni occorre eseguire per ottenere gli altri quattro?

2 **Simbolo dell'euro**

Il simbolo dell'euro (€) è stato presentato al pubblico dalla Commissione europea nel dicembre 1996, che ha motivato così la sua scelta: «la € si ispira all'epsilon greca, e rinvia quindi alla culla della civiltà europea e alla prima lettera di Europa, barrata con due tratti orizzontali paralleli a indicare la stabilità dell'euro».
La figura riporta le misure ufficiali del simbolo dell'euro.



- ▶ Fissato il sistema di riferimento cartesiano con l'origine nel punto A e l'asse delle ascisse orizzontale, scrivi le equazioni dei tratti principali del simbolo: i due archi di circonferenza concentrici e le due barre orizzontali. (Per semplificare i calcoli, anche se non corrisponde alle indicazioni del disegno, supponi che la retta AG e la retta simmetrica formino angoli di 45° anziché di 40°.)

3 **La pista di atletica leggera**

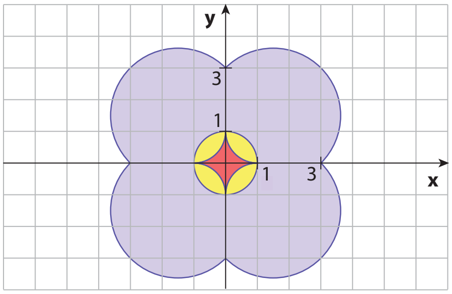
Le corse di atletica leggera si svolgono, nella versione outdoor, su una pista formata da un minimo di sei corsie, otto per le gare internazionali, della larghezza di 1,22 metri ciascuna. Due tratti paralleli delle corsie sono rettilinei e hanno una lunghezza di 100 m ciascuno, mentre le due curve hanno la forma di due semicirconferenze, anch'esse di lunghezza (riferita alla prima corsia) di 100 m. La linea di arrivo si trova al termine di uno dei tratti rettilinei.

- ▶ Fissato un opportuno sistema di riferimento, determina le equazioni delle due semicirconferenze.
- ▶ Di quanto è più lunga la seconda corsia rispetto alla prima?
- ▶ Se un corridore parte dalla sesta corsia, di quanto deve spostarsi in avanti alla partenza, rispetto a un corridore della prima, per percorrere lo stesso tratto in una gara di 400 m?
- ▶ Qual è l'area racchiusa dalla pista?

4 **Il fiore**

Laura vuole preparare dei bigliettini al computer con un disegno stilizzato di un fiore. Ha a disposizione solo un programma di grafica vettoriale molto semplice, e quindi deve dare al computer le equazioni corrette degli archi di curva che compongono il disegno.

- ▶ Quali sono queste equazioni?



Bergamini, Trifone, Barozzi MATEMATICA.BLU - Vol. 3 © Zanichelli 2012 con Maths in English

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 L'equazione della circonferenza tangente all'asse delle ordinate e di centro $C(-2; -3)$ è:

A $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 9 = 0$.
B $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 9 = 0$.
C $x^2 + y^2 = 4$.
D $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$.
E $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$.

2 Le proposizioni seguenti sono tutte vere *tranne una*. Quale?

L'equazione $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ rappresenta una circonferenza:

A passante per l'origine solo se $a = 0$ o $b = 0$.
B per qualsiasi valore di a e di b.
C passante per l'origine.
D di raggio $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.
E di centro $\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$.

3 Considera il punto $P(7; 6)$ e la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$.
Per il punto P passano:

A due rette tangenti alla circonferenza.
B solo rette secanti la circonferenza.
C solo una retta tangente e nessuna secante.
D solo rette esterne alla circonferenza.
E solo una tangente e rette secanti.

4 Le circonferenze

$$\gamma_1: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0 \ \text{ e } \ \gamma_2: x^2 + y^2 = 16$$

sono:

A secanti.
B esterne.
C tangenti esternamente.
D γ_1 interna a γ_2.
E tangenti internamente.

5 L'equazione

$$x^2 + y^2 + k = 0$$

rappresenta una circonferenza con il centro nell'origine e raggio:

A $\sqrt{k}$ se $k > 0$.
B $\sqrt{-k}$ se $k > 0$.
C $-\sqrt{k}$ se $k > 0$.
D $-\sqrt{k}$ se $k < 0$.
E $\sqrt{-k}$ se $k < 0$.

6 Date le circonferenze di equazioni

$$\gamma_1: x^2 + y^2 - 4x - 8y + 15 = 0,$$
$$\gamma_2: 3x^2 + 3y^2 - 12x - 25y + 50 = 0$$

e i punti $A(4; 3)$, $B(4; 5)$, $C(0; 5)$ e $D(2; 2)$, quale delle seguenti proposizioni è *vera*?

A $D \notin \gamma_1$ ed esiste una circonferenza passante per A, B, C, D.
B D è interno alla circonferenza passante per A, B e C.
C D è esterno alla circonferenza passante per A, B e C.
D γ_1 e γ_2 hanno in comune i punti A, B e D.
E γ_1 e γ_2 hanno lo stesso centro.

7 Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2 + y^2 - 3x + y + 5t = 0$ rappresenta un fascio di circonferenze concentriche?

A $t \leq 1$
B $t \geq -2$
C $t \geq -\frac{1}{2}$
D $t \geq 0$
E $t \leq \frac{1}{2}$

8 Data l'equazione $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 4k - 6 = 0$, quale proposizione è *vera*?

A Per $k \leq -1 \vee k \geq 3$ è un fascio di circonferenze concentriche.
B Il luogo dei centri è la retta $x + y = 0$.
C Per $-1 \leq k \leq 3$ è un fascio di circonferenze esterne.
D Per $k \leq -1 \vee k \geq 3$ è un fascio di circonferenze tangenti.
E Nessuna delle affermazioni precedenti è vera.

QUESITI

9 a) Considera la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$. Siano C il suo centro, A il punto (di ascissa non nulla) di intersezione con l'asse delle ascisse e B quello (con ordinata non nulla) con l'asse delle ordinate. Verifica che A, B e C sono allineati.

b) Dimostra che in ogni circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ la retta che congiunge i suoi punti di intersezione con gli assi, diversi dall'origine, passa per il centro della circonferenza.

10 **La tangente nell'origine**. Dimostra che per ogni circonferenza che passa per l'origine di equazione $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ la tangente in O ha equazione $ax + by = 0$.

11 Date una circonferenza e una retta nel piano cartesiano, indica un procedimento per determinare il punto P della circonferenza di minor distanza dalla retta e poi trova il punto della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$ più vicino alla retta $x + 2y - 1 = 0$. $\left[P\left(2 - \frac{\sqrt{5}}{5}; 3 - \frac{2}{5}\sqrt{5}\right)\right]$

12 Date le due circonferenze di equazioni

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0,$$

indica come devono essere i coefficienti delle due equazioni se le due circonferenze:
a) sono concentriche;
b) hanno lo stesso centro che appartiene alla bisettrice del II e IV quadrante;
c) passano per l'origine;
d) sono tangenti all'asse x nello stesso punto.

[a) $a = a'$, $b = b'$; b) $a = a'$, $b = b'$, $a = -b$; c) $c = c' = 0$; d) $a = a'$, $c = c'$, $a^2 = 4c$]

13 In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$8x^2 + 8y^2 - 4kx + 8y - 3k = 0,$$

dove k è un parametro reale. Calcola per quali valori di k il luogo è costituito da:

1. un punto; 2. due punti; 3. infiniti punti; 4. nessun punto.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione straordinaria,* 2003, *quesito* 2)

14 **VERO O FALSO?**
Considera la circonferenza γ di equazione:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

a) Se $a = b$, allora il centro si trova sulla bisettrice del I e III quadrante. V F

b) Se $a = 0$ e $c = 0$, allora γ è tangente all'asse x. V F

c) Se $a < 0$ e $b > 0$, allora il centro di γ appartiene al I quadrante. V F

d) Se $a^2 + b^2 - 4c = 0$, allora γ è costituita da un solo punto. V F

e) Se $a < 0$, $b < 0$ e $c < 0$, allora γ non esiste. V F

f) Se $a = 0$, $b = 0$ e $c < 0$, allora la circonferenza ha il centro nell'origine e raggio $\sqrt{-c}$. V F

PROBLEMI

15 a) Determina l'equazione della circonferenza che ha il centro sulla retta di equazione $x - 2y - 12 = 0$ ed è tangente alla retta di equazione $3y - 2x + 16 = 0$ nel suo punto di ordinata nulla.
b) Considera il fascio di rette di equazione $mx - y - 3 = 0$; determina il suo centro D e le due rette del fascio passanti per i punti A e B della circonferenza di ascissa 3.
c) Determina il quarto vertice C del rombo $ADBC$ e calcolane perimetro e area.
d) Trova l'equazione della circonferenza inscritta nel rombo.

$\left[\text{a) } x^2 + y^2 - 12x + 6y + 32 = 0; \text{ b) } D(0; -3), 2x - 3y - 9 = 0, 2x + 3y + 9 = 0;\right.$
$\left.\text{c) } C(6; -3); 2p = 4\sqrt{13}, \text{ area} = 12; \text{ d) } x^2 + y^2 - 6x + 6y + \frac{198}{13} = 0\right]$

16 a) Considera il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + (k - 10)x + (k - 4)y + 4(6 - k) = 0$ e individua le coordinate dei punti base A e B $(x_A < x_B)$.
b) Dopo aver verificato che il fascio considerato è generato da una circonferenza γ e da una retta r, determina l'equazione della circonferenza γ_1, simmetrica della circonferenza γ rispetto a r.
c) Scrivi le equazioni delle tangenti s e t a γ_1 mandate dal punto P di coordinate $(-3; 4)$.
d) Calcola l'area del triangolo individuato dalle rette s, t e dalla retta congiungente i punti di tangenza.

$\left[\text{a) } A(3; 1), B(4; 0); \text{ b) } x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0; \text{ c) } x + 2y - 5 = 0, 2x + y + 2 = 0; \text{ d) } \frac{27}{2}\right]$

17 a) Scrivi l'equazione della circonferenza avente centro nell'origine e un diametro di estremi A e B, dove A e B sono i punti dell'asse x le cui ascisse $(x_A < x_B)$ sono le soluzioni dell'equazione $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.
b) Sia C il punto dell'asse x (con $x_C < 0$) tale che $\overline{AO} = 3\overline{CO}$, e sia D il suo simmetrico rispetto all'asse y. Scrivi le equazioni delle semicirconferenze aventi diametri AC e AD, situate nel semipiano delle ordinate positive, e quelle delle semicirconferenze aventi diametri DB e CB, situate nel semipiano delle ordinate negative.
c) Calcola l'area della parte di piano delimitata dalle quattro semicirconferenze trovate e dimostra che essa è un terzo di quella del cerchio di diametro AB.

$[\text{a) } x^2 + y^2 = 9; \text{ b) } y = \sqrt{-4x - x^2 - 3}, y = \sqrt{3 - 2x - x^2},$
$y = -\sqrt{4x - x^2 - 3}, y = -\sqrt{3 + 2x - x^2}; \text{ c) } 3\pi]$

18 a) Scrivi l'equazione del fascio di circonferenze avente per punti base le intersezioni con gli assi cartesiani della retta parallela alla bisettrice del I e del III quadrante e formante un triangolo nel IV quadrante di area $\frac{25}{2}$.
b) Determina l'equazione della circonferenza γ_1 del fascio passante per il punto $A(1; 0)$.
c) Scrivi l'equazione del fascio di circonferenze concentriche a γ_1 e determina la circonferenza γ_2 del fascio tangente alla retta $2x - 3y + 11 = 0$.
d) Calcola l'area della corona circolare individuata dalle due circonferenze γ_1 e γ_2.

$[\text{a) } x^2 + y^2 - 25 + k(x - y - 5) = 0; \text{ b) } \gamma_1: x^2 + y^2 - 6x + 6y + 5 = 0;$
$\text{c) } x^2 + y^2 - 6x + 6y + k = 0, \gamma_2: x^2 + y^2 - 6x + 6y - 34 = 0; \text{ d) } 39\pi]$

19 a) Scrivi e rappresenta graficamente l'equazione della circonferenza γ_1 passante per i punti $A(1; 3)$, $B(5; 5)$ e $C(8; -4)$.
b) Determina e rappresenta graficamente, nello stesso riferimento di γ_1, l'equazione della circonferenza γ_2 avente il centro nel punto $(5; 0)$ e raggio 3.
c) Determina l'area del quadrilatero $ABCD$, dove D è l'intersezione di ascissa minore della circonferenza γ_2 con l'asse delle ascisse.

$[\text{a) } \gamma_1: x^2 + y^2 - 10x = 0; \text{ b) } \gamma_2: x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0; \text{ c) } 28]$

20 a) Scrivi l'equazione della circonferenza γ_1 di centro $P(-3; 2)$ e passante per il punto $A(0; 1)$.
b) Scrivi l'equazione della circonferenza γ_2 simmetrica di γ_1 rispetto alla retta $y = x + 1$ e rappresenta graficamente γ_1 e γ_2.
c) Determina le tangenti r e s a γ_1 e γ_2 mandate dal punto $S(-10; -9)$ che non intersecano rispettivamente γ_2 e γ_1. Siano Q e R i rispettivi punti di tangenza.
d) Calcola l'area del trapezio isoscele individuato da PQR e dal centro di γ_2.

[a) γ_1: $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$; b) γ_2: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$;
c) r: $3x - y + 21 = 0$, s: $x - 3y - 17 = 0$, $Q(-6; 3)$, $R(2; -5)$; d) 12]

21 a) Scrivi l'equazione della circonferenza che è tangente nel punto $A(0; 2)$ alla retta $3x - 4y + 8 = 0$ e ha il centro sulla retta di equazione $y = -2x + 3$.
b) Tra le rette parallele alla bisettrice del II e IV quadrante trova quelle che, intersecando la circonferenza, determinano una corda lunga $\frac{5}{2}\sqrt{2}$.
c) Trova il perimetro del rettangolo con i vertici nei punti di intersezione della circonferenza con le rette trovate nel punto b).
d) Dal punto $P(4; -5)$ conduci le tangenti alla circonferenza, trova le loro equazioni, le coordinate dei punti E e F di tangenza e il perimetro del triangolo EFP.

$\left[\text{a) } x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0;\ \text{b) } y = -x + 4,\ y = -x - 1;\ \text{c) } 10\sqrt{2};\right.$
$\left.\text{d) } y = -\frac{3}{4}x - 2,\ x = 4,\ E(0; -2),\ F(4; 0),\ 2(5 + \sqrt{5})\right]$

22 a) Nel fascio di circonferenze tangenti alla retta r di equazione $2x + y - 4 = 0$ nel suo punto A di ascissa 2, determina la circonferenza γ_1 passante per il punto $B(8; -2)$.
b) Scrivi l'equazione della circonferenza γ_2 simmetrica alla circonferenza individuata al punto a) rispetto alla retta s di equazione $x - 2y + 8 = 0$.
c) Verifica che anche la circonferenza γ_2 è tangente alla retta r e individuane il punto di tangenza C.
d) Calcola l'area della parte di piano individuata dalle due circonferenze e dalla retta r.

[a) γ_1: $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$; b) γ_2: $x^2 + y^2 - 4x - 20y + 84 = 0$; c) $C(-2; 8)$; d) $10(4 - \pi)$]

23 Dati i punti $A(-1; 0)$, $B\left(\frac{7}{5}; -\frac{9}{5}\right)$ e $C\left(\frac{7}{5}; \frac{16}{5}\right)$:
a) determina le equazioni delle tre circonferenze γ_A, γ_B e γ_C, mutuamente tangenti, di centri A, B, C;
b) indicati con D, E e F i punti in cui le tre circonferenze sono tangenti, calcola l'equazione della circonferenza che passa per i punti di tangenza;
c) calcola le equazioni delle tangenti comuni e verifica che passano per uno stesso punto T.

$\left[\text{a) } \gamma_A\text{: } x^2 + y^2 + 2x = 0,\ \gamma_B\text{: } 5x^2 + 5y^2 - 14x + 18y + 6 = 0,\ \gamma_C\text{: } 5x^2 + 5y^2 - 14x - 32y + 16 = 0;\right.$
$\left.\text{b) } 5x^2 + 5y^2 - 4x - 2y - 4 = 0;\ \text{c) } 3x + 4y - 2 = 0,\ 4x - 3y - 1 = 0,\ 5y - 1 = 0,\ T\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)\right]$

24 Sia γ la semicirconferenza di raggio unitario avente centro nell'origine O degli assi cartesiani e posta nel semipiano delle ordinate positive. Indicato con A il punto in cui essa tocca il semiasse delle ascisse negative, traccia per A una retta AP, con P punto generico di γ.
a) Scrivi le coordinate del punto Q di intersezione tra la retta AP e l'asse del segmento OP al variare della retta AP.
b) Determina la posizione di P affinché Q stia sull'asse delle ordinate.
c) In questa posizione trova l'equazione della tangente t in P a γ.
d) Calcola l'area del triangolo OBC, dove B e C sono i punti di intersezione di t con gli assi coordinati.

$\left[\text{a) se } y = h(x+1)\text{: } Q\left(\frac{1 - 3h^2}{2(h^2 + 1)}; \frac{3 - h^2}{2(h^2 + 1)}h\right);\ \text{b) } P\left(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right);\ \text{c) } \sqrt{3}x + 3y - 2\sqrt{3} = 0;\ \text{d) } \frac{2}{3}\sqrt{3}\right]$

CAPITOLO

5

٥ [numerazione araba] ५ [numerazione devanagari] 五 [numerazione cinese]

LA PARABOLA

LA DISTANZA DI SICUREZZA Un'automobile che viaggia in autostrada si trova davanti un ostacolo improvviso: un incidente, una coda, il carico disperso da un TIR. Mentre il conducente si accorge del pericolo, l'auto percorre quello che si chiama spazio di reazione. Poi c'è lo spazio di frenata, cioè tutta la strada che l'auto copre dal momento in cui il guidatore schiaccia il pedale del freno.

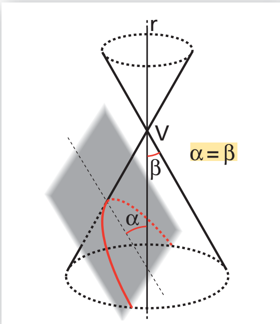
In quanto spazio si ferma un'automobile in corsa?

▶ **La risposta a pag. 329**

1. LA PARABOLA E LA SUA EQUAZIONE

Che cos'è la parabola

In questo capitolo studiamo un'altra conica: la *parabola*.
Definiamola come luogo geometrico e deduciamo poi l'equazione algebrica che la rappresenta nel piano cartesiano.

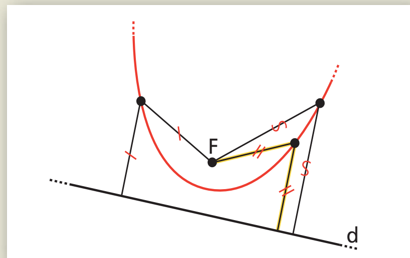


▲ **Figura 1** Consideriamo un cono di asse *r*, con angolo al vertice 2β. Sezioniamo la superficie del cono con un piano che formi con l'asse del cono un angolo α = β. La figura che si ottiene dall'intersezione è una parabola.

DEFINIZIONE

Parabola

Assegnati nel piano un punto F e una retta d, si chiama parabola la curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da F e da d.

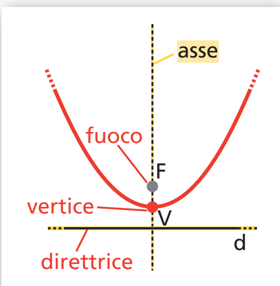


Il punto F e la retta d vengono detti, rispettivamente, **fuoco** e **direttrice** della parabola.

La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si chiama **asse della parabola**.

Il punto V in cui la parabola interseca il suo asse è detto **vertice** della parabola.

Si può dimostrare che l'asse della parabola è anche asse di simmetria della curva, ossia è vero che, preso un punto della parabola, esiste un altro suo punto che è simmetrico del primo dato rispetto all'asse.



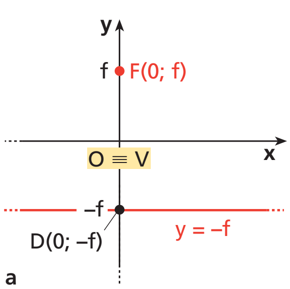
▲ **Figura 2**

Inizialmente, studieremo le parabole del piano cartesiano con asse parallelo all'asse y. Considereremo successivamente anche parabole con asse parallelo all'asse x.

L'equazione della parabola con asse coincidente con l'asse y e vertice nell'origine

Determiniamo l'equazione della generica parabola con asse coincidente con l'asse y e vertice nell'origine degli assi (figura a). Il fuoco è un generico punto dell'asse y che supponiamo distinto da $O(0; 0)$, cioè

$$F(0; f), \qquad \text{con } f \neq 0.$$



La direttrice, quindi, è una retta parallela all'asse x e interseca l'asse y in un punto D tale che $\overline{FO} = \overline{OD}$, cioè $D(0; -f)$. L'equazione della direttrice è pertanto:

$$y = -f.$$

Indichiamo con $P(x; y)$ un punto generico della parabola (figura b) e imponiamo la condizione:

$$\overline{PF} = \overline{PH}.$$

Poiché $\overline{PF} = \sqrt{x^2 + (y - f)^2}$ e $\overline{PH} = |\, y + f \,|$, si ha:

$$\sqrt{x^2 + (y - f)^2} = |\, y + f \,|.$$

Eleviamo i due membri al quadrato:

$$x^2 + (y - f)^2 = (y + f)^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + \cancel{y^2} - 2fy + \cancel{f^2} = \cancel{y^2} + 2fy + \cancel{f^2}$$

$$x^2 - 4fy = 0.$$

Ricavando y, otteniamo l'equazione cercata, ossia:

$$y = \frac{1}{4f}x^2.$$

Posto $a = \frac{1}{4f}$, l'equazione precedente diventa:

$\boldsymbol{y = ax^2}$ **equazione della parabola con vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse *y*.**

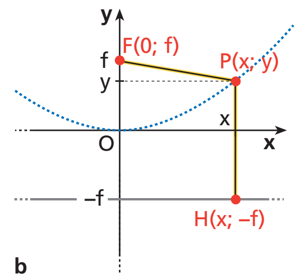
Poiché $f \neq 0$, a risulta definito ed è $a \neq 0$.

Scriviamo ora le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice in funzione di a. Dalla relazione $a = \frac{1}{4f}$ ricaviamo $f = \frac{1}{4a}$, quindi il *fuoco* ha coordinate

$\boldsymbol{F\left(0; \frac{1}{4a}\right)}$ **coordinate del fuoco**

e la direttrice ha equazione

$\boldsymbol{y = -\frac{1}{4a}}$ **equazione della direttrice**.



b

REGOLA

Equazione della parabola con asse coincidente con l'asse *y* e vertice nell'origine

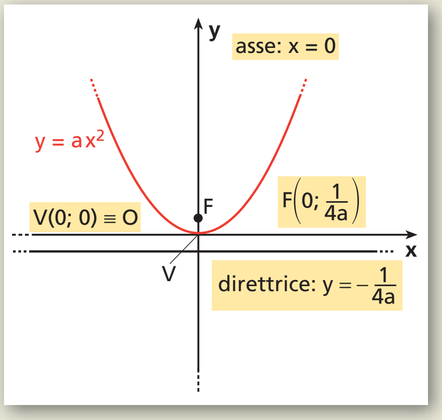
L'equazione di una parabola che ha il vertice nell'origine degli assi e asse coincidente con l'asse y è del tipo $y = ax^2$ (con $a \neq 0$);

il fuoco F ha coordinate $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$;

la direttrice ha equazione

$$y = -\frac{1}{4a};$$

l'asse ha equazione $x = 0$.



Quindi, le coordinate dei punti della parabola verificano l'equazione $y = ax^2$. Viceversa, si può dimostrare che, per i punti $P(x; y)$ del piano le cui coordinate verificano l'equazione $y = ax^2$, si ha $\overline{PF} = \overline{PH}$. Questi punti dunque appartengono alla parabola.

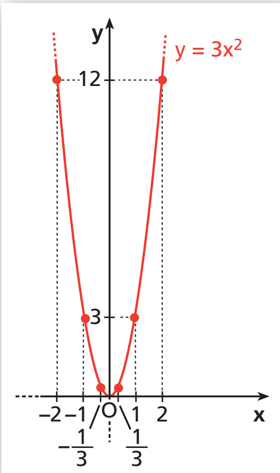
Dall'equazione $y = ax^2$ al grafico

ESEMPIO

Rappresentiamo nel piano cartesiano la parabola di equazione $y = 3x^2$.
Determiniamo le coordinate di alcuni suoi punti e scriviamole in una tabella:

x	0	$\pm\frac{1}{3}$	± 1	± 2
y	0	$\frac{1}{3}$	3	12

Nella tabella notiamo che i punti di ascissa opposta hanno la stessa ordinata.
L'ordinata del fuoco F è $f = \frac{1}{4a} = \frac{1}{12}$, cioè $F\left(0; \frac{1}{12}\right)$; la direttrice ha equazione $y = -\frac{1}{12}$. Otteniamo il grafico della figura 3.



▲ Figura 3 Grafico della parabola di equazione $y = 3x^2$.

● Il grafico della parabola risulta simmetrico rispetto all'asse y: punti di ascissa opposta hanno la stessa ordinata.

Il segno di *a* e la concavità della parabola

● Se $a > 0$, la parabola si trova nel primo e secondo quadrante.

Nell'equazione della parabola $y = ax^2$, se $a > 0$, si ha $y \geq 0$, quindi i punti della parabola si trovano nel semipiano dei punti con ordinata maggiore o uguale a 0.

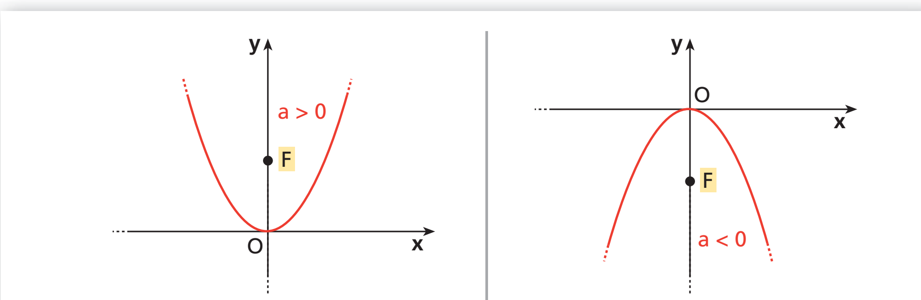
Inoltre, se $a > 0$, anche $f > 0$. Il fuoco si trova, dunque, sul semiasse positivo delle y: diciamo che la parabola *volge la concavità verso l'alto* (figura 4*a*).

● Se $a < 0$, la parabola si trova nel terzo e quarto quadrante.

Se invece $a < 0$, si ha $y \leq 0$ e i punti della parabola giacciono nel semipiano dei punti con ordinata minore o uguale a 0; inoltre si ha $f < 0$. Il fuoco si trova nel semiasse negativo delle y: la parabola *volge la concavità verso il basso* (figura 4*b*).

● Per $a = 0$ non abbiamo una parabola: l'equazione diventa $y = 0$, ossia quella dell'asse x. In tal caso la parabola è detta *degenere*.

► Figura 4 La concavità di una parabola.



a. Concavità rivolta verso l'alto.
b. Concavità rivolta verso il basso.

Parabole simmetriche

In due parabole con vertice nell'origine e *con coefficiente a opposto*, i punti che hanno la stessa ascissa hanno ordinata opposta, quindi le parabole si corrispondono in una simmetria rispetto all'asse x e sono *congruenti*.

● Le equazioni di una simmetria rispetto all'asse x sono:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

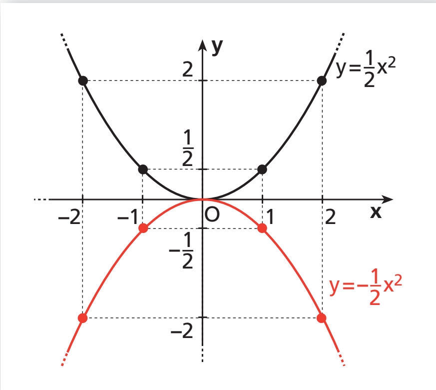
● In generale, due parabole di equazioni

$$y = ax^2 \text{ e } y = a'x^2$$

sono congruenti se e solo se

$$|a| = |a'|.$$

ESEMPIO

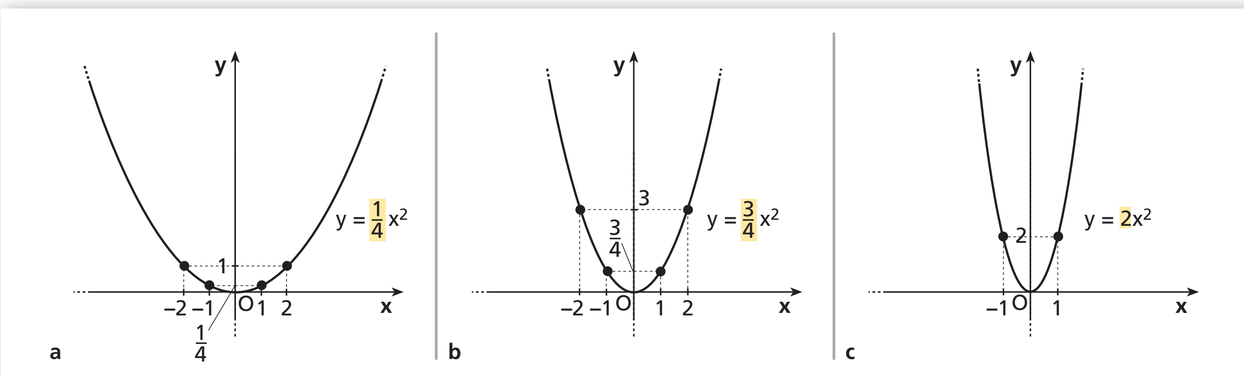


◄ **Figura 5** Le parabole con equazioni $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = -\frac{1}{2}x^2$ sono simmetriche rispetto all'asse x e sono quindi congruenti.

Il valore di *a* e l'apertura della parabola

Disegniamo per punti, assegnando a x alcuni valori a piacere, le parabole di equazione: $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = \frac{3}{4}x^2$, $y = 2x^2$ (figura 6).

▼ **Figura 6** L'apertura della parabola diminuisce all'aumentare di *a*.

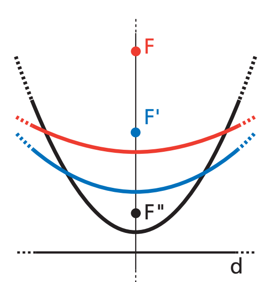


Notiamo che, per $a > 0$, all'aumentare di a diminuisce l'apertura della parabola. Se invece a è negativo, l'apertura diminuisce all'aumentare del valore assoluto di a.

● Ciò che geometricamente influenza l'apertura della parabola è la reciproca distanza tra fuoco e direttrice (figura a lato). Al diminuire della distanza, diminuisce l'apertura. Dal punto di vista analitico questo può essere compreso considerando le coordinate del fuoco $F(0; f)$:

$$f = \frac{1}{4a} \to a = \frac{1}{4f}.$$

Al diminuire di f aumenta a, quindi diminuisce l'apertura.
Possiamo confrontare anche parabole che hanno coefficienti a di segno opposto: l'apertura diminuisce al crescere di $|a|$. Confronta, per esempio, $y = x^2$ e $y = -5x^2$.

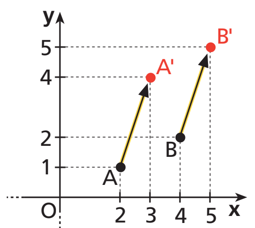


L'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y

La traslazione

Una **traslazione** è un'isometria di equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$



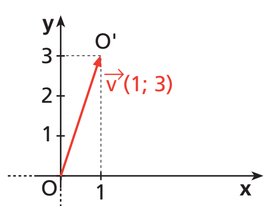
Le equazioni permettono di trovare le coordinate di un punto $P'(x'; y')$ note quelle di $P(x; y)$.
Se congiungiamo P con P' otteniamo un **segmento orientato**. Nell'esempio a fianco, considerati i segmenti orientati con primo estremo in un punto e secondo nella sua immagine (per esempio, $\overrightarrow{AA'}$ e $\overrightarrow{BB'}$), notiamo che:

- sono *congruenti*;
- appartengono a rette parallele e quindi hanno la *stessa direzione*;
- sono orientati nello *stesso verso*.

Segmenti orientati con queste caratteristiche si dicono **equipollenti** fra loro.
Ognuno dei segmenti orientati equipollenti rappresenta uno stesso **vettore**.
Gli elementi caratteristici di un vettore $\overrightarrow{AA'}$ sono:

- il **modulo**, che è la misura del segmento AA'; lo indichiamo con $|\overrightarrow{AA'}|$;
- la **direzione**, che è la direzione della retta AA';
- il **verso**, da A ad A'.

La relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza. Chiamiamo **vettore** ognuna delle sue classi di equivalenza, ossia l'insieme di tutti i segmenti fra loro equipollenti.

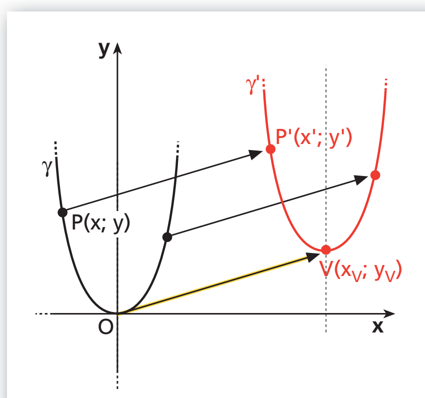


Un vettore può essere rappresentato, oltre che con un segmento orientato, anche con una lettera con sopra una freccia (per esempio, $\vec{v}$).
Se, come nella figura a lato, rappresentiamo un vettore con il particolare segmento orientato che ha come primo estremo il punto $O(0; 0)$, per indicarlo è sufficiente fornire le coordinate del secondo estremo O', che vengono dette **componenti** del vettore.
Nell'esempio possiamo indicare il vettore collegato alla traslazione con $\vec{v}(1; 3)$.
Osserviamo che le componenti del vettore sono proprio i coefficienti a e b delle equazioni della traslazione.
In generale, si può dimostrare che data la traslazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

a essa è associato il vettore $\vec{v}(a; b)$ e viceversa.

Data una qualsiasi parabola con asse parallelo all'asse y e di vertice noto, determiniamo la sua equazione.
La parabola, che chiamiamo γ', si può ottenere mediante la traslazione dei punti della parabola γ con vertice nell'origine e a essa congruente (figura 7).



▶ **Figura 7** Ogni punto della parabola γ' si ottiene traslando un punto della parabola γ mediante il vettore $\overrightarrow{OV}$.

In particolare, V è l'immagine di O, quindi la traslazione è associata al vettore $\overrightarrow{OV} = \vec{v}(x_V; y_V)$. Le equazioni della traslazione sono allora

$$\begin{cases} x' = x + x_V \\ y' = y + y_V \end{cases}$$

da cui ricaviamo x e y:

$$\begin{cases} x = x' - x_V \\ y = y' - y_V \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione $y = ax^2$ della parabola passante per l'origine, si ha

$$y' - y_V = a(x' - x_V)^2,$$

ossia l'equazione che devono soddisfare le coordinate dei punti di γ'.
Gli apici delle variabili x' e y' servono solo a distinguere tali punti da quelli di γ. Una volta determinata l'equazione, possiamo eliminarli e scrivere:

$$\boldsymbol{y - y_V = a(x - x_V)^2}$$ **equazione della parabola avente vertice $(x_V; y_V)$ e asse parallelo all'asse y.**

Poiché a proviene dall'equazione della parabola passante per l'origine, deve essere $a \neq 0$.

Esplicitiamo y, svolgiamo i calcoli e ordiniamo:

$$y = ax^2 - 2ax_Vx + ax_V^2 + y_V.$$

Ponendo $-2ax_V = b$ e $ax_V^2 + y_V = c$, si ha l'equazione nella forma:

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$$ **equazione della parabola con asse parallelo all'asse y.**

Dalle posizioni ricaviamo:

Sfruttiamo il fatto che $a \neq 0$.

$$\boldsymbol{x_V = -\frac{b}{2a}}$$ **ascissa del vertice**;

$$y_V = c - ax_V^2 = c - \cancel{a} \cdot \frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\boldsymbol{y_V = -\frac{\Delta}{4a}}$$ **ordinata del vertice**.

Poniamo, come al solito, $\Delta = b^2 - 4ac$.

ESEMPIO

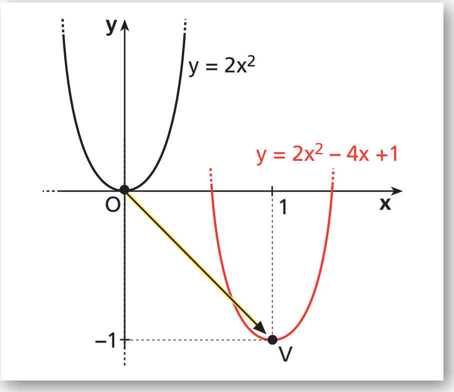
L'equazione della parabola, di vertice $V(1; -1)$, che si ottiene dalla traslazione della parabola di equazione $y = 2x^2$ è:

$$y - (-1) = 2(x - 1)^2$$
$$y + 1 = 2x^2 - 4x + 2$$
$$y = 2x^2 - 4x + 1.$$

Verifichiamo le formule per ricavare le coordinate del vertice:

$$x_V = -\frac{-4}{4} = 1;$$

$$y_V = -\frac{16 - 8}{8} = -1.$$

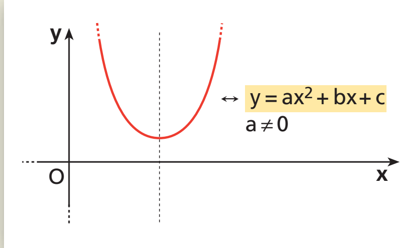


◄ **Figura 8** La parabola di equazione $y = 2x^2 - 4x + 1$ può essere ottenuta da quella di equazione $y = 2x^2$ mediante la traslazione di vettore $\vec{v}(1; -1)$.

Abbiamo dimostrato che una parabola, con l'asse parallelo all'asse y, ha sempre equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$.
Viceversa, è possibile dimostrare che una qualsiasi equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$ rappresenta una parabola.
Per la dimostrazione, data l'equazione $y = ax^2 + bx + c$, basta considerare la parabola di equazione $y = ax^2$ e traslarla del vettore $\vec{v}\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$, ottenendo così proprio l'equazione $y = ax^2 + bx + c$.

In generale, vale il seguente teorema.

TEOREMA
A ogni parabola con asse parallelo all'asse y corrisponde un'equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, e viceversa.



Le caratteristiche di una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$

Abbiamo già visto che una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ ha vertice V di coordinate $x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.
L'ascissa del fuoco F è uguale a quella del vertice, quindi:

$$\boldsymbol{x_F = -\frac{b}{2a}}$$ **ascissa del fuoco**.

Per determinare l'ordinata del fuoco sfruttiamo il fatto che F, nella traslazione di vettore $\vec{v}(x_V; y_V)$, è il corrispondente del fuoco della parabola di equazione $y = ax^2$, quindi:

$$y_F = \frac{1}{4a} + y_V = \frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a}$$

$$\boldsymbol{y_F = \frac{1-\Delta}{4a}}$$ **ordinata del fuoco**.

Analogamente, per l'equazione della direttrice otteniamo:

$$y = -\frac{1}{4a} + y_V$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{1+\Delta}{4a}}$$ **equazione della direttrice**.

● Poiché ogni parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ è congruente alla corrispondente parabola di equazione $y = ax^2$, anche per queste parabole la concavità dipende soltanto dal coefficiente a.

● L'ordinata del fuoco della parabola di equazione $y = ax^2$ è $\frac{1}{4a}$.

● L'equazione della direttrice della parabola di equazione $y = ax^2$ è $y = -\frac{1}{4a}$.

Dall'equazione $y = ax^2 + bx + c$ al grafico

Riassumiamo le regole relative alla parabola con asse parallelo all'asse y.

REGOLA

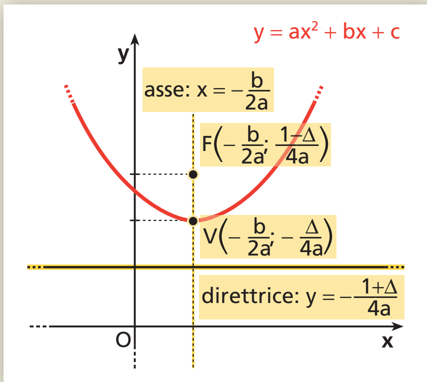
Equazione della parabola con asse parallelo all'asse y

L'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y è del tipo

$$y = ax^2 + bx + c,$$

dove a, b, c sono coefficienti reali e $a \neq 0$. L'asse ha equazione

$$x = -\frac{b}{2a},$$



il vertice è il punto $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, il fuoco è il punto $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ e la direttrice ha equazione $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$.

- L'equazione $y = ax^2 + bx + c$ fa corrispondere a ogni x *uno e un solo* valore di y, quindi una parabola con equazione di questo tipo *è il grafico di una funzione*.
- $\Delta = b^2 - 4ac$.

ESEMPIO

Rappresentiamo nel piano cartesiano la parabola di equazione

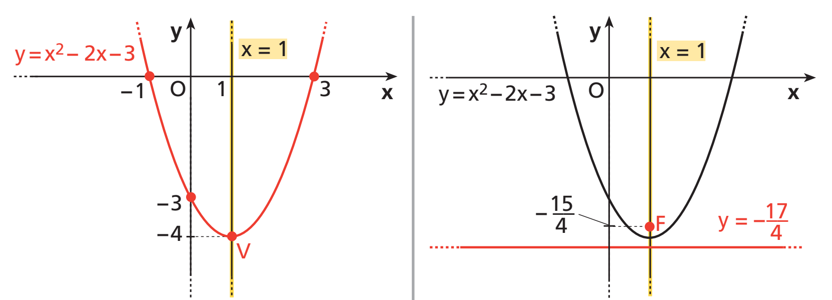
$$y = x^2 - 2x - 3$$

e troviamo l'asse di simmetria, il fuoco e la direttrice.

Per rappresentare in modo approssimato la parabola, basta trovare il vertice e alcuni altri punti, per esempio i punti di intersezione con gli assi cartesiani.

Applicando le formule $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ si trovano le coordinate del vertice $V(1; -4)$. Poiché $a = 1$, la parabola rivolge la concavità verso l'alto, quindi interseca sicuramente l'asse x. Ponendo $y = 0$, si ha $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$, e per $x = 0$ si ha $y = -3$. Dunque la parabola interseca gli assi cartesiani nei punti $(-1; 0)$, $(3; 0)$ e $(0; -3)$. Si può ora disegnare approssimativamente il suo grafico (figura 9*a*).
Applicando le formule si ottengono l'equazione dell'asse di simmetria $x = 1$, il fuoco $F\left(1; -\frac{15}{4}\right)$ e l'equazione della direttrice $y = -\frac{17}{4}$.

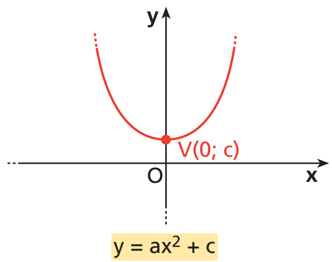
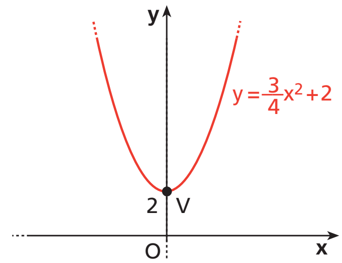
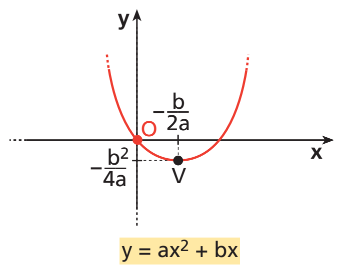
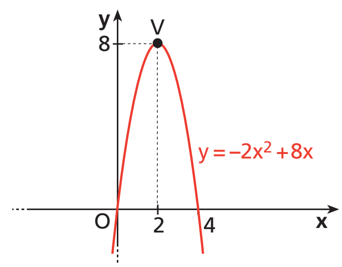
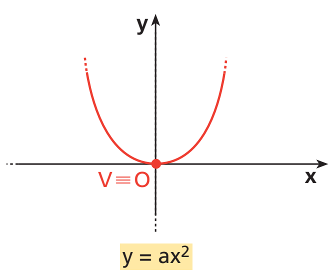
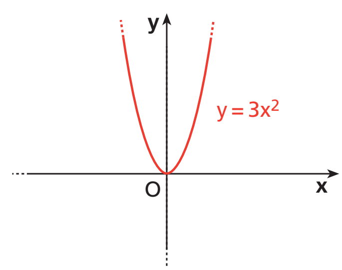
▼ Figura 9



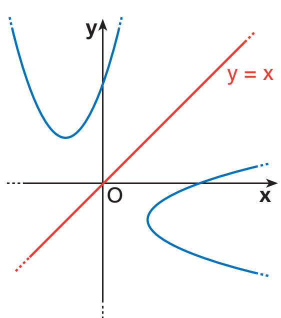
a. Parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$. **b.** Direttrice e fuoco della parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$.

- È possibile calcolare l'ordinata del vertice anche sostituendo la sua ascissa nell'equazione della parabola, perché V è un punto della curva.
- L'ascissa del fuoco è uguale a quella del vertice, ossia $x_F = 1$; l'ordinata del fuoco è:
$$y_F = \frac{1-\Delta}{4a} = -\frac{15}{4}.$$
La direttrice ha equazione:
$$y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{17}{4}.$$
- Fuoco e direttrice, pur essendo elementi fondamentali per la definizione della parabola, non sono utili per disegnarla.

Alcuni casi particolari dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$

Caso esaminato	Grafico	Esempio
$b = 0$ L'equazione diventa: $y = ax^2 + c$. La parabola ha vertice $V(0; c)$ e il suo asse di simmetria è l'asse y.		
$c = 0$ L'equazione diventa: $y = ax^2 + bx$. La parabola ha vertice $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a}\right)$ e passa sempre per l'origine O. Infatti le coordinate $(0; 0)$ soddisfano l'equazione.		
$b = 0, c = 0$ L'equazione diventa: $y = ax^2$. Ritroviamo la parabola già studiata con asse coincidente con l'asse y e vertice nell'origine.		

La parabola con asse parallelo all'asse x



Ogni parabola con asse parallelo all'asse x si può ottenere come corrispondente, nella simmetria assiale rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, di una parabola con asse parallelo all'asse y.

Per ricavare la sua equazione, all'equazione generale della parabola con asse parallelo all'asse y,

$$y = ax^2 + bx + c,$$

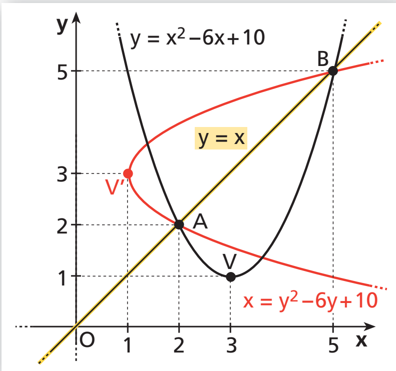
applichiamo le equazioni della simmetria:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Dobbiamo scambiare la variabile x con la variabile y, quindi otteniamo:

$$x = ay^2 + by + c$$ **equazione della parabola con asse parallelo all'asse x.**

ESEMPIO



◀ **Figura 10** Nella simmetria assiale rispetto alla retta di equazione $y = x$, alla parabola di equazione $y = x^2 - 6x + 10$ corrisponde la parabola di equazione $x = y^2 - 6y + 10$.

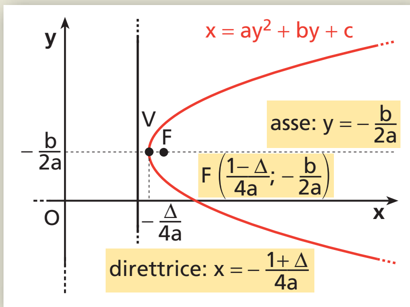
Anche per ottenere le altre caratteristiche della parabola (coordinate del vertice, equazione della direttrice, …) si possono applicare le equazioni della simmetria alle formule per la parabola con asse parallelo all'asse y, ottenendo i risultati che sintetizziamo nella seguente regola.

● Anche in questo caso, rispetto alle formule che conosci, basta scambiare la x con la y.

REGOLA

Equazione della parabola con asse parallelo all'asse x

L'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse x è del tipo $x = ay^2 + by + c$, dove a, b, c sono coefficienti reali e $a \neq 0$. L'asse ha equazione $y = -\frac{b}{2a}$; il vertice è il punto $V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$; il fuoco F ha coordinate $\left(\frac{1-\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$ e la direttrice ha equazione $x = -\frac{1+\Delta}{4a}$.



● L'equazione $x = ay^2 + by + c$ **non** fa corrispondere a ogni x uno e un solo valore di y, quindi una parabola con asse parallelo all'asse x **non** rappresenta una funzione da x a y.

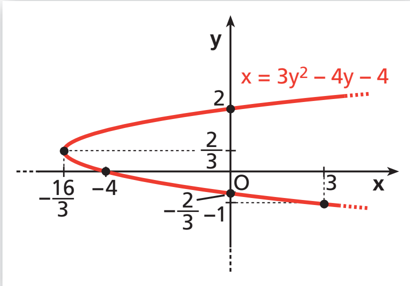
ESEMPIO

Disegniamo la parabola di equazione $x = 3y^2 - 4y - 4$.

Il vertice è $V\left(-\frac{16}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Determiniamo le coordinate di alcuni punti della parabola, mediante una tabella, attribuendo valori a y e ricavando quelli di x:

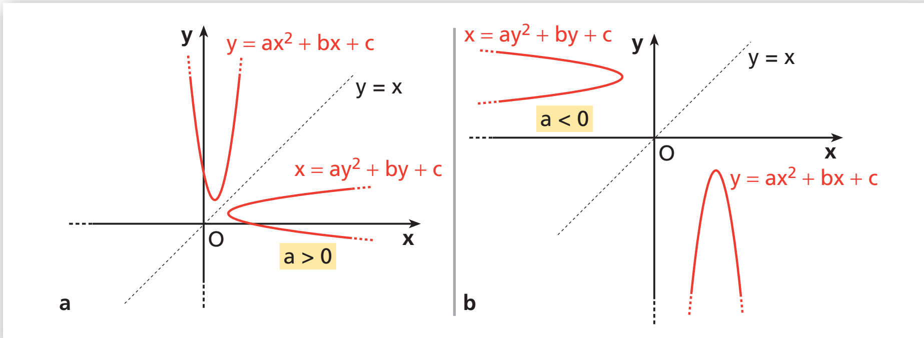
y	x		
$-\frac{2}{3}$	0	→	$\left(0; -\frac{2}{3}\right)$
0	-4	→	$(-4; 0)$
2	0	→	$(0; 2)$
-1	3	→	$(3; -1)$



◀ **Figura 11**

Il fuoco è $F\left(-\frac{21}{4}; \frac{2}{3}\right)$, l'equazione della direttrice è $x = -\frac{65}{12}$.

Mediante la simmetria possiamo anche comprendere che una parabola con asse parallelo all'asse x ha concavità rivolta verso la direzione positiva delle ascisse se $a > 0$, verso la direzione negativa se $a < 0$ (figura 12).

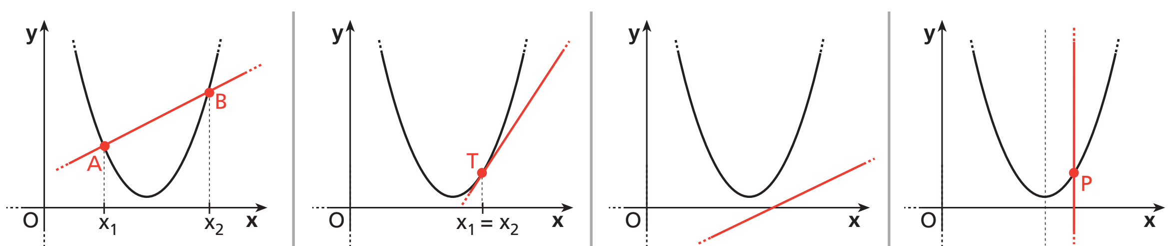


▶ **Figura 12** **Da una parabola con concavità rivolta verso l'alto ($a > 0$) otteniamo, per simmetria rispetto a $y = x$, una parabola con concavità rivolta verso la direzione positiva delle ascisse. Da una parabola con concavità verso il basso otteniamo una parabola con concavità verso la direzione negativa delle ascisse.**

2. LA POSIZIONE DI UNA RETTA RISPETTO A UNA PARABOLA

● Le considerazioni svolte si riferiscono sia a parabole con l'asse parallelo all'asse y, sia a parabole con asse parallelo all'asse x.

Una parabola e una retta possono essere secanti in due punti, essere tangenti in un punto, non intersecarsi in alcun punto oppure, se la retta è parallela all'asse della parabola, intersecarsi in un solo punto.
Considerando una parabola con asse parallelo all'asse y, i casi possibili sono quelli della figura 13.



a. La retta è secante la parabola. I punti di intersezione sono due.

b. La retta è tangente alla parabola. Il punto di intersezione è unico e si chiama *punto di tangenza*.

c. La retta è esterna alla parabola. Non vi sono punti di intersezione.

d. La retta è parallela all'asse della parabola: c'è un unico punto di intersezione.

▲ **Figura 13**

Supponiamo che la retta non sia parallela all'asse y e che, dunque, la sua equazione possa essere scritta nella forma esplicita $y = mx + q$.

Risolvendo il sistema formato dall'equazione della parabola e dall'equazione della retta

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

si ottiene l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = mx + q$, ossia

$$ax^2 + (b - m)x + c - q = 0,$$

le cui soluzioni sono le ascisse dei punti di intersezione della parabola con la retta.

Si ha che:

- se $\Delta > 0$, la retta è **secante** la parabola in due punti;
- se $\Delta = 0$, la retta è **tangente** alla parabola in un punto;
- se $\Delta < 0$, la retta è **esterna** alla parabola.

ESEMPIO

Determiniamo gli eventuali punti di intersezione della parabola di equazione

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$$

con la retta di equazione

$$y = x - 4.$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

Utilizzando il metodo del confronto, otteniamo l'equazione:

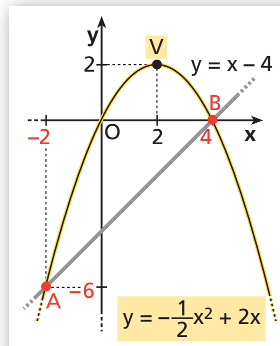
$$x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Essa ammette due soluzioni reali distinte, $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$, che sono le ascisse dei due punti di intersezione.
Troviamo ora le loro ordinate:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = x - 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = x - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -6 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

La retta interseca la parabola nei punti $A(-2; -6)$ e $B(4; 0)$.

Se $\Delta > 0$, l'equazione ammette due soluzioni, x_1 e x_2, reali e distinte, che corrispondono alle ascisse dei due punti di intersezione della retta con la parabola (figura 13*a*).
Se $\Delta = 0$, l'equazione ammette soluzioni reali e coincidenti, $x_1 = x_2$, e la retta è tangente alla parabola (figura 13*b*).
Se $\Delta < 0$, l'equazione non ammette soluzioni reali, pertanto la retta non presenta alcun punto di intersezione con la parabola (figura 13*c*).

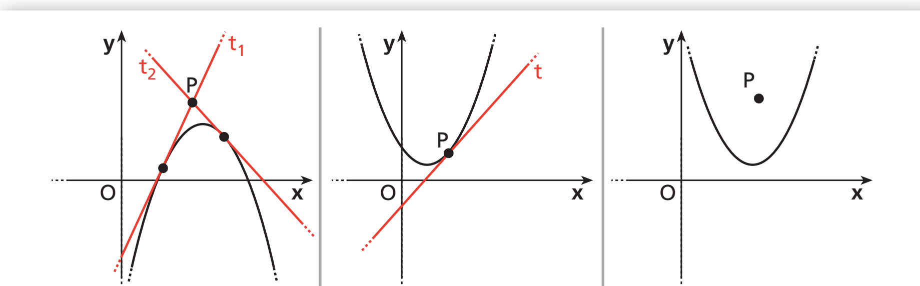


▲ **Figura 14** I punti $A(-2; -6)$ e $B(4; 0)$ sono le intersezioni della parabola $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ con la retta $y = x - 4$.

IN PRATICA
▶ Videolezione 18

3. LE RETTE TANGENTI A UNA PARABOLA

Le rette passanti per un punto P e tangenti a una parabola possono essere due, una o nessuna, a seconda della posizione di P rispetto alla parabola.
Se per un punto P si possono tracciare due rette tangenti, si dice che P è **esterno** alla parabola; se la retta è una sola, P è **sulla** parabola; se da P non è possibile tracciare rette tangenti, allora P si dice **interno** alla parabola.



a. *P* **esterno** alla parabola: due rette tangenti.
b. *P* **sulla** parabola: una retta tangente.
c. *P* **interno** alla parabola: non esistono rette tangenti.

◀ **Figura 15**

Per **determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti**, si procede nel seguente modo:

- si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per $P(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = m(x - x_0);$$

- si scrive il sistema delle equazioni del fascio di rette e della parabola:

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

- si pone la condizione di tangenza, ossia si pone uguale a 0 il discriminante dell'equazione risolvente, cioè $\Delta = \mathbf{0}$ (infatti, se una retta è tangente deve avere due intersezioni coincidenti con la parabola);
- si risolve rispetto a m l'equazione ottenuta e si sostituiscono nell'equazione del fascio gli eventuali valori determinati.

ESEMPIO

Determiniamo le equazioni delle eventuali rette passanti per $P(1; -5)$ e tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 2$.

- Scriviamo l'equazione del fascio di rette passanti per P:

$$y + 5 = m(x - 1).$$

- Scriviamo il sistema formato dalle equazioni del fascio e della parabola:

$$\begin{cases} y + 5 = m(x - 1) \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$$

- Per sostituzione otteniamo la seguente equazione risolvente di secondo grado:

$$x^2 - mx + m + 3 = 0.$$

- Calcoliamo Δ:

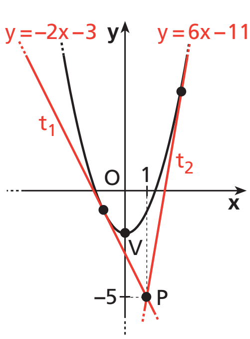
$$\Delta = m^2 - 4m - 12.$$

- Poniamo la condizione di tangenza, ossia $\Delta = 0$:

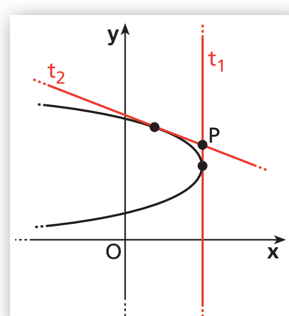
$$m^2 - 4m - 12 = 0.$$

Otteniamo le soluzioni $m_1 = -2$ e $m_2 = 6$ a cui corrispondono le due rette (figura a lato):

$$t_1: \ y = -2x - 3,$$
$$t_2: \ y = 6x - 11.$$



Se la parabola non ha l'asse parallelo all'asse y, può succedere che una delle sue tangenti passanti per P sia parallela all'asse y (figura 16). In questo caso la tangente non ha coefficiente angolare e quindi, nel porre $\Delta = 0$, non si trova il valore del coefficiente angolare relativo a tale retta.



▶ **Figura 16**

La formula di sdoppiamento

Data l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$, per ottenere l'equazione della retta tangente nel punto $P(x_0; y_0)$ della parabola, consideriamo l'equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$ del fascio di rette passanti per P e la mettiamo a sistema con quella della parabola:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases} \to ax^2 + (b - m)x + c + mx_0 - y_0 = 0.$$

Per ottenere la tangenza, le soluzioni dell'equazione devono essere entrambe coincidenti con x_0 e quindi avere somma $2x_0$. Per la condizione relativa alla somma delle radici di un'equazione di secondo grado:

$$-\frac{b - m}{a} = 2x_0 \to \boldsymbol{m = 2ax_0 + b}.$$

Sostituendo nell'equazione del fascio di rette, otteniamo:

$$y - y_0 = (2ax_0 + b)(x - x_0),$$

che fornisce la soluzione del problema.
Cerchiamo una forma più facile da ricordare. Svolgiamo i calcoli:

$$y - y_0 = 2ax_0x - 2ax_0^2 + bx - bx_0.$$

Consideriamo poi l'uguaglianza $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$. Moltiplicando entrambi i membri per 2, otteniamo:

$$2y_0 = 2ax_0^2 + 2bx_0 + 2c.$$

Sommiamo membro a membro quest'ultima uguaglianza e l'equazione precedente,

$$y + y_0 = 2ax_0x + bx + bx_0 + 2c,$$

raccogliamo b al secondo membro e dividiamo entrambi i membri per 2:

$$\boldsymbol{\frac{y + y_0}{2} = ax_0x + b\frac{x + x_0}{2} + c}.$$

Questa formula, detta **formula di sdoppiamento**, si può ricordare pensando che si ottiene dall'equazione della parabola sostituendo x con $\frac{x + x_0}{2}$, y con $\frac{y + y_0}{2}$ e x^2 con x_0x:

$$\begin{array}{ccccccc} \boldsymbol{y} & = & a\,\boldsymbol{x^2} & + & b\,\boldsymbol{x} & + c \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \boldsymbol{\frac{y + y_0}{2}} & & \boldsymbol{x_0x} & & \boldsymbol{\frac{x + x_0}{2}} & \end{array}$$

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione della tangente alla parabola di equazione $y = x^2 + 3x$ nel suo punto $P(-1; -2)$.

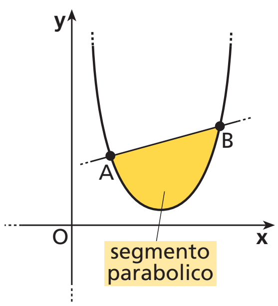
Utilizziamo la formula di sdoppiamento, dove vale $x_0 = -1$ e $y_0 = -2$:

$$y = x^2 + 3x \to \frac{y - 2}{2} = -x + 3\frac{x - 1}{2} \to y = x - 1.$$

- Il metodo che esaminiamo si può utilizzare soltanto se P appartiene alla parabola.

- Nell'equazione $Ax^2 + Bx + C = 0$, se $\Delta \geq 0$, si ha $-\frac{B}{A} = s$, dove s è la somma delle radici.

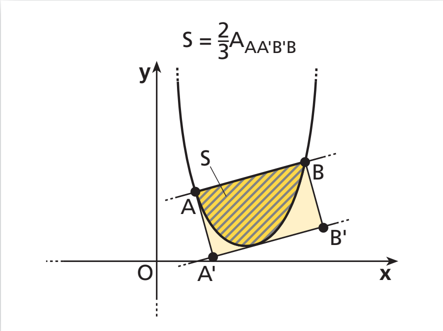
- L'uguaglianza si ottiene sostituendo le coordinate di P nell'equazione della parabola, in quanto P le appartiene.



● La proprietà del segmento parabolico è anche detta **teorema di Archimede**, in quanto è stata dimostrata dal noto matematico e fisico greco vissuto a Siracusa. Archimede (287-212 a.C.) compì studi nel campo della geometria e pose i fondamenti dell'idrostatica. Durante l'assedio di Siracusa, costruì anche una serie di macchine da guerra, organizzando la difesa contro i Romani.

Il segmento parabolico

Se una retta è secante una parabola nei punti A e B, il segmento AB e l'arco di parabola AB delimitano una parte di piano detta **segmento parabolico** (figura a lato nel colonnino).
Tracciamo la retta parallela ad AB e tangente alla parabola, e consideriamo su di essa le proiezioni A' e B' di A e B (figura 17). Si può dimostrare che l'area del segmento parabolico è uguale a $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo $AA'B'B$.



▲ Figura 17

ESEMPIO

Determiniamo l'area S del segmento parabolico individuato dalla parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ e dalla retta di equazione $y = x + \frac{1}{2}$.
Dal sistema delle due equazioni si ottengono i punti di intersezione:

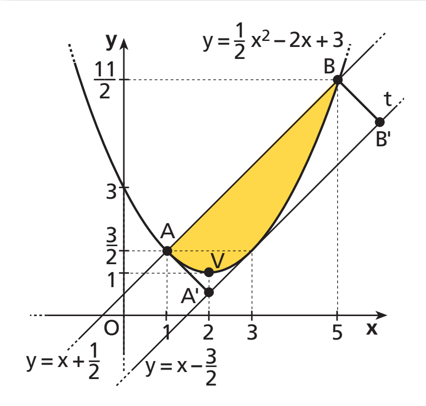
$$A\left(1; \frac{3}{2}\right) \text{ e } B\left(5; \frac{11}{2}\right).$$

Considerando una generica retta parallela ad AB, di equazione $y = x + q$, e imponendo la condizione di tangenza alla parabola, si ottiene la retta tangente t di equazione:

$$y = x - \frac{3}{2}.$$

Calcoliamo la misura di AB con la formula della distanza tra due punti. Otteniamo $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$, mentre la distanza di A dalla retta t vale $\sqrt{2}$.
Quindi l'area del rettangolo $AA'B'B$ è: $4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$.
L'area del segmento parabolico è:

$$S = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}.$$



► Figura 18

IN PRATICA
► Videolezione 19

4. COME DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA PARABOLA

Poiché nell'equazione della parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

sono presenti tre coefficienti a, b e c, per poterli determinare occorrono tre informazioni sulla parabola, dette *condizioni*. Queste permettono di impostare un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a, b, c.

● D'ora in poi, quando parleremo di parabola senza specificare altro, sottintenderemo che si tratta di una parabola con asse parallelo all'asse y.

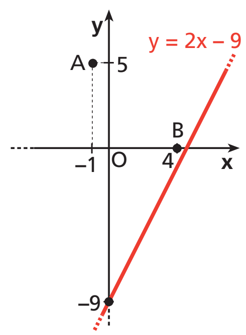
Forniamo l'elenco di alcune possibili condizioni:

- sono note le coordinate del vertice e del fuoco;
- sono note le coordinate del vertice (o del fuoco) e l'equazione della direttrice;
- la parabola passa per tre punti non allineati;
- la parabola passa per due punti e si conosce l'equazione dell'asse;
- la parabola passa per un punto e sono note le coordinate del vertice (o del fuoco);
- la parabola passa per un punto e sono note le equazioni dell'asse e della direttrice;
- la parabola è tangente a una retta data e passa per due punti.

● Le coordinate note di un punto della parabola corrispondono a *una* condizione, perché permettono di scrivere un'equazione in a, b e c; le coordinate note del fuoco (o del vertice) corrispondono a *due* condizioni, perché possiamo scrivere due equazioni, utilizzando le formule relative all'ascissa e all'ordinata; l'asse noto della parabola, la direttrice nota o una tangente nota corrispondono a *una* condizione.

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione della parabola passante per i punti $A(-1; 5)$ e $B(4; 0)$ e tangente alla retta di equazione $y = 2x - 9$.



Imponiamo alla parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ il passaggio per i due punti A e B:

$$5 = a - b + c \qquad \text{passaggio per } A(-1; 5),$$
$$0 = 16a + 4b + c \qquad \text{passaggio per } B(4; 0).$$

Ora imponiamo che la retta $y = 2x - 9$ sia tangente alla parabola.
Scriviamo il sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 2x - 9 \end{cases}$$

e poniamo nell'equazione risolvente $ax^2 + (b - 2)x + c + 9 = 0$ la condizione $\Delta = 0$:

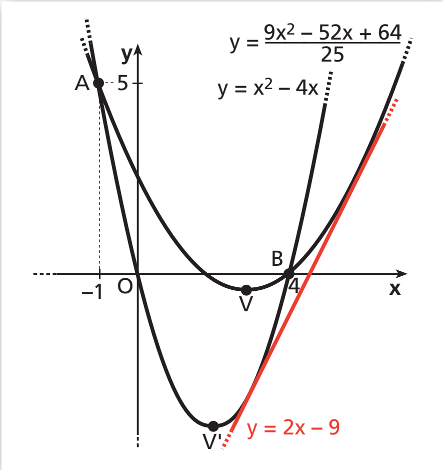
$$\Delta = (b - 2)^2 - 4a \cdot (c + 9) = 0.$$

Dalle tre condizioni otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} a - b + c = 5 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ (b - 2)^2 - 4a(c + 9) = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, ricaviamo:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a = \dfrac{9}{25} \\ b = -\dfrac{52}{25} \\ c = \dfrac{64}{25} \end{cases}$$



◄ **Figura 19** La parabola $y = x^2 - 4x$ passa per l'origine e ha il vertice $V'(2; -4)$; la parabola $y = \dfrac{9x^2 - 52x + 64}{25}$ ha il vertice $V\left(\dfrac{26}{9}; -\dfrac{4}{9}\right)$. Entrambe sono tangenti alla retta di equazione $y = 2x - 9$ e passano per A e B.

Pertanto, sono due le parabole che soddisfano le condizioni richieste:

$$y = x^2 - 4x, \qquad y = \frac{9x^2 - 52x + 64}{25}.$$

Se la parabola ha l'asse parallelo all'asse x, si fanno considerazioni del tutto analoghe a quelle finora svolte.

ESPLORAZIONE

Le coniche di Apollonio

Il Grande Geometra

Apollonio nacque a Perge, in Panfìlia, attorno al 262 a.C. e studiò ad Alessandria, centro degli studi matematici del mondo occidentale dell'epoca. Visse per un breve periodo a Pergamo, sede della biblioteca che, per grandezza e importanza, era seconda solo a quella di Alessandria, la quale conteneva circa 500 000 volumi. Tra le mura delle due Accademie di matematica più attive e stimolanti del tempo, Apollonio scrisse la sua grande opera, per la quale è considerato uno dei più brillanti matematici del periodo ellenistico, tanto da essere chiamato «Grande Geometra».
L'opera che rese famoso Apollonio è *Τά Κωνικά* o, in latino, *Conicorum Libri*, ovvero *Il libro delle coniche*.

È una delle poche opere giunte fino a noi ed è quindi estremamente preziosa, anche se incompleta. Originariamente, il trattato era composto da otto libri. Il libro VIII è andato perduto. I libri dal V al VII, i più innovativi di tutta l'opera, ci sono pervenuti solo nella traduzione araba. Nel libro I, Apollonio racconta di aver scritto in fretta una prima versione delle *Coniche*, subito dopo aver ricevuto, ad Alessandria, la visita dello studioso Neucrate, che lo aveva convinto della necessità di pubblicare i suoi risultati. I libri IV e VII si aprono con una dedica al re di Pergamo, città in cui il matematico ebbe modo di rivedere e perfezionare gli otto volumi.

Un punto di vista innovativo

L'argomento «coniche» non era affatto nuovo all'epoca di Apollonio. Le sezioni di un cono si studiavano già da circa un secolo e mezzo.
I matematici erano a conoscenza del fatto che i tre tipi fondamentali di coniche (parabola, ellisse e iperbole) potevano essere ottenuti tagliando un cono con un piano. Però, prima di Apollonio, per ottenere ciascuna conica si considerava un diverso tipo di cono.
Apollonio dimostrò per la prima volta che da un unico cono era possibile ottenere tutti i tipi di coniche, variando l'inclinazione del piano di intersezione.
Eliminò inoltre la restrizione a considerare solo coni retti, dimostrando che le sezioni coniche si possono ottenere da un generico cono circolare, anche obliquo.

◄ Nike di Samotracia (Louvre, Parigi). Il periodo ellenistico è compreso tra la morte di Alessandro Magno (323 a.C.) e la battaglia di Azio (31 a.C.), che segnò il passaggio del predominio dai Greci ai Romani. Questo periodo, di cui la Nike ben rappresenta il fermento artistico, fu straordinariamente fecondo anche per la scienza. In particolare, per la matematica, insieme con Apollonio troviamo Euclide (365-300 a.C.) e Archimede (287-212 a.C.).

Attività

Le coniche al museo

Le coniche sono un argomento che appassiona i curatori di alcuni musei di matematica italiani.

- Fai una ricerca in Internet relativa a come viene presentato l'argomento.

@ **Cerca nel Web:**
Laboratorio di macchine matematiche, Il Giardino di Archimede, MateFitness

5. I FASCI DI PARABOLE

IN PRATICA
▶ Videolezione 20

Consideriamo le seguenti parabole, γ e γ', con asse parallelo all'asse delle ordinate:

$$\gamma:\ y = -2x^2 + 10x - 7,$$
$$\gamma':\ y = x^2 - 2x + 2.$$

Scriviamo le equazioni in forma implicita:

$$y + 2x^2 - 10x + 7 = 0,$$
$$y - x^2 + 2x - 2 = 0.$$

Ora formiamo tutte le possibili *combinazioni lineari* di tali equazioni:

$$p(y + 2x^2 - 10x + 7) + q(y - x^2 + 2x - 2) = 0,$$

con $p, q \in \mathbb{R}$ e non entrambi nulli.

● Una **combinazione lineare** di due equazioni $A(x; y) = 0$ e $B(x; y) = 0$ è un'equazione del tipo $p \cdot A(x; y) + q \cdot B(x; y) = 0$, con $p, q \in \mathbb{R}$ e non entrambi nulli.

Tale equazione rappresenta infinite parabole al variare di p e q. In particolare:

- se $p = 0$ e $q \neq 0$, si ha la parabola γ';
- se $q = 0$ e $p \neq 0$, si ha la parabola γ.

Poiché p e q non sono entrambi nulli supponiamo, per esempio, $p \neq 0$ e dividiamo entrambi i membri per p per ottenere un'equazione con un solo parametro $k = \frac{q}{p}$:

$$y + 2x^2 - 10x + 7 + k(y - x^2 + 2x - 2) = 0.$$

● L'uso di un solo parametro facilita lo studio dell'equazione, ma impedisce di ottenere dal fascio l'equazione della parabola γ.

Scriviamo l'equazione in una forma equivalente raccogliendo i termini simili:

$$(1 + k)y + (2 - k)x^2 + 2(k - 5)x + 7 - 2k = 0.$$

A ogni valore di $k \in \mathbb{R}$ corrisponde una parabola particolare.
L'insieme delle parabole individuate da tale relazione si chiama **fascio di parabole** definito da γ e γ'.

- Se $k = -1$, l'equazione contiene soltanto la variabile x:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad (x - 1)(x - 3) = 0 \quad \rightarrow \quad x - 1 = 0 \vee x - 3 = 0.$$

  Essa rappresenta la **parabola degenere** costituita dall'insieme delle due rette $x - 1 = 0$ e $x - 3 = 0$.
- Se $k \neq -1$, possiamo dividere per $1 + k$ e scrivere il fascio in forma esplicita:

$$y = \frac{k-2}{1+k} \cdot x^2 + \frac{2(5-k)}{1+k} \cdot x + \frac{2k-7}{1+k}.$$

● L'equazione scritta in questo modo rappresenta una parabola generica di cui è possibile studiare più facilmente le caratteristiche, come la concavità o il vertice.

- Se nell'equazione $y + 2x^2 - 10x + 7 + k(y - x^2 + 2x - 2) = 0$ poniamo $k = 0$, otteniamo la parabola γ. Non esiste invece un valore di k a cui corrisponda la parabola γ'.

Le parabole γ e γ' sono dette **generatrici** del fascio.

In questo esempio le parabole si intersecano nei due punti $P(1; 1)$, $Q(3; 5)$. Le coordinate di questi due punti soddisfano le equazioni di entrambe le parabole e anche quella di ogni parabola del fascio. Infatti, sostituendo nelle equazioni implicite delle parabole γ e γ' le coordinate di Q, otteniamo

$$5 + 2(3)^2 - 10 \cdot 3 + 7 = 0, \qquad 5 - (3)^2 + 2 \cdot (3) - 2 = 0,$$

e quindi, indipendentemente dal valore dato a k, anche

$$5 + 2(3)^2 - 10 \cdot 3 + 7 + k[5 - (3)^2 + 2 \cdot 3 - 2] = 0 + k \cdot 0 = 0.$$

Si ottiene lo stesso risultato sostituendo le coordinate di P.

Per i punti P e Q passano quindi tutte le parabole del fascio. Questi punti sono detti **punti base** del fascio.
Consideriamo nuovamente l'equazione del fascio in forma esplicita.
Se $k = 2$, si annulla il coefficiente di x^2 e l'equazione diventa $y = 2x - 1$, ossia l'equazione della retta passante per P e Q, che può quindi essere considerata come una *parabola degenere* del fascio. Tracciamo il grafico del fascio (figura 20).

Si può dimostrare che si ottiene lo stesso fascio se a γ e γ' si sostituiscono altre due parabole del fascio, dove una delle due può anche essere la retta passante per i punti base.

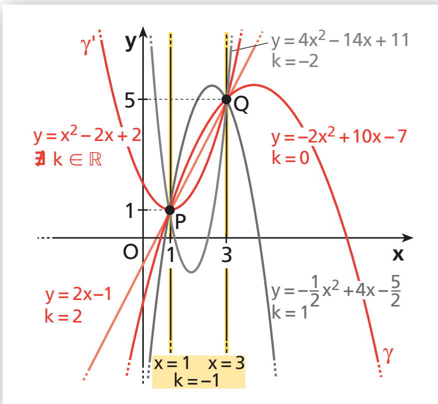


Figura 20 Il fascio di parabole di equazione $(1 + k)y + (2 - k)x^2 + 2(k - 5)x + 7 - 2k = 0$ per $k = -2; -1; 0; 1; 2$.

DEFINIZIONE

Fascio di parabole

Date due parabole γ e γ' di equazioni scritte in forma implicita

$$y - ax^2 - bx - c = 0, \qquad y - a'x^2 - b'x - c' = 0,$$

con a e a' non entrambi nulli, si chiama fascio di parabole generato da γ e γ' l'insieme di parabola γ' e di tutte le parabole rappresentate dall'equazione:

$$y - ax^2 - bx - c + k(y - a'x^2 - b'x - c') = 0, \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

γ e γ' si dicono *generatrici del fascio*.
L'equazione del fascio può essere scritta anche nella forma

$$(1 + k)y - (a + ka')x^2 - (b + kb')x - (c + kc') = 0,$$

e, se $k \neq -1$, si ha:

$$y = \frac{a + ka'}{1 + k}x^2 + \frac{b + kb'}{1 + k}x + \frac{c + kc'}{1 + k}.$$

Se $k \neq \frac{-a}{a'}$, l'equazione scritta rappresenta, al variare di k, l'equazione di infinite parabole appartenenti al fascio di generatrici γ e γ'.
Per esempio, $y = kx^2 + (1 - k)x + k$ rappresenta, per $k \neq 0$, un fascio di parabole.

La generatrice γ si ottiene per $k = 0$, mentre γ' non si può ottenere per nessun valore di k, o, come abbiamo visto per i fasci di rette e di circonferenze, diciamo che γ' si ottiene per $k \to \infty$.

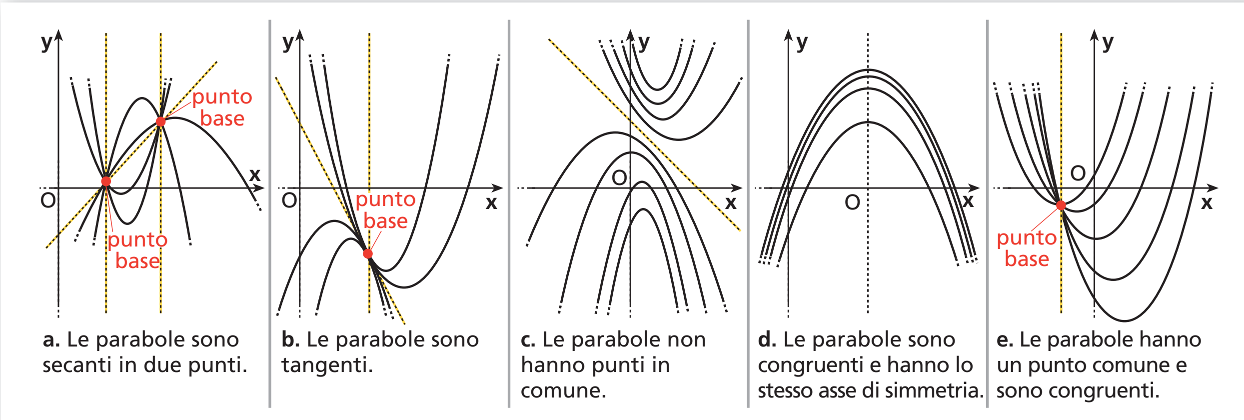
Quindi, spesso, scriveremo l'equazione del fascio nella forma:

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

dove almeno uno dei coefficienti A, B, C è funzione di k.

Lo studio di un fascio di parabole

Studiare un fascio di parabole vuol dire descriverne le caratteristiche, in particolare, determinare le generatrici, gli eventuali punti base, le parabole degeneri.
I casi possibili sono mostrati nella figura 21.



▲ **Figura 21** I casi possibili di fasci di parabole.

Esaminiamo in modo sintetico il procedimento relativo ai diversi elementi.

Generatrici
Si riscrive in forma implicita l'equazione del fascio e si raccoglie rispetto al parametro k.
Le equazioni delle due generatrici si ottengono una per $k = 0$ e l'altra uguagliando a 0 l'espressione che è moltiplicata per k.

Punti base
Si risolve il sistema delle equazioni delle due generatrici. I punti base possono essere due distinti (parabole secanti), due coincidenti (parabole tangenti), uno (parabole congruenti e con diverso asse di simmetria) o nessuno. Se non ci sono punti base, le parabole non hanno punti in comune e possono essere congruenti e con lo stesso asse di simmetria.

Parabole degeneri
Le parabole degeneri sono rette che devono passare per gli eventuali punti base. Esse si ottengono:
a) se il coefficiente di y non dipende dal parametro, uguagliando a 0 il coefficiente di x^2 (se dipende dal parametro); la retta che si ottiene è parallela all'asse x o non è parallela agli assi cartesiani;
b) se il coefficiente di y dipende dal parametro, uguagliando a 0 tale coefficiente; si può ottenere una retta o una coppia di rette parallele all'asse y.

● Nella figura 21, nei diversi casi, abbiamo segnato in giallo le rette che sono parabole degeneri del fascio.
Nel caso *a* le parabole degeneri sono due: una è la retta che passa per i punti base, l'altra è costituita dalla coppia di rette parallele all'asse y passanti per i punti base.

ESEMPIO
Consideriamo il fascio di parabole di equazione:
$$y = (k - 2)x^2 + (1 - k)x + k.$$
Raccogliamo i termini rispetto a k e scriviamo l'equazione nella variabile k:
$$k(x^2 - x + 1) + (-2x^2 + x - y) = 0.$$
Le due generatrici si ottengono per $k = 0$ e $k \to \infty$, cioè:
$$\gamma: -2x^2 + x - y = 0 \quad \rightarrow \quad y = -2x^2 + x,$$
$$\gamma': x^2 - x + 1 = 0.$$

Per determinare eventuali punti base scriviamo il sistema delle equazioni delle generatrici:

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 \\ 2x^2 - x + y = 0 \end{cases}$$

Il discriminante della prima equazione è negativo, quindi il sistema non ammette soluzioni reali. Le parabole non hanno punti in comune, come nelle figure 21c o 21d; poiché nell'equazione del fascio il coefficiente $k - 2$ di x^2 varia con k, le parabole non sono congruenti.
Osserviamo poi che, posto uguale a 0 il coefficiente di x^2 nell'equazione iniziale del fascio, otteniamo, per $k = 2$, la retta $y = -x + 2$, che è una parabola degenere del fascio.

● I fasci di parabole con assi paralleli all'asse delle ascisse si trattano in modo simile a quelli discussi in questo paragrafo. Negli esercizi troverai anche tale tipo di fasci.

Come trovare l'equazione di un fascio di parabole

Per determinare l'equazione di un fascio di parabole si deve scrivere la combinazione lineare delle equazioni di due parabole qualsiasi del fascio (che possono anche essere quelle degeneri), prese come generatrici.

ESEMPIO

Scriviamo l'equazione del fascio di parabole passanti per $A(2; 1)$ e $B(4; 2)$.
A e B sono i punti base del fascio. Scriviamo le equazioni delle parabole degeneri γ e γ_1, cioè la retta AB e la coppia di rette parallele all'asse y passanti per A e per B:

$$\gamma: \frac{y-1}{2-1} = \frac{x-2}{4-2} \rightarrow y - 1 = \frac{x-2}{2} \rightarrow 2y - x = 0;$$

$$\gamma_1: (x-2)(x-4) = 0.$$

Il fascio ha allora equazione:

$$2y - x + k(x-2)(x-4) = 0.$$

In generale, possiamo distinguere i seguenti casi.

Fasci di parabole per due punti distinti

Dati i punti distinti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ e indicata con $y = mx + q$ l'equazione della retta AB, si può dimostrare che l'equazione

$$y = mx + q + k(x - x_A)(x - x_B)$$

rappresenta un fascio di parabole passanti per A e B.

● Verifica che con la formula ottieni l'equazione del fascio $y = kx^2 - (2k + 3)x + 2$ con punti base $A(0; 2)$, $B(2; -4)$.

Fasci di parabole tangenti in un punto a una retta data

Dato il punto $T(x_T; y_T)$ appartenente alla retta r di equazione $y = mx + q$, si può dimostrare che l'equazione

$$y = mx + q + k(x - x_T)^2$$

rappresenta un fascio di parabole tangenti in T alla retta r.

● Verifica che il fascio delle parabole tangenti alla retta $y = x$ in $T(1; 1)$ ha equazione $y = kx^2 + (1 - 2k)x + k$.

LA DISTANZA DI SICUREZZA

In quanto spazio si ferma un'automobile in corsa?

Il quesito completo a pag. 307

Spesso chi guida non presta attenzione alle condizioni che dovrebbero mettere in sicurezza se stesso, i suoi passeggeri e gli altri automobilisti.

Rispettare i limiti non basta

La segnaletica, le multe, le campagne per la sicurezza sono basate quasi esclusivamente sulla velocità, ma molti incidenti dipendono dalla distanza tra un veicolo e quello che lo precede.

La velocità, in particolare, contribuisce a determinare la distanza di sicurezza. Questa deve essere superiore allo spazio di reazione e allo spazio di frenata, sommati.

I due spazi dipendono da fattori psicologici (la nostra attenzione), da limiti tecnologici (l'evoluzione delle automobili) e dalle condizioni ambientali (lo stato dell'asfalto, la situazione meteorologica ecc.).

Due regole empiriche

Non ci sono regole matematiche o fisiche per determinarli. Ma sulla base delle statistiche possiamo ipotizzare che in condizioni normali questi due spazi (espressi in metri) dipendano dalla velocità (espressa in kilometri all'ora) secondo le relazioni seguenti:

- lo spazio di reazione si ottiene moltiplicando la velocità per 0,3;
- lo spazio di frenata è dato dal quadrato della velocità per 0,01.

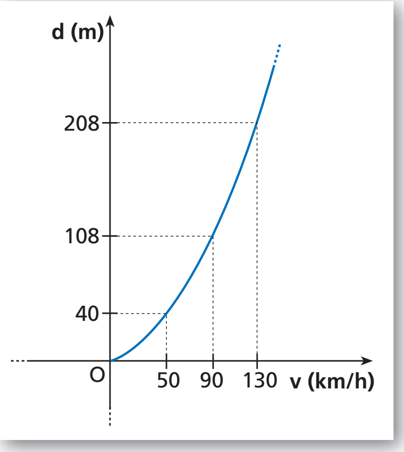
Facciamo due esempi: a 60 km/h lo spazio di reazione è di 18 metri, mentre quello di frenata è di 36. Quindi per fermarsi servono almeno 54 metri.

A 100 km/h la reazione richiede 30 metri e la frenata 100. In tutto ne servono almeno 130.

In generale, la distanza di sicurezza minima è data dalla somma dei due spazi, di reazione e di frenata:

$$d = 0{,}3v + 0{,}01v^2,$$

e possiamo rappresentarla con una parabola nel piano $(v; d)$.

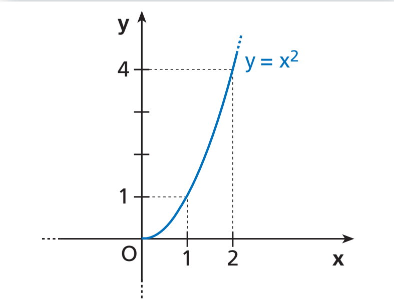


Ovviamente la parabola passa per l'origine: da fermi si può stare in sicurezza a distanza nulla.

Inoltre, della parabola ci interessa soltanto la parte nel primo quadrante, cioè quella per velocità v positive. Dal grafico puoi notare quanto rapidamente aumenti la distanza di sicurezza al crescere della velocità.

L'area del quadrato

Per avere un'idea di quanto cresca velocemente una parabola, prendi il quadrato di lato x. La sua area è $y = x^2$, cioè descrive il ramo destro di una parabola col vertice nell'origine degli assi. Al variare di x, la coppia $(x; y)$ si muove sul ramo destro di $y = x^2$. Aumentando di poco la lunghezza del lato, l'area può aumentare notevolmente. Se hai un lato di un metro (100 centimetri) e lo allunghi di soli 2 centimetri, l'area del secondo quadrato è più grande dell'area del primo di ben 404 centimetri quadrati. Un aumento del lato del 2% ha causato sull'area un aumento di oltre il 4%. Puoi osservare lo stesso fenomeno esaminando l'area del cerchio in funzione del raggio o quella dell'esagono in funzione del lato.



LABORATORIO DI MATEMATICA
LA PARABOLA

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di Wiris troviamo le parabole del fascio $y = (k + 3)x^2 - kx + 1$ che individuano sulla retta $y = x + 3$ una corda lunga $3\sqrt{2}$. Tracciamo poi il grafico di tutto.

- Attiviamo Wiris, quindi apriamo il modello del sistema a due equazioni per inserirvi l'equazione del fascio di parabole e quella della retta (figura 1).
- Diamo *Calcola* e troviamo, in funzione di k, le coordinate dei punti di intersezione fra le parabole del fascio e la retta.

Un problema sulle parabole

$$\text{risolvere}\left(\begin{cases} y=(k+3)\cdot x^2-k\cdot x+1 \\ y=x+3 \end{cases},\{x, y\}\right) \rightarrow \left\{\left\{x=\frac{-2}{k+3}, y=\frac{3\cdot k+7}{k+3}\right\},\{x=1, y=4\}\right\}$$

▲ Figura 1

- Esprimiamo la lunghezza della corda inserendo nella formula della distanza fra due punti le coordinate degli estremi (figura 2).
- Impostiamo e risolviamo l'equazione ottenuta uguagliando l'espressione in k a $3\sqrt{2}$.
- Sostituiamo nel fascio i due valori trovati di k, mettendo in evidenza le equazioni delle parabole che soddisfano l'ipotesi del problema.

$$d=\sqrt{\left(\frac{-2}{k+3}-1\right)^2+\left(\frac{3\cdot k+7}{k+3}-4\right)^2};$$

$$\text{risolvere}(d=3\cdot\sqrt{2}) \rightarrow \left\{\{k=-2\},\left\{k=-\frac{7}{2}\right\}\right\}$$

$$\text{sostituire}(y=(k+3)\cdot x^2-k\cdot x+1,\ k,\ -2) \rightarrow y=x^2+2\cdot x+1$$

$$\text{sostituire}(y=(k+3)\cdot x^2-k\cdot x+1,\ k,\ -7/2) \rightarrow y=-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{7}{2}\cdot x+1$$

▲ Figura 2

- Scriviamo infine le istruzioni necessarie per ottenere il grafico.

Nel sito: ► 2 esercitazioni guidate ► 7 esercitazioni in più

Esercitazioni

Nei seguenti fasci di parabole determina, con il computer, gli eventuali punti base e i valori del parametro reale k che individuano le parabole che soddisfano le condizioni indicate. Traccia il grafico delle corrispondenti parabole.

1 $y = kx^2 - 2x - k + 1$;
a) passante per il punto $P\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$;
b) formante con la retta di equazione $y = -1$ una corda lunga 4;
c) tangente alla retta di equazione $y = 4x - 5$.

$\left[(-1; 3) \text{ e } (1; -1); \text{a) } 2; \text{b) } -1, \frac{1}{3}; \text{c) } 3\right]$

2 $y = (k - 2)x^2 - 2(k - 1)x + k$;
a) passanti per $P(1; 0)$;
b) intersecanti l'asse y in un punto distante $\frac{5}{2}$ dall'origine;
c) intersecanti l'asse x in due punti A e B e l'asse y in un punto C tali che il triangolo ABC abbia area 3.

$\left[(1; 0); \text{a) } \mathbb{R}; \text{b) } -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}; \text{c) } \frac{3}{2}, 3\right]$

3 Determina l'equazione della parabola passante per l'origine e per i punti A e B, intersezioni della retta di equazione $y = x + 10$ con la circonferenza di centro $C(-2; 1)$ e raggio 5.

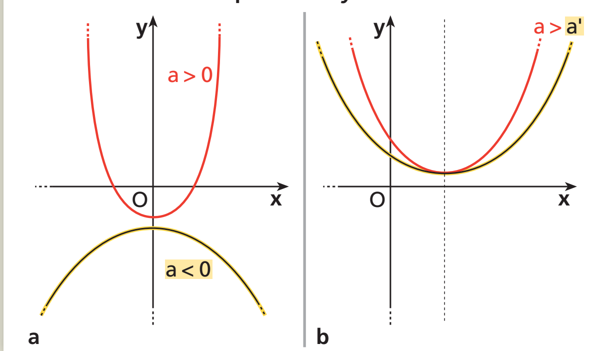
$\left[y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x\right]$

LA TEORIA IN SINTESI
LA PARABOLA

1. LA PARABOLA E LA SUA EQUAZIONE

- **Parabola**: luogo geometrico dei punti equidistanti da una retta (**direttrice**) e da un punto (**fuoco**).
- **Asse della parabola**: retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice.
- **Vertice**: punto di intersezione fra asse e parabola.

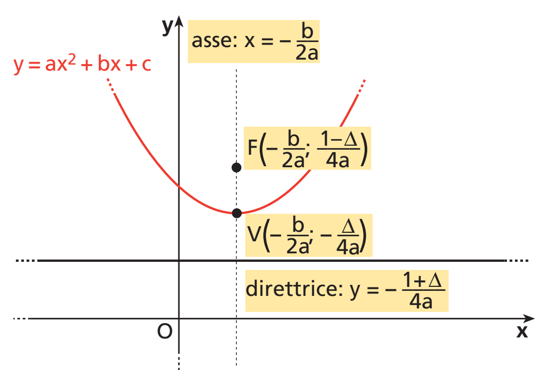
Concavità e apertura di $y = ax^2 + bx + c$



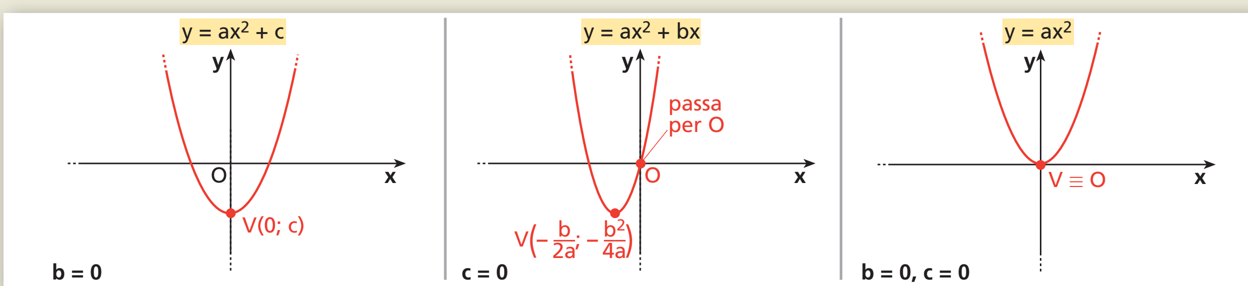
- **Asse parallelo all'asse y**
  - **Equazione di una parabola**
    – con **asse parallelo all'asse y**: $y = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$);
    – con **asse coincidente con l'asse y e con vertice nell'origine**: $y = ax^2$ (con $a \neq 0$).
  - **Concavità** e **apertura** della parabola dipendono solo da a (figure *a* e *b*).

Caratteristiche della parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$

asse	$x = -\dfrac{b}{2a}$
vertice	$V\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$
fuoco	$F\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$
direttrice	$y = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$



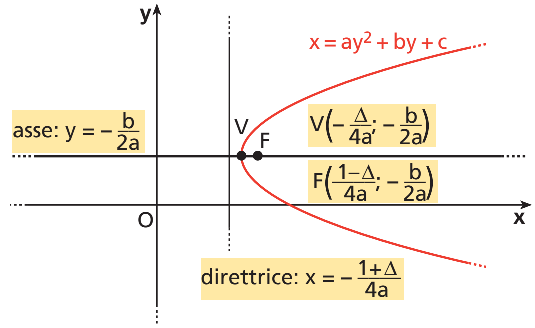
Casi particolari



- **Asse parallelo all'asse x**
  - **Equazione di una parabola con asse parallelo all'asse x**: $x = ay^2 + by + c$ (con $a \neq 0$).
  - La **concavità** della parabola è rivolta verso la direzione positiva dell'asse x se $a > 0$, verso la direzione negativa dell'asse x se $a < 0$.

Caratteristiche della parabola di equazione $x = ay^2 + by + c$

asse	$y = -\dfrac{b}{2a}$
vertice	$V\left(-\dfrac{\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$
fuoco	$F\left(\dfrac{1-\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$
direttrice	$x = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$

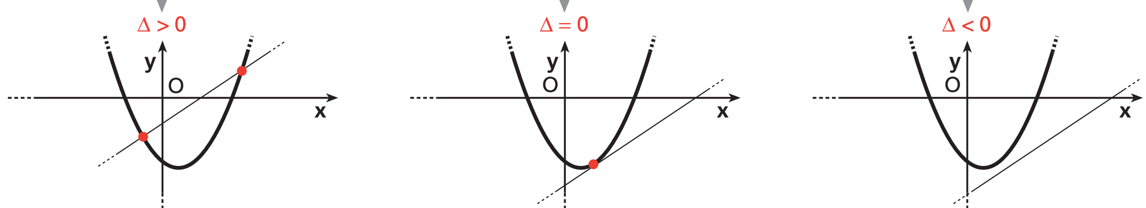


2. LA POSIZIONE DI UNA RETTA RISPETTO A UNA PARABOLA

Posizione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ rispetto alla retta $y = mx + q$ (non parallela all'asse y)

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases} \longrightarrow$$

si ottiene come risolvente un'equazione di secondo grado in x il cui discriminante Δ può essere:



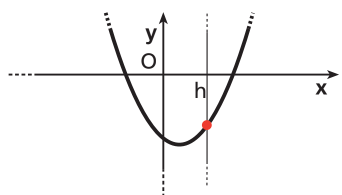
retta secante | retta tangente | retta esterna

Intersezione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ con la retta $x = h$ (parallela all'asse y)

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = h \end{cases} \longrightarrow$$

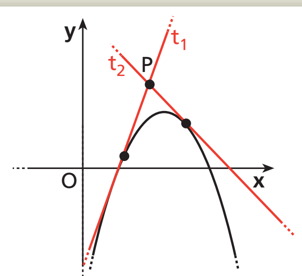
si ottengono le coordinate di un punto

retta secante in un punto

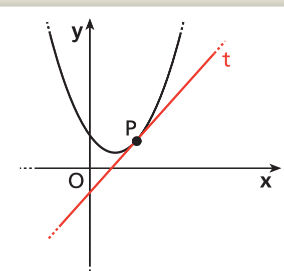


3. LE RETTE TANGENTI A UNA PARABOLA

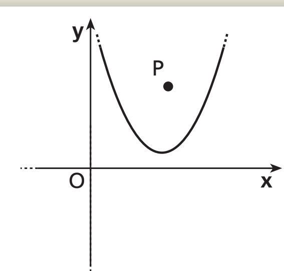
■ Per un punto P è possibile condurre due, una o nessuna tangente a una parabola.



a. *P* **esterno** alla parabola: due rette tangenti.



b. *P* **sulla** parabola: una retta tangente.



c. *P* **interno** alla parabola: non esistono rette tangenti.

Bergamini, Trifone, Barozzi **MATEMATICA.BLU - Vol. 3** © Zanichelli 2012 *con Maths in English*

- Per determinare le equazioni delle eventuali rette passanti per $P(x_0; y_0)$ e tangenti alla parabola:
  - si scrive l'equazione del fascio di rette di centro P: $y - y_0 = m(x - x_0)$;
  - si scrive il sistema delle equazioni del fascio e della parabola: $\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$;
  - si pone $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente (**condizione di tangenza**); si possono presentare i seguenti casi:
    – $m_1 \neq m_2$: le rette tangenti sono due;
    – $m_1 = m_2$: la retta tangente è una sola (il punto P appartiene alla parabola);
    – $m_1, m_2 \notin \mathbb{R}$: non esistono tangenti passanti per P.
- Si procede analogamente per le tangenti alla parabola $x = ay^2 + by + c$, tenendo conto che, nel caso in cui una delle due tangenti condotte da P sia parallela all'asse y, se si pone la condizione $\Delta = 0$, si ottiene un solo valore di m.
- Se il punto P appartiene alla parabola, si può utilizzare la formula di sdoppiamento:

$$\frac{y + y_0}{2} = ax_0x + b\frac{x + x_0}{2} + c.$$

4. COME DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA PARABOLA

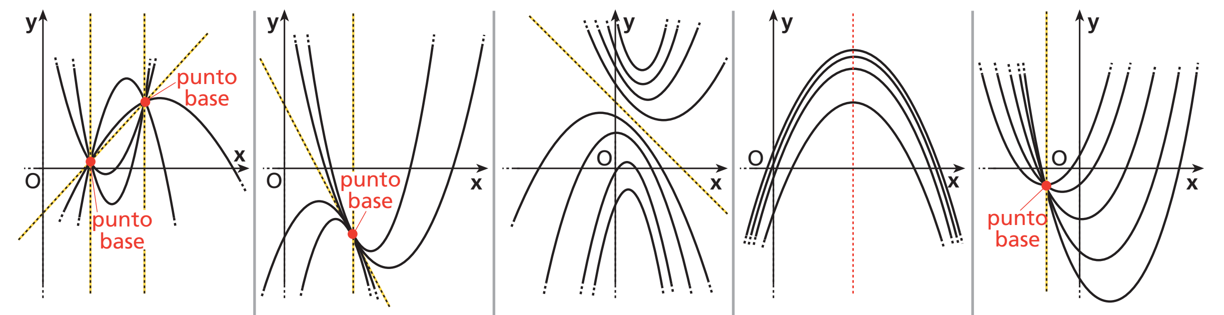
- Per determinare i tre coefficienti a, b, c, presenti nell'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ (o $x = ay^2 + by + c$) sono necessarie **tre condizioni.** Per esempio, sono note:
  - le coordinate del vertice e del fuoco;
  - l'equazione della direttrice e le coordinate del vertice (o del fuoco);
  - le coordinate di tre punti (non allineati) per i quali passa la parabola;
  - le coordinate del vertice (o del fuoco) e di un punto appartenente alla parabola;
  - le coordinate di due punti appartenenti alla parabola e la condizione di tangenza.

5. I FASCI DI PARABOLE

- **Fascio generato dalle parabole γ e γ' (generatrici)**
  Siano $y - ax^2 - bx - c = 0$ e $y - a'x^2 - b'x - c' = 0$, con a e a' non entrambi nulli, le due generatrici. Il fascio è l'insieme della parabola γ' e di tutte le parabole rappresentate dall'equazione:

$$y - ax^2 - bx - c + k(y - a'x^2 - b'x - c') = 0, \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

- **Parabole degeneri**: le rette appartenenti al fascio (quando si annullano i coefficienti dei termini di secondo grado).
- **Punti base del fascio**: i punti che appartengono a tutte le parabole del fascio.
- **Diverse tipologie di fasci**



a. Le parabole sono secanti in due punti.
b. Le parabole sono tangenti.
c. Le parabole non hanno punti in comune.
d. Le parabole sono congruenti e hanno lo stesso asse di simmetria.
e. Le parabole hanno un punto comune e sono congruenti.

- **Equazione del fascio di parabole**
  - **passanti per due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$**: $y = mx + q + k(x - x_A) \cdot (x - x_B)$, dove $y = mx + q$ è l'equazione della retta AB;
  - **tangenti a una retta r (di equazione $y = mx + q$) nel punto $T(x_T; y_T)$**: $y = mx + q + k(x - x_T)^2$.

1. LA PARABOLA E LA SUA EQUAZIONE

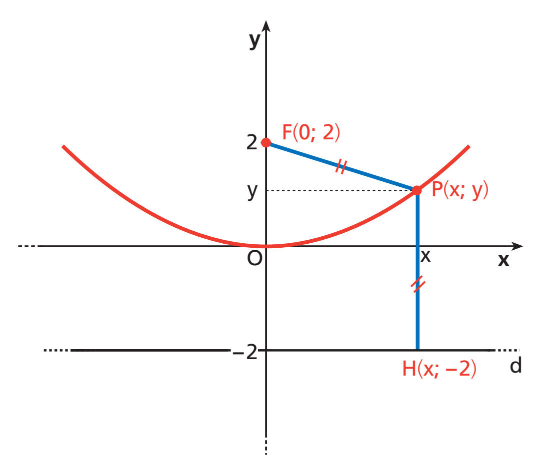
▶ Teoria a pag. 308

La parabola con asse coincidente con l'asse y e vertice nell'origine

1 ESERCIZIO GUIDA

Applicando la definizione, determiniamo l'equazione della parabola che ha fuoco $F(0; 2)$ e direttrice d di equazione $y = -2$.

La parabola è il luogo dei punti equidistanti dal fuoco e dalla direttrice. Disegniamo il fuoco F e la direttrice d. Indichiamo con $P(x; y)$ un punto generico della parabola e con H il piede della perpendicolare condotta da P alla direttrice.



Se $P(x; y)$ sta sulla parabola, le sue coordinate soddisfano la condizione $\overline{PF} = \overline{PH}$.
Pertanto, poiché

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4}$$

$$\overline{PH} = |y - (-2)| = |y + 2|$$

abbiamo:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = |y + 2|.$$

Eleviamo i due membri al quadrato e svolgiamo i calcoli:

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = (y + 2)^2$$

$$x^2 + \cancel{y^2} - 4y + \cancel{4} = \cancel{y^2} + 4y + \cancel{4}$$

$$x^2 = 8y.$$

Ricaviamo y:

$$y = \frac{x^2}{8}.$$

Questa è l'equazione della parabola richiesta.

Determina l'equazione della parabola della quale sono assegnati il fuoco F e la direttrice d.

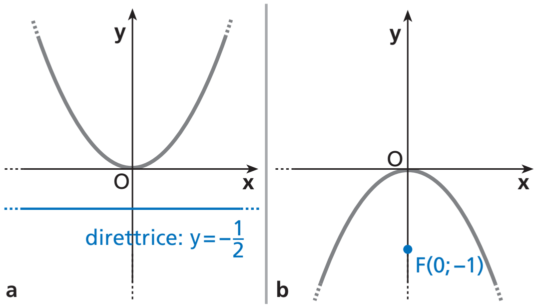
2 $F(0; 3)$ $\quad d: y = -3$

3 $F\left(0; \frac{1}{3}\right)$ $\quad d: y = -\frac{1}{3}$

4 $F(0; -4)$ $\quad d: y = 4$

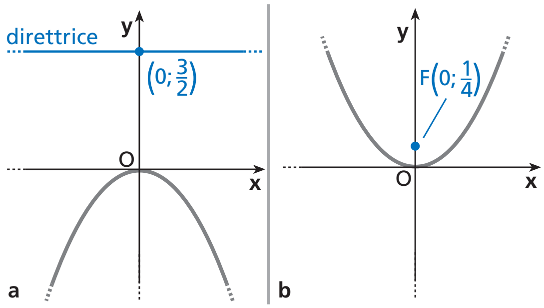
Trova le equazioni delle seguenti parabole, utilizzando i dati delle figure.

5



$\left[y = \frac{1}{2}x^2;\ y = -\frac{1}{4}x^2\right]$

6



$\left[y = -\frac{1}{6}x^2;\ y = x^2\right]$

7 Una parabola ha per asse l'asse y e il vertice nell'origine degli assi. Il fuoco è nel punto $F\left(0; \frac{5}{2}\right)$ e la direttrice passa per il punto $A\left(0; -\frac{5}{2}\right)$. Determina l'equazione della parabola. $\left[y = \frac{1}{10}x^2\right]$

8 Una parabola ha vertice nell'origine, asse coincidente con l'asse y e direttrice di equazione $y = \frac{4}{3}$. Dopo aver individuato le coordinate del fuoco, scrivi l'equazione della parabola. $\left[F\left(0; -\frac{4}{3}\right); y = -\frac{3}{16}x^2\right]$

9 **ESERCIZIO GUIDA**

Rappresentiamo nel piano cartesiano la parabola di equazione $y = \frac{x^2}{4}$ e determiniamo le sue caratteristiche, cioè le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice.

La parabola è del tipo $y = ax^2$, pertanto il vertice è l'origine degli assi e l'asse di simmetria è l'asse y.

Costruiamo la tabella, tenendo presente che i punti della parabola di ascissa opposta hanno la stessa ordinata, e disegniamo la parabola per punti. Il fuoco F ha ascissa nulla e ordinata

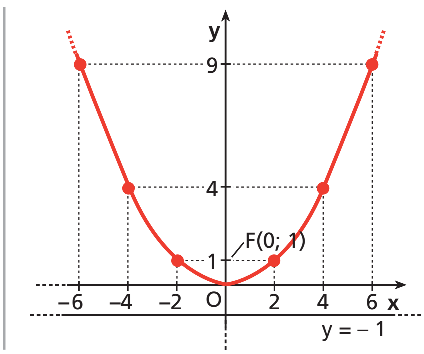
$$y_F = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{4}} = 1,$$

quindi $F(0; 1)$. L'equazione della direttrice è

$$y = -\frac{1}{4a},$$

quindi $y = -1$.

x	y
0	0
±2	1
±4	4
±6	9



Dopo aver trovato le caratteristiche della parabola di equazione assegnata, disegnala nel piano cartesiano.

10 $y = \frac{3}{2}x^2$

11 $y = -\frac{5}{8}x^2$

12 $x^2 = \frac{2}{5}y$

13 $x^2 + 2y = 0$

14 $4y + 3x^2 = 0$

15 $2x^2 = 5y$

16 Per quali valori di a l'equazione $y = \frac{1}{a-1}x^2$ rappresenta una parabola? Trova a affinché il fuoco abbia coordinate $(0; 2)$ e disegna la parabola ottenuta. $[a \neq 1; a = 9]$

17 L'equazione $ay - 3x^2 = 0$ può rappresentare una parabola per qualsiasi valore di a? Trova per quali valori di a la direttrice ha equazione $y = \frac{1}{2}$ e disegna la parabola ottenuta. $[a \neq 0; a = -6]$

18 Quale valore deve avere il coefficiente a nell'equazione $y = ax^2$ affinché la parabola che essa rappresenta passi per il punto $P(-2; 8)$? $[2]$

19 Una parabola di equazione $y = ax^2$ ha fuoco nel punto $F(0; 5)$. Quanto vale il coefficiente a? $\left[\frac{1}{20}\right]$

20 Per quale valore di a la parabola di equazione $y = ax^2$ ha direttrice di equazione $y = \frac{1}{8}$? $[-2]$

21 Data l'equazione $y = ax^2$, trova a affinché la direttrice abbia equazione $y = -4$. Stabilisci poi se i punti $P(4; 1)$, $Q\left(1; \frac{1}{4}\right)$, $R\left(-2; \frac{1}{4}\right)$ appartengono alla parabola. $\left[\frac{1}{16}\right]$

22 Nella parabola di equazione $y = ax^2$, trova a affinché il fuoco, che ha ordinata negativa, abbia distanza dalla direttrice uguale a $\frac{8}{3}$. $\left[-\frac{3}{16}\right]$

23 Stabilisci come è rivolta la concavità delle seguenti parabole, determina le loro caratteristiche e disegna il loro grafico: $y = -4x^2$, $\quad 2y + 3x^2 = 0$, $\quad 2x^2 = \frac{1}{3}y$.

24 Nell'equazione $y = ax^2$ determina per quale valore di a si ha una parabola con la concavità rivolta verso il basso e con il fuoco che ha distanza da $O(0; 0)$ uguale a $\frac{2}{3}$. $\left[-\frac{3}{8}\right]$

25 Verifica che la parabola di equazione $y = x^2$ ha un'apertura maggiore della parabola $y = 2x^2$, disegnandone i grafici.

Per ogni coppia di parabole assegnata, stabilisci quale delle due parabole ha apertura minore.

26 $y = \frac{3}{4}x^2$ e $y = -\frac{4}{3}x^2$. **27** $y = -3x^2$ e $y = \frac{1}{3}x^2$. **28** $y = 6x^2$ e $y = 5x^2$.

La parabola con asse parallelo all'asse y

Qui di seguito sono assegnate le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice di alcune parabole. Determina l'equazione di ciascuna parabola applicando la definizione.

29 $F(-2; -1)$, $\quad d: y = -3$. $\left[y = \frac{1}{4}x^2 + x - 1\right]$

30 $F(2; 3)$, $\quad d: y = -3$. $\left[y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right]$

31 $F\left(-2; -\frac{19}{4}\right)$, $\quad d: y = -\frac{21}{4}$. $[y = x^2 + 4x - 1]$

32 $F(-1; -1)$, $\quad d: y = -\frac{3}{2}$. $\left[y = x^2 + 2x - \frac{1}{4}\right]$

33 $F\left(2; -\frac{15}{4}\right)$, $\quad d: y = -\frac{17}{4}$. $[y = x^2 - 4x]$

34 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo le caratteristiche della parabola $y = x^2 + 3x + 2$ e disegniamo il suo grafico.

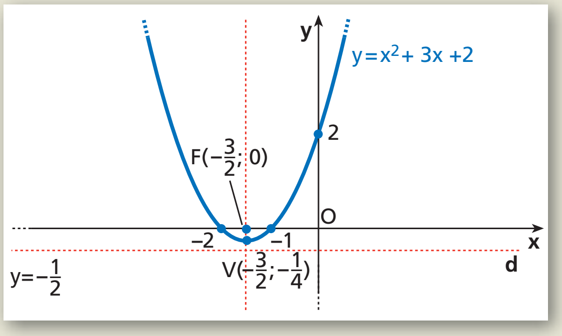
Le caratteristiche della parabola sono l'asse di simmetria, il vertice, il fuoco, la direttrice.

- L'asse ha equazione $x = -\frac{b}{2a}$, quindi $x = -\frac{3}{2}$.
- Il vertice ha ascissa $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$ e l'ordinata è $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{9-8}{4} = -\frac{1}{4}$.

Poiché il vertice è un punto della parabola, l'ordinata del vertice si può ottenere anche sostituendo l'ascissa $x = -\frac{3}{2}$ nell'equazione della parabola. Il vertice è allora $V\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

- Il fuoco F ha la stessa ascissa del vertice, $x_F = -\frac{3}{2}$. L'ordinata è $y_F = \frac{1-\Delta}{4a} = \frac{1-(9-8)}{4 \cdot 1} = 0$.
  Pertanto è $F\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.
- L'equazione della direttrice è
  $$y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{1+1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Per disegnare la parabola è utile determinare i punti di intersezione con gli assi cartesiani.
Per $x = 0$ si ha $y = 2$ e per $y = 0$ si ha $x_1 = -1$ e $x_2 = -2$. I punti di intersezione sono allora $(0; 2)$, $(-1; 0)$ e $(-2; 0)$.
Rappresentiamo ora la parabola.



Determina le caratteristiche delle seguenti parabole, cioè trova le coordinate del vertice, del fuoco, l'equazione della direttrice e dell'asse di simmetria e rappresentale graficamente.

35 $y = x^2 - 4x + 3$; $\quad y = -2x^2 + 4x$.

36 $y = -x^2 + 4$; $\quad y = x^2 - 4x + 4$.

37 $y = (x-1)(x+2)$; $\quad x^2 - 2x + y = 0$.

38 $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$; $\quad y + 4x = x^2 + 2$.

39 $y = x^2 - 2x - 8$; $\quad y = -x^2 - 2x + 3$.

40 $3y = x^2 - 4x$; $\quad y = -x^2 - 8x$.

41 $y = -x^2 + 3x + 4$; $\quad y = -3x^2 + 3$.

42 $y = x^2 - x$; $\quad y = (x-1)^2$.

43 $y = 3x^2 + 6$; $\quad y = -x^2 + 2x + 3$.

44 $y = -x^2 - \frac{1}{2}$; $\quad y = x^2 - 4x$.

45 $y = 4 + x^2$; $\quad y = -x^2 + \frac{1}{4}x$.

46 $y = (x+3)^2$; $\quad y = -x^2 + 6x$.

47 Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'equazione $ay = (a+1)x^2 + ax$ rappresenta una parabola? $[a \neq 0 \wedge a \neq -1]$

48 Per quali valori di k l'equazione $y = (k^2 - 1)x^2 + x - k - 3$:
a) rappresenta una parabola con la concavità rivolta verso l'alto?
b) rappresenta una parabola che passa per l'origine? [a) $k < -1 \vee k > 1$; b) $k = -3$]

49 Let $y = f(x) = x^2 - 6x + 8$. Find the vertex and axis of symmetry. Does its graph open up or down? Find the maximum or minimum value of $f(x)$ and state which it is. Sketch the graph. Label the vertex and intercepts on your graph.

(USA *Southern Illinois University Carbondale,* Final Exam, Fall 2001)

$[V(3; -1); x = 3]$

50 TEST L'insieme di tutti i valori del parametro m per cui le curve di equazioni $x^2 + y^2 = 1$ e $y = x^2 + m$ hanno esattamente un unico punto in comune è:

A $\left\{-\frac{5}{4}, -1, 1\right\}$ B $\left\{-\frac{5}{4}, 1\right\}$ C $\{-1, 1\}$ D $\left\{-\frac{5}{4}\right\}$ E $\{1\}$

(*Kangourou Italia, Categoria Student*, 2003)

51 TEST Per quale valore non nullo di k la distanza tra i vertici delle parabole $y = kx^2 - 2x + 1$ e $y = -2x^2 + 2$ è uguale a 1?

A Per ogni k. B 1 C -1 D ± 1 E Per nessun valore di k.

(*CISIA, Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso*)

La parabola con asse parallelo all'asse x

52 Scrivi l'equazione del luogo dei punti equidistanti da $F(-1; -1)$ e dalla retta di equazione $x = -\frac{3}{2}$.

$\left[x = y^2 + 2y - \frac{1}{4}\right]$

53 Scrivi l'equazione della parabola che ha il vertice nell'origine e per fuoco il punto $F\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. Disegna la parabola e trova l'equazione della direttrice.

$\left[x = -\frac{1}{2}y^2; x = \frac{1}{2}\right]$

54 Una parabola ha il vertice nell'origine degli assi e asse di simmetria coincidente con l'asse x. La direttrice passa per il punto $P(2; 4)$. Scrivi l'equazione della parabola e disegnala nel piano cartesiano.

$\left[x = -\frac{1}{8}y^2\right]$

55 Disegna in uno stesso piano cartesiano le parabole di equazione $x = ay^2$, con $a = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{2}$, $a = 2$, $a = -2$. Scrivi le caratteristiche delle parabole al variare di a.

56 Una parabola ha il vertice nell'origine e il fuoco di coordinate $\left(0; \frac{1}{16}\right)$; una seconda parabola ha il vertice nell'origine e direttrice di equazione $x = -\frac{1}{8}$. Trova le equazioni delle due parabole e i loro punti di intersezione. (Suggerimento. Per trovare i punti di intersezione di due parabole basta risolvere il sistema formato dalle loro equazioni.)

$\left[y = 4x^2, x = 2y^2; (0; 0), \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{4}; \frac{\sqrt[3]{4}}{4}\right)\right]$

57 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la parabola di equazione $x = -y^2 + 6y - 5$, determiniamo le sue caratteristiche e disegniamola nel piano cartesiano.

- Poiché $a < 0$, la concavità è verso sinistra.
- Calcoliamo il discriminante.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 20 = 16.$$

- Troviamo le coordinate del vertice.

$V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$; pertanto:

$$x_V = -\frac{16}{-4} = 4; \; y_V = -\left(-\frac{6}{2}\right) = 3; \; V(4; 3).$$

- L'asse ha equazione $y = 3$.
- Troviamo le coordinate del fuoco.
Il fuoco ha la stessa ordinata del vertice:

$$F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; 3\right), \; x_F = \frac{1-16}{-4} = \frac{15}{4}.$$

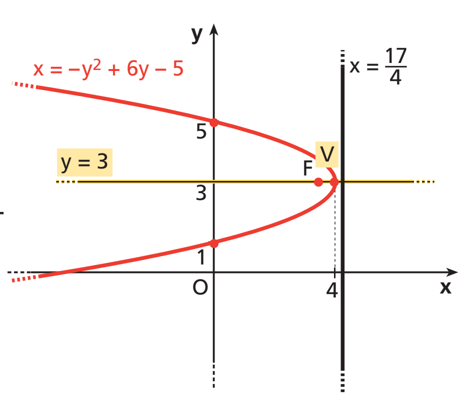
- La direttrice ha equazione

$$x = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{1+16}{-4} = \frac{17}{4}.$$

- Determiniamo alcuni punti della parabola, osservando che per $x = 0$, si ha

$$-y^2 + 6y - 5 = 0, \text{ da cui } y = 1 \text{ e } y = 5.$$

y	x
0	−5
1	0
2	3
4	3
5	0



Determina le caratteristiche delle seguenti parabole e traccia il loro grafico.

58 $x = -2y^2 + 3y$; $\quad x = \frac{1}{4}y^2 + y$.

59 $x - y^2 + 2y + 8 = 0$; $\quad x = (y-3)^2$.

60 $x = y^2 + y$; $\quad x = -y^2 - 8$.

61 $x = -2y^2 + \frac{1}{2}y$; $\quad x = -y^2 - 4y - 4$.

62 $x = \frac{1}{4}y^2 + 1$; $\quad x + y^2 - 2 = 0$.

63 $y^2 - x + 2y + 1 = 0$; $\quad x = y^2 - 9$.

64 $x = \frac{1}{2}y^2 - 8y$; $\quad x = 4y^2 + 12y + 9$.

65 $y^2 - 6y + x = 0$; $\quad y^2 - x - 3y + 2 = 0$.

66 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $2x - (y-1)(y+2) + 1 = 0$ rappresenta una parabola. V F

b) L'equazione $x(x-1) = y - 2$ rappresenta una parabola con l'asse parallelo all'asse x. V F

c) L'equazione $x - 2y(y-1) = 0$ rappresenta una parabola che passa per l'origine. V F

d) L'equazione $x(1-x) = y(2-y)$ rappresenta una parabola. V F

e) L'equazione $x^2 + y^2 = y(1+y) + 3$ rappresenta una circonferenza. V F

67 L'equazione $x = (b-2)y^2 + by$ rappresenta una parabola per ogni valore di b? Trova:
a) per quali valori di b il fuoco ha ascissa positiva;
b) per quali valori di b la parabola rivolge la concavità verso la direzione positiva dell'asse x.

[$b \neq 2$; a) $b < -1 \vee 1 < b < 2$; b) $b > 2$]

68 L'equazione $ax - (a+1)y^2 = 0$ può rappresentare una parabola? Determina il valore di a affinché il suo fuoco sia il punto $(3; 0)$.

$\left[a \neq 0 \wedge a \neq -1;\ a = -\frac{12}{11}\right]$

69 **TEST** Una parabola è rappresentata da un'equazione della forma $x - h = a(y-k)^2$. Se $|a| < 1$, l'enunciato che correttamente ne identifica il grafico è:

A) la parabola non è una funzione.

B) la parabola ha un vertice nel punto $(-h; -k)$.

C) la parabola ha un asse di simmetria verticale.

D) il grafico ha subìto una dilatazione verticale di fattore a.

(CAN *Barry Mabillard Learning Centre*, 2006)

I grafici di funzioni che contengono archi di parabola

70 **ESERCIZIO GUIDA**

Rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = x^2 - 3x - |x-1| + 1.$$

Poiché

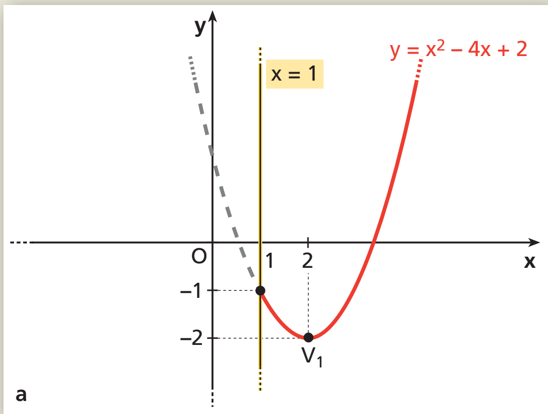
$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$$

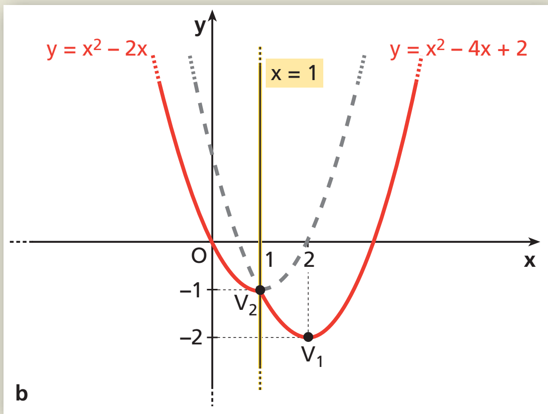
la funzione data è la seguente:

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 - 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Le equazioni $y = x^2 - 4x + 2$ e $y = x^2 - 2x$ sono le equazioni di due parabole rispettivamente di vertici $V_1(2; -2)$ e $V_2(1; -1)$.
Consideriamo la prima equazione e disegniamo solo l'arco di parabola contenuto nel semipiano con $x \geq 1$.

Consideriamo la seconda equazione e disegniamo solo l'arco di parabola contenuto nel semipiano delle $x < 1$.
Il grafico della funzione è rappresentato dalla linea continua.





Rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

71 $y = x^2 - x - |x - 1|$

72 $y = -x^2 + |x + 4|$

73 $y = -x^2 + |x|$

74 $y = x^2 + |x - 2| + 2$

75 $y = x \cdot |x - 1|$

76 $y = x^2 - 2|x|$

77 $y = x^2 - |x^2 - 1|$

78 $y = |x^2 - 4x|$

79 $y = x^2 - |x| - |x - 2|$

80 $y = |x^2 - 2|x||$

81 **ESERCIZIO GUIDA**

Dopo averne determinato il dominio, rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = 1 + \sqrt{x + 1}.$$

Per determinare il dominio occorre porre il radicando maggiore o uguale a 0, cioè:

$$x + 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq -1.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -1\}$.
Tracciamo nel piano cartesiano la retta $x = -1$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ascissa minore di -1 (figura *a*).
Per rappresentare la funzione isoliamo la radice:

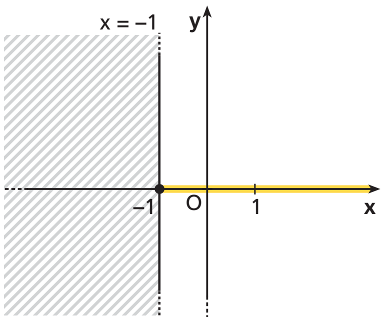
$$y - 1 = \sqrt{x + 1}.$$

Questa equazione è equivalente a:

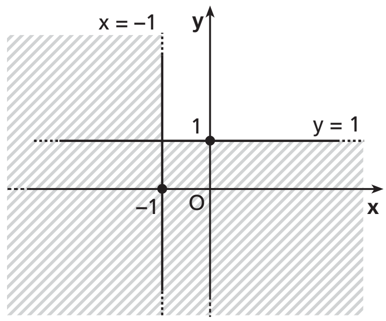
$$\begin{cases} y - 1 \geq 0 \\ (y - 1)^2 = x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ y^2 - 2y + 1 = x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ x = y^2 - 2y \end{cases}$$

Tracciamo nel piano cartesiano la retta $y = 1$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ordinata minore di 1 (figura *b*).

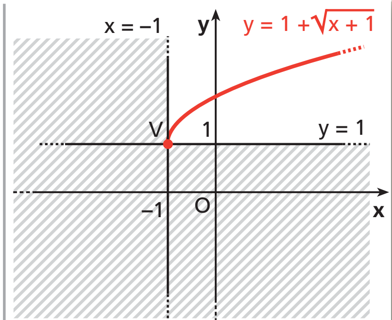
L'equazione $x = y^2 - 2y$ è l'equazione di una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse x con vertice $V(-1; 1)$.
Tracciamo il ramo di parabola contenuto nella parte di piano che non abbiamo oscurato (figura *c*).



a. Il dominio di $y = 1 + \sqrt{x+1}$.



b. Regione contenente il grafico della funzione.



c. Il grafico della funzione.

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

82 $y = 2 + \sqrt{x+2}$

83 $y = 1 - \sqrt{x}$

84 $y = 3 - \sqrt{2x+3}$

85 $y = -\sqrt{x-1}$

86 $y = 2\sqrt{x+4}$

87 $y = 2 - \sqrt{2x-4}$

88 $y = \sqrt{x-9}$

89 $x = 2 + \sqrt{2y}$

90 $y = 2 + \sqrt{x+1}$

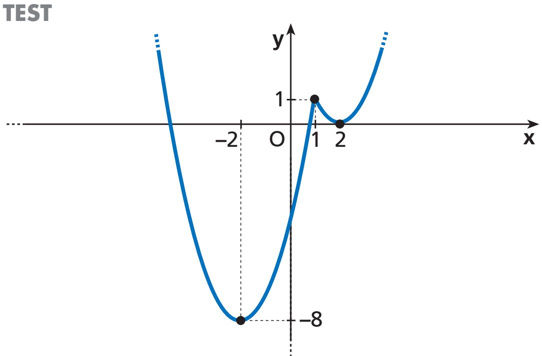
91 $x - \sqrt{y+3} = 0$

92 $y = \sqrt{|x|+1}$

93 $y = 1 + \sqrt{|x-1|-2}$

ESERCIZI VARI I grafici con archi di parabola

94 **TEST**



Nel grafico è rappresentata la funzione:

A $y = x^2 - 4|x-1|$.

B $y = x^2 - 4|x| - 4$.

C $y = -x^2 + 4|x-1|$.

D $y = x^2 + 4|x-1|$.

E $y = x^2 - 4|x| + 4$.

95 **TEST** La curva di equazione $y = 2\sqrt{x+1} - 2$ rappresenta un arco di parabola. Qual è la sua equazione?

A $x = \dfrac{y^2}{2} + y + 1$, con $y \geq -2$.

B $x = \dfrac{y^2}{4} + y$, con $y < -2$.

C $x = \dfrac{y^2}{4} - 2$, con $y \geq 0$.

D $x = \dfrac{y^2}{4} + y$, con $y \geq -2$.

E $x = \dfrac{y^2}{2} - 3$, con $y > 0$.

96 **TEST** Quale fra le seguenti funzioni *non* ha come grafico uno o più archi di parabola?

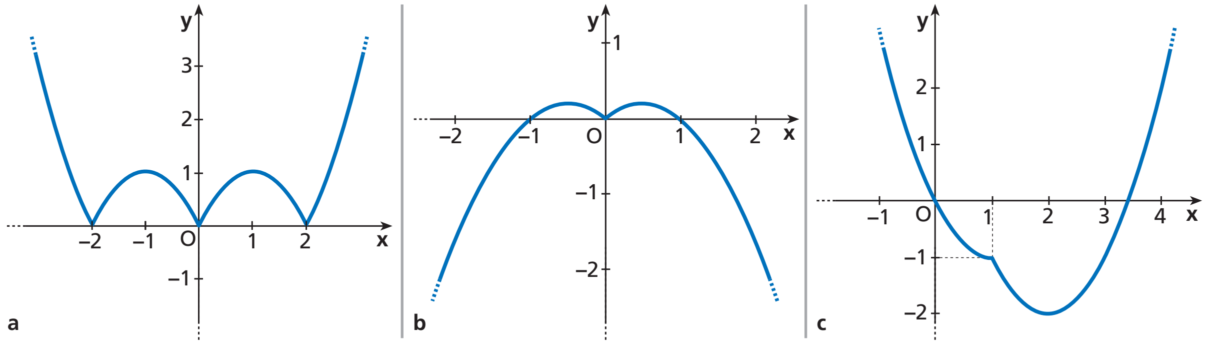
A $y = \sqrt{x+1}$ B $y = 1 + \sqrt{2-3x}$ C $y = 1 - \sqrt{-x}$ D $y = 2 + \sqrt{-1-|x+1|}$ E $y = \sqrt{|x|} + 1$

97 **ASSOCIA** a ciascuna funzione il suo grafico.

1) $y = -x^2 + |x|$

2) $y = |x^2 - 2|x||$

3) $y = x^2 - 3x - |x - 1| + 1$



Disegna i grafici relativi alle seguenti equazioni.

98 $y = x|x| - 3$

99 $y = -2\sqrt{x}$

100 $y + 1 = \sqrt{x}$

101 $\sqrt{y} = 1 - x$

102 $x = |y^2 - 2y|$

103 $x = 2 - \sqrt{y}$

104 $y = |x^2 - 3x|$

105 $|y| + 2x = x^2$

106 $y = \dfrac{x^3 - x}{x}$

107 $y = 3 + \sqrt{1 - x}$

108 $y = x^2 - |x|$

109 $y + 1 = \sqrt{x}$

110 $y = \dfrac{x^3 - 4x}{x - 2}$

111 $x - 1 = \sqrt{y - 3}$

112 $y = -\sqrt{x - 2}$

113 $x - \sqrt{y + 1} = 2$

114 $x = |y^2 - 4|$

115 $x - \sqrt{y + 3} = 0$

116 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \le 0 \\ 4x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

117 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{se } x \le 1 \\ -2x + 6 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

118 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 2 \\ -(x-2)(x-6) & \text{se } x \ge 2 \end{cases}$

119 $|x| + 2x^2 - y = 0$

120 $|y| - 4x^2 + x = 0$

121 $y = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$

122 $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \le 1 \\ x - 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

123 $y = |x - 2| \cdot x + 3$

124 $y = \dfrac{|x^2 - 1|}{x - 1} \cdot x$

125 $|x| + |y| = x^2$

126 $|y| = 1 - x^2$

127 $y = 2\sqrt{1 - |x|}$

128 $y = 2\sqrt{2|x| - x}$

129 $y = \sqrt{2 - 3|x| + x}$

130 $f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & \text{se } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{se } -2 \le x \le 1 \\ 3x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

131 $y = -4\sqrt{|x| - 1}$

132 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 1} & \text{se } x \ge 2 \\ 2x^2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$

133 $y - |3|x| - x^2| = 0$

134 $y - |x^2 - |x|| = 0$

135 $y = |x^2 - 4x| - 2$

136 $y|y| = |x| - 4$

137 $y = -|-x^2 + 4x| + 1$

138 $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x^2 - 2x} & \text{se } x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

139 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{se } |x| \leq 1 \\ -\sqrt{|x| - 1} & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$

140 $f(x) = \begin{cases} |x + 4| - 1 & \text{se } x \leq -3 \\ x^2 + 3x & \text{se } x > -3 \end{cases}$

141 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2 + 2|x|} & \text{se } x \geq -1 \\ (x + 2)^2 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

2. LA POSIZIONE DI UNA RETTA RISPETTO A UNA PARABOLA

▶ Teoria a pag. 318

142 **ESERCIZIO GUIDA**

Stabiliamo se le rette di equazioni $y = x - 2$ e $y = x - 1$ sono secanti, tangenti o esterne alla parabola di equazione $y = x^2 + 3x - 1$ e rappresentiamo graficamente la parabola e le rette.

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x^2 + 3x - 1 \end{cases}$$

Per confronto, otteniamo:

$$x^2 + 3x - 1 = x - 2$$

$$x^2 + 3x - 1 - x + 2 = 0$$
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$\frac{\Delta}{4} = 1 - 1 = 0.$$

Quindi l'unica soluzione è:

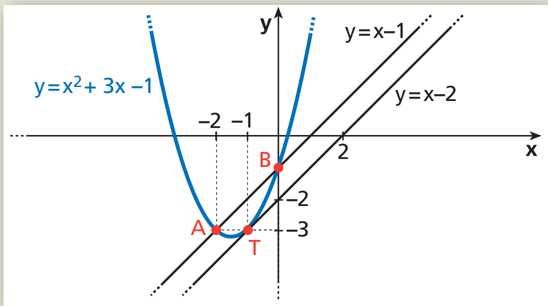
$$x = -1.$$

Poiché $\Delta = 0$, la retta è tangente alla parabola. Il punto di tangenza ha ascissa $x = -1$ e la rispettiva ordinata è $y = -3$.
Il punto di tangenza è $T(-1; -3)$.

Risolviamo ora il sistema:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 + 3x - 1 \end{cases}$$

Si ha $x - 1 = x^2 + 3x - 1$, da cui $x^2 + 2x = 0$. L'equazione ha $\Delta > 0$, quindi si hanno due soluzioni $x_1 = -2$ e $x_2 = 0$. La retta $y = x - 1$ è quindi secante la parabola nei punti $A(-2; -3)$ e $B(0; -1)$.
Rappresentiamo il grafico della parabola e delle due rette.



Nei seguenti esercizi sono assegnate le equazioni di una retta e di una parabola. Determina per ciascuna coppia i punti di intersezione delle due curve e disegna il loro grafico.

143 $y = 3x + 1, \quad y = x^2 + 4x - 1.$ $[(1; 4); (-2; -5)]$

144 $y = -x, \quad y = x^2 - x - 1.$ $[(1; -1); (-1; 1)]$

145 $y = 2x + 5, \quad y = x^2 + 2x + 5.$ $[(0; 5)]$

146 $y = -8, \quad y = x^2 + 8.$ [nessuna intersezione]

147 $y = x + 4, \quad x = y^2 + 2y + 4.$ [nessuna intersezione]

148 $x = 2, \quad x = -2y^2 - 3y + 1.$ $\left[\left(2; -\frac{1}{2}\right); (2; -1)\right]$

149 Determina le coordinate del punto di intersezione della parabola $y = 2x^2 + 4x - 2$ con la retta parallela all'asse della parabola passante per il punto $P(-2; 6)$. $[(-2; -2)]$

150 Calcola la lunghezza del segmento AB, dove A e B sono i punti di intersezione della bisettrice del I e III quadrante con la parabola di equazione $y = x^2 - 3x + 3$. $[2\sqrt{2}]$

151 Data la parabola di equazione $y = -x^2 + 6x$, indicato con V il vertice, determina l'area del triangolo AVB, dove A e B sono i punti di intersezione della parabola con la retta di equazione $y = 5$. $[8]$

152 Date la parabola $y = x^2 - 2x + 7$ e la retta r di equazione $y = 2x - 1$, determina l'equazione della retta parallela a r passante per il vertice della parabola e calcola le coordinate dei punti di intersezione di tale retta con la parabola. $[y = 2x + 4; (1; 6); (3; 10)]$

153 Scrivi l'equazione della retta che interseca la parabola $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ nei due punti A e B di ascissa 0 e 4. Calcola la lunghezza della corda AB e l'area del triangolo ABO, essendo O l'origine degli assi. $[y = x - 1; 4\sqrt{2}; 2]$

154 Dopo aver verificato che la retta di equazione $y = -6x - 1$ è tangente in un punto A alla parabola di equazione $y = x^2 - 4x$, determina l'area del triangolo AVF, dove V e F sono rispettivamente il vertice e il fuoco della parabola. $\left[A(-1; 5); \frac{3}{8}\right]$

155 Determina l'area del triangolo ABF, dove A e B sono i punti di intersezione della retta di equazione $x - 3y - 1 = 0$ con la parabola di equazione $x = -y^2 + 2y + 1$ e F è il fuoco della parabola. $\left[\frac{9}{8}\right]$

156 Data la parabola di equazione $y = 2x^2 - 8x$, trova la misura della corda AB che si ottiene intersecando la parabola con la retta di equazione $y = 3x - 12$. Determina poi sull'asse y un punto C che formi con A e B un triangolo isoscele ABC di base AB. $\left[\frac{5}{2}\sqrt{10}; C\left(0; -\frac{17}{6}\right)\right]$

157 Determina per quali valori di m la parabola di equazione $y = 2x^2 - 4x + 3$ e il fascio di rette di equazione $y = mx + m$ hanno dei punti in comune. $[m \leq -8 - 6\sqrt{2} \vee m \geq -8 + 6\sqrt{2}]$

158 Dopo aver determinato le intersezioni A e B della retta $y = x - 3$ con la parabola $y = -x^2 + 3x + 5$, di vertice V, calcola l'area del triangolo ABV. $\left[A(4; 1); B(-2; -5); \text{area} = \frac{105}{4}\right]$

159 Data la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x + 5$, determina:
a) le intersezioni della parabola con la retta di equazione $y = -x + 5$ e indicale con A e B (A punto di ascissa minima);
b) un punto P sull'arco di parabola AB in modo che il triangolo OPB abbia area 20.
[a) $A(0; 5)$, $B(5; 0)$; b) due soluzioni: $(1; 8)$, $(3; 8)$]

160 Rappresenta nel piano cartesiano la parabola di equazione $y = -x^2 + 2x$. Determina quindi le rette del fascio con centro $C\left(\frac{3}{2}; 3\right)$ che hanno almeno un punto comune con la parabola data.
[rette del fascio di centro C con coefficiente angolare $m \leq -4 \ \vee \ m \geq 2$]

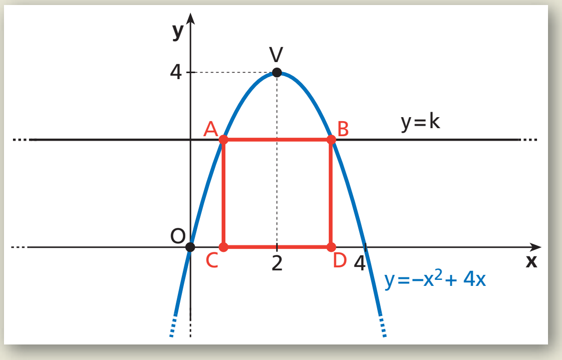
161 Data la parabola di equazione $y = x^2 - 6x + 8$, trova quale punto della retta $y = -2x - 1$ ha distanza minima dalla parabola. $[(0; -1)]$

Inscrivere quadrilateri o corde

162 **ESERCIZIO GUIDA**

Inscriviamo nella parte di piano compresa tra la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$ e l'asse x un rettangolo di perimetro uguale a 10.

La parabola ha il vertice V di coordinate $(2; 4)$ e interseca gli assi cartesiani nei punti $(0; 0)$ e $(4; 0)$.



Tracciamo ora una retta parallela all'asse x. Essa ha equazione $y = k$, con $0 < k < 4$, e interseca la parabola nei punti A e B, le cui coordinate si determinano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = k \end{cases} \to \begin{cases} x^2 - 4x + k = 0 \\ y = k \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-k} \\ y = k \end{cases} \to \begin{array}{l} A(2 - \sqrt{4-k}; k) \\ B(2 + \sqrt{4-k}; k) \end{array}$$

Consideriamo poi le proiezioni di A e B sull'asse x, che indichiamo con C e D, e troviamo il perimetro del rettangolo $ABDC$. Si ha:

$$\overline{AB} = 2 + \sqrt{4-k} - 2 + \sqrt{4-k} = 2\sqrt{4-k},$$
$$\overline{AC} = k.$$

Quindi il perimetro del rettangolo è uguale a:

$$4\sqrt{4-k} + 2k.$$

Troviamo ora per quale valore di k il perimetro risulta uguale a 10 risolvendo l'equazione:

$$4\sqrt{4-k} + 2k = 10.$$

Si ha $2\sqrt{4-k} = 5 - k$, da cui, posto $k \leq 4$, si ottiene, elevando al quadrato:

$$4 \cdot (4 - k) = 25 + k^2 - 10k \to k^2 - 6k + 9 = 0.$$

Le soluzioni di questa equazione sono:

$$k_1 = k_2 = 3.$$

Dovendo essere $0 < k < 4$, la soluzione è accettabile e la retta che individua il rettangolo ha equazione $y = 3$.

163 Date le parabole di equazioni $y = -x^2 + 4x + 2$ e $y = x^2 - 3x$, conduci una retta parallela all'asse x in modo che intercetti corde uguali sulle due parabole. $\left[y = \frac{15}{8}\right]$

164 Date le parabole di equazioni $x = y^2 - 2y$ e $x = -y^2 + y$, determina l'equazione di una retta parallela all'asse y in modo che intercetti corde uguali su entrambe le parabole. $\left[x = -\frac{3}{8}\right]$

165 Per quale valore di k la parabola $y = x^2 - 2x + k - 1$ stacca un segmento di misura 3 sulla retta $y = 2$? $\left[k = \frac{7}{4}\right]$

166 Inscrivi nella parte di piano compresa fra la parabola di equazione $y = -\frac{x^2}{2} + 4x + 8$ e l'asse x un quadrato avente un lato sull'asse x. $[y = 8]$

167 Data la parabola di equazione $y = -x^2 + 3x + 2$, inscrivi nella parte di piano compresa fra l'asse x e la curva un rettangolo la cui altezza è doppia della base. $[y = -8 + 2\sqrt{33}]$

168 Inscrivi nella parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = -2x^2 + 16x - 24$ e dall'asse x un rettangolo che ha il perimetro uguale a 16. $[y = 6]$

169 Nella parte di piano definita dalla parabola di equazione $y = -x^2 + 8x - 7$ e dall'asse x inscrivi un trapezio isoscele $ABCD$ con la base maggiore AB sull'asse x. Trova le coordinate di C e D in modo che il trapezio abbia area 32. $[C(3; 8); D(5; 8)]$

170 Una retta parallela all'asse y interseca la parabola $9x = y^2 + 18$ in due punti A e B. Indica con A' e B' le proiezioni di A e B sull'asse y e determina a che distanza dall'asse y occorre condurre la retta AB in modo che il rettangolo $ABB'A'$ abbia perimetro uguale a 58. $[x = 11]$

171 Data la parabola di equazione $x = 2y^2 - 8y + 9$, trova quale retta, che interseca la parabola ed è parallela alla retta di equazione $2y = x$, definisce una corda lunga $3\sqrt{5}$. $\left[y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right]$

La risoluzione grafica di equazioni e disequazioni irrazionali

172 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo graficamente la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt{2x+2} + 1 \geq \frac{3}{2}x.$$

Isoliamo la radice a sinistra del segno di disuguaglianza:

$$\sqrt{2x+2} \geq \frac{3}{2}x - 1.$$

Dai due membri della disequazione ricaviamo le equazioni di due funzioni, cioè poniamo:

$$y = \sqrt{2x+2} \ \text{ e } \ y = \frac{3}{2}x - 1.$$

Per disegnare il grafico della prima funzione,

$$y = \sqrt{2x+2},$$

determiniamo il suo dominio ponendo il radicando maggiore o uguale a 0:

$$2x + 2 \geq 0 \ \rightarrow \ 2x \geq -2 \ \rightarrow \ x \geq -1.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$.

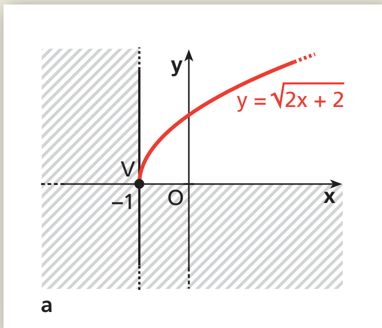
L'equazione $y = \sqrt{2x+2}$ è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 2x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x = \frac{1}{2}y^2 - 1 \end{cases}$$

L'equazione

$$x = \frac{1}{2}y^2 - 1$$

è l'equazione di una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse e con vertice $V(-1; 0)$. La condizione $y \geq 0$ impone di tracciare solo l'arco di parabola che contiene tutti i punti di ordinata maggiore o uguale a 0 (figura *a*).

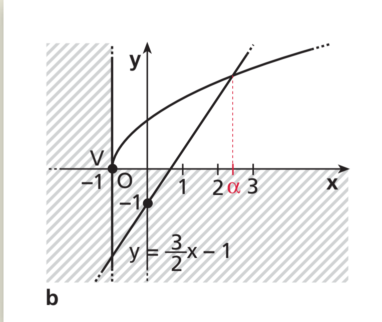


a

Rappresentiamo la seconda funzione, corrispondente alla retta di equazione

$$y = \frac{3}{2}x - 1,$$

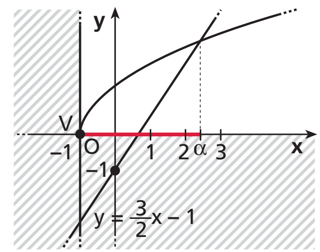
tracciandone il grafico per $x \geq -1$ (figura *b*).



b

Dal grafico leggiamo, in modo approssimato, l'ascissa α del punto di intersezione tra la retta e la parabola, nella parte di piano in cui la disequazione ha significato: $\alpha \simeq 2{,}4$.

Osserviamo nel grafico tracciato che la disequazione iniziale $\sqrt{2x+2} \geq \frac{3}{2}x - 1$ mette a confronto l'ordinata di un punto della parabola (membro a sinistra) con l'ordinata di un punto della retta (membro a destra) con la stessa ascissa.
Evidenziamo sul grafico la zona in cui i punti della parabola hanno ordinate maggiori o uguali alle ordinate dei punti corrispondenti della retta (figura *c*).
Le ascisse di questi punti sono le soluzioni della disequazione data:



c

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq \alpha, \alpha \simeq 2{,}4\}.$$

Osservazione. Se dobbiamo risolvere un'**equazione**, per esempio $\sqrt{2x+2} + 1 = \frac{3}{2}x$, procediamo allo stesso modo, ma terminiamo la risoluzione dopo la determinazione dell'ascissa (o delle ascisse) dei punti di intersezione.

Risolvi graficamente le seguenti equazioni e disequazioni irrazionali.

173 $\sqrt{x+1} - 1 \geq x - 2$ $[-1 \leq x \leq 3]$

174 $\sqrt{x} < x$ $[x > 1]$

175 $-\sqrt{x} + 3 \leq -x + 1$ $[S = \varnothing]$

176 $\sqrt{x+4} - 1 = \frac{x-1}{4}$ $[5 + 4\sqrt{5}]$

177 $\sqrt{4x-1} = 2x + \frac{1}{2}$ $[S = \varnothing]$

178 $\sqrt{x+1} + 5 > -x + \frac{7}{2}$ $[x \geq -1]$

179 $-\sqrt{x+2} < \frac{1}{3}x$ $[x > \alpha, \alpha \simeq -1{,}7]$

180 $\sqrt{x} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$ $[x_1 \simeq 0{,}1;\ x_2 \simeq 1{,}4]$

181 $\sqrt{4x-8} \leq 11 - 3x$ $[2 \leq x \leq 3]$

182 $-\sqrt{x} - 5 > -3x + 3$ $[x > \alpha, \alpha \simeq 3{,}2]$

183 $-\sqrt{2x} + \frac{5}{2} > -\frac{2}{3}x$ $[x \geq 0]$

184 $\sqrt{x+2} \leq 2x + 3$ $[x \geq -1]$

185 $\sqrt{\frac{1}{2}x + 2} + 1 \geq 3x - 1$ $[-4 \leq x \leq \alpha, \alpha \simeq 1{,}1]$

186 $\sqrt{-3x-6} \leq 2x + 13$ $[-5 \leq x \leq -2]$

187 $\sqrt{-x^2-4x} < 1 - x^2$ $[\alpha < x \leq 0, \alpha \simeq -0{,}2]$

188 $|x| + 1 < 4 - x^2$ $\left[\frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$

189 $\sqrt{10x - x^2} = \frac{4}{9}(x-5)^2$ $[2; 8]$

190 $\sqrt{8x - x^2 + 9} = 6 - 2x^2$ $[1]$

191 $3 - \sqrt{x-1} = |x-4|$ $[1; 2; 5]$

192 $\sqrt{x} = |x-6|$ $[4; 9]$

193 $\sqrt{-10x - x^2} = 5 - \sqrt{x+5}$ $[-5; -1]$

194 $2 + \sqrt{12x - x^2 - 11} \geq 3 + \sqrt{x-6}$ $[6 \leq x \leq 10]$

195 $-3 + \sqrt{x} \geq -|x-3|$ $[0 \leq x \leq 1 \vee x \geq 4]$

196 $9\sqrt{x - \frac{1}{3}} < -x + 3$ $\left[\frac{1}{3} < x < \alpha, \alpha \simeq 0{,}4\right]$

197 $\sqrt{x+4} \leq |x-2|$ $[-4 \leq x \leq 0 \vee x \geq 5]$

198 $\sqrt{16 - 6x - x^2} \leq 5 - \sqrt{x+3}$ $[1 \leq x \leq 2]$

Risolvi graficamente i seguenti sistemi di equazioni.

199 $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$

200 $\begin{cases} x - \sqrt{2-y} = 1 \\ y + x - 1 = 0 \end{cases}$

201 $\begin{cases} y - \sqrt{-\dfrac{x}{4}} = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

202 $\begin{cases} y = |x^2 - 4| \\ y = \dfrac{1}{4}x + 1 \end{cases}$

203 $\begin{cases} y = ||x| - 4| \\ y = 2x^2 \end{cases}$

204 $\begin{cases} x = \sqrt{y} \\ 2y - |x| - 6 = 0 \end{cases}$

3. LE RETTE TANGENTI A UNA PARABOLA

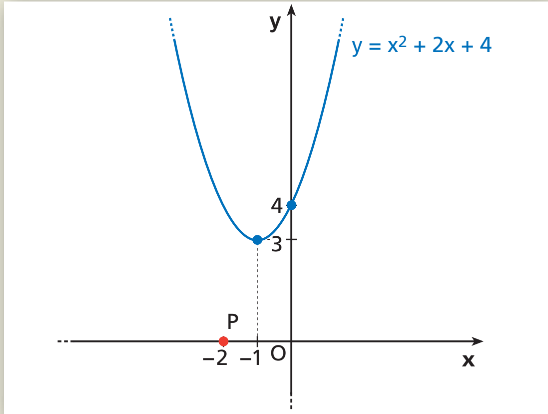
▶ Teoria a pag. 319

IN PRATICA
▶ Videolezione 18

205 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la parabola di equazione $y = x^2 + 2x + 4$, determiniamo le equazioni delle rette passanti per il punto $P(-2; 0)$ e tangenti alla parabola.

La parabola ha il vertice di coordinate $(-1; 3)$.



Poiché l'ordinata del vertice è positiva e la concavità è rivolta verso l'alto, la parabola non ha intersezioni con l'asse x. Essa interseca l'asse y in $(0; 4)$. Il punto P non appartiene alla parabola.
Scriviamo l'equazione della generica retta passante per P:

$$y = m(x + 2).$$

Mettiamo a sistema l'equazione della retta con quella della parabola:

$$\begin{cases} y = mx + 2m \\ y = x^2 + 2x + 4 \end{cases}$$

Mediante sostituzione, otteniamo:

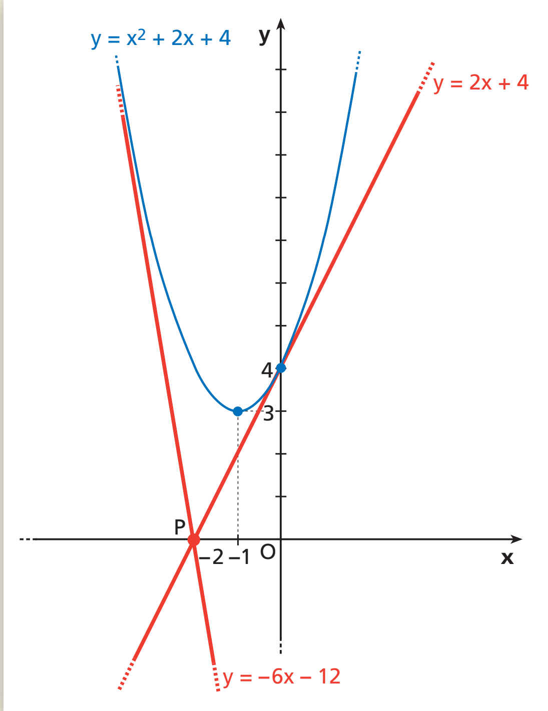
$$x^2 + 2x + 4 = mx + 2m$$
$$x^2 + (2 - m)x + 4 - 2m = 0$$
$$\Delta = (2 - m)^2 - 4(4 - 2m) =$$
$$= m^2 + 4m - 12.$$

Ponendo $\Delta = 0$ (condizione di tangenza):

$$m^2 + 4m - 12 = 0$$

$$m = -2 \pm \sqrt{16} = -2 \pm 4 = \begin{cases} -6 \\ 2 \end{cases}$$

Poiché abbiamo trovato due valori di m, $m_1 = -6$ e $m_2 = 2$, esistono **due** rette tangenti alla parabola passanti per P, di equazioni $y = -6x - 12$ e $y = 2x + 4$.



206 TEST La rappresentazione grafica della funzione $y = (-2x + 10)^2$ è:

A una parabola con la concavità rivolta verso il basso e che è tangente all'asse delle x.

B una parabola con la concavità rivolta verso l'alto e che è tangente all'asse delle x.

C una parabola che non taglia né è tangente all'asse delle x.

D una circonferenza di centro $x = 5$, $y = 0$.

E una retta con pendenza negativa.

(*CISIA, Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso*)

207 Data la parabola di equazione $y = x^2 - 3x + 2$, determina l'equazione della retta tangente nel suo punto di ascissa -1. $[y = -5x + 1]$

208 Data la parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 6$, determina l'equazione della retta tangente nel punto di intersezione fra la parabola e l'asse y. $[y = -4x - 6]$

209 Verifica che la parabola di equazione $y = 2x^2 + 4x + 2$ è tangente all'asse x e scrivi le coordinate del punto di tangenza. $[T(-1; 0)]$

210 Data la parabola di equazione $y = x^2 + 4x + 6$, determina le equazioni delle rette passanti per $P(-4; 5)$ e tangenti alla parabola. $[y = -2x - 3; y = -6x - 19]$

211 Scrivi le equazioni delle rette passanti per $P(2; 8)$ e tangenti alla parabola di equazione $y = -2x^2 + 16x - 24$. Determina inoltre le coordinate dei punti di tangenza. $[y = 16x - 24; y = 8; (0; -24); (4; 8)]$

212 È data la parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$. Dopo aver determinato le equazioni delle rette a essa tangenti, uscenti dal punto $C(1; -8)$, trova le coordinate dei punti di intersezione A e B delle tangenti con l'asse x. Calcola l'area del triangolo ABC. $[y = 4x - 12; y = -4x - 4; A(3; 0); B(-1; 0); \text{area} = 16]$

213 Determina le coordinate dei punti di intersezione, A e B, della parabola $y = -x^2 + 4x$ con la retta $y = -x + 4$, essendo A il punto di ascissa minore. Conduci dal punto $C\left(\frac{5}{2}; 6\right)$ le rette tangenti alla parabola e verifica che i punti di tangenza sono A e B. Detto E il punto in cui la tangente in A interseca l'asse x, calcola l'area del triangolo EBC. $\left[A(1; 3); B(4; 0); \text{area} = \frac{27}{2}\right]$

214 Data la parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, scrivi le equazioni delle rette tangenti a essa uscenti dal punto $C\left(2; -\frac{7}{2}\right)$ e determina le coordinate dei punti di tangenza A e B. Verifica che il triangolo ABC è equilatero, di lato $2\sqrt{3}$. $\left[y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} - \frac{7}{2}; y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - \frac{7}{2}; A\left(2 - \sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right); B\left(2 + \sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right)\right]$

215 Disegna la parabola di equazione $y = -x^2 - 2x + 7$. Dal punto $C(0; 11)$ traccia le due tangenti e determina le coordinate dei punti A e B di tangenza. Calcola l'area del triangolo ABC. $[y = 2x + 11; y = -6x + 11; A(2; -1); B(-2; 7); \text{area} = 16]$

216 Determina l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione $y = -x^2 + x + 2$ e parallela alla retta di equazione $x - y + 1 = 0$, poi calcola le coordinate del punto di tangenza. $[x - y + 2 = 0; P(0; 2)]$

217 Data la parabola di equazione $y = x^2 + 3x + 2k - 1$, determina per quale valore di k essa risulta tangente alla retta passante per i punti $A(-1; -4)$ e $B(1; -1)$. $\left[k = -\frac{15}{32}\right]$

218 Scrivi le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti alla parabola di equazione $x = \frac{1}{2}y^2 - 2y$ e passanti per $P(-2; 3)$.

Condotta poi la tangente t_3 nel punto della parabola di ordinata 1, trova l'area del triangolo definito da t_1, t_2, t_3. $\left[x = -2; x - 2y + 8 = 0; 2x + 2y + 1 = 0; \text{area} = \frac{3}{4}\right]$

219 Trova l'equazione della tangente comune alle due parabole di equazioni $y = -x^2 - 2x$ e $y = -x^2 + 2x + 3$. $\left[y = \frac{3}{2}x + \frac{49}{16}\right]$

220 Determina le equazioni delle rette tangenti a entrambe le parabole di equazioni $y = x^2 - 4x + 3$ e $y = -x^2 + 2x - 6$. $[y = -4x + 3; y = 2x - 6]$

221 Trova le equazioni delle rette tangenti comuni alle due parabole di equazioni $x = \frac{y^2}{2} - 2$ e $x = \frac{y^2}{4}$ e determina l'area del quadrilatero definito dai punti di tangenza. $[x - 2y + 4 = 0; x + 2y + 4 = 0; 24]$

222 Trova la tangente comune alle due parabole di equazioni $y = 2x^2 + 2x + 1$ e $y = 2x^2 - 2x + 2$. Indicati con T_1 e T_2 i punti di tangenza, verifica che la distanza tra T_1 e T_2 è uguale alla distanza tra i vertici delle due parabole. $[8x - 8y + 7 = 0; d = \sqrt{2}]$

La formula di sdoppiamento

Risolvi i seguenti esercizi applicando la formula di sdoppiamento.

223 Calcola l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione $y = -2x^2 + x + 1$ nel suo punto di ascissa nulla e verifica che la retta è parallela alla bisettrice del I e del III quadrante. $[y = x + 1]$

224 Scrivi l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione $y = -x^2 + 3x$ nel suo punto di ordinata uguale a -4 e ascissa positiva. $[y = -5x + 16]$

225 Verifica che la retta tangente alla parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ nell'origine è la bisettrice del II e del IV quadrante.

226 Data la parabola di equazione $y = \frac{3}{2}x^2 - x + 5$, determina l'equazione della retta tangente nel punto $P(2; 9)$. $[y = 5x - 1]$

227 Verifica che il punto $Q(4; 3)$ appartiene alla parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ e scrivi l'equazione della retta passante per Q tangente alla parabola. $[y = 2x - 5]$

L'area del segmento parabolico

228 Trova l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola di equazione $y = x^2 - 4x$ e dalla retta $y = 2x$. $[36]$

229 Calcola l'area della parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = -\frac{1}{3}(x+1)(x-3)$ e dalla retta di equazione $y = \frac{1}{3}(x + 1)$. $\left[\frac{3}{2}\right]$

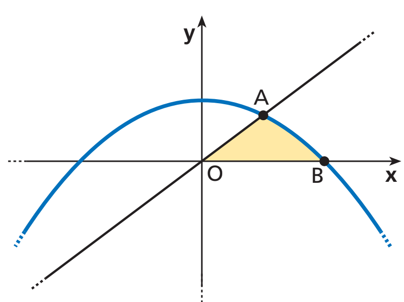
230 Trova l'area del segmento parabolico definito dalla parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$ e dalla retta che congiunge i due punti della parabola di ascissa -7 e -1. $[18]$

231 Determina il valore positivo di a tale che la parabola $y = x^2 + 1$ divida in due parti uguali l'area del rettangolo di vertici $(0; 0)$, $(a; 0)$, $(0; a^2 + 1)$ e $(a; a^2 + 1)$.

(USA *Harvard-MIT Math Tournament*, 2002)

$[a = \sqrt{3}]$

232 Trova l'area del triangolo mistilineo OAB rappresentato nella figura, sapendo che la parabola ha equazione $y = -\frac{1}{8}x^2 + 2$ e la retta $y = \frac{3}{4}x$.



$\left[\frac{19}{6}\right]$

233 Trova l'area della regione delimitata dalle due parabole di equazioni $y = -x^2 + 4x$ e $y = x^2 - 4x + 4$. $\left[\frac{16}{3}\sqrt{2}\right]$

4. COME DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA PARABOLA

▶ Teoria a pag. 322

IN PRATICA
▶ Videolezione 19

L'equazione della parabola noti il vertice e il fuoco

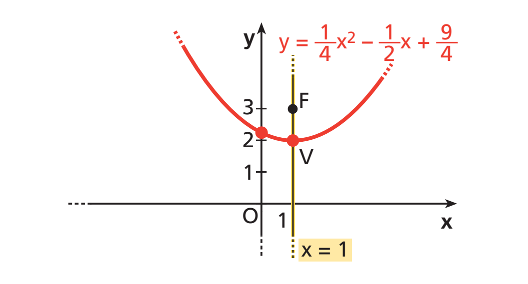
234 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y avente per vertice il punto $V(1; 2)$ e per fuoco il punto $F(1; 3)$ e rappresentiamola nel piano cartesiano.

La parabola ha equazione generale $y = ax^2 + bx + c$. Per trovare a, b, c, utilizziamo le formule del vertice $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ e quelle del fuoco $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$. Si ha il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 2 \\ \frac{1-\Delta}{4a} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 - 4ac = -8a \\ 1 - (b^2 - 4ac) = 12a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 - 4ac = -8a \\ 1 + 8a = 12a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - c = -2 \\ a = \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{9}{4} \end{cases}$$

L'equazione della parabola è: $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$.



Osservazione. La seconda equazione del sistema può essere sostituita con la condizione di appartenenza del vertice alla parabola:

$$2 = a + b + c.$$

Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, della quale sono indicate le coordinate del vertice V e del fuoco F, e rappresentala nel piano cartesiano.

235 $V(-3; 1)$, $F\left(-3; -\frac{3}{4}\right)$. $\left[y = -\frac{1}{7}x^2 - \frac{6}{7}x - \frac{2}{7}\right]$

236 $V\left(1; -\frac{3}{4}\right)$, $F(1; -1)$. $\left[y = -x^2 + 2x - \frac{7}{4}\right]$

237 $V(2; -1)$, $F\left(2; -\frac{5}{4}\right)$. $[y = -x^2 + 4x - 5]$

238 $V(1; -2)$, $F\left(1; -\frac{23}{12}\right)$. $[y = 3x^2 - 6x + 1]$

Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x, della quale sono indicate le coordinate del vertice V e del fuoco F, e rappresentala nel piano cartesiano.

239 $V(1; -2)$, $F\left(\frac{5}{4}; -2\right)$. $[x = y^2 + 4y + 5]$

240 $V(0; 3)$, $F\left(\frac{1}{4}; 3\right)$. $[x = y^2 - 6y + 9]$

241 $V\left(\frac{5}{2}; 1\right)$, $F(4; 1)$. $\left[x = \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{8}{3}\right]$

242 $V(-3; 1)$, $F\left(-\frac{47}{16}; 1\right)$. $[x = 4y^2 - 8y + 1]$

L'equazione della parabola noti il vertice e la direttrice

Determina l'equazione della parabola, della quale sono indicate le coordinate del vertice V e l'equazione della direttrice d.

243 $V(6; 2)$, d: $x = \frac{25}{4}$. $\left[x = -y^2 + 4y + 2\right]$

244 $V\left(-\frac{5}{2}; 2\right)$, d: $x = -\frac{3}{2}$. $\left[x = -\frac{1}{4}y^2 + y - \frac{7}{2}\right]$

245 $V(0; -1)$, d: $y = -2$. $\left[y = \frac{1}{4}x^2 - 1\right]$

246 $V(16; 0)$, d: $x = \frac{65}{4}$. $\left[x = -y^2 + 16\right]$

L'equazione della parabola per due punti, noto l'asse

247 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione della parabola che passa per i punti $A(0; -4)$, $B(-1; -1)$ e che ha asse di equazione $x = 1$.

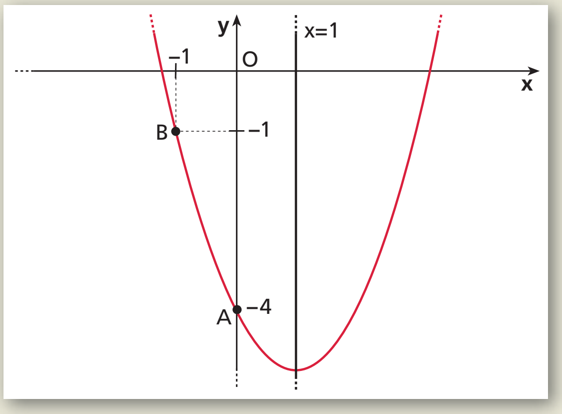
L'asse è parallelo all'asse y e quindi la parabola cercata ha equazione $y = ax^2 + bx + c$.

L'equazione dell'asse della generica parabola è $x = -\frac{b}{2a}$ e quindi vale l'uguaglianza $-\frac{b}{2a} = 1$.

Imponiamo ora che la parabola passi per i punti A e B. Un punto appartiene alla parabola se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione.
Sostituiamo pertanto le coordinate dei due punti al posto di x e y nell'equazione $y = ax^2 + bx + c$:

$-4 = c$ (passaggio per A)

$-1 = a - b + c$ (passaggio per B)



Risolviamo il sistema formato dalle tre equazioni nelle tre incognite a, b, c:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ -4 = c \\ -1 = a - b + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = -4 \\ a - b + c = -1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = -4 \\ a + 2a - 4 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = -4 \\ a = 1 \end{cases}$$

L'equazione della parabola è $y = x^2 - 2x - 4$.

Determina l'equazione della parabola, di cui sono indicate le coordinate di due suoi punti, A e B, e l'equazione dell'asse di simmetria.

248 $A(-1; -1)$, $B(1; 5)$, $x = -\frac{3}{2}$. $[y = x^2 + 3x + 1]$

249 $A(1; -3)$, $B(4; 0)$, $x = 2$. $[y = x^2 - 4x]$

250 $A(-1; 1)$, $B(0; 4)$, $x = 1$. $[y = -x^2 + 2x + 4]$

251 $A(-6; 1)$, $B(9; -2)$, $y = -3$. $[x = -y^2 - 6y + 1]$

252 $A(-2; 5)$, $B(1; -7)$, $x = -\frac{5}{2}$. $[y = -x^2 - 5x - 1]$

253 $A(1; 1)$, $B(3; 0)$, $y = 1$. $[x = 2y^2 - 4y + 3]$

254 $A(2; -2)$, $B(0; 0)$, $y = -\frac{5}{6}$. $[x = 3y^2 + 5y]$

L'equazione della parabola passante per tre punti

Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y che passa per i punti assegnati e rappresentala graficamente.

255 $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, $C(3; 0)$. $[y = -x^2 + 3x]$

256 $A(-1; 0)$, $B(0; 5)$, $C(2; 3)$. $[y = -2x^2 + 3x + 5]$

257 $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(-1; -9)$. $[y = -x^2 + 5x - 3]$

258 $A(-1; -3)$, $B(2; 0)$, $C(0; -4)$. $[y = x^2 - 4]$

259 $A(0; -1)$, $B(-2; -3)$, $C(-4; -1)$. $\left[y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1\right]$

260 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y passante per l'origine e per $A(6; 9)$ e $B(-6; 15)$. $\left[y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x\right]$

Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x che passa per i punti assegnati e disegnala nel piano cartesiano.

261 $A(2; 0)$, $B(4; 1)$, $C(12; 2)$. $[x = 3y^2 - y + 2]$

262 $A(-11; 2)$, $B(13; -2)$, $C(2; 0)$. $\left[x = -\frac{1}{4}y^2 - 6y + 2\right]$

263 $A(2; 1)$, $B(12; -1)$, $C(0; 2)$. $[x = y^2 - 5y + 6]$

264 $A(0; 1)$, $B(-1; 0)$, $C(-1; 2)$. $[x = -y^2 + 2y - 1]$

L'equazione della parabola passante per un punto, noto il vertice

Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y che passa per il punto A e che ha vertice in V e disegnala.

265 $A(1; -2)$, $V(2; -3)$. $[y = x^2 - 4x + 1]$

266 $A(4; 10)$, $V(1; -8)$. $[y = 2x^2 - 4x - 6]$

267 $A(1; 0)$, $V\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$. $[y = -x^2 + 3x - 2]$

268 $A(0; 1)$, $V\left(\frac{3}{2}; \frac{13}{4}\right)$. $[y = -x^2 + 3x + 1]$

269 **TEST** Qual è l'equazione della parabola passante per l'origine e avente il vertice nel punto $V(-2; 4)$?

- **A** $y = -x^2 - 4x$.
- **B** $y = -x^2 + 4x$.
- **C** $y = x^2 - 4x$.
- **D** $y = x^2 + 4x$.
- **E** $y = -x^2 - 4$.

(*CISIA, Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso*)

270 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y passante per l'origine e con il vertice nel punto $V(1; -2)$. $[y = 2x^2 - 4x]$

271 Determina l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse x, passante per l'origine degli assi e con il vertice nel punto $V(4; -2)$. $[x = -y^2 - 4y]$

272 Scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, che ha vertice $V\left(\frac{1}{3}; -\frac{16}{3}\right)$ e che incontra l'asse y nel punto di ordinata -5. $[y = 3x^2 - 2x - 5]$

273 Una parabola, con l'asse parallelo all'asse y, ha vertice $V(4; 2)$ e passa per il punto di intersezione delle rette di equazioni $5x - 2y - 10 = 0$ e $3x + 2y + 2 = 0$. Determina la sua equazione. $\left[y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6\right]$

L'equazione della parabola note altre condizioni

274 Determina l'equazione della parabola con asse di equazione $x = \frac{1}{2}$ e passante per i punti di intersezione della retta di equazione $y = -2x + 6$ con gli assi cartesiani. $[y = -x^2 + x + 6]$

275 Scrivi l'equazione della parabola passante per il punto $A(1; -2)$, con l'asse di equazione $x = 2$ e il vertice appartenente alla retta di equazione $x + 2y + 4 = 0$. $[y = x^2 - 4x + 1]$

276 Scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y e concavità rivolta verso il basso, passante per l'origine e per $A\left(1; \frac{7}{8}\right)$ e con vertice sulla retta di equazione $y = 2x - 6$. $\left[y = -\frac{1}{8}x^2 + x\right]$

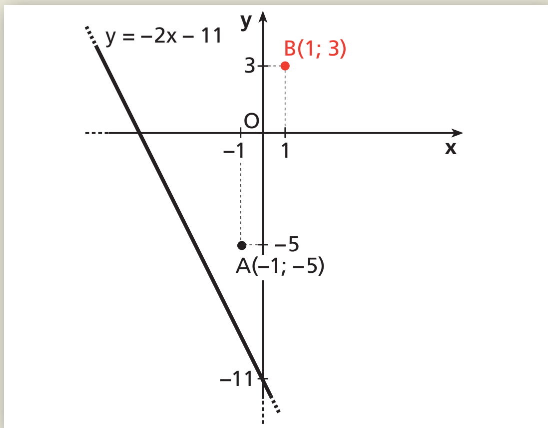
277 Trova l'equazione della parabola che ha asse di equazione $y = -2$, vertice appartenente all'asse y e passa per il punto di intersezione delle rette di equazioni $x + 2y + 1 = 0$ e $3x - y - 4 = 0$. $[x = y^2 + 4y + 4]$

278 Le rette di equazioni $y = 3x - 3$ e $y = -3x + 21$ si intersecano in un punto V e incontrano l'asse x nei punti A e B. Determina e rappresenta graficamente l'equazione della parabola che ha vertice in V e passa per A e B. $[y = -x^2 + 8x - 7]$

279 Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x, il fuoco in $F(-1; 1)$ e il vertice appartenente alla retta di equazione $4x + 2y + 3 = 0$. $\left[x = y^2 - 2y - \frac{1}{4}\right]$

280 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y e con il vertice di ascissa minore di -1, passante per i punti $A(-1; -5)$ e $B(1; 3)$ e tangente alla retta di equazione $y = -2x - 11$.



Imponiamo alla parabola di equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

il passaggio per i due punti A e B:

$$\begin{cases} -5 = a - b + c & \text{passaggio per } A(-1; -5) \\ 3 = a + b + c & \text{passaggio per } B(1; 3) \end{cases}$$

Ricaviamo due incognite in funzione della terza. Usiamo il metodo di riduzione, sottraendo membro a membro:

$$\ominus\begin{cases} a - b + c = -5 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$$
$$-2b \qquad = -8 \rightarrow b = 4$$

Sostituiamo $b = 4$ nella prima equazione e ricaviamo c in funzione di a:

$$\begin{cases} a - 4 + c = -5 \rightarrow c = -a - 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

L'equazione della parabola diventa:

$$y = ax^2 + 4x - a - 1.$$

Ora imponiamo che la retta $y = -2x - 11$ sia tangente alla parabola:

$$\begin{cases} y = ax^2 + 4x - a - 1 \\ y = -2x - 11 \end{cases}$$

L'equazione risolvente è:

$$ax^2 + 6x - a + 10 = 0.$$

Imponiamo la condizione di tangenza, cioè $\frac{\Delta}{4} = 0$:

$$a^2 - 10a + 9 = 0 \rightarrow a = 1 \lor a = 9.$$

Le soluzioni trovate sono due:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -2 \end{cases} \lor \begin{cases} a = 9 \\ b = 4 \\ c = -10 \end{cases}$$

Otteniamo le due parabole di equazioni:

$$y = x^2 + 4x - 2 \quad \text{e} \quad y = 9x^2 + 4x - 10.$$

Poiché la parabola richiesta deve avere il vertice con ascissa minore di -1, calcoliamo le coordinate del vertice delle due parabole:

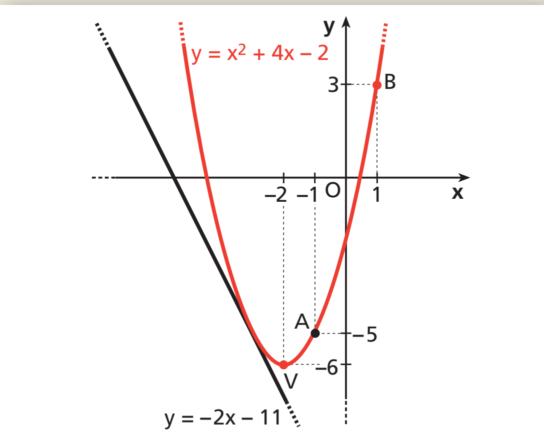
$y = x^2 + 4x - 2$, $V(-2; -6)$, ascissa $-2 < -1$

$y = 9x^2 + 4x - 10$, $V\left(-\frac{2}{9}; -\frac{94}{9}\right)$,

ascissa $-\frac{2}{9} > -1$.

Pertanto la parabola cercata ha equazione:

$$y = x^2 + 4x - 2.$$



281 Determina l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ passante per i punti $A(1; 2)$, $B(3; 0)$ e tangente alla bisettrice del II e IV quadrante. $[y = 3x^2 - 13x + 12]$

282 Scrivi l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ passante per i punti $A(2; 0)$, $B(1; -1)$ e tangente alla retta $y = -2x + 5$. $[y = -x^2 + 4x - 4;\ y = -9x^2 + 28x - 20]$

283 Determina l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ di vertice $V(2; -2)$ e tangente alla retta $y = 2x - 7$. $[y = x^2 - 4x + 2]$

284 Determina l'equazione della parabola $x = ay^2 + by + c$ passante per i punti $A(2; 0)$, $B(0; 1)$ e tangente alla retta di equazione $4x + 8y - 7 = 0$. $[x = y^2 - 3y + 2]$

285 Determina l'equazione della parabola $x = ay^2 + by + c$ di vertice $V(0; 1)$, tangente alla retta di equazione $x - 4y = 0$. $[x = -y^2 + 2y - 1]$

286 Determina per quali valori di k la parabola di equazione $y = x^2 + kx + 4$ è tangente all'asse delle ascisse. Scrivi le equazioni delle parabole corrispondenti ai valori trovati e calcola l'area della parte di piano individuata dalle tangenti a esse nel punto di ascissa 0 e dall'asse delle x. $[k = \pm 4;\ y = x^2 - 4x + 4,\ y = x^2 + 4x + 4;\ \text{area} = 4]$

287 Data l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$, il cui asse di simmetria è $x = 3$, determina i coefficienti a, b e c in modo che la parabola passi per $A(-1; -4)$ e sia tangente alla retta di equazione $4x - 4y + 37 = 0$.

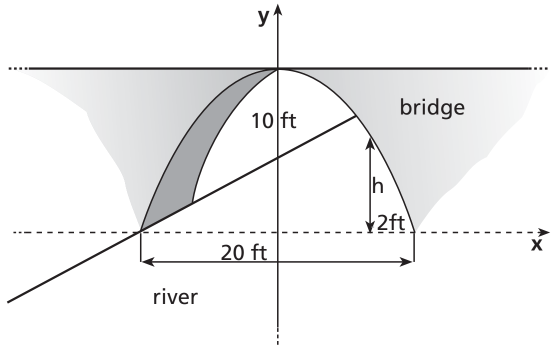
$$\left[y = -x^2 + 6x + 3;\ y = -\frac{1}{64}x^2 + \frac{3}{32}x - \frac{249}{64}\right]$$

288 Determina l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ passante per il punto $A(0; 1)$ e tangente a entrambe le rette di equazioni $y = -4x$ e $4x + 4y - 3 = 0$. $[y = x^2 - 2x + 1;\ y = 9x^2 + 2x + 1]$

289 A bridge over a stream is in the form of a parabolic arch (see diagram). The stream is 20 feet across and the bridge is 10 feet high at midstream.
a) Find the equation of the arch.
b) Find the height of the arch 2 feet from the shore.

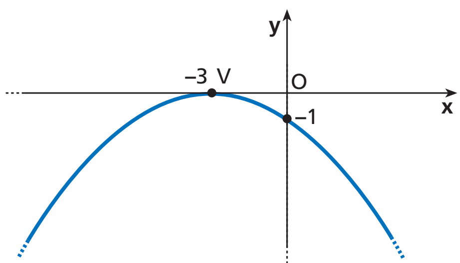
(USA *Southern Illinois University Carbondale*, Final Exam, Fall 2001)

$\left[\text{a) } y = -\frac{1}{10}x^2 + 10; \text{ b) } h = 3{,}6 \text{ ft}\right]$



ESERCIZI VARI Le condizioni per determinare la parabola

290 **TEST** La parabola rappresentata in figura



ha equazione:

A $y = -(x+3)^2$.
B $y = -\frac{(x+3)^2}{9}$.
C $y = -(x-3)(x-1)$.
D $y = -\frac{(x-3)^2}{9}$.
E $y = -(x-3)^2$.

291 **ASSOCIA** a ogni parabola o il suo vertice o la sua retta direttrice.

1) $x = \frac{1}{2}y^2 - 2y + 1$.
2) $y = x^2 + 3x + 1$.
3) $x = \frac{1}{2}y^2 - 2y - 1$.
4) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 1$.

a) $y = -\frac{3}{2}$.
b) $V\left(-3; \frac{7}{2}\right)$.
c) $x = -\frac{3}{2}$.
d) $V(-3; 2)$.

292 **TEST** In quale dei seguenti casi *non* puoi determinare univocamente l'equazione di una parabola che soddisfi le condizioni date?

A La parabola che passa per $A(1; 3)$, avente il vertice nell'origine degli assi e asse di simmetria parallelo all'asse y.
B La parabola avente il vertice in $A(1; 1)$ e per direttrice la retta $y = 3$.
C La parabola avente il vertice nel punto $V(0; 3)$ e il fuoco nell'origine degli assi.
D La parabola avente il fuoco $F(0; 1)$ e passante per $P(1; 3)$.
E La parabola passante per $A(1; 0)$, $B(-1; 0)$ e $C(2; 3)$.

293 **TEST** La direttrice di una parabola ha equazione $y = -5$. Se il suo vertice ha coordinate $(3; -1)$, quali sono le coordinate del suo fuoco?

A $F(3; -3)$
B $F(3; 0)$
C $F(3; 3)$
D $F(-3; -1)$
E La parabola non esiste.

294 **VERO O FALSO?**

La parabola di equazione $y = ax^2 - ax + a + 1$:

a) ha per asse di simmetria la retta $x = \frac{1}{2}$. V F
b) ha il fuoco sull'asse x se $a = -\frac{8}{3}$. V F
c) è tangente all'asse x se $a = \frac{4}{3}$. V F
d) passa per l'origine se $a = -1$. V F
e) interseca l'asse x solo per $-\frac{4}{3} \le a \le 0$. V F

COMPLETA le seguenti equazioni di parabole utilizzando i dati a fianco.

295 $y = \dots x^2 + 2x + \dots$ il vertice è $V(1; -3)$.

296 $y = \dots x^2 - \dots x + \dots$ passa per $A(0; 3)$ e $B(1; 0)$ e l'asse di simmetria è $x = 2$.

297 $y = \dots x^2 + \dots x - \dots$ il fuoco è $F\left(-1; -\frac{7}{4}\right)$, passa per $(0; -1)$ e la concavità è rivolta verso l'alto.

298 $y = x^2 - \dots x + \dots$ passa per $(0; 2)$, è tangente alla retta di equazione $y = 2x - 7$ e il vertice ha ascissa positiva.

299 $y = \dots x^2 - 4x + \dots$ passa per l'origine e l'ordinata del vertice è -2.

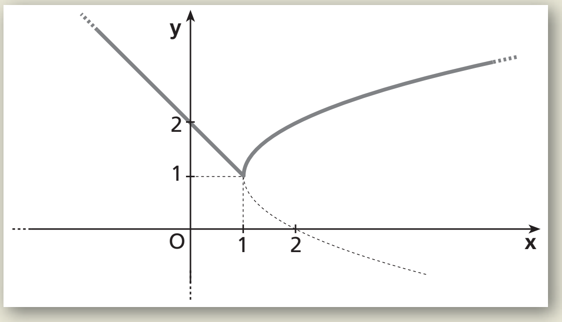
300 $x = \dots y^2 + \dots y + 1$ il fuoco è $F\left(\frac{1}{4}; -1\right)$ e la concavità è rivolta verso destra.

301 $x = \dots y^2 + 2y - \dots$ l'asse di simmetria è $y = -1$ e interseca l'asse y nel punto di ordinata 2.

Dal grafico all'equazione

302 **ESERCIZIO GUIDA**

Troviamo l'equazione del grafico utilizzando i dati della figura.



Consideriamo la funzione per $x \leq 1$: il grafico è una semiretta di coefficiente angolare -1 e ordinata all'origine 2. L'equazione corrispondente è:

$$y = -x + 2 \qquad \text{se } x \leq 1.$$

Studiamo ora la funzione per $x > 1$: si tratta di un arco di parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x, del tipo $x = ay^2 + by + c$, di vertice $V(1; 1)$ e passante per il punto $(2; 0)$.
Imponiamo il passaggio per il vertice V:

$$1 = a + b + c.$$

Poiché la parabola in questione ha vertice

$V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$ e l'ordinata y_V ha valore 1,

risulta:

$$-\frac{b}{2a} = 1 \to b = -2a.$$

Imponiamo alla parabola il passaggio per il punto $(2; 0)$, ottenendo $c = 2$.

Risolviamo il sistema formato dalle tre equazioni nelle tre incognite a, b e c:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ b=-2a \\ c=2 \end{cases} \to \begin{cases} a-2a+2=1 \\ b=-2a \\ c=2 \end{cases} \to \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione della parabola:

$$x = y^2 - 2y + 2.$$

Ordiniamo rispetto alla variabile y ed esplicitiamo:

$$y^2 - 2y + 2 - x = 0 \to$$
$$\to y = 1 \pm \sqrt{1 - 2 + x} \to y = 1 \pm \sqrt{x - 1}.$$

Poiché nel grafico dobbiamo considerare tutti i punti con $y \geq 1$, l'equazione dell'arco di parabola è:

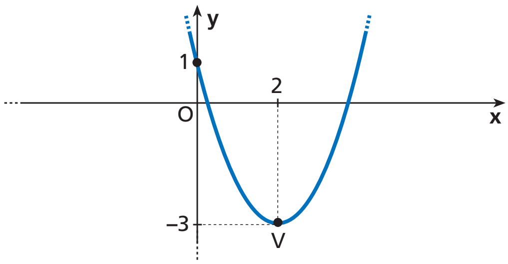
$$y = 1 + \sqrt{x - 1}, \qquad \text{con } x > 1.$$

In sintesi, l'equazione del grafico in figura risulta:

$$y = \begin{cases} -x + 2 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 + \sqrt{x - 1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

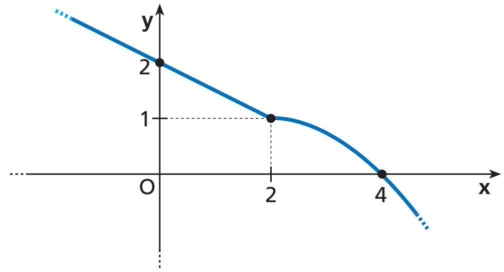
Trova l'equazione dei grafici utilizzando i dati delle figure.

303



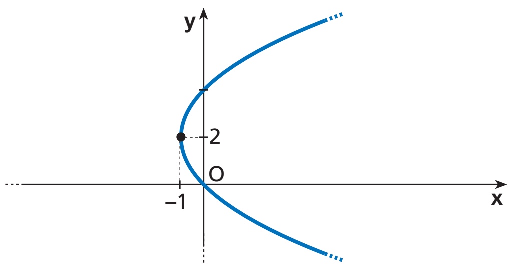
$\left[y = x^2 - 4x + 1\right]$

305



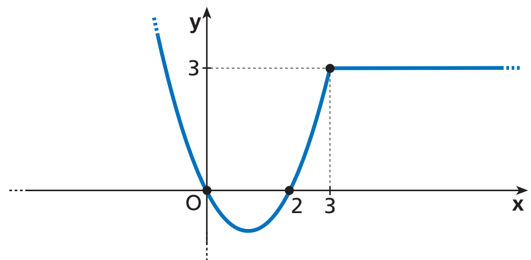
$$\left[f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x + 2 & \text{se } x \leq 2 \\ -\dfrac{1}{4}x^2 + x & \text{se } x > 2 \end{cases}\right]$$

304



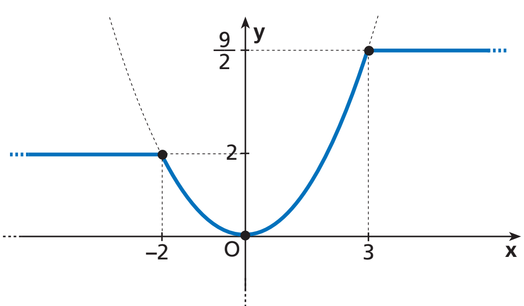
$$\left[x = \frac{1}{4}y^2 - y\right]$$

306



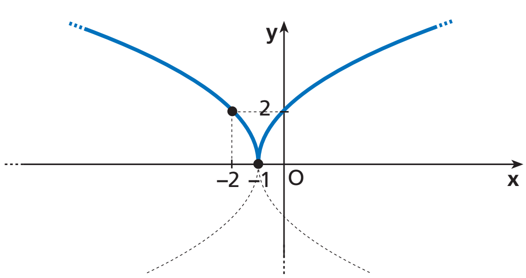
$$\left[f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \leq 3 \\ 3 & \text{se } x > 3 \end{cases}\right]$$

307



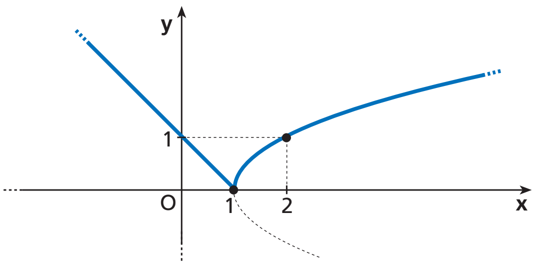
$$\left[f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq -2 \\ \dfrac{1}{2}x^2 & \text{se } -2 < x \leq 3 \\ \dfrac{9}{2} & \text{se } x > 3 \end{cases}\right]$$

308



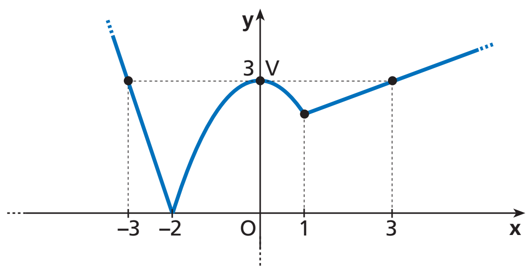
$$\left[f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{-x-1} & \text{se } x \leq -1 \\ 2\sqrt{x+1} & \text{se } x > -1 \end{cases}\right]$$

309



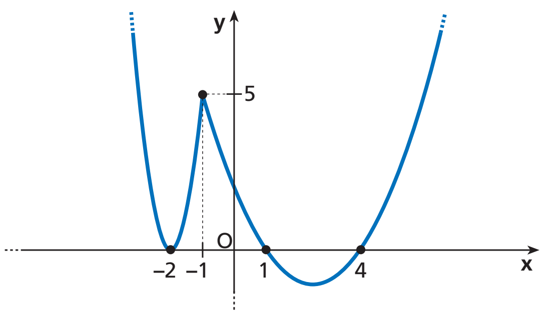
$$\left[f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{se } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases} \right]$$

310



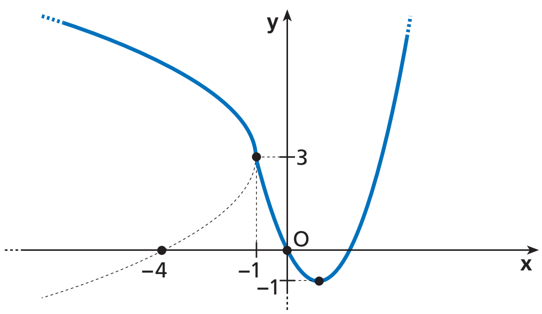
$$\left[f(x) = \begin{cases} -3x-6 & \text{se } x \leq -2 \\ -\frac{3}{4}x^2+3 & \text{se } -2 < x \leq 1 \\ \frac{3}{8}x+\frac{15}{8} & \text{se } x > 1 \end{cases} \right]$$

311



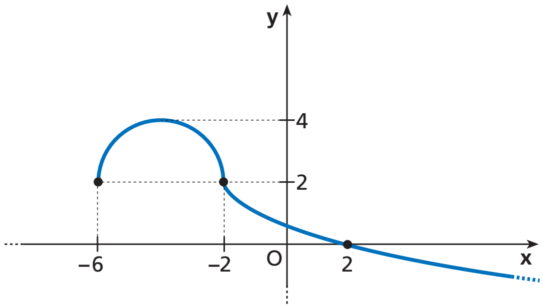
$$\left[f(x) = \begin{cases} 5x^2+20x+20 & \text{se } x \leq -1 \\ \frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+2 & \text{se } x > -1 \end{cases} \right]$$

312



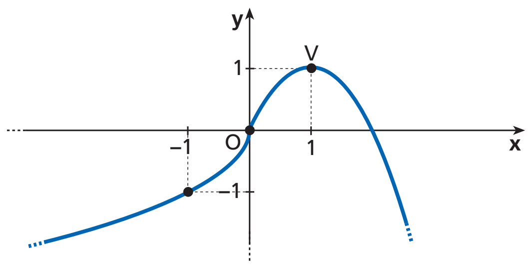
$$\left[f(x) = \begin{cases} 3+\sqrt{-3x-3} & \text{se } x \leq -1 \\ x^2-2x & \text{se } x > 1 \end{cases} \right]$$

313



$$\left[f(x) = \begin{cases} 2+\sqrt{-x^2-8x-12} & \text{se } x < -2 \\ 2-\sqrt{x+2} & \text{se } x \geq -2 \end{cases} \right]$$

314



$$\left[f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{se } x \le 0 \\ -x^2 + 2x & \text{se } x > 0 \end{cases} \right]$$

315 Data la parabola $y = x^2 + bx + 3$, trova b in modo che:

a) abbia il vertice sull'asse y;
b) sia tangente alla bisettrice del II e IV quadrante;
c) sia tangente all'asse x;
d) stacchi sulla retta $y = -3$ una corda lunga 6.

$\left[\text{a) } b = 0; \text{ b) } b = -1 \pm 2\sqrt{3}; \text{ c) } b = \pm 2\sqrt{3}; \text{ d) } b = \pm 2\sqrt{15}\right]$

316 Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x, con vertice in $V(-1; 1)$ e passante per l'origine O del sistema di riferimento, e rappresentala graficamente. Detto F il fuoco e A il secondo punto di intersezione della parabola con l'asse y, calcola l'area del triangolo AVF. $\left[x = y^2 - 2y; \frac{1}{8}\right]$

317 Trova l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x, con vertice in $V(2; 0)$ e passante per $A(6; -2)$, e rappresentala graficamente. Detto F il fuoco, calcola l'area del triangolo AVF. $\left[x = y^2 + 2; \frac{1}{4}\right]$

318 Determina l'equazione della parabola passante per $A(0; 5)$ e $B(5; 0)$ e avente come asse di simmetria la retta di equazione $x = 2$. Sull'arco di parabola AB trova un punto P in modo che il quadrilatero $OAPB$ abbia area $\frac{55}{2}$. $[y = -x^2 + 4x + 5; \text{ due soluzioni: } (3; 8), (2; 9)]$

319 Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 3 = 0$, determina la parabola che ha vertice nel centro e passa per i punti di intersezione della circonferenza con l'asse x. $[y = x^2 - 2x - 3]$

320 Determina l'equazione della parabola p con asse di simmetria l'asse y, con il vertice di ordinata 4 e passante per il punto $A(-2; 0)$. Scrivi poi le equazioni delle rette tangenti alla parabola p passanti per il punto $C(1; 4)$. Detti B e D i punti di tangenza, riconosci la natura del quadrilatero $ABCD$ e calcolane l'area. $[y = -x^2 + 4; y = 4, y = -4x + 8; 10]$

321 Data la parabola con asse parallelo all'asse y, che ha il vertice nell'origine e che passa per il punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, considera il triangolo equilatero ABO che ha un vertice in O e i vertici A e B sulla parabola. Trova le coordinate di A e B e l'area del triangolo. $\left[A(1; \sqrt{3}), B(-1; \sqrt{3}); \sqrt{3}\right]$

322 Considera i punti $V(2; -1)$ e $A(0; 3)$ e la retta r di equazione $y = x + 9$.

a) Determina l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, avente come vertice il punto V e passante per il punto A.
b) Trova i punti di intersezione B e C tra la parabola e la retta r.
c) Determina l'equazione della retta tangente alla parabola parallela alla retta r e le coordinate del punto T di tangenza.
d) Calcola l'area del quadrilatero $ABCT$.

$\left[\text{a) } y = x^2 - 4x + 3; \text{ b) } B(-1; 8), C(6; 15); \text{ c) } y = x - \frac{13}{4}, T\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{4}\right); \text{ d) } \frac{189}{4}\right]$

323 Scrivi l'equazione della parabola avente fuoco $F\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ e vertice $V(1; -2)$. Dette A e B le sue intersezioni con la bisettrice del II e IV quadrante, determina:
a) le tangenti in A e in B alla parabola;
b) un punto C sull'asse x tale che l'area del triangolo ABC sia uguale a $4\sqrt{3}$.
$\left[y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}; \text{a) } y = (-1-\sqrt{3})x - 3, y = (-1+\sqrt{3})x - 3; \text{b) } C(-4; 0), C(4; 0)\right]$

324 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, di vertice $V(3; 5)$, passante per il punto $A(1; 1)$. Determina l'equazione della circonferenza avente come estremi di un diametro i punti di intersezione della parabola con la retta $y = -2x + 11$. $[y = -x^2 + 6x - 4; x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0]$

325 Fra le parabole del tipo $y = ax^2 + bx + c$:
a) determina la parabola p_1 passante per $A(-3; 4)$ e $B(5; 8)$ e avente ascissa del vertice uguale a 2;
b) individua la parabola p_2 passante per A e B e per il punto $(1; 2)$;
c) conduci una retta parallela all'asse y nella parte di piano delimitata da p_1 e p_2 in modo che, intersecando le due parabole, si formi un segmento lungo 2.
$\left[\text{a) } y = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{37}{4}; \text{b) } y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{4}; \text{c) } x = 1 \pm 2\sqrt{3}\right]$

326 a) Scrivi le equazioni delle parabole (della forma $y = ax^2 + bx + 4$) tangenti all'asse delle ascisse e aventi, nel punto di ascissa 3, la tangente di coefficiente angolare 2.
b) Determina l'equazione della retta parallela all'asse delle ascisse che forma con le tangenti alle parabole nel loro punto di ascissa $x = 0$ un triangolo di area 32.
$\left[\text{a) } y = x^2 - 4x + 4 \text{ e } y = \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 4; \text{b) } y = -4 \text{ e } y = 12\right]$

327 Scrivi le equazioni delle parabole $y = ax^2 + bx + c$, tangenti alle rette $2x + 2y + 1 = 0$ e $2x - y - 8 = 0$ e passanti per il punto $O(0; 0)$, e determina la misura della corda intercettata sulla retta di equazione $2x - y - 6 = 0$ dalla parabola avente il vertice di ascissa maggiore.
$\left[y = \frac{1}{2}x^2 - 2x \text{ e } y = \frac{9}{50}x^2 - \frac{2}{5}x; 4\sqrt{5}\right]$

328 Determina l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y tangente alla retta $4x + y - 16 = 0$ nel suo punto di ascissa 4 e passante per l'origine del sistema di riferimento. Trova l'area della parte di piano delimitata dalla parabola trovata e dalla bisettrice del secondo e quarto quadrante.
$\left[y = -x^2 + 4x; \frac{125}{6}\right]$

5. I FASCI DI PARABOLE

▶ Teoria a pag. 325

IN PRATICA ▶ Videolezione 20

Riconosci fra le seguenti equazioni quelle che rappresentano un fascio di parabole.

329 $(k+2)x - ky + 3 - k = 0$ [no]

330 $x^2 + y^2 + kx - 3y - 4 = 0$ [no]

331 $(k+1)x^2 + 2ky - 3k + 1 = 0$ [sì]

332 $x^2 - ky^2 = 1$ [no]

333 $x = y^2 - (a+1)y - 2$ [sì]

334 $y + 2 = ax^2 + (a-1)x + 1$ [sì]

335 $kxy = 2 - k$ [no]

336 $(k+1)x^2 - y + kx = 0$ [sì]

337 $(k+1)x^2 + (k+1)y^2 - ky + kx = 0$ [no]

338 $(2k-1)y^2 - 3x + (k+3)y = 2$ [sì]

Lo studio di un fascio di parabole

339 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo il fascio di parabole rappresentato dalla seguente equazione:

$$y = -(k+2)x^2 - x + k - 1, \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

- Determiniamo le coordinate dei vertici al variare di k:

$$V\left(-\frac{1}{2(k+2)}; \frac{4k^2+4k-7}{4(k+2)}\right).$$

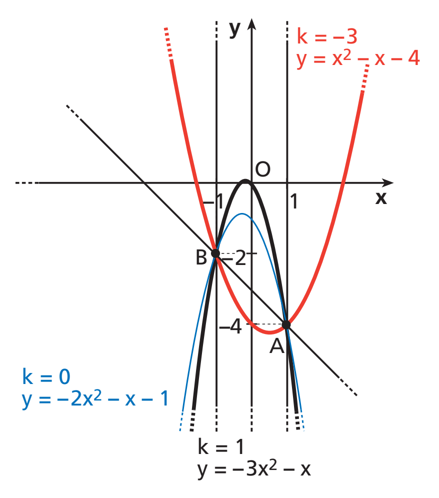
Le parabole hanno il vertice variabile e quindi anche l'asse di simmetria è variabile.

- Studiamo la concavità.
Se $k < -2$, le parabole volgono la concavità verso l'alto.
Se $k > -2$, le parabole volgono la concavità verso il basso.
Se $k = -2$, si ha la parabola degenere, ossia la retta di equazione $y = -x - 3$.
- Troviamo le parabole generatrici e gli eventuali punti base.
Scriviamo l'equazione del fascio in forma implicita e raccogliamo il parametro k:
$y + 2x^2 + x + 1 + k(x^2 - 1) = 0.$
Scriviamo l'equazione della parabola p, corrispondente a $k = 0$:
$y = -2x^2 - x - 1.$
Scriviamo l'equazione della parabola p', uguagliando a 0 l'espressione che è moltiplicata per k, $x^2 - 1 = 0$, e troviamo una parabola degenere, ossia la coppia di rette di equazioni $x = 1$ e $x = -1$.
Determiniamo le coordinate dei punti di intersezione di p con p':

$$\begin{cases} y = -2x^2 - x - 1 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

I punti base sono due: $A(1; -4)$ e $B(-1; -2)$.
Si tratta quindi di un fascio di parabole secanti.



- Disegniamo qualche parabola del fascio, attribuendo alcuni valori a k:

$$k = 0 \quad \rightarrow \quad y = -2x^2 - x - 1 \quad \rightarrow \quad V_0\left(-\frac{1}{4}; -\frac{7}{8}\right);$$

$$k = 1 \quad \rightarrow \quad y = -3x^2 - x \quad \rightarrow \quad V_1\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right);$$

$$k = -3 \quad \rightarrow \quad y = x^2 - x - 4 \quad \rightarrow \quad V_{-3}\left(\frac{1}{2}; -\frac{17}{4}\right).$$

Studia i seguenti fasci di parabole.

340 $(a-1)x^2 + 2y + 2x + a + 1 = 0$ [parab. senza punti in comune; parab. deg. per $a = 1$]

341 $y - 3 = ax^2$ [parab. tangenti; parab. deg. per $a = 0$; $A(0; 3)$ punto base]

342 $kx^2 - y + (k-1)x = 0$ [parab. secanti in due punti; parab. deg. per $k = 0$; $A(-1; 1)$ e $B(0; 0)$ punti base]

343 $y = (k+1)x^2 - 2kx - 3$ [parab. secanti in due punti; parab. deg. per $k = -1$; $A(0; -3)$ e $B(2; 1)$ punti base]

Bergamini, Trifone, Barozzi **MATEMATICA.BLU - Vol. 3** © Zanichelli 2012 *con Maths in English*

344 $(k-2)y+kx^2-2x+k=0$

[parab. senza punti in comune; parab. deg. per $k=0$; $\nexists$ parab. per $k=2$; non ci sono punti base]

345 $(k-1)y=(k+2)x^2-x$

$\left[\text{parab. secanti in due punti; parab. deg. per } k=-2, k=1; A(0;0), B\left(\frac{1}{3};\frac{1}{9}\right) \text{ punti base}\right]$

346 $y=x^2+2kx+2k-1$ [parab. secanti in un punto; $A(-1;0)$ punto base]

347 $x^2+2(m-2)x-(m+1)y+4-5m=0$

[parab. tangenti alla retta $2x-y-5=0$ in $(3;1)$; parab. deg. per $m=-1$]

348 $(1+m)x^2-4mx+(m-1)y=0$

[parab. secanti in due punti; parab. deg. per $m=-1$, $m=1$; $A(0;0)$ e $B(2;4)$ punti base]

349 $(m+1)x^2+2(2-3m)x+(m-1)y+4+9m=0$

[parab. senza punti in comune; parab. deg. per $m=-1$; $\nexists$ parab. per $m=1$]

350 $(1+m)x^2-4x+(1-m)y+3-m=0$

[parab. tangenti alla retta $y=2x-2$ nel punto $(1;0)$; parab. deg. per $m=\pm 1$]

351 $x=-y^2+(a+2)y+2$ [parab. secanti in un punto; $A(2;0)$ punto base]

352 $y=(1-k)x^2-(k+2)x+2k-3$

[parab. secanti in due punti; parab. deg. per $k=1$; $A(-2;5)$, $B(1;-4)$ punti base]

353 $(k-2)x^2-ky-9k+8=0$

[parab. secanti in due punti; parab. deg. per $k=0$, $k=2$; $A(-2;-5)$, $B(2;-5)$ punti base]

354 $y=(k+1)x^2-2(3k+1)x+9k+1$

[parab. tangenti in un punto; parab. deg. per $k=-1$; $A(3;4)$ punto base]

355 $x=(2-k)y^2+2ky+1$ [parab. secanti in due punti; parab. deg. per $k=2$; $A(1;0)$ e $B(9;2)$ punti base]

356 $y^2-(m+1)x+(m-6)y+9-m=0$

[parab. con asse di simmetria parallelo all'asse x, passanti per $(1;2)$ e $(4;5)$; parab. deg. per $m=-1$]

357 $y^2+(m-1)x+2(m-2)y+m=0$

[parab. con asse di simmetria parallelo all'asse x, tangenti alla retta $x+2y+1=0$ nel punto $(-3;1)$; parab. deg. per $m=1$]

358 Studia il fascio di parabole di equazione $y=(3k-2)x^2+2(3-5k)x-4+7k$, poi determina per quale valore di k la parabola del fascio:

a) passa per il punto $P(2;-3)$;
b) ha il vertice sull'asse y.

$\left[\text{parab. secanti; parab. deg. per } k=\frac{2}{3}; A(1;0) \text{ e } B\left(\frac{7}{3};-\frac{8}{9}\right) \text{ punti base; a) } k=3; \text{ b) } k=\frac{3}{5}\right]$

359 Studia il fascio di parabole di equazione $(1-2k)x^2-(3+3k)x+(1+k)y-6-3k=0$ e determina l'equazione della parabola del fascio:

a) passante per il punto $P(0;1)$;
b) che ha asse di simmetria di equazione $x=-\frac{1}{2}$.

[parab. secanti; $(-1;2)$, $(1;8)$ punti base; a) $y=4x^2+3x+1$; b) $y=3x^2+3x+2$]

360 Dopo aver studiato il fascio di parabole rappresentato dall'equazione $y = (2k + 1)x^2 - kx + k - 3$, determina per quale valore di k si ottiene la parabola del fascio:

a) passante per il punto $P(2; -2)$;
b) avente il vertice sull'asse delle x;
c) avente il fuoco sulla retta $y = -4$.

$\left[\text{parab. senza punti in comune; parab. deg. per } k = -\frac{1}{2}\text{; a) } k = -\frac{3}{7}\text{; b) } k = \frac{10 \pm 2\sqrt{46}}{7}\text{; c) } k = -1, k = -\frac{5}{7}\right]$

361 Considera il fascio di parabole di equazione $(m + 1)\,y^2 + (m - 1)\,x + 2(m - 1)\,y = 0$ e studia le sue principali caratteristiche. Determina poi la parabola del fascio:

a) passante per il punto $(2; -2)$;
b) tangente alla retta $x - 2y - 2 = 0$;
c) che intercetta sul semiasse positivo delle ordinate un segmento di lunghezza 2.

[$m \neq -1$: parab. congruenti con asse di simmetria parallelo all'asse x e tangenti in O alla retta $x + 2y = 0$;
a) $x = -\frac{1}{2}(y^2 + 4y)$; b) $x = -2y^2 - 2y$; c) $x = y^2 - 2y$]

362 Studia il fascio di parabole di equazione $(m + 1)x^2 - 4(m + 1)x - (m + 1)y + 4 + 5m = 0$ e determina poi la parabola del fascio:

a) passante per il punto $A(3; -3)$;
b) che intercetta sull'asse delle ascisse un segmento di lunghezza 6;
c) tangente alla retta $2x - y - 3 = 0$;
d) avente il vertice sulla retta di equazione $2x - y - 4 = 0$.

[$m \neq -1$: parab. congruenti con asse di simmetria $x = 2$, senza punti in comune;
a) $y = x^2 - 4x$; b) $y = x^2 - 4x - 5$; c) $y = x^2 - 4x + 6$; d) $y = x^2 - 4x + 4$]

363 Considerato il fascio di parabole di equazione $y = mx^2 + mx + 2m - 1$ valutare le seguenti affermazioni:

a) i vertici di tutte le parabole hanno la stessa ascissa;
b) esiste una sola parabola il cui vertice ha ordinata nulla;
c) si hanno parabole con concavità rivolta verso l'alto e che tagliano l'asse delle ascisse in due punti solo con $0 < m < \frac{4}{7}$;
d) con $m < 0$ l'ordinata del vertice della parabola è negativa;
e) con $m \neq 0$ tutte le parabole sono isometriche.

(*Università di Lecce, Facoltà di Scienze, Test di ingresso*)

Come trovare l'equazione di un fascio di parabole

364 **ESERCIZIO GUIDA**

a) Determiniamo l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, passanti per i punti $A(-1; 0)$ e $B(1; 2)$.
b) Determiniamo l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, tangenti nel punto T di ascissa 3 alla retta t di equazione $y = 2x - 1$.

a) Determiniamo l'equazione della retta AB utilizzando la formula della retta per due punti:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \rightarrow \frac{y - 0}{2 - 0} = \frac{x - (-1)}{1 - (-1)} \rightarrow \frac{y}{2} = \frac{x + 1}{2} \rightarrow y = x + 1.$$

Scriviamo l'equazione del fascio utilizzando la formula:

$y = mx + q + k(x - x_A)(x - x_B)$.

Sostituendo a x_A e x_B le ascisse di A e B e a m e q i valori trovati per la retta AB, otteniamo:

$y = x + 1 + k(x + 1)(x - 1) \quad \to \quad y = x + 1 + k(x^2 - 1) \quad \to \quad y = kx^2 + x + 1 - k$.

b) Scriviamo l'equazione del fascio utilizzando la formula:

$y = mx + q + k(x - x_T)^2$.

Sostituendo a x_T l'ascissa di T e a m e q i corrispondenti valori dell'equazione di t otteniamo:

$y = 2x - 1 + k(x - 3)^2 \to y = 2x - 1 + k(x^2 - 6x + 9) \to y = kx^2 + (2 - 6k)x - 1 + 9k$.

365 Nel fascio di parabole definito dalle parabole di equazioni

$y = x^2 - 2x + 1, \qquad y = -x^2 + 4x + 1,$

determina:
a) l'equazione delle parabole degeneri;
b) l'equazione della parabola passante per il punto $P(-1; -2)$.

$\left[\text{a) } y = x + 1;\ x = 0;\ x = 3;\ \text{b) } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1\right]$

366 Nel fascio individuato dalle parabole di equazioni $y = 2x^2 + x - 1$ e $y = -x^2 + 2x$, determina la parabola:
a) avente il fuoco di ascissa $\frac{7}{2}$;
b) passante per il punto $P(0; 1)$;
c) avente asse di simmetria di equazione $x = \frac{1}{2}$.

$\left[\text{a) } y = -\frac{x^2}{4} + \frac{7}{4}x - \frac{1}{4};\ \text{b) } y = -4x^2 + 3x + 1;\ \text{c) } y = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}\right]$

367 Date le parabole di equazioni $y = x^2 + 2x$ e $y = -x^2 + 1$, scrivi l'equazione del fascio da esse determinato e quindi trova la parabola del fascio:
a) passante per il punto $P(1; -3)$;
b) avente vertice di ascissa $x_V = 1$.

$\left[\text{a) } y = -3x^2 - 2x + 2;\ \text{b) } y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right]$

368 Dopo aver rappresentato le parabole di equazioni $x = 2y^2 - 4y$ e $x = 3y^2 + 4$, scrivi l'equazione del fascio da esse individuato, infine determina e rappresenta le seguenti parabole:
a) degeneri;
b) avente per asse di simmetria la retta di equazione $y = -\frac{1}{2}$;
c) avente il vertice di ordinata $y_V = \frac{1}{4}$.

$\left[\text{a) } x + 12y + 8 = 0;\ y + 2 = 0;\ \text{b) } x = 4y^2 + 4y + 8;\ \text{c) } y = \frac{8}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}\right]$

369 Nel fascio individuato dalle parabole di equazioni $y = x^2 - 2x + 4$ e $y = -x^2 + 2$, determina la parabola:
a) passante per l'origine;
b) avente vertice di ascissa $x_V = \frac{1}{4}$;
c) tangente alla retta di equazione $y = -2x + 4$.

$\left[\text{a) } y = -3x^2 + 2x;\ \text{b) } y = -2x^2 + x + 1;\ \text{c) } y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{3},\ y = x^2 - 2x + 4\right]$

370 Scrivi l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, passanti per $A(0; 0)$ e $B(1; 4)$.

$[y = kx^2 + (4 - k)x]$

371 Determina l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, passanti per i punti $A(-1; 1)$ e $B(1; -1)$. Trova poi la parabola del fascio con concavità verso l'alto e con il vertice sulla retta di equazione $y = -x - \frac{3}{4}$. $[y = kx^2 - x - k; y = x^2 - x - 1]$

372 Scrivi l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, tangenti nel punto $T(2; 7)$ alla retta $y = 2x + 3$. $[y = kx^2 + 2(1 - 2k)x + 3 + 4k]$

373 Nel fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, tangenti alla retta di equazione $y = 2x + 5$ nel punto di ascissa nulla, determina la parabola:
a) passante per $P(1; 9)$;
b) con vertice di ascissa $-\frac{1}{3}$;
c) tangente alla retta di equazione $y = 6x + 9$.
[a) $y = 2x^2 + 2x + 5$; b) $y = 3x^2 + 2x + 5$; c) $y = -x^2 + 2x + 5$]

374 Fra le parabole del fascio con asse parallelo all'asse y, avente come punti base $A(-3; 0)$ e $B(0; 3)$, determina quella:
a) che ha vertice in $V(-2; -1)$;
b) che ha fuoco in $F\left(-1; \frac{15}{4}\right)$;
c) avente per asse la retta di equazione $x = -\frac{5}{4}$.
[a) $y = x^2 + 4x + 3$; b) $y = -x^2 - 2x + 3$; c) $y = -2x^2 - 5x + 3$]

375 Nel fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, passanti per i punti $A(-3; 2)$ e $B(3; -2)$, determina la parabola:
a) passante per $P(-1; -2)$;
b) tangente alla retta di equazione $2x + 3y - 9 = 0$.
$\left[\text{a) } y = \frac{x^2 - 2x - 9}{3}; \text{ b) } y = \frac{-x^2 - 2x + 9}{3}\right]$

376 Nel fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, tangenti alla retta di equazione $y = -x + 2$ nel punto di ascissa 1, determina la parabola:
a) passante per $P(2; -1)$;
b) con fuoco di ascissa $\frac{5}{4}$;
c) con direttrice la retta di equazione $y = \frac{5}{4}$.
[a) $y = -x^2 + x + 1$; b) $y = 2x^2 - 5x + 4$; c) $y = -2x^2 + 3x$]

377 Scrivi l'equazione del fascio di parabole tangenti nel vertice $V(2; 4)$ alla retta di equazione $y = 4$ e determina la parabola tangente alla retta di equazione $y = 4x - 6$. $[y = 4 + k(x - 2)^2; y = 2x^2 - 8x + 12]$

378 Fra tutte le parabole con asse parallelo all'asse y, tangenti nel punto $T(-1; -1)$ alla bisettrice del I e III quadrante, determina quella che è tangente alla retta di equazione $y = 7x + 9$. $[y = -3x^2 - 5x - 3]$

379 Nel fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, passanti per i punti $A(2; 3)$ e $B(4; -1)$, determina la parabola:
a) passante per $P(1; 8)$;
b) tangente alla retta di equazione $y = 6x - 7$.
[a) $y = x^2 - 8x + 15$; b) $y = -2x^2 + 10x - 9$, $y = -8x^2 + 46x - 57$]

380 Nel fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, passanti per i punti $A(2; 2)$ e $B(3; 0)$, determina la parabola:
a) passante per l'origine;
b) tangente alla retta di equazione $y = x - 4$;
c) avente per asse la retta di equazione $x = 2$.
[a) $y = -x^2 + 3x$; b) $y = x^2 - 7x + 12$, $y = 9x^2 - 47x + 60$; c) $y = -2x^2 + 8x - 6$]

ESERCIZI VARI La parabola

TEST

381 Quali, fra le seguenti coppie di parabole, hanno lo stesso vertice?

A $y = x^2 + 1$ e $y = -x^2 - 1$

B $x = \frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{3}y + 1$ e $x = -\frac{1}{3}y^2 + 2y + 1$

C $y = -x^2 + 2x$ e $y = 2x^2 - 4x + 1$

D $x = -y^2 + 2y$ e $x = -2y^2 + 4y - 3$

E $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{4}$ e $y = 3x^2 + 6x$

382 The graph of two parabolas, $y = 2x^2$ and $y = x^2 + x + 6$, intersects in two points. An equation for the line that passes through these two points is:

A $x - 2x + 18 = 0.$

B $2x - y - 18 = 0.$

C $2x - y + 12 = 0.$

D $2x - y + 4 = 0.$

E $x - 2y + 12 = 0.$

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2003)

383 L'equazione $x = ay^2 + by + c$, con $a > 0$, $b = 0$ e $c > 0$, rappresenta una parabola con:

A la concavità rivolta verso destra e vertice sull'asse y.

B asse di simmetria l'asse x e vertice sul semiasse positivo delle x.

C la concavità rivolta verso sinistra e vertice sull'asse x.

D vertice un punto qualunque del I quadrante e passante per l'origine.

E asse di simmetria l'asse x e vertice nell'origine.

384 Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $(3k + 6)x^2 + 3y - 6k = 0$ rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse delle y?

A $k = 2$ B $k = 1$ C $k \neq -2$ D $\forall k \in \mathbb{R}$ E $\nexists k \in \mathbb{R}$

385 Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $(k - 1)y^2 + (k^2 - 2k - 3)x^2 + 2ky - x + 2k - 1 = 0$ rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse delle ascisse e concavità rivolta verso il semiasse negativo delle ascisse?

A -3 B 3 C 0 D 1 E -1

386 Given that the vertex of the parabola $y = x^2 + 8x + k$ is on the x-axis, what is the value of k?

A 0 B 4 C 8 D 16 E 24

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2001)

387 L'equazione che rappresenta la parabola traslata di un'unità verso destra e di otto unità verso il basso rispetto alla parabola di equazione $y = 5x^2$ è:

A $y = 5(x - 8)^2 + 1.$

B $y = 5x^2 - 8.$

C $y = 5(x - 1)^2 - 8.$

D $y = 5(x - 1)^2 + 8.$

E $y = 5(x + 1)^2 - 8.$

(USA *Pro2Serve Tennessee Math Contest «Fermat 1»*, 2005)

388 Trova tutti i valori di a per i quali le parabole $y = 1 + 2x - x^2$ e $y = x^2 + a^2$ si intersecano.

(USA *Texas A&M University High School Mathematics Contest*, 2001)

$\left[-\sqrt{\frac{3}{2}} \leq a \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$

389 Trova la retta tangente alla parabola di equazione $y = x^2 + 2x + 4$, parallela alla retta di equazione $y - 2x = 0$. Indicati con T il punto di tangenza, con V il vertice della parabola e con A il punto d'incontro della retta tangente con l'asse delle x, calcola l'area del triangolo AVT. $[y = 2x + 4; 1]$

390 Determina l'equazione della parabola con fuoco $F\left(-\frac{15}{4}; 1\right)$ e direttrice $x = -\frac{17}{4}$. Trova successivamente l'equazione della circonferenza con centro nel vertice della parabola e passante per i punti di intersezione della parabola con l'asse y. $[x = y^2 - 2y - 3; x^2 + y^2 + 8x - 2y - 3 = 0]$

391 a) Considera la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 5$ e determina il suo punto P di ascissa 4.
b) Scrivi l'equazione della tangente t in P alla parabola.
c) Sia R l'intersezione di t con la tangente nel vertice V alla parabola; siano H e K le proiezioni di P sull'asse di simmetria della parabola e sulla tangente nel vertice. Calcola l'area del quadrilatero $HPRV$ e dimostra che è il triplo dell'area del triangolo PRK.

[a) $P(4; 5)$; b) $4x - y - 11 = 0$; c) $R(3; 1)$, $H(2; 5)$, $K(4; 1)$; 6]

392 Nel fascio individuato dalle parabole di equazioni $y = x^2 - 2x + 4$ e $y = -x^2 + 2$, determina la parabola:
a) passante per l'origine;
b) avente vertice di ascissa $x_V = \frac{1}{4}$;
c) tangente alla retta di equazione $y = -2x + 4$.

$\left[\text{a) } y = -3x^2 + 2x; \text{ b) } y = -2x^2 + x + 1; \text{ c) } y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}, y = x^2 - 2x + 4\right]$

393 TEST Let $P(a; b)$ and $Q(c; d)$ denote two distinct points on the graph of $y = x^2$. Suppose that the slope of line PQ is 5, and the x-coordinates of P and Q differ by 1. Find $b + d$.

A 41
B 25
C 13
D 5
E None of these.

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2003)

394 La parabola $x = y^2$ e la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ si incontrano in P al di sopra dell'asse x e in Q al di sotto dell'asse x. Le tangenti comuni alla circonferenza e alla parabola incontrano la parabola in X al di sotto dell'asse x e in Y al di sopra dell'asse x. Dimostra che XP e YQ sono tangenti alla circonferenza.

(USA *The Blakers Mathematics Competition*, 2002)

395 Una circonferenza e una parabola sono disegnate nel pianto cartesiano. La circonferenza ha centro nel punto (0; 5) e raggio 4, e la parabola ha il suo vertice in (0; 0). Se la circonferenza è tangente alla parabola in due punti, ricava l'equazione della parabola.

(USA *Texas A&M University High School Mathematics Contest*, 2000)

$\left[y = \frac{1}{4}x^2\right]$

396 Considera la parabola che ha il vertice e il fuoco sull'asse y, rispettivamente di ordinata 2 e $\frac{5}{2}$. Trova il punto della parabola più vicino alla retta di equazione $y = \frac{1}{2}(x + 1)$.

$\left[y = \frac{x^2}{2} + 2; \left(\frac{1}{2}; \frac{17}{8}\right)\right]$

397 a) Determina la retta tangente alla parabola γ_1 di equazione $y = -x^2 + 3x$, parallela alla bisettrice del I e III quadrante. Indicati con T il punto di tangenza e con A e B i punti di intersezione della parabola con l'asse x, calcola l'area del triangolo ATB.
b) Scrivi l'equazione della parabola γ_2 simmetrica di γ_1 rispetto alla retta $y = x$. Trova i punti di intersezione di γ_1 e γ_2 e verifica che in uno di essi hanno la stessa tangente.

[a) $y = x + 1$; $T(1; 2)$; 3; b) $x = -y^2 + 3y$; (0; 0); (2; 2)]

398 Determina per quale valore di k la parabola del fascio $y = -x^2 + 2(k - 1)x - k$:
a) passa per il punto $P(-1; 1)$;
b) ha asse di simmetria $x = 5$;
c) ha il vertice di ordinata 5;
d) è tangente alla bisettrice del I e del III quadrante.
e) Trova infine il luogo descritto dai vertici delle parabole del fascio.

$\left[\text{a) } k = 0; \text{ b) } k = 6; \text{ c) } k = -1; k = 4; \text{ d) } k = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{2}; \text{ e) } y = x^2 - x - 1\right]$

399 Studia il fascio di parabole di equazione $y = kx^2 + 2x - k + 1$ e trova la parabola γ_1 che ha il vertice di ordinata 3 e la parabola γ_2 tangente alla retta di equazione $y = 2x - 2$.
Nella parte di piano racchiusa da γ_1 e γ_2, determina l'equazione di una retta parallela all'asse y che intercetta una corda PQ di lunghezza 3.
Tracciate le tangenti alle due parabole nei punti P e Q (con P nel II quadrante) che si intersecano nel punto T, trova l'area del triangolo PQT.
$\left[\text{parab. secanti nei punti } A(-1;-1) \text{ e } B(1;3);\ \gamma_1\text{: } y=-x^2+2x+2, \gamma_2\text{: } y=3x^2+2x-2;\ x=-\frac{1}{2} \vee x=\frac{1}{2};\ \frac{9}{8}\right]$

400 Due parabole γ_1 e γ_2 hanno il vertice in comune $V(3; 1)$, passano per $A(4; 0)$ e hanno gli assi paralleli agli assi cartesiani. Trova l'area della regione delimitata da γ_1 e γ_2. $\left[\frac{1}{3}\right]$

401 a) Scrivi l'equazione della parabola γ con asse parallelo all'asse y che ha il vertice V sulla retta $y = 2x + 2$ e che passa per i punti $(-2; -5)$ e $(0; 3)$.
b) Indicati con A e B i punti di intersezione di γ con l'asse x, traccia la retta tangente in A e la parallela all'asse y in B e indica con P il loro punto di intersezione. Verifica che la retta AV passa per il punto medio di PB.
[a) $y = -x^2 + 2x + 3$]

402 Considera la parabola γ di equazione $y = -\frac{x^2}{2} + 4x - 6$ e da un punto C dell'asse di γ conduci le tangenti a γ. Detti A e B i punti di tangenza e M il punto medio di AB, dimostra che il vertice della parabola è il punto medio del segmento CM.

403 Data la parabola di equazione $y = \frac{1}{4}x^2$, considera un punto Q della direttrice.
a) Verifica che le due tangenti alla parabola condotte da Q sono perpendicolari.
b) Determina la tangente t alla parabola nel suo punto P di ascissa 3. Trova poi la tangente alla parabola perpendicolare a t. Verifica che le due tangenti si intersecano in un punto della direttrice.
$\left[\text{b) } y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{4},\ y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{9}, \left(\frac{5}{6}; -1\right)\right]$

404 Data la parabola γ di equazione $2y = x^2 - 6x + 5$, trova le equazioni delle rette tangenti nei punti A e B di intersezione di γ con l'asse x.
Verifica che le tangenti in A e B si incontrano in un punto C dell'asse della parabola e che il punto medio del segmento di perpendicolare condotto da C all'asse x è il vertice V di γ. [$y = -2x + 2$, $y = 2x - 10$]

405 Tre parabole con asse parallelo all'asse y hanno vertici $V_1(1; 0)$, $V_2(2; -2)$, $V_3(1; 2)$ e intersecano l'asse y nei punti di ordinate -1, -6 e 3, rispettivamente.
Trova le loro equazioni, verifica che hanno una tangente comune e determina le coordinate dei punti di contatto. [$y = -x^2 + 2x - 1$, $y = -x^2 + 4x - 6$, $y = x^2 - 2x + 3$; $y = -2x + 3$; $(2; -1)$, $(3; -3)$, $(0; 3)$]

406 Nel fascio di parabole congruenti aventi l'asse di simmetria coincidente con l'asse y trova la parabola γ_1 che ha il vertice di ordinata 1 e passa per il punto $(-2; -3)$ e la parabola γ_2 passante per $(3; -7)$.
Traccia la retta tangente in un punto T di γ_1 che interseca γ_2 in P e Q e verifica che T è il punto medio di PQ.
[γ_1: $y = -x^2 + 1$, γ_2: $y = -x^2 + 2$]

407 a) Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per $A(1; 0)$, $B(4; -3)$ e tangente in quest'ultimo punto alla retta t di coefficiente angolare -4.
b) Per un punto P dell'arco AB di parabola, conduci la retta parallela all'asse y e indica con Q il punto che tale retta ha in comune con la corda AB. Determina P e Q in modo che l'area del triangolo APQ sia 2.
c) Scrivi l'equazione del fascio di parabole tangenti in B alla retta t e trova quale di queste ha il vertice sull'asse delle x.
$\left[\text{a) } y = -x^2 + 4x - 3;\ \text{b) } P(3; 0), Q(3; -2);\ \text{c) } y = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{20}{3}x - \frac{25}{3}\right]$

408 a) Considera la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 3$, rappresentala graficamente e indica con F il suo fuoco e con d la sua direttrice.
b) Determina l'equazione della tangente t alla parabola nel suo punto P di ascissa 0.
c) Verifica che t è la bisettrice dell'angolo formato dalla retta per P e F e dalla perpendicolare condotta da P a d.

$\left[\text{a) } F\left(2; -\frac{3}{4}\right), d: y = -\frac{5}{4}; \text{ b) } y = -4x + 3\right]$

409 a) Trova l'equazione della parabola γ_1 passante per il punto $A(-1; 0)$, avente per asse di simmetria la retta $x = 1$ e tangente alla retta di equazione $y = 2x - 6$. Indica con V il vertice e con B l'ulteriore punto di intersezione di γ_1 con l'asse x; trova sull'arco VB un punto P tale che l'area del triangolo PAB sia $\frac{7}{4}$.
b) Scrivi l'equazione della parabola γ_2 con vertice $V(2; 1)$ e fuoco $F\left(2; \frac{3}{4}\right)$.
c) Determina la retta parallela all'asse x che stacca sulle parabole due corde uguali.

$\left[\text{a) } y = \frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}, P\left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{8}\right); \text{ b) } y = -x^2 + 4x - 3; \text{ c) } y = -1\right]$

410 Dopo aver rappresentato le parabole γ_1 e γ_2 di equazioni $y = x^2 + 4x$ e $y = -x^2 + 2x$, scrivi l'equazione del fascio da esse individuato, poi determina le parabole:
a) degeneri;
b) con asse di simmetria coincidente con l'asse y;
c) con il fuoco sull'asse delle x.
d) Considera la parabola γ_1 e trova il perimetro del triangolo rettangolo isoscele che ha l'ipotenusa sull'asse x e i cateti tangenti alla parabola. Calcola la lunghezza della corda che collega i punti di tangenza.

$\left[\text{a) } y = 3x; x = -1; x = 0; \text{ b) } y = -3x^2; \text{ c) } y = -2x^2 + x, y = -4x^2 - x; \text{ d) } \frac{17}{2}(1 + \sqrt{2}); 1\right]$

411 Studia il fascio di parabole di equazione

$$y = ax^2 - (2a + 1)x + a - 1$$

e determina:
a) la parabola γ avente per tangente la retta $y = -3x$;
b) la parabola γ_1 di vertice il punto $\left(\frac{1}{2}; -\frac{7}{4}\right)$.
c) Dimostra che le due parabole γ e γ_1 sono congruenti.
d) Determina la retta $x = h$ $(h > 0)$ tale che intersechi le due parabole γ e γ_1 in due punti che con l'origine formano un triangolo di area 36.

[parab. tangenti, parab. degenere $y + x + 1 = 0$, punto base $(1; -2)$;
a) γ: $y = x^2 - 3x$; b) γ_1: $y = -x^2 + x - 2$; d) $h = 4$]

412 Determina le equazioni delle parabole $y = ax^2 + bx + c$, aventi per vertice un punto di ordinata -9 e di ascissa la soluzione minore dell'equazione $t^4 - 11t^3 + 25t^2 - 11t + 24 = 0$, e che individuano sulla retta $x - y - 10 = 0$ un segmento AB di misura $3\sqrt{2}$. Calcola l'area del triangolo ABC, dove C è l'intersezione di ascissa positiva della parabola avente la concavità rivolta verso l'alto con l'asse delle x.

$\left[y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x - 10, y = x^2 - 6x; 6\right]$

413 Studia il fascio di parabole di equazione

$$(k - 1)x^2 + (1 - 3k)x + (1 + k)y + k - 1 = 0$$

e determina per quali valori di k si ha la parabola:
a) con il vertice sulla retta di equazione $x = 2$;
b) tangente alla retta $y = -x$;
c) passante per il punto di intersezione delle rette $y = x + 3$ e $3x + y - 11 = 0$.

$\left[\text{parab. tangenti; (1; 1) punto base; } y = x, x = 1 \text{ parab. degeneri; a) } k = 3; \text{ b) } k = \frac{1}{3}; \text{ c) } k = -\frac{1}{2}\right]$

414 Determina l'equazione della parabola passante per i punti $P(-1; -8)$ e $Q(0; -3)$ e avente asse di simmetria di equazione $x = 2$. Calcola le coordinate dei punti di intersezione A e B della parabola con l'asse x (B è il punto di ascissa maggiore). Trova l'equazione della tangente t alla parabola passante per B. Detta C l'intersezione della retta t con l'asse y, scrivi l'equazione della circonferenza di centro C e raggio BC.
$[y = -x^2 + 4x - 3;\ A(1; 0), B(3; 0);\ y = -2x + 6; x^2 + y^2 - 12y - 9 = 0]$

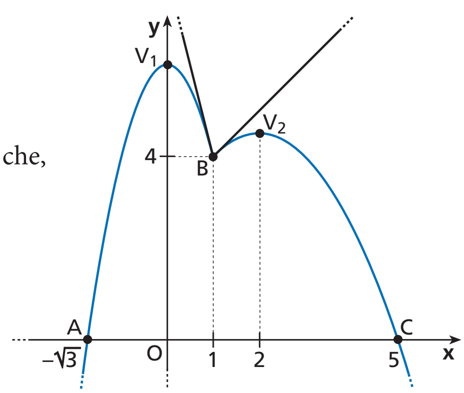
415 Determina l'equazione della retta t tangente in $T(1; 3)$ alla circonferenza con centro in $C(-2; 0)$, quindi scrivi l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, tangente in T alla retta t e passante per il punto $A(-1; 9)$. Trova l'equazione di una retta parallela all'asse y che interseca la parabola in P e la retta t in Q in modo che l'area del triangolo PQT sia uguale a 108.
$[y = -x + 4; y = x^2 - 3x + 5; x = -5 \vee x = 7]$

416 Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, con vertice in $V(0; 9)$ e passante per $A(-2; 5)$. Successivamente trova l'equazione della retta t tangente in A alla parabola e scrivi l'equazione della circonferenza con il centro C sull'asse y e tangente in A alla retta t. Detto V il vertice della parabola, calcola l'area del triangolo AVC.
$\left[y = -x^2 + 9; y = 4x + 13; x^2 + y^2 - 9y + 16 = 0; \frac{9}{2}\right]$

417 Dato il triangolo ABC isoscele su AB con $\overline{AB} = 4$ e di altezza $\overline{CH} = 9$, una parabola passa per A e B e ha il vertice nel baricentro del triangolo. Dopo aver scelto un opportuno sistema di riferimento, trova l'equazione della parabola e la sua tangente nel punto A.
$\left[A(-2; 0), B(2; 0); y = -\frac{3}{4}x^2 + 3; y = 3x + 6\right]$

418 Data una circonferenza di raggio 2, disegna la parabola che passa per i due punti A e B estremi di un diametro e ha il vertice in un estremo del diametro perpendicolare ad AB. Posto un opportuno sistema di riferimento, trova l'equazione della circonferenza e della parabola e inscrivi un quadrato nel segmento parabolico definito dalla retta AB.
$\left[x^2 + y^2 = 4; y = -\frac{1}{2}x^2 + 2; C\big(2(\sqrt{2} - 1); 4(\sqrt{2} - 1)\big) \text{ è un vertice del quadrato}\right]$

419
a) Scrivi la funzione di cui è rappresentato il grafico, utilizzando i dati della figura.
b) Calcola l'area del quadrilatero ABV_2C.
c) Trova le tangenti nel punto B.
d) Determina, sull'arco AV_1 della parabola, un punto P in modo che, dette H e K le sue proiezioni sull'asse x e sull'asse y, sia $\overline{PH} + \overline{PK} = 5$.



$\left[\text{a) } y = -2x^2 + 6 \text{ se } x < 1,\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2} \text{ se } x \geq 1; \text{ b)} 13 + 2\sqrt{3}; \text{ c) } y = -4x + 8,\ y = x + 3; \text{ d) } P(-1; 4)\right]$

420 Scrivi l'equazione della parabola $y = x^2 + bx + c$, passante per l'origine e ivi tangente a una retta di coefficiente angolare 6. Determina l'equazione della tangente t e della normale n alla parabola nel suo punto di ascissa -5. Calcola l'area del triangolo formato da t e da n con la retta avente coefficiente angolare 4 e passante per il punto della parabola di ascissa -2.
$\left[y = x^2 + 6x; t\text{: } 4x + y + 25 = 0, n\text{: } x - 4y - 15 = 0; \frac{255}{16}\right]$

421 Rappresenta la parabola di equazione $x = 2y^2 + 1$ e trova una retta parallela all'asse y che intersecando la parabola forma con il vertice un triangolo di area uguale a $\frac{27}{4}$. Scrivi poi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo. $[2x - 11 = 0; x^2 + y^2 - 7x + 6 = 0]$

422 Scrivi l'equazione della parabola p_1: $y = x^2 - 4x + c$ tangente in un punto A alla parabola p_2 di equazione $y = -x^2 + 8x - 18$ e traccia le rette passanti per A e aventi coefficienti angolari -2 e -1. Siano B e C le intersezioni delle rette trovate con p_1 e D ed E quelle con p_2. Verifica che i triangoli ABC e AED sono congruenti e calcolane area e perimetro.
$\left[y = x^2 - 4x; B(-1; 5), C(0; 0), D(7; -11), E(6; -6); \text{area} = 6, 2p = \sqrt{26} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{5}\right]$

423 Determina l'equazione della parabola p_1: $y = ax^2 + bx - 1$ tangente alla retta $2x - y = 0$ nel punto di ascissa 1 e l'equazione della parabola p_2 con asse parallelo all'asse y, avente per vertice il punto di ascissa 4 di p_1 e passante per il punto di ascissa 3 di p_1. Calcola il valore di k per il quale la retta $y = k$ interseca p_1 e p_2 formando segmenti congruenti. $[y = -x^2 + 4x - 1; y = 3x^2 - 24x + 47; k = 2]$

424 Considera la parabola di equazione $y = x^2 + 6x$ che interseca l'asse x nei punti O e B. Determina le coordinate di un punto P, appartenente all'arco OB della parabola, tale che la somma delle sue distanze dalla tangente t in B e dalla normale n alla curva in B sia $\frac{60}{\sqrt{37}}$. $\left[O(0; 0), B(-6; 0); P_1(-1; -5), P_2\left(-\frac{18}{5}; -\frac{216}{25}\right)\right]$

425 Determina le equazioni delle parabole $y = x^2 + bx$ e $y = -x^2 - 2x + c$ che intersecano la retta r: $y = -5$ nel punto di ascissa 1 e le tangenti alle due parabole nei punti che hanno in comune. Calcola poi l'area del poligono formato dalla retta r, dalle tangenti determinate e dall'asse delle ordinate.
$[y = x^2 - 6x,\ y = -x^2 - 2x - 2; 4x + y + 1 = 0; 2]$

426 Scrivi l'equazione della parabola avente per asse la retta $y = 4$, che intercetta sull'asse y una corda lunga 4 e passante per il punto di ascissa -6 dell'asse delle x. Trova l'equazione della parabola simmetrica della parabola trovata rispetto all'asse y. Nella parte di piano delimitata dalle due parabole inscrivi un rettangolo avente perimetro 10 e individua i suoi vertici.
$\left[x = -\frac{1}{2}y^2 + 4y - 6; x = \frac{1}{2}y^2 - 4y + 6; \left(\frac{3}{2}; 3\right), \left(\frac{3}{2}; 5\right), \left(-\frac{3}{2}; 3\right), \left(-\frac{3}{2}; 5\right)\right]$

427 Scrivi le equazioni delle parabole $y = ax^2 + bx + c$, tangenti alle rette $2x - y - 5 = 0$ e $2x + y - 3 = 0$ e passanti per il punto di ascissa 4 della retta $3x - 5y + 8 = 0$. Determina l'equazione della retta t tangente nel punto A di ascissa 3 alla parabola avente il vertice di ordinata minore e l'equazione della retta n normale alla stessa parabola in A e poi calcola l'area del triangolo formato da t, n e dall'asse delle ascisse.
$\left[y = x^2 - 4x + 4 \text{ e } y = \frac{1}{4}x^2 - x + 4; t: 2x - y - 5 = 0, n: x + 2y - 5 = 0; \frac{5}{4}\right]$

428 Scrivi l'equazione della parabola avente il fuoco in $F\left(4; -\frac{3}{2}\right)$ e per direttrice la retta $y = -\frac{5}{2}$. Determina l'equazione della tangente t alla parabola nel suo punto A di ascissa 6. Individua il punto G simmetrico del punto F rispetto a t e verifica che il triangolo FAG è isoscele e che il piede dell'altezza condotta da A appartiene alla tangente nel vertice della parabola. $\left[y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6; 2x - y - 12 = 0; G\left(6; -\frac{5}{2}\right)\right]$

429
a) Rappresenta il grafico della curva di equazione $y = 3 - \sqrt{3 - x}$.
b) Trova l'equazione della parabola con il vertice nel I quadrante che passa per i punti $(1; -1)$ e $(0; -6)$ e che intersecando l'asse x determina una corda lunga $2\sqrt{3}$.
c) Determina le intersezioni A e B delle due curve e calcola l'area del triangolo formato dall'asse del segmento AB e dagli assi cartesiani.
$\left[\text{b) } y = -x^2 + 6x - 6; \text{c) } A(2; 2), B(3; 3), \frac{25}{2}\right]$

430 La parabola γ_1 ha come asse di simmetria la retta $x = 4$ e ha per tangente nel punto A di ascissa 1 la retta di equazione $y = 6x - 7$. La parabola γ_2 ha il vertice nel punto $V\left(4; -\frac{13}{4}\right)$ e il fuoco in $F\left(4; -\frac{9}{4}\right)$. Determina l'equazione di γ_1 e γ_2 e nella parte di piano da esse racchiusa inscrivi un rettangolo con i lati paralleli agli assi cartesiani di perimetro uguale a 24.

$\left[y = -x^2 + 8x - 8,\ y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + \frac{3}{4}; \ldots\right]$

431 Trova le intersezioni A e B fra la retta r di equazione $y = -x + 3$ e la parabola p di equazione $y = x^2 - 2x + 1$. Considera sull'arco AB di parabola un punto P e determina l'equazione del luogo descritto dal baricentro del triangolo APB al variare di P. Scrivi poi l'equazione della circonferenza di diametro AB e determina le ascisse delle altre due intersezioni fra la circonferenza e la parabola.

$\left[A(-1; 4),\ B(2; 1);\ x^2 + y^2 - x - 5y + 2 = 0;\ x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},\ x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right]$

432 Scrivi l'equazione della circonferenza con il diametro di estremi $A(1; 1)$ e $B(3; 5)$ e della parabola con asse parallelo all'asse y passante per A e con vertice in B. Trova l'ulteriore punto C di intersezione fra la circonferenza e la parabola e verifica che in tale punto le due curve hanno la stessa tangente t. Trova poi per quale punto P della parabola si verifica che:

$$\sqrt{5}\,\overline{PQ} + \overline{PR} = 2,$$

essendo Q e R le proiezioni di P rispettivamente sulla retta t e sull'asse x.

$[x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0;\ y = -x^2 + 6x - 4;\ C(4; 4);\ t: y = -2x + 12;\ P(5; 1)]$

433 Scrivi l'equazione della circonferenza con il centro nel punto $Q(3; 5)$ e tangente all'asse x. Determina le intersezioni A e B della circonferenza con l'asse y.
Detto C il punto di tangenza della circonferenza con l'asse x, trova l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x passante per A, per B e per C. Sull'arco AB di parabola determina il punto P tale che la somma delle sue distanze dagli assi cartesiani sia uguale a $\frac{13}{3}$.

$\left[x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0;\ A(0; 9),\ B(0; 1);\ C(3; 0),\ x = \frac{1}{3}y^2 - \frac{10}{3}y + 3;\ P\left(-\frac{7}{3}; 2\right)\right]$

434 Determina il valore di k per il quale la parabola $y = \frac{3k - 7}{3}x^2 + \frac{6k - 5}{3}x + 3k - 2$ passa per il punto $P(6; -45)$.
Detti A, B e C i punti di incontro della parabola trovata con l'asse x e con l'asse y, determina l'equazione della circonferenza passante per tali punti. Trova la retta $y = k$ che interseca la parabola in D ed E e la circonferenza in F e G in modo che:

$$\frac{11}{5}\overline{DE}^2 + \overline{FG}^2 = 6.$$

$\left[k = 1;\ x^2 + y^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4} = 0;\ k = \frac{1}{2}\right]$

435 Delle due parabole con asse parallelo all'asse y passanti per $A(0; -1)$ e tangenti alle rette $y = 3x$ e $y = -2x + 15$, trova quella il cui vertice V ha ascissa maggiore.
Sull'arco AV di tale parabola considera un punto P di ascissa x e, indicata con $\mathscr{A}(APV)$ l'area del triangolo APV, traccia la funzione $f(x) = \mathscr{A}(APV)$.
Individua il punto P per cui si ha $f(x) = 2$. Trova poi l'equazione della circonferenza con centro nel vertice della parabola e passante per il suo fuoco. Spiega perché la circonferenza è tangente alla direttrice.

$\left[y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1;\ f(x) = \frac{4x - x^2}{2},\ 0 \leq x \leq 4;\ P(2; 2);\ x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0\right]$

436 Trova l'equazione della parabola con la concavità rivolta verso l'alto e con asse parallelo all'asse y che passa per $A(1; -4)$ e ha il fuoco in $F\left(-1; -\frac{31}{4}\right)$. Determina l'equazione della circonferenza γ con centro nel vertice della parabola e raggio tale che l'area individuata da γ sia π volte l'area racchiusa nel segmento parabolico compreso tra la parabola e la retta $y = 1$.

$[y = x^2 + 2x - 7;\ x^2 + y^2 + 2x + 16y + 29 = 0]$

437 a) Nel fascio di parabole con asse parallelo all'asse y tangenti alla retta di equazione $2x + y - 8 = 0$ nel suo punto di ascissa 6, individua quella tangente all'asse delle ascisse.

b) Traccia le tangenti alla parabola dal punto $P\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ e indica con A e B i punti di tangenza.

c) Verifica che il triangolo APB è un triangolo rettangolo e determina l'equazione della semicirconferenza circoscritta ad esso.

$\left[\text{a) } y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1; \text{ b) } 2x - y = 0,\ A(-2; -4),\ 2x + 4y - 5 = 0,\ B\left(3; -\frac{1}{4}\right); \text{ c) } \begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - 4x + 17y - 20 = 0 \\ 3x - 4y - 10 \leq 0 \end{cases}\right]$

438 a) Determina l'equazione della retta t passante per i punti A e B appartenenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 6$, di ascissa rispettivamente 1 e 6.

b) Trova l'area del segmento parabolico individuato dalla retta t e dalla parabola.

c) Determina il punto C ottenuto dall'intersezione delle rette r e s tangenti in A e B alla parabola.

d) Calcola l'area del triangolo ABC.

$\left[\text{a) } 2x - y = 0; \text{ b) } \frac{125}{6}; \text{ c) } C\left(\frac{7}{2}; -\frac{11}{2}\right); \text{ d) } \frac{125}{4}\right]$

439 Considera la retta r di equazione $y = -4$ e il punto $F(0; 8)$. Detto P un punto generico di r, sia Q il punto di intersezione tra l'asse t del segmento PF e la perpendicolare a r per P.

a) Verifica che il luogo descritto da Q al variare di P su r è una parabola avente r come direttrice e F come fuoco e dimostra che la retta t è tangente in Q alla parabola.

b) Determina la posizione di P affinché il triangolo PFQ abbia area doppia di quella del triangolo OPF.

$\left[\text{a) } y = \frac{x^2}{24} + 2; \text{ b) } P_1(-4\sqrt{15}; -4),\ P_2(4\sqrt{15}; -4)\right]$

440 Considera la parabola γ avente fuoco in $F(0; 8)$ e la retta di equazione $y = -4$ come direttrice, e sia P il punto di γ avente ascissa 3.

a) Determina la retta t, tangente a γ in P.

b) Nel fascio di rette parallele a t trova la retta r su cui γ stacca un segmento di lunghezza $\frac{3}{2}\sqrt{17}$.

c) Calcola l'area del triangolo che ha per vertici gli estremi della corda e il fuoco.

$[\text{a) } 2x - 8y + 13 = 0; \text{ b) } x - 4y + 8 = 0; \text{ c) } 18]$

441 a) Considera il fascio di parabole di equazione $y = x^2 - (b + 1)x + 3$ e dimostra che tutte le parabole del fascio passano per uno stesso punto P.

b) Determina la parabola γ del fascio che è tangente alla retta r di equazione $3x + 2y - 6 = 0$.

c) Determina la retta p perpendicolare a r in P e trova il suo ulteriore punto Q di intersezione con γ.

d) Trova la retta t, tangente in Q a γ.

e) Calcola l'area del triangolo individuato dalle rette r, p, t.

$\left[\text{a) } P(0; 3); \text{ b) } 2y = 2x^2 - 3x + 6; \text{ c) } 2x - 3y + 9 = 0,\ Q\left(\frac{13}{6}; \frac{40}{9}\right); \text{ d) } 102x - 36y - 61 = 0; \text{ e) } \frac{2197}{864}\right]$

442 Siano date le parabole α: $y = 2x^2 - 3x + 1$ e β: $x = -y^2 + 1$.

a) Calcola le coordinate dei loro punti di intersezione A e B e indica con A il punto di ascissa minore.

b) Detto P un punto sull'arco di α compreso tra A e B, determina P in modo che si abbia $\overline{BP}^2 - \overline{AP}^2 = \frac{1}{4}$.

c) Trova il punto Q su β in modo che i segmenti AP e BQ siano le basi di un trapezio.

d) Calcola l'area del trapezio.

$\left[\text{a) } A(0; 1),\ B(1; 0); \text{ b) } P\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{8}\right); \text{ c) } Q\left(\frac{21}{25}; \frac{2}{5}\right); \text{ d) } \frac{123}{400}\right]$

443 Considera la parabola avente il punto $V(0; 4)$ come vertice e $F\left(0; \frac{15}{4}\right)$ come fuoco.

a) Trova le equazioni delle due circonferenze con il centro sull'asse y tangenti alla parabola e all'asse x.
b) Determina le coordinate dei punti di contatto tra le due circonferenze e la parabola.
c) Calcola l'area del quadrilatero formato dai quattro punti appena determinati.

[a) $x^2 + y^2 + 5y = 0$, $x^2 + y^2 - 3y = 0$; b) $(\pm\sqrt{6}; -2)$, $(\pm\sqrt{2}; 2)$; c) $4(\sqrt{6} + \sqrt{2})$]

444 Sia α la circonferenza di centro $A(-2; 0)$ e raggio 2 e sia β la parabola avente per direttrice la tangente alla circonferenza nel punto di ascissa -4 e per fuoco un generico punto F sull'asse x.

a) Trova le equazioni di α e β.
b) Discuti, al variare del punto F, le posizioni relative di α e β.
c) Tra le posizioni di F tali che α e β siano secanti in due punti distinti P e Q, determina quella per cui PQ è un diametro di α e scrivi l'equazione della parabola corrispondente.

$\left[\text{a) } \alpha: x^2 + y^2 + 4x = 0, \beta: x = \frac{1}{2(h+4)}y^2 + \frac{h-4}{2}\right.$; b) secanti per $-4 < h < 4$, tangenti per $h = 4$, esterne per $h < -4 \vee h > 4$, parab. degenere per $h = -4$; c) $\left. h = -2,\ y^2 = 4(x+3)\right]$

445 Considera la parabola di equazione $y = 8x - x^2$ e il fascio di rette di equazione $y = 2x + h$, dove h è un parametro reale.

a) Studia, al variare di h, le posizioni relative di retta e parabola.
b) Nel caso in cui la retta è secante, indica con P e Q i punti di intersezione e trova la retta r del fascio tale che le tangenti t_1 e t_2 alla parabola in P e Q siano perpendicolari.
c) Trova le coordinate del punto di intersezione R tra t_1 e t_2.
d) Calcola l'area del triangolo individuato dalle rette t_1, t_2 e r.

$\left[\text{a) } h < 9 \text{ secanti, } h = 9 \text{ tangenti, } h > 9 \text{ esterne; b) } 8x - 4y + 31 = 0\text{; c) } R\left(3; \frac{65}{4}\right)\text{; d) } \frac{5}{4}\sqrt{5}\right]$

446 Considera i due fasci di parabole p_1: $y = x^2 + (a-1)x + a$ e p_2: $y = -x^2 + ax - 2$.

a) Studia, al variare di a, le posizioni relative delle due parabole generiche.
b) Nel caso in cui esse sono tangenti, determina la tangente comune.
c) Nel caso in cui sono secanti, determina a affinché, detti P e Q i loro punti di intersezione, la lunghezza della corda PQ misuri $\frac{\sqrt{29}}{4}$.

$\left[\text{a) } a > -\frac{15}{8} \text{ esterne, } a = -\frac{15}{8} \text{ tangenti, } a < -\frac{15}{8} \text{ secanti; b) } 38x + 16y + 31 = 0\text{; c) } a = -2\right]$

447 Determina l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, passante per $P(1; 0)$ e avente vertice nel punto $V(2; -1)$. Nel fascio di rette per P trova la retta, con coefficiente angolare positivo, che intersecando la parabola individua un segmento parabolico di area $\frac{32}{3}$. [$y = x^2 - 4x + 3$; $m = 2$]

448 Sia p_1 la parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y passante per i punti $A(0; -5)$, $B(2; 3)$ e $C(3; 4)$ e sia p_2 la parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y avente vertice in $V(2; -4)$ e passante per $D(5; 0)$.

a) Determina le equazioni delle due parabole.
b) Calcola le coordinate dei punti P e Q di intersezione delle parabole e l'equazione della retta PQ.
c) Determina l'area della parte di piano compresa tra le due parabole.

$\left[\text{a) } y = -x^2 + 6x - 5, 9y = 4(x^2 - 4x - 5)\text{; b) } P(5; 0) \equiv D, Q\left(\frac{5}{13}; -\frac{480}{169}\right)\text{; c) } \frac{4000}{169}\right]$

I sistemi parametrici

449 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo il sistema parametrico

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} - 4x + 6 \\ 2kx + (1+k)y - 2k - 2 = 0 \\ 0 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

al variare del parametro k in $\mathbb{R}$, utilizzando il metodo grafico.

- L'equazione $y = \dfrac{x^2}{2} - 4x + 6$ rappresenta una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, che ha vertice in $V(4; -2)$ e che interseca gli assi cartesiani in $(0; 6)$, $(2; 0)$ e $(6; 0)$.
Disegniamo la curva ed evidenziamo l'arco con $0 \leq x \leq 6$ che ha per estremi i punti $A(0; 6)$ e $B(6; 0)$.
- Studiamo ora l'equazione $2kx + (1+k)y - 2k - 2 = 0$.
Evidenziamo k:

$$k(2x + y - 2) + y - 2 = 0.$$

È un fascio proprio di rette, di generatrici:

$y = 2$, ottenuta ponendo $k = 0$,

$2x + y - 2$, ottenuta ponendo l'espressione che è moltiplicata per k uguale a 0.

Il centro del fascio è $C(0; 2)$.
- Imponiamo alla retta generica del fascio il passaggio per $A(0; 6)$:

$$(1+k)6 - 2k - 2 = 0 \rightarrow 4k + 4 = 0 \rightarrow k = -1.$$

- Imponiamo ora il passaggio per $B(6; 0)$:

$$12k - 2k - 2 = 0 \rightarrow 10k - 2 = 0 \rightarrow k = \frac{1}{5}.$$

- Troviamo il valore di k relativo alla retta del fascio tangente alla parabola con il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} - 4x + 6 \\ 2kx + (k+1)y - 2k - 2 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo il valore di y ricavato dalla prima equazione nella seconda, otteniamo:

$$2kx + (k+1)\left(\frac{x^2}{2} - 4x + 6\right) - 2k - 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2kx + k\frac{x^2}{2} - 4kx + 6k + \frac{x^2}{2} - 4x + 6 - 2k - 2 = 0 \rightarrow (k+1)x^2 - 4(k+2)x + 8k + 8 = 0.$$

Poniamo $\dfrac{\Delta}{4} = 0$:

$$4(k+2)^2 - 8(k+1)^2 = 0 \rightarrow k^2 + \cancel{4k} + 4 - 2k^2 - \cancel{4k} - 2 = 0 \rightarrow -k^2 + 2 = 0 \rightarrow k = \pm\sqrt{2}.$$

Le rette tangenti alla parabola sono due, ma quella tangente all'arco AB si ottiene per $k = \sqrt{2}$. Infatti le rette del fascio, al variare di k, ruotano intorno al punto C in senso orario a partire dalla retta $2x + y - 2 = 0$, che si ottiene per $k \rightarrow \infty$.
- Osservando il grafico, deduciamo il numero dei punti di intersezione tra la parabola e le rette del fascio nell'intervallo $0 \leq x \leq 6$ e quindi il numero delle soluzioni, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

– per $k = -1$, una soluzione;

– per $-1 < k < \frac{1}{5}$, una soluzione;

– per $k = \frac{1}{5}$, due soluzioni;

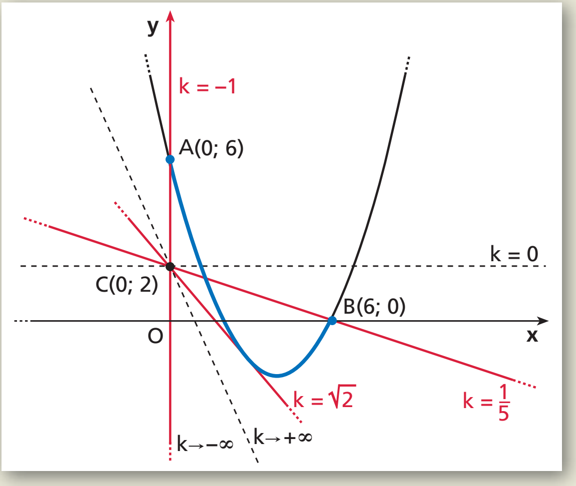
– per $\frac{1}{5} < k < \sqrt{2}$, due soluzioni;

– per $k = \sqrt{2}$, due soluzioni coincidenti.

In sintesi, il sistema ammette:

una soluzione per $-1 \leq k < \frac{1}{5}$;

due soluzioni per $\frac{1}{5} \leq k \leq \sqrt{2}$.



Risolvi i seguenti sistemi parametrici con metodo grafico.

450 $\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ kx - y - 3 - 5k = 0 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.}: -\frac{3}{2} < k \leq -\frac{1}{2};\ 2 \text{ sol.}: -2 \leq k \leq -\frac{3}{2}\right]$

451 $\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ 3x - y + 2k = 0 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.}: -6 \leq k < 0;\ 2 \text{ sol.}: 0 \leq k \leq \frac{1}{8}\right]$

452 $\begin{cases} y = x^2 - 3x - 4 \\ x - 3y - k + 1 = 0 \\ 0 < x \leq 4 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.}: 5 \leq k \leq 13;\ 2 \text{ sol.}: 13 < k \leq \frac{64}{3}\right]$

453 $\begin{cases} x^2 = 2y \\ 4kx + 2(1 + 2k)y - 10k - 1 = 0 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.}: k \leq -\frac{1}{2} \vee k > 0;\ 2 \text{ sol.}: \frac{\sqrt{3} - 3}{12} \leq k \leq 0\right]$

454 $\begin{cases} y^2 - 4y - x + 4 = 0 \\ x + (m - 1)y + 4(1 - m) = 0 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$ $[2 \text{ sol.}: 1 \leq m \leq 2]$

455 $\begin{cases} x = y^2 - 4y \\ x - 2y + m = 0 \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$ $[1 \text{ sol.}: 5 \leq m < 8;\ 2 \text{ sol.}: 8 \leq m \leq 9]$

456 $\begin{cases} x = y^2 - 2y + 1 \\ 2kx + (1 + 5k)y - 2(1 + 5k) = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.}: k < -\frac{1}{4} \vee k \geq 0;\ 2 \text{ sol.}: -\frac{1}{4} \leq k \leq -\frac{1}{5} \vee -\frac{1}{13} \leq k < 0\right]$

457 $\begin{cases} x = \sqrt{y + 4} \\ y = 2x + q \\ x \leq 3 \end{cases}$ $[1 \text{ sol.}: -4 < q \leq -1;\ 2 \text{ sol.}: -5 \leq q \leq -4]$

458 $\begin{cases} y = 2\sqrt{x + 1} \\ 3x - 2y + k - 2 = 0 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.}: 4(\sqrt{3} - 1) \leq k < 5;\ 2 \text{ sol.}: 5 \leq k \leq \frac{19}{3}\right]$

459 $\begin{cases} y = |x^2 - 2x| \\ y = 2k \\ -1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.: } \frac{3}{2} < k \leq 4; 2 \text{ sol.: } \frac{1}{2} < k \leq \frac{3}{2}; 4 \text{ sol.: } 0 \leq k \leq \frac{1}{2}\right]$

460 $\begin{cases} y = \sqrt{4 - x} \\ (k-1)x + y - 4k + 1 = 0 \\ -5 < x \leq 4 \end{cases}$ $[1 \text{ sol.: } k < 1]$

461 $\begin{cases} x = -1 + \sqrt{1+y} \\ (m+1)x - y + 2(1-m) = 0 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $[1 \text{ sol.: } m < 1; 2 \text{ sol.: } m = 1]$

462 $\begin{cases} \sqrt{16 - 4x} + 6k = kx - 1 \\ -2 \leq x \leq 4 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.: } \frac{-1-2\sqrt{6}}{8} < k \leq -\frac{1}{2}; 2 \text{ sol.: } -1 \leq k \leq \frac{-2\sqrt{6}-1}{8}\right]$

(Suggerimento. Isolata la radice, poni $y = \sqrt{16 - 4x}$ e $y = kx - 1 - 6k$.)

463 $\begin{cases} 1 - \sqrt{x-1} = 2m - \dfrac{m+1}{3}x \\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.: } \frac{4}{5} < m \leq 2; 2 \text{ sol.: } \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{4}{5}\right]$

464 $\begin{cases} \sqrt{x+4} = \dfrac{x+m}{2} \\ x \leq 0 \end{cases}$ $[2 \text{ sol.: } 4 \leq m \leq 5]$

465 $\begin{cases} \sqrt{4-x} + 5k = kx + 1 \\ -4 \leq x \leq 4 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.: } \frac{1-2\sqrt{2}}{9} < k \leq 1; 2 \text{ sol.: } \frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq k \leq \frac{1-2\sqrt{2}}{9}\right]$

466 $\begin{cases} x^2 + (m-4)x - 5m - 1 = 0 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.: } -\frac{5}{3} < m \leq -1; 2 \text{ sol.: } -2 \leq m \leq -\frac{5}{3}\right]$

(Suggerimento. Poni: $y = x^2$.)

467 $\begin{cases} x^2 - mx + 2m = 0 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $[1 \text{ sol.: } m < -1; 2 \text{ sol.: } -1 \leq m \leq 0]$

468 $\begin{cases} x^2 - mx - 4 = 0 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $[1 \text{ sol.: } m \leq 0 \vee m \geq 3]$

469 $\begin{cases} (x+3)^2 = -x + 2k \\ -2 \leq x < -1 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.: } -\frac{1}{2} \leq k < \frac{3}{2}\right]$

---

470 $\begin{cases} (k+1)x^2 - (k+3)x + 2 = 0 \\ -2 \leq x < 1 \end{cases}$

$[1 \text{ sol.: } k \leq -2 \vee k > 1]$

471 $\begin{cases} x^2 - 4x - 4k = 0 \\ -2 < x \leq 4 \end{cases}$

$[1 \text{ sol.: } 0 < k < 3; 2 \text{ sol.: } -1 \leq k \leq 0]$

472 $\begin{cases} kx^2 + 2(k-1)x - 4(k-1) = 0 \\ 0 < x \leq 3 \end{cases}$

$\left[1 \text{ sol.: } k \leq \frac{2}{11} \vee k > 1\right]$

473 $\begin{cases} x^2 - 6x + 4(k-1) = 0 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

$\left[1 \text{ sol.: } \frac{9}{4} \leq k < 3; 2 \text{ sol.: } 3 \leq k \leq \frac{13}{4}\right]$

474 $\begin{cases} x^2 - (k-2)x - k + 1 = 0 \\ -1 < x \leq 1 \end{cases}$ $[1 \text{ sol.: } 0 < k \leq 2]$

475 $\begin{cases} kx^2 - 2kx - 3(k+1) = 0 \\ -1 < x \leq \dfrac{3}{2} \end{cases}$

$\left[1 \text{ sol.: } k < -\frac{4}{5}; 2 \text{ sol.: } -\frac{4}{5} \leq k \leq -\frac{3}{4}\right]$

REALTÀ E MODELLI

1 **Partita di pallavolo**

Durante un torneo di giochi scolastici assistiamo a una partita di pallavolo.
Immaginiamo di fissare un sistema di riferimento cartesiano centrato su una parete alle spalle di una squadra e proiettiamo sulla parete le varie posizioni della palla.
La traiettoria parabolica della palla alzata dal palleggiatore raggiunge la sua massima altezza nel punto $A(4; 6)$ e viene intercettata dallo schiacciatore nel punto $B\left(\frac{1}{2}; \frac{47}{16}\right)$.

- ▶ Determina l'equazione della traiettoria.
- ▶ Nel caso in cui lo schiacciatore (o per meglio dire la sua proiezione sulla parete di fondo) si trova nell'origine, a che altezza intercetta la palla? (Supponi che il giocatore salti verticalmente.)
- ▶ Se il soffitto della palestra è alto 5,5 m, riuscirà il palleggiatore ad alzare ugualmente la palla? In caso negativo, in che punto la palla rimbalzerà contro il soffitto?

2 **Efficienza di un motorino**

L'efficienza di un motorino (ossia il numero dei kilometri percorsi con un litro di carburante) dipende dal peso del veicolo, approssimativamente secondo la formula:

$$E(x) = 0{,}12x^2 - 21{,}12x + 944{,}12, \qquad 80 \leq x \leq 120,$$

dove x è il peso del motorino in kilogrammi. Sulla base di tale informazione:

- ▶ qual è il peso del motorino meno efficiente?
- ▶ qual è l'efficienza minima?
- ▶ quanto pesano i motorini la cui efficienza è superiore a quella minima di almeno tre unità?

3 **Spettacolo di milioni di stelle brillanti**

Camilla, per la sua laurea, ha avuto in regalo un buono per il pacchetto viaggio «Spettacolo di milioni di stelle brillanti».
Il viaggio, proposto da un'agenzia specializzata e da un gruppo di esperti conoscitori del deserto del Sahara, si svolgerà nel periodo dal 27 luglio al 10 agosto. Nel programma è prevista una settimana a cavallo di un dromedario per raggiungere i piccoli villaggi, oltre ai bivacchi permanenti allestiti per i turisti. Ovviamente, essendo un viaggio impegnativo, inizia a porsi il problema della temperatura…
Durante la giornata, nel periodo considerato e nel tragitto proposto, la temperatura varia secondo la formula:

$$t(x) = -0{,}3004 \cdot x^2 + 7{,}212 \cdot x + 6{,}73, \quad 0 \leq x \leq 24,$$

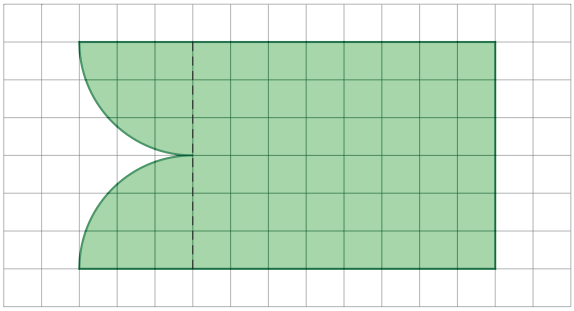
dove il tempo x è misurato in ore e la temperatura $t(x)$ in gradi centigradi.

- ▶ Quando la temperatura è massima?
- ▶ Quando è minima?
- ▶ Qual è la massima temperatura raggiunta?
- ▶ Qual è l'escursione termica prevista?

4 **Zona riservata ai cani**

All'interno di un parco bisogna creare una zona recintata per i cani che deve avere la forma in figura.

- ▶ Avendo a disposizione 150 m di recinzione, quali devono essere le dimensioni del rettangolo in modo che l'area della zona sia massima?



VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Data la parabola di equazione

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1,$$

il fuoco F, il vertice V e la direttrice d sono rispettivamente:

A $F(1;1)$, $V\left(1;\frac{1}{2}\right)$, la retta $y = 0$.

B $F(1;-1)$, $V\left(1;\frac{1}{2}\right)$, la retta $y = -1$.

C $F(1;-1)$, $V\left(1;\frac{1}{2}\right)$, la retta $y = 0$.

D $F(-1;-1)$, $V\left(-1;\frac{1}{2}\right)$, la retta $y = 0$.

E $F(-1;-1)$, $V\left(-1;\frac{1}{2}\right)$, la retta $y = -\frac{3}{2}$.

2 Data la parabola di equazione $y = ax^2 + c$, con a e c discordi, una sola delle seguenti proposizioni è *vera*. Quale?

A La parabola passa per l'origine.

B Il vertice ha ordinata c.

C L'asse di simmetria è la retta $y = 0$.

D Il fuoco ha ordinata $\frac{1-4ac}{4a}$.

E La parabola interseca l'asse x nei punti $x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$.

3 Solo una delle seguenti parabole passa per i punti $A(1;-1)$, $B(-1;5)$, $O(0;0)$. Quale?

A $y = -2x^2 + 3x$

B $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$

C $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}$

D $y = x^2 - \frac{3}{2}x$

E $y = 2x^2 - 3x$

4 La lunghezza della corda individuata dalla parabola $y = x^2 + x$ sulla retta $y = x + 4$ è:

A $2\sqrt{3}$.

B $3\sqrt{2}$.

C $4\sqrt{2}$.

D $2\sqrt{5}$.

E $5\sqrt{2}$.

5 Una soltanto delle seguenti parabole ha il vertice $V(2;-1)$ e passa per $A(1;0)$. Quale?

A $y = x^2 - 4x$

B $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$

C $y = -x^2 + 4x - 3$

D $y = x^2 - 4x + 3$

E $y = -x^2 - 3$

6 L'equazione $x = -y^2 + 4y + c$ rappresenta una parabola con il fuoco di coordinate:

A $(0;2)$.

B $(2;c+4)$.

C $(c+4;2)$.

D $(c+5;2)$.

E $\left(\frac{15}{4}+c;2\right)$.

7 Considera la parabola di equazione

$$y = -x^2 + bx + c.$$

Le seguenti proposizioni sono tutte vere *tranne* una. Quale?

A La parabola interseca l'asse x solo se $b^2 + 4c \geq 0$.

B L'ordinata del vertice è $\frac{b^2}{4} + c$.

C Il fuoco ha ascissa $\frac{b}{2}$.

D La tangente alla parabola nel suo punto di intersezione con l'asse y ha equazione $y = bx + c$.

E L'asse della parabola ha equazione $y = \frac{b}{2}$.

8 Sulle parabole di equazioni

$$p_1: y = -\frac{1}{4}x^2 + 2 \text{ e } p_2: y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x,$$

si può dire che:

A hanno lo stesso vertice.

B hanno lo stesso asse di simmetria.

C hanno lo stesso fuoco.

D hanno la stessa direttrice.

E sono congruenti.

QUESITI

9 **VERO O FALSO?** Per ognuna delle seguenti proposizioni indica se è vera o falsa e motiva la risposta.

a) La parabola di equazione $y = m(x - a)^2$ ha vertice in $(a; 0)$ ed è tangente all'asse x. V F

b) Due parabole con lo stesso fuoco hanno la stessa equazione. V F

c) Due parabole del tipo $y = ax^2 + bx + c$ con lo stesso asse di simmetria differiscono solo nel termine noto. V F

d) Tre parabole con i vertici allineati hanno lo stesso asse di simmetria. V F

10 Stabilisci per quali valori di a, b, c la parabola $y = ax^2 + bx + c$:

a) ha vertice sull'asse x;
b) rivolge la concavità verso l'alto e passa per l'origine;
c) ha vertice nell'origine;
d) ha come asse di simmetria la retta $x = 2$. [a) $b^2 - 4ac = 0$; b) $a > 0 \wedge c = 0$; c) $b = 0 \wedge c = 0$; d) $b = -4a$]

11 Dimostra che la tangente alla parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ nel suo punto P di ascissa nulla ha equazione $y = bx + c$ e verificalo nel caso della parabola di equazione $y = x^2 + 4x - 5$.

12 Dimostra che, in ogni parabola di equazione $y = -x^2 + bx + c$, c è l'ordinata del punto di intersezione con l'asse y ed è anche l'opposto del prodotto delle ascisse dei punti di intersezione con l'asse x, mentre b è la somma delle ascisse dei punti di intersezione con l'asse x.
Cosa si potrebbe dire, analogamente, per una parabola di equazione $y = x^2 + bx + c$?
Verifica la proprietà considerando la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x + 5$ e $y = x^2 + 4x + 5$.

13 Dimostra che la tangente in un punto P di una parabola $y = ax^2$ divide in due parti, una tripla dell'altra, il rettangolo che ha per vertici il vertice della parabola, il punto P e le sue proiezioni sugli assi cartesiani e verifica la proprietà con un esempio.

14 Dimostra che nella parabola di equazione $y = ax^2$ le tangenti condotte da un punto della direttrice sono sempre perpendicolari tra loro. Nella parabola di equazione $y = \frac{1}{4}x^2$, sapendo che una tangente passante per il punto $P\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$ ha coefficiente angolare $\frac{1}{2}$, determina l'altra tangente per P. [$2x + y + 4 = 0$]

15 Data la parabola di equazione $y = ax^2$, indica con F il suo fuoco e con d la direttrice, dimostra che la retta t tangente alla parabola in un suo punto qualunque P è bisettrice dell'angolo formato dalla retta per P e F e dalla perpendicolare per P alla direttrice d.

16 Data la parabola di equazione $y = ax^2$ e un fascio di rette parallele, dimostra che i punti medi delle corde intercettate dalla parabola sulle rette parallele appartengono a una retta parallela all'asse della parabola.

17 Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y = x^2 + 1$ nel punto $(1; 2)$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso Sperimentale, Sessione ordinaria*, 2007, *quesito* 7).

$\left[y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right]$

PROBLEMI

18 a) Considera il fascio di parabole di equazione $ay^2 - 2(a-1)y - 2x + 1 + a = 0$ e individua le principali caratteristiche.
b) Tra le parabole del fascio, trova quella passante per il punto (2; 2).
c) Determina le equazioni delle tangenti r e s alla parabola trovata nei punti di intersezione A e B con l'asse delle ordinate.
d) Scrivi l'equazione della circonferenza tangente alla parabola nei punti A e B.
e) Determina l'equazione di una retta parallela all'asse y che interseca la circonferenza in P e Q e la parabola in C e D in modo che:
$\overline{CD} = \sqrt{2}\,\overline{PQ}$.

$\left[\text{a) parabole tangenti alla retta } 2x - 2y - 1 = 0 \text{ in } \left(\frac{3}{2}; 1\right); \text{ b) } x = -\frac{1}{2}y^2 + 2y;\right.$
$\left.\text{c) } r\colon x - 2y = 0,\ s\colon x + 2y - 8 = 0; \text{ d) } x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0; \text{ e) } x = -2,\ x = 1\right]$

19 a) Nel fascio di parabole con asse parallelo all'asse y tangenti alla retta $2x - y - 3 = 0$ nel suo punto di ordinata 3, individua quella passante per il punto (1; 3).
b) Determina le equazioni delle tangenti r e s alla parabola mandate dal punto P della direttrice avente ascissa $\frac{19}{8}$.
c) Calcola perimetro e area del triangolo APB, dove A e B sono i punti di tangenza delle rette r e s.
d) Determina il circocentro del triangolo APB e scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo.

$\left[\text{a) } y = x^2 - 4x + 6; \text{ b) } 2x - y - 3 = 0,\ 8x + 16y - 47 = 0;\right.$
$\left.\text{c) } \frac{5}{16}(5 + 3\sqrt{5}),\ \frac{125}{256}; \text{ d) } C\left(\frac{19}{8}; \frac{81}{32}\right),\ 16x^2 + 16y^2 - 76x - 81y + 183 = 0\right]$

20 a) Determina l'equazione della parabola avente per fuoco il punto $P(-4; -3)$ e per direttrice la retta $y + 5 = 0$.
b) Scrivi le equazioni delle rette r e s tangenti alla parabola nei suoi punti di intersezione A e B con la retta $y - 5 = 0$.
c) Calcola l'area del triangolo individuato dalle rette r e s e dalla direttrice della parabola.
d) Scrivi le equazioni delle tangenti p e q alla parabola mandate dal punto D della direttrice avente ascissa $-\frac{5}{2}$ e verifica che sono fra loro perpendicolari.
e) Siano E e F i punti di tangenza delle rette p e q con la parabola. Verifica che il fuoco della parabola e i punti E e F sono allineati.

$\left[\text{a) } y = \frac{1}{4}x^2 + 2x; \text{ b) } 3x - y - 1 = 0,\ 3x + y + 25 = 0; \text{ c) } \frac{64}{3};\right.$
$\left.\text{d) } y = 2x,\ 2x + 4y + 25 = 0; \text{ e) } E \equiv O(0; 0),\ F\left(-5; -\frac{15}{4}\right)\right]$

21 a) Determina l'equazione del fascio di parabole con punti base $A(0; 4)$ e $B(1; 0)$.
b) Individua la parabola γ del fascio, con il coefficiente di x^2 minore, avente direttrice di equazione $y = -\frac{5}{2}$.
c) Trova le equazioni delle rette t_1 e t_2, tangenti a γ in A e B, e le equazioni n_1 e n_2 delle normali a t_1 e t_2 in A e B.
d) Calcola l'area del quadrilatero $ABCD$, essendo C il punto di intersezione di n_1 e n_2 e D il punto di intersezione di t_1 e t_2.

$\left[\text{a) } y = ax^2 - (a + 4)x + 4; \text{ b) } y = x^2 - 5x + 4;\right.$
$\left.\text{c) } y = -5x + 4,\ y = -3x + 3;\ y = \frac{1}{5}x + 4,\ y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}; \text{ d) } \frac{137}{2}\right]$

22 a) Scrivi l'equazione della parabola tangente alla retta $x + 2y - 16 = 0$ nel suo punto di intersezione con l'asse delle ordinate e avente per asse di simmetria la retta $y - 4 = 0$.
b) La retta $2x - y = 0$ interseca la parabola nell'origine O e nel punto A. Scrivi l'equazione della retta r tangente alla parabola in A.
c) Determina l'equazione della retta s simmetrica della retta r rispetto all'asse di simmetria della parabola e dimostra che anche la retta s è tangente alla parabola in un punto B di cui si chiedono le coordinate.
d) Sia C il punto di intersezione tra le rette r e s. Calcola l'area del triangolo mistilineo ABC, che ha come lati AC e CB e l'arco di parabola AB.
e) Scrivi l'equazione della circonferenza avente centro nel punto C e passante per i punti A e B.
f) Determina l'area della parte di piano delimitata dalla parabola e dalla circonferenza, situata nel semipiano $x - 4 \leq 0$.

$\left[\text{a) } x = -\frac{1}{4}y^2 + 2y;\ \text{b) } x + y - 9 = 0;\ \text{c) } x - y - 1 = 0,\ B(3; 2);\ \text{d) } \frac{4}{3};\ \text{e) } x^2 + y^2 - 10x - 8y + 33 = 0;\ \text{f) } 2\pi - \frac{4}{3}\right]$

23 a) Scrivi l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano per i quali il rapporto fra la distanza dal punto $F(2; 4)$ e dalla retta d: $2x + y + 2 = 0$ vale 1. Spiega perché si tratta di una parabola.
b) Individua le coordinate del vertice e l'equazione della tangente t nel vertice della parabola.
c) Verifica che la parabola trovata è tangente alle rette r: $2x + 1 = 0$ e s: $y + 1 = 0$ e trova i punti di tangenza A e B.
d) Determina l'area del triangolo ABC individuato dalle rette r e s e dalla retta congiungente A e B.
e) Scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

$\left[\text{a) } x^2 - 4xy + 4y^2 - 28x - 44y + 96 = 0;\ \text{b) } V(0; 3),\ t\text{: } 2x + y - 3 = 0;\ \text{c) } A\left(-\frac{1}{2}; \frac{21}{4}\right),\ B(12; -1);\ \text{d) } \frac{625}{16};\ \text{e) } 4x^2 + 4y^2 - 46x - 17y - 45 = 0\right]$

24 a) Rappresenta nel piano cartesiano la funzione $y = x^2 - 4|x| + 1$.
b) Nel fascio di rette di centro $A(0; 1)$ determina l'equazione della retta passante per il punto B della curva di ascissa 5 e trova l'ulteriore punto C di intersezione della retta con il grafico tracciato.
c) Calcola la misura del segmento BC.
d) Sull'arco CA della curva determina un punto P in modo che $\sqrt{2}\,\overline{PQ} + \overline{PR} + \overline{PS} = \frac{5}{2}$, essendo $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$, $\overline{PS}$ le distanze di P dalla retta AC, rispettivamente dall'asse x e dall'asse y.
e) Scrivi l'equazione della circonferenza di diametro AB e, indicato con D l'ulteriore punto di intersezione con la curva, trova il rapporto tra l'area del triangolo ACP e l'area del triangolo ABD.

$\left[\text{b) } y = x + 1,\ C(-3; -2);\ \text{c) } \overline{BC} = 8\sqrt{2};\ \text{d) } P\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right);\ \text{e) } x^2 + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0,\ \frac{\sqrt{21}}{28}\right]$

25 a) Studia il fascio di parabole di equazione $y = kx^2 - 2x(4k - 1) + 16k - 7$ indicando le parabole degeneri e i punti base.
b) Tra le parabole del fascio individua quella tangente all'asse delle ascisse e indica con A il punto di intersezione con l'asse delle ordinate.
c) Nell'arco di parabola di estremi A e B, dove B è il punto base del fascio dato, individua i punti che formano con AB un triangolo di area 6.
d) Trova il luogo descritto dai vertici delle parabole e rappresentalo graficamente.

[a) parabole tangenti…; b) $y = x^2 - 6x + 9$, $A(0; 9)$; c) $C_1(1; 4)$, $C_2(3; 0)$; d) $y = x - 3$, $x \neq 4$]

26 Studia il fascio di parabole di equazione $ax^2 + (1 - 4a)x - y - 4 = 0$ e individua i suoi punti base. Trova poi le equazioni delle due parabole del fascio γ e γ' che formano, ciascuna, con la retta del fascio un segmento parabolico di area $\frac{16}{3}$. Dimostra, infine, che le due parabole trovate sono simmetriche rispetto a M, punto medio del segmento che congiunge i punti base.

$\left[\text{fascio di parabole secanti in } A(0; -4),\ B(4; 0);\ y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4,\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right]$

27 a) Rappresenta graficamente la curva di equazione $y = 4 - \sqrt{16 + 8x}$.
b) Determina l'equazione della retta r tangente alla curva nel suo punto V di ordinata massima.
c) Scrivi l'equazione della retta s tangente alla curva nel suo punto di ascissa nulla e trova le coordinate del punto di intersezione A tra le rette r e s.
d) Indica con B e C le proiezioni di V rispettivamente sull'asse x e sull'asse y e trova il rapporto fra l'area del quadrilatero $VAOC$ e l'area del triangolo ABO.
e) Calcola l'area del triangolo mistilineo formato dalle rette r e s e dalla curva.

$\left[\text{a) semiparabola...; b) } x + 2 = 0\text{; c) } s\colon x + y = 0,\ A(-2; 2)\text{; d) } 3\text{; e) } \frac{2}{3}\right]$

28 a) Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y di vertice $V(-4; 16)$ e passante per il punto $A(0; 12)$.
b) Trova l'equazione della retta tangente nel punto P, di ascissa 2, appartenente alla parabola.
c) Dimostra che la retta trovata è l'asse del segmento FQ con F fuoco della parabola e Q proiezione di P sulla direttrice.
d) Calcola perimetro e area del triangolo FPQ.
e) Trova l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo FPQ.

$\left[\text{a) } y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x + 12\text{; b) } 3x + y - 13 = 0\text{; d) } 2(10 + \sqrt{10}), 30\text{; e) } x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - 24y + \frac{349}{3} = 0\right]$

29 a) Scrivi l'equazione della parabola γ che ha per asse di simmetria la retta $x = 2$ ed è tangente nel punto A di ascissa 1 alla retta r di equazione $2x - 2y + 1 = 0$.
b) Determina sull'arco di γ che appartiene al I quadrante un punto P, e le sue proiezioni H e K rispettivamente sulla retta r e sull'asse x, in modo che: $\overline{PH} + \sqrt{2}\,\overline{PK} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$.
c) Determina per quale valore di c la retta $y = c$ divide la regione di piano del I quadrante compresa tra γ e l'asse x in due parti A_1 e A_2 (essendo A_1 quella che contiene il vertice di γ) in modo che: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2\sqrt{2} - 1}$.

$\left[\text{a) } y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x\text{; b) } P\left(3; \frac{3}{2}\right)\text{; c) } 1\right]$

30 Siano date la parabola λ e la retta r d'equazioni rispettive $y = x^2 + 1$ e $y = x - 1$.
1. Qual è la distanza minima tra λ e r? E quale ne è il valore?
2. Siano A e B i punti d'intersezione di λ con la retta s d'equazione $y = x + 3$, si determini il punto P appartenente all'arco AB tale che il triangolo ABP abbia area massima.
3. Si determini l'area del segmento parabolico di base AB e si verifichi che essa è $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo ABP. [...].

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria*, 2005, *problema* 2)

$\left[\mathbf{1.}\ \frac{7}{8}\sqrt{2}\text{; } \mathbf{2.}\ P\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)\text{; } \mathbf{3.}\ \frac{9}{2}\right]$

31 I punti A e B sono comuni a una parabola con asse parallelo all'asse y, a una retta e a una circonferenza. Trova le equazioni di parabola, retta e circonferenza, sapendo che:
a) il punto A ha coordinate $(-2; 4)$;
b) la parabola ha il vertice nell'origine e il fuoco sull'asse y;
c) la retta passa per il punto $C(2; 12)$;
d) la circonferenza passa per il punto $D(4; 0)$.

Determina le altre due intersezioni fra la circonferenza e la parabola.
Dette E e F tali intersezioni (E quella di ascissa positiva), verifica che le rette EA e FB sono perpendicolari.

$[y = x^2; y = 2x + 8; B(4; 16); x^2 + y^2 - 10x - 16y + 24 = 0; E(1; 1); F(-3; 9); y = -x + 2; y = x + 12]$

CAPITOLO 6

٦ [numerazione araba]

६ [numerazione devanagari]

六 [numerazione cinese]

L'ELLISSE

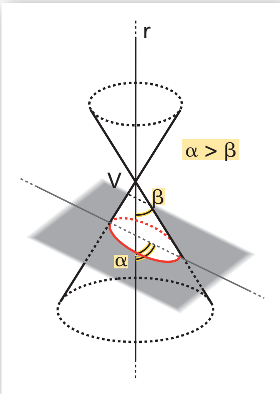
L'ELLISSE DEL GIARDINIERE Nei giardini rinascimentali, ma prima ancora nei bellissimi giardini arabi, era facile imbattersi in aiuole ellittiche. L'ellisse infatti, con i suoi fuochi, è stata usata come simbolo di molte relazioni a due: uomo-Dio, maschio-femmina, tecnica-natura e così via.
Anche se un'ellisse non si disegna facilmente con riga e compasso, i giardinieri di un tempo sapevano disegnarne di perfette.

Come può fare un giardiniere per creare un'aiuola a forma di ellisse?

La risposta a pag. 401

1. L'ELLISSE E LA SUA EQUAZIONE

Affrontiamo in questo capitolo lo studio di un'altra conica: l'*ellisse*.
Procediamo in modo analogo a quanto fatto nei capitoli precedenti per la circonferenza e la parabola, definendo l'ellisse come luogo geometrico e determinandone l'equazione algebrica.



▲ **Figura 1** Consideriamo un cono di asse *r* con angolo al vertice 2β. Sezioniamo la superficie del cono con un piano che formi con l'asse del cono un angolo α tale che α > β.
La figura che si ottiene dall'intersezione è un'ellisse.

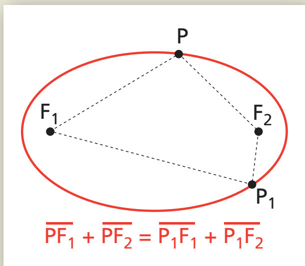
L'ellisse come luogo geometrico

DEFINIZIONE

Ellisse

Assegnati nel piano due punti, F_1 e F_2, detti **fuochi**, si chiama ellisse la curva piana luogo geometrico dei punti P tali che sia costante la somma delle distanze di P da F_1 e da F_2:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \textbf{costante}.$$



Consideriamo, dunque, un'ellisse di fuochi F_1 e F_2. Il punto medio del segmento F_1F_2 si chiama **centro** dell'ellisse.

Indichiamo con:

$2c$ la distanza tra F_1 e F_2, detta **distanza focale**;

$2a$ la somma costante delle distanze dei punti dell'ellisse dai fuochi.

● a e c indicano due valori costanti e positivi.

Se P è un generico punto dell'ellisse, per definizione deve risultare:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a.$$

Poiché in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due, considerato il triangolo PF_1F_2, deve essere

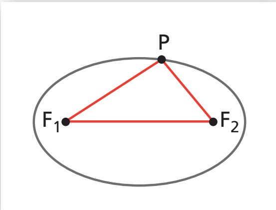
$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} > \overline{F_1F_2},$$

e quindi

$$2a > 2c,$$

ossia la relazione tra a e c è:

$$\boldsymbol{a > c}.$$



▲ **Figura 2** In un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due.

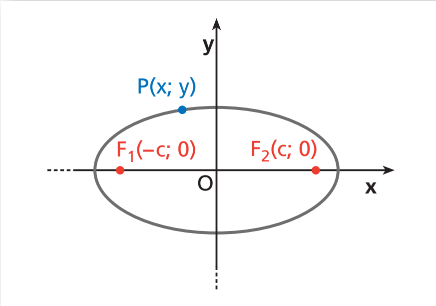
L'equazione dell'ellisse con i fuochi appartenenti all'asse x

L'equazione dell'ellisse, così come quella della parabola o della circonferenza, è diversa a seconda della posizione della curva rispetto al sistema di riferimento.

Esaminiamo il caso in cui il centro dell'ellisse è posto nell'origine degli assi e la retta passante per F_1 e F_2 è l'asse x.
Poiché abbiamo indicato la distanza focale con $2c$, le coordinate dei fuochi sono:

$$F_1(-c; 0), \quad F_2(c; 0).$$

● $2c$ è una distanza, quindi si ha $c > 0$.



◀ **Figura 3** Scegliamo come asse x la retta F_1F_2 e come asse y la perpendicolare condotta per il punto medio del segmento F_1F_2.

Indicato con $P(x; y)$ un generico punto del piano, calcoliamo le distanze del punto dai fuochi:

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad \overline{PF_2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Poiché P appartiene all'ellisse se e solo se

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a,$$

sostituendo in quest'ultima uguaglianza le espressioni di $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$, otteniamo:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

che è già l'equazione dell'ellisse. Cerchiamo ora di scriverla in una forma più semplice, in modo che non contenga radicali.

Isoliamo un radicale ed eleviamo entrambi i membri al quadrato:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = [2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}]^2.$$

Svolgendo i calcoli e semplificando, abbiamo:

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Isoliamo il radicale e dividiamo per 4:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri e riordiniamo i termini:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Poniamo:

$$\boldsymbol{a^2 - c^2 = b^2}.$$

L'equazione diventa:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividiamo tutti i termini per a^2b^2:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

Questa è l'**equazione canonica** o **normale** dell'ellisse. Si ha:

$$a^2 - c^2 = b^2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 > b^2 \rightarrow \boldsymbol{a > b}.$$

● $2a$ è una distanza, quindi si ha $a > 0$.

● Il secondo membro è positivo perché $2a$ è uguale alla somma dei due radicali.

● $a^2 - cx$ è positivo; infatti si ha $a > c$ e, per tutti i punti dell'ellisse, si ha anche $a \geq x$, quindi, moltiplicando membro a membro, si ha $a^2 > cx$.

● Ciò è possibile perché, essendo $a > c$, è anche $a^2 > c^2$ e quindi $a^2 - c^2 > 0$.

● **Canonica** deriva dal greco *kanón*, che significa «norma».

Abbiamo dimostrato che tutti i punti $P(x; y)$ dell'ellisse verificano l'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Viceversa, si può dimostrare che soltanto i punti del piano che verificano l'equazione appartengono all'ellisse.

ESEMPIO

Verifichiamo che l'equazione seguente rappresenta un'ellisse:

$$4x^2+9y^2=16.$$

Poiché $9y^2=\dfrac{y^2}{\frac{1}{9}}$, se dividiamo ambo i membri per 16, otteniamo:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{16}{9}}=1.$$

L'equazione è quella di un'ellisse, con $a^2=4$ e $b^2=\dfrac{16}{9}$, ossia $a=2$ e $b=\dfrac{4}{3}$.

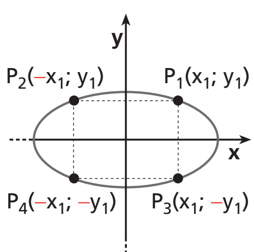
La circonferenza può essere considerata come una particolare ellisse. Infatti, se nell'equazione di un'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ abbiamo $a=b$, ossia $a^2=b^2$, l'equazione diventa:

$$x^2+y^2=a^2.$$

Questa è l'equazione della circonferenza che ha centro nell'origine degli assi e raggio a.
In questo caso $c=0$, quindi i due fuochi coincidono con il centro della circonferenza.

Ricordiamo che $a^2-c^2=b^2$, ovvero $a^2-b^2=c^2$. Se $a^2=b^2$, allora $a^2-b^2=0$, $c^2=0$, $c=0$.

Le simmetrie nell'ellisse



Nell'equazione dell'ellisse le variabili x e y compaiono solo elevate al quadrato. Se consideriamo un punto dell'ellisse $P_1(x_1; y_1)$, appartiene all'ellisse anche il punto $P_2(-x_1; y_1)$, che ha la stessa ordinata e l'ascissa opposta. Per verificarlo, basta osservare che, poiché $x_1^2=(-x_1)^2$, se

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1, \quad \text{anche} \quad \frac{(-x_1)^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1.$$

Dal punto di vista geometrico, ciò significa che *l'ellisse ha come asse di simmetria l'asse y.*

Analogamente, se $P_1(x_1; y_1)$ è un punto dell'ellisse, lo è anche il punto P_3 di coordinate $(x_1; -y_1)$, che ha la stessa ascissa e ordinata opposta. *L'ellisse ha come asse di simmetria anche l'asse x.*

Allo stesso modo, se $P_1(x_1; y_1)$ è un punto dell'ellisse, lo è anche il punto $P_4(-x_1; -y_1)$, che ha ascissa e ordinata opposte. Quindi, poiché P_1 e P_4 sono simmetrici rispetto all'origine, *l'ellisse ha come centro di simmetria l'origine degli assi.*

Si dice anche che l'equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ rappresenta un'ellisse riferita al centro e ai suoi assi di simmetria.

L'intersezione dell'ellisse con gli assi cartesiani

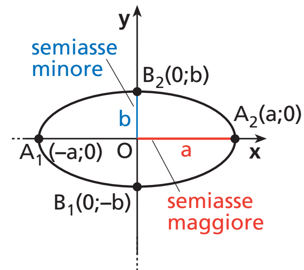
Per determinare le intersezioni di un'ellisse con l'asse x, mettiamo a sistema l'equazione dell'ellisse e l'equazione dell'asse x, cioè risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = a^2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pm a \\ y = 0 \end{cases}$$

I punti

$A_1(-a; 0)$ e $A_2(a; 0)$

sono le intersezioni dell'ellisse con l'asse x.



Analogamente, per determinare le intersezioni con l'asse y, risolviamo:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Otteniamo $x = 0$ e $y = \pm b$, cioè i punti

$B_1(0; -b)$ e $B_2(0; b)$

sono le intersezioni dell'ellisse con l'asse y.

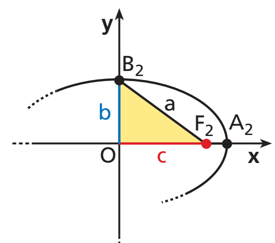
I punti A_1, A_2, B_1 e B_2 si chiamano **vertici** dell'ellisse.

I segmenti A_1A_2 e B_1B_2 sono detti **assi** dell'ellisse. La distanza $\overline{A_1A_2}$ misura $2a$, mentre $\overline{B_1B_2}$ misura $2b$, quindi a e b rappresentano le misure dei semiassi. Poiché $a > b$, risulta anche $\overline{A_1A_2} > \overline{B_1B_2}$. Per questo, il segmento A_1A_2 è detto **asse maggiore** e B_1B_2 è detto **asse minore**.

● La parola *asse* è usata per indicare sia i segmenti A_1A_2 e B_1B_2, sia le relative rette (che sono gli assi di simmetria).

La distanza fra uno dei vertici sull'asse y e un fuoco è sempre uguale ad a. Per esempio, se consideriamo il vertice B_2 e il fuoco F_2, poiché $\overline{OB_2} = b$ e $\overline{OF_2} = c$, per il teorema di Pitagora, si ha:

$$\overline{B_2F_2} = \sqrt{b^2 + c^2} = a.$$



Il grafico dell'ellisse

Disegniamo il rettangolo con i lati paralleli agli assi cartesiani, ognuno passante per uno dei quattro vertici A_1, A_2, B_1 e B_2: tutti i punti dell'ellisse sono all'interno di questo rettangolo. Per verificare questa affermazione, nell'equazione canonica isoliamo y^2. Otteniamo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

I membri dell'uguaglianza ottenuta devono essere entrambi positivi o nulli. In particolare, al secondo membro deve essere:

$$a^2 - x^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad -a \leq x \leq a.$$

● Infatti:

$-x^2 + a^2 \geq 0$

$x^2 - a^2 \leq 0.$

Poiché $x^2 - a^2 = 0$ per $x = \pm a$ e la disequazione è verificata per valori interni, si ha:

$-a \leq x \leq a.$

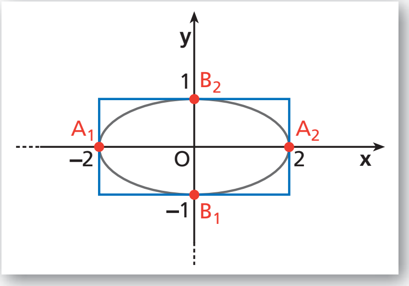
Con ragionamenti analoghi, isolando x^2, si ottiene:

$$-b \leq y \leq b.$$

L'ellisse è quindi inscritta nel rettangolo che ha i lati di equazioni

$$x = \pm a, \qquad y = \pm b.$$

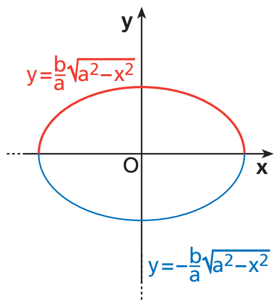
ESEMPIO



Nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, si ha $a = 2$ e $b = 1$.

I vertici sono $A_1(-2;\ 0)$, $A_2(2;\ 0)$, $B_1(0;\ -1)$, $B_2(0;\ 1)$. Tutti i punti dell'ellisse sono all'interno del rettangolo i cui lati passano per i vertici e misurano 4 e 2.

▶ Figura 4



L'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ non rappresenta una funzione perché a ogni $x \in \mathbb{R}$ corrispondono due valori di y.
Esplicitando l'equazione rispetto alla variabile y si ha:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Il grafico dell'ellisse può essere visto come unione di due semiellissi di equazioni

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

che invece rappresentano due funzioni.

Le coordinate dei fuochi di un'ellisse di equazione nota

Ricordiamo che i fuochi si trovano sull'asse x e hanno coordinate $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$.

Data l'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ di un'ellisse, è possibile determinare le coordinate dei fuochi.

Partendo dall'uguaglianza $a^2 - c^2 = b^2$, isoliamo c^2 al primo membro:

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Poiché c è un numero positivo si ha

$$\boldsymbol{c = \sqrt{a^2 - b^2}},$$

quindi:

$$\boldsymbol{F_1\left(-\sqrt{a^2 - b^2};\ 0\right), \quad F_2\left(\sqrt{a^2 - b^2};\ 0\right).}$$

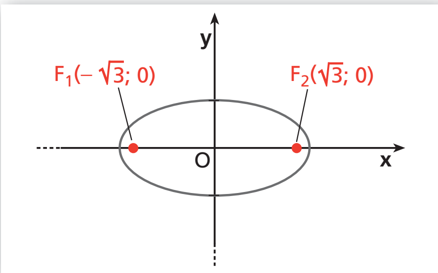
ESEMPIO

Nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, essendo $a = 2$ e $b = 1$, si ha

$$c = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$

I fuochi sono:

$$F_1(-\sqrt{3}; 0),\ F_2(\sqrt{3}; 0).$$



▶ **Figura 5** $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ e $F_2(\sqrt{3}; 0)$ sono i fuochi dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

L'eccentricità

Il rapporto fra la distanza focale e la lunghezza dell'asse maggiore di un'ellisse è detto **eccentricità** ed è solitamente indicato con la lettera e:

$$e = \frac{\textbf{distanza focale}}{\textbf{lunghezza dell'asse maggiore}}.$$

L'eccentricità e indica la forma più o meno schiacciata dell'ellisse.
Nell'ellisse con i fuochi sull'asse x la distanza focale è $2c$, mentre la lunghezza dell'asse maggiore è $2a$, quindi l'eccentricità è data dal rapporto $\frac{2c}{2a}$, ossia:

$$\boldsymbol{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}.$$

Poiché $c < a$, si ha:

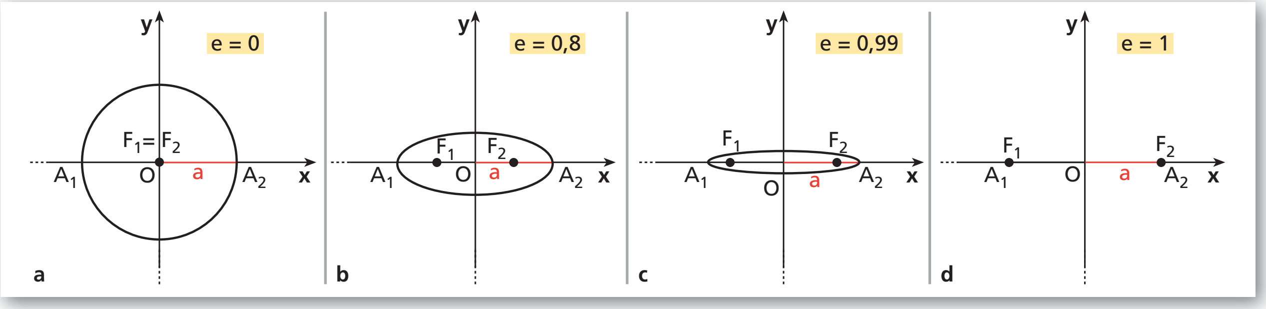
$$0 < e < 1.$$

Se $\boldsymbol{e = 0}$ (figura 6*a*), si ha $\frac{c}{a} = 0$, cioè $c = 0$: i fuochi coincidono con il centro.
Inoltre dalla relazione $c^2 = a^2 - b^2$, essendo $c = 0$, si ha $a^2 = b^2$ e l'equazione dell'ellisse diventa $x^2 + y^2 = a^2$, che rappresenta una circonferenza con il centro nell'origine e raggio a.
Se l'eccentricità aumenta, l'ellisse risulta più schiacciata sull'asse maggiore.
Nel caso limite di $\boldsymbol{e = 1}$ (figura 6*d*), si ha $c = a$ (fuochi nei due vertici) e $b = 0$.
L'ellisse, riducendosi all'asse maggiore, diventa *degenere*.
Concludendo, per l'eccentricità vale la relazione:

$$\boldsymbol{0 \le e < 1}.$$

Un'ellisse è **degenere** quando si riduce a un segmento, oppure a un punto (il centro).

▼ Figura 6



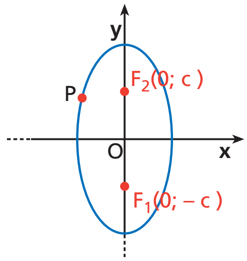
L'ellisse con i fuochi sull'asse *y*

Determiniamo l'equazione generica dell'ellisse con i fuochi sull'asse y. Il procedimento è analogo a quello seguito per l'ellisse con i fuochi sull'asse x.
In questo caso, diversamente dal precedente, indichiamo con $2b$ la somma costante delle distanze dei punti dell'ellisse dai fuochi.
Le coordinate dei fuochi sono $F_1(0; -c)$ e $F_2(0; c)$.

Indichiamo con $P(x; y)$ un generico punto dell'ellisse.
Per quanto abbiamo supposto, P deve verificare la relazione:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b.$$

Anche in questo caso prendiamo in esame solo ellissi il cui centro coincide con l'origine.



Con calcoli analoghi a quelli effettuati per l'ellisse con i fuochi sull'asse x si ottiene l'equazione:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

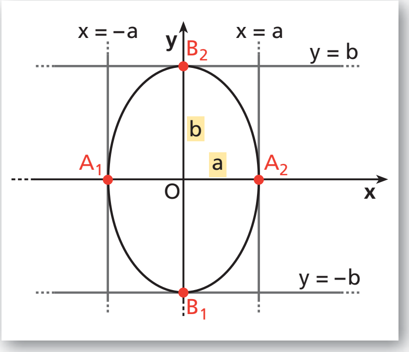
L'equazione ottenuta è uguale a quella dell'ellisse che ha i fuochi sull'asse x, in questo caso però si pone $\boldsymbol{b^2 - c^2 = a^2}$.
Da quest'ultima relazione segue che:

$$b^2 = a^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad b^2 > a^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{b > a}.$$

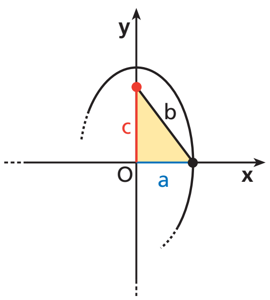
▶ Figura 7

Anche l'ellisse con i fuochi sull'asse y:

- è simmetrica rispetto agli assi cartesiani;
- ha vertici nei punti $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$;
- è inscritta nel rettangolo che ha i lati di equazioni $x = \pm a$, $y = \pm b$.



Poiché $b > a$, risulta $\overline{B_1B_2} > \overline{A_1A_2}$ e quindi B_1B_2 è detto **asse maggiore** e A_1A_2 è detto **asse minore**.



Poiché $b^2 - c^2 = a^2$, si ha $c^2 = b^2 - a^2$, da cui $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, quindi le coordinate dei fuochi sono:

$$\boldsymbol{F_1\left(0; -\sqrt{b^2 - a^2}\right)},$$

$$\boldsymbol{F_2\left(0; \sqrt{b^2 - a^2}\right)}.$$

L'eccentricità per l'ellisse con i fuochi sull'asse y, essendo $2b$ la lunghezza dell'asse maggiore, è:

$$\boldsymbol{e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}}.$$

Per definizione, e è il rapporto fra la distanza focale e la lunghezza dell'asse maggiore.

ESEMPIO

▶ Figura 8

Nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$,

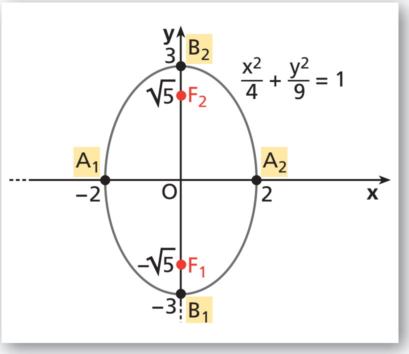
$a = 2$, $b = 3$, i vertici dell'ellisse sono $A_1(-2; 0)$, $A_2(2; 0)$, $B_1(0; -3)$, $B_2(0; 3)$.

La semidistanza focale è:

$$c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

I fuochi sono $F_1(0; -\sqrt{5})$, $F_2(0; \sqrt{5})$.

L'eccentricità è $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.



ESPLORAZIONE

L'ellisse in architettura

Il fuoco del presidente

La National Statuary Hall, situata all'interno del Campidoglio di Washington (sede dei due rami del Congresso degli Stati Uniti), ospita una collezione di cento statue donate dagli stati dell'Unione, che rappresentano importanti personalità della storia del Paese.

In origine era la sede della Camera dei rappresentanti (l'equivalente della nostra Camera dei deputati), ma nel 1857, per i problemi acustici dovuti alla sua forma ellittica, i parlamentari si trasferirono in un'altra sala del Campidoglio.

Si racconta che John Quincy Adams, sesto presidente degli Stati Uniti (1825-1829), quando tornò a frequentare la Hall come membro del Congresso, scelse una posizione che corrispondeva a uno dei fuochi dell'ellisse che costituiva la pianta della sala. In questo modo poteva sfruttare la sua acustica per origliare i discorsi dei deputati che avevano i propri banchi nei pressi dell'altro fuoco.

Un metodo ingegnoso e lecito di spionaggio politico, molto prima del Watergate.

L'ellisse nel Barocco

Nell'epoca del Barocco l'ellisse venne usata dagli architetti sia nella pianta delle chiese sia in quella delle piazze. L'esempio più famoso è piazza San Pietro a Roma, opera del Bernini. Nel centro di simmetria della sua parte ellittica c'è un obelisco e poco distante, nella pavimentazione, c'è una pietra circolare che segna uno dei due fuochi. Stando su quella pietra, il colonnato, che è composto da quattro file di colonne, per un gioco prospettico appare come se fosse formato da una sola fila.

Attività

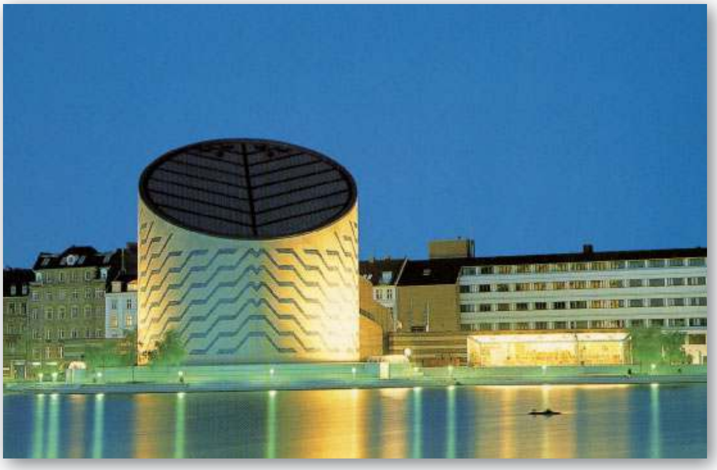
Ellissi moderne

Anche in epoca moderna, l'ellisse viene ampiamente utilizzata in architettura.

Per esempio, l'architetto svizzero Mario Botta ha usato l'ellisse nella ristrutturazione della Scala (2002-2004).

Nella foto puoi osservare come nel Tycho Brahe Planetarium di Copenaghen (1980) si sfrutti la proprietà geometrica che la sezione di un cilindro è un'ellisse.

- Cerca altri esempi di ellissi in architettura.



Cerca nel Web:

ellisse, architettura, Zenith Music Hall (puoi utilizzare l'opzione *Immagini* del tuo motore di ricerca)

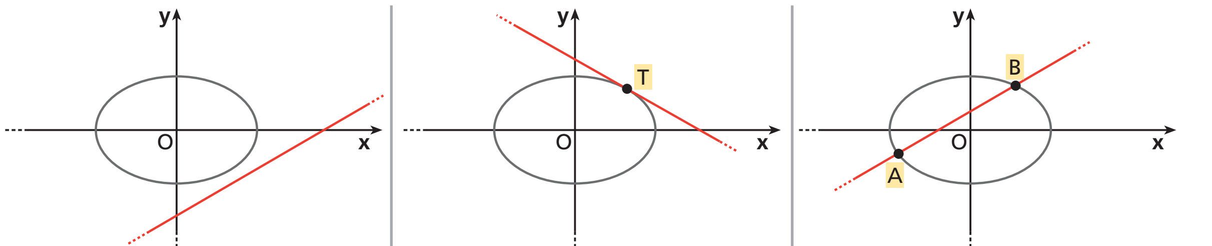
2. LE POSIZIONI DI UNA RETTA RISPETTO A UN'ELLISSE

Se vogliamo studiare la posizione di una retta di equazione $a'x + b'y + c' = 0$ rispetto a un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, procediamo in maniera analoga a quanto fatto per la circonferenza e la parabola, determinando quante sono le soluzioni del sistema costituito dalle due equazioni.

● Ricaviamo la x (o, indifferentemente, la y) dall'equazione della retta e sostituiamo l'espressione trovata nell'altra equazione. Otteniamo così un'equazione di secondo grado detta **equazione risolvente**.

Studiamo il segno del discriminante Δ dell'equazione risolvente:

- $\boldsymbol{\Delta < 0}$, il sistema non ha soluzioni reali, la retta è **esterna** all'ellisse;
- $\boldsymbol{\Delta = 0}$, il sistema ha due soluzioni reali e coincidenti, la retta è **tangente** all'ellisse in un punto;
- $\boldsymbol{\Delta > 0}$, il sistema ha due soluzioni reali, la retta è **secante** l'ellisse in due punti.



a. La retta è esterna all'ellisse. Non vi sono punti di intersezione.

b. La retta è tangente all'ellisse. L'unico punto di intersezione è il punto di tangenza.

c. La retta è secante l'ellisse. I punti di intersezione sono due.

▲ **Figura 9**

ESEMPIO

Studiamo che posizione ha la retta di equazione $x + 2y - 6 = 0$ rispetto all'ellisse $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$.

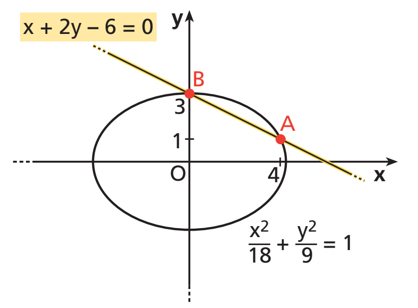
Risolviamo il sistema: $\begin{cases} \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$

Ricaviamo la x dalla seconda equazione, sostituiamo in quella di secondo grado e svolgiamo i calcoli. Otteniamo l'equazione risolvente:

$$6y^2 - 24y + 18 = 0 \quad \rightarrow \quad y^2 - 4y + 3 = 0.$$

Il discriminante dell'equazione è $\Delta = 4 > 0$.

L'equazione ha perciò le due soluzioni distinte $y_1 = 1$ e $y_2 = 3$, e dunque la retta interseca l'ellisse nei due punti $A(4; 1)$ e $B(0; 3)$.

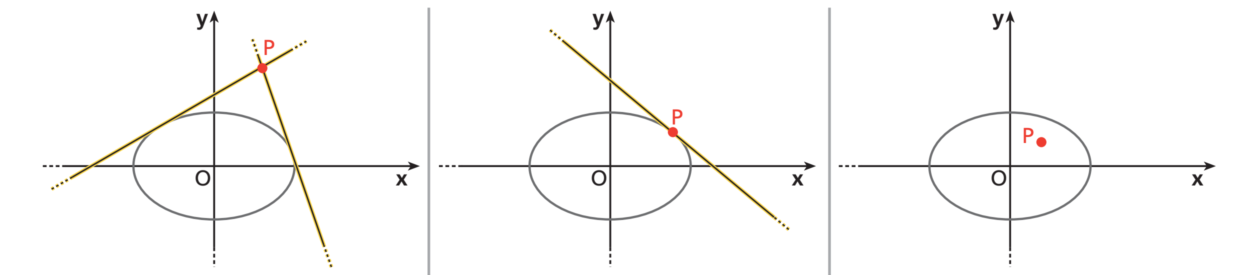


◀ **Figura 10** La retta $x + 2y - 6 = 0$ è secante l'ellisse $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ nei punti $A(4; 1)$ e $B(0; 3)$.

Le equazioni delle tangenti a un'ellisse

Le rette per un punto P e tangenti a un'ellisse possono essere due, una o nessuna, a seconda della posizione di P rispetto all'ellisse.

▼ Figura 11



a. P è esterno all'ellisse: esistono due rette tangenti per P.

b. P appartiene all'ellisse: esiste una sola retta tangente per P.

c. P è interno all'ellisse: non esistono rette tangenti per P.

Per determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti condotte da un punto $P(x_0; y_0)$ alla generica ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, si deve annullare il discriminante dell'equazione risolvente il sistema tra l'equazione della retta generica passante per P e l'equazione dell'ellisse:

$$\mathbf{\Delta = 0}.$$

ESEMPIO

Determiniamo le equazioni delle eventuali rette tangenti condotte dal punto $P(6; -2)$ all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Scriviamo l'equazione del fascio di rette di centro P:

$$y + 2 = m(x - 6).$$

Scriviamo il sistema formato dalle equazioni del fascio e dell'ellisse:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y + 2 = m(x - 6) \end{cases}$$

Ricaviamo la y dall'equazione della retta, la sostituiamo nell'equazione dell'ellisse e otteniamo l'equazione risolvente:

$$(1 + 3m^2)x^2 - 12(3m^2 + m)x + 108m^2 + 72m = 0.$$

Imponiamo la condizione di tangenza $\frac{\Delta}{4} = 0$ e otteniamo l'equazione in m:

$$36(3m^2 + m)^2 - (1 + 3m^2)(108m^2 + 72m) = 0.$$

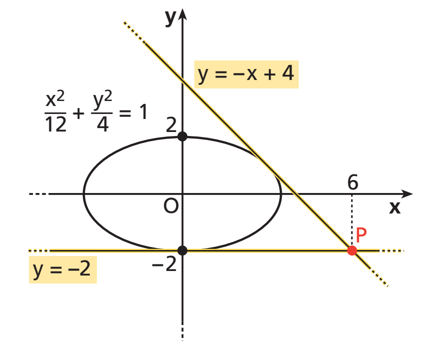
Risolvendola otteniamo:

$$m_1 = 0, m_2 = -1.$$

Sostituiamo i valori di m nell'equazione del fascio di rette e troviamo le equazioni delle due tangenti:

$$t_1: y = -2, \ t_2: y = -x + 4.$$

▼ Figura 12



La formula di sdoppiamento

Se si deve determinare l'equazione della retta *tangente all'ellisse in un suo punto* $P(x_0; y_0)$, si può utilizzare la seguente **formula di sdoppiamento**:

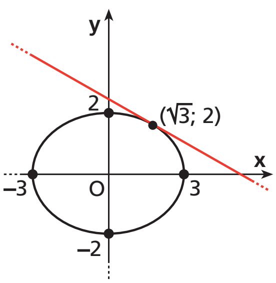
La formula si può applicare *solo se il punto P appartiene all'ellisse.*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

che si ottiene dall'equazione canonica dell'ellisse sostituendo il termine x^2 con xx_0 e il termine y^2 con yy_0.

ESEMPIO

Troviamo la retta t tangente all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$ nel suo punto di coordinate $(\sqrt{3}; 2)$. Applichiamo la formula di sdoppiamento e otteniamo:



$$\frac{\sqrt{3}\,x}{9} + \frac{2y}{6} = 1.$$

Semplificando, abbiamo l'equazione della retta t:

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3.$$

IN PRATICA
▶ Videolezione 21

3. COME DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UN'ELLISSE

Abbiamo visto che l'equazione di un'ellisse con centro di simmetria nell'origine e fuochi su uno degli assi cartesiani è la seguente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Per determinarla basta conoscere i valori di a e b. Quindi occorrono due informazioni (condizioni) sull'ellisse che permettano di impostare un sistema di due equazioni nelle incognite a e b.

Alcune condizioni possibili sono le seguenti:

- sono note le lunghezze dei due semiassi;
- sono note le coordinate di un fuoco e di un vertice (o semiasse);
- l'ellisse passa per un punto noto e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice);
- l'ellisse passa per un punto noto e si conosce l'eccentricità;
- l'ellisse passa per due punti noti;
- è nota l'eccentricità e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice);
- è nota l'equazione di una retta tangente all'ellisse e sono note le coordinate di un vertice (o di un fuoco, o di un punto dell'ellisse).

La lunghezza di un semiasse è uguale, a meno del segno, alla coordinata non nulla dei vertici che si trovano su tale asse. Quindi le coordinate di un vertice e la lunghezza di un semiasse forniscono la stessa condizione.

Le coordinate di un fuoco o di un vertice corrispondono a una sola condizione.

La conoscenza di un vertice (o semiasse) fornisce direttamente il valore di a o b. Gli altri tipi di condizioni forniscono invece delle equazioni nelle incognite a e b, che si ottengono dalle formule dell'eccentricità e delle coordinate dei fuochi oppure sostituendo le coordinate di un punto noto nell'equazione dell'ellisse.

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione di un'ellisse con fuochi sull'asse y che passa per il punto $P\left(2; \frac{5}{3}\sqrt{5}\right)$ e ha eccentricità $e = \frac{4}{5}$.

Sostituiamo le coordinate del punto P nell'equazione canonica dell'ellisse:

$$\frac{4}{a^2} + \frac{125}{9b^2} = 1.$$

Poiché i fuochi appartengono all'asse y, la formula dell'eccentricità è:

$$e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}.$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{125}{9b^2} = 1 & \text{conoscenza delle coordinate di un punto} \\ \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \frac{4}{5} & \text{conoscenza dell'eccentricità} \end{cases}$$

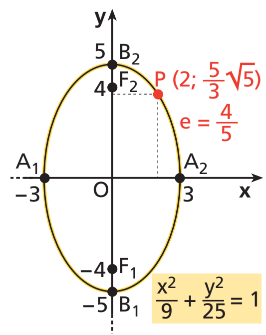
dal quale si ricava:

$$\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 25 \end{cases}$$

L'equazione dell'ellisse è:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

● Esaminiamo gli altri casi negli esercizi.



4. L'ELLISSE E LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

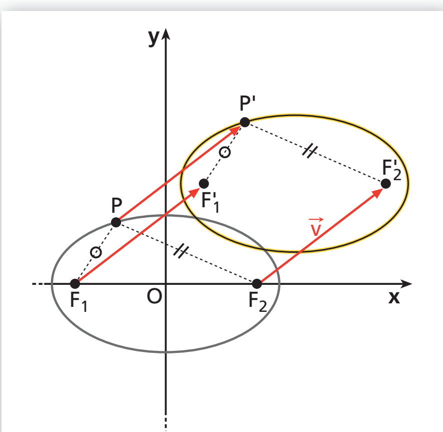
IN PRATICA
▶ Videolezione 22

L'ellisse traslata

Se trasformiamo un'ellisse con una traslazione di vettore $\vec{v}$, la curva ottenuta è ancora un'ellisse. Infatti, indicando con P' il corrispondente di un punto P dell'ellisse e con F_1' e F_2' i corrispondenti dei fuochi F_1 e F_2 dell'ellisse, vale ancora:

$$\overline{P'F_1'} + \overline{P'F_2'} = 2a.$$

L'ellisse trasformata però non ha più il centro coincidente con l'origine degli assi cartesiani.



◀ **Figura 13** Traslazione di vettore $\vec{v}$ di un'ellisse.

● Una traslazione lascia invariate le distanze fra punti, perciò $\overline{PF_1} = \overline{P'F_1'}$ e $\overline{PF_2} = \overline{P'F_2'}$.

Determiniamo l'equazione dell'ellisse ottenuta applicando alla generica ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ la traslazione di vettore $\vec{v}(p; q)$.

Le equazioni della traslazione di vettore $\vec{v}(p; q)$ sono:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = x' - p \\ y = y' - q \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alla x e alla y le espressioni trovate:

$$\frac{(x' - p)^2}{a^2} + \frac{(y' - q)^2}{b^2} = 1.$$

Eliminando gli apici otteniamo l'equazione dell'ellisse cercata:

$$\boldsymbol{\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1}.$$

● Il centro dell'ellisse traslata ha coordinate $(p; q)$. L'equazione ottenuta diventa quella di un'ellisse con centro nell'origine quando $p = q = 0$.

Possiamo scrivere l'equazione anche in altro modo. Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{b^2(x - p)^2 + a^2(y - q)^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$b^2(x^2 - 2px + p^2) + a^2(y^2 - 2qy + q^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - 2b^2px + b^2p^2 + a^2y^2 - 2a^2qy + a^2q^2 - a^2b^2 = 0$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2px - 2a^2qy + b^2p^2 + a^2q^2 - a^2b^2 = 0.$$

Ponendo

$$a' = b^2, \quad b' = a^2, \quad c' = -2b^2p, \quad d' = -2a^2q,$$
$$e' = b^2p^2 + a^2q^2 - a^2b^2,$$

otteniamo l'equazione scritta in modo più semplice:

$$\boldsymbol{a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0}.$$

● Questa equazione è di secondo grado nelle incognite x e y, come l'equazione della circonferenza. Al contrario di questa, però, i coefficienti di x^2 e y^2, a' e b', sono fra loro diversi, pur avendo lo stesso segno.

Dalle relazioni $a' = b^2$, $b' = a^2$, $c' = -2b^2p$, $d' = -2a^2q$ si possono ricavare le coordinate $(p; q)$ del centro dell'ellisse traslata in funzione dei coefficienti dell'equazione dell'ellisse. Valgono infatti le uguaglianze:

$$p = -\frac{c'}{2a'}, \qquad q = -\frac{d'}{2b'}.$$

Viceversa, data un'equazione $a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0$, si può dimostrare che, se a' e b' hanno lo stesso segno e se l'equazione ammette soluzioni reali, allora rappresenta un'ellisse con il centro di coordinate

$$\boldsymbol{O'\left(-\frac{c'}{2a'}; -\frac{d'}{2b'}\right)},$$

con assi di simmetria di equazioni

$$\boldsymbol{x = -\frac{c'}{2a'}, \quad y = -\frac{d'}{2b'}}$$

e con vertici le cui coordinate si ottengono mettendo a sistema l'equazione dell'ellisse con le equazioni degli assi di simmetria.

● Per rappresentare un'ellisse traslata, negli esercizi vedremo il *metodo del completamento del quadrato*.

ESEMPIO

Rappresentiamo l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$.

Abbiamo: $a' = 1$, $b' = 4$, $c' = -6$, $d' = -8$, $e' = -3$.

Le coordinate del centro di simmetria O' dell'ellisse sono:

$$x_{O'} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3, \qquad y_{O'} = -\frac{-8}{2 \cdot 4} = 1.$$

Le equazioni degli assi di simmetria sono perciò $x = 3$, $y = 1$.

Calcoliamo le coordinate dei vertici:

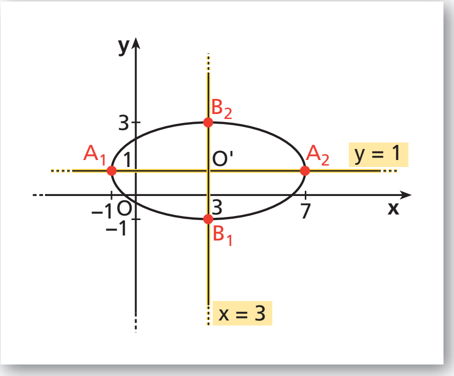
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = 7 \\ y = 1 \end{cases}$$

Intersechiamo gli assi di simmetria con l'ellisse.

Due vertici sono quindi i punti $A_1(-1; 1)$ e $A_2(7; 1)$.

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \\ x = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} y_2 = 3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Gli altri due vertici sono i punti $B_1(3; -1)$ e $B_2(3; 3)$.



◀ **Figura 14**

Per determinare l'equazione della tangente a un'ellisse traslata in un suo punto $(x_0; y_0)$ è possibile usare la formula di sdoppiamento che si ottiene a partire dall'equazione dell'ellisse con le seguenti sostituzioni:

$$x^2 \rightarrow x_0 x, \qquad y^2 \rightarrow y_0 y, \qquad x \rightarrow \frac{x + x_0}{2}, \qquad y \rightarrow \frac{y + y_0}{2}.$$

La dilatazione

Dato il punto $P(x; y)$, chiamiamo **dilatazione** la trasformazione geometrica che gli associa il punto $P'(x'; y')$ con:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{R}^+.$$

La dilatazione e le funzioni

Data la funzione $y = f(x)$, l'equazione della sua immagine f' nella dilatazione si ottiene ricavando x e y dalle equazioni della trasformazione e sostituendo in $y = f(x)$. Si ha:

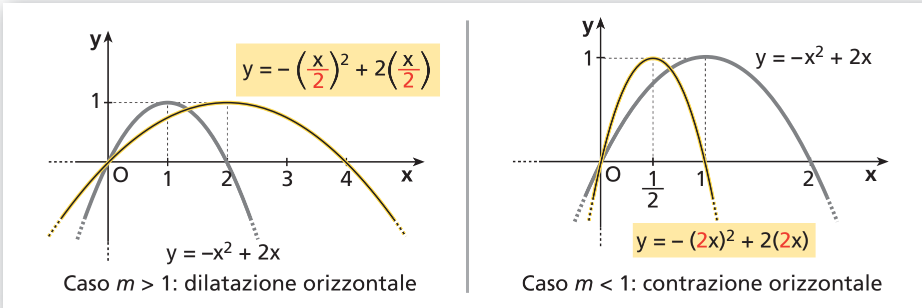
$$\boldsymbol{y = nf\left(\frac{x}{m}\right)}.$$

Casi particolari

1. Dilatazione o contrazione orizzontale

Se $\boldsymbol{n = 1}$, si ha $\boldsymbol{y = f\left(\dfrac{x}{m}\right)}$.

► Figura 15



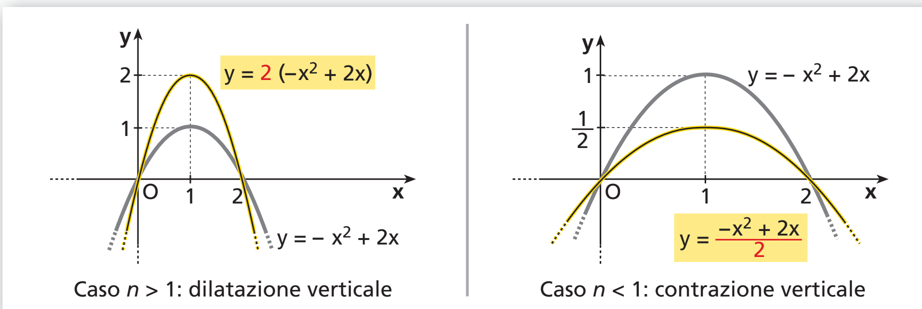
Caso $m > 1$: dilatazione orizzontale

Caso $m < 1$: contrazione orizzontale

2. Dilatazione o contrazione verticale

Se $\boldsymbol{m = 1}$, si ha $\boldsymbol{y = n\,f(x)}$.

► Figura 16



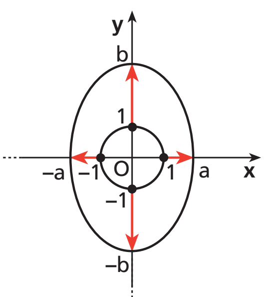
Caso $n > 1$: dilatazione verticale

Caso $n < 1$: contrazione verticale

L'ellisse come dilatazione della circonferenza

Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e la dilatazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'}{a} \\ y = \dfrac{y'}{b} \end{cases}$$



sostituiamo in $x^2 + y^2 = 1$, eliminando gli apici:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Abbiamo ottenuto l'equazione generica dell'ellisse, che può quindi essere vista come l'immagine della circonferenza nella dilatazione.

L'area racchiusa da un'ellisse

Si può dimostrare che in una dilatazione si conserva il rapporto tra le aree e che il rapporto tra l'area s' della figura trasformata e l'area s di quella non trasformata è uguale ad ab. Se chiamiamo s l'area del cerchio e s' quella racchiusa dall'ellisse, abbiamo $s = \pi \cdot 1^2 = \pi$ e $\dfrac{s'}{s} = ab$, quindi:

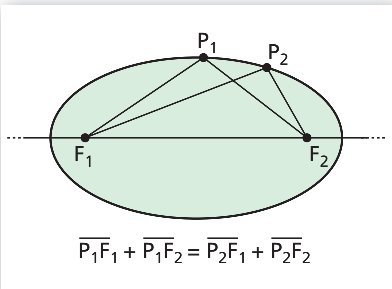
$$\boldsymbol{s' = \pi ab}.$$

L'ELLISSE DEL GIARDINIERE

Come può fare un giardiniere per creare un'aiuola a forma di ellisse?

▶ Il quesito completo a pag. 385

Prendiamo un punto qualsiasi dell'ellisse e consideriamo la sua distanza da ciascuno dei due fuochi.
Abbiamo visto che, se si cambia il punto sull'ellisse, la somma di queste due distanze rimane la stessa.
Questa proprietà viene utilizzata per disegnare un'ellisse sul terreno.



Il compasso del giardiniere
Lo strumento che si usa per disegnarla è composto da due paletti legati alle estremità di una corda e da un terzo paletto libero.
Si piantano i due paletti legati nel terreno in corrispondenza dei due fuochi, poi si fa girare il terzo paletto in modo da percorrere la corda tenendola sempre tesa; la curva disegnata è un'ellisse.

Puoi utilizzare anche tu la stessa tecnica per disegnare un'ellisse su un foglio, sostituendo i due paletti con due puntine, la corda con uno spago e il terzo paletto con una matita.
La lunghezza della corda che si utilizza per disegnare l'ellisse è uguale all'asse maggiore, cioè all'asse che passa per i due fuochi. Infatti, sappiamo che

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a,$$

dove P è un punto dell'ellisse e a è la lunghezza del semiasse maggiore.

Due casi limite
Se mettiamo i due paletti vicinissimi (possiamo pensarli coincidenti), otteniamo una circonferenza. Man mano che allontaniamo i due paletti, l'aiuola diventa sempre più oblunga.
Ovviamente, se la corda viene tirata per tutta la sua lunghezza, i due paletti finiscono nei vertici dell'ellisse, alle estremità dell'asse maggiore, e l'ellisse si riduce a un segmento.

La più grande aiuola ellittica
Si trova a Padova nella piazza del Prato della Valle. Nei tempi antichi era un luogo paludoso, ma nel 1775, per ordine del provveditore della città Andrea Memmo, iniziarono i lavori di sistemazione. Fu previsto un grande giardino a forma ellittica, circondato da un canale e da due file di statue. Si ottenne così un'isola, chiamata Isola Memmia, che occupa circa 20 000 m^2.
Sui due assi dell'ellisse ci sono due viali e quattro ponti, e nel centro di simmetria c'è una fontana.
Lo spazio è sistemato in gran parte a prato e viene utilizzato per mercati e spettacoli. È un luogo di incontro e di aggregazione, un'ampia area verde nel centro della città.

Un'ellisse nel gelato

Con un cono di cialda e con un coltello realizza una sezione come quella nella foto. Come puoi verificare che la curva che ottieni è proprio un'ellisse?
Con un pennarello riporta la sezione su un foglio e poi misura i due assi.
Con i valori che trovi, calcola la distanza focale e segnala sul foglio.
Adesso prendi un punto qualsiasi della curva e con opportune misure verifica che vale la proprietà fondamentale dell'ellisse.

LABORATORIO DI MATEMATICA
L'ELLISSE

ESERCITAZIONE GUIDATA

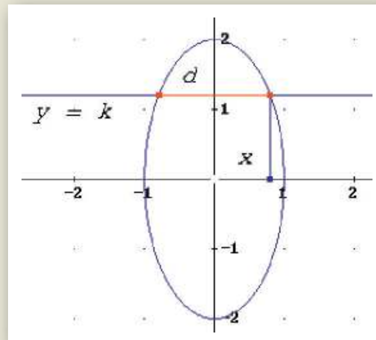
Costruiamo una funzione di Derive che in ingresso richieda un valore d e in uscita dia l'equazione dell'eventuale retta $y = k$ che intercetta, sulla semiellisse che fa parte dell'ellisse di equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ed è costituita da punti posti al di sopra e sull'asse x, una corda lunga d.
Proviamo la funzione assegnando rispettivamente a d i valori 0, 1 e 3.

L'analisi del problema

Ricaviamo l'equazione della semiellisse che sta sopra e sull'asse x, esplicitando la y dall'equazione dell'ellisse: $y = 2\sqrt{1 - x^2}$.
Abbozziamo un disegno dell'ellisse data, della retta generica $y = k$ e della corda lunga d (figura 1).

Da esso deduciamo che il valore di k si ricava sostituendo $\frac{d}{2}$ a x nell'equazione della semiellisse, e dopo alcuni calcoli troviamo $y = \sqrt{4 - d^2}$.

Osserviamo infine che la retta esiste se vengono assegnati dei valori di d appartenenti all'intervallo $[0; 2]$.

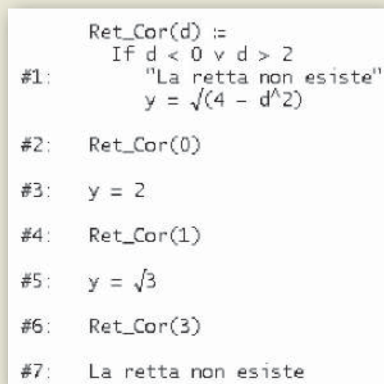


▲ Figura 1

La sessione di lavoro

• Attiviamo Derive e definiamo la funzione tenendo conto dell'analisi svolta, pertanto nella riga di editazione, scriviamo:
Ret_Cor(d) : = If(d < 0 ∨ d > 2, "La retta non esiste", y = SQRT(4 − d^2))
e la immettiamo nella #1 (figura 2).
• La facciamo poi operare con i valori proposti, ottenendo le risposte che leggiamo in figura 2.

▶ Figura 2



Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 8 esercitazioni in più

Esercitazioni

Per ognuno dei casi seguenti costruisci, con il computer, una funzione che legga i valori dei coefficienti h e k di un'ellisse di equazione $hx^2 + ky^2 = 1$ e dia in uscita i risultati indicati.

1 Le coordinate dei quattro vertici dell'ellisse.
Prova la funzione con $h = \frac{1}{25}$ e $k = \frac{1}{9}$, con $h = 1$ e $k = \frac{3}{4}$, con $h = 0$ e $k = \frac{9}{16}$.

2 Le intersezioni dell'ellisse con la retta di equazione $y = x + 4$.
Prova la funzione con $h = 1$ e $k = \frac{1}{4}$, con $h = \frac{1}{9}$ e $k = \frac{1}{16}$, con $h = \frac{1}{16}$ e $k = \frac{1}{25}$.

LA TEORIA IN SINTESI

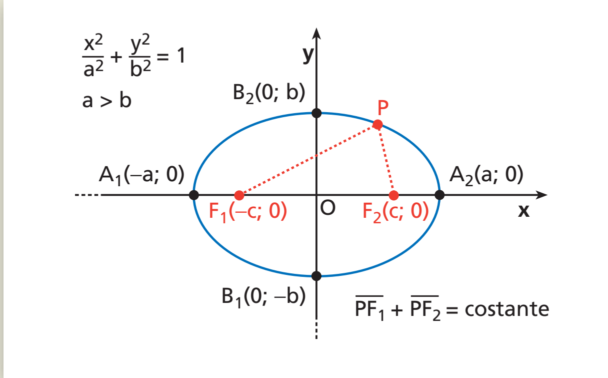
L'ELLISSE

1. L'ELLISSE E LA SUA EQUAZIONE

- **Ellisse**: luogo geometrico dei punti P per cui è costante la somma delle distanze da due punti F_1 e F_2, detti **fuochi**.
- **L'ellisse con centro nell'origine e fuochi sull'asse *x***
  - **Fuochi**: $F_1(-c; 0)$, $F_2(+c; 0)$, con $a > c$ e $a^2 - c^2 = b^2$.
  - **Vertici**: $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$.
  - **Assi**: i segmenti A_1A_2 (asse maggiore) e B_1B_2 (asse minore).
  - **Eccentricità**:

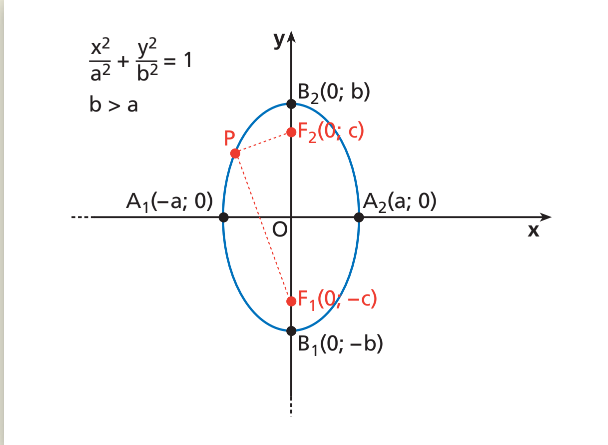
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

  $0 \leq e < 1$. e indica la forma più o meno schiacciata dell'ellisse.



- **L'ellisse con centro nell'origine e fuochi sull'asse *y***
  - **Fuochi**: $F_1(0; -c)$, $F_2(0; +c)$, con $b > c$ e $b^2 - c^2 = a^2$.
  - **Vertici**: $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$.
  - **Assi**: i segmenti B_1B_2 (asse maggiore), A_1A_2 (asse minore).
  - **Eccentricità**:

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}.$$



2. LE POSIZIONI DI UNA RETTA RISPETTO A UN'ELLISSE

- Considerato il sistema formato dalle equazioni della retta e dell'ellisse, si studia il segno del discriminante dell'equazione risolvente. Se:
  - $\boldsymbol{\Delta < 0}$, il sistema non ammette soluzioni reali; **la retta è esterna all'ellisse**;
  - $\boldsymbol{\Delta = 0}$, il sistema ammette due soluzioni coincidenti; **la retta è tangente all'ellisse in un punto**;
  - $\boldsymbol{\Delta > 0}$, il sistema ha due soluzioni reali e distinte; **la retta è secante l'ellisse in due punti**.

- Per determinare le **equazioni delle tangenti** condotte da $P(x_0; y_0)$ all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:
  - si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per P, $y - y_0 = m(x - x_0)$;
  - si scrive il sistema formato dalle equazioni del fascio e dell'ellisse:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}$$

  - si ottiene l'equazione risolvente di secondo grado nella variabile x oppure nella variabile y;
  - si pone la condizione di tangenza, ossia $\Delta = 0$;
  - si risolve l'equazione di secondo grado rispetto a m:
    – se $\boldsymbol{m_1 \neq m_2}$, le rette tangenti sono due e il punto è esterno all'ellisse;
    – se $\boldsymbol{m_1 = m_2}$, la retta tangente è una sola e il punto appartiene all'ellisse;
    – se $\boldsymbol{m_1, m_2 \notin \mathbb{R}}$, non esistono rette tangenti e il punto è interno all'ellisse.

- **Formula di sdoppiamento**: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.
  Fornisce l'equazione della tangente a un'ellisse in un suo punto $(x_0; y_0)$.

3. COME DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UN'ELLISSE

- L'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ contiene due coefficienti a e b, sono quindi necessarie due condizioni per determinarli.
  Per esempio, sono note l'eccentricità e le coordinate di un fuoco (o di un vertice).

4. L'ELLISSE E LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

- **Traslazione di un'ellisse mediante vettore $\vec{v}(p; q)$**
  La curva ottenuta è ancora un'ellisse, di equazione $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ con centro $(p; q)$. L'equazione è riconducibile alla forma $a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0$, dove a' e b' sono concordi.
  Viceversa, se a' e b' sono concordi e se l'equazione precedente ammette soluzioni reali, allora tale equazione rappresenta un'ellisse con centro $O'\left(-\frac{c'}{2a'}; -\frac{d'}{2b'}\right)$ e assi di simmetria di equazioni $x = -\frac{c'}{2a'}$, $y = -\frac{d'}{2b'}$.

- Una qualunque ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ può essere considerata come l'immagine della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ in una **dilatazione** di equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$

- L'**area racchiusa da un'ellisse** di semiassi a e b è:

$$A = \pi ab.$$

1. L'ELLISSE E LA SUA EQUAZIONE

▶ Teoria a pag. 386

1 Determina il luogo geometrico dei punti del piano la cui somma delle distanze dai punti $(-3; 0)$ e $(3; 0)$ è 10. $\left[\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\right]$

2 Scrivi l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano la cui somma delle distanze dai punti $(-2; 0)$ e $(2; 0)$ è 14. $\left[\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{45}=1\right]$

3 Scrivi l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano la cui somma delle distanze dai punti $A(0; -1)$ e $B(0; 1)$ è 12. $\left[\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{36}=1\right]$

4 Determina il luogo geometrico dei punti del piano la cui somma delle distanze dai punti $A(0; -4)$ e $B(0; 4)$ è uguale a 10. $\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1\right]$

5 **ESERCIZIO GUIDA**

Data l'ellisse di equazione $4x^2 + 9y^2 = 36$, determiniamo la misura dei semiassi, le coordinate dei vertici e dei fuochi, l'eccentricità e rappresentiamo la curva graficamente.

Dividiamo entrambi i membri dell'equazione data per il termine noto, per ridurla nella forma canonica,

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,$$

da cui deduciamo $a = 3$, $b = 2$ e le coordinate dei vertici:

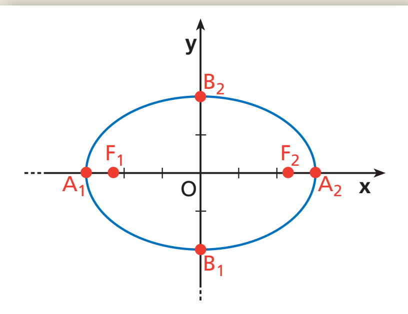
$$A_1(-3; 0),\quad A_2(3; 0),\quad B_1(0; -2),\quad B_2(0; 2).$$

Determiniamo inoltre:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5,$$

le coordinate dei fuochi $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$,

il valore dell'eccentricità $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.



Rappresentiamo graficamente l'ellisse, dopo aver disegnato i quattro vertici.

Riconosci quali delle seguenti equazioni rappresentano ellissi e, in caso affermativo, scrivile nella forma canonica, determina la misura dei semiassi, le coordinate dei vertici e dei fuochi, l'eccentricità e rappresenta la curva graficamente.

6 a) $x^2 + 3y^2 = 1$; b) $x^2 = 9y^2 + 1$; c) $4x^2 + 25y^2 + 1 = 0$.

7 a) $y^2 + 4x^2 = 9$; b) $1 - x^2 + 25y^2 = 0$; c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=\frac{1}{3}$.

8 a) $9x^2 + y^2 = 36$; b) $x^2 - 4 = y^2$; c) $y^2 = x^2 + 3$.

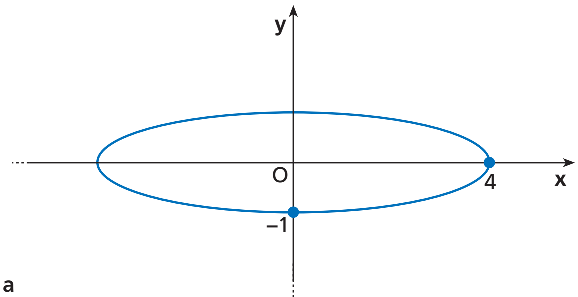
9 a) $x^2 = 9 - 9y^2$; b) $4 - x^2 - 16y^2 = 0$; c) $y^2 = \frac{15-5x^2}{3}$.

10 a) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=\frac{1}{2}$; b) $9x^2 + y^2 = 1$; c) $y = x^2 + 8x + 3$.

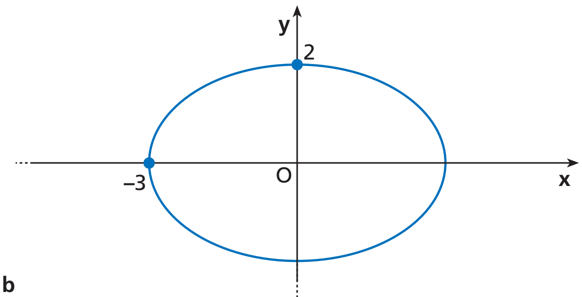
11 a) $y^2 = 36 - 9x^2$; b) $x^2 = \frac{16-y^2}{16}$; c) $25y^2 + x^2 - 100 = 0$.

Trova le equazioni delle ellissi rappresentate nei seguenti grafici, utilizzando i dati delle figure, e determina le coordinate dei vertici, dei fuochi e l'eccentricità.

12



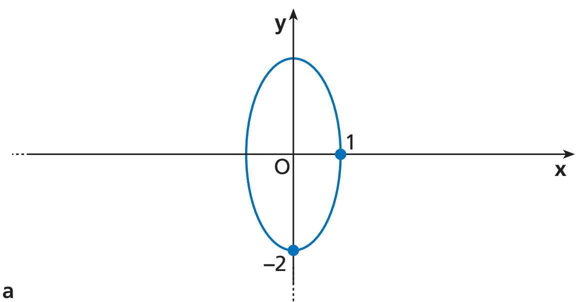
a



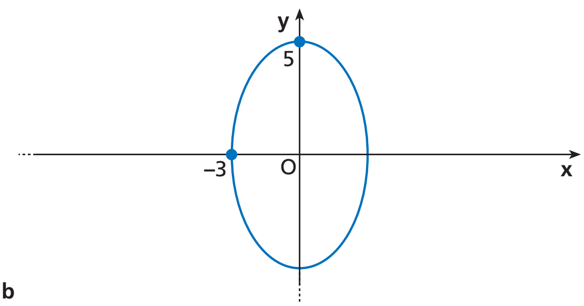
b

$\left[\dfrac{x^2}{16}+y^2=1;\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\right]$

13



a



b

$\left[x^2+\dfrac{y^2}{4}=1;\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1\right]$

Trova per quali valori di k le seguenti equazioni rappresentano un'ellisse.

14 $\dfrac{x^2}{9k}+\dfrac{y^2}{k-2}=1$ $[k>2]$

15 $x^2+(4-k)y^2=k$ $[0<k<4]$

16 Scrivi l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x e con le caratteristiche indicate e calcola l'eccentricità (ricorda che a, b, c sono, rispettivamente, le misure dei semiassi e della semidistanza focale).

a) $a=4$, $b=1$. $\left[x^2+16y^2=16,\ \dfrac{\sqrt{15}}{4}\right]$

b) $a=2$, $c=1$. $\left[3x^2+4y^2=12,\ \dfrac{1}{2}\right]$

c) $b=3$, $c=2$. $\left[\dfrac{x^2}{13}+\dfrac{y^2}{9}=1,\ \dfrac{2\sqrt{13}}{13}\right]$

d) $2a=6$, $b=\sqrt{5}$. $\left[\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1,\ \dfrac{2}{3}\right]$

e) $b=2$, $2c=4\sqrt{3}$. $\left[x^2+4y^2=16,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

f) $a=5$, $c^2=16$. $\left[\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1,\ \dfrac{4}{5}\right]$

17 Scrivi l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse y e con le caratteristiche indicate e calcola l'eccentricità (ricorda che a, b, c sono, rispettivamente, le misure dei semiassi e della semidistanza focale).

a) $b=3$, $a=2$. $\left[\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1,\ \dfrac{\sqrt{5}}{3}\right]$

b) $b=2$, $c=1$. $\left[\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1,\ \dfrac{1}{2}\right]$

c) $a=2$, $c=3$. $\left[\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{13}=1,\ \dfrac{3\sqrt{13}}{13}\right]$

d) $a=2$, $2b=8$. $\left[\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

e) $c^2=36$, $2b=20$. $\left[\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{100}=1,\ \dfrac{3}{5}\right]$

f) $2a=6$, $c=2$. $\left[\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{13}=1,\ \dfrac{2\sqrt{13}}{13}\right]$

18 Scrivi l'equazione di un'ellisse che ha i fuochi sull'asse y, asse minore lungo 4 e distanza focale uguale a 2.
$\left[\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1\right]$

19 Determina l'equazione di un'ellisse che ha i fuochi sull'asse x, semiasse maggiore lungo 6 e distanza focale uguale a 4.
$\left[\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1\right]$

20 Trova l'equazione dell'ellisse che ha i fuochi sull'asse x, asse maggiore lungo $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ e asse minore lungo 4.
$\left[\frac{3x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1\right]$

21 **TEST** An ellipse has the centre at the point $(-4; 6)$ and passes through the points $(-4; 9)$ and $(2; 6)$. An equation that describes this ellipse is:

A $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y+6)^2}{36}=1.$

B $\frac{(x-4)^2}{36}+\frac{(y+6)^2}{9}=1.$

C $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-6)^2}{36}=1.$

D $\frac{(x+4)^2}{36}+\frac{(y-6)^2}{9}=1.$

(CAN *Barry Mabillard Learning Centre,* Practice Exam)

22 **VERO O FALSO?**

a) L'eccentricità dell'ellisse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ è $\frac{\sqrt{2}}{2}$. V F

b) L'ellisse di equazione $x^2+9y^2=36$ ha i fuochi sull'asse x. V F

c) Se i due semiassi di un'ellisse sono uguali, l'eccentricità è 1. V F

d) L'ellisse di equazione $9x^2+4y^2=1$ ha un vertice nel punto $\left(0; \frac{1}{3}\right)$. V F

e) L'ellisse di eccentricità $\frac{1}{10}$ è più schiacciata rispetto a quella di eccentricità $\frac{1}{2}$. V F

23 **COMPLETA** la seguente tabella.

Equazione	Fuochi	Eccentricità
$\frac{x^2}{4}+y^2=1$	$F_1(\ldots;\ldots)$, $F_2(\ldots;\ldots)$	$e=\ldots$
$\frac{x^2}{\ldots}+\frac{y^2}{\ldots}=1$	$F_1(0;+8)$, $F_2(0;-8)$	$e=\frac{4}{5}$
$\frac{x^2}{\ldots}+\frac{y^2}{16}=1$	$F_1(+3;0)$, $F_2(-3;0)$	$e=\ldots$
$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{\ldots}=1$	$F_1(\ldots;0)$, $F_2(\ldots;0)$	$e=\frac{\sqrt{5}}{3}$
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{\ldots}=1$	$F_1(0;+4)$, $F_2(0;-4)$	$e=\ldots$

24 **ASSOCIA** a ciascuna equazione la caratteristica dell'ellisse che essa rappresenta.

a) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1.$ b) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1.$ c) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1.$

1) Eccentricità $\frac{1}{2}$. 2) Fuochi $(\pm 1; 0)$. 3) Vertici $(\pm 2; 0)$.

25 Per quali valori di k l'espressione $\frac{2k-1}{k}$ può rappresentare l'eccentricità di un'ellisse non degenere? $\left[\frac{1}{2} \leq k < 1\right]$

26 TEST Find the eccentricity of the ellipse: $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0$.

A $\frac{\sqrt{13}}{3}$. B $\frac{1}{2}$. C $\frac{\sqrt{5}}{3}$. D $\frac{3\sqrt{13}}{13}$. E $\frac{\sqrt{5}}{13}$.

(USA *Montana Council of Teachers of Mathematics, Math Contest,* 2007)

L'ellisse e i parametri

27 **ESERCIZIO GUIDA**

Data l'equazione

$$\frac{x^2}{k+2} + \frac{y^2}{3-k} = 1,$$

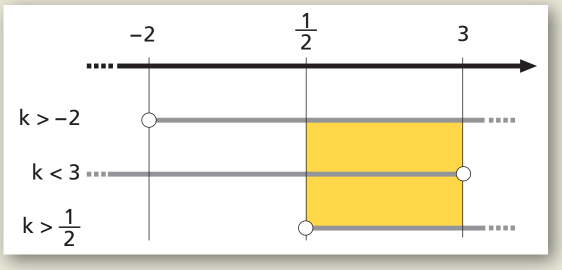
determiniamo i valori da attribuire al parametro k affinché rappresenti un'ellisse con i fuochi sull'asse delle x.

Affinché l'equazione data sia l'equazione canonica di un'ellisse, devono valere le uguaglianze:

$$a^2 = k + 2 \text{ e } b^2 = 3 - k.$$

Deve perciò essere: $k + 2 > 0$ e $3 - k > 0$.
I fuochi stanno sull'asse x, quindi deve valere la disuguaglianza:

$$a > b \rightarrow a^2 > b^2 \rightarrow k + 2 > 3 - k.$$



Risolviamo il sistema costituito dalle tre disequazioni: $\begin{cases} k+2>0 \\ 3-k>0 \\ k+2>3-k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k>-2 \\ k<3 \\ k>\frac{1}{2} \end{cases}$

Le soluzioni del sistema sono $\frac{1}{2} < k < 3$, quindi l'equazione data rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse x per $\frac{1}{2} < k < 3$.

28 Data l'equazione

$$\frac{x^2}{1-2k} + \frac{y^2}{k+4} = 1,$$

determina i valori da attribuire al parametro k affinché rappresenti un'ellisse con i fuochi sull'asse x. $[-4 < k < -1]$

29 È data l'equazione:

$$(3k-1)x^2 + (k+5)y^2 = 3k^2 + 14k - 5.$$

Stabilisci per quali valori del parametro k essa rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse y. $[k > 3]$

30 Determina i valori del parametro k affinché l'equazione

$$\frac{x^2}{2k+3} + \frac{y^2}{3-k} = 1:$$

a) rappresenti un'ellisse;
b) rappresenti una circonferenza.

$\left[\text{a) } -\frac{3}{2} < k < 3; \text{ b) } k = 0\right]$

31 Dopo aver trovato i valori di k affinché l'equazione

$$\frac{x^2}{4k+4} + \frac{y^2}{3+k} = 1$$

rappresenti un'ellisse, determina quello corrispondente all'ellisse passante per il punto $(2; \sqrt{2})$. $[k > -1; k = 1]$

32 Individua i valori di k affinché la conica di equazione

$$\frac{x^2}{2k+7} + \frac{y^2}{3+k} = 1$$

sia un'ellisse con un fuoco di coordinate $(\sqrt{7}; 0)$.

$[k = 3]$

33 Determina i valori di k affinché l'equazione

$$\frac{x^2}{2k-1} + \frac{y^2}{5k+2} = 1:$$

a) sia un'ellisse con i fuochi sull'asse delle y;
b) abbia un fuoco di coordinate $(0; 3)$;
c) abbia un vertice di coordinate $(-3; 0)$;
d) abbia eccentricità $e = \sqrt{\frac{6}{7}}$.

$\left[\text{a) } k > \frac{1}{2}; \text{ b) } k = 2; \text{ c) } k = 5; \text{ d) } k = 1\right]$

34 a) Per quali valori di k l'equazione

$$kx^2 - (k-1)y^2 = k+1$$

rappresenta un'ellisse?
b) Per quali un'ellisse con i fuochi sull'asse x?
c) Traccia il grafico per $k = \frac{1}{8}$.

$\left[\text{a) } 0 < k < 1; \text{ b) } 0 < k < \frac{1}{2}\right]$

35 Determina k in modo che l'equazione

$$(2k+1)x^2 + 4ky^2 - 1 = 0$$

rappresenti un'ellisse:
a) qualsiasi;
b) passante per $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$;
c) con i fuochi sull'asse x ed eccentricità $\frac{1}{4}$.

$\left[\text{a) } k > 0; \text{ b) } k = \frac{1}{6}; \text{ c) } k = \frac{4}{7}\right]$

36 Considera l'equazione $(k+2)x^2 - ky^2 = 1$ e trova per quali valori di k si ha:
a) un'ellisse;
b) una circonferenza;
c) un'ellisse con i fuochi sull'asse x e un'ellisse con i fuochi sull'asse y;
d) un'ellisse con un fuoco di coordinate $(1; 0)$.

Posto $k = -\frac{1}{4}$, trova i vertici del quadrato inscritto nell'ellisse.

$\left[\text{a) } -2 < k < 0; \text{ b) } k = -1; \text{ c) } -2 < k < -1, -1 < k < 0; \text{ d) } k = -\sqrt{2}; \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

2. LE POSIZIONI DI UNA RETTA RISPETTO A UN'ELLISSE

▶ Teoria a pag. 394

Nei seguenti esercizi sono assegnate l'equazione di un'ellisse e di una retta. Stabilisci la posizione della retta rispetto all'ellisse e, nei casi in cui la retta non sia esterna, determina le coordinate dei punti di intersezione.

37 $4x^2 + 9y^2 = 36;\quad x - y - 7 = 0.$ [esterna]

38 $16x^2 + 25y^2 = 100;\quad x - 2 = 0.$ $\left[\text{secante: } \left(2; -\frac{6}{5}\right), \left(2; \frac{6}{5}\right)\right]$

39 $81x^2 + 196y^2 = 441;\quad 2y + 3 = 0.$ $\left[\text{tangente: } \left(0; -\frac{3}{2}\right)\right]$

40 $x^2 + 4y^2 = 40;\quad x + 6y - 20 = 0.$ [tangente: $(2; 3)$]

41 $4x^2 + 21y^2 = 85;\quad 2x - 9y - 17 = 0.$ $\left[\text{secante: } \left(-\frac{1}{2}; -2\right), (4; -1)\right]$

42 Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{8} = 35$, determina la lunghezza della corda individuata sulla retta di equazione $x - 2y + 7 = 0$.

$\left[48\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$

43 Data l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 16$, trova la lunghezza della corda individuata sulla retta che passa per i punti $A\left(1; \frac{5}{2}\right)$ e $B(-2; 1)$. $[2\sqrt{5}]$

44 Dopo aver determinato l'equazione dell'ellisse avente due vertici di coordinate (6; 0) e (0; 4), calcola la lunghezza della corda individuata sulla bisettrice del secondo e quarto quadrante. $\left[\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1; \frac{24\sqrt{26}}{13}\right]$

45 Calcola l'area del triangolo ABF, dove A e B sono i punti di intersezione della retta di equazione $y = -2x + 3$ con l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ e F è il fuoco dell'ellisse di ascissa negativa. [12]

46 Nel fascio di rette parallele all'asse x, determina le rette sulle quali l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{12} = 1$ stacca una corda di lunghezza $\sqrt{2}$. $[y = \pm 3]$

47 Nel fascio di rette di centro $O(0; 0)$, individua su quali rette l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ stacca una corda di lunghezza $\sqrt{10}$. $\left[y = \pm \frac{x}{2}\right]$

48 Scrivi le equazioni dei lati del rettangolo di perimetro 28 inscritto nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{32} = 1$. $\left[x = \pm 3,\ y = \pm 4;\ x = \pm \frac{51}{25},\ y = \pm \frac{124}{25}\right]$

Le equazioni delle tangenti a un'ellisse

49 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo le equazioni delle rette tangenti all'ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 = 9$, condotte dal punto $P(-9; 0)$.

L'equazione della retta generica passante per il punto $P(-9; 0)$ è $y = m(x + 9)$.

Scriviamo il sistema retta-ellisse per determinare i valori del coefficiente angolare m:

$$\begin{cases} y = mx + 9m \\ x^2 + 2y^2 = 9 \end{cases}$$

Determiniamo l'equazione risolvente:

$$x^2 + 2(mx + 9m)^2 = 9.$$

Riduciamo l'equazione risolvente a forma normale:

$$x^2 + 2(m^2x^2 + 18m^2x + 81m^2) - 9 = 0$$
$$(1 + 2m^2)x^2 + 36m^2x + 162m^2 - 9 = 0.$$

Imponiamo che Δ $\left(\text{in questo caso } \frac{\Delta}{4}\right)$ sia nullo, in questo modo la retta intersecherà l'ellisse in due punti coincidenti:

$$(18m^2)^2 - (1 + 2m^2)(162m^2 - 9) = 0$$
$$324m^4 - 162m^2 - 324m^4 + 9 + 18m^2 = 0$$
$$144m^2 - 9 = 0$$
$$m^2 = \frac{9}{144} \rightarrow m^2 = \frac{1}{16} \rightarrow m = \pm \frac{1}{4}.$$

Sostituiamo i valori ottenuti in $y = mx + 9m$. Ricaviamo così le equazioni delle rette tangenti all'ellisse uscenti da $P(-9; 0)$:

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{4} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}.$$

50 Conduci dal punto $P\left(6; -\frac{3}{2}\right)$ le tangenti all'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 9$. $[2y + 3 = 0;\ 4x + 6y - 15 = 0]$

51 Determina le equazioni delle tangenti all'ellisse di equazione $9x^2 + 16y^2 = 144$, condotte dai suoi punti di intersezione con gli assi cartesiani. $[x = \pm 4;\ y = \pm 3]$

52 Scrivi le equazioni delle tangenti all'ellisse di equazione $x^2 + 9y^2 = 25$, parallele alla retta $\frac{4}{3}x + 3y - 1 = 0$.
[$4x + 9y + 25 = 0$; $4x + 9y - 25 = 0$]

53 Determina l'equazione della tangente all'ellisse di equazione $x^2 + 3y^2 = 36$, condotta dal suo punto del primo quadrante di ordinata 3.
[$x + 3y - 12 = 0$]

54 Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$, determina i valori del parametro q per cui le rette del fascio di equazione $x - 6y + q = 0$:
a) intersecano l'ellisse in due punti distinti;
b) sono tangenti all'ellisse;
c) sono esterne all'ellisse.
[a) $-20 < q < 20$; b) $q = \pm 20$; c) $q < -20 \lor q > 20$]

55 Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ e il fascio di rette di equazione $y = mx - 4$, determina i valori del parametro m che corrispondono a rette che:
a) intersecano l'ellisse in due punti distinti;
b) sono tangenti all'ellisse;
c) sono esterne all'ellisse.
[a) $m < -1 \lor m > 1$; b) $m = \pm 1$; c) $-1 < m < 1$]

56 Trova il valore di k affinché l'ellisse di equazione
$$\frac{x^2}{k+6} + \frac{y^2}{1-k} = 1$$
sia tangente alla retta di equazione $y = -2x + 4$.
[$k = -3$]

57 Scrivi le equazioni delle tangenti all'ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 = 9$, condotte dal punto $\left(3; \frac{3}{2}\right)$.
Indicati con R e S i punti di contatto, trova l'area del triangolo PRS.
$\left[x - 3 = 0; x + 4y - 9 = 0; \frac{3}{2}\right]$

58 Considera l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 20$ e determina il perimetro del quadrato circoscritto all'ellisse che ha i vertici sugli assi cartesiani.
[$20\sqrt{2}$]

59 Calcola l'area del triangolo equilatero circoscritto all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ con un vertice sul semiasse positivo delle y.
[$2\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})$]

La formula di sdoppiamento

60 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione della tangente all'ellisse di equazione $3x^2 + y^2 = 4$, nel suo punto del quarto quadrante, di ascissa 1.

Determiniamo l'ordinata del punto, sostituendo l'ascissa 1 nell'equazione dell'ellisse:
$$3 + y^2 = 4 \quad \rightarrow \quad y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad y = \pm 1.$$
Il punto cercato, nel quarto quadrante, ha ordinata -1.

Applichiamo la formula di sdoppiamento:
$$3x_0x + y_0y = 4 \quad \rightarrow \quad 3x - y = 4.$$
L'equazione della tangente cercata è:
$$y = 3x - 4.$$

61 Scrivi le equazioni delle tangenti all'ellisse di equazione $9x^2 + 2y^2 = 54$, nei suoi punti di ordinata 3.
[$y = \pm 3x + 9$]

62 Trova l'equazione della tangente all'ellisse di equazione $4x^2 + y^2 = 4$, nel suo punto di ascissa $\frac{1}{2}$, che si trova nel quarto quadrante.
$[2x - \sqrt{3}\,y - 4 = 0]$

63 Determina l'equazione della tangente all'ellisse di equazione $x^2 + 9y^2 = 9$, nel suo punto di intersezione con la retta di equazione $x - 6\sqrt{2}\,y = 0$, che si trova nel primo quadrante.
$\left[\frac{2\sqrt{2}}{9}x + \frac{1}{3}y = 1\right]$

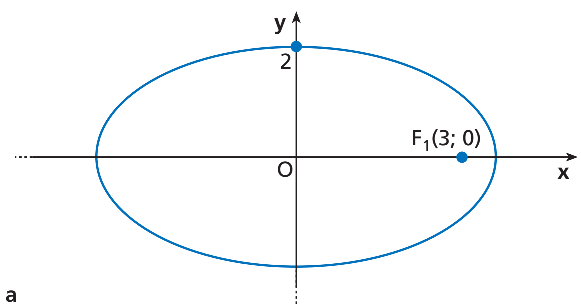
64 Scrivi l'equazione della retta tangente all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{36} = 1$, nel suo punto di ordinata $-3\sqrt{3}$, che si trova nel terzo quadrante.
$\left[\frac{\sqrt{2}}{8}x + \frac{\sqrt{3}}{12}y + 1 = 0\right]$

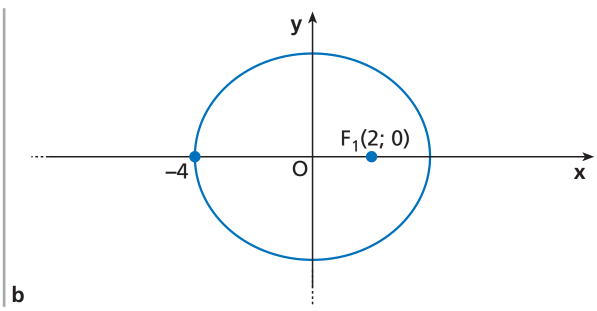
3. COME DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UN'ELLISSE

Teoria a pag. 396

IN PRATICA
Videolezione 21

65 Trova le equazioni delle ellissi dei seguenti grafici, utilizzando i dati delle figure.





$\left[\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{4} = 1;\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1\right]$

66 TEST Determine the equation of the ellipse having vertices $(\pm 10; 0)$ and foci $(\pm 6; 0)$.

A $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$

B $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1.$

C $100x^2 + 36y^2 = 1.$

D $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$

E $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{64} = 1.$

(USA *Indiana State Mathematics Contest*, 2004)

67 Scrivi l'equazione dell'ellisse riferita agli assi avente un vertice in $(0; -3)$ e semiasse sull'asse x di misura $2\sqrt{3}$.
$[9x^2 + 12y^2 = 108]$

68 Trova l'equazione dell'ellisse con centro in O avente un fuoco in $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ e l'asse su cui non giace il fuoco di lunghezza $\sqrt{7}$.
$[7x^2 + 16y^2 = 28]$

69 Determina e rappresenta l'equazione dell'ellisse con centro in O avente un fuoco in $(0; -2\sqrt{5})$ e un vertice in $(-4; 0)$.
$\left[\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1\right]$

70 Trova l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse delle y avente un vertice in $(0; 4)$ ed eccentricità $\frac{\sqrt{7}}{4}$.
$\left[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1\right]$

71 Determina l'equazione dell'ellisse di eccentricità $\frac{1}{2}$, sapendo che ha un vertice in $(0; -\sqrt{3})$.
$[3x^2 + 4y^2 = 12; 4x^2 + 3y^2 = 9]$

72 Determina l'equazione dell'ellisse con centro di simmetria nell'origine, di eccentricità $e = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e avente un fuoco nel punto $(0; 4)$.
$\left[\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{20} = 1\right]$

73 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione dell'ellisse passante per i punti $P(1; 2)$ e $Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$.

Consideriamo l'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e imponiamo il passaggio per P e Q.

Sostituendo le coordinate di P e Q, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \\ \frac{3}{4a^2} + \frac{9}{2b^2} = 1 \end{cases}$$

Per risolverlo più facilmente, conviene porre $\frac{1}{a^2} = t$ e $\frac{1}{b^2} = v$.

Si ha:

$$\begin{cases} t + 4v = 1 \\ \frac{3}{4}t + \frac{9}{2}v = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 - 4v \\ 3(1 - 4v) + 18v = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 - 4v \\ 3 - 12v + 18v = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 - 4v \\ 6v = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ v = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Tenendo conto delle posizioni effettuate, otteniamo:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{3} \text{ e } \frac{1}{b^2} = \frac{1}{6}.$$

L'equazione dell'ellisse è $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$.

74 Qual è l'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ passante per i punti $\left(\sqrt{3}; \frac{1}{2}\right)$ e $\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$? $[x^2 + 4y^2 = 4]$

75 Scrivi l'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ passante per i punti $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3\sqrt{7}}{10}\right)$ e $\left(-2; \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$.
$[x^2 + 25y^2 = 16]$

76 Scrivi l'equazione dell'ellisse avente un vertice nel punto $(-3; 0)$ e passante per $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -2\right)$.
$[8x^2 + 9y^2 = 72]$

77 Qual è l'equazione dell'ellisse passante per i punti $(-2\sqrt{2}; 2)$ e $(\sqrt{5}; 4)$? $\left[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1\right]$

78 Determina l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse delle y, avente un vertice in $(2; 0)$ e passante per $\left(1; \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.
$\left[\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1\right]$

79 Un'ellisse ha un fuoco in $(0; 2\sqrt{2})$ e passa per $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}; 2\right)$. Qual è la sua equazione? $\left[x^2 + \frac{y^2}{9} = 1\right]$

80 Determina l'equazione dell'ellisse con centro di simmetria nell'origine, di eccentricità $e=\frac{3\sqrt{17}}{17}$ e avente un fuoco nel punto (0; 3). $\left[\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{17}=1\right]$

81 Determina l'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con i fuochi sull'asse x, di eccentricità $e=\frac{\sqrt{7}}{3}$ e avente un vertice di coordinate $(-3; 0)$. $\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1\right]$

82 Trova l'equazione dell'ellisse con centro di simmetria nell'origine, di eccentricità $e=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ e avente un fuoco nel punto $(-3; 0)$. $\left[\frac{x^2}{10}+y^2=1\right]$

83 Scrivi l'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, di eccentricità $e=\frac{\sqrt{5}}{5}$ e avente il semiasse minore $a=4$. $\left[\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{20}=1\right]$

84 Determina l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x, di eccentricità $e=\sqrt{\frac{2}{3}}$, sapendo che passa per $(-\sqrt{3}; -\sqrt{2})$. $\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1\right]$

85 Trova l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse y, di eccentricità $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$, sapendo che passa per $(1; -\sqrt{3})$. $\left[\frac{x^2}{3}+\frac{2y^2}{9}=1\right]$

86 Scrivi l'equazione canonica dell'ellisse che nel suo punto di ascissa 1 ha per tangente la retta di equazione $x+6\sqrt{2}y-9=0$. $\left[\frac{x^2}{9}+y^2=1\right]$

87 L'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$ è tangente alla retta di equazione $\sqrt{3}x-2y-4=0$. Trova il valore di a. [2]

88 Dopo aver determinato l'equazione canonica dell'ellisse passante per i punti $A(2; 0)$ e $B\left(1; -\frac{3}{2}\right)$, calcola l'area del triangolo ABC, dove C è il punto di intersezione delle tangenti all'ellisse condotte da A e B. $\left[\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1; \frac{1}{2}\right]$

89 Un'ellisse con centro nell'origine O ha un vertice di coordinate $(\sqrt{10}; 0)$ ed è tangente alla retta di equazione $y=6x-20$. Qual è l'equazione dell'ellisse? $\left[\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{40}=1\right]$

90 Trova l'equazione dell'ellisse che ha un vertice di coordinate (0; 3) e i fuochi sull'asse x distanti $\frac{18}{5}\sqrt{5}$ dalla retta di equazione $y=3x$. $[x^2+9y^2=81]$

91 Determina l'equazione di un'ellisse sapendo che ha i fuochi di coordinate $(\pm\sqrt{15}; 0)$ e che il quadrato inscritto nell'ellisse avente i lati paralleli agli assi cartesiani ha perimetro 16. $[x^2+4y^2=20]$

4. L'ELLISSE E LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

▶ Teoria a pag. 397

IN PRATICA ▶ Videolezione 22

L'ellisse traslata

92 **ESERCIZIO GUIDA**

Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, determiniamo l'equazione dell'ellisse corrispondente nella traslazione di vettore $\vec{v}(3; -4)$ e rappresentiamo le due ellissi.

Nell'ellisse data vale $a=2$ e $b=3$ e dunque i vertici sono $A_1(-2; 0)$, $A_2(2; 0)$, $B_1(0; -3)$ e $B_2(0; 3)$.
Scriviamo le equazioni della traslazione di vettore $\vec{v}(3; -4)$:

$$\begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y-4 \end{cases}$$

Ricaviamo la x e la y:

$$\begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' + 4 \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ alla x e alla y le espressioni trovate:

$$\frac{(x'-3)^2}{4} + \frac{(y'+4)^2}{9} = 1.$$

Eliminando gli apici, otteniamo l'equazione dell'ellisse cercata:

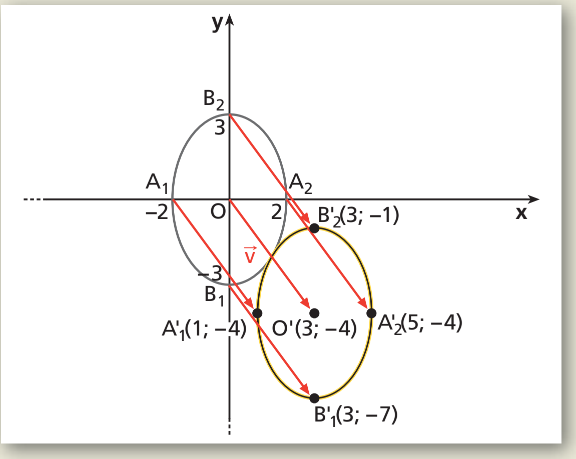
$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1.$$

Sviluppando i calcoli otteniamo l'equazione:

$$\frac{9(x^2-6x+9)+4(y^2+8y+16)}{36} = \frac{36}{36} \quad \rightarrow \quad 9x^2 + 4y^2 - 54x + 32y + 109 = 0.$$

Il centro O' dell'ellisse traslata corrisponde nella traslazione al centro $O(0; 0)$ dell'ellisse data; per trovare O' sostituiamo, nelle equazioni della traslazione, le coordinate di O a x e y:

$$\begin{cases} x' = 0 + 3 \\ y' = 0 - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = -4 \end{cases}$$



Il centro dell'ellisse traslata è $O'(3; -4)$.
Gli assi di simmetria dell'ellisse traslata sono le rette per O' parallele agli assi cartesiani:

$$x = 3 \quad \text{e} \quad y = -4.$$

I vertici dell'ellisse traslata sono i corrispondenti dei vertici dell'ellisse data.
Sostituendo nelle equazioni della traslazione alla x e alla y le coordinate dei vertici otteniamo:

$$A'_1(1; -4), A'_2(5; -4), B'_1(3; -7), B'_2(3; -1).$$

93 Determina l'equazione e disegna l'ellisse ottenuta dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ mediante la traslazione di vettore $\vec{v}(2; -1)$.
$[3x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 4 = 0]$

94 Scrivi l'equazione e disegna l'ellisse ottenuta dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ mediante la traslazione di vettore $\vec{v}(-1; 1)$; scrivi le coordinate dei fuochi dell'ellisse traslata.
$[x^2 + 2y^2 + 2x - 4y + 1 = 0; F_1(0; 1), F_2(-2; 1)]$

95 Una traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$ fa corrispondere l'origine del sistema di riferimento al vertice di ascissa maggiore dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$. Determina le componenti del vettore e l'equazione dell'ellisse traslata.
$[a = 5, b = 0; 4x^2 + 25y^2 - 40x = 0]$

96 Trova l'ellisse corrispondente all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ nella traslazione che fa corrispondere al fuoco di ordinata negativa il punto $F'(3; 0)$.
$[25x^2 + 16y^2 - 150x - 96y - 31 = 0]$

97 Scrivi l'equazione dell'ellisse che ha il centro di simmetria di coordinate $(3; -1)$, l'asse maggiore parallelo all'asse x e lungo 4 e l'asse minore lungo 2.
$\left[\frac{(x-3)^2}{4} + (y+1)^2 = 1\right]$

98 Find the right hand focus of the ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.
Write a new equation which shifts this ellipse so that the right hand focus sits on the origin.

$[F(3;0); 16x^2+25y^2+96x-256=0]$

Il metodo del completamento del quadrato

99 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo le caratteristiche dell'ellisse di equazione $9x^2+25y^2-54x-100y-44=0$ e tracciamone poi il grafico.

Risolviamo l'esercizio in due modi.

1. Metodo del completamento del quadrato
Cerchiamo di scrivere l'equazione data nella forma:

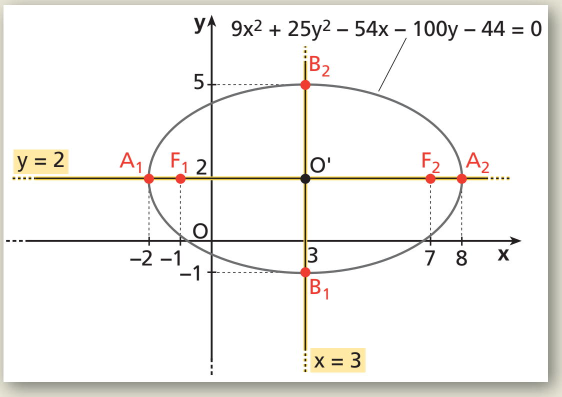
$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1.$$

Riscriviamo l'equazione data raggruppando i termini con x e quelli con y:

$$9x^2-54x+25y^2-100y-44=0$$
$$9(x^2-6x)+25(y^2-4y)-44=0.$$

Per avere il quadrato di un binomio all'interno di ogni parentesi, occorre aggiungere il termine noto. Aggiungiamo a entrambi i membri i termini mancanti:

$$9(x^2-6x+9)+25(y^2-4y+4)-44=81+100$$
$$9(x-3)^2+25(y-2)^2=225.$$



Dividendo entrambi i membri per 225 si ha:

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1.$$

Il centro di simmetria è (3; 2), i semiassi misurano 5 e 3.

2. Considerata l'**equazione generica** $\boldsymbol{a'x^2+b'y^2+c'x+d'y+e=0}$, per l'ellisse data abbiamo:

$$a'=9,\ b'=25,\ c'=-54,\ d'=-100,\ e'=-44.$$

Troviamo le coordinate del centro di simmetria O′ dell'ellisse:

$$x_{O'}=-\frac{c'}{2a'}=-\frac{-54}{2\cdot 9}=3; \qquad y_{O'}=-\frac{d'}{2b'}=-\frac{-100}{2\cdot 25}=2.$$

Pertanto è O′(3; 2).
Gli assi di simmetria sono perciò:

$$x=3, \qquad y=2.$$

Calcoliamo le coordinate dei vertici intersecando gli assi di simmetria con l'ellisse:

$$\begin{cases}9x^2+25y^2-54x-100y-44=0\\ y=2\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x_1=-2\\ y=2\end{cases} \vee \begin{cases}x_2=8\\ y=2\end{cases}$$

Due vertici sono i punti $A_1(-2;2)$ e $A_2(8;2)$.

$$\begin{cases} 9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \\ x = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} y_2 = 5 \\ x = 3 \end{cases}$$

Gli altri due vertici sono i punti $B_1(3; -1)$ e $B_2(3; 5)$.

Essendo $a = 5$ e $b = 3$:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4.$$

Quindi i fuochi sono i punti $F_1(-1; 2)$ e $F_2(7; 2)$.

Determina le caratteristiche delle ellissi aventi le seguenti equazioni e rappresentale.

100 $9x^2 + y^2 = 6y$

101 $4x^2 + y^2 + 8x = 0$

102 $25x^2 + 9y^2 - 100x - 18y - 116 = 0$

103 $x^2 + 4y^2 + 2x + 8y + 4 = 0$

104 $9x^2 + y^2 - 18x + 4y + 12 = 0$

105 $2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2 = 0$

106 $4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y + 12 = 0$

107 $4x^2 + y^2 - 4x - 35 = 0$

108 $x^2 + 9y^2 - 6x = 0$

109 $9x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 9 = 0$

110 $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$

111 $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$

112 Verifica che l'equazione $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$ non corrisponde ad alcun punto del piano cartesiano.

113 Verifica che l'equazione $4x^2 + y^2 + 4x + 6y + 10 = 0$ rappresenta un'ellisse degenere nel suo centro.

114 Rappresenta il luogo geometrico dei punti del piano per i quali la somma delle distanze dai punti $F_1(-2; 2)$ e $F_2(4; 2)$ è uguale a 10. $[16x^2 + 25y^2 - 32x - 100y - 284 = 0]$

115 Determina l'equazione dell'ellisse avente centro di simmetria $O'(-1; 3)$, gli assi paralleli agli assi cartesiani e due vertici nei punti $A(-3; 3)$ e $B(-1; 4)$. $[x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0]$

116 Scrivi l'equazione dell'ellisse di eccentricità $e = \frac{1}{2}$ avente centro di simmetria $O'(-2; 2)$ e i fuochi sulla retta di equazione $x = -2$, distanti fra loro 4. $[4x^2 + 3y^2 + 16x - 12y - 20 = 0]$

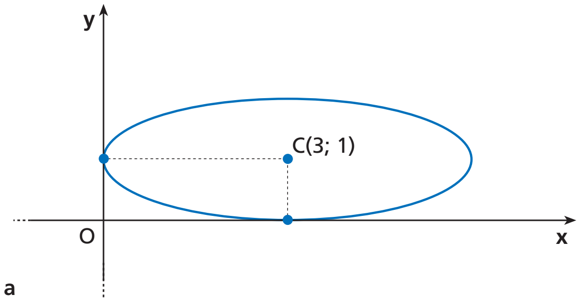
117 Trova l'equazione dell'ellisse con i fuochi $F_1(0; -1)$ e $F_2(2; -1)$ e semiasse maggiore di lunghezza $a = \sqrt{15}$. $[14x^2 + 15y^2 - 28x + 30y - 181 = 0]$

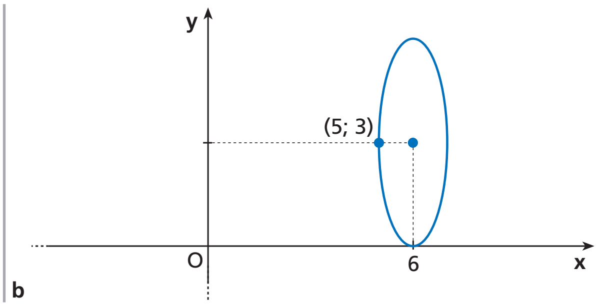
118 Qual è l'equazione dell'ellisse con i fuochi $F_1(-2; -2)$ e $F_2(-2; 2)$ e semiasse minore di lunghezza $a = 1$? $[5x^2 + y^2 + 20x + 15 = 0]$

119 Trova per quali valori di k l'equazione $x^2 + 4y^2 - 6x + 2y + k = 0$ rappresenta un'ellisse non degenere. $\left[k < \frac{37}{4}\right]$

120 Trova per quali valori di k l'equazione $x^2 + 2y^2 + 3x - y - 2k = 0$ rappresenta un'ellisse non degenere. $\left[k > -\frac{19}{16}\right]$

121 Trova le equazioni delle ellissi dei seguenti grafici, utilizzando i dati delle figure.





$[x^2 + 9y^2 - 6x - 18y + 9 = 0;\ 9x^2 + y^2 - 108x - 6y + 324 = 0]$

L'ellisse come dilatazione di una circonferenza

122 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo i parametri $a, b \in \mathbb{R}^+$ della dilatazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$

affinché la circonferenza con centro nell'origine e raggio 1 sia trasformata nell'ellisse di equazione:

$$4x^2 + 9y^2 = 1.$$

Ricaviamo la x e la y dalle equazioni della dilatazione:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'}{a} \\ y = \dfrac{y'}{b} \end{cases}$$

L'equazione della circonferenza è $x^2 + y^2 = 1$. Sostituiamo in tale equazione alla x e alla y le espressioni trovate:

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Affinché l'equazione trovata sia l'equazione dell'ellisse deve valere:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} = 4 \\ \dfrac{1}{b^2} = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{4} \\ b^2 = \dfrac{1}{9} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \pm\dfrac{1}{2} \\ b = \pm\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Poiché si richiede che a e b siano positivi, i valori cercati sono $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = \dfrac{1}{3}$.

123 Determina i parametri a e b della dilatazione di equazioni $\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}^+$, affinché la circonferenza con centro nell'origine e raggio 1 sia trasformata nell'ellisse di equazione $4x^2 + 16y^2 = 16$. $[a = 2; b = 1]$

124 Determina i parametri a e b della dilatazione di equazioni $\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}^+$, affinché la circonferenza con centro nell'origine e raggio 1 sia trasformata nell'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{36} = 1$. $[a = 8; b = 6]$

125 Scrivi le equazioni di una dilatazione che trasforma la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 16$ nell'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. $\left[\begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{y}{2} \end{cases}\right]$

Bergamini, Trifone, Barozzi MATEMATICA.BLU - Vol. 3 © Zanichelli 2012 con Maths in English

126 Determina le equazioni di una dilatazione che trasforma l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{81}=1$ nella circonferenza di equazione $x^2+y^2=9$.
$\left[\begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{y}{3} \end{cases}\right]$

127 Dopo aver rappresentato l'ellisse di equazione $9x^2+4y^2-18x-8y-23=0$, trova l'equazione della curva corrispondente nella trasformazione di equazioni $\begin{cases} x'=3x \\ y'=2y \end{cases}$ e rappresenta tale curva.
$[x^2+y^2-6x-4y-23=0]$

L'area racchiusa da un'ellisse

128 Calcola l'area della parte di piano racchiusa dall'ellisse di equazione $3x^2+4y^2=4$. $\left[\frac{2}{3}\pi\sqrt{3}\right]$

129 Un'ellisse con i fuochi sull'asse x ha eccentricità $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e passa per il punto $(2; 3)$. Trova l'area racchiusa dall'ellisse. $[20\pi]$

130 Una circonferenza ha equazione $x^2+y^2=9$ e un'ellisse con centro nell'origine ha come asse maggiore il diametro della circonferenza che si trova sull'asse x e un fuoco di ascissa $\sqrt{5}$. Trova l'area delimitata dalle due curve contenuta nel semipiano con $y \geq 0$.
$\left[\frac{3}{2}\pi\right]$

La rappresentazione grafica di particolari funzioni

131 **ESERCIZIO GUIDA**

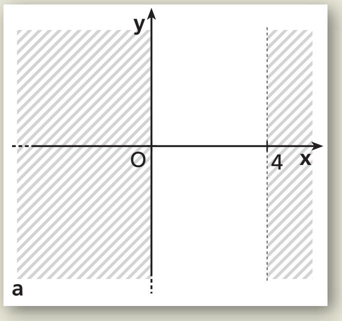
Dopo averne determinato il dominio, rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y=2\sqrt{4x-x^2}+1.$$

Per determinare il dominio poniamo il radicando maggiore o uguale a 0, ossia:

$$4x-x^2 \geq 0 \rightarrow 0 \leq x \leq 4.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme $D=\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 4\}$. Tracciamo nel piano cartesiano la retta $x=4$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ascissa minore di 0 o maggiore di 4 (figura *a*).



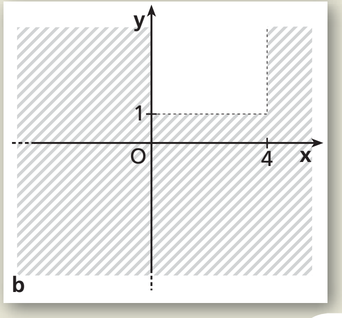
Per rappresentare la funzione isoliamo la radice, ossia:

$$y-1=2\sqrt{4x-x^2} \rightarrow \frac{y-1}{2}=\sqrt{4x-x^2}.$$

Questa equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \frac{y-1}{2} \geq 0 \\ \frac{(y-1)^2}{4}=4x-x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \frac{(y-1)^2}{4}+(x^2-4x+4-4)=0 \end{cases} \rightarrow$$

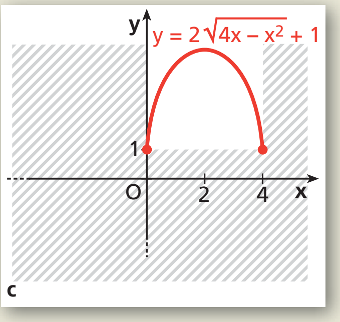
$$\rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \frac{(y-1)^2}{4}+(x-2)^2=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \frac{(y-1)^2}{16}+\frac{(x-2)^2}{4}=1 \end{cases}$$



Nella seconda equazione abbiamo aggiunto $+4$ (e quindi anche -4) per ottenere un quadrato di binomio. L'equazione finale ottenuta è così quella di un'ellisse traslata, ricavata traslando l'ellisse $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$ del vettore $\vec{v}(2;1)$.

Tracciamo nel piano cartesiano la retta $y=1$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ordinata minore di 1 (figura b).

L'equazione $\frac{(y-1)^2}{16}+\frac{(x-2)^2}{4}=1$ è l'equazione di un'ellisse di centro $C(2;1)$, asse maggiore di equazione $x=2$, con $b=4$, e asse minore di equazione $y=1$, con $a=2$. Tracciamo ora il ramo di ellisse contenuto nella parte di piano che non abbiamo oscurato (figura c), ottenendo così il grafico cercato.



c

Dopo averne determinato il dominio, rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

132 $y=\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+8x}$

133 $y=3\sqrt{1-x^2}+1$

134 $y=-5\sqrt{1-(x-1)^2}-2$

135 $y=\sqrt{-x^2+4}$

136 $y=-\frac{1}{2}\sqrt{4x-x^2}$

137 $y=\frac{3}{2}\sqrt{-x^2+\frac{4}{9}}$

138 $y=-\frac{2}{3}\sqrt{-x^2+x}+1$

139 $y=3+\frac{4}{5}\sqrt{9-x^2}$

140 $y=\sqrt{4-9x^2}$

141 $y=-\sqrt{1-16x^2}$

142 $y=\sqrt{8x-4x^2}$

143 $y=-2\sqrt{6x-x^2-8}$

144 $y=\sqrt{32x-4x^2}$

145 $y=-3\sqrt{1-x^2}$

146 $y=2-\sqrt{9-9x^2}$

147 $y=-1+\sqrt{16x-4x^2}$

148 $y=\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$

149 $y=-\frac{4}{3}\sqrt{9-x^2}$

150 $y=\frac{1}{2}\sqrt{-4x-x^2}$

151 $y=-1+2\sqrt{4x-x^2-3}$

Traccia il grafico delle curve aventi le seguenti equazioni.

152 $x=-3\sqrt{9-y^2}$

153 $x=-2-\frac{1}{3}\sqrt{4-y^2}$

154 $x=2\sqrt{1-y^2}$

155 $x=4+\sqrt{16y-4y^2}$

156 $x=2\sqrt{-4y-3-y^2}$

157 $x=\frac{2}{3}\sqrt{6y-y^2-5}$

158 $x=-\sqrt{8y-4y^2}$

159 $x=-\sqrt{16-16y^2}$

160 $4x^2+9y^2-24|x|+18y+9=0$

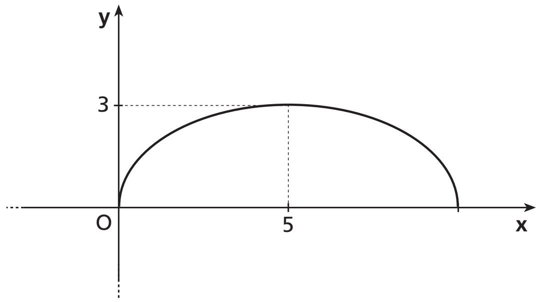
161 $x^2+16y^2-6x-32|y|+9=0$

162 $x^2+9y^2+2|x|-36|y|+28=0$

163 $4x^2+y^2-8|x|+6|y|-3=0$

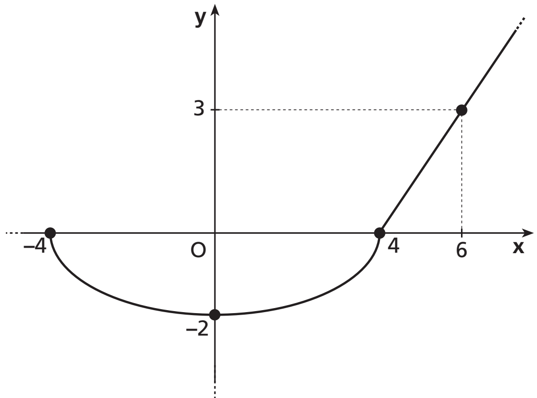
Trova le equazioni dei seguenti grafici utilizzando i dati delle figure.

164



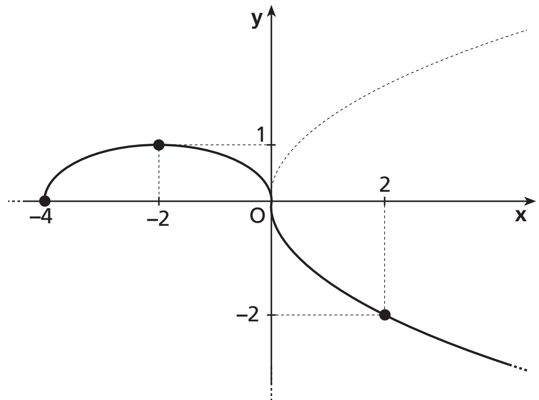
$\left[y = \frac{3}{5}\sqrt{10x - x^2}\right]$

165



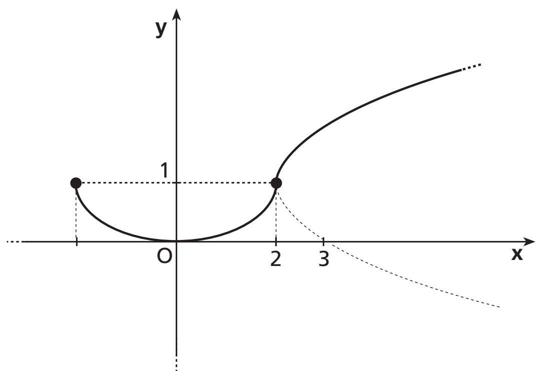
$\left[y = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} & \text{se} -4 \le x \le 4 \\ \frac{3}{2}x - 6 & \text{se } x > 4 \end{cases}\right]$

166



$\left[y = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{-x^2 - 4x} & \text{se} -4 \le x \le 0 \\ -\sqrt{2x} & \text{se } x > 0 \end{cases}\right]$

167



$\left[y = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} & \text{se} -2 \le x \le 2 \\ 1 + \sqrt{x - 2} & \text{se } x > 2 \end{cases}\right]$

La risoluzione grafica di equazioni e disequazioni irrazionali

Utilizzando il metodo già visto nell'esercizio guida 111 del capitolo 4, risolvi graficamente le seguenti equazioni e disequazioni irrazionali.

168 $2\sqrt{1 - x^2} + 2 > 2x + 4$ $[-1 < x < 0]$

169 $\sqrt{-(x+3)^2+4} > x+3$ $[-5 \le x < \alpha;\ \alpha \simeq -1{,}6]$

170 $\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \le -2$ $[S = \emptyset]$

171 $\sqrt{-x^2 + 1} - 3 = -2x - 1$ $\left[x_1 = \frac{3}{5};\ x_2 = 1\right]$

172 $-2\sqrt{-x^2 + 4x} \le -x+2$ $[0 \le x \le \alpha;\ \alpha \simeq 3{,}8]$

173 $-\sqrt{6x - x^2} - 2 > -\frac{5}{3}x$ $[3 < x \le 6]$

174 $\sqrt{-25x^2 + 50x} = 3x$ $[x_1 \simeq 1{,}4;\ x_2 = 0]$

175 $-\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+4} \le -\frac{1}{4}x$ $[-2 \le x \le \alpha;\ \alpha \simeq 1{,}8]$

176 $\frac{1}{3}\sqrt{-x^2+2x+1} \ge \frac{x}{9} + \frac{1}{3}$ $[0 \le x \le \alpha;\ \alpha \simeq 1{,}2]$

177 $5\sqrt{-x^2+6x}-\sqrt{5}\,x \geq 0$ $[0 \leq x \leq 5]$

178 $1-2\sqrt{2x-x^2} < -x$ $\left[\frac{1}{5} < x < 1\right]$

179 $\sqrt{\frac{16-x^2}{15}} \geq 3x+4$ $[-4 \leq x \leq -1]$

180 $1-\frac{1}{4}\sqrt{-x^2-8x} \leq \sqrt{x+4}$ $[-4 \leq x \leq 0]$

Risolvi graficamente le seguenti disequazioni e i seguenti sistemi.

181 $x^2+4y^2 \leq 4$

182 $9x^2+16y^2-144 \leq 0$

183 $\frac{x^2}{4}+y^2 \geq 1$

184 $\begin{cases} 9x^2+25y^2-225 \leq 0 \\ y-x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

185 $\begin{cases} x^2+4y^2 \leq 36 \\ 4x^2+y^2-4 \geq 0 \end{cases}$

186 Trova l'area della parte di piano definita dal sistema $\begin{cases} y \leq \frac{1}{3}\sqrt{9-x^2} \\ y \geq |x|-3 \end{cases}$. $\left[\frac{3}{2}\pi+9\right]$

I sistemi parametrici

Studia i seguenti sistemi parametrici con metodo grafico in modo analogo a quello esaminato nei capitoli 4 e 5.

187 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \\ y-kx-2k=0 \\ -2 \leq x \leq 2, \quad y \geq 0 \end{cases}$ $[2 \text{ sol. per } k \geq 0]$

188 $\begin{cases} y=\frac{1}{4}\sqrt{16-x^2} \\ y=kx+k-1 \\ 0 \leq x < 4 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } \frac{1}{5} < k \leq 2\right]$

189 $\begin{cases} \frac{x^2}{9}+y^2=1 \\ y=mx-5m+1 \\ 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } 0 \leq m \leq \frac{1}{2}\right]$

190 $\begin{cases} y=\frac{4}{3}\sqrt{4-x^2} \\ y=mx-2m+\frac{8}{3} \\ -2 < x < 2 \end{cases}$ $\left[2 \text{ sol. per } 0 \leq m < \frac{2}{3}, 1 \text{ sol. per } m \geq \frac{2}{3}\right]$

191 $\begin{cases} y=1+\frac{1}{4}\sqrt{8x-x^2} \\ mx-y+2+m=0 \\ 0 < x < 8 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -1 < m \leq -\frac{1}{9}, 2 \text{ sol. per } -\frac{1}{9} < m \leq 0\right]$

192 $\begin{cases} 9x^2+y^2-18x=0 \\ y=kx-3k \\ 1 \leq x \leq 2, \quad y \leq 0 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } 0 \leq k < \frac{3}{2}, 2 \text{ sol. per } \frac{3}{2} \leq k \leq \sqrt{3}\right]$

193 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ 2x + 3y = k \\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } 3 \le k < 4,\ 2 \text{ sol. per } 4 \le k \le 5]$

194 $\begin{cases} 4x^2 + 3y^2 - 16x - 18y + 31 = 0 \\ y = kx + 3 \\ 2 - \sqrt{3} \le x \le 2,\ 1 \le y \le 4 \end{cases}$ $[2 \text{ sol. per } -2 \le k \le -1 \vee k = 2, 1 \text{ sol. per } -1 < k < 2]$

195 $\begin{cases} y = 2\sqrt{9 - x^2} \\ (2k-1)x - y(k+2) + 3 - k = 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } k \le -\frac{9}{7} \vee k \ge 0\right]$

196 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 9 \\ ky + x + 3 - k = 0 \\ x \le 0,\ \ y \ge 0 \end{cases}$ $\left[2 \text{ sol. per } -6 \le k \le -\frac{24}{5} \vee k = 0, 1 \text{ sol. per } k < -6 \vee k > 0\right]$

ESERCIZI VARI L'ellisse

TEST

197 L'equazione dell'ellisse che ha un vertice in $(0; 5)$ e un fuoco in $(0; 4)$ è:

A $25x^2 - 16y^2 = 400$.

D $25x^2 - 9y^2 = 225$.

B $25x^2 + 9y^2 = 225$.

E $16x^2 - 9y^2 = 144$.

C $9x^2 + 25y^2 = 225$.

(*Università di Bergamo, Facoltà di Ingegneria, Corso propedeutico di Matematica*)

198 L'equazione $2(x-1)^2 + 2(y+2)^2 = k^2$ rappresenta:

A un'ellisse per ogni k.

B una circonferenza per ogni k.

C un'ellisse per $k \ne \sqrt{2}$ e una circonferenza per $k = \sqrt{2}$.

D una circonferenza per $k \ne 0$ e un punto per $k = 0$.

(*Università di Genova, Corso di laurea in Matematica, Test di autovalutazione*)

199 The range of the conic defined by $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$ is:

A $|y| < 4$.

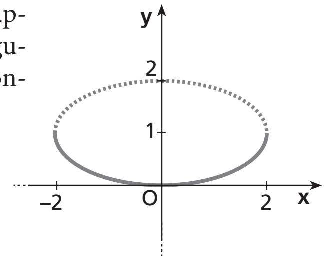
B $|y| \le 4$.

C $|y| < 5$.

D $|y| \le 5$.

(CAN *Barry Mabillard Learning Centre,* Practice Exam)

200 La funzione rappresentata in figura con la linea continua è:



A $y = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} - 1$.

B $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4} + 1$.

C $y = -2\sqrt{1 - x^2} + 1$.

D $y = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} + 1$.

E $y = 2\sqrt{1 - x^2} + 1$.

201 **ASSOCIA** i valori del parametro k, data l'ellisse di equazione $(k-2)x^2+(k+2)y^2=k^2-4$, con la corrispondente proprietà.

1) Per $k>2$.
2) Per nessun valore di k.
3) Per un valore di k superiore a 13.
4) Per un valore di k compreso tra 2 e 8.

a) L'ellisse ha i fuochi appartenenti all'asse x.
b) L'ellisse ha l'asse maggiore lungo 6.
c) L'ellisse ha eccentricità $\frac{1}{2}$.
d) L'ellisse ha i fuochi appartenenti all'asse y.

202 Riconoscere che la curva di equazione $4(x-1)^2+9(y+2)^2=36$ è un'ellisse. Trovare le coordinate del centro e le equazioni degli assi. Scrivere le equazioni della traslazione per cui l'equazione della curva assume forma canonica.

(*Politecnico di Torino, II Facoltà di Architettura*)

$[(1;-2);\ x=1,\ y=-2;\ x'=x-1,\ y'=y+2]$

203 Sia E un'ellisse nel piano e sia A un punto fissato all'interno di E. Si supponga che due rette perpendicolari passanti per A intersechino E rispettivamente nei punti P, P' e Q, Q'. Dimostra che

$$\frac{1}{\overline{AP}\cdot\overline{AP'}}+\frac{1}{\overline{AQ}\cdot\overline{AQ'}}$$

è indipendente dalla scelta delle rette. (USA *Iowa Collegiate Mathematics Competition*, 1995)

204 John si trova all'interno di un'ellisse con pareti riflettenti la cui equazione è $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con $a>b>0$. Egli si trova nel punto $(3;0)$ e punta un raggio laser in direzione y. La luce si riflette sull'ellisse e procede verso Brown, coprendo una distanza di 10 unità prima di raggiungerlo. John quindi comincia a ruotare su se stesso: ovunque punti il laser, la luce si riflette sulle pareti e colpisce Brown. Qual è la coppia ordinata $(a;b)$? (USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*, 2003)

$[(5;4)]$

205 Data la circonferenza di equazione $25x^2+25y^2=64$, determina:
a) l'equazione della retta t, tangente alla circonferenza nel suo punto del terzo quadrante di ascissa $-\frac{24}{25}$;
b) le intersezioni A e B di t con gli assi cartesiani;
c) l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine passante per A e B.

$\left[\text{a) } 3x+4y+8=0;\ \text{b) } (0;-2), \left(-\frac{8}{3};0\right);\ \text{c) } 9x^2+16y^2=64\right]$

206 Data l'equazione $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{13-k}=1$, stabilisci per quali valori di k:
a) l'equazione rappresenta un'ellisse o, come caso particolare, una circonferenza;
b) i fuochi sono sull'asse y;
c) un fuoco ha coordinate $(-1;0)$.

$[\text{a) } k<13, k=9;\ \text{b) } k<9;\ \text{c) } k=10]$

207 Scrivi l'equazione della circonferenza con centro nell'origine e raggio 3 e quella dell'ellisse, riferita ai propri assi, passante per $A(5;0)$ e $B\left(-4;\frac{9}{5}\right)$. Determina poi i punti di intersezione delle due curve e trova la lunghezza della corda che la retta $x=3$ individua sull'ellisse.

$\left[x^2+y^2=9;\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1;\ (0;3), (0;-3);\ \frac{24}{5}\right]$

208 Scrivi l'equazione dell'ellisse, riferita al centro e agli assi, passante per i punti $A\left(3;\frac{16}{5}\right)$ e $B\left(-4;\frac{12}{5}\right)$, e determina le coordinate dei fuochi e l'eccentricità. Scrivi poi l'equazione della parabola con la concavità rivolta verso l'alto, passante per i fuochi dell'ellisse e avente il vertice nel punto di intersezione dell'ellisse con l'asse y.

$\left[\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1;\ F(\pm3;0);\ e=\frac{3}{5};\ y=\frac{4}{9}x^2-4\right]$

209 L'ellisse γ, riferita ai propri assi e con i fuochi sull'asse x, ha semidistanza focale $2\sqrt{2}$ ed eccentricità $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Indicati con A e B i vertici dell'asse maggiore dell'ellisse, sia $ABCD$ un trapezio isoscele inscritto in γ, con C e D posti nel semipiano delle ordinate positive. Stabilito un conveniente sistema di riferimento cartesiano monometrico, trova l'equazione dell'ellisse e determina l'area e il perimetro del trapezio, sapendo che la base minore è i $\frac{2}{3}$ della maggiore.

$\left[x^2 + 9y^2 = 9; \frac{5}{3}\sqrt{5}; \frac{2\sqrt{14} + 30}{3}\right]$

210 L'asse maggiore di un'ellisse sia AB e O il suo centro, e sia F uno dei suoi fuochi. P è un punto sull'ellisse e CD una corda passante per O tale che CD è parallela alla tangente all'ellisse in P. La retta PF e la retta CD si incontrano in Q. Ricava il rapporto tra le lunghezze di PQ e OA. (*Taiwan National Olympiad*, 2005)

$\left[\frac{\overline{PQ}}{\overline{OA}} = 1\right]$

211 Un n-agono regolare è inscritto in un'ellisse che non è una circonferenza. Quali sono i possibili valori di n? (CAN *University of Waterloo, Senior Math Circles,* 2009)

[3 e 4]

212 Scrivi l'equazione dell'ellisse avente due vertici nei punti in cui la circonferenza di equazione $4x^2 + 4y^2 = 9$ interseca l'asse y e passante per il punto in cui la retta di equazione $2x + 4y - 5 = 0$ interseca l'asse x. Rappresenta le due curve e considera la retta di equazione $y = k$ che stacca sulla circonferenza una corda CD e sull'ellisse una corda EF. Verifica che il rapporto $\frac{\overline{EF}}{\overline{CD}}$ è costante al variare di k. Determina infine per quale valore di k la corda CD è lunga come il lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza.

$\left[36x^2 + 100y^2 = 225; k = \pm\frac{3}{4}\right]$

213 Un'ellisse con centro nell'origine e con i fuochi sull'asse x ha eccentricità $\frac{2}{\sqrt{7}}$ e passa per il punto $A\left(-\frac{4}{3}; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$. Determina la sua equazione e calcola l'area del triangolo inscritto nell'ellisse, sapendo che due vertici del triangolo hanno ascissa $\frac{2}{3}$ e il terzo è il vertice dell'ellisse sul semiasse negativo delle x.

$\left[36x^2 + 84y^2 = 169; \frac{17}{12}\sqrt{\frac{51}{7}}\right]$

214 Scrivi per quali valori di k l'equazione $\frac{x^2}{k-6} + \frac{y^2}{2} = 1$:

a) rappresenta un'ellisse, precisando per quali valori si ha una circonferenza;
b) rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse x.
c) Disegna l'ellisse che si ottiene per $k = 14$ e, scritta l'equazione della tangente t nel suo punto P di ordinata 1 del primo quadrante, trova quali rette parallele a t staccano sull'ellisse una corda lunga $\sqrt{5}$.

$\left[\text{a) } k > 6, k = 8; \text{ b) } k > 8; \text{ c) } t\text{: } y = -\frac{x}{2} + 2; y = -\frac{x}{2} \pm \sqrt{3}\right]$

215 a) Determina l'equazione della circonferenza che ha centro nell'origine e raggio uguale a $2\sqrt{5}$ e quella dell'ellisse riferita ai propri assi che ha un fuoco nel punto $F(3; 0)$ e che passa per il punto $P\left(2; \frac{4}{5}\sqrt{21}\right)$.
b) Trova le coordinate dei punti di intersezione tra le due curve.
c) Calcola l'area del quadrilatero formato dai punti trovati.

$\left[\text{a) } x^2 + y^2 = 20; 16x^2 + 25y^2 = 400; \text{ b) }\left(\pm\frac{10}{3}; \pm\frac{4\sqrt{5}}{3}\right); \text{ c) } \frac{160}{9}\sqrt{5}\right]$

216 Trova l'equazione dell'ellisse riferita ai propri assi che ha i fuochi sull'asse x distanti 8 e che passa per il punto $P\left(3; -\frac{12}{5}\right)$. Verifica che il punto $V(5; 1)$ è esterno all'ellisse e determina le equazioni delle due tangenti all'ellisse condotte da V. Trova l'equazione della retta passante per i due punti di tangenza A e B e calcola l'area del triangolo PAB.

$[9x^2 + 25y^2 - 225 = 0; 4x + 5y - 25 = 0, x = 5; 9x + 5y - 45 = 0; \text{area} = 3]$

217 a) Determina l'equazione dell'ellisse riferita ai propri assi, con i fuochi sull'asse x, in cui il semiasse maggiore è uguale al doppio del semiasse minore ed è anche uguale al minore aumentato di 2.
b) Considera il fascio improprio di rette aventi coefficiente angolare 2 e determina in questo fascio la retta p tangente all'ellisse nel secondo quadrante e le coordinate del punto P di tangenza.
c) Nel fascio determina la retta q che stacca sull'ellisse una corda AB di lunghezza $\frac{8\sqrt{85}}{17}$ e calcola l'area del triangolo ABP.

$\left[\text{a) } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1; \text{ b) } p\text{: } y = 2x + 2\sqrt{17}, P\left(-\frac{16}{\sqrt{17}}; \frac{2}{\sqrt{17}}\right); \text{ c) } q\text{: } y = 2x; 8\right]$

218 Considera l'ellisse di equazione $k^2x^2 + y^2 = 4$, con k numero reale positivo, e studiane le caratteristiche al variare di k.
a) Determina per quale valore di k l'ellisse è tangente alla retta t: $3x - 2y + 6 = 0$ e calcola le coordinate del punto P di tangenza.
b) Trova l'equazione della normale n all'ellisse in P e le coordinate del punto Q in cui n incontra l'asse y.
c) Detto F il fuoco dell'ellisse posto nel semipiano delle ordinate positive, calcola l'area del triangolo PQF.

$\left[\text{a) } \frac{3}{\sqrt{5}}; P\left(-\frac{10}{9}; \frac{4}{3}\right); \text{ b) } 18x + 27y - 16 = 0, Q\left(0; \frac{16}{27}\right); \text{ c) } \frac{100}{243}\right]$

219 Rappresenta l'ellisse di equazione $9x^2 + 4y^2 + 36x - 16y + 16 = 0$ e determinane l'eccentricità, le coordinate dei fuochi e l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa -2 e di minore ordinata.

$\left[e = \frac{\sqrt{5}}{3}; F_{1,2}(-2; 2 \pm \sqrt{5}); y = -1\right]$

220 Trova l'equazione della circonferenza di centro $C(4; 0)$ e passante per il punto $P(4; 5)$. Indicati con F_1 e F_2 i punti di intersezione della circonferenza con l'asse delle ordinate, scrivi l'equazione della retta t tangente alla circonferenza in F_2, punto di intersezione di ordinata maggiore. Indicato con A il punto di intersezione della retta t con l'asse delle x, trova l'equazione dell'ellisse passante per A e con i fuochi in F_1 e F_2.

$\left[x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0; F_{1,2}(0; \pm 3); y = \frac{4}{3}x + 3; \frac{16x^2}{81} + \frac{16y^2}{225} = 1\right]$

221 Scrivi l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse delle ordinate, con un vertice in $A(3; 0)$ ed eccentricità $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Successivamente calcola l'area dei rettangoli inscritti nell'ellisse aventi perimetro che misura 20.

$\left[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1; 16, \frac{224}{9}\right]$

222 Scrivi l'equazione dell'ellisse riferita al centro e agli assi che ha un vertice in $B(0; -1)$ ed è tangente alla retta $4x + 15y - 25 = 0$ nel punto T. Determina poi sull'arco di ellisse che si trova nel terzo quadrante un punto P in modo che l'area del triangolo PBT sia uguale a 4.

$\left[x^2 + 25y^2 = 25; T\left(4; \frac{3}{5}\right); P\left(-4; -\frac{3}{5}\right)\right]$

223 Nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, indicati con C il vertice sul semiasse positivo delle y e con F_1 e F_2 i fuochi, considera le rette CF_1 e CF_2 che intersecano la curva in A e B. Trova il perimetro del triangolo ABC.

$\left[\frac{400}{17}\right]$

224 Considera la circonferenza γ di equazione $x^2 + y^2 = 16$ e l'ellisse γ' di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Dimostra che una retta parallela all'asse x, intersecando γ e γ' in quattro punti distinti, determina due corde, PQ su γ e $P'Q'$ su γ', tali che $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{5}{4}$.
Generalizza la proprietà con le equazioni $x^2 + y^2 = b^2$ e $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dimostrando che $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{a}{b}$.

225 Nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ indica con P un suo punto, con A e B i vertici sull'asse x e con F_1 e F_2 i fuochi. Dimostra che, al variare di P, è costante $\frac{\overline{AP}^2 - \overline{PB}^2}{\overline{F_1P}^2 - \overline{F_2P}^2}$, calcolando il valore di tale rapporto.

Generalizza poi la proprietà per un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e determina il valore del rapporto.

$\left[\frac{4\sqrt{7}}{7}; \frac{a}{c}\right]$

226 Sono date la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$ e l'ellisse di equazione $3x^2 + 4y^2 = 12$. Traccia la retta di equazione $x = k$ che, nel primo quadrante, interseca in A l'ellisse e in B la circonferenza. Verifica che le tangenti condotte da A e da B alle due curve si intersecano, al variare di k, in un punto P dell'asse x. Determina poi per quale valore di k l'area del triangolo OAP è 3.

$\left[P\left(\frac{4}{k}; 0\right); 1\right]$

227 Considera l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 12$.

a) Determina la tangente t nel suo punto P del primo quadrante di ascissa 3.
b) Conduci la perpendicolare n alla retta t in P e dimostra che è la bisettrice dell'angolo $F_1\widehat{P}F_2$, essendo F_1 e F_2 i fuochi dell'ellisse.

[a) $3x + 2\sqrt{3}\,y - 12 = 0$; b) $4\sqrt{3}\,x - 6y - 9\sqrt{3} = 0$]

228 a) Trova l'equazione dell'ellisse, con centro nell'origine e i fuochi sull'asse x, che ha eccentricità $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ e un vertice in $(5; 0)$.
b) Considera il quadrato circoscritto all'ellisse con le diagonali sugli assi cartesiani e trova l'area del rettangolo che ha per vertici i punti di contatto dei lati del quadrato con l'ellisse.
c) Generalizza il risultato precedente con l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dimostrando che l'area del rettangolo è $\frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$.

[a) $x^2 + 4y^2 = 25$; b) 20]

229 Scrivi l'equazione di un'ellisse con centro nell'origine che ha un vertice di coordinate $(4; 0)$, sapendo inoltre che la retta di equazione $y = -2$ stacca sull'ellisse una corda lunga $\frac{8}{3}\sqrt{6}$. Verifica che il triangolo che ha per vertici i fuochi e uno dei due vertici sull'asse y è equilatero.

$\left[\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1\right]$

230 Determina per quale valore di k l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 4k^2$ racchiude una regione di area 8π. Rappresenta l'ellisse e determina le tangenti parallele alle bisettrici dei quadranti. Calcola l'area del quadrilatero che esse formano intersecandosi.

[± 2; $y = \pm x \pm 2\sqrt{5}$; 40]

231 a) Trova l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine e fuochi sull'asse x di eccentricità $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e passante per il punto $\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
b) Scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, tangente alla retta di equazione $y = -2x + 5$ nel punto di ascissa 1 e con il vertice sull'asse y.
c) Determina l'area delimitata dall'arco di parabola con $y \geq 0$ e dalla semiellisse con $y \leq 0$.

$\left[\text{a) } x^2 + 4y^2 = 4; \text{ b) } y = -x^2 + 4; \text{ c) } \frac{32}{3} + \pi\right]$

232 Scrivi l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine che ha un vertice in $(-3; 0)$ e passante per il punto $\left(-\frac{1}{3}; 4\right)$, l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y di vertice $V(0; 1)$ e passante per $(-4; 9)$ e determina i loro punti di intersezione A e B, con B nel primo quadrante.
Nel punto B traccia le tangenti alle due curve e su di esse determina i punti P e Q in modo che $PQ \parallel AB$ e $\overline{PQ} = \frac{20}{3}$.
$\left[\frac{x^2}{9} + \frac{5}{81}y^2 = 1,\ y = \frac{1}{2}x^2 + 1,\ A(-2; 3), B(2; 3); P_1\left(-\frac{1}{2}; -2\right), Q_1\left(\frac{37}{6}; -2\right), P_2\left(\frac{9}{2}; 8\right), Q_2\left(-\frac{13}{6}; 8\right)\right]$

233 Scrivi l'equazione della circonferenza tangente nel punto T di ascissa -2 appartenente alla retta t di equazione $2x - 3y + 22 = 0$ e avente centro C appartenente alla retta di equazione $y = x + 3$. Detti F_1 e F_2 i punti di intersezione della circonferenza con l'asse x, scrivi l'equazione dell'ellisse passante per C e avente i fuochi in F_1 e F_2.
$\left[x^2 + y^2 - 6y - 4 = 0; \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1\right]$

234 Determina l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse delle ascisse, passante per il punto $P\left(4; \frac{9}{5}\right)$ ed eccentricità $e = \frac{4}{5}$. Determina l'equazione delle rette parallele all'asse x che staccano sull'ellisse corde di lunghezza $\frac{5}{3}\sqrt{3}$.
$\left[\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1; y = \pm\frac{\sqrt{33}}{2}\right]$

235 Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, scrivi le equazioni delle rette passanti per il vertice di ascissa negativa e che distano 3 dal centro dell'ellisse. Detti P e P' i punti di intersezione delle rette trovate con le loro perpendicolari passanti per il centro dell'ellisse, calcola l'area del quadrilatero $VP'OP$.
$\left[y = \pm\frac{3}{4}(x + 5); 12\right]$

236 Data l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 25$, determina centro, fuochi e vertici. Trova la misura della corda EF che l'ellisse stacca sulla retta di equazione $x - 4y - 5 = 0$.
Determina poi un punto P sull'arco di ellisse che si trova nel primo quadrante in modo che l'area del triangolo PEF sia 10.
$\left[C(0; 0); F_{1,2}\left(\pm\frac{5\sqrt{3}}{2}; 0\right); V_{1,2}\left(0; \pm\frac{5}{2}\right), V_{3,4}(\pm 5; 0); 2\sqrt{17}; P(3; 2)\right]$

237 Determina l'equazione dell'ellisse che ha i fuochi sull'asse y, centro nell'origine, distanza focale $2\sqrt{5}$ e passa per il punto $\left(1; \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$. Trova poi sull'arco di ellisse del primo quadrante un punto P tale che, dette H e K le sue proiezioni sugli assi cartesiani, si abbia $\overline{PH} + \overline{PK} = 3$.
$\left[\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1; (0; 3), \left(\frac{24}{13}; \frac{15}{13}\right)\right]$

238 Scrivi l'equazione di un'ellisse con il centro nell'origine e i fuochi sull'asse y, sapendo che il quadrato inscritto ha il perimetro uguale a 24 e che l'asse maggiore misura 12. Calcola poi il perimetro dei rettangoli inscritti nell'ellisse che hanno l'area uguale a $16\sqrt{6}$.
$\left[\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{36} = 1; 8(1 + \sqrt{6}), 8(\sqrt{2} + \sqrt{3})\right]$

239 Date la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 9$ e l'ellisse di equazione $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$, considera sulla circonferenza i punti P e P' e sull'ellisse i punti Q e Q' aventi la stessa ascissa k, con $-3 < k < 3$ e $k \neq 0$. Verifica che le tangenti alle due curve in P, P', Q e Q' si intersecano nello stesso punto e determinane le coordinate.
$\left[\left(\frac{9}{k}; 0\right)\right]$

240 Scrivi l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine e passante per i punti $A(2; -1)$ e $B(-3; 0)$ e determina le coordinate dei fuochi e l'eccentricità. Calcola poi l'equazione della circonferenza di centro $C(-1; 1)$, avente per diametro l'asse minore dell'ellisse.
$\left[\frac{x^2}{9} + \frac{5y^2}{9} = 1; F\left(\pm\frac{6\sqrt{5}}{5}; 0\right); e = 2\frac{\sqrt{5}}{5}; 5x^2 + 5y^2 + 10x - 10y + 1 = 0\right]$

241 a) Dimostra che il luogo geometrico dei punti del piano per i quali il rapporto tra la distanza dal punto $F(1; 3)$ e la distanza dalla retta $4x + 5 = 0$ vale $\frac{4}{5}$ è un'ellisse.
b) Individua centro, vertici, fuochi e assi di simmetria dell'ellisse trovata.
c) Considera il rombo circoscritto all'ellisse con due lati tangenti nei suoi punti di ascissa 1. Trova il raggio della circonferenza inscritta nel rombo.

[a) $9x^2 + 25y^2 - 90x - 150y + 225 = 0$;
b) $C(5; 3)$, vertici $(5; 0)$, $(10; 3)$, $(5; 6)$, $(0; 3)$, fuochi $(1; 3)$, $(9;3)$, assi $x = 5$, $y = 3$; c) $\frac{25}{41}\sqrt{41}$]

242 Risolvi graficamente il sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}} \\ y \geq kx + 2k \\ x \geq 0, k \geq 0 \end{cases}$$

[$0 \leq k \leq \frac{1}{2}$: arco di ellisse BP con $B(0; 1)$ e $P\left(\frac{-8k^2+2}{4k^2+1}; \frac{4k}{4k^2+1}\right)$]

243 a) Scrivi l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano per i quali la somma delle distanze dai punti $F_1(-1; 0)$ e $F_2(-1; 6)$ vale 10.
b) Rappresenta il luogo, verificando che si tratta di un'ellisse e individuane vertici e assi di simmetria.
c) Determina i punti di intersezione A e B dell'ellisse con l'asse x e calcola l'area del triangolo ACB, essendo C il centro dell'ellisse.
d) Effettua una traslazione che porti l'ellisse ad avere il centro nell'origine O e poi trova le equazioni della dilatazione che trasforma la curva traslata in una circonferenza che ha il raggio uguale a 8.

[a) $25x^2 + 16y^2 + 50x - 96y - 231 = 0$; b) $V_1(-5; 3)$, $V_2(3; 3)$, $V_3(-1; 8)$, $V_4(-1; -2)$, $x = -1$, $y = 3$;
c) $A\left(\frac{11}{5}; 0\right)$, $B\left(-\frac{21}{5}; 0\right)$, $\frac{48}{5}$; d) $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = \frac{8}{5}y \end{cases}$]

244 Determina l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine, passante per $A(1; 2)$ e avente un vertice di coordinate $(3; 0)$. Trova poi le equazioni delle rette tangenti all'ellisse e perpendicolari alla retta $2x - y + 1 = 0$ e calcola le coordinate dei punti di tangenza. [$x^2 + 2y^2 = 9$; $x + 2y \pm 3\sqrt{3} = 0$; $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$]

245 Stabilisci per quali valori di k l'equazione $\frac{x^2}{8-k} + \frac{y^2}{2k+2} = 1$ rappresenta:
a) un'ellisse;
b) una circonferenza;
c) un'ellisse con i fuochi sull'asse y;
d) un'ellisse con un vertice di coordinate $(0; 2\sqrt{3})$;
e) un'ellisse di eccentricità $\frac{1}{2}$.

[a) $-1 < k < 8$; b) $k = 2$; c) $2 < k < 8$; d) $k = 5$; e) $k = \frac{16}{11}$, $k = \frac{13}{5}$]

246 Considera il luogo individuato dalle seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \sqrt{1 - k^2} - 2 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

a) Indica per quali valori di k è definito il luogo e determina i valori assunti da x e da y al variare di k.
b) Trova l'equazione cartesiana del luogo e rappresenta il suo grafico.

[a) $k \in [-1; 1]$; $x \in [1; 5]$, $y \in [-2; -1]$; b) $y = \frac{1}{2}\sqrt{6x - x^2 - 5} - 2$ (semiellisse traslata)]

REALTÀ E MODELLI

1 **Orbita terrestre**

Secondo la prima legge di Keplero, la Terra ruota intorno al Sole descrivendo un'orbita ellittica di cui il Sole occupa uno dei fuochi. Alcuni dati astronomici (approssimati) sono:

- eccentricità dell'orbita terrestre: 0,0167;
- perielio (minima distanza Terra-Sole): $147{,}1 \cdot 10^6$ km.
- afelio (massima distanza Terra-Sole): $152{,}1 \cdot 10^6$ km.
- diametro del Sole: $1392 \cdot 10^3$ km.

Posizionato il sistema di riferimento cartesiano in modo che il centro dell'orbita coincida con l'origine degli assi e il Sole abbia ascissa positiva e ordinata nulla,

▶ scrivi l'equazione dell'orbita terrestre;

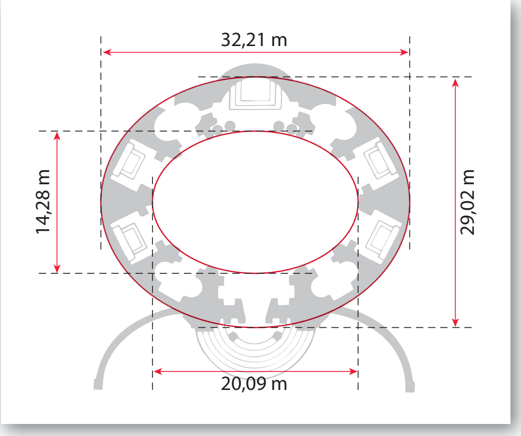
▶ trova le coordinate del centro del Sole e dell'altro fuoco;

▶ confronta la distanza focale con la dimensione del Sole.

2 **Una chiesa di Roma**

La Chiesa di Sant'Andrea al Quirinale, costruita su progetto del Bernini tra il 1658 e il 1678, ha pianta ellittica: all'estremità dell'asse minore si trovano l'entrata e l'altare maggiore.

In questo disegno della pianta si evidenziano l'ellisse centrale, dove si dispongono i fedeli, e la fascia esterna con le varie cappelle.



▶ Scrivi le equazioni (approssimate) delle due ellissi riferite al loro centro. Le due ellissi sono omotetiche?

▶ Nello spazio delimitato dall'ellisse centrale, vengono sistemate le sedie per i fedeli in file parallele all'asse maggiore. Supponendo che lo spazio necessario per ogni sedia sia 60 cm in larghezza e 1 m nella direzione dell'asse minore, valuta quante sedie sono necessarie.

▶ In occasione di alcuni lavori di restauro, per non rovinare la pavimentazione, si stende un telo sull'intera base dell'ellisse centrale. Quale sarà l'area del telo utilizzato?

3 **Si sussurra, ma si sente**

Nella St Paul's Cathedral, a Londra, c'è la famosa Whispering Gallery, una balconata interna a circa 30 m dal suolo che ha questa caratteristica: se si sussurra rivolti verso il muro, tale suono può essere udito chiaramente in un qualunque altro punto della galleria, purché si metta l'orecchio vicino al muro.

In questo caso si sfruttano delle proprietà di acustica legate alle frequenze di un suono sussurrato; in qualsiasi stanza ellittica, però, si può verificare lo stesso fenomeno se chi emette il suono e chi lo riceve occupano la posizione dei fuochi.

▶ Elisa e Filippo si trovano in una sala ellittica il cui semiasse maggiore è 12 m e quello minore 7 m. Determina in quali posizioni si devono mettere per poter verificare la proprietà descritta.

▶ Fissato il sistema di riferimento cartesiano nel modo consueto, considera il punto P dell'ellisse, nel primo quadrante, di ascissa 5, e verifica che le due rette passanti per P e per i fuochi sono simmetriche rispetto alla normale all'ellisse in P.

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Data l'equazione $ax^2 + by^2 = c$, una sola delle seguenti affermazioni è *falsa*, quale?

A L'equazione rappresenta un'ellisse se e solo se $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

B L'equazione rappresenta un'ellisse se e solo se a, b, c sono concordi.

C Se $a = c = 4$ e $b = 1$, l'equazione rappresenta un'ellisse i cui fuochi hanno coordinate $(0; \sqrt{3})$ e $(0; -\sqrt{3})$.

D Se $c = 1$ e $a > b > 1$, l'equazione rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse y.

E Se $a = b$ e $a \cdot c > 0$, l'equazione rappresenta una circonferenza.

2 Quale delle ellissi con le seguenti equazioni ha eccentricità uguale a $\frac{1}{4}$?

A $\frac{3}{16}x^2 + \frac{y^2}{15} = 1$

B $\frac{5}{32}x^2 + \frac{y^2}{30} = 1$

C $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

D $16x^2 + 15y^2 = 240$

E $4x^2 + 3y^2 = 12$

3 Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2 + (k-2)y^2 = 2$ rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse y?

A $k > 2$

B $k > 3$

C $2 < k < 3$

D $2 \leq k < 3$

E $2 < k \leq 3$

4 Considera l'ellisse di equazione $2x^2 + y^2 + -8x + 6y + 13 = 0$. Quale fra le seguenti proposizioni è *vera*?

A L'eccentricità è $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

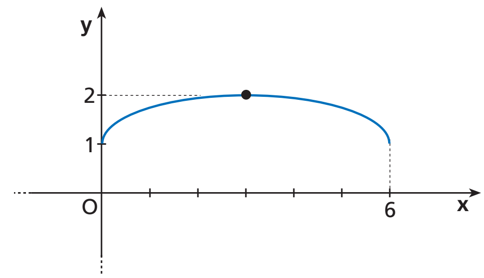
B Le coordinate dei fuochi sono $(0; \pm 2\sqrt{2})$.

C Il semiasse minore è $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D L'eccentricità è $\frac{1}{2}$.

E Le coordinate del centro sono $(4; -3)$.

5



Il grafico della figura ha equazione:

A $y = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{6x - x^2}$.

B $y = 1 + \sqrt{6x - x^2}$.

C $y = 1 - \sqrt{6x - x^2}$.

D $y = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{6x - x^2}$.

E $y = 2 + \sqrt{6x - x^2}$.

6 Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2} = 1$, una sola delle seguenti proposizioni è *vera*, quale?

A L'eccentricità è $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

B I fuochi si trovano sull'asse x.

C Se $a = 1$, la curva passa per $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$.

D Se un fuoco ha coordinate $(-\sqrt{3}; 0)$, allora $a = 4$.

E Un vertice ha coordinate $\left(\frac{1}{2}a; 0\right)$.

7 Considera l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{18} = 1$. Una sola delle seguenti proposizioni è *falsa*, quale?

A I fuochi hanno coordinate $(4; 0)$ e $(-4; 0)$.

B L'ellisse ha come tangente nel suo punto del primo quadrante di ascissa 1 la retta di equazione $3x + y - 6 = 0$.

C L'asse maggiore è triplo dell'asse minore.

D Un vertice ha coordinate $(0; 3\sqrt{2})$.

E Se si trasla l'ellisse in modo che il centro sia $(-2; 0)$, l'equazione della curva è: $9x^2 + y^2 + 36x + 18 = 0$.

QUESITI

8 È data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{7}=1$. Calcola il rapporto fra le aree del rettangolo circoscritto all'ellisse e di quello inscritto nell'ellisse che ha i lati proporzionali e paralleli a quelli del rettangolo circoscritto. Dimostra che il risultato ottenuto sarebbe stato lo stesso per qualsiasi altra ellisse. [2]

9 Dimostra che in un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, avente semiasse maggiore a ed eccentricità e, le distanze di un punto $P(x_0; y_0)$ dell'ellisse dai fuochi sono sempre date da $a-ex_0$ e $a+ex_0$; verificalo nel caso dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$, considerando il suo punto P di ascissa $2\sqrt{3}$.

10 Dimostra che in un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ l'eccentricità rappresenta il rapporto costante tra le distanze di un punto $P(x_0; y_0)$ dell'ellisse dal fuoco $F_1(c; 0)$ e dalla retta $x=\frac{a^2}{c}$ $\left(\text{o dal fuoco } F_2(-c; 0) \text{ e dalla retta di equazione } x=-\frac{a^2}{c}\right)$.

11 Dimostra che l'equazione $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$, con $a>0$ e $b>0$, rappresenta un'ellisse non degenere se e solo se $\frac{c^2}{4a}+\frac{d^2}{4b}-e>0$. (Suggerimento. Applica il metodo del completamento del quadrato.)

12 Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, traccia in un suo punto P la tangente t che interseca l'asse x in A e l'asse y in B e traccia per P la perpendicolare a t che interseca in C l'asse x e in D l'asse y. Dimostra che tra le ascisse e le ordinate dei punti A, B, C, D, vale la relazione $x_Ax_C+y_By_D=0$.

PROBLEMI

13
a) Rappresenta graficamente l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ e indica con F_1 e F_2 i suoi fuochi.
b) Sia A il punto dell'ellisse del primo quadrante avente ordinata $2\sqrt{3}$. Scrivi l'equazione della tangente t all'ellisse in A.
c) Determina l'equazione della bisettrice s dell'angolo $F_1\widehat{A}F_2$ e verifica che è la retta perpendicolare a t in A.
d) Sia B il punto di intersezione di s con l'asse x. Calcola il rapporto fra le aree dei triangoli AF_1B e AF_2B.
e) Verifica che $\overline{AF_1}:\overline{AF_2}=\overline{F_1B}:\overline{F_2B}$.

$\left[\text{a) } F_1(-2\sqrt{5}; 0), F_2(2\sqrt{5}; 0); \text{ b) } A(3; 2\sqrt{3}), 2x+3\sqrt{3}y-24=0; \text{ c) } 3\sqrt{3}x-2y-5\sqrt{3}=0; \text{ d) } B\left(\frac{5}{3}; 0\right), \frac{41+12\sqrt{5}}{31}\right]$

14
a) Determina l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano per i quali il rapporto tra la distanza dal punto $F(3; 0)$ e la distanza dalla retta d: $x=\frac{25}{3}$ vale $\frac{3}{5}$, verificando che il luogo determinato è un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.
b) Inscrivi nell'ellisse un rettangolo di perimetro $\frac{124}{5}$ determinandone i suoi vertici.
c) Esegui una traslazione e trova l'equazione dell'ellisse traslata sapendo che il punto F si trasforma in $F'(5; 4)$.

$\left[\text{b) } \left(\pm 3; \pm\frac{16}{5}\right), \left(\pm\frac{187}{41}; \pm\frac{336}{205}\right); \text{ c) } \frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{16}=1\right]$

15 a) Considera l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ e indica con F_1 e F_2 i suoi fuochi ($y_{F_1} < y_{F_2}$). Scrivi l'equazione della retta tangente all'ellisse nel punto P, appartenente all'ellisse, situato nel primo quadrante e avente ascissa 3 e chiama Q ed R le sue intersezioni con le rette di equazione $y = 8$ e $y = -8$.
b) Verifica che gli angoli $Q\widehat{F_2}P$ e $P\widehat{F_1}R$ sono retti.
c) Trova l'area del triangolo PF_1R e l'equazione della circonferenza ad esso circoscritta.
d) Individua le equazioni della dilatazione che trasforma l'ellisse data in una circonferenza di raggio uguale a 12.

$$\left[\text{a) } 2x + y - 8 = 0,\ Q(0; 8),\ R(8; -8);\ \text{c) } 25,\ x^2 + y^2 - 11x + 6y + 8 = 0;\ \text{d) } \begin{cases} x' = 2\sqrt{3}\,x \\ y' = 3y \end{cases}\right]$$

16 a) Scrivi l'equazione dell'ellisse avente centro di simmetria nel punto (5; 3) tangente a entrambi gli assi cartesiani.
b) Determina l'equazione della parabola passante per il punto di tangenza con l'asse delle ordinate e per i punti A e B dell'ellisse di ascissa 1.
c) Scrivi l'equazione della circonferenza avente diametro AB.
d) Calcola l'area della parte di piano, situata nel primo quadrante, delimitata dalla circonferenza e dalla parabola.

$$\left[\text{a) } 9x^2 + 25y^2 - 90x - 150y + 225 = 0;\ \text{b) } x = \frac{25}{81}(y-3)^2;\ \text{c) } (x-1)^2 + (y-3)^2 = \frac{81}{25};\ \text{d) } \frac{81}{50}\pi + \frac{12}{5}\right]$$

17 Data l'ellisse con l'asse maggiore sull'asse x, di centro $C(4; 0)$, passante per l'origine e con eccentricità $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$, considera un punto P nell'arco di ellisse che si trova nel primo quadrante.
a) Esprimi $s = \overline{PC}^2 + \frac{9}{16}\overline{PH}^2$, con H proiezione di P sull'asse y, in funzione dell'ascissa x di P. Traccia il grafico della funzione ottenuta.
b) Per quale valore dell'ascissa di P viene assunto da s il valore minimo?
c) Quanto vale s quando P si trova nei vertici dell'ellisse?

$$\left[\text{a) } s = x^2 - \frac{7}{2}x + 16,\ 0 \le x \le 8;\ \text{b) } x = \frac{7}{4};\ \text{c) } 16, 18, 52\right]$$

18 a) Rappresenta graficamente l'ellisse di equazione $9x^2 + 25y^2 - 108x - 100y + 199 = 0$ indicando le sue caratteristiche principali.
b) Calcola il perimetro del rombo avente per vertici i fuochi della curva data e gli estremi del suo asse minore.
c) Determina l'equazione della circonferenza inscritta nel rombo del punto b).

$$\left[\text{a) ellisse di centro } (6; 2), \text{ vertici } (11; 2), (1; 2), (6; 5), (6; -1) \text{ e fuochi } F_1(2; 2), F_2(10; 2);\ \text{b) } 2p = 20;\ \text{c) } (x-6)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2\right]$$

19 a) Scrivi l'equazione dell'ellisse con gli assi paralleli agli assi cartesiani, avente centro di simmetria nel punto (4; 2) e passante per i punti di coordinate (8; 0) e (− 1; 1).
b) Calcola le equazioni delle tangenti nei punti dell'ellisse le cui ordinate sono soluzioni dell'equazione $t^4 - 2t^3 + 2t^2 - t = 0$.
c) Calcola l'area del quadrilatero convesso individuato dalle tangenti trovate.

$$\left[\text{a) } x^2 + 3y^2 - 8x - 12y = 0;\ \text{b) } 2x + 3y = 0,\ 2x - 3y - 16 = 0,\ 5x + 3y + 2 = 0,\ 5x - 3y - 42 = 0;\ \text{c) } \frac{28}{3}\right]$$

20 a) Rappresenta graficamente la curva di equazione $y = -3 - \sqrt{4x - 4x^2}$.
b) Determina la retta tangente r alla curva data nel suo punto di ascissa 1.
c) Scrivi l'equazione della parabola tangente a r nel suo punto V di ordinata -3 e passante per l'origine del sistema di riferimento e stabilisci la posizione reciproca della parabola e della curva data.
d) Scrivi l'equazione della circonferenza avente un diametro che ha per estremi le intersezioni della parabola con l'asse delle ordinate.
e) Calcola l'area della superficie racchiusa dalla parabola e dalla circonferenza situata nel semipiano delle ascisse positive.

[a) semiellisse inferiore di centro $\left(\frac{1}{2}; -3\right)$ e semiassi $\frac{1}{2}$ e 1; b) $x = 1$;
c) $y^2 + 9x + 6y = 0$, tangente in V; d) $x^2 + y^2 + 6y = 0$; e) $\frac{9}{2}\pi - 4$]

21 a) Rappresenta graficamente l'ellisse di equazione $25x^2 + 9y^2 - 90y = 0$, individuandone centro di simmetria, vertici, fuochi, assi.
b) Sia A il punto della curva del primo quadrante di ordinata 9. Scrivi l'equazione della retta tangente t alla curva in A e siano B e C i punti di t di ascissa 0 e 10 rispettivamente.
c) Calcola l'area del triangolo AF_1C, dove F_1 è il fuoco di ordinata minore, dopo aver dimostrato che si tratta di un triangolo rettangolo.
d) Scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo ABF_2, dove F_2 è il fuoco di ordinata maggiore e dimostra che AB è un suo diametro.

[a) ellisse di centro $C(0; 5)$, vertici $(0; 0)$, $(3; 5)$, $(0; 10)$, $(-3; 5)$, fuochi $(0; 1)$, $(0; 9)$, assi $x = 0$, $y = 5$;
b) $A\left(\frac{9}{5}; 9\right)$, t: $5x + 4y - 45 = 0$, $B\left(0; \frac{45}{4}\right)$, $C\left(10; -\frac{5}{4}\right)$; c) $\frac{1681}{40}$; d) $\left(x - \frac{9}{10}\right)^2 + \left(y - \frac{81}{8}\right)^2 = \frac{3321}{1600}$]

22 a) Rappresenta graficamente l'ellisse di equazione $5x^2 + 9y^2 - 20x - 90y - 160 = 0$.
b) Siano F_1 e F_2 $(x_{F_1} < x_{F_2})$ i fuochi della curva e A e D i punti di intersezione con l'asse delle $x (x_A < x_D)$. Scrivi l'equazione della retta t tangente alla curva in A.
c) Verifica che la retta t è bisettrice di uno dei due angoli formati dalle rette AF_1 e AF_2.
d) Scrivi l'equazione della retta n perpendicolare alla curva in A e trova il punto E di intersezione di n con l'asse minore dell'ellisse.
e) Calcola l'area del triangolo ADE e determina le coordinate del suo baricentro G.

[a) ellisse di centro $(2; 5)$ e semiassi $a = 9$, $b = 3\sqrt{5}$;
b) $F_1(-4; 5)$, $F_2(8; 5)$, $A(-4; 0)$, $D(8; 0)$, t: $2x + 3y + 8 = 0$; d) $3x - 2y + 12 = 0$, $E(2; 9)$; e) area $= 54$, $G(2; 3)$]

23 Dopo aver determinato per quali valori di a l'equazione

$$(a - 3)x^2 + (a - 6)y^2 = a - 3$$

rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse y, considera l'ellisse passante per il punto $\left(\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$. Detti A, B, A_1, B_1 i suoi vertici (nominati in senso antiorario, con A di ascissa positiva), determina:
a) l'area del quadrato inscritto nell'ellisse con i lati paralleli agli assi cartesiani;
b) l'equazione della parabola con vertice in A e passante per B e B_1;
c) per quali valori di k le rette del fascio $4kx + ky = k - 4$ incontrano l'arco di parabola appartenente al primo quadrante.

[$a > 6$, $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$; a) $\frac{16}{5}$; b) $x = -\frac{1}{4}y^2 + 1$;
c) 1 sol. per $-4 \leq k < -\frac{4}{3}$, 2 sol. per $-\frac{4}{3} \leq k \leq -\frac{16}{13}$]

CAPITOLO

7

٧

[numerazione araba]

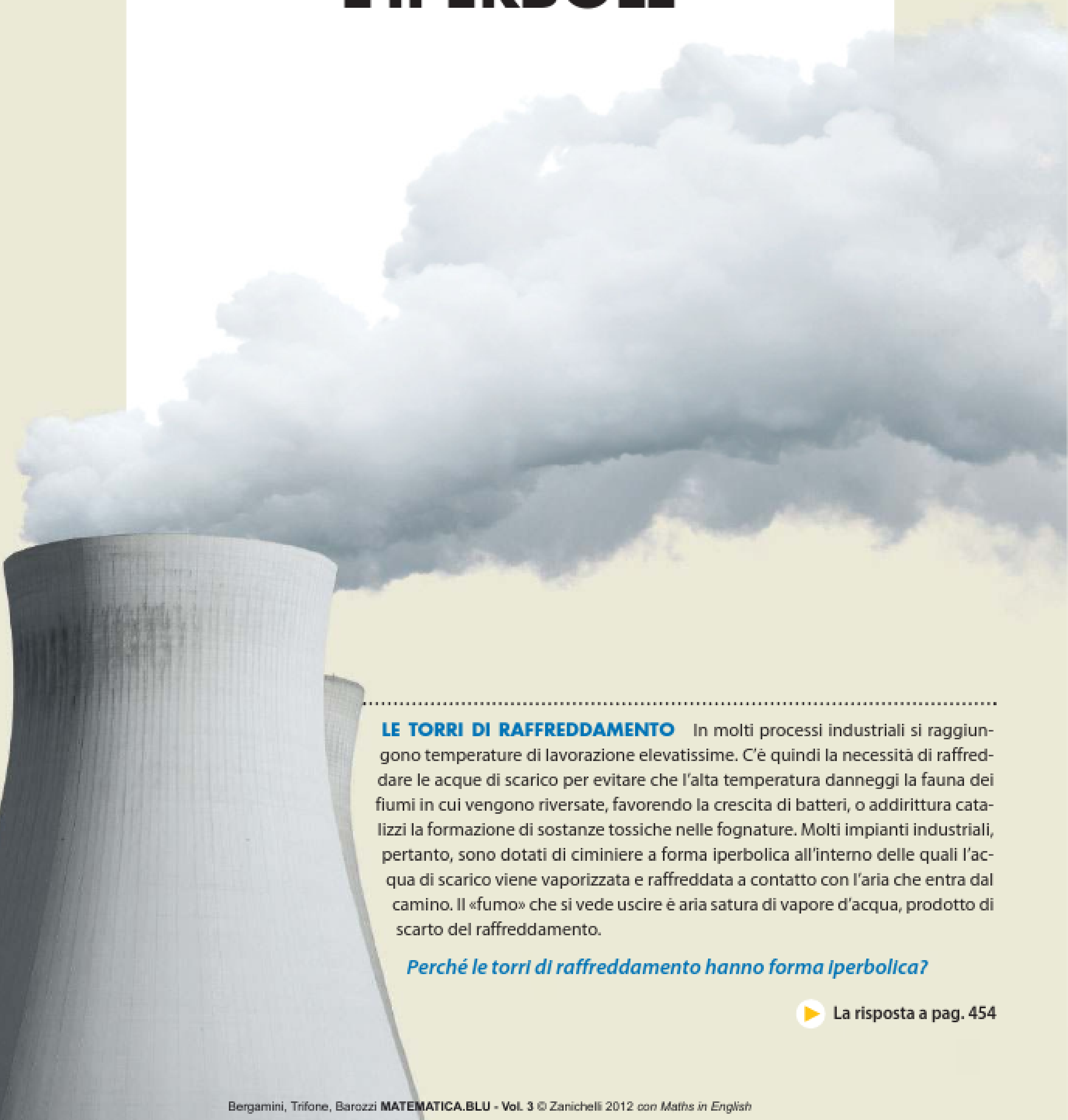
७

[numerazione devanagari]

七

[numerazione cinese]

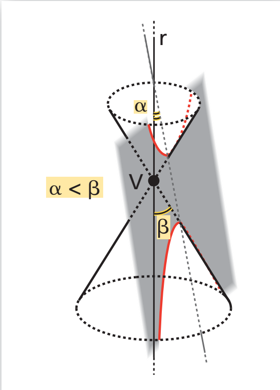
L'IPERBOLE



LE TORRI DI RAFFREDDAMENTO In molti processi industriali si raggiungono temperature di lavorazione elevatissime. C'è quindi la necessità di raffreddare le acque di scarico per evitare che l'alta temperatura danneggi la fauna dei fiumi in cui vengono riversate, favorendo la crescita di batteri, o addirittura catalizzi la formazione di sostanze tossiche nelle fognature. Molti impianti industriali, pertanto, sono dotati di ciminiere a forma iperbolica all'interno delle quali l'acqua di scarico viene vaporizzata e raffreddata a contatto con l'aria che entra dal camino. Il «fumo» che si vede uscire è aria satura di vapore d'acqua, prodotto di scarto del raffreddamento.

Perché le torri di raffreddamento hanno forma iperbolica?

► **La risposta a pag. 454**



▲ **Figura 1** Consideriamo un cono con un angolo al vertice 2β. Se un piano seca il cono formando un angolo α con il suo asse e tale che $\alpha < \beta$, allora l'intersezione fra il piano e la superficie del cono è un'iperbole.

1. L'IPERBOLE E LA SUA EQUAZIONE

Completiamo il nostro studio sulle coniche prendendo in esame l'*iperbole*. Anche per l'iperbole diamo la definizione come luogo geometrico e ne determiniamo l'equazione algebrica.

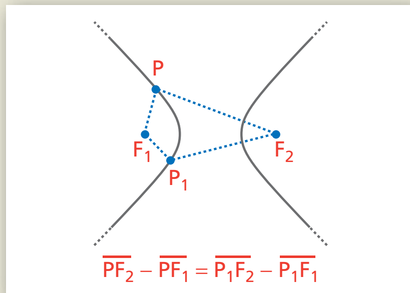
L'iperbole come luogo geometrico

DEFINIZIONE

Iperbole

Assegnati nel piano due punti F_1 e F_2, detti **fuochi**, si chiama iperbole la curva piana luogo geometrico dei punti P che hanno costante la differenza delle distanze da F_1 e da F_2:

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = \textbf{costante}.$$



Il punto medio del segmento F_1F_2 si chiama **centro** dell'iperbole.
Indichiamo con:

$2c$ la distanza tra F_1 e F_2, detta **distanza focale**;

$2a$ la differenza costante fra le distanze di ciascun punto dell'iperbole da ognuno dei due fuochi.

● a e c indicano due valori costanti e positivi.

Se P è un generico punto dell'iperbole, dalla definizione data segue

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a \quad \text{se} \quad \overline{PF_1} - \overline{PF_2} > 0, \text{ cioè se } P \text{ è più vicino a } F_2,$$

oppure:

$$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a \quad \text{se} \quad \overline{PF_2} - \overline{PF_1} > 0, \text{ ovvero se } P \text{ è più vicino a } F_1.$$

Queste due relazioni si possono riassumere nella seguente uguaglianza:

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a.$$

In un triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due (figura 2). Considerato allora il triangolo PF_1F_2, la differenza dei due lati PF_1 e PF_2 è

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$$

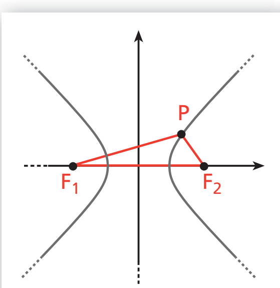
e il terzo lato è il segmento F_1F_2 di lunghezza $2c$, che congiunge i due fuochi, quindi

$$2a < 2c,$$

ossia:

$$\boldsymbol{a < c}.$$

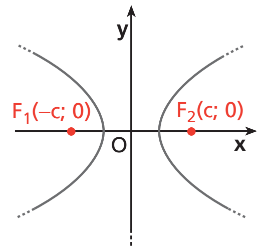
▼ **Figura 2** In un triangolo la differenza fra due lati è minore del terzo.



L'equazione dell'iperbole con i fuochi appartenenti all'asse *x*

Anche per l'iperbole, come per le altre coniche finora esaminate, l'equazione è diversa a seconda della posizione della curva rispetto al sistema di riferimento.

Se si considerano i fuochi sull'asse x o y e il centro come origine degli assi, si ottiene il tipo d'equazione più semplice.



Esaminiamo il caso in cui la retta passante per i punti F_1 e F_2 è l'asse x.

Le coordinate dei fuochi sono allora:

$$F_1(-c; 0), \qquad F_2(c; 0).$$

Indicato con $P(x; y)$ un generico punto del piano, poiché P appartiene all'iperbole se e solo se

$$\left| \overline{PF_1} - \overline{PF_2} \right| = 2a,$$

utilizzando la formula della distanza fra due punti, otteniamo:

$$\left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Se eliminiamo il valore assoluto, otteniamo:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Con calcoli analoghi a quelli svolti per l'ellisse, si ha l'equazione equivalente:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Poniamo: $\boldsymbol{c^2 - a^2 = b^2}$.
L'equazione diventa allora: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$,
e, dividendo tutti i termini per a^2b^2, otteniamo:

Questo è possibile perché da $c > a$ segue $c^2 > a^2$ e quindi $c^2 - a^2 > 0$.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1},$$

che è detta **equazione canonica** o **normale** dell'iperbole.
Viceversa, si può dimostrare che ogni equazione del tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

rappresenta un'iperbole.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $25x^2 - 4y^2 = 36$.
Dividendo entrambi i membri per 36, otteniamo

$$\frac{25x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

che si può anche scrivere:

$$\frac{x^2}{\frac{36}{25}} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

L'equazione è quindi quella di un'iperbole, con $a^2 = \frac{36}{25}$ e $b^2 = 9$, ossia:

$$a = \frac{6}{5} \text{ e } b = 3.$$

Le simmetrie nell'iperbole

Poiché nell'equazione canonica sia la variabile x sia la y compaiono solo elevate al quadrato, se $P_1(x_1; y_1)$ è un punto dell'iperbole, lo sono anche i punti $P_2(-x_1; y_1)$, $P_3(x_1; -y_1)$ e $P_4(-x_1; -y_1)$.

L'iperbole è quindi una curva simmetrica rispetto all'asse x, all'asse y e all'origine.

- $(x_1)^2 = (-x_1)^2$
$(y_1)^2 = (-y_1)^2$.

- Si dice anche che l'equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ rappresenta un'iperbole riferita al centro e ai suoi assi di simmetria o, più semplicemente, *un'iperbole riferita ai propri assi.*

L'intersezione dell'iperbole con gli assi cartesiani

Per determinare le intersezioni dell'iperbole con l'asse x, mettiamo a sistema le rispettive equazioni, ossia risolviamo:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = a^2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pm a \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi $A_1(-a; 0)$ e $A_2(a; 0)$ sono le intersezioni con l'asse x e si dicono **vertici reali** dell'iperbole. Il segmento A_1A_2 si chiama **asse trasverso**. Ha lo stesso nome anche la retta che passa per A_1 e A_2, ossia l'asse x. Il numero a è la misura della lunghezza del semiasse trasverso. Inoltre i fuochi, che si trovano sull'asse x, giacciono sull'asse trasverso.

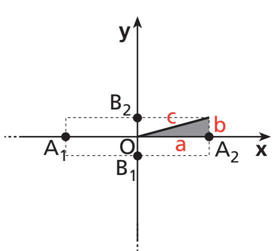
Analogamente, per determinare le intersezioni con l'asse y, risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{-y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 = -b^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

La prima equazione è impossibile: *l'iperbole non ha intersezioni con l'asse y.*

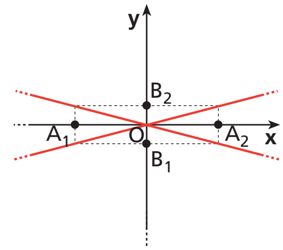
Il grafico dell'iperbole

Per disegnare l'iperbole, è utile evidenziare sull'asse y i punti $B_1(0; -b)$ e $B_2(0; b)$, anche se non sono punti di intersezione tra l'iperbole e l'asse delle ordinate.
Tali punti sono anche detti **vertici non reali**. La retta B_1B_2, perpendicolare all'asse trasverso, è detta **asse non trasverso**. Il numero b è la misura della lunghezza del semiasse non trasverso.



Disegniamo il rettangolo con i lati paralleli agli assi cartesiani e passanti per i punti A_1, A_2, B_1 e B_2. Le misure di metà dei lati del rettangolo sono a e b, mentre c, per il teorema di Pitagora, è la misura di metà della diagonale. Infatti dalla relazione $c^2 - a^2 = b^2$ si ha $c^2 = a^2 + b^2$ (figura a lato).

Disegniamo anche le due rette sulle quali giacciono le diagonali del rettangolo. Poiché passano per l'origine e per i punti $(a; b)$ e $(a; -b)$, esse hanno equazioni, rispettivamente,



$$\boldsymbol{y = \frac{b}{a}x} \text{ e } \boldsymbol{y = -\frac{b}{a}x},$$

e sono dette **asintoti** dell'iperbole.

Dimostriamo che tutti i punti dell'iperbole, eccetto i vertici A_1 e A_2, sono esterni al rettangolo.
Ricaviamo y^2 dall'equazione dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si ha $-\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$, da cui:

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

Poiché il primo membro y^2 è positivo o nullo, deve esserlo anche il secondo, cioè:

$$\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \geq 0 \rightarrow x^2 - a^2 \geq 0 \rightarrow x \leq -a \vee x \geq a.$$

Escludendo i vertici A_1 e A_2, i punti dell'iperbole si trovano fuori dalla striscia limitata dalle rette $x = a$ e $x = -a$.

Deduciamo che l'iperbole è costituita da due **rami** distinti.

Dimostriamo ora che i due rami dell'iperbole sono interni agli angoli formati dai due asintoti e contenenti i fuochi.
Consideriamo le intersezioni dell'iperbole con una retta generica passante per l'origine, cioè risolviamo il sistema:

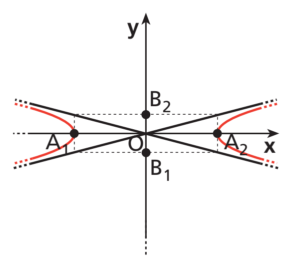
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases}$$

Si ottengono le soluzioni:

$$x = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} \qquad \text{e} \qquad y = \pm\frac{mab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}.$$

Queste soluzioni sono reali solo se:

$$b^2 - a^2m^2 > 0, \text{ cioè } -\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}.$$



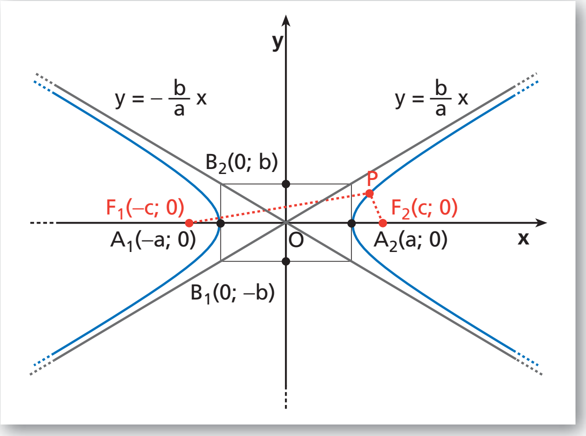
L'iperbole è quindi intersecata da rette passanti per l'origine che si trovano all'interno dei due angoli opposti al vertice formati dagli asintoti e contenenti l'asse x.

Osserviamo che, assegnando a m valori molto vicini a $\pm\frac{b}{a}$, si ha che $b^2 - a^2m^2$ diventa un numero molto piccolo, vicino allo zero, quindi i valori assoluti di x e y tendono a diventare molto grandi. Si dice in questo caso che le rette $y = \pm\frac{b}{a}x$, ovvero gli asintoti, intersecano la curva all'infinito.

Gli asintoti sono quindi rette che non intersecano mai la curva, ma le si avvicinano sempre più man mano che ci si allontana dall'origine.

Il grafico che si ottiene per l'iperbole è disegnato nella figura 3. L'iperbole non è una curva chiusa ed è costituita da due **rami** distinti.

▶ **Figura 3** Grafico dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.



▶ **Figura 4** Grafico dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

ESEMPIO

Nell'iperbole di equazione

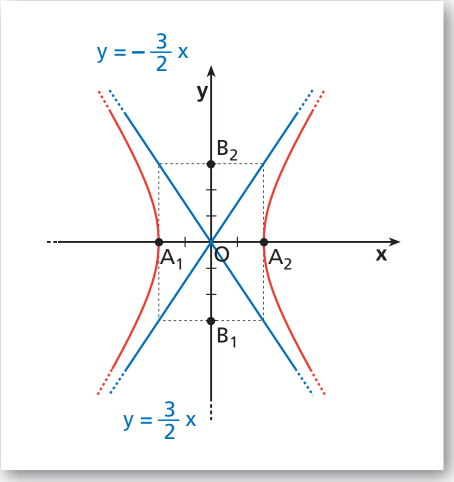
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

essendo $a = 2$ e $b = 3$, i vertici sono

$$A_1(-2;0),\ A_2(2;0),$$
$$B_1(0;-3) \text{ e } B_2(0;3).$$

Le equazioni degli asintoti sono:

$$y = \frac{3}{2}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{3}{2}x.$$



Le coordinate dei fuochi di un'iperbole di equazione nota

Data l'equazione di un'iperbole, è possibile determinare le coordinate dei fuochi. Poiché $c^2 - a^2 = b^2$, otteniamo $c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, quindi i fuochi hanno coordinate:

$$\boldsymbol{F_1(-\sqrt{a^2+b^2};0),\quad F_2(\sqrt{a^2+b^2};0).}$$

ESEMPIO

Nell'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1,$$

è $a=3$, $b=4$ e $c=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$, quindi i vertici sono i punti

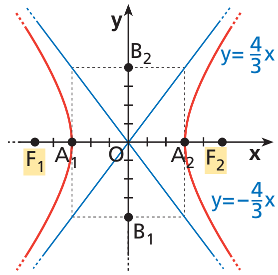
$$A_1(-3;0),\ A_2(3;0),\ B_1(0;-4),\ B_2(0;4),$$

i fuochi sono

$$F_1(-5;0) \text{ e } F_2(5;0)$$

e le equazioni degli asintoti sono:

$$y = \frac{4}{3}x \text{ e } y = -\frac{4}{3}x.$$



L'eccentricità nell'iperbole

Ritroviamo il concetto di **eccentricità** anche nello studio dell'iperbole.
L'eccentricità è il rapporto fra la distanza focale e la lunghezza dell'asse trasverso:

$$e = \frac{\textbf{distanza focale}}{\textbf{lunghezza dell'asse trasverso}}.$$

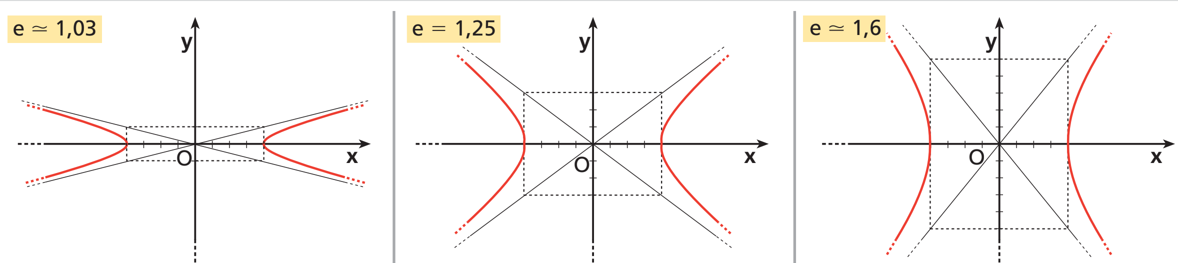
Nell'iperbole con i fuochi sull'asse x la distanza focale è $2c$, mentre la lunghezza dell'asse trasverso è $2a$, quindi l'eccentricità è data dal rapporto:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Poiché $c > a > 0$, osserviamo che $\boldsymbol{e > 1}$.

Per comprendere il significato geometrico dell'eccentricità dell'iperbole, esaminiamo i grafici di tre iperboli con lo stesso valore di a ($a = 4$) e diversi valori di b. All'aumentare di b, aumenta c, quindi aumenta e. A eccentricità maggiore corrisponde maggiore apertura dei rami dell'iperbole.

▼ Figura 5



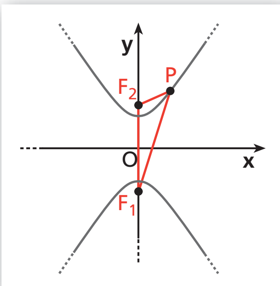
a. Grafico di $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$.
Essendo $a = 4$, $b = 1$:
$c = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$
$e = \frac{\sqrt{17}}{4} \simeq 1{,}03$.

b. Grafico di $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.
$a = 4$, $b = 3$, quindi:
$c = \sqrt{16+9} = 5$
$e = \frac{5}{4} = 1{,}25$.

c. Grafico di $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$.
$a = 4$, $b = 5$, quindi:
$c = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$
$e = \frac{\sqrt{41}}{4} \simeq 1{,}6$.

L'iperbole con i fuochi sull'asse *y*

▼ **Figura 6** Nel triangolo F_1F_2P, $2b$ è la misura della differenza delle lunghezze di due lati ed è quindi minore della misura del terzo lato, $2c$. Quindi $b < c$.



Esaminiamo ora il caso in cui la retta passante per i fuochi, F_1 e F_2, è l'asse y. Indichiamo le coordinate dei fuochi con $F_1(0; -c)$ e $F_2(0; c)$.

In questo caso, diversamente dal precedente, indichiamo con $2b$ la differenza costante fra le distanze di ciascun punto dell'iperbole da ognuno dei due fuochi.

Se P è un generico punto dell'iperbole, dalla definizione data segue l'uguaglianza:

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2b.$$

Per determinare l'equazione dell'iperbole possiamo ripetere gli stessi ragionamenti fatti per l'iperbole con i fuochi sull'asse x.

In questo caso, dopo aver posto $c^2 - b^2 = a^2$, si ottiene l'equazione:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.}$$

● L'equazione

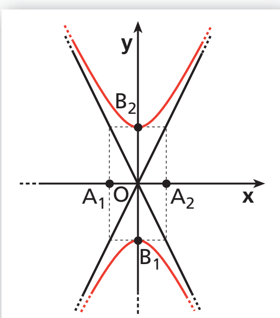
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

si può anche scrivere:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Questa è l'**equazione canonica dell'iperbole con i fuochi sull'asse *y***.
Procedendo in modo analogo a quanto visto per l'iperbole con i fuochi sull'asse x, si può verificare che per l'iperbole con i fuochi sull'asse y valgono le seguenti proprietà:

- l'iperbole è simmetrica rispetto agli assi cartesiani e all'origine;
- **l'asse *y* è l'asse trasverso** e i **vertici reali** sono i punti $\boldsymbol{B_1(0; -b)}$, $\boldsymbol{B_2(0; b)}$;
- **l'asse *x* è l'asse non trasverso** e i punti $\boldsymbol{A_1(-a; 0)}$, $\boldsymbol{A_2(a; 0)}$ sono detti **vertici non reali**;
- le rette di equazione $\boldsymbol{y = -\frac{b}{a}x}$ e $\boldsymbol{y = \frac{b}{a}x}$ sono gli **asintoti** dell'iperbole;
- i **fuochi** dell'iperbole hanno coordinate $\boldsymbol{F_1(0; -\sqrt{b^2 + a^2})}$ e $\boldsymbol{F_2(0; \sqrt{b^2 + a^2})}$;
- l'**eccentricità** vale $\boldsymbol{e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{b}}$.



▲ **Figura 7** Grafico dell'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

ESEMPIO

Nell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -1$, essendo $a = 2$ e $b = 4$,
i vertici reali sono $B_1(0; -4)$, $B_2(0; 4)$;
i vertici non reali sono

$$A_1(-2; 0),\ A_2(2; 0);$$

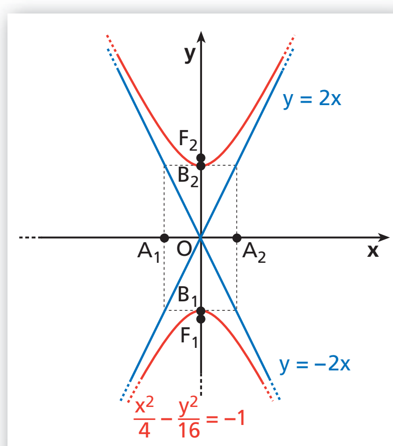
gli asintoti hanno equazioni

$$y = -2x \text{ e } y = 2x;$$

la semidistanza focale è

$$c = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5};$$

i fuochi sono $F_1(0; -2\sqrt{5})$ e $F_2(0; 2\sqrt{5})$;
l'eccentricità è $e = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.



► **Figura 8** Grafico dell'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -1.$$

ESPLORAZIONE

Proietti, satelliti, comete

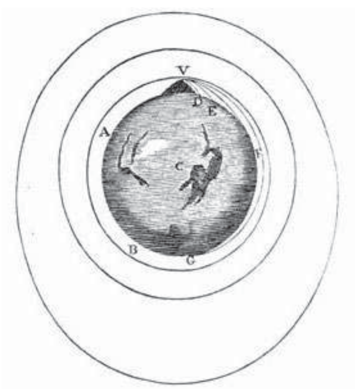
Dalla Terra all'Universo in tre momenti

1. Galileo Galilei (1564-1642) affermò che le traiettorie dei corpi lanciati o, come si diceva allora, dei *proietti*, sono parabole. Trattò matematicamente il loro studio nel suo *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e i movimenti locali*.

2. Giovanni Keplero (1571-1630), studiando il moto di Marte, enunciò le tre leggi relative al moto dei pianeti note con il suo nome. In particolare, nella prima, Keplero affermò che le orbite dei pianeti non sono circolari ma ellittiche, con il Sole in uno dei due fuochi.

3. A partire dalle leggi di Keplero, Isaac Newton (1643-1727) formulò la legge di gravitazione universale: l'attrazione fra due masse avviene rispettando la stessa legge in tutto l'Universo. Il moto di un grave sulla Terra o fuori da essa risponde alle stesse leggi.

▶ Nel trattato *Il sistema del mondo*, Newton immagina una pietra scagliata da una montagna: se è lanciata con forza sempre più grande, si spinge sempre più lontano, fino a non cadere a terra e continuare a «percorrere i cieli a somiglianza dei pianeti».

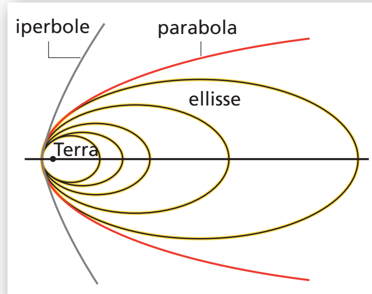


▶ Nel 1705 Edmund Halley, utilizzando le leggi di Newton, affermò che la cometa osservata nel 1531, nel 1607 e nel 1682 sarebbe ritornata nel 1758, come effettivamente avvenne. L'orbita ellittica della cometa di Halley, a differenza di quella delle orbite dei pianeti, ha una forte eccentricità: 0,967.

Le coniche in orbita

Mediante la legge di gravitazione universale, si può dimostrare che l'orbita descritta da un satellite intorno alla Terra ha sempre la forma di una conica.

▶ A seconda della velocità di lancio un satellite può assumere una traiettoria ellittica, parabolica o iperbolica. Ciò avviene in un modello semplificato che tenga conto della sola attrazione terrestre.



Si può calcolare che la velocità minima a cui deve essere lanciata la pietra del disegno di Newton (come ogni altro corpo) affinché diventi un satellite della Terra è uguale a 7,9 km/s (*prima velocità cosmica*). Se la velocità ha questo valore ed è in direzione parallela alla superficie terrestre, il moto è *circolare* con raggio uguale a quello della Terra.

L'orbita diventa ellittica se la velocità di lancio aumenta, rimanendo però al di sotto di 11,2 km/s (*seconda velocità cosmica*). Per questo valore la traiettoria diventa una *parabola*. La seconda velocità cosmica è detta anche *velocità di fuga*, perché, superato il suo valore, il satellite riesce a sfuggire alla gravità terrestre lungo una traiettoria *iperbolica*.

Attività

I satelliti geostazionari

C'è una distanza alla quale il periodo dell'orbita di un satellite e quello di rotazione della Terra attorno al proprio asse coincidono. Tale orbita è chiamata *geostazionaria*.

- Cerca informazioni sui satelliti geostazionari.

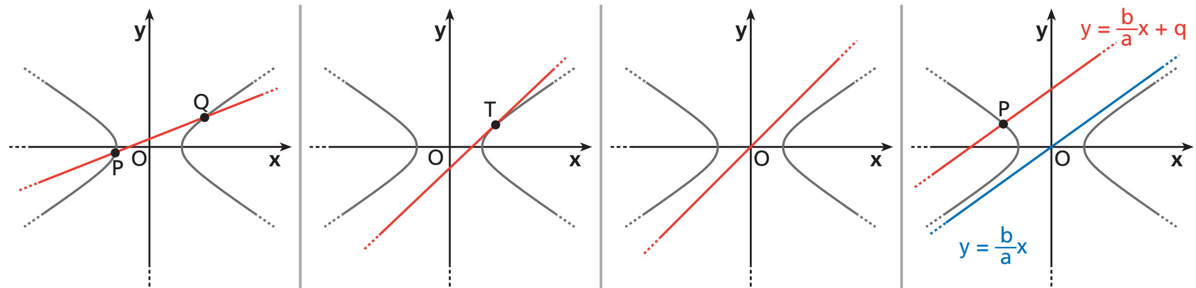
Cerca nel Web:

satelliti geostazionari, geostationary orbit

2. LE POSIZIONI DI UNA RETTA RISPETTO A UN'IPERBOLE

Un'iperbole e una retta possono essere secanti in due punti, essere tangenti in un punto, non intersecarsi in alcun punto oppure, se la retta è parallela a un asintoto, intersecarsi in un punto.

▼ **Figura 9**



a. La retta è secante l'iperbole. I punti di intersezione sono due.

b. La retta, non parallela agli asintoti, è tangente all'iperbole. Il punto di intersezione è unico e si chiama *punto di tangenza*.

c. La retta è esterna all'iperbole. Non vi sono punti di intersezione.

d. La retta è parallela a un asintoto: la retta è secante e il punto di intersezione è unico.

Se vogliamo stabilire la posizione di una retta di equazione $a'x + b'y + c' = 0$, rispetto a un'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, consideriamo il sistema formato dalle due equazioni e studiamo l'equazione risolvente.

- Se l'equazione risolvente è di secondo grado, studiamo il segno del discriminante Δ:
  - se $\boldsymbol{\Delta > 0}$, il sistema ha due soluzioni reali; la retta è secante l'iperbole in due punti;
  - se $\boldsymbol{\Delta = 0}$, il sistema ha due soluzioni reali e coincidenti; la retta è tangente all'iperbole in un punto;
  - se $\boldsymbol{\Delta < 0}$, il sistema non ha soluzioni reali; la retta è esterna all'iperbole.
- Se l'equazione risolvente è di primo grado, la retta è secante l'iperbole in un solo punto.

ESEMPIO

Studiamo che posizione ha la retta di equazione $2x + 3y - 4 = 0$ rispetto all'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$. Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ 2x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo x dall'equazione di primo grado e sostituiamo in quella di secondo grado:

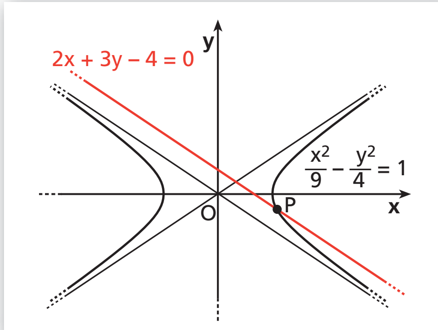
$$\begin{cases} \frac{1}{9}\left(\frac{-3y+4}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = \frac{-3y+4}{2} \end{cases}$$

L'equazione risolvente è:

$$9y^2 + 16 - 24y - 9y^2 = 36 \quad \rightarrow \quad -24y - 20 = 0 \quad \rightarrow \quad 6y + 5 = 0.$$

Poiché è un'equazione di primo grado, la retta è secante l'iperbole in un solo punto:

$$P\left(\frac{13}{4}; -\frac{5}{6}\right).$$



▶ **Figura 10** La retta $2x + 3y - 4 = 0$ è secante l'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ nel punto $P\left(\frac{13}{4}; -\frac{5}{6}\right)$.

● Che la retta sia secante in un solo punto si ricava anche osservando che il suo coefficiente angolare è $-\frac{2}{3}$, e quindi la retta è parallela all'asintoto di equazione $y = -\frac{2}{3}x$.

Le rette tangenti a un'iperbole

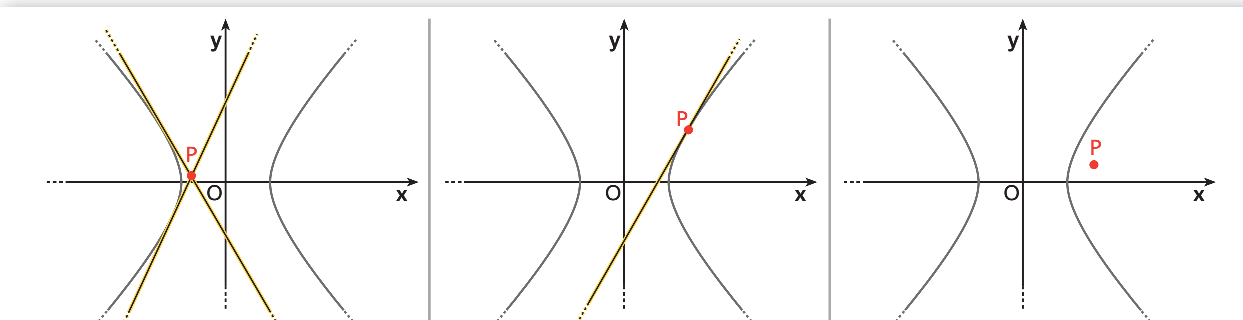
Per determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti condotte da un punto $P(x_0; y_0)$ alla generica iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, si procede in modo analogo a quanto fatto per la determinazione delle tangenti a una parabola e a un'ellisse.

- Si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per P, $y - y_0 = m(x - x_0)$.
- Si scrive il sistema formato dalle equazioni del fascio e dell'iperbole:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}$$

- Si giunge all'equazione risolvente di secondo grado nella variabile x oppure nella variabile y.
- Si pone la condizione di tangenza, ossia $\boldsymbol{\Delta = 0}$.
- Si risolve l'equazione di secondo grado rispetto a m:
  - se $\boldsymbol{m_1 \neq m_2}$, le rette tangenti sono due e il punto è esterno all'iperbole (figura 11*a*);
  - se $\boldsymbol{m_1 = m_2}$, la retta tangente è una sola e il punto appartiene all'iperbole (figura 11*b*);
  - se $\boldsymbol{m_1, m_2} \notin \mathbb{R}$, non esistono rette tangenti e il punto è interno all'iperbole (figura 11*c*).

▼ **Figura 11**



a. Esistono due rette tangenti per *P*.

b. *P* appartiene all'iperbole: esiste una sola retta tangente per *P*.

c. Non esistono rette tangenti per *P*.

Se il punto P appartiene a un asintoto, allora fra le equazioni delle tangenti si trova anche l'equazione dell'asintoto stesso. Gli asintoti, infatti, sono considerati tangenti all'iperbole in un punto all'infinito.

La formula di sdoppiamento

Per determinare l'equazione della retta *tangente all'iperbole in un suo punto* $P(x_0; y_0)$, si può utilizzare la **formula di sdoppiamento**:

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1} \qquad \text{per l'iperbole } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = -1} \qquad \text{per l'iperbole } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Le formule si ottengono dall'equazione canonica dell'iperbole sostituendo il termine x^2 con xx_0 e il termine y^2 con yy_0.

3. COME DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UN'IPERBOLE

Poiché nell'equazione dell'iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \left(\text{oppure } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1\right)$$

sono presenti due coefficienti a e b, per determinarla occorrono due condizioni sull'iperbole. Esse permettono di impostare un sistema di due equazioni nelle incognite a e b.

Alcune condizioni possibili sono le seguenti:
- sono note le coordinate di un fuoco e di un vertice;
- l'iperbole passa per un punto noto e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice);
- l'iperbole passa per un punto noto e si conosce l'eccentricità;
- l'iperbole passa per due punti noti;
- è nota l'eccentricità e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice);
- è nota l'equazione di un asintoto e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice, o di un punto per il quale passa l'iperbole);
- è nota l'equazione di una retta tangente all'iperbole e sono note le coordinate di un punto della curva (o di un vertice, o di un fuoco).

● Le coordinate di un fuoco o di un vertice corrispondono a una sola condizione.

● La conoscenza di un vertice fornisce direttamente il valore di a o b, mentre gli altri tipi di condizioni forniscono delle equazioni nelle incognite a e b.

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione dell'iperbole avente fuoco $F(\sqrt{5}; 0)$ e passante per $P\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; 1\right)$.

Dalle coordinate del fuoco ricaviamo l'equazione:

$$a^2 + b^2 = 5.$$

Sostituendo le coordinate del punto P nell'equazione canonica dell'iperbole otteniamo:

$$\frac{5}{4a^2} - \frac{1}{b^2} = 1.$$

Risolviamo il sistema costituito dalle due relazioni ottenute:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ \dfrac{5}{4a^2} - \dfrac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = 5 - b^2 \\ 5b^2 - 4a^2 = 4a^2b^2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 = 5 - b^2 \\ 5b^2 - 20 + 4b^2 = 20b^2 - 4b^4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = 5 - b^2 \\ 4b^4 - 11b^2 - 20 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo:

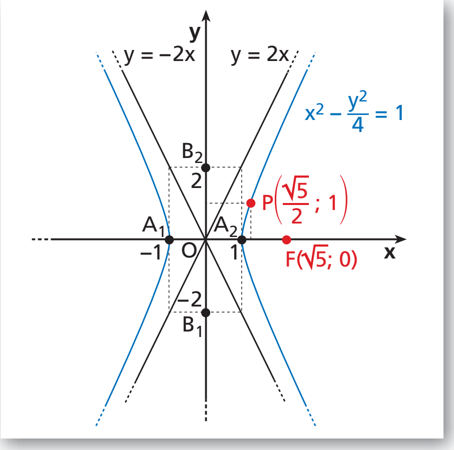
$$b^2 = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 320}}{8} = \frac{11 \pm 21}{8} = \begin{cases} 4 \\ -\dfrac{5}{4} \text{ (non accettabile)} \end{cases}$$

Poiché b^2 è sempre positivo, l'unica soluzione accettabile è $b^2 = 4$ e:

$$a^2 = 5 - b^2 = 5 - 4 = 1.$$

L'equazione richiesta si ottiene sostituendo i valori dei parametri nell'equazione canonica dell'iperbole:

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1.$$



▶ **Figura 12** Grafico dell'iperbole di equazione $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

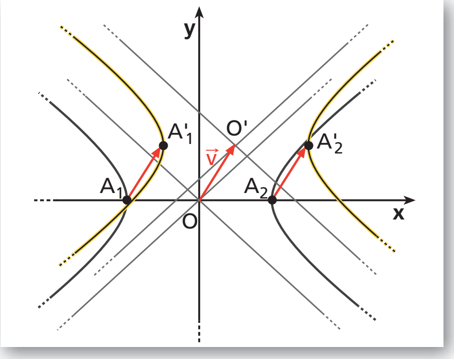
4. L'IPERBOLE TRASLATA

IN PRATICA ▶ Videolezione 23

Analogamente a quanto visto per l'ellisse, se trasformiamo un'iperbole con una traslazione di vettore $\vec{v}$, la curva ottenuta è ancora un'iperbole; infatti, indicando con P' il corrispondente di un punto P dell'iperbole e con F'_1 e F'_2 i corrispondenti dei fuochi F_1 e F_2 dell'iperbole, vale ancora:

$$\left| \overline{P'F'_1} - \overline{P'F'_2} \right| = 2a.$$

L'iperbole traslata ha il centro, i vertici, gli assi di simmetria e gli asintoti che sono i corrispondenti di quelli dell'iperbole data.



◀ **Figura 13**

- L'equazione dell'iperbole corrispondente all'iperbole di equazione
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$
nella stessa traslazione è
$$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=-1.$$

Procedendo in modo analogo a quanto fatto per l'ellisse, si dimostra che l'equazione dell'iperbole corrispondente all'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ nella traslazione di vettore $\vec{v}(p; q)$ è:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1.$$

Svolgendo i calcoli e con opportune sostituzioni, si ottiene l'equazione

$$a'x^2+b'y^2+c'x+d'y+e'=0$$

di secondo grado nelle incognite x e y come l'equazione dell'ellisse traslata. Rispetto a questa, però, nell'equazione dell'iperbole, **a' e b' hanno segno opposto**.
Anche per l'iperbole si dimostra che le coordinate del centro di simmetria O' sono:

$$x_{O'}=p=-\frac{c'}{2a'},\ y_{O'}=q=-\frac{d'}{2b'}.$$

Viceversa, data un'equazione

$$a'x^2+b'y^2+c'x+d'y+e'=0,$$

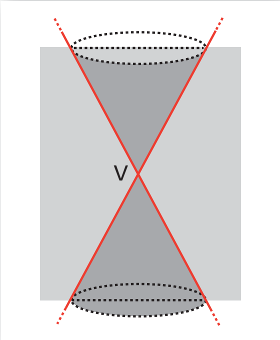
si può dimostrare che, se a' e b' hanno segno opposto, allora, o rappresenta un'iperbole con il centro di coordinate

$$O'\left(-\frac{c'}{2a'};-\frac{d'}{2b'}\right),$$

e con assi di simmetria di equazione

$$x=-\frac{c'}{2a'},\qquad y=-\frac{d'}{2b'},$$

oppure rappresenta una coppia di rette passanti per il centro di simmetria, che chiamiamo **iperbole degenere** (figura 14).



▲ **Figura 14** Se consideriamo l'intersezione fra una superficie conica e un piano che contiene l'asse del cono, otteniamo un'iperbole degenere costituita da due rette che passano per il vertice del cono.

5. L'IPERBOLE EQUILATERA

L'iperbole equilatera riferita agli assi di simmetria

Se nell'equazione canonica, cioè riferita al centro e agli assi di simmetria, si ha $a=b$, l'iperbole si dice **equilatera**.

Per esempio, consideriamo il caso in cui i fuochi siano sull'asse x.

L'equazione dell'iperbole è

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1,$$

che può anche essere scritta nella forma:

$$x^2-y^2=a^2.$$

Se i fuochi sono sull'asse y, l'equazione dell'iperbole equilatera è:

$$\boldsymbol{x^2 - y^2 = -a^2}.$$

Essendo $2a = 2b$, il rettangolo che ha lati paralleli all'asse trasverso e a quello non trasverso diventa un quadrato. Le equazioni degli **asintoti** sono

$$\boldsymbol{y = x} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{y = -x}:$$

gli asintoti coincidono con le bisettrici dei quadranti e sono quindi perpendicolari tra di loro.

La semidistanza focale nell'iperbole equilatera diventa:

$$c = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2},$$

e l'**eccentricità** vale $e = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} \rightarrow \boldsymbol{e = \sqrt{2}}.$

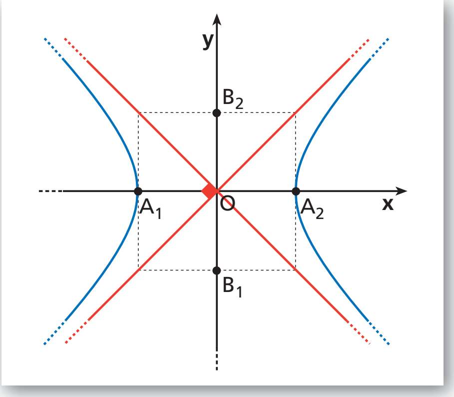
● In generale, un'iperbole si dice *equilatera* se i suoi asintoti sono perpendicolari.

ESEMPIO

L'iperbole di equazione

$$x^2 - y^2 = 9$$

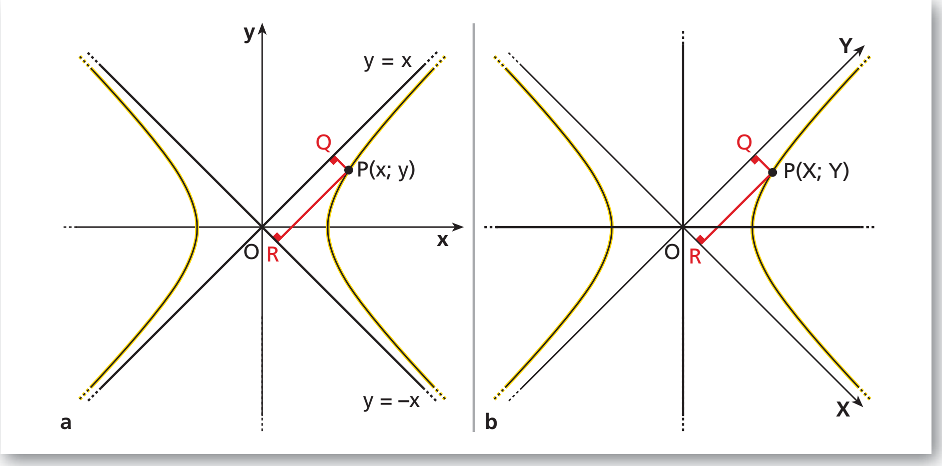
ha per vertici $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$, $B_1(0;-3)$ e $B_2(0;3)$. I fuochi sono $F_1(-3\sqrt{2};0)$ e $F_2(3\sqrt{2};0)$.



► **Figura 15** Grafico dell'iperbole $x^2 - y^2 = 9$ riferita ai suoi assi di simmetria.

L'iperbole equilatera riferita agli asintoti

In un'iperbole equilatera, gli asintoti coincidono con le bisettrici dei quadranti, ovvero sono perpendicolari fra loro. Consideriamo quindi gli asintoti come assi, X e Y, di un nuovo sistema di riferimento per l'iperbole.
Consideriamo l'iperbole nei due sistemi di riferimento xOy e XOY. Sia P un punto dell'iperbole, esso ha coordinate $(x; y)$ nel primo sistema e $(X; Y)$ nel secondo.



◄ **Figura 16** L'iperbole equilatera:
a) riferita agli assi;
b) riferita agli asintoti.

● Distanza di un punto $P(x_0; y_0)$ da una retta di equazione $ax + by + c = 0$:
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Nel riferimento *xOy*	Nel riferimento *XOY*
$\overline{PQ} = \frac{\lvert x - y \rvert}{\sqrt{2}}$	$\overline{PQ} = \lvert X \rvert$
$\overline{PR} = \frac{\lvert x + y \rvert}{\sqrt{2}}$	$\overline{PR} = \lvert Y \rvert$
$\overline{PQ} \cdot \overline{PR} = \frac{\lvert x - y \rvert}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\lvert x + y \rvert}{\sqrt{2}} = \frac{\lvert x^2 - y^2 \rvert}{2} = \frac{a^2}{2}$	$\overline{PQ} \cdot \overline{PR} = \lvert X \rvert \cdot \lvert Y \rvert = \lvert X \cdot Y \rvert$

Confrontando i risultati ottenuti, abbiamo:

$$|XY| = \frac{a^2}{2},$$

$$XY = \pm \frac{a^2}{2}.$$

Considerando il riferimento XOY, se i rami dell'iperbole si trovano nel primo o terzo quadrante, è $XY = \frac{a^2}{2}$, mentre, se si trovano nel secondo o quarto quadrante, è $XY = -\frac{a^2}{2}$.

● Per semplicità, anche nel caso di iperbole equilatera riferita ai propri asintoti, indichiamo gli assi con x e y (anziché con X e Y).

Ponendo uguale a k l'espressione costante del secondo membro, otteniamo che l'equazione di un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti è:

$$\boldsymbol{xy = k},$$

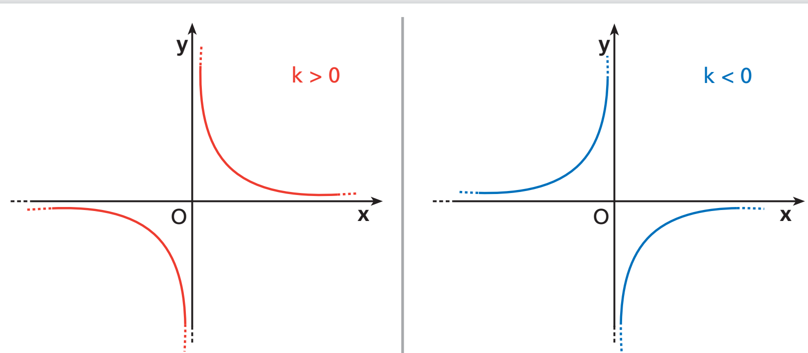
● L'equazione $xy = k$, ovvero $y = \frac{k}{x}$, indica che fra le variabili x e y c'è **proporzionalità inversa**. k è la costante di proporzionalità.

con k costante positiva o negativa.
La relazione fra le costanti a e k relative alle due equazioni $x^2 - y^2 = a^2$ e $xy = k$ è quindi:

$$k = \frac{a^2}{2} \text{ o } k = -\frac{a^2}{2}.$$

Nella figura 17 esaminiamo i due possibili casi.

► **Figura 17** Grafico dell'iperbole equilatera di equazione $xy = k$. Gli assi sono gli asintoti dell'iperbole.



a. Se $k > 0$, i rami dell'iperbole sono nel primo e terzo quadrante.

b. Se $k < 0$, i rami dell'iperbole sono nel secondo e quarto quadrante.

● Se $k = 0$, è $xy = 0$, da cui $x = 0 \vee y = 0$, e si ha un'iperbole equilatera degenere, ossia l'unione dei due assi coordinati.

Gli assi di simmetria dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti sono le bisettrici dei quadranti, e quindi i fuochi e i vertici appartengono a tali rette.
Le coordinate dei vertici reali sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} xy = k \\ y = x \end{cases} \text{per } k > 0, \qquad \begin{cases} xy = k \\ y = -x \end{cases} \text{per } k < 0.$$

I vertici reali hanno coordinate:

per $k > 0$: $A_1(-\sqrt{k}; -\sqrt{k})$ e $A_2(\sqrt{k}; \sqrt{k})$;

per $k < 0$: $A_1(-\sqrt{-k}; \sqrt{-k})$ e $A_2(\sqrt{-k}; -\sqrt{-k})$.

La lunghezza del semiasse trasverso in entrambi i casi è:

$$a = \overline{OA_2} = \sqrt{|k| + |k|} = \sqrt{2|k|}.$$

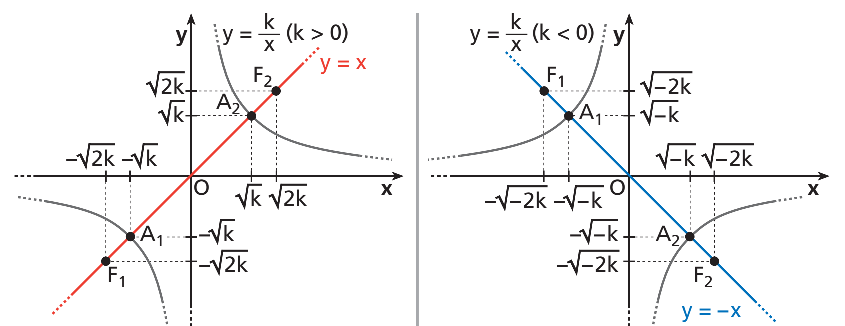
La semidistanza focale è:

$$c = a\sqrt{2} = \sqrt{2|k|} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{|k|}.$$

Le coordinate dei fuochi sono:

per $k > 0$: $F_1(-\sqrt{2k}; -\sqrt{2k})$ e $F_2(\sqrt{2k}; \sqrt{2k})$;

per $k < 0$: $F_1(-\sqrt{-2k}; \sqrt{-2k})$ e $F_2(\sqrt{-2k}; -\sqrt{-2k})$.



◀ **Figura 18**

a. Se $k > 0$, i vertici e i fuochi appartengono alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

b. Se $k < 0$, i vertici e i fuochi appartengono alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

ESEMPIO

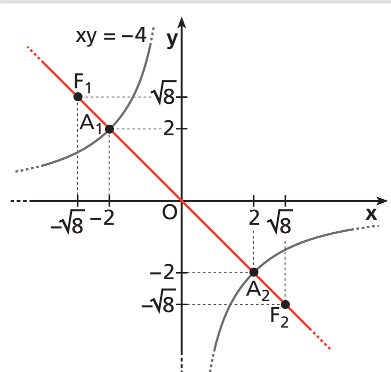
L'iperbole equilatera di equazione

$$xy = -4$$

ha per asse trasverso la bisettrice del secondo e quarto quadrante. I vertici sono i punti

$$A_1(-2; 2) \text{ e } A_2(2; -2).$$

I fuochi sono i punti $F_1(-\sqrt{8}; \sqrt{8})$ e $F_2(\sqrt{8}; -\sqrt{8})$.



▶ **Figura 19** Grafico dell'iperbole $xy = -4$ riferita ai suoi asintoti.

L'equazione dell'iperbole dell'esempio riferita ai propri assi si ottiene ricavando a^2:

$$-\frac{a^2}{2} = k,$$

da cui

$$a^2 = 8.$$

L'equazione cercata, considerando i fuochi sull'asse x, è

$$x^2 - y^2 = 8.$$

IN PRATICA
▶ Videolezione 24

La funzione omografica

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione dell'iperbole ottenuta applicando all'iperbole equilatera riferita agli asintoti di equazione $xy = 1$ la traslazione di vettore $\vec{v}(1; 3)$.
Scriviamo le equazioni della traslazione e ricaviamo la x e la y:

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 3 \end{cases}$$

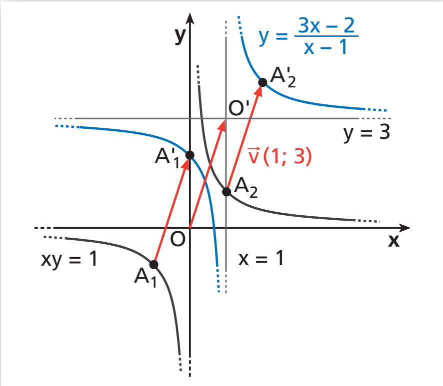
Sostituiamo nell'equazione data le espressioni di x e y e togliamo gli apici. L'equazione diventa:

$$(x - 1)(y - 3) = 1.$$

Ricaviamo la y:

$$y - 3 = \frac{1}{x - 1} \rightarrow y = 3 + \frac{1}{x - 1} \rightarrow y = \frac{3x - 3 + 1}{x - 1} \rightarrow y = \frac{3x - 2}{x - 1}.$$

L'equazione ottenuta rappresenta un'iperbole che ha centro in $O'(1; 3)$ e asintoti paralleli agli assi cartesiani di equazione $x = 1$ e $y = 3$.



▶ **Figura 20** In blu il grafico dell'iperbole di equazione $y = \frac{3x-2}{x-1}$ che ha centro in $O'(1;3)$ e asintoti di equazione $x = 1$ e $y = 3$.

In generale, si può dimostrare che, se si considera un'iperbole equilatera che ha gli asintoti paralleli agli assi cartesiani, allora tale curva ha un'equazione del tipo:

$$\boxed{y = \frac{ax + b}{cx + d},} \quad \text{con } c \neq 0 \text{ e } ad - bc \neq 0.$$

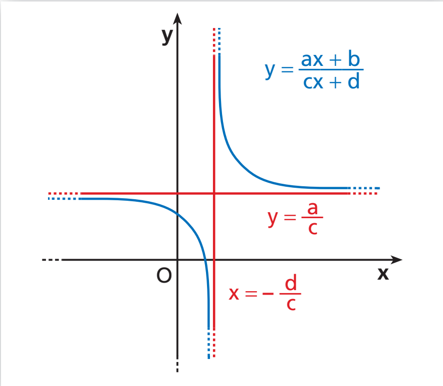
Possiamo leggere quest'ultima relazione come funzione $y = f(x)$ della variabile x: la **funzione omografica**.

Le equazioni degli asintoti sono:

$$x = -\frac{d}{c} \quad \text{e} \quad y = \frac{a}{c}.$$

Le coordinate del centro di simmetria sono:

$$\boxed{C\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right).}$$



▶ **Figura 21** Iperbole equilatera riferita ad assi paralleli agli asintoti.

Viceversa, si può dimostrare che ogni equazione del tipo precedente rappresenta un'iperbole equilatera.

ESEMPIO

L'equazione

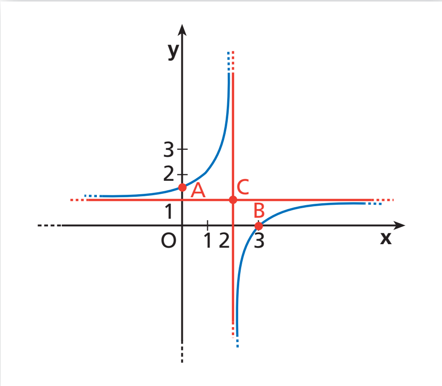
$$y = \frac{x-3}{x-2}$$

rappresenta un'iperbole che ha centro $C(2; 1)$. Per disegnare il suo grafico possiamo considerare alcuni suoi punti. Per esempio, determiniamo quelli di intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x-3}{x-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow A\left(0; \frac{3}{2}\right)$$

e

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x-3}{x-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow B(3; 0).$$



◀ **Figura 22** Grafico della funzione omografica $y = \frac{x-3}{x-2}$.

● Affinché l'equazione $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ rappresenti un'iperbole occorre che sia $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$.

Se una di queste due condizioni non è soddisfatta, l'equazione rappresenta invece una retta.

Se $c = 0$, l'equazione diventa:

$$y = \frac{ax+b}{d} \rightarrow y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d},$$

che rappresenta una retta.

Se $ad - bc = 0$, allora possiamo scrivere:

$$ad = bc \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Indicando con m il rapporto $\frac{a}{c}$, abbiamo:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = m \rightarrow a = mc \text{ e } b = md.$$

Sostituendo a e b nell'equazione data, otteniamo:

$$y = \frac{mcx + md}{cx+d} \rightarrow y = \frac{m(cx+d)}{cx+d} \rightarrow y = m, \text{ con } x \neq -\frac{d}{c},$$

che è l'equazione di una retta parallela all'asse x, privata del suo punto di ascissa $-\frac{d}{c}$.

● Per esempio, l'equazione

$$y = \frac{2x+6}{x+3}$$

non rappresenta un'iperbole equilatera perché si può scrivere:

$$y = \frac{2(x+3)}{x+3} \rightarrow$$
$$\rightarrow y = 2, \text{ con } x \neq -3.$$

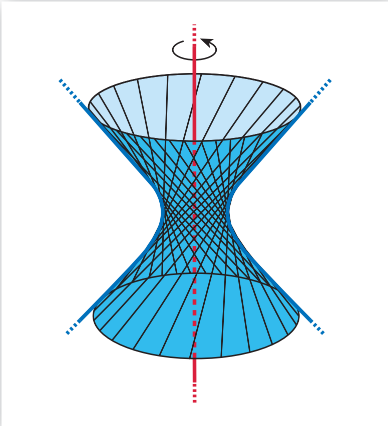
Si tratta quindi di una retta parallela all'asse x privata del punto $(-3; 2)$.

LE TORRI DI RAFFREDDAMENTO

Perché le torri di raffreddamento hanno forma iperbolica?

▶ Il quesito completo a pag. 435

Le torri di raffreddamento, in particolare quelle delle centrali nucleari, hanno una forma «a iperbole».
Più precisamente, la loro superficie è parte di un iperboloide a una falda che si ottiene facendo ruotare un'iperbole intorno al suo asse non trasverso. In figura puoi osservarne un modello,



o meglio una sua parte, poiché l'iperboloide ha estensione infinita.
Per ogni punto dell'iperboloide a una falda passano due rette che appartengono completamente alla superficie. Per questo si dice anche che essa è una superficie doppiamente rigata.

Robustezza e risparmio
La scelta di utilizzare questa forma nelle torri di raffreddamento è dovuta a due ragioni principali:

- è una forma molto stabile da un punto di vista strutturale;
- è facile da costruire utilizzando travi metalliche (disposte come alcune delle rette del reticolo).

Inoltre, una torre con questa forma ha la caratteristica di offrire il minimo profilo al vento e quindi corre meno rischi di essere abbattuta da venti di eccezionale intensità.

L'iperboloide, infine, richiede la minore quantità possibile di materiale per essere costruito.
Per dare un'idea di quanto poco materiale serva, basta pensare che una torre alta 150 metri può avere uno spessore di 12 centimetri, cioè quello di un solo mattone, senza perdere in robustezza.

La scelta di utilizzare la forma a iperboloide, quindi, non dipende da proprietà termiche o di raffreddamento delle acque di scarico dei processi industriali. Viene adottata solo per ragioni di economia (il poco materiale necessario) e di robustezza (si possono usare travi metalliche che formano il reticolo sul quale costruire l'iperboloide).
Per queste ragioni tale struttura è usata anche in ambiti architettonici non industriali.

Iperboloidi e architettura

La struttura dell'iperboloide è stata utilizzata in molte opere architettoniche, per esempio da Oscar Niemeyer, nella Cattedrale di Brasilia (foto in basso), da Le Corbusier e da Vladimir G. Shukhov.
Nelle foto a fianco trovi la torre di Shukhov a Mosca e la torre della città di Kōbe in Giappone.

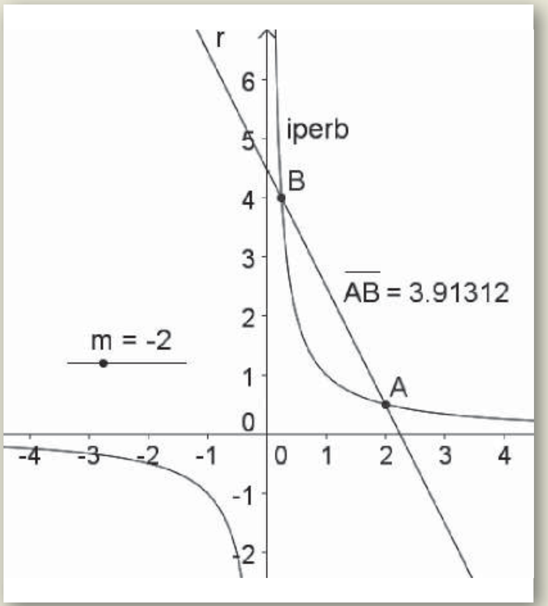
LABORATORIO DI MATEMATICA
L'IPERBOLE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Determiniamo, con l'aiuto di GeoGebra, il coefficiente angolare m della retta di equazione $y = mx + \frac{9}{2}$, in modo che tale retta, intersecando l'iperbole di equazione $xy = 1$, formi una corda lunga $d = \frac{7\sqrt{5}}{4}$.

▲ Figura 1

- Entriamo in ambiente GeoGebra e per mezzo della riga di inserimento immettiamo nella finestra algebrica (figura 1) la lunghezza d della corda e poi l'equazione dell'iperbole, il cui grafico appare automaticamente nella zona del disegno (figura 2).
- Con *Slider* attiviamo una *slider* alla quale diamo il nome m.
- Inseriamo la retta r con il coefficiente angolare m dipendente dalla *slider* (figura 2).
- Con *Intersezione fra due figure* ricaviamo i due punti A e B.
- Con *Segmento per due punti* applicato ad A e a B evidenziamo il segmento, facendo apparire la sua lunghezza sia nel disegno sia nella finestra algebrica.
- Con il mouse spostiamo il cursore della *slider* e di conseguenza variano l'inclinazione della retta r, la posizione dei punti A e B e la lunghezza della corda AB.
- Quando la lunghezza della corda coincide con d, ci fermiamo e leggiamo il coefficiente angolare della retta r: $m = -2$, il risultato richiesto (figura 2).



▲ Figura 2

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 9 esercitazioni in più

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer risolvi i seguenti problemi.

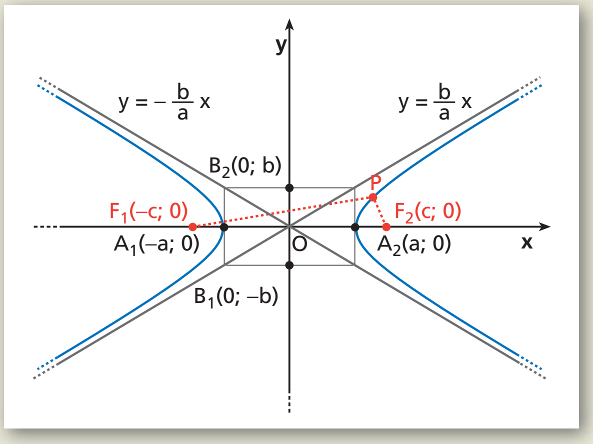
1 Determina il coefficiente k dell'iperbole di equazione $xy = k$, sapendo che intersecando la retta di equazione $y = -x + 3$ forma una corda lunga $d = 5\sqrt{2}$. $[k = -4]$

2 Dette A, B, C e D le intersezioni dell'iperbole di equazione $xy = k$ con la circonferenza di equazione $4x^2 + 4y^2 = 17$, determina il coefficiente k in modo che il rettangolo $ABCD$ abbia area $S = \frac{15}{2}$. $[k = -1 \vee k = 1]$

LA TEORIA IN SINTESI

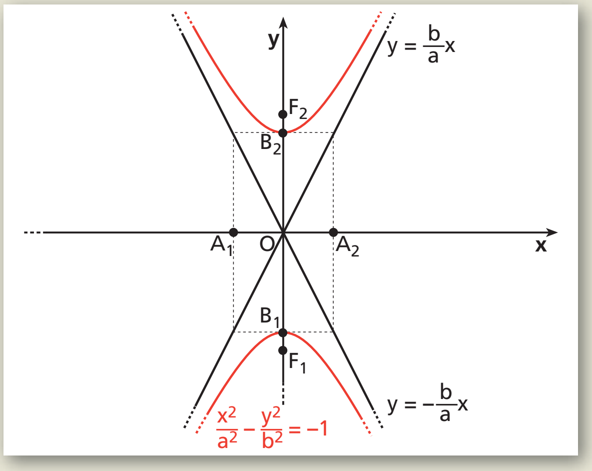
L'IPERBOLE

1. L'IPERBOLE E LA SUA EQUAZIONE



- **Iperbole**: luogo geometrico dei punti P che hanno costante la differenza delle distanze da due punti F_1 e F_2, detti **fuochi**.
- **L'iperbole con i fuochi sull'asse *x***
  - **Equazione canonica** dell'iperbole quando i fuochi sono sull'asse x e l'asse y passa per il punto medio del segmento che li congiunge:
    $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
  - **Fuochi**: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, con $a < c$ e $c^2 - a^2 = b^2$.

    ESEMPIO: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ è l'equazione dell'iperbole con fuochi $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$.
  - **Vertici reali**: $A_1(-a; 0)$ e $A_2(a; 0)$, intersezioni dell'iperbole con l'asse x.
    $B_1(0; -b)$ e $B_2(0; b)$ *non* sono intersezioni con l'asse y e sono detti **vertici non reali**.
  - **Asse trasverso A_1A_2**: asse passante per i vertici reali. B_1B_2 è invece detto **asse non trasverso**.
  - L'iperbole non è una curva chiusa ed è costituita da due **rami** distinti. Man mano che ci si allontana dall'origine, entrambi i rami si avvicinano sempre più a due rette, dette **asintoti**, di equazioni:
    $$y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$
    ESEMPIO: Nell'iperbole dell'esempio precedente si hanno $A_1(-4; 0)$ e $A_2(4; 0)$, $B_1(0; -3)$ e $B_2(0; 3)$.
    Gli asintoti hanno equazioni:
    $$y = \pm\frac{3}{4}x.$$
  - **Eccentricità *e***: rapporto fra la distanza focale e la lunghezza dell'asse trasverso; indica la forma più o meno schiacciata dell'iperbole.
    $$e = \frac{\text{distanza focale}}{\text{lunghezza dell'asse trasverso}}, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}, e > 1.$$



- **L'iperbole con i fuochi sull'asse *y***
  - Se i fuochi dell'iperbole sono sull'asse y, **l'equazione canonica** dell'iperbole è:
    $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$
  - L'asse y è l'asse trasverso e i **vertici reali** sono i punti $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$; l'asse x è l'asse non trasverso e i punti $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ sono detti **vertici non reali**. I **fuochi** sono $F_1(0; -c)$, $F_2(0;c)$, con $c^2 = a^2 + b^2$, e quindi $c = \sqrt{a^2+b^2}$.
  - **Eccentricità**: $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$, $e > 1$.

2. LE POSIZIONI DI UNA RETTA RISPETTO A UN'IPERBOLE

- Considerato il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

formato dalle equazioni di un'iperbole e di una retta, si studia il segno del discriminante dell'equazione risolvente. Se:

- $\boldsymbol{\Delta > 0}$, il sistema ha due soluzioni reali e distinte; **la retta è secante l'iperbole in due punti**;
- $\boldsymbol{\Delta = 0}$, il sistema ha due soluzioni reali e coincidenti; **la retta è tangente all'iperbole in un punto**;
- $\boldsymbol{\Delta < 0}$, il sistema non ha soluzioni reali; **la retta è esterna all'iperbole**.

Se l'equazione risolvente è di primo grado, la retta è secante l'iperbole in un solo punto.

- Per determinare le equazioni delle **rette tangenti condotte da un punto** $P(x_0; y_0)$ all'iperbole di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$:
  - si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per P, $y - y_0 = m(x - x_0)$;
  - si scrive il sistema formato dalle equazioni del fascio e dell'iperbole:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}$$

  - si arriva all'**equazione risolvente di secondo grado** nella variabile x oppure nella variabile y;
  - si pone la condizione di tangenza, $\boldsymbol{\Delta = 0}$;
  - si risolve l'equazione di secondo grado rispetto a m:
    – se $\boldsymbol{m_1 \neq m_2}$, le rette tangenti sono due e il punto è esterno all'iperbole;
    – se $\boldsymbol{m_1 = m_2}$, la retta tangente è una sola e il punto appartiene all'iperbole;
    – se $\boldsymbol{m_1, m_2 \notin \mathbb{R}}$, non esistono rette tangenti e il punto è interno all'iperbole.

Se il punto P appartiene a un asintoto, fra le equazioni delle tangenti si trova anche l'equazione dell'asintoto stesso. Gli asintoti, infatti, sono considerati tangenti all'iperbole in un punto all'infinito.

- **Formula di sdoppiamento**: $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$ o $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = -1$.

Fornisce l'equazione della tangente a un'iperbole in un suo punto $(x_0; y_0)$.

3. COME DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UN'IPERBOLE

- L'equazione dell'iperbole contiene due coefficienti a e b, sono quindi necessarie due condizioni per determinarli. Alcune condizioni possibili sono le seguenti:
  - sono note le coordinate di un fuoco e di un vertice;
  - l'iperbole passa per un punto noto e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice);
  - l'iperbole passa per un punto noto e si conosce l'eccentricità;
  - l'iperbole passa per due punti noti;
  - è nota l'eccentricità e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice);
  - sono note l'equazione di un asintoto e le coordinate di un fuoco (o di un vertice, o di un punto dell'iperbole);
  - è nota l'equazione di una retta tangente all'iperbole e sono note le coordinate di un punto della curva (o di un vertice, o di un fuoco).

4. L'IPERBOLE TRASLATA

- **Traslazione di un'iperbole mediante vettore $\vec{v}(p; q)$**. La curva ottenuta è ancora un'iperbole di equazione

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = \pm 1,$$

riconducibile alla forma:

$a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0$, dove a' e b' hanno segno opposto.

Le coordinate del centro di simmetria O' sono: $x_{O'} = p = -\frac{c'}{2a'}$, $y_{O'} = q = -\frac{d'}{2b'}$.

Viceversa, data un'equazione

$a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0$,

se a' e b' hanno segno opposto, essa rappresenta un'iperbole con **centro** di coordinate $O'\left(-\frac{c'}{2a'}; -\frac{d'}{2b'}\right)$ e con **assi di simmetria** di equazioni $x = -\frac{c'}{2a'}$, $y = -\frac{d'}{2b'}$, oppure rappresenta una coppia di rette passanti per il centro di simmetria. Tale coppia è detta **iperbole degenere**.

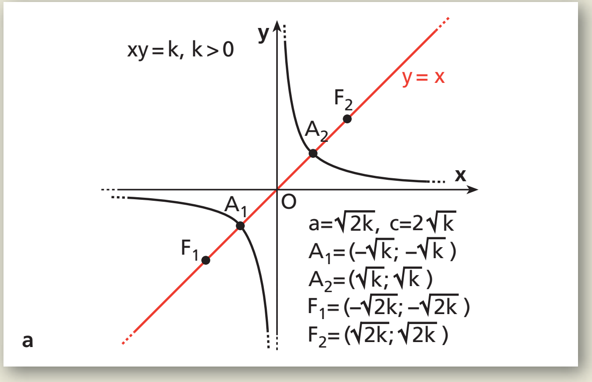
5. L'IPERBOLE EQUILATERA

- **Iperbole equilatera**: si ha $a = b$ e l'equazione diventa:
  - $x^2 - y^2 = a^2$ se i fuochi sono sull'asse x,
  - $x^2 - y^2 = -a^2$ se i fuochi sono sull'asse y.

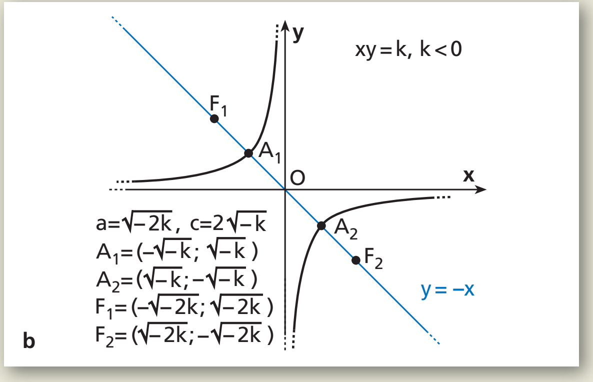
- Gli **asintoti** coincidono con le **bisettrici dei quadranti**. L'equazione dell'iperbole equilatera **riferita agli asintoti** è:

  $xy = k$, con k costante positiva o negativa.

  - Se $k > 0$, i rami dell'iperbole sono nel I e III quadrante (figura *a*).
  - Se $k < 0$, sono nel II e IV quadrante (figura *b*).



a



b

- Un'iperbole equilatera che ha gli asintoti paralleli agli assi cartesiani ha un'equazione del tipo

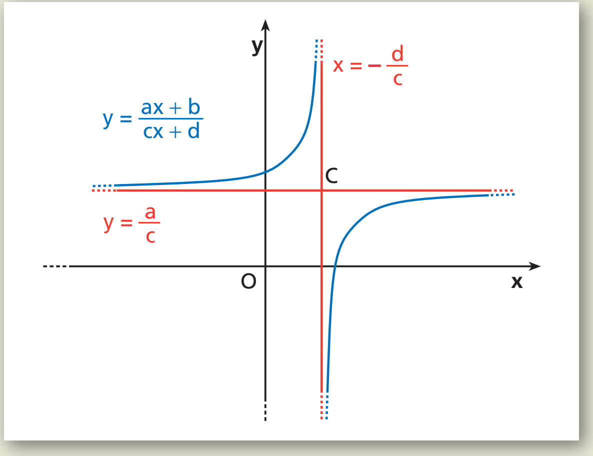
  $$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \text{ con } c \neq 0 \text{ e } ad - bc \neq 0.$$

  L'equazione esprime una funzione detta **funzione omografica**.
  Gli **asintoti** hanno equazioni:

  $$x = -\frac{d}{c} \text{ e } y = \frac{a}{c}.$$

  Il **centro di simmetria** è $C\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.

  ESEMPIO: $y = \frac{3x - 5}{x + 2}$ è l'equazione di un'iperbole equilatera di asintoti $x = -2$ e $y = 3$.



1. L'IPERBOLE E LA SUA EQUAZIONE

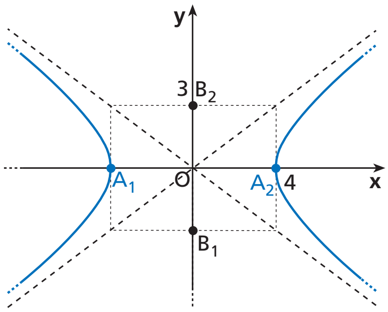
▶ Teoria a pag. 436

1 Determina l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano la cui differenza delle distanze dai punti $(-4; 0)$ e $(4; 0)$ è $2\sqrt{10}$. $[6x^2 - 10y^2 = 60]$

2 Scrivi l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano la cui differenza delle distanze dai punti $(-1; 0)$ e $(1; 0)$ è $\frac{3}{2}$. $\left[\frac{16}{9}x^2 - \frac{16}{7}y^2 = 1\right]$

3 Scrivi l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano la cui differenza delle distanze dai punti $A(0; -\sqrt{7})$ e $B(0; \sqrt{7})$ è 2. $\left[\frac{x^2}{6} - y^2 = -1\right]$

4 **COMPLETA** utilizzando i dati della figura.



Vertici reali di coordinate ....

Fuochi di coordinate ....

Vertici non reali di coordinate ....

Asse non trasverso lungo ....

Asse trasverso lungo ....

Distanza focale uguale a ....

Eccentricità $e =$ ....

Asintoti di equazioni ....

5 **ESERCIZIO GUIDA**

Data l'equazione dell'iperbole $9x^2 - 16y^2 = 144$, determiniamo la misura del semiasse trasverso, le coordinate dei vertici e dei fuochi, l'eccentricità e l'equazione degli asintoti; poi rappresentiamo la curva graficamente.

Dividiamo entrambi i membri dell'equazione data per il termine noto, per ridurla in forma canonica,

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

da cui deduciamo che si tratta di un'iperbole con i fuochi sull'asse x con $a = 4$ e $b = 3$. Le coordinate dei vertici reali sono

$$A_1(-4; 0), \quad A_2(4; 0),$$

e quelle dei vertici non reali sono:

$$B_1(0; -3), \quad B_2(0; 3).$$

Il semiasse trasverso misura 4.
Determiniamo il valore di c^2,

$$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25,$$

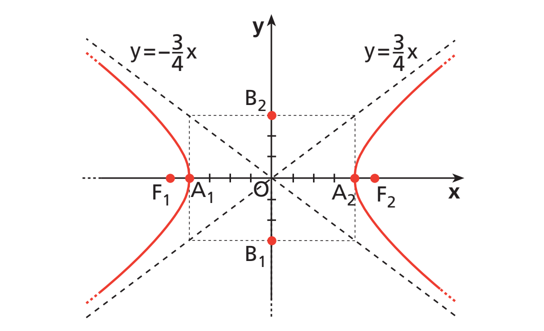
le coordinate dei fuochi $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$,

il valore dell'eccentricità $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$,

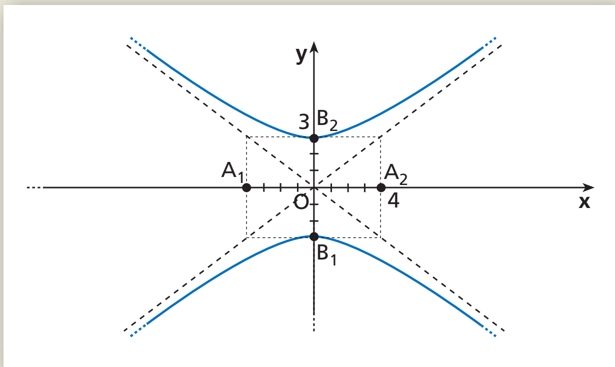
e infine le equazioni degli asintoti

$$y = \pm\frac{b}{a}x \quad \rightarrow \quad y = \pm\frac{3}{4}x.$$

Rappresentiamo l'iperbole graficamente, dopo aver disegnato i quattro vertici e gli asintoti, che sono le diagonali del rettangolo individuato dai vertici.



Osservazione. Se l'equazione fosse $9x^2 - 16y^2 = -144$, si tratterebbe di un'iperbole con i fuochi sull'asse y con coordinate $(0; -5)$ e $(0; 5)$, con gli stessi vertici e asintoti, ma di eccentricità $e = \frac{c}{b} = \frac{5}{3}$.



Riconosci quali delle seguenti equazioni rappresentano iperboli e, in caso affermativo, determina la misura del semiasse trasverso, le coordinate dei vertici e dei fuochi, l'equazione degli asintoti, l'eccentricità e rappresenta la curva graficamente.

6 a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 2$; c) $1 - x^2 + 9y^2 = 0$;

b) $6x^2 - y^2 - 1 = 0$; d) $9x^2 - y^2 = 1$.

7 a) $y^2 = 3 - x^2$; c) $4x^2 = y^2 - 4$;

b) $7x^2 = y^2 + 2$; d) $-4x^2y^2 + 1 = 0$.

8 a) $4 - x^2 + 16y^2 = 0$; c) $16x^2 - y^2 - 25 = 0$;

b) $y^2 = -1 + 4x^2$; d) $9x^2 - y^2 = -4$.

9 a) $y^2 = 36 + 9x^2$; c) $y^2 = \frac{4 + x^2}{2}$;

b) $x^2 = \frac{-9 + y^2}{9}$; d) $3x^2 + 3y^2 - 16 = 0$.

10 TEST Which of the following is an equation of a hyperbola with horizontal transverse axis and asymptotes $y = \pm\frac{4}{3}x$?

A $x^2 - y^2 = 12$

B $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

C $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

D $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

E $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest,* 2000)

11 Put $x^2 + 4x - 3y^2 + 12y = 35$ in standard form by completing squares. Identify the conic.

(USA *Southern Illinois University Carbondale,* Final Exam, 2002)

$\left[\text{hyperbola: } \frac{(x+2)^2}{27} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1\right]$

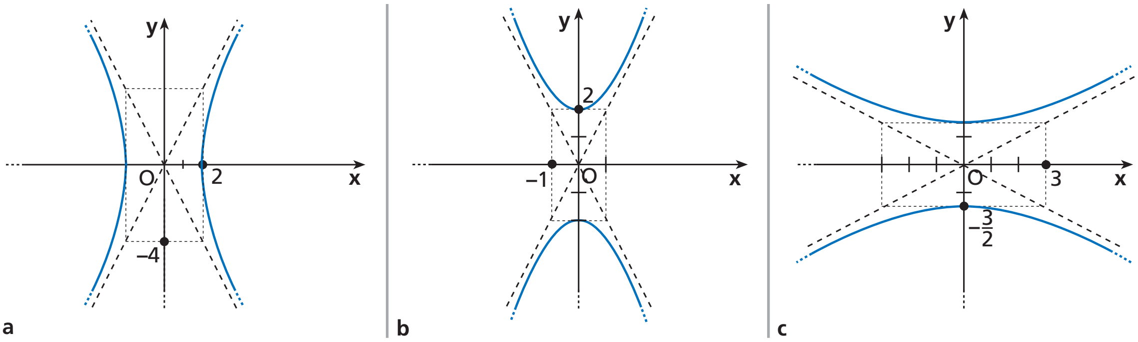
12 Find the asymptotes of

$$\frac{(x+1)^2}{36} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1.$$

(USA *Southern Illinois University Carbondale,* Final Exam, 2002)

$\left[y = \pm\frac{1}{2}(x+1) + 3\right]$

13 Scrivi le equazioni delle iperboli rappresentate nei seguenti grafici, utilizzando i dati delle figure, e trova le coordinate dei vertici, quelle dei fuochi, l'eccentricità e le equazioni degli asintoti.



$\left[\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1;\ \frac{y^2}{4}-x^2=1;\ \frac{4}{9}y^2-\frac{x^2}{9}=1\right]$

14 Scrivi l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x con le caratteristiche indicate e calcola l'eccentricità e (ricordando che a, b, c sono rispettivamente le misure dei semiassi e della semidistanza focale).

a) $a=2,\quad b=4.$ $\left[4x^2-y^2=16;\sqrt{5}\right]$

b) $a=1,\quad c=2.$ $\left[3x^2-y^2=3;2\right]$

c) $b=4,\quad c=6.$ $\left[\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1;\frac{3}{5}\sqrt{5}\right]$

d) $2a=8,\quad c=6.$ $\left[\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1;\frac{3}{2}\right]$

e) $b=3,\quad 2c=\sqrt{40}.$ $\left[9x^2-y^2=9;\sqrt{10}\right]$

f) $c=3,\quad b^2=\frac{11}{4}.$ $\left[\frac{4}{25}x^2-\frac{4}{11}y^2=1;\frac{6}{5}\right]$

15 Scrivi l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse y con le caratteristiche indicate e calcola l'eccentricità e (a, b, c sono rispettivamente le misure dei semiassi e della semidistanza focale).

a) $a=1,\quad b=3.$ $\left[9x^2-y^2=-9;\frac{\sqrt{10}}{3}\right]$

b) $b=2,\quad c=5.$ $\left[\frac{x^2}{21}-\frac{y^2}{4}=-1;\frac{5}{2}\right]$

c) $a=3,\quad c=8.$ $\left[\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{55}=-1;\frac{8}{\sqrt{55}}\right]$

d) $a=2,\quad b^2=12.$ $\left[y^2-3x^2=12;\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$

e) $2b=6,\quad c=\frac{9}{2}.$ $\left[4x^2-5y^2=-45;\frac{3}{2}\right]$

16 **VERO O FALSO?**

a) L'eccentricità dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=-1$ è $\frac{\sqrt{13}}{3}$. V F

b) L'iperbole di equazione $4x^2-36y^2=-1$ ha un vertice reale nel punto $\left(0;\frac{1}{6}\right)$. V F

c) Se l'asse trasverso di un'iperbole è uguale all'asse non trasverso, l'eccentricità è 1. V F

d) L'iperbole di equazione $2x^2-9y^2-9=0$ ha i fuochi sull'asse y. V F

e) Gli asintoti dell'iperbole di equazione $4x^2-9y^2+36=0$ hanno equazione $y=\pm\frac{3}{2}x$. V F

17 **TEST** Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, il luogo dei punti le cui coordinate $(x;y)$ soddisfano l'equazione

$$\left|x^2-y^2\right|=1$$

è costituito da:

A un'iperbole.

B una coppia di iperboli.

C una coppia di circonferenze.

D una circonferenza.

E una coppia di rette.

(*CISIA, Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso,* 2001)

Bergamini, Trifone, Barozzi **MATEMATICA.BLU - Vol. 3** © Zanichelli 2012 *con Maths in English*

Trova per quali valori di k le seguenti equazioni rappresentano:
a) un'iperbole con i fuochi sull'asse x; b) un'iperbole con i fuochi sull'asse y.

18 $\frac{x^2}{2k+6}+\frac{y^2}{2k}=1$ [a) $-3<k<0$; b) impossibile]

19 $(k+1)x^2+y^2=2k$ [a) $k<-1$; b) impossibile]

20 Per quali valori di k l'espressione $\frac{4k-6}{3k}$ può rappresentare l'eccentricità di un'iperbole? [$k<0 \vee k>6$]

21 Determina i valori di k affinché l'equazione $\frac{x^2}{2k-1}+\frac{y^2}{k^2-4}=1$ rappresenti:
a) un'iperbole;
b) un'iperbole con i fuochi sull'asse x;
c) un'iperbole che passa per il punto di coordinate $(0; -\sqrt{5})$;
d) un'iperbole con un fuoco di coordinate $(2; 0)$.

$\left[\text{a) } k<-2 \vee \frac{1}{2}<k<2;\ \text{b) } \frac{1}{2}<k<2;\ \text{c) } k=-3;\ \text{d) } k=1\right]$

22 Trova per quali valori di k l'equazione $\frac{x^2}{4k^2-1}-\frac{y^2}{k-3}=1$ rappresenta:
a) un'ellisse;
b) una circonferenza;
c) un'iperbole;
d) un'iperbole con i fuochi sull'asse y;
e) un'iperbole con i fuochi sull'asse y che ha distanza focale uguale a 4.

$\left[\text{a) } k<-\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2}<k<3;\ \text{b) } k=\frac{-1\pm\sqrt{65}}{8};\ \text{c) } -\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2} \vee k>3;\ \text{d) } -\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2};\ \text{e) } k=0 \vee k=-\frac{1}{4}\right]$

23 Determina i valori di k affinché l'equazione $\frac{x^2}{3-k}+\frac{y^2}{4k+3}=1$ rappresenti:
a) un'iperbole;
b) un'iperbole con i fuochi sull'asse y;
c) un'iperbole con un fuoco di coordinate $(0; -2\sqrt{5})$;
d) un'iperbole che passa per il punto $\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{4}\right)$.

$\left[\text{a) } k<-\frac{3}{4} \vee k>3;\ \text{b) } k>3;\ \text{c) } k=4;\ \text{d) } k=-1 \vee k=-\frac{183}{64}\right]$

24 Trova per quali valori di k l'equazione $\frac{x^2}{k-2}+\frac{y^2}{6k}=1$ rappresenta:
a) un'iperbole;
b) un'iperbole con i fuochi sull'asse x;
c) un'iperbole con i fuochi sull'asse y;
d) un'iperbole con gli asintoti di equazione $y=\pm\sqrt{6}\,x$.

[a) $0<k<2$; b) impossibile; c) $0<k<2$; d) $k=1$]

25 Trova per quali valori di k l'equazione $(2k-1)x^2+(k-3)y^2=k$ rappresenta:
a) un'iperbole;
b) un'iperbole con i fuochi sull'asse x;
c) un'iperbole con i fuochi sull'asse y;
d) un'iperbole con distanza focale $4\sqrt{\frac{2}{3}}$.

$\left[\text{a) } \frac{1}{2}<k<3;\ \text{b) } \frac{1}{2}<k<3;\ \text{c) impossibile; d) } k=\frac{12}{19} \vee k=2\right]$

26 Determina i valori di k per cui l'equazione $(k+2)x^2-(1-k^2)y^2+1=0$ rappresenta un'iperbole:
a) con i fuochi sull'asse x;
b) passante per il punto $(3; 1)$;
c) con un vertice di coordinate $(1; 0)$.

[a) $k<-2$; b) $k=-6 \vee k=-3$; c) $k=-3$]

27 TEST How many points do the graphs of $4x^2 - 9y^2 = 36$ and $x^2 - 2x + y^2 = 15$ have in common?

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2000)

2. LE POSIZIONI DI UNA RETTA RISPETTO A UN'IPERBOLE

▶ Teoria a pag. 444

Stabilisci la posizione reciproca delle seguenti coppie di iperboli e rette e, nei casi in cui la retta non sia esterna, determina le coordinate dei punti di intersezione.

28 $3x^2 - 4y^2 = 12;\quad x + y - 1 = 0.$ [tangente: $(4; -3)$]

29 $4x^2 - 9y^2 = 36;\quad 4x - 3y - 12 = 0.$ $\left[\text{secante: } (3; 0), \left(5; \frac{8}{3}\right)\right]$

30 $x^2 - 4y^2 = 20;\quad 3x + 2y = 0.$ [esterna]

31 Trova per quale valore di a l'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = a^2$ stacca sulla retta di equazione $x - 4y = 0$ una corda lunga $16\sqrt{\frac{17}{15}}$. [$a = \pm 8$]

32 Verificare che le rette parallele a un asintoto dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ incontrano l'iperbole in un solo punto, fuorché l'asintoto stesso, che non ha intersezioni con l'iperbole.

(*Università della Calabria, Dipartimento di Matematica*, 2008)

33 Calcola la lunghezza della corda staccata dall'iperbole di equazione $7x^2 - 4y^2 = 3$ sulla retta di equazione $5x + 4y = 0$. [$\sqrt{41}$]

34 Calcola la lunghezza della corda staccata dall'iperbole di equazione $3x^2 - 8y^2 = -5$ sulla retta di equazione $x - 4y + 5 = 0$. [$\sqrt{17}$]

35 Dopo aver determinato l'equazione dell'iperbole avente un vertice reale di coordinate $(2; 0)$ e un vertice non reale nel punto $(0; -4)$, calcola la lunghezza della corda individuata sulla bisettrice del primo e terzo quadrante. $\left[\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1; \frac{8\sqrt{6}}{3}\right]$

36 Dopo aver determinato le coordinate dei punti A e B di intersezione dell'iperbole di equazione $x^2 - \frac{y^2}{8} = -1$ con la retta di equazione $y = 4x$, indicati con F_1 e F_2 i fuochi dell'iperbole, verifica che il quadrilatero AF_1BF_2 è un parallelogramma e determinane l'area. [$A(-1; -4)$, $B(1; 4)$; 6]

37 Determina l'area del triangolo ABF, dove A e B sono i punti di intersezione della retta di equazione $x = 4$, con l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = -1$, e F è un fuoco dell'iperbole. [12]

38 Nel fascio di rette di equazione $y = k$ determina quelle sulle quali l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ stacca una corda di lunghezza $2\sqrt{30}$. [$y = \pm 6$]

39 Nel fascio di rette di centro $O(0; 0)$ determina quella sulla quale l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{36} = 1$ stacca una corda di lunghezza 4.

$\left[y = \pm\frac{3\sqrt{10}}{10}x\right]$

40 Trova per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la retta di equazione $y - 2x - k = 0$ interseca l'iperbole di equazione $3x^2 - y^2 = 1$. Posto $k = 1$, determina la lunghezza della corda intercettata dall'iperbole sulla retta.

$\left[k \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee k \geq \frac{\sqrt{3}}{3}; 2\sqrt{10}\right]$

Le rette tangenti a un'iperbole

41 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo le equazioni delle tangenti all'iperbole di equazione $x^2 - 4y^2 = 9$, condotte dal punto $P\left(\frac{9}{5}; 0\right)$.

L'equazione di una retta generica per P è:

$$y - 0 = m\left(x - \frac{9}{5}\right) \quad \rightarrow \quad y = mx - \frac{9}{5}m.$$

Consideriamo il sistema costituito dall'equazione della retta e dall'equazione dell'iperbole:

$$\begin{cases} y = mx - \frac{9}{5}m \\ x^2 - 4y^2 = 9 \end{cases}$$

Troviamo l'equazione risolvente e riduciamola a forma normale:

$$x^2 - 4\left(mx - \frac{9}{5}m\right)^2 = 9 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4m^2x^2 - \frac{324}{25}m^2 + \frac{72}{5}m^2x = 9$$

$$25x^2 - 100m^2x^2 - 324m^2 + 360m^2x = 225 \quad \rightarrow \quad 25(1 - 4m^2)x^2 + 360m^2x - 9(36m^2 + 25) = 0.$$

Imponiamo che Δ $\left(\text{in questo caso } \frac{\Delta}{4}\right)$ sia nullo:

$$(180m^2)^2 - 25 \cdot (1 - 4m^2) \cdot (-9)(36m^2 + 25) = 0$$

$$32\,400m^4 + 225(1 - 4m^2) \cdot (36m^2 + 25) = 0.$$

Dividiamo i due membri per 225:

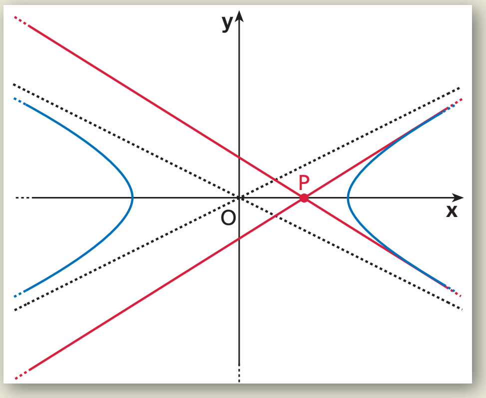
$$\cancel{144m^4} + 36m^2 - \cancel{144m^4} + 25 - 100m^2 = 0.$$

Riduciamo a forma normale e risolviamo l'equazione ottenuta:

$$64m^2 - 25 = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 = \frac{25}{64} \quad \rightarrow \quad m = \pm\frac{5}{8}.$$

Sostituendo i valori ottenuti nell'equazione della retta per P, otteniamo le equazioni delle tangenti richieste:

$$y = -\frac{5}{8}x + \frac{9}{8}, \quad y = \frac{5}{8}x - \frac{9}{8}.$$



42 Data l'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 16$, determina le equazioni delle tangenti condotte dal punto $P\left(\frac{16}{5}; 0\right)$.

$[5x + 3y - 16 = 0; 5x - 3y - 16 = 0]$

43 Conduci la tangente all'iperbole di equazione $x^2 - 4y^2 = 20$ dal suo punto di ordinata 2 del II quadrante.
$[3x + 4y + 10 = 0]$

44 Scrivi le equazioni delle rette tangenti all'iperbole di equazione $4x^2 - 9y^2 = 36$ condotte dal punto $P\left(0; -\frac{3}{2}\right)$ e, detti A e B i punti di contatto, calcola l'area del triangolo PAB.
$\left[5x - 6y - 9 = 0; 5x + 6y + 9 = 0; \frac{125}{6}\right]$

45 Trova le equazioni delle rette tangenti all'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 9$ nei suoi punti di intersezione con la retta $x - 5 = 0$. Delle due rette trovate indica con t quella che è tangente nel I quadrante. Trova i punti P e Q di intersezione di t con gli asintoti e calcola l'area del triangolo POQ.
$[5x + 4y - 9 = 0; 5x - 4y - 9 = 0; 9]$

46 Determina l'area del triangolo che la tangente nel punto $C(4; 1)$ all'iperbole di equazione $x^2 - 12y^2 = 4$ forma con gli assi di simmetria dell'iperbole.
$\left[\frac{1}{6}\right]$

47 Dati l'iperbole di equazione $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ e il fascio di rette parallele alla retta di equazione $y = 2x$, determina i valori dell'ordinata all'origine delle rette che:
a) intersecano l'iperbole in due punti distinti;
b) sono tangenti all'iperbole;
c) sono esterne all'iperbole.
[a) $q < -1 \vee q > 1$; b) $q = \pm 1$; c) $-1 < q < 1$]

48 Data l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = -1$, determina i coefficienti angolari delle rette del fascio di centro $C(1; 0)$ che:
a) intersecano l'iperbole in due punti distinti;
b) sono tangenti all'iperbole;
c) sono esterne all'iperbole.
$\left[\text{a) } m < -\frac{\sqrt{5}}{2} \vee m > \frac{\sqrt{5}}{2}; \text{ b) } m = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}; \text{ c) } -\frac{\sqrt{5}}{2} < m < \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$

49 Determina il valore di k affinché l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1+k} = 1$ sia tangente alla retta di equazione $4x - 9y - 6 = 0$.
$\left[k = \frac{1}{3}\right]$

50 Stabilisci, al variare del valore di $k \in \mathbb{R}$, la posizione reciproca della retta di equazione $x - ky + 2 = 0$ e dell'iperbole di equazione $5x^2 - 9y^2 = 45$. Disegna l'iperbole e le rette tangenti trovate e calcola l'area del triangolo formato dai punti di tangenza e dal punto di intersezione delle tangenti.
$\left[k < -1 \vee k > 1 \text{ secante}; k = \pm 1 \text{ tangente}; -1 < k < 1 \text{ esterna; area} = \frac{25}{4}\right]$

La formula di sdoppiamento

51 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione della tangente all'iperbole di equazione $16x^2 - 3y^2 = 1$ nel suo punto A, del II quadrante, di ascissa $-\frac{1}{2}$.

Secondo la formula di sdoppiamento, l'equazione della retta tangente all'iperbole in un suo punto $A(x_0; y_0)$ è: $\frac{xx_0}{a_2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Determiniamo l'ordinata del punto appartenente all'iperbole nel II quadrante, di ascissa $-\frac{1}{2}$:

$$16\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3y^2 = 1 \;\rightarrow\; 16\cdot\frac{1}{4} - 3y^2 = 1 \;\rightarrow\; 3y^2 = 3 \;\rightarrow\; y^2 = 1 \;\rightarrow\; y = \pm 1.$$

Poiché il punto A appartiene al II quadrante, l'ordinata richiesta è $y = 1$.

Applichiamo ora la formula di sdoppiamento in $A\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$:

$$16x\left(-\frac{1}{2}\right) - 3y(1) = 1 \;\rightarrow\; -8x - 3y - 1 = 0.$$

L'equazione della tangente richiesta è $8x + 3y + 1 = 0$.

Risolvi gli esercizi applicando la formula di sdoppiamento.

52 Scrivi l'equazione della tangente all'iperbole di equazione $8x^2 - 9y^2 = 36$ nel suo punto $(-3; -2)$.
$[4x - 3y + 6 = 0]$

53 Determina l'equazione della tangente all'iperbole di equazione $9x^2 - y^2 = -8$ nel suo punto di ascissa $\frac{1}{3}$ che si trova nel IV quadrante.
$[3x + 3y + 8 = 0]$

54 Trova l'equazione della retta tangente all'iperbole di equazione $12x^2 - 32y^2 + 5 = 0$ nel suo punto di ordinata $-\frac{1}{2}$ che si trova nel III quadrante.
$[6x - 16y - 5 = 0]$

55 Scrivi l'equazione della tangente all'iperbole di equazione $5x^2 - y^2 = 3$ nel suo punto di intersezione con la retta di equazione $y + \sqrt{2}\,x = 0$ che ha ascissa negativa.
$[5x + \sqrt{2}\,y + 3 = 0]$

56 **TEST** The point (3; 1) is on the hyperbola

$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1.$$

What is the slope of the line passing through (3; 1) and tangent to the hyperbola?

A 1 **B** -1 **C** $\frac{1}{3}$ **D** 3 **E** None of these.

(USA *Marywood University Mathematics Contest*, 2006)

3. COME DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UN'IPERBOLE

► Teoria a pag. 446

57 **TEST** L'iperbole della figura ha equazione:

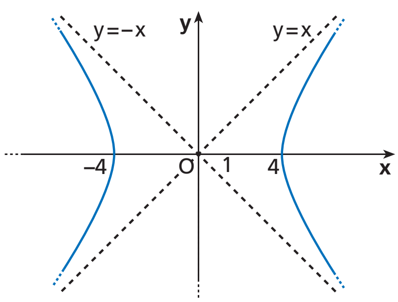
A $x^2 - y^2 = 4.$

B $y^2 = x^2 + 16.$

C $x^2 - y^2 = 16.$

D $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$

E $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1.$



58 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione dell'iperbole avente un fuoco nel punto $F\left(-\frac{5}{2};0\right)$ e un asintoto di equazione $y=\frac{4}{3}x$.

L'equazione dell'iperbole è del tipo $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ e gli asintoti hanno equazione $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Dalle coordinate di F deduciamo che $c=\frac{5}{2}$, quindi: $a^2+b^2=c^2 \rightarrow a^2+b^2=\frac{25}{4}$.

Dall'equazione dell'asintoto ricaviamo: $\frac{b}{a}=\frac{4}{3} \rightarrow \frac{b^2}{a^2}=\frac{16}{9} \rightarrow b^2=\frac{16}{9}a^2$.

Risolviamo il sistema costituito dalle due relazioni ottenute:

$$\begin{cases} a^2+b^2=\frac{25}{4} \\ b^2=\frac{16}{9}a^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2+\frac{16}{9}a^2=\frac{25}{4} \\ b^2=\frac{16}{9}a^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{25}{9}a^2=\frac{25}{4} \\ b^2=\frac{16}{9}a^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2=\frac{9}{4} \\ b^2=4 \end{cases}$$

da cui, sostituendo i valori ottenuti nell'equazione canonica:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{4}=1 \rightarrow \frac{4x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1.$$

59 Scrivi l'equazione dell'iperbole avente un fuoco in $(-5;0)$ e un asintoto di equazione $y=\sqrt{\frac{2}{3}}x$. $[2x^2-3y^2=30]$

60 Trova l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x avente distanza focale uguale a $\frac{10}{3}$ e un asintoto di equazione $y=-\frac{3}{4}x$. $\left[\frac{9}{16}x^2-y^2=1\right]$

61 Determina l'equazione dell'iperbole avente un fuoco in $(0;-\sqrt{5})$ e passante per $(1;2\sqrt{2})$. $\left[x^2-\frac{y^2}{4}=-1\right]$

62 Determina l'equazione dell'iperbole che interseca l'asse x, individuando un segmento di lunghezza 8, e ha un fuoco nel punto $(-5;0)$. $\left[\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\right]$

63 Scrivi l'equazione dell'iperbole avente un vertice e un fuoco, rispettivamente, in $(5;0)$ e $(-6;0)$. $\left[\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1\right]$

64 Scrivi l'equazione dell'iperbole avente un vertice reale in $(-6;0)$ e un asintoto di equazione $2x+3y=0$. $[4x^2-9y^2=144]$

65 Trova l'equazione dell'iperbole che ha i fuochi sull'asse x, eccentricità $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ e asse non trasverso lungo 6. $\left[\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{9}=1\right]$

66 Determina l'equazione dell'iperbole che ha i fuochi sull'asse y, asse trasverso lungo 8 e distanza focale uguale a 10. $\left[\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1\right]$

67 Scrivi l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x, asse non trasverso lungo 4 e distanza focale uguale a 12. $\left[\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{4}=1\right]$

68 Trova l'equazione dell'iperbole con un vertice reale in $(\sqrt{5};0)$ e passante per $\left(-\frac{5}{2};-1\right)$. $\left[\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1\right]$

69 Scrivi l'equazione dell'iperbole di eccentricità 2, passante per $(-\sqrt{7};3)$ e con i fuochi sull'asse x. $[3x^2-y^2=12]$

70 Determina l'equazione dell'iperbole di eccentricità $e=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ che ha un vertice non reale nel punto $(-2;0)$. $\left[\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=-1\right]$

71 Determina l'equazione dell'iperbole avente un fuoco in $(0; -5)$ e passante per $\left(\frac{9}{4}; 5\right)$. $\left[\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1\right]$

72 Scrivi l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse y passante per i punti $\left(1; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ e $(4; \sqrt{5})$.
$\left[\frac{x^2}{4} - y^2 = -1\right]$

73 Considerata l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, determinare a e b sapendo che è tangente alla retta di equazione $4x + y - 7 = 0$ e che passa per il punto $(2\sqrt{2}; 3)$.
(*Università di Firenze, Corso di laurea in Scienze vivaistiche*, 2008)
$\left[a_1 = \sqrt{7}; b_1 = 3\sqrt{7}; a_2 = \frac{\sqrt{14}}{2}; b_2 = \sqrt{7}\right]$

74 Un'iperbole con i fuochi sull'asse y passa per il punto $(1; -4\sqrt{5})$ e ha per asintoto la retta di equazione $2x - y = 0$. Determina l'equazione dell'iperbole e, dopo averne individuato le caratteristiche, disegnala.
$\left[\frac{x^2}{19} - \frac{y^2}{76} = -1\right]$

75 Un'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ha eccentricità $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$ e passa per $(-6; 2\sqrt{15})$. Calcola i valori di a e di b. $[a = 3; b = 2\sqrt{3}]$

76 Determina l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x avente il semiasse trasverso di lunghezza $2\sqrt{3}$ e passante per $(2\sqrt{6}; 2)$. $[x^2 - 3y^2 = 12]$

77 Determina l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x avente un asintoto di equazione $3x + 4y = 0$ e passante per $(-4\sqrt{5}; 3)$.
$\left[\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1\right]$

78 Scrivi l'equazione dell'iperbole avente un fuoco nel punto $(-\sqrt{7}; 0)$ e passante per $(2\sqrt{2}; -\sqrt{3})$.
$[3x^2 - 4y^2 = 12]$

79 Scrivi l'equazione dell'iperbole avente vertice reale di coordinate $(2; 0)$ e tangente alla retta di equazione $2x - 3y - 2 = 0$. $[x^2 - 3y^2 = 4]$

80 Determina l'equazione dell'iperbole avente i fuochi sull'asse y, lunghezza dell'asse trasverso 6 e tangente alla retta di equazione $y = \frac{9}{8}x + \frac{3}{2}$. $[27x^2 - 16y^2 = -144]$

81 L'iperbole di equazione $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ è tangente alla retta $6x - \sqrt{3}\,y - 3 = 0$. Trova il valore di b. $[3]$

82 Stabilisci per quali valori di b il punto $A(2; 1)$ appartiene all'iperbole di equazione $\frac{x^2}{b^2+1} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, determina la corrispondente equazione dell'iperbole e trova l'equazione della tangente nel punto A.
$[\pm 1; x^2 - 2y^2 = 2; y = x - 1]$

83 Data l'iperbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, determina b in modo tale che il suo grafico risulti tangente alla retta passante per $A(-2; -1)$ e parallela a $y = x + 2$. Calcola, poi, l'eccentricità. $\left[b = \sqrt{3}; e = \frac{\sqrt{7}}{2}\right]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **MATEMATICA.BLU - Vol. 3** © Zanichelli 2012 *con Maths in English*

84 Scrivi l'equazione dell'iperbole, con i fuochi sull'asse x, passante per i punti $A(2; 1)$ e $B(-1; 0)$ e poi quella della circonferenza di centro O, passante per i fuochi dell'iperbole. Individua le intersezioni delle due curve e calcola l'area del rettangolo che esse formano.

$\left[x^2 - 3y^2 = 1; 3x^2 + 3y^2 = 4; \left(\frac{\sqrt{5}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{6}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{6}\right); \text{area} = \frac{\sqrt{15}}{3}\right]$

85 Scrivi l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse y che nel suo punto di coordinate $\left(2; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ ha per tangente la retta di equazione $x - 4\sqrt{5}\,y + 8 = 0$.

$\left[\frac{x^2}{16} - y^2 = -1\right]$

4. L'IPERBOLE TRASLATA

▶ Teoria a pag. 447

IN PRATICA
▶ Videolezione 23

86 **ESERCIZIO GUIDA**

Data l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -1$, determiniamo l'equazione dell'iperbole corrispondente nella traslazione di vettore $\vec{v}(6; 2)$ e rappresentiamo le due iperboli.

L'iperbole data ha i fuochi sull'asse y e inoltre $a = 2$ e $b = 4$. I vertici reali sono perciò $B_1(0; -4)$ e $B_2(0; 4)$, mentre quelli non reali sono $A_1(-2; 0)$ e $A_2(2; 0)$. Gli asintoti dell'iperbole hanno equazione:

$$y = \pm 2x.$$

Scriviamo le equazioni della traslazione di vettore $\vec{v}(6; 2)$ e ricaviamo la x e la y:

$$\begin{cases} x' = x + 6 \\ y' = y + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x' - 6 \\ y = y' - 2 \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione dell'iperbole alla x e alla y le espressioni trovate:

$$\frac{(x'-6)^2}{4} - \frac{(y'-2)^2}{16} = -1.$$

L'equazione dell'iperbole traslata è:

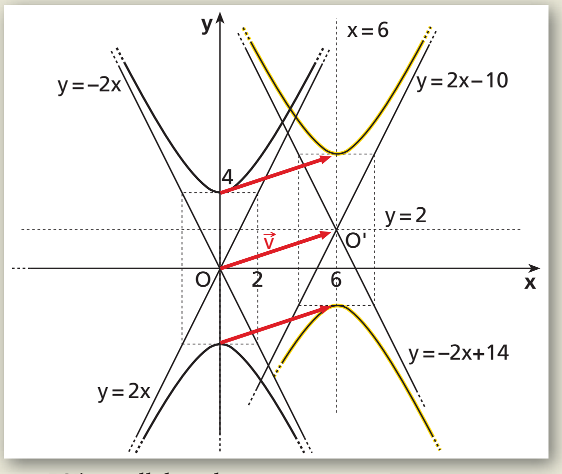
$$\frac{(x-6)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{16} = -1.$$

Sviluppando i calcoli otteniamo l'equazione:

$$4x^2 - y^2 - 48x + 4y + 156 = 0.$$

Ricaviamo le coordinate del centro di simmetria e dei vertici dell'iperbole traslata, sostituendo nelle equazioni della traslazione alla x e alla y le coordinate dei punti corrispondenti:

$$O'(6; 2),\ A_1'(4; 2),\ A_2'(8; 2),\ B_1'(6; -2),\ B_2'(6; 6).$$



Gli assi di simmetria dell'iperbole traslata sono le rette per O' parallele agli assi cartesiani:

$$x = 6 \text{ e } y = 2.$$

Gli asintoti dell'iperbole traslata sono le rette per O' parallele agli asintoti dell'iperbole data. La loro equazione è:

$$y - 2 = \pm 2(x - 6) \rightarrow y = -2x + 14 \vee y = 2x - 10.$$

87 Determina l'equazione e disegna l'iperbole ottenuta dall'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ nella traslazione di vettore $\vec{v}(1; -1)$.

$[9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y + 41 = 0]$

88 Scrivi l'equazione e disegna l'iperbole ottenuta dall'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ nella traslazione di vettore $\vec{v}(-2; 1)$. Scrivi le coordinate dei vertici e dei fuochi dell'iperbole traslata.
$[x^2 - 4y^2 + 4x + 8y - 4 = 0; A_1'(-4; 1), A_2'(0; 1), B_1'(-2; 0), B_2'(-2; 2), F_1'(-\sqrt{5} - 2; 1), F_2'(\sqrt{5} - 2; 1)]$

89 Scrivi l'equazione dell'iperbole ottenuta dall'iperbole di equazione $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = -1$ nella traslazione che fa corrispondere l'origine degli assi al punto $O'(3; 1)$.
$[2x^2 - y^2 - 12x + 2y + 21 = 0]$

90 Una traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$ fa corrispondere l'origine del sistema di riferimento al vertice reale di ascissa maggiore dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$. Determina le componenti del vettore e l'equazione dell'iperbole traslata.
$[a = 3, b = 0; 25x^2 - 9y^2 - 150x = 0]$

91 Trova l'iperbole corrispondente all'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ nella traslazione che fa corrispondere al fuoco di ascissa positiva il punto $(-1; -1)$.
$[5x^2 - 4y^2 + 40x - 8y + 56 = 0]$

Il metodo del completamento del quadrato

92 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo e tracciamo il grafico delle curve di equazioni:
a) $9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y + 29 = 0$; b) $4x^2 - y^2 + 8x + 4y = 0$.

a) Poiché i coefficienti di x^2 e y^2 sono opposti, si tratta di un'iperbole. Cerchiamo di scrivere l'equazione data nella forma:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \quad \text{oppure} \quad \frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = -1.$$

Riscriviamo l'equazione data raggruppando i termini con x e quelli con y:

$$9x^2 - 18x - 4y^2 + 16y + 29 = 0 \rightarrow 9(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 4y) + 29 = 0.$$

Perché i termini all'interno delle parentesi diventino il quadrato di un binomio, occorre aggiungere il termine noto. Aggiungiamo i termini mancanti a entrambi i membri dell'equazione:

$$9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) + 29 = 9 - 16 \rightarrow 9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 + 29 = -7 \rightarrow$$
$$\rightarrow 9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 = -36.$$

Dividendo entrambi i membri per 36, otteniamo: $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = -1$.

Il centro di simmetria dell'iperbole è $O'(1; 2)$.
Le coordinate di O' potevano essere determinate anche ricordando che nell'equazione

$$a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0$$

si ha $x_{O'} = -\frac{c'}{2a'}$ e $y_{O'} = -\frac{d'}{2b'}$.

Quindi

$$x_{O'} = -\frac{-18}{2 \cdot 9} = 1, \quad y_{O'} = -\frac{16}{2 \cdot (-4)} = 2.$$

Gli assi di simmetria sono le rette per O' parallele agli assi:

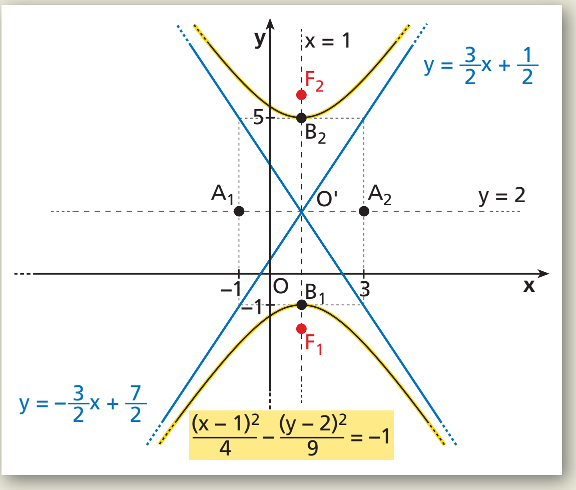
$$x = 1, \qquad y = 2.$$

La lunghezza dei semiassi dell'iperbole è $a = 2$ e $b = 3$.

La semidistanza focale è $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$.
Poiché l'iperbole ha l'asse focale parallelo all'asse y, i vertici reali sono $B_1(1; -1)$ e $B_2(1; 5)$, i vertici non reali sono $A_1(-1; 2)$ e $A_2(3; 2)$, e i fuochi sono $F_1(1; 2 - \sqrt{13})$ e $F_2(1; 2 + \sqrt{13})$.
Gli asintoti sono le rette per O' con coefficiente angolare $m = \pm \frac{b}{a}$:

$$y - 2 = \pm \frac{3}{2}(x - 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \vee y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$



b) Applichiamo il metodo del completamento del quadrato riscrivendo l'equazione data:

$$4(x^2 + 2x) - (y^2 - 4y) = 0 \rightarrow$$

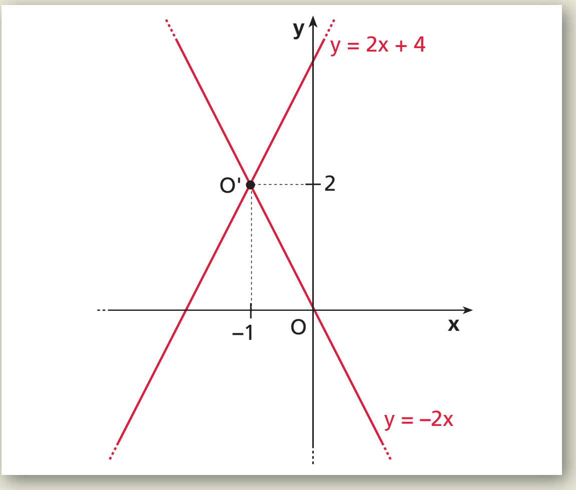
$$\rightarrow 4(x^2+2x+1)-4-(y^2-4y+4)+4=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4(x+1)^2 - (y-2)^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4(x+1)^2 = (y-2)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2(x+1) = \pm(y-2).$$

Questo risultato significa che l'equazione data rappresenta un'*iperbole degenere* costituita dalle due rette $y = 2x + 4$ e $y = -2x$ passanti per $O'(-1; 2)$.



Rappresenta graficamente le seguenti iperboli.

93 $x^2 - \frac{(y+1)^2}{4} = 4;$ $\quad \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(2y+1)^2}{4} = -1.$

94 $y^2 - (x-1)^2 = 4;$ $\quad (4x+1)^2 - \frac{y^2}{9} = -1.$

Dopo averne determinato le caratteristiche, rappresenta le iperboli aventi le seguenti equazioni. (In alcuni casi le iperboli sono degeneri.)

95 $25x^2 - 9y^2 - 50x + 18y - 209 = 0$

96 $x^2 - 4y^2 + 2x - 24y - 31 = 0$

97 $2x^2 - y^2 - 8x - 8y - 4 = 0$

98 $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$

99 $-9x^2 + y^2 - 54x - 2y - 71 = 0$

100 $25x^2 - 4y^2 + 50x - 75 = 0$

101 $x^2 - 9y^2 = 0$

102 $x^2 - 4y^2 - 6x = 0$

103 $x^2 - 9y^2 - 4x + 5 = 0$

104 $9x^2 - y^2 + 6x + 2y = 0$

105 $4x^2 - y^2 + 2y - 9 = 0$

106 $x^2 - y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$

107 $4x^2 - 9y^2 + 8x - 72y - 464 = 0$

108 $16x^2 - 4y^2 - 96x - 8y + 204 = 0$

ESERCIZI VARI L'iperbole traslata

109 Scrivi l'equazione dell'iperbole avente centro di simmetria $O'(2; -2)$, gli assi paralleli agli assi cartesiani, un vertice reale in $A(1; -2)$ e un vertice non reale in $B(2; 0)$. $[4x^2 - y^2 - 16x - 4y + 8 = 0]$

110 Determina l'equazione dell'iperbole di eccentricità $e = 2$, avente centro di simmetria $O'(1; -3)$ e i fuochi su una retta parallela all'asse x, distanti fra loro 4. $[3x^2 - y^2 - 6x - 6y - 9 = 0]$

111 Determina e rappresenta il luogo geometrico dei punti del piano per i quali la differenza delle distanze dai punti $F_1(-2; 2)$, $F_2(4; 2)$ è uguale a 4. $[5x^2 - 4y^2 - 10x + 16y - 31 = 0]$

112 Trova e rappresenta l'equazione dell'iperbole con assi paralleli agli assi cartesiani, con i fuochi $F_1(-4; -4)$, $F_2(-4; 6)$ e semiasse trasverso di lunghezza 4. $[16x^2 - 9y^2 + 128x + 18y + 391 = 0]$

113 Determina e rappresenta l'equazione dell'iperbole con assi paralleli agli assi cartesiani con fuochi $F_1(-2; -5)$, $F_2(-2; 3)$ e semiasse non trasverso di lunghezza 3. $[7x^2 - 9y^2 + 28x - 18y + 82 = 0]$

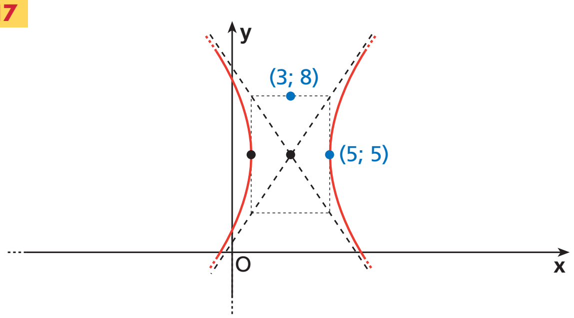
114 Riconosci e rappresenta la curva di equazione $x^2 - 2x - 4y^2 - 3 = 0$. Detto A il punto di ascissa positiva in cui la curva interseca l'asse delle x, determina l'equazione della retta tangente in A alla curva stessa. [iperbole di centro $(1; 0)$; $A(3; 0)$; $x = 3$]

115 Scrivi l'equazione dell'iperbole che ha il centro di simmetria di coordinate $(-2; 1)$, un vertice reale in $(0; 1)$ e asse focale lungo $2\sqrt{5}$. $[x^2 - 4y^2 + 4x + 8y - 4 = 0]$

116 Determina per quali valori di k l'equazione $x^2 + 2ky^2 - kx + (k + 3)y - 2 = 0$ rappresenta un'iperbole. Trova poi per quali valori di k:
a) l'iperbole ha centro sulla retta di equazione $y = -2x$.
b) l'iperbole ha come asse di simmetria la retta di equazione $y = 2$.
$\left[k < 0; \text{a) } k = -\frac{3}{4}; \text{b) } k = -\frac{1}{3}\right]$

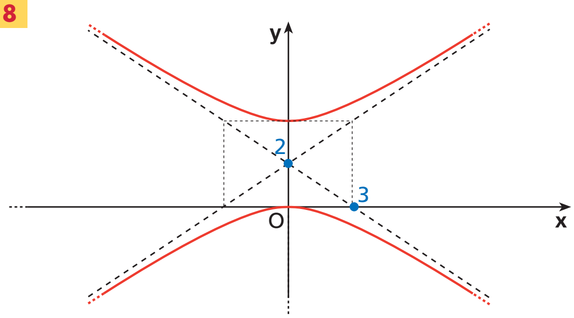
Trova le equazioni delle iperboli dei seguenti grafici, utilizzando i dati delle figure.

117



$[9x^2 - 4y^2 - 54x + 40y - 55 = 0]$

118



$[4x^2 - 9y^2 + 36y = 0]$

Riconosci se le seguenti equazioni rappresentano circonferenze, ellissi o iperboli e rappresentale.

119 a) $9x^2 + y^2 - 18x + 4y + 12 = 0$; b) $9x^2 - y^2 - 18x - 4y + 12 = 0$.

120 a) $x^2 - y^2 - 4x - 2y = 0$; b) $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$.

121 a) $-9x^2 - 4y^2 - 18x + 8y + 23 = 0$; b) $9x^2 - 4y^2 + 18x + 8y - 31 = 0$.

122 a) $x^2 - 4y^2 + 2x - 3 = 0$; b) $x^2 + 4y^2 + 2x - 3 = 0$.

La rappresentazione grafica di particolari funzioni

123 **ESERCIZIO GUIDA**

Dopo averne determinato il dominio, rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = 2\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7} + 1.$$

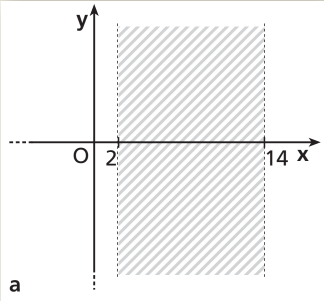
Per determinare il dominio poniamo il radicando maggiore o uguale a 0, ossia:

$$\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7 \geq 0 \rightarrow x \leq 2 \vee x \geq 14.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 2 \vee x \geq 14\}.$$

Tracciamo nel piano cartesiano le rette $x = 2$ e $x = 14$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ascissa maggiore di 2 e minore di 14 (figura *a*).



a

Per rappresentare la funzione isoliamo la radice:

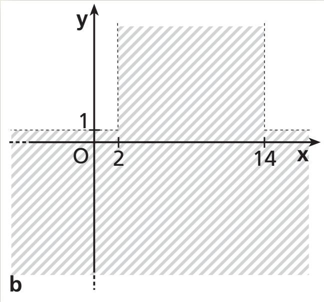
$$y - 1 = 2\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7} \rightarrow \frac{y-1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7}.$$

Questa equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{y-1}{2} \geq 0 \\ \dfrac{(y-1)^2}{4} = \dfrac{1}{4}x^2 - 4x + 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \dfrac{(y-1)^2}{4} - \dfrac{x^2 - 16x + 64 - 64}{4} = 7 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \dfrac{(y-1)^2}{4} - \dfrac{x^2 - 16x + 64}{4} = -9 \end{cases} \rightarrow$$

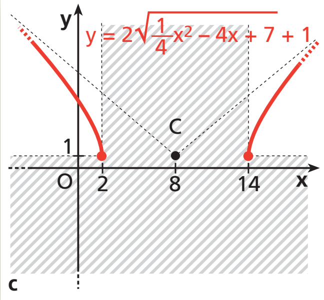
$$\rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \dfrac{(x-8)^2}{36} - \dfrac{(y-1)^2}{36} = 1 \end{cases}$$



b

Tracciamo nel piano cartesiano la retta $y = 1$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ordinata minore di 1 (figura *b*).

L'equazione $\dfrac{(x-8)^2}{36} - \dfrac{(y-1)^2}{36} = 1$ rappresenta un'iperbole traslata di centro $C(8; 1)$, assi di simmetria $x = 8$ e $y = 1$, asintoti $y = x - 7$ e $y = -x + 9$. Tracciamo ora i rami di iperbole contenuti nella parte di piano che non abbiamo eliminato (figura *c*), ottenendo così il grafico cercato.



c

Dopo averne determinato il dominio, rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

124 $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x-3)^2 - 9}$

125 $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4x} + \dfrac{1}{2}$

126 $y = -\sqrt{x^2 + 1}$

127 $y = 2\sqrt{(x-2)^2 - 4}$

128 $y = -\sqrt{x^2 - 16}$

129 $y = 3 - 4\sqrt{x^2 - 4}$

130 $y = 2 + \sqrt{9x^2 + 9}$

131 $y = 1 - \sqrt{4x^2 + 16x}$

132 $y = \sqrt{8x + 4x^2}$

133 $y = \frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25} + 5$

134 $y = 2 - \frac{4}{5}\sqrt{x^2 + 9}$

135 $y = \sqrt{|x| + 4x^2}$

136 $y = \sqrt{4x|x| - 2|x|}$

137 $y = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{6|x| + x^2}$

Traccia il grafico delle curve aventi le seguenti equazioni.

138 $x = -1 - \sqrt{y^2 + 1}$

139 $x = 2 + \sqrt{4y^2 - 16y}$

140 $x^2 - y|y| = 1$

141 $x = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - 2y - 15}$

142 $x = 3 + \sqrt{y^2 - 4}$

143 $x = 2 - \frac{1}{3}\sqrt{y^2 - 9}$

144 $x^2 + y|y| - 4x - 4y + 4 = 0$

145 $x^2 + y|y| = 4$

146 $x|x| - y^2 + 1 = 0$

147 $x|x| - y^2 - 2y + 1 = 0$

148 $x|x| + 4y^2 + 2x - 3 = 0$

149 $x^2 + y|y| - 9 = 0$

150 $x^2 - y|y| + 2x - 2|y| + 1 = 0$

151 $x^2 - y^2 + 2|x + y| - 9 = 0$

152 $\frac{x|x|}{9} + \frac{y|y|}{4} = 1$

153 $|y| = \sqrt{x^2 - 4}$

154 $x|x| + y|y| - 1 = 0$

155 Data l'iperbole $x^2 - 4y^2 = 1$,

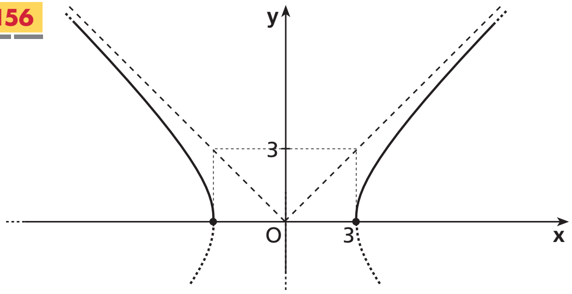
a) disegnarla su un diagramma cartesiano;
b) scrivere le equazioni degli asintoti;
c) trovare le rette tangenti passanti per $P(0; 1)$;
d) esprimere la porzione con $y \leq 0$ come grafico di funzione, specificando il campo di esistenza.

(*Università di Padova, Corso di laurea in Chimica e Tecnologie farmaceutiche*, 2008)

$\left[\text{b) } y = \pm\frac{1}{2}x;\ \text{c) } y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x + 1;\ \text{d) } f(x) = -\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2},\ x \leq -1 \vee x \geq 1\right]$

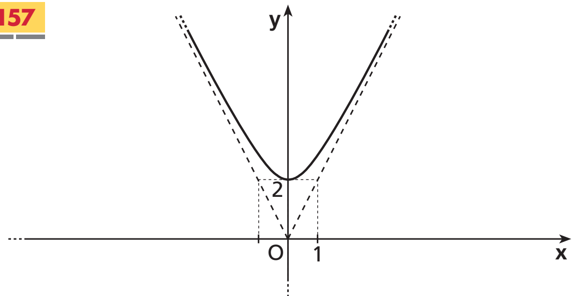
Trova le equazioni dei seguenti grafici utilizzando i dati delle figure.

156



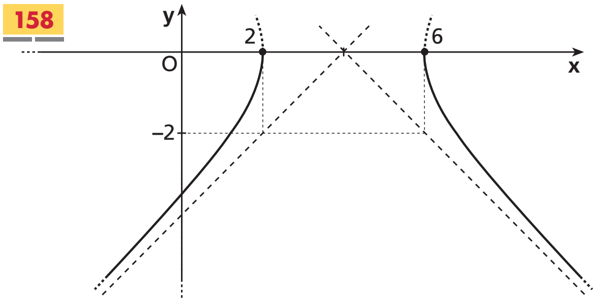
$\left[y = \sqrt{x^2 - 9}\right]$

157



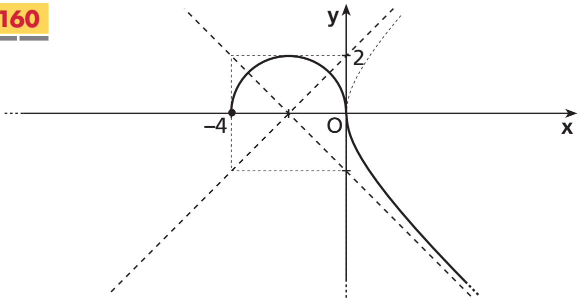
$\left[y = 2\sqrt{1 + x^2}\right]$

158



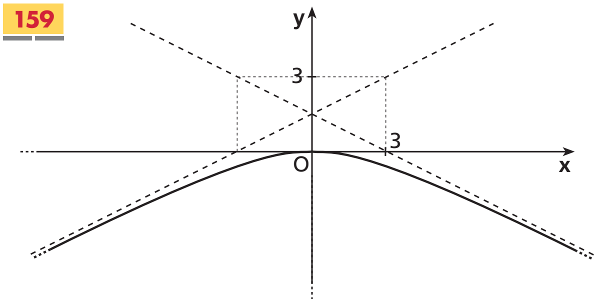
$\left[y = -\sqrt{x^2 - 8x + 12}\right]$

160



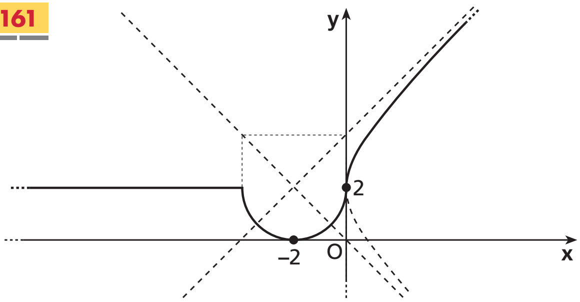
$\left[y = \begin{cases}\sqrt{-x^2 - 4x} & \text{se} -4 \leq x \leq 0\\ -\sqrt{x^2 + 4x} & \text{se } x > 0\end{cases}\right]$

159



$\left[y = -\frac{1}{2}\sqrt{9 + x^2} + \frac{3}{2}\right]$

161



$\left[y = \begin{cases}2 & \text{se } x \leq -4\\ -\sqrt{-x^2 - 4x} + 2 & \text{se} -4 < x \leq 0\\ \sqrt{x^2 + 4x} + 2 & \text{se } x > 0\end{cases}\right]$

La risoluzione grafica di equazioni e disequazioni irrazionali

162 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo graficamente la seguente disequazione irrazionale:

$$4\sqrt{x^2 - 6x + 5} \leq x + 4.$$

Isoliamo la radice a sinistra del segno di disuguaglianza:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 5} \leq \frac{1}{4}x + 1.$$

Dai due membri della disequazione ricaviamo le equazioni di due funzioni:

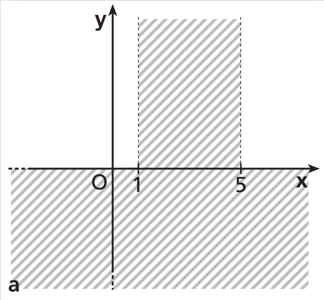
$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 5} \text{ e } y = \frac{1}{4}x + 1.$$

Per disegnare il grafico della prima funzione, $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$, determiniamo il suo dominio ponendo il radicando maggiore o uguale a 0:

$$x^2 - 6x + 5 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \leq 1 \vee x \geq 5.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme:

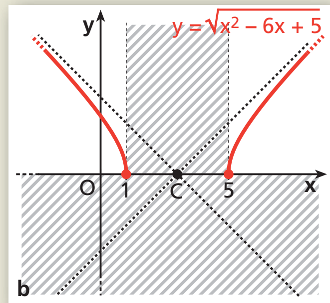
$$D = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1 \vee x \geq 5\}.$$



L'equazione della prima funzione, $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$, è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = x^2 - 6x + 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 - (x^2 - 6x + 9 - 9) = 5 \end{cases} \rightarrow$$

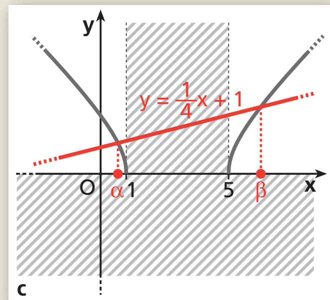
$$\rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 - (x-3)^2 = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ \dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$



Eliminiamo tutti i punti che non hanno $x \leq 1 \vee x \geq 5$ o $y \geq 0$ (figura *a*, nella pagina precedente).

L'equazione $\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ è l'equazione di un'iperbole traslata di centro $C(3; 0)$, asse trasverso $y = 0$, con $a = 2$, asse non trasverso $x = 3$, con $b = 2$, asintoti $y = \pm(x - 3)$.

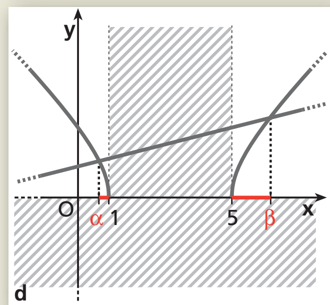
Tracciamo i rami di iperbole contenuti nella parte di piano che non abbiamo eliminato (figura *b*), ottenendo il grafico cercato.



Rappresentiamo la seconda funzione, corrispondente alla retta di equazione $y = \dfrac{1}{4}x + 1$ (figura *c*).

Dal grafico leggiamo, in modo approssimato, le ascisse α e β dei punti di intersezione tra la retta e l'iperbole, nella parte di piano in cui la disequazione ha significato:

$$\alpha \simeq 0{,}7, \quad \beta \simeq 6{,}3.$$



Osserviamo nel grafico tracciato che la disequazione $\sqrt{x^2 - 6x + 5} \leq \dfrac{1}{4}x + 1$ mette a confronto l'ordinata di un punto dell'iperbole (membro a sinistra) con l'ordinata di un punto della retta (membro a destra) con la stessa ascissa.

Evidenziamo sull'asse x gli intervalli in cui i punti dell'iperbole hanno ordinate minori o uguali alle ordinate dei punti corrispondenti della retta (figura *d*).

Le ascisse di questi punti sono le soluzioni della disequazione data:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq 1 \vee 5 \leq x \leq \beta, \alpha \simeq 0{,}7, \beta \simeq 6{,}3\}.$$

Osservazione. Se dobbiamo risolvere un'**equazione**, per esempio $\sqrt{x^2 - 6x + 5} = \dfrac{1}{4}x + 1$, procediamo allo stesso modo, ma terminiamo la risoluzione dopo la determinazione dell'ascissa (o delle ascisse) dei punti di intersezione.

Risolvi graficamente le seguenti equazioni e disequazioni irrazionali.

163 $\sqrt{4x^2 + 4} > x + 2$ $[x < 0 \vee x > \alpha; \alpha \simeq 1{,}3]$

164 $\sqrt{x^2 + 16} \geq 2x + 3$ $[x \leq \alpha; \alpha \simeq 0{,}5]$

165 $\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4} \leq \dfrac{x}{3}$ $[2 \leq x \leq \alpha; \alpha \simeq 2{,}7]$

166 $\sqrt{\dfrac{x^2}{4} + 1} + 4 > 5$ $[x \neq 0]$

167 $-\sqrt{x^2 + 9} \geq -2x$ $[x \geq \alpha; \alpha \simeq 1{,}7]$

168 $6\sqrt{x^2 - 1} - 2 = -x + 2$ $[x_1 \simeq -1{,}3; x_2 \simeq 1{,}1]$

169 $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}x$ $[x \simeq 0{,}6]$

170 $\sqrt{x + 1} \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4x}$ $[-1 \leq x \leq \alpha \vee x \geq \beta; \alpha \simeq -0{,}5, \beta \simeq 8{,}5]$

171 $\sqrt{1 - x^2} < \sqrt{x^2 - 2x}$ $[-1 \leq x < \alpha; \alpha \simeq -0{,}4]$

172 $3\sqrt{x^2-2x}+1<\frac{1}{3}x$ $[S=\varnothing]$

173 $-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4x}\le -x+1$ $[x\le 0]$

174 $\sqrt{4x+x^2+3}<\sqrt{2}(x+1)$ $[x>1]$

175 $\frac{3\sqrt{5}}{5}\sqrt{x^2-4x}-3x+1>0$ $[x\le 0]$

176 $\sqrt{x^2-4}<3-|x|$ $[-\alpha<x\le -2 \vee 2\le x<\alpha;\ \alpha\simeq 2{,}2]$

5. L'IPERBOLE EQUILATERA

▶ Teoria a pag. 448

L'iperbole equilatera riferita agli assi di simmetria

177 Fra le seguenti equazioni riconosci quelle dell'iperbole equilatera riferita ai suoi assi di simmetria e rappresentale graficamente.

$x^2-y^2=1;\qquad x^2+y^2=1;\qquad y^2-x^2=2;$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1;\qquad y^2-4x^2=1;\qquad y^2-x^2=4.$

178 Disegna le seguenti iperboli equilatere, scrivendo le equazioni degli asintoti e le coordinate dei vertici e dei fuochi. Calcola poi l'eccentricità.

$y^2-x^2=1;\quad y^2-x^2=9;\quad x^2-y^2=16;\quad x^2-y^2=25;\quad y^2-x^2=36.$

179 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri assi avente un fuoco nel punto $F(\sqrt{18};0)$.

L'equazione dell'iperbole cercata è del tipo $x^2-y^2=a^2$. Dalla relazione fra a e c ricaviamo il valore di a^2 (ricordiamo che $a^2+b^2=c^2$ e $a=b$):

$$c^2=2a^2 \quad\rightarrow\quad 18=2a^2 \quad\rightarrow\quad 9=a^2.$$

Scriviamo poi l'equazione richiesta: $x^2-y^2=a^2 \quad\rightarrow\quad x^2-y^2=9$.

Scrivi le equazioni delle iperboli equilatere riferite ai propri assi di simmetria e con le seguenti caratteristiche. Rappresentale poi graficamente.

180 Avente un fuoco in $(2\sqrt{6};0)$. $[x^2-y^2=12]$

181 Passante per $(2\sqrt{5};-4)$. $[x^2-y^2=4]$

182 Passante per il punto di ascissa 4 della retta di equazione $2x-y-5=0$. $[x^2-y^2=7]$

183 Avente un vertice reale in $(-3;0)$. $[x^2-y^2=9]$

184 Data l'equazione $\frac{2x^2}{k-4}-\frac{3y^2}{k+1}=1$, determina per quale valore di k rappresenta un'iperbole equilatera. Preso poi P appartenente a tale iperbole nel primo quadrante, trova le sue coordinate, sapendo che, detti F_1 e F i fuochi, l'area del triangolo F_1PF vale 10. $[k=14;\ P(\sqrt{15};\sqrt{10})]$

185 Dato il fascio di curve di equazione $(k-3)x^2+2(k-4)y^2-5k+\frac{3}{2}=0$, determina per quali valori di k l'equazione rappresenta un'iperbole e un'iperbole equilatera. Disegna l'iperbole per $k=\frac{7}{2}$ determinandone fuochi, vertici, asintoti ed eccentricità.

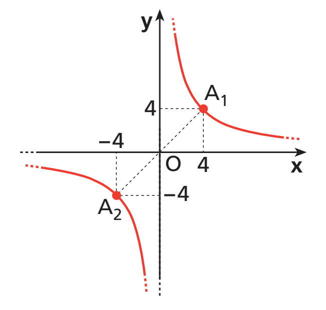
$$\left[3<k<4;\ k=\frac{11}{3};\ F(\pm 4\sqrt{3};0);\ V(\pm 4\sqrt{2};0);\ y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x;\ e=\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$$

L'iperbole equilatera riferita agli asintoti

186 ESERCIZIO GUIDA

Data l'iperbole equilatera di equazione $xy = 16$, determiniamo le coordinate dei vertici e rappresentiamo la curva graficamente.

Poiché $k = 16 > 0$, il grafico della curva si trova nel primo e terzo quadrante e l'asse trasverso della curva è la bisettrice dei precedenti quadranti, ossia $y = x$.



Per determinare le coordinate dei vertici risolviamo il sistema costituito dalle equazioni dell'iperbole e della bisettrice. Otteniamo:

$$A_1(\sqrt{k}; \sqrt{k}),\ A_2(-\sqrt{k}; -\sqrt{k}) \to A_1(4; 4),\ A_2(-4; -4).$$

Per disegnare l'iperbole troviamo qualche punto della curva assegnando valori a x, purché diversi da 0, e calcolando i corrispondenti valori di y. Per esempio, per $x = 2$ abbiamo $y = 8$.

Infine, congiungendo i punti ottenuti, rappresentiamo la curva richiesta, ricordando che gli assi cartesiani sono gli asintoti.

Data l'equazione dell'iperbole, in ciascuno dei seguenti casi determina le coordinate dei vertici e dei fuochi e rappresenta graficamente la curva.

187 a) $xy = 36$; b) $xy + 12 = 0$; c) $xy = 8$; d) $xy = -18$.

188 a) $y = \dfrac{2}{x}$; b) $y = -\dfrac{1}{x}$; c) $y = -\dfrac{2}{3x}$; d) $y - \dfrac{1}{2x} = 0$.

189 Stabilisci quali delle seguenti equazioni rappresenta un'iperbole equilatera, specificando se è riferita agli assi o agli asintoti, e determina i vertici e i fuochi.

a) $x^2 - 4y^2 + 4 = 0$; c) $xy + 6 = 0$; e) $x = \dfrac{y}{2}$; g) $x^2 = y^2 + 4$;

b) $y^2 - x^2 = 9$; d) $9x^2 - 9y^2 = 1$; f) $x^2 = 1 - y^2$; h) $y - x^2 = 0$.

190 COMPLETA

a) Un'iperbole equilatera con i fuochi sull'asse x ha equazione ....
b) L'equazione $xy + 1 = 0$ rappresenta un'iperbole equilatera con i fuochi sulla retta ....
c) Un'iperbole equilatera riferita agli assi ha per asintoti le rette ....
d) L'eccentricità dell'iperbole di equazione $xy = 4$ è ....

191 Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita agli asintoti, passante per $(-2; -8)$ e, dopo aver calcolato le coordinate dei suoi vertici, rappresentala graficamente. $[xy = 16; (-4; -4), (4; 4)]$

Determina le equazioni delle iperboli equilatere riferite ai propri asintoti e con le seguenti caratteristiche. Rappresentale poi graficamente.

192 Avente un vertice nel punto $A(6; -6)$. $[xy = -36]$

193 Situata nel secondo e quarto quadrante, sapendo che $\overline{A_1A_2} = 6\sqrt{2}$. $[xy = -9]$

194 Avente un fuoco nel punto $F(-4; 4)$. $[xy = -8]$

195 Tangente alla retta di equazione $y = 5x - 10$. $[xy = -5]$

196 Data l'iperbole equilatera riferita agli asintoti di equazione $xy = k$, con $k > 0$:
a) stabilisci per quale valore del parametro l'iperbole ha il semiasse trasverso che misura 4;
b) rappresenta l'iperbole;
c) trova le coordinate dei fuochi e dei vertici;
d) scrivi le equazioni delle rette tangenti all'iperbole nei vertici.
[a) $k = 8$; c) $V(\pm 2\sqrt{2}; \pm 2\sqrt{2})$, $F(\pm 4; \pm 4)$; d) $y = -x + 4\sqrt{2}$, $y = -x - 4\sqrt{2}$]

197 Scrivi le equazioni delle iperboli equilatere, riferite agli asintoti, che sono tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$ e trova l'area del quadrilatero che si ottiene congiungendo i punti di tangenza.
[$xy = -2$; $xy = 2$; area $= 8$]

198 Determina l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita agli asintoti, che stacca sulla retta di equazione $y = -2x + 1$ una corda che misura $\frac{7}{2}\sqrt{5}$.
[$xy = -6$]

199 Dopo aver determinato l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita agli asintoti, che passa per il punto $A(-2; -8)$, trova le equazioni delle rette tangenti nei vertici.
[$xy = 16$; $y = -x \pm 8$]

200 Dopo aver determinato l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita agli asintoti, avente un fuoco nel punto $F(-2\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$, calcola l'area del quadrilatero i cui vertici sono le intersezioni delle rette di equazioni $y = -3x + 9$ e $y = -3x - 9$ con l'iperbole.
[$xy = 6$; area $= 18$]

201 Considera l'iperbole di equazione $xy = 12$ e rappresentala graficamente. Calcola poi le aree dei triangoli formati dagli assi cartesiani e dalle tangenti all'iperbole nei suoi punti di ascissa 4 e -6 e verifica che sono uguali.
[24]

La funzione omografica

IN PRATICA
▸ Videolezione 24

202 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo il grafico dell'iperbole equilatera di equazione $y = \frac{6x + 1}{2x - 4}$.

L'equazione $y = \frac{6x + 1}{2x - 4}$ è quella della funzione omografica $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, che rappresenta un'iperbole equilatera avente gli asintoti $x = -\frac{d}{c}$ e $y = \frac{a}{c}$ e le coordinate del centro di simmetria $C\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.

In questo caso abbiamo: $a = 6$, $b = 1$, $c = 2$, $d = -4$.

Il centro è $C\left(-\frac{-4}{2}; \frac{6}{2}\right)$, ossia $C(2; 3)$.

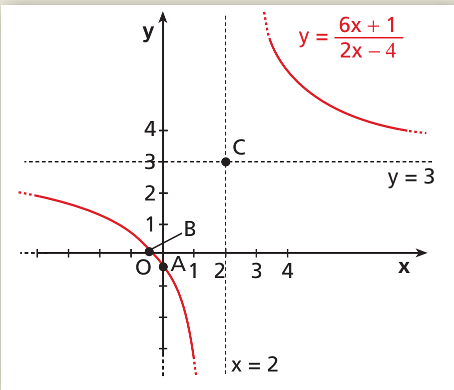
Le equazioni degli asintoti sono $x = 2$ e $y = 3$.

Per disegnare il grafico dell'iperbole determiniamo alcuni suoi punti, per esempio le intersezioni con gli assi:

$$\text{asse } y) \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{6x + 1}{2x - 4} \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases} \to A\left(0; -\frac{1}{4}\right);$$

$$\text{asse } x) \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{6x + 1}{2x - 4} \end{cases} \to \begin{cases} y = 0 \\ x = -\frac{1}{6} \end{cases} \to B\left(-\frac{1}{6}; 0\right).$$

Tracciamo il grafico dell'iperbole assegnata.



Disegna il grafico delle seguenti iperboli equilatere.

203 $y = \dfrac{6x+4}{3x-9}$

204 $y = \dfrac{2x-1}{4x+8}$

205 $y = \dfrac{5x+1}{2-10x}$

206 $y = \dfrac{1-2x}{3+6x}$

207 $y = \dfrac{x}{x-3}$

208 $y = \dfrac{3+5x}{1-x}$

209 $2xy + x - y + 3 = 0$

210 $xy - x + y + 3 = 0$

211 $xy - 3x + 2y + 6 = 0$

Stabilisci quali delle seguenti equazioni rappresentano delle funzioni omografiche e, in caso affermativo, traccia il loro grafico.

212 $xy + 3x + y + 3 = 0$

213 $y = \dfrac{2x+3}{10x+15}$

214 $xy = y - 2$

215 $y = \dfrac{2x}{x^2+x}$

Traccia il grafico delle seguenti funzioni.

216 $y = \dfrac{2|x|+6}{x-4}$

217 $y = \dfrac{|3x+6|}{x-1}$

218 $y = \left|\dfrac{3x-9}{x+2}\right|$

219 $|x| + xy - 4y = 0$

220 $|x|y - 4 = 0$

221 $y = \dfrac{|x|-1}{x}$

222 $y = \dfrac{2-|x|}{|2-x|}$

223 $y = \left|\dfrac{2|x|+1}{x}\right|$

224 $y = \dfrac{|x-3|}{x} + 2$

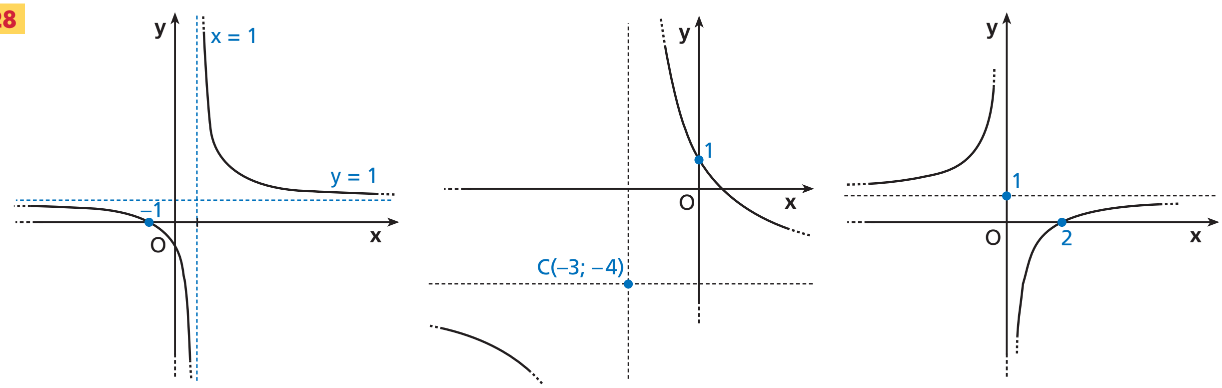
225 $y = \dfrac{x}{|x+2|+|x|}$

226 $y = \dfrac{x+1}{|x^2-1|}$

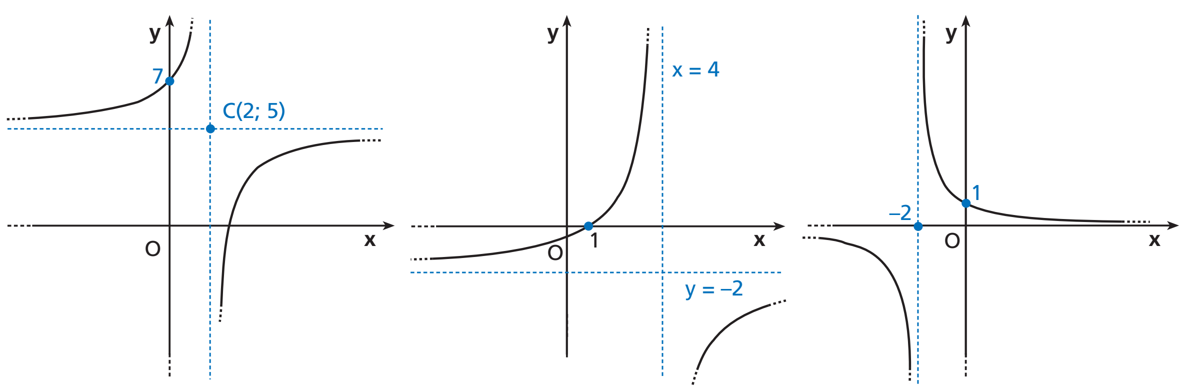
227 $|x|y - xy + y = 2$

Utilizzando i dati delle figure, trova le equazioni delle funzioni rappresentate nei seguenti grafici.

228



229



Rappresenta le curve corrispondenti alle seguenti equazioni.

230 $|xy| + x - y = 0$

231 $x|y| = 4$

232 $|y| = \frac{x+2}{x}$

233 $2xy + |y| - 2 = 0$

234 Data l'equazione $y = \frac{3ax+b}{x-c}$, determina a, b, $c \in \mathbb{R}$ in modo che il grafico della funzione passi per il punto $A\,(3; 14)$ e gli asintoti siano $x = 2$ e $y = 6$. Disegna la curva così ottenuta. $\left[y = \frac{6x-4}{x-2}\right]$

235 Per quale valore di k la funzione omografica $y = \frac{2x+k}{2x+6}$ passa per il punto $P\left(1; -\frac{3}{8}\right)$? Quali sono le equazioni dei suoi asintoti? Determina l'equazione della tangente nel punto di intersezione dell'iperbole con l'asse y. Calcola poi l'area del triangolo formato dalla tangente e dagli asintoti.
$[k = -5;\ x = -3;\ y = 1;\ 11x - 18y - 15 = 0;\ \text{area} = 11]$

236 Determina i parametri a, b e d nell'equazione $y = \frac{ax+b}{4x+d}$, affinché essa rappresenti un'iperbole equilatera avente un asintoto di equazione $2x + 1 = 0$ e passante per i punti $A(1; 1)$ e $B(-1; -2)$.
Determina le coordinate del centro di simmetria dell'iperbole, l'equazione del secondo asintoto e degli assi di simmetria dell'iperbole. Rappresenta infine l'iperbole.
$\left[a = 1, b = 5, d = 2;\ O'\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right);\ y = \frac{1}{4};\ y = x + \frac{3}{4};\ y = -x - \frac{1}{4}\right]$

237 Studia la curva di equazione $y = \frac{-3x+4}{x-2}$ ed esegui una traslazione in modo tale che i suoi asintoti coincidano con gli assi cartesiani. Trova poi quali punti della curva trasformata hanno per tangente una retta di coefficiente angolare 2. $[xy = -2;\ (-1; 2), (1; -2)]$

238 Determina le eventuali intersezioni dell'iperbole equilatera di equazione $xy = \frac{1}{2}$ e della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$, dopo aver studiato la loro posizione reciproca nel piano cartesiano. Esegui poi una traslazione che porti il centro comune delle curve in $C\,(4; 2)$ e trova le nuove equazioni.
$\left[\text{curve tangenti; } \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ y = \frac{4x-15}{2(x-4)};\ x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0\right]$

I fasci di funzione omografiche

239 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo il fascio di funzioni omografiche di equazione $y = \frac{(k-1)x+2}{kx-4}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e troviamo il luogo dei centri di simmetria.

L'equazione $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ rappresenta una funzione omografica se $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$.

- $c = 0$ per $k = 0$. L'equazione diventa:

$$y = \frac{-x+2}{-4} \rightarrow y = \frac{x}{4} - \frac{1}{2},$$ che è l'equazione di una retta.

- $ad - bc = 0$ se $-4(k-1) = 2k \rightarrow k = \frac{2}{3}$.

L'equazione diventa:

$$y = \frac{-\frac{1}{3}x + 2}{\frac{2}{3}x - 4} = \frac{-\frac{1}{3}x + 2}{-2\left(-\frac{1}{3}x + 2\right)} = -\frac{1}{2} \text{ (con } x \neq 6),$$

ossia l'equazione della retta $y = -\frac{1}{2}$ privata del punto $\left(6; -\frac{1}{2}\right)$.

- Per $k \neq 0 \wedge k \neq \frac{2}{3}$, abbiamo un fascio di funzioni omografiche.

  Cerchiamo i **punti base** del fascio, scrivendo la sua equazione nella forma implicita ed evidenziando k:

  $(kx-4)y=(k-1)x+2 \ \rightarrow \ ykx-4y-kx+x-2=0 \ \rightarrow \ k(yx-x)-4y+x-2=0.$

  Per ottenere le coordinate dei punti base, risolviamo il sistema:

  $$\begin{cases} yx-x=0 \\ -4y+x-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(y-1)=0 \\ -4y+x-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \vee y=1 \\ -4y+x-2=0 \end{cases}$$

  Sostituendo nella seconda equazione:

  per $x=0,-4y-2=0 \ \rightarrow \ y=-\frac{1}{2}$, $A\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ è un punto base;

  per $y=1,-4+x-2=0 \ \rightarrow \ x=6$, $B(6;1)$ è un punto base.

- Il **centro di simmetria** delle funzioni omografiche è $C\left(\frac{4}{k};\frac{k-1}{k}\right)$ con $k \neq 0$ e $k \neq \frac{2}{3}$.

- Cerchiamo il **luogo dei centri di simmetria**, determinando k in funzione dell'ascissa e sostituendo nell'ordinata:

  $$x=\frac{4}{k} \ \rightarrow \ k=\frac{4}{x};\ y=\frac{k-1}{k} \ \rightarrow \ y=\frac{\frac{4}{x}-1}{\frac{4}{x}}=\frac{\frac{4-x}{\cancel{x}}}{\frac{4}{\cancel{x}}}=1-\frac{x}{4} \text{ (con } x \neq 0).$$

  Il luogo cercato è la retta di equazione $y=1-\frac{x}{4}$, privata del punto $(0;1)$ e privata inoltre del punto $\left(6;-\frac{1}{2}\right)$ relativo a $k=\frac{2}{3}$, valore per cui non si ha un'iperbole ma una retta.

240 Trova per quale valore di a l'equazione $y=\dfrac{2ax+1}{(a-6)x-4}$ rappresenta un'iperbole equilatera.

$\left[\forall a \in \mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3},6\right\}\right]$

241 Studia il fascio di funzioni omografiche $y=\dfrac{ax+1}{(a-2)x+3}$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

$\left[\text{per } a=2,\ y=\frac{2x+1}{3};\ \text{per } a=-1,\ y=\frac{1}{3} \text{ con } x \neq 1;\ \text{per } a \neq -1;2, \text{ iperboli di centro } \left(-\frac{3}{a-2};\frac{a}{a-2}\right)\right]$

242 Dopo aver studiato il fascio di curve di equazione $y=\dfrac{mx-m}{x+2m}$ al variare di $m \in \mathbb{R}$, trova il luogo dei centri di simmetria.

$\left[\text{per } m=0,\ y=0 \text{ con } x \neq 0;\ \text{per } m=-\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2} \text{ con } x \neq 1;\right.$
$\left.\text{per } m \neq -\frac{1}{2};0, \text{ iperboli di centro } (-2m;m);\ x+2y=0 \text{ esclusi i punti } \left(1;-\frac{1}{2}\right), (0;0)\right]$

243 Studia il fascio di curve di equazione $y=\dfrac{(k+2)x+k-1}{2kx+1}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e determina il luogo dei centri di simmetria. Scrivi poi l'equazione dell'iperbole del fascio che ha come asintoto la retta $x=\frac{1}{2}$ e quella dell'iperbole che ha per tangente la retta $y=2x$.

$\left[\text{per } k=0,\ y=2x-1;\ \text{per } k=-\frac{1}{2},\ y=-\frac{3}{2} \text{ con } x \neq 1;\ \text{per } k=2,\ y=1 \text{ con } x \neq -\frac{1}{4};\ \text{per } k \neq -\frac{1}{2};0;2,\right.$
$\left.\text{iperboli di centro } \left(-\frac{1}{2k};\frac{k+2}{2k}\right);\ y=\frac{1-4x}{2} \text{ esclusi i punti } \left(0;\frac{1}{2}\right), \left(1;-\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{1}{4};1\right);\ y=\frac{x-2}{1-2x},\ y=\frac{50x-1}{32x+17}\right]$

244 Data l'equazione $y = \dfrac{a-3}{(a+1)x-2}$, studia il fascio di curve da essa rappresentato al variare di $a \in \mathbb{R}$ e trova gli eventuali punti comuni a tutte le curve del fascio.

$\left[\text{per } a = -1,\ y = 2; \text{ per } a = 3,\ y = 0 \text{ con } x \neq \dfrac{1}{2}; \text{ per } a \neq -1; 3, \text{ iperboli di centro } \left(\dfrac{2}{a+1}; 0\right); \left(\dfrac{1}{2}; 2\right)\right]$

245 Trova per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $y = \dfrac{x-k}{kx-4}$ rappresenta un'iperbole equilatera, determina gli eventuali punti comuni a tutte le iperboli e scrivi l'equazione dell'iperbole del fascio che ha come asintoto la retta $x = \dfrac{1}{4}$.

$\left[\forall k \in \mathbb{R} - \{\pm 2, 0\}; \left(2; -\dfrac{1}{2}\right), \left(-2; \dfrac{1}{2}\right); y = \dfrac{x-16}{16x-4}\right]$

ESERCIZI VARI L'iperbole

246 **ASSOCIA** a ciascuna iperbole i propri asintoti.

1) $5x^2 - 2y^2 = 10$
2) $x^2 - y^2 = 16$
3) $-25x^2 + 4y^2 = 100$
4) $xy - 2 = 0$
5) $y = \dfrac{x+1}{x}$

a) $5x \pm 2y = 0$
b) $x = 0 \vee y = 0$
c) $x = 0 \vee y = 1$
d) $\sqrt{10}\,x \pm 2y = 0$
e) $2x \pm 2y = 0$

247 **COMPLETA**
Data l'equazione $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{2a-3} = 1$, allora:

a) per $a >$ …… l'equazione rappresenta un'iperbole con i vertici reali sull'asse x;
b) per $a =$ …… l'equazione rappresenta una circonferenza;
c) per $a < -3$ l'equazione rappresenta una ……… con i fuochi sull'asse delle ……… .

$\left[\text{a) } \dfrac{3}{2}; \text{ b) } -3; \text{ c) ellisse, ordinate}\right]$

248 **TEST** Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$(k^2 - 4k)x^2 + (6-k)y^2 = 1$$

rappresenta un'iperbole equilatera con i fuochi sull'asse delle ascisse?

A $k = 2 \vee k = 3$
B $k < 6$
C $k = 0$
D $\forall k \in \mathbb{R}$
E $\nexists k \in \mathbb{R}$

249 **TEST** Un'iperbole con i fuochi sull'asse y ha un vertice nel punto $(0; -\sqrt{3})$ e passa per il punto $P(1; 2)$. Quale fra le seguenti affermazioni è *falsa*?

A È simmetrica rispetto ai suoi asintoti.
B È simmetrica rispetto al suo asse trasverso.
C È simmetrica rispetto al suo asse non trasverso.
D Ha eccentricità maggiore di 1.
E Non ha il centro nell'origine O.

250 **VERO O FALSO?**

a) In ogni iperbole si ha $e > 1$. V F
b) All'aumentare di e, aumenta lo «schiacciamento» dell'iperbole. V F
c) L'iperbole equilatera ha eccentricità uguale a 1. V F
d) Tutte le funzioni omografiche hanno eccentricità $e = \sqrt{2}$. V F
e) L'eccentricità e cambia al cambiare del sistema di riferimento. V F

251 Scrivi l'equazione del luogo dei centri delle iperboli di equazione $3\left(x-\frac{k}{k-1}\right)^2-4(y-k+2)^2=12$. Dopo aver verificato che il luogo è un'iperbole, rappresentala e trova l'equazione della retta a essa tangente nel suo punto di ascissa 3.

$\left[y=\frac{-x+2}{x-1};\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right]$

252 Determina l'equazione dell'iperbole equilatera avente fuochi $F_1(2; 0)$, $F_2(2; 4)$. $[x^2-y^2-4x+4y+2=0]$

253 a) Rappresenta l'iperbole γ di equazione $x^2-y^2+6x-3y-\frac{37}{4}=0$, dopo aver determinato il centro C, i vertici reali, le equazioni degli asintoti, l'eccentricità.

b) Studia il fascio di curve di equazione $y=\frac{(a-2)x+1}{2ax+3}$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

c) Trova il luogo dei centri di simmetria.

d) Individua nel fascio l'iperbole con il centro di simmetria coincidente con quello di γ e disegnala.

$\left[\text{a) } C\left(-3; -\frac{3}{2}\right), A_1\left(-7; -\frac{3}{2}\right), A_2\left(1; -\frac{3}{2}\right), 2x+2y+9=0, 2x-2y+3=0, e=\sqrt{2};\right.$
b) per $a=0$, $y=\frac{-2x+1}{3}$; per $a=6$, $y=\frac{1}{3}$ con $x\neq-\frac{1}{4}$; per $a\neq 0, 6$ iperboli di centro $\left(\frac{-3}{2a}; \frac{a-2}{2a}\right)$;
$\left.\text{c) } y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\text{, esclusi i punti } \left(0; \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right);\ \text{d) } y=\frac{-3x+2}{2x+6}\right]$

254 Data la famiglia di parabole $y=\frac{a^3x^2}{3}+\frac{a^2x}{2}-2a$, con $a\neq 0$, il luogo dei vertici è un'iperbole. Determina l'equazione di tale iperbole.

(USA *Texas A&M University High School Mathematics Contest*, 2006)

$\left[xy=\frac{105}{64}\right]$

255 **TEST** Supponi che ABC sia un triangolo equilatero con $A=(-1; 0)$ e con entrambi i punti B e C appartenenti al ramo destro dell'iperbole definita dall'equazione $x^2-y^2=1$. Qual è l'area di ABC?

A $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B 3 C $3\sqrt{3}$ D 6 E $4\sqrt{3}$

(USA *University of South Carolina, High School Math Contest*, 2005)

256 **TEST** Quali sono le equazioni degli asintoti della seguente iperbole?

$4x^2-3y^2+8x+16=0.$

A $y=x$ e $y=-x$.

B $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ e $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

C $y=\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1)$ e $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1)$.

D $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$ e $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$.

E $y=\frac{1}{2}(x+1)$ e $y=-\frac{1}{2}(x+1)$.

(USA *Elon University, High School Math Contest*, 2002)

257 a) Scrivi l'equazione dell'iperbole riferita agli assi, con i fuochi sull'asse x, di eccentricità $\frac{\sqrt{5}}{2}$ e passante per $(4\sqrt{3}; 2)$.

b) Determina l'equazione della retta tangente nel suo punto P di ascissa $2\sqrt{10}$ e di ordinata negativa.

c) Dimostra che tale tangente è la bisettrice dell'angolo $F'\widehat{P}F$, essendo F e F' i fuochi dell'iperbole.

$\left[\text{a) } \frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1;\ \text{b) } \sqrt{10}\,x+2\sqrt{2}\,y-16=0\right]$

258 a) Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita agli asintoti, tangente alla retta di equazione $y = -2x - 8$.

b) Per un punto A dell'iperbole, nel primo quadrante, traccia la retta tangente, che interseca l'asse x in B, e la retta parallela all'asse x che interseca l'asse y in C. Verifica che l'area del trapezio $OBAC$ è costante al variare di A.

c) Trova per quale posizione di A il triangolo OAB è equilatero.

$\left[\text{a) } xy = 8; \text{ b) } 12; \text{ c) } x_A = 2\sqrt[4]{\frac{4}{3}}\right]$

259 Determina l'equazione dell'iperbole equilatera che individua sulla retta $y = 3$ un segmento di lunghezza 8. Trova poi l'equazione della tangente all'iperbole nel suo punto A del primo quadrante di ascissa 3 e quella nel punto B del terzo quadrante di ascissa -3. Calcola infine l'area del quadrilatero definito dalle due tangenti e dalle rette parallele all'asse y e passanti per A e per B.

$\left[x^2 - y^2 = 7; 3x - \sqrt{2}\,y - 7 = 0; 3x - \sqrt{2}\,y + 7 = 0; \text{area} = 42\sqrt{2}\right]$

260 Scrivi l'equazione della funzione omografica passante per l'origine degli assi e avente centro nel punto $C(1; 1)$. Determina poi le equazioni delle due tangenti t e t' nei vertici dell'iperbole e, considerata la retta di equazione generica $y = k$, trova per quale valore di k si forma, con l'asse x e le due tangenti t e t', un rombo.

$\left[y = \frac{x}{x-1}; y = -x; y = -x + 4; k = \pm 2\sqrt{2}\right]$

261 Trova l'equazione dell'iperbole equilatera avente centro di simmetria $O'(-1; 4)$, asse trasverso parallelo all'asse y e un vertice in $A(-3; 4)$. $[x^2 - y^2 + 2x + 8y - 11 = 0]$

262 Dopo aver determinato l'equazione dell'iperbole avente centro nell'origine O del sistema di riferimento, un fuoco di coordinate $F(0; \sqrt{39})$ e passante per il punto $A(2; 6)$, calcola l'equazione degli asintoti, determina l'eccentricità e rappresenta la curva. Considera poi la retta di equazione generica $y = k$, che interseca l'iperbole in B e in C, e trova per quale valore di k il triangolo BCO ha area uguale a 12.

$\left[\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{27} = -1; y = \pm\frac{3}{2}x; e = \frac{\sqrt{13}}{3}; k = \pm 6\right]$

263 Determina l'equazione dell'iperbole avente centro nell'origine del sistema di riferimento, asse trasverso l'asse x, eccentricità $e = 2$ e passante per il punto $A(3; \sqrt{15})$. Trova poi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo che ha per vertici il punto A e i vertici reali dell'iperbole.

$\left[\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1; 3x^2 + 3y^2 - 4\sqrt{15}\,y - 12 = 0\right]$

264 Data la curva di equazione $y = \frac{2x - a}{bx + c}$, trova a, b, c, sapendo che ha per asintoto la retta $y = 1$ e per tangente in $A(0; -4)$ la retta t: $y = 5x - 4$. Considera poi la retta passante per il centro di simmetria C e parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante, determinando la sua intersezione B con la retta t. Calcola l'area del triangolo ABC.

$\left[a = 8, b = 2, c = 2; B\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right); \text{area} = \frac{10}{3}\right]$

265 Determina per quali valori di k l'equazione $\frac{x^2}{3k+1} - \frac{y^2}{9-k^2} = 1$ rappresenta:

a) un'iperbole;
b) un'iperbole equilatera;
c) un'iperbole con fuochi sull'asse x;
d) un'ellisse;
e) una circonferenza.
f) Posto $k = 1$, rappresenta la curva che si ottiene, individuando le sue principali caratteristiche. Trova quali rette parallele all'asse y, intersecando la curva, determinano una corda lunga 16.

$\left[\text{a) } k < -3 \vee -\frac{1}{3} < k < 3; \text{ b) } k = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}; \text{ c) } -\frac{1}{3} < k < 3; \text{ d) } k > 3; \text{ e) } k = 5; \text{ f) } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1, x = \pm 6\right]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **MATEMATICA.BLU - Vol. 3** © Zanichelli 2012 *con Maths in English*

266 Data l'iperbole equilatera riferita agli asintoti di equazione $xy = k$, con $k < 0$:

a) stabilisci per quale valore del parametro l'iperbole stacca sulla retta di equazione $2x - y - 6 = 0$ una corda che misura $\sqrt{5}$;

b) rappresenta l'iperbole;

c) trova le coordinate dei fuochi e dei vertici;

d) scrivi le equazioni delle rette tangenti all'iperbole nei vertici.

[a) $k = -4$; c) $F(\pm 2\sqrt{2}; \mp 2\sqrt{2})$, $V(\pm 2; \mp 2)$; d) $y = x \pm 4$]

267 Per quali valori dei coefficienti a, b, c, d la funzione omografica $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ ha centro $C(2; -1)$ e passa per $B(0; 1)$? Considerata l'intersezione con l'asse x, determina l'equazione della tangente t in tale punto. Detti D ed E i punti di intersezione fra t e gli asintoti, calcola l'area del triangolo ECD e l'equazione della circonferenza a esso circoscritta. [$a = -1$, $b = -2$, $c = 1$, $d = -2$; $x - 4y + 2 = 0$; area $= 8$; $x^2 + y^2 + 4x - 13 = 0$]

268 a) Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera avente i vertici sull'asse y e passante per il punto A di coordinate $(3; -5)$.

b) Sia B il simmetrico di A rispetto all'asse delle ascisse. Determina l'equazione della tangente t all'iperbole nel punto B.

c) Calcola l'area della parte di piano individuata dalla retta t, dall'asse delle ascisse e dall'asintoto dell'iperbole avente coefficiente angolare positivo.

$\left[\text{a) } x^2 - y^2 + 16 = 0;\ \text{b) } B(3; 5),\ 3x - 5y + 16 = 0;\ \text{c) } \dfrac{64}{3}\right]$

269 a) Scrivi l'equazione dell'iperbole avente vertici reali $(\pm 3; 0)$ e passante per il punto $\left(-5; -\dfrac{8}{3}\right)$, individuandone gli asintoti.

b) Trova le equazioni delle tangenti all'iperbole mandate dal punto P dell'asse y di ordinata $-\dfrac{3}{2}$. Siano A e B i punti di tangenza.

c) Calcola l'area del quadrilatero $AOBP$, dove O è l'origine del sistema di riferimento.

$\left[\text{a) } \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1,\ y = \pm\dfrac{2}{3}x;\ \text{b) } 5x - 6y - 9 = 0,\ 5x + 6y + 9 = 0,\ A\left(5; \dfrac{8}{3}\right), B\left(-5; \dfrac{8}{3}\right);\ \text{c) } \dfrac{15}{2}\right]$

270 a) Considera l'iperbole di equazione $9x^2 - y^2 + 9 = 0$. Individua i suoi vertici e rappresentala graficamente.

b) Trova le equazioni delle tangenti all'iperbole mandate dal punto A di coordinate $\left(-1; \dfrac{3}{5}\right)$. Siano B e C i punti di tangenza ($x_B > x_C$).

c) Calcola l'area del triangolo ABC.

d) Determina un punto P sull'iperbole, con ordinata positiva e ascissa minore dell'ascissa di C, tale che $\overline{PH} = \dfrac{12}{\sqrt{226}}$, essendo H la proiezione di P sulla retta BC.

$\left[\text{a) } V(0; \pm 3);\ \text{b) } 12x + 5y + 9 = 0,\ 9x - 5y + 12 = 0,\ B\left(\dfrac{4}{3}; -5\right), C\left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{15}{4}\right);\ \text{c) } \dfrac{343}{40};\ \text{d) } (0; 3)\right]$

271 a) Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti, passante per il punto di coordinate $(-2; -3)$.

b) Scrivi l'equazione della circonferenza avente centro nell'origine del sistema di riferimento e raggio 2. Siano A e B le sue intersezioni con i semiassi positivi delle x e delle y.

c) Determina le equazioni delle tangenti all'iperbole mandate da A e B.

d) Calcola l'area del quadrilatero formato da dette tangenti e dagli asintoti dell'iperbole.

$\left[\text{a) } xy = 6;\ \text{b) } x^2 + y^2 = 4,\ A(2; 0),\ B(0; 2);\ \text{c) } 6x + y - 12 = 0,\ x + 6y - 12 = 0;\ \text{d) } \dfrac{24}{7}\right]$

272 Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera riferita a un sistema di assi cartesiani, paralleli ai suoi asintoti, avente un asintoto di equazione $y - 2 = 0$ e passante per i punti $A(1; -3)$ e $B(5; 7)$. Trova le coordinate del centro di simmetria dell'iperbole, l'equazione del secondo asintoto e degli assi di simmetria dell'iperbole. Determina infine l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine, avente due vertici nei punti di intersezione dell'iperbole con gli assi.

$\left[y = \frac{2x+4}{x-3}; (3; 2); x = 3; y = -x + 5; y = x - 1; \frac{x^2}{4} + \frac{9}{16}y^2 = 1\right]$

273 Scrivi l'equazione dell'iperbole, simmetrica rispetto agli assi cartesiani, che passa per i punti $P(-2; 0)$ e $Q(3; -2\sqrt{5})$, e considera la tangente t nel suo punto R di ascissa $\frac{5}{2}$ e ordinata positiva. Determina quindi l'equazione della retta s tangente all'iperbole nel punto R', simmetrico di R rispetto all'origine, e, dopo aver osservato che le due rette t e s sono parallele, calcola la loro distanza. Scrivi l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x, due vertici coincidenti con quelli dell'iperbole ed eccentricità $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\left[\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1; R\left(\frac{5}{2}; 3\right); t: 10x - 3y - 16 = 0; R'\left(-\frac{5}{2}; -3\right); s: -10x + 3y - 16 = 0; \frac{32}{\sqrt{109}}; \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\right]$

274 Scrivi l'equazione dell'iperbole, con i fuochi sull'asse x, con gli assi di simmetria coincidenti con gli assi cartesiani, passante per il punto $P(-7; 1)$ e di eccentricità $e = \sqrt{2}$. Trova poi le equazioni delle rette tangenti all'iperbole in P e in P', simmetrico di P rispetto all'asse y. Sia A il loro punto di intersezione. Determina, infine, l'equazione della circonferenza di centro A passante per i fuochi dell'iperbole.

$[x^2 - y^2 = 48; 7x + y + 48 = 0; 7x - y - 48 = 0; x^2 + y^2 + 96y - 96 = 0]$

275 a) Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai propri assi che ha un fuoco nel punto $F(2\sqrt{5}; 0)$ ed eccentricità $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

b) Nel fascio improprio di rette aventi coefficiente angolare 2 determina le rette p_1 e p_2 tangenti all'iperbole e calcola le coordinate dei punti P e Q di tangenza.

c) Indicati con R e S i punti in cui p_1 e p_2 intersecano l'asse delle ordinate, calcola l'area del quadrilatero $PSQR$.

$\left[\text{a) } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1; \text{ b) } y = 2x \pm 2\sqrt{15}; \left(\pm\frac{16}{\sqrt{15}}; \pm\frac{2}{\sqrt{15}}\right); \text{ c) } 64\right]$

276 L'iperbole α, con i fuochi sull'asse delle ascisse, ha il semiasse trasverso di lunghezza $\frac{5}{2}$ e gli asintoti di equazioni $2x\sqrt{3} \pm 3y = 0$, mentre la circonferenza β ha raggio 1 e centro nell'origine degli assi.

a) Determina le equazioni di α e β.

b) Trova le equazioni delle quattro tangenti comuni ad α e a β e calcola le coordinate dei quattro punti di tangenza con l'iperbole.

c) Trova l'area del quadrilatero individuato dalle quattro tangenti.

$\left[\text{a) } 4x^2 - 3y^2 = 25, x^2 + y^2 = 1; \text{ b) } 4x \pm 3y \pm 5 = 0; (\pm 5; \pm 5); \text{ c) } \frac{25}{6}\right]$

277 Le due iperboli α e β condividono gli stessi asintoti di equazioni $2x \pm 3y = 0$, hanno i fuochi l'una sull'asse delle ascisse e l'altra sull'asse delle ordinate, e sono entrambe tangenti all'ellisse γ di equazione $9x^2 + 16y^2 = 144$.

a) Determina le equazioni delle due iperboli.

b) Calcola l'area del quadrilatero formato dai quattro fuochi delle due iperboli.

[a) $4x^2 - 9y^2 = 64$, $4x^2 - 9y^2 = -81$; b) 52]

278 Nel semipiano delle ordinate positive considera un punto generico P del ramo dell'iperbole γ di equazione $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$, la sua proiezione H sull'asse x e il fuoco F dell'iperbole. Indicata con t la retta tangente a γ nel punto P, sia T il punto in cui t incontra l'asse delle ascisse. Determina le coordinate di P affinché si abbia $4\overline{TF} = \sqrt{17}\,\overline{PH}$.

$[(3; 4\sqrt{2}); (-3; 4\sqrt{2})]$

REALTÀ E MODELLI

1 **Il costo della caffettiera**

Una piccola fabbrica produce un nuovo tipo di caffettiera in un dato periodo di tempo, sostenendo costi fissi pari a circa € 9000 e costi variabili quantificabili in € 9 per ogni unità prodotta.

▶ Esprimi in funzione del numero x di pezzi prodotti i costi totali sostenuti dall'azienda e il costo medio unitario per ogni pezzo prodotto.
Rappresenta graficamente la funzione «costo totale» e la funzione «costo medio unitario» tenendo conto che nel periodo considerato l'azienda può produrre al massimo 3000 unità.

▶ Il costo unitario diminuisce all'aumentare del numero di pezzi prodotti. Per studiare meglio questo aspetto, calcola la variazione percentuale della diminuzione di costo unitario corrispondente all'aumento di 100 pezzi prodotti, nei due casi in cui inizialmente i pezzi prodotti siano 1000 oppure 2000.

▶ Dopo un'indagine di mercato si valuta che le caffettiere possano essere vendute a un prezzo massimo di € 16. Considerato che le spese di distribuzione sono di circa € 1800 fisse aumentate di € 0,50 per ogni pezzo, calcola qual è il minimo numero di pezzi da produrre per non andare in perdita.

2 **Torre di raffreddamento**

Il profilo di molte torri di raffreddamento di centrali nucleari ha la forma di un'iperbole.

▶ Rappresenta nel piano cartesiano gli archi di iperbole di equazione $x^2 - \dfrac{(y-10)^2}{100} = 1$ delimitati dall'asse delle ascisse (nei punti A e B con $x_A < x_B$) e dalla retta $y = 12$ (nei punti C e D con $x_C < x_D$). Tali archi rappresentano il profilo di una torre di raffreddamento.

▶ In assenza di vento il vapore che fuoriesce dalla torre occupa, con buona approssimazione, la zona delimitata dalle due rette tangenti all'iperbole nei punti C e D. Scrivi l'equazione della porzione del fascio di rette (generato dalle tangenti) compresa tra le tangenti stesse.

3 **Le sonde Voyager**

La sonda spaziale Voyager 2 è stata una delle prime esploratrici del sistema solare esterno, ed è ancora in attività. Lanciata il 20 agosto 1977 dalla NASA, poco prima della gemella Voyager 1, fu immessa in un'orbita che la portò a sfiorare i due pianeti giganti, Giove e Saturno. Durante il viaggio i tecnici si resero conto che potevano sfruttare un allineamento planetario piuttosto raro per far proseguire la sonda verso Urano e Nettuno.
Dalla legge di gravitazione universale si deduce che se un corpo (per esempio la sonda) arriva nella sfera di influenza gravitazionale di un altro corpo (per esempio Saturno) con una velocità sufficientemente elevata, non precipita né si mette in rotazione attorno al secondo corpo, ma si allontana seguendo una traiettoria iperbolica di cui il pianeta è un fuoco.

La traiettoria di Voyager 2 vicino a Saturno può essere descritta dalla seguente equazione (i valori sono espressi in kilometri):

$$\frac{x^2}{1{,}109 \cdot 10^{11}} - \frac{y^2}{1{,}320 \cdot 10^{11}} = 1,$$

mentre per Voyager 1 l'equazione analoga è:

$$\frac{x^2}{2{,}761 \cdot 10^{10}} - \frac{y^2}{9{,}502 \cdot 10^{10}} = 1.$$

▶ Quale delle due sonde si è avvicinata di più a Saturno?

▶ Quale delle due traiettorie ha eccentricità maggiore?

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Quali equazioni, tra

$$x = -\frac{4}{y}, \quad x^2 = y^2 + 1, \quad y = \frac{1-x}{2x+1},$$

rappresentano un'iperbole equilatera?

- **A** Solo la prima.
- **B** Solo la prima e la terza.
- **C** Nessuna delle tre.
- **D** Solo la seconda.
- **E** Tutte e tre.

2 La retta $3x + 2y = 0$ e il punto $F(0; -\sqrt{13})$ sono rispettivamente un asintoto e un fuoco di un'iperbole.
La sua equazione è:

- **A** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$
- **B** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{13} = 1.$
- **C** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{13} = -1.$
- **D** $9x^2 - 4y^2 + 36 = 0.$
- **E** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$

3 L'eccentricità dell'iperbole di equazione

$$x^2 - y^2 = -4$$

è:

- **A** $\frac{1}{\sqrt{2}}.$
- **B** 2.
- **C** $\sqrt{2}.$
- **D** $\frac{1}{2}.$
- **E** $\frac{1}{2}\sqrt{2}.$

4 È data l'iperbole di equazione:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Le rette del fascio $y = mx$ che intersecano l'iperbole sono *soltanto* quelle per cui:

- **A** $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le m \le \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- **B** $-\frac{\sqrt{3}}{2} < m < \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- **C** $m = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$
- **D** $0 \le m \le \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- **E** $0 \le m < \frac{\sqrt{3}}{2}.$

5 Quale delle seguenti proposizioni relative alla funzione omografica di equazione $y = \frac{x}{x-2}$ è *vera*?

- **A** Passa per l'origine degli assi e per il punto $P(1; 1)$.
- **B** Ha come asintoti le rette di equazioni $x = 2$ e $y = -1$.
- **C** Ha il centro nel punto $C(2; 1)$.
- **D** Il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse x.
- **E** La curva che la rappresenta è situata interamente nel primo quadrante.

6 Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $(k+1)x^2 + (2k-1)y^2 = 2k$ rappresenta un'iperbole con i fuochi sull'asse y?

- **A** $k < -1 \vee k > 0.$
- **B** $0 < k < \frac{1}{2}.$
- **C** $-1 \le k < 0.$
- **D** $-1 < k < 0.$
- **E** $k < 0 \vee k > \frac{1}{2}.$

7 Considera l'iperbole di equazione:

$$y = \frac{1-x}{x+2}.$$

Quale delle seguenti proposizioni è *falsa*?

- **A** Gli asintoti sono $x = -2$ e $y = -1$.
- **B** Il centro di simmetria è $(-2; -1)$.
- **C** L'iperbole interseca l'asse x in $x = 1$.
- **D** Traslando l'iperbole in modo che abbia centro di simmetria nell'origine, essa ha equazione $xy = 3$.
- **E** L'iperbole interseca l'asse y in $(0; -1)$.

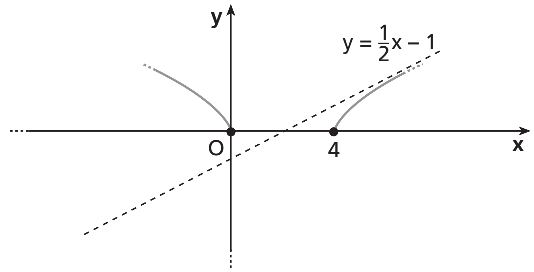
8 Un'iperbole ha equazione:

$$xy - 2x - 4y - 1 = 0.$$

Possiamo affermare che:

- **A** gli assi sono le rette di equazioni $x = 4$, $y = 2$.
- **B** gli asintoti sono le rette di equazioni $x - y - 2 = 0$, $x + y - 6 = 0$.
- **C** i semiassi sono entrambi uguali a 6.
- **D** la distanza tra i fuochi è 12.
- **E** l'eccentricità è 2.

9 Il grafico della figura ha equazione:



A $y = 2\sqrt{x^2 - 4x}$.

B $y = \sqrt{x^2 - 2x}$.

C $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4x}$.

D $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4x}$.

E $y = 2 + \sqrt{x^2 - 4x}$.

QUESITI

10 Dimostra che la tangente a un'iperbole equilatera del tipo $xy = k$ in un suo punto $P(x_0; y_0)$ ha equazione:

$$\frac{xy_0 + x_0y}{2} = k.$$

11 Dimostra che in una qualunque iperbole del tipo $xy = k$ la tangente in un suo punto forma con gli assi cartesiani un triangolo di area costante $2 \cdot |k|$.

12 Verifica che la tangente a un'iperbole in un suo punto P è bisettrice dell'angolo formato dalle rette PF_1 e PF_2, essendo F_1 e F_2 i due fuochi, utilizzando l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ e il suo punto P di ascissa 4 nel primo quadrante.

13 Riferito il piano a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri l'equazione:

$$xy + px + qy + r = 0.$$

Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti p, q, r (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2004, *quesito* 6)

14 In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano la seguente equazione:

$$2xy - (k-1)x + 4y - 2k + 1 = 0,$$

dove k è un parametro reale. Determinare per quali valori di k il luogo assegnato è:
- un'iperbole;
- una coppia di rette.

(*Esame di Stato di indirizzo scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria*, 2001, *quesito* 4)

15 Considera l'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = a^2$. Indicati con F_1 e F_2 i suoi fuochi e con O l'origine degli assi, verifica che per un generico punto P dell'iperbole vale la proporzione

$$\overline{PF_1} : \overline{PO} = \overline{PO} : \overline{PF_2},$$

ossia la misura del segmento che congiunge un punto P dell'iperbole con il centro di simmetria è medio proporzionale tra le distanze del punto dai due fuochi.

16 Una retta secante un'iperbole stacca sull'iperbole e sugli asintoti segmenti aventi lo stesso punto medio. Verifica che l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ e la retta di equazione $15x - 4y - 84 = 0$ soddisfano la proprietà.

PROBLEMI

17 Considera l'insieme delle curve di equazione $y = \dfrac{3kx - 1}{kx + 1}$, $\quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

a) Verifica che tutte le curve hanno in comune un punto P e determina le sue coordinate.
b) Disegna i grafici delle curve γ_1 e γ_2 corrispondenti a $k = -1$, $k = 1$ e verifica che sono uno il simmetrico dell'altro rispetto all'asse delle ordinate.
c) Calcola l'area del poligono formato dalle tangenti ai vertici delle curve γ_1 e γ_2.
d) Generalizza il risultato del punto b) dimostrando che curve con k opposti sono reciprocamente simmetriche rispetto all'asse y.

[a) $P(0; -1)$; c) quadrato di area 32]

18 a) Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera avente centro nel punto $E(2; 0)$ e un vertice nell'origine del sistema di riferimento.
b) Trova l'equazione della circonferenza avente il centro nel punto $(0; -3)$ e passante per l'altro vertice dell'iperbole.
c) Determina le coordinate dei punti di intersezione A, B, C, D tra la circonferenza e gli asintoti dell'iperbole $(x_A > x_B > x_C > x_D)$.
d) Dimostra che i triangoli AEB e CED sono simili e calcolane il rapporto di similitudine.

$\left[\text{a) } x^2 - y^2 - 4x = 0\text{; b) } x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0\text{; c) } A(5; -3), B(3; 1), C(0; 2), D(-4; -6)\text{; d) } \frac{1}{2}\right]$

19 a) Scrivi l'equazione della funzione omografica avente il centro di simmetria in $C(-4; 3)$ e passante per il punto $P(-6; 9)$.
b) Sia O l'intersezione dell'iperbole trovata con l'asse delle ascisse e A il suo simmetrico rispetto a C. Scrivi l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento OA.
c) Determina gli ulteriori punti di intersezione D ed E dell'iperbole con la circonferenza.
d) Calcola l'area del quadrilatero $ADOE$.

$\left[\text{a) } y = \frac{3x}{x+4}\text{; b) } O(0; 0), A(-8; 6), x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0\text{; c) } D(-7; 7), E(-1; -1)\text{; d) } 14\right]$

20 a) Determina l'equazione dell'iperbole, con gli assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani, avente per asintoti le rette di equazioni $2x - y - 8 = 0$ e $2x + y - 4 = 0$ e un vertice nel punto $(2; -2)$.
b) Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti di intersezione dell'iperbole trovata con l'asse y e con la retta $x - 6 = 0$.
c) Trova l'area del rettangolo che ha per vertici i punti di intersezione tra l'iperbole e la circonferenza.

$\left[\text{a) } (x-3)^2 - \frac{(y+2)^2}{4} = 1\text{; b) } x^2 + y^2 - 6x + 4y - 28 = 0\text{; c) } 48\sqrt{2}\right]$

21 a) Studia e rappresenta graficamente l'iperbole di equazione $2x^2 - y^2 + 8x + 6y = 0$.
b) Sia A l'intersezione di ascissa negativa dell'iperbole con l'asse x e B quella di ordinata positiva con l'asse y. Determina le equazioni delle tangenti all'iperbole in A e in B.
c) Le tangenti, intersecando gli assi cartesiani, formano un trapezio di cui si chiede l'area.

$\left[\text{a) iperbole traslata di centro } C(-2; 3)\text{; b) } t_A\text{: } 4x - 3y + 16 = 0, t_B\text{: } 4x - 3y + 18 = 0\text{; c) } \frac{17}{6}\right]$

22 a) Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $(9; 9)$ e passante per il punto $(14; 4)$.
b) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti, passante per il punto di intersezione della circonferenza con la bisettrice del primo e terzo quadrante avente ascissa minore.
c) Calcola l'area della figura piana i cui vertici sono i punti di intersezione della circonferenza con l'iperbole.

[a) $x^2 + y^2 - 18x - 18y + 112 = 0$; b) $xy = 16$; c) 6]

23 a) Determina l'equazione della funzione omografica avente per centro di simmetria il punto $C(-3; 2)$ e passante per il punto $A(-7; 1)$.

b) Scrivi l'equazione della circonferenza avente centro in C e raggio $2\sqrt{2}$.

c) Trova le intersezioni tra l'iperbole e la circonferenza e individua le tangenti nei punti comuni.

d) Determina i fuochi F_1 e F_2 dell'iperbole e calcola l'area del triangolo AF_1F_2.

$\left[\text{a) } y = \dfrac{2x+10}{x+3}; \text{ b) } x^2 + y^2 + 6x - 4y + 5 = 0; \text{ c) } (-1; 4), (-5; 0), y = -x + 3, y = -x - 5; \text{ d) } F_1(-3 - 2\sqrt{2}; 2 - 2\sqrt{2}), F_2(-3 + 2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2}), \text{area} = 6\sqrt{2}\right]$

24 a) Studia il fascio di curve di equazione $kxy + (1-k)x + 6y - 3k + 3 = 0$ e indica per quali valori di k si ottiene una retta o l'insieme di due rette.

b) Studia la curva γ che si ottiene attribuendo a k il valore -1.

c) Traccia le tangenti alla curva γ condotte dal punto $(2; -2)$ e siano C e D i punti di tangenza.

d) Calcola il perimetro e l'area del triangolo ACD, essendo $A(-6; 0)$.

$\left[\text{a) } k = 0, x + 6y + 3 = 0; k = 1, x + 6 = 0, y = 0; k = 2, x + 3 = 0, 2y - 1 = 0; \text{ b) } y = \dfrac{2x+6}{x-6}; \text{ c) } C(0; -1); x + 2y + 2 = 0; D(3; -4); 2x + y - 2 = 0; \text{ d) } \sqrt{37} + 3\sqrt{2} + \sqrt{97}; \dfrac{15}{2}\right]$

25 Dato il fascio di curve di equazione $y = \dfrac{kx - 4k}{(k+1)x - 2}$, con $k \in \mathbb{R}$:

a) stabilisci per quali valori di k rappresenta un fascio di iperboli equilatere traslate;

b) determina il luogo dei centri di simmetria delle iperboli;

c) trova e rappresenta graficamente l'iperbole γ del fascio che ha come asintoto la retta $4y - 1 = 0$;

d) detto A il punto simmetrico dell'origine O degli assi cartesiani rispetto al centro di simmetria di γ e indicato con C il punto $(0; 1)$, trova il perimetro e l'area del triangolo OAC.

$\left[\text{a) } k \neq -1, -\dfrac{1}{2}, 0; \text{ b) } y = -\dfrac{x}{2} + 1, \text{ con } x \neq 0; \text{ c) } y = \dfrac{x-4}{4x-6}; \text{ d) } \sqrt{37} + 1; \dfrac{1}{4}\right]$

26 Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x, y:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a},$$

dove a è un parametro reale positivo.

a) Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione $x + y = 4$.

c) Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha il centro nel punto di coordinate $(1; 1)$ e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.

d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t.

e) Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza k.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Sessione ordinaria*, 2001, *problema* 1)

$\left[\text{a) } y = \dfrac{ax}{x-a}, x \neq 0; \text{ b) } 0 < a \leq 1; \text{ c) } x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0; \text{ d) } 3\pi + 2; \pi - 2; \text{ e) } \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$

PROBLEMI DI RIEPILOGO SU CIRCONFERENZA, PARABOLA, ELLISSE, IPERBOLE

27 a) Data l'ellisse $x^2 + 2y^2 - 4x - 4y = 0$, disegna la curva e indica la traslazione da applicare per renderla simmetrica rispetto all'origine.

b) Studia il fascio di curve di equazione $y = \frac{(2k+1)x}{kx+2}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e trova il luogo dei centri di simmetria.

c) Individua nel fascio l'iperbole con il centro di simmetria coincidente con quello dell'ellisse e disegnala.

$\left[\text{a)} \begin{cases} x' = x-2 \\ y' = y-1 \end{cases}\right.$; b) per $k=0$, $y=\frac{x}{2}$; per $k=-\frac{1}{2}$, $y=0$ con $x \neq 4$; per $k \neq 0, -\frac{1}{2}$ iperboli di centro $\left(-\frac{2}{k}; \frac{2k+1}{k}\right)$; luogo dei centri di simmetria: $y = -\frac{x}{2} + 2$, esclusi i punti $(0; 2)$, $(4; 0)$; c) $\left. y = \frac{x}{x-2}\right]$

28 Determina l'equazione dell'ellisse, riferita ai propri assi di simmetria, avente un fuoco in $F(2; 0)$ e $a = 3$. Trova poi l'equazione dell'iperbole che ha gli stessi fuochi e ha un vertice in $V(1; 0)$. Calcola l'area del quadrilatero individuato dai punti di intersezione tra ellisse e iperbole. Verifica, infine, che il rapporto tra l'area trovata e l'area del cerchio individuato dalla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 1 = 0$ è uguale a $\frac{3\sqrt{15}}{11\pi}$.

$\left[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1; x^2 - \frac{y^2}{3} = 1; \text{area} = 3\sqrt{15}\right]$

29 a) Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(-3; 0)$, $B(1; 2)$ e $C(4; -7)$.

b) Determina l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y avente il vertice nel punto $D(1; -8)$ e passante per il punto $E(4; 1)$.

c) Trova i punti comuni alla circonferenza e alla parabola e individua la tangente t alle due curve nel punto in comune con l'ordinata minore.

d) Individua le tangenti alla circonferenza nei due punti di uguale ordinata che ha in comune con la parabola e calcola l'area del triangolo individuato da esse e dalla tangente t.

[a) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$; b) $y = x^2 - 2x - 7$; c) $D(1; -8)$, $E(4; 1)$, $F(-2; 1)$, $y = -8$; d) $3x + 4y - 16 = 0$; $3x - 4y + 10 = 0$; area $= \frac{675}{4}$]

30 a) Determina l'equazione della parabola passante per i punti $(2; 5)$, $(-3; 0)$ e $(7; 0)$.

b) Scrivi l'equazione della circonferenza del fascio $x^2 + y^2 + (6+k)x - (10+k)y + 9 + 3k = 0$ passante per il punto di intersezione di ascissa positiva della parabola con l'asse delle x.

c) Trova l'equazione dell'ellisse avente come asse maggiore, parallelo all'asse x, il diametro della circonferenza e semiasse minore un segmento di lunghezza 3.

[a) $x^2 - 4x + 5y - 21 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$; c) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$]

31 a) Determina l'equazione della parabola γ con asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse avente vertice nel punto $V(4; 2)$ e passante per il punto A di coordinate $(-5; -1)$.

b) Nel fascio proprio di rette di centro $C(9; 0)$ individua la retta r che forma nel primo quadrante con gli assi cartesiani un triangolo di area $\frac{81}{4}$.

c) Stabilisci la posizione reciproca di γ e r e individua gli eventuali punti in comune.

d) Scrivi l'equazione dell'ellisse, con gli assi paralleli agli assi cartesiani, avente centro nel punto $\left(6; \frac{3}{2}\right)$, passante per il centro C del fascio di rette e per il punto $\left(12; \frac{3}{2}\right)$.

$\left[\text{a) } x = -y^2 + 4y; \text{ b) } y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}; \text{ c) tangenti in } (3; 3); \text{ d) } x^2 + 12y^2 - 12x - 36y + 27 = 0\right]$

32 a) Scrivi l'equazione della parabola passante per i punti $A(0; 1)$, $B(4; 1)$ e avente il vertice sull'asse delle ascisse.

b) Determina l'equazione della tangente alla parabola in B e indica con C la sua intersezione con l'asse x.

c) Individua l'equazione della circonferenza passante per i punti A, C e F, dove F è il fuoco della parabola.

$\left[\text{a) } y = \frac{1}{4}x^2 - x + 1; \text{ b) } y = x - 3, C(3; 0); \text{ c) } x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0\right]$

33 a) Considera il fascio di curve di equazione $y = \frac{3x + 13 - k}{(k+1)x + (k+11)}$ e stabilisci per quali valori di k rappresenta delle iperboli.

b) Verifica che tutte le iperboli del fascio passano per due punti fissi A e B $(x_A < x_B)$.

c) Individua l'iperbole del fascio avente per asintoto la retta $y - 3 = 0$.

d) Indicato con C il punto dell'iperbole trovata di ordinata 1, determina l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, avente il vertice in C e passante per A.

$\left[\text{a) } k \neq -1, 4, 5; \text{ b) } A\left(-3; \frac{1}{2}\right), B\left(-\frac{8}{3}; \frac{3}{5}\right); \text{ c) } y = \frac{3x+13}{x+11}; \text{ d) } y = \frac{-x^2 - 2x + 7}{8}\right]$

34 a) Rappresenta graficamente la curva γ di equazione $y = \frac{-2x + 6}{x - 1}$.

b) Siano A e B $(x_A < x_B)$ i vertici della conica rappresentata. Scrivi l'equazione della circonferenza avente un diametro di estremi A e B.

c) Determina le equazioni delle tangenti alla curva γ nel suo punto C di ascissa 0 e nel punto D di ascissa 5.

d) Sia E il punto di intersezione delle tangenti trovate. Calcola l'area del triangolo CDE.

$\left[\text{b) } A(-1; -4), B(3; 0), x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0; \text{ c) } 4x + y + 6 = 0, x + 4y - 1 = 0; \text{ d) } \frac{125}{6}\right]$

35 a) Rappresenta graficamente la curva di equazione $xy + 3x - 5y - 19 = 0$.

b) Applica un'opportuna traslazione alla curva data che porti il suo centro di simmetria C nell'origine del sistema di riferimento. Rappresenta la curva ottenuta e indica con V il suo vertice di ascissa positiva.

c) Scrivi l'equazione della parabola avente il vertice in C e passante per V, con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate.

d) Calcola l'area del triangolo CVA, dove A è il punto di ascissa 7 della curva data al punto a).

$\left[\text{b) } xy = 4, V(2; 2); \text{ c) } y = \frac{5x^2 - 50x + 98}{9}; \text{ d) } 8\right]$

36 Rappresenta graficamente le curve di equazioni $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ e $xy + 2y - 6 = 0$. Determina l'equazione della retta passante per l'origine e per il punto medio del segmento che congiunge i punti di intersezione A e B tra le due curve assegnate e trova quali punti della retta determinano con A e B un triangolo di area uguale a 14.

$\left[y = \frac{3}{5}x; \left(\frac{25}{2}; \frac{15}{2}\right), \left(-\frac{15}{2}; -\frac{9}{2}\right)\right]$

37 I punti A e B sono comuni a una parabola, a una retta e a una circonferenza.
Trova le loro equazioni sapendo che:

- il punto A ha coordinate $(-2; 4)$;
- la parabola ha il vertice nell'origine e asse di simmetria $x = 0$;
- la retta passa per il punto $C(2; 12)$;
- la circonferenza passa per il punto $D(4; 0)$.

Determina le altre due intersezioni fra la circonferenza e la parabola. Dette E e F tali intersezioni (E quella di ascissa positiva), verifica che le rette EA e FB sono perpendicolari.

$[y = x^2; y = 2x + 8; B(4; 16); x^2 + y^2 - 10x - 16y + 24 = 0; E(1; 1); F(-3; 9); y = -x + 2; y = x + 12]$

38 a) Scrivi l'equazione del fascio di circonferenze passanti per i punti $O(0; 0)$ e $B(4; 0)$, individuando le equazioni dell'asse radicale e della retta dei centri.

b) Nel fascio individua la circonferenza che ha il centro nel primo quadrante e raggio $\sqrt{13}$.

c) Determina la parabola con asse parallelo all'asse x, vertice nel centro della circonferenza e passante per il punto $(-7; 0)$. Determina quindi fuoco e direttrice e dopo aver dato la definizione di parabola come luogo geometrico di punti, trova l'equazione della parabola utilizzando la definizione.

d) Determina il punto P della parabola di ordinata positiva tale che l'area del triangolo BPO sia 4.

$\left[\text{a) } x^2 + y^2 - 4x + ky = 0,\ y = 0,\ x = 2; \text{ b) } x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0; \text{ c) } x = -y^2 + 6y - 7, \left(\frac{7}{4}; 3\right), x = \frac{9}{4}; \text{ d) } P(1; 2)\right]$

39 a) Scrivi l'equazione della circonferenza di raggio 5, con centro C sulla bisettrice del primo e terzo quadrante ($x_C > 0$) e che stacca sull'asse x una corda AB lunga 8 ($x_A < x_B$).

b) Dopo aver calcolato le coordinate dei punti A e B, cerca la tangente alla circonferenza parallela alla retta AC e il relativo punto di tangenza D di ordinata positiva.

c) Calcola l'area del quadrilatero $ACDE$, dove E è il punto di intersezione della retta tangente con l'asse x. Di quale quadrilatero si tratta?

d) Per quali valori di h il punto $P(h - 1; h)$ è interno alla circonferenza?

$\left[\text{a) } x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0; \text{ b) } 4y - 3x - 28 = 0, D(0; 7); \text{ c) } \frac{125}{3}; \text{ d) } 0 < h < 7\right]$

40 Nel fascio di parabole di equazione

$$y = ax^2 - (2a + 1)x + a - 1,$$

individua la retta appartenente al fascio, gli eventuali punti base e le caratteristiche del fascio.
Nel fascio determina:

a) la parabola γ avente per tangente la retta $y = -3x$;

b) la parabola γ_1 di vertice il punto $\left(\frac{1}{2}; -\frac{7}{4}\right)$.

c) Dimostra che le due parabole γ e γ_1 sono congruenti.

d) Determina la retta $x = h$ ($h > 0$) che interseca le due parabole γ e γ_1 in due punti che con l'origine formano un triangolo di area 36.

[$y + x + 1 = 0$, punto base $(1; -2)$, fascio di parabole tangenti a una stessa retta;
a) γ: $y = x^2 - 3x$; b) γ_1: $y = -x^2 + x - 2$; d) $h = 4$]

41 Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(-4; 0)$, $B(2; 0)$ e avente il centro sulla retta $y = 4$; calcola quindi le coordinate dei punti H e K estremi del diametro parallelo all'asse x.
Determina l'equazione delle parabole con asse parallelo all'asse y aventi in comune il punto $C(0; 4)$ e tangenti all'asse x. Tra tali parabole trova quelle passanti per i punti H e K.
Calcola l'area della regione limitata dalle predette parabole e dall'asse x.
Determina l'iperbole equilatera nella forma $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ passante per i punti B e C e con asintoto orizzontale $y = -2$.

$\left[x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0; (-6; 4), (4; 4); y = \dfrac{b^2}{16}x^2 + bx + 4; y = \dfrac{4}{9}x^2 + \dfrac{8}{3}x + 4, y = x^2 - 4x + 4; \dfrac{20}{3}; y = \dfrac{4 - 2x}{x + 1}\right]$

42 Un punto $P(x; y)$ si muove nel piano in modo che la sua distanza dal punto $A(2; 3)$ rimane i $\dfrac{3}{5}$ della sua distanza dalla retta $y = \dfrac{25}{3}$.
Quale curva descrive P nel suo moto e quali sono le sue caratteristiche?
Disegna la curva e trova le due tangenti nei punti d'intersezione con l'asse x.
Trova le equazioni della dilatazione che trasformano la curva in una circonferenza che ha il diametro uguale alla distanza tra le due rette tangenti e scrivi l'equazione della circonferenza.

$\left[\text{ellisse: } \dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1, x = -2 \text{ e } x = 6; \begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{4}{5}y \end{cases}, x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0\right]$

43 Studia il fascio di parabole di equazione $ax^2 + (1 - 4a)x - y - 4 = 0$ e individua i suoi punti base. Trova poi le equazioni delle due parabole del fascio γ e γ' che formano, ciascuna, con la retta del fascio un segmento parabolico di area $\dfrac{16}{3}$. Dimostra, infine, che le due parabole trovate sono simmetriche rispetto a M, punto medio del segmento che congiunge i punti base.

$\left[\text{parabole secanti in } A(0; -4), B(4; 0); y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - 4, y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right]$

44
a) Nel fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + 4x - 4y + k = 0$, individua quella tangente a entrambi gli assi cartesiani.
b) Determina l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, avente il vertice nel centro della circonferenza e passante per l'origine degli assi.
c) Scrivi l'equazione della parabola simmetrica della parabola data rispetto al diametro della circonferenza passante per l'origine.
d) Scrivi infine, applicando la definizione, l'equazione dell'ellisse avente per fuochi i punti d'intersezione delle due parabole e per semiasse maggiore un segmento di lunghezza 4.

$\left[\text{a) } x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0; \text{ b) } y = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x; \text{ c) } x = \dfrac{1}{2}y^2 - 2y; \text{ d) } 15x^2 + 2xy + 15y^2 + 28x - 28y - 196 = 0\right]$

45
a) Studia e rappresenta graficamente la curva di equazione $3x^2 - y^2 - 18x + 4y + 20 = 0$, individuandone le caratteristiche.
b) Trasforma la curva data in un'iperbole avente il centro di simmetria nel punto $(2; 4)$ e determinane l'equazione.
c) Scrivi l'equazione dell'ellisse avente i vertici coincidenti con i fuochi dell'iperbole trasformata ed i fuochi coincidenti con i vertici dell'iperbole trasformata.

[a) iperbole di centro $(3; 2)$, vertici $(2; 2)$, $(4; 2)$ e fuochi $(1; 2)$, $(5; 2)$;
b) $3x^2 - y^2 - 12x + 8y - 7 = 0$; c) $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-4)^2}{3} = 1$]

46 a) Scrivi l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate e passante per i punti di coordinate $(-2; 4)$, $(0; 3)$ e $(4; -5)$.

b) Individua l'equazione della tangente t alla parabola nel suo punto di intersezione A con l'asse delle x, avente ascissa negativa.

c) Determina le coordinate del punto G simmetrico del fuoco F della parabola rispetto alla retta t.

d) Scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo AGD, dove D è l'intersezione tra la retta t e la retta passante per F e per G.

$$\left[\text{a) } y=-\frac{1}{4}x^2-x+3;\ \text{b) } A(-6;0);\ t\colon y=2x+12;\ \text{c) } G(-6;5);\ \text{d) } x^2+y^2+12x-5y+36=0\right]$$

47 a) Studia il fascio di parabole di equazione $(k+1)y+(k-1)x^2+2x(1-2k)+3-5k=0$, indicando quali sono le parabole degeneri e per quali valori di k si ottengono.

b) Determina l'equazione della circonferenza avente un diametro con estremi i punti base del fascio di parabole.

c) Scrivi infine l'equazione dell'ellisse avente eccentricità $\frac{4}{5}$ e per asse minore il segmento che ha per estremi il punto base del fascio di ascissa negativa e il punto ad esso simmetrico rispetto alla retta $x-2=0$.

$$\left[\text{a) parabole secanti con due punti base } A(-1;0),\ B(4;5);\ \text{parabole degeneri per } k=-1,\ (x+1)(x-4)=0,\ \text{per } k=1,\ y=x+1;\ \text{b) } x^2+y^2-3x-5y-4=0;\ \text{c) } \frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1\right]$$

48 a) Verifica che il luogo dei centri delle circonferenze passanti per l'origine del sistema di riferimento e tangenti alla retta $x-1=0$ è la parabola di equazione $x=-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}$.

b) Siano A e B le intersezioni della parabola con l'asse delle ordinate. Scrivi l'equazione della circonferenza avente il centro nel punto $(1; 0)$ e passante per A e B.

c) Calcola l'area della superficie di piano racchiusa dalla circonferenza e dalla parabola.

$$\left[\text{b) } x^2+y^2-2x-1=0;\ \text{c) } \frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\right]$$

49 a) Considera il fascio di parabole di equazione $y=ax^2+10ax+3$ e trova i suoi punti base A e B.

b) Scrivi l'equazione della circonferenza avente un diametro di estremi A e B.

c) Determina l'equazione delle tangenti alla circonferenza nel suo punto d'intersezione con l'asse delle ascisse con ascissa minore e nel suo punto di ascissa -2 e ordinata negativa.

d) Calcola l'area della parte di piano individuata dalla circonferenza e dalle tangenti trovate.

$$\left[\text{a) } A(-10;3),\ B(0;3);\ \text{b) } x^2+y^2+10x-6y+9=0;\ \text{c) } y=-\frac{4}{3}x-12,\ y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2};\ \text{d) } 25-\frac{25}{4}\pi\right]$$

50 a) Rappresenta graficamente la curva γ di equazione $y=\sqrt{5-8x-4x^2}$.

b) Determina per quali valori di k il fascio di rette di equazione $y=kx+3$ interseca la curva γ.

c) Sia A il punto di tangenza $(x_A<0)$ di γ con una retta del fascio e B l'intersezione di γ con il semiasse positivo delle x: calcola le coordinate di A e B.

d) Determina l'equazione della parabola passante per A, B e per il centro del fascio di rette.

$$\left[\text{b) } k\le-\frac{24}{5}\vee k\ge 0;\ \text{c) } A(-1;3),\ B\left(\frac{1}{2};0\right);\ \text{d) } y=-4x^2-4x+3\right]$$

51 a) Rappresenta graficamente la curva di equazione $y = \frac{|x+1|}{x+3}$ indicando con A e B le intersezioni con l'asse delle ascisse e delle ordinate, rispettivamente.

b) Utilizzando il grafico, discuti la seguente equazione dipendente dal parametro k: $|x+1| - kx - 3k = 0$.

c) Trova le equazioni delle tangenti che la curva data ammette nel punto di ascissa -1.

d) Scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo individuato dalle tangenti trovate e dall'asintoto verticale della curva data.

[a) $A(-1; 0)$, $B\left(0; \frac{1}{3}\right)$; b) $k < -1 \vee k = 0 \vee k \geq 1$: 1 sol.; $-1 \leq k < 0$: nessuna sol.; $0 < k < 1$: 2 sol. distinte; c) $x + 2y + 1 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$; d) $2x^2 + 2y^2 + 9x + 7 = 0$]

52 a) Scrivi l'equazione della parabola tangente alla retta $2x + y - 3 = 0$ nel suo punto di ascissa 3 e passante per il punto $B(5; -3)$.

b) Indica con C e D le intersezioni della parabola con l'asse delle ascisse. Determina le equazioni delle rette tangenti r e s alla parabola mandate dal punto P appartenente all'asse di simmetria avente ordinata -5.

c) Scrivi le equazioni delle iperboli aventi per asintoti le rette r e s e asse trasverso di lunghezza pari a CD.

[a) $y = x^2 - 8x + 12$; b) $C(2; 0)$, $D(6; 0)$, $2x + y - 3 = 0$, $2x - y - 13 = 0$; c) $\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y+5)^2}{16} = 1$, $(x-4)^2 - \frac{(y+5)^2}{4} = -1$]

53 a) Siano $A(1; 2)$, $B(5; 2)$ e $C\left(4; \frac{7}{2}\right)$ tre vertici consecutivi di un trapezio isoscele avente base maggiore AB. Individua le coordinate del quarto vertice D.

b) Scrivi l'equazione della parabola passante per i vertici del trapezio.

c) Determina le equazioni delle tangenti alla parabola in D e C.

d) Calcola l'area della parte di piano delimitata dalla parabola e dalle tangenti a essa.

e) Scrivi infine l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo mistilineo del punto d).

[a) $D\left(2; \frac{7}{2}\right)$; b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$; c) t_C: $2x + 2y - 15 = 0$; t_D: $2x - 2y + 3 = 0$; d) $\frac{1}{3}$; e) $4x^2 + 4y^2 - 24x - 28y + 81 = 0$]

54 a) Rappresenta graficamente la curva avente equazione $y = \sqrt{2|x| + x^2}$.

b) Determina le coordinate dei punti A e B ($x_A < x_B$) della curva che hanno ordinata $2\sqrt{2}$ e scrivi l'equazione della parabola passante per B, per il punto di ordinata minore della curva data e tangente all'asse delle ordinate.

c) Calcola l'area del triangolo formato dalla direttrice della parabola e dagli asintoti della curva data.

[b) $x = \frac{1}{4}y^2$; c) 1]

55 a) Determina il luogo γ dei punti del piano equidistanti dalla retta r: $x - 2 = 0$ e dal punto $F(4; 2)$.

b) Riconosci e rappresenta il luogo ottenuto e indica con A la sua intersezione con l'asse delle ascisse.

c) Calcola le coordinate del punto B simmetrico di A rispetto all'asse di simmetria di γ.

d) Scrivi l'equazione della circonferenza avente un diametro di estremi A e B.

e) Calcola infine l'area della parte di piano delimitata da γ e dalla semicirconferenza situata nel semipiano $x - 4 \leq 0$.

[a) $x = \frac{1}{4}y^2 - y + 4$; b) $A(4; 0)$; c) $B(4; 4)$; d) $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$; e) $2\pi - \frac{8}{3}$]

56 a) Tra le parabole del fascio di equazione $(m-1)y^2+(1-m)y+(1-m)x+6-m=0$ determina quella tangente alla retta r di equazione $x-3y=0$.

b) Sia P il punto di tangenza. Trova l'equazione dell'ellisse che ha per asse minore la corda individuata dalla parabola sulla retta parallela all'asse y passante per P e per semiasse maggiore 3.

c) Scrivi l'equazione dell'iperbole avente asse trasverso parallelo all'asse x uguale a 2 e per asintoti la retta r e la sua simmetrica rispetto alla retta $x-6=0$.

[a) $x=y^2-y+4$; b) $P(6;2)$, $(x-6)^2+(2y-1)^2-9=0$; c) $(x-6)^2-9(y-2)^2=1$]

57 a) Nel fascio di parabole di equazione $(k+1)y^2-(1+k)y-(k+1)x+2+k=0$ individua la parabola p passante per il punto $(4;2)$.

b) Determina la tangente t nel punto A di intersezione di p con l'asse delle ascisse.

c) Scrivi l'equazione della retta s simmetrica di t rispetto alla retta $y=\frac{1}{2}$.

d) Verifica che s è tangente alla parabola p e chiama B il punto di tangenza.

e) Scrivi l'equazione dell'iperbole che ha per asintoti le rette t e s e ha un vertice coincidente col vertice di p.

$\left[\text{a) } x=y^2-y+2;\ \text{b) } t: x+y-2=0;\ \text{c) } s: x-y-1=0;\ \text{d) } B(2;1);\ \text{e) } \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}\right]$

58 a) Rappresenta graficamente l'iperbole di equazione $9x^2-16y^2+36x+128y-364=0$, indicando con V_1 e V_2 $(x_{V_1}<x_{V_2})$ i suoi vertici.

b) Determina i punti A e B $(x_A>x_B)$ di intersezione della curva con l'asse delle ascisse.

c) Scrivi l'equazione della retta t tangente all'iperbole in A.

d) Calcola l'area del triangolo individuato dagli asintoti e dalla retta t.

$\left[\text{a) } V_1(-6;4), V_2(2;4);\ \text{b) } A\left(\frac{14}{3};0\right), B\left(-\frac{26}{3};0\right);\ \text{c) } 15x+16y-70=0;\ \text{d) } 12\right]$

59 a) Scrivi l'equazione della circonferenza γ_1 passante per i punti $(-8;-8)$, $(-9;-7)$ e $(-1;-1)$. Indica con C il suo centro.

b) Trova i punti A e B $(x_A<x_B)$ di intersezione di γ_1 con l'asse delle ascisse e scrivi le equazioni delle tangenti t_A e t_B in A e B.

c) Sia D il punto in comune a t_A e t_B. Scrivi l'equazione della circonferenza γ_2 circoscritta al quadrilatero $ACBD$.

d) Scrivi l'equazione della parabola che ha il vertice nel punto di ordinata minima di γ_1 e passa per i punti comuni alle due circonferenze.

$\left[\text{a) } x^2+y^2+10x+8y+16=0;\ \text{b) } A(-8;0), B(-2;0), t_A: 3x-4y+24=0, t_B: 3x+4y+6=0;\right.$

$\left.\text{c) } D\left(-5;\frac{9}{4}\right), 4x^2+4y^2+40x+7y+64=0;\ \text{d) } y=x^2+10x+16\right]$

60 a) Rappresenta graficamente la curva di equazione $36x^2-9y^2-432x+54y+891=0$.

b) Siano A e B $(x_A<x_B)$ i vertici della curva data. Scrivi l'equazione della circonferenza avente un diametro coincidente con AB.

c) Determina le equazioni delle tangenti r e s alla curva data e alla circonferenza parallele all'asse y e calcola perimetro e area del quadrilatero formato da r, da s e dalle rette parallele aventi coefficienti angolari uguali a -1 e passanti per A e B.

[b) $A(3;3)$, $B(9;3)$, $x^2+y^2-12x-6y+36=0$; c) $r: x-3=0$, $s: x-9=0$, perimetro $=12(1+\sqrt{2})$, area $=36$]

61 a) Considera la retta di equazione $x + 2y + 4 = 0$ e sia C il suo punto di intersezione con l'asse delle ascisse. Scrivi l'equazione della circonferenza avente centro C e raggio $4\sqrt{2}$.

b) Traccia le tangenti r e s alla circonferenza nei punti A e B ($y_A < y_B$) di intersezione con l'asse delle ordinate. Sia D il punto comune a r e s.

c) Scrivi l'equazione della parabola passante per A, B e D.

d) Calcola l'area della parte di piano racchiusa dalla circonferenza e dalla parabola situata nel semipiano delle ascisse positive.

[a) $C(-4; 0)$, $x^2 + y^2 + 8x - 16 = 0$; b) r: $y = x - 4$, s: $y = -x + 4$, $D(4; 0)$; c) $x = -\frac{1}{4}y^2 + 4$; d) $8\left(\frac{14}{3} - \pi\right)$]

62 Sono dati il fascio di iperboli di equazione $xy = k$, con $k > 0$, e l'ellisse di equazione $9x^2 + 25y^2 = 225$.

a) Determina l'equazione dell'iperbole del fascio che è tangente all'ellisse.

b) Calcola la lunghezza della corda dell'ellisse individuata dai due punti di tangenza P e Q.

c) Trova le equazioni delle rette tangenti all'iperbole nei punti P e Q.

d) Qual è la distanza fra le due rette tangenti?

[a) $xy = \frac{15}{2}$; b) $2\sqrt{17}$; c) $3x + 5y \pm 15\sqrt{2} = 0$; d) $\frac{30}{\sqrt{17}}$]

63 Una parabola passante per A e B divide il triangolo ABC in due parti equivalenti. Supposto ABC equilatero di lato 3 cm e l'asse della parabola perpendicolare al segmento AB, in un conveniente sistema di riferimento si determinino:

a) le coordinate di A, B e C;

b) l'equazione della parabola;

c) l'equazione della circonferenza inscritta nel triangolo ABC.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2000, *quesito* 1)

64 Il triangolo ABC è isoscele sulla base BC e contiene il centro della circonferenza k circoscritta a esso. Condotta la retta t tangente a k in C, indicare con D la proiezione ortogonale di A su t e con E quella di A su BC.

a) Dimostrare che i triangoli ACD e ACE sono congruenti.

b) Ammesso che le misure del raggio della circonferenza k e del segmento AE, rispetto a un'assegnata unità di misura, siano $\frac{5}{4}$ e 2, riferire il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), in modo però che l'asse x sia parallelo alla retta BC.

Trovare:

1. le coordinate dei punti B, C, D;
2. l'equazione della circonferenza k;
3. l'equazione della parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti B, C, D.

c) Stabilire analiticamente se la circonferenza k e la parabola p hanno altri punti in comune oltre ai punti B e C.

(*Esame di Stato*, *Liceo scientifico*, *Scuole italiane all'estero* (*Americhe*, *Emisfero boreale*), *Sessione ordinaria*, 2005, *problema* 1)

[b) 1. posto A come origine del sistema di riferimento $B(-1; -2)$, $C(1; -2)$, $D\left(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5}\right)$; 2. $x^2 + y^2 + \frac{5}{2}y = 0$; 3. $y = \frac{20}{39}x^2 - \frac{98}{39}$; c) no]

CAPITOLO

8

٨ [numerazione araba]

८ [numerazione devanagari]

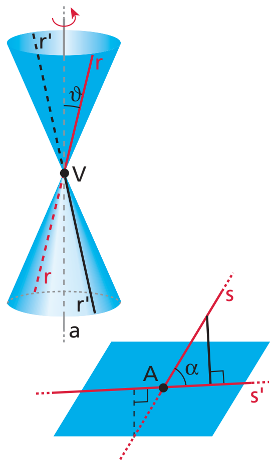
八 [numerazione cinese]

LE CONICHE

LE CONICHE IN OMBRA Le coniche possono essere pensate come equazioni quadratiche in due variabili, sezioni di un doppio cono indefinito con un piano, ma anche come ombre di una sfera…

Com'è possibile ottenere parabole, ellissi e iperboli proiettando un fascio di luce su una sfera?

▶ La risposta a pag. 513



Se una retta s interseca obliquamente un piano in un punto, l'angolo acuto da essa formato con la sua proiezione ortogonale s' sul piano si dice *angolo della retta con il piano*.

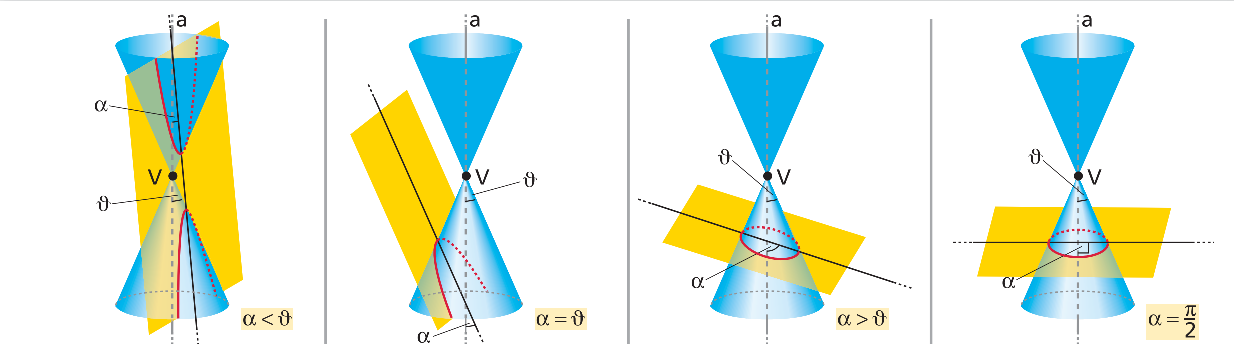
1. LE SEZIONI CONICHE

Data una retta r nello spazio che intersechi in V la retta a, si chiama **superficie conica a due falde** la superficie generata in una rotazione completa di r attorno ad a. La parte di spazio racchiusa dalla superficie è detta **cono a due falde**. La retta r, e ogni altra retta r' della superficie conica, si dice **generatrice**; l'angolo ϑ che r forma con a si chiama **semiapertura**. L'asse di rotazione è anche asse di simmetria del cono. V è detto **vertice** del cono.

La circonferenza, l'ellisse, la parabola e l'iperbole sono dette anche **sezioni coniche** o semplicemente **coniche** proprio perché tali curve si possono ottenere sezionando con un piano, non passante per il vertice, una superficie conica a due falde.

Possiamo distinguere tre casi.

1. L'angolo α formato dal piano secante con l'asse a del cono è minore della semiapertura ϑ: la sezione conica è un'iperbole (figura 1*a*).
2. L'angolo α formato dal piano secante con l'asse a del cono è uguale alla semiapertura ϑ: la sezione conica è una parabola (figura 1*b*).
3. L'angolo α formato dal piano secante con l'asse a del cono è maggiore della semiapertura ϑ: la sezione conica è un'ellisse; in particolare, se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, abbiamo una circonferenza (figure 1*c* e 1*d*).



a. La sezione conica è una curva costituita da due rami illimitati: l'**iperbole**.

b. La sezione conica è una curva costituita da un unico ramo aperto illimitato: la **parabola**.

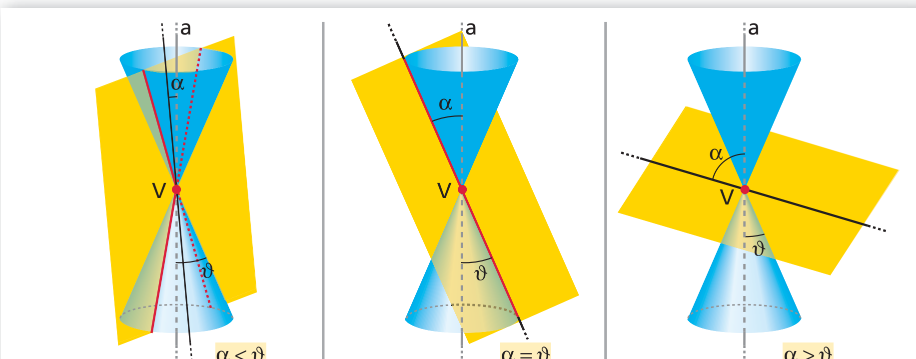
c. La sezione conica è una curva chiusa e limitata: l'**ellisse**.

d. L'ellisse è ridotta a una **circonferenza**.

▲ **Figura 1** Le sezioni coniche.

Se il piano che interseca la superficie conica passa per il centro, al variare dell'angolo α si ottengono le coniche degeneri della figura 2.

► **Figura 2**



a. Iperbole degenere: coppia di rette incidenti nel vertice.

b. Parabola degenere: coppia di rette coincidenti passanti per il vertice.

c. Ellisse degenere: un punto, coincidente con il vertice.

2. L'EQUAZIONE GENERALE DI UNA CONICA

Si può dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA

Ogni conica è descritta da un'equazione di secondo grado in due incognite avente la forma

$$\boldsymbol{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0},$$

con $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ e A, B, C non contemporaneamente nulli.

Viceversa, se l'insieme delle soluzioni reali di un'equazione algebrica di secondo grado in due incognite non è vuoto, esso rappresenta, nel piano cartesiano, una conica.

Questa equazione viene detta **equazione generale** di una conica.

Ci limitiamo, per il momento, a considerare un'equazione del tipo

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

con A e C *non contemporaneamente nulli*.
Nell'equazione manca il termine in xy, ossia $B = 0$.

La presenza del termine xy indica che gli assi di simmetria della conica non sono paralleli agli assi cartesiani. Ci occuperemo del caso generale di tali coniche nel capitolo sulle trasformazioni geometriche.

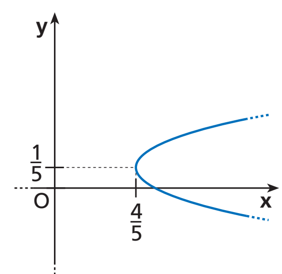
Ci proponiamo di studiare il tipo di conica corrispondente all'equazione, al variare dei coefficienti. Si dimostra che sono possibili i seguenti casi.

1. Se $\boldsymbol{A = 0}$ oppure $\boldsymbol{C = 0}$, allora l'equazione rappresenta una **parabola**.

- Se $\boldsymbol{A = 0}$ e $\boldsymbol{C \neq 0}$, si ha $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, che è l'equazione di una **parabola con asse parallelo all'asse *x***.
- Se $\boldsymbol{C = 0}$ e $\boldsymbol{A \neq 0}$, si ha $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$, che è l'equazione di una **parabola con asse parallelo all'asse *y***.

ESEMPIO

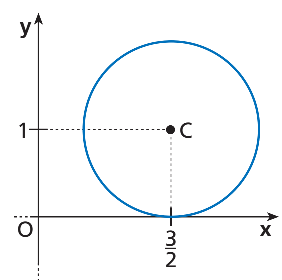
L'equazione $5y^2 - 2y - x + 1 = 0$ ha $A = B = 0$ e $C = 5$. È l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse delle ascisse, $x = 5y^2 - 2y + 1$, con il vertice di coordinate $\left(\frac{4}{5}; \frac{1}{5}\right)$ e che interseca l'asse x in $(1; 0)$.



2. Se $\boldsymbol{A \neq 0, C \neq 0}$ e $\boldsymbol{A = C}$, l'equazione rappresenta una **circonferenza**, purché sia soddisfatta la condizione di realtà.

ESEMPIO

L'equazione $4x^2 + 4y^2 - 12x - 8y + 9 = 0$ ha $A = C = 4$ e $B = 0$. Rappresenta la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 3x - 2y + \frac{9}{4} = 0$, che ha centro $C\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ e raggio $r = \sqrt{\frac{9}{4} + 1 - \frac{9}{4}} = 1$.



3. Se $\boldsymbol{A \neq 0, C \neq 0}$ e $\boldsymbol{A \neq C}$, l'equazione rappresenta un'**ellisse** o un'**iperbole** con gli assi di simmetria paralleli o coincidenti con gli assi cartesiani.
Infatti è possibile applicare il metodo del completamento del quadrato e scrivere l'equazione nella forma

$$A\left(x^2 + \frac{Dx}{A} + \frac{D^2}{4A^2}\right) + C\left(y^2 + \frac{Ey}{C} + \frac{E^2}{4C^2}\right) = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F,$$

Poiché operiamo una traslazione, la curva che otteniamo è congruente a quella di partenza e dal suo studio possiamo quindi ricavare che tipo di conica è quella iniziale.

da cui, se poniamo $s = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$,

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = s.$$

Se consideriamo la traslazione di vettore $\left(-\frac{D}{2A}; -\frac{E}{2C}\right)$, otteniamo:

$$Ax^2 + Cy^2 = s,$$

equazione in **forma canonica** della conica.
Il centro di simmetria della conica coincide con l'origine degli assi.
Distinguiamo due casi.

- $\boldsymbol{A \cdot C > 0}$, cioè A e C concordi:
  - se $s \neq 0$ ma è concorde con A e C, si ha un'**ellisse**;

    se $A > 0$ e $C > 0$, deve essere:

    $$s = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4C^2} - F > 0;$$

    questa relazione viene detta **condizione di realtà**;
  - se $s = 0$, si ha $Ax^2 + Cy^2 = 0$, equazione verificata solo dal **punto** $(0; 0)$, che è un'ellisse degenere.
- $\boldsymbol{A \cdot C < 0}$, cioè A e C discordi:
  - se $s \neq 0$, si ha un'**iperbole**;
  - se $s = 0$, si ha $Ax^2 + Cy^2 = 0$, equazione corrispondente a un'iperbole degenere, ossia a una **coppia di rette**.

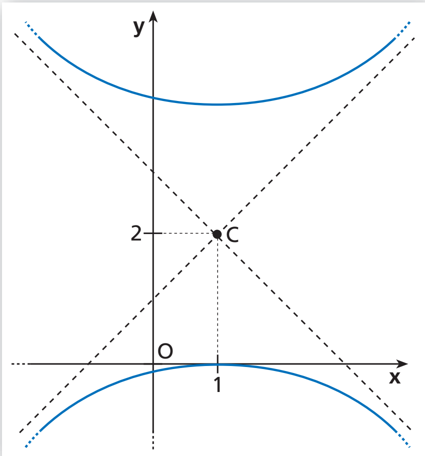
ESEMPIO

1. L'equazione $2x^2 - y^2 - 4x + 4y + 2 = 0$ ha $A \neq 0$, $C \neq 0$, A e C discordi.
Riscriviamola applicando il metodo del completamento del quadrato:

$$2(x^2 - 2x + 1) - 2 - (y^2 - 4y + 4) + 4 + 2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 2(x-1)^2 - (y-2)^2 = -4 \quad \rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(y-2)^2}{4} = -1.$$

Riconosciamo così che si tratta di un'iperbole di centro $C(1; 2)$, con i fuochi sulla retta di equazione $x = 1$ e semiassi $a = \sqrt{2}$ e $b = 2$, che si può ottenere dall'iperbole di equazione $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = -1$ con una traslazione di vettore $\vec{v} = (1; 2)$.



▶ Figura 3

2. Consideriamo l'equazione:

$$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0.$$

Poiché $A \neq 0$, $C \neq 0$, A e C discordi e $s = 0$, abbiamo una coppia di rette. Per determinare le loro equazioni, riscriviamo quella iniziale,

$$(x^2 - 2x + 1) - y^2 = 0 \rightarrow (x-1)^2 - y^2 = 0 \rightarrow (x - 1 + y)(x - 1 - y) = 0,$$

da cui ricaviamo che le due rette hanno equazioni:

$$y = \pm(x - 1).$$

3. Cerchiamo il tipo di conica corrispondente all'equazione:

$$4x^2 + y^2 + 8x - 6y + 13 = 0.$$

Essendo $A \neq 0$, $C \neq 0$, A e C concordi e $s = 0$, la conica è un'ellisse degenere, ossia un punto. Per verificarlo, determiniamone le coordinate riscrivendo l'equazione:

$$4(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) - 4 - 9 + 13 = 0 \rightarrow 4(x+1)^2 + (y-3)^2 = 0.$$

L'equazione è soddisfatta dalla coppia:

$$(-1; 3).$$

$s = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F \rightarrow$

$\rightarrow s = \frac{2^2}{4 \cdot 1} - 1 = 0.$

3. LA DEFINIZIONE DI UNA CONICA MEDIANTE L'ECCENTRICITÀ

Diamo un'altra definizione di conica utilizzando i fuochi, le direttrici e l'eccentricità.

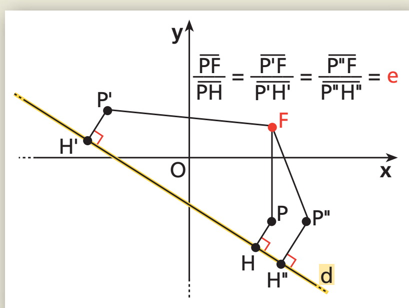
DEFINIZIONE

Conica

Si dice conica il luogo dei punti P di un piano per i quali è costante il rapporto fra la distanza di P da un punto fisso F del piano, detto **fuoco**, e quella da una retta fissa d dello stesso piano, detta **direttrice**, non passante per P:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = e,$$

con e numero reale non negativo.



Il numero reale e si chiama **eccentricità** della conica. Si dimostra che:

- se $\boldsymbol{e = 0}$, la conica è una **circonferenza**;
- se $\boldsymbol{0 < e < 1}$, la conica è un'**ellisse**;
- se $\boldsymbol{e = 1}$, la conica è una **parabola**;
- se $\boldsymbol{e > 1}$, la conica è un'**iperbole**.

Possiamo giustificare la definizione nel modo seguente.
Nel piano cartesiano consideriamo un punto fisso $F(p; q)$ e una retta fissa d con

Abbiamo già studiato l'eccentricità nei casi dell'ellisse e dell'iperbole.

Il caso della circonferenza $e = 0$ va considerato come caso limite dell'ellisse, in cui la direttrice è a distanza infinita dal fuoco.

equazione $ax + by + c = 0$. Preso un generico punto $P(x; y)$ non appartenente a d, calcoliamo la sua distanza da F e quella da d:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2}, \qquad \overline{PH} = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Sostituiamo nella formula che definisce la conica:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = e \;\rightarrow\; \overline{PF} = e\overline{PH} \;\rightarrow\; \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = e\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

● Eleviamo al quadrato, sviluppiamo e raccogliamo i termini simili in x e in y.

Con alcuni passaggi otteniamo la seguente equazione:

$$[(1-e^2)a^2 + b^2]x^2 + 2abe^2xy + [(1-e^2)b^2 + a^2]y^2 - 2(a^2p + b^2p + ace^2)x + \\ - 2(a^2q + b^2q + bce^2)y + (p^2 + q^2)(a^2 + b^2) - c^2e^2 = 0.$$

Questa equazione è del tipo

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

quindi rappresenta una conica.

ESEMPIO

Determiniamo il luogo dei punti P del piano tali che il rapporto fra la distanza dal punto $F(1; -2)$ e la distanza dalla retta d di equazione $2x - 1 = 0$ è uguale a 2.

Scriviamo l'espressione della distanza di P da F e della distanza di P da d:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}, \qquad \overline{PH} = \frac{|2x-1|}{2}.$$

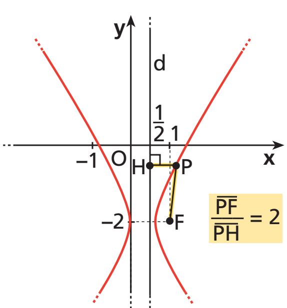
Imponiamo la condizione che il rapporto fra tali distanze sia uguale a 2:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = 2 \quad \text{se e solo se} \quad \frac{2\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}}{|2x-1|} = 2 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = |2x-1|.$$

Eleviamo entrambi i membri al quadrato e riduciamo i termini simili, da cui otteniamo:

$$3x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4 = 0,$$



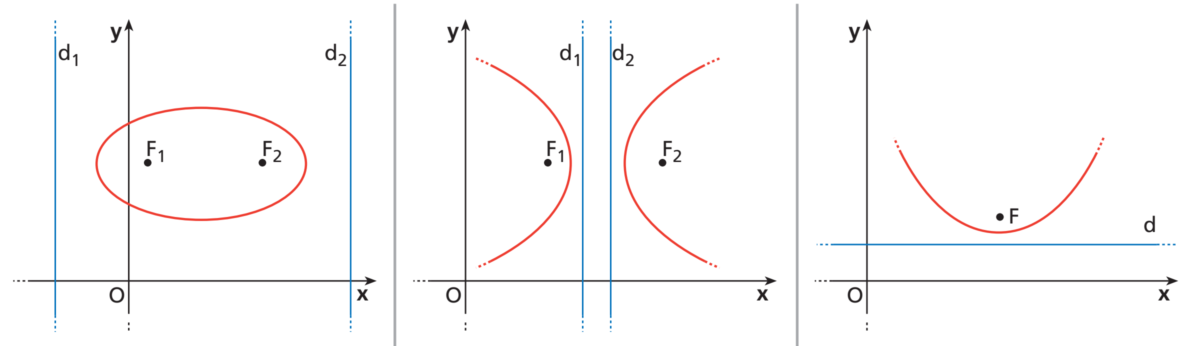
$3x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

equazione del tipo $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, che quindi rappresenta una conica. In particolare, si tratta di un'iperbole perché $A \cdot C < 0$, essendo $A = 3$ e $C = -1$.

Si può verificare che F è uno dei due fuochi dell'iperbole. Si può inoltre dimostrare che anche per l'altro fuoco esiste una retta, simmetrica della retta d rispetto al centro di simmetria dell'iperbole, tale che è verificata la condizione che il rapporto fra le distanze è 2. Per l'iperbole esistono quindi due fuochi e due direttrici, che nell'esempio sono:

$$F(1; -2),\; d: 2x - 1 = 0; \quad F_1\left(-\frac{1}{3}; -2\right),\; d_1: 6x - 1 = 0.$$

In generale, si possono distinguere i tre casi della figura 4.



a. L'ellisse ha due fuochi e due direttrici.

b. L'iperbole ha due fuochi e due direttrici.

c. La parabola ha un fuoco e una direttrice.

▲ Figura 4 L'ellisse e l'iperbole hanno due fuochi. Hanno anche due direttrici simmetriche rispetto al centro di simmetria della curva e perpendicolari all'asse focale.

Le direttrici dell'ellisse e dell'iperbole

Consideriamo l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

con i fuochi sull'asse x. Si ha $F_{1,2}(\pm c; 0)$, con $c=\sqrt{a^2-b^2}$, l'eccentricità è $e=\frac{c}{a}$ e le direttrici sono rette parallele all'asse y.

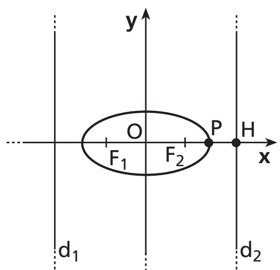
Troviamo l'equazione della direttrice d_2: $x=k$, ricordando che $\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}}=e$ *per ogni* punto P della curva.

Scegliamo allora $P(a; 0)$, da cui

$$\overline{PF_2}=a-c \text{ e } \overline{PH}=k-a.$$

Si ha:

$$\frac{a-c}{k-a}=\frac{c}{a} \quad\rightarrow\quad a^2-\cancel{ac}=kc-\cancel{ac} \quad\rightarrow\quad k=\frac{a^2}{c}.$$



La direttrice d_2 ha equazione

$$\boxed{x=\frac{a^2}{c}}.$$

Per simmetria d_1 ha equazione

$$\boxed{x=-\frac{a^2}{c}}.$$

Allo stesso modo si dimostra che per l'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

le direttrici hanno equazioni

$$\boxed{x=\pm\frac{a^2}{c}}.$$

● Le direttrici di un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ con i fuochi sull'asse y hanno equazioni $y=\pm\frac{b^2}{c}$.

● Le direttrici di un'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ hanno equazioni $y=\pm\frac{b^2}{c}$.

4. LE DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO IN DUE INCOGNITE

Abbiamo già visto che una disequazione di primo grado in due variabili $ax + by + c \geq 0$ è verificata da uno dei due semipiani definiti dalla retta $ax + by + c = 0$.
Studiamo ora le disequazioni di secondo grado nella forma

$$f(x; y) = ax^2 + by^2 + cx + dy + e \geq 0,$$

tenendo conto che si procede allo stesso modo anche quando la disequazione è del tipo:

$$f(x; y) \leq 0.$$

L'equazione $f(x; y) = 0$ rappresenta una conica, mentre i punti le cui coordinate soddisfano la disequazione $f(x; y) > 0$ sono quelli di una delle due regioni di piano definite dalla curva.

Per individuare quale regione scegliere, si usa il **metodo del punto di prova**.
Esaminiamo un esempio.

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione:

$$4x^2 - 3y - 9 \leq 0.$$

Consideriamo la curva di equazione:

$$4x^2 - 3y - 9 = 0.$$

Esplicitiamo y:

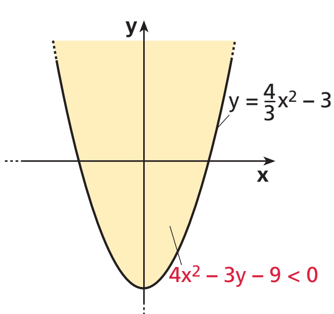
$$y = \frac{4}{3}x^2 - 3.$$

Si tratta di una parabola di vertice $V(0; -3)$, rivolta verso l'alto.

La parabola divide il piano in due regioni, una delle quali verifica la disequazione. Consideriamo un punto a caso del piano, detto *punto di prova*, che non appartenga alla curva, per esempio $O(0; 0)$, e sostituiamo le sue coordinate nella disequazione

$$0 - 0 - 9 \leq 0,$$

ottenendo una disuguaglianza vera.
Si può verificare che le coordinate di ogni altro punto della zona in cui si trova O rendono vera la disequazione.
Pertanto le soluzioni della disequazione assegnata sono rappresentate dai punti della zona colorata nella figura a lato.
Poiché la relazione è $\leq$, consideriamo anche i punti della parabola, mentre se avessimo soltanto $<$, li escluderemmo.



In generale, scelto il punto P di prova, se le sue coordinate soddisfano la disequazione, le soluzioni sono rappresentate dalla regione di piano in cui si trova P. Se le sue coordinate non la soddisfano, le soluzioni corrispondono alla regione di piano che non contiene P.

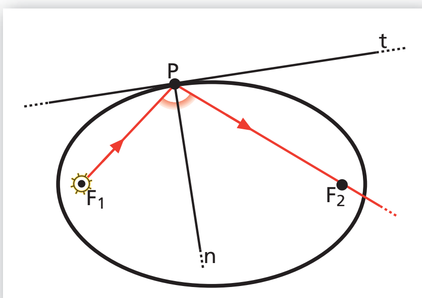
ESPLORAZIONE

Le proprietà ottiche delle coniche

Invece degli usuali specchi piani, a volte, per particolari applicazioni, si usano specchi le cui forme sono ricavate dalle coniche. Se facciamo ruotare un'ellisse, un'iperbole e una parabola intorno al proprio asse focale, otteniamo delle particolari superfici dello spazio dette rispettivamente *ellissoide*, *iperboloide* e *paraboloide* di rotazione. Gli specchi con queste forme hanno leggi di riflessione collegate alle proprietà delle coniche. Esaminiamole, chiamando **raggio focale** ogni segmento che congiunge un punto di una conica con un suo fuoco.

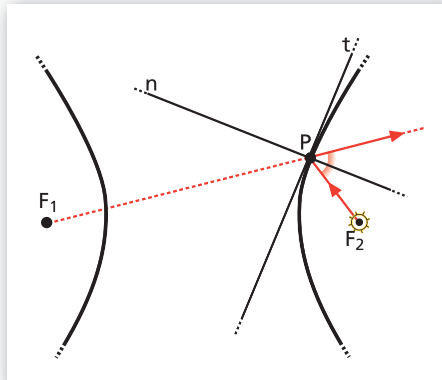
Ellisse

I raggi focali F_1P e F_2P formano, con la retta n perpendicolare alla tangente t in P, angoli congruenti.
Specchio ellittico. Se una sorgente luminosa puntiforme è collocata in un fuoco, i suoi raggi vengono riflessi sull'altro fuoco.



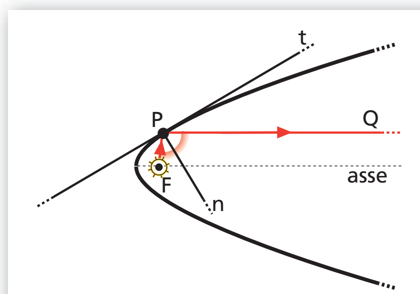
Iperbole

Il raggio focale F_2P e il prolungamento del raggio focale F_1P formano con la retta n angoli congruenti.
Specchio iperbolico. Se una sorgente luminosa puntiforme è collocata in un fuoco, i raggi riflessi si propagano come se fossero emessi da una sorgente collocata nell'altro fuoco.



Parabola

Il raggio focale FP e la semiretta PQ parallela all'asse formano con la retta n angoli congruenti.
Specchio parabolico. Se una sorgente luminosa puntiforme è collocata nel fuoco, i raggi riflessi sono paralleli all'asse del paraboloide. Viceversa, se i raggi incidenti sullo specchio sono paralleli all'asse, i raggi riflessi convergono nel fuoco.



Attività

Luci e suoni sulle coniche

- Cerca in Internet applicazioni delle proprietà ottiche delle coniche.

@ **Cerca nel Web:**
proprietà focali, telescopi, suono, specchi, fari, biliardo ellittico

5. LE CONICHE E I PROBLEMI GEOMETRICI

Introduzione

In un problema geometrico possiamo evidenziare due aspetti fondamentali:

a) l'analisi del problema e la sua trasformazione in problema algebrico, ossia in un'equazione o in un sistema risolvente;

b) la determinazione delle soluzioni del sistema risolvente compatibili con le limitazioni imposte dal problema.

Per trovare le soluzioni, utilizziamo il *metodo grafico*.

Più in dettaglio, la soluzione del problema comprende le seguenti fasi.

- Analisi del problema con l'aiuto di una figura.
- Scelta delle incognite (una o due) e determinazione delle limitazioni.
- Impostazione dell'equazione o del sistema risolvente con le limitazioni ed eventuali altre condizioni.
- Rappresentazione nel piano cartesiano e discussione grafica.

Un problema geometrico può essere formulato in modo da contenere un *parametro*. In questo caso, in realtà, siamo in presenza non di un solo problema, ma di un insieme di problemi che al variare del parametro possono non avere soluzioni, averne una oppure due.

Per problemi come questi ci proporremo di svolgere la *discussione*, ossia di determinare il numero di soluzioni per i diversi valori del parametro, mediante il metodo grafico.

Come esempio, esaminiamo un problema risolto da un'equazione irrazionale.

ESEMPIO

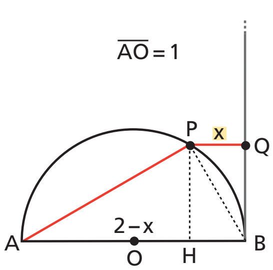
Problema. Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2$, conduciamo la tangente in B. Consideriamo un punto P sulla semicirconferenza e la sua proiezione ortogonale Q sulla tangente. Determiniamo P in modo che sia verificata la relazione:

$$\overline{AP} + k\overline{PQ} = 3, \quad k \in \mathbb{R}^+.$$

Discutiamo l'esistenza e il numero delle soluzioni al variare di k.

Risoluzione

Costruiamo la figura. Osserviamo che, al variare di P, le misure dei segmenti PQ e AP variano, pur rimanendo comprese fra 0 e 2.



Scegliamo come **incognita** $\overline{PQ} = x$.

Determiniamo le **limitazioni** scrivendo la relazione data dal problema per i casi estremi.

a) Se $P \equiv B$, allora $x = 0$, $\overline{PQ} = 0$ e $\overline{AP} = \overline{AB} = 2$; quindi la relazione $\overline{AP} + k\overline{PQ} = 3$ diventa $2 + k \cdot 0 = 3$, che è impossibile.

b) Se $P \equiv A$, allora $\overline{AP} = 0$ e $x = \overline{PQ} = \overline{AB} = 2$; quindi la relazione $\overline{AP} + k\overline{PQ} = 3$ diventa $0 + k \cdot 2 = 3$, cioè $k = \frac{3}{2}$.

Le limitazioni sono pertanto: $0 < x \leq 2$.

Completiamo la figura disegnando la proiezione H di P sul diametro AB. Osserviamo che $\overline{AH} = 2 - x$. Determiniamo quindi $\overline{AP}$ in funzione di x applicando il primo teorema di Euclide al triangolo rettangolo APB:

$$\overline{AP}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AB} \;\rightarrow\; \overline{AP}^2 = (2-x) \cdot 2 \;\rightarrow\; \overline{AP} = \sqrt{(2-x) \cdot 2} = \sqrt{4-2x}.$$

● Il triangolo APB è rettangolo in quanto inscritto in una semicirconferenza.

Scriviamo l'**equazione risolvente** associando a essa le limitazioni:

$$\begin{cases} \sqrt{4-2x} + kx = 3 \\ 0 < x \leq 2 \\ k > 0 \end{cases}$$

Iniziamo la **discussione**.
L'equazione ottenuta è irrazionale. Isoliamo il radicale. Introduciamo una seconda variabile y e sdoppiamo l'equazione facendo ricorso alla proprietà transitiva dell'uguaglianza:

$$\begin{cases} \sqrt{4-2x} = 3 - kx \\ 0 < x \leq 2 \\ k > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{4-2x} \\ y = 3 - kx \\ 0 < x \leq 2 \wedge 0 \leq y < 2 \\ k > 0 \end{cases}$$

● Dalla prima equazione abbiamo ricavato le limitazioni per la y: a $x = 0$ corrisponde $y = 2$; a $x = 2$ corrisponde $y = 0$.

Eleviamo al quadrato entrambi i membri della prima equazione ed esplicitiamo la x:

$$\begin{cases} y^2 = 4 - 2x \\ y = 3 - kx \\ 0 < x \leq 2 \wedge 0 \leq y < 2 \\ k > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y^2 + 2 \\ kx + y - 3 = 0 \\ 0 < x \leq 2 \wedge 0 \leq y < 2 \\ k > 0 \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto un sistema che contiene l'equazione di una parabola e quella di un fascio proprio di rette. L'esistenza delle soluzioni del problema è legata alla determinazione dei punti di intersezione fra le rette del fascio e l'arco di parabola individuato dalle limitazioni $0 < x \leq 2 \wedge 0 \leq y < 2$ al variare di k.

Disegniamo il **grafico** mettendo in evidenza:

- il ramo di parabola individuato dalle *limitazioni*;
- la retta tangente e le rette passanti per gli estremi dell'arco (*capisaldi*).

Rappresentiamo la parabola e poi studiamo il fascio di rette.

Le generatrici del fascio sono $x = 0$ (che non si ottiene per alcun valore reale di k) e $y = 3$ (che corrisponde alla retta con $k = 0$) e il centro è $N(0; 3)$.

Determiniamo l'orientamento utilizzando le rette tangenti e i capisaldi.

● Determinare l'orientamento del fascio significa stabilire in che verso le rette del fascio ruotano intorno al centro al variare di k.

Retta passante per l'estremo $R(0; 2)$: $k \notin \mathbb{R}$, $x = 0$.

Retta passante per l'estremo $S(2; 0)$: $k = \frac{3}{2} \rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$.

Determiniamo le tangenti imponendo l'annullamento del discriminante dell'equazione risolvente del sistema:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y^2 + 2 \\ y = 3 - kx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y^2 + 2 \\ y = 3 - k\left(-\frac{1}{2}y^2 + 2\right) \end{cases} \rightarrow ky^2 - 2y + 6 - 4k = 0;$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - 6k + 4k^2.$$

Ora imponiamo la condizione di tangenza $\frac{\Delta}{4} = 0$:

$$4k^2 - 6k + 1 = 0.$$

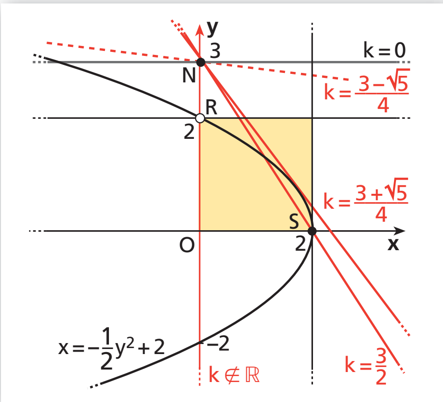
In corrispondenza di $k = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$ abbiamo le rette tangenti.

● La tangente con $k = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$ tocca la parabola in un punto non compatibile con le limitazioni.

Ordiniamo i valori di k e rappresentiamo le rette corrispondenti:

$$k = 0, \quad k = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}, \quad k = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}, \quad k = \frac{3}{2}.$$

Elementi del fascio di rette $y = 3 - kx$	
Rette generatrici:	$x = 0 \quad (k \to \infty)$; $\quad y = 3 \quad (k = 0)$.
Centro:	$N = (0; 3)$.
Retta per $R(0; 2)$:	$x = 0 \quad (k \to \infty)$.
Retta per $S(2; 0)$:	$3x + 2y - 6 = 0 \quad \left(k = \frac{3}{2}\right)$.
Retta tangente:	$k = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$.
Orientamento:	*orario*.



▲ **Figura 5** Rappresentazione grafica del problema.

Analizziamo il grafico:

- il fascio è orientato in senso *orario*;
- per $k < \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$ le rette del fascio non incontrano l'arco di parabola individuato dalle limitazioni;
- per $\frac{3 + \sqrt{5}}{4} \leq k \leq \frac{3}{2}$ ogni retta ha *due* intersezioni con la parabola compatibili con le limitazioni;
- per $k > \frac{3}{2}$ ogni retta ha *una* intersezione con la parabola compatibile con le limitazioni.

Scriviamo la **risposta**. Il problema dato ha:

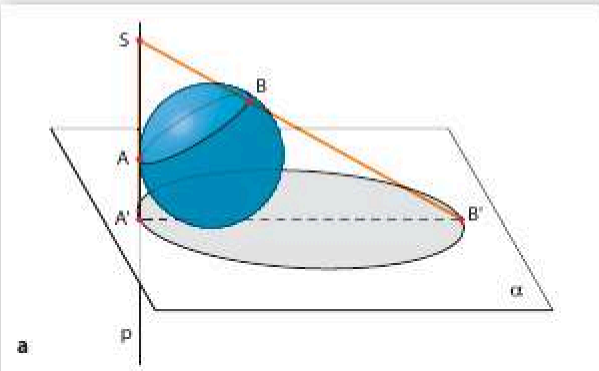
- *due* soluzioni per $\frac{3 + \sqrt{5}}{4} \leq k \leq \frac{3}{2}$;
- *una* soluzione per $k > \frac{3}{2}$.

LE CONICHE IN OMBRA

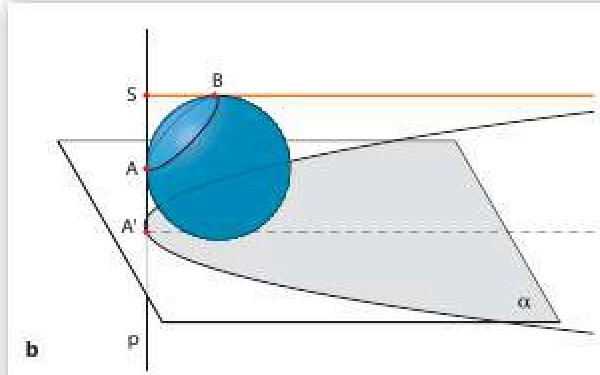
Com'è possibile ottenere parabole, ellissi e iperboli proiettando un fascio di luce su una sfera?

▶ **Il quesito completo a pag. 501**

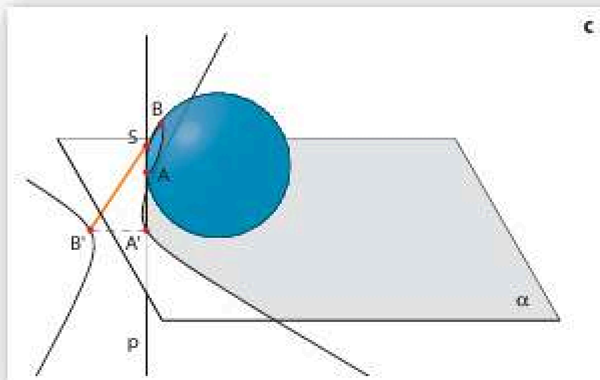
Consideriamo una sfera tangente a un piano α e a una retta p perpendicolare a tale piano. Su p è posta, a una certa distanza dal piano, una sorgente luminosa puntiforme S. I raggi uscenti da S determinano un cono che è tangente alla sfera lungo la circonferenza di diametro AB. Il cerchio di diametro AB proietta un'ombra sul piano α; il segmento $A'B'$ è la proiezione del diametro AB, e il contorno dell'ombra è una curva del piano α. Questa curva è una conica, in quanto ottenuta come sezione di un cono (il cono del fascio luminoso proiettato da S) con un piano (il piano α) . Nel caso della figura *a*, abbiamo un'ellisse.

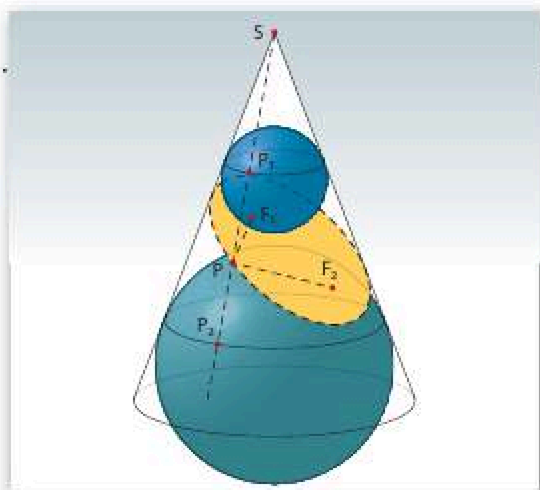


Se spostiamo S lungo la retta p fino a che il raggio luminoso SB diventa parallelo al piano α, possiamo immaginare che la conica «ombra» del cerchio di diametro AB si allunghi sempre più, fino ad aprirsi e a trasformarsi in una parabola (figura *b*).



Se continuiamo ad abbassare il punto S, otteniamo la situazione della figura *c*, in cui la conica «ombra» del cerchio si spezza in due rami, dando luogo a un'iperbole.





Le sfere di Dandelin

È possibile dimostrare che, nel caso delle ellissi e delle iperboli, esistono due sfere che sono tangenti sia al piano α, sia alla superficie del cono, mentre nel caso della parabola ne esiste una sola. Esse sono chiamate *sfere di Dandelin*, dal nome del matematico che le studiò, Germinal-Pierre Dandelin (1794-1847).

Il loro interesse è dovuto al fatto che con il loro studio si chiarisce il legame fra le coniche definite come «luoghi di punti» alle coniche definite come sezioni piane di un cono.

Ne parliamo nel capitolo C1.

LABORATORIO DI MATEMATICA
LE CONICHE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di Wiris troviamo le equazioni degli asintoti dell'iperbole traslata di equazione:

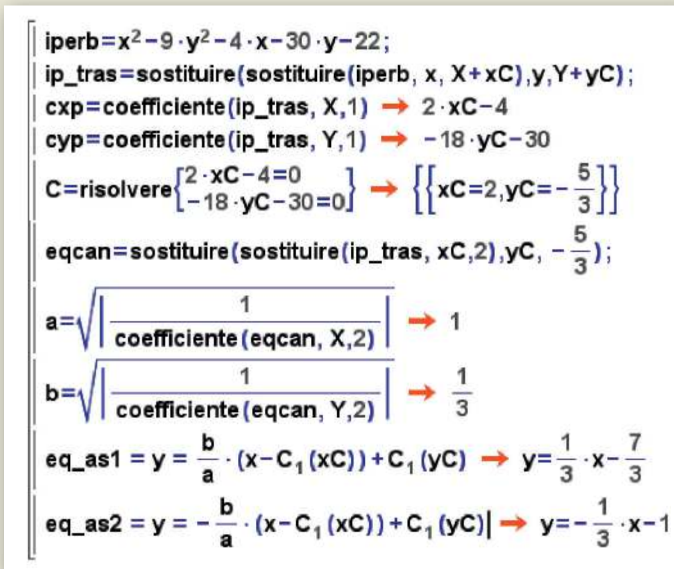
$$x^2 - 9y^2 - 4x - 30y - 22 = 0.$$

L'analisi del problema

Ricordiamo che le equazioni degli asintoti di un'iperbole traslata, la cui equazione manca del termine in xy, sono date dalle $y = \pm\frac{b}{a}(x - x_C) + y_C$, dove $C(x_C; y_C)$ è il centro dell'iperbole e i coefficienti a e b sono le lunghezze dei suoi semiassi.

Il procedimento risolutivo con Wiris

- Assegniamo il nome iperb al primo membro dell'equazione dell'iperbole (figura 1).
- Per determinare le coordinate del centro:
  – in iperb sostituiamo X + xC a x e Y + yC a y;
  – estraiamo dall'espressione ip_tras, appena ottenuta, i coefficienti lineari di X e di Y;
  – li uguagliamo a 0 e li inseriamo in un sistema, che risolviamo.
- Ricaviamo il primo membro dell'equazione canonica dell'iperbole e lo memorizziamo in eqcan, sostituendo le coordinate del centro, appena trovate, nell'espressione ip_tras.
- Da eqcan traiamo a e b, le lunghezze dei semiassi.
- Per ottenere le equazioni degli asintoti, scriviamo le formule citate nell'analisi, inserendovi i coefficienti con i nomi riconoscibili da Wiris, per i passi precedentemente svolti, e facciamo clic su *Calcola*.



▲ **Figura 1**

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 13 esercitazioni in più

Esercitazioni

Usa il computer per studiare le equazioni delle coniche seguenti, trova ciò che è richiesto e traccia i grafici della conica e dei suoi punti salienti.

1 L'iperbole $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.
Le intersezioni della curva con gli assi cartesiani. $[(1 + \sqrt{5}; 0) \text{ e } (1 - \sqrt{5}; 0), (0; 2)]$

2 L'ellisse $25x^2 + 16y^2 + 50x - 32y - 359 = 0$.
L'equazione della tangente nel suo punto di ordinata 4 e di ascissa positiva. $\left[y = -\frac{5}{3}x + \frac{23}{3}\right]$

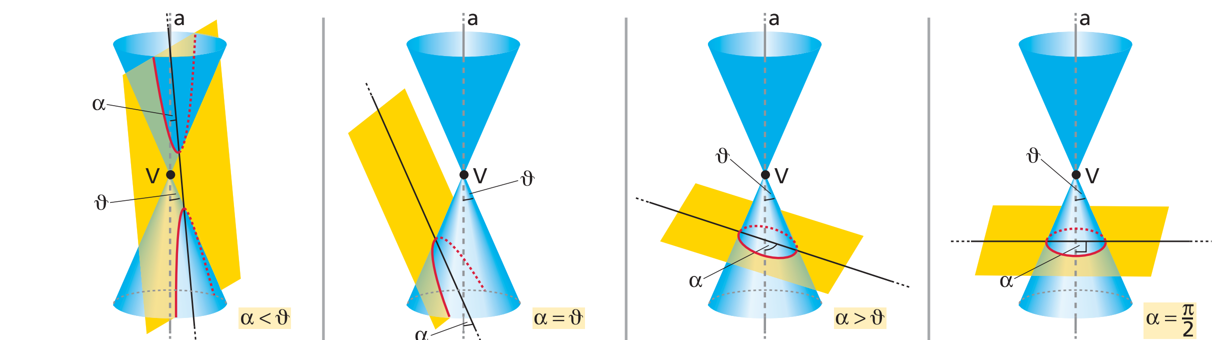
Bergamini, Trifone, Barozzi **MATEMATICA.BLU - Vol. 3** © Zanichelli 2012 *con Maths in English*

LA TEORIA IN SINTESI

LE CONICHE

1. LE SEZIONI CONICHE

- Le **coniche** sono curve ottenute come sezioni di una superficie conica con un piano. Al variare dell'angolo α formato dal piano secante con l'asse del cono si ottiene un'*iperbole*, una *parabola*, un'*ellisse* o una *circonferenza*.

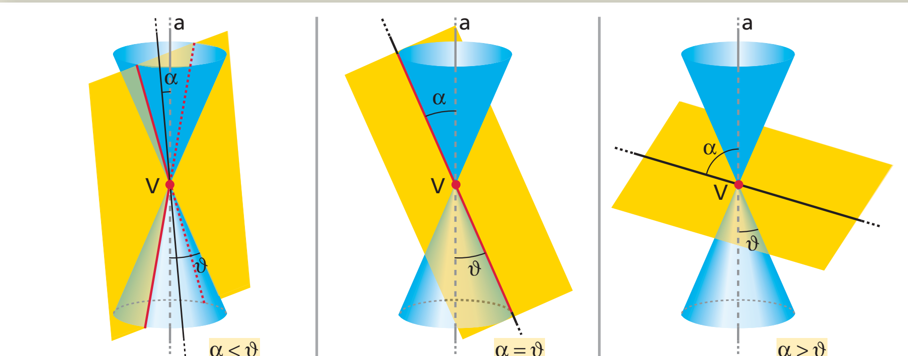


a. La sezione conica è una curva costituita da due rami illimitati: l'**iperbole**.

b. La sezione conica è una curva costituita da un unico ramo aperto illimitato: la **parabola**.

c. La sezione conica è una curva chiusa e limitata: l'**ellisse**.

d. L'ellisse è ridotta a una **circonferenza**.



a. Iperbole degenere: coppia di rette incidenti nel vertice.

b. Parabola degenere: coppia di rette coincidenti passanti per il vertice.

c. Ellisse degenere: un punto, coincidente con il vertice.

2. L'EQUAZIONE GENERALE DI UNA CONICA

- Una conica è descritta da un'**equazione** di secondo grado in due incognite del tipo:

$$\boldsymbol{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0},$$

con $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ e A, B, C non contemporaneamente nulli. Viceversa, l'insieme non vuoto delle soluzioni di un'equazione del tipo suddetto è rappresentato nel piano cartesiano da una conica.

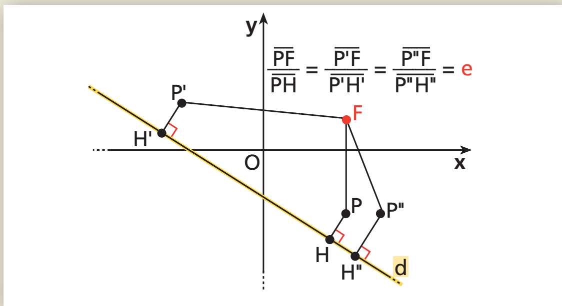
- Dall'equazione $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ si riconosce il **tipo di conica** che essa rappresenta utilizzando le seguenti regole.

1. Se $A = 0$ oppure $C = 0$, allora l'equazione rappresenta una parabola.

2. Se $A = C \neq 0$, allora l'equazione rappresenta una circonferenza (purché valga la condizione di realtà).

3. Se $A \cdot C \neq 0$ e $A \neq C$, e:
   - $A \cdot C > 0$: l'equazione rappresenta un'ellisse o un'ellisse degenere (un punto),
   - $A \cdot C < 0$: l'equazione rappresenta un'iperbole o un'iperbole degenere (coppia di rette).

3. LA DEFINIZIONE DI UNA CONICA MEDIANTE L'ECCENTRICITÀ



- Una **conica** è il luogo dei punti P di un piano tali che il rapporto fra la distanza $\overline{PF}$ di P da un punto fisso F del piano, detto **fuoco**, e quella da una retta fissa d dello stesso piano, detta **direttrice** (non passante per P), è una costante e non negativa detta **eccentricità**.
  - Se $\boldsymbol{e = 0}$, la conica è una **circonferenza**.
  - Se $\boldsymbol{0 < e < 1}$, la conica è un'**ellisse**.
  - Se $\boldsymbol{e = 1}$, la conica è una **parabola**.
  - Se $\boldsymbol{e > 1}$, la conica è un'**iperbole**.

- Le direttrici di un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ hanno equazioni:
  - $x = \pm \frac{a^2}{c}$ se $a > b$;
  - $x = \pm \frac{b^2}{c}$ se $a < b$.

- Le direttrici di un'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hanno equazioni $x = \pm \frac{a^2}{c}$.

  Le direttrici di un'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ hanno equazioni $y = \pm \frac{b^2}{c}$.

4. LE DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO IN DUE INCOGNITE

- Una disequazione di secondo grado in due incognite nella forma

$$f(x; y) = ax^2 + by^2 + cx + dy + e \geq 0$$

  individua una delle due regioni del piano definite dalla curva di equazione $f(x; y) = 0$.

- Per risolvere una disequazione con il metodo del **punto di prova**:
  - rappresentiamo sul piano cartesiano la conica di equazione $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$;
  - scegliamo un punto P che non appartenga alla conica e sostituiamo le sue coordinate nella disequazione;
  - se le coordinate del punto soddisfano la disequazione, le soluzioni sono rappresentate dalla regione di piano in cui si trova P. Se le coordinate del punto non la soddisfano, le soluzioni corrispondono alla regione di piano che non contiene P.

5. LE CONICHE E I PROBLEMI GEOMETRICI

- La risoluzione di un problema geometrico che dipende da un *parametro* consiste nel determinare il numero di soluzioni per i diversi valori del parametro.

- La *discussione* del problema, mediante il *metodo grafico*, comprende le seguenti fasi:
  - analisi del problema con l'aiuto di una figura;
  - scelta delle incognite (una o due) e determinazione delle limitazioni imposte dal problema;
  - impostazione dell'equazione o del sistema risolvente con le limitazioni ed eventuali altre condizioni;
  - rappresentazione nel piano cartesiano e dicussione grafica.

1. LE SEZIONI CONICHE

Teoria a pag. 502

1 Individua la sezione conica determinata dal piano secante π nei seguenti casi. Esegui un disegno. ϑ indica la semiapertura del cono, α l'angolo, compreso fra 0° e 90°, formato dal piano secante con l'asse del cono.

a) $\vartheta = 25°$, $\alpha = 40°$, π non passa per il vertice.
b) $\vartheta = 35°$, $\alpha = 30°$, π non passa per il vertice.
c) $\vartheta = 30°$, $\alpha = 27°$, π passa per il vertice.
d) π parallelo all'asse del cono e non passante per il vertice.
e) $\vartheta = 32°$, $\alpha = 32°$, π non passa per il vertice.
f) $\vartheta = 22°$, $\alpha = 29°$, π passa per il vertice.
g) $\vartheta = 36°$, $\alpha = 42°$, π non passa per il vertice.
h) $\vartheta = 28°$, $\alpha = 28°$, π passa per il vertice.

2 Individua le sezioni ottenute con un piano che interseca una superficie sferica.

3 Individua le sezioni ottenute con un piano che interseca un cilindro indefinito.

4 **VERO O FALSO?**

a) Un'iperbole degenere è sempre costituita da una coppia di rette incidenti. V F
b) Una circonferenza si ottiene sezionando una superficie conica con un piano perpendicolare all'asse del cono. V F
c) Una parabola è un caso particolare di iperbole di cui si considera un solo ramo. V F
d) Una parabola può degenerare in una retta. V F
e) Nell'ellisse degenere i fuochi coincidono con il centro. V F

2. L'EQUAZIONE GENERALE DI UNA CONICA

Teoria a pag. 503

5 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo le coniche aventi le seguenti equazioni e disegniamo i loro grafici:

a) $3x^2 + 4y^2 + 6x - 12y + 5 = 0$;
b) $xy - 2x + y - 3 = 0$;
c) $2xy - x + 6y - 3 = 0$.

---

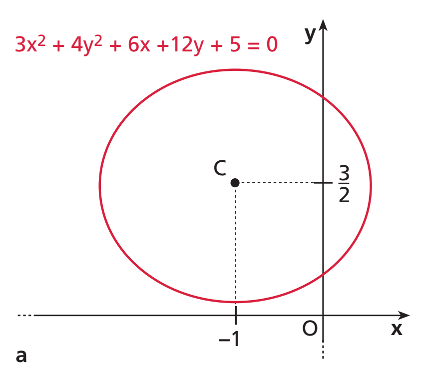
a) L'equazione ha $A \neq 0$, $C \neq 0$, A e C concordi e $s = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F = \frac{36}{12} + \frac{144}{16} - 5 = 7 > 0$, quindi si tratta di un'ellisse.
Applichiamo il metodo del completamento del quadrato.

$$3(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 3y) + 5 = 0 \quad \to \quad 3(x^2 + 2x + 1 - 1) + 4\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 5 = 0 \quad \to$$

$$\to \quad 3(x+1)^2 - 3 + 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - 9 + 5 = 0 \quad \to \quad 3(x+1)^2 + 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - 7 = 0 \quad \to$$

$$\to \quad \frac{(x+1)^2}{\frac{7}{3}} + \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{7}{4}} = 1.$$

Abbiamo ottenuto un'ellisse traslata di centro $C\left(-1; \frac{3}{2}\right)$, con i fuochi sulla retta $y = \frac{3}{2}$ e semiassi $a = \sqrt{\frac{7}{3}}$ e $b = \frac{\sqrt{7}}{2}$.



b) Raccogliamo la y nell'equazione della curva:

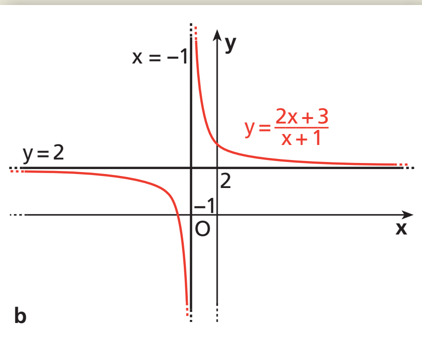
$$y(x+1) - 2x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad y(x+1) = 2x + 3.$$

Osserviamo che per $x = -1$ otteniamo l'uguaglianza assurda $0 = 1$, per cui poniamo $x + 1 \neq 0$ e dividiamo entrambi i membri per $(x + 1)$:

$$y = \frac{2x+3}{x+1}.$$

Abbiamo ottenuto l'equazione di un'iperbole equilatera traslata (funzione omografica).
Tracciamo il grafico utilizzando gli asintoti:

$$x = -1, \qquad y = 2.$$



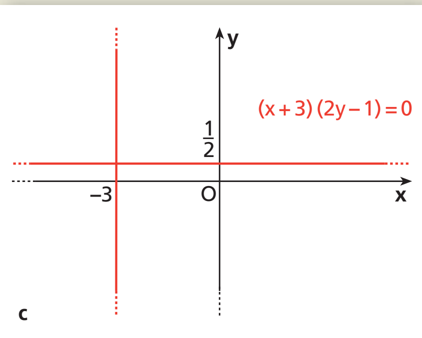
c) Nell'equazione raccogliamo $2y$ fra il primo e il terzo addendo, -1 fra il secondo e il quarto:

$$2y(x+3) - (x+3) = 0 \quad \rightarrow \quad (x+3)(2y-1) = 0.$$

L'insieme delle soluzioni di questa equazione è rappresentato dalle rette di equazioni:

$$x = -3, \quad y = \frac{1}{2}.$$

Abbiamo ottenuto un'iperbole equilatera *degenere* coincidente con i propri asintoti.



6 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $x^2 - 2x = 0$ rappresenta una parabola degenere. V F

b) $x^2 + 4y^2 = 2x + 3$ rappresenta un'ellisse. V F

c) $x^2 - y^2 = 0$ non rappresenta alcuna conica. V F

d) $xy = 0$ è l'equazione di un'iperbole degenere. V F

7 Fra le seguenti equazioni indica quelle che rappresentano una conica.

a) $5x^2 + 5y^2 + x + 3y + 20 = 0$
b) $x^2 - y^2 + 2x - y + 5 = 0$
c) $4x^2 + 9y^2 - 5x - y + 10 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 5 = 0$
e) $4y^2 - 5x + 15y - 7 = 0$
f) $3x^2 + 4y^2 - 2x + y + 6 = 0$

[a) no; b) iperbole equilatera; c) no; d) no; e) parabola; f) no]

Studia e rappresenta graficamente le coniche che hanno le seguenti equazioni.

8 $-5y^2 - 2x + 3y + 1 = 0$

9 $-2x^2 + y^2 - 6x - 5y + 3 = 0$

10 $9x^2 + y^2 - 18x - 6y - 3 = 0$

11 $\sqrt{5}\,x^2 - 7y^2 - 10x + 14y - 13 = 0$

12 $4x^2 - x + 3y - 2 = 0$

13 $4x^2 + 25y^2 - 8x - 100 = 0$

14 $9x^2 - 9y^2 + 9x + 6y = 0$

15 $xy - 4y - 2 = 0$

16 $25x^2 + 16y^2 + 50x - 64y - 2 = 0$

17 $-12x^2 + 9y^2 + 36x + 30y + 7 = 0$

18 $-x^2 - 4y^2 + 6x + 8y - 1 = 0$

19 $xy + 3x + 2y - 1 = 0$

20 $xy + 2x - 3y - 3 = 0$

21 $2xy - 3x + 2y - 1 = 0$

Riconosci le coniche degeneri relative alle seguenti equazioni.

22 $3xy - 5x + 12y - 20 = 0$

23 $x^2 - 6xy + 9y^2 = 0$

24 $x^2 + 4y^2 - 2x + 1 = 0$

25 $x^2 - y^2 + 4y - 4 = 0$

26 $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10 = 0$

27 $2xy + 4x - y - 2 = 0$

28 Identify and sketch the conic described by each of the following equations.

a) $y^2 - 4y - 4x = 0$; b) $4x^2 - y^2 - 4x - 3 = 0$; c) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$.

If a parabola, identify the vertex and the focus. If an ellipse, identify the center, the lengths of the major and minor axes, and the foci. If a hyperbola, identify the center, the foci and the asymptotes.

(USA *Rensselaer Polytechnic Institute,* Sample Test, 2004)

[a) parabola; b) hyperbola; c) ellipse]

29 Find the right hand focus of the ellipse:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Write a new equation which shifts this ellipse so that the right hand focus sits on the origin.

[$F(3; 0)$; $16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0$]

30 **TEST** Qual è il grafico dell'equazione $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y = 7$?

A Una parabola. **B** Un'ellisse. **C** Un'iperbole. **D** Una circonferenza.

Qual è il grafico dell'equazione $x - y^2 + 2y = 4$?

A Una parabola. **B** Un'ellisse. **C** Un'iperbole. **D** Una retta.

(USA *Southern Illinois University Carbondale,* Final Exam, 2003)

31 **TEST** Il grafico dell'equazione $x^2 - xy + x - y = 0$ è:

A un'ellisse. **B** una parabola. **C** un punto. **D** una retta. **E** una coppia di rette incidenti.

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2000)

32 TEST Il grafico dell'equazione $x(x^2 - xy + y^2 - 1) = y(y^2 - 1)$ è formato da:

A una circonferenza e una retta.
B una parabola e una retta.
C due rette e un'ellisse.
D tre rette.
E due parabole.

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2002)

Coniche e parametri

33 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo per quali valori del parametro reale k l'equazione

$$kx^2 + (k-1)y^2 + 2x - 3y + 1 = 0$$

rappresenta:

a) un'iperbole;
b) una parabola con asse parallelo agli assi coordinati;
c) un'ellisse;
d) una circonferenza.

Confrontando con l'equazione generale $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, vediamo che i coefficienti sono:

$$A = k, C = k-1, D = 2, E = -3, F = 1.$$

a) L'equazione rappresenta un'iperbole se i coefficienti dei termini di secondo grado sono discordi, ossia $A \cdot C < 0$. Pertanto dobbiamo risolvere la seguente disequazione:

$$k \cdot (k-1) < 0.$$

Le soluzioni sono :

$$0 < k < 1.$$

Dunque per $0 < k < 1$ l'equazione data rappresenta un'iperbole. In particolare, avremo un'iperbole equilatera se $C = -A$, ossia:

$$k - 1 = -k \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{2}.$$

b) L'equazione data rappresenta una parabola con asse parallelo agli assi coordinati se contiene soltanto un termine di secondo grado. Abbiamo due casi.

- Uguagliamo a 0 il coefficiente del termine di secondo grado in x:

$$k = 0.$$

Sostituiamo nell'equazione data:

$$-y^2 + 2x - 3y + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}y - \frac{1}{2}.$$

Questa equazione rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse delle ascisse.

- Ora uguagliamo a 0 il coefficiente del termine di secondo grado in y:

$$k - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad k = 1.$$

Sostituendo nell'equazione data, otteniamo l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate:

$$x^2 + 2x - 3y + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$

c) L'equazione rappresenta un'ellisse se i coefficienti dei termini di secondo grado sono concordi e se è soddisfatta la condizione di realtà, che può essere applicata solo se $A > 0$ e $C > 0$. Discutiamo allora separatamente i due casi.

1. $A > 0$ e $C > 0$.

Dobbiamo risolvere il seguente sistema di disequazioni, ricordando che la condizione di realtà è:

$$\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F \geq 0.$$

$$\begin{cases} k > 0 \\ k - 1 > 0 \\ \dfrac{4}{4k} + \dfrac{9}{4(k-1)} - 1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k > 1 \\ \dfrac{4k^2 - 17k + 4}{4k(k-1)} \leq 0 \end{cases}$$

Poiché $k > 1$, il denominatore della frazione è positivo, quindi il sistema è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} k > 1 \\ 4k^2 - 17k + 4 \leq 0 \end{cases} \rightarrow \quad 1 < k \leq 4.$$

2. $A < 0$ e $C < 0$.
In questo caso moltiplichiamo per -1 entrambi i membri dell'equazione:

$$-kx^2 + (1-k)y^2 - 2x + 3y - 1 = 0.$$

Ora i coefficienti dei termini di secondo grado sono positivi, quindi procediamo come nel caso precedente:

$$\begin{cases} -k > 0 \\ 1 - k > 0 \\ \dfrac{4}{-4k} + \dfrac{9}{4(1-k)} + 1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k < 0 \\ \dfrac{-4k^2 + 17k - 4}{4k(1-k)} \geq 0 \end{cases}$$

Poiché $k < 0$, il denominatore della frazione è negativo, quindi il sistema è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} k < 0 \\ -4k^2 + 17k - 4 \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k < 0 \\ 4k^2 - 17k + 4 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \quad k < 0.$$

Dunque per $k < 0$ o per $1 < k \leq 4$ l'equazione data rappresenta un'ellisse.

d) L'equazione data rappresenta una circonferenza se $A = C$, cioè se:

$$k = k - 1 \quad \rightarrow \quad 0 = -1 \qquad \text{assurdo.}$$

Poiché abbiamo ottenuto un'uguaglianza assurda, non esiste alcun valore del parametro reale k tale che l'equazione rappresenti una circonferenza.

Determina per quali valori del parametro reale *k* l'equazione rappresenta una parabola con asse parallelo a uno degli assi coordinati.

34 $(k-4)x^2 + (2-k)y^2 - kx + (k+2)y + k + 3 = 0$ $[k = 4, k = 2]$

35 $(3k-2)x^2 + (5-2k)y^2 - 3x + (3-k)y + k = 0$ $\left[k = \frac{2}{3}, k = \frac{5}{2}\right]$

Determina per quali valori del parametro reale *k* l'equazione rappresenta un'iperbole e, in particolare, per quali è anche equilatera.

36 $(4k-5)x^2 + (2k+3)y^2 - kx + (2k+1)y + 5 = 0$ $\left[-\frac{3}{2} < k < \frac{5}{4}; \text{ equilatera: } k = \frac{1}{3}\right]$

37 $(2k-3)x^2+(1-k)y^2+2x+5y+9=0$ $\left[k<1 \vee k>\frac{3}{2}; \text{equilatera: } k=2\right]$

Determina i valori del parametro reale k per i quali l'equazione rappresenta un'ellisse e, in particolare, quelli per cui rappresenta una circonferenza.

38 $(k+5)x^2-ky^2+x-y+5=0$

$\left[-5<k\leq-\frac{5+2\sqrt{6}}{2} \vee \frac{2\sqrt{6}-5}{2}\leq k<0; \text{circonferenza: impossibile}\right]$

39 $(3k-4)x^2+(k+2)y^2-3x+y+1=0$ $\left[k<-2 \vee \frac{4}{3}<k\leq\frac{1+\sqrt{139}}{6}; \text{circonferenza: impossibile}\right]$

Determina per quali valori del parametro reale k l'equazione rappresenta:
a) un'iperbole; b) una parabola con asse parallelo agli assi coordinati; c) un'ellisse.

40 $x^2+3y^2+(k+2)x+(k-3)y+k=0$ $[\text{ellisse: } \forall k \in \mathbb{R}]$

41 $(k+1)x^2-3y^2-kx+2=0$ $[\text{iperbole: } k>-1; \text{parabola: } k=-1; \text{ellisse: } k<-1]$

42 $(k+2)x^2+ky^2+3x-2y+1=0$

$\left[\text{iperbole: } -2<k<0; \text{parabola: } k=-2 \vee k=0; \text{ellisse: } k<-2 \vee 0<k\leq\frac{5+\sqrt{153}}{8}\right]$

Studia il fascio di coniche al variare di k in $\mathbb{R}$.

43 $x^2+ky^2-2x+4y-1=0$ $[\text{iperbole: } k<0; \text{ellisse: } k>0; \text{parabola: } k=0]$

44 $(k-1)x^2-y^2+6x-4=0$ $\left[\text{iperbole: } k>1; \text{ellisse: } -\frac{5}{4}\leq k<1; \text{parabola: } k=1\right]$

45 $x^2-2k^2y^2-x-8y=0$ $[\text{iperbole: } k\neq 0; \text{parabola: } k=0]$

46 Dato il seguente fascio di coniche

$$\gamma_t: x^2+(1-t)y^2+2tx-2(1-t)y+2-t=0,$$

determinare i valori del parametro t per cui γ_t è una parabola.

(*Politecnico di Torino, Dipartimento di Matematica*)

[nessuno]

3. LA DEFINIZIONE DI UNA CONICA MEDIANTE L'ECCENTRICITÀ

▶ Teoria a pag. 505

47 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo il luogo dei punti P del piano tali che il rapporto fra la distanza dal punto $F(-4;-3)$ e la distanza dalla retta d di equazione $y+5=0$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Scriviamo l'espressione della distanza di $P(x;y)$ da F e della distanza $\overline{PH}$ di P da d:

$$\overline{PF}=\sqrt{(x+4)^2+(y+3)^2}, \qquad \overline{PH}=|y+5|.$$

Imponiamo la condizione data dal problema:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ se e solo se } \frac{\sqrt{(x+4)^2+(y+3)^2}}{|y+5|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \to \quad \sqrt{2[(x+4)^2+(y+3)^2]} = |y+5|.$$

Eleviamo a quadrato entrambi i membri e riduciamo i termini simili:

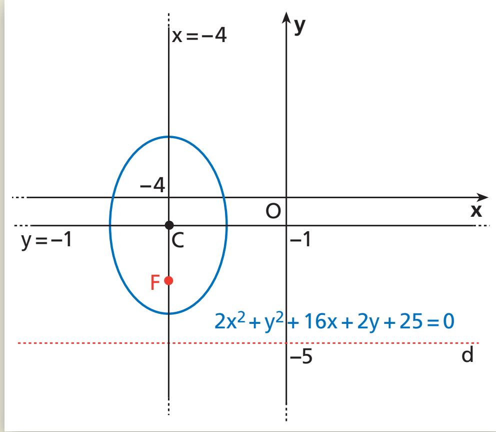
$$2(x^2+8x+16+y^2+6y+9) = y^2+10y+25 \quad \to \quad 2x^2+y^2+16x+2y+25=0.$$

Abbiamo ottenuto un'equazione del tipo $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, ossia l'equazione di una conica. In particolare, dato che $A \cdot C = 2 > 0$, essa rappresenta un'ellisse.

Disegniamo il grafico.
Trasformiamo l'equazione applicando il metodo del completamento del quadrato:

$$2(x^2+8x+16)-32+(y^2+2y+1)-1+25=0 \to$$
$$\to 2(x+4)^2+(y+1)^2=8 \to$$
$$\to \frac{(x+4)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{8}=1.$$

Pertanto, il centro è $C(-4; -1)$, i fuochi si trovano sulla retta di equazione $x=-4$ e i semiassi sono $a=2$ e $b=2\sqrt{2}$.



Determina il luogo del punto *P* che soddisfa le seguenti proposizioni.

48 Il rapporto fra la distanza di P da $F(-1; 1)$ e dalla retta di equazione $x+3=0$ è uguale a 1.
[parabola: $y^2-4x-2y-7=0$]

49 Il rapporto fra la distanza di P da $F(2; 0)$ e dalla retta di equazione $2x-5=0$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
[ellisse: $8x^2+12y^2-28x+23=0$]

50 Il rapporto fra la distanza di P da $F(-2; -1)$ e dall'asse delle ascisse è uguale a $\sqrt{5}$.
[iperbole: $x^2-4y^2+4x+2y+5=0$]

51 Il rapporto fra la distanza di P dalla retta $2x-9=0$ e dal punto $F(3; -2)$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
[iperbole equilatera: $2x^2-2y^2-24x-8y+55=0$]

52 Il rapporto fra la distanza di P dalla retta $2x+1=0$ e dal punto $F(2; 4)$ è uguale a $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
[ellisse: $4x^2+16y^2-76x-128y+317=0$]

53 Il rapporto fra la distanza di P da $F(-3; 3)$ e dalla retta $2y-3=0$ è uguale a $\sqrt{3}$.
[iperbole: $4x^2-8y^2+24x+12y+45=0$]

54 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo la conica di equazione $x^2-3y^2-6x-12y-12=0$ e determiniamo il centro, i fuochi, gli eventuali asintoti e le direttrici.

I coefficienti dei termini di secondo grado sono discordi ($A \cdot C = -3 < 0$) perciò l'equazione rappresenta un'iperbole.

Applichiamo il metodo del completamento del quadrato:

$$(x^2 - 6x + 9 - 9) - 3(y^2 + 4y + 4 - 4) - 12 = 0,$$

$$(x-3)^2 - 9 - 3(y+2)^2 + 12 - 12 = 0,$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{3} = 1.$$

Il centro è $C(3; -2)$, i *semiassi* a e b, la *semidistanza focale* c e l'*eccentricità* e sono:

$$a = \sqrt{9} = 3, \quad b = \sqrt{3}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{3}, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Troviamo i *fuochi*, ricordando che appartengono all'asse trasverso:

$$F_1: \begin{cases} x_1 = x_0 - c = 3 - 2\sqrt{3} \\ y_1 = y_0 = -2 \end{cases} \qquad F_2: \begin{cases} x_2 = x_0 + c = 3 + 2\sqrt{3} \\ y_2 = y_0 = -2 \end{cases}$$

Determiniamo le equazioni degli asintoti:

$$y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0) \quad \rightarrow \quad y + 2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 3).$$

Determiniamo infine le *direttrici* tenendo conto che sono parallele all'asse delle ordinate e intersecano il segmento A_1A_2. Per definizione ogni punto P dell'iperbole verifica la relazione:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

In particolare se il punto P coincide con il vertice A_2 e F con il fuoco F_2 troveremo la direttrice di equazione $x = k$ relativa al fuoco F_2. In questo caso $k < x_{A_2} < x_2$ e sono valide le relazioni:

$$\overline{PF} = \overline{A_2F_2} = x_2 - x_{A_2} = 2\sqrt{3} - 3, \overline{PH} = \overline{A_2H} = x_A - k = 6 - k \quad \rightarrow \quad \frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{6 - k}.$$

Dall'ultima relazione deduciamo il valore di k:

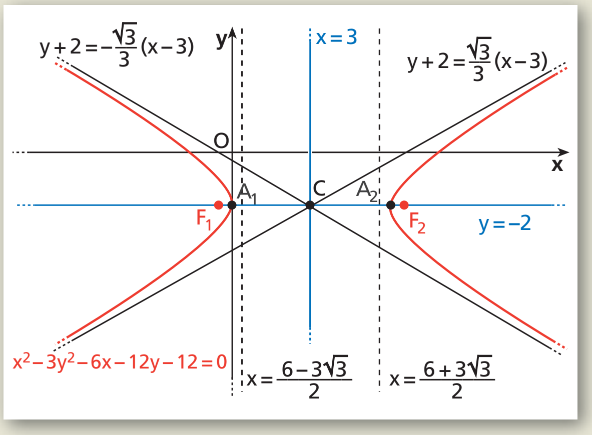
$$\frac{2\sqrt{3} - 3}{6 - k} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad k = \frac{6\sqrt{3} + 9}{2\sqrt{3}} = \frac{18 + 9\sqrt{3}}{6} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{2}.$$

L'equazione della direttrice relativa a F_2 è dunque:

$$x = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{2}.$$

Ripetendo il procedimento per la direttrice relativa al fuoco F_1 deduciamo la sua equazione:

$$x = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2}.$$



Studia le coniche con le seguenti equazioni, determinando il centro, i fuochi, gli eventuali asintoti e le direttrici.

55 $3x^2 + y^2 + 6x + 6y + 4 = 0$

$\left[\text{ellisse}, C(-1; -3), F_1\left(-1; \frac{4}{3}\sqrt{3} - 3\right), F_2\left(-1; -\frac{4}{3}\sqrt{3} - 3\right), d_1\!: y = 2\sqrt{3} - 3, d_2\!: y = -2\sqrt{3} - 3\right]$

56 $x^2 - 4y^2 - 10x + 16y + 25 = 0$
$\left[\text{iperbole}, C(5; 2), F_1(5; 2\sqrt{5} + 2), F_2(5; -2\sqrt{5} + 2),\right.$
$\left.\text{asintoti: } x + 2y - 9 = 0 \text{ e } x - 2y - 1 = 0, d_1: y = 2 + \frac{2}{5}\sqrt{5}, d_2: y = 2 - \frac{2}{5}\sqrt{5}\right]$

57 $x^2 + 2\sqrt{3}\,y^2 - 2\sqrt{3}\,x + 4\sqrt{3}\,y = 0$
$\left[\text{ellisse}, C(\sqrt{3}; -1), F_1\left(\sqrt{3} + \sqrt{2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}}; -1\right),\right.$
$\left.F_2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}}; -1\right), d_1: x = \sqrt{3} + \frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}}}, d_2: x = \sqrt{3} - \frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}}}\right]$

58 $16x^2 + 9y^2 - 96x = 0$
$\left[\text{ellisse}, C(3; 0), F_1(3; \sqrt{7}), F_2(3; -\sqrt{7}), d_1: y = \frac{16}{7}\sqrt{7}, d_2: y = -\frac{16}{7}\sqrt{7}\right]$

59 $5x^2 - 3y^2 + 15x + 6y - 1 = 0$
$\left[\text{iperbole}, C\left(-\frac{3}{2}; 1\right), F_1\left(-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{74}{15}}; 1\right), F_2\left(-\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{74}{15}}; 1\right),\right.$
$\left.\text{asintoti: } y = \pm\frac{\sqrt{15}}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right) + 1, d_1: x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{111}{10}}, d_2: x = -\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{111}{10}}\right]$

60 $xy + x + 4y = 0$
$[\text{iperbole}, C(-4; -1), F_1(2\sqrt{2} - 4; 2\sqrt{2} - 1), F_2(-2\sqrt{2} - 4; -2\sqrt{2} - 1), \text{asintoti: } x = -4 \text{ e } y = -1]$

61 $9x^2 + 5y^2 + 54x - 40y + 116 = 0$
$\left[\text{ellisse}, C(-3; 4), F_1(-3; 2), F_2(-3; 6), d_1: y = \frac{17}{2}, d_2: y = -\frac{1}{2}\right]$

62 $x^2 - y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$
$[\text{iperbole}, C(3; 1), F_1(5; 1), F_2(1; 1), \text{asintoti: } y = x - 2 \text{ e } y = -x + 4, d_1: x = 4, d_2: x = 2]$

63 $25x^2 + 9y^2 - 50x + 18y - 191 = 0$
$\left[\text{ellisse}, C(1; -1), F_1(1; 3), F_2(1; -5), d_1: y = \frac{21}{4}, d_2: y = -\frac{29}{4}\right]$

64 $12x^2 - 4y^2 + 24x + 8\sqrt{3}y - 3 = 0$
$\left[\text{iperbole}, C(-1; \sqrt{3}), F_1(0; \sqrt{3}), F_2(-2; \sqrt{3}),\right.$
$\left.\text{asintoti: } y = \sqrt{3}\,x + 2\sqrt{3} \text{ e } y = -\sqrt{3}\,x, d_1: x = -\frac{3}{4}, d_2: x = -\frac{5}{4}\right]$

I grafici con archi di coniche

65 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo il grafico corrispondente alla seguente equazione:

$$y = \sqrt{x^2 + x} - 3.$$

L'equazione rappresenta una *funzione* perché a ogni valore di x corrisponde soltanto un valore di y. Determiniamo il dominio imponendo la condizione di esistenza della radice:

$$x^2 + x \geq 0.$$

$$D:]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[.$$

Isoliamo la radice:

$$y + 3 = \sqrt{x^2 + x}.$$

Posto $y + 3 \geq 0$, ossia $y \geq -3$, eleviamo al quadrato e trasformiamo l'equazione con il metodo del completamento del quadrato:

$$(y+3)^2 = x^2 + x \quad \to \quad (y+3)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \quad \to$$

$$\to \quad (y+3)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad \to$$

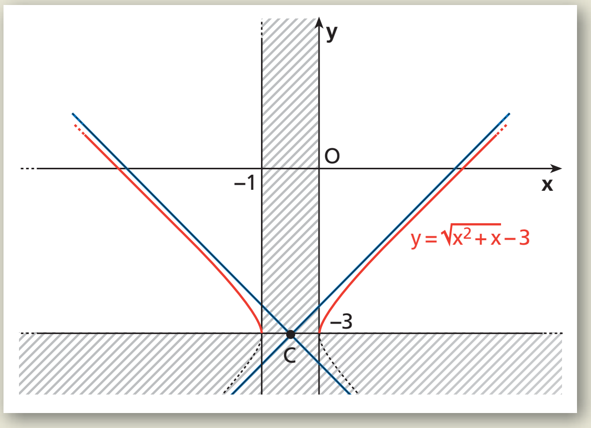
$$\to \quad 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 4(y+3)^2 = 1.$$

Si tratta di un'iperbole con

centro: $\left(-\frac{1}{2}; -3\right)$;

semiassi: $a = b = \frac{1}{2}$;

asintoti: $y + 3 = \pm\left(x + \frac{1}{2}\right)$.



Disegna i grafici corrispondenti alle seguenti equazioni.

66 $y = \sqrt{6x - x^2}$

67 $x = \sqrt{4y - 3y^2}$

68 $y = \dfrac{2x - 6}{|x| - 3}$

69 $y^2 = |x^2 - x|$

70 $y = \sqrt{2 - |x|}$

71 $3y = \sqrt{6x + 3x^2}$

72 $x|x| + y^2 - |x| = 0$

73 $y = |2x^2 - 1| + x^2$

74 $|xy| + y = 2$

75 $x|x| + y^2 - |y| = 0$

76 $3x^2 + 4y^2 = |x + 1| - x + 10$

77 $xy + |y| - 1 = 0$

I luoghi geometrici

78 ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo il luogo dei punti $P(x; y)$ del piano le cui coordinate sono espresse in funzione del parametro reale k e disegniamo il grafico:

$$P\left(\sqrt{4 - k^2}; \frac{k+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Scriviamo le *equazioni parametriche* del luogo:

$$\begin{cases} x = \sqrt{4 - k^2} \\ y = \dfrac{k+1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

La prima equazione ha senso soltanto se k soddisfa la condizione di realtà:

$$4 - k^2 \geq 0 \quad \to \quad -2 \leq k \leq 2.$$

Da questa deduciamo le seguenti condizioni per la x e per la y:

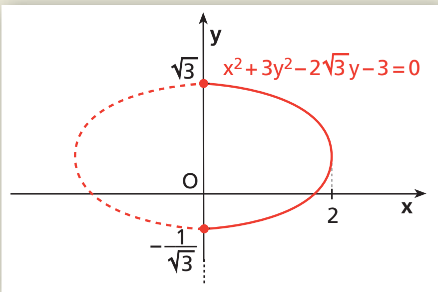
$$-2 \leq k \leq 2 \quad \to \quad \begin{cases} 0 \leq \sqrt{4 - k^2} \leq 2 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq \dfrac{k+1}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{3} \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

Per ricavare l'equazione che lega le coordinate x e y dobbiamo eliminare il parametro k tenendo conto delle condizioni imposte:

$$\begin{cases} x = \sqrt{4-k^2} \\ \sqrt{3}\,y - 1 = k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = 4-k^2 \\ (\sqrt{3}\,y-1)^2 = k^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4 - x^2 = k^2 \\ (\sqrt{3}\,y-1)^2 = k^2 \end{cases}$$

Eliminiamo il parametro k per sostituzione e scriviamo l'equazione del luogo con le condizioni:

$$\begin{cases} 4 - x^2 = (\sqrt{3}\,y-1)^2 \\ 0 \le x \le 2 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \le y \le 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}\,y - 3 = 0 \\ 0 \le x \le 2 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3} \end{cases}$$



Il luogo cercato è l'arco dell'ellisse traslata di equazione $x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}\,y - 3 = 0$ i cui punti hanno ascissa compresa fra 0 e 2. Tale equazione viene detta *equazione cartesiana* del luogo.

Determina il luogo dei punti del piano le cui coordinate sono espresse in funzione del parametro reale indicato. Disegna il grafico.

79 $P\left(\dfrac{k+1}{4}; 2-k^2\right)$ $[y = -16x^2 + 8x + 1]$

80 $P(-t^2 + 4t; 2t)$ $\left[x = -\dfrac{1}{4}y^2 + 2y\right]$

81 $P\left(\dfrac{1-k}{k}; 2-k\right)$ $\left[y = \dfrac{2x+1}{x+1}\right]$

82 $P\left(\sqrt{4-t^2}; \dfrac{t}{2}\right)$ $\left[\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1, \text{con } 0 \le x \le 2 \wedge -1 \le y \le 1\right]$

83 $P(t+3; \sqrt{1-t^2})$ $[x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0, \text{con } 0 \le y \le 1 \wedge 2 \le x \le 4]$

84 $P\left(k - \dfrac{1}{k}; k + \dfrac{1}{k}\right)$ $[x^2 - y^2 = -4]$

85 $P(m^2 - 3m; -m)$ $[x = y^2 + 3y]$

86 $M(t-5; \sqrt{9-4t^2})$ $\left[4x^2 + y^2 + 40x + 91 = 0, \text{con } -\dfrac{13}{2} \le x \le -\dfrac{7}{2} \wedge 0 \le y \le 3\right]$

87 $H(\sqrt{3h^2+1} - 2; h+3)$ $[x^2 - 3y^2 + 4x + 18y - 24 = 0, \text{con } x \ge -1]$

88 $M\left(\dfrac{1}{k^2+1}; k^2 - 1\right)$ $\left[y = \dfrac{1-2x}{x}, \text{con } 0 < x \le 1 \wedge y \ge -1\right]$

89 Sia dato il punto $F(-1; 0)$. Determina il luogo dei punti P del piano per i quali la somma fra la distanza dall'asse delle ascisse e il doppio della distanza da F è uguale a 5. Verifica che è formato da due parti di ellissi diverse, che ha due assi di simmetria ed è quindi dotato di centro.

$\left[\dfrac{3}{25}(x+1)^2 + \dfrac{9}{100}\left(y + \dfrac{5}{3}\right)^2 = 1, \text{con } 0 \le y \le 5; \dfrac{3}{25}(x+1)^2 + \dfrac{9}{100}\left(y - \dfrac{5}{3}\right)^2 = 1, \text{con } -5 \le y < 0\right]$

90 Dati i punti $F_1(1; -1)$, $F_2(1; 3)$ e la retta d di equazione $y = \dfrac{11}{2}$, dimostra che i seguenti luoghi definiscono la stessa conica.

a) Il luogo dei punti P del piano per i quali $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 6$.

b) Il luogo dei punti Q del piano per i quali $\dfrac{\overline{QH}}{\overline{QF_2}} = \dfrac{3}{2}$, dove $\overline{QH}$ è la distanza fra Q e la retta d.

$[(x-1)^2 + (y-1)^2 = 45]$

91 In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette r e s di equazioni rispettivamente $2x + my = 1$ e $mx - 2y = 2$, dove m è un parametro reale. Qual è l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto di intersezione delle due rette al variare di m?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2005, *quesito* 7)

92 Considera i punti $A(0; 5)$, $B(3; 1)$ e P variabile sulla parabola di equazione $y = x^2 - x$. Trova il luogo descritto dal baricentro del triangolo ABP e rappresenta il suo grafico. $[y = 3x^2 - 7x + 6]$

93 Dati i punti $A(-2; 0)$ e $B(4; 0)$, scrivi l'equazione del luogo descritto dall'ortocentro del triangolo ABP, con P che varia sulla retta di equazione $y = 3$. Rappresenta il suo grafico. $\left[y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}\right]$

94 Scrivi l'equazione del luogo geometrico descritto dai vertici delle parabole del fascio di equazione:

$y = 4x^2 - (k-2)x + k + 1.$ $[y = -4x^2 + 8x + 3]$

95 Determina l'equazione del luogo descritto dai centri delle circonferenze del fascio di equazione:

$kx^2 + ky^2 - 4(2+k)x - 2y + 1 = 0.$ $[x - 4y - 2 = 0]$

96 Scrivi l'equazione del luogo descritto dai centri delle funzioni omografiche del fascio di equazione:

$y = \dfrac{(1+m)x + 2}{4 + (m+2)x}.$ $[x - 4y + 4 = 0]$

97 Data la parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 2$, determina il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti nel suo punto di ascissa 2. $\left[y = -\frac{1}{2}x + 3\right]$

98 **TEST** Da un punto fisso di una circonferenza si tracciano le corde che hanno come secondo estremo ogni altro punto della circonferenza. Qual è il luogo dei punti medi delle corde?

A Un'ellisse. B Una circonferenza. C Un'iperbole. D Una parabola. E Una retta.

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2004)

Le coniche e i sistemi parametrici

Determina le soluzioni dei seguenti sistemi al variare del parametro k, con il metodo grafico.

99 $\begin{cases} xy + 4 = 0 \\ y - x - 2k = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ $[2 \text{ sol. per } k \leq -2]$

100 $\begin{cases} 2xy - x - y - 3 = 0 \\ x + 2y - 1 = k \\ x > 1 \wedge y > 1 \end{cases}$ $\left[2 \text{ sol. per } \frac{1}{2} + \sqrt{14} \leq k < 8\right]$

101 $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - 4x - 3 = 0 \\ x + y = k \\ y + 2x \geq 0 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -\frac{1}{2} \leq k < \frac{3}{10}; 2 \text{ sol. per } \frac{3}{10} \leq k \leq \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}\right]$

102 $\begin{cases} 36x^2 + 9y^2 - 24x - 12y + 4 = 0 \\ x + y = k \\ 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \wedge y \geq \frac{2}{3} \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } \frac{2}{3} \leq k < \frac{4}{3}; 2 \text{ sol. per } \frac{4}{3} \leq k \leq 1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right]$

103 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 3x - 2y = 2k \\ x \geq 2 \end{cases}$ $[2 \text{ sol. per } k \geq \sqrt{5}]$

104 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4 \\ y = x + 2k \\ 0 \leq x \leq 2 \wedge y \geq 0 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -1 \leq k \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

105 $\begin{cases} x^2 - 3y^2 + 2x = 0 \\ y - kx + 4k - 3 = 0 \\ x \geq 0 \wedge y \geq -\sqrt{5} \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } k < \frac{\sqrt{3}}{3} \vee k > 3 + \sqrt{5}; 2 \text{ sol. per } \frac{2}{3} \leq k \leq 3 + \sqrt{5}\right]$

106 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ 2y - 2(k+1)x - 1 = 0 \\ y \geq -\sqrt{3}\,x \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } k < -2 - \sqrt{3}; 2 \text{ sol. per } -2 - \sqrt{3} \leq k \leq -\frac{1}{4}\right]$

107 $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 - 24x = 0 \\ kx - y = 6k - 2 \\ 0 \leq x \leq 6 \end{cases}$ $[2 \text{ sol. per } k \geq 0]$

108 $\begin{cases} x + 2y = xy \\ y = kx - 4k - 2 \\ -4 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. } k > -\frac{1}{3}; 2 \text{ sol. per } -\frac{1}{2} \leq k \leq -\frac{1}{3}\right]$

Sistemi con un'equazione da sdoppiare

109 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo le soluzioni del seguente sistema, al variare del parametro *k*, con il metodo grafico:

$$\begin{cases} 2\sqrt{4x - x^2} - kx - \dfrac{k}{2} = 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Per applicare il metodo grafico, sdoppiamo l'equazione e indichiamo con y ciascuno dei due membri:

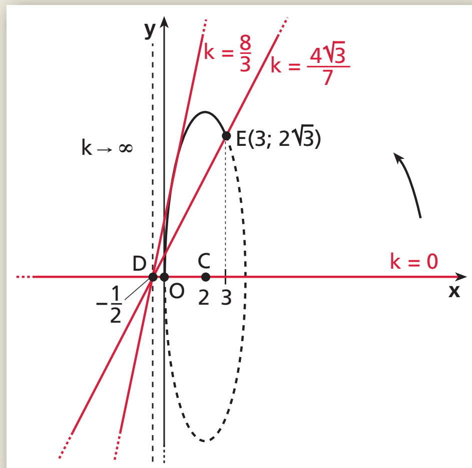
$$\begin{cases} 2\sqrt{4x - x^2} = kx + \dfrac{k}{2} \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{4x - x^2} \\ y = kx + \dfrac{k}{2} \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Il sistema è costituito dall'equazione di una curva, dall'equazione di un fascio di rette e dalle condizioni sulle soluzioni. Risolvere il sistema significa determinare i valori di k per cui i punti di intersezione delle rette del fascio e della curva hanno ascissa compresa tra 0 e 3.

- Studiamo la curva di equazione $y = 2\sqrt{4x - x^2}$.
  Il dominio è D: $0 \leq x \leq 4$.
  Posto $y \geq 0$, eleviamo al quadrato:

$$y^2 = 4(4x - x^2) \rightarrow 4x^2 + y^2 - 16x = 0 \rightarrow 4(x^2 - 4x + 4) + y^2 - 16 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4(x-2)^2 + y^2 = 16 \rightarrow \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1.$$



Si tratta quindi di un'ellisse traslata di centro $C(2; 0)$ e semiassi $a = 2$, $b = 4$.
Tracciamo il grafico dell'ellisse ed evidenziamo l'arco $\overset{\frown}{OE}$ definito dalle limitazioni. E è il punto di ascissa 3 e, sostituendo nell'equazione dell'ellisse, si trova che l'ordinata è $2\sqrt{3}$.

- Studiamo il fascio di rette:

$$y = kx + \frac{k}{2} \quad \to \quad 2y - 2kx - k = 0 \quad \to$$

$$\to \quad k(-2x - 1) + 2y = 0.$$

Le generatrici sono le rette:

$$-2x - 1 = 0 \text{ per } k \to \infty;$$
$$2y = 0 \text{ per } k = 0.$$

Il centro del fascio è $D\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Le *rette caposaldo* sono:

- la retta per $O(0; 0)$: $\quad k = 0$;
- la retta per $E(3; 2\sqrt{3})$: $\quad k(-7) + 4\sqrt{3} = 0 \quad \to \quad k = \frac{4\sqrt{3}}{7}$;
- la retta tangente che si ottiene ponendo la condizione di tangenza $\Delta = 0$ nel sistema costituito dall'equazione dell'ellisse e del fascio di rette:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 16x = 0 \\ y = kx + \frac{k}{2} \end{cases} \to \begin{cases} y = kx + \frac{k}{2} \\ 4x^2 + k^2x^2 + \frac{k^2}{4} + k^2x - 16x = 0 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} y = kx + \frac{k}{2} \\ (4 + k^2)x^2 - x(16 - k^2) + \frac{k^2}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (16 - k^2)^2 - (4 + k^2)k^2 = 0 \quad \to \quad 256 + k^4 - 32k^2 - 4k^2 - k^4 = 0 \quad \to \quad -36k^2 + 256 = 0 \quad \to$$

$$\to \quad k^2 = \frac{64}{9} \quad \to \quad k = \pm\frac{8}{3}.$$

Poiché le rette del fascio, al crescere di k, ruotano intorno al centro in senso antiorario, il valore negativo non è accettabile, quindi la retta tangente si ha per $k = \frac{8}{3}$.

Osservando il grafico deduciamo che:

- per $0 \leq k < \frac{4}{7}\sqrt{3}$ si ha *una* soluzione;
- per $\frac{4}{7}\sqrt{3} \leq k \leq \frac{8}{3}$ si hanno *due* soluzioni.

Determina le soluzioni dei seguenti sistemi, al variare del parametro k, con il metodo grafico.

110 $\begin{cases} \sqrt{2x^2 + 4x} - kx - \frac{3}{2}k = 0 \\ -4 \leq x \leq -2 \end{cases}$ $\quad \left[1 \text{ sol. per } -\frac{8}{5} < k \leq 0; 2 \text{ sol. per } -\frac{2}{3}\sqrt{6} \leq k \leq -\frac{8}{5}\right]$

111 $\begin{cases} \sqrt{9-4x^2}-2x+k=0 \\ 0 \le x \le \dfrac{3}{2} \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } -3 \le k \le 3]$

112 $\begin{cases} \sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}\,x-k=0 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } 2 \le k < 2\sqrt{3};\ 2 \text{ sol. per } 2\sqrt{3} \le k \le 4]$

113 $\begin{cases} \sqrt{4-x}+x-k=0 \\ 0 < x \le 4 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } 2 < k < 4;\ 2 \text{ sol. per } 4 \le k \le \dfrac{17}{4}\right]$

114 $\begin{cases} \sqrt{5-4x-x^2}-kx+3k-3=0 \\ -5 \le x \le 1 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } \dfrac{3}{8} < k \le \dfrac{3}{2};\ 2 \text{ sol. per } 0 \le k \le \dfrac{3}{8}\right]$

115 $\begin{cases} \sqrt{16-x^2}-2x-k=0 \\ -4 \le x \le 0 \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } 4 \le k < 8;\ 2 \text{ sol. per } 8 \le k \le 4\sqrt{5}]$

116 $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3}{2}-x-\dfrac{1}{2}x^2}+\dfrac{1}{2}x-k=0 \\ -3 \le x \le -1 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -\dfrac{3}{2} \le k \le \sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\right]$

117 $\begin{cases} \sqrt{1-2x^2}-kx+1=0 \\ 0 < x \le \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } k \ge \sqrt{2}]$

118 $\begin{cases} \sqrt{4-x^2}-kx+3k=0 \\ 0 < x \le 2 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -\dfrac{2}{3} \le k \le 0;\ 2 \text{ sol. per } -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \le k < -\dfrac{2}{3}\right]$

119 $\begin{cases} \sqrt{2+3x}-kx-k=0 \\ -\dfrac{2}{3} \le x \le 1 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } 0 \le k < \dfrac{\sqrt{5}}{2};\ 2 \text{ sol. per } \dfrac{\sqrt{5}}{2} \le k \le \dfrac{3}{2}\right]$

120 $\begin{cases} \sqrt{-\dfrac{9}{4}x^2+\dfrac{27}{2}x-\dfrac{45}{4}}-kx-3=0 \\ 1 \le x \le 5 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -3 \le k < -\dfrac{3}{5};\ 2 \text{ sol. per } -\dfrac{3}{5} \le k \le 0\right]$

121 $\begin{cases} \dfrac{x}{x-1}-kx-k=0 \\ x \ge -3 \wedge y \ge 0 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } k \le -\dfrac{3}{8} \vee k=0;\ 2 \text{ sol. per } k > 0\right]$

122 $\begin{cases} \sqrt{4+x^2}-kx-4=0 \\ x > 0 \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } k < 1]$

123 $\begin{cases} y=\sqrt{4x^2+3} \\ 2kx+(k+1)y-\sqrt{3}=0 \\ x \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } k < \dfrac{\sqrt{3}-2}{3};\ 2 \text{ sol. per } \dfrac{\sqrt{3}-2}{3} \le k \le 0\right]$

124 $\begin{cases} \sqrt{x^2-2x-8}+2x+k=0 \\ -4 \le x \le 6 \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } -16 \le k \le -8;\ 2 \text{ sol. per } 3\sqrt{3}-2 \le k \le 4]$

125 $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x-8}-kx-4=0 \\ x \ge -6 \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } -2 \le k < 0 \vee k=1;\ 2 \text{ sol. per } 0 \le k < 1]$

126 $\begin{cases} \dfrac{x}{x+1}=kx+2k+2 \\ y \ge 0 \end{cases}$

$[1 \text{ sol. per } k < -1 \vee k=0;\ 2 \text{ sol. per } -1 \le k < 0 \vee k > 0;\ 2 \text{ sol. coincidenti per } k=1]$

127 $\sqrt{x|x|+4}=kx+4k$ $\left[1 \text{ sol. per } 0 \le k < \dfrac{\sqrt{5}}{5} \vee \dfrac{\sqrt{3}}{3} < k < 1;\ 3 \text{ sol. per } \dfrac{\sqrt{5}}{5} \le k \le \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$

128 $\sqrt{|2-x|}-x=k$ $\left[1 \text{ sol. per } k < -2 \vee k > -\dfrac{7}{4};\ 2 \text{ sol. per } k=-2 \vee k=-\dfrac{7}{4};\ 3 \text{ sol. per } -2 < k < -\dfrac{7}{4}\right]$

Il metodo della parabola fissa

129 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo le soluzioni del seguente sistema, al variare del parametro k, con il metodo della parabola fissa:

$$\begin{cases}(2k-1)x^2 - kx + 1 = 0\\ -2 \le x \le 1\end{cases}$$

Posto $y = x^2$, riscriviamo il sistema:

$$\begin{cases}y = x^2\\ (2k-1)y - kx + 1 = 0\\ -2 \le x \le 1\end{cases}$$

che risolviamo con il metodo grafico.
Abbiamo una *parabola fissa* di equazione $y = x^2$. Tenendo conto delle limitazioni del problema, evidenziamo l'arco $\overset{\frown}{AB}$ di estremi $A(-2; 4)$ e $B(1; 1)$.
L'equazione

$$(2k-1)y - kx + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad k(2y - x) - y + 1 = 0$$

è relativa a un fascio di rette con generatrici di equazioni:

$2y - x = 0 \qquad$ per $k \rightarrow \infty$;

$-y + 1 = 0 \qquad$ per $k = 0$.

Il centro del fascio è $C(2; 1)$.

Disegniamo le rette caposaldo:

retta per $A(-2; 4)$: $\quad 8k - 4 + 2k + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 10k = 3 \quad \rightarrow \quad k = \frac{3}{10}$;

retta per $B(1; 1)$: $\quad 2k - 1 - k + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad k = 0$;

retta tangente:

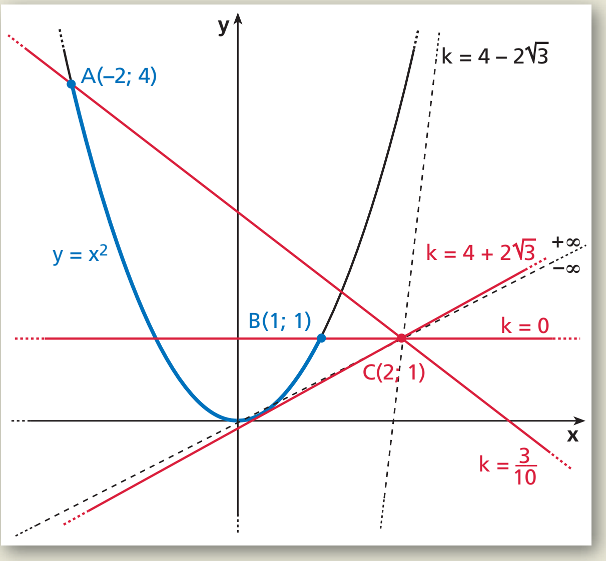
$$\begin{cases}y = x^2\\ (2k-1)y - kx + 1 = 0\end{cases} \quad \rightarrow \quad (2k-1)x^2 - kx + 1 = 0,$$

$$\Delta = 0 \quad \rightarrow \quad k^2 - 4(2k-1) = 0 \quad \rightarrow \quad k^2 - 8k + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad k = 4 \pm \sqrt{16-4} = 4 \pm 2\sqrt{3}.$$

Poiché le rette del fascio, al crescere di k, ruotano intorno al centro in senso orario, il valore da considerare è $k = 4 + 2\sqrt{3}$.

Osservando il grafico, concludiamo che si ha:

- per $0 < k \le \frac{3}{10}$ *una* soluzione;
- per $k \le 0 \lor k \ge 4 + 2\sqrt{3}$ *due* soluzioni.



Determina le soluzioni dei seguenti sistemi, al variare del parametro *k*, con il metodo della parabola fissa.

130 $\begin{cases} x^2 - 4x + 2k + 3 = 0 \\ 0 < x \le 2 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -\frac{3}{2} < k < \frac{1}{2}; 2 \text{ sol. per } k = \frac{1}{2}\right]$

131 $\begin{cases} (k+1)x^2 - (k+3)x + 2 = 0 \\ -2 \le x \le 1 \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } -2 < k \le 1; 2 \text{ sol. per } k \le -2 \vee k > 1]$

132 $\begin{cases} kx^2 + (k-1)x - k + 1 = 0 \\ 0 < x \le 3 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } k < \frac{2}{11} \vee k > 1; 2 \text{ sol. per } \frac{2}{11} \le k \le \frac{1}{5}\right]$

133 $\begin{cases} (4m+5)x^2 + 4(m-1)x - 9m = 0 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } m \le -\frac{4}{5} \vee m > 0; 2 \text{ sol. per } -\frac{1}{8} \le m \le 0\right]$

134 $\begin{cases} ax^2 - 2ax - 3(a+1) = 0 \\ -1 \le x \le \frac{3}{2} \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } a < -\frac{4}{5}; 2 \text{ sol. per } -\frac{4}{5} \le a \le -\frac{3}{4}\right]$

4. LE DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO IN DUE INCOGNITE

▶ Teoria a pag. 508

135 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo graficamente il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \ge 4x \\ 3y^2 - x \le 0 \\ x - 6 \le 0 \end{cases}$$

Rappresentiamo la curva di equazione $x^2 - y^2 - 4x = 0$.

Si ha: $(x^2 - 4x + 4) - 4 - y^2 = 0 \rightarrow (x-2)^2 - y^2 = 4 \rightarrow \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$.

È un'iperbole equilatera traslata con centro in (2; 0), vertici in (0; 0) e (4; 0) e asintoti di equazioni $y = x - 2$ e $y = -x + 2$.

Per determinare i punti del piano le cui coordinate verificano la disequazione

$$x^2 - y^2 \ge 4x,$$

utilizziamo il punto di prova (1; 0), per il quale, sostituendo, abbiamo:

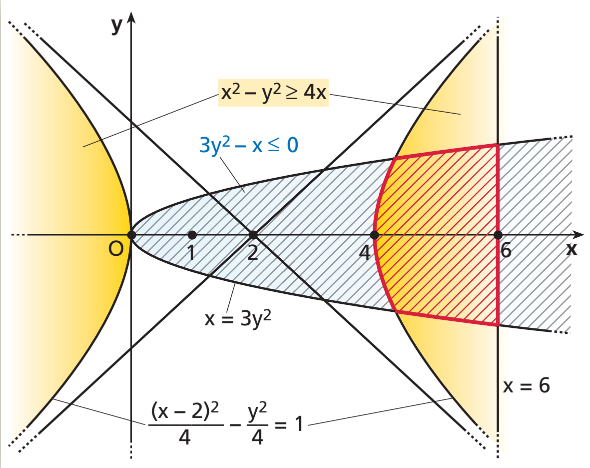
$1 \ge 4$ **falso**.

La zona i cui punti hanno coordinate che soddisfano la disequazione è quindi quella che non contiene (1; 0).

Per la disequazione $3y^2 - x \le 0$, disegnata la parabola di equazione $3y^2 - x = 0 \rightarrow x = 3y^2$, utilizziamo ancora (1; 0) come punto di prova:

$-1 \le 0$ **vero**,

quindi la zona da considerare contiene (1; 0).



Le soluzioni della disequazione $x-6\leq 0 \rightarrow x\leq 6$ sono rappresentate da tutti i punti del semipiano con ascissa minore o uguale a 6.
Intersecando le tre zone trovate, otteniamo quella che in figura è tratteggiata in rosso, i cui punti hanno coordinate che soddisfano il sistema. Accettiamo anche tutti i punti del suo contorno in quanto in tutte le disequazioni abbiamo anche il segno di uguale.

Risolvi graficamente le seguenti disequazioni o sistemi di disequazioni.

136 $x^2\geq 2x-y+1$

137 $3x^2-5y^2+x+y<0$

138 $2xy+x+3y-2<0$

139 $x^2+4y^2-2|x|\geq 5+|y|$

140 $\sqrt{x-4}<y+1$

141 $\begin{cases} x^2+y^2-6x+2y\leq -6 \\ 3x^2+4y^2-18x+8y-19>0 \end{cases}$

142 $(x-3)(y-1)<2$

143 $x(y+4)\geq -2$

144 $x\leq -y^2+4y$

145 $4y^2\geq x^2-2x-3$

146 $x^2+|y-1|>3$

147 $x^2+y^2-2|x|-3\leq 0$

148 $\begin{cases} \sqrt{5-y}<3-x \\ x\geq 0 \end{cases}$

149 $\begin{cases} 4x^2+9y^2+24x\geq 0 \\ 3y^2+12y-4x\leq 0 \end{cases}$

150 $\begin{cases} x^2-y^2+3x-2y<0 \\ |2x+3|\leq 5 \end{cases}$

151 $\begin{cases} |y|\leq 2 \\ |x-4|\geq 1 \\ 4x^2-3y^2-8x>0 \end{cases}$

152 $\begin{cases} \sqrt{12x-3x^2}>y+2 \\ y+2\geq 0 \end{cases}$

153 $\begin{cases} x^2+4y^2+4x-16y+16\geq 0 \\ x^2-y^2+10x+4y+20\geq 0 \\ x+2\leq 0 \end{cases}$

154 $\begin{cases} y<\dfrac{3-2x}{x-4} \\ (x-4)^2+(y+2)^2\geq 3 \end{cases}$

155 $\begin{cases} xy\leq 4 \\ x^2+y^2\geq 8 \end{cases}$

156 $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y+1\geq 0 \\ x+y>0 \end{cases}$

157 $\begin{cases} y<\sqrt{x-1} \\ y-2x+4>0 \end{cases}$

158 $\begin{cases} x\geq y^2-4 \\ 2x<y+2 \end{cases}$

159 $\begin{cases} (x-3)^2\leq 2+y^2-2y \\ x>3y \end{cases}$

160 $\begin{cases} x^2\leq 4x+y-6 \\ y>2x+3 \end{cases}$

161 $\begin{cases} y^2\leq (x+2)^2 \\ x^2+y^2\leq 4 \end{cases}$

162 $(x^2+y^2-4)(x+1)\geq 0$

163 $\sqrt{x^2-y}\leq 2x$

164 $\dfrac{x^2+y-4}{x+1}>0$

165 $\dfrac{x^2}{x^2+y^2-2x}\leq 1$

Determina l'area delle parti di piano individuate dalle soluzioni dei seguenti sistemi.

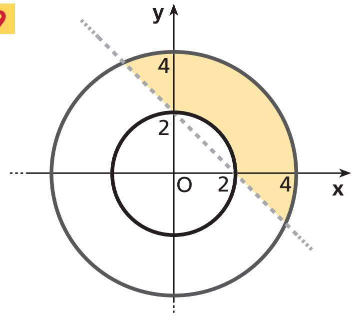
166 $\begin{cases} y\geq x^2-4x \\ x+y-4\leq 0 \end{cases}$ $\left[\dfrac{9}{2}\right]$

167 $\begin{cases} x^2+y^2+2x-1\leq 0 \\ y^2-x-1<0 \end{cases}$ $\left[\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{3}(\sqrt{2}-1)\right]$

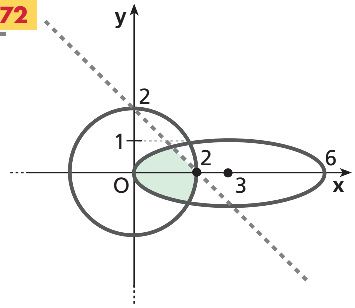
168 $\begin{cases} x^2+y^2\leq 16 \\ x^2\geq 1-y^2 \\ x+y\leq 4 \end{cases}$ $[11\pi+8]$

Scrivi un sistema di disequazioni che individui le regioni di piano rappresentate in figura.

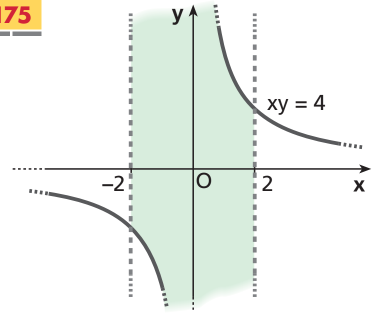
169



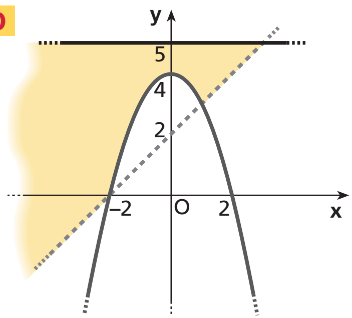
172



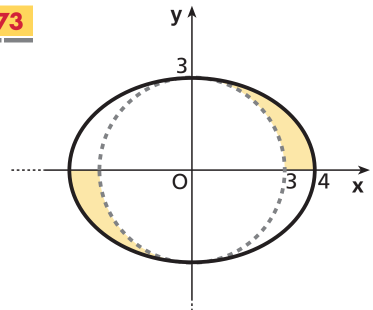
175



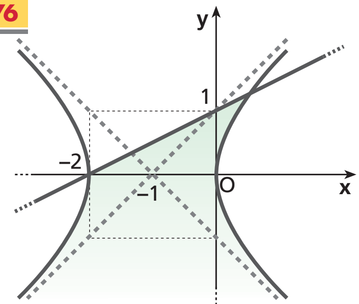
170



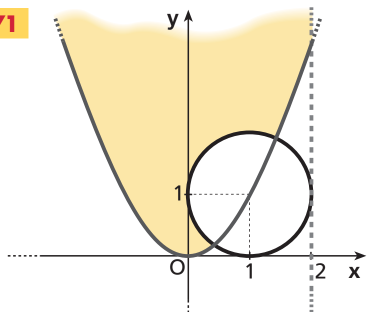
173



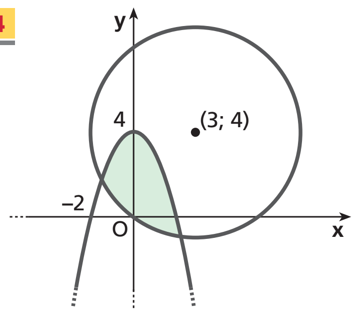
176



171



174



5. LE CONICHE E I PROBLEMI GEOMETRICI

▶ Teoria a pag. 510

I problemi geometrici senza parametri

177 Dato il triangolo isoscele ABC di altezza $\overline{AH} = 2$ e angolo di vertice $B\widehat{A}C = 120°$, traccia esternamente al triangolo la semicirconferenza di diametro AB e centro O. Considera sulla semicirconferenza un punto P, traccia la sua proiezione M su AB e il prolungamento di PM fino a incontrare in Q il lato BC. Esprimi in funzione di $\overline{BM} = x$ la somma $s = \overline{PM}^2 + 3\overline{MQ}^2 + \overline{BM}^2$ e rappresenta graficamente tale funzione.

$[s = 4x + x^2, 0 \leq x \leq 4]$

178 Dato il triangolo rettangolo ABC, di perimetro $24a$, traccia la semicirconferenza che ha per diametro l'ipotenusa AC ed esterna al triangolo. Preso un punto P sulla semicirconferenza, considera la sua proiezione D su AC. Sapendo che $\overline{AB} = 8a$, rappresenta $y = \dfrac{\overline{PC}^2}{\overline{AP}^2}$ in funzione di $\overline{DC}$. (Per il grafico poni $a = 1$.)

$\left[y = \dfrac{x}{10a - x}, 0 \leq x < 10a\right]$

179 a) Scrivi l'equazione della parabola passante per l'origine O, per il punto $B(6; 0)$ e avente per tangente nell'origine la retta di equazione $y = 6x$.
b) Inscrivi nel segmento parabolico delimitato dall'asse x un rettangolo $PQRS$ con la base su OB e altezza variabile k. Esprimi la differenza d tra il quadrato della misura della base e il quadrato di quella dell'altezza del rettangolo al variare dell'altezza e rappresenta graficamente la funzione d.
[a) $y = -x^2 + 6x$; b) $d = 36 - 4k - k^2, 0 \leq k \leq 9$]

180 Sono date le parabole γ_1 e γ_2 con asse parallelo all'asse x. γ_1 ha il vertice sull'asse x di ascissa 8 e interseca l'asse y in $(0; 4)$. γ_2 ha vertice sull'asse x, passa per $(0; -4)$ e in questo punto ha per tangente la retta di equazione $y = -x - 4$.
a) Determina le equazioni di γ_1 e γ_2.
b) Inscrivi un rettangolo nella figura geometrica ottenuta con gli archi di γ_1 e γ_2 compresi fra le loro intersezioni con l'asse y. Esprimi la misura y del perimetro del rettangolo in funzione dell'ordinata k di uno dei suoi vertici con $k > 0$, e rappresenta il grafico della funzione ottenuta.
c) Trova per quale valore di k il perimetro del rettangolo è massimo.
$\left[\text{a) } x = -\frac{1}{2}y^2 + 8, x = \frac{1}{8}y^2 - 2; \text{ b) } y = -\frac{5}{4}k^2 + 4k + 20, 0 < k < 4; \text{ c) } \frac{8}{5}\right]$

181 È dato il triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa BC e con H proiezione di A su BC. Considera un punto P su $\overline{HB}$ e la sua proiezione D su AB. Sapendo che $\overline{AC} = 10a$ e $\overline{AH} = 8a$, esprimi

$$y = \frac{\overline{PB}}{3\overline{PC} + 5\overline{DB}}$$

in funzione di $\overline{PB}$ e rappresenta la funzione ottenuta. (Per il grafico poni $a = 1$.)
$\left[y = \frac{x}{50a + x}, 0 \leq x \leq \frac{32}{3}a\right]$

182 a) Una semicirconferenza ha diametro $\overline{AB} = 2$, P è un suo punto e viene proiettato sul diametro in H. Esprimi in funzione di $\overline{AH}$ la radice quadrata della differenza $2\overline{AP}^2 - \overline{PH}^2$. Rappresenta la funzione ottenuta mettendone in evidenza il tratto relativo al problema.
b) Risolvi graficamente la seguente disequazione:
$\sqrt{2x + x^2} \leq \sqrt{8 - x^2 - 2x}$.
[a) $y = \sqrt{2x + x^2}$; b) $-\sqrt{5} - 1 \leq x \leq -2 \vee 0 \leq x \leq \sqrt{5} - 1$]

183 La semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 4a$ ha come punto medio C. Il prolungamento della corda AC incontra in D la tangente in B alla semicirconferenza. Considerati un punto P dell'arco $\overset{\frown}{CB}$ e la sua proiezione H su DB, studia $y = \overline{AP}^2 - \overline{PD}^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{PH}$ in funzione di $\overline{PH}$. (Per il grafico poni $a = 1$.)
[$y = 8\sqrt{4ax - x^2}, 0 \leq x \leq 2a$]

184 È dato un quarto di cerchio con centro O, raggio di misura $4a$ e A e B estremi dell'arco relativo. Il raggio OC è bisettrice dell'angolo $A\hat{O}B$. Considera un punto P sull'arco $\overset{\frown}{CA}$ e traccia la parallela a OA che taglia OC in D. K e H sono le proiezioni rispettivamente di D e P su OA. Determina e rappresenta la funzione che esprime il perimetro del rettangolo $DPKH$ in funzione di $\overline{PH}$. (Per il grafico poni $a = 1$.)
[$y = 2\sqrt{16a^2 - x^2}, 0 < x < 2a\sqrt{2}$]

185 Dato il triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa $\overline{AB} = 10a$ e con $\overline{AC} = 6a$, traccia la semicirconferenza di diametro CB ed esterna al triangolo. Preso un punto P sulla semicirconferenza e indicata con D la sua proiezione sul diametro CB, esprimi, mediante $\overline{DB}$, $y = \overline{AD}^2 + \overline{PD}^2 + \overline{DB}^2$ e rappresenta la funzione ottenuta. (Per il grafico poni $a = 1$.)
[$y = x^2 - 8ax + 100a^2, 0 \leq x \leq 8a$]

186 a) Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 4$, sul prolungamento di AB dalla parte di B considera un punto C tale che BC sia uguale al raggio. Preso sulla semicirconferenza un punto P, determina la funzione

$$y = \left| \overline{PC}^2 - 8\overline{PB} \right|$$

al variare della distanza di P da B.

b) Verificato che la funzione trovata è

$$y = |2x^2 - 8x + 4|,$$

rappresentala graficamente mettendo in evidenza il tratto relativo al problema. Scrivi l'equazione della circonferenza che ha per diametro il segmento che congiunge il vertice della parabola di equazione $y = 2x^2 - 8x + 4$ con il suo punto D di intersezione con l'asse y.

c) Trova l'equazione della retta t tangente alla circonferenza in D e, detto E il punto in cui t interseca l'asse x, scrivi l'equazione della funzione omografica che ha centro di simmetria E e passa per D.

d) Verifica che la retta tangente in D alla funzione omografica è la simmetrica di t rispetto all'asse y.

$\left[\text{b) } x^2 + y^2 - 2x - 16 = 0; \text{ c) } y = \frac{1}{4}x + 4,\ y = \frac{64}{x+16}; \text{ d) } y = -\frac{1}{4}x + 4\right]$

187 Nella circonferenza di centro O e raggio r, disegna le corde AE e AF in semipiani opposti rispetto alla retta AO con le misure uguali a $r\sqrt{3}$ e r.

a) Dimostra che l'angolo $E\widehat{A}F$ è retto.

b) Considera sull'arco $\overset{\frown}{EF}$, che non contiene A, un punto P e traccia la perpendicolare PH alla retta EF. Posto $\overline{EH} = x$, esprimi la funzione

$$y = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{PF}^2 + \overline{AF}^2}$$

al variare di P sull'arco $\overset{\frown}{EF}$ e rappresentala graficamente, tenendo conto delle limitazioni del problema. (Per il grafico poni $r = 1$.)

[b) $y = \sqrt{-x^2 + 5r^2}$, $0 \le x \le 2r$]

188 In un triangolo ABC, rettangolo in A, l'area è $54a^2$ e il perimetro è $36a$.

a) Trova le misure dei lati.

b) Considera un punto P sull'ipotenusa BC e da P traccia la perpendicolare a BC che interseca il cateto maggiore AC in Q. Trova, al variare di P su BC, l'area y del quadrilatero $AQPB$ (poni $\overline{PC} = x$). Rappresenta la funzione ottenuta ed evidenzia il tratto relativo al problema. (Per il grafico poni $a = 1$.)

c) Dimostra che il quadrilatero $AQPB$ è sempre inscrivibile in una circonferenza.

$\left[\text{a) } 9a, 12a, 15a; \text{ b) } y = 54a^2 - \frac{3}{8}x^2, 0 \le x \le \frac{48}{5}a\right]$

189 Considera una circonferenza $\mathscr{C}_1$ di diametro $\overline{AB} = 8a$ e una circonferenza $\mathscr{C}_2$ di centro O e raggio r tangente internamente in A a $\mathscr{C}_1$. Dal punto B conduci uno dei due segmenti di tangenza BM alla circonferenza $\mathscr{C}_2$.

a) Posto $a = 1$, trova per quale valore di r si ha:

$$\overline{BM} = (\overline{OA} + 2)\sqrt{2}.$$

b) Constatato che $r = 2$, traccia una retta s perpendicolare ad AB che interseca le due circonferenze $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ formando le corde CD ed EF. Rappresenta graficamente la funzione

$$y = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{EF}^2}$$

al variare della posizione della retta s. (Poni la distanza di A dalla retta s uguale a x.)

c) Trova il massimo della funzione.

[a) $r = 2$; b) $y = 2\sqrt{12x - 2x^2}$, $0 \le x \le 4$; c) $y_{max} = 6\sqrt{2}$ per $x = 3$]

I problemi di geometria analitica con parametri

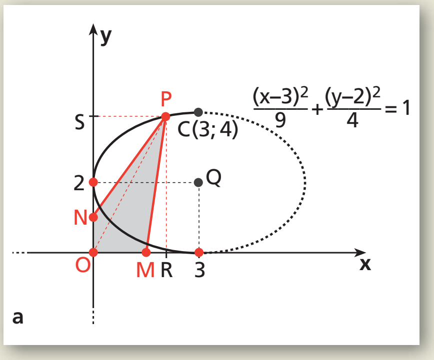
190 **ESERCIZIO GUIDA**

Considera l'ellisse con centro $Q(3; 2)$ e semiassi $a = 3$, $b = 2$; sull'arco i cui punti hanno ascissa minore o uguale a 3 determiniamo un punto P in modo che l'area del quadrilatero $OMPN$ sia uguale a s, con $s \in \mathbb{R}$, essendo O l'origine, $M = \left(\frac{3}{2}; 0\right)$, $N = (0; 1)$.

Per prima cosa deduciamo l'equazione dell'ellisse:

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$

Si tratta di un'ellisse traslata tangente all'asse x e all'asse y (figura a).



Il punto P appartiene alla semiellisse individuata dalle seguenti **limitazioni**:

$$0 \le x \le 3 \wedge 0 \le y \le 4.$$

Il quadrilatero $OMPN$ è scomponibile nella somma dei triangoli OMP e ONP, pertanto:

$$\text{area}(OMPN) = \text{area}(OMP) + \text{area}(ONP) = \frac{1}{2}\overline{OM} \cdot \overline{RP} + \frac{1}{2}\overline{ON} \cdot \overline{SP}.$$

Scegliamo come **incognite** le coordinate di P e, tenendo conto che x e y sono numeri positivi, scriviamo la formula dell'area:

$$\text{area}(OMPN) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} y + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{3}{4} y + \frac{1}{2} x.$$

La relazione richiesta dal problema è quindi data dalla seguente equazione:

$$\frac{3}{4} y + \frac{1}{2} x = s \quad \rightarrow \quad 2x + 3y - 4s = 0.$$

Ora scriviamo il **sistema risolvente** associando le limitazioni e la condizione di non negatività dell'area ($s \ge 0$):

$$\begin{cases} 4(x-3)^2 + 9(y-2)^2 = 36 \\ 2x + 3y - 4s = 0 \\ 0 \le x \le 3 \wedge 0 \le y \le 4 \\ s \ge 0 \end{cases}$$

Iniziamo la **discussione**.
La prima equazione esprime la condizione di appartenenza di P all'ellisse; la seconda rappresenta il fascio improprio di rette parallele con coefficiente angolare $m = -\frac{2}{3}$. La ricerca delle soluzioni del problema è equivalente alla determinazione, al variare di s, dei punti di intersezione fra le rette del fascio e l'arco di ellisse definito dalle limitazioni, i cui estremi sono i vertici $A(3; 0)$ e $C(3; 4)$.
Rappresentiamo il sistema in un grafico (figura b) e determiniamo poi i **capisaldi** e le rette corrispondenti.

Sostituiamo nell'equazione del fascio le coordinate dei vertici A e C:

$$A(3;0) \quad \rightarrow \quad 6+0-4s=0 \quad \rightarrow \quad s=\frac{3}{2};$$

$$C(3;4) \quad \rightarrow \quad 6+12-4s=0 \quad \rightarrow \quad s=\frac{9}{2}.$$

Per determinare il caposaldo associato alla tangente troviamo l'equazione risolvente del sistema formato dall'equazione dell'ellisse e da quella della retta generica del fascio:

$$\begin{cases}(2x-6)^2+(3y-6)^2=36\\ 3y=4s-2x\end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}2x^2-4sx+9-12s+4s^2=0\\ 3y=4s-2x\end{cases}$$

Ora imponiamo la condizione di tangenza annullando il discriminante,

$$\frac{\Delta}{4}=0 \quad \rightarrow \quad 4s^2-18+24s-8s^2=0 \quad \rightarrow \quad 2s^2-12s+9=0,$$

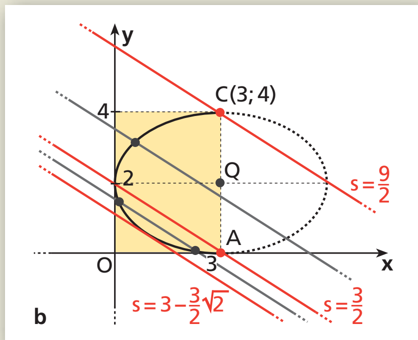
da cui si ottengono i valori:

$$s_1=3-\frac{3}{2}\sqrt{2}, \qquad s_2=3+\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

A questi due valori corrispondono due tangenti, ma soltanto quella associata a s_1 è compatibile con le limitazioni.

Analizziamo il grafico e scriviamo la **soluzione**:

- *due* soluzioni per $3-\frac{3}{2}\sqrt{2} \le s \le \frac{3}{2}$;
- *una* soluzione per $\frac{3}{2} < s \le \frac{9}{2}$.



191 Sull'ellisse di equazione $9x^2+4y^2=36$ determina un punto P con ascissa non negativa in modo che l'area del triangolo F_1F_2P risulti uguale a k, con $k \in \mathbb{R}_0^+$ (F_1 e F_2 sono i fuochi dell'ellisse).
[2 sol. simmetriche per $0 \le k \le 2\sqrt{5}$]

192 Data la circonferenza di centro $C(1;0)$ e raggio 2, determina il punto P dell'arco che giace nel primo quadrante in modo che risulti $\overline{AP}+\overline{TH}=k$, con $k \in \mathbb{R}^+$, sapendo che A è la proiezione di P sull'asse delle ordinate, T è il punto di tangenza con la retta di equazione $x-y-1-2\sqrt{2}=0$, H è la proiezione ortogonale di T sulla retta AP.
[1 sol. per $\sqrt{2}+\sqrt{3} \le k < \sqrt{2}+3$; 2 sol. per $\sqrt{2}+3 \le k \le 3\sqrt{2}+1$]

193 Data la parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate, di vertice $V(2;4)$, passante per l'origine e per il punto $B(3;3)$, determina un punto P appartenente all'arco OVB in modo che il triangolo che ha per vertici l'origine, P e la proiezione C di B sull'asse x abbia area uguale a $k \in \mathbb{R}_0^+$.
$\left[1 \text{ sol. per } 0 \le k < \frac{9}{2}; 2 \text{ sol. per } \frac{9}{2} \le k \le 6\right]$

194 Nella parabola di equazione $x=-\frac{1}{4}y^2+2$ determina un punto P appartenente all'arco di curva giacente nel primo quadrante in modo che l'area del quadrilatero $OFPA$ sia uguale al numero reale non negativo s (O è l'origine, F il fuoco della parabola, A l'intersezione dell'arco con l'asse delle ordinate).
$\left[1 \text{ sol. per } \sqrt{2} \le s < 2\sqrt{2}; 2 \text{ sol. per } 2\sqrt{2} \le s \le \frac{17}{8}\sqrt{2}\right]$

195 Disegna l'ellisse di cui sono noti i tre vertici $A(2; -1)$, $B(4; 0)$, $C(2; 1)$. Discuti il numero delle intersezioni con ordinata negativa tra l'ellisse e le rette del fascio $(h+1)x + (5h+1)y - 4 = 0$.

$[(x-2)^2 + 4y^2 = 4$; 2 sol. per $h \leq -1$; 1 sol. per $h > 0$ e per la generatrice $x + 5y = 0]$

196 Discuti il numero dei punti di intersezione tra la generica retta del fascio di centro $M(0; 2)$ e l'arco dell'iperbole di equazione $16x^2 - 9y^2 - 96x - 36y - 36 = 0$, con $x \leq 0 \wedge y \leq 0$. (Suggerimento. Considera come incognita il coefficiente angolare m delle rette.)

$\left[1 \text{ sol. per } \frac{4}{3} < m < \frac{4}{3}(\sqrt{5}+2); 2 \text{ sol. per } m \geq \frac{4}{3}(\sqrt{5}+2); 2 \text{ sol. coincidenti per la retta } x = 0\right]$

197 Dopo aver determinato l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x, passante per il punto $A(-6; 3)$ e di vertice $V(2; 1)$, inscrivi nell'arco di parabola appartenente al primo quadrante un rettangolo con un lato sull'asse delle ordinate e di perimetro $2l$, con $l \in \mathbb{R}_0^+$.

$\left[2 \text{ sol. per } 2 \leq l \leq \frac{5}{2}\right]$

198 Disegna la circonferenza γ_1 passante per i punti $M(-4; 0)$ e $N(-4; 2)$ il cui centro appartiene alla retta di equazione $x - 2y + 4 = 0$. Disegna quindi la parabola γ_2 con asse parallelo all'asse x, con vertice in M e passante per R, secondo estremo del diametro MR di γ_1. Determina un punto T sull'arco di parabola che ha per estremi i punti M e R in modo che l'area del triangolo MRT sia uguale a s, con s parametro reale. Per quale posizione di T tale area risulta massima?

$[\gamma_1: x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$; $\gamma_2: x = y^2 - 4$; 2 sol. per $0 \leq s \leq 1$; area massima per $T(-3; 1)]$

199 Data l'ellisse di equazione $25(x-3)^2 + 9(y-5)^2 = 225$, sia A il vertice con ascissa maggiore, B il punto di ascissa 4 e ordinata maggiore, C il centro. Determina il punto P appartenente al minore dei due archi con estremi A e B in modo che il rapporto fra la sua distanza dalla retta CB e dall'asse parallelo all'asse delle ascisse sia uguale $\frac{h}{\sqrt{209}}$, con $h \in \mathbb{R}^+$.

[1 sol. per $h > 0$]

200 Data la circonferenza di centro $C(-3; 4)$ e raggio $r = 2\sqrt{2}$, trova la tangente t nel punto $T(-5; 2)$. Determina quindi una parallela s a tale tangente che intersechi la circonferenza nei punti M e N tali che il perimetro del rettangolo $MNN'M'$ sia uguale a $2\sqrt{2}\,m$, con $m \in \mathbb{R}$ (M' e N' sono le proiezioni di M e N sulla tangente t).

$[x + y + 3 = 0$; 1 sol. per $0 \leq m < 4$; 2 sol. per $4 \leq m \leq 2 + 2\sqrt{5}]$

201 Considera la funzione $f(x) = \sqrt{2 - x|x|}$.

a) Disegna il grafico di f, trova il dominio D e il codominio C.
b) Determina i punti di intersezione della retta di equazione $x + 3y + q = 0$ con il grafico di f al variare di q.
c) Detto B il punto di intersezione del grafico di f con la retta di equazione $x - y = 0$, determina un punto P del grafico di f con ascissa negativa tale che verifichi la relazione:

$$\overline{PO}^2 - \overline{PB}^2 = 2k, \qquad k \in \mathbb{R}^+.$$

[a) $D =]-\infty; \sqrt{2}]$, $C = [0; +\infty[$; b) 1 inters. per $q < -2\sqrt{5} \vee -4 < q \leq -\sqrt{2}$, 3 inters. per $-2\sqrt{5} \leq q \leq -4$; c) 1 sol. per $k > \sqrt{2} - 1$]

202 È dato l'insieme di curve rappresentate dall'equazione:

$$(k-3)x^2 + (k-2)y^2 - k^2 + 5k - 6 = 0, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

a) Identifica il tipo di curva corrispondente ai possibili valori di k.
b) Determina nell'insieme di curve l'iperbole equilatera, l'ellisse con due dei suoi vertici nei punti $(\pm\sqrt{2}; 0)$ e poi i loro punti di intersezione A, B, C, D.

c) Sull'ellisse trovata al punto b), determina nel primo quadrante un punto P tale che l'area di OHP (H proiezione di P sull'asse x) sia m volte quella di $ABCD$.
Per quale valore di m l'area è massima?

[a) per $2 < k < 3$ iperbole di fuochi $(\pm 1; 0)$, per $k > 3$ ellisse di fuochi $(\pm 1; 0)$, per $k = 2$ retta $x = 0$, per $k = 3$ retta $y = 0$; b) $2x^2 - 2y^2 = 1$, $x^2 + 2y^2 = 2$, inters. $\left(1; \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-1; \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; c) 2 sol. per $0 < m \leq \frac{1}{8}$; $m = \frac{1}{8}$]

203 Considera il fascio di parabole di equazione $ax^2 + (a-2)x + y + 1 - a = 0$.

a) Verifica che sono secanti e trova i punti base A, B (ascissa di A minore di quella di B).
b) Verifica che la parabola γ_1, il cui vertice ha ascissa -1, è simmetrica della parabola γ_2, il cui vertice ha ascissa 0, rispetto al punto medio M del segmento AB.
c) Sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ di γ_2 determina il punto P in modo che l'area di $APBP'$ sia massima, dove P' è il simmetrico di P rispetto a M.

[a) $A\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}; -\sqrt{5}-2\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \sqrt{5}-2\right)$; b) $y = 2x^2 + 4x - 3$, $y = -2x^2 + 1$; c) $P\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\text{area}_{max} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$]

204 Considera la seguente famiglia di curve:

$y = \sqrt{4 + mx^2}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Identifica il tipo di curva corrispondente ai possibili valori di m.
b) Trova per quale valore di m si ottiene una semiellisse γ con fuochi $(0; \pm\sqrt{2})$ e rappresentala nel piano cartesiano.
c) Sia t la tangente a γ parallela alla bisettrice del I e III quadrante e sia T il punto di tangenza; siano A e B le intersezioni di γ con l'asse delle ascisse. Nel triangolo ABT determina la secante NM parallela ad AB tale che il rettangolo $HLMN$ abbia area massima ($N \in AT$, $M \in BT$, H proiezione di N su AB, L proiezione di M su AB).

[a) $m < 0$ semiellisse, $m = 0$ retta, $m > 0$ ramo di iperbole; b) $m = -2$; c) $T\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, secante $y = \frac{\sqrt{6}}{3}$]

205 È data la circonferenza γ di centro $C(-3; 1)$ e raggio 3. Determina una retta passante per l'origine che stacchi sulla circonferenza una corda di estremi A e B con ordinata minore o uguale a 0 e tale che sia soddisfatta la relazione $\overline{AB}^2 + \overline{CH}^2 = k$, $k \in \mathbb{R}$, dove H è il punto medio di AB. Qual è il valore massimo di questa espressione? A quale retta corrisponde? [1 sol. per $9 \leq k \leq 33$; $k_{max} = 33$; $y = 0$]

I problemi di geometria piana con parametri

206 **ESERCIZIO GUIDA**

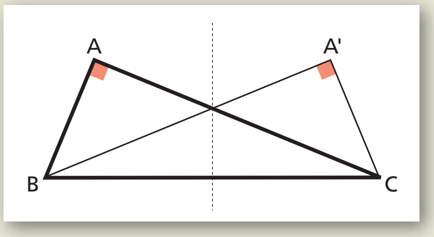
Determiniamo il triangolo ABC, rettangolo in A e di area $\frac{9}{2}$, in modo che la somma dei cateti sia uguale a $3k$, con $k \in \mathbb{R}^+$.

Disegniamo la figura e scriviamo le **relazioni** date dal problema:

$$\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{9}{2} \quad \rightarrow \quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 9,$$

$$\overline{AB} + \overline{AC} = 3k.$$

Osserviamo che se un triangolo ABC verifica la relazione, anche il simmetrico $A'BC$ rispetto all'asse dell'ipotenusa BC la verifica: infatti $AB \cong A'C$ e $AC \cong A'B$. Il problema è dunque simmetrico.



Per risolvere il problema scegliamo come incognite: $\overline{AB} = x$, $\overline{AC} = y$.
Le misure dei cateti non possono essere negative; poiché inoltre l'area di un triangolo non degenere non può essere nulla, sono valide le seguenti **limitazioni**:

$$x > 0 \wedge y > 0.$$

Scriviamo il **sistema risolvente** utilizzando le relazioni e associando le condizioni:

$$\begin{cases} \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 9 \\ \overline{AB} + \overline{AC} = 3k \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} xy = 9 \\ x + y = 3k \\ x > 0 \wedge y > 0 \\ k > 0 \end{cases}$$

Iniziamo la **discussione**.
Risolviamo il sistema graficamente.
La prima equazione rappresenta un'iperbole equilatera riferita agli asintoti; la seconda un fascio improprio di rette. La ricerca delle soluzioni del problema è equivalente alla determinazione, al variare di k, dei punti di intersezione fra le rette del fascio e il ramo di iperbole che giace nel primo quadrante ($x > 0$ e $y > 0$).

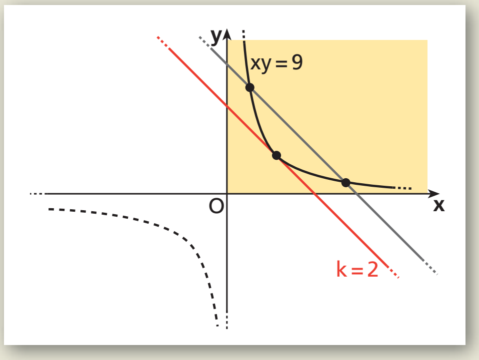
Rappresentiamo il sistema in un grafico, quindi determiniamo i **capisaldi** e le rette corrispondenti.
Il ramo di iperbole individuato dalle limitazioni è illimitato, quindi l'unico caposaldo del problema è quello corrispondente alla retta tangente. Deduciamo per sostituzione l'equazione risolvente:

$$x^2 - 3kx + 9 = 0 \quad \to \quad \Delta = 9k^2 - 36.$$

Il sistema ammette soluzioni soltanto se $9k^2 - 36 \geq 0$, quindi per $k \geq 2$. Il caposaldo cercato è $k = 2$, a cui corrisponde la retta *tangente* $x + y - 6 = 0$.

Dal grafico vediamo che per $k \geq 2$ ogni retta interseca l'iperbole in due punti (coincidenti se $k = 2$) compatibili con le limitazioni e simmetrici rispetto alla bisettrice del I e III quadrante. Ogni coppia di punti rappresenta soluzioni simmetriche.

Scriviamo la **risposta**: il problema ammette *due* soluzioni per $k \geq 2$. In particolare per $k = 2$ il triangolo rettangolo dato è isoscele.



Risolvi i seguenti problemi di geometria utilizzando il metodo grafico. Puoi scegliere una o due incognite. Alle misure fisse indicate con una lettera puoi attribuire un valore particolare.

207 Sia P un punto del segmento AB avente misura fissata s; posto $\overline{AP} = x$, costruisci il rettangolo R_1 con i lati che misurano $(x - 1)$ e $(x + 2)$, il rettangolo R_2 i cui lati misurano $(x + 1)$ e $(x - 2)$.

a) Per quali valori di x e di s è possibile costruire i rettangoli R_1 e R_2?
b) Posto $s = 5$, determina P in modo che il rapporto fra le aree di R_1 e R_2 sia k, $k \geq 0$.

$$\left[\text{a) } 2 \leq x \leq s; \text{ b) } 1 \text{ sol. per } k \geq \frac{14}{9}\right]$$

208 È dato un segmento PR di lunghezza assegnata $2a$. Disegna una generica circonferenza passante per P e R, poi disegna il quadrilatero $PQRS$ che ha per diagonali PR e il diametro QS perpendicolare a PR. Determina il raggio della circonferenza in modo che l'area di $PQRS$ sia uguale a k, $k \in \mathbb{R}^+$. Nella discussione puoi porre $a = 1$. [2 sol. simmetriche per $k \geq 2$]

209 Dividi un segmento di lunghezza unitaria in due parti tali che la somma dell'area del quadrato costruito sulla prima e di quella del triangolo equilatero costruito sulla seconda sia uguale a k, $k > 0$.
$\left[2 \text{ sol. per } \frac{4\sqrt{3}-3}{13} \leq k \leq \frac{\sqrt{3}}{4}; 1 \text{ sol. per } \frac{\sqrt{3}}{4} < k \leq 1\right]$

210 In un triangolo rettangolo ABC le misure dei cateti sono $\overline{AC} = 12$, $\overline{BC} = 5$. Sull'ipotenusa AB determina un punto P in modo che risulti $\overline{PC} = k$, $k > 0$. $\left[2 \text{ sol. per } \frac{60}{13} \leq k \leq 5; 1 \text{ sol. per } 5 < k \leq 12\right]$

211 I cateti di un triangolo rettangolo misurano $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 4$. Determina due punti P sul cateto AB e Q sul cateto AC, tali che $\overline{AP} + \overline{AQ} = \overline{BC}$ e l'area di APQ sia k volte quella di ABC, $k \geq 0$.
$\left[1 \text{ sol. per } \frac{1}{3} \leq k < \frac{1}{2}; 2 \text{ sol. per } \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{25}{48}\right]$

212 Considera il quadrato $ABCD$ di lato 4; sul prolungamento di AB, dalla parte di B, determina il punto P in modo che $\overline{PD}^2 = k\overline{PC}^2$, con k numero reale non negativo. $\left[1 \text{ sol. per } 1 < k < 2; 2 \text{ sol. per } 2 \leq k \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

213 Sul segmento $\overline{AB} = 1$ determina un punto P tale che sia valida la relazione $3\overline{AP}^2 + 2\overline{PB}^2 = k$, $k \in \mathbb{R}^+$.
$\left[2 \text{ sol. per } \frac{6}{5} \leq k \leq 2; 1 \text{ sol. per } 2 < k \leq 3\right]$

214 Da un punto M del diametro $\overline{AB} = 2r$ di una semicirconferenza traccia la perpendicolare ad AB e indica con N il suo punto di intersezione con la semicirconferenza. Determina M in modo che la somma delle misure dei segmenti AM e MN sia uguale a k, $k \geq 0$. Nella discussione poni $r = 1$.
[1 sol. per $0 \leq k < 2$; 2 sol. per $2 \leq k \leq 1 + \sqrt{2}$]

215 Il trapezio isoscele $ABCD$ è circoscritto a una circonferenza di raggio r. Determina le misure delle basi in modo che l'area sia uguale a k, $k \in \mathbb{R}^+$. Discutendo poni $r = 1$. [1 sol. (2 sol. simmetriche) per $k \geq 4$]

216 Due rette si incontrano perpendicolarmente nel punto O. Su una di esse, da parti opposte rispetto a O, costruisci due segmenti OP e OR; alla stessa maniera sull'altra costruisci i segmenti $OQ \cong OP$ e $OS \cong OR$.

a) Dimostra che il quadrilatero $PQRS$ è un trapezio isoscele.
b) Mantenendo fissa la misura a del segmento PS determina i quattro segmenti precedenti in modo che l'area di $PQRS$ sia uguale a k, $k > 0$. Nella discussione poni $a = 1$. $\left[\text{b) 2 sol. simmetriche per } \frac{1}{2} \leq k \leq 1\right]$

217 Il trapezio isoscele $ABCD$ è circoscrivibile a una circonferenza e i suoi lati obliqui hanno lunghezza l fissata. Determina le basi, sapendo che l'area è k volte quella di un quadrato di lato 1, $k \geq 0$. Nella discussione puoi porre $l = 1$. [1 sol. (2 sol. simmetriche) per $0 \leq k \leq 1$]

218 In un trapezio rettangolo la base maggiore è congruente al lato obliquo; l'altezza, che ha lunghezza $h = 5$, è maggiore della base minore. Determina la misura dei lati del trapezio, sapendo che l'area è uguale a quella di un triangolo avente la stessa altezza e la base uguale a k, $k > 0$.
(Suggerimento. Poni la misura del lato obliquo uguale a x, quella della differenza delle basi uguale a y.)
[2 sol. per $5\sqrt{3} \leq k < 10$; 1 sol. per $k \geq 10$]

219 Circoscrivi a una semicirconferenza di raggio r un trapezio isoscele di perimetro $2kr$, $k > 0$. Nel grafico poni $r = 1$.
[2 sol. per $2\sqrt{2} \leq k \leq 3$; 1 sol. per $k > 3$]

220 Ripeti l'esercizio 219 con la condizione che l'area sia uguale a kr^2, $k > 0$. Nella discussione poni $r = 1$.
[2 sol. per $\sqrt{3} \leq k \leq 2$; 1 sol. per $k > 2$]

221 Inscrivi in una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 6$ un trapezio isoscele $ABCD$ tale che la sua area sia k volte, $k \geq 0$, quella del quadrato costruito sull'altezza.
[1 sol. per $k \geq 1$]

222 Su di un segmento prefissato $\overline{AB} = 2l$ trova un punto C tale che la somma delle aree dei cerchi di raggi AC e BC sia k volte quella del cerchio di diametro AB. Poni $\overline{AC} = x$.
[1 sol. per $2 \leq k \leq 4$ (2 sol. simmetriche con le limitazioni $0 \leq x \leq 2$)]

223 In una circonferenza di centro O e raggio 2 conduci una corda AB parallela a una tangente t e considera il rettangolo che ha per lati la corda e la sua distanza dalla tangente. Determina la corda in modo che la diagonale del rettangolo risulti proporzionale al raggio della circonferenza. Indica con k la costante di proporzionalità.
$\left[1 \text{ sol. per } 0 \leq k < 2;\ 2 \text{ sol. per } 2 \leq k \leq \frac{4}{\sqrt{3}}\right]$

224 L'arco $\overset{\frown}{AB}$ è un quarto della circonferenza di centro O e raggio r. Determina su di esso un punto M per cui sia valida la relazione $\overline{AM}^2 + \overline{MH}^2 = kr^2$, $k > 0$, essendo $\overline{MH}$ la misura della distanza di M dal raggio OB. Nel grafico poni $r = 1$.
[1 sol. per $1 \leq k \leq 2$]

225 La base AB di un triangolo isoscele è i $\frac{2}{3}$ dell'altezza CH. Traccia la circonferenza γ di diametro AC e dimostra che passa per il punto H. Indicato con D l'ulteriore punto di intersezione di γ con il lato BC, determina la base del triangolo in modo che l'area del quadrilatero $AHDC$ sia uguale a k volte, $k \in \mathbb{R}^+$, quella di un rettangolo con un lato congruente a CH e l'altro uguale a $\frac{3}{2}$.
[1 sol. per $k > 0$]

226 È dato il triangolo equilatero ABC di lato 2. Disegna una circonferenza γ passante per i vertici A e B e che intersechi il prolungamento del lato CA in Q, quello di CB in P.

a) Dimostra che $ABPQ$ è un trapezio isoscele.
b) Determina γ in modo che l'area del trapezio sia uguale a k volte, $k \in \mathbb{R}^+$, quella del triangolo dato.
c) Trova e rappresenta graficamente la relazione che lega il lato obliquo del trapezio e il raggio di γ.

$\left[\text{b) 1 sol. per } k > 0;\ \text{c) } (x+1)^2 - 3y^2 = -3,\ x > 0 \wedge y > \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

227 Sull'arco $\overset{\frown}{AB}$, quarta parte di una circonferenza di centro O e raggio 2, considera un punto C tale che $A\hat{O}C = 30°$ e indica con D la proiezione ortogonale di C su OB.
Sull'arco $\overset{\frown}{BC}$ considera un punto P e indica con E e F le sue proiezioni rispettivamente su DC e OB.
Determina la funzione $y = 2\overline{PE} + \overline{OD}$ al variare di P su $\overset{\frown}{BC}$ (poni $\overline{PF} = x$) e rappresentala graficamente mettendo in evidenza il tratto relativo al problema. Trova il valore di y quando P è il punto medio di $\overset{\frown}{BC}$.
[$y = 2\sqrt{4 - x^2} - 1$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$; $y = 2\sqrt{3} - 1$]

228 In una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ conduci la retta tangente in A. Determina poi un punto P sulla circonferenza in modo che, dette M e N le sue proiezioni ortogonali rispettivamente su AB e sulla tangente, risulti:

$$3\overline{NP} + 2\overline{MP} = mr, \quad m \in \mathbb{R}.$$

(Suggerimento. Scegli come incognite $\overline{NP} = x$, $\overline{MP} = y$.)
[2 sol. per $0 \leq m < 6$; 4 sol. per $6 \leq m \leq 3 + \sqrt{13}$]

229 Determina i lati di un triangolo isoscele avente perimetro $2p = 20$, sapendo che il rapporto fra il lato obliquo e la base è uguale a m, $m \in \mathbb{R}$. (Suggerimento. Poni la base uguale a $2x$ e il lato obliquo uguale a y.)

$\left[1 \text{ sol. per } m \geq \frac{1}{2}\right]$

230 In un triangolo equilatero ABC di lato l il punto L di AC e il punto M di AB sono tali che $\overline{AL} = \overline{AM}$. Determina L in modo che risulti:

$2\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{LB}^2 = kl^2$, con k parametro reale. $\left[1 \text{ sol. per } 2 < k \leq 3; 2 \text{ sol. per } \frac{23}{16} \leq k \leq 2\right]$

231 In una circonferenza di raggio $r = 1$ inscrivi un triangolo isoscele in modo che la somma fra la base e l'altezza sia uguale a m, $m \in \mathbb{R}_0^+$. (Suggerimento. Scegli l'altezza come incognita.)

$[1 \text{ sol. per } 0 \leq m < 2; 2 \text{ sol. per } 2 \leq m \leq \sqrt{5} + 1]$

232 Un trapezio rettangolo è circoscritto a una circonferenza di raggio 2. Determina le misure delle basi x e y, $x > y$, in modo che l'area sia uguale a m volte quella di un quadrato di lato 1.

$[1 \text{ sol. per } m > 8; 2 \text{ sol. per } 4 + 2\sqrt{3} \leq m \leq 8]$

233 Data una circonferenza di raggio 2 conduci la tangente t in un suo punto A. Da un punto P di t manda la secante passante per il centro. Determina P in modo che, indicata con PB la parte esterna della secante, risulti verificata la relazione:

$\overline{PB} = k\overline{AP}, \quad k \geq 0.$ $[1 \text{ sol. per } k = 0; 2 \text{ sol. per } 0 < k < 1]$

234 I lati del triangolo ABC misurano rispettivamente $\overline{AB} = 9$, $\overline{AC} = 6$, $\overline{BC} = 8$. Dal punto R del lato BC manda la parallela al lato AB che interseca il lato AC nel punto K e la parallela al lato AC che incontra il lato AB nel punto H. Determina R in modo che sia verificata la relazione:

$\overline{RH} + \overline{RK} = m, \quad m \in \mathbb{R}.$ $[1 \text{ sol. per } 6 \leq m \leq 9]$

235 Nel triangolo equilatero ABC di lato $l = 2$ traccia una parallela al lato AB in modo che, dette D ed E le sue intersezioni con BC e CA, la somma dei quadrati dei lati obliqui del trapezio $ABDE$ e del quadrato della sua base minore sia $4k$, con k parametro reale. $\left[2 \text{ sol. per } \frac{2}{3} \leq k \leq 1; 1 \text{ sol. per } 1 < k \leq 2\right]$

236 Sulla diagonale AC di un quadrato $ABCD$ di lato l determina un punto P tale che la somma dei quadrati delle misure delle due parti di diagonale sia uguale a kl^2, $k \in \mathbb{R}$. $[2 \text{ sol. per } 1 \leq k \leq 2]$

237 Risolvi il problema precedente sostituendo la corrispondente relazione con la seguente:

$\overline{AP}^2 + 2\overline{PC}^2 = kl^2.$ $\left[1 \text{ sol. per } 2 < k \leq 4; 2 \text{ sol. per } \frac{4}{3} \leq k \leq 2\right]$

238 In un trapezio rettangolo $ABCD$ l'altezza AD e la base minore CD hanno uguale misura s e la diagonale minore AC è perpendicolare al lato obliquo. Determina un punto M su AC in modo che, detta H la sua proiezione ortogonale su AD, il perimetro del triangolo AHM sia pari a k volte il perimetro del trapezio ($k \in \mathbb{R}_0^+$).

$\left[1 \text{ sol. per } 0 \leq k \leq \frac{3 + \sqrt{2}}{7}\right]$

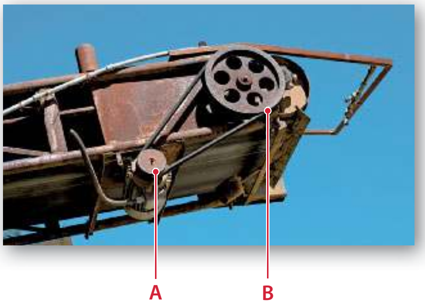
239 In una circonferenza di raggio r è data una corda $\overline{AB} = r$. Condotta la tangente in B determina un punto P della corda in modo che, detta H la sua proiezione ortogonale sulla tangente, risulti:

$2\overline{AP}^2 + \overline{PH}^2 + \overline{HB}^2 = mr^2, \quad m \in \mathbb{R}_0^+.$ $\left[1 \text{ sol. per } 1 < m \leq 2; 2 \text{ sol. per } \frac{2}{3} \leq m \leq 1\right]$

REALTÀ E MODELLI

1 La cinghia di trasmissione

La cinghia è uno dei più semplici sistemi tecnologici per trasmettere il moto e quindi per trasportare materiali. Supponi che nel sistema in figura la ruota piccola (la motrice) abbia raggio di 1 dm, quella grande di 2 dm e la distanza tra i due centri sia di 6 dm.



Posiziona il sistema di riferimento cartesiano in modo tale che la ruota piccola abbia centro nell'origine e l'asse x passi per i centri delle due ruote.

- ▶ Trova l'equazione della retta a cui appartiene il tratto AB della cinghia (A e B rappresentano i punti di contatto fra la cinghia e le ruote).
- ▶ Qual è la velocità del nastro trasportatore (supposta uguale alla velocità lineare della cinghia) se il punto B impiega 0,9 s a portarsi su A?

2 Il lancio del peso

Il record del mondo di lancio del peso maschile è stato stabilito a Westwood il 20 maggio 1990 dallo statunitense Randy Barnes con la misura di 23,12 m.

- ▶ Supponendo che in questo lancio parabolico l'altezza massima di 3,5 m sia stata raggiunta dal peso dopo 10 m, fissato un opportuno sistema di riferimento (il lanciatore è fisso nell'origine), scrivi l'equazione della parabola descritta dal peso.
- ▶ Da quale altezza è partito il lancio?
- ▶ Se il lancio precedente avesse raggiunto dopo 10 m l'altezza massima di 5,5 m, di quanto sarebbe stato più corto rispetto al primo?

3 La sveglia

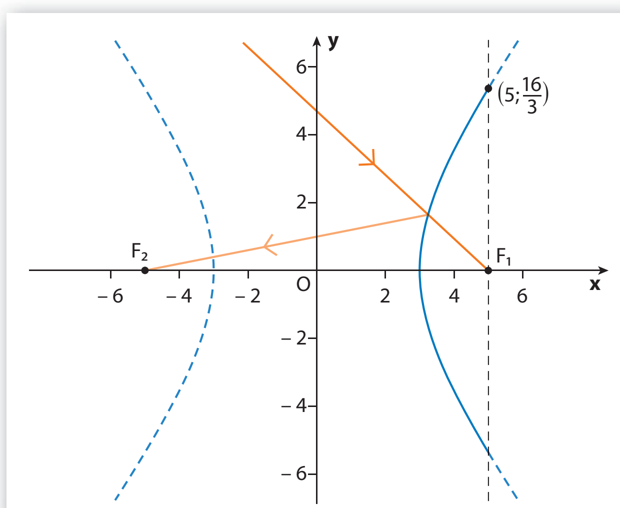
Una sveglia da tavolo ha il quadrante a forma di ellisse con assi di 10 e 6 cm; le lancette sono fissate sull'asse maggiore (quello orizzontale), distanti 3 cm dal vertice destro, e i numeri delle ore sono scritti sul bordo esterno.

- ▶ Qual è la misura massima della lancetta più lunga?
- ▶ Fissato il sistema di riferimento cartesiano nel modo usuale, individua sul grafico dell'ellisse i punti in cui vanno scritte le ore (procedi solo per via grafica, non algebrica).

4 Il telescopio

Un telescopio contiene uno specchio iperbolico la cui proprietà è quella di riflettere un raggio di luce che colpisce uno dei due fuochi nella direzione dell'altro fuoco.

- ▶ Se scegliamo un opportuno sistema di assi cartesiani con origine nel centro dell'iperbole, poniamo un fuoco in (5; 0), un vertice in (3; 0) e il punto finale dello specchio in $\left(5; \frac{16}{3}\right)$ come nella figura, qual è l'equazione che definisce lo specchio del telescopio?
- ▶ Supponiamo che il raggio incidente intersechi l'asse y nel punto di ordinata 4,3. In quale punto il raggio riflesso interseca l'asse y?



Bergamini, Trifone, Barozzi MATEMATICA.BLU - Vol. 3 © Zanichelli 2012 con Maths in English

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Considera la generica equazione di secondo grado in x e in y:

$$Ax^2 + Cy^2 - Dx - Ey + F = 0.$$

Quale delle seguenti affermazioni è *vera*?

A L'equazione rappresenta una conica per qualsiasi valore dei coefficienti A, C, D, E, F.

B L'equazione rappresenta una conica soltanto se $A = C$.

C Se A è concorde con C, l'equazione rappresenta un'ellisse per qualsiasi valore dei coefficienti D, E, F.

D Se A e C hanno segno opposto, l'equazione rappresenta un'iperbole per qualsiasi valore dei coefficienti D, E, F.

E Se $A = C$ oppure $A = -C$, l'equazione rappresenta una conica per qualsiasi valore dei coefficienti D, E, F.

2 Della curva relativa all'equazione

$$5x^2 + 20x = -3y^2 - 6y - 8$$

possiamo dire che:

A non è una conica.

B è un'iperbole con eccentricità $e = \sqrt{\frac{5}{2}}$ e con i fuochi $F_1(-2; -1-\sqrt{2})$, $F_2(-2; -1+\sqrt{2})$.

C è un'iperbole con i fuochi $F_1(-2; -1-\sqrt{2})$, $F_2(-2; -1+\sqrt{2})$ e i vertici $V_1(-2; -1-\sqrt{5})$, $V_2(-2; -1+\sqrt{5})$.

D è un'ellisse con centro in $C(-2; -1)$ e fuochi $F_1(-2; -1-\sqrt{2})$, $F_2(-2; -1+\sqrt{2})$.

E è una parabola con vertice nel punto $V(-2; -1)$ e fuoco in $F(-2; -1+\sqrt{2})$.

3 Quale dei seguenti luoghi geometrici rappresenta un arco di parabola?

A $\begin{cases} x = \dfrac{t^2-2}{t^2} \\ y = \dfrac{1}{t^2+1} \end{cases}$

B $P\left(k^2; \dfrac{1}{k}\right)$

C $\begin{cases} x = \dfrac{m-2}{3} \\ y = \sqrt{m+1} \end{cases}$

D $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 5 - t^2 \end{cases}$

E $P(\sqrt{9-t^2}; t-3)$

4 L'equazione

$$\sqrt{x^2 - 2x + 5} + 1 - q = 0, \qquad q \in \mathbb{R}:$$

A non ammette soluzioni reali per alcun valore del parametro q.

B ammette due soluzioni per $q \geq 1$.

C non ammette soluzioni per $1 \leq q \leq 3$.

D ammette due soluzioni coincidenti per $q = -1$ e per $q = 3$.

E ammette due soluzioni per $q \geq 3$.

5 Considera l'equazione:

$$kx^2 + (1-k)y^2 + (k-1)x + ky - 10 = 0, \ k \in \mathbb{R}.$$

Le affermazioni seguenti sono tutte vere *tranne* una. Quale?

A L'equazione rappresenta un'iperbole per $k < 0$ oppure $k > 1$.

B L'equazione rappresenta un'ellisse per $0 < k < 1$.

C Non esistono punti comuni a tutte le coniche rappresentate dall'equazione data.

D L'equazione rappresenta una parabola per $k = 1$.

E Non esiste un valore di k a cui corrisponda un'iperbole equilatera.

6 Una delle seguenti proposizioni è *vera*. Quale?

A Tutte le coniche hanno centro.

B L'eccentricità di una conica è uguale al rapporto fra i semiassi.

C L'eccentricità è uguale al rapporto fra la semidistanza focale e il semiasse maggiore.

D Esistono coniche con più di due assi di simmetria.

E Nessuna delle affermazioni precedenti è vera.

7 Della curva relativa all'equazione

$$(x-2) \cdot (y+2) = 0$$

possiamo dire che:

A non rappresenta una conica.

B è un'iperbole e le direttrici sono le rette di equazioni $x = 2$, $y = -2$.

C è un'iperbole col centro nell'origine.

D rappresenta soltanto il punto $P(2; -2)$.

E è una conica degenere.

8 Tutte le seguenti equazioni rappresentano una conica *tranne* una. Quale?

A $3xy = 2 - 5x - 3y$

B $x^2 + y^2 - x + 4y + 6 = 0$

C $4x^2 + 3y^2 + 8\sqrt{2}x + 6y + 10 = 0$

D $x^2 - y^2 = x + y - 1$

E $x^2 - xy = 0$

9 Quale dei seguenti sistemi rappresenta la regione colorata della figura?

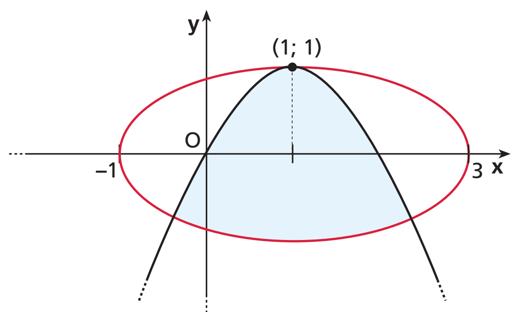
A $\begin{cases} y < -x^2 + 2x \\ x^2 + 4y^2 < 2x + 3 \end{cases}$

B $\begin{cases} y > -x^2 + 2x \\ x^2 + 4y^2 - 2x - 3 < 0 \end{cases}$

C $\begin{cases} y + x^2 \leq 2x \\ x^2 + 4y^2 - 2x \geq 3 \end{cases}$

D $\begin{cases} y < -x^2 - 2x \\ x^2 < 4y^2 + 2x + 3 \end{cases}$

E $\begin{cases} y + x^2 - 2x \leq 0 \\ 4x^2 + y^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases}$



10 L'equazione $2kx^2 - (k+2)y^2 - 2x + 1 = 0$ rappresenta un'iperbole per:

A $\forall k \in \mathbb{R}$.

B $k > 0$.

C $k < -2$.

D $k < -2 \vee k > 0$.

E $-2 < k < 0$.

11 Al variare di $t \in \mathbb{R} - \{2\}$ il punto

$$P\left(\frac{4}{t-2}; 2t - 1\right)$$

descrive:

A una parabola.

B un'ellisse.

C un'iperbole.

D una retta.

E una circonferenza.

12 Essendo C un punto del piano e $\overline{PD}$ la distanza di P da una retta r, non passante per C, il luogo dei punti P del piano per i quali risulta $\overline{PC} - \sqrt{2}\,\overline{PD} = 0$ è:

A una parabola.

B una circonferenza.

C un'iperbole.

D un'ellisse.

E una retta.

13 La regione di piano individuata dal sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x \leq 0 \\ y > |x| \end{cases}$$

ha area:

A $\pi - \frac{1}{2}$.

B $\frac{\pi - 2}{4}$.

C $\frac{3\pi + 2}{4}$.

D $\frac{\pi + 2}{4}$.

E $\pi + \frac{1}{2}$.

QUESITI

14 Scrivi la definizione di iperbole. Dimostra che il luogo dei punti di un piano per i quali risulta uguale ad un fissato numero positivo e minore di 1 il rapporto fra la distanza da una retta fissa e da un punto fisso è un'iperbole.

15 Mediante un caso particolare verifica le proprietà ottiche della parabola.

16 L'estremo A di un segmento di lunghezza h si muove sull'asse delle ordinate; l'estremo B si muove invece sull'asse delle ascisse. Dimostra che la traiettoria descritta da un generico punto M di AB è un ellisse.

17 Si consideri il seguente sistema di equazioni nelle indeterminate x, y:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{17}{4} \\ x^3 y^3 = 1 \end{cases}$$

Ogni sua soluzione rappresenta le coordinate di un punto del piano cartesiano (Oxy). Calcolare quanti e quali punti rappresenta il sistema.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero (Europa), Sessione ordinaria,* 2004, *quesito* 6)

$\left[\text{quattro punti: } \left(2; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; 2\right), \left(-2; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; -2\right)\right]$

18 Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche $(x; y)$ si considerino i luoghi dei punti rappresentati dalle seguenti equazioni:

a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$,
b) $x^2 + y^2 = 0$,
c) $x^2 + y^2 + 1 = 0$,
d) $x^2 + y^2 + 2xy = 0$,
e) $x^2 + y^2 + xy = 0$,
f) $x^2 - y^2 = 0$,
g) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$,
h) $(x^2 - 1)^2 + y^2 = 0$.

Dopo aver dato una definizione precisa di «equazione di un luogo di punti», riconoscere quale delle precedenti equazioni rappresenta:

i) nessun punto,
ii) un punto,
iii) due punti,
iv) una retta,
v) due rette,
vi) una circonferenza.

(*Syllabus di Matematica*, *Unione Matematica Italiana*, 1999)

PROBLEMI

19 Considera l'insieme delle curve definite dalla seguente equazione:

$$3x^2 + (k + 3)y^2 - kx + 6y = 0 \qquad (k \in \mathbb{R}).$$

a) Dimostra che tutte le curve hanno in comune due punti.
b) Studia il carattere della curva al variare di k.
c) Determina per quali valori di k la retta di equazione $y = 2$ ha almeno un punto in comune con le iperboli dell'insieme.
d) Calcola per quali k si ottiene una circonferenza o un'iperbole equilatera.

[a) $(0; 0)$, $(1; -1)$; b) $k < -3$: iperbole; $k = -3$: parabola; $k > -3$: ellisse; c) $k \leq 24 - 12\sqrt{6}$; d) $k = 0$: circonferenza; $k = -6$: iperbole equilatera degenere]

20 Considera la seguente equazione:

$$(a + 2)x^2 + 2y^2 + 4x + ay = 0 \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

a) Dimostra che tutte le curve che essa rappresenta hanno in comune due punti.
b) Studia il carattere delle curve al variare del parametro reale a.
c) Rappresenta nel piano cartesiano le soluzioni del seguente sistema ottenuto ponendo $a = -2$ e $a = 2$:

$$\begin{cases} y^2 - y + 2x \leq 0 \\ 2x^2 + y^2 + 2x + y > 0 \end{cases}$$

d) Verifica che per $a = -4$ si ha un'iperbole degenere costituita da due rette perpendicolari.

[a) $A(0; 0)$, $B(-1; -1)$; b) $a < -2$: iperbole; $a = -2$: parabola; $a > -2$: ellisse]

21 I punti M e N descrivono i seguenti luoghi:

$$\gamma_M: \begin{cases} x = \dfrac{6h}{1+h^2} \\ y = \dfrac{3-3h^2}{1+h^2} \end{cases} \qquad \gamma_N: \begin{cases} x = 3t - 6 \\ y = 3t^2 - 6t + 3 \end{cases}$$

a) Determina le equazioni cartesiane dei due luoghi.
b) Calcola l'area di ciascuna regione finita di piano limitata dalle due curve.
c) Trova l'iperbole i cui vertici coincidono con i punti di contatto fra le due curve e che ha per asintoti le rette $x = -\dfrac{3}{2}$, $y = \dfrac{3}{2}$.

$\left[\text{a) } x^2 + y^2 = 9,\ x^2 + 6x - 3y + 9 = 0;\ \text{b) } \dfrac{9}{4}\pi - 3,\ \dfrac{27}{4}\pi + 3;\ \text{c) } y = \dfrac{3x+9}{2x+3}\right]$

22 Considera il luogo individuato dalle seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \sqrt{1-k^2} - 2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

a) Determina l'insieme dei valori di k per i quali è definito il luogo.
b) Determina i valori assunti da x e da y al variare di k.
c) Trova l'equazione cartesiana $f(x; y) = 0$ del luogo.
d) Discuti le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} f(x; y) = 0 \\ mx - y - 1 = 0 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R}).$$

$\left[\text{a) } -1 \le k \le 1;\ \text{b) } 1 \le x \le 5, -2 \le y \le -1;\ \text{c) } \dfrac{1}{2}\sqrt{6x - x^2 - 5} - y - 2 = 0;\right.$
$\left.\text{d) 1 sol. per } -1 \le m < -\dfrac{1}{5},\ \text{2 sol. per } -\dfrac{1}{5} \le m \le 0\right]$

23 È data la seguente equazione di secondo grado in due variabili:

$$25x^2 + 9y^2 - 200x - 18y + 184 = 0.$$

a) Studia la conica corrispondente e rappresentala graficamente.
b) Determina la parabola γ_1 con vertice $M(0; 1)$ e passante per i fuochi della conica data e la parabola γ_2 con vertice M e passante per i punti della conica data di ascissa 4.
c) Calcola l'area della regione finita di piano limitata dalle due parabole e dalla retta $x = 4$.

$\left[\text{a) } C(4; 1),\ a = 3,\ b = 5,\ c = 4,\ e = \dfrac{4}{5};\ \text{fuochi: } F_1(4; -3),\ F_2(4; 5);\ \text{b) } 4x = (y-1)^2;\ 25x = 4(y-1)^2;\ \text{c) } \dfrac{16}{3}\right]$

24 Il punto P descrive, nel piano cartesiano, il luogo individuato dalle seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = \dfrac{1}{2}t^2 - 4t + 2 \end{cases} \quad (t \ge 0).$$

a) Determina l'equazione cartesiana $f(x; y) = 0$ del luogo e le condizioni su x e su y.
b) Discuti il sistema

$$\begin{cases} f(x; y) = 0 \\ mx - y + 3m = 0 \end{cases}$$

con le condizioni determinate al punto precedente.
c) Se interpretiamo t come la variabile tempo, descrivi i moti componenti di P e il verso di percorrenza della traiettoria.

[a) $x^2 - 10x - 8y - 23 = 0$, $x \ge -3$ e $y \ge -6$; b) 2 sol. per $m \ge -1$;
c) x: moto rettilineo unif., y: moto rettilineo unif. accelerato, verso tale che l'ascissa x cresce nel tempo]

25 Dati un punto $F(3+\sqrt{5}\,;2)$ e la retta d di equazione $x = 3 + \frac{9}{\sqrt{5}}$:

a) determina l'equazione della conica con eccentricità $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$, con un fuoco in F e la corrispondente direttrice coincidente con la retta d;
b) determina il centro, i semiassi e i vertici della conica;
c) calcola per quali valori di k le rette del fascio improprio $y = k$ intercettano sulla conica una corda di lunghezza uguale alla distanza fra i fuochi.

$\left[\text{a) } \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1\text{; b) } C(3;2);\ a=3,\ b=2;\ V_1(0;2),\ V_2(3;0),\ V_3(6;2),\ V_4(3;4)\text{; c) } k_1 = \frac{2}{3},\ k_2 = \frac{10}{3}\right]$

26 Sono date le seguenti relazioni:

I) $x|x| - y^2 = -1$;   II) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{3 - x^2 - 2x}$.

a) Determina dominio e codominio di ciascuna di esse. Sono funzioni?
b) Rappresenta i due grafici.
c) Calcola eventuali punti di intersezione delle curve che rappresentano le equazioni.
d) Rappresenta nel piano cartesiano le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x|x| - y^2 + 1 \le 0 \\ y - \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{3 - x^2 - 2x} < 0 \\ -3 \le x \le 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

$\left[\text{a) } D_{\mathrm{I}} = [-1; +\infty[,\ C_{\mathrm{I}} = \mathbb{R},\ D_{\mathrm{II}} = [-3;1],\ C_{\mathrm{II}} = \left[0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right]\text{, la II è una funzione; c) } A(0;1)\right]$

27 Sono dati i punti $F_1(-2;-1)$ e $F_2(2;-1)$.

a) Determina l'equazione dell'ellisse di eccentricità $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e con i fuochi in F_1 e F_2.
b) Trova il centro C, i vertici, i semiassi e le direttrici.
c) Considerate le rette di equazione $x + 2y - 2q = 0$, discuti il numero dei punti di contatto con l'ellisse che verificano le limitazioni $0 \le x \le 2\sqrt{2}$ e $-3 \le y < 1$.

$\left[\text{a) } \frac{x^2}{8} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1\text{; b) } C(0;-1);\ V_1(0;-3),\ V_2(2\sqrt{2};-1),\ V_3(0;1),\ V_4(-2\sqrt{2};-1);\ a = 2\sqrt{2},\ b=2;\ x = \pm 4;\right.$
$\left.\text{c) 1 sol. per } -3 \le q \le 1\text{, 2 sol. per } 1 < q \le \sqrt{6} - 1\right]$

28 Sono date le coniche di equazione:

$(k+1)x^2 - (k+3)y^2 - x + 6y = 0, \quad k \in \mathbb{R}$.

a) Dimostra che hanno in comune tre punti.
b) Studia il carattere delle coniche al variare del parametro reale k.
c) Determina il luogo dei centri delle coniche che ne sono dotate.
d) Verifica che i punti comuni sono vertici di un triangolo inscritto in una semicirconferenza e determina la sua equazione.

$\left[\text{a) } P_1(0;0),\ P_2\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right),\ P_3\left(-\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)\text{; b) } k < -3 \vee k > -1\text{: iperbole; } k = -3 \vee k = -1\text{: parabola;}\right.$
$\left.-3 < k < -1\text{: ellisse; c) } k \ne -3 \wedge k \ne -1,\ y = \frac{6x}{4x+1}\text{; d) } k = -2\right]$

29 Sono date le curve α e β definite dalle seguenti relazioni:

α: $xy - x - 3y + 4 = 0$;

β: luogo dei punti $P(k + 3; 1 + \sqrt{2 - k^2})$, $k \in \mathbb{R}$.

a) Dopo aver trovato l'equazione cartesiana di β, rappresenta graficamente le due curve.
b) Verifica che hanno in comune soltanto un punto T e che sono tangenti.
c) Calcola l'area della regione finita di piano che ha per contorno la curva β, la tangente condotta per T e la retta di equazione $x = 3 + \sqrt{2}$.

[a) α: funzione omografica $y = \frac{x-4}{x-3}$; β: semicirconferenza $y = 1 + \sqrt{6x - x^2 - 7}$;
b) $T(2; 2)$, tangente: $x - y = 0$; c) $2 + 2\sqrt{2} - \frac{3}{4}\pi$]

30 a) Scrivi l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano che sono equidistanti dalla retta d di equazione $x - 2y - 9 = 0$ e dal punto F di coordinate $(3; 2)$ e spiega perché si tratta di una parabola.
b) Individua le coordinate del vertice V, l'equazione della retta t tangente nel vertice e l'equazione dell'asse di simmetria della parabola.
c) Sia A l'intersezione della retta t con l'asse delle ordinate e B l'intersezione, di ascissa minore, della parabola con l'asse delle ascisse. Dimostra che il triangolo ABF è un triangolo rettangolo e determinane l'area e il perimetro.
d) Scrivi l'equazione della semicirconferenza circoscritta al triangolo ABF.
e) Trova l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, passante per A, B e V.

[a) $4x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 56y - 16 = 0$; b) $V(4; 0)$, t: $x - 2y - 4 = 0$, $2x + y - 8 = 0$;
c) $A(0; -2)$, $B(-1; 0)$, area $= 5$, $2p = \sqrt{5}(3 + \sqrt{5})$;
d) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0 \\ 4x - 3y - 6 \le 0 \end{cases}$; e) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$]

31 a) Nel fascio di curve di equazione $(k + 1)x^2 + y^2 - 2kx + 2y + k = 0$ individua per quale valore di k si ottiene una circonferenza e rappresentala graficamente indicando con O e A le sue intersezioni con gli assi cartesiani.
b) Studia la curva che si ottiene per $k = -1$ e chiama B la sua intersezione con la circonferenza.
c) Stabilisci per quali valori di k l'equazione data rappresenta un'ellisse e in tal caso determinane il luogo dei centri $\mathcal{L}$.
d) Determina il luogo $\mathcal{L}'$ simmetrico di $\mathcal{L}$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante. Il luogo $\mathcal{L}'$ interseca la parabola nei punti C e D. Verifica che il triangolo BCD è simile al triangolo OAB e calcolane il rapporto r di similitudine.

[a) $k = 0$, $O(0; 0)$, $A(0; -2)$; b) parabola, $B(1; -1)$; c) $k > -1$, $\mathcal{L}$: $y + 1 = 0 \wedge x < 1$; d) $\mathcal{L}'$: $x + 1 = 0$, $r = 2$]

32 Considera il luogo dei punti del piano per i quali il rapporto fra la distanza da $F(2; 0)$ e dalla retta $y = -\frac{3}{2}$ è uguale a 2.

a) Determina l'equazione, il centro, i semiassi, l'eccentricità e rappresenta graficamente la conica trovata.
b) Riduci in forma canonica l'equazione trovata.
c) Discuti il numero dei punti di contatto della conica, di ordinata $y \le -1$, con le rette del fascio di centro $Q(-2\sqrt{3} - 1; -\sqrt{3} - 4)$.

[a) $\frac{(x-2)^2}{3} - (y+2)^2 = -1$; $C(2; -2)$; $a = \sqrt{3}$, $b = 1$; $e = 2$; b) $\frac{x^2}{3} - y^2 = -1$;
c) 1 punto per la retta $x = -2\sqrt{3} - 1$ e le rette con coefficiente angolare
$m \le -\frac{1}{\sqrt{3}} \vee m = \frac{1}{2} \vee \frac{1}{\sqrt{3}} < m < \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+2} \vee m > \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+2}$;
2 punti per le rette con $-\frac{1}{\sqrt{3}} < m < \frac{1}{2} \vee m = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+2}$]

CAPITOLO

9

٩ [numerazione araba]

९ [numerazione devanagari]

九 [numerazione cinese]

ESPONENZIALI E LOGARITMI

LA RETE DI SANT'ANTONIO Ti arriva una lettera dal tuo amico Elio con una lista di cinque nomi: 1. Ada; 2. Bruno; 3. Carla; 4. Davide; 5. Elio. Tu devi spedire a ciascuno di loro 10 euro, cancellare il nome di Ada e scrivere in fondo alla lista il tuo: 1. Bruno; 2. Carla; 3. Davide; 4. Elio; 5. IL TUO NOME. Poi devi fotocopiare la lettera e spedirla a cinque tuoi amici o conoscenti. Ora non ti resta che aspettare e, come tu hai spedito 10 euro alle persone in lista, così inizieranno ad arrivarne a te: in poco tempo rientreranno i tuoi 50 euro e ne riceverai addirittura altri 39 000... In realtà le cose non stanno così. Hai avuto la fortuna (o la sfortuna!) di essere coinvolto in una catena di Sant'Antonio.

Perché le catene di Sant'Antonio non funzionano?

▶ **La risposta a pag. 576**

1. LE POTENZE CON ESPONENTE REALE

Le potenze con esponente intero o razionale

Riassumiamo nelle tabelle seguenti le definizioni, già note, relative alle potenze di un numero reale con esponente intero o razionale e le proprietà delle potenze.

Le potenze con esponente intero		
a^x se…	**…è definita per…**	**Esempio**
$x > 0$	$\forall\, a$	$(-\sqrt{2})^3 = -2\sqrt{2}$; $0^3 = 0$.
$x = 0$	$a \neq 0$	$a^0 = 1$; 0^0 non si definisce.
$x < 0$	$a \neq 0$	$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

▲ Tabella 1

Le potenze con esponente razionale		
a^x se…	**…è definita per…**	**Esempio**
$x > 0$	$a \geq 0$	$5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$; $0^{\frac{1}{2}} = 0$.
$x = 0$	$a \neq 0$	$a^0 = 1$; 0^0 non si definisce.
$x < 0$	$a > 0$	$(\sqrt{3})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

▲ Tabella 2

Osserviamo che l'introduzione degli esponenti razionali richiede che **la base delle potenze non possa essere negativa**. In caso contrario si avrebbero situazioni non accettabili come quella del seguente esempio.

ESEMPIO

Supponiamo che la base di una potenza possa essere negativa. Allora possiamo scrivere:

$$-125 = (-5)^3 = \{[(-5)^3]^{\frac{1}{2}}\}^2 = \{[(-5)^3]^2\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-5)^6} = \sqrt{5^6} = 125.$$

Ma -125 non è uguale a 125!

Le potenze con esponente reale

È possibile definire una potenza con esponente non razionale?

Una scrittura come $3^{\sqrt{2}}$ ha significato?

Sappiamo che $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale, cioè un numero decimale illimitato non periodico. Esso può essere approssimato per eccesso o per difetto da due successioni di numeri decimali finiti.

1,4	1,41	1,414	1,4142	…	per difetto
1,5	1,42	1,415	1,4143	…	per eccesso

Indicato con a_n il termine generico di indice n della prima successione e con b_n quello della seconda successione, sono vere le seguenti proprietà:

- $a_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$;
- fissato $\varepsilon > 0$, con $\varepsilon \in \mathbb{R}$, è sempre possibile trovare $\overline{n}$ tale che $\forall\, n > \overline{n}$ si ha:

$$b_n - a_n < \varepsilon.$$

La seconda proprietà dice che i termini delle due successioni si avvicinano sempre di più all'aumentare di n.

Infatti, fissato $\varepsilon = 0{,}01$, è sufficiente considerare $\overline{n} = 2$. Per $n > 2$, $b_n - a_n < 0{,}01$. Analogamente, fissato $\varepsilon = 0{,}001$, si può considerare $\overline{n} = 3$. Per $n > 3$, $b_n - a_n < 0{,}001$ e così via.
È proprio questo avvicinamento sempre maggiore che permette di definire il numero $\sqrt{2}$.

Con ε indichiamo un numero preso piccolo quanto vogliamo.

Consideriamo ora le due seguenti successioni di potenze con base 3 e con esponenti razionali uguali ai termini delle precedenti successioni:

$$3^{1,4} \quad 3^{1,41} \quad 3^{1,414} \quad 3^{1,4142} \quad \ldots$$
$$3^{1,5} \quad 3^{1,42} \quad 3^{1,415} \quad 3^{1,4143} \quad \ldots$$

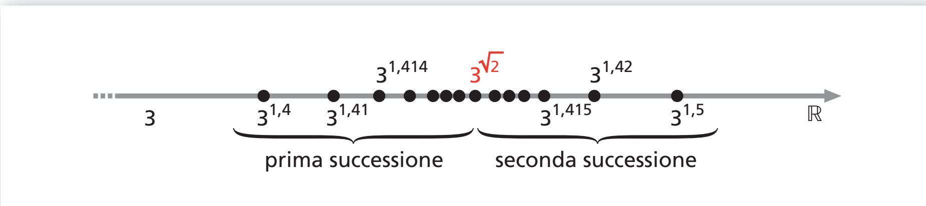
Anche in questo caso si può verificare che:

- i termini della seconda successione sono maggiori dei termini della prima con lo stesso indice;
- i termini delle due successioni si avvicinano sempre più all'aumentare dell'indice.

Questa proprietà è vera anche se al posto di 3 consideriamo, come base, un qualsiasi numero maggiore di 1.

Possiamo allora utilizzare le due successioni per definire $3^{\sqrt{2}}$ come il numero reale approssimato dalla prima successione per difetto e dalla seconda per eccesso:

$$3^{1,4} < 3^{1,41} < 3^{1,414} < 3^{1,4142} < \ldots < 3^{\sqrt{2}} < \ldots < 3^{1,4143} < 3^{1,415} < 3^{1,42} < 3^{1,5}.$$



◀ **Figura 1** **Se rappresentiamo le successioni approssimanti sulla retta reale, vediamo che i punti relativi alla prima successione si avvicinano sempre di più a un punto da sinistra senza mai oltrepassarlo, quelli relativi alla seconda si avvicinano allo stesso punto da destra senza mai oltrepassarlo. Associamo a tale punto il numero $3^{\sqrt{2}}$.**

In generale, si definisce la **potenza a^x di un numero reale a, con $a > 1$ e con esponente reale $x > 0$**, come quell'*unico* numero reale:

- maggiore di tutte le potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per difetto;
- minore di tutte le potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per eccesso.

In maniera analoga si ragiona quando $0 < a < 1$, ma tenendo conto che in questo caso al crescere degli esponenti che approssimano x le potenze decrescono, mentre al decrescere degli esponenti le potenze crescono.

Questa proprietà è vera ogni volta che la base di una potenza è compresa fra 0 e 1. Per esempio:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Quindi si definisce la **potenza a^x di un numero reale a, con $0 < a < 1$ e con esponente reale $x > 0$**, come quell'*unico* numero reale:

Calcola le successioni che approssimano $(0,2)^{\sqrt{2}}$. Che differenza noti tra queste e quelle che approssimano $3^{\sqrt{2}}$?

- maggiore di tutte le potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per eccesso;
- minore di tutte le potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per difetto.

Si definisce poi:

- $\mathbf{1}^x = \mathbf{1}$ per qualunque reale x;
- $\mathbf{0}^x = \mathbf{0}$ per qualunque reale x positivo;
- $\boldsymbol{a}^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$ per qualunque reale a positivo;
- se l'esponente è negativo:

$\boldsymbol{a}^{-r} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}\right)^r = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}^r}$ per qualunque reale a positivo (con $r > 0$).

Non si definiscono invece:

0^0 non è definita, così come 0^{-2}.

- le potenze con base zero ed esponente nullo o negativo;
- le potenze con base un numero reale negativo.

Ci limiteremo a studiare le potenze a^x con base reale $a > 0$, che sono le sole a essere definite con esponente x reale qualsiasi. Con tale condizione, essendo la base a positiva, il valore della potenza è sempre positivo:

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad a^x > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Le proprietà delle potenze con esponente reale

Si può dimostrare che anche per le potenze con esponente reale valgono le cinque proprietà note delle potenze a esponente razionale; le riassumiamo nella tabella 3.

▼ Tabella 3

Le proprietà delle potenze

Definizione $a, b \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}$	Esempio
I. Prodotto di potenze di uguale base: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$10^{4\sqrt{3}} \cdot 10^{-\sqrt{27}} = 10^{\sqrt{3}}$
II. Quoziente di potenze di uguale base: $a^x : a^y = a^{x-y}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^4 : \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^9$
III. Potenza di potenza: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$(6^{-\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 6^{-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 6^{-2} = \frac{1}{36}$
IV. Prodotto di potenze di uguale esponente: $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{\pi} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\pi} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\pi}$
V. Quoziente di potenze di uguale esponente: $a^x : b^x = (a : b)^x$	$\left(\frac{81}{5}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$

Inoltre vale il seguente teorema.

TEOREMA

All'aumentare dell'esponente reale x, la potenza a^x:

- aumenta se $a > 1$, cioè
- diminuisce se $0 < a < 1$, cioè

$$a > 1, \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2};$$
$$0 < a < 1, \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}.$$

ESEMPIO

Fissati i due esponenti 5 e $\sqrt{3}$, poiché $5 > \sqrt{3}$ risulta:

$2^5 > 2^{\sqrt{3}}$, essendo la base 2 maggiore di 1, e

$\left(\frac{1}{2}\right)^5 < \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$, essendo la base $\frac{1}{2}$ minore di 1.

2. LA FUNZIONE ESPONENZIALE

DEFINIZIONE

Funzione esponenziale

Si chiama funzione esponenziale ogni funzione del tipo:

$y = a^x$, con $a \in \mathbb{R}^+$.

Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$, il codominio è $\mathbb{R}^+$.

Pertanto, fissato un numero $a > 0$, la funzione esponenziale di base a è così definita:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad f: x \mapsto a^x.$$

Abbiamo una diversa funzione esponenziale per ogni valore $a > 0$ che scegliamo.

Studiamo il grafico della funzione $y = a^x$ nei seguenti tre casi:

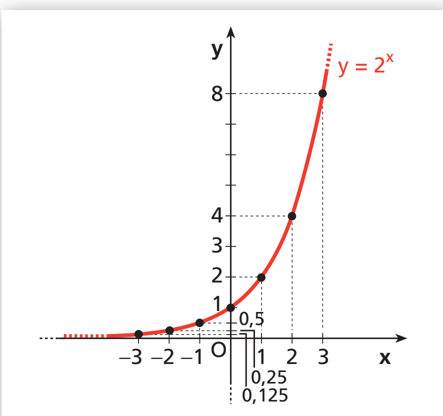
$$a > 1, \quad 0 < a < 1, \quad a = 1.$$

Il grafico della funzione esponenziale $y = a^x$ è detto *curva esponenziale*.

Primo caso: $a > 1$

Scegliamo, per esempio, $a = 2$; la funzione da studiare è $y = 2^x$. Il suo grafico è rappresentato in figura 2, insieme alla tabella dei punti utilizzati per costruirlo.

x	$y = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



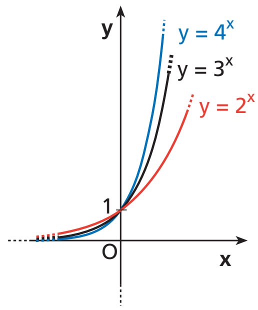
◀ **Figura 2** Il grafico di $y = 2^x$.

Poiché 2^x è positivo per qualunque valore di x, il grafico della funzione esponenziale

$$y = 2^x$$

si trova interamente «sopra» l'asse x. Inoltre esso:

- interseca l'asse y nel punto $(0; 1)$;
- non interseca mai l'asse x, perché non esiste alcun valore di x tale che risulti $2^x = 0$;
- ha andamento crescente: al crescere dell'esponente cresce il valore della potenza;
- per esponenti negativi decrescenti le potenze si avvicinano sempre più a 0 (si scrive anche $2^x \to 0$ per $x \to -\infty$ e si legge: 2^x tende a 0 per x che tende a meno infinito).



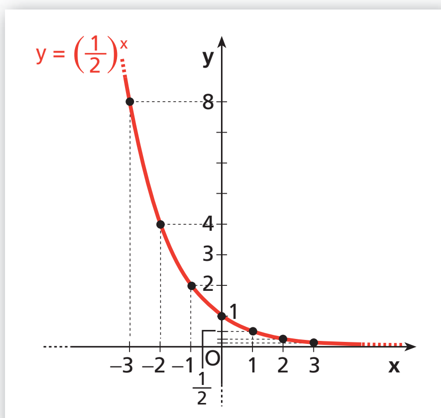
I grafici delle funzioni esponenziali con basi $a > 1$ hanno tutti comportamenti simili a quello della funzione $y = 2^x$ (figura a lato).

Secondo caso: $0 < a < 1$

Scegliamo, per esempio, $a = \frac{1}{2}$: la funzione da studiare è $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Il suo grafico è rappresentato in figura 3, insieme alla tabella dei punti utilizzati per costruirlo.

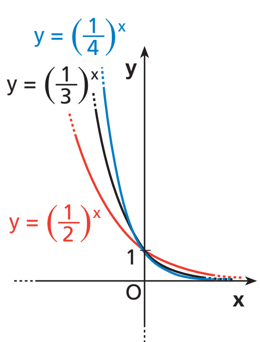
▶ **Figura 3** Il grafico di $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



Poiché $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ è positivo per qualunque valore di x, il grafico si trova interamente «sopra» l'asse x. Inoltre esso:

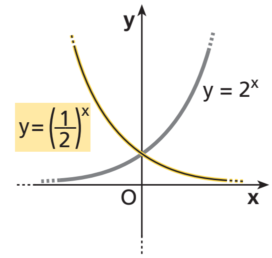
- interseca l'asse y nel punto $(0; 1)$;
- non interseca mai l'asse x;
- ha andamento decrescente: al crescere dell'esponente decresce il valore della potenza;
- per esponenti positivi crescenti le potenze si avvicinano sempre più a 0 $\left(\text{si scrive anche: } \left(\frac{1}{2}\right)^x \to 0 \text{ per } x \to +\infty\right)$.



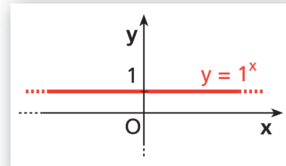
I grafici delle funzioni esponenziali con basi $0 < a < 1$ (figura a lato) hanno tutti comportamenti simili a quello della funzione:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Il grafico di $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ è il simmetrico rispetto all'asse y del grafico di $y = 2^x$. Infatti, una simmetria rispetto all'asse y trasforma $y = 2^x$ in $y = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
Questa proprietà è vera qualunque siano le basi a e $\frac{1}{a}$ (con $a \neq 1$).



Terzo caso: $a = 1$
La funzione è $y = 1^x$, ossia $y = 1$, per qualunque valore della x. Si tratta della retta parallela all'asse x passante per il punto (0; 1).

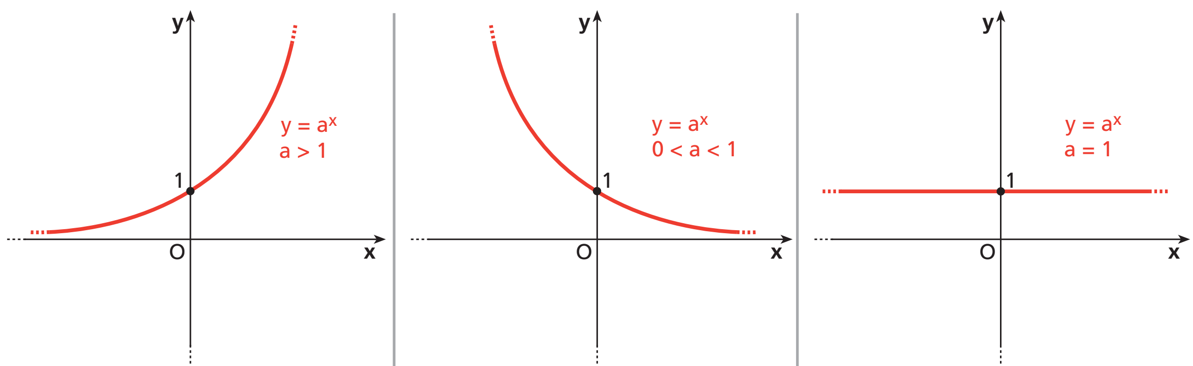


▲ **Figura 4** Il grafico della funzione $y = 1^x$ è la retta parallela all'asse x che interseca l'asse y nel punto di ordinata uguale a 1, ossia la retta di equazione $y = 1$.

In generale, qualunque sia il valore $a > 0$ della base, il grafico della funzione esponenziale:

- sta tutto «sopra» l'asse x (cioè, $a^x > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$);
- in particolare, non interseca mai l'asse x ($a^x \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$);
- interseca *sempre* l'asse y nel punto (0; 1).

▼ **Figura 5** Riassumiamo le proprietà della funzione esponenziale distinguendo i tre casi $a > 1$, $0 < a < 1$, $a = 1$.



a.
- Dominio: $\mathbb{R}$;
- codominio: $\mathbb{R}^+$;
- funzione crescente in $\mathbb{R}$;
- funzione biiettiva;
- $a^x \to 0$ per $x \to -\infty$;
- $a^x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

b.
- Dominio: $\mathbb{R}$;
- codominio: $\mathbb{R}^+$;
- funzione decrescente in $\mathbb{R}$;
- funzione biiettiva;
- $a^x \to 0$ per $x \to +\infty$;
- $a^x \to +\infty$ per $x \to -\infty$.

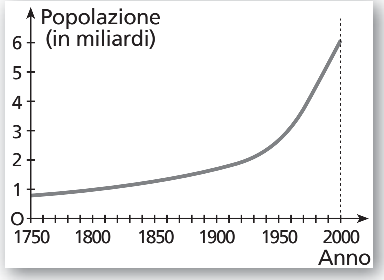
c.
- Dominio: $\mathbb{R}$;
- codominio: {1};
- funzione costante;
- funzione non iniettiva.

La crescita esponenziale

Confrontiamo l'andamento delle funzioni $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ con quello di $y = 2^x$ mediante una tabella.
Si può notare che, all'aumentare di x, 2^x supera velocemente i valori delle potenze e si potrebbe dimostrare che ciò è vero qualunque esponente n abbia la potenza x^n.

x	x^2	x^3	x^4	2^x
0	0	0	0	1
1	1	1	1	2
10	100	1000	10^4	1024
20	400	$8 \cdot 10^3$	$1{,}6 \cdot 10^5$	$\simeq 1{,}05 \cdot 10^6$
100	10^4	10^6	10^8	$\simeq 1{,}3 \cdot 10^{30}$
200	$4 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^6$	$1{,}6 \cdot 10^9$	$\simeq 1{,}6 \cdot 10^{60}$

Ci sono fenomeni il cui andamento è descrivibile con una funzione esponenziale e il cui aumento molto rapido viene quindi detto *crescita esponenziale*. Per esempio negli ultimi secoli la popolazione mondiale ha avuto una crescita di questo tipo.



▶ **Figura 6** La popolazione mondiale dal 1750 al 2000 (fonte: United Nations Population Division).

Le funzioni del tipo $y = [f(x)]^{g(x)}$

● Studiamo il dominio di potenze in cui la base o l'esponente variano al variare di x.

La definizione di potenza a esponente reale permette di estendere il concetto di funzione a forme del tipo $y = [f(x)]^{g(x)}$. Studiamone il dominio considerando per primi i casi con base o con esponente costante a.

1. $y = a^{f(x)}$ esiste in tutto il dominio di $f(x)$, se e solo se $a > 0$.

ESEMPIO

$y = 3^{\sqrt{x-1}}$ ha per dominio $x \geq 1$.

2. $y = [f(x)]^{a}$ esiste per $f(x) \geq 0$ se $a \in \mathbb{R}^+$, per $f(x) > 0$ se $a \in \mathbb{R}^-$.

ESEMPIO

$y = (x^2 - 1)^{\sqrt{2}}$ ha per dominio $x \leq -1 \vee x \geq 1$.

Per la funzione $y = (x^2 - 1)^{-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{(x^2-1)^{\sqrt{2}}}$ dobbiamo invece escludere i valori che annullano $x^2 - 1$ (e quindi il denominatore), pertanto il suo dominio è $x < -1 \vee x > 1$.

3. $y = [f(x)]^{g(x)}$ esiste nel dominio di $g(x)$ se e solo se $f(x) > 0$.

ESEMPIO

Consideriamo $y = (4x^2 - 1)^{\sqrt{x}}$:

$\sqrt{x}$ esiste per $x \geq 0$.

Inoltre, perché esista la potenza, deve essere

$$4x^2 - 1 > 0 \rightarrow x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}.$$

Ponendo a sistema le due condizioni, otteniamo il dominio della funzione: $x > \dfrac{1}{2}$.

3. LE EQUAZIONI ESPONENZIALI

IN PRATICA
▶ Videolezione 25

● L'equazione
$2 \cdot 5^x - 1 = 0$
è esponenziale, mentre
$2x \cdot 5^2 - 1 = 0$
non lo è.

DEFINIZIONE

Equazione esponenziale

Un'equazione si dice esponenziale quando contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.

Abbiamo già detto che considereremo solo potenze a^x con base reale $a > 0$ ed esponente reale x. Trattiamo l'equazione esponenziale più semplice, del tipo:

$$a^x = b, \text{ con } a > 0.$$

● Non hanno significato scritture del tipo

$$(-5)^x = -125,$$

perché la base e il valore della potenza devono essere positivi.

Equazione esponenziale impossibile

Abbiamo visto che $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ quando $a > 0$.
In altre parole, a^x non può essere mai negativo o nullo.

Per esempio, l'equazione $2^x = -4$ non è verificata per alcun valore reale di x.
Non hanno soluzioni nemmeno equazioni del tipo $1^x = 4$ perché $1^x = 1\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Pertanto, i casi in cui l'equazione $a^x = b$ $(a > 0)$ risulta *impossibile* sono i seguenti:

1. se $b \leq 0$;
2. se $a = 1$ e $b \neq 1$.

Equazione esponenziale indeterminata

Se $a = 1$ e $b = 1$, l'equazione ha infinite soluzioni, cioè l'equazione

$$1^x = 1$$

è *indeterminata*, perché è verificata per qualunque valore reale di x.

Equazione esponenziale determinata

L'equazione esponenziale $a^x = b$, con a e b reali positivi e $a \neq 1$, ammette sempre **una e una sola soluzione**. Infatti, poiché $y = a^x$ è una funzione monotòna, è anche biunivoca, quindi per ogni x esiste una sola immagine y e viceversa.

● La funzione $y = a^x$ è crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$.

È possibile risolvere l'equazione **in modo immediato**, se si riescono a scrivere a e b come potenze aventi la stessa base.

● Non esiste un metodo generale per la risoluzione delle equazioni esponenziali. Noi considereremo solo alcuni casi e in particolare le equazioni risolvibili con i logaritmi (paragrafo 8).

ESEMPIO

Risolviamo $25^x = 125$.

Poiché 25 e 125 si possono scrivere come potenze di 5, riscriviamo l'equazione come:

$$5^{2x} = 5^3.$$

● $25^x = (5^2)^x = 5^{2x}$.

Se due potenze sono uguali e sono uguali le basi, devono essere uguali anche gli esponenti, quindi:

$$5^{2x} = 5^3 \quad \rightarrow \quad 2x = 3 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3}{2}.$$

4. LE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

IN PRATICA
▶ **Videolezione 26**

DEFINIZIONE

Disequazione esponenziale

Una disequazione si dice esponenziale quando contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.

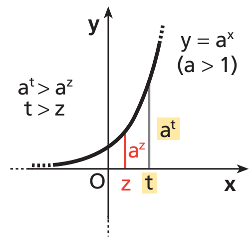
Per le disequazioni esponenziali valgono osservazioni analoghe a quelle relative alle equazioni esponenziali, purché ricordiamo quanto segue:

- se $a > 1$, $\quad t > z \quad \Leftrightarrow \quad a^t > a^z$;
- se $0 < a < 1$, $\quad t > z \quad \Leftrightarrow \quad a^t < a^z$.

Consideriamo alcuni esempi.

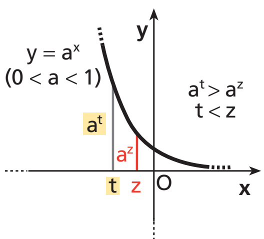
● Se $a > 1$, allora

$$\boxed{a^t > a^z \quad \Leftrightarrow \quad t > z.}$$



● Se $0 < a < 1$, allora

$$\boxed{a^t > a^z \quad \Leftrightarrow \quad t < z.}$$



ESEMPIO

1. Risolviamo la disequazione $32^x > 128$.

Osservando che 32 e 128 sono potenze di 2, riscriviamo la disequazione:

$$2^{5x} > 2^7.$$

Poiché le potenze hanno base maggiore di 1, dalla disuguaglianza precedente otteniamo una disuguaglianza fra gli esponenti **di ugual verso**:

$$5x > 7 \quad \to \quad x > \frac{7}{5}.$$

2. Risolviamo la disequazione $\left(\frac{1}{8}\right)^x > \frac{1}{4}$.

Osserviamo che $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{4}$ sono potenze di $\frac{1}{2}$, quindi:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Poiché le potenze hanno base minore di 1, dalla disuguaglianza precedente otteniamo una disuguaglianza fra gli esponenti **di verso contrario**:

$$3x < 2 \quad \to \quad x < \frac{2}{3}.$$

5. LA DEFINIZIONE DI LOGARITMO

Sappiamo che l'equazione esponenziale $a^x = b$, con $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, ammette una e una sola soluzione. A tale valore si dà il nome di logaritmo in base a di b e si scrive: $x = \log_a b$.

Per esempio, la soluzione dell'equazione $2^x = 7$ è $x = \log_2 7$.

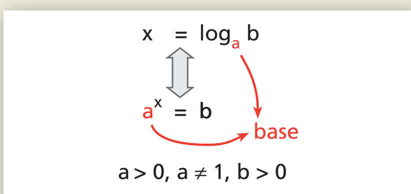
● Non esiste $\log_a 0$ né il logaritmo di un numero negativo: per definizione la base e l'argomento devono essere positivi.

● Deve essere $a \neq 1$ perché, come abbiamo visto, l'equazione $1^x = b$ è impossibile o indeterminata.

DEFINIZIONE

Logaritmo in base *a* di *b*

Dati due numeri reali positivi a e b, con $a \neq 1$, si chiama logaritmo in base a di b l'esponente x da assegnare alla base a per ottenere il numero b.



Il numero b viene detto **argomento** del logaritmo.

Dalla definizione possiamo osservare che il logaritmo permette di scrivere in modo diverso la relazione che esiste in una potenza fra base, esponente e risultato. Per esempio, le due scritture $5^2 = 25$ e $2 = \log_5 25$ sono equivalenti.

Dalla definizione, supponendo $a, b > 0$ e $a \neq 1$, si ricava:

$\mathbf{\log_a 1 = 0}$, perché $a^0 = 1$;

$\mathbf{\log_a a = 1}$, perché $a^1 = a$;

$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b}$, siccome da $a^x = b$ si ha $x = \log_a b$, sotituendo x nell'esponente di a otteniamo $a^{\log_a b} = b$.

Osserviamo poi che se due numeri positivi sono uguali, anche i loro logaritmi, rispetto a una stessa base, sono uguali e viceversa:

$$\boldsymbol{x = y \Leftrightarrow \log_a x = \log_a y}.$$

Vale il seguente teorema.

TEOREMA

All'aumentare dell'argomento b (reale positivo), il logaritmo $\log_a b$:
- aumenta, se $a > 1$;
- diminuisce, se $0 < a < 1$.

ESEMPIO

Fissati i due argomenti 5 e 2, poiché $5 > 2$, risulta:

$\log_{10} 5 > \log_{10} 2$, perché la base 10 è maggiore di 1;

$\log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{2}} 2$, perché la base $\frac{1}{2}$ è minore di 1.

In genere, la base 10 si sottintende. Per esempio, $\log_{10} 5$ si scrive $\log 5$.

6. LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

Le proprietà fondamentali dei logaritmi sono tre, valide qualunque sia la base, purché positiva e diversa da 1.
Nei loro enunciati sottintendiamo che i logaritmi sono riferiti a una stessa base.

PROPRIETÀ

Logaritmo di un prodotto

Il logaritmo del prodotto di due numeri positivi è uguale alla *somma* dei logaritmi dei singoli fattori:

$$\boldsymbol{\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \quad (b > 0, c > 0)}.$$

ESEMPIO

$\log_2 (8 \cdot 16) = \log_2 8 + \log_2 16.$

Si verifica l'uguaglianza tenendo conto che il primo membro è

$\log_2 (8 \cdot 16) = \log_2 128 = 7$, perché $128 = 2^7$, e il secondo membro è:

$$\log_2 8 + \log_2 16 = 3 + 4 = 7,$$

perché $8 = 2^3$ e $16 = 2^4$.

PROPRIETÀ

Logaritmo di un quoziente

Il logaritmo del quoziente di due numeri positivi è uguale alla *differenza* fra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \; (b > 0, c > 0).$$

ESEMPIO

$$\log_3\left(\frac{729}{9}\right) = \log_3 729 - \log_3 9.$$

Si verifica l'uguaglianza tenendo conto che il primo membro è

$$\log_3\left(\frac{729}{9}\right) = \log_3 81 = 4, \text{ perché } 81 = 3^4,$$

e il secondo membro è:

$$\log_3 729 - \log_3 9 = 6 - 2 = 4,$$

perché $729 = 3^6$ e $9 = 3^2$.

PROPRIETÀ

Logaritmo di una potenza

Il logaritmo della potenza di un numero positivo elevato a un esponente reale è uguale al prodotto di tale esponente per il logaritmo di quel numero positivo:

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b \;\; (b > 0).$$

ESEMPIO

$$\log_3 9^4 = 4 \cdot \log_3 9.$$

Si verifica l'uguaglianza tenendo conto che:

$$\log_3 9^4 = \log_3 (3^2)^4 = \log_3 3^8 = 8;$$

$$\log_3 9 = 2, \text{ perché } 3^2 = 9, \text{ quindi } 4 \cdot \log_3 9 = 4 \cdot 2 = 8.$$

Un caso particolare

Poiché $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$, si può applicare la terza proprietà anche nel caso del logaritmo di una radice:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b \; (b > 0).$$

ESEMPIO

$$\log_{10} \sqrt{6} = \frac{1}{2} \log_{10} 6, \text{ perché } \sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}.$$

La dimostrazione delle proprietà dei logaritmi

Per dimostrare le proprietà dei logaritmi, poniamo:

$$x = \log_a b, \quad y = \log_a c.$$

Per definizione di logaritmo, le due uguaglianze scritte equivalgono alle seguenti:

$$a^x = b, \quad a^y = c.$$

Dimostriamo la proprietà del logaritmo di un prodotto:

$$\mathbf{\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$$

Date le uguaglianze $a^x = b$ e $a^y = c$, si ha:

$a^x \cdot a^y = b \cdot c$	moltiplicazione membro a membro
$a^{x+y} = b \cdot c$	prodotto di due potenze di ugual base
$x + y = \log_a (b \cdot c)$	definizione di logaritmo
$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$	sostituzione usando $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$
$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$	proprietà simmetrica dell'uguaglianza

Dimostriamo la proprietà del logaritmo di un quoziente:

$$\mathbf{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}$$

Date le uguaglianze $a^x = b$ e $a^y = c$, si ha:

$\frac{a^x}{a^y} = \frac{b}{c}$	divisione membro a membro
$a^{x-y} = \frac{b}{c}$	quoziente di due potenze di ugual base
$x - y = \log_a \frac{b}{c}$	definizione di logaritmo
$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$	sostituzione usando $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$
$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$	proprietà simmetrica dell'uguaglianza

Dimostriamo la proprietà del logaritmo di una potenza:

$$\mathbf{\log_a b^n = n \log_a b}$$

Data l'uguaglianza $a^x = b$, si ha:

$(a^x)^n = b^n$	elevamento all'esponente n dei due membri
$a^{nx} = b^n$	potenza di una potenza
$nx = \log_a b^n$	definizione di logaritmo
$n \log_a b = \log_a b^n$	sostituzione usando $x = \log_a b$
$\log_a b^n = n \log_a b$	proprietà simmetrica dell'uguaglianza

La formula del cambiamento di base

Come calcolare i logaritmi usando la calcolatrice

Abbiamo visto che $\log_a b$ è un numero reale per $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$.
Abbiamo anche visto che, quando a e b possono essere scritti come potenze con la stessa base, allora $\log_a b$ è un numero intero o razionale.

● $\log_2 8 = 3$ perché $2^3 = 8$.
$\log_9 27 = \frac{3}{2}$ perché
$9^{\frac{3}{2}} = 3^{\cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}}} = 3^3 = 27$.

In caso contrario, non sempre $\log_a b$ si riesce a esplicitare. Per esempio, dato $\log_3 14$, non è possibile scrivere 14 come potenza di base 3 ed esponente intero o razionale. In casi come questo usiamo la calcolatrice per calcolare un'approssimazione decimale del logaritmo.
Le calcolatrici sono spesso costruite per calcolare i logaritmi in due sole basi: la base 10 e la base e. Il numero $\boldsymbol{e}$ è detto **numero di Nepero** ed è un numero irrazionale, il cui valore, approssimato a cinque cifre decimali, è 2,71828.

Per distinguere i logaritmi nelle due basi si usano le seguenti notazioni:

log $\boldsymbol{x}$ indica il $\log_{10} x$, detto anche **logaritmo decimale**;

ln $\boldsymbol{x}$ indica il $\log_e x$, detto anche **logaritmo naturale** o **neperiano**.

Vediamo come utilizzare la calcolatrice.

- e si può ottenere studiando i numeri del tipo $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, con $n \in \mathbb{N}$. Attribuendo a n valori crescenti, cioè 1, 2, ..., la successione dei numeri di quel tipo si avvicina a un numero irrazionale che viene chiamato e.

ESEMPIO

Calcoliamo $\log_3 14$.

Posto $x = \log_3 14$, abbiamo:

$$3^x = 14.$$

Calcoliamo il logaritmo in base 10 di entrambi i membri:

$$\log 3^x = \log 14.$$

Per la proprietà del logaritmo di una potenza,

$$x \cdot \log 3 = \log 14,$$

da cui, essendo $\log 3 \neq 0$, ricaviamo:

$$x = \frac{\log 14}{\log 3}.$$

Quindi:

$$\log_3 14 = \frac{\log 14}{\log 3}.$$

Ora possiamo calcolare il valore *approssimato* di x, determinando con la calcolatrice il valore di log 14 e il valore di log 3:

$$x = \frac{\log 14}{\log 3} \simeq \frac{1,146128}{0,477121} \simeq 2,402.$$

- Il procedimento è analogo se usiamo la base e.

- Abbiamo così trasformato il logaritmo in base 3 nel quoziente di due logaritmi in base 10.

La formula del cambiamento di base

In generale, per scrivere il $\log_a b$ mediante logaritmi in base $c > 0$, si utilizza la seguente proprietà.

PROPRIETÀ

Cambiamento di base nei logaritmi

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad a > 0, b > 0, c > 0, \; a \neq 1, c \neq 1.$$

DIMOSTRAZIONE

La dimostrazione è simile, nei passaggi, a quella del precedente esempio. Dalla definizione di logaritmo sappiamo che le due uguaglianze

$$x = \log_a b \quad \text{e} \quad a^x = b$$

sono equivalenti. Calcoliamo allora il logaritmo in base c di entrambi i membri della seconda uguaglianza:

$$\log_c a^x = \log_c b.$$

Per la proprietà del logaritmo di una potenza,

$$x \cdot \log_c a = \log_c b,$$

da cui, essendo $\log_c a \neq 0$ (perché $a \neq 1$):

$$x = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Quindi:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Possiamo anche scrivere la formula del cambiamento di base così:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{1}{\log_c a} \cdot \log_c b.$$

Il numero $\boldsymbol{\frac{1}{\log_c a}}$ è detto **modulo di trasformazione** per il passaggio dalla base c alla base a. Per esempio, per passare dai logaritmi in base 10 a quelli in base 2, il modulo di trasformazione è:

$$\frac{1}{\log 2} \simeq 3{,}32193.$$

● Per passare dai logaritmi decimali a quelli naturali è:

$$\frac{1}{\log e} \simeq 2{,}30259.$$

● **Nepero, Briggs, Eulero**

I logaritmi furono introdotti dal matematico scozzese John Napier (1550-1617), che pubblicò nel 1614 la prima tavola di logaritmi. Napier, chiamato in italiano Nepero, scoprì il numero e, ma non utilizzò come base per i logaritmi né e né 10. Fu il matematico inglese Henry Briggs (1561-1631) a introdurre le prime tavole dei logaritmi in base 10, perché si accorse che alcuni calcoli risultavano più semplici utilizzando come base quella usata per la numerazione posizionale, cioè il 10.
Successivamente Leonhard Euler (1707-1783), in italiano Eulero, utilizzò il numero e, in particolare per definire le potenze con esponente immaginario.
Egli lo indicò per la prima volta con la lettera e.

● Il termine «logaritmo» è stato introdotto da Nepero senza fornirne motivazione. Deriva dai termini greci *lógos* e *arithmós*.
Lógos significa «ragione», «pensiero», ma anche «proporzione»; *arithmós* significa «numero».

7. LA FUNZIONE LOGARITMICA

DEFINIZIONE

Funzione logaritmica

Si chiama funzione logaritmica ogni funzione del tipo:

$$y = \log_a x, \quad \text{con} \quad a > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

Poiché l'argomento del logaritmo deve essere positivo, il dominio della funzione è $\mathbb{R}^+$; si dimostra che la funzione assume tutti i valori reali, quindi il codominio è $\mathbb{R}$.
Fissata la base a, la funzione logaritmica è così definita:

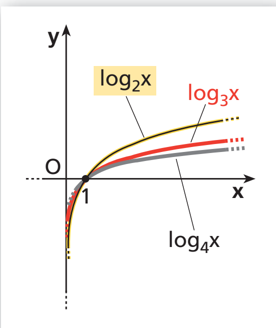
$$f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f\colon x \mapsto y = \log_a x.$$

Studiamo il grafico della funzione $y = \log_a x$, nei due casi $a > 1$ e $0 < a < 1$.

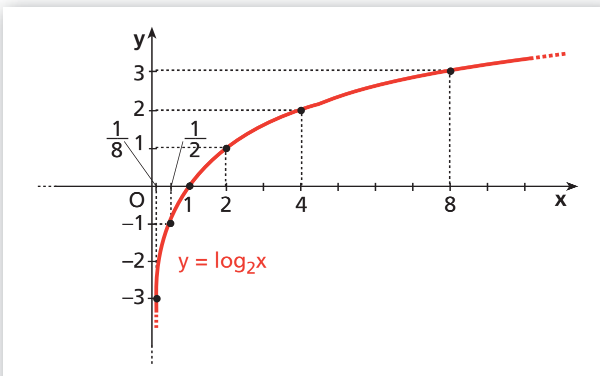
Primo caso: $a > 1$

Scegliamo, per esempio, $a = 2$, e studiamo la funzione $y = \log_2 x$.
Compiliamo una tabella, attribuendo a x valori positivi.
Disegniamo nel piano cartesiano i punti ottenuti e, con l'aggiunta di altri punti, otteniamo il grafico di $y = \log_2 x$.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3



▲ **Figura 7** I grafici delle funzioni logaritmiche con $a > 1$ hanno tutti comportamenti simili a quello di $y = \log_2 x$.

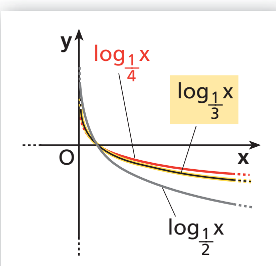


◀ **Figura 8** Poiché l'argomento x deve essere positivo, il grafico si trova nel semipiano a destra dell'asse y e interseca l'asse x nel punto $(1; 0)$. I punti della curva hanno ordinata positiva se $x > 1$, hanno ordinata negativa se $x < 1$. Il grafico ha andamento crescente e si avvicina sempre più all'asse y per $x \to 0$.

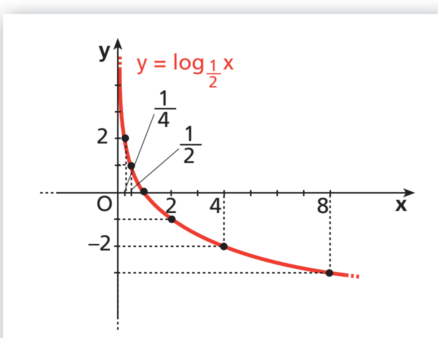
Secondo caso: $0 < a < 1$

Scegliamo $a = \frac{1}{2}$, quindi la funzione è $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.
Compiliamo di nuovo una tabella e disegniamo il grafico.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	-1	-2	-3



▲ **Figura 9** I grafici delle funzioni logaritmiche con $0 < a < 1$ hanno tutti lo stesso andamento di quello di $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

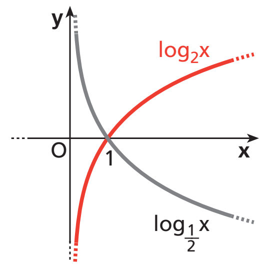


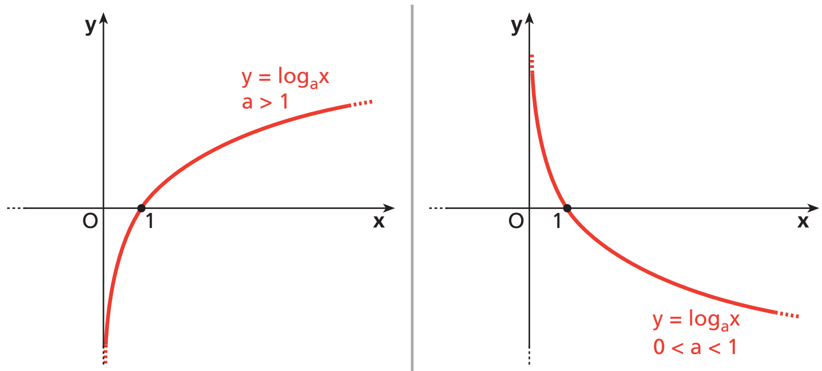
◀ **Figura 10** Anche questa curva si trova nel semipiano a destra dell'asse y e interseca l'asse x nel punto $(1; 0)$. I punti della curva hanno ordinata negativa se $x > 1$, hanno ordinata positiva se $0 < x < 1$. È una funzione decrescente e il suo grafico si avvicina sempre più all'asse y per $x \to 0$.

- I grafici di $y = \log_2 x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ sono simmetrici l'uno dell'altro rispetto all'asse x. Infatti, per la formula del cambiamento di base, si ha

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\log_2 x}{-1} = -\log_2 x,$$

quindi le ordinate dei punti che hanno la stessa ascissa sono opposte.
Questa proprietà è vera considerando generiche basi a e $\frac{1}{a}$, con $a > 0$ e $a \neq 1$.





a.
- Dominio: $\mathbb{R}^+$;
- codominio: $\mathbb{R}$;
- funzione crescente in $\mathbb{R}^+$;
- funzione biiettiva;
- $\log_a x \to -\infty$ per $x \to 0$;
- $\log_a x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

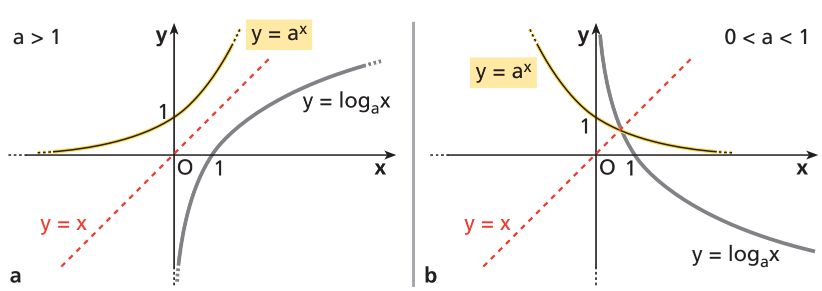
b.
- Dominio: $\mathbb{R}^+$;
- codominio: $\mathbb{R}$;
- funzione decrescente in $\mathbb{R}^+$;
- funzione biiettiva;
- $\log_a x \to +\infty$ per $x \to 0$;
- $\log_a x \to -\infty$ per $x \to +\infty$.

◄ **Figura 11** Le proprietà della funzione logaritmo.

- La funzione $y = a^x$ è una funzione biiettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$, quindi è invertibile. Ricaviamo x in funzione di y. Applicando la definizione di logaritmo, otteniamo:

$$x = \log_a y.$$

Pertanto, la funzione logaritmo è la funzione inversa della funzione esponenziale.
I grafici delle due funzioni sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante (figura 12).



◄ **Figura 12** I grafici della funzione esponenziale e della funzione logaritmo sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Il grafico di funzioni del tipo $y = e^{f(x)}$

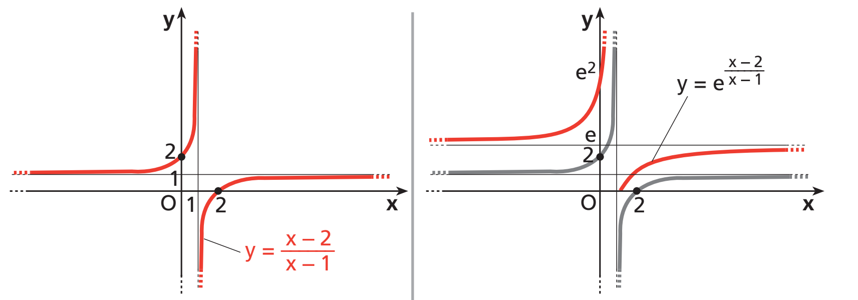
Per disegnare l'andamento del grafico della funzione

$$y = e^{f(x)},$$

noto quello di $y = f(x)$, teniamo conto delle proprietà di $y = e^x$ e in particolare:

$$\begin{array}{ll} \text{se } x \to -\infty, & e^x \to 0; \\ \text{se } x \to +\infty, & e^x \to +\infty; \\ \text{se } x = 0, & e^x = 1. \end{array}$$

Per esempio, disegniamo il grafico di $y = e^{\frac{x-2}{x-1}}$.



a. Tracciamo il grafico di $y = \frac{x-2}{x-1}$.

b. Tenendo conto delle proprietà della funzione esponenziale tracciamo il grafico di $y = e^{\frac{x-2}{x-1}}$.

▶ Figura 13

Nel disegnare il grafico abbiamo tenuto conto che:

$$\text{per } x \to -\infty \text{ o } x \to +\infty, \quad \frac{x-2}{x-1} \to 1, \quad e^{\frac{x-2}{x-1}} \to e^1 = e;$$

$$\text{per } x \to 1^+, \quad \frac{x-2}{x-1} \to -\infty, \quad e^{\frac{x-2}{x-1}} \to 0;$$

$$\text{per } x \to 1^-, \quad \frac{x-2}{x-1} \to +\infty, \quad e^{\frac{x-2}{x-1}} \to +\infty;$$

(con $x \to 1^+$ indichiamo che x tende a 1 assumendo valori maggiori di 1, con $x \to 1^-$ assumendo valori minori di 1).

Notiamo inoltre che, essendo sempre $e^x > x$, si ha anche $e^{\frac{x-2}{x-1}} > \frac{x-2}{x-1}$, ossia il grafico di $y = e^{\frac{x-2}{x-1}}$ «sta sempre sopra» a quello di $y = \frac{x-2}{x-1}$.

Per $x \to 1^+$ consideriamo solo la parte di grafico a destra della retta $x = 1$, per $x \to 1^-$ consideriamo solo la parte a sinistra.

Il grafico di funzioni del tipo $y = \ln f(x)$

Per disegnare l'andamento del grafico della funzione

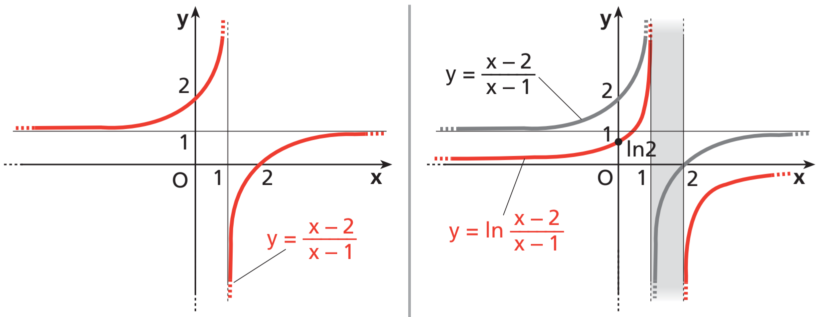
$$y = \ln f(x),$$

noto quello di $y = f(x)$, teniamo conto delle proprietà di $y = \ln x$ e in particolare:

$$\begin{array}{ll} \text{se } x \leq 0, & \nexists \ln x; \\ \text{se } x \to 0^+, & \ln x \to -\infty; \\ \text{se } x = 1, & \ln x = 0; \\ \text{se } x \to +\infty, & \ln x \to +\infty. \end{array}$$

Poiché il dominio di $y = \ln x$ è $\mathbb{R}^+$, x può avvicinarsi a 0 solo da valori maggiori di 0, quindi $x \to 0^+$.

Per esempio, disegniamo il grafico di $y = \ln \frac{x-2}{x-1}$.



a. Disegniamo il grafico di $y = \frac{x-2}{x-1}$.

b. Tenendo conto delle proprietà di $y = \ln x$, disegniamo il grafico di $y = \ln\frac{x-2}{x-1}$.

◀ **Figura 14**

Nel disegnare il grafico abbiamo tenuto conto che:

$$\text{per } 1 < x < 2, \quad \frac{x-2}{x-1} < 0, \quad \nexists \ln\frac{x-2}{x-1};$$

$$\text{per } x \to 2^+, \quad \frac{x-2}{x-1} \to 0, \quad \ln\frac{x-2}{x-1} \to -\infty;$$

$$\text{per } x \to \pm\infty, \quad \frac{x-2}{x-1} \to 1, \quad \ln\frac{x-2}{x-1} \to 0;$$

$$\text{per } x \to 1^-, \quad \frac{x-2}{x-1} \to +\infty, \quad \ln\frac{x-2}{x-1} \to +\infty.$$

Notiamo inoltre che, essendo sempre $\ln x < x$, si ha anche $\ln\frac{x-2}{x-1} < \frac{x-2}{x-1}$, quindi il grafico di $y = \ln\frac{x-2}{x-1}$ «sta sempre sotto» a quello di $y = \frac{x-2}{x-1}$.

8. LE EQUAZIONI LOGARITMICHE

IN PRATICA ▶ **Videolezione 27**

DEFINIZIONE

Equazione logaritmica

Un'equazione si dice logaritmica quando l'incognita compare nell'argomento di almeno un logaritmo.

● $\log(x+3) = 5$ è un'equazione logaritmica; $(x-5)\log 3 = 7$ non è un'equazione logaritmica.

Consideriamo le equazioni logaritmiche che possiamo scrivere nella forma:

$$\log_a A(x) = \log_a B(x),$$

dove con $A(x)$ e $B(x)$ indichiamo due funzioni dell'incognita x.

Per le condizioni di esistenza dei logaritmi deve essere: $A(x) > 0$ e $B(x) > 0$.

● Ricorda che il logaritmo è definito solo in $\mathbb{R}^+$.

Dal momento che:

$$A(x) = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad \log_a A(x) = \log_a B(x),$$

per risolvere l'equazione è sufficiente cercare le soluzioni di $A(x) = B(x)$ e controllare successivamente se queste soddisfano le condizioni di esistenza.

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione $\log x + \log(x+3) = \log 2 + \log(2x+3)$.

Scriviamo le condizioni di esistenza imponendo che ciascun logaritmo presente nell'equazione abbia argomento maggiore di 0. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 3 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \quad x > 0\text{, cioè C.E.: } x > 0.$$

Applichiamo la proprietà del logaritmo di un prodotto:

$$\log x\,(x + 3) = \log 2(2x + 3).$$

Svolgiamo i calcoli e passiamo all'uguaglianza degli argomenti:

$$x^2 + 3x = 4x + 6 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}$$

Il valore -2 non soddisfa la condizione di esistenza posta ($x > 0$), che è invece soddisfatta da 3. Quindi, l'unica soluzione dell'equazione logaritmica iniziale è $x = 3$.

Usiamo un'incognita ausiliaria

Mostriamo con un esempio il metodo di risoluzione di un secondo tipo di equazione logaritmica.

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione $(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 = 0$.
La condizione di esistenza del logaritmo è $x > 0$.
Posto $\log_3 x = t$, otteniamo:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \rightarrow t = 1 \pm \sqrt{1 + 3} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

da cui:

$$\log_3 x = -1 \rightarrow x_1 = \frac{1}{3};$$

$$\log_3 x = 3 \rightarrow x_2 = 27.$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili perché soddisfano la condizione di esistenza.

IN PRATICA
▶ Videolezione 28

9. LE DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Consideriamo le disequazioni logaritmiche che possiamo scrivere nella forma

$$\boldsymbol{\log_a A(x) < \log_a B(x)},$$

o nelle forme analoghe con gli altri segni di disuguaglianza.

Per passare da una disequazione di questo tipo a una fra i due argomenti dobbiamo ricordare il comportamento della funzione logaritmica:

- per $a > 1$, $\quad \log_a b < \log_a c \Leftrightarrow b < c$;
- per $0 < a < 1$, $\quad \log_a b < \log_a c \Leftrightarrow b > c$;

con $b, c > 0$.

Le soluzioni di una disequazione logaritmica del tipo considerato si ottengono risolvendo il sistema formato da:

- le condizioni di esistenza della disequazione;
- la disequazione che si ottiene dalla disuguaglianza degli argomenti.

ESEMPIO

1. Risolviamo la disequazione $\log_5(x-1) < 2$.
Poiché $2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot \log_5 5 = \log_5 5^2 = \log_5 25$, riscriviamo la disequazione:

$$\log_5(x-1) < \log_5 25.$$

Dobbiamo risolvere il sistema:

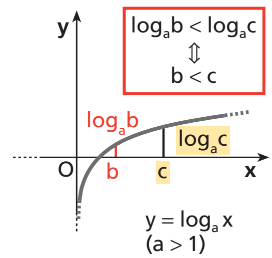
$$\begin{cases} x-1>0 & \text{condizione di esistenza} \\ x-1<25 & \text{disuguaglianza fra gli argomenti, con lo stesso verso di quella fra i logaritmi (base maggiore di 1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>1 \\ x<26 \end{cases}$$

Le soluzioni della disequazione di partenza sono:

$$1 < x < 26.$$

- Se $a > 1$, allora



Per esempio,
$\log_2 8 < \log_2 32 \Leftrightarrow 8 < 32$.

2. Risolviamo la disequazione $\log_{\frac{1}{3}}(x-4) > \log_{\frac{1}{3}} 5x$.

Dobbiamo risolvere il sistema:

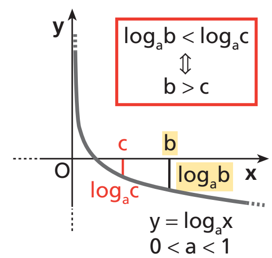
$$\begin{cases} x-4>0 & \text{condizione di esistenza del primo logaritmo} \\ 5x>0 & \text{condizione di esistenza del secondo logaritmo} \\ x-4<5x & \text{disuguaglianza fra gli argomenti, di verso contrario a quella fra i logaritmi (base compresa fra 0 e 1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>4 \\ x>0 \\ -4x<4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>4 \\ x>0 \\ x>-1 \end{cases} \rightarrow \quad x>4$$

Le soluzioni della disequazione di partenza sono:

$$x > 4.$$

- Se $0 < a < 1$, allora



Per esempio,
$\log_{\frac{1}{2}} 16 < \log_{\frac{1}{2}} 8 \Leftrightarrow 16 > 8$.

10. I LOGARITMI E LE EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Le equazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

Alcune equazioni esponenziali si possono risolvere mediante i logaritmi.

IN PRATICA
▶ Videolezione 29

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione

$$7 \cdot 5^{2x} = 3^{x+1}.$$

Poiché entrambi i membri dell'equazione sono numeri positivi, possiamo applicare il logaritmo in base 10 e trovare un'equazione equivalente:

$$\log(7 \cdot 5^{2x}) = \log 3^{x+1} \rightarrow \log 7 + 2x \log 5 = (x+1)\log 3 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x \log 5 - x \log 3 = \log 3 - \log 7 \rightarrow$$
$$\rightarrow x(2\log 5 - \log 3) = \log 3 - \log 7 \rightarrow x = \frac{\log 3 - \log 7}{2\log 5 - \log 3}.$$

● Possiamo usare logaritmi in una base qualsiasi, purché sia la stessa per entrambi i membri. Per semplicità useremo i logaritmi in base 10.

● Con questo metodo non possiamo risolvere equazioni come $1 + 5^{2x} = 3^{x+1}$. Infatti essa è equivalente a $\log(1 + 5^{2x}) = \log 3^{x+1}$, ma non riusciamo a semplificare $\log(1 + 5^{2x})$ usando le proprietà dei logaritmi, perché nell'argomento compare una somma e non un prodotto!

● L'equazione

$$1 + 5^{2x} = 3^{x+1}$$

si può risolvere con il metodo grafico, che esamineremo negli esercizi.

Le disequazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

I logaritmi sono utili anche per risolvere disequazioni esponenziali come quella del seguente esempio.

ESEMPIO

Per risolvere la disequazione

$$\frac{6^{x-3}}{4} < 2 \cdot 5^{3x},$$

applichiamo il logaritmo in base 10 a entrambi i membri. Poiché la base è 10 (maggiore di 1), se $a < b$, allora $\log a < \log b$:

$$\log \frac{6^{x-3}}{4} < \log(2 \cdot 5^{3x}) \rightarrow (x-3)\log 6 - \log 4 < \log 2 + 3x \log 5 \rightarrow$$
$$\rightarrow x \log 6 - 3x \log 5 < 3\log 6 + \log 4 + \log 2 \rightarrow$$
$$\rightarrow x(\log 6 - 3\log 5) < 3\log 6 + \log 4 + \log 2.$$

Osserviamo che $\log 6 - 3\log 5 < 0$ e quindi cambiamo il verso della disuguaglianza:

$$x > \frac{3\log 6 + \log 4 + \log 2}{\log 6 - 3\log 5}.$$

● $\log 6 - 3\log 5 < 0$ perché è equivalente a

$$\log 6 < 3\log 5$$
$$\log 6 < \log 5^3$$
$$6 < 5^3.$$

● **La risoluzione grafica di equazioni e disequazioni**

Negli esercizi vedremo come è possibile utilizzare il metodo grafico per ottenere le soluzioni (almeno in modo approssimato) di equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche.

ESPLORAZIONE

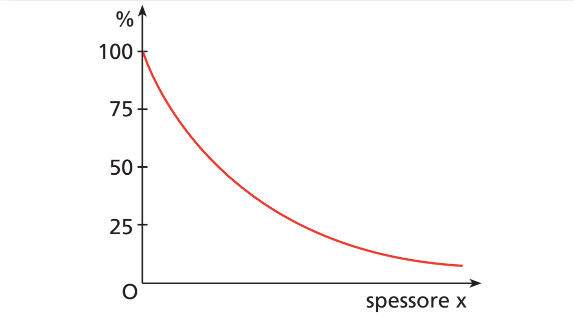
Esponenziale e medicina

La materia assorbe le radiazioni

I raggi X sono radiazioni elettromagnetiche invisibili all'occhio umano: sono fortemente energetiche, a frequenza molto alta. Tutte le onde elettromagnetiche, nell'attraversare uno strato di materia, vengono in parte assorbite, in parte trasmesse. Pertanto, l'intensità I trasmessa al di là dello strato risulta inferiore all'intensità I_0 del raggio incidente.
L'intensità trasmessa dipende dallo spessore x di materia attraversata, secondo una legge esponenziale (**legge dell'assorbimento della radiazione**):

$$I = I_0 e^{-\mu x}.$$

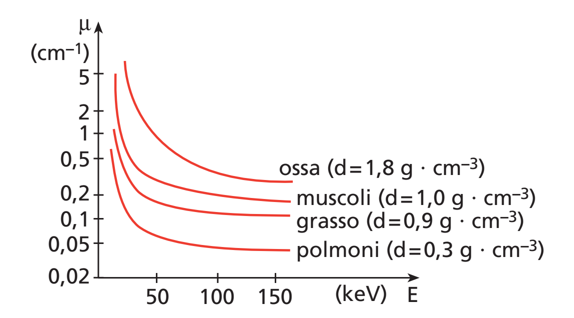
μ è un parametro, detto **coefficiente di attenuazione** o **di assorbimento**.



▲ Percentuale dell'intensità della radiazione trasmessa da uno spessore *x* di materia, rispetto a quella incidente. L'andamento è esponenziale.

Assorbimento differenziato e lastre

Il coefficiente di assorbimento dipende dall'energia del raggio incidente e dalla densità della sostanza attraversata. Le tecniche di diagnosi medica, basate sull'uso dei raggi X, sfruttano proprio il fatto che, a parità di energia del raggio incidente, l'assorbimento della radiazione è diverso a seconda della densità dei tessuti biologici attraversati. L'aria non attenua i raggi X, il grasso li assorbe pochissimo, il fegato, i muscoli e i reni un po' di più. Le ossa, con il loro alto contenuto di sali di calcio, li trattengono quasi del tutto. Quando si fanno delle radiografie, si espone una parte del corpo a raggi X: quelli che riescono ad attraversare i tessuti, emergono dall'altra parte e impressionano una pellicola trasparente, la **lastra**. La lastra è una specie di pellicola fotografica su cui è applicata una sostanza gelatinosa (*emulsione sensibile*) che contiene un composto (un sale) di argento. Questo, dopo essere stato colpito da un raggio X e trattato con alcune sostanze chimiche (il *bagno di sviluppo*, proprio come per le fotografie), si deposita sulla pellicola sotto forma di granuli neri. Quindi la lastra rimane bianca nei punti dove le strutture più ricche di calcio (le ossa e gli organi più densi) hanno bloccato i raggi X, mentre diventa nera, o quasi, dove arrivano i raggi X che non sono stati fermati.



▲ Diverso coefficiente di assorbimento delle strutture biologiche al variare della loro densità *d*. L'assorbimento è minore man mano che l'energia *E* della radiazione aumenta.

Attività

A caccia di esponenziali

La funzione esponenziale viene usata per descrivere diversi fenomeni in fisica.

- Fai una ricerca sulle applicazioni degli esponenziali alla fisica e alle altre scienze naturali.

@ **Cerca nel Web:**

esponenziali, applicazioni, fisica, spettroscopia d'assorbimento, Lambert Beer, legge

LA RETE DI SANT'ANTONIO

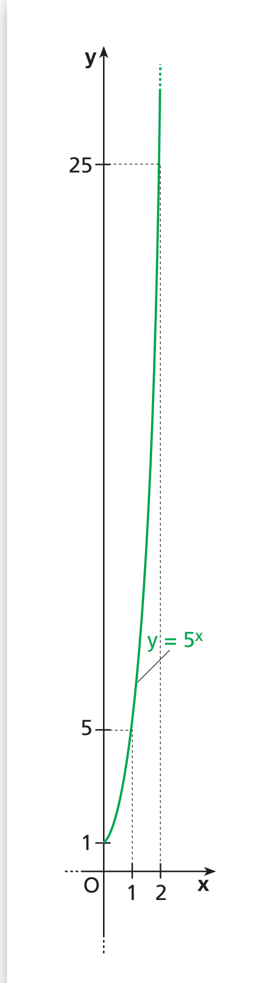
Perché le catene di Sant'Antonio non funzionano?

▶ Il quesito completo a pag. 553

Un meccanismo quasi perfetto…
Come prima cosa spedisci cinque lettere (a Giorgio, Grazia, Giovanni, Gianna e Gino) e mandi 10 euro ciascuno ad Ada, Bruno, Carla, Davide ed Elio.
Poi non devi far altro che aspettare. I tuoi cinque amici (Giorgio e gli altri) dopo un po' ti manderanno 50 euro e spediranno 5 lettere ciascuno ad altri loro amici. In tutto saranno 25 ($= 5^2$) nuove lettere.
A loro volta questi 25 amici-degli-amici ti manderanno 250 euro e spediranno… Poi ci saranno gli amici-degli-amici-degli-amici e così via… fino agli amici-degli-amici-degli-amici-degli-amici-degli-amici.
Quanti soldi riceverai in tutto? 5 volte 10 euro dagli amici, 5^2 volte dagli amici-degli-amici, poi 5^3, 5^4 e infine 5^5. In tutto $(5 + 5^2 + + 5^3 + 5^4 + 5^5) \times 10$, cioè 39 050 euro, grazie alla piccola generosità dei 3905 «amici-di-qualcuno».
Anche loro non devono far altro che aspettare il loro turno per ricevere altrettanti soldi!

Perché allora la catena non funziona?
Supponiamo che Ada sia la persona che comincia la catena. Al primo passo coinvolge 5 persone. Al secondo, 5^2. Al terzo, 5^3 e così via: dopo n passi, sono coinvolte 5^n persone. Il numero di persone coinvolte è una funzione dei passi fatti ed è esattamente l'esponenziale in base 5 di n.
Ada riceve 39 050 euro quando al quinto passo ci sono 5^5 persone che spediscono lettere. A loro volta questi 5^5 riceveranno i loro soldi al decimo passo, quello che coinvolge 5^{10} persone.
E questi 5^{10} naturalmente avranno i loro euro al passo che ne coinvolgerà 5^{15}.
Basta una calcolatrice per scoprire che 5^{15} vale 30 517 578 125, cioè circa 5 volte l'attuale numero di abitanti della Terra!
Quindi, in soli nove passi si esaurisce la possibilità concreta di ricevere soldi. Già per quelli al decimo non è possibile averne, mai.
L'esponenziale è una funzione che cresce molto velocemente e, così facendo, molto presto (dopo nove passi) il numero di persone potenzialmente coinvolte supera il numero degli abitanti della Terra.

Girano sempre gli stessi soldi
Un'alternativa è che le persone che sono già state coinvolte lo siano una seconda volta. Chi viene coinvolto di nuovo nella catena deve cominciare a restituire i soldi che ha ricevuto, ovvero la catena di Sant'Antonio fa girare sempre gli stessi soldi.
È proprio la velocità del meccanismo a far sì che dopo pochi passi servano troppe persone perché questo sia ancora conveniente per qualcuno. Infatti, il numero di persone coinvolte al passo n è 5^n e, come si vede nella figura, l'esponenziale di n con base 5 cresce molto velocemente. Lo stesso vale per ogni altra base più grande di 1.



Una catena di bontà

Perché le catene di Sant'Antonio si chiamano così? Negli anni Cinquanta del secolo scorso circolavano lettere nelle quali si chiedeva di recitare preghiere al Santo e si promettevano eventi fortunati se si fosse continuata la catena, disgrazie se la si fosse interrotta.
Sant'Antonio (raffigurato al centro del dipinto mentre fa parlare un neonato) è noto per le energie dedicate alla diffusione di atti d'amore e carità. Pensiamo per un attimo di far partire una catena ispirata ai princìpi del Santo e di chiedere che ognuno che riceva un gesto generoso lo restituisca a cinque nuove persone. Una catena così potrebbe funzionare, perché i gesti generosi non rispondono alle regole dell'economia e ciascuno di noi può farne di più di quanti ne riceve.

LABORATORIO DI MATEMATICA
I LOGARITMI

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Wiris tracciamo i grafici di $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{4}$ e di $g(x) = \log_2 f(x)$, per mostrare come l'andamento del logaritmo di una funzione possa essere ricavato da quello della funzione stessa .

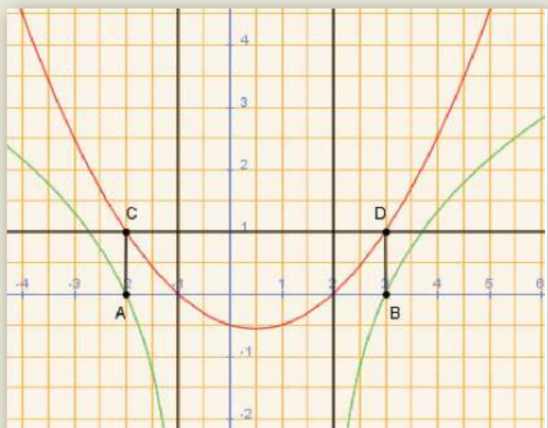
- Attiviamo Wiris e inseriamo in un nuovo blocco le espressioni delle due funzioni (figura 1).
- Scriviamo (figura 1) ed eseguiamo le istruzioni per tracciare il loro grafico, uno in rosso, l'altro in verde (figura 2).
- Prepariamo, quindi, le istruzioni per tracciare i punti A, B, C, D e i segmenti AC e BD (figura 1) e le eseguiamo, per ottenere il disegno di figura 2.
- Osservando il grafico e tenendo conto delle caratteristiche dei logaritmi, costruiamo la tabella sotto, che esprime i legami fra gli andamenti della $f(x)$ e della $g(x)$.

```
f(x) = (x^2 - x - 2)/4 ;
g(x) = log_2 (f(x)) ;
tracciante( punto(0.50,2), 12, 12) ;
tracciare(f(x), {colore = rosso}) ;
tracciare(g(x), {colore = verde}) ;
[A := punto(-2,0), B := punto(3,0)] ;
[C := punto(-2,1), D := punto(3,1)] ;
[s1 := segmento(A,C), s2 := segmento(B,D)] ;
tracciare({y = 1, A, B, C, D, s1, s2, x=-1, x = 2 }) ;
scrivere("A", punto(-2.20, -0.40)) ;
scrivere("B", punto(3.10, -0.40)) ;
scrivere("C", punto(-2.00, 1.20)) ;
scrivere("D", punto(2.80, 1.20)) ;
```

▶ Figura 1

▼ Figura 2

x	$f(x)$	$\log_2 f(x)$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$]-\infty; -2[$	decresce	decresce
-2	1	0
$]-2; 1[$	decresce	decresce
-1	0	$-\infty$
$]-1; 2[$	negativa	non esiste
2	0	$-\infty$
$]2; 3[$	cresce	cresce
3	1	0
$]3; +\infty[$	cresce	cresce
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$



Nel sito: ▶ 2 esercitazioni guidate ▶ 36 esercitazioni in più

Esercitazioni

Con il computer traccia il grafico delle seguenti coppie di funzioni. Metti poi in evidenza, nel modo che ti permette lo strumento informatico che stai usando, i legami fra il grafico della $g(x)$ e quello della $f(x)$.

1 $f(x) = x + 10$ e $g(x) = \log_{10} f(x)$

2 $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = \ln f(x)$

3 $f(x) = \frac{10x}{x-1}$ e $g(x) = \log_{10} f(x)$

4 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{5}$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$

5 $f(x) = -x^2 + 4x$ e $g(x) = \log_{10} f(x)$

6 $f(x) = |4x - 4|$ e $g(x) = \log_2 f(x)$

7 $f(x) = \sqrt{x+4}$ e $g(x) = \log_2 f(x)$

8 $f(x) = e^{-x^2+4}$ e $g(x) = \ln f(x)$

LA TEORIA IN SINTESI
ESPONENZIALI E LOGARITMI

1. LE POTENZE CON ESPONENTE REALE

- Una potenza con esponente reale è:

  a^x, con $a \in \mathbb{R}^+$ e $x \in \mathbb{R}$.

  ESEMPIO: $(\sqrt{2})^{-2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}, (\sqrt{5})^{\sqrt{2}}$ sono potenze con esponente reale.

  La base di a^x è dunque sempre positiva, mentre l'esponente può essere anche negativo o nullo; il risultato è sempre un numero positivo.
  Casi particolari:

  - $1^x = 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$;
  - $0^x = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+$;
  - $a^0 = 1, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}^+$.

  Valgono le cinque proprietà delle potenze e il seguente teorema:

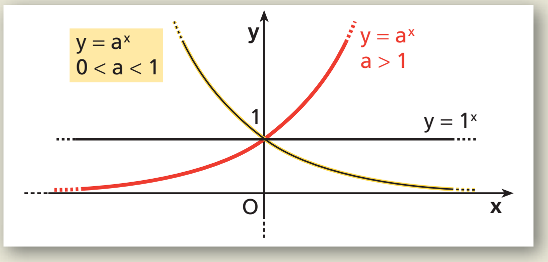
  - $a > 1, \qquad x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$;
  - $0 < a < 1, \qquad x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$.

2. LA FUNZIONE ESPONENZIALE

- **Funzione esponenziale**: ogni funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$ del tipo

  $y = a^x$, con $a \in \mathbb{R}^+$.

- Se $a \neq 1$, la funzione esponenziale è o **sempre crescente** o **sempre decrescente**.



3. LE EQUAZIONI ESPONENZIALI

- **Equazione esponenziale**: contiene almeno una potenza in cui compare l'incognita nell'esponente.
  L'equazione esponenziale più semplice è del tipo:

  $a^x = b$, con $a > 0$.

  Quando l'equazione è determinata ($a \neq 1, b > 0$), può essere **risolta in modo immediato** se si riescono a scrivere a e b come potenze con la stessa base.

  ESEMPIO: $27^x = 81 \ \rightarrow\ 3^{3x} = 3^4 \ \rightarrow\ 3x = 4 \ \rightarrow\ x = \frac{4}{3}$.

4. LE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

- **Disequazione esponenziale**: contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.
  Per risolvere le disequazioni esponenziali si tiene conto che:

  - se $a > 1$ e $a^x > a^y$, allora $x > y$;
  - se $0 < a < 1$ e $a^x > a^y$, allora $x < y$.

  ESEMPIO: **1.** $2^{2x} > 2^3 \ \rightarrow\ 2x > 3 \ \rightarrow\ x > \frac{3}{2}$.
  2. $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^5 \ \rightarrow\ x < 5$.

5. LA DEFINIZIONE DI LOGARITMO

- **Logaritmo in base *a* di *b***: dati due numeri reali positivi a e b, con $a \neq 1$, è l'esponente da assegnare ad a per ottenere b.

$$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$$

base

con $a > 0 \wedge a \neq 1, b > 0$

Casi particolari:
- $\log_a 1 = 0$, perché $a^0 = 1$;
- $\log_a a = 1$, perché $a^1 = a$.

- **Proprietà**
  - $a^{\log_a b} = b$.
  - $x = y \Leftrightarrow \log_a x = \log_a y$.

6. LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

Se $a > 0 \wedge a \neq 1$, valgono le seguenti proprietà:

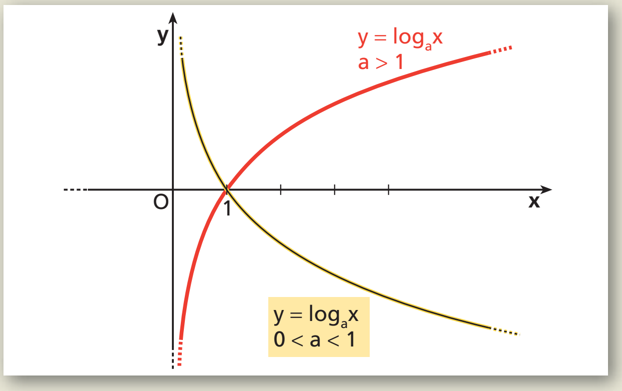
- **1. Logaritmo di un prodotto**:
  $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \; (b > 0, c > 0)$.
  2. Logaritmo di un quoziente:
  $$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \; (b > 0, c > 0).$$
  3. Logaritmo di una potenza:
  $\log_a b^n = n \cdot \log_a b \; (b > 0, n \in \mathbb{R})$.

- I logaritmi **in base 10** si indicano con il simbolo **log**, quelli **in base *e*** con **ln**.

- Logaritmi di **diversa base**:
  $$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, a \neq 1, c \neq 1, a > 0, b > 0, c > 0.$$

7. LA FUNZIONE LOGARITMICA

- **Funzione logaritmica**: è una funzione da $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$ del tipo
  $$y = \log_a x, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}^+ \text{ e } a \neq 1.$$



8. LE EQUAZIONI LOGARITMICHE

- **Equazione logaritmica**: l'incognita compare nell'argomento di almeno un logaritmo.

ESEMPIO: $\log(x-7) = 1$.

Risoluzione
C.E.: $x - 7 > 0 \rightarrow x > 7$;
$\log(x-7) = \log 10$;
$x - 7 = 10 \rightarrow x = 17$;
$17 > 7 \Rightarrow 17$ è soluzione accettabile.

9. LE DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

- Fra le **disequazioni logaritmiche** consideriamo quelle del tipo:
  $$\log_a A(x) < \log_a B(x).$$

- **Risoluzione.**
  Teniamo conto che:
  - per $a > 1$, se $\log_a b < \log_a c$, allora $b < c$;
  - per $0 < a < 1$, se $\log_a b < \log_a c$, allora $b > c$;

  e risolviamo il sistema formato da:
  - le condizioni di esistenza della disequazione;
  - la disequazione che si ottiene dalla disuguaglianza degli argomenti.

ESEMPIO: $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) < \log_{\frac{1}{3}} 3$.

$$\begin{cases} x - 2 > 0 & \text{C.E.} \\ x - 2 > 3 & \text{disuguaglianza fra gli argomenti, con verso opposto rispetto a quella fra i logaritmi } \left(0<\frac{1}{3}<1\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x > 5 \end{cases} \rightarrow \quad x > 5.$$

10. I LOGARITMI E LE EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

- Alcune equazioni e disequazioni esponenziali si possono risolvere mediante i logaritmi.

ESEMPIO: $2 \cdot 6^x = 5$
$\log 2 + x \log 6 = \log 5$
$$x = \frac{\log 5 - \log 2}{\log 6}.$$

1. LE POTENZE CON ESPONENTE REALE

▶ Teoria a pag. 554

Le potenze con esponente intero o razionale

1 Fra le seguenti potenze con esponente razionale elimina quelle prive di significato e spiega il motivo della tua scelta.

$(2\pi)^{-44}$; $\quad(-2)^{\frac{1}{8}}$; $\quad(-3)^{-2}$; $\quad(9-3^2)^0$; $\quad(\sqrt[4]{5})^{-\frac{2}{7}}$; $\quad 0^{-2}$.

2 Tenendo presente che $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$, scrivi le seguenti potenze con esponente razionale sotto forma di radice.

a) $3^{\frac{5}{8}}$; $\quad 4^{\frac{2}{3}}$; $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$;

b) $2^{-\frac{4}{3}}$; $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{4}{3}}$; $\quad \left(\frac{11}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}$.

$\left[\text{a) } \sqrt[8]{3^5};\ 2\cdot\sqrt[3]{2};\ \frac{\sqrt{3}}{9};\ \text{b) } \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}};\ 4\cdot\sqrt[3]{4};\ \sqrt[5]{\frac{9}{121}}\right]$

3 Scrivi le seguenti radici sotto forma di potenza con esponente razionale.

a) $\sqrt[6]{2^5}$; $\quad \sqrt[4]{243}$; $\quad \sqrt[4]{0,25}$;

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\quad \sqrt[19]{\frac{1}{256}}$; $\quad \sqrt[7]{\frac{1}{125}}$.

$\left[\text{a) } 2^{\frac{5}{6}};\ 3^{\frac{5}{4}};\ 2^{-\frac{1}{2}};\ \text{b) } 2^{-\frac{1}{2}};\ 2^{-\frac{8}{19}};\ 5^{-\frac{3}{7}}\right]$

Calcola il valore delle seguenti potenze con esponente razionale.

4 $4^{-\frac{1}{2}}$; $\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$; $\quad \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$; $\quad \sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}}}$. $\quad \left[\frac{1}{2};\ \frac{2}{9}\sqrt{6};\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right]$

5 $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $\quad 27^{-\frac{1}{3}}$; $\quad 64^{\frac{1}{3}}$; $\quad 125^{-\frac{1}{3}}$. $\quad \left[4;\ \frac{1}{3};\ 4;\ \frac{1}{5}\right]$

6 $\left(\sqrt[3]{\frac{25}{4}}\right)^{-\frac{3}{2}}$; $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$; $\quad \left(\frac{4}{9}\right)^{0,25}$; $\quad (\sqrt{5})^{-\frac{1}{2}}$. $\quad \left[\frac{2}{5};\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{6}}{3};\ \frac{\sqrt[4]{125}}{5}\right]$

Le potenze con esponente reale

7 Per ognuna delle seguenti potenze con esponente irrazionale, scrivi i primi cinque termini delle successioni che la approssimano per difetto e per eccesso.

$10^{\sqrt{3}}$; $\quad 5^{\pi}$; $\quad 3^{\sqrt{5}}$; $\quad \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$; $\quad 3^{\pi-1}$.

8 Indica quali fra le seguenti scritture hanno significato, ossia rappresentano potenze con esponente reale.

a) $-5^{\sqrt{3}}$; $\quad$ b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{1+\sqrt{2}}$; $\quad$ c) $(\sqrt{5}+1)^{\pi}$; $\quad$ d) $(1-\sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$; $\quad$ e) $1^{\sqrt{3}}$. $\quad$ [a; c; e]

9 Determina per quali valori di a le seguenti scritture hanno significato.

a) $a^{\sqrt{2}+1}$; $\quad$ b) $(a^2+1)^{\pi}$; $\quad$ c) $\left(\frac{2a}{a-3}\right)^{\sqrt{3}}$; $\quad$ d) $a^{\sqrt{a-1}}$; $\quad$ e) $(-a)^a$.

[a) $a \geq 0$; b) $\forall a \in \mathbb{R}$; c) $a \leq 0 \vee a > 3$; d) $a \geq 1$; e) $a < 0$]

10 Metti in ordine crescente i seguenti numeri.

$3^{-\frac{1}{2}}$, $\quad -3^{\sqrt{2}}$, $\quad -3^{\frac{1}{2}}$, $\quad -3^{\pi}$, $\quad 3^{-1}$, $\quad 3^{-\sqrt{3}}$.

Indica quali valori possono assumere le variabili affinché le seguenti espressioni rappresentino potenze reali con esponenti reali.

11 $(x+4)^{\pi}$; $(4-|x|)^{x}$; $\left(\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3}}$. $[x \geq -4; -4 < x \leq 4; x > 0]$

12 $(\sqrt{x+2})^{\frac{1}{x}}$; x^{x}; $(x+3)^{\frac{1}{x}}$. $[x > -2 \wedge x \neq 0; x > 0; x > -3 \wedge x \neq 0]$

13 $(\sqrt{a^2+2}-3a)^{x}$; $\left(\frac{2-x}{x}\right)^{\sqrt{2}}$. $\left[a < \frac{1}{2}; 0 < x \leq 2\right]$

14 $\left(\frac{\sqrt{a^2+3}-2a}{a+1}\right)^{x}$; $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a^2-1}}{1-a}\right)^{2-x}$. $[-1 < a < 1; \text{imp.}]$

Le proprietà delle potenze con esponente reale

VERO O FALSO?

15
a) $4^{\frac{1}{x}} = 4^{-x}$ V F
b) $-8^{x} = (-8)^{x}$ V F
c) $6^{x^2} = (6^{x})^{2}$ V F
d) $|-2|^{x} = |2^{x}|$ V F
e) $5^{x} + 5^{y} = 5^{x+y}$ V F

16
a) $\frac{1}{3^{x}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ V F
b) $a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}}, \forall a \in \mathbb{R}^{+}$ V F
c) $0^{x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ V F
d) $a^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}, \forall a \in \mathbb{R}^{+}$ V F
e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{0} = 1$ V F

17
a) $7^{x-1} = 7^{x} - 1$ V F
b) $(3^{x})^{2} = 3^{x^2}$ V F
c) $5^{x-2} \cdot \frac{1}{25} = 5^{x-4}$ V F
d) $8^{1+3x} = 2^{3+3x}$ V F
e) $(a^{3})^{x} \cdot \frac{1}{(a^{2})^{x}} = a$ V F

18
a) $5^{2x-1} = \frac{25^{x}}{5}$ V F
b) $\sqrt[5]{64^{x}} = 2^{\frac{6}{5}x}$ V F
c) $\sqrt{2\sqrt{4^{x}}} = 8^{\frac{x}{2}}$ V F
d) $9 \cdot 3^{2x+1} = 27 \cdot 9^{x}$ V F
e) $\sqrt{64^{2x}} = 8^{x}$ V F

Semplifica le seguenti espressioni, applicando le proprietà delle potenze.

19 $2^{3} \cdot 2^{\sqrt{5}}$; $3^{\sqrt{5}} \cdot 3^{\sqrt{20}}$; $2^{\sqrt{3}} \cdot 3^{\sqrt{3}}$; $(5^{4\pi} : 5^{4}) \cdot 5^{\pi}$; $(((6^{\sqrt{2}})^{2})^{\sqrt{2}})^{-1}$; $((5)^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}$.

$\left[2^{3+\sqrt{5}}; 3^{3\cdot\sqrt{5}}; 6^{\sqrt{3}}; 5^{5\pi-4}; \left(\frac{1}{6}\right)^{4}; 25\right]$

20 $(2^{x} \cdot 2^{3})^{x}$; $\sqrt{a} \cdot a^{3x}$; $a \cdot \frac{\sqrt[5]{a^{x}}}{\sqrt[15]{a^{x}}}$; $\left(\frac{a^{4x}}{\sqrt{a}}\right)^{3} \cdot \sqrt[4]{a^{x}}$; $\left(\frac{\sqrt{a}}{a}\right)^{3x} : \left(\frac{\sqrt[5]{a}}{a^{3}}\right)^{2x}$.

$\left[2^{x^2+3x}; a^{3x+\frac{1}{2}}; a^{\frac{15+2x}{15}}; a^{\frac{49x-6}{4}}; a^{\frac{41}{10}x}\right]$

21 $(3^{-2x} \cdot 3^{3}) : 3^{x}$; $\left(\frac{2^{x}}{4^{2x}}\right)^{3}$; $\sqrt{\frac{9^{x+1}}{3^{4x}}}$; $2^{x} \cdot 4^{x+1} \cdot 16^{x+2}$; $3^{-x} \cdot 9^{-\frac{1}{2}x}$; $(3^{-2x+1} \cdot \sqrt[7]{9^{x}})^{3}$.

$\left[3^{-3x+3}; 2^{-9x}; 3^{1-x}; 2^{7x+10}; 3^{-2x}; 3^{\frac{-36x+21}{7}}\right]$

22 **COMPLETA** inserendo il simbolo $>$ oppure $<$ fra le seguenti coppie di numeri.

a) $3^{2\pi} \ldots 3^{6}$; $2^{\sqrt{5}} \ldots 2^{\frac{5}{2}}$; $\left(\frac{5}{6}\right)^{\sqrt{7}} \ldots \left(\frac{5}{6}\right)^{\sqrt{5}+1}$; $1{,}12^{3} \ldots 3^{1{,}12}$.

b) $4^{0{,}15} \ldots 4^{0{,}25}$; $0{,}12^{6} \ldots 0{,}12^{5}$; $0{,}6^{\sqrt{5}} \ldots 0{,}6^{3}$; $0{,}31^{\sqrt{3}} \ldots 0{,}31^{\sqrt{7}}$.

2. LA FUNZIONE ESPONENZIALE

Teoria a pag. 557

23 Costruisci per punti il grafico delle seguenti funzioni.

a) $y = 3^x$; b) $y = 5^x$; c) $y = 2{,}5^x$; d) $y = 0{,}4^x$; e) $y = 1^x$.

Su uno stesso piano cartesiano disegna ciascuna coppia di funzioni esponenziali assegnando alla x alcuni valori scelti a piacere.

24 $y = 3^x$ e $y = 3^{2x}$.

25 $y = 2^x$ e $y = 2^{x-1}$.

26 $y = 3^x$ e $y = 3^x - 1$.

27 Disegna il grafico delle funzioni $y = 2^x$, $y = 4^x$, $y = 5^x$ in uno stesso piano cartesiano. Che cosa puoi dedurre dal confronto dei tre grafici?

28 Come nell'esercizio precedente, ma con le funzioni $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

29 Quale delle seguenti funzioni cresce più rapidamente? Motiva la risposta.

a) $y = 4^x$; b) $y = (\sqrt{3})^x$.

30 Indica quali delle seguenti equazioni definiscono una funzione esponenziale, motivando la risposta.

$y = 4^{-x}$, $y = (-4)^x$, $y = -4^x$, $y = 1^x$, $y = (-1)^x$.

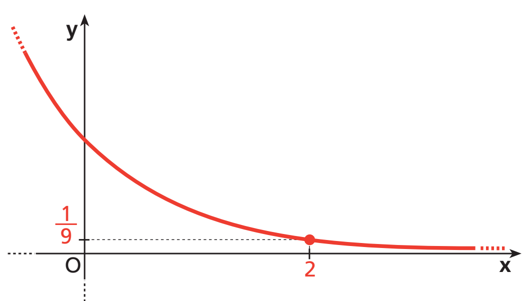
31 Disegna i grafici delle funzioni $y = 2^{-x}$ e $y = -2^x$.

32 Rappresenta le seguenti funzioni in uno stesso piano cartesiano. Che cosa puoi notare?

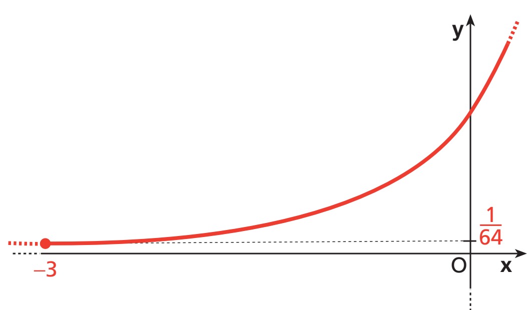
$y = 2^x$, $y = 2^{x+1}$, $y = 2^x + 1$.

Nelle figure sono disegnati i grafici di funzioni esponenziali. Scrivi le equazioni corrispondenti.

33



34



35 **VERO O FALSO?**

a) $y = (2 - \sqrt{3})^x$ è una funzione decrescente in $\mathbb{R}$. V F

b) Il grafico di $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ interseca l'asse y nel punto di ordinata 1. V F

c) La funzione $y = 4^{-x-3}$ è sempre positiva in $\mathbb{R}$. V F

d) La funzione $y = a^{x-2}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, ha come dominio $\mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}^+$. V F

e) La funzione $y = \left(\frac{a-1}{a}\right)^x$ esiste per $a < 0 \vee a > 1$ ed è crescente per $a < 0$. V F

Le trasformazioni geometriche e le funzioni esponenziali

Assegnate le seguenti funzioni, scrivi le equazioni delle funzioni ottenute da quelle date mediante una traslazione secondo il vettore indicato e traccia i loro grafici.

36 $y = 2^x$; $\quad \vec{v}(0; -1)$. $\quad [y = 2^x - 1]$

37 $y = 10^x$; $\quad \vec{v}(2; -1)$. $\quad [y = 10^{x-2} - 1]$

Disegna il grafico delle seguenti funzioni utilizzando le trasformazioni geometriche.

38 $y = 2^{x+2}$; $\quad y = 2^x + 2$.

39 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 1$; $\quad y = 2^{-x}$.

40 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $\quad y = -2^x$.

41 $y = 3^{|x|}$; $\quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$.

42 $y = 3^{\frac{x}{2}}$; $\quad y = 5 \cdot 3^x$.

43 $y = \frac{2^x}{3}$; $\quad y = \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}x}$.

44 $y = 2^{3x}$; $\quad y = 3 \cdot 2^x$.

45 $y = 4^{-x} + 1$; $\quad y = -3^x - 3$.

46 $y = 2^{x+1} - 3$; $\quad y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$.

47 $y = -3^{-x}$; $\quad y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$.

48 $y = |-2^{-x}|$; $\quad y = |2^{x+1} - 1|$.

49 $y = 2 \cdot 3^{-x}$; $\quad y = 4 \cdot 2^x - 1$.

50 $y = -2^{|x|}$; $\quad y = |2^{x+2}|$.

51 $y = -3^{|x|}$; $\quad y = -\left|\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1\right|$.

52 $y = |1 - 4^x| - 1$; $\quad y = \frac{6^{x+1}}{3^x} + 1$.

53 $y = 2^{-x} + \frac{x}{|x|}$; $\quad y = 3^{|x|-2} + 1$.

54 $y = 2 - 4^{|x|}$; $\quad y = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{1-|x|}$.

55 $y = \sqrt{2^x - 1}$; $\quad y = \frac{1}{2^x - 1}$.

56 $y = \sqrt{-2^{-x} + 1}$; $\quad y = \frac{1}{3^{-x} - 1}$.

57 $y = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $\quad y = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$.

58 $y = |2 - 2^{|x|}| + 1$; $\quad y = 2^{-|x|} - 3$.

59 $y = 2^{|x-2|}$; $\quad y = 2^{|x|-2}$.

60 $y = 3^{\frac{|x|}{x}} - 3^x$; $\quad y = \left|-\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right|$.

61 Data la funzione f di equazione $y = 2^{x-1}$, determina l'equazione della sua trasformata f' che si ottiene mediante la dilatazione di equazioni $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 4y \end{cases}$. Disegna il grafico di f'. $\quad \left[y = 4\left(2^{\frac{x}{3}-1}\right)\right]$

62 Determina l'equazione della funzione il cui grafico è simmetrico di quello della funzione $y = 2^{x-1}$ rispetto alla retta $y = -4$. Trasla poi il grafico ottenuto secondo il vettore $\vec{v}(-3; -4)$ e scrivi l'equazione della sua funzione. $\quad [y = -(2^{x-1} + 8); y = -(2^{x+2} + 12)]$

63 Determina l'espressione analitica e traccia il grafico della funzione che si ottiene dalla funzione $y = 2^x$ applicando la traslazione di vettore $\vec{v}(2; -1)$ e, al risultato, la simmetria rispetto al punto $(1; -4)$. $\quad [y = -2^{-x} - 7]$

64 Alla funzione $y = 3^x$ applica la simmetria rispetto all'asse y e poi rispetto alla retta di equazione $y = -1$ e infine la traslazione di vettore $\vec{v}(2; 4)$. Scrivi l'equazione della funzione ottenuta e disegna il suo grafico. $\quad [y = -3^{2-x} + 2]$

Il dominio di funzioni contenenti funzioni esponenziali

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

65 $y = 2^{\sqrt{x-1}}$ $[x \geq 1]$

66 $y = \frac{1}{2} \cdot 3^x + 4^{\frac{1}{x}}$ $[x \neq 0]$

67 $y = 2^{\frac{x}{x^2-1}}$ $[x \neq \pm 1]$

68 $y = \sqrt{4^x}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

69 $y = \frac{4}{3^x}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

70 $y = 3^{\frac{x-1}{x^3-4x}}$ $[x \neq \pm 2 \wedge x \neq 0]$

71 $y = \frac{5^{\frac{1}{x}}}{x^2-4}$ $[x \neq 0 \wedge x \neq \pm 2]$

72 $y = \sqrt{2^x} - \sqrt{x+2}$ $[x \geq -2]$

73 $y = \sqrt{-3^{-x}}$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

74 $y = 4^{\sqrt{3-|x|}}$ $[-3 \leq x \leq 3]$

75 $y = x^{2x}$ $[x > 0]$

76 $y = (2x-1)^{\pi}$ $\left[x \geq \frac{1}{2}\right]$

77 $y = (\sqrt{x+4})^{\sqrt{2}+1}$ $[x \geq -4]$

78 $y = \frac{1}{(x-3)^{\sqrt{3}}}$ $[x > 3]$

79 $y = (2-4x)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\left[x \leq \frac{1}{2}\right]$

80 $y = (x-2)^{\sqrt{4-x}}$ $[2 < x \leq 4]$

81 $y = \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{x}}$ $[x < -1 \vee x > 1]$

82 $y = (\sqrt{2}+x)^{\frac{1}{|x|-1}}$ $[x > -2 \wedge x \neq \pm 1]$

83 $y = (\sqrt{4-x^2})^{\sqrt{x}}$ $[0 \leq x < 2]$

84 $y = (x - \sqrt{x^2-2x})^x$ $[x \geq 2]$

85 $y = (\sqrt{2x} - x)^{-\sqrt{2}}$ $[0 < x < 2]$

86 $y = \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^{\sqrt{x+3}}$ $[-3 \leq x < -1 \vee 0 < x < 1]$

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni, indicando per ciascuna il dominio e il codominio.

87 $y = \frac{1}{3^x - 1}$ $[x \neq 0;\ y < -1 \vee y > 0]$

88 $y = \sqrt{2^x + 1}$ $[\forall x \in \mathbb{R};\ y > 1]$

89 $y = \frac{3^x+1}{3^x}$ $[\forall x \in \mathbb{R};\ y > 1]$

90 $y = (2^x - 1)^2$ $[\forall x \in \mathbb{R};\ y \geq 0]$

91 $y = \left|1 - \left(\frac{1}{3}\right)^x\right|$ $[\forall x \in \mathbb{R};\ y \geq 0]$

92 $y = \frac{|x|}{x} + 3^x$ $[x \neq 0; -1 < y < 0 \vee y > 2]$

93 $y = \frac{1}{\sqrt{3^x - 1}}$ $[x > 0;\ y \geq 0]$

94 $y = 2^{|2+x|}$ $[\forall x \in \mathbb{R};\ y \geq 1]$

95 Indica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste la funzione

$$y = \left(\frac{a^2-4}{11-2a}\right)^x$$

e per quali valori di a la funzione è crescente. Assegna poi ad a i valori $-5, 3, 4$ e rappresenta, se è possibile, le funzioni ottenute.

$\left[a < -2 \vee 2 < a < \frac{11}{2};\ a < -5 \vee 3 < a < \frac{11}{2}\right]$

Determina per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono crescenti.

96 $y = \left(\frac{2a+3}{a-1}\right)^x$ $[a < -4 \vee a > 1]$

97 $y = (2a^2 + 5a - 2)^x$ $\left[a < -3 \vee a > \frac{1}{2}\right]$

98 $y = (10 - a^2)^x$ $[-3 < a < 3]$

99 $y = \left(\frac{a^2+3a+1}{a+1}\right)^x$ $[-2 < a < -1 \vee a > 0]$

Calcola per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono decrescenti.

100 $y = (1 - 2a)^x$ $\left[0 < a < \frac{1}{2}\right]$

101 $y = \left(\frac{2-a}{a+2}\right)^x$ $[0 < a < 2]$

102 $y = (\sqrt{2a} - 3)^x$ $\left[\frac{9}{2} < a < 8\right]$

103 $y = (a^2 + 2a - 2)^x$ $[-3 < a < -1 - \sqrt{3} \vee -1 + \sqrt{3} < a < 1]$

3. LE EQUAZIONI ESPONENZIALI

▶ Teoria a pag. 560

IN PRATICA
▶ Videolezione 25

104 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $2^x + 1 = 0$ è impossibile. V F

b) L'equazione $5^{2-x} - \frac{1}{5} = 0$ ha per soluzione 3. V F

c) $\forall x \in \mathbb{R}$ è soluzione di $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$. V F

d) $2^{-x} + 2^x = 0$ è un'equazione impossibile. V F

e) $2 \cdot 4^{x-1} = 0$ ha per soluzione 1. V F

I due membri si possono scrivere come potenze di uguale base

105 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo le seguenti equazioni:

a) $3^x = \frac{\sqrt{3}}{9}$; **b)** $75 \cdot 5^{3x-2} - 5^{3x+1} = -50$; **c)** $6 \cdot 2^{x+3} = 4 \cdot 7^x - 2^x$.

a) Poiché $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$, l'equazione diventa:

$$3^x = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^2}.$$

Applichiamo la seconda proprietà delle potenze:

$$3^x = 3^{\frac{1}{2}-2} \to 3^x = 3^{-\frac{3}{2}}.$$

Se due potenze di ugual base sono uguali, devono essere uguali anche i loro esponenti, quindi:

$$x = -\frac{3}{2}.$$

b) Per le proprietà delle potenze:

$$75 \cdot \frac{5^{3x}}{25} - 5 \cdot 5^{3x} = -50 \to 3 \cdot 5^{3x} - 5 \cdot 5^{3x} = -50.$$

Raccogliamo 5^{3x}:

$$(3-5) \cdot 5^{3x} = -50 \quad \to \quad -2 \cdot 5^{3x} = -50.$$

Dividiamo entrambi i membri per -2:

$$5^{3x} = 25 \quad \to \quad 5^{3x} = 5^2 \quad \to \quad 3x = 2.$$

La soluzione dell'equazione data è $x = \frac{2}{3}$.

c) Applichiamo la prima proprietà delle potenze ed eseguiamo i calcoli:

$$6 \cdot 2^3 \cdot 2^x = 4 \cdot 7^x - 2^x \to 48 \cdot 2^x + 2^x = 4 \cdot 7^x \to$$
$$\to 49 \cdot 2^x = 4 \cdot 7^x.$$

Dividiamo entrambi i membri per $49 \cdot 7^x$ e applichiamo la quinta proprietà delle potenze:

$$\frac{2^x}{7^x} = \frac{4}{49} \to \left(\frac{2}{7}\right)^x = \left(\frac{2}{7}\right)^2.$$

La soluzione dell'equazione è $x = 2$.

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali.

106 $2^x = 16 \cdot \sqrt{2}$ $\left[x = \frac{9}{2}\right]$

107 $5^x = \frac{1}{25} \cdot \sqrt{5}$ $\left[x = -\frac{3}{2}\right]$

108 $3^x = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}$ $\left[x = \frac{9}{4}\right]$

109 $4^x = 2 \cdot \sqrt{2}$ $\left[x = \frac{3}{4}\right]$

110 $\sqrt[3]{5^x} = \frac{1}{3125}$ $[x = -15]$

111 $8^x \cdot \sqrt{2} = 4^x$ $\left[x = -\frac{1}{2}\right]$

112 $a^x \cdot a^{2x-1} = \frac{a^2}{\sqrt{a}}$ $(a > 0)$ $\left[x = \frac{5}{6}\right]$

113 $2^x = 8 \cdot \sqrt{2}$ $\left[x = \frac{7}{2}\right]$

114 $\sqrt[3]{5^x} = 25$ $[x = 6]$

115 $3^x \cdot 27 = 9^{2x}$ $[x = 1]$

116 $t^2 \cdot t^{x+1} = \frac{t^{6x}}{t^5}$ $(t > 0)$ $\left[x = \frac{8}{5}\right]$

117 $2^x + 9 \cdot 2^x = 40$ $[x = 2]$

118 $3 \cdot 4^x + \frac{7}{4} \cdot 4^x = 19 \cdot \sqrt{2}$ $\left[x = \frac{5}{4}\right]$

119 $5 \cdot 2^x + 2^{x-3} = 328$ $[x = 6]$

120 $9^{x+2} = \sqrt[3]{3^{x+7}}$ $[x = -1]$

121 $4^{2x+1} = 8^{2x-1}$ $\left[x = \frac{5}{2}\right]$

122 $8^{x-1} = \sqrt[3]{2^{x-3}}$ $\left[x = \frac{3}{4}\right]$

123 $3 \cdot 5^x + 5^{x+1} = 8 \cdot 5^3$ $[x = 3]$

124 $3^{x+2} = 2^{2x+4}$ $[x = -2]$

125 $4^{x+1} + 3^x = 0$ [impossibile]

126 $26 \cdot 2^x = 4 \cdot 5^x + 2^x$ $[x = 2]$

127 $21 \cdot 3^x - 2^{x+3} = 3^{x+1}$ $[x = -2]$

128 $6 \cdot 3^{x+2} + 64 \cdot 2^{x-2} = 5 \cdot 3^{x+3}$ $[x = -4]$

129 $3^x - 3^{x-2} + 3^{x+1} = 35$ $[x = 2]$

130 $5^x \cdot 25^x = \frac{1}{5}$ $\left[x = -\frac{1}{3}\right]$

131 $3^x - 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}} = 0$ $\left[x = \frac{21}{10}\right]$

132 $3^{3(x+2)} = 9^{\frac{1}{x}+1}$ $\left[x = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{3}\right]$

133 $2^x + 2^{x+1} = -2^{x-1} + 7$ $[x = 1]$

134 $\frac{2^x \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x+2}}{8 \cdot 2^{x+3}} = \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$ $\left[x = \frac{28}{15}\right]$

135 $\frac{4^{2-x} \cdot 2^{x+3}}{16^x} = \frac{1}{8}$ $[x = 2]$

136 $\sqrt{27\sqrt{9^x}} = 3^{x-2} \cdot 27$ $[x = 1]$

137 $\frac{8^{2-x}}{2^{2+x}} = \frac{16^{2x-1}}{4^x}$ $\left[x = \frac{4}{5}\right]$

138 $3^{x+\frac{1}{2}} - 3^x = 9 \cdot (\sqrt{3} - 1)$ $[x = 2]$

139 $(\sqrt{2})^x + (\sqrt{2})^{x-1} = 2(\sqrt{2} + 1)$ $[x = 3]$

140 $3^{2-x} + 3^{3-x} = 12$ $[x = 1]$

141 $8^{x-\frac{2}{3}} = \sqrt{2^{x+1}}$ $[x = 1]$

142 $4^x + (2^x)^2 - 2^{2(x-2)} = 124$ $[x = 3]$

143 $7^x + 49^{\frac{x}{2}} = 2 \cdot \sqrt[5]{343}$ $\left[x = \frac{3}{5}\right]$

144 $4^{2x-1} - 4^{2x+1} + 3 \cdot 2^{4x} = -\frac{3}{2}$ $\left[x = \frac{1}{4}\right]$

Utilizziamo un'incognita ausiliaria

145 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo l'equazione:

$$6 \cdot 3^x - 3^{2-x} = 15.$$

Applichiamo la seconda proprietà delle potenze $(a^x : a^y = a^{x-y})$ al termine 3^{2-x}:

$$6 \cdot 3^x - \frac{9}{3^x} = 15.$$

Poniamo $z = 3^x$ e sostituiamo:

$$6z - \frac{9}{z} = 15.$$

Dividiamo entrambi i membri per 3 e riduciamo allo stesso denominatore che eliminiamo, essendo $z = 3^x \neq 0$:

$$\frac{2z^2 - 3}{z} = \frac{5z}{z} \rightarrow 2z^2 - 3 = 5z \rightarrow 2z^2 - 5z - 3 = 0 \rightarrow z_1 = -\frac{1}{2} \text{ e } z_2 = 3.$$

Ora risolviamo $3^x = z_1$ e $3^x = z_2$, cioè:

$3^x = -\frac{1}{2}$ impossibile perché una funzione esponenziale non può assumere valore negativo

$3^x = 3 \rightarrow x = 1.$

L'equazione data ha per soluzione $x = 1$.

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali utilizzando un'incognita ausiliaria.

146 $4^x = 2^x - 2$ $[S = \varnothing]$

147 $8 + 2^{x+1} = 2^{2x}$ $[x = 2]$

148 $9^x - 3 = 2 \cdot 3^x$ $[x = 1]$

149 $3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 3 = \frac{1}{3} \cdot 3^x$ $[x = -1 \vee x = 2]$

150 $5^{2x} - 5^x = 5^{x-2} - \frac{1}{25}$ $[x = 0 \vee x = -2]$

151 $\frac{2}{3^x - 1} = \frac{1}{3^x - 5}$ $[x = 2]$

152 $2^x + 8 = \frac{1}{4} + 2^{1-x}$ $[x = -2]$

153 $10^x + 10^{2-x} = 101$ $[x = 0 \vee x = 2]$

154 $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$ $[x = 3]$

155 $2^{x+1} + 2^{3-x} = 17$ $[x = -1 \vee x = 3]$

156 $3^x + 3^{1-x} = 4$ $[x = 0 \vee x = 1]$

157 $9^x + 9 = 10 \cdot 3^x$ $[x = 0 \vee x = 2]$

158 $2^{4x+3} + 2 = 17 \cdot 4^x$ $\left[x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{1}{2}\right]$

159 $5^x + 5^{1-x} + 6 = 0$ $[S = \varnothing]$

160 $2^x - \sqrt{2} = 4 - 2^{\frac{5}{2} - x}$ $\left[x = \frac{1}{2} \vee x = 2\right]$

161 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \frac{12}{2^x} + 32 = 0$ $[x = -2 \vee x = -3]$

162 $-2 \cdot 5^{x+2} + 25^{x+1} = 375$ $[x = 1]$

163 $5^{x+2} - 4 \cdot 5^{1-x} - 30 = -5^{2-x}$ $[x = 0 \vee x = -1]$

164 $3^x - 3^{-1} = 3(2 \cdot 3^{-x} + 8 \cdot 3^{-1})$ $[x = 2]$

165 $\frac{4}{2^x - 1} + \frac{3}{2^x + 1} = 5$ $[x = 1]$

166 $\frac{2 \cdot (3^x + 1)}{3^x} = \frac{3 \cdot (3^x + 1)}{2 \cdot 3^x + 1}$ $[S = \varnothing]$

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali applicando il metodo necessario.

167 $2^{3x} + 8^x = \sqrt[5]{2}$ $\left[x = -\frac{4}{15}\right]$

168 $2^{x+2} - 2^{x-1} - 2^{x-2} = 26$ $[x = 3]$

169 $5^x + 5^{-x-1} = \frac{6}{5}$ $[x = -1 \vee x = 0]$

170 $2 \cdot 7^x + 7^{1-x} = 3$ $[S = \varnothing]$

171 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4 \cdot 64^x = 0$ $\left[x = -\frac{5}{7}\right]$

172 $7^x \cdot \sqrt{7^x} = \frac{1}{343}$ $[x = -2]$

173 $2 \cdot 3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+2} - 8 = 1 - 3^x$ $\quad [x = 2]$

174 $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3} = \left(\frac{16}{9}\right)^{1+2x}$ $\quad \left[x = \frac{1}{5}\right]$

175 $2^{2x-1} \cdot 3^x = \frac{1}{2 \cdot 3^x}$ $\quad [x = 0]$

176 $\frac{5^{x+2} \cdot 25^{1-x}}{125^x} = \frac{1}{5}$ $\quad \left[x = \frac{5}{4}\right]$

177 $27^{\frac{2}{3}x} - 3^{2x+3} + 9^{x+2} = 165$ $\quad \left[x = \frac{1}{2}\right]$

178 $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} - \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x-1}{x}} = 0$ $\quad [x = \pm 1]$

179 $12^{x-2} = 2\sqrt{3}$ $\quad \left[x = \frac{5}{2}\right]$

180 $\sqrt{3\sqrt{3}} = 3 \cdot 9^{2-x}$ $\quad \left[x = \frac{17}{8}\right]$

181 $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^{-2} \cdot \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ $\quad \left[x = \frac{5}{4}\right]$

182 $(27^x)^{x-4} = \frac{1}{3 \cdot (3^{4x})^2}$ $\quad \left[x = \frac{1}{3} \vee x = 1\right]$

183 $2^{\frac{5}{x}} = 4^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{2^3} \cdot 8^{\frac{5}{6}}$ $\quad [x = -5 \vee x = 1]$

184 $\sqrt{27^x} \cdot 9^x = \frac{1}{81\sqrt{3}}$ $\quad \left[x = -\frac{9}{7}\right]$

185 $8^{\frac{x}{x-1}} = 16\sqrt{4^x}$ $\quad [x = \pm 2]$

186 $\frac{9^x + 9}{3^x} = 10$ $\quad [x = 0 \vee x = 2]$

187 $16^x - 3 \cdot 2^{2x+1} + 8 = 0$ $\quad \left[x = \frac{1}{2} \vee x = 1\right]$

188 $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 4 = 3 \cdot 2^{-x}$ $\quad [x = -2]$

189 $3^{3x} - 3^x - 3^{2x+1} + 3 = 0$ $\quad [x = 0 \vee x = 1]$

190 $\frac{\sqrt{3^x}}{\sqrt{3^{x+1} \cdot 9^{x+2}}} = \frac{1}{9}$ $\quad \left[x = -\frac{5}{4}\right]$

191 $\frac{\sqrt{3 \cdot \sqrt{9^x}}}{81^{x-1}} = 9^{2x+3}$ $\quad \left[x = -\frac{1}{5}\right]$

192 $\frac{5^x}{5^x + 1} - \frac{1}{25^x - 1} = 1$ $\quad [S = \varnothing]$

193 $\frac{(2^x)^{x-3}}{\sqrt{8^x}} = \frac{(\sqrt{2})^{3x}}{32}$ $\quad [x = 1 \vee x = 5]$

194 $\sqrt[x+2]{25^x} \cdot \sqrt[x]{5^4} = 125$ $\quad [x = 2]$

195 $\frac{24}{3^x - 1} - \frac{9}{3^x} = 2$ $\quad [x = 2]$

196 $3^{-x} + \frac{3^x + 2}{3^x + 6} = \frac{24}{3^{2x} + 6 \cdot 3^x}$ $\quad [x = 1]$

197 $1 + 26 \cdot 3^{\frac{1}{2}x - 2} = 3^{x-1}$ $\quad [x = 4]$

198 $|8^x - 2| = \sqrt{2^{3x}}$ $\quad \left[x = \frac{2}{3} \vee x = 0\right]$

199 $4^{\sqrt{x+2}} + 6 = 4^{2-\sqrt{x+2}}$ $\quad \left[x = -\frac{7}{4}\right]$

200 $10^x - 2^x - 5^x + 1 = 0$ $\quad [x = 0]$

201 $25 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-x} - 10\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 1\right] = 4\left(\frac{5}{2}\right)^x$ $\quad [x = 1]$

I sistemi con equazioni esponenziali

Risolvi i seguenti sistemi.

202 $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2^{x-y} = 64 \end{cases}$ $\quad [(3; -3)]$

203 $\begin{cases} 2^x + y = 0 \\ 4^x + y = 2 \end{cases}$ $\quad [(1; -2)]$

204 $\begin{cases} y - 2^x = 0 \\ 5y = 4^x + 4 \end{cases}$ $\quad [(0; 1); (2; 4)]$

205 $\begin{cases} 9^{x-y} \cdot 27^y = 1 \\ 4^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y = 32 \end{cases}$ $\quad \left[\left(\frac{5}{4}; -\frac{5}{2}\right)\right]$

206 $\begin{cases} 3^x \cdot \sqrt{81^{x-y}} = 1 \\ 25^x \cdot \sqrt{125^y} = 5 \end{cases}$ $\quad \left[\left(\frac{4}{17}; \frac{6}{17}\right)\right]$

207 $\begin{cases} x - 2y^2 = 0 \\ 4^x \cdot 8 = 16^{2y} \end{cases}$ $\quad \left[\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\right]$

208 $\begin{cases} 4^{y^2} - 2^{4x} = 0 \\ \frac{625^x \cdot 25^x}{\sqrt{125}} = \left(\frac{1}{5}\right)^y \end{cases}$ $\quad \left[\left(\frac{1}{2}; -1\right); \left(\frac{9}{50}; \frac{3}{5}\right)\right]$

209 $\begin{cases} 36 \cdot 6^{x-y} = 6^{2x} \\ 49^x \cdot \sqrt{7^y} = 1 \end{cases}$ $\quad \left[\left(-\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)\right]$

4. LE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Teoria a pag. 561

IN PRATICA
Videolezione 26

210 VERO O FALSO?

a) $5^x < \frac{1}{25}$ ha per soluzione $x < -2$. V F

b) $a^4 > a^2$ è sempre vera. V F

c) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-x} > 1$ se $x < 0$. V F

d) $1^x > 1^4$ è vera per $x > 4$. V F

e) $5^{-x} + 7^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. V F

f) $6^x < -6$ se $x < -1$. V F

211 CACCIA ALL'ERRORE

Ognuna delle seguenti proposizioni è falsa. Individua l'errore.

a) $x^{-\frac{1}{3}} < x^{-\frac{2}{3}}$ se $x > 1$.

b) Se $\left(\frac{2}{3}\right)^a < \left(\frac{2}{3}\right)^b$, allora $a < b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

c) Se $a^2 < b^2$, allora $a < b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

d) $x^4 < x^2$ non è mai vera.

e) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{2}{3}} > \left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{6}{7}}$.

f) $3^x > 2^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

I due membri si possono scrivere come potenze di uguale base

212 ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo le disequazioni a) $250 \cdot 5^{\frac{x}{3}} > 2$; b) $\left(\frac{1}{27}\right)^x > \frac{1}{81}$.

a) Dividiamo entrambi i membri per 250:

$$5^{\frac{x}{3}} > \frac{2}{250}.$$

Semplifichiamo e otteniamo:

$$5^{\frac{x}{3}} > 5^{-3}.$$

Poiché le potenze hanno base maggiore di 1, dalla disequazione precedente possiamo ottenere una disequazione equivalente di ugual verso fra gli esponenti:

$$\frac{x}{3} > -3 \rightarrow x > -9.$$

b) Osserviamo che $\frac{1}{27}$ e $\frac{1}{81}$ sono potenze di $\frac{1}{3}$:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{3}\right)^4.$$

Poiché le potenze hanno base minore di 1, dalla disequazione precedente otteniamo una disequazione equivalente fra gli esponenti cambiando il verso:

$$3x < 4 \rightarrow x < \frac{4}{3}.$$

Risolvi le seguenti disequazioni esponenziali i cui membri sono riconducibili a potenze di uguale base.

213 $\left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{27}{8}$ $[x < 3]$

214 $3^{2x} > 81$ $[x > 2]$

215 $\left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{8}{27}$ $[x < -3]$

216 $3^{2x+2} < \frac{1}{3}$ $\left[x < -\frac{3}{2}\right]$

217 $7^{x+2} > 49$ $[x > 0]$

218 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} < 64$ $[x > -2]$

219 $0{,}1^x < 100$ $[x > -2]$

220 $100^x < 0{,}001$ $\left[x < -\frac{3}{2}\right]$

221 $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+3} < \left(\frac{5}{2}\right)^{x-2}$ $\left[x > -\frac{1}{2}\right]$

222 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} < 625$ $\left[x > -\frac{5}{2}\right]$

223 $\frac{35}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \geq 0,7 \cdot 5^x$ $\left[x \leq \frac{2}{3}\right]$

224 $2 \cdot 3^{2x-1} + 9^{x+1} - 3^{2x+1} \leq \frac{60}{\sqrt[5]{3}}$ $\left[x \leq \frac{9}{10}\right]$

225 $17 \cdot \sqrt{2^{x+1}} > 34 \cdot \sqrt[3]{4^{x-3}}$ $[x < 9]$

226 $2^{x+5} \cdot 3^{x+2} \leq 8 \cdot 6^{\frac{3x-1}{x}}$ $[x < 0]$

Utilizziamo un'incognita ausiliaria

227 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo la disequazione:

$$3^x - 2 \cdot 3^{2-x} < 7.$$

Utilizzando la seconda proprietà delle potenze:

$$3^x - 2 \cdot \frac{9}{3^x} < 7.$$

Introduciamo la variabile ausiliaria $z = 3^x$ e riduciamo allo stesso denominatore:

$$z - \frac{18}{z} < 7 \quad \rightarrow \quad \frac{z^2 - 7z - 18}{z} < 0.$$

Abbiamo ottenuto una disequazione fratta con denominatore sempre positivo ($z = 3^x > 0$). Quindi la disequazione è equivalente a:

$$z^2 - 7z - 18 < 0.$$

Le soluzioni sono:

$$-2 < z < 9.$$

Ora sostituiamo z con 3^x:

$$-2 < 3^x < 3^2.$$

Questa disequazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 3^x > -2 \\ 3^x < 3^2 \end{cases}$$

La prima disequazione ha per soluzione tutti gli x reali, la seconda $x < 2$.
Le soluzioni comuni (e quindi le soluzioni della disequazione assegnata) sono:

$$x < 2.$$

Risolvi le seguenti disequazioni esponenziali con l'uso di un'incognita ausiliaria.

228 $2 \cdot 3^{-x} - 3^x \geq 1$ $[x \leq 0]$

229 $7^x - 6 > 7^{1-x}$ $[x > 1]$

230 $-4^x - 3 \cdot 2^x > 2^{2x} - 2^x$ $[S = \varnothing]$

231 $34\left(\frac{3}{5}\right)^x < 25\left(\frac{9}{25}\right)^x + 9$ $[x < 0 \vee x > 2]$

232 $9\left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} \leq 0$ $[S = \varnothing]$

233 $(0,01)^x - 7(0,1)^x - 30 \geq 0$ $[x \leq -1]$

234 $\frac{5}{7}(0,2)^x + \frac{7}{5} - \frac{2}{35}(0,2)^{-x} \leq 0$ $[x \geq 2]$

235 $5^{\frac{2}{x}} - \frac{26}{25}5^{\frac{1}{x}} > -\frac{1}{25}$ $\left[-\frac{1}{2} < x < 0 \vee x > 0\right]$

236 $\frac{1}{3^x - 9} - \frac{1}{3^x + 1} > 0$ $[x > 2]$

237 $\frac{-6}{2^x - 2} + \frac{9}{2^x - 1} < 0$ $[x < 0 \vee 1 < x < 2]$

Risolvi le seguenti disequazioni applicando il metodo necessario.

238 $4 \cdot 2^{3x} - 4^{x+2} < 0$ $[x < 2]$

239 $2 \cdot 3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+2} - 8 \geq 1 - 3^x$ $[x \geq 2]$

240 $\frac{9 \cdot 3^{-x}}{9^x + 3^{2x}} > \frac{27}{2}$ $\left[x < -\frac{1}{3}\right]$

241 $(2^{x+2})^2 \cdot 3^x < \frac{2}{3^{x+3}}$ $\left[x < -\frac{3}{2}\right]$

242 $\frac{7^{2\sqrt{2x^{2-x}}}}{\sqrt{9^x - 10 \cdot 3^x + 9}} \geq 0$ $[x < 0 \vee x > 2]$

243 $\frac{\sqrt{3^{6x} : 3^2}}{3^7} < |-3^{-x}|$ $[x < 2]$

244 $2^x - 1 > \sqrt{3 \cdot 2^x - 3}$ $[x > 2]$

245 $2^x < \frac{7^{x+1}}{2}$ $[x > -1]$

246 $16 \cdot 4^{2x} < 3^{x+1}$ $[x < -1]$

247 $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} > 14$ $[x > 1]$

248 $\sqrt{2 \cdot 6^x + 7} \leq 6^x + 1$ $\left[x \geq \frac{1}{2}\right]$

249 $|2 \cdot 9^x - 1| > 5$ $\left[x > \frac{1}{2}\right]$

250 $|16^x - 4| \geq 4 + 2 \cdot 4^x$ $[x \geq 1]$

251 $3^x - 9 < \sqrt{9^x - 9}$ $[x \geq 1]$

252 $(3^{2-x} - 27) \cdot \left(\frac{1}{2} - 4^x\right) \geq 0$ $\left[x \leq -1 \vee x \geq -\frac{1}{2}\right]$

253 $4^x(4^{x+1} - 33) > -8$ $\left[x < -1 \vee x > \frac{3}{2}\right]$

254 $\dfrac{2^{3x} - 8 + 3 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{2x+1}}{\sqrt{4^x + 3^{-x} + 10}} \geq 0$ $[x \geq 1]$

255 $\left|\dfrac{4^{-x}}{2^{x+2} : 2^6}\right| < 1$ $\left[x > \frac{4}{3}\right]$

256 $\left|\dfrac{3 \cdot 5^{x+1} + 5}{5^{2x} - 2 \cdot 5^x + 1}\right| < 5$ $[x > 1]$

257 $\dfrac{5^{\frac{4}{3}x+3}}{\sqrt{49^{x+2}}} \leq \dfrac{7 \cdot \sqrt[3]{25^x}}{\sqrt[3]{7^x}}$ $\left[x \geq -\frac{9}{2}\right]$

258 $\sqrt{4^x \cdot 2^x + \sqrt{8^x - 1}} \leq \sqrt{2^{3x+1} - 1}$ $\left[x = 0 \vee x \geq \frac{1}{3}\right]$

259 $\dfrac{8^{1+x} + 8^x}{9} \geq 4^{1+2x} + \dfrac{16}{4^{1-2x}}$ $[x \leq -3]$

260 $\dfrac{2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2}{(25^x - 5) \cdot (81 \cdot 3^x - 3)} \leq 0$ $\left[-3 < x \leq -1 \vee \frac{1}{2} < x \leq 1\right]$

261 $\dfrac{5}{3^x - 3} + \dfrac{2 \cdot 3^x}{3^x + 3} \geq \dfrac{18 - 2 \cdot 9^x}{9^x - 9}$ $[x \leq 0 \vee x > 1]$

262 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2-3}} \cdot \sqrt[x]{4} - 1 \geq 0$ $[x = 2]$

263 $\dfrac{3^x - 81}{(4^{2x+1} - 32)\sqrt{5^{\frac{x^2-3}{2}} - 125}} \leq 0$ $[3 < x \leq 4]$

264 $\dfrac{20 - 8^{2\sqrt{x}+1} - 64^{2\sqrt{x}}}{(2^x - 1)(2^x - 4)} > 0$ $\left[\frac{1}{36} < x < 2\right]$

265 $\sqrt[2x+3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^3 \sqrt[x+2]{\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}}$ $\left[x > -\frac{3}{2}, x \in \mathbb{Z}\right]$

266 $\left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{5}{4}\right)^x \leq \sqrt[x+2]{\frac{5}{4}}$ $[-2 < x \leq \sqrt{5}, x \in \mathbb{Z}]$

267 $\sqrt[2x]{|4^x - 12|} \geq \sqrt[x]{2}$ $[x \in \mathbb{N} - \{0\}]$

I sistemi con disequazioni esponenziali

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

268 $\begin{cases} 3^{2x-1} > 3 \\ 1 - 5^{x^2-4} \geq 0 \end{cases}$ $[1 < x \leq 2]$

269 $\begin{cases} 5^{2x-1} - 25 > 0 \\ \dfrac{3^x + 1}{3^x - 1} \geq 1 \end{cases}$ $\left[x > \frac{3}{2}\right]$

270 $\begin{cases} 4^{3x+2} > 2 \\ 2^x(2^x - 1) < 2 \end{cases}$ $\left[-\frac{1}{2} < x < 1\right]$

271 $\begin{cases} 3^x - 3^{3-x} + 6 \geq 0 \\ |2^x - 1| < 3 \end{cases}$ $[1 \leq x < 2]$

272 $\begin{cases} \dfrac{(\sqrt{49^x} - 7)(3^x - 1)}{64 - 2^x} \geq 0 \\ \sqrt{1 + 4^x} > \dfrac{1}{\sqrt{4^x - 1}} \end{cases}$ $[1 \leq x < 6]$

273 $\begin{cases} 7^x \cdot \sqrt[x]{49} : \sqrt[3]{\left(\frac{1}{7}\right)^{-2x-5}} - 1 > 0 \\ \sqrt[3]{1 - 3 \cdot 2^x \cdot (2^x - 1)} - 2^x + 1 < 0 \end{cases}$ $[x = 1 \vee x > 3, x \in \mathbb{N}]$

5. LA DEFINIZIONE DI LOGARITMO

▶ Teoria a pag. 562

274 VERO O FALSO?

a) Se $3^x = 11$, allora $x = \log_{11} 3$. V F

b) Se $\log_9 a = -2$, allora $a = (-2)^9$. V F

c) $2^{-\frac{1}{3}} = x$ è equivalente a $\log_2 x = -\frac{1}{3}$. V F

d) $\log_{-2}(-8) = 3$ perché $(-2)^3 = -8$. V F

e) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$. V F

275 VERO O FALSO?

a) Se $a < 0$, $\log_{-a}(-\sqrt[3]{a}) = \frac{1}{3}$. V F

b) Se $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-\frac{1}{3}}$, allora $\log_3 x = -1$. V F

c) $\log_a 1 = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}$. V F

d) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = 1$. V F

e) $\log_x x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. V F

Riscrivi, usando i logaritmi, le seguenti uguaglianze.

276 $2^5 = 32$; $\quad 3^4 = 81$; $\quad 5^2 = 25$; $\quad 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$; $\quad 10^0 = 1$.

277 $7^x = 2$; $\quad a^4 = 6$; $\quad 2^9 = b$; $\quad 6^{-5} = b$; $\quad a^{-2} = 8$.

Riscrivi, usando le potenze, le seguenti uguaglianze.

278 $\log_7 49 = 2$; $\quad \log_{11} 121 = 2$; $\quad \log_{10} 10\,000 = 4$; $\quad \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$.

279 $\log_a 3 = 7$; $\quad \log_2 b = -\frac{1}{2}$; $\quad \log_5 3 = x$; $\quad \log_2 a = -5$.

280 Fra i seguenti logaritmi elimina quelli privi di significato e spiega il motivo della scelta.

a) $\log_3(-3)$; $\quad \log_2 82$; $\quad \log_2(-1)$; $\quad \log_3 0{,}6$; $\quad \log_5 5$; $\quad \log_{-2}(-8)$.

b) $\log_2(-2)$; $\quad \log_{11}(-0{,}01)$; $\quad \log_1 100$; $\quad \log_5 0$; $\quad \log_8 10$; $\quad \log_{\sqrt{3}} 3$.

281 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\log_2(4 \cdot \sqrt[3]{2})$ applicando la definizione di logaritmo.

Sappiamo che l'uguaglianza $x = \log_2(4 \cdot \sqrt[3]{2})$ è equivalente a:

$$2^x = 4 \cdot \sqrt[3]{2}.$$

Ricordando che $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, possiamo scrivere $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$, quindi:

$$2^x = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}.$$

Applichiamo la prima proprietà delle potenze:

$$2^x = 2^{\frac{7}{3}} \rightarrow x = \frac{7}{3}.$$

Quindi $\log_2(4 \cdot \sqrt[3]{2}) = \frac{7}{3}$.

Calcola i seguenti logaritmi applicando la definizione.

282 $\log_3 243$; $\quad \log_2 64$; $\quad \log_3 27$; $\quad \log_5 25$. [5; 6; 3; 2]

283 $\log_2 16$; $\quad \log_3 9$; $\quad \log_5 125$; $\quad \log_7 49$. [4; 2; 3; 2]

284 $\log 100; \quad \log 1000; \quad \log_{11} 121; \quad \log_7 343.$ $[2; 3; 2; 3]$

285 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}; \quad \log_{10} 10; \quad \log_2 1; \quad \log_{\frac{5}{6}} 1; \quad \log_5 5; \quad \log_2 2.$ $[1; 1; 0; 0; 1; 1]$

286 $\log_3 \frac{1}{9}\sqrt{3}; \quad \log_2 \frac{1}{16}; \quad \log_5 0{,}04; \quad \log_{745} 1.$ $\left[-\frac{3}{2}; -4; -2; 0\right]$

287 $\log_2 \frac{4}{\sqrt{2}}; \quad \log_3 (3 \cdot \sqrt[4]{3}); \quad \log_2 \frac{\sqrt[5]{4}}{2}; \quad \log_6 (6 \cdot \sqrt[3]{6}).$ $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{4}; -\frac{3}{5}; \frac{4}{3}\right]$

288 $\log_7 (7\sqrt{7}); \quad \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \log_2 (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}); \quad \log \frac{1}{\sqrt[13]{10}}.$ $\left[\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; -\frac{1}{13}\right]$

289 $\log_5 \sqrt[5]{5}; \quad \log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \log_3 \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[3]{9}}; \quad \log_5 \left(0{,}2 \frac{\sqrt{5}}{5}\right).$ $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{2}; \frac{5}{6}; -\frac{3}{2}\right]$

290 $\log_3 (27 \cdot \sqrt{3}); \quad \log_4 \frac{1}{2}; \quad \log_{25} \frac{5}{\sqrt[3]{5}}; \quad \log_8 \sqrt[117]{4}.$ $\left[\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{351}\right]$

291 $\log_{625} \frac{\sqrt[3]{5}}{25}; \quad \log_{16} \frac{2}{\sqrt[7]{2}}; \quad \log (1000 \cdot \sqrt[8]{10}); \quad \log_{49} \sqrt[5]{\frac{1}{7}}.$ $\left[-\frac{5}{12}; \frac{3}{14}; \frac{25}{8}; -\frac{1}{10}\right]$

292 $\log_{\sqrt{2}} 1; \quad \log_{\sqrt{2}} 256; \quad \log_{2\sqrt{2}} 2; \quad \log_{0{,}1} 10.$ $\left[0; 16; \frac{2}{3}; -1\right]$

293 $\log_{\frac{4}{9}} \frac{27}{8}; \quad \log_{\sqrt[3]{9}} \sqrt[4]{27}; \quad \log_{32} \sqrt[5]{8}; \quad \log_{\frac{4}{3}} \frac{64}{27}.$ $\left[-\frac{3}{2}; \frac{9}{8}; \frac{3}{25}; 3\right]$

294 $\log_{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{2}; \quad \log_{\frac{\sqrt[4]{8}}{4}} 32; \quad \log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[4]{27}; \quad \log_{\frac{\sqrt{3}}{9}} 27.$ $\left[-4; -4: \frac{9}{4}; -2\right]$

295 $\log_a a; \quad \log_{2a} (4a^2); \quad \log_{\sqrt{a}} a^3; \quad \log_a (a\sqrt{a}).$ $\left[1; 2; 6; \frac{3}{2}\right]$

296 $\log_{a+1} (a^3 + 3a^2 + 3a + 1); \quad \log_{\frac{2}{a}} \frac{a^3}{8}; \quad \log_{2+\frac{1}{a}} \frac{2a+1}{a}.$ $[3; -3; 1]$

297 **ESERCIZIO GUIDA**

Data l'uguaglianza $\log_5 b = 2$, calcoliamo il valore di b, applicando la definizione di logaritmo.

Ricordiamo che, se $x = \log_a b$, allora $a^x = b$. Nel nostro caso, quindi, possiamo scrivere

$$5^2 = b$$

e concludere che:

$$b = 25.$$

Calcola il valore dell'argomento b, usando la definizione di logaritmo.

298 $\log_3 b = 3; \quad \log_5 b = 3; \quad \log b = 4; \quad \log_2 b = 5.$ $[27; 125; 10\,000; 32]$

299 $\log_2 b = 6; \quad \log_6 b = 3; \quad \log_2 b = 1; \quad \log_3 b = 4.$ $[64; 216; 2; 81]$

300 $\log_3 b = -1; \quad \log_2 b = -1; \quad \log_2 b = -2; \quad \log_5 b = -2.$ $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{25}\right]$

301 $\log_2 b = \frac{1}{2}; \quad \log_3 b = \frac{1}{4}; \quad \log_4 b = \frac{1}{2}; \quad \log_5 b = \frac{1}{3}.$ $\left[\sqrt{2}; \sqrt[4]{3}; 2; \sqrt[3]{5}\right]$

302 $\log_3 b = 0; \quad \log_{0{,}4} b = 1; \quad \log_5 b = -\frac{1}{3}; \quad \log_{32} b = -\frac{1}{4}.$ $\left[1; 0{,}4; \frac{1}{\sqrt[3]{5}}; \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\right]$

303 $\log_4 b = -2; \quad \log_{\frac{2}{3}} b = -\frac{1}{2}; \quad \log_{\frac{1}{2}} b = -2; \quad \log_5 b = -\frac{2}{5}.$ $\left[\frac{1}{16}; \sqrt{\frac{3}{2}}; 4; \sqrt[5]{\frac{1}{25}}\right]$

304 $\log_{\sqrt{3}} b = 3; \quad \log_{20} b = -\frac{11}{7}; \quad \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} b = 2; \quad \log_{11} b = -3.$ $\left[3\sqrt{3}; \sqrt[7]{\frac{1}{20^{11}}}; \frac{3}{4}; \frac{1}{1331}\right]$

305 $\log b = 2; \quad \log (1 - b) = -1; \quad \log b^3 = 2; \quad \log \frac{b}{3} = 1.$ $\left[100; \frac{9}{10}; \sqrt[3]{100}; 30\right]$

306 ESERCIZIO GUIDA

Data l'uguaglianza $\log_a 16 = 2$, calcoliamo la base a.

Applichiamo la definizione di logaritmo:

$$a^2 = 16 \quad \rightarrow \quad a = \pm\sqrt{16} = \pm 4.$$

La base di un logaritmo può essere solo positiva e diversa da 1, quindi concludiamo che:

$$a = 4.$$

Calcola il valore della base a usando la definizione di logaritmo.

307 $\log_a 9 = 2$; $\log_a 125 = 3$; $\log_a 100 = 2$; $\log_a 2 = 1$. $[3; 5; 10; 2]$

308 $\log_a 169 = 2$; $\log_a 27 = 3$; $\log_a \frac{1}{4} = 2$; $\log_a \frac{16}{81} = 4$. $\left[13; 3; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$

309 $\log_a \frac{1}{4} = -2$; $\log_a \frac{8}{27} = -3$; $\log_a \frac{1}{81} = -4$; $\log_a \frac{4}{5} = -1$. $\left[2; \frac{3}{2}; 3; \frac{5}{4}\right]$

310 $\log_a 5 = 1$; $\log_a 100 = -2$; $\log_a 4 = -2$; $\log_a \frac{1}{49} = -2$. $\left[5; \frac{1}{10}; \frac{1}{2}; 7\right]$

311 $\log_a 5 = -1$; $\log_a 3 = -2$; $\log_a 4 = \frac{1}{2}$; $\log_a \frac{1}{2} = -2$. $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{\sqrt{3}}; 16; \sqrt{2}\right]$

312 $\log_a (2a-3) = 1$; $\log_a 3 = -11$; $\log_a 6 = 36$; $\log_a (2\sqrt{a} - 2) = \frac{1}{2}$. $\left[3; \frac{1}{3^{\frac{1}{11}}}; \sqrt[36]{6}; 4\right]$

313 $\log_a 5 = -2$; $\log_a 64 = 5$; $\log_a \frac{1}{100} = -2$; $\log_a 8 = 3$. $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}; 2\cdot\sqrt[5]{2}; 10; 2\right]$

314 $\log_a \sqrt{2} = 2$; $\log_a \frac{1}{64} = -2$; $\log_a (3 + 2\sqrt{2}) = 2$; $\log_a 64 = 4$. $[\sqrt[4]{2}; 8; 1+\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$

315 $\log_{a+1} 2 = -1$; $\log_{a+2} 10 = 1$; $\log_{\sqrt{a}+1} 4 = 2$; $\log_{a^2-a}(-2a) = 1$. $\left[-\frac{1}{2}; 8; 4; -1\right]$

316 VERO O FALSO?

a) $2^{\log_2 3} = \log_3 2$ V F

b) $7^{\log_{10} 7} = 10$ V F

c) $9^{\log_9 \sqrt{3}} = \sqrt{3}$ V F

d) $5^{-\log_5 2} = \frac{1}{2}$ V F

e) $\log_2(6^{\log_6 2}) = 1$ V F

f) Se $\log_2 x > \log_2 3$, allora $x > 3$. V F

g) $\log_{\frac{1}{4}} 6 < \log_{\frac{1}{4}} 3$ V F

317 COMPLETA

a) $7^{\log_{\dots} 2} = 2$

b) $\log_{\dots} 9 = -2$

c) $\log_2 \dots = 0$

d) $\log_5(2^{\log_2 \dots}) = 2$

e) $\log_7 \dots + \log_4 1 = 1$

f) $\log_{\dots}(3^{\log_3 10}) = 1$

g) $\log_6 6 - \log_6 \dots = 1$

COMPLETA inserendo $>$ o $<$ fra le seguenti coppie di logaritmi.

318 $\log 11 \dots \log 3$; $\log 5 \dots \log 8$; $\log 100 \dots \log 5$.

319 $\log_2 14 \dots \log_2 11$; $\log_{0,4} 6 \dots \log_{0,4} 9$; $\log_3 23 \dots \log_3 116$.

320 $\log_{\frac{2}{3}} \frac{7}{6} \ldots \log_{\frac{2}{3}} \frac{11}{9}$; $\log_{\frac{7}{9}} 98 \ldots \log_{\frac{7}{9}} 97$; $\log_{\frac{6}{5}} 48 \ldots \log_{\frac{6}{5}} 7$.

321 Metti in ordine crescente i seguenti logaritmi:

$\log_{\frac{1}{2}} 7, \quad \log_2 7, \quad \log_6 7, \quad \log_7 7, \quad \log_{\frac{1}{3}} 7.$

322 Se $\log_{2n}(1944) = \log_n(486\sqrt{2})$, calcola n^6.

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge*, 1996)

$[3^{20} \cdot 2^6]$

323 **TEST** Quanti distinti numeri primi sono fattori di N se $\log_2(\log_3(\log_5(\log_7 N))) = 11$?

A 1 B 4 C 17 D 2^{11} E Nessuno dei precedenti.

(USA *Marywood University Mathematics Contest*, 2001)

6. LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

Teoria a pag. 563

324 **VERO O FALSO?**

a) $2\log 5 - \log 4 = 2\log\frac{5}{2}$ V F

b) $\frac{\log a}{\log b} = \log\frac{a}{b}$ V F

c) $\log_2 \sqrt{a^n} = \frac{n}{2}\log_2 a$ V F

d) $\log_2 2b = 1 + \log_2 b$ V F

325 **VERO O FALSO?**

a) $\log_8 a^4 b = \log_2 a + \log_8 b$ V F

b) $(\log_3 a)^2 = 2\log_3 a$ V F

c) $\frac{\log_5 7}{2} = \log_5 \sqrt{7}$ V F

d) $\log_2(a+b) = \log_2 a \cdot \log_2 b$ V F

326 **ESERCIZIO GUIDA**

Applicando le proprietà dei logaritmi sviluppiamo l'espressione:

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{5a^6}{13\sqrt[4]{19}}.$$

Nell'espressione l'argomento del logaritmo si presenta sotto forma di frazione; applichiamo per prima la proprietà del logaritmo di un quoziente:

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{5a^6}{13\sqrt[4]{19}} = \log_{\frac{1}{3}}(5a^6) - \log_{\frac{1}{3}}(13\sqrt[4]{19}).$$

Ai logaritmi di $5a^6$ e $13\sqrt[4]{19}$ applichiamo la proprietà del logaritmo del prodotto e otteniamo:

$$\log_{\frac{1}{3}} 5 + \log_{\frac{1}{3}} a^6 - \left(\log_{\frac{1}{3}} 13 + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{19}\right) =$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} 5 + \log_{\frac{1}{3}} a^6 - \log_{\frac{1}{3}} 13 - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{19}.$$

Applichiamo infine ai logaritmi di a^6 e $\sqrt[4]{19}$ la proprietà del logaritmo di una potenza:

$$\log_{\frac{1}{3}} a^6 = 6\log_{\frac{1}{3}} a \quad \text{e} \quad \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{19} = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{3}} 19.$$

Otteniamo così:

$$\log_{\frac{1}{3}} 5 + 6\log_{\frac{1}{3}} a - \log_{\frac{1}{3}} 13 - \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{3}} 19.$$

L'espressione assegnata vale:

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{5a^6}{13\sqrt[4]{19}} = \log_{\frac{1}{3}} 5 + 6\log_{\frac{1}{3}} a - \log_{\frac{1}{3}} 13 - \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{3}} 19.$$

Nell'ipotesi in cui tutti gli argomenti dei logaritmi con cui operi siano positivi, sviluppa le seguenti espressioni applicando le proprietà dei logaritmi.

327 $\log \frac{3}{5a}$ $\quad [\log 3 - \log 5 - \log a]$

328 $\log_5(3ab^2)$ $\quad [\log_5 3 + \log_5 a + 2\log_5 b]$

329 $\log_{\frac{2}{3}} \frac{3\sqrt{a}}{b}$ $\quad \left[\log_{\frac{2}{3}} 3 + \frac{1}{2}\log_{\frac{2}{3}} a - \log_{\frac{2}{3}} b\right]$

330 $\log_2\left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad \left[\frac{5}{6}\right]$

331 $\log \frac{5a}{b^4}\sqrt[7]{b}$ $\quad \left[\log 5 + \log a - \frac{27}{7}\log b\right]$

332 $\log_{\sqrt{2}} \frac{\sqrt[5]{4}}{8\sqrt{2}}$ $\quad \left[-\frac{31}{5}\right]$

333 $\log_5 \frac{5}{61\sqrt[4]{91}}$ $\quad \left[1 - \log_5 61 - \frac{1}{4}\log_5 91\right]$

334 $\log(a^4 b^5 \sqrt{7})$ $\quad \left[4\log a + 5\log b + \frac{1}{2}\log 7\right]$

335 $\log \frac{(a+2)^3}{a}\sqrt{a}$ $\quad \left[3\log(a+2) - \frac{1}{2}\log a\right]$

336 $\log \frac{a^3(a^2+1)}{b^2}$ $\quad [3\log a + \log(a^2+1) - 2\log b]$

337 $\log_5\left(\frac{3\sqrt[6]{a}}{\sqrt[27]{b}}\right)$ $\quad \left[\log_5 3 + \frac{1}{6}\log_5 a - \frac{1}{27}\log_5 b\right]$

338 $\log \frac{(\sqrt{2}+1)^3}{17}$ $\quad [3\log(\sqrt{2}+1) - \log 17]$

---

339 $\log_2 \frac{b(a-1)^2}{a\sqrt[6]{2a^2}}$ $\quad \left[\log_2 b + 2\log_2(a-1) - \frac{4}{3}\log_2 a - \frac{1}{6}\right]$

340 $\log\left[\frac{100a^3b}{c^2}(\sqrt{ab})^3\right]$ $\quad \left[2 + \frac{9}{2}\log a + \frac{5}{2}\log b - 2\log c\right]$

341 $\log_3 \frac{a^2\sqrt{b}}{9\sqrt[3]{ab}}$ $\quad \left[\frac{5}{3}\log_3 a + \frac{1}{6}\log_3 b - 2\right]$

342 $\log_5 \frac{25\sqrt[4]{b^3}\,a}{\sqrt[3]{c^2}}$ $\quad \left[2 + \frac{3}{4}\log_5 b + \log_5 a - \frac{2}{3}\log_5 c\right]$

343 $\log\sqrt{a\sqrt[3]{ab^2}}$ $\quad \left[\frac{2}{3}\log a + \frac{1}{3}\log b\right]$

344 $\log \frac{b\sqrt[3]{(a+3b)8}}{\sqrt{a+3b}}$ $\quad \left[\log b - \frac{1}{6}\log(a+3b) + \log 2\right]$

345 **ESERCIZIO GUIDA**

Applichiamo le proprietà dei logaritmi per semplificare l'espressione

$$4\log_5 a + \log_5 17 - \frac{3}{7}\log_5 b, \quad \text{con } a, b > 0,$$

fino a ottenere un unico logaritmo.

Applichiamo la proprietà del logaritmo di una potenza:

$$4\log_5 a = \log_5 a^4 \quad \text{e} \quad \frac{3}{7}\log_5 b = \log_5 b^{\frac{3}{7}} = \log_5 \sqrt[7]{b^3}.$$

Sostituiamo nell'espressione iniziale e otteniamo:

$$\log_5 a^4 + \log_5 17 - \log_5 \sqrt[7]{b^3}.$$

Applichiamo ora ai primi due addendi la proprietà del logaritmo di un prodotto:

$$\log_5 17a^4 - \log_5 \sqrt[7]{b^3}.$$

Infine applichiamo la proprietà del logaritmo di un quoziente:

$$\log_5 \frac{17a^4}{\sqrt[7]{b^3}}.$$

L'espressione assegnata vale $\log_5 \dfrac{17a^4}{\sqrt[7]{b^3}}$.

Applica le proprietà dei logaritmi per scrivere le seguenti espressioni sotto forma di un unico logaritmo, nell'ipotesi che tutti gli argomenti dei logaritmi siano positivi.

346 $\log 3 + \log 7 - \log 6$ $\left[\log \frac{7}{2}\right]$

347 $\log_2 x - \log_2 (x-1) + \log_2 5$ $\left[\log_2 \frac{5x}{x-1}\right]$

348 $\log_3 (x^2+1) - \log_3 (x-3)$ $\left[\log_3 \frac{x^2+1}{x-3}\right]$

349 $\log_3 5 + 4 \cdot \log_3 t$ $[\log_3 (5t^4)]$

350 $4 \log_{\frac{2}{5}} a + \log_{\frac{2}{5}} b$ $\left[\log_{\frac{2}{5}} a^4 b\right]$

351 $\frac{1}{4}\log a - \frac{1}{3}\log b$ $\left[\log \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right]$

352 $\log_3 a + \log_3 b - \log_3 5$ $\left[\log_3 \frac{ab}{5}\right]$

353 $\log_5 h - 2\log_5 b + \frac{1}{2}\log_5 6$ $\left[\log_5 \frac{h\sqrt{6}}{b^2}\right]$

354 $\frac{1}{2}\log_3 x + 2\log_3 (x+1) - \log_3 7$ $\left[\log_3 \frac{\sqrt{x}\,(x+1)^2}{7}\right]$

355 $\frac{1}{2}(\log 7 + \log x - \log 3)$ $\left[\log \sqrt{\frac{7x}{3}}\right]$

356 $\frac{1}{3}(\log a + 2\log b) - 3(\log k + \log h)$ $\left[\log \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{(kh)^3}\right]$

357 $\log_2 (x-3) - \frac{1}{4}\log_2 (x-1) - 1$ $\left[\log_2 \frac{x-3}{2\sqrt[4]{x-1}}\right]$

358 $\log (x-1) + \log (x-2) - \log (x+3)$ $\left[\log \frac{(x-1)(x-2)}{x+3}\right]$

359 $\log_2 (3x-1) + 3 \cdot \log_2 (x-1) - 4 \cdot \log_2 (x-2)$ $\left[\log_2 \frac{(3x-1)\cdot(x-1)^3}{(x-2)^4}\right]$

360 $3\log b - 2\log b^2 + \log b^3 - 2\log (b+1)$ $\left[\log \frac{b^2}{(b+1)^2}\right]$

361 $\log_7 a - 2\log_7 b + \frac{1}{2}\log_7 c$ $\left[\log_7 \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b^2}\right]$

362 $2\log (x^2-1) - \log (x+1) - \log (x-1)$ $[\log (x+1)(x-1)]$

363 $4\log_2 3 - \frac{1}{2}\log_2 h + \frac{4}{5}\log_2 k$ $\left[\log_2 \frac{81\cdot\sqrt[5]{k^4}}{\sqrt{h}}\right]$

364 $\frac{1}{2}[\log_2 a + 2\log_2 (a+4)] - \log_2 (a-1)$ $\left[\log_2 \frac{\sqrt{a}\cdot(a+4)}{a-1}\right]$

365 $4 \cdot [\log a + \log(a+5)] - 2\log(a-5)$ $\left[\log \frac{a^4 \cdot (a+5)^4}{(a-5)^2}\right]$

366 $3 \cdot [\log_2 b - 2 \cdot (\log_2 c + \log_2 a)]$ $\left[\log_2 \frac{b^3}{c^6 a^6}\right]$

367 $\frac{1}{3} \cdot [\log_3 27 - 2 \cdot (\log_3 a^2 - \log_3 b^2)]$ $\left[\log_3\left(3 \cdot \sqrt[3]{\frac{b^4}{a^4}}\right)\right]$

Identità condizionate

Trova per quali condizioni le seguenti identità sono vere.

368 a) $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = \log_2(x^2-1)$.

b) $\log_2 \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}\log_2 x$.

c) $2\log(x^2+x+6) = \log(x^2+x+6)^2$.

d) $\log|x^2-x| = \log|x| + \log|x-1|$.

$[a)\ x > 1;\ b)\ x > 0;\ c)\ \forall x \in \mathbb{R};\ d)\ x \neq 0 \ \wedge\ x \neq 1]$

369 a) $\log\sqrt{\frac{x}{x+2}} = \log\sqrt{x} - \log\sqrt{x+2}$.

b) $\log\frac{x^2+9}{x^2+1} = \log(x^2+9) - \log(x^2+1)$.

c) $\log x^4 = 4\log|x|$.

d) $\frac{1}{2}\log\frac{x^2-1}{x} = \log\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$.

$[a)\ x > 0;\ b)\ \forall x \in \mathbb{R};\ c)\ x \neq 0;\ d)\ -1 < x < 0 \ \vee\ x > 1]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni applicando le proprietà dei logaritmi.

370 $2^{-\log_2 5}$; $81^{\log_3 2}$; $7^{-1+\log_7 2}$. $\left[\frac{1}{5}; 16; \frac{2}{7}\right]$

371 $4^{-\log_2 3}$; $25^{-\log_5 10}$; $4^{3-\log_2 7}$. $\left[\frac{1}{9}; \frac{1}{100}; \frac{64}{49}\right]$

Dimostra, senza utilizzare la calcolatrice, le seguenti disuguaglianze.

372 $\log_4 5 + 4\log_4 3 > 3$

373 $2^{2\log_2 3} + \log_2 \sqrt[3]{4} > 5^{\log_5 8}$

374 **TEST** L'espressione $7^{2+\log_7 x}$ è uguale a:

A $49x$. B $7^2 + x$. C $49 + \log_7 x$. D $49\log_7 x$. E $7x$.

(*CISIA, Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso*, 2003)

375 **TEST** Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A $\log_3 4 + \log_3 5 = 2$

B $\log_3 4 + \log_3 5 > 3$

C $\log_3 4 + \log_3 5 < 3$

D Non conosco l'argomento

(*Università di Genova, Corso di laurea in Matematica, Test di autovalutazione*)

La formula del cambiamento di base

376 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo $\log_2 3$ usando il logaritmo in base 10 e calcoliamone il valore approssimato.

Utilizziamo la formula del cambiamento di base $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, in cui $a = 2$, $b = 3$, $c = 10$:

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Con la calcolatrice approssimiamo log 3 e log 2 con quattro cifre decimali:

$\log 3 \simeq 0,4771; \quad \log 2 \simeq 0,3010.$

La risposta è: $\log_2 3 \simeq \frac{0,4771}{0,3010} \simeq 1,5850.$

Trasforma i seguenti logaritmi in logaritmi in base 10 e approssima con quattro cifre decimali i valori trovati.

377 $\log_{0,11} 7$; $\log_4 61$; $\log_{2,5} 0,10$; $\log_3 99$; $\log_{31} 543$.

378 $\log_5 0,23$; $\log_{0,3} 0,67$; $\log_{6,4} 64$; $\log_{0,79} 50$; $\log_{40} 80$.

Semplifica le seguenti espressioni senza utilizzare la calcolatrice.

379 $\log_4 7 \cdot \log_7 16$ [2]

380 $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6$ [$\log_2 6$]

381 $\log_3 5 \cdot \log_{25} 9$ [1]

382 $\log_4 10 + \frac{1}{2\log_{10} 4} + \log_2 10$ $\left[\frac{7}{4}\log_2 10\right]$

383 Given that $\log_b(2) \simeq 0.5093$, $\log_b(3) \simeq 0.8072$, and $\log_b(5) \simeq 1.1826$, find approximate for the following:

a) $\log_b(15)$; c) $\log_b\left(\frac{6}{5}\right)$; e) $\log_b(45)$;

b) $\log_b\left(\frac{2}{3}\right)$; d) $\log_b(9)$; f) $\log_b(200)$.

(USA *Tacoma Community College*, *Math 115 Worksheets*, 2003)

[a) 1.9898; b) − 0.2979; c) 0.1339; d) 1.6144; e) 2.797; f) 3.8931]

384 Senza fare uso della calcolatrice valuta $\frac{1}{\log_2 36} + \frac{1}{\log_3 36}$.

(CAN *Canadian Mathematical Olympiad*, 1973)

$\left[\frac{1}{2}\right]$

Dimostra le seguenti uguaglianze nell'ipotesi in cui esistano i logaritmi.

385 $\log_{a^2} b^2 = \log_a b$

386 $\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} = \log_a b$

387 $\log_a b = -\log_{\frac{1}{a}} b$

388 $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$

389 $\log_{a^2}(a\sqrt{a}) = \log_a \sqrt[4]{a^3}$

390 **TEST** Se $\log_2 10 = a$, allora $\log_{10} 2$ vale:

A $2a$. B $\frac{a}{2}$. C $5a$. D $\frac{a}{5}$. E $\frac{1}{a}$.

(*Kangourou Italia, Categoria Student*, 2001)

391 Dimostrare che, presi tre numeri reali positivi a, b, c, con $a \neq 1$, si ha sempre $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$.

(*Università di Trieste, Corso di Laurea in Fisica e Matematica*, 2007)

7. LA FUNZIONE LOGARITMICA

▶ Teoria a pag. 567

Traccia il grafico delle seguenti funzioni logaritmiche.

392 a) $y = \log_3 x$; b) $y = \log_{0,6} x$; c) $y = \log_{0,2} x$; d) $y = \log_{23} x$; e) $y = \log_7 x$.

393 Indica quali equazioni definiscono una funzione logaritmica e quali no, motivando la risposta.

$$y = \log_4 x^{-1}, \quad y = \log_4(-x), \quad y = \log_{-4} x, \quad y = \log_1 x, \quad y = \log_{-1} x, \quad y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1).$$

394 Disegna i grafici delle funzioni $y = \log_2 x^{-1}$ e $y = -\log_2 x^{-1}$.

395 Rappresenta le seguenti funzioni in uno stesso piano cartesiano.

$$y = \log_2 x, \quad y = \log_2(x+1), \quad y = \log_2 x + 1.$$

Che cosa puoi notare?

396 Quale delle seguenti funzioni cresce più rapidamente? Motiva la risposta.

a) $y = \log_4 x$; b) $y = \log_{\sqrt{3}} x$.

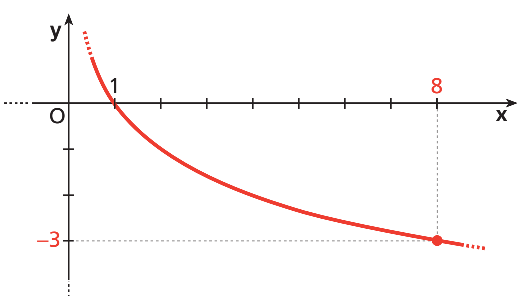
Disegna nello stesso piano cartesiano ciascuna coppia di funzioni logaritmiche.

397 $y = \log_3 x, \quad y = \log_3 2x$.

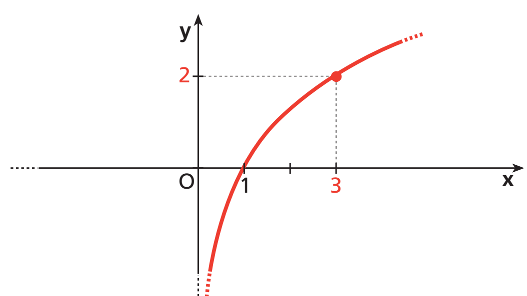
398 $y = \log_2 x, \quad y = 4\log_2 x$.

Nelle figure sono disegnati i grafici di funzioni logaritmiche. Scrivi le equazioni corrispondenti.

399



400



401 VERO O FALSO?

a) $y = \log_{2\sqrt{2}} x$ è una funzione crescente in $\mathbb{R}$. V F

b) $y = \log_{\sqrt{2}} x$ è positiva per $x > 1$. V F

c) La funzione $y = \log_2 x^2$ ha come dominio l'insieme dei numeri reali. V F

d) La funzione $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ esiste per $a > 0$ e $a \neq 1$ ed è crescente per $a < 1$. V F

402 VERO O FALSO?

a) Le funzioni $y = \log x^4$ e $y = 4\log x$ sono identiche. V F

b) Le due equazioni $y = \ln(x^2 - 1)$ e $y = \ln(x-1) + \ln(x+1)$ rappresentano la stessa funzione. V F

c) La funzione $y = \log_2 x - 1$ ha come funzione inversa $y = 2^{x+1}$. V F

d) Le funzioni $y = 2x$ e $y = 3^{\log_3 2x}$ hanno lo stesso grafico. V F

403 Let $f(x) = \ln(x+3)$. Find $f^{-1}(x)$.

(USA *Southern Illinois University Carbondale,* Final Exam, Spring 2001)

$[y = e^x - 3]$

404 Indica se i grafici delle seguenti funzioni sono identici:

$$y = \log_2 2x - \log_2(x-4); \qquad y = 1 + \log_2 \frac{x}{x-4}.$$

405 Dimostra che i grafici delle seguenti equazioni sono congruenti:

$$\log_4(1+2y) = 4 - x; \qquad y = 2^{-2x+7} - \frac{1}{2}.$$

Le trasformazioni geometriche e la funzione logaritmo

406 Data la funzione $y = \ln x$, scrivi l'equazione della funzione ottenuta traslandola secondo il vettore $\vec{v}(-1; 2)$ e traccia il suo grafico. $[y = \ln(x+1) + 2]$

Disegna il grafico delle seguenti funzioni utilizzando le trasformazioni geometriche.

407 $y = \ln(x-1) + 4$; $\quad y = \log_2 x - 1$.

408 $y = \log(x-2) - 3$; $\quad y = \log_3(x+3)$.

409 $y = \ln(-x)$; $\quad y = -\ln x$.

410 $y = -\ln(-x)$; $\quad y = \ln\frac{x}{2}$.

411 $y = \frac{\ln x}{3}$; $\quad y = 2\ln x$.

412 $y = \ln 4x$; $\quad y = \frac{\ln x}{4}$.

413 $y = 3\ln\frac{x}{4}$; $\quad y = \ln(-x) + 1$.

414 $y = -3\ln x$; $\quad y = \frac{1}{2}\ln(-x)$.

415 $y = |\log_4 x|$; $\quad y = \left|\log_{\frac{1}{4}} x\right|$.

416 $y = -|\ln x|$; $\quad y = -\ln|x|$.

417 $y = \sqrt{\ln x}$; $\quad y = (\ln x)^2$.

418 $y = \frac{1}{\log_2 x}$; $\quad y = -\ln\frac{1}{x} + 1$.

419 $y = \ln\left(\frac{e^2}{|x|}\right)$; $\quad y = \left|\ln\left(\frac{e^2}{x}\right)\right|$.

420 $y = |\log_2 x + 1|$; $\quad y = |\log|x||$.

421 $y = \frac{\ln x}{|\ln x|} + 2\ln x$; $\quad y = -\log_{\frac{1}{3}} x + 4$.

422 Applica alla funzione $y = \log_2 x$ la simmetria rispetto all'asse x e al risultato applica la simmetria rispetto al punto $(-1; 3)$. Scrivi l'espressione analitica della funzione ottenuta e disegna il suo grafico.

$[y = \log_2(-x-2) + 6]$

423 Data la funzione f di equazione $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, determina l'equazione della sua trasformata f' che si ottiene mediante la dilatazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = 4y \end{cases}$$

Disegna il grafico di f'. $\left[y = \log_{\frac{1}{2}} 16x^4\right]$

424 Disegna il grafico della funzione f di equazione $y = -\ln x$. Trasforma poi f mediante la dilatazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = 4x \\ y' = 2y \end{cases}$$

Disegna la funzione f' ottenuta e trova i punti di intersezione del grafico di f' con gli assi. $\left[y = -2\ln\frac{x}{4}\right]$

425 Data la funzione $y = \log_4 x$, applica di seguito la traslazione di vettore $(2; -3)$, la simmetria rispetto all'asse x e la simmetria rispetto alla retta di equazione $x = 5$. Rappresenta graficamente la funzione ottenuta ed esprimila analiticamente. $[y = -\log_4(8 - x) + 3]$

426 Data la funzione $y = a^x - 2$, determina a sapendo che il punto $P(2; 7)$ appartiene al suo grafico e rappresentala graficamente. Disegna poi il grafico simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante e determina l'equazione della funzione corrispondente. $[a = 3;\ y = \log_3(x + 2)]$

Il dominio di funzioni contenenti funzioni logaritmiche

427 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo il dominio della funzione:

$$y = \log \frac{x+3}{x-1}.$$

È una funzione logaritmica con argomento frazionario, quindi dobbiamo imporre due condizioni:

a) denominatore della frazione diverso da 0;
b) argomento del logaritmo positivo.

La prima condizione è contenuta nella seconda. Risolviamo pertanto solo questa:

$$\frac{x+3}{x-1} > 0.$$

Studiamo il segno del numeratore:

$$x + 3 > 0 \quad \text{se} \quad x > -3.$$

Studiamo il segno del denominatore:

$$x - 1 > 0 \quad \text{se} \quad x > 1.$$

Compiliamo il quadro dei segni (figura sotto).

		-3		1	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+3}{x-1}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

L'ultima riga, ricavata dalle precedenti con la regola dei segni, permette di giungere al risultato:

$$\frac{x+3}{x-1} > 0 \quad \text{se} \quad x < -3 \lor x > 1.$$

Pertanto D: $x < -3 \lor x > 1$.

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

428 $y = \ln \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$ $[x < -1 \lor x > 1]$

429 $y = \log(x - 8) + \log(2x + 7)$ $[x > 8]$

430 $y = \log_2 \dfrac{x - 3}{x + 2}$ $[x < -2 \lor x > 3]$

431 $y = \log(x^3 - 1)$ $[x > 1]$

432 $y = \log(x + 5) + \log(3 - x)$ $[-5 < x < 3]$

433 $y = \ln|x^2 - 1|$ $[x \neq \pm 1]$

434 $y = \ln(3 - |x|)$ $[-3 < x < 3]$

435 $y = \ln(x^2 - 4x) + 4$ $[x < 0 \lor x > 4]$

436 $y = \log(4^x - 2) + \log(2^x - 1)$ $\left[x > \dfrac{1}{2}\right]$

437 $y = \log \dfrac{x}{\sqrt{x - 2}}$ $[x > 2]$

438 $y = \sqrt{\log \dfrac{x}{x - 3}}$ $[x > 3]$

439 $y = \dfrac{x}{\log(x + 1)}$ $[x > -1 \land x \neq 0]$

440 $y = \dfrac{5}{\log(x^2 + 1) - 1}$ $[x \neq \pm 3]$

441 $y = \dfrac{\ln(x - \sqrt{x^2 - x})}{\ln(x - 3)}$ $[x > 3 \land x \neq 4]$

442 $y = \log_3 \log_2 x$ $[x > 1]$

443 $y = \dfrac{1}{\log_2 \log_3(x - 1)}$ $[x > 2 \land x \neq 4]$

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni, indicando per ciascuna il dominio e il codominio.

444 $y = 2 + \log_2(x-1)$ $[x > 1; \forall y \in \mathbb{R}]$

445 $y = |1 - \ln x|$ $[x > 0; y \geq 0]$

446 $y = |\log_2(x+2)|$ $[x > -2; y \geq 0]$

447 $y = |\ln x| + \ln x$ $[x > 0; y \geq 0]$

448 $y = \left|\log_3 \dfrac{1}{3x}\right| - 1$ $[x > 0; y \geq -1]$

449 $y = -\log(|x| - 2)$ $[x < -2 \wedge x > 2; \forall y \in \mathbb{R}]$

450 $y = \sqrt{\ln x + 1}$ $\left[x \geq \dfrac{1}{e}; y \geq 0\right]$

451 $y = \dfrac{1}{\log_2 x - 1}$ $[x > 0 \wedge x \neq 2; y \neq 0]$

452 $y = \dfrac{\log_2 x + 1}{\log_2 x}$ $[x > 0 \wedge x \neq 1; y \neq 1]$

453 $y = \dfrac{\ln|x|}{|\ln x|} + \ln x$ $[x > 0 \wedge x \neq 1; y < -1 \vee y > 1]$

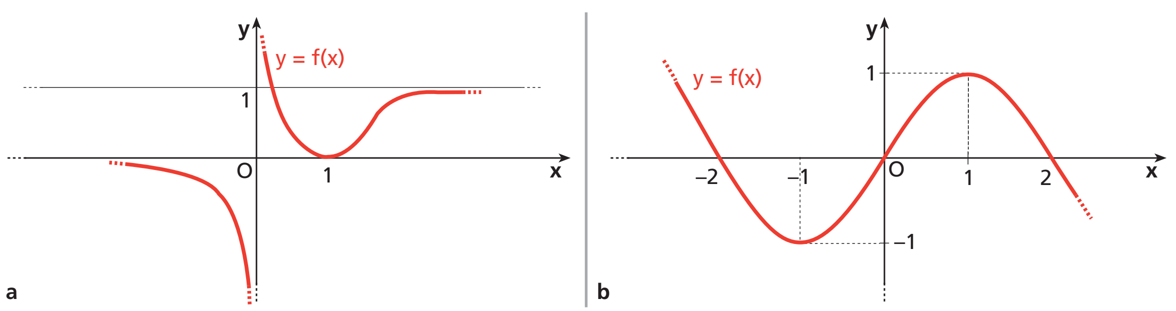
454 $y = \ln^2 x$ $[x > 0; y \geq 0]$

455 $y = 2 - \dfrac{1}{\log_2 x}$ $[x > 0 \wedge x \neq 1; y \neq 2]$

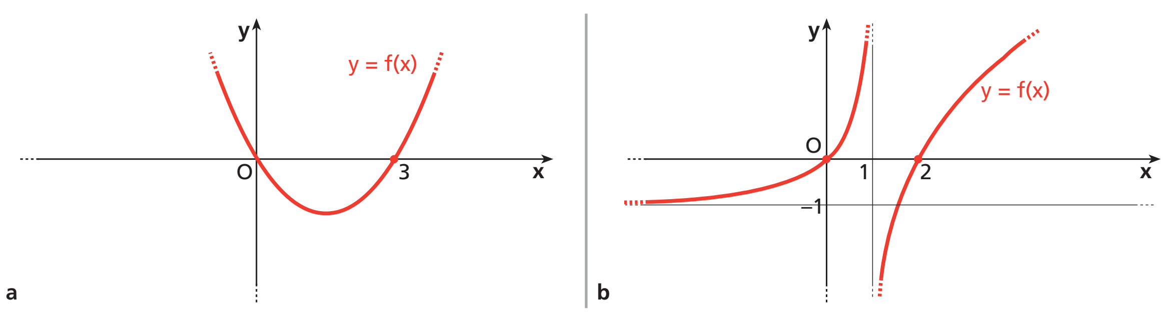
Il grafico delle funzioni del tipo $y = e^{f(x)}$

Utilizzando i grafici delle funzioni $y = f(x)$ delle figure, disegna quello di $y = e^{f(x)}$.

456



457



Disegna il grafico della funzione $f(x)$ e poi quello di $y = e^{f(x)}$.

458 $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 1$

459 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

460 $f(x) = x^2 - 1$

461 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

462 $f(x) = \dfrac{|x|}{x-2}$

463 $f(x) = \dfrac{1}{|x| - 2}$

Traccia i grafici delle seguenti funzioni.

464 $y = e^{-\sqrt{x+1}}$

465 $y = e^{x^2 - 4x}$

466 $y = e^{2|x| - 4}$

467 $y = e^{|x - x^2|}$

468 $y = e^{\frac{1}{x^2-2x}}$

469 $y = e^{\frac{x}{2-x}}$

470 $y = e^{\sqrt{9-x^2}}$

471 $y = e^{\frac{x-3}{|x|}}$

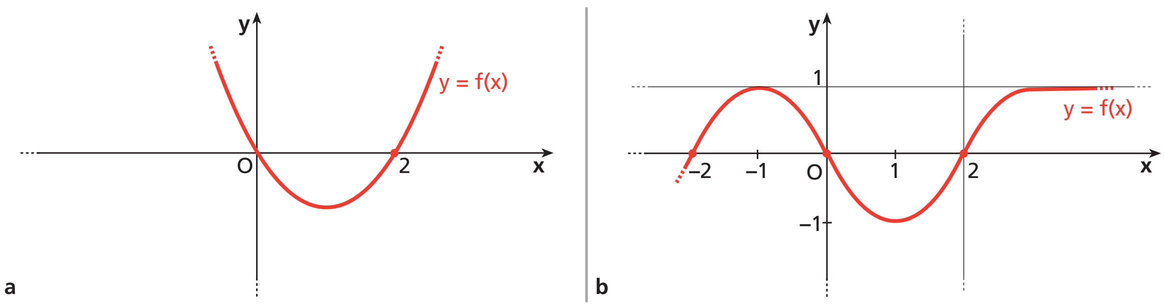
472 $y = e^{\left|\frac{1}{x-1}\right|}$

473 $y = e^{\frac{1}{|x^2-1|}}$

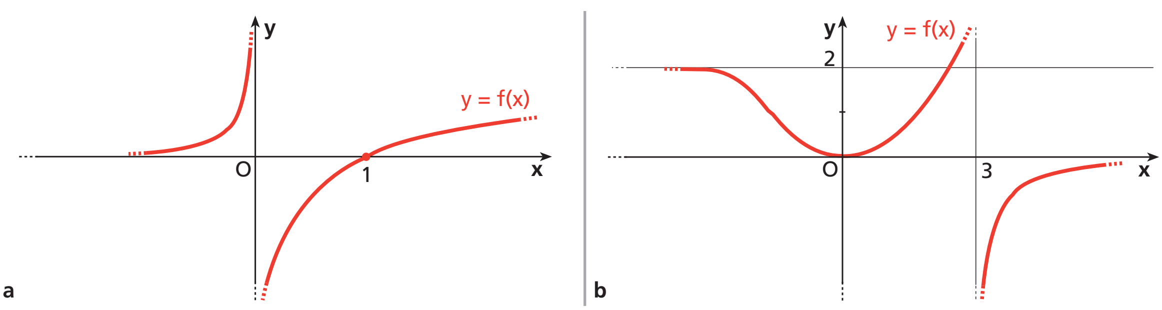
Il grafico delle funzioni del tipo $y = \ln f(x)$

Utilizzando i grafici delle funzioni $y = f(x)$ delle figure, disegna quello di $y = \ln f(x)$.

474



475



Disegna il grafico della funzione $f(x)$ e poi quello di $y = \ln f(x)$.

476 $f(x) = 2|x| + 1$

477 $f(x) = x^2 - 4$

478 $f(x) = \sqrt{x} - 1$

479 $f(x) = \dfrac{x-1}{2x}$

480 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

481 $f(x) = \left|\dfrac{x}{x-1}\right|$

Traccia i grafici delle seguenti funzioni.

482 $y = \ln(2x - x^2)$

483 $y = \ln\dfrac{2x-1}{x}$

484 $y = \ln\dfrac{x}{|x-4|}$

485 $y = \ln\dfrac{1}{|x-2|}$

486 $y = \ln(-1 + \sqrt{1-x})$

487 $y = \ln[(x-1)(x-5)]$

8. LE EQUAZIONI LOGARITMICHE

▶ Teoria a pag. 571

IN PRATICA ▶ Videolezione 27

Riconosci le equazioni logaritmiche nei seguenti gruppi di equazioni.

488 $3x+1=\log 22$; $3\cdot\log_2 x=17$; $\log_2 5=x+\frac{3}{\log_5 x}$; $\log_7 x=2$.

489 $x^{\log 5}=31$; $\sqrt{x-3-\log_5 44}=2$; $\log_3(x^2+1)=x^2+1$; $\log_{112}(\sqrt{x})=2$.

490 $\log(x-1)=\log x$; $\log(x^2+1)=\log x$; $\log_2 x=\log_3(x+1)$; $\log_5\sqrt{7}=x$.

491 ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione:

$$\mathbf{\log_2(x-2)-\log_2(8-x)=\log_2 x-3.}$$

Imponiamo le condizioni di esistenza, ricordando che gli argomenti dei logaritmi devono essere positivi:

$$\begin{cases}x-2>0\\8-x>0\\x>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x>2\\x<8\\x>0\end{cases}\rightarrow\quad 2<x<8.$$

Risolviamo l'equazione con le proprietà dei logaritmi. Innanzitutto al secondo membro, poiché per la definizione di logaritmo è $\log_a a=1$, scriviamo:

$$3=3\cdot1=3\log_2 2=\log_2 2^3=\log_2 8.$$

Sostituiamo nell'equazione data e applichiamo le proprietà dei logaritmi:

$$\log_2(x-2)-\log_2(8-x)=\log_2 x-\log_2 8,$$

$$\log_2\left(\frac{x-2}{8-x}\right)=\log_2\frac{x}{8}.$$

Uguagliando gli argomenti, otteniamo l'equazione fratta:

$$\frac{x-2}{8-x}=\frac{x}{8}.$$

Svolgendo i calcoli, otteniamo:

$$x^2-16=0\ \rightarrow\ x=\pm4.$$

Solo il valore $x=4$ appartiene all'intervallo $]2;8[$ e quindi soddisfa le condizioni di esistenza.

L'unica soluzione dell'equazione data è:

$$x=4.$$

Risolvi le seguenti equazioni.

492 $\log_{x^2}(-2x+8)=1$ $[x=-4\vee x=2]$

493 $\log_2(\sqrt{5-x^2}-x)=0$ $[x=1]$

494 $\log_2\left|\,|x^2-3|-1\right|=1$ $[x=0\vee x=\pm\sqrt{6}]$

495 $\ln(x-2)=1$ $[x=e+2]$

496 $\log_4(3x-20)=3$ $[x=28]$

497 $\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)=-2$ $[x=6]$

498 $3\log_8(4x-7)=-2$ $\left[x=\frac{29}{16}\right]$

499 $4\log_{16}x=\log_5\frac{1}{125}$ $\left[x=\frac{1}{8}\right]$

500 $\log_2 x=\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ $[x=1]$

501 $\log_7(\sqrt{2x+1}-1)=0$ $\left[x=\frac{3}{2}\right]$

502 $\frac{1}{3}\log(9x+8-x^3)=\log(2-x)$ $[x=0]$

503 $\frac{1}{2}\log_2(2x-7)=2+\frac{1}{2}\log_2 x$ $[S=\varnothing]$

504 $\frac{1}{2}\log(1-8x)=\log(1-\sqrt{2x})$ $\left[x=0\vee x=\frac{2}{25}\right]$

505 $\log_3|2x-1|-\log_3 x=0$ $\left[x=\frac{1}{3}\vee x=1\right]$

506 $-2\log_4\sqrt{6x}+\log_4(x^2-16)=0$ $[x=8]$

507 $\frac{2}{3}\log_4(2x-3)=\log_8 2$ $\left[x=\frac{5}{2}\right]$

508 $\log_5 x + \log_5 3 = \log_5 6$ $[x = 2]$

509 $\log_3 5 + \log_3 2 - \log_3 x = \log_3 4$ $\left[x = \frac{5}{2}\right]$

510 $\log_2(2x + 11) = \log_2(x + 10)$ $[x = -1]$

511 $\log_2 x - \log_2 7 = \log_2(x - 1)$ $\left[x = \frac{7}{6}\right]$

512 $\log x - \log 3 = \log(x - 1) + \log 3$ $\left[x = \frac{9}{8}\right]$

513 $\log x - \log(x + 1) = \log 2 - \log 5$ $\left[x = \frac{2}{3}\right]$

514 $\log(x - 1) - \log(x + 2) = \log 3$ $[S = \varnothing]$

515 $\log_2 x + \log_2(x - 1) = \log_2 3x$ $[x = 4]$

516 $\dfrac{\log_5(x^2 + 1)}{\log_5[2 \cdot (x^2 - 4)]} = 1$ $[x = 3 \vee x = -3]$

517 $\log_5(x + 1) + 2\log_5 2 = \log_5 6x$ $[x = 2]$

518 $\log(3x - 1) + \log(x - 2) = \log 22$ $[x = 4]$

519 $\log(x - 1) - \log(x + 1) = \log(x - 3) - \log(x - 2)$ $[x = 5]$

520 $\log(2x + 1) - \log(x - 1) = \log(x + 4) - \log 2$ $[x = 3]$

521 $\log 7 + \log(x - 3) - \log x = \log 14 - \log(x + 1)$ $[x = 2 + \sqrt{7}]$

522 $\log_4(x^2 + 2) - \log_4(x^2 - 1) = \log_4 5 - \log_4(x + 1)$ $[S = \varnothing]$

523 $\log(2 - 3x) + \log(x + 2) = \log 5$ $\left[x = -1 \vee x = -\frac{1}{3}\right]$

524 $\log_2(x^2 - 4) + 2\log_2 x = 1 + \log_2(5x^2 + 16)$ $[x = 4]$

525 $\log(5x - 2) + \log(x + 3)^2 = \log 7 + \log(x + 3) + 2\log(5x - 2)$ $\left[x = \frac{1}{2}\right]$

526 $\log_3(x - 1) + 1 = \log_3(x + 2) + \log_3\left(x - \frac{6}{5}\right)$ $\left[x = \frac{11 + \sqrt{61}}{10}\right]$

527 $1 + \log_3(x - 2) + \log_3(x + 2) = \log_3 5 + \log_3 x$ $[x = 3]$

528 $\log_2(x^2 + 1) = 1 + \frac{2}{3}\log_2 x + \log_8 x$ $[x = 1]$

529 $\log(2x^2 + 5x - 3) - \log(x + 3) = \log(4 - x)$ $\left[x = \frac{5}{3}\right]$

530 $\log(10 - x^2) - \log 8 = 2\log\frac{x}{5} - 2\log\frac{\sqrt{2}}{5}$ $[x = \sqrt{2}]$

531 $\log_2(x^2 + 2x + 8) = 2 + 2\log_4(x + 2)$ $[x = 0 \vee x = 2]$

Usiamo un'incognita ausiliaria

532 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo l'equazione $2\log_2^2 x + 5\log_2 x - 3 = 0$.

Per l'esistenza di $\log_2 x$ deve essere $x > 0$. Poniamo poi $\log_2 x = t$ e sostituiamo nell'equazione:

$$2t^2 + 5t - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{2} \\ t_2 = -3 \end{cases}$$

Dai due valori di t, tenendo conto dell'assegnazione, otteniamo le soluzioni dell'equazione iniziale:

$$\log_2 x = -3 \quad \to \quad x_1 = \frac{1}{8},$$
$$\log_2 x = \frac{1}{2} \quad \to \quad x_2 = \sqrt{2}.$$

I valori ottenuti sono entrambi accettabili perché positivi.

Risolvi le seguenti equazioni.

533 $3\log^2 x - 2\log x = 0$ $\left[x = 1 \vee x = \sqrt[3]{100}\right]$

534 $\log_4^2 x + 3\log_4 x = 4$ $\left[x = 4 \vee x = \frac{1}{256}\right]$

535 $\log_3 x(3\log_3 x - 4) + 1 = 0$ $\left[x = \sqrt[3]{3} \vee x = 3\right]$

536 $\log x - \frac{1}{2} = \log\sqrt{x}$ $[x = 10]$

537 $\frac{3}{\log x - 2} + \log x + 2 = 0$ $[x = 0{,}1 \vee x = 10]$

538 $\log_2 x^2 + \log_2^2 x = 0$ $\left[x = 1 \vee x = \frac{1}{4}\right]$

539 $\log_2^2 x^2 + 4\log_2\sqrt{x} - 2 = 0$ $\left[x = \frac{1}{2} \vee x = \sqrt{2}\right]$

540 $\log_3\sqrt{x}\,(\log_3 x + 1) - 2\log_3 x = 2$ $\left[x = \frac{1}{3} \vee x = 81\right]$

541 $(\log_2 x^2)^2 + 9\log_2 x + 2 = 0$ $\left[x = \frac{1}{4} \vee x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right]$

542 $3 = \frac{14}{\log_5 x + 2} + \frac{4}{\log_5 x - 1}$ $[x = 1 \vee x = 5^5]$

543 $2 = \log_3 x - 8\log_x 3$ $\left[x = \frac{1}{9} \vee x = 81\right]$

544 $\log_2^3 x + 6\log_2^2 x - 16\log_2 x = 0$ $\left[x = \frac{1}{256} \vee x = 1 \vee x = 4\right]$

545 $\log_3^2(x-1) = 2 + 2\log_9(x-1)$ $\left[x = \frac{4}{3} \vee x = 10\right]$

ESERCIZI VARI Le equazioni logaritmiche

TEST

546 Le equazioni $\log\sqrt{x} = 1$ e $\frac{1}{2}\log x = 1$ sono equivalenti?

- A Sì.
- B Solo se $x \geq 0$.
- C Sì, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- D Solo per $x < 0$.
- E No.

547 La condizione di esistenza dell'equazione $\log^2 x - 4 = 0$ è:

- A $x \geq 4$.
- B $x > 4$.
- C $x < -2 \vee x > 2$.
- D $x > 2$.
- E $x > 0$.

548 Il grafico di $y = \log(x + 9)$ incontra la retta di equazione $y = 1$ nel punto di coordinate:

- A $(1; 0)$.
- B $(1; 1)$.
- C $(-8; 0)$.
- D $(-1; 1)$.
- E $(-1; 0)$.

549 L'equazione $\log_x 4 + \log_4 x = -2$ è:

- A verificata per $x = 1$.
- B impossibile.
- C verificata per $x = 4$.
- D verificata per $x = -4$.
- E verificata per $x = \frac{1}{4}$.

550 L'equazione $\log x = 2\log 2x$ è verificata per:

- A $x = 0$.
- B $x = \frac{1}{4}$.
- C $x = \frac{1}{2} \vee x = 0$.
- D $x = \frac{1}{4} \vee x = 0$.
- E $x = \frac{1}{2}$.

551 **ASSOCIA** a ciascuna equazione nella prima riga le sue soluzioni scritte nella seconda.

1) $\log_x 9 = 2$ **2)** $\log(x^2+1) = 1$ **3)** $\log_2 \frac{1}{8} = x$

a) $x = \pm 3$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = -3$

552 **ASSOCIA** a ciascuna equazione a sinistra un'equazione equivalente fra quelle scritte a destra.

1) $\log(x-1) + \log(x+1) = 1$ **a)** $\log(x^2-1) = 1$

2) $\log(x+1)(x-1) = \log 10$ **b)** $\log(1-x^2) = 1$

3) $3\log(1-x)(1+x) = 3$ **c)** $\log(x-1) = \log 10 - \log(1+x)$

553 **ASSOCIA** a ciascuna equazione la proposizione corretta.

1) $\log(2x+1) = 2\log(x-1)$ **4)** $2\log(x-2) - 2\log 2 = \log(2x-7)$

2) $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$ **5)** $|\log_2 x + 3| = 5$

3) $3\log_3 x = \log_3 64$

a) L'equazione ammette come unica soluzione $x = 4$.
b) L'equazione ammette due soluzioni di cui una è $x = 4$.

554 Find the value of x in

$\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = 5.$

(IR *Leaving Certificate Examination,* Higher Level, 1995)

$[x = 6]$

Risolvi le seguenti equazioni.

555 $\log_2(x-2) + 3 = \log_2 \frac{3}{5} + \frac{2}{3}\log_2 64$ $\left[x = \frac{16}{5}\right]$

556 $\frac{\log(x^2+2x-8)}{\log(x+12)} = 1$ $[x = -5 \vee x = 4]$

557 $\log 21 - \log(x+5) - \log(23-x) = -\log 7$ $[x = 2 \vee x = 16]$

558 $\log_2(3x-1) + \log_2 x = 2\log_2 x - \log_2(x+1)$ $\left[x = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right]$

559 $\log_3(x+1) = \log_3(x^2+9) - 2$ $[x = 0 \vee x = 9]$

560 $\log(5+x) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log(x+3) + \log 2$ $[x = -1]$

561 $\log_3(x^2+3x-3) - 1 = \log_3(x+2) +$
$+\log_3(x-2)$ $[x = 3]$

562 $\log_2(2x+6) - \log_4(x-1) = 3$ $[x = 5]$

563 $\log_5(x^2+6x-2) = 1 + \log_5(x+2)$ $[x = 3]$

564 $1 - \frac{2}{\log_3 x + 2} = 3\log_{\frac{1}{3}} x$ $\left[x = \frac{\sqrt[3]{9}}{27} \vee x = 1\right]$

565 $\frac{1}{5}\log_5(x+1) - \log_{x+1} 5 = \frac{4}{5}$ $\left[x = -\frac{4}{5} \vee x = 3124\right]$

566 $\frac{5}{4}\log_4 x + \log_{16}\sqrt[4]{x} = \frac{11}{16}$ $[x = 2]$

567 $\log_3(x-1) = \frac{1}{2}\log_3 x$ $\left[x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

568 $\log(x-1) - 2\cdot\log(x+1) - \log 8 = -2$ $\left[x = \frac{3}{2} \vee x = 9\right]$

569 $\log 2 + \frac{1}{2}\log(x^2+5) = \log(x^2+2)$ $[x = -2 \vee x = 2]$

570 $3\log_{13}(5-x) + \log_{13} 11 = \log_{13}(x+3) +$
$+2\log_{13}(5-x)$ $\left[x = \frac{13}{3}\right]$

571 $4\log(3-2x)-\log(4-x^2)=\log(3-2x)^3$ $\quad[x=1-\sqrt{2}]$

572 $2\log_2 x=2+\log_2(x+3)$ $\quad[x=6]$

573 $2\log_2\left(\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}\right)=\log_2(x^2-5)-2$ $\quad[S=\varnothing]$

574 $\log_5 x+\log_5(\sqrt{5}\cdot x-4)=\frac{1}{2}$ $\quad[x=\sqrt{5}]$

575 $\log(x+1)-\log(\sqrt{x+1})=2$ $\quad[x=9999]$

576 $\ln x\cdot\ln x^2+\ln x^3-2=0$ $\quad\left[x=\frac{1}{e^2}\vee x=\sqrt{e}\right]$

577 $\left|\log_2\sqrt{x+1}-1\right|=2$ $\quad\left[x=-\frac{3}{4}\vee x=63\right]$

578 $\frac{\log_2(2x+3)}{\log_2 x}=\frac{\log_2 4x^2}{\log_2 x}-1$ $\quad\left[x=\frac{3}{2}\right]$

579 $\sqrt{\log_2 x}-8\log_2\sqrt{x}=0$ $\quad[x=1\vee x=\sqrt[16]{2}]$

580 $\log_2\log_3(x-5)=2$ $\quad[x=86]$

581 $6\left(\log_3 x-\log_{\frac{1}{3}}x\right)+\log_3\frac{1}{x}=5$ $\quad[x=\sqrt[11]{3^5}]$

582 $\log_3|2x^2+x|+\log_3\frac{1}{5}=1$ $\quad\left[x=-3\vee x=\frac{5}{2}\right]$

583 $2(\log_2 x)^2+\log_2 x^5-3=0$ $\quad\left[x=\frac{1}{8}\vee x=\sqrt{2}\right]$

584 $\log_2^2 x^2+\log_2 x=7(1-\log_2 x)-2$ $\quad\left[x=\frac{\sqrt{2}}{8}\vee x=\sqrt{2}\right]$

585 $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}x+5}-\sqrt{\log_2 x-1}=2$ $\quad[x=2]$

586 $\log_2^3 x-\frac{1}{2}\log_2^2 x^2-4\log_2 x^2=0$ $\quad\left[x=\frac{1}{4}\vee x=1\vee x=16\right]$

587 $\frac{3\log_2 x-1}{2\log_2 x+8}=\frac{13}{40}+\frac{2\log_2 x-3}{\log_2 x^4+4}$ $\quad\left[x=2\vee x=2^{\frac{16}{9}}\right]$

588 $\frac{\log_2 x}{\log_2 x+3}+\frac{6}{\log_2 x-3}+\frac{72}{9-\log_2^2 x}=0$ $\quad\left[x=\frac{1}{512}\vee x=64\right]$

589 $-\log_{\frac{1}{3}}6+\log_3(x+1)=\log_3(5x)$ $\quad[S=\varnothing]$

590 $1+\frac{\log_2(x+1)}{\log_2 x}=\frac{1}{\log_2 x}$ $\quad[S=\varnothing]$

591 $\frac{3}{\log_2 x-1}+\frac{2}{\log_2 x+1}=2$ $\quad\left[x=8\vee x=\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

592 $\log_3(x+1)-2\log_9(x-2)=3\log_{27}x-2$ $\quad\left[x=\frac{11+\sqrt{157}}{2}\right]$

593 $\log_3(x+1)=2\log_9(x^2+9)-2$ $\quad[x=0\vee x=9]$

594 $\frac{3}{\ln x}+\frac{\ln x}{\ln x+1}=2+\frac{1}{\ln x}$ $\quad\left[x=e^{\sqrt{2}}\vee x=e^{-\sqrt{2}}\right]$

595 $\frac{3}{\log_2 x(1+\log_2 x)}=2-\frac{3}{\log_2 x}$ $\quad\left[x=\frac{1}{2\sqrt{2}}\vee x=4\right]$

596 $\sqrt{\log_2^2 x+\log_2 x-2}=\log_{\frac{1}{2}}x-2$ $\quad\left[x=\frac{1}{4}\right]$

597 $\log_{\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{3^{2-x}}+3^x\right)=-1+\log_{\frac{1}{4}}(2^{x-3}+2^x)$ $\quad[x=4]$

598 $\frac{2}{1-\log_5 x^2}-\frac{\log_5 x}{\log_5 x+3}=\frac{\log_5^2 x-10\log_5 x}{2\log_5^2 x+\log_5 x^5-3}$ $\quad[x=5\ \vee\ x=25]$

599 $3\log_4 x-\log_4(x+1)=\log_4(x^4-81)+\log_{\frac{1}{4}}(x^2-2x-3)$ $\quad[S=\varnothing]$

600 $\sqrt{10+\log_3 x^2}=5-\sqrt{10+3\log_{\frac{1}{3}}x}$ $\quad\left[x=\frac{1}{3^5}\ \vee\ x=27\right]$

601 $3+\log x^5-2\log^2 x=(\log x+6)(\log x-1)$ $\quad\left[x=10^{\sqrt{3}}\ \vee\ x=10^{-\sqrt{3}}\right]$

602 $\log\sqrt{|x-2|+2x}-\frac{1}{2}\log(3x+7)=0$ $[S=\varnothing]$

603 $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}(2x+4)+\log_3 x+\log_3(x-1)}{\log_3\frac{x}{2}}=0$ $[x=4]$

604 $2\log_4^2|x+1|+\log_4|x^2-1|+\log_{\frac{1}{4}}|x-1|-1=0$ $\left[x=-\frac{3}{4}\vee x=-\frac{5}{4}\vee x=-3\right]$

605 $\log_2^3 x+6\log_{\frac{1}{2}}^2 x+9\log_2 x+4\log_4 x+6=0$ $\left[x=\frac{1}{8}\vee x=\frac{1}{4}\vee x=\frac{1}{2}\right]$

606 $\sqrt{3+\log_{\frac{1}{2}}x}+\sqrt{3+\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}}x}=\dfrac{6}{\sqrt{3+2\cdot\log_4 x}}$ $[x=1\vee x=8]$

607 $2\log_3^2\sqrt{x+5}+\log_{\frac{1}{3}}^2\sqrt{x+5}-9\log_3\sqrt{x+5}+6=0$ $[x=4\vee x=76]$

608 **TEST** Risolvi per x l'equazione $\log_4\sqrt{x^{\frac{4}{3}}}+3\log_x(16x)=7$.

A 16. B 27. C 64. D 81. E 343.

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2001)

I sistemi con equazioni logaritmiche

Risolvi i seguenti sistemi.

609 $\begin{cases}\log_2 x-\log_2 y=2\\ x-2y=1\end{cases}$ $\left[\left(2;\frac{1}{2}\right)\right]$

610 $\begin{cases}2\log_3 x-y=1\\ \log_3 x+2y=4\end{cases}$ $\left[\left(3\sqrt[5]{3};\frac{7}{5}\right)\right]$

611 $\begin{cases}\log_3(x-y)=1\\ \log_3 x+\log_3 y=2\log_3 2\end{cases}$ $[(4;1)]$

612 $\begin{cases}x^2+y^2=\frac{37}{9}\\ \log_3 x+\log_3 y=\log_3 2-1\end{cases}$ $\left[\left(2;\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3};2\right)\right]$

613 $\begin{cases}\log_3(2x-y)=0\\ 3^y+3^x-\frac{4}{3}=0\end{cases}$ $[(0;-1)]$

614 $\begin{cases}4\log_2 x-\log_2 y^2=4\\ \log_2 x+\log_2 y=4\end{cases}$ $[(4;4)]$

615 $\begin{cases}\log_2 x-\log_2(y+1)^2=2\\ \log_{y+1}x=1\end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{4};-\frac{3}{4}\right)\right]$

616 $\begin{cases}3^x\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^y=27\\ \frac{1}{2}\log_2(x-y)=\log_4 x\end{cases}$ $[(3;0)]$

617 $\begin{cases}\log_{xy}12=1\\ 2^{x-4}\cdot 3^{x-1}=\frac{6^y}{8}\end{cases}$ $[(4;3)\vee(-3;-4)]$

618 $\begin{cases}\log_5(y-x)-1=2\log_5 y\\ 2x=-5^{\log_5 y}\end{cases}$ $\left[\left(-\frac{3}{20};\frac{3}{10}\right)\right]$

9. LE DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Teoria a pag. 572

I due membri si possono scrivere come logaritmi di uguale base

IN PRATICA Videolezione 28

619 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo le seguenti disequazioni:

a) $\log_{11}(2-x)>\log_{11}(x+2)$; b) $\log_{\frac{1}{5}}20x<-3$.

a) Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2-x>0 & \text{condizione di esistenza;} \\ x+2>0 & \text{condizione di esistenza;} \\ 2-x>x+2 & \text{disuguaglianza fra gli argomenti con lo stesso verso} \\ & \text{di quella fra i logaritmi, dato che la base è maggiore di 1.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x>-2 \\ x>-2 \\ -2x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>-2 \\ x<0 \end{cases}$$

Le soluzioni della disequazione data sono:

$$-2<x<0.$$

b) Osserviamo che, per la definizione di logaritmo, possiamo scrivere

$$-3=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=\log_{\frac{1}{5}}5^3=\log_{\frac{1}{5}}125$$

e perciò la disequazione assume la forma:

$$\log_{\frac{1}{5}}20x<\log_{\frac{1}{5}}125.$$

Ora dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 20x>0 & \text{condizione di esistenza;} \\ 20x>125 & \text{disuguaglianza fra gli argomenti con verso opposto rispetto a quella} \\ & \text{fra i logaritmi, essendo la base minore di 1.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>0 \\ 20x>125 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>\frac{25}{4} \end{cases}$$

Le soluzioni della disequazione assegnata sono:

$$x>\frac{25}{4}.$$

Risolvi le seguenti disequazioni.

620 $\log_3(2-5x)>2$ $\left[x<-\frac{7}{5}\right]$

621 $\log_2(x^2-1)>3$ $[x<-3 \vee x>3]$

622 $\log_{\frac{1}{3}}(4x-3)>-1$ $\left[\frac{3}{4}<x<\frac{3}{2}\right]$

623 $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(16-9x^2)<-2$ $[-1<x<1]$

624 $\log_5\left(\frac{2-x}{x+3}\right)<\log_5 4$ $[-2<x<2]$

625 $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{4+x}{2x+11}\right)<\log_{\frac{1}{5}}x$ $\left[0<x<\frac{-5+\sqrt{33}}{2}\right]$

626 $\log(2x-x^2)<\log(x-2)$ $[S=\emptyset]$

627 $\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)>\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{x}{x+1}\right)$ $[x<-1]$

628 $\log_{\frac{4}{5}}(2-x^2)-\log_{\frac{4}{5}}(1-2x)<0$ $\left[1-\sqrt{2}<x<\frac{1}{2}\right]$

Utilizziamo anche le proprietà dei logaritmi

Risolvi le seguenti disequazioni.

629 $\log_{\frac{1}{4}}(x^2-6)-\log_{\frac{1}{4}}(x-3)>-1$ $[S=\emptyset]$

630 $\frac{1}{2}\log(-x^2+2x)<\log x$ $[1<x<2]$

631 $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{7}}(x^3+22) > \log_{\frac{1}{7}}(x+1)$ $\left[x > \frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right]$

632 $\log(x+5) - \log(4-x) + \log(3x-1) > \log(3x-1) - \log(x+4)$ $\left[\frac{1}{3} < x < 4\right]$

633 $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(25-x) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5) < 0$ $[5 < x < 9]$

634 $\log\left(2+\frac{1}{x}\right) - \log\left(2-\frac{1}{x}\right) < \log(2x+1) - \log(1-2x)$ $[S = \varnothing]$

635 $\frac{1}{2}\log(6-x) - \frac{1}{2}\log(2x-5) > \log 3$ $\left[\frac{5}{2} < x < \frac{51}{19}\right]$

636 $2\log_{\sqrt{3}}(1-x) - \log_{\sqrt{3}}(3-x) < 2$ $\left[\frac{-1-\sqrt{33}}{2} < x < 1\right]$

Usiamo un'incognita ausiliaria

637 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo la disequazione $\log_2(5x-6) < 3 + \dfrac{4}{\log_2(5x-6)}$.

Introduciamo l'incognita ausiliaria $y = \log_2(5x-6)$ e sostituiamo:

$$y < 3 + \frac{4}{y} \quad \to \quad \frac{y^2-3y-4}{y} < 0.$$

Abbiamo ottenuto una disequazione algebrica fratta che ha per soluzioni:

$$y < -1 \vee 0 < y < 4.$$

Ora dobbiamo risolvere le due disequazioni logaritmiche:

$$\log_2(5x-6) < -1, \quad 0 < \log_2(5x-6) < 4.$$

- La disequazione $\log_2(5x-6) < -1$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 5x-6 > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo;} \\ \log_2(5x-6) < \log_2\frac{1}{2} & \text{poiché } -1 = \log_2\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{6}{5} \\ 5x-6 < \frac{1}{2} \end{cases} \to \begin{cases} x > \frac{6}{5} \\ 10x < 13 \end{cases} \to \begin{cases} x > \frac{6}{5} \\ x < \frac{13}{10} \end{cases}$$

Le soluzioni della prima disequazione sono: $S_1 = \left\{x \mid \frac{6}{5} < x < \frac{13}{10}\right\}$.

- La disequazione $0 < \log_2(5x-6) < 4$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 5x-6 > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo;} \\ \log_2(5x-6) < \log_2 16 & \text{poiché } 4 = \log_2 16; \\ \log_2(5x-6) > \log_2 1 & \text{poiché } 0 = \log_2 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{6}{5} \\ 5x-6 < 16 \\ 5x-6 > 1 \end{cases} \to \begin{cases} x > \frac{6}{5} \\ x < \frac{22}{5} \\ x > \frac{7}{5} \end{cases}$$

Le soluzioni della seconda disequazione sono: $S_2 = \left\{x \mid \frac{7}{5} < x < \frac{22}{5}\right\}$.

Le soluzioni della disequazione assegnata sono pertanto:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \mid \frac{6}{5} < x < \frac{13}{10} \vee \frac{7}{5} < x < \frac{22}{5}\right\}.$$

Risolvi le seguenti disequazioni.

638 $(\log x)^2 - 7\log x + 12 < 0$ $[1000 < x < 10\,000]$

639 $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x - 2 < 0$ $\left[\frac{1}{4} < x < 2\right]$

640 $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 > 0$ $\left[0 < x < \frac{1}{2} \vee x > 4\right]$

641 $2(\log_3 x)^2 + 3\log_3 x - 2 < 0$ $\left[\frac{1}{9} < x < \sqrt{3}\right]$

642 $[\log_2(x+5)]^2 - \log_2(x+5) - 6 > 0$ $\left[-5 < x < -\frac{19}{4} \vee x > 3\right]$

643 $\dfrac{2}{\log_{\frac{2}{3}} x - 1} > \dfrac{\log_{\frac{2}{3}} x}{\log_{\frac{2}{3}} x - 1}$ $\left[\frac{4}{9} < x < \frac{2}{3}\right]$

644 $3\log_5(x-4) > \dfrac{6}{\log_5(x-4) + 1}$ $\left[\frac{101}{25} < x < \frac{21}{5} \vee x > 9\right]$

ESERCIZI VARI Le disequazioni logaritmiche

TEST

645 Il dominio della funzione $y = \log_2 \log_{\frac{1}{2}} x$ è:

A $[0; 1]$.

B $]0; +\infty[$.

C $]1; +\infty[$.

D $]-\infty; 0[$.

E $]0; 1[$.

646 Quale fra le seguenti disequazioni ammette come soluzioni $x > 0$?

A $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > 0$

B $\log_2(x+1) > 0$

C $\log x > 10$

D $\log_2 x > 0$

E $\log_{\frac{1}{2}} x < 0$

647 Puoi affermare che $\log_a A > \log_a B \Rightarrow A > B$ se a vale:

A -1.

B 0.

C $\frac{2}{3}$.

D $\frac{3}{2}$.

E $\frac{3}{5}$.

648 La disequazione $\log x \cdot \log 2x < 0$ è verificata per:

A $x > 1$.

B $x > 0$.

C $\frac{1}{2} < x < 1$.

D $x < 0$.

E $0 < x < \frac{1}{2}$.

649 **COMPLETA**

Disequazioni	a	Soluzioni
$\log_a(x-1) < 1$	2	
$\log_a(x+1) < -2$		$x > 3$
$\log_{\frac{1}{3}}(x+a) < -2$		$x > 0$

650 **ASSOCIA** a ogni disequazione le sue soluzioni.

1) $\log_2 x > 3$

2) $\log_{\sqrt{2}} x > 4$

3) $\log_{\frac{1}{3}}(2-x) > \log_{\frac{1}{3}}(1-2x)$

4) $\log_2(x+1) - \log_2(x-1) < 1$

a) $x > 3$

b) $x < -1$

c) $x > 8$

d) $x > 4$

651 Data la disequazione $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+k) > k$:

a) determina le soluzioni se $k=-1$;
b) stabilisci se per $k=0$ è equivalente alla disequazione $2\log_{\frac{1}{2}} x > 0$. $[-\sqrt{3}<x<-1 \vee 1<x<\sqrt{3}; \text{no}]$

Risolvi le seguenti disequazioni.

652 $\log_4(x-1) \leq -2$ $\left[1<x\leq\frac{17}{16}\right]$

653 $\log_{\frac{1}{3}}(1-2x) < 1$ $\left[x<\frac{1}{3}\right]$

654 $\log_4(x^2+15) > 3$ $[x<-7 \vee x>7]$

655 $\log_2(4x+1) > 0$ $[x>0]$

656 $\log_{\frac{1}{3}} 9 + \log_{\frac{1}{3}} x \geq 0$ $\left[0<x\leq\frac{1}{9}\right]$

657 $\log(x^2+17x+16) < 2$ $[-21<x<-16 \vee -1<x<4]$

658 $\log_{\frac{2}{3}} x^5 - 2\log_{\frac{2}{3}}\sqrt{x} < 1$ $\left[x>\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right]$

659 $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{3x-2}{x+5}\right) - \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{3+x}{2-x}\right) < 0$ $[S=\varnothing]$

660 $\left(\log_{\frac{1}{4}} x\right)^2 + 2\log_{\frac{1}{4}} x > \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} x$ $\left[0<x<\frac{1}{2} \vee x>64\right]$

661 $\frac{1}{\log x} - 3\log x < 2$ $\left[\frac{1}{10}<x<1 \vee x>\sqrt[3]{10}\right]$

662 $\log(3-x)^2 - 2\log(4+x) < 0$ $\left[x>-\frac{1}{2} \wedge x\neq 3\right]$

663 $\log_{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{1}{x}\right) - \log_{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}(x+1) < \log_{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}\frac{1}{x} + 3$ $[x>3]$

664 $\log_{\frac{7}{9}}(3x-7)^2 + \log_{\frac{7}{9}}(11-2x) < \log_{\frac{7}{9}}(3x-7) + \log_{\frac{7}{9}}(11-2x)^2$ $\left[\frac{18}{5}<x<\frac{11}{2}\right]$

---

665 $\log_2(\sqrt{1-x}-2) > 0$ $[x<-8]$

666 $\log_2(1-|x|) > 3$ $[S=\varnothing]$

667 $\sqrt{4-\log_2 x} > 3$ $\left[0<x<\frac{1}{32}\right]$

668 $\log_2 x > -\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x}$ $[x>1]$

669 $2\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$ $\left[1<x\leq\frac{3}{2}\right]$

670 $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x) - 2\log_{\frac{1}{3}}(6-x) < -\log_{\frac{1}{3}} 4$
$[x<-2\sqrt{3} \vee 2\sqrt{3}<x<6]$

671 $\log_2(4x+6) - \log_2(5+x) \leq 1$ $\left[-\frac{3}{2}<x\leq 2\right]$

672 $\log_2\sqrt{2x-x^2} < 0$ $[0<x<2 \wedge x\neq 1]$

673 $\frac{1}{\log_5(x-1)} < -1$ $\left[\frac{6}{5}<x<2\right]$

674 $\log_{\sqrt[3]{2}}(2x-5) - \log_{\sqrt[3]{2}}\frac{2x-5}{x+4} < 3$ $[S=\varnothing]$

675 $3\log_2(2x-4) - \log_2(-x+3) > 2\log_2(x-5)$
$[S=\varnothing]$

676 $\frac{1}{2}\log_x[2(1-x)] + \log_x\sqrt{x} + \frac{1}{4}\log_x x^2 < 2$
$[0<x<\sqrt{3}-1]$

677 $\log\log(x-1) \geq 0$ $[x\geq 11]$

678 $\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{3}{2}\right) \leq 1$ $\left[-\frac{3}{2}<x\leq\frac{\sqrt{2}-3}{2}\right]$

679 $\ln x + \frac{2}{\ln x} - 3 \leq 0$ $[0<x<1 \vee e\leq x\leq e^2]$

680 $3(\log_3 x + \log_x 3) \geq 10$
$[1<x\leq\sqrt[3]{3} \vee x\geq 27]$

681 $\log_2 \log_3 (x+4) > 0$ $[x > -1]$

682 $\log_2 \log_{\frac{1}{2}} (x-6) < 0$ $\left[\frac{13}{2} < x < 7\right]$

683 $\log_4 \sqrt{3x-2} - [\log_4 (3x-2)]^2 < \frac{1}{2}$ $\left[x > \frac{2}{3}\right]$

684 $\log_6 \sqrt{x^2-2x} < \log_6 |x| - \frac{1}{2}$ $\left[2 < x < \frac{12}{5}\right]$

685 $\dfrac{\sqrt[3]{\log_5 (4^{2x}+1)} - 1}{\log^2_{\frac{1}{4}} 3x - \log_4 9x^2 + 1} \leq 0$ $\left[0 < x \leq \frac{1}{2}\right]$

686 $\dfrac{(4-\log_2 x)\log_2 |x|}{\log_2 (x-2)} \geq 0$ $[3 < x \leq 16]$

687 $\log^3 x - 4\log^2 x + 4\log x \leq 0$ $[0 < x \leq 1 \vee x = 100]$

688 $\log_2 |x^2+2x-3| - \log_2 (x-2) < 1$ $[S = \varnothing]$

689 $\dfrac{\log_2 (x+1)}{4} > \dfrac{1}{3} \log_4 (x\sqrt{x}+1)$ $[x > 0]$

690 $\dfrac{3\log_9^2 x + \log_{\frac{1}{9}} x^2}{\sqrt{\log_9 x^2}} \geq 0$ $[x \geq 3\sqrt[3]{3}]$

691 $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{|x-2|}{x} < -1 + \log_2 x$ $[x > 4]$

692 $\dfrac{|\log_3 |2x+3|| - 3}{\log_3 x} > 0$ $[0 < x < 1 \vee x > 12]$

693 $\log_9 (x+2) - \log_9 (x^2-7x+12) \leq \log_9 \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{2}$ $\left[2 < x \leq \frac{5}{2} \vee x \geq 8\right]$

694 $\sqrt{\log_3 x} - 6\log_3 \sqrt{x} > 0$ $[1 < x < \sqrt[9]{3}]$

---

695 $\dfrac{\ln^2 x^2 - 9}{3 - \ln |x|} > 0$ $\left[-e^3 < x < -e^{\frac{3}{2}} \vee -e^{-\frac{3}{2}} < x < e^{-\frac{3}{2}} \vee e^{\frac{3}{2}} < x < e^3, x \neq 0\right]$

696 $\log_{\frac{3}{4}} [\sqrt{x^4(x-1)} + 1]^2 < 0$ $[x > 1]$

697 $2\log_7 x - \log_7 |1+x| \geq -\log_7 \left|\dfrac{1}{x^2} - 1\right|$ $[x \geq 2]$

698 $\dfrac{\log_2^2 (x-1) - 9\log_2 (x-1) + 20}{|\log_2 (x-1)|} \leq 0$ $[17 \leq x \leq 33]$

699 $\dfrac{|-2\log x| + \log (x^2+1)}{2\log x - \log (2x-5)^2} \geq 0$ $\left[\frac{5}{3} < x < 5 \wedge x \neq \frac{5}{2}\right]$

700 $\dfrac{\sqrt{\log_2 \log_{\frac{1}{4}} (x^2-4) + 1}}{\log_2 (7-2x) - 3\log_8 x} \geq 0$ $\left[2 < x \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$

I sistemi con disequazioni logaritmiche

Risolvi i seguenti sistemi.

701 $\begin{cases} \log_2 \dfrac{x}{x-1} < 2 \\ \log_{\frac{1}{2}} (x-1) < \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\left[x > 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

702 $\begin{cases} \log^2 x < \dfrac{2}{\log x + 1} \\ \dfrac{\log x - 1}{\log (x-1)} \leq 0 \end{cases}$ $[2 < x < 10]$

703 $\begin{cases} \log_4 (x-1) + \dfrac{3}{2} < \log_2 (2x-1) \\ \log_2 \log_3 x \leq 1 \end{cases}$ $\left[1 < x \leq 9 \wedge x \neq \frac{3}{2}\right]$

704 $\begin{cases} \log_3 (x^2+9) \leq \log_3 (x+1) + 2 \\ \dfrac{\log_3^2 x - 1}{|\log_3 x|} > 0 \end{cases}$ $\left[0 < x < \frac{1}{3} \vee 3 < x \leq 9\right]$

705 $\begin{cases} \log_2 (4^x - 2) < 1 \\ \dfrac{x^2-4}{\log_2 x + 2} \leq 0 \end{cases}$ $\left[\frac{1}{2} < x < 1\right]$

706 $\begin{cases} \dfrac{1}{\log_3 \log_2 x} > 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{\log_2 x - 2} \geq 0 \end{cases}$ $[x > 4]$

10. I LOGARITMI E LE EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Teoria a pag. 573

IN PRATICA
Videolezione 29

Le equazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

707 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo l'equazione $9 \cdot 7^x = 11$.

Dividiamo entrambi i membri per 9:

$$7^x = \frac{11}{9}.$$

Dopo aver osservato che i due membri sono positivi, trasformiamo l'equazione uguagliando i logaritmi (in una base qualsiasi) del primo e del secondo membro. In questo caso conviene utilizzare la base 7:

$$\log_7 7^x = \log_7 \frac{11}{9}.$$

Applichiamo la terza proprietà dei logaritmi:

$$x \log_7 7 = \log_7 \frac{11}{9}.$$

Essendo $\log_7 7 = 1$:

$$x = \log_7 \frac{11}{9}.$$

Possiamo trasformare la soluzione passando ai logaritmi in base 10, in modo da calcolare un valore approssimato con la calcolatrice:

$$x = \frac{\log \frac{11}{9}}{\log 7} \simeq 0{,}1031.$$

Risolvi le seguenti equazioni.

708 $5^x = 9$ $\left[x = \frac{\log 9}{\log 5}\right]$

709 $1{,}3^x - 2 = 0$ $\left[x = \frac{\log 2}{\log 1{,}3}\right]$

710 $1{,}3^x + 2 = 0$ $[S = \varnothing]$

711 $3 \cdot 11^x = 2$ $\left[x = \frac{\log 2 - \log 3}{\log 11}\right]$

712 $4 \cdot 5^x = 3 \cdot 7^x$ $\left[x = \frac{\log 3 - \log 4}{\log 5 - \log 7}\right]$

713 $\frac{7}{2^x} = 1$ $\left[x = \frac{\log 7}{\log 2}\right]$

714 $3 \cdot 2^x + 2^{x+1} = 19$ $\left[x = \frac{\log 19 - \log 5}{\log 2}\right]$

715 $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 26$ $\left[x = \frac{\log 2}{\log 3}\right]$

716 $4^x = 4^{x-2} + 27$ $\left[x = 2 + \frac{2\log 3 - \log 5}{2\log 2}\right]$

717 $2^x + 2^{x+1} + 2^{x-1} = 15$ $\left[x = \frac{\log 30 - \log 7}{\log 2}\right]$

718 $12 - 2^{x+3} + 2^{2x} = 0$ $\left[x = 1 \vee x = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 2}\right]$

719 $7^{x+1} - 7^x + 2 \cdot 7^{x-1} = 2$ $\left[x = 1 - \frac{\log 22}{\log 7}\right]$

720 $9^x - 3^x - 2 = 0$ $\left[x = \frac{\log 2}{\log 3}\right]$

721 $\sqrt[3]{7^x} = 5$ $\left[x = \frac{3\log 5}{\log 7}\right]$

722 $3^x + 20 = 9^x$ $\left[x = \frac{\log 5}{\log 3}\right]$

723 $3 \cdot 5^x - \frac{12}{5^x} = 5^x$ $\left[x = \frac{\log 6}{2\log 5}\right]$

724 $5^x \cdot 2^{2x} = 10$ $\left[x = \frac{\log 5 + \log 2}{\log 5 + 2\log 2}\right]$

725 $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{2-x} = 29$ $\left[x = 2 \vee x = \frac{\log 2}{\log 3} - 1\right]$

726 $6 - 5 \cdot 3^x + (3^x)^2 = 0$ $\left[x = 1 \vee x = \frac{\log 2}{\log 3}\right]$

727 $9 \cdot 2^{2x+1} - 9^2 - 4^{2x} = 0$ $\left[x = \frac{\log 3}{\log 2}\right]$

728 $2^{2x+3} - 25 \cdot 2^x + 3 = 0$ $\left[x = -3 \vee x = \frac{\log 3}{\log 2}\right]$

729 $\frac{2}{5^x} = \frac{3}{7^x}$ $\left[x = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 7 - \log 5}\right]$

730 $3^x + 3^{x+1} = 5^x$ $\left[x = \frac{2\log 2}{\log 5 - \log 3}\right]$

731 $7 \cdot 2^x + \frac{5}{2^x} = \frac{117}{4}$ $\left[x=2 \vee x=\frac{\log 5 - \log 28}{\log 2}\right]$

732 $2 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^{x+1} = 2^{3x+1} - 2^{3x}$ $\left[x = -\frac{\log 17}{\log 3 - 3\log 2}\right]$

733 $5^x + 233 = 33(\sqrt{5^x} + 1)$ $\left[x = 4 \vee x = \frac{\log 64}{\log 5}\right]$

ESERCIZI VARI Le equazioni esponenziali

734 **TEST** Fra le seguenti equazioni esponenziali, *una sola* può essere risolta senza ricorrere all'uso dei logaritmi. Quale?

A $7^{x+1} = 5^x$
B $3^{x-1} = 6^{2x}$
C $2^{3x-1} = 5^x$
D $2^{x-1} = 4^x + 3$
E $2^{2x} + 2 = 6^{1-x}$

735 **TEST** Tutte le seguenti equazioni si devono risolvere ricorrendo all'uso dei logaritmi, *tranne* una. Quale?

A $2^{x-1} = 3^{x+1}$
B $\sqrt[3]{4^x} = 3$
C $3^{x-1} + 3 = 9$
D $7 \cdot 5^{x+2} = 7^{x+1}$
E $\frac{2}{4^x} = \frac{3}{6^x}$

736 **ASSOCIA** a ciascuna equazione a destra, un'equazione equivalente a sinistra.

1) $2^{x-3} - 2 = 0$
2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 2$
3) $2 \cdot 2^{2x-3} = 2$

a) $2^{3-x} - 2 = 0$
b) $4^{x-1} = 2$
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} = 2$

Risolvi le seguenti equazioni.

737 $3^{\sqrt{x+2}} = 9^{\sqrt{x}}$ $\left[x = \frac{2}{3}\right]$

738 $\sqrt{3^{x+3}} = \frac{3^{2x+4}}{27^{5x}}$ $\left[x = \frac{5}{27}\right]$

739 $49^x - 13 \cdot 7^x + 36 = 0$ $[x = \log_7 9 \vee x = \log_7 4]$

740 $\frac{8^x \cdot 2}{2^{x+3}} = \frac{2^{x+1}}{2^{2x+2}}$ $\left[x = \frac{1}{3}\right]$

741 $64 \cdot 4^x + 7 \cdot 2^{x+2} - 2 = 0$ $[x = -4]$

742 $6 - \frac{3 + 5^x}{5^x} = 6 \cdot 5^x$ $[S = \varnothing]$

743 $\frac{1}{2^x - 1} + \frac{2^x}{4^x - 1} = \frac{3 \cdot 2^x - 1}{2^x + 1}$ $[x = 1]$

744 $\frac{(2^{x-2})^x}{4^{2x+1}} = \frac{(2^{2x})^{x-3}}{8^{x+4}}$ $[x = -2 \vee x = 5]$

745 $\frac{2 \cdot 25^x - 13 \cdot 5^x + 15}{5^x - 5} = 0$ $\left[x = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 5}\right]$

746 $6 \cdot 2^x + \frac{1}{2^x} = 5$ $\left[x = -1 \vee x = -\frac{\log 3}{\log 2}\right]$

747 $5^x + 5^{x+1} + 5^{x-1} - 93 = 0$ $\left[x = 1 + \frac{\log 3}{\log 5}\right]$

748 $\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} = \left(\frac{4}{9}\right)^x$ $\left[x = -\frac{1}{2}\right]$

749 $\frac{20 - 4^x}{5 + 4^x} = \frac{4}{5}$ $\left[x = \frac{\ln 80 - \ln 9}{\ln 4}\right]$

750 $3^x = 16 \cdot 3^{-x+1} + 2$ $\left[x = \frac{\ln 8}{\ln 3}\right]$

751 $2^{4x} - 12 = 2^{2x}$ $[x = 1]$

752 $2^{x+3} - \sqrt{2^{4+2x}} = 4 + 2 \cdot 4^{\frac{x}{2}}$ $[x = 1]$

753 $3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$ $[x = -1 \vee x = 2]$

754 $\left(2^x - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right) \cdot (3^x - 5) = 0$ $\left[x = -\frac{4}{3} \vee x = \frac{\log 5}{\log 3}\right]$

755 $3^{x+1}-2\cdot 3^x+3^{x+2}=5^{x-1}$ $\left[x=\frac{2\log 5+\log 2}{\log 5-\log 3}\right]$

756 $\frac{3^{x-2}\cdot 2^{1-x}}{6}=7^x$ $\left[x=\frac{\log_7\frac{1}{27}}{\log_7\frac{14}{3}}\right]$

757 $5\sqrt{9^{x-1}}-2^x=3^{x-1}$ $\left[\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{4}\right]$

758 $\frac{4^{x-1}\cdot 5^x}{3^{x-3}}=4$ $\left[x=\frac{\log_3 16-3}{\log_3 20-1}\right]$

759 $3^x=6^{x-2}\cdot 3$ $[x=\log_2 12]$

760 $3^{\frac{x+1}{2}}\cdot 7^{x-1}=\frac{1}{49^x\cdot 9^x}$ $\left[x=\frac{2\ln 7-\ln 3}{5\ln 3+6\ln 7}\right]$

761 $(2^x-1)(2^x-4)=10$ $\left[x=\frac{\ln 6}{\ln 2}\right]$

762 $\frac{\sqrt[x-2]{3}}{\sqrt{3^{x+2}}}=\frac{1}{\sqrt[2x-4]{3^x}}$ $[x=3]$

763 $\frac{2^{x-3}+4}{2^{3-x}}=32$ $[x=5]$

764 $\frac{5^x-4\sqrt{5^x}+5}{\sqrt{5^{x+2}}-2\sqrt{5^x}}=\frac{2}{3}$ $[x=0\vee x=2]$

765 $\frac{2}{25^x-1}+\frac{3}{4}=\frac{2}{5^x-1}$ $[x=\log_5 3]$

766 $4^x+10^x=25^x$ $\left[x=\log_{\frac{2}{5}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$

767 Data la funzione $f(x)=\frac{3^x}{1-3^{2x}}$:

a) determina il suo dominio;
b) dimostra che $f(x)=-f(-x)$;
c) trova per quale valore di x si ha $f(x)=-\frac{3}{8}$. [a) D: $x\neq 0$; c) 1]

768 Considera la funzione $y=2^{2x}-3\cdot 2^x$ e trova i punti di intersezione del suo grafico con l'asse x e con la retta di equazione $y=\frac{7}{4}$. $\left[(\log_2 3;0);\left(\log_2\frac{7}{2};\frac{7}{4}\right)\right]$

Le disequazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

769 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo la disequazione:

$$\frac{7^{3+x}}{5}>4\cdot 3^{5x}.$$

Applichiamo a entrambi i membri il logaritmo in base 10. Poiché la base è maggiore di 1, si mantiene il verso nella disequazione fra logaritmi:

$$\log\frac{7^{3+x}}{5}>\log(4\cdot 3^{5x})$$

$$\log 7^{3+x}-\log 5>\log 4+\log 3^{5x}$$ II e I proprietà dei logaritmi

$$(3+x)\log 7-\log 5>2\log 2+5x\log 3$$ III proprietà dei logaritmi

$$x\log 7-5x\log 3>2\log 2+\log 5-3\log 7\ \rightarrow\ x\cdot(\log 7-5\log 3)>2\log 2+\log 5-3\log 7.$$

Dato che $\log 7-5\log 3\simeq -1{,}54<0$, dividendo entrambi i membri della disequazione per questo fattore, invertiamo il verso della disequazione.
Le soluzioni sono pertanto:

$$x<\frac{2\log 2+\log 5-3\log 7}{\log 7-5\log 3}.$$

Risolvi le seguenti disequazioni usando le proprietà dei logaritmi.

770 $4^{3+x} \geq 7^{2-x}$ $\left[x \geq \dfrac{2\log 7 - 6\log 2}{\log 7 + 2\log 2}\right]$

771 $3^{x+1} \geq 2^{1-x}$ $\left[x \geq \dfrac{\log 2 - \log 3}{\log 2 + \log 3}\right]$

772 $\dfrac{3^x \cdot 14}{3^2(2^2+3)} < 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-x}$ $\left[x < \dfrac{2\log 3 - \log 2}{\log 3 - \log 2}\right]$

773 $\sqrt{5^{x-1}} < 9 \cdot 3^{2x}$ $\left[x > \dfrac{\log 5 + 4\log 3}{\log 5 - 4\log 3}\right]$

774 $3 \cdot 5^{2-x} - 6^{1+x} < 8 \cdot 5^{2-x} - 2 \cdot 6^{1+x}$ $\left[x < \dfrac{3\log 5 - \log 6}{\log 6 + \log 5}\right]$

775 $5 \cdot 3^{1-x} - 2^{1+x} \geq 4 \cdot 3^{1-x} + 3 \cdot 2^{1+x}$ $\left[x \leq \dfrac{\log 3 - 3\log 2}{\log 3 + \log 2}\right]$

776 $(0,1)^x - 3 \cdot 6^x > 6^x - 8 \cdot (0,1)^x$ $\left[x < \dfrac{2\log 3 - 2\log 2}{\log 3 + 2\log 2 + \log 5}\right]$

777 $4 \cdot (0,3)^{2x-1} - (0,1)^{-x} \leq 5 \cdot 10^x + 0,09^x$ $\left[x \geq \dfrac{\log 37 - 2\log 3 - \log 2}{3 - 2\log 3}\right]$

778 $25^{x+1} - 3 \cdot 5^{2x+1} < 31 - 7 \cdot 25^x$ $\left[x < \dfrac{\log 31 - \log 17}{2\log 5}\right]$

779 $40 - 9 \cdot 2^x > 20 + 2^{2-x}$ $\left[\dfrac{\log 2 - \log 9}{\log 2} < x < 1\right]$

780 $4^x + 10 > 7 \cdot 2^x$ $\left[x < 1 \vee x > \dfrac{\log 5}{\log 2}\right]$

781 $11^x < 18 \cdot 11^{-x} + 3$ $\left[x < \dfrac{\log 2 + \log 3}{\log 11}\right]$

782 $\dfrac{7^{x-2} \cdot 3^{1+x}}{5^{2-x}} \leq 11$ $\left[x \leq \dfrac{\log 11 + 2\log 7 + 2\log 5 - \log 3}{\log 7 + \log 5 + \log 3}\right]$

783 $13 \cdot 10^{2x-3} - 4 \cdot 7^{2x+1} < \dfrac{100^x}{1000} + 35 \cdot 7^{2x}$ $\left[x < \dfrac{3 + \log 3 - 2\log 2 + \log 7}{2 - 2\log 7}\right]$

784 $\dfrac{100^x - 2^{3-x}}{5^{2x-1} - 7^{x+1}} \leq 0$ $\left[\dfrac{3\log 2}{2 + \log 2} \leq x < \dfrac{\log 5 + \log 7}{2\log 5 - \log 7}\right]$

785 $(7^x - 1)^2 - 5 \cdot (7^x - 1) + 4 < 0$ $\left[\dfrac{\log 2}{\log 7} < x < \dfrac{\log 5}{\log 7}\right]$

786 $0,2^x \cdot (6 \cdot 0,2^x - 13) \geq -5$ $\left[x \leq \dfrac{\log 3 - \log 5}{\log 5} \vee x \geq \dfrac{\log 2}{\log 5}\right]$

ESERCIZI VARI Le disequazioni esponenziali

TEST

787 Quale fra le seguenti affermazioni è *vera*?

A $2^x < 3^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

B $4^x \geq 3^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

C $6^x > 3^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D $4^x < 3^x \quad \forall x < 0$

E $2^x \geq e^x \quad \forall x \geq 0$

788 La disuguaglianza $a^{f(x)} < a^{-3}$ implica $f(x) + 3 < 0$ se:

A $a = 0$.

B $a = \dfrac{3}{4}$.

C $a = 1$.

D $a = -2$.

E $a = \dfrac{5}{4}$.

789 Considera le tre implicazioni:

1. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} < \frac{16}{9} \rightarrow x < -1$.
2. $\left(\frac{5}{6}\right)^{2x} < 0 \rightarrow x < 0$.
3. $5^x < -5 \rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$.

Possiamo dire che:

A solo la seconda e la terza sono vere.
B solo la prima e la terza sono vere.
C solo la prima e la seconda sono false.
D sono tutte e tre false.
E sono vere tutte e tre.

790 L'insieme delle soluzioni della disequazione $3^{-2x} < \alpha$ è $\mathbb{R}^+$ se:

A $\alpha = -9$.
B $\alpha = 0$.
C $\alpha = 3$.
D $\alpha = 1$.
E $\alpha = \frac{1}{3}$.

791 **ASSOCIA** a ciascuna disequazione le rispettive soluzioni.

1) $4^x + 1 > 2^{x+1}$
2) $-5^{2-x} \leq 1$
3) $\left(\frac{3}{4}\right)^x - \left(\frac{3}{4}\right)^{-x} \geq 0$
4) $\sqrt{3^x} - 3 < 0$

a) $\forall x \in \mathbb{R}$
b) $x \neq 0$
c) $x \leq 0$
d) $x < 2$

792 **ASSOCIA** a ciascuna disequazione la relativa proposizione vera.

1) $\sqrt{2^x} + 2 < 0$
2) $\sqrt[3]{3^x} < 0$
3) $\frac{2^{3x}}{x^2+1} > 0$
4) $5^{\sqrt{x}} + 5 < 0$
5) $\frac{3^{x+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0$

a) È verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.
b) È impossibile.

---

793 Data la funzione $y = \log_3\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 3\right]$ determina:

a) il suo dominio;
b) per quali valori di x il grafico della funzione è sopra all'asse delle ascisse. [a) D: $x < 0$; b) $x < 1 - \log_3 4$]

Risolvi le seguenti disequazioni.

794 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} < 625$ $\left[x > -\frac{5}{2}\right]$

795 $24 \cdot 5^x \geq 5 \cdot 6^{x+1}$ $\left[x \leq \frac{\log 5 - \log 4}{\log 5 - \log 6}\right]$

796 $\frac{3}{10^x - 2} - \frac{1}{10^x + 2} > 1 - \frac{2}{10^x + 2}$ $[\log 2 < x < \log(2 + \sqrt{12})]$

797 $\left|\left(\frac{2}{5}\right)^x - \left(\frac{5}{2}\right)^{-2x}\right| < 2$ $\left[x > \frac{\log 2}{\log 2 - \log 5}\right]$

798 $45 \cdot 2^{2x-2} < -35 \cdot 4^{x-1}$ $[S = \varnothing]$

799 $5^{2x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} < 0$ $\left[x < \frac{\log 3}{2\log 5 + \log 3}\right]$

800 $1 - \frac{1}{4 \cdot 9^x - 4} \geq 0$ $\left[x < 0 \vee x \geq \log_9 \frac{5}{4}\right]$

801 $2^{x+5} \cdot 3^{x+2} \leq 8 \cdot 6^{\frac{3x-1}{x}}$ $[x < 0]$

802 $\frac{5^x}{25} \geq \frac{9 \cdot (3^{x-2})^{x+2}}{3^{x^2} \cdot 3^{x-4}}$ $[x \geq 2]$

803 $\dfrac{|3^x-1|-|3-3^x|-2}{\sqrt{4^x-2^{x+3}+16}} \geq 0$ $[x \geq 1 \wedge x \neq 2]$

804 $\dfrac{|2^x-4|-2^x+4}{5^x-2} > 0$ $[\log_5 2 < x < 2]$

805 $\sqrt{25-5^x} \leq 5^x - 5$ $\left[\dfrac{\log 9}{\log 5} \leq x \leq 2\right]$

806 $\dfrac{9^{1-2x} \cdot 3^{5x-2}}{2^{x+1}} < \dfrac{7}{2 \cdot 4^x}$ $\left[x < \dfrac{\log 7}{\log 2 + \log 3}\right]$

807 $\dfrac{3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 4^{2x}}{|-1+5^{x+1}|-4} < 0$ $\left[x < -\dfrac{1}{2} \vee x > 0\right]$

808 $\dfrac{2^x-2}{\sqrt[3]{3 \cdot 6^x \cdot (6^x-1)} - 6} < 0$ $\left[\dfrac{\log 2}{\log 6} < x < 1\right]$

809 $\dfrac{3^{2x+1}+12}{9^{2x}-2 \cdot 3^{2x}-3} - \dfrac{9}{4 \cdot (9^x-3)} \geq 0$ $\left[x > \dfrac{1}{2}\right]$

810 $\dfrac{15^x - 5^{x+1} + 5 \cdot 3^x - 9^x}{4^x-4} \leq 0$ $\left[x \leq 0 \vee 1 < x \leq \dfrac{\log 5}{\log 3}\right]$

811 $\log_3(2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(2^x-3) \geq 0$ $[x > \log_2 3]$

ESERCIZI VARI Domini di funzioni con esponenziali e logaritmi

TEST

812 Quale fra le seguenti funzioni *non* ha dominio $x \neq 0$?

A $y = \log e^{\frac{1}{x}} + 1$

B $y = \ln x^2 - 1$

C $y = \log_3 |x| + 5$

D $y = 3^x + \ln x^2$

E $y = \dfrac{\ln(x+3)}{x}$

813 Quale delle seguenti funzioni ha dominio $\mathbb{R}$?

A $y = 3^{x-1}$

B $y = \log x$

C $y = \log(x^2-5)$

D $y = \log\sqrt{x}$

E $y = \dfrac{x+1}{\log x}$

814 Il dominio della funzione
$$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)} \text{ è:}$$

A $x > 2$.

B $1 < x \leq 2$.

C $x > 1$.

D $1 \leq x < 2$.

E $x \geq 2$.

815 Il dominio della funzione $y = \log_\alpha x - 1$ è:

A $x > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

B $x < 0$ se $0 < \alpha < 1$.

C $x < 1$ se $0 < \alpha < 1$.

D $x > 1$ se $\alpha > 1$.

E $x > 0$ se $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$.

816 **ASSOCIA** a ciascuna funzione la relativa proposizione vera.

1) $y = \ln(x^2+10) - 100$

2) $y = 3^{x-1}$

3) $y = \log_2(x-3) + \log_4(2-x)$

4) $y = \dfrac{1}{2^{x-3}}$

5) $y = x^2 + \dfrac{\log x}{\ln(-x)}$

a) Il suo dominio è $\mathbb{R}$.

b) Il suo dominio è vuoto.

817 Data la funzione $y = a\log_2(3^{x-1} - 1)$, $a \in \mathbb{R}$, determina:

a) il dominio;

b) se $a < 0$, per quali valori di x la y è positiva;

c) se $a = 1$, per quale valore di x la y vale 1.

[a) D: $x > 1$; b) $1 < x < 1 + \log_3 2$; c) $x = 2$]

818 **ESERCIZIO GUIDA**

Cerchiamo il dominio delle seguenti funzioni:

a) $y = \dfrac{3}{5^{-x} - 25}$; b) $y = \dfrac{\ln x}{1 - \ln^2 x}$; c) $y = \ln(1 - e^{-2x})$; d) $y = \sqrt{4 - \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2}$.

a) La funzione è fratta, quindi si escludono i valori di x che annullano il denominatore:

$$5^{-x} - 25 = 0.$$

Scriviamo i due membri come potenze di uguale base:

$$5^{-x} = 5^2 \rightarrow -x = 2 \rightarrow x = -2.$$

Il dominio della funzione è dunque:

$$D:\ x \neq -2.$$

b) La funzione è fratta e i suoi termini contengono un logaritmo; dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x > 0 & \text{condizione di esistenza di } \ln x; \\ 1 - \ln^2 x \neq 0 & \text{denominatore diverso da 0.} \end{cases}$$

Cerchiamo i valori che annullano il denominatore risolvendo l'equazione:

$$1 - \ln^2 x = 0.$$

Utilizziamo l'incognita ausiliaria $z = \ln x$,

$$z^2 - 1 = 0 \rightarrow z_1 = -1 \quad z_2 = 1,$$

da cui:

$$\ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1};$$
$$\ln x = 1 \rightarrow x = e.$$

Il dominio della funzione è dunque:

$$D:\ x > 0 \wedge x \neq e^{-1} \wedge x \neq e.$$

c) Imponiamo la condizione di esistenza del logaritmo:

$$1 - e^{-2x} > 0 \rightarrow 1 > e^{-2x}.$$

Scriviamo i due membri come potenze di uguale base:

$$e^0 > e^{-2x} \rightarrow e^{-2x} < e^0.$$

Poiché la base è maggiore di 1, otteniamo una disequazione equivalente, fra gli esponenti, di uguale verso:

$$-2x < 0 \rightarrow 2x > 0 \rightarrow x > 0.$$

Il dominio della funzione è dunque:

$$D:\ x > 0.$$

d) Abbiamo una radice di indice pari il cui radicando contiene un logaritmo; pertanto:

$$\begin{cases} x > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo;} \\ 4 - \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 \geq 0 & \text{condizione di esistenza della radice.} \end{cases}$$

Per risolvere la disequazione logaritmica utilizziamo l'incognita ausiliaria $z = \log_{\frac{1}{2}} x$:

$4 - z^2 \geq 0 \quad \to \quad z^2 - 4 \leq 0 \quad \to \quad -2 \leq z \leq 2.$

Sostituiamo z con $\log_{\frac{1}{2}} x$ e consideriamo il sistema equivalente alla doppia disequazione precedente:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x \leq 2 \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq -2 \end{cases} \to \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \end{cases} \to \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} 4 \end{cases}$$

Poiché $0 < \frac{1}{2} < 1$, le disequazioni fra gli argomenti hanno verso contrario:

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ x \leq 4 \end{cases}$$

Ritornando al sistema iniziale, troviamo il dominio della funzione con il sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \geq \frac{1}{4} \\ x \leq 4 \end{cases}$$

Il dominio della funzione è dunque:

D: $\frac{1}{4} \leq x \leq 4$.

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

819 $y = \sqrt{4^{x-1} - 2}$ $\left[x \geq \frac{3}{2}\right]$

820 $y = \log(2 - x) + \log(3x - x^2)$ $[0 < x < 2]$

821 $y = \frac{\sqrt{4 - x}}{\ln(2^x - 3)}$ $[\log_2 3 < x \leq 4 \wedge x \neq 2]$

822 $y = \frac{5}{6^x + 5}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

823 $y = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$ $[0 < x < e^{-1} \vee x > e^{-1}]$

824 $y = \sqrt{3^x - 5}$ $\left[x \geq \frac{\log 5}{\log 3}\right]$

825 $y = \sqrt{\log_3 x - 2}$ $[x \geq 9]$

826 $y = \frac{2^{3x}}{8 - 2^x}$ $[x \neq 3]$

827 $y = \frac{\log x}{\ln x - 2}$ $[0 < x < e^2 \vee x > e^2]$

828 $y = \sqrt{e^{-x} - e^x}$ $[x \leq 0]$

829 $y = \sqrt{3 - \log_2(x - 1)}$ $[1 < x \leq 9]$

830 $y = \frac{7^x}{\sqrt[3]{8^x - 2}}$ $\left[x \neq \frac{1}{3}\right]$

831 $y = \frac{\ln(9 - 6x)}{\ln x - 1}$ $\left[0 < x < \frac{3}{2}\right]$

832 $y = \frac{1}{\log(2^x - 1)}$ $[0 < x < 1 \vee x > 1]$

833 $y = \frac{\ln x - 4}{\sqrt{4 - \ln x}}$ $[0 < x < e^4]$

834 $y = \sqrt{\log_2 x - 1} + \sqrt{-\log_2 x + 4}$ $[2 \leq x \leq 16]$

835 $y = \log_2(2^x + 2^{1-x} - 3)$ $[x < 0 \vee x > 1]$

836 $y = \frac{1}{\log^2 x - \log x}$ $[x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 10]$

837 $y = \sqrt{\frac{3^x - 1}{3^{-x} - 3}}$ $[-1 < x \leq 0]$

838 $y = \sqrt{\frac{\ln x}{\ln x - 1}}$ $[0 < x \leq 1 \vee x > e]$

839 $y = \log(x+5) - \log(6-x) + 2$ $[-5 < x < 6]$

840 $y = \ln(|x| - 1) + 2$ $[x < -1 \vee x > 1]$

841 $y = \log(10^x + 4) - \log(10^x - 5)$ $[x > \log 5]$

842 $y = \sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{2^x - 4}$ $[x \geq 4]$

843 $y = \sqrt{1 - \log^2 x}$ $\left[\frac{1}{10} \le x \le 10\right]$

844 $y = \sqrt{2^x + 2^{1-x} - 3}$ $[x \le 0 \vee x \ge 1]$

845 $y = \sqrt{27^x - 9 \cdot 3^{-x}}$ $\left[x \ge \frac{1}{2}\right]$

846 $y = \dfrac{1 - 3^x}{4^{x-2} - 2^x}$ $[x \ne 4]$

847 $y = \dfrac{\log(x-2) - 8}{(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2}$ $[2 < x < 9 \vee x > 9]$

848 $y = \sqrt{|e^x - 2| - 1}$ $[x \le 0 \vee x \ge \ln 3]$

849 $y = \log_{\frac{1}{2}}\left[\log_{\frac{1}{2}}(x+5)\right]$ $[-5 < x < -4]$

850 $y = \dfrac{17^x - 11^x}{5^x - 25^x + 6}$ $\left[x \ne \frac{\log 3}{\log 5}\right]$

851 $y = \dfrac{13^x - 3^x}{|\log_2(5-x)| - 1}$ $\left[x < 5 \wedge x \ne \frac{9}{2} \wedge x \ne 3\right]$

852 $y = \log\left[\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right| - 2\right]$ $\left[x < -\frac{\log 3}{\log 2}\right]$

853 $y = \log_{\frac{1}{3}}[\log_4(x^2 - 1)]$ $[x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}]$

854 $y = \dfrac{\log(12x - 7)}{\left|7^{\frac{x}{x+1}} - 1\right| - 6}$ $\left[x > \frac{7}{12}\right]$

855 $y = e^{\frac{6}{\log_2(3+x) - 2}}$ $[-3 < x < 1 \vee x > 1]$

856 $y = \log\dfrac{x-2}{x^2 - x} + \log(x-1)$ $[x > 2]$

857 $y = \sqrt{\dfrac{\log_3 x - 2}{10^x - 10}}$ $[0 < x < 1 \vee x \ge 9]$

858 $y = \sqrt{\log_2 x - 1} + \sqrt{\log_2(x-1)}$ $[x \ge 2]$

859 $y = \log\dfrac{11^{-x} - 11^x}{13^{x+1} - 13^{-x-1}}$ $[-1 < x < 0]$

860 $y = \sqrt{2\log^2_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x - 1}$ $\left[0 < x \le \frac{\sqrt{2}}{2} \;\vee\; x \ge 2\right]$

861 $y = \dfrac{\sqrt{e^x - 6}}{2\ln^2 x - 3\ln x + 1}$ $[x \ge \ln 6 \;\wedge\; x \ne e]$

862 $y = \sqrt{3^{\frac{2x+7}{2-x}} - 9} - \sqrt{6^{2x+1} - 12}$ $\left[\frac{\ln 2}{2\ln 6} \le x < 2\right]$

863 $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\log_3 \log_{\frac{1}{2}}(1 - 2^x)}$ $[-2 \le x < 0 \;\wedge\; x \ne -1]$

---

864 $y = \dfrac{1}{e^{2x-5} - 1} + \dfrac{1}{e - e^{-\frac{1}{x}}}$; $\quad y = \dfrac{1}{\log_2 x^2 - 4} - \dfrac{1}{2 - \log_2|x|}$. $\left[x \ne 0 \wedge x \ne -1 \wedge x \ne \frac{5}{2}; x \ne 0 \wedge x \ne \pm 4\right]$

865 $y = \sqrt{2 \cdot e^x + 5 - 3 \cdot e^{-x}}$; $\quad y = \sqrt{\dfrac{\ln(x^2 + 4)}{\ln(x+1) - 2}}$ $[x \ge -\ln 2; x > e^2 - 1]$

866 $y = \ln(1 - 2\sqrt{-x})$ $\left[-\frac{1}{4} < x \le 0\right]$

867 $y = \sqrt{\log_2(x+1)} + \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x - 4}$ $\left[0 < x \le \frac{1}{16}\right]$

868 $y = \dfrac{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}|x|}}{\log_2(3 - 2x)}$ $[-1 \le x < 1 \wedge x \ne 0]$

869 $y = \log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_3 x$ $[x > 3]$

870 $y = \dfrac{\sqrt{9^x - 3}}{\log_3 \sqrt{|x|}}$ $\left[x \ge \frac{1}{2} \wedge x \ne 1\right]$

871 $y = \sqrt{\dfrac{3^x - 2}{\log_3 x}}$ $[0 < x \le \log_3 2 \vee x > 1]$

872 $y = \sqrt{\dfrac{\ln(3-x) - \ln 2x}{\ln(3-x)}}$ $[0 < x \le 1 \vee 2 < x < 3]$

873 $y = \sqrt{\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(1-x) - \log_{\frac{1}{2}}(1-2x)}{2^{-x} - 4}}$ $\left[x < -2 \vee 0 \le x < \frac{1}{2}\right]$

LA RISOLUZIONE GRAFICA DI EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

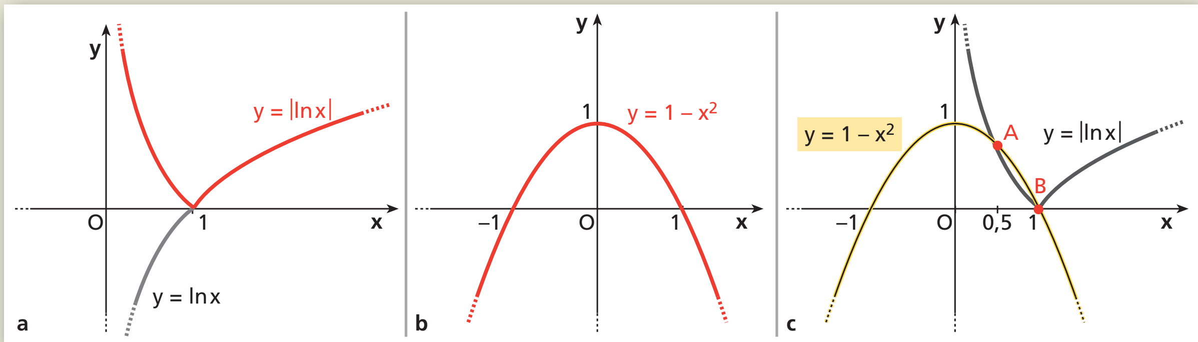
La risoluzione grafica di equazioni

874 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo la seguente equazione utilizzando il metodo grafico:

$$|\ln x| = 1 - x^2.$$

Le soluzioni dell'equazione sono le ascisse dei punti di intersezione dei grafici delle due funzioni di equazioni $y=|\ln x|$ e $y=1-x^2$. Consideriamo il grafico di $y=|\ln x|$ (figura *a*) e il grafico di $y=1-x^2$ (figura *b*), riportandoli in uno stesso piano cartesiano (figura *c*), e segniamo i punti di intersezione *A* e *B*.



L'ascissa di *A* è approssimativamente 0,5, mentre quella di *B* è 1.
Le soluzioni dell'equazione sono $x_1 \simeq 0,5$ e $x_2 = 1$.

Risolvi le seguenti equazioni utilizzando il metodo grafico.

875 $\ln x + x^2 = 4$ $[x \simeq 1,8]$

876 $\ln(x+3) + x = 10$ $[x \simeq 7,6]$

877 $\ln(x+6) - |x| = 0$ $[x_1 \simeq -1,5;\ x_2 \simeq 2,1]$

878 $\ln x = -2x + 2$ $[x = 1]$

879 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = x^2 - 4x$ $[x \simeq 4,1]$

880 $2^x - 1 = -x$ $[x = 0]$

881 $e^{-x} = \frac{x}{3}$ $[x \simeq 1]$

882 $x\log_{\frac{1}{2}} x = -1$ $[x \simeq 1,6]$

883 $\ln(x-1) - 1 = \frac{x^2}{16}$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

884 $\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 = -\frac{2}{x}$ $[x_1 = -1;\ x_2 \simeq 2,2]$

885 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = \ln(x+1)$ $[x \simeq 0,2]$

886 $2^x = |x^2 - 2|$ $[x_1 \simeq -1,5;\ x_2 \simeq -1,3;\ x_3 \simeq 0,7]$

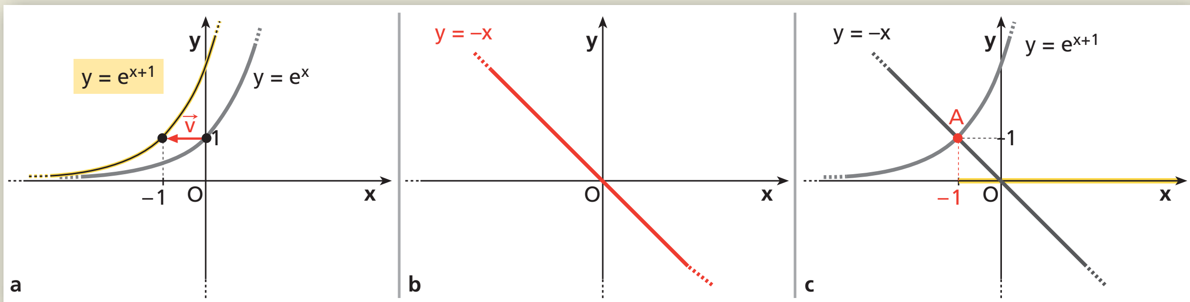
La risoluzione grafica di disequazioni

887 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo la seguente disequazione utilizzando il metodo grafico:

$$e^{x+1} > -x.$$

Consideriamo le funzioni di equazioni $y = e^{x+1}$ e $y = -x$ e disegniamo i loro grafici (figure *a* e *b*).
La disequazione ha come soluzioni tutti i valori di x per cui l'ordinata corrispondente di $y = e^{x+1}$ risulta maggiore di quella di $y = -x$ (figura *c*). L'ascissa del punto A, comune ai due grafici, è -1.



L'insieme delle soluzioni della disequazione è $x > -1$.

Risolvi le seguenti disequazioni utilizzando il metodo grafico.

888 $\log_{\frac{1}{2}} x \le x^2 - 5$ $[x \ge 2]$

889 $2^{-x} > 2x + 1$ $[x < 0]$

890 $x < \log_{\frac{1}{3}} x + 2$ $[0 < x < a, \text{con } a \simeq 1,6]$

891 $\ln(x+3) > x^2 - 4$ $[-2 < x < a, \text{con } a \simeq 2,4]$

892 $x^2 + 1 > \ln x$ $[x > 0]$

893 $\ln(x+2) > 3^x$ $[S = \varnothing]$

894 $x^2 + 6x < 2^x + 3$ $[a < x < b \vee x > c, \text{con } a \simeq -6,5, b \simeq 0,7, c \simeq 6,2]$

895 $|e^{-x} - 1| \ge \ln x$ $[0 < x \le a, \text{con } a \simeq 2,5]$

896 $\ln(x-1) < \dfrac{1}{x-1}$ $[1 < x < a, \text{con } a \simeq 2,8]$

897 $\dfrac{1}{x} > -3^{-x}$ $[x < a \vee x > 0, \text{con } a \simeq -0,5]$

898 $|\ln x| \ge 4 - x^2$ $[0 < x \le a \vee x \ge b, \text{con } a \simeq 0,02, b \simeq 1,8]$

899 $xe^x - 2 > 0$ $[x > a, \text{con } a \simeq 0,8]$

900 $(2-x)e^x < x$ $[x > a, \text{con } a \simeq 1,6]$

ESERCIZI VARI Problemi

901 È data la funzione:

$$f(x) = \frac{1 - 5^{x-1}}{2(2^{x+2} - 8)}.$$

a) Determina il dominio di $f(x)$.
b) Cerca gli zeri della funzione.
c) Studia il suo segno.
d) Data la funzione $g(x) = 2^x - 2$, esprimi la funzione $y = 8f(x) \cdot g(x)$ e rappresentala graficamente.

[a) D: $x \ne 1$; b) non ci sono zeri; c) $f(x) < 0 \ \forall x \ne 1$; d) $y = 1 - 5^{x-1}, x \ne 1$]

902 È data la funzione $f(x) = \dfrac{\ln^2 x - \ln x}{\ln\sqrt{x} - 1}$.

a) Determina il dominio.
b) Cerca gli zeri della funzione.
c) Studia il suo segno.

[a) D: $x > 1 \wedge x \ne 2$; b) $x = e$; c) $f(x) > 0$ per $1 < x < 2 \vee x > e$]

903 Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{2-x}$:

a) rappresentala graficamente;
b) disegna il grafico di $g(x) = e^{f(x)}$;
c) dimostra analiticamente che $g(x)$ è invertibile;
d) esprimi l'equazione di $g^{-1}(x)$ e rappresentala graficamente.

$\left[\text{d) } g^{-1}(x) = \dfrac{2\ln x}{1 + \ln x}\right]$

904 Considerate le funzioni

$$f(x) = |x - 2|, \quad g(x) = \log_2 x - 2,$$

a) esprimi $h = f \circ g$ e $t = g \circ f$;

b) rappresenta graficamente f, g, h e t;

c) risolvi le disequazioni: $h(x) > 1$, $t(x) > -2$.

[a) $h(x) = |\log_2 x - 4|$, $t(x) = \log_2|x - 2| - 2$; c) $0 < x < 8 \vee x > 32$; $x < 1 \vee x > 3$]

905 Data la funzione

$$f(x) = a \log_2(x + b),$$

a) calcola a e b sapendo che il suo grafico passa per l'origine e interseca la retta di equazione $y = 4$ nel punto di ascissa 3;

b) rappresenta il grafico di $f(x)$ per i valori di a e b trovati;

c) risolvi analiticamente e graficamente la disequazione:

$$2\log_2(x + 1) \geq 3 - \log_{\frac{1}{2}} x.$$

[a) $a = 2$, $b = 1$; c) $0 < x \leq 3 - 2\sqrt{2} \vee x \geq 3 + 2\sqrt{2}$]

906 La popolazione di un certo Stato, che nel 1990 era di 8 milioni di persone, cresce del 3% all'anno secondo la legge

$$N = N_0 e^{kt},$$

dove N rappresenta la popolazione, espressa in milioni di persone, presente t anni dopo il 1990, N_0 è la popolazione iniziale nel 1990 e k è un coefficiente detto *costante di crescita*.

a) Calcola il valore di k.

b) Determina N nel 2000.

c) Indica la previsione di N nel 2020.

d) Calcola il tempo necessario per il raddoppio della popolazione.

[a) $k = \ln 1{,}03$; b) 10 751 331; c) 19 418 100; d) $t \simeq 23{,}45$ anni]

907 Il numero di batteri in una certa coltura raddoppia in 20 minuti. Sai che il numero iniziale è $N_0 = 500$.

a) Scrivi un'equazione che permetta di determinare il numero N di batteri presenti t minuti più tardi.

b) Calcola il valore di N dopo 60 minuti e dopo 27 minuti.

c) Dopo quanto tempo i batteri sono 2 350 000?

[a) $N = 500 \cdot e^{t\frac{\ln 2}{20}}$; b) $N_1 = 4000$, $N_2 \simeq 1275$, c) $t \simeq 244$ minuti]

908 In una vincita si ha la possibilità di scegliere tra:

a) 300 000 euro investiti al tasso annuale del 10% per 12 anni in capitalizzazione composta (alla fine di ogni anno viene calcolato l'interesse e sommato alla somma depositata; sulla nuova somma viene calcolato l'interesse alla fine dell'anno successivo);

b) € 0,1 messi a frutto in un conto che raddoppia la somma depositata ogni 6 mesi per i successivi 12 anni.

Quale delle due opportunità conviene scegliere e perché? [b]

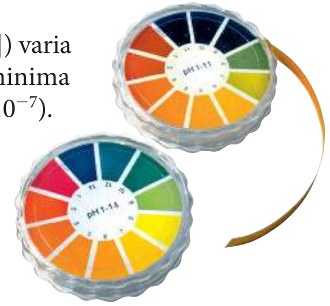
909 The growth of bacteria is known to follow the law of exponential growth $N(t) = N_0 e^{kt}$. If the original size of the colony is 100 bacteria and 4 hours later it is 100,000 bacteria, how many hours after the original time will the colony number count up to 1,000,000 bacteria?

(USA *Southern Illinois University Carbondale,* Final Exam, Fall 2001)

[5h 20′]

REALTÀ E MODELLI

1 **Il pH**



La concentrazione molare di ioni H^+ presenti in una soluzione (indicata con $[H^+]$) varia da 1 ($=10^0$) per una soluzione di massima acidità a 10^{-14} per una soluzione di minima acidità, ovvero di massima basicità (la soluzione neutra, l'acqua pura, ha $[H^+] = 10^{-7}$).
In questa sequenza di potenze l'elemento significativo è l'esponente del 10; si definisce pertanto il pH di una soluzione come $\text{pH} = -\log [H^+]$.

- ▶ Dato il pH delle seguenti soluzioni, distingui quali sono acide, neutre o basiche: acqua di mare da 7,7 a 8,3; latte 6,5; saliva da 6,5 a 7,4; sapone da 9 a 10; succo di mela 3,5; acido cloridrico 0,3.
- ▶ Dato il pH di una soluzione, quanto vale la concentrazione di ioni H^+?
- ▶ Un aumento del pH corrisponde a un aumento oppure a una diminuzione della concentrazione $[H^+]$?
- ▶ La soluzione X ha il pH doppio della soluzione Y; cosa puoi dire della concentrazione di ioni H^+ presenti nelle due soluzioni?

2 **Una popolazione batterica**

La crescita dei batteri avviene per divisione cellulare, perciò in un dato intervallo di tempo (che dipende da vari fattori) raddoppia il numero dei batteri di una coltura e la legge di crescita è una funzione esponenziale in base 2. L'*Escherichia coli*, per esempio, ha un tempo di *generazione* (tempo necessario a una cellula per duplicarsi) di circa 20 minuti.
Considera una colonia di 1000 batteri *Escherichia coli*:

- ▶ calcola quanti batteri compongono la colonia dopo 4 generazioni;
- ▶ esprimi la legge di crescita in funzione del numero n di generazioni;
- ▶ determina in quanto tempo è avvenuta tale crescita;
- ▶ calcola la velocità media di crescita (variazione del numero di cellule per unità di tempo);
- ▶ da quanti batteri sarà costituita la colonia dopo 4 ore?

3 **Il decadimento radioattivo**

La legge del decadimento radioattivo è espressa dalla funzione $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, dove N_0 è il numero dei nuclei radioattivi presenti all'istante $t = 0$, $N(t)$ è il numero di nuclei presenti all'istante t, λ è la costante di decadimento caratteristica dell'elemento, t rappresenta il tempo (espresso in giorni).
Supponiamo che $4{,}75 \cdot 10^7$ atomi di radon si trovino nelle fondamenta di una casa; queste vengono sigillate per impedire che entri altro radon. Sapendo che la costante di decadimento del radon è $\lambda = 0{,}181$ giorni^{-1}:

- ▶ trova quanti atomi di radon rimangono nelle fondamenta dopo una settimana e dopo due settimane;
- ▶ calcola il tempo di dimezzamento del numero dei nuclei del radon.
- ▶ Se il radon iniziale fosse una quantità N_0 incognita, un mese sarebbe sufficiente per farlo scomparire?

4 **L'altimetro a pressione**

La pressione atmosferica, esercitata dal peso della colonna d'aria sovrastante il punto in cui viene effettuata la misura, diminuisce all'aumentare dell'altitudine. La posizione verticale di un aereo può essere così determinata mediante l'altimetro a pressione, che si basa proprio sulla variazione della pressione atmosferica in funzione dell'altitudine.

Al livello del mare la pressione atmosferica è di circa 14,7 psi (*pounds for square inch*, unità di misura anglosassone usata anche in campo aeronautico).
L'andamento della pressione P in funzione dell'altitudine h è espresso dalla funzione $P = 14{,}7 \cdot 10^{-0{,}000018h}$ (P è misurata in psi; h in *feet*, «piedi», simbolo ft).

- ▶ Qual è l'altezza di volo di un comune aereo se l'altimetro a pressione registra 13,82 psi?
- ▶ Quale pressione registra l'altimetro se un aereo si trova a viaggiare a un'altitudine di 10 000 ft?

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Se a, b e c sono numeri reali positivi e $a \neq 1$, quale fra le seguenti uguaglianze è *falsa*?

A $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

B $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

C $\log_a a = 1$

D $\log_a b \cdot \log_a c = \log_a(b + c)$

E $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$

2 L'intervallo $]0; 3[$ è l'insieme delle soluzioni di:

A $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+3}{x} > 1.$

B $\log_2 \frac{x+3}{x} \geq 1.$

C $\log_2 \frac{x-3}{x} < 0.$

D $\log_2 \frac{x+3}{x} > 1.$

E $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+3}{x} \leq 0.$

3 La disequazione $2^x + \frac{8}{2^x} > 6$:

A è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

B è verificata per $x < 1 \ \vee \ x > 2$.

C è verificata per $x < 2$.

D è verificata $\forall x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x \neq 0$.

E non ha soluzioni.

4 Quale fra le funzioni seguenti ha come dominio $\mathbb{R} - \{0\}$?

A $y = \frac{\ln|x|}{x-1}$

B $y = \ln x^2 - 1$

C $y = \frac{1}{\ln x^2}$

D $y = \frac{\ln x}{x}$

E $y = \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}$

5 Quale fra le seguenti uguaglianze è *vera*?

A $5^{2\log_5 2} = 4$

B $\log_3 5 - \log_3 4 = \log_3 1$

C $\log_3 5 + \log_3 4 = \log_3 9$

D $\frac{\log_3 5}{\log_3 4} = \log_3 \frac{5}{4}$

E $\log_3 5 \cdot \log_3 4 = \log_3 20$

6 Per quali valori reali di k la funzione

$$y = ke^{x+3} + \log(x^2 + kx + 1)$$

ha dominio coincidente con $\mathbb{R}$?

A $k > 0$

B $-2 < k < 2$

C $k < 0$

D $\forall k \in \mathbb{R}$

E $k > 2$

7 L'equazione $3^{-x^2+3x} = -3^{-2x^2+x}$:

A ha due soluzioni $x = 0$ e $x = -2$.

B ha una soluzione $x = 0$.

C ha due soluzioni $x = 0$ e $x = \frac{4}{3}$.

D non ha soluzione.

E è equivalente a $-x^2 + 3x = \frac{1}{2x^2 + x}$.

8 L'equazione $3^x + 1 = 4^{x+2}$:

A si risolve utilizzando l'uguaglianza $1 = \log 10$.

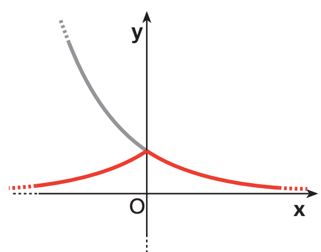
B si risolve utilizzando il metodo grafico.

C si risolve utilizzando i logaritmi e le loro proprietà.

D si risolve utilizzando l'uguaglianza $1 = 3^0$.

E è impossibile.

9 La seguente figura rappresenta il grafico (in rosso) di una funzione. Quale?



A $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

B $y = 2^{|x|}$

C $y = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\right|$

D $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

E $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

10 Sull'equazione $(a-2)^x = 3$ puoi affermare che:

A $\forall a \in \mathbb{R}$, $x = \log_{a-2} 3$.

B è impossibile.

C ammette una soluzione se $a = 2$.

D ammette soluzioni se e solo se $a \neq 3$.

E ammette una soluzione se $a > 3$.

11 La figura a lato rappresenta il grafico di una funzione. Quale?

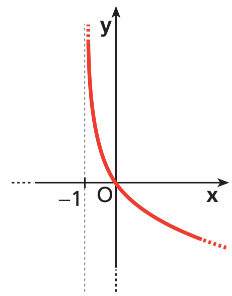
A $y = \ln(x+1)$

B $y = \log_{0,5}(x+1)$

C $y = \log_{0,5}(x-1)$

D $y = \ln(x-1)$

E $y = 1 - \log_{0,5} x$



QUESITI

Rispondi ai seguenti quesiti, supponendo che siano verificate le condizioni di esistenza dei logaritmi presenti.

12 Verifica la seguente identità: $\dfrac{\log_a x}{1+\log_a b} = \dfrac{\log_b x}{1+\log_b a}$.

13 Discuti al variare di a: $\log_{\frac{2}{\sqrt{a}}} x^2 > 4$. $\left[\text{per } 0 < a < 4, x < -\dfrac{4}{a} \vee x > \dfrac{4}{a}; \text{per } a > 4, -\dfrac{4}{a} < x < \dfrac{4}{a}\right]$

14 Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln(2x - \sqrt{4-1})$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2004, *quesito* 9)

15 Si consideri la seguente uguaglianza: $\ln(2x+1)^4 = 4\ln(2x+1)$. È vero o falso che vale per ogni x reale? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2006, *quesito* 9)

16 Dimostra che $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n}\log_a b$ e calcola il valore dell'espressione $\log_{\sqrt{2}} 81 + \log_{2\sqrt{2}} 3 + \log_4 9 \cdot \log_{243} 4$.

17 Risolvere la seguente disequazione in x:

$(\ln x)^2 \geq \ln(x^2)$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2004, *quesito* 4)

18 Luca e Claudia devono calcolare il valore di una certa espressione contenente logaritmi. Trovano come risultati rispettivamente: $\log_2 27 + \log_2 12$ e $2 + \log_2 81$.
Ammesso che il risultato ottenuto da Luca sia esatto, si può concludere che quello ottenuto da Claudia è sbagliato? Fornire una risposta esaurientemente motivata.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione straordinaria*, 2005, *quesito* 3)

19 Indica le relazioni che esistono tra i seguenti logaritmi, motivando le risposte:

a) $\log_5 x$ e $\log_{25} x$; b) $\log_a x$ e $\log_{\sqrt{a}} \sqrt{x}$; c) $\log_a x$ e $\log_{a^2} x$; d) $\log_a x$ e $\log_a (ax)$.

PROBLEMI

20 Data la funzione:

$$f(x) = \log_a \log_a(1-2x),$$

a) studia, al variare di a nell'insieme dei numeri reali, il dominio e il segno della funzione;
b) considera la funzione che si ottiene per $a = 2$ e dimostra che è strettamente decrescente nel suo dominio;
c) determina la funzione inversa $f^{-1}(x)$;
d) trova per quali valori di x è $f(x) < 2$.

$\left[\text{a) per } a > 1,\ D\text{: } x < 0,\ f(x) > 0 \text{ se } x < \frac{1-a}{2};\right.$
$\left.\text{per } 0 < a < 1,\ D\text{: } 0 < x < \frac{1}{2}, f(x) > 0 \text{ se } 0 < x < \frac{1-a}{2};\ \text{c) } y = \frac{1-2^{2^x}}{2};\ \text{d) } -\frac{15}{2} < x < 0\right]$

21 Sono date le funzioni $f(x) = \sqrt{3^{\frac{x}{2}} + 3^x - 2}$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 1)$.

a) Determina il dominio D_f di $f(x)$ e il dominio D_g di $g(x)$.
b) Trova quale valore assume $f(x)$ per $x = \log_3 4$.
c) Calcola i valori di x per cui è $g(x) < -1$.
d) Considerata la funzione $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, studiane i seguenti aspetti: dominio, intersezioni del grafico con l'asse x, segno.

$\left[\text{a) } D_f\text{: } x \geq 0,\ D_g\text{: } \mathbb{R};\ \text{b) } 2;\ \text{c) } x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{1+\sqrt{5}}{2};\right.$
$\left.\text{d) } D\text{: } x > 0 \wedge x \neq 1;\ \text{non ci sono zeri; } y > 0 \text{ per } 0 < x < 1\right]$

22 Data la funzione $f(x) = \log_2(|x + a| + b)$:

a) determina a e b in modo che la funzione abbia dominio $\mathbb{R}$ e il suo grafico passi per (4; 2) e (0; 1);
b) trova i punti di intersezione con gli assi cartesiani;
c) disegna il grafico di $f(x)$ e utilizzalo per risolvere la disequazione $\sqrt{x} + \log_2(|x-1| + 1) \geq 1$.

[a) $a = -1$; $b = 1$; b) (1; 0), (0; 1); c) $x \geq 0$]

23 Data la funzione $f(x) = |4 - x^2|$, considera $g(x) = \ln f(x)$.

a) Studia il dominio, le intersezioni con gli assi e il segno di $g(x)$.
b) Rappresenta nel piano cartesiano i risultati ottenuti.
c) Disegna il grafico di $g(x)$ a partire da quello di $f(x)$ e conferma i risultati precedenti.
d) Determina i punti di intersezione del grafico di $g(x)$ con la retta di equazione $y = \ln 5$.
e) Esprimi l'equazione della funzione il cui grafico è il simmetrico del grafico di $g(x)$ rispetto alla retta precedente.

$\left[\text{a) } D\text{: } x \neq \pm 2;\ (0; \ln 4),\ (\pm\sqrt{3}; 0),\ (\pm\sqrt{5}; 0);\right.$
$\left. g(x) > 0 \text{ se } x < -\sqrt{5} \vee -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \vee x > \sqrt{5};\ \text{d) } (\pm 3; \ln 5);\ \text{e) } y = \ln\frac{25}{|4 - x^2|}\right]$

24 Considerata la funzione $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$,

a) determina a, b, c in modo che il suo grafico sia simmetrico rispetto all'asse y, passi per $\left(1; \frac{7}{2}\right)$ e $f(0) = 4$;
b) calcola per quali valori di x è $f(x) \geq \frac{9}{2}$;
c) esprimi analiticamente la funzione $g(x)$ il cui grafico è simmetrico di quello di $f(x)$ rispetto alla retta di equazione $y = 6$; trova le intersezioni dei grafici di $f(x)$ e $g(x)$.

[a) $a = b = -1$, $c = 6$; b) $S = \varnothing$; c) $g(x) = 2^x + 2^{-x} + 6$; non si intersecano]

25 È data la funzione:

$$f(x) = \log_{x^2-2x+1} 4.$$

a) Determina il dominio, studia il segno e cerca gli zeri della funzione.

b) Dimostra che $f(x)$ coincide con la funzione

$$g(x) = \frac{1}{\log_2 |x-1|}.$$

c) Risolvi $f(x) \geq 1$. (Conviene trasformare in base 2.)

[a) $x \neq 0, 1, 2$; $f(x) > 0$ per $x < 0 \vee x > 2$; non ci sono zeri; c) $-1 \leq x < 0 \vee 2 < x \leq 3$]

26 Considera le funzioni:

$$f(x) = \frac{1}{3}(2x-k) \text{ e } g(x) = |\log_2 x - 1|.$$

a) Calcola k in modo che i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ si intersechino in un punto di ascissa 4.
b) Considerando il valore di k trovato nel punto a), rappresenta graficamente le funzioni.
c) Utilizzando i grafici risolvi la disequazione

$$f(x) \geq g(x).$$

d) Scrivi l'espressione analitica della funzione

$$h(x) = (g \circ f)(x).$$

e) Risolvi $h(x) > 1$.

$\left[\text{a) } k = 5;\ \text{c) } x \geq 4;\ \text{d) } h(x) = \left|\log_2\left(\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\right) - 1\right|;\ \text{e) } \frac{5}{2} < x < 4 \vee x > \frac{17}{2}\right]$

27 Data la funzione:

$$f(x) = 4^{x+a} + b,$$

a) determina a e b sapendo che il suo grafico passa per il punto $\left(\frac{1}{2}; 31\right)$ e che la retta di equazione

$$y = 2x + 5$$

lo interseca nel suo punto di ascissa -1;
b) rappresenta graficamente $f(x)$;
c) esprimi analiticamente $f^{-1}(x)$ e disegnane il grafico.
d) traccia il grafico di $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

[a) $a = 2$, $b = -1$; c) $f^{-1}(x) = \log_4(x+1) - 2$]

CAPITOLO β1

١ [numerazione araba]

१ [numerazione devanagari]

一 [numerazione cinese]

LA STATISTICA

POSSIAMO FIDARCI? I giornali sono sommersi di sondaggi, che rivelano opinioni, tendenze, orientamenti politici della popolazione.

Quanto sono attendibili i risultati dei sondaggi?

▶ La risposta a pag. β45

1. I DATI STATISTICI

La statistica induttiva e la statistica descrittiva

«La statistica è un gioco a due persone in cui la prima è il matematico e la seconda è la natura.»

Abraham Wald, *Annals of Mathematics*, vol. 46, 1945.

Immagina di parlare con uno sconosciuto e di raccogliere informazioni sulle sue abitudini, sui suoi gusti, sul suo stato di salute. Potresti dedurre un ritratto significativo di questa persona.

Se raccogliessi le stesse informazioni per un gruppo di persone, diciamo mille, e ti accorgessi che alcune risposte si assomigliano e altre differiscono completamente le une dalle altre, cosa potresti dedurne? Potresti fare, in qualche modo, un ritratto di gruppo?

A volte anche molte informazioni possono essere inutili, se non sono ben organizzate. In tal caso può essere utile *raggruppare e sintetizzare i dati*: in questo modo si rinuncia a parte dell'informazione che essi contengono, ma si guadagna in leggibilità e facilità di interpretazione. In particolare si possono elaborare tanti dati relativi a singoli individui per trarne informazioni sulla popolazione nel suo complesso. A seconda poi di come questi dati vengono raggruppati è possibile studiare aspetti diversi del problema in esame.

La **statistica** ha questo nome perché all'inizio essa studiava principalmente i dati utili al governo degli Stati.

La *statistica* si occupa proprio dei modi di raccogliere e analizzare **dati** relativi a un certo gruppo di persone (gli studenti di una scuola, gli abitanti di un quartiere, gli elettori di una regione, …) o di oggetti (le automobili, i dischi, i libri, …), per trarne conclusioni e fare previsioni. Le **fasi fondamentali** di un'indagine statistica sono quindi:

- rilevamento dei dati e raccolta in tabelle;
- rappresentazione grafica dei dati;
- elaborazione dei dati.

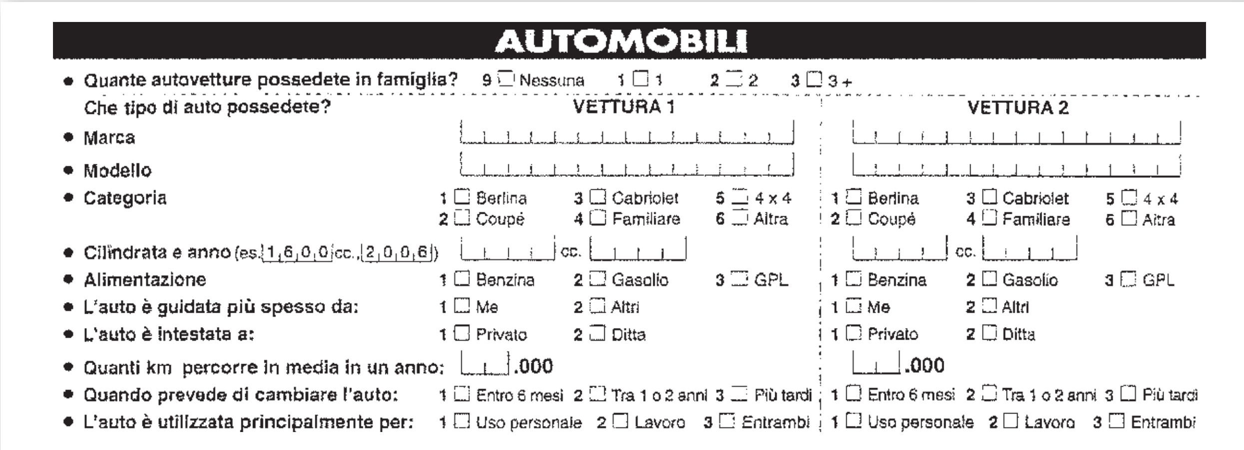
Sinonimi di «popolazione» sono «universo» e «collettivo statistico».

Il gruppo preso in considerazione viene detto **popolazione**. Noi studieremo alcuni strumenti matematici utili per descrivere i dati relativi a una popolazione. Si parla in questo caso di **statistica descrittiva**.

Spesso viene presa in esame soltanto una parte della popolazione, detta **campione**, scelta in modo che rappresenti l'intero gruppo. Osserviamo che la raccolta dei dati di tipo globale sarebbe più significativa di quella campionaria, ma è molto costosa. Per questo la maggior parte della raccolta dati è di tipo campionario. Il campione deve essere attendibile: per esempio, se si sta eseguendo un'indagine per verificare o meno il successo di una trasmissione televisiva, l'intervistato non deve essere qualcuno che lavora per quella trasmissione. Le tecniche utilizzate per la raccolta dei dati possono essere l'intervista diretta o indiretta. Nel caso di intervista indiretta, si possono ottenere le informazioni volute facendo compilare un questionario che viene poi spedito o consegnato dall'intervistato a un incaricato (pensa, per esempio, al censimento).

In un questionario strutturato si risponde scegliendo fra risposte prefissate.

Si propongono di solito questionari anonimi con la sola richiesta dell'indicazione del sesso e dell'età. Il linguaggio utilizzato deve essere chiaro e non ambiguo e spesso il questionario è di tipo strutturato. Nella figura 1 puoi osservare una parte di un questionario spedito a casa da una ditta per una ricerca di mercato.



AUTOMOBILI

- Quante autovetture possedete in famiglia? 9 ☐ Nessuna 1 ☐ 1 2 ☐ 2 3 ☐ 3 +

Che tipo di auto possedete?	VETTURA 1	VETTURA 2
• Marca		
• Modello		
• Categoria	1 ☐ Berlina 3 ☐ Cabriolet 5 ☐ 4 x 4 2 ☐ Coupé 4 ☐ Familiare 6 ☐ Altra	1 ☐ Berlina 3 ☐ Cabriolet 5 ☐ 4 x 4 2 ☐ Coupé 4 ☐ Familiare 6 ☐ Altra
• Cilindrata e anno (es. 1,6,0,0 cc. 2,0,0,6)	cc.	cc.
• Alimentazione	1 ☐ Benzina 2 ☐ Gasolio 3 ☐ GPL	1 ☐ Benzina 2 ☐ Gasolio 3 ☐ GPL
• L'auto è guidata più spesso da:	1 ☐ Me 2 ☐ Altri	1 ☐ Me 2 ☐ Altri
• L'auto è intestata a:	1 ☐ Privato 2 ☐ Ditta	1 ☐ Privato 2 ☐ Ditta
• Quanti km percorre in media in un anno:	.000	.000
• Quando prevede di cambiare l'auto:	1 ☐ Entro 6 mesi 2 ☐ Tra 1 o 2 anni 3 ☐ Più tardi	1 ☐ Entro 6 mesi 2 ☐ Tra 1 o 2 anni 3 ☐ Più tardi
• L'auto è utilizzata principalmente per:	1 ☐ Uso personale 2 ☐ Lavoro 3 ☐ Entrambi	1 ☐ Uso personale 2 ☐ Lavoro 3 ☐ Entrambi

▲ Figura 1

Raccolte le schede compilate:

- si contano le schede per sapere il numero effettivo delle unità che costituiscono il campione;
- si contano le diverse risposte date a ciascuna domanda predisponendo tabelle di spoglio;
- si rappresentano graficamente i dati;
- si elaborano i dati con metodi matematici;
- si interpretano i dati e si traggono conclusioni in modo tale che si possano ritenere valide per tutta la popolazione.

I metodi per ottenere risultati soddisfacenti in questo delicato procedimento di passaggio dal campione alla popolazione sono studiati da quella parte della statistica detta **statistica induttiva** (o **inferenza statistica**).

I caratteri qualitativi e i caratteri quantitativi

Gli elementi di una popolazione si chiamano **unità statistiche**. È possibile studiare diverse caratteristiche di tali unità e ogni caratteristica rappresenta un **carattere** della popolazione.

I caratteri possono essere di due tipi:

- **qualitativi** se vengono descritti con parole;
- **quantitativi** se invece vengono descritti mediante numeri.

Per esempio, se scegliamo come unità statistiche gli studenti di una scuola, alcuni caratteri qualitativi sono il sesso, il Paese di provenienza, il mezzo di trasporto usato per raggiungere la scuola; sono invece caratteri quantitativi l'età, il peso, la statura.

I caratteri quantitativi possono essere:

- **discreti** se possono assumere un numero finito di valori o al più una infinità numerabile;
- **continui** se possono assumere gli infiniti valori di un intervallo reale.

Ogni carattere viene descritto mediante le **modalità** con cui esso si può manifestare.

ESEMPIO

1. Il carattere «stato civile» ha due modalità: «coniugato/a» e «libero/a». Si tratta di un carattere qualitativo.
2. Il carattere «sport praticato» ha più modalità: «calcio», «nuoto», «pallavolo», … Si tratta di un carattere qualitativo con più modalità.
3. Il carattere «numero dei libri letti nel 2009» ha più modalità quantitative: 0, 1, 2, …

A volte alle modalità di un carattere corrispondono valori numerici; per esempio il prezzo al barile del petrolio in diversi periodi storici o la piovosità di una zona nei diversi mesi dell'anno. Tali valori vengono detti **intensità**.

Le tabelle di frequenza

Abbiamo chiesto in un questionario ai 26 studenti di una classe di indicare con una delle seguenti lettere l'attività a cui dedicano la maggior parte del tempo libero:

S: sport; C: cinema, TV; N: altre attività.
A: amici; H: hobby;

Abbiamo ottenuto i seguenti risultati:

A, A, C, H, N, S, S, S, N, A, C, C, H,
N, H, S, A, H, A, S, S, A, A, C, A, C.

Dalla lettura di questa sequenza è difficile trarre informazioni, in quanto i risultati si susseguono in modo disordinato.
Costruiamo la tabella 1, dove nella prima colonna mettiamo le diverse modalità e percorrendo poi la sequenza dei risultati facendo un segno, per esempio una barra /, vicino ad ogni modalità verificata (**occorrenza**). Alla fine contiamo il numero dei segni per ogni modalità e lo scriviamo nella terza colonna. Tale numero rappresenta la *frequenza* della modalità considerata. Lo sport ha frequenza 6, gli amici una frequenza 8 e così via.

▶ Tabella 1

Distribuzione di frequenza delle modalità

Modalità	Occorrenza	Frequenza
sport	///// /	6
amici	///// ///	8
cinema, TV	/////	5
hobby	////	4
altre attività	///	3
Totale delle unità statistiche		26

DEFINIZIONE

Frequenza (o frequenza assoluta)
La frequenza è il numero di volte in cui un dato si presenta.

L'insieme delle coppie ordinate di cui il primo elemento è la modalità e il secondo la frequenza corrispondente viene detto **distribuzione di frequenza**.

Più spesso interessa il valore della frequenza confrontato con il numero totale delle unità statistiche. Infatti siamo in situazioni diverse se, per esempio, la frequenza di una modalità è 8 rispetto a un totale di 26 o se, invece, è 8 rispetto a un totale di 260.

Per questo motivo viene anche calcolata la **frequenza relativa**, di cui diamo la definizione.

DEFINIZIONE

Frequenza relativa

La frequenza relativa di una modalità è il rapporto fra la frequenza della modalità e il numero totale delle unità statistiche.

frequenza relativa

frequenza

$$f = \frac{F}{T}$$

totale delle unità statistiche

Nell'esempio precedente la frequenza della modalità «sport» è 6, ossia 6 studenti su 26 nel tempo libero praticano uno sport; pertanto la frequenza relativa è:

$$f = \frac{6}{26} = \frac{3}{13} = 0,23076 \simeq 0,23.$$

La frequenza relativa può essere espressa anche in **percentuale**, moltiplicando per 100 il valore ottenuto: la frequenza percentuale della modalità sport è 23%. Questo significa che, in una distribuzione con le stesse caratteristiche, dato un campione di 100 studenti, 23 nel tempo libero praticano uno sport.

◄ Tabella 2

Distribuzione delle frequenze relative

Modalità	Frequenza	Frequenza relativa	Frequenza relativa percentuale
sport	6	3/13	23%
amici	8	4/13	31%
cinema, TV	5	5/26	19%
hobby	4	2/13	15%
altre attività	3	3/26	12%
Totale	26	1	100%

● Le frequenze relative percentuali delle tabelle sono approssimate alle unità.

Osserviamo che la somma delle frequenze relative è 1, in percentuale è 100%.

Le classi di frequenza

Studiamo i risultati ottenuti da un gruppo di studentesse che, nell'ora di educazione fisica, hanno eseguito una prova di salto in lungo da fermo (tabella 3).

▼ Tabella 3

Gruppo *A*: salto in lungo

Numero d'ordine	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Misura del salto in metri	1,36	1,46	1,62	1,54	1,94	1,85	1,75	1,88	1,61	1,90	1,65	1,53	1,36	1,67	1,46	1,60	1,50	1,67	1,65	1,78	2,12	1,86

In casi come questo, è utile raggruppare le modalità in **classi**, determinando la frequenza di ogni classe. Nella tabella seguente consideriamo cinque classi.

● L'estremo inferiore di ciascuna classe può essere considerato escluso dalla classe, mentre quello superiore incluso, o viceversa. Noi adottiamo la prima soluzione. Per esempio, nella tabella il valore 1,60 è relativo alla classe 1,40-1,60 e non alla classe 1,60-1,80.
Se l'estremo superiore è incluso ed è escluso quello inferiore, per indicare un intervallo si usa anche il simbolo ⊣ (per esempio, 1,40 ⊣ 1,60). Se l'estremo superiore è escluso ed è incluso quello inferiore, si può usare il simbolo ⊢.

Classi di frequenza

Classe	Frequenza	Frequenza relativa percentuale
1,20-1,40	2	9%
1,40-1,60	6	27%
1,60-1,80	8	36%
1,80-2,00	5	23%
2,00-2,20	1	5%

▲ Tabella 4

Il raggruppamento in classi fornisce meno informazioni (per esempio, non sappiamo quanto valgono esattamente i 6 salti compresi fra 1,40 e 1,60 m), però fornisce una sintesi più leggibile della prova.
Di ogni classe è spesso utile calcolare il **valore centrale**, che si ottiene dividendo per 2 la somma degli estremi della classe. Per esempio, il valore centrale della classe 1,60-1,80 è (1,60 + 1,80)/2, ossia 1,70.

Dalle frequenze relative alle frequenze

Se vengono forniti le frequenze relative f e il numero totale T delle unità statistiche, è possibile calcolare le frequenze F di ogni modalità. Infatti, essendo

$$f = \frac{F}{T},$$

conoscendo f e T, possiamo ricavare F:

$$F = f \cdot T.$$

La frequenza di una modalità è il prodotto tra la frequenza relativa e il numero totale delle unità statistiche.

ESEMPIO

Se abbiamo rilevato che, in un campione di 800 lavoratori dipendenti, il 62% usa mezzi propri per recarsi sul posto di lavoro, il numero delle unità del campione che hanno dato questa indicazione è:

● 62% = 62 : 100 = 0,62.

$$0,62 \cdot 800 = 496.$$

Si può indurre che su 3800 lavoratori 2356 utilizzano un mezzo proprio.

● 0,62 · 3800 = 2356.

Le frequenze cumulate

Consideriamo la tabella 4 e proviamo a rispondere alla seguente domanda: «Quante sono le studentesse che nel salto in lungo non hanno superato 1,80 metri?».
Osservando la tabella rileviamo che 1,80 è il limite superiore della terza classe. Le studentesse della prima classe sono 2, quelle della seconda sono 6 e quelle della terza sono 8. Sommando i tre numeri otteniamo 16, il valore che risponde al quesito. Questo valore si chiama *frequenza cumulata*.

● 2, 6 e 8 sono le frequenze delle prime tre classi; 16 è la somma di tali frequenze.

DEFINIZIONE

Frequenza cumulata

La frequenza cumulata relativa a ogni modalità è la somma della frequenza assoluta corrispondente con tutte le frequenze assolute precedenti.

Completiamo la tabella 4 con le frequenze cumulate per ogni classe e anche con le frequenze cumulate relative percentuali, ottenendo la tabella 5.

▼ Tabella 5

Classi di frequenza

Classe	Frequenza	Frequenza cumulata	Frequenza relativa percentuale	Frequenza relativa percentuale cumulata
1,20-1,40	2	2	9%	9%
1,40-1,60	6	8	27%	36%
1,60-1,80	8	16	36%	72%
1,80-2,00	5	21	23%	95%
2,00-2,20	1	22	5%	100%

Le serie statistiche

Le tabelle che riportano nella prima colonna le modalità di un carattere *qualitativo* vengono dette **serie statistiche**.
Nella seconda colonna compare o la *misura della modalità qualitativa* (*intensità*) o il *numero di volte con il quale essa si presenta* (*frequenza*). Si tratta in ogni caso di una *distribuzione statistica di frequenze*.

● Anche l'intensità può essere considerata come una particolare frequenza.

La tabella 6 riporta per quattro imprese artigiane il fatturato annuo (intensità) e il numero dei dipendenti (frequenza) del 2010.
L'insieme delle modalità di un carattere qualitativo, alle quali associamo le loro frequenze, definisce una **mutabile statistica**.

► Tabella 6

Fatturato annuo e numero di dipendenti

Impresa artigiana	Fatturato (euro)	Numero dipendenti
A	57 300	2
B	48 040	3
C	63 300	5
D	37 200	2

Consideriamo ora la tabella 7 che riporta i prezzi in euro di un prodotto in anni successivi.
Essa costituisce una **serie storica**. Le serie storiche mostrano la successione dei valori che un fenomeno assume in tempi successivi.

► Tabella 7

Prezzo di un prodotto

Anno	Prezzo (euro)
2006	5,81
2007	6,41
2008	6,61
2009	6,21
2010	6,81

Un altro esempio di serie storica è quello della tabella 8, relativa alle vendite di una merce, espresse in kilogrammi, nei giorni di una settimana.

Vendita di una merce	
Giorno	Vendite (kg)
lunedì	140
martedì	310
mercoledì	185
giovedì	170
venerdì	280
sabato	135

▲ Tabella 8

Una serie storica di questo tipo viene detta **serie ciclica**, in quanto le modalità temporali si ripetono secondo un ordine prefissato.

● Sono cicliche anche le serie storiche relative ai mesi dell'anno e alle ore del giorno.

Nelle serie storiche la seconda colonna spesso riporta non la frequenza, cioè il numero di volte in cui si è presentato un fenomeno, ma l'intensità di un fenomeno (pesi, valori monetari ecc.).

La tabella 9 riporta la produzione in quintali di uva da tavola negli anni 2006-2007, suddivisa nelle tre grandi aree italiane.
Una serie di questo tipo viene detta *serie geografica*, o territoriale.
Le serie geografiche mostrano la successione dei valori che un fenomeno assume in zone geografiche diverse.

► Tabella 9

Uva da tavola raccolta. Anni 2006-2007 (in quintali)	
Nord Italia	26 593
Centro Italia	258 238
Sud Italia e Isole	14 773 702

Le seriazioni statistiche

Le tabelle che riportano nella prima colonna un carattere *quantitativo* vengono dette **seriazioni statistiche**. Nella seconda colonna compare la frequenza, cioè il numero di volte con il quale si presenta la relativa modalità.

▼ Tabella 10

Componenti nucleo familiare																						
Numero d'ordine	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Numero componenti	4	3	4	2	3	3	3	5	4	4	2	4	3	3	4	5	4	3	3	3	3	4

Distribuzione di frequenza	
Numero componenti nucleo familiare	Frequenza
2	2
3	10
4	8
5	2
Totale	22

▲ Tabella 11

L'insieme delle modalità di un carattere quantitativo, alle quali associamo le loro frequenze, definisce una **variabile statistica**. Studiamo, per esempio, la numerosità dei nuclei familiari degli studenti di una classe (tabella 10).
Otteniamo la distribuzione di frequenza della tabella 11.

Le tabelle a doppia entrata

Nella tabella 12 riportiamo i voti in italiano e in matematica di alcuni studenti.
Per interpretare l'andamento dei due voti compiliamo la tabella 13, che può essere letta sia nel senso delle righe sia nel senso delle colonne. Questa **tabella a doppia entrata** permette di conoscere quanti sono gli alunni che hanno un determinato voto

in italiano e in matematica, ma anche di leggere immediatamente quanti sono gli alunni che hanno un certo voto in matematica e contemporaneamente un altro voto in italiano.
Si tratta di una **distribuzione statistica congiunta** che permette l'osservazione delle unità statistiche sotto due modalità.
Se vogliamo sapere quanti studenti hanno 7 in matematica e 6 in italiano, leggiamo il valore che si trova all'incrocio fra la seconda riga e la prima colonna, ossia 1.

Numero d'ordine	Voto in italiano	Voto in matematica
1	6	8
2	6	6
3	7	6
4	6	6
5	8	7
6	7	7
7	7	6
8	8	8
9	9	8
10	6	7
11	6	6
12	6	6
13	7	6

◀ **Tabella 12**

● Un altro esempio di seriazione statistica è quello presentato dalla tabella 4.

Voto in matematica \ Voto in italiano	6	7	8	9	Totale
6	4	3	0	0	7
7	1	1	1	0	3
8	1	0	1	1	3
Totale	6	4	2	1	13

◀ **Tabella 13**

Quando entrambe le modalità sono quantitative si hanno **tabelle di correlazione**, se sono qualitative **tabelle di contingenza** e se una modalità è qualitativa e l'altra quantitativa **miste**.
Le frequenze assolute che si trovano nell'ultima colonna e nell'ultima riga, sotto l'indicazione «totale», si chiamano frequenze *marginali*, mentre quelle interne che sono lette dalle due modalità si chiamano frequenze *congiunte* o *interne*.
Una distribuzione statistica congiunta può essere letta anche in altri modi.
Se consideriamo separatamente le modalità della prima colonna con i relativi totali esposti nell'ultima colonna, o le modalità della prima riga con i relativi totali dell'ultima riga, otteniamo due distribuzioni semplici (tabella 14 e tabella 15) che si chiamano **distribuzioni marginali.**

Voto in matematica	Numero alunni
6	7
7	3
8	3
Totale	13

▲ **Tabella 14** Distribuzione marginale relativa al voto in matematica.

Voto in italiano	Numero alunni
6	6
7	4
8	2
9	1
Totale	13

▲ **Tabella 15** Distribuzione marginale relativa al voto in italiano.

Se fissiamo ora una modalità del carattere «voto in italiano», per esempio «voto = 7», possiamo costruire una distribuzione semplice, detta *condizionata*, della modalità «voto in matematica», utilizzando le frequenze della colonna considerata (tabella 16).

Voto in matematica	Voto in italiano = 7 (n. alunni)
6	3
7	1
8	0
Totale	4

▲ **Tabella 16** Distribuzione del «voto in matematica» condizionata al «voto in italiano uguale a 7».

Si chiamano **distribuzioni condizionate** quelle che, avendo fissato una particolare modalità di un carattere, associano le corrispondenti frequenze assolute a tutte le modalità dell'altro carattere.

Nelle distribuzioni marginali e condizionate possiamo calcolare le frequenze relative. Quando, per una certa modalità, tutte le distribuzioni condizionate e la distribuzione marginale presentano la stessa sequenza di frequenze relative, possiamo affermare che le due modalità sono **indipendenti**.

Un esempio di modalità indipendenti è il seguente, che presenta una distribuzione congiunta con frequenze assolute (tabella 17) e a fianco le distribuzioni condizionate e la distribuzione marginale con frequenze relative (tabella 18).

X \ Y	y_1	y_2	y_3	Totale
x_1	15	25	20	60
x_2	75	125	100	300
x_3	60	100	80	240
Totale	150	250	200	600

▲ **Tabella 17**

X \ Y	fissato y_1	fissato y_2	fissato y_3	Totale
x_1	0,1	0,1	0,1	0,1
x_2	0,5	0,5	0,5	0,5
x_3	0,4	0,4	0,4	0,4
Totale	1	1	1	1

▲ **Tabella 18**

Se osserviamo la tabella 17, rileviamo che, essendo le due modalità indipendenti, ogni frequenza congiunta o interna è il prodotto del totale della sua riga con il totale della sua colonna diviso per il numero di tutte le osservazioni.

Possiamo, più velocemente, stabilire l'indipendenza delle due modalità calcolando tutte le frequenze relative rispetto al totale delle osservazioni e verificando che le frequenze congiunte relative sono il prodotto delle frequenze marginali relative.

X \ Y	y_1	y_2	y_3	Totale
x_1	0,025	0,042	0,033	0,1
x_2	0,125	0,208	0,167	0,5
x_3	0,1	0,167	0,133	0,4
Totale	0,25	0,417	0,333	1

◀ **Tabella 19**

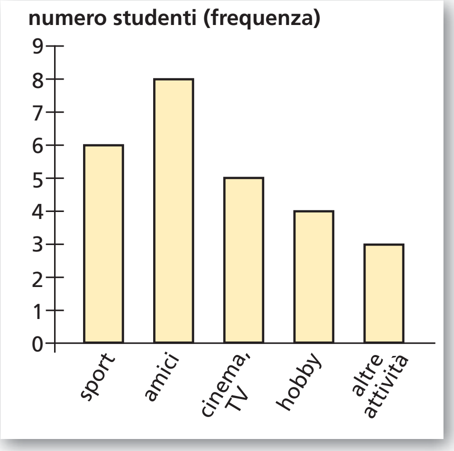
2. LA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI DATI

Sicuramente abbiamo familiarità con le rappresentazioni grafiche di dati statistici, poiché sono usate quotidianamente dai giornali e dalla televisione.

Le rappresentazioni grafiche sono molto utili, poiché sono di facile lettura ed evidenziano chiaramente l'andamento di un fenomeno, in particolare i suoi punti di massimo e di minimo.

L'ortogramma

Riportiamo le frequenze della tabella 2 (a pagina β5) su un asse verticale. Sull'asse orizzontale segniamo tanti segmenti, tutti della stessa lunghezza, quante sono le modalità. Per ogni segmento tracciamo un rettangolo che ha per altezza la corrispondente frequenza. La rappresentazione che otteniamo è detta **ortogramma**. In esso a ogni frequenza corrisponde un rettangolo che ha *l'altezza proporzionale alla frequenza* stessa.

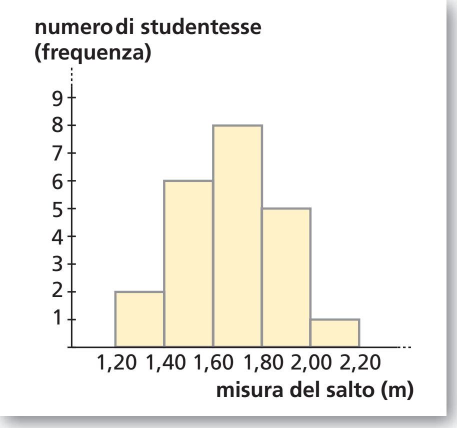


◀ **Figura 2** **In un ortogramma le basi dei rettangoli corrispondono alle diverse modalità, le altezze sono proporzionali alle frequenze.**

L'istogramma

Per rappresentare la distribuzione della tabella 4 (a pagina β6) riportiamo sull'asse orizzontale i valori degli estremi delle classi, ottenendo così dei segmenti le cui lunghezze rappresentano le ampiezze degli intervalli (figura 3).

▶ **Figura 3** **Un istogramma è costituito da rettangoli che hanno le basi proporzionali alle ampiezze delle classi e le aree proporzionali alle frequenze.**

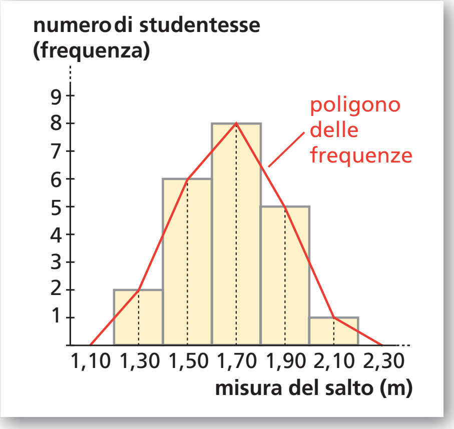


● **Istogramma** deriva dai termini greci *histós*, che significa «trama», «tela», e *-gramma*, da *gráphein*, «scrivere».

Disegniamo poi dei rettangoli che hanno per basi tali segmenti e la cui *area è proporzionale alla frequenza* della classe. Otteniamo così una rappresentazione grafica detta **istogramma**.

Se le classi, come nel nostro esempio, *hanno tutte la stessa ampiezza*, anche in un istogramma, come in un ortogramma, è sufficiente prendere rettangoli con le altezze proporzionali alle frequenze.

Se in un istogramma si congiungono i punti medi dei lati superiori dei rettangoli, si ottiene una spezzata, chiamata anche **poligono delle frequenze** (figura 4). L'ascissa di ogni vertice del poligono delle frequenze corrisponde al valore centrale di una classe.



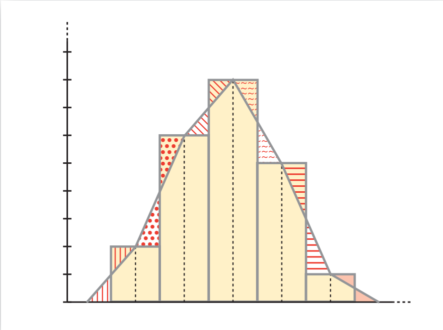
● Il termine «poligono», per indicare il poligono delle frequenze, è usato impropriamente, perché indica una spezzata aperta (e non chiusa).

◀ **Figura 4** **Il poligono delle frequenze può essere pensato come un grafico lineare in cui a ogni valore centrale viene associato il punto che ha ordinata corrispondente alla frequenza.**

Per esempio, nell'istogramma della figura 4, consideriamo anche le classi 1,00-1,20 e 2,20-2,40, con valori centrali 1,10 e 2,30.

Se le classi hanno la stessa ampiezza, di solito si considerano come vertici della spezzata anche i punti corrispondenti ai valori centrali di una classe precedente e di una successiva a quelle in cui abbiamo valori (figura 4). Queste due classi hanno frequenza 0.

Si può verificare che in tal modo la somma delle aree dei rettangoli dell'istogramma è uguale all'area delimitata dall'asse orizzontale e dal poligono delle frequenze.



▶ **Figura 5** La somma delle aree dei rettangoli di un istogramma è uguale all'area sottostante il poligono delle frequenze.

Se le classi non hanno la stessa ampiezza, non si possono tracciare semplicemente rettangoli con le altezze proporzionali alle frequenze, ma le altezze devono essere calcolate in modo che le aree siano proporzionali alle frequenze.

ESEMPIO

▶ **Tabella 20**

Consideriamo la tabella 20, relativa a una prova di salto in lungo, che riporta classi di frequenza con ampiezza diversa.

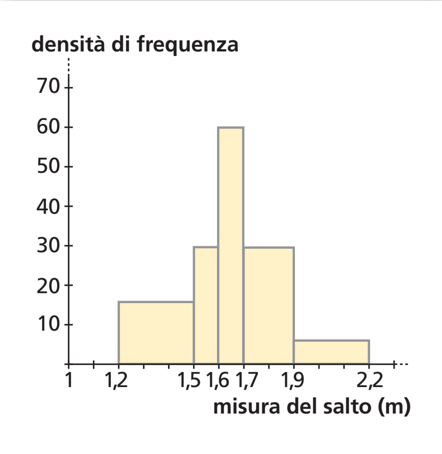
Le altezze dei rettangoli si ottengono dividendo ogni frequenza per la relativa ampiezza, ottenendo così la **densità di frequenza**.

Per esempio:

$$\frac{5}{1,50-1,20}=\frac{5}{0,3}\simeq 16,67.$$

Classi di frequenza

Classe	Frequenza
1,20-1,50	5
1,50-1,60	3
1,60-1,70	6
1,70-1,90	6
1,90-2,20	2



▶ **Figura 6** Le aree dei rettangoli sono proporzionali alle frequenze. Sull'asse delle ordinate è posto il rapporto $\frac{\text{frequenza}}{\text{ampiezza classe}}$, ossia la densità di frequenza.

Densità di frequenza

Classe	Frequenza	Densità di frequenza
1,20-1,50	5	16,67
1,50-1,60	3	30,00
1,60-1,70	6	60,00
1,70-1,90	6	30,00
1,90-2,20	2	6,67

▲ **Tabella 21**

L'areogramma

Questo tipo di grafico, detto anche **diagramma circolare** o **diagramma a torta**, è particolarmente utile per rappresentare le frequenze relative percentuali.

Un cerchio viene suddiviso in tanti settori circolari, ognuno dei quali corrisponde a una classe.

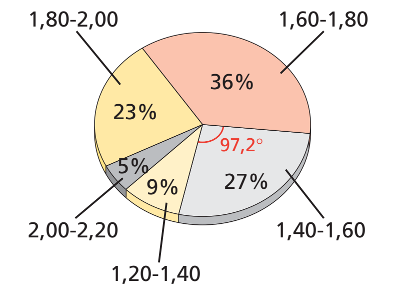
Gli angoli al centro dei diversi settori hanno ampiezza proporzionale alle frequenze percentuali (figura 7).

ESEMPIO

Consideriamo ancora le frequenze relative percentuali della tabella 4 (a pagina β6) riguardante la prova di salto in lungo.
Per determinare l'ampiezza x del settore corrispondente alla frequenza 27% scriviamo la proporzione:

$$x : 360° = 27 : 100 \quad \rightarrow \quad x = \frac{360° \cdot 27}{100} = 97{,}2°.$$

Il settore ha l'angolo al centro di 97,2°. Allo stesso modo si ricavano le ampiezze degli altri settori, e si può così ottenere il diagramma.



◀ **Figura 7** Frequenze relative percentuali del salto in lungo.

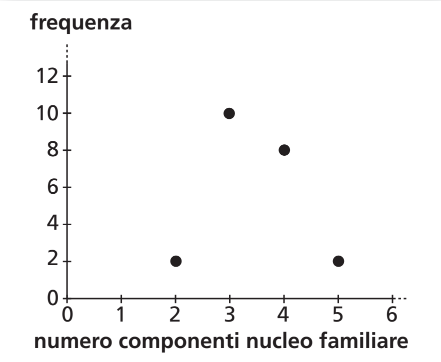
I diagrammi cartesiani

Usiamo questo tipo di rappresentazione per le seriazioni statistiche aventi modalità quantitativa discreta e per le serie storiche.

● «Discreto» è sinonimo di «non continuo». Per esempio, una quantità numerabile, esprimibile mediante i numeri naturali, è discreta.

Riprendiamo i dati della tabella 11 (che richiamiamo a fianco della figura 8) e riportiamo sull'asse delle ascisse il numero dei componenti del nucleo familiare e sull'asse delle ordinate le frequenze.

Possiamo costruire il diagramma semplicemente segnando i punti (figura 8).
L'insieme dei punti si chiama **nuvola di punti**.

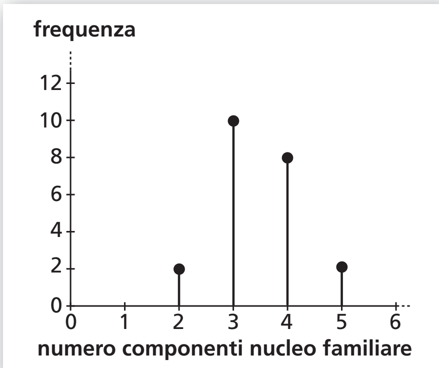


▶ **Figura 8** Diagramma cartesiano con la nuvola di punti.

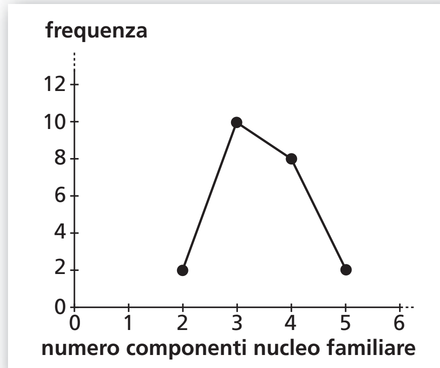
Numero componenti nucleo familiare	Frequenza
2	2
3	10
4	8
5	2

Possiamo anche evidenziare i segmenti corrispondenti alle ordinate dei punti (figura 9). Il diagramma è chiamato anche **diagramma a segmenti**.

Possiamo collegare i punti allo scopo di far risaltare l'andamento del fenomeno (figura 10).
Il *poligono delle frequenze* che otteniamo mostra il modo in cui si dispongono i punti, facendo risaltare la **forma della distribuzione**.



▲ **Figura 9** Diagramma a segmenti.

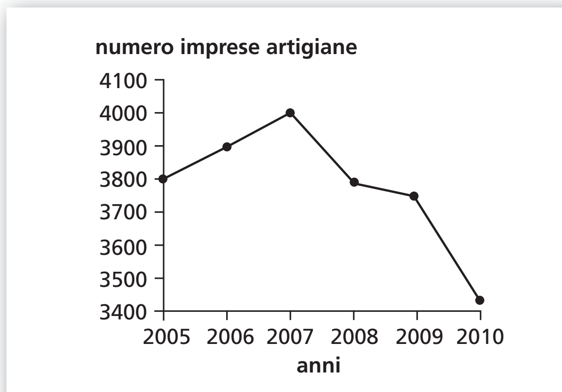


▲ **Figura 10** Poligono delle frequenze.

I diagrammi cartesiani sono molto utilizzati per rappresentare le **serie storiche** perché mettono bene in evidenza l'andamento di un fenomeno nel tempo.

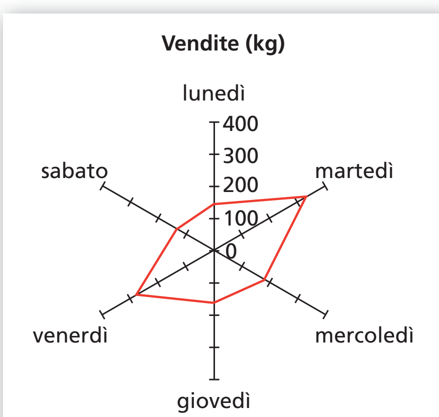
Numero totale imprese artigiane nei Comuni con meno di 5000 residenti	
Anno	Numero
2005	3820
2006	3910
2007	3995
2008	3820
2009	3780
2010	3435

▲ **Tabella 22**



▲ **Figura 11** La spezzata mostra l'andamento del fenomeno negli anni considerati.

Il radar



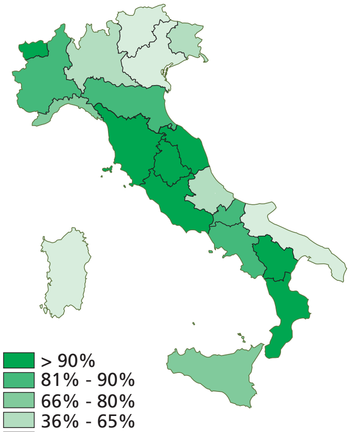
► **Figura 12** Nel grafico si vede con immediatezza che i giorni di maggiore vendita sono il martedì e il venerdì.

Questo tipo di grafico è idoneo per rappresentare serie storiche aventi carattere ciclico.
Da un punto del piano tracciamo tante semirette quante sono le modalità temporali. Gli angoli fra due semirette consecutive sono uguali e su di esse si segnano i valori, che si collegano con una spezzata. Rappresentiamo la tabella 8 (a pagina β8), riguardante la vendita di una merce nei giorni della settimana.

I cartogrammi e gli ideogrammi

I **cartogrammi** sono grafici utilizzati per rappresentare dati relativi ad aree geografiche. Si costruiscono utilizzando una carta geografica del territorio considerato e segnando le varie aree con segni convenzionali o colori diversi. I cartogrammi sono frequentissimi sui libri di geografia e sugli atlanti.

● Si chiama *serie territoriale* una serie le cui modalità qualitative sono zone geografiche.



◄ **Figura 13** I colori (o i segni grafici) diversi indicano una diversa intensità del fenomeno, secondo una legenda convenzionale.

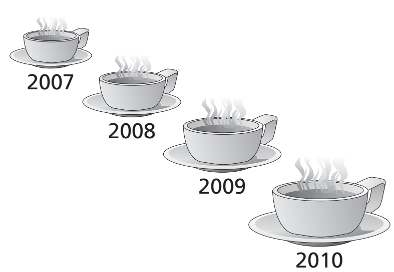
Gli **ideogrammi** utilizzano figure che richiamano il contenuto del fenomeno e servono per dare una visione immediata di un fenomeno. Le figure hanno dimensioni diverse, proporzionali ai dati che rappresentano.

Consideriamo la serie storica della tabella 23, che riporta il numero di tazzine di caffè servite al bar di un circolo sportivo. Abbiamo il seguente ideogramma (figura 14).

Tazzine di caffè

Anno	Numero tazzine caffè
2007	4600
2008	6400
2009	7230
2010	8890

◄ **Tabella 23**



◄ **Figura 14** Gli ideogrammi permettono una percezione immediata del fenomeno. Si nota subito che il consumo del caffè è stato sempre in aumento.

3. GLI INDICI DI POSIZIONE CENTRALE

In statistica si cerca di riassumere una serie di dati con un valore medio (compreso tra il minimo e il massimo valore della distribuzione) che possa esprimere sinteticamente il fenomeno.
Esistono *medie di calcolo* che si determinano tenendo conto di tutti i valori della distribuzione (media aritmetica, media ponderata, media geometrica, media armonica e media quadratica) e *medie di posizione* che si calcolano tenendo conto solo di alcuni valori (mediana e moda).

▼ Tabella 24

Gruppo *B*: salto in lungo da fermo	
Numero d'ordine	Misura del salto in metri
1	1,95
2	2,16
3	1,95
4	1,84
5	1,62
6	1,74
7	1,78
8	1,64
9	1,30
10	1,62
11	1,72
12	1,58
13	1,75
14	1,45
15	1,73
16	1,48

La media aritmetica

Supponiamo di voler confrontare i risultati delle prove di salto del gruppo A di studentesse del paragrafo 1 (tabella 3) con quelli delle studentesse di un secondo gruppo, che chiamiamo gruppo B, di cui riportiamo i risultati in tabella 24.
Affiancando le tabelle delle frequenze dei due gruppi (tabella 25), scopriamo che non è facile stabilire se la prova è andata meglio per il gruppo A o per il gruppo B.

Confronto delle frequenze		
Classe	Frequenza gruppo *B*	Frequenza gruppo *A*
1,20-1,40	1	2
1,40-1,60	3	6
1,60-1,80	8	8
1,80-2,00	3	5
2,00-2,20	1	1

▲ Tabella 25

Calcolando, invece, la *media aritmetica* relativa ai due gruppi di dati, otteniamo un'informazione sintetica della distribuzione dei dati.

DEFINIZIONE

Media aritmetica

La media aritmetica M di n numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è il quoziente fra la loro somma e il numero n.

somma dei valori

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

media aritmetica

numero dei valori

La media aritmetica M_A del gruppo A è

$$M_A = \frac{1,36 + 1,46 + 1,62 + \ldots + 1,78 + 2,12 + 1,86}{22} \simeq 1,671$$

mentre la media aritmetica dei dati del gruppo B è

$$M_B = \frac{1,95 + 2,16 + 1,95 + \ldots + 1,45 + 1,73 + 1,48}{16} \simeq 1,707.$$

Poiché $M_B > M_A$, possiamo dire che le studentesse del gruppo B hanno mediamente saltato meglio di quelle del gruppo A.

La media aritmetica viene anche detta semplicemente **media**, in quanto è il tipo di media più semplice che si può definire.

Nell'esempio precedente abbiamo utilizzato la media come **valore di sintesi**, ossia come un valore che riassume una caratteristica di un insieme di dati. Inoltre possiamo notare che, in questo esempio, la media si trova proprio nella zona della distribuzione dove si addensano maggiormente i risultati.

Quando un valore di sintesi ha questa proprietà, diciamo che è un buon **indice di posizione centrale**. Come vedremo, non sempre la media è un buon indice di posizione centrale.

La media ponderata

Consideriamo la tabella 26, relativa ai voti che gli studenti di una classe hanno ottenuto in un compito, e calcoliamo la media:

$$M = \frac{4+4+5+5+5+5+5+5+5+6+6+6+6+6+6+6+6+7+7+7+8+8}{22}.$$

Al numeratore possiamo anche scrivere $4 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 2$: ogni voto viene moltiplicato per la sua frequenza. La media è allora:

$$M = \frac{4 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 2}{2 + 7 + 8 + 3 + 2} \simeq 5{,}82.$$

Le frequenze rappresentano i diversi «pesi» che devono avere i singoli voti nel calcolo della media. Più grande è la frequenza di un voto, maggiore è l'influenza che esso ha sul valore medio.

La media calcolata è una *media aritmetica ponderata*.

▼ Tabella 26

Voti di una classe	
Voto	**Frequenza**
4	2
5	7
6	8
7	3
8	2

DEFINIZIONE

Media aritmetica ponderata

Dati i numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e associati a essi i numeri $p_1, p_2, \ldots, p_n$, detti *pesi*, chiamiamo media aritmetica ponderata P il rapporto fra la somma dei prodotti dei numeri per i loro pesi e la somma dei pesi stessi.

$$\underbrace{P}_{\text{media aritmetica ponderata}} = \frac{\overbrace{x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n}^{\text{somma dei prodotti dei valori per i loro pesi}}}{\underbrace{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}_{\text{somma dei pesi}}}$$

● La media aritmetica può essere considerata un caso particolare di media ponderata in cui tutti i pesi sono uguali a 1.

Se calcoliamo la media aritmetica ponderata nel caso di classi, possiamo assumere come valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i valori centrali di ogni classe e come pesi le frequenze. Il valore ottenuto può essere diverso dalla media aritmetica.

ESEMPIO

Calcoliamo la media aritmetica ponderata relativa alla tabella 4 (pagina β6), gruppo A:

$$P = \frac{1{,}30 \cdot 2 + 1{,}50 \cdot 6 + 1{,}70 \cdot 8 + 1{,}90 \cdot 5 + 2{,}10 \cdot 1}{2 + 6 + 8 + 5 + 1} \simeq 1{,}673.$$

Il valore ottenuto è diverso, anche se di poco, dalla media aritmetica 1,671, in quanto in ogni classe abbiamo sostituito ai valori della classe il **valore centrale**.

Per come abbiamo usato la media ponderata nei precedenti esempi, cioè facendo coincidere i pesi con le frequenze, essa non è altro che la media ordinaria scritta in modo leggermente diverso. La media ponderata tuttavia è particolarmente significativa quando i pesi servono per indicare l'*importanza* dei diversi valori.

ESEMPIO

In un quadrimestre vengono svolte prove alle quali viene attribuita una diversa importanza (compiti in classe, relazioni, interrogazioni, test). Per un certo studente i voti riportati e i pesi da attribuire ai voti sono quelli della tabella 27.

Calcoliamo la media ponderata:

$$P = \frac{5 \cdot 1 + 6 \cdot 2{,}5 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 2{,}5 + 6 \cdot 3}{1 + 2{,}5 + 1 + 1 + 2{,}5 + 3} \simeq 5{,}95.$$

Il valore che otteniamo è maggiore di quello della media aritmetica semplice (circa 5,67), perché i voti positivi sono stati ottenuti nelle prove alle quali è stata data maggiore importanza.

Voti pesati	
Voto	**Peso**
5	1
6	2,5
5	1
5	1
7	2,5
6	3

▲ Tabella 27

La media geometrica

▼ Tabella 28

Produzione di grano	
Anno	Produzione (tonnellate)
2005	98
2006	125
2007	145,5
2008	143
2009	165
2010	213

Consideriamo la tabella 28 relativa alla produzione di grano di un'azienda agricola tra il 2005 e il 2010.
Determiniamo la percentuale media di variazione della produzione.

Nel 2006 si è avuto un incremento rispetto al 2005 di 27 tonnellate, cioè una variazione percentuale:

$$\frac{27}{98} \simeq 0,276$$

$$0,276 \cdot 100 = 27,6\%.$$

Effettuando i calcoli per tutti gli anni, otteniamo la tabella 29.

► Tabella 29

Variazione della produzione		
Anno	Produzione (tonnellate)	Variazione %
2005	98	
2006	125	27,6%
2007	145,5	16,4%
2008	143	−1,7%
2009	165	15,4%
2010	213	29,1%

Conoscendo i dati della tabella 29, possiamo passare dal valore della produzione di un anno a quello dell'anno successivo procedendo nel modo seguente:

$$2006 \qquad 98 + 98 \cdot \frac{27,6}{100} = 98 \cdot \left(1 + \frac{27,6}{100}\right) = 98 \cdot (1,276) \simeq 125;$$

$$2007 \qquad 125 + 125 \cdot \frac{16,4}{100} = 125 \cdot \left(1 + \frac{16,4}{100}\right) = 125 \cdot (1,164) \simeq 145,5;$$

$$2008 \qquad 145,5 + 145,5 \cdot \frac{-1,7}{100} = 145,5 \cdot \left(1 - \frac{1,7}{100}\right) = 145,5 \cdot (0,983) \simeq 143;$$

$$2009 \qquad 143 + 143 \cdot \frac{15,4}{100} = 143 \cdot \left(1 + \frac{15,4}{100}\right) = 143 \cdot (1,154) \simeq 165;$$

$$2010 \qquad 165 + 165 \cdot \frac{29,1}{100} = 165 \cdot \left(1 + \frac{29,1}{100}\right) = 165 \cdot (1,291) \simeq 213.$$

Possiamo ottenere il valore relativo all'anno 2010 anche direttamente:

$$98 \cdot 1,276 \cdot 1,164 \cdot 0,983 \cdot 1,154 \cdot 1,291 = 213.$$

Notiamo che i valori 1,276, 1,164, … non sono altro che il rapporto fra il dato di un anno e quello dell'anno precedente.

Cerchiamo ora un valore x tale che:

$$98 \cdot (1 + x) \cdot (1 + x) \cdot (1 + x) \cdot (1 + x) \cdot (1 + x) = 213.$$

Tale valore è detto **tasso medio di variazione**; addizionando algebricamente tale tasso all'unità, si ottiene un fattore che, moltiplicato successivamente per il valore iniziale tante volte quante sono le variazioni considerate, fornisce il valore finale.
Nel nostro esempio, svolgendo i calcoli, si ha

$$98 \cdot (1 + x)^5 = 213,$$

dove:

$$(1 + x)^5 = 1,276 \cdot 1,164 \cdot 0,983 \cdot 1,154 \cdot 1,291$$

$$(1 + x) = \sqrt[5]{1,276 \cdot 1,164 \cdot 0,983 \cdot 1,154 \cdot 1,291}$$

$$(1 + x) \simeq 1{,}168$$
$$x \simeq 0{,}168.$$

Il tasso medio di variazione è 0,168. In percentuale otteniamo 16,8%.

L'espressione con la radice che abbiamo utilizzato è la media geometrica dei cinque termini che esprimono il rapporto fra un dato e quello precedente.

● Il valore ottenuto dice che, se ogni anno l'aumento della produzione fosse stato costante e uguale al 16,8%, all'ultimo anno avremmo avuto lo stesso quantitativo di produzione.

DEFINIZIONE

Media geometrica

La media geometrica G di n numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è la radice n-esima del prodotto degli n numeri.

$$\underbrace{G}_{\text{media geometrica}} = \sqrt[\overset{\text{numero dei valori}}{n}]{\underbrace{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot x_n}_{\text{prodotto dei valori}}}$$

● La media geometrica si calcola per valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tutti positivi.

La media geometrica trova impiego ogniqualvolta si considera il variare di un fenomeno nel tempo come, per esempio, il tasso di variazione di prezzi, dei componenti di una popolazione (esseri umani, insetti ecc.), tassi di rendimento di capitali.

ESEMPIO

Calcoliamo la media geometrica dell'andamento dei prezzi in euro di un prodotto, esposti nella tabella 30:

$$G = \sqrt[4]{1{,}103 \cdot 1{,}031 \cdot 0{,}939 \cdot 1{,}097}$$

$$G \simeq 1{,}040.$$

Andamento dei prezzi

Anno	Prezzo	Rapporto rispetto all'anno precedente
2005	5,8	–
2006	6,4	1,103
2007	6,6	1,031
2008	6,2	0,939
2009	6,8	1,097

◄ **Tabella 30**

● I calcoli per determinare la media geometrica si impostano direttamente sulla tabella della serie storica.

Il tasso medio di variazione dei prezzi è, in percentuale, il 4,0%.

Ciò significa che, se il rapporto del prezzo di un periodo rispetto a quello precedente fosse stato costantemente circa 1,040, il prodotto di tutti i rapporti sarebbe stato invariato. Infatti:

$$1{,}103 \cdot 1{,}031 \cdot 0{,}939 \cdot 1{,}097 = 1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04.$$

La media armonica

La tabella 31 mostra il prezzo in euro di un litro di benzina in quattro successivi momenti.

Prezzo della benzina

Tempo	Prezzo
I	1,382
II	1,395
III	1,405
IV	1,442

◄ **Tabella 31**

Abbiamo ogni volta effettuato un rifornimento per 30 euro. La domanda che ci poniamo è «quanto è costata in media la benzina al litro?».

● Per esempio:

$$\frac{30}{1{,}382} \simeq 21{,}71.$$

Per rispondere in modo corretto dobbiamo prima calcolare quanti litri di benzina abbiamo acquistato ogni volta, dividendo 30 euro per il prezzo al litro. Otteniamo i valori della tabella 32.

Litri di benzina acquistati

Tempo	Prezzo	Litri acquistati
I	1,382	21,71
II	1,395	21,51
III	1,405	21,35
IV	1,442	20,80

▶ Tabella 32

In totale abbiamo acquistato 85,37 litri spendendo 120 euro. Il costo di un litro di benzina è stato pertanto:

$$\frac{120}{85{,}37} \simeq 1{,}406.$$

Possiamo trovare direttamente tale costo calcolando la media armonica.

● La media armonica si calcola per valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tutti positivi.

DEFINIZIONE

Media armonica

La media armonica A di n numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è il reciproco della media aritmetica dei reciproci dei valori.

$$A = \frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}}{n}}$$

media armonica

somma dei reciproci dei valori

numero dei valori

In pratica la media armonica si ottiene come rapporto fra il numero dei termini e la somma dei reciproci dei valori:

$$A = \frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots\dfrac{1}{x_n}}{n}} = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}}.$$

Nel nostro esempio:

$$A = \frac{4}{\dfrac{1}{1{,}382}+\dfrac{1}{1{,}395}+\dfrac{1}{1{,}405}+\dfrac{1}{1{,}442}} \simeq 1{,}406.$$

● La velocità media è il rapporto tra lo spazio e il tempo. È quindi lo spazio relativo a ogni unità di tempo.

ESEMPIO

1. La tabella 33 riporta, per ogni giorno della settimana, il tempo impiegato da un dipendente per percorrere i 14 km che lo separano dal posto di lavoro e il relativo valore della velocità media.

Tempo impiegato e velocità

Giorno	Tempo impiegato (minuti)	Velocità media (km/h)
lunedì	30	28
martedì	20	42
mercoledì	24	35
giovedì	21	40
venerdì	35	24

▶ Tabella 33

Per determinare qual è la velocità che tiene in media il dipendente, calcoliamo la media armonica delle velocità:

$$A = \frac{5}{\frac{1}{28}+\frac{1}{42}+\frac{1}{35}+\frac{1}{40}+\frac{1}{24}} \simeq 32{,}31.$$

Avremmo potuto anche calcolare la velocità media della settimana dividendo il percorso totale (70 km) per il tempo complessivo (130 minuti):

$$\frac{70}{\frac{130}{60}} \simeq 32{,}31.$$

2. Il **potere di acquisto** di una moneta è la quantità di beni che si può acquistare con un'unità monetaria. Consideriamo il prezzo di un bene rilevato in quattro città (tabella 34).

▶ Tabella 34

Prezzo unitario di un bene

Città	Prezzo unitario (euro)
Milano	0,85
Francoforte	0,70
Marsiglia	1,10
Bruxelles	0,95

Per determinare il potere di acquisto determiniamo il costo di un'unità del bene calcolando la media armonica:

$$A = \frac{4}{\frac{1}{0{,}85}+\frac{1}{0{,}70}+\frac{1}{1{,}10}+\frac{1}{0{,}95}} \simeq 0{,}88.$$

Pertanto il potere d'acquisto è $\frac{1}{0{,}88} \simeq 1{,}14$.

Con un euro si possono acquistare 1,14 unità del bene.

Il potere d'acquisto è dato dal rapporto fra quantità dei beni e loro prezzo. Se la quantità è 5 e il prezzo 4,4 euro, il potere d'acquisto è $\frac{5}{4{,}4}$; se la quantità è 1 e il prezzo 0,88 euro, il potere d'acquisto è $\frac{1}{0{,}88}$.

La media quadratica

Consideriamo le due sequenze di numeri:

1, 2, 18, 20, 24;   9, 11, 14, 15, 16.

Entrambe hanno media aritmetica $M = 13$.

In entrambi i casi il valore della media aritmetica si colloca tra il secondo numero e il terzo, ma nella prima sequenza abbiamo valori che si discostano dalla media in misura maggiore rispetto a quelli della seconda sequenza.

Calcoliamo ora una nuova media, la *media quadratica* Q. Dobbiamo elevare al quadrato tutti i termini:

1, 4, 324, 400, 576;   81, 121, 196, 225, 256.

Calcoliamo la media aritmetica dei quadrati,

$$\frac{1+4+324+400+576}{5} = \frac{1305}{5} = 261,$$

$$\frac{81+121+196+225+256}{5} = \frac{879}{5} = 175{,}8,$$

e infine estraiamo la radice quadrata. Le due medie quadratiche risultano:

$$Q_1 = \sqrt{261} \simeq 16{,}155, \qquad Q_2 = \sqrt{175{,}8} \simeq 13{,}259.$$

Il valore della media quadratica della prima successione è più elevato di quello della seconda che è molto prossimo al valore 13 della media aritmetica.

Il confronto fra la media aritmetica e la media quadratica permette di stabilire come i valori da cui esse provengono tendono a raggrupparsi più o meno.

La media quadratica è utilizzata per calcolare il valore medio di scostamenti da un livello prefissato. Gli scostamenti possono essere positivi o negativi, ampi o ridotti, e la media quadratica risulta essere idonea per questi valori in quanto supera il problema del segno e tiene conto solamente dell'ampiezza degli scostamenti.

DEFINIZIONE

Media quadratica

La media quadratica Q di n numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è la radice quadrata della media aritmetica dei quadrati dei numeri.

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$

media quadratica

somma dei quadrati dei valori

numero dei valori

ESEMPIO

La tabella 35 riporta le variazioni della temperatura in gradi Celsius relative ad alcuni giorni di una settimana rispetto alla temperatura media stagionale. Calcoliamo il valore della variazione media per mezzo della media quadratica.

Giorno	Variazione	Variazioni al quadrato
lunedì	−2,5	6,25
martedì	1,5	2,25
mercoledì	0,8	0,64
giovedi	−1,5	2,25
venerdì	−2,4	5,76
Totale		17,15

▶ Tabella 35

Non avrebbe avuto fondamento il calcolo della media aritmetica delle variazioni con il loro segno, in quanto si sarebbero avute delle compensazioni. La media aritmetica delle variazioni prese in valore assoluto è 1,74 e il confronto con la media quadratica, di poco superiore, indica che i valori assoluti delle variazioni della temperatura non differiscono molto fra loro.

Nella tabella sono riportati anche i valori al quadrato delle variazioni. La media quadratica risulta:

$$Q = \sqrt{\frac{17,15}{5}} \simeq 1,85.$$

La mediana

Consideriamo la seguente sequenza di nove numeri:

7, 13, 6, 10, 3, 11, 12, 57, 61.

La media aritmetica 20 non è un buon indice di posizione in quanto tutti i numeri, tranne 57 e 61, sono minori di 20. La presenza di questi due valori, molto maggiori degli altri, «sposta» il valore medio rispetto alla posizione centrale.
Scegliamo l'indice di posizione centrale nel seguente modo:

- disponiamo i numeri in ordine crescente (o decrescente):

3, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 57, 61;

- scegliamo il valore 11, che sta al centro. Tale valore è detto **mediana**.

La mediana di una sequenza di numeri suddivide la sequenza in due gruppi contenenti lo stesso numero di elementi.

Se il numero dei dati è pari, il valore della mediana è dato dalla semisomma dei due valori che occupano la posizione centrale.

Se il numero dei valori n è dispari, la mediana occupa la posizione

$$\frac{n+1}{2},$$

se è pari, le posizioni

$$\frac{n}{2} \text{ e } \frac{n}{2}+1.$$

Cerchiamo, per esempio, la mediana dei seguenti otto valori:

28, 14, 33, 5, 25, 38, 30, 36.

Disposti in ordine crescente danno la seguente sequenza:

5, 14, 25, 28, 30, 33, 36, 38,

I valori centrali sono 28 e 30, e quindi la mediana è:

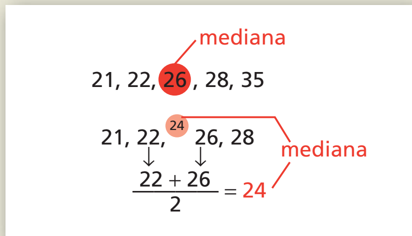
$$\frac{28+30}{2}=29.$$

DEFINIZIONE

Mediana

Data la sequenza ordinata di n numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la mediana è:

- il valore centrale, se n è dispari;
- la media aritmetica dei due valori centrali, se n è pari.



La mediana ha una particolare proprietà. Consideriamo la somma delle differenze in valore assoluto fra ogni valore e la mediana. Questa somma è minore di quella che otterremmo utilizzando, invece della mediana, qualsiasi altro valore.

ESEMPIO

Un'impresa ha l'incarico di rifornire 6 supermercati, disposti lungo un'unica strada, la cui distanza dal capoluogo è riportata nella seguente tabella.

Supermercato	A	B	C	D	E	F
Distanza (km)	3	6	13	19	22	25

◀ Tabella 36

L'impresa vuole costruire un magazzino in una posizione tale che sia minima la somma delle sue distanze dai supermercati.
Per risolvere il problema dobbiamo calcolare la mediana della sequenza di tabella 36:

$$\frac{13+19}{2}=16.$$

Infatti, per la proprietà enunciata, la somma di distanze magazzino-supermercato data da

$$|3-16|+|6-16|+|13-16|+|19-16|+|22-16|+|25-16|=44$$

è la minima possibile.

La determinazione della mediana presenta qualche difficoltà quando non è nota la sequenza dei dati, ma solo la tabella di frequenza.

Consideriamo la tabella 37 relativa al numero dei fratelli degli allievi di una classe. Gli allievi sono 25, pertanto la mediana, nella sequenza dei dati, occupa il posto $\frac{25+1}{2}=13$. Osserviamo che i primi tre posti sono occupati dal valore 0, i successivi otto dal valore 1 ed essendo arrivati all'undicesimo posto dobbiamo esaminare i successivi due posti che hanno entrambi il valore 2. La mediana pertanto ha valore 2.

Numero di fratelli

Numero fratelli	Numero allievi
0	3
1	8
2	7
3	4
4	1
5	1
6	1

▲ Tabella 37

▶ Tabella 38

Possiamo utilizzare le frequenze cumulate (tabella 38) e dall'ultima colonna rilevare che il tredicesimo posto è occupato dal valore 2. Incontriamo qualche difficoltà ulteriore se le modalità quantitative si presentano in classi.

Frequenze cumulate		
Numero fratelli	**Numero allievi**	**Frequenza cumulata**
0	3	3
1	8	11
2	7	18
3	4	22
4	1	23
5	1	24
6	1	25

La tabella 39 riporta i tempi impiegati dai 661 alunni di un liceo per recarsi da casa a scuola e le relative frequenze cumulate.

Introduciamo l'ipotesi che il numero degli alunni associato a ogni classe si distribuisca uniformemente nella classe stessa.

Facendo riferimento alla tabella, gli alunni che impiegano tra 50 e 60 minuti sono 5. Li supponiamo uniformemente distribuiti nei 10 minuti di intervallo, nel senso che ogni 2 minuti arriva a scuola un alunno. Il primo arriverà dopo 52 minuti, il secondo dopo 54 minuti e così via.

La mediana è il valore del termine che occupa il $\frac{661+1}{2} = 331°$ posto della sequenza dei dati, e si colloca nella classe tra 20 e 30 minuti.

▶ Tabella 39

Tempo impiegato per raggiungere la scuola		
Tempo impiegato (minuti)	**Numero alunni**	**Frequenza cumulata**
0-10	73	73
10-20	240	313
20-30	190	503
30-40	121	624
40-50	32	656
50-60	5	661

Dalle frequenze cumulate rileviamo che il 313-esimo valore è 20; il valore da noi cercato occupa all'*interno della classe* la posizione numero:

$$331 - 313 = 18.$$

Dividiamo l'intervallo della classe per la sua frequenza:

$$\frac{10}{190} \simeq 0{,}0526.$$

Il 18-esimo elemento della classe pertanto avrà il valore:

$$20 + 0{,}0526 \cdot 18 = 20{,}9468,$$

che può essere preso, approssimato a 20,9, come valore della mediana.

La moda

Consideriamo i seguenti valori:

$$4,\ 3,\ 6,\ 8,\ 6,\ 13,\ 11,\ 12,\ 2,\ 4,\ 3,\ 4,\ 4,\ 9,\ 5,\ 4$$

e ordiniamoli in senso crescente:

$$2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12,\ 13.$$

Il valore 4 ha una frequenza maggiore rispetto agli altri valori. In questo caso si preferisce assumere come indice di posizione centrale tale numero, che viene chiamato **moda**.

DEFINIZIONE

Moda

Dati i numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si chiama moda il valore a cui corrisponde la frequenza massima.

$$50,\ 100,\ \underbrace{200,\ 200,\ 200}_{\text{moda}},\ 300,\ 300$$

Viene indicata come *moda* anche la modalità qualitativa con la frequenza maggiore di una serie statistica.

La moda indica il valore più «presente» nella distribuzione. Ci sono serie di dati che hanno più di una moda. Consideriamo i risultati di un compito in classe (tabella 40).

Voti di un compito					
Voto	4	5	6	7	8
Frequenza	2	9	3	9	2

◄ Tabella 40

La distribuzione risulta *bimodale*, avendo per moda sia 5 sia 7. Ciò significa che nella classe si possono distinguere due gruppi di studenti: uno ha ben compreso gli argomenti del compito, l'altro ha bisogno di studiarli ancora!

Bimodale significa «che ha due mode».

Questo tipo di informazione sarebbe andato perso se avessimo riassunto i risultati del compito con la media o la mediana, che, come puoi verificare, valgono entrambe 6.

Possiamo calcolare la moda anche nel caso di distribuzioni di frequenze i cui valori sono raggruppati in classi.
Se i valori si presentano raggruppati in classi, si parla di **classe modale**.
Nel caso in cui le classi siano di ampiezza costante, la classe modale è quella avente frequenza massima. Nel caso di classi non aventi ampiezza costante, la classe modale è quella per la quale è massimo il rapporto tra frequenza e ampiezza della classe (**densità di frequenza**).

ESEMPIO

Riprendiamo in esame parte della tabella 39 (riportata in tabella 42).

La classe modale è la seconda, che corrisponde a un intervallo di tempo fra 10 e 20 minuti.

Tempo impiegato (minuti)	Numero alunni
0-10	73
10-20	240
20-30	190
30-40	121
40-50	32
50-60	5

▲ Tabella 42

Consideriamo ora lo stesso fenomeno, rappresentato però con una distribuzione delle unità statistiche in intervalli di classe con ampiezze non costanti (tabella 41).

Osserviamo i valori della colonna relativa ai rapporti tra le frequenze e le ampiezze delle classi: la classe modale è quella con un rapporto maggiore, ossia quella con un intervallo di tempo fra 20 e 25 minuti.

Tempo impiegato per raggiungere la scuola		
Tempo impiegato (minuti)	Numero alunni	Rapporto tra frequenza e ampiezza classe
0-10	73	7,3
10-15	106	21,2
15-20	134	26,8
20-25	143	28,6
25-35	158	15,8
35-45	35	3,5
45-60	12	0,8

▲ Tabella 41

La scelta della media

Non possiamo dare una regola per la scelta del tipo di media da utilizzare, quindi ci limitiamo soltanto a qualche considerazione di carattere generale.

La *media aritmetica* è l'indice di posizione centrale più utilizzato. Rappresenta globalmente tutti i dati e possiamo sostituirla a essi senza alterarne il valore complessivo. La utilizziamo congiuntamente alla mediana e, nelle seriazioni statistiche, anche con la moda.

La *mediana* ha la caratteristica di non essere influenzata dalla rilevante differenza fra i dati.

La *moda* indica il valore che più probabilmente si verifica.

La *media geometrica* è utilizzata per calcolare le variazioni medie percentuali di fenomeni che variano nel tempo.

La *media armonica* è utilizzata per la determinazione di valori medi di dati che derivano dal reciproco di altri dati. La usiamo, per esempio, quando calcoliamo il valore medio di velocità relative a uno stesso percorso, o per il calcolo del prezzo medio di un bene allo scopo di determinare il potere di acquisto della moneta.

La *media quadratica* è utilizzata quando si deve calcolare la media degli scostamenti (positivi o negativi) da un valore fisso medio o tenere conto dell'esistenza di valori molto distanti dai valori centrali di una successione di dati.

Osserviamo inoltre che si può dimostrare una relazione tra i vari tipi di media: $A < G < M < Q$, e cioè la media armonica A assume un valore inferiore alla media geometrica G, che a sua volta ha un valore minore di quello della media aritmetica M, inferiore a quello della media quadratica Q.

Se i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ coincidono, allora coincidono anch le quattro medie A, G, M, Q.

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo, per esempio, che $G < M$ nel caso di $n = 2$, ossia con due valori x_1 e x_2 positivi diversi tra loro.
Dobbiamo dimostrare che

$$\sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2},$$

che, elevando al quadrato, equivale a:

$$x_1 x_2 < \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2}{4} \quad \rightarrow \quad 4x_1x_2 < x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2.$$

Portando $4x_1x_2$ a secondo membro e svolgendo i calcoli otteniamo:

$$0 < (x_1 - x_2)^2.$$

Essendo vera questa relazione, è vera anche quella iniziale fra le due medie.

4. GLI INDICI DI VARIABILITÀ

Il calcolo della media serve solo per capire l'ordine di grandezza del fenomeno sintetizzandolo in un unico valore. Per una descrizione più completa è necessario studiare come variano i dati.

Consideriamo le due sequenze di valori:

a. 8, 16, 21, 29, 37, 49, 57;

b. 27, 28, 28, 30, 32, 34, 38.

Esse sono costituite dallo stesso numero di valori e, per entrambe, la media è 31. Tuttavia, la distribuzione dei valori intorno al valore medio 31 è diversa per le due sequenze: i valori della seconda sequenza sono più vicini al valore medio, mentre quelli della prima sono più sparsi. In statistica, per indicare questo fatto, si dice che le due sequenze hanno diversa **dispersione** o **variabilità**.
Per misurare la variabilità si usano degli **indici di variabilità**, quali il campo di variazione, lo scarto semplice medio e lo scarto quadratico medio.

Il campo di variazione

DEFINIZIONE

Campo di variazione

Il campo di variazione di una sequenza di numeri è la differenza fra il numero massimo e quello minimo.

$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$

$x_n - x_1$ campo di variazione

● Il *campo di variazione* è indicato anche con il termine *range*.

Nella sequenza *a* il campo di variazione è $57 - 8 = 49$, nella sequenza *b* è $38 - 27 = 11$.

Lo scarto semplice medio

Il campo di variazione non è un indice molto accurato, in quanto tiene conto soltanto del valore maggiore e di quello minore e non di quelli intermedi.
Consideriamo altre due sequenze di numeri:

c. 2, 3, 4, 4, 8, 8, 9, 9, 9, 14;

d. 2, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 14.

Esse hanno la stessa numerosità, lo stesso valore medio 7 e lo stesso campo di variazione 12, ma i valori della sequenza *d* sono più vicini al valore medio 7 di quelli della sequenza *c*.
Cerchiamo un indice che permetta di rilevare questa differenza.
Per ogni valore della sequenza *c* calcoliamo lo **scarto assoluto dalla media**, che è la differenza in valore assoluto fra il valore stesso e la media. Indichiamo con S_1 il primo scarto, con S_2 il secondo e così via:

$$S_1 = |2-7| = 5, \quad S_2 = |3-7| = 4, \quad S_3 = |4-7| = 3,$$
$$S_4 = |4-7| = 3, \quad S_5 = |8-7| = 1, \quad S_6 = |8-7| = 1,$$
$$S_7 = |9-7| = 2, \quad S_8 = |9-7| = 2, \quad S_9 = |9-7| = 2,$$
$$S_{10} = |14-7| = 7.$$

Calcoliamo ora la media aritmetica degli scarti che chiamiamo **scarto semplice medio**. Lo indichiamo con S_c, poiché è riferito alla sequenza *c*:

$$S_c = \frac{5+4+3+3+1+1+2+2+2+7}{10} = 3.$$

● Lo scarto semplice medio uguale a 3 ci dice che, mediamente, i valori della sequenza si discostano di 3 dalla media.

Ripetendo il procedimento per *d*, calcoliamo lo scarto semplice medio S_d:

$$S_d = \frac{5+1+1+1+1+0+0+1+1+7}{10} = 1{,}8.$$

S_c è maggiore di S_d: in *c* i valori sono mediamente più lontani dalla loro media.

DEFINIZIONE

Scarto semplice medio

Si chiama scarto semplice medio S di una sequenza di numeri x_1, x_2, …, x_n la media aritmetica dei valori assoluti degli scarti dei numeri stessi dalla loro media aritmetica M.

$$S = \frac{|x_1 - M| + |x_2 - M| + \ldots + |x_n - M|}{n}$$

scarto semplice medio

media dei valori assoluti degli scarti

● Gli scarti dalla media vanno presi in valore assoluto, perché ciò che interessa è lo scostamento di ogni dato dalla media e non se il dato è minore o maggiore del valore medio stesso.
D'altra parte, **la media aritmetica degli scarti**, **non considerati in valore assoluto**, **vale sempre 0**, e quindi non fornisce informazioni sulla dispersione dei dati.
Infatti, indicati con x_1, x_2, …, x_n i diversi dati e con M la loro media aritmetica, abbiamo come media degli scarti:

$$\frac{(x_1 - M) + (x_2 - M) + \ldots + (x_n - M)}{n} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n \overbrace{- M - M - \ldots - M}^{n \text{ volte}}}{n} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n - nM}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - M = M - M = 0.$$

Lo scarto semplice medio e le frequenze

Consideriamo nuovamente la sequenza d:

d. 2, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 14.

I valori possono essere presentati come distribuzione di frequenze mediante la tabella 43.

Valori e frequenza

Valore	Frequenza
2	1
6	4
7	2
8	2
14	1

▲ Tabella 43

Nel calcolo dello scarto semplice medio possiamo moltiplicare ogni scarto assoluto dalla media per la sua frequenza. Lo scarto semplice medio è allora:

$$S_d = \frac{5 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 7 \cdot 1}{10} = 1{,}8.$$

Le frequenze rappresentano i diversi «pesi» che hanno i singoli scarti assoluti. In pratica abbiamo calcolato la media aritmetica ponderata degli scarti assoluti dalla media.

La deviazione standard

IN PRATICA
▶ Videolezione 30

● La deviazione standard viene anche detta **scarto quadratico medio**.

L'indice più utilizzato per valutare la dispersione o la variabilità di un fenomeno è la **deviazione standard**, più sensibile dei precedenti anche per piccole variazioni nella distribuzione dei dati intorno alla media.

Consideriamo la seguente sequenza di otto valori:

5, 6, 14, 15, 17, 20, 31, 36,

la cui media aritmetica è 18.

Per ogni valore calcoliamo lo scarto e lo eleviamo al quadrato. I valori che si ottengono vengono detti **scarti quadratici**:

$$(5-18)^2 = 169; \quad (6-18)^2 = 144;$$
$$(14-18)^2 = 16; \quad (15-18)^2 = 9;$$
$$(17-18)^2 = 1; \quad (20-18)^2 = 4;$$
$$(31-18)^2 = 169; \quad (36-18)^2 = 324.$$

Calcoliamo poi la media degli scarti quadratici, chiamata **varianza**:

$$\frac{169+144+16+9+1+4+169+324}{8} = 104{,}5.$$

Il valore della deviazione standard si ottiene calcolando la radice quadrata della varianza. La indichiamo con la lettera greca σ (si legge «sigma»):

$$\sigma = \sqrt{104{,}5} \simeq 10{,}2225.$$

● La varianza si basa sulla proprietà che la somma dei quadrati degli scarti dalla media è minima. Se calcoliamo la somma dei quadrati degli scarti da un valore diverso dalla media aritmetica, otterremo sempre un valore maggiore.

● La varianza si può calcolare anche facendo la differenza tra la media aritmetica dei quadrati dei valori e il quadrato della media:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - M^2.$$

DEFINIZIONE

Deviazione standard

La deviazione standard σ di una sequenza di numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è la radice quadrata della media aritmetica dei quadrati degli scarti dei numeri stessi dalla loro media aritmetica.

$$\underbrace{\sigma}_{\text{deviazione standard}} = \sqrt{\underbrace{\frac{(x_1-M)^2 + (x_2-M)^2 + \ldots + (x_n-M)^2}{n}}_{\text{media dei quadrati degli scarti}}}$$

La varianza e le frequenze

Consideriamo ora la seguente sequenza di dieci valori:

3, 3, 5, 7, 7, 7, 12, 12, 12, 12,

la cui media aritmetica è 8.

Calcoliamo la varianza:

$$\frac{25+25+9+1+1+1+16+16+16+16}{10} = 12{,}6.$$

La deviazione standard è $\sigma = \sqrt{12{,}6} = 3{,}55$.

Compiliamo una tabella con i valori e le loro frequenze (tabella 44).

Ogni scarto dalla media al quadrato viene moltiplicato per la frequenza del valore.

La varianza è allora:

$$\frac{25 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 16 \cdot 4}{10} = 12{,}6.$$

Abbiamo calcolato la media aritmetica ponderata degli scarti dalla media al quadrato, dove le frequenze rappresentano i diversi «pesi».

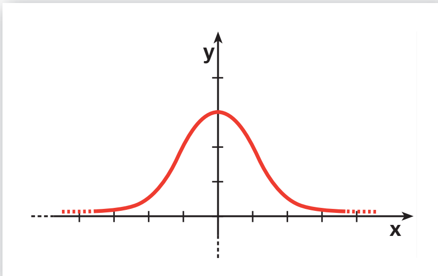
Valori e frequenza

Valore	Frequenza
3	2
5	1
7	3
12	4

▲ Tabella 44

La distribuzione gaussiana

Consideriamo ancora la distribuzione relativa ai risultati della prova di salto in lungo di un gruppo di studentesse. Il suo poligono delle frequenze ha una forma particolare, detta anche «a campana» (figura 4, a pagina β11).
Se aumentassimo il numero dei risultati, prendendo in considerazione, per esempio, tutte le studentesse di una stessa scuola o quelle di più scuole, il poligono delle frequenze molto probabilmente si avvicinerebbe sempre di più a una particolare curva teorica detta **curva normale** o **gaussiana** (o **di Gauss**).



◀ **Figura 15** La curva di Gauss.

Il calcolo della deviazione standard assume particolare importanza nelle distribuzioni gaussiane, poiché tale indice è collegato al modo con cui le frequenze si distribuiscono intorno al valore medio. Si può infatti dimostrare che se M è la media aritmetica di una distribuzione gaussiana e σ la sua deviazione standard, il 68,27% dei valori è compreso fra $M - \sigma$ e $M + \sigma$, il 95,45% fra $M - 2\sigma$ e $M + 2\sigma$, e infine il 99,74% fra $M - 3\sigma$ e $M + 3\sigma$.
Da queste informazioni, essendo la distribuzione gaussiana simmetrica rispetto alla media, se ne possono ricavare altre. Per esempio, il 15,865% dei valori è maggiore di $M + \sigma$. Infatti, la percentuale di valori maggiori di $M + \sigma$ o minori di $M - \sigma$ è

$$100 - 68{,}27 = 31{,}73\%,$$

e quindi la percentuale di valori maggiori di $M + \sigma$ è:

$$\frac{100 - 68{,}27}{2} = 15{,}865\%.$$

● Altri intervalli rilevanti sono: $M \pm 1{,}96 \cdot \sigma$ e $M \pm 2{,}576 \cdot \sigma$, che contengono rispettivamente il 95% e il 99% dei valori.

In modo analogo si ricava che il 2,275% dei valori è maggiore di $M + 2\sigma$, e la stessa percentuale di valori è minore di $M - 2\sigma$.

ESEMPIO

Il costo mensile per il trasporto casa-scuola e viceversa, in una popolazione composta da 800 studenti delle scuole superiori residenti fuori dal capoluogo di provincia, ha una distribuzione gaussiana. Sapendo che il costo medio mensile è $C_M = 56$ euro e la deviazione standard $\sigma = 5$ euro, quanti studenti sostengono un costo compreso tra 51 e 61 euro? Quanti maggiore di 66 euro? E quanti un costo compreso tra 46 e 61 euro?
Essendo $51 = 56 - 5$ e $61 = 56 + 5$, la prima domanda chiede quante sono le persone che sostengono un costo compreso tra $C_M - \sigma$ e $C_M + \sigma$; sappiamo che sono il 68,27%:

$$800 \cdot \frac{68{,}27}{100} = 546.$$

La seconda domanda chiede quanti sono gli studenti che sostengono un costo maggiore di $C_M + 2\sigma$, essendo $66 = 56 + 2 \cdot 5$. Essi sono il 2,275%:

$$800 \cdot \frac{2,275}{100} = 18.$$

La terza domanda chiede quanti studenti hanno un costo compreso tra $C_M - 2\sigma$ $(46 = 56 - 2 \cdot 5)$ e $C_M + \sigma$ $(61 = 56 + 5)$. La percentuale è

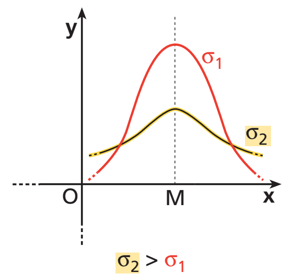
$$\frac{95,45}{2} + \frac{68,27}{2} = 81,86$$

e il numero degli studenti:

$$800 \cdot \frac{81,86}{100} = 655.$$

I valori calcolati sono da considerarsi approssimati, in quanto la popolazione esaminata non ha una distribuzione rigorosamente gaussiana, ma sono comunque attendibili.

Notiamo che, se due distribuzioni hanno la stessa media M e diversa deviazione standard σ, sono rappresentabili mediante due curve di Gauss in cui quella con σ maggiore è più schiacciata orizzontalmente rispetto all'altra, che invece è più stretta intorno alla media e più alta.



La popolazione e il campione

La ricerca dei valori dell'universo per mezzo di un campione, come abbiamo già rilevato, è un passaggio delicato in quanto, effettuando un processo induttivo, rimane inevitabile un'incertezza.
Elementi fondamentali sono la rappresentatività del campione e la sua numerosità. Un campione è rappresentativo se riproduce in scala ridotta la popolazione dell'universo.

Noi consideriamo soltanto campioni nei quali l'individuazione degli elementi avviene mediante estrazione con la possibilità che un elemento possa essere considerato più di una volta. È il procedimento migliore, in quanto ogni unità della popolazione ha la stessa probabilità di essere scelta e un campione ha la stessa probabilità di tutti i possibili campioni di essere formato.

Un metodo alternativo è quello dell'estrazione in blocco dove un elemento può essere considerato una sola volta. Noi considereremo solo campioni formati con il primo metodo perché le formule sono più semplici e all'aumentare della numerosità del campione i risultati tendono a coincidere.

Consideriamo un'impresa alimentare che utilizza una macchina che confeziona ogni otto ore 5000 pacchetti da 400 g di biscotti con una tolleranza nel peso misurata da una deviazione standard di 10 g; le confezioni da scartare per peso errato sono l'1,8% del totale. I parametri che sintetizzano questa popolazione sono:

- la sua numerosità: $N = 5000$;
- la media aritmetica: $\mu = 400$ g;
- la deviazione standard: $\sigma = 10$ g;
- la percentuale delle confezioni da scartare: $p = 1,8\%$.

● Se si conosce la distribuzione del fenomeno nella popolazione e il campione la rispecchia, si dice che è **stratificato**.

● I campioni aventi una numerosità $n \leq 30$ sono chiamati *piccoli campioni*.

● L'estrazione in blocco equivale a estrazioni successive senza più considerare l'elemento estratto che viene tolto dalla popolazione. La probabilità di un elemento di essere estratto cambia dopo ogni estrazione.

Viene estratto un campione di 50 pacchetti e il peso medio risulta di 396 g, con una deviazione standard di 15 g, e una sola confezione deve essere scartata, cioè il 2%. I parametri che sintetizzano il campione sono:

- la sua numerosità: $n = 50$;
- la media aritmetica (media campionaria): $\overline{x} = 396$ g;
- la deviazione standard: $s = 15$ g;
- la frequenza campionaria: $f = 2\%$.

I parametri della popolazione μ, σ e p sono valori costanti, mentre $\overline{x}$, s e f variano da campione a campione e sono indicati come *stimatori*.

I dati forniti dal campione sono una stima della popolazione. Nel caso in esame porteranno a decidere, con una certa probabilità, se gli elementi conosciuti dell'universo sono da modificare o se la differenza rilevata è solo casuale.

Il rapporto $\frac{n}{N}$ si chiama tasso di campionamento.

È importante non confondere i parametri della popolazione con quelli del campione.
Possiamo riassumere i simboli in una tabella.

	Numerosità	Media	Deviazione standard	Percentuale
Popolazione	N	μ	σ	p
Campione	n	$\overline{x}$	s	f

▶ Tabella 45

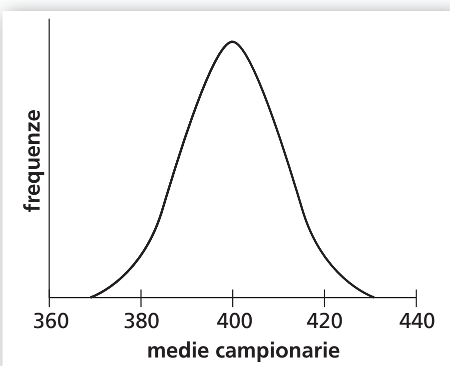
La distribuzione campionaria

Per comprendere il significato che assumono i valori rilevati da un campione, dobbiamo conoscere il legame che esiste tra i parametri della popolazione N, μ, σ, p e quelli di un campione n, $\overline{x}$, s, f.

L'insieme di tutti i possibili campioni che si possono estrarre da una popolazione costituisce lo **spazio dei campioni** (o **spazio campionario**) **di dimensione *n***.
Il numero degli elementi di questo insieme è N^n, numero che diventa veramente elevato all'aumentare di n. Basta osservare che nel nostro esempio avremmo 5000^{50} campioni.
Se di ogni campione calcoliamo la media aritmetica $\overline{x}$, e costruiamo una seriazione statistica dove facciamo corrispondere a ogni valore calcolato il numero delle volte che si è presentato, otteniamo una distribuzione che ha un poligono delle frequenze vicino alla curva di distribuzione normale o gaussiana.
La distribuzione di tutte le medie campionarie o distribuzione campionaria è indicata con $\overline{X}$.
Nell'esempio che consideriamo si avrebbe il grafico della figura 16.

Una distribuzione statistica viene indicata con una lettera maiuscola.

Se la numerosità n del campione cresce, la distribuzione $\overline{X}$ tende sempre più a una distribuzione normale.



◀ Figura 16

Calcolando la media aritmetica di questa distribuzione statistica (cioè la media aritmetica di tutte le medie) $\mu_{\overline{X}}$, otteniamo che essa coincide con la media della popolazione μ. Questo risultato, che si può verificare e dimostrare, permette di affermare che la media di un campione è uno **stimatore corretto** della media della popolazione.

La distribuzione delle medie aritmetiche campionarie ha una variabilità la cui deviazione standard, chiamata **errore standard**, è: $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Questo valore risulta legato alla deviazione standard della popolazione σ e alla numerosità del campione n e indica come variano mediamente i valori della distribuzione $\overline{X}$ intorno al valore medio μ.

● $M(\overline{X}) = \mu_{\overline{X}} = \mu$.

La stima della media

Stima puntuale della media

Per stimare la media dell'universo utilizziamo la media del campione e lo possiamo fare in quanto sappiamo che è uno stimatore corretto. La stima che effettuiamo si dice **puntuale**, ma è opportuno accompagnarla dalla deviazione standard della distribuzione campionaria o **errore standard** per indicarne la precisione.

● L'errore standard è detto anche **errore medio di campionamento**.

Nell'esempio considerato, utilizzando la media del campione, stimiamo la media della popolazione $\overline{x} = 396$ e associamo a questo valore l'errore standard $\sigma_{\overline{X}} = \frac{10}{\sqrt{50}} \simeq 1,41$ per indicarne la precisione.

In genere non è conosciuta la deviazione standard della popolazione σ, e pertanto dobbiamo utilizzare la deviazione standard del campione s, che però **non** è uno stimatore corretto.
Si rimedia a questo con un'opportuna correzione e l'**errore standard** assume la seguente formula:

$$s_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}.$$

Nel nostro esempio si ha:

$$s_{\overline{X}} = \frac{15}{\sqrt{50-1}} \simeq 2,14.$$

La stima puntuale non ci permette di valutare l'attendibilità della media e si preferisce indicare come stima della media della popolazione non un singolo valore ma un *intervallo* che, con una certa probabilità, contenga detto valore.

Stima per intervallo della media

Consideriamo la distribuzione delle medie campionarie che è molto prossima alla distribuzione gaussiana.

Sappiamo che in questa distribuzione, perfettamente simmetrica, con media M e deviazione standard σ, negli intervalli $M \pm \sigma$, $M \pm 2\sigma$ e $M \pm 3\sigma$ si trovano rispettivamente il 68,27%, il 95,45% e il 99,74% dei valori.
Sappiamo anche che gli intervalli $M \pm 1,96\sigma$ e $M \pm 2,576\sigma$ contengono rispettivamente il 95% e il 99% dei valori.

● $M \pm \sigma$ è una notazione per indicare l'intervallo:
$]M-\sigma; M+\sigma[$.

Bergamini, Trifone, Barozzi MATEMATICA.BLU - Vol. 3 © Zanichelli 2012 *con Maths in English*

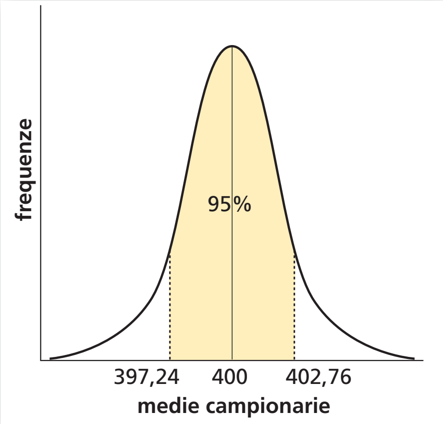
Applicando queste considerazioni alla distribuzione delle medie campionarie, possiamo, per esempio, affermare che in $\mu \pm 1{,}96 \cdot \sigma_{\overline{X}}$ e $\mu \pm 2{,}576 \cdot \sigma_{\overline{X}}$ vi sono rispettivamente il 95% e il 99% delle medie di tutti i possibili campioni.
Le percentuali rappresentano anche la **probabilità** che un campione abbia il valore della media compreso in tali intervalli.

Le caratteristiche tecniche della macchina del nostro esempio, indicano che la media della popolazione è $\mu = 400$ e la deviazione standard è $\sigma = 10$.
Avendo già calcolato l'errore standard $\sigma_{\overline{X}} = 1{,}41$, possiamo affermare che nell'intervallo:

● Ricordiamo che l'errore standard è la deviazione standard della distribuzione delle medie campionarie.

$$]400 - 1{,}96 \cdot 1{,}41; 400 + 1{,}96 \cdot 1{,}41[=]397{,}24; 402{,}76[$$

si trovano il 95% delle medie di tutti i possibili campioni che si possono estrarre; possiamo anche affermare che estraendo un campione, la sua media, con probabilità del 95%, sarà un valore compreso in detto intervallo.



◀ Figura 17

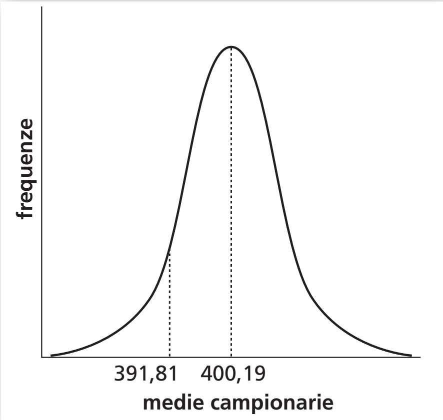
● Sappiamo che la media di un campione è una stima corretta della media incognita della popolazione.

● Supponiamo di non conoscere la deviazione standard della popolazione σ, altrimenti sarebbe stato più corretto usare il valore di $\sigma_{\overline{X}} = 1{,}41$.

L'obiettivo che noi vogliamo raggiungere è determinare, a partire dalla media campionaria, un intervallo, chiamato **di confidenza**, che contenga la media della popolazione, e che ciò sia vero con probabilità del 95%. Pertanto nell'intervallo precedente sostituiamo a 400 la media del campione 396 e al valore di 1,41 il valore dell'errore standard $s_{\overline{X}} = 2{,}14$. L'intervallo risulta:

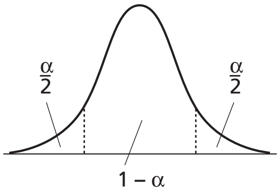
$$]396 - 1{,}96 \cdot 2{,}14; 396 + 1{,}96 \cdot 2{,}14[=]391{,}81; 400{,}19[.$$

Graficamente la situazione è illustrata in figura 18.



◀ Figura 18

● Nella distribuzione gaussiana la zona con probabilità $(1 - \alpha)$ è simmetrica alla media e nelle code rimane $\frac{\alpha}{2}$.



Il livello di confidenza (o di fiducia) dell'intervallo, indicato con $(1 - \alpha)$, dove α è detto **livello di significatività**, indica, in percentuale, quanto è affidabile, cioè con quale probabilità corrisponde alla popolazione effettiva, l'intervallo calcolato utilizzando la media campionaria. Per ogni livello della percentuale $(1 - \alpha)$ cambia il coefficiente che moltiplica l'errore standard. Questo coefficiente viene indicato con il simbolo $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

L'intervallo di confidenza, in generale, assume la seguente formulazione:

$$\left]\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}}; \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}}\right[.$$

Riportiamo in tabella 46 alcuni valori di $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

● Minore è l'ampiezza dell'intervallo, maggiore è la precisione della stima. Avendo fissato un livello di confidenza $(1 - \alpha)$, per diminuire l'ampiezza è necessario aumentare la numerosità del campione n.

Livello di confidenza $(1 - \alpha)$	Valori di $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
68,27%	1
80%	1,28
90%	1,645
95%	1,96
95,45%	2
99%	2,576
99,74%	3
99,99%	3,29

◀ Tabella 46

I procedimenti esposti possono essere applicati anche nel caso di piccoli campioni, cioè con una numerosità $n < 30$, ma solo quando tali campioni sono estratti da una popolazione con distribuzione normale ed è conosciuta la sua deviazione standard. Quando questa non è nota ma si conosce la deviazione standard del campione, occorre utilizzare un diverso modo di procedere.

ESEMPIO

Una popolazione è formata da 500 consumatori e si è rilevato che il consumo medio di latte fresco in un mese è di 10 litri con una deviazione standard di 4,5 litri. Si estrae un campione di 40 unità con un consumo medio mensile di 10,2 litri e una deviazione standard di 5,4 litri. Determiniamo:

a) l'intervallo dello spazio dei campioni che contiene il 90% di tutte le medie campionarie;
b) qual è la percentuale delle medie campionarie che hanno un valore compreso tra 8,5 e 11,5 litri;
c) quale percentuale della popolazione ha un consumo maggiore di 8,5 litri;
d) la stima puntuale della media della popolazione tramite il campione e il relativo errore standard;
e) l'intervallo di confidenza al 99% della media della popolazione.

a) Conosciamo la media della popolazione $\mu = 10$; utilizzando la deviazione standard della popolazione $\sigma = 4{,}5$ e la numerosità del campione $n = 40$, calcoliamo l'errore standard della distribuzione campionaria

$\sigma_{\overline{X}} = \frac{4,5}{\sqrt{40}} = 0,71$. L'intervallo che contiene il 90% di tutte le medie campionarie è: $]10 - 1,645 \cdot 0,71; 10 + 1,645 \cdot 0,71[=]8,8; 11,2[$.
Si può anche affermare che estraendo un campione, la probabilità che la sua media cada in detto intervallo è del 90%.

b) L'intervallo dato,]8,5; 11,5[, è simmetrico rispetto alla media della popolazione e possiamo scriverlo:

$$\left]10 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{X}}; 10 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{X}}\right[= \left]10 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot 0,71; 10 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot 0,71\right[.$$

Essendo $10 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot 0,71 = 8,5$ si ottiene $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2{,}113$, che corrisponde a una percentuale di poco superiore al 95,45%.

Data la simmetria si ottiene lo stesso risultato ponendo $10 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot 0,71 = 11,5$.

c) Sfruttando il risultato del punto precedente, abbiamo che la percentuale per un consumo tra 8,5 e 11,5 litri è del 95,45%. Pertanto, per un consumo maggiore di 8,5, essa è circa: $\frac{95,45\%}{2} + 50\% = 97,73\%$.

Graficamente otteniamo la figura 19.

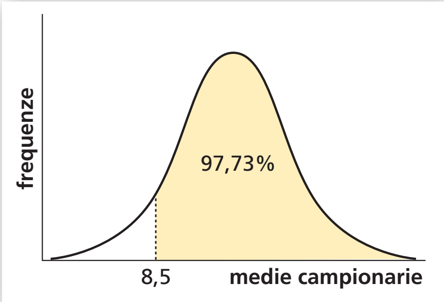


Figura 19

d) La stima puntuale della media della popolazione per mezzo del campione è $\overline{x} = 10,2$. L'errore standard che affianchiamo a questo valore è $\sigma_{\overline{X}} = 0,71$ nel caso sia conosciuta la deviazione standard della popolazione. Se invece utilizziamo la deviazione standard s del campione, l'errore standard è:

$$s_{\overline{X}} = \frac{5,4}{\sqrt{40-1}} = 0,86.$$

e) L'intervallo di confidenza al 99% della media della popolazione risulta:

$$]10,2 - 2,576 \cdot 0,71; 10,2 + 2,576 \cdot 0,71[=]8,4; 12,0[$$

utilizzando l'errore standard dell'intera popolazione $\sigma_{\overline{X}} = 0,71$;

$$]10,2 - 2,576 \cdot 0,86; 10,2 + 2,576 \cdot 0,86[=]8,0; 12,4[$$

utilizzando l'errore standard ottenuto dal campione $s_{\overline{X}} = 0,86$.

La stima di una percentuale

Quando si vuole stimare p, percentuale non nota di una caratteristica della popolazione, è necessario utilizzare la frequenza f rilevata nel campione.
Le considerazioni che si effettuano sono analoghe a quelle della media aritmetica.

I valori della frequenza di una caratteristica, che sono stati rilevati nei campioni dello spazio campionario, costituiscono la distribuzione delle frequenze campionarie F con grafico molto prossimo alla curva normale o gaussiana.
Il valore medio di F è uguale a quello della percentuale p della popolazione, e pertanto il valore della frequenza f del campione risulta essere uno stimatore corretto di p. La deviazione standard di questa distribuzione, chiamata **errore standard**, è data dalla seguente formula:

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}.$$

Nell'esempio iniziale della macchina che confezionava sacchetti di biscotti, è indicata come nota la percentuale $p = 1{,}8\%$ del numero dei sacchetti difettosi della popolazione.
Se non fosse nota, sarebbe necessario stimarla con la frequenza del campione, nel nostro caso $f = 2\%$, e utilizzare, per indicare l'errore medio della stima, l'errore standard della distribuzione F, la seguente relazione:

$$s_F = \sqrt{\frac{f \cdot (1-f)}{n}}.$$

Nell'esempio considerato si avrebbe: $s_F = \sqrt{\frac{0{,}02 \cdot 0{,}98}{50}} = 0{,}0198.$

Anche nella ricerca della percentuale di una caratteristica della popolazione è meglio determinare un intervallo di confidenza, vero con probabilità $(1-\alpha)$.
Nell'esempio che consideriamo, a livello del 99% si ha il seguente intervallo:

$$]0{,}02 - 2{,}576 \cdot 0{,}0198; 0{,}02 + 2{,}576 \cdot 0{,}0198[=]-0{,}031; 0{,}071[.$$

In questo caso, essendo negativo, il valore del limite inferiore viene posto uguale a 0:]0; 0,071[.

ESEMPIO

Nell'elezione del sindaco in un Comune, dopo lo spoglio dei voti di 200 sezioni, un candidato ha ottenuto il 43% dei consensi. Viene effettuata una proiezione costruendo un intervallo di confidenza a livello del 95%.

L'errore standard è $s_F = \sqrt{\frac{0{,}43 \cdot (1-0{,}43)}{200}} = 0{,}035$ e l'intervallo è:

$$]0{,}43 - 1{,}96 \cdot 0{,}035; 0{,}43 + 1{,}96 \cdot 0{,}035[=]0{,}361; 0{,}499[.$$

L'ampiezza dell'intervallo, chiamata anche *forbice*, diminuisce con l'aumentare del numero delle sezioni scrutinate.

Il coefficiente di variazione

Supponiamo di aver esaminato l'andamento dei prezzi di un bene a Roma e a Firenze e di aver calcolato la media aritmetica e la deviazione standard.
I valori ottenuti (espressi in euro) sono riportati nella tabella 47.

	Media	σ
Roma	4,53	2,12
Firenze	4,02	1,99

◄ Tabella 47

Attenzione a non confondere la frequenza della caratteristica di un fenomeno con il numero di volte con cui essa si presenta nello spazio dei campioni.

$M(F) = \mu_F = p.$

L'errore standard risulta massimo quando $f = 0{,}5$ e quindi

$s_F = \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$

La proiezione afferma che, in base al campione considerato, la percentuale di voti ricevuti dal candidato è compresa tra il 36,1% e il 49,9%.

Se confrontassimo direttamente i due scarti quadratici medi σ, saremmo indotti a ritenere che i prezzi a Roma abbiano una variabilità maggiore, commettendo un errore.
Per confrontare in modo corretto i due valori di σ dobbiamo cercare quale variabilità essi presentano rispetto al loro valore medio.
Calcoliamo pertanto il rapporto tra il valore della deviazione standard e il valore della media. Otteniamo:

$$\text{Roma:}\quad \frac{2,12}{4,53} \simeq 0,468; \qquad \text{Firenze:}\quad \frac{1,99}{4,02} \simeq 0,495.$$

Questo rapporto è un numero puro. Può essere espresso anche in percentuale per una lettura più immediata.
Se moltiplichiamo i valori ottenuti per 100, possiamo affermare che i prezzi, rispetto alla media, a Firenze hanno una variabilità del 49,5%, maggiore di quella di Roma che è del 46,8%.

- Un numero puro non ha dimensioni; deriva dal rapporto di due grandezze aventi uguale unità di misura.

DEFINIZIONE

Coefficiente di variazione

Il coefficiente di variazione $C.V.$ è il rapporto tra la deviazione standard e la media aritmetica:

$$C.V. = \frac{\sigma}{M}.$$

- Se si esprime in percentuale:

$$C.V. = \frac{\sigma}{M} \cdot 100.$$

Se l'uso del coefficiente di variazione si è reso necessario per confrontare due fenomeni della stessa natura e interpretarli correttamente, a maggior ragione si rende necessario quando i due fenomeni hanno unità di misura diverse.

- Per confrontare due fenomeni si possono utilizzare anche i punti *zeta* così definiti:

$$z_i = \frac{x_i - M}{\sigma}.$$

Per la loro trattazione si rimanda al capitolo sulle distribuzioni di probabilità.

ESEMPIO

In una impresa si sono rilevati gli stipendi degli impiegati e l'età.
Si sono ottenuti i seguenti valori:

stipendi: media = 1070 euro, σ = 348 euro, $C.V. \simeq$ 32,5%;

età: media = 38 anni, σ = 10 anni, $C.V. \simeq$ 26,3%.

- Esistono due situazioni particolari, anche se abbastanza rare. Se la media aritmetica è negativa, nel calcolo di $C.V.$, dobbiamo considerarla in valore assoluto. Se la media aritmetica è nulla o il valore di σ è maggiore del valore della media, l'indice non può essere utilizzato.

La concentrazione

Abbiamo chiesto a venti alunni di una classe terza di una scuola secondaria di primo grado a quanto ammonta la «paga» settimanale e il risultato di questa rilevazione è rappresentato nella tabella 48.

▼ **Tabella 48**

Paga settimanale	
Importo (euro)	**Frequenza**
0-5	5
5-10	9
10-15	3
15-20	2
20-25	1

Esaminando la tabella si intuisce che la somma totale a disposizione dei venti ragazzi non è equamente distribuita: vogliamo studiare meglio questo aspetto.
Per prima cosa stimiamo a quanto ammontano le somme a disposizione dei ragazzi di ogni classe di intervallo, moltiplicando il valore centrale della classe per la corrispondente frequenza. Il valore ottenuto rappresenta l'**intensità del carattere della classe**:

1ª classe: $2{,}5 \cdot 5 = 12{,}5$;

2ª classe: $7{,}5 \cdot 9 = 67{,}5$;

3ª classe: $12{,}5 \cdot 3 = 37{,}5$;

4ª classe: $17{,}5 \cdot 2 = 35$;

5ª classe: $22{,}5 \cdot 1 = 22{,}5$.

Addizioniamo i valori delle intensità delle classi e otteniamo 175. Questa somma rappresenta l'**intensità globale del fenomeno**.

Costruiamo ora la tabella 49, che mette in relazione ogni frequenza con l'intensità del carattere della classe.

► Tabella 49

Intensità del carattere

Frequenza	Intensità
5	12,5
9	67,5
3	37,5
2	35,0
1	22,5

● Leggiamo la tabella: cinque alunni hanno complessivamente 12,5 euro, nove alunni hanno complessivamente 67,5 euro ecc.

Calcoliamo poi le frequenze cumulate e le intensità cumulate (tabella 50).

◄ Tabella 50

Frequenze e intensità cumulate

Frequenza	Intensità	Frequenza cumulata	Intensità cumulata
5	12,5	5	12,5
9	67,5	14	80,0
3	37,5	17	117,5
2	35,0	19	152,5
1	22,5	20	175,0

● Leggiamo le due ultime colonne: 5 alunni hanno a disposizione 12,5 euro dei 175 euro complessivi, 14 alunni hanno a disposizione 80 euro dei 175 euro complessivi, 17 alunni hanno a disposizione 117,5 euro dei 175 euro complessivi ecc.

Calcoliamo ora le frequenze relative cumulate e le intensità relative cumulate dividendo le frequenze cumulate per la somma delle frequenze e le intensità cumulate per l'intensità globale (tabella 51).

▼ Tabella 51

Frequenze relative cumulate e intensità relative cumulate

Frequenza	Intensità	Frequenza cumulata	Intensità cumulata	Frequenza relativa cumulata	Intensità relativa cumulata
5	12,5	5	12,5	0,25	0,07
9	67,5	14	80,0	0,70	0,46
3	37,5	17	117,5	0,85	0,67
2	35,0	19	152,5	0,95	0,87
1	22,5	20	175,0	1,00	1,00

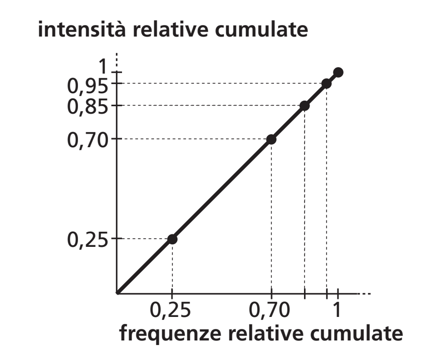
Leggiamo le ultime due colonne:

il 25% degli alunni riceve il 7% della somma complessiva;
il 70% degli alunni riceve il 46% della somma complessiva;
l'85% degli alunni riceve il 67% della somma complessiva ecc.

14 studenti sono il 70% di 20 e ricevono solo 80 euro, ossia il 46% di 175 euro.
Per avere equidistribuzione il 70% degli studenti dovrebbe ricevere il 70% della somma complessiva.

Se le frequenze relative cumulate fossero uguali alle intensità relative cumulate, si avrebbe una perfetta equidistribuzione.

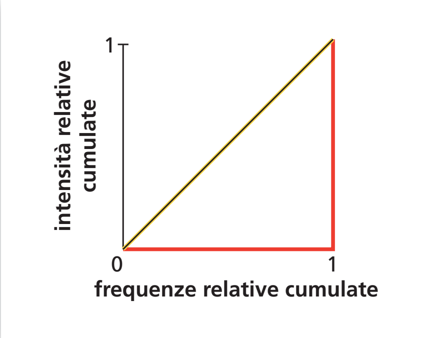
In questo caso, rappresentando i punti corrispondenti in un diagramma cartesiano, essi si trovano sulla bisettrice del primo quadrante, il cui tratto compreso fra i punti di ascisse 0 e 1 è il **diagramma di concentrazione nel caso di equidistribuzione**.



◀ **Figura 20** In caso di equidistribuzione le coppie frequenza relativa cumulata-intensità relativa cumulata sarebbero costituite da valori uguali. Per esempio, (0,25; 0,25), (0,70; 0,70), … Rappresentandole con dei punti di un grafico cartesiano e congiungendo tali punti, otteniamo il diagramma di concentrazione nel caso di equidistribuzione, che è un tratto della bisettrice del primo quadrante.

Considerando il nostro esempio, la massima concentrazione si avrebbe se la somma totale fosse percepita da un solo ragazzo e gli altri diciannove non ricevessero nulla. In questo caso il 10%, 20%, 30%, … degli studenti riceverebbe lo 0% della somma, mentre il 100% riceverebbe il 100%.

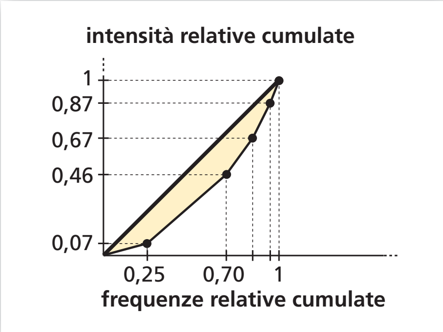
Abbiamo la situazione completamente opposta, di massima concentrazione, quando tutte le intensità relative cumulate sono nulle tranne l'ultima che ha valore 1. Questo significa che l'intensità totale è tutta concentrata nell'ultima classe di intervallo. Tracciamo il diagramma relativo, riportando anche la retta di equidistribuzione.
I due cateti del triangolo rettangolo isoscele rappresentano la situazione di massima concentrazione e per questo vengono detti **diagramma di massima concentrazione**.



▶ **Figura 21** La spezzata formata dai cateti del triangolo rettangolo isoscele è il diagramma di massima concentrazione.

Inseriamo ora nel diagramma appena tracciato i punti che hanno per ascisse le frequenze relative cumulate e per ordinate le corrispondenti intensità relative cumulate della tabella 51 (a pagina β39).

Congiungiamo poi i punti con una spezzata che viene detta **spezzata di concentrazione**.



▶ **Figura 22** L'area di concentrazione è la zona del piano compresa fra la retta di equidistribuzione e la spezzata di concentrazione.

Chiamiamo **area di concentrazione** la regione del piano delimitata dalla retta di equidistribuzione e dalla spezzata di concentrazione.

Tanto più la spezzata si avvicina alla retta di equidistribuzione, tanto minore è l'area di concentrazione. Al contrario, più la spezzata si avvicina ai cateti del triangolo, tanto maggiore è l'area di concentrazione.

L'area del triangolo rettangolo isoscele rappresenta la massima concentrazione.

Poiché i cateti del triangolo misurano 1, il valore dell'area di massima concentrazione è $\frac{1 \cdot 1}{2} = 0{,}5$.

Per trovare il valore dell'area di concentrazione dobbiamo sottrarre dall'area del triangolo l'area sottostante la spezzata di concentrazione. Esaminando il grafico di figura 22, notiamo che dobbiamo sommare le aree delle seguenti figure:

- un triangolo con base 0,07 e altezza 0,25, quindi area 0,00875;
- un trapezio con basi 0,07 e 0,46 e altezza 0,45, quindi area 0,11925;
- un trapezio con basi 0,46 e 0,67 e altezza 0,15, quindi area 0,08475;
- un trapezio con basi 0,67 e 0,87 e altezza 0,10, quindi area 0,077;
- un trapezio con basi 0,87 e 1 e altezza 0,05, quindi area 0,04675.

Addizioniamo le aree parziali e otteniamo l'area sotto la spezzata di concentrazione. La somma risulta 0,3365.
Otteniamo quindi il valore dell'area di concentrazione:

$$0{,}5 - 0{,}3365 = 0{,}1635.$$

Il rapporto tra la misura dell'area di concentrazione e quella dell'area di massima concentrazione fornisce un indice della concentrazione.

Calcoliamo l'indice di concentrazione per l'esempio considerato:

$$R = \frac{0{,}1635}{0{,}5} = 0{,}327.$$

In termini percentuali indica una concentrazione del 32,7%.
In sintesi, data una successione di valori x_i ordinati in senso non decrescente e date le relative frequenze f_i, si determina *l'indice di concentrazione* nel seguente modo.

1. Si calcolano le intensità moltiplicando gli x_i per le f_i, cioè $x_i \cdot f_i$. Se il fenomeno ha modalità qualitative a cui corrispondono già delle intensità, si costruiscono le frequenze contando il numero di modalità a cui corrisponde la stessa intensità.
2. Si costruiscono le frequenze relative cumulate f_{rc} e le intensità relative cumulate i_{rc}.
3. Si rappresentano nel piano cartesiano i punti aventi come coordinate i valori corrispondenti di frequenze relative cumulate e intensità relative cumulate $(f_{rc}; i_{rc})$ e, congiungendo tali punti, si ottiene la spezzata di concentrazione.
4. Si traccia la retta di equidistribuzione e si calcola l'area di concentrazione sottraendo all'area di massima concentrazione, che ha valore 0,5, le aree del triangolo e dei trapezi sottostanti la spezzata di concentrazione.
5. Si calcola *l'indice di concentrazione R*:

$$R = \frac{\text{area di concentrazione}}{\text{area di massima concentrazione}}.$$

5. I RAPPORTI STATISTICI

I **rapporti statistici** sono i quozienti fra i valori di due dati statistici o di un dato statistico e di uno non statistico.
Esaminiamo i seguenti rapporti statistici: rapporti di derivazione, rapporti di densità, rapporti di composizione, rapporti di coesistenza, numeri indice.

Rapporti di derivazione: servono per confrontare due dati statistici di cui il primo deriva dal secondo.

● Per comodità di lettura e interpretazione, i quozienti vengono moltiplicati per 1000.

ESEMPIO

▶ Tabella 52

Dati rilevati in un Comune

Anno	Numero nati	Numero morti	Popolazione	Quoziente di natalità (per 1000 abitanti)	Quoziente di mortalità (per 1000 abitanti)
2005	980	714	76 414	12,82	9,34
2006	794	735	76 735	10,35	9,58
2007	776	705	78 018	9,95	9,04
2008	746	678	78 158	9,54	8,67
2009	731	653	78 707	9,29	8,30

$$\textbf{Quoziente di natalità} = \frac{\text{numero dei nati}}{\text{popolazione}};$$

$$\textbf{Quoziente di mortalità} = \frac{\text{numero dei morti}}{\text{popolazione}}.$$

Rapporti di densità: sono i rapporti tra dati statistici e dati relativi al campo di riferimento.
Un rapporto di densità è, per esempio, il rapporto tra la popolazione e la superficie del territorio in cui abita. Un altro esempio è il rapporto tra il fatturato di un'azienda (espresso in euro) e il numero di addetti.

Rapporti di composizione: sono rapporti tra dati omogenei e servono per valutare l'importanza delle diverse modalità nella composizione del valore complessivo del fenomeno. Spesso coincidono con le frequenze relative.

● L'esame della tabella 53 ci dice, per esempio, che la spesa per le manifestazioni sportive incide molto più di quella per il teatro e i concerti.

ESEMPIO

▶ Tabella 53

Spesa per il tempo libero

Tipo di spettacolo	Spesa	Rapporto di composizione in %
teatro e concerti	212 118	11,6
cinema	303 787	16,7
trattenimenti vari	914 230	50,2
manifestazioni sportive	390 652	21,5
Totale	1 820 787	

$$11{,}6\% \simeq \frac{212118}{1820787} \cdot 100, \quad 16{,}7\% \simeq \frac{303787}{1820787} \cdot 100, \ldots$$

● Per esempio, per confrontare i risultati di diverse scuole, si può considerare il rapporto fra il numero degli alunni respinti e quello dei promossi.

Rapporti di coesistenza: sono rapporti tra le frequenze di due fenomeni diversi riferiti alle stesse unità statistiche e danno un'indicazione dello squilibrio fra dati coesistenti in uno stesso luogo o in uno stesso periodo di tempo.

Numeri indice: sono il rapporto fra un dato statistico e il valore di un dato statistico preso come elemento di riferimento (base), moltiplicato per 100. Si distinguono in numeri indice a **base fissa** e numeri indice a **base mobile**. In quest'ultimo caso, il rapporto è tra il dato statistico e quello che lo precede.

- I numeri indice sono molto usati nella valutazione di serie storiche di dati.

Numeri indice a base fissa

Si divide ogni valore per quello della base fissata e si moltiplica il quoziente per 100.

ESEMPIO

Nella tabella 54 fissiamo come base il 2004 e, per indicare questa scelta, adottiamo la seguente notazione: 2004 = 100.

◀ Tabella 54

Produzione di uva

Anno	Produzione di uva (tonnellate)	Numero indice a base fissa
2004	32,2	100,00
2005	36,8	114,29
2006	29,4	91,30
2007	32,9	102,17
2008	32,3	100,31
2009	30,2	93,79
2010	35,8	111,18

anno 2005 $\frac{36,8}{32,2} \cdot 100 \simeq 114,29;$

anno 2006 $\frac{29,4}{32,2} \cdot 100 \simeq 91,30; \ldots$

Numeri indice a base mobile

Come base si sceglie il valore che nella tabella precede il valore in esame.

ESEMPIO

◀ Tabella 55

Produzione di uva

Anno	Produzione di uva (tonnellate)	Numero indice a base mobile
2004	32,2	n.d.
2005	36,8	114,29
2006	29,4	79,89
2007	32,9	111,90
2008	32,3	98,18
2009	30,2	93,50
2010	35,8	118,54

- Il numero indice del primo anno non è determinabile in quanto non conosciamo il valore dell'anno precedente.

anno 2005 $\frac{36,8}{32,2} \cdot 100 \simeq 114,29;$ anno 2006 $\frac{29,4}{36,8} \cdot 100 \simeq 79,89; \ldots$

- Notiamo che è possibile passare dai numeri indice a base fissa a quelli a base mobile dividendo un numero indice a base fissa per il suo precedente e moltiplicando il quoziente per 100.

ESPLORAZIONE

Statistica e mercato del lavoro

Per descrivere l'andamento della domanda e dell'offerta di lavoro è utile conoscere il *tasso di occupazione*, il *tasso di disoccupazione* e il *tasso di attività*, calcolati di solito in riferimento all'area geografica di provenienza e al sesso. Queste informazioni possono servire, per esempio, a orientare gli incentivi alle imprese o i supporti ai giovani in cerca di lavoro. Il termine «tasso» indica che i rapporti sono dati in percentuale (moltiplicati per 100). Il **tasso di occupazione** si definisce con il rapporto tra gli occupati e la popolazione in età lavorativa. Il **tasso di disoccupazione** è dato dal rapporto tra le persone in cerca di lavoro e la forza lavoro, dove con «forza lavoro» si intendono le persone occupate e quelle in cerca di lavoro dai 15 anni in su. Il **tasso di attività** è invece il rapporto tra la forza lavoro e la popolazione dai 15 anni in su. Inoltre, viene dato particolare rilievo al *tasso di disoccupazione giovanile*, un indicatore specifico per l'età compresa tra 15 e 25 anni, che esprime la difficoltà dei più giovani a trovare un impiego remunerativo: si calcola come il rapporto tra i giovani in cerca di occupazione e quelli appartenenti alla forza lavoro.

L'Italia di ieri e di oggi

Il confronto fra i censimenti può fornire una panoramica della tendenza evolutiva di un Paese. Per esempio, tra il 1861 e il 2001 la popolazione residente in Italia è più che raddoppiata, passando da poco più di 22 milioni a quasi 57 milioni di cittadini. La progressiva diminuzione della natalità, registrata dal secondo dopoguerra in poi, e l'allungamento della vita media hanno determinato un invecchiamento della popolazione: l'*indice di vecchiaia*, che è il rapporto percentuale tra la popolazione con più di 65 anni e la popolazione fino a 14 anni, è passato dal 38,9% nel 1861 al 140,6% nel 2001. Rispetto al passato, si è ridotto il numero medio di componenti dei nuclei familiari, mentre è aumentato il numero di famiglie composte da una sola persona.

▲ Una famiglia di agricoltori del Nord Italia nel primo dopoguerra.

Dopo la Seconda guerra mondiale l'Italia si è trasformata, da Paese prevalentemente agricolo, in Paese industrializzato. Nel 1961, l'industria rappresentava già il settore dominante, dando occupazione al 40,6% dei lavoratori. Nei quarant'anni successivi c'è stato il forte sviluppo del terziario, dove la quota di occupati è passata dal 30,3% nel 1961 al 60,9% nel 2001, con conseguente calo di occupazione nell'agricoltura, dove la percentuale dei lavoratori è passata dal 17,2% al 5,4%.

Attività

Piramide della popolazione

Nelle indagini statistiche demografiche la popolazione viene spesso rappresentata per praticità con un grafico, detto *piramide dell'età* o *piramide della popolazione*, in cui si confrontano le frequenze di uomini e donne al variare della fascia di età. La lunghezza dei rettangoli è proporzionale al numero di persone che appartengono a ciascun gruppo.
Dal grafico è possibile dedurre molte informazioni demografiche sulla struttura della popolazione.

- Prova a cercare informazioni al riguardo, individuando in particolare alcuni esempi di piramidi delle età e descrivendo il tipo di popolazione al variare del grafico.

@ **Cerca nel Web:**
piramide della popolazione, piramide dell'età, age-sex pyramid

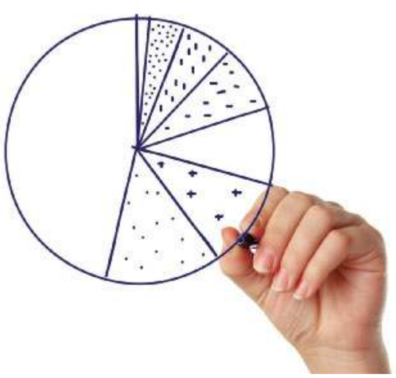
POSSIAMO FIDARCI?

Quanto sono attendibili i risultati dei sondaggi?

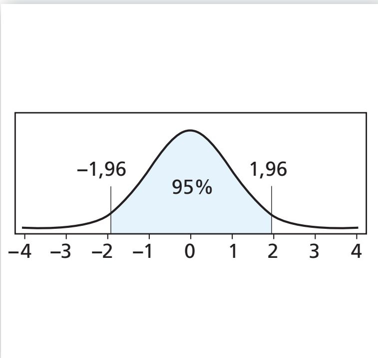
▶ Il quesito completo a pag. β1

In Italia vi sono sessanta milioni di abitanti. I sondaggi, al massimo, interpellano poche migliaia di individui. Eppure i risultati, per lo più, non si discostano molto dai valori reali e riescono a presumere gli orientamenti della popolazione con un accettabile grado di approssimazione. Com'è possibile?

Per capire il metodo della cosiddetta «inferenza statistica», su cui si basano i sondaggi, si può ricorrere a un modello molto semplice: il lancio della moneta. Dal punto di vista del calcolo delle probabilità, infatti, intervistare i cittadini equivale a contare il numero di esiti testa o croce. Si tratta solo di capire quante monete si devono lanciare (ovvero quante persone interpellare) perché la percentuale di esiti che osserviamo sia vicina, con un piccolo margine di errore, alla vera probabilità dell'evento stesso.
Per la legge dei grandi numeri, maggiore è il numero dei lanci, più alta è la probabilità che la percentuale degli esiti (per esempio, testa) si approssimi al 50%. Analogamente, maggiore è il numero di intervistati in un sondaggio, tanto più il risultato ottenuto sarà vicino alla realtà.



Per un grande numero di lanci, la distribuzione di probabilità del lancio delle monete può essere ricondotta alla gaussiana standard. Utilizzando la curva a campana, si può determinare un criterio per stabilire il margine di errore, valido anche per i sondaggi. Si tratta di determinare l'intervallo in cui l'area al di sotto della curva a campana equivale a una probabilità totale del 95% (ovvero la probabilità che i risultati siano esatti diciannove volte su venti).
Una delle proprietà della gaussiana è che il 95,45% dei valori tende a essere incluso nell'intervallo di estremi $M - 2\sigma$ e $M + 2\sigma$. Nel caso della curva normale standardizzata, la deviazione standard è pari a 1 e il valore medio a 0. Pertanto, si può dimostrare che lanciando N monete la stima che i risultati siano esatti al 95% è affetta da un margine di errore pari a $\frac{98}{\sqrt{N}}$.



In altre parole significa che, su 20 serie di lanci, per 19 volte la frazione che dà il numero di teste uscite differirà dalla vera probabilità di una percentuale non superiore al margine di errore calcolato.
Per fare qualche esempio, per $N = 10$, il margine di errore è pari al 31%; per $N = 1000$, il margine di errore che si ottiene è pari a circa il 3,1%.

La stessa formula viene utilizzata nei sondaggi: vale a dire che, se intervistiamo 1000 persone, nel 95% dei casi otterremo una percentuale di risposte che si discosta al massimo del 3,1% rispetto alla media della popolazione generale. Ecco quindi la formula per determinare il margine di errore di un sondaggio: 98% diviso la radice quadrata del numero delle persone intervistate.

I sondaggi, comunque, hanno i loro limiti anche quando il margine di errore è molto piccolo. Per questo a volte sbagliano, come è effettivamente successo prima del voto elettorale o durante gli exit poll. Nel primo caso, il risultato può essere sbagliato perché i sondaggi non sono in grado di rendere conto dei cambiamenti futuri e fino al giorno prima del voto qualcosa può cambiare; nel secondo, i risultati possono essere inficiati dalle false risposte dei cittadini. Altre volte, inoltre, il vantaggio di una parte politica sull'altra è così piccolo da sfidare qualunque previsione.

LABORATORIO DI MATEMATICA
LA STATISTICA

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Excel costruiamo una tabella contenente i numeri degli alunni delle quindici classi di cinque livelli (I, II, III, IV, V) e di tre sezioni (A, B, C) di una scuola e i totali e le medie dei vari livelli e delle varie sezioni.

La costruzione della tabella

- Apriamo un foglio di Excel e scriviamo le intestazioni della tabella (figura 1).
- Per simulare una situazione reale, inseriamo per ogni classe un numero a caso fra 16 e 30: poniamo il cursore nella cella B5, nella barra della formula digitiamo = CASUALE.TRA(16;30) e battiamo i tasti F9 e INVIO, in modo che il numero casuale apparso non cambi più.
- Operiamo similmente per le altre celle adibite a contenere la consistenza numerica delle classi.
- Per ricavare i totali e le medie digitiamo rispettivamente in E5 = SOMMA(B5:D5), in F5 = MEDIA(B5:D5) e copiamo la zona E5:F5 sino alla riga 9, in B10 = SOMMA(B5:B9), in B11 = MEDIA (B5:B9) e copiamo la zona B10:B11 sino alla colonna C (cioè alla zona D10:D11), in E10 = SOMMA(B5:D9) e in F11 = MEDIA(B5:D9).

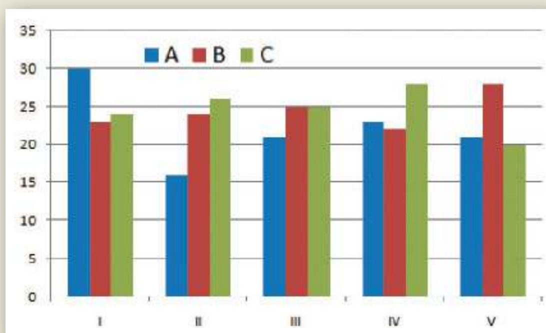
	A	B	C	D	E	F
1	La statistica descrittiva					
2						
3	Classe	Sezione				
4	Livello	A	B	C	I totali	Le medie
5	I	30	23	24	77	25,7
6	II	16	24	26	66	22,0
7	III	21	25	25	71	23,7
8	IV	23	22	28	73	24,3
9	V	21	28	20	69	23,0
10	I totali	111	122	123	356	
11	Le medie	22,2	24,4	24,6		23,7

▲ Figura 1

La realizzazione dell'istogramma

- Per ottenere l'istogramma di figura 2, evidenziamo la zona A4:D9 e facciamo clic, di seguito, sulla scheda *Inserisci*, sul pulsante *Istogramma* e, nella tendina che scende, sull'icona a sinistra del campo *Colonne 2D*.

▼ Figura 2



Nel sito: ► 1 esercitazione guidata ► 5 esercitazioni in più

Esercitazioni

Per ognuna delle seguenti indagini statistiche costruisci un foglio per raccogliere i dati e dividerli in classi di frequenza; ricavare una tabella contenente le classi di frequenza, le classi di frequenza cumulata, le classi di frequenza relativa percentuale, le classi di frequenza percentuale cumulata; ottenere il grafico indicato.

1 Le altezze degli alunni di una classe. L'istogramma delle classi di frequenza.

2 Le principali attività sportive praticate dagli alunni di una scuola. L'areogramma delle percentuali delle classi di frequenza.

3 Il numero dei libri prestati da una biblioteca nei primi cinque giorni di quattro settimane. Il grafico a radar del numero dei libri prestati dal lunedì al venerdì.

LA TEORIA IN SINTESI
LA STATISTICA

1. I DATI STATISTICI

- **Popolazione**: insieme di persone o oggetti sui quali si effettua un'indagine statistica.
- **Carattere**: caratteristica distintiva di ciascun elemento (**unità statistica**) di una popolazione statistica. È descritto mediante le **modalità** con cui esso si può manifestare:
  - **carattere quantitativo**: carattere le cui modalità sono espresse numericamente, può essere:
    – **continuo**: se può assumere gli infiniti valori di un intervallo reale;
    ESEMPIO: Il carattere $x \in \mathbb{R}$, dove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali.
    – **discreto**: se può assumere un numero finito di valori o al più una infinità numerabile;
    ESEMPIO: Il carattere $n \in A$, dove $A = \{1, 3, 7\}$.
  - **carattere qualitativo**: carattere le cui modalità sono espresse con parole.
    ESEMPIO: Il carattere «sesso» ha due modalità: «maschile» e «femminile».
- **Frequenza assoluta**: è il numero di volte in cui si presenta una modalità in una distribuzione di dati.
- **Frequenza relativa**: è il rapporto tra la frequenza assoluta e il numero totale delle unità statistiche.
- **Frequenza cumulata**: è la somma della frequenza assoluta corrispondente a una data modalità con tutte le frequenze assolute precedenti.
- **Serie statistica**: è la tabella che riporta le modalità di un carattere qualitativo e le relative frequenze.
- **Seriazione statistica**: è la tabella che riporta le modalità di un carattere quantitativo e le relative frequenze.

ESEMPIO:

Serie statistica

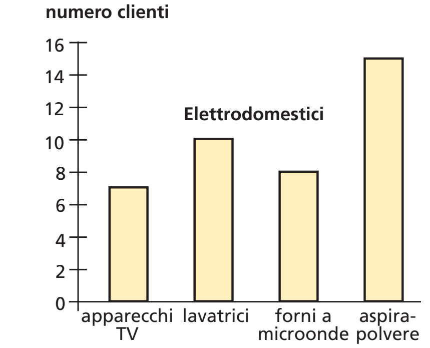
Elettrodomestici	Frequenza
apparecchi TV	7
lavatrici	10
forni a microonde	8
aspirapolvere	15
Totale	40

Seriazione statistica

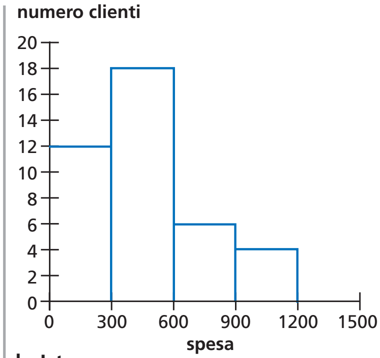
Spesa sostenuta dai clienti (euro)	Frequenza	Frequenza relativa percentuale	Frequenza cumulata	Frequenza relativa percentuale cumulata
0-300	12	30%	12	30%
300-600	18	45%	30	75%
600-900	6	15%	36	90%
900-1200	4	10%	40	100%
Totale	40	100%		

2. LA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI DATI

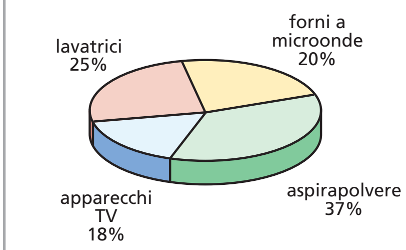
- Esistono vari tipi di grafici per rappresentare i dati statistici e le loro frequenze, fra i quali l'**ortogramma**, l'**istogramma**, l'**areogramma**, i **diagrammi cartesiani**, il **radar**.



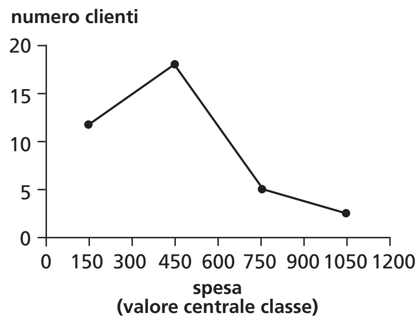
a. Ortogramma



b. Istogramma

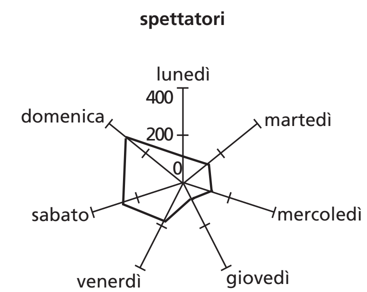


c. Areogramma



d. Diagramma cartesiano

Giorni settimana	Spettatori cinema Lux
lunedì	80
martedì	120
mercoledì	150
giovedì	130
venerdì	190
sabato	230
domenica	310



e. Radar

3. GLI INDICI DI POSIZIONE CENTRALE

- **Indici di posizione centrale**: sono la media, la mediana e la moda.

- • **Media aritmetica** di $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

  • **Media aritmetica ponderata** di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con pesi $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$P = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

  • **Media geometrica** di $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

  • **Media armonica** di $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$A = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

  • **Media quadratica** di $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

- Se i numeri sono disposti in una sequenza ordinata, la **mediana** è il valore centrale della sequenza se n è dispari, o la media aritmetica dei due valori centrali se n è pari.

- La **moda** è il valore cui corrisponde la frequenza massima.

4. GLI INDICI DI VARIABILITÀ

- Data una sequenza di numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con valore medio M, si definiscono:
  - **campo di variazione**: la differenza tra il valore massimo e quello minimo;
  - **scarto semplice medio** S:

$$S = \frac{|x_1 - M| + |x_2 - M| + \ldots + |x_n - M|}{n};$$

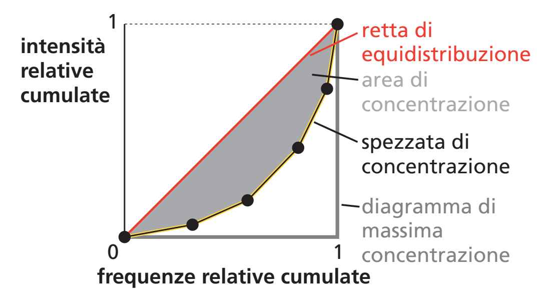
- **deviazione standard σ**: $\sigma = \sqrt{\dfrac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_n - M)^2}{n}}$;
- **coefficiente di variazione**: $C.V. = \dfrac{\sigma}{M}$.

■ La media di una caratteristica della popolazione μ è stimata per mezzo della media $\overline{x}$ di un suo campione di numerosità n. L'incertezza è valutata mediante l'**errore standard** $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ o $s_{\overline{X}} = \dfrac{s}{\sqrt{n-1}}$, a seconda che sia conosciuta la deviazione standard della popolazione σ o solo quella del campione s.
Si preferisce utilizzare l'**intervallo di confidenza**

$$\left]\overline{x} - 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[\text{ oppure } \left]\overline{x} - 1,96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}}; \overline{x} + 1,96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}}\right[$$

che, con probabilità del 95%, contiene il valore medio della popolazione. Se invece di 1,96 si utilizza 2,576, il valore della probabilità è del 99%.
Per stimare la percentuale di una caratteristica della popolazione, se f è la percentuale relativa al campione, l'errore standard che si utilizza è: $s_F = \sqrt{\dfrac{f \cdot (1-f)}{n}}$.

■ Per studiare la **concentrazione** di un fenomeno, descritto da una tabella frequenze-intensità, calcoliamo le frequenze e le intensità cumulate e poi le frequenze e le intensità relative cumulate. Rappresentiamo in un diagramma cartesiano i punti che hanno per ascisse le frequenze relative cumulate e per ordinate le intensità relative cumulate e congiungiamo tali punti, ottenendo la **spezzata di concentrazione**. L'**area di concentrazione** è l'area compresa fra la spezzata di concentrazione e la bisettrice del primo quadrante (corrispondente al caso di equidistribuzione). L'**indice di concentrazione** è il rapporto fra la misura dell'area di concentrazione e quella dell'area di massima concentrazione. Quest'ultima vale 0,5 e si ottiene quando tutte le intensità relative cumulate sono nulle tranne l'ultima, che è 1.



5. I RAPPORTI STATISTICI

■ **Rapporti statistici**: sono i quozienti fra i valori di due dati statistici o di un dato statistico e uno non statistico.

■ **Rapporti di derivazione**: servono per confrontare due dati statistici di cui il primo deriva dal secondo.

ESEMPIO: Quoziente di natalità $= \dfrac{\text{numero dei nati}}{\text{popolazione}}$.

■ **Rapporti di densità**: sono i rapporti tra dati statistici e dati relativi al campo di riferimento.

ESEMPIO: **1.** Il rapporto tra la popolazione e la superficie del territorio in cui abita.
2. Il rapporto tra il fatturato di un'azienda (espresso in euro) e il numero di addetti.

■ **Rapporti di composizione**: sono rapporti tra dati omogenei e servono per valutare l'importanza delle diverse modalità nella composizione del valore complessivo del fenomeno.

ESEMPIO: Considerati diversi tipi di libri letti in un anno: $\dfrac{\text{numero libri di avventura}}{\text{numero totale libri}}$.

■ **Rapporti di coesistenza**: sono rapporti tra le frequenze di due fenomeni diversi riferiti alla stessa unità statistica e indicano lo squilibrio fra dati coesistenti in uno stesso luogo o in uno stesso periodo di tempo.

ESEMPIO: $\dfrac{\text{numero nascite maschi}}{\text{numero nascite femmine}}$.

■ **Numero indice**: rapporto fra un dato statistico e il valore di un dato statistico preso come elemento di riferimento (base), moltiplicato per 100. Si distinguono numeri indice a **base fissa** e numeri indice a **base mobile**. In quest'ultimo caso, il rapporto è tra il dato statistico e quello che lo precede.

1. I DATI STATISTICI

▶ Teoria a pag. β2

Popolazione, carattere, modalità

1 VERO O FALSO?

a) La statistica si occupa di raccogliere e analizzare dati relativi a un fenomeno collettivo. V F

b) Il gruppo di elementi preso in considerazione viene detto campione. V F

c) Le modalità di un carattere sono i diversi valori, numerici o verbali, che esso assume. V F

d) Un carattere è detto quantitativo se le sue modalità esprimono delle quantità. V F

e) Un carattere è detto qualitativo se le sue modalità si definiscono con parole. V F

2 ESERCIZIO GUIDA

In una biblioteca viene effettuata un'indagine sull'età delle persone che prendono in prestito dei libri. Quali sono la popolazione, le unità statistiche e il carattere?

Assumiamo come popolazione di questa indagine le persone che frequentano la biblioteca; quindi l'unità statistica è il singolo utente della biblioteca.
Il carattere da rilevare è l'età degli utenti; tale carattere è di tipo quantitativo. Le modalità potrebbero essere: da 6 a 15 anni, da 16 a 25 anni, da 26 a 35 anni, da 36 a 45 anni, da 46 a 55 anni, da 56 a 65 anni, …

In ognuna delle seguenti indagini statistiche indica quali sono la popolazione, le unità statistiche e il carattere. Indica, inoltre, se il carattere è di tipo qualitativo o quantitativo e fai esempi di modalità possibili.

3 In una scuola viene svolta un'indagine sulla statura degli studenti iscritti.

4 Nei diversi ospedali di una città viene fatta un'indagine sul numero di bambini nati nello stesso anno.

5 Viene effettuata una rilevazione sugli iscritti dell'Università di Parma, nel corrente anno accademico, in regola con gli esami a seconda del tipo di facoltà.

6 Alla fine delle Olimpiadi di Pechino è stata fatta un'indagine sulle medaglie vinte da ogni Paese partecipante.

7 In Italia è stata effettuata un'indagine sull'età delle persone che si sono sposate negli ultimi cinque anni.

Le tabelle di frequenza

8 VERO O FALSO?

a) La frequenza assoluta di una modalità rappresenta il numero di unità che assumono quella modalità. V F

b) La frequenza relativa di una modalità rappresenta il rapporto tra quella modalità e la modalità precedente. V F

c) La frequenza cumulata di una modalità è la somma della frequenza assoluta corrispondente con tutte quelle che la precedono. V F

d) La somma di tutte le frequenze assolute vale 1. V F

e) Una seriazione statistica è una tabella che riporta nella prima colonna le modalità di un carattere quantitativo. V F

9 **TEST** Si è rilevato che i 28 alunni di una classe preferiscono i seguenti generi musicali.

Genere	Numero di elementi
rock	18
leggera	7
classica	3

Le frequenze relative percentuali sono:

A 18%, 7%, 3%.
B 64%, 25%, 11%.
C 64%, 89%, 100%.
D 11%, 25%, 64%.
E 18%, 25%, 28%.

10 **ESERCIZIO GUIDA**

I dati che seguono si riferiscono alla cilindrata delle auto vendute in un certo periodo da un concessionario. Compiliamo la tabella di frequenza e calcoliamo le frequenze relative, esprimendole anche in percentuale; calcoliamo infine le frequenze cumulate e le frequenze cumulate relative percentuali.

1100, 900, 900, 1000, 1200, 1600, 1600, 1800, 1950, 2000, 900, 1000, 1100, 1600, 1200, 1200, 1400, 1600, 1800, 1800, 900, 900, 1100, 1100, 1100, 1000, 900, 1000, 2000, 900, 1400, 2000.

Raggruppiamo i dati in tre classi (estremi inclusi):

900-1200, 1300-1600, 1700-2000,

poi contiamo il numero di auto vendute per ogni classe e compiliamo la seguente tabella.

Classe	Numero di auto
900-1200	19
1300-1600	6
1700-2000	7
Totale	32

Ovviamente avremmo potuto anche scegliere classi diverse.
Per calcolare le frequenze relative, dividiamo il numero di auto di ogni classe per il numero totale.

Otteniamo i seguenti valori (approssimati):

cilindrata 900-1200: $\frac{19}{32} \simeq 0,59$;

cilindrata 1300-1600: $\frac{6}{32} \simeq 0,19$;

cilindrata 1700-2000: $\frac{7}{32} \simeq 0,22$.

Le frequenze percentuali si ottengono moltiplicando per 100 le frequenze relative appena calcolate:

cilindrata 900-1200: $0{,}59 \cdot 100 = 59\%$;
cilindrata 1300-1600: $0{,}19 \cdot 100 = 19\%$;
cilindrata 1700-2000: $0{,}22 \cdot 100 = 22\%$.

La prima frequenza cumulata è uguale alla prima frequenza: 19.
La seconda è la somma della prima frequenza cumulata con la seconda frequenza: $19 + 6 = 25$.
La terza è la somma della seconda frequenza cumulata con la terza frequenza: $25 + 7 = 32$.
Analogamente operiamo per ottenere le frequenze relative percentuali cumulate dalle frequenze relative percentuali.

Classe	Frequenza	Frequenza cumulata	Frequenza relativa percentuale	Frequenza relativa percentuale cumulata
900-1200	19	19	59%	59%
1300-1600	6	25	19%	78%
1700-2000	7	32	22%	100%
Totale	32		100%	

Per ognuno dei seguenti esercizi raggruppa i dati, compila la tabella di frequenza, poi calcola le frequenze relative e percentuali, quindi le frequenze cumulate e infine le frequenze cumulate relative percentuali.

11 Attività sportive preferite in un gruppo di 20 persone: calcio, pallacanestro, tennis, calcio, ciclismo, tennis, aerobica, calcio, pallavolo, pallacanestro, tennis, ciclismo, aerobica, aerobica, pallavolo, tennis, aerobica, pallavolo, tennis, tennis.

12 Età dei visitatori di un museo, espressa in anni: 38, 40, 41, 40, 43, 40, 40, 40, 42, 43, 45, 43, 48, 46, 45, 48, 50, 51, 40, 42, 40, 40, 42, 45, 43, 43, 46, 48, 48, 41, 50, 48, 46, 46, 43, 44, 44, 46.

13 Peso corporeo in kg di 40 bambini iscritti alla prima classe delle scuole primarie in un comune nell'anno scolastico 2009/10: 31,5; 34,0; 30,5; 29,4; 28,2; 28,4; 35,7; 28,5; 31,3; 27,9; 30,0; 35,2; 30,2; 28,4; 33,3; 37,1; 29,8; 34,0; 31,4; 26,5; 31,2; 29,4; 33,3; 32,0; 34,1; 28,5; 30,0; 31,1; 32,5; 35,2; 35,7; 32,0; 34,7; 37,1; 30,5; 26,5; 30,0; 31,5; 30,8; 32,6.

14 Peso in mg di 20 compresse di un farmaco: 19,9; 20,2; 20,1; 19,9; 19,8; 19,9; 20,3; 20,1; 20,0; 20,0; 19,8; 19,9; 20,1; 19,9; 20,2; 20,4; 19,9; 19,8; 19,9; 19,9.

15 Numero dei libri prestati giornalmente da una biblioteca nel corso di un mese: 4, 10, 12, 25, 20, 22, 25, 13, 12, 12, 10, 20, 25, 25, 10, 10, 13, 10, 10, 22, 22, 20, 13.

16 Generi di film preferiti dagli studenti di una classe: horror, western, fantascienza, musicale, commedia, horror, fantascienza, western, horror, musicale, horror, western, fantascienza, musicale, horror, musicale, commedia, commedia.

17 Bevande calde preferite da un gruppo di turisti: caffè, tè, latte, latte, tè, caffè, caffè, tè, latte, caffè, latte, tè, caffè, latte, tè, tè, tè.

COMPLETA

18 In una fabbrica sono stati prodotti 800 scooter suddivisi in 4 modelli.

Tipo di scooter	Quantità	Percentuale
Alfabeta	…	25%
XY	120	…
Tuono	320	…
S50	160	…

19 Tre amici hanno totalizzato 12 000 punti in un videogioco.

Nome	Punti	Percentuale
Luca	3360	…
Andrea	…	45%
Giorgio	3240	…

20 Quattro giocatori di pallacanestro hanno realizzato complessivamente 50 punti in una partita.

Giocatore	Punti	Percentuale
n. 1	…	40%
n. 2	5	…
n. 3	…	30%
n. 4	10	…

21 I 20 studenti di una classe hanno svolto un tema di italiano, scelto fra tre titoli.

Tipo	Numero	Percentuale
Letteratura	5	…
Storia	…	…
Attualità	…	65%

22 Distribuzione del numero dei dipendenti in 20 imprese artigiane.

Numero dipendenti	Frequenza	Frequenza cumulata	Frequenza relativa percentuale	Frequenza relativa percentuale cumulata
1	…	…	…	40%
2	…	13	…	…
3	…	…	20%	…
4	…	…	…	…
Totale	20	…	…	…

Per ognuno dei seguenti esercizi raggruppa i dati in classi e compila una tabella a doppia entrata.

23 Accompagnatori turistici di un'agenzia che conoscono ciascuno due lingue straniere. Si hanno le seguenti coppie ordinate dove la prima lingua è quella del Paese di origine:
(francese; inglese), (francese; spagnolo), (francese; tedesco), (tedesco; inglese), (tedesco; francese), (francese; inglese), (inglese; tedesco), (spagnolo; inglese), (inglese; francese), (francese; tedesco).

24 Età di 15 coppie che si sono sposate nel mese di aprile in un Comune del Veneto. Si hanno le seguenti coppie ordinate dove il primo dato è l'età della sposa e il secondo l'età dello sposo:
(23; 26), (32; 33), (18; 26), (34; 37), (24; 23), (28; 34), (22; 24), (27; 27),
(27; 32), (32; 30), (45; 36), (29; 39), (27; 32), (24; 25), (27; 25).

25 Raggruppa i seguenti dati in classi, compila una tabella a doppia entrata e determina le distribuzioni marginali e condizionate. Verifica che le due modalità sono dipendenti.
Considera un campione di 30 pezzi meccanici prodotti da una macchina che possono essere difettosi nel peso o nella lunghezza. Si hanno le seguenti coppie ordinate di dati, dove il primo valore indica il peso in grammi e il secondo la lunghezza in cm:
(123; 56), (122; 55), (122; 55), (123; 55), (120; 56), (123; 57), (122; 55), (122; 56), (122; 54), (124; 57), (125; 55), (122; 54), (123; 58), (123; 54), (125; 55), (121; 52), (122; 55), (123; 56), (125; 56), (126; 57), (122; 56), (123; 54), (124; 55), (122; 55), (123; 56), (123; 57), (123; 56), (122; 57), (123; 57), (123; 55).

2. LA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI DATI

▶ Teoria a pag. β10

26 **ASSOCIA** a ciascuna tipologia di indagine la rappresentazione grafica che ti sembra più appropriata.

1) Vendita (in unità) di automobili in Italia negli ultimi cinque anni.
2) Pesi alla nascita di un campione di neonati raggruppati in classi.
3) Produzione di uova in un'azienda avicola nei sette giorni di una settimana.
4) Percentuali di medaglie vinte durante le Olimpiadi di Pechino 2008 dai Paesi partecipanti.
5) Produzione di granoturco (in quintali) nelle tre grandi aree italiane (Nord, Centro, Sud).

a) Areogramma.
b) Istogramma.
c) Cartogramma.
d) Ortogramma.
e) Radar.

27 **ESERCIZIO GUIDA**

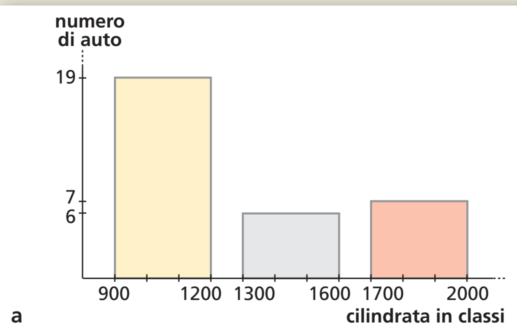
a) Riprendiamo i dati ottenuti nell'esercizio 10, sulle auto vendute divise per classi di cilindrata, e rappresentiamo graficamente i dati.

Classe	Numero di auto	Percentuale
900-1200	19	59%
1300-1600	6	19%
1700-2000	7	22%
Totale	32	100%

b) La tabella sotto riporta la temperatura in °C registrata da un termografo ogni quattro ore. Rappresentiamo graficamente i dati.

Ore	Temperatura
4	8
8	12
12	26
16	28
20	18
24	12

a) Rappresentiamo il numero di auto (seconda colonna) mediante un istogramma, composto da rettangoli che hanno le basi tutte uguali e le altezze proporzionali al numero di auto vendute (figura *a*).

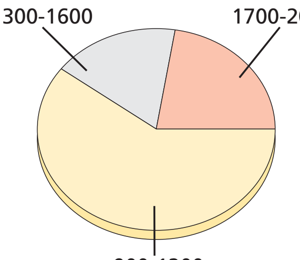


a

Rappresentiamo le percentuali con un areogramma, in cui gli angoli al centro sono proporzionali alle frequenze percentuali (figura *b*). Per esempio, per determinare l'ampiezza x dell'angolo al centro che corrisponde al 22% utilizziamo la proporzione:

$$x : 360° = 22 : 100;$$

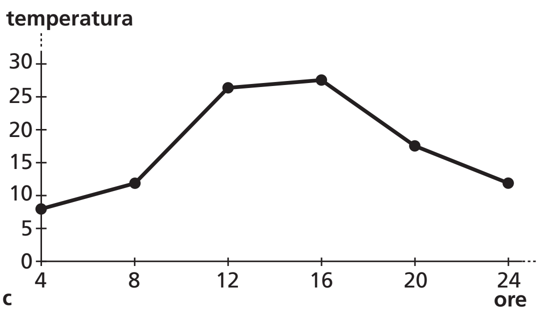
$$x = \frac{360° \cdot 22}{100} = 79,2°.$$



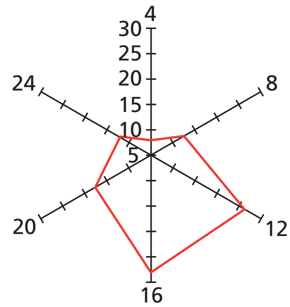
b

b) Usiamo un diagramma cartesiano. Riportiamo sull'asse delle ascisse le ore della giornata e sull'asse delle ordinate le temperature (figura *c*).

Possiamo effettuare anche la rappresentazione utilizzando il radar (figura *d*).



c



d

In ognuno dei seguenti esercizi, dopo aver compilato la tabella di frequenza e calcolato le percentuali, rappresenta graficamente i dati.

28 Età dei genitori di un gruppo di alunni: 38, 40, 41, 40, 43, 40, 40, 40, 42, 43, 45, 43, 48, 46, 45, 48, 50, 51, 40, 42, 40, 40, 42, 45, 43, 43, 46, 48, 48, 41, 50, 48, 46, 46, 43, 44, 44, 46.

29 I generi di film preferiti dell'esercizio 16.

30 Età di inizio dell'attività di un gruppo di ginnaste di livello agonistico: 5, 6, 8, 5, 7, 11, 8, 9, 12, 6, 5, 11, 7, 5, 6, 7, 5, 6, 8, 5, 6, 7, 6, 8, 8, 6, 9, 6, 7, 9, 6, 8.

31 Le vocali presenti nel nome dei sette colori fondamentali o colori dell'iride: rosso, arancio, giallo, verde, azzurro, indaco, violetto.

Fai le rappresentazioni grafiche che ritieni più opportune per i dati contenuti in ciascuna delle seguenti tabelle.

32 Percentuali dei risultati nelle elezioni del sindaco in un Comune nel primo turno di votazione e nel ballottaggio finale.

Candidati	% voti primo turno	% voti ballottaggio finale
A	43	48
B	37	52
C	14	-
D	6	-

33 Quotazione del dollaro in euro nel corso di una settimana.

Giorno	Quotazione dollaro in euro
lunedì	1,328
martedì	1,315
mercoledì	1,304
giovedì	1,313
venerdì	1,318

34 Attività sportive praticate da 400 ragazzi e 400 ragazze di età compresa fra i 14 e i 18 anni (alcuni praticano più di uno sport).

Sport	Maschi	Femmine
atletica	42	130
calcio	180	28
sci/snowboard	88	78
tennis	54	46
altro	35	75
nessuno sport	28	85

35 Tasso di incremento del prodotto interno lordo (PIL) in Italia dal 2000 al 2009.

Anni	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Tasso di incremento	3,6%	1,8%	0,3%	0,0%	1,1%	0,0%	1,9%	1,9%	−1,0%	−5,0%

36 Numero degli incidenti stradali, secondo i mesi, avvenuti su una strada ad alto traffico.

Mese	gen.	feb.	mar.	apr.	mag.	giu.	lug.	ago.	sett.	ott.	nov.	dic.
Numero	25	21	18	20	15	12	16	10	14	18	20	23

COMPLETA

37 Età di un campione di 300 elementi estratto dalla popolazione degli abitanti di una città (distribuzione da completare calcolando le relative percentuali).

Età	Persone	Percentuale
0 ⊣ 18	54	
18 ⊣ 30	84	
30 ⊣ 50	90	
50 ⊣ 70	48	
70 ⊣ 100	24	

38 Temperatura media dell'acqua di mare rilevata nel mese di luglio 2009 in una località balneare. Dopo aver completato la tabella effettua una rappresentazione grafica per le frequenze assolute e una rappresentazione con le frequenze relative e quelle cumulate.

Temperatura	Numero giornate	Frequenza relativa	Frequenza relativa cumulata
26	2		
27	4		
28	9		
29	12		
30	4		

39 I voti conseguiti in una classe nell'ultimo compito di matematica sono:

6, 6, 7, 5, 5, 4, 4, 3, 6, 8, 8, 8, 9, 4, 8, 4, 5, 6, 6, 7.

Compila la tabella di frequenza dei voti e, dopo aver calcolato le frequenze relative percentuali, rappresenta graficamente i dati.

40 Data la serie storica riportata nella tabella a fianco, determina le frequenze percentuali e quelle cumulate percentuali. Effettua la rappresentazione grafica più opportuna.

[10%; 16%; 26%; ...]

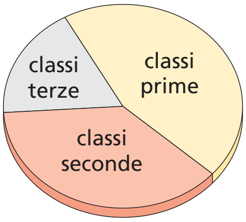
Giorno	Numero clienti
lunedì	25
martedì	40
mercoledì	65
giovedì	50
venerdì	30
sabato	40

41 Il diagramma rappresenta gli studenti di una scuola secondaria di primo grado. Gli angoli relativi alle classi prime, seconde e terze sono rispettivamente di 168°, 132°, 60°.

a) Calcola la percentuale di allievi nelle classi prime, nelle seconde e nelle terze.

b) Sapendo che gli studenti sono 300, calcola il numero di allievi per ogni classe.

c) Raccogli tutti i dati disponibili in una tabella.



3. GLI INDICI DI POSIZIONE CENTRALE

▶ Teoria a pag. β15

La media aritmetica

42 Determina la media aritmetica delle seguenti sequenze di numeri.

a) 9; 21; 12; 33; 6.

b) 7; 16; 21; 7; 21; 16.

c) 3,6; 4,2; 6,7; 5,3.

d) −6; 0; 12; 8; −4; −10.

e) 2,3; −1; −6,4; 5,4; 3,2; −5.

f) $4 \cdot 10^{-3}$; $2 \cdot 10^{-1}$; $5 \cdot 10^{-2}$.

[a) 16,2; b) $14,\bar{6}$; c) 4,95; d) 0; e) −0,25; f) $8,4\overline{6} \cdot 10^{-2}$]

43 Sono dati i numeri: 2; 4; 6; 8; 10; 12.

a) Calcola la media aritmetica.

b) Calcola la media dei primi due, dei due di mezzo e degli ultimi due.

c) Calcola la media dei tre valori medi ottenuti. Il risultato che ottieni è uguale alla media aritmetica dei sei numeri?

[a) 7; b) 3; 7; 11; c) 7]

44 In cinque verifiche sulla produzione di un testo mediante un programma di videoscrittura un ragazzo ha commesso i seguenti numeri di errori: 10, 8, 7, 6, 5. Calcola il numero medio di errori in ogni verifica. [7,2]

45 Si è fatta un'indagine tra sei amiche ed è risultato che il loro consumo mensile di verdura in kg è il seguente: 5,2, 6,0, 6,5, 7,8, 8,1, 9,3.
Calcola il consumo medio di verdura del gruppo delle ragazze. [7,15 kg]

46 The table below shows the frequency of 0, 1, 2, or 3 goals scored in a number of football matches.

Number of goals scored	0	1	2	3
Number of matches	1	x	1	5

If the mean number of goals scored in a match is 2, find the value of x.

(IR *Leaving Certificate Examination,* Ordinary Level, 1995)

[$x = 3$]

47 Sono dati i seguenti numeri: 5; 7; 11; 12; 15.

a) Calcola la media aritmetica, indicandola con M.
b) Se ogni numero viene moltiplicato per 1,5, come cambia il valore di M?
c) Cosa succede al valore di M se ogni numero è moltiplicato per 2 e aumentato di 3?
d) Cosa succede al valore di M se ogni numero è aumentato di 3 e il valore ottenuto moltiplicato per 2?
e) Dimostra che se $M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, la media dei valori $(k \cdot x_1 + h)$ e $(k \cdot x_2 + h)$, dove $k, h \in \mathbb{R}$, è $(k \cdot M + h)$.

[a) $M = 10$; b) $M = 15$; c) $M = 23$; d) $M = 26$]

La media ponderata

48 **ESERCIZIO GUIDA**

Un grossista di frutta acquista quattro quantitativi di mele Golden presso aziende agricole diverse che hanno praticato prezzi differenti. La seguente tabella espone i prezzi e le relative quantità e si vuole determinare il prezzo medio al kg.

	Azienda A	Azienda B	Azienda C	Azienda D
Prezzo (€)	0,60	0,55	0,68	0,57
Quantità (kg)	200	300	220	280

Dobbiamo calcolare una media aritmetica ponderata dei prezzi dove i pesi sono le quantità.

$$M = \frac{0,60 \cdot 200 + 0,55 \cdot 300 + 0,68 \cdot 220 + 0,57 \cdot 280}{200 + 300 + 220 + 280} \simeq 0,59.$$

49 **TEST** Un esame consiste in una prova di laboratorio, una prova orale e una prova scritta. Le tre prove hanno rispettivamente peso 2, 3, 5. Un candidato riceve 8 nella prova di laboratorio, 6 nella prova orale e 7 nella prova scritta. Quanto vale la media aritmetica ponderata dei punteggi?

A 6,9. B 7,2. C 6,7. D 6,5. E 7,4.

50 **TEST** È data la seguente tabella, relativa ai punti totalizzati giocando al tiro con l'arco.

Punti	Numero tiri
10	6
20	3
30	1
40	2

Il punteggio medio per ogni tiro è:

A 9,6. C 3,0. E 19,2.
B 25,0. D 41,5.

51 La seguente tabella riporta il numero di DVD posseduti dai ragazzi di una classe.

Numero DVD	10	15	20	25
Numero ragazzi	8	7	6	3

Calcola il numero medio di DVD posseduti da ciascun ragazzo. [15,8]

52 Nella seguente tabella viene indicato il numero di Gran Premi di Formula 1 vinti, negli ultimi tre anni, da vari piloti.

Numero GP vinti	1	2	3	4	5	6	7
Numero piloti	7	4	1	2	3	2	1

Calcola il numero medio di GP vinti da ciascun pilota. [3]

53 The table shows a student's marks and the weights given to these marks. Calculate the weighted mean mark.

Subject	Physics	Chemistry	Mathematics	Irish
Mark	74	65	82	58
Weight	3	4	5	2

(IR *Leaving Certificate Examination,* Ordinary Level, 1994)

[$M = 72$]

54 Sono dati i seguenti numeri con i rispettivi pesi riportati a fianco.

Numeri	Pesi
7; 14; 21; 28.	4; 3; 2; 1.
7; 14; 21; 28.	8; 6; 4; 2.
−4; −6; −10; 4; 6; 10.	1; 2; 3; 3; 2; 1.
−4; −6; −10; 4; 6; 10.	3; 2; 1; 1; 2; 3.

a) Calcola le medie ponderate.
b) Confronta le medie delle prime due sequenze e spiega il motivo del risultato.
c) Senza effettuare il calcolo, è possibile individuare il segno della media della terza e della quarta sequenza di numeri?

[a) 14; 14; − 1; 1]

55 In una scuola con 360 alunni la rilevazione delle età ha dato la seguente composizione.

Età	11	12	13	14
Numero alunni	30%	35%	25%	10%

a) Determina la frequenza assoluta per ogni età.
b) Calcola la media aritmetica ponderata utilizzando le frequenze assolute e quelle relative.

[a) 108; 126; 90; 36; b) 12,15]

56 Un candidato a un concorso deve superare quattro prove. Le prove hanno rispettivamente peso 1, 2, 3, 4 e occorre conseguire almeno 60 come punteggio medio. Sapendo che il punteggio medio delle prime tre prove è 56, quale deve essere il punteggio della quarta prova per ottenere il punteggio medio richiesto?

[66]

57 Data la sequenza di numeri: 3, 6, 12, 14, con i rispettivi pesi 2, 3, 1, 6:
a) calcola la media ponderata;
b) calcola la media ponderata raddoppiando i numeri;
c) calcola la media ponderata raddoppiando i pesi;
d) calcola la media ponderata raddoppiando i numeri e i pesi;
e) verifica le proprietà dei punti precedenti considerando quattro numeri generici x, y, t, z con i rispettivi pesi p_1, p_2, p_3 e p_4.

[a) 10; b) 20; c) 10; d) 20]

La media geometrica

58 **ESERCIZIO GUIDA**

Un capitale è stato investito con i seguenti rendimenti: 7% il primo anno; 5% sia per il secondo sia per il terzo anno; 9% il quarto anno; 8% sia per il quinto sia per il sesto e il settimo anno. Calcoliamo il rendimento percentuale medio.

Dobbiamo calcolare la media geometrica utilizzando il fattore (1 + tasso) che permette di passare dal valore di un anno a quello dell'anno successivo. Per esempio, poiché il tasso per il primo anno è 7%, ossia 0,07, il primo fattore nella media è $1 + 0{,}07 = 1{,}07$:

$$G = \sqrt[7]{(1{,}07)(1{,}05)(1{,}05)(1{,}09)(1{,}08)(1{,}08)(1{,}08)} = \sqrt[7]{(1{,}07)(1{,}05)^2(1{,}09)(1{,}08)^3} \simeq 1{,}0713.$$

Quindi il rendimento medio percentuale è stato del 7,13%.

59 **TEST** Si sono registrati gli aumenti di costo di un bene di prima necessità in quattro anni successivi e si è rilevato che nel primo anno il dato è del 3,5%, nel secondo anno del 4,0%, nel terzo anno del 3,8% e nel quarto anno del 4,2%. L'aumento medio percentuale nei quattro anni è:

A 3,2%. B 7,8%. C 4,0%. D 3,8%. E 4,5%.

60 **COMPLETA** Nella tabella a fianco sono riportati i dati relativi alle vendite di automobili di una concessionaria in diversi anni. Compila i dati mancanti per il calcolo dell'incremento medio delle vendite.

$G = \sqrt[5]{1{,}0682 \cdot 1{,}0638 \cdot \ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots$

Anno	Numero automobili	$x_i - x_{i-1}$	$\frac{x_i - x_{i-1}}{x_i}$
2005	220		
2006	235	$235 - 220 = 15$	$\frac{15}{220} = 0{,}0682$
2007	250	15	0,0638
2008	255	....	....
2009	250	....	....
2010	240	....	....

61 Un capitale è stato investito per 6 anni ai seguenti tassi: 4% per il primo anno, 3% per ognuno dei due anni successivi e 5% per ciascuno degli ultimi tre anni. Calcola il tasso medio di investimento. [4,16%]

62 Un bene economico ha registrato in quattro anni successivi i seguenti aumenti di prezzo.

Numero ordine anno	Variazione percentuale
I	4%
II	3%
III	4%
IV	2%

Determina l'aumento medio percentuale. [3,25%]

63 Data la tabella della rilevazione della spesa mensile (in euro) per famiglia negli anni riportati, calcola l'incremento medio di spesa.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Spesa	2178	2194	2313	2381	2398	2461	2480

[2,2%]

64 Nella tabella seguente è riportato il numero di abitanti di un Comune dal 2003 al 2010. Determina il tasso medio di variazione della popolazione.

Anno	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Abitanti	6340	6527	6990	6960	6212	6180	6240	6387

[0,1056%]

La media armonica

65 **ESERCIZIO GUIDA**

Un ciclista percorre prima 30 km alla velocità di 25 km/h e successivamente altri 45 km alla velocità di 20 km/h. Calcoliamo la velocità media v_m.

Suddividiamo il percorso di 75 km in 5 tratti uguali ciascuno di 15 km e assegniamo a ogni tratto la sua velocità. Abbiamo i seguenti cinque valori: 25, 25, 20, 20, 20. Calcoliamo la media armonica:

$$A = \frac{5}{\frac{1}{25}+\frac{1}{25}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}} = \frac{5}{\frac{1}{25}\cdot 2+\frac{1}{20}\cdot 3} \simeq 21{,}739 \quad \rightarrow \quad v_m = 21{,}739 \text{ km/h}.$$

Se moltiplichiamo numeratore e denominatore della formula per 15 otteniamo:

$$A = \frac{75}{\frac{1}{25}\cdot 30+\frac{1}{20}\cdot 45} \simeq 21{,}739 \quad \rightarrow \quad v_m = 21{,}739 \text{ km/h},$$

che rappresenta la media armonica ponderata dei valori 25 km/h e 20 km/h, ciascuno considerato con il suo «peso».

Osserviamo che il numeratore è la lunghezza totale del percorso e il denominatore è la somma dei tempi impiegati per percorrere i due tratti di strada.

66 **TEST** Un podista percorre 15 km alla velocità di 15 km/h e i successi 20 km alla velocità di 18 km/h. La sua velocità media è stata di:

- **A** 16,58 km/h.
- **B** 17,00 km/h.
- **C** 14,27 km/h.
- **D** 16,71 km/h.
- **E** 19,34 km/h.

67 Si è rilevato che, nel mese di settembre, il prezzo in euro di un kilogrammo di pesce spada in cinque mercati ittici è stato:

26,5,   25,9,   27,0,   27,8,   25,5.

Supponendo di comprare in ogni mercato pesce spada per € 25, calcola il prezzo medio di un kilogrammo di pesce spada acquistato. [€ 26,52]

68 Un automobilista percorre metà del suo tragitto alla velocità di 80 km/h e l'altra metà alla velocità di 110 km/h. Calcola la velocità media. [92,63 km/h]

69 Un automobilista percorre i primi 50 km alla velocità di 80 km/h e i successivi 25 alla velocità di 110 km/h. Calcola la velocità media. [88 km/h]

70 Un automobilista percorre i due terzi del percorso alla velocità di 80 km/h e l'ultimo terzo alla velocità di 110 km/h. Calcola la velocità media. [88 km/h]

La media quadratica

71 **ESERCIZIO GUIDA**

Un orefice ha a disposizione 7 medaglie d'oro, di uguale spessore, da fondere per ricavare altre 7 medaglie, uguali tra loro, dello stesso spessore di quelle fuse. Sappiamo che tre delle medaglie da fondere hanno diametro uguale a 12 mm, due medaglie hanno diametro uguale a 14 mm, una ha diametro di 15 mm e l'ultima di 17 mm. Calcoliamo quale deve essere il diametro delle nuove medaglie.

Possiamo risolvere il problema calcolando prima la superficie totale delle 7 medaglie da fondere. Applichiamo la formula dell'area del cerchio $A = r^2\pi$:

$$S = (6^2\pi) \cdot 3 + (7^2\pi) \cdot 2 + (7{,}5^2\pi) + (8{,}5^2\pi) = 334{,}5\pi \text{ mm}^2.$$

La superficie di ogni medaglia da realizzare è:

$$S = \frac{334{,}5\pi}{7} \simeq 47{,}79\pi \text{ mm}^2.$$

Applicando la formula inversa, determiniamo il raggio e quindi il diametro:

$$r = \sqrt{\frac{47{,}79\pi}{\pi}} \simeq 6{,}91 \text{ mm}, \qquad \text{quindi } 2r \simeq 13{,}82 \text{ mm}.$$

Possiamo ottenere direttamente il valore del diametro calcolando la media quadratica dei diametri delle medaglie:

$$Q = \sqrt{\frac{12^2 + 12^2 + 12^2 + 14^2 + 14^2 + 15^2 + 17^2}{7}} =$$

$$= \sqrt{\frac{12^2 \cdot 3 + 14^2 \cdot 2 + 15^2 + 17^2}{7}} = \quad \text{(media quadratica ponderata)}$$

$$= \sqrt{\frac{1338}{7}} \simeq 13{,}82 \text{ mm}.$$

72 **TEST** Si è versata una certa somma in banca nel mese di gennaio e altre somme nei cinque mesi successivi.
Gli scostamenti di queste ultime rispetto alla prima sono stati: $+4\%, +3\%, -1\%, +2\%, -2\%$.
Lo scostamento medio è stato:

A 3%.
B 2,6%.
C 1%.
D 5%.
E 3,4%.

73 Si devono sostituire 5 quadrati aventi rispettivamente lati di 8, 12, 15, 16 e 20 cm con 5 quadrati aventi lati uguali in modo che la superficie totale rimanga la stessa. Calcola la misura del lato dei nuovi quadrati. [14,758 cm]

74 Si sono rilevate le seguenti differenze di peso in grammi rispetto al peso standard garantito da una macchina confezionatrice: $+2$, -18, -10, $+4$, $+5$, -9. Calcola la media quadratica degli scarti. [9,57 g]

La mediana

75 Determina la mediana dei seguenti gruppi di numeri:
a) 1; 5; 9; 2; 4; 8; 5;
b) 14; 32; 12; 17; 35; 34; 30; 11;
c) -5; -6; 7; 3; -1; 0; -4;
d) 9; -9; 8; -5; 6; -6.
[a) 5; b) 23,5; c) -1; d) 0,5]

76 Scrivi cinque numeri tali che la loro media sia 7 e la loro mediana 8.

La moda

Determina la moda delle seguenti sequenze di numeri.

77 a) 5; 8; 7; 5; 6; 5; 9; 7; 5; 8; 7.
b) 14; 22; 22; 17; 17; 14; 15; 22; 20; 22; 20.
[a) 5; b) 22]

78 a) -3; 0; 0; -1; 7; -1; -1; -3; 7; -1; -1.
b) 25; 27; 25; 29; 31; 23; 25; 26; 25; 33; 25.
[a) -1; b) 25]

Media, mediana, moda

79 **TEST** Dati i valori

6, 5, 5, 8, 12, 15,

quale delle seguenti affermazioni è *errata*?

A La media aritmetica è 8,5.
B La moda è 5.
C La mediana è 6,5.
D La media armonica è circa 7,1.
E La media quadratica è circa 9,3.

80 **TEST** In quale sequenza di numeri la media aritmetica coincide con la moda e la mediana?

A 9, 2, 5, 7, 4, 9.
B 10, 12, 2, 9, 8, 8.
C 9, 7, 7, 7, 7, 7.
D 7, 9, 5, 8, 6, 7.
E 1, 2, 3, 3, 4, 6.

81 **COMPLETA** la seguente tabella.

Dati	Media	Mediana	Moda
3, 7, 8, 10, 3, 6, 3, 2			
12, 15, 11, 15, 19, 18, 15			

82 Nel corso del mese di giugno in un supermercato i duroni per cinque giorni sono stati offerti al prezzo di 10 euro al kg, per nove giorni al prezzo di 7 euro al kg, per quattro giorni al prezzo di 8 euro al kg e per sette giorni al prezzo di 9 euro al kg. Calcola la media aritmetica, la mediana e la moda. [8,32; 8; 7]

83 Le autovetture di un salone per la vendita di auto usate sono classificate secondo l'età dell'usato.

Età usato (mesi)	Numero autovetture
6	12
12	16
18	15
24	9
30	5
36	1
48	1
60	1

Determina la media aritmetica, la mediana e la moda. [17,4; 18; 12]

84 La seguente tabella riporta la quantità di libri venduti in una determinata settimana in 20 librerie.

Numero libri venduti	Numero librerie
50	4
60	6
70	5
80	3
90	2

Determina la media aritmetica, la moda e la mediana del numero di libri venduti.
[66,5; 60; 65]

85 Considera la distribuzione relativa al numero totale di goal effettuati da ciascuna delle squadre di calcio di serie A fino a una certa giornata del campionato e calcola la media aritmetica, la mediana e la moda.
Puoi ripetere il calcolo considerando le distribuzioni relative al totale dei goal subiti e alla differenza reti.

86 Rappresenta graficamente la seguente distribuzione di frequenze e calcola la media aritmetica, la mediana e la moda.

Dati	1	2	3	4	5
Frequenze	3	5	7	9	4

[3,21; 3; 4]

87 Determina quale numero occorre unire alla sequenza di numeri 14, 8, 20, 10 affinché:

a) essendo maggiore di 14, il valore della media aritmetica coincida con quello della mediana;
b) essendo minore di 14, il suo valore sia quello della media aritmetica.

[a) 18; b) 13]

88 È data la seguente distribuzione del peso di 19 ragazzi.

Peso (kg)	46-50	50-54	54-58	58-62	62-66	66-70
N. ragazzi	2	3	6	4	3	1

Calcola la media aritmetica del peso (utilizzando per ogni classe il valore centrale), la mediana e la moda.
[57,26; $57,\overline{3}$; 54-58]

4. GLI INDICI DI VARIABILITÀ

▶ Teoria a pag. β26

IN PRATICA
▶ Videolezione 30

89 **VERO O FALSO?**

a) Lo scarto semplice medio è la media aritmetica degli scarti di una sequenza di valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dalla loro media M. V F

b) La deviazione standard è utile per confrontare sequenze di valori aventi la stessa media aritmetica M ma diversa variabilità. V F

c) Il coefficiente di variazione è utile per confrontare fenomeni che hanno unità di misura diverse. V F

d) Il coefficiente di concentrazione permette di stabilire se il fenomeno esaminato è più o meno equamente distribuito tra le varie unità statistiche. V F

Il campo di variazione

90 Determina il campo di variazione delle seguenti sequenze di numeri:

a) 3; 5; 2; 8; 9; 4;
b) − 3; − 9; − 1; − 4;
c) − 2; − 2; − 2; − 2;
d) 12; 6; 18; 24; 6;
e) 3; − 2; − 4; 0; − 3;
f) 6; 1; 1; 2; − 2.

[a) 7; b) 8; c) 0; d) 18; e) 7; f) 8]

91 Siano A, B e C tre borghi campestri. Un geometra posto in B effettua cinque misurazioni dell'ampiezza dell'angolo $A\widehat{B}C$ e ottiene i seguenti valori:

$$92° \, 28' \, 56''; \quad 92° \, 29' \, 04''; \quad 92° \, 28' \, 58''; \quad 92° \, 28' \, 59''; \quad 92° \, 29' \, 05''.$$

Calcola la media aritmetica e il campo di variazione. [92° 29′ 0,4″; 9″]

92 Nel corso dell'anno, un alunno ha conseguito in italiano e in inglese i seguenti voti.

Italiano	6	5	7	7	8	6	5	6
Inglese	5	5	6	6	7	7	6	6

Determina in quale materia la variabilità è stata maggiore utilizzando il campo di variazione.

[italiano 3; inglese 2]

93 La tabella riporta le variazioni percentuali rispetto allo stesso periodo dell'anno precedente delle vendite del commercio fisso al dettaglio da marzo 2009 a marzo 2010 (ISTAT).

Mese	mar 09	apr 09	mag 09	giu 09	lugl 09	ago 09	sett 09	ott 09	nov 09	dic 09	gen 10	feb 10	mar 10
Variazioni %	− 4,2	− 0,2	− 2,6	− 0,7	− 2,6	− 2,4	− 1,9	0,4	1,5	0,5	− 2,4	− 0,4	2,9

Effettua un'opportuna rappresentazione grafica, calcola la media aritmetica e il campo di variazione.

$[-0,93\%; 7,1\%]$

Lo scarto semplice medio

94 Determina lo scarto semplice medio nelle seguenti sequenze di numeri:

a) 3; 5; 9; 10; 22;
b) − 5; − 6; − 8; 5; 6; 8;
c) 5; 5; 5; − 5; − 5;
d) 2; 2; 2; 2;
e) − 16; − 10; − 2; 0; 2; 8;
f) 5; 8; 11; 14; 17.

$[a)\ 4,96;\ b)\ 6,\overline{3};\ c)\ 4,8;\ d)\ 0;\ e)\ 6,\overline{6};\ f)\ 3,6]$

95 Nelle seguenti sequenze di numeri, verifica che la media aritmetica degli scarti, non in valore assoluto, è uguale a 0. Calcola poi lo scarto semplice medio.

a) 6; 8; 2; 6; 10; 4; b) − 5; 7; 2; 8; − 3; − 9.

$[a)\ 2;\ b)\ 5,\overline{6}]$

Date le distribuzioni descritte nelle seguenti tabelle, calcola lo scarto semplice medio.

96 Goal segnati da una squadra nel girone di andata del campionato.

Goal	0	1	2	3	4
Frequenza	3	8	4	1	2

[0,94]

97 T-shirt possedute dai ragazzi di una classe.

Numero T-shirt	**Numero alunni**
4	5
6	8
8	6
10	2

[1,54]

98 Voti riportati da uno studente universitario.

Voto	18	23	25	26	28	30
Frequenza	2	2	8	4	7	1

[2]

99 Temperature (in gradi Celsius) rilevate in 10 giornate.

Temperatura	− 3	− 2	2	3
Frequenza	2	3	3	2

[2,4]

La deviazione standard

100 **TEST** Le stature, in metri, di un gruppo di ragazzi sono: 1,67; 1,72; 1,60; 1,65; 1,80; 1,85.
La deviazione standard vale:

A 0,00749.
B 2,0143.
C 1,715.
D 0,0035.
E 0,08653.

101 **ESERCIZIO GUIDA**

In una certa località, nel corso di una giornata estiva sono state rilevate le seguenti temperature in gradi Celsius: 19,0; 21,0; 22,5; 24,0; 26,0; 27,5; 28,0; 28,0; 26,0; 24,0.

Determiniamo:
a) la temperatura media della giornata;
b) il campo di variazione;
c) lo scarto semplice medio;
d) la deviazione standard.

a) La temperatura media è la media aritmetica M dei valori misurati:

$$M = \frac{19{,}0 + 21{,}0 + 22{,}5 + 24{,}0 + 26{,}0 + 27{,}5 + 28{,}0 + 28{,}0 + 26{,}0 + 24{,}0}{10} = \frac{246}{10} = 24{,}6.$$

La temperatura media è 24,6 °C.

b) Il campo di variazione è la differenza fra il valore massimo e il valore minimo: $28{,}0 - 19{,}0 = 9{,}0$.

Questa differenza viene chiamata anche «escursione termica».

c) Per rispondere a questa domanda e alla successiva, disponiamo i dati nella prima colonna di una tabella, poi completiamo la tabella calcolando gli scarti, gli scarti in valore assoluto, i quadrati degli scarti.

Lo scarto semplice medio è:

$$S = \frac{25{,}0}{10} = 2{,}5.$$

Temperatura	Scarto	Scarto assoluto	Scarto al quadrato
19,0	−5,6	5,6	31,36
21,0	−3,6	3,6	12,96
22,5	−2,1	2,1	4,41
24,0	−0,6	0,6	0,36
26,0	+1,4	1,4	1,96
27,5	+2,9	2,9	8,41
28,0	+3,4	3,4	11,56
28,0	+3,4	3,4	11,56
26,0	+1,4	1,4	1,96
24,0	−0,6	0,6	0,36
246*	0*	25*	84,9*

* Totale.

d) La deviazione standard è: $\sigma = \sqrt{\frac{84{,}9}{10}} \simeq 2{,}91$.

102 Calcola la deviazione standard delle seguenti sequenze di numeri:

a) 7; 9; 11; 13;
b) 0,9; 3,6; 9,6; 13,5; 18,9;
c) 2; 6; 10; 14; 18;
d) 3; 3; 3; 3; 3;
e) $-9; -2; 1; 2; 3$;
f) $-7; -5; 1; 3; 8$.

[a) 2,24; b) 6,53; c) 5,66; d) 0; e) 4,34; f) 5,44]

Calcola la deviazione standard delle distribuzioni descritte dalle seguenti tabelle.

103 Voti riportati da un alunno nel primo quadrimestre in inglese.

Voto	4	5	8	9
Frequenza	1	2	1	3

[2,07]

104 Temperature rilevate nel corso di una giornata invernale (espresse in °C).

Temperatura	−3	−2	2	3
Frequenza	2	3	3	2

[2,45]

105 Dalla produzione e vendita di articoli di pelletteria, una ditta, in sei mesi successivi, ha ottenuto i seguenti guadagni in euro: 100 000, 125 000, 140 000, 135 000, 160 000, 110 000. Calcola il guadagno medio e la deviazione standard.

[128 333; 19 720]

106 Una prova di tedesco contiene 80 difficoltà. La seguente tabella indica quanti errori sono stati commessi dagli studenti di una classe.

Errori	0	5	10	20	30	40	50
Studenti	2	1	5	4	4	3	2

Calcola il numero medio di errori e la deviazione standard. [22,62; 15,09]

107 Le misurazioni ripetute relative al consumo di energia elettrica per la prestazione giornaliera di una lavastoviglie in una mensa aziendale, presentano una distribuzione che si può ritenere gaussiana con media di 8 kWh e deviazione standard 0,85 kWh. Determina quante volte in 240 giorni il consumo è stato:

a) compreso fra 7,15 kWh e 8,85 kWh;
b) maggiore di 9,7 kWh;
c) minore di 5,45 kWh.

[a) 163,848; b) 5,46; c) 0,312]

Il campionamento, la stima della media e della frequenza

108 **ESERCIZIO GUIDA**

a) In una popolazione formata da $N = 200$ ragazzi di 19 anni l'altezza è una grandezza distribuita normalmente con media $\mu = 180$ cm e deviazione standard $\sigma = 12$ cm. Si estraggono 60 campioni composti ciascuno da $n = 25$ ragazzi e da uno di questi rileviamo che l'altezza media è $\overline{x} = 176$ cm. Determiniamo a un livello di confidenza del 95% se il campione considerato è compreso nell'intervallo della media μ.

b) Dobbiamo stimare l'altezza media in una popolazione di ragazzi aventi 19 anni e da un campione formato da 65 elementi abbiamo rilevato che l'altezza media è $\overline{x} = 178$ cm con una deviazione standard $s = 14$ cm. Effettuiamo una stima puntuale e per intervallo a un livello di confidenza del 99%.

c) Determiniamo a un livello di confidenza del 95,45% una stima per intervallo della percentuale dei ragazzi che intendono iscriversi all'università, avendo rilevato che 23 ragazzi su 50 hanno questa intenzione.

a) L'errore standard che indica la variabilità della distribuzione delle medie campionarie è:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{25}} = 2,4.$$

Prevediamo che il 95% dei campioni, cioè $60 \cdot 0,95 = 57$, abbia una media compresa nell'intervallo $\mu \pm 1,96\sigma_{\overline{X}}$ e pertanto l'intervallo è: $]180 - 1,96 \cdot 2,4; 180 + 1,96 \cdot 2,4[=]175,30; 184,70[$.
Il campione considerato ha una media compresa nell'intervallo delle medie campionarie.

b) La stima puntuale dell'altezza media della popolazione è $\overline{x} = 178$ cm, con un errore standard:

$$s_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{14}{\sqrt{65-1}} = 1,75.$$

L'intervallo di confidenza, a un livello di confidenza del 99%, risulta:

$$]178 - 2,576 \cdot 1,75;\ 178 + 2,576 \cdot 1,75[\ =\ ]173,49; 182,51[.$$

c) La frequenza del campione è $f = \frac{23}{50} = 0,46$ ed essendo l'errore standard

$$s_F = \sqrt{\frac{f \cdot (1-f)}{n}} = \sqrt{\frac{0,46 \cdot (1-0,46)}{65}} = 0,0618,$$

l'intervallo a un livello di confidenza del 95,45% risulta:

$$]0,46 - 2 \cdot 0,0618; 0,46 + 2 \cdot 0,0618[\ =\ ]0,3364; 0,5836[.$$

109 Una macchina confeziona scatole di cacao in polvere del peso medio di 200 g con una deviazione standard di 10 g. Considerando campioni con numerosità 64 e sapendo che il peso è una grandezza con distribuzione gaussiana, determina:

a) la media di tutte le medie dei possibili campioni;
b) l'errore standard della variabile media campionaria;
c) se un campione con peso medio di 203 g è contenuto nell'intervallo della media μ a livello di confidenza del 99%;
d) come il punto precedente considerando il 95% delle medie campionarie.

[a) 200; b) 1,25; c) sì:]196,78; 203,22[; d) no:]197,55; 202,45[]

110 Un campione di 40 pile ha fornito una durata media di 293 ore. Sapendo che la durata è una grandezza che si distribuisce secondo la curva gaussiana e che la deviazione standard della popolazione è 10 ore, effettua la stima per intervallo della media della popolazione a un livello di confidenza del 95%. Determina l'intervallo di confidenza a un livello del 99%, supponendo di non conoscere la deviazione standard della popolazione ma solo quella del campione, pari a 15 ore.

[]289,90; 296,10[;]286,82; 299,18[]

111 Su una produzione di 3000 bicchieri di cristallo, un campione di 150 elementi ha rilevato una frequenza di pezzi difettosi del 12%. Determina l'intervallo di confidenza a un livello del 90% della frequenza di bicchieri difettosi della popolazione e il loro numero.

[]0,0764; 0,1636[;]229; 491[]

112 Un partito politico nel corso della campagna elettorale in un Comune ha dichiarato che i sondaggi lo davano vincente al 42%. Nel corso dello scrutinio, dopo lo spoglio dei voti in 400 seggi, la percentuale era del 39%. A un livello di confidenza del 99,74%, si può ritenere ancora valida la percentuale del sondaggio?

[]0,3168; 0,4632[; sì]

113 In un campione di 50 persone che si dedicano all'attività di volontariato, si è rilevato che il tempo medio di impegno è di 12 ore mensili, con una deviazione standard di 8 ore. Sapendo che la grandezza considerata è distribuita gaussianamente, determina con una stima puntuale e per intervallo, a un livello di confidenza del 99%, il tempo medio di impegno di tutte le persone che attuano volontariato.

[12;]9,06; 14,94[]

114 Una ditta di prodotti farmaceutici pone in vendita una particolare crema per le mani con caratteristica antigelo anche per temperature molto basse. Su 25 persone intervistate, 22 hanno confermato l'efficacia di tale prodotto. Determina l'intervallo di confidenza al 95% della percentuale dell'efficacia di tale prodotto.
Determina anche l'intervallo nel caso in cui il campione sia formato da 250 persone, ma la percentuale di persone soddisfatte non sia cambiata.

[]0,7526; 1,0000[;]0,8396; 0,9204[]

115 Una popolazione è costituita da 800 anelli di acciaio per tende con misura del diametro distribuita normalmente con media di 32 mm e deviazione standard di 4 mm. Si estraggono 40 campioni composti ciascuno da 25 anelli. Determina per quanti campioni si può prevedere un diametro compreso tra 30,4 e 33,6 mm.

[$\sigma_{\overline{X}} = 0{,}8$; 38]

116 In un'azienda si è rilevato, sulla base degli anni precedenti, che il numero medio dei giorni di assenza per malattia è stato di 6 giorni. Nel corso dell'anno corrente si è rilevato su 60 dipendenti che i giorni di assenza per malattia sono stati in media 10, con una deviazione standard di 5 giorni. Sapendo che la grandezza si distribuisce normalmente, determina a un livello di confidenza del 95% se la valutazione di 6 giorni non è più accettabile.

[]8,73; 11,27[; no]

Il coefficiente di variazione

117 **TEST** Il coefficiente di variazione della situazione descritta nell'esercizio 100 è:

A 1,715.
B 0,05045.
C 0,08653.
D 0,25.
E 2,3421.

118 Calcola il coefficiente di variazione delle seguenti sequenze di numeri.

a) 5; 7; 15; 33;
b) 5,3; 6,2; 8,1; 9,5; 10,4; 11,5;
c) 3; 3; 3; 3;
d) −6; −4; −3; −2; −1;
e) 6; 8; 10; 12;
f) −4; −1; 1, 4.

[a) 73,64%; b) 26%; c) 0; d) 53,76%; e) 24,85%; f) non si calcola]

119 **TEST** Dati i valori, espressi in secondi,

80, 32, 45, 60, 50,

quale delle seguenti affermazioni è *esatta*?

A Il campo di variazione è 30 s.
B La varianza è 25,824 s^2.
C Lo scarto semplice medio è 15 s.
D La deviazione standard è 5,02 s.
E Il coefficiente di variazione è del 30,09%.

120 La tabella che segue illustra la distribuzione del peso di 20 neonati (in kg).

Peso	Numero neonati
0-1,25	1
1,25-1,75	2
1,75-2,25	2
2,25-2,75	5
2,75-3,25	8
3,25-3,75	1
3,75-4,25	1

Calcola il coefficiente di variazione. [28,91%]

121 Il numero di componenti delle famiglie di un Comune è distribuito nel modo seguente.

Numero componenti	Numero famiglie
1	2633
2	3325
3	3121
4	1834
5	721
6	114
7	89

Calcola il coefficiente di variazione. [48,83%]

122 **TEST** In un vivaio è stata misurata l'altezza di alcuni abeti aventi tre anni di età.

Altezza (cm)	Numero abeti
80-90	6
90-100	12
100-110	9
110-120	3

Quale delle seguenti affermazioni è *errata*?

A Il campo di variazione è di 40 cm.
B La varianza è di 81 cm^2.
C La deviazione standard è di 9 cm.
D Lo scarto semplice medio è di 10 cm.
E Il coefficiente di variazione è del 9,2%.

La concentrazione

123 **ESERCIZIO GUIDA**

Consideriamo la tabella a fianco, che riporta le quote mercato di cinque imprese.
Costruiamo l'area di concentrazione e calcoliamo l'indice di concentrazione.

Nome impresa	Quote mercato (%)
A	15
B	5
C	30
D	20
E	30

Costruiamo la tabella dove elaborare i dati, avendo ordinato le quote di mercato in ordine crescente.

Imprese	Numero imprese (frequenza)	Percentuale quote mercato (intensità)	Frequenza relativa	Intensità relativa	Frequenza relativa cumulata	Intensità relativa cumulata equidistribuita	Intensità relativa cumulata reale
B	1	5	0,20	0,05	0,20	0,20	0,05
A	1	15	0,20	0,15	0,40	0,40	0,20
D	1	20	0,20	0,20	0,60	0,60	0,40
C-E	2	60	0,40	0,60	1,00	1,00	1,00

Possiamo costruire il diagramma di concentrazione utilizzando le ultime tre colonne della tabella.

Area di concentrazione = area del triangolo rettangolo isoscele − area sottostante la curva di concentrazione:

$$0,5-\left[\frac{0,05\cdot 0,2}{2}+\frac{(0,05+0,2)\cdot 0,2}{2}+\frac{(0,2+0,4)\cdot 0,2}{2}+\frac{(0,4+1)\cdot 0,4}{2}\right]=0,5-0,37=0,13.$$

Indice di concentrazione $=\dfrac{\text{area di concentrazione}}{\text{area di massima concentrazione}}\rightarrow R=\dfrac{0,13}{0,5}=0,26.$

Osservazione. Possiamo anche calcolare l'indice in modo più diretto.

Tenendo conto che $0,5=\frac{1}{2}$, raccogliamo $\frac{1}{2}$ in tutti i termini della precedente espressione dell'area di concentrazione,

$$R=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\{1-[(0+0,05)\cdot 0,2+(0,05+0,2)\cdot 0,2+(0,2+0,4)\cdot 0,2+(0,4+1)\cdot 0,4]\}}{\cancel{\frac{1}{2}}},$$

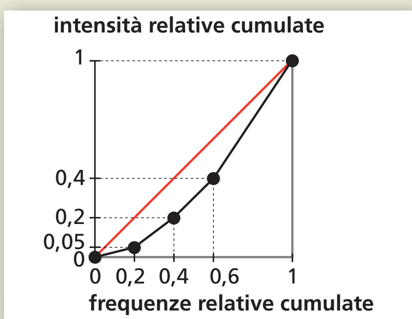
da cui otteniamo:

$$R=1-[(0+0,05)\cdot 0,2+(0,05+0,2)\cdot 0,2+(0,2+0,4)\cdot 0,2+(0,4+1)\cdot 0,4].$$

L'indice di concentrazione si ottiene come complemento all'unità della somma delle doppie aree dei trapezi rettangoli sottostanti la curva di concentrazione, con l'avvertenza di considerare il triangolo rettangolo iniziale come un trapezio rettangolo con base minore nulla. Otteniamo le doppie aree dei trapezi rettangoli addizionando due intensità cumulate successive (somma delle basi), moltiplicate per la frequenza relativa dell'intensità cumulata maggiore (altezza del trapezio). Possiamo impostare i calcoli utilizzando le colonne delle frequenze relative e delle intensità relative cumulate:

$R=1-0,74=0,26.$

In questo modo abbiamo automatizzato il calcolo.



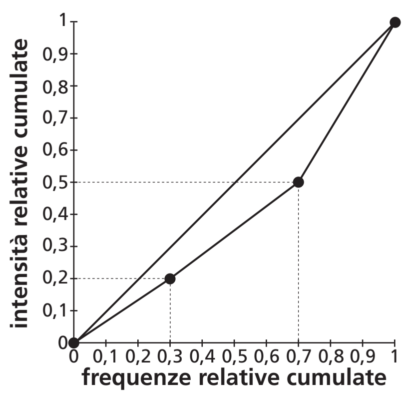
Frequenze relative f_i	Intensità relative cumulate q_i	$q_{i-1}+q_i$	$(q_{i-1}+q_i)f_i$
	0		
0,20	0,05	0,05	0,01
0,20	0,20	0,25	0,05
0,20	0,40	0,60	0,12
0,40	1	1,40	0,56
Totale			0,74

124 **COMPLETA** la seguente tabella, relativa alla paga di 10 ragazzi che lavorano in pub, pizzerie e paninoteche durante il fine settimana, e il calcolo del coefficiente di concentrazione.

Paga	Numero ragazzi	Intensità	Frequenze cumulate	Intensità cumulate	Freq. rel. cumulate	Int. rel. cumulate
60-70	2	130	2	130	0,2	0,139
70-100	4	340	6	470	…	…
100-120	3	…	…	…	…	…
120-150	1	…	…	…	…	…

Area concentrazione $= \frac{1}{2} - \left[\frac{0,2 \cdot 0,139}{2} + \frac{(\dots) \cdot 0,4}{2} + \frac{\dots}{2} + \frac{\dots}{2}\right] = \dots;\quad R = \frac{\dots}{0,5} = 0,1221.$

125 **TEST** Il grafico relativo alla concentrazione di un fenomeno è il seguente.



Il coefficiente di concentrazione R è:

- A 0,395.
- B 0,105.
- C 0,21.
- D 0,5.
- E 0,42.

126 La produzione di grano in tonnellate di quattro aziende agricole nel 2010 è indicata dalla tabella che segue.

Azienda agricola	Produzione grano (tonnellate)
A	23
B	18
C	32
D	27

Costruisci l'area di concentrazione e calcola l'indice di concentrazione. [$R = 11,50\%$]

127 Il numero di giorni di vacanza effettuati da 5 ragazzi è riportato nella tabella seguente.

Nome	Giorni di vacanza
Antonio	20
Carlo	40
Luca	15
Matteo	20
Nicola	40

Costruisci l'area di concentrazione e calcola l'indice di concentrazione. [$R = 20,74\%$]

128 Considera il numero di auto di proprietà di 20 famiglie descritto dalla seguente distribuzione.

Numero automobili	Numero famiglie
0	2
1	10
2	5
3	2
4	1

Costruisci l'area di concentrazione e calcola l'indice di concentrazione. [$R = 33,67\%$]

129 Esamina gli stipendi mensili percepiti dai 16 impiegati di un'impresa.

Classe di stipendio (euro)	Numero impiegati
900-1000	3
1000-1200	4
1200-1500	6
1500-1800	2
1800-2100	1

Costruisci l'area di concentrazione e calcola l'indice di concentrazione. [$R = 11,47\%$]

5. I RAPPORTI STATISTICI

Teoria a pag. β41

I rapporti di derivazione, di composizione, di coesistenza

130 **ASSOCIA** a ciascun obiettivo il rapporto statistico più indicato per raggiungerlo.

1) Valutare l'importanza di ciascuna voce di spesa (alimentari, utenze, abbigliamento, ...) in un bilancio familiare.
2) Valutare lo squilibrio tra le entrate e le uscite di un'azienda in uno stesso periodo.
3) Valutare la natalità di un Comune in un determinato anno.
4) Valutare l'utile di un'azienda rispetto a un periodo di riferimento.
5) Valutare l'attività industriale relativamente alla superficie di una regione.

a) Rapporto di derivazione.
b) Rapporto di densità.
c) Rapporto di composizione.
d) Rapporto di coesistenza.
e) Numeri indice.

131 **ESERCIZIO GUIDA**

La tabella seguente riporta dati statistici di quattro piccole imprese.

Ditta	Numero dipendenti	Fatturato (euro)	Debiti	Crediti
A	5	25 000	12 000	13 000
B	8	54 000	22 000	26 000
C	4	32 000	13 000	11 000
D	3	45 000	19 000	18 000

Calcoliamo gli indici di derivazione, di composizione e di coesistenza.

Calcoliamo il rapporto di *derivazione* che si ottiene dal rapporto tra fatturato e numero dipendenti. È un rapporto tra grandezze *non omogenee* e si esprime in euro per dipendente:

$$\frac{25\,000}{5} = 5000; \quad \frac{54\,000}{8} = 6750; \quad \frac{32\,000}{4} = 8000; \quad \frac{45\,000}{3} = 15\,000.$$

Calcoliamo il rapporto di *derivazione* che si ottiene dal rapporto fra crediti e fatturato. È un rapporto tra grandezze *omogenee* e si esprime in *percentuale*:

$$\frac{13000}{25000}\cdot 100 = 52\%; \quad \frac{26\,000}{54\,000}\cdot 100 \simeq 48,15\%; \quad \frac{11000}{32\,000}\cdot 100 \simeq 34,38\%; \quad \frac{18\,000}{45\,000}\cdot 100 = 40\%.$$

Calcoliamo il rapporto di *composizione* dato dal rapporto fra il numero dei dipendenti di ogni impresa e il totale dei dipendenti delle quattro imprese. È un rapporto tra grandezze *omogenee* e lo esprimiamo in *percentuale*:

$$\frac{5}{20}\cdot 100 = 25\%; \quad \frac{8}{20}\cdot 100 = 40\%; \quad \frac{4}{20}\cdot 100 = 20\%; \quad \frac{3}{20}\cdot 100 = 15\%.$$

Calcoliamo il rapporto di *coesistenza* dato dal rapporto fra debiti e crediti. È un rapporto tra grandezze *omogenee* e lo esprimiamo in *percentuale*:

$$\frac{12\,000}{13000}\cdot 100 \simeq 92,31\%; \quad \frac{22\,000}{26\,000}\cdot 100 \simeq 84,62\%; \quad \frac{13000}{11000}\cdot 100 \simeq 118,18\%; \quad \frac{19\,000}{18\,000}\cdot 100 \simeq 105,56\%.$$

Nella tabella che segue riportiamo gli indici trovati.

Derivazione	Derivazione	Composizione	Coesistenza
fatturato/dipendenti (euro per dipendente)	crediti/fatturato (%)	dipendenti (%)	debiti/crediti (%)
5000	52,00	25	92,31
6750	48,15	40	84,62
8000	34,38	20	118,18
15 000	40,00	15	105,56

132 **TEST** Esaminando i dati del censimento di un piccolo Comune, si è rilevato che il numero di stanze è 9794 e il numero di persone è 12 450 di cui 8680 proprietari. Quale dei seguenti rapporti è *errato*?

A Rapporto di derivazione: 0,79 stanze/persona.
B Rapporto di derivazione: 1,27 persone/stanza.
C Rapporto di composizione: 69,7% di proprietari.
D Rapporto di composizione: 38,5% di affittuari.
E Rapporto di coesistenza: 2,3 proprietari per affittuario.

133 **TEST** All'inizio dell'anno una ditta aveva 42 dipendenti, di cui 12 donne. Nel corso dell'anno sono stati assunti 3 uomini e 2 donne e si sono dimessi 4 uomini e 1 donna. Alla fine dell'anno sono stati calcolati alcuni rapporti statistici. Quale delle seguenti affermazioni è *errata*?

A Il rapporto di coesistenza uomini/donne è 2,2.
B Il rapporto di durata dei dipendenti è 4,2 anni.
C Il rapporto di composizione degli uomini è 69%.
D Il rapporto di composizione delle donne è 31%.
E Il rapporto di coesistenza assunti/dimessi è 100.

134 Le persone iscritte a una polisportiva, secondo l'attività sportiva praticata, risultano le seguenti.

Attività sportiva	calcio	tennis	volley	basket	ginnastica	nuoto
Numero persone	54	25	29	45	89	37

Determina i rapporti di composizione. [19,35%; 8,96%; …; 13,26%]

135 Popolazione, numero dei matrimoni e numero dei divorzi in quattro Comuni.

Comune	Popolazione	Numero matrimoni	Numero divorzi
A	65 312	512	84
B	32 450	331	43
C	33 458	267	43
D	32 513	154	19

Determina i rapporti di derivazione e di coesistenza.

[7,84; 10,20; 7,98; 4,74 matrimoni per mille abitanti; 1,29; 1,33; 1,29; 0,58 divorzi per mille abitanti; divorzi: 16,41%; 12,99%; 16,10%; 12,34% dei matrimoni]

136 Da un'indagine emergono i seguenti dati relativi al numero di incidenti stradali in una provincia durante il periodo estivo.

Mese	Numero incidenti
giugno	37
luglio	128
agosto	187
settembre	63

Determina i rapporti di composizione. Sapendo che l'entità della rete stradale è 3457 km, determina i rapporti di derivazione.

[8,92%; 30,84%; 45,06%; 15,18%; 0,01; 0,04; 0,05; 0,02 incidenti/km; 93,43; 27,01; 18,49; 54,87 km/incidente]

137 Le importazioni ed esportazioni (tonnellate di merce movimentata) di un'impresa industriale nei primi sei mesi del 2009 sono riportate nella seguente tabella.

Mese	Importazioni	Esportazioni
gennaio	122	127
febbraio	134	122
marzo	115	105
aprile	98	97
maggio	95	103
giugno	105	96

Determina i rapporti di composizione e i rapporti di coesistenza. [18,24%; 20,03%; ...; 15,70%; 19,54%; 18,77%; ...; 14,77%; 96,06%; 109,84%; ...; 109,38% delle esportazioni]

138 La seguente tabella riporta le riserve mondiali di greggio in miliardi di barili (*Oil & Gas Journal*, 2006).

Area geografica	Miliardi di barili
Nord America	213,4
Centro e Sud America	103,4
Europa occidentale	16,4
Europa orientale	77,8
Medio Oriente	743,4
Africa	106,6
Asia e Oceania	35,9

Determina i rapporti di composizione.
[16,45%; 7,97%; 1,26%; 6,00%; 57,32%; 8,22%; 2,77%]

139 La seguente tabella riporta la produzione mondiale di autoveicoli, suddivisa in veicoli leggeri e pesanti, da parte dei maggiori produttori (2006).

Paese	Veicoli leggeri	Veicoli pesanti	Totale
Giappone	9756515	1727718	11484233
Stati Uniti	4372196	6979093	11351289
Cina	4315290	2956524	7271814
Germania	5398508	419663	5818171
Corea del Sud	3489136	350453	3839589
Francia	2722168	442200	3164368
Spagna	2078639	697547	2776186
Brasile	2092029	505353	2597382

Determina i rapporti di composizione e i rapporti di coesistenza tra veicoli pesanti e leggeri.
[veicoli leggeri: 28,51%; 12,78%; ...; veicoli pesanti: 12,27%; 49,57%; ...; coesistenza: 17,71%; 159,62%; ... dei veicoli leggeri]

I numeri indice

140 **ESERCIZIO GUIDA**

Consideriamo la serie storica a lato relativa al prezzo in euro di due beni A e B dal 2006 al 2010.

a) Calcoliamo i numeri indice a base fissa con base anno 2006 e con base anno 2008.
b) Calcoliamo i numeri indice a base mobile.

Anno	Prezzo bene A	Prezzo bene B
2006	12,31	7,32
2007	13,42	8,56
2008	11,24	9,02
2009	12,56	9,25
2010	13,87	9,38

a) Poniamo il valore dell'anno 2006 uguale a 100. Dividiamo il prezzo di ogni anno per il prezzo dell'anno assunto come base e moltiplichiamo il quoziente per 100.

Calcoliamo i numeri indice per il bene A:

$$\frac{13,42}{12,31} \cdot 100 \simeq 109,02; \quad \frac{11,24}{12,31} \cdot 100 \simeq 91,31; \quad \frac{12,56}{12,31} \cdot 100 \simeq 102,03; \quad \frac{13,87}{12,31} \cdot 100 \simeq 112,67.$$

Calcoliamo i numeri indice per il bene B:

$$\frac{8,56}{7,32} \cdot 100 \simeq 116,94; \quad \frac{9,02}{7,32} \cdot 100 \simeq 123,22; \quad \frac{9,25}{7,32} \cdot 100 \simeq 126,37; \quad \frac{9,38}{7,32} \cdot 100 \simeq 128,14.$$

Esponiamo i risultati nella tabella a fianco.

La differenza fra ogni numero indice e 100 dà la variazione percentuale rispetto all'anno base.

Anno	Numero indice bene A (2006 = 100)	Numero indice bene B (2006 = 100)
2006	100,00	100,00
2007	109,02	116,94
2008	91,31	123,22
2009	102,03	126,37
2010	112,67	128,14

Se prendiamo come base l'anno 2008, tutti i rapporti scritti in precedenza hanno al denominatore il valore 11,24 per il bene A e 9,02 per il bene B. I risultati sono esposti nella tabella a lato.

La differenza fra il numero indice e 100 dà la variazione percentuale rispetto all'anno 2008.

Anno	Numero indice bene A (2008 = 100)	Numero indice bene B (2008 = 100)
2006	109,52	81,15
2007	119,40	94,90
2008	100,00	100,00
2009	111,74	102,55
2010	123,40	103,99

b) Calcoliamo i numeri indice a base mobile. Dividiamo il valore di ogni anno per quello dell'anno precedente e moltiplichiamo il quoziente per 100.

Calcoliamo i numeri indice per il bene A:

$$\frac{13,42}{12,31} \cdot 100 \simeq 109,02; \quad \frac{11,24}{13,42} \cdot 100 \simeq 83,76; \quad \frac{12,56}{11,24} \cdot 100 \simeq 111,74; \quad \frac{13,87}{12,56} \cdot 100 \simeq 110,43.$$

Calcoliamo i numeri indice per il bene B:

$$\frac{8,56}{7,32} \cdot 100 \simeq 116,94; \quad \frac{9,02}{8,56} \cdot 100 \simeq 105,37; \quad \frac{9,25}{9,02} \cdot 100 \simeq 102,55; \quad \frac{9,38}{9,25} \cdot 100 \simeq 101,41.$$

Non siamo in grado di calcolare il numero indice per il primo anno in quanto manca il dato dell'anno precedente.
La differenza fra ogni numero indice e 100 dà la variazione percentuale rispetto all'anno precedente.
Possiamo ottenere il numero indice a base mobile anche dai numeri indice a base fissa, dividendo un numero indice per il suo precedente e moltiplicando il quoziente per 100.

Anno	Numero indice a base mobile bene A	Numero indice a base mobile bene B
2006	n.d.	n.d.
2007	109,02	116,94
2008	83,76	105,37
2009	111,74	102,55
2010	110,43	101,41

141 Considera la seguente tabella, che illustra il numero di dipendenti di un'impresa nel corso di un decennio.

Anno	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Numero dipendenti	876	854	847	859	868	875	869	874	885	865

a) Calcola i numeri indice a base fissa con base anno 2001.
b) Calcola i numeri indice a base fissa con base anno 2005.
c) Calcola i numeri indice a base mobile.

[a) 100; 97,49; ...; 98,74; b) 100,92; 98,39; ...; 100; ...; 99,65; c) n.d.; 97,49; 99,18; ...; 97,74]

142 Il prezzo di un prodotto in euro nel corso dell'anno 2009, a Firenze, ha riportato i valori indicati nella tabella.

Mese	Prezzo
gennaio	32,25
febbraio	34,74
marzo	38,58
aprile	42,12
maggio	45,16
giugno	45,89
luglio	42,13
agosto	39,16
settembre	38,74
ottobre	35,87
novembre	35,12
dicembre	34,80

a) Calcola i numeri indice a base fissa con base mese di gennaio.
b) Calcola i numeri indice a base fissa con base mese di aprile.
c) Calcola i numeri indice a base mobile.

[a) 100; 107,72; 119,63; ...; 107,91;
b) 76,57; 82,48; ...; 100; ...; 82,62;
c) n.d.; 107,72; 111,05; ...; 99,09]

143 La seguente tabella riguarda i siti web più visitati nel mondo nel 2006.

Siti web	Visitatori
Yahoo!	133 428 000
Google	123 892 000
Time Warner Network	123 702 000
MSN (Microsoft)	118 154 000
Myspace	81 233 000
eBay	79 787 000
Amazon	57 702 000
Ask Network	51 885 000
Wikipedia	46 372 000
Viacom Digital	43 056 000

Calcola i numeri indice a base fissa con base Yahoo! e con base Google.

[base Yahoo!: 100; 92,85; 92,71; ...;
base Google: 107,70; 100; 99,85; ...]

ESERCIZI VARI La statistica

144 **TEST** I punteggi ottenuti da tre candidati in cinque prove sono stati i seguenti:

1° 5, 8, 7, 7, 9;
2° 7, 7, 5, 8, 7;
3° 5, 7, 8, 7, 7.

Sapendo che non sono ammessi alla fase successiva i candidati con una media inferiore a 6,5 e con uno scarto quadratico medio superiore a 1, quali di questi tre candidati sono ammessi alla fase successiva del concorso?

A Il 1° e il 2°.
B Il 2°.
C Il 3°.
D Il 2° e il 3°.
E Tutti e tre.

145 **TEST** Rilevando il tempo impiegato da un dispositivo per compiere una lavorazione, si sono ottenute le seguenti misure in secondi: 4, 8, 5, 5, 7, 5, 5, 7, 6, 8. Il valore medio del tempo è:

A 6, media aritmetica dei valori.
B 5, moda dei valori.
C 5,5, mediana dei valori.
D 6,1, media quadratica dei valori.
E 5,9, media geometrica dei valori.

146 **TEST** Un'impresa mercantile ha collocato i seguenti quantitativi di merce sul mercato.

Anno	2007	2008	2009	2010
Quantità (t)	4320	4940	5230	4860

Ponendo la base 2007 = 100, quale delle seguenti sequenze di numeri indice è *corretta*? (valori arrotondati all'unità)

A 100; 114; 106; 93.
B 100; 87; 83; 89.
C 100; 114; 121; 113.
D 100; 87; 94; 108.
E 100; 107; 118; 117.

147 Sono stati rilevati i seguenti valori relativi alla lunghezza e al peso di 12 neonati. Sapendo che il primo valore indica il peso in kg, il secondo la lunghezza in cm: (3,2; 48), (2,6; 51), (2,9; 49), (2,4; 47), (2,8; 50), (2,9; 49), (2,7; 48), (3,5; 52), (3,3; 52), (3,1; 51), (3,0; 49), (2,9; 47), raggruppa i dati in classi e compila una tabella a doppia entrata.

148 La seguente tabella riporta il numero di autovetture di un determinato tipo per le quali si è dovuto procedere alla sostituzione della marmitta, classificate secondo il numero di kilometri percorsi.

Kilometri (migliaia)	Numero autovetture
fino a 40	6
40-60	9
60-70	23
70-80	8
oltre 80	4

Effettua la rappresentazione grafica che ritieni più opportuna.

149 Alcuni candidati che partecipano a un esame universitario ottengono i seguenti punteggi: 24, 28, 25, 29, 30, 18.

a) Qual è la media dei punteggi?
b) Quale punteggio avrebbe dovuto ottenere l'ultimo candidato affinché la media fosse 26?

[a) $25,\overline{6}$; b) 20]

150 Considera i seguenti prezzi in euro di tre categorie di prodotti rilevati per quattro anni successivi.

Anno	Bene A	Bene B	Bene C
2004	12,50	7,25	18,50
2005	12,65	8,35	19,35
2006	12,10	8,10	18,55
2007	11,90	7,90	18,80

Calcola i numeri indice a base fissa prendendo come base l'anno 2004.

[A: 100; 101,2; 96,80; 95,20; B: 100; 115,17; 111,72; 108,97; C: 100; 104,59; 100,27; 101,62]

151 La quantità di frutta (in kg) venduta in una settimana da un negoziante è la seguente.

Giorno	lu	ma	me	gio	ve	sa
Kg di frutta	15	20	30	28	27	40

Calcola la quantità media giornaliera di frutta venduta e il campo di variazione. [$26,\overline{6}$; 25]

152 Da una rilevazione è risultato che i due sport preferiti dagli alunni di sesso maschile di una classe sono, in ordine di preferenza: (calcio; tennis), (calcio; nuoto), (calcio; volley), (calcio; basket), (nuoto; basket), (volley; basket), (nuoto; volley), (basket; calcio), (basket; volley), (calcio; volley), (volley; nuoto). Raggruppa i dati e compila una tabella a doppia entrata. Determina le distribuzioni marginali e condizionate.
Le due modalità sono dipendenti?

153 Gli studenti di una classe sono stati suddivisi secondo il loro peso in kilogrammi. Calcola la media del peso degli studenti.

Classe di peso	Frequenza
50-55	7
55-60	10
60-65	8
65-70	3

[58,75]

154 Il prezzo in euro di un prodotto in quattro mesi successivi è stato il seguente: 12,45; 13,05; 13,40; 13,20. Determina il potere di acquisto della moneta relativamente a quel prodotto. [0,0768 unità]

155 Scrivi cinque numeri tali che la loro media aritmetica sia 10 e la loro mediana 8.

156 Complete the following frequency distribution table.

Class interval	2-4	4-8	8-14	14-18
Mid interval x_r	3			
Frequency f_r	2	6	9	3

Calculate the mean of the frequency distribution. For each x_r, calculate $|d_r|$, where d_r is the deviation of x_r from the mean.

(IR *Leaving Certificate Examination*, Higher Level, 1994)

[$M = 9{,}45$]

157 Nella tabella seguente sono riportate le risorse di un Paese. Completa la tabella, poi rappresenta i dati mediante un diagramma circolare.

Attività	Percentuale	Ampiezza del settore
industria	45%	
agricoltura	30%	
servizi	15%	
altro	10%	

158 In un campionato una squadra di calcio ha giocato 36 partite, realizzando 52 punti. I goal segnati sono stati 58, quelli subiti 40.

a) Calcola la media dei punti a partita.
b) Calcola la media dei goal segnati per partita e quella dei goal subiti. [a) $1,\overline{4}$; b) $1,6\overline{1}$; $1,\overline{1}$]

159 Le altezze di un gruppo di giocatori di pallavolo, espresse in centimetri, sono: 178, 180, 180, 181, 182, 175, 178, 176, 180, 180, 181, 184, 200, 181, 182, 173, 175, 176, 176, 177, 170, 170, 201, 200, 170. Calcola l'altezza media e la variazione standard. Raggruppa in classi i valori e calcola le frequenze relative e percentuali, quindi le frequenze cumulate e infine quelle relative cumulate. [180,24 cm; 8,32 cm]

160 Elabora la seguente tabella che mette in evidenza l'altezza in cm di 10 persone, presentando una seriazione statistica con quattro classi di intervallo.

Nome delle persone	Altezza in cm
Annovi	176
Bertini	186
Colonna	185
Defendi	178
Foggiani	172
Lombardo	170
Manni	178
Notari	182
Possenti	171
Sassotti	176

161 Calcola la media aritmetica, la mediana e la moda dei tempi (in minuti) impiegati da alcuni ragazzi a percorrere un tracciato di corsa campestre, dati dalla sequenza:

10, 8, 8, 9, 9, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 8. [8,7; 9; 9]

162 Età dei partecipanti alla prova teorica per il conseguimento della patente B in un determinato giorno.

Età	Numero esaminandi
18	12
19	6
20	4
21	1
22	0
23	2
24	1

Calcola la media dell'età, la mediana, la moda e il campo di variazione. [19,3; 19; 18; 6]

163 Cinque operai compiono lo stesso lavoro. Il primo impiega 4 giorni, il secondo 6 giorni, il terzo 5 giorni, il quarto e il quinto 8 giorni. Calcola il tempo medio che viene impiegato per compiere il lavoro. [5,77 gg]

164 Calcola la media e lo scarto semplice medio del numero di spettatori presenti alla proiezione di un film nel corso di una settimana. Calcola anche la deviazione standard.

Giorno	lu	ma	me	gio	ve	sa	do
Spettatori	215	200	270	280	350	400	420

[305; 72,86; 80,40]

165 Una conduttura idrica, a causa di quattro rotture, subisce via via le seguenti perdite percentuali sui successivi flussi: 4%, 9%, 10%, 2%. Calcola la percentuale media di perdita. [6,31%]

166 La tabella illustra il prezzo in euro di un prodotto a Roma e a Parigi rilevato in successive quattro settimane. Determina in quale città la variabilità è stata maggiore.

Settimana	Roma	Parigi
1ª	4,28	5,75
2ª	4,79	5,88
3ª	4,04	5,19
4ª	3,98	5,17

[Roma, 7,47%]

167 Nella seguente tabella vengono riportati i ricavi, in migliaia di euro, di un rivenditore di PC in diversi periodi.

Mesi	Ricavi
gennaio	28 000
febbraio	19 500
marzo	22 000
aprile	24 000
maggio	21 500
giugno	23 700

Calcola il tasso medio di variazione dei ricavi.

[− 3,28%]

168 Calcola la deviazione standard della seguente distribuzione: tempi impiegati da un ciclista a fare 8 giri di pista (espressi in minuti).

Tempo	1	1,1	1,4	1,8
Frequenza	2	1	3	1

[0,27]

169 Nella seriazione seguente è riportato il numero delle domande presentate a una scuola secondaria di I grado, per ottenere il sussidio Buono Libro, ripartite secondo il numero dei componenti della famiglia.

Numero componenti della famiglia	2	3	4	5	6
Numero domande	5	16	14	4	1

Calcola la media, la mediana e la moda.

[3,5; 3; 3]

170 The following data give the weight lost by 15 members of the Bancroft Health Club and Spa at the end of two months after joining the club.

5 10 8 7 25 12 5 14

11 10 21 9 8 11 18

Compute for these data:

a) the sample mean;
b) the sample standard deviation.

(USA *United States Naval Academy*, Final Examination, 2001)

$\left[M = \frac{174}{15}; \sigma = \sqrt{\frac{461,6}{15}}\right]$

171 Find the mean and standard deviation of the grouped frequency distribution.

Number of trials	Frequency
1-5	2
6-10	1
11-15	12
16-20	10
21-25	5

(CAN *John Abbott College*, Final Examination, 2002)

[mean = 15,5; σ = 5,21]

172 **TEST** L'età media dei partecipanti a una festa è di 24 anni. Se l'età media degli uomini è 28 anni e quella delle donne è 18 anni, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?

A $\frac{14}{9}$

B $\frac{9}{14}$

C 2

D $\frac{3}{2}$

E $\frac{4}{3}$

(*CISIA, Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso,* 2007)

173 In un'impresa si è rilevato che nel 2000 la media delle retribuzioni mensili degli impiegati è stata di 1150 euro, con una deviazione standard di 432 euro, e nel 2001 la media è stata di 1240 euro, con una deviazione standard di 482 euro. Determina in quale anno vi è stata maggior variabilità. [nel 2001, 38,87%]

174 Data la seguente serie storica relativa al numero degli abbonamenti a teatro, calcola i numeri indice a base fissa e a base mobile ponendo 2006 = 100 per i numeri indice a base fissa.

Anno	2006	2007	2008	2009	2010
Numero abbonati	1559	1650	1520	1587	1620

[100; 105,84; 97,50; …; n.d.; 105,84; 92,12; …]

175 Per determinare la durata di accumulatori per auto si considera un campione di 120 elementi che ha fornito una durata di 48 mesi, con una deviazione standard di 10 mesi. Sapendo che la durata è una grandezza con distribuzione normale, determina l'intervallo di confidenza della media a un livello di fiducia del 95%. Determina gli intervalli di fiducia anche quando la numerosità del campione è di 100, di 70 e di 40 e verifica il loro andamento. [$]46,2; 49,8[$; $]46,0; 50,0[$; $]45,6; 50,4[$; $]44,9; 51,1[$]

176 I tempi medi (espressi in minuti) impiegati dai dipendenti di una società per recarsi sul posto di lavoro sono:

15, 20, 18, 10, 25, 40, 35, 32, 28, 45, 27, 43, 55, 34, 45, 43, 28, 23, 25, 27, 32, 33, 14, 32, 12.

a) Compila la distribuzione di frequenza con classi di intervallo di ampiezza costante ordinandole a partire dal valore minimo 10 (estremo inferiore incluso nelle classi, ed estremo superiore escluso).
b) Calcola le frequenze cumulate. [a) classe 10-20, …; 5, …; b) 5, 13, …]

177 Riferendoti ai dati non raggruppati in classi dell'esercizio 176, calcola il tempo medio impiegato da ciascun dipendente per recarsi al lavoro e la deviazione standard. [29,64; 11,22]

178 Nella serie seguente sono riportati i prezzi di vendita al kg del Parmigiano-Reggiano in cinque negozi.

Negozio	A	B	C	D	E
Prezzo (euro)	18,84	19,45	16,40	21,55	19,25

Effettua la rappresentazione grafica e calcola il prezzo medio del formaggio. [18,96]

179 Indicata con $\overline{x}$ la media aritmetica dei valori $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, valutare la seguente affermazione: «sommando a ciascuno dei valori x_i la costante c la media aritmetica dei nuovi valori è $\overline{x} + c$».

(*Università di Lecce, Corso di laurea in Matematica, Test di ingresso,* 2000)

180 **TEST** Per i dati seguenti (valori della pressione sanguigna sistolica di 20 pazienti scelti a caso nel corso di una donazione di sangue), costruisci una distribuzione di frequenza usando cinque classi. Descrivi la forma della distribuzione.

135 120 115 132 136 124 119 145 98 110
125 120 115 140 130 105 116 121 125 108

A Simmetrica.
B Deviata verso destra.
C Deviata verso sinistra.
D Uniforme.
E Nessuna delle risposte precedenti.

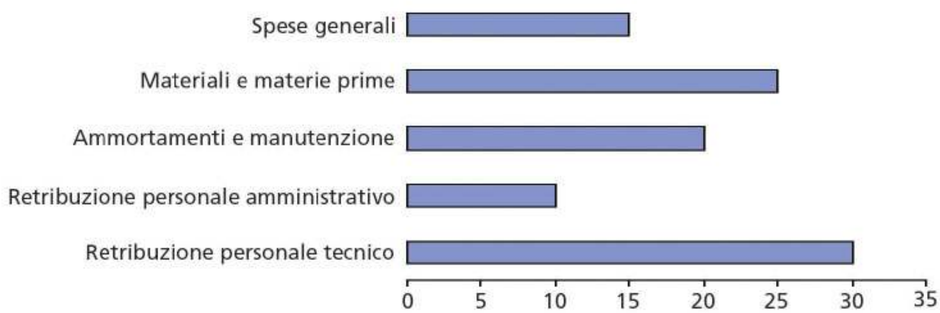
(USA *Florida Gulf Coast University Invitational Mathematics Competition,* 2008)

181 **TEST** Per superare un esame, uno studente deve sostenere tre prove, una pratica, una scritta e una orale. Ed ottenere 60 punti. La valutazione viene effettuata facendo la media aritmetica ponderata dei punteggi ottenuti nelle tre prove, dando ad essi, in ordine, pesi 1, 2 e 3. Uno studente riporta 80 punti nella prova pratica, 44 nella scritta e 66 nella orale. Lo studente:

A non ha superato l'esame in quanto la media è minore di 57.
B non ha superato l'esame in quanto la media è circa 59,17.
C ha superato l'esame in quanto la media è 61.
D ha superato l'esame in quanto la media è maggiore di 70.
E ha superato l'esame in quanto la media è circa 63,33.

(*Università di Udine, Test SSISS Fisico/Informatico/Matematica*, 2007)

182 **TEST** Nell'azienda Ambra i costi e le spese sono distribuiti come è indicato nell'istogramma che segue:



Qual è il rapporto tra le retribuzioni dei tecnici e quelle degli amministrativi?

A $\frac{1}{3}$ B $\frac{3}{1}$ C $\frac{1}{2}$ D $\frac{2}{3}$ E $\frac{2}{1}$

(*Facoltà di Ingegneria, Simulazione test di ingresso*)

183 Un'azienda ripartisce i soldi a disposizione degli stipendi mensili nel seguente modo: 3 migliaia di euro al direttore, 8 ai 4 capi ufficio, 4,8 alle 4 segretarie e 16 ai 16 impiegati.
Calcola la media ponderata, la mediana, la moda e la deviazione standard degli stipendi.

[$\simeq$ € 1272; € 1000; € 1000; € 502,4]

184 Da un'indagine svolta su un campione di 1000 persone e relativa alle ore di navigazione in Internet durante una giornata sono emersi i seguenti dati.

Fascia oraria	Numero di utenti connessi	Tempo di connessione
0-8	80	1 h
8-13	200	1 h
13-20	600	1 h
20-24	120	1 h

a) Rappresenta graficamente i dati, utilizzando la forma che ti sembra più idonea.
b) Riporta in una tabella le frequenze relative.
c) Supponendo che il numero di utenti connessi in una stessa fascia oraria sia equamente distribuito nel tempo, stima quanti utenti navigano in Internet fra le 11 e le 16.

[c) 337]

185 La tabella indica la produzione di uva da vino di quattro aziende agricole e il numero degli addetti.

Azienda agricola	Produzione uva (kg)	Numero addetti
A	7200	6
B	2800	4
C	3600	5
D	1400	3

Determina gli indici di derivazione e di composizione.

[derivazione: 1200; 700; 720; 467 kg/addetto; composizione: 48%; 18,67%; 24%; 9,33%; 33,33%; 22,22%; 27,78%; 16,67%]

186 In base alle rilevazioni satellitari effettuate dal 1995 al 2008, a causa del riscaldamento globale i ghiacci della Groenlandia si sono sciolti secondo l'andamento riportato in tabella.

Quadriennio	Ghiacci sciolti
1996-2000	-360 km^3
2000-2004	-520 km^3
2004-2008	-8000 km^3

Supponendo che la quantità di ghiaccio totale nel 1995 fosse all'incirca di $80 \cdot 10^3$ km^3, determina la diminuzione percentuale dei ghiacci per ogni periodo esaminato e il tasso medio di variazione.

[$-$ 0,45%, $-$ 0,65%, $-$ 1,01%; $-$ 0,7%]

187 Si vuole aprire una videoteca lungo una strada nella quale ci sono quattro palazzi, A, B, C, D, le cui distanze relative sono:

$d(A, B) = 300$ m, $d(B, C) = 100$ m,
$d(C, D) = 150$ m.

Inoltre, il numero di inquilini di ogni palazzo è $n_A = 84$, $n_B = 110$, $n_C = 66$, $n_D = 124$.

a) Determina la posizione ottimale per la videoteca.
b) Lungo la strada c'è un forno, posto fra C e D, a 50 m da D. È stato osservato che gli inquilini del palazzo A per arrivare al forno impiegano 300 s a piedi, 120 s in bici e 100 s in auto. Determina la velocità media di ciascun inquilino di A.

[a) 300 m da A (verso D); b) 2,89 m/s]

188 Abbiamo investito in tre giorni successivi 51 000 euro, 79 000 euro e 20 000 euro nell'acquisto di azioni della Società Gamma. Il costo di acquisto nei tre giorni è stato di 4,25, 3,95 e 4,00 euro. Calcola il costo medio pagato per azione. [4,054]

189 Una fabbrica di giocattoli produce orsetti di peluche e la percentuale di pezzi difettosi prevista è del 6%. Si estrae un campione di 80 elementi e si rilevano che gli orsetti con difetto nel colore e nelle cuciture sono 6. Determina se il campione estratto si può ritenere compreso nell'intervallo della percentuale della popolazione a un livello di fiducia del 95%. Determina poi l'intervallo di fiducia della popolazione utilizzando la frequenza del campione.

[sì:]0,0080; 0,1120[;]0,0173; 0,1327[]

190 Tre condotte di acqua, con diametro rispettivamente di 12, 18 e 21 cm, confluiscono in un nodo dal quale devono partire tre tubi aventi uguale diametro. Calcola il diametro che questi tubi devono avere.

[17,41 cm]

191 Gli studenti di una classe sono stati suddivisi secondo il tempo settimanale dedicato allo sport.

Numero ore	Numero studenti
0-2	6
2-3	8
3-4	6
4-5	2
oltre 5	2

Ponendo la chiusura dell'ultima classe a 7, calcola la media aritmetica, la mediana e la moda.

[2,83; 2,813; classe modale 2-3]

192 Si vuole stimare il tempo medio che impiega una corriera di linea per collegare due località. Il tempo impiegato per detto servizio è una grandezza gaussiana e si è rilevato che in 20 giorni la media è stata di 24 minuti. Determina un intervallo di confidenza della media a livello di confidenza del 99%, sapendo che da precedenti osservazioni la deviazione standard della popolazione è di 5 minuti.

[]21,12; 26,88[]

193 La tabella illustra i numeri indice della produzione di energia elettrica con base 2007.

Anno	2006	2007	2008	2009	2010
Numero indice	98,70	100,00	102,34	107,65	105,80

a) Trasforma gli indici a base fissa 2007 in indici a base mobile.
b) Trasforma gli indici a base fissa 2007 in indici a base fissa 2006.
[a) n.d.; 101, 32; 102, 34; 105, 19; 98, 28; b) 100; 101, 32; 103, 69; 109, 07; 107, 19]

194 La tabella illustra le ordinazioni di un'impresa, ripartite secondo l'importo in euro.

Classe di ordinazione	Numero di ordinazioni	Totale ricavo ordinazioni
0-500	25	8500
500-1000	15	13 000
1000-1500	10	14 000
1500-2500	8	18 400
oltre 2500	6	16 000

Costruisci l'area di concentrazione e calcola l'indice di concentrazione. [$R = 39,86\%$]

195 Un grossista ha acquistato patate a buccia rossa per 200 euro al prezzo di 0,25 euro al kilogrammo e patate a buccia bianca per 300 euro al prezzo di 0,20 euro al kilogrammo. Calcola il costo medio di un kilogrammo di patate. [0, 217 euro]

196 Un gruppo di 1500 studenti partecipa a una selezione di atletica leggera sui 100 m piani. Si osserva che la distribuzione dei tempi ottenuti è approssimativamente gaussiana, con media $t_M = 15{,}2$ s e deviazione standard $\sigma = 1{,}7$ s. Quanti ragazzi hanno corso ottenendo un tempo compreso tra 13,5 s e 16,9 s? Quanti hanno impiegato meno di 11,8 s? Quanti hanno impiegato più di 20,3 s? [1024; 34; 2]

197 Acquistando una partita di merce un grossista ha avuto uno sconto del 5%, inoltre ha avuto sul netto uno sconto del 3% quale premio fedeltà e, infine, uno sconto del 2% sul netto per pagamento in contanti. Determina il tasso medio di sconto. [3, 34%]

198 Due corpi hanno la stessa massa m e velocità diverse v_1 e v_2. Vogliamo calcolare quale velocità v dovrebbero avere entrambi affinché la somma delle loro energie cinetiche rimanga invariata. Quale media possiamo utilizzare fra v_1 e v_2 per trovare v? Motiva la tua risposta.
(L'energia cinetica si calcola con la formula $E_c = \frac{1}{2} mv^2$.)

199 Relativamente ai dipendenti di una ditta, i giorni di assenza in un anno per malattia con durata non superiore a sei giorni sono distribuiti nel modo seguente.

Numero giorni assenza	Numero casi
1	12
2	14
3	24
4	10
5	8
6	2

Costruisci l'area di concentrazione e calcola l'indice di concentrazione. [$R = 25,04\%$]

200 Una popolazione di 10 000 insetti dopo sei mesi è diventata di 13 000 insetti. Determina il tasso mensile medio di accrescimento della popolazione e, in base a tale tasso, il valore della popolazione dopo tre mesi. [4, 47%; 11402]

201 A una prova vengono attribuiti punteggi in quindicesimi e risulta superata con almeno un punteggio di 10. Abbiamo i seguenti dati relativi a 40 candidati che hanno superato la prova.

Punteggio	10	11	12	13	14	15
Candidati	6	14	12	4	2	2

a) Effettua la rappresentazione grafica.
b) Determina il punteggio medio, la mediana e la moda.
c) Calcola la deviazione standard e il coefficiente di variazione.
d) Determina la percentuale dei candidati che hanno ottenuto un punteggio superiore a quello medio.
[b) 11,7; 11, 5; 11; c) 1, 27; 10, 9%; d) 50%]

202 Calcola il tasso di variazione della vendita di acqua minerale in cinque anni consecutivi, presso un negozio di alimentari, spiegando perché si deve applicare la media geometrica.

Anno	Consumo (litri)
2006	480
2007	520
2008	505
2009	515
2010	528

[2,4%]

203 Secondo una recente statistica, in Italia una persona ogni 76 è allergica alle fragole e, tra quelli che lo sono, 2 su 3 sono donne. Sulla base di queste informazioni, e supponendo che in Italia il numero di donne sia uguale a quello degli uomini, si può concludere che è allergico alle fragole un uomo ogni X uomini. Determinare X.

(*Olimpiadi di Matematica, Gara di 2° livello,* 2004)

[114]

204 **TEST** Uno studente universitario ha superato un certo numero di esami, riportando la media di 23. Dopo aver superato un altro esame, la sua media scende a 22,25. Sapendo che il voto di ciascun esame è un numero intero compreso fra 18 e 30 inclusi, che voto ha riportato lo studente all'ultimo esame?

A 18 **B** 19 **C** 20 **D** 21 **E** 22

(*Olimpiadi di Matematica, Gara di 2° livello,* 2007)

205 In una fabbrica di automobili sono state prodotte 800 automobili in 4 modelli. Completa la seguente tabella.

Tipo di auto	Quantità	Percentuale
A	50	…
B	…	25%
C	250	…
D	…	…
Totale	…	

a) Effettua la rappresentazione grafica.
b) Individua il tipo di auto che rappresenta la moda.
c) Calcola i rapporti di coesistenza fra i vari tipi di auto e quello che rappresenta la moda.

[b) D; c) 16,7%; 66,7%; 83,3%]

206 The following frequency distribution gives the results for a sample of families living in a large apartment complex, where x represents the number of children in a family.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	8	11	23	21	13	7	2

a) Construct a histogram, and describe the shape of the distribution.
b) Find the median and mode.
c) Find the mean and standard deviation of the distribution.
d) How many children are included in the sample?

(CAN *John Abbott College*, Final Examination, Winter 2001)

$\left[\text{b) median} = 3, \text{ mode} = 2; \text{ c) } M = \frac{219}{85}, \sigma = 1,46; \text{ d) } 219\right]$

REALTÀ E MODELLI

1 **I campionati mondiali di calcio**

Le tabelle riportano i risultati ottenuti dall'Italia nei campionati mondiali di calcio del 1982 e del 2006.

Campionato mondiale 1982	
Partita	**Risultato**
Italia – Polonia	0-0
Italia – Perù	1-1
Italia – Camerun	1-1
Italia – Argentina	2-1
Italia – Brasile	3-2
Polonia – Italia	0-2
Italia – Germania	3-1

Campionato mondiale 2006	
Partita	**Risultato**
Italia – Ghana	2-0
Italia – Stati Uniti	1-1
Repubblica Ceca – Italia	0-2
Italia – Australia	1-0
Italia – Ucraina	3-0
Germania – Italia	0-2
Italia – Francia	1-1 (5-3 ai rigori)

Per il campionato mondiale del 2006, calcola:

- la media dei goal fatti e dei goal subìti durante il campionato, esclusi i goal ai rigori;
- lo scarto semplice medio dei goal fatti;
- la deviazione standard dei goal fatti.

Confrontando i due campionati mondiali:

- in quale campionato l'Italia ha subìto in media più goal?
- In quale campionato è migliore il rapporto fra goal fatti e goal subìti?

2 **I biglietti del treno**

Anno	Milano-Roma	Milano-Bologna
2005	€ 46,48	€ 22,72
2006	€ 46,48	€ 22,72
2007	€ 51,00	€ 26,00
2008	€ 56,10	€ 28,50
2009	€ 75,10	€ 37,10
2010	€ 89,00	€ 41,00

Dal 2005 al 2010 i biglietti dei treni Eurostar Italia hanno subìto degli incrementi, come risulta dai prezzi applicati sulle tratte Milano-Roma e Milano-Bologna riportati nella tabella a lato.
Calcola:

- i numeri indice a base fissa con base anno 2008;
- i numeri indice a base mobile.

Sulla base dei risultati ottenuti rispondi alle seguenti domande:

- il costo del biglietto è aumentato maggiormente nella tratta Milano-Roma o Milano-Bologna tra il 2008 e il 2010?
- in quale anno si è avuto il maggiore aumento rispetto all'anno precedente e in quale delle due tratte?

3 **Quanto vale la condotta?**

Compila, con voti a tua scelta, la pagella di una quarta classe di liceo scientifico. Prevedi venti studenti, dieci materie (italiano, latino, inglese, storia, filosofia, matematica, fisica, scienze, disegno e storia dell'arte, educazione fisica) e il voto di condotta. Attribuisci alle materie voti compresi fra il 4 e il 9; al voto di condotta assegna valori compresi fra il 7 e il 9.

- Stabilisci quale materia ha la media più alta e quale studente ha la media più alta, sia considerando tutti i voti, sia escludendo il voto di condotta.
- Stabilisci quanto influisce in generale il voto di condotta sulla media dei voti (puoi confrontare tutte le medie compresa la condotta con quelle senza condotta).

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Si svolge un'indagine statistica sui turisti che visitano il Museo dell'Accademia di Venezia. Quale delle seguenti modalità deve essere inevitabilmente presentata mediante una seriazione a classi di intervallo?

- **A** Nazione di provenienza.
- **B** Età.
- **C** Numero di musei già visitati nella stessa città.
- **D** Tempo impiegato per la visita.
- **E** Giorni di permanenza a Venezia.

2 Si è rilevato il grado di istruzione di 40 persone.

Grado istruzione	Numero persone
primaria	4
secondaria di I grado	16
secondaria di II grado	12
università	8

Le frequenze relative della tabella sono nell'ordine:

- **A** 0,04; 0,16; 0,12; 0,08.
- **B** 0,01; 0,04; 0,03; 0,02.
- **C** 0,4; 1,6; 1,2; 0,8.
- **D** 0,1; 0,4; 0,3; 0,2.
- **E** 0,25; 1; 0,75; 0,50.

3 Data la successione di valori

1, 13, 11, 5, 5, 7, 5, 9,

quale delle seguenti affermazioni è *esatta*?

- **A** La mediana e la moda hanno lo stesso valore.
- **B** La moda ha un valore maggiore della media aritmetica.
- **C** La moda è inferiore alla mediana che è inferiore, a sua volta, alla media aritmetica.
- **D** La mediana è inferiore alla moda.
- **E** La media aritmetica è inferiore alla mediana.

4 Dati i valori

4, 4, 4, 7, 7, 13,

quale delle seguenti affermazioni è *esatta*?

- **A** La media aritmetica è 7.
- **B** La mediana è 7.
- **C** La moda è 4.
- **D** La media geometrica è 5.
- **E** La media armonica è 5.

5 In un compito in classe si sono registrati i seguenti voti: 6, 7, 5, 4, 9, 4, 8, 6, 6, 7, 6, 5, 7, 6. Quanto vale la moda?

- **A** 4
- **B** 5
- **C** 6
- **D** 7
- **E** 9

6 Le vendite di un'impresa mercantile hanno avuto nel corso di successivi anni un andamento crescente. Le percentuali di incremento sono state: 3%, 4%, 5% e 8%. L'incremento medio è stato:

- **A** il 5%, media aritmetica degli incrementi.
- **B** il 4,5%, valore mediano.
- **C** il 4,68%, valore ottenuto utilizzando la media geometrica.
- **D** il 5,34%, valore ottenuto con la media quadratica.
- **E** il 4,4%, valore ottenuto con la media armonica.

7 Dati i seguenti valori, relativi a più misurazioni di una stessa lunghezza in cm,

10,5, 12,7, 12,0, 11,9 10,9,

quale delle seguenti affermazioni è *errata*?

- **A** Il campo di variazione è 0,4 cm.
- **B** La varianza è 0,632 cm^2.
- **C** Lo scarto semplice medio è 0,72 cm.
- **D** La deviazione standard è 0,795 cm.
- **E** Il coefficiente di variazione è del 6,85%.

QUESITI

8 Spiega come devi procedere per calcolare la media aritmetica dei dati esposti in una serie e in una seriazione. Utilizza il procedimento per calcolare la media aritmetica del prezzo di un prodotto rilevato nei primi 6 mesi di un anno e nel corso dei giorni di un mese.

Mese	Prezzo
gennaio	4,30
febbraio	4,98
marzo	4,62
aprile	4,50
maggio	4,56
giugno	4,40

Prezzo	Giorni
4,45	4
4,47	8
4,51	4
4,52	6
4,53	4
4,54	4

[4,56; 4,50]

9 Dopo aver esposto cosa si intende per rapporto di derivazione, di composizione e di coesistenza, calcola i loro valori utilizzando i seguenti dati (espressi in euro):

reddito di una famiglia	45 000;
consumo beni alimentari	25 000;
consumo beni non alimentari	12 000;
consumo beni non essenziali	5000;
risparmio	3000.

[consumo totale/reddito: 93,33%; …; consumo beni alimentari/consumo totale: 59,52%; …; risparmio/consumi beni non essenziali: 60%; …]

10 Spiega lo scopo che hanno gli indici di variabilità, assoluti e relativi e calcola lo scarto semplice medio e la deviazione standard e il coefficiente di variazione dei valori riportati in tabella, corrispondenti ai tempi impiegati da un mezzo per effettuare le consegne giornaliere in un determinato percorso.

Tempo (minuti)	Frequenza
50-60	4
60-70	8
70-80	6
80-90	2

[7,6; 9; 13,2%]

PROBLEMI

11 Un negozio di alimentari ha rilevato i seguenti dati sul numero dei clienti e sull'incasso giornaliero.

Giorno	lunedì	martedì	mercoledì	giovedì	venerdì	sabato
Numero clienti	21	30	28	27	35	45
Incasso (euro)	320	358	390	320	430	510

a) Calcola il numero medio giornaliero dei clienti e l'incasso medio giornaliero.
b) Determina la spesa media dei clienti per ogni giorno della settimana.

[a) 31; 388; b) 15,24; 11,93; …; 11,33]

12 La seguente tabella mette a confronto il consumo di acqua minerale di una famiglia nel corso dei mesi estivi degli anni 2009 e 2010.

Mese	giugno	luglio	agosto	settembre
Consumo 2009 (litri)	28	52	56	38
Consumo 2010 (litri)	24	48	54	34

a) Calcola le deviazioni standard.
b) Determina i coefficienti di variazione.
c) Confronta gli indici di variabilità e trai una conclusione.

[a) 11,17; 11,75; b) 25,7%; 29,4%]

13 La seguente tabella mostra la composizione degli alunni di una scuola secondaria di I grado, nel corso di cinque anni scolastici, suddivisi per classi.

Anno	Classe 1ª	Classe 2ª	Classe 3ª	Totale
2003/04	53	48	52	153
2004/05	49	52	49	150
2005/06	45	47	48	140
2006/07	38	45	49	132
2007/08	37	37	44	118

Determina:

a) i rapporti di composizione degli iscritti di ogni classe sul totale degli iscritti di ogni anno;
b) i rapporti di coesistenza fra gli alunni delle classi prime e gli alunni delle altre classi;
c) i numeri indice a base fissa 2003/04 e a base fissa 2007/08 per il totale degli iscritti e rappresenta graficamente il loro andamento;
d) i numeri indice a base mobile del totale degli iscritti.

[a) 34,6%; 31,4%; ...; 37,3%; b) 53%; 48,5%; ...; 45,7%; c) base 2003/04: 100,00; 98,04; 91,50; ...; 77,12; base 2007/08: 129,66; 127,12; ...; 100,00; d) n.d.; 98,04; ...; 89,39]

14 Un automobilista percorre in autostrada un terzo del tragitto alla velocità di 80 km/h, un terzo alla velocità di 120 km/h e l'ultimo terzo alla velocità di 100 km/h. Calcola:

a) la velocità media di tutto il tragitto;
b) il tempo complessivo nell'ipotesi che il tragitto sia lungo 144 km;
c) la velocità media nel caso avesse viaggiato per metà del tragitto alla velocità di 80 km/h, per un quarto del tragitto alla velocità di 120 km/h e per l'ultimo quarto alla velocità di 100 km/h;
d) la velocità media nel caso avesse viaggiato per un terzo del tempo complessivo alla velocità di 80 km/h, per un terzo del tempo alla velocità di 120 km/h e per l'ultimo terzo alla velocità di 100 km/h.

[a) 97,3 km/h; b) 1h 28m 48s; c) 92,3 km/h; d) 100 km/h]

15 Si sono eseguite 20 rilevazioni relative al peso in grammi di piccoli cubi di acciaio:

20,4; 21,5; 22,4; 23,3; 21,5; 22,3; 21,5; 23,0; 21,5; 20,9; 22,9; 23,0; 22,0; 21,5; 22,0; 21,4; 22,1; 21,5; 20,8; 22,0.

Raggruppa i dati esposti in sette classi di ampiezza costante 0,5 ordinandole dal valore minimo 20,0 al valore massimo 23,5 ed effettua la rappresentazione grafica. Calcola:

a) il valore medio, la mediana e la moda;
b) la deviazione standard e il coefficiente di variazione;
c) confronta i valori calcolati con quelli che avresti ottenuto direttamente senza raggruppare i pesi in classi.

[a) 21,70; 21,60; classe 21-21,5; b) 0,7730; 3,56%; c) 21,875; 21,75; 21,5; 0,7589]

16 Il consumo di energia elettrica delle imprese artigiane di Porto Tolle nel mese di maggio 2002 ha avuto la seguente distribuzione:

Consumo (kWh)	200 ⊢ 300	300 ⊢ 400	400 ⊢ 500	500 ⊢ 600	600 ⊢ 700
Numero imprese	20	32	14	8	6

a) Effettua la rappresentazione grafica dei dati statistici.
b) Determina le frequenze relative percentuali e quelle cumulate.
c) Calcola la media aritmetica, la mediana e la classe modale.
d) Determina lo scarto semplice medio e la deviazione standard.
e) Determina il coefficiente di variazione e l'indice di concentrazione.

[b) 25%, 40%, …; 25%, 65%, …; c) 385; 364, 1; 300 ⊢ 400; d) 95,5; 117,37; e) 30,49%; 44,67%]

17 Una macchina confeziona riso a cottura rapida in scatole con peso di 1 kg e deviazione standard di 16 g. Si estrae un campione di 65 scatole e il peso medio risulta di 0,992 kg, con deviazione standard di 17 g. Si sa che il peso è una grandezza con distribuzione normale e si vuole determinare a un livello di confidenza del 95%:

a) se il peso medio del campione rientra nell'intervallo della media della popolazione;
b) la stima per intervallo della popolazione, utilizzando i valori del campione.

[a) no;]0,996; 1,004[; b)]0,988; 0,996[]

18 La seguente serie storica mostra l'andamento del numero dei dipendenti di un'impresa nel corso di sei anni.

Anno	Numero dipendenti
2005	84
2006	86
2007	88
2008	97
2009	93
2010	98

a) Effettua la rappresentazione grafica della serie storica.
b) Calcola la media aritmetica e la mediana.
c) Determina il tasso medio di variazione del numero dei dipendenti.
d) Determina lo scarto semplice medio e il coefficiente di variazione.
e) Determina i numeri indice a base fissa con $2005 = 100$.

[b) 91; 90,5; c) 3,13%; d) 5; 5,88%; e) 100; 102,38; …]

19 La seguente tabella mostra il numero di autovetture di proprietà di residenti in un Comune e il numero dei residenti nello stesso Comune.

Anno	Autovetture	Residenti
2006	6932	25 045
2007	8457	26 304
2008	11 302	26 905
2009	13 508	27 002
2010	13 694	27 305

a) Calcola i rapporti di derivazione annui relativi al numero di autovetture per ogni 100 abitanti.
b) Determina i numeri indice a base fissa 2006.
c) Rappresenta graficamente i numeri indice e commenta il loro andamento tenendo presente l'andamento dei rapporti di derivazione calcolati.

[a) 27,68; …; 50,15;
b) autovetture: 100; 122; …; 197,55;
residenti: 100; …; 109,02]

CAPITOLO

β2

٢ [numerazione araba]

२ [numerazione devanagari]

二 [numerazione cinese]

L'INTERPOLAZIONE, LA REGRESSIONE, LA CORRELAZIONE

FATTORI DI RISCHIO I virus sono spesso i responsabili dei nostri malanni. Per indicare la causa presunta di una malattia si parla anche di fattore di rischio…

…com'è possibile cercare eventuali correlazioni tra un fattore di rischio e una malattia?

La risposta a pag. β103

1. CHE COS'È L'INTERPOLAZIONE

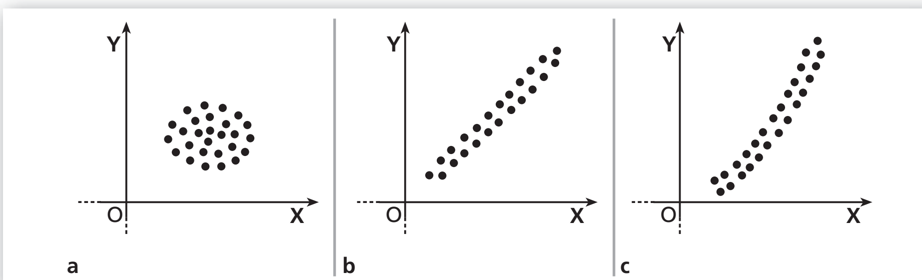
Introduzione

Spesso, in diversi campi scientifici, si deve affrontare il problema di interpretare, valutare e gestire dati ricavati da rilevazioni statistiche o da esperimenti riguardanti un fenomeno. Il problema è piuttosto complesso, mentre noi vogliamo soltanto dare un'idea di come si può affrontarlo e ci limitiamo a casi semplici.
Studiamo problemi che riguardano relazioni fra due sole variabili X e Y, delle quali conosciamo alcune coppie di valori $(x_i; y_i)$, rilevati da un'indagine statistica e che vogliamo interpretare tramite una funzione $y = f(x)$.

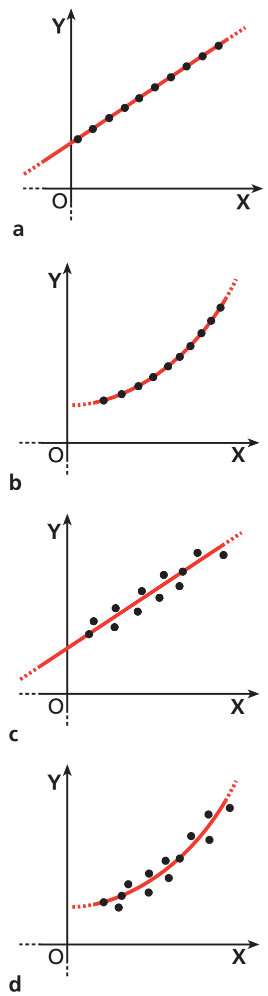
In statistica è usuale indicare con lettere maiuscole le variabili. Indichiamo quindi con X e Y le variabili relative alle coppie osservate $(x_i; y_i)$, mentre denoteremo con x e y le variabili di funzioni che interpretino i dati statistici. Nei grafici useremo X e Y.

L'interpolazione matematica e l'interpolazione statistica

Consideriamo le coppie ordinate di valori $(x_i; y_i)$ e rappresentiamole in un piano cartesiano tramite punti, ottenendo quello che chiamiamo **diagramma a dispersione** o **nuvola di punti** (figura 1).



▲ Figura 1



Vogliamo determinare una funzione matematica, che chiameremo **funzione interpolante**, in grado di rappresentare il fenomeno studiato.

- Se la funzione assume esattamente i valori rilevati, e quindi il suo grafico passa per tutti i punti del diagramma a dispersione, parliamo di **interpolazione *per* punti noti** o **interpolazione matematica** (figure *a* e *b* a lato).
- Se la funzione assume valori «vicini» ai valori rilevati e quindi il suo grafico passa fra i punti del diagramma a dispersione, parliamo di **interpolazione *fra* punti noti** o **interpolazione statistica** (figure *c* e *d* a lato).

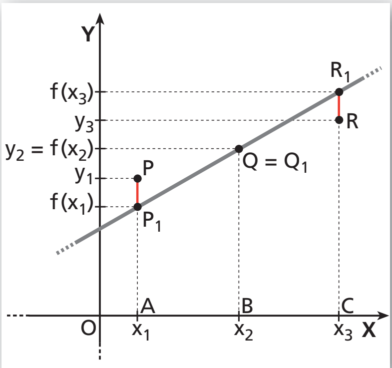
Gli errori di accostamento

Ci occuperemo di interpolazione *fra* punti noti. In questo caso, come abbiamo già detto, la funzione interpolante $y = f(x_i)$ non passa per i punti noti e quindi i valori teorici $f(x_i)$ sono diversi dai corrispondenti valori effettivi y_i ottenuti dalla rilevazione statistica. Chiamiamo **errori di accostamento** le differenze:

$$e_i = y_i - f(x_i).$$

ESEMPIO

Consideriamo un diagramma a dispersione costituito da soli tre punti, $P(x_1; y_1)$, $Q(x_2; y_2)$ e $R(x_3; y_3)$, interpolato da una retta passante fra essi.



In corrispondenza di x_1, l'errore è positivo:

$$e_1 = \overline{PA} - \overline{P_1A} = y_1 - f(x_1) > 0.$$

In corrispondenza di x_2, l'errore è nullo:

$$e_2 = \overline{QB} - \overline{Q_1B} = y_2 - f(x_2) = 0.$$

In corrispondenza di x_3, l'errore è negativo:

$$e_3 = \overline{RC} - \overline{R_1C} = y_3 - f(x_3) < 0.$$

- La retta passa per: $P_1(x_1; f(x_1))$, $Q_1(x_2; f(x_2))$, $R_1(x_3; f(x_3))$.

◀ **Figura 2** **Diagramma a dispersione con rappresentati i segmenti PP_1, QQ_1, RR_1, corrispondenti agli errori di accostamento.**

Gli errori considerati sono anche detti **errori parziali**, per distinguerli dall'**errore totale** che indichiamo con $\boldsymbol{e}$. L'errore totale è la somma di tutti gli errori parziali:

$$\boldsymbol{e = \sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)].}$$

- Il simbolo $\sum_{i=1}^{n}$ si legge «sommatoria per i che va da 1 a n». Con esso indichiamo la somma di n termini, dove l'indice i varia da 1 a n. Per esempio:

$$\sum_{i=1}^{3} e_i = e_1 + e_2 + e_3.$$

ESEMPIO

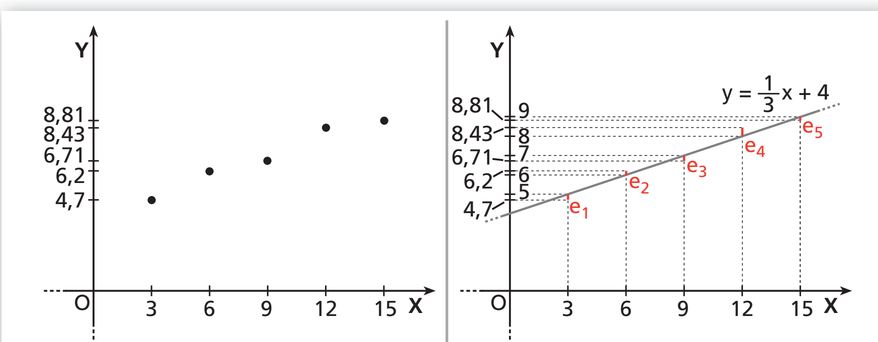
1. Da una rilevazione statistica si sono ottenuti i seguenti valori relativi a due variabili X e Y:

◀ **Tabella 1**

x_i	3	6	9	12	15
y_i	4,7	6,2	6,71	8,43	8,81

Rappresentiamo il diagramma a dispersione (figura 3*a*). Vogliamo interpolare i dati con la funzione $y = \frac{1}{3}x + 4$. Rappresentiamo la retta e segniamo gli errori (figura 3*b*).

◀ **Figura 3**



a. Rappresentazione del diagramma a dispersione.

b. Diagramma a dispersione con retta interpolante e interpretazione grafica degli errori relativi.

I valori $f(x_i)$, relativi alla retta interpolante, sono riportati in tabella 2.

◀ **Tabella 2**

x_i	3	6	9	12	15
$f(x_i)$	5	6	7	8	9

Gli errori parziali indicati in figura sono:

$$e_1 = 4,7 - 5 = -0,3; \qquad e_2 = 6,2 - 6 = 0,2; \qquad e_3 = 6,71 - 7 = -0,29;$$

$$e_4 = 8,43 - 8 = 0,43; \qquad e_5 = 8,81 - 9 = -0,19.$$

L'errore totale è pertanto:

$$e = \sum_{i=1}^{5} e_i = -0,3 + 0,2 - 0,29 + 043 - 0,19 = -0,15.$$

2. Da una rilevazione statistica si sono ottenuti i seguenti valori relativi a due variabili X e Y:

▶ **Tabella 3**

x_i	3	6	9	12	15
y_i	7	4	5,5	11	7,5

Vogliamo interpolare i dati con la funzione $y = \frac{1}{3}x + 4$ vista nell'esempio precedente. Riprendiamo i valori calcolati nell'esempio:

▶ **Tabella 4**

x_i	3	6	9	12	15
$f(x_i)$	5	6	7	8	9

Gli errori parziali sono:

$$e_1 = 7 - 5 = 2;$$

$$e_2 = 4 - 6 = -2;$$

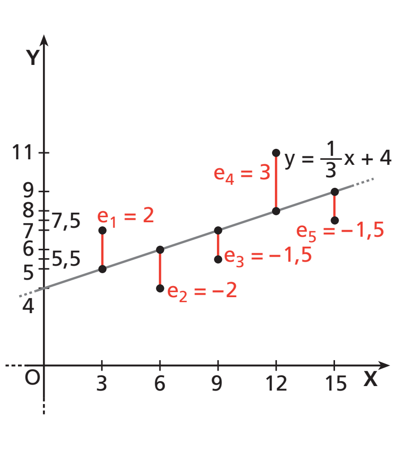
$$e_3 = 5,5 - 7 = -1,5;$$

$$e_4 = 11 - 8 = 3;$$

$$e_5 = 7,5 - 9 = -1,5.$$

L'errore totale è nullo:

$$e = \sum_{i=1}^{5} e_i = 2 - 2 - 1,5 + 3 - 1,5 = 0.$$



▶ **Figura 4** Diagramma a dispersione con retta interpolante e rappresentazione grafica degli errori relativi.

● L'errore totale è zero perché gli errori positivi sono stati compensati da quelli negativi, non perché non ci sono errori. Questo si verifica sempre quando la retta interpolante passa per il punto avente come coordinate la media delle x_i e la media delle y_i.

Se confrontiamo i risultati ottenuti nei due esempi, potremmo pensare che la seconda interpolazione sia migliore della prima, perché il suo errore totale è nullo.

Tuttavia gli errori parziali sono più consistenti nel secondo esempio che nel primo e anche dal confronto dei due diagrammi notiamo che l'interpolazione migliore è la prima. Questo ci fa pensare che la valutazione dell'errore totale non sia il criterio migliore per capire la validità di una interpolazione. Possiamo utilizzare allora altri criteri i quali evitano che un errore positivo venga annullato da uno negativo.

Il metodo che segue, invece di considerare la somma degli errori parziali, considera la somma dei quadrati degli errori parziali.

2. IL METODO DEI MINIMI QUADRATI

La condizione di accostamento

Date due variabili X e Y, delle quali conosciamo n coppie $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, …, $(x_n; y_n)$, sia $y = f(x)$ la funzione con la quale intendiamo interpolare nel miglior modo possibile i dati. L'espressione analitica di f inizialmente non è nota, quindi contiene, oltre alla variabile x, anche dei parametri, che indichiamo con a, b, c, … Per esempio, se il suo grafico è una retta, f ha equazione $y = ax + b$. Vogliamo determinare i valori a, b, c, … in modo che l'interpolazione sia giudicata la migliore in base a un criterio che chiameremo *condizione di accostamento*.

DEFINIZIONE

Condizione di accostamento del metodo dei minimi quadrati

Con il metodo dei minimi quadrati scegliamo i valori numerici dei parametri della funzione interpolante in modo che risulti minima la funzione S somma dei quadrati degli errori relativi e_i:

$$S = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2.$$

È proprio determinando il minimo della funzione

$$S(a, b; c; \ldots) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2$$

che si determinano i valori dei parametri a, b, c, … presenti nell'espressione della funzione interpolante.

La funzione S dipende dai parametri a, b, c, …, ma non da x, in quanto le coppie $(x_i; y_i)$ sono valori fissati e non indicano variabili.
Per esempio, se la funzione approssimante è una retta $y = ax + b$, S dipende da a e b.

L'indice quadratico relativo

Determinata la funzione interpolante, si può poi stimare quanto i valori teorici si avvicinano a quelli rilevati, mediante degli **indici di scostamento**. Più un indice di questo tipo assume valore piccolo, tanto migliore è l'accostamento e la funzione è idonea a rappresentare il fenomeno. Un indice utilizzato è l'**errore standard**

$$E = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2}{n}},$$

che ha tuttavia il difetto di essere un indice assoluto, in quanto non tiene conto del fatto che i valori di y_i e $f(x_i)$ siano grandi o piccoli. Di solito si preferisce l'**indice quadratico relativo**, dato dal rapporto fra l'errore standard e la media fra i valori teorici:

$$\boldsymbol{I = \frac{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2}{n}}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}}}.$$

Un valore di I uguale a 0,3 può essere considerato accettabile in un problema, mentre può essere inadeguato in un altro problema dove la precisione dell'interpolazione deve essere più alta.

A seconda del problema a cui si riferiscono i dati, uno stesso valore di I può indicare una interpolazione più o meno accettabile.

Di solito supporremo che una funzione fornisca una buona interpolazione se risulta $I \leq 0{,}1$. In ogni caso l'indice è particolarmente utile per confrontare la bontà dell'accostamento, rispetto agli stessi dati, di funzioni interpolanti diverse.

Funzioni interpolanti di tipo lineare

Se la funzione interpolante è rappresentata da una retta di equazione $y = ax + b$, la funzione da minimizzare è $S(a; b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$.

Ricorda che:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}.$$

Si può dimostrare che la retta interpolante ha equazione

$$\boldsymbol{y - \overline{y} = a(x - \overline{x})},$$

ossia è una retta passante per il punto$(\overline{x}; \overline{y})$, che viene detto **baricentro** della distribuzione.

Si può anche dimostrare che il valore di a della retta dei minimi quadrati si può calcolare con la formula:

$$\boldsymbol{a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i' y_i'}{\sum_{i=1}^{n} x_i'^2}},$$

dove $\boldsymbol{x_i' = x_i - \overline{x}}$ e $\boldsymbol{y_i' = y_i - \overline{y}}$, ossia x_i' e y_i' rappresentano, per ogni variabile, gli scarti dei valori dati rispetto al valore medio.

ESEMPIO

Il fatturato di un'industria, relativo agli anni dal 2006 al 2010, è il seguente.

▶ Tabella 5

Anni	2006	2007	2008	2009	2010
Migliaia di euro	3456	3769,5	4126,5	4182	4408,5

Determiniamo la retta che interpola questi dati. Dopo aver calcolato $\overline{x}$ e $\overline{y}$,

Per brevità, indichiamo $\sum_{i=1}^{n}$ con $\sum$.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{15}{5} = 3, \qquad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{19942{,}5}{5} = 3988{,}5,$$

Indichiamo gli anni, a partire dal 2006, rispettivamente con 1, 2, 3, 4, 5.

compiliamo le colonne di x_i' e y_i' e poi quelle di $x_i'y_i'$ e $(x_i')^2$.

	x_i	y_i	$x_i' = x_i - \overline{x}$	$y_i' = y_i - \overline{y}$	$x_i'y_i'$	$(x_i')^2$
	1	3456	−2	−532,5	1065	4
	2	3769,5	−1	−219	219	1
	3	4126,5	0	138	0	0
	4	4182	1	193,5	193,5	1
	5	4408,5	2	420	840	4
$\sum$	15	19942,5			2317,5	10
	$\overline{x} = 3$	$\overline{y} = 3988{,}5$				

▶ Tabella 6

I valori ottenuti permettono di calcolare a:

$$a = \frac{\sum x_i' y_i'}{\sum x_i'^2} = \frac{2317,5}{10} = 231,75.$$

Essendo l'equazione della retta interpolante $y - \overline{y} = a(x - \overline{x})$, sostituendo otteniamo $y - 3988,5 = 231,75 \cdot (x - 3) \quad \rightarrow \quad y = 231,75x + 3293,25$.

Per calcolare I, completiamo la tabella con i valori di $f(x_i)$ e gli errori.

	Anni x_i	Fatturati y_i	$f(x_i)$	$y_i - f(x_i)$	$[y_i - f(x_i)]^2$
	1	3456	3525	−69	4761
	2	3769,5	3756,75	12,75	162,56
	3	4126,5	3988,5	138	19044
	4	4182	4220,25	−38,25	1463,06
	5	4408,5	4452	−43,5	1892,25
$\sum$	15	19942,5	19942,5		27322,87

◀ **Tabella 7**

Con i valori calcolati ricaviamo l'indice di scostamento:

$$I = \frac{\sqrt{\dfrac{\sum [y_i - f(x_i)]^2}{n}}}{\dfrac{\sum f(x_i)}{n}} = \frac{\sqrt{\dfrac{27322,87}{5}}}{\dfrac{19942,5}{5}} \simeq 0,01853 < 0,1.$$

I è minore di 0,1: la funzione dà una buona interpolazione dei dati.

● Questa relazione ci dice che il fatturato y in media aumenta ogni anno di 231,75 migliaia di euro e che all'inizio, al tempo zero, cioè nel 2005, il valore del fatturato era di 3293,25 migliaia di euro.

3. LA DIPENDENZA, LA REGRESSIONE, LA CORRELAZIONE

IN PRATICA
▶ **Videolezione 31**

La dipendenza fra due caratteri

Una tabella a doppia entrata permette di leggere quante unità statistiche possono essere considerate contemporaneamente sotto due modalità.

Consideriamo il tipo di letture preferite da un gruppo di ragazzi e ragazze (tabella 8).

Sesso \ Letture	Romanzo	Saggio	Giallo	Totale
Maschi	20	5	25	50
Femmine	45	10	15	70
Totale	65	15	40	120

◀ **Tabella 8**

● L'assenza di indipendenza viene indicata come esistenza di dipendenza, ma più correttamente si dovrebbe parlare di *connessione* o *interdipendenza*.

Possiamo costruire una tabella teorica nella quale si ha perfetta indipendenza. Ogni frequenza interna o congiunta si ottiene moltiplicando il totale della sua riga per il totale della sua colonna e dividendo poi il prodotto per il totale delle osservazioni (tabella 9).

▶ Tabella 9

Sesso \ Letture	Romanzo	Saggio	Giallo	Totale
Maschi	27,08	6,25	16,67	50
Femmine	37,92	8,75	23,33	70
Totale	65	15	40	120

La differenza tra una frequenza assoluta rilevata e la corrispondente frequenza assoluta teorica si chiama **contingenza**.
Per comodità esponiamo il loro valore nella tabella 10.

▶ Tabella 10

Sesso \ Letture	Romanzo	Saggio	Giallo
Maschi	−7,08	−1,25	8,33
Femmine	7,08	1,25	−8,33

Sui valori delle contingenze si basa l'indice χ^2 (**chi quadrato**) che è la somma dei rapporti fra il quadrato di ogni contingenza e la relativa frequenza teorica. Nel nostro caso abbiamo:

$$\chi^2=\frac{50{,}1264}{27{,}08}+\frac{1{,}5625}{6{,}25}+\frac{69{,}3889}{16{,}67}+\frac{50{,}1264}{37{,}92}+\frac{1{,}5625}{8{,}75}+\frac{69{,}3889}{23{,}33}\simeq 10{,}7383.$$

χ^2 vale zero nel caso di perfetta indipendenza, essendo nulle tutte le contingenze, ma in generale dipende dalle frequenze e cresce al crescere delle osservazioni. Si utilizza il seguente indice, detto **χ^2 normalizzato**:

$$C=\frac{\chi^2}{N\cdot(h-1)},$$

dove N è il numero totale delle osservazioni e h è il valore minore tra il numero delle righe e delle colonne. Si ha che $0 \le C \le 1$. Nel nostro esempio:

$$C=\frac{10{,}7383}{120\cdot(2-1)}=0{,}089.$$

● Un altro indice utilizzato è l'indice quadratico medio di contingenza:

$$I_c=\sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2+N}}=\sqrt{\frac{10{,}7383}{10{,}7383+120}}=0{,}287.$$

La regressione

La **teoria della regressione** si occupa della determinazione di una funzione fra due variabili statistiche adatta a descriverne il possibile legame. Ci limiteremo a considerare la **regressione lineare**. Date due variabili statistiche X e Y, possiamo cercare la retta di **regressione di Y su X** oppure la retta di **regressione di X su Y**, ossia della variabile Y rispetto alla variabile X o viceversa.

● **L'origine del termine regressione**
Il termine «regressione» venne usato per la prima volta dall'inglese Francis Galton (1822-1911) in uno studio sulla relazione intercorrente fra la statura dei padri e quella dei figli. Egli notò che, in media, i figli di un padre basso sono più alti del padre, mentre i figli di un padre alto sono più bassi del padre. C'è quindi una tendenza, che egli chiamò *regressione*, della statura dei figli ad avvicinarsi al valor medio della statura.

ESEMPIO

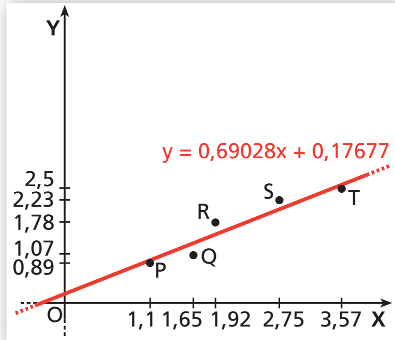
Nella tabella 11 sono riportati il reddito di cinque dipendenti di un'industria e le relative spese per le ferie.

▶ Tabella 11

Dipendenti	Reddito mensile (in migliaia di euro)	Spese annuali per le ferie
Annovi	1,1	0,89
Bertini	1,65	1,07
Cocci	1,92	1,78
Dondi	2,75	2,23
Ellani	3,57	2,5

Chiamiamo X la variabile relativa al reddito e Y quella relativa alle spese. Con il metodo dei minimi quadrati possiamo determinare la retta di regressione di Y rispetto a X. Svolgendo i calcoli si ottiene, mediante il baricentro della distribuzione:

$$y - 1{,}694 = 0{,}69028(x - 2{,}198),$$
$$y = 0{,}69028x + 0{,}17677.$$

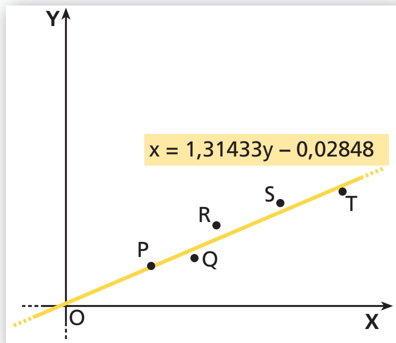


◄ **Figura 5** Diagramma a dispersione e retta di regressione di Y su X.

Analogamente, possiamo determinare la retta di regressione di X su Y. Svolti i calcoli si ottiene:

$$x = 1{,}31433y - 0{,}02848.$$

Confrontando le equazioni delle due rette di regressione notiamo che passano entrambe per lo stesso punto di coordinate (2,198; 1,694), che è proprio il baricentro della distribuzione.



◄ **Figura 6** Diagramma a dispersione e retta di regressione di X su Y.

● Nell'esempio , il coefficiente di regressione di Y su X è quindi 0,69028.

● Se il reddito aumenta di 100 euro, si può pensare che le spese per le ferie aumentino di 69 euro.

● A un aumento per le spese per ferie di 100 euro, si può collegare un aumento di stipendio di 131 euro.

● I risultati ottenuti esprimono delle *tendenze e non* dei *rapporti causa-effetto*. Se aumentiamo la corrente elettrica che circola in una lampadina, aumenta la luce prodotta. Se invece aumentiamo lo stipendio, l'aumento delle spese per le ferie non è un effetto sicuro.

I coefficienti di regressione

Il coefficiente angolare m della prima retta dell'esempio viene detto **coefficiente di regressione di Y su X** e indica di quanto varia la variabile Y al variare di una unità di X.
Nell'esempio, si può ipotizzare che se il reddito mensile aumenta di 1 euro, la predisposizione delle famiglie è di aumentare di circa 0,69 euro le spese per le ferie.
Analogamente, il coefficiente m_1 della seconda retta dell'esempio viene detto **coefficiente di regressione di X su Y** e indica di quanto varia X al variare di una unità di Y.
Nell'esempio, si può pensare che se le spese per ferie sono aumentate di 1 euro, le famiglie hanno avuto un aumento di reddito di 1,31 euro.

I coefficienti di regressione sono coefficienti angolari di rette: se sono positivi indicano che le rette hanno andamento crescente e se sono negativi indicano un andamento decrescente. Nel nostro esempio, questo fa capire che se aumenta il reddito, aumentano le spese per le ferie e, viceversa, se aumentano le spese per le ferie vuol dire che è aumentato lo stipendio.

In generale:
- se $m > 0$, Y aumenta all'aumentare di X;
- se $m < 0$, Y diminuisce all'aumentare di X;
- se $m = 0$, Y non dipende da X.

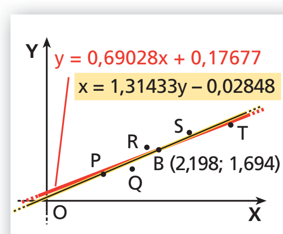
Affermazioni analoghe valgono per il coefficiente m_1 di regressione di X su Y.

La regressione e l'angolo fra le rette di regressione

ESEMPIO

Riprendiamo le due rette dell'esempio precedente e rappresentiamole in uno stesso riferimento cartesiano (figura 7). Notiamo che le due rette non coincidono.

▼ **Figura 7** Le due rette $y = 0{,}69028x + 0{,}17677$ e $x = 1{,}31433y - 0{,}02848$ rappresentate nello stesso sistema cartesiano.



In generale, considerate le due rette di regressione di Y su X e di X su Y, rispetto all'angolo che si forma fra di esse si può dire che:

- più l'angolo è piccolo, migliore è il grado di approssimazione dei dati da parte delle due rette;
- se l'angolo è retto, non c'è dipendenza lineare fra le due variabili;
- se l'angolo è nullo, vale a dire se le due rette coincidono, diciamo che la regressione è **perfetta**; in questo caso le coppie di valori dei dati appartengono tutti alla retta.

Consideriamo per questo ultimo caso un esempio.

ESEMPIO

Abbiamo la situazione espressa in tabella relativa al prezzo di un prodotto e alla sua richiesta sul mercato.

▶ Tabella 12

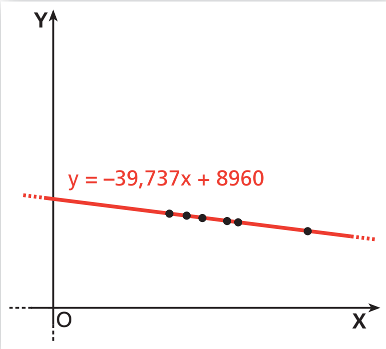
Prezzo (in euro)	X	28	31,2	36	42	44,8	61,6
Numero articoli richiesti	Y	7840	7672	7560	7280	7168	6496

Determiniamo le rette di regressione con il metodo dei minimi quadrati. Otteniamo, con il solito procedimento:

$$y - 7336 = -39{,}737 \cdot (x - 40{,}6),$$

$$x - 40{,}6 = -0{,}025 \cdot (y - 7336).$$

Le rappresentiamo in un grafico (figura 8). Notiamo che le rette coincidono, quindi la regressione è perfetta. Notiamo inoltre che le coppie di valori dati in tabella appartengono tutti alla retta, che esprime il legame tra domanda e prezzo in maniera perfetta.



▶ **Figura 8** Diagramma a dispersione e rette di regressione sovrapposte di Y su X e di X su Y.

La correlazione

Finora abbiamo interpretato dati forniti da indagini statistiche o esperimenti su due variabili X e Y, ricercando una funzione in grado di rappresentare il legame di dipendenza fra questi dati. Ora ci poniamo ancora il problema di stabilire se fra i valori dati esiste un legame, ma, in caso affermativo, cerchiamo di esprimerlo non più come una funzione, ma con un numero che misuri quanto una variabile dipende dall'altra.
Di questo problema si occupa la **teoria della correlazione**.

● Ci limitiamo a considerare una dipendenza lineare.

La covarianza

Date n coppie $(x_i; y_i)$ di una rilevazione statistica su due variabili X e Y, calcolate le medie

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} \text{ e } \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n},$$

ricaviamo tutti gli scarti $\boldsymbol{x'_i = x_i - \overline{x}}$ e $\boldsymbol{y'_i = y_i - \overline{y}}$ dai valori medi $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

Diamo il nome di **covarianza di *X* e di *Y*** alla media dei prodotti degli scarti, ossia alla quantità $\sigma_{XY} = \frac{\sum x_i' y_i'}{n}$.

ESEMPIO

Le rilevazioni riguardanti due variabili X e Y sono riportate nella tabella 13.

◀ Tabella 13

X	6	6	7	7	8	8	9	9	2	2
Y	4	5	4	5	4	5	4	5	1	2
X	3	3	4	4	3	3	4	4	6	7
Y	1	2	1	2	4	5	4	5	2	1

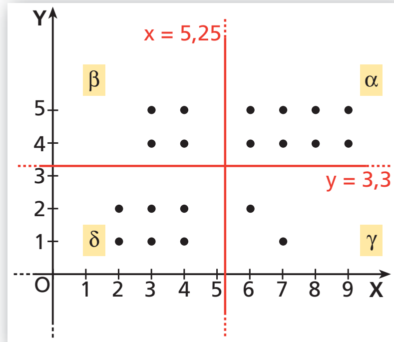
Determiniamo la covarianza di X e di Y. Calcoliamo gli scarti e i loro prodotti dopo aver determinato i valori medi:

$$\bar{x} = \frac{105}{20} = 5,25 \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{66}{20} = 3,3.$$

◀ Tabella 14

	x_i	y_i	x_i'	y_i'	$x_i'y_i'$
	6	4	0,75	0,7	0,525
	6	5	0,75	1,7	1,275
	7	4	1,75	0,7	1,225
	7	5	1,75	1,7	2,975
	8	4	2,75	0,7	1,925
	8	5	2,75	1,7	4,675
	9	4	3,75	0,7	2,625
	9	5	3,75	1,7	6,375
	2	1	−3,25	−2,3	7,475
	2	2	−3,25	−1,3	4,225
	3	1	−2,25	−2,3	5,175
	3	2	−2,25	−1,3	2,925
	4	1	−1,25	−2,3	2,875
	4	2	−1,25	−1,3	1,625
	3	4	−2,25	0,7	−1,575
	3	5	−2,25	1,7	−3,825
	4	4	−1,25	0,7	−0,875
	4	5	−1,25	1,7	−2,125
	6	2	0,75	−1,3	−0,975
	7	1	1,75	−2,3	−4,025
$\sum$	105	66	0	0	32,5

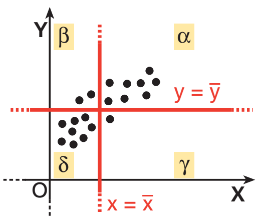
Otteniamo $\sigma_{XY} = \frac{\sum x'_i y'_i}{n} = \frac{32,5}{20} = 1,625$.
La covarianza è positiva.
In questo caso osserviamo che le rette $x = \overline{x}$ e $y = \overline{y}$ dividono il diagramma a dispersione in quattro regioni che chiamiamo rispettivamente $\alpha, \beta, \delta, \gamma$.
Dalla figura possiamo rilevare che le regioni opposte α e δ contengono più punti e le altre β e γ meno punti.



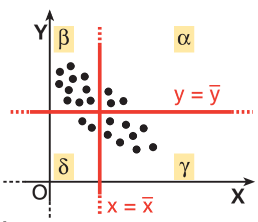
In generale, è vero quanto segue.

- Se $\sigma_{XY} > 0$, nelle regioni α e δ in cui il diagramma a dispersione è diviso dalle rette $x = \overline{x}$ e $y = \overline{y}$, abbiamo più punti che nelle altre due regioni β e γ (figura *a*). Questo significa che all'aumentare di una variabile, aumenta in media anche l'altra.
- Se $\sigma_{XY} < 0$, nelle regioni β e γ abbiamo più punti che nelle altre due regioni α e δ (figura *b*). All'aumentare di una variabile, diminuisce in media l'altra.
- Se $\sigma_{XY} = 0$, i valori x_i sono uguali a $\overline{x}$ o i valori di y_i sono uguali a $\overline{y}$. Tutti i punti stanno sulle rette $x = \overline{x}$ e $y = \overline{y}$ (figura *c*). Fra le due variabili non c'è dipendenza.

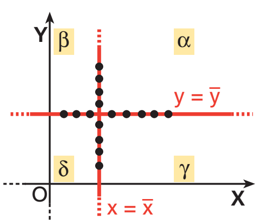
► **Figura 9** Diagramma a dispersione e sua suddivisione in quattro regioni $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ da parte delle rette $x = \overline{x}$ e $y = \overline{y}$.



a. $\sigma_{XY} > 0$.



b. $\sigma_{XY} < 0$.



c. $\sigma_{XY} = 0$.

Il coefficiente di Bravais-Pearson

Per misurare il grado di dipendenza delle variabili X e Y, usiamo un indice che prende il nome di **coefficiente di correlazione lineare di Bravais-Pearson** e che indichiamo con la lettera r. Questo indice vale:

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}, \quad \text{cioè} \quad r = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2 \sum (y_i - \overline{y})^2}}.$$

Ricordiamo che con σ_{XY} abbiamo indicato la covarianza, mentre:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n}} \quad \text{e} \quad \sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \overline{y})^2}{n}}$$

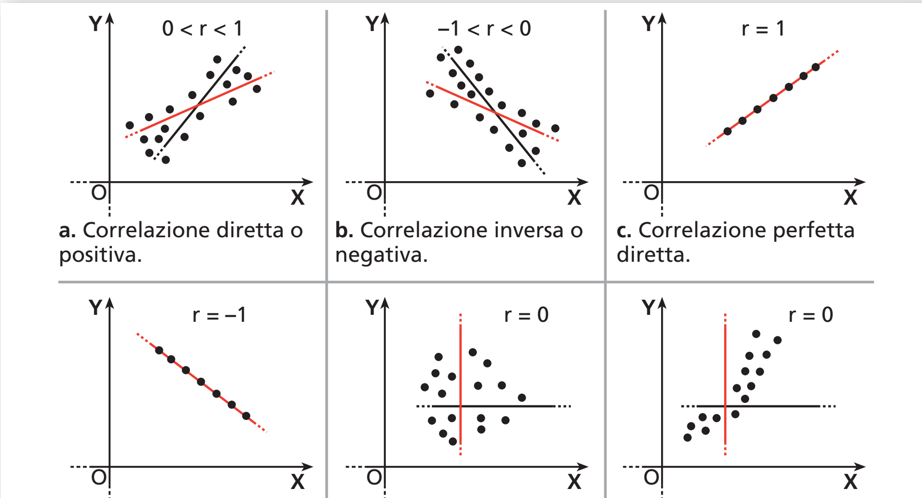
sono le **deviazioni standard** di X e di Y.

Sul coefficiente, o indice, di correlazione di Bravais-Pearson possiamo fare le seguenti considerazioni.

- Il coefficiente di correlazione è un numero senza dimensioni, che non risente perciò delle unità di misura di X e di Y.
- È un numero compreso tra -1 e $+1$.
- Se $0 < r < 1$, la correlazione è **diretta** o **positiva**, cioè all'aumentare di X aumenta in media anche Y.
- Se $-1 < r < 0$, la correlazione è **inversa** o **negativa**, cioè all'aumentare di X diminuisce in media Y.
- Se $r = 1$, la correlazione è **perfetta diretta**, cioè tutti i punti del diagramma a dispersione appartengono alla retta di regressione che è crescente.
- Se $r = -1$, la correlazione è **perfetta inversa**, cioè tutti i punti del diagramma a dispersione appartengono alla retta di regressione che è decrescente.
- Se $r = 0$, non esiste correlazione lineare.

● Dire che non c'è correlazione lineare non vuol dire che non ci sia correlazione; può esistere ma di altro tipo.

Graficamente abbiamo le situazioni illustrate nella figura 10.



a. Correlazione diretta o positiva. **b.** Correlazione inversa o negativa. **c.** Correlazione perfetta diretta. **d.** Correlazione perfetta inversa. **e.** Non esiste correlazione lineare. **f.** Non esiste correlazione lineare.

◄ **Figura 10** Rappresentazione di diagrammi a dispersione, con indicazioni delle rette di regressione di Y su X (in rosso) e di X su Y (in nero) e degli indici di correlazione r.

Nei casi c e d le due rette coincidono.

- Valutiamo il prodotto $m \cdot m_1$ dei coefficienti di regressione visti in precedenza. Risulta:

$$m \cdot m_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \cdot \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (y_i - \bar{y})^2} =$$

$$= \frac{\left[\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right]^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2} = r^2.$$

Quindi, se conosciamo i coefficienti di regressione, possiamo più semplicemente calcolare il coefficiente di correlazione con la formula:

$$\boldsymbol{r = \pm\sqrt{m \cdot m_1}}.$$

r va scelto con il segno + se i due coefficienti sono positivi, con il segno − se i due coefficienti sono negativi. Si ricava inoltre che:

$$\boldsymbol{m = r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}} \text{ e } \boldsymbol{m_1 = r\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}}.$$

La correlazione in tabelle a doppia entrata

Le notazioni per una tabella a doppia entrata sono riportate nella tabella 15.

◄ **Tabella 15**

X \ Y	y_1	y_2	…	y_j	…	…	**Totale**
x_1	f_{11}	f_{12}	…	f_{1j}	…	…	R_1
x_2	f_{21}	f_{22}	…	f_{2j}	…	…	R_2
…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	f_{i1}	f_{i2}	…	f_{ij}	…	…	R_i
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
Totale	C_1	C_2	…	C_j	…	…	N

Calcoliamo il coefficiente di correlazione lineare r. La formula per il calcolo risulta essere un'estensione di quella utilizzata in precedenza, e utilizza le frequenze marginali della X scritte dell'ultima colonna R_i, le frequenze marginali della Y scritte nell'ultima riga C_j e le frequenze congiunte f_{ij}:

$$r = \frac{\sum\sum(x_i - \overline{x})(y_k - \overline{y})f_{ij}}{\sqrt{\sum(x_i - \overline{x})^2 R_i \cdot \sum(y_j - \overline{y})^2 C_j}}.$$

● Il doppio simbolo di sommatoria indica che i valori da sommare sono distribuiti su righe e colonne.

Consideriamo la seguente distribuzione di frequenze di due variabili quantitative per le quali abbiamo già stabilito che non esiste indipendenza:

X = voto in matematica, $\quad Y$ = voto in italiano.

▶ Tabella 16

X \ Y	6	7	8	9	Totale
6	4	5	0	0	9
7	1	1	1	0	3
8	1	0	1	1	3
Totale	6	6	2	1	15

Calcoliamo innanzitutto le medie delle distribuzioni marginali:

$$\overline{x} = \frac{6 \cdot 9 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 3}{15} = 6,6; \qquad \overline{y} = \frac{6 \cdot 6 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1}{15} = 6,9.$$

Il calcolo risulta facilitato se ordiniamo i valori che ci interessano in una tabella a doppia entrata.
Intestiamo la tabella con gli scarti dei valori della X e della Y dalla media, nelle celle interne calcoliamo il prodotto fra gli scarti con le frequenze congiunte, e aggiungiamo una riga e una colonna per il calcolo del prodotto del quadrato degli scarti per le frequenze marginali.

▶ Tabella 17

$x_i - \overline{x}$ \ $y_j - \overline{y}$	−0,9	0,1	1,1	2,1	$(x_i - \overline{x})^2 R_i$
−0,6	2,16	−0,3	0	0	3,24
0,4	−0,36	0,04	0,44	0	0,48
1,4	−1,26	0	1,54	2,94	5,88
$(y_j - \overline{y})^2 C_j$	4,86	0,06	2,42	4,41	

● Utilizzando i valori della tabella, possiamo calcolare:

$\sigma_{XY} = \frac{5,2}{15} = 0,35;$

$\sigma_X = \sqrt{\frac{9,6}{15}} = 0,8;$

$\sigma_Y = \sqrt{\frac{11,75}{15}} = 0,89;$

$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{0,35}{0,8 \cdot 0,89} = 0,49.$

Abbiamo pertanto:

$$\sum(x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y})f_{ij} = 2,16 - 0,3 - 0,36 + 0,04 + 0,44 - 1,26 + 1,54 + $$
$$+ 2,94 = 5,2;$$
$$\sum(x_i - \overline{x})^2 R_i = 3,24 + 0,48 + 5,88 = 9,6;$$
$$\sum(y_j - \overline{y})^2 C_j = 4,86 + 0,06 + 2,42 + 4,41 = 11,75.$$

Il valore dell'indice di correlazione risulta:

$$r = \frac{5,2}{\sqrt{9,6 \cdot 11,75}} = 0,49.$$

FATTORI DI RISCHIO

…com'è possibile cercare eventuali correlazioni tra un fattore di rischio e una malattia?

▶ Il quesito completo a pag. β89

Acqua e colera
John Snow (1813-1858) è considerato il primo epidemiologo della storia. Nel 1854 a Londra divampava una violenta epidemia di colera. Snow, sfatando l'idea che la malattia si trasmettesse per via aerea, comprese la vera causa: l'acqua contaminata.

Snow cercò un'associazione tra i decessi di colera e le pompe di acqua della città. Raccolse i dati e compilò tabelle di confronto, come la seguente.

Ditta di acqua	N. decessi
Compagnia Southwark & Vauxhall	286
Compagnia Lambeth	14
Altro	34

Le indagini statistiche di Snow diedero ragione alla sua intuizione. Le pompe incriminate furono rimosse e i casi di colera, immediatamente, diminuirono.

Una scienza tra medicina e statistica
La scienza che si occupa dello studio delle malattie nelle popolazioni è l'epidemiologia, una branca della medicina che osserva le malattie in rapporto alla collettività. Per far questo, fa ricorso a metodi di analisi statistica dei dati.

Due parametri fondamentali negli studi di sanità pubblica sono la **prevalenza** e l'**incidenza**.

- La prevalenza è un indicatore che stima i casi di malattia in una data popolazione in un preciso istante temporale. Si misura come rapporto $P =$ numero di casi al tempo t/numero di persone della popolazione al tempo t.
- L'incidenza è la misura dei nuovi casi di malattia sopraggiunti in un dato lasso temporale in una popolazione, cioè è il rapporto $I =$ numero di nuovi casi nell'intervallo di tempo $(t_1 - t_0)$/popolazione sana al tempo t_0.

Per misurare la prevalenza basta una sola indagine. Per misurare l'incidenza, che invece è una misura della variazione dei casi di malattia, ne occorrono due, una al tempo t_0 e l'altra al tempo t_1. Se l'evento di cui si misura l'incidenza è il decesso legato alla malattia, si parla di **tasso di mortalità**. Il termine «tasso» indica che il rapporto di incidenza è moltiplicato per 100 (cioè è una percentuale) o per 1000.

Questioni di probabilità
Uno degli aspetti di maggiore interesse dell'epidemiologia è ricercare eventuali correlazioni tra l'esposizione a un fattore di rischio (causa presunta) e l'insorgenza di una malattia (effetto).
Supponiamo di voler quantificare il rischio di prendere una malattia y in presenza di un certo fattore x (per esempio, il rischio di osteoporosi in pazienti sopra i 60 anni). La causa x, l'età, rappresenta la variabile indipendente, mentre l'effetto y, l'osteoporosi, la variabile dipendente, in quanto variabile subordinata alla prima.
Per vedere se esiste un'associazione tra le due, gli epidemiologi usano una tabella, detta **tavola di contingenza** (tabella sotto).
A questo punto si tratta di fare dei confronti, cioè dei rapporti tra i numeri della tabella. Per vedere se l'esposizione al fattore di rischio è associata alla malattia, si confronta il gruppo degli esposti e il gruppo dei non esposti.
La prevalenza della malattia tra gli esposti è $R_1 = \frac{a}{a+b}$, quella tra i non esposti è $R_2 = \frac{c}{c+d}$. Il rapporto $R = \frac{R_1}{R_2}$ si chiama **rischio relativo**.

- Se il rischio relativo vale 1, significa che non c'è differenza tra i due gruppi, cioè l'incidenza della malattia non dipende dalla presenza del fattore considerato (nell'esempio, il rischio di osteporosi non dipende dall'età).
- Se il rischio è diverso da 1, significa che c'è un'associazione tra causa e malattia: se è maggiore di 1, il fattore può causare la malattia (nell'esempio significherebbe che è più probabile avere l'osteoporosi dopo i 60 anni); se è minore di 1, significa, al contrario, che il fattore può prevenire la malattia, cioè l'esposizione riduce la probabilità di ammalarsi.

Tavola di contingenza

	Malati (o casi)	Non ammalati (o controlli)
Esposti	a	b
Non esposti	c	d

LABORATORIO DI MATEMATICA

LA REGRESSIONE

ESERCITAZIONE GUIDATA

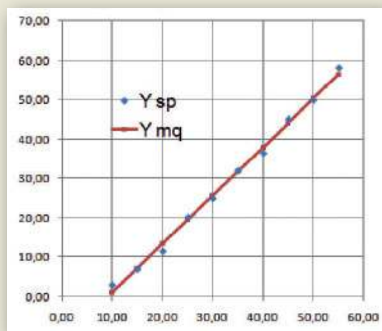
Costruiamo un foglio di Excel che richieda in ingresso dieci coppie di valori per le variabili *X* e *Y*, ottenute sperimentalmente, corrispondenti a dieci punti nel piano cartesiano, e che dia in uscita i coefficienti della retta dei minimi quadrati interpolante i dieci punti, il grafico dei punti e della retta. Proviamo il foglio con i seguenti dati.

X	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
Y	3	7	11,50	20,20	25	32	36,40	45	49,80	58

- Attiviamo Excel e in un nuovo foglio scriviamo i dati nelle zone B4:B13 e C4:C13 (figura 1).
- Per ottenere i coefficienti della retta dei minimi quadrati evidenziamo la zona B15:C15, digitiamo = REGR.LIN(C4 : C13; B4 : B13) (l'operatore apposito) e battiamo contemporaneamente i tasti CTRL, MAIUSC e INVIO. I risultati determinati in tal modo sono memorizzati fra parentesi graffe e sono detti *in forma di matrice*.
- Per ottenere le ordinate dei punti della retta dei minimi quadrati con la stessa ascissa dei punti assegnati e gli scarti al quadrato delle ordinate dei punti assegnati dalle ordinate dei punti della retta, digitiamo rispettivamente = B15*B4 + C15 in D4 e = (C4 − D4)^2 in E4, e copiamo la zona D4:E4 sino alla riga 13.
- Per calcolare l'indice quadratico relativo digitiamo = RADQ(MEDIA(E4 : E13))/MEDIA(D4 : D13) in E15.
- Per costruire il grafico, evidenziamo la zona B3:D13 e facciamo clic di seguito sulla scheda *Inserisci*, sul gruppo di strumenti *Grafico a dispersione* e, nella finestra di dialogo che appare, sull'icona *Dispersione con linee diritte e indicatori*.
- Sistemiamo infine il grafico (figura 2).

	A	B	C	D	E
1		La retta dei minimi quadrati			
2					
3		x	Y sp	Y mq	Err Quad
4		10,00	3,00	1,0345	3,8630
5		15,00	7,00	7,2024	0,0410
6		20,00	11,50	13,3703	3,4980
7		25,00	20,20	19,5382	0,4380
8		30,00	25,00	25,7061	0,4985
9		35,00	32,00	31,8739	0,0159
10		40,00	36,40	38,0418	2,6956
11		45,00	45,00	44,2097	0,6246
12		50,00	49,80	50,3776	0,3336
13		55,00	58,00	56,5455	2,1157
14					
15		1,2336	-11,3012	I =	0,0413

▲ **Figura 1**



▲ **Figura 2**

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 3 esercitazioni in più

Esercitazione

1 Costruisci un foglio elettronico che:

- legga le coordinate di quattro punti A, B, C, D;
- determini l'equazione della retta dei minimi quadrati e quelle delle rette AC e BD;
- calcoli l'indice quadratico relativo delle tre rette e tracci il loro grafico.

Prova con $A(2; 5)$, $B(4; 6)$, $C(6; 7)$, $D(8; 8{,}40)$.

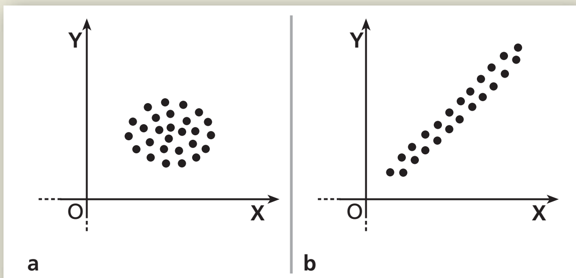
[$y = 0{,}56x + 3{,}80$; $y = 0{,}50x + 4$; $y = 0{,}60x + 3{,}60$; 0,0166, 0,0308, 0,0214]

LA TEORIA IN SINTESI

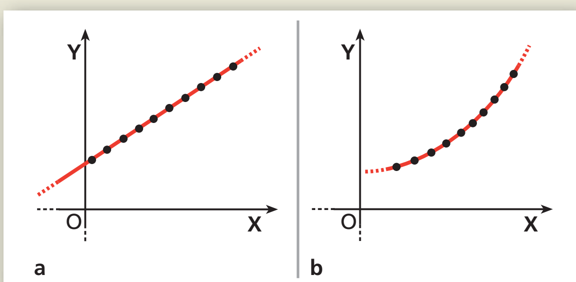
L'INTERPOLAZIONE, LA REGRESSIONE, LA CORRELAZIONE

1. CHE COS'È L'INTERPOLAZIONE

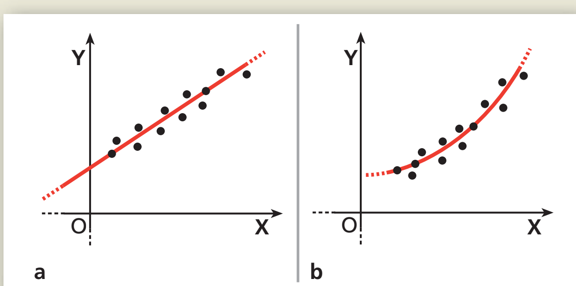
- I dati riguardanti un fenomeno statistico rilevati mediante coppie ordinate $(x_i; y_i)$ di valori possono essere rappresentati in un riferimento cartesiano con un **diagramma a dispersione** o **nuvola di punti**.



- La funzione matematica atta a rappresentare il fenomeno è detta **funzione interpolante**. Se il suo grafico passa esattamente per tutti i punti, parliamo di **interpolazione *per* punti noti** o **interpolazione matematica**.



- Se il grafico passa fra i punti del diagramma a dispersione, o soltanto per alcuni di essi, parliamo di **interpolazione *fra* punti noti** o **interpolazione statistica**.



- Gli **errori di accostamento** $e_i = y_i - f(x_i)$, detti **errori parziali**, rappresentano le differenze fra i valori rilevati nell'indagine statistica e quelli teorici ricavati dalla funzione interpolante $y = f(x)$. La loro somma è l'**errore totale** $e = \sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]$. Poiché gli errori parziali positivi e negativi possono compensarsi a vicenda, la valutazione dell'errore totale non è un buon criterio per capire la validità di una interpolazione.

2. IL METODO DEI MINIMI QUADRATI

- Il **metodo dei minimi quadrati** si esprime con una **condizione di accostamento**. La condizione è che risulti minima la somma dei quadrati degli errori relativi e_i:

$$S = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2.$$

Dobbiamo determinare perciò il minimo di questa funzione.

- Una volta determinata la funzione, ne diamo una valutazione tramite l'**indice quadratico relativo**:

$$I = \frac{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2}{n}}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}}.$$

Di solito riteniamo che la funzione fornisca una buona interpolazione se risulta $I \leq 0{,}1$.

- Come funzione interpolante abbiamo utilizzato la **funzione lineare** $y = ax + b$, ottenibile mediante la formula $y - \overline{y} = a(x - \overline{x})$, con:

$$a = \frac{\sum x_i' y_i'}{\sum x_i'^2},$$

dove $\overline{x}$ e $\overline{y}$ sono i valori medi, x_i' e y_i' sono gli scarti dei valori dati dai valori medi, ossia:

$$x_i' = x_i - \overline{x} \text{ e } y_i' = y_i - \overline{y}.$$

3. LA DIPENDENZA, LA REGRESSIONE, LA CORRELAZIONE

- Si possono costruire tabelle a doppia entrata in cui si ha teoricamente una perfetta indipendenza tra due caratteri e tabelle in cui esiste **dipendenza**.

- La differenza tra una frequenza assoluta rilevata e la corrispondente frequenza assoluta teorica si chiama **contingenza**.

- L'indice χ^2 (**chi quadrato**) è la somma dei rapporti fra il quadrato di ogni contingenza con la relativa frequenza teorica.
  χ^2 vale zero nel caso di perfetta indipendenza, dipende dalle frequenze e cresce al crescere delle osservazioni.

- La **regressione** si occupa dell'individuazione di un legame tra due variabili statistiche X e Y. Può essere **di X su Y** o **di Y su X**.

- La regressione lineare si attua determinando le rette interpolanti un diagramma a dispersione, prima rispetto a Y poi rispetto a X.
  Considerato l'angolo che si forma fra le due rette di regressione di Y su X e di X su Y, possiamo dire che:
  - più l'angolo è piccolo, migliore è il grado di approssimazione dei dati da parte delle due rette;
  - se l'angolo è retto, non c'è dipendenza lineare fra le due variabili;
  - se l'angolo è nullo, vale a dire se le due rette coincidono, diciamo che la regressione è **perfetta**; in questo caso le coppie di valori dei dati appartengono tutti alla retta.

- Mediante la **correlazione** vogliamo esprimere il legame che c'è tra due variabili statistiche X e Y con un indice.

- Diamo il nome di **covarianza di X e di Y** alla quantità:

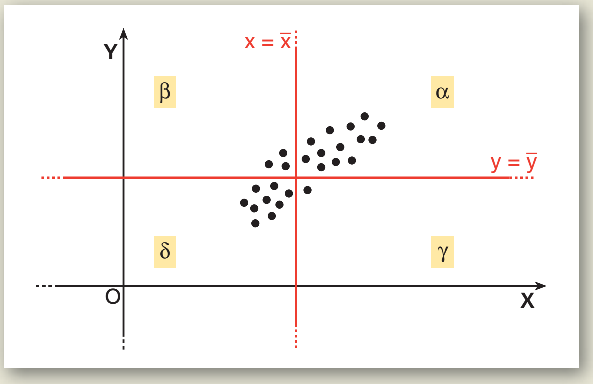
$$\sigma_{XY} = \frac{\sum x_i' y_i'}{n},$$

dove

$$x_i' = x_i - \overline{x} \text{ e } y_i' = y_i - \overline{y}$$

sono gli scarti dai valori medi $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

- Le rette $x = \overline{x}$ e $y = \overline{y}$ dividono il diagramma a dispersione in quattro regioni α, β, δ, γ.



  - Se $\sigma_{XY} > 0$, nelle regioni α e δ abbiamo più punti che nelle regioni β e γ. All'aumentare di una variabile, aumenta in media anche l'altra.
  - Se $\sigma_{XY} < 0$, nelle regioni β e γ abbiamo più punti che nelle regioni α e δ. All'aumentare di una variabile, diminuisce in media l'altra.
  - Se $\sigma_{XY} = 0$, i valori x_i sono uguali a $\overline{x}$ o i valori di y_i sono uguali a $\overline{y}$. Tutti i punti stanno sulle rette $x = \overline{x}$ e $y = \overline{y}$.

- Per misurare il grado di dipendenza delle variabili X e Y, usiamo un indice che prende il nome di **coefficiente di correlazione lineare di Bravais-Pearson**. Questo indice vale:

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}, \quad \text{cioè } r = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2 \sum (x_i - \overline{y})^2}},$$

dove σ_X e σ_Y sono le deviazioni standard.

  - Se $0 < r < 1$, la correlazione è **diretta** o **positiva**, cioè all'aumentare di X aumenta in media anche Y.
  - Se $-1 < r < 0$, la correlazione è **inversa** o **negativa**, cioè all'aumentare di X diminuisce in media Y.
  - Se $r = 1$, la correlazione è **perfetta diretta**, cioè tutti i punti del diagramma a dispersione appartengono alla retta di regressione che è crescente.
  - Se $r = -1$, la correlazione è **perfetta inversa**, cioè tutti i punti del diagramma a dispersione appartengono alla retta di regressione che è decrescente.
  - Se $r = 0$, non esiste correlazione lineare.

1. CHE COS'È L'INTERPOLAZIONE

Teoria a pag. β90

Gli errori di accostamento

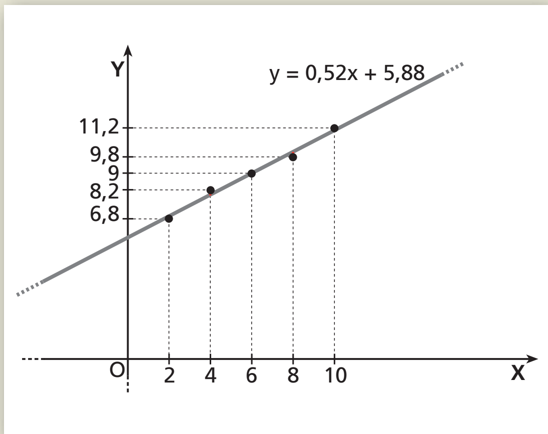
1 ESERCIZIO GUIDA

Da una rilevazione statistica si sono ottenuti i seguenti valori relativi a due variabili X e Y.

x_i	2	4	6	8	10
y_i	6,8	8,2	9	9,8	11,2

Interpoliamo i dati con la funzione $y = 0{,}52x + 5{,}88$. Determiniamo gli errori parziali e l'errore totale.

Rappresentiamo la funzione e i dati.



I valori $f(x_i)$ interpolati con $y = 0{,}52x + 5{,}88$ sono riportati in tabella.

x_i	2	4	6	8	10
$f(x_i)$	6,92	7,96	9	10,04	11,08

Gli errori parziali sono:

$e_1 = 6{,}8 - 6{,}92 = -0{,}12;$
$e_2 = 8{,}2 - 7{,}96 = 0{,}24;$
$e_3 = 9 - 9 = 0;$
$e_4 = 9{,}8 - 10{,}04 = -0{,}24;$
$e_5 = 11{,}2 - 11{,}08 = 0{,}12.$

L'errore totale è pertanto:

$$e = \sum_{i=1}^{5} e_i = -0{,}12 + 0{,}24 + 0 - 0{,}24 + 0{,}12 = 0.$$

Da una rilevazione statistica si sono ottenuti i valori relativi a due variabili X e Y riportati nelle seguenti tabelle. Interpola i dati con la funzione indicata sotto ciascuna tabella e determina gli errori parziali e l'errore totale.

2

x_i	1	5	10	25	30
y_i	4	12	21	53	60

$y = 1{,}97x + 1{,}9$

[$e_1 = 0{,}13$, $e_2 = 0{,}25$, $e_3 = -0{,}6$, $e_4 = 1{,}85$, $e_5 = -1$; $e = 0{,}63$]

3

Quantità	1	5	10	25	30
Costo medio	8	28	53	128	153

$y = 5{,}13x + \dfrac{2{,}545}{x}$

[$e_1 = 0{,}325$, $e_2 = 1{,}841$, $e_3 = 1{,}446$, $e_4 = -0{,}352$, $e_5 = -0{,}985$; $e = 2{,}275$]

2. IL METODO DEI MINIMI QUADRATI

Teoria a pag. β93

4 ESERCIZIO GUIDA

In un esperimento abbiamo ottenuto le seguenti coppie di valori per le variabili X e Y.

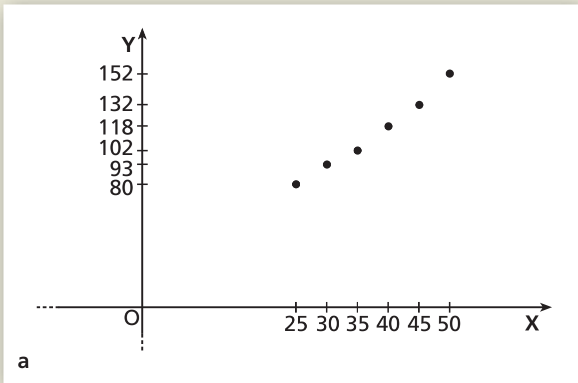
x_i	25	30	35	40	45	50
y_i	80	93	102	118	132	152

Rappresentiamo il diagramma a dispersione, determiniamo la retta interpolante e verifichiamo la bontà dell'accostamento con l'indice quadratico relativo *I*.

Rappresentiamo i punti in un diagramma cartesiano.

La retta interpolante ha equazione $y = a\,x + b$, ottenibile con la formula $y - \overline{y} = a(x - \overline{x})$, dove $a = \dfrac{\sum x_i' y_i'}{\sum x_i'^2}$.

Calcoliamo i valori che servono per applicare le formule e li riportiamo in una tabella.
Nelle ultime tre colonne della tabella riportiamo anche i valori necessari per il calcolo dell'indice quadratico relativo, valori che calcoliamo *dopo* aver trovato la funzione interpolante.



a

	x_i	y_i	x_i'	y_i'	$x_i'y_i'$	$x_i'^2$	$f(x_i)$	$y_i - f(x_i)$	$[y_i - f(x_i)]^2$
	25	80	−12,5	−32,8333	410,41625	156,25	77,6195	2,3805	5,6668
	30	93	−7,5	−19,8333	148,74975	56,25	91,7050	1,2950	1,6770
	35	102	−2,5	−10,8333	27,08325	6,25	105,7905	3,7905	14,3679
	40	118	2,5	5,1667	12,91675	6,25	119,8760	−1,8760	3,5194
	45	132	7,5	19,1667	143,75025	56,25	133,9615	−1,9615	3,8475
	50	152	12,5	39,1667	489,58375	156,25	148,0470	3,9530	15,6262
$\sum$	225	677			1232,5	437,5	676,9995		44,7048

$$\overline{x} = 37,5; \qquad \overline{y} = 112,8333.$$

L'equazione della retta interpolante è:

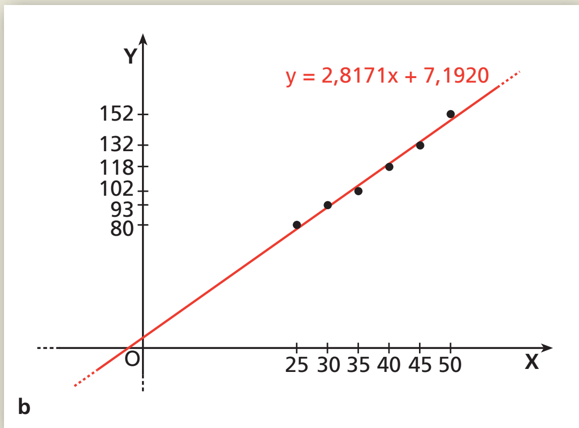
$$y = \frac{1232,5}{437,5}(x - 37,5) + 112,8333 \quad \rightarrow \quad y = 2,8171x + 7,1920.$$

La rappresentiamo insieme al diagramma a dispersione. Calcoliamo l'indice quadratico relativo:

$$I = \frac{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2}{n}}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}}$$

$$I = \frac{\sqrt{\dfrac{44,7048}{6}}}{\dfrac{676,9995}{6}} \simeq 0,024.$$

Essendo $I < 0,1$, possiamo dire che la funzione trovata è adatta a rappresentare il fenomeno studiato.



b

Rappresenta in un diagramma a dispersione i dati delle seguenti tabelle. Determina, con il metodo dei minimi quadrati, l'equazione della retta di interpolazione e verifica la bontà dell'accostamento con l'indice quadratico relativo *I*.

5

x_i	0	1	2	3	4
y_i	3	5,4	9,9	13,5	18,9

$[y = 3{,}99x + 2{,}16; I = 0{,}0673]$

6

x_i	1	4	9	16	25
y_i	0,51	15,3	41,31	75,99	121,89

$[y = 5{,}058x - 4{,}635; I = 0{,}0053]$

7

x_i	1	2	3	4	5
y_i	37	62,9	96,2	118,4	148

$[y = 27{,}75x + 9{,}25; I = 0{,}0219]$

8

Tempo (s)	1	2	3	4	5
Velocità (m/s)	13,9	25,96	39,30	52,42	65,39

$[y = 12{,}944x + 0{,}562; I = 0{,}0074]$

3. LA DIPENDENZA, LA REGRESSIONE, LA CORRELAZIONE

▶ Teoria a pag. β95

La dipendenza fra due caratteri

9 Si è rilevato il livello di gradimento di un prodotto in tre regioni e il risultato è riportato nella seguente tabella.

Regioni \ Gradimento	Basso	Medio	Alto
Piemonte	20	30	10
Toscana	10	20	30
Puglia	30	10	10
Sicilia	10	30	40

Dopo aver verificato che le due modalità non sono indipendenti calcola gli indici χ^2 e C.

$[\chi^2 = 52{,}91; C = 0{,}1058]$

10 La tabella espone i punteggi conseguiti da quattro studenti sottoposti a tre test. I punteggi sono espressi in centesimi.

Studente \ Test	I	II	III
A	60	80	70
B	70	65	95
C	85	75	80
D	70	60	80

Calcola gli indici χ^2 e C arrotondando opportunamente le frequenze teoriche all'unità.

$[\chi^2 = 9{,}02; C = 0{,}005]$

11 Un campione di 80 dipendenti è stato esaminato sotto le modalità «grado di istruzione» e «settore» in cui opera l'azienda in cui lavora.

Grado istruzione \ Settore	Industria	Commercio	Agricoltura	Altro
Scuola media	8	2	4	1
Scuola superiore	12	28	5	0
Laurea	10	8	2	0

Calcola gli indici χ^2 e C. $[\chi^2 = 15,81; C = 0,0988]$

La regressione e la correlazione

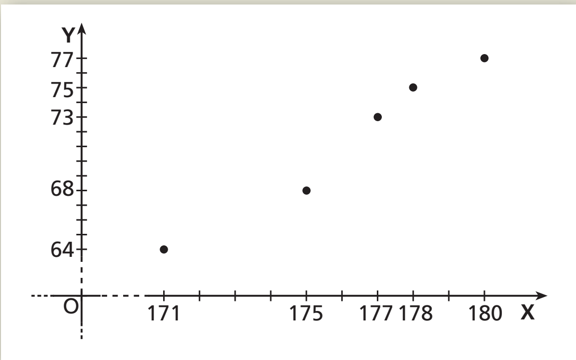
IN PRATICA
▶ Videolezione 31

12 **ESERCIZIO GUIDA**

Nella seguente tabella sono riportati la statura di cinque giovani e il relativo peso corporeo.

Ragazzo	Altezza in centimetri (X)	Peso in kilogrammi (Y)
1	171	64
2	175	68
3	177	73
4	178	75
5	180	77

Rappresentiamo i dati in un diagramma a dispersione. Stabiliamo se c'è qualche relazione di tipo lineare tra le due grandezze, con il metodo dei minimi quadrati. Calcoliamo i coefficienti di regressione e ne valutiamo il significato. Determiniamo l'indice di correlazione.



L'equazione della retta di regressione di Y su X è:

$$y - 71,4 = 1,5299(x - 176,2)$$

e l'equazione della retta di regressione di X su Y è:

$$x - 176,2 = 0,6325 \cdot (y - 71,4).$$

I coefficienti di regressione sono $m = 1,5299$ e $m_1 = 0,6325$. Possiamo perciò dire che al variare di 1 cm dell'altezza il peso corporeo dei giovani varia in media di 1,5299 kilogrammi e che al variare di 1 kilogrammo del peso corporeo la statura varia in media di 0,6325 centimetri.
Calcoliamo l'indice di correlazione: $r = \sqrt{1,5299 \cdot 0,6325} \simeq 0,9837$. È un buon indice perché è vicino a 1, quindi, nel nostro caso, c'è molta correlazione tra peso e statura.

13 Sono dati i valori riportati in tabella.

x_i	30	48	102	168	180
y_i	30	33	42	53	55

- Rappresenta il diagramma a dispersione. Cosa osservi?
- Determina la retta di regressione della variabile X su Y e quella della variabile Y su X.
- Quanto valgono i due coefficienti di regressione? Cosa indicano?
- Determina il valore della variabile Y in corrispondenza di $x = 200$.
- Determina l'indice di correlazione.

[$x - 105{,}6 = 6(y - 42{,}6)$; $y - 42{,}6 = 0{,}16667(x - 105{,}6)$; $y = 58{,}33$; $r = 1$, perciò…]

Dati i valori riportati in tabella, rappresenta il diagramma a dispersione e determina la retta di regressione della variabile X su Y e quella della variabile Y su X. Calcola l'indice di correlazione e commenta i risultati ottenuti.

14

x_i	1	3	5	7	9	11
y_i	33,6	16	13,2	− 15,6	− 23,2	− 47,2

[$x - 6 = -0{,}123(y + 3{,}8667)$; $y + 3{,}8667 = -7{,}863(x - 6)$; $r = -0{,}983$]

15

x_i	16	25	50	86	92
y_i	24	29	36	50	54

[$x - 53{,}8 = 2{,}641(y - 38{,}6)$; $y - 38{,}6 = 0{,}376(x - 53{,}8)$; $r = 0{,}9966$]

16

Anni	2006	2007	2008	2009	2010
X: aerei arrivati	197 268	204 946	228 401	241 039	262 191
Y: passeggeri sbarcati	14 513 254	14 936 001	16 569 832	18 601 896	19 838 429

[$x - 226\,769 = 0{,}0114(y - 16\,891\,882)$; $y - 16\,891\,882 = 85{,}8765(x - 226\,769)$; $r = 0{,}988$]

17

Anni	2006	2007	2008	2009	2010
X: merci caricate	496 671	562 158	549 941	513 828	463 978
Y: merci scaricate	496 669	562 214	549 922	513 846	464 090

[$x - 517\,315 = 1{,}0006(y - 517\,348)$; $y - 517\,348 = 0{,}999(x - 517\,315)$; $r = 0{,}9999$]

La correlazione in tabelle a doppia entrata

18 Si è rilevato il peso di 50 bambini di due anni e la loro altezza.

Altezza (cm) \ Peso (kg)	11	12	13	14
60	0	1	1	0
65	3	3	3	1
70	0	6	6	2
75	0	5	6	3
80	0	1	4	5

Calcola il coefficiente di correlazione r. [0,4216]

19 La tabella seguente è relativa al numero delle persone che abitano in 100 appartamenti suddivisi per numeri di vani.

Persone \ Numero vani	1	2	3	4	5
1	6	25	5	0	0
2	4	20	12	2	1
3	0	5	6	5	2
4	0	0	2	3	2

Calcola il coefficiente di correlazione r.

[0,6011]

ESERCIZI VARI L'interpolazione, la regressione, la correlazione

TEST

20 L'interpolazione matematica permette di determinare una funzione il cui grafico:

- A passa per tutti i punti di un diagramma a dispersione.
- B passa fra i punti di un diagramma a dispersione.
- C passa per alcuni punti di un diagramma a dispersione.
- D è sempre decrescente.
- E è sempre crescente.

21 Il metodo dei minimi quadrati serve per:

- A calcolare il quadrato di un numero.
- B determinare l'equazione di una funzione il cui grafico passa per n punti.
- C definire l'equazione di una funzione il cui grafico passa fra n punti.
- D calcolare la distanza fra un punto e una curva.
- E calcolare la distanza fra due punti appartenenti a una stessa curva.

22 La regressione lineare fra le variabili X e Y esprime:

- A di quanto X è più piccola di Y.
- B di quanto Y è più piccola di X.
- C un legame lineare fra X e Y.
- D di quanto X varia rispetto Y.
- E di quanto Y varia rispetto X.

23 La correlazione è:

- A diretta se $r < 0$.
- B diretta se $r = 0$.
- C perfetta se $r > 1$.
- D perfetta diretta se $r = 1$.
- E inversa se $r < -1$.

Da una rilevazione statistica si sono ottenuti i valori relativi alle due variabili X e Y riportate nella seguente tabella. Interpola i dati con la funzione indicata e determina gli errori parziali e l'errore totale.

24

x_i	1	5	10	25	30
y_i	8	28	53	128	153

$y = 5x + 3$

[$e_1 = 0$, $e_2 = 0$, $e_3 = 0$, $e_4 = 0$, $e_5 = 0$; $e = 0$, perciò si può affermare che…]

Rappresenta in un diagramma a dispersione i dati delle seguenti tabelle. Determina, con il metodo dei minimi quadrati, l'equazione della retta di interpolazione statistica e verifica la bontà dell'accostamento con l'indice quadratico relativo I (considera come X la variabile nella prima riga e come Y quella nella seconda).

25

Prezzo	23,4	25,6	27,8	29,2	31,1	32,2
Quantità offerta	63	65	68	72	76	78

$[y = 1{,}7838x + 20;\ I = 0{,}0132]$

26

Quantità	8	9	10	11	12	13
Ricavo	65	66	67	68	69	70

[$y = x + 57$; $I = 0$, perciò i punti…]

27

N. addetti manutenzione	1	3	6	10	12	13
N. interventi straordinari	440	406	375	320	292	275

$[y = -13{,}36x + 451{,}52;\ I = 0{,}0089]$

28

x_i	8	9	10	11	12	14
y_i	66	67	68	69	70	72

[$y = x + 58$; $I = 0$, perciò i punti…]

29

Tempo (s)	1	3	6	10	12	13
Velocità (cm/s)	44,4	40,6	37,4	31,8	29	27,5

$[y = -1{,}3675x + 45{,}3728;\ I = 0{,}0096]$

30 La seguente serie storica riguarda la produzione di olive in migliaia di tonnellate dal 1995 al 2000.

Anni	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Quantità	3018	3088	3159	3232	3315	3390

Esprimi il trend con una funzione lineare $y = ax + b$. $[y = 74{,}686x + 2938{,}933;\ I = 0{,}001163]$

Dati i valori riportati nelle seguenti tabelle, rappresenta il diagramma a dispersione e determina la retta di regressione della variabile X su Y e quella della variabile Y su X. Calcola l'indice di correlazione e commenta i risultati ottenuti (considera come X la variabile nella prima riga e come Y quella nella seconda).

31

Paesi	Danimarca	Germania	Grecia	Spagna	Francia
Produzione patate (in centinaia di t)	14 145	124 380	10 500	34 200	65 000
Produzione frumento (in centinaia di t)	48 340	198 667	20 160	46 300	339 280

$[x - 49\,645 = 0{,}2268(y - 130\,549);\ y - 130\,549 = 1{,}90197(x - 49\,645);\ r = 0{,}65672]$

32

Paesi	Polonia	Rep. Ceca	Ungheria	Romania	Bulgaria
Produzione frumento (in centinaia di t)	81 927	36 390	5270	71 562	37 740
Produzione granoturco (in centinaia di t)	4165	1689	68 110	126 797	16 500

[$x - 46\,577{,}8 = 0{,}02927\,(y - 43\,452{,}2)$; $y - 43\,452{,}2 = 0{,}09\,(x - 46\,577{,}8)$; $r = 0{,}05133$]

33 Nella seguente tabella sono riportati i dati (in milioni) relativi al numero di viaggi all'estero con almeno un pernottamento effettuati dagli italiani negli anni dal 2003 al 2008 (fonte: ISTAT).

Anni	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Viaggi all'estero	14,6	15,8	17,8	18,1	18,9	19,8

a) Rappresenta i dati in una nuvola di punti.
b) Scrivi l'equazione della retta che esprime il trend del fenomeno, calcola l'indice quadratico relativo.
c) Nel 2009 i viaggi all'estero (in milioni) sono stati 17,3. Quale valore avresti invece potuto prevedere con il risultato del punto precedente.

[b) $y = 1{,}02x + 13{,}93$; $I = 0{,}022$; c) $\simeq 21{,}1$ milioni]

34 La tabella riporta le temperature medie mensili misurate a Roma nel 2008 (fonte: ISTAT).
Interpolando i dati con la funzione $y = 0{,}253x + 14{,}381$, calcola l'errore di accostamento totale, l'errore standard e l'indice di scostamento. [$-0{,}006$; $6{,}074$; $0{,}379$]

gennaio	9,5
febbraio	9,8
marzo	11,0
aprile	15,6
maggio	18,4
giugno	22,7
luglio	25,1
agosto	25,1
settembre	20,6
ottobre	16,7
novembre	10,7
dicembre	7,1

35 Nella tabella sono riportati i dati relativi al reddito medio pro capite X (in dollari) e la speranza di vita alla nascita Y (in termini percentuali) degli abitanti di 6 Paesi in via di sviluppo nel 2000.

a) Rappresenta i dati in una nuvola di punti.
b) Determina la retta di regressione di X su Y e quella di Y su X.
c) Determina quanto deve aumentare il reddito medio pro capite perché la speranza di vita alla nascita aumenti dell'1%.

[b) $x = 54{,}35y - 2324{,}93$; $y = 0{,}013x + 48{,}023$; c) $\simeq 77$ dollari]

Paese	X	Y
Bangladesh	370	61,19
Burkina Faso	210	44,22
Ecuador	1190	69,59
Egitto	1490	67,46
El Salvador	2000	70,15
Repubblica del Congo	570	51,32

REALTÀ E MODELLI

1

Le tabelle di crescita

Nella tabella sono riportati i dati relativi alle altezze medie delle bambine dalla nascita fino a un anno di età.

▶ Stabilisci se esiste una relazione lineare tra le due grandezze determinando l'equazione delle rette di regressione e calcolando l'indice di correlazione.

Età (mesi)	Altezza (cm)
0	49
2	53
4	59
6	62
8	66
10	68
12	71

2

Il mercato immobiliare

La tabella riporta i dati, relativi al primo semestre 2010, dei prezzi degli appartamenti di nuova costruzione in vendita nella periferia est di Roma, in base al numero dei locali.

▶ È possibile trovare una funzione che leghi il prezzo al numero dei locali?

▶ Trovata la retta interpolante, determina la bontà dell'accostamento con l'indice quadratico relativo *I*.

▶ Sulla base dei risultati precedenti stabilisci quanto potrebbe costare un appartamento di 6 locali.

Numero locali	Prezzo (in euro)
1	230 000
2	280 000
3	320 000
4	380 000
5	450 000

3

I voti

Fai riferimento alla pagella che hai compilato per l'esercizio 3 (Quanto vale la condotta?) di Realtà e modelli del capitolo precedente, oppure compilane una sulla base delle indicazioni fornite in quel problema.

▶ Tradizionalmente si dice che gli studenti che vanno bene in matematica vanno bene anche in latino. Usando il coefficiente di correlazione lineare, stabilisci se questo è vero nel caso della pagella che hai preparato.

▶ Analizza la correlazione tra italiano e latino, tra matematica e fisica, tra storia e filosofia.

4

La dilatazione lineare

Una classe, suddivisa in quattro gruppi, effettua un esperimento nel laboratorio di fisica.
Ogni gruppo riscalda in un forno di precisione varie sbarrette di alluminio che a temperatura ambiente (20 °C) sono lunghe 500,00 mm. La seguente tabella riporta le lunghezze finali in mm, misurate dai vari gruppi, alle diverse temperature.

Gruppo	80 °C	90 °C	110 °C	150 °C	180 °C
1	500,61	500,78	500,98	501,38	501,71
2	500,71	500,79	500,96	501,51	501,73
3	500,70	500,80	502,00	501,50	501,70
4	500,72	500,83	501,11	501,45	501,71

▶ Dopo aver trovato la media delle lunghezze per ogni temperatura, analizza come l'allungamento dipende dalla variazione di temperatura, utilizzando la retta di regressione.

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Dato un diagramma a dispersione, la retta interpolante è quella che:

A passa per tutti i punti del diagramma.

B passa soltanto per qualche punto del diagramma.

C passa soltanto per due punti del diagramma.

D passa fra i punti del diagramma e casualmente per i punti del diagramma.

E non può passare per nessun punto del diagramma.

2 In un esperimento abbiamo ottenuto le seguenti coppie di valori per le variabili X e Y.

x_i	5	10	15	20
y_i	12	19	25	30

Se interpoliamo i dati con la funzione $y = 1{,}2x + 6$, l'errore totale è:

A 2. B 0. C 1. D -2. E -1.

3 La condizione di accostamento con il metodo dei minimi quadrati è tale da rendere:

A minimo l'errore totale.

B negativi tutti gli errori parziali.

C positivo l'errore totale.

D minima la somma dei valori assoluti degli errori parziali.

E minima la somma dei quadrati degli errori parziali.

4 L'indice quadratico relativo I:

A serve per valutare la bontà dell'accostamento di una funzione ai punti di un diagramma a dispersione.

B serve, in un diagramma a dispersione, per stabilire il tipo di funzione interpolante.

C è un numero sempre negativo.

D è il quadrato di un numero relativo.

E è sempre un numero intero.

5 Quale delle seguenti affermazioni relative all'interpolazione dei dati statistici di una serie storica è *falsa*?

A Le condizioni del fenomeno esaminato non sono state soggette a fenomeni imprevisti.

B La retta interpolante fornisce il trend del fenomeno.

C Il coefficiente angolare della retta interpolante indica di quanto è variato in media ogni anno il fenomeno.

D L'indice quadratico relativo deve avere valore prossimo all'unità.

E La retta interpolante permette di prevedere l'andamento del fenomeno per alcuni degli anni successivi.

6 Date le due rette di regressione di Y su X e di Y su X, quale delle seguenti affermazioni *non* è corretta?

A Esse si incontrano nel baricentro della distribuzione.

B Se l'angolo che si forma fra di esse è retto, non esiste correlazione lineare.

C Se l'angolo che si forma fra di esse è nullo, la regressione è perfetta.

D I coefficienti angolari delle due rette sono detti coefficienti di regressione della Y rispetto X e della X rispetto alla Y.

E Il coefficiente di regressione di Y su X indica quanto varia la X al variare di una unità della Y.

7 Quale delle seguenti affermazioni è *vera*?

A Se $r = 0$, fra i due fenomeni non esiste alcun tipo di correlazione.

B Se $r = -1$, fra i coefficienti di regressione lineare sussiste la relazione $m = -\dfrac{1}{m_1}$.

C La covarianza è la somma dei prodotti degli scarti dei valori della X e dei valori della Y dalle rispettive medie.

D I coefficienti di regressione lineare e la covarianza hanno lo stesso segno.

E Se i coefficienti di regressione lineare hanno lo stesso segno, allora $r > 0$.

8 Quale delle seguenti formule è *errata*?

A $r = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$

B $m = r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$

C $m_1 = r\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}$

D $r = \pm m \cdot m_1$

E $r = \dfrac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2 \sum (y_i - \overline{y})^2}}$

QUESITI

9 Illustra il concetto di funzione interpolante fra punti noti. Rappresenta poi il diagramma a dispersione della seguente tabella:

X	5	10	15	20
Y	4	22	16	3

e traccia la funzione interpolante $y = -0{,}3\,x^2 + 7{,}6x - 25{,}8$.

10 Spiega il significato degli errori parziali e, utilizzando la seguente tabella:

X	3	6	9	12	15
Y	5	9	13	13	19

e la retta interpolante $y = x + 3$, determina gli errori parziali e l'errore totale. [− 1, 0, 1, − 2, 1; − 1]

11 Descrivi il modo per determinare l'equazione di una retta interpolante con il metodo dei minimi quadrati e determina l'equazione della retta interpolante per i dati della seguente tabella.

X	12	16	18	24
Y	9	11	20	19

[$y = 0{,}9x - 1$]

12 Illustra che cos'è la regressione lineare. Data poi la seguente tabella:

X	4	8	12	16
Y	20	28	32	50

rappresenta il diagramma a dispersione e traccia le rette di regressione lineare che hanno equazione:

$$y = 2{,}375x + 8{,}75 \quad \text{e} \quad x = 0{,}393y - 2{,}7725.$$

13 Spiega cos'è il coefficiente di correlazione lineare di Bravais-Pearson e utilizzando i dati contenuti nella tabella del quesito precedente determina il suo valore. [0,956]

PROBLEMI

14 Da una rilevazione statistica si sono ottenuti i valori relativi a due variabili X e Y riportati in tabella.

a) Interpola i dati con la funzione indicata:

$$y = 3x + \frac{11{,}78}{x}.$$

b) Determina gli errori parziali e l'errore totale.

Dosi fertilizzante	2	4	6	8	10
Quantità prodotto	12	15	20	25,5	31,2

[b) $e_1 = 0{,}11$, $e_2 = 0{,}055$, $e_3 = 0{,}037$, $e_4 = 0{,}028$, $e_5 = 0{,}022$; $e = 0{,}252$]

Dati i valori nelle tabelle riportate sotto:
a) rappresentali in un diagramma a dispersione;
b) determina con il metodo dei minimi quadrati l'equazione della retta interpolante;
c) verifica la bontà dell'accostamento con l'indice quadratico relativo *I*.

15

N. medaglie	1	2	3	4	5
Peso (g)	52,36	103,84	157,2	209,68	261,56

[b) $y = 52,424x - 0,344$; c) $I = 0,0025$]

16

x_i	151	152	157	168	171	173
y_i	160	165	170	175	180	185

[b) $y = 0,9194x + 23,554$; c) $I = 0,0126$]

17

x_i	20	25	30	35	40	45
y_i	83	85	88	92	96	98

[b) $y = 0,64x + 69,533$; c) $I = 0,0066$]

18 I dati di una rilevazione statistica relativa agli alunni iscritti a un liceo scientifico sono i seguenti.

Anni	2006	2007	2008	2009	2010
N. alunni	742	791	840	907	985

a) Rappresenta la serie storica con un diagramma cartesiano.
b) Determina le proiezioni lineari relative agli anni 2011, 2012, 2013. [b) 1033,6, 1093,8, 1154]

19 Un'azienda ha sostenuto, per la sicurezza degli impianti, le seguenti spese (in centinaia di euro).

Anni	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Spesa sicurezza	341	392	439	508	584	666

a) Rappresenta graficamente il fenomeno.
b) Determina la funzione che esprime il trend lineare.
c) Calcola l'indice quadratico relativo *I*.
d) Determina le proiezioni relative agli anni 2010 e 2011.
[b) $y = 64,857x + 261,333$; c) 0,0253; d) 715,332; 780,189]

20 Data la seguente tabella:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	10	13,14	24,09	32,85	45,99

a) rappresenta i dati in un diagramma a dispersione;
b) determina con il metodo dei minimi quadrati l'equazione della retta interpolante statistica;
c) verifica la bontà dell'accostamento con l'indice quadratico relativo *I*.
[b) $y = 9,169x + 6,876$; c) $I = 0,0934$]

21 Data la seguente serie storica relativa alle quantità (in tonnellate) esportate di Parmigiano Reggiano:

Anni	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Quantità (t)	625	635	642	654	666	675

a) costruisci la funzione che esprime il trend lineare;
b) estrapola la serie storica determinando le proiezioni relative agli anni 2010, 2011, 2012;
c) se da una ulteriore indagine, per questi ultimi tre anni, i dati osservati sono stati rispettivamente 684, 694, 707, riformula la funzione del trend partendo dall'anno 2007.
[a) $y = 10,143x + 614$; b) 685, 695, 705; c) $y = 10,229x + 644,2$]

Dati i valori nelle tabelle riportate sotto:
a) rappresentali in un diagramma a dispersione;
b) determina la retta di regressione della variabile X su Y e quella della variabile Y su X;
c) calcola l'indice di correlazione lineare;
d) commenta i risultati ottenuti.

22

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	50	42	28	18	12	0

[b) $x - 3{,}5 = -0{,}099(y - 25)$; $y - 25 = -10(x - 3{,}5)$;
c) $r = -0{,}9955$; d) correlazione inversa quasi perfetta]

23

Anni	2002	2003	2004	2005	2006
Posta scaricata	262 688	199 772	238 155	294 486	381 689
Posta caricata	262 688	192772	250 447	294 479	381 687

[b) $x - 275\,358 = 0{,}986196(y - 276\,415)$; $y - 276\,415 = 1{,}00377(x - 275\,358)$;
c) $r = 0{,}9949$; d) correlazione diretta quasi perfetta]

24

Anni	2004	2005	2006	2007	2008
Produzione latte vaccino (in centinaia di t)	101 025	101 309	105 723	109 192	112 342
Produzione latte pecorino (in centinaia di t)	6560	6757	7767	8992	8754

[b) $x - 105\,918 = 4{,}223(y - 7766)$; $y - 7766 = 0{,}21512(x - 105\,918)$;
c) $r = 0{,}953\,158$; d) correlazione diretta molto alta]

25 Nella tabella sono riportati i dati relativi al numero di persone che hanno trasferito la propria residenza dall'Italia all'estero nel quinquennio 2001-2005 (fonte: Istat).

2001	2002	2003	2004	2005
56 077	41 756	48 706	49 910	59 931

a) Rappresenta i dati in un diagramma a dispersione e congiungi i punti trovati con una spezzata.
b) Scrivi l'equazione della retta interpolante e controlla se la funzione ottenuta dà una buona interpolazione dei dati.

[b) $y = 1586{,}2x + 46\,517{,}4$; $I = 0{,}114 > 0{,}1$, quindi…]

26 Nella tabella sono riportati i dati relativi all'età e al numero di pulsazioni (al minuto) sotto sforzo, rilevati su un campione di otto donne.

Età	12	19	22	26	29	34	40	45
Pulsazioni	180	176	180	172	168	170	162	154

a) Riporta i dati in un diagramma a dispersione.
b) Scrivi l'equazione della retta di regressione della variabile *pulsazioni* rispetto alla variabile *età*.
c) Fai una previsione, in base ai dati forniti, riguardo al numero di pulsazioni sotto sforzo di una donna di 52 anni.

[b) $y = -0{,}767x + 192{,}014$; c) $\simeq 152$]

27 La seguente tabella riporta l'altezza in centimetri e il peso in chilogrammi dei 16 componenti della squadra di calcio di un Istituto Tecnico.

Altezza	183	178	175	181	171	181	169	175	177	176	180	178	174	176	178	180
Peso	80	74	74	76	68	80	66	72	75	73	77	75	73	73	76	80

Dopo aver brevemente introdotto il concetto di correlazione statistica, si risolvano i seguenti quesiti:

a) rappresentare, in un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, il diagramma a dispersione relativo ai dati della tabella precedente;
b) determinare l'equazione della retta di regressione $y = ax + b$ con il metodo dei minimi quadrati (y = peso in chilogrammi, x = altezza in centimetri);
c) calcolare il coefficiente di correlazione lineare di Bravais-Pearson;
d) rappresentare, sul grafico di cui al punto a), la retta di regressione trovata;
e) dire se la retta di regressione passa per il punto (177; 74,5) giustificando la risposta.

(*Maturità tecnico-commerciale*, *Sessione ordinaria*, 1997)

[b) $y = 0{,}995x - 101{,}649$; c) $r = 0{,}9464$; e) sì, è il baricentro della distribuzione]

28 Date le due grandezze X e Y riportate nella seguente tabella:

x_i	10	15	30	40	55	60
y_i	4	12	36	52	76	84

a) rappresenta il diagramma a dispersione;
b) determina la retta di regressione della variabile X su Y e quella della variabile Y su X;
c) traccia le due rette di regressione sul diagramma a dispersione;
d) determina il coefficiente di correlazione lineare;
e) commenta il risultato.

[b) $x = 0{,}625y + 7{,}5$; $y = 1{,}6x - 12$; d) 1; e) nel diagramma a dispersione si rileva che…; correlazione lineare perfetta]

29 La tabella riporta i valori di tre grandezze X, Y e W.

x_i	5	7	9	11	13
y_i	20	14	16	8	4
w_i	12	9	10	6	4

a) Rappresenta in un diagramma a dispersione i valori X e Y.
b) Rappresenta in un diagramma a dispersione i valori Y e W.
c) Rappresenta in un diagramma a dispersione i valori X e W.
d) Calcola il coefficiente di correlazione lineare fra X e Y.
e) Calcola il coefficiente di correlazione lineare fra Y e W.
f) Calcola il coefficiente di correlazione lineare fra X e W.
g) Commenta i risultati ottenuti.

[d) $-0{,}94$; e) 1; f) 0,94; g) osservando i diagrammi a dispersione tra X e Y e tra X e W rileviamo una distribuzione dei punti…]

30 Date le tre variabili

X: reddito annuo in migliaia di euro,
Y: età dell'auto posseduta in anni,
W: numero km percorsi dall'auto per litro di carburante,

x_i	25	30	40	50	70
y_i	8	6	7	4	3
w_i	11	13	15	15	16

a) rappresenta i diagrammi a dispersione fra X e Y, fra Y e W e fra X e W;
b) determina il coefficiente di correlazione lineare fra X e Y;
c) determina il coefficiente di correlazione lineare fra Y e W;
d) determina il coefficiente di correlazione lineare fra X e W;
e) interpreta la correlazione lineare tra il fenomeno rappresentato dalla variabile X e quello rappresentato dalla variabile W.

[b) $-0{,}903$; c) $-0{,}784$; d) 0,873; e) fenomeni concomitanti che hanno in comune…]

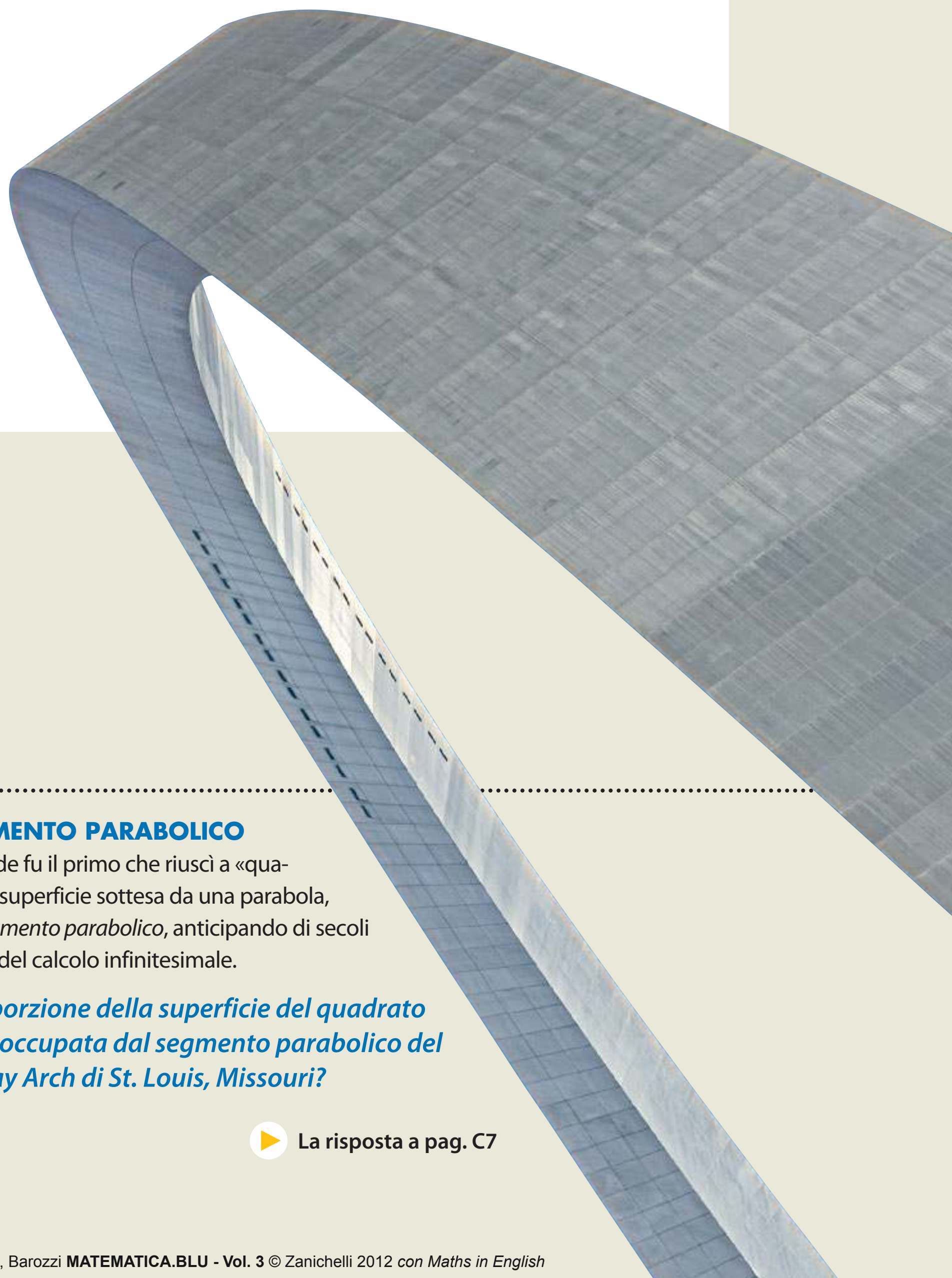
CAPITOLO **C1**

١ [numerazione araba]

१ [numerazione devanagari]

一 [numerazione cinese]

COLLEGAMENTI



IL SEGMENTO PARABOLICO

Archimede fu il primo che riuscì a «quadrare» la superficie sottesa da una parabola, detta *segmento parabolico*, anticipando di secoli i metodi del calcolo infinitesimale.

Quale porzione della superficie del quadrato rosso è occupata dal segmento parabolico del Gateway Arch di St. Louis, Missouri?

▶ **La risposta a pag. C7**

LE SEZIONI CONICHE: IL PUNTO DI VISTA SINTETICO

Dallo spazio al piano

Il punto di vista cartesiano che abbiamo utilizzato nello studio delle coniche non chiarisce il collegamento fra la definizione delle coniche come *intersezioni nello spazio di un piano e di un cono circolare retto a due falde* e la loro definizione come *luoghi geometrici nel piano*.
Ciò è invece possibile se si esamina il problema di un punto di vista sintetico, studiando i risultati raggiunti da Germinal Pierre Dandelin (1794-1847).

In questo capitolo ci occupiamo di particolari superfici nello spazio e delle loro intersezioni con un piano, e non abbiamo a che fare con figure solide. Per questo motivo, dato che non c'è pericolo di ambiguità, possiamo adottare una terminologia tipica dello studio delle superfici nello spazio, e utilizzare quindi la parola **cono** come sinonimo di **superficie conica** e la parola **sfera** come sinonimo di **superficie sferica**.

1. I TEOREMI DI DANDELIN

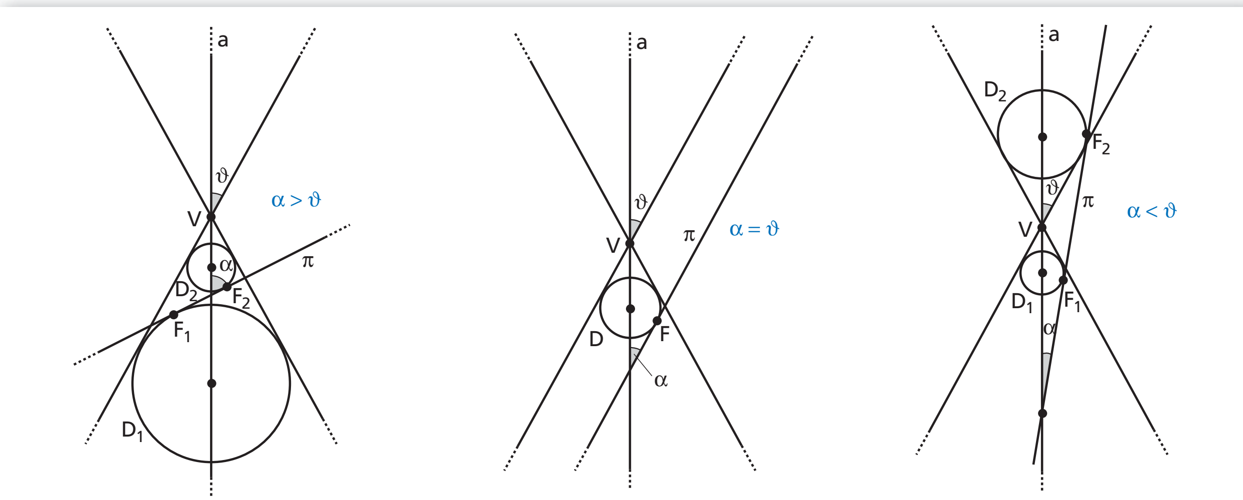
Le sfere di Dandelin

Utilizzando i concetti già introdotti a pagina 502, diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Sfera di Dandelin

Dati un cono circolare retto a due falde S, di asse a e vertice V, e un piano secante π non contenente V, diciamo sfera di Dandelin qualunque sfera D che sia inscritta in una falda di S e sia tangente anche al piano π in un suo punto.



▲ Figura 1

Nella figura 1 si mostrano le sezioni della superficie conica e delle sfere nel piano τ contenente l'asse a e l'asse r di simmetria della conica, ottenuta sezionando la superficie conica con il piano π. Si osservano queste tre possibilità:

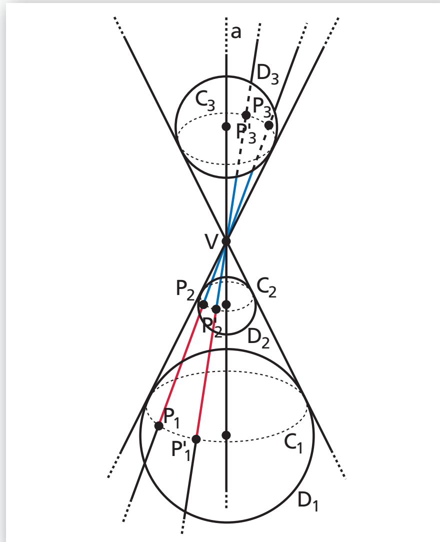
- $\alpha > \vartheta$ (*ellisse*): ci sono due sfere di Dandelin, D_1 e D_2, entrambe nella falda intersecata da π, tangenti a π nei punti F_1 e F_2;
- $\alpha = \vartheta$ (*parabola*): c'è una sola sfera di Dandelin D nella falda intersecata da π, tangente a π nel punto F;
- $\alpha < \vartheta$ (*iperbole*): ci sono due sfere di Dandelin, D_1 e D_2, una in ciascuna delle falde, tangenti a π nei punti F_1 e F_2.

Valgono le seguenti proprietà, di cui omettiamo la dimostrazione.

P1: dati una sfera D e un punto P esterno a essa, i segmenti di tangente a D condotti da P sono tra loro congruenti e formano un cono circolare retto la cui base è delimitata da una circonferenza C costituita da tutti e soli i punti di tangenza.

P2: ogni sfera di Dandelin è tangente al cono S in tutti e soli i punti di una circonferenza C appartenente a un piano perpendicolare all'asse a.

P3: date due sfere di Dandelin relative allo stesso cono S e tangenti a esso rispettivamente in C_1 e C_2, una generatrice di S incontra C_1 e C_2 in due punti P_1 e P_2 la cui distanza P_1P_2 non dipende dalla generatrice scelta.



◀ **Figura 2**

● Per esempio, in figura 2, V è esterno a D_1, $VP_1 \cong VP_1'$ e la circonferenza C_1 delimita la base di un cono circolare retto di vertice V.

● In figura 2, $P_1P_2 \cong P_1'P_2'$ e $P_1P_3 \cong P_1'P_3'$.

I teoremi di Dandelin

Possiamo ora dimostrare i seguenti teoremi relativi alle tre diverse tipologie di sezione conica $\gamma = S \cap \pi$.

TEOREMA

Teorema di Dandelin per l'ellisse

I punti F_1 e F_2 in cui le sfere D_1 e D_2 sono tangenti al piano secante π sono i *fuochi* dell'ellisse γ, cioè, detti A e B i vertici dell'ellisse sull'asse r:

$$\overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = \text{costante} = \overline{AB}, \forall P \in \gamma.$$

DIMOSTRAZIONE

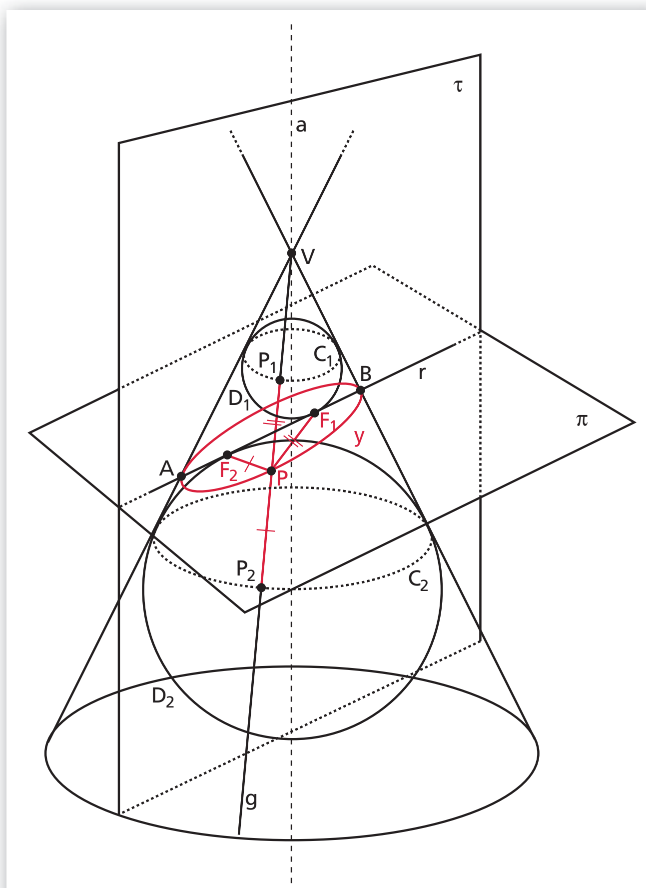
Siano P un generico punto dell'ellisse e g la generatrice del cono passante per P. Siano P_1 e P_2 rispettivamente i punti in cui g interseca le circonferenze C_1 e C_2 relative alle sfere D_1 e D_2 (proprietà **P2**). Le coppie di segmenti PP_1, PF_1 e PP_2, PF_2 sono segmenti di tangente condotti da un punto esterno a una stessa sfera, quindi sono congruenti (proprietà **P1**). Pertanto:

$$\overline{PF}_1 = \overline{PP}_1 \text{ e } \overline{PF}_2 = \overline{PP}_2 \rightarrow$$
$$\rightarrow \overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = \overline{PP}_1 + \overline{PP}_2 = \overline{P_1P}_2.$$

Ma $\overline{P_1P}_2$ non dipende dalla particolare generatrice (proprietà **P3**), cioè è una costante che non dipende dal punto P, quindi,

$$\overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = \text{costante},$$

▼ **Figura 3**



come richiesto dalla tesi. Determiniamo il valore della costante considerando i casi in cui il punto P coincide con il vertice A o con il vertice B. Si ha

$$\overline{AF_1} + \overline{AF_2} = \overline{BF_1} + \overline{BF_2},$$

da cui

$$2\overline{AF_2} + \overline{F_1F_2} = 2\overline{BF_1} + \overline{F_1F_2} \rightarrow \overline{AF_2} = \overline{BF_1},$$

pertanto:

$$\overline{AF_1} + \overline{AF_2} = \overline{AF_2} + \overline{F_2F_1} + \overline{BF_1} = \overline{AB}.$$

Quindi concludiamo che:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{AB}, \forall P \in \gamma.$$

TEOREMA

Teorema di Dandelin per la parabola

Il punto F in cui la sfera D è tangente al piano secante π è il *fuoco* della parabola γ, cioè, detta d la retta intersezione tra il piano π e il piano σ contenente la circonferenza C e detta H la proiezione di P su d:

$$\overline{PF} = \overline{PH}, \forall P \in \gamma.$$

La circonferenza C è costituita dai punti di tangenza fra la sfera e la falda del cono. d è la direttrice della parabola.

DIMOSTRAZIONE

Sia P un generico punto della parabola e sia g la generatrice del cono passante per P. Sia C_1 la circonferenza determinata sul cono dal piano perpendicolare all'asse a contenente P e sia T il punto in cui la retta g interseca la circonferenza C. La generatrice contenente il vertice della parabola B incontra C e C_1 rispettivamente nei punti T_1 e P_1 tali che $\overline{PT} = \overline{P_1T_1}$ (proprietà **P3**). Siano inoltre K la proiezione di P sul piano τ contenente gli assi a e r e D l'intersezione tra r e d. Si dimostra che K è necessariamente l'intersezione tra r e il diametro di C_1 appartenente a τ. Il quadrilatero $KPHD$ è pertanto un rettangolo.

Essendo gli angoli α e ϑ congruenti per ipotesi, i triangoli T_1DB e KBP_1 sono isosceli e tra loro simili. Possiamo dedurre la seguente catena di congruenze:

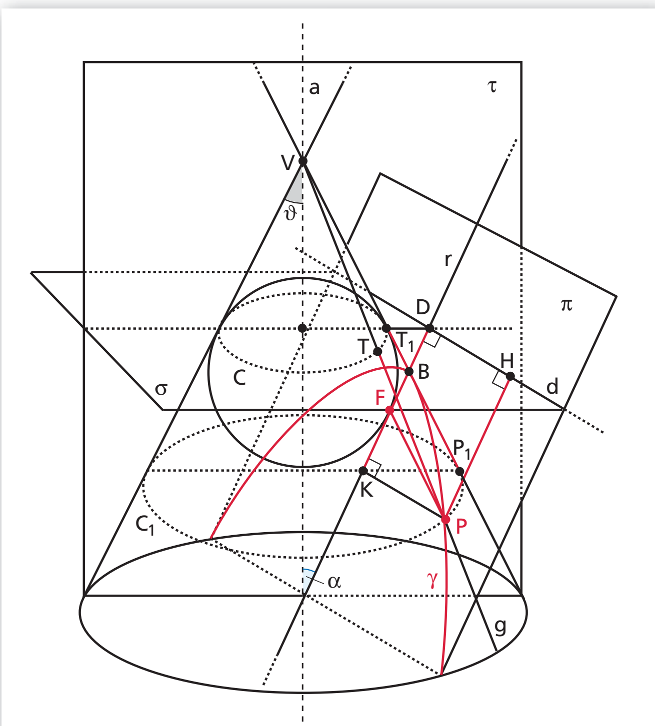
- $PF \cong PT$ (segmenti di tangente);
- $PT \cong P_1T_1$ (proprietà **P3**);
- $P_1T_1 \cong DK$ (T_1DB e KBP_1 isosceli e simili);
- $DK \cong PH$ (lati opposti di un rettangolo).

Possiamo quindi scrivere:

$$\overline{PF} = \overline{PH},$$

per ogni punto P di γ che non sia il vertice B. Ma poiché, per $P \equiv B$ si ha $PH \cong BT_1$ (il triangolo T_1DB è isoscele) e $BT_1 \cong BF$ (segmenti di tangente), la tesi è verificata $\forall P \in \gamma$.

▼ **Figura 4**



TEOREMA

Teorema di Dandelin per l'iperbole

I punti F_1 e F_2 in cui le sfere D_1 e D_2 sono tangenti al piano secante π sono i *fuochi* dell'iperbole γ, cioè, detti A e B i vertici dell'iperbole sull'asse r:

$$|\overline{PF}_1 - \overline{PF}_2| = \text{costante} = \overline{AB}, \forall P \in \gamma.$$

DIMOSTRAZIONE

Siano P un generico punto dell'iperbole γ e g la generatrice del cono per P. Siano P_1 e P_2 rispettivamente i punti in cui g interseca le circonferenze C_1 e C_2 relative alle sfere D_1 e D_2. Analogamente a quanto visto per l'ellisse,

$$\overline{PF}_1 = \overline{PP}_1 \text{ e } \overline{PF}_2 = \overline{PP}_2,$$

per cui:

$$|\overline{PF}_1 - \overline{PF}_2| = |\overline{PP}_1 - \overline{PP}_2| = \overline{P_1P}_2.$$

Poiché la lunghezza del segmento P_1P_2 non dipende dalla particolare generatrice, la tesi è dimostrata. In particolare, considerando i casi in cui P coincide con il vertice A o con il vertice B:

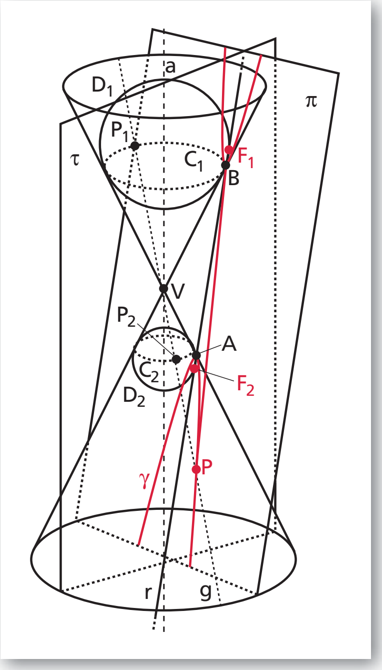
$$\overline{AF}_1 - \overline{AF}_2 = \overline{BF}_2 - \overline{BF}_1 \to \overline{F_1F}_2 - 2\overline{AF}_2 = \overline{F_1F}_2 - 2\overline{BF}_1 \to \overline{AF}_2 = \overline{BF}_1,$$

per cui

$$|\overline{AF}_1 - \overline{AF}_2| = |\overline{AF}_1 - \overline{BF}_1| = \overline{AB},$$

quindi concludiamo che:

$$|\overline{PF}_1 - \overline{PF}_2| = \overline{AB}, \forall P \in \gamma.$$



► Figura 5

Il teorema di Dandelin fuoco-direttrice

Ricordiamo la definizione unificata di conica data a pagina 505.

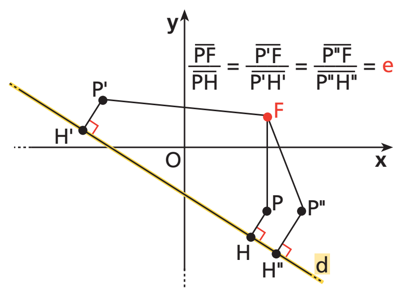
DEFINIZIONE

Conica

Si dice conica il luogo dei punti P di un piano per i quali è costante il rapporto fra la distanza di P da un punto fisso F del piano, detto **fuoco**, e quella da una retta fissa d dello stesso piano, detta **direttrice**, non passante per P:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = e,$$

con e numero reale non negativo.



● e è l'**eccentricità** della conica. Se:
$e = 0$, la conica è una **circonferenza**;
$0 < e < 1$, la conica è un'**ellisse**;
$e = 1$, la conica è una **parabola**;
$e > 1$, la conica è un'**iperbole**.

Nel caso della circonferenza, $e = 0$ e quindi la definizione non è direttamente applicabile. Si deve immaginare la retta direttrice a distanza infinita dal fuoco e trattare il caso come caso limite di ellisse.

Anche questa definizione può essere dedotta come proprietà caratteristica di una sezione conica sfruttando le sfere di Dandelin.

TEOREMA

Teorema di Dandelin fuoco-direttrice

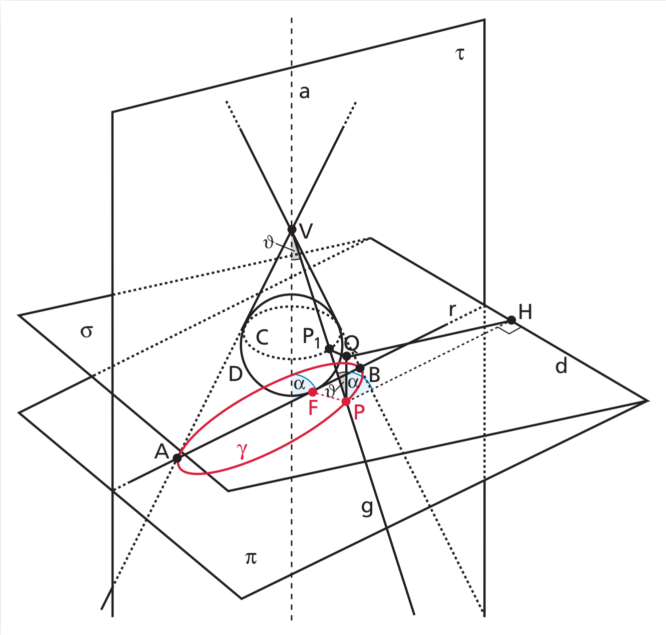
Siano date una sezione conica qualunque γ, intersezione del cono S e del piano π, e una relativa sfera di Dandelin D tangente a S nei punti di una circonferenza C e a π nel punto F. Detta d la retta in cui il piano σ contenente C interseca π e indicata con H la proiezione di P su d, si ha:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\vartheta} = e,$$

dove ϑ è l'angolo di semiapertura del cono e α è l'angolo tra l'asse a del cono e il piano secante π.

DIMOSTRAZIONE

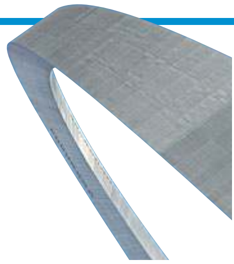
▼ Figura 6



Sia P un generico punto della conica γ e sia Q l'intersezione tra il piano σ e la retta per P parallela all'asse a. Detto P_1 il punto in cui la generatrice g passante per P interseca la circonferenza C, consideriamo i triangoli PQP_1 e PQH, rettangoli in Q, aventi in P gli angoli $P_1\widehat{P}Q = \vartheta$ e $H\widehat{P}Q = \alpha$ (indipendenti dalla posizione di P su γ). Tenendo conto che $\overline{P_1P} = \overline{PF}$ in quanto segmenti di tangente a D da uno stesso punto:

$$\overline{P_1P} \cdot \cos\vartheta = \overline{PF} \cdot \cos\vartheta = \overline{PQ} =$$

$$= \overline{PH} \cdot \cos\alpha \rightarrow \frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\vartheta}, \forall P \in \gamma.$$



IL SEGMENTO PARABOLICO

Quale porzione della superficie del quadrato rosso è occupata dal segmento parabolico del Gateway Arch di St. Louis, Missouri?

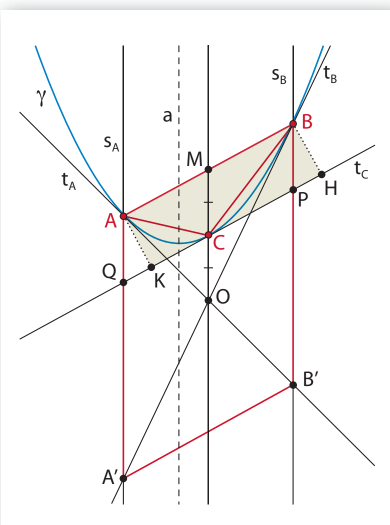
▶ Il quesito completo a pag. C1

La quadratura del segmento parabolico: un'interpretazione del metodo di Archimede

Nel trattato *Quadratura della parabola*, riprendendo un'intuizione «meccanica» già esposta nell'opera *Equilibrio dei piani* e rielaborandola alla luce del *metodo di esaustione*, Archimede arriva a dimostrare questo teorema.

Teorema di Archimede:
Dato un segmento parabolico di base AB la sua area è $\frac{2}{3}$ *dell'area del rettangolo in cui è inscritto il segmento stesso.*

Il rettangolo considerato è $ABHK$, definito dalla corda AB, base del segmento parabolico, dalla retta tangente all'arco di parabola parallela ad AB e dalle perpendicolari a questa passanti per gli estremi A e B.



Illustriamo il senso del procedimento archimedeo presupponendo le seguenti proposizioni, dimostrabili per via sintetica o analitica.

P1: dati due punti qualsiasi A e B della parabola γ, dette t_A e t_B le tangenti a γ in A e in B e s_A e s_B le parallele all'asse di simmetria a di γ passanti per A e B, sia A' l'intersezione di s_A con t_B e B' l'intersezione di s_B con t_A; il quadrilatero $ABB'A'$ è un parallelogramma.

P2: detto O il centro del parallelogramma $ABB'A'$ visto in **P1**, la parallela all'asse passante per O, che interseca la corda AB nel suo punto medio M, incontra γ in un punto C tale che $MC \cong CO$ e la tangente t_C a γ in C è parallela ad AB.

Come corollario delle precedenti abbiamo questa proprietà.

P3: il parallelogramma $ABPQ$, equivalente a $\frac{1}{4}$ di $ABB'A'$, è equivalente al rettangolo $AKHB$ in cui è inscritto il segmento parabolico; il triangolo ABC inscritto nel segmento equivale a $\frac{1}{2}$ di $ABPQ$, quindi a $\frac{1}{2}$ del rettangolo $AKHB$ e a $\frac{1}{8}$ di $ABB'A'$.

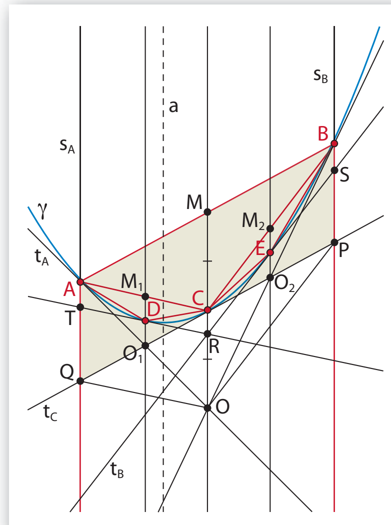
Il procedimento di Archimede può riassumersi in questo modo.

Poiché l'area $\wp$ *del segmento parabolico è uguale all'area* $\Im$ *del triangolo ABC più quella dei segmenti parabolici residui di basi AC e BC, inscrivendo in essi i relativi triangoli, si può dare inizio a un procedimento che, ripetuto quante volte si vuole, «esaurisce» il segmento parabolico tramite un poligono con un numero crescente di lati.*

Dalla figura, si deduce che, come ABC è equivalente a $\frac{1}{8}$ di $ABB'A'$, così ADC e CBE sono equivalenti a $\frac{1}{8}$ dei rispettivi parallelogrammi $ACOQ$ e $CBPO$: ma questi sono equivalenti entrambi a $\frac{1}{2}$ di $ABPQ$, cioè ad ABC.

Quindi, in sintesi, ogni triangolo produce altri due triangoli equivalenti ciascuno a $\frac{1}{8}$ del primo, per cui:

$$\wp = \Im + 2\cdot\frac{1}{8}\Im + 2^2\cdot\frac{\Im}{8^2} + \ldots =$$
$$= \Im\left[1 + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \ldots\right]$$



Se consideriamo la somma della progressione geometrica per n che diventa sempre più grande ($n \to +\infty$), otteniamo infine la tesi:

$$1 + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n =$$
$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} =$$
$$= \frac{4}{3} \to \wp = \frac{4}{3}\Im = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}S_{AKHB}\right) =$$
$$= \frac{2}{3}S_{AKHB}.$$

1. I TEOREMI DI DANDELIN

▶ Teoria a pag. C2

1 Dimostra la proprietà **P1** che abbiamo enunciato nella teoria e utilizzato per dimostrare i teoremi di Dandelin: dati una sfera D e un punto P esterno a essa, i segmenti di tangente a D condotti da P sono tra loro congruenti e formano un cono circolare retto la cui base è delimitata da una circonferenza C costituita da tutti e soli i punti di tangenza.

2 Dimostra la proprietà **P3**: date due sfere di Dandelin internamente tangenti a uno stesso cono S rispettivamente nelle circonferenze C_1 e C_2, una generatrice di S incontra C_1 e C_2 in due punti P_1 e P_2 la cui distanza P_1P_2 non dipende dalla generatrice scelta.

3 Sia $\gamma = S \cap \pi$ un'ellisse. Dimostra che il rapporto $\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = e$ (eccentricità) che la caratterizza equivale al rapporto $\frac{\overline{OF}}{\overline{OA}}$, essendo A e B i vertici dell'ellisse e O il suo centro, cioè il punto medio dell'asse AB.

(Suggerimento. Applica la proprietà $\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = e$ prima al punto A, poi al punto B…)

4 Siano $\gamma = S \cap \pi$ un'ellisse, A e B i suoi vertici e O il punto medio di AB, cioè il centro dell'ellisse. Dimostra per via sintetica che i punti F_1 e F_2 in cui le sfere di Dandelin sono tangenti al piano secante π sono simmetrici rispetto a O.

(Suggerimento. Considera la sezione nel piano τ contenente l'asse a e l'asse AB; dimostra che $AF_1 \cong BF_2$, confrontando i diversi segmenti di tangente originati dalla costruzione.)

IL SEGMENTO PARABOLICO

Dimostra per via analitica le seguenti proprietà, che abbiamo utilizzato per studiare il metodo di Archimede per la quadratura del segmento parabolico.

5 **P1**: dati due punti qualsiasi A e B della parabola γ, dette t_A e t_B le tangenti a γ in A e in B e s_A e s_B le parallele all'asse di simmetria a di γ passanti per A e B, sia A' l'intersezione di s_A con t_B e B' l'intersezione di s_B con t_A; il quadrilatero $ABB'A'$ è un parallelogramma.

(Suggerimento. Riferisci γ alla tangente nel vertice (asse x) e al suo asse di simmetria (asse y), così che la sua equazione assuma la forma $y = ax^2$: la retta tangente in un generico punto di ascissa $x = x_A$ ha equazione $y = 2ax_Ax - ax_A^2$…)

6 **P2**: detto O il centro del parallelogramma $ABB'A'$ dell'esercizio precedente, la parallela all'asse passante per O, che interseca la corda AB nel suo punto medio M, incontra γ in un punto C tale che $MC \cong CO$ e la tangente t_C a γ in C è parallela ad AB.

(Suggerimento. Riferisci γ alla tangente nel vertice (asse x) e al suo asse di simmetria (asse y), così che la sua equazione assuma la forma $y = ax^2$: la retta tangente in un generico punto di ascissa $x = x_A$ ha equazione $y = 2ax_Ax - ax_A^2$…)

7 Dimostra per via sintetica che la retta perpendicolare alla tangente in un punto P di una parabola γ (retta *normale*) è *bisettrice* dell'angolo formato dalla retta per P parallela all'asse di γ e dalla retta che congiunge P e il fuoco F.

(Suggerimento. Traccia la direttrice d e considera il triangolo PFH, con H proiezione di P su d, quindi traccia le tangenti a γ in P e nel vertice V e ricorda la proprietà **P1**…)

IL CALCOLO APPROSSIMATO

1. LE APPROSSIMAZIONI

Troncamenti e arrotondamenti

Spesso capita di non conoscere tutte le cifre decimali di un numero. Ciò accade, per esempio, quando eseguiamo misure di grandezze, che sono sempre caratterizzate da un'incertezza che dipende, in particolare, dallo strumento utilizzato. Altre volte, trascuriamo volutamente le cifre decimali di un numero da un certo punto in poi, per esempio quando consideriamo numeri irrazionali come $\sqrt{2}$ e π, che sono rappresentati da scritture decimali con infinite cifre.

L'**approssimazione** di un numero r può essere realizzata:

- per **troncamento**, limitandosi a scrivere la quantità desiderata di cifre decimali di r e omettendo tutte quelle successive;
- per **arrotondamento**, scegliendo, tra i numeri che hanno la quantità di cifre decimali desiderata, quello che più si avvicina a r. Si guarda la prima cifra che viene omessa: se è minore di 5, il valore arrotondato coincide con quello troncato; se, invece, la cifra omessa è maggiore o uguale a 5, il valore arrotondato si ottiene aumentando di una unità l'ultima cifra del numero troncato.

ESEMPIO

1. L'approssimazione per troncamento di $\sqrt{2}$ alla seconda cifra decimale è 1,41, essendo $\sqrt{2} = 1,41421\ldots$
2. Il valore arrotondato alla seconda cifra decimale di $\sqrt{2}$ è ancora 1,41, perché la prima cifra omessa, la terza, è 4, minore di 5.
3. Il troncamento di π alla terza cifra decimale dà per valore 3,141, perché $\pi = 3,1415926\ldots$
4. Il valore arrotondato alla terza cifra decimale di π è 3,142, perché la prima cifra omessa è 5.

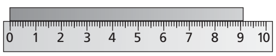
Se si tronca un numero r, si ottiene sempre un'approssimazione per difetto, ossia l'approssimazione per troncamento non è mai maggiore di r.
Se si arrotonda r, si ottiene un'approssimazione che può essere per difetto, quando la prima cifra decimale trascurata è minore di 5, oppure per eccesso, quando la prima cifra decimale trascurata è maggiore o uguale a 5.

Un numero reale, se è irrazionale, ha uno sviluppo decimale illimitato e non periodico; che cosa vuol dire, allora, conoscere un numero reale?
Poiché non è possibile scrivere tutte le sue cifre, per conoscerlo dobbiamo disporre di una procedura che consenta di calcolare un numero desiderato di cifre decimali, qualunque esso sia.
Per esempio, se scriviamo $\pi = 3,1415\ldots$, stiamo intendendo che conosciamo una procedura di calcolo delle cifre decimali di π, che abbiamo utilizzato per scrivere la parte intera e le prime cifre decimali. I puntini di sospensione indicano che le cifre proseguono all'infinito, senza alcuna periodicità.

Intervallo di indeterminazione e precisione di un'approssimazione

La scrittura $\pi = 3,1415\ldots$ può essere interpretata dicendo che la rappresentazione decimale di π è un numero compreso nell'intervallo che ha per estremi i numeri decimali finiti 3,415 (approssimazione per difetto) e 3,1416 (approssimazione per eccesso).
L'intervallo $[3,1415; 3,1416]$ si dice **intervallo di indeterminazione** o **di incertezza** del numero π. È quindi ragionevole assumere come stima di π il punto medio dell'intervallo e come precisione, o incertezza dell'informazione, la semiampiezza dell'intervallo stesso. In sintesi: $\pi = 3,14155 \pm 0,00005$.

Si dice anche che 3,14155 approssima π a meno di 0,00005, che è l'errore massimo che possiamo compiere approssimando π con 3,14155.
L'errore massimo viene anche detto **errore assoluto**.
Nel caso appena considerato l'approssimazione di π è stata effettuata per troncamento, in quanto abbiamo immaginato di utilizzare una procedura che dà il numero desiderato di cifre dello sviluppo decimale di π e di fermarci alla quarta cifra dopo la virgola.
In generale, però, non è noto se l'approssimazione di un numero reale è per difetto o per eccesso. Questo è il caso in cui l'approssimazione è il risultato di una misura.



Supponiamo, per esempio, di misurare la lunghezza di una sbarretta di metallo e di rilevare che la tacca dello strumento di misura più vicina alla seconda estremità della sbarretta corrisponda a 9,1 cm.
Possiamo dire che il **valore vero** della lunghezza della sbarretta appartiene all'intervallo di indeterminazione [9,0; 9,2]. Come stima del valore vero della lunghezza assumiamo 9,1 cm, mentre l'errore assoluto è pari a 0,1 cm. La misura è allora: $(9{,}1 \pm 0{,}1)$ cm e diciamo che 9,1 cm approssima la lunghezza della sbarretta a meno di 0,1 cm.
Nota che in questo caso supponiamo che la precisione del processo di misura, ossia l'errore assoluto, sia uguale alla **sensibilità** dello strumento, ossia alla minima variazione della grandezza misurata che lo strumento è in grado di apprezzare (1 mm).

● In assenza di diverse ed esplicite precisazioni assumeremo sempre che sensibilità dello strumento e precisione del processo di misura coincidano.

Cifre esatte e cifre significative

Quando l'approssimazione è il risultato di una misura, si dicono **cifre esatte**, o anche **cifre certe**, le cifre comuni ai valori minimo e massimo dell'intervallo di indeterminazione.
Nel caso della misura della lunghezza della sbarretta metallica abbiamo una sola cifra esatta: il 9.
D'altra parte, nella misura della lunghezza della sbarretta, anche la cifra dei millimetri è importante: se ci limitassimo a fornire solo le cifre esatte della misura, ossia 9, non daremmo alcuna informazione sulla cifra dei millimetri, che potrebbe essere una qualunque delle dieci cifre decimali. Invece, affermare che la lunghezza della sbarretta è 9,1 cm, anche se la cifra dei millimetri non è certa, consente di escludere ben sette valori possibili per la cifra dei millimetri, dato che essa può essere solo 0, 1 oppure 2. Per questo motivo la cifra dei millimetri è considerata significativa. In generale, sono **cifre significative** tutte quelle cifre su cui si hanno informazioni, cioè di cui si sa che sono esatte o che, pur non essendo esatte, possono assumere solo alcuni valori.
Quando un'approssimazione è il risultato di una misura di una grandezza, il numero di cifre significative è collegato alla **sensibilità** dello strumento. Per esempio, se si misura la massa di un corpo con una bilancia sensibile al grammo, le cifre significative arrivano fino alla cifra dei grammi.
Vediamo altri due esempi di determinazione del numero di cifre esatte e di cifre significative in un'approssimazione.

ESEMPIO

1. Sia 2,349 un'approssimazione per arrotondamento del numero reale r. Il valore vero di r deve essere maggiore o uguale a 2,3485 e minore di 2,3495. Quindi l'ampiezza dell'intervallo di indeterminazione è 0,001.

L'errore assoluto è 0,0005, per cui si dice che 2,349 approssima il numero r a meno di 0,0005.
Le cifre comuni ai valori minimo e massimo dell'intervallo di indeterminazione sono tre: 2, 3, 4. Quindi r è noto con tre cifre decimali esatte. Invece le cifre significative sono quattro: 2, 3, 4, 9.

2. Sia 3,299 un'approssimazione del numero reale r e 0,001 l'errore assoluto. In tal caso il valore minimo dell'intervallo di indeterminazione è $3{,}299 - 0{,}001 = 3{,}298$ e il valore massimo è $3{,}299 + 0{,}001 = 3{,}300$. r è noto con una sola cifra esatta (3), anche se il numero di cifre significative è uguale a quattro (3, 2, 9, 9).

La notazione scientifica

Un numero x si dice espresso in **notazione scientifica** quando è scritto nella forma di un prodotto fra un numero decimale limitato a, maggiore o uguale a 1 e minore di 10, e una potenza di 10.
In simboli: $x = \pm\, a \cdot 10^k$, con $0 \leq a < 10$ e k numero intero.

ESEMPIO
2345 in notazione scientifica è $2{,}345 \cdot 10^3$; 0,0034 è $3{,}4 \cdot 10^{-3}$.

È bene che le cifre di a siano tutte e sole le cifre significative.

ESEMPIO
Se diciamo che la velocità della luce nel vuoto è pari a $3 \cdot 10^8$ m/s, consideriamo una sola cifra significativa: la luce viaggia a una velocità di circa trecento milioni di metri al secondo.

2. LA PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

Errori e operazioni

Supponiamo di aver misurato le due dimensioni X e Y di un tavolo rettangolare con un metro a nastro con la sensibilità del millimetro e di aver trovato:

$$x = 120{,}0 \text{ cm} \quad \text{e} \quad y = 80{,}0 \text{ cm}.$$

Calcoliamo ora la misura del semiperimetro p del rettangolo e il suo intervallo di indeterminazione. Prendiamo come precisione delle misure la sensibilità dello strumento, 1 mm.
Con $x = 120{,}0$ vogliamo dire che X appartiene all'intervallo [119,9; 120,1], ossia, $X = (120{,}0 \pm 0{,}1)$ cm. Analogamente, $Y = (80{,}0 \pm 0{,}1)$ cm.
Il semiperimetro p è dato dalla somma $X + Y$, che è compresa tra la somma dei più piccoli valori e la somma dei più grandi valori che possono assumere X e Y:

$$(120{,}0 - 0{,}1) \text{ cm} + (80{,}0 - 0{,}1) \text{ cm} \leq p \leq (120{,}0 + 0{,}1) \text{ cm} + (80{,}0 + 0{,}1) \text{ cm},$$

ossia p appartiene all'intervallo [199,8; 200,2] e quindi può essere scritto come $(200{,}0 \pm 0{,}2)$ cm.

● Nota anche che, in generale, nel calcolo approssimato, l'informazione data dalla scrittura 3,300 è diversa da quella della scrittura 3,3. Nel primo caso, infatti, è noto che le cifre dei centesimi e dei millesimi sono entrambe nulle, mentre nel secondo caso non si ha alcuna informazione sulla cifra dei centesimi e su quella dei millesimi.

● La notazione scientifica estende, in un certo senso, il concetto di approssimazione anche a numeri non decimali. Per esempio, se vogliamo calcolare in modo rapido qual è il prodotto di $81 \cdot 33$, possiamo approssimare 81 con 80 e 33 con 30 e dire che il prodotto vale circa $80 \cdot 30 = 2400$. Con la notazione scientifica abbiamo:

$$8 \cdot 10 \cdot 3{,}10 = 2{,}4 \cdot 10^3.$$

La differenza rispetto al caso di numeri decimali è che per i numeri interi introduciamo degli 0 anziché omettere delle cifre. Per esempio, 84 379 può essere scritto come $8{,}43 \cdot 10^2$ se nei calcoli si pensa di poter trascurare le cifre delle decine e delle unità.

● Indichiamo con X e Y le due lunghezze esatte, e con x e y le rispettive approssimazioni, ottenute attraverso la misura con lo strumento.

Il valore ottenuto è quindi uguale alla somma delle lunghezze x e y, con un errore massimo che è dato dalla somma degli errori assoluti che si possono commettere.

In generale, è possibile dimostrare che, date le approssimazioni $x \pm \Delta x$ e $y \pm \Delta y$ di due grandezze o di due numeri X e Y, abbiamo come approssimazioni:

$$(x + y) \pm (\Delta x + \Delta y), \text{ per } X + Y; \qquad (x - y) \pm (\Delta x + \Delta y), \text{ per } X - Y.$$

Vale quindi il seguente teorema.

TEOREMA

Propagazione degli errori: addizione o sottrazione

In un'addizione o in una sottrazione, l'errore assoluto del risultato è la somma degli errori assoluti degli operandi.

Determiniamo ora l'area a del rettangolo e il suo intervallo di indeterminazione. Abbandoniamo l'esempio numerico e lavoriamo con simboli generici. Sappiamo che x e y sono approssimazioni delle lunghezze X e Y, e quindi scriviamo:

$$X = x \pm \Delta x \quad \text{e} \quad Y = y \pm \Delta y.$$

L'area a, che è data dal prodotto XY, è compresa tra il prodotto dei più piccoli valori e quello dei più grandi valori che possono assumere X e Y,

$$(x - \Delta x) \cdot (y - \Delta y) \leq a \leq (x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y),$$

cioè, eseguendo i calcoli:

$$xy - (x\Delta y + y\Delta x - \Delta x\, \Delta y) \leq a \leq xy + (x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\, \Delta y).$$

Supponendo che Δx e Δy siano abbastanza piccoli rispetto a x e a y, è possibile trascurare il prodotto $\Delta x\Delta y$, ottenendo così:

$$xy - (x\Delta y + y\Delta x) \leq a \leq xy + (x\Delta y + y\Delta x) \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad a = xy = xy \pm (x\Delta y + y\Delta x).$$

Quindi l'errore assoluto nella moltiplicazione xy è dato da $\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x$.
La formula per la propagazione degli errori in una moltiplicazione può essere riscritta in una forma più semplice da ricordare se, invece che utilizzare gli errori assoluti Δx e Δy, si usano gli **errori relativi**, dati dal rapporto fra l'errore assoluto e l'approssimazione disponibile, ossia, rispettivamente $\frac{\Delta x}{x}$ e $\frac{\Delta y}{y}$. Infatti, dividendo entrambi i membri per xy:

$$\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta(xy)}{xy} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}.$$

Considerazioni analoghe valgono per una divisione.
Supponiamo, infatti, di voler determinare il massimo errore che si può commettere nella divisione $\frac{X}{Y}$ di due grandezze X e Y di cui sono note le rispettive approssimazioni $x \pm \Delta x$ e $y \pm \Delta y$. Il quoziente $\frac{X}{Y}$ è compreso tra il rapporto del più piccolo valore che può assumere X con il più grande valore che può assumere Y e

il rapporto del più grande valore che può assumere X con il più piccolo valore che può assumere Y:

$$\frac{x-\Delta x}{y+\Delta y} \leq \frac{X}{Y} \leq \frac{x+\Delta x}{y-\Delta y}.$$

Moltiplicando tutti i termini delle disuguaglianze per $(y+\Delta y)\cdot(y-\Delta y)$ ed eseguendo i calcoli, si ottiene:

$$xy - y\Delta x - x\Delta y + \Delta x\Delta y \leq \frac{X}{Y}[y^2-(\Delta y)^2] \leq xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

Nell'ipotesi che Δx e Δy siano piccoli rispetto a x e a y, trascuriamo $\Delta x\Delta y$ e $(\Delta y)^2$:

$$xy - y\Delta x - x\Delta y \leq \frac{X}{Y}y^2 \leq xy + y\Delta x + x\Delta y.$$

Dividiamo tutti i termini per y^2:

$$\frac{x}{y} - \frac{\Delta x}{y} - \frac{x\Delta y}{y^2} \leq \frac{X}{Y} \leq \frac{x}{y} + \frac{\Delta x}{y} + \frac{x\Delta y}{y^2} \rightarrow \frac{X}{Y} = \frac{x}{y} \pm \left(\frac{x\Delta y + y\Delta x}{y^2}\right).$$

L'errore assoluto $\Delta\left(\frac{X}{Y}\right)$ è quindi dato da $\frac{x\Delta y + y\Delta x}{y^2}$. Dividendo per $\frac{x}{y}$ si ottiene, per gli errori relativi:

$$\frac{\Delta\left(\frac{X}{Y}\right)}{\frac{X}{Y}} = \frac{\Delta(xy)}{xy} = \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta x}{x},$$

che è la stessa legge di propagazione degli errori relativi sul prodotto.
Vale quindi il seguente teorema.

TEOREMA

Propagazione degli errori: moltiplicazione e divisione

In una moltiplicazione o in una divisione, l'errore relativo del risultato è dato dalla somma degli errori relativi degli operandi.

Misure ripetute

Nel caso in cui si eseguano più misure $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di una stessa grandezza X si è soliti usare, come stima del valore vero di X, la media aritmetica $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ delle misure, mentre l'errore assoluto che si può commettere su X è dato dalla semidifferenza tra i valori massimo x_M e minimo x_m delle misure ottenute:

$$X = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \pm \frac{x_M - x_m}{2}.$$

ESEMPIO

71, 72, 72, 73, 71 sono le pulsazioni al minuto rilevate su una studentessa a riposo. Assumiamo come misura delle pulsazioni la media aritmetica 71,8 e come errore assoluto $\frac{73-71}{2}$. Quindi il numero di pulsazioni al minuto della studentessa è 72 ± 1.

1. LE APPROSSIMAZIONI

Teoria a pag. C9

1 Aiutandoti con la calcolatrice scientifica, esprimi i valori troncati alla sesta cifra dopo la virgola dei numeri irrazionali e (numero di Nepero), $\sqrt{17}$, π.

2 Esprimi i valori arrotondati alla terza, quarta e quinta cifra dopo la virgola di e e $\sqrt{17}$.

Per ognuna delle situazioni descritte negli esercizi dal 3 al 9, determina l'intervallo di indeterminazione dell'approssimazione o misura, l'errore assoluto, le cifre esatte e quelle significative.

3 Il numero 1,73 è un'approssimazione per troncamento di $\sqrt{3}$.

4 Il numero 0,1411 è un'approssimazione per troncamento di un valore ottenuto con la calcolatrice.

5 Una massa m è stata pesata con una bilancia sensibile al grammo. Il risultato della misura è stato 213 g.

6 Una misura di lunghezza con uno strumento sensibile al decimo di millimetro ha fornito 12,34 cm.

7 Come nell'esercizio precedente, ma con lunghezza 12,00 cm.

8 14,013 è un'approssimazione del numero r e 0,001 è la sua precisione.

9 13,999 è un'approssimazione del numero r e 0,001 è la sua precisione.

10 Aiutandoti con la calcolatrice scientifica, determina un'approssimazione:
a) per troncamento di π a meno di 10^{-2} e di $\sqrt{7}$ a meno di 10^{-3};
b) per arrotondamento di π a meno di 10^{-3} e di $\sqrt{7}$ a meno di 10^{-2}.

11 **TEST** L'età della Terra è valutata intorno ai $4{,}5 \times 10^9$ anni. L'*Homo erectus* è comparso circa 10^6 anni fa. Qual è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'*Homo erectus*?

A $4{,}5 \times 10^9$ anni   B $3{,}5 \times 10^9$ anni   C $4{,}5 \times 10^6$ anni   D $4{,}5 \times 10^3$ anni

(*Prova INVALSI, Scuola secondaria di secondo grado, Seconda classe,* 2011)

2. LA PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

Teoria a pag. C11

Errore assoluto ed errore relativo

12 ESERCIZIO GUIDA

La distanza media della Terra dalla Luna è di 384 400 km, con un errore assoluto di 1 metro.
Giorgio ha misurato la sua altezza ottenendo (179 ± 1) cm.
Quale fra le due misure è la più precisa?

Nonostante l'errore assoluto della prima misura sia cento volte maggiore di quello della seconda, la misura della distanza Terra-Luna è molto più precisa.
Per rispondere alla domanda in termini numerici, confrontiamo gli errori relativi e non gli errori assoluti:

• errore relativo sulla misura della distanza Terra-Luna: $\frac{1}{3,844 \cdot 10^8} \simeq 3 \cdot 10^{-9}$;

• errore relativo sulla misura dell'altezza di Giorgio: $\frac{1}{79} \simeq 6 \cdot 10^{-3}$.

$6 \cdot 10^{-3}$ è molto maggiore di $3 \cdot 10^{-9}$, quindi la misura della distanza Terra-Luna è molto più precisa!

13 Determina la più precisa fra le misure (102 ± 3) m e $(2,3 \pm 0,2)$ km.

14 Scrivi in ordine di precisione decrescente le seguenti misure:

(13 ± 2) g; $(3,4 \pm 0,2)$ kg; $(1,2 \pm 0,2)$ mg; $(120,2 \pm 0,5)$ g.

Errori e operazioni

15 **ESERCIZIO GUIDA**

Il valore dell'accelerazione di gravità g può essere determinato misurando la lunghezza l di un pendolo e il periodo T della sua oscillazione (il periodo è il tempo impiegato a compiere un'oscillazione completa), essendo $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$. Un gruppo di studenti, durante una lezione di laboratorio, ottiene le seguenti misure:

$l = 93,8 \pm 0,1$ cm, $T = 1,944 \pm 0,001$ s.

Quale valore risulta come misura di g e qual è il suo errore assoluto?

Notiamo, innanzitutto, che π può essere approssimato con un numero di cifre decimali predefinito, quindi è possibile scegliere una sua approssimazione che renda trascurabile rispetto agli altri l'errore commesso su π e, di conseguenza, su $4\pi^2$. Pertanto $\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta\left(\frac{l}{T^2}\right)}{\frac{l}{T^2}}$.

Dobbiamo allora vedere come gli errori su T e su l si propagano quando si calcola $\frac{l}{T^2}$. Calcoliamo l'errore relativo $\frac{\Delta T}{T}$:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{0,001}{1,944} \simeq 0,0005.$$

Poiché in una moltiplicazione si addizionano gli errori relativi, l'errore relativo su T^2 è dato da $2\frac{\Delta T}{T}$, ossia 0,001.
Per determinare l'errore relativo di $\frac{l}{T^2}$ è sufficiente addizionare gli errori relativi di l e di T^2:

$$\frac{\Delta\left(\frac{l}{T^2}\right)}{\frac{l}{T^2}} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T} \simeq \frac{0,1}{93,8} + 0,001 \simeq 0,002.$$

Quindi l'errore relativo $\frac{\Delta g}{g}$ è 0,002.

Passiamo ora al calcolo di $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$, avendo cura di utilizzare per π tutte le cifre fornite dalla calcolatrice. Otteniamo $g = 979,8735931\ldots$ Di questo valore dobbiamo considerare solo le cifre significative.

Per ottenerle, calcoliamo l'errore assoluto Δg. Poiché $\Delta g = \frac{\Delta g}{g} g$:

$$\Delta g \simeq 0{,}002 \cdot 979{,}8735931\ldots \simeq 2.$$

Concludiamo che $g = (980 \pm 2)$ cm/s^2. Il valore di g ha una sola cifra esatta, ma tre significative.

16 Misura un tavolo rettangolare. Determina le misure del perimetro e dell'area del tavolo prendendo in considerazione la sensibilità dello strumento di misura utilizzato.

17 Andrea ha determinato lo spigolo di un cubetto con una riga graduata in millimetri ottenendo il valore 8,3 cm. Quale è il volume V del cubo? [$(5{,}7 \cdot 10^2 \pm 2 \cdot 10)$ cm^3]

18 Il Comune di Portici, in provincia di Napoli, è uno dei Comuni italiani con la densità di popolazione più alta. Su un'area di 4,5 km^2 vivono $5{,}44 \cdot 10^4$ abitanti. Qual è la densità di popolazione? [$(1{,}21 \cdot 10^2 \pm 3^2 \cdot 10^2)$ abitanti al km^2]

19 Le dimensioni di un campo da calcio sono $(105{,}0 \pm 0{,}5)$ m e $(70{,}0 \pm 0{,}5)$ m. Quali sono perimetro e area del campo? [(350 ± 2) m; $(7{,}35 \cdot 10^3 \pm 9 \cdot 10)$ m^2]

20 Le dimensioni di una scatola a forma di parallelepipedo sono $(30{,}2 \pm 0{,}2)$ cm, $(15{,}3 \pm 0{,}2)$ cm e $(23{,}0 \pm 0{,}2$ cm). Qual è il volume della scatola? [$(1{,}06 \cdot 10^4 \pm 3 \cdot 10^2)$ cm^3]

Misure ripetute

21 Per calcolare il valore dell'accelerazione di gravità g si è utilizzato un pendolo di lunghezza l e si è misurato il periodo T, come nell'esercizio guida 15. Si sono effettuate più misure con pendoli di lunghezza diversa. Completa la tabella e dai una stima del valore di g.

l (cm)	T (s)	$\frac{\Delta l}{l}$	$\frac{\Delta T^2}{T^2}$	$\frac{\Delta g}{g}$	Δg
93,8	1,944				
70,3	1,681				
45,7	1,358				
21,2	0,922				

22 Sono state effettuate diverse misure di una stessa grandezza. Nella tabella sono riportate le misure e il numero di volte in cui sono state ottenute. Indica il valore della grandezza. [$(7{,}3 \pm 0{,}2)$ cm]

Misura (cm)	Frequenza
7,2	3
7,3	4
7,4	4
7,5	2

23 Negli allenamenti per la gara dei 110 ostacoli, un atleta ha ottenuto i seguenti tempi (in secondi): 13,58; 13,57; 13, 59; 13,59; 13,55; 13,56; 13,56; 13,53; 13,54; 13,60.
Indica una stima del valore medio del tempo impiegato. [$(13{,}57 \pm 0{,}03)$ s]

VELOCITÀ DI VARIAZIONE DI UNA GRANDEZZA

1. GRANDEZZE VARIABILI

Vediamo alcuni esempi di grandezze variabili.

ESEMPIO

1. Nella tabella 1 di Trenitalia, il treno *Frecciarossa* 9507 impiega un'ora e cinque minuti per percorrere il tragitto Milano-Bologna.

▼ Tabella 1

Treno		Partenza		Arrivo	
	9507 FRECCIAROSSA	Milano Centrale	08:15	Bologna Centrale	09:20

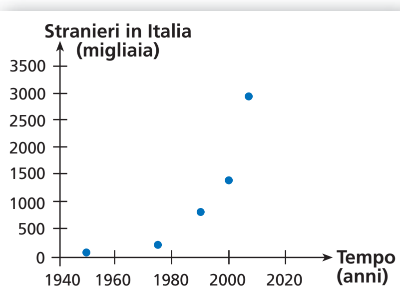
Se vogliamo studiare il moto del treno, ossia come varia lungo la linea ferroviaria la sua posizione nel tempo, dobbiamo fissare un sistema di riferimento *tempo-spazio*. Per esempio, scegliamo come istante iniziale, quello in cui il treno parte da Milano Centrale, cioè le 8:15, e come posizione iniziale, con valore 0, quella del treno quando si trova nella stessa stazione. A questo punto il moto di *Frecciarossa* 9507 può essere descritto con una sequenza di coppie ordinate di dati (*tempo*; *posizione*), in cui per posizione si intende la distanza percorsa sulla linea ferroviaria a partire da Milano, che possono poi essere rappresentate su un piano cartesiano.

2. La tabella 2 rappresenta alcuni dati relativi alla variazione nel tempo del numero di stranieri residenti in Italia.

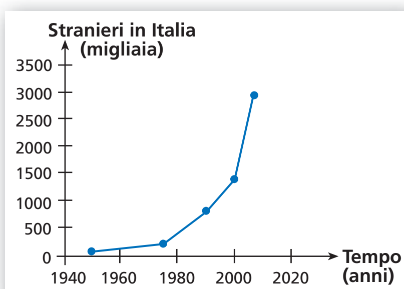
Anni	1950	1975	1990	2000	2007
Popolazione stranieri in Italia (in migliaia)	47,0	186,0	781,0	1380,0	2938,9

◀ Tabella 2

Nel grafico della figura 1 sono state riportate le coppie di dati (*tempo*; *popolazione*) e nel grafico della figura 2, per meglio evidenziare l'andamento, queste coppie di dati sono state unite con dei segmenti.



▲ Figura 1



▲ Figura 2

3. È possibile rappresentare anche variazioni di grandezze quando la variabile indipendente non è il tempo. Potremmo, per esempio, studiare come varia il livello dell'acqua al variare della quantità di acqua introdotta in ciascuno dei due bicchieri della figura 3.

◀ Figura 3

2. VELOCITÀ MEDIA E ISTANTANEA DI VARIAZIONE

Velocità media di variazione di una grandezza

La velocità media v_m di un oggetto che in un intervallo di tempo Δt si è spostato da una posizione p_1 a una posizione p_2 è data dal rapporto $\frac{p_2 - p_1}{\Delta t}$.

Sapendo che la distanza, lungo la linea ferroviaria, dalla stazione di Milano Centrale a quella di Bologna Centrale è di circa 216 km, la velocità media del treno *Frecciarossa* 9507 è:

$$v_m = \frac{216 \text{ km}}{\left(1 + \frac{1}{12}\right) \text{ ore}} \simeq 199 \text{ kilometri all'ora (km/h).}$$

Anche nel secondo esempio è possibile determinare una velocità media di variazione. In questo caso la velocità media riguarda la variazione della popolazione di stranieri rispetto al tempo e si ottiene calcolando il rapporto fra la variazione del numero di stranieri e l'intervallo di tempo nel quale è avvenuta. Per esempio, la velocità media di variazione nell'intervallo di tempo [1950; 1975] è:

$$v_m = \frac{(186{,}0 - 47{,}0) \text{ migliaia di stranieri}}{25 \text{ anni}} = 5{,}56 \text{ migliaia di stranieri all'anno.}$$

Invece, nell'intervallo [1990; 2007] è:

$$\frac{(2938{,}9 - 781{,}0) \text{ migliaia di stranieri}}{17 \text{ anni}} \simeq 127{,}0 \text{ migliaia di stranieri all'anno.}$$

Il confronto fra i valori delle due velocità di variazione nei due intervalli considerati indica che il fenomeno dell'immigrazione in Italia è notevolmente aumentato nel tempo.

Nel terzo esempio considerato non c'è una grandezza che varia nel tempo, ma anche in questo caso è possibile parlare di velocità media di variazione del livello d'acqua in ciascuno dei bicchieri rispetto alla quantità di liquido introdotto.
Basta calcolare il rapporto tra la variazione dell'altezza $(h_2 - h_1)$ e la variazione di volume $(V_2 - V_1)$ dell'acqua:

$$v_m = \frac{h_2 - h_1}{V_2 - V_1}.$$

Se il livello e il volume sono misurati rispettivamente in cm e in cm^3, la velocità media si misura in cm^{-2}. Ricordando che 1 dm^3 di acqua è uguale a 1 litro, è possibile misurare la velocità media in cm/L o dm/L (centimetri al litro o decimetri a litro).
In generale, la **velocità media di variazione** di una grandezza y rispetto a una grandezza x è il **rapporto incrementale** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ fra l'incremento Δy della variabile dipendente e l'incremento Δx della variabile indipendente.
Se $y = f(x)$, detto h l'incremento della variabile indipendente, la velocità media di variazione nell'intervallo $[x; x + h]$ è data dal rapporto incrementale

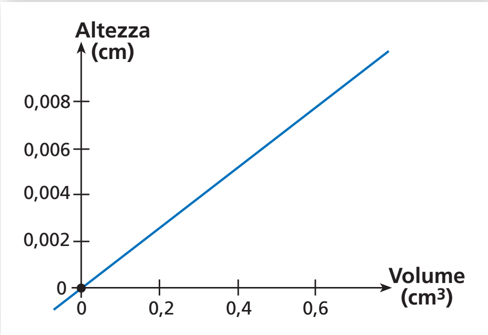
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Velocità istantanea di variazione di una grandezza

Per generalizzare l'esempio relativo alla variazione del livello del liquido nei bicchieri, ci serviamo di un modello matematico, schematizzando il primo bicchiere con un cilindro e il secondo con un cono aventi entrambi il raggio di base di 5 cm e l'altezza di 10 cm. Poiché il cilindro ha sezione costante, il livello h del liquido è direttamente proporzionale al volume V di liquido introdotto. Infatti

$$V = \pi r^2 h \rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

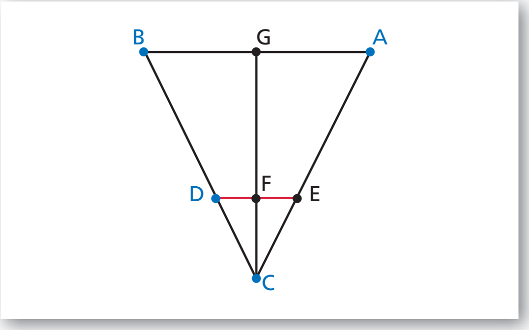
Essendo r costante, $h = kV$, dove la costante di proporzionalità k è misurata in cm^{-2} o cm/L. Nel caso dell'esempio considerato, $k = \frac{1}{25\pi} \simeq 0{,}013\ \text{cm}^{-2}$, o anche 13 cm/L. Il grafico di $h = 0{,}013V$ è una retta; la sua pendenza, cioè il suo coefficiente angolare, è uguale alla velocità media di variazione relativa a qualunque intervallo.



◀ Figura 4

La pendenza e, quindi, la velocità media non variano, qualunque sia la variazione di volume considerata.
Nel caso del secondo bicchiere la velocità di variazione del livello dell'acqua non è costante ma dipende dall'intervallo in cui viene calcolata. Infatti, man mano che l'acqua sale, la superficie aumenta; ciò vuol dire che il liquido deve distribuirsi su una superficie sempre più ampia e quindi la velocità di innalzamento del livello diminuisce.
Consideriamo i triangoli simili CDE e CBA, che raffigurano due sezioni verticali del cono per due diversi valori del livello del liquido.

$$AB : DE = CG : CF \rightarrow 10 : DE = 10 : CF \rightarrow CF = DE = 2DF.$$

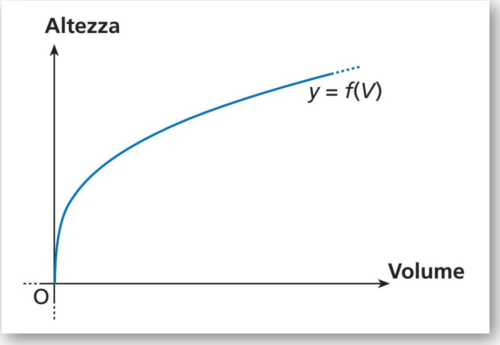


◀ Figura 5

Essendo CF e DF, rispettivamente, l'altezza e il raggio di base del cono d'acqua, indicato con y il livello FC, abbiamo che:

$$V = \frac{\pi \frac{y^2}{4}}{3} y \rightarrow V = \frac{\pi}{12} y^3 \rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{12V}{\pi}}.$$

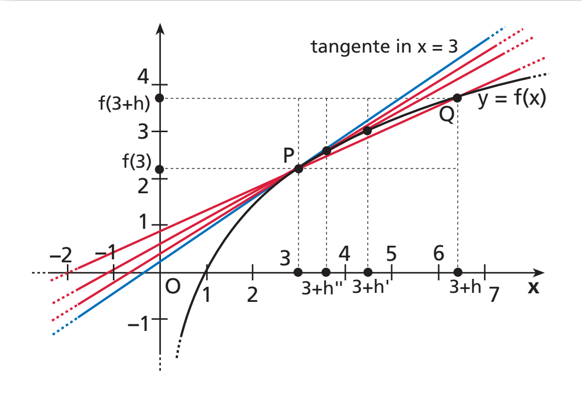
Non esiste dunque proporzionalità diretta tra livello y e volume V, coerentemente con il fatto che la velocità di variazione non è costante, e il grafico della funzione $y = f(V)$ ha l'andamento rappresentato in figura 6.



► Figura 6

In questi casi possiamo parlare di *velocità istantanea* di variazione, ossia di una velocità che cambia istante per istante.
Il procedimento di calcolo di una velocità istantanea di variazione è basato sul calcolo della velocità media su intervalli sempre più piccoli. Consideriamo il grafico della funzione $y = f(x)$ (figura 7), che lega due grandezze x (variabile indipendente) e y (variabile dipendente). Riducendo l'intervallo h su cui viene calcolata la velocità media, otteniamo migliori approssimazioni della velocità istantanea nel punto $x = 3$.
Al diminuire di h, la secante passante per i punti $(3; f(3))$ e $(3 + h; f(3 + h))$ tende a confondersi con la tangente al grafico nel punto $(3; f(3))$. Poiché la pendenza delle secanti fornisce la velocità media di variazione di y rispetto a x nell'intervallo di ampiezza h, la pendenza della tangente fornisce la velocità istantanea di variazione di y rispetto a x nel punto di ascissa $x = 3$.

► Figura 7



Determinare la velocità istantanea di variazione di y in un punto x_0 corrisponde quindi a trovare la tangente al grafico della funzione f nel punto di ascissa x_0. Tale tangente esiste, e non è verticale, se e solo se è possibile calcolare la velocità istantanea. Non è invece possibile calcolare la velocità istantanea nei punti a tangente verticale.

ESEMPIO

Consideriamo la funzione $y = 3x^2 - 2x + 1$ e chiediamoci qual è la velocità istantanea di variazione di y rispetto a x in $x = 2$.
Calcoliamo innanzitutto il rapporto incrementale $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$.

$$f(2) = 3(2)^2 - 2(2) + 1 = 12 - 4 + 1 = 9,$$

$$f(2+h) = 3(2+h)^2 - 2(2+h) + 1 = 3h^2 + 10h + 9,$$

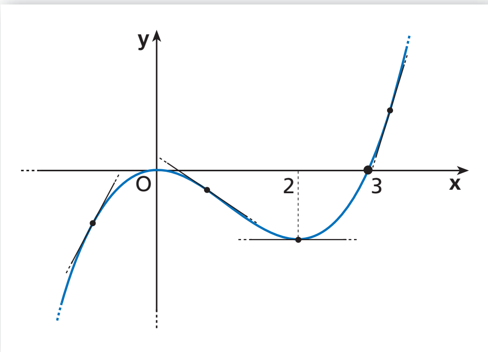
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{3h^2 + 10h}{h} \rightarrow 3h + 10.$$

Nell'espressione del rapporto incrementale trascuriamo poi il termine $3h$, perché tende a diventare sempre più piccolo al tendere di h a 0.
La velocità istantanea di variazione di y rispetto a x in 2 è quindi uguale a 10.

Riassumendo, la velocità istantanea di variazione in un punto x_0 è data dal valore (quando esiste) a cui tende il rapporto incrementale calcolato nel punto quando l'incremento h tende a 0. Tale valore viene detto **derivata** della funzione nel punto.

La funzione velocità istantanea di variazione

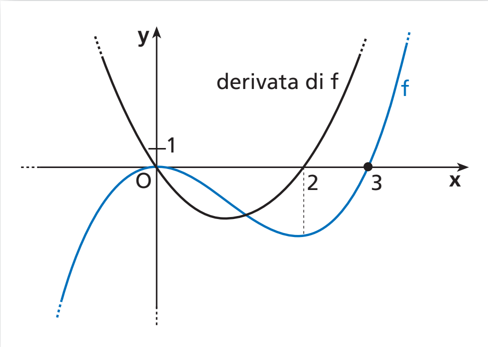
Per semplicità, limitiamoci a considerare funzioni il cui grafico ammette in ogni punto la retta tangente e essa non è verticale. È allora possibile calcolare la velocità istantanea di variazione per ogni x appartenente al dominio della funzione, ed esiste una **funzione derivata** di f che associa, a ogni x appartenente al dominio, la derivata in x della funzione $f(x)$.
Consideriamo il grafico della funzione f riportato nella figura 8, con qualche segmento per indicare le direzioni delle rette tangenti in alcuni suoi punti.



◀ **Figura 8**

Se percorriamo il profilo del grafico possiamo notare che in tutti i punti degli intervalli in cui la funzione è crescente le tangenti hanno pendenza positiva; viceversa, in tutti i punti degli intervalli in cui la funzione decresce, le tangenti hanno pendenza negativa. La pendenza è invece uguale a 0 nei punti di massimo o minimo relativo, ossia nei punti in cui la funzione passa da crescente a decrescente o viceversa.
Inoltre, possiamo vedere che negli intervalli in cui il grafico di f volge la concavità verso il basso, la pendenza delle tangenti decresce, mentre negli intervalli in cui il grafico volge la concavità verso l'alto, la pendenza delle tangenti cresce.
In base a quanto ora affermato, valutando dal grafico che il punto di minimo relativo sia in $x = 2$, possiamo concludere che la derivata di f è positiva o nulla negli intervalli $]-\infty; 0]$ e $[2; +\infty[$, mentre è negativa nell'intervallo $]0; 2[$.
Nella figura 9 abbiamo riportato l'andamento del grafico della funzione f e quello del grafico della sua derivata sullo stesso piano cartesiano.

● $f(x)$ è crescente *se e solo se* la derivata di f è non negativa.
Il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso l'alto *se e solo se* la derivata di f è crescente.



◀ **Figura 9**

2. VELOCITÀ MEDIA E ISTANTANEA DI VARIAZIONE

▶ Teoria a pag. C18

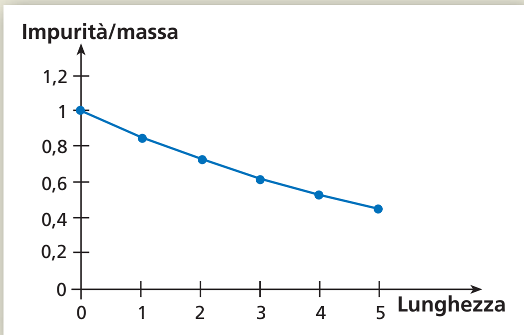
Velocità media di variazione di una grandezza

1 **ESERCIZIO GUIDA**

In un sistema di tubature per la purificazione del cherosene da usare per il riscaldamento domestico viene rimosso il 15% delle impurità per ogni metro di tubatura, come indica la tabella.

Lunghezza tubatura (m)	Quantità di impurità rimasta (per ogni unità di massa)
0	1
1	0,85
2	$0{,}85^2 \simeq 0{,}7225$
3	$0{,}85^3 \simeq 0{,}6141$
4	$0{,}85^4 \simeq 0{,}5220$
5	$0{,}85^5 \simeq 0{,}4437$

Tracciamo un grafico della quantità delle impurità y contenute nel cherosene rispetto al variare della lunghezza x della tubatura e calcoliamo la velocità media di variazione di y:
a) in 5 metri di tubatura;
b) tra 1 e 2 metri di tubatura;
c) tra 3 e 4 metri di tubatura.



In un grafico uniamo i punti ricavati dai valori della tabella con segmenti per meglio individuare l'andamento.
La pendenza dei vari segmenti fornisce la velocità media di variazione a ogni intervallo di 1 metro.
In 5 metri abbiamo quindi una velocità media data da

$$\frac{0,85^5 - 1}{5} \simeq -0,1113.$$

Tra 1 e 2 metri la velocità media è $\frac{0,85^2 - 0,85}{1} \simeq -0,1275$.

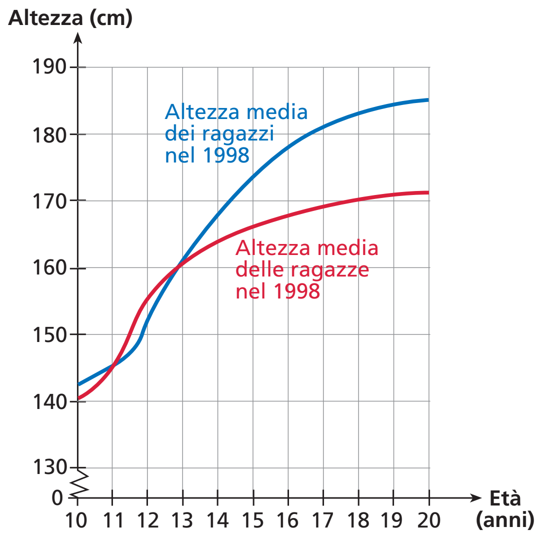
Tra 3 e 4 metri è: $\frac{0,85^4 - 0,85^3}{1} \simeq -0,0921$.

Notiamo che:

a) le velocità di variazione sono negative, infatti la quantità di impurità rimasta nel cherosene decresce con la lunghezza della tubatura;

b) le velocità medie decrescono in valore assoluto, infatti la quantità di impurità rimasta nel cherosene decresce sempre meno al crescere della lunghezza della tubatura.

2 Il grafico seguente mostra l'altezza media delle ragazze e dei ragazzi olandesi nel 1998.



Spiega perché il grafico mostra che, in media, la crescita delle ragazze è più lenta dopo i 12 anni.

(*Pisa*, 2006)

3 Data la funzione $y = 10x - x^2$, calcola la velocità media di variazione di y rispetto a x negli intervalli:

a) $[1; 3]$;
b) $[1; 1 + h]$;
c) $[a; a + h]$.

[a) 6; b) $-h + 8$; c) $10 - 2a - h$]

4 Nel 1970 la nazionale italiana di calcio partecipò ai mondiali che si tennero a Città del Messico. Varie furono le discussioni sull'influenza dell'altitudine sulle prestazioni dei calciatori (Città del Messico è a 2250 metri sul livello del mare). Ipotizzando che la pressione dell'aria decresca dello 0,4% ogni 30 metri, di quanto si è ridotta, in percentuale, la pressione salendo dal livello del mare (1 atmosfera) a Città del Messico? Qual è la velocità media di diminuzione della pressione dal livello del mare a Città del Messico? E da 1800 m a 2100 m? Traccia anche uno schizzo del grafico della pressione al variare dell'altitudine.

[si è ridotta di circa il 26%; circa 0,00012 atmosfere al metro; circa 0,00010 atmosfere al metro]

Velocità istantanea di variazione di una grandezza

5 **ESERCIZIO GUIDA**

Sia $y = -5x^2 + 10x + 30$. Valutiamo la velocità istantanea di variazione di y in $x = 1{,}5$ mediante una tabella. Calcoliamo poi il suo valore come il limite del rapporto incrementale.

Possiamo usare un metodo numerico che dia un'approssimazione della velocità istantanea di variazione in $x = 1{,}5$, calcolando la velocità media sull'intervallo $[1{,}5; 2]$, e poi calcolando valori sempre più precisi avvicinando a $x = 1{,}5$ il secondo estremo dell'intervallo.

Per esempio prendiamo gli intervalli $[1{,}5; 1{,}6]$, $[1{,}50; 1{,}51]$, $[1{,}500; 1{,}501]$, …

Con la calcolatrice o aiutandoci con un foglio elettronico, otteniamo la tabella seguente.

Intervallo	Velocità media
[1,5; 2]	− 7,5
[1,5; 1,6]	− 5,5
[1,50; 1,51]	− 5,05
[1,500; 1,501]	− 5,005
…	…

All'avvicinarsi del secondo estremo dell'intervallo a 1,5, la velocità media sembra tendere al valore −5.

Calcoliamo la velocità media nell'intervallo $[1{,}5; 1{,}5 + h]$: essa risulta uguale a $\dfrac{y(1{,}5+h)-y(1{,}5)}{h}$.

$$y(1{,}5 + h) = -5(1{,}5 + h)^2 + 10(1{,}5 + h) + 30 = -5h^2 - 5h + 33{,}75,$$

$$y(1{,}5) = 33{,}75.$$

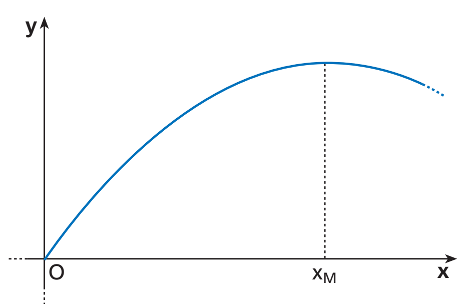
Quindi $\dfrac{y(1+h)-y(1)}{h} = -5h - 5$.

Trascuriamo ora il termine moltiplicato per h (se h tende a 0, il termine $-5h$ diventa trascurabile), ottenendo così la velocità istantanea $v(1{,}5) = -5$, valore che conferma la nostra previsione ricavata dalla tabella.

6 Sia $y = 2x - x^2$. Cerca di valutare la velocità istantanea di variazione di y in $x = 0$ mediante una tabella. Calcola poi il suo valore con il limite del rapporto incrementale. [2]

7 Sia $y = x^3 - 3x + 1$. Calcola la velocità istantanea di variazione di y in $x = 1$ e in $x = 2$. [0 e 9]

8 Il seguente grafico descrive la produttività y di una linea di una catena di montaggio al variare del numero x di operai impiegati.



Dopo aver descritto le caratteristiche della funzione produttività, traccia un grafico che descriva l'andamento della funzione derivata.

9 Disegna il grafico di $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

a) È possibile sapere qual è il segno della velocità istantanea di variazione di f in $x = 0$ e in $x = 2$ senza calcolare tali velocità? Perché?
b) È possibile sapere qual è il valore della velocità istantanea di variazione in $x = 1$ senza calcolare tale velocità? Perché?
c) Calcola le velocità istantanee di variazione in $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$. [c) −2; 0; 2]

MATHS IN ENGLISH

1.
POLAR AND CARTESIAN COORDINATES... AND HOW TO CONVERT THEM

2.
THE NUMBER π

3.
FLATLAND – A ROMANCE OF MANY DIMENSIONS

The first precept was never accept a thing as true until I knew it as such without a single doubt.

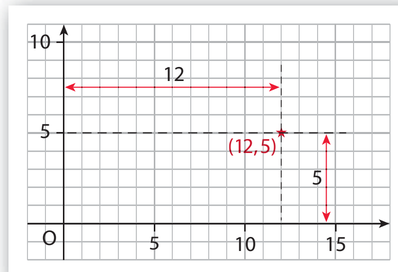
René Descartes (1596-1650),
Le Discours de la Méthode, 1637

1. POLAR AND CARTESIAN COORDINATES... AND HOW TO CONVERT THEM

To pinpoint where you are on a map or graph there are two main systems:
– Cartesian Coordinates;
– Polar Coordinates.

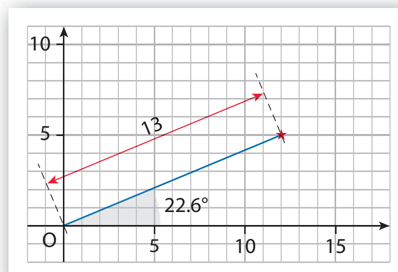
Cartesian Coordinates

Using Cartesian Coordinates you mark a point by **how far along** and **how far up** it is:



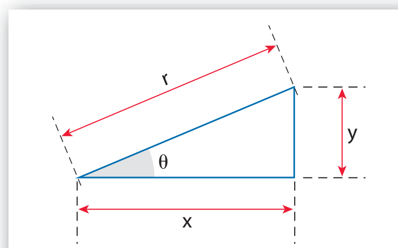
Polar Coordinates

Using Polar Coordinates you mark a point by **how far away**, and **what angle** it is:



Converting

To convert from one to the other, you need to solve the triangle:



To Convert from Cartesian to Polar

When you know a point in Cartesian Coordinates (x; y) and want it in Polar Coordinates (r; θ) you **solve a triangle of which you know two sides**.

EXAMPLE

What is (12; 5) in Polar Coordinates?

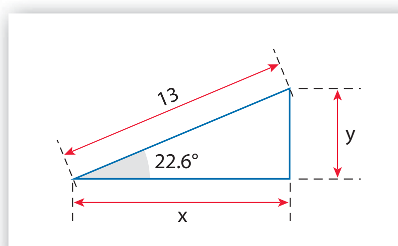
Use Pythagorean Theorem to find the long side (the hypotenuse):

$$r^2 = 12^2 + 5^2$$

$$r = \sqrt{(12^2 + 5^2)}$$

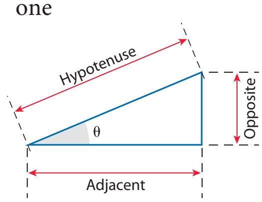
$$r = \sqrt{(144 + 25)} = \sqrt{(169)} = 13$$

Use the **Tangent Function**[1] to find the angle:



1 Sine, Cosine and Tangent: Three Functions, but same idea.

Sine, Cosine and Tangent are all based on a Right Triangle
Before getting stuck into the functions, it helps to give a **name** to each side of a right triangle:
- "Opposite" is opposite to the angle θ
- "Adjacent" is adjacent (next to) to the angle θ
- "Hypotenuse" is the long one



$$\tan(\theta) = \frac{5}{12}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = 22.6°$$

Answer: the point (12; 5) is (13; 22.6°) in Polar Coordinates.

So, to convert from Cartesian Coordinates (x; y) to Polar Coordinates (r; θ) you need the following equations:

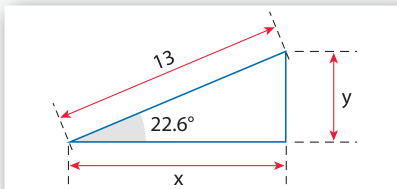
$$\boldsymbol{r = \sqrt{(x^2 + y^2)}} \qquad\qquad \boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

To Convert from Polar to Cartesian

When you know a point in Polar Coordinates (r; θ), and want it in Cartesian Coordinates (x; y) you solve a triangle of which you know the hypotenuse and an angle:

EXAMPLE

What is (13; 22.6°) in Cartesian Coordinates?



Use the Cosine Function and solve for x: $\cos(22.6°) = \frac{x}{13}$

Rearranging and solving: $x = 13 \times \cos(22.6°) = 13 \times 0.921 = \mathbf{12.002}$

Use the Sine Function and solve for y: $\sin(22.6°) = \frac{y}{13}$

Rearranging and solving: $y = 13 \times \sin(22.6°) = 13 \times 0.391 = \mathbf{4.996}$

Answer: the point (13; 22.6°) is almost exactly **(12; 5)** in Cartesian Coordinates.

So, to convert from Polar Coordinates (r; θ) to Cartesian Coordinates (x; y) you need the following equations:

$$\boldsymbol{x = r \times \cos(\theta)} \qquad\qquad \boldsymbol{y = r \times \sin(\theta)}$$

(from http://www.mathsisfun.com/polar-cartesian-coordinates.html)

Exercises

1 **About the Pythagorean Theorem.** Only one of the following sentences is wrong. Which one?

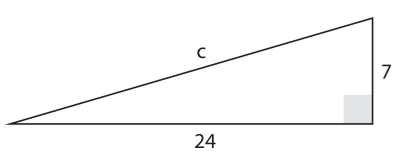
- **A** In a right triangle: the square of the hypotenuse is equal to the sum of the squares of the other two sides.
- **B** "A 3-4-5 triangle" is a right triangle.
- **C** Pythagorean Theorem can be written in one short equation: $a^3 + b^3 = c^3$
- **D** The following equation summarizes the Pythagorean Theorem: the lenght of the diagonal of a square with a unit side is $\sqrt{2}$.

2 **Finding polar coordinates.** What are the polar coordinates of the point $P = (3; 8)$?

A (8.54; 20.6°) **B** (9.11; 69.4°) **C** (8.54; 110.6°) **D** (8.54; 69.4°)

3 **Solving a triangle.** Calculate the value of c.

- **A** $c = 5$
- **B** $c = 25$
- **C** $c = \sqrt{527}$
- **D** $c = 31$



2. THE NUMBER π

When we first meet the number $\pi = 3.14159 \ldots$ it is all about circles. In particular, if we have a circle of radius r, then

circumference $= 2\pi r$,

and

area $= \pi r^2$

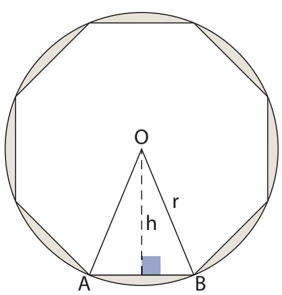
The first of these formulae is more or less what we *mean* by the number π. For if we regard it as "obvious" that the circumference of a circle is proportional to its diameter, then the ratio $\frac{\text{circumference}}{\text{diameter}}$ will be a single number, the same for all circles.

And that number is denoted by the symbol π. To put it another way, we *define* π to be that number, and as the diameter of a circle is twice the radius, i.e. $2r$, the formula *circumference* $= 2\pi r$ then follows immediately.

But the second formula, *area* $= \pi r^2$, is quite a different matter. There was no mention of area at all in our definition of π just now. Here, then, we have a simple but far from obvious result.

So why is it true?

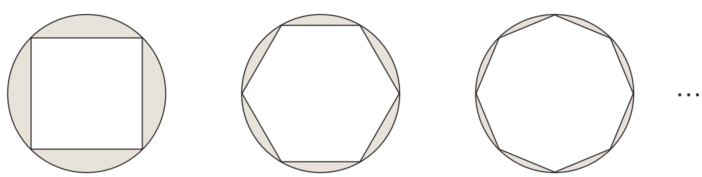
Begin by inscribing within the circle a polygon with N equal sides.



Now, this polygon will consist of N triangles such as OAB, where O is the centre of the circle, and the area of each such triangle will be $\frac{1}{2}$ its "base" AB times its "height" h. The total area of the polygon will be N times this, i.e. $\frac{1}{2} \times (AB) \times h \times N$. But $(AB) \times N$ is the length of the perimeter of the polygon, so

$$\textit{Area of polygon} = \frac{1}{2} \times (\textit{Perimeter of polygon}) \times h.$$

Consider, finally, what happens as we let N get larger and larger, so that the polygon has an ever-increasing number of shorter and shorter sides, and therefore approximates the circle ever more closely:



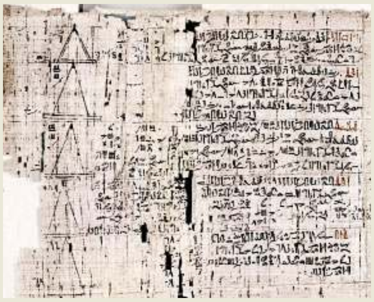
As we continue in this way, the perimeter of the polygon will get ever closer to the circumference of the circle, which is $2\pi r$, and h will get ever closer to the radius of the circle, r. The area of the polygon will therefore get ever closer to $\frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$.

And that is why the area of a circle is πr^2. [...]

The earliest known estimate of π is $\left(\frac{4}{3}\right)^4 = 3.16\ldots$, which appears in the Rhind Papyrus, dating from about 1650 BC. Despite this, the crude approximation $\pi = 3$ was used throughout much of the ancient world, and this is the approximation which appears in the Old Testament:

> … Also he made a molten sea of ten cubits from brim to brim, round in compass…
> and a line of thirty cubits did compass it round about.
>
> (1 Kings 7:23)

The Rhind Papyrus



In 1858, Alexander Henry Rhind (1833-1863) bought a scroll that was 18 feet long and 13 inches high, which is now called the *Rhind Mathematical Papyrus*. A scribe named Ahmes made this copy around 1650 or 1700 BC (different sources are inconsistent with the date), and he copied it from a document that dated 200 years before that, so the original was from around 1850 BC. The Rhind, also called the Ahmes Papyrus, is the greatest source of information on Egyptian mathematics from that time. The Rhind Papyrus contains 87 math problems, including equations, volumes of cylinders and prisms, and areas of triangles, rectangles, circles and trapezoids, and fractions. The Egyptians used unit fractions, which are fractions with one in the numerator. In order to simplify things, the Egyptians included an important table in the papyrus, so they could look up the answers to arithmetic problems. This table showed the number 2 divided by all the odd numbers from 3 to 101. The answers to these division problems were stated in the table as several fractions added together, although the plus signs were omitted. For example, the fraction $\frac{5}{8}$ would have been written like this: $\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}$.
Addition and subtraction were accomplished in this way, but multiplication and division were a different matter. In fact, the only multiplication that the Egyptians used was with the number 2. If they wanted to multiply 17 by 4, they would have doubled 17 to get 34, and then they would have doubled 34 to get a final answer of 68. In other words, division was accomplished by successively doubling the denominator of a fraction.
After the death of Henry Rhind, the Rhind Papyrus was transferred to the British Museum. Fortunately large missing pieces of the Rhind were found in New York's Historical society and reunited with the other part of the papyrus. The British Museum now owns the whole Rhind Papyrus.

The first really systematic attempt to pin down the value of π seems to have been by Archimedes, who used polygons with 96 sides, inside *and* outside the circle, to show that π must be greater than $3\frac{10}{71}$ but less than $3\frac{1}{7}$. And this upper bound of $\frac{22}{7}$ often appeared, centuries later, as an approximation to π in elementary textbooks. The first exact formula for π was obtained in 1593 by Viète:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \ldots$$

and this remarkable infinite product was again derived by considering polygons. The square roots make it a little cumbersome, but still permitted, even in Viète's time, the numerical calculation of π to 14 decimal places:

$\pi = 3.14159\ 26535\ 8979\ldots$

(David Acheson, *1089 and All That. A Journey into Matehematics*, Oxford University Press, 2002)

Exercises

1 **Right statements.** How many and which of the following statements are *correct*?

A π is the ratio of the Circumference to the Diameter of a Circle B $\pi = 3.14$ C $\pi = \frac{22}{7}$ D π is an irrational number

2 **The best estimate.** Which of the following gives the best estimate for π (Consider 5 decimal places)? Why?

A 3.14 B $\frac{22}{7}$ C $\sqrt{10}$ D $\sqrt{31}$

3. FLATLAND – A ROMANCE OF MANY DIMENSIONS

▲ The frontispiece.

Section 1
Of the Nature of Flatland

I CALL our world Flatland, not because we call it so, but to make its nature clearer to you, my happy readers, who are privileged to live in Space.

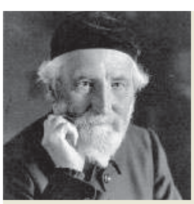
Imagine a vast sheet of paper on which straight Lines, Triangles, Squares, Pentagons, Hexagons, and other figures, instead of remaining fixed in their places, move freely about, on or in the surface, but without the power of rising above or sinking below it, very much like shadows--only hard with luminous edges--and you will then have a pretty correct notion of my country and countrymen. Alas, a few years ago, I should have said "my universe": but now my mind has been opened to higher views of things.

In such a country, you will perceive at once that it is impossible that there should be anything of what you call a "solid" kind; but I dare say you will suppose that we could at least distinguish by sight the Triangles, Squares, and other figures, moving about as I have described them. On the contrary, we could see nothing of the kind, not at least so as to distinguish one figure from another. Nothing was visible, nor could be visible, to us, except Straight Lines; and the necessity of this I will speedily demonstrate.

Place a penny on the middle of one of your tables in Space; and leaning over it, look down upon it. It will appear a circle.

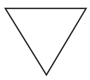
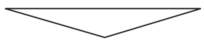
But now, drawling back to the edge of the table, gradually lower your eye (thus bringing yourself more and more into the condition of the inhabitants of Flatland), and you will find the penny becoming more and more oval to your view, and at last when you have placed your eye exactly on the edge of the table (so that you are, as it were, actually a Flatlander) the penny will then have ceased to appear oval at all, and will have become, so far as you can see, a straight line.

The same thing would happen if you were to treat in the same way a Triangle, or a Square, or any other figure cut out from pasteboard. As soon as you look at it with your eye on the edge of the table, you will find that it ceases to appear to you as a figure, and that it becomes in appearance a straight line. Take for example an equilateral Triangle--who represents with us a Tradesman of the respectable class. Figure 1 represents the Trades-



Edwin Abbott Abbott (1838-1926) was the eldest son of Edwin Abbott (1808-1882), headmaster of the Philological School, Marylebone, and his wife, Jane Abbott (1806-1882). His parents were first cousins.
He was educated at the City of London School and at St John's College, Cambridge, where he took the highest honors in classics, mathematics and theology. In 1862 he took orders. Abbott became headmaster of the City of London School in 1865.
He retired in 1889 and devoted himself to literary and theological pursuits. Abbott wrote *Shakespearian Grammar* (1870) a permanent contribution to English philology. His theological writings include three anonymously published religious romances. Abbott also wrote educational text books, one being "Via Latina: First Latin Book" (1898), distributed around the world within the education system.
Abbott's best-known work is his 1884 novella *Flatland: A Romance of Many Dimensions* which describes a two-dimensional world and explores the nature of dimensions.
It has often been categorized as science fiction although it could more precisely be called "mathematical fiction".
With the advent of modern science fiction from the 1950s to the present day, *Flatland* has seen a revival in popularity, especially among science fiction and cyberpunk fans. Many works have been inspired by the novella, including novel sequels, short films, and a film called *Flatland*.

man as you would see him while you were bending over him from above; figures 2 and 3 represent the Tradesman, as you would see him if your eye were close to the level, or all but on the level of the table; and if your eye were quite on the level of the table (and that is how we see him in Flatland) you would see nothing but a straight line. [...]


(1)

(2)

(3)

Section 3
Concerning the Inhabitants of Flatland

THE GREATEST length or breadth of a full grown inhabitant of Flatland may be estimated at about eleven of your inches[1]. Twelve inches may be regarded as a maximum.

Our Women are Straight Lines.

Our Soldiers and Lowest Class of Workmen are Triangles with two equal sides, each about eleven inches long, and a base or third side so short (often not exceeding half an inch) that they form at their vertices a very sharp and formidable angle. Indeed when their bases are of the most degraded type (not more than the eighth part of an inch in size), they can hardly be distinguished from Straight lines or Women; so extremely pointed are their vertices. With us, as with you, these Triangles are distinguished from others by being called Isosceles; and by this name I shall refer to them in the following pages.

Our Middle Class consists of Equilateral or Equal-Sided Triangles.

Our Professional Men and Gentlemen are Squares (to which class I myself belong) and Five-Sided Figures or Pentagons.

Next above these come the Nobility, of whom there are several degrees, beginning at Six-Sided Figures, or Hexagons, and from thence rising in the number of their sides till they receive the honourable title of Polygonal, or many-Sided. Finally when the number of the sides becomes so numerous, and the sides themselve so small, that the figure cannot be distinguished from a circle, he is included in the Circular or Priestly order; and this is the highest class of all.

It is a Law of Nature with us that a male child shall have one more side than his father, so that each generation shall rise (as a rule) one step in the scale of development and nobility. Thus the son of a Square is a Pentagon; the son of a Pentagon, a Hexagon; and so on. [...]

(Edwin Abbott Abbott, *Flatland, A Romance of Many Dimensions*, Second, revised edition, 1884)

[1] **1 inch = 2.54 centimeters**
An inch is the name of a unit of length in a number of different systems, including Imperial units and United States customary units. Corresponding units of area and volume are the square inch and the cubic inch.

Exercises

1 **Following the Law of Nature.** In Flatland, a male child shall have one more side than his father. How many sides shall have a male child of a Circular? Why?

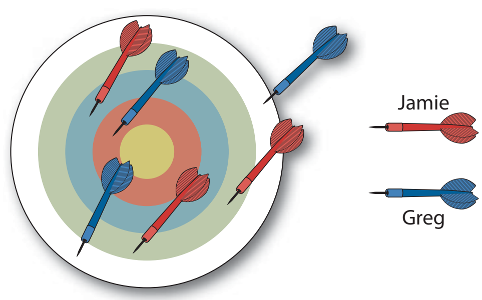
2 **What's the Score?** The center circle of the target has radium of 3 inches and each ring is 3 inches wide. For each region of area A, the score follows from the formula:

$$\text{Score} = \frac{225\pi}{A}$$

a) Find the area of each region in terms of π.

b) Use the formula to find the score for each region.

c) Which player, Greg or Jamie, has a higher score?



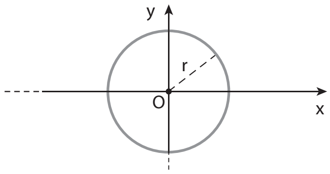
MATHS TALK

Let's read the equations

Visit us online for the pronunciation of these formulas and many others!

Conics

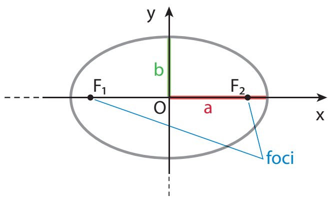
Graph | **Conic** | **Typical equation**



circle

$$x^2 + y^2 = r^2$$

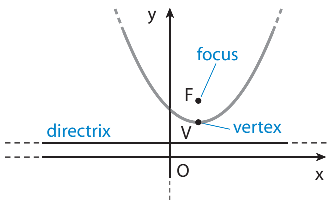
***x* squared plus *y* squared equals *r* squared**, where *r* is the radius



ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

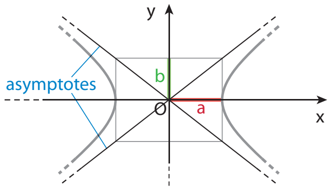
***x* squared over *a* squared plus *y* squared over *b* squared equals one**, where *a* is the semi-major axis and *b* the semi-minor axis



parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

y* equals *a x* squared plus *b x* plus *c, where *a*, *b*, *c* are parameters that define the vertex and the directrix of a parabola with directrix parallel to the *x*-axis

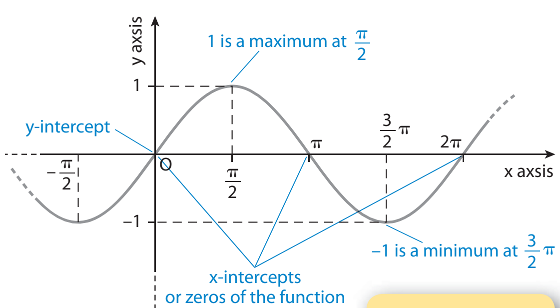


hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

***x* squared over *a* squared minus *y* squared over *b* squared equals one**, where *a* is the semi-major axis and *b* the semi-minor axis

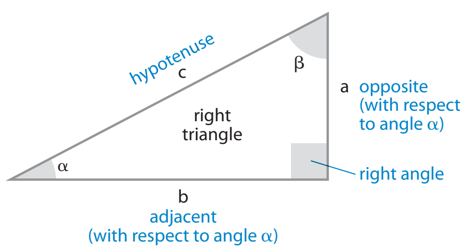
Graph of the sine function



y* equals sine *x

- The domain of the function $y = \sin x$ is $\mathbb{R}$.
- The function is bounded between -1 and $+1$; the range of the function is $[-1,1]$.
- The function is periodic with period 2π.

Some basic trigonometric identities



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Sine alpha equals *a* over *c*

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Cosine alpha equals *b* over *c*

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Sine squared of alpha plus cosine squared of alpha equals one

3

Massimo Bergamini   Anna Trifone   Graziella Barozzi

Matematica.blu 2.0

Un libro di matematica a colori, che illustra con fotografie il legame tra matematica e realtà, e mette in evidenza a colpo d'occhio ciò che è importante imparare.

Nel libro

- **Esercizi** suddivisi in due livelli di difficoltà.
- **Esercizi** dai **test universitari**, dalle **gare di matematica** ed **esercizi in inglese** (*Test your skills*).
- **Verso l'esame di Stato**: per ogni capitolo test, quesiti e problemi per prepararsi alla prova scritta già dal terzo anno.
- **Approfondimenti** sulla storia della matematica, la filosofia e la fisica (*Riflettere sui fondamenti*, *Modelli di crescita e caos*).
- **Aperture di capitolo** con domande su **matematica e realtà** (per esempio, come funziona la TAC, quanto sono attendibili i risultati dei sondaggi) e risposte alla fine della teoria.
- Schede di **Esplorazione** su matematica e storia, musica, arte, medicina, con esercizi di comunicazione e ricerca su Internet.
- **Realtà e modelli**: problemi insoliti per costruire e applicare modelli matematici che descrivono la realtà.