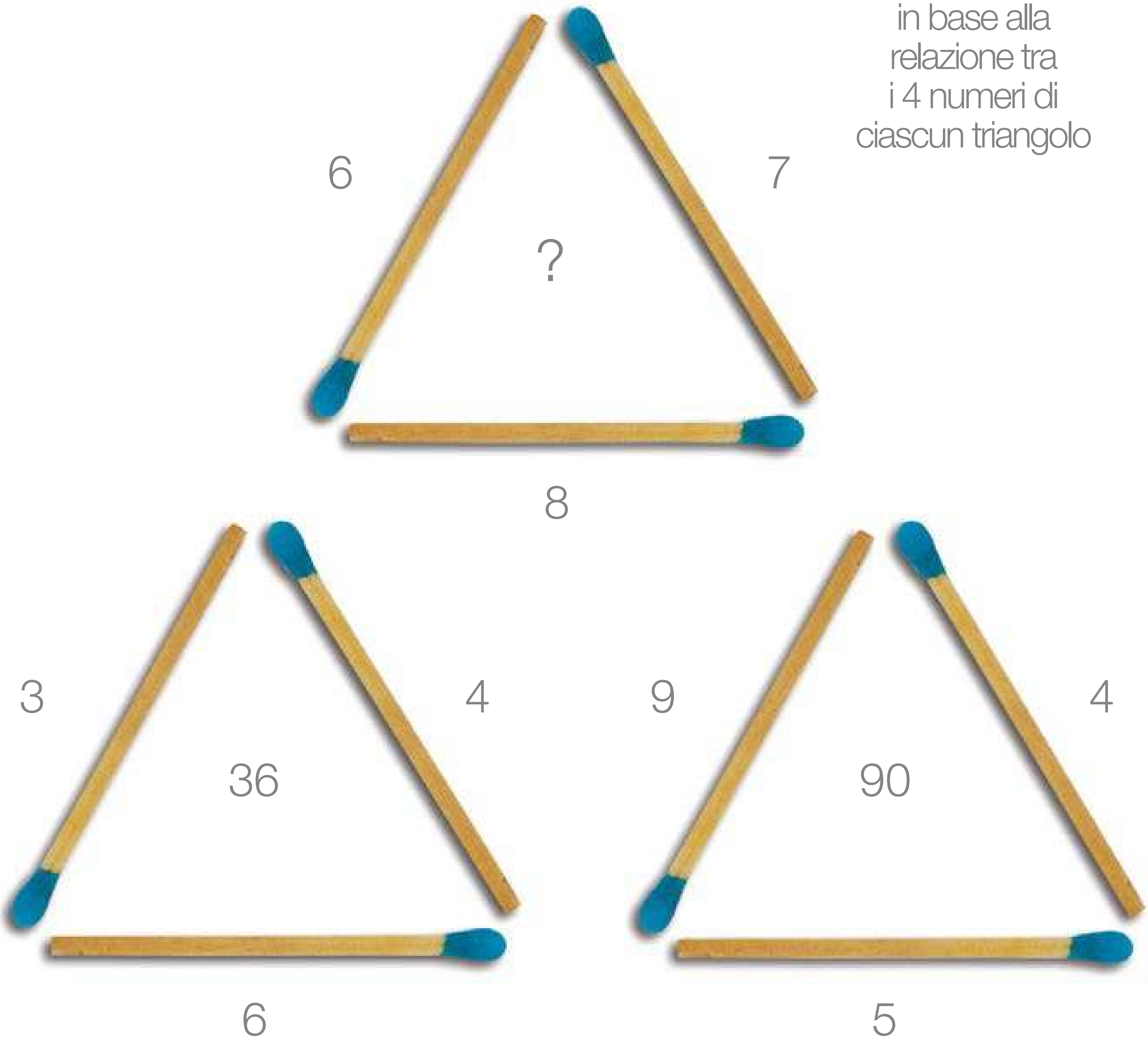
Massimo Bergamini
Anna Trifone Graziella Barozzi

4

Matematica.blu 2.0

Trova il numero mancante in base alla relazione tra i 4 numeri di ciascun triangolo



ZANICHELLI

Massimo Bergamini
Anna Trifone Graziella Barozzi

Matematica.blu 2.0

4

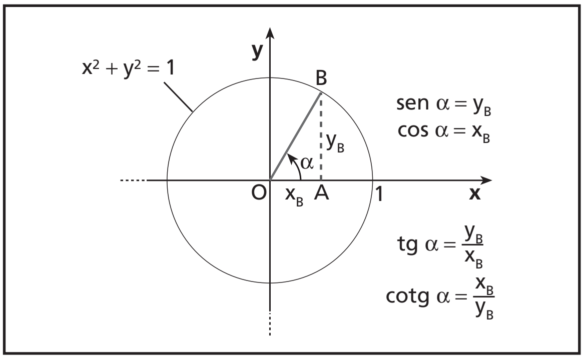
Le funzioni goniometriche

La prima relazione fondamentale

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

La seconda relazione fondamentale

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$



Seno, coseno, tangente e cotangente di angoli notevoli

Radianti	Gradi	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
0	0	0	1	0	non esiste
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	non esiste	0

Realizzazione editoriale:
- Coordinamento redazionale: Marinella Lombardi
- Redazione: Valentina Franceschi, Marinella Lombardi
- Collaborazione redazionale: Massimo Armenzoni, Parma
- Segreteria di redazione: Deborah Lorenzini
- Progetto grafico: Byblos, Faenza
- Progetto grafico delle pagine IX-XVI: Roberto Marchetti
- Composizione e impaginazione: Litoincisa, Bologna
- Ricerca iconografica e realizzazione delle aperture di capitolo e di *Realtà e modelli*: Byblos, Faenza
- Disegni: Graffito, Cusano Milanino
- Correzione di bozze: T2, Bologna
- Indice analitico: Massimo Armenzoni, Parma

Contributi:
- Stesura delle aperture: Daniela Cipolloni (*Il percorso più breve, Bloccare le e-mail di spam, Come ordina Google le pagine?, I calcoli per una dieta sana ed equilibrata*), Daniele Gouthier (*Rotolare per misurare, I pannelli solari*)
- Stesura delle schede di Esplorazione: Fulvia Baccarani (*Uno, cento, mille racconti*), Chiara Ballarotti (*Arte al cubo*), Daniela Cipolloni (*Le fibre ottiche, Siamo soli nell'Universo?, Scienza delle costruzioni, Trasformazioni geometriche e tassellazioni*), Chiara Manzini (*Astri, seni, coseni, tangenti*), Elisa Menozzi (*L'inafferrabile pi greco, Da quantità silvestri a numeri immaginari, Design, cinema e videogiochi*)
- Stesura dei testi e degli esercizi del *Laboratorio di matematica*: Antonio Rotteglia
- Stesura e revisione degli esercizi in lingua inglese: Andrea Betti
- Revisioni dei testi e degli esercizi: Chiara Ballarotti, Luca Malagoli, Elisa Menozzi, Monica Prandini
- Rilettura dei testi: Marco Giusiano, Luca Malagoli, Francesca Anna Riccio
- Risoluzione degli esercizi: Silvano Baggio, Francesco Benvenuti, Davide Bergamini, Angela Capucci, Elisa Capucci, Lisa Cecconi, Elisa Garagnani, Daniela Giorgi, Erika Giorgi, Cristina Imperato, Francesca Incensi, Chiara Lugli, Francesca Lugli, Elisa Menozzi, Monica Prandini, Francesca Anna Riccio, Elisa Targa, Ambra Tinti
- Stesura degli esercizi: Graziella Barozzi, Anna Maria Bartolucci, Davide Bergamini, Cristina Bignardi, Francesco Biondi, Lisa Cecconi, Chiara Cinti, Paolo Maurizio Dieghi, Daniela Favaretto, Rita Fortuzzi, Ilaria Fragni, Lorenzo Ghezzi, Chiara Lucchi, Mario Luciani, Chiara Lugli, Francesca Lugli, Armando Magnavacca, Elisa Menozzi, Luisa Morini, Monica Prandini, Tiziana Raparelli, Laura Recine, Daniele Ritelli, Antonio Rotteglia, Giuseppe Sturiale, Renata Tolino, Maria Angela Vitali, Alessandro Zagnoli, Alessandro Zago, Lorenzo Zordan
- Stesura dei problemi di *Realtà e modelli*: Daniela Boni, Maria Falivene, Nadia Moretti
- Revisione didattica del testo (*Diary revision*): Eleonora Basile, Maria Alberta Bulgaro, Laura Caliccia, Anna Maria Logoteta, Alvisia Marcantonio, Lucia Nasoni, Mariapia Riva

L'intera opera è frutto del lavoro comune di Massimo Bergamini e Anna Trifone. Hanno collaborato alla realizzazione di questo volume Davide Bergamini e Enrico Bergamini.

Copertina:
- Progetto grafico: Miguel Sal & C., Bologna
- Realizzazione: Roberto Marchetti
- Immagine di copertina: Artwork Miguel Sal & C., Bologna

Prima edizione: gennaio 2011

L'impegno a mantenere invariato il contenuto di questo volume per un quinquennio (art. 5 legge n. 169/2008) è comunicato nel catalogo Zanichelli, disponibile anche online sul sito www.zanichelli.it, ai sensi del DM 41 dell'8 aprile 2009, All. 1/B.

File per diversamente abili
L'editore mette a disposizione degli studenti non vedenti, ipovedenti, disabili motori o con disturbi specifici di apprendimento i file pdf in cui sono memorizzate le pagine di questo libro. Il formato del file permette l'ingrandimento dei caratteri del testo e la lettura mediante software screen reader.
Le informazioni su come ottenere i file sono sul sito www.zanichelli.it/diversamenteabili

---

Suggerimenti e segnalazione degli errori
Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi. L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli. Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro scrivere al seguente indirizzo:

lineauno@zanichelli.it

Le correzioni di eventuali errori presenti nel testo sono pubblicati nella sezione *errata corrige* del sito dell'opera (www.online.zanichelli.it/bergaminitriennio)

Zanichelli editore S.p.A. opera con sistema qualità certificato CertiCarGraf n. 477 secondo la norma UNI EN ISO 9001:2008

Massimo Bergamini
Anna Trifone Graziella Barozzi

Matematica.blu 2.0

4

ZANICHELLI

SOMMARIO

Come funziona una rotella misuratrice?

▶ La risposta a pag. 662

Com'è possibile trovare tg 35° senza strumenti di calcolo e tavole?

▶ La risposta a pag. 720

Come si devono collocare i pannelli solari in modo che il loro rendimento sia massimo?

▶ **La risposta a pag. 785**

In assenza di apparecchiature tecnologiche sofisticate, come si può, dalla Terra, stimare la distanza della Luna?

▶ **La risposta a pag. 861**

Da un punto di vista geometrico, come si può descrivere la relazione tra mouse e cursore?

▶ **La risposta a pag. 944**

CAPITOLO 12
LE EQUAZIONI E LE DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

CAPITOLO 13
LA TRIGONOMETRIA

CAPITOLO 14
I NUMERI COMPLESSI. LE COORDINATE POLARI

Che tipo di figure si ottengono sezionando un cubo con un piano?

▶ La risposta a pag. 1036

Come poteva Cartesio descrivere il volo di una mosca?

▶ La risposta a pag. 1100

Se esponiamo ai raggi solari una figura che illustra il teorema di Pitagora, che cosa accade alla sua ombra?

▶ La risposta a pag. 1164

CAPITOLO 15
LO SPAZIO

CAPITOLO 16
LA GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO

CAPITOLO 17
LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Come fa un commesso viaggiatore a stabilire il percorso più breve per raggiungere i suoi clienti?

▶ **La risposta a pag. α17**

Come si possono bloccare le e-mail di spam?

▶ **La risposta a pag. α72**

FONTI DELLE ILLUSTRAZIONI

IX: Ryan Carter/Shutterstock;
X: Molodec/Shutterstock;
XI: Allison/Shutterstock;
XII: Irin-k/Shutterstock;
XIII: fantasista/Shutterstock;
XIV: Oleksiy_Mark/Shutterstock;
XV (a): Alhovik/Shutterstock;
XV (b): TryBy/Shutterstock;
XVI: IMaster/Shutterstock;
633, 662 (a): Pialr Echevarria/Shutterstock, Marek Cech/Shutterstock;
662 (b): Liquiditty, 2005;
700 (a): Billyhoiler/Shutterstock;
700 (b): EuToch/Shutterstock;
700 (c): Jiri Hera/Shutterstock;
705, 720 (a): tychobrahe.com;
757: www.laverderosa.it;
761, 785 (a): Prism_68/Shutterstock;
766: Olga Kushcheva/Shutterstock;
785: Panzer3fan, 2006;
849, 861 (a): Carolina K. Smith, M.D./Shutterstock, Jonathan Larsen/Shutterstock;
854: Foto Giraudon, 1991;
911 (a): Nik Niklz/Shutterstock;
911 (b): Michal Duriník/Shutterstock;
917, 944 (a): Kevin O'Mara, 2005;
944 (b): Paul Fleet/Shutterstock;
944 (c): Sharply-done/iStockphoto;
985, 1036 (a): Peter Kirillov/Shutterstock;
1071: Algecireño/Shutterstock;
1081, 1100 (a): Raffaelo/iStockphoto;
1100 (b): Steeve Reed/Shutterstock;
1126 (a): Shutterstock;
1126 (b): Roel Driever;
1129, 1164 (a): Mike Flippo/Shutterstock;
1129, 1164 (b): Feng Yu/Shutterstock;
1149 (a): Eva Madrazo/Shutterstock;
1149 (b): Jennifer Stone/Shutterstock;
1226: Norman Pogson/Shutterstock;
α1, α17 (a): Bill Lawson/Shutterstock;
α11 (a): Jerry Bauer;
α17 (b): Martin Groetschel, 1977;
α17 (c): Manfred W. Padberg e Giovanni Rinaldi, 1987;
α43 (a): Poznyakov/Shutterstock;
α43(b): Thumb/Shutterstock;
α43(c): Perrush/Shutterstock;
α43 (d): Rob Pitman/Shutterstock;
α49, α72 (a): Alexey Stiop/Shutterstock;
α65: Webphoto;
α72 (b): Felix Moeckel/iStockphoto;
α72 (c): Chris Browning, 2007;
α105 (a): Kiselev Andrey Valerevich/Shutterstock;
α105 (b): Zentilia/Shutterstock.

Realtà e modelli

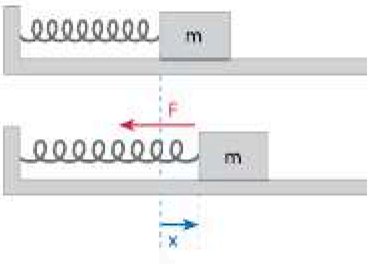
? **Quali sono le caratteristiche di un modello matematico? Quale rapporto c'è fra il modello e la realtà?**

Le caratteristiche di un modello

Più fenomeni, un modello

Diversi fenomeni, come il suono prodotto dalla corda di una chitarra pizzicata, un terremoto, le onde prodotte da un sasso lanciato in uno stagno, l'emissione di luce, hanno punti in comune e possono essere studiati mediante uno stesso modello, quello dell'oscillatore armonico.

La costruzione del modello



Per costruire il modello dell'oscillatore armonico, consideriamo l'oscillazione di una massa m attaccata a una molla come in figura.
Se la molla viene deformata, allungandola o comprimendola, del vettore $\vec{x}$, la massa è sottoposta a una forza elastica $\vec{F}$ che ha stessa direzione di $\vec{x}$, verso contrario e intensità direttamente proporzionale a x, secondo una costante k che dipende dalle caratteristiche della molla. Quindi: $\vec{F} = k\vec{x}$.
Sappiamo anche che vale la legge di Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$, dove a è l'accelerazione.
Supponiamo inoltre che:

- non ci sia attrito fra la massa, l'aria e il piano d'appoggio;
- la massa della molla sia trascurabile;
- in prima approssimazione e su intervalli di tempo sufficientemente brevi, la massa m si muova di moto uniformemente accelerato (l'errore che si commette adottando questa ipotesi è tanto minore quanto più è breve l'intervallo di tempo considerato).

L'ipotesi che il moto sia uniformemente accelerato per brevi intervalli serve soltanto per costruire un modello che utilizzi gli strumenti di calcolo che conosci. L'analisi matematica mette a disposizione strumenti che permettono di evitare questa ipotesi semplificatrice.

Le previsioni del modello

Il modello costruito, fissata la posizione e la velocità iniziali, x_0 e v_0, permette di ottenere la posizione x_1, la velocità v_1 e l'accelerazione a_1 della massa dopo un intervallo di tempo Δt. Conoscendo x_1, v_1 e a_1 è poi possibile trovare x_2, v_2 e a_2 dopo un secondo intervallo Δt, e così via.
Tenendo conto che:

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{kx}{m}$$

e applicando le formule del moto uniformemente accelerato ricaviamo:

$$x_{n+1} = x_n + v_n \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\left(-\frac{k}{m}\right)x_n(\Delta t)^2; \quad v_{n+1} = v_n + \left(-\frac{k}{m}\right)x_n \cdot \Delta t; \quad a_n = \left(-\frac{k}{m}\right)x_n.$$

In laboratorio

Puoi anche realizzare un esperimento in laboratorio per studiare le oscillazioni.
Se nel laboratorio della tua scuola non c'è una rotaia a cuscino d'aria, è più semplice realizzare il moto nel caso di una molla appesa in verticale, con attaccato un corpo a una estremità.

Attività

- Nell'ipotesi che $x_0 = 1$ m, $v_0 = 0$ m/s, $m = 0{,}1$ kg, $k = 40$ N/m e considerando $\Delta t = 1$ s, scrivi i primi valori delle successioni relative a x, v, a calcolando manualmente x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3, a_0, a_1, a_2, a_3.
- Considerato, per esempio, $\Delta t = 1$ s e un numero adeguato di intervalli, con l'aiuto di un foglio elettronico traccia i grafici di x, v e a in funzione di t.
- Che analogie e differenze noti?

Ipotesi semplificatrici e limiti di un modello

Un modello matematico è l'espressione di quanto si conosce e si ritiene interessante di una situazione o di un problema. La scelta delle variabili significative da studiare e di quelle che invece si possono trascurare è la prima importante operazione nella costruzione del modello. Per esempio, nell'oscillatore armonico si è deciso di trascurare l'attrito dell'aria e la massa della molla. Naturalmente, proprio per la scelta attuata, ogni modello ha limiti di applicazione.

Per sottolineare l'inutilità di un modello che non faccia ipotesi semplificatrici, è significativo questo passo tratto da *L'artefice* di Borges, in cui si parla dell'Arte della Cartografia in un Impero:

«[...] i Collegi dei Cartografi eressero una Mappa dell'Impero, che uguagliava in grandezza l'Impero e coincideva puntualmente con esso. Meno Dedite allo Studio della Cartografia, le Generazioni Successive compresero che quella vasta Mappa era Inutile e non senza Empietà l'abbandonarono alle Inclemenze del Sole e degli Inverni.»

(in Jorge Luis Borges, *Tutte le opere*, Mondadori, 1984)

Linguaggio matematico e previsioni

L'uso del linguaggio matematico è fondamentale per passare da una descrizione qualitativa a una quantitativa della situazione e per fare previsioni accurate. Nell'oscillatore armonico avresti potuto affermare, con considerazioni qualitative, che la massa oscilla tra due posizioni simmetriche rispetto al punto di equilibrio; però solo l'equazione $F = -kx$, combinata con la seconda legge della dinamica e le equazioni del moto uniformemente accelerato, ha consentito di prevedere la posizione della massa oscillante in ogni istante.

Il rapporto fra modello e realtà

In *Le città invisibili* Calvino parla del rapporto fra realtà e modello come problema di verità, descrivendo la città di Eudossia.

«A Eudossia, che si estende in alto e in basso, con vicoli tortuosi, scale, angiporti, catapecchie, si conserva un tappeto in cui puoi contemplare la vera forma della città. [...] se ti fermi a osservarlo con attenzione, ti persuadi che a ogni luogo del tappeto corrisponde un luogo della città e che tutte le cose contenute nella città sono comprese nel disegno [...]
Sul rapporto misterioso di due oggetti così diversi come il tappeto e la città fu interrogato un oracolo. Uno dei due oggetti, – fu il responso, – ha la forma che gli dei diedero al cielo stellato e alle orbite su cui ruotano i mondi; l'altro ne è l'approssimativo riflesso, come ogni opera umana.
Gli àuguri già da tempo erano certi che l'armonico disegno del tappeto fosse di natura divina; in questo senso fu interpretato l'oracolo, senza dar luogo a controversie.
Ma nello stesso modo tu puoi trarne la conclusione opposta: che la vera mappa dell'universo sia la città d'Eudossia così com'è, una macchia che dilaga senza forma, con vie tutte a zig-zag, case che franano una sull'altra nel polverone, incendi, urla nel buio.»

(Italo Calvino, *Le città invisibili*, Mondadori, 1996)

Dalla corrispondenza biunivoca...

Nel Seicento, grazie anche ai risultati ottenuti nel secolo precedente nel campo dell'algebra, si pongono le basi per un uso della matematica come strumento di conoscenza, descrizione e previsione dei fenomeni naturali.
Celebre è il passo del *Saggiatore* di Galileo Galilei del 1623: «La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola».
Non c'è alcun dubbio che queste parole individuino nella matematica la disciplina privilegiata per costruire una descrizione razionale del mondo, fondata, come precisava Galileo, sulle *sensate* esperienze e sulle *certe* dimostrazioni.

Nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi*, Galileo afferma che, come nei commerci, per far tornare i calcoli, dalle merci si devono togliere le tare, così «quando il filosofo geometra vuol riconoscere in concreto gli effetti dimostrati in astratto, bisogna che difalchi gli impedimenti della materia».

Per esempio, l'oscillatore armonico è un buon modello non solo per il sistema massa-molla, ma anche per atomi eccitati da radiazioni elettromagnetiche.

Ma per Galileo la matematica non è soltanto la lingua della Natura: difalcati gli impedimenti, ossia semplificata la complessità del mondo fenomenico, i modelli matematici ne descrivono la vera essenza. Per esempio, eliminati gli attriti, otteniamo il principio d'inerzia che sta alla base del reale comportamento dei corpi in movimento.
C'è in Galileo, e successivamente in Newton, la convinzione che esista fra modello matematico e realtà una perfetta corrispondenza biunivoca.

...all'analogia

Una prospettiva meno rigida, che domina la ricerca scientifica fino agli inizi del Novecento, è quella dell'analogia meccanica: non si considera più il modello della meccanica newtoniana come costitutivo della realtà, ma solo come schema utile per una descrizione di fenomeni anche non appartenenti alla meccanica.
La modellistica contemporanea compie poi un ulteriore passo, sostituendo, all'analogia meccanica, l'analogia matematica. L'attenzione è spostata dal problema della verità a quello della descrizione e, soprattutto, della previsione dei comportamenti in situazioni complesse.
Dice Von Neumann parlando del concetto di modello: «La giustificazione di un siffatto costrutto matematico è soltanto e precisamente che ci si aspetta che funzioni».

«Le nuvole non sono sfere, le montagne non sono coni, le coste non sono circonferenze, la corteccia non è liscia, né il fulmine viaggia in linea retta.»

Queste parole di Benoît B. Mandelbrot sottolineano la sfida della modellistica moderna: descrivere la Natura nella sua complessità, senza eliminarne aspetti significativi.
Per farlo Mandelbrot utilizza nuove figure geometriche, i frattali.

Attività

I modelli matematici sono utilizzati nei più svariati campi disciplinari. Sviluppa questo tema con una presentazione multimediale.

Da leggere:

- Giorgio Israel, *Modelli matematici*, Muzzio, 2009.
- Ludwig Boltzmann, *Modelli matematici, fisica e filosofia: scritti divulgativi*, Bollati Boringhieri, 1999.
- Primo Brandi, Anna Salvadori, *Modelli matematici elementari*, Bruno Mondadori, 2004.
- Benoît B. Mandelbrot, *Gli oggetti frattali*, Einaudi, 2000.

@ **Cerca nel Web:**
modelli matematici, fisica, biologia, economia, medicina, sport, musica

Problemi e modelli della probabilità

? Il calcolo della probabilità: una matematica nata dai giochi d'azzardo. Ma la Natura gioca a dadi?

Partendo dalle scommesse

Tentare la fortuna

È attribuita a Tacito la frase:
«La speranza di diventare ricchi è una delle più diffuse cause di povertà».

Il calcolo della probabilità nacque da alcuni problemi che i giocatori d'azzardo posero ai matematici, nella speranza di trarne vantaggio; oggi può farci capire, in modo razionale, che con il gioco accanito non ci si arricchisce, ma piuttosto si può cadere in disgrazia.

Per esempio, nel gioco del lotto non ha senso puntare somme sempre più ingenti su numeri «ritardatari», perché ogni estrazione non dipende dalle precedenti. Il matematico Vinicio Villani ha persino proposto che si affiggano in tutte le ricevitorie del lotto avvertenze del tipo:

«Diffidate da chiunque vi proponga un metodo sicuro per vincere al lotto».

Ecco alcuni problemi legati al gioco da cui iniziò l'interesse dei matematici per lo studio di fenomeni casuali.

I dadi di Firenze Perché nel lancio di tre dadi è più vantaggioso puntare sull'uscita di un 10 invece che sull'uscita di un 9?
Il fenomeno era stato osservato da scommettitori fiorentini e fu spiegato da Galileo.

Il problema del Cavaliere di Méré Perché se si lanciano 24 volte due dadi per ottenere almeno un 12 (ossia due 6) si ha una probabilità di vincere che è minore di quella che si ha quando si lancia 4 volte un dado per ottenere almeno un 6? Basandosi sulle sue osservazioni, il Cavaliere di Méré, accanito giocatore, pose il problema a Pascal. Nel 1657 Christiaan Huygens, nel suo *De ratiociniis in ludo aleae* (Sui ragionamenti nel gioco dei dadi), ispirandosi alla corrispondenza che Pascal ebbe con Fermat per risolvere il problema, calcolò che la probabilità di vincere puntando sull'uscita di almeno un 6 su 4 lanci di un dado è leggermente maggiore di $\frac{1}{2}$, mentre con 24 lanci di due dadi è di poco minore di $\frac{1}{2}$.

Problemi e modelli della probabilità

Fra probabilità e statistica

Il Cavaliere di Méré e i giocatori fiorentini avevano basato le loro domande sull'esperienza, osservando la frequenza delle uscite di particolari eventi. Era un approccio alla probabilità che in seguito si rivelò decisamente fertile.
Il primo matematico a occuparsene è stato Jakob Bernoulli, il cui manuale, *Ars conjectandi*, pubblicato nel 1713, può essere considerato come il primo trattato di probabilità veramente importante.
L'approccio frequentista è poi diventato fondamentale nelle attività legate alle assicurazioni, in particolare quelle per calcolare le polizze assicurative che stanno alla base, per esempio, dei sistemi pensionistici e per le quali è necessario conoscere l'aspettativa di vita al variare dell'età. John Graunt fornì nel 1662 le prime tavole di speranza di vita, calcolate a partire da dati provenienti dal registro delle morti che venne pubblicato a Londra a partire dal 1603.
Oggi ci sono polizze che assicurano contro eventi di svariati tipi (morte, incidenti d'auto, grandine, perdita di bagagli, …): si basano proprio su indagini statistiche e sul calcolo della probabilità.

Applicazioni sociali

Nel mondo moderno le applicazioni del calcolo delle probabilità sono presenti in ogni campo della scienza, dall'economia, alla fisica, alla biologia, alla tecnologia.
Per fare un esempio, ecco un problema in campo medico.

Per risolvere il problema Positivo al test!, puoi utilizzare la scheda di lavoro che trovi online nel sito http://scuola.zanichelli.it/online/bergaminibiennio/biennio-blu, nel capitolo Introduzione alla probabilità.

Attività

Positivo al test!
Per avere informazioni sulla diffusione di una malattia, si fanno test diagnostici non invasivi e poco costosi, ottenendo una prima informazione, da sottoporre a verifiche più approfondite nei casi di esito positivo.
Supponiamo che si sappia che la probabilità che il test funzioni correttamente nel caso di individui malati (ossia risulti positivo) sia del 99%, mentre quella che il test funzioni correttamente nel caso di individui sani (ossia risulti negativo) sia del 99,5%. Se si sa anche che la probabilità di avere quella malattia è dello 0,5%, qual è la probabilità che un individuo positivo al test sia davvero malato?

Un modello probabilistico

Una questione di tempi

Il **decadimento radioattivo** è il fenomeno in cui i nuclei instabili di alcuni elementi chimici si trasformano, mediante emissione di particelle e radiazioni, in altri nuclei che a loro volta possono essere stabili o radioattivi.
Il decadimento avviene spesso in tempi molto lunghi. Per descriverne la durata si utilizza il **tempo di dimezzamento**, ossia il tempo necessario affinché decada la metà degli atomi di un campione radioattivo.
Le **scorie radioattive**, generate come scarti da un reattore nucleare a fissione, contengono vari tipi di nuclei che hanno tempi di dimezzamento lunghissimi e sono altamente pericolose per l'uomo. Per questo è necessario metterle in sicurezza in particolari siti e il tempo di stoccaggio da prevedere può arrivare fino ad alcune centinaia di migliaia di anni.

Nuclei e dadi

Consideriamo un numero n molto grande di nuclei di una sostanza radioattiva. Vogliamo studiare mediante un modello come varia tale numero nel tempo.
Il fenomeno può essere simulato pensando di associare a ogni nucleo un dado e stabilendo che, dopo ogni lancio simultaneo di n dadi (che rappresentano il numero di nuclei della sostanza radioattiva), vengano eliminati tutti quelli che presentano una determinata faccia, per esempio la faccia contrassegnata con il numero 1.
La probabilità che ha un dado di essere eliminato dipende dal numero di facce del dado stesso: nel caso di dado a sei facce è $\frac{1}{6}$.
Ogni lancio rappresenta un intervallo di tempo di ampiezza Δt. Il decadimento dei nuclei della sostanza radioattiva in ogni intervallo di tempo Δt viene quindi simulato dall'eliminazione, dopo ogni lancio, dei dadi contrassegnati con la faccia 1.
È possibile allora compilare una tabella che dopo ogni lancio indichi il numero di dadi rimasti, ossia che indichi il numero di atomi rimasti al variare del tempo.

Questo non è l'unico metodo per studiare il fenomeno radioattivo. Un altro possibile modello prevede l'utilizzo di un'equazione differenziale dalla cui soluzione si ottiene l'espressione analitica della funzione che esprime il numero n di nuclei al variare del tempo t: $n(t) = n_0 \cdot w^{-kt}$. Il numero n_0 è il numero di nuclei presenti all'istante $t = 0$ e k è una costante che dipende dalla sostanza considerata.

Attività

Per costruire un foglio elettronico che esegua la simulazione descritta sopra puoi considerare uguale a 600 il numero di dadi iniziali e andare avanti fino a che il numero di dadi rimasti sia minore di 50. Ecco alcune indicazioni per la realizzazione.

- Se usi Excel, l'istruzione che consente di generare un numero intero casuale da 1 a 6 è:
  =INT(CASUALE()*6+1).

CASUALE() genera un numero casuale nell'intervallo [0; 1[; prendendo la parte intera della somma tra 1 e il prodotto per 6 di tale numero si ottiene un numero intero maggiore o uguale a 1 e minore o uguale a 6.

- Copiando la formula fino alla cella A600 si hanno i 600 numeri casuali desiderati.
- C'è però un problema: una qualunque azione effettuata in Excel provoca un aggiornamento della funzione casuale che porta a un cambiamento della lista dei 600 numeri casuali generati, come se avvenisse un nuovo lancio dei 600 dadi. Allo scopo di evitare questo inconveniente si può selezionare la colonna dove si trovano i numeri casuali (in questo caso la colonna A), copiarla e, posizionandosi nella cella B1, incollarla con la funzione INCOLLA SPECIALE avendo l'attenzione di spuntare la voce *Valori* e poi dare OK. In questo modo la lista dei 600 numeri non cambia più (e a questo punto è possibile eliminare la colonna A ormai inutile).
- Per simulare il decadimento radioattivo, si tratta di far contare al foglio elettronico i numeri uguali a 1. Questo può essere fatto con la funzione CONTA.SE, precisando nel primo argomento la zona di foglio da prendere in considerazione (nel nostro caso da A1 ad A600) e nel secondo argomento il numero di cui calcolare la frequenza assoluta (nel nostro caso 1):
  =CONTA.SE(A1:A600;1).

La funzione restituisce quanti 1 sono presenti e quindi fornisce il numero Δn di nuclei decaduti.

- Ora devi proseguire simulando il lancio di $(600 - \Delta n)$ dadi, con lo stesso procedimento di prima, e continuare poi allo stesso modo fino a ottenere un numero di dadi inferiore a 50.
- Infine riporta in una tabella il numero del lancio t, il numero Δn di dadi decaduti e il numero n di dadi rimasti e fai disegnare a Excel il grafico della funzione $n(t)$.

▼ Tabella 1 Una tabella ottenuta con la simulazione del lancio di 600 dadi.

t	Δn	n
0	0	600
1	94	506
2	80	426
3	76	350
4	59	291
5	45	246
6	47	199
7	29	170
8	36	134
9	22	112
10	15	97
11	8	89
12	17	72
13	17	55
14	11	44

Problemi e modelli della probabilità

Probabilità e particelle

Nel 1820 Pierre Simon de Laplace, nel suo *Théorie analytique des probabilités*, scriveva:

«Noi dobbiamo dunque considerare lo stato presente dell'universo come effetto del suo stato anteriore e come causa del suo stato futuro. Un'intelligenza che, per un dato istante, conoscesse tutte le forze di cui è animata la natura [...] abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e dell'atomo più leggero: nulla sarebbe incerto per essa e l'avvenire, come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi».

Laplace riteneva che il calcolo delle probabilità fosse utile in tutte quelle situazioni in cui è difficile ottenere informazioni molto precise sulle grandezze in gioco, ma che sarebbe possibile conoscere con esattezza posizione e velocità di ogni singola particella dell'universo.
Nel 1927 Werner Heisenberg enunciava il principio di indeterminazione, affermando che il prodotto delle incertezze di due grandezze coniugate (per esempio, posizione e quantità di moto) non può essere minore del rapporto fra la costante di Planck e 2π.
Nel mondo macroscopico gli effetti di questo principio sono irrilevanti, perché la costante di Planck è molto piccola. Nel mondo atomico e subatomico, invece, le conseguenze sono significative e sorprendenti. Per esempio, affermare che non è possibile conoscere con la precisione voluta sia la quantità di moto sia la posizione di una particella, implica che perde significato il concetto di traiettoria.
Non ha quindi senso parlare di traiettoria di un elettrone, ma solo di probabilità di trovare l'elettrone in una determinata posizione. A differenza di ciò che affermava Laplace, l'approccio probabilistico non è allora un utile stratagemma per ovviare alla nostra ignoranza, ma una necessità per comprendere la natura del mondo.

Attività

La nascita del concetto di probabilità. Approfondisci questo tema e sintetizza i risultati della tua ricerca in una presentazione multimediale.

Da leggere:

- Keith Devlin , *La lettera di Pascal. Storia dell'equazione che ha fondato la teoria della probabilità*, Rizzoli, 2008;
- Carla Rossi, *La matematica dell'incertezza*, Zanichelli, 1999.

Cerca nel Web:

probabilità storia, Aristotele, dadi astragali giochi aleatori, gioco zara

CAPITOLO

10

١٠ [numerazione araba]

१० [numerazione devanagari]

十 [numerazione cinese]

LE FUNZIONI GONIOMETRICHE

ROTOLARE PER MISURARE I tecnici che misurano la lunghezza delle strade usano uno strumento chiamato *rotella misuratrice*. Nei negozi specializzati in carte e atlanti è anche possibile comperare piccole rotelle multiscala da far correre su una carta geografica in modo da convertire in kilometri reali i centimetri rappresentati.

Come funziona una rotella misuratrice?

La risposta a pag. 662

1. LA MISURA DEGLI ANGOLI

Gli angoli e la loro ampiezza

La **trigonometria** ha lo scopo di studiare i procedimenti di calcolo che permettono di determinare, con l'approssimazione che si vuole, la misura degli elementi di un triangolo (lati e angoli), noti alcuni di essi.
Trova applicazione, in particolare, in astronomia, meccanica, navigazione aerea e marittima, topografia.
Lo studio della trigonometria è preceduto da quello della **goniometria**, ossia di quella parte della matematica che si occupa della misura degli angoli e delle relative funzioni. Richiamiamo la definizione di angolo.

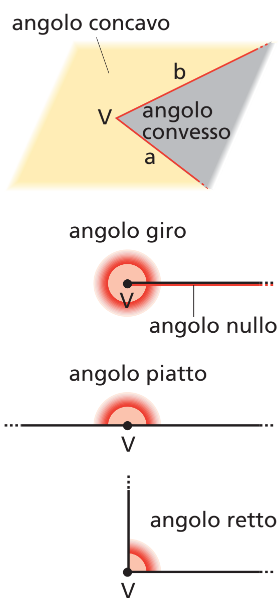
● «Trigonometria» deriva dal greco *trigonos*, che significa «triangolo» e *métron*, ossia «misura».

DEFINIZIONE

Angolo

Un angolo è la parte di piano individuata da due semirette *a* e *b* che hanno origine comune *V*.

● Un angolo si dice **convesso** quando non contiene i prolungamenti dei suoi lati, **concavo** quando li contiene. In genere, quando si parla dell'angolo $a\widehat{V}b$, senza altra indicazione, ci si riferisce all'angolo convesso.



Il punto *V* si chiama **vertice** dell'angolo e le semirette *a* e *b* si chiamano **lati**.
Quando i lati di un angolo sono coincidenti, l'angolo è **nullo** se è formato dalla sola semiretta dei lati, è **giro** se è formato da tutti i punti del piano.
Se i lati di un angolo sono uno il prolungamento dell'altro, l'angolo è **piatto**.
Se due rette incontrandosi formano quattro angoli congruenti, ognuno degli angoli è un angolo **retto**.
Due angoli congruenti hanno la stessa **ampiezza**, che si può misurare rispetto a un'unità di misura assegnata.
È usuale indicare con le lettere greche minuscole α, β, γ, … sia gli angoli sia la misura della loro ampiezza.
Le unità di misura più usate sono:

- il grado sessagesimale;
- il radiante.

La misura in gradi

Nel *sistema sessagesimale*, l'unità di misura degli angoli è il **grado sessagesimale**, definito come la 360ª parte dell'angolo giro.

Il grado sessagesimale viene indicato con un piccolo cerchio in alto a destra della misura:

$$1° = \frac{1}{360} \text{ dell'angolo giro.}$$

Nel sistema sessagesimale, il grado viene suddiviso a sua volta in 60 *primi*, che vengono indicati con un apice (′):

$$1° = 60'.$$

Ogni primo viene suddiviso a sua volta in 60 *secondi*, indicati con due apici (″):

$$1' = 60''.$$

Queste suddivisioni in 60 parti danno il nome al sistema di misura.

● Un angolo di 32 gradi, 10 primi e 47 secondi viene scritto così:

$32°\,10'\,47''$.

Perché la suddivisione in 360 parti?

Pare che la suddivisione del cerchio in 360 parti risalga ai Babilonesi (circa 2000 a.C.), i quali contavano il ciclo delle stagioni, ossia l'anno solare, in 360 giorni.
Per lungo tempo, tuttavia, la misura degli angoli in gradi non venne adottata sistematicamente. Soltanto nel II secolo d.C. Tolomeo d'Alessandria ne fece un uso regolare, introducendo i sottomultipli del grado, in latino *partes minutae primae* e *partes minutae secundae*, che noi oggi chiamiamo «primi» e «secondi».

Il sistema di misura degli angoli con gradi, primi e secondi è il più antico, ma presenta il problema di non basarsi su un sistema decimale e di avere quindi procedimenti di calcolo complicati.

ESEMPIO

Per ottenere:	$30° \, 20' \, 54'' + 2° \, 45' \, 24''$
dobbiamo prima sommare i secondi:	$54'' + 24'' = 78''$,
trasformare il risultato in primi e secondi:	$78'' = 1' \, 18''$,
sommare i primi:	$20' + 45' + 1' = 66'$,
trasformare il risultato in gradi e primi:	$66' = 1° \, 6'$,
sommare i gradi:	$30° + 2° + 1° = 33°$,
e ottenere così il risultato finale:	$33° \, 6' \, 18''$.

La misura in radianti

Per semplificare i calcoli si usa il sistema che ha per unità di misura il radiante.
Per definirlo, consideriamo due circonferenze di raggi r e r' e i due archi l e l', sottesi da angoli al centro della stessa ampiezza α, sulle due circonferenze (figura a lato).

Dalla proporzionalità fra archi e angoli al centro si ricava

$$l : \alpha° = 2\pi r : 360° \quad \text{e} \quad l' : \alpha° = 2\pi r' : 360°,$$

$$l = \frac{\alpha° \pi}{180°} r \quad \text{e} \quad l' = \frac{\alpha° \pi}{180°} r',$$

da cui, dividendo membro a membro, si ottiene

$$l : l' = r : r' \quad \rightarrow \quad l : r = l' : r' \quad \rightarrow \quad \frac{l}{r} = \frac{l'}{r'},$$

cioè gli archi sono proporzionali ai rispettivi raggi e il rapporto $\frac{l}{r}$ non varia al variare della circonferenza, ma dipende solo dall'angolo al centro α.
Se ogni volta che si misura un arco l si usa come unità di misura il raggio della circonferenza cui appartiene, si ottiene un numero che non dipende dalla circonferenza considerata, ma solo dall'angolo α che sottende l'arco.

Il rapporto $\frac{l}{r}$ viene quindi assunto come misura, in radianti, di α:

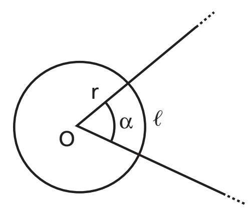
$$\boxed{\alpha = \frac{l}{r}.}$$

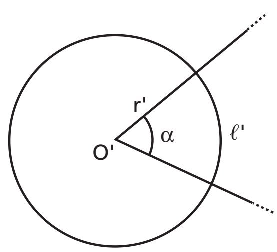
La scelta di dividere in 60 parti può essere giustificata dal fatto che il numero 60 ha molti divisori: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

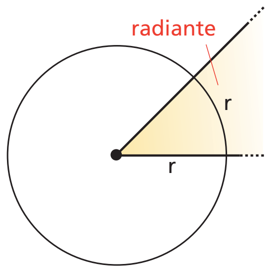
Le calcolatrici scientifiche usano anche il **sistema sessadecimale**, in cui accanto ai gradi si usano decimi, centesimi, millesimi, … di grado. Per esempio, nel sistema sessadecimale, 37,25° significa

$$37° + \left(\frac{2}{10}\right)^{\circ} + \left(\frac{5}{100}\right)^{\circ}.$$

Se invece si suddivide l'angolo retto in cento parti, si ottiene il **sistema centesimale**. Il grado centesimale, definito come la centesima parte dell'angolo retto, si indica con grad o gon.







Come definizione di radiante si può allora dare la seguente.

DEFINIZIONE

Radiante

Data una circonferenza, si chiama radiante l'angolo al centro che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.

L'unità di misura viene indicata con rad, ma generalmente, se si esprime un angolo in radianti, si è soliti trascurare l'indicazione dell'unità di misura.

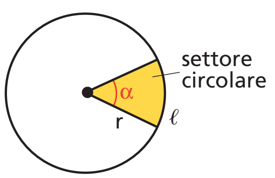
Poiché sottende l'intera circonferenza, l'angolo giro misura $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$.

L'angolo piatto, che corrisponde a metà circonferenza, misura π, l'angolo retto misura $\frac{\pi}{2}$ ecc.

Lunghezza di un arco di circonferenza

Dalla relazione $\alpha = \frac{l}{r}$, ricaviamo che, se α è misurato in radianti, la lunghezza di un arco è:

$$l = \alpha r.$$



Area del settore circolare

Esprimiamo anche l'area di un settore circolare.

Dalla proporzione: $A_{\text{settore}} : A_{\text{cerchio}} = \alpha : 2\pi$,

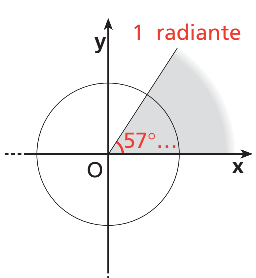
ricaviamo: $A_{\text{settore}} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot A_{\text{cerchio}} = \frac{\alpha}{2\cancel{\pi}} \cancel{\pi} r^2 = \boxed{\frac{1}{2}\alpha r^2},$

o, tenendo conto che $\alpha = \frac{l}{r}$: $A_{\text{settore}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{r} r^2 = \boxed{\frac{1}{2} lr}.$

● Nelle calcolatrici si può operare sia con i gradi sia con i radianti. I simboli corrispondenti sono DEG, che sta per *degree*, e RAD. Di solito, è presente anche il sistema centesimale, con il simbolo GRAD.

● In particolare, 1 radiante corrisponde a circa 57°. Infatti:

$$1 \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3{,}1415\ldots} \simeq 57°.$$



Dai gradi ai radianti e viceversa

Date le misure di un angolo α in gradi sessagesimali e in radianti, vale la proporzione

$$\alpha° : \alpha_{\text{rad}} = 360° : 2\pi,$$

da cui ricaviamo le due formule che convertono la misura di un angolo da radianti a gradi e viceversa:

$$\alpha° = \alpha_{\text{rad}} \cdot \frac{180°}{\pi}, \qquad \alpha_{\text{rad}} = \alpha° \cdot \frac{\pi}{180°}.$$

ESEMPIO

1. A $\frac{2}{3}\pi$ radianti corrisponde:

$$\alpha° = \frac{2}{3}\cancel{\pi} \cdot \frac{180°}{\cancel{\pi}} = \frac{2}{\cancel{3}_1} \cdot \cancel{180°}^{60°} = 120°.$$

2. A 60° corrisponde:

$$\alpha_{\text{rad}} = \cancel{60°}^{1} \cdot \frac{\pi}{\cancel{180°}_3} = \frac{\pi}{3}.$$

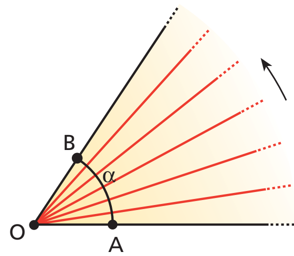
Riportiamo in una tabella le misure in radianti e in gradi di alcuni angoli.

Misure degli angoli

gradi	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

Gli angoli orientati

La definizione di angolo che abbiamo dato non è adatta per descrivere tutte le situazioni. Per esempio, nell'avvitare o svitare una vite si descrive un angolo che può essere maggiore di un angolo giro.
È più utile quindi collegare il concetto di angolo a quello di *rotazione*, cioè al movimento che porta uno dei lati dell'angolo a sovrapporsi all'altro.



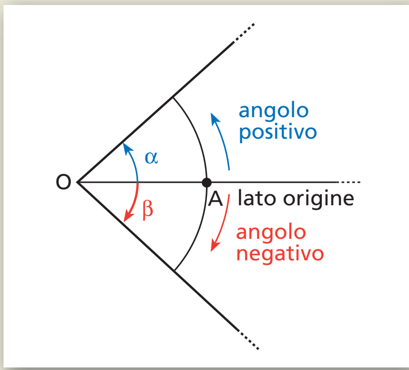
La rotazione è univoca solo quando ne viene specificato il **verso**, **orario** o **antiorario**. Nella figura a lato il senso adottato è quello antiorario.

Consideriamo la semiretta OA che ruota in senso antiorario intorno al vertice O, fino a sovrapporsi alla semiretta OB, generando l'angolo $\alpha = A\widehat{O}B$. La semiretta OA si chiama **lato origine** dell'angolo α, la semiretta OB si chiama **lato termine**.

DEFINIZIONE

Angolo orientato

Un angolo si dice orientato quando sono stati scelti uno dei due lati come lato origine e un senso di rotazione.
Un angolo orientato si dice *positivo* quando è descritto mediante una rotazione in senso antiorario; si dice *negativo* quando la rotazione è in senso orario.

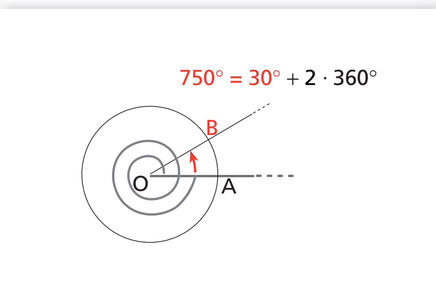


Un angolo orientato può anche essere maggiore di un angolo giro.

ESEMPIO

Poiché $750° = 30° + 2 \cdot 360°$, l'angolo di 750° si ottiene con la rotazione della semiretta OA di due giri completi e di ulteriori 30°.

$$\begin{array}{r|l} 750 & 360 \\ \hline 30 & 2 \end{array}$$



◀ **Figura 1** L'angolo di 750° si ottiene con una rotazione della semiretta *OA* di 30° e 2 angoli giro.

La forma sintetica

È possibile scrivere in forma sintetica un qualunque angolo α, minore di un angolo giro, e tutti gli infiniti angoli orientati che da α differiscono di un multiplo dell'angolo giro nel seguente modo:

$$\text{in gradi: } \alpha + k360°, \text{ con } k \in \mathbb{Z}; \quad \text{in radianti: } \alpha + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Quando $k = 0$, otteniamo l'angolo α.

In seguito, se non daremo altre indicazioni, sarà sempre vero che $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre, per brevità, utilizzeremo il termine «angolo» anche per indicare un angolo maggiore di un angolo giro.

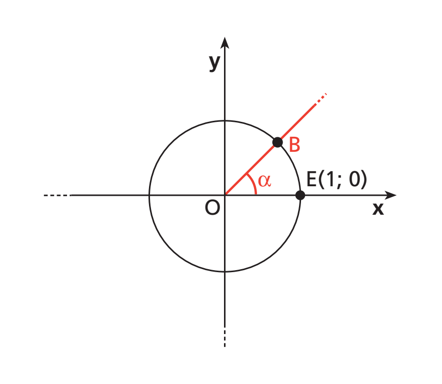
ESEMPIO

La scrittura $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ indica gli angoli:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \pm 2\pi, \frac{\pi}{4} \pm 4\pi, \frac{\pi}{4} \pm 6\pi, \ldots$$

La circonferenza goniometrica

Nel piano cartesiano, per **circonferenza goniometrica** intendiamo la circonferenza che ha come centro l'origine O degli assi e raggio di lunghezza 1, ossia la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.



◄ **Figura 2** La circonferenza goniometrica.

Essendo la lunghezza di un arco $l = \alpha r$, poiché il raggio della circonferenza è 1, se l'angolo è misurato in radianti la lunghezza dell'arco $\widehat{EB}$ è uguale alla misura dell'angolo $E\widehat{O}B$.

Il punto $E(1; 0)$ si dice **origine degli archi**.

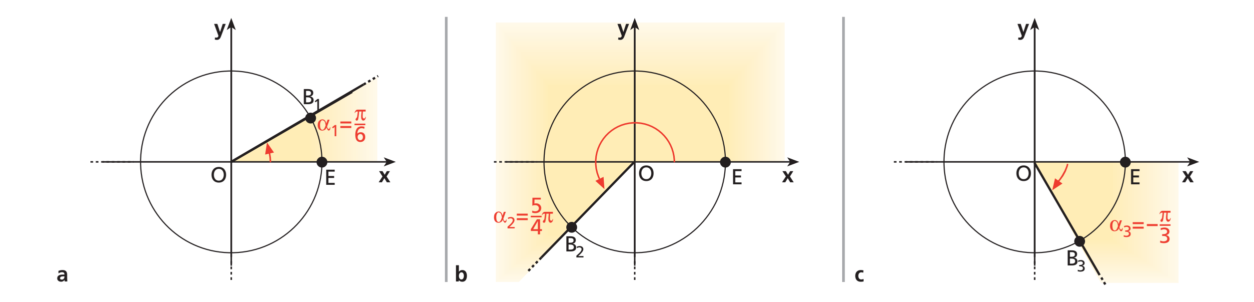
Utilizzando la circonferenza goniometrica, si possono rappresentare gli angoli orientati, prendendo come lato origine l'asse x. In questo modo, a ogni angolo corrisponde un punto di intersezione B fra la circonferenza e il lato termine.

ESEMPIO

Rappresentiamo gli angoli $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$, $\alpha_2 = \frac{5}{4}\pi$, $\alpha_3 = -\frac{\pi}{3}$.

Essi individuano sulla circonferenza i punti B_1, B_2 e B_3 della figura 3.

▼ **Figura 3**



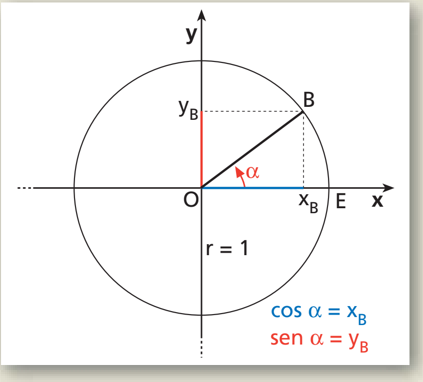
2. LE FUNZIONI SENO E COSENO

Introduciamo alcune **funzioni goniometriche** che alla misura dell'ampiezza di ogni angolo associano un numero reale.

DEFINIZIONE

Seno e coseno

Consideriamo la circonferenza goniometrica e un angolo orientato α, e sia B il punto della circonferenza associato ad α.
Definiamo coseno e seno dell'angolo α, e indichiamo con $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$, le funzioni che ad α associano, rispettivamente, il valore dell'ascissa e quello dell'ordinata del punto B:



$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = x_B\\ \operatorname{sen}\alpha = y_B\end{array}\right. \rightarrow \quad B(\cos\alpha;\ \operatorname{sen}\alpha).$$

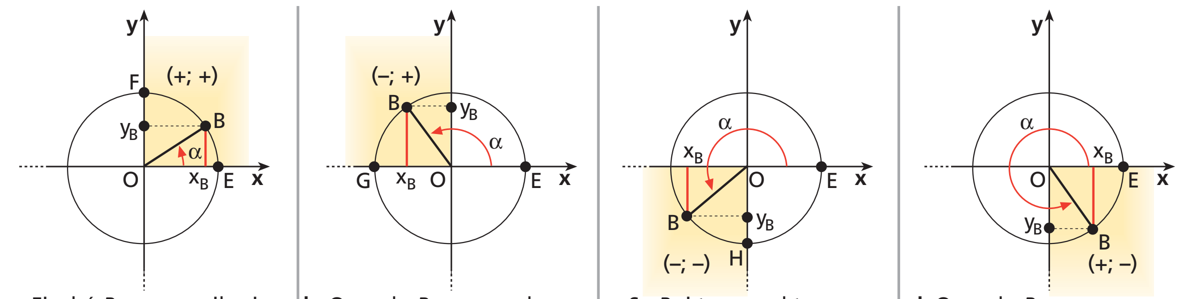
Nel linguaggio scientifico internazionale il seno di α si indica anche con $\sin\alpha$.

Seno e coseno di un angolo α sono funzioni che hanno come **dominio** $\mathbb{R}$, perché per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste uno e un solo punto sulla circonferenza.

Le variazioni delle funzioni seno e coseno

Supponiamo che un punto B percorra l'intera circonferenza goniometrica, a partire da E, in verso antiorario.
Se $\alpha = E\widehat{O}B$, come variano $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ al variare della posizione di B? Basta osservare che cosa succede all'ascissa di B (ossia il coseno) e alla sua ordinata (ossia il seno).

▼ Figura 4



a. Finché B percorre il primo quarto di circonferenza, la sua ascissa x_B e la sua ordinata y_B sono positive. Man mano che B si avvicina al punto F, l'ascissa diminuisce e l'ordinata aumenta. In F, $x_F = 0$, $y_F = 1$.

b. Quando B percorre la circonferenza nel secondo quadrante, la sua ordinata è ancora positiva, mentre l'ascissa diventa negativa. Quando B si avvicina a G, sia l'ascissa sia l'ordinata diminuiscono. In G, $x_G = -1$, $y_G = 0$.

c. Se B si trova nel terzo quadrante, la sua ordinata e la sua ascissa sono negative. Man mano che B si avvicina a H, l'ascissa aumenta e l'ordinata diminuisce. In H, $x_H = 0$, $y_H = -1$.

d. Quando B percorre l'ultimo quarto di circonferenza, la sua ordinata è ancora negativa, mentre l'ascissa è positiva. Avvicinandosi a E, sia l'ascissa sia l'ordinata di B aumentano. In E, $x_E = 1$, $y_E = 0$.

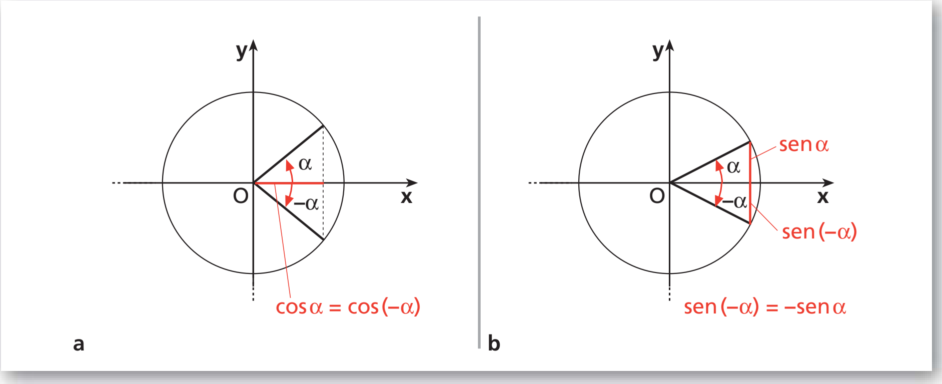
Qualunque sia la posizione di B sulla circonferenza, la sua ordinata e la sua ascissa assumono sempre valori compresi fra -1 e 1, quindi:

$$-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1 \qquad \text{e} \qquad -1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

Il codominio delle funzioni seno e coseno è quindi $[-1; 1]$.

Poiché $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$ (figura 5*a*), allora il coseno è una funzione pari, mentre, essendo $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$ (figura 5*b*), il seno è una funzione dispari.

▶ Figura 5



I grafici delle funzioni $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$

Studiando il grafico della funzione nel riferimento cartesiano Oxy, indichiamo l'angolo con x.

Possiamo costruire il grafico della funzione $y = \operatorname{sen} x$ in $[0; 2\pi]$ riportando sull'asse x i valori degli angoli e, in corrispondenza, sull'asse y le ordinate dei punti che stanno sulla circonferenza goniometrica (figura 6).

Analogamente, per ottenere il grafico della funzione coseno, riportiamo sulle ordinate di un piano cartesiano le ascisse dei punti della circonferenza goniometrica in corrispondenza degli angoli (figura 7).

▼ Figura 6

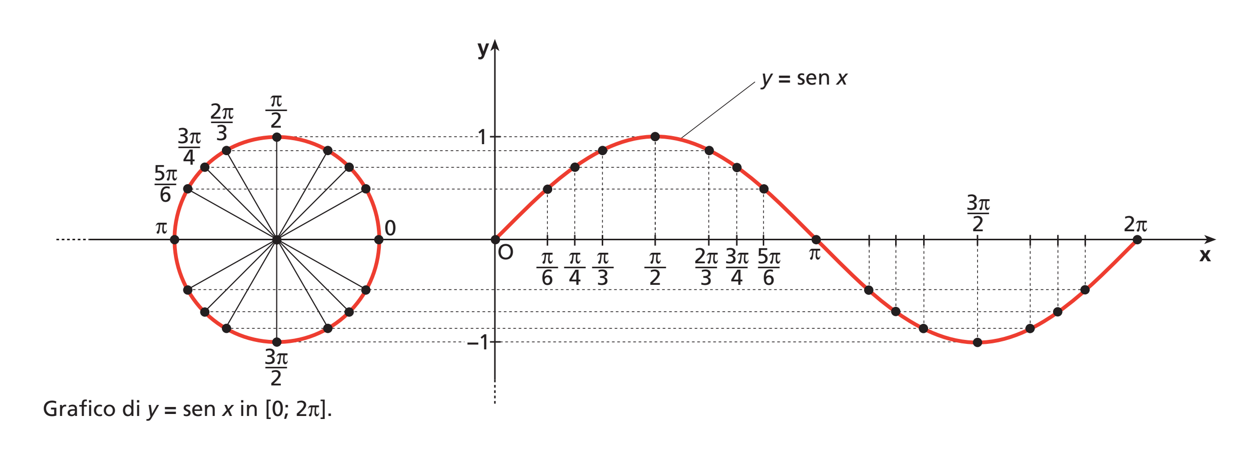


Grafico di $y = \operatorname{sen} x$ in $[0; 2\pi]$.

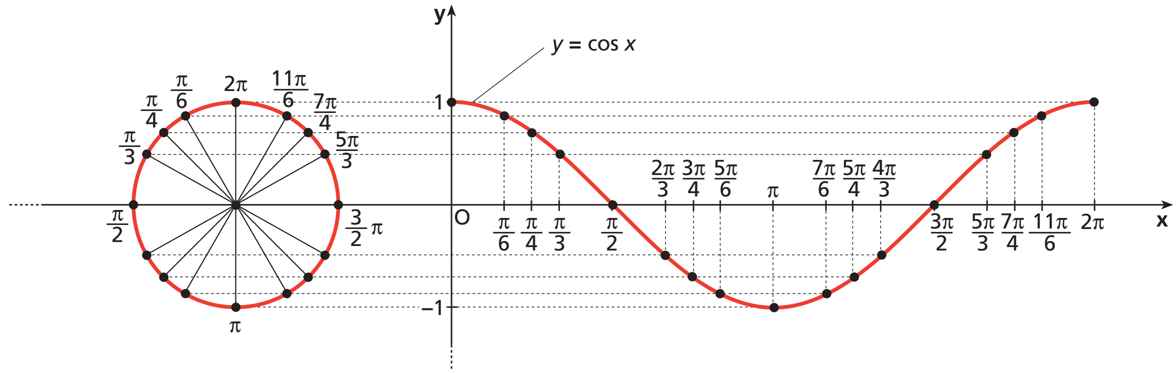


Grafico di $y = \cos x$ in $[0; 2\pi]$.

▲ **Figura 7**

Il periodo delle funzioni seno e coseno

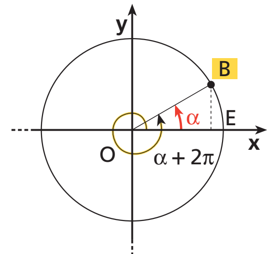
Dopo aver percorso un giro completo, il punto B può ripetere lo stesso movimento quante volte si vuole.

Le funzioni sen α e cos α assumono di nuovo gli stessi valori ottenuti al «primo giro», ossia:

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}(\alpha + 2\cdot 2\pi) = \dots$$
$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha + 2\cdot 2\pi) = \dots$$

Le funzioni seno e coseno sono quindi periodiche di periodo 2π. Possiamo scrivere, in modo sintetico:

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen}\alpha,$$
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

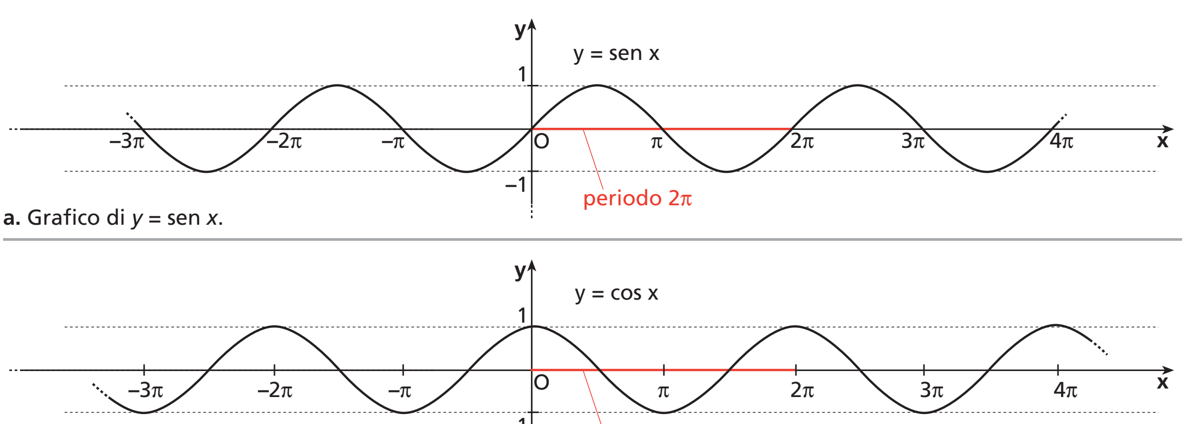


In generale, una funzione $y = f(x)$ è detta **periodica** di periodo p (con $p > 0$) se per ogni x e per qualsiasi numero k intero si ha $\boldsymbol{f(x) = f(x + kp)}$.

La sinusoide e la cosinusoide

Il grafico completo della funzione seno si chiama **sinusoide** (figura 8*a*), quello della funzione coseno **cosinusoide** (figura 8*b*).

▼ **Figura 8** Grafici completi di $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$. Le funzioni sono periodiche di periodo 2π, quindi i grafici si ottengono ripetendo ogni 2π i grafici relativi all'intervallo $[0; 2\pi]$.

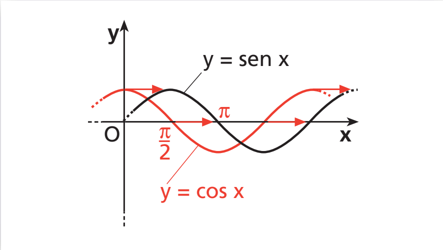


a. Grafico di $y = \operatorname{sen} x$.

b. Grafico di $y = \cos x$.

I grafici delle due funzioni sono sovrapponibili con una traslazione di vettore parallelo all'asse x e di modulo $\frac{\pi}{2}$.

▶ Figura 9



In sintesi

- La funzione $y = \operatorname{sen} x$ ha per dominio $\mathbb{R}$ e per codominio l'intervallo $[-1; 1]$, ossia:

  $$\operatorname{sen} x\colon \mathbb{R} \to [-1; 1].$$

  Pertanto si ha $|\operatorname{sen} x| \leq 1$.
  È una funzione dispari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.
- La funzione $y = \cos x$ ha per dominio $\mathbb{R}$ e per codominio $[-1; 1]$, ossia:

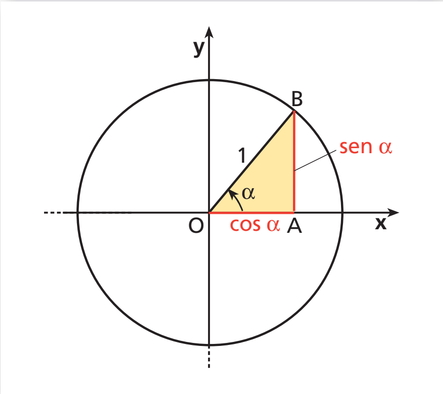
  $$\cos x\colon \mathbb{R} \to [-1; 1].$$

  Si ha quindi $|\cos x| \leq 1$.
  È una funzione pari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

La prima relazione fondamentale

Poiché il punto $B(\cos \alpha; \operatorname{sen} \alpha)$ appartiene alla circonferenza goniometrica, le sue coordinate soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 = 1$:

$\boldsymbol{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1}$ **prima relazione fondamentale della goniometria**.



◀ **Figura 10** $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$. La relazione esprime il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo *OAB*.

Da questa relazione è possibile ricavare sen α conoscendo cos α e viceversa.

Infatti, se è noto cos α, si ha: $\operatorname{sen} \alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$.

Viceversa, se si conosce sen α, si ha: $\cos \alpha = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}$.

3. LA FUNZIONE TANGENTE

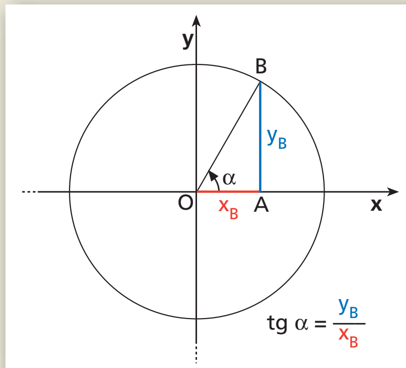
La tangente di un angolo

DEFINIZIONE

Tangente di un angolo

Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il lato termine e la circonferenza goniometrica di centro O. Definiamo tangente di α la funzione che ad α associa il rapporto, quando esiste, fra l'ordinata e l'ascissa dal punto B:

$$\mathbf{tg}\ \alpha = \frac{y_B}{x_B}.$$



Il rapporto $\frac{y_B}{x_B}$ non esiste quando $x_B = 0$, ossia per $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Il **dominio** della funzione tangente è quindi:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

- Nel linguaggio scientifico internazionale la tangente di α si indica con tan α.
- La tangente di un angolo non esiste quando B si trova sull'asse y, ossia quando l'angolo è uguale a $\frac{\pi}{2}$ o a $\frac{3}{2}\pi$ o a un altro valore che ottieni da $\frac{\pi}{2}$ aggiungendo multipli interi dell'angolo piatto.

Un altro modo di definire la tangente

Consideriamo la circonferenza goniometrica e la retta tangente a essa nel punto E, origine degli archi.

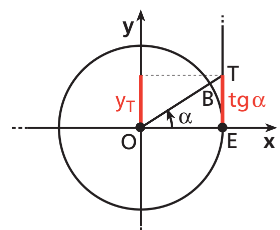
Il prolungamento del lato termine OB interseca la retta tangente nel punto T (figura a lato).

La tangente dell'angolo α può anche essere definita come il valore dell'ordinata del punto T, ossia:

$$\text{tg}\ \alpha = y_T.$$

Dimostriamo che le due definizioni date sono equivalenti.

- «Tangente» deriva dal latino *tangere*, che significa «toccare».



DIMOSTRAZIONE

Consideriamo i due triangoli rettangoli OAB e OET. Essi sono simili, quindi:

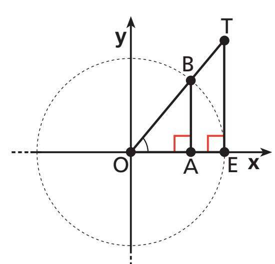
$$\overline{TE} : \overline{BA} = \overline{OE} : \overline{OA} \quad \rightarrow \quad y_T : y_B = 1 : x_B,$$

da cui

$$y_T = \frac{y_B \cdot 1}{x_B}, \quad \text{ossia } y_T = \frac{y_B}{x_B}.$$

Pertanto:

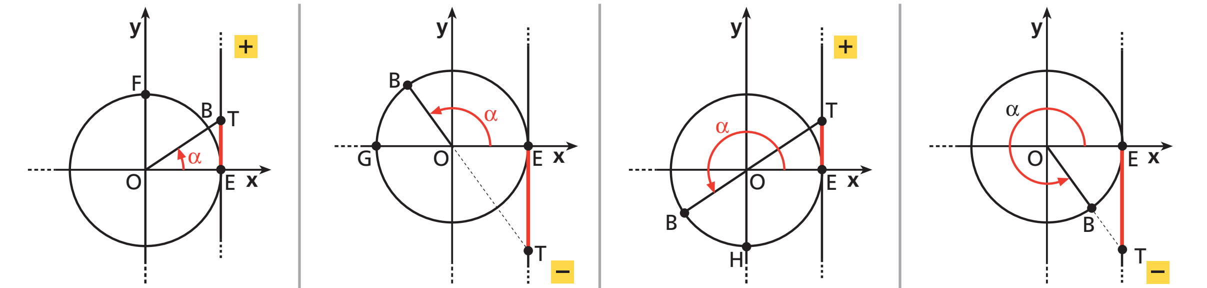
$$\text{tg}\ \alpha = \frac{y_B}{x_B} = y_T.$$



Le variazioni della funzione tangente

Studiamo come varia y_T al variare dell'angolo α.

▼ Figura 11



a. Finché B percorre il primo quarto di circonferenza, l'ordinata di T è positiva e aumenta man mano che B si avvicina al punto F. Quando $B \equiv F$, la tangente non esiste.

b. Quando B percorre la circonferenza nel secondo quadrante, l'ordinata T è negativa, e aumenta fino a quando $B \equiv G$, in cui $y_T = 0$.

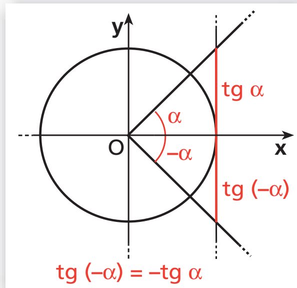
c. Se B si trova nel terzo quadrante, l'ordinata di T è di nuovo positiva e va aumentando fino a quando $B \equiv H$ e T non esiste più. La tangente di $\frac{3\pi}{2}$ non esiste.

d. Quando B percorre l'ultimo quarto di circonferenza, l'ordinata di T ritorna negativa e aumenta fino allo 0.

● A differenza delle funzioni seno e coseno, la funzione tangente può assumere qualunque valore reale.
Il suo codominio è quindi $\mathbb{R}$, mentre, come abbiamo visto, il suo dominio è: $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Essendo $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ (figura 12), la tangente è una funzione dispari.

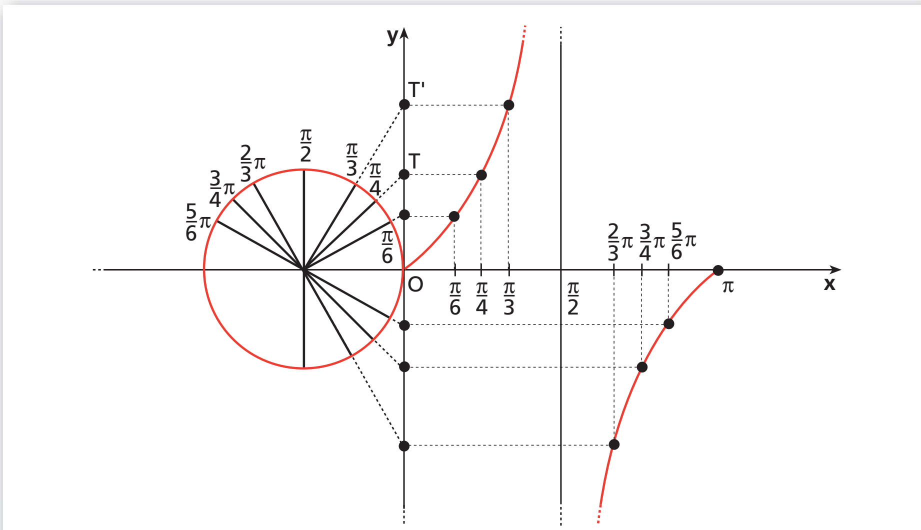
▶ Figura 12



Il grafico della funzione $y = \operatorname{tg} x$

Tracciamo il grafico della funzione $y = \operatorname{tg} x$ nell'intervallo $[0; \pi]$, riportando sull'asse x i valori degli angoli e sull'asse y le ordinate dei punti corrispondenti sulla retta tangente alla circonferenza goniometrica.

▶ Figura 13



Notiamo come, man mano che x si avvicina a $\frac{\pi}{2}$:

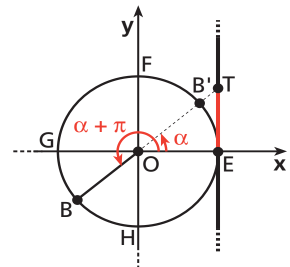
- con valori minori di $\frac{\pi}{2}$, il valore della funzione tende a diventare sempre più grande; diremo che tende a $+\infty$;
- con valori maggiori di $\frac{\pi}{2}$, il valore della funzione, che è negativo, tende a diventare sempre più grande in valore assoluto; diremo che tende a $-\infty$.

Il grafico della tangente, per valori di x che si approssimano a $\frac{\pi}{2}$, si avvicina sempre più alla retta di equazione $x = \frac{\pi}{2}$, che viene detta **asintoto verticale** del grafico.

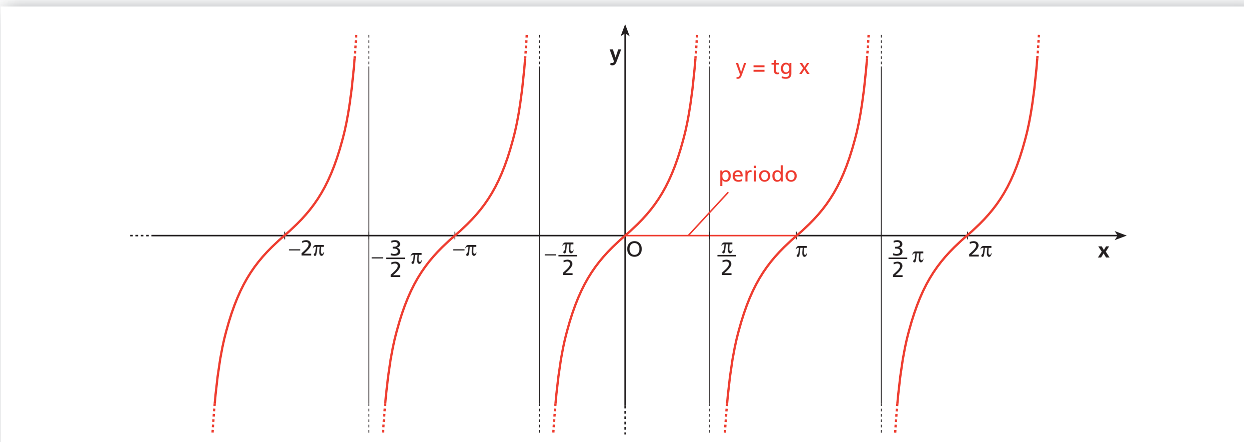
Il periodo della funzione *y* = tg *x*

La tangente è una funzione periodica di periodo π, cioè qualunque sia l'angolo α, è:

$$\text{tg}\,\alpha = \text{tg}(\alpha + k \cdot \pi), \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$



Questo si può vedere usando la definizione di tangente (figura a lato).
Il grafico completo della tangente si chiama **tangentoide**.



▲ **Figura 14** Rappresentazione della tangentoide.

In sintesi

La funzione $y = \text{tg}\,x$ ha per dominio $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ e codominio $\mathbb{R}$, ossia:

$$\text{tg}\,x\colon \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}.$$

Ha infiniti asintoti verticali di equazione $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

È una funzione dispari, quindi è simmetrica rispetto all'origine.

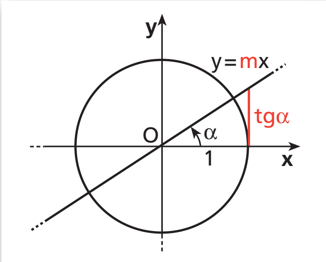
Il significato goniometrico del coefficiente angolare di una retta

Tracciamo la circonferenza goniometrica e la retta di equazione $y = mx$ (figura 15), da cui:

$$m = \frac{y}{x}.$$

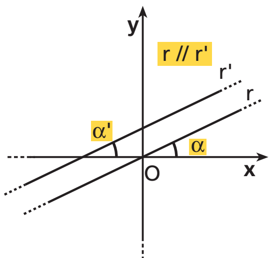
In particolare, se $x = 1$, $y = \text{tg}\,\alpha$ e

$$m = \frac{\text{tg}\,\alpha}{1} = \text{tg}\,\alpha.$$



▶ Figura 15

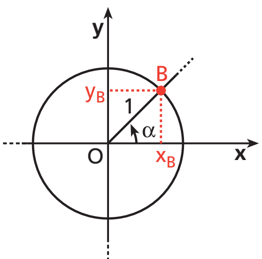
Il coefficiente angolare della retta è uguale alla tangente dell'angolo fra la retta e l'asse x. Dalla geometria analitica sappiamo che due rette sono parallele quando hanno lo stesso coefficiente angolare e, inoltre, rette parallele formano angoli congruenti con l'asse x. Ciò permette di estendere il risultato ottenuto anche a rette che non passano per l'origine (figura a lato).



$\alpha = \alpha'$, $m = m' \Rightarrow m' = \text{tg}\,\alpha'$

La seconda relazione fondamentale

Consideriamo la circonferenza goniometrica. Per definizione:



$$\text{tg}\,\alpha = \frac{y_B}{x_B},$$

$$y_B = \text{sen}\,\alpha \quad \text{e} \quad x_B = \cos\alpha.$$

Sostituiamo sen α e cos α nell'espressione della tangente:

$$\boxed{\textbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\textbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}}{\textbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}}}.$$

Questa è la **seconda relazione fondamentale** della goniometria: la tangente di un angolo è data dal rapporto, quando esiste, fra il seno e il coseno dello stesso angolo.

4. LE FUNZIONI SECANTE E COSECANTE

DEFINIZIONE

Secante e cosecante di un angolo

Dato un angolo α, si chiama:

- secante di α la funzione che associa ad α il reciproco del valore di cos α, purché cos α sia diverso da 0. Si indica con sec α:

$$\textbf{sec}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\textbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}}, \quad \text{con} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;$$

- cosecante di α la funzione che associa ad α il reciproco del valore di sen α, purché sen α sia diverso da 0. Si indica con cosec α:

$$\textbf{cosec}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\textbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}}, \quad \text{con} \quad \alpha \neq 0 + k\pi.$$

● Secante e cosecante, come seno e coseno, sono funzioni periodiche di periodo 2π.

Un altro modo di definire la secante e la cosecante

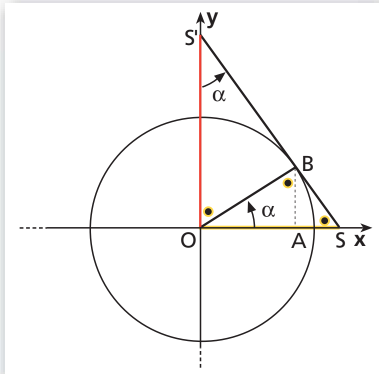
Consideriamo la circonferenza goniometrica, l'angolo α e la tangente in B che intersechi gli assi x e y rispettivamente in S e S' (figura 16).

Essendo simili i triangoli OBA e OBS, si ha

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OB} : \overline{OS} \rightarrow$$
$$\rightarrow \cos\alpha : 1 = 1 : \overline{OS},$$

da cui:

$$\overline{OS} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha.$$



◀ Figura 16

Analogamente, essendo simili i triangoli OAB e OBS', si ha

$$\overline{BA} : \overline{OB} = \overline{OB} : \overline{OS'} \rightarrow \text{sen}\,\alpha : 1 = 1 : \overline{OS'},$$

da cui:

$$\overline{OS'} = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \text{cosec}\,\alpha.$$

La secante di α è quindi l'ascissa del punto S, intersezione della retta tangente nel punto B, associato ad α sulla circonferenza goniometrica, con l'asse x.
Analogamente, la cosecante di α è l'ordinata del punto S', intersezione della retta tangente in B con l'asse y.

I grafici della secante e della cosecante

Il grafico del reciproco di una funzione

Dal grafico di una funzione $y = f(x)$ è possibile ricavare l'andamento della funzione:

$$y = g(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

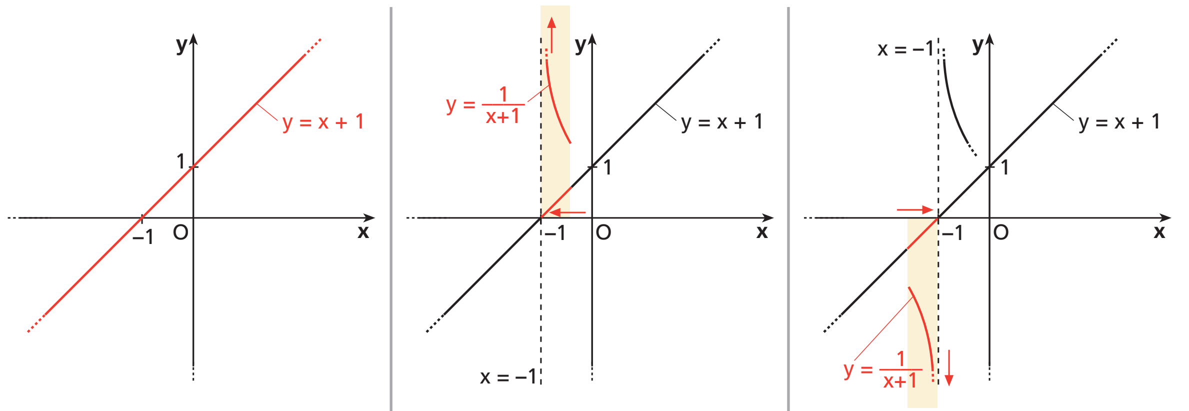
1. Se il grafico di $f(x)$ interseca l'asse x in x_0, ossia se $f(x_0) = 0$, *per valori di x che tendono a x_0*, il valore del reciproco è:
   - positivo e con valori sempre più grandi, man mano che ci si avvicina a x_0, se $f(x) > 0$; diremo che $g(x)$ tende a $+\infty$;
   - negativo e con valori sempre più grandi in valore assoluto, se $f(x) < 0$; diremo che $g(x)$ tende a $-\infty$.

   Avvicinandosi al punto x_0 il grafico della funzione $g(x)$ si avvicina a quello della retta $x = x_0$, che viene detta **asintoto verticale** del grafico di $g(x)$.

   Per esempio, considerata la funzione $y = x + 1$, $f(x_0) = 0$ se $x_0 = -1$.

   Il suo reciproco $y = \frac{1}{x+1}$ tende a $+\infty$ quando x tende a -1 e $x > -1$, cioè x è «a destra» di -1, perché $f(x)$ assume valori sempre più grandi. Analogamente, il reciproco tende a $-\infty$ per x che tende a -1 «da sinistra». La retta $x = -1$ è asintoto verticale (figura 17).
2. Quando $f(x)$ tende a $+\infty$ o a $-\infty$, il suo reciproco $g(x)$ si avvicina sempre più a 0, cioè $g(x)$ tende a 0 (figura 18).
3. Se $f(a) = 1$, è vero anche che $g(a) = \frac{1}{f(a)} = \frac{1}{1} = 1$. a è allora *ascissa di un punto di intersezione* dei grafici della funzione e del suo reciproco.

   Analogamente, se $f(b) = -1$, $g(b) = \frac{1}{f(b)} = \frac{1}{-1} = -1$, cioè *$b$ è ascissa di un punto di intersezione* (figura 19*a*).

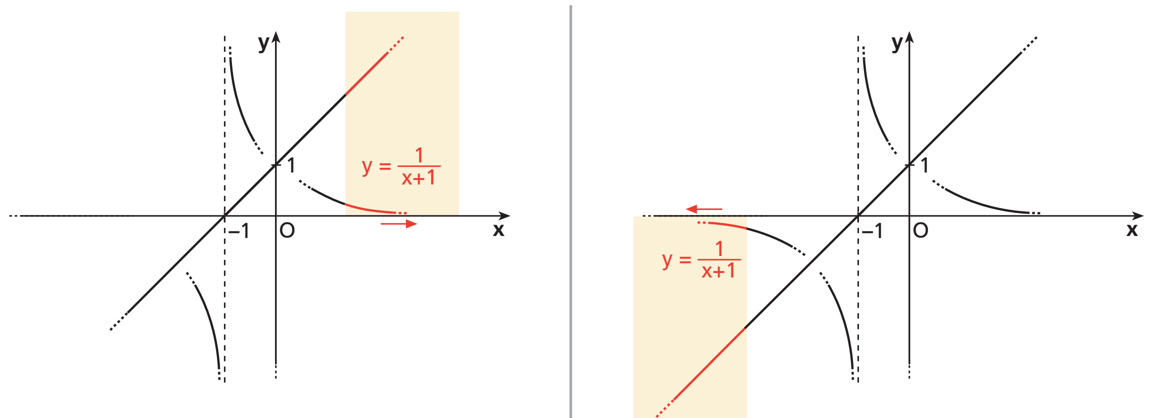


a. Grafico di $y = x + 1$.

b. Tendenza a $+\infty$ di $y = \frac{1}{x+1}$, quando x tende a -1 da destra.

c. Tendenza a $-\infty$ di $y = \frac{1}{x+1}$, quando x tende a -1 da sinistra.

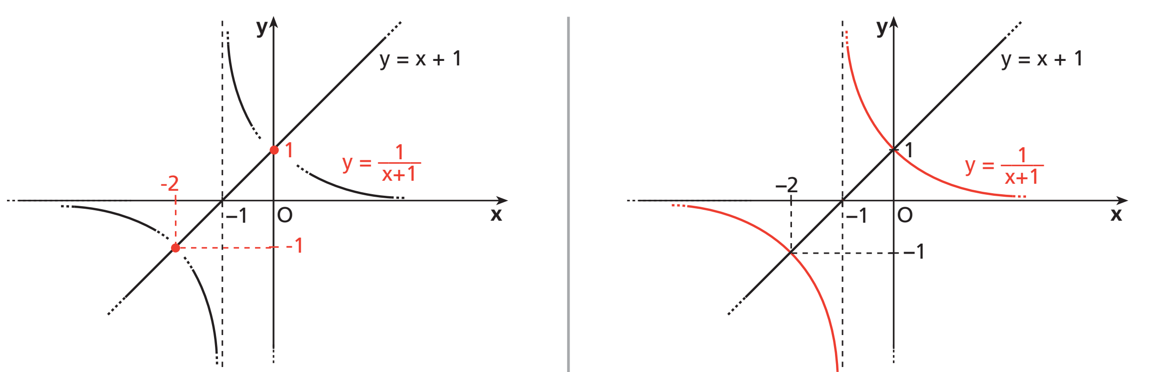
▲ **Figura 17**



a. Tendenza a 0 di $y = \frac{1}{x+1}$, quando $y = x + 1$ tende a $+\infty$.

b. Tendenza a 0 di $y = \frac{1}{x+1}$, quando $y = x + 1$ tende a $-\infty$.

▲ **Figura 18**

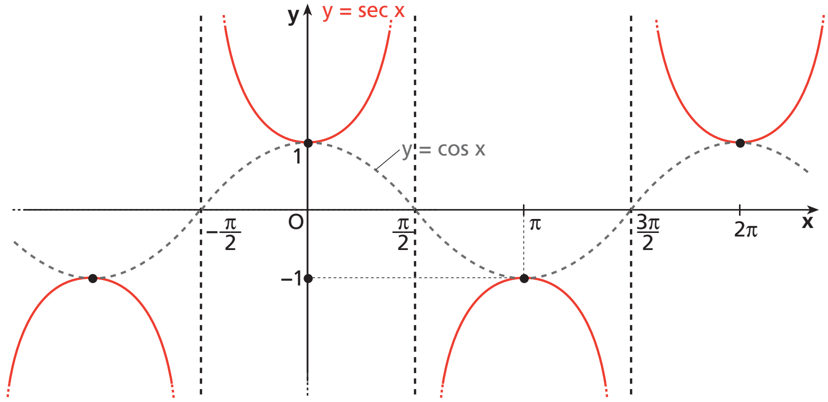


a. La funzione e il suo reciproco hanno in comune i punti (0; 1) e (–2; –1).

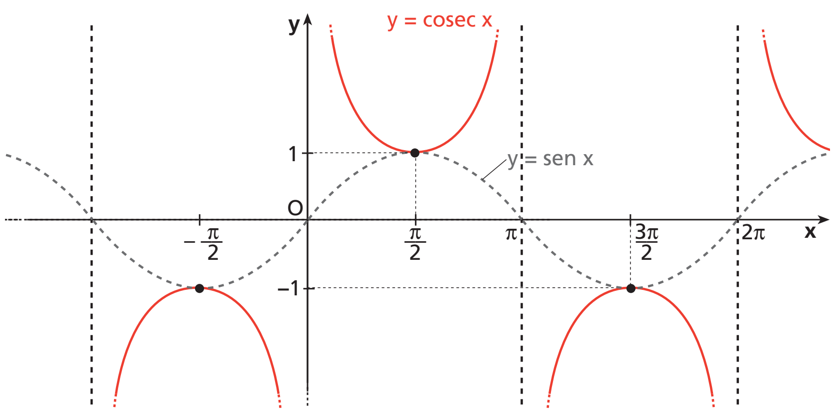
b. Le informazioni raccolte permettono di tracciare il grafico «probabile» di $y = \frac{1}{x+1}$.

▲ **Figura 19**

I grafici delle funzioni secante e cosecante sono rappresentati in figura 20.



a. Grafico della secante.



b. Grafico della cosecante.

◄ Figura 20 I grafici delle funzioni secante e cosecante.

Il grafico di una funzione si ottiene da quello dell'altra con una traslazione di vettore parallelo all'asse x e modulo $\frac{\pi}{2}$.

I domini delle due funzioni sono deducibili dalla loro definizione. Quindi:

$$y = \sec x \text{ ha dominio } \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\};$$

$$y = \operatorname{cosec} x \text{ ha dominio } \mathbb{R} - \{0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\};$$

Dalla figura 20 si deduce che il codominio, sia della funzione secante, sia della funzione cosecante, è $\mathbb{R} -]-1; 1[$.

Sono asintoti verticali le rette di equazione:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ per il grafico della secante;}$$

$$x = 0 + k\pi \text{ per il grafico della cosecante.}$$

Come il coseno, la secante è una funzione pari, mentre la cosecante è una funzione dispari, come il seno.

5. LA FUNZIONE COTANGENTE

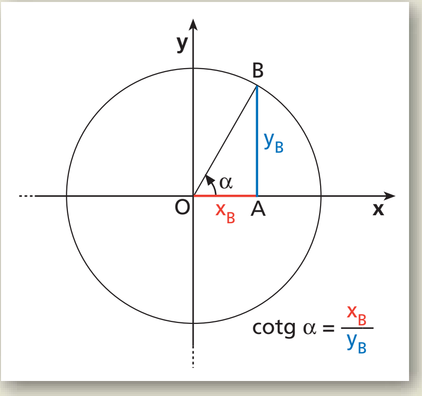
La cotangente di un angolo

DEFINIZIONE

Cotangente di un angolo

Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il lato termine e la circonferenza goniometrica. Definiamo cotangente di α la funzione che associa ad α il rapporto, quando esiste, fra l'ascissa e l'ordinata del punto B:

$$\mathbf{cotg}\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{x_B}{y_B}.$$



La cotangente di α si può indicare anche con cotan α.

La cotangente di un angolo **non** esiste quando il punto B si trova sull'asse x, ossia quando l'angolo misura 0, π e tutti i multipli interi di π.

Il **dominio** della funzione cotangente è quindi:

$$\alpha \neq k \cdot \pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Poiché tg $\alpha = \frac{y_B}{x_B}$ e cotg $\alpha = \frac{x_B}{y_B}$, risulta tg $\alpha \cdot$ cotg $\alpha = 1$, da cui:

$$\boxed{\mathbf{cotg}\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{tg}\ \boldsymbol{\alpha}}}, \text{ con } \alpha \neq k\frac{\pi}{2}.$$

L'uguaglianza vale in un insieme più ristretto rispetto al dominio della cotangente.

La condizione posta deriva dal fatto che consideriamo $\frac{1}{\text{tg}\ \alpha}$, quindi occorre scartare gli angoli in cui non esiste tg α, cioè $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, e quelli in cui tg $\alpha = 0$, cioè $\alpha = 0 + k\pi$, perciò: $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$.

Dalla definizione di cotangente deriva anche che:

$$\boxed{\mathbf{cotg}\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\alpha}}}, \text{ con } \alpha \neq k\pi.$$

L'uguaglianza vale in tutto il dominio della cotangente, quindi è equivalente alla definizione formulata in precedenza.

Un altro modo di definire la cotangente

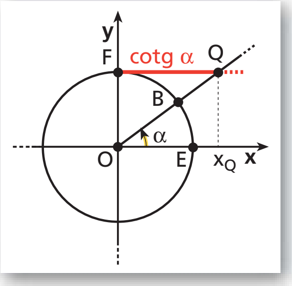
Consideriamo la circonferenza goniometrica e la retta tangente a essa nel punto F.

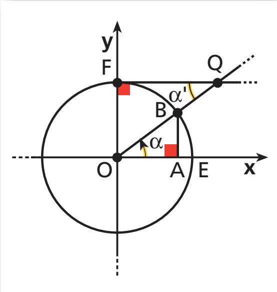
Il prolungamento del lato termine OB interseca la retta tangente nel punto Q.

La cotangente dell'angolo α può anche essere definita come l'ascissa del punto Q, ossia:

$$\text{cotg}\ \alpha = x_Q.$$

▶ Figura 21





Infatti, i due triangoli rettangoli OAB e OFQ sono simili, essendo $FQ \,/\!/\, OA$ e quindi $\alpha \cong \alpha'$ perché alterni interni di rette parallele tagliate da una trasversale.

◀ **Figura 22**

Scriviamo la proporzione fra le misure dei cateti corrispondenti,

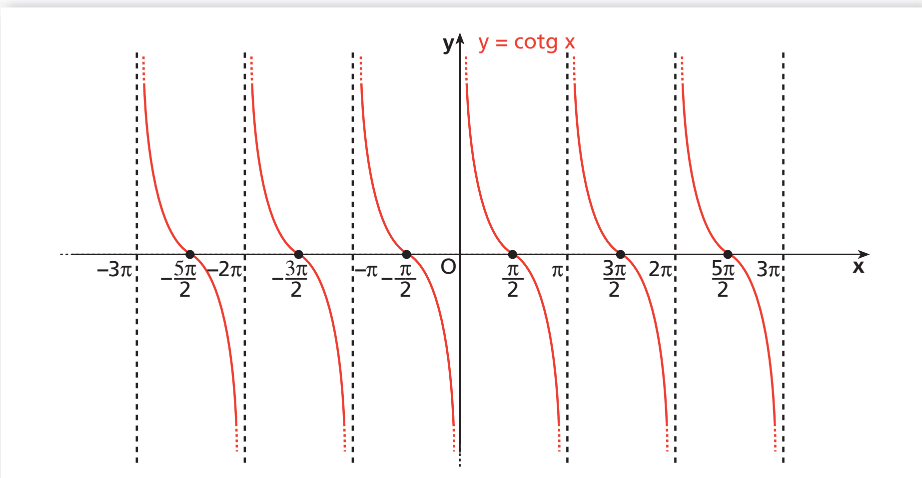
$$\overline{FQ} : \overline{OA} = \overline{FO} : \overline{BA} \quad \rightarrow \quad x_Q : x_B = 1 : y_B \quad \rightarrow \quad x_Q = \frac{x_B}{y_B}.$$

Pertanto:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{x_B}{y_B} = x_Q.$$

Il grafico della funzione $y = \operatorname{cotg} x$

Come la tangente, anche la funzione cotangente può assumere qualunque valore reale. Il codominio della cotangente è quindi $\mathbb{R}$, mentre il suo dominio è: $x \neq k \cdot \pi$. Le rette di equazione $x = k\pi$ sono asintoti verticali del suo grafico.

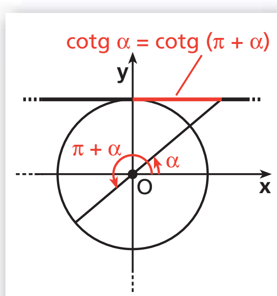


◀ **Figura 23** **Il grafico della funzione cotangente.**

Il periodo della funzione cotangente

In analogia con la tangente, la funzione cotangente risulta periodica di periodo π:

$$\operatorname{cotg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{cotg} \alpha, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$



► **Figura 24**

6. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI PARTICOLARI

Mediante le proprietà delle figure geometriche, riusciamo a calcolare il valore delle funzioni goniometriche di alcuni angoli particolari.

L'angolo $\frac{\pi}{6}$

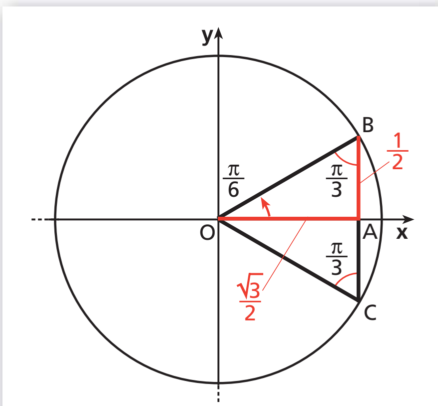
Consideriamo la circonferenza goniometrica e il triangolo OAB, rettangolo in A, con $\alpha = A\widehat{O}B = \frac{\pi}{6}$ e $\overline{OB} = 1$.

Poiché in un triangolo rettangolo gli angoli acuti sono complementari, $O\widehat{B}A = \frac{\pi}{3}$.

Prolungando il lato BA, otteniamo sulla circonferenza il punto C.

Il triangolo OBC è equilatero, poiché ha gli angoli di $\frac{\pi}{3}$, quindi $\overline{BC} = 1$.

AB è la metà di BC, ossia $\overline{AB} = \frac{1}{2}$.



◀ Figura 25

- $\frac{\pi}{6}$ radianti $= 30°$;

  $\frac{\pi}{3}$ radianti $= 60°$.

Ricaviamo $\overline{OA}$ applicando il teorema di Pitagora al triangolo OAB:

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pertanto:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ricaviamo la tangente e la cotangente di $\frac{\pi}{6}$:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Pertanto:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

- Noto $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, per determinare $\cos\frac{\pi}{6}$ potremmo anche utilizzare direttamente la prima relazione fondamentale:

  $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6} = 1.$

- Possiamo ricavare anche secante e cosecante:

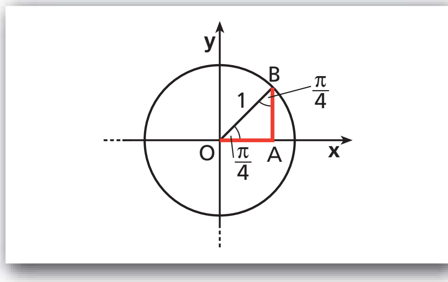
  $\sec\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$

  $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}} = 2.$

L'angolo $\frac{\pi}{4}$

Consideriamo la circonferenza goniometrica e il triangolo OAB, rettangolo in A, con $\alpha = A\widehat{O}B = \frac{\pi}{4}$ e $\overline{OB} = 1$.

Poiché l'angolo in B è complementare di α, risulta $O\widehat{B}A = \frac{\pi}{4}$ e il triangolo OAB è anche isoscele.



◀ Figura 26

● $\frac{\pi}{4}$ radianti $= 45°$.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo AOB:

$$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{OB}^2.$$

Poiché $\overline{OA} = \overline{AB}$ e $\overline{OB} = 1$:

$$2\overline{OA}^2 = 1 \rightarrow \overline{OA}^2 = \frac{1}{2} \rightarrow \overline{OA} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Calcoliamo tangente e cotangente di $\frac{\pi}{4}$:

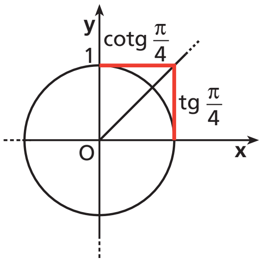
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1; \quad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = 1.$$

Pertanto:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

● Poiché $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, otteniamo:

$$\sec\frac{\pi}{4} = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

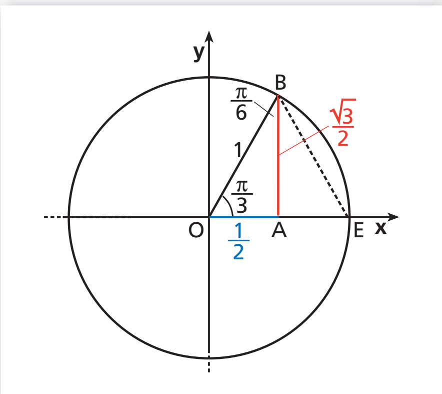


L'angolo $\frac{\pi}{3}$

Nel cerchio goniometrico, consideriamo il triangolo OAB, rettangolo in A, con $\alpha = A\widehat{O}B = \frac{\pi}{3}$ e, di conseguenza, $O\widehat{B}A = \frac{\pi}{6}$.

Congiungendo B con E, otteniamo il triangolo OEB che ha i tre lati congruenti.

BA è l'altezza del triangolo OEB e OA è la metà di OE, quindi $\overline{OA} = \frac{1}{2}$.



◀ Figura 27

Ricaviamo $\overline{AB}$ applicando il teorema di Pitagora al triangolo OAB:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ricaviamo la tangente e la cotangente di $\frac{\pi}{3}$.

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Pertanto:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \quad \text{e} \quad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- $\sec\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$

  $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}.$

- Per gli angoli di $\frac{\pi}{6}$ e di $\frac{\pi}{3}$ i valori di seno e coseno, di tangente e cotangente e di secante e cosecante sono scambiati. Per esempio:

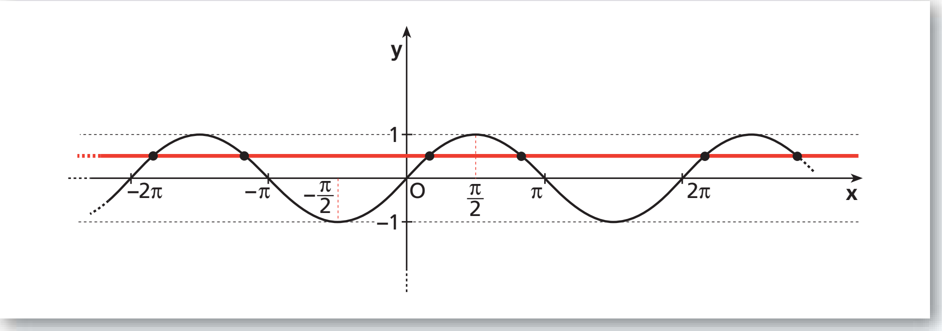
  $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$

7. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

La funzione inversa di $y = \operatorname{sen} x$

Una funzione è invertibile, ossia ammette la funzione inversa, solo se è biiettiva.

La funzione $y = \operatorname{sen} x$ non è biiettiva perché non è iniettiva. Infatti, se consideriamo una retta $y = k$, parallela all'asse x, con $-1 \leq k \leq 1$, essa interseca il grafico della funzione seno in infiniti punti, quindi ogni valore del codominio $[-1; 1]$ di $y = \operatorname{sen} x$ è immagine di infiniti valori del dominio $\mathbb{R}$.



▶ **Figura 28** La retta $y = k$, con $-1 \leq k \leq 1$, interseca il grafico di $y = \operatorname{sen} x$ in infiniti punti, quindi la funzione seno non è iniettiva.

La restrizione del dominio

Se restringiamo il dominio della funzione seno all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, la funzione $y = \operatorname{sen} x$ risulta biiettiva e dunque invertibile.

La funzione inversa del seno si chiama *arcoseno*.

DEFINIZIONE

Arcoseno

Dati i numeri reali x e y, con

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2},$$

diciamo che y è l'arcoseno di x se x è il seno di y.

Scriviamo: $y = \text{arcsen}\, x$.

$y = \text{arcsen}\, x$ $\Updownarrow$ $x = \text{sen}\, y$

$D = [-1; 1]$

$C = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Con D indichiamo il dominio, con C il codominio.

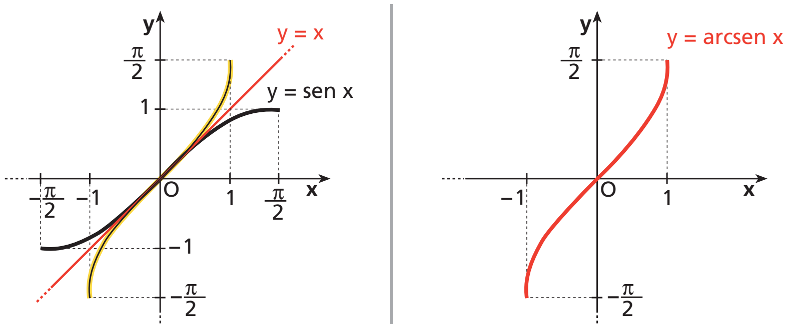
L'arcoseno di x si può indicare anche con $\text{sen}^{-1} x$ o $\arcsin x$ o $\sin^{-1} x$.

ESEMPIO

$$\text{arcsen}\, 1 = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow \text{sen}\, \frac{\pi}{2} = 1; \quad \text{arcsen}\, \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \leftrightarrow \text{sen}\, \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Per ottenere il grafico della funzione $y = \text{arcsen}\, x$, basta costruire il simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante del grafico della funzione $y = \text{sen}\, x$, considerata nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Data una qualsiasi funzione f invertibile, il grafico della funzione inversa f^{-1} si ottiene da quello di f per simmetria rispetto alla retta bisettrice del I e III quadrante, che ha equazione $y = x$.



a. Dato il grafico di $y = \text{sen}\, x$ in $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, tracciamo il simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante ottenendo il grafico della funzione inversa.

b. Grafico della funzione $y = \text{arcsen}\, x$.

◀ **Figura 29**

Le considerazioni fatte per la funzione inversa di $y = \text{sen}\, x$ valgono anche per le funzioni inverse delle altre funzioni goniometriche.

La funzione inversa di $y = \cos x$

Se consideriamo $[0; \pi]$ come dominio, la funzione coseno è biunivoca e quindi invertibile.

La funzione inversa del coseno si chiama *arcocoseno*.

DEFINIZIONE

Arcocoseno

Dati i numeri reali x e y, con $-1 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq \pi$, diciamo che y è l'arcocoseno di x se x è il coseno di y.

Scriviamo: $y = \arccos x$.

$y = \arccos x$ $\Updownarrow$ $x = \cos y$

$D = [-1; 1]$

$C = [0; \pi]$

L'arcocoseno di x si può indicare anche con $\cos^{-1} x$.

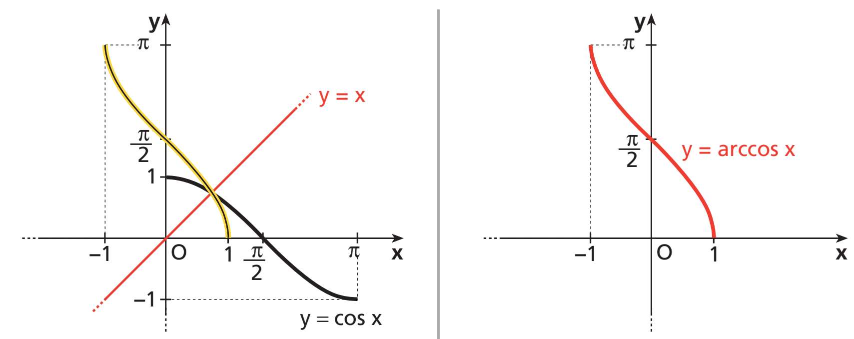
ESEMPIO

$$\arccos(-1) = \pi \leftrightarrow \cos \pi = -1;$$

$$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \leftrightarrow \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La figura 30 illustra il grafico della funzione arcocoseno.

▶ Figura 30



a. Dato il grafico di $y = \cos x$ in $[0; \pi]$, tracciamo il simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, ottenendo il grafico della funzione inversa.

b. Grafico della funzione $y = \arccos x$.

La funzione inversa di $y = \text{tg}\, x$

Se consideriamo $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ come dominio, la funzione tangente è biunivoca e quindi invertibile.

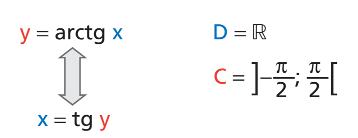
La funzione inversa della tangente si chiama *arcotangente*.

DEFINIZIONE

Arcotangente

Dati i numeri reali x e y, con $x \in \mathbb{R}$ e $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, diciamo che y è l'arcotangente di x se x è la tangente di y.

Scriviamo: $y = \text{arctg}\, x$.



● L'arcotangente di x si può indicare anche con $\text{tg}^{-1} x$ o $\arctan x$ o $\tan^{-1} x$.

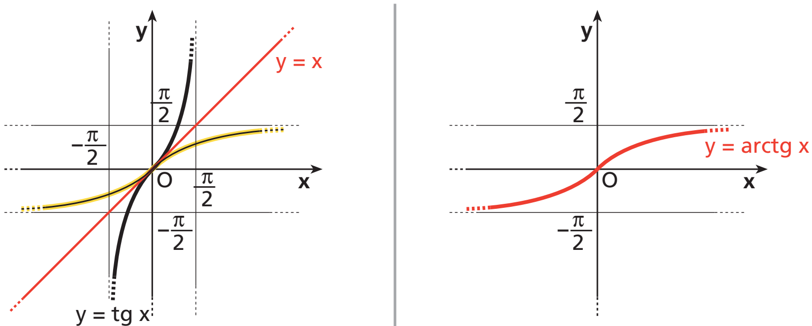
ESEMPIO

$$\text{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4} \leftrightarrow \text{tg}\, \frac{\pi}{4} = 1;$$

$$\text{arctg}\, \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \leftrightarrow \text{tg}\, \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Studiamo il grafico della funzione arcotangente.

◀ **Figura 31**



a. Dato il grafico di $y = \text{tg}\, x$ in $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, tracciamo il simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, ottenendo quello della funzione inversa.

b. Grafico della funzione $y = \text{arctg}\, x$.

La funzione inversa di $y = \text{cotg}\, x$

DEFINIZIONE

Arcocotangente

Dati i numeri reali x e y, con $x \in \mathbb{R}$ e $0 < y < \pi$, diciamo che y è l'arcocotangente di x se x è la cotangente di y.
Scriviamo: $y = \text{arccotg}\, x$.

$y = \text{arccotg}\, x$ $\Updownarrow$ $x = \text{cotg}\, y$

$D = \mathbb{R}$

$C =]0; \pi[$

● L'arcocotangente di x si può indicare anche con $\text{cotg}^{-1} x$ o $\text{arccot}\, x$ o $\text{cotan}^{-1} x$.

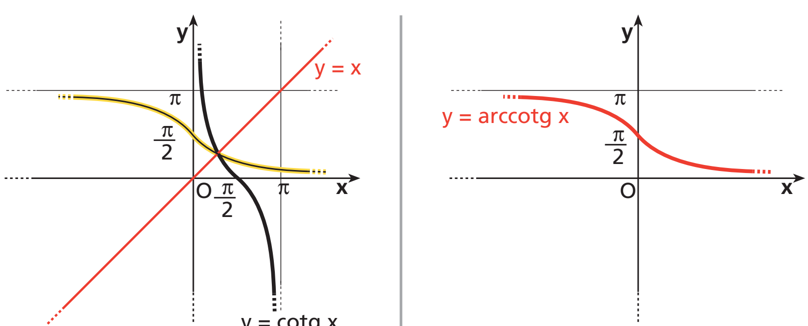
ESEMPIO

$$\text{arccotg}\, 0 = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow \text{cotg}\, \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\text{arccotg}\, \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3} \leftrightarrow \text{cotg}\, \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Disegniamo il grafico della funzione arcocotangente.

◀ **Figura 32**



a. Considerato il grafico di $y = \text{cotg}\, x$ in $]0; \pi[$, per ottenere quello della funzione inversa tracciamo il simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

b. Grafico della funzione $y = \text{arccotg}\, x$.

Le funzioni goniometriche e la calcolatrice

Per determinare il valore di una funzione goniometrica di un angolo possiamo impiegare la calcolatrice.
I tasti da utilizzare sono <sin> per la funzione seno, <cos> per il coseno e <tan> per la tangente.
Se la misura dell'angolo è in gradi sul display deve comparire la scritta DEG (dall'inglese *degree*).
È possibile scegliere anche l'opzione RAD per la misura in radianti.
Le funzioni arcoseno, arcocoseno e arcotangente si indicano, rispettivamente, con $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$. Per ottenerle, di solito deve essere premuto prima il tasto relativo alla «seconda funzione», indicato a volte con <INV>, e poi il tasto della funzione seno, coseno o tangente.

8. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE E LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Dai grafici delle funzioni goniometriche si ottengono grafici di altre funzioni mediante traslazioni, simmetrie, dilatazioni e contrazioni. Ne proporremo alcuni negli esercizi, mentre qui ci occupiamo soltanto delle *funzioni sinusoidali*.

Ricordiamo che il grafico di una funzione del tipo $y = nf\left(\frac{x}{m}\right)$, rispetto a quello di $y = f(x)$, ha:
- contrazione orizzontale se $m < 1$;
- dilatazione orizzontale se $m > 1$;
- contrazione verticale se $n < 1$;
- dilatazione verticale se $n > 1$.

Le funzioni sinusoidali

La funzione

$$y = 3 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

è della forma $y = nf\left(\frac{x}{m}\right)$:

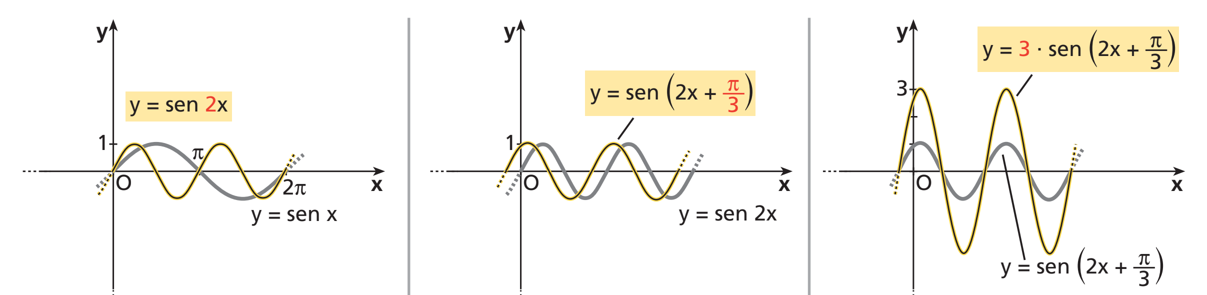
$$\text{con } m = \frac{1}{2} < 1;\ n = 3 > 1.$$

Applichiamo al grafico di $y = \operatorname{sen} x$ le seguenti trasformazioni:

- contrazione orizzontale con $m = \frac{1}{2}$;
- traslazione di vettore $\vec{v}\left(-\frac{\pi}{6}; 0\right)$;
- dilatazione verticale con $n = 3$.

La funzione $y = 3 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ è nulla in $2x + \frac{\pi}{3} = 0$, cioè in $x = -\frac{\pi}{6}$.

▼ **Figura 33** Grafico di $y = 3 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.



a. Grafico di $y = \operatorname{sen} 2x$.

b. Grafico di $y = \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

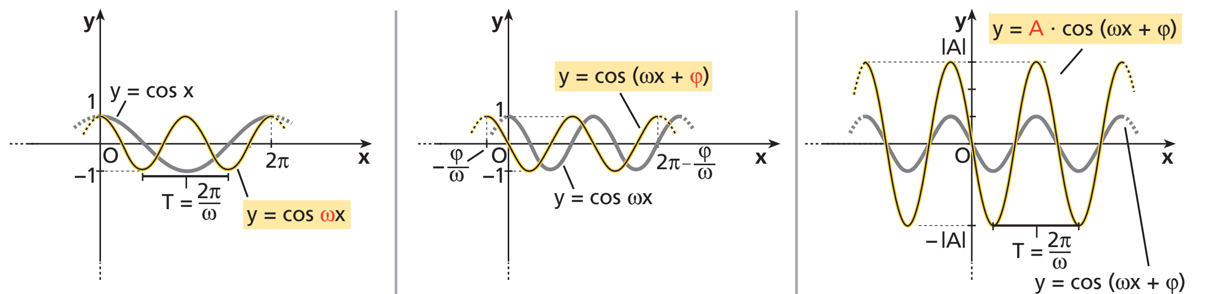
c. Grafico di $y = 3 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Una funzione di questo tipo è detta **sinusoidale** e viene applicata molto spesso nello studio di fenomeni fisici.

In generale, sono dette funzioni sinusoidali le funzioni del tipo:

$$y = A\,\text{sen}(\omega x + \varphi), \quad y = A\cos(\omega x + \varphi), \quad \text{con } A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Studiamo il grafico di $y = A\cos(\omega x + \varphi)$.



a. Il cambiamento di ω modifica il periodo della funzione.

b. Il cambiamento di φ produce una traslazione orizzontale.

c. Il cambiamento di |A| genera una dilatazione o contrazione verticale.

▲ **Figura 34** Il grafico di una funzione sinusoidale del tipo: $y = A\cos(\omega x + \varphi)$.

Il codominio della funzione è $[-|A|; |A|]$. Il numero $|A|$ è detto **ampiezza** della funzione sinusoidale, il numero ω **pulsazione** e φ **sfasamento** o **fase iniziale**.

Se è $\omega > 0$, il periodo è:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}.$$

● Se $\omega < 0$, è $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.

Infatti:

$$f(x) = A\,\text{sen}(\underline{\omega x + \varphi}) = A\,\text{sen}(\underline{\omega x + \varphi} + 2k\pi) = A\,\text{sen}[(\omega x + 2k\pi) + \varphi] =$$

$$= A\,\text{sen}\left[\omega\left(x + \frac{2k\pi}{\omega}\right) + \varphi\right] = f\left(x + k\frac{2\pi}{\omega}\right) = f(x + kT),$$

● La funzione seno ha periodo 2π e cioè: $\text{sen}\,\underline{\alpha} = \text{sen}(\underline{\alpha} + 2k\pi)$.

quindi, poiché una funzione $f(x)$ è periodica di periodo T quando $f(x) = f(x + kT)$, nel nostro caso si ha $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Il periodo delle funzioni goniometriche

Nella tabella riassumiamo i periodi delle principali funzioni goniometriche che abbiamo studiato.

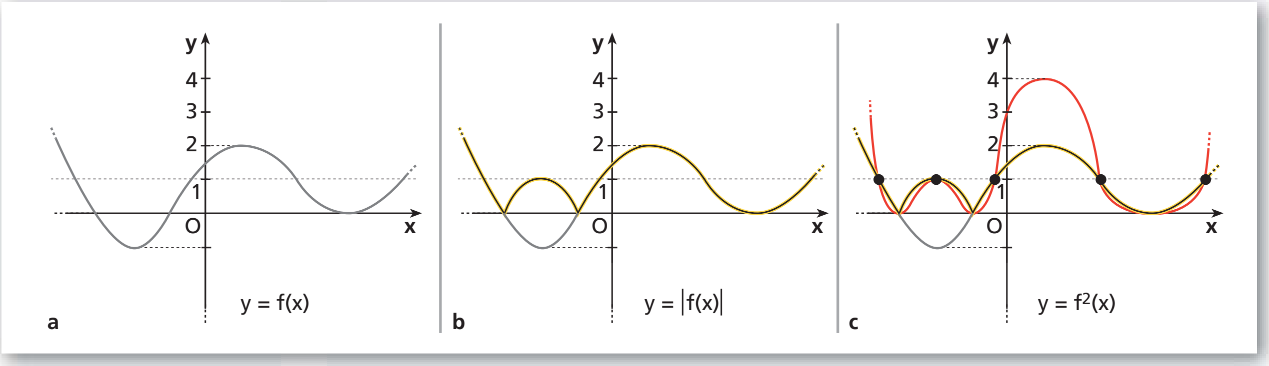
Funzione	Periodo
$\text{sen}\,x$, $\cos x$	2π
$\text{sen}(\omega x + \varphi)$, $\cos(\omega x + \varphi)$	$\frac{2\pi}{\omega}$
$\text{tg}\,x$, $\text{cotg}\,x$	π
$\text{tg}(\omega x + \varphi)$, $\text{cotg}(\omega x + \varphi)$	$\frac{\pi}{\omega}$

Il grafico di $y = f^2(x)$

Dato il grafico della funzione $y = f(x)$, cerchiamo di ricavare da esso l'andamento di quello di $y = f^2(x)$.
Tenendo conto che elevando al quadrato un numero, sia positivo sia negativo, si ottiene un numero positivo che non dipende dal segno del numero iniziale ma soltanto dal suo valore assoluto, consideriamo $y = |f(x)|$. Abbiamo le seguenti informazioni:

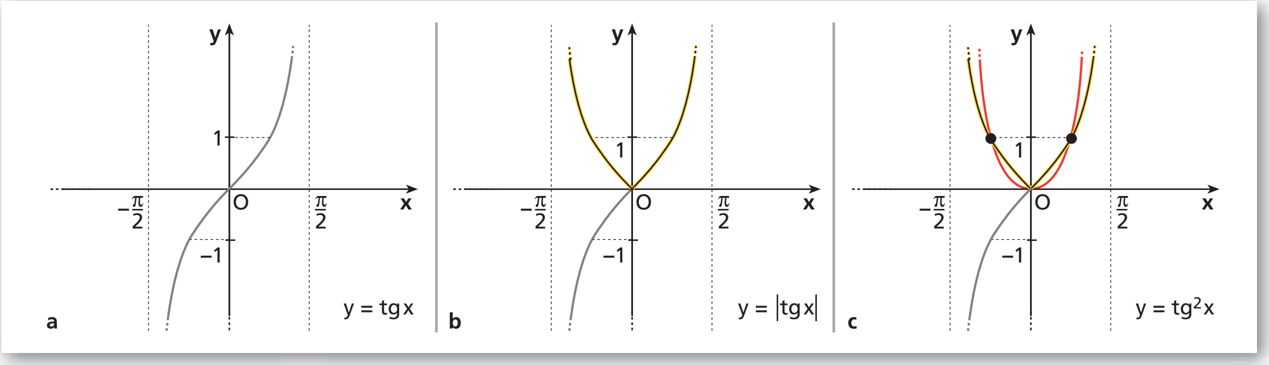
1. se $|f(x)| = 1$, $f^2(x) = 1$;
2. se $f(x) = 0$, $f^2(x) = 0$;
3. se $|f(x)| < 1$, $f^2(x) < |f(x)|$;
4. se $|f(x)| > 1$, $f^2(x) > |f(x)|$.

Esaminiamo un esempio.



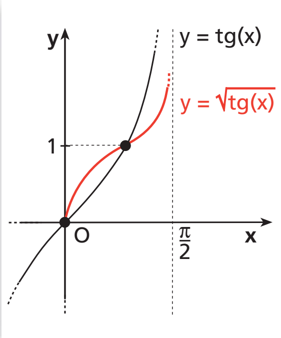
▲ Figura 35

Ricaviamo anche l'andamento del grafico di $y = \mathrm{tg}^2 x$ in $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.



▲ Figura 36

▼ Figura 37



Il grafico di $y = \sqrt{f(x)}$

Dato il grafico della funzione $y = f(x)$, ricaviamo l'andamento di quello di $y = \sqrt{f(x)}$.
Sfruttiamo queste informazioni:

1. se $f(x) < 0$, $\sqrt{f(x)}$ non esiste;
2. se $f(x) = 0$, $\sqrt{f(x)} = 0$;
3. se $f(x) = 1$, $\sqrt{f(x)} = 1$;
4. se $0 < f(x) < 1$, $f(x) < \sqrt{f(x)} < 1$;
5. se $f(x) > 1$, $1 < \sqrt{f(x)} < f(x)$.

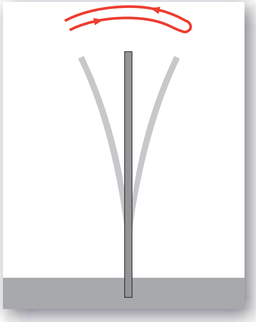
A fianco, come esempio, riportiamo il grafico di $y = \sqrt{\mathrm{tg}\, x}$ in $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

ESPLORAZIONE

Suoni e moti armonici

Il moto oscillatorio armonico

Le vibrazioni di una sorgente sonora e quelle delle particelle di un mezzo di propagazione sono descrivibili come movimenti periodici oscillatori attorno a una posizione di equilibrio.

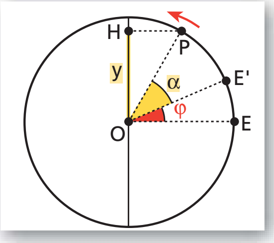


◀ La vibrazione di una lamina che genera un suono. Ogni corpo che vibra genera compressioni e rarefazioni delle molecole del mezzo di propagazione. Esse si propagano sotto forma di onde di pressione, mettendo in vibrazione le particelle del mezzo.

Se un oggetto in vibrazione viene riportato nella posizione di equilibrio da una forza proporzionale allo spostamento rispetto a quella posizione, si parla di **forza elastica** e di **moto armonico**.

Un'**oscillazione completa**, cioè quella che riporta l'oggetto nella posizione di partenza, viene sempre compiuta nello stesso tempo ***T***, detto **periodo**.

Il moto armonico di una particella



Per descrivere l'andamento di un moto oscillatorio armonico, consideriamo il moto uniforme di un punto P su di una circonferenza di raggio A. Tracciamo il diametro verticale e supponiamo che il moto sia in senso antiorario, partendo dal punto E'. La proiezione H di P sul diametro verticale descrive un moto armonico attorno al centro della circonferenza. La sua distanza y da O è

$$y = A\,\text{sen}\,(\alpha + \varphi) \rightarrow y = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi),$$

dove $\omega = \frac{\alpha}{t}$ è la velocità angolare costante che è data dalla relazione $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Abbiamo così ottenuto che l'equazione che descrive il moto armonico di una sorgente sonora, o di una particella del mezzo di propagazione, è una funzione sinusoidale.

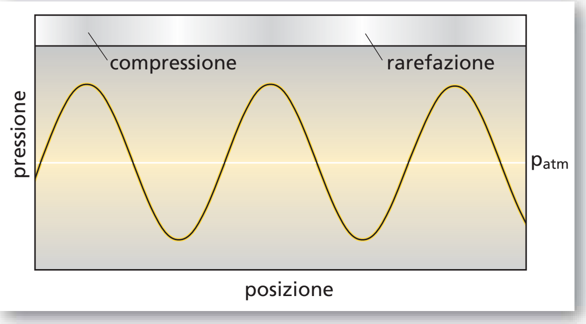
Di solito, per descrivere il moto, si considera anche la **frequenza** $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, che indica il numero di oscillazioni per unità di tempo.

Attività

Onde e suoni

Se esaminiamo la propagazione di un suono nei vari punti del mezzo che circonda la sorgente, troviamo che essa può ancora essere descritta mediante una funzione sinusoidale, come nella figura. Al variare del tempo la funzione sinusoidale si sposta e le rarefazioni e le compressioni delle molecole si propagano nel mezzo.

Fai una ricerca sul legame fra le caratteristiche dell'onda sinusoidale e i caratteri distintivi del suono.



▲ Grafico che rappresenta la pressione dell'aria in funzione della posizione rispetto alla sorgente sonora.

Cerca nel Web:

suono, caratteristiche onda sinusoidale, timbro, strumenti musicali

ROTOLARE PER MISURARE

Come funziona una rotella misuratrice?

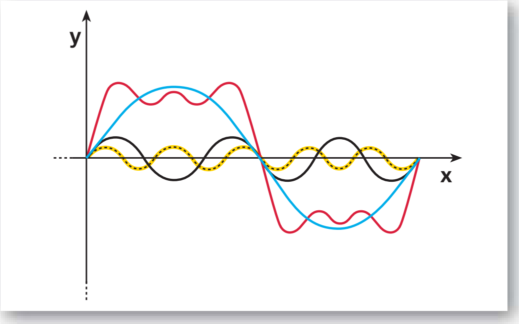
▶ Il quesito completo a pag. 633

Per le strade
Un tecnico che camminando spinge una rotella misuratrice misura la lunghezza di un tratto di strada.
Lo strumento è composto da una ruota gommata che gira sul terreno e da un contatore che conta i giri, o le parti di giro, che la ruota compie.
In realtà, il tecnico non legge sul contatore il numero di giri compiuti, ma direttamente una lunghezza in metri.
Il funzionamento della rotella si basa sulla proporzionalità tra angoli al centro e lunghezze dei corrispondenti archi. Il contatore misura in radianti gli angoli che la ruota spazza girando e li converte in lunghezze.

Su una carta geografica
Nelle rotelle multiscala per leggere le carte geografiche il funzionamento è lo stesso: il contatore è dato da un ago che si muove man mano che la rotella corre sulla carta.
La rotella in questo caso è molto più piccola per seguire meglio i particolari della mappa. C'è quindi bisogno di un demoltiplicatore di giri che trasformi i numerosi giri della rotellina in frazioni di angolo giro sul quadrante.
Sul disco della rotella sono tracciate circonferenze colorate: ognuna corrisponde a una delle possibili scale in cui sono disegnate le mappe. Su ogni circonferenza sono riportate le misure espresse in kilometri. La circonferenza che corrisponde alla scala della carta che stiamo leggendo indica i kilometri del percorso che ci interessa.
In corrispondenza di un certo movimento della rotella, l'ago spazza lo stesso angolo per tutte le diverse circonferenze, ma ogni arco di circonferenza rappresenta una misura diversa letta nella scala opportuna.

Onde e sinusoidi

La sinusoide è la curva che rappresenta la funzione seno. Questa descrive molti fenomeni ondulatori presenti in natura, come per esempio il suono o le onde generate dalla caduta di un sasso nell'acqua.
Quando si sommano due o più sinusoidi, spesso si trova una curva che non è più una sinusoide, ma che continua a essere periodica.
Nell'esempio della figura, se, punto per punto, sommi algebricamente le ordinate delle tre sinusoidi, ottieni l'onda disegnata in rosso.
Viceversa, si dimostra che è possibile scomporre un'onda periodica complessa in una somma di sinusoidi più semplici da analizzare.



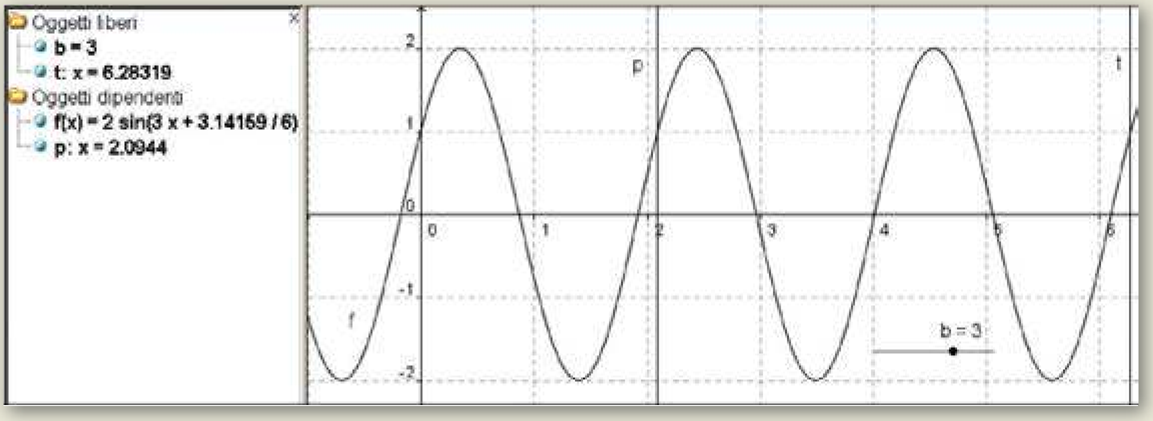
LABORATORIO DI MATEMATICA
LE FUNZIONI GONIOMETRICHE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Per studiare l'influenza che il coefficiente b ha sull'andamento delle funzioni definite dalla legge da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ $f: x \mapsto 2\,\mathrm{sen}\left(bx + \frac{\pi}{6}\right)$, costruiamo un foglio da disegno di GeoGebra che ne mostri i grafici in relazione ai valori assegnati a b.

- Apriamo GeoGebra e attiviamo una *slider*, alla quale diamo il nome b, e stabiliamo l'intervallo di variazione di b da 1 a 4 con incremento 1.
- Nella riga di inserimento digitiamo l'espressione delle funzioni, dipendente dal parametro b: f(x) = 2*sin(b*x + π/6).
- Con INVIO la immettiamo nella finestra algebrica e il sistema contemporaneamente ne mostra il grafico nell'area del disegno (figura 1).
- Per delimitare un periodo della funzione sinusoidale, dato da $T = \frac{2\pi}{b}$, inseriamo la retta p: $x = \frac{2\pi}{b}$. In figura 1 vediamo il caso $b = 3$.
- Per confrontarlo con il periodo fondamentale 2π, immettiamo la retta t: $x = 2\pi$.

▼ Figura 1



- Se spostiamo con il mouse il corsoio della *slider*, vediamo che la funzione sinusoidale forma b periodi all'interno del periodo fondamentale $[0; 2\pi[$.

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 4 esercitazioni in più

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer traccia i grafici delle funzioni in relazione ai valori assegnati ai coefficienti letterali.

1 $f(x) = a \cos(bx + c)$

2 $f(x) = (ax + b)\,\mathrm{sen}\,x$

3 $f(x) = a \arccos x - b$

4 $f(x) = a\,\mathrm{sen}\,x + b \cos x$

5 $f(x) = a\,\mathrm{tg}\,(bx + c)$

6 $f(x) = \mathrm{arcsen}\,(ax + b)$

7 $f(x) = a\,\mathrm{arctg}\,x + b$

8 $f(x) = a\,\mathrm{sen}\,x + b\,\mathrm{sen}\,2x$

LA TEORIA IN SINTESI
LE FUNZIONI GONIOMETRICHE

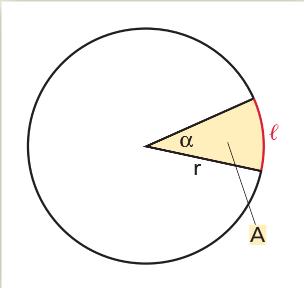
1. LA MISURA DEGLI ANGOLI

- Un angolo può essere misurato in **gradi** oppure in **radianti**.
Un grado è la 360ª parte dell'angolo giro.
Un radiante è l'angolo al centro di una circonferenza che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.
Vale la proporzione $\alpha^\circ : \alpha_{rad} = 360^\circ : 2\pi$, che permette di passare da gradi a radianti e viceversa.

ESEMPIO: 30° equivale a $\frac{\pi}{6}$ radianti, perché:

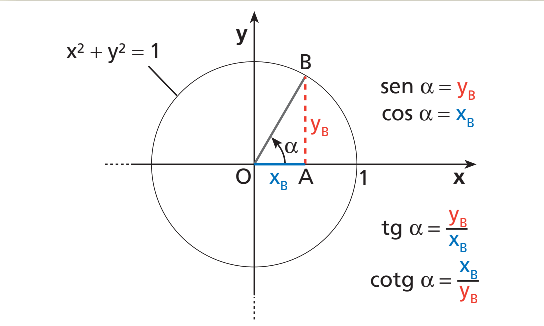
$$30^\circ : \alpha = 360^\circ : 2\pi \rightarrow \alpha = \frac{30^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{6}.$$

- Se in una circonferenza α è la misura in radianti di un angolo al centro e r la misura del raggio:
  - la **lunghezza dell'arco** è $l = \alpha r$;
  - l'**area del settore circolare** è $A = \frac{1}{2}\alpha r^2 = \frac{1}{2} l r$.



2. 3. 4. 5. LE FUNZIONI SENO, COSENO, TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE, COSECANTE

- Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il suo lato termine e la circonferenza goniometrica. Si dice:
  - **seno di α** (sen α) il valore dell'ordinata di B;
  - **coseno di α** (cos α) il valore dell'ascissa di B;
  - **tangente di α** (tg α) il rapporto fra l'ordinata e l'ascissa di B; è definita per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;
  - **cotangente di α** (cotg α) il rapporto fra l'ascissa e l'ordinata di B; è definita per $\alpha \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.



- **Relazioni fondamentali della goniometria**:

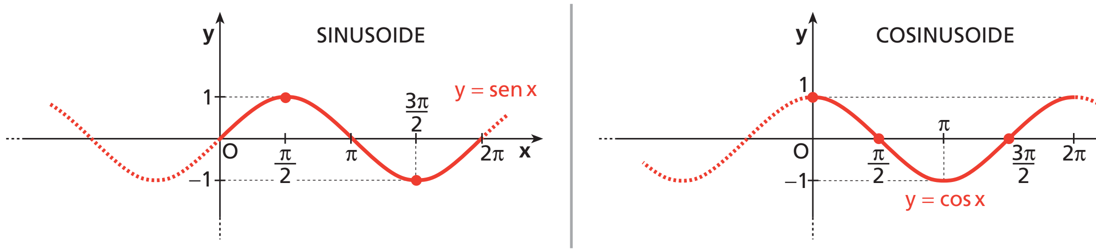
$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \text{ e } \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}.$$

- **Secante di α**

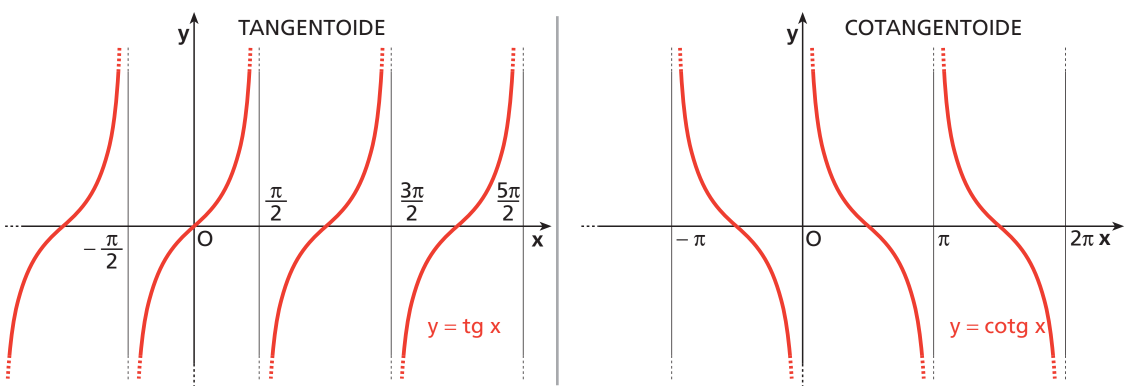
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \text{ con } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

- **Cosecante di α**

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}, \text{ con } \alpha \neq 0 + k\pi.$$

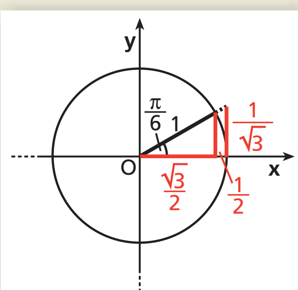


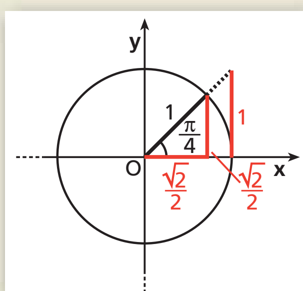
Grafici delle funzioni seno e coseno. Le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π.

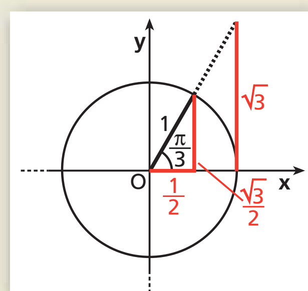


Grafici delle funzioni tangente e cotangente. Le funzioni tangente e cotangente sono periodiche di periodo π.

6. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI PARTICOLARI







$\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
$\text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
$\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$.

$\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;
$\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

7. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

- Le **funzioni inverse** delle funzioni seno, coseno, tangente e cotangente sono, rispettivamente, le seguenti (con D indichiamo il dominio, con C il codominio):

- **arcoseno**: $y = \text{arcsen}\,x$

  $D: [-1; 1]$; $C: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

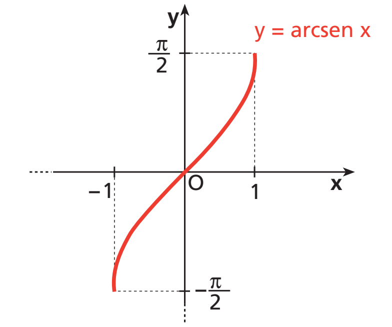


Grafico della funzione $y = \text{arcsen}\,x$.

- **arcocoseno**: $y = \arccos x$

  $D: [-1; 1]$; $C: [0; \pi]$;

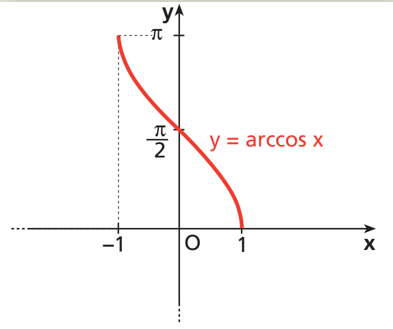


Grafico della funzione $y = \arccos x$.

- **arcotangente**: $y = \text{arctg}\,x$

  $D: \mathbb{R}$; $C: \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$;

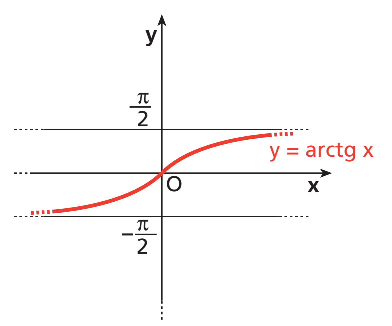


Grafico della funzione $y = \text{arctg}\,x$.

- **arcocotangente**: $y = \text{arccotg}\,x$

  $D: \mathbb{R}$; $C:]0; \pi[$.

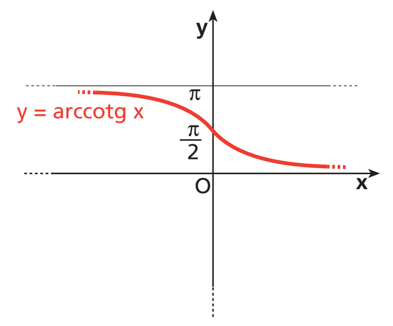


Grafico della funzione $y = \text{arccotg}\,x$.

■ I loro grafici si ottengono da quelli delle funzioni di cui sono le inverse, tracciando i simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

8. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE E LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

■ Dai grafici delle funzioni goniometriche si possono ottenere i grafici di altre funzioni mediante **traslazioni**, **simmetrie**, **dilatazioni** e **contrazioni**.

■ **Funzioni sinusoidali**: sono funzioni del tipo

$$y = A\,\text{sen}(\omega x + \varphi), \quad y = A\cos(\omega x + \varphi),$$

con $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$.

■ Si dice:

- **ampiezza** della funzione sinusoidale il numero $|A|$;
- **pulsazione** il numero ω;
- **sfasamento** o **fase iniziale** il numero φ;
- **periodo** della funzione sinusoidale il numero $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.

1. LA MISURA DEGLI ANGOLI

Teoria a pag. 634

Gli angoli e la loro misura

Dai gradi sessagesimali ai gradi sessadecimali

1 ESERCIZIO GUIDA

Esprimiamo 25° 32′ 40″ in forma sessadecimale.

Poiché $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$, scriviamo:

$$32' = \left(32 \cdot \frac{1}{60}\right)^{\circ}.$$

Poiché $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$, scriviamo:

$$40'' = \left(40 \cdot \frac{1}{3600}\right)^{\circ}.$$

Trasformiamo la misura:

$$25^{\circ}\,32'\,40'' = 25^{\circ} + \left(\frac{32}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{40}{3600}\right)^{\circ} =$$
$$= 25^{\circ} + 0{,}5\bar{3}^{\circ} + 0{,}0\bar{1}^{\circ} \simeq 25{,}54^{\circ}.$$

La trasformazione richiesta è la seguente:

$$25^{\circ}\,32'\,40'' \simeq 25{,}54^{\circ}.$$

Esprimi in forma sessadecimale le seguenti misure di angoli.

2 0° 59′ 59″; 0° 30′. [1°; 0,5°]

3 1° 59′ 30″; 2° 40″. [1,99°; 2,01°]

4 20° 30′; 60° 20′. [20,5°; 60,3°]

5 15° 30′ 30″; 30° 30′ 30″. [15,5°; 30,5°]

6 44° 59′ 32″; 45° 59′ 60″. [44,99°; 46°]

7 92° 20′ 36″; 140° 26′ 55″. [92,34°; 140,45°]

Dai gradi sessadecimali ai gradi sessagesimali

8 ESERCIZIO GUIDA

Trasformiamo 28,07° (forma sessadecimale) in gradi, primi e secondi.

Possiamo scrivere $28{,}07^{\circ} = \boxed{28^{\circ}} + 0{,}07^{\circ}$. Trasformiamo 0,07° in primi, moltiplicando 0,07 per 60 (poiché $1^{\circ} = 60'$):

$$0{,}07^{\circ} = (0{,}07 \cdot 60)' = 4{,}2'.$$

Scriviamo $4{,}2' = \boxed{4'} + 0{,}2'$.

Trasformiamo 0,2′ in secondi, moltiplicando 0,2 per 60 (poiché $1' = 60''$):

$$0{,}2' = (0{,}2 \cdot 60)'' = \boxed{12''}.$$

Pertanto:

$$28{,}07^{\circ} = 28^{\circ}\,4'\,12''.$$

Esprimi in gradi, primi e secondi le seguenti misure di angoli, espresse in forma sessadecimale (arrotondando eventualmente i secondi).

9 2,234° [2° 14′ 2″]

10 22,52° [22° 31′ 12″]

11 120,360° [120° 21′ 36″]

12 1,567° [1° 34′ 1″]

13 90,05° [90° 3′]

14 25,251° [25° 15′ 4″]

15 90,5° [90° 30′]

16 60,46° [60° 27′ 36″]

17 100,252° [100° 15′ 7″]

Le operazioni fra angoli espressi in gradi

18 **ESERCIZIO GUIDA**

Eseguiamo la seguente sottrazione:

90° − 32° 46′ 22″.

Per poter eseguire la sottrazione, scriviamo 90° in termini di primi e secondi.

Poiché 1° = 60′, possiamo scrivere:

90° = 89° 60′.

Poiché 1′ = 60″, possiamo scrivere:

90° = 89° 59′ 60″.

Ora è possibile eseguire la sottrazione in colonna, fra gradi, primi e secondi:

89° 59′ 60″ −
32° 46′ 22″ =
―――――――――
57° 13′ 38″

Esegui le seguenti operazioni fra le misure di angoli.

19 15° 32′ 52″ + 2° 12′ 8″ [17° 45′]

20 185° 2′ + 6° 59′ 12″ [192° 1′ 12″]

21 27° 2′ 3″ + 42° 12′ 56″ + 1° 2′ 4″ [70° 17′ 3″]

22 102° 50′ 18″ + 3° 9′ 42″ [106°]

23 180° − 28° 30′ 58″ [151° 29′ 2″]

24 270° − 120° 29′ 32″ [149° 30′ 28″]

25 360° − 322° 40′ 50″ [37° 19′ 10″]

26 90° − 82° 48′ 32″ [7° 11′ 28″]

27 26° − 1° 1′ 1″ [24° 58′ 59″]

28 18° 30′ 15″ · 2 [37° 0′ 30″]

Dai gradi sessagesimali ai radianti e viceversa

29 **COMPLETA** la seguente tabella scrivendo la misura mancante, in gradi o in radianti.

Gradi	90°	0°		180°		30°		270°		
Radianti			$\frac{\pi}{3}$		$\frac{3}{4}\pi$		$\frac{2}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$

Trasforma in radianti le misure dei seguenti angoli, espresse in gradi sessagesimali.

30 15°, 36°, 210°, 300°. $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{5}; \frac{7}{6}\pi; \frac{5}{3}\pi\right]$

31 16°, 27°, 102°, 315°. [0,28; 0,47; 1,78; 5,50]

32 25°, 35°, 72°, 155°. [0,44; 0,61; 1,26; 2,71]

33 121° 3′, 200° 36′, 15° 12′ 58″. [2,11; 3,50; 0,27]

Trasforma in gradi sessagesimali le misure dei seguenti angoli, espresse in radianti.

34 $\frac{4}{5}\pi$, $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{7}{9}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$. [144°; 75°; 140°; 300°]

35 $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{9}{5}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$. [38° 11′ 50″; 120°; 324°; 270°]

36 4π, 4, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}\pi$. [720°; 229° 11′; 143° 14′ 22″; 450°]

37 $\frac{3}{8}\pi$, 3,405, $\frac{5}{16}\pi$, 2,807. [67° 30′; 195° 5′ 32″; 56° 15′; 160° 49′ 45″]

38 **COMPLETA** la seguente tabella inserendo la misura mancante.

Gradi sessagesimali	22° 30′			31° 12′		18° 1′ 2″	
Radianti		$\frac{3}{8}\pi$			8		
Forma decimale			12,5°				120,34°

39 Un angolo α misura 0,725 radianti. Trova la misura del suo supplementare in radianti e in gradi. [138° 39′ 21″; 2,42]

In un triangolo rettangolo trova le misure in gradi degli angoli acuti α e β utilizzando la condizione indicata.

40 $\alpha = \frac{1}{3}\beta$ [$\alpha = 22° 30'$, $\beta = 67° 30'$]

41 $\alpha = \beta - 20°$ [$\alpha = 35°$, $\beta = 55°$]

42 α supera il doppio di β di 15°. [$\alpha = 65°$, $\beta = 25°$]

43 In un triangolo isoscele ciascun angolo alla base misura 27°. Trova la misura in radianti dell'angolo al vertice. [2,2]

44 Un angolo di un triangolo misura 32°, un secondo angolo è $\frac{2}{3}\pi$ radianti. Calcola la misura del terzo angolo in gradi e in radianti. [28°; 0,49]

45 Un triangolo ha un angolo doppio di un altro e il terzo angolo misura 24°. Trova la misura in radianti dei tre angoli del triangolo. [0,42; 0,91; 1,82]

46 Un triangolo ha gli angoli α, β, γ tali che $\alpha = \frac{1}{3}\beta$ e $\beta = \gamma$. Trova la misura in radianti degli angoli α, β, γ. $\left[\alpha = \frac{\pi}{7}; \beta = \gamma = \frac{3}{7}\pi\right]$

47 Un quadrilatero ha due angoli che misurano 148° e $\frac{7}{15}\pi$ e gli altri due sono uno i $\frac{3}{5}$ dell'altro. Scrivi le misure degli angoli del quadrilatero in gradi e in radianti. $\left[148°, 84°, 80°, 48°; \frac{37}{45}\pi, \frac{7}{15}\pi, \frac{4}{9}\pi, \frac{4}{15}\pi\right]$

Trova la misura, in gradi o in radianti, di due angoli supplementari α e β, utilizzando la condizione indicata.

48 $\alpha - 3\beta = 27°$ [$\alpha = 141° 45'$, $\beta = 38° 15'$]

49 $\beta - 2\alpha = 80°$ [$\alpha = 33° 20'$, $\beta = 146° 40'$]

50 $\alpha = \beta + \frac{\pi}{3}$ $\left[\alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{\pi}{3}\right]$

51 Calcola la misura, in gradi e in radianti, di un angolo al centro di una circonferenza il cui raggio è uguale a 5 cm e che sottende un arco lungo 23 cm. [263° 33′ 38″; 4,6]

52 Calcola la lunghezza di un arco di circonferenza, con il raggio lungo 7 cm, che sottende un angolo uguale a 4,2 radianti. [29,4 cm]

53 Due archi l_1 e l_2 di due circonferenze, che hanno i raggi r_1 e r_2 rispettivamente uguali a 2 cm e 3,5 cm, sottendono lo stesso angolo. Trova la misura di l_2, sapendo che l_1 misura 4,5 cm. [7,88 cm]

54 Trova l'area di un settore circolare individuato da un arco lungo 22 cm di una circonferenza che ha il raggio lungo 5,2 cm e determina la misura in gradi dell'angolo sotteso dall'arco. [57,2 cm^2; 242° 21′ 40″]

55 Due settori circolari appartengono allo stesso cerchio e hanno area uguale a 12 cm^2 e 15,4 cm^2. Trova le lunghezze degli archi da essi determinati, sapendo che il primo sottende un angolo di 1,5 radianti. [6 cm; 7,7 cm]

56 Un settore circolare ha l'angolo al centro che misura 96° e l'area uguale a 60π. Determina la misura del raggio della circonferenza e dell'arco che è definito dal settore. [15; 8π]

57 Un settore circolare ha area uguale a 12 e perimetro 14. Quanto misurano il raggio e l'angolo al centro corrispondente? $\left[3, \frac{8}{3}\text{ rad}; 4, \frac{3}{2}\text{ rad}\right]$

58 **VERO O FALSO?**

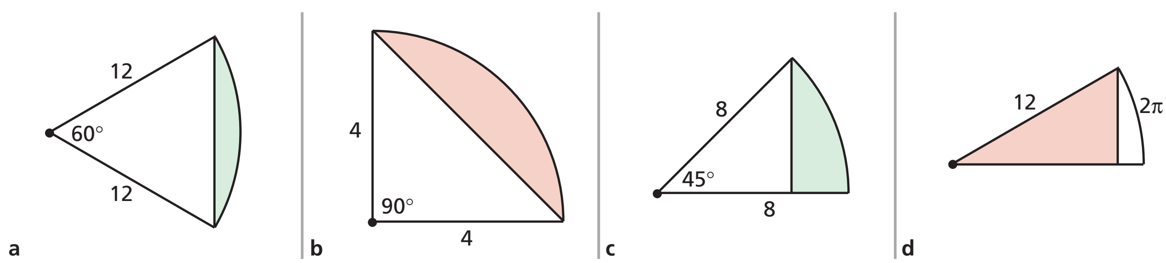
a) Se $\alpha = \frac{9}{4}\pi$, allora $\alpha = 45°$. V F

b) Se $\alpha = 300°$, allora $\alpha = \frac{5}{3}\pi$. V F

c) La misura l di un arco di circonferenza di raggio r che corrisponde a un angolo al centro di α radianti è $l = \frac{1}{2}\alpha r$. V F

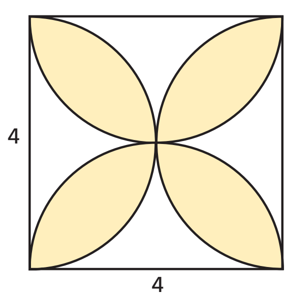
d) L'arco l di una circonferenza di raggio 5 cm, che sottende un angolo $\alpha = 32°$, è lungo $l = 32 \cdot 5 = 160$ cm. V F

59 Trova il perimetro e l'area delle zone colorate.



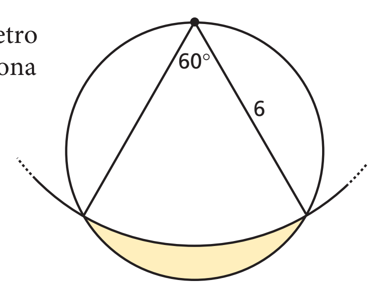
[a) $12 + 4\pi$, $24\pi - 36\sqrt{3}$; b) $2\pi + 4\sqrt{2}$, $4\pi - 8$; c) $2\pi + 8$, $8\pi - 16$; d) $18 + 6\sqrt{3}$, $18\sqrt{3}$]

60 Quanto vale l'area della zona colorata?



[$8(\pi - 2)$]

61 Trova perimetro e area della zona colorata.



$\left[\frac{2}{3}\pi(3 + 2\sqrt{3}); 2(3\sqrt{3} - \pi)\right]$

Gli angoli orientati

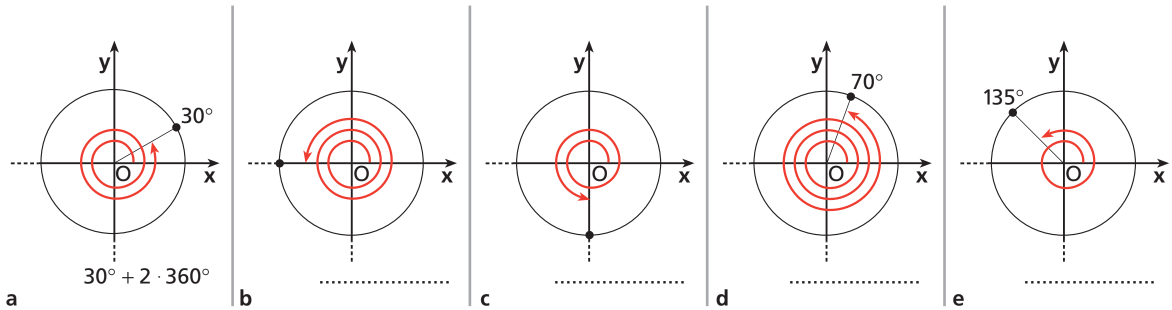
62 Disegna i seguenti angoli orientati facendo riferimento alla circonferenza goniometrica. L'angolo $\widehat{R}$ rappresenta l'angolo retto.

a) $+\widehat{R}$; $\quad -2\widehat{R}$; $\quad -\frac{1}{2}\widehat{R}$. $\qquad$ b) $+3\widehat{R}$; $\quad +\frac{3}{2}\widehat{R}$; $\quad -\frac{5}{2}\widehat{R}$.

63 Disegna i seguenti angoli, facendo riferimento alla circonferenza goniometrica.

$390°$; $\quad 765°$; $\quad -420°$; $\quad 450°$; $\quad 1200°$.

64 Scrivi in forma sintetica gli angoli rappresentati in figura.



Disegna alcuni degli angoli corrispondenti a ogni scrittura sintetica.

65 $k360°$; $\ k180°$; $\ k90°$; $\ k45°$.

66 $60° + k360°$; $\quad 45° + k180°$; $\quad 300° + k60°$.

Disegna sul cerchio goniometrico i seguenti angoli, misurati in radianti.

67 $\frac{\pi}{4}$; $\ \frac{3}{4}\pi$; $\ \frac{11}{4}\pi$; $\ \frac{\pi}{8}$.

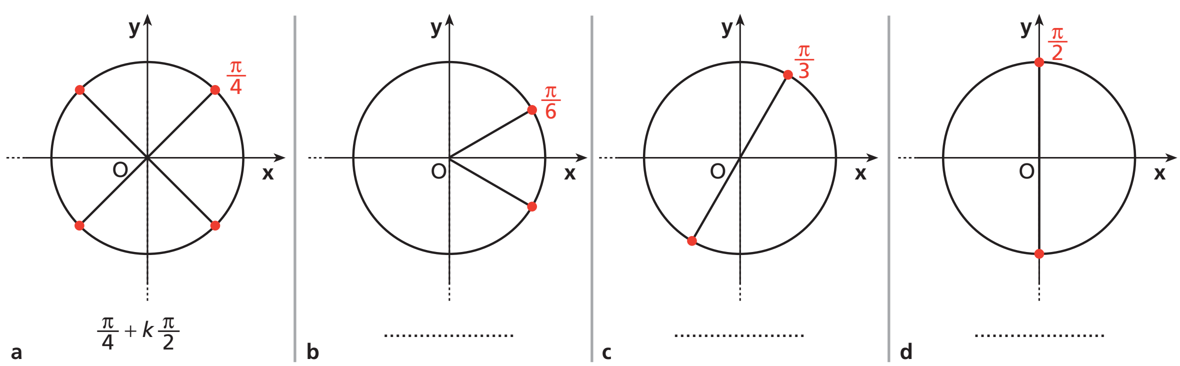
68 $\frac{\pi}{2}$; $\ \frac{3}{2}\pi$; $\ \frac{\pi}{3}$; $\ \frac{17}{6}\pi$.

Disegna alcuni degli angoli corrispondenti a ogni scrittura sintetica.

69 $2k\pi$; $\ k\pi$; $\ \frac{\pi}{2} + k\pi$.

70 $\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $\ \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{4}$.

71 **COMPLETA** indicando tutti gli angoli che hanno il lato termine che passa per i punti segnati nelle seguenti figure, con la scrittura più sintetica possibile (come nel caso *a*).



2. LE FUNZIONI SENO E COSENO

▶ Teoria a pag. 639

72 **VERO O FALSO?**

a) Il seno di un angolo orientato è un segmento. V F

b) Se sen $\alpha < 0$ e cos $\alpha < 0$, allora α appartiene al IV quadrante. V F

c) $\sqrt{\text{sen}^2 135°} = \text{sen } 135°$. V F

d) Se cos $\alpha > 0$, allora sen $\alpha > 0$. V F

e) Se cos $\alpha >$ cos β, allora $\alpha > \beta$. V F

73 **VERO O FALSO?**

a) Se $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, allora $0 \leq \cos^2\alpha \leq 1$. V F

b) $\cos^2\alpha \leq \cos\alpha, \forall\alpha \in \mathbb{R}$. V F

c) Se $\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha$, allora può essere solo $\alpha = \frac{\pi}{4}$. V F

d) Se $\text{sen}\,\alpha = -\frac{8}{9}$, allora α appartiene al III quadrante oppure al IV. V F

e) $\text{sen}^2\frac{\alpha}{4} + \cos^2\frac{\alpha}{4} = 1$. V F

74 **VERO O FALSO?**

a) $\cos 10° = \cos 350°$ V F

b) $\text{sen}\,3 < \text{sen}\,4$ V F

c) $\text{sen}\,3° < \text{sen}\,4°$ V F

d) $\text{sen}\,8° < \text{sen}\,8$ V F

75 **COMPLETA** la tabella e disegna, utilizzando la circonferenza goniometrica, il coseno e il seno degli angoli assegnati, indicando se sono positivi o negativi.

α	30°	145°	220°	$-28°$	380°	460°	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{13}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{17}{3}\pi$
$\cos\alpha$	+									
$\text{sen}\,\alpha$	+									

76 **TEST** Se $\cos x = \frac{1}{4}$ si ha:

A $0 < x < \frac{\pi}{6}$.

B $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$.

C $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$.

D $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$.

(*Università di Modena, Corso di laurea in Matematica, Test propedeutico,* 2003)

77 **TEST** Supponi che ABC sia un triangolo con tre angoli acuti $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$. Allora il punto $(\cos\widehat{B} - \text{sen}\,\widehat{A}; \text{sen}\,\widehat{B} - \cos\widehat{A})$ può trovarsi:

A solo nel I quadrante o nel II quadrante.

B solo nel III quadrante o nel IV quadrante.

C solo nel II quadrante o nel III quadrante.

D solo nel II quadrante.

E in uno qualsiasi dei quattro quadranti.

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 1993)

78 **VERO O FALSO?** La funzione $f(x) = \sqrt{4\,\text{sen}\,(5x) - 5}$ nell'insieme dei numeri reali non è definita. V F

(*Università di Lecce, Facoltà di Scienze, Test di ingresso*, 2001)

Disegna, utilizzando la circonferenza goniometrica, gli angoli a cui corrispondono i seguenti valori.

79 $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$; $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$.

80 $\text{sen}\,\alpha = -\frac{1}{4}$; $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

81 $\cos\beta = \frac{1}{2}$; $\operatorname{sen}\beta = -1$.

82 $\operatorname{sen}\beta = -\frac{1}{2}$; $\cos\gamma = -\frac{1}{4}$; $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$.

83 Individua sulla circonferenza goniometrica i seguenti valori.

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, $\operatorname{sen}\frac{5}{8}\pi$, $\operatorname{sen}(-240°)$, $\cos\frac{7}{4}\pi$, $\operatorname{sen}300°$, $\cos330°$.

84 **COMPLETA** inserendo i segni $>$, $<$ o $=$ (senza utilizzare la calcolatrice).

$\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi \dots \operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi$; $\operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi \dots \operatorname{sen}\frac{3}{5}\pi$; $\operatorname{sen}240° \dots \operatorname{sen}330°$;

$\cos3\pi \dots \operatorname{sen}\left(-\frac{5}{2}\pi\right)$; $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} \dots \cos4\pi$; $\cos80° \dots \cos110°$.

Trova quale condizione deve soddisfare il parametro affinché sia verificata l'uguaglianza.

85 $\cos x = k - 2$ $[1 \le k \le 3]$

86 $\operatorname{sen}x = -2a$ $\left[-\frac{1}{2} \le a \le \frac{1}{2}\right]$

87 $4a\cos x = a + 1$ $\left[a \le -\frac{1}{5} \vee a \ge \frac{1}{3}\right]$

88 $(k-1)\operatorname{sen}x = k$ $\left[k \le \frac{1}{2}\right]$

89 $(2a-3)\cos x = -a + 4$, con $x \in 2°$ quadrante. $[a \le -1 \vee a \ge 4]$

90 $(k-1)\cos x = 3 - k$, con $x \in 4°$ quadrante. $[2 \le k \le 3]$

91 $6a\operatorname{sen}x + a^2 + 9 = 0$, con $x \in 3°$ quadrante. $[a = 3]$

92 **VERO O FALSO?**

a) Se $\cos\alpha = \sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha$, con $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, allora $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}$. V F

b) Se $\cos\frac{\pi}{6} = \cos x$, allora $x = \frac{\pi}{6}$. V F

c) Se $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$, allora $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. V F

d) Se $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, allora $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{sen}\alpha$. V F

93 **ESERCIZIO GUIDA**

Sapendo che $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$ e che $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcoliamo il valore di $\cos\alpha$.

Utilizziamo la prima relazione fondamentale della goniometria $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, sostituendo a $\operatorname{sen}\alpha$ il valore $\frac{5}{13}$. Otteniamo così:

$$\frac{25}{169} + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{144}{169} \rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{12}{13}.$$

Poiché $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ e per tali angoli il coseno è negativo, allora:

$$\cos\alpha = -\frac{12}{13}.$$

Calcola il valore della funzione indicata, utilizzando le informazioni fornite.

94 $\operatorname{sen}\alpha = \frac{7}{25}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\cos\alpha$? $\left[\frac{24}{25}\right]$

95 $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ e $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$; $\operatorname{sen}\alpha$? $\left[-\frac{3}{5}\right]$

96 $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\cos\alpha$? $\left[-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$

97 $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$; $\cos\alpha$? $\left[\frac{\sqrt{21}}{5}\right]$

98 $\cos\alpha = -\frac{4}{7}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\operatorname{sen}\alpha$? $\left[\frac{\sqrt{33}}{7}\right]$

99 $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$; $\operatorname{sen}\alpha$? $\left[-\frac{\sqrt{5}}{3}\right]$

100 $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{9}{41}$ e $\alpha \in 4°$ quadrante; $\cos\alpha$? $\left[\frac{40}{41}\right]$

101 $\cos\alpha = -\frac{28}{53}$ e $\alpha \in 3°$ quadrante; $\operatorname{sen}\alpha$? $\left[-\frac{45}{53}\right]$

102 $\cos\alpha = \frac{33}{65}$ e $\alpha \in 4°$ quadrante; $\operatorname{sen}\alpha$? $\left[-\frac{56}{65}\right]$

103 $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{12}{13}$ e $\alpha \in 3°$ quadrante; $\cos\alpha$? $\left[-\frac{5}{13}\right]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

104 $\frac{1}{2}\cos 540° + \frac{2}{3}\operatorname{sen} 720° - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 450° + 6\operatorname{sen}(-270°)$ $\left[\frac{21}{4}\right]$

105 $\cos 4\pi + 2\operatorname{sen}\left(-\frac{15}{2}\pi\right) + \frac{1}{3}\cos(-3\pi) + \operatorname{sen}\frac{9}{2}\pi$ $\left[\frac{11}{3}\right]$

106 $\cos 720° + 2\cos 1080° - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 630° + 3\operatorname{sen} 540°$ $\left[\frac{7}{2}\right]$

107 $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{7}{2}\pi - \cos(-7\pi) + 2\operatorname{sen}\left(-\frac{11}{2}\pi\right)}{2\operatorname{sen}\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + \cos 4\pi - 4\cos\frac{5}{2}\pi}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

108 $\dfrac{4\left(\cos^2 2\pi + \operatorname{sen}^2\frac{5}{2}\pi\right) + 8\cos 10\pi}{3[1 - 4\cos(-4\pi)]}$ $\left[-\frac{16}{9}\right]$

109 $a\operatorname{sen}\left(-\frac{5}{2}\pi\right) + \frac{a}{2}\cos(8\pi) - \left(\frac{a}{2} + 1\right)\cos 0$ $[-a-1]$

110 $\left(a\cos 2\pi + b\operatorname{sen}\frac{7}{2}\pi\right)^2 - \left[a\operatorname{sen}\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + b\cos(-5\pi)\right]^2$ $[0]$

111 $\dfrac{(-\operatorname{sen} 5\pi + \cos\pi)\operatorname{sen}\frac{11}{2}\pi + 2\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi \cdot [\operatorname{sen}(-3\pi) + \cos 2\pi]}{3\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{5}{2}\pi + 2\operatorname{sen}\frac{9}{2}\pi\right)}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

112 Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, calcola il valore della seguente espressione:

$$\frac{a\operatorname{sen}\alpha + b\cos 2\alpha}{\operatorname{sen}(-4\alpha) - a\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - b\cos\left(\frac{7}{2}\pi + \alpha\right)}.$$ $[1]$

113 Se $\alpha = \pi$, calcola il valore della seguente espressione:

$$\frac{a^2\cos(5\pi - \alpha) - b^2\operatorname{sen}\left(\frac{7}{2}\pi - \alpha\right)}{a\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + b\cos(4\pi - \alpha)} - a\operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right).$$ $[b]$

114 Se $\alpha = \frac{3}{2}\pi$, calcola il valore della seguente espressione:

$$\frac{\cos\left(\frac{9}{2}\pi + \alpha\right) + \operatorname{sen}(-\pi + \alpha) + \cos(\alpha - 5\pi)}{2\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + 4\cos\left(\alpha - \frac{7}{2}\pi\right)}.$$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

115 Disegna il grafico di $y = \cos x$ nell'intervallo $[-\pi; 4\pi]$. Scrivi le ascisse dei punti di intersezione della funzione con l'asse x in tale intervallo e trova le ordinate dei punti di ascissa $x = \frac{7}{2}\pi$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = 3\pi$. Quali sono i valori di x in cui $\cos x = -1$ nell'intervallo considerato?

$\left[\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \pm\frac{7}{2}\pi; 0, 0, -1; \pm\pi, 3\pi\right]$

116 Disegna il grafico di $y = \text{sen}\, x$ nell'intervallo $\left[-\frac{5}{2}\pi; \frac{7}{2}\pi\right]$. Trova i punti di intersezione della funzione con l'asse x e calcola le ordinate dei punti di ascissa $x = -\frac{3}{2}\pi$, $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{7}{2}\pi$. Determina i valori di x per cui $\text{sen}\, x = -1$. $\left[-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi; 1, 0, 0, 1, -1; -\frac{5}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]$

Trova il dominio delle seguenti funzioni.

117 $y = \frac{\sqrt{1+\text{sen}\, x}}{\cos x}$ $\left[x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

118 $y = \frac{2}{\text{sen}\, x}$ $[x \neq k\pi]$

119 $y = \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}$ $[x \neq 2k\pi]$

Trova il valore minimo e massimo delle seguenti funzioni, nell'intervallo indicato a fianco.

120 $y = -\frac{1}{2}\cos x$, $\mathbb{R}$; $y = 1 + 2\,\text{sen}\, x$, $\mathbb{R}$.

121 $y = -\text{sen}\, x + 4$, $[0; \pi]$; $y = \cos x - \frac{2}{3}$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

122 $y = \text{sen}(x + \pi)$, $\mathbb{R}$; $y = \frac{1}{4}\cos x + 2$, $\left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$.

123 $y = \sqrt{2}\cos 2x - 1$, $\mathbb{R}$; $y = \frac{1}{2 + \cos x}$, $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Semplifica le seguenti espressioni.

124 $(a\,\text{sen}\,\alpha - 2\cos\alpha)^2 + (a\cos\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha)^2 - 4 + a^2\,\text{sen}\,\frac{5}{2}\pi$ $[2a^2]$

125 $4 - 4\,\text{sen}^2\alpha + (\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha)^2 + 2\cos\alpha(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)$ $[1 + 6\cos^2\alpha]$

126 $\text{sen}^2\alpha + (4\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha)^2 + (4\,\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha)^2 + 2\cos^2\alpha$ $[18 + \cos^2\alpha]$

127 Trova per quali valori di a le soluzioni dell'equazione $x^2 - ax + a - 1 = 0$ rappresentano il seno e il coseno dello stesso angolo. $[a = 1]$

3. LA FUNZIONE TANGENTE

Teoria a pag. 643

La tangente di un angolo

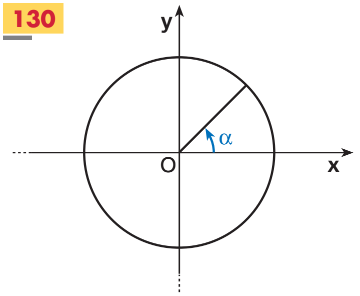
Disegna la circonferenza goniometrica e rappresenta la tangente dei seguenti angoli.

128 $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5}{4}\pi$; 2π.

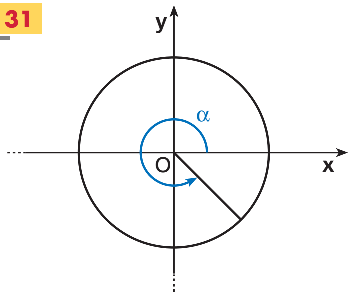
129 30°; 180°; 225°; 320°.

Per ogni angolo α in figura, individua tg α, quando esiste, sulla retta tangente alla circonferenza.

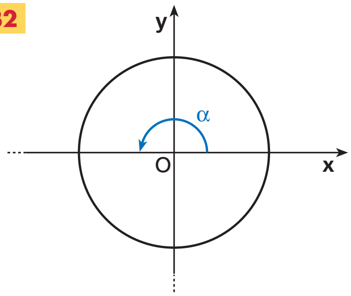
130



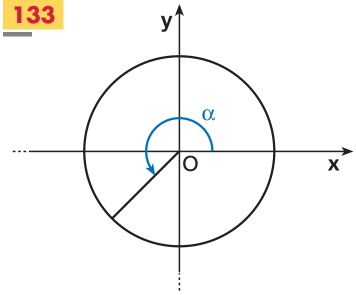
131



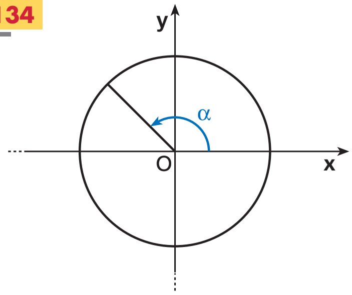
132



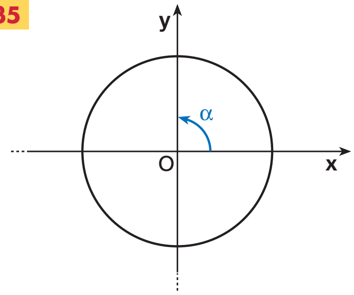
133



134



135



136 Rappresenta gli angoli che soddisfano le seguenti uguaglianze.

$\operatorname{tg} \alpha = 1$; $\operatorname{tg} \beta = 3$; $\operatorname{tg} \gamma = -2$.

Utilizzando la circonferenza goniometrica, individua l'angolo α che soddisfa le seguenti relazioni.

137 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\quad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

138 $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$, $\quad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$.

139 $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$, $\quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

140 Utilizzando la circonferenza goniometrica rappresenta gli angoli che verificano le seguenti condizioni.

$\operatorname{tg} \alpha = -3$, $\alpha \in$ IV quadrante; $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{2}$, $\beta \in$ III quadrante; $\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{3}$, $\gamma \in$ I quadrante.

Trova quale condizione deve soddisfare il parametro *k* affinché sia verificata l'uguaglianza.

141 $\operatorname{tg} x = \frac{1-k}{k^2-9}$ $\quad [k \neq \pm 3]$

142 $\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{4-k^2}{k+1}}$ $\quad [k \leq -2 \vee -1 < k \leq 2]$

143 $(k+2) \operatorname{tg} x = 2k$, $x \in$ I quadrante. $\quad [k < -2 \vee k \geq 0]$

144 $\operatorname{tg} x = \frac{2-k}{4k^2-9}$, $x \in$ IV quadrante. $\quad \left[-\frac{3}{2} < k < \frac{3}{2} \vee k \geq 2\right]$

145 $\operatorname{tg} x = \sqrt{k-3} - k$, $x \in$ IV quadrante. $\quad [k \geq 3]$

Trova il dominio delle seguenti funzioni.

146 $y = \frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x} + 1}$ $\quad \left[x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

147 $y = \frac{-\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$ $\quad \left[x \neq k\frac{\pi}{2}\right]$

148 $y = \frac{2 \operatorname{sen} x - 1}{3 \operatorname{tg} x}$ $\quad \left[x \neq k\frac{\pi}{2}\right]$

Utilizziamo le relazioni fondamentali della goniometria

149 **ESERCIZIO GUIDA**

Sapendo che $\operatorname{sen} \alpha = \frac{5}{7}$ e che $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcoliamo il valore di $\operatorname{tg} \alpha$.

Utilizziamo la prima relazione fondamentale della goniometria, $\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, per determinare il valore di $\cos\alpha$:

$$\frac{25}{49} + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{24}{49}.$$

Poiché $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e per tali angoli il coseno è positivo, abbiamo:

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

Sfruttiamo ora la seconda relazione fondamentale della goniometria, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$, per determinare $\mathrm{tg}\,\alpha$:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{2\sqrt{6}}{7}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}.$$

Calcola il valore di tg α, usando le informazioni fornite.

150 $\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. $\left[-\frac{4}{3}\right]$

151 $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. $\left[-\frac{15}{8}\right]$

152 $\mathrm{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{7}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. $\left[-\frac{\sqrt{13}}{6}\right]$

153 $\cos\alpha = -\frac{5}{6}$ e $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$. $\left[\frac{\sqrt{11}}{5}\right]$

154 Utilizza le relazioni fondamentali per dimostrare le formule che permettono di trovare $\mathrm{sen}\,\alpha$ e $\cos\alpha$ in funzione di $\mathrm{tg}\,\alpha$:

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\pm\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}}.$$

Calcola il valore delle funzioni indicate, utilizzando le informazioni fornite.

155 $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\mathrm{sen}\,\alpha$? $\cos\alpha$? $\left[\frac{\sqrt{5}}{3}; -\frac{2}{3}\right]$

156 $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{28}{45}$ e $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$; $\mathrm{sen}\,\alpha$? $\cos\alpha$? $\left[-\frac{28}{53}; -\frac{45}{53}\right]$

157 $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{9}{40}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\mathrm{sen}\,\alpha$? $\cos\alpha$? $\left[\frac{9}{41}; -\frac{40}{41}\right]$

158 $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{12}{5}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$; $\mathrm{sen}\,\alpha$? $\cos\alpha$? $\left[-\frac{12}{13}; \frac{5}{13}\right]$

159 $\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{15}{17}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\cos\alpha$? $\mathrm{tg}\,\alpha$? $\left[-\frac{8}{17}; -\frac{15}{8}\right]$

160 $\cos\alpha = \frac{39}{89}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$; $\mathrm{sen}\,\alpha$? $\mathrm{tg}\,\alpha$? $\left[-\frac{80}{89}; -\frac{80}{39}\right]$

161 $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{15}{8}$ e $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$; $\mathrm{sen}\,\alpha$? $\cos\alpha$? $\left[-\frac{15}{17}; -\frac{8}{17}\right]$

162 $\cos\alpha = -\frac{33}{65}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\mathrm{sen}\,\alpha$? $\mathrm{tg}\,\alpha$? $\left[\frac{56}{65}; -\frac{56}{33}\right]$

Determina il valore delle seguenti espressioni.

163 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{7}{2}\pi+2\alpha\right)+2\operatorname{tg}\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)$, con $\alpha=\frac{\pi}{2}$. $[1]$

164 $2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)-\operatorname{tg}(2\alpha+\pi)$, con $\alpha=\pi$. $[-1]$

Trasforma le seguenti espressioni in funzione soltanto di $\cos\alpha$.

165 $\frac{\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha+2}{\operatorname{sen}\alpha}$, $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$. $\left[\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{3\cos^2\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\right]$

166 $\operatorname{sen}^2\alpha-1-4(\operatorname{tg}^2\alpha+1)\operatorname{sen}^2\alpha$, con $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. $\left[-\frac{(\cos^2\alpha-2)^2}{\cos^2\alpha}\right]$

167 $\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\operatorname{sen}^2\alpha-\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$, con $\alpha\neq k\frac{\pi}{2}$. $\left[\frac{3\cos^2\alpha-3\cos^4\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}\right]$

168 $\operatorname{sen}\alpha-\frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}+\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$. $\left[\frac{(\cos\alpha-1)^2}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\right]$

Trasforma le seguenti espressioni in funzione soltanto di $\operatorname{sen}\alpha$, sapendo che $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

169 $\frac{4\operatorname{tg}\alpha+\cos\alpha}{1-2\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$ $\left[\frac{1+4\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{1-3\operatorname{sen}^2\alpha}\right]$

170 $\frac{1+\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}+1-\cos^2\alpha+\frac{4}{\operatorname{sen}^2\alpha}$ $\left[\frac{5}{\operatorname{sen}^2\alpha}\right]$

171 $\frac{1}{2}\cos^2\alpha+\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{2+2\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{2}{\cos^2\alpha}$ $\left[\frac{5-\operatorname{sen}^2\alpha}{2(1-\operatorname{sen}^2\alpha)}\right]$

172 $\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}+1\right)\left(\frac{\cos^2\alpha-1}{2}\right)$ $\left[-\left(\operatorname{sen}\alpha+\frac{1}{2}\right)\right]$

Trasforma le seguenti espressioni in funzione soltanto di $\operatorname{tg}\alpha$, sapendo che $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

173 $\left(\operatorname{sen}^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}-3+3\cos^2\alpha\right)\frac{1}{\cos^2\alpha}$ $[1+\operatorname{tg}^4\alpha]$

174 $2\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}$ $\left[\frac{\operatorname{tg}^3\alpha-2}{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\right]$

175 $(4\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha}{1+3\operatorname{sen}^2\alpha}\right)$ $\left[\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right]$

176 $\left(\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}-\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\right)\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos\alpha}$ $[1+\operatorname{tg}^3\alpha]$

177 VERO O FALSO?

a) Se $\alpha<0$ e $\operatorname{tg}\alpha>0$, allora $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$. V F

b) Se $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ e $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$, allora $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{3}{5}$. V F

c) $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$. V F

d) Se $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, allora $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{4}$. V F

e) Se $\operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{5}$ e $\cos\alpha<0$, allora $\operatorname{sen}\alpha=\frac{12}{13}$. V F

Semplifica le seguenti espressioni utilizzando le relazioni fondamentali della goniometria.

178 $\dfrac{\text{sen}^3\alpha - \text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} + 2\,\text{tg}\,\alpha + \dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\text{tg}\,\alpha}$ $[2\,\text{tg}\,\alpha]$

179 $\dfrac{1}{2}\cos\alpha + \dfrac{\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha} - \text{sen}^2\alpha + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha\,\text{tg}^2\alpha}$ $[\cos\alpha]$

180 $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} - \text{tg}\,\alpha + \dfrac{1-\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha}$ $[-\text{tg}\,\alpha]$

181 $\text{sen}\,\alpha\,\text{tg}\,\alpha + \cos\alpha(1-\text{sen}\,\alpha) + \text{tg}\,\alpha\cos^2\alpha$ $\left[\dfrac{1}{\cos\alpha}\right]$

182 $(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)^2 - 2\,\text{tg}\,\alpha\cos^2\alpha + 2\,\text{sen}^2\alpha - 1$ $[2\,\text{sen}^2\alpha]$

183 **TEST** Se $\text{tg}\,x = 2$ e $180° < x < 270°$, quanto vale $\text{sen}\,x$?

A $\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$. B $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. C $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$. D $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. E $\dfrac{1}{2}$.

(USA *Marywood University Mathematics Contest*, 2006)

184 **TEST** Se $\text{sen}\,x = 2\cos x$, allora qual è il valore di $\text{sen}\,x\cos x$?

A $\dfrac{1}{3}$. B $\dfrac{2}{3}$. C $\dfrac{1}{4}$. D $\dfrac{1}{5}$. E $\dfrac{2}{5}$.

(USA *Marywood University Mathematics Contest*, 2001)

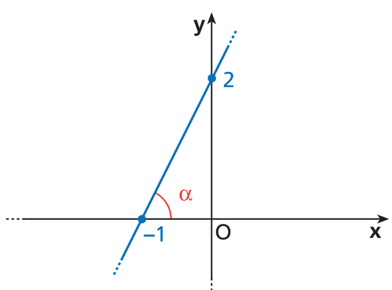
Il significato goniometrico del coefficiente angolare di una retta

185 La retta r forma con l'asse x un angolo α che ha $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$. Scrivi l'equazione di r, sapendo che passa per il punto di coordinate $(0; 1)$. $[4x - 3y + 3 = 0]$

186 Determina l'equazione della retta che passa per il punto P di coordinate $(2; 5)$ e forma con l'asse x un angolo α che ha $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{12}{13}$. $[12x - 5y + 1 = 0 \vee 12x + 5y - 49 = 0]$

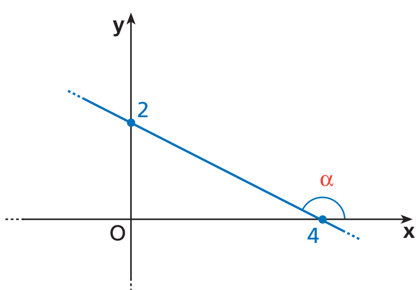
Utilizzando i dati della figura determina tg α e scrivi l'equazione della retta.

187



$[2]$

188



$\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

189 Calcola il coseno dell'angolo che la retta di equazione $y = -\dfrac{3}{4}x + 5$ forma con l'asse x. $\left[-\dfrac{4}{5}\right]$

190 Determina il seno dell'angolo che la retta di equazione $12x + 9y - 1 = 0$ forma con l'asse x. $\left[\dfrac{4}{5}\right]$

191 Trova l'equazione della retta passante per il punto $A(-2; 1)$ e che forma un angolo di $\dfrac{2}{3}\pi$ con l'asse x. $[y = -\sqrt{3}\,x - 2\sqrt{3} + 1]$

192 Trova le equazioni delle rette passanti per il punto $P(\sqrt{7}; -3)$ e che formano con l'asse x un angolo il cui seno è $\frac{3}{4}$.
$\left[y = \frac{3}{\sqrt{7}}x - 6;\ y = -\frac{3}{\sqrt{7}}x\right]$

193 Considera il fascio di rette di equazione $y = (k+2)x + k - 1$, con $k \in \mathbb{R}$, e determina:
a) la retta inclinata di 150° rispetto all'asse x;
b) le rette che hanno inclinazione compresa fra $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$. $\left[\text{a) } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 3 - \frac{\sqrt{3}}{3};\ \text{b) } -1 \le k \le \sqrt{3} - 2\right]$

4. LE FUNZIONI SECANTE E COSECANTE

Teoria a pag. 646

Utilizzando la circonferenza goniometrica, rappresenta gli angoli che verificano le seguenti uguaglianze.

194 $\sec\alpha = 2$

195 $\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$

196 $\sec\alpha = -1$

197 $\operatorname{cosec}\alpha = 3$

Trova quale condizione deve soddisfare il parametro affinché sia verificata l'uguaglianza.

198 $\sec\alpha = k - 4$ $[k \le 3 \vee k \ge 5]$

199 $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{2k}{k+3}$ $[k < -3 \vee -3 < k \le -1 \vee k \ge 3]$

200 $\sec\alpha = \frac{2a-1}{a}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. $[a < 0 \vee a > 1]$

201 $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{a+2}}{a+1}$, con $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$. $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < a < -1\right]$

202 Se $\sec\alpha = \frac{5}{4}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$, verifica che $\frac{2\operatorname{sen}\alpha - 4\cos\alpha}{\cos\alpha - 3\operatorname{sen}\alpha} = -\frac{22}{13}$.

203 Se $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{13}{12}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, verifica che $\frac{\operatorname{tg}\alpha - 13\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - 1 + 13\cos\alpha} = \frac{12}{7}$.

204 Trasforma l'espressione y in funzione soltanto di: a) sec α, b) cosec α.

$$y = \operatorname{tg}^2\alpha + 1 - \operatorname{cosec}^4\alpha$$

$\left[\text{a) } \sec^2\alpha - \frac{\sec^4\alpha}{(\sec^2\alpha - 1)^2};\ \text{b) } \frac{\operatorname{cosec}^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1} - \operatorname{cosec}^4\alpha\right]$

205 Trasforma l'espressione y in funzione soltanto di: a) sen α, b) tg α.

$$y = \frac{\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha}{2\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$\left[\text{a) } \frac{1}{2\operatorname{sen}^4\alpha};\ \text{b) } \frac{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2}{2\operatorname{tg}^4\alpha}\right]$

206 Trova il valore di sen α e cos α, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, sapendo che:

$$3\frac{\sec\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha} - 4 = 0.$$

$\left[\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right]$

207 Determina il valore di sen α e cos α, con $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, sapendo che:

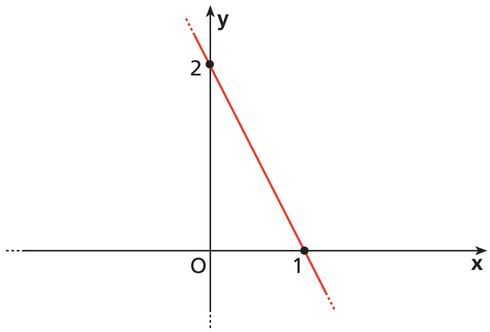
$$12\sec\alpha - 5\operatorname{cosec}\alpha = 0.$$

$\left[-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right]$

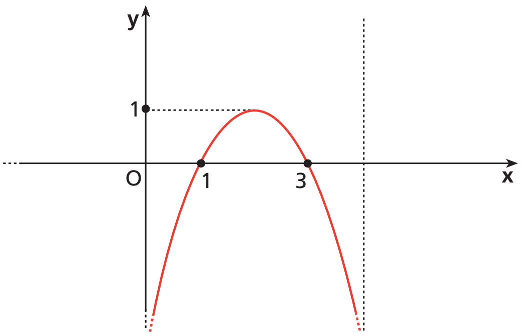
Il grafico del reciproco di una funzione

Nel grafico è rappresentata la funzione $y = f(x)$. Disegna il grafico di $y = \frac{1}{f(x)}$.

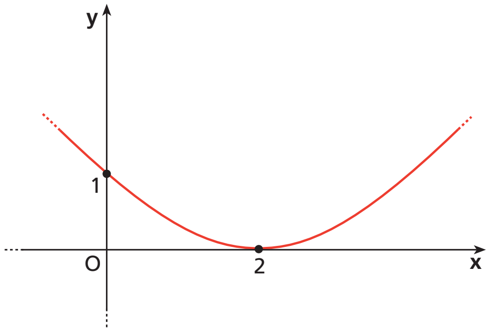
208



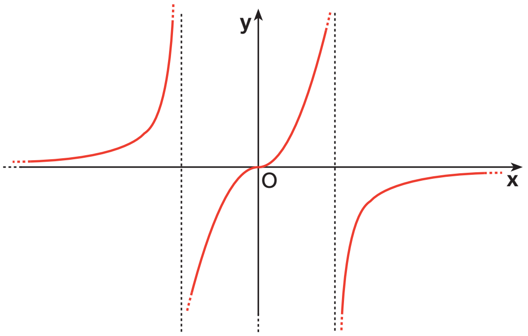
210



209



211



212 Rappresenta il grafico della funzione $f(x) = x^2 + 2$ e poi disegna quello di $\frac{1}{f(x)}$.

213 Disegna il grafico della funzione $f(x) = -x^2 + 4x$ e poi traccia quello di $\frac{1}{f(x)}$.

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

214 $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

215 $y = \frac{1}{2x - 3}$

216 $y = \frac{1}{x^2 - 4x}$

217 $y = \frac{1}{|x| - 1}$

218 $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x}}$

5. LA FUNZIONE COTANGENTE

▶ Teoria a pag. 650

La cotangente di un angolo

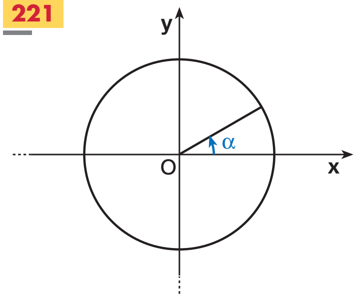
Disegna la circonferenza goniometrica e rappresenta la cotangente dei seguenti angoli.

219 60°; 90°; 150°; 330°.

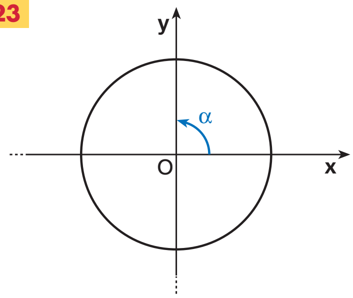
220 $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{5}{4}\pi$; $\frac{7}{4}\pi$.

Per ogni angolo α in figura, individua cotg α, quando esiste, sulla retta tangente alla circonferenza.

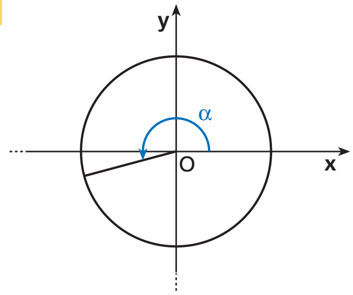
221



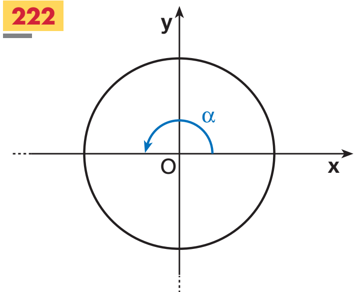
223



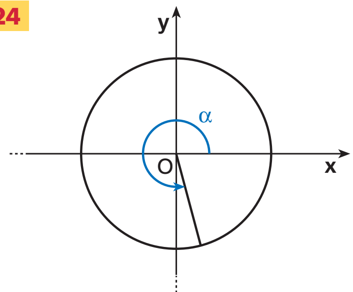
225



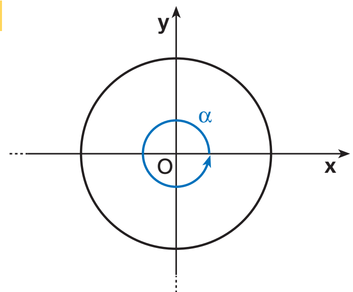
222



224



226



227 Disegna nel cerchio goniometrico gli angoli che soddisfano le seguenti uguaglianze.

$\text{cotg}\,\alpha = 1$; $\text{cotg}\,\beta = 4$; $\text{cotg}\,\gamma = -2$.

Trova quale condizione deve soddisfare il parametro affinché sia verificata l'uguaglianza.

228 $\text{cotg}\,x = \dfrac{a-4}{a+1}$ [$a \neq -1$]

229 $2k\,\text{cotg}\,x = k^2 - 16$ [$k \neq 0$]

230 $\text{cotg}\,x = \dfrac{\sqrt{a-3}}{2a}$ [$a \geq 3$]

Indica in quale quadrante si trova un angolo α che verifica le seguenti condizioni.

231 $\text{sen}\,\alpha > 0$, $\text{cotg}\,\alpha < 0$. [II quadrante]

232 $\text{cotg}\,\alpha < 0$, $\sec\alpha < 0$. [II quadrante]

233 $\cos\alpha > 0$, $\text{cotg}\,\alpha > 0$. [I quadrante]

234 Utilizza le relazioni fondamentali per dimostrare le seguenti formule, che permettono di trovare sen α e cos α in funzione di cotg α.

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\pm\,\text{cotg}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha}}.$$

235 **ESERCIZIO GUIDA**

Sapendo che cotg $\alpha = 3$ e che α appartiene al I quadrante, determiniamo sen α, cos α e tg α.

Poiché $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, seno, coseno e tangente di α sono tutti positivi.

- Calcoliamo sen α applicando la formula $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha}}$:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

- Calcoliamo $\cos\alpha$ applicando la formula $\cos\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$:

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\cdot\sqrt{10}}{10}.$$

- Calcoliamo $\operatorname{tg}\alpha$ tenendo presente che $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$, quindi:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}.$$

Considera le funzioni seno, coseno, tangente e cotangente dell'angolo α: noti il valore di una funzione e l'intervallo a cui appartiene α, calcola il valore delle altre tre funzioni.

236 $\operatorname{cotg}\alpha = 2$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = 1$ e $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$. $\left[\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$

237 $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}; -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}\right]$

238 $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$; $\operatorname{cotg}\alpha = -\sqrt{3}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

239 Trasforma l'espressione in funzione soltanto di $\operatorname{tg}\alpha$, sapendo che $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{cotg}\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}^2\alpha + \cos^2\alpha}$$ $\left[\frac{\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha + 1)}{3\operatorname{tg}^2\alpha + 2}\right]$

240 Trasforma l'espressione in funzione soltanto di $\operatorname{cotg}\alpha$, sapendo che $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha + \cos^2\alpha - 1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$ $\left[\frac{2\operatorname{cotg}^2\alpha - \operatorname{cotg}\alpha + 2}{\operatorname{cotg}\alpha}\right]$

241 Trasforma l'espressione in funzione soltanto di $\operatorname{sen}\alpha$, sapendo che $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

$$3\operatorname{sen}\alpha - 2\operatorname{cotg}^2\alpha + \cos^2\alpha$$ $\left[\frac{-\operatorname{sen}^4\alpha + 3\operatorname{sen}^3\alpha + 3\operatorname{sen}^2\alpha - 2}{\operatorname{sen}^2\alpha}\right]$

Trova il dominio delle seguenti funzioni.

242 $y = \frac{\operatorname{cotg} x}{\cos x}$ $\left[x \neq k\frac{\pi}{2}\right]$

243 $y = \frac{2}{\operatorname{cotg} x}$ $\left[x \neq k\frac{\pi}{2}\right]$

244 $y = \operatorname{cotg} x - 3\operatorname{sen} x$ $[x \neq k\pi]$

Espressioni con le funzioni goniometriche

Semplifica le seguenti espressioni.

245 $\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}^2\alpha\right)\frac{1}{\sec^2\alpha}$ $[1 + \operatorname{sen}^2\alpha]$

246 $(\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha)\operatorname{cotg}^2\alpha$ $\left[\frac{1}{\operatorname{sen}^4\alpha}\right]$

247 $\frac{\cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}^2\alpha - 2}{\operatorname{cotg}\alpha}\cdot\operatorname{cosec}\alpha$ $[-\cos\alpha]$

248 $1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}^2\alpha - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}^2\alpha$ $\left[\frac{1}{\cos^2\alpha}\right]$

249 $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha} - \operatorname{cotg}\alpha + 1$ $\left[\frac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha}\right]$

6. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI PARTICOLARI

▶ Teoria a pag. 652

250 Determina il seno dei seguenti angoli, utilizzando la conoscenza del seno degli angoli particolari:

120°; 135°; 150°; 180°; 270°; 300°. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; 0; -1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

251 Determina il coseno dei seguenti angoli, utilizzando la conoscenza del coseno di angoli particolari:

120°; 135°; 150°; 180°; 270°; 300°. $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -1; 0; \frac{1}{2}\right]$

252 Determina la tangente dei seguenti angoli, utilizzando la conoscenza della tangente degli angoli particolari:

120°; 135°; 150°; 180°; 270°; 300°. $\left[-\sqrt{3}; -1; -\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; \text{non esiste}; -\sqrt{3}\right]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

253 $4\operatorname{sen} 30° - \sec 60° + \sqrt{2}\operatorname{cosec} 45° + \cos 90° - 3\sec 0° + \operatorname{cotg} 45°$ $[0]$

254 $4\cos 0 - 2\sec\frac{\pi}{3} + 2\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} - 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}$ $[0]$

255 $3\operatorname{tg} 0° + 4\cos 30°\operatorname{sen} 60° - \sqrt{2}\cos 45° - 6\operatorname{sen} 90°$ $[-4]$

256 $\cos 0° + \operatorname{sen} 90° - 3\cos 180° + 5\operatorname{sen}^2 270° - \operatorname{sen} 180° + 7\cos 270°$ $[10]$

257 $\sqrt{3}\cos 30° - \sqrt{3}\sec 60° - \operatorname{sen} 45° + \cos 60°\operatorname{cosec} 45° - 8\operatorname{sen}^2 30°$ $\left[-\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right]$

258 $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} - 3\sec\frac{\pi}{4} + \operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{6} - 8\operatorname{cotg}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}$ $[-3\sqrt{2}]$

259 $\frac{1}{2}\sec 45° - \cos 45° - 2\cos^2 30° + \sqrt{3}\operatorname{cosec} 60° - 3\operatorname{tg} 30° + 3\operatorname{cotg} 60°$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

260 $\frac{1}{3}\cos 0° + \sqrt{3}\operatorname{sen} 60° + 4\cos 90° - \frac{\sqrt{2}}{3}\cos 45° - 2\cos 60° - \frac{3}{2}\operatorname{sen} 90°$ $[-1]$

261 $\frac{3}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} - \sec\frac{\pi}{3} + \frac{3}{5}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} - \frac{3}{4}\sec\frac{\pi}{4}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2}$ $\left[-\frac{13}{10}\right]$

262 $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sec\frac{\pi}{4} + \operatorname{cosec}\frac{\pi}{4}\right) + 3\operatorname{cotg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}$ $[6]$

263 $\dfrac{\left(2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + 2\cos\frac{\pi}{6}\right)^2}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \cos\pi - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}} - \left(2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)^2$ $\left[\frac{-7 + 2\sqrt{6}}{3}\right]$

264 $\left(2\cos\frac{\pi}{6} - 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)^2 + 16\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$ $[10 + 4\sqrt{2}]$

265 $\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\right)^2 - \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6}\right)^2$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

266 $\sec\frac{\pi}{3}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}\right) - 2\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} + \operatorname{tg} 0 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$ $[-\sqrt{3}]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni a coefficienti letterali.

267 $2a \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - b\sqrt{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} + a\cos\frac{\pi}{2} + b\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}$ $[a-b]$

268 $a \operatorname{sen} 90° + 2b\cos 180° - 3a\operatorname{sen} 270° + b\cos 0°$ $[4a-b]$

269 $2x\cos 60° - 2y\operatorname{sen} 60° + x\sec 60° + y\operatorname{tg} 60°$ $[3x]$

270 $\left(a\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - b\cos\pi\right)\left(2a\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - b\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}\right) + b^2\sec\frac{\pi}{3}$ $[a^2+b^2]$

271 $x\operatorname{tg} 0 + \left(x\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} + y\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^2 - 3y^2\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} - x\operatorname{cotg}\frac{3}{2}\pi$ $[3x^2+6xy]$

272 $a\sec\frac{\pi}{3} + b^2\sqrt{3}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} + 5a\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi - b^2\cos 0 - b^2\operatorname{cosec}\frac{3}{2}\pi$ $[3b^2-3a]$

273 $\dfrac{a^2\operatorname{tg} 45° + ab\operatorname{cosec} 30° + b^2\sec 0°}{a\operatorname{cosec} 90° - b\operatorname{sen} 270°}$ $[a+b]$

274 $\dfrac{2x\operatorname{sen} 30°}{x\cos 0° + 2y\operatorname{sen} 30°} + \dfrac{y\operatorname{sen} 90°}{2y\sqrt{3}\cos 30° + 2y\operatorname{sen} 270° + x} + \cos 60°$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

275 $\dfrac{a\cdot\operatorname{sen} 90° - b\cdot\cos 0° + (a+b)\cdot\operatorname{tg} 45° - 2a + 1}{a^2\cdot\operatorname{tg} 45° - 2ab\cdot\cos 180° + b^2\cdot\operatorname{sen} 90° - (a+b)^2 + 1}$ $[1]$

276 $\dfrac{a^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + 2b^2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + ab\sec\frac{\pi}{3}}{a\cos 0 + b\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2}\cdot a\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$ $[b]$

7. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

Teoria a pag. 654

COMPLETA le seguenti tabelle.

277

x	$y = \operatorname{arcsen} x$	$\operatorname{sen} y$
0		
1		
	$\frac{\pi}{6}$	
		$-\frac{1}{2}$
		-1

278

x	$y = \arccos x$	$\cos y$
	$\frac{\pi}{3}$	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$		
		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
	π	
0		

279

x	$y = \operatorname{arctg} x$	$\operatorname{tg} y$
		0
	$\frac{\pi}{3}$	
-1		
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		
		$-\sqrt{3}$

280

x	$y = \operatorname{arccotg} x$	$\operatorname{cotg} y$
	$\frac{\pi}{2}$	
$\sqrt{3}$		
		-1
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		
	$\frac{5}{6}\pi$	

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

281 $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\left[\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{3}\right]$

282 $\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$

283 $\operatorname{arctg}(-1)$, $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$. $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$

284 $\operatorname{arcsen} 1 + \operatorname{arctg}(-1)$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

285 $\operatorname{arctg}(-1) + 2\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ $\left[-\frac{\pi}{4}\right]$

286 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\left[\frac{\pi}{6}\right]$

287 $\pi - \operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\arccos\frac{1}{2}$ $\left[\frac{7}{4}\pi\right]$

288 $\pi - \left[4\operatorname{arctg}(-1) + 2\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[\frac{8}{3}\pi\right]$

Risolvi le seguenti equazioni.

289 $\operatorname{arcsen} x = \pi$ [impossibile]

290 $4\operatorname{arctg} x - \pi = 0$ $[1]$

291 $9(\arccos x)^2 = \pi^2$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

292 $\arccos\frac{1}{2} = \operatorname{arcsen} x$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

293 $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

294 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\cos\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

Si tratta di una funzione composta; calcoliamo il valore della funzione più «interna», arcsen $\left(-\frac{1}{2}\right)$, tenendo conto che il codominio dell'arcoseno è $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \rightarrow \cos\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

295 $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} 1)$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

296 $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$ $[\sqrt{3}]$

297 $\cos[\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})]$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

298 $\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

299 $\cos\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

300 $\operatorname{cotg}\left[\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

301 $\operatorname{sen}(\operatorname{arccotg}\sqrt{3})$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

302 $\cos\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

303 $\operatorname{tg}\left[\operatorname{arccotg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$ $[-\sqrt{3}]$

304 $\cos[\operatorname{arctg}(-1)]$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

305 $\operatorname{tg}\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

306 $\operatorname{sen}[\operatorname{arccotg}(-\sqrt{3})]$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

307 **COMPLETA**

$\arccos\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \ldots\ldots$; $\operatorname{sen}\left[\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right] = \ldots\ldots$; $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \ldots\ldots$;

$\operatorname{cotg}\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \ldots\ldots;$ $\quad\arccos\left(\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right) = \ldots\ldots;$ $\quad\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(-1)] = \ldots\ldots;$

$\operatorname{arcsen}\left(\cos\frac{5}{2}\pi\right) = \ldots\ldots;$ $\quad\operatorname{tg}\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \ldots\ldots;$ $\quad\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{4}\right) + \operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{4}\right) = \ldots\ldots.$

308 **VERO O FALSO?**

a) $\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{5}{6}\pi$ V F

b) $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4} = 1$ V F

c) $\operatorname{arcsen} 0 = \arccos 1$ V F

d) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ V F

e) $\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(-1)] = -1$ V F

f) $\arccos\left(\cos\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arccotg}\left(\operatorname{cotg}\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ V F

309 **TEST** Determina quale dei seguenti risultati è uguale a $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} v)$.

A $\frac{1}{\sqrt{v^2-1}}$. B $\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$. C $\frac{1+v}{\sqrt{v^2-1}}$. D $\frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}$. E $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$.

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 1993)

Il dominio dell'inversa di una funzione goniometrica

310 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo il dominio della funzione $y = \operatorname{arcsen}\frac{x+1}{x-2}$.

Poiché il dominio della funzione arcoseno è $[-1; 1]$, dobbiamo imporre che:

$$-1 \le \frac{x+1}{x-2} \le 1.$$

Pertanto, dobbiamo risolvere il seguente sistema di due disequazioni fratte:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-2} \ge -1 \\ \frac{x+1}{x-2} \le 1 \end{cases}$$

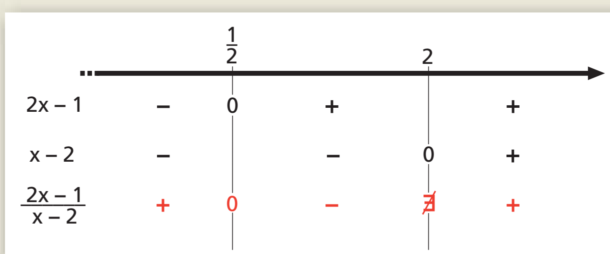
• Risolviamo la prima disequazione:

$$\frac{x+1}{x-2} \ge -1 \rightarrow \frac{x+1}{x-2} + 1 \ge 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x+1+x-2}{x-2} \ge 0 \rightarrow \frac{2x-1}{x-2} \ge 0.$$

La prima disequazione è soddisfatta per

$$x \le \frac{1}{2} \vee x > 2.$$



• Risolviamo la seconda disequazione:

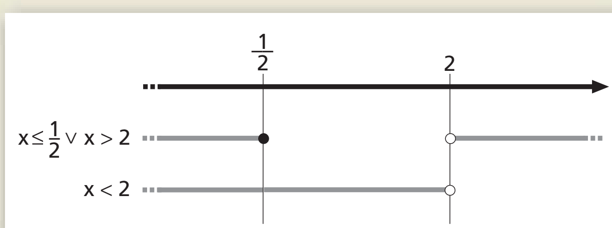
$$\frac{x+1}{x-2} \le 1 \rightarrow \frac{x+1}{x-2} - 1 \le 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x+1-x+2}{x-2} \le 0 \rightarrow \frac{3}{x-2} \le 0,$$

che è soddisfatta per $x < 2$.

Compiliamo il quadro relativo al sistema.

Il dominio della funzione è $x \le \frac{1}{2}$.



Determina il dominio delle seguenti funzioni.

311 $y = \operatorname{arcsen}(2x+1)$ $[[-1; 0]]$

312 $y = \arccos(x^2-4)$ $[[-\sqrt{5}; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; \sqrt{5}]]$

313 $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ $[\mathbb{R} - \{0\}]$

314 $y = \operatorname{arctg}(x^4+1)$ $[\mathbb{R}]$

315 $y = \operatorname{arccotg}(x^3+1)$ $[\mathbb{R}]$

316 $y = \arccos(-x^2+2x)$ $[[1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]]$

317 $y = \operatorname{arcsen}\dfrac{2}{x+2}$ $[]-\infty; -4] \cup [0; +\infty[]$

318 $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2x+3}{x-2}$ $[\mathbb{R} - \{2\}]$

319 $y = \operatorname{arccotg}\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$ $[\mathbb{R} - \{-2, 2\}]$

320 $y = \arccos\dfrac{x-1}{x+3}$ $[[-1; +\infty[]$

321 $y = \dfrac{1}{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}$ $[]0; 1]]$

322 $y = \sqrt{\operatorname{arcsen}(x-1)}$ $[[1; 2]]$

323 $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{1-x}$ $[\mathbb{R} - \{1\}]$

Trova il dominio e la funzione inversa delle seguenti funzioni restringendo tale dominio dove necessario.

324 $y = \arccos\dfrac{x+1}{2x}$ $\left[x \leq -\dfrac{1}{3} \vee x \geq 1;\ y = \dfrac{1}{2\cos x - 1}\right]$

325 $y = \operatorname{tg}(x-\pi)$ $\left[x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z};\ y = \pi + \operatorname{arctg} x\right]$

326 $y = 2 + \operatorname{arcsen}\sqrt{x-1}$ $[1 \leq x \leq 2;\ y = 1 + \operatorname{sen}^2(x-2)]$

327 $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x-4}{x+2}$ $\left[x \neq -2;\ y = \dfrac{2\operatorname{tg} x + 4}{1 - \operatorname{tg} x}\right]$

8. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE E LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

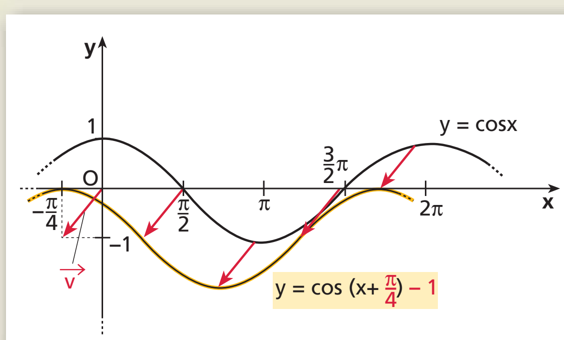
▶ Teoria a pag. 658

La traslazione

328 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo il grafico della funzione $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$.

Tracciamo il grafico di $y = \cos x$ e poi lo trasliamo secondo il vettore $\vec{v}\left(-\dfrac{\pi}{4}; -1\right)$.



Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2.0** © Zanichelli 2011 *Volume 4*

Disegna le seguenti funzioni, utilizzando i grafici delle funzioni goniometriche e delle loro inverse.

329 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

330 $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$

331 $y = \text{cotg}\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) - 2$

332 $y = \cos x + 2$

333 $y = \text{sen}\, x + 1$

334 $y = \text{cotg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 4$

335 $y = \text{tg}(x - \pi) + 1$

336 $y = \text{arcsen}(x - 1)$

337 $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

338 $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

339 $y = \text{sen}(x + 2\pi) + 2$

340 $y = \arccos x + 1$

341 $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

342 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 5$

343 $y = \cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$

344 $y = \frac{1}{\text{sen}\, x} + 2$

345 $y = \frac{1}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$

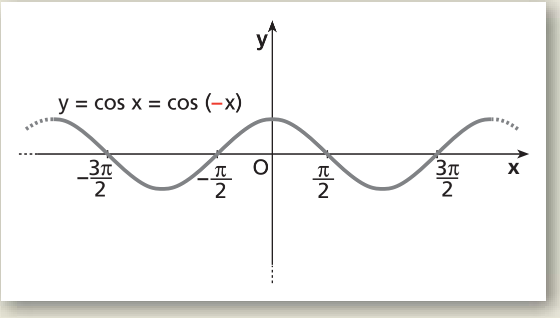
346 $y = \frac{1}{\text{tg}\, x} + 1$

Le simmetrie

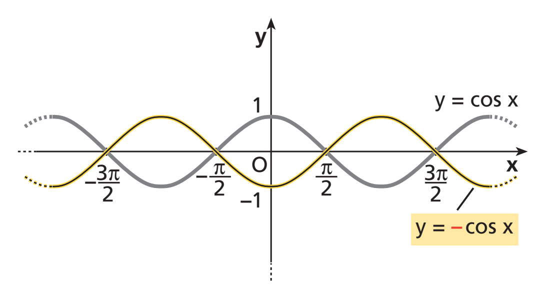
347 ESERCIZIO GUIDA

Disegniamo i grafici delle funzioni: a) $y = \cos(-x)$; b) $y = -\cos x$.

a) Sappiamo che il grafico di $y = f(-x)$ è simmetrico di quello di $y = f(x)$ rispetto all'asse y. Poiché il grafico di $y = \cos x$ è simmetrico rispetto all'asse y, il grafico di $y = \cos(-x)$ coincide con quello di $y = \cos x$.



b) Il grafico della funzione $y = -f(x)$ è simmetrico di quello di $y = f(x)$ rispetto all'asse x. Quindi, tracciato il grafico di $y = \cos x$, consideriamo il suo simmetrico rispetto all'asse delle ascisse.



Disegna i grafici delle seguenti funzioni.

348 $y = \text{tg}(-x)$

349 $y = \sec(-x)$

350 $y = -\text{sen}(-x)$

351 $y = \text{cotg}(-x)$

352 $y = \text{cosec}(-x)$

353 $y = \text{sen}(-x)$

354 $y = -\cos(-x)$

355 $y = -\text{tg}(-x)$

356 $y = -\sec x$

357 $y = -\text{arctg}(-x)$

358 $y = -\text{sen}\, x$

359 $y = -\text{tg}\, x$

360 $y = -\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

361 $y = -\frac{1}{\operatorname{sen}(-x)}$

362 $y = \frac{1}{-\operatorname{tg} x}$

363 $y = -1 + \operatorname{sen}(-x)$

364 $y = -\operatorname{cotg} x$

365 $y = -\operatorname{arcsen} x$

Le funzioni goniometriche e il valore assoluto

Il grafico di $y = |f(x)|$

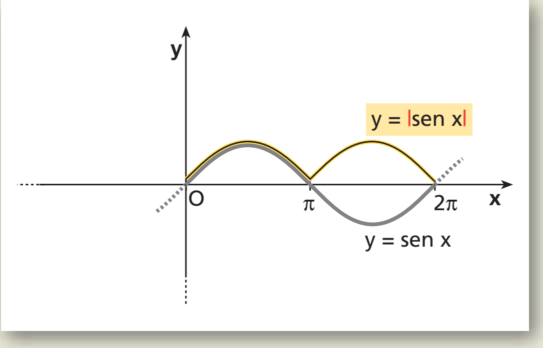
366 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo il grafico della funzione

$y = |\operatorname{sen} x|$, con $0 \leq x \leq 2\pi$.

a) Disegniamo $y = \operatorname{sen} x$ e confermiamo la parte di curva che sta nel semipiano positivo delle y.

b) Negli intervalli in cui la curva sta nel semipiano negativo delle y, tracciamo la curva simmetrica rispetto all'asse x.



Disegna il grafico delle seguenti funzioni.

367 $y = |\cos x|$

368 $y = |\operatorname{cosec} x|$

369 $y = |\cos(-x)|$

370 $y = |\operatorname{tg} x|$

371 $y = |\operatorname{cotg} x|$

372 $y = |-\operatorname{tg}(-x)|$

373 $y = |\sec x|$

374 $y = |\operatorname{sen}(-x)|$

375 $y = |-\operatorname{sen}(-x)|$

376 $y = |\operatorname{arctg} x|$

377 $y = |\operatorname{sen} x - 2|$

378 $y = |\operatorname{arcsen} x|$

379 $y = \frac{1}{|\operatorname{sen} x - 1|}$

380 $y = \left|\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\right|$

381 $y = \frac{1}{|\operatorname{tg}(-x)|}$

Il grafico di $y = f(|x|)$

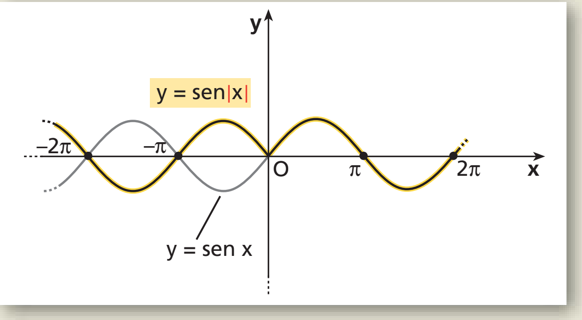
382 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo il grafico della funzione $y = \operatorname{sen}|x|$.

Sappiamo che $f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$

a) Disegniamo $y = \operatorname{sen} x$ nel semipiano positivo delle x.

b) Per $x < 0$ disegniamo il simmetrico del grafico precedente rispetto all'asse y.



Disegna i grafici delle seguenti funzioni.

383 $y = \text{tg}\,|x|$

384 $y = \text{cotg}\,|x|$

385 $y = \sec|x|$

386 $y = \text{arcsen}\,|x|$

387 $y = \text{cosec}\,|x|$

388 $y = \text{arctg}\,|x|$

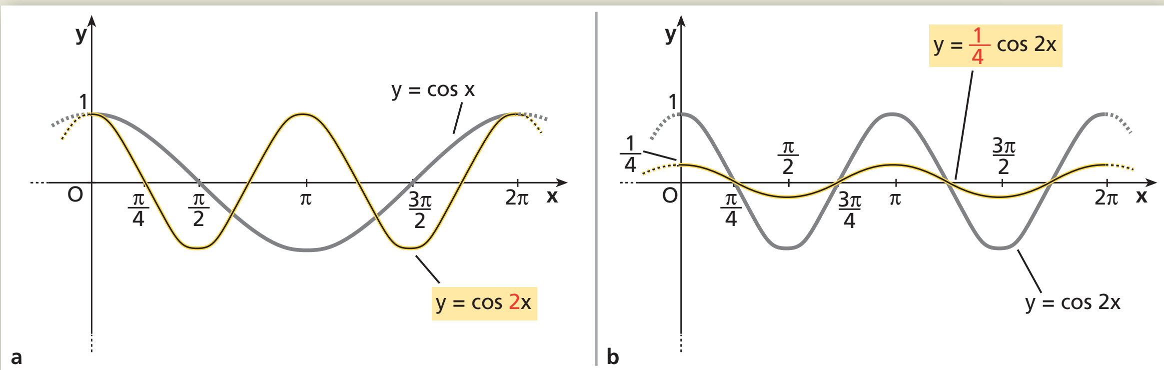
La dilatazione e la contrazione

389 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo il grafico della funzione $y = \frac{1}{4}\cos 2x$.

a) Passiamo da $y = \cos x$ a $y = \cos 2x$. Possiamo scrivere $2x = \frac{x}{\frac{1}{2}}$, quindi $y = \cos 2x = \cos\frac{x}{\frac{1}{2}}$, e pertanto abbiamo una contrazione orizzontale di rapporto $m = \frac{1}{2}$ (figura *a*).

b) Da $y = \cos 2x$ passiamo a $y = \frac{1}{4}\cos 2x$ con una contrazione verticale con $n = \frac{1}{4}$ (figura *b*).



Disegna i grafici delle seguenti funzioni.

390 $y = 2\,\text{sen}\frac{x}{4}$; $y = \frac{1}{2}\text{sen}\,2x$; $y = 2\cos\frac{x}{2}$.

391 $y = 3\,\text{tg}\frac{x}{4}$; $y = 2\,\text{cotg}\,4x$; $y = 4\,\text{sen}\frac{x}{2}$.

392 $y = 4\cos 2x$; $y = \frac{1}{2}\text{sen}\frac{x}{4}$; $y = \frac{1}{4}\text{tg}\frac{x}{2}$.

393 $y = 2\,\text{cotg}\frac{x}{2}$; $y = 3\,\text{sen}\,4x$; $y = 3\cos 2x$.

394 **ESERCIZIO GUIDA**

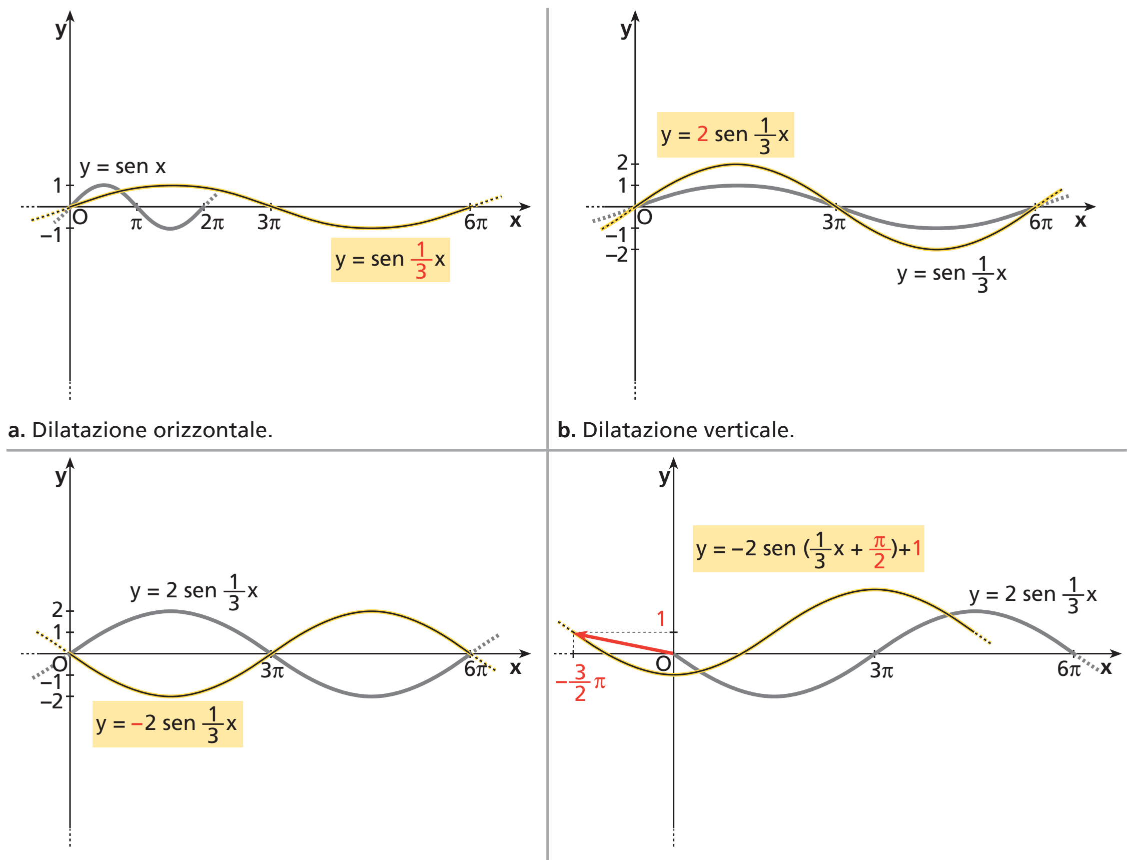
Disegniamo il grafico della funzione sinusoidale $y = -2\,\text{sen}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ e scriviamo il valore dell'ampiezza, della pulsazione, della fase iniziale e del periodo.

Applichiamo alla funzione $y = \text{sen}\,x$, per passi successivi:

- la dilatazione orizzontale con $m = 3$;
- la dilatazione verticale con $n = 2$;
- la simmetria rispetto all'asse x;
- la traslazione di vettore $\left(-\frac{3\pi}{2}; 1\right)$.

Notiamo che si può determinare la componente orizzontale del vettore di traslazione ponendo $\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{2} = 0$, cioè:

$$\frac{1}{3}x = -\frac{\pi}{2} \rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}.$$



a. Dilatazione orizzontale.

b. Dilatazione verticale.

c. Simmetria rispetto all'asse *x*.

d. Traslazione.

L'ampiezza $|A|$ vale 2, la pulsazione $\omega = \frac{1}{3}$, la fase iniziale $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Il periodo è $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ossia

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi.$$

Disegna i grafici delle seguenti funzioni e scrivi il valore dell'ampiezza, della pulsazione, della fase iniziale e del periodo.

395 $y = \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$

396 $y = 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

397 $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

398 $y = 2\cos\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{2}\right)$

399 $y = 3\operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}x + \pi\right)$

400 $y = -2\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

401 $y = -2\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$

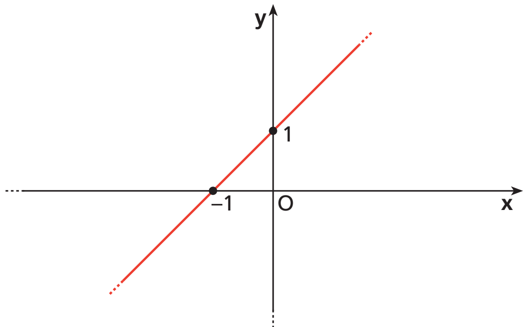
402 $y = -6\operatorname{sen}\left(2x + \frac{3}{2}\pi\right)$

403 $y = -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$

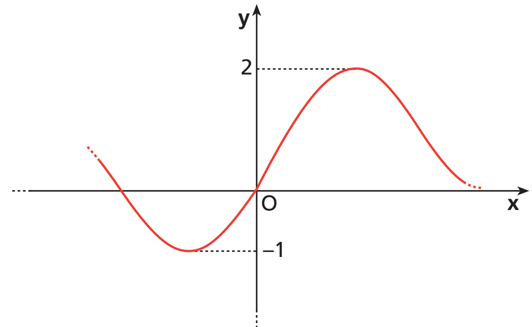
Il grafico di $y = f^2(x)$ e di $y = \sqrt{f(x)}$

Nel grafico è rappresentata la funzione $y = f(x)$. Disegna $y = f^2(x)$.

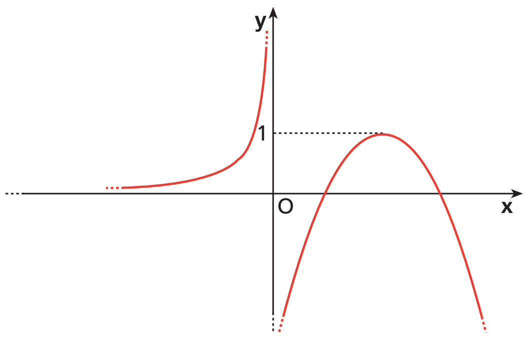
404



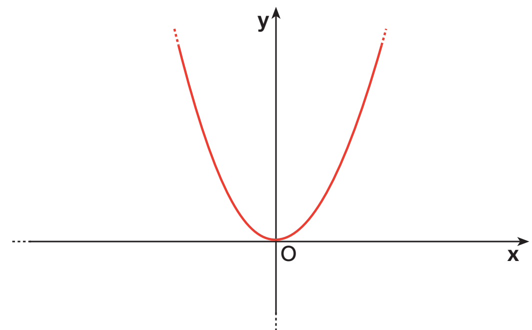
406



405



407



408 Disegna la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x + 1$ e poi traccia il grafico di $f^2(x)$.

409 Rappresenta graficamente la funzione $f(x) = -\operatorname{tg} x$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$ e poi disegna $f^2(x)$.

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

410 $y = (-\cos x + 1)^2$

411 $y = \operatorname{tg}^2 |x|$

412 $y = \operatorname{tg}^2 x - 1$

413 $y = \operatorname{sen}^2 x$

414 $y = -\cos^2 x$

415 $y = \operatorname{sen}^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

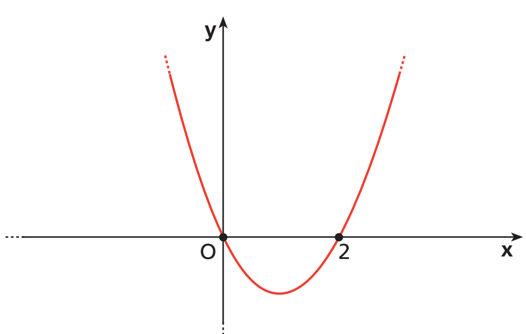
416 $y = \cos^2 x + 2$

417 $y = \operatorname{arctg}^2 x$

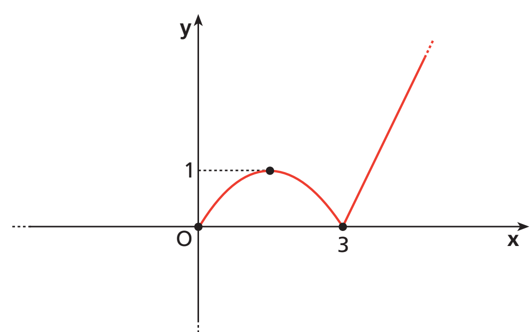
418 $y = \frac{1}{2}\cos^2(2x)$

Nel grafico è rappresentata la funzione $y = f(x)$. Disegna $y = \sqrt{f(x)}$.

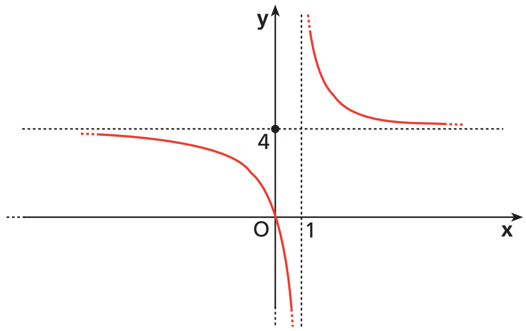
419



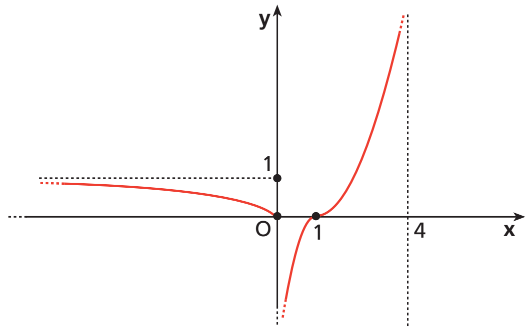
420



421



422



423 Disegna la funzione $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ e poi traccia il grafico di $\sqrt{f(x)}$.

424 Rappresenta il grafico della funzione $f(x) = -\operatorname{sen} x$ nell'intervallo $[-\pi; \pi]$ e poi disegna $\sqrt{f(x)}$.

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

425 $y = \sqrt{\cos x}$

426 $y = \sqrt{-\operatorname{tg} x}$

427 $y = \sqrt{\operatorname{sen} x + 1}$

428 $y = \sqrt{\operatorname{tg}|x|}$

429 $y = -\sqrt{|\operatorname{tg} x|}$

430 $y = \sqrt{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1}$

431 $y = -\sqrt{\operatorname{sen}(-x)}$

432 $y = \sqrt{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x + 2}$

433 $y = \sqrt{\operatorname{cosec} x}$

ESERCIZI VARI Le funzioni goniometriche

434 **TEST** La funzione $y = 3\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{4}\right)$ ha come ampiezza, pulsazione e periodo, rispettivamente:

A $3, \frac{1}{3}, 6\pi$. B $3, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\pi$. C $3, \frac{1}{3}, \frac{\pi}{6}$. D $3, \frac{1}{3}, \frac{\pi}{6}$. E $\frac{1}{3}, 3, 8\pi$.

435 **TEST** Quale, fra le seguenti funzioni, ha la stessa rappresentazione grafica della funzione $y = |\operatorname{sen}|x||$?

A $y = \cos x$ B $y = |\operatorname{sen} x|$ C $y = |\cos x|$ D $y = \operatorname{sen} x$ E $y = \cos|x|$

436 **TEST** Se l'ampiezza di $y = \left(\frac{1}{k}\right)\cos(k^2\theta)$ è 2, allora il periodo deve essere:

A π. B 2π. C 4π. D 8π. E 16π.

(USA *Wolsborn-Drazovich State Mathematics Contest*, 2006)

437 **TEST** È data la funzione $f(x) = \operatorname{sen}(2x - 5)$. Allora: [Nota: *dom* e *im* stanno per *dominio* e *codominio.*]

A $\operatorname{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}: -1 \leq 2x - 5 \leq 1\}$.

B $\operatorname{im}(f) = [-1; 1]$.

C f ha periodo $T = \pi - 5$.

D f ha periodo $T = 2\pi - 5$.

(*Politecnico di Torino, Test di autovalutazione*)

438 **ASSOCIA** a ciascuna delle prime tre funzioni quella, fra le ultime tre, che ha lo stesso grafico.

1) $y = \cos(x + 2\pi)$.

2) $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{3}{2}\pi\right)$.

3) $y = \operatorname{sen}(x + \pi)$.

a) $y = -\cos x$.

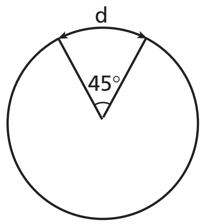
b) $y = \operatorname{sen}(-x)$.

c) $y = \cos(-x)$.

439 Disegna il grafico delle seguenti funzioni.

$$y = \operatorname{sen} 2x; \quad y = \cos 2x; \quad y = \cos\frac{x}{2}; \quad y = \cos|x|; \quad y = \operatorname{sen}|x|.$$

440 The diagram shows an angle of 45° at the centre of the circle of radius length 14 cm.
Calculate d, taking $\pi = \frac{22}{7}$.



(IR *Leaving Certificate Examination*, Ordinary Level, 1992)

[11 cm]

441 A graph has equation $y = \cos(2x)$, where x is a real number.

a) Draw a sketch of that part of the graph for which $0 \le x \le 2\pi$.
b) On your sketch show two of the lines of symmetry which the complete graph possesses.

(UK *Northern Examination Assessment Board, NEAB*)

$\left[\text{b) } x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots\right]$

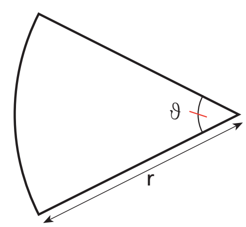
442 The functions $f(x)$ and $g(x)$ are defined for all real numbers by $f(x) = \sin(2x)$, $g(x) = |\sin(2x)|$.

a) (*i*) State whether f is an odd function, an even function or neither.
(*ii*) State whether g is an odd function, an even function or neither.
b) Given that f and g are periodic functions, write down the periods of f and of g.

(UK *Northern Examination Assessment Board, NEAB*)

$\left[\text{a) } f \text{ is an odd function, } g \text{ is an even function; b) } \pi; \frac{\pi}{2}\right]$

443



The sector of the circle shown, of radius length r, has total perimeter length 18. Using this information, express the angle ϑ in terms of r and hence obtain a formula for the area of the sector in terms of r.

$\left[\vartheta = \frac{2(9-r)}{r}; \text{ area} = (9-r)r\right]$

Disegna i grafici delle seguenti funzioni.

444 $y = \operatorname{sen} 2x - \frac{\pi}{2}$

445 $y = 4\sec x - 1$

446 $y = 2\cos\frac{x}{4} + 1$

447 $y = \operatorname{tg}|x| - 3$

448 $y = \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - 1}{\operatorname{sen} x}$

449 $y = 3 - \operatorname{arcsen} x$

450 $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}$

451 $y = 2\cos 2x + 2$

452 $y = \frac{|\operatorname{sen} x|}{\operatorname{sen} x} + 4$

453 $y = \frac{-1}{|\operatorname{sen} x - 1|}$

454 $y = \frac{1}{1 - \operatorname{arctg} x}$

455 $y = \frac{1}{\operatorname{sen}|x|} - 1$

456 $y = \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x + 1}$

457 $y = \frac{1}{-\sqrt{\cos x} + 2}$

458 $y = \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]^2$

459 $y = 2\sqrt{\cos x} - 1$

460 $y = -\operatorname{cotg}^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

461 $y = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$

462 $y = \begin{cases} |\cos 2x| & \text{se } x \le 0 \\ |\operatorname{arctg} x| - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}; \qquad y = \begin{cases} \cos x & \text{se } |x| \le \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{cosec} x & \text{se } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$

463 Traccia il grafico di $f(x) = 4\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, di $\frac{|f(x)|}{f(x)} + 1$ e di $\frac{f(x) + |f(x)|}{2}$.

464 Della funzione $y = 1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ trova il dominio, disegna il grafico e scrivi le equazioni degli asintoti.
$[D: x \neq \pi + 2k\pi;\ x = \pi + 2k\pi]$

465 Quanto valgono i rapporti di dilatazione m e n e il vettore $\vec{v}$ di traslazione che si applicano a $y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}\pi\right)$ per ottenere una funzione del tipo $y = \cos x$?
$[m = 3, n = 1;\ \vec{v}(-2\pi; 0)]$

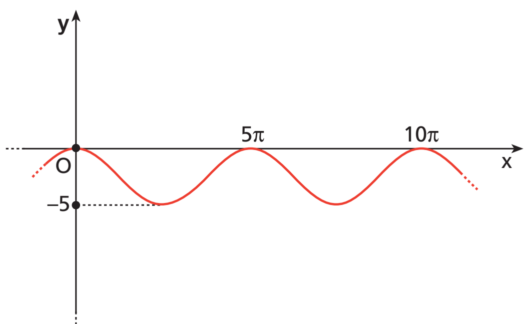
466 Dopo aver tracciato il grafico della funzione $f(x) = -|\operatorname{tg} x| + 1$, disegna il grafico delle funzioni $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) - \frac{\pi}{2}$, $2f(x)$, $f(2x)$.

467 Dopo aver trovato il dominio D e il codominio C e aver disegnato il grafico della funzione $f(x) = \frac{1 + \cos x}{\cos x}$, traccia i grafici di $f(|x|)$ e di $f(x) + 1$.
$\left[D: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ C: \left]-\infty; 0\right] \cup \left[2; +\infty\right[\right]$

468 Traccia i grafici di $y = \frac{\cos x}{\cos x}$, $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$, $y = 1$. Rappresentano la stessa funzione?

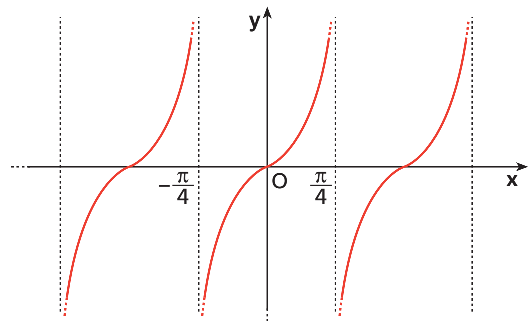
Scrivi le equazioni delle funzioni che hanno i seguenti grafici, sapendo che sono ricavabili dai grafici delle funzioni goniometriche mediante le trasformazioni geometriche.

469



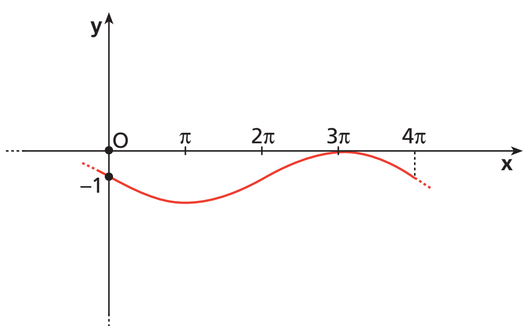
$\left[y = \frac{5}{2}\cos\frac{2}{5}x - \frac{5}{2}\right]$

471



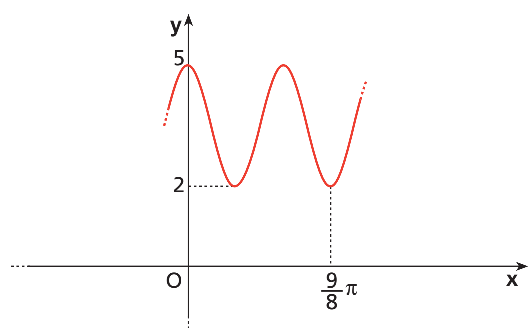
$[y = \operatorname{tg} 2x]$

470



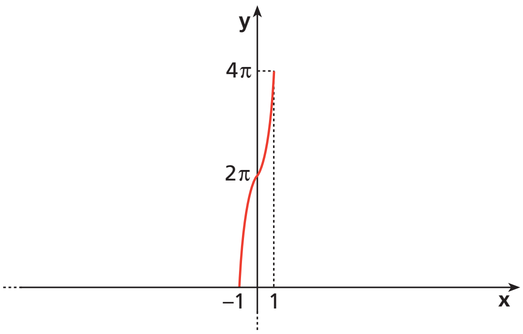
$\left[y = -1 - \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right]$

472



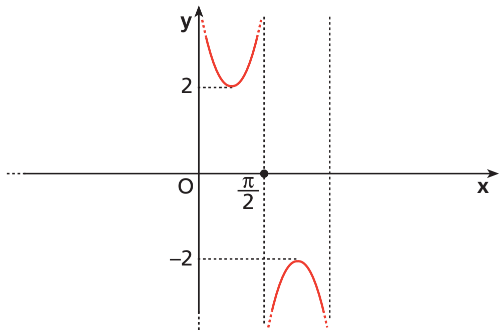
$\left[y = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\cos\frac{8}{3}x\right]$

473



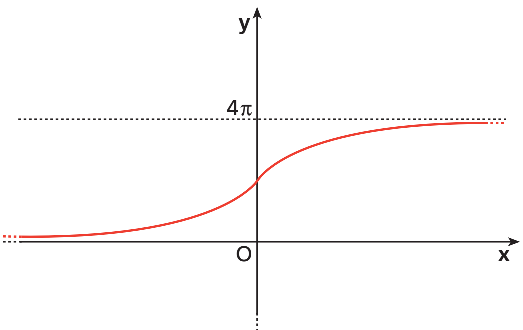
$[y = 2\pi + 4\,\text{arcsen}\,x]$

475



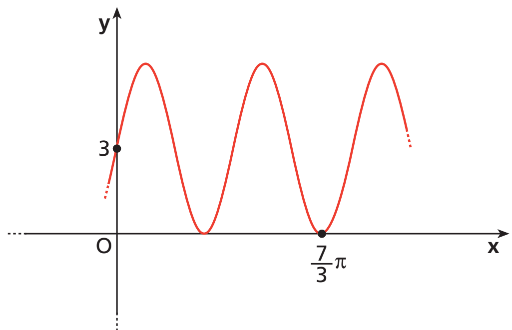
$[y = 2\,\text{cosec}\,2x]$

474



$[y = 4\,\text{arctg}\,x + 2\pi]$

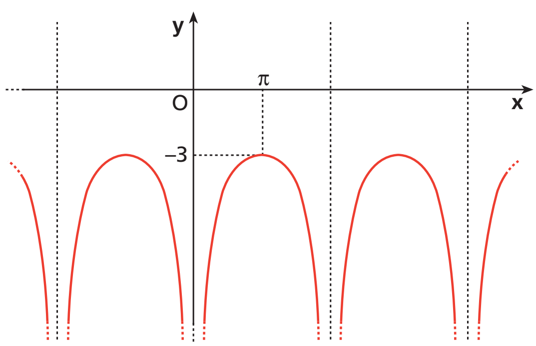
476



$\left[y = 3 + 3\,\text{sen}\,\frac{3}{2}x\right]$

477 a) Determina una possibile equazione della funzione f rappresentata in figura.
b) Indica il dominio e il codominio di f.
c) Traccia il grafico di $|f(x)| - 3$.
d) Disegna il grafico di $-f(x - \pi)$.

$\left[\text{a) } f(x) = -\frac{1}{\left|\text{sen}\,\frac{x}{2}\right|} - 2;\ \text{b) } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z};\ ]-\infty; -3]\right]$



Funzioni sinusoidali e luoghi geometrici

478 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo il luogo geometrico descritto al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ da $P(x; y)$, con x e y date da:

$$\begin{cases} x = 2\cos\alpha - 1 \\ y = 3\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$$

Isoliamo al primo membro $\cos\alpha$ e $\text{sen}\,\alpha$:

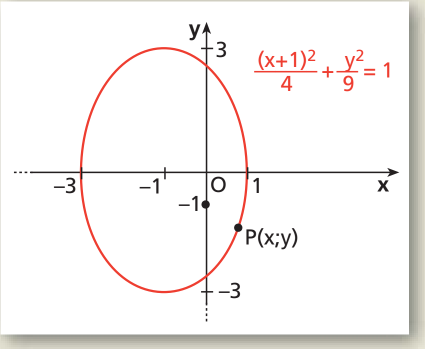
$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x+1}{2} \\ \text{sen}\,\alpha = \dfrac{y}{3} \end{cases}$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri delle due equazioni e poi sommiamo membro a membro. Otteniamo

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2,$$

da cui, essendo $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$: $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Il luogo cercato è un'ellisse traslata di centro $(-1; 0)$ e semiassi di lunghezza 2 e 3.



Determina i luoghi geometrici descritti al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ da $P(x; y)$, con x e y date dalle seguenti equazioni.

479 $\begin{cases} x = 3 + \cos\alpha \\ y = \operatorname{sen}\alpha - 2 \end{cases}$ $[(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1]$

480 $\begin{cases} x = 3\cos\alpha \\ y = 1 + \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$ $\left[\frac{x^2}{9} + (y-1)^2 = 1\right]$

481 $\begin{cases} x = \operatorname{sen}\alpha \\ y = \cos^2\alpha + 1 \end{cases}$ $[y = 2 - x^2]$

482 $\begin{cases} x = 2\operatorname{tg}\alpha \\ y = \sec\alpha \end{cases}$ $\left[\frac{x^2}{4} - y^2 = -1\right]$

483 $\begin{cases} x = 2\operatorname{sen}^2\alpha - 1 \\ y = \cos^2\alpha + 2 \end{cases}, \quad \alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.$

$[x + 2y - 5 = 0, -1 < x < 1]$

484 $\begin{cases} x = \operatorname{sen}\alpha + 3 \\ y = \operatorname{cosec}\alpha \end{cases}, \quad \alpha \in]0; \pi[.$

$[xy - 3y - 1 = 0, 3 < x \leq 4]$

485 Le coordinate dei punti di una curva sono date dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x = \cos 3\alpha - 2 \\ y = \operatorname{sen} 3\alpha + 1 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Determina l'equazione cartesiana della curva.
b) Individua il tipo di conica $\mathscr{C}$ che essa rappresenta e calcola l'eccentricità.
c) Trova l'equazione della retta tangente a $\mathscr{C}$ nel suo punto di ordinata 1 e ascissa minore, dopo averla rappresentata su un piano cartesiano.

[a) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$; b) circonferenza, $e = 0$; c) $x = -3$]

Il periodo delle funzioni goniometriche

Determina il periodo delle seguenti funzioni.

486 $y = \operatorname{sen} 4x, \qquad y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$ $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$

487 $y = \cos 6x, \qquad y = \operatorname{cotg} 2x.$ $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

488 $y = \operatorname{sen}(3x + \pi), \qquad y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right).$ $\left[\frac{2}{3}\pi, 4\pi\right]$

489 $y = \cos(2x + 2\pi), \qquad y = \operatorname{cotg}\left(6x + \frac{\pi}{4}\right).$ $\left[\pi, \frac{\pi}{6}\right]$

Determina k in modo che la funzione abbia il periodo T indicato.

490 $y = \operatorname{sen} 2kx, \qquad T = \frac{\pi}{2}.$ $[2]$

491 $y = \operatorname{tg}\dfrac{2}{k}x$, $\quad T = 2\pi$. [4]

492 $y = \cos\left(\dfrac{k}{4}x + \pi\right)$, $\quad T = \pi$. [8]

493 $y = \operatorname{cotg}\left(\dfrac{k}{3}x\right)$, $\quad T = \dfrac{\pi}{3}$. [9]

494 a) Data la funzione $y = f(x) = 2\cos kx + 2$, determina k in modo che il periodo sia $\dfrac{2}{3}\pi$.

b) Traccia il grafico della funzione f ottenuta con il valore di k del punto precedente.

c) Disegna il grafico di $\dfrac{1}{|f(x)|}$.

d) Indica un intervallo in cui f è invertibile, trova l'espressione analitica di f^{-1} e rappresentala graficamente.

$\left[\text{a) } k = 3; \text{ d) } \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]; f^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}\arccos\dfrac{x-2}{2}\right]$

495 Data la funzione $y = a \cdot \operatorname{arcsen}(x + b)$, determina i valori di a e b in modo che sia $a > 0$ e che la funzione abbia come dominio l'intervallo $[0; 2]$ e come codominio l'intervallo $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.

a) Rappresenta la funzione così ottenuta.
b) Determina la funzione inversa (applicando la simmetria rispetto a $y = x$).
c) Dopo aver individuato il periodo della funzione inversa, rappresentala su un intero periodo.

$\left[y = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arcsen}(x-1); \text{ b) } y = \operatorname{sen}(\pi x) + 1; \text{ c) } T = 2\right]$

496 a) Data la funzione $f(x) = 3\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2$, determina il suo periodo e rappresentala graficamente.

b) Traccia il grafico di $|f(x)|$.

c) Traccia il grafico di $\big||f(x)| - 3\big|$.

d) Verifica se nell'intervallo $\left[-\dfrac{\pi}{3}; \pi\right]$ la funzione $f(x)$ è invertibile; se necessario effettua una restrizione del dominio in modo che lo sia, determina $f^{-1}(x)$ in tale dominio e rappresentala graficamente.

e) Calcola $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ e $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

$\left[\text{a) } 2\pi; \text{ d) no; in } \left[-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5}{6}\pi\right] \text{ è invertibile e } f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x-2}{3}\right) + \dfrac{\pi}{3}; \text{ e) } \dfrac{1}{2}, -1\right]$

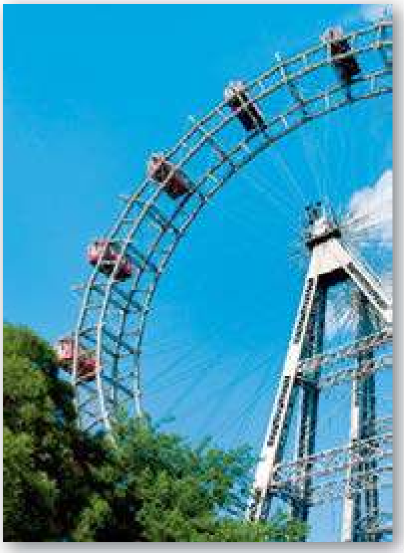
497 Trova per quale valore di a il periodo della funzione $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{3a}{2}x + \pi\right)$ è $\dfrac{\pi}{2}$, e poi rappresentala graficamente. $\left[a = \dfrac{4}{3}\right]$

498 Come nell'esercizio precedente, ma con la funzione $y = \cos\left(\dfrac{k}{4}x - 1\right)$ e con periodo $\dfrac{3}{2}\pi$. $\left[k = \dfrac{16}{3}\right]$

REALTÀ E MODELLI

1 **La ruota panoramica**

Nel 1897 fu costruita a Vienna la Riesenrad, una ruota panoramica alta 65 metri tuttora esistente e in funzione, in occasione delle celebrazioni dei 50 anni di regno dell'imperatore Francesco Giuseppe I.
Il punto più basso dista da terra 4 metri e impiega circa 4 minuti per fare un giro completo.



- Posiziona il sistema di riferimento cartesiano nel centro della ruota ed esprimi le funzioni che descrivono l'ascissa e l'ordinata della posizione di un passeggero in funzione dell'angolo α formato dal raggio della ruota e dalla verticale (in modo che alla partenza l'angolo sia nullo e supponendo che la ruota giri in senso antiorario).
- Posiziona ora il sistema di riferimento cartesiano in modo che l'asse x coincida con la linea del terreno e l'asse y passi per il centro della ruota. Esprimi la funzione che descrive l'altezza del passeggero rispetto al terreno, sempre in relazione all'angolo α, e rappresenta il grafico di tale funzione.
- Esprimi l'altezza del passeggero trovata al punto precedente in funzione del tempo, anziché dell'angolo.
- A che altezza dal suolo si trova il passeggero dopo 30 secondi dalla partenza?

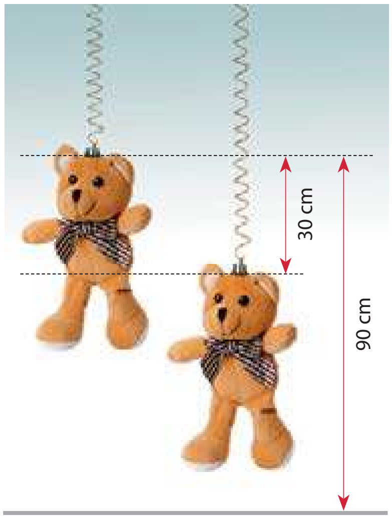
2 **La marea**

La marea è un moto periodico di oceani e mari che si innalzano e abbassano anche di 10-15 metri, solitamente ogni circa sei ore. L'ampiezza (detta *altezza dell'onda di marea*, uguale al dislivello tra bassa e alta marea) dipende dalla conformazione della costa e del terreno.
Al molo di un villaggio in Bretagna una tabella riporta giorno per giorno gli orari della marea e precisa che l'altezza dell'acqua sul pilone del molo varia da 0,8 a 9,5 m. Per un certo giorno sono segnati i seguenti orari: alta marea ore 4:03; bassa marea ore 10:14; alta marea ore 16:25; bassa marea ore 22:36.

- Determina l'altezza media dell'acqua sul pilone, l'ampiezza della variazione e il periodo dell'onda di marea di quel giorno.
- La variazione dell'altezza del livello dell'acqua nel tempo può essere descritta da una funzione goniometrica; scrivi l'equazione di tale funzione fissando il tempo 0 in corrispondenza delle ore 4:03 e il livello 0 in corrispondenza dell'altezza media dell'acqua.
- Cambia il sistema di riferimento mettendo il livello 0 in corrispondenza del fondo del mare e il tempo 0 in corrispondenza dell'ora 0 della notte (esprimi il tempo in minuti) e rappresentane il grafico.

3 **Il pupazzetto a molla**

Roberto gioca con un pupazzetto a molla facendolo oscillare verticalmente, partendo da una posizione di equilibrio a un'altezza di 90 cm dal pavimento. Supponiamo che per effettuare un'oscillazione completa, di ampiezza 30 cm, e ritornare nella posizione iniziale impieghi 3 secondi.



- Esprimi mediante una funzione goniometrica la variazione dell'altezza dal suolo del pupazzetto in funzione del tempo e rappresenta il grafico della funzione.
- Quale posizione occupa il pupazzetto dopo 2 secondi?

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: www.zanichellitest.it

1 Delle seguenti affermazioni relative alla funzione $y = \operatorname{arcsen}(\sqrt{x} - 1)$ una sola è *falsa*. Quale?

A Il dominio è $0 \le x \le 4$.

B Il codominio è $[-1; 1]$.

C La sua funzione inversa è $y = (1 + \operatorname{sen} x)^2$.

D La funzione è positiva per $1 < x \le 4$.

E La funzione interseca l'asse y in $\left(0; -\frac{\pi}{2}\right)$.

2 Indica quale delle seguenti proposizioni è *vera*.

A Se $\operatorname{sen}\alpha < 0$ e $\operatorname{cotg}\alpha < 0$, allora α ha il lato termine nel terzo quadrante.

B Se $\operatorname{tg}^2\alpha = -\operatorname{tg}\alpha$ e $\alpha \ne 0$, allora il lato termine di α è nel secondo o nel quarto quadrante.

C Se $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, allora $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{7}{2}}$.

D Se $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{4}$ e il suo lato termine appartiene al secondo quadrante, allora $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$.

E Se $\operatorname{tg}\alpha = -6$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, allora

$$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{6\sqrt{7}}{7}.$$

3 Le seguenti proposizioni sono tutte vere *tranne* una. Quale?

A La funzione $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$ è invertibile nell'intervallo $\left[-\frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi\right]$.

B La funzione inversa di $y = 2\operatorname{tg} 2x$ ha equazione $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

C $(\operatorname{sen} x)^{-1} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

D $\frac{1}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}\sec 2x$.

E La funzione $y = \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{x^2+1}$ ha per dominio $\mathbb{R}$.

4 La funzione $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{4}{3}x + \pi\right)$ ha periodo:

A $\frac{1}{2}$. B $\frac{3}{4}\pi$. C $\frac{3}{2}\pi$. D 2π. E $\frac{4}{3}$.

5 Quale fra le seguenti funzioni *non* è simmetrica rispetto all'origine?

A $y = \operatorname{sen} x$

B $y = \operatorname{arctg} x$

C $y = \operatorname{arcsen} x$

D $y = \operatorname{tg} x$

E $y = -\cos x$

6 Quale delle seguenti funzioni ha il grafico della figura?

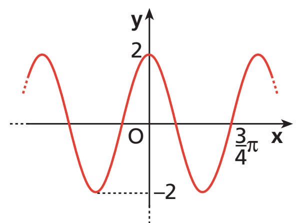
A $y = 2\operatorname{sen} 2x$

B $y = 2\operatorname{sen} x$

C $y = 4\cos 2x$

D $y = 2\cos 2x$

E $y = 2\operatorname{sen}(x + \pi)$



7 L'espressione

$$\frac{1}{\sec^2\alpha} + \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \operatorname{tg}^2\alpha$$

è equivalente a:

A $1 - \operatorname{tg}^2\alpha$.

B $\operatorname{cosec}^2\alpha$.

C $\sec^2\alpha$.

D $\frac{1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha}{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\sec^2\alpha}$.

E $\frac{1 + \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

8 Il grafico della funzione

$$y = -3 + 2\cos\left(\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$$

A interseca l'asse y nel punto $(0; 4)$.

B ha codominio $[-4; -1]$.

C ha periodo $T = \frac{8}{3}\pi$.

D passa per il punto $(3\pi; -2)$.

E è simmetrico rispetto all'asse y.

QUESITI

9 Confronta le funzioni $f_1(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)$ e $f_2(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$, precisando per ciascuna il dominio e il codominio, sottolineando analogie e differenze dei rispettivi grafici.

$\left[f_1(x) = x, D = C = [-1; 1];\ f_2(x) = x \text{ solo nell'intervallo} \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], D: \mathbb{R}, C: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right]$

10 Dimostra che per qualunque $x \in \mathbb{R}$ vale la relazione:

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

11 Dimostra che il periodo della funzione $y = A \operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$ è $\frac{\pi}{\omega}$.

12 Verifica che per $-1 < x < 1$ è $\operatorname{tg} \operatorname{arcsen} x = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

13 Se $\operatorname{tg}\alpha$ e $\operatorname{tg}\beta$ sono radici di $x^2 - px + q = 0$ e $\operatorname{cotg}\alpha$ e $\operatorname{cotg}\beta$ sono radici di $x^2 - rx + s = 0$, quanto vale il prodotto rs espresso in funzione di p e q?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria,* 2004, *quesito* 7)

$\left[\frac{p}{q^2}\right]$

PROBLEMI

14 Data la funzione $f(x) = \frac{a}{2} + \frac{4}{\pi} \operatorname{arcsen}(x + 1)$:

a) trova a in modo che il suo grafico passi per $(0; 5)$;
b) determina il dominio e il codominio della funzione f_1 ottenuta per il valore di a del punto precedente;
c) rappresenta graficamente f_1;
d) determina il punto di intersezione del suo grafico con l'asse y;
e) traccia il grafico di $f_1(|x|) - 2$.

[a) $a = 6$; b) $D: [-2; 0]$, $C: [1; 5]$; d) $(0; 5)$]

15 Data la funzione

$$y = \frac{-2(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + 2}{\operatorname{sen} x}:$$

a) verifica se è funzione pari o dispari;
b) rappresentala graficamente;
c) determina il suo periodo;
d) rappresenta $|f(x)| + 1$;
e) rappresenta $\frac{1}{f(x)}$.

[a) pari; c) 2π]

16 a) Rappresenta graficamente la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \text{arcsen}|x| & \text{se } x \leq 0 \\ |\sec x| + 3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

b) Determina il suo dominio e il suo codominio.

c) Indica l'insieme più ampio in cui la funzione è invertibile, determina l'espressione algebrica di f^{-1} e rappresentala graficamente.

$$\left[\text{b) } D: [-1; +\infty[, \text{ con } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; C: \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup [4; +\infty[; \text{ c)} \left[-1; \frac{\pi}{2}\right[; \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} -\text{sen}\, x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \arccos\left(\frac{1}{x-3}\right) & \text{se } x \geq 4 \end{cases}\right]$$

17 a) Trova il dominio della funzione: $y = f(x) = \text{arcsen}\left|\frac{2x-1}{x}\right| + \sqrt{\text{arctg}\,(2x-1)}$.

b) Calcola $f\left(\frac{1}{2}\right)$ e $f(1)$.

c) Considera la funzione:

$$y = g(x) = a + b \arccos\sqrt{\frac{x-1}{x}}.$$

Per quali valori dei parametri a e b il suo grafico interseca quello di f nel punto di ascissa 1 e taglia l'asse x nel punto di ascissa 2?

d) Determina il dominio di g.

$$\left[\text{a) } \left[\frac{1}{2}; 1\right]; \text{ b) } 0; \frac{1}{2}(\pi + \sqrt{\pi}); \text{ c) } a = -\frac{\pi + \sqrt{\pi}}{2}, b = \frac{2(\pi + \sqrt{\pi})}{\pi}; \text{ d) } [1; +\infty[\right]$$

18 Considera la funzione:

$y = a + b\,\text{arcsen}\,[c(x + d)]$, con b e c positivi.

a) Determina i parametri a, b, c, d in modo che abbia dominio $\left[-\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right]$ e codominio $[0; 2\pi]$ e che il suo grafico passi per $P\left(\frac{5}{2}; \pi\right)$.

b) Esegui una traslazione in modo che il grafico della funzione $f(x)$ ottenuta abbia centro di simmetria nell'origine.

c) Traccia il grafico di $\frac{1}{f(x)}$.

d) Trova l'equazione della funzione $f^{-1}(x)$ inversa di f e disegna il suo grafico.

$$\left[\text{a) } y = 2\text{arcsen}\,\frac{1}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right) + \pi; \text{ b) } y = 2\text{arcsen}\,\frac{1}{3}x; \text{ d) } y = 3\,\text{sen}\,\frac{x}{2}\right]$$

19 Data la funzione $y = a\,\text{sen}\,bx + c$, con a e b positivi:

a) trova a, b, c in modo che il periodo sia 3π e il codominio $\left[-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right]$;

b) esegui una traslazione di vettore $\vec{v}(0; -1)$ e determina i punti di intersezione con l'asse x del grafico della funzione $f(x)$ ottenuta, nell'intervallo $[-\pi; 2\pi]$;

c) traccia il grafico di $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ indicando il suo dominio e il suo codominio.

$$\left[\text{a) } y = \frac{3}{2}\text{sen}\,\frac{2}{3}x + 1; \text{ b) } f(x) = \frac{3}{2}\text{sen}\,\frac{2}{3}x; x = 0 \text{ e } x = \frac{3\pi}{2}; \text{ c) } D: \left]3k\pi; \frac{3}{2}\pi + 3k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}, C: \left[\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right[\right]$$

20 Rappresenta, nello stesso sistema di assi cartesiani ortogonali, le funzioni:

$$f(x) = \operatorname{arcsen}|x|, \qquad g(x) = 1 - x^2.$$

a) Dai grafici deduci il numero delle soluzioni dell'equazione $\operatorname{arcsen}|x| = 1 - x^2$.

b) Generalizzando, discuti per quali valori di k l'equazione $\operatorname{arcsen}|x| = k - x^2$ ammette soluzioni.

c) Traccia i grafici di $\frac{1}{f(x)}$ e di $\frac{1}{[g(x)]^2}$.

$\left[\text{b) per } k = 0 \text{ una soluzione, per } 0 < k \leq 1 + \frac{\pi}{2} \text{ due soluzioni}\right]$

21 Data la funzione

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(x) + 1,$$

rappresentala in un sistema di assi cartesiani indicando dominio e codominio.

a) Determina la funzione omografica

$$g(x) = \frac{ax + b}{x}$$

tale che il suo grafico abbia come asintoti le rette $x = 0$ e $y = 1$ e passi per il punto $(1; 0)$.

b) Utilizzando i grafici delle funzioni f e g, determina il numero delle soluzioni delle equazioni:

$$f(x) = g(x),\ f(x) = |g(x)|,\ f(x) = g(|x|),\ f(|x|) = g(|x|).$$

$\left[\text{a) } g(x) = \frac{x-1}{x}\text{; b) numero soluzioni: 0, 1, 1, 0}\right]$

22 Data la funzione $y = a\operatorname{tg}(bx)$, esprimi, in funzione di a e b diversi da 0, il periodo e gli asintoti paralleli all'asse y.

a) Determina la funzione di periodo $T = 2\pi$, passante per $\left(\frac{\pi}{2}; -2\right)$ e con $b > 0$.

b) Rappresenta la funzione trovata in un sistema di assi cartesiani ortogonali.

c) Come potresti modificare la legge per rendere il grafico simmetrico rispetto all'asse y?

d) Determina la funzione inversa indicando dominio e codominio.

$\left[T = \frac{\pi}{|b|}; x = \frac{\pi}{2b} + k\frac{\pi}{b}\text{; a) } y = -2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\text{; c) per esempio: } y = -2\operatorname{tg}\frac{|x|}{2}\text{; d) } y = -2\operatorname{arctg}\frac{x}{2}; D\colon \mathbb{R}, C\colon]-\pi; \pi[\right]$

23 È data la funzione $f(x) = a + \operatorname{arctg}(x + 1)$.

a) Calcola il valore di a in modo che la funzione passi per il punto $(-2; 0)$, quindi risolvi l'equazione:

$$f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

b) Determina dominio e codominio; nello stesso riferimento disegna i grafici di $f(x)$ e di $f(|x|)$.

c) Per quali valori di x risulta $f(x) = f(|x|)$?

$\left[\text{a) } a = \frac{\pi}{4}, x = 0\text{; b) } D\colon \mathbb{R}, C\colon \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi\right[\text{; c) } x \geq 0\right]$

24 Considera la generica funzione $y = a\sec px$, con $a \neq 0 \wedge p \neq 0$.

a) Indica il periodo T e le equazioni degli asintoti.

b) Determina la particolare funzione y_1 di periodo $T = \frac{\pi}{2}$ e passante per il punto $\left(\frac{\pi}{6}; -1\right)$; rappresenta il suo grafico.

c) Trova un intervallo in cui y_1 sia invertibile, deduci l'espressione della funzione inversa e il corrispondente dominio. Rappresenta poi il grafico della funzione inversa.

$\left[\text{a) } T = \frac{2\pi}{p}, x = \frac{\pi}{2p} + k\frac{\pi}{p}\text{; b) } y_1 = \frac{1}{2}\sec 4x\text{; c) } \left[0; \frac{\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}\right], (y_1)^{-1} = \frac{1}{4}\arccos\frac{1}{2x}, D\colon x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{2}\right]$

CAPITOLO **11**

١١
[numerazione araba]

११
[numerazione devanagari]

十一
[numerazione cinese]

LE FORMULE GONIOMETRICHE

PRIMA TYCHO, POI ENRICO Fin dal XVI secolo, nei principali osservatori astronomici e, in particolare, in quello danese di Tycho Brahe (qui raffigurato nel monumento collocato al Tycho Brahe Museum, isola di Ven, Svezia) venivano utilizzate formule goniometriche e tavole di seni e coseni per effettuare calcoli astronomici. Qualcosa del genere l'ha fatto anche Enrico Fermi, che nel 1918, nella sua prova di ammissione alla Scuola Normale di Pisa, calcolò tg 35° senza tavole…

Com'è possibile trovare tg 35° senza strumenti di calcolo e tavole?

▶ **La risposta a pag. 720**

1. GLI ANGOLI ASSOCIATI

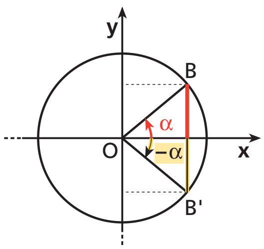
Come vedremo, la caratteristica di questi angoli è di avere i valori delle funzioni goniometriche uguali in valore assoluto a quelli di α.

Consideriamo un angolo α. Chiamiamo **angoli associati** (o **archi associati**) ad α i seguenti angoli:

$$-\alpha,\ \frac{\pi}{2}-\alpha,\ \frac{\pi}{2}+\alpha,\ \pi-\alpha,\ \pi+\alpha,\ \frac{3}{2}\pi-\alpha,\ \frac{3}{2}\pi+\alpha,\ 2\pi-\alpha.$$

Le funzioni goniometriche di angoli associati

Determiniamo seno, coseno, tangente e cotangente degli angoli associati ad α, in funzione di seno, coseno, tangente e cotangente dell'angolo α.



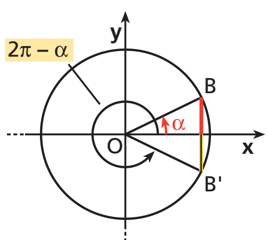
a α e $-\alpha$

- I due angoli α e $-\alpha$ (figura *a*) sono congruenti e orientati in verso opposto, ossia sono *angoli opposti*:

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = y_{B'} = -y_B = -\operatorname{sen}\alpha,$$
$$\cos(-\alpha) = x_{B'} = x_B = \cos\alpha.$$

Pertanto:

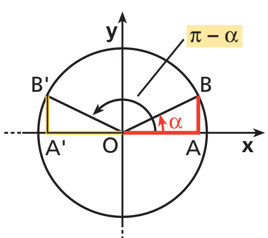
$$\mathbf{sen}\,(-\alpha) = -\mathbf{sen}\,\alpha \qquad \mathbf{tg}\,(-\alpha) = \frac{-\mathbf{sen}\,\alpha}{\mathbf{cos}\,\alpha} = -\mathbf{tg}\,\alpha$$
$$\mathbf{cos}\,(-\alpha) = \mathbf{cos}\,\alpha \qquad \mathbf{cotg}\,(-\alpha) = \frac{\mathbf{cos}\,\alpha}{-\mathbf{sen}\,\alpha} = -\mathbf{cotg}\,\alpha$$



b α e $2\pi-\alpha$

- Gli angoli α e $2\pi-\alpha$ sono *esplementari*, ossia la loro somma è un angolo giro. Per essi valgono considerazioni analoghe a quelle precedenti (figura *b*), quindi:

$$\mathbf{sen}\,(2\pi-\alpha) = -\mathbf{sen}\,\alpha \qquad \mathbf{tg}\,(2\pi-\alpha) = -\mathbf{tg}\,\alpha$$
$$\mathbf{cos}\,(2\pi-\alpha) = \mathbf{cos}\,\alpha \qquad \mathbf{cotg}\,(2\pi-\alpha) = -\mathbf{cotg}\,\alpha$$



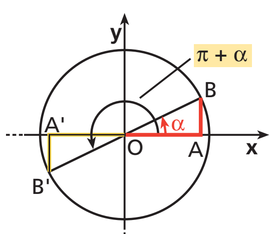
c α e $\pi-\alpha$

- Gli angoli α e $\pi-\alpha$ sono *supplementari*.
  I triangoli rettangoli OAB e $OA'B'$ (figura *c*) sono congruenti perché hanno congruenti l'ipotenusa e l'angolo acuto α:

$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = y_{B'} = y_B = \operatorname{sen}\alpha,$$
$$\cos(\pi-\alpha) = x_{B'} = -x_B = -\cos\alpha.$$

Pertanto:

$$\mathbf{sen}\,(\pi-\alpha) = \mathbf{sen}\,\alpha \qquad \mathbf{tg}\,(\pi-\alpha) = \frac{\mathbf{sen}\,\alpha}{-\mathbf{cos}\,\alpha} = -\mathbf{tg}\,\alpha$$
$$\mathbf{cos}\,(\pi-\alpha) = -\mathbf{cos}\,\alpha \qquad \mathbf{cotg}\,(\pi-\alpha) = \frac{-\mathbf{cos}\,\alpha}{\mathbf{sen}\,\alpha} = -\mathbf{cotg}\,\alpha$$



d α e $\pi+\alpha$

- Gli angoli α e $\pi+\alpha$ *differiscono di un angolo piatto* (figura *d*). Con considerazioni analoghe a quelle del caso precedente otteniamo:

$$\mathbf{sen}\,(\pi+\alpha) = -\mathbf{sen}\,\alpha \qquad \mathbf{tg}\,(\pi+\alpha) = \frac{-\mathbf{sen}\,\alpha}{-\mathbf{cos}\,\alpha} = \mathbf{tg}\,\alpha$$
$$\mathbf{cos}\,(\pi+\alpha) = -\mathbf{cos}\,\alpha \qquad \mathbf{cotg}\,(\pi+\alpha) = \frac{-\mathbf{cos}\,\alpha}{-\mathbf{sen}\,\alpha} = \mathbf{cotg}\,\alpha$$

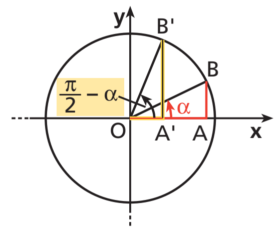
- Gli angoli α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$ sono *complementari*.

  Nel triangolo rettangolo $OA'B'$ (figura *e*) risulta $A'\widehat{O}B' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e $O\widehat{B'}A' = \alpha$, perché complementare del precedente.
  I triangoli OAB e $OA'B'$ sono congruenti perché hanno congruente l'ipotenusa e l'angolo acuto α, pertanto $OA \cong A'B'$ e $AB \cong OA'$:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = y_{B'} = x_B = \cos\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x_{B'} = y_B = \operatorname{sen}\alpha.$$

  Pertanto:

$$\mathbf{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathbf{cos}\,\alpha \qquad \mathbf{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\mathbf{cos}\,\alpha}{\mathbf{sen}\,\alpha} = \mathbf{cotg}\,\alpha$$
$$\mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathbf{sen}\,\alpha \qquad \mathbf{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\mathbf{sen}\,\alpha}{\mathbf{cos}\,\alpha} = \mathbf{tg}\,\alpha$$



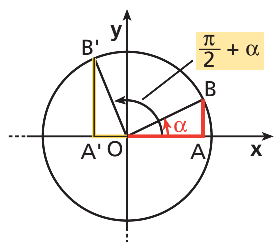
e α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$

- Gli angoli α e $\frac{\pi}{2} + \alpha$ *differiscono di un angolo retto*.

  Nel triangolo rettangolo $OA'B'$ (figura *f*) risulta $A'\widehat{O}B' = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e $A'\widehat{B'}O = \alpha$.

  Quindi, in analogia con il caso precedente, tenuto conto che $A'B'O$ è nel secondo quadrante, otteniamo:

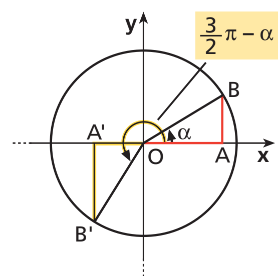
$$\mathbf{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \mathbf{cos}\,\alpha \qquad \mathbf{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\mathbf{cos}\,\alpha}{-\,\mathbf{sen}\,\alpha} = -\,\mathbf{cotg}\,\alpha$$
$$\mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\,\mathbf{sen}\,\alpha \qquad \mathbf{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{-\,\mathbf{sen}\,\alpha}{\mathbf{cos}\,\alpha} = -\,\mathbf{tg}\,\alpha$$



f α e $\frac{\pi}{2} + \alpha$

- Se consideriamo α e $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ (figura *g*), $A'\widehat{O}B' = \frac{3}{2}\pi - \alpha - \pi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e $A'\widehat{B'}O = \alpha$, quindi i triangoli AOB e $A'OB'$ sono congruenti. Per *angoli la cui somma è* $\frac{3}{2}\pi$ otteniamo quindi:

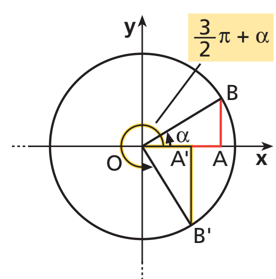
$$\mathbf{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\,\mathbf{cos}\,\alpha \qquad \mathbf{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \frac{-\,\mathbf{cos}\,\alpha}{-\,\mathbf{sen}\,\alpha} = \mathbf{cotg}\,\alpha$$
$$\mathbf{cos}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\,\mathbf{sen}\,\alpha \qquad \mathbf{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \frac{-\,\mathbf{sen}\,\alpha}{-\,\mathbf{cos}\,\alpha} = \mathbf{tg}\,\alpha$$



g α e $\frac{3}{2}\pi - \alpha$

- Con ragionamenti analoghi, per α e $\frac{3}{2}\pi + \alpha$ (figura *h*), ossia *angoli la cui differenza è* $\frac{3}{2}\pi$, otteniamo:

$$\mathbf{sen}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\,\mathbf{cos}\,\alpha \qquad \mathbf{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \frac{-\,\mathbf{cos}\,\alpha}{\mathbf{sen}\,\alpha} = -\,\mathbf{cotg}\,\alpha$$
$$\mathbf{cos}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \mathbf{sen}\,\alpha \qquad \mathbf{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \frac{\mathbf{sen}\,\alpha}{-\,\mathbf{cos}\,\alpha} = -\,\mathbf{tg}\,\alpha$$



h α e $\frac{3}{2}\pi + \alpha$

La riduzione al primo quadrante

Utilizzando le relazioni stabilite per gli angoli associati, è possibile determinare le funzioni goniometriche di qualunque angolo, conoscendo le funzioni goniometriche degli angoli che appartengono al primo quadrante.
Il procedimento relativo viene detto **riduzione al primo quadrante**.

ESEMPIO

Riduciamo al primo quadrante sen 110°.
Poiché 110° = 90° + 20°, possiamo scrivere:

$$\text{sen } 110° = \text{sen } (90° + 20°) = \cos 20°.$$

2. LE FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Iniziamo con la formula di sottrazione del coseno perché è la più semplice da dimostrare.

La formula di sottrazione del coseno

Consideriamo $\cos(\alpha - \beta)$. **Non** è vero che:

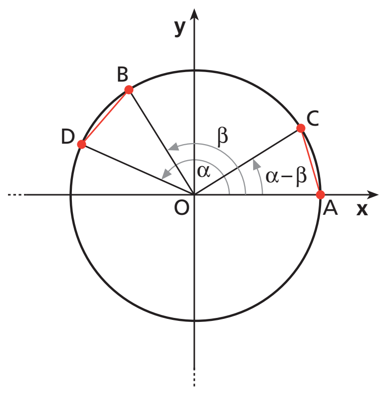
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha - \cos\beta. \qquad \text{FALSO!}$$

Per esempio, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \neq \cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{6}$.

Infatti, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$,

invece: $\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{6} = 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Esiste tuttavia una relazione fra $\cos(\alpha - \beta)$ e i seni e i coseni di α e di β. Cerchiamola.
Consideriamo due angoli $D\widehat{O}A$ di ampiezza α e $B\widehat{O}A$ di ampiezza β, con $\alpha > \beta$. La loro differenza è $D\widehat{O}B = \alpha - \beta$ (figura 1).
Consideriamo l'angolo $C\widehat{O}A = \alpha - \beta$, che ha il primo estremo nell'origine A degli archi.
I punti B, C e D hanno allora coordinate $B(\cos\beta; \text{sen }\beta)$, $C(\cos(\alpha - \beta); \text{sen }(\alpha - \beta))$, $D(\cos\alpha; \text{sen }\alpha)$.



► **Figura 1** Le corde *CA* e *DB* sono congruenti perché corrispondenti di angoli al centro congruenti.

Essendo $D\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}A$ entrambi di ampiezza $\alpha - \beta$, le corde CA e DB sono congruenti perché corrispondenti di angoli al centro congruenti. Applicando la formula della distanza tra due punti, otteniamo:

$$\overline{CA}^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = [\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + \text{sen}^2(\alpha - \beta),$$
$$\overline{DB}^2 = (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\text{sen }\alpha - \text{sen }\beta)^2.$$

Uguagliando le due espressioni e sviluppando i calcoli otteniamo:

$$\cos^2(\alpha-\beta)+1-2\cos(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)=$$
$$=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

La somma dei quadrati del seno e del coseno di un angolo è 1 (prima relazione fondamentale), quindi

$$2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

da cui ricaviamo:

$$\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}.$$

ESEMPIO

Riprendiamo l'esempio iniziale e calcoliamo $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ come $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{6}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=$$
$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

La formula di addizione del coseno

Possiamo scrivere:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta).$$

- Applichiamo la formula di sottrazione del coseno.

Essendo $\cos(-\beta)=\cos\beta$ e $\operatorname{sen}(-\beta)=-\operatorname{sen}\beta$:

$$\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}.$$

La formula di addizione del seno

Poiché, per le formule degli angoli associati, è

$$\operatorname{sen}x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

considerando l'angolo $x=\alpha+\beta$, abbiamo:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}\beta.$$

- Applichiamo la formula di sottrazione del coseno.

Poiché $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$:

$$\boldsymbol{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}.$$

La formula di sottrazione del seno

● Applichiamo la formula di addizione del seno.

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}[\alpha + (-\beta)] = \text{sen}\,\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha\,\text{sen}(-\beta).$$

Essendo $\text{sen}(-\beta) = -\text{sen}\,\beta$ e $\cos(-\beta) = \cos\beta$:

$$\mathbf{sen}(\alpha - \beta) = \mathbf{sen}\,\alpha \cos\beta - \cos\alpha\,\mathbf{sen}\,\beta.$$

Le formule di addizione e sottrazione della tangente

Calcoliamo tg$(\alpha + \beta)$

Essendo $\text{tg}\,x = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}$, si ha

● Applichiamo le formule di addizione del seno e del coseno.

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta},$$

con la condizione di esistenza della tangente: $(\alpha + \beta) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Dividiamo numeratore e denominatore per $\cos\alpha\cos\beta$, con la condizione $\cos\alpha \neq 0 \rightarrow \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi$, $\cos\beta \neq 0 \rightarrow \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k_2\pi$:

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}.$$

Pertanto:

$$\mathbf{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathbf{tg}\,\alpha + \mathbf{tg}\,\beta}{\mathbf{1} - \mathbf{tg}\,\alpha\,\mathbf{tg}\,\beta},$$

con $\alpha + \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi$, $\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k_2\pi$.

Calcoliamo tg$(\alpha - \beta)$

● Trasformiamo la differenza in una somma in modo da applicare la formula di $\text{tg}(\alpha + \beta)$.

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \text{tg}[\alpha + (-\beta)] = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}(-\beta)}{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}(-\beta)} = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}.$$

Tenendo conto delle condizioni di esistenza di $\text{tg}\,\alpha$, $\text{tg}\,\beta$ e $\text{tg}(\alpha - \beta)$:

$$\mathbf{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathbf{tg}\,\alpha - \mathbf{tg}\,\beta}{\mathbf{1} + \mathbf{tg}\,\alpha\,\mathbf{tg}\,\beta},$$

con $\alpha - \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi$, $\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k_2\pi$.

Il grafico di $y = a \operatorname{sen} x + b \cos x$ e l'angolo aggiunto

La conoscenza delle formule di addizione e sottrazione permette di studiare il grafico di una funzione del tipo $y = a \operatorname{sen} x + b \cos x$ riconducendolo a quello di una funzione sinusoidale del tipo $y = r \operatorname{sen}(x + \alpha)$. Dobbiamo risolvere il seguente problema: data l'espressione $a \operatorname{sen} x + b \cos x$, cerchiamo un numero r positivo e un angolo α tali che:

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = r \operatorname{sen}(x + \alpha).$$

L'angolo α viene detto **angolo aggiunto**.
Sviluppiamo il secondo membro. Per la formula di addizione del seno:

$$r \operatorname{sen}(x + \alpha) = \underline{r} \operatorname{sen} x \underline{\cos \alpha} + \underline{r} \cos x \underline{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Perché l'espressione ottenuta coincida con $a \operatorname{sen} x + b \cos x$, deve essere:

$$\begin{cases} a = r \cos \alpha \\ b = r \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$$

Elevando al quadrato i membri delle due equazioni e sommando, si ha:

$$a^2 + b^2 = r^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) \rightarrow a^2 + b^2 = r^2 \rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dividendo membro a membro la seconda equazione per la prima, si ha:

$$\frac{b}{a} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Per determinare α teniamo conto che, date le relazioni del sistema, a ha lo stesso segno di $\cos \alpha$ e b lo stesso di $\operatorname{sen} \alpha$:

segno di a e di $\cos \alpha$	segno di b e di $\operatorname{sen} \alpha$	quadrante del lato termine di α
+	+	I
+	–	IV
–	–	III
–	+	II

Come esempio, studiamo il grafico di $y = \operatorname{sen} x - \cos x$.
Si ha $\operatorname{sen} x - \cos x = r \operatorname{sen}(x + \alpha)$ quando:

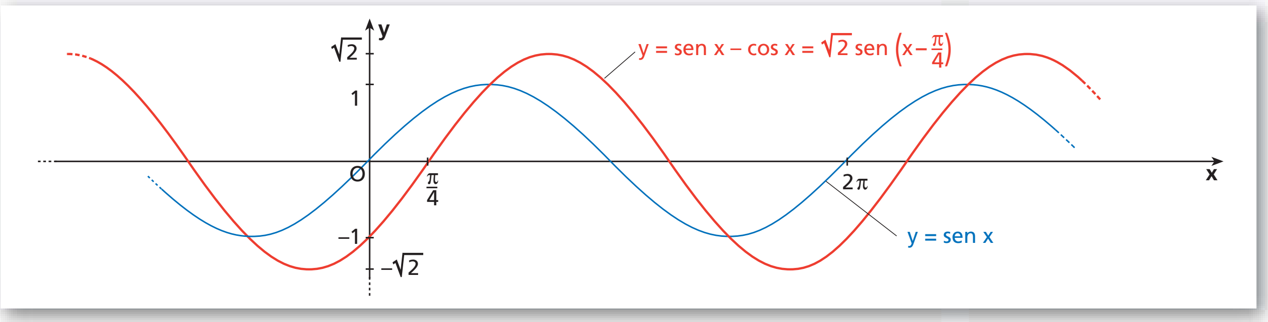
$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-1}{1} = -1$ con $\operatorname{sen} \alpha$ negativo e $\cos \alpha$ positivo, cioè il lato termine di α è nel IV quadrante. Quindi $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

La funzione $y = \operatorname{sen} x - \cos x$ si può scrivere come $y = \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Il suo grafico si ottiene da quello di $y = \operatorname{sen} x$ con una traslazione di vettore $\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ e una dilatazione verticale con $n = \sqrt{2}$.

● Analogamente, potremmo utilizzare:
$r \cos(x + \alpha)$.

▼ Figura 2



L'angolo fra due rette

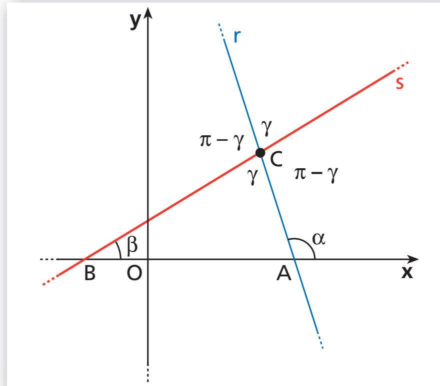
Consideriamo nel piano cartesiano due rette, r e s, incidenti e non perpendicolari, di equazioni:

$$y = mx + q \text{ e } y = m'x + q'.$$

Sappiamo che $m = \operatorname{tg}\alpha$ e $m' = \operatorname{tg}\beta$, dove α e β sono gli angoli che le rette formano con l'asse x (figura 3).
Vogliamo trovare l'angolo γ formato dalle due rette. Poiché α è angolo esterno del triangolo ABC, esso è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti β e γ, quindi

● Gli angoli formati dalle due rette r e s sono quattro, a due a due opposti al vertice e a due a due supplementari, pertanto basta conoscere uno di questi angoli perché siano noti tutti gli altri.

▶ Figura 3

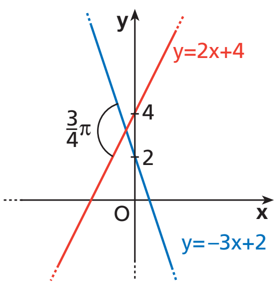


$$\alpha = \beta + \gamma \rightarrow \gamma = \alpha - \beta,$$

da cui:

$$\boxed{\operatorname{tg}\gamma} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \boxed{\frac{m - m'}{1 + mm'}}.$$

Se il valore della tangente è positivo, l'angolo γ determinato è l'angolo acuto fra le due rette, altrimenti γ è l'angolo ottuso.



ESEMPIO

Determiniamo l'angolo fra le rette di equazioni $y = 2x + 4$ e $y = -3x + 2$:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2+3}{1-6} = \frac{5}{-5} = -1 \rightarrow \gamma = \frac{3}{4}\pi.$$

Gli angoli fra le rette sono $\frac{3}{4}\pi$ e $\pi - \frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$.

Il coefficiente angolare di rette perpendicolari

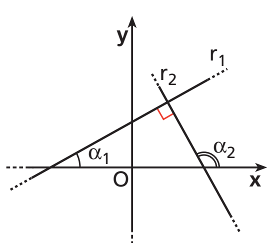
● r_1 e r_2 non devono essere parallele agli assi cartesiani.

Consideriamo r_1 e r_2 due rette fra loro perpendicolari e indichiamo con α_1 e α_2 gli angoli che esse formano con il semiasse positivo delle x.
Analogamente al caso precedente, α_2 è angolo esterno di un triangolo, quindi possiamo scrivere

● Per gli angoli associati:
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{cotg}\alpha$.

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2},$$

da cui si ha: $\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotg}\alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}$.



$r_1 \perp r_2 \rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$

Poiché $m = \operatorname{tg}\alpha$, ritroviamo la condizione nota di perpendicolarità:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

Due rette sono perpendicolari quando i loro coefficienti angolari sono uno l'opposto del reciproco dell'altro.

3. LE FORMULE DI DUPLICAZIONE

Consideriamo sen 2α. **Non** è vero che:

$$\text{sen } 2\alpha = 2 \cdot \text{sen } \alpha. \qquad \text{FALSO!}$$

Per esempio:

$$\text{sen } 2 \cdot \frac{\pi}{4} \neq 2 \,\text{sen} \frac{\pi}{4}.$$

Infatti,

$$\text{sen } 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \text{sen} \frac{\pi}{2} = 1,$$

mentre

$$2 \cdot \text{sen} \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Quindi, in generale, sen $2\alpha \neq 2$ sen α e per il calcolo dobbiamo ricorrere a una formula detta *di duplicazione*.

Le **formule di duplicazione** permettono di calcolare il seno, il coseno e la tangente di 2α conoscendo il valore del seno, coseno o tangente di α.

Ricaveremo queste formule applicando le formule di addizione, considerando l'angolo $2\alpha = \alpha + \alpha$.

● Utilizzeremo la convenzione secondo cui il simbolo di una funzione goniometrica davanti a più fattori riguarda tutto il prodotto. Per esempio:

$$\text{sen } 2\alpha = \text{sen}(2\alpha),$$
$$\cos \alpha\beta = \cos(\alpha\beta),$$
$$\text{tg } x\sqrt{x} = \text{tg}(x\sqrt{x}).$$

sen 2α

$$\text{sen } 2\alpha = \text{sen}(\alpha + \alpha) = \text{sen } \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \text{ sen } \alpha,$$

$$\boxed{\textbf{sen } \mathbf{2\alpha = 2 \,\textbf{sen}\, \alpha \cos \alpha}.}$$

● Utilizziamo la formula di addizione del seno.

cos 2α

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \text{sen } \alpha \text{ sen } \alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha.$$

Questa formula, ricordando che $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, può essere scritta anche nei seguenti modi:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = (1 - \text{sen}^2\alpha) - \text{sen}^2\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1.$$

In sintesi:

$$\boxed{\mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \textbf{sen}^2\alpha = } \begin{cases} \mathbf{1 - 2\,\textbf{sen}^2\alpha} \\ \mathbf{2\cos^2\alpha - 1} \end{cases}}$$

● Viene usata una di queste formule invece di un'altra equivalente ogni volta che è preferibile avere un'espressione in funzione del solo seno di un angolo o del solo coseno.

● Anche per il coseno, **non** è vero che quando l'angolo raddoppia, raddoppia anche il coseno:

$$\cos 2\alpha \neq 2\cos \alpha.$$

tg 2α

$$\text{tg } 2\alpha = \text{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg } \alpha \text{ tg } \alpha},$$

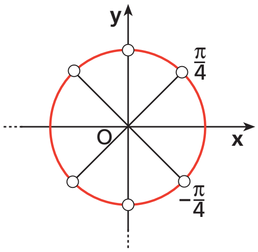
$$\boxed{\textbf{tg } \mathbf{2\alpha = \frac{2 \,\textbf{tg}\, \alpha}{1 - \textbf{tg}^2\alpha}}.}$$

● Anche per la tangente:

$$\text{tg } 2\alpha \neq 2 \text{ tg } \alpha.$$

- Mentre le formule di sen 2α e di cos 2α sono valide $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, quella di tg 2α vale solo se α soddisfa le seguenti condizioni:

esistenza di	condizione
tg 2α	$2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$
tg α	$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
denominatore	$\text{tg}\,\alpha \neq \pm 1 \rightarrow \alpha \neq \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$



In sintesi, la formula di tg 2α vale per: $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

- Essendo α uguale alla metà di 2α, si può anche dire che le formule di duplicazione forniscono le funzioni goniometriche di un angolo, note quelle della sua metà.

- Dalle formule $\cos 2\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$ e $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ si possono ricavare rispettivamente $\text{sen}^2\alpha$ e $\cos^2\alpha$:

$$\textbf{sen}^2\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1 - \cos 2\boldsymbol{\alpha}}}{\mathbf{2}},$$

$$\mathbf{cos}^2\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1 + \cos 2\boldsymbol{\alpha}}}{\mathbf{2}}.$$

Queste formule trasformano $\text{sen}^2\alpha$ e $\cos^2\alpha$ in funzioni lineari del coseno di 2α.
In generale, una **funzione lineare** nel seno e nel coseno è una funzione di primo grado rispetto a seno e coseno, ossia è del tipo $y = a\,\text{sen}\,x + b\cos x + c$.

Terminiamo fornendo un esempio di applicazione delle formule di duplicazione.

ESEMPIO

Calcoliamo sen 2α, cos 2α, tg 2α, sapendo che il lato termine dell'angolo α appartiene al secondo quadrante e $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

Si ha

$$\text{sen}\,\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha} = +\sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5},$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3}{4},$$

- Il seno è positivo perché l'angolo ha il lato termine nel secondo quadrante.

quindi:

$$\text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25},$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25},$$

$$\text{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha} = \frac{2\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\frac{9}{16}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{7} = -\frac{24}{7}.$$

4. LE FORMULE DI BISEZIONE

Le formule di bisezione permettono di scrivere le funzioni goniometriche dell'angolo $\frac{\alpha}{2}$ in funzione dell'angolo α. Per ricavarle è possibile usare le formule di duplicazione del coseno, scrivendo α come $2 \cdot \frac{\alpha}{2}$.

$$\cos\alpha = \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - 2\,\text{sen}^2\frac{\alpha}{2},$$

da cui, ricavando rispettivamente $\cos\frac{\alpha}{2}$ e $\text{sen}\frac{\alpha}{2}$:

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}, \qquad \boxed{\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}.$$

Ricaviamo ora la formula che esprime $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\boxed{\text{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \boxed{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}.$$

● La formula della tangente vale solo se:

$$1+\cos\alpha \neq 0 \rightarrow \cos\alpha \neq -1 \rightarrow \alpha \neq \pi + 2k\pi,$$

condizione necessaria anche per l'esistenza di $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$.

● In queste formule compare sempre il doppio segno. Nelle applicazioni dobbiamo sceglierne uno solo, in base al quadrante in cui si trova il lato termine dell'angolo $\frac{\alpha}{2}$.

● La formula di bisezione della tangente si può presentare in altre due forme, che generalmente risultano più comode perché sono razionali e non presentano il doppio segno $\pm$:

$$\boxed{\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{1+\cos\alpha}}, \qquad \text{con } \alpha \neq \pi + 2k\pi,$$

oppure

$$\boxed{\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}}, \qquad \text{con } \alpha \neq \pi + k\pi.$$

Dimostriamo la prima relazione:

$$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cancel{2}\,\frac{1+\cos\alpha}{\cancel{2}}} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Per esempio, calcoliamo $\text{sen}\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$ quando $\text{sen}\,\alpha = -\frac{12}{13}$ e $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Se $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, allora si ha $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3}{4}\pi$; quindi il lato termine di $\frac{\alpha}{2}$ appartiene al secondo quadrante, e avremo $\text{sen}\frac{\alpha}{2} > 0$ e $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$.

● Anche in questo caso:
$\text{sen}\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\text{sen}\,\alpha}{2}$,
$\cos\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\cos\alpha}{2}$,
$\text{tg}\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\text{tg}\,\alpha}{2}$.

● Per esempio, se il lato termine dell'angolo $\frac{\alpha}{2}$ si trova nel secondo quadrante, $\text{sen}\frac{\alpha}{2}$ è positivo, quindi sceglieremo il segno +, mentre $\cos\frac{\alpha}{2}$ è negativo, per cui sceglieremo il segno −.

● Moltiplichiamo e dividiamo per $2\cos\frac{\alpha}{2}$.

● Prova tu a dimostrare la seconda relazione.

Il valore del coseno di α è:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{144}{169}} = -\frac{5}{13}.$$

Quindi:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}} = -\sqrt{\frac{\cancel{8}^{4}}{13}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_{1}}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13},$$

$$\text{sen}\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{\cancel{18}^{9}}{13}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_{1}}} = \frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{8}{13}} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}.$$

- Il valore assoluto di $\cos\alpha$ si ricava con:

  $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

  Il segno $-$ deriva dal fatto che il lato termine di α è nel terzo quadrante.

- $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$ si può ricavare anche applicando la definizione:

  $$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{3\sqrt{13}}{13}}{-\frac{2\sqrt{13}}{13}} = -\frac{3}{2}.$$

5. LE FORMULE PARAMETRICHE

Le formule parametriche permettono di esprimere il seno e il coseno di un angolo α in funzione della tangente di $\frac{\alpha}{2}$.

Utilizziamo le formule di duplicazione del seno e del coseno, con $\alpha = 2\cdot\frac{\alpha}{2}$:

$$\text{sen}\,\alpha = 2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}. \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Dividiamo il secondo membro di entrambe per $\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1$:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad \cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Applichiamo la proprietà invariantiva delle frazioni dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2\frac{\alpha}{2}$:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\dfrac{2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}. \qquad \cos\alpha = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

- Occorre porre la condizione:

  $\cos^2\frac{\alpha}{2} \neq 0 \rightarrow$

  $\rightarrow \frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow$

  $\rightarrow \alpha \neq \pi + 2k\pi.$

Da cui:

$$\boldsymbol{\text{sen}\,\alpha = \frac{2\text{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}, \qquad \boldsymbol{\cos\alpha = \frac{1-\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}},$$

con $\alpha \neq \pi + 2k\pi$.

Spesso, per comodità, si pone $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$, per cui:

$$\mathbf{sen}\,\alpha = \frac{2t}{1+t^2}\,. \qquad \mathbf{cos}\,\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,.$$

Queste formule sono dette *parametriche* perché esprimono il seno e il coseno di un angolo in funzione dello stesso *parametro t*.
Vengono anche dette *formule razionali*.

ESEMPIO

Calcoliamo sen α e cos α, sapendo che $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$.

Posto $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t = 2$, si hanno:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{4}{1+4} = \frac{4}{5},$$

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-4}{1+4} = -\frac{3}{5}.$$

6. LE FORMULE DI PROSTAFERESI E DI WERNER

Le formule di prostaferesi

«Prostaferesi» deriva dal greco *prósth(esis)*, cioè «aggiunta», e *apháiresis*, cioè «sottrazione».

Le formule di prostaferesi permettono di trasformare la somma o la differenza di due funzioni goniometriche in un prodotto di funzioni goniometriche.
Ricaviamo tali formule utilizzando le formule di addizione e sottrazione del seno e del coseno.
Scriviamo le formule del seno:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

Sommiamo membro a membro:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta.$$

Sottraiamo membro a membro:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Scriviamo le formule del coseno:

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

Sommiamo membro a membro:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta.$$

Sottraiamo membro a membro:

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

● Ricaviamo α e β in funzione di p e q dal sistema:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases}$$
$$2\alpha = p+q \rightarrow$$
$$\rightarrow \alpha=\frac{p+q}{2};$$
$$\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases}$$
$$2\beta = p-q \rightarrow$$
$$\rightarrow \beta=\frac{p-q}{2}.$$

Poniamo $\alpha+\beta=p$ e $\alpha-\beta=q$, da cui ricaviamo $\alpha=\dfrac{p+q}{2}$ e $\beta=\dfrac{p-q}{2}$.

Sostituendo, nelle quattro relazioni ricavate, ad α e a β le espressioni trovate in funzione di p e q, otteniamo le **formule di prostaferesi**:

$$\mathbf{sen}\,p+\mathbf{sen}\,q=2\,\mathbf{sen}\frac{p+q}{2}\mathbf{cos}\frac{p-q}{2};$$
$$\mathbf{sen}\,p-\mathbf{sen}\,q=2\,\mathbf{cos}\frac{p+q}{2}\mathbf{sen}\frac{p-q}{2};$$

$$\mathbf{cos}\,p+\mathbf{cos}\,q=2\,\mathbf{cos}\frac{p+q}{2}\mathbf{cos}\frac{p-q}{2};$$
$$\mathbf{cos}\,p-\mathbf{cos}\,q=-2\,\mathbf{sen}\frac{p+q}{2}\mathbf{sen}\frac{p-q}{2}.$$

ESEMPIO

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=2\cos\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}}{2}=$$
$$=2\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}.$$

Le formule di Werner

● Johann Werner nacque a Norimberga nel 1468 e vi morì nel 1522. Oltre che di matematica, si occupò di geografia e astronomia. A lui si devono sia le formule che prendono il suo nome, sia quelle di prostaferesi.

Le formule di Werner risolvono il problema inverso rispetto a quello delle formule di prostaferesi, cioè permettono di trasformare espressioni contenenti prodotti di funzioni seno e coseno in somme o differenze di funzioni seno e coseno. Si ottengono facendo uso delle relazioni ricavate per ottenere le formule di prostaferesi:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Dividiamo tutti i membri per 2 e riscriviamo le uguaglianze leggendole da destra a sinistra:

$$\mathbf{sen}\,\alpha\,\mathbf{cos}\,\beta=\frac{1}{2}[\mathbf{sen}(\alpha+\beta)+\mathbf{sen}(\alpha-\beta)];$$
$$\mathbf{cos}\,\alpha\,\mathbf{cos}\,\beta=\frac{1}{2}[\mathbf{cos}(\alpha+\beta)+\mathbf{cos}(\alpha-\beta)];$$
$$\mathbf{sen}\,\alpha\,\mathbf{sen}\,\beta=\frac{1}{2}[\mathbf{cos}(\alpha-\beta)-\mathbf{cos}(\alpha+\beta)].$$

● $\frac{5}{12}\pi=75°$.

ESEMPIO

$$\cos\frac{5}{12}\pi\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5}{12}\pi+\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{12}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

ESPLORAZIONE

L'inafferrabile pi greco

π = 3,14159265358979323846264338327950 2...

Che rapporto c'è tra la misura di una circonferenza e il suo diametro? Oggi sappiamo che questo rapporto è costante e lo chiamiamo π. Il simbolo è stato introdotto solo nel 1706 dal matematico inglese William Jones: la lettera greca fu scelta in onore di Pitagora, perché era l'iniziale del suo nome. Ma quanto vale π?

I Babilonesi utilizzavano $3 + \frac{1}{8}$.

Nel Papiro di Rhind, il primo documento in cui si parla del rapporto tra cerchio e diametro, il valore riportato è $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16049\ldots$

Archimede individuò un metodo che venne poi utilizzato per lungo tempo. Si basava sul calcolo del perimetro di poligoni inscritti e circoscritti a una circonferenza. Con un numero crescente di lati, si riesce ad approssimare sempre meglio la lunghezza della circonferenza. Con questo metodo egli calcolò che:

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}, \text{ ossia } 3,1408\ldots<\pi<3,1428\ldots$$

In India, il matematico Brahmagupta (596-670 d.C.) propose il valore $\sqrt{10} = 3{,}216\ldots$ L'arabo al-Kashi, intorno al 1430, con il metodo di Archimede trovò un valore con quattordici cifre esatte. Furono poi trovate diverse «formule infinite», fra le quali ricordiamo quella di Leibniz (1674):

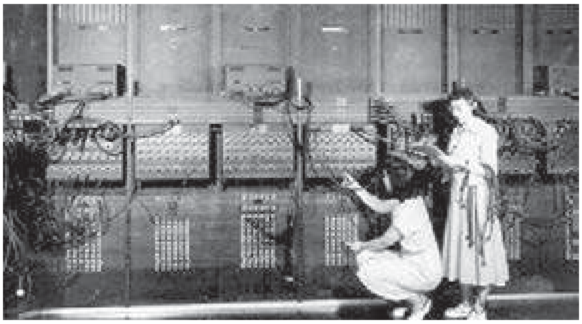
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Nel 1761 Lambert dimostrò che π è irrazionale, quindi non è esprimibile con una frazione, ossia con un numero decimale limitato o illimitato ma periodico.

Nel Ventesimo secolo il numero delle cifre di π calcolate con precisione è aumentato con ritmo sempre crescente grazie ai calcolatori elettronici.

Questi progressi partirono nel 1947, quando Ferguson calcolò 808 decimali utilizzando una semplice calcolatrice: l'impresa durò quasi un anno.

Il primo vero e proprio calcolatore, ENIAC (in figura), nel 1949 calcolò 2037 decimali in settanta ore.



▲ Due operatrici addette alla programmazione dell'ENIAC.

Nel 1966 l'IBM ottenne π con una precisione di duecentocinquantamila cifre decimali. Nel 1989 i fratelli Chudnovsky raggiunsero un miliardo di cifre, mentre nel 1997 Kanada superò i 50 miliardi di cifre in sole 29 ore di calcolo. Nel 2002 il gruppo di ricerca diretto da Kanada presso la Tokyo University calcolò più di mille miliardi di cifre di π.

Tutti questi tentativi non vanno ricondotti alla semplice voglia di battere un record: rimane la speranza di «afferrare» π, trovando qualche regolarità fra le sue cifre.

Attività

La magia di π

π non ha esercitato il suo fascino solo sui matematici. Per esempio, su di lui sono state scritte poesie e sceneggiature cinematografiche (π. *Il teorema del delirio*) ed escogitati stratagemmi mnemonici per ricordarne le cifre. Il 14 marzo (3-14 nella notazione anglosassone) si festeggia il Pi Day. L'idea è nata nel 1988 nell'Exploratorium di San Francisco e si è presto diffusa in vari dipartimenti di matematica nel mondo. Proprio il 14 marzo, Einstein festeggiava il suo compleanno.

- Fai una ricerca in Internet sulle curiosità e le iniziative legate a π. In rete trovi anche il programma SuperPI, creato da un collaboratore di Kanada, per calcolare π con un PC.

@ **Cerca nel Web:**

pi, poetry, SuperPi, pi day, Kanada

PRIMA TYCHO, POI ENRICO

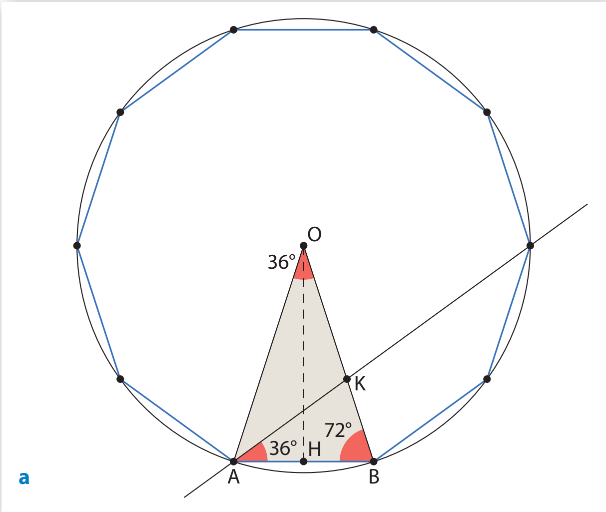
Com'è possibile trovare tg 35° senza strumenti di calcolo e tavole?

▶ Il quesito completo a pag. 705

L'idea di Fermi si basa sull'uso delle formule di sottrazione della tangente e sul fatto che per angoli piccoli di misura α in gradi, tg $\alpha°$ è bene approssimata dalla misura dell'angolo α in radianti, ossia da $\frac{\pi}{180} \cdot \alpha°$.

In particolare, Fermi scrive tg 35° come tg (36° − 1°). Innanzitutto, determiniamo tg 36° considerando il lato AB del decagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio 1 (figura *a*). L'angolo al centro $A\widehat{O}B$ misura la decima parte dell'angolo giro, ossia 36°. Poiché il triangolo AOB è isoscele sulla base AB, i suoi angoli alla base sono congruenti e misurano quindi 72°.

Consideriamo ora la bisettrice AK dell'angolo alla base OAB.



a

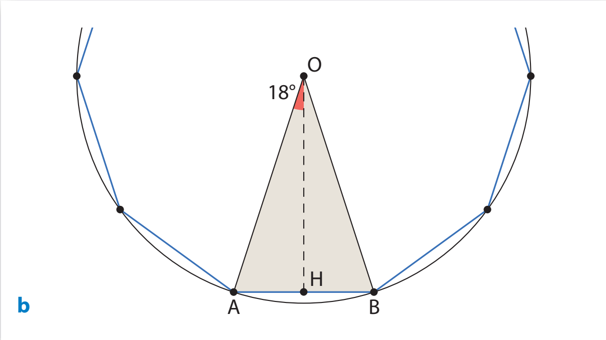
Il triangolo OKA è un triangolo isoscele, avendo gli angoli alla base OA che misurano entrambi 36°. Quindi $\overline{AK} = \overline{OK}$. Inoltre i triangoli AKB e AOB hanno gli angoli congruenti e perciò sono simili.

Possiamo impostare la proporzione $\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{AB}}$, da cui si ottiene: $\overline{AB}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{BK}$.

Indicando la misura del lato AB del decagono regolare con x e ricordando che il raggio della circonferenza misura 1, abbiamo che $\overline{BK} = \overline{OB} - \overline{OK}$, ossia, essendo $\overline{OK} = \overline{AK} = \overline{AB}$, risulta $\overline{BK} = 1 - x$.

L'uguaglianza $\overline{AB}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{BK}$ si traduce nell'equazione $x^2 = 1 \cdot (1 - x)$, la cui soluzione positiva è $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Passiamo ora alla determinazione della tangente dell'angolo $A\widehat{O}B$ (figura *b*).



b

$$\text{tg } 18° = \frac{\overline{AH}}{\overline{OH}}.$$

Per quanto prima dimostrato: $\overline{AH} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ e

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Quindi $\text{tg } 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$.

Usiamo ora le formule di duplicazione della tangente:

$$\text{tg } 36° = \frac{2 \text{ tg} 18°}{1 - \text{tg}^2 18°} = \frac{2\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}}{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\right)^2} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cdot \frac{10 + 2\sqrt{5}}{4(1 + \sqrt{5})},$$

da cui, con opportune razionalizzazioni, otteniamo:

$$\text{tg } 36° = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \simeq 0{,}727.$$

Considerando tg 35° = tg (36° − 1°), applichiamo le formule di sottrazione della tangente ottenendo:

$$\text{tg } 35° = \text{tg } (36° - 1°) = \frac{\text{tg } 36° - \text{tg } 1°}{1 + \text{tg } 36° \cdot \text{tg } 1°}.$$

Come Fermi scrisse nella sua brillante risoluzione, «essendo 1° un numero assai piccolo, si può porre con grande approssimazione $\text{tg } 1° \simeq \frac{\pi}{180} \simeq 0{,}0174$».

Infine, sostituendo i valori trovati per tg 36° e tg 1° in $\frac{\text{tg } 36° - \text{tg } 1°}{1 + \text{tg } 36° \cdot \text{tg } 1°}$, abbiamo tg 35° $\simeq$ 0,700.

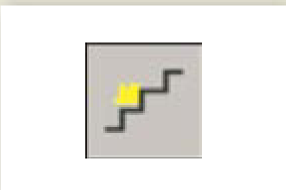
LABORATORIO DI MATEMATICA
LE FORMULE GONIOMETRICHE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Derive semplifichiamo l'espressione goniometrica $2\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}(\pi - \alpha)$.

La sessione di lavoro

- Entriamo in ambiente Derive e immettiamo l'espressione data nella #1 (figura 1).
- Impostiamo, quindi, l'opzione che indica al sistema, una volta ricevuto uno dei comandi del menu *Semplifica*, di sviluppare l'espressione. Precisamente, facciamo clic di seguito su *Opzioni*, su *Modalità*, su *Semplificazione* e nel campo *Trigonometrica* scegliamo *Expand*.



▲ Figura 2

- Sulla #1 applichiamo poi il comando *Semplifica_Visualizza passaggi* (figura 2). Vediamo apparire sia un riquadro contenente una proprietà goniometrica colorata in blu (qui la formula di addizione per il coseno) sia l'etichetta seguente (qui la #2), consistente nell'espressione semplificata attraverso l'applicazione della proprietà mostrata (figura 1).
- Usiamo poi diverse volte di seguito il comando e al termine leggiamo nella #7 (figura 1) il risultato delle semplificazioni.

▼ Figura 1

#1: $2\cdot \mathrm{COS}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{SIN}(\pi - \alpha)$

$\mathrm{COS}(z + w) = \mathrm{COS}(z)\cdot\mathrm{COS}(w) - \mathrm{SIN}(z)\cdot\mathrm{SIN}(w)$

#2: $2\cdot\left(\mathrm{COS}(\alpha)\cdot\mathrm{COS}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - \mathrm{SIN}(\alpha)\cdot\mathrm{SIN}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) + \mathrm{SIN}(\pi - \alpha)$

$\mathrm{COS}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

#3: $\sqrt{3}\cdot\mathrm{COS}(\alpha) - 2\cdot\mathrm{SIN}(\alpha)\cdot\mathrm{SIN}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{SIN}(\pi - \alpha)$

$\mathrm{SIN}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$

#4: $\sqrt{3}\cdot\mathrm{COS}(\alpha) - \mathrm{SIN}(\alpha) + \mathrm{SIN}(\pi - \alpha)$

$\mathrm{SIN}(z + \pi) = -\mathrm{SIN}(z)$

#5: $\sqrt{3}\cdot\mathrm{COS}(\alpha) - \mathrm{SIN}(\alpha) - \mathrm{SIN}(-\alpha)$

$\mathrm{SIN}(-z) = -\mathrm{SIN}(z)$

#6: $\sqrt{3}\cdot\mathrm{COS}(\alpha) - \mathrm{SIN}(\alpha) + \mathrm{SIN}(\alpha)$

#7: $\sqrt{3}\cdot\mathrm{COS}(\alpha)$

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 25 esercitazioni in più

Esercitazioni

Semplifica le seguenti espressioni sul quaderno. Con l'aiuto del computer, usa comandi appropriati per effettuare le medesime semplificazioni. Sostituisci ad α l'ampiezza indicata, sia nell'espressione iniziale sia in quella semplificata, e determinane i valori, sia quello esatto sia quello approssimato. Stampa la sessione di lavoro.

1 $\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) + \operatorname{sen}(\pi + \alpha) + 3\operatorname{sen}\alpha$, con $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

2 $2\operatorname{cotg}(2\pi - \alpha) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$, con $\alpha = \dfrac{5\pi}{12}$. $[3\sqrt{3} - 6]$

3 $2\operatorname{sen}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos(\pi - \alpha)$, con $\alpha = \dfrac{15\pi}{8}$. $\left[-\sqrt{\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{4}}\right]$

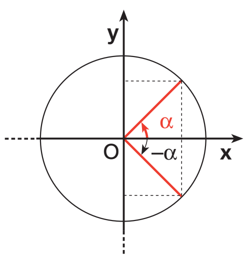
LA TEORIA IN SINTESI

LE FORMULE GONIOMETRICHE

1. GLI ANGOLI ASSOCIATI

Funzioni goniometriche di angoli associati

α e $-\alpha$



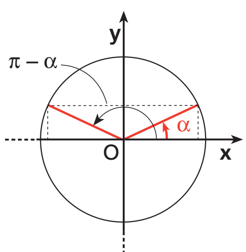
$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$

α e $\pi - \alpha$



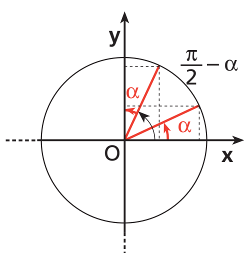
$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{cotg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$

α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$



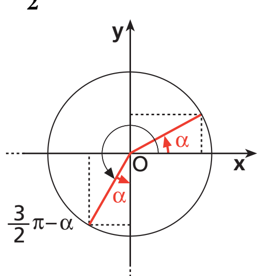
$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha$

$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$

α e $\frac{3}{2}\pi - \alpha$



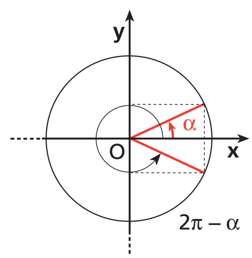
$\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\cos\alpha$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha$

$\operatorname{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$

α e $2\pi - \alpha$



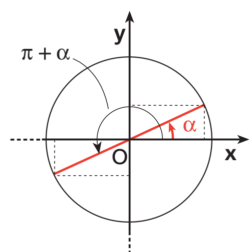
$\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$

$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{cotg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$

α e $\pi + \alpha$



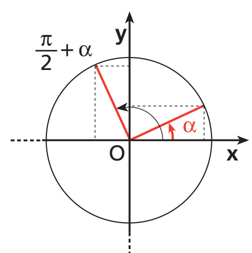
$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{cotg}(\pi + \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$

α e $\frac{\pi}{2} + \alpha$



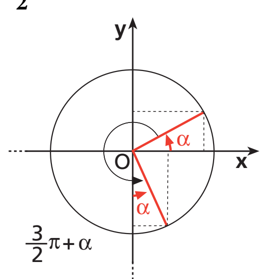
$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{cotg}\alpha$

$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha$

α e $\frac{3}{2}\pi + \alpha$



$\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos\alpha$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$

$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\operatorname{cotg}\alpha$

$\operatorname{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha$

2. LE FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Funzione	Formula di addizione	Formula di sottrazione
seno	$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$	$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
coseno	$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
tangente	$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ solo se: $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k_1\pi, \beta\neq\frac{\pi}{2}+k_2\pi$	$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ solo se: $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k_1\pi, \beta\neq\frac{\pi}{2}+k_2\pi$

- Una funzione del tipo $y=a\operatorname{sen}x+b\cos x$ può essere ricondotta alla forma sinusoidale $y=r\operatorname{sen}(x+\alpha)$, con $r=\sqrt{a^2+b^2}$ e $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{b}{a}$. α è detto **angolo aggiunto**.

3. 4. LE FORMULE DI DUPLICAZIONE E DI BISEZIONE

Funzione	Formula di duplicazione	Formula di bisezione
seno	$\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$	$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$
coseno	$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=\begin{cases}1-2\operatorname{sen}^2\alpha\\2\cos^2\alpha-1\end{cases}$	$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$
tangente	$\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ solo se: $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\wedge\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$	$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ solo se $\alpha\neq\pi+2k\pi$ $=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$ solo se $\alpha\neq\pi+2k\pi$ $=\dfrac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ solo se $\alpha\neq\pi+k\pi$
		il segno del radicale dipende dal quadrante in cui si trova il lato termine di $\frac{\alpha}{2}$

- Sono utili anche le formule: $\operatorname{sen}^2\alpha=\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}$; $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos2\alpha}{2}$.

5. LE FORMULE PARAMETRICHE

- $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, con $\alpha\neq\pi+2k\pi$;
- $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, con $\alpha\neq\pi+2k\pi$.

6. LE FORMULE DI PROSTAFERESI E DI WERNER

Formule di prostaferesi

- $\operatorname{sen}p+\operatorname{sen}q=2\operatorname{sen}\dfrac{p+q}{2}\cdot\cos\dfrac{p-q}{2}$;
- $\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2}$;
- $\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cdot\cos\dfrac{p-q}{2}$;
- $\cos p-\cos q=-2\operatorname{sen}\dfrac{p+q}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2}$.

Formule di Werner

- $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$;
- $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$;
- $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$.

1. GLI ANGOLI ASSOCIATI

▶ Teoria a pag. 706

1 **COMPLETA** la seguente tabella, converti gli angoli in radianti e disegnali su una circonferenza goniometrica.

Angolo	Angolo associato	Nome degli angoli associati
α		opposti
α	$180° + \alpha$	
$30°$		supplementari
	$70°$	complementari
α	$90° + \alpha$	
α		esplementari

Angoli opposti (α e $-\alpha$)

COMPLETA le seguenti uguaglianze.

2 $\operatorname{sen}(-30°) = \dots\dots\dots;$ $\quad \operatorname{sen}(-45°) = \dots\dots\dots;$ $\quad \operatorname{cosec}(-60°) = \dots\dots\dots$ $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right]$

3 $\cos(-60°) = \dots\dots\dots;$ $\quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \dots\dots\dots;$ $\quad \sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \dots\dots\dots$ $\left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{2}\right]$

4 $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \dots\dots\dots;$ $\quad \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \dots\dots\dots;$ $\quad \operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \dots\dots\dots$ $[-1; -\sqrt{3}; -\sqrt{3}]$

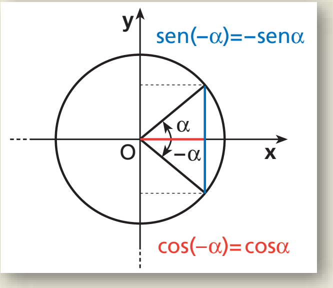
5 **ESERCIZIO GUIDA**

Semplifichiamo la seguente espressione:

$$\operatorname{sen}(-\alpha) + 2\cos(-\alpha) + \sec(-\alpha)\operatorname{cotg}(-\alpha)\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha.$$

Trasformiamo prima di tutto le funzioni di $-\alpha$ in funzioni di α notando in figura che

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha;\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$



e quindi:

$$\sec(-\alpha) = \sec\alpha;\ \operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha.$$

L'espressione diventa:

$$-\operatorname{sen}\alpha + 2\cos\alpha + \sec\alpha(-\operatorname{cotg}\alpha)\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha.$$

Trasformiamo $\sec\alpha$ e $\operatorname{cotg}\alpha$ in funzione di $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ e semplifichiamo:

$$-\operatorname{sen}\alpha + 2\cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha = 2\cos\alpha - 1.$$

Semplifica le seguenti espressioni.

6 $-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\alpha) + \cos\alpha\cos(-\alpha)$ $[1]$

7 $\operatorname{tg}(-\alpha) - 2\cos(-\alpha) + 2\operatorname{sen}(-\alpha)\operatorname{cotg}(-\alpha)$ $[-\operatorname{tg}\alpha]$

8 $\operatorname{sen}(-\alpha) + \cos(-\alpha) + \sec(-\alpha) + 2\operatorname{sen}\alpha - \sec\alpha + 3\cos\alpha$ $[\operatorname{sen}\alpha + 4\cos\alpha]$

9 $\operatorname{sen}^2(-\alpha) + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{cotg}(-\alpha)$ $[0]$

10 $\dfrac{\cos(-\alpha) - \operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2(-\alpha)} + \operatorname{sen}^2(-\alpha) - \cos(-\alpha)$ $[\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha]$

11 $\sqrt{3}\cos(-30°) + \sqrt{3}\operatorname{sen}(-60°) - \cos(-45°) - \cos(-60°)\operatorname{cosec}(-45°) + 2\operatorname{tg}(-45°)$ $[-2]$

Angoli complementari $\left(\alpha \text{ e } \dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$

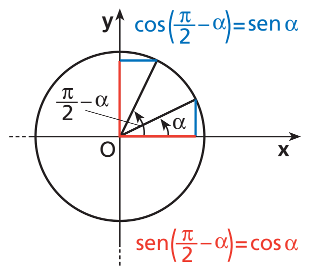
12 **ESERCIZIO GUIDA**

Semplifichiamo la seguente espressione:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos\alpha + \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Trasformiamo $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ in funzione di $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos\alpha + \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$



Trasformiamo le funzioni di $\frac{\pi}{2} - \alpha$ in funzioni di α tenendo conto delle relazioni riportate in figura.

L'espressione diventa: $\cos\alpha - \cos\alpha + \dfrac{1}{\cos\alpha}\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\alpha$.

Semplifica le seguenti espressioni.

13 $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ $[\cos\alpha]$

14 $2\cos(90° - \alpha) - 3\operatorname{sen}(90° - \alpha) + 2\cos\alpha - 3\operatorname{sen}\alpha$ $[-\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha]$

15 $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 3\cos(-\alpha)\right] + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ $[0]$

16 $[\cos(90° - \alpha) + \operatorname{sen}(90° - \alpha)]^2 - \dfrac{2\operatorname{tg}(90° - \alpha)}{1 + \operatorname{cotg}^2(-\alpha)}$ $[1]$

Angoli che differiscono di un angolo retto $\left(\alpha \text{ e } \dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$

17 **ESERCIZIO GUIDA**

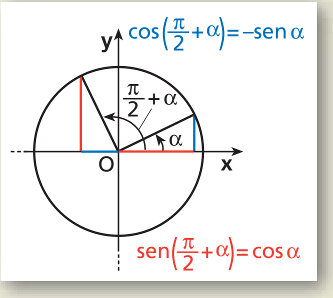
Semplifichiamo la seguente espressione:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{sen}\alpha + \sec\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

Trasformiamo $\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ in funzione di $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{sen}\alpha+\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).$$

Trasformiamo quindi le funzioni di $\frac{\pi}{2}+\alpha$ in funzioni di α tenendo conto delle relazioni in figura.



L'espressione diventa: $-\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha+\frac{1}{-\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha=-1+\cos\alpha$.

Semplifica le seguenti espressioni.

18 $\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ [$\cos\alpha$]

19 $\cos(90°+\alpha)\operatorname{cotg}(90°+\alpha)(1+\operatorname{cotg}^2\alpha)(-\cos\alpha)$ [-1]

20 $\dfrac{\operatorname{sen}(90°+\alpha)+\cos(90°+\alpha)\operatorname{tg}(90°-\alpha)}{\cos\alpha}$ [0]

21 $\operatorname{sen}(90°+\alpha)\cos(90°-\alpha)+\cos(90°+\alpha)\operatorname{sen}(90°+\alpha)-\operatorname{sen}(-\alpha)$ [$\operatorname{sen}\alpha$]

Angoli supplementari (α e $\pi-\alpha$)

22 **ESERCIZIO GUIDA**

Semplifichiamo la seguente espressione:

$$\mathbf{3\cos\alpha+\cos(\pi-\alpha)-\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{cotg}(\pi-\alpha)\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}(\pi-\alpha).}$$

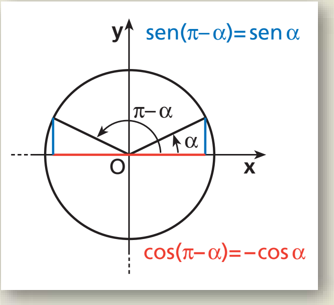
Trasformiamo $\operatorname{cotg}(\pi-\alpha)$ in funzione del seno e del coseno:

$$3\cos\alpha+\cos(\pi-\alpha)-\operatorname{sen}\alpha+\frac{2\cos(\pi-\alpha)}{\operatorname{sen}(\pi-\alpha)}\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}(\pi-\alpha).$$

Trasformiamo quindi le funzioni di $\pi-\alpha$ in funzioni di α mediante le relazioni riportate in figura. L'espressione diventa:

$$3\cos\alpha-\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha+2\frac{-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}\alpha=$$

$$=2\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha-2\cos\alpha=\operatorname{sen}\alpha.$$



Semplifica le seguenti espressioni.

23 $2[\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(180°-\alpha)-\cos\alpha\cos(180°-\alpha)]-5\cos 180°$ [7]

24 $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{cotg}(\pi-\alpha)\operatorname{tg}\alpha$ [0]

25 $\cos\alpha\operatorname{cosec}(180°-\alpha)+\operatorname{sen}\alpha\sec(180°-\alpha)-\operatorname{cotg}(180°-\alpha)+\operatorname{tg}(180°-\alpha)$ [$2\operatorname{cotg}\alpha-2\operatorname{tg}\alpha$]

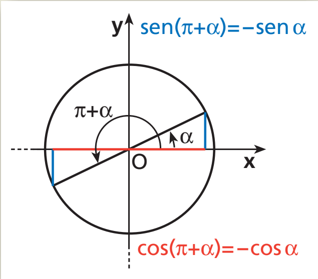
26 $\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)-\cos(\pi-\alpha)-\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(-\alpha)$ [0]

Angoli che differiscono di un angolo piatto (α e $\pi + \alpha$)

27 **ESERCIZIO GUIDA**

Semplifichiamo la seguente espressione:

$$\mathbf{cosec}(\pi + \alpha) + 3\,\mathbf{sen}\,\alpha + \mathbf{cotg}(\pi + \alpha)\,\mathbf{sec}\,\alpha + 2\,\mathbf{sen}(\pi + \alpha).$$



Trasformiamo $\operatorname{cotg}(\pi + \alpha)$, $\operatorname{cosec}(\pi + \alpha)$ e $\sec\alpha$ in funzione del seno e del coseno:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi + \alpha)} + 3\operatorname{sen}\alpha + \frac{\cos(\pi + \alpha)}{\operatorname{sen}(\pi + \alpha)} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} + 2\operatorname{sen}(\pi + \alpha).$$

Trasformiamo quindi le funzioni di $\pi + \alpha$ in funzioni di α tenendo conto delle relazioni in figura. L'espressione diventa:

$$\frac{1}{-\operatorname{sen}\alpha} + 3\operatorname{sen}\alpha + \frac{-\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} - 2\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} + \operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{sen}\alpha.$$

Semplifica le seguenti espressioni.

28 $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\pi + \alpha) + \cos(\pi + \alpha)\cos\alpha + 2$ $[1]$

29 $[\operatorname{tg}(180° + \alpha) + \operatorname{tg}\alpha]\operatorname{cosec}(180° + \alpha) - \sec(180° + \alpha)$ $\left[-\frac{1}{\cos\alpha}\right]$

30 $\operatorname{sen}\alpha\cos(\pi + \alpha) + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos\alpha[\operatorname{sen}(\pi + \alpha) + 1] + \cos(\pi + \alpha)$ $[0]$

31 $[\operatorname{sen}(180° - \alpha) - \cos(180° + \alpha)]^2 - 2\operatorname{sen}(-\alpha)\cos(180° + \alpha)$ $[1]$

Angoli la cui somma o differenza è $\frac{3}{2}\pi$

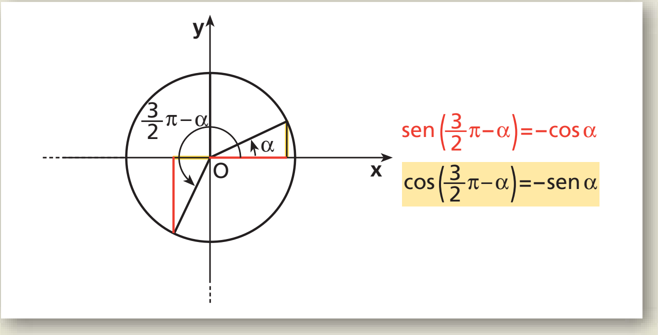
32 **ESERCIZIO GUIDA**

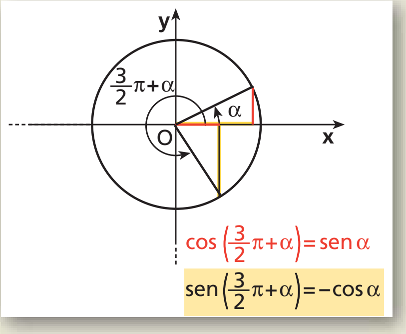
Semplifichiamo l'espressione:

$$\mathbf{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)\mathbf{cos}\,\alpha + \mathbf{cos}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)\mathbf{cos}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + \mathbf{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right).$$

Trasformiamo le funzioni di $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ e $\frac{3}{2}\pi + \alpha$ in funzioni di α tenendo conto delle relazioni che compaiono nelle figure:

$$-\cos\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha(-\operatorname{sen}\alpha) + \operatorname{tg}\alpha = -\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha = -1 + \operatorname{tg}\alpha.$$





Semplifica le seguenti espressioni.

33 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$ [0]

34 $2\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)\operatorname{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) + \cos^2\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$ [-1]

35 $\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + \cos(-\alpha) + 2\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$ [$\operatorname{sen}\alpha$]

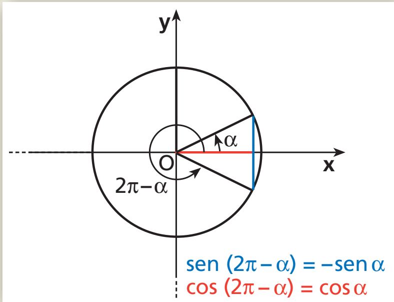
36 $\cos(270° + \alpha) + \operatorname{tg}(270° - \alpha) - \dfrac{\operatorname{sen}(270° - \alpha)}{\operatorname{sen}(-\alpha)}$ [$\operatorname{sen}\alpha$]

Angoli esplementari (α e $2\pi - \alpha$)

37 **ESERCIZIO GUIDA**

Semplifichiamo la seguente espressione:

$$3\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) + \cos(2\pi - \alpha)\sec\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha - 1.$$



Trasformiamo sec α in funzione del coseno:

$$3\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) + \cos(2\pi - \alpha)\frac{1}{\cos\alpha} + 2\operatorname{sen}\alpha - 1.$$

Trasformiamo quindi le funzioni di $2\pi - \alpha$ in funzione di α tenendo conto delle relazioni mostrate in figura.
L'espressione diventa:

$$-3\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha\frac{1}{\cos\alpha} + 2\operatorname{sen}\alpha - 1 = -3\operatorname{sen}\alpha + 1 + 2\operatorname{sen}\alpha - 1 = -\operatorname{sen}\alpha.$$

Semplifica le seguenti espressioni.

38 $\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) - 2\cos(2\pi - \alpha) - \cos\alpha\operatorname{tg}(2\pi - \alpha)$ [$-2\cos\alpha$]

39 $\sec(360° - \alpha)\cos\alpha + \operatorname{tg}(360° - \alpha)\operatorname{cotg}\alpha$ [0]

40 $\operatorname{cosec}(2\pi - \alpha) + \dfrac{\cos^2(2\pi - \alpha) + \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}(2\pi - \alpha)}$ $\left[-\dfrac{2}{\operatorname{sen}\alpha}\right]$

41 $\operatorname{tg}(360° - \alpha) + 2\cos(360° - \alpha) + 2\operatorname{sen}(180° - \alpha)\operatorname{cotg}(-\alpha) + \operatorname{tg}\alpha$ [0]

ESERCIZI VARI Gli angoli associati

42 **TEST** Il valore della somma $\cos 40° + \cos 140°$ è:

A negativo ma diverso da -1.
B positivo.
C 0.
D irrazionale.
E -1.

(*Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso,* 2000)

43 **TEST** Siano α e β due angoli legati fra di loro dalla relazione $\beta = \pi - \alpha$. Quale delle seguenti uguaglianze è vera?

A $\tan\alpha + \tan\beta = 0$
B $\cos\alpha = \cos\beta$
C $\sin\alpha + \sin\beta = 0$
D $\tan\alpha = \tan\beta$
E $\cos\alpha + \cos\beta = -1$

(*Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso,* 1999)

44 **VERO O FALSO?**

a) $\operatorname{sen}(-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha \wedge \operatorname{tg}(-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$. V F

b) $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha \wedge \operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$. V F

c) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \wedge \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\operatorname{cotg}\alpha$. V F

d) $\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha \wedge \cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha$. V F

e) $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha \wedge \operatorname{tg}(2\pi+\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$. V F

45 **ASSOCIA** a ciascuna espressione della prima colonna una equivalente nella seconda colonna.

1) $\operatorname{tg}(x+\pi)+\operatorname{tg}(\pi-x)$	a) 0
2) $\operatorname{sen}(x+90°)-\cos(180°-x)$	b) 2
3) $\operatorname{cosec}(270°-x)+2+\sec(-x)$	c) $2\cos x$
4) $\operatorname{sen}^2(-x)+\operatorname{sen}^2(270°+x)$	d) 1

46 Dimostra che, se un triangolo ABC è rettangolo, allora:

$$\operatorname{sen}^2\widehat{A}+\operatorname{sen}^2\widehat{B}+\operatorname{sen}^2\widehat{C}=2.$$

47 **VERO O FALSO?** Se $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$:

a) $\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$ V F

b) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha$ V F

c) $\operatorname{tg}\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)=-\operatorname{cotg}(4\pi+\alpha)$ V F

d) $\operatorname{cotg}(\alpha-4\pi)=\operatorname{cotg}\alpha$ V F

e) $\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\cos\alpha$ V F

f) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{sen}\alpha=\cos(\pi-\alpha)$ V F

48 **TEST** $\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right)+\arccos\left(\frac{1}{3}\right)+\arctan\left(\frac{1}{3}\right)+\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{3}\right)=$

A π. B $\frac{\pi}{2}$. C $\frac{\pi}{3}$. D $\frac{2\pi}{3}$. E $\frac{3\pi}{4}$.

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 1994)

49 **TEST** Se $\operatorname{sen}^{-1}x+\operatorname{sen}^{-1}y=\frac{\pi}{2}$, allora il valore numerico di x^2+y^2 è:

A 0. B 1. C $\frac{\pi}{2}$ D π. E nessuno di questi.

(USA *Indiana University of Pennsylvania Mathematics Competition*, 2002)

Semplifica le seguenti espressioni.

50 $\operatorname{cosec}(\pi+\alpha)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+\cos(2\pi-\alpha)-\sec(-\alpha)$ [$\cos\alpha$]

51 $\cos(-\alpha)+\cos(360°-\alpha)+\cos(180°-\alpha)-\cos(180°+\alpha)$ [$2\cos\alpha$]

52 $\operatorname{tg}(-\alpha)+\operatorname{tg}(180°-\alpha)+\operatorname{tg}(360°-\alpha)-\operatorname{tg}(180°-\alpha)$ [$-2\operatorname{tg}\alpha$]

53 $\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)+2\cos(\pi+\alpha)+3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(-\alpha)$ [$-\operatorname{sen}\alpha$]

54 $\operatorname{sen}(90°+\alpha)\operatorname{tg}(-\alpha)+\operatorname{sen}(90°+\alpha)\operatorname{cotg}(90°-\alpha)-\cos(-\alpha)\operatorname{sen}(90°-\alpha)$ [$-\cos^2\alpha$]

55 $\operatorname{tg}(90°-\alpha)\operatorname{tg}\alpha-\frac{\operatorname{sen}(180°+\alpha)}{\cos(180°-\alpha)}+\operatorname{cotg}(90°-\alpha)$ [1]

56 $\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1+[\operatorname{cotg}(\pi-\alpha)]^2}-\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]^2$ [-1]

57 $\dfrac{\operatorname{sen}(-\alpha)+\cos(180°-\alpha)-\operatorname{tg}(180°+\alpha)}{\operatorname{tg}(180°-\alpha)-\cos(90°-\alpha)-\cos(-\alpha)}$ $[1]$

58 $\dfrac{-2\operatorname{sen}^2(180°-\alpha)+\cos^2(180°-\alpha)+2}{\operatorname{tg}(180°-\alpha)\operatorname{sen}(90°-\alpha)+1}$ $[3(\operatorname{sen}\alpha+1)]$

59 $\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+\cos(3\pi+\alpha)+\operatorname{sen}(-\alpha)\operatorname{cotg}(\alpha-5\pi)$ $[-3\cos\alpha]$

60 $\dfrac{\cos(5\pi+\alpha)\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)+\operatorname{sen}^2(3\pi+\alpha)}{\cos(\alpha-6\pi)\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)-\cos\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)}$ $\left[\dfrac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha(1-\cos\alpha)}\right]$

61 $\operatorname{sen}(\alpha-2\pi)\operatorname{cotg}(-\alpha)+\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)\cos(\alpha+5\pi)+\operatorname{sen}^2(6\pi-\alpha)$ $[1-\cos\alpha]$

62 $\operatorname{cotg}(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+2\dfrac{\operatorname{sen}(-\alpha)\cos(10\pi-\alpha)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\alpha-\frac{11}{2}\pi\right)}$ $[-\cos\alpha+2]$

63 $\operatorname{sen}(\pi-\alpha)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-2\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\cos(2\pi-\alpha)+\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)}{\operatorname{cotg}(-\alpha)}$ $[-3\cos^2\alpha]$

64 $\cos(-\alpha)\operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$ $[\cos^2\alpha]$

65 $-\cos\left(-\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{sen}(\alpha-5\pi)+\operatorname{sen}\left(-\alpha-\frac{7}{2}\pi\right)$ $[\cos\alpha]$

66 $\operatorname{sen}(720°+\alpha)\cos(180°+\alpha)-\cos(450°+\alpha)\operatorname{sen}(-270°-\alpha)$ $[0]$

67 $\operatorname{cotg}^2\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+\sec^2(\pi+\alpha)-\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)\cos(5\pi-\alpha)}{\operatorname{sen}^2\left(\alpha-\frac{7}{2}\pi\right)}$ $[2\sec^2\alpha]$

68 $\dfrac{2}{\operatorname{cosec}(90°-\alpha)}+6\dfrac{\cos(180°-\alpha)}{\operatorname{sen}(-\alpha)}-2\cos(540°-\alpha)$ $[2\operatorname{cotg}\alpha(2\operatorname{sen}\alpha+3)]$

69 $\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{7}{2}\pi\right)\sec(\pi+\alpha)-\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)$ $[0]$

70 $\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)\cos(\alpha+\pi)+\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{-\operatorname{sen}(-\alpha)+\cos\left(\frac{7}{2}\pi+\alpha\right)}$ $\left[\dfrac{\cos^2\alpha(2\operatorname{sen}^2\alpha+1)}{2\operatorname{sen}^2\alpha}\right]$

71 $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{5}\operatorname{cotg}\frac{1}{5}+\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{cotg}\left(\frac{11}{2}\pi-\alpha\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)}$ $[1-\operatorname{tg}^2\alpha]$

72 $\dfrac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)-1}{\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)}\cdot\dfrac{4\operatorname{tg}(4\pi-\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(3\pi+\alpha)}$ $[4]$

73 $\dfrac{\operatorname{cotg}^2(\alpha-3\pi)-1}{\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\dfrac{\operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}^2(-\alpha-\pi)}$ $[-1]$

74 $\dfrac{1-\cos(8\pi-\alpha)}{\operatorname{sen}(-4\pi-\alpha)\cos(6\pi-\alpha)}+\operatorname{tg}(\alpha-3\pi)+\dfrac{1-\cos(10\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(7\pi+\alpha)}$ $[\operatorname{sen}\alpha]$

Date le seguenti informazioni, determina i valori richiesti.

75 $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, con $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$. Calcola: $\frac{\cos(270° - \alpha)}{\text{sen}(-\alpha - 90°)} + \frac{\text{cotg}(540° + \alpha)}{\text{tg}(630° - \alpha)}$. $\left[\frac{7}{4}\right]$

76 $\text{sen}\,\alpha = \frac{12}{13}$, con $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Calcola: $\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2\cos(-\alpha - 4\pi)}{\text{sen}(-\pi - \alpha)} + \text{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$. $\left[-\frac{5}{3}\right]$

77 $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Calcola: $\cos(\pi + \alpha)$, $\text{tg}(\alpha - 4\pi)$, $\cos(2\pi - \alpha)$, $\text{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$, $\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.
$\left[-\frac{4}{5}; \frac{4}{3}; \frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{4}{3}\right]$

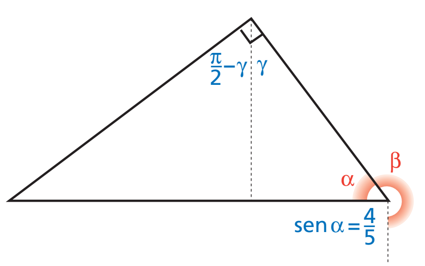
78 $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{7}{25}$, con $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$. Calcola: $\cos(\pi + \alpha)$, $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, $\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$, $\cos(-\alpha)$.
$\left[\frac{7}{25}; -\frac{7}{24}; \frac{7}{25}; -\frac{7}{25}\right]$

79 $\text{sen}(\pi + \alpha) = \frac{5}{13}$, con $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Calcola: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, $\text{cotg}(\pi - \alpha)$, $\text{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$.
$\left[-\frac{5}{13}; \frac{12}{13}; \frac{12}{5}; -\frac{12}{5}\right]$

80 $\text{sen}\,\alpha = \frac{12}{13}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Calcola: $\text{sen}(-\pi + \alpha)$, $\cos(-\pi - \alpha)$, $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, $\text{cotg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, $\text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.
$\left[-\frac{12}{13}; -\frac{5}{13}; -\frac{5}{12}; -\frac{12}{5}; -\frac{5}{13}\right]$

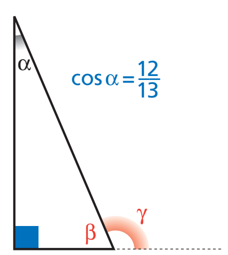
81 $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Calcola: $\text{sen}(-\alpha)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, $\text{sen}(\pi + \alpha)$, $\cos\left(-\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$, $\text{tg}(\pi + \alpha)$.
$\left[-\frac{3}{5}; -\frac{3}{5}; -\frac{3}{5}; -\frac{3}{5}; \frac{3}{4}\right]$

82



Trova: $\text{sen}\,\beta$, $\text{tg}\,\gamma$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$.
$\left[-\frac{3}{5}; \frac{3}{4}; \frac{3}{5}\right]$

83



Calcola: $\text{tg}\,\beta$, $\cos\gamma$, $\text{sen}(\pi + \gamma)$.
$\left[\frac{12}{5}; -\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}\right]$

La riduzione al primo quadrante

84 **ESERCIZIO GUIDA**

Esprimiamo mediante la riduzione al primo quadrante: a) sen 225°; b) $\text{tg}\frac{5}{3}\pi$.

a) $\text{sen}\,225° = \text{sen}\,(180° + 45°) = -\,\text{sen}\,45°$.

b) $\text{tg}\frac{5}{3}\pi = \text{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \text{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\text{tg}\frac{\pi}{3}$.

Esprimi mediante la riduzione al primo quadrante le seguenti funzioni goniometriche.

85 sen 115°; cos 136°; tg 151°; cos 128°. [sen 65°, − cos 44°, − tg 29°, − cos 52°]

86 $\text{sen}\frac{3}{4}\pi$; $\cos\frac{5}{6}\pi$; $\text{tg}\frac{7}{8}\pi$; $\text{cotg}\frac{5}{6}\pi$. $\left[\text{sen}\frac{\pi}{4}, -\cos\frac{\pi}{6}, -\text{tg}\frac{\pi}{8}, -\text{cotg}\frac{\pi}{6}\right]$

87 $\text{sen}\frac{17}{12}\pi$; $\cos\frac{10}{7}\pi$; $\text{tg}\frac{6}{5}\pi$; $\text{cotg}\frac{11}{9}\pi$. $\left[-\text{sen}\frac{5}{12}\pi, -\cos\frac{3}{7}\pi, \text{tg}\frac{\pi}{5}, \text{cotg}\frac{2}{9}\pi\right]$

88 $\text{sen}\frac{13}{7}\pi$; $\cos\frac{16}{9}\pi$; $\text{tg}\frac{13}{8}\pi$; $\text{cotg}\frac{17}{10}\pi$. $\left[-\text{sen}\frac{\pi}{7}, \cos\frac{2}{9}\pi, -\text{tg}\frac{3}{8}\pi, -\text{cotg}\frac{3}{10}\pi\right]$

89 sen 1312°; cos 1280°; tg 1532°; cos 829°. [− sen 52°, − cos 20°, − tg 88°, − cos 71°]

90 $\text{sen}\frac{27}{4}\pi$; $\cos\frac{35}{6}\pi$; $\text{tg}\frac{38}{5}\pi$; $\text{cotg}\frac{37}{6}\pi$. $\left[\text{sen}\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{6}, -\text{tg}\frac{2}{5}\pi, \text{cotg}\frac{\pi}{6}\right]$

91 $\text{sen}\left(-\frac{13}{8}\pi\right)$; $\cos\left(-\frac{6}{7}\pi\right)$; $\text{tg}\left(-\frac{13}{9}\pi\right)$; $\text{cotg}\left(-\frac{7}{10}\pi\right)$. $\left[\text{sen}\frac{3}{8}\pi, -\cos\frac{\pi}{7}, -\text{tg}\frac{4}{9}\pi, \text{cotg}\frac{3}{10}\pi\right]$

92 sen(− 144°); cos(− 101°); tg(− 53°); $\text{cotg}\left(-\frac{9}{11}\pi\right)$. $\left[-\text{sen } 36°, -\cos 79°, -\text{tg } 53°, \text{cotg}\frac{2}{11}\pi\right]$

93 **COMPLETA** riducendo gli angoli al primo quadrante.

sen 257° = …;	$\text{tg}\frac{4}{3}\pi = \ldots$;	cos 124° = ….
$\text{cotg}\left(-\frac{6}{15}\pi\right) = \ldots$;	sen 978° = …;	$\text{tg}\left(-\frac{8}{3}\pi\right) = \ldots$.
cos(− 480°) = …;	$\text{sen}\frac{15}{7}\pi = \ldots$;	cotg 250° = ….

94 **VERO O FALSO?**

a) tg 228° = − tg 48° V F

b) cos (− 320°) = cos 40° V F

c) sen (− 390°) = − cos 120° V F

d) $\text{tg}\frac{13}{4}\pi = -\text{cotg}\frac{9}{4}\pi$ V F

e) $\cos\frac{19}{3}\pi = -\text{sen}\frac{19}{6}\pi$ V F

f) $\text{sen}\left(-\frac{7}{6}\pi\right) = \cos\left(-\frac{13}{3}\pi\right)$ V F

Calcola seno, coseno e tangente dei seguenti angoli, mediante la riduzione al primo quadrante.

95 135°, 330°, 225°, 495°.

96 $\frac{2}{3}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{5}{4}\pi, -\frac{4}{3}\pi.$

97 $\frac{11}{4}\pi, \frac{17}{6}\pi, -\frac{7}{3}\pi, \frac{13}{6}\pi.$

98 − 240°, 480°, − 840°, 510°.

Mediante la riduzione al primo quadrante, calcola il valore delle seguenti funzioni.

99 sen 405°, tg 225°, cotg (− 495°), cos 315°. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

100 $\text{tg}\frac{7}{3}\pi, \cos\frac{15}{4}\pi, \text{sen}\left(-\frac{5}{6}\pi\right), \text{cotg}\frac{7}{6}\pi.$ $\left[\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right]$

101 sen 150°, cos 240°, tg 135°, cotg (− 60°). $\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

102 $\cos\frac{11}{6}\pi, \text{sen}\left(-\frac{5}{3}\pi\right), \text{tg}\frac{2}{3}\pi, \text{sen}\frac{4}{3}\pi.$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Le espressioni con gli angoli da ridurre al primo quadrante

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

103 $\text{sen } 140° - \cos 315° + 2 \text{ sen } 220° + 3 \cos 225°$ $[-\text{sen } 40° - 2\sqrt{2}]$

104 $\text{tg } 310° + \text{cotg } 330° - 4 \text{ tg } 230° + 2 \text{ tg } 130°$ $[-7 \text{ tg } 50° - \sqrt{3}]$

105 $\text{sen } 240° + \cos 300° + 2 \text{ sen } 120° + \cos 210°$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

106 $\text{sen } 150° + \cos 240° - \text{tg}(-150°) + \text{sen } 750°$ $\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

107 $2 \text{ sen } 72° - 3 \cos 162° + \cos 342° - 5 \text{ sen } 252°$ $[11 \text{ sen } 72°]$

108 $5 \cos 36° - 2 \text{ sen } 54° + 3 \text{ sen } 234° + \cos 144° - 2 \text{ sen } 306°$ $[\cos 36°]$

109 $\text{sen } 198° - 4 \text{ sen } 18° - 7 \cos 252° + 2 \text{ sen } 342°$ $[0]$

110 $\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{3} - 3 \cos \frac{7}{6}\pi + 2 \text{ tg} \frac{5}{3}\pi + \sqrt{2} \text{ sen} \frac{3}{4}\pi$ $[1]$

111 $2 \cos 225° + \sqrt{3} \text{ sen } 240° - \sqrt{2} \text{ sen } 315° - 2 \text{ sen } 150° + \frac{3}{2} \text{tg } 945°$ $[-\sqrt{2}]$

112 $\dfrac{2 \cos 240° + 2 \text{ tg } 225° - \sqrt{2} \cos 315°}{4 \cos 150° + 2 \text{ cotg } 225°}$ $[0]$

113 $\text{sen } 390° + \cos 120° - \frac{2}{\sqrt{2}} \cos 135° - \text{tg } 210°$ $\left[\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right]$

114 $\frac{2}{3} \cos 300° - \text{tg } 150° + \text{cotg } 240° - \text{sen } 210°$ $\left[\frac{5+4\sqrt{3}}{6}\right]$

115 $4(\text{sen } 150° \cos 135° + \cos 240° \text{ sen } 135°) \text{ sen } 45°$ $[-2]$

116 $\text{sen} \frac{5}{4}\pi \cos \frac{4}{3}\pi + \text{sen} \frac{7}{6}\pi \cos \frac{5}{4}\pi$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

117 $\cos 30° - 2 \text{ sen}^2 135° + \cos 135° - 5 \cos 270° + \text{sen}^2 120° - \cos(-30°) + \text{sen } 45°$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

118 $\cos 135° \cdot \cos 315° - 2 \cos 300° \cdot \text{sen}(-30°) + \cos(-330°) \cdot \text{sen } 135° \cdot \cos(-225°)$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

119 $(\text{sen } 210° \cos 225° - \text{sen } 225° \cos 210°) \cos 45° - \cos 240° - \text{cosec } 330°$ $\left[\frac{11-\sqrt{3}}{4}\right]$

120 $2 \text{ sen} \frac{5}{6}\pi + 4 \cos \frac{5}{6}\pi \text{ sen} \frac{2}{3}\pi - 2 \text{ tg} \frac{3}{4}\pi + \text{cotg} \frac{5}{6}\pi$ $[-\sqrt{3}]$

121 $\cos 120° \text{ cosec } 135° - \sqrt{3} \cos 150° - \sqrt{3} \text{ sen } 120° - \text{sen } 135°$ $[-\sqrt{2}]$

122 $4 \cos 240° - \sec 225°(\text{sen } 240° - \sqrt{3} \cos 120°) + \text{tg } 225°$ $[-1]$

123 $3 \text{ cotg } 270° - 4 \cos 330° \text{ sen } 300° - \sqrt{2}(\cos 315° - 6 \sec 315°)$ $[14]$

124 $\text{tg } 108° - 2 \text{ tg } 252° + 3 \text{ cotg } 198°$ $[0]$

125 $\sqrt{3} \text{ sen } 240° + 3 \text{ tg } 150° - 2 \sec 120° + (5 \cos 480° + 2 \text{ tg } 600°)$ $[\sqrt{3}]$

126 $\operatorname{tg}^2\frac{7}{6}\pi + \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi \cdot \cos\frac{11}{4}\pi - \frac{1}{3}\cos\frac{4}{3}\pi - \left(\cos\frac{17}{6}\pi - \operatorname{tg}\frac{10}{3}\pi\right)^2$ $\left[-\frac{27}{4}\right]$

127 $\operatorname{tg} 225° + \operatorname{sen}^2 315° + \operatorname{tg} 660°(\cos 510° + \operatorname{sen} 600°) - \cos 420° + \operatorname{sen} 330°$ $\left[\frac{7}{2}\right]$

128 $\cos(-30°) + \operatorname{sen}(-60°) + \operatorname{sen} 210° - \operatorname{tg} 225° - \operatorname{cosec} 150°$ $\left[-\frac{7}{2}\right]$

129 $x^2 \sec 120° + y^2 \operatorname{cotg} 135° + xy \operatorname{cosec} 150° - x^2 \operatorname{sen} 270°$ $[-(x-y)^2]$

130 $\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{7}{6}\pi\right)\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{cotg}\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\frac{11}{6}\pi + \cos\frac{4}{3}\pi$ $\left[\frac{5}{3}\right]$

131 $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{7}{4}\pi \cdot \cos\frac{11}{6}\pi - \cos\frac{5}{3}\pi \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi - \cos\frac{7}{4}\pi}$ $\left[\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right]$

132 $3 \operatorname{cotg} 234° + 2 \operatorname{tg} 216° + 2 \operatorname{cotg} 306° + 4 \operatorname{tg} 324° + \operatorname{tg} 36°$ $[0]$

133 $\cos\frac{21}{4}\pi + \operatorname{sen}\frac{15}{6}\pi + \operatorname{tg}\frac{23}{3}\pi + \operatorname{sen}\frac{31}{4}\pi + \operatorname{cotg}\frac{43}{6}\pi$ $[1-\sqrt{2}]$

134 $\operatorname{tg}\frac{27}{4}\pi + \operatorname{sen}\frac{33}{6}\pi + \cos\frac{45}{4}\pi - \operatorname{tg}\frac{23}{3}\pi + \operatorname{cotg}\frac{29}{6}\pi$ $\left[-\frac{4+\sqrt{2}}{2}\right]$

135 $3 \operatorname{sen} 750° - 2\cos 855° - 2 \operatorname{sen} 570° + \operatorname{tg} 495°$ $\left[\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right]$

136 $\operatorname{sen}\frac{27}{6}\pi - 2\operatorname{tg}\frac{25}{4}\pi - \cos\frac{17}{6}\pi + \operatorname{cotg}\frac{16}{3}\pi$ $\left[\frac{5\sqrt{3}-6}{6}\right]$

137 $2\cos 486° + 3 \operatorname{sen} 36° - 2\cos 666° - 4 \operatorname{sen} 216°$ $[3 \operatorname{sen} 36°]$

Uguaglianze verificabili con la riduzione al primo quadrante e le relazioni tra gli archi associati

Verifica le seguenti uguaglianze.

138 $\dfrac{4(\operatorname{sen} 150° - \cos 120°)\cdot(\cos 330° \cdot \operatorname{sen} 240°)}{\operatorname{tg} 315° - \cos 450°} = \operatorname{tg}^2 240°$

139 $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{9}{4}\pi + \operatorname{tg}^2\left(-\frac{4}{3}\pi\right)}{\operatorname{sen}\left(-\frac{3}{2}\pi\right)} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{5}{6}\pi + \operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\left(-\frac{3}{4}\pi\right)}{\operatorname{sen}\frac{7}{6}\pi \cdot \cos\frac{2}{3}\pi}$

140 $\dfrac{\cos\frac{5}{3}\pi\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi - \operatorname{cotg}\frac{11}{6}\pi\right)}{\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi - \cos\frac{7}{6}\pi} = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}$

141 $\operatorname{tg}\frac{27}{4}\pi + 2\cos 7\pi + 2\operatorname{tg}\frac{22}{3}\pi \cdot \operatorname{sen}\frac{14}{3}\pi = \cos\frac{11}{2}\pi$

142 $\operatorname{sen}\frac{31}{6}\pi + \operatorname{tg}\frac{17}{3}\pi + \cos\frac{23}{3}\pi = \cos\frac{25}{4}\pi + \operatorname{sen}\frac{21}{4}\pi + \operatorname{tg}\frac{2}{3}\pi$

143 $\operatorname{cotg}\frac{25}{3}\pi + \operatorname{tg}\frac{29}{6}\pi + \operatorname{sen}\frac{28}{3}\pi + \cos\frac{19}{6}\pi = \operatorname{tg}\frac{11}{3}\pi$

144 $\operatorname{sen} 10° \cdot (\operatorname{tg} 190° + 1) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 170°}{\cos 10°} + \cos 80°$

I grafici delle funzioni goniometriche e gli archi associati

Disegna i grafici delle seguenti funzioni dopo aver semplificato la loro espressione analitica mediante le regole degli archi associati.

145 $y = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + 2\cos(\pi + x)$ $[y = -3\cos x]$

146 $y = -\operatorname{tg}(-x) + 2$ $[y = \operatorname{tg} x + 2]$

147 $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x)}$ $\left[y = \frac{1}{2}\sec x\right]$

148 $y = \dfrac{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sec(\pi - x)} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$ $\left[y = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

149 $y = \dfrac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{-\operatorname{sen}(-x)}$ $[y = 2\operatorname{sen} x,\ x \neq k\pi]$

2. LE FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Teoria a pag. 708

150 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo seno, coseno e tangente di 75° e cos 15° utilizzando le formule di addizione e sottrazione.

Scriviamo $75° = 30° + 45°$ e applichiamo le formule di addizione del seno, del coseno e della tangente:

$$\operatorname{sen}(30° + 45°) = \operatorname{sen} 30° \cos 45° + \operatorname{sen} 45° \cos 30°;$$
$$\cos(30° + 45°) = \cos 30° \cos 45° - \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30°;$$
$$\operatorname{tg}(30° + 45°) = \frac{\operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg} 45°}{1 - \operatorname{tg} 30° \operatorname{tg} 45°}.$$

Poiché $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45° = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} 45° = 1$:

$$\operatorname{sen} 75° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4};$$

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4};$$

$$\operatorname{tg} 75° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{\sqrt{3} + 3}{3}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}}.$$

Razionalizzando, abbiamo: $\operatorname{tg} 75° = 2 + \sqrt{3}$.
Calcoliamo ora cos 15° scrivendo: $15° = 45° - 30°$.

Per la formula di sottrazione del coseno:

$$\cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Applicando opportunamente le formule di addizione e sottrazione, calcola le seguenti funzioni goniometriche.

151 sen 165°; $\cos\frac{7}{12}\pi$; tg 195°. $\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}; 2-\sqrt{3}\right]$

152 $\text{sen}\frac{17}{12}\pi$; cos 165°; $\text{tg}\frac{7}{12}\pi$. $\left[\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}; \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}; -2-\sqrt{3}\right]$

153 sen 285°; $\cos\frac{17}{12}\pi$; tg 255°. $\left[\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}; 2+\sqrt{3}\right]$

154 $\sec\frac{7}{12}\pi$; cosec 165°; cotg 75°. $[-\sqrt{6}-\sqrt{2}; \sqrt{6}+\sqrt{2}; 2-\sqrt{3}]$

155 **ESERCIZIO GUIDA**

Sviluppiamo $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$ **e** $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$**, utilizzando le formule di addizione e sottrazione.**

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = \text{sen}\frac{\pi}{6}\cos x + \text{sen}\, x\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}\, x;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos x + \text{sen}\frac{\pi}{6}\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\text{sen}\, x.$$

Sviluppa con le formule di addizione e sottrazione e semplifica le seguenti espressioni.

156 $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$ $[\sqrt{3}\cos x]$

157 $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ $[-\text{sen}\, x]$

158 $\cos(60° + x) - \text{sen}(120° + x)$ $\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}(\cos x + \text{sen}\, x)\right]$

159 $\text{sen}\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$ $[0]$

160 $\cos(\alpha + 135°) - \cos(225° - \alpha) + \cos(-\alpha)$ $[\cos\alpha]$

161 $\cos\left(\alpha-\frac{11}{6}\pi\right)-\text{sen}\left(\frac{5}{3}\pi+\alpha\right)$ $[\sqrt{3}\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha]$

162 $(\sqrt{3}\,\text{tg}\,\alpha - 1)\cdot\text{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$ $[-\text{tg}\,\alpha]$

163 $\dfrac{\text{sen}(\alpha + 45°) - \cos(\alpha + 45°)}{\text{sen}(\alpha + 135°) + \cos(\alpha + 315°)}$ $[\text{tg}\,\alpha]$

164 $\cos(210° - x) - \text{sen}(120° + x)$ $[-\sqrt{3}\cos x]$

165 $\text{sen}\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)+\text{sen}\left(\alpha+\frac{5}{6}\pi\right)$ $\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cos\alpha + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\text{sen}\,\alpha\right]$

166 $\cos(60° - \alpha)\cdot\cos(300° - \alpha)$ $\left[\frac{\cos^2\alpha - 3\,\text{sen}^2\alpha}{4}\right]$

167 $\cos\left(\alpha-\frac{2}{3}\pi\right)+\frac{1}{2}\text{sen}\,\alpha+\cos\left(\alpha-\frac{7}{6}\pi\right)-\text{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right]$

168 $\text{sen}(240° - \alpha) + \cos(\alpha - 330°)$ $[0]$

169 $\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(1-\text{tg}\, x)-1$ $[\text{tg}\, x]$

170 $\text{sen}\,(\alpha + 300°) \cdot \text{sen}\,(240° + \alpha)$ $\left[\frac{1}{4}(-\text{sen}^2\alpha + 3\cos^2\alpha)\right]$

171 $\text{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \text{tg}\left(\alpha + \frac{2}{3}\pi\right)$ $\left[\frac{2\sqrt{3}\,(1 + \text{tg}^2\alpha)}{1 - 3\,\text{tg}^2\alpha}\right]$

172 $\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ $[0]$

173 $\text{sen}^2(30° + x) + \cos x \cos(x - 240°) - \text{sen}^2 x$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

174 $\dfrac{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}$ $[-\sqrt{3}]$

175 $\text{sen}^2(\alpha - 150°) + \cos^2(\alpha + 330°) - 1$ $[\sqrt{3}\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha]$

176 $\text{tg}\,(\alpha - 135°) \cdot \text{tg}\,(\alpha + 225°) - 1$ $\left[\frac{4\,\text{tg}\,\alpha}{(1 - \text{tg}\,\alpha)^2}\right]$

177 $\text{sen}^2(\alpha - 150°) - \cos^2(300° - \alpha) - \sqrt{3}\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$ $[0]$

178 $\text{sen}\left(\frac{7}{6}\pi - \alpha\right) \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\cos^2\alpha$ $\left[-\frac{3}{4}\cos 2\alpha\right]$

179 Dati gli angoli acuti α e β, con $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$ e $\cos\beta = \frac{2}{3}$, calcola $\cos(\alpha + \beta)$. $\left[\frac{4\sqrt{2} - \sqrt{5}}{9}\right]$

180 Dati gli angoli α e β, con $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ e $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, sapendo che $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{4}$ e $\cos\beta = \frac{3}{4}$, calcola $\text{sen}(\alpha + \beta)$. $\left[\frac{3 - \sqrt{105}}{16}\right]$

181 Dati gli angoli α e β, con $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ e $\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$, sapendo che $\text{sen}\,\alpha = -\frac{2}{3}$ e $\cos\beta = \frac{1}{3}$, calcola $\text{tg}(\alpha + \beta)$. $\left[\frac{2 - 2\sqrt{10}}{\sqrt{5} + 4\sqrt{2}}\right]$

Sapendo che $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ e che $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcola le seguenti funzioni goniometriche.

182 $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$; $\text{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$. $\left[\frac{-4 + 3\sqrt{3}}{10}; \frac{48 + 25\sqrt{3}}{11}\right]$

183 $\cos\left(\frac{2}{3}\pi - \alpha\right)$; $\text{cotg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$. $\left[\frac{4\sqrt{3} - 3}{10}; 7\right]$

Sapendo che $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ e che $90° < \alpha < 180°$, calcola le seguenti funzioni goniometriche.

184 $\text{sen}\left(\frac{7}{6}\pi + \alpha\right)$; $\cos(240° + \alpha)$. $\left[\frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}; \frac{5 + 12\sqrt{3}}{26}\right]$

185 $\text{tg}(45° + \alpha)$; $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. $\left[-\frac{7}{17}; \frac{12}{13}\right]$

Date le seguenti informazioni, determina i valori richiesti.

186 $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$. Calcola:
$\text{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, $\text{cotg}\left(\frac{3}{4}\pi + \alpha\right)$, $\text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$. $\left[\frac{-25\sqrt{3} - 48}{39}; 7; \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}\right]$

187 $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Calcola:

$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, $\operatorname{sen}\left(\frac{5}{6}\pi - \alpha\right)$, $\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi - \alpha\right)$. $\left[-\frac{4+\sqrt{2}}{6}; \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}; \frac{9+4\sqrt{2}}{7}\right]$

188 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{sen}\beta = -\frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$. Calcola:

$\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$. $\left[3; \frac{13}{50}\sqrt{10}\right]$

189 $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$. Calcola:

$\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$. $\left[\frac{1}{3}; \frac{-\sqrt{5}(1+2\sqrt{3})}{10}\right]$

190 $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 5$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, con α e β nel primo quadrante. Calcola:

$\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$. $\left[1; -\frac{1}{5}; \frac{\sqrt{26}}{26}\right]$

191 $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{3}{19}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, con α e β nel primo quadrante. Calcola:

$\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$. $\left[\frac{1}{6}; \frac{9}{17}; \frac{9\sqrt{370}}{370}; \frac{19\sqrt{370}}{370}\right]$

192 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = -\frac{4}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Calcola:

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, $\operatorname{sen}\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{4}\right)$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, $\cos(\pi + \alpha - \beta)$. $\left[\frac{7}{25}; -\frac{17}{50}\sqrt{2}; \text{non esiste}; 0\right]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

193 $\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{6} - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$ $\left[\frac{-(2\sqrt{6}+1)}{6}\right]$

194 $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \arccos\frac{4}{5}\right)$ $\left[\frac{4\sqrt{3}+3}{10}\right]$

195 $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{5} - \operatorname{arcsen}\frac{1}{2}\right)$ $\left[\frac{48-25\sqrt{3}}{39}\right]$

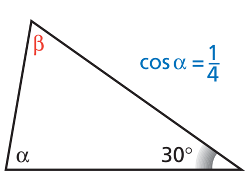
196 $\cos\left[\arccos\frac{12}{13} - \operatorname{arcsen}\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$ $\left[\frac{16}{65}\right]$

197 $\operatorname{sen}\left[\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right]$ $\left[\frac{\sqrt{10}(-3+\sqrt{3})}{20}\right]$

198 $\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}\frac{12}{5} - \operatorname{arcsen}\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$ [non esiste]

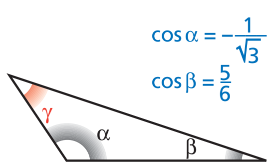
199 Calcola $\operatorname{sen}(\alpha + \beta + \gamma)$, sapendo, che α, β e γ sono angoli del primo quadrante e che $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\beta = \frac{4}{5}$, $\operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{3}$. $\left[\frac{6\sqrt{2}+8\sqrt{6}+3\sqrt{3}-4}{30}\right]$

200



Determina $\operatorname{tg}\beta$. $\left[\frac{\sqrt{3}(4+\sqrt{5})}{3}\right]$

201



Determina $\operatorname{sen}\gamma$. $\left[\frac{5\sqrt{6}-\sqrt{33}}{18}\right]$

202 α, β, γ sono angoli acuti, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{3}{4}$. Calcola $\operatorname{sen}(\alpha + \beta + \gamma)$. $\left[\frac{2}{3}\sqrt{2}\right]$

203 When $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ and $\cos\beta = \frac{4}{5}$, α and β less then 90°, express $\sin(\alpha + \beta)$ in the form $\frac{a}{b}$, where $a, b \in \mathbb{Q}$. Hence, or otherwise, show $\cos(45° - \alpha - \beta) = \frac{89\sqrt{2}}{130}$.
(IR *Leaving Certificate Examination*, Higher Level, 1995)
$\left[\sin(\alpha + \beta) = \frac{56}{65}\right]$

204 Dato il triangolo di angoli α, β e γ, determina $\operatorname{tg}\gamma$ sapendo che $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ e $\cos\beta = \frac{4}{5}$. Puoi dire se il triangolo è acutangolo o ottusangolo?
$\left[-\frac{56}{33}; \text{ottusangolo}\right]$

205 α e β appartengono al primo quadrante, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{cotg}\beta = 3$. Dimostra che $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

206 Dimostra che $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha}$.

Il grafico di $y = a \operatorname{sen} x + b \cos x$ e l'angolo aggiunto

Disegna il grafico delle seguenti funzioni, dopo averne trasformato l'equazione con il metodo dell'angolo aggiunto.

207 $y = \sqrt{3}\operatorname{sen} x - \cos x$

208 $y = \sqrt{2}\operatorname{sen} x + \sqrt{2}\cos x - 1$

209 $y = \operatorname{sen}(x + 60°) + \cos(x + 60°)$

210 $y = \operatorname{sen}(\pi + x) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

211 $y = \operatorname{sen} 2x - \cos 2x - \frac{1}{2}$

212 $y = \operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)$

213 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + 2$

214 $y = |\operatorname{sen}|x| - \cos|x||$

215 $y = 2\sqrt{3}\operatorname{sen} 4x - 2\cos 4x + \frac{1}{2}$

216 $y = \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

L'angolo fra due rette

Calcola la tangente goniometrica dell'angolo acuto formato dalle seguenti coppie di rette.

217 $y = -5x$; $x - y = 2$. $\left[\frac{3}{2}\right]$

218 $3x + 2y = 0$; $\sqrt{3}x - 3y - 2 = 0$. $\left[\frac{24 + 13\sqrt{3}}{3}\right]$

219 $\sqrt{3}x - y + 3 = 0$; $x - \sqrt{3}y = -2$. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

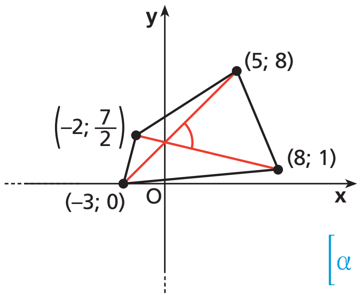
220 $y = -\frac{8}{5}x + 6$; $8x - 5y - 6 = 0$. $\left[\frac{80}{39}\right]$

221 $2x + 4y - 1 = 0$; $2y + 4 = 0$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

222 Determina le rette passanti per $A(2; -1)$ che formano con la retta $3x + y + 1 = 0$ un angolo di 45°.
$\left[y = 2x - 5,\ y = -\frac{1}{2}x\right]$

223 Trova le equazioni delle rette passanti per il punto $A(2; -1)$ che formano un angolo di $60°$ con la retta di equazione $y = \sqrt{3}\,x + 1$. $[y = -1,\ y = -\sqrt{3}\,x + 2\sqrt{3} - 1]$

224 Determina l'angolo formato dalle diagonali del quadrilatero della figura.



$\left[\alpha = \text{arctg}\,\frac{5}{3}\right]$

225 Rappresenta graficamente l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ e trova l'angolo formato dagli asintoti. $\left[\alpha = \text{arctg}\,\frac{4}{3}\right]$

226 Le due rette di equazioni $y = 2x - 6$ e $x - 3y - 3 = 0$ si intersecano nel punto A e definiscono con l'asse y il triangolo ABC. Trova gli angoli del triangolo e, detto G il baricentro, determina l'angolo $B\widehat{G}C$.
$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} + \text{arctg}\,\frac{1}{3}, \frac{\pi}{2} - \text{arctg}\,2;\ \text{arctg}\left(-\frac{9}{7}\right)\right]$

227 Trova i vertici e gli angoli del triangolo che ha i lati sulle rette di equazioni $x - 4y + 9 = 0$, $4x + y - 15 = 0$, $7x + 6y - 5 = 0$.
$\left[(-1; 2), (3; 3), (5; -5); \frac{\pi}{2}, \text{arctg}\,2, \text{arctg}\,\frac{1}{2}\right]$

228 Determina l'ampiezza dell'angolo formato dalle tangenti alla circonferenza di equazione $(x-4)^2 + y^2 = 4$ condotte dal punto $A(8; 4)$.
$\left[\alpha = \text{arctg}\,\frac{\sqrt{7}}{3}\right]$

229 Determina le tangenti goniometriche degli angoli del triangolo di vertici $A(-2; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(2; 3)$ e detto D il centro della circonferenza circoscritta trova gli angoli $A\widehat{D}B$ e $B\widehat{D}C$.
$\left[\text{tg}\,A\widehat{B}C = -4;\ \text{tg}\,B\widehat{C}A = 1;\ \text{tg}\,C\widehat{A}B = \frac{3}{5}; \frac{\pi}{2}, \text{arctg}\,\frac{15}{8}\right]$

230 Rappresenta l'iperbole di equazione $4x^2 - y^2 - 8x + y - 1 = 0$ e determina l'angolo formato dagli asintoti.
$\left[\alpha = \text{arctg}\,\frac{4}{3}\right]$

231 Considera i triangoli ABC con $A\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$, $B(4; 0)$ e C variabile sulla retta r di equazione $y = -x + 9$.
Verifica che esistono due posizioni di C per cui è $A\widehat{C}B = \frac{\pi}{4}$. $\left[C_1(5; 4), C_2\left(\frac{7}{3}; \frac{20}{3}\right)\right]$

232 Considera la parabola γ di equazione $y = x^2 - 4x + 4$ e la retta r passante per il punto $A(-1; 1)$ e per il punto B di γ di ascissa $\frac{3}{5}$.
La retta r interseca γ, oltre che in B, anche in C. Trova l'equazione della retta tangente t alla parabola in C e l'angolo formato dalle rette r e t.
$\left[r\!: y = \frac{3}{5}x + \frac{8}{5};\ t\!: y = 4x - 12; \frac{\pi}{4}\right]$

233 Scrivi l'equazione della parabola che ha l'asse di equazione $x = 2$ e passa per $A(4; 0)$ e $B(-1; -5)$. Trovata l'equazione della tangente t in A alla parabola, determina l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta t e dalla retta passante per A e per il vertice della parabola.
$\left[y = -x^2 + 4x;\ t\!: y = -4x + 16;\ \text{arctg}\,\frac{2}{9}\right]$

234 Due rette r e s passanti per $A(4; 2)$ formano un angolo α tale che $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$. Sapendo che r passa per $B(10; 4)$ e che s interseca l'asse y in un punto di ordinata negativa, trova l'equazione della retta s. $[y = x - 2]$

235 Trova l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalle tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 4$ nei suoi punti di ascissa -3 e 2.
$\left[\text{arctg}\,\frac{5}{6}\right]$

236 Il triangolo ABC ha i vertici in $A(1; 0)$, $B(5; 4)$ e in C, che si trova sull'asse x, con ascissa maggiore di 1. Determina la posizione di C, sapendo che $\text{tg}\,A\widehat{C}B = \frac{2}{3}$. Detto poi M il punto medio di AB, determina gli angoli $A\widehat{C}M$ e $M\widehat{C}B$.
$\left[C(11; 0);\ A\widehat{C}M = \text{arctg}\,\frac{1}{4};\ M\widehat{C}B = \text{arctg}\,\frac{5}{14}\right]$

237 Trova le ampiezze degli angoli del triangolo di vertici $A(1; 0)$, $B(2; 2\sqrt{3})$, $C(7; -\sqrt{3})$ e determina le equazioni delle rette che dividono l'angolo $B\widehat{A}C$ in tre parti uguali.
$\left[\widehat{A} = \frac{\pi}{2}, \widehat{B} = \frac{\pi}{3}, \widehat{C} = \frac{\pi}{6};\ \sqrt{3}\,x - 7y - \sqrt{3} = 0, 5\sqrt{3}\,x - 9y - 5\sqrt{3} = 0\right]$

238 Date le rette r e s, di equazioni $y = 3x - 3$ e $3y + x - 1 = 0$, che si intersecano nel punto A, considera su r il punto B di ascissa 2 e su s il punto C di ascissa 7. Nel triangolo ABC determina l'ampiezza dell'angolo $\widehat{A}$ e dei due angoli in cui esso resta diviso dall'altezza AH relativa al lato BC.
$\left[\widehat{A} = \frac{\pi}{2};\ \text{arctg}\,\frac{1}{2}, \text{arctg}\,2\right]$

239
a) Scrivi l'equazione della circonferenza con centro nell'origine O e passante per $A(1; 1)$ e l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, vertice in A e passante per O.
b) Determina l'angolo formato dalle due curve nel punto A, ossia l'angolo formato dalle tangenti nel loro punto di intersezione.
c) Trova l'angolo formato dalle due tangenti alla parabola nei suoi punti di intersezione con l'asse x.
d) Determina il coseno degli angoli del triangolo formato dalle due tangenti di cui al punto precedente e dall'asse x.
$\left[\text{a) } x^2 + y^2 = 2;\ y = -x^2 + 2x;\ \text{b) } 45°;\ \text{c) arctg}\,\frac{4}{3};\ \text{d) } \frac{3}{5}, \sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{1}{5}}\right]$

240 Dato il fascio di rette di equazione $(2k + 1)x - (2 - k)y + 1 = 0$, determina:
a) le due generatrici e il centro C del fascio;
b) l'angolo formato dalle due generatrici;
c) le rette del fascio che formano un angolo di 45° con la generatrice a cui non corrisponde un valore finito di k;
d) l'angolo formato da tali rette con l'asse x.
$\left[\text{a) } x - 2y + 1 = 0 \text{ e } 2x + y = 0, C\left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right);\ \text{b) sono perpendicolari; c) } |k| = 1;\ \text{d) arctg}\,3 \text{ e arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$

3. LE FORMULE DI DUPLICAZIONE

Teoria a pag. 713

241 **ESERCIZIO GUIDA**

Sviluppiamo sen 4α conoscendo sen α e cos α.

Per far ciò dobbiamo applicare due volte le formule di duplicazione. Nella prima applicazione scriviamo:

$$\text{sen}\ 4\alpha = \text{sen}(2 \cdot 2\alpha) = 2\ \text{sen}\ 2\alpha \cos 2\alpha.$$

Sostituiamo nell'espressione trovata le espressioni corrispondenti a sen 2α e cos 2α:

$$2\ \text{sen}\ 2\alpha \cos 2\alpha = 2(2\ \text{sen}\ \alpha \cos \alpha)(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha).$$

Quindi:

$$\text{sen}\ 4\alpha = 4\,\text{sen}\ \alpha \cos \alpha\ (\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha).$$

242 Calcola $\cos 4\alpha$ in funzione di $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$. $[1 - 8\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha]$

243 Calcola $\operatorname{sen} 3\alpha$ e $\cos 3\alpha$ in funzione di $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$, utilizzando le formule di addizione e sottrazione e le formule di duplicazione. $[3\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha, \cos\alpha - 3\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha]$

244 Se $\tan 3x$ è scritta in termini di $\tan x$, $\tan 3x = \dfrac{A\tan x - B\tan^3 x}{1 - C\tan^2 x}$, trova $A + B + C$.

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2000)

[7]

Sviluppa con le formule di duplicazione e semplifica le seguenti espressioni.

245 $\cos 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$ [1]

246 $\cos 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha + 2\operatorname{sen}^2\alpha$ $[(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)^2]$

247 $\operatorname{tg} 2\alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}\alpha) \cdot \operatorname{cotg}\alpha$ $\left[\dfrac{2}{1 - \operatorname{tg}\alpha}\right]$

248 $\cos 2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha + (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2$ $[2\cos^2\alpha]$

249 $\cos 2\alpha - \dfrac{\cos\alpha \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ $[-1]$

250 $\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \operatorname{cotg}\alpha$ $[\operatorname{tg}\alpha]$

251 $(1 + \cos 2\alpha) \cdot (1 + \operatorname{tg}\alpha)^2$ $[2(1 + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)]$

252 $\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{\cos\alpha \cdot \operatorname{sen} 2\alpha} \cdot (\operatorname{cotg}^2\alpha + 1)$ $\left[\dfrac{1}{\operatorname{sen}^3\alpha}\right]$

253 $\dfrac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha$ [0]

254 $\dfrac{3\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha}{2\operatorname{tg} 2\alpha}$ $[3\cos^2\alpha - 1]$

255 $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha} \cdot (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) - \operatorname{sen} 2\alpha$ [1]

256 $(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha) \cdot \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha} + 2\operatorname{sen} 2\alpha$ $[(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2]$

257 $\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi + 2\alpha\right) - \cos\left(2\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos^2\alpha$ $[\sqrt{2}\operatorname{sen}^2\alpha]$

258 $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - 2\alpha\right) \cdot (1 + \operatorname{tg} 2\alpha) - 1$ $\left[\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}\right]$

259 $\operatorname{sen}\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right) + 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)$ $[2\operatorname{sen}^2\alpha]$

260 **ESERCIZIO GUIDA**

Senza determinare il valore dell'angolo α, calcoliamo $\operatorname{sen} 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ e $\operatorname{tg}\left(2\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$ sapendo che:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5} \text{ e } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

- Consideriamo $\operatorname{sen} 2\alpha$ e applichiamo la formula di duplicazione del seno, $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$. Determiniamo $\cos\alpha$ per mezzo della prima relazione fondamentale, osservando che $\cos\alpha$ deve essere negativo, poiché $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} = -\frac{4}{5}.$$

Sostituendo i valori di $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

- Per trovare $\cos 2\alpha$, applichiamo la formula $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$:

$$\cos 2\alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}.$$

- Per calcolare $\operatorname{tg}\left(2\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$, applichiamo la formula di addizione:

$$\operatorname{tg}\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}.$$

Calcoliamo tg 2α con la formula di duplicazione: $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

Essendo $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\dfrac{3}{4}$, si ha: $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{\cancel{2}^{1}\left(-\frac{3}{\cancel{4}_{2}}\right)}{1 - \frac{9}{16}} = -\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{16}{7} = -\dfrac{24}{7}$.

Sostituendo, otteniamo:

$$\operatorname{tg}\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\frac{24}{7} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\,\frac{24}{7}} = \frac{-24 + 7\sqrt{3}}{7 + 24\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3} - 24}{7 + 24\sqrt{3}}.$$

Con le informazioni date, calcola quanto è richiesto.

261 $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Calcola sen 2α, cos 2α, tg 2α. $\left[\frac{3}{8}\sqrt{7}; \frac{1}{8}; 3\sqrt{7}\right]$

262 $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{4}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Calcola sen 2α, cos 2α, tg 2α. $\left[\frac{\sqrt{15}}{8}; \frac{7}{8}; \frac{\sqrt{15}}{7}\right]$

263 $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{6}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Calcola cos 4α. $\left[\frac{127}{162}\right]$

264 $\cos \alpha = \frac{1}{4}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Calcola cos 4α. $\left[\frac{17}{32}\right]$

265 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$, con $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Calcola sen 2α, cos 2α. $\left[-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]$

266 $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{9}{41}$, con $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$. Calcola sen α, cos α. $\left[-\frac{720}{1681}; \frac{1519}{1681}\right]$

267 $\cos \alpha = \frac{9}{41}$, con $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. Calcola sen 2α, cos 2α, tg 2α. $\left[-\frac{720}{1681}; -\frac{1519}{1681}; \frac{720}{1519}\right]$

268 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$, con $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Calcola sen 2α, cos 2α, tg 2α. $\left[-\frac{24}{25}; \frac{7}{25}; -\frac{24}{7}\right]$

269 $\operatorname{cotg} \alpha = -3$, con $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. Calcola sen 2α, cos 2α, tg 2α. $\left[-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; -\frac{3}{4}\right]$

270 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Calcola sen 2α, cos 2α, tg 2α. $\left[\frac{336}{625}; -\frac{527}{625}; -\frac{336}{527}\right]$

271 $\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. Calcola sen 2α, cos 2α, $\operatorname{tg}\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$. $\left[-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}; \frac{1}{7}\right]$

272 $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{29}{21}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Calcola $\operatorname{sen}(\pi - 2\alpha)$, cos 2α, $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + 2\alpha\right)$. $\left[-\frac{840}{841}; -\frac{41}{841}; -\frac{41}{840}\right]$

273 $\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{4}{5}$, con $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Calcola sen 4α, cos 4α, tg 4α. $\left[-\frac{24}{25}; -\frac{7}{25}; \frac{24}{7}\right]$

274 $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{3}$, con $\pi < \alpha < 2\pi$. Calcola sen α, cos α, tg α. $\left[-\frac{4}{9}\sqrt{2}; -\frac{7}{9}; \frac{4}{7}\sqrt{2}\right]$

275 $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{2}{3}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$. Calcola sen 6α, cos 6α, tg 6α. $\left[\frac{12}{13}; \frac{5}{13}; \frac{12}{5}\right]$

276 $\operatorname{sen} 4\alpha = \frac{8}{17}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{8}$. Calcola sen 8α, cos 8α, tg 8α. $\left[\frac{240}{289}; \frac{161}{289}; \frac{240}{161}\right]$

277 $\operatorname{sen}\alpha=\frac{24}{25}$, $\operatorname{sen}\beta=-\frac{3}{5}$, con $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ e $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$. Calcola $\cos 2(\alpha+\beta)$, $\operatorname{sen}(2\alpha+\beta)$. $\left[\frac{7}{25}; \frac{117}{125}\right]$

278 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{sen}\beta=\frac{7}{25}$, con $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ e $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$. Calcola $\operatorname{tg}(\pi+2\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-2\beta)$. $\left[\text{non esiste}; -\frac{44}{125}\right]$

279 $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, con $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Calcola $\operatorname{sen}\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, $\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)$. $\left[-\frac{8+7\sqrt{2}}{18}; \frac{81+56\sqrt{2}}{17}\right]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

280 $\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$ $\left[\frac{24}{25}\right]$

281 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}\right)$ $\left[-\frac{17\sqrt{2}}{50}\right]$

282 $\cos\left(2\arccos\frac{1}{4}\right)$ $\left[-\frac{7}{8}\right]$

283 $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

284 $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{8}{15}\right)$ $\left[\frac{161}{289}\right]$

285 $\operatorname{tg}\left[2\operatorname{arcsen}\left(-\frac{7}{25}\right)\right]$ $\left[-\frac{336}{527}\right]$

286 **VERO O FALSO?**

a) Se $\cos\alpha=\frac{3}{7}$ e $\cos\beta=\frac{6}{7}$, allora $\beta=2\alpha$. V F

b) L'uguaglianza $\operatorname{sen}5\alpha=2\operatorname{sen}\frac{5}{2}\alpha\cos\frac{5}{2}\alpha$ è vera $\forall\alpha\in\mathbb{R}$. V F

c) $\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha$ è vera solo per $\alpha=k\pi$. V F

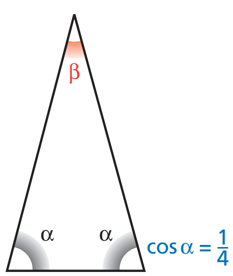
d) Se $\operatorname{sen}2\alpha=\frac{3}{10}$, allora $\operatorname{sen}4\alpha=\frac{6\sqrt{91}}{100}$. V F

e) Se $\cos 2\alpha=\frac{1}{4}$, allora $\cos 4\alpha=\frac{7}{8}$. V F

f) L'uguaglianza $\operatorname{sen}2\alpha=\operatorname{sen}\alpha$ non è mai vera. V F

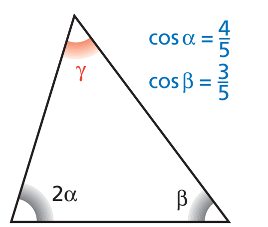
Le applicazioni alla geometria

287



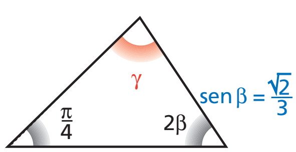
Calcola sen β e cos β. $\left[\frac{\sqrt{15}}{8}; \frac{7}{8}\right]$

288



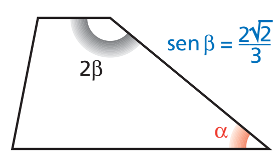
Calcola sen γ e cos γ. $\left[\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right]$

289



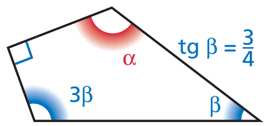
Determina tg γ. $\left[\frac{81+20\sqrt{14}}{31}\right]$

290



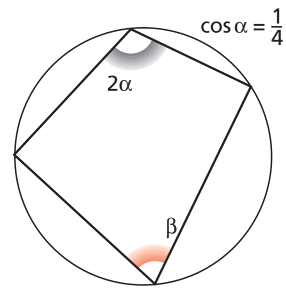
Calcola cotg α. $\left[\frac{7\sqrt{2}}{8}\right]$

291



Determina $\cos\alpha$. $\left[-\frac{336}{625}\right]$

292



Determina $\operatorname{tg}\beta$. $\left[\frac{\sqrt{15}}{7}\right]$

293 Un angolo alla circonferenza ha ampiezza α e $\cos\alpha = \frac{8}{17}$. Trova seno e coseno del corrispondente angolo al centro. $\left[\operatorname{sen}\beta = \frac{240}{289}; \cos\beta = -\frac{161}{289}\right]$

294 Nel quadrilatero $ABCD$ inscritto in una circonferenza l'angolo $\widehat{A}$ è tale che $\operatorname{tg}\widehat{A} = \frac{24}{7}$ e l'angolo $\widehat{B}$ è doppio di $\widehat{A}$. Trova $\cos\widehat{C}$ e $\cos\widehat{D}$. $\left[-\frac{7}{25}; \frac{527}{625}\right]$

295 In un quadrilatero $ABCD$ l'angolo $\widehat{A}$ misura 135°, l'angolo $\widehat{B}$ è tale che $\cos\widehat{B} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ e $\widehat{C} \cong \widehat{B}$. Trova i valori delle funzioni goniometriche di $\widehat{D}$. $\left[\operatorname{sen}\widehat{D} = \frac{7}{10}\sqrt{2}; \cos\widehat{D} = \frac{\sqrt{2}}{10}; \operatorname{tg}\widehat{D} = 7\right]$

296 Un triangolo isoscele ABC ha gli angoli alla base $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ di ampiezza α, con $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$. Traccia l'altezza BH e determina $\operatorname{tg} C\widehat{B}H$. $\left[\frac{7}{24}\right]$

I grafici e le formule di duplicazione

Traccia il grafico delle seguenti funzioni dopo aver trasformato le loro equazioni.

297 $y = -(\operatorname{sen} x + \cos x)^2$

298 $y = \frac{2\operatorname{sen} 4x}{\cos 2x} + 1$

299 $y = 4\operatorname{tg} 2x\,(1 - \operatorname{tg}^2 x)$

300 $y = \frac{\cos 2x - \cos^2 x}{2\operatorname{sen} x}$

301 $y = \operatorname{sen} 4x \cos 4x + \frac{1}{2}$

302 $y = |2\operatorname{sen} x \operatorname{cosec} 2x| - 1$

Mediante le formule di duplicazione, trasforma le seguenti espressioni in espressioni lineari del seno e del coseno.

303 $\cos^2 x - \frac{1}{2} - \operatorname{sen} x \cos x$ $\left[\frac{1}{2}(\cos 2x - \operatorname{sen} 2x)\right]$

304 $2\operatorname{sen}^2 x - \sqrt{3}$ $[-\cos 2x + 1 - \sqrt{3}]$

305 $\cos^2 x - 2\sqrt{3}\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen}^2 x$ $[\cos 2x - \sqrt{3}\operatorname{sen} 2x]$

306 $2\sqrt{2}\operatorname{sen} x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ $[\operatorname{sen} 2x + \cos 2x - 1]$

307 $\operatorname{sen}^2 x - \cos x \operatorname{sen} x + 2\cos^2 x$ $\left[\frac{-\operatorname{sen} 2x + \cos 2x + 3}{2}\right]$

308 $2\operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen} x \cos x$ $[1 - \cos 2x - 2\operatorname{sen} 2x]$

Trasforma le seguenti funzioni in funzioni lineari del seno e coseno e, utilizzando il metodo dell'angolo aggiunto, traccia il loro grafico.

309 $y = \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x$

310 $y = 2 \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x$

311 $y = \cos^2 x + 2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x$

312 $y = -\cos^2 x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x$

313 $y = \sqrt{2} \cos^2 x + \sqrt{2} \operatorname{sen} x \cos x$

314 $y = \sqrt{3} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x - 1$

315 $y = 2\sqrt{2} \cos x \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

316 $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x - \frac{1}{2} \cos^2 x$

4. LE FORMULE DI BISEZIONE

▶ Teoria a pag. 715

317 **ESERCIZIO GUIDA**

Senza determinare il valore dell'angolo α, calcoliamo $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ sapendo che $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{12}{13}$ e $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Poiché $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, $\cos \alpha$ deve essere negativo. Dalla relazione $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ricaviamo il valore di $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = -\frac{5}{13}.$$

Inoltre, essendo $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, si ha $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3}{4}\pi$, quindi il lato termine di $\frac{\alpha}{2}$ si trova nel secondo quadrante. Perciò $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$ deve essere positivo e $\cos \frac{\alpha}{2}$ negativo. Si ha:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{2}} = -\sqrt{\frac{\cancel{8}^{4}}{13} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_{1}}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13},$$

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{\cancel{18}^{9}}{13} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_{1}}} = \frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{8}{13}} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}.$$

Osservazione. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ si può ricavare anche applicando la definizione:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{3\sqrt{13}}{13}}{-\frac{2\sqrt{13}}{13}} = -\frac{3}{2}.$$

Con le informazioni date calcola quanto è richiesto.

318 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Calcola seno, coseno e tangente di $\frac{\alpha}{2}$. $\left[\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{2\sqrt{5}}{5}; \frac{1}{2}\right]$

319 $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}$, con $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Calcola seno, coseno e tangente di $\frac{\alpha}{2}$. $\left[\frac{\sqrt{15}}{4}; \frac{1}{4}; \sqrt{15}\right]$

320 $\sec \alpha = -\frac{5}{3}$, con $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Calcola $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$. $\left[2; \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$

321 $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{7}\sqrt{6}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Calcola $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ e $\cos\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)$. $\left[\frac{\sqrt{21}}{14}(1+\sqrt{2}); -\frac{\sqrt{42}}{7}\right]$

322 $\operatorname{sen}2\alpha = \frac{-\sqrt{15}}{4}$, con $\frac{3}{2}\pi < 2\alpha < 2\pi$. Calcola $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$. $\left[\frac{\sqrt{6}}{4}; -\frac{\sqrt{10}}{4}\right]$

323 $\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$, con $\frac{3}{2}\pi < 2\alpha < 2\pi$. Calcola $\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$. $\left[\frac{\sqrt{6}}{4}; -\frac{\sqrt{15}}{5}\right]$

324 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Calcola $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ e $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$. $\left[\frac{5}{3}; \frac{1}{4}\right]$

325 $\cos 3\alpha = -\frac{7}{8}$, con $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Calcola $\operatorname{sen}\frac{3}{2}\alpha$ e $\cos\frac{3}{2}\alpha$. $\left[\frac{\sqrt{15}}{4}; -\frac{1}{4}\right]$

326 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{sen}\beta = \frac{4}{5}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Calcola $\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$. $\left[\frac{2\sqrt{5}}{5}; \text{non esiste}\right]$

327 $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$, $\operatorname{sen}\beta = -\frac{3}{5}$, $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$. Calcola $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}$. $\left[\frac{7}{9}; -\frac{11}{\sqrt{130}}\right]$

328 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Calcola $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$, $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. $\left[\frac{16\sqrt{17}}{85}; \frac{11}{\sqrt{170}}\right]$

329 $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)$; $\quad\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}\right)$. $\left[\frac{\sqrt{10}}{10}; \frac{3\sqrt{10}}{10}\right]$

330 $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right)$; $\quad\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{8}{15}\right)$. $\left[\frac{\sqrt{26}}{26}; \frac{1}{4}\right]$

331 **VERO O FALSO?**

a) $\operatorname{sen}4x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 8x}{2}}$. V F

b) $\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$. V F

c) $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha}{2}$. V F

d) Se $\cos 4\alpha = \frac{17}{32}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{8}$, allora $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$. V F

Semplifica le seguenti espressioni.

332 $\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\alpha}$; $\quad\dfrac{1-2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}$. $\left[\frac{1+\cos\alpha}{4}; 2\operatorname{cotg}\alpha\right]$

333 $\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \operatorname{sen}\alpha + 1$ $[2]$

334 $2\operatorname{cotg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\sec^2\frac{\alpha}{2}$; $\quad\left(2\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 2\right)\cdot\operatorname{sen}2\alpha$. $\left[\frac{4\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}; 4\operatorname{sen}\alpha\right]$

335 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{cosec}\alpha$; $\quad\dfrac{2-\sec^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. $\left[\frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}; \operatorname{cotg}\alpha\right]$

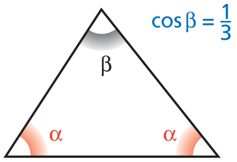
336 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\alpha$ $[-3\operatorname{tg}\alpha]$

337 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cosec}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha$ $[2\operatorname{sen}\alpha]$

338 $\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha$ $\left[\frac{1}{2} + \operatorname{sen}\alpha\right]$

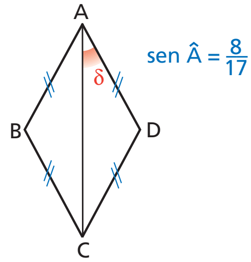
Le applicazioni alla geometria

339



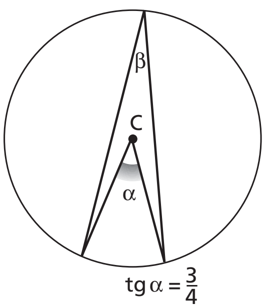
Trova $\cos\alpha$. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

340



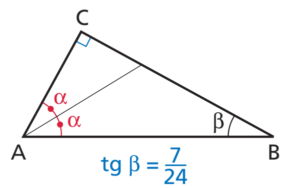
Determina $\text{tg}\,\delta$, $\text{sen}\,\widehat{B}$, $\cos\widehat{B}$. $\left[\frac{1}{4}; \frac{8}{17}; -\frac{15}{17}\right]$

341



Calcola $\text{sen}\,\beta$ e $\cos\beta$. $\left[\frac{\sqrt{10}}{10}; \frac{3\sqrt{10}}{10}\right]$

342



Calcola $\text{sen}\,\alpha$ e $\cos\alpha$. $\left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]$

343 Nel triangolo ABC l'angolo $\widehat{A}$ è doppio dell'angolo $\widehat{B}$ e $\text{tg}\,\widehat{A} = \frac{24}{7}$. Trova $\text{sen}\,\widehat{B}$ e $\text{sen}\,\widehat{C}$. $\left[\frac{3}{5}; \frac{117}{125}\right]$

344 Nel triangolo isoscele ABC, acutangolo di base AB, si ha $\text{sen}\,\widehat{C} = \frac{\sqrt{15}}{8}$. Traccia la bisettrice AP dell'angolo $\widehat{A}$ e calcola $\cos P\widehat{A}B$. $\left[\frac{\sqrt{10}}{4}\right]$

345 Determina seno e coseno dell'angolo α, sapendo che α è un angolo al centro di una circonferenza la cui tangente vale $\frac{4}{3}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Calcola poi il seno dell'angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco. $\left[\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$

I grafici e le formule di bisezione

Disegna i grafici delle seguenti funzioni dopo aver trasformato le loro equazioni.

346 $y = \cos^2\frac{x}{2} - \text{sen}^2\frac{x}{2}$

347 $y = \cos x + 2\cos^2\frac{x}{2}$

348 $y = \text{tg}\frac{x}{2} \cdot \text{sen}\,x - 2\cos x$

349 $y = 4\,\text{sen}^2\frac{x}{2} + 3\cos x$

350 $y = \dfrac{\text{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos x} + 1$

351 $y = \left|\text{sen}^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right|$

5. LE FORMULE PARAMETRICHE

▶ Teoria a pag. 716

352 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{7}{4}$. Calcola sen α, cos α, tg α. $\left[-\frac{56}{65}; -\frac{33}{65}; \frac{56}{33}\right]$

353 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2$. Calcola:
$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha}{\sec\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}$. $\left[-\frac{4}{5}\right]$

Trasforma in $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ le seguenti espressioni.

354 $\frac{2\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1}{\operatorname{sen}\alpha}$ $\left[\frac{2t+1}{t}\right]$

355 $\frac{1 + \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{2 + 2\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha}$ $\left[\frac{1-t}{t+2}\right]$

356 $\frac{2\operatorname{sen}\alpha + 3\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$ $\left[\frac{4t+3-3t^2}{2}\right]$

357 $\frac{2\operatorname{sen}\alpha + 4\cos\alpha}{\cos\alpha} - 2\operatorname{tg}\alpha$ [4]

358 $\frac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} + 1}{4 - \cos^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{2}$ $\left[\frac{-1}{8t^2+6}\right]$

359 $2\operatorname{tg}\alpha + \frac{\cos\alpha}{1 + \operatorname{sen}\alpha}$ $\left[\frac{1+t}{1-t}\right]$

360 $\cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} + 2$ $\left[\frac{t^2+3}{t^2+1}\right]$

6. LE FORMULE DI PROSTAFERESI E DI WERNER

▶ Teoria a pag. 717

Le formule di prostaferesi

Calcola il valore delle seguenti somme o differenze applicando le formule di prostaferesi.

361 sen 15° + sen 75° $\left[\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

362 $\cos\frac{13}{12}\pi + \cos\frac{17}{12}\pi$ $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

363 $\operatorname{sen}\frac{5}{12}\pi - \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

364 cos 105° − cos 15° $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

Trasforma in prodotto le seguenti somme.

365 sen 20° + sen 100° $[\sqrt{3}\cos 40°]$

366 cos 15° − cos 75° $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

367 cos 45° + sen 105° $[\sqrt{3}\operatorname{sen} 75°]$

368 $\operatorname{sen} 60° - \frac{1}{2}$ $[\sqrt{2}\operatorname{sen} 15°]$

369 1 + cos 45° $[2\cos^2(22° 30')]$

370 $\frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{sen} 75°$ [− sen 15°]

371 sen 2α + sen 6α [2 sen 4α cos 2α]

372 cos 10α + cos 4α [2 cos 7α cos 3α]

373 $\cos 5\alpha - \cos 3\alpha$ $[-2 \operatorname{sen} 4\alpha \operatorname{sen} \alpha]$

374 $\operatorname{sen} 8\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha$ $[2 \cos 5\alpha \operatorname{sen} 3\alpha]$

375 $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ $[2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta]$

376 $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$ $\left[2\cos\frac{\pi}{12}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right]$

377 $\operatorname{sen}(60° - \alpha) + \operatorname{sen}(240° + \alpha)$ $[-\operatorname{sen} \alpha]$

378 $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 3\alpha$ $[\operatorname{sen} 2\alpha(1 + 2\cos\alpha)]$

379 $\cos 2\alpha + \operatorname{sen} 8\alpha$ $[2 \operatorname{sen}(45° + 3\alpha)\cos(45° - 5\alpha)]$

380 $1 - \operatorname{sen} \alpha$ $\left[2\cos\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$

381 $1 + \cos \alpha$ $\left[2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right]$

382 $\frac{1}{2} + \operatorname{sen} \alpha$ $\left[2\operatorname{sen}\left(15° + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15° - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$

383 $\cos 6\alpha + \cos 4\alpha - 2\cos 5\alpha$ $[2\cos 5\alpha(\cos\alpha - 1)]$

384 $\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 4\alpha + \operatorname{sen} 3\alpha$ $[\operatorname{sen} 4\alpha(2\cos\alpha - 1)]$

Semplifica le seguenti espressioni.

385 $\frac{\operatorname{sen} 15° + \operatorname{sen} 25°}{\cos 5° \operatorname{sen} 20°}$ $[2]$

386 $\frac{\operatorname{sen}(60° + \alpha) + \operatorname{sen}(60° - \alpha)}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{2\cos 4\alpha}\right]$

387 $\frac{\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha}{\cos 3\alpha - \cos 5\alpha}$ $[\operatorname{cotg} 4\alpha]$

388 $\frac{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 4\alpha + \operatorname{sen} 6\alpha}$ $[\operatorname{cotg} 4\alpha]$

389 $\operatorname{sen}^2(30° - \alpha) - \operatorname{sen}^2(30° + \alpha)$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} 2\alpha\right]$

390 $\frac{\cos^2(45° + \alpha) - \cos^2(45° - \alpha)}{\operatorname{sen} 3\alpha - \operatorname{sen} 7\alpha}$ $\left[\frac{1}{2\cos 5\alpha}\right]$

391 $\frac{\operatorname{sen} 9x - \operatorname{sen} x}{(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)(\cos 4x + \cos 6x)}$ $[4 \operatorname{sen} x]$

392 $\frac{\cos(4\alpha - \beta) - \cos(\beta + 4\alpha)}{\operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} \beta}$ $[4\cos 2\alpha]$

I grafici e le formule di prostaferesi

Disegna i grafici delle seguenti funzioni dopo aver semplificato la loro espressione analitica con le formule di prostaferesi.

393 $y = \frac{\operatorname{sen} 9x - \operatorname{sen} x}{2\cos 5x}$

394 $y = \operatorname{sen}(30° - x) - \operatorname{sen}(30° + x)$

395 $y = \frac{\cos 3x + \cos x}{\operatorname{sen}(60° + x) + \operatorname{sen}(60° - x)}$

396 $y = \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 4x}$

397 $y = \frac{\cos 3x - \cos 5x}{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}$

398 $y = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$

Le formule di Werner

Trasforma in somme i seguenti prodotti.

399 $\operatorname{sen} 2\alpha \cos 3\alpha$ $\left[\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} \alpha)\right]$

400 $\cos 7\alpha \cos 5\alpha$ $\left[\frac{1}{2}(\cos 12\alpha + \cos 2\alpha)\right]$

401 $\operatorname{sen} 4\alpha \operatorname{sen} 5\alpha$ $\left[\frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos 9\alpha)\right]$

402 $\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{5}{2}x$ $\left[\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 3x)\right]$

403 $\operatorname{sen}(x + y)\operatorname{sen}(x - y)$ $\left[\frac{1}{2}(\cos 2y - \cos 2x)\right]$

404 $\operatorname{sen}(2\alpha - \beta)\cos(2\alpha + \beta)$ $\left[\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 4\alpha - \operatorname{sen} 2\beta)\right]$

ESERCIZI VARI Le formule goniometriche

405 **VERO O FALSO?**
Valutare le seguenti affermazioni:

a) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$ quali che siano i valori reali di α e β. V F

b) Nell'uguaglianza $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$ i valori di α per i quali non esiste il primo membro sono gli stessi per i quali non esiste il secondo membro. V F

(*Università di Lecce, Facoltà di Scienze, Test di ingresso,* 2001)

406 **TEST** Quale fra le seguenti relazioni goniometriche è vera per ogni valore di α?

A $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

B $\operatorname{sen}(\pi+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

C $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

D $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$

E $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

(*MIUR, Corso di laurea in Odontoiatria, Test di ingresso,* 2002)

407 **TEST** L'espressione goniometrica

$$\frac{\cos(2\alpha)}{1-\operatorname{sen}(2\alpha)} + 1 \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$$

è equivalente a:

A $2 - \operatorname{cotan}(2\alpha)$.

B $\frac{2\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)-\operatorname{sen}(\alpha)}$.

C $\frac{2\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)-\operatorname{sen}(\alpha)}$.

D $\frac{1}{\cos(\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha)}$.

E $\frac{1}{\operatorname{cotan}(2\alpha)}$.

(*Università di Bergamo, Facoltà di Ingegneria, Corso propedeutico di Matematica*)

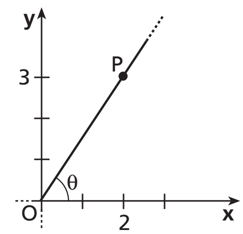
408 Prove that

$$\sin^2(x+\alpha) + \sin^2(x+\beta) + \\ -2\cos(\alpha-\beta)\sin(x+\alpha)\sin(x+\beta)$$

is a constant function of x.

(USA *Atlantic Provinces Council on the Sciences, APICS, Mathematics Contest*, 1999)

409 **TEST** Se le coordinate del punto P nel piano xy in figura sono $(2; 3)$, allora $\cos(2\theta)=$



A $\frac{4}{13}$.

B $\frac{2}{\sqrt{13}}$.

C $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

D $\frac{-5}{13}$.

E nessuna di queste.

(USA *Marywood University Mathematics Contest*, 2001)

410 **ASSOCIA** a ciascuna espressione la sua trasformazione utilizzando le formule parametriche e ponendo $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$:

1) $\operatorname{sen}\alpha + 1 - \cos\alpha$

2) $\frac{\cos\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha}$

3) $\cos\alpha + 1$

4) $\operatorname{sen}\alpha + 1$

a) $\frac{2}{1+t^2}$

b) $\frac{(1+t)^2}{t^2+1}$

c) $\frac{t(t^2-1)}{t^2+1}$

d) $\frac{2t(t+1)}{1+t^2}$

Semplifica le seguenti espressioni.

411 $\cos(-\alpha) + \operatorname{sen}(90° - \alpha) + \cos(\alpha - 360°) - \operatorname{sen}(90° + \alpha)$ [$2\cos\alpha$]

412 $\frac{\operatorname{sen}(180°-\alpha)\cos(90°+\alpha)}{\operatorname{sen}(-\alpha)} + \frac{\operatorname{sen}(90°+\alpha)\cos(90°-\alpha)}{\cos(180°+\alpha)}$ [0]

413 $\frac{\operatorname{sen}(-\alpha)+\operatorname{sen}(\pi-\alpha)+\operatorname{sen}(\pi+\alpha)}{\cos(-\alpha)+\cos(\pi-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)}$ [$\operatorname{tg}\alpha$]

414 $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cos\alpha$ [$\cos\alpha$]

415 $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\cos 2\alpha}{1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha}$ $\left[\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}\right]$

416 $4[\cos(\alpha - 30°) + \operatorname{sen}(-60°)\cos\alpha] + 2\cos(90° + \alpha)$ $[0]$

417 $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - 1}{\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\pi + \alpha\right)}$ $[0]$

418 $\operatorname{sen} 2\alpha + \cos 2\alpha + 1 - 2\sqrt{2}\cos\alpha\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ $[0]$

419 $\dfrac{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2\alpha}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

420 $4\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos\alpha}$ $[4]$

421 $2\cos\alpha\cdot(1 + \cos 2\alpha) - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen} 2\alpha$ $[2\cos\alpha(3\cos^2\alpha - 1)]$

422 $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ $\left[\frac{1 + \cos\alpha}{\cos\alpha}\right]$

423 $\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\pi - \alpha\right) - \operatorname{sen}\alpha\right]\cdot\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha\cdot\sec\alpha$ $[(\sqrt{3} - 2)\operatorname{sen}\alpha]$

424 $\cos^2\alpha - 4[\operatorname{sen}^2(150° + \alpha)] - \sqrt{3}\operatorname{sen} 2\alpha$ $[-3\operatorname{sen}^2\alpha]$

425 $\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}^2\alpha - 2$ $[2\cos^2\alpha]$

426 $[\operatorname{tg}(150° - \alpha)\operatorname{tg}(-\alpha - 30°) + 1]\cos(\alpha + 30°) - \frac{1}{\operatorname{sen}(60° - \alpha)}$ $[0]$

427 $\cos(\alpha + 30°)\cos(\alpha + 60°) - \operatorname{sen}(\alpha + 60°)\operatorname{sen}(\alpha + 30°) + \operatorname{sen} 2\alpha$ $[0]$

428 $2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 4\cos\left(\frac{7}{4}\pi + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - 3\sqrt{2}\operatorname{sen} x$ $[3\sqrt{2}\cos x]$

429 $\dfrac{\sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha}{\sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha} + 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3\operatorname{tg}\alpha}$ $[2]$

430 $2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}$ $\left[\frac{1 + \cos\alpha}{2}\right]$

431 $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha}$ $[1]$

432 $\dfrac{\cos 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha}{2} + \dfrac{\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos 4\alpha}$ $\left[\frac{\operatorname{sen} 2\alpha\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha}\right]$

433 $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}$ $[\operatorname{tg}\alpha]$

434 $\dfrac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \dfrac{1 + \cos\alpha}{\cos\alpha}$ $\left[2 + \frac{2}{\cos\alpha}\right]$

435 $\sec\alpha\cdot\cos 3\alpha + 3 - 4\cos 2\alpha$ $[4\operatorname{sen}^2\alpha]$

436 $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)\cdot\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos\beta + \cos\alpha}$ $[\cos\beta - \cos\alpha]$

437 $\dfrac{\operatorname{sen}(60° + \alpha) \cdot \operatorname{sen}(60° - \alpha)}{1 + \cos 2\alpha}$ $\left[\dfrac{4 - \sec^2\alpha}{8}\right]$

438 $2\operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) - \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}$ $[\operatorname{tg}\beta]$

439 $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) - \operatorname{sen}(\alpha + \beta)(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) + 2\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha - 1 + 2(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\operatorname{tg}\beta +$
$- \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{tg}\alpha)$ $[\operatorname{sen}^2\alpha]$

440 $\dfrac{(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 - \operatorname{sen}2\alpha}{(\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha)^2} - \dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$ $[0]$

441 $2\cos\left(\alpha - \dfrac{\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\dfrac{\beta}{2} - 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$ $[\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta]$

442 $4ab\operatorname{cosec}(\pi - \alpha) \cdot \left(\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha + \beta}{2} - \operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right) + \dfrac{(a + b)^2}{\operatorname{cosec}\beta} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{7}{4}\pi$ $[-(a - b)^2\operatorname{sen}\beta]$

443 $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \cos 2\alpha + \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}(\pi - 2\alpha)} - \dfrac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \pi)}{2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{cosec}(2\pi + \alpha)} + \dfrac{\operatorname{sen}(\pi + 2\alpha)}{4\cos^2\alpha}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

444 $\left(\cos^2\dfrac{\alpha - \beta}{2} - \operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(\pi + \beta)}{\operatorname{sen}2\alpha\operatorname{sen}2\beta}$ $\left[-\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\right]$

445 $(\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha) \cdot \left(2\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\alpha$ $[\operatorname{sen}^2\alpha]$

446 $\dfrac{\cos 3\alpha + \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\operatorname{sen}3\alpha + \operatorname{sen}4\alpha + \operatorname{sen}5\alpha}$ $[\operatorname{cotg}4\alpha]$

447 Sapendo che $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$ e che $270° < \alpha < 360°$, calcola le seguenti funzioni goniometriche:
$\cos(60° + \alpha)$; $\operatorname{sen}(\alpha - 225°)$; $\operatorname{tg}2\alpha$. $\left[\dfrac{1 + 3\sqrt{5}}{8}; \dfrac{\sqrt{30} + \sqrt{2}}{8}; \dfrac{\sqrt{15}}{7}\right]$

448 $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$, $\operatorname{sen}\beta = -\dfrac{8}{17}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < \dfrac{3}{2}\pi$. Calcola:
$\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$, $\operatorname{sen}2\alpha$, $\operatorname{sen}\dfrac{\beta}{2}$. $\left[\dfrac{171}{140}; \dfrac{21}{221}; \dfrac{120}{169}; \sqrt{\dfrac{16}{17}}\right]$

449 $\operatorname{cotg}\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. Calcola: $\operatorname{sen}2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg}\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. $\left[-\dfrac{4}{5}; -\dfrac{3}{5}; \dfrac{1}{7}; \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right]$

I grafici e le formule goniometriche

Disegna i grafici delle seguenti funzioni.

450 $y = \dfrac{-\operatorname{sen}2x}{\cos x}$

451 $y = \operatorname{sen}\dfrac{3}{2}x\cos\dfrac{3}{2}x - 1$

452 $y = \dfrac{\operatorname{sen}2x}{1 - \operatorname{sen}^2x} + 1$

453 $y = \cos x + \cos^2\dfrac{x}{2}$

454 $y = 2\operatorname{sen}2x\cos 2x$

455 $y = \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$

456 $y = \operatorname{sen}|x| + 2$

457 $y = -|\operatorname{tg}x|$

458 $y = -\cos x + 2$

459 $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$

460 $y = \dfrac{\cos^2x\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}^3x}{-\operatorname{sen}x}$

461 $y = \operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2} + \cos x$

462 $y = \dfrac{\operatorname{sen}2x - \cos x}{2\cos x}$

463 $y = \cos 2x - \cos^2x$

464 $y = \cos^2\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}x}{1 + \cos x}$

465 $y = -\operatorname{sen}^4\dfrac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2}$

466 $y = 4\operatorname{sen}^2x - 2\operatorname{sen}2x$

467 $y = \cos^2 2x - \operatorname{sen}2x\cos 2x$

468 $y = \dfrac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 7x}{\cos 5x}$

469 $y = -\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x$

470 $y = -2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

471 $y = (\operatorname{sen} x - \cos x)^2$

472 $y = (1 + \operatorname{tg} x)\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

473 $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x + \operatorname{sen} x}$

474 $y = \left|\operatorname{sen} x \cos x - \dfrac{1}{2}\right|$

475 $y = \left|\dfrac{\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x}{\cos 3x}\right|$

476 $y = -\left|\cos\dfrac{x}{2}\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right| + 1$

477 $y = \operatorname{sen} x + \cos x - 2$

Il periodo delle funzioni goniometriche

478 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo il periodo delle seguenti funzioni:

a) $y = \operatorname{sen} 3x + \cos 5x$; **b)** $y = \dfrac{\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x}{\cos 3x}$.

a) Il periodo di sen $3x$ è $T_1 = \dfrac{2\pi}{3}$, quello di cos $5x$ è $T_2 = \dfrac{2\pi}{5}$.

Scriviamo T_1 e T_2 con denominatore comune: $T_1 = \dfrac{10}{15}\pi$, $T_2 = \dfrac{6}{15}\pi$.

Consideriamo il minimo comune multiplo fra i numeratori:

m.c.m.$(10; 6) = 30$.

Si ha pertanto uno stesso valore della funzione per x_0 e $x_0 + \dfrac{30}{15}\pi$, perché $\dfrac{30}{15}\pi$ contiene un numero intero di volte sia T_1 sia T_2.

Quindi $\dfrac{30}{15}\pi = 2\pi$ è il periodo cercato.

Osservazione. In generale, non ci sono regole per determinare il periodo di funzioni che siano somme o prodotti di altre funzioni periodiche. Tuttavia, se si hanno due funzioni periodiche con periodi diversi T_1 e T_2, e se esistono multipli comuni di T_1 e T_2, allora le funzioni somma o prodotto hanno periodo uguale al minimo comune multiplo dei periodi.

b) Deve essere $\cos 3x \neq 0$, cioè:

$$3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \rightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}.$$

Applicando una delle formule di prostaferesi, otteniamo:

$$\frac{\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x}{\cos 3x} = \frac{2\cancel{\cos 3x}\operatorname{sen} x}{\cancel{\cos 3x}} = 2\operatorname{sen} x.$$

Quindi il periodo cercato è 2π.

Determina il periodo delle seguenti funzioni, dopo averle opportunamente trasformate con le formule goniometriche.

479 $y = \dfrac{2 + 4\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $[2\pi]$

480 $y = 2\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2} + \cos x$ $[2\pi]$

481 $y = 1 - 2\operatorname{sen}^2 6x$ $\left[\dfrac{\pi}{6}\right]$

482 $y = \cos^2 4x - \operatorname{sen}^2 4x$ $\left[\dfrac{\pi}{4}\right]$

483 $y = \operatorname{sen}^2 x + 1$ $[\pi]$

484 $y = \operatorname{sen} 3x + \cos 6x$ $\left[\frac{2}{3}\pi\right]$

485 $y = \operatorname{sen} 4x \cos 4x$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

486 $y = \operatorname{sen} 4x \cos 8x$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

487 $y = \dfrac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x}{\cos 5x - \cos 3x}$ $[\pi]$

488 $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$ $[2\pi]$

489 $y = \operatorname{tg} 2x + \cos \dfrac{x}{2}$ $[4\pi]$

490 Data la funzione $y = 3\cos 8x - 2 \operatorname{sen} 4x$ del tipo $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, dimostra che la media aritmetica dei periodi di f_1, f_2 e f è un angolo di 75°.

Nei seguenti esercizi determina k in modo che la funzione abbia il periodo T indicato.

491 $y = \cos \dfrac{4}{k} x$, $T = \pi$. $[2]$

492 $y = \operatorname{tg} k \dfrac{x}{2}$, $T = \dfrac{\pi}{3}$. $[6]$

493 $y = 2\cos^2 kx$, $T = \dfrac{\pi}{4}$. $[4]$

494 $y = \operatorname{sen}\left(2kx + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $T = \dfrac{\pi}{2}$. $[2]$

495 $y = \operatorname{sen}^2 kx$, $T = \dfrac{\pi}{2}$. $[2]$

496 $y = \operatorname{sen} kx + \cos 6x$, $T = \dfrac{2}{3}\pi$. $[3]$

Problemi

497 a) Data l'iperbole di equazione $16x^2 - 9y^2 - 32x - 128 = 0$, esegui la traslazione che la rende simmetrica rispetto all'origine.
b) Determina le equazioni degli asintoti dell'iperbole traslata e la tangente dell'angolo acuto α da essi formato.
c) Calcola $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

$\left[\text{a)} \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y \end{cases}; \text{b)}\ y = \pm\frac{4}{3}x;\ \frac{24}{7};\ \text{c)}\ \frac{24}{25}; \frac{7}{25}; \frac{3}{4}\right]$

498 a) Dati i vettori $\vec{a}(1;1)$ e $\vec{b}(2;3)$, determina l'angolo α da essi formato.
b) Trova le componenti del vettore somma $\vec{c}$, l'angolo α_1 formato da $\vec{c}$ con $\vec{a}$ e l'angolo α_2 formato da $\vec{c}$ con $\vec{b}$.
c) Verifica che $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \operatorname{tg}\alpha$.

$\left[\text{a)}\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}; \text{b)}\ \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{7}, \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{1}{18}\right]$

499 Rappresenta graficamente la funzione di equazione $y = \operatorname{sen} 2x + \sqrt{3}\cos 2x - 4$ e indica il suo periodo.
Scrivi l'espressione della funzione nella forma: $y = A \cdot \operatorname{sen}(x + k)\cos(x + k) - 4$.
Rappresenta la curva simmetrica di quella data, rispetto all'asse delle ascisse.

$\left[T = \pi; A = 4, k = \frac{\pi}{6}\right]$

500 TEST Let x be a real number such that $\sec x - \tan x = 2$. Then $\sec x + \tan x =$

A 0.1. B 0.2. C 0.3. D 0.4. E 0.5.

(USA *American High School Mathematical Examination, AHSME*, 1999)

501 Express $2\cos x - \sin x$ in the form $R\cos(x + \alpha)$, where R is a positive constant, and α is an angle between 0° and 360°.

(UK *Northern Examination Assessment Board, NEAB*)

$[\sqrt{5}\cos(x + 26{,}57°)]$

502 Data la funzione $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$,

a) determina il dominio e dimostra l'identità $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = -2 \operatorname{cotg} 2x$;

b) trova il periodo e il codominio di $f(x)$;

c) calcola il valore dei coefficienti a e b in modo che la funzione $g(x) = af(bx)$ passi per il punto $\left(\frac{\pi}{2}; 6\right)$ e abbia periodo 2π.

$\left[\text{a) } x \neq k\frac{\pi}{2}; \text{ b) } \frac{\pi}{2}, C\colon \mathbb{R}; \text{ c) } -3; \frac{1}{4}\right]$

503 Considera la funzione $f(x) = a \cos x + b \operatorname{sen} x$.

a) Determina i coefficienti a e b in modo che il grafico di $f(x)$ passi per i punti $P\left(\frac{\pi}{6}; 1\right)$ e $Q\left(-\frac{\pi}{6}; 2\right)$.

b) Trasforma la funzione nella forma $f(x) = A \cos(x + \alpha)$ e determina i punti di minimo e di massimo.

c) Considera la funzione $g(x) = f(-x)$ e disegna i grafici delle due funzioni nel medesimo riferimento.

d) Verifica che $g(x)$ si può ottenere da $f(x)$ mediante una traslazione.

$\left[\text{a) } \sqrt{3}; -1; \text{ b) } f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right), \text{ min: } x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \text{ max: } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \text{ d) } x' = x - \frac{\pi}{3} \wedge y' = y\right]$

504 Considera il fascio di parabole di equazione: $y = -x^2 + bx$.

a) Trova la parabola la cui tangente t nell'origine forma un angolo di 75° con l'asse delle x.

b) Determina il luogo γ dei vertici delle parabole.

c) Dal punto P di γ di ascissa -1, manda le rette che formano con t angoli di 60°.

$[\text{a) } b = 2 + \sqrt{3}; \text{ b) } y = x^2; \text{ c) } x + y = 0, (2 - \sqrt{3})x - y + 3 - \sqrt{3} = 0]$

505 Considera la funzione $y = 2\cos^2 ax + b \operatorname{sen} x \cos x$, con $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{Z}$.

a) Trasformala in modo da ottenere una funzione lineare.

b) Verifica che il periodo della funzione è indipendente da a ed è $T = \pi$.

c) Posto $a = 1$, determina b in modo che la funzione passi per il punto $\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$, quindi trova il codominio e disegna il grafico.

$\left[\text{a) } y = 1 + \cos 2ax + \frac{b}{2} \operatorname{sen} 2x; \text{ c) } b = 2, C\colon [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]\right]$

506 Dimostra che, se α, β e γ sono gli angoli interni di un triangolo rettangolo, sono valide le seguenti relazioni:

a) $\operatorname{sen} 12\alpha + \operatorname{sen} 12\beta + \operatorname{sen} 12\gamma = 0$;

b) $\cos 14\alpha + \cos 14\beta + \cos 14\gamma = -1$.

507 Dimostra che, se α e β sono gli angoli acuti di un triangolo rettangolo non isoscele, è valida la relazione:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^2} = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{(1 - \operatorname{tg}^2 \beta)^2}.$$

508 Date le rette di equazioni $y = \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} x$ e $y = \frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} x$, dimostra che l'angolo da esse formato è α, scrivi le loro equazioni quando $\alpha = 45°$ e rappresentale graficamente.

509 Verifica che, se α, β e γ sono gli angoli interni di un triangolo, valgono le seguenti identità:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta + 2\gamma) + \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta}{\cos \beta - \cos \alpha}.$$

510 Dimostra che in un triangolo ABC, con l'angolo $\widehat{B} = 2\widehat{A}$, si ha: $\dfrac{\operatorname{tg} \widehat{A} \cdot \operatorname{sen} \widehat{B}}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \dfrac{2 \operatorname{sen} \widehat{C}}{4\cos^2 \widehat{A} - 1}$.

511 Dimostra che in un quadrilatero $ABCD$ inscrivibile in una circonferenza, con l'angolo $\widehat{B} = 2\widehat{A}$, si ha:

$$\operatorname{tg} \widehat{D} = \frac{2 \operatorname{tg} \widehat{C}}{1 - \operatorname{tg}^2 \widehat{A}}.$$

REALTÀ E MODELLI

1 **La strada in salita**

Alcune strade di San Francisco hanno una notevole pendenza e inoltre sono rettilinee, senza curve. In una strada il cartello indica una pendenza del 15% per 800 m e successivamente dell'11% per altri 800 m.

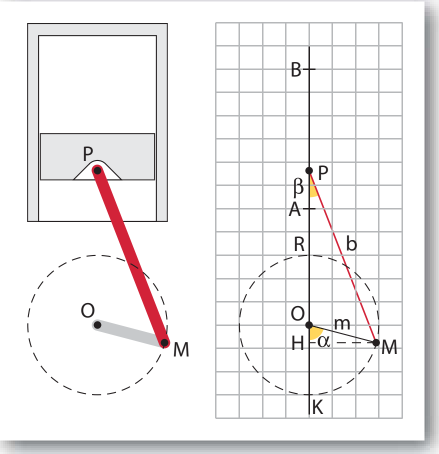
- Al termine della strada, di quanto si è saliti in quota?
- Se per tutto il percorso la strada avesse avuto la stessa pendenza, quanto dovrebbe segnalare il cartello iniziale?

(SUGGERIMENTO In un triangolo ABC rettangolo in B, si ha $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \operatorname{tg} C\widehat{A}B$ e $\overline{BC} = \overline{AC} \cdot \operatorname{sen} C\widehat{A}B$.)

2 **La biella-manovella**

La biella è un'asta (MP) di collegamento tra due parti di una macchina, alle quali è incernierata; ha la funzione di trasformare il moto rotatorio continuo della manovella OM nel moto rettilineo alterno del punto P che può essere collegato a un pistone; in tal caso si parla di «meccanismo biella-manovella».

Indichiamo con m la lunghezza della manovella OM e con b la lunghezza della biella MP, con α e β gli angoli formati dalla manovella e dalla biella con la verticale; A e B identificano le posizioni estreme del punto P variabile.



- Trova quanto vale l'ampiezza del moto del punto P.
- Trova la relazione tra m, b, α e β.
- Calcola la distanza OP in funzione di α quando P si trova in una posizione qualsiasi tra A e B (come in figura).

(SUGGERIMENTO In un triangolo ABC rettangolo in B, si ha $\overline{BC} = \overline{AC} \cdot \operatorname{sen} C\widehat{A}B$ e $\overline{AB} = \overline{AC} \cdot \cos C\widehat{A}B$.)

3 **Il gioco del golf**

Una pallina da golf viene lanciata con una velocità iniziale v_0 m/s; la traiettoria iniziale forma un angolo α con il terreno, orizzontale. Se la distanza che la pallina riesce a raggiungere è espressa dalla relazione

$d = \frac{2(v_0)^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g}$ (g è costante e vale 9,8 m/s^2):

- come si può esprimere la distanza d in funzione dell'angolo 2α?
- Quanto vale l'angolo α se la velocità iniziale è di 40 m/s e la distanza raggiunta è di 83 m?

4 **La finestra basculante**

La signora Ada vuole far montare, nella sua mansarda, finestre che si aprono a ribalta, come in figura. Le dimensioni sono di 1,10 m di larghezza per 1 m di altezza, e il vincolo intorno al quale ruota si trova a 40 cm dal davanzale. L'installatore le dice che normalmente l'angolo formato dalla finestra aperta con lo stipite verticale è di 20°. La signora Ada pensa che in tal modo la finestra si apra troppo poco e chiede che l'apertura sia doppia. Il tecnico le risponde che allora bisogna raddoppiare l'angolo.

- Il tecnico ha detto una cosa corretta? Per capirlo, segui queste indicazioni:
  - rappresenta con un disegno la finestra aperta vista di lato;
  - calcola la distanza degli spigoli della finestra e dello stipite, con la finestra aperta di 20°, sia nella parte superiore che inferiore;
  - che cosa succede raddoppiando l'angolo?

(SUGGERIMENTO Considera che, in una circonferenza di raggio r, la corda AB sottesa a un angolo alla circonferenza α misura $\overline{AB} = 2r \cdot \operatorname{sen} \alpha$.)

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: www.zanichellitest.it

1 La somma $\operatorname{sen}\frac{3}{7}\pi + \operatorname{sen}\frac{4}{7}\pi$ vale:

A $\operatorname{sen}\frac{7}{7}\pi = \operatorname{sen}\pi = 0$.

B $-2\cos\frac{\pi}{14}$.

C $2\operatorname{sen}\frac{\pi}{14}$.

D $2\cos\frac{\pi}{7}$.

E $2\cos\frac{\pi}{14}$.

2 $$\frac{[(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 - \operatorname{sen}2\alpha]\cos 4\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$$

è equivalente a:

A $\cos 4\alpha$.

B $-\frac{1}{2\operatorname{sen}4\alpha}$.

C $-\frac{1}{2\cos\alpha}$.

D $\frac{1}{\cos\alpha}$.

E $\frac{1}{2\cos\alpha}$.

3 Se α e β sono gli angoli acuti di un triangolo rettangolo, quale fra le seguenti uguaglianze è *vera*?

A $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

B $\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$.

C $\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

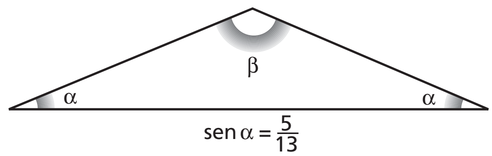
D $\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)$.

E $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

4 La funzione $y = \operatorname{sen}^2 x + \cos\frac{3x}{2}$ ha periodo:

A 2π. B 4π. C 3π. D $\frac{4}{3}\pi$. E π.

5



Nella figura, β è:

A $\pi - \operatorname{arcsen}\frac{120}{169}$.

B $\pi - \arccos\frac{12}{13}$.

C $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}\frac{5}{13}$.

D $\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$.

E $\pi - \arccos\frac{5}{13}$.

6 Una sola delle seguenti uguaglianze è *falsa*. Quale?

A $\operatorname{sen}3\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{3}{2}\alpha\cos\frac{3}{2}\alpha$.

B $\operatorname{sen}3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$.

C $\operatorname{sen}3\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 6\alpha}{2}}$.

D $\operatorname{sen}3\alpha + \operatorname{sen}5\alpha = 2\operatorname{sen}4\alpha\cos\alpha$.

E $\operatorname{sen}3\alpha - \operatorname{sen}5\alpha = 2\cos 4\alpha\operatorname{sen}\alpha$.

QUESITI

7 Dimostra in due modi diversi che, in un triangolo rettangolo, la somma dei seni degli angoli acuti è uguale alla somma dei loro coseni.

8 In un piano, riferito ad assi cartesiani ortogonali, sono assegnate una retta a di coefficiente angolare 2 e una retta b di coefficiente angolare $-$ 2. Calcolare il seno dell'angolo orientato $(a; b)$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione ordinaria,* 2001, *quesito* 10)

$\left[\frac{4}{5}\right]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2.0** © Zanichelli 2011 *Volume 4*

9 Verifica che in ogni triangolo ABC: $\operatorname{sen}\widehat{A} = \operatorname{sen}(\widehat{B}+\widehat{C})$, $\operatorname{sen}\dfrac{\widehat{A}}{2} = \cos\left(\dfrac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}\right)$.

10 È possibile che sia $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}\alpha$ per qualche valore di α? Motiva la risposta.

11 In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva di equazione $y = \cos x - 2\operatorname{sen} x$. Determinare una traslazione degli assi che trasformi l'equazione nella forma $Y = k\operatorname{sen} X$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria,* 2003, *quesito* 2)

$\left[X = x + \alpha, Y = y, \text{con } \alpha = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]$

12 Cosa si intende per «funzione periodica»? Qual è il periodo della funzione $f(x) = \operatorname{tg} 2x + \cos 2x$?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione suppletiva,* 2003, *quesito* 1)

13 Dimostra che se in un triangolo ABC l'angolo $\widehat{B} = 2\widehat{A}$, allora:

$$\frac{\operatorname{sen}\widehat{C}}{\operatorname{sen}\widehat{A} + \operatorname{sen}\widehat{B}} = 2\cos\widehat{A} - 1.$$

14 Scrivi una legge del tipo $y = r\cos\omega(x+\vartheta)$ nella forma $y = r\operatorname{sen}\omega(x+\varphi)$. Quale relazione lega ϑ e φ?

15 Si provi che le espressioni $y = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ e $y = \sqrt{3}\sin(x) + \cos(x)$ definiscono la stessa funzione f. Di f si precisi: dominio, codominio e periodo.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero (calendario australe), Sessione ordinaria,* 2008, *quesito* 8)

16 Trovare il periodo della funzione: $y = \operatorname{sen}\dfrac{2}{3}x + \operatorname{sen}\dfrac{1}{4}x$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria,* 2005, *quesito* 7)

$[24\,\pi]$

17 Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di $\operatorname{sen}^2(35°) + \operatorname{sen}^2(55°)$, ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria,* 2005, *quesito* 9)

$[1]$

PROBLEMI

18 Verifica che in ogni triangolo rettangolo, indicando con α, β e γ gli angoli interni, si ha:

a) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$;
b) $\operatorname{sen} 8\alpha + \operatorname{sen} 8\beta + \operatorname{sen} 8\gamma = 0$.

19 a) Data la funzione $y = \sqrt{\dfrac{2(1+\operatorname{sen} 2x)}{1+\cos 2x}}$, verifica che è uguale a $y = f(x) = |\operatorname{tg} x + 1|$.

b) Determina il suo dominio e il periodo. Rappresenta la funzione su un periodo completo.

c) Traccia il grafico di $\dfrac{1}{f(x)}$.

$\left[\text{b) } D\text{: } x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi; T = \pi\right]$

20 a) Data la funzione $f(x) = 2\cos^2\dfrac{x}{2} + \operatorname{sen} x$, determina il suo periodo. Usando le formule goniometriche semplifica l'espressione della funzione in modo da poterla rappresentare.

b) Qual è il codominio della funzione?

c) Risolvi graficamente l'equazione $f(x) = 0$, indicando tutte le soluzioni in $\mathbb{R}$.

$\left[\text{a) } T = 2\pi;\ y = 1 + \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right);\ \text{b) } C\text{: } [1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}];\ \text{c) } x = \pi + 2k\pi \text{ e } x = \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

21 Data la funzione $y = a \cdot \text{sen}[b(x - \varphi)] + k$, determina i parametri a, b, φ, k, sapendo che la funzione ha periodo $T = \pi$, codominio $[-4; 2]$, passa per il punto $\left(\frac{\pi}{6}; -1\right)$ e raggiunge un massimo in $x = \frac{5}{12}\pi$.

a) Rappresenta la funzione ottenuta.

b) Applica alla funzione la traslazione di vettore $\left(-\frac{\pi}{6}; 1\right)$, indicando con $y = g(x)$ la funzione traslata.

c) Rappresenta la funzione $f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 3 + 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ dopo averla opportunamente semplificata.

d) Determina per quali valori di x la funzione $f(x)$ assume gli stessi valori della funzione $g(x)$.

$\left[\text{a) } y = 3\,\text{sen}\,2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1;\ \text{b) } g(x) = 3\,\text{sen}\,2x;\ \text{c) } f(x) = -3;\ \text{d) } x = \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

22 a) Determina i valori di a e b affinché valga l'identità $\frac{\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha + 1}{1 + \cos\alpha} = a \cdot \text{tg}\frac{\alpha}{2} + b$.

b) Determina dominio e periodo della funzione $f(x) = a \cdot \text{tg}\frac{x}{2} + b$.

c) Rappresenta $f(x)$ dopo aver attribuito ad a e b i valori trovati al punto a) insieme al grafico di $f^2(x)$.

$[\text{a) } a = -1, b = 1;\ \text{b) } D\text{: } x \neq \pi + 2k\pi;\ T = 2\pi]$

23 a) Trasforma $y = a\cos^2 x + b\cos x\,\text{sen}\,x + \text{sen}^2 x$ in una funzione lineare.

b) Determina a e b, con $b > 0$, in modo che la funzione abbia come codominio l'intervallo $[-1; 3]$.

c) Determina i punti in cui la funzione raggiunge il suo massimo e il suo minimo nell'intervallo $[0; \pi]$.

d) Traccia il grafico della funzione in tale intervallo.

$\left[\text{a) } y = \frac{b}{2}\text{sen}\,2x + \frac{a-1}{2}\cos 2x + \frac{a+1}{2};\ \text{b) } a = 1, b = 4;\ \text{c) } \min\left(\frac{3}{4}\pi; -1\right), \max\left(\frac{\pi}{4}; 3\right)\right]$

24 a) Trasforma la funzione $f(x) = \text{sen}\,\alpha x \cos(\alpha x - \beta)$ in una funzione lineare.

b) Determina α e β in modo che il periodo sia 2π e il grafico di $f(x)$ passi per il punto $(\pi; 1)$.

c) Determina il codominio, il minimo e il massimo della funzione ottenuta nell'intervallo $[0; 2\pi]$ e rappresentala poi graficamente.

$\left[\text{a) } y = \frac{1}{2}[\text{sen}(2\alpha x - \beta) + \text{sen}\,\beta];\ \text{b) } \alpha = \frac{1}{2}; \beta = \frac{\pi}{2};\ \text{c) } [0; 1], \min(0; 0), \max(\pi; 1)\right]$

25 Data la funzione $f(x) = a\,\text{sen}\,x + b\cos x$, determina i valori di a e b in modo che il suo grafico passi per i punti $A\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $B\left(\frac{\pi}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

a) Trasforma $f(x)$ nella forma $y = r \cdot \text{sen}(x + \varphi)$ e rappresentala graficamente.

b) Deduci dal grafico le soluzioni della disequazione $f(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$.

c) Costruisci i grafici delle funzioni $y = |f(x)|$ e $y = f(|x|)$.

d) Quale traslazione potresti applicare alla funzione $y = f(x)$ per renderla pari, ossia simmetrica rispetto all'asse y?

$\left[a = \frac{1}{2}; b = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \text{a) } y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right);\ \text{b) } 0 < x < \frac{\pi}{3};\ \text{d) traslazione di vettore } \left(-\frac{\pi}{6}; 0\right)\right]$

26 a) Trasforma in funzioni lineari $f(x) = \text{sen}^2\frac{x}{2}$ e $g(x) = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x}$.

b) Rappresenta $f(x)$ e $g(x)$ nello stesso piano cartesiano dopo aver trovato il dominio e il periodo di ciascuna.

c) Verifica che i due grafici si intersecano nei punti di ascissa $x = 2\pi + k\pi$ e $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

d) Trova sia graficamente sia analiticamente per quali x nell'intervallo $[0; 2\pi]$ le funzioni assumono il loro massimo valore.

$\left[\text{a) } f(x) = \frac{1 - \cos x}{2}, g(x) = \frac{1 + \cos 2x}{2};\ \text{b) } f(x)\text{: } D\text{: } \mathbb{R}, T = 2\pi, g(x)\text{: } D\text{: } \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}; T = \pi\right]$

CAPITOLO

12

١٢ [numerazione araba]

१२ [numerazione devanagari]

十二 [numerazione cinese]

LE EQUAZIONI E LE DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

I PANNELLI SOLARI Il protocollo di Kyoto chiede di ridurre le emissioni di anidride carbonica e di bruciare sempre meno combustibili fossili. Un minor consumo di petrolio e dei suoi derivati favorisce una condizione di stabilità, pace e sviluppo sostenibile: riduce la dipendenza dai Paesi produttori, le ragioni di conflitti e, in definitiva, le guerre. È anche un'esigenza storica: il petrolio finirà ed è importante costruire alternative. L'energia solare è una delle soluzioni al problema. È rinnovabile: finché c'è il Sole c'è energia. È economica: la si «raccoglie» con una tecnologia semplice, i pannelli solari. È diffusa: chiunque può diventare produttore, almeno a certe latitudini.

Come si devono collocare i pannelli solari in modo che il loro rendimento sia massimo?

La risposta a pag. 785

1. LE EQUAZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

Negli esercizi proponiamo anche la verifica di identità goniometriche. Un'**identità goniometrica** è un'uguaglianza fra espressioni contenenti funzioni goniometriche di uno o più angoli che, a differenza di un'equazione, risulta verificata per **tutti** i valori dei domini di tali funzioni. Per esempio, $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\cos x}$ è un'identità goniometrica. Essa è verificata $\forall x \neq k\frac{\pi}{2}$.

DEFINIZIONE

Equazione goniometrica
Un'equazione si dice goniometrica se contiene almeno una funzione goniometrica dell'incognita.

ESEMPIO

$2\cos x - 1 = 0$ è un'equazione goniometrica perché contiene la funzione coseno dell'incognita x.

$2x\cos\frac{\pi}{4} - 1 = 0$ non è un'equazione goniometrica perché non contiene funzioni goniometriche dell'incognita x, in quanto $\cos\frac{\pi}{4}$ è un numero.

Le **equazioni goniometriche elementari** sono quelle del tipo:

$$\operatorname{sen} x = a, \quad \cos x = b, \quad \operatorname{tg} x = c, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Risolviamo sen *x* = *a*

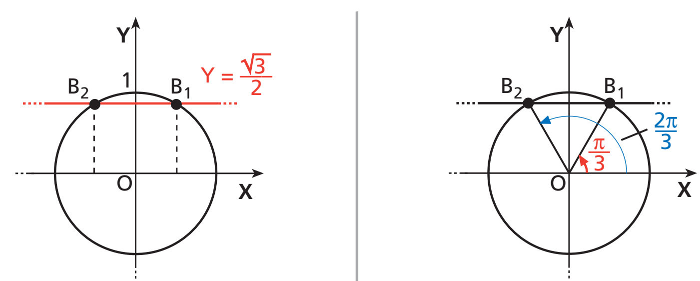
Poiché il seno di un angolo rappresenta l'ordinata del punto della circonferenza goniometrica a cui l'angolo è associato, dobbiamo trovare i punti della circonferenza goniometrica di ordinata a. Distinguiamo due casi.

L'equazione è determinata

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Disegniamo la circonferenza goniometrica nel piano cartesiano, indichiamo gli assi con X e Y, per non confonderli con l'incognita x dell'equazione e, applicando la definizione di seno di un angolo, cerchiamo i punti di ordinata $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



a. Disegniamo la retta di equazione $Y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Le sue intersezioni con la circonferenza goniometrica sono date dai punti B_1 e B_2.

b. Gli angoli che hanno seno uguale a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sono $\frac{\pi}{3}$ e $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

▶ **Figura 1** Soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ comprese fra 0 e 2π.

Poiché il seno è una funzione periodica di periodo 2π, alle soluzioni $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{2}{3}\pi$ dobbiamo aggiungere quelle ottenute sommando i multipli interi di 2π.

Le soluzioni dell'equazione data sono le seguenti:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi.$$

L'equazione è impossibile

Poiché i valori di $\operatorname{sen} x$ sono compresi fra -1 e 1, l'equazione $\operatorname{sen} x = a$ è impossibile quando $a > 1$ oppure $a < -1$.

ESEMPIO

L'equazione $\operatorname{sen}\ x = \frac{3}{2}$ non ha soluzione, perché $\frac{3}{2} > 1$.

In generale, l'equazione elementare $\operatorname{sen} x = a$ può essere:

- **determinata** se $-1 \leq a \leq 1$; una volta trovata una soluzione α, cioè un angolo α tale che $\operatorname{sen} \alpha = a$, le soluzioni dell'equazione sono:

  $$x = \alpha + 2k\pi \ \vee \ x = (\pi - \alpha) + 2k\pi;$$

- **impossibile** se $a < -1$ oppure $a > 1$.

Se per il valore a dell'equazione $\operatorname{sen} x = a$ non conosciamo il corrispondente valore dell'angolo del primo o del quarto quadrante, possiamo applicare la funzione inversa del seno ($x = \operatorname{arcsen} a$) e calcolare un valore approssimato di α utilizzando la calcolatrice.

ESEMPIO

Risolviamo $\operatorname{sen} x = -\frac{7}{8}$.
Otteniamo:

$$x = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{7}{8}\right) + 2k\pi \ \vee \ x = \pi - \operatorname{arcsen}\left(-\frac{7}{8}\right) + 2k\pi.$$

Per trovare il valore approssimato di $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{7}{8}\right)$ con la calcolatrice, scegliamo la modalità RAD e, dopo aver calcolato $-\frac{7}{8} = -0,875$, premiamo il tasto <$\sin^{-1}$>, oppure i tasti <INV> e <sin>. Viene visualizzato il valore della misura in radianti dell'angolo x, ossia $-1,065435817$, che approssimiamo a $-1,07$.

Le soluzioni dell'equazione sono:

$$x \simeq -1,07 + 2k\pi \ \vee \ x \simeq 3,14 + 1,07 + 2k\pi \simeq 4,21 + 2k\pi.$$

Se scegliamo la modalità DEG, viene visualizzato il valore in gradi sessadecimali. Si ottiene:

$$-61,04497563 \simeq -61,$$

$$x \simeq -61° + k360°,$$

$$x \simeq 241° + k360°.$$

In gradi, le soluzioni sono:
$x = 60° + k360°$,
$x = 120° + k360°$.

Qui e in seguito sottintendiamo che k assuma valori interi: $k \in \mathbb{Z}$. Le scritture $+k\pi$ e $-k\pi$ sono pertanto equivalenti, cioè al variare di k rappresentano lo stesso insieme di valori. Lo stesso vale per $+2k\pi$ e $-2k\pi$. Nei risultati degli esercizi useremo le due scritture indifferentemente.

Casi particolari.
$a = 1$, $\operatorname{sen} x = 1$;
soluzioni:
$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$
$a = -1$, $\operatorname{sen} x = -1$;
soluzioni:
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$
ossia
$$x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi.$$

Risolviamo $\cos x = b$

Il coseno di un angolo è l'ascissa del punto della circonferenza goniometrica a cui l'angolo è associato, quindi cerchiamo i punti della circonferenza goniometrica di ascissa b.
Distinguiamo due casi.

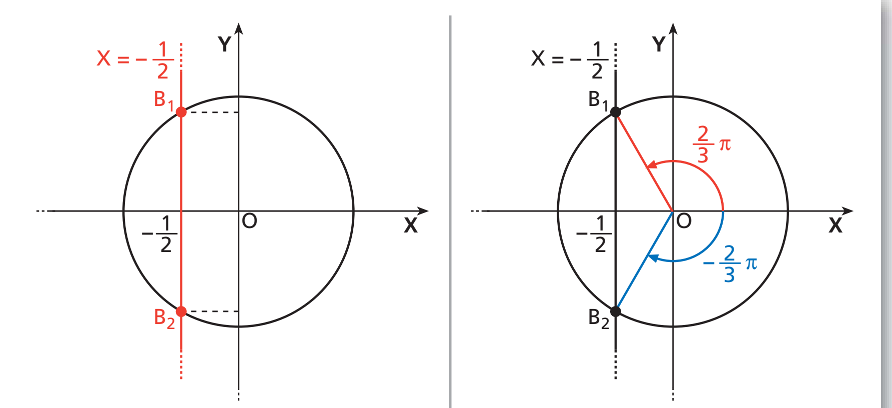
L'equazione è determinata

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione:

$$\cos x = -\frac{1}{2}.$$

▶ **Figura 2** Soluzioni dell'equazione $\cos x = -\frac{1}{2}$, comprese fra $-\pi$ e π.



a. Disegniamo la retta di equazione $X = -\frac{1}{2}$. Le sue intersezioni con la circonferenza goniometrica sono B_1 e B_2.

b. Gli angoli che hanno coseno uguale a $-\frac{1}{2}$ sono $\frac{2}{3}\pi$ e $-\frac{2}{3}\pi$.

Per la periodicità della funzione coseno, alle due soluzioni $x = \frac{2}{3}\pi$ e $x = -\frac{2}{3}\pi$ dobbiamo aggiungere quelle ottenute sommando i multipli interi di 2π. Quindi le soluzioni dell'equazione data sono

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi,$$

che possiamo anche indicare con:

$$x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi.$$

● In gradi:
$x = \pm 120° + k360°$.

L'equazione è impossibile

L'equazione $\cos x = b$ è impossibile se $b > 1$ o $b < -1$, poiché $-1 \leq \cos x \leq 1$.

● Casi particolari.
$b = 1$, $\cos x = 1$;
soluzioni:
$x = 2k\pi$.
$b = -1$, $\cos x = -1$;
soluzioni:
$x = \pi + 2k\pi$.

ESEMPIO

L'equazione

$$\cos x = -\frac{5}{2}$$

non ha soluzioni perché $-\frac{5}{2} < -1$.

In generale, l'equazione elementare **cos $x = b$** può essere:

- **determinata** se $-1 \leq b \leq 1$; data una soluzione β, cioè un angolo β tale che $\cos \beta = b$, le soluzioni dell'equazione sono:

$$x = \beta + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\beta + 2k\pi;$$

- **impossibile** se $b < -1$ oppure $b > 1$.

Per angoli non noti, anche per questa equazione possiamo utilizzare la calcolatrice, calcolando arccos b con i tasti <INV> e <cos>, oppure con il tasto <cos^{-1}>.

Risolviamo tg $x = c$

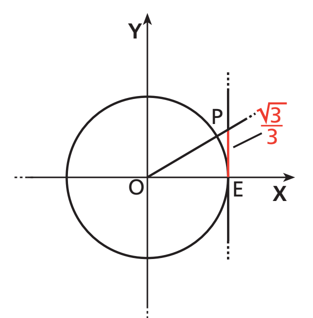
La tangente di un angolo è l'ordinata del punto di intersezione della retta tangente alla circonferenza nell'origine degli archi con la retta *OP* che individua l'angolo.

L'equazione è determinata per qualunque valore reale di c.

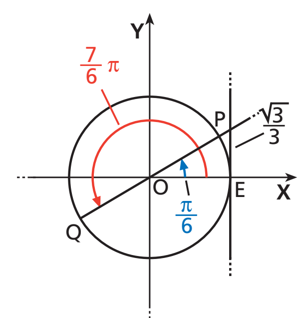
ESEMPIO

Risolviamo l'equazione:

$$\text{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



a. Tracciamo la retta tangente in *E* alla circonferenza e individuiamo il punto *P* di ordinata $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



b. Prolungando *OP* otteniamo *Q*, corrispondente a un secondo angolo con tangente $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Fra 0 e 2π gli angoli cercati sono $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7}{6}\pi$.

◀ **Figura 3** Soluzioni dell'equazione $\text{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ comprese fra 0 e 2π.

Per la periodicità della funzione tangente, alla soluzione $x = \frac{\pi}{6}$ dobbiamo aggiungere quelle ottenute sommando i multipli interi di π.

Le soluzioni dell'equazione data sono:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

In gradi: $x = 30° + k180°$.

In generale, l'equazione elementare **tg $x = c$** è sempre **determinata**.

Data una soluzione γ, cioè un angolo γ tale che tg $\gamma = c$, le soluzioni dell'equazione sono:

$$x = \gamma + k\pi.$$

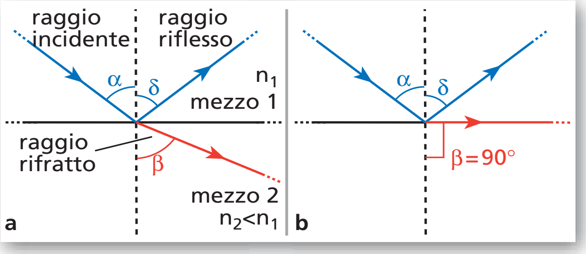
Se si utilizza la calcolatrice, per calcolare arctg c, si usano i tasti <INV> e <tan>, oppure il tasto <tan^{-1}>.

ESPLORAZIONE

Le fibre ottiche

Un'autostrada per i segnali digitali

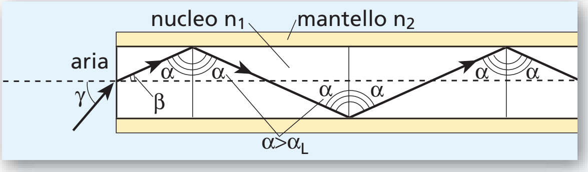
Le fibre ottiche consentono connessioni tv e internet velocissime per far viaggiare informazioni digitali. A differenza dei cavi di rame, che conducono elettroni, le fibre ottiche fanno passare impulsi luminosi. I cavi in fibra ottica sono sottilissimi fili di vetro. Sono formati da un cilindro interno trasparente, chiamato **nucleo** o **core**, ricoperto da un rivestimento detto **mantello** o **cladding**. Il fenomeno fisico alla base del funzionamento della fibra ottica è stato studiato ben 350 anni prima che trovasse applicazione in questa tecnologia. Si tratta della riflessione totale della luce. Quando un raggio passa da un mezzo all'altro (per esempio, dall'aria all'acqua o dall'aria al vetro), la sua traiettoria viene deviata: il raggio viene in parte riflesso e in parte rifratto (figura *a*).



La legge di riflessione stabilisce l'uguaglianza tra l'angolo di incidenza e l'angolo di riflessione. La rifrazione è invece descritta da una legge trigonometrica, la legge di Snell, dal nome dello scienziato olandese che la formulò nel 1621. Il raggio rifratto, nel passaggio dal mezzo 1 al mezzo 2, si propaga con un angolo β legato all'angolo di incidenza α dalla relazione $n_1 \operatorname{sen}\alpha = n_2 \operatorname{sen}\beta$, dove n_1 e n_2 sono gli indici di rifrazione dei due mezzi, che dipendono dalle loro densità ottiche. Dalla formula si deduce che, se $n_1 > n_2$, deve essere $\operatorname{sen}\alpha < \operatorname{sen}\beta$, ovvero $\alpha < \beta$. Quindi, passando da un mezzo più denso a uno meno denso, il raggio rifratto si avvicina alla superficie di separazione dei mezzi. Esiste un valore α_L dell'angolo di incidenza, minore di 90°, per il quale l'angolo di rifrazione è proprio un angolo retto. α_L è detto **angolo limite** (figura *b*). Da tale valore in poi non si ha rifrazione e il raggio incidente viene completamente riflesso.

A zigzag nella fibra ottica

Per far viaggiare un fascio di luce nella fibra ottica si sfrutta proprio la riflessione totale. Per questo il nucleo interno ha un indice di rifrazione più alto del mantello. Ogni raggio che entra nella fibra ottica con un angolo di incidenza tra il nucleo e il mantello superiore all'angolo limite resta confinato dentro il nucleo e rimbalza a zigzag lungo tutta la lunghezza, fino all'estremo opposto.

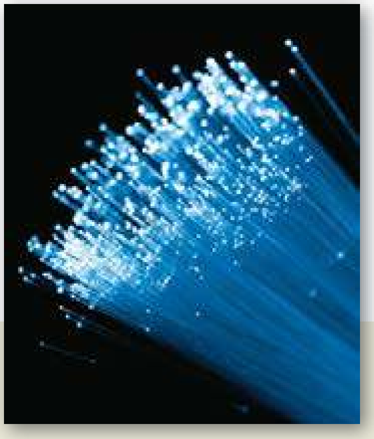


Esiste dunque un **cono di accettazione**, entro cui i raggi provenienti dall'esterno della fibra vengono intrappolati dentro la fibra ottica.

Attività

Un po' di storia e un problema

- Fai una ricerca sulla storia delle fibre ottiche. Quando sono state inventate? Quali sono state le prime applicazioni?
- Data una fibra con indice di rifrazione del nucleo $n_1 = 1{,}48$ e indice di rifrazione del mantello $n_2 = 1{,}46$, determina l'angolo limite α_L. Sapendo che l'indice di rifrazione dell'aria è 1, qual è l'angolo di accettazione γ, cioè l'angolo di incidenza massimo tra aria e vetro, che produce nel nucleo un raggio rifratto tale da generare la riflessione totale del segnale?



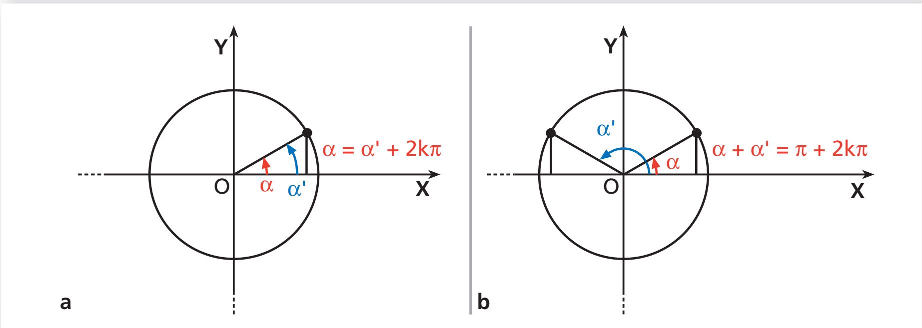
@ **Cerca nel Web:**
fibra ottica, applicazioni fibra ottica

Particolari equazioni goniometriche elementari

L'equazione sen α = sen α'
Anche equazioni di questo tipo, come quella elementare, si risolvono tenendo conto della definizione della funzione seno e della sua periodicità.
Osserviamo che:

$$\mathbf{sen}\,\alpha = \mathbf{sen}\,\alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + 2k\pi \;\vee\; \alpha + \alpha' = \pi + 2k\pi.$$

Due angoli hanno lo stesso seno se e solo se sono congruenti o supplementari, a meno di un numero intero di angoli giro.



◀ Figura 4

ESEMPIO
Risolviamo la seguente equazione:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Se chiamiamo $\alpha = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}$ e $\alpha' = \frac{1}{4}x - \frac{\pi}{4}$, possiamo applicare la proprietà precedente e cioè porre:

$$\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \;\vee\; \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi.$$

Svolgendo i calcoli otteniamo:

$$x = \pi + 8k\pi \;\vee\; x = \frac{7}{3}\pi + \frac{8}{3}k\pi.$$

L'equazione sen α = − sen α'
Possiamo ricondurci al caso precedente scrivendo $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(-\alpha')$. Infatti, per le proprietà degli archi associati, è: $-\operatorname{sen}\alpha' = \operatorname{sen}(-\alpha')$.

L'equazione sen α = cos α'
Per le proprietà degli archi associati, sappiamo che $\cos\alpha' = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)$, quindi possiamo scrivere

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right),$$

che permette di ricondurci al primo caso.

L'equazione sen α = − cos α'
Per risolvere equazioni di questo tipo, scriviamo $\cos\alpha' = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)$, da cui

$-\cos\alpha' = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)$. Pertanto l'equazione data si trasforma nella seguente:

$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right), \text{ e quindi } \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha'\right).$$

L'equazione cos α = cos α'

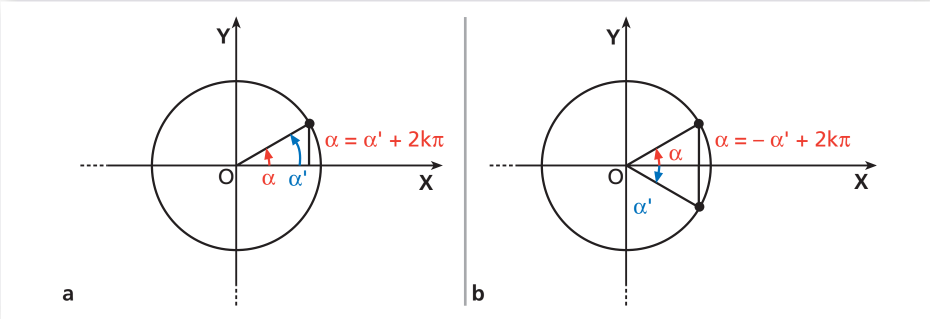
Equazioni di questo tipo si risolvono tenendo presente che

$$\cos\alpha = \cos\alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + 2k\pi \vee \alpha = -\alpha' + 2k\pi,$$

ossia, in forma più compatta:

$$\boldsymbol{\cos\alpha = \cos\alpha' \Leftrightarrow \alpha = \pm\alpha' + 2k\pi}.$$

● Due angoli hanno lo stesso coseno se e solo se sono congruenti oppure sono opposti, a meno di un numero intero di angoli giro.



▶ Figura 5

L'equazione cos α = − cos α'

Poiché gli angoli supplementari hanno coseni opposti, ossia $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, possiamo scrivere l'equazione nella forma $\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha')$ e ricondurci al caso precedente.

L'equazione tg α = tg α'

Equazioni di questo tipo sono risolubili tenendo presente che:

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + k\pi}.$$

● Due angoli hanno la stessa tangente se e solo se sono congruenti, a meno di un numero intero di angoli piatti.

ESEMPIO

Risolviamo la seguente equazione:

$$\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Essa è equivalente all'equazione

$$x = 2x + \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

con la condizione:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge 2x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \to \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}.$$

Risolvendo l'equazione, otteniamo:

$$x = -\frac{\pi}{4} - k\pi, \text{ soluzioni accettabili.}$$

● Se si devono risolvere equazioni del tipo

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}\alpha',$$

basta passare dalle cotangenti alle tangenti, con la relazione:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

L'equazione tg α = − tg α'

Poiché $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, possiamo scrivere l'equazione nella forma $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-\alpha')$, che permette di ricondurci al caso precedente.

Equazioni riconducibili a equazioni elementari

Per ricondurre, quando è possibile, equazioni che contengono più funzioni goniometriche a equazioni elementari si deve:

- esprimere le diverse funzioni mediante una sola di esse, utilizzando eventualmente le formule goniometriche;
- risolvere l'equazione ottenuta rispetto a tale funzione considerata come incognita;
- risolvere le equazioni elementari che si ottengono.

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione:

$$2 \operatorname{sen}^2 x + 5 \cos x - 4 = 0.$$

- Scriviamo l'espressione del primo membro in funzione soltanto di $\cos x$, essendo $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$2(1 - \cos^2 x) + 5 \cos x - 4 = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0.$$

- Risolviamo l'equazione rispetto a $\cos x$:

$$\cos x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

- Se $\cos x = 2$, nessuna soluzione.

Se $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Per comodità, puoi anche indicare $\cos x$ con t:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

2. LE EQUAZIONI LINEARI IN SENO E COSENO

DEFINIZIONE

Equazione lineare in sen x e cos x

Un'equazione goniometrica si dice lineare in $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ quando è possibile ricondurla alla forma:

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x + c = 0, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ e } b \neq 0.$$

Se $a = 0$ o $b = 0$, si ottiene un'equazione elementare.

Per risolvere un'equazione lineare si possono applicare tre metodi: quello algebrico, quello grafico e quello dell'angolo aggiunto.

Il metodo algebrico

Il metodo algebrico è diverso a seconda che il termine noto c sia uguale o diverso da 0.

Il caso in cui $c = 0$

Con $c = 0$ l'equazione diventa della forma:

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = 0.$$

Un'equazione lineare con $c = 0$ non può avere come soluzione:

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ o

$x = \pi + k\pi$.

Infatti, essendo a e b non nulli, l'equazione si ridurrebbe rispettivamente a:

$a \cdot 1 + 0 \cdot b = 0$ o

$b \cdot 1 + a \cdot 0 = 0$, ossia

$a = 0$ oppure $b = 0$,

entrambe impossibili.

Si potrebbe anche trasformare sen x o cos x usando, per esempio, $\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$, ma otterremmo un'equazione più impegnativa, perché irrazionale.

Per risolvere questa equazione ci riconduciamo a un'equazione elementare nella tangente. Dividiamo tutti i termini per cos x, che è sicuramente diverso da 0, perché $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non può essere soluzione dell'equazione di partenza:

$$a \operatorname{tg} x + b = 0 \to \operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}.$$

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione:

$$\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0.$$

Dividiamo entrambi i membri per $\cos x$, con $\cos x \neq 0 \left(\text{infatti } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{\sqrt{3} \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x} \quad \to \quad \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0,$$

e otteniamo l'equazione elementare

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3},$$

le cui soluzioni sono:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Il caso in cui $c \neq 0$

L'equazione goniometrica è del tipo:

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x + c = 0.$$

Per la soluzione si utilizzano le formule parametriche:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \text{con } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \text{ e } x \neq \pi + 2k\pi.$$

Sostituendo ed eseguendo le semplificazioni, si ottiene un'equazione di secondo grado in t del tipo:

$$a't^2 + b't + c' = 0.$$

Poiché le formule parametriche si applicano solo per valori di x per cui esiste la tangente di $\frac{x}{2}$, cioè per $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \to x \neq \pi + 2k\pi$, occorre, prima di tutto, verificare se l'equazione di partenza ammette come soluzioni $x = \pi + 2k\pi$. Risolvendo poi l'equazione in t, si ottengono tutte le altre soluzioni.

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione:

$$\operatorname{sen} x + \cos x - 1 = 0.$$

Dapprima dobbiamo verificare se $x = \pi + 2k\pi$ è soluzione dell'equazione data. Sostituiamo nel primo membro dell'equazione $x = \pi$:

$$\operatorname{sen} \pi + \cos \pi - 1 = 0 + (-1) - 1 \neq 0.$$

Poiché l'uguaglianza è falsa, $x = \pi + 2k\pi$ **non** è soluzione dell'equazione data.

Sostituiamo ora a sen x e cos x dell'equazione le relative espressioni delle formule parametriche e l'equazione data diventa:

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 = 0.$$

Moltiplichiamo i due membri per $1 + t^2$ e semplifichiamo:

$$2t + 1 - t^2 - 1(1 + t^2) = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad -2t^2 + 2t = 0 \rightarrow 2t\,(t-1) = 0 \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Siamo giunti alle due equazioni elementari:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1.$$

Risolviamole:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0 \rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \rightarrow x = 2k\pi;$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1 \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Le soluzioni dell'equazione lineare sen x + cos $x - 1 = 0$ sono:

$$x = 2k\pi \;\vee\; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

● $1 + t^2$ è sempre diverso da 0.

Il metodo grafico

È possibile risolvere un'equazione lineare in seno e coseno anche con la geometria analitica. In tal caso, l'equazione a sen $x + b$ cos $x + c = 0$ viene sostituita da un sistema formato dall'equazione stessa e dall'equazione $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, che rappresenta la prima relazione fondamentale della goniometria:

$$\begin{cases} a \operatorname{sen} x + b \cos x + c = 0 \\ \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \end{cases}$$

Si pone poi cos $x = X$ e sen $x = Y$ e si ottiene il sistema algebrico:

$$\begin{cases} aY + bX + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

● Graficamente al sistema corrisponde l'intersezione fra una retta (prima equazione) e la circonferenza goniometrica (seconda equazione).

ESEMPIO

Risolviamo la seguente equazione:

$$\sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x = 2.$$

Trasformiamo l'equazione nel sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x = 2 \\ \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \end{cases}$$

Poniamo sen $x = Y$ e cos $x = X$:

$$\begin{cases} \sqrt{3}\, Y + X = 2 & \text{equazione di una retta} \\ X^2 + Y^2 = 1 & \text{equazione della circonferenza con centro l'origine e raggio 1} \end{cases}$$

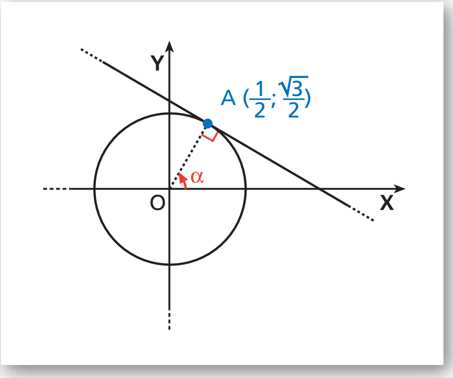
Le soluzioni dell'equazione data sono rappresentate dalle coordinate degli eventuali punti di intersezione della retta con la circonferenza.
Svolgendo i calcoli, si ottiene:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2} \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Disegniamo nel piano cartesiano la retta e la circonferenza, in modo da rappresentare la soluzione trovata.
Sostituiamo $\cos x$ a X e $\operatorname{sen} x$ a Y, ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

che ha per soluzioni $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.



▶ Figura 6 La retta ha un solo punto in comune con la circonferenza, dunque è tangente a essa. Detta α la misura dell'angolo $X\widehat{O}A$, l'equazione ha per soluzioni $x = \alpha + 2k\pi$.

Il metodo dell'angolo aggiunto

● Abbiamo introdotto l'angolo aggiunto a pagina 711.

Ricordando che l'espressione

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x$$

equivale a

$$r \operatorname{sen}(x + \alpha), \quad \text{con } r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a},$$

è possibile trasformare l'equazione lineare

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x + c = 0$$

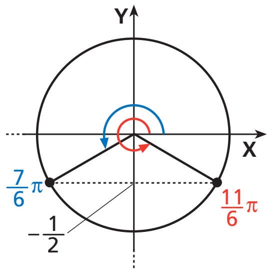
in un'equazione del tipo

$$r \operatorname{sen}(x + \alpha) + c = 0 \rightarrow \operatorname{sen}(x + \alpha) = -\frac{c}{r},$$

ossia in un'equazione elementare.

● Per determinare α teniamo conto che a ha lo stesso segno di $\cos\alpha$ e b lo stesso di $\operatorname{sen}\alpha$.
Nella tabella indichiamo il quadrante in cui si trova il lato termine di α.

Segno di *a*	Segno di *b*	Quadrante
+	+	I
+	−	IV
−	−	III
−	+	II



ESEMPIO

Risolviamo l'equazione: $\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x + 1 = 0$.

$$r = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{3}.$$

L'equazione equivale a:

$$2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \rightarrow x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \rightarrow x = \frac{13}{6}\pi + 2k\pi. \end{cases}$$

3. LE EQUAZIONI OMOGENEE IN SENO E COSENO

Le equazioni omogenee di secondo grado

DEFINIZIONE

Equazione omogenea di secondo grado in sen *x* e cos *x*

Un'equazione goniometrica si dice omogenea di secondo grado in sen x e cos x quando è possibile scriverla nella forma:

$$\boldsymbol{a \,\text{sen}^2 x + b \,\text{sen}\, x \cos x + c \cos^2 x = 0}.$$

● Un'equazione è omogenea quando tutti i suoi termini sono dello stesso grado.

Consideriamo due casi.

- $\boldsymbol{a = 0 \vee c = 0}$.

  L'equazione diventa del tipo:

  $$b \,\text{sen}\, x \cos x + c \cos^2 x = 0, \text{ se } a = 0;$$
  $$a \,\text{sen}^2 x + b \,\text{sen}\, x \cos x = 0, \text{ se } c = 0.$$

  In entrambi i casi si può scrivere il primo membro come prodotto di fattori,

  $$\cos x\,(b \,\text{sen}\, x + c \cos x) = 0, \text{ oppure}$$
  $$\text{sen}\, x\,(a \,\text{sen}\, x + b \cos x) = 0,$$

  ottenendo equazioni che si possono risolvere mediante la legge di annullamento del prodotto. Uguagliando a 0 i singoli fattori, si hanno equazioni elementari o equazioni lineari.

- $\boldsymbol{a \neq 0 \wedge c \neq 0}$.

  Sono presenti entrambi i termini con $\text{sen}^2 x$ e con $\cos^2 x$.

  Poiché $a \neq 0$, possiamo assumere:

  $$\cos^2 x \neq 0.$$

  Dividiamo per $\cos^2 x$, ottenendo un'equazione di secondo grado in tg x, equivalente alla data:

  $$\frac{a \,\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \,\text{sen}\, x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x} \rightarrow$$

  $$\rightarrow\ a \,\text{tg}^2 x + b \,\text{tg}\, x + c = 0.$$

● Si ha $\cos^2 x = 0$ per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ e, se questo valore fosse soluzione dell'equazione, risulterebbe:

$a \cdot 1 + 0 + 0 = 0$, ossia

$a = 0$, contro l'ipotesi.

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione:

$$\text{sen}^2 x - (1 + \sqrt{3})\,\text{sen}\, x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0.$$

Poiché sono presenti i termini in $\text{sen}^2 x$ e $\cos^2 x$ (quindi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non è soluzione dell'equazione), dividiamo i due membri per $\cos^2 x$:

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{(1 + \sqrt{3})\,\text{sen}\, x \cancel{\cos x}}{\cos^{\cancel{2}} x} + \frac{\sqrt{3}\,\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} = \frac{0}{\cos^2 x}.$$

● Con questo metodo si possono risolvere anche equazioni omogenee di grado superiore al secondo.

Otteniamo l'equazione in tg x:

$$\mathrm{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3}) \cdot \mathrm{tg}\, x + \sqrt{3} = 0.$$

Poniamo tg $x = y$ e risolviamo l'equazione di secondo grado in y:

$$y_{1,2} = \frac{(1+\sqrt{3}) \pm \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}}{2} = \frac{(1+\sqrt{3}) \pm (1-\sqrt{3})}{2} = \begin{cases} 1 \\ \sqrt{3} \end{cases}$$

Risolviamo, dunque, le due equazioni elementari:

$$\mathrm{tg}\, x = 1, \qquad \text{da cui } x = \frac{\pi}{4} + k\pi;$$

$$\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}, \qquad \text{da cui } x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

L'equazione omogenea data ha per soluzioni:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Un'equazione omogenea di secondo grado può essere risolta anche trasformandola in una equazione lineare, tenendo presente che:

$$\mathrm{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \mathrm{sen}\, x \cos x = \frac{\mathrm{sen}\, 2x}{2}.$$

Per esempio, risolviamo:

$$5\,\mathrm{sen}^2 x - 2 = 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, x \cos x + \cos^2 x.$$

Sostituendo le espressioni precedenti si ha:

$$5\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) - 2 = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, 2x + \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$5 - 5\cos 2x - 4 = 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, 2x + 1 + \cos 2x$$

$$2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, 2x + 6\cos 2x = 0.$$

Risolvendo l'equazione lineare ottenuta con uno dei metodi visti, si ha:

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}.$$

Le equazioni riconducibili a omogenee di secondo grado in seno e coseno

Un'equazione del tipo

$$\boldsymbol{a\,\mathrm{sen}^2 x + b\,\mathrm{sen}\, x \cos x + c\cos^2 x = d \quad (d \neq 0)}$$

è **riconducibile a omogenea di secondo grado in seno e coseno**. Infatti, può essere scritta in modo da risultare omogenea moltiplicando il termine noto d per $(\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x)$, uguale a 1 per ogni x.

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione:

$$2\sqrt{3}\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\,x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = \sqrt{3}\,.$$

Moltiplichiamo il secondo membro per $(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)$:

$$2\sqrt{3}\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\,x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = \sqrt{3}\cdot(\text{sen}^2 x + \cos^2 x).$$

Svolgiamo i calcoli:

$$2\sqrt{3}\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\,x \cos x + \cancel{\sqrt{3}\cos^2 x} = \sqrt{3}\,\text{sen}^2 x + \cancel{\sqrt{3}\cos^2 x}$$

$$2\sqrt{3}\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\,x \cos x - \sqrt{3}\,\text{sen}^2 x = 0$$

$$\sqrt{3}\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\,x \cos x = 0.$$

Abbiamo così ottenuto un'equazione omogenea equivalente che, risolta, ha per soluzioni:

$$x = k\pi \ \vee \ x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

● Negli esercizi esamineremo anche equazioni omogenee in seno e coseno di terzo e quarto grado.

4. I SISTEMI DI EQUAZIONI GONIOMETRICHE

È possibile trattare i sistemi di equazioni goniometriche in modo analogo ai sistemi di equazioni algebriche, risolvendoli con gli stessi metodi.

● Un sistema di equazioni goniometriche è un insieme di equazioni goniometriche nelle stesse incognite. Le soluzioni del sistema sono le soluzioni comuni a tutte le equazioni che lo compongono.

ESEMPIO

Risolviamo il seguente sistema di due equazioni goniometriche in due incognite x e y, utilizzando il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} 4\cos^2 x + 3\cos^2 y = 4 \\ 2\cos x + 5\cos y = 6 \end{cases}$$

Poniamo $\cos x = X$ e $\cos y = Y$:

$$\begin{cases} 4X^2 + 3Y^2 = 4 \\ 2X + 5Y = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4X^2 + 3Y^2 = 4 \\ X = \dfrac{6-5Y}{2} \end{cases} \rightarrow$$

● Ricaviamo X nella seconda equazione e sostituiamo la sua espressione nella prima.

$$\rightarrow \begin{cases} 4\left(\dfrac{6-5Y}{2}\right)^2 + 3Y^2 = 4 \rightarrow 7Y^2 - 15Y + 8 = 0 \rightarrow Y = \dfrac{8}{7} \text{ e } Y = 1 \\ X = \dfrac{6-5Y}{2} \end{cases}$$

Poiché $Y = \cos y$, e la funzione coseno ha i valori compresi fra -1 e 1, l'equazione $\cos y = \frac{8}{7}$ non ha soluzioni.

Consideriamo soltanto la soluzione $Y = 1$, per cui il sistema diventa:

$$\begin{cases} Y = 1 \\ X = \frac{1}{2} \end{cases} \to \begin{cases} \cos y = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \to \begin{cases} y = 2k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k_1\pi \end{cases} \quad \text{con } k, k_1 \in \mathbb{Z}.$$

5. LE DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

DEFINIZIONE

Disequazione goniometrica

Una disequazione si dice goniometrica se contiene almeno una funzione goniometrica dell'incognita.

Le disequazioni goniometriche elementari

Le disequazioni goniometriche elementari sono del tipo:

$$\operatorname{sen} x < a, \quad \cos x \leq b, \quad \operatorname{tg} x \geq c, \ldots$$

È possibile risolverle in due modi:

1. utilizzando il grafico della relativa funzione goniometrica;
2. utilizzando la circonferenza goniometrica.

Primo metodo

Negli esercizi guida trovi anche un esempio di disequazione con tg x.

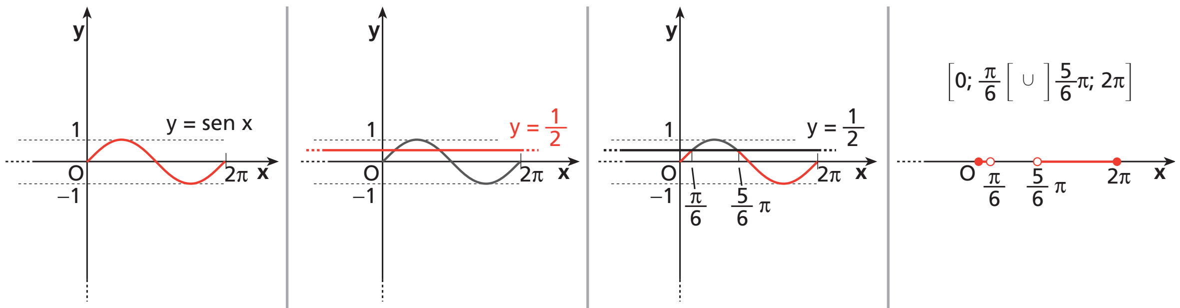
ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $\operatorname{sen} x < \frac{1}{2}$.

La sua equazione associata è $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, le cui soluzioni in $[0; 2\pi]$ sono $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5}{6}\pi$.

Tracciamo il grafico della funzione $y = \operatorname{sen} x$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$ e il grafico della retta $y = \frac{1}{2}$. Le ascisse dei punti di intersezione della retta con la sinusoide sono $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$.

Poiché dev'essere $\operatorname{sen} x < \frac{1}{2}$, coloriamo la parte di sinusoide che sta strettamente «sotto» la retta $y = \frac{1}{2}$ (figura 7c).



a. Disegniamo il grafico di $y = \text{sen}\, x$, $x \in [0; 2\pi]$.

b. Tracciamo la retta $y = \frac{1}{2}$.

c. Evidenziamo in rosso la parte di sinusoide le cui ordinate sono strettamente minori di $\frac{1}{2}$.

d. La soluzione della disequazione è data dalle ascisse corrispondenti ai punti evidenziati.

▲ **Figura 7** Risoluzione grafica della disequazione $\text{sen}\, x < \frac{1}{2}$.

Le ascisse dei punti della sinusoide evidenziata variano da 0 a $\frac{\pi}{6}$ e da $\frac{5}{6}\pi$ a 2π. Pertanto abbiamo due intervalli di soluzioni:

$$\left[0; \frac{\pi}{6}\right[\quad \cup \quad \left]\frac{5}{6}\pi; 2\pi\right].$$

Per determinare le soluzioni della disequazione data in $\mathbb{R}$, dobbiamo tener conto della periodicità della funzione seno. Otteniamo le soluzioni:

$$\left[2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[\quad \cup \quad \left]\frac{5}{6}\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi\right].$$

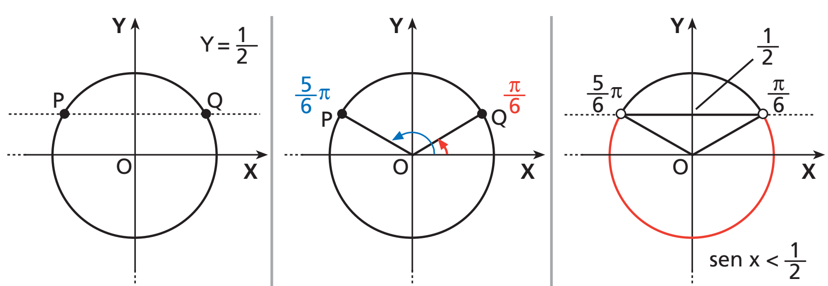
● Per semplicità abbiamo considerato l'intervallo chiuso $[0; 2\pi]$ e non quello aperto di periodicità del seno: $[0; 2\pi[$. Questo comporta che nella scrittura delle soluzioni i valori $2k\pi$ e $2\pi + 2k\pi$, che sono gli stessi, vengano ripetuti due volte.

Secondo metodo

ESEMPIO

Consideriamo di nuovo la disequazione $\text{sen}\, x < \frac{1}{2}$.

Disegniamo la circonferenza goniometrica e su di essa evidenziamo i punti P e Q che hanno ordinata uguale a $\frac{1}{2}$. A essi corrispondono gli angoli $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$ che risolvono l'equazione associata.



a. Tracciamo la retta $Y = \frac{1}{2}$ e indichiamo con P e Q i punti aventi ordinata $\frac{1}{2}$.

b. Evidenziamo gli angoli $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$ individuati da P e Q.

c. Coloriamo in rosso gli archi, i cui punti hanno ordinata minore di $\frac{1}{2}$.

◀ **Figura 8** Risoluzione della disequazione $\text{sen}\, x < \frac{1}{2}$ con la circonferenza goniometrica.

Per scrivere le soluzioni in $\mathbb{R}$, aggiungiamo $2k\pi$ a ogni estremo degli intervalli, ottenendo lo stesso risultato del primo metodo.

Le soluzioni nell'intervallo $[0; 2\pi]$ sono date da tutti gli angoli a cui corrispondono sulla circonferenza goniometrica punti con ordinata minore di $\frac{1}{2}$:

$$\left[0; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5}{6}\pi; 2\pi\right].$$

Le disequazioni goniometriche non elementari

Forniamo ora due esempi di risoluzione di disequazioni goniometriche non elementari intere.

Nell'esercizio guida 601 trovi anche un esempio di disequazione fratta.

ESEMPIO

1. Risolviamo la seguente disequazione nell'intervallo $[0; 2\pi]$:

$$\sqrt{2}\,\mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}\, x \geq 0.$$

Questa è una disequazione di secondo grado in sen x, soddisfatta per valori esterni all'intervallo delle soluzioni dell'equazione associata.
Determiniamo le soluzioni dell'equazione associata:

$$\sqrt{2}\,\mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}\, x = 0$$

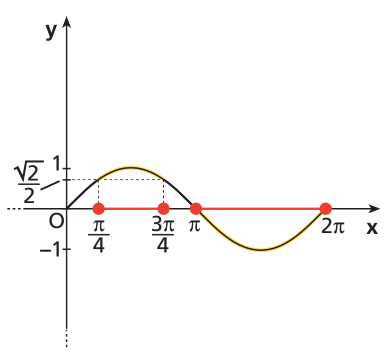
$$\mathrm{sen}\, x \cdot (\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, x - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{sen}\, x = 0 \ \vee \ \mathrm{sen}\, x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Consideriamo i valori esterni all'intervallo delle soluzioni:

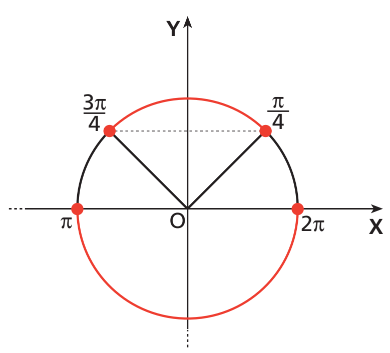
$$\mathrm{sen}\, x \leq 0 \ \vee \ \mathrm{sen}\, x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ci siamo quindi ricondotti a risolvere due disequazioni elementari. In figura 9 rappresentiamo graficamente gli intervalli soluzione, ottenuti secondo i due metodi che abbiamo utilizzato nel sottoparagrafo precedente.

▶ Figura 9



a. Risoluzione con il grafico della funzione seno.



b. Risoluzione con la circonferenza goniometrica.

Le soluzioni della disequazione di partenza, nell'intervallo $[0; 2\pi]$, sono

$$\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi\right] \cup [\pi; 2\pi].$$

Per ottenere le soluzioni in $\mathbb{R}$, basta aggiungere $2k\pi$ a ogni estremo degli intervalli.

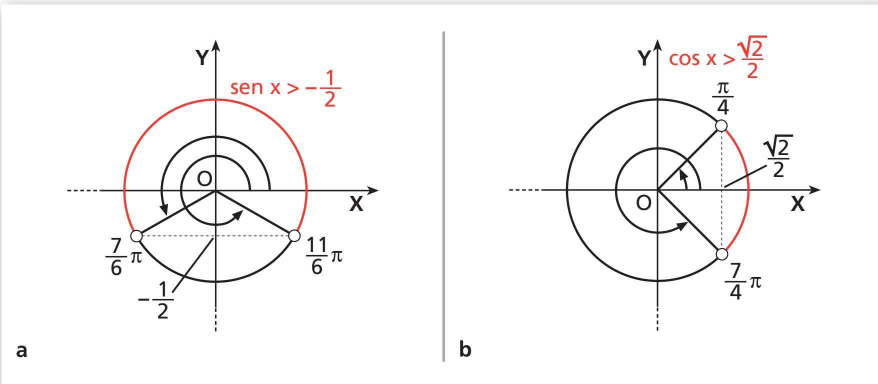
2. Risolviamo la seguente disequazione nell'intervallo $[0; 2\pi]$:

$$(2\,\mathrm{sen}\,x + 1) \cdot (\sqrt{2}\cos x - 1) < 0.$$

- Studiamo il segno di ciascun fattore, ponendolo maggiore di 0:

1° fattore $\quad 2\,\mathrm{sen}\,x + 1 > 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{sen}\,x > -\frac{1}{2} \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad 0 \leq x < \frac{7}{6}\pi \vee \frac{11}{6}\pi < x \leq 2\pi \text{ (figura 10}a\text{);}$$



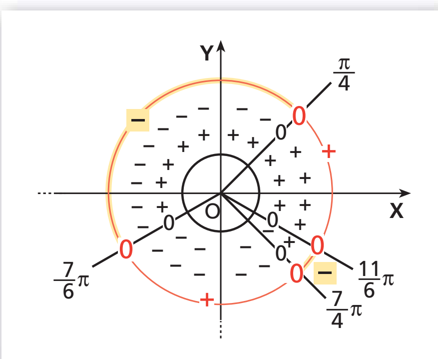
◀ **Figura 10**

2° fattore $\quad \sqrt{2}\cos x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \vee \frac{7}{4}\pi < x \leq 2\pi \text{ (figura 10}b\text{).}$$

- Studiamo il segno del prodotto rappresentando i segni dei due fattori su due circonferenze concentriche (figura 11).

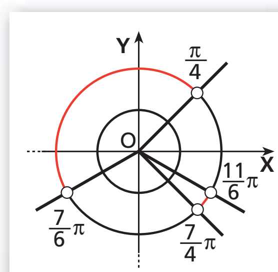
I segni del primo fattore sono rappresentati sulla circonferenza interna, quelli del secondo sulla seconda circonferenza. Mettiamo anche uno 0 quando il fattore si annulla.



◀ **Figura 11** Rappresentazione grafica del segno dei due fattori. Il primo fattore corrisponde alla circonferenza più interna.

Applicando la regola dei segni, risolviamo la disequazione data.
Poiché la disequazione è formata da un prodotto che deve essere negativo, le sue soluzioni, nell'intervallo $[0; 2\pi]$, sono:

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{7}{6}\pi \vee \frac{7}{4}\pi < x < \frac{11}{6}\pi.$$



▲ **Figura 12** Rappresentazione grafica degli archi corrispondenti alle soluzioni della disequazione assegnata.

I sistemi di disequazioni goniometriche

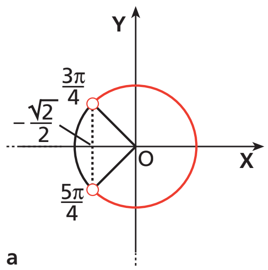
Un sistema di disequazioni goniometriche è l'insieme di due o più disequazioni goniometriche nella stessa incognita. Le soluzioni del sistema sono quei valori che soddisfano contemporaneamente tutte le disequazioni.

ESEMPIO

Risolviamo il seguente sistema di due disequazioni nell'intervallo $[0; 2\pi]$:

$$\begin{cases} 2\cos x + \sqrt{2} > 0 \\ \operatorname{tg}^2 x - 3 \leq 0 \end{cases}$$

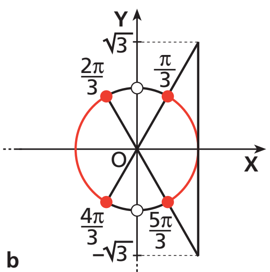
- Risolviamo la prima disequazione (figura *a*):



a

$$\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad 0 \leq x < \frac{3}{4}\pi \ \vee \ \frac{5}{4}\pi < x \leq 2\pi.$$

- Risolviamo la seconda disequazione (figura *b*):

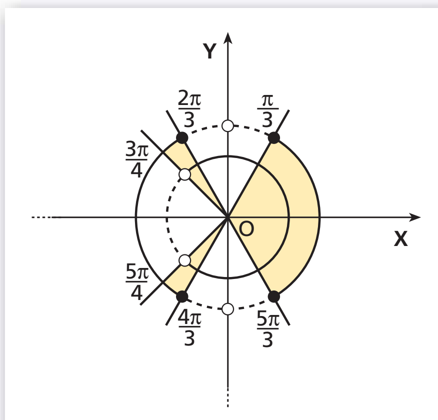


b

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 \leq 0 \quad \rightarrow \quad -\sqrt{3} \leq \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \ \vee \ \frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi \ \vee \ \frac{5}{3}\pi \leq x \leq 2\pi.$$

Compiliamo il quadro dei risultati utilizzando due circonferenze concentriche (figura 13).



▶ **Figura 13** Le soluzioni del sistema assegnato. Per ogni disequazione abbiamo segnato con tratto continuo gli archi corrispondenti alle soluzioni, con tratteggio quelli che non corrispondono a soluzioni. Con un cerchietto nero indichiamo un valore che è soluzione, con un cerchietto bianco un valore che non lo è.

Le soluzioni del sistema sono date dagli intervalli che soddisfano contemporaneamente entrambe le disequazioni, cioè:

$$\left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}\pi; \frac{3}{4}\pi\right[\cup \left]\frac{5}{4}\pi; \frac{4}{3}\pi\right] \cup \left[\frac{5}{3}\pi; 2\pi\right].$$

Osservazione. Se le soluzioni non sono richieste nel solo intervallo $[0; 2\pi]$, allora vanno scritte aggiungendo a ogni estremo dell'intervallo il periodo relativo. Per esempio, invece dell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ dovremo scrivere:

$$\left[2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right].$$

6. LE EQUAZIONI GONIOMETRICHE PARAMETRICHE

Un'equazione goniometrica parametrica è un'equazione goniometrica che dipende da un parametro reale.

Per tali equazioni si effettua la discussione che consiste nel determinare, al variare del parametro, il *numero* delle soluzioni dell'equazione che soddisfano eventuali limitazioni poste all'incognita.

Nella discussione di equazioni parametriche goniometriche, utilizziamo il **metodo grafico**.
Vediamo alcuni esempi distinguendo tre casi.

Per esempio $2\,\text{sen}\,x - k\cos^2 x + k - 1 = 0$ è un'equazione goniometrica parametrica.

a) L'equazione è elementare

L'equazione è elementare se contiene una sola funzione goniometrica, per esempio sen x, ed è di primo grado.

ESEMPIO

Discutiamo:

$$\begin{cases} k\,\text{sen}\,x - 2k + 1 = 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

Dividiamo per $k \neq 0$ e isoliamo sen x:

$$\text{sen}\,x = \frac{2k-1}{k}.$$

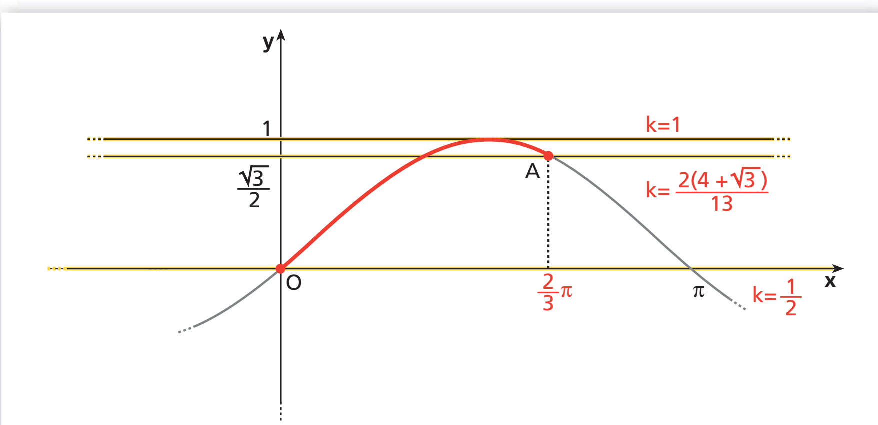
Supponiamo $k \neq 0$ in quanto per $k = 0$ l'equazione diventa: $0 \cdot \text{sen}\,x - 2 \cdot 0 + 1 = 0$, $1 = 0$, impossibile.

Poniamo uguali a y i membri dell'uguaglianza:

$$\begin{cases} y = \text{sen}\,x \\ y = \frac{2k-1}{k} \end{cases}$$

Graficamente le soluzioni dell'equazione sono le ascisse dei punti di intersezione fra la sinusoide e il fascio di rette parallele all'asse x, rappresentato dalla seconda equazione, nell'intervallo $\left[0; \frac{2}{3}\pi\right]$ (figura 14).

Una retta del fascio ha nessuna, una o due intersezioni con la sinusoide in $\left[0; \frac{2}{3}\pi\right]$ a seconda della sua posizione rispetto all'asse x e alle rette di equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $y = 1$. Queste tre rette sono dette **rette caposaldo**.



◀ **Figura 14** Le rette caposaldo del fascio sono $y = 0$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = 1$.

Determiniamo i valori di k corrispondenti alle rette caposaldo del fascio:

$$\text{retta per } O \to y = 0 \quad \to \frac{2k-1}{k} = 0 \quad \to k = \frac{1}{2};$$

$$\text{retta per } A \to y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \to \frac{2k-1}{k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to 4k - 2 = \sqrt{3}\,k \to k = \frac{2(4+\sqrt{3})}{13};$$

$$\text{retta tangente} \to y = 1 \quad \to \frac{2k-1}{k} = 1 \quad \to k = 1.$$

L'equazione ha:

una soluzione per $\frac{1}{2} \leq k < \frac{2(4+\sqrt{3})}{13}$;

due soluzioni per $\frac{2(4+\sqrt{3})}{13} \leq k \leq 1$.

Osserva che per $k < \frac{1}{2}$ e per $k > 1$ non ci sono soluzioni per l'equazione che soddisfano le condizioni.

b) L'equazione è di secondo grado in una funzione goniometrica

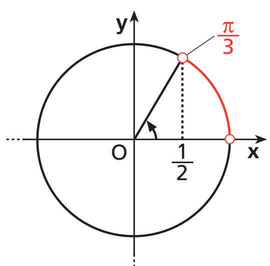
ESEMPIO

Discutiamo:

$$\begin{cases} k\cos^2 x + 2\cos x - k + 1 = 0 \\ 0 < x < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Nella discussione si considera come incognita non l'angolo x, ma la funzione goniometrica, quindi poniamo $\cos x = t$. Di conseguenza le limitazioni di x devono essere convertite per la funzione t e cioè:

$$\text{se } 0 < x < \frac{\pi}{3}, \text{ allora } \frac{1}{2} < t < 1.$$



Il sistema diventa:

$$\begin{cases} kt^2 + 2t - k + 1 = 0 \\ \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

Discutiamo ora l'equazione con il metodo della parabola fissa.
Poniamo $y = t^2$, così si ottiene:

$$\begin{cases} ky + 2t - k + 1 = 0 \\ y = t^2 \\ \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

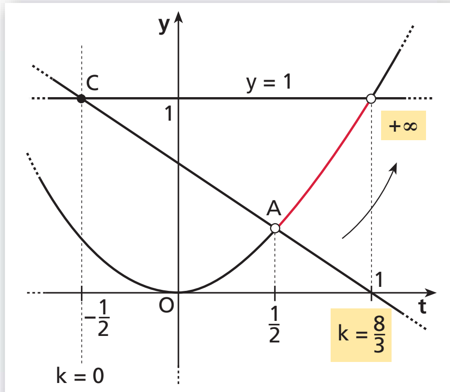
La prima equazione si può infatti scrivere come $k(y-1) + 2t + 1 = 0$, che corrisponde a un fascio di rette di generatrici $t = -\frac{1}{2}$ e $y = 1$.

Le due equazioni sono interpretabili graficamente come un fascio di rette di centro $C\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ e una parabola con il vertice nell'origine (figura 15).

Per determinare il valore di k corrispondente a $t = \frac{1}{2}$, troviamo l'ordinata di A mediante l'equazione della parabola

$$y_A = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

e sostituiamo le coordinate di $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ nell'equazione del fascio:



◀ **Figura 15** Nel fascio, procedendo in senso antiorario dalla retta $t = -\frac{1}{2}$, corrispondente a $k = 0$, si hanno valori di k crescenti tendenti a $+\infty$ per rette tendenti a $y = 1$.

$$\frac{1}{4}k + 1 - k + 1 = 0 \rightarrow k - 4k + 8 = 0 \rightarrow k = \frac{8}{3}.$$

Dal grafico ricaviamo che l'equazione ha **una soluzione** per $k > \frac{8}{3}$.

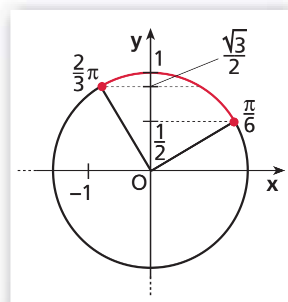
Nell'esempio considerato gli estremi dell'intervallo in cui varia l'angolo x si trovano nello stesso quadrante. Bisogna fare attenzione quando invece tali estremi si trovano in quadranti diversi.

ESEMPIO

Discutiamo: $\begin{cases} -2\,\text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\, x - k + 1 = 0 \\ \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \end{cases}$

Poiché $\text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\text{sen}\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dovremmo scrivere $\frac{1}{2} \leq \text{sen}\, x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Invece, per gli angoli dell'intervallo $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{2}{3}\pi\right]$, sen x assume anche i valori compresi tra $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e 1.



▲ **Figura 16**

Bisogna allora dividere l'intervallo $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{2}{3}\pi\right]$ nei due intervalli $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right[$ e $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\right]$.

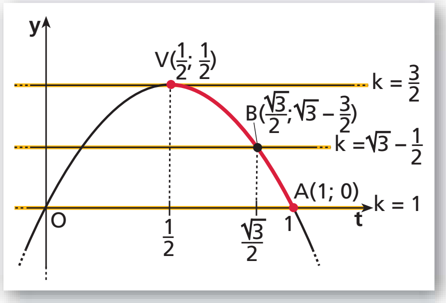
Nel primo intervallo si ha $\frac{1}{2} \leq \text{sen}\, x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ e a ogni valore di sen x corrisponde un solo valore di x, mentre nel secondo si ha $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \text{sen}\, x \leq 1$ e si hanno due valori di x.

Pertanto, seguendo il metodo grafico nella discussione, posto sen $x = t$ nell'equazione $-2\,\text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\, x = k - 1$, si ha:

$$\begin{cases} y = -2t^2 + 2t \\ y = k - 1 \\ \frac{1}{2} \leq t < \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta una parabola di vertice $V\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ e la seconda un fascio di rette parallele all'asse t.

▶ Figura 17



Le rette particolari sono quelle che passano per i punti di ascissa 1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$, ossia per $A(1; 0)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)$ e $V\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$:

retta per A $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $k - 1 = 0$ $\rightarrow k = 1$;

retta per B $\rightarrow$ $y = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$ $\rightarrow$ $k - 1 = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$ $\rightarrow k = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$;

retta per V $\rightarrow$ $y = \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $k - 1 = \frac{1}{2}$ $\rightarrow k = \frac{3}{2}$.

Dunque, tenendo conto delle osservazioni iniziali, concludiamo che il sistema ha:

due soluzioni per $1 \leq k \leq \sqrt{3} - \frac{1}{2}$;

una soluzione per $\sqrt{3} - \frac{1}{2} < k \leq \frac{3}{2}$.

c) L'equazione è lineare

ESEMPIO

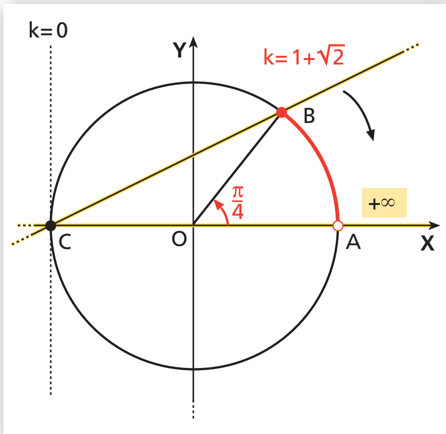
Discutiamo:

$$\begin{cases} k \operatorname{sen} x - \cos x - 1 = 0 \\ 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Utilizziamo il **metodo della circonferenza goniometrica**, cioè poniamo $\operatorname{sen} x = Y$ e $\cos x = X$, ottenendo:

$$\begin{cases} kY - X - 1 = 0 & \text{fascio di rette di centro } C(-1; 0) \\ X^2 + Y^2 = 1 & \text{circonferenza goniometrica} \\ 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

▶ **Figura 18** I valori di k tendono a $+\infty$ procedendo in senso orario dalla retta $X = -1$, corrispondente a $k = 0$, verso la retta $Y = 0$.



Determiniamo il valore di k corrispondente alla retta passante per $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$k\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{2}k = \sqrt{2} + 2 \rightarrow k = 1 + \sqrt{2}.$$

L'equazione ha **una soluzione** per $k \geq 1 + \sqrt{2}$.

I PANNELLI SOLARI

Come si devono collocare i pannelli solari in modo che il loro rendimento sia massimo?

► Il quesito completo a pag. 761

I pannelli solari oggi possono servire per fornire acqua calda e riscaldamento alle nostre case, oppure, se sono fotovoltaici, per trasformare la luce del Sole in energia elettrica.
Per un buon funzionamento, è importante che prendano sempre molto sole. Viceversa, meno sole prendono, meno sono efficienti.
La situazione migliore sarebbe avere dei pannelli che si muovono insieme al Sole, un po' come succede con i girasoli, e che rimangono sempre perpendicolari ai suoi raggi.

Oggi questa tecnologia è ancora antieconomica, quindi bisogna ricorrere a un compromesso.
Alla nostra latitudine, si ha un buon orientamento direzionando i pannelli verso Sud e inclinandoli di circa 30°, ma anche con angoli di 20° o di 40° la produzione rimane molto buona.
Per fare un confronto, si pensi che un pannello orizzontale (0°) perde il 10% di efficienza, mentre uno verticale (90°) ne perde addirittura il 35%.
Stiamo parlando sempre di impianti montati su tetti rivolti a Sud. Quando il tetto è rivolto a Nord, l'impianto solare è praticamente inutile.

Un tetto rivolto a Sud

In generale, per definire una buona inclinazione, gli elementi da tenere in considerazione sono l'orientamento della casa e l'inclinazione del tetto.
Supponiamo di avere una casa con orientamento verso Sud: la più conveniente.

In queste condizioni, per trovare la posizione migliore l'unico elemento su cui bisogna lavorare è l'angolo x del quale inclinare il pannello sul tetto. L'efficienza $e(x)$ può essere scritta come una funzione,

$$e(x) = E \operatorname{sen}(ax + b),$$

che ha valore massimo E quando l'argomento del seno vale $\frac{\pi}{2}$, cioè in corrispondenza dell'angolo $x_{\max} = \frac{\pi - 2b}{2a}$. Stando così le cose, però, l'angolo migliore è ancora ignoto, dal momento che dipende dai valori di a e b.
Per calcolarli possiamo sfruttare la conoscenza del rendimento di un pannello orizzontale (che, con i dati della nostra latitudine, ha un'efficienza del 90% di quella massima) e di uno verticale (che ha un'efficienza del 65%):

$$e(0) = E \operatorname{sen} b = \frac{9}{10}E,$$

$$e\left(\frac{\pi}{2}\right) = E \operatorname{sen}\left(a\frac{\pi}{2} + b\right) = \frac{65}{100}E.$$

Quello che ne ricaviamo sono due equazioni goniometriche nelle incognite a e b la cui soluzione consente di calcolare l'angolo per il quale il rendimento è massimo.
La prima delle due equazioni permette di dire che:

$$\operatorname{sen} b = \frac{9}{10} \to b = \operatorname{arcsen}\frac{9}{10}.$$

Questo valore, sostituito nella seconda, porta all'equazione nella sola incognita a,

$$\operatorname{sen}\left(a\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsen}\frac{9}{10}\right) = \frac{65}{100},$$

che può essere letta come

$$a\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsen}\frac{9}{10} = \operatorname{arcsen}\frac{65}{100},$$

da cui si ricava a.
Naturalmente, non tutte le case sono esattamente orientate verso Sud. In questo caso, nella formula dell'efficienza entra un secondo angolo y, dato dall'orientamento della casa. E per questo angolo y valgono ulteriori condizioni di massimo e di minimo che rendono più complicate le equazioni goniometriche da risolvere.

Energia elettrica dal Sole

La quota del fabbisogno energetico soddisfatto grazie all'energia del Sole cresce di anno in anno. La tecnologia più diffusa è quella dei pannelli fotovoltaici, il cui funzionamento si basa su semiconduttori che trasformano direttamente l'energia solare in energia elettrica. Questo, però, non è l'unico sistema per realizzare la conversione.
Negli ultimi anni sono state costruite vere e proprie centrali dove si utilizza l'energia solare per surriscaldare il vapore necessario a mettere in moto una turbina collegata a un alternatore che produce energia elettrica. Mentre nelle centrali convenzionali questo si fa bruciando un combustibile (per esempio gas, carbone o derivati del petrolio), nelle centrali solari si usano degli specchi che convogliano la luce del Sole su un serbatoio e ne surriscaldano il contenuto.

► Nella foto, la centrale di Sanlúcar la Mayor, vicino a Siviglia, inaugurata nel 2007.

LABORATORIO DI MATEMATICA
LE EQUAZIONI GONIOMETRICHE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Wiris troviamo, tutte e sole, le soluzioni appartenenti all'intervallo $[0; 2\pi[$ dell'equazione $2 \operatorname{sen} x + 3\cos x = -2$; operiamo poi le verifiche con gli angoli trovati come soluzioni.

- Attiviamo Wiris e impostiamo la soluzione dell'equazione scrivendo quest'ultima all'interno del comando *risolvere* (figura 1).
- Facciamo clic su *Calcola* e il sistema mostra due delle infinite soluzioni periodiche dell'equazione.

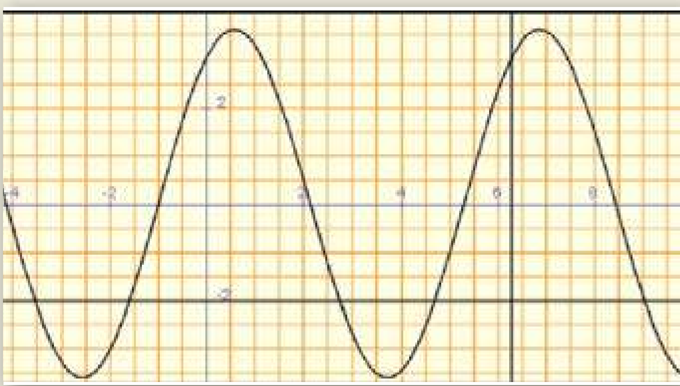
$$\text{risolvere}(2\cdot\sin(x)+3\cdot\cos(x)=-2) \rightarrow \left\{\left\{x=-\frac{\pi}{2}\right\},\{x=2.7468\}\right\}$$

▲ **Figura 1**

```
y1=2·sin(x)+3·cos(x);
y2= −2;
tracciare({y1, y2, x = 2·π}) → tracciante1
```

◀ **Figura 2**

- Per vedere quali cadono nell'intervallo fondamentale $[0; 2\pi[$, prepariamo le istruzioni per ottenere i grafici del primo e del secondo membro dell'equazione (figura 2).
- Le facciamo eseguire con un clic su *Calcola* e notiamo, dal grafico di figura 3, che in $[0; 2\pi[$ i valori delle espressioni del primo e del secondo membro coincidono due volte. In tale intervallo, quindi, l'equazione ammette due soluzioni, delle quali una è già nota.
- Otteniamo l'altra aggiungendo 2π alla prima soluzione (figura 4).



◀ **Figura 3**

$$-\frac{\pi}{2}+2\cdot\pi \rightarrow \frac{3\cdot\pi}{2}$$

▲ **Figura 4**

- Scegliamo di svolgere le due verifiche sostituendo le due soluzioni nel primo membro dell'equazione (figura 5).

$$\text{sostituire}(2\cdot\sin(x)+3\cdot\cos(x),\ x,\ 2.7468) \rightarrow -2.$$
$$\text{sostituire}\left(2\cdot\sin(x)+3\cdot\cos(x),\ x,\ \frac{3\cdot\pi}{2}\right) \rightarrow -2$$

▶ **Figura 5**

Nel sito: ▶ **1 esercitazione guidata** ▶ **21 esercitazioni in più**

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer:
- **trova, tutte e sole, le soluzioni delle seguenti equazioni, appartenenti all'intervallo [0°; 360°[;**
- **svolgi la verifica utilizzando la più piccola soluzione trovata;**
- **traccia i grafici del primo e del secondo membro dell'equazione nell'intervallo [0°; 360°[.**

1 $\dfrac{2}{\operatorname{sen} x + 3\cos x} = 3$ $[96°15'53'', 300°36'19'']$

2 $\dfrac{4\sqrt{2}\operatorname{sen} x - 2\cos x - 4}{5} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{10} - \dfrac{\cos x}{2}$ $[45°, 123°55'26'']$

3 $(4\operatorname{sen} x - 1)(10\operatorname{sen} x + 1) = 5(1 - 2\operatorname{sen} x)^2$ $[17°27'27'', 162°32'33'', 270°]$

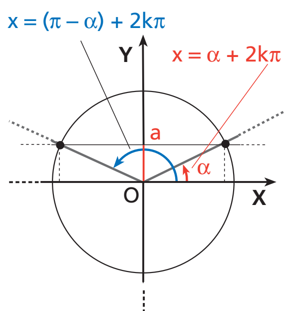
LA TEORIA IN SINTESI
LE EQUAZIONI E LE DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

1. LE EQUAZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

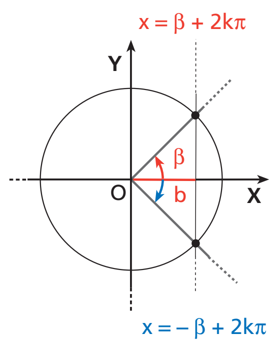
- **Equazione goniometrica**: contiene almeno una funzione goniometrica dell'incognita.
- **Equazione goniometrica elementare**: è del tipo $\operatorname{sen} x = a$, $\cos x = b$, $\operatorname{tg} x = c$.

Equazioni goniometriche elementari

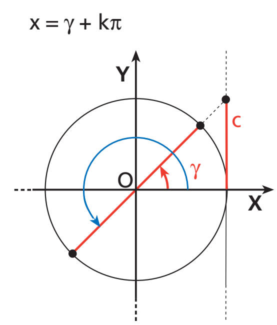
$$\operatorname{sen} x = a \begin{cases} \text{determinata se } -1 \leq a \leq 1 \\ \text{impossibile se } a < -1 \vee a > 1 \end{cases}$$



$$\cos x = b \begin{cases} \text{determinata se } -1 \leq b \leq 1 \\ \text{impossibile se } b < -1 \vee b > 1 \end{cases}$$



$\operatorname{tg} x = c$ determinata $\forall c \in \mathbb{R}$



Particolari equazioni goniometriche elementari	
Equazione	**Proprietà di risoluzione**
$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha'$	$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha' \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \alpha' + 2k\pi \ \vee \ \alpha + \alpha' = \pi + 2k\pi$
$\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} \alpha'$	$-\operatorname{sen} \alpha' = \operatorname{sen}(-\alpha')$
$\operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha'$	$\cos \alpha' = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)$
$\operatorname{sen} \alpha = -\cos \alpha'$	$-\cos \alpha' = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha'\right)$
$\cos \alpha = \cos \alpha'$	$\cos \alpha = \cos \alpha' \Leftrightarrow \alpha = \pm\alpha' + 2k\pi$
$\cos \alpha = -\cos \alpha'$	$-\cos \alpha' = \cos(\pi - \alpha')$
$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha'$	$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + k\pi$
$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \alpha'$	$-\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg}(-\alpha')$
$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} \alpha'$	$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

2. LE EQUAZIONI LINEARI IN SENO E COSENO

- **Equazioni lineari**: sono della forma $a \operatorname{sen} x + b \cos x + c = 0$, con $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

- **Metodo di risoluzione algebrico**
  - $c = 0$: si dividono i membri per $\cos x \neq 0$ e si risolve l'equazione in tangente.
  - $c \neq 0$:
    – si determinano eventuali soluzioni del tipo $x = \pi + 2k\pi$;
    – si utilizzano le formule parametriche per $x \neq \pi + 2k\pi$:
    $$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{con } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2};$$
    – si risolve l'equazione in t.

- **Metodo di risoluzione grafico**
  - Si esegue la sostituzione $\operatorname{sen} x = Y$ e $\cos x = X$.
  - Si risolve il sistema tra equazione della retta $aY + bX + c = 0$ e $X^2 + Y^2 = 1$, equazione della circonferenza goniometrica.
  - Le soluzioni dell'equazione sono i punti di intersezione tra retta e circonferenza.

- **Metodo di risoluzione dell'angolo aggiunto**
  - Si considera $a \operatorname{sen} x + b \cos x = r \operatorname{sen}(x + \alpha)$, con $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$.
  - Si sostituisce in $a \operatorname{sen} x + b \cos x + c = 0$:
    $$r \operatorname{sen}(x + \alpha) + c = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}(x + \alpha) = -\frac{c}{r}, \text{ equazione elementare.}$$

3. LE EQUAZIONI OMOGENEE IN SENO E COSENO

- **Equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno**: sono le equazioni riconducibili alla forma:
  $$a \cdot \operatorname{sen}^2 x + b \cdot \operatorname{sen} x \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0.$$

- **Metodo risolutivo**
  Primo caso: $a = 0 \lor c = 0$.
  L'equazione diventa:
  - se $a = 0$: $b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x = 0 \quad \rightarrow \quad \cos x (b \operatorname{sen} x + c \cos x) = 0$;
  - se $c = 0$: $a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen} x (a \operatorname{sen} x + b \cos x) = 0$.

  Si risolve con la legge di annullamento del prodotto.
  Secondo caso: $a \neq 0 \land c \neq 0$.
  Si divide per $\cos^2 x$ (diverso da 0, essendo $a \neq 0$) e si ottiene:
  $$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$

- Sono **riconducibili** a omogenee di secondo grado in seno e coseno le equazioni del tipo:
  $$a \cdot \operatorname{sen}^2 x + b \cdot \operatorname{sen} x \cos x + c \cdot \cos^2 x = d \; (d \neq 0).$$

- **Metodo risolutivo**
  - Si moltiplica d per $1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$.
  - Si risolve l'equazione omogenea così ottenuta nella forma:
    $$a \cdot \operatorname{sen}^2 x + b \cdot \operatorname{sen} x \cos x + c \cdot \cos^2 x = d \cdot (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x).$$

4. I SISTEMI DI EQUAZIONI GONIOMETRICHE

- **Sistema di equazioni goniometriche**: è un insieme di due o più equazioni goniometriche nelle stesse incognite.
- **Metodo risolutivo**: si utilizzano i metodi già studiati per i sistemi di equazioni algebriche.

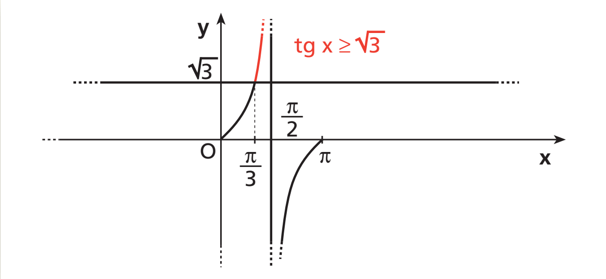
5. LE DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

- **Disequazioni goniometriche elementari**: sono le disequazioni del tipo $\operatorname{sen} x < a$, $\cos x < a$, $\operatorname{tg} x < a$ e quelle analoghe con diversi simboli di diseguaglianza.

- **Metodi risolutivi**

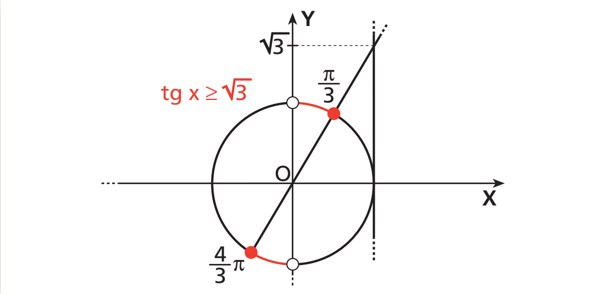
Metodo grafico con il grafico della funzione goniometrica:

- si tracciano il grafico della funzione goniometrica e la retta $y = a$;
- le soluzioni del problema sono date dalle ascisse dei punti del grafico che si trovano sopra o sotto la retta $y = a$ (a seconda del verso della disuguaglianza).



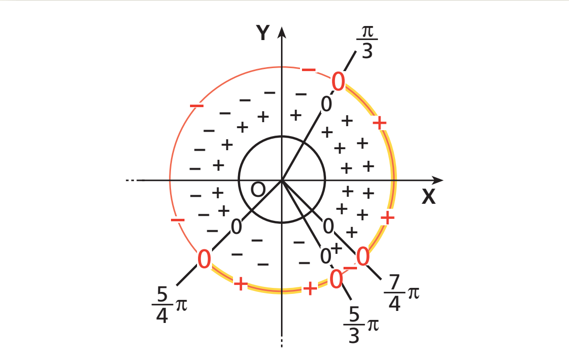
Metodo grafico con la circonferenza goniometrica:

- si disegna la circonferenza goniometrica;
- si risolve l'equazione associata;
- si determinano gli archi in cui la disequazione è soddisfatta.



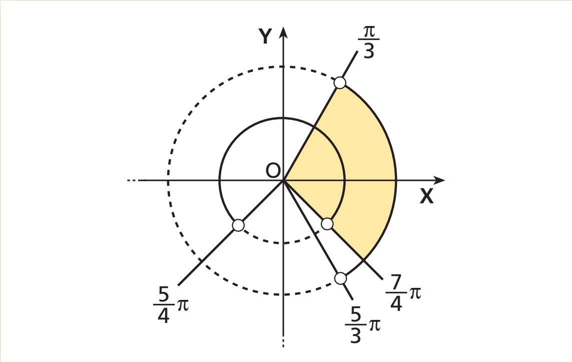
- Si risolvono le **disequazioni goniometriche non elementari** riconducendole a disequazioni elementari. Le disequazioni sotto forma di prodotti si risolvono mediante lo **studio del segno** dei fattori.

ESEMPIO: $(2 \operatorname{sen} x + \sqrt{2})(2 \cos x - 1) > 0$.



- Un **sistema di disequazioni goniometriche** ha come soluzioni quei valori che soddisfano contemporaneamente tutte le sue disequazioni.

ESEMPIO: $\begin{cases} 2 \operatorname{sen} x + \sqrt{2} > 0 \\ 2 \cos x - 1 > 0 \end{cases}$



6. LE EQUAZIONI GONIOMETRICHE PARAMETRICHE

- Anche per le equazioni goniometriche parametriche si può utilizzare il **metodo grafico** per discuterle, ossia per determinare quante sono le soluzioni al variare del parametro, fissato un intervallo a cui devono appartenere le soluzioni.

1. LE EQUAZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

▶ Teoria a pag. 762

Le identità goniometriche

1 **ESERCIZIO GUIDA**

Verifichiamo l'identità: $\operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \sec\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}$.

Determiniamo le condizioni di esistenza del primo e secondo membro:

D: $\cos\alpha \neq 0$; $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$; quindi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha \neq k\pi$. Più sinteticamente D: $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Consideriamo il primo membro dell'identità e trasformiamo $\operatorname{cosec}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ e $\sec\alpha$ in funzioni di $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$. Il primo membro diventa perciò:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\right)^2.$$

Semplifichiamo e riduciamo il tutto a un'unica frazione calcolando il minimo comune multiplo dei denominatori:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2\alpha}.$$

Usando la prima relazione fondamentale della goniometria, $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, abbiamo:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2\alpha}.$$

Il primo membro risulta uguale al secondo, quindi l'identità è verificata.

Verifica le seguenti identità.

2 $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 - 1 = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

3 $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha$

4 $1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$

5 $\cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \operatorname{cotg}^2\alpha = 1$

6 $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha)\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

7 $(\operatorname{cotg}\alpha - \cos\alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha = 1 - \operatorname{sen}\alpha$

8 $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{1 - \operatorname{cotg}\alpha}$

9 $\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^3\alpha = \operatorname{sen}\alpha$

10 $\operatorname{cosec}^2\alpha + \sec^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\alpha}$

11 $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cdot(1 - \operatorname{sen}^2\alpha) = 1$

12 $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$

13 $\dfrac{1}{2 - \operatorname{sen}^2\alpha} = \dfrac{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}{2 + \operatorname{tg}^2\alpha}$

14 $\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = 1$

15 $\dfrac{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha} = \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha$

16 $\cos^6\alpha + \operatorname{sen}^6\alpha = 1 - 3\cos^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha$

17 $\dfrac{1 - \cos^2\alpha}{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha}$

18 $\operatorname{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\operatorname{cotg}^2\alpha\operatorname{sen}^4\alpha$

Identità verificabili con le formule di addizione e sottrazione

Verifica le seguenti identità.

19 $\operatorname{sen}(30° + \alpha) = \operatorname{sen}(-210° - \alpha)$; $\quad \operatorname{sen}\left(\frac{5}{6}\pi - \alpha\right) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$.

20 $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$; $\quad \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\alpha$.

21 $\operatorname{sen}^2\left(\alpha - \frac{3}{4}\pi\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$

22 $\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

23 $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

24 $4\cos\left(\frac{5}{6}\pi + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha - 3}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$

25 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\operatorname{sen}^2\alpha - 1}{2\cos^2\alpha - 1}$

Identità verificabili con le formule di duplicazione

Verifica le seguenti identità.

26 $\frac{2}{1 - \cos 2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha$

27 $1 + \cos 2\alpha = 2 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$

28 $2\operatorname{cosec} 2\alpha = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha$

29 $(1 - \cos 2\alpha)\operatorname{cosec} 2\alpha = \operatorname{tg}\alpha$

30 $\operatorname{cotg} 2\alpha = \operatorname{cosec} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha$

31 $2\operatorname{cotg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\alpha$

32 $\operatorname{sen}\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha\operatorname{sen} 2\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

33 $\frac{\cos 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \cos^2\alpha$

34 $\operatorname{sen} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha + \cos^2\alpha = 2 - \cos 2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

35 $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = -\operatorname{tg} 2\alpha$

36 $\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{sen} 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

Identità verificabili con le formule di bisezione

Verifica le seguenti identità.

37 $\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}^2\alpha - 2\cos\alpha\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$

38 $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = 2\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

39 $\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} = 4\operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$

40 $\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}$

41 $\frac{1 + \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + 1}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - 1}$

42 $\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} \cdot (1 + \cos\alpha)}{2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1 - \cos\alpha}$

ESERCIZI VARI Le identità goniometriche

Verifica le seguenti identità.

43 $\operatorname{tg}(45° + \alpha) = \frac{1 + \operatorname{sen} 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

44 $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

45 $\frac{1 + \cos 2\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$

46 $\cos 2\alpha = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

47 $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\alpha$

48 $4\cos(60°+\alpha)\cos(60°-\alpha) = \cos 2\alpha - 2\operatorname{sen}^2\alpha$

49 $1+\operatorname{cotg}^2\alpha+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\operatorname{cosec}^2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

50 $\operatorname{sen}\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha\operatorname{sen}2\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

51 $\sec\alpha - \cos^2\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha - \cos\alpha + 1 = \operatorname{sen}^2\alpha$

52 $1 + \operatorname{tg}^2\alpha - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

53 $\operatorname{tg}\alpha + \frac{2\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha} - \operatorname{cotg}\alpha + 1 = \frac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha}$

54 $2\operatorname{sen}\alpha\cos 2\alpha + \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}3\alpha$

55 $\cos\frac{5}{3}\alpha\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3} = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\frac{2}{3}\alpha\cos\frac{2}{3}\alpha$

56 $\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{\cos 2\alpha}{4}}{\operatorname{sen}2\alpha} = \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha}{8}$

57 $\dfrac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$

58 $\dfrac{2\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$

59 $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\beta} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\beta$

60 $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha} - \dfrac{\operatorname{sen}2\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$

---

61 $\dfrac{\cos^2(90°+\alpha) - \operatorname{sen}^2(90°-\alpha)}{\operatorname{cotg}(180°-\alpha)-1} = \operatorname{sen}^2(180°+\alpha)\,[\operatorname{tg}(90°-\alpha)-1]$

62 $\cos 2\alpha + 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{cosec}\alpha = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+1$

63 $\dfrac{2\left[\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha} + \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$

64 $\dfrac{\cos\left(\alpha-\frac{2}{3}\pi\right)+\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{7}{6}\pi\right)}{\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{7}{4}\pi\right)}\cdot\sqrt{2}\operatorname{sen}2\alpha = -2\cos^2\alpha$

65 $\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha + 2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right) = \cos 2\alpha + \cos\alpha + \sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha$

66 $\dfrac{\cos 3\alpha + \operatorname{sen}3\alpha}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha} - \operatorname{sen}2\alpha = 1 + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

67 $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{(\cos\alpha\cdot\cos\beta)^2} = (\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)$

68 $\dfrac{3\operatorname{sen}2\alpha - 6\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}2\alpha} = -6\operatorname{cotg}\alpha\cdot\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}2\alpha + 2\cos\alpha + 1}$

69 $\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + 3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}{\operatorname{cosec}\alpha + \cos\alpha\operatorname{cotg}\alpha + 6} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

70 $\dfrac{\operatorname{sen}3\alpha - \left[\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right]^3}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\alpha} = -3\cos^3\alpha(1+\cos\alpha)$

La scrittura sintetica delle soluzioni di un'equazione

71 **TEST** Fra le seguenti espressioni, una sola *non* è equivalente a $x = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}$. Quale?

A $x = \pi + k\frac{\pi}{2}$

B $x = \frac{3}{2}\pi + k\frac{\pi}{2}$

C $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

D $x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

E $x = k\frac{\pi}{2}$

72 **ASSOCIA** a ciascuna espressione della prima riga un'espressione della seconda riga che descriva gli stessi angoli.

1) $x = k\pi$. **2)** $x = \pi + 2k\pi$. **3)** $x = -4\pi + 2k\pi$.

a) $x = 2k\pi$. **b)** $x = \pi + k\pi$. **c)** $x = -\pi + 2k\pi$.

73 **VERO O FALSO?**
Le due scritture sintetiche indicate sono equivalenti.

a) $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \qquad x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi.$ V F

b) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \qquad x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$ V F

c) $x = \frac{5}{6}\pi + k\pi, \qquad x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi.$ V F

d) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \qquad x = -\frac{\pi}{2} + k\pi.$ V F

e) $x = k\pi, \qquad x = 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi.$ V F

f) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \qquad x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi.$ V F

Rappresenta nella circonferenza goniometrica le seguenti soluzioni di equazioni goniometriche.

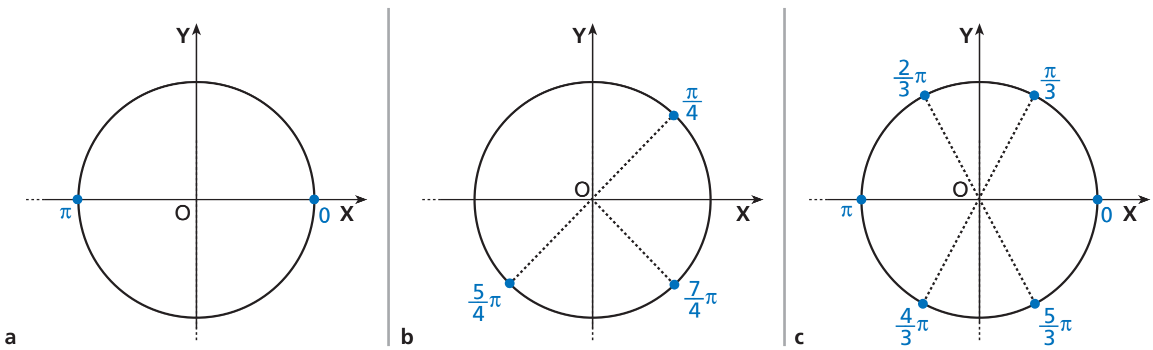
74 a) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; b) $x = \frac{3}{2}\pi + k\pi$.

75 a) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$; b) $x = -\frac{2}{3}\pi + k\pi$.

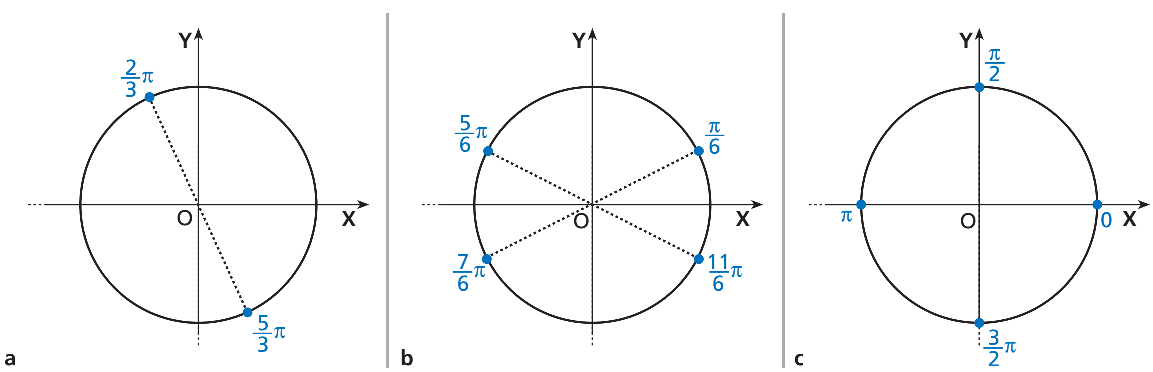
76 a) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; b) $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi \vee x = k\pi$.

In ogni figura sono indicate le soluzioni di un'equazione goniometrica. Scrivi il risultato nella forma più sintetica possibile, indicando anche la periodicità.

77



78



Riconosci fra le seguenti equazioni quelle goniometriche.

79 $3 \operatorname{sen} x = 1$; $\quad 3x \operatorname{sen} 90° = 1$; $\quad 2 \cos x + 2 = 0$; $\quad 2x - \operatorname{tg} 30° = 0$. [sì; no; sì; no]

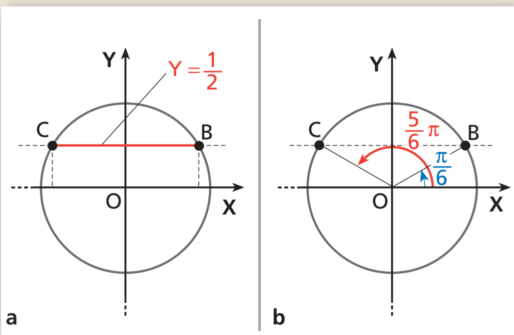
80 $x^2 \cos 60° + x \operatorname{sen}(-30°) + \operatorname{tg} 45° = 0$; $\operatorname{sen} x + (1 + \sqrt{2}) \cos x = 1$; $\operatorname{sen}^2 x - \cos x - 3 = 0$. [no; sì; sì]

Le equazioni elementari del tipo sen $x = a$

81 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo le seguenti equazioni:

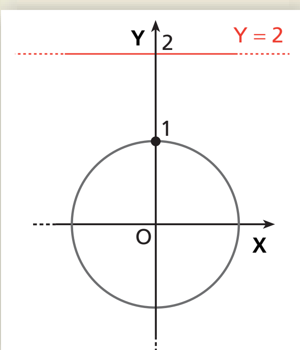
a) $2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$; b) $2 \operatorname{sen} x - 4 = 0$; c) $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$.



a) Risolviamo l'equazione rispetto a sen x:

$$2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}.$$

Usando la circonferenza goniometrica, cerchiamo i punti di ordinata $\frac{1}{2}$. Una soluzione si ha per $x = \frac{\pi}{6}$, un'altra per $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$. Inoltre, tutti gli angoli che si ottengono da $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$ aggiungendo (o sottraendo) 2π e i suoi multipli hanno lo stesso seno, quindi sono soluzioni dell'equazione. In conclusione, le soluzioni dell'equazione data sono: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$.



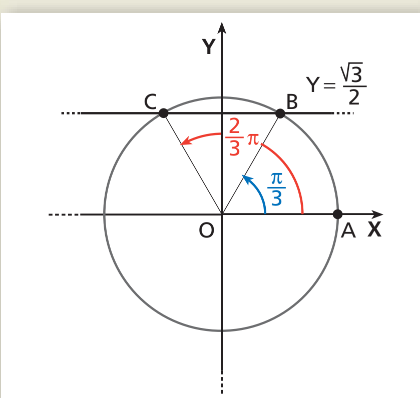
b) Risolviamo l'equazione rispetto a sen x:

$$2 \operatorname{sen} x - 4 = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} x = 4; \quad \operatorname{sen} x = 2.$$

L'equazione è impossibile perché deve essere $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ per qualsiasi valore di x.
Controlliamo questo risultato graficamente, tracciando la circonferenza goniometrica.

Tracciamo inoltre la retta dei punti che hanno ordinata 2.

La retta disegnata non incontra mai la circonferenza goniometrica, e questo mostra che non esistono angoli il cui seno è 2.



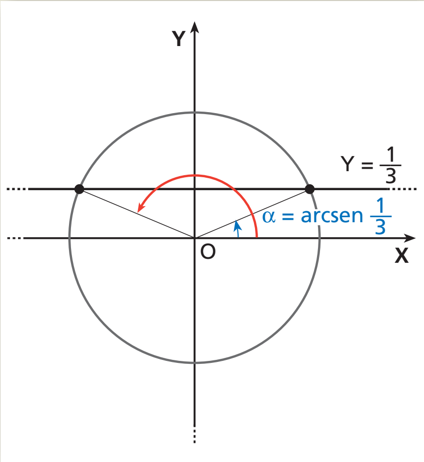
c) $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Per risolvere l'equazione poniamo $x - \frac{\pi}{6} = y$.
Otteniamo l'equazione goniometrica ausiliaria in y, che risolviamo nel modo consueto:

$$\operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le soluzioni sono $y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e $y = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$.
Sostituiamo i valori trovati per y nell'equazione

$$x - \frac{\pi}{6} = y$$



e risolviamo le due equazioni in x:

$$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi, \quad x-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi+2k\pi.$$

L'equazione assegnata ammette le soluzioni:

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi.$$

d) $\operatorname{sen} x=\frac{1}{3}$.

Procediamo come nel caso a). Tuttavia, notiamo che il seno non corrisponde ad angoli particolari, quindi esprimiamo le soluzioni mediante la funzione arcoseno:

$$x=\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}+2k\pi \vee x=\pi-\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}+2k\pi.$$

82 Scrivi le soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ in $[0; 3\pi]$. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi\right]$

83 Scrivi le soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen} 2x=\frac{1}{2}$ in $[0; 2\pi]$. $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi\right]$

Risolvi le seguenti equazioni in $\mathbb{R}$.

84 $2 \operatorname{sen} x=\sqrt{3}$ $\left[x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi\right]$

85 $2 \operatorname{sen} x=-\sqrt{2}$ $\left[x=\frac{5}{4}\pi+2k\pi \vee x=\frac{7}{4}\pi+2k\pi\right]$

86 $2 \operatorname{sen} x-4=3$ [impossibile]

87 $2 \operatorname{sen} x+2=3 \operatorname{sen} x+4$ [impossibile]

88 $2 \operatorname{sen} 3x-1=0$ $\left[x=\frac{\pi}{18}+k\frac{2}{3}\pi \vee x=\frac{5}{18}\pi+k\frac{2}{3}\pi\right]$

89 $2 \operatorname{sen}\frac{x}{3}+\sqrt{3}=0$ $[x=-\pi+6k\pi \vee x=4\pi+6k\pi]$

90 $2 \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$ $\left[x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi\right]$

91 $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$ $\left[x=\frac{\pi}{3}+k\pi\right]$

92 $\operatorname{sen} x-1=0$ $\left[x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$

93 $\operatorname{sen} x=\frac{1}{7}$ $\left[x=\operatorname{arcsen}\frac{1}{7}+2k\pi \vee x=\pi-\operatorname{arcsen}\frac{1}{7}+2k\pi\right]$

94 $\operatorname{sen} x=-\frac{1}{2}$ $\left[x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi\right]$

95 $2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}=1$ $\left[x=\frac{5}{3}\pi+4k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+4k\pi\right]$

96 $4 \operatorname{sen} x=-1$ $\left[x=\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{4}\right)+2k\pi \vee x=\pi-\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{4}\right)+2k\pi\right]$

97 $2\,\text{sen}\,5x - \sqrt{2} = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{20} + k\frac{2}{5}\pi \vee x = \frac{3}{20}\pi + k\frac{2}{5}\pi\right]$

98 $3\,\text{sen}\,x - 10 = 2(\text{sen}\,x - 1)$ [impossibile]

99 $\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + \text{arcsen}\frac{1}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{4}\pi - \text{arcsen}\frac{1}{3} + 2k\pi\right]$

100 $\frac{3}{5}\text{sen}\,x - \frac{4}{3} = -\frac{2}{5}\text{sen}\,x + \text{sen}\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$ [impossibile]

101 $2(\text{sen}\,2x + 3) - 1 = 3(1 - \text{sen}\,2x) + 2$ $\left[x = k\frac{\pi}{2}\right]$

102 $4\,\text{sen}(x - 15°) = 3\,\text{sen}(x - 15°) + 2[13 + 3\,\text{sen}(x - 15°)]$ [impossibile]

103 $8\,\text{sen}\,8x = 8$ $\left[x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4}\right]$

104 $2\cos 60°\,\text{sen}\,x - \text{sen}\,30° = \text{tg}\,180°$ $[x = 30° + k360° \vee x = 150° + k360°]$

105 $\text{sen}\,x + 3 = 2(\text{sen}\,x + 2)$ $\left[x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

106 $2\,\text{sen}\,x + \sqrt{3} = 0$ $\left[x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right]$

107 $\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{18}\right) + 3 = 2\left[\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{18}\right) + 2\right]$ $\left[x = \frac{14}{9}\pi + 2k\pi\right]$

108 $(\text{sen}\,3x - 2)(\text{sen}\,3x - 3) = (\text{sen}\,3x + 2)(\text{sen}\,3x + 3)$ $\left[x = k\frac{\pi}{3}\right]$

109 $\left|\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right| = 1$ $\left[x = \frac{2}{3}\pi + k\pi\right]$

110 $5 - \text{sen}(x + 21°) = 6 - 2\,\text{sen}(x + 21°)$ $[x = 69° + k360°]$

111 $2\,\text{sen}\,x - 2\cos 45° = 2(\sqrt{2}\,\text{sen}\,60° - \text{sen}\,x)$ $[x = 75° + k360° \vee x = 105° + k360°]$

112 $\text{sen}(2x - 10°) + 3 = 3\,\text{sen}(2x - 10°) + 4$ $[x = -10° + k180° \vee x = 110° + k180°]$

113 $|2\,\text{sen}\,3x| = 1$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}\right]$

114 $3\,\text{sen}\,x - 1 - \left[\frac{\text{sen}\,x - 2}{3} + \left(\text{sen}\,x - \frac{\text{sen}\,x - 1}{3}\right)\right] = 20$ [impossibile]

Le equazioni elementari del tipo $\cos x = a$

115 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo le equazioni: a) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$; b) $\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

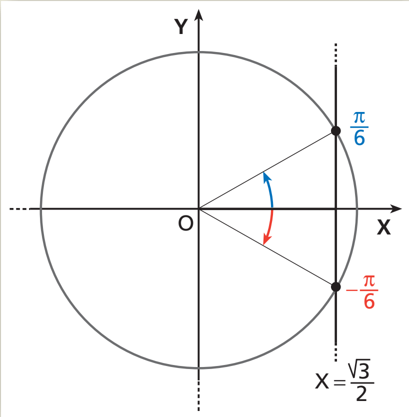
a) Risolviamo l'equazione rispetto a $\cos x$:

$$2\cos x - \sqrt{3} = 0 \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sulla circonferenza goniometrica, cerchiamo i punti di ascissa $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Una soluzione si ha per $x = \frac{\pi}{6}$, l'altra per $x = -\frac{\pi}{6}$.
Tenendo conto che il periodo della funzione coseno è 2π, le soluzioni dell'equazione data, in forma sintetica, sono:

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$



b) Poniamo $5x = y$, ottenendo l'equazione:

$$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \to \quad y = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Sostituiamo i valori determinati in $5x = y$ e risolviamo le due equazioni in x ottenute:

$$5x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \to \ x = \pm\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}k\pi. \qquad \text{In gradi: } x = \pm 9° + k72°.$$

Risolvi le seguenti equazioni.

116 $\cos x = -\frac{1}{2}$ $\left[x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$

117 $2\cos x = \sqrt{2}$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$

118 $3\cos x - 5 = 3$ [impossibile]

119 $2\cos 5x + \sqrt{2} = 0$ $[x = \pm 27° + k72°]$

120 $2\cos 6x - 1 = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}\right]$

121 $\cos x = 1$ $[x = 2k\pi]$

122 $8\cos x = 1$ $\left[x = \pm\arccos\frac{1}{8} + 2k\pi\right]$

123 $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ $\left[x = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

124 $\cos x - 4 = 3\cos x + 8$ [impossibile]

125 $\cos\frac{x}{4} - 1 = 0$ $[x = 8k\pi]$

126 $\cos\left(\frac{\pi}{9} - x\right) = 0$ $\left[x = \frac{11}{18}\pi + k\pi\right]$

127 $\cos 3x = -1 - \cos 3x$ $\left[x = \pm\frac{2}{9}\pi + k\cdot\frac{2}{3}\pi\right]$

128 $\cos 4x = \frac{1}{3}$ $\left[x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + k\frac{\pi}{2}\right]$

129 $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$ $\left[x = \frac{\pi}{6} \pm \arccos\frac{1}{4} + 2k\pi\right]$

---

130 $2\cos\left(x - \frac{\pi}{18}\right) - \sqrt{3} = 0$ $\left[x = -\frac{\pi}{9} + 2k\pi \vee x = \frac{2}{9}\pi + 2k\pi\right]$

131 $2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

132 $2\cos x + 2 = \cos x + 2$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

133 $2\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{6} = \text{tg}\,\pi$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

134 $2(\cos 2x + 3) - 1 = 3(1 - \cos 2x) + 2$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

135 $2(\cos x - 1) + 3 = 3(\cos x - 2) - 2(\cos x - 3)$ $[x = \pi + 2k\pi]$

136 $\cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) - 3 = 2\cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) - 2$ $\left[x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right]$

137 $5\cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right) + 3 = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right) + 4$ $\left[x = -\frac{2}{9}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{4}{9}\pi + 2k\pi\right]$

138 $4\cos(x - 115°) - 5 - 2[14 + 3\cos(x - 115°)] = \cos(x - 115°)$ [impossibile]

139 $2\sqrt{3}\cos(x+1°)+10=3-2[1+2\sqrt{3}\cos(x+1°)]$ $[x=-151°+k360° \vee x=149°+k360°]$

140 $2\cos x-2\cos 45°=2(\sqrt{2}\,\text{sen}\,60°-\cos x)$ $[x=\pm 15°+k360°]$

141 $2|\cos 4x|=1$ $\left[x=\pm\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{4}\right]$

142 $\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left[x=\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2}\right]$

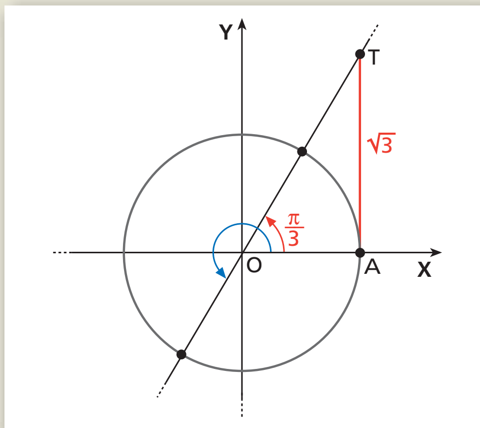
Le equazioni elementari del tipo tg $x = a$

143 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo l'equazione $\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

Poniamo $x+\frac{\pi}{3}=y$.

Otteniamo l'equazione $\text{tg}\,y=\sqrt{3}$.
Tracciamo la retta tangente alla circonferenza nel punto A origine degli archi e prendiamo sulla tangente il punto T di ordinata $\sqrt{3}$. Tracciata TO, vediamo che al valore $\sqrt{3}$ della tangente corrispondono l'angolo $\frac{\pi}{3}$ e tutti quelli che si ottengono da $\frac{\pi}{3}$ aggiungendo un multiplo di π.



Le soluzioni sono $y=\frac{\pi}{3}+k\pi$.

Sostituiamo il valore trovato per y in $x+\frac{\pi}{3}=y$ e risolviamo l'equazione ottenuta:

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k\pi \rightarrow x=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+k\pi \rightarrow x=k\pi.$$

Le soluzioni dell'equazione assegnata sono: $x=k\pi$.

Risolvi le seguenti equazioni.

144 $\text{tg}\,x-1=0$ $\left[x=\frac{\pi}{4}+k\pi\right]$

145 $3\,\text{tg}\,x=\sqrt{3}$ $\left[x=\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$

146 $\text{tg}\,x-\sqrt{3}=0$ $\left[x=\frac{\pi}{3}+k\pi\right]$

147 $\text{tg}\,x=2$ $[x=\text{arctg}\,2+k\pi]$

148 $\text{tg}\frac{x}{4}+1=0$ $[x=-\pi-4k\pi]$

149 $3\,\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{9}\right)-\sqrt{3}=0$ $\left[x=\frac{\pi}{18}+k\pi\right]$

150 $3\,\text{tg}\,x+4=\text{tg}\,x+4$ $[x=k\pi]$

151 $\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1=0$ $\left[x=-\frac{5}{12}\pi+k\pi\right]$

152 $2\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\text{tg}\,x-\text{tg}\frac{\pi}{3}=\text{tg}\,\pi$ $\left[x=\frac{\pi}{4}+k\pi\right]$

153 $3\,\text{tg}\frac{x}{2}-2=2\,\text{tg}\frac{x}{2}-1$ $\left[x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$

154 $\text{tg}\,3x=3$ $\left[x=\frac{1}{3}\text{arctg}3+k\frac{\pi}{3}\right]$

155 $\text{cotg}\,2x=1$ $\left[x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right]$

156 $\text{tg}(110°-x)=0$ $[x=110°+k180°]$

157 $3\,\text{cotg}\,3x=-\sqrt{3}$ $\left[x=-\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3}\right]$

158 $3\,\text{tg}\,6x+\sqrt{3}=0$ $\left[x=-\frac{\pi}{36}+k\frac{\pi}{6}\right]$

159 $3\,\text{tg}\,3x=-1+2\,\text{tg}\,3x$ $\left[x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3}\right]$

160 $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4=0$ $\left[x=-\frac{\pi}{3}+\operatorname{arctg}(-4)+k\pi\right]$

161 $\left|\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|=\sqrt{3}$ $\left[x=k\pi \vee x=\frac{2}{3}\pi+k\pi\right]$

162 $6-2\sqrt{3}\operatorname{tg}(x+100°)=4[1+\sqrt{3}\operatorname{tg}(x+100°)]+8$ $[x=-130°+k180°]$

163 $\operatorname{tg}(x-12°)-3=2\operatorname{tg}(x-12°)-2$ $[x=-33°+k180°]$

164 $2(\operatorname{tg}x+1)+3(1-\operatorname{tg}x)=-2(\operatorname{tg}x-1)+4$ $\left[x=\frac{\pi}{4}+k\pi\right]$

165 $2(\operatorname{tg}3x-1)+\sqrt{3}=1-[2\operatorname{tg}3x+3(1-\operatorname{tg}3x)]$ $\left[x=-\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3}\right]$

166 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $\operatorname{sen}\frac{1}{4}x=\frac{1}{4}$ è equivalente a $\operatorname{sen}x=1$. V F

b) L'equazione $|\cos x|=1$ ha come soluzioni $x=k\pi$. V F

c) L'equazione $\operatorname{sen}x=-4k^2$ ammette soluzione solo se $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$. V F

167 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $\cos(2x-1)=2a$, se $a=\frac{1}{2}$ ammette come soluzione $x=\frac{1}{2}+k\pi$. V F

b) L'equazione $\operatorname{tg}x=2k-1$ ammette infinite soluzioni $\forall k\in\mathbb{R}$. V F

c) L'equazione $\operatorname{tg}x=4\pi$ non ammette soluzioni. V F

168 **COMPLETA**

a) $\operatorname{sen}x=\ldots\ldots\ \rightarrow\ x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$.

b) $\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \rightarrow\ x=\pm\frac{\pi}{8}+\ldots\ldots$.

c) $\cos x=\ldots\ldots\ \rightarrow\ x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi \vee x=\ldots\ldots$.

d) $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}\ \rightarrow\ x=-\frac{\pi}{3}+\ldots\ldots$.

e) $\sqrt{2}\operatorname{sen}4x=1\ \rightarrow\ x=\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{2}\vee x=\ldots\ldots$.

169 **ASSOCIA** ogni equazione al suo insieme soluzione.

1) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$. 2) $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$. 3) $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$. 4) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

a) $|\cos x|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. b) $\sqrt{3}\operatorname{tg}x=1$. c) $\operatorname{sen}x=\frac{1}{2}$. d) $\operatorname{cotg}x=1$.

Particolari equazioni goniometriche elementari

170 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo le seguenti equazioni:

a) $\operatorname{sen}4x=\operatorname{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$;

b) $\operatorname{sen}\left(3x+\frac{2}{5}\pi\right)=-\operatorname{sen}\left(2x-\frac{3}{4}\pi\right)$;

c) $\cos 6x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$;

d) $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 3x$;

e) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\frac{5x}{6}$;

f) $\operatorname{tg}\left(3x+\frac{2}{5}\pi\right)=-\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

a) $\mathbf{sen}\,\boldsymbol{4x} = \mathbf{sen}\left(\boldsymbol{2x} - \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right)$.

Poiché $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + 2k\pi \vee \alpha + \alpha' = \pi + 2k\pi$ e nell'equazione data è $\alpha = 4x$ e $\alpha' = 2x - \frac{\pi}{3}$, dobbiamo risolvere le due equazioni:

- $4x = 2x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi;$
- $4x + 2x - \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi \quad \rightarrow \quad 6x = \frac{\pi}{3} + \pi + 2k\pi \quad \rightarrow \quad 6x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{2}{9}\pi + k\frac{\pi}{3}.$

In sintesi: $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{2}{9}\pi + k\frac{\pi}{3}$.

b) $\mathbf{sen}\left(\boldsymbol{3x} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{\pi}\right) = -\mathbf{sen}\left(\boldsymbol{2x} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{\pi}\right)$.

Per le proprietà degli archi associati $-\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(-\alpha)$, quindi riscriviamo l'equazione così:

$$\operatorname{sen}\left(3x + \frac{2}{5}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(-2x + \frac{3}{4}\pi\right).$$

Procediamo in modo analogo a quello dell'equazione precedente. Dobbiamo risolvere le seguenti equazioni:

- $3x + \frac{2}{5}\pi = -2x + \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \quad \rightarrow \quad 3x + 2x = -\frac{2}{5}\pi + \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \quad \rightarrow$
  $\rightarrow \quad 5x = \frac{-8\pi + 15\pi}{20} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad 5x = \frac{7}{20}\pi + 2k\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{7}{100}\pi + \frac{2}{5}k\pi;$
- $3x + \frac{2}{5}\pi - 2x + \frac{3}{4}\pi = \pi + 2k\pi \quad \rightarrow \quad 3x - 2x = -\frac{2}{5}\pi - \frac{3}{4}\pi + \pi + 2k\pi \quad \rightarrow$
  $\rightarrow \quad x = \frac{-8\pi - 15\pi + 20\pi}{20} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad x = -\frac{3}{20}\pi + 2k\pi.$

In sintesi: $x = \frac{7}{100}\pi + \frac{2}{5}k\pi \vee x = -\frac{3}{20}\pi + 2k\pi$.

c) $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{6x} = \mathbf{cos}\left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right)$.

Tenendo conto che $\cos\alpha = \cos\alpha' \Leftrightarrow \alpha = \pm\alpha' + 2k\pi$, dobbiamo risolvere le seguenti equazioni:

- $6x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad 5x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi;$
- $6x = -x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad 7x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{21} + \frac{2}{7}k\pi.$

In sintesi: $x = -\frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi \vee x = \frac{\pi}{21} + \frac{2}{7}k\pi$.

d) $\mathbf{sen}\left(\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\right) = \mathbf{cos}\,\boldsymbol{3x}$.

L'equazione si può trasformare utilizzando gli angoli associati nella seguente:

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right).$$

Si hanno le equazioni:

- $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi;$
- $x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - 3x = \pi + 2k\pi.$

Le soluzioni sono:

$4x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee -2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, ossia

$x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{8} - k\pi.$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2.0** © Zanichelli 2011 *Volume 4*

e) $\mathbf{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \mathbf{tg}\,\frac{5x}{6}$.

Poiché $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + k\pi$, posta la condizione

$$x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge \frac{5}{6}x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \to \quad x \neq \frac{2}{3}\pi + k\pi \wedge x \neq \frac{3}{5}\pi + k\frac{6}{5}\pi,$$

si ha:

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}x + k\pi \quad \to \quad x - \frac{5}{6}x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \to \quad \frac{x}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \to \quad x = \pi + 6k\pi.$$

Le soluzioni sono accettabili.

f) $\mathbf{tg}\left(3x + \frac{2}{5}\pi\right) = -\mathbf{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Poniamo: $3x + \frac{2}{5}\pi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge 2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \to \quad x \neq \frac{\pi}{30} + k\frac{\pi}{3} \wedge x \neq \frac{3}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}$.

Per una delle relazioni fra archi associati, l'equazione è equivalente a:

$$\operatorname{tg}\left(3x + \frac{2}{5}\pi\right) = \operatorname{tg}\left(-2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Analogamente al caso precedente, dobbiamo risolvere l'equazione:

$$3x + \frac{2}{5}\pi = -2x + \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \to \quad 5x = \frac{-8\pi + 5\pi}{20} + k\pi \quad \to \quad x = -\frac{3\pi}{100} + k\frac{\pi}{5}.$$

Le soluzioni sono accettabili.

Risolvi le seguenti equazioni.

171 $\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$ $\left[x = -\frac{\pi}{10} - \frac{2}{3}k\pi \vee x = \frac{3}{70}\pi + \frac{2}{7}k\pi\right]$

172 $\operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} x$ $\left[x = \frac{\pi}{8} + k\pi \vee x = \frac{5}{16}\pi + k\frac{\pi}{2}\right]$

173 $\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen} 2x$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}\right]$

174 $\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{3}{4}\pi - 3x\right)$ $\left[x = \frac{5}{8}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{3}{8}\pi + 2k\frac{\pi}{5}\right]$

175 $\cos\left(2x - \frac{5}{7}\pi\right) = -\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$ $\left[x = \frac{55}{168}\pi + k\frac{\pi}{3} \vee x = \frac{15}{56}\pi - k\pi\right]$

176 $\cos\left(\frac{3}{4}\pi - 4x\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ $\left[x = \frac{5}{24}\pi + k\pi \vee x = \frac{13}{72}\pi + k\frac{\pi}{3}\right]$

177 $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{7}\right) = \operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{8}\right)$ $\left[x = \frac{15}{56}\pi - k\pi\right]$

178 $\operatorname{tg}(3x + 65°) = -\operatorname{tg}(2x - 25°)$ $[x = 28° + k36°]$

179 $\operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(5x + \frac{2}{3}\pi\right)$ $\left[x = \frac{\pi}{240} + k\frac{\pi}{4} \vee x = -\frac{41}{60}\pi - k\pi\right]$

180 $\operatorname{sen}\left(4x - \frac{\pi}{10}\right) = -\cos\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$ $\left[x = -\frac{\pi}{5} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{7}k\pi\right]$

181 $\operatorname{sen} 8x = \operatorname{sen} 6x$ $\left[x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{14} + k\frac{\pi}{7}\right]$

182 $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos 2x$ $\left[x = \frac{5}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi\right]$

183 $\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ $\left[x = \frac{\pi}{16} + \frac{3}{2}k\pi \vee x = \frac{19}{32}\pi + \frac{3}{4}k\pi\right]$

184 $\cos\left(5x - \frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(3x + \frac{5}{4}\pi\right)$ $\left[x = \frac{23}{24}\pi + k\pi \vee x = -\frac{7}{96}\pi + k\frac{\pi}{4}\right]$

185 $\cos\left(4x-\frac{2}{5}\pi\right)=-\cos\left(3x+\frac{4}{5}\pi\right)$ $\left[x=\frac{3}{35}\pi+\frac{2}{7}k\pi \vee x=\frac{\pi}{5}+2k\pi\right]$

186 $\operatorname{sen}\left(4x-\frac{2}{5}\pi\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{3}{4}\pi-5x\right)$ $\left[x=\frac{23}{180}\pi+\frac{2}{9}k\pi \vee x=-\frac{13}{20}\pi+2k\pi\right]$

187 $\operatorname{sen}3x=\cos 2x$ $\left[x=\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}k\pi \vee x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$

188 $\operatorname{sen}\frac{x}{3}=\cos 5x$ $\left[x=\frac{3}{32}\pi+\frac{3}{8}k\pi \vee x=-\frac{3}{28}\pi-\frac{3}{7}k\pi\right]$

189 $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=\operatorname{tg}\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$ $\left[x=\frac{43}{45}\pi+k\frac{\pi}{3}\right]$

190 $\operatorname{tg}\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{3}{8}\pi-3x\right)$ $\left[x=\frac{15}{16}\pi+k\frac{\pi}{2}\right]$

191 $\operatorname{sen}2x=-\operatorname{sen}8x$ $\left[x=k\frac{\pi}{5} \vee x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right]$

192 $\operatorname{sen}(2x-108°)=\operatorname{sen}(-54°-5x)$ $\left[x=\frac{54°}{7}+k\frac{360°}{7} \vee x=-114°+k120°\right]$

193 $\cos\left(3x-\frac{4}{5}\pi\right)=\cos\left(\frac{2}{5}\pi-2x\right)$ $\left[x=\frac{6}{25}\pi+\frac{2}{5}k\pi \vee x=\frac{2}{5}\pi+2k\pi\right]$

194 $\cos 6x=-\cos 4x$ $\left[x=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{10}+k\frac{\pi}{5}\right]$

195 $|\cos x|=\cos 3x$ $\left[x=2k\pi \vee x=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi \vee x=\frac{5}{4}\pi+2k\pi\right]$

196 $\operatorname{sen}\left(2x-\frac{5}{3}\pi\right)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)$ $\left[x=\frac{71}{150}\pi+\frac{2}{5}k\pi \vee x=\frac{\pi}{30}+2k\pi\right]$

197 $\operatorname{sen}4x=-\cos\frac{3}{2}x$ $\left[x=\frac{3}{5}\pi+\frac{4}{5}k\pi \vee x=\frac{3}{11}\pi+\frac{4}{11}k\pi\right]$

198 $\operatorname{sen}3x=-\cos 4x$ $\left[x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee x=\frac{3}{14}\pi+\frac{2}{7}k\pi\right]$

199 $\operatorname{tg}5x=\operatorname{tg}3x$ $\left[x=k\frac{\pi}{2}\right]$

200 $\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x-78°\right)=\operatorname{sen}(2x-25°)$ $\left[x=-106°+k720° \vee x=\frac{566°}{7}+k\frac{720°}{7}\right]$

201 $\cos(2x+54°)=\cos(70°-5x)$ $\left[x=\frac{16°}{7}+\frac{1}{7}k360° \vee x=\frac{124°}{3}+k120°\right]$

202 $\cos\left(3x-\frac{\pi}{9}\right)=-\cos\left(4x-\frac{2}{3}\pi\right)$ $\left[x=\frac{16}{63}\pi+\frac{2}{7}k\pi \vee x=\frac{14}{9}\pi+2k\pi\right]$

203 $\operatorname{sen}(4x+100°)=\cos(23°-5x)$ $\left[x=33°+k360° \vee x=\frac{13°}{9}+k40°\right]$

204 $\operatorname{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{sen}x=0$ $\left[x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{4}{9}\pi+\frac{2}{3}k\pi\right]$

205 $\cos(2x-30°)=\cos x$ $[x=30°+k360° \vee x=10°+k120°]$

206 $\operatorname{tg}4x+\operatorname{tg}12x=0$ $\left[x=k\frac{\pi}{16}\right]$

207 $\operatorname{sen}(3x-25°)=-\operatorname{sen}(75°-5x)$ $[x=25°+k180° \vee x=35°+k45°]$

208 $\cos(102°-3x)=\cos(38°+2x)$ $\left[x=\frac{64°}{5}+k72° \vee x=140°+k360°\right]$

209 $\operatorname{sen}\left(2x-\frac{2}{9}\pi\right)=-\cos\left(3x+\frac{5}{3}\pi\right)$ $\left[x=\frac{11}{18}\pi+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{90}+\frac{2}{5}k\pi\right]$

210 $\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$ $\left[x=\frac{11}{3}\pi+4k\pi \vee x=\frac{5}{9}\pi+\frac{4}{3}k\pi\right]$

211 $\operatorname{tg}(2x+35°)=\operatorname{tg}(7x-75°)$ $[x=22°+k36°]$

212 $\operatorname{sen}(x-\pi)+\operatorname{sen}4x=0$ $\left[x=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}k\pi \vee x=\frac{2}{3}k\pi\right]$

213 $\operatorname{tg}2x-\operatorname{cotg}\frac{3}{2}x=0$ $\left[x=\frac{\pi}{7}+\frac{2}{7}k\pi\right]$

214 sen $(70° - 3x) = -\cos(2x + 14°)$ $\left[x = \frac{146°}{5} + k72° \vee x = 174° + k360°\right]$

215 $\cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \cos x$ $\left[x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{15} + \frac{2}{3}k\pi\right]$

216 $\cos\left(3x + \frac{2}{7}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ $\left[x = \frac{55}{112}\pi + k\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{41}{56}\pi + k\pi\right]$

217 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $\cos 2x = \cos x$ ha come soluzioni $x = 2k\pi$. V F

b) L'equazione $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{cotg}\, x = 0$ non ha soluzione. V F

c) L'equazione $\mathrm{sen}\, 2x = \cos 2x$ ha come soluzioni $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$. V F

d) L'equazione $\cos x = -\mathrm{sen}\, x$ ha come soluzioni $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. V F

218 **ASSOCIA** ogni equazione al suo insieme soluzione.

1) $x = k\frac{\pi}{3}$.

2) $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$.

3) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

4) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$.

a) $\mathrm{tg}\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) = \mathrm{tg}\, x$.

b) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x = 1$.

c) $2\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = 1$.

d) $\cos 4x = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$.

Equazioni riducibili a equazioni elementari

219 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo le seguenti equazioni:

a) $\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 2x = 1$; b) $\mathrm{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) + \cos 2x = 0$.

a) $\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 2x = 1$.

Questa equazione contiene funzioni goniometriche sia di x, sia di $2x$.

Esprimiamo tutto soltanto con funzioni goniometriche di x, utilizzando le formule di duplicazione:

$$\cos^2 x + (2\,\mathrm{sen}\, x \cdot \cos x)^2 = 1.$$

Svolgiamo i calcoli: $\cos^2 x + 4\,\mathrm{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = 1$.
Esprimiamo $\mathrm{sen}^2 x$ come $(1 - \cos^2 x)$, in modo da avere un'equazione contenente solo il coseno di x:

$$\cos^2 x + 4(1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x = 1.$$

Svolgiamo i calcoli: $4\cos^4 x - 5\cos^2 x + 1 = 0$.
Questa è un'equazione biquadratica del tipo $ay^4 + by^2 + c = 0$.
Poniamo $\cos^2 x = y$ e otteniamo l'equazione:

$$4y^2 - 5y + 1 = 0, \quad \text{da cui} \quad y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{1}{4}, \quad \text{da cui} \quad \cos^2 x = \frac{1}{4} \ \rightarrow \ \cos x = \pm\frac{1}{2} \ \rightarrow \ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi;$$

$$y_2 = 1, \quad \text{da cui} \quad \cos^2 x = 1 \ \rightarrow \ \cos x = \pm 1 \ \rightarrow \ x = k\pi.$$

b) $\mathbf{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\mathbf{cos}\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)+\mathbf{cos}\,2x=0$.

Applichiamo le formule di addizione, sottrazione e duplicazione in modo che l'argomento delle funzioni sia solo x:

$$\left(\operatorname{sen}x\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)+\left(\cos x\cdot\cos\frac{2}{3}\pi-\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi\right)+(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x)=0.$$

Svolgiamo i calcoli:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}\cos x\right)+\left(-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}x\right)+[\cos^2x-(1-\cos^2x)]=0$$

$$2\cos^2x-\cos x-1=0.$$

Poniamo $\cos x=y$,

$$2y^2-y-1=0\ \rightarrow\ y=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm3}{4}=\begin{cases}1\\-\frac{1}{2}\end{cases}$$

da cui:

$$y_1=-\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \cos x=-\frac{1}{2}\ \rightarrow\ x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi;$$

$$y_2=1\rightarrow\ \cos x=1\rightarrow\ x=2k\pi.$$

Risolvi le seguenti equazioni.

220 $2\cos^2x-\cos x=0$ $\quad\left[x=\frac{\pi}{2}+k\pi\vee x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$

221 $2\operatorname{sen}^2x-1=0$ $\quad\left[x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right]$

222 $2\cos^2x-\operatorname{sen}x-1=0$ $\quad\left[x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi\vee x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right]$

223 $2\cos^2x-3\cos x+1=2\operatorname{sen}^2x$ $\quad\left[x=2k\pi\vee x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2k\pi\right]$

224 $\cos2x-\operatorname{sen}2x\cdot\operatorname{tg}x=0$ $\quad\left[x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$

225 $2\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos x=1$ $\quad\left[x=k\pi\vee x=\frac{\pi}{3}+k\pi\right]$

226 $\cos x-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}$ $\quad[x=2k\pi]$

227 $2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}(1-\operatorname{sen}x)$ $\quad[x=2k\pi]$

228 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{cotg}x=-1$ $\quad\left[x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi\right]$

229 $4\cos x+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=3$ $\quad\left[x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\right]$

230 $\operatorname{cotg}2x\cdot\operatorname{cotg}x=1$ $\quad\left[x=\frac{\pi}{6}+k\pi\vee x=\frac{5}{6}\pi+k\pi\right]$

231 $\operatorname{sen}x+\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{x}{2}=0$ $\quad\left[x=2k\pi\vee x=\frac{5}{3}\pi+4k\pi\vee x=\frac{7}{3}\pi+4k\pi\right]$

232 $\operatorname{sen}^34x+1=0$ $\quad\left[x=\frac{3}{8}\pi+k\frac{\pi}{2}\right]$

233 $\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x = 0$ $[x = k\pi]$

234 $5\operatorname{sen}(\pi - x) + 4 - 2\cos^2 x = 0$ $\left[x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right]$

235 $2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0$ $\left[x = k\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right]$

236 $\operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{cosec} x = 1$ $\left[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

237 $3\operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{tg} x - 2\cos^2 x = 2$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right]$

238 $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg} x = 0$ $\left[x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

239 $2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,(1 - \cos x)$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

240 $\sqrt{2}\,\cos^2 x + \cos x = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right]$

241 $(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})\,(\cos x + 1) = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \pi + 2k\pi\right]$

242 $\sqrt{2 + \operatorname{sen}^2 x} = \frac{3}{2}$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

243 $\operatorname{cotg}^2 x + 1 = 2\operatorname{tg}^2 x$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

244 $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{5}{6}\pi\right) = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

245 $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

246 $2\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x - 3 = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi\right]$

247 $2\cos^4 x - \cos^2 x = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right]$

248 $\operatorname{sen}^2 2x - 2 - 2\cos 2x = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

249 $3\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cotg}^2 x + 5\operatorname{sen} x = 7$ $\left[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

250 $\operatorname{tg}^2 4x - \operatorname{tg} 4x = 0$ $\left[x = k\frac{\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4}\right]$

251 $\cos 2x - (\operatorname{sen} x - 1)^2 + \operatorname{sen} x = 0$ $\left[x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

252 $\operatorname{cotg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{cotg} x = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

253 $4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 3 = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

254 $\cos^2 x - \operatorname{sen}(-x) = \operatorname{sen}^2 x + 1$ $\left[x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

255 $\operatorname{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3})\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

256 $2\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x + 1 = 2\left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right)$ $[x = k\pi]$

257 $2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}^2 x + 1$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

258 $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x = 0$ $\left[x = k\frac{\pi}{3}\right]$

259 $\cos x + \cos\frac{x}{2} + 1 = 0$ $\left[x = \pi + 2k\pi \vee x = \frac{4}{3}\pi + 4k\pi \vee x = \frac{8}{3}\pi + 4k\pi\right]$

260 $\cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}k\pi\right]$

261 $\cos 4x - \cos 2x = \operatorname{sen} 3x$ $\left[x = k\frac{\pi}{3} \vee x = \frac{7}{6}\pi + k\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right]$

262 $\operatorname{sen} 4x \cos 5x = \operatorname{sen} 6x \cos 3x$ $\left[x = k\frac{\pi}{2}\right]$

263 $(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x) \cdot (2\operatorname{sen} x \cos x) = 4\operatorname{sen} x$ $\left[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

264 $\operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{cotg} x + \cos x - 1 = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

265 $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - (1 + \operatorname{tg} x) = 0$ $\left[x = k\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

266 $2\cos 3x + 1 = \frac{1}{\cos 3x}$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right]$

267 $4\operatorname{sen}^4 x - 5\operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

268 $\frac{4\cos x - 7}{2\cos^2 x - \cos x} - \frac{5 - 6\cos x}{\cos x} = 7$ $\left[x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$

269 $\frac{\cos x + 2}{\sqrt{\cos x}} - \sqrt{\cos x} = \sqrt{4\cos x + 6}$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

270 $\frac{2}{\sqrt{2 - \operatorname{sen} x}} - \sqrt{\operatorname{sen} x} = \sqrt{2 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$ $\left[x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

271 $3\operatorname{tg}^4 x - 10\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

272 $\frac{1}{\operatorname{sen} x + 1} - \frac{1}{6(1 - \operatorname{sen} x)} = \frac{1}{3}$ $\left[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

273 $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 7x = 2\operatorname{sen} 5x$ $\left[x = k\frac{\pi}{5}\right]$

274 $\cos 4x \cos 6x - \cos 3x \cos 5x = 0$ $\left[x = k\frac{\pi}{9}\right]$

275 $2\cos x - \sqrt{2} - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \pm\arccos\frac{2 - \sqrt{2}}{2} + 2k\pi\right]$

276 $(1 - \operatorname{tg} x) \cdot \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = 0$ $[x = k\pi]$

277 $4\operatorname{sen} x \cdot \cos\left(x - \frac{11}{6}\pi\right) = \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} 2x - 1$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

278 $2\cos x \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) = \operatorname{sen} x(-\cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen} x) + \operatorname{tg} x$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

2. LE EQUAZIONI LINEARI IN SENO E COSENO

▶ Teoria a pag. 769

279 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x = \sqrt{3}$.

Il metodo algebrico

L'equazione è del tipo $a \cos x + b \operatorname{sen} x + c = 0$, con $c \neq 0$. Usiamo le formule parametriche:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Poiché tali formule valgono per $x \neq \pi + 2k\pi$, dobbiamo verificare se $x = \pi + 2k\pi$ è una soluzione dell'equazione data. Sostituiamo alla x il valore π nel primo membro dell'equazione data:

$$\sqrt{3}\cos\pi + \operatorname{sen}\pi = -\sqrt{3} + 0 = -\sqrt{3} \neq \sqrt{3}.$$

In questo caso $x = \pi + 2k\pi$ **non** è soluzione dell'equazione data.
Se $x = \pi + 2k\pi$ avesse soddisfatto l'equazione, l'avremmo considerata come una soluzione.

Determiniamo le soluzioni diverse da $\pi + 2k\pi$. Ponendo $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, le formule parametriche diventano:

$$\operatorname{sen}x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Sostituiamo tali espressioni nell'equazione data:

$$\sqrt{3}\,\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} = \sqrt{3} \to \frac{\sqrt{3}\,(1-t^2)+2t}{1+t^2} = \frac{\sqrt{3}\,(1+t^2)}{1+t^2} \to \sqrt{3} - \sqrt{3}t^2 + 2t = \sqrt{3} + \sqrt{3}t^2.$$

L'equazione ridotta in forma normale è:

$$\sqrt{3}t^2 - t = 0 \to t(\sqrt{3}t - 1) = 0 \begin{cases} t = 0 \\ \sqrt{3}t - 1 = 0 \to t = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \to t = \dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Poiché $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, per risolvere l'equazione di partenza dobbiamo risolvere le equazioni elementari:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0, \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0 \quad \to \quad \frac{x}{2} = k\pi \quad \to \quad x = 2k\pi;$
- $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \to \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \to \quad x = \frac{2\pi}{6} + 2k\pi \quad \to \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$

Le soluzioni dell'equazione data sono: $x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Il metodo grafico

Trasformiamo l'equazione nel sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen}x = \sqrt{3} \\ \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \end{cases}$$

Poniamo $\operatorname{sen}x = Y$ e $\cos x = X$ e sostituiamo nel sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cdot X + Y = \sqrt{3} & \to \text{ equazione di una retta} \\ X^2 + Y^2 = 1 & \to \text{ equazione della circonferenza goniometrica} \end{cases}$$

Risolviamo il sistema ricavando Y dalla prima equazione e sostituendo nella seconda:

$$\begin{cases} Y = -\sqrt{3}\cdot X + \sqrt{3} \\ X^2 + (-\sqrt{3}\cdot X + \sqrt{3})^2 = 1 \end{cases}$$

Risolviamo la seconda equazione:

$$X^2 + (3X^2 + 3 - 6X) = 1 \to 4X^2 - 6X + 2 = 0 \to 2X^2 - 3X + 1 = 0$$

$$X = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Riprendiamo il sistema:

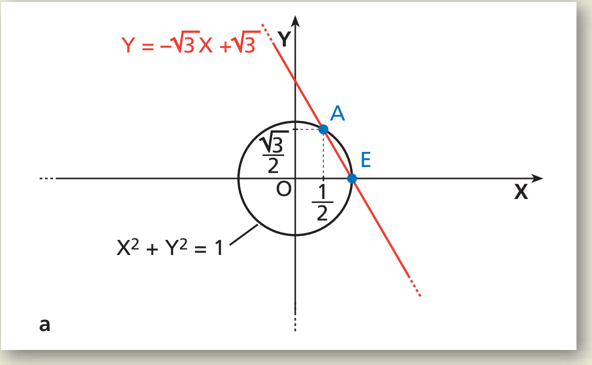
$$\begin{cases} Y = -\sqrt{3}\cdot X + \sqrt{3} \\ X = 1 \vee X = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} X = 1 \\ Y = 0 \end{cases} \to E(1;0) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{1}{2} \\ Y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \to A\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Disegniamo sul piano cartesiano la retta e la circonferenza (figura *a*).
La retta interseca la circonferenza nei due punti E e A.

Sostituiamo i valori trovati a $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, ottenendo due sistemi di due equazioni elementari:

1. $\begin{cases} \cos x = 1 \\ \operatorname{sen} x = 0 \end{cases} \to x = 2k\pi;$

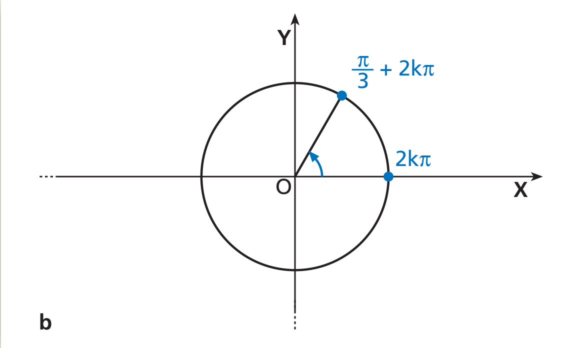
2. $\begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \to x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi.$



a

Le soluzioni dell'equazione data sono (figura *b*):

$$x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$



b

Il metodo dell'angolo aggiunto

Poiché $a \operatorname{sen} x + b \cos x = r \operatorname{sen}(x + \alpha)$, con $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{a}$, nell'equazione data, per l'espressione $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x$ abbiamo:

$$r = \sqrt{1+3} = 2; \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} \to \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Quindi l'equazione equivale a:

$$2\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3},$$

equazione elementare che ha come soluzioni $x = 2k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche lineari.

280 $\cos x - \operatorname{sen} x = 1$ $\left[x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = 2k\pi\right]$

281 $\cos x - \operatorname{sen} x = \sqrt{2}$ $\left[x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$

282 $\sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{3}$ $\left[x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

283 $\operatorname{sen} x - \cos(-x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\left[x = \dfrac{5}{12}\pi + 2k\pi \vee x = \dfrac{13}{12}\pi + 2k\pi\right]$

284 $2\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$ $\left[x = 2k\pi \vee x = 2\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}\sqrt{3} + 2k\pi\right]$

285 $\sqrt{3}\cos x - \operatorname{sen} x = 0$ $\left[x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi\right]$

286 $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{sen} x = 1$ $\left[x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = 2k\pi\right]$

287 $\operatorname{sen} x + \cos x - \sqrt{2} = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$

288 $\sqrt{3} \operatorname{sen} x - 2\cos x = \sqrt{3} - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

289 $\sqrt{3} \operatorname{sen} x + 3\cos x + 3 = 0$ $\left[x = \pi + 2k\pi \vee x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right]$

290 $\cos 5x + \operatorname{sen} 5x = 0$ $\left[x = \frac{3}{20}\pi + k\frac{\pi}{5}\right]$

291 $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

292 $\sqrt{3} \operatorname{sen} 3x + \cos 3x = \sqrt{3}$ $\left[x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right]$

293 $\sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x + 1 = 0$ $\left[x = \pi + 2k\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right]$

294 $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right]$

295 $\operatorname{sen}\left(\frac{3}{4}\pi + x\right) + \cos\left(x - \frac{7}{4}\pi\right) = \sqrt{2}$ $\left[x = 2k\pi \vee x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

296 $\operatorname{sen} x + (\sqrt{2} - 1)\cos x - 1 = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

297 $(2 + \sqrt{3}) \operatorname{sen} x - \cos x + 2 + \sqrt{3} = 0$ $\left[x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

298 $\operatorname{sen} x + 2\cos x - 6 = 0$ [impossibile]

299 $\operatorname{sen} x + 3\cos x = 2 + \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = 2k\pi\right]$

300 $\sqrt{3} \operatorname{sen} x - 5\cos x + 1 = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + 2k\pi\right]$

301 $\cos\left(\frac{11}{6}\pi - x\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ $\left[x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{7}{12}\pi + 2k\pi\right]$

302 $\sqrt{3} \operatorname{sen}\left(x + \frac{4}{3}\pi\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{7}{6}\pi\right) + 2 = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

3. LE EQUAZIONI OMOGENEE IN SENO E COSENO

Teoria a pag. 773

Le equazioni di secondo grado

303 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo l'equazione:

$$2\sqrt{3}\cos^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x = \sqrt{3}.$$

L'equazione non è, così come è scritta, un'equazione omogenea, perché compare il termine noto $\sqrt{3}$. Usiamo la relazione $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ per trasformare l'equazione data nell'equazione equivalente:

$$2\sqrt{3}\cos^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x = \sqrt{3}(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) \rightarrow \sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3}\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x = 0.$$

Risolviamo l'equazione omogenea ottenuta.

Verifichiamo innanzitutto se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è soluzione dell'equazione data. Sostituendo $\frac{\pi}{2}$ alla x nel primo membro:

$$2\sqrt{3}\cos^2\frac{\pi}{2} - 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0 - 2\cdot 1\cdot 0 \neq \sqrt{3}.$$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ **non** è soluzione dell'equazione data. In caso contrario, avremmo considerato tali angoli tra le soluzioni.

Cerchiamo eventuali altre soluzioni. Supponiamo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e, dividendo entrambi i membri dell'equazione per $\cos^2 x$, otteniamo un'equazione equivalente alla data:

$$\sqrt{3}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \sqrt{3}\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} - 2\frac{\text{sen}\,x\cos x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x} \to \sqrt{3} - \sqrt{3}\left(\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\right)^2 - 2\frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = 0 \quad \to$$

$$\to \quad \sqrt{3} - \sqrt{3}\,\text{tg}^2 x - 2\,\text{tg}\,x = 0 \to \sqrt{3}\,\text{tg}^2 x + 2\,\text{tg}\,x - \sqrt{3} = 0.$$

Poniamo $y = \text{tg}\,x$,

$$\sqrt{3}\,y^2 + 2y - \sqrt{3} = 0,$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \sqrt{3}(-\sqrt{3})}}{\sqrt{3}} = \frac{-1 \pm \sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{-1 \pm 2}{\sqrt{3}} = \begin{cases} \dfrac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Poiché $y = \text{tg}\,x$, si ha:

$$\text{tg}\,x = -\sqrt{3} \to x = \frac{2\pi}{3} + k\pi; \quad \text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} \to x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Le soluzioni dell'equazione data sono: $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Risolvi le seguenti equazioni.

304 $\text{sen}^2 x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,x\cos x = 0$ $\left[x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

305 $\sqrt{3}\cos^2 x - \text{sen}\,x\cos x = \sqrt{3}$ $\left[x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

306 $3\,\text{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\,\text{sen}\,x\cos x = 2$ $\left[x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right]$

307 $4\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\,x\cos x + 3 = 0$ [impossibile]

308 $\text{sen}\,x\cos x - \cos^2 x = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

309 $2\,\text{sen}^2 x + 3\,\text{sen}\,x\cos x = 2 + \cos^2 x$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

310 $7\,\text{sen}^2 x + 5\,\text{sen}(-x)\cos x = 2 - 2\cos^2 x$ $\left[x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

311 $3\,\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\,x\,\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = 2 - 3\cos^2 x$ $\left[x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

312 $3\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\,x\cos x - 2 = 0$ $\left[x = \text{arctg}\,2 + k\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

313 $10\,\text{sen}^2 x + 2\sqrt{3}\,\text{sen}\,x\cos x + 4\cos^2 x = 7$ $\left[x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

314 $\cos x - \sqrt{3}\,\operatorname{sen} x = \dfrac{1 - 4\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$ $\left[x = k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi\right]$

315 $\dfrac{2\cos^2 x - 5}{\operatorname{sen} x} = 2(\sqrt{3}\cos x - 4\operatorname{sen} x)$ $\left[x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi\right]$

316 $2(2 + \operatorname{sen} x \cos x) = 5\cos x(\cos x + \operatorname{sen} x)$ $\left[x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{4}\right) + k\pi\right]$

317 $\operatorname{sen}^4 x - \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x = 0$ $\left[x = k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\right]$

318 $(3 + \sqrt{3})\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x + (\sqrt{3} - 1)\operatorname{sen} x \cos x = 3$ $\left[x = \dfrac{3}{4}\pi + k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi\right]$

319 $3\operatorname{sen}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{sen} x \cos x + 5\cos^2 x - 3 = 0$ $\left[x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right]$

320 $(\sqrt{3} - 1)\operatorname{sen}^2 x + (\sqrt{3} + 1)\operatorname{sen} x \cos x + 1 = 0$ $\left[x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right]$

321 $\operatorname{sen}^2 x + 4\sqrt{3}\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x + 2 = 0$ $\left[x = \dfrac{5}{6}\pi + k\pi \vee x = \dfrac{2}{3}\pi + k\pi\right]$

322 $(\sqrt{2} - 1)\cos^2 x + (\sqrt{2} - 2)\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen}^2 x = 0$ $\left[x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \vee x = \dfrac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

323 $2\cos^2 x + 1 + \sqrt{3} = 2(2 + \sqrt{3})\operatorname{sen} x \cos x$ $\left[x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi\right]$

324 $\cos x \operatorname{sen}\left(\dfrac{2}{3}\pi + x\right) - \sqrt{3}\cos^2 x = \operatorname{sen} x \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ $\left[x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \vee x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right]$

325 $2\operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x - 3\cos^4 x = 0$ $\left[x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\right]$

326 $\operatorname{sen}^4 x + 4\cos^4 x - 5\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = 0$ $\left[x = \pm\operatorname{arctg} 2 + k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\right]$

327 $5\cos^4 x + 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x - 3\operatorname{sen}^4 x + 1 = 0$ $\left[x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right]$

328 $\cos^3 x = -5\operatorname{sen}^2 x \cos x + 4\operatorname{sen} x \cos^2 x + 2\operatorname{sen}^3 x$ $\left[x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + k\pi\right]$

329 $\sqrt{3}\cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x = \sqrt{3}\cos x \operatorname{sen}^2 x$ $\left[x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \vee x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right]$

ESERCIZI VARI Le equazioni goniometriche

330 **VERO O FALSO?**

a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x \rightarrow x = k\pi.$ V F

b) $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = 2 \rightarrow$ impossibile. V F

c) $2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = 1 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}.$ V F

d) $\operatorname{sen} x - \cos x = \sqrt{2} \rightarrow x = \dfrac{3}{4}\pi + k\pi.$ V F

e) $\dfrac{1}{4}\cos 4x = 1 \rightarrow \cos x = 1.$ V F

f) $\sqrt{|\operatorname{sen} x|} = 1 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$ V F

331 **TEST** Una sola fra le seguenti equazioni ammette due soluzioni comprese fra 0 e 2π. Quale?

A $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$

B $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-1$

C $\operatorname{sen} 2x=0$

D $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

E $\cos(2x-\pi)=\frac{1}{2}$

332 **TEST** L'equazione $\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{1}{2}$ è equivalente a:

A $\cos\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2}$.

B $\operatorname{sen} x=\frac{1}{3}$.

C $\operatorname{sen}\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}$.

D $\cos x=-\frac{1}{2}$.

E $\cos\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}$.

333 Find all solution ϑ to

$$2\cos^2\vartheta-3\cos\vartheta=-1.$$

(USA *Southern Illinois University Carbondale*, Final Exam, 2001)

$\left[\vartheta=2k\pi \vee \vartheta=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$

334 Solve each equation on the interval $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$.

a) $3\sec^2\vartheta-4=0$;

b) $\cos 2\vartheta-\sin\vartheta=0$.

(USA *Southern Illinois University Carbondale*, Final Exam, 2004)

$\left[\text{a) } \vartheta=\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}; \text{ b) } \vartheta=\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$

335 **ASSOCIA** ogni equazione alle rispettive soluzioni.

1) $2\operatorname{sen}^2 x=1$. **2)** $\operatorname{sen} x-\cos x=0$. **3)** $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x=0$.

a) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi \vee x=k\pi$. **b)** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$. **c)** $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$.

TEST

336 La soluzione dell'equazione $\operatorname{sen} x-\cos\frac{x}{2}=0$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$ è:

A $\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. B $\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. C $0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. D $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. E $0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

(*Università di Bergamo, Facoltà di Ingegneria, Corso propedeutico di Matematica*)

337 Ci sono due valori di x, con $0<x<\frac{\pi}{2}$, per i quali $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=9\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

Trova questi valori di x in radianti e calcola il loro prodotto.

A 1,107. B 0,5133. C 0,7512. D 1,525. E 0,9871.

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2003)

338 Trova l'angolo ϑ in radianti per il quale $0 \leq \vartheta \leq \pi$ e $4\cos 2\vartheta+4\operatorname{sen}^2\vartheta-4\cos\vartheta=-1$.

A $\frac{\pi}{6}$. B $\frac{\pi}{4}$. C $\frac{\pi}{3}$. D $\frac{\pi}{2}$. E $\frac{2\pi}{3}$.

(USA *University of North Carolina at Wilmington High School Math Contest*, 2004)

339 If the system of equations

$$\begin{cases} y=7\sin x+3\cos x \\ y=7\cos x+3\sin x \end{cases}$$

is solved simultaneously for $0 \leq x \leq \pi$, the value of y must be:

A $4\sqrt{2}$. B $2\sqrt{5}$. C 2. D $5\sqrt{2}$. E -2.

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2003)

340 Find x if $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x=\cos\frac{x}{2}$, where $0 \leq x \leq 2\pi$.

(IR *Leaving Certificate Examination*, Higher Level, 1994)

$\left[x_1=\pi; x_2=\frac{2}{3}\pi; x_3=\frac{4}{3}\pi\right]$

341 TEST Suppose ϑ is an angle between 0° and 90° for which $\cos\vartheta\cos 2\vartheta = \frac{1}{4}$. What is the value of ϑ?

A 32° B 34° C 36° D 38° E 40°

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2004)

342 Risolvi l'equazione $4(16^{\text{sen}^2 x}) = 2^{6\,\text{sen}\,x}$ per $0 \le x \le 2\pi$.

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge*, 2000)

$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$

Le identità condizionate

Verifica le seguenti identità indicando i valori di α per i quali non sono definite.

343 $\frac{\cos\alpha \,\text{tg}\, 2\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha - 1}$

344 $\frac{\cos^2\alpha}{1 + \text{sen}\, 2\alpha} = \frac{1}{(1 + \text{tg}\,\alpha)^2}$

345 $\frac{\text{sen}\, 3\alpha - \text{sen}\,\alpha}{\cos 2\alpha} = 2\,\text{tg}\,\alpha\cos\alpha$

346 $\frac{1 - \text{tg}\,\alpha}{1 + \text{tg}\,\alpha} = \frac{(\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha)^2}{\cos 2\alpha}$

347 $\frac{\cos 2\alpha}{\text{sen}\, 2\alpha - \cos 2\alpha + 1} = \frac{\text{cotg}\,\alpha - 1}{2}$

348 $\frac{\sqrt{2}\,\text{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \cos\alpha} = \frac{2\,\text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\text{sen}^2\alpha + \text{sen}\,\alpha\cos\alpha}$

349 $\frac{\text{sen}\,\alpha}{1 + \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{1 + \text{cotg}\frac{\alpha}{2}}$

350 $\frac{\cos\alpha\left[\text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{3}{4}\pi\right)\right]}{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{tg}\, 2\alpha$

351 $\frac{\text{tg}\,\alpha(1 - \text{sen}^2\alpha)}{\text{sen}\, 3\alpha + \text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{4\cos\alpha}$

Le equazioni

Risolvi le seguenti equazioni.

352 $3\,\text{sen}\, x + \cos x - 3 = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = 2\,\text{arctg}\,\frac{1}{2} + 2k\pi\right]$

353 $3\,\text{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\,\text{tg}\, x + 1 = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

354 $2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$ $\left[x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \vee x = 2k\pi\right]$

355 $\cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = -\,\text{sen}\left(3x - \frac{4}{3}\pi\right)$ $\left[x = \frac{31}{30}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{19}{150}\pi + \frac{2}{5}k\pi\right]$

356 $\text{tg}\left(2x - \frac{2}{7}\pi\right) = -\,\text{cotg}\left(3x - \frac{3}{5}\pi\right)$ $\left[x = \frac{57}{70}\pi + k\pi\right]$

357 $4\cos^2 x + \text{cosec}^2 x - 7 = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

358 $4\,\text{sen}^2 x - 7 + 10\cos^2 x = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right]$

359 $\text{sen}\, 2x + \cos 2x + 1 = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

360 $\frac{1 + \cos^2 x}{\cos x} + \cos^2 x + 1 = 0$ $[x = \pi + 2k\pi]$

361 $\text{sen}^2\frac{x}{2}\cos^2 x + 2\cos x = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

362 $\sqrt{3}\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\, 2x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

363 $5\,\text{sen}^2 x - \sqrt{3}\ \text{sen}\,2x = 2 + \cos^2 x$ $\left[x = \frac{5}{6}\pi + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

364 $2\cos^2 6x - 1 = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{3} \vee x = \pm\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3}\right]$

365 $\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{9}\right) = -\cos\left(2x - \frac{5}{3}\pi\right)$ $\left[x = \frac{5}{3}\pi + \frac{6}{5}k\pi \vee x = \frac{23}{21}\pi + \frac{6}{7}k\pi\right]$

366 $\frac{3}{7}\cos x - \frac{4}{5} - \left(\text{sen}\,\frac{\pi}{2} + \frac{1}{5}\right) = -\frac{4}{7}\cos x$ [impossibile]

367 $\cos x - \sqrt{3}\ \text{sen}\,x = 1$ $\left[x = 2k\pi \vee x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$

368 $\sqrt{3}\ \text{sen}\,x - \cos x + 2 = 0$ $\left[x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right]$

369 $2\,\text{sen}\,x\cos^2 x - \text{sen}\,x = 0$ $\left[x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right]$

370 $\cos x\,\text{cotg}\,x + \sqrt{3}\ \cos x = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k\pi\right]$

371 $\text{sen}\,4x - \cos 4x - 1 = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right]$

372 $\text{tg}\left(3x - \frac{\pi}{7}\right) = \text{cotg}\left(\frac{2}{5}\pi - 2x\right)$ $\left[x = \frac{17}{70}\pi + k\pi\right]$

373 $\text{sen}\,x - \sqrt{3}\ \cos x = -2$ $\left[x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right]$

374 $\sqrt{2}\ \text{sen}\,x + \sqrt{2}\cos x + 2 = 0$ $\left[x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right]$

375 $3\,\text{tg}^2 x + 4\sqrt{3}\ \text{tg}\,x + 3 = 0$ $\left[x = \frac{5}{6}\pi + k\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k\pi\right]$

376 $\sqrt{3}\ \text{sen}\,x + \cos x + \sqrt{3} = 0$ $\left[x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

377 $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = 2k\pi\right]$

378 $2\,\text{sen}^2 x = \text{sen}\,2x$ $\left[x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

379 $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ $\left[x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

380 $\text{cotg}\,(5x - 125°) = -\,\text{tg}\,(15° - 3x)$ $\left[x = \frac{25°}{4} + k\frac{45°}{2}\right]$

381 $4\,\text{sen}^2 x - 8\,\text{sen}\,x - 5 = 0$ $\left[x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right]$

382 $8\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 = 4\,\text{sen}^2 x$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

383 $2\,\text{sen}^4 x - 4\,\text{sen}^2 x = \sqrt{3}\ \cos^3 x - 2$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

384 $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right)$ $\left[x = \frac{19}{12}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{11}{60}\pi + \frac{2}{5}k\pi\right]$

385 $\text{sen}\,(5x - 115°) = \text{sen}\,(35° - 2x)$ $\left[x = \frac{150°}{7} + k\frac{360°}{7} \vee x = -\frac{100°}{3} + k120°\right]$

386 $\text{tg}\,x\cos x + \text{tg}\,x = \sqrt{3}\ \cos x + \sqrt{3}$ $\left[x = \pi + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

387 $3\,\text{sen}^2 x - \sqrt{3}\ \text{sen}\,2x - 3\cos^2 x = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

388 $\cot g\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{5}\right)=-\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{7}\right)$ $\left[x=\frac{177}{560}\pi+\frac{3}{8}k\pi\right]$

389 $5\operatorname{sen}^2 x+3\cos^2 x+\cos(-x)=5$ $\left[x=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$

390 $3\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen} x\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen} x=0$ $\left[x=k\pi \vee x=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)+k\pi\right]$

391 $\operatorname{sen}(2x-70°)=-\cos\left(\frac{x}{2}+12°\right)$ $\left[x=\frac{704°}{3}+k\,240° \vee x=\frac{656°}{5}+k\,144°\right]$

392 $\cot g\left(\frac{x}{4}+24°\right)=-\cot g(2x-48°)$ $\left[x=\frac{32°}{3}+k\,80°\right]$

393 $\sqrt{3}\operatorname{sen} x-\cos x+\sqrt{2}=0$ $\left[x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi \vee x=\frac{17}{12}\pi+2k\pi\right]$

394 $\cos x\cdot\cos(x-300°)=\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen}(x-210°)$ $[x=45°+k180° \vee x=30°+k180°]$

395 $2\operatorname{sen}^2 x+2\sqrt{3}\operatorname{sen} x\cos x-4\cos^2 x+1=0$ $\left[x=\frac{\pi}{6}+k\pi \vee x=\frac{2}{3}\pi+k\pi\right]$

396 $4\operatorname{sen} 2x\cos 2x-1=0$ $\left[x=\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2} \vee x=\frac{5}{24}\pi+k\frac{\pi}{2}\right]$

397 $2\operatorname{sen}^2 x+\sqrt{3}\operatorname{sen} x\cos x+1-\cos^2 x=0$ $\left[x=k\pi \vee x=\frac{5}{6}\pi+k\pi\right]$

398 $2\operatorname{sen}^2 x-4\sqrt{2}\operatorname{sen} x+3=0$ $\left[x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \vee x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right]$

399 $2\cos^2 x+3\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x\cos x=3$ $\left[x=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{4}+k\pi\right]$

400 $2\operatorname{sen}^2 x+9\cos\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+4=0$ $\left[x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi\right]$

401 $\operatorname{tg}^2 x+(\sqrt{3}+1)\operatorname{tg} x+\sqrt{3}=0$ $\left[x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\right]$

402 $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 2x-4\operatorname{tg} 2x+\sqrt{3}=0$ $\left[x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2} \vee x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\right]$

403 $3\operatorname{sen}^2 x+2\sqrt{3}\operatorname{sen} x\cos x+\cos^2 x=0$ $\left[x=\frac{5}{6}\pi+k\pi\right]$

404 $2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$ $\left[x=\frac{1}{3}\pi+2k\pi \vee x=\pi+2k\pi \vee x=\frac{5}{3}\pi+2k\pi\right]$

405 $4\operatorname{sen}^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+4\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-3=0$ $\left[x=2k\pi \vee x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi\right]$

406 $4\operatorname{sen}^4 x-11\operatorname{sen}^2 x+6=0$ $\left[x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\right]$

407 $2\sec x=\frac{2-\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$ $[x=2k\pi]$

408 $\frac{2}{1+\operatorname{sen} x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x+5}{\cos^2 x}$ [impossibile]

409 $\operatorname{sen}\left(\frac{5}{6}\pi-x\right)-\cos\left(\frac{4}{3}\pi-x\right)=-\sqrt{3}$ $\left[x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi \vee x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right]$

410 $\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\pi+x\right)+\frac{1}{2}=\sqrt{3}\cos(-x)$ $\left[x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]$

411 $\operatorname{sen} x(\sqrt{3}\cos x-2\operatorname{sen} x)=3-5\operatorname{sen}^2 x$ $\left[x=\frac{\pi}{3}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$

412 $\frac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} - \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos 2x} = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

413 $\frac{\operatorname{sen}(\pi - x)}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left[x = \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

414 $\sqrt{3} - 2\operatorname{sen} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} 2x}$ [impossibile]

415 $\cos x + \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ $[x = k\pi]$

416 $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg} x = 0$ $\left[x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k}{2}\pi\right]$

417 $4 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{5}{6}\pi\right) = 2 - \sqrt{3}\operatorname{sen} 2x$ $[x = k\pi]$

418 $\cos 2x - 2\cos\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) = 0$ $\left[x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

419 $\frac{2\operatorname{sen} x \cos x - \cos x}{3\operatorname{tg}^2 x - 1} = 0$ [impossibile]

420 $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg} 2x + 2 = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

421 $2\cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) + \cos 2x = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

422 $\operatorname{sen}^4 x + 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x - 3\cos^4 x = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

423 $\frac{(\cos x - 3)(2\cos x + 1)}{3 - 4\operatorname{sen}^2 x} = 0$ [impossibile]

424 $2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} - \cos 2x - \cos x = 2$ $\left[x = \pi + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

425 $2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 3$ $[x = \pi + 2k\pi]$

426 $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x - 2\cos x = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

427 $\cos 2x - 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + 2\cos x = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

428 $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x = \cos 4x + \cos 2x$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{14} + \frac{2}{7}k\pi\right]$

429 $\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 6x = 2\cos x$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi\right]$

430 $8\cos^2 x - 3\operatorname{tg}^2 x - 5 = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

431 $6\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

432 $2\cos x \cdot \operatorname{sen}\left(x - \frac{7}{6}\pi\right) - \operatorname{sen} x(\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x) = 1$ $\left[x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

433 $2 \cdot (1 + \cos x) \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1 + \operatorname{sen}^2 x$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

434 $\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2 x} + \cos x = 1$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right]$

435 $\operatorname{sen}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) = 0$ $\left[x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

436 $\operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 2x = 2\cos^2 x - 1$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{5}{24}\pi + \frac{k\pi}{2}\right]$

437 $2\cos^2 x + \sqrt{3}\,\operatorname{sen} 2x + 1 = 0$ $\left[x = -\frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

438 $4\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x - \sqrt{3}\,\operatorname{sen} 2x = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

439 $2\operatorname{sen}^2 x + 2\cos 2x + \operatorname{sen} 2x = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

440 $2\operatorname{sen}^2 x + \sqrt{3}\,\operatorname{sen}(-2x) - 3 = 0$ $\left[x = -\frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

441 $2\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} x - 2\operatorname{sen} x - 1 = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right]$

442 $2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{3}\cdot\cos x$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = 2k\pi\right]$

443 $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + 8\operatorname{sen} x = 7$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

444 $4\cos^2(-x) + 8\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 5 = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

445 $2\operatorname{sen}^2 3x - 3\operatorname{sen}(\pi - 3x) - 2 = 0$ $\left[x = \frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi \vee x = \frac{11}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right]$

446 $3\operatorname{sen}^2 x + (\sqrt{3} + 1)\operatorname{sen} x\cos x + (\sqrt{3} + 2)\cos^2 x = 2$ $\left[x = \frac{3}{4}\pi + k\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k\pi\right]$

447 $\dfrac{3 - 2\operatorname{sen} x}{\cos x} = 4\operatorname{tg} x$ $\left[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

448 $\dfrac{\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 6x}{\cos 3x + \cos 7x} = 1$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right]$

449 $\dfrac{\cos 8x - \cos 2x}{\cos(\pi - 4x)} = 1$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}\right]$

450 $\cos x + \cos 3x = 2\operatorname{sen} 6x\cos x$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right]$

451 $\operatorname{sen} 6x + \cos 4x + \operatorname{sen} 4x + \cos 6x = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{3}{20}\pi + k\frac{\pi}{5}\right]$

452 $\dfrac{\operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 1}{\operatorname{tg} 2x} = 0$ [impossibile]

453 $\dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{5\cos^2 x - \cos x}{\operatorname{sen} x}$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

454 $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2\operatorname{sen}^3 x = 0$ $\left[x = k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

455 $\operatorname{cotg}^2 x = \dfrac{2 + 3\cos x}{1 - \cos x}$ $\left[x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$

456 $\dfrac{\operatorname{sen} x + 1}{\operatorname{sen} x} + \operatorname{cotg}^2 x = 2$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

457 $\cos\frac{x}{2} - 2\cos x - 2 = 0$ $\left[x = \pi + 2k\pi \vee x = \pm 2\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 4k\pi\right]$

458 $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right]$

459 $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg}\frac{x}{2}} = 1$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

460 $\operatorname{cotg} 2x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$ $\left[x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k\pi\right]$

461 $\operatorname{cotg} 2x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

462 $\dfrac{1+\cos 2x}{\cos x} - \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2-2\cos^2 x} = 0$ $\left[x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

463 $\operatorname{sen} 2x = \cos x\,(1-\cos 2x)$ $\left[x = k\dfrac{\pi}{2}\right]$

464 $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{4}{3}\pi\right) = \cos x \cdot \cos\left(\dfrac{5}{3}\pi + x\right) + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ $\left[x = \dfrac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

465 $\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$ $\left[x = k\dfrac{\pi}{2}\right]$

466 $\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ $\left[x = k\dfrac{\pi}{2}\right]$

467 $\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen} 2x = \cos^2 x + \dfrac{1}{2}$ $\left[x = \dfrac{3}{4}\pi + k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right]$

468 $\operatorname{sen} 5x \cos 7x = \operatorname{sen} 4x \cos 8x$ $\left[x = k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3}\right]$

469 $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos 2x = 0$ $\left[x = \dfrac{3}{4}\pi + k\pi \vee x = \dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi \vee x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

470 $2\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 2x \cos 9x = 0$ $\left[x = k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{10} + k\dfrac{\pi}{5} \vee x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3}\right]$

471 $\operatorname{sen} 16x = \sqrt{2}\cos 8x$ $\left[x = \dfrac{\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{8} \vee x = \dfrac{\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{4} \vee x = \dfrac{3}{32}\pi + k\dfrac{\pi}{4}\right]$

472 $\dfrac{\cos 2x - \cos x}{\operatorname{sen} x} = 2\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\left[x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \dfrac{5}{3}\pi + 2k\pi\right]$

473 $\dfrac{\operatorname{sen} 3x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} 2x} = \operatorname{sen} 2x - \dfrac{1}{2}$ $\left[x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right]$

474 $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} + \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\left[x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right]$

475 $\dfrac{\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{5}{3}\pi\right)}{1-\cos x} - \dfrac{\cos(x+2\pi)+1}{\operatorname{sen}(-x)} = 0$ $\left[x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi\right]$

476 $\operatorname{sen}^2 2x = \dfrac{13}{20}\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \arccos\dfrac{12}{13}\right)$ $\left[x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2} \vee x = \dfrac{5}{12}\pi + k\dfrac{\pi}{2}\right]$

477 $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{32}{25} - \cos\left(\operatorname{arcsen}\dfrac{24}{25}\right)$ $\left[x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

478 $\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \dfrac{2}{3}\pi\right) + \cos 2x = 0$ $\left[x = \pm\dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi \vee x = 2k\pi\right]$

479 $2\sqrt{2}\operatorname{sen} x \cos x + 2\cos x - \sqrt{2}\operatorname{sen} x - 1 = 0$ $\left[x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \dfrac{5}{4}\pi + 2k\pi \vee x = \dfrac{7}{4}\pi + 2k\pi\right]$

480 $\dfrac{\cos^2 x + 3}{-\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{2\cos x}{1+\cos x}$ [impossibile]

481 $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} 2x = 2\cos^2 x$ $\left[x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi\right]$

482 $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 2\cos^2\dfrac{x}{2} - 2\cos^2 x$ $\left[x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x = 2k\pi\right]$

483 $(\sqrt{3}+1)\operatorname{sen}^2 x + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} 2x = \sqrt{3}$ $\left[x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi\right]$

484 $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 7\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -5$ $[x = 2\operatorname{arctg} 3 + 2k\pi \vee x = 2\operatorname{arctg}(-2) + 2k\pi]$

485 $\cos\dfrac{x}{2} + \cos x + \cos\dfrac{3}{2}x = 0$ $\left[x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm\dfrac{4}{3}\pi + 4k\pi\right]$

486 $\dfrac{\sqrt{3}\cos x + 2\,\text{sen}\,x}{\text{cotg}\,x} = \dfrac{1 + \text{sen}^2 x - \cos 2x}{\cos x}$ $\left[x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi\right]$

487 $\text{sen}\,2x\ \text{tg}\,x + 4 = 6\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi + x\right)$ [impossibile]

Con il metodo grafico

Determina con il metodo grafico il numero delle soluzioni delle seguenti equazioni.

488 $\cos x - 2x = 0$ [1 soluzione]

489 $2\,\text{tg}\,x + x - 1 = 0$ [∞ soluzioni]

490 $2\,\text{sen}\dfrac{x}{2} + x = 1$ [1 soluzione]

491 $\text{sen}\,x + \cos x = 4x^2$ [2 soluzioni]

492 $|\text{sen}\,x| - x^2 + 1 = 0$ [2 soluzioni]

493 $\cos\dfrac{x}{2} - 2|x| = 0$ [2 soluzioni]

494 $\sqrt{1 - x^2} = |\cos x|$ [1 soluzione]

495 $\arccos x + x^2 - 4 = 0$ [1 soluzione]

496 $\sqrt{x + 4} = \text{tg}\dfrac{x}{2}$ [∞ soluzioni]

497 $\text{sen}\,2x + x^2 - 3x + 2 = 0$ [2 soluzioni]

Le equazioni con le funzioni goniometriche inverse

Risolvi le seguenti equazioni.

498 $\arccos x = \dfrac{\pi}{4}$ $\left[x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

499 $3(\text{arcsen}\,x)^2 + \pi\,\text{arcsen}\,x = 0$ $\left[x = 0 \vee x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

500 $\text{arctg}\dfrac{2x + 1}{x} = \dfrac{\pi}{4}$ $[x = -1]$

501 $4(\text{arcsen}\,x)^2 = \pi^2$ $[x = \pm 1]$

502 $6\,\text{arcsen}\sqrt{x - 3} = \pi$ $\left[x = \dfrac{13}{4}\right]$

503 $2\,\text{arcsen}|2x - 1| = \pi$ $[x = 0 \vee x = 1]$

504 Se $\text{arcsen}\,x = \dfrac{\pi}{2}$, quanto vale $\text{arctg}\,x$? $\left[\dfrac{\pi}{4}\right]$

505 Se $\text{arctg}\,x = -\dfrac{\pi}{4}$, quanto vale $\text{arcsen}\,x$? E $\arccos x$? $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$

506 Risolvi l'equazione $\text{sen}(\text{arctg}\sqrt{3}) = \cos x$. $\left[x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

507 Risolvi l'equazione $\text{sen}\,2x = \cos(\text{arctg}\,1)$. $\left[x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \vee x = \dfrac{3}{8}\pi + k\pi\right]$

4. I SISTEMI DI EQUAZIONI GONIOMETRICHE

Teoria a pag. 775

508 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo i seguenti sistemi di equazioni:

a) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{sen}\,x + \text{sen}\,y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ \cos x - \cos y = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases}$

a) Ricaviamo x dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} - y \\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) + \operatorname{sen} y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} - y \\ \cos y + \operatorname{sen} y = 1 \end{cases}$$

Per risolvere la seconda equazione, utilizziamo le formule parametriche: $\cos y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{sen} y = \dfrac{2t}{1+t^2}$, dove $t = \operatorname{tg}\dfrac{y}{2}$, con $y \neq \pi + 2k\pi$:

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} = 1 \rightarrow 1 - t^2 + 2t = 1 + t^2 \rightarrow -2t^2 + 2t = 0 \rightarrow 2t^2 - 2t = 0.$$

Le soluzioni sono:

$$t = 0, \text{ da cui } \frac{y}{2} = k\pi \rightarrow y = 2k\pi; \quad t = 1, \text{ da cui } \frac{y}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} - 2k\pi \\ y = 2k\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

b) Sommiamo membro a membro le due equazioni del sistema:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \cos x - \cos y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases} \\ \hline \quad 2\cos x = \sqrt{3} \end{array} \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

Sottraiamo la seconda equazione dalla prima:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \cos x - \cos y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases} \\ \hline \quad 2\cos y = 1 \end{array} \rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \rightarrow y = \pm\frac{1}{3}\pi + 2k_1\pi.$$

Le soluzioni del sistema dato sono:

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \pm\dfrac{1}{3}\pi + 2k_1\pi \end{cases} \text{con } k, k_1 \in \mathbb{Z}.$$

Risolvi i seguenti sistemi.

509 $\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \sqrt{3} + 1 \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3} - 1 \end{cases}$ $\left[x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ y = \dfrac{3}{4}\pi + k_1\pi\right]$

510 $\begin{cases} x + y = \pi \\ 2\operatorname{sen} x + 2\cos y = \sqrt{3} + 1 \end{cases}$ $\left[\left(x = \dfrac{5}{6}\pi - 2k\pi \wedge y = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \vee \left(x = \dfrac{2}{3}\pi - 2k\pi \wedge y = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right]$

511 $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \dfrac{3}{2} \\ 2\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen}^2 y = \dfrac{9}{2} \end{cases}$ $\left[\left(x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi\right) \wedge y = \dfrac{\pi}{2} + 2k_1\pi\right]$

512 $\begin{cases} 8\operatorname{sen} x - 6\operatorname{sen} y = 1 \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1 \end{cases}$ $\left[x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ y = \dfrac{\pi}{6} + 2k_1\pi \vee y = \dfrac{5}{6}\pi + 2k_1\pi\right]$

513 $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \dfrac{3}{2} \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\left[x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2k_1\pi\right]$

514 $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x + \cos y = \sqrt{3} \end{cases}$ $\left[\left(x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \wedge y = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \vee \left(x = \dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi \wedge y = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right)\right]$

515 $\begin{cases} x + y = \pi \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = -2 \end{cases}$ $\left[x = \dfrac{3}{4}\pi - k\pi \wedge y = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right]$

516 $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$ $\left[\left(x = \dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi \wedge y = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \vee \left(x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \wedge y = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right]$

517 $\begin{cases} \cos x + 3\cos y = \sqrt{3} \\ \cos x - 3\cos y = -2\sqrt{3} \end{cases}$ $\left[x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \dfrac{7}{6}\pi + 2k\pi,\ y = \dfrac{\pi}{6} + 2k_1\pi \vee y = \dfrac{11}{6}\pi + 2k_1\pi\right]$

518 $\begin{cases} 2\operatorname{tg} x - 3\operatorname{tg} y = 2 + \sqrt{3} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{3} \end{cases}$ $\left[x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ y = \dfrac{5}{6}\pi + k_1\pi\right]$

519 $\begin{cases} x + y = \pi \\ \operatorname{sen}(\pi - x) + \sqrt{3}\cos y = 1 \end{cases}$ $\left[\left(x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge y = \dfrac{\pi}{2} - 2k\pi\right) \vee \left(x = -\dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi \wedge y = \dfrac{11}{6}\pi - 2k\pi\right)\right]$

520 $\begin{cases} x + y = \dfrac{3}{2}\pi \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 1 \end{cases}$ $\left[\left(x = 2k\pi \wedge y = \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) \vee \left(x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge y = \pi + 2k\pi\right)\right]$

521 $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = 1 \\ 5\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 2 \end{cases}$ $\left[x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pm\dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi,\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k_1\pi \vee y = \pm\dfrac{2}{3}\pi + 2k_1\pi\right]$

522 $\begin{cases} 2\cos x + 3\cos y = -\sqrt{3} \\ 4\cos^2 x - 2\cos^2 y = 3 \end{cases}$ $\left[x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \dfrac{7}{6}\pi + 2k\pi,\ y = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi\right]$

523 $\begin{cases} x + y = \pi \\ 3\operatorname{tg} x + 3\operatorname{cotg} y = -2\sqrt{3} \end{cases}$ $\left[\left(x = \dfrac{2}{3}\pi - k\pi \wedge y = \dfrac{\pi}{3} + k\pi\right) \vee \left(x = \dfrac{\pi}{6} - k\pi \wedge y = \dfrac{5}{6}\pi + k\pi\right)\right]$

524 $\begin{cases} x + y = \dfrac{5}{6}\pi \\ 2\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\operatorname{sen} y = -1 \end{cases}$ $\left[x = -\dfrac{\pi}{6} - 2k\pi \wedge y = \pi + 2k\pi\right]$

525 $\begin{cases} \operatorname{tg} x + 3\operatorname{cotg} y = 0 \\ \operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{cotg}^2 y = 4 \end{cases}$ $\left[\left(x = \dfrac{2}{3}\pi + k\pi \wedge y = \dfrac{\pi}{3} + k_1\pi\right) \vee \left(x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \wedge y = \dfrac{2}{3}\pi + k_1\pi\right)\right]$

526 $\begin{cases} \operatorname{sen}(x - y) = 1 \\ \cos(x + y) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\left[\left(x = \dfrac{5}{12}\pi + (2k + h)\pi \wedge y = -\dfrac{\pi}{12} + h\pi\right) \vee \left(x = \dfrac{\pi}{12} + (2k + h)\pi \wedge y = -\dfrac{5}{12}\pi + h\pi\right)\right]$

5. LE DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

▶ Teoria a pag. 776

527 **VERO O FALSO?**

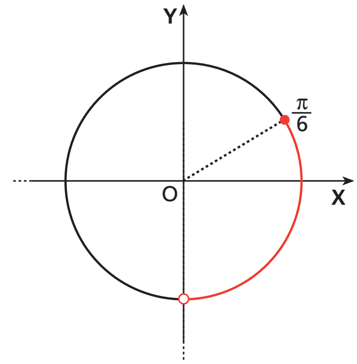
Nella figura è indicato graficamente (in rosso) l'insieme delle soluzioni di una disequazione goniometrica. L'insieme delle soluzioni si può scrivere:

a) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. V F

b) $2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi$. V F

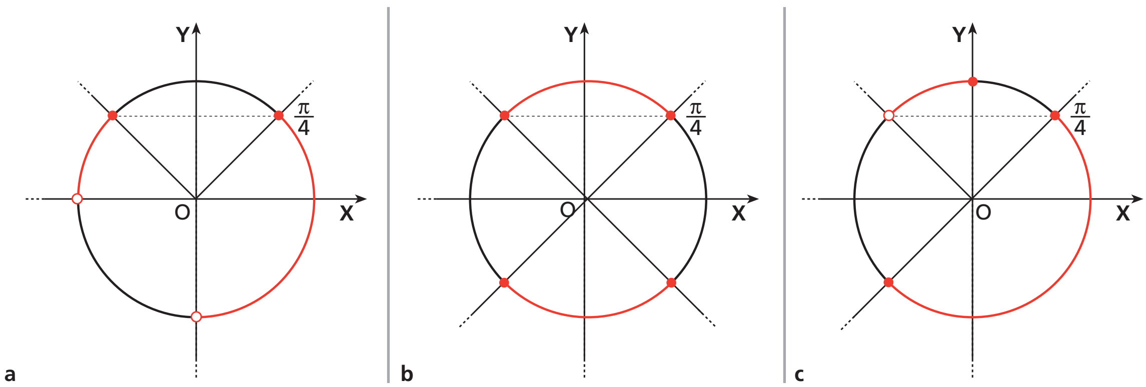
c) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. V F

d) $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. V F

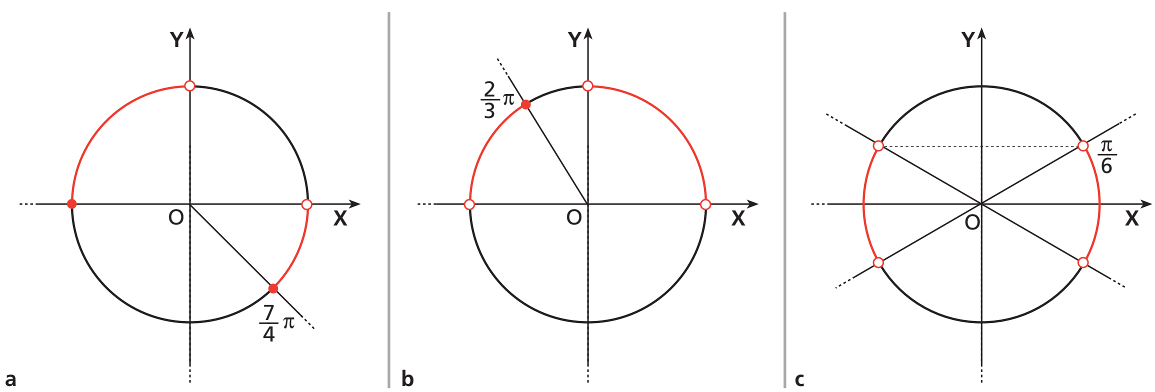


Nelle seguenti figure sono indicate le soluzioni di alcune disequazioni goniometriche. Scrivile in forma algebrica.

528



529



Le disequazioni goniometriche elementari

530 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo le disequazioni:

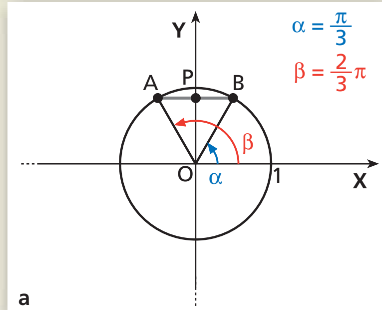
a) $2\,\text{sen}\,x - \sqrt{3} > 0$; b) $2\cos x + 1 \leq 0$; c) $\text{tg}\,x > 1$.

a) $\mathbf{2\,sen\,x - \sqrt{3} > 0}$.

Ricaviamo sen x: sen $x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

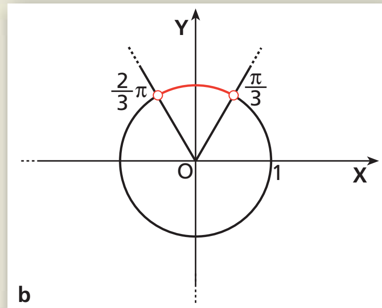
Disegniamo la circonferenza goniometrica e sull'asse y segniamo il punto $P\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Tracciamo poi per P la corda AB parallela all'asse x. Congiungiamo il centro O con A e B. $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e $\beta = \frac{2}{3}\pi$ sono le soluzioni dell'equazione associata sen $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (figura *a*).



a

Poiché deve risultare sen $x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, scegliamo l'arco AB che sta al di sopra della retta AB (figura *b*).



b

I punti A e B sono esclusi, perché la disuguaglianza della disequazione è stretta.

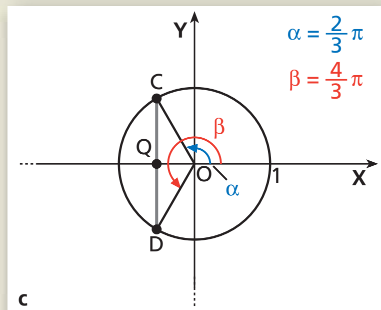
Le soluzioni sono: $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$.

b) $\mathbf{2\cos x + 1 \leq 0}$.

Ricaviamo $\cos x$: $\cos x \leq -\frac{1}{2}$.

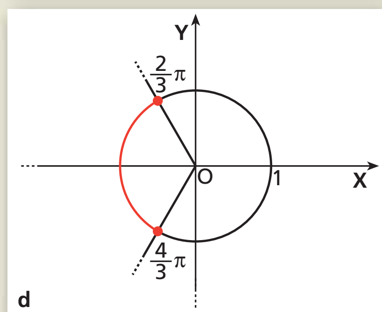
Disegniamo la circonferenza goniometrica e sull'asse x segniamo il punto $Q\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Tracciamo poi per Q la corda CD parallela all'asse y e congiungiamo il centro O con C e D. $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ e $\beta = \frac{4}{3}\pi$ sono le soluzioni dell'equazione associata $\cos x = -\frac{1}{2}$ (figura *c*).



c

Poiché deve risultare $\cos x \leq -\frac{1}{2}$, scegliamo l'arco evidenziato in rosso (figura *d*).



d

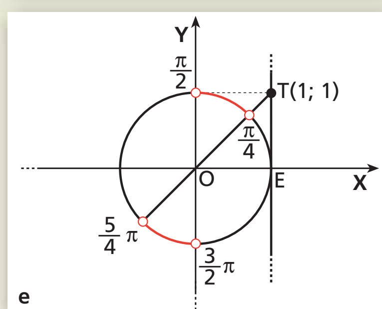
I punti C e D sono inclusi, perché la disuguaglianza è larga.

Le soluzioni sono: $\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$.

c) $\mathbf{tg\,x > 1}$.

Disegniamo la circonferenza goniometrica e la retta tangente nel punto $E(1; 0)$. Su tale retta scegliamo il punto $T(1; 1)$ e tracciamo OT in modo da individuare gli angoli con tangente uguale a 1, cioè $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5}{4}\pi$.

Poiché deve risultare tg $x > 1$, gli archi da scegliere sono quelli compresi fra $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$ e fra $\frac{5}{4}\pi$ e $\frac{3}{2}\pi$ (figura *e*). Essendo $\frac{5}{4}\pi = \frac{\pi}{4} + \pi$ e $\frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{2} + \pi$, le soluzioni della disequazione sono: $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$.



e

Un metodo alternativo

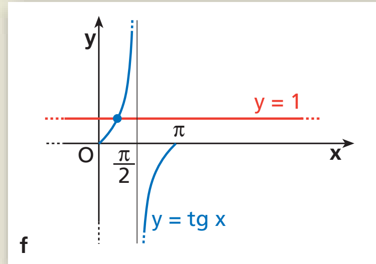
Per risolvere tutte le disequazioni esaminate possiamo anche utilizzare il grafico della funzione goniometrica presente. Vediamolo, per esempio, nella terza disequazione, $\operatorname{tg} x > 1$.

Disegniamo il grafico della funzione $y = \operatorname{tg} x$ e determiniamo i punti che hanno ordinata maggiore di 1. Poiché la tangente ha periodo uguale a π, disegniamo i grafici delle funzioni $y = \operatorname{tg} x$ e $y = 1$ nell'intervallo $[0; \pi]$ (figura *f*).

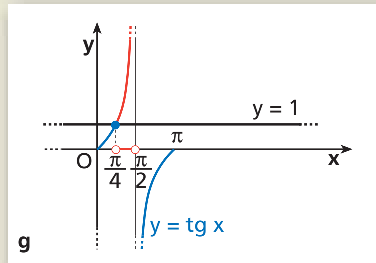
I due grafici si intersecano nel punto di ascissa $\frac{\pi}{4}$, soluzione dell'equazione $\operatorname{tg} x = 1$ in $[0; \pi]$.

Coloriamo la porzione di grafico che sta «sopra» la retta $y = 1$ (figura *g*).
Le soluzioni della disequazione sono date dalle ascisse dei punti colorati del grafico, ossia $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$.
La soluzione trovata è quella relativa all'intervallo $[0; \pi]$. Poiché il periodo della funzione $y = \operatorname{tg} x$ è π, le soluzioni in $\mathbb{R}$ sono:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$



f



g

Risolvi le seguenti disequazioni in $[0; 2\pi]$.

531 $2 \operatorname{sen} x > \sqrt{2}$ $\left[\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right]$

532 $3 \operatorname{tg} x > \sqrt{3}$ $\left[\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{7}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi\right]$

533 $\cos x > \frac{1}{2}$ $\left[0 \leq x < \frac{\pi}{3} \vee \frac{5}{3}\pi < x \leq 2\pi\right]$

534 $2 \cos x < \sqrt{2}$ $\left[\frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}\right]$

535 $2 \operatorname{sen} x + 1 < 0$ $\left[\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi\right]$

536 $\operatorname{tg} x \leq -1$ $\left[\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3}{4}\pi \vee \frac{3}{2}\pi < x \leq \frac{7}{4}\pi\right]$

537 $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left[0 \leq x \leq \frac{3}{4}\pi \vee \frac{5}{4}\pi \leq x \leq 2\pi\right]$

538 $\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 3 \geq 0$ $\left[\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{4}{3}\pi \leq x < \frac{3}{2}\pi\right]$

539 $2 \cos x \geq \sqrt{3}$ $\left[0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \vee \frac{11}{6}\pi \leq x \leq 2\pi\right]$

540 $2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \geq \sqrt{2}$ $\left[\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi\right]$

541 $\operatorname{sen} x - 1 < 0$ $\left[x \neq \frac{\pi}{2}\right]$

542 $3 \operatorname{tg} x + 4 > \operatorname{tg} x + 4$ $\left[0 < x < \frac{\pi}{2} \vee \pi < x < \frac{3}{2}\pi\right]$

543 $2 \cos x + \sqrt{3} < 0$ $\left[\frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}\right]$

544 $\operatorname{sen} x \leq -1$ $\left[x = \frac{3}{2}\pi\right]$

545 $\operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}$ $\left[\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{2}{3}\pi \vee \frac{3}{2}\pi < x \leq \frac{5}{3}\pi\right]$

546 $\operatorname{cotg} x \leq -1$ $\left[\frac{3}{4}\pi \leq x < \pi \vee \frac{7}{4}\pi \leq x < 2\pi\right]$

547 $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$ $\left[\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}\pi\right]$

548 $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 > 0$ $\left[0 < x < \pi \vee \frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi\right]$

549 $2 \cos 2x - 1 \leq 0$
$\left[\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi \vee \frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi\right]$

550 $1 - \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$ $\left[\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{19}{12}\pi\right]$

551 $\sqrt{3} \operatorname{cotg} \frac{x}{2} \geq 3$ $\left[0 < x \leq \frac{\pi}{3}\right]$

552 $2 \operatorname{sen} 2x - \sqrt{3} < 0$
$\left[0 \leq x < \frac{\pi}{6} \vee \frac{\pi}{3} < x < \frac{7}{6}\pi \vee \frac{4}{3}\pi < x \leq 2\pi\right]$

Risolvi le seguenti disequazioni in $\mathbb{R}$.

553 $\operatorname{sen} x < -\frac{1}{2}$ $\left[\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right]$

554 $2 \cos x + 2 < \cos x + 2$ $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$

555 $3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} < 0$ $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi\right]$

556 $2\cos x \geq -1$ $\left[-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$

557 $\operatorname{tg} x \geq -1$ $\left[-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

558 $\operatorname{tg} 2x \leq 0$ $\left[\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\right]$

559 $\cos x \geq 1$ $[x = 2k\pi]$

560 $3\operatorname{cotg} x \geq \sqrt{3}$ $\left[k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

561 $\operatorname{cotg} x \leq \sqrt{3}$ $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x < \pi + k\pi\right]$

562 $2\operatorname{sen} x \leq -\sqrt{2}$ $\left[\frac{5}{4}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right]$

563 $\operatorname{sen} x + 3 > 2(\operatorname{sen} x + 2)$ [impossibile]

564 $2(\operatorname{sen} x + 3) - 1 < 3(1 - \operatorname{sen} x) + 2$ $[\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi]$

565 $\cos x - \sqrt{2} > 3\cos x$ $\left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$

566 $2(\operatorname{tg} x + 1) + 3(1 - \operatorname{tg} x) < -2(\operatorname{tg} x - 1) + 4$ $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

567 $\sqrt{3}\ \operatorname{sen}(40° - 2x) - 3 > 3\sqrt{3}\ \operatorname{sen}(40° - 2x)$ $[50° + k180° < x < 80° + k180°]$

568 $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$ $\left[-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2k\pi\right]$

569 $\operatorname{sen}\frac{x}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

570 $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

Le disequazioni goniometriche non elementari

571 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo le disequazioni: a) $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 \leq 0$; b) $\operatorname{sen} x - \cos x \geq 0$.

a) Risolviamo dapprima l'equazione associata:

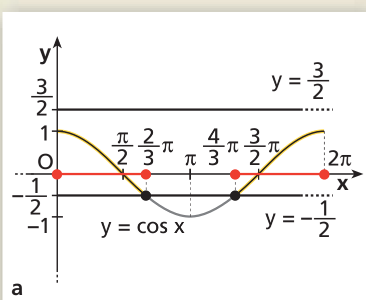
$$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$$

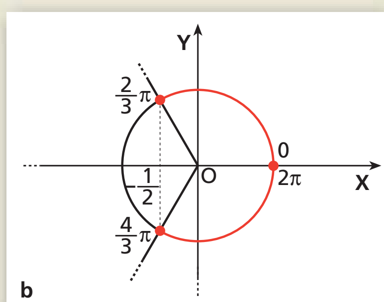
$$\cos x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{4} = \frac{2 \pm 4}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{cases}$$

Dallo studio delle disequazioni di 2° grado sappiamo che la disequazione è soddisfatta per i valori interni all'intervallo delle soluzioni, cioè:

$$-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{3}{2}.$$

Rappresentiamo graficamente gli intervalli soluzione della disequazione con il grafico della funzione $y = \cos x$ (figura a) oppure con la circonferenza goniometrica (figura b).





Le soluzioni della disequazione sono:

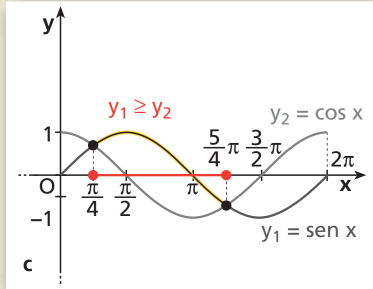
$$2k\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \vee \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi.$$

b) **sen x − cos $x \geq 0$**.

Risolviamo la disequazione con il metodo grafico, ossia disegniamo i grafici di $y = \text{sen}\, x$ e di $y = \cos x$ e determiniamo gli intervalli in cui risulta $\text{sen}\, x \geq \cos x$ (figura *c*):

$$\begin{cases} y_1 = \text{sen}\, x \\ y_2 = \cos x \\ y_1 \geq y_2 \end{cases}$$

Le soluzioni sono: $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$.



In alternativa, per la risoluzione puoi usare le formule parametriche oppure il metodo dell'angolo aggiunto.

Risolvi le seguenti disequazioni.

572 $2\,\text{sen}^2 x - 1 \leq 0$ $\left[\frac{3}{4}\pi + k\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi + k\pi\right]$

573 $2\cos^2 x + \cos x \geq 0$ $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right]$

574 $\text{tg}^2 x - 1 \geq 0$ $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

575 $3 - \text{cotg}^2 x \leq 0$ $\left[\frac{5}{6}\pi + k\pi \leq x \leq \frac{7}{6}\pi + k\pi \wedge x \neq \pi + k\pi\right]$

576 $2\,\text{sen}^2 x + \sqrt{3}\,\text{sen}\, x \geq 0$ $\left[2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi \vee \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right]$

577 $1 - 2\cos^2 x \leq 0$ $\left[\frac{3}{4}\pi + k\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi + k\pi\right]$

578 $\sqrt{3}\,\text{sen}\, x + \cos x \geq 0$ $\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

579 $3\,\text{tg}^2 x + \sqrt{3}\,\text{tg}\, x \leq 0$ $\left[\frac{5}{6}\pi + k\pi \leq x \leq \pi + k\pi\right]$

580 $\cos^2 x - \cos x \geq 0$ $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \vee x = 2k\pi\right]$

581 $\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x < 0$ $\left[\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \wedge x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

582 $3\,\text{sen}\, x - \sqrt{3}\cos x \leq 0$ $\left[-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

583 $\text{sen}^2 x - 2 \leq 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

584 $4\,\text{sen}\, x \cos x + 1 \leq 0$ $\left[\frac{7}{12}\pi + k\pi \leq x \leq \frac{11}{12}\pi + k\pi\right]$

585 $2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 1 < 0$ $\left[-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \wedge x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

586 $\text{sen}^2 x - 3\,\text{sen}\, x + 2 \leq 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

587 $\cos^2 x - 2\cos x + 1 > 0$ $[\forall x \neq 2k\pi]$

588 $3\,\text{tg}^2 x - (\sqrt{3} - 3)\,\text{tg}\, x - \sqrt{3} \geq 0$ $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

589 $\cos 2x + \cos x + 1 > 0$ $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right]$

590 $2 - \cos x \leq \sqrt{2}\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \text{sen}\, x$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

591 $\operatorname{sen} x + \cos x \leq 0$ $\left[\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right]$

592 $\operatorname{sen} x - (\sqrt{2} - 1)\cos x \leq 0$ $\left[-\frac{7}{8}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{8} + 2k\pi\right]$

593 $4\cos^2 x + 4\cos x - 3 \geq 0$ $\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

594 $\sqrt{3}\cos x - \operatorname{sen} x \geq 0$ $\left[-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

595 $\operatorname{sen} x - \cos x + 1 \geq 0$ $\left[2k\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

596 $\operatorname{sen} x + \cos x + 1 \leq 0$ $\left[\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

597 $\sqrt{3}\operatorname{sen} x - \cos x - 1 \geq 0$ $\left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi\right]$

598 $1 - 3\cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x \geq 0$ $\left[\operatorname{arctg} 2 + k\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

599 $\operatorname{sen} 3x < \cos 4x - \cos 2x$ $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + k\pi \vee \pi + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee \frac{11}{6}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\right]$

600 $1 + 2\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos x \geq 0$ $\left[2k\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right]$

Le disequazioni fratte e quelle sotto forma di prodotto

601 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo le disequazioni: a) $\frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{3}}{2\cos^2 x - 1} \leq 0$; b) $(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})(2\cos^2 x - 1) \leq 0$.

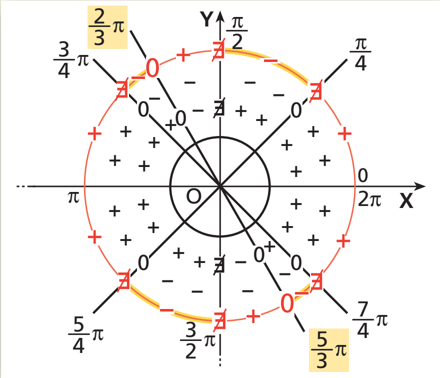
a) La disequazione è fratta.

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore nell'intervallo tra 0 e 2π, ponendoli maggiori di 0:

$$N > 0 \quad \operatorname{tg} x + \sqrt{3} > 0 \ \rightarrow\ \operatorname{tg} x > -\sqrt{3} \ \rightarrow\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{2}{3}\pi < x < \frac{3}{2}\pi \vee \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi;$$

$$D > 0 \quad 2\cos^2 x - 1 > 0 \ \rightarrow\ \cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 0 < x < \frac{\pi}{4} \vee \frac{3}{4}\pi < x < \frac{5}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi < x < 2\pi.$$



Rappresentiamo i segni su due circonferenze concentriche.

Sulla circonferenza interna è individuato il segno del numeratore. Segniamo con ∄ i valori per cui la tangente non esiste.

Sulla seconda circonferenza è individuato il segno del denominatore.

Applichiamo la regola dei segni e registriamo i risultati in una terza circonferenza, dove il segno ∄ indica che la frazione non esiste, cioè indica i valori in corrispondenza dei quali il denominatore è 0 oppure la tangente non esiste.

Tenendo conto della periodicità, la disequazione è soddisfatta nei seguenti intervalli:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \frac{2}{3}\pi + k\pi \leq x < \frac{3}{4}\pi + k\pi.$$

b) $(\mathbf{tg}\, x + \sqrt{3})\,(2\cos^2 x - 1) \leq 0$.

Anche per lo studio di un prodotto procediamo applicando la regola dei segni.

Utilizziamo la stessa figura del caso a) poiché i fattori sono identici. La differenza rispetto al quoziente si ha per i valori in cui si annulla il secondo fattore: per essi il prodotto esiste e si annulla, quindi essi, al contrario del caso a), sono soluzioni della disequazione. La disequazione è soddisfatta per:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \frac{2}{3}\pi + k\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + k\pi.$$

Risolvi le seguenti disequazioni.

602 $\dfrac{2\,\mathrm{sen}^2 x - 1}{\cos x} \leq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3}{4}\pi \vee \frac{5}{4}\pi \leq x < \frac{3}{2}\pi \vee \frac{7}{4}\pi \leq x \leq 2\pi\right]$

603 $(1 - 2\,\mathrm{sen}\, x)(2\cos x + \sqrt{3}) \leq 0$ $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7}{6}\pi + 2k\pi\right]$

604 $(3\,\mathrm{tg}^2 x - 1)(\mathrm{sen}\, x + 1) \geq 0$ $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

605 $(2\cos x - 1)(\cos^2 x - 1) \leq 0$ $\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi\right]$

606 $(2\,\mathrm{sen}\, x - \sqrt{3})(2\cos x + \sqrt{2}) \leq 0$ $\left[-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right]$

607 $\dfrac{2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, x - \sqrt{6}}{3\,\mathrm{tg}^2 x - 1} \leq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3} \vee \frac{2}{3}\pi \leq x < \frac{5}{6}\pi \vee \left(\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi \wedge x \neq \frac{3}{2}\pi\right)\right]$

608 $(\mathrm{cotg}\, x - 1)(2\,\mathrm{sen}\, x + 1) \geq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[0 < x \leq \frac{\pi}{4} \vee \pi < x \leq \frac{7}{6}\pi \vee \frac{5}{4}\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi\right]$

609 $\dfrac{\mathrm{tg}^2 x - 1}{2\,\mathrm{sen}\, x + 1} \leq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \vee \frac{3}{4}\pi \leq x < \frac{7}{6}\pi \vee \left(\frac{5}{4}\pi \leq x \leq \frac{7}{4}\pi \wedge x \neq \frac{3}{2}\pi\right) \vee \frac{11}{6}\pi < x \leq 2\pi\right]$

610 $\mathrm{sen}\, x \cdot (\mathrm{tg}^2 x - 1) \leq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \vee \frac{3}{4}\pi \leq x \leq \pi \vee \left(\frac{5}{4}\pi \leq x \leq \frac{7}{4}\pi \wedge x \neq \frac{3}{2}\pi\right)\right]$

611 $\dfrac{2\,\mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}\, x}{\cos^2 x} \geq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[\left(\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2}\right) \vee \left(\pi \leq x \leq 2\pi \wedge x \neq \frac{3}{2}\pi\right)\right]$

612 $(\mathrm{tg}^2 x - 3)(2\cos x - 1) \leq 0$ $\left[-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

613 $(2\,\mathrm{sen}^2 x - 1)(1 - 2\cos x) \geq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi \vee \frac{5}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{3}\pi \vee \frac{7}{4}\pi \leq x \leq 2\pi\right]$

614 $\sqrt{3}\,\mathrm{cotg}\, x - 4\cos^2 x \geq 0$ $\left[k\pi < x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \vee \frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

615 $3\cos x \cdot (\sqrt{2} - 2\,\mathrm{sen}\, x) \geq 0$ $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right]$

616 $(\mathrm{tg}\, x + \sqrt{3})(2\cos^2 x - 1) \leq 0$ $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \frac{2}{3}\pi + k\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

617 $\dfrac{\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, x - \cos x}{1 - \mathrm{sen}^2 x} \geq 0$ $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

618 $(\sqrt{2}\,\mathrm{cotg}\, x - \sqrt{6})(\mathrm{sen}\, x - 1) \leq 0$ $\left[k\pi < x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

619 $\dfrac{\mathrm{sen}\, x(2\cos^2 x + \cos x)}{\mathrm{tg}^2 x - 1} \leq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$.
$\left[0 \leq x < \frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{2}{3}\pi \vee \frac{3}{4}\pi < x \leq \pi \vee \frac{5}{4}\pi < x \leq \frac{4}{3}\pi \vee \frac{3}{2}\pi < x < \frac{7}{4}\pi\right]$

620 $\dfrac{2\cos x + \sqrt{3}}{\operatorname{sen} x(\cos x + 1)} \geq 0$ $\left[2k\pi < x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \vee \pi + 2k\pi < x \leq \frac{7}{6}\pi + 2k\pi\right]$

621 $\dfrac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} \geq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} \vee \pi \leq x < \frac{5}{4}\pi \vee \frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi \vee x = 0\right]$

622 $\dfrac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1} \leq 0$ $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \frac{3}{4}\pi + k\pi \leq x < \frac{5}{6}\pi + k\pi\right]$

623 $\dfrac{2\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x + 1} \leq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[x = 0 \vee \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3}{4}\pi < x \leq \pi \vee \frac{3}{2}\pi < x \leq \frac{5}{3}\pi \vee \frac{7}{4}\pi < x \leq 2\pi\right]$

624 $(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})(1 + \operatorname{cotg} x) \leq 0$ $\left[k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \vee \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

625 $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x} \leq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[0 \leq x < \frac{\pi}{3} \vee \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \vee \frac{4}{3}\pi < x \leq \frac{3}{2}\pi \vee x = 2\pi\right]$

626 $\dfrac{2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \geq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[0 \leq x < \frac{\pi}{4} \vee \frac{3}{4}\pi < x \leq \pi \vee \frac{7}{6}\pi \leq x < \frac{5}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi < x \leq \frac{11}{6}\pi \vee x = 2\pi\right]$

627 $\operatorname{sen} x \cdot (2\cos x + 1)(\operatorname{tg} x - 1) \geq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$.
$\left[x = 0 \vee \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{2}{3}\pi \leq x \leq \pi \vee \frac{5}{4}\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi \vee \frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi\right]$

ESERCIZI VARI Le disequazioni goniometriche

TEST

628 La disequazione $(\operatorname{sen} x + 2)(3\cos x - 3) \geq 0$ è verificata per:

- A $x = k\pi$.
- B nessun valore di x.
- C $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
- D ogni valore di x.
- E $x = 2k\pi$.

629 Considera le seguenti disequazioni in $[0; 2\pi]$. Quale ha come soluzioni solo angoli compresi fra 0 e π?

- A $2\operatorname{sen} x < 1$
- B $\cos x > \frac{1}{3}$
- C $\operatorname{tg} x \leq 1$
- D $\operatorname{sen} x > \frac{4}{5}$
- E $\cos x < 1$

630 Fra le seguenti espressioni, una sola risulta sempre maggiore o uguale a 1. Quale?

- A $\cos 2\alpha + 2\operatorname{sen}^2\alpha - 1$
- B $-2\cos 2\alpha - 3\operatorname{sen}^2\alpha$
- C $3\operatorname{sen}^2\alpha + 2\cos 2\alpha$
- D $\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha$
- E $2\cos 2\alpha + 3\operatorname{sen}^2\alpha - 2$

631 Quale fra le seguenti disequazioni *non* è sempre verificata $\forall x \in \mathbb{R}$?

- A $\operatorname{sen} x \leq 1$
- B $\operatorname{tg}^2 x - 1 > 0$
- C $\operatorname{sen}^2 x + \pi > 0$
- D $\cos x + 2 \geq 0$
- E $\operatorname{sen} x \geq -1$

632 **ASSOCIA** a ciascuna disequazione della prima colonna una disequazione della seconda colonna a essa equivalente.

1) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \leq 2$. a) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 2} \geq 0$.

2) $\operatorname{sen} x \geq 0$. b) $\dfrac{2\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x} \geq 0$.

3) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x + \pi} > 0$. c) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \geq 0$.

633 **ASSOCIA** a ciascuna disequazione della prima colonna una disequazione della seconda colonna in modo che l'unione delle soluzioni delle due disequazioni sia l'insieme $\mathbb{R}$.

1) $\operatorname{tg} x \leq 0$. a) $\operatorname{sen} x \geq 0$.

2) $\cos x \geq 0$. b) $\operatorname{cotg} x \geq 0$.

3) $\operatorname{cosec} x < 0$. c) $\sec x < 0$.

634 **ASSOCIA** ciascuna disequazione alla corrispondente proprietà.

1) $4\cos^2 x + 4\cos x + 1 > 0.$

2) $(2\cos x + 1)^2 \dfrac{4 + \operatorname{sen}^2 x}{|1 + 2\operatorname{sen} x|} \geq 0.$

3) $\dfrac{|1 + 2\cos x|}{8} \geq 0.$

a) È verificata per $x \neq \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$ e $x \neq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$.

b) È equivalente alla disequazione $\dfrac{5}{(2\cos x + 1)^2} \geq 0.$

c) È verificata per qualunque valore di x.

Risolvi le seguenti disequazioni.

635 $2\operatorname{sen} x + \sqrt{2} > 0$ $\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right]$

636 $2\cos x + \sqrt{3} \geq 0$ $\left[2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \vee \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi\right]$

637 $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} \leq 0$ $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

638 $\operatorname{cotg} x + \sqrt{3} > 0$ $\left[k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi\right]$

639 $\sqrt{3}\operatorname{sen} x - \cos x > 0$ $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi\right]$

640 $\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x - 1 < 0$ $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right]$

641 $3\operatorname{sen}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{sen} x \cos x - 3\cos^2 x \leq 0$ $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

642 $2\operatorname{sen}^2 x - (2 - \sqrt{3})\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \leq 0$ $\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right]$

643 $4\cos^2 x - 2(1 - \sqrt{2})\cos x - \sqrt{2} \geq 0$ $\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right]$

644 $2\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x + 2\cos^2 x \geq 1$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

645 $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{3} + 1)\operatorname{tg} x + 1 \geq 0$ $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{7}{6}\pi + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

646 $2\operatorname{sen}^2 x - (2 + \sqrt{3})\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \geq 0$ $\left[2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi\right]$

647 $(\operatorname{tg}^2 x - 3)(2\operatorname{sen}^2 x - 1) \leq 0$ $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \vee \frac{2}{3}\pi + k\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

648 $(2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x)(\operatorname{tg}^2 x - 1) \leq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$.
$\left[0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \vee \frac{3}{4}\pi \leq x \leq \pi \vee \frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi\right]$

649 $\operatorname{tg} x(2\cos x + 1)(2\operatorname{sen} x - 1) \leq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$.
$\left[0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \vee \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{2}{3}\pi \vee \frac{5}{6}\pi \leq x \leq \pi \vee \frac{4}{3}\pi \leq x < \frac{3}{2}\pi\right]$

650 $(\sqrt{3} - 2\operatorname{sen} x)(2\cos x - 1)(\cos^2 x + 1) \geq 0$ $\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$

651 $(\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x + 1)(\operatorname{cotg}^2 x - 1) \leq 0$ $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

652 $\dfrac{4\operatorname{sen}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x} \geq 0$ $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

653 $\dfrac{\operatorname{sen} x}{4\cos^2 x - 1} \leq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[x = 0 \vee \frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi \vee \pi \leq x < \frac{4}{3}\pi \vee \frac{5}{3}\pi < x \leq 2\pi\right]$

654 $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{2\cos x + 1} \geq 0, \quad \text{con } 0 \leq x \leq 2\pi.$

$\left[\left(\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{2}{3}\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2}\right) \vee \frac{3}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi \vee \left(\frac{4}{3}\pi < x \leq \frac{7}{4}\pi \wedge x \neq \frac{3}{2}\pi\right)\right]$

655 $\dfrac{|\operatorname{sen} x|}{2\cos x - 1} \geq 0$ $\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi\right]$

656 $\dfrac{1 + |\cos x|}{2\operatorname{sen} x - \sqrt{3}} < 0$ $\left[-\frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

657 $|\cos x - 2| < 1$ [impossibile]

658 $\left|\dfrac{2\operatorname{sen} x - 1}{\cos x + \operatorname{sen} x}\right| > 0$ $\left[x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \wedge x \neq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \wedge x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

659 $|\operatorname{cotg}^2 x - 3| \leq 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

660 $|\cos x| \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{con } 0 \leq x \leq 2\pi.$ $\left[0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \vee \frac{3}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi \leq x \leq 2\pi\right]$

661 $|\operatorname{tg} x| \leq \sqrt{3}, \quad \text{con } 0 \leq x \leq 2\pi.$ $\left[0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \vee \frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi \vee \frac{5}{3}\pi \leq x \leq 2\pi\right]$

662 $2|\operatorname{sen}(-x)| \leq \sqrt{2}, \quad \text{con } 0 \leq x \leq 2\pi.$ $\left[0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \vee \frac{3}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi \leq x \leq 2\pi\right]$

663 $2|\cos x| < 1$ $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + k\pi\right]$

664 $\sqrt{\operatorname{sen} x} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\left[2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi\right]$

665 $\sqrt{\sqrt{3} - 2\cos x} \geq 0$ $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right]$

666 $(\cos x + \operatorname{sen} x)\operatorname{tg}\left(\dfrac{3}{2}x - \pi\right) > 0$ $\left[k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi \vee \frac{2}{3}\pi + k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

667 $2 - 3\operatorname{sen}^2 x - \cos x < \cos^2 x$ $\left[-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \wedge x \neq 2k\pi\right]$

668 $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x} \geq 0, \quad \text{con } 0 \leq x \leq 2\pi.$ $\left[0 \leq x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{5}{6}\pi < x \leq \pi \vee \frac{3}{2}\pi < x < \frac{11}{6}\pi\right]$

669 $\cos x + |\operatorname{sen} x| < 0, \quad \text{con } 0 \leq x \leq 2\pi.$ $\left[\frac{3}{4}\pi < x < \frac{5}{4}\pi\right]$

670 $\operatorname{sen} x > \operatorname{sen} 2x, \quad \text{con } 0 \leq x \leq 2\pi.$ $\left[\frac{\pi}{3} < x < \pi \vee \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi\right]$

671 $|1 - \operatorname{tg} x| \leq 1$ $[k\pi \leq x \leq \operatorname{arctg} 2 + k\pi]$

672 $\dfrac{4\cos^2 \frac{x}{2} - 2 - \cos x - 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 x} \geq 0, \quad \text{con } 0 \leq x \leq 2\pi.$ $\left[0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \vee \frac{5}{3}\pi \leq x \leq 2\pi\right]$

673 $(\operatorname{sen} x + 1)^2 + 2\operatorname{sen} x < \operatorname{sen} x(2 + \operatorname{sen} x)$ $\left[\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right]$

674 $2\operatorname{sen}^2 x + 3\sqrt{2}\operatorname{sen} x < 4, \quad \text{con } 0 \leq x \leq 2\pi.$ $\left[0 \leq x < \frac{\pi}{4} \vee \frac{3}{4}\pi < x \leq 2\pi\right]$

675 $-\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos^2 x}} \leq 0$ $\left[k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

676 $2\left|\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\right| + \operatorname{sen} x < \sqrt{3}\cos x$ [impossibile]

677 $\sqrt{3}\,\text{sen}^2 x + 4\,\text{sen}\,x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x \leq 0$ $\left[\frac{2}{3}\pi + k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + k\pi\right]$

678 $\text{tg}\,x \cdot (1 - \cos^2 x) \geq 0$ $\left[k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

679 $\left|\frac{1}{\text{cotg}\,x}\right| > \sqrt{3}$ $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

680 $\frac{2|\cos x| - 1}{2\text{tg}\,x} > 0$ $\left[k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi \vee \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + k\pi\right]$

681 $\frac{2\cos x - 1}{\text{tg}\,x - \sqrt{3}} \leq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[\left(0 \leq x < \frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{\pi}{3}\right) \vee \frac{4}{3}\pi < x < \frac{3}{2}\pi \vee \frac{5}{3}\pi \leq x \leq 2\pi\right]$

682 $\frac{(\text{tg}\,x - \text{tg}^2 x)\cos x}{\text{sen}\,2x - \cos x} \geq 0$ in $[0; 2\pi]$. $\left[\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{4} \vee \frac{5}{6}\pi < x \leq \pi \vee \left(\frac{5}{4}\pi \leq x \leq 2\pi \wedge x \neq \frac{3}{2}\pi\right)\right]$

683 $\cos x(3\,\text{tg}^2 x - 1)(\cos^2 x + \cos x) \geq 0$ $\left[\left(\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \vee x = \pi + 2k\pi\right]$

684 $(\text{cotg}^2 x - \sqrt{3}\,\text{cotg}\,x)(\text{tg}^2 x - \text{tg}\,x)\cos x \geq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$.
$\left[\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \vee \pi < x \leq \frac{7}{6}\pi \vee \left(\frac{5}{4}\pi \leq x < 2\pi \wedge x \neq \frac{3}{2}\pi\right)\right]$

685 $\frac{3\,\text{sen}\,x - \sqrt{3}\cos x}{2\cos x + 1} \leq 0$ $\left[-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x \leq \frac{7}{6}\pi + 2k\pi\right]$

686 $\frac{\text{cotg}^2 x - 3}{2\cos^2 x - 1} \geq 0$ $\left[\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \wedge x \neq k\pi\right) \vee \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

687 $\frac{\text{sen}\,x \cdot (2\cos x + 1)}{\text{sen}\,x + \cos x} \leq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[x = 0 \vee \frac{2}{3}\pi \leq x < \frac{3}{4}\pi \vee \pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi \vee \frac{7}{4}\pi < x \leq 2\pi\right]$

688 $\frac{(\text{tg}^2 x - 1)(\text{cotg}^2 x - 3)}{\text{sen}\,x - \cos x} \geq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$.
$\left[0 < x \leq \frac{\pi}{6} \vee \frac{3}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi \vee \left(\frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{7}{4}\pi \wedge x \neq \frac{5}{4}\pi \wedge x \neq \frac{3}{2}\pi\right) \vee \frac{11}{6}\pi \leq x < 2\pi\right]$

689 $\left|\text{tg}^2 x - 1\right| - 2\,\text{tg}^2 x < 0$ $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

690 $\sqrt{1 + 2\cos x} > 1 - \cos x$ $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

691 $2\,\text{tg}\,x + \sqrt{\text{tg}^2 x - 1} \leq 1 + \text{tg}\,x$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

692 $\left|5 - \sqrt{\text{cotg}\,x}\right| \leq 4$ $\left[\text{arccotg}\,81 + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

693 $\frac{\text{sen}\,x - \text{tg}\,x}{\text{sen}\,x(\text{tg}\,x - 1)} \leq 0$ $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge x \neq \pi + 2k\pi\right]$

694 $\frac{\text{sen}\,x(2 - \cos x)}{\text{tg}\,x} \leq 1$ $\left[x \neq k\frac{\pi}{2}\right]$

695 $\frac{2\,\text{sen}\,x\cos x + \cos x + 1 + 2\,\text{sen}\,x}{3\cos x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,x} < 0$
$\left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee \frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, x \neq \pi + 2k\pi\right]$

696 $\frac{1 - 2\cos^2 x}{|\cos x|} > \text{tg}\,x$ $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \vee \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right]$

697 $\frac{\text{sen}\,2x(4\cos^2 x - 1)}{\text{sen}\,x} \geq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[0 < x \leq \frac{\pi}{3} \vee \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \vee \frac{4}{3}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi \vee \frac{5}{3}\pi \leq x < 2\pi\right]$

698 $\dfrac{\cos x + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x} \geq -1$ $\left[x \neq k\dfrac{\pi}{2}\right]$

699 $\dfrac{\sqrt{2}}{\cos x} + \dfrac{4\cos x}{\operatorname{sen}^2 2x} + \dfrac{\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2 x} < 0$ $\left[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi \wedge x \neq \pi + 2k\pi\right]$

700 $-3\operatorname{sen}^2 x\,(1 - \sec^2 x) \leq \sqrt{3}\,(2\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\,\cos^2 x)$ $\left[-\dfrac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{3} + k\pi\right]$

701 $\sqrt{3}\cos^2 x - 3\operatorname{sen} 2x > \sqrt{3}\,(1 - 3\operatorname{sen}^2 x)$ $\left[\dfrac{\pi}{3} + k\pi < x < \pi + k\pi\right]$

702 $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x}} > 0$ $\left[\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

703 $\dfrac{\cos 2x - \operatorname{sen} x}{\sqrt{2}\cos x - 1} \leq 0$ $\left[\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

704 $\sqrt{7\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x + 6\cos^2 x} - 2 \leq 0$ $\left[x = \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

705 $\dfrac{3\operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 3}{\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2} - 1} \geq 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[\dfrac{\pi}{3} \leq x < \dfrac{\pi}{2} \vee \dfrac{5}{6}\pi \leq x \leq \dfrac{4}{3}\pi \vee \dfrac{11}{6}\pi \leq x < 2\pi\right]$

706 $\left|\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\left[k\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\right]$

707 $\dfrac{\sqrt{4\cos^2\dfrac{x}{2} + 8\cos x - 7}}{|2\operatorname{sen}^2 x - 1|} \geq 0$ $\left[-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \wedge x \neq \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$

708 $|\operatorname{sen}^2 3x - \cos^2 3x| - \operatorname{sen} 6x > 0$ $\left[\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{3}{8}\pi + k\dfrac{\pi}{3}\right]$

709 $\sqrt{\cos x + \operatorname{sen} x} - \sqrt{\cos 2x} \geq 0$ $\left[2k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \dfrac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

710 $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcsen}\dfrac{x - 1}{x} > 0$ $[x > 1]$

711 $\dfrac{4\operatorname{arctg} x - \pi}{\operatorname{arcsen}(2 - x)} > 0$ $[1 < x < 2]$

712 $|\operatorname{arcsen} x| < \dfrac{\pi}{4}$ $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

713 $(4\operatorname{arcsen} x - \pi)\arccos x > 0$ $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x < 1\right]$

714 $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{6\operatorname{arcsen} x + \pi} > 0$ $\left[-1 \leq x < -\dfrac{1}{2} \vee 0 < x \leq 1\right]$

715 $\dfrac{\operatorname{arctg}(x - 3)}{x^2 - 3x} \geq 0$ $[0 < x < 3 \vee x > 3]$

716 Data la disequazione $\sqrt{2|\operatorname{sen} x|} \geq 1$, determina:

a) la periodicità delle soluzioni;

b) le soluzioni relative a un periodo;

c) quali tra le seguenti disequazioni sono equivalenti alla precedente:

$2|\operatorname{sen} x| \geq 1$; $\sqrt{2\operatorname{sen} x} \geq 1$; $\dfrac{1}{\sqrt{2|\operatorname{sen} x|}} \leq 1$.

$\left[\text{a) } \pi;\ \text{b) } \dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{5}{6}\pi;\ \text{c) prima e terza}\right]$

I sistemi di disequazioni goniometriche

717 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \cos x \cdot (2\,\mathrm{sen}^2 x - 1) < 0 \\ \mathrm{cotg}^2 x - 3 \geq 0 \\ 2\,\mathrm{sen}\, x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Dobbiamo risolvere ogni disequazione nell'intervallo tra 0 e 2π e poi scegliere le soluzioni comuni a tutte e tre.

- Risolviamo la prima disequazione.
  Studiamo il segno dei due fattori, ponendoli entrambi maggiori di 0:

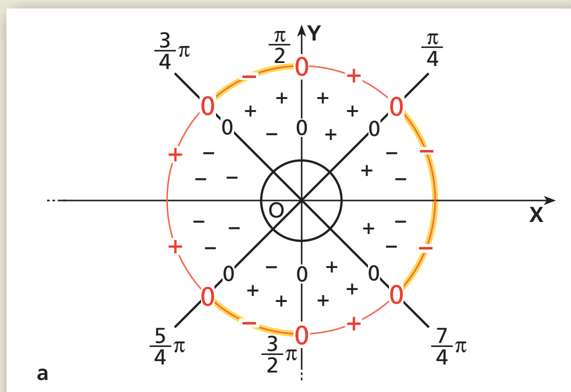
$$\cos x > 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi;$$

$$2\,\mathrm{sen}^2 x - 1 > 0 \rightarrow \mathrm{sen}\, x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \mathrm{sen}\, x > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{per} \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi \vee \frac{5}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi.$$

Rappresentiamo su circonferenze concentriche i segni dei fattori e del prodotto (figura *a*).

La prima disequazione del sistema è verificata, fra 0 e 2π, se:

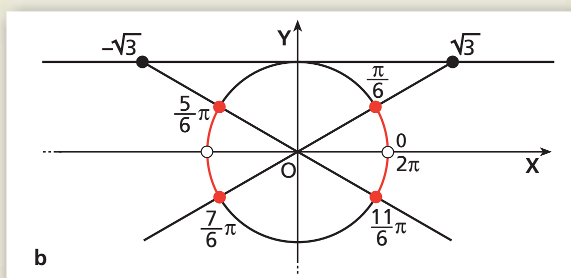
$$0 \leq x < \frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{4}\pi \vee$$
$$\vee \frac{5}{4}\pi < x < \frac{3}{2}\pi \vee \frac{7}{4}\pi < x \leq 2\pi.$$



a

- Risolviamo la seconda disequazione (figura *b*):

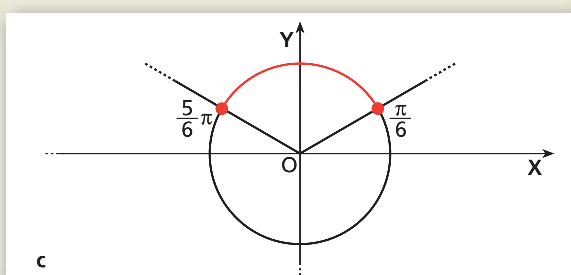
$$\mathrm{cotg}^2 x - 3 \geq 0 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \mathrm{cotg}\, x \leq -\sqrt{3} \vee \mathrm{cotg}\, x \geq \sqrt{3} \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{6} \vee \frac{5}{6}\pi \leq x < \pi \vee$$
$$\vee \pi < x \leq \frac{7}{6}\pi \vee \frac{11}{6}\pi \leq x < 2\pi.$$



b

- Risolviamo la terza disequazione (figura *c*):

$$2\,\mathrm{sen}\, x - 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{sen}\, x \geq \frac{1}{2} \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi.$$

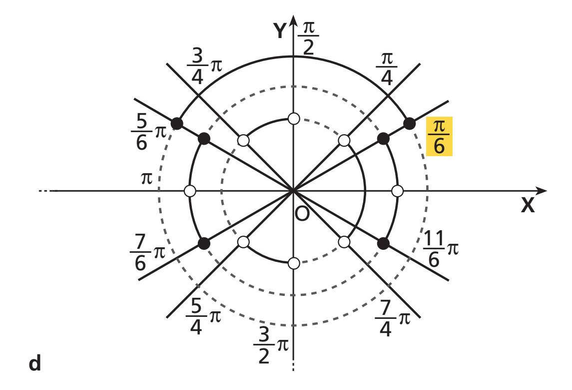


c

Riuniamo i risultati delle tre disequazioni in un grafico formato da tre circonferenze concentriche (figura *d*).

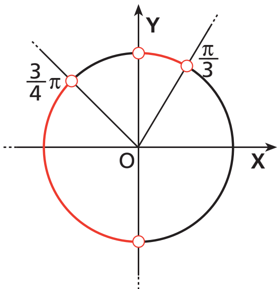
Possiamo osservare dal grafico che, fra 0 e 2π, non ci sono valori in cui sono soddisfatte contemporaneamente tutte e tre le disequazioni, tranne $x = \frac{\pi}{6}$. Pertanto, le soluzioni del sistema sono:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$



d

718 **TEST** Quale dei seguenti sistemi ha per soluzioni quelle rappresentate in figura?



A $\begin{cases} \operatorname{tg} x > -1 \\ \cos x < \frac{1}{2} \end{cases}$

B $\begin{cases} \operatorname{cotg} x < 1 \\ \cos x < \frac{1}{2} \end{cases}$

C $\begin{cases} \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x < 0 \end{cases}$

D $\begin{cases} \cos x \leq 0 \\ \operatorname{tg} x > \sqrt{3} \end{cases}$

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

719 $\begin{cases} \operatorname{sen} x \leq 0 \\ \cos x < 1 \end{cases}$ $[\pi + 2k\pi \leq x < 2\pi + 2k\pi]$

720 $\begin{cases} \operatorname{sen} x > \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} x < 1 \end{cases}$ $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

721 $\begin{cases} 2\cos x + 1 \geq 0 \\ 2\operatorname{sen} x - \sqrt{2} < 0 \end{cases}$ $\left[-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$

722 $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq 1 \\ \cos x < \frac{1}{2} \end{cases}$ $\left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \leq x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

723 $\begin{cases} 2\operatorname{sen} x \leq 1 \\ 2\cos x < \sqrt{3} \end{cases}$ $\left[\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \leq x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right]$

724 $\begin{cases} \cos x < 0 \\ \operatorname{sen} x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\left[\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \leq x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

725 $\begin{cases} 2\operatorname{sen}^2 x - 1 \leq 0 \\ 2\cos x + 1 \geq 0 \end{cases}$ $\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$

726 $\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x - 1 \geq 0 \\ \sqrt{3} + 2\operatorname{sen} x \geq 0 \end{cases}$ con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[\left(\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2}\right) \vee \frac{5}{4}\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi \vee \frac{5}{3}\pi \leq x \leq \frac{7}{4}\pi\right]$

727 $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x - 1 \leq 0 \\ \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \geq 0 \end{cases}$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi\right]$

728 $\begin{cases} 1 - 2\operatorname{sen} x \geq 0 \\ 2\cos x - \sqrt{2} \leq 0 \end{cases}$ $\left[\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right]$

729 $\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x - 3 \geq 0 \\ 2\cos^2 x - 1 \geq 0 \end{cases}$ [impossibile]

730 $\begin{cases} 3\operatorname{tg}^2 x - 1 \leq 0 \\ 3\operatorname{cotg}^2 x - 1 \geq 0 \end{cases}$ $\left[-\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \wedge x \neq k\pi\right]$

731 $\begin{cases} 1 - 2\cos^2 x \geq 0 \\ \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \geq 0 \\ 4\operatorname{sen}^2 x - 3 \geq 0 \end{cases}$ $\left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

732 $\begin{cases} 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \geq 0 \\ 2\cos x - 1 \geq 0 \\ \cos^2 x + \cos x \geq 0 \end{cases}$ con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[x = 0 \vee \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \vee \frac{5}{3}\pi \leq x \leq 2\pi\right]$

733 $\begin{cases} \operatorname{cotg}^2 x - 3 \leq 0 \\ 2\cos^2 x - 1 \leq 0 \\ \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x + 1 \leq 0 \end{cases}$ $\left[x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

734 $\begin{cases} \operatorname{sen} x - \cos x \geq 0 \\ \operatorname{tg}^4 x - 1 \leq 0 \end{cases}$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right]$

735 $\begin{cases} \operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x \leq 0 \\ \cos x(2\operatorname{sen} x + 1) \geq 0 \end{cases}$ $\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

736 $\begin{cases} 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 \leq 0 \\ \sqrt{3}\operatorname{cotg}^2 x - 3\operatorname{cotg} x \leq 0 \end{cases}$ $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi\right]$

737 $\begin{cases} \operatorname{sen} x(2\cos x + 1) \leq 0 \\ \cos x(\operatorname{tg} x + 1) \geq 0 \end{cases}$ con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[x = 0 \vee \frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi \leq x \leq 2\pi\right]$

738 $\begin{cases} \sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x \geq 0 \\ 4\operatorname{sen}^2 x - 3 \leq 0 \\ 2\cos x + 1 \geq 0 \end{cases}$ $\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$

739 $\begin{cases}(2\,\text{sen}\,x-1)(2\cos x+3)\geq 0\\ \text{tg}\,x\cdot(\text{cotg}\,x-\sqrt{3})\leq 0\end{cases}$ $\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq x<\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$

740 $\begin{cases}\text{sen}\,x\cdot(\cos^2 x+2\cos x)\geq 0\\ \dfrac{\cos x+1}{\text{tg}\,x-1}\leq 0\end{cases}$ $\left[k\pi\leq x<\frac{\pi}{4}+k\pi\right]$

741 $\begin{cases}\text{sen}\,x-\cos x+1\geq 0\\ \text{cotg}^4 x-9\geq 0\end{cases}$ con $0\leq x\leq 2\pi$. $\left[0<x\leq\frac{\pi}{6}\vee\left(\frac{5}{6}\pi\leq x\leq\frac{7}{6}\pi\wedge x\neq\pi\right)\right]$

742 $\begin{cases}\text{sen}\,x+\cos x-1\geq 0\\ \dfrac{4\,\text{sen}^2 x-3}{\cos^2 x}\geq 0\end{cases}$ $\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq x<\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$

743 $\begin{cases}\text{cotg}^2 x-3\leq 0\\ 2\cos^2 x-1\leq 0\\ \text{sen}^2 x+2\,\text{sen}\,x+1\leq 0\end{cases}$ $\left[x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right]$

744 $\begin{cases}2\cos^2 x+\cos x-1\geq 0\\ 2\,\text{sen}\,x+1\geq 0\end{cases}$ $\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{3}+2k\pi\vee x=\pi+2k\pi\right]$

745 $\begin{cases}(2\,\text{sen}^2 x-1)(\cos^2 x+\cos x)\leq 0\\ \cos x\cdot(\text{cotg}\,x+1)\leq 0\end{cases}$ con $0\leq x\leq 2\pi$. $\left[\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3}{4}\pi\vee\frac{5}{4}\pi\leq x\leq\frac{3}{2}\pi\vee\frac{7}{4}\pi\leq x<2\pi\right]$

746 $\begin{cases}4\,\text{sen}^2 x-1>0\\ |\,\text{tg}\,x\,|\geq 1\end{cases}$ $\left[\frac{\pi}{4}+k\pi\leq x\leq\frac{3}{4}\pi+k\pi\wedge x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$

747 $\begin{cases}\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-1>\text{sen}\,2x\\ 2\sqrt{\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+x\right)}<\sqrt{2}\end{cases}$ $\left[2k\pi<x<\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee\frac{5}{6}\pi+2k\pi<x<\pi+2k\pi\right]$

748 $\begin{cases}2\,\text{sen}^2 x+2(2-\sqrt{3})\,\text{sen}\,\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\sqrt{3}>0\\ \cos^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}\,x\geq 0\end{cases}$ $\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{2}{3}\pi+2k\pi\right]$

749 $\begin{cases}\text{tg}^2 x+(1-\sqrt{3})\,\text{tg}\,x-\sqrt{3}<0\\ \dfrac{\cos x+\text{sen}\,x}{\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}\geq 0\end{cases}$ con $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}\pi$. $\left[-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\vee\frac{3}{4}\pi<x<\frac{5}{4}\pi\right]$

750 $\begin{cases}\dfrac{1-\text{sen}\,x}{\cos x}>\sqrt{3}\\ \text{sen}\,2x+\text{sen}\,x\geq 0\end{cases}$ [impossibile]

751 $\begin{cases}\sqrt{3}\,\text{sen}\,x>\text{sen}\,2x\\ \left|\text{tg}\dfrac{x}{2}\right|<1\\ \sqrt{1-\cos x}>-1\end{cases}$ $\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi\vee\frac{11}{6}\pi+2k\pi<x<2\pi+2k\pi\right]$

752 $\begin{cases} \sqrt{2}\,\text{sen}\,(\pi - x) > \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) \\ \dfrac{|\,\text{sen}\,x\,| - 1}{1 - \text{tg}\left(\pi + \dfrac{x}{2}\right)} > 0 \end{cases}$ $\left[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi\right]$

753 $\begin{cases} 2|\,\text{sen}\,(\pi - x)\,| < \sqrt{3} \\ \sqrt{3\,\text{cotg}^2 x - 1} < \sqrt{3}\,\text{cotg}\,x \end{cases}$ $\left[k\pi < x < \dfrac{\pi}{3} + k\pi\right]$

754 $\begin{cases} \text{cotg}\dfrac{x}{2}(1 + \cos x) < \text{sen}\,x \\ 2\,\text{cosec}\,2x < \sqrt{2} \end{cases}$ $\left[\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi\right]$

755 $\begin{cases} |\,\text{sen}\,x - \cos x\,| > 0 \\ \text{tg}\dfrac{x}{2} - 2 < -2\cos x \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi \vee \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\right) \wedge x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right]$

756 $\begin{cases} \sqrt{\text{sen}\dfrac{x}{2} - \cos x} > 0 \\ 3\,\text{sen}\,x - 1 - \cos(-2x) < 0 \end{cases}$ con $0 \leq x \leq 2\pi$. $\left[\dfrac{5}{6}\pi < x < \dfrac{5}{3}\pi\right]$

757 $\begin{cases} \dfrac{\cos^2 x + 3}{\cos 2x + 2} - \dfrac{\cos 2x}{3 - \cos^2 x} \geq \dfrac{5}{6} \\ |\cos x - \text{sen}\,x\,| < \sqrt{2} \end{cases}$ $\left[x \neq \dfrac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

Applicazioni alle funzioni goniometriche

Il dominio

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

758 $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen}\,4x}$ $\left[x \neq k\dfrac{\pi}{4}\right]$

760 $f(x) = \sqrt{\text{tg}\,x}$ $\left[k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right]$

759 $f(x) = \dfrac{\cos(3x - \pi)}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}$ $\left[x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\right]$

761 $f(x) = \dfrac{1}{2\cos^2 x - 1}$ $\left[x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\right]$

762 $f(x) = \sqrt{2\cos x + 1}$ $\left[2k\pi \leq x \leq \dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi \vee \dfrac{4}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi\right]$

763 $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,5x + \cos 5x}{2\cos x - \sqrt{3}}$ $\left[x \neq \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \wedge x \neq \dfrac{11}{6}\pi + 2k\pi\right]$

764 $f(x) = \sqrt{2\cos x(\cos x - 1)}$ $\left[x = 2k\pi \vee \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

765 $f(x) = \dfrac{\text{cotg}\,x}{4\,\text{sen}\,x\cos x - 1}$ $\left[x \neq k\pi \wedge x \neq \dfrac{\pi}{12} + k\pi \wedge x \neq \dfrac{5}{12}\pi + k\pi\right]$

766 $f(x) = \dfrac{-2\cos x - \cos^2 x}{2\,\text{sen}^2 x - 3\cos x + 3}$ $[x \neq 2k\pi]$

767 $f(x) = \sqrt{\cos x - \text{sen}\,x}$ $\left[2k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \dfrac{5}{4}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi\right]$

768 $f(x) = \sqrt{\cos x + \operatorname{sen} x} + \sqrt{\cos x}$ $\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

769 $f(x) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{sen} 2x}}$ $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \pi + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

770 $f(x) = \sqrt{\frac{\cos 3x + \cos 5x}{\cos x}}$ $\left[-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

771 $f(x) = \sqrt{\frac{|\operatorname{sen} x|}{\operatorname{sen} 2x - \cos x}}$ $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

772 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x - \cos x - 1}}$ $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < (2k+1)\pi\right]$

773 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x - 2\cos x}}$ $[\operatorname{arctg} 2 + 2k\pi < x < \operatorname{arctg} 2 + (2k+1)\pi]$

774 $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\frac{\operatorname{sen} x + 1}{2\cos x - 1}}$ $\left[2k\pi \leq x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

775 $f(x) = \sqrt{2\operatorname{sen} x - 1} + \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

776 $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{|\cos x| - |\operatorname{sen} x|}$ $\left[x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right]$

777 $f(x) = \frac{\sqrt{\cos x + \operatorname{sen} x - 1}}{\operatorname{cotg} x}$ $\left[2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

778 $f(x) = \sqrt{\cos x + \operatorname{sen}\frac{x}{2}}$ $\left[-\frac{\pi}{3} + 4k\pi \leq x \leq \frac{7}{3}\pi + 4k\pi\right]$

779 Determina il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{1 - 2\cos x} + \frac{1}{\sqrt{a \operatorname{sen} x}}$ al variare di a in $\mathbb{R}$.

$\left[\text{se } a > 0, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x < (2k+1)\pi; \text{ se } a = 0, \nexists\, x; \text{ se } a < 0, (2k+1)\pi < x \leq \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right]$

780 Trova per quali valori di a il dominio della funzione $y = \sqrt{\cos x - 2a}$:

a) è un insieme non vuoto; b) è l'intervallo $\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$. $\left[\text{a) } a \leq \frac{1}{2}; \text{ b) } a = \frac{1}{4}\right]$

781 Data la funzione $y = \sqrt{a - 4 + \operatorname{sen} x}$, determina a in modo che il dominio sia:

a) un insieme non vuoto; b) $\mathbb{R}$. [a) $a \geq 3$; b) $a \geq 5$]

Il grafico

782 Traccia i grafici delle funzioni $y = \operatorname{sen} x + \cos x$ e $y = \cos 2x$ e determina i loro punti di intersezione sia graficamente che algebricamente.

$\left[x = 2k\pi \vee x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

783 Rappresenta graficamente le funzioni $f(x) = 2|\cos x|$ e $g(x) = 2(1 - \operatorname{sen} x)$ e trova per quali valori di x si ha $f(x) > g(x)$.

$\left[2k\pi < x < \pi + 2k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

784 Data la funzione $f(x) = |\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x|$, trova per quali valori di x si ha $f(x) \geq 1$. Rappresenta graficamente $f(x)$ e verifica il risultato trovato.

$\left[-\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

785 Quanti punti di intersezione ha il grafico della funzione $y = \operatorname{sen} 2x - \cos x$ con l'asse x nell'intervallo $[0; \pi]$?

[tre]

786 Determina i punti di intersezione del grafico della funzione $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \cos^2 x$ con la retta $y = -1$ nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$\left[x = -\frac{\pi}{4}, x = 0\right]$

787 Disegna i grafici delle funzioni $y = -\frac{1}{4}\operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{sen}^2 x$, indicandone dominio, codominio, periodo, e trova i loro punti di intersezione sia graficamente che algebricamente.

$\left[x = k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{7}{12}\pi + k\pi\right]$

788 Il grafico γ della funzione $y = a\operatorname{sen}^2 x + b\operatorname{sen} x \cos x - \sqrt{2}$ passa per i punti $\left(-\frac{\pi}{4}; -\sqrt{2}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{2}\right)$.

a) Calcola a e b e trova in quali punti γ attraversa l'asse x nell'intervallo $[0; \pi]$.

b) Trasforma l'equazione di γ in modo da avere una sola funzione goniometrica e rappresentala in un periodo.

$\left[\text{a) } a = b = 2\sqrt{2}, \left(\frac{\pi}{8}; 0\right), \left(\frac{5}{8}\pi; 0\right); \text{ b) } y = 2\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

789 Trova i valori di a, b e c in modo che il grafico della funzione $f(x) = a\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + b\cos x + c$ passi per l'origine O e per i punti $\left(\frac{2}{3}\pi; 3\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{3}; -1\right)$. Calcola poi i punti di intersezione con l'asse x nell'intervallo $[-\pi; \pi]$.

$\left[a = 2, b = -2, c = 1; x = -\frac{2}{3}\pi, x = 0\right]$

6. LE EQUAZIONI GONIOMETRICHE PARAMETRICHE

▶ Teoria a pag. 781

Discuti, individuando graficamente il numero delle soluzioni delle seguenti equazioni parametriche nell'intervallo indicato, al variare del parametro in $\mathbb{R}$.

Equazioni elementari

790 $\begin{cases} \operatorname{sen} x = 2k - 1 \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{\sqrt{3}+2}{4}\right]$

791 $\begin{cases} 2\operatorname{tg} x - 2a - 1 = 0 \\ -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } a > -\frac{3}{2}\right]$

792 $\begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{k+3}{2} \\ \frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } -3 - \sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3} - 3]$

793 $\begin{cases}(2k+3)\cos x = k-1\\ 0 \le x \le \frac{5}{6}\pi\end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } k \le -4 \vee k \ge \frac{5\sqrt{3}-11}{4}\right]$

794 $\begin{cases}4\cos 2x - k + 2 = 0\\ 0 \le x \le \frac{2}{3}\pi\end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } 0 < k \le 6; 2 \text{ sol. per } -2 \le k \le 0]$

795 $\begin{cases}k \operatorname{sen} x \cos x = 2\\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}\end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } k \ge 4]$

796 $\begin{cases}\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2k + 1 = 0\\ 0 < x \le \frac{5}{4}\pi\end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } 0 \le k \le \frac{2+\sqrt{2}}{4}; 2 \text{ sol. per } \frac{2+\sqrt{2}}{4} < k \le 1\right]$

797 $\begin{cases}k \operatorname{sen}\frac{x}{2} - 2k + 1 = 0\\ -\pi \le x < \frac{5}{3}\pi\end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } \frac{1}{3} \le k \le \frac{2}{3}; 2 \text{ sol. per } \frac{2}{3} < k \le 1\right]$

798 $\begin{cases}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = k - 3\\ -\frac{\pi}{12} \le x \le \frac{\pi}{2}\end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } 2 \le k \le 3 + \sqrt{3}]$

799 $\begin{cases}\frac{k}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = k - 2\\ \frac{\pi}{6} < x \le \frac{5}{6}\pi\end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } \frac{8}{5} < k < 4; 2 \text{ sol. per } \frac{4}{3} \le k \le \frac{8}{5}\right]$

800 $\begin{cases}k \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = k - \frac{1}{2}\\ -\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6}\end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } k \ge 1]$

Equazioni di secondo grado

801 $\begin{cases}k \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1 - 2k = 0\\ 0 \le x < \frac{\pi}{2}\end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } k < 0 \vee k \ge \frac{1}{2}\right]$

802 $\begin{cases}4(\cos^2 x + \operatorname{sen} x) = k - 1\\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\end{cases}$ $[2 \text{ sol. per } 5 \le k \le 6]$

803 $\begin{cases}(2k+1)\operatorname{sen}^2 x + 2\cos x = 2k\\ 0 \le x \le \frac{2}{3}\pi\end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -\frac{1}{2} \le k < 1; 2 \text{ sol. per } k \ge 1\right]$

804 $\begin{cases}\operatorname{sen} x + 2\operatorname{cotg} x = \frac{2k}{\operatorname{sen} x}\\ 0 < x \le \frac{\pi}{2}\end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } \frac{1}{2} \le k < 1\right]$

805 $\begin{cases}\cos^2 x + k \operatorname{sen} x + k = 0\\ 0 \le x \le \frac{\pi}{3}\end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -1 \le k \le \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right]$

806 $\begin{cases} \operatorname{tg} 3x + k \operatorname{cotg} 3x = 2 \\ \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } k < 0]$

807 $\begin{cases} (k+1)\cos^2 x + \cos x = 2k \\ -\frac{\pi}{3} < x \leq \pi \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } 0 < k \leq \frac{3}{7}; 2 \text{ sol. per } \frac{-2+\sqrt{2}}{4} \leq k \leq 0 \vee \frac{3}{7} < k \leq 2\right]$

808 $\begin{cases} \frac{1}{\operatorname{sen} x} + k \operatorname{sen} x = k + 2 \\ -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } k > -\frac{8}{3}; 2 \text{ sol. per } k \leq -\frac{8}{3}\right]$

809 $\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x - (k-1)\operatorname{tg} x + 1 = k \\ -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $[2 \text{ sol. per } k \geq 1]$

810 $\begin{cases} 4\cos^2 x - 4k\cos x = 2k - 1 \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } \frac{1}{2} < k \leq \frac{5}{6}; 2 \text{ sol. per } -1+\sqrt{2} \leq k \leq \frac{1}{2}\right]$

811 $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + k\cos x - 1 = 0 \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } k = 1; 2 \text{ sol. per } 0 < k < 1]$

812 $\begin{cases} \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2k \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 2 + k = 0 \\ \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -1 < k \leq \frac{2\sqrt{3}+1}{11}\right]$

813 $\begin{cases} \cos 2x + k\operatorname{sen}^2 x + \cos\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) = k - 1 \\ \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } k > 2 + \sqrt{2}]$

Equazioni lineari e omogenee

814 $\begin{cases} \operatorname{sen} x - \cos x = k - 2 \\ 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } 1 < k \leq 2]$

815 $\begin{cases} 2\operatorname{sen} x + 2\sqrt{3}\cos x = k \\ -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } 0 < k \leq 2; 2 \text{ sol. per } 2 < k \leq 4]$

816 $\begin{cases} 2\cos x - k\operatorname{sen} x + 1 = 0 \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } k > 1]$

817 $\begin{cases} 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos x = 2k \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq k < \frac{\sqrt{3}}{2}; 2 \text{ sol. per } \frac{\sqrt{3}}{2} \leq k \leq \frac{\sqrt{7}}{2}\right]$

818 $\begin{cases} \cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - k\operatorname{sen} x + 2 - 4k = 0 \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } \frac{1}{3} \leq k < \frac{1}{2}; 2 \text{ sol. per } \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{5}\right]$

819 $\begin{cases} k \operatorname{sen} x - 1 + \cos x = k \\ -\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -(2+\sqrt{3}) \le k < \dfrac{\sqrt{3}-2}{3}; 2 \text{ sol. per } \dfrac{\sqrt{3}-2}{3} \le k \le 0\right]$

820 $\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x = k - 2 \\ 0 < x < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ $\left[2 \text{ sol. per } 3 < k \le \dfrac{5+\sqrt{2}}{2}\right]$

821 $\begin{cases} \cos(x + 60°) - k \operatorname{sen} x = 2k \\ 0° < x < 210° \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } 0 \le k < \dfrac{1}{4}; 2 \text{ sol. per } -\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6} \le k < 0\right]$

822 $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x - k = k \operatorname{sen} x \cos x \\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } 0 < k < 1]$

823 $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x + 4k \cos x \operatorname{sen} x - k = 0 \\ 0 < x \le \dfrac{3}{4}\pi \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } -1 \le k < 0; 2 \text{ sol. per } k < -1 \vee k \ge 0]$

824 $\begin{cases} k \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 2 \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \\ -\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } k > \sqrt{2} \vee k \le 0]$

825 $\begin{cases} 2k \operatorname{sen}^2 x + 2k + 1 = 4 \operatorname{sen} x \cos x + 2k \cos^2 x \\ \dfrac{\pi}{12} < x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -\dfrac{1}{4} \le k \le 0; 2 \text{ sol. per } 0 < k \le \dfrac{3}{4}\right]$

826 $\begin{cases} 4 \operatorname{sen} x \cos x = 2k + 1 + 4k \cos^2 x \\ -\dfrac{\pi}{4} < x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -\dfrac{3}{4} < k < -\dfrac{1}{2}; 2 \text{ sol. per } -\dfrac{1}{2} \le k \le \dfrac{-2+\sqrt{13}}{6}\right]$

827 Utilizzando opportuni grafici, determina il numero delle soluzioni delle equazioni:

$$\operatorname{arcsen}\frac{x}{2} = \operatorname{sen}(\pi x); \qquad \operatorname{arcsen}\frac{x}{2} = \cos(\pi x).$$

a) Quale delle due equazioni ha come soluzione un numero intero?

b) Determina algebricamente i punti di intersezione dei grafici di $y = \operatorname{sen} \pi x$ e $y = \cos \pi x$.

c) Risolvi sia graficamente che algebricamente la disequazione $\operatorname{sen} \pi x > \cos \pi x$ nel dominio della funzione $y = \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{2}$.

$\left[\text{a) 3 sol. per ciascuna equazione, la prima: } x = 0; \text{ b) } \dfrac{1}{4} + k; \text{ c) } -\dfrac{7}{4} < x < -\dfrac{3}{4} \vee \dfrac{1}{4} < x < \dfrac{5}{4}\right]$

828 a) Trova per quali valori di x vale l'identità: $\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ e rappresenta il grafico della funzione $y = \operatorname{sen}(\arccos x)$.

b) Individua le equazioni della trasformazione geometrica che applicata alla funzione $y = \operatorname{sen} x$ fanno ottenere la funzione $f(x) = \operatorname{sen} \pi(x + 1) + |k|$, con $k \in \mathbb{R}$.

c) Studia il grafico di $f(x)$ nell'intervallo $[-1; 1]$ al variare di k e, in particolare, rappresenta i grafici relativi a $k = 0$ e $k = 1$.

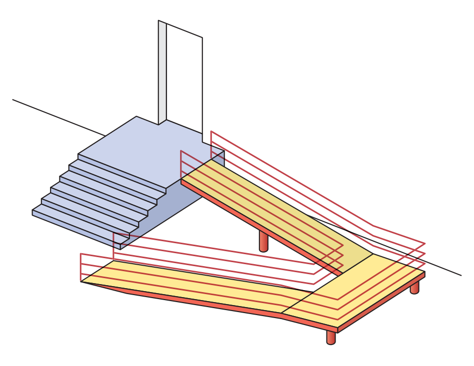
d) Determina graficamente per quale valore di k l'equazione: $\operatorname{sen}(\arccos x) = \operatorname{sen} \pi(x + 1) + |k|$ ha tre soluzioni.

$\left[\text{a) } -1 \le x \le 1; \text{ b) } \begin{cases} x' = \dfrac{x}{\pi} - 1 \\ y' = y + |k| \end{cases}; \text{ d) nessun valore di } k\right]$

REALTÀ E MODELLI

1 **La rampa di accesso**

Per accedere a un edificio pubblico ci sono 6 gradini alti 16 cm e profondi 30 cm; è necessario costruire una rampa di accesso per carrozzine. La normativa prevede che la massima pendenza (ovvero il rapporto tra lo spostamento verticale e quello orizzontale) delle rampe sia dell'8%.



- Qual è il massimo angolo che una rampa può formare con l'orizzontale?
- Lo spazio disponibile di fronte alla base della scala è di 260 cm. Una rampa che costeggia la scala occupando tutto lo spazio a essa antistante è a norma?
- Lungo la parete dell'edificio di fianco alla scala si può costruire una rampa doppia, come in figura (ciascuna delle due rampe si può sviluppare, in orizzontale, per 650 cm). In questo modo risulta a norma? Di quanto risulta inclinata?

(**SUGGERIMENTO** In un triangolo ABC rettangolo in B, si ha $\overline{AB} = \overline{BC} \cdot \operatorname{tg} A\widehat{C}B$.)

2 **Il gioco del calcio**

In una partita di calcio amatoriale, un giocatore colpisce il pallone imprimendogli una velocità v_0 a 47° rispetto all'orizzontale; dopo 3 secondi il pallone raggiunge l'altezza di circa 4,5 metri.

- Scrivi la funzione che esprime la traiettoria del pallone e qual è l'altezza massima che può raggiungere.
- Se il pallone viene colpito con una velocità iniziale di circa 27,2 m/s e dopo 3 s raggiunge l'altezza di 14,5 m, qual è l'angolo che il vettore velocità iniziale forma con l'orizzontale?
- Se con i dati precedenti il pallone finisce fuori campo, di quanto dovrebbe essere l'angolo impresso alla palla da un giocatore posto a metà campo affinché il pallone ricada dentro il campo? (Lunghezza standard del campo = 105 m.)

(**SUGGERIMENTO** In un triangolo ABC rettangolo in B, si ha $\overline{AB} = \overline{AC} \cdot \operatorname{sen} A\widehat{C}B$ e $\overline{BC} = \overline{AC} \cdot \cos A\widehat{C}B$.)

3 **La galleria**

Un autocarro transita, sulla sua corsia di marcia, attraverso una galleria di sezione semicircolare di raggio 6 m.

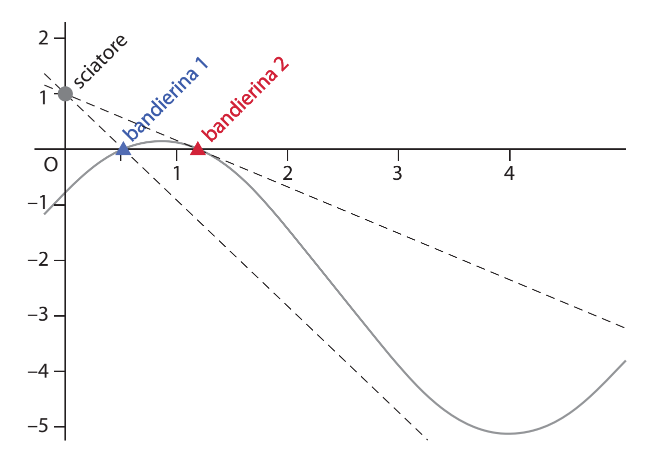
- Determina l'area di ingombro massima che l'autocarro può avere (intesa come l'area della sezione trasversale del veicolo).

(**SUGGERIMENTO** Ricorda le formule del triangolo rettangolo date nel problema precedente.)

4 **La pista di sci**

Nella prima parte di un percorso di slalom alcune bandierine sono posizionate lungo la traiettoria come mostrato in figura.
Supponendo che la curva in figura abbia equazione $y = 2\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x - \dfrac{5}{2}$ e che lo sciatore si trovi in $A(0; 1)$, determina:

- la posizione delle bandierine;
- l'equazione della traiettoria rettilinea da seguire per passare all'esterno della prima bandierina;
- le equazioni delle possibili traiettorie rettilinee per passare tra la prima e la seconda bandierina.



VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: www.zanichellitest.it

1 Per una sola delle seguenti equazioni, le soluzioni indicate sono quelle corrette. Quale?

A $\operatorname{sen} x = -1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3}{2}\pi + k\pi$

B $6 \operatorname{sen} 6x = 6 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$

C $\cos 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

D $\operatorname{arctg} x = 1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

E $\operatorname{tg} 2x = 4\pi \quad \rightarrow \quad x = 2\pi + k\pi$

2 Indica quale delle seguenti equazioni ha come soluzione $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

A $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}$.

B $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C $\operatorname{tg} x = 1$.

D $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

E $\operatorname{cotg} x = -1$.

3 Quale fra le seguenti disequazioni è verificata per ogni x dell'insieme $\mathbb{R}$?

A $|\operatorname{sen} x| > 0$

B $\cos^2 x > 1$

C $\operatorname{sen} x + \pi > 0$

D $|-\cos x| \leq 0$

E $2 \operatorname{tg}^2 x > 0$

4 Una sola delle seguenti disequazioni ha come soluzioni $0 < x < \frac{2}{3}\pi \vee \pi < x < \frac{4}{3}\pi$ in $[0; 2\pi]$. Quale?

A $2 \cos x + 1 > 0$

B $\frac{\operatorname{sen} x}{2 \cos x + 1} > 0$

C $\frac{\operatorname{sen} x}{2 \cos x + 1} \geq 0$

D $\operatorname{tg}^2 x - 3 > 0$

E $\frac{2 \operatorname{sen} x + 1}{\cos x} > 0$

5 L'insieme $A = \left\{x \,|\, x \in \left]\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\right[\right\}$ verifica una sola delle seguenti disequazioni. Quale?

A $2 \operatorname{sen}^2 x - 1 < 0$

B $2 \cos^2 x - 1 < 0$

C $\operatorname{cotg}^2 x - 1 > 0$

D $\operatorname{tg}^2 x - 1 > 0$

E $2 \cos^2 x - 1 > 0$

6 L'equazione $\sqrt{4 \cos x} = \sqrt{2\sqrt{2}}$ non ammette come soluzione:

A $x = -\frac{\pi}{4}$.

B $x = \frac{\pi}{4}$.

C $x = \frac{3}{4}\pi$.

D $x = \frac{7}{4}\pi$.

E $x = \frac{9}{4}\pi$.

7 Una sola delle seguenti proposizioni è *falsa*. Quale?

A La soluzione dell'equazione $\operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{2}$ è $x = 1$.

B $|\operatorname{sen} x| + \operatorname{sen} x = 2$ solo per $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

C $|\cos x| < 1$ per $0 < x < 2\pi \wedge x \neq \pi$, nell'intervallo $[0; 2\pi]$.

D $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x} = 1$ solo per $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

E Nell'intervallo $[0; 2\pi]$,
$\begin{cases} \operatorname{sen} x < 1 \\ \cos x \leq 0 \end{cases}$ per $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3}{2}\pi$.

8 Considera la disequazione:

$$\sqrt{2 \operatorname{sen} x} > \frac{1}{\sqrt{2 \cos x}}, \text{ con } x \in [0; 2\pi].$$

Quale fra le seguenti proposizioni è *vera*?

A L'insieme delle soluzioni è $\left]\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right[$.

B L'insieme delle soluzioni è $\left]\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right[$.

C L'insieme delle soluzioni è: $\left]\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{13\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}\right[$.

D La disequazione non ha soluzioni.

E Nessuna delle proposizioni precedenti è vera.

QUESITI

9 Indica quale tra le seguenti equazioni ammette soluzione e per ciascuna determina le eventuali soluzioni.

a) $\operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2}$; b) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = x$; c) $\operatorname{sen} x = \frac{\pi}{2}$; d) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = x$; e) $\operatorname{arcsen} x = x$.

[a) $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2} + k\pi$; b) impossibile; c) impossibile; d) 1; e) 0]

10 Determina, quando possibile, le soluzioni delle seguenti disequazioni.

a) $\arccos x < \frac{\pi}{2}$; b) $\arccos x < 0$; c) $\operatorname{arcsen} x < \frac{\pi}{2}$; d) $\arccos x > \frac{\pi}{4}$; e) $\operatorname{arcsen} x > 0$.

[a) $0 < x \leq 1$; b) impossibile; c) $-1 \leq x < 1$; d) $-1 \leq x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $0 < x \leq 1$]

11 Trova i valori di φ per i quali l'equazione $|\operatorname{sen} 2x| + |\cos(2x - \varphi)| = 0$ ha soluzioni. $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

12 Può essere $\operatorname{arcsen} x = \arccos x$? E $\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arctg} x$?

13 La risoluzione di un problema assegnato conduce all'equazione $2\operatorname{sen} x + k\cos x = 1$, dove $k > 0$ e $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$. Si discutano le possibili soluzioni del problema.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Scuole italiane all'estero*, *Sessione ordinaria*, 2007, *quesito* 8)

14 Si trovi per quali valori di k ammetta soluzione l'equazione trigonometrica: $\operatorname{sen} x + \cos x = k$.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione straordinaria*, 2007, *quesito* 10)

15 L'equazione risolvente un dato problema è: $k\cos 2x - 5k + 2 = 0$, dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema. (*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2006, *quesito* 6)

16 **TEST** Il numero delle soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen} 2x \cos x = 2$ nell'intervallo reale $[0; 2\pi]$ è:

A 0. B 2. C 3. D 5.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2006, *quesito* 2)

17 Considerata l'equazione: $\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}(2x) = 12$, spiegare in maniera esauriente se ammette soluzioni reali o se non ne ammette. (*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione straordinaria*, 2006, *quesito* 9)

18 Per quale o quali valori di x, con $90° < x \leq 450°$, è vero che: a) $2\cos 5x = 1$; b) $2\cos 5x > 1$.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Scuole italiane all'estero*, *Sessione ordinaria*, 2006, *quesito* 3)

PROBLEMI

19 a) Determina a in modo che il grafico di $f(x) = a\cos x + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$ intersechi l'asse y nel punto di ordinata 3. Sostituisci il valore di a trovato e rappresenta graficamente $f(x)$.

b) Discuti graficamente il numero delle soluzioni dell'equazione $|f(x)| = k - 4$ in $\left[0; \frac{5}{3}\pi\right]$ al variare di k.

[a) $a = 2$; b) 3 sol. per $4 \leq k < 7$, 4 sol. per $7 \leq k \leq 4 + 2\sqrt{3}$]

20 Data la funzione $y = \left|\dfrac{3\,\text{sen}\,x}{\cos x - 1}\right|$:

a) determina il dominio e i punti di intersezione con l'asse x;
b) calcola per quali valori di x la funzione è minore o uguale a 3 in $[0; 2\pi]$;
c) dimostra che è possibile scrivere l'equazione della funzione nella forma $y = 3\left|\text{cotg}\,\dfrac{x}{2}\right|$ e traccia il grafico, verificando i risultati ottenuti nei punti precedenti;
d) discuti al variare di k il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$3\left|\text{cotg}\,\frac{x}{2}\right| = k - 1 \quad \text{quando } \frac{\pi}{3} < x \le \frac{3}{2}\pi.$$

$\left[\text{a) } D\text{: } x \ne 2k\pi,\ x = \pi + 2k\pi;\ \text{b) } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3}{2}\pi;\ \text{d) 2 sol. per } 1 \le k \le 4,\ \text{1 sol. per } 4 < k < 3\sqrt{3} + 1\right]$

21 È data la funzione $f(x) = 2\,\text{sen}^2 x - 2\cos x\,\text{sen}\,x - 1$.

a) Trova il periodo e i punti di intersezione con gli assi cartesiani in $[0; \pi]$. Studia il suo segno.
b) Rappresenta graficamente $f(x)$ dopo aver dimostrato che può essere scritta nella forma:

$$f(x) = A\,\text{sen}\,(2x + \varphi).$$

c) Calcola per quali valori di x si ha $f(x) < -1$ in $[0; \pi]$.
d) Studia il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$f(x) = \sqrt{2}\,k \text{ in } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

$\left[\text{a) } T = \pi;\ (0; -1), \left(\dfrac{3}{8}\pi; 0\right), \left(\dfrac{7}{8}\pi; 0\right);\ y > 0 \text{ per } \dfrac{3}{8} + k\pi < x < \dfrac{7}{8} + k\pi;\ \text{c) } 0 < x < \dfrac{\pi}{4};\right.$
$\left.\text{d) 1 sol. per } -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < k \le \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \text{2 sol. per } -1 \le k \le -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

22 Data la funzione $y = f(x) = 2\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\,x - 1$:

a) determina il periodo;
b) calcola le coordinate dei punti di intersezione del suo grafico con l'asse delle ascisse in $[-\pi; \pi]$;
c) determina gli intervalli in cui la funzione è positiva;
d) considera la funzione $y = g(x) = \text{sen}\,x(2\cos x - 1)$ e trova i punti di intersezione fra i grafici di $f(x)$ e $g(x)$;
e) determina gli intervalli in cui entrambe le funzioni sono positive.

$\left[\text{a) } 2\pi;\ \text{b) } \left(-\dfrac{5}{6}\pi; 0\right), \left(-\dfrac{\pi}{6}; 0\right), \left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right);\ \text{c) } \dfrac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \dfrac{11}{6}\pi + 2k\pi;\ \text{d) } \dfrac{3}{8}\pi + k\dfrac{\pi}{2};\right.$
$\left.\text{e) } \dfrac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \dfrac{5}{3}\pi + 2k\pi\right]$

23 Verifica le seguenti identità, indicando le condizioni di esistenza:

$$\frac{(\text{sen}\,x + \cos x)^2 - (\text{sen}\,x - \cos x)^2}{2} = 2\,\text{sen}\,x\cos x;$$

$$\text{tg}^2 x + 1 - \frac{1}{\cos^2 x} + \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1.$$

a) Rappresenta nello stesso riferimento cartesiano le due funzioni:

$$f(x) = 2\,\text{sen}\,x\cos x; \qquad g(x) = 2\cos^2 x - 1.$$

b) Determina le soluzioni della disequazione $f(x) \le g(x)$ sia graficamente, sia algebricamente.

$\left[\text{b) } k\pi \le x \le \dfrac{\pi}{8} + k\pi \vee \dfrac{5}{8}\pi + k\pi \le x \le \pi + k\pi\right]$

24 Data la funzione $y = \operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3}$.

a) determina il dominio e il periodo;
b) calcola i valori di x per cui il grafico della funzione interseca la retta $y + \sqrt{3} = 0$;
c) studia il segno di y nel suo periodo e rappresenta il grafico della funzione $[-\pi; \pi]$.

$\left[\text{a) } D\text{: } \mathbb{R}, T = 2\pi; \text{ b) } \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi; \text{ c) } y \geq 0 \text{ per } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right]$

25 Data la funzione $y = f(x) = \dfrac{\operatorname{cotg}\frac{x}{2}}{\cos x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} 2x}$:

a) dimostra che la funzione $y = g(x) = \dfrac{2\cos x + 1}{\operatorname{sen} 2x}$ coincide con $f(x)$ e determina il suo dominio;
b) calcola gli zeri di $f(x)$;
c) determina per quali valori di x in $[0; 2\pi]$ la funzione assume valori negativi.

$\left[\text{a) } D\text{: } x \neq k\frac{\pi}{2}; \text{ b) } \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \text{ c) } \frac{\pi}{2} < x < \frac{2}{3}\pi \vee \pi < x < \frac{4}{3}\pi \vee \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi\right]$

26 a) Data la funzione $y = \sqrt{\cos x + k \operatorname{sen} x}$, trova il valore di k per cui il suo grafico passa per $A\left(\frac{\pi}{3}; \sqrt{2}\right)$.
b) Assegnato a k il valore calcolato, determina il dominio della funzione e i punti di intersezione con gli assi per x appartenente all'intervallo $[0; 2\pi]$; calcola per quali valori di x è $y > 1$.
c) Determina il periodo, trasforma l'equazione della funzione nella forma $y = \sqrt{a \operatorname{sen}(x + \varphi)}$ e rappresentala graficamente.

$\left[\text{a) } k = \sqrt{3}; \text{ b) } D\text{: } 0 \leq x \leq \frac{5}{6}\pi \vee \frac{11}{6}\pi \leq x \leq 2\pi; (0; 1), \left(\frac{5}{6}\pi; 0\right), \left(\frac{11}{6}\pi; 0\right);\right.$
$\left. 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \text{ c) } T = 2\pi; y = \sqrt{2\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}\right]$

27 Data la funzione $f(x) = \dfrac{\cos x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$:

a) determina il dominio e calcola i valori di x per cui $f(x) = 0$;
b) studia il segno della funzione;
c) trova eventuali valori di x per i quali $f(x) = 3$.

$\left[\text{a) } D\text{: } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq k\pi; \text{ impossibile;}\right.$
$\left.\text{b) } f(x) > 0 \text{ per } 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi; \text{ c) } \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

28 Data la funzione $f(x) = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg}^2 x - 1}$:

a) determina il dominio D e il periodo;
b) trova per quali valori di x la funzione $g(x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{tg} x - 1}$ coincide con $f(x)$;
c) studia il segno di $f(x)$ in un periodo;
d) dimostra che nell'intervallo $[0; 2\pi]$ $f(x)$ assume almeno una volta valore 1.

$\left[\text{a) } D\text{: } \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, 2\pi; \text{ b) } \forall x \in D;\right.$
$\left.\text{c) } f(x) > 0 \text{ per } x \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right[; \text{ d) } x = \pi \text{ (con metodo grafico si trova anche } 0{,}99597\ldots)\right]$

CAPITOLO 13	١٣	१३	十三
	[numerazione araba]	[numerazione devanagari]	[numerazione cinese]

LA TRIGONOMETRIA

DALLA TERRA ALLA LUNA Per misurare la distanza tra la Terra e altri corpi celesti, si utilizzano radar in grado di emettere e ricaptare, al suo ritorno sulla Terra, un segnale che «rimbalza» sulla superficie del corpo. Conoscendo velocità e tempo di percorrenza del segnale, si risale alla distanza.

In assenza di apparecchiature tecnologiche sofisticate, come si può, dalla Terra, stimare la distanza della Luna?

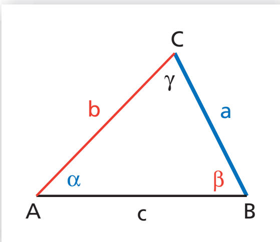
▶ **La risposta a pag. 861**

1. I TRIANGOLI RETTANGOLI

La parola **trigonometria** deriva dal greco e significa «misura dei triangoli».

Finora ci siamo occupati di goniometria, ossia della misurazione degli angoli e delle funzioni associate a essi. Ora tratteremo la trigonometria, che studia le relazioni metriche fra i lati e gli angoli di un triangolo.

D'ora in poi, quando ci occuperemo di triangoli, rispetteremo le seguenti convenzioni per la nomenclatura dei diversi elementi. Disegnato un triangolo *ABC* (figura 1), indichiamo con α la misura dell'angolo $\widehat{A}$, con β la misura dell'angolo $\widehat{B}$ e con γ la misura dell'angolo $\widehat{C}$. Indichiamo poi con *a* la misura del lato *BC*, che si oppone al vertice *A*, con *b* la misura del lato *AC*, che si oppone al vertice *B*, e con *c* la misura del lato *AB*, che si oppone al vertice *C*.



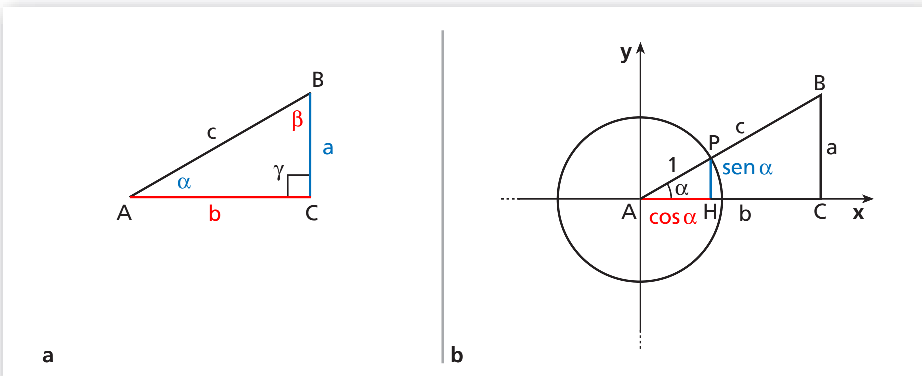
▲ Figura 1

I teoremi sui triangoli rettangoli

Disegniamo un triangolo rettangolo *ABC*, con l'angolo retto in $\widehat{C}$, come in figura 2*a*, e indichiamo le misure dei lati e degli angoli, secondo le convenzioni appena stabilite.

Tracciamo la circonferenza goniometrica con centro *A* (figura 2*b*).

► Figura 2



In figura sono indicati il punto *P*, in cui il lato *AB* incontra la circonferenza goniometrica, e il punto *H*, proiezione di *P* sul lato *AC*.
I triangoli *APH* e *ABC* sono simili in quanto sono rettangoli e hanno l'angolo acuto α in comune.
Possiamo scrivere le proporzioni

$$BC : AB = PH : AP,$$

$$AC : AB = AH : AP,$$

e, poiché $\overline{AP} = 1$, $\overline{PH} = \operatorname{sen}\alpha$ e $\overline{AH} = \cos\alpha$, otteniamo:

$$\overline{BC} = \overline{AB}\ \operatorname{sen}\alpha, \quad \text{ossia} \quad \boxed{a = c\operatorname{sen}\alpha,}$$

$$\overline{AC} = \overline{AB}\cos\alpha, \quad \text{ossia} \quad \boxed{b = c\cos\alpha.}$$

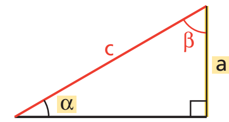
Le due uguaglianze ottenute portano a enunciare il seguente teorema.

TEOREMA

Primo teorema dei triangoli rettangoli

In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale a quella dell'ipotenusa moltiplicata per il seno dell'angolo opposto al cateto o per il coseno dell'angolo (acuto) adiacente al cateto.

cateto = ipotenusa · seno dell'angolo opposto
cateto = ipotenusa · coseno dell'angolo acuto adiacente



a = c sen α
a = c cos β

Consideriamo nuovamente la figura 2*b*. Per la similitudine dei triangoli *APH* e *ABC*, possiamo anche scrivere la proporzione

$$BC : AC = PH : AH,$$

da cui:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha, \text{ oppure } \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha.$$

Scritte nella forma

$$\overline{BC} = \overline{AC}\ \mathbf{tg}\,\alpha, \quad \text{ossia} \quad \boldsymbol{a = b\,\mathbf{tg}\,\alpha},$$

$$\overline{AC} = \overline{BC}\ \mathbf{cotg}\,\alpha, \quad \text{ossia} \quad \boldsymbol{b = a\,\mathbf{cotg}\,\alpha},$$

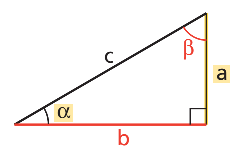
le due relazioni portano al seguente teorema.

TEOREMA

Secondo teorema dei triangoli rettangoli

In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale a quella dell'altro cateto moltiplicata per la tangente dell'angolo opposto al primo cateto o per la cotangente dell'angolo (acuto) adiacente al primo cateto.

cateto = altro cateto · tangente dell'angolo opposto al primo cateto
cateto = altro cateto · cotangente dell'angolo acuto adiacente al primo cateto



a = b tg α
a = b cotg β

La risoluzione dei triangoli rettangoli

Risolvere un triangolo rettangolo significa determinare le misure dei suoi lati e dei suoi angoli conoscendo **almeno un lato** e un altro dei suoi elementi (cioè, un angolo o un altro lato).

Esaminiamo quattro casi: due casi in cui si conoscono due lati e due casi in cui si conoscono un lato e un angolo.

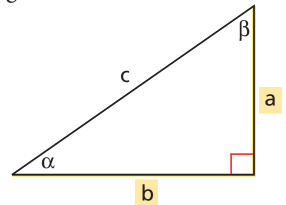
● Se di un triangolo sono noti solo gli angoli, non è possibile determinare i lati, perché esistono infiniti triangoli, tutti simili al dato, che hanno gli angoli congruenti.

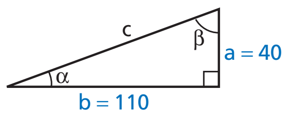
Sono noti i due cateti

Conoscendo *a* e *b*, vogliamo determinare α, β e *c*:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}; \quad \beta = 90° - \alpha;$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ per il teorema di Pitagora.}$$





ESEMPIO

Le misure dei due cateti del triangolo in figura sono $a = 40$ e $b = 110$:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{40}{110} = 0,\overline{36}, \quad \text{da cui}$$

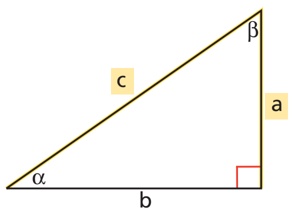
$\alpha \simeq 19°\,58'\,59''$, che approssimiamo a 20°,

$\alpha \simeq 20° \;\rightarrow\; \beta \simeq 90° - 20° \simeq 70°.$

$$c = \sqrt{40^2 + 110^2} = \sqrt{1600 + 12100} = \sqrt{13700} \simeq 117.$$

È possibile calcolare il valore di c anche senza applicare il teorema di Pitagora, ma ricavando c dalla formula: $a = c\,\text{sen}\,\alpha$.

Sono noti un cateto e l'ipotenusa



Conoscendo a e c, vogliamo determinare α, β e b:

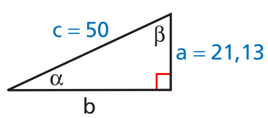
$$\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{c} \rightarrow \alpha = \text{arcsen}\frac{a}{c};$$

$\beta = 90° - \alpha;$

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$, per il teorema di Pitagora.

Si può ricavare b anche senza applicare il teorema di Pitagora, ma con:

$b = c\cos\alpha$ o $b = c\,\text{sen}\,\beta$.



ESEMPIO

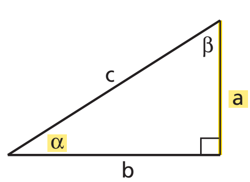
In un triangolo rettangolo le misure di un cateto e dell'ipotenusa sono $a = 21{,}13$ e $c = 50$.
Ricaviamo:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{21{,}13}{50} = 0,4226 \;\rightarrow\; \alpha \simeq 25°;$$

$\beta \simeq 90° - 25° \simeq 65°;$

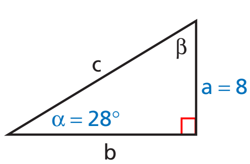
$$b = \sqrt{50^2 - (21{,}13)^2} = \sqrt{2500 - 446,4769} = \sqrt{2053,5231} \simeq 45{,}3.$$

Sono noti un cateto e un angolo acuto



Conoscendo a e α, vogliamo determinare β, b e c:

$$\beta = 90° - \alpha; \qquad b = a\,\text{tg}\,\beta; \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



ESEMPIO

Consideriamo il triangolo rettangolo in cui sono noti $a = 8$ e $\alpha = 28°$.
Si ricava:

$\beta = 90° - 28° = 62°;$

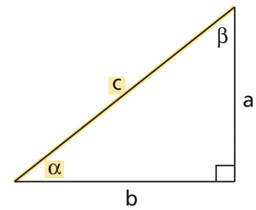
$b = 8\,\text{tg}\,62° \simeq 8 \cdot 1{,}88 \simeq 15;$

$c \simeq \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17.$

Sono noti l'ipotenusa e un angolo acuto

Conoscendo c e α, vogliamo determinare β, a e b:

$$\beta = 90° - \alpha; \quad a = c \operatorname{sen} \alpha; \quad b = c \operatorname{sen} \beta.$$



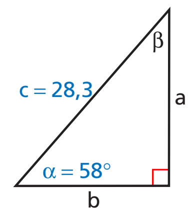
ESEMPIO

Consideriamo il triangolo rettangolo della figura a lato. Le misure dell'ipotenusa e dell'angolo sono rispettivamente $c = 28{,}3$ e $\alpha = 58°$.
Si ricava:

$$\beta = 90° - 58° = 32°;$$

$$a = 28{,}3 \cdot \operatorname{sen} 58° \simeq 28{,}3 \cdot 0{,}848 \simeq 24;$$

$$b = 28{,}3 \cdot \operatorname{sen} 32° \simeq 28{,}3 \cdot 0{,}5299 \simeq 15.$$



2. APPLICAZIONI DEI TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

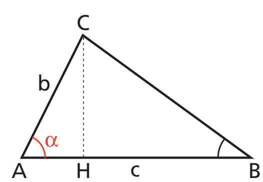
L'area di un triangolo

Consideriamo un triangolo qualsiasi ABC e supponiamo noti due lati e l'angolo α compreso fra essi. Distinguiamo due casi.

a) α è acuto

Tracciata l'altezza CH (figura a lato), si ha $\overline{CH} = b \operatorname{sen} \alpha$, per il primo teorema dei triangoli rettangoli, quindi la misura dell'area S del triangolo è:

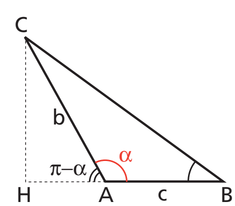
$$S = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2} cb \operatorname{sen} \alpha.$$



b) α è ottuso

Il triangolo rettangolo CHA (figura a lato) ha un angolo acuto di misura $\pi - \alpha$, quindi $\overline{CH} = b \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = b \operatorname{sen} \alpha$ e la misura dell'area è ancora:

$$S = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2} cb \operatorname{sen} \alpha.$$



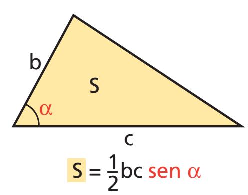
Abbiamo quindi il seguente teorema.

TEOREMA

Area di un triangolo

La misura dell'area di un triangolo è uguale al semiprodotto delle misure di due lati e del seno dell'angolo compreso fra essi.

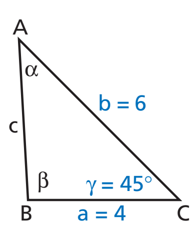
$$\textbf{area} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \textbf{lato}_1 \cdot \textbf{lato}_2 \cdot \textbf{seno dell'angolo compreso}$$



ESEMPIO

Calcoliamo S, sapendo che $a = 4$, $b = 6$ e che l'angolo compreso tra essi è $\gamma = 45°$ (figura a lato):

$$S = \frac{1}{2} 4 \cdot 6 \cdot \operatorname{sen} 45° = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6 \cdot \sqrt{2}.$$



ESPLORAZIONE

Astri, seni, coseni, tangenti

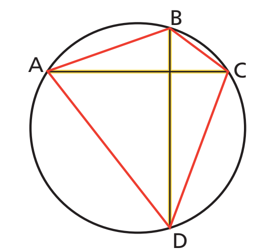
Nasce una nuova scienza

Colui che è ricordato come il fondatore della trigonometria, Ipparco di Nicea, è un astronomo vissuto prevalentemente ad Alessandria d'Egitto nel II secolo a.C. Nei suoi scritti si trovano delle vere e proprie tavole con le misure delle *corde* di un cerchio di raggio fissato riferite alla misura dell'angolo al centro corrispondente. Considerata la circonferenza goniometrica, la relazione che lega la misura di una corda c e il seno dell'angolo al centro α corrispondente è

$$c = 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2},$$

quindi lo studio delle corde è in realtà equivalente a quello dei seni degli angoli al centro corrispondenti. Un altro astronomo greco, Tolomeo (II sec. d.C.), scrisse un'opera fondamentale non solo per l'astronomia, ma anche per la trigonometria: l'*Almagesto*.

▶ Teorema di Tolomeo: il prodotto delle misure delle diagonali di un quadrilatero inscritto in una circonferenza è uguale alla somma dei prodotti di quelle dei lati opposti del quadrilatero.



$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$

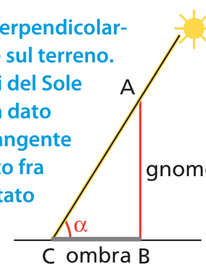
In essa riportò delle tavole molto accurate delle misure delle corde, con valori che andavano, aumentando di mezzo grado, da 1° a 180°. Dal *teorema di Tolomeo*, esposto nell'opera, egli ricavò diverse formule, fra le quali quelle oggi note come formule di *addizione* e *sottrazione*.

I nomi delle funzioni goniometriche

In India, Aryabhata (500 d.C.) introdusse l'uso delle mezze corde indicandole con il nome *jiva*. Data la relazione che abbiamo esaminato parlando dei Greci, esse erano già in qualche modo misure dei seni.
Gli Arabi trasformarono il termine originario indiano utilizzando, per assonanza, la parola *jaib*, che vuol dire «piega». Dagli Europei, la parola *jaib* venne poi tradotta in *sinus*, che, appunto, in latino ha anche il significato di «piega». Gli Arabi utilizzavano anche il coseno di un angolo, determinato come seno dell'angolo complementare, ma non esisteva un termine per indicarlo. Per il coseno il francese Francois Viète (1540-1603) usava il termine *sinus residuae*. Solo nel 1620 l'inglese Edmund Gunter (1581-1626) introdusse il termine *cosinus*.
L'introduzione delle funzioni tangente e cotangente è dovuta alla scienza degli orologi solari, la *gnomonica*. Il termine *tangente* fu introdotto nel 1583 dal danese Thomas Fincke e il termine *cotangente* ancora da Gunter nel 1620.

▶ Uno gnomone è un'asta infissa perpendicolarmente su un muro verticale oppure sul terreno. Consideriamo l'angolo α che i raggi del Sole formano rispetto all'orizzonte in un dato momento, ossia la sua altezza. La tangente dell'altezza si ottiene come rapporto fra la lunghezza di uno gnomone piantato a terra e quella della sua ombra:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$



La prima opera di trigonometria occidentale fu *De triangulis omnimodis*, scritta verso il 1464 da Johann Müller, detto Regiomontano.

Attività

Gli Arabi e l'astronomia

Gli Arabi hanno studiato l'astronomia greca e ce ne hanno tramandato opere importanti, come l'*Almagesto* (che in arabo significa *Il più grande*) di Tolomeo.

- Fai una ricerca sui contributi arabi allo sviluppo dell'astronomia medioevale.

◀ Maestro astronomo al lavoro con l'astrolabio. Istanbul, Museo Topkapi.

Cerca nel Web:

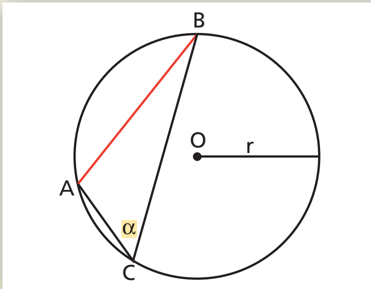
Qibla, La Mecca, astronomia, Mihrab

Il teorema della corda

TEOREMA

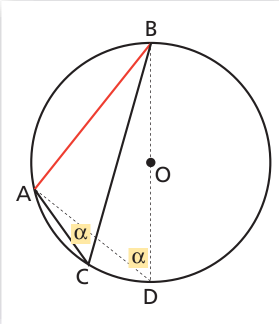
In una circonferenza la misura di una corda è uguale al prodotto della misura del diametro per il seno di uno degli angoli alla circonferenza che insistono sulla corda.

$$\overline{AB} = 2r \cdot \operatorname{sen}\alpha$$



DIMOSTRAZIONE

Considerato un qualsiasi angolo $A\widehat{C}B$ alla circonferenza che insista sulla corda AB e sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ minore, tracciamo il diametro BD e congiungiamo il vertice A con l'estremo D del diametro (figura 3).

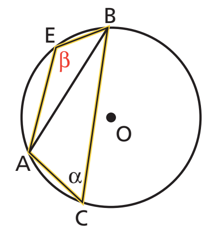


▲ **Figura 3** Costruzione della figura del teorema.

Il triangolo ABD è rettangolo in A, perché inscritto in una semicirconferenza. Inoltre, si ha $A\widehat{D}B \cong A\widehat{C}B$, perché i due angoli insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{AB}$. Chiamiamo α la loro misura comune. Calcoliamo la misura della corda AB applicando il teorema dei triangoli rettangoli al triangolo ABD:

$$\overline{AB} = 2r \cdot \operatorname{sen}\alpha.$$

Il teorema continua a valere anche se consideriamo l'angolo $A\widehat{E}B = \beta$ che insiste sull'arco maggiore $\overset{\frown}{AB}$ (figura a lato). Infatti il quadrilatero $AEBC$, essendo inscritto in una circonferenza, ha gli angoli opposti supplementari, quindi $\alpha + \beta = \pi$, perciò $\beta = \pi - \alpha$ e $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$.

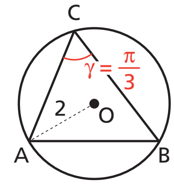


ESEMPIO

Determiniamo la misura della corda di una circonferenza di raggio 2, sapendo che su di essa insiste un angolo di $\frac{\pi}{3}$.

Applichiamo il teorema della corda.

$$\overline{AB} = 2 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$



Il raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo

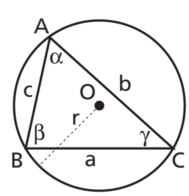
Il triangolo ABC è inscritto in una circonferenza di raggio r.

Il teorema della corda permette di scrivere le relazioni

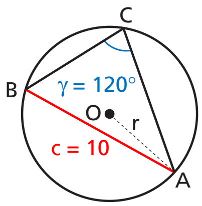
$$a = 2r \cdot \operatorname{sen}\alpha, \quad b = 2r \cdot \operatorname{sen}\beta, \quad c = 2r \cdot \operatorname{sen}\gamma,$$

dalle quali possiamo ricavare r:

$$r = \frac{a}{2\operatorname{sen}\alpha}, \quad r = \frac{b}{2\operatorname{sen}\beta}, \quad r = \frac{c}{2\operatorname{sen}\gamma}.$$



Queste formule consentono di calcolare il raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo conoscendo un lato del triangolo e l'angolo opposto a esso.



ESEMPIO

Calcoliamo il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo ABC, di cui sono noti il lato $\overline{AB} = 10$ e l'angolo $A\widehat{C}B = 120°$.
Utilizziamo la relazione:

$$r = \frac{c}{2\,\mathrm{sen}\,\gamma} = \frac{10}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

3. I TRIANGOLI QUALUNQUE

Esaminiamo ora le relazioni che legano le misure dei lati di un triangolo qualunque ai valori delle funzioni goniometriche degli angoli.

Il teorema dei seni

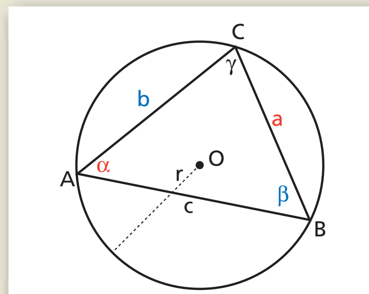
- Il teorema dei seni è anche noto come **teorema di Eulero**.

- Leonhard Euler (1707-1783) nacque a Basilea, dove iniziò la sua formazione matematica. Visse poi a Pietroburgo e a Berlino (1744-1766), alla corte di Federico il Grande, come direttore della sezione di scienze matematiche dell'Accademia. Ci ha lasciato più di 800 scritti, fra libri e articoli.

TEOREMA

In un triangolo le misure dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\gamma}}$$



DIMOSTRAZIONE

Consideriamo un triangolo ABC inscritto in una circonferenza di diametro $2r$. Applicando il teorema della corda ai lati del triangolo ABC, otteniamo:

$$\frac{a}{\mathrm{sen}\,\alpha} = 2r; \qquad \frac{b}{\mathrm{sen}\,\beta} = 2r; \qquad \frac{c}{\mathrm{sen}\,\gamma} = 2r.$$

- Per il teorema della corda:

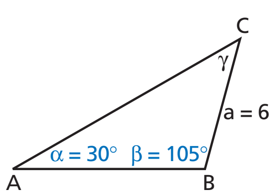
  $a = 2r \cdot \mathrm{sen}\,\alpha$,

  $b = 2r \cdot \mathrm{sen}\,\beta$,

  $c = 2r \cdot \mathrm{sen}\,\gamma$.

Essendo i tre rapporti uguali alla misura del diametro della circonferenza, possiamo concludere che:

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{2}\boldsymbol{r}.}$$



ESEMPIO

Con i dati della figura calcoliamo $\overline{AB} = c$. Per poter applicare il teorema dei seni dobbiamo calcolare l'ampiezza dell'angolo γ:

$$\gamma = 180° - (30° + 105°) = 45°.$$

Utilizziamo la relazione $\dfrac{a}{\mathrm{sen}\,\alpha} = \dfrac{c}{\mathrm{sen}\,\gamma}$:

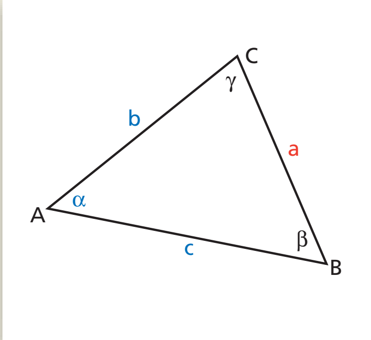
$$\frac{6}{\mathrm{sen}\,30°} = \frac{c}{\mathrm{sen}\,45°} \rightarrow \frac{6}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow c = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{2}.$$

Il teorema del coseno

TEOREMA

In un triangolo il quadrato della misura di un lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due lati diminuita del doppio prodotto della misura di questi due lati per il coseno dell'angolo compreso fra essi.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$



Il teorema del coseno è anche noto come **teorema di Carnot**.
Lazare-Nicolas Carnot (1753-1823) fu un matematico e un uomo politico francese, da non confondersi con il figlio Sadi Carnot (1796-1832), che fu un eminente fisico, noto per i suoi studi di termodinamica.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo un triangolo ABC acutangolo (figura a lato).
Tracciamo l'altezza CH relativa al lato AB.
Applicando il primo teorema dei triangoli rettangoli al triangolo ACH, otteniamo:

$$\overline{CH} = b \operatorname{sen}\alpha \text{ e } \overline{AH} = b\cos\alpha.$$

Per differenza, si ha anche:

$$\overline{HB} = c - b\cos\alpha.$$

Determiniamo $\overline{CB}$ applicando il teorema di Pitagora al triangolo CHB:

$$\overline{CB}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2 =$$

$$= b^2\operatorname{sen}^2\alpha + (c - b\cos\alpha)^2 = b^2\operatorname{sen}^2\alpha + c^2 + b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha =$$
$$= b^2(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

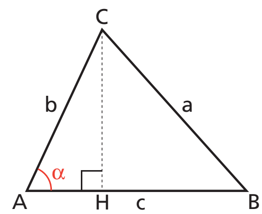
Quindi:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}.$$

Analogamente, per gli altri due lati si ha:

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}; \qquad \boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

La dimostrazione è analoga se il triangolo è ottusangolo.



ESEMPIO

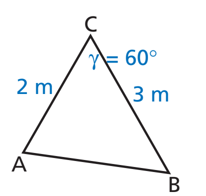
Calcoliamo la misura del lato AB di un triangolo ABC di cui sappiamo che:

$$AC = 2 \text{ m}, BC = 3 \text{ m e l'angolo } \gamma = 60°.$$

Applichiamo il teorema di Carnot al triangolo:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos\gamma = 4 + 9 - 12 \cdot \frac{1}{2} = 7,$$

da cui $AB = \sqrt{7}$ m.



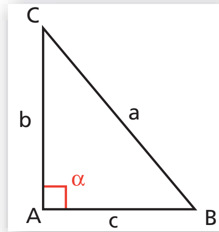
▶ Figura 4

Il teorema del coseno viene anche chiamato **teorema di Pitagora generalizzato**. Questo perché, se il triangolo ABC è rettangolo, il teorema del coseno non è altro che il teorema di Pitagora.
Infatti, se $\alpha = 90°$, si ha

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 90°,$$

e poiché $\cos 90° = 0$, ritroviamo il teorema di Pitagora:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$



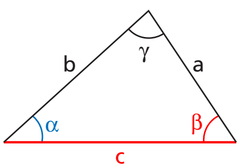
La risoluzione dei triangoli qualunque

Risolvere un triangolo qualunque significa determinare le misure dei suoi lati e dei suoi angoli. È sempre possibile risolvere un triangolo se sono noti *tre* suoi elementi, di cui *almeno uno sia un lato*.
Possiamo utilizzare il teorema dei seni e il teorema del coseno.
Esaminiamo i quattro possibili casi.

Nel triangolo rettangolo basta conoscere due elementi, infatti il terzo elemento è l'angolo retto.

Sono noti un lato e due angoli

Conoscendo c, α e β, vogliamo determinare γ, a e b.



Determiniamo $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.
Per il teorema dei seni:

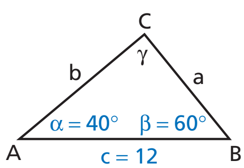
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \quad \rightarrow \quad a = \frac{c \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Ancora per il teorema dei seni:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \quad \rightarrow \quad b = \frac{c \cdot \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

ESEMPIO

Nel triangolo in figura sono noti $c = 12$, $\alpha = 40°$ e $\beta = 60°$.
Ricaviamo γ:



$$\gamma = 180° - (40° + 60°) = 80°.$$

Per il teorema dei seni, $\frac{a}{\operatorname{sen} 40°} = \frac{12}{\operatorname{sen} 80°}$, da cui:

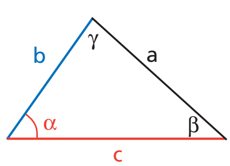
$$a = \frac{12 \cdot \operatorname{sen} 40°}{\operatorname{sen} 80°} \simeq \frac{12 \cdot 0,64279}{0,9848} \simeq 7,83.$$

Ancora per il teorema dei seni, $\frac{b}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{12}{\operatorname{sen} 80°}$, da cui:

$$b = \frac{12 \cdot \operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 80°} \simeq \frac{12 \cdot 0,866}{0,9848} \simeq 10,55.$$

Sono noti due lati e l'angolo fra essi compreso

Nel triangolo in figura a lato conosciamo b, c e α; determiniamo β, γ e a.



Determiniamo a mediante il teorema del coseno:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}.$$

Applichiamo nuovamente il teorema del coseno per calcolare β:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad \rightarrow \quad 2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2 \quad \rightarrow$$

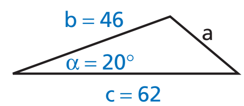
$$\rightarrow \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Troviamo β con la funzione arcocoseno.
Infine determiniamo γ:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta).$$

ESEMPIO

Del triangolo in figura sono noti $b = 46$, $c = 62$ e $\alpha = 20°$.



Applichiamo il teorema del coseno per calcolare a:

$$a = \sqrt{46^2 + 62^2 - 2 \cdot 46 \cdot 62 \cdot \cos 20°}$$

$$a \simeq \sqrt{2116 + 3844 - 5704 \cdot 0{,}93969} \simeq \sqrt{600{,}0082} \rightarrow a \simeq 24{,}50.$$

Applichiamo il teorema del coseno per calcolare β:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \rightarrow 46^2 = 24{,}5^2 + 62^2 - 2 \cdot 24{,}5 \cdot 62 \cdot \cos\beta,$$

$$\cos\beta \simeq 0{,}77 \rightarrow \beta \simeq 40°.$$

$$\gamma \simeq 180° - (20° + 40°) = 120°.$$

Per calcolare β abbiamo usato il teorema del coseno, invece del teorema dei seni, perché, se determiniamo un angolo conoscendo il valore del suo coseno, allora l'angolo che otteniamo è unico.
Infatti l'equazione

$$\cos x = k, \quad \text{con} -1 \leq k \leq 1,$$

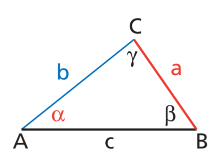
ha un'unica soluzione se $0° < x < 180°$, mentre

$$\operatorname{sen} x = k$$

ha due soluzioni se $0° < x < 180°$.
Quindi, se si calcola un angolo conoscendo il valore del suo seno, si ottengono due soluzioni di cui si dovrà poi verificare l'accettabilità.

Sono noti due lati e un angolo opposto a uno di essi

Consideriamo il triangolo ABC e supponiamo noti a, b e α. Vogliamo conoscere β, γ e c.



Applichiamo il teorema dei seni al triangolo dato per calcolare β:

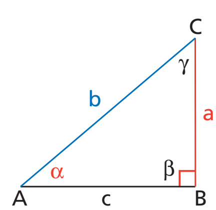
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}\operatorname{sen}\alpha.$$

Esaminiamo i casi che si possono presentare a seconda del valore di sen β, ricordando che deve risultare $0 < \operatorname{sen}\beta \leq 1$, altrimenti β non esiste.

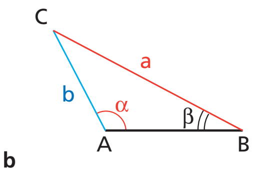
1. $\operatorname{sen}\beta = 1 \;\rightarrow\; \beta = 90°$.

Distinguiamo due casi:

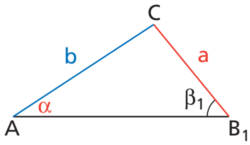
- se $\alpha \geq 90°$, il problema non ha soluzioni;
- se $\alpha < 90°$, il problema ammette una sola soluzione (figura *a*).



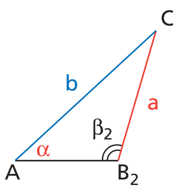
a



b



c



d

2. $0 < \text{sen}\,\beta < 1$: in questo caso si hanno due soluzioni, β_1 e β_2, tra loro supplementari, per esempio β_1 acuto e β_2 ottuso.
Per sapere se questi valori sono accettabili, dobbiamo considerare α, a e b.

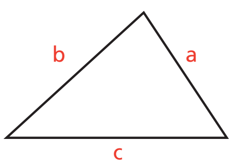
- Se $\alpha \geq 90°$, la soluzione β_2 non è accettabile perché un triangolo non può avere due angoli ottusi. Accettiamo solo β_1 acuto; il problema ammette una sola soluzione (figura *b*).
- Se $\alpha < 90°$ e $b > a$, allora, poiché a lato maggiore sta opposto angolo maggiore, è $\beta_1 > \alpha$ oppure $\beta_2 > \alpha$; entrambe le situazioni sono accettabili: il problema ammette due soluzioni (figure *c* e *d*).
- Se $\alpha < 90°$ e $b < a$, allora $\beta < \alpha$, per cui β_2, che è ottuso, non è accettabile e abbiamo per soluzione solo β_1.

Per finire, dopo aver calcolato β, determiniamo $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ e poi calcoliamo la misura del terzo lato, applicando il teorema dei seni:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} \quad \rightarrow \quad c = a\frac{\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha}.$$

Del caso appena esaminato trovi due esempi nell'esercizio 248 a pagina 885.

Sono noti i tre lati



Conoscendo a, b e c (figura a lato), determiniamo α, β e γ.

Ricaviamo α applicando il teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \rightarrow \quad 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \quad \rightarrow$$

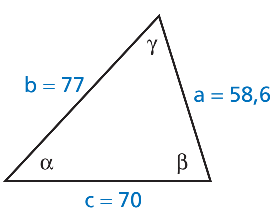
$$\rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \rightarrow \quad \alpha = \arccos\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

● Anche in questo caso, come nel secondo, è opportuno utilizzare il teorema del coseno e non quello dei seni.

Ricaviamo β allo stesso modo:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \rightarrow \quad \beta = \arccos\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Ricaviamo γ per differenza: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.



ESEMPIO

Consideriamo il triangolo con $a = 58{,}6$, $b = 77$ e $c = 70$.

Ricaviamo α utilizzando il teorema del coseno:

$$\cos\alpha = \frac{(77)^2 + (70)^2 - (58{,}6)^2}{2 \cdot 70 \cdot 77} = \frac{5929 + 4900 - 3433{,}96}{10\,780}$$

$$\cos\alpha = \frac{7395{,}04}{10\,780} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha \simeq 0{,}686 \quad \rightarrow \quad \alpha \simeq \arccos 0{,}686 \simeq 47°.$$

Allo stesso modo:

$$\cos\beta = \frac{70^2 + 58{,}6^2 - 77^2}{2 \cdot 70 \cdot 58{,}6} \simeq 0{,}29 \quad \rightarrow \quad \beta \simeq \arccos 0{,}29 \simeq 73°.$$

Ricaviamo, infine, γ per differenza: $\gamma \simeq 180° - (47° + 73°) = 60°$.

● Negli esercizi esamineremo applicazioni della trigonometria alla fisica, alla realtà, alla geometria.

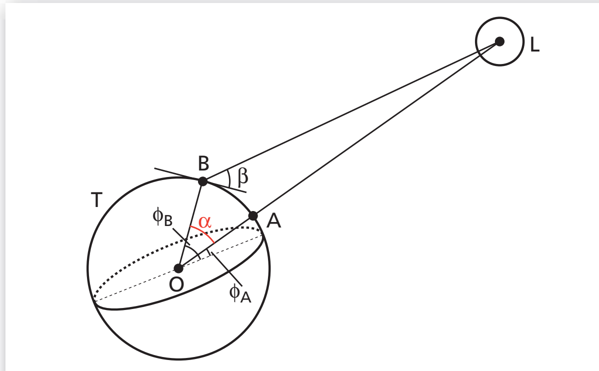
DALLA TERRA ALLA LUNA

In assenza di apparecchiature tecnologiche sofisticate, come si può, dalla Terra, stimare la distanza della Luna?

▶ **Il quesito completo a pag. 849**

Lo schema del problema

Indichiamo con O il centro della Terra e con L il centro della Luna. Dobbiamo determinare la lunghezza di OL. Scegliamo sullo stesso meridiano due punti A e B di cui siano note le latitudini ϕ_A e ϕ_B; l'angolo al centro corrispondente misura $\alpha = \phi_B - \phi_A$. Quando la Luna passa allo zenit di uno dei due punti, per esempio A, misuriamo da B l'elevazione β della Luna sull'orizzonte, cioè l'angolo che la retta BL forma con il piano dell'orizzonte.



Con il teorema dei seni

Applichiamo il teorema dei seni al triangolo BOL, tenendo presente che conosciamo la misura del raggio terrestre $r = \overline{OB}$ e gli angoli α e β:

$$\frac{\overline{OB}}{\operatorname{sen} B\widehat{L}O} = \frac{\overline{OL}}{\operatorname{sen} O\widehat{B}L}.$$

Poiché $O\widehat{B}L = 90° + \beta$, possiamo ricavare

$$B\widehat{L}O = 180° - (\alpha + 90° + \beta) = 90° - (\alpha + \beta)$$

e trasformare la proporzione in un'altra equivalente:

$$\frac{\overline{OB}}{\operatorname{sen}[90° - (\alpha + \beta)]} = \frac{\overline{OL}}{\operatorname{sen}(90° + \beta)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{r}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\overline{OL}}{\cos\beta}.$$

Risolvendo la proporzione otteniamo la distanza Terra-Luna:

$$\overline{OL} = r\frac{\cos\beta}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

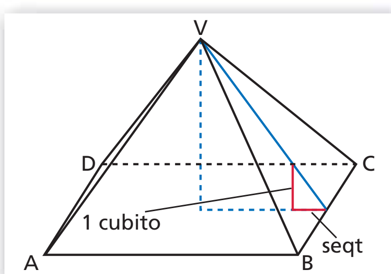
I calcoli degli astronomi

La Luna, in realtà, si muove attorno alla Terra su un'orbita ellittica, di cui la Terra occupa uno dei fuochi. Questo fatto implica che ci sono due punti caratteristici lungo l'orbita in cui la Luna può trovarsi rispetto alla Terra: l'*apogeo*, il punto di massima lontananza, e il *perigeo*, ovvero il punto di massima vicinanza. All'apogeo la Luna dista 405 696 km, al perigeo 363 104 km.

I primi passi della trigonometria

Il Papiro di Rhind è il più lungo testo egizio di matematica giunto fino a noi. Risale al 1650 circa a.C. ed è conservato al British Museum di Londra. Prende il nome dall'antiquario che lo acquistò a Luxor nel 1858 e contiene 84 problemi svolti di aritmetica, algebra e geometria. Nel problema 56 del Papiro di Rhind si chiede di calcolare il *seqt* della faccia laterale di una piramide a base quadrata di altezza 250 cubiti e con lato di base 360 cubiti.

Il seqt, analogamente alla nostra cotangente, è la profondità, corrispondente all'elevazione di un cubito, misurata su una retta orizzontale sulla quale si inclina la retta di cui si vuole stimare la pendenza. Maggiore è l'angolo di inclinazione, minore sarà la misura del seqt.



Il *cubito*, pari circa ai nostri 30 centimetri, corrispondeva a 7 *palmi*, unità di misura con la quale il seqt veniva espresso.

La soluzione per la piramide proposta dal papiro è semplice:

- si calcola la lunghezza in cubiti di metà del lato di base,

  $$\frac{360}{2} = 180;$$

- si divide per l'altezza, trovando il seqt in cubiti come somma di frazioni con numeratore 1,

  $$\frac{180}{250} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50};$$

- per trovare il valore in palmi si moltiplica per 7,

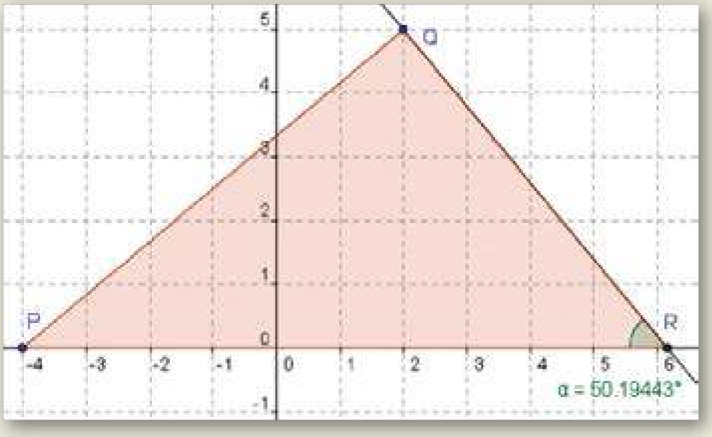
  $$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}\right) \cdot 7 = 5 + \frac{1}{25}.$$

LABORATORIO DI MATEMATICA
LA TRIGONOMETRIA

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con GeoGebra determiniamo l'ampiezza dell'angolo $Q\widehat{R}P$ del triangolo PQR, sapendo che i vertici P e Q hanno coordinate $(-4; 0)$ e $(2; 5)$, che il lato PR giace sull'asse x e che il lato QR è perpendicolare al lato PQ.

- Attiviamo GeoGebra e, per rendere noti al sistema i punti P e Q, scriviamo nella riga di inserimento P = (− 4, 0) e battiamo INVIO (figura 1), e così per Q = (2, 5).
- Con *Segmento per due punti*, applicato a P e a Q, tracciamo il lato PQ.
- Con il comando *Retta perpendicolare*, applicato a PQ e al punto Q, ricaviamo la retta QR.
- Usiamo *Intersezione fra due oggetti* sulla retta QR e l'asse x per determinare il vertice R.
- Con *Poligono* evidenziamo il triangolo PQR.
- Attiviamo infine *Angolo* e facciamo clic di seguito su Q, sul vertice R e su P, ottenendo il nome α per l'angolo $Q\widehat{R}P$ e la sua ampiezza espressa nel sistema sessadecimale (figura 1).

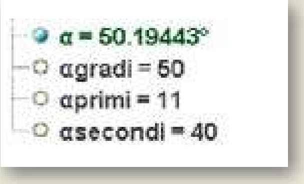


▲ Figura 1

- Se desideriamo conoscere l'ampiezza dell'angolo α nel sistema sessagesimale, impostiamo nella riga di inserimento, una alla volta, le seguenti operazioni e poi le inseriamo nella zona algebrica:

  αgradi = floor(α/°),
  αprimi = floor((α/° − αgradi)60),
  αsecondi = round(((α/° − αgradi)60 − αprimi)60).

GeoGebra le svolge e ci mostra che α è ampio 50°11′40″ (figura 2).



▲ Figura 2

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 17 esercitazioni in più

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer determina la soluzione dei seguenti problemi di trigonometria e traccia il grafico dei dati e dei risultati parziali e finali, corredato da didascalie.

1 Calcola gli angoli del triangolo i cui lati giacciono sulle rette $y = \frac{4}{3}x + 1$, $y = -\frac{3}{4}x$ e $y = 2x + 1$.
[90°, 79°41′43″, 10°18′17″]

2 Determina gli angoli del triangolo di vertici $A(-3; 1)$, $B(-1; 2)$, $C(-2; 3)$.
[71°33′54″, 71°33′54″, 36°52′12″]

3 Trova l'angolo $A\widehat{O}B$, dove O è l'origine degli assi cartesiani, il punto A ha coordinate $(-1; 3)$ e $M(0; 4)$ è il punto medio del segmento AB.
[29°44′42″]

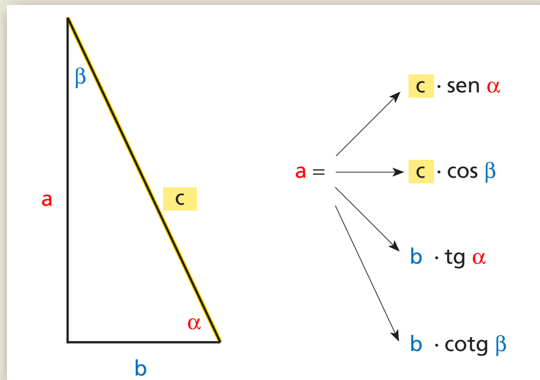
LA TEORIA IN SINTESI
LA TRIGONOMETRIA

1. I TRIANGOLI RETTANGOLI

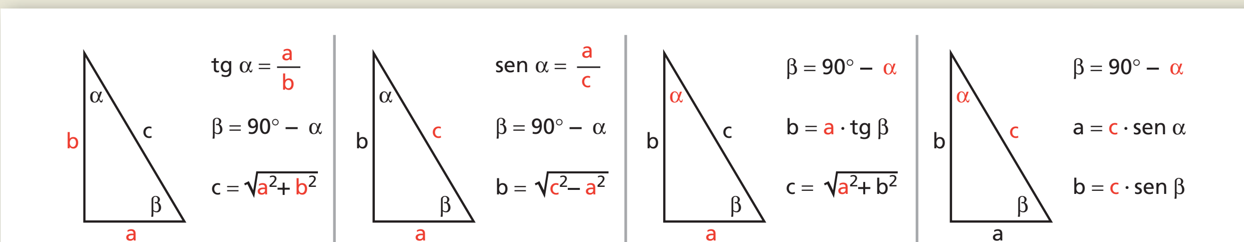
- La **trigonometria** è lo studio delle relazioni fra i lati e gli angoli di un triangolo.

- **Primo teorema dei triangoli rettangoli**
  In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale:
  - alla misura dell'ipotenusa moltiplicata per il seno dell'angolo opposto al cateto stesso;
  - alla misura dell'ipotenusa moltiplicata per il coseno dell'angolo acuto adiacente al cateto stesso.

- **Secondo teorema dei triangoli rettangoli**
  In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale:
  - alla misura dell'altro cateto moltiplicata per la tangente dell'angolo opposto al primo cateto;
  - alla misura dell'altro cateto per la cotangente dell'angolo adiacente al primo cateto.



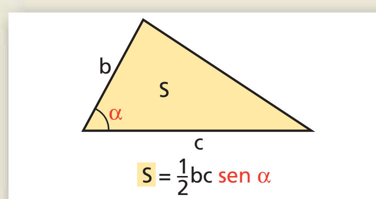
- **Risolvere un triangolo rettangolo** significa determinare le misure dei suoi lati e dei suoi angoli conoscendo **almeno un lato** e **un altro dei suoi elementi**.

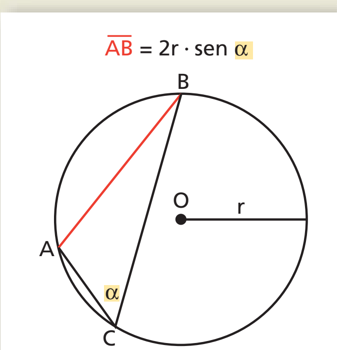


a. Sono noti i due cateti. **b.** Sono noti l'ipotenusa e un cateto. **c.** Sono noti un cateto e l'angolo opposto. **d.** Sono noti l'ipotenusa e un angolo adiacente.

2. APPLICAZIONI DEI TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

- **Area di un triangolo**
  La misura dell'area di un triangolo è uguale al semiprodotto delle misure di due lati e del seno dell'angolo compreso fra essi.





- **Teorema della corda**
  In una circonferenza la misura di una corda è uguale al prodotto della misura del diametro per il seno di uno degli angoli alla circonferenza che insistono sulla corda.

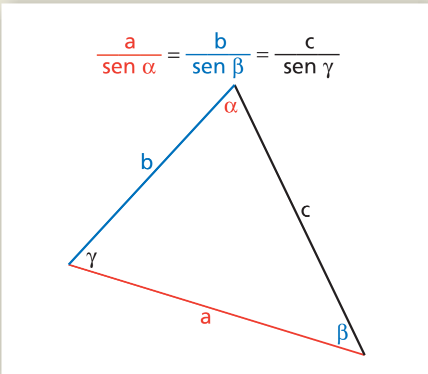
- Il **raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo**, noti un lato a del triangolo e l'angolo α opposto a esso, si calcola con:

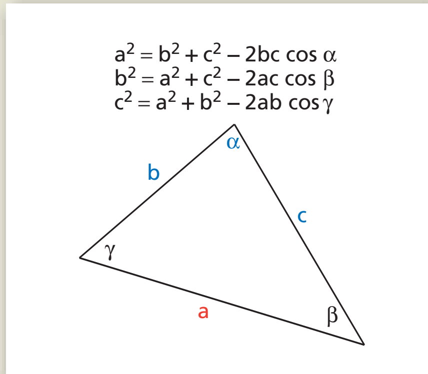
$$r = \frac{a}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha}.$$

3. I TRIANGOLI QUALUNQUE

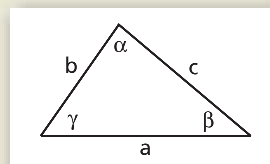
- **Teorema dei seni**
  In un triangolo le misure dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.

- **Teorema del coseno**
  In un triangolo il quadrato della misura di un lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due lati diminuita del doppio prodotto della misura di questi due lati per il coseno dell'angolo compreso fra essi.





- **Risolvere un triangolo qualunque** significa determinare le misure dei suoi lati e dei suoi angoli conoscendo **almeno un lato** e altri **due** suoi elementi.



  - Sono noti un lato e due angoli adiacenti. Per esempio: c, α, β noti.

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta),$$
$$a : \text{sen}\,\alpha = c : \text{sen}\,\gamma \Rightarrow a,$$
$$b : \text{sen}\,\beta = c : \text{sen}\,\gamma \Rightarrow b.$$

  - Sono noti due lati e l'angolo compreso fra essi. Per esempio: b, c, α noti.

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha},$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \beta,$$
$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta).$$

  - Sono noti due lati e un angolo opposto a uno di essi.
    Per esempio: a, b, α noti.

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} \Rightarrow \text{sen}\,\beta,$$

sen β
- $= 1 \rightarrow \beta = 90°$
  - $\alpha < 90°$: una soluzione
  - $\alpha > 90°$: problema impossibile
- $< 1 \rightarrow$ β_1 acuto, β_2 ottuso
  - $\alpha \geq 90°$: solo β_1 accettabile
  - $\alpha < 90°$
    - e $b < a$: solo β_1 accettabile
    - e $b > a$: β_1 e β_2 accettabili

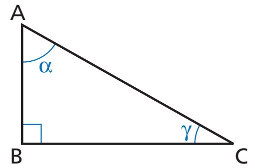
  - Sono noti i tre lati a, b, c.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \alpha,$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \beta,$$
$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta).$$

1. I TRIANGOLI RETTANGOLI

Teoria a pag. 850

1 **VERO O FALSO?**



Nel triangolo rettangolo della figura si ha:

a) $\overline{AB} = \overline{AC}\cos\gamma$. V F

b) $\overline{AC} = \dfrac{\overline{AB}}{\cos\alpha}$. V F

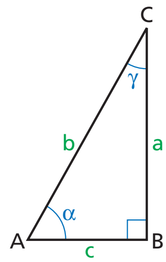
c) $\overline{BC} = \overline{AB}\,\mathrm{tg}\,\gamma$. V F

d) $\overline{AC} = \overline{BC}\,\mathrm{sen}\,\alpha$. V F

e) $\overline{AB} = \overline{BC}\,\mathrm{cotg}\,\alpha$. V F

f) $\overline{AB} = \overline{AC}\cos\alpha$. V F

2 **COMPLETA** osservando la figura.



a) $b\cos\alpha = \dots\dots$ $\qquad \dfrac{c}{\mathrm{sen}\,\gamma} = \dots\dots$

b) $\mathrm{sen}\,\alpha = \dfrac{\dots}{\dots}$ $\qquad a\,\mathrm{tg}\,\gamma = \dots\dots$

c) $\dfrac{c}{a} = \dots\dots$ $\qquad b = c\cdot\dots\dots$

d) $\dfrac{b}{a} = \dots\dots$ $\qquad b\,\mathrm{sen}\,\alpha = \dots\dots$

La risoluzione dei triangoli rettangoli

3 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo un triangolo *ABC* rettangolo in *A*, sapendo che:

a) un cateto è lungo 10 cm e l'ipotenusa 26 cm;
b) i due cateti sono lunghi 30 cm e 40 cm.

a) Troviamo gli elementi incogniti del triangolo.
Per ricavare β, applichiamo il primo teorema dei triangoli rettangoli:

$$\overline{AB} = \overline{BC}\cos\beta$$

$$10 = 26\cos\beta \rightarrow \cos\beta = \frac{5}{13} \rightarrow \beta = \arccos\frac{5}{13}.$$

Ricaviamo γ:

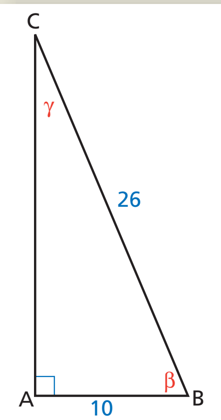
$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{5}{13}.$$

Essendo $\mathrm{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$, ricaviamo sen β:

$$\mathrm{sen}\,\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2\beta} \rightarrow \mathrm{sen}\,\beta = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13};$$

abbiamo scelto il valore positivo perché β è un angolo acuto.
Per il primo teorema dei triangoli rettangoli si ha:

$$\overline{AC} = \overline{CB}\,\mathrm{sen}\,\beta \rightarrow \overline{AC} = \cancel{26}^{\,2}\cdot\frac{12}{\cancel{13}_{\,1}} = 24.$$ La lunghezza di *AC* è 24 cm.



b) Per il secondo teorema dei triangoli rettangoli,

$$\overline{AC} = \overline{AB}\ \mathrm{tg}\,\beta \rightarrow 40 = 30\mathrm{tg}\,\beta \rightarrow \mathrm{tg}\,\beta = \frac{4}{3}$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\frac{4}{3},$$

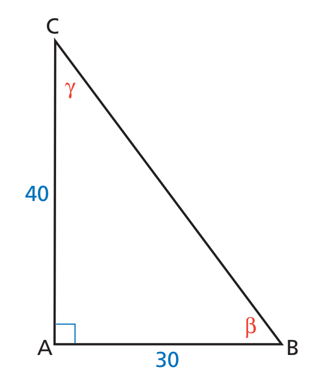
da cui:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{4}{3}.$$

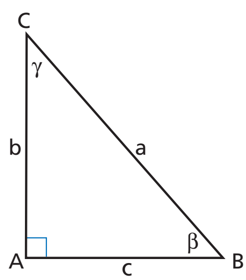
Con il teorema di Pitagora calcoliamo $\overline{BC}$:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50.$$

L'ipotenusa BC ha lunghezza 50 cm.



Risolvi il triangolo *ABC*, rettangolo in *A*, noti gli elementi indicati.



4 $b = 15;\quad \gamma = 30°.$ $[a = 10\sqrt{3};\ c = 5\sqrt{3};\ \beta = 60°]$

5 $a = 24;\quad \beta = 60°.$ $[b = 12\sqrt{3};\ c = 12;\ \gamma = 30°]$

6 $b = 8;\quad c = 8\sqrt{3}.$ $[a = 16;\ \beta = 30°;\ \gamma = 60°]$

7 $a = 48;\quad b = 24.$ $[c = 24\sqrt{3};\ \beta = 30°;\ \gamma = 60°]$

8 $c = 10;\quad \gamma = 60°.$ $\left[a = \frac{20}{3}\sqrt{3};\ b = \frac{10}{3}\sqrt{3};\ \beta = 30°\right]$

9 $b = 22;\quad \gamma = 45°.$ $[a = 22\sqrt{2};\ c = 22;\ \beta = 45°]$

10 $b = 46;\quad \beta = 30°.$ $[a = 92;\ c = 46\sqrt{3};\ \gamma = 60°]$

11 $a = 84;\quad c = 42\sqrt{3}.$ $[b = 42;\ \beta = 30°;\ \gamma = 60°]$

12 $a = 28;\quad \gamma = 45°.$ $[b = 14\sqrt{2};\ c = 14\sqrt{2};\ \beta = 45°]$

13 $a = 36;\quad \beta = 18°.$ $[b \simeq 11{,}12;\ c \simeq 34{,}24;\ \gamma = 72°]$

14 $c = 5;\quad b = 12.$ $\left[a = 13;\ \beta = \mathrm{arcsen}\frac{12}{13};\ \gamma = \mathrm{arcsen}\frac{5}{13}\right]$

15 $c = 5;\quad a = 5\sqrt{2}.$ $[b = 5;\ \beta = \gamma = 45°]$

16 $c = 15;\quad \beta = \mathrm{arctg}\frac{3}{5}.$ $\left[b = 9;\ a \simeq 17{,}49;\ \gamma = \mathrm{arctg}\frac{5}{3}\right]$

17 $a = 5;\quad \beta = 10°.$ $[b \simeq 0{,}87;\ c \simeq 4{,}92;\ \gamma = 80°]$

18 $b = 16;\quad a = 34.$ $\left[c = 30;\ \beta = \mathrm{arcsen}\frac{8}{17};\ \gamma = \mathrm{arcsen}\frac{15}{17}\right]$

19 $b = 12;\quad \beta = \frac{\pi}{3}.$ $\left[a = 8\sqrt{3};\ c = 4\sqrt{3};\ \gamma = \frac{\pi}{6}\right]$

20 $c = 3{,}5;\quad b = 12.$ $[a = 12{,}5;\ \beta = \arccos 0{,}28;\ \gamma = \mathrm{arcsen}\ 0{,}28]$

21 $a = 40;\quad \gamma = 60°.$ $[b = 20;\ c = 20\sqrt{3};\ \beta = 30°]$

22 $b = 14;\quad \gamma = \arccos\frac{2}{3}.$ $\left[a = 21;\ c \simeq 15{,}65;\ \beta = \mathrm{arcsen}\frac{2}{3}\right]$

23 $a = 10$; $\gamma = 20°$. $[\beta = 70°; b \simeq 9{,}4; c \simeq 3{,}42]$

24 $c = 80$; $b = 150$. $\left[a = 170; \beta = \text{arcsen}\frac{15}{17}; \gamma = \text{arcsen}\frac{8}{17}\right]$

25 $c = 40$; $a = 41$. $\left[b = 9; \beta = \text{arcsen}\frac{9}{41}; \gamma = \text{arcsen}\frac{40}{41}\right]$

26 $a = 8$; $\beta = 65°$. $[\gamma = 25°; b \simeq 7{,}25; c \simeq 3{,}38]$

27 $c = 36$; $\gamma = \frac{\pi}{4}$. $\left[\beta = \frac{\pi}{4}; b = 36; a = 36\sqrt{2}\right]$

28 $b = 8$; $c = 15$. $\left[a = 17; \beta = \text{arcsen}\frac{8}{17}; \gamma = \text{arcsen}\frac{15}{17}\right]$

29 $a = 9$; $\beta = \text{arcsen}\frac{3}{5}$. $\left[\gamma = \arccos\frac{3}{5}; b = \frac{27}{5}; c = \frac{36}{5}\right]$

30 $a = 40$; $\gamma = 85°$. $[\beta = 5°; b \simeq 3{,}5; c \simeq 39{,}8]$

31 $c = 32$; $\gamma = \frac{\pi}{6}$. $\left[\beta = \frac{\pi}{3}; b = 32\sqrt{3}; a = 64\right]$

32 $b = 5\sqrt{3}$; $c = 5$. $\left[a = 10; \beta = \frac{\pi}{3}; \gamma = \frac{\pi}{6}\right]$

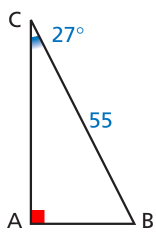
33 $b = 30$; $\gamma = \arccos\frac{15}{17}$. $\left[a = 34; c = 16; \beta = \text{arcsen}\frac{15}{17}\right]$

34 $c = 75$; $\beta = \text{arctg}\frac{8}{15}$. $\left[b = 40; a = 85; \gamma = \text{arcsen}\frac{15}{17}\right]$

35 $b = 56$; $\beta = \text{arcsen}\frac{21}{29}$. $\left[a = \frac{232}{3}; c = \frac{160}{3}; \gamma = \text{arcsen}\frac{20}{29}\right]$

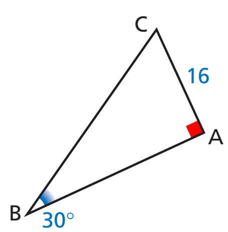
Risolvi i seguenti triangoli rettangoli, noti gli elementi indicati in figura.

36



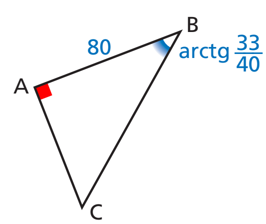
$[c \simeq 24{,}97; b \simeq 49{,}01; \beta = 63°]$

37



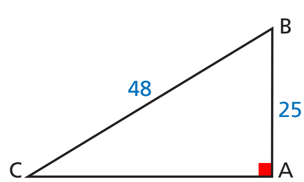
$[a = 32; c \simeq 27{,}71; \gamma = 60°]$

38



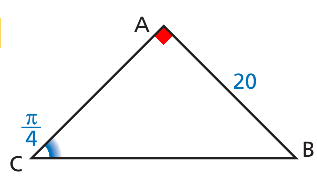
$\left[b = 66; a \simeq 103{,}71; \gamma = \text{arctg}\frac{40}{33}\right]$

39



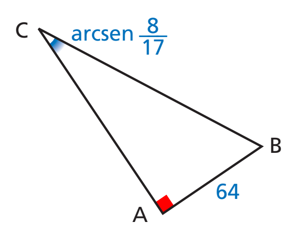
$\left[b \simeq 40{,}98; \beta \simeq \text{arcsen } 0{,}85; \gamma = \text{arcsen}\frac{25}{48}\right]$

40



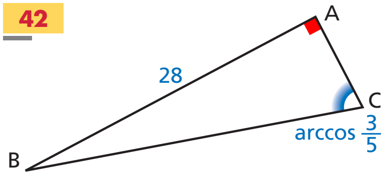
$\left[\beta = \frac{\pi}{4}; b = 20; a = 20\sqrt{2}\right]$

41



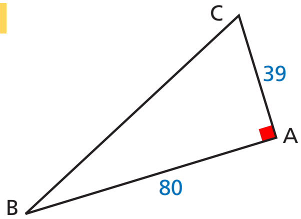
$\left[a = 136; b = 120; \beta = \text{arcsen}\frac{15}{17}\right]$

42



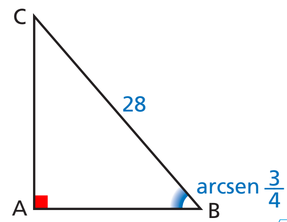
$\left[a = 35;\ b = 21;\ \beta = \text{arcsen}\,\frac{3}{5}\right]$

43



$\left[a=89;\ \beta=\text{arcsen}\,\frac{39}{89};\ \gamma=\text{arcsen}\,\frac{80}{89}\right]$

44

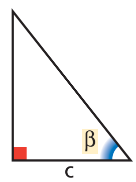


$\left[b=21;\ c=7\sqrt{7};\ \gamma=\text{arcsen}\,\frac{\sqrt{7}}{4}\right]$

---

45 **VERO O FALSO?**

Noti gli elementi del triangolo rettangolo indicati in figura, allora:



a) l'area del triangolo misura $\frac{1}{2}c^2 \text{tg}\,\beta$. V F

b) l'ipotenusa misura $\frac{c}{\text{sen}\,\beta}$. V F

c) l'altezza relativa all'ipotenusa misura $c\,\text{sen}\,\beta$. V F

d) il perimetro del triangolo misura $c\left(\frac{\cos\beta + \text{sen}\,\beta + 1}{\cos\beta}\right)$. V F

e) le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano $c\cos\beta$ e $c\frac{\text{sen}^2\beta}{\cos\beta}$. V F

Le relazioni fra gli elementi di un triangolo rettangolo

Verifica che tra gli elementi di un triangolo *ABC*, rettangolo in *A*, valgono le seguenti relazioni.

46 $\text{sen}^2\frac{\gamma}{2} = \frac{a-b}{2a}$

47 $\text{cotg}\,\beta \cdot \text{cotg}\,\gamma = 1$

48 $\frac{a+c}{a+b} = \frac{1+\cos\beta}{1+\text{sen}\,\beta}$

49 $bc = a^2\cos\beta\cos\gamma$

50 $\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{\text{sen}\,\beta\cos\gamma}$

51 $\cos\beta\cdot\cos\gamma = \frac{bc}{a^2}$

52 $\text{tg}\,\frac{\gamma}{2} = \frac{c}{a+b}$

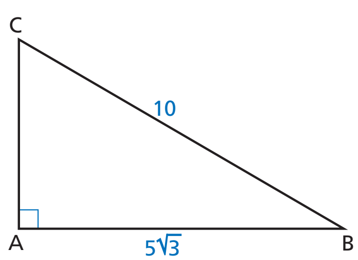
53 $\text{tg}\,\beta + \text{tg}\,\gamma = \frac{a}{b\,\text{sen}\,\gamma}$

54 $\frac{\text{tg}\,\beta}{\text{sen}\,\gamma} = \frac{ab}{c^2}$

I problemi con i triangoli rettangoli

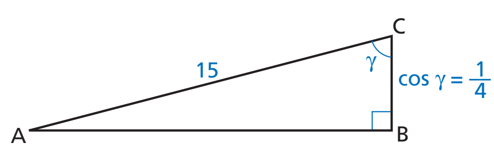
Utilizzando i dati della figura, deduci ciò che è indicato a fianco in rosso.

55 β, $\overline{AC}$



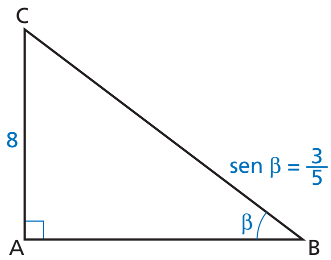
$[30°;\ 5]$

56 $\overline{BC}$, sen α



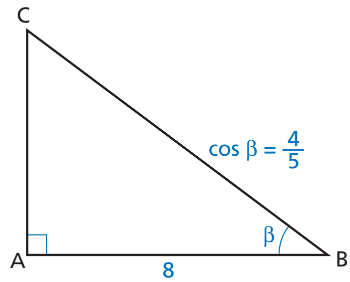
$\left[\frac{15}{4};\ \frac{1}{4}\right]$

57 $\overline{BC}$, $\cos\gamma$



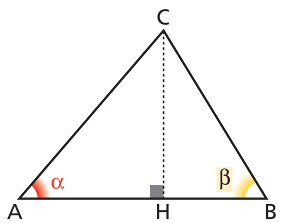
$\left[\frac{40}{3}; \frac{3}{5}\right]$

58 $\overline{AC}$, $\operatorname{tg}\gamma$



$\left[6; \frac{4}{3}\right]$

Nei seguenti esercizi, dato un triangolo come quello della figura e noti gli elementi indicati, determina i lati e gli angoli incogniti.



59 $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $\overline{CH} = 12$. $[24; 12\sqrt{2}; 12(\sqrt{3}+1); 105°]$

60 $\alpha = 60°$, $\overline{HB} = 9$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$. $\left[27; 12\sqrt{6}; 3(2\sqrt{6}+3); \operatorname{arcsen}\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}\right]$

61 $\overline{AC} = 24$, $\beta = \frac{\pi}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. $\left[\frac{64\sqrt{3}}{5}; \frac{8(9+4\sqrt{3})}{5}; \operatorname{arcsen}\frac{3\sqrt{3}+4}{10}\right]$

62 $\overline{CH} = 8$, $\overline{AH} = 6$, $\beta = 30°$. $\left[2(3+4\sqrt{3}); 16; 10; \operatorname{arcsen}\frac{4}{5}; \operatorname{arcsen}\frac{3+4\sqrt{3}}{10}\right]$

63 In un triangolo rettangolo un cateto è lungo 10 cm e l'angolo opposto a esso è di 40°. Trova il perimetro del triangolo. [37,47 cm]

64 In un triangolo rettangolo il rapporto tra un cateto e l'ipotenusa è $\frac{5}{13}$, e l'altro cateto è lungo 48 cm. Determina l'area del triangolo e le misure degli angoli. [480 cm^2; 22° 37′; 67° 23′]

65 Nel triangolo ABC, rettangolo in A, un cateto è lungo 20 cm e il coseno dell'angolo acuto a esso adiacente è 0,7. Determina l'area e il perimetro del triangolo. [204 cm^2; 68,97 cm]

66 Nel triangolo rettangolo ABC la lunghezza dell'ipotenusa BC è 41 cm e la tangente dell'angolo $\widehat{B}$ è $\frac{40}{9}$. Determina il perimetro e l'area del triangolo. [90 cm; 180 cm^2]

67 Nel triangolo rettangolo ABC le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa BC sono $BH = 25$ cm e $CH = 49$ cm. Determina i cateti e gli angoli acuti. $\left[AB = 5\sqrt{74}\text{ cm}; AC = 7\sqrt{74}\text{ cm}; \widehat{B} = \operatorname{arctg}\frac{7}{5}; \widehat{C} = \operatorname{arctg}\frac{5}{7}\right]$

68 In un triangolo rettangolo la lunghezza dell'altezza AH relativa all'ipotenusa è 12 cm e l'ampiezza dell'angolo acuto β è 22°. Risolvi il triangolo. $[AB \simeq 32{,}03\text{ cm}; AC \simeq 12{,}94\text{ cm}; BC \simeq 34{,}55\text{ cm}]$

69 Nel triangolo rettangolo ABC l'altezza AH relativa all'ipotenusa misura 3 m, la proiezione HC del cateto AC sull'ipotenusa misura 7 m. Calcola il perimetro e l'area del triangolo. $\left[\left(\frac{10\sqrt{58}}{7} + \frac{58}{7}\right)\text{m}; \frac{87}{7}\text{m}^2\right]$

70 L'area di un triangolo rettangolo è 54 m^2 e la tangente di uno degli angoli acuti misura $\frac{3}{4}$. Calcola il perimetro del triangolo. [36 m]

71 Calcola l'area di un triangolo rettangolo, sapendo che il suo perimetro è 46 m e l'ampiezza di un angolo acuto è 34°. [85,99 m^2]

72 Determina l'area di un rettangolo, sapendo che la sua diagonale è lunga 65 cm e che essa forma con la base un angolo di 20°. [1357,89 cm^2]

73 In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono di 50°. Determina l'area, sapendo che la base del triangolo è 40 cm. [476,70 cm^2]

74 Determina i cateti di un triangolo rettangolo, sapendo che l'altezza relativa all'ipotenusa è 50 cm e che uno degli angoli del triangolo è 25°. [55,17 cm; 118,31 cm]

75 In un trapezio isoscele l'angolo alla base, l'altezza e la base maggiore sono rispettivamente 80°, 50 cm e 37,64 cm. Calcola il perimetro del trapezio. [159,18 cm]

76 Calcola l'area di un rombo che ha la diagonale maggiore di 16 cm e un angolo di 120°. $\left[\frac{128\sqrt{3}}{3}\text{cm}^2\right]$

77 Nel trapezio rettangolo $ABCD$ il lato obliquo BC forma un angolo di 30° con la base maggiore AB e la diagonale AC è perpendicolare a BC. Calcola il perimetro e l'area del trapezio, sapendo che la sua altezza è 10 cm. $\left[10\left(3+\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)\text{cm}; \frac{250\sqrt{3}}{3}\text{cm}^2\right]$

78 L'area di un trapezio isoscele di base AB è 184 m^2, il suo perimetro è 64 m e la sua altezza è $h = 8$ m. Determina gli angoli del trapezio. $\left[\widehat{A}=\widehat{B}=\operatorname{arcsen}\frac{8}{9}; \widehat{C}=\widehat{D}=\pi-\operatorname{arcsen}\frac{8}{9}\right]$

79 Le altezze di un parallelogramma sono 9 m e 12 m e il perimetro 70 m. Determina gli angoli del parallelogramma. $\left[\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}; \pi-\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}\right]$

80 In un triangolo rettangolo un cateto è lungo 75 cm e il seno del suo angolo opposto è $\frac{15}{17}$. Determina il perimetro del triangolo e l'altezza relativa all'ipotenusa. [200 cm; $h \simeq 35{,}29$ cm]

81 In un triangolo rettangolo un cateto è i $\frac{3}{8}$ dell'altro e la loro somma è 44 cm. Risolvi il triangolo. $\left[32\text{ cm}; 12\text{ cm}; 4\sqrt{73}\text{ cm}; \widehat{B}=\operatorname{arcsen}\frac{3\sqrt{73}}{73}\right]$

82 In un triangolo isoscele la base è lunga 24 cm e il coseno dell'angolo al vertice è $\frac{7}{25}$. Determina le altezze del triangolo. [16 cm; 19,2 cm]

83 Il lato obliquo di un triangolo isoscele è lungo 81 cm e il coseno dell'angolo alla base è $\frac{9}{41}$. Trova il perimetro e l'area del triangolo. [197,56 cm; 1404,9756 cm^2]

84 Nel trapezio isoscele $ABCD$ di base AB è $AD = DC = 82$ cm e $\operatorname{tg}\widehat{A} = \frac{9}{40}$. Determina perimetro e area del trapezio. [488 cm; 2916 cm^2]

85 Trova il perimetro di un triangolo isoscele, di base $AB = 48$ cm, in cui il coseno dell'angolo al vertice è uguale a $-\frac{7}{25}$. [108 cm]

86 In un triangolo ABC, $\widehat{A} = 30°$ e $\widehat{B} = 45°$. Essendo $AC = 20$ cm e $CB = 10\sqrt{2}$ cm, calcola la lunghezza del lato AB. [$(10\sqrt{3}+10)$ cm]

87 Trova i lati del triangolo ABC in cui $\cos\widehat{A} = \frac{4}{5}$, $\widehat{B} = 45°$ e l'altezza relativa ad AB è lunga 24 cm. [56 cm; 40 cm; $24\sqrt{2}$ cm]

88 Nel triangolo ABC conosci gli angoli $\widehat{A} = 35°$, $\widehat{B} = 70°$ e l'altezza $CH = 30$ cm. Determina i lati del triangolo. [$AC \simeq 52{,}3$ cm; $BC \simeq 31{,}93$ cm; $AB \simeq 53{,}76$ cm]

89 Una circonferenza ha diametro $\overline{AB} = 60$. La corda AC misura 40 e il suo prolungamento incontra in T la tangente alla circonferenza condotta per il punto B. Calcola $\overline{BT}$. $[30\sqrt{5}]$

90 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è lunga 20 cm e fra gli angoli acuti β e γ vale la relazione sen $\beta =$ $= 2$ sen γ. Trova l'area del triangolo. [80 cm^2]

91 La differenza tra i cateti di un triangolo rettangolo è 2 cm, mentre il coseno di uno degli angoli acuti è $\frac{21}{29}$. Determina il perimetro del triangolo. [140 cm]

92 In un trapezio rettangolo $ABCD$ l'angolo $D\widehat{C}B$ è di 120° e il lato obliquo BC, che misura $6l$, è perpendicolare alla diagonale minore AC. Determina il perimetro e l'area del trapezio. $\left[\text{perimetro} = 3(9 + \sqrt{3})l;\ \text{area} = \frac{63\sqrt{3}}{2}l^2\right]$

93 Trova gli angoli di un triangolo isoscele sapendo che il perimetro è 72 cm e la base 32 cm. [36,9°; 106,2°]

94 In un triangolo rettangolo un cateto è i $\frac{7}{24}$ dell'altro e l'area è 756 cm^2. Determina i cateti e gli angoli acuti. [72 cm, 21 cm; 73,7°; 16,3°]

95 In un triangolo rettangolo un cateto è lungo 72 cm ed è i $\frac{12}{13}$ dell'ipotenusa. Risolvi il triangolo. [78 cm; 30 cm; 67,4°; 22,6°]

96 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è lunga 20 dm e un angolo acuto ha ampiezza 27°. Calcola le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. [15,88 dm; 4,12 dm]

97 Il trapezio scaleno $ABCD$ è circoscritto a una circonferenza; gli angoli alla base maggiore sono $\widehat{A} = 75°$, $\widehat{B} = 45°$ e l'area è $S = 32\sqrt{6}$. Calcola il raggio della circonferenza. [4]

98 Un trapezio rettangolo $ABCD$ circoscritto a una circonferenza ha gli angoli retti in A e in D e l'angolo acuto in B è di 54°. Sapendo che il perimetro è $20\sqrt{5}$, calcola l'area e la lunghezza del lato obliquo BC. $[\text{area} = 50\sqrt{5};\ \overline{BC} = 10(\sqrt{5} - 1)]$

99 Determina il perimetro e l'area di un ottagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio $r = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. $[8\sqrt{2};\ 4(\sqrt{2} + 1)]$

100 Da un punto P esterno a una circonferenza di centro C si mandano le tangenti PA e PB. Sapendo che $\cos A\widehat{P}B = -\frac{7}{25}$ e che $PC = 15$ cm, determina i valori delle funzioni goniometriche degli angoli $C\widehat{P}A$ e $P\widehat{C}A$ e il raggio della circonferenza. $\left[\text{sen } C\widehat{P}A = \frac{4}{5};\ \text{sen } P\widehat{C}A = \frac{3}{5};\ r = 12 \text{ cm}\right]$

101 In un triangolo rettangolo la differenza dei cateti è 6 cm e la tangente dell'angolo opposto al cateto maggiore è $\frac{21}{20}$. Calcola il perimetro e l'area del triangolo. [420 cm; 7560 cm^2]

102 Nel triangolo ABC l'altezza CH divide AB in due parti, una tripla dell'altra. Sapendo che $\overline{AB} = 8a$ e $\overline{CH} = 2a$, calcola la tangente di ciascun angolo del triangolo, il suo perimetro e l'altezza relativa a CB nel triangolo CHB. $\left[\text{tg } \widehat{A} = 1;\ \text{tg } \widehat{B} = \frac{1}{3};\ \text{tg } \widehat{C} = -2;\ 2a(\sqrt{2} + \sqrt{10} + 4);\ \frac{3a\sqrt{10}}{5}\right]$

103 Il trapezio $ABCD$ è rettangolo in A e D. Sapendo che $AB = 32$ cm, $CD = 8$ cm e tg $\widehat{B} = \frac{5}{12}$, calcola il perimetro e l'area del trapezio e determina il valore di $\cos\widehat{C}$. $\left[76 \text{ cm};\ 200 \text{ cm}^2;\ -\frac{12}{13}\right]$

104 Determina i lati di un triangolo rettangolo, sapendo che il perimetro è 180 cm e la tangente di uno degli angoli acuti è $\frac{12}{5}$. [30 cm; 72 cm; 78 cm]

105 Gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ del triangolo ABC sono acuti e $\operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{4}{5}$. Sapendo che la lunghezza del lato AB è 12 cm e quella dell'altezza AH è 8 cm, determina la lunghezza degli altri due lati e il valore di $\operatorname{sen}\widehat{A}$.
$\left[AC = 10 \text{ cm}; BC = (4\sqrt{5}+6) \text{ cm}; \operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{6+4\sqrt{5}}{15}\right]$

106 Nel triangolo ABC l'angolo $\widehat{B}$ è ottuso e AH è l'altezza relativa al lato BC. Sapendo che $HB = 12$ cm, $HC = 48$ cm e $\operatorname{tg}\widehat{C} = \frac{1}{3}$, determina i lati e gli angoli del triangolo.
$\left[AB = 20 \text{ cm}; AC = 16\sqrt{10} \text{ cm}; BC = 36 \text{ cm}; \widehat{B} = \operatorname{arcsen}\frac{4}{5}; \widehat{A} = \operatorname{arcsen}\frac{9}{50}\sqrt{10}\right]$

107 L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga 106 cm e il perimetro 252 cm. Determina le tangenti degli angoli acuti. $\left[\frac{28}{45}; \frac{45}{28}\right]$

108 Nel trapezio rettangolo $ABCD$ la base minore CD è 45 cm e il lato obliquo 90 cm. Inoltre $\cos\widehat{C} = -\frac{4}{5}$. Determina perimetro e area del trapezio. [perimetro = 306 cm; area = 4374 cm^2]

109 Nel triangolo isoscele ABC il lato misura $26l$ e il coseno dell'angolo al vertice è $-\frac{119}{169}$. Trova il perimetro e le altezze del triangolo. [perimetro = $100l$; $10l$; $18{,}5l$]

110 Le ampiezze degli angoli di un triangolo sono α, β, γ. Sapendo che $\cos\alpha = \frac{7}{25}$ e $\cos\beta = \frac{24}{25}$, calcola $\cos\gamma$, specificando se il triangolo è rettangolo, acutangolo o ottusangolo. [0; triangolo rettangolo]

111 Dimostra che in ogni triangolo rettangolo la tangente di un angolo acuto è uguale a $\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}$, dove a_1 e a_2 sono le misure delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
Determina le misure dei lati del triangolo quando $a_1 = 12$ cm e $a_2 = 4$ cm. $[16 \text{ cm}, 8\sqrt{3} \text{ cm}, 8 \text{ cm}]$

112 Dimostra che tra l'angolo al vertice α di un triangolo isoscele e un suo angolo alla base β sussiste la relazione: $\cos\alpha = 1 - 2\cos^2\beta$.
Se $\beta = \operatorname{arcsen}\frac{5}{13}$ e il lato misura 120 cm, trova la base e l'altezza del triangolo. $\left[\frac{2880}{13} \text{ cm}; \frac{600}{13} \text{ cm}\right]$

Triangoli rettangoli nella realtà

113 Una funivia collega due località, A e B, distanti 1200 m ed è inclinata di 42° sul piano orizzontale. A che altezza, rispetto ad A, si trova la stazione B? [802,96 m]

114 Lo scivolo di un parchetto per bambini è alto 2,5 m. Per arrivare a terra un bimbo scivola per 3,36 m. Che angolo forma lo scivolo con il terreno? [48°]

115 La rampa di un parcheggio sotterraneo è lunga 8,4 m e forma un angolo di 21° con il piano orizzontale. A che profondità si trova il parcheggio? [3,01 m]

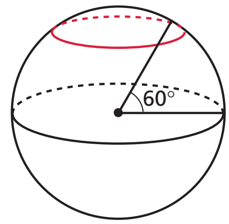
116 In un cartello stradale si legge: «Pendenza del 14%». Percorrendo un tratto di 280 m, quanto si sale in altezza? Che angolo forma la strada con il piano orizzontale? [39,2 m; 8,05°]

117 TEST L'ombra di un campanile è lunga la metà della sua altezza. Detta α la misura dell'angolo formato dal sole sull'orizzonte in quel momento, si può dire che:

A $45° \leq \alpha < 60°$. B $60° \leq \alpha$. C $\alpha < 30°$. D è notte. E $30° \leq \alpha < 45°$.

(*CISIA*, *Facoltà di Ingegneria*, *Test di ingresso*, 2003)

118 TEST La lunghezza dell'equatore è di circa 40 000 km. La lunghezza del parallelo che si trovi a 60° di latitudine Nord (si veda la figura a lato), arrotondata alle centinaia di km è:



A 34 600 km. C 26 700 km. E nessuno dei precedenti.
B 23 500 km. D 30 000 km.

(*Olimpiadi di Matematica*, *Giochi di Archimede*, 1998)

119 TEST In un giorno di sole una sfera è posata su un terreno orizzontale. In un certo istante l'ombra della sfera raggiunge la distanza di 10 metri dal punto in cui la sfera tocca il terreno. Nello stesso istante un'asta di lunghezza 1 metro posta verticalmente al terreno getta un'ombra lunga 2 metri. Qual è il raggio della sfera in metri?

A $\frac{5}{2}$. B $9-4\sqrt{5}$. C $10\sqrt{5}-20$. D $8\sqrt{10}-23$. E $6-\sqrt{15}$.

(*Olimpiadi di Matematica*, *Gara di 2° livello*, 2008)

Problemi con equazioni, disequazioni, funzioni

120 Inscrivi un triangolo ABC in una semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 4a$, in modo che l'angolo in B risulti maggiore dell'angolo in A. Da O conduci la perpendicolare al diametro che incontra AC in H. Determina l'angolo $\widehat{B}$ in modo che il rettangolo di base OH e altezza AC abbia area $4a^2$. [60°]

121 In un rettangolo $ABCD$, di area $8a^2$, la diagonale DB misura $4a$. Trova l'angolo $D\widehat{B}A$. [45°]

122 È dato il trapezio $ABCD$, di base maggiore AB, tale che l'angolo $B\widehat{C}D$ è di 120°, il triangolo HCB (con H piede della perpendicolare tracciata da D su AB) è rettangolo e l'altezza DH è lunga 4 cm. Indica con x l'angolo $D\widehat{A}B$ e determina l'area del trapezio. Trova poi per quale valore di x l'area vale $\frac{80}{3}\sqrt{3}$ cm².

$$\left[\text{area} = 8\left(\frac{7}{3}\sqrt{3} + \operatorname{cotg} x\right) \text{cm}^2;\ x = 30°\right]$$

123 Considera sulla semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 4$ cm un punto P e, posto $A\widehat{B}P = x$, trova per quali valori di x si ha:

$$\frac{8\overline{PB} + 5\overline{PO}}{\overline{AB}} = \frac{13}{2}.$$

$$\left[x = \frac{\pi}{3}\right]$$

124 Una semicirconferenza ha diametro $AB = 10$ cm e t è la sua tangente in A. Considera un punto P sulla semicirconferenza e indica con C il punto proiezione di P su t. Posto $P\widehat{B}A = x$, trova per quale posizione di P si ha $\overline{PC} + \overline{PB} = \frac{25}{2}$.

$$\left[x = \frac{\pi}{3}\right]$$

125 È dato il triangolo ABC inscritto in una semicirconferenza il cui diametro AB misura $r\sqrt{2}$. Indicato con x l'angolo $C\widehat{A}B$, determina l'area del triangolo al variare di C sulla semicirconferenza e il valore di x per cui l'area risulta uguale a $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$.

$$\left[\text{area} = \frac{r^2}{2}\operatorname{sen} 2x;\ x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{3}\right]$$

126 Nel triangolo ABC, rettangolo in A, il cateto AB misura $10a$ e l'angolo $\widehat{C}$ ha il coseno uguale a $\frac{12}{13}$. Disegna la semicirconferenza di diametro CB esterna al triangolo e su di essa trova un punto P in modo che:

$\overline{CP} \cdot \overline{PB} = 169a^2$. (Poni $C\widehat{B}P = x$.) $[x = 15° \vee x = 75°]$

127 Nel triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa $\overline{BC} = 2a$, il cateto minore è AB. Traccia la perpendicolare all'ipotenusa BC nel suo punto medio M, fino a incontrare il cateto AC in P. Determina l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{C}B$ in modo che:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{PM}} = 3\frac{\overline{CM}}{\overline{AB}}.$$ $[30°]$

128 Inscrivi un triangolo ABC in una semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2a$ in modo che l'angolo in B risulti maggiore dell'angolo in A. Prolunga AC fino a intersecare in T la tangente in B alla circonferenza e trova per quali valori di $x = A\widehat{B}C$ si ha: $3\overline{CT} + \sqrt{3}\,\overline{CB} = 2\overline{AC}$. $[60°]$

129 Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza e si conoscono:

$$\overline{AB} = \overline{DA} = 2, \quad \cos\widehat{A} = \cos\widehat{C} = 0.$$

a) Posto $B\widehat{D}C = x$, esprimi, in funzione di x, l'area del quadrilatero.
b) Calcola per quali valori di x l'area è $2 + \sqrt{3}$.
c) In corrispondenza di tali angoli determina la misura della diagonale AC.

$\left[\text{a) } 2(\text{sen } 2x + 1)\text{; b) } \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\text{; c) } \sqrt{3} + 1\right]$

130 Nel trapezio rettangolo $ABCD$ si hanno $\widehat{A} = \widehat{D} = \frac{\pi}{2}$ e $\overline{AD} = \overline{DC} = 20$. DC è la base minore. Traccia da A e D le perpendicolari alla retta CB, che la intersechino rispettivamente in Q e in P. Determina $\overline{AQ}$, $\overline{DP}$ e $\overline{PQ}$ in funzione della misura x di $A\widehat{B}C$ e calcola x in modo che $\overline{AQ} = \sqrt{3}\,\overline{PD} + \overline{PQ}$.

$\left[\overline{AQ} = 20(\text{sen } x + \cos x)\text{; } \overline{DP} = 20 \text{ sen } x\text{; } \overline{PQ} = 20 \text{ sen } x\text{; } x = \frac{\pi}{6}\right]$

131 Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa BC lunga 16 cm e l'angolo $A\widehat{B}C = 60°$. Trova un punto Q sull'altezza AH relativa all'ipotenusa in modo che sia:

$4\overline{QB}^2 + \frac{1}{6}\overline{AC}^2 = \overline{CQ}^2$. (Poni $Q\widehat{B}C = x$.) $[x = 45°]$

132 È dato il rombo $ABCD$ circoscritto a una circonferenza di centro O e raggio r. Indica con x l'angolo $O\widehat{A}B$ e determina, al variare di x, l'area $A(x)$ del rombo. Trova per quali valori di x si ha $A(x) = \frac{8}{3}\sqrt{3}\,r^2$. Rappresenta poi il grafico della funzione $y = A(x)$ evidenziando il tratto che si riferisce al problema.

$\left[A(x) = \frac{4r^2}{\text{sen } 2x}\text{; } x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{3}\right]$

133 Nel trapezio rettangolo $ABCD$, di base maggiore AB e base minore DC, è $\overline{AD} = \overline{DC} = 8$. E e F sono le proiezioni sulla retta CB, rispettivamente, di D e A. Indica con x l'angolo $A\widehat{B}C$ e determina la funzione:

$$f(x) = \overline{AF} + \overline{DE} + \overline{EC}.$$

a) Calcola per quali valori di x si ha: $f(x) = 8\sqrt{6}$.
b) Rappresenta graficamente $f(x)$ nell'intervallo in cui può variare x geometricamente. (Suggerimento. Trasforma l'espressione di $f(x)$ con il metodo dell'angolo aggiunto.)

$\left[f(x) = 16(\text{sen } x + \cos x)\text{; a) } x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5}{12}\pi\right]$

134 Dato il quadrato $ABCD$ di lato a, sia r una retta passante per B e non intersecante altri punti del quadrato. A' e C' sono le proiezioni su r, rispettivamente, di A e C.

a) Determina l'angolo $A'\widehat{B}A = x$ in modo che l'area del trapezio $A'ACC'$ sia $\frac{3}{4}a^2$.

b) Studia la funzione che rappresenta l'area senza tener conto dei limiti del problema. Per disegnare il grafico, poni $a = 1$.

$\left[\text{a) } x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5}{12}\pi\right]$

135 P è un punto variabile su una semicirconferenza di raggio 2 e H la sua proiezione sul diametro AB.
a) Studia la funzione $f(x) = \overline{PH} + \overline{HB}$ al variare dell'angolo $x = P\widehat{A}H$ e rappresenta il tratto di grafico che si riferisce al problema.
b) Trova per quali valori di x il valore della funzione è minore della misura del raggio.

$\left[\text{a) } f(x) = 2\sqrt{2}\,\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2;\ \text{b) } 0 \leq x < \frac{\pi}{8}\right]$

136 Data la circonferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$, considera una corda CD perpendicolare ad AB e in C traccia la tangente alla circonferenza fino a incontrare in E il prolungamento del diametro. Indicato $C\widehat{B}O$ con x, studia al variare di x la funzione

$$y = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{CE}}{\overline{EO}}$$

e disegnane il grafico evidenziando il tratto che si riferisce al problema. $\left[y = 2\,\text{sen}\,2x;\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{\pi}{4}\right]$

137 Nel triangolo ABC, rettangolo in C, l'area misura 24 e $\overline{AC} = 6$. Considera un punto P variabile sulla semicirconferenza di diametro CB esterna al triangolo. Sia D la sua proiezione su CB ed E la proiezione di D su AB. Posto $P\widehat{B}C = x$, trova per quali valori di x si ha:

$$\overline{DB} + \overline{PD} + \frac{5}{2}\overline{AE} = 25.$$

$\left[x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{2}\right]$

138 Nel quadrato $ABCD$, di lato lungo 1 m, traccia l'arco di circonferenza $\overset{\frown}{AC}$ di centro B. Su di esso considera il punto P individuato dall'angolo $A\widehat{B}P = x$. Sia H la proiezione di P su AD.
a) Traccia il grafico della funzione $y = 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AH} + \overline{PD}^2$.
b) Trova per quali valori di x si ha $\overline{PD}^2 = 3 - \sqrt{6}$. (Suggerimento. Calcola $\overline{DH}$ e $\overline{HP}$...)

[a) $y = 3 - 2\cos x$; b) $x = 15° \vee x = 75°$]

139 Nella semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2$ traccia il punto C tale che $A\widehat{B}C = 60°$. Considera P sull'arco $\overset{\frown}{AC}$ e H proiezione di P su AC. Determina per quale posizione di P si ha: $\sqrt{3}\ \overline{AH} + \overline{PH} = 1$.
(Poni $P\widehat{A}C = x$.) [$x = 45°$]

140 Dato il segmento AB di lunghezza unitaria, considera la semiretta AP che forma con AB un angolo acuto $P\widehat{A}B = x$. Sia Q la proiezione di B su AP. Costruisci il triangolo AQC rettangolo e isoscele di ipotenusa AQ, nel semipiano generato da AP non contenente B.

a) Determina i valori di x per cui l'area del quadrilatero $ABQC$ risulta minore di $\frac{1}{4}$.

b) Considera la funzione $f(x)$ che rappresenta l'area del triangolo ABQ, tracciane il grafico limitatamente all'intervallo del problema geometrico e individua il suo valore massimo.

$\left[\text{a) arctg } 2 < x < \frac{\pi}{2};\ \text{b) } f(x) = \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2x;\ \frac{1}{4}\right]$

141 Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, traccia la tangente t in B e considera la semiretta di origine A che interseca la semicirconferenza in P e la retta t in D. Indica con H la proiezione di P su t, poni $P\widehat{A}B = x$ e trova per quali posizioni di P si ha:

$$\overline{PH} + \overline{DH} > \frac{1}{2}\overline{DB}.$$

$\left[\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{2}\right]$

142 È dato il triangolo ABC rettangolo in $\widehat{A}$, avente:

$$\overline{AC} = 7 \text{ e } \cos B\widehat{C}A = \frac{7}{25}.$$

a) Determina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$.
b) Considera sul prolungamento di AB dalla parte di A un punto D tale che $A\widehat{C}D = \frac{1}{2}B\widehat{C}A$. Risolvi il triangolo rettangolo ACD.
c) Traccia la semicirconferenza di diametro CB esterna ai triangoli e su di essa considera un punto P tale che l'area del quadrilatero $BDCP$ sia $\frac{361}{2}$, ponendo $P\widehat{B}C = x$.

$\left[\text{a) } \overline{AB} = 24, \overline{BC} = 25; \text{ b) } \cos A\widehat{C}D = \frac{4}{5}, \overline{DC} = \frac{35}{4}, \overline{AD} = \frac{21}{4}; \text{ c) } x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5}{12}\pi\right]$

143 Dato il settore circolare AOB di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ e raggio $\sqrt{3}$, considera il punto P sull'arco AB e con esso costruisci il rettangolo inscritto $DCPS$ tale che DC appartenga al raggio OA. Determina l'area del rettangolo $DCPS$ in funzione dell'angolo $A\widehat{O}P = x$. Calcola per quale valore di x l'area vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Per quale valore di x il rettangolo diventa un quadrato?

$\left[\text{area} = 3\cos x \operatorname{sen} x - \sqrt{3}\operatorname{sen}^2 x; x = \frac{\pi}{6}; x = \operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right]$

144 Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, siano P un punto su di essa e H la proiezione di P sul diametro AB. Determina $f(x) = \frac{\overline{AH} + \overline{PH}}{\overline{HB}}$ in funzione dell'angolo $P\widehat{B}A = x$ e calcola per quale valore di x si ha $f(x) = 2$.

$\left[f(x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x; x = \frac{\pi}{4}\right]$

145 È dato il quadrato $ABCD$ di lato 4 cm. Al suo interno traccia l'arco di circonferenza $\overset{\frown}{AC}$ con centro nel punto D. Considera un punto T dell'arco e la tangente in esso che incontra i lati del quadrato nei punti P e Q.
a) Scrivi $\overline{PQ}$ in funzione dell'angolo $A\widehat{D}T = 2x$.
b) Trova per quali valori di x si ha $\overline{PQ} = 8(\sqrt{2} - 1)$.
c) Risolvi la disequazione $\overline{AB} - \overline{PQ} < \frac{4}{3}(2\sqrt{3} - 3)$.

$\left[\text{a) } \overline{PQ} = 4\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}; \text{ b) } x = \frac{\pi}{8}; \text{ c) } 0 < x < \frac{\pi}{12} \vee \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}\right]$

2. APPLICAZIONI DEI TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

▶ Teoria a pag. 853

L'area di un triangolo

Determina l'area di un triangolo ABC, noti gli elementi indicati.

146 $a = 20$, $b = 5$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. $[25\sqrt{3}]$

147 $a = 12$, $c = 3\sqrt{2}$, $\beta = \frac{3}{4}\pi$. $[18]$

148 $b = \frac{5}{2}\sqrt{3}$, $c = 16$, $\alpha = 120°$. $[30]$

149 $a = 20$, $b = 12$, $\gamma = 150°$. $[60]$

150 $b = 65$, $c = 20$, $\alpha = \operatorname{arcsen}\frac{5}{13}$. $[250]$

151 $a = 26$, $c = 10$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{12}{5}$. $[120]$

152 Calcola l'area di un triangolo sapendo che due suoi lati sono lunghi 30 cm e 18 cm e l'angolo compreso tra essi è di 45°. [190,9 cm^2]

153 In un triangolo due lati sono lunghi 28 cm e 46 cm. L'angolo compreso tra essi ha il coseno uguale a $\frac{12}{13}$. Determina l'area del triangolo. [247,7 cm^2]

154 Calcola l'area di un parallelogramma in cui due lati consecutivi misurano 12 e 28 e l'angolo compreso fra essi ha ampiezza $\frac{\pi}{3}$. $[168\sqrt{3}]$

155 In un triangolo ABC, $\overline{AC} = 26$ e $\overline{AB} = 18\sqrt{2}$. Sapendo che l'area è 234, trova l'angolo $C\widehat{A}B$. $\left[\frac{\pi}{4} \vee \frac{3}{4}\pi\right]$

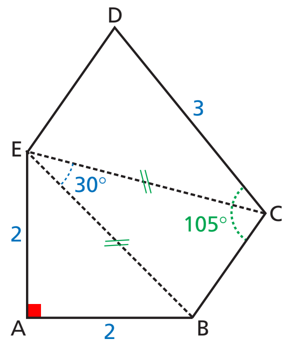
156 Un triangolo isoscele ha area 192 e l'angolo alla base misura $\text{arcsen}\frac{4}{5}$. Determina il perimetro. [64]

157 Dal vertice A del triangolo equilatero ABC di lato l traccia una semiretta secante il triangolo e fissa su di essa il punto P tale che $\overline{AP} = l$. Calcola le ampiezze degli angoli del triangolo ABP, sapendo che è valida la seguente relazione fra le aree dei due triangoli: $S_{ABC} = \sqrt{3}\, S_{ABP}$. $\left[\frac{5}{12}\pi; \frac{5}{12}\pi; \frac{\pi}{6}\right]$

158 Un rombo ha l'area di 208,6 cm^2 e un angolo misura 68°. Trova il lato e le due diagonali. [15; 16,8; 24,9]

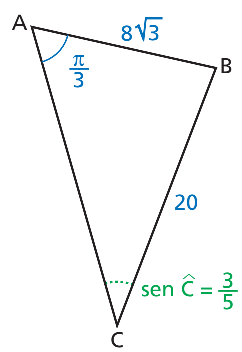
Nei seguenti esercizi determina gli elementi richiesti utilizzando i dati forniti nelle figure.

159



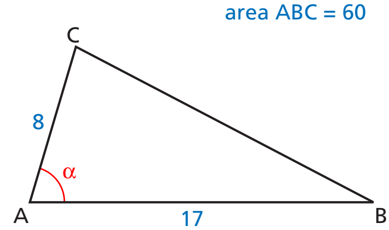
area ABCDE? $\left[4 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$

160



area ABC? $[24(\sqrt{3} + 4)]$

161



α? $\overline{CB}$? $\left[\text{arcsen}\frac{15}{17}; 15\right]$

Il teorema della corda

162 **ESERCIZIO GUIDA**

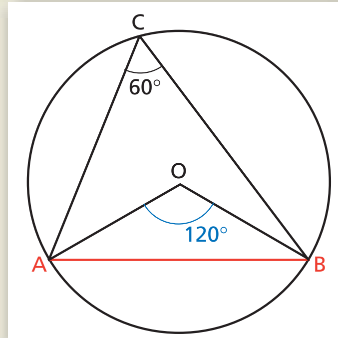
In una circonferenza il raggio è 20 cm. Calcoliamo la lunghezza di una sua corda, sapendo che l'angolo al centro che insiste su di essa ha ampiezza di 120°.

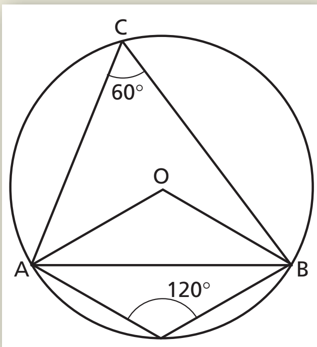
Se l'angolo al centro che insiste sulla corda è 120°, allora il corrispondente angolo alla circonferenza è $\alpha = 60°$.

Per il teorema della corda è:

$$\overline{AB} = 2r\,\text{sen}\,\alpha = 2 \cdot 20 \cdot \text{sen}\,60° = \cancel{40}^{\,20}\,\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}_{\,1}} = 20\sqrt{3}\,.$$

La corda è lunga $20\sqrt{3}$ cm.

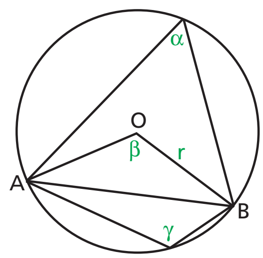




Osservazione. Sulla corda AB insistono angoli alla circonferenza di 60° e angoli alla circonferenza di 120°. La lunghezza della corda AB che calcoliamo non dipende dall'angolo scelto, perché

$$\text{sen}\,60° = \text{sen}\,120° = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Negli esercizi che seguono trova l'elemento indicato riferendoti alla figura.



163 $\overline{AB} = ?$, $r = 5$, $\alpha = 30°$. [5]

164 $\overline{AB} = ?$, $r = 12$, $\gamma = 135°$. $[12\sqrt{2}]$

165 $\overline{AB} = ?$, $r = 15$, $\beta = \arccos\frac{7}{25}$. [18]

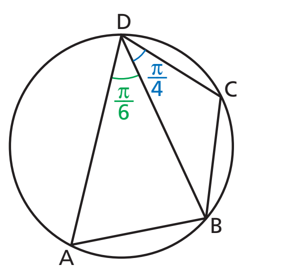
166 $r = ?$, $\overline{AB} = 10\sqrt{3}$, $\alpha = 30°$. $[10\sqrt{3}]$

167 $r = ?$, $\overline{AB} = 20$, $\beta = 120°$. $\left[\frac{20}{3}\sqrt{3}\right]$

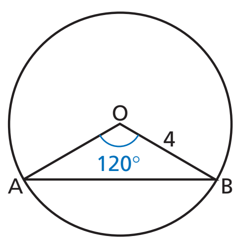
168 $\alpha = ?$, $\beta = ?$, $\gamma = ?$, $\overline{AB} = 7\sqrt{2}$, $r = 7$. [45°; 90°; 135°]

Nei seguenti esercizi determina gli elementi richiesti utilizzando i dati forniti nelle figure.

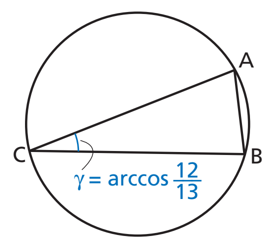
169



raggio = 10 $\overline{AB}$? $\overline{BC}$?



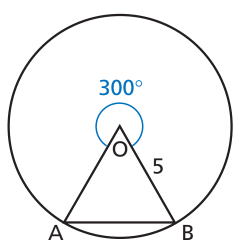
$\overline{AB}$?



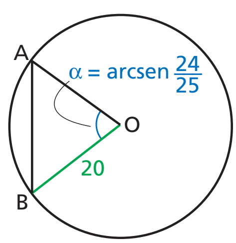
raggio = 13 $\overline{AB}$?

$[10; 10\sqrt{2}; 4\sqrt{3}; 10]$

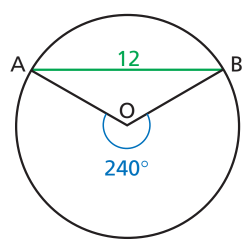
170



$\overline{AB}$?



$\overline{AB}$?



raggio?

$[5; 24; 4\sqrt{3}]$

171 Utilizzando il teorema della corda, trova le misure dei lati del triangolo equilatero, del quadrato e dell'esagono regolare inscritti in una circonferenza di raggio r. $[r\sqrt{3}; r\sqrt{2}; r]$

172 In una circonferenza di raggio 8 cm, una corda sottende un angolo alla circonferenza di 30°. Determina la lunghezza della corda. [8 cm]

173 In una circonferenza di raggio 24 cm, l'angolo al centro di 48° insiste su una corda AB. Determina la lunghezza di AB. [19,5 cm]

174 Determina il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo ABC, sapendo che $AB = 40$ cm e che $\cos A\widehat{C}B = \frac{12}{13}$. $[r = 52 \text{ cm}]$

175 Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza di raggio 5 e $\overline{AC} = 8$. Calcola seno, coseno e tangente degli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ supponendo che il vertice B si trovi sul maggiore dei due archi di estremi A e C.
$\left[\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{4}{5}; \cos\widehat{B} = \frac{3}{5}; \operatorname{tg}\widehat{B} = \frac{4}{3}; \operatorname{sen}\widehat{D} = \frac{4}{5}; \cos\widehat{D} = -\frac{3}{5}; \operatorname{tg}\widehat{D} = -\frac{4}{3}\right]$

176 Nel triangolo isoscele ABC il rapporto fra il raggio della circonferenza circoscritta e la base AB è $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Trova l'ampiezza dell'angolo al vertice $A\widehat{C}B$. $\left[\frac{\pi}{4} \vee \frac{3}{4}\pi\right]$

177 In una circonferenza di raggio 2, la corda AB misura $\frac{16}{9}\sqrt{5}$. Preso C sull'arco maggiore $\widehat{AB}$ in modo che $\overline{AC} = \overline{CB}$, determina il perimetro del triangolo ABC. $\left[\frac{40}{9}\sqrt{5}\right]$

178 Sia ABC un triangolo inscritto in una circonferenza. Determina la misura del raggio, sapendo che la corda BC misura $12l$ e gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ misurano rispettivamente 45° e 105°. Trova poi il perimetro del triangolo. $[r = 12l; 6l(\sqrt{6} + 2 + 3\sqrt{2})]$

179 In una circonferenza di raggio r, tre corde consecutive AB, BC, CD misurano rispettivamente r, $r\sqrt{3}$ e $r\sqrt{2}$. Quanto misura la corda AD? $[r\sqrt{2}]$

180 Nel quadrilatero $ABCD$ inscritto in una circonferenza di raggio 4 calcola $\overline{AD}$ e l'ampiezza dei quattro angoli, sapendo che $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 4\sqrt{3}$, $\overline{CD} = 4\sqrt{2}$. $\left[4\sqrt{2}; \widehat{A} = \frac{7}{12}\pi; \widehat{B} = \widehat{D} = \frac{\pi}{2}; \widehat{C} = \frac{5}{12}\pi\right]$

181 Considera una circonferenza di raggio r e una sua corda $\overline{AB} = r$. Sul maggiore dei due archi $\widehat{AB}$ prendi un punto P e poni $P\widehat{B}A = x$. Determina $\overline{BP}$ in funzione di x e trova per quali valori di x si ha $r < \overline{BP} < r\sqrt{2}$.
$\left[\overline{BP} = 2r\operatorname{sen}\left(\frac{5}{6}\pi - x\right); 0 < x < \frac{\pi}{12} \vee \frac{7}{12}\pi < x < \frac{2}{3}\pi\right]$

182 Su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ considera la corda $\overline{AC} = r$ e sull'arco $\widehat{CB}$ un punto P variabile, con $P\widehat{A}B = x$. Calcola x in modo che il perimetro di $ACPB$ sia $5r$. Trova poi l'area del quadrilatero corrispondente al valore di x determinato. $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}\right]$

183 In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, la corda AC misura $r\sqrt{2}$. Il punto P, preso sull'arco $\widehat{AC}$, ha proiezione H sul segmento AC e C ha proiezione K sulla tangente in P. Detto x l'angolo $C\widehat{A}P$, determina la funzione

$$y = \overline{CK} + \sqrt{2}\,\overline{PH} + \overline{PK}$$

e rappresenta il suo grafico tenendo conto dei limiti del problema. $\left[y = 2r\operatorname{sen}2x; 0 \le x \le \frac{\pi}{4}\right]$

184 In una circonferenza di raggio r traccia il diametro AB e il diametro CD a esso perpendicolare. Sull'arco minore $\widehat{DB}$ considera un punto P e, posto $P\widehat{A}B = x$, trova per quali valori di x si ha:

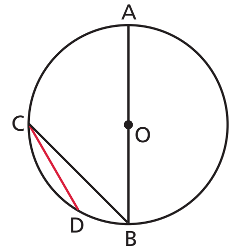
$$2\overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PC} + \overline{AC}.$$

$\left[\frac{\pi}{12}\right]$

185 TEST Nella figura a fianco, calcolare CD sapendo che $OB = 1$, $A\widehat{B}C = 45°$, $B\widehat{C}D = 15°$.

A $2 - \sqrt{2}$. B $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. C $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D 1. E $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$.

(*Olimpiadi di Matematica, Giochi di Archimede*, 2001)



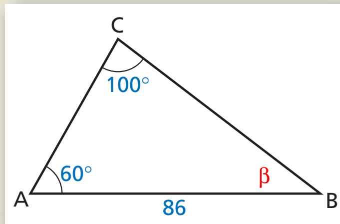
3. I TRIANGOLI QUALUNQUE

Teoria a pag. 856

Il teorema dei seni

186 **ESERCIZIO GUIDA**

Utilizziamo gli elementi indicati nella figura per trovare l'angolo β e i lati *CB* e *AC* del triangolo.



$\beta = 180° - (100° + 60°) = 20°$.

Applichiamo il teorema dei seni per determinare CB e AC:

$$\frac{\overline{CB}}{\text{sen } 60°} = \frac{86}{\text{sen } 100°} \rightarrow \overline{CB} = \frac{86}{\text{sen } 100°} \cdot \text{sen } 60° \simeq 75{,}6.$$

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen } 20°} = \frac{86}{\text{sen } 100°} \rightarrow \overline{AC} = \frac{86}{\text{sen } 100°} \cdot \text{sen } 20° \simeq 29{,}8.$$

Del triangolo *ABC* sono noti alcuni elementi. Determina ciò che è richiesto.

187 $a = 12$, $b = 9$, $\beta = 30°$. sen α? $\left[\frac{2}{3}\right]$

188 $a = 20$, $b = 9$, $\alpha = 120°$. sen β? $\left[\frac{9\sqrt{3}}{40}\right]$

189 $a = 21$, $c = 12$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. sen α? cos β? [impossibile]

190 $b = 12$, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$. a? c? $[6\sqrt{6}; 6(\sqrt{3}+1)]$

191 $a = 12\sqrt{2}$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$. b? c? $[12\sqrt{3}(\sqrt{3}-1); 12\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)]$

192 $\alpha = 60°$, $\gamma = 75°$, $b = 12$. a? c? $[6\sqrt{6}; 6(1+\sqrt{3})]$

193 $\alpha = 82°$, $\beta = 36°$, $c = 63$. a? b? $[70{,}6; 41{,}9]$

194 $\beta = 28°$, $\gamma = 107°$, $b = 48$. a? c? $[72{,}3; 97{,}8]$

195 Nel triangolo ABC sono noti $\overline{AB} = 20$, cotg $\widehat{A} = \frac{3}{4}$ e $\widehat{C} = \frac{\pi}{6}$. Determina la misura degli altri due lati. $[\overline{BC} = 32; \overline{AC} = 4(3 + 4\sqrt{3})]$

196 Determina il perimetro del parallelogramma $ABCD$ di base AB, sapendo che $\overline{BD} = 12$, $D\widehat{A}B = \frac{\pi}{3}$, $A\widehat{B}D = \frac{\pi}{4}$. $[12\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)]$

197 Nel triangolo ABC si conoscono $AB = 10\sqrt{7}$ m, sen $\widehat{A} = \frac{3}{5}$ e cos $\widehat{C} = -\frac{3}{4}$. Determina i lati AC e BC. $[AC = 2(4\sqrt{7} - 9)$ m; $BC = 24$ m$]$

198 Nel triangolo LMN il lato LM è lungo 60 cm e l'angolo $M\widehat{L}N$ ha ampiezza 30°. Sapendo che $\cos L\widehat{N}M = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, determina gli altri lati del triangolo. $[MN = 90 \text{ cm}; LN = 30(2\sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ cm}]$

199 Nel triangolo acutangolo ABC la mediana AM è lunga 80 cm e forma, col lato AB, un angolo di 30°. La lunghezza del lato BC è 120 cm. Calcola l'area del triangolo. $[800(\sqrt{5} + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2]$

200 La bisettrice NP del triangolo LMN misura 40. Determina $\overline{NM}$ e $\overline{LP}$, noti $L\widehat{N}M = \arccos\frac{7}{25}$ e $\widehat{M} = 30°$.
$\left[\overline{NM} = 8(4 + 3\sqrt{3}); \overline{LP} = \frac{1200}{7 + 24\sqrt{3}}\right]$

201 Il triangolo LMN è ottusangolo in $\widehat{L}$; sapendo che $LM = 19$ m, $LN = 13$ m e che l'altezza relativa al lato LM è $NH = 12$ m, calcola il perimetro del triangolo e l'ampiezza di $L\widehat{N}M$.
$\left[(32 + 12\sqrt{5}) \text{ m}; L\widehat{N}M = \arcsen \frac{19\sqrt{5}}{65}\right]$

202 Nel triangolo ABC i lati AB e BC sono lunghi rispettivamente 50 cm e 80 cm. La tangente di $B\widehat{A}C$ è $-\frac{4}{3}$. Determina il perimetro e l'area. $[20(5 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}; 200(4\sqrt{3} - 3) \text{ cm}^2]$

203 Nel triangolo ABC la bisettrice CD misura 8 e forma con la base AB l'angolo $C\widehat{D}B = 60°$. Determina $D\widehat{C}B$ sapendo che $\overline{AC} + \overline{CB} = 24$.
$\left[\frac{\pi}{5}\right]$

204 Considera il triangolo equilatero ABC e la circonferenza a esso circoscritta di raggio r. Sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ che non contiene C prendi il punto P. Calcola $A\widehat{B}P$ in modo che l'area del quadrilatero $APBC$ sia i $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo equilatero.
$\left[\frac{\pi}{6}\right]$

205 Sia ABC un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r. Considera una corda CD interna all'angolo $A\widehat{C}B$ e su CD un punto E tale che $AD \cong DE$. Dopo aver dimostrato che il triangolo ADE è equilatero, esprimi in funzione di $x = A\widehat{C}D$ il perimetro del triangolo AEC.
Determina poi per quale valore di x il perimetro misura $(2 + \sqrt{3})r$.
$\left[\text{perimetro} = r(\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}); x = \frac{\pi}{6}\right]$

206 Sono dati i triangoli ABC e ABD, appartenenti allo stesso semipiano rispetto al segmento AB, tali che l'angolo $A\widehat{C}B$ è la metà dell'angolo $A\widehat{D}B$, $\overline{CB} = 2a$, $\overline{AD} = a$ e $C\widehat{B}D = \frac{\pi}{6}$. Indica con P il punto di intersezione tra AC e BD e, posto $A\widehat{C}B = x$, determina la funzione:

$$f(x) = \frac{\overline{PC} - \overline{PB}}{\overline{PD}}.$$

Calcola poi in quali intervalli di $[0; 2\pi]$ si ha $f(x) \geq 0$.
$\left[f(x) = \frac{2(1 - 2\operatorname{sen} x)}{\cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen} x}, \text{con } 0 \leq x < \frac{\pi}{6}; 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \vee \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{5}{6}\pi \vee \frac{7}{6}\pi < x \leq 2\pi\right]$

207 Considera il segmento AB e nei due semipiani opposti disegna il triangolo ABC con $C\widehat{B}A = 2x$ e $\overline{CB} = 2a$ e il triangolo ABD con $B\widehat{A}D = x$. I due triangoli sono tali che $C\widehat{B}D = \frac{\pi}{2}$. Indica con P il punto di intersezione dei segmenti CD e AB. Sapendo che $P\widehat{C}B = \frac{\pi}{6}$, determina la misura di AD in funzione di x e calcola per quali valori di x è:

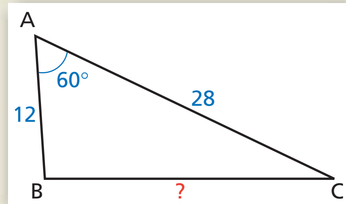
$$\overline{AD} > \frac{2\sqrt{3}}{3}a.$$

$\left[\overline{AD} = \frac{2a\cos 2x}{\sqrt{3}\operatorname{sen} x}; 0 < x < \frac{\pi}{6}\right]$

Il teorema del coseno

208 ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo la misura del lato BC utilizzando gli elementi indicati nella figura.



Applichiamo il teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Si ha:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos B\widehat{A}C =$$
$$= 12^2 + 28^2 - 2\cdot 12\cdot 28\cos 60° =$$
$$= 144 + 784 - \cancel{2}\cdot 12\cdot 28\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = 592 \to \overline{BC} = \sqrt{592} \simeq 24{,}3.$$

Del triangolo ABC sono noti alcuni elementi. Determina ciò che è richiesto.

209 $a = 12$, $b = 6$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. c? $[6\sqrt{3}]$

210 $b = 4\sqrt{2}$, $c = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$. a? $[4\sqrt{17}]$

211 $a = 15$, $c = 21$, $\beta = 40°$. b? $[13{,}5]$

212 $a = 24$, $b = 12$, $c = 12\sqrt{3}$. γ? $[60°]$

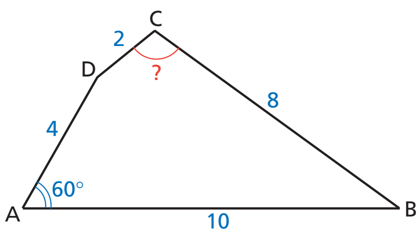
213 $a = \sqrt{56}$, $b = 10$, $c = 6$. $\cos\alpha$? $\left[\frac{2}{3}\right]$

214 $a = 12$, $b = 4\sqrt{10}$, $c = 8$. $\operatorname{tg}\beta$? $[\sqrt{15}]$

215 $a = 8$, $c = 9$, $\beta = \arccos\frac{1}{3}$. b? $[\sqrt{97}]$

216 $b = 20$, $c = 6$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. a? $[2\sqrt{61}]$

217 Determina l'angolo $B\widehat{C}D$ nel quadrilatero della figura.



$[\simeq 104°]$

218 Nel triangolo ABC, $\overline{BC} = 4$, $\overline{AB} = x$, $\overline{AC} = x + 2$ e $\cos B\widehat{A}C = \frac{x+8}{2x+4}$. Determina tutti i possibili valori di x.

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge*, 2006)

$[x = 6]$

219 **TEST** Un triangolo ha lati di lunghezza 1, 2 e $\sqrt{7}$. La misura in radianti dell'angolo opposto al lato di lunghezza $\sqrt{7}$ è

A $\frac{\pi}{2}$.
B $\frac{5\pi}{8}$.
C $\frac{2\pi}{3}$.
D $\frac{3\pi}{4}$.
E $\frac{5\pi}{6}$.

(USA *University of South Carolina, High School Math Contest*, 1994)

220 Nel triangolo acutangolo ABC si ha

$$\operatorname{sen} A\widehat{C}B = \frac{5}{13},\ AC = 26\text{ cm e } BC = 8\text{ cm}.$$

Trova AB. [18,9 cm]

221 Un rombo ha i lati lunghi 10 cm e un angolo di 25°. Determina le lunghezze delle diagonali. [4,3 cm; 19,5 cm]

222 Nel triangolo ABC la misura di AC è 4 e il coseno dell'angolo $\widehat{A}$ è $\frac{3}{4}$. Il punto D divide AB nei segmenti $\overline{AD} = 2$ e $\overline{DB} = 1$. Trova $\overline{CD}$, $\overline{CB}$ e la misura di CM, mediana relativa ad AB.

$\left[\overline{CD} = 2\sqrt{2}; \overline{CB} = \sqrt{7}; \overline{CM} = \frac{\sqrt{37}}{2}\right]$

223 In un parallelogramma due lati consecutivi misurano 4 e 20 e l'angolo fra essi compreso è $\alpha = \operatorname{arcsen}\frac{4}{5}$. Calcola le misure dell'area e delle diagonali.

$[\text{area} = 64; 8\sqrt{5}; 16\sqrt{2}]$

224 La base maggiore AB del trapezio rettangolo $ABCD$ misura 26, il lato obliquo CB misura 5 e $\widehat{B} = \operatorname{arcsen}\frac{5}{13}$. Determina $\overline{AC}$ e l'area.
$\left[\overline{AC} = \sqrt{461};\ \text{area} = \frac{7700}{169}\right]$

225 Verifica che il triangolo che ha i lati lunghi 9 cm, 15 cm e 21 cm è ottusangolo.

226 In un trapezio isoscele $ABCD$ la base maggiore AB e il lato obliquo CB sono lunghi rispettivamente 70 cm e 32 cm. L'angolo $A\widehat{B}C$ è di 72°. Calcola le lunghezze delle diagonali e del perimetro del trapezio.
$[AC = BD = 67{,}4\ \text{cm};\ \text{perimetro} = 184{,}2\ \text{cm}]$

227 Nel triangolo LMN la lunghezza del lato LM è $6\sqrt{21}$ cm, quella del lato MN è 50 cm e il seno dell'angolo compreso fra essi è $\frac{2}{5}$. Determina il raggio della circonferenza circoscritta e l'area del triangolo.
$[r_1 = 95\ \text{cm},\ r_2 = 5\sqrt{46}\ \text{cm};\ S_1 = S_2 = 60\sqrt{21}\ \text{cm}^2]$

228 I lati AB e AC del triangolo ABC sono lunghi rispettivamente 24 cm e 20 cm; il coseno dell'angolo compreso fra essi è $-\frac{1}{4}$. Determina il perimetro, l'area e la mediana BM.
$[\text{perimetro} = (44 + 8\sqrt{19})\ \text{cm};\ \text{area} = 60\sqrt{15}\ \text{cm}^2;\ BM = 2\sqrt{199}\ \text{cm}]$

229 Nel triangolo ABC il lato AB supera di 4 cm il lato AC. Inoltre, $B\widehat{A}C = 120°$ e $BC = 14$ cm. Trova le lunghezze dei lati AC e AB.
$[AC = 6\ \text{cm};\ AB = 10\ \text{cm}]$

230 Nel triangolo ABC sono noti il lato AB, la bisettrice AT dell'angolo $B\widehat{A}C$ e il segmento BT staccato da tale bisettrice sul lato BC; le loro lunghezze sono: $AB = 6$ cm, $AT = 6(\sqrt{3} - 1)$ cm e $BT = 3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$ cm. Calcola il perimetro e l'area del triangolo.
$[(6\sqrt{3} - 3\sqrt{6} + 9\sqrt{2})\ \text{cm};\ 9(3 - \sqrt{3})\ \text{cm}^2]$

231 È dato il trapezio isoscele $ABCD$ di cui conosci: la base maggiore $AB = 18$ cm, i lati obliqui $AD = BC = 12$ cm e la diagonale $BD = 6\sqrt{7}$ cm. Determina gli angoli e il perimetro del trapezio.
$[\widehat{A} = 60°;\ \widehat{D} = 120°;\ 48\ \text{cm}]$

232 La corda AB di una circonferenza di centro O e raggio r è lunga quanto il lato di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza. Traccia da B la tangente alla circonferenza e prendi su di essa un punto P appartenente al semipiano individuato da AB e contenente O. Poni $\overline{PB} = x$. Esprimi:

$$f(x) = \overline{AP}^2 - \overline{AB}^2,$$

rappresenta la funzione nel piano cartesiano e determina per quale valore di x è $f(x) = \frac{1}{4}r^2$.
$\left[f(x) = x^2 + \sqrt{3}\,rx,\ x \geq 0;\ x = \frac{r}{2}(2 - \sqrt{3})\right]$

233 Sia $ABCD$ un quadrato di lato $2r$. Traccia la circonferenza di diametro AB e considera un punto P appartenente alla semicirconferenza interna al quadrato, ponendo $P\widehat{A}B = x$. Sia P' il simmetrico di P rispetto ad AB. Determina la funzione

$$f(x) = \overline{DP'}^2 - \overline{PA}^2,$$

rappresentala graficamente ed evidenzia la parte del grafico relativa al problema. In tale tratto indica il massimo e il minimo valore della funzione. Trova per quale valore di x la funzione assume valore massimo.
$\left[f(x) = 4r^2(1 + \operatorname{sen} 2x);\ \text{massimo} = 8r^2;\ \text{minimo} = 4r^2;\ x = \frac{\pi}{4}\right]$

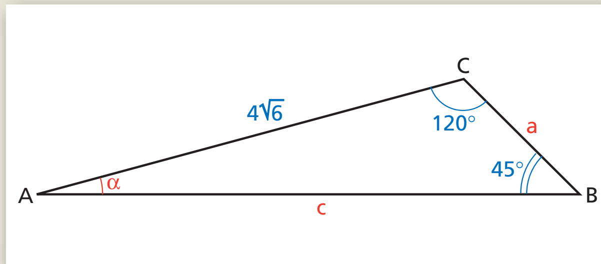
La risoluzione dei triangoli qualunque

Sono noti un lato e due angoli

234 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo il triangolo ABC, sapendo che:

$b = 4\sqrt{6}, \beta = 45°, \gamma = 120°.$



Ricaviamo α per differenza:

$$\alpha = 180° - (45° + 120°) = 15°.$$

Applichiamo il teorema dei seni per calcolare c e a:

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \rightarrow c = \frac{b \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta};$$

$$c = \frac{4\sqrt{6}\operatorname{sen}120°}{\operatorname{sen}45°} = \frac{4\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 12;$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \rightarrow a = \frac{b \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta};$$

$$a = \frac{4\sqrt{6}\operatorname{sen}15°}{\operatorname{sen}45°} = \frac{\cancel{4}\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\cancel{4}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\overset{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{6}}}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot 2}{\cancel{\sqrt{2}}_{1}} = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}.$$

Risolvi il triangolo ABC, noti gli elementi indicati.

235 $c = 12\sqrt{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. $\left[\beta = \frac{5}{12}\pi; a = 12\sqrt{2}; b = 6(\sqrt{2}+\sqrt{6})\right]$

236 $b = \sqrt{3} + 1$, $\beta = 15°$, $\gamma = 120°$. $[\alpha = 45°; a = 4 + 2\sqrt{3}; c = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}]$

237 $a = 8\sqrt{6}$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, $\beta = \frac{\pi}{12}$. $\left[\gamma = \frac{\pi}{4}; b = 8\sqrt{3} - 8; c = 16\right]$

238 $c = 4\sqrt{2}$, $\alpha = 30°$, $\gamma = \frac{7}{12}\pi$. $\left[\beta = \frac{\pi}{4}; a = 4\sqrt{3} - 4; b = 4\sqrt{6} - 4\sqrt{2}\right]$

239 $a = 28$, $\alpha = 30°$, $\beta = \arccos\frac{1}{3}$. $\left[\gamma \simeq 79°28'; b = \frac{112}{3}\sqrt{2}; c = \frac{28}{3}(2\sqrt{6}+1)\right]$

240 $c = 4\sqrt{3}$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, $\beta = \frac{\pi}{12}$. $\left[\gamma = \frac{\pi}{4}; a = 6\sqrt{2}; b = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)\right]$

241 $a = 10\sqrt{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{5}{12}\pi$. $\left[\beta = \frac{\pi}{3}; b = 10\sqrt{3}; c = 5\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\right]$

Sono noti due lati e l'angolo fra essi compreso

242 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo il triangolo ABC, sapendo che:

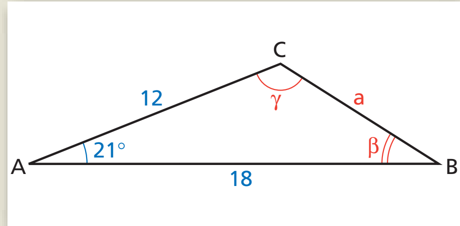
$b = 12, c = 18, \alpha = 21°.$

Applicando il teorema del coseno, ricaviamo a:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$;

$a^2 = 12^2 + 18^2 - 2 \cdot 12 \cdot 18 \cos 21° \simeq 64{,}69$;

$a \simeq 8{,}04$.



Ricaviamo β, applicando ancora il teorema del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \rightarrow \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos\beta \simeq \frac{8{,}04^2 + 18^2 - 12^2}{2 \cdot 8{,}04 \cdot 18} \simeq 0{,}85 \rightarrow \beta \simeq 32°.$$

Ricaviamo γ per differenza:

$\gamma \simeq 180° - (21° + 32°) = 127°$.

Risolvi il triangolo *ABC*, noti gli elementi indicati.

243 $b = 14$, $c = 28$, $\alpha = 34°$. $[a \simeq 18{,}17; \beta \simeq 26°; \gamma \simeq 120°]$

244 $a = 15{,}3$, $b = 6{,}2$, $\gamma = 128°$. $[c \simeq 19{,}73; \alpha \simeq 38°; \beta \simeq 14°]$

245 $a = \sqrt{3}$, $c = 5\sqrt{3}$, $\beta = 60°$. $[b \simeq 7{,}94; \alpha \simeq 11°; \gamma \simeq 109°]$

246 $b = 4$, $c = 20$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$. $[a \simeq 22{,}27; \beta \simeq 9°; \gamma \simeq 51°]$

247 $a = 4\sqrt{3}$, $b = 6\sqrt{2}$, $\gamma = 60°$. $[\alpha \simeq 50°; \beta \simeq 70°; c \simeq 7{,}82]$

Sono noti due lati e l'angolo opposto a uno di essi

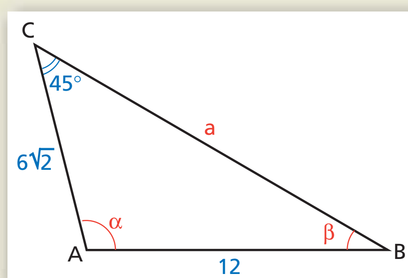
248 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo un triangolo *ABC*, sapendo che:

a) $b = 6\sqrt{2}$, $c = 12$, $\gamma = 45°$;

b) $b = 4\sqrt{2}$, $c = 4\sqrt{6}$, $\beta = 30°$.

a) Ricaviamo β con il teorema dei seni:



$$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta},$$

$$\frac{\cancel{12}^{\,2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{{}^{1}\cancel{6}\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\beta} \rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2} \begin{cases} \beta_1 = 30° \\ \beta_2 = 150° \end{cases}$$

È accettabile solo il valore $\beta_1 = 30°$, in quanto per $\beta_2 = 150°$ si avrebbe $\beta + \gamma = 150° + 45° = 195° > 180°$.

Inoltre non sarebbe vero che ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore: $6\sqrt{2}$, che è minore di 12, sarebbe opposto a 150°, che è maggiore di 45°.

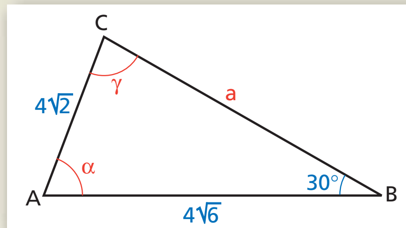
Determiniamo α per differenza:

$\alpha = 180° - (30° + 45°) = 105°$.

Troviamo a con il teorema dei seni:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \;\rightarrow\; \frac{a}{\operatorname{sen}105°} = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \;\rightarrow\; a \simeq 16{,}4.$$

b) Applichiamo il teorema dei seni:



$$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta},$$

$$\frac{4\sqrt{6}}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \;\rightarrow\; \operatorname{sen}\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \begin{cases} \gamma_1 = 60° \\ \gamma_2 = 120° \end{cases}$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili.

- Se $\gamma = 60° \rightarrow \alpha = 90°$,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}90°} = \frac{4\sqrt{2}}{\operatorname{sen}30°} \;\rightarrow\; a = 8\sqrt{2}.$$

- Se $\gamma = 120° \rightarrow \alpha = 30°$, il triangolo è isoscele, quindi $a = 4\sqrt{2}$.

Risolvi il triangolo *ABC*, noti gli elementi indicati.

249 $a = 12\sqrt{2}$, $b = 8\sqrt{3}$, $\alpha = 60°$. $[\beta = 45°; \gamma = 75°; c = 12 + 4\sqrt{3}]$

250 $b = 6\sqrt{3}$, $c = 6\sqrt{2}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$. $\left[\alpha = \frac{5}{12}\pi; \gamma = \frac{\pi}{4}; a = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}\right]$

251 $a = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{2} + \sqrt{6}$, $\alpha = 45°$. $[\beta = 60°, \gamma = 75°, b = 2\sqrt{3} \vee \beta = 30°, \gamma = 105°, b = 2]$

252 $b = 7$, $c = 7\sqrt{3}$, $\gamma = 120°$. $[\alpha = 30°; \beta = 30°; a = 7]$

253 $b = 3\sqrt{3}$, $c = 3$, $\beta = \frac{\pi}{3}$. $\left[\alpha = \frac{\pi}{2}; \gamma = \frac{\pi}{6}; a = 6\right]$

254 $b = 4$, $c = 2\sqrt{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{6}$.

$\left[\alpha = \frac{7}{12}\pi, \beta = \frac{\pi}{4}, a = 2(\sqrt{3} + 1) \vee \alpha = \frac{\pi}{12}, \beta = \frac{3}{4}\pi, a = 2(\sqrt{3} - 1)\right]$

255 $a = 6(\sqrt{2} + 1)$, $b = 6 + 3\sqrt{2}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$. $\left[\alpha = \frac{\pi}{2}; \gamma = \frac{\pi}{4}; c = 6 + 3\sqrt{2}\right]$

256 $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{3}$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}$ (α acuto). $[\beta = 90°; \gamma \simeq 48°; c = \sqrt{15}]$

Sono noti i tre lati

257 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo un triangolo *ABC*, sapendo che:

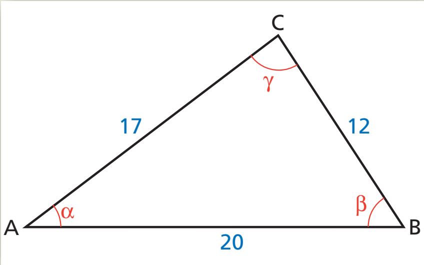
$a = 12, b = 17, c = 20.$

Applichiamo più volte il teorema del coseno:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{17^2 + 20^2 - 12^2}{2 \cdot 17 \cdot 20} \simeq 0,80 \to \alpha \simeq 36,72°;$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{12^2 + 20^2 - 17^2}{2 \cdot 12 \cdot 20} \simeq 0,53 \to \beta \simeq 57,91°;$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{12^2 + 17^2 - 20^2}{2 \cdot 12 \cdot 17} \simeq 0,08 \to \gamma \simeq 85,36°.$$



Risolvi il triangolo *ABC*, noti gli elementi indicati.

258 $a = 4$, $b = 9$, $c = 12$. $[\alpha \simeq 15°; \beta \simeq 35°; \gamma \simeq 130°]$

259 $a = 20$, $b = 7$, $c = 14$. $[\alpha \simeq 142°; \beta \simeq 12°; \gamma \simeq 26°]$

260 $a = 52$, $b = 48$, $c = 36$. $[\alpha \simeq 75°; \beta \simeq 63°; \gamma \simeq 42°]$

261 $a = 15$, $b = 26$, $c = 40$. $[\alpha \simeq 10°; \beta \simeq 17°; \gamma \simeq 153°]$

262 $a = 4$, $b = 2\sqrt{6}$, $c = 2 + 2\sqrt{3}$. $[45°; 60°; 75°]$

263 $a = 12$, $b = 8$, $c = 4\sqrt{7}$. $[\alpha \simeq 79°; \beta \simeq 41°; \gamma \simeq 60°]$

264 $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{2} + \sqrt{6}$. $\left[\alpha = \frac{\pi}{3}; \beta = \frac{\pi}{4}; \gamma = \frac{5}{12}\pi\right]$

I problemi con i triangoli qualunque

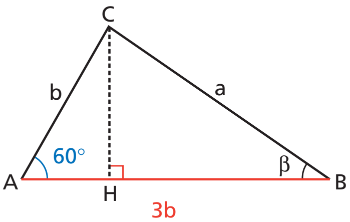
265 **VERO O FALSO?**

Nel triangolo della figura si ha:

a) $a = \dfrac{\sqrt{3}\,b}{2\,\text{sen}\,\beta}$. V F

b) $\overline{CH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. V F

c) $\dfrac{\text{sen}\,(120° - \beta)}{\text{sen}\,\beta} = 3$. V F



266 In un triangolo un lato misura $9\sqrt{2}$. Un angolo a esso adiacente è di $\frac{\pi}{4}$ e l'altro ha tangente uguale a $-\frac{4}{3}$. Determina le misure degli altri elementi del triangolo. $\left[\text{angolo: arccos}\frac{\sqrt{98}}{10}; \text{lati: } 72, 45\sqrt{2}\right]$

267 In un triangolo l'area misura $\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \sqrt{3})$ e due angoli hanno ampiezze $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$. Calcola le misure degli altri elementi del triangolo. $\left[\text{angolo: } \frac{5}{12}\pi; \text{lati: } 2, \sqrt{6}, \sqrt{3} + 1\right]$

268 In un triangolo le misure dell'area e di due lati sono rispettivamente $\frac{25}{2}(3 - \sqrt{3})$, 10 e $5(\sqrt{3} - 1)$. Trova gli altri elementi del triangolo. $[60°, 81°, 39°, 8,76 \vee 120°, 45°, 15°, 5\sqrt{6}]$

269 In un triangolo isoscele il seno degli angoli alla base è uguale a $\frac{1}{5}$. Calcola il perimetro e l'area sapendo che la base misura 40. $\left[10\left(\frac{5}{3}\sqrt{6} + 4\right), \frac{100}{3}\sqrt{6}\right]$

270 Calcola l'area di un rombo di lato 35 cm, sapendo che il coseno dell'angolo acuto è $\frac{7}{25}$. [1176 cm^2]

271 Determina il perimetro e la diagonale minore di un parallelogramma, sapendo che la diagonale maggiore è lunga 20 cm e forma con un lato un angolo di 30°, mentre l'angolo a essa opposto è di 135°. [$20(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)$ cm, $20\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm]

272 Calcola il perimetro e l'area di un trapezio isoscele, sapendo che la base maggiore è 90 cm, il lato obliquo 30 cm e l'angolo alla base ha il coseno uguale a $\frac{3}{5}$. [204 cm; 1728 cm^2]

273 In un parallelogramma la diagonale minore misura $2\sqrt{2}$ cm e forma con un lato un angolo di 30°. Sapendo che l'angolo opposto a tale diagonale è di 45°, calcola il perimetro del parallelogramma. [$2(\sqrt{6}+\sqrt{2}+2)$ cm]

274 Nel parallelogramma $ABCD$ si hanno: $AD = 5$ cm, $AB = 1$ cm, $\widehat{A} = 135°$. Determina le diagonali del parallelogramma. [5,75 cm; 4,35 cm]

275 In un parallelogramma un angolo misura 75°, un lato 15 e l'area $15\sqrt{3}$. Calcola la misura dell'altro lato. [$3\sqrt{2}-\sqrt{6}$]

276 Il triangolo acutangolo ABC è inscritto in una circonferenza di raggio 5; la misura del lato AB è $5\sqrt{3}$ e quella del lato AC è 8. Calcola l'area del triangolo. [$2(4\sqrt{3}+9)$]

277 Nel quadrato $ABCD$ è inscritto il quadrato $RSTV$ ($AR \cong BS \cong CT \cong DV$). Il perimetro di $ABCD$ è $8\sqrt{6}$, quello di $RSTV$ è 16. Determina gli angoli $S\widehat{R}B$ e $R\widehat{S}B$. [15°; 75°]

278 Nel triangolo LMN la bisettrice NP è lunga 78 cm, l'ampiezza dell'angolo $L\widehat{M}N$ è 24° e quella dell'angolo $L\widehat{N}M$ è 54°. Risolvi il triangolo. [$\widehat{L} = 102°$; $MN \simeq 149{,}03$ cm; $ML \simeq 123{,}26$ cm; $NL \simeq 61{,}97$ cm]

279 Nel triangolo ABC la bisettrice dell'angolo in C incontra il lato AB nel punto P tale che $PB = 70$ cm. Sapendo che $A\widehat{B}C = 40°$ e $A\widehat{C}B = 80°$, calcola l'area del triangolo. [4203,61 cm^2]

280 In un triangolo ABC conosci il lato $AB = 35$ cm, l'angolo $A\widehat{B}C = 45°$ e la mediana $AM = 28$ cm. Calcola l'area e il perimetro del triangolo. [1ª soluzione: $S \simeq 936{,}6$ cm^2; $2p \simeq 167{,}3$ cm; 2ª soluzione: $S \simeq 288{,}4$ cm^2; $2p \simeq 83{,}1$ cm]

281 Nel triangolo ABC i lati AB e BC sono lunghi rispettivamente 42 cm e 78 cm; la tangente dell'angolo $B\widehat{A}C$ è $-\frac{3}{2}$. Determina gli angoli, il terzo lato del triangolo e la mediana BN. [$\simeq 123{,}7°$; $\simeq 29{,}7°$; $\simeq 26{,}6°$; 46,44 cm; 58,18 cm]

282 Sulla semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ è assegnato un punto Q tale che $\overline{AQ} + \overline{QB} = \sqrt{6}\,r$. Quanto misura l'angolo $Q\widehat{A}B$? [due soluzioni simmetriche: 15°; 75°]

283 Nella semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 4$ è data la corda $\overline{BC} = 2$. Sul raggio OA è fissato il punto D tale che $\overline{DO} = 3\overline{AD}$. Calcola la misura del segmento DC. $\left[\frac{\sqrt{37}}{2}\right]$

284 L'ampiezza dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele è 120°. Calcola il rapporto fra il raggio della circonferenza circoscritta e il raggio di quella inscritta. $\left[\frac{2(2\sqrt{3}+3)}{3}\right]$

285 Un triangolo ABC è inscritto in una circonferenza; le misure dei lati AC e BC sono rispettivamente 5 e 3 e l'area è 6. Determina il raggio della circonferenza circoscritta. $\left[\text{due soluzioni: } \frac{5}{2}; \frac{5}{4}\sqrt{13}\right]$

286 In un triangolo isoscele il rapporto $\frac{r_i}{r_c}$ fra i raggi della circonferenza inscritta e circoscritta è $\frac{1}{2}$: determina gli angoli del triangolo.
[triangolo equilatero]

287 Il triangolo acutangolo MNP è inscritto in una circonferenza di raggio 2; la misura del lato MN è $2\sqrt{3}$ e l'area della superficie è $(3+\sqrt{3})$. Determina gli angoli del triangolo. [due sol. 60°, 75°, 45°; 60°, 45°, 75°]

288 Il triangolo RST ha il lato RS lungo 8 cm e la mediana RM lunga 5 cm. Sapendo che l'ampiezza dell'angolo $S\widehat{R}M$ è $\arccos\frac{3}{5}$, determina i lati RT e ST e l'angolo $R\widehat{S}T$. $\left[RT = 2\sqrt{17}\ \text{cm};\ ST = 2\sqrt{41}\ \text{cm};\ \text{arcsen}\frac{4}{\sqrt{41}}\right]$

289 Sai che nel triangolo ABC il lato BC è lungo 110 cm, la mediana AM è lunga 80 cm e l'angolo $A\widehat{M}C$ è di 60°. Determina l'area e il perimetro del triangolo. $[2200\sqrt{3}\ \text{cm}^2;\ (110+5\sqrt{553}+5\sqrt{201})\ \text{cm}]$

290 Nel triangolo PQR conosci il lato $\overline{PQ} = 2\sqrt{2}$, il lato $\overline{QR} = 2$ e la mediana $\overline{RM} = \sqrt{3}-1$. Calcola l'area e il perimetro del triangolo. $[\text{area} = \sqrt{3}-1;\ \text{perimetro} = 2+\sqrt{2}+\sqrt{6}]$

291 La base maggiore del trapezio rettangolo $ABCD$ è $AB = 48$ cm; la diagonale maggiore BD è lunga $32\sqrt{3}$ cm ed è bisettrice dell'angolo $A\widehat{B}C$. Determina gli angoli, il perimetro e l'area del trapezio.
$[\widehat{B} = 60°;\ \widehat{C} = 120°;\ 16(7+\sqrt{3})\ \text{cm};\ 640\sqrt{3}\ \text{cm}^2]$

292 Nel triangolo ABC sono dati il lato $AB = 35$ cm, il lato $AC = 21$ cm e $\text{tg}\,\widehat{B} = \frac{3}{4}$. Determina gli elementi incogniti del triangolo.
$\left[\widehat{C} = 90°;\ \widehat{B} = \text{arcsen}\frac{3}{5};\ \widehat{A} = \frac{\pi}{2} - \widehat{B};\ BC = 28\ \text{cm}\right]$

293 Il rettangolo $ABCD$ ha i lati $AB = 40$ cm e $BC = 25$ cm; il parallelogramma $ABC'D'$ ha i vertici C' e D' appartenenti alla retta CD. Il perimetro di $ABC'D'$ è i $\frac{6}{5}$ del perimetro di $ABCD$. Calcola gli angoli del parallelogramma $ABC'D'$.
$\left[\widehat{C}' = \text{arcsen}\frac{25}{38}\right]$

294 Le misure dei lati del trapezio scaleno $ABCD$ sono: base maggiore $\overline{AB} = 60$, base minore $\overline{CD} = 20$, lati obliqui $\overline{BC} = 20\sqrt{3}$ e $\overline{AD} = 20$. Determina gli angoli del trapezio, la sua area e la misura delle sue diagonali. $[\widehat{A} = 60°,\ \widehat{B} = 30°,\ \widehat{C} = 150°,\ \widehat{D} = 120°;\ 400\sqrt{3};\ 20\sqrt{7},\ 20\sqrt{3}]$

295 In un rombo di lato l è inscritta una circonferenza; in tale circonferenza è inscritto il rettangolo che ha i vertici nei punti di tangenza fra rombo e circonferenza. Sapendo che l'ampiezza degli angoli acuti è α, trova l'area del rettangolo.
$\left[\frac{1}{2}l^2\,\text{sen}^3\alpha\right]$

296 L'area di un triangolo isoscele è 160 m²; l'altezza relativa alla base è $AH = 20$ m. Determina gli angoli del triangolo e le altezze relative ai lati obliqui.
$\left[\beta = \gamma = \text{arctg}\frac{5}{2};\ \alpha = \text{arctg}\frac{20}{21};\ h = \frac{80\sqrt{29}}{29}\ \text{m}\right]$

297 The measure of the vertex angle of isosceles triangle ABC is ϑ and the sides of the triangle are $\sin\vartheta$, $\sqrt{\sin\vartheta}$, and $\sqrt{\sin\vartheta}$. Compute the area of ABC.
(USA *American Regions Math League, ARML, Contest*, Sample Problem)
$\left[\frac{8}{25}\right]$

298 Nel triangolo ABC la lunghezza del lato AB è $5\sqrt{21}$ cm, quella della proiezione del lato AC su BC è 8 cm. Gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ sono acuti e $\text{sen}\,\widehat{C} = \frac{\sqrt{21}}{5}$; calcola i lati e gli angoli del triangolo.
$\left[AC = 20\ \text{cm};\ BC = (3\sqrt{21}+8)\ \text{cm};\ \widehat{B} = \arccos\frac{3}{5};\ \widehat{A} = \arccos\frac{4\sqrt{21}-6}{25}\right]$

299 Il triangolo ABC è ottusangolo in $\widehat{A}$; le lunghezze dei lati AC e BC e dell'altezza CH sono: $AC = 9$ cm, $BC = 24$ cm, $CH = 6$ cm. Determina gli angoli e il terzo lato del triangolo.
$\left[\widehat{A} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right); \widehat{B} = \arccos\frac{\sqrt{15}}{4}; \widehat{C} = \arccos\frac{2+5\sqrt{3}}{12}; AB = (6\sqrt{15} - 3\sqrt{5})\text{ cm}\right]$

300 Nel triangolo ABC la lunghezza della proiezione HC del lato AC su BC è 40 cm; sai inoltre che $\cos\widehat{C} = \frac{4}{7}$, $\operatorname{sen} B\widehat{A}H = \frac{2}{7}$ e l'angolo $\widehat{B}$ è acuto. Calcola le lunghezze dei lati del triangolo e le ampiezze degli altri due angoli.
$\left[AB = \frac{14}{3}\sqrt{165}\text{ cm}; AC = 70\text{ cm}; BC = \left(\frac{4}{3}\sqrt{165} + 40\right)\text{ cm}; \widehat{B} = \arccos\frac{2}{7}; \widehat{A} = \arccos\frac{3\sqrt{165}-8}{49}\right]$

301 Determina gli angoli, il raggio della circonferenza inscritta e di quella circoscritta al triangolo ABC, sapendo che $AB = 2$ cm, $BC = \sqrt{6}$ cm e $AC = (1 + \sqrt{3})$ cm.
$\left[\widehat{A} = 60°, \widehat{B} = 75°, \widehat{C} = 45°; r_i = \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\text{ cm}; r_c = \sqrt{2}\text{ cm}\right]$

302 Two sides and an angle are given. Determine whether the given information results in one triangle, two triangles or no triangle at all. Solve any triangle(s) that result.

$a = 4, \quad b = 8, \quad \alpha = 20°.$

(USA *Southern Illinois University Carbondale*, Final Exam, 2002)
[1st tr.: $\beta \simeq 43.16°$, $\gamma \simeq 116.84°$, $c \simeq 10.44$; 2nd tr.: $\beta \simeq 136.84°$, $\gamma \simeq 23.16°$, $c \simeq 4.6$]

303 Nel triangolo PQR sono noti il lato $PQ = 2(\sqrt{3} + 1)$ m, la bisettrice $PT = 2$ m e l'angolo $P\widehat{Q}R = 15°$. Determina il perimetro e l'area del triangolo. $[2\sqrt{3}(\sqrt{2} + 2)\text{ m}; 2\sqrt{3}\text{ m}^2]$

304 Nel triangolo ABC la bisettrice di $\widehat{C}$ interseca AB in P. Sapendo che $\overline{PB} = 21$, $\widehat{B} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}$ e $A\widehat{C}B = \arccos\frac{7}{9}$, calcola l'area del triangolo. $\left[\frac{3136}{23}\sqrt{2}\right]$

305 Il triangolo ABC ha $\widehat{B} = 45°$ e $\overline{AB} = 28\sqrt{2}$. La mediana AM misura 35. Calcola l'area. [196 o 1372]

306 In triangle ABC, $\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 9$, and $\widehat{A} = 60$ degrees. Find the sum of all possible lengths of AC.
(USA *Bay Area Math Meet, Bowl Sampler,* 1995)
[10]

307 Nel triangolo ABC l'angolo $\widehat{B}$ è ottuso e AH è l'altezza relativa al lato BC. Sapendo che $HB = 12$ cm, $HC = 48$ cm e $\operatorname{tg} B\widehat{C}A = \frac{1}{3}$, determina i lati e gli angoli del triangolo.
$\left[AB = 20\text{ cm}; AC = 16\sqrt{10}\text{ cm}; BC = 36\text{ cm}; \operatorname{sen} A\widehat{B}C = \frac{4}{5}; \operatorname{sen} B\widehat{A}C = \frac{9}{50}\sqrt{10}\right]$

308 Il triangolo PQR ha l'angolo in Q di 30° e la lunghezza del lato PQ è 120 cm. La mediana RM incontra PQ in M in modo che $R\widehat{M}Q = 110°$. Trova i lati e gli angoli incogniti.
[una soluzione accettabile: $QR \simeq 87{,}71$ cm; $PR \simeq 62{,}15$ cm; $P\widehat{R}Q \simeq 105°$]

309 Nel triangolo ABC i lati AB e BC sono lunghi rispettivamente 32 cm e 66 cm; la tangente dell'angolo $B\widehat{A}C$ è $\frac{6}{5}$. Determina il terzo lato e l'area del triangolo.
[una soluzione accettabile: $AC \simeq 81{,}74$ cm; area $\simeq 1004{,}67$ cm^2]

310 Il parallelogramma $ABCD$ ha l'angolo $\widehat{B} = \frac{2}{3}\pi$ e la sua bisettrice incontra la diagonale AC nel punto P in modo che $\overline{AP} = \frac{35}{8}$ e $\overline{BP} = \frac{15}{8}$. Determina i lati del parallelogramma. [5; 3]

311 In un trapezio scaleno $ABCD$ le basi misurano: $\overline{AB} = 5\sqrt{3} + 21$ e $\overline{CD} = 9$. Sapendo che l'angolo in B è di 60° e che $\cos\widehat{D} = -\frac{5}{13}$, calcola la lunghezza dei lati obliqui. $[24; 13\sqrt{3}]$

312 Gli angoli del parallelogramma $ABCD$ hanno il seno uguale a $\frac{3}{5}$ e le distanze del suo centro O dai lati sono $\overline{OM} = 5$ e $\overline{OP} = 8$. Calcola le lunghezze delle diagonali e l'area del parallelogramma. $\left[10\sqrt{17}, \frac{50}{3}; \frac{800}{3}\right]$

313 In un triangolo isoscele ABC l'altezza BH relativa al lato obliquo AC lo divide in due parti, AH e HC, con $AH = 2HC$. Determina gli angoli del triangolo. Discuti poi il problema nel caso più generale in cui $\overline{AH} : \overline{HC} = p : q$, con p e q numeri interi positivi.
$\left[\widehat{A} = \widehat{B} = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}, \widehat{C} = \arccos\frac{1}{3}; \widehat{C} = \arccos\frac{q}{p+q}, \widehat{A} = \widehat{B} = \arccos\sqrt{\frac{p}{2(p+q)}}\right]$

Problemi con equazioni, disequazioni, funzioni

314 Considera il triangolo rettangolo ABC che ha gli angoli acuti $\widehat{B} = 60°$ e $\widehat{C} = 30°$ e l'ipotenusa $\overline{BC} = a$. Per il vertice A conduci una retta s esterna al triangolo e indica con B' e C' le proiezioni ortogonali di B e C su di essa. Trova l'angolo $C\widehat{A}C'$, sapendo che il perimetro del trapezio $BCC'B'$ è $\frac{2+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a$. [45°]

315 In una circonferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$ la corda MN è perpendicolare al diametro e lo divide in due parti che stanno nel rapporto $\frac{7}{3}$. Determina l'ampiezza dell'angolo al centro $M\widehat{O}N = 2x$.
$\left[2 \text{ arcsen}\frac{\sqrt{21}}{5}\right]$

316 Nel rettangolo $ABCD$ è inscritto il triangolo ABP, con il vertice P sul lato CD. Le misure dei lati del rettangolo sono $\overline{AB} = a$ e $\overline{AD} = (2-\sqrt{3})a$. Determina l'angolo $D\widehat{A}P$, sapendo che è valida la relazione $\overline{AP}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BP}^2$. [60°]

317 Un triangolo LMN è inscritto in una circonferenza di raggio $r = 5$; la lunghezza del lato LM è $5\sqrt{3}$. Determina l'ampiezza dell'angolo $M\widehat{L}N$ in modo che risulti valida la relazione $\overline{LN}^2 - \overline{MN}^2 = 25\sqrt{3}$.
[due soluzioni: 45°; 15°]

318 I lati obliqui di un trapezio isoscele hanno misura l e sono congruenti alla base minore. Determina gli angoli alla base maggiore, sapendo che la somma della base maggiore con il doppio dell'altezza è uguale a $(1+2\sqrt{2})l$. [45°]

319 In un settore circolare AOB di raggio r e di ampiezza uguale a 90° traccia un raggio OP. Considera la proiezione ortogonale D di P sul raggio OB e il punto medio C del raggio OA. Determina l'angolo $A\widehat{O}P$, sapendo che è valida la relazione:

$$\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = \frac{11}{10}r^2.$$

$\left[\text{due soluzioni: } \cos A\widehat{O}P = \frac{5 \pm \sqrt{10}}{10}\right]$

320 Considera il triangolo rettangolo ABC inscritto in una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$: sul lato BC costruisci il quadrato $BPQC$ esternamente al triangolo. Sai che il trapezio $ABPQ$ ha area $S = \frac{4+3\sqrt{2}}{2}r^2$: quanto misura l'angolo $B\widehat{A}C$? $\left[\frac{3}{8}\pi, \text{arctg}(5\sqrt{2}+7)\right]$

321 Determina gli angoli di un trapezio isoscele, sapendo che la base maggiore è $\overline{AB} = 14$, la base minore è $\overline{CD} = 8$ e il rapporto fra il quadrato della diagonale e il quadrato del lato obliquo è $\frac{37}{9}$. $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\right]$

322 Nel triangolo ABC il lato AC ha misura l, il lato BC ha misura $2l$. Determina gli angoli del triangolo sapendo che fra i due lati noti e l'angolo $\widehat{A}$ intercorre la seguente relazione:

$$\overline{BC} \text{ sen } 2\widehat{A} - \overline{AC} \text{ tg } 2\widehat{A} = 0.$$

[tre soluzioni: $\widehat{A} = 90°, \widehat{B} = 30°; \widehat{A} = 30°, \widehat{B} \simeq 14{,}477°; \widehat{A} = 150°, \widehat{B} \simeq 14{,}477°$]

323 Traccia la tangente t nel punto B alla semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 4$. Considera un punto P sulla semicirconferenza e indica con Q e R le sue proiezioni rispettivamente su AB e su t; determina $P\widehat{A}B$ in modo che:

$$2\sqrt{3}\,\overline{PQ} + \overline{PR} = 5\overline{AQ}.$$

$\left[\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

324 Due semicirconferenze di diametri $\overline{AB} = \overline{BC} = 2r$ sono tangenti esternamente in B. Presi i punti P sulla prima e Q sulla seconda in modo che $P\widehat{B}Q = 45°$, calcola $x = P\widehat{B}A$ in modo che:

$$\overline{BQ} + \sqrt{2}\,\overline{PB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}.$$

$\left[\frac{5}{12}\pi\right]$

325 Determina i lati AC e CB nel triangolo ABC in cui sono noti: $AB = 10$ cm, $B\widehat{A}C = 45°$, $A\widehat{B}C = 30°$. Considera un punto P appartenente al lato AC e, posto $P\widehat{B}A = x$, risolvi la seguente equazione:

$$\overline{PA} + \overline{PB} = \frac{5}{3}\sqrt{2}(3+\sqrt{3}).$$

Esprimi poi la funzione $f(x) = \frac{10\sqrt{2}}{\overline{PA}}$ e rappresentala su un periodo completo, indipendentemente dal problema geometrico.

$[AC = 5(\sqrt{6}-\sqrt{2})\text{ cm}, CB = 10(\sqrt{3}-1)\text{ cm}; x = 15°; f(x) = \operatorname{cotg} x + 1]$

326 Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, sia C il punto medio dell'arco $\overset{\frown}{AB}$. Considera sull'arco $\overset{\frown}{BC}$ un punto P, traccia la tangente in P che incontra la retta AB nel punto Q e, posto $P\widehat{A}B = x$, determina $\overline{PQ}$ e $\overline{QB}$ in funzione di x. Risolvi, nei limiti imposti dal problema, l'equazione:

$$\overline{QB} + \overline{PQ} = (1+\sqrt{3})r.$$

Rappresenta poi la funzione $f(x) = \frac{\overline{PQ}}{2\overline{OQ}}$ su un periodo completo ed evidenzia la parte relativa al problema.

$\left[\overline{PQ} = r\operatorname{tg} 2x; \overline{QB} = r\left(\frac{1}{\cos 2x} - 1\right); x = \frac{\pi}{6}; f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x, \text{ con } 0 \le x < \frac{\pi}{4}\right]$

327 Dato il quadrato $ABCD$ di lato $l = 1$, costruisci una semicirconferenza di diametro AB esterna al quadrato. Considerato sulla semicirconferenza un punto P, con $A\widehat{B}P = x$, determina l'espressione della funzione:

$$f(x) = \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2.$$

Rappresenta la funzione su un periodo completo ed evidenzia la parte relativa al problema. Individua la situazione geometrica corrispondente al valore massimo della funzione.

$\left[f(x) = 3 + 2\operatorname{sen} 2x; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}; \text{massimo} = \left(\frac{\pi}{4}; 5\right)\right]$

328 È dato il triangolo ABC tale che il lato $\overline{AB} = 2a$ e la mediana a esso relativa $\overline{CM} = a$. Determina, in funzione dell'angolo $C\widehat{A}B = x$, il perimetro del triangolo ABC. Rappresenta la funzione ottenuta ed evidenzia la parte relativa al problema. Descrivi la situazione geometrica corrispondente al valore massimo del perimetro.

$[f(x) = 2\sqrt{2}\,a\operatorname{sen}(x+45°) + 2a \text{ con } 0° < x < 90°;$
$\text{massimo} = (45°; 2a(\sqrt{2}+1))$, triangolo rettangolo isoscele$]$

329 Data la semicirconferenza di centro O e raggio unitario, prolunga il diametro AB di un segmento $\overline{BC} = 1$ e congiungi il punto C con i punti P e Q della semicirconferenza tali che $C\widehat{O}Q = 2 \cdot C\widehat{O}P$. Indicato con x l'angolo $C\widehat{O}P$, determina l'espressione della funzione:

$$f(x) = \frac{\overline{QC}^2 - \overline{PC}^2}{2\cdot\overline{QP}^2}.$$

Rappresenta il grafico di $f(x)$ ed evidenzia il tratto relativo al problema. Indipendentemente dal problema geometrico, risolvi la disequazione $f(x) \le 0$.

$\left[f(x) = 4\cos x + 2, 0 < x \le \frac{\pi}{2}; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \le x \le \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right]$

330 Sono dati il quadrato $ABCD$ di lato $l = 1$ e in esso l'arco di circonferenza $\overset{\frown}{BD}$, di centro C.
Considera un punto P appartenente all'arco $\overset{\frown}{BD}$ e poni $D\widehat{C}P = 2x$.
Determina l'espressione analitica della funzione $y = \overline{AP}^2 - \overline{BP}^2$.
Verifica che la funzione può essere espressa come $y = -2\cos 2x + 1$ e rappresentala graficamente nei limiti imposti dal problema.

331 Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto in una circonferenza di raggio r, con AB e BC corde consecutive di lunghezza uguale al raggio.
Posto $C\widehat{A}D = x$, calcola l'area $A(x)$ del quadrilatero e determina poi per quale valore di x si ha

$A(x) = \dfrac{2\sqrt{3}+3}{4}r^2$. $\left[A(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r^2\left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{3}\,\text{sen}\,x\cos x + \text{sen}^2 x\right);\ x = \dfrac{\pi}{4} \vee x = \dfrac{5}{12}\pi\right]$

332 È dato il quadrilatero $ABCD$ inscritto in una circonferenza di raggio r. L'angolo in A è di $\dfrac{\pi}{3}$, quello in B è tale che $A\widehat{B}D$ è doppio di $D\widehat{B}C$. Determina l'espressione analitica della funzione

$$f(x) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}},$$

dopo aver posto $D\widehat{B}C = x$. Trova per quali valori di x si ha $f(x) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\left[f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\text{cotg}\,2x + \text{cotg}\,x), \text{ con } 0 < x < \dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{3}\right]$

333 È data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$. Inscrivi in essa il triangolo ABC e traccia la bisettrice dell'angolo $C\widehat{A}B$ che interseca la circonferenza in D e il lato CB in T. Indicato con $2x$ l'angolo $C\widehat{A}B$, determina, al variare di x, il rapporto $y = \dfrac{\overline{AT}}{\overline{TD}}$ e calcola per quale valore di x tale rapporto è 1.

$\left[y = \dfrac{1}{\text{sen}^2 x} - 2;\ 0 < x \leq \dfrac{\pi}{4};\ x = \text{arcsen}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$

334 Sono dati il triangolo equilatero ABC di lato l e la semiretta di origine A che incontra il lato BC nel punto P. Su tale semiretta, considera il punto S proiezione di C e il punto T proiezione di B. Indicato con x l'angolo $B\widehat{A}P$, determina la funzione $f(x) = \dfrac{\overline{CS}^2 + \overline{BT}^2}{\overline{AB}^2}$.

Dimostra che la condizione $f(x) \leq \dfrac{3}{4}$ è sempre verificata nei limiti imposti dal problema geometrico.

$\left[f(x) = \dfrac{4 - \cos 2x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,2x}{4}, 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}\right]$

335 È data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 4r$ e centro O. Sul raggio perpendicolare ad AB considera un punto C tale che $CP \cong CO$, con P punto appartenente alla semicirconferenza. Indica con H la proiezione di P su AB.

a) Esprimi la funzione $f(x) = \dfrac{\overline{CP} + \overline{OH}}{\overline{PH}}$, con $x = C\widehat{P}O$.

b) Determina le limitazioni per x e trova per quali valori di x si ha $f(x) > 1$.

c) Calcola $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

d) Determina il perimetro del quadrilatero $CPHO$ quando $x = \dfrac{\pi}{3}$.

$\left[\text{a) } f(x) = \dfrac{1 + \text{sen}\,2x}{1 + \cos 2x};\ \text{b) } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{8} < x \leq \dfrac{\pi}{3};\ \text{c) } \dfrac{2+\sqrt{3}}{3};\ \text{d) } r(5+\sqrt{3})\right]$

336 Considera il quadrato $ABCD$ di lato $2r$ e costruisci, internamente a esso, una semicirconferenza di diametro AB. Considera un punto P variabile sulla semicirconferenza.

a) Indica con x l'angolo $P\widehat{A}B$ e con K e Q le proiezioni di P rispettivamente su CD e su CB. Determina le soluzioni dell'equazione $\dfrac{\overline{PK}}{\overline{PQ}} = \dfrac{3}{4}$.

b) Esprimi la funzione $f(x) = \overline{PK} + \overline{PQ}$ al variare di P sulla semicirconferenza e, posto $r = 1$, rappresentala in un periodo evidenziando la parte relativa al problema.

c) Per quale posizione di P la funzione raggiunge il minimo valore e per quale il massimo?

$\left[\text{a) } x = \text{arctg}\,2;\ \text{b) } y = 3r - r\sqrt{2}\,\text{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right);\ \text{c) min. per } x = \dfrac{\pi}{8}, \text{max per } x = \dfrac{\pi}{2}\right]$

337 È dato il segmento $\overline{AB} = 2l$. Dal suo punto medio M conduci una semiretta in modo che formi con MB un angolo acuto variabile di ampiezza x. Sia K la proiezione ortogonale di B sulla semiretta.
a) Risolvi, nei limiti imposti dal problema, l'equazione:
$$\overline{AK}^2 + \overline{KB}^2 = \frac{5}{2}l^2.$$
b) Verifica che la funzione $f(x) = \overline{AK}^2 + \overline{KB}^2$ può essere espressa con $y = 3l^2 + l^2 \cos 2x$.
c) Poni $l = 1$ e rappresenta la funzione $g(x)$ ottenuta da $f(x)$ con una traslazione di vettore
$\vec{v}\left(-\frac{\pi}{2}; -3\right)$. $\left[\text{a) } x = \frac{\pi}{3}; \text{ c) } y = -\cos 2x\right]$

338 In una circonferenza di centro O e raggio r, è data la corda AB congruente al lato del triangolo equilatero inscritto. Conduci la tangente in B e considera su di essa un punto C appartenente allo stesso semipiano di O rispetto alla retta AB.
a) Indicato con x l'angolo $B\widehat{A}C$, calcola il valore di x per cui l'area del triangolo ABC vale $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$.
b) Rappresenta in un periodo la funzione
$$f(x) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}},$$
evidenziando il tratto relativo al problema. $\left[\text{a) } x = 30°; \text{ b) } f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{sen } x, \text{ con } 0° \le x < 60°\right]$

339 È data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e centro O. Nel triangolo ABC in essa inscritto poni $B\widehat{A}C = x$. Sulla semiretta OC considera il punto P tale che $\overline{OC} = \overline{CP}$.
Verifica che $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 10r^2$. Risolvi poi, nei limiti geometrici imposti dal problema, la disequazione $\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2} \ge 2$. Determina il valore del rapporto $\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2}$ per $x = \frac{\pi}{6}$. $\left[0 \le x \le \frac{1}{2}\arccos\frac{5}{12}; \frac{7}{3}\right]$

340 Data la semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$, considera su di essa il punto C tale che, indicato con α l'angolo $O\widehat{A}C$, sia $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Considera su BC un punto P. Posto $B\widehat{O}P = x$, determina la funzione $f(x)$ che rappresenta il perimetro del triangolo OPB e risolvi, nei limiti imposti dal problema, l'equazione $f(x) = \frac{12}{5}r$. $\left[f(x) = 3r\left(\frac{\cos x + 3\,\text{sen } x + 1}{3\cos x + 4\,\text{sen } x}\right), \text{ con } 0 \le x \le 2\alpha, x = \alpha\right]$

341 È dato il triangolo isoscele ABC di base $\overline{AB} = 2a$ e lati obliqui $\overline{AC} = \overline{CB} = 5a$. Calcola le funzioni goniometriche seno, coseno e tangente degli angoli α adiacenti alla base. Traccia la semicirconferenza di diametro AB esterna al triangolo e considera su di essa un punto P, con $B\widehat{A}P = x$.
Verifica che la funzione
$$y = \frac{\overline{PC}^2 + \overline{PB}^2}{\overline{AB}^2}$$
può essere scritta nella forma $y = \frac{27}{4} + \frac{5}{2}\text{sen}(2x - \alpha_1)$. In quale relazione sono gli angoli α e α_1?
Calcola per quale valore di x la funzione ha valore massimo (trova per x un valore approssimato).
[α e α_1 angoli complementari; $x = 50{,}77°$]

342 In una circonferenza di raggio r traccia la corda AB lunga come il lato del triangolo equilatero inscritto e la tangente alla circonferenza nel punto B.
Sul minore degli archi AB, considera il punto P e indica con il punto H l'intersezione della semiretta AP con la tangente in B.
Posto $P\widehat{A}B = x$, determina, nei limiti geometrici del problema, per quali valori di x è risolta l'equazione:
$$(\overline{AP} + \overline{PB}) \cdot \overline{BH} = \sqrt{3}\,r^2.$$
Risolvi in $\mathbb{R}$ la disequazione $\overline{AH} \ge \overline{HB}$ e verifica che i valori di x ammessi dal problema fanno parte delle soluzioni. [$x = 30°$; $-60° + k360° < x \le 60° + k360°$]

343 È dato il trapezio isoscele $ABCD$ tale che le diagonali sono perpendicolari ai lati obliqui, la base maggiore $\overline{AB} = 2a$ e $D\widehat{A}B = 60°$. Sulla base maggiore AB considera il punto P e poni $A\widehat{D}P = x$.
Considera la funzione $f(x)$ che esprime il perimetro del triangolo APD e trova, tenendo conto dei limiti del problema, per quali valori di x si ha:
$$f(x) \ge 3a.$$
[$60° \le x \le 90°$]

344 È dato il triangolo ABC tale che $\overline{AB} = a$, $C\widehat{A}B = 60°$, $A\widehat{B}C = 2x$. Traccia la bisettrice dell'angolo $A\widehat{B}C$ che incontra il lato AC nel punto P, considera la funzione $f(x) = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AP}}$ e, nei limiti imposti dal problema, risolvi la disequazione $f(x) \leq 1 + \sqrt{3}$. $[0° < x \leq 45°]$

345 Il triangolo ABC è inscritto nella circonferenza di raggio r e ha l'angolo $C\widehat{A}B = \alpha$ tale che $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$. Posto $A\widehat{B}C = x$ e indicato con M il punto medio di AB, calcola per quali valori di x si ha:

$$25\overline{CM}^2 - \frac{19}{4}\overline{AC}^2 = 9r^2.$$

$\left[x = \dfrac{\pi}{4}\right]$

346 Data la circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, considera su AB il punto H e costruisci il triangolo equilatero AEF che ha AH come altezza.
Dal punto E conduci la parallela ad AB che incontra in L la circonferenza (L è da parte opposta di A rispetto al segmento EF). In funzione di $B\widehat{A}L = x$, determina $\overline{EF}$, $\overline{EL}$. Calcola poi l'angolo x tale che $\overline{EF} = \overline{EL}$.

$\left[\overline{EF} = 2r\,\text{sen}\,2x,\ \overline{EL} = 2r\left[\dfrac{1}{2} - \text{sen}\,(2x - 30°)\right], \text{con } 0° \leq x \leq 30°;\ x = 15°\right]$

347 È dato il triangolo ABC tale che $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ e $\overline{AC} = 2b$. Considerato l'angolo in $\widehat{C}$ come variabile x, determina l'espressione di $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Verifica che, nei limiti imposti dal problema geometrico, vale l'uguaglianza

$$\overline{AB} + \overline{BC} = 4b\cos x$$

e determina il valore di x per cui $\overline{BC} = \dfrac{4}{3}\sqrt{3}\,b$. $\left[\overline{AB} = \dfrac{b}{\cos x}, \overline{BC} = \dfrac{b}{\cos x}(4\cos^2 x - 1);\ x = \dfrac{\pi}{6}\right]$

348 Considerato il triangolo ABC avente i lati $\overline{CA} = a$ e $\overline{CB} = 2a$, si costruisca da parte opposta a C, rispetto alla retta AB, il triangolo rettangolo ABD il cui cateto BD sia uguale alla metà del cateto AB.
Si studi come varia l'area del quadrangolo $ADBC$ al variare dell'angolo $A\widehat{C}B$ e si calcoli il perimetro di detto quadrangolo quando la sua area è massima. (*Esame di maturità scientifica, Sessione ordinaria,* 1988, *quesito* 3)

$\left[S(x) = a^2\left(\text{sen}\,x - \cos x + \dfrac{5}{4}\right), \text{con } 0 \leq x \leq \pi, S(x) \text{ massima per } x = \dfrac{3}{4}\pi;\ a\left(3 + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}\right)\right]$

349 Si conduca internamente a un angolo retto AOB una semiretta OC che forma con OA un angolo $A\widehat{O}C = x$; presi rispettivamente su OA e OB due punti M ed N, tali che $\overline{OM} = 1$, $\overline{ON} = \sqrt{3}$, siano M' ed N' le rispettive proiezioni di M ed N su OC. Detto P il punto medio di $M'N'$, si determini x in modo che risulti massima l'area del triangolo NOP. (*Esame di maturità scientifica, Sessione ordinaria*, 1975, *quesito* 3)

$\left[S(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(\cos^2 x + \sqrt{3}\,\text{sen}\,x\cos x), \text{con } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, S(x) \text{ massima per } x = \dfrac{\pi}{6}\right]$

350 a) È data la semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2$ e la corda $\overline{CD} = \sqrt{2}$, con C più vicino a B. Costruisci il quadrilatero $ABCD$ e determina l'area $f(x)$ in funzione dell'angolo $A\widehat{O}D = x$.
b) Determina il dominio e il codominio di $f(x)$ e i punti di intersezione con gli assi cartesiani, indipendentemente dal problema geometrico.
c) Rappresenta graficamente $f(x)$ evidenziando il tratto relativo al problema e indica il massimo e il minimo.

$\left[\text{a) } f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{1}{2}, \text{con } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2};\ \text{b) } D\colon \mathbb{R}, C\colon \left[\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right], (\pi + 2k\pi; 0),\right.$
$\left.\left(\dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi; 0\right), (0; 1);\ \text{c) max:} \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right), \text{min:} (0; 1), \left(\dfrac{\pi}{2}; 1\right)\right]$

351 In un trapezio isoscele $ABCD$ la base minore CD e i lati obliqui hanno lunghezza l, gli angoli acuti hanno ampiezza $\dfrac{\pi}{3}$. Sia P un punto del lato obliquo BC, H la sua proiezione su AB. Posto $P\widehat{A}B = x$:
a) esprimi la funzione $f(x) = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PH}}$;
b) calcola per quale valore di x risulta $\overline{PC} = \overline{PH}$;
c) indipendentemente dal problema geometrico studia il dominio e il segno della funzione $f(x)$.

$\left[\text{a) } f(x) = \dfrac{1}{2}(\text{cotg}\,x - \sqrt{3}), \text{con } 0 < x \leq \dfrac{\pi}{6};\ \text{b) } \dfrac{\pi}{12};\ \text{c) } x \neq k\pi, f(x) \geq 0 \text{ per } k\pi < x \leq \dfrac{\pi}{6} + k\pi\right]$

352 In una circonferenza di raggio r è assegnata la corda AB con distanza $\frac{\sqrt{3}\,r}{2}$ dal centro O. Sul maggiore dei due archi $\overset{\frown}{AB}$ considera un punto P e poni $B\widehat{A}P = x$.
Trova l'espressione analitica della funzione $f(x)$ perimetro del triangolo APB e indipendentemente dal problema geometrico risolvi la disequazione $f(x) > 0$.

$\left[f(x) = r[(2+\sqrt{3})\,\text{sen}\,x + \cos x + 1], \text{ con } 0 \le x \le \frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi\right]$

353 Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza di raggio r e $\overline{AB} = \overline{BC}$, $A\widehat{B}C = \frac{\pi}{3}$.
Posto $A\widehat{C}D = x$:
a) dimostra che $\overline{AD} + \overline{CD} = \overline{BD}$;
b) esprimi la funzione $f(x) = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$ e trova per quali valori di x risulta $f(x) = \frac{1}{2}$;
c) indipendentemente dalle limitazioni del problema, trova il dominio di $f(x)$ e risolvi la disequazione $f(x) < 2 - \sqrt{3}$.

$\left[\text{b) } f(x) = \frac{\sqrt{3} - \text{tg}\,x}{\sqrt{3} + \text{tg}\,x}, \text{ con } 0 < x < \frac{\pi}{3}; x = \frac{\pi}{6};\right.$
$\left.\text{c) } D\colon x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \ne -\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi\right]$

354 In un triangolo equilatero ABC di lato l, la retta s è perpendicolare al lato BC in un suo punto H. Sia P il punto di s, nel semipiano non contenente il triangolo, tale che $\overline{BP} = l$; posto $C\widehat{B}P = x$:
a) determina la funzione $f(x)$ che esprime la somma dell'area del triangolo BPH con il doppio di quella del triangolo equilatero di lato BH e disegna il grafico corrispondente;
b) trova il massimo di $f(x)$ e risolvi la disequazione $f(x) \ge \frac{\sqrt{3}}{2} l^2$.

$\left[\text{a) } f(x) = \frac{l^2}{4}(\text{sen}\,2x + \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3}), \text{ con } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}; \text{ b) max: } \left(\frac{\pi}{12}; \frac{l^2}{4}(2+\sqrt{3})\right), 0 \le x \le \frac{\pi}{6}\right]$

355 In una circonferenza di centro O e raggio r conduci una corda PQ congruente al lato del quadrato inscritto. Traccia un diametro con estremi A, B appartenenti al maggiore dei due archi $\overset{\frown}{PQ}$ (B più vicino a Q) e poni $B\widehat{O}Q = 2x$.
a) Scrivi l'espressione analitica della funzione $f(x) = \left|\sqrt{2}\,\overline{PB} - 2\overline{AQ}\right|$.
b) Disegna il grafico e determina eventuali massimi e minimi.
c) Senza tener conto delle limitazioni imposte dal problema, risolvi la disequazione $f(x) \ge \sqrt{2}\,r$.

$\left[\text{a) } f(x) = \left|2\sqrt{2}\,r\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|, \text{ con } 0 \le x \le \frac{\pi}{4}; \text{ b) min: } \left(\frac{\pi}{4}; 0\right), \text{ max: } (0; 2r); \text{ c) } \frac{5}{12}\pi + k\pi \le x \le \frac{13}{12}\pi + k\pi\right]$

356 Nella semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ la corda AC forma un angolo assegnato $B\widehat{A}C = \frac{\pi}{4}$. Considera un punto D dell'arco $\overset{\frown}{BC}$, indicando con E la sua proiezione sulla corda BC, con F quella sul prolungamento di AC.
a) Poni $C\widehat{B}D = x$ e determina la funzione $f(x) = \frac{\overline{DE} + \overline{DF}}{\overline{BC}}$.
b) Scrivi l'espressione $s(x)$ dell'area del rettangolo $CEDF$. Per quale x risulta massima? Quante soluzioni ha l'equazione $s(x) = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} r^2$?

$\left[\text{a) } y = \text{sen}\,2x, \text{ con } 0 \le x \le \frac{\pi}{4}; \text{ b) } s(x) = r^2(\cos 2x - \cos^2 2x), x = \frac{\pi}{6}, 2\right]$

357 È dato un triangolo ABC in cui l'angolo $B\widehat{A}C = 2\alpha$ ha il coseno uguale a $\frac{7}{25}$ e la bisettrice AD misura a.
a) Poni $A\widehat{D}B = x$ e dimostra che, nell'ambito delle limitazioni del problema, l'area di ABC può essere espressa dalla funzione $f(x) = \frac{12a^2}{16 - 9\,\text{cotg}^2 x}$; determina poi il triangolo con area minima.
b) Scrivi l'espressione analitica della funzione $g(x) = \frac{96}{25} \cdot \frac{f(x)}{\overline{BC}^2}$, disegna il grafico e determina il massimo.

$\left[\text{a) isoscele con area } \frac{3}{4}a^2; \text{ b) } g(x) = \frac{7}{25} - \cos 2x, \text{ max: } \left(\frac{\pi}{2}; \frac{32}{25}\right)\right]$

358 È data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = \sqrt{3}\,l$; conduci la tangente in A e fissa su di essa il punto C, appartenente al semipiano della semicirconferenza, tale che $\overline{AC} = l$. Sulla semicirconferenza considera un punto P e poni $P\widehat{A}B = x$.
a) Determina le funzioni $f(x) = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ e $g(x) = 2\overline{PA}^2 + 4\overline{AC}^2$.
b) Traccia i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ evidenziando la parte relativa al dominio del problema.
c) Risolvi la disequazione $f(x) \geq g(x)$ senza tener conto dei limiti del problema.

$\left[\text{a) } f(x) = l^2(4 - \sqrt{3}\,\text{sen}\,2x),\ g(x) = l^2(7 + 3\cos 2x), \text{ con } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \text{c) } \frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + k\pi\right]$

359 Nella semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e centro O è inscritto il quadrilatero $ABCD$ nel quale il lato CD è congruente al raggio. Posto l'angolo $B\widehat{O}C = 2x$:
a) determina x in modo che il perimetro del quadrilatero $ABCD$ valga $(3 + \sqrt{3})r$;
b) rappresenta la funzione $f(x) = \frac{\text{perimetro}_{ABCD}}{2r}$ su un intero periodo e indica l'arco di curva relativo al problema;
c) descrivi la situazione geometrica nella quale il perimetro raggiunge il suo valore massimo;
d) risolvi la disequazione $f(x) \leq 1$ senza tener conto delle limitazioni del problema.

$\left[\text{a) } x=0 \text{ e } x=\frac{\pi}{3} \text{ (situazioni limite); b) } y=\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3}{2}; \text{ c) trapezio isoscele; d) } \frac{5}{6}\pi+2k\pi\leq x\leq\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right]$

360 Sui due lati di un angolo retto di vertice O, si considerano due segmenti OM e ON tali che $\overline{OM} = 1$ e $\overline{ON} = \sqrt{3}$. Dopo aver tracciato una semiretta r interna all'angolo, indica con M' e con N' le proiezioni rispettivamente di M e di N su r. Sia P il punto medio di $M'N'$ e S il punto di intersezione tra r e la parallela a OM passante per N.
a) Indica con A_1 l'area del triangolo PNS e con A_2 quella del triangolo ONS e determina, al variare dell'angolo $M\widehat{O}N' = x$, la funzione $f(x) = \frac{A_1}{A_2}$.
Rappresenta $f(x)$ in un periodo ed evidenzia la parte relativa al problema.
b) Individua la situazione geometrica corrispondente al valore minimo della funzione.

$\left[\text{a) } f(x) = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), 0 < x < \frac{\pi}{2}; \text{ b) min: } \left(\frac{5}{12}\pi; \frac{9 - 2\sqrt{3}}{12}\right)\right]$

361 Nella semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2$ e centro O, è condotta la semiretta contenente il raggio OQ perpendicolare ad AB. Considerato il generico punto P della semicirconferenza indica con H la sua proiezione su AB e con L il punto della semiretta OQ tale che l'angolo $H\widehat{P}L$ sia diviso in due parti congruenti dal raggio OP.
a) Esprimi la misura di OL in funzione dell'angolo $x = O\widehat{P}L$, indicando anche il corrispondente dominio.
b) Determina per quali valori di x la misura di OL è maggiore del raggio.
c) Posto $x = \frac{\pi}{6}$, determina gli angoli formati dalle diagonali del quadrilatero $OHPL$.

$\left[\text{a) } \overline{OL} = \frac{1}{2\cos x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}; \text{ b) } \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}; \text{ c) } \alpha = \text{arcsen}\left(\frac{5}{2\sqrt{7}}\right), \beta = \pi - \text{arcsen}\left(\frac{5}{2\sqrt{7}}\right)\right]$

362 Un triangolo ABC ha l'angolo $\widehat{B}$ doppio dell'angolo $\widehat{C}$ e il lato AC è lungo b.
a) Determina $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ in funzione dell'ampiezza x dell'angolo $\widehat{C}$.
b) Risolvi, limitatamente al problema, la disequazione $\overline{AB} \geq b\frac{\sqrt{2}}{2}$.
c) Trova il valore di $\widehat{C}$ per cui $\overline{BC} = b$.

$\left[\text{a) } \overline{AB} = \frac{b}{2\cos x}, \overline{BC} = \frac{b(4\cos^2 x - 1)}{2\cos x}; \text{ b) } \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{3}; \text{ c) } \frac{\pi}{5}\right]$

363 È dato il trapezio rettangolo $ABCD$ la cui base minore AB misura l, l'angolo $A\widehat{B}C = \frac{2}{3}\pi$ e la diagonale $\overline{AC} = \sqrt{3} \cdot l$. Sull'altezza BH considera il punto P tale che $P\widehat{C}D = x$. In funzione di x determina

$$f(x) = \frac{\overline{PD}^2 - \overline{PB}^2}{l^2}$$

e verifica che $f(x) > 0$ nei limiti imposti dal problema.
Indipendentemente dal problema geometrico, risolvi la disequazione $f(x) \geq \frac{3}{4}$.

$\left[f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{tg}\,x + \frac{1}{4}, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

I problemi con discussione

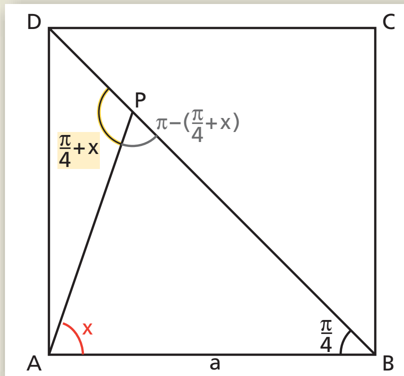
I problemi con i parametri

364 **ESERCIZIO GUIDA**

Dato il quadrato $ABCD$ di lato $\overline{AB} = a$, sulla diagonale DB determiniamo un punto P tale che $\overline{AP}^2 + \overline{PD}^2 = ka^2$. Discutiamo il numero delle soluzioni al variare di k in $\mathbb{R}^+$.

Posto $P\widehat{A}B = x$, osservando la figura, otteniamo le limitazioni: $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.
Applichiamo il teorema dei seni al triangolo APB,

$$\frac{\overline{AP}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\left[\pi - \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right]} \quad \rightarrow \quad \overline{AP} = \frac{a}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)},$$



e al triangolo APD,

$$\frac{\overline{AD}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \frac{\overline{PD}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \quad \rightarrow \quad \overline{PD} = \frac{a\cos x}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}.$$

Sostituendo nella relazione del problema, abbiamo

$$\frac{a^2}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} + \frac{a^2\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = ka^2,$$

che, poiché per $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ si ha $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \neq 0$, equivale a:

$$1 + 2\cos^2 x = 2k\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

Applicando le formule di bisezione e di addizione otteniamo:

$$1 + 2\frac{1 + \cos 2x}{2} = 2k\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x\right)^2 \rightarrow 2 + \cos 2x = k(1 + \operatorname{sen} 2x).$$

Poiché $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, si ha $0 \le 2x \le \pi$ e quindi si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 2 + \cos 2x = k(1 + \operatorname{sen} 2x) \\ 0 \le 2x \le \pi \end{cases}$$

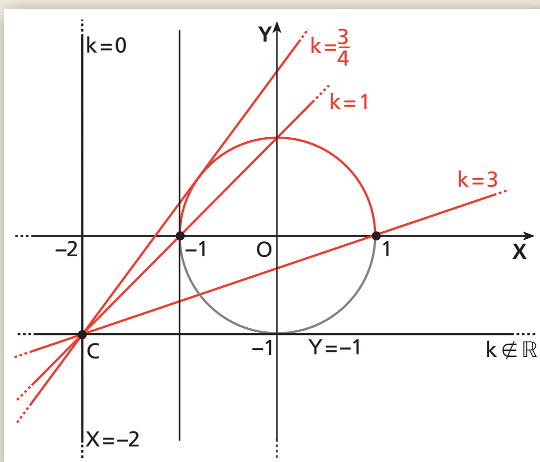
Poniamo $\cos 2x = X$, $\operatorname{sen} 2x = Y$. Con la relazione $\cos^2 2x + \operatorname{sen}^2 2x = 1$ otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 2 + X = k(1 + Y) \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ -1 \le X \le 1 \wedge 0 \le Y \le 1 \end{cases}$$

Discutiamo il sistema graficamente. La prima equazione rappresenta un fascio di rette, la seconda una circonferenza. Il fascio di rette:

$$2 + X - k(1 + Y) = 0$$

ha centro $C(-2; -1)$ e le rette che danno i capisaldi sono:



- retta tangente alla circonferenza:

$$\frac{|2+0-k(1+0)|}{\sqrt{1+k^2}}=1 \quad\to\quad (2-k)^2=1+k^2 \quad\to\quad -4k+4=1 \quad\to\quad k=\frac{3}{4};$$

- retta passante per $(-1;0)$: $2-1-k=0 \quad\to\quad k=1$;
- retta passante per $(1;0)$: $2+1-k=0 \quad\to\quad k=3$.

Osservando la figura, concludiamo che si hanno:

$$2 \text{ soluzioni per } \frac{3}{4}\le k\le 1, \quad 1 \text{ soluzione per } 1<k\le 3.$$

365 Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$, considera il punto P appartenente a essa e tale che $P\widehat{B}A=x$; traccia la tangente in P e sia H la proiezione del punto B sulla tangente.
a) Determina la funzione $f(x)=\overline{PH}+\overline{HB}$, traccia il suo grafico ed evidenzia la parte relativa al problema.
b) Discuti nei limiti del problema il numero delle intersezioni dei grafici di $f(x)$ e di $y=kr$, con $k\in\mathbb{R}$.

$\left[\text{a) } f(x)=r\left[\sqrt{2}\,\text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1\right]; \text{ b) } 0\le k<2 \text{ una sol.}, 2\le k\le 1+\sqrt{2} \text{ due sol.}\right]$

366 Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$, considera le corde AC e CD consecutive e congruenti. Posto $A\widehat{B}C=x$, discuti, al variare di $k\in\mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione:

$$\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{DB}=\frac{k-1}{2}\overline{AB}.$$

$[3\le k<1+2\sqrt{2} \text{ una sol.}; 1+2\sqrt{2}\le k\le 4 \text{ due sol.}]$

367 Il triangolo equilatero ABC è inscritto in una circonferenza di raggio r. Considera sull'arco minore BC il punto P, con $P\widehat{A}B=x$. Esprimi la funzione

$$f(x)=\frac{\text{area}_{APB}}{\text{area}_{ABC}},$$

rappresentala ed evidenzia il tratto relativo al problema.
Discuti il numero delle intersezioni del grafico di $f(x)$ con la retta di equazione $y=m$, al variare di m in $\mathbb{R}$, nei limiti imposti dal problema.
Risolvi, indipendentemente dal problema, la disequazione $f(x)\ge\frac{2}{3}$.

$\left[f(x)=\frac{1}{3}\left[2\,\text{sen}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1\right]; 0\le m\le 1 \text{ una sol.}; \frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$

368 In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$ determina un punto P in modo che, detta Q la sua proiezione su AB, risulti verificata la relazione $\overline{AQ}+\overline{QP}=k\overline{QB}$, con k parametro reale.

$\left[\text{con } P\widehat{A}B=x, (1+k)\cos 2x+\text{sen}\,2x+1-k=0 \text{ con } 0<x\le\frac{\pi}{2}; k\ge 0 \text{ una sol.}\right]$

369 Il trapezio $ABCD$ ha gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$ retti, la base maggiore $\overline{AB}=2a$ e la diagonale AC forma con il lato obliquo BC un angolo α il cui coseno è $\frac{3}{\sqrt{13}}$.
Determina l'angolo $B\widehat{A}C=x$ in modo che si abbia $5\overline{AD}+\overline{DC}=ka$, con k parametro reale.

$\left[13\cos^2 x-13\,\text{sen}\,x\cos x-15+k=0, \text{ con } \frac{\pi}{2}-\alpha<x<\pi-\alpha;\right.$

$\left.0<k\le 17 \text{ una sol.}, 17<k\le\frac{17+13\sqrt{2}}{2} \text{ due sol.}\right]$

370 Nel trapezio rettangolo $ABCD$ la base maggiore AB ha misura 2 e il lato obliquo BC misura 4. Determina l'angolo alla base $A\widehat{B}C$, sapendo che il perimetro misura $8 + 2k$. Discuti al variare di k in $\mathbb{R}$.

$\left[2 \operatorname{sen} x - 2\cos x - k = 0, \text{ con } \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}; \sqrt{3} - 1 < k < 2 \text{ una sol.}\right]$

371 È dato il triangolo ABC tale che $\overline{AB} = l$ e $C\widehat{A}B = 3\,C\widehat{B}A$. Considera un punto P sul lato CB tale che $\overline{PA} = \overline{PB}$. Posto $P\widehat{B}A = x$, esprimi e rappresenta in un periodo la funzione:

$$f(x) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}.$$

Evidenzia la parte del grafico che si riferisce al problema geometrico e discuti per essa il numero di intersezioni con le rette $y = k$, con $k \in \mathbb{R}$. Dal punto di vista geometrico come potresti giustificare i due casi limite?

$\left[f(x) = 2\cos 2x, \text{ con } 0 < x < \frac{\pi}{4}; 0 < k < 2 \text{ una sol.}\right]$

372 In una circonferenza di raggio r, considera la corda $\overline{AB} = r\sqrt{2}$ e il punto P, appartenente al maggiore dei due archi AB, con $B\widehat{A}P = x$. Costruisci la funzione:

$$f(x) = \frac{\text{perimetro}_{APB}}{\overline{AB}}.$$

Dopo averla rappresentata, discuti le intersezioni con la retta di equazione $y = k$ al variare di k in $\mathbb{R}$ e nei limiti imposti dal problema.
Determina per quale valore di x si ha il perimetro massimo e calcola il valore corrispondente. Descrivi le caratteristiche geometriche del triangolo APB.

$\left[f(x) = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + 1, \text{ con } 0 < x < \frac{3}{4}\pi; 2 \leq k \leq \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + 1 \text{ due sol.};\right.$

$\left.\text{max: } \left(\frac{3}{8}\pi; \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + 1\right), \text{ il triangolo è isoscele: } \overline{AP} = \overline{BP}\right]$

373 È dato il triangolo equilatero ABC di lato l e la semicirconferenza di diametro CB esterna al triangolo. Sia P un punto variabile sulla semicirconferenza, con $P\widehat{C}B = x$. Esprimi e rappresenta la funzione:

$$f(x) = \overline{AP}^2 + \overline{PB}^2.$$

Individua la situazione geometrica corrispondente al valore massimo della funzione.
Discuti graficamente le soluzioni dell'equazione $f(x) = k \cdot l^2$ nei limiti geometrici imposti dal problema ($k \in \mathbb{R}$).

$\left[f(x) = l^2\left[\frac{3}{2} + \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right], \text{ con } 0 < x < \frac{\pi}{2}; \text{ max: } \left(\frac{\pi}{3}; \frac{5}{2}l^2\right); 1 \leq k < 2 \text{ una sol.}, 2 \leq k \leq \frac{5}{2} \text{ due sol.}\right]$

374 Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, si consideri su di essa il punto T individuato dall'angolo $T\widehat{A}B = x$, la tangente in T e, sulla tangente, $\overline{TN} = \overline{TM} = r$ (N dalla parte di A). Verifica che il quadrilatero $ABMN$ risulta convesso solo se $\frac{45°}{2} \leq x \leq \frac{135°}{2}$.
Determina la funzione

$$f(x) = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{MN}^2 + \overline{NA}^2}{r^2}$$

nel caso in cui il quadrilatero sia convesso e, dopo averla rappresentata in un periodo, determina il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$, nei limiti geometrici imposti dal problema.

$[f(x) = 14 - 4 \operatorname{sen} 2x; 10 \leq k \leq 14 - 2\sqrt{2} \text{ due sol.}]$

375 Sono date una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e la corda BC di lunghezza uguale al lato dell'esagono regolare inscritto nella circonferenza. Considera sulla semicirconferenza non contenente C il punto D, con $A\widehat{B}D = x$. Determina in funzione di x il perimetro del triangolo ACD, rappresenta il grafico relativo e discuti graficamente il numero delle sue intersezioni con la retta di equazione $y = \sqrt{3}\,rk$.
Studia la situazione geometrica corrispondente al massimo del perimetro.

$\left[f(x) = \sqrt{3}\,r\left[1 + 2\,\mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right], \text{con } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}; 2 \le k < 1 + \sqrt{3} \text{ una intersez., } 1 + \sqrt{3} \le k \le 3 \text{ due intersez.; max:}\left(\frac{\pi}{3}; 3\sqrt{3}\,r\right) \text{ triangolo equilatero}\right]$

376 In una circonferenza di centro O e raggio r, sono date due corde AB e CD tali che $C\widehat{O}D = 2A\widehat{O}B = 2x$. Dopo aver individuato i limiti geometrici del problema imponendo che $\overline{AB} < \overline{CD}$, determina per quale valore di x si ha $\overline{CD} = \sqrt{3}\,\overline{AB}$.
Discuti, nei limiti imposti dal problema, per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ ha soluzione la seguente equazione:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = k.$$

Considera la funzione $f(x) = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2r}$. Qual è il suo periodo?

$\left[0 < x < \frac{2}{3}\pi;\ x = \frac{\pi}{3};\ 1 < k < 2 \text{ una sol.; } T = 4\pi\right]$

377 Dati la circonferenza di diametro unitario e il quadrato $ABCD$ in essa inscritto, considera il punto P sull'arco $\widehat{DC}$, con $P\widehat{A}C = x$. Rappresenta la funzione

$$f(x) = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$$

in un periodo ed evidenzia la parte relativa al problema. Determina il valore massimo di tale funzione, indicando per quale valore di x si ottiene tale valore.
Discuti il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = m$, al variare di m in $\mathbb{R}$.
Risolvi poi in $\mathbb{R}$ la disequazione $f(x) \ge 1$.

$\left[f(x) = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\left(x + \frac{3}{8}\pi\right), \text{con } 0 \le x \le \frac{\pi}{4}; \text{ max: }\left(\frac{\pi}{8}; \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}\right); 1 + \sqrt{2} \le m \le \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \text{ due sol.; } -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

378 Date la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e la corda $\overline{AC} = r\sqrt{3}$, considera la corda BD che interseca AC in P. Posto $P\widehat{B}C = x$, discuti, al variare di k in $\mathbb{R}$, l'equazione parametrica

$$\frac{\overline{PC} + \overline{CB}}{\overline{PB}} = k.$$

$\left[1 \le k < \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \text{ una sol.; } \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \le k \le \sqrt{2} \text{ due sol.}\right]$

379 Una semicirconferenza ha diametro $\overline{AB} = 2r$ e la corda $\overline{BC} = r$. Sia P un punto dell'arco $\widehat{AC}$ in modo che, dette D la sua proiezione sulla tangente in A ed E quella su AC, si abbia:

$$\overline{PD} + 2\overline{PE} = r(k - 1)\sqrt{3}, \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

Poni $P\widehat{A}C = x$ e discuti il numero delle soluzioni dell'equazione al variare di k in $\mathbb{R}$.

$\left[1 \le k < \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \text{ una sol.; } \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \le k \le 2 \text{ due sol.}\right]$

380 Presi i punti D e C rispettivamente sulle tangenti in A e B a una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, si abbia $\overline{AD} = \overline{CB} = r$. Sia P un punto sulla semicirconferenza. Posto $P\widehat{A}B = x$, discuti l'equazione:

$$\overline{PC}^2 + 2\overline{PD}^2 + 2\overline{AP}^2 = kr^2, \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

$[13 - 6\sqrt{2} \le k \le 7 \text{ due sol.; } 7 < k \le 19 \text{ una sol.}]$

381 Considera il punto P sulla semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e poni $P\widehat{B}A = x$. Sia BC una semiretta di origine B, con C che si trova nel semipiano di origine AB contenente la semicirconferenza e tale che $C\widehat{B}A = \frac{3}{4}\pi$ e $\overline{BC} = 2r$. Discuti l'equazione:

$$\overline{PC}^2 + \overline{AP}^2 = k\overline{AB}^2, \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

$\left[2 < k \leq 2 + \sqrt{2} \text{ una sol.}; \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \leq k \leq 2 \text{ due sol.}\right]$

382 Sulla semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ considera il punto C tale che $A\widehat{B}C = 30°$ e sull'arco $\overset{\frown}{CB}$ un punto D, con $D\widehat{B}C = x$. Sia T il punto di intersezione di DA e BC. Esprimi la funzione

$$f(x) = \frac{\overline{DT}}{\overline{TC}},$$

rappresenta il suo grafico indicando il tratto relativo al problema e calcola per quale valore di x si ha $f(x) = \sqrt{2}$. Studia poi le intersezioni del grafico della funzione con la retta di equazione $y = k - 1$, al variare di k in $\mathbb{R}$.

$\left[f(x) = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \text{con } 0 < x \leq \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{12}; 1 \leq k < \sqrt{3} + 1 \text{ una sol.}\right]$

383 Considera i punti C e D appartenenti alle semicirconferenze opposte rispetto al diametro AB di una circonferenza di raggio r, tali che $C\widehat{B}A = 2A\widehat{B}D$.

a) Posto $A\widehat{B}D = x$, esprimi la funzione $f(x) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$.

b) Calcola $f(x)$ quando il valore di x è il massimo consentito dalle limitazioni geometriche.

c) Determina il periodo di $f(x)$, rappresenta il suo grafico senza tenere conto dei limiti del problema e trova i punti di intersezione con l'asse x.

d) Discuti le intersezioni del grafico di $f(x)$ con la retta $y = k - 2$, con $k \in \mathbb{R}$, quando $x \in \left[0; \frac{2}{3}\pi\right]$.

$\left[\text{a) } f(x) = 4\cos^2 x - 1, \text{con } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}; \text{b) } 1; \text{c) } T = \pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi;\right.$
$\left.\text{d) due sol. per } 1 \leq k \leq 2, \text{ una sol. per } 2 < k \leq 5\right]$

384 In una circonferenza di raggio r, la corda AB è congruente al lato del quadrato inscritto. Sia C un punto variabile sul minore degli archi $\overset{\frown}{AB}$ e sia x l'angolo $A\widehat{B}C$.

a) Determina in funzione di x:

$$f(x) = \frac{2\sqrt{2}\,\text{area}_{ABC}}{\text{area}_{\text{quadrato inscritto}}}.$$

b) Rappresenta $f(x)$ relativamente al problema geometrico considerato.

c) Discuti l'equazione $f(x) = k$ nell'intervallo in cui può variare x.

$\left[\text{a) } f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{con } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \text{c) due sol. per } 0 \leq k \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

385 È data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$. All'esterno della semicirconferenza costruisci il triangolo rettangolo ABC tale che $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$ e $\text{tg}\,\widehat{B} = \frac{1}{2}$.

Considerato il punto P della semicirconferenza tale che $A\widehat{B}P = x$, esprimi la funzione:

$$f(x) = \frac{\overline{CP}^2}{r^2}.$$

Rappresenta graficamente la funzione ottenuta e determina il numero dei punti di intersezione con la retta di equazione $y = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Calcola per quale valore di x l'espressione $\overline{CP}^2$ assume il valore massimo.

$\left[f(x) = 2\sqrt{2}\,\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 3, \text{con } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 1 \leq k < 5 \text{ una sol.}; 5 \leq k \leq 2\sqrt{2} + 3 \text{ due sol.};\right.$
$\left.\text{max: } \left(\frac{3}{8}\pi; (2\sqrt{2} + 3)r^2\right)\right]$

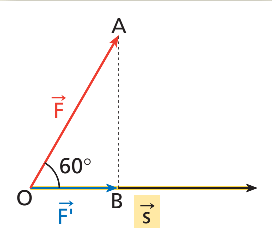
386 Il trapezio rettangolo $ABCD$ con base maggiore AB è circoscritto a una semicirconferenza di diametro $\overline{AD} = 4$.
a) Posto $A\widehat{B}C = x$, trova l'area $S(x)$ del trapezio e calcola per quali valori di x si ha $S(x) = \frac{16}{3}\sqrt{3}$.
b) Indica con $P(x)$ il perimetro di $ABCD$ e discuti l'equazione $P(x) = 4k$ al variare di k in $\mathbb{R}$.
Che figura si ottiene per $k = 3$?
$\left[\text{a) } S(x) = \frac{8}{\operatorname{sen} x};\ x = 60°; \text{ b) una sol. per } k > 3\right]$

LE APPLICAZIONI DELLA TRIGONOMETRIA

Le applicazioni alla fisica

387 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il lavoro che compie una forza costante di intensità pari a 25 N, inclinata di 60° rispetto a un piano orizzontale, agente su un corpo che viene spostato dalla forza su tale piano di 15 m.



Dati la forza $\vec{F}$ e lo spostamento $\vec{s}$, il lavoro L compiuto dalla forza è dato da

$$L = F' \cdot s,$$

dove F' è l'intensità della proiezione della forza lungo la direzione dello spostamento. F' è la misura di un cateto del triangolo rettangolo OAB, quindi

$$F' = \overline{OB} = \overline{OA} \cdot \cos\alpha = F \cdot \cos\alpha, \text{ da cui:}$$

$$L = F \cdot s \cdot \cos\alpha.$$

Applichiamo la formula precedente:

$$L = F \cdot s \cdot \cos\alpha = 25 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} = 187{,}5.$$

Il lavoro è di 187,5 J.

388 Calcola l'intensità e la direzione della risultante delle due forze di intensità $F' = 8$ N, $F'' = 10$ N applicate nel punto A e che formano tra loro un angolo di 30°. [17,39 N; 16° 42′ 19″ risp. a $\vec{F'}$]

389 Generalizza il problema precedente, determinando l'intensità e la direzione della risultante R di due forze $\vec{F'}$ e $\vec{F''}$ che sono applicate a uno stesso punto e le cui direzioni formano un angolo α.
$\left[R = \sqrt{F'^2 + F''^2 + 2F'F''\cos\alpha};\ \operatorname{sen}\beta = \frac{F''}{R}\operatorname{sen}\alpha\right]$

390 Una massa puntiforme di 0,5 kg è appesa a un filo verticale di massa trascurabile. Una forza $\vec{F}$ orizzontale di modulo pari a 2 N è applicata alla massa e la tiene in equilibrio in una posizione in cui il filo forma un angolo α con la verticale. Trova l'ampiezza di α. [22° 12′ 13″]

391 Calcola il lavoro che svolge una forza costante di intensità pari a 15 N, inclinata di 30° rispetto a un piano orizzontale, agente su un corpo che si sposta su tale piano di 25 m. [324,8 J]

392 Qual è il lavoro relativo a una forza perpendicolare a uno spostamento? Giustifica la risposta. [0]

393 Un carrello di massa $m = 1{,}2$ kg, vincolato a muoversi su una rotaia rettilinea senza attrito, è spinto da una forza $\vec{F}$ che forma un angolo di 25° rispetto alla direzione di movimento. Se l'intensità della forza F è 3,2 N, qual è l'accelerazione del carrello? [2,42 m/s^2]

394 Un ragazzo sta girando in una giostra a sedili; la catena del suo sedile è inclinata di 36° rispetto alla verticale. Se la massa complessiva del sedile e del ragazzo è di 80 kg, quanto è la tensione della catena? (Considera trascurabile la massa della catena.) [969,1 N]

395 Un raggio di luce proveniente dall'aria incide perpendicolarmente sulla faccia di un prisma di vetro a sezione triangolare avente indice di rifrazione $n = 1{,}5$. Quale deve essere il valore minimo dell'angolo rifrangente del prisma perché il raggio subisca la riflessione totale? [41° 48′ 37″]

396 Un'altalena a bilancia misura 3 m e il suo fulcro si trova a 30 cm da terra. Qual è la massima altezza raggiungibile da ciascun sedile? (I sedili si trovano alle due estremità.) [60 cm]

397 Un blocco avente la massa di 150 kg è spinto su un piano orizzontale scabro da una forza inclinata verso il basso che forma un angolo di 34° con l'orizzontale. Se l'intensità della forza è 300 N e il coefficiente di attrito è $k = 0{,}12$, qual è l'accelerazione impressa al blocco? [$0{,}348 \text{ m/s}^2$]

398 Una lastra trasparente a facce piane e parallele ha uno spessore di 50 cm. Un raggio luminoso incide su di essa con un angolo di incidenza di 35°: quale spostamento subisce nell'attraversarla se l'angolo di rifrazione è di 28°? Per spostamento intendiamo la distanza fra la direzione del raggio entrante e quella del raggio uscente. [6,9 cm]

399 Un raggio luminoso proveniente dall'aria incide sulla superficie piana di un mezzo trasparente con un angolo di incidenza di 40°; il corrispondente angolo di rifrazione è di 30°. Trova l'ampiezza dell'angolo limite nel passaggio inverso, dal mezzo trasparente all'aria. [51° 03′ 55″]

400 Tre forze, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, i cui moduli sono 8 N, 4 N e 10 N, sono applicate su una stessa massa puntiforme. Determina gli angoli che $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ formano con $\vec{F}_3$, sapendo che le tre forze si equilibrano. [157° 40′ 06″; 130° 32′ 30″]

401 Un corpo pesa 850 N ed è appoggiato su un piano inclinato senza attrito. Per tenerlo in equilibrio è necessaria una forza $F = 150$ N parallela al piano. Determina l'inclinazione α del piano. [$\alpha \simeq 10°\, 9'\, 51''$]

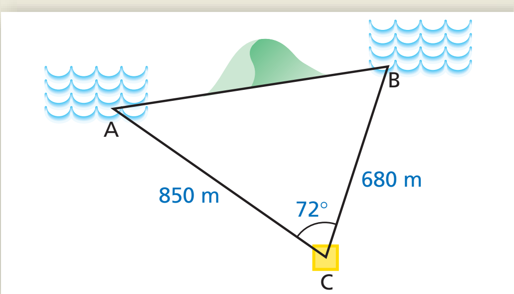
402 Un pendolo è formato da una sferetta di piccole dimensioni appesa a un filo lungo 80 cm. Nella posizione di riposo l'altezza della sfera dal suolo è 60 cm; durante l'oscillazione essa raggiunge l'altezza massima dal suolo di 75 cm. Qual è l'ampiezza di oscillazione? [35° 39′ 33″]

Altre applicazioni alla realtà

403 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo la distanza fra due laghi separati da una collina. Scegliamo come punto di riferimento un monastero che dista dai due laghi rispettivamente 850 m e 680 m. Inoltre, le direzioni in cui dal monastero si vedono i due laghi formano un angolo di 72°.

Indichiamo i due laghi con A e B e il monastero con C.



Applichiamo il teorema del coseno al triangolo ABC e otteniamo:

$$\overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma} =$$
$$= \sqrt{850^2 + 680^2 - 2 \cdot 850 \cdot 680 \cdot \cos 72°} \simeq$$
$$\simeq \sqrt{827\,676} \simeq 909{,}77.$$

La distanza fra i laghi è di circa 909,77 m.

404 Due case, A e B, sono separate da un fiume. Una torre T è posta dalla stessa parte di B, a una distanza da B di 375 m. L'angolo $B\widehat{T}A$ è di 60°; l'angolo $A\widehat{B}T$ è di 75°. Calcola la distanza fra le due case. [459,28 m]

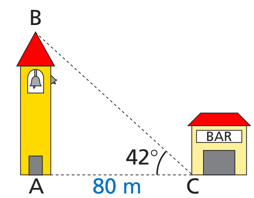
405 Ti trovi su una spiaggia e vuoi calcolare l'altezza di un isolotto scoglioso. Scegli due punti A e B allineati con l'isolotto e distanti fra loro 20 m. Misuri gli angoli $D\widehat{A}C = 28°$ e $D\widehat{B}C = 20°$ (D è un punto alla base dell'isolotto, C è un punto sulla sua sommità). Quanto risulta alto? [23,07 m]

406 In un terreno pianeggiante vuoi calcolare la distanza fra due punti inaccessibili A e B. Scegli due posizioni P e Q, distanti 50 m fra loro e misuri gli angoli $Q\widehat{P}A = 120°$, $Q\widehat{P}B = 50°$, $P\widehat{Q}B = 110°$, $P\widehat{Q}A = 40°$. Quanto sono distanti A e B? [137,37 m]

407 Una chiesa si trova in cima a una collina e la cella campanaria del suo campanile è a 25 m dal suolo. Per calcolare l'altezza del colle scegli come riferimento una casa situata nella pianura sottostante; misuri, rispetto alla verticale, l'angolo $\widehat{A} = 73°\,20'$, sotto cui vedi la casa dalla base del campanile, e l'angolo $\widehat{B} = 65°\,40'$, sotto cui la vedi dalla cella campanaria. Quanto è alto il colle rispetto alla pianura? [48,97 m]

408 Ti trovi su una collinetta e vuoi calcolare la sua altezza. Come riferimenti scegli, sulla cresta, due posizioni, A e B, distanti 80 m e una casa C ai piedi del colle, dopodiché misuri gli angoli $C\widehat{A}B = 75°\,15'$ e $A\widehat{B}C = 69°\,39'$. Misurando l'angolo che la direzione BC forma con la verticale in B, trovi 125° 33′. Quanto è alta la collina rispetto alla quota della casa? [78,22 m]

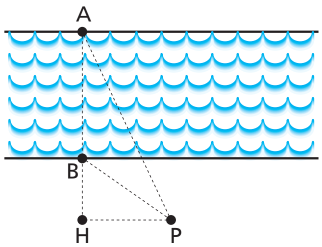
409 Calcola l'altezza di un campanile, sapendo che da un bar distante 80 metri da esso si vede la sua cima secondo un angolo di 42°. [$\simeq$ 72 m]



410 Un geometra deve misurare la larghezza di un canale. Dopo aver individuato un punto di riferimento A sulla sponda opposta alla sua, pianta due paletti: uno, sull'argine, nella posizione B e l'altro nella posizione H in modo che la retta ABH risulti perpendicolare alle sponde (figura a lato). Dalla posizione P, tale che $P\widehat{H}A = 90°$, misura gli angoli $H\widehat{P}B$, $H\widehat{P}A$ e la distanza PH:

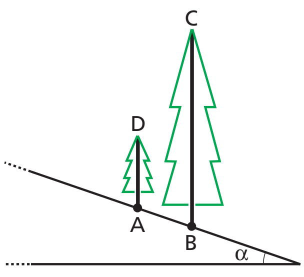
$$H\widehat{P}B = 35°;\ H\widehat{P}A = 65°;\ PH = 20\text{ m}.$$

Qual è la larghezza AB del canale? [28,89 m]



411 Una torre ha la sezione quadrata di area $s = 64\text{ m}^2$ ed è inclinata su un lato di 4° 45′ 9″ rispetto alla verticale. Il suo baricentro si trova a 25,6 m da terra al centro della sezione della torre. La verticale passante per il baricentro cade dentro la base della torre? [sì, a 2,13 m dal centro]

412 Sul pendio di una montagna di inclinazione $\alpha = 20°$ ci sono due alberi che indichiamo con AD e BC, alti rispettivamente 12 m e 39 m e piantati a distanza $AB = 42$ m.
Qual è la distanza DC tra le loro cime? [$\simeq$ 41,4 m]



413 Una piazza ha la forma di un quadrilatero convesso i cui angoli misurano: $\widehat{A} = 70°$, $\widehat{B} = 130°$, $\widehat{C} = 40°$, $\widehat{D} = 120°$. Se il lato AB è lungo 40 m e BC 90 m, quanto misura la superficie della piazza? [3388,26 m^2]

414 Un osservatore è sulla riva di un lago in una postazione a 241 m di altezza dalla sua superficie. Dall'altra parte del lago vede la cima di una montagna in una direzione che forma, col piano orizzontale, un angolo $\alpha = 43° \, 12'$ verso l'alto e la sua immagine riflessa sull'acqua sotto un angolo $\beta = 49° \, 33'$ verso il basso. Quanto è alta la cima della montagna? (Ricorda che per le leggi della riflessione l'angolo di incidenza e quello di riflessione sono congruenti.) [2176 m]

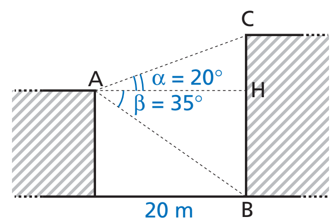
415 A vertical flagpole stands on horizontal ground. The angle of elevation of the top of the pole from a certain point on the ground is ϑ. From a point on the ground 10 meters closer to the pole the angle of elevation is β. Show that the height of the pole is $\dfrac{10 \sin \vartheta \sin \beta}{\sin(\beta - \vartheta)}$.

(IR *Leaving Certificate Examination*, Higher Level, 1994)

416 Per calcolare l'area di un appezzamento di terreno a forma di quadrilatero convesso un agronomo ne misura i lati trovando: $AB = 58$ m, $BC = 53$ m, $CD = 104$ m e $DA = 82$ m. Misura poi l'angolo $D\widehat{A}B = 112° \, 42'$. Qual è l'area del terreno? [4949,59 m^2]

417 In una zona montuosa un topografo deve calcolare l'altezza di una cima V rispetto alla sua postazione P. Per base prende la distanza $PQ = 483$ m dal punto noto Q situato sulla cima di un'altra montagna. Misura gli angoli $P\widehat{Q}V = 54° \, 48'$, $Q\widehat{P}V = 50° \, 39'$ e l'angolo $\alpha = 68° \, 24'$ che la direzione PV forma col piano orizzontale. Quanto è il dislivello fra P e V? [381 m]

418 Due edifici sono posti uno di fronte all'altro alla distanza di 20 m. Un osservatore A sta sul cornicione (figura a lato) dell'edificio più basso e vede il cornicione C di quello più alto sotto l'angolo $\alpha = 20°$ rispetto al piano orizzontale. L'angolo sotto cui A vede la base B dello stesso edificio è $\beta = 35°$. Trova le altezze dei due palazzi. [14 m; 21,28 m]



Le applicazioni alla geometria solida

419 L'apotema di una piramide regolare a base quadrata forma, con il piano della base, un angolo α tale che $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{12}{5}$. Determina la tangente dell'angolo β che lo spigolo laterale forma con il piano della base.

$\left[\operatorname{tg} \beta = \dfrac{6\sqrt{2}}{5}\right]$

420 Dallo spigolo AD del cubo $ABCDEFGH$ (AF, BG, CH e DE sono gli spigoli laterali) conduci un piano $ALMD$ che intersechi la faccia $BCHG$: se tale piano divide il cubo in due parti, una doppia dell'altra, quanto è l'ampiezza α del diedro che esso forma con la faccia $ABCD$? [33° 41′ 24″]

421 La piramide $ABCV$ ha per base il triangolo equilatero ABC, di lato a, e lo spigolo CV è perpendicolare alla base.

Sai che il volume misura $\dfrac{1}{4}a^3$; determina l'angolo α che lo spigolo BV forma con lo spigolo BC e l'angolo ϕ della faccia ABV con la base. [$\alpha = 60°$; $\phi = \operatorname{arctg} 2$]

422 In una piramide regolare a base esagonale lo spigolo laterale è lungo 10 cm e forma un angolo di 70° col piano di base. Calcola il volume della piramide e l'angolo σ che ciascuna faccia laterale forma col piano di base. [volume $\simeq 95{,}196$ cm^3; $\sigma \simeq 72° \, 30'$]

423 Lo spigolo laterale di una piramide regolare a base quadrata misura $(\sqrt{6} + \sqrt{2})l$ (l è una lunghezza nota) e forma un angolo di 75° con la diagonale della base. Calcola l'angolo ϕ della faccia laterale col piano di base e il volume V del cono circolare retto inscritto nella piramide. $\left[\phi = \operatorname{arctg}\sqrt{2}(2 + \sqrt{3});\ V = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{6}\pi l^3\right]$

424 Un cubo di spigolo l è inscritto in una piramide regolare a base quadrata in modo che quattro dei suoi vertici si trovano sugli spigoli laterali della piramide, mentre gli altri stanno sulla sua base. Determina il volume della piramide, sapendo che la tangente dell'angolo che le sue facce laterali formano con la base è 2. $\left[\frac{8}{3}l^3\right]$

425 Un prisma retto che ha per base un triangolo rettangolo è inscritto in una sfera di raggio r. Gli angoli acuti delle basi ABC e $A'B'C'$ del prisma sono $\widehat{B} = \widehat{B}' = 75°$ e $\widehat{C} = \widehat{C}' = 15°$. Determina l'angolo $x = C\widehat{B}C'$ in modo che l'area laterale del prisma sia $\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{2}r^2$. $[30°]$

426 Una piramide regolare a base quadrata ha gli spigoli laterali lunghi 12 cm e l'area di base uguale a 16 cm^2. Determina gli angoli delle facce laterali e l'angolo σ che ciascuna di esse forma con la base.
$\left[\alpha = \beta = \arccos\frac{1}{6}; \gamma = \arccos\frac{17}{18}; \sigma = \arccos\frac{\sqrt{35}}{35}\right]$

427 La diagonale di un parallelepipedo rettangolo, misurata rispetto a un'unità prefissata, è $d = \sqrt{5}$; gli spigoli della base misurano $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Determina l'ampiezza dell'angolo α che la diagonale d forma con la diagonale di base. $[\alpha = 30°]$

428 Un cono circolare retto è circoscritto a una semisfera di raggio noto r il cui cerchio di base giace sulla base del cono. Esprimi il volume del cono in funzione dell'angolo x che il suo apotema forma col piano di base; in particolare, calcola tale volume nel caso in cui l'area laterale del cono sia doppia di quella della base.
$\left[V_c = \frac{\pi r^3}{3\,\text{sen}^2 x \cos x}; x = \frac{\pi}{3} \text{ e } V_c = \frac{8}{9}\pi r^3\right]$

429 Un trapezio isoscele $ABCD$ è circoscritto a una semicirconferenza di diametro $2r$. Determina l'angolo acuto, sapendo che il rapporto fra il volume del solido generato dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base maggiore e quello della sfera di raggio r è $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. $\left[60° \vee \text{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{11}\right]$

430 Una piramide retta avente per base un rettangolo $ABCD$ è inscritta in un cono circolare retto. L'altezza comune ai due solidi è $\overline{VO} = 24$; nelle facce laterali gli angoli al vertice $A\widehat{V}B = 2\alpha$ e $B\widehat{V}C = 2\beta$ sono tali che $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{13}$ e $\text{sen}\,\beta = \frac{4}{13}$. Determina il seno dell'angolo x di apertura del cono ($x = A\widehat{V}O$) e il volume del cono. $\left[\text{sen}\,x = \frac{5}{13}; V_c = 800\pi\right]$

431 Nella piramide $ABCV$ la base è il triangolo ABC rettangolo in B; lo spigolo VC è perpendicolare alla base e la faccia ABV ha un angolo retto in B. Sapendo che $\overline{VA} = 8$, $V\widehat{A}B = 30°$ e $C\widehat{B}V = 45°$, trova l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{C}B$ e il volume della piramide. $\left[\text{tg}\,A\widehat{C}B = \sqrt{6}; \text{volume} = \frac{16}{3}\sqrt{3}\right]$

432 Nel rettangolo $ABCD$ la diagonale AC misura l. Dette S_1 l'area della superficie totale del cilindro ottenuto con una rotazione completa del rettangolo intorno ad AB e S_2 l'area del cerchio di raggio l, poni $C\widehat{A}B = x$. Considera la funzione

$$f(x) = \frac{S_1}{S_2}$$

e trova per quali valori di x si ha $f(x) \geq 2$. $\left[f(x) = \text{sen}\,2x - \cos 2x + 1; \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}\right]$

433 Un prisma retto ha per base il rettangolo $ABCD$ inscritto in una circonferenza di diametro $2r$ e centro O. Posto $A\widehat{O}D = 2x$ e supposto $\overline{AB} \geq \overline{AD}$, esprimi, in funzione di x, il volume del prisma sapendo che l'area della superficie laterale vale S. Calcola quindi per quale valore di x il volume ha misura $\frac{Sr}{2\sqrt{2}}$.
$\left[V(x) = \frac{Sr\,\text{sen}\,x \cos x}{\cos x + \text{sen}\,x}; \frac{\pi}{4}\right]$

434 Nella semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$ è condotta la corda AC. Detta H la proiezione di C sul diametro, indica con V_1 il volume del cono generato dal triangolo AHC in una rotazione completa attorno alla retta AB, con V_2 quello del cono generato dal triangolo OHC. Esprimi, in funzione dell'angolo $B\widehat{A}C = x$, il rapporto $f(x) = \frac{V_2}{V_1}$.
Considera poi, indipendentemente dalle condizioni di esistenza del problema geometrico, la funzione $f(x)$ nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ e dimostra che assume il suo valore massimo per $x = 0$.
$\left(\text{Suggerimento. Verifica che in } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \text{ si ha } f(x) = 1 - \frac{1}{1 + \cos x}.\right)$ $\left[f(x) = \frac{|\cos 2x|}{1 + \cos 2x}, \text{ con } 0 < x < \frac{\pi}{2}\right]$

Le applicazioni alla geometria analitica

435 Trova i vertici e gli angoli di un triangolo, sapendo che le equazioni dei suoi lati sono $2x - 3y - 5 = 0$, $x + 6y - 10 = 0$ e $x + y = 0$. $[(4; 1); (1; -1); (-2; 2); 35{,}6°; 43{,}2°; 101{,}3°]$

436 Calcola gli angoli del triangolo di vertici (2; 1), (6; 1), (3; 5). $[51°; 53°; 76°]$

437 Determina gli angoli del triangolo di vertici (2; 2), (5; 4), $\left(5; -\frac{5}{2}\right)$. $[33{,}7°; 56{,}3°; 90°]$

438 Determina l'equazione della circonferenza di centro $C(2; 0)$ e passante per $A(4; 0)$. Scrivi l'equazione della tangente nel suo punto di ascissa 3 di ordinata positiva e trova l'angolo che essa forma con la direzione positiva dell'asse x. $[(x-2)^2 + y^2 = 4; x + \sqrt{3}\,y = 6; 150°]$

439 Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla parabola di equazione

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$$

nei suoi punti di intersezione con l'asse x e determina l'angolo da esse formato.
$[y = 3x; y = -3x + 18; 36{,}9°]$

440 Disegna l'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

e trova gli angoli formati dagli asintoti. $[67{,}4°; 112{,}6°]$

441 Determina le rette appartenenti al fascio di equazione $(1-k)\,x + (k+2)\,y - 1 = 0$ e che formano un angolo di 30° con la retta $x + y = 1$. $\left[k = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}; k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$

442 Nel triangolo di vertici $A(-3; -1)$, $B(3; 2)$ e $C(5; 0)$ calcola la tangente goniometrica dell'angolo in B e verifica il teorema del coseno relativamente al lato AC. $[-3]$

443 Un'iperbole con i fuochi sull'asse y e centro nell'origine degli assi ha un asintoto inclinato di 30° rispetto al semiasse positivo delle x. Sapendo che l'iperbole passa per il punto $M(-12; 7)$, determina:
a) la sua equazione;
b) la tangente goniometrica dell'angolo $A\widehat{M}B$ (A e B sono i vertici reali dell'iperbole);
c) il diametro della circonferenza passante per A, M e B (utilizza il teorema della corda).
$\left[\text{a) } \frac{x^2}{3} - y^2 = -1; \text{ b) } \frac{1}{8}; \text{ c) } 2\sqrt{65}\right]$

444 Dati i punti $A(2; 0)$ e $B(4; 2)$, determina il luogo geometrico dei punti P tali che tg $A\widehat{P}B = \pm 1$.
[l'unione delle due circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ e $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, esclusi i punti A e B]

445 Scrivi l'equazione dell'ellisse riferita agli assi e con i fuochi sull'asse x, avente due vertici nei punti $A(-2\sqrt{3}; 0)$ e $B(0; 2)$. Indicato con F il fuoco con ascissa negativa, calcola il coseno dell'angolo $A\widehat{F}B$. Verifica il teorema di Carnot relativamente al lato AB del triangolo AFB e determina il raggio della circonferenza circoscritta a esso.

$\left[x^2 + 3y^2 = 12; \cos \widehat{F} = -\sqrt{\frac{2}{3}}; 2\sqrt{3}\right]$

446 Date la circonferenza $\mathscr{C}_1$, con centro in $C_1(-2; 3)$ e raggio $r_1 = \sqrt{5}$, e la circonferenza $\mathscr{C}_2$, con centro in $C_2(1; 3)$ e raggio $r_2 = \sqrt{2}$, trova i punti di intersezione delle due circonferenze. Detto A quello con ordinata maggiore, determina gli angoli del triangolo C_1AC_2 e il coefficiente angolare della bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$.

$\left[A(0; 4), B(0; 2); \cos \widehat{A} = -\frac{1}{\sqrt{10}}; \operatorname{sen} \widehat{C}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}; \widehat{C}_2 = \frac{\pi}{4}; m = 3 + \sqrt{10}\right]$

447 Siano A e B i punti di intersezione fra la retta $2x - y - 5 = 0$ e la parabola $y = x^2 - 4x$, V il vertice. Determina il coseno dell'angolo $A\widehat{V}B$, utilizzando il teorema di Carnot nel triangolo AVB, e confrontalo con il valore della sua tangente dedotto dalle equazioni delle rette AV e VB.

$\left[\cos A\widehat{V}B = \frac{1}{\sqrt{5}}; \operatorname{tg} A\widehat{V}B = 2\right]$

448 I punti $A(-4; 2)$ e $B(-1; -1)$ sono vertici di un triangolo in cui il lato BC ha equazione $x - 2y - 1 = 0$ e $\overline{AC} = \sqrt{29}$. Determina l'angolo $A\widehat{C}B$ e l'equazione del lato AC.

$\left[\operatorname{sen} \widehat{C} = \frac{9}{\sqrt{145}}; \text{due soluzioni: } 2x + 5y - 2 = 0, 26x - 7y + 118 = 0\right]$

Le equazioni parametriche di una curva

449 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo l'equazione cartesiana della curva definita dalle seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t} \\ y = 2 \operatorname{cotg} t \end{cases}$$

Per eliminare il parametro t, cerchiamo di utilizzare la relazione $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$.
Nella prima equazione ricaviamo sen t:

$$x = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen} t = \frac{1}{x}.$$

Per ricavare cos t, dividiamo membro a membro le due equazioni:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \cdot \frac{1}{2\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{2\cos t} \quad \rightarrow \quad \cos t = \frac{y}{2x}.$$

Sostituiamo le espressioni di sen t e cos t in $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4x^2} = 1 \quad \rightarrow \quad 4 + y^2 = 4x^2 \quad \rightarrow \quad 4x^2 - y^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x^2 - \frac{y^2}{4} = 1.$$

L'equazione ottenuta è quella di un'iperbole.

Scrivi le equazioni cartesiane delle curve definite dalle seguenti equazioni parametriche.

450 $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5 \operatorname{sen} t \end{cases}$ $[x^2 + y^2 = 25]$

451 $\begin{cases} x = \dfrac{2}{\cos t} \\ y = 5\,\mathrm{tg}\,t \end{cases}$ $\left[\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{25} = 1\right]$

452 $\begin{cases} x = -6 + 3\cos t \\ y = 1 + 3\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$ $[x^2 + y^2 + 12x - 2y + 28 = 0]$

453 $\begin{cases} x = -1 + 2\cos t \\ y = \dfrac{1}{2} + 2\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$ $[4x^2 + 4y^2 + 8x - 4y - 11 = 0]$

454 $\begin{cases} x = \dfrac{4}{\mathrm{sen}\,t} \\ y = \mathrm{cotg}\,t \end{cases}$ $\left[\dfrac{x^2}{16} - y^2 = 1\right]$

455 $\begin{cases} x = \mathrm{sen}^2 t \\ y = \mathrm{sen}\,2t \end{cases}$ $[y^2 = 4x - 4x^2]$

456 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos t} - 1 \\ y = 2\,\mathrm{tg}\,t + 1 \end{cases}$ $\left[(x+1)^2 - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1\right]$

Determina il luogo geometrico descritto dalle seguenti equazioni e rappresentalo graficamente.

457 $\begin{cases} x = 2\cos\alpha \\ y = 4\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi.$ $\left[\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1\right]$

458 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y = \cos\alpha + 1 \end{cases}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi.$ $[4x^2 + y^2 - 2y = 0]$

459 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos\alpha + 4 \\ y = 2\,\mathrm{sen}\,\alpha + 3 \end{cases}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi.$ $[16x^2 + y^2 - 128x - 6y + 261 = 0]$

460 $\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}} - 1 \\ y = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}} + 2 \end{cases}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi.$

[arco della circonferenza $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$, con $-1 \le x \le 0 \wedge 2 \le y \le 3$]

461 Considera il luogo dei punti del piano rappresentato dal sistema di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \mathrm{cotg}\,\alpha \\ y = 2\,\mathrm{cosec}\,\alpha \end{cases}, \alpha \ne k\pi.$$

a) Verifica che è un'iperbole, determinandone l'equazione.
b) Calcola la tangente dell'angolo acuto β formato dagli asintoti.
c) Trova la formula che, dato un angolo x, esprime $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$ in funzione di $\mathrm{tg}\,x$ e calcola $\mathrm{tg}\,\dfrac{\beta}{2}$.

$\left[\text{a) } 4x^2 - y^2 = -4; \text{ b) } \dfrac{4}{3}; \text{ c) } \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 x}}{\mathrm{tg}\,x}; \dfrac{1}{2}\right]$

REALTÀ E MODELLI

1
Il satellite geostazionario

I satelliti per le comunicazioni o per le informazioni meteo sono geostazionari, cioè percorrono un'orbita fissa sopra l'equatore all'altezza di circa 35 790 km dal suolo terrestre con un periodo di rivoluzione uguale a quello della Terra, e quindi si trovano sempre sopra lo stesso punto della superficie terrestre.
Sapendo che il raggio equatoriale medio della Terra è di 6371 km e che le onde elettromagnetiche emesse dal satellite viaggiano in linea retta, rispondi alle seguenti domande.

- Una persona che si trova al Polo Nord può ricevere le informazioni dal satellite?

- Fino a quale latitudine si possono ricevere i segnali del satellite?
- Supponiamo che una persona che si trova al Polo Nord possa piantare verticalmente un'antenna; quanto deve essere alta per ricevere i segnali dal satellite?
- Le onde elettromagnetiche viaggiano alla velocità della luce ($c = 2{,}9979 \cdot 10^8$ m/s); con quanto ritardo arriva un segnale a un ricevente che si trova al 45° parallelo sulla stessa longitudine del satellite?

2
La gola di montagna

Un gruppo di scout decide di fare il campo estivo in una zona di montagna. Per raggiungere il posto, il gruppo deve attraversare un ponticello sopra una imponente gola calcarea con ripide pareti scavate dalle acque di un impetuoso torrente. Dopo aver piantato le tende, uno dei compiti che il gruppo decide di darsi è quello di misurare la distanza (in linea d'aria) fra due punti A e B lontani dal ponticello e da parti opposte rispetto alla gola.

- Come fanno a trovare la distanza fra i due punti? (Cerca una strategia per risolvere il problema. Supponi che dal punto A i ragazzi possano vedere sia il punto B sia un'area a esso circostante.)

3
L'altezza del monte

Alcuni amici in estate affittano una casa in una valle di montagna per fare trekking. Da una delle finestre vedono la cima della montagna da raggiungere e, non avendo a disposizione una cartina, iniziano ad avanzare alcune ipotesi sulla sua altezza. Non trovando un accordo, Camilla propone una tecnica di calcolo:
a) misurare l'angolo con il quale è possibile vedere la cima dalla base della casa (piano terra);
b) misurare l'angolo con il quale è possibile vedere la cima dalla stazione di partenza dell'ovovia.

- Sapendo che la distanza fra la casa e l'ovovia è di 1000 m e che l'angolo misurato dalla casa è di 35° circa, mentre quello misurato dalla stazione dell'ovovia è di 50° circa, quanto è alta la montagna rispetto al livello della casa? (Supponi che casa e ovovia si trovino alla stessa altitudine.)

4
Un problema nautico

Due barche a vela, Laura e Mara, lasciano il molo nello stesso istante in una bella giornata ventosa. Laura può navigare percorrendo 12 miglia nautiche in un'ora (1 nmi = 1852 m), Mara invece può fare 15 miglia nautiche in un'ora. Dal momento del distacco dal molo, le loro direzioni di navigazione rimangono costanti e formano tra loro un angolo di 115° circa. Dopo tre ore di navigazione, Laura lancia un segnale di aiuto che viene raccolto da Mara.

- Quanto sono lontane le due barche quando viene lanciato il segnale?
- Se Laura si ferma e Mara cerca di raggiungerla, quanto tempo impiega?

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: www.zanichellitest.it

1 Se in un triangolo rettangolo un cateto è lungo 30 cm e la tangente dell'angolo a esso opposto è $\frac{3}{5}$, quanto è lungo l'altro cateto?

A 50 cm
B 18 cm
C 2 cm
D 40 cm
E 30 cm

2 In un triangolo $a = 18$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ e $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{10}$. Quanto vale b?

A 3
B 60
C $\frac{27}{25}$
D $\frac{25}{27}$
E 30

3 Se in un triangolo due lati sono lunghi rispettivamente 6 cm e 15 cm e il coseno dell'angolo compreso fra essi vale $\frac{3}{10}$, quanto è lungo il terzo lato?

A 207 cm
B 315 cm
C $\sqrt{315}$ cm
D $\sqrt{207}$ cm
E $\sqrt{261}$ cm

4 In un triangolo rettangolo un cateto è lungo 12 cm e l'ipotenusa 28 cm. Quanto vale il coseno dell'angolo adiacente al cateto dato?

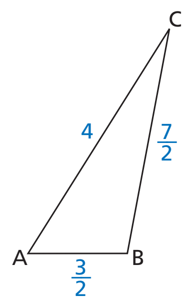
A $\frac{3}{7}$
B $\frac{7}{3}$
C $\frac{2\sqrt{10}}{7}$
D $\frac{7\sqrt{10}}{20}$
E Non ci sono sufficienti elementi per poterlo calcolare.

5 Del quadrilatero convesso $ABCD$ si conoscono i lati $\overline{AB} = \overline{DA} = 6$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{CD} = 5$ e l'angolo $\widehat{B} = 120°$. Riguardo all'angolo $\widehat{D}$ si può affermare che:

A non ci sono elementi sufficienti per calcolarlo.
B il coseno è uguale a $-\frac{1}{4}$.
C la sua misura è 60°.
D è congruente a $\widehat{B}$.
E è un angolo acuto.

6 Nel triangolo della figura l'angolo $B\widehat{A}C$ misura:

A 120°.
B 60°.
C 45°.
D 30°.
E 150°.



7 Le misure degli spigoli del prisma retto a base quadrata $ABCDA'B'C'D'$ sono:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = 1, \ \overline{AA'} = 2.$$

Riguardo all'angolo $\varphi = D'\widehat{A}B'$ possiamo dire che:

A $\varphi = 90°$.
B $\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$.
C $\operatorname{sen}\varphi = \frac{3}{5}$.
D $\operatorname{sen}\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
E $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}$.

8 Quanti sono i triangoli non congruenti aventi un lato lungo 16 cm e gli angoli adiacenti α e β tali che $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$ e $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$?

A Nessuno.
B Uno.
C Due.
D Tre.
E Più di tre.

9 Quanti triangoli non congruenti esistono con due lati di lunghezza $a = 6$ cm, $c = (2\sqrt{2} - 1)$ cm e l'angolo γ opposto a c tale che $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{3}$?

A Nessuno.
B Uno.
C Due.
D Tre.
E Più di tre.

QUESITI

10 L'area di un quadrilatero si può ottenere dalla seguente formula:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \operatorname{sen}\alpha,$$

dove d_1 e d_2 sono le misure delle diagonali del quadrilatero e α è uno degli angoli da esse formato. Giustifica geometricamente la formula. (Suggerimento. Somma le aree dei quattro triangoli...)

11 Dimostra che la misura della mediana relativa al lato AB del triangolo ABC, avente i lati di misure a, b, c, ha la seguente espressione: $m_c^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\right)$.

(Suggerimento. Applica ai triangoli ACM e MCB il teorema del coseno; somma le due relazioni...)

12 Dimostra che l'area di un triangolo qualsiasi ABC è data dalla seguente formula:

$S_{ABC} = 2r_c^2 \operatorname{sen}\widehat{A} \operatorname{sen}\widehat{B} \operatorname{sen}\widehat{C}$ (dove r_c è il raggio della circonferenza circoscritta).

13 Verifica che in un triangolo isoscele ABC, di base BC, vale la relazione $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma$.

14 Preso un triangolo qualunque, costruisci i quadrati sui tre lati e unisci i vertici liberi di tali quadrati in modo da ottenere tre triangoli. Utilizzando la trigonometria, dimostra che tali triangoli sono equivalenti.

15 Dimostra che, se in un triangolo il quadrato di un lato è maggiore della somma dei quadrati degli altri due, il triangolo è ottusangolo.
Verifica che il triangolo di lati $a = 4$, $b = 9$ e $c = 10$ è ottusangolo e calcola la misura dell'angolo ottuso.

16 Dimostra che il perimetro e l'area di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio r misurano rispettivamente $2nr\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$ e $\frac{1}{2}r^2 n \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$. Calcola poi:

a) perimetro e area del dodecagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio 2;
b) il raggio di una circonferenza in cui è inscritto un ottagono regolare di area $32\sqrt{2}$;
c) trova una formula analoga per il poligono regolare circoscritto.

$\left[\text{a) } 2p = 12\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1); S = 12; \text{ b) } 4; \text{ c) } 2p = 2nr \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}, S = nr^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right]$

17 Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria,* 2007, *quesito* 2)

18 Secondo il codice della strada il segnale di «salita ripida» (figura a lato) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo.
La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%.
Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria,* 2008, *quesito* 10)

19 Si consideri la seguente proposizione: «In ogni triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati eguali è costante». Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso sperimentale, Sessione suppletiva,* 2007, *quesito* 4)

20 Spiegare come utilizzare il teorema di Carnot per trovare la distanza tra due punti accessibili ma separati da un ostacolo.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria,* 2005, *quesito* 6)

21 Nella semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, C è il punto medio di un arco $\widehat{DB}$.
Verifica che $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$.

22 **TEST** Di triangoli non congruenti, di cui un lato è lungo 10 cm e i due angoli interni adiacenti ad esso, α e β, sono tali che $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$ e $\operatorname{sen} \beta = \frac{24}{25}$, ne esistono:

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

(*Esame di stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva,* 2004, *quesito* 10)

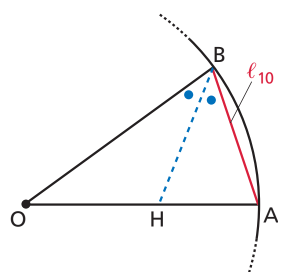
23 Le ampiezze degli angoli di un triangolo sono α, β, γ. Sapendo che $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ e $\cos\beta = \frac{12}{13}$, calcolare il valore esatto di $\cos\gamma$, specificando se il triangolo è rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria,* 2003, *quesito* 1)

PROBLEMI

24
a) Ricordando che la sezione aurea x di un segmento l è tale che $l : x = x : (l - x)$, dimostra che il lato l_{10} del decagono regolare inscritto in una circonferenza è la sezione aurea del raggio. (Suggerimento. Traccia la bisettrice dell'angolo $O\widehat{B}A$ – figura a lato – e considera la similitudine dei triangoli...)
b) Calcola la misura di l_{10} in funzione di r, misura del raggio.
c) Determina sen 18° e sen 36°.
d) Trova la misura di L_{10}, lato del decagono regolare circoscritto.

$\left[\text{b) } r\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \text{ c) } \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}; \text{ d) } \frac{2}{5}r\sqrt{25-10\sqrt{5}}\right]$



25 È data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$. Dal punto A traccia la tangente alla semicirconferenza. Considera sulla tangente un punto M (con $\overline{AM} < r$) e da M conduci la tangente alla circonferenza. Indica con P il punto di tangenza e con x l'angolo $P\widehat{B}A$.
a) Determina l'area $S(x)$ del triangolo AMP e l'area $R(x)$ del triangolo APB.
b) Esprimi la funzione $y = \sqrt{\frac{S(x)}{R(x)}}$ e rappresenta il suo grafico, senza tener conto delle limitazioni geometriche.
c) Trova per quali valori di x si ha $y \geq \frac{1}{\sqrt{6}}$.

$\left[\text{a) } S(x) = \frac{r^2 \operatorname{sen}^3 x}{\cos x}, R(x) = r^2 \operatorname{sen} 2x, 0 \leq x < \frac{\pi}{4};\right.$
$\left.\text{b) } y = \frac{\sqrt{2}}{2}|\operatorname{tg} x|; \text{ c) } -\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq -\frac{\pi}{6} + k\pi \vee \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

26 È data la semicirconferenza di diametro $\overline{CB} = 4l$. Sia H il punto medio dell'arco $\widehat{CB}$. Sul prolungamento di BH dalla parte di H considera il punto A tale che $\overline{AH} = l\sqrt{2}$. Sia D il punto di intersezione fra la parallela ad AB passante per C e la perpendicolare per A ad AB.

a) Determina la misura del raggio della circonferenza quando il perimetro del trapezio $ABCD$ misura $3\sqrt{2} + 2$.

b) Esprimi la funzione

$$f(x) = \frac{\overline{CP} - \overline{PB}}{\overline{HM}},$$

con P appartenente all'arco $\widehat{HB}$, $P\widehat{C}B = x$ e M intersezione tra CP e HB.

c) Rappresenta graficamente $f(x)$, tenendo conto dei limiti imposti dal problema.

$\left[\text{a) } 1; \text{b) } f(x) = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right]$

27 Del triangolo ABC si sa che $\overline{AC} = l$, $\cos B\widehat{A}C = \frac{3}{5}$, $\cos A\widehat{C}B = -\frac{1}{3}$.

a) Determina perimetro e area del triangolo.

b) Se invece dei coseni i valori assegnati rappresentassero i seni dei due angoli, il problema avrebbe soluzione?

c) Risolvi il problema proposto in b) nel caso in cui:

$$\overline{AC} = l, \text{sen}\, B\widehat{A}C = \frac{1}{2}, \text{sen}\, A\widehat{C}B = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\left[\text{a) } 2p = (4 + 2\sqrt{2})l, S = \frac{(6+2\sqrt{2})l^2}{7}; \text{b) no; c) } \widehat{A} = 30°, \widehat{B} = 105°, \widehat{C} = 45° \text{ opp. } \widehat{A} = 30°, \widehat{B} = 15°, \widehat{C} = 135°\right]$

28 Il triangolo ABC ha $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 3$ e $B\widehat{A}C = \frac{\pi}{3}$. Detta AQ la bisettrice dell'angolo $B\widehat{A}C$ determina:

a) la misura di BC;

b) le misure delle due parti CQ e QB in cui il lato è diviso dalla bisettrice;

c) il coseno dell'angolo $A\widehat{B}C$;

d) la misura della bisettrice AQ;

e) indicato con P un punto della bisettrice AQ e con x la misura del segmento AP, determina la funzione

$$f(x) = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$$

e il valore minimo assunto da essa nei limiti imposti dal problema.

$\left[\text{a) } \overline{BC} = \sqrt{13}; \text{b) } \overline{CQ} = \frac{3}{7}\sqrt{13}, \overline{QB} = \frac{4}{7}\sqrt{13}; \text{c) } \cos\widehat{B} = \frac{5\sqrt{13}}{26}; \text{d) } \overline{AQ} = \frac{12\sqrt{3}}{7};\right.$

$\left.\text{e) } f(x) = 3x^2 - 7\sqrt{3}\,x + 25; \text{minimo: } \left(\frac{7\sqrt{3}}{6}; \frac{51}{4}\right)\right]$

29 $ABCD$ è un quadrato di lato $\overline{AB} = l$; dal vertice A manda una semiretta che intersechi in F il lato BC e dal vertice B traccia il segmento perpendicolare ad AF in E.

a) Posto $B\widehat{A}F = x$, dimostra che la somma $\overline{BE}^2 + \overline{CE}^2$ può essere scritta nella forma:

$$f(x) = l^2\left[2 - \sqrt{2}\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

b) Disegna il grafico di $f(x)$ e, in relazione alle limitazioni geometriche, trova per quali x assume il massimo e il minimo.

c) Determina graficamente il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = kl^2, k \in \mathbb{R}$, con $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{8}$; in particolare risolvila per $k = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2}$.

d) Trova il vettore della traslazione che trasforma $f(x)$ nella funzione $g(x) = \sqrt{2}\,l^2(1 - \cos 2x)$.

$\left[\text{b) max: } (0; l^2), \left(\frac{\pi}{4}; l^2\right), \text{min: } \left(\frac{\pi}{8}; (2 - \sqrt{2})l^2\right); \text{c) 2 sol. per } 2 - \sqrt{2} \leq k \leq 1, \text{1 sol. per } 1 < k \leq 2 + \sqrt{2};\right.$

$\left. x = \frac{\pi}{24} + h\pi \vee x = \frac{5\pi}{24} + h\pi, h \in \mathbb{Z}; \text{d) } \vec{v}\left(-\frac{\pi}{8}; (\sqrt{2} - 2)l^2\right)\right]$

30 Il triangolo isoscele ABC ha i lati obliqui $\overline{AB} = \overline{AC} = l$ e l'angolo al vertice $B\widehat{A}C = 2x$.

a) Determina il rapporto $f(x) = \frac{r_i}{r_c}$ fra il raggio r_i della circonferenza inscritta e quello r_c della circonferenza circoscritta; dimostra che può essere scritto nella forma $f(x) = 2\,\text{sen}\,x(1 - \text{sen}\,x)$. Trova per quale valore di x raggiunge il massimo.

b) Determina il numero delle intersezioni della retta $y = k$, $k \in \mathbb{R}$, con il grafico di $f(x)$ che abbiano ascissa $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

c) Abbandonate le limitazioni imposte dal problema, dimostra che la retta $x = \frac{\pi}{2}$ è asse di simmetria del grafico $f(x)$.

$\left[\text{a) } x_{max} = \frac{\pi}{6}\text{; b) una sol. per } 0 \le k < \sqrt{2} - 1\text{, due sol. per } \sqrt{2} - 1 \le x \le \frac{1}{2}\right]$

31 Una piramide regolare a base triangolare ha lo spigolo laterale lungo l. Indicato con x l'angolo che tale spigolo forma con il piano della base:

a) determina, in funzione di x, il rapporto fra il volume V_1 della piramide e il volume V_2 del prisma la cui base coincide con quella della piramide e con altezza uguale allo spigolo di base della piramide;

b) trova per quali valori di x risulta $V_1 > V_2$;

c) determina l'angolo che le facce laterali formano con il piano della base nel caso in cui $V_2 = 3V_1$.

$\left[\text{a) } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{3}}{9}\,\text{tg}\,x\text{; b) arctg}\,3\sqrt{3} < x < \frac{\pi}{2}\text{; c) } \frac{\pi}{3}\right]$

32 Nella semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e centro O è condotta la corda AP che forma l'angolo x con il diametro.

a) Deduci la funzione $f(x)$ che esprime l'area della superficie del solido generato in una rotazione completa del settore circolare OBP attorno al diametro e determina il dominio.

b) Trova per quale valore di x tale area è massima.

c) Verifica che $\text{sen}\,[\text{arctg}\,(2)] = \frac{2}{\sqrt{5}}$, calcola $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e, posto $r = 1$, disegna il grafico di $f(x)$.

$\left[\text{a) } f(x) = \pi r^2[2 + \sqrt{5}\,\text{sen}\,(2x + \alpha)]\text{ con } \alpha = \text{arctg}\,(-2)\text{, } D\text{: }\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\text{; b) } x_{max} = \frac{\pi - 2\alpha}{4} \simeq 1{,}33897\text{; c) } 0{,}4\pi r^2\right]$

33 In una piramide regolare di vertice V e base quadrata $ABCD$ le altezze delle facce laterali hanno misura 6 e formano, con il piano della base, angoli di ampiezza x.

a) Determina gli spigoli della piramide in funzione di x e l'area $S(x)$ del triangolo AVC.

b) Discuti l'equazione $S(x) = 36k$, con k parametro reale positivo, e determina per quale valore di x l'area è massima.

c) Calcola il rapporto fra il volume del cono retto inscritto nella piramide e quello della piramide.

$\left[\text{a) } \overline{AB} = 12\cos x\text{, } \overline{AV} = 6\sqrt{1 + \cos^2 x}\text{, } S(x) = 18\sqrt{2}\,\text{sen}\,2x\text{; b) due sol. per } 0 < k \le \frac{\sqrt{2}}{2}\text{, } x = \frac{\pi}{4}\text{; c) } \frac{\pi}{4}\right]$

34 Nel triangolo ABC, rettangolo in A, risulta:

$\overline{AB} = a$, $\quad \text{sen}\,A\widehat{B}C = \frac{4}{5}$, $\quad$ dove a è una lunghezza nota.

Indicato con D un punto della semicirconferenza di diametro BC, non contenente A, esprimere l'area S del triangolo ABD in funzione dell'ampiezza x dell'angolo $B\widehat{A}D$.

Constatato che si ha:

$$S = \frac{a^2}{6}(4\,\text{sen}^2 x + 3\,\text{sen}\,x\cos x),$$

studiare questa funzione e disegnarne l'andamento con riferimento alla questione geometrica.

Utilizzare il disegno ottenuto al fine di calcolare per quali valori di x l'area S risulta uguale a ka^2, dove k è un parametro reale.

Determinare infine il perimetro del triangolo ABD per il quale è massima l'area S.

(*Esame di maturità scientifica, Sessione suppletiva,* 1996, *quesito* 3)

$\left[\text{una sol. per } 0 \le k < \frac{2}{3}\text{, due sol. per } \frac{2}{3} \le k \le \frac{3}{4}\text{; } S\text{ massima per } x = \text{arctg}\,3\text{, } 2p = a(1 + \sqrt{10})\right]$

CAPITOLO

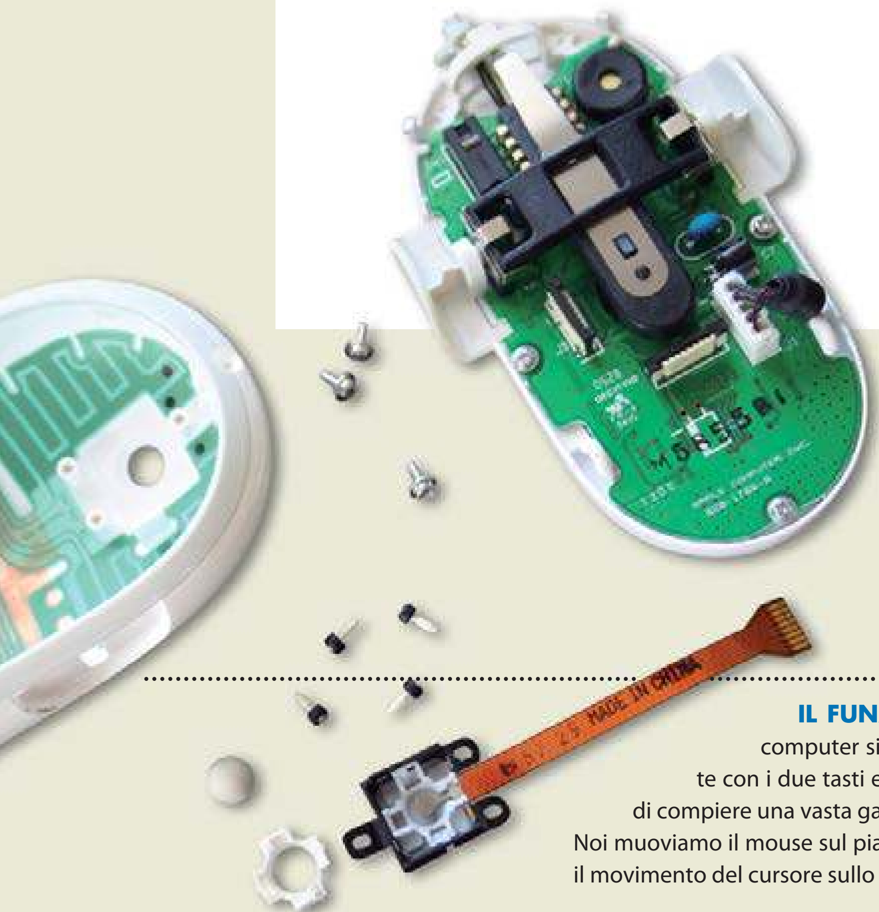
14

١٤ [numerazione araba]

१४ [numerazione devanagari]

十四 [numerazione cinese]

I NUMERI COMPLESSI. LE COORDINATE POLARI



IL FUNZIONAMENTO DEL MOUSE Un computer si può comandare quasi completamente con i due tasti e la rotella del mouse, che permettono di compiere una vasta gamma di azioni.
Noi muoviamo il mouse sul piano della scrivania e così riproduciamo il movimento del cursore sullo schermo.

Da un punto di vista geometrico, come si può descrivere la relazione tra mouse e cursore?

▶ **La risposta a pag. 944**

1. I NUMERI COMPLESSI

Problema:

«Qual è il *numero reale x* il cui quadrato è uguale a -4?».

Il problema non ammette soluzione, perché non esiste alcun numero reale che elevato al quadrato fornisca un numero negativo.

Introdurremo ora un nuovo insieme numerico, più ampio di $\mathbb{R}$, in cui invece il problema proposto avrà soluzione.

Questo nuovo insieme, che indicheremo con la lettera $\mathbb{C}$, è l'insieme dei **numeri complessi**.

La definizione di numero complesso

● Così come abbiamo ottenuto le frazioni considerando coppie di numeri naturali, otteniamo i numeri complessi utilizzando coppie di numeri reali.

DEFINIZIONE

Numero complesso

Chiamiamo numero complesso ogni coppia ordinata $(a; b)$ di numeri reali.

Possiamo anche dire che un numero complesso è un qualsiasi elemento dell'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

ESEMPIO

$(2; 3)$, $(5; 0)$, $\left(-\frac{2}{7}; \sqrt{3}\right)$, $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ sono numeri complessi.

Definiamo in $\mathbb{C}$ le operazioni di addizione e di moltiplicazione e l'elevamento al quadrato.

L'addizione

DEFINIZIONE

Somma di numeri complessi

Dati due numeri complessi $(a; b)$ e $(c; d)$, la loro somma è il numero complesso definito dalla coppia $(a + c; b + d)$.

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$$

ESEMPIO

$(2; 4) + (6; -9) = (8; -5)$.

Si può dimostrare che l'addizione fra numeri complessi gode delle proprietà **commutativa** e **associativa**. Inoltre, il numero $(0; 0)$ è l'**elemento neutro** dell'addizione.

Somma di numeri del tipo $(a; 0)$

Il risultato è ancora un numero dello stesso tipo, perché il secondo elemento della coppia è 0:

$$(h; 0) + (k; 0) = (h + k; 0).$$

● Per esempio: $(5; 0) + (3; 0) = (8; 0)$.

La moltiplicazione

DEFINIZIONE

Prodotto di due numeri complessi

Dati due numeri complessi $(a; b)$ e $(c; d)$, il loro prodotto è il numero complesso definito dalla coppia $(ac - bd; ad + bc)$.

$$(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$$

La definizione del prodotto è più complicata di quella della somma. Tuttavia, come vedremo, è proprio questa definizione che permette di fornire una risposta al problema di ottenere un numero che, elevato al quadrato, dia un numero negativo.

ESEMPIO

$$(2; 4) \cdot (3; 1) = (2 \cdot 3 - 4 \cdot 1; 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3) = (2; 14).$$

Si può dimostrare che la moltiplicazione fra numeri complessi gode delle proprietà **commutativa** e **associativa** e di quella **distributiva rispetto all'addizione**. Inoltre, il numero $(1; 0)$ è l'**elemento neutro**, mentre $(0; 0)$ è l'**elemento assorbente**, ossia moltiplicato per un numero qualsiasi dà come risultato se stesso.

Prodotto di numeri del tipo $(a; 0)$

Il risultato è ancora dello stesso tipo, perché il secondo elemento della coppia è 0:

$$(h; 0) \cdot (k; 0) = (h \cdot k - 0 \cdot 0; h \cdot 0 + k \cdot 0) = (h \cdot k; 0).$$

Per esempio:
$(5; 0) \cdot (3; 0) = (15; 0)$.

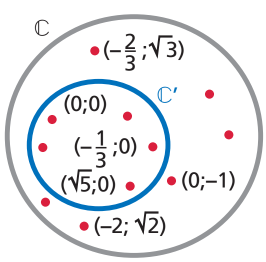
Dal numero complesso $(a; 0)$ al numero reale a

Si può creare una corrispondenza biunivoca che associa a ogni numero complesso del tipo $(a; 0)$ il numero reale a, primo elemento della coppia:

$$(a; 0) \longleftrightarrow a.$$

Le operazioni di addizione e di moltiplicazione fra numeri complessi del tipo $(a; 0)$ forniscono gli stessi risultati delle stesse operazioni fra numeri reali corrispondenti.

Questa proprietà si esprime anche dicendo che l'insieme $\mathbb{R}$ è **isomorfo** al sottoinsieme $\mathbb{C}'$ di $\mathbb{C}$ formato dalle coppie del tipo $(a; 0)$, rispetto alle operazioni di addizione e di moltiplicazione.



ESEMPIO

$$\begin{array}{ccccc} (2; 0) & + & (3; 0) & = & (5; 0) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ 2 & + & 3 & = & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} (2; 0) & \cdot & (3; 0) & = & (6; 0) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ 2 & \cdot & 3 & = & 6 \end{array}$$

Chiamiamo **numero complesso reale** ogni numero complesso del tipo $(a; 0)$ che possiamo anche identificare con il numero reale a.

Pertanto potremo rappresentare un numero complesso reale in due modi:

a e $(a; 0)$.

Per esempio, il numero 5 indica il numero complesso reale $(5; 0)$ e viceversa.

Per semplicità chiameremo **numero reale** un numero complesso reale.

Il quadrato di un numero complesso

Calcoliamo il quadrato di un numero complesso, eseguendo il prodotto del numero per se stesso.

ESEMPIO

$$(2; 3)^2 = (2; 3) \cdot (2; 3) = (4 - 9; 6 + 6) = (-5; 12).$$

In generale:

$$(a; b)^2 = (a; b) \cdot (a; b) = (a^2 - b^2; 2ab).$$

Quadrato di numeri del tipo (*a*; 0)

$$(a; 0)^2 = (a; 0) \cdot (a; 0) = (a \cdot a - 0 \cdot 0; a \cdot 0 + 0 \cdot a) = (a^2; 0).$$

- Per esempio: $(7; 0)^2 = (49; 0)$.

Quadrato di numeri del tipo (0; *b*)

ESEMPIO

$$(0; 2)^2 = (0; 2) \cdot (0; 2) = (0 \cdot 0 - 2 \cdot 2; 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0) = (-4; 0) = -4.$$

Questo esempio dà finalmente una risposta al problema posto inizialmente: «Qual è quel *numero* il cui quadrato è uguale a -4?»

Il numero complesso (0; 2) soddisfa la richiesta del problema.

- Verifica che anche il numero complesso $(0; -2)$ è soluzione del problema.

In generale, il quadrato di un numero complesso del tipo $(0; b)$ è uguale al reale negativo $-b^2$. Infatti:

$$(0; b)^2 = (0; b) \cdot (0; b) = (0 \cdot 0 - b \cdot b; 0 \cdot b + b \cdot 0) = (-b^2; 0) = -b^2.$$

I numeri immaginari

DEFINIZIONE

Numero immaginario

Chiamiamo numero immaginario ogni numero complesso del tipo $(0; b)$.

Il numero (0; 1) si chiama **unità immaginaria**, che indichiamo con il simbolo i.

- Il quadrato dell'unità immaginaria vale -1:

  $$(0; 1)^2 = -1.$$

  Infatti:

  $$(0; 1)^2 = (0; 1) \cdot (0; 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1; 0).$$

  Possiamo anche scrivere $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

- Moltiplicando un numero del tipo $(b; 0)$ per l'unità immaginaria si ottiene il numero $(0; b)$:

  $$(b; 0) \cdot (0; 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1; b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0; b).$$

- Per esempio: $(3; 0) \cdot (0; 1) = (0; 3)$.

La forma algebrica dei numeri complessi

Ogni numero complesso $(a; b)$ può essere scritto come somma dei due numeri complessi $(a; 0)$ e $(0; b)$:

$$(a; b) = (a; 0) + (0; b).$$

Poiché un numero del tipo $(a; 0)$ è reale e un numero del tipo $(0; b)$ è immaginario, ogni numero complesso si può vedere come somma di un numero reale e di un numero immaginario.

Abbiamo visto inoltre che ogni numero immaginario $(0; b)$ può essere scritto come prodotto del numero reale $(b; 0)$ per l'unità immaginaria, cioè:

$$(0; b) = (b; 0) \cdot (0; 1).$$

Un generico numero complesso $(a; b)$ può allora essere scritto in questo modo:

$$(a; b) = (a; 0) + (b; 0) \cdot (0; 1).$$

Indichiamo il reale $(a; 0)$ con a, il reale $(b; 0)$ con b, e poiché $(0; 1) = i$, sostituendo nella relazione precedente, scriviamo in altro modo il numero $(a; b)$:

$$(a; b) = a + bi.$$

La forma $\boldsymbol{a + bi}$ è detta **forma algebrica** del numero complesso $(a; b)$.

ESEMPIO

La forma algebrica del numero complesso $(2; 3)$ è $2 + 3i$.

Nel numero complesso $a + bi$, il termine a si chiama **parte reale**, bi si chiama **parte immaginaria**; b è il **coefficiente della parte immaginaria**.

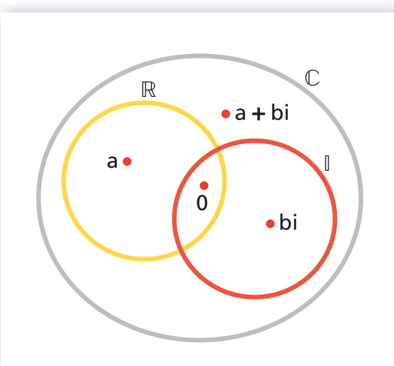
parte reale
$\frac{1}{2} - 5i$
parte immaginaria

In particolare, se in un numero complesso $a + bi$ risulta $a = 0$, abbiamo il **numero immaginario** bi; se risulta $b = 0$, abbiamo il **numero reale** a.

ESEMPIO

Il numero immaginario $\frac{3}{7}i$ può essere visto come il numero complesso $0 + \frac{3}{7}i$.

Il numero reale $\frac{2}{3}$ può essere visto come il numero complesso $\frac{2}{3} + 0i$.



◀ **Figura 1** L'insieme dei numeri complessi contiene due sottoinsiemi propri: il sottoinsieme ℝ dei numeri reali e il sottoinsieme 𝕀 dei numeri immaginari. Essi sono sottoinsiemi propri in quanto numeri complessi del tipo $a + bi$ (con $a \neq 0$ e $b \neq 0$) non appartengono né a ℝ né a 𝕀. Il numero 0 è considerato sia un numero reale sia un numero immaginario.

Il confronto fra numeri complessi

Due numeri complessi sono **uguali** quando hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria.

Non viene definita una relazione d'ordine che permetta di dire se un numero complesso è maggiore o minore di un altro.

Il modulo di un numero complesso

DEFINIZIONE

Modulo di un numero complesso

Dato il numero complesso $a + bi$, si dice modulo del numero, e si indica $|a + bi|$, la radice quadrata della somma del quadrato di a e del quadrato di b:

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}.$$

Il modulo di un numero complesso è un numero reale positivo (o nullo).

ESEMPIO

$$|4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

I numeri complessi coniugati e complessi opposti

Due numeri sono **complessi coniugati** se hanno la stessa parte reale e i coefficienti delle parti immaginarie opposti. Il complesso coniugato di $a + bi$ è $a - bi$.

Il complesso coniugato di $z = a + bi$ si indica con $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$.

ESEMPIO

$-2 + 5i$ e $-2 - 5i$ sono complessi coniugati.

● Non sono complessi coniugati i numeri

$$-2 + 5i \quad \text{e} \quad 2 + 5i.$$

Se due numeri complessi hanno opposte sia la parte reale sia quella immaginaria, si dicono numeri **complessi opposti**.

ESEMPIO

Sono complessi opposti:

$$\sqrt{5} + 4i \quad \text{e} \quad -\sqrt{5} - 4i; \qquad -8 + 9i \quad \text{e} \quad 8 - 9i.$$

2. IL CALCOLO CON I NUMERI IMMAGINARI

Le quattro operazioni

Dalle definizioni date per le operazioni fra numeri complessi si ricavano le seguenti regole relative ai numeri immaginari.

1. Addizione e sottrazione

$$ai + bi = (a + b)i \quad \text{e} \quad ai - bi = (a - b)i.$$

2. Moltiplicazione

$$ai \cdot bi = -\, a \cdot b.$$

Algebricamente si può procedere così (essendo $i^2 = -1$):

$$a \cdot i \cdot b \cdot i = a \cdot b \cdot i^2 = a \cdot b \cdot (-1) = -\, ab.$$

3. Divisione

$$ai : bi = a : b.$$

● Valgono la proprietà commutativa e quella associativa.

ESEMPIO

1. $5i + 6i = 11i$; $\quad 5i - 3i = 2i$; $\quad 10i - 9i = i$; $\quad 2i - 2i = 0i = 0$.
2. $3i \cdot 5i = 15i^2 = 15(-1) = -15$.
3. $8i : 2i = 4$; $\quad 3i : i = 3$.

● 0 può essere considerato come un numero immaginario, in quanto può essere pensato come $0i$.

L'addizione e la sottrazione fra due numeri immaginari hanno come risultato un numero immaginario, mentre la moltiplicazione e la divisione fra due numeri immaginari hanno come risultato un numero reale. Quindi, l'addizione e la sottrazione nell'insieme $\mathbb{I}$ sono operazioni interne, mentre non lo sono la moltiplicazione e la divisione.

● Un numero immaginario ha una forma simile a un monomio e, nel calcolo, i numeri immaginari **si comportano come monomi**. Tuttavia, deve essere ben chiaro che essi **non sono monomi**. Il simbolo *i* indica un numero e non una variabile!

Le potenze con i numeri immaginari

Calcoliamo innanzitutto alcune potenze a esponente naturale di i:

$$i^0 = 1;\ i^1 = i;\ i^2 = -1;\ i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i;\ i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1;$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i;\ \ldots$$

Le potenze di *i*	
i^0	1
i^1	i
i^2	-1
i^3	$-i$
i^4	1
i^5	i
i^6	-1
i^7	$-i$
i^8	1
i^9	i
i^{10}	-1
i^{11}	$-i$
...	...

Nella tabella possiamo notare che le potenze si ripetono nell'ordine: $1, i, -1, -i$, cioè sono cicliche di periodo 4.

Le potenze con esponente pari valgono 1 oppure -1, quelle con esponente dispari valgono i oppure $-i$.

Per calcolare per esempio i^{14}, tenendo conto che anche per i numeri immaginari valgono le proprietà delle potenze che già conosciamo, possiamo scrivere:

$$i^{14} = i^{4\cdot 3 + 2} = \left(i^4\right)^3 \cdot i^2 = 1^3 \cdot (-1) = -1.$$

In generale:

$$i^n = i^{4k + r} = \left(i^4\right)^k \cdot i^r = 1^k \cdot i^r = i^r.$$

Una potenza di i con esponente naturale $n \geq 4$ è uguale alla potenza che ha per base i e per esponente il resto della divisione fra n e 4.

Per calcolare la potenza di un numero immaginario basta applicare la quarta proprietà delle potenze:

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n.$$

ESEMPIO

$(7i)^2 = 49i^2 = 49(-1) = -49;$

$(-3i^2)^3 = -27i^6 = -27(-1) = 27;$

$(\sqrt{2}\,i)^2 = -2.$

3. IL CALCOLO CON I NUMERI COMPLESSI IN FORMA ALGEBRICA

Un numero complesso $a + bi$ ha una forma simile a un binomio e, nel calcolo, possiamo eseguire le operazioni con i numeri complessi seguendo le stesse regole valide per i binomi.

L'addizione

$$(\underline{a} + \underline{bi}) + (\underline{c} + \underline{di}) = (\underline{a + c}) + (\underline{b + d})i.$$

ESEMPIO

$(4 + 2i) + (5 + 3i) = (4 + 5) + (2 + 3)i = 9 + 5i.$

In generale, la **somma di due numeri complessi** è un numero complesso che ha:

- per parte reale la somma delle parti reali;
- per coefficiente della parte immaginaria la somma dei coefficienti delle parti immaginarie.

La **somma di due numeri complessi coniugati** è un numero reale doppio della parte reale degli addendi.

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

ESEMPIO

$(6 - i) + (6 + i) = 12.$

La **somma di due numeri complessi opposti** è 0.

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0.$$

ESEMPIO

$(-5 + 4i) + (5 - 4i) = 0.$

La sottrazione

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

La **differenza fra due numeri complessi** è un numero complesso che ha:

- per parte reale la differenza delle parti reali;
- per coefficiente della parte immaginaria la differenza dei coefficienti delle parti immaginarie.

ESEMPIO

$$(12 - 7i) - (4 + 2i) = 12 - 7i - 4 - 2i =$$
$$= (12 - 4) + (-7 - 2)i = 8 - 9i.$$

Poiché

$$(a + bi) - (a - bi) = a + bi - a + bi = 2bi,$$

la **differenza fra due numeri complessi coniugati** è un numero immaginario che ha per coefficiente il doppio del coefficiente della parte immaginaria del minuendo.

ESEMPIO

$$(2 - 15i) - (2 + 15i) = -30i.$$

La moltiplicazione

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Algebricamente possiamo calcolare il **prodotto fra numeri complessi** nel modo seguente:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2.$$

Essendo $i^2 = -1$, abbiamo $bdi^2 = -bd$, quindi:

$$(\underline{a} + \underline{bi}) \cdot (\underline{c} + \underline{di}) = \underline{ac} + \underline{adi} + \underline{bci} - \underline{bd} = (\underline{ac - bd}) + (\underline{ad + bc})i.$$

- Nel calcolo, il prodotto di due numeri complessi può essere pensato come prodotto di due binomi.

ESEMPIO

$$(1 - 3i)(2 - i) = 2 - i - 6i + 3i^2 = 2 - 3 - 7i = -1 - 7i.$$

Il **prodotto di due numeri complessi coniugati** è un numero reale dato dalla somma del quadrato della parte reale e del quadrato del coefficiente della parte immaginaria:

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

ESEMPIO

$$(6 + 7i) \cdot (6 - 7i) = 36 + 49 = 85.$$

Il reciproco

Il **reciproco di un numero complesso** $a + bi$ è quel numero complesso che moltiplicato per il numero dato dà come risultato 1.

- 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione.

Lo indichiamo con $\frac{1}{a + bi}$.

Se moltiplichiamo numeratore e denominatore della frazione per il coniugato di $a + bi$, cioè per $a - bi$, otteniamo che il reciproco di $a + bi$ è:

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

- Il numero $\frac{a - bi}{a^2 + b^2}$ è un numero complesso perché si può scrivere come $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$.

Verifichiamo ora che il prodotto del numero complesso $a + bi$ per il suo reciproco è uguale a 1.

$$(a + bi) \cdot \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1.$$

La divisione

Il **quoziente fra due numeri complessi** $a + bi$ e $c + di$ è definito come prodotto del primo per il reciproco del secondo.

$$(a + bi):(c + di) = (a + bi) \cdot \frac{1}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di}.$$

Possiamo quindi indicare la divisione anche con $\frac{a + bi}{c + di}$.

Per ottenere il quoziente possiamo applicare la definizione, ma si può verificare che giungiamo allo stesso risultato se moltiplichiamo numeratore e denominatore per $c - di$ (complesso coniugato del denominatore):

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

● Nel calcolo, il quoziente fra due numeri complessi può essere pensato come una frazione algebrica.

ESEMPIO

$$(3 - 2i):(4 + i) = \frac{3 - 2i}{4 + i} = \frac{(3 - 2i)(4 - i)}{(4 + i)(4 - i)} =$$
$$= \frac{12 - 3i - 8i - 2}{16 + 1} = \frac{10}{17} - \frac{11}{17}i.$$

La potenza

Fra le potenze di numeri complessi esaminiamo solo l'elevamento al quadrato e al cubo.

Per il calcolo del **quadrato** utilizziamo la regola del quadrato di un binomio: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

$$(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$$

ESEMPIO

$$(5 - 3i)^2 = 25 - 30i + 9i^2 = 25 - 30i - 9 = 16 - 30i.$$

Per il calcolo del **cubo** utilizziamo la regola del cubo di un binomio: $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

$$(a + bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i =$$
$$= a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i.$$

ESEMPIO

$$(3 + 2i)^3 = 27 + 54i + 36i^2 + 8i^3 = 27 + 54i - 36 - 8i = -9 + 46i.$$

● Tutte le operazioni che abbiamo esaminato (addizione e sottrazione, moltiplicazione, divisione e potenza) sono operazioni interne nell'insieme $\mathbb{C}$.

4. VETTORI E NUMERI COMPLESSI

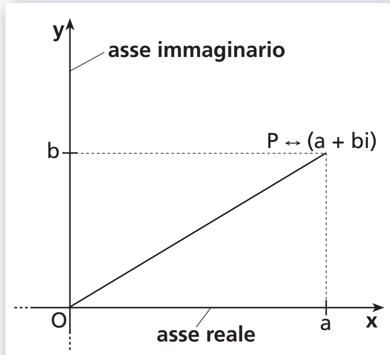
Il piano di Gauss

Poiché un numero complesso, per definizione, è una coppia ordinata $(a; b)$ di numeri reali, fissato su un piano un sistema di assi cartesiani Oxy, è possibile associare a ogni numero complesso un punto $P(a; b)$ del piano e viceversa.

Abbiamo così creato una corrispondenza biunivoca fra i numeri complessi e i punti del piano che permette di rappresentare geometricamente i numeri complessi.

Il piano in cui si rappresenta $\mathbb{C}$ si chiama **piano complesso** o **piano di Gauss**.

In tale piano i punti dell'asse x corrispondono a numeri reali, i punti dell'asse y corrispondono a numeri immaginari, gli altri punti del piano corrispondono a numeri complessi. L'asse x è detto **asse reale**, l'asse y **asse immaginario**.

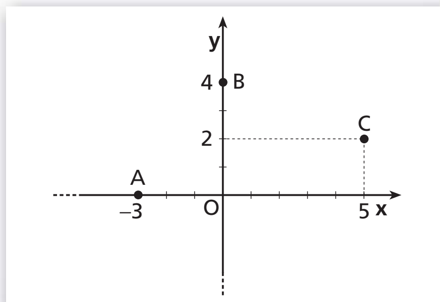


◄ **Figura 2**

● Karl Friedrich Gauss (1777-1855), matematico, fisico e astronomo tedesco, espose in modo completo la teoria dei numeri e con il calcolo numerico determinò un metodo per la risoluzione di un sistema di n equazioni in n incognite.

ESEMPIO

In figura sono rappresentati nel piano di Gauss il numero reale -3, il numero immaginario $4i$ e il numero complesso $5+2i$.



► **Figura 3** Al punto A corrisponde il numero reale -3, al punto B il numero immaginario $4i$ e al punto C il numero complesso $5+2i$.

I vettori

Un segmento AB può essere percorso da A verso B oppure da B verso A. Se a ogni segmento assegniamo un verso di percorrenza, otteniamo l'insieme dei **segmenti orientati**. Indichiamo con AB il segmento orientato da A verso B e con BA lo stesso segmento orientato, però, da B verso A. A seconda del verso di percorrenza chiamiamo A e B primo o secondo estremo.

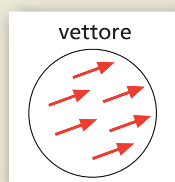
a. Segmento orientato AB.

b. Segmento orientato BA.

DEFINIZIONE

Vettore

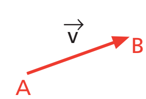
Un vettore è l'insieme costituito da tutti i segmenti paralleli, ugualmente orientati, e con la stessa lunghezza di un dato segmento orientato.



● Un vettore si indica tramite una lettera con sopra una freccia. Per esempio $\vec{a}$, $\vec{v}$, $\vec{u}$, oppure può essere indicato anche tramite gli estremi di un segmento orientato $\overrightarrow{AB}$.

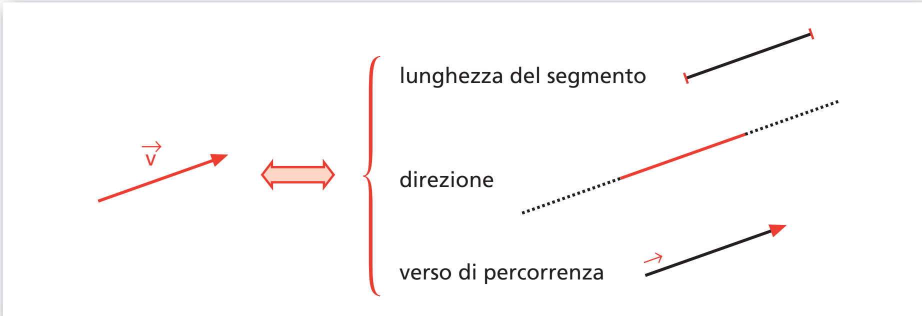
Ciascun segmento orientato che fa parte dell'insieme è un **rappresentante** del vettore.

Per rappresentare graficamente un vettore $\vec{v}$ basta disegnare un qualunque rappresentante, cioè un qualsiasi segmento AB orientato dell'insieme.



● Dalla definizione si deduce che un vettore ha tre caratteristiche (figura 4):

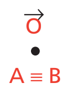
- la **lunghezza** comune a tutti i segmenti orientati dell'insieme, detta anche **intensità** oppure **modulo** del vettore;
- la **direzione** delle rette a cui appartengono tali segmenti;
- il **verso** di percorrenza di tali rette.



▶ **Figura 4** Le caratteristiche di un vettore.

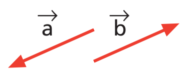
Il vettore nullo

Un vettore con gli estremi coincidenti (cioè rappresentato dal segmento di lunghezza nulla) viene chiamato **vettore nullo** e si indica con il simbolo $\vec{0}$.



I vettori opposti

Due vettori si dicono **opposti** se hanno la stessa lunghezza e la stessa direzione, ma verso opposto.



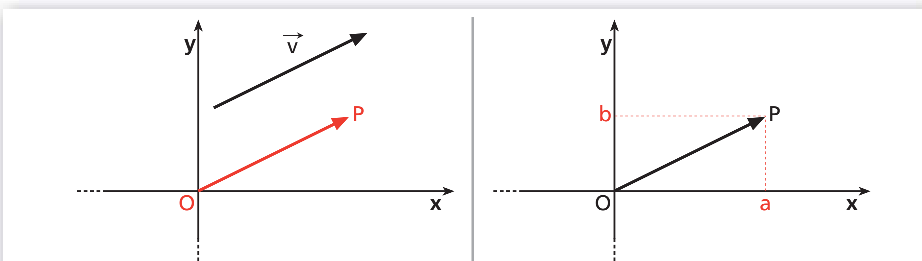
I vettori e i numeri complessi

Dato un vettore $\vec{v}$, è sempre possibile disegnarlo nel piano cartesiano scegliendo come suo rappresentante il segmento orientato $\overrightarrow{OP}$ con primo estremo nell'origine.

Le coordinate del punto P, secondo estremo del vettore $\overrightarrow{OP}$, si chiamano **componenti** del vettore.

● Per esempio, se le coordinate di P sono $P(3; 2)$, 3 e 2 sono anche le componenti del vettore $\overrightarrow{OP}$.

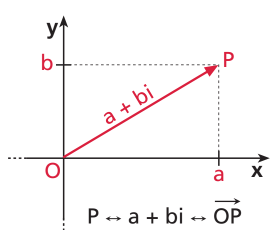
▶ **Figura 5**



a. Il segmento orientato $\overrightarrow{OP}$, che ha per primo estremo l'origine degli assi, è il rappresentante del vettore $\vec{v}$.

b. Le componenti del vettore $\overrightarrow{OP}$ sono $(a; b)$, cioè le coordinate del punto P.

Poiché a ogni punto del piano P è associato uno e un solo vettore $\overrightarrow{OP}$, esiste una **corrispondenza biunivoca** fra i **numeri complessi** e i **vettori** del piano di Gauss, che associa a ogni numero $a + bi$ il vettore che ha per componenti a e b, e viceversa.

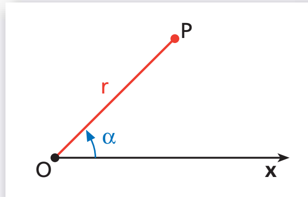


5. LE COORDINATE POLARI

Ogni punto del piano può essere individuato, oltre che dalle coordinate cartesiane, da coordinate polari.
Per individuare un **sistema di coordinate polari** nel piano, fissiamo un punto O, detto **polo**, una semiretta orientata x avente origine in O, detta a**sse polare**, e una unità di misura u.

A ogni punto P del piano diverso da O, associamo due numeri r e α:

- r: misura di OP rispetto a u;
- α: misura dell'angolo orientato $x\widehat{O}P$, formato da OP con l'asse polare e preso in senso antiorario.



◀ **Figura 6**

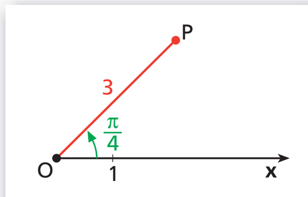
r si chiama **modulo**, α **anomalia** o **argomento**.
r e α sono le coordinate polari di P; le indichiamo con $P[r; \alpha]$.

● Il punto O ha coordinate $[0; \alpha]$, con α qualsiasi.

ESEMPIO

Rappresentiamo il punto $P\left[3; \frac{\pi}{4}\right]$.

▶ **Figura 7**

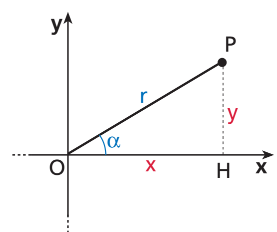


● Le coppie $[r; \alpha]$ e $[r; \alpha + 2k\pi]$ rappresentano lo stesso punto P del piano. Per convenzione, si indica come **argomento principale** l'angolo α tale che $0 \leq \alpha < 2\pi$.

● Per brevità, l'argomento principale viene anche indicato solo con **argomento**.

Coordinate polari e coordinate cartesiane

Conoscendo le coordinate polari di un punto $P[r; \alpha]$, si possono ricavare le sue coordinate cartesiane $(x; y)$.
Nel triangolo OPH (figura a lato) possiamo applicare il primo teorema dei triangoli rettangoli, ottenendo:



$$\boldsymbol{x = r\cos\alpha}, \qquad \boldsymbol{y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha}.$$

Viceversa, possiamo ricavare le coordinate polari da quelle cartesiane calcolando:

$$\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \boldsymbol{\alpha\colon\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}},$$

(l'angolo α si determina tenendo conto del quadrante in cui si trova il punto e considerando solo l'argomento principale).

● Applichiamo il teorema di Pitagora e il secondo teorema dei triangoli rettangoli.

ESEMPIO

1. Date le coordinate polari del punto $A\left[2; \frac{\pi}{3}\right]$, determiniamo le sue coordinate cartesiane:

$$x_A = r\cos\alpha = 2\cos\frac{\pi}{3} = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = 1,$$

$$y_A = r\,\mathrm{sen}\,\alpha = 2\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3} = \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \sqrt{3}.$$

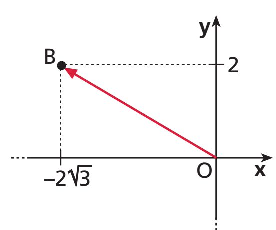
2. Date le coordinate cartesiane del punto $B(-2\sqrt{3}; 2)$, determiniamo le sue coordinate polari:

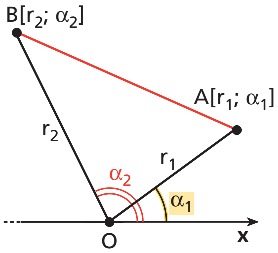
$$r = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = 4,$$

$$\alpha\colon \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cancel{2}}{-\cancel{2}\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \to \alpha_1 = \frac{5}{6}\pi \vee \alpha_2 = \frac{11}{6}\pi.$$

Poiché B è nel secondo quadrante, il valore di α è:

$$\alpha = \frac{5}{6}\pi.$$



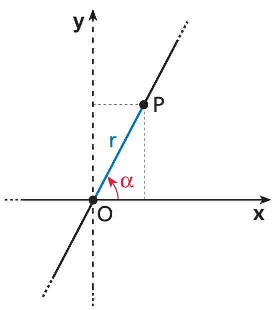


6. LE COORDINATE POLARI E LE EQUAZIONI DELLE CURVE

Rappresentando i punti mediante coordinate polari si possono affrontare gli stessi problemi che abbiamo già esaminato utilizzando le coordinate cartesiane. Per esempio, considerando la figura a lato e applicando il teorema del coseno al triangolo OAB, otteniamo la **distanza fra due punti**:

$$\overline{AB} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}\,.$$

L'equazione della retta



Cerchiamo l'**equazione di una retta passante per l'origine**.
In coordinate cartesiane l'equazione è $y = mx$.
Se P è un punto della retta, ha coordinate $(x; y)$ che verificano l'equazione. Passiamo alle coordinate polari $[r; \alpha]$. Poiché

$$x = r\cos\alpha,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

sostituendo nell'equazione della retta si ha:

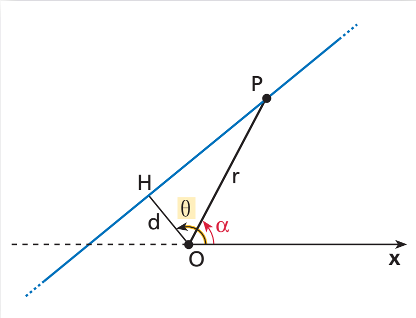
$$r\,\mathrm{sen}\,\alpha = mr\cos\alpha \quad \to \quad \mathrm{sen}\,\alpha = m\cos\alpha,$$

$$\mathbf{tg}\,\alpha = m, \quad \textbf{con } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Cerchiamo ora l'**equazione di una retta non passante per l'origine**.

Nel riferimento polare la retta è univocamente determinata se sono noti:

- d, distanza del polo;
- θ, angolo che l'asse polare forma con il segmento orientato $\overrightarrow{OH}$.



▲ Figura 8

Per il primo teorema sui triangoli rettangoli, un punto $P[r; \alpha]$ appartiene alla retta r se e solo se:

$$\overline{OH} = \overline{OP}\cos H\widehat{O}P.$$

● r, α sono variabili, d e θ invece sono numeri reali fissati.

Essendo $H\widehat{O}P = \theta - \alpha$, sostituendo si ha:

$$d = r\cos(\theta - \alpha).$$

L'equazione ottenuta è quella della retta in coordinate polari.
Viceversa, se la retta è scritta in coordinate polari, possiamo ottenere la sua equazione cartesiana.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $r\cos\left(\frac{2}{3}\pi - \alpha\right) = \sqrt{3}$.

Mediante la formula di sottrazione del coseno, otteniamo

$$r\cos\frac{2}{3}\pi\cos\alpha + r\,\mathrm{sen}\frac{2}{3}\pi\,\mathrm{sen}\,\alpha = \sqrt{3},$$

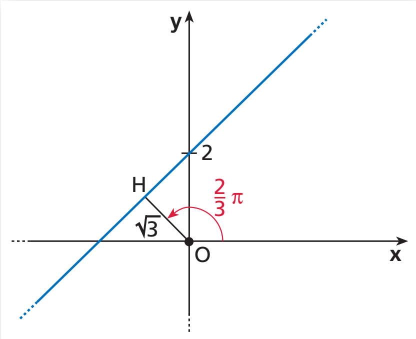
e poiché $r\cos\alpha = x$ e $r\,\text{sen}\,\alpha = y$, si ha:

$$-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = \sqrt{3} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2.$$

Abbiamo ottenuto l'equazione cartesiana della retta.

▶ **Figura 9**



L'equazione della circonferenza

Se la circonferenza ha centro in O e raggio R, tutti i suoi punti hanno lo stesso modulo r, quindi l'equazione è:

$$r = R.$$

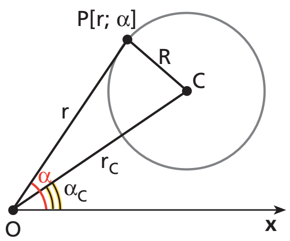
Se il centro è in un punto $C[r_C;\ \alpha_C]$ e il raggio è R, come nella figura a lato, per qualunque punto $P[r;\ \alpha]$ appartenente alla circonferenza possiamo applicare il teorema del coseno al triangolo OPC:

$$\overline{PC}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OC}^2 - 2\cdot\overline{OP}\cdot\overline{OC}\cos(\alpha - \alpha_C)$$

$$R^2 = r^2 + r_C^2 - 2rr_C\cos(\alpha - \alpha_C)$$

$$\boldsymbol{r^2 - 2rr_C\cos(\alpha - \alpha_C) + r_C^2 - R^2 = 0},$$ dove le variabili sono r e α.

● Negli esercizi considereremo problemi anche con altre coniche.



ESEMPIO

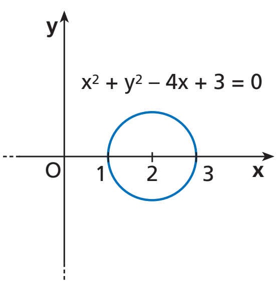
Disegniamo il luogo dei punti rappresentato dall'equazione:

$$r^2 - 4r\cos\alpha + 3 = 0.$$

È più comodo trasformare l'equazione nella corrispondente in coordinate cartesiane, ricordando che $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $r\cos\alpha = x$:

$$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0.$$

Nel piano cartesiano, la circonferenza ha centro $C(2;\ 0)$ e raggio 1.



La spirale di Archimede

Alcune curve hanno in coordinate polari un'espressione particolarmente semplice, mentre risulta molto complessa la corrispondente equazione in coordinate cartesiane.
Un'equazione lineare in r e α del tipo

$$\boldsymbol{r = m\cdot\alpha + q}$$

nel riferimento polare ha come grafico una spirale, detta **di Archimede**.

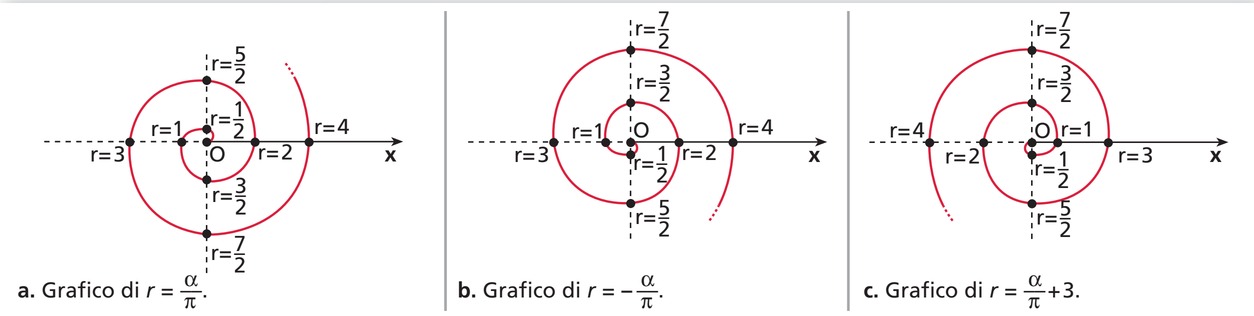
Consideriamo $q = 0$ e $m = \frac{1}{\pi}$. L'equazione diventa $r = \frac{\alpha}{\pi}$. Calcoliamo le coordinate di alcuni punti appartenenti alla curva.

● r deve essere un numero positivo o nullo e $m \neq 0$. Se $m = 0$ l'equazione diventa $r = q$, che è l'equazione di una circonferenza con centro nel polo e raggio q (con $q \geq 0$).

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
r	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4

Con $m > 0$ si hanno spirali che ruotano in senso antiorario.

Chiamiamo **passo** la distanza tra due punti successivi sull'asse polare x.
Dal grafico (figura 10*a*) osserviamo che la spirale si sviluppa in senso antiorario e con passo costante pari a 2.
Se il parametro m risulta negativo, allora α può assumere solo valori minori o uguali a 0 perché deve essere $r \geq 0$.
Nella figura 10*b* è rappresentata la spirale di equazione $r = -\frac{1}{\pi} \cdot \alpha$, nella quale puoi osservare che lo sviluppo della curva è in senso orario.

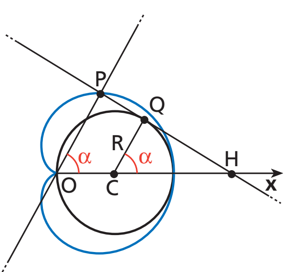


▲ **Figura 10** Le spirali.

Osserviamo ora il grafico della spirale di equazione $r = \frac{1}{\pi} \cdot \alpha + 3$ (figura 10*c*).
Il campo di variabilità di α è $\alpha \geq -3\pi$, quindi la spirale inizia con direzione dell'angolo di 180°.

La cardioide

Data una circonferenza di centro C e raggio R e un punto O appartenente alla circonferenza, si definisce **cardioide** il luogo dei piedi P delle perpendicolari condotte da O alle tangenti alla circonferenza.



a

Osservando la figura *a*, si nota che i triangoli POH e QCH sono simili; si può affermare che: $\overline{PO} : \overline{QC} = \overline{OH} : \overline{CH}$.

Nel riferimento polare che ha il polo in O e l'asse polare passante per C, si ha $\overline{PO} = r$. Poiché $\overline{OH} = \overline{OC} + \overline{CH}$ e nel triangolo rettangolo QCH è $\overline{CH} = \frac{R}{\cos\alpha}$, sostituendo si ha:

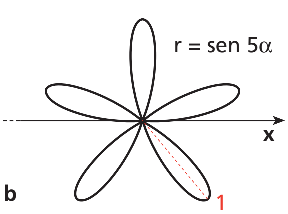
$$r : R = \left(R + \frac{R}{\cos\alpha}\right) : \frac{R}{\cos\alpha} \quad \rightarrow \quad r = \cancel{R}\left(R + \frac{R}{\cos\alpha}\right) \cdot \frac{\cos\alpha}{\cancel{R}} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad r = \frac{R\cos\alpha + R}{\cancel{\cos\alpha}} \cdot \cancel{\cos\alpha}.$$

L'equazione della cardioide è quindi:

$$\boldsymbol{r = R(1 + \cos\alpha)}.$$

Altre curve



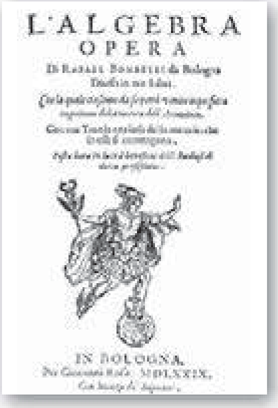
b

Curve di equazione molto semplice hanno grafici molto suggestivi. Nella figura *b* ne abbiamo un esempio.

ESPLORAZIONE

Da quantità silvestri a numeri immaginari

Per non lasciare i calcoli a metà



▲ Frontespizio di *L'algebra* di Raffaele Bombelli, pubblicata a Bologna nel 1579.

Si può far risalire l'introduzione dei numeri immaginari e complessi a Raffaele Bombelli, che utilizzava le espressioni *più di meno* e *meno di meno* (abbreviate: *p.d.m.* e *m.d.m.*) per indicare $+i$ e $-i$. Egli applicò la formula di Cardano per la risoluzione di equazioni di terzo grado all'equazione $x^3 = 15x + 4$ e non si spaventò davanti alla comparsa di radici quadrate di numeri negativi.
Prima di allora, si sapeva che una soluzione è 4 (si può verificare sostituendo il valore), ma con la formula non si riusciva a giungere al risultato e si lasciava il procedimento risolutivo incompiuto.
In generale, per la soluzione di un'equazione di terzo grado con la formula di Cardano, si ha:

$$x^3 = px + q$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \\ + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Applicando la formula alla nostra equazione, otteniamo:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Con il linguaggio moderno, la soluzione proposta da Bombelli si può sintetizzare così:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}.$$

Poiché

$$(2 + i)^3 = 2 + 11i \quad \text{e} \quad (2 - i)^3 = 2 - 11i,$$

si ottiene:

$$x = (2 + i) + (2 - i) = 2 + 2 = 4.$$

Immaginari ma non troppo

La diffidenza verso i numeri immaginari fu grande.
Lo stesso Bombelli parlava di «quantità silvestri» e anche il termine «immaginari», coniato da Cartesio, denota il fatto che essi, sebbene utili per il calcolo, non erano comunque considerati oggetti matematici degni di tale nome. Erano niente più che artifici per risolvere alcuni problemi.
Solo alla fine del Settecento i numeri complessi vennero riconosciuti come un vero e proprio insieme numerico. In particolare, Gauss ne diede rappresentazione geometrica e dimostrò il teorema fondamentale dell'algebra (data un'equazione algebrica di grado n, $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, con $a_0 \neq 0$ e avente i coefficienti appartenenti a $\mathbb{C}$, essa ha n radici in $\mathbb{C}$).
La rappresentazione algebrica dei numeri complessi arrivò nel 1833, grazie al matematico irlandese Hamilton (1805-1865). Per primo egli interpretò questi numeri come coppie ordinate di numeri reali.
Alla fine dell'Ottocento venne anche la prima applicazione dei numeri complessi alla realtà. L'ingegnere americano Steinmetz (1865-1923) fondò la sua teoria delle correnti alternate proprio sui numeri complessi.

Attività

Numeri più che complessi

Hamilton non si accontentò di definire i numeri complessi mediante coppie di reali. Egli inventò i quaternioni, costituiti da quaterne ordinate di numeri reali.

- Svolgi una ricerca sui quaternioni e sulle loro proprietà.

◀ Un francobollo della Repubblica d'Irlanda, commemorativo dei quaternioni di Hamilton.

Cerca nel Web:
Hamilton, quaternioni, quaternions

7. LA FORMA TRIGONOMETRICA DI UN NUMERO COMPLESSO

Abbiamo visto che a un numero complesso $z = a + bi$ corrisponde un vettore $\overrightarrow{OP}$ di componenti a e b. In coordinate polari il secondo estremo del vettore $\overrightarrow{OP}$ è $P[r; \alpha]$. Possiamo quindi identificare il modulo e l'argomento di un numero complesso con le coordinate polari del suo punto immagine P.

Poiché valgono le relazioni

$$a = r\cos\alpha, \quad b = r\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

abbiamo:

$$a + bi = r\cos\alpha + (r\,\mathrm{sen}\,\alpha)i = r[\cos\alpha + (\mathrm{sen}\,\alpha)i].$$

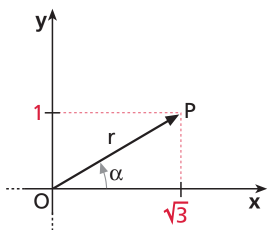
Possiamo pertanto scrivere il numero complesso z nella **forma trigonometrica**

$$\boldsymbol{z = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)},$$

dove

$$\boldsymbol{r = \sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{a}}.$$

Per semplicità, preferiamo la scrittura $i\,\mathrm{sen}\,\alpha$ a $(\mathrm{sen}\,\alpha)i$. r e α sono rispettivamente il modulo e l'argomento del numero complesso z.



ESEMPIO

Consideriamo il numero complesso $\sqrt{3} + i$.

Calcoliamo r e α:

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{6} \vee \alpha_2 = \frac{7}{6}\pi.$$

Scegliamo $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$ perché a e b sono positivi, quindi α appartiene al primo quadrante.

La forma trigonometrica del numero complesso $\sqrt{3} + i$ è:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\right).$$

Per determinare α, invece di calcolare $\mathrm{tg}\,\alpha$, possiamo considerare:

$$\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}},$$

$$\boldsymbol{\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

ESEMPIO

Riprendendo l'esempio precedente,

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,\alpha = \frac{1}{2},$$

quindi:

$$\alpha = \frac{\pi}{6}.$$

8. OPERAZIONI FRA NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA

La scrittura di un numero complesso in forma trigonometrica rende più agevoli le operazioni di moltiplicazione, divisione, potenza e radice n-esima di numeri complessi.

● Le operazioni di addizione e sottrazione sono invece più semplici se i numeri sono scritti in forma algebrica.

La moltiplicazione

Calcoliamo il prodotto dei numeri complessi $z_1 = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ e $z_2 = s(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)$:

$$z_1 \cdot z_2 = r \cdot s \cdot (\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha) \cdot (\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta) =$$

$$= r \cdot s \cdot (\underline{\cos\alpha\cos\beta} + \overbrace{i\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta + i\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta}^{i\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)} - \underline{\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}),$$

$\cos(\alpha + \beta)$

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = r \cdot s[\cos(\alpha+\beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)].}$$

REGOLA

Prodotto di due numeri complessi

Il prodotto di due numeri complessi scritti in forma trigonometrica è uguale al numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli dei numeri dati e per argomento la somma degli argomenti.

ESEMPIO

Consideriamo i numeri complessi:

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\right),\ z_2 = 3 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right).$$

Il loro prodotto è:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\right] = 6 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right).$$

● Puoi verificare che, trasformando i numeri in forma algebrica, si ottiene lo stesso risultato.

La divisione

Determiniamo il quoziente dei numeri complessi $z_1 = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ e $z_2 = s(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)$, con $z_2 \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)}{s(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)}.$$

Eliminiamo i al denominatore moltiplicando numeratore e denominatore per $(\cos\beta - i\,\mathrm{sen}\,\beta)$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)}{s(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)} \cdot \frac{(\cos\beta - i\,\text{sen}\,\beta)}{(\cos\beta - i\,\text{sen}\,\beta)} =$$

$$= \frac{r}{s} \cdot \frac{\cos\alpha\cos\beta - i\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta + i\,\text{sen}\,\alpha\cos\beta - i^2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos^2\beta - i^2\,\text{sen}^2\beta} =$$

$$= \frac{r}{s} \cdot \frac{\overbrace{\cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}^{\cos(\alpha-\beta)} + \overbrace{i(\text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta)}^{i\,\text{sen}(\alpha-\beta)}}{\underbrace{\cos^2\beta + \text{sen}^2\beta}_{1}},$$

$$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i\,\text{sen}(\alpha - \beta)].}$$

REGOLA

Quoziente di due numeri complessi

Il quoziente di due numeri complessi scritti in forma trigonometrica è uguale al numero complesso che ha per modulo il quoziente dei moduli dei numeri dati e per argomento la differenza degli argomenti.

ESEMPIO

Calcoliamo il quoziente fra $z_1 = 6 \cdot \left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{3}{4}\pi\right)$ e $z_2 = 3 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{3} \cdot \left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right] = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right).$$

● Verifica che si ottiene lo stesso risultato trasformando i numeri in forma algebrica.

Il reciproco

Il reciproco del numero complesso $z = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$ è:

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)}} = \frac{1(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0)}{r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)} = \frac{1}{r}[\cos(-\alpha) + i\,\text{sen}(-\alpha)] =$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{r}(\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha).}$$

● Ricordiamo che $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$ e $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

La potenza

Calcoliamo il quadrato del numero complesso $z = r \cdot (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$:

$$z^2 = z \cdot z = [r \cdot (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)] \cdot [r \cdot (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)].$$

Per la regola del prodotto, moltiplichiamo i moduli e sommiamo gli argomenti:

$$z^2 = r^2[\cos(\alpha + \alpha) + i\,\text{sen}(\alpha + \alpha)] = r^2(\cos 2\alpha + i\,\text{sen}\,2\alpha).$$

In generale, la potenza n-esima di un numero complesso (con $n \in \mathbb{Z}^+$) è calcolabile con la seguente formula, detta anche **formula di De Moivre**:

$$\boldsymbol{[r \cdot (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^n = r^n \cdot (\cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha), \text{ con } n \in \mathbb{Z}^+.}$$

DIMOSTRAZIONE

- Scriviamo la potenza come prodotto di fattori uguali:

$$[r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^n =$$
$$= \underbrace{[r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)] \cdot [r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)] \cdot \ldots \cdot [r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]}_{n \text{ fattori}} =$$

- Applichiamo la regola del prodotto fra numeri complessi:

$$= \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n \text{ fattori}} \cdot [\cos\underbrace{(\alpha + \alpha + \ldots + \alpha)}_{n \text{ addendi}} + i\,\text{sen}\underbrace{(\alpha + \alpha + \ldots + \alpha)}_{n \text{ addendi}}] =$$
$$= r^n(\cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha).$$

Se n è un numero intero positivo, anche nei numeri complessi definiamo $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$.

Per la regola del reciproco di un numero complesso, vale la seguente uguaglianza:

$$[r \cdot (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^{-n} = \frac{1}{r^n(\cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha)} = \frac{1}{r^n} \cdot (\cos n\alpha - i\,\text{sen}\,n\alpha).$$

Per quanto abbiamo visto, per una potenza con esponente *intero*, vale dunque la seguente regola.

REGOLA

Potenza di un numero complesso

La potenza con esponente intero di un numero complesso scritto in forma trigonometrica è uguale al numero complesso che ha per modulo la potenza del modulo del numero dato e per argomento il prodotto dell'esponente per l'argomento del numero dato.

Come per i numeri reali, se la base della potenza è diversa da 0, si pone per definizione:

$[r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^0 =$
$= 1 (r \neq 0)$.

9. LE RADICI *n*-ESIME DELL'UNITÀ

DEFINIZIONE

Radice *n*-esima dell'unità

Si chiama radice n-esima dell'unità, con n intero positivo, e si indica con $\sqrt[n]{1}$, ogni numero complesso u tale che $u^n = 1$.

$$\sqrt[n]{1} = u \Leftrightarrow u^n = 1.$$

Poniamo $u = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$, scriviamo 1 in forma trigonometrica, cioè $1 = \cos 0 + i\,\text{sen}\,0$, e sostituiamo nella relazione:

$$u^n = 1,$$
$$[r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^n = \cos 0 + i\,\text{sen}\,0.$$

Per determinare u dobbiamo ricavare r e α.

Sviluppiamo la potenza con la formula di De Moivre:

$$r^n(\cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha) = \cos 0 + i\,\text{sen}\,0.$$

L'uguaglianza è valida se sono uguali i moduli dei due numeri e gli argomenti, a meno di multipli interi di 2π, ossia se:

$$\begin{cases} r^n = 1 \\ n\alpha = 0 + 2k\pi \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} r = 1 \\ \alpha = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Pertanto le **radici *n*-esime dell'unità** si ricavano dalla formula:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{n}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Ma quante sono le radici *distinte* dell'unità? Per capirlo, vediamolo prima con degli esempi, calcolando le radici per $n = 2$, 3 e 4.

Calcoliamo $\sqrt[2]{1}$

$$\sqrt[2]{1} = \cos\frac{2k\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{2} = \cos k\pi + i\,\mathrm{sen}\,k\pi.$$

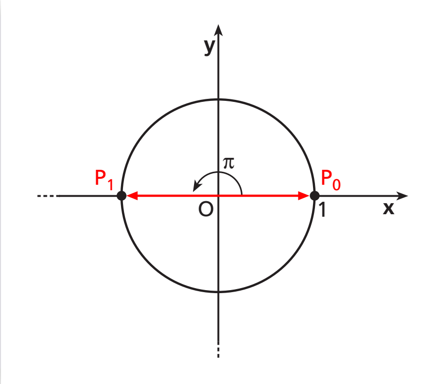
Al variare di k si ottengono infiniti numeri, ma non tutti diversi tra loro. Compiliamo la seguente tabella.

k	0	1	2	3	...
$\sqrt[2]{1} = \cos k\pi + i\,\mathrm{sen}\,k\pi$	1	-1	1	-1	...

Proseguendo ad attribuire valori a k, le radici sono ciclicamente 1 e -1 e, poiché si ottengono per $k = 0$ e $k = 1$, le indichiamo con u_0 e u_1.

Pertanto le radici quadrate distinte dell'unità sono due: 1 e -1.

Possiamo rappresentare geometricamente le due radici nel piano di Gauss. I punti P_0 e P_1 sono le immagini di u_0 e u_1. Poiché i due numeri hanno lo stesso modulo uguale a 1, i due punti si trovano su una circonferenza di centro O e raggio 1.



▶ **Figura 11** Radici quadrate dell'unità ($n = 2$): $\alpha_0 = 0$; $\alpha_1 = \pi$, cui corrispondono i punti P_0 e P_1.

Calcoliamo $\sqrt[3]{1}$

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{3}.$$

Scriviamo la tabella sostituendo a k i valori 0, 1, 2, 3, 4.

k	0	1	2	3	4	...
$\sqrt[3]{1}$	1	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	1	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	...

Anche in questo caso la situazione è ciclica: procedendo nel calcolo per valori di k superiori a 2, si ottengono ancora gli stessi valori trovati inizialmente.

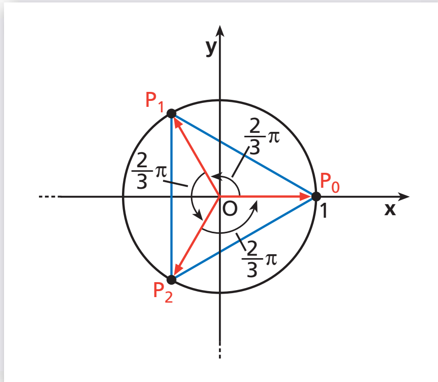
Pertanto le radici cubiche distinte dell'unità sono tre:

$$u_0 = 1;\quad u_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;\quad u_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Il modulo dei tre numeri è 1 e i loro argomenti sono:

$$\alpha_0 = 0, \qquad \text{per } k = 0;$$
$$\alpha_1 = \frac{2}{3}\pi, \qquad \text{per } k = 1;$$
$$\alpha_2 = \frac{4}{3}\pi, \qquad \text{per } k = 2.$$

Quindi possiamo rappresentare sulla circonferenza unitaria le tre radici come vertici di un triangolo equilatero inscritto in essa.



◀ **Figura 12** Radici cubiche dell'unità ($n = 3$): $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \frac{2}{3}\pi$, $\alpha_2 = \frac{4}{3}\pi$, cui corrispondono i punti P_0, P_1, P_2.

Calcoliamo $\sqrt[4]{1}$

$$\sqrt[4]{1} = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{4} = \cos\frac{k\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{k\pi}{2}.$$

Calcoliamo i valori delle radici sostituendo a k i valori in tabella.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\sqrt[4]{1}$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	...

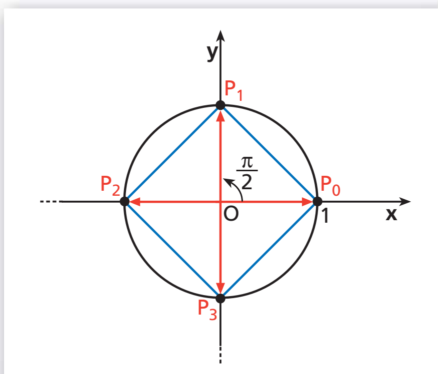
Le radici quarte distinte dell'unità sono quattro:

$u_0 = 1;\quad u_1 = i;\quad u_2 = -1;\quad u_3 = -i.$

Possiamo disegnarle nel piano di Gauss, considerando la circonferenza di raggio 1, tenendo presente che:

$$\alpha_0 = 0;\ \alpha_1 = \frac{\pi}{2};\ \alpha_2 = \pi;\ \alpha_3 = \frac{3}{2}\pi.$$

I punti che rappresentano le radici sono i vertici di un quadrato.



◀ **Figura 13** Radici quarte dell'unità ($n = 4$): $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \pi$, $\alpha_3 = \frac{3}{2}\pi$, cui corrispondono rispettivamente i punti P_0, P_1, P_2 e P_3.

Le radici n-esime dell'unità

In generale, si dimostra che le radici n-esime distinte dell'unità sono n. Per calcolarle, nella formula, basta attribuire a k i valori 0, 1, 2, …, $n - 1$:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{n},\quad \text{con } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Per rappresentare le n radici distinte nel piano di Gauss, basta disegnare la circonferenza con centro nell'origine e raggio 1, quindi inscrivere in essa il poligono regolare di n lati con uno dei vertici nel punto $P(1; 0)$. Ogni vettore che parte da O e ha un estremo in uno dei vertici del poligono rappresenta una delle radici.

10. LE RADICI *n*-ESIME DI UN NUMERO COMPLESSO

DEFINIZIONE

Radice n-esima di un numero complesso

Dati il numero complesso z e il numero n intero positivo, si dice radice n-esima di z ogni numero complesso w tale che $w^n = z$.

$$\sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow w^n = z.$$

Sia $z = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ e sia $w = s(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$ una radice n-esima di z. Vogliamo determinare s e β in funzione di r e di α, applicando la definizione:

$$\underbrace{[s(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)]^n}_{w^n} = \underbrace{r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)}_{z}.$$

Applichiamo la formula di De Moivre:

$$s^n(\cos n\beta + i \operatorname{sen} n\beta) = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha).$$

Dal confronto dei due numeri ricaviamo il sistema:

$$\begin{cases} s^n = r \\ n\beta = \alpha + 2k\pi \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \beta = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Pertanto, le radici n-esime del numero complesso z sono:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]}.$$

Osserva l'analogia fra questa formula e la formula di De Moivre.

Anche nel caso delle radici n-esime di un numero complesso si dimostra che le radici sono n distinti numeri complessi, che si possono ottenere attribuendo a k tutti i valori interi da 0 a $n-1$.

ESEMPIO

Calcoliamo le radici cubiche di $z = 8\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right)$.

In forma algebrica $z = -8i$, quindi dobbiamo calcolare $\sqrt[3]{-8i}$.

Sappiamo che le radici cubiche sono tre, corrispondenti a $k = 0, 1, 2$.

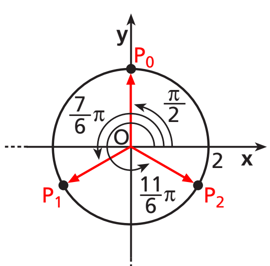
Scriviamo le radici, applicando la formula:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right], \text{ con } k = 0, 1, 2.$$

Le tre soluzioni sono i vertici del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio 2.



Gli argomenti $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi\right)$ sono:

$$\frac{\pi}{2} \text{ per } k = 0; \quad \frac{7}{6}\pi \text{ per } k = 1; \quad \frac{11}{6}\pi \text{ per } k = 2.$$

Determiniamo le tre radici:

$$\text{per } k = 0, \quad z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 2i;$$

$$\text{per } k = 1, \quad z_1 = 2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{7}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} - i;$$

$$\text{per } k = 2, \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{11}{6}\pi\right) = \sqrt{3} - i.$$

Per determinare le radici n-esime di un numero complesso $r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$, è sufficiente determinarne una qualunque e poi moltiplicare questa per le radici n-esime dell'unità.

Infatti, abbiamo visto che

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right].$$

Applichiamo la formula del prodotto di numeri complessi,

$$[r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)]\cdot[s(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)] = r\cdot s[\cos(\alpha+\beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)],$$

leggendola da destra verso sinistra. Otteniamo:

$$\sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] =$$

$$= \underbrace{\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{\alpha}{n}\right)}_{\text{una radice del numero dato}}\cdot\underbrace{\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{n}\right)}_{\text{radici } n\text{-esime dell'unità}}.$$

Verifica che nell'esempio precedente ottieni il risultato moltiplicando $-\sqrt{3} - i$ per le tre radici cubiche dell'unità, oppure moltiplicando $\sqrt{3} - i$ per le stesse radici.

La risoluzione delle equazioni di secondo grado in $\mathbb{C}$

La definizione relativa alle radici n-esime di un numero complesso e la formula per calcolarle permettono di risolvere il problema che ci siamo posti all'inizio di questo capitolo.
Per risolvere in $\mathbb{C}$

$$x^2 = -4,$$

dobbiamo determinare quei numeri che, in $\mathbb{C}$, sono le radici quadrate di -4.
Essendo

$$-4 = 4(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi), \text{ con } r = 4 \text{ e } \alpha = \pi,$$

abbiamo:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right)\right], \text{ con } k = 0, 1.$$

Otteniamo:

$$\text{per } k = 0, \quad \sqrt{-4} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 2i;$$

$$\text{per } k = 1, \quad \sqrt{-4} = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{3}{2}\pi\right) = -2i.$$

I due numeri che elevati al quadrato danno -4 sono $2i$ e $-2i$.
In generale, data l'equazione di secondo grado in $\mathbb{C}$

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

la formula risolutiva è:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Prima della radice abbiamo messo il solo segno + perché in $\mathbb{C}$ la radice stessa fornisce le radici con ambedue i segni.

ESEMPIO

L'equazione $x^2 - 6x + 25 = 0$ in $\mathbb{C}$ ha per soluzioni:

$$x_{1,2} = 3 + \sqrt{-16}.$$

Essendo $\sqrt{-16} = \pm 4i$, le due soluzioni sono i numeri complessi:

$$x_1 = 3 - 4i,\ x_2 = 3 + 4i.$$

11. LA FORMA ESPONENZIALE DI UN NUMERO COMPLESSO

Un numero complesso può essere espresso in una terza forma, diversa da quella algebrica $(a + bi)$ e da quella trigonometrica $r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$.

Questa terza forma, detta **esponenziale**, viene utilizzata soprattutto per semplificare i calcoli nelle scienze applicate.

I numeri complessi in forma esponenziale sono utili perché si possono eseguire tutte le operazioni applicando le proprietà delle potenze.

Consideriamo un numero complesso con modulo 1. In forma trigonometrica è scritto $\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$. Poniamo

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha,$$

dove e indica il numero di Nepero.

$e = 2{,}7182\ldots$ è la base dei logaritmi naturali.

$e^{i\alpha}$ è un modo diverso di scrivere il numero complesso $\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$ in forma abbreviata, quindi dobbiamo anche stabilire che due numeri complessi $e^{i\alpha}$ ed $e^{i\beta}$ sono uguali se α e β differiscono di multipli interi di 2π, ossia se $\beta = \alpha + 2k\pi$.

Applicando le proprietà delle potenze, troviamo una corrispondenza formale con le operazioni di moltiplicazione, divisione ed elevamento a potenza fra numeri complessi scritti in forma trigonometrica.

Moltiplicazione

$$\begin{array}{ccccc} e^{i\alpha} & \cdot & e^{i\beta} & = & e^{i(\alpha+\beta)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) & \cdot & (\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta) & = & \cos(\alpha+\beta) + i \operatorname{sen}(\alpha+\beta). \end{array}$$

Divisione

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} & = & e^{i(\alpha-\beta)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \dfrac{\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha}{\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta} & = & \cos(\alpha-\beta) + i \operatorname{sen}(\alpha-\beta). \end{array}$$

Potenza

$$\underset{\displaystyle (\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^n}{\underset{\downarrow}{(e^{i\alpha})^n}} = \underset{\displaystyle \cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\,n\alpha.}{\underset{\downarrow}{e^{i(\alpha n)}}}$$

In generale, passando a un numero complesso $z = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$, con modulo r qualsiasi, possiamo scrivere $z = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha) = re^{i\alpha}$.

La scrittura $\boldsymbol{re^{i\alpha}}$ si chiama **forma esponenziale del numero complesso z**.

Le formule di Eulero

Consideriamo le due uguaglianze:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha \quad \text{ed} \quad e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha.$$

- Sommiamo membro a membro:

$$\begin{array}{rrcl} & e^{i\alpha} & = & \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ + & e^{-i\alpha} & = & \cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ \hline & e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} & = & 2\cos\alpha \end{array}$$

da cui ricaviamo $\cos\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$.

- Sottraiamo membro a membro:

$$\begin{array}{rrcl} & e^{i\alpha} & = & \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ - & e^{-i\alpha} & = & \cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ \hline & e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} & = & 2i\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{array}$$

da cui ricaviamo $\mathrm{sen}\,\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$.

Sono dette **formule di Eulero** le quattro formule:

$$\boldsymbol{e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha, \qquad e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha,}$$

$$\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \qquad \mathrm{sen}\,\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.}$$

Per $\alpha = \pi$ nella prima formula si ha:

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = -1.$$

Possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{e^{\pi i} + 1 = 0}.$$

In questa uguaglianza compaiono insieme i cinque numeri più importanti della matematica:

$1, 0, e, \pi, i$.

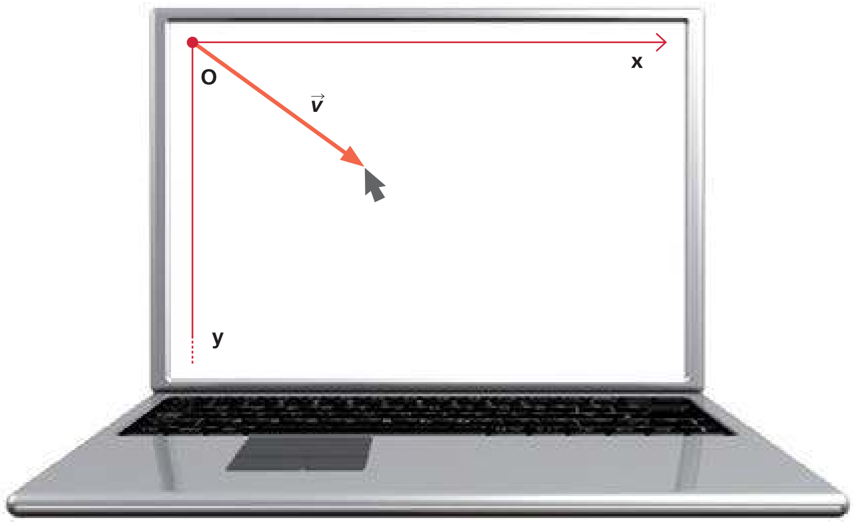
Leonhard Euler (1707-1783), in italiano Eulero, è considerato il matematico più importante del Diciottesimo secolo. Si occupò anche di meccanica classica e celeste, dando così importanti contributi anche in fisica.

Queste formule snelliscono i calcoli perché consentono di utilizzare le relazioni relative alla funzione esponenziale al posto di quelle relative alle funzioni goniometriche.

IL FUNZIONAMENTO DEL MOUSE

Da un punto di vista geometrico, come si può descrivere la relazione tra mouse e cursore?

▶ Il quesito completo a pag. 917



Il cursore del nostro computer si muove sullo schermo, per esempio sul desktop. Lo schermo rappresenta un rettangolo, vale a dire una porzione di un piano.
Possiamo quindi vederlo come una parte del piano cartesiano con gli assi paralleli ai bordi dello schermo.

Si parte in alto a sinistra come nella scrittura
Storicamente, chi ha introdotto gli strumenti grafici per gestire file, programmi e cartelle, ha stabilito che lo schermo è una porzione del quarto quadrante. Infatti, l'origine degli assi è in alto a sinistra, l'asse delle x è il lato superiore e quello delle y il lato sinistro dello schermo.
Questa scelta apparentemente innaturale è dovuta al fatto che i calcolatori inizialmente erano macchine che scrivevano. E nella nostra cultura cominciamo a scrivere proprio in alto a sinistra. Il piano cartesiano può anche essere visto come insieme di vettori che escono dall'origine o come piano complesso.
Un suo punto è determinato da due valori numerici che sono rispettivamente le componenti del vettore o le parti, reale e immaginaria, del numero complesso.
Per fissare le idee possiamo individuare il cursore con un vettore che esce dall'origine, cioè dall'angolo in alto a sinistra dello schermo.

Ma come si muove il cursore?
È naturale: attraverso il mouse.
A sua volta il mouse viene spostato sul piano della scrivania, più precisamente sul mouse pad che è anche questo una porzione di un piano cartesiano. Lo strumento che manda l'informazione al cursore può essere una pallina che ruota per attrito o un raggio di luce.
In entrambe le situazioni c'è un punto che varia sul mouse pad e quindi sul piano cartesiano. Il movimento del mouse avviene nel raggio d'azione della mano, cioè in una zona di alcuni centimetri quadrati, mentre il cursore spazia su tutto lo schermo, che ha una superficie di alcuni decimetri quadrati. Si tratta di due porzioni diverse del piano cartesiano.
Il movimento della nostra mano è descritto sullo schermo da una funzione che associa al vettore determinato dal punto di contatto della pallina del mouse il vettore determinato dalla posizione del cursore: la variazione del primo produce una più grande variazione del secondo.

Il volo e le coordinate polari

Le coordinate polari sono utilizzate nella navigazione aerea. Quando la direzione del viaggio è costante per lunghi tratti, il tragitto può essere descritto per mezzo di un angolo (la rotta) e della distanza (in miglia nautiche) dal luogo di arrivo. La rotta è l'angolo che la retta congiungente due punti (partenza e arrivo) forma con la direzione del Nord, misurato in senso orario a partire dal vettore che dal punto di partenza indica il Nord stesso. La rotta può essere *vera* o *magnetica*, a seconda che si scelga come riferimento il Nord vero o quello magnetico. Per esempio, la rotta vera per un volo da Perugia a Siena (che distano 56 miglia nautiche, circa 104 km) sarà 280°. E per un volo da Siena a Perugia?

LABORATORIO DI MATEMATICA
I NUMERI COMPLESSI

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Excel costruiamo un foglio che calcoli la potenza n-esima di un numero complesso in forma algebrica $a + bi$. Usiamo poi il foglio per calcolare $(1 + i)^3$.

L'analisi del problema

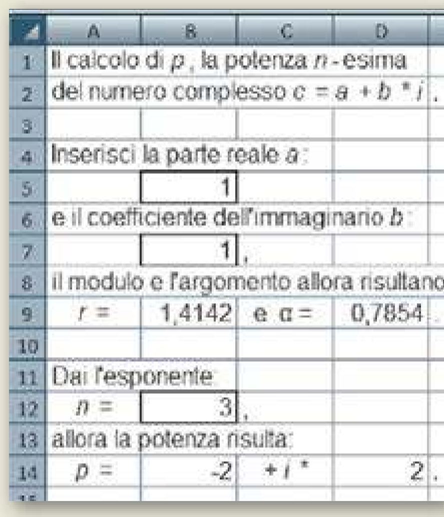
Per ricavare la potenza n-esima di un numero complesso $c = a + bi$ ricorriamo alla formula di De Moivre: $p = c^n = r^n(\cos(n\alpha) + i\,\mathrm{sen}(n\alpha))$, dove il modulo r vale $\sqrt{a^2 + b^2}$ e l'ampiezza dell'argomento α si ricava da a e da b applicando i seguenti controlli:

se $a = 0$ e $b < 0$, $\alpha = \frac{3}{2}\pi$; se $a = 0$ e $b \geq 0$, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$; se $a > 0$ e $b \geq 0$, $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$;

se $a > 0$ e $b < 0$, $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} + 2\pi$; se ($a < 0$ e $b \geq 0$) o ($a < 0$ e $b < 0$), $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} + \pi$.

La costruzione e l'applicazione del foglio

- Apriamo un foglio di Excel e scriviamo delle indicazioni per segnalare dove immettere i dati e dove leggere i risultati, come vediamo in figura 1.
- In B9 digitiamo = RADQ(B5^2+B7^2) per il calcolo di r.
- In D9 inseriamo la formula con le condizioni per determinare α: = SE(B5 = 0; SE(B7 < 0; 3*PI.GRECO()/2; PI.GRECO()/2); SE(B5 > 0; SE(B7 > 0; ARCTAN(B7/B5); ARCTAN(B7/B5) + 2*PI.GRECO()); ARCTAN(B7/B5) + PI.GRECO())).
- In B14 e in D14 digitiamo rispettivamente = B9^B12*COS(B12*D9) e = B9^B12*SEN(B12*D9) per ottenere i coefficienti della potenza di c.
- Per ottemperare alla richiesta del problema, digitiamo 1 in B5, 1 in B7 e 3 in B12 e vediamo apparire il risultato come in figura 1.



	A	B	C	D
1	Il calcolo di p, la potenza n-esima			
2	del numero complesso $c = a + b * i$.			
3				
4	Inserisci la parte reale a:			
5		1		
6	e il coefficiente dell'immaginario b:			
7		1	,	
8	il modulo e l'argomento allora risultano			
9	r =	1,4142	e α =	0,7854
10				
11	Dai l'esponente			
12	n =	3	,	
13	allora la potenza risulta:			
14	p =	-2	+ i *	2.

▶ Figura 1

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 10 esercitazioni in più

Esercitazioni

Costruisci un foglio che, letti la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria dei seguenti numeri complessi, fornisca i risultati richiesti.

1 Due numeri complessi; risultati: la somma, la differenza, il prodotto e il quoziente.

2 Due numeri complessi; risultati: i numeri in forma trigonometrica, il loro prodotto e il loro quoziente nelle due forme.

3 Tre numeri complessi; risultati: le soluzioni dell'equazione di secondo grado avente quei tre numeri come coefficienti.

LA TEORIA IN SINTESI

I NUMERI COMPLESSI. LE COORDINATE POLARI

1. I NUMERI COMPLESSI

- I **numeri complessi** sono definiti come coppie ordinate $(a; b)$ di numeri reali. L'insieme dei numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$.
- Le **operazioni** che si definiscono in $\mathbb{C}$ sono tali da **conservare i risultati** ottenuti nei numeri reali, se si crea una **corrispondenza biunivoca** fra il sottoinsieme dei numeri complessi del tipo $(a; 0)$ e l'insieme $\mathbb{R}$. In $\mathbb{C}$ **non è definita una relazione d'ordine**.
- **Addizione**: $(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$.
  Moltiplicazione: $(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$.
- I numeri complessi del tipo $(0; b)$ vengono detti **immaginari**. $(0; 1)$ è l'**unità immaginaria** e si indica con i. Il quadrato di un numero immaginario è un numero reale negativo.
- Un numero complesso $(a; b)$ può essere scritto nella **forma algebrica** $a + bi$.
  a è la **parte reale** del numero complesso, bi la **parte immaginaria**, b è il **coefficiente della parte immaginaria**.
- Il **modulo** del numero complesso $a + bi$ è dato dalla radice quadrata della somma del quadrato di a col quadrato di b:
  $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Il **complesso coniugato** di $a + bi$ è $a - bi$.

2. IL CALCOLO CON I NUMERI IMMAGINARI

- La forma algebrica permette di applicare ai complessi le stesse regole del calcolo letterale, tenendo presente, però, che i non è una variabile ma un numero immaginario il cui quadrato vale -1, cioè $\boldsymbol{i^2 = -1}$.
- Esaminiamo alcuni esempi di calcolo con i numeri immaginari.
  Addizione: $3i + 8i = 11i$.
  Sottrazione: $2i - 6i = -4i$.
  Moltiplicazione: $5i \cdot 4i = 20i^2 = 20(-1) = -20$.
  Divisione: $7i : 3i = \frac{7}{3}$.
  Potenza: $(9i)^2 = 81i^2 = -81$.
- Le potenze di i, ossia $i^0, i, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, \ldots$ hanno risultati che si ripetono: $1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \ldots$
  Una potenza di i con esponente naturale $n \geq 4$ è uguale alla potenza che ha per base i e per esponente il resto della divisione fra n e 4:
  $i^n = i^r$, con $n = 4k + r$.

3. IL CALCOLO CON I NUMERI COMPLESSI IN FORMA ALGEBRICA

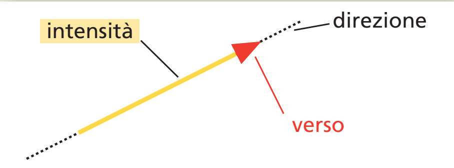
- **Operazioni con i numeri complessi**
  Seguono le stesse regole del calcolo letterale con i binomi e le frazioni algebriche.

ESEMPIO: $\frac{3 + 2i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{3 + 3i + 2i + 2i^2}{1 - i^2} = \frac{3 + 5i - 2}{1 + 1} = \frac{1 + 5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i.$

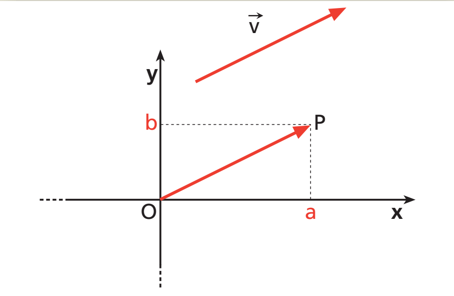
4. VETTORI E NUMERI COMPLESSI

- **Rappresentazione nel piano di Gauss o piano complesso**
  A ogni numero complesso $a + bi$ è possibile associare un punto $P(a; b)$ in un piano su cui è fissato un sistema di assi cartesiani Oxy. Viceversa a ogni punto $P(a; b)$ del piano è possibile associare il numero complesso $a + bi$.

- **Vettore** è l'insieme dei segmenti paralleli e ugualmente orientati, che hanno tutti la stessa lunghezza.



- Un vettore ha tre caratteristiche:
  - la **lunghezza** del segmento, detta anche **intensità** oppure **modulo** del vettore;
  - la **direzione** della retta a cui appartiene il vettore;
  - il **verso** di percorrenza sulla retta.



- Dato un vettore $\vec{v}$ è sempre possibile rappresentarlo nel piano cartesiano con un segmento orientato $\overrightarrow{OP}$ che ha il primo estremo nell'origine degli assi. Le coordinate $(a; b)$ del punto P si chiamano **componenti** di $\overrightarrow{OP}$.

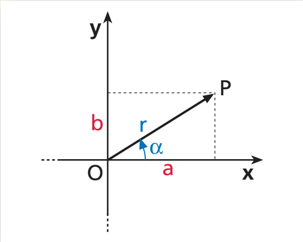
- Esiste una **corrispondenza biunivoca** fra i **numeri complessi** e i **vettori**.

5. LE COORDINATE POLARI

- **Coordinate polari** $[r; \alpha]$: un punto P può essere individuato da r, detto **modulo**, e α, detto **argomento** o **anomalia**.

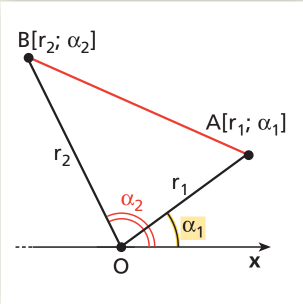
- Date le **coordinate polari** di un punto $P[r; \alpha]$, si possono ricavare le sue **coordinate cartesiane** $(a; b)$ e viceversa:

$$\begin{cases} a = r\cos\alpha \\ b = r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$



6. LE COORDINATE POLARI E LE EQUAZIONI DELLE CURVE

- In coordinate polari la **distanza fra due punti** è:
  $\overline{AB} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$.



- Equazione di una **retta passante per l'origine**:
  $\mathrm{tg}\,\alpha = m$, con $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

- Equazione di una **retta non passante per l'origine**:
  $d = r\cos(\theta - \alpha)$.

- Equazione della **circonferenza** di centro $C[r_C; \alpha_C]$ e raggio R:
  $r^2 - 2r\,r_C\cos(\alpha - \alpha_C) + r_C^2 - R^2 = 0$.

- Equazione della **spirale di Archimede**:
  $r = m\alpha + q$, con $r \geq 0$ e $m \neq 0$.

- Equazione della **cardioide**:
  $r = R(1 + \cos\alpha)$.

7. LA FORMA TRIGONOMETRICA DI UN NUMERO COMPLESSO

- **Forma trigonometrica del numero complesso $\boldsymbol{a + bi}$**
Dato il vettore $\overrightarrow{OP}$ di componenti a e b e con P di coordinate polari $[r; \alpha]$, abbiamo $a = r\cos\alpha$ e $b = r\,\text{sen}\,\alpha$, quindi:

$$a + bi = r\cos\alpha + (r\,\text{sen}\,\alpha)i = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha).$$

8. OPERAZIONI FRA NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA

- Dati due numeri complessi in forma trigonometrica $z_1 = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$ e $z_2 = s(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)$, calcoliamo:
  - **prodotto**:
  $$z_1 \cdot z_2 = r \cdot s[\cos(\alpha + \beta) + i\,\text{sen}(\alpha + \beta)];$$
  - **quoziente**:
  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i\,\text{sen}(\alpha - \beta)];$$
  - **reciproco**:
  $$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r} \cdot (\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha);$$
  - **potenza**:
    – a esponente intero positivo: $z_1^n = r^n(\cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha)$ (**formula di De Moivre**);
    – a esponente intero negativo: $z_1^{-n} = \dfrac{1}{r^n} \cdot (\cos n\alpha - i\,\text{sen}\,n\alpha)$.

9. LE RADICI *n*-ESIME DELL'UNITÀ

- **Radice *n*-esima dell'unità**: ogni numero complesso u tale che $u^n = 1$.

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{2k\pi}{n}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \text{ e } k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

10. LE RADICI *n*-ESIME DI UN NUMERO COMPLESSO

- **Radice *n*-esima del numero complesso *z***: ogni numero complesso w tale che $w^n = z$.

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right), \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \text{ e } k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

È possibile scrivere tali radici determinandone una e moltiplicandola per le radici n-esime dell'unità.

11. LA FORMA ESPONENZIALE DI UN NUMERO COMPLESSO

- La **forma esponenziale** del numero complesso $r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$ è $re^{i\alpha}$.
- **Formule di Eulero**:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha, \; e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \; \text{sen}\,\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$$

1. I NUMERI COMPLESSI

Teoria a pag. 918

L'addizione e la moltiplicazione

1 **ESERCIZIO GUIDA**

Eseguiamo l'addizione e la moltiplicazione dei due numeri complessi $(-3; 2)$ e $(4; -10)$.

Addizione

Essendo $(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$:

$$(-3; 2) + (4; -10) = (-3 + 4; 2 - 10) = $$
$$= (1; -8).$$

Moltiplicazione

Essendo $(a; b) \cdot (c; d) = (a \cdot c - b \cdot d; a \cdot d + b \cdot c)$:

$$(-3; 2) \cdot (4; -10) = (-12 - (-20); 30 + 8) =$$
$$= (8; 38).$$

Esegui le seguenti addizioni di numeri complessi.

2 $(1; 3) + (-1; 2)$; $(-4; -2) + (-1; 6)$.

3 $(-2; 3) + (0; 0)$; $(-1; 2) + (1; -2)$.

4 $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$; $\left(2; \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Esegui le seguenti moltiplicazioni di numeri complessi.

5 $(1; -3) \cdot (-2; 1)$; $(-2; 0) \cdot (-1; 2)$.

6 $(5; 7) \cdot (1; 1)$; $(-2; 3) \cdot (0; 0)$.

7 $(5; 7) \cdot \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{7}\right)$; $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

8 $\left(\frac{1}{2}; 3\right) \cdot \left(\frac{1}{2}; -3\right)$; $(2; -1) \cdot (2; 1)$.

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

9 $(1; 2) + (-1; 3) \cdot (0; -1)$

10 $\left(\frac{1}{2}; 2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}; -2\right) + \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}; -2\right)$

11 $(3; -1) \cdot [(-4; 3) + (4; -3)]$

12 $(1; -1) \cdot [(2; -1) + (3; 1)]$

13 $(2; 3) \cdot (2; -3) + (-2; -3)$

Dimostra le seguenti proprietà relative alle operazioni fra numeri complessi.

14 Nell'addizione vale la proprietà commutativa.

15 Nell'addizione vale la proprietà associativa.

16 $(0; 0)$ è l'elemento neutro dell'addizione.

17 Nella moltiplicazione vale la proprietà commutativa.

18 Nella moltiplicazione vale la proprietà associativa.

19 $(1; 0)$ è l'elemento neutro della moltiplicazione.

20 Dimostra che $(0; 1)$ non è l'elemento neutro della moltiplicazione.

21 **TEST** Il prodotto $(a; b) \cdot (1; 1)$ è uguale a:

A $(a; b)$. B $(b; a)$. C $(a + b; a - b)$. D $(a - b; a + b)$. E $(b - a; b + a)$.

22 **TEST** Il prodotto $(a; b) \cdot (b; a)$ è uguale a:

A $(ab; ba)$. B $(a^2 - b^2; a^2 + b^2)$. C $(0; a^2 + b^2)$. D $(a^2 - b^2; 0)$. E $(-ab; ba)$.

Calcola i seguenti quadrati, verificando che i numeri immaginari hanno come quadrato un numero reale negativo.

23 $(0;1)^2$; $(1;0)^2$; $(1;1)^2$.

24 $(-1;0)^2$; $(0;-1)^2$; $(-1;-1)^2$.

25 $(2;0)^2$; $(0;2)^2$; $(2;2)^2$.

26 $(2;1)^2$; $(1;3)^2$; $(-1;2)^2$.

La forma algebrica dei numeri complessi

27 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo in forma algebrica il numero complesso $(4;-5)$.

Essendo $(a;b) = a + bi$:

$$(4;-5) = 4 - 5i.$$

Scrivi in forma algebrica i seguenti numeri complessi.

28 $(0;1)$; $(1;0)$; $(-1;0)$; $(0;-1)$.

29 $(1;1)$; $(3;-1)$; $(-1;2)$; $(5;-7)$.

30 Scrivi nella forma $(a;b)$ i seguenti numeri complessi espressi in forma algebrica.

$5-3i$; $3+2i$; -7; i; $-3i$.

Per ognuna delle seguenti coppie di numeri, calcola la somma e il prodotto mediante la definizione. Scrivi poi i numeri in forma algebrica.

31 $(4;1)$; $(2;0)$.

32 $(1;-2)$; $(-1;3)$.

33 $\left(\frac{1}{2};0\right)$; $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$.

34 $\left(\frac{3}{2};2\right)$; $\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right)$.

35 $(0;1)$; $(1;0)$.

36 $(0;-1)$; $(-1;0)$.

37 $(1;1)$; $(-1;-1)$.

38 $(1;-1)$; $(-1;1)$.

39 **ESERCIZIO GUIDA**

Dato il numero complesso $3 + ki - 4i$, determiniamo per quale valore di k esso è un numero complesso reale.

Occorre che il coefficiente della parte immaginaria sia 0.

Raccogliamo i:

$$3 + i(k-4).$$

Uguagliamo a 0 il coefficiente di i:

$$k - 4 = 0 \rightarrow k = 4.$$

Pertanto, il numero $3 + ki - 4i$ è complesso reale per $k = 4$, e in tal caso vale 3.

Determina per quali valori di k i seguenti numeri complessi sono numeri complessi reali.

40 $\frac{1}{2} - ki + 3i$; $\quad \frac{2}{3} + 3ki - \frac{1}{2}i$.

41 $\frac{5}{4} + \frac{3}{2}i - \frac{2}{5}ki$; $\quad \frac{7}{8} - \frac{1}{8}i + \frac{9}{2}ki$.

42 $2 - ki + 9i$; $\quad 6 + 9ki + \frac{1}{4}i$.

43 $\frac{2}{3} - 3i + 2ki$; $\quad \frac{1}{2} - i + \frac{3}{2}ki$.

Determina per quali valori di k i seguenti numeri complessi sono immaginari.

44 $k + 1 - 4ki$; $\quad 2k - 1 + \frac{1}{2}ki$.

45 $5k + 2 - \frac{3}{2}ki$; $\quad \frac{3}{2}k - 6 - 2ki - \frac{i}{2}$.

46 $8k - \frac{16}{3} - \frac{3}{2}ki + \frac{i}{2}$; $\quad \frac{5}{4} - 2k + 8ki - \frac{5}{2}i$.

47 $1 - 4k + \frac{1}{2}ki + 4i$; $\quad 9 + k - \frac{3}{2}i - \frac{5}{2}ki$.

48 $k(k+2) - \left(k^2 + \frac{2}{3}\right) + ki - \frac{2}{3}i$

49 Determina $x, y \in \mathbb{R}$ in modo che i due numeri complessi $3x + 1 + (x - y + 2)i$ e $x - y + 2xi$ siano uguali. $[x = -3, y = 5]$

50 Calcola $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che siano uguali i numeri complessi $a - b + 7 + (2a - b)i$ e $4a - 3b + 5bi$. $[a = 3, b = 1]$

Il modulo di un numero complesso

51 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il modulo del numero complesso $2 - 3i$.

Il modulo del numero complesso $a + bi$ è:

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Poiché $a = 2$ e $b = -3$, abbiamo:

$$|2 - 3i| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

Calcola il modulo dei seguenti numeri complessi.

52 $-i$; $\quad 3 - 4i$; $\quad 6$; $\quad 1 + i$.

53 $3 + i$; $\quad 2i$; $\quad \frac{1}{2} - i$; $\quad 5 - 12i$.

Trova per quali valori di x il numero complesso ha il modulo indicato.

54 $1 + x - 5i$, modulo 13. $[-13, 11]$

55 $2k + 1 + ki - i$, modulo 3. $\left[1, -\frac{7}{5}\right]$

56 **TEST** Quale dei seguenti numeri complessi ha modulo a, con $a \in \mathbb{R}$?

- **A** $a + ai$
- **B** $\frac{a^2 + 1}{a} - \frac{i}{a}$
- **C** $\frac{3}{2}a - \frac{a}{2}i$
- **D** $2a - ai$
- **E** $\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{a}{2}i$

57 **ASSOCIA** a ogni numero complesso il suo modulo (considera $x \in \mathbb{R}^+$).

1) $x + 2xi$	a) $(x + 2)\sqrt{2}$
2) $(x + 2) + (x + 2)i$	b) $\sqrt{2}\,x$
3) $ix - x$	c) $\frac{1}{2}x\sqrt{5}$
4) $\frac{x}{2} - xi$	d) $\frac{\sqrt{2}}{2}x$
5) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xi$	e) $x\sqrt{5}$

I complessi coniugati e gli opposti

58 Scrivi il numero complesso coniugato e l'opposto dei seguenti numeri complessi.

$$3-6i; \quad 2+\sqrt{3}\,i; \quad \frac{1}{3}-i; \quad -1+i; \quad -\frac{1}{4}-2i.$$

59 Dati i due numeri complessi $z_1 = 2a - 1 + 3bi$ e $z_2 = a + b - ai$, determina a e b in modo che:

a) $z_1 = z_2$;

b) $z_1 = \overline{z_2}$;

c) z_1 e z_2 siano opposti.

$\left[\text{a) } a=\frac{3}{4}, b=-\frac{1}{4}; \text{ b) } a=\frac{3}{2}, b=\frac{1}{2}; \text{ c) } a=\frac{3}{10}, b=\frac{1}{10}\right]$

60 Considera i due numeri complessi

$$z_1 = x + 2 - yi \;\text{ e }\; z_2 = x - y + 2xi$$

e stabilisci per quali valori di x e $y \in \mathbb{R}$ essi sono:

a) opposti;

b) coniugati.

[a) impossibile; b) $x = -1$ e $y = -2$]

2. IL CALCOLO CON I NUMERI IMMAGINARI

Teoria a pag. 922

Le quattro operazioni

61 **ESERCIZIO GUIDA**

Eseguiamo le quattro operazioni fra i numeri immaginari $2i$ e $5i$.

Per eseguire i calcoli, trattiamo i numeri immaginari come monomi nella lettera i; dobbiamo però ricordare che ***i* è un numero** e che $\boldsymbol{i^2 = -1}$:

$$2i + 5i = (2+5)i = 7i, \qquad 2i \cdot 5i = 2 \cdot 5 \cdot i \cdot i = 10 \cdot (-1) = -10,$$

$$2i - 5i = (2-5)i = -3i, \qquad 2i : 5i = \frac{2\cancel{i}}{5\cancel{i}} = \frac{2}{5}.$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

62 $i - 2i$; $\quad 4i + 2i$; $\quad 8i - 3i$.

63 $i + \frac{1}{2}i$; $\quad i - \frac{1}{2}i$; $\quad \frac{1}{3}i + \frac{1}{2}i$.

64 $i \cdot 9i$; $\quad i \cdot \left(-\frac{1}{2}i\right)$; $\quad \frac{3}{4}i \cdot \frac{2}{9}i$.

65 $3i : i$; $\quad 5i : 2i$; $\quad 4i : \left(-\frac{1}{2}i\right)$.

66 $\left[(2i-3i)\cdot\frac{4}{3}i\right] : \frac{2}{3}$ [2]

67 $\left(\frac{1}{3}i - \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{3}i + \frac{1}{2}i\right) : \frac{5}{4i \cdot 9i}$ [-1]

68 $-5i - (14i - 6i) + (-2i + 6i)$ [$-9i$]

69 $6i(-2i+5i) - \frac{1}{2}i(13i - 7i) + i(-2i)$ [-13]

70 $8i : (-4i) + 16i(-2i + i)$ [14]

71 $i(2i-5i)^2 - (9i - i) : (6i - 4i)^2$ [$-7i$]

72 $(\sqrt{2}\,i)^2 - 4i(-5i) + 6\sqrt{2}\,i : (-\sqrt{2}\,i)$ [-28]

Le potenze

73 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo i^{35}.

Sappiamo che $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$. I valori si ripetono secondo la regola $i^n = i^{\text{resto di } n:4}$.
Applichiamo la regola: $35 : 4 = 8$, con resto 3, quindi $i^{35} = i^3 = -i$.

Calcola il valore delle seguenti espressioni contenenti potenze di numeri immaginari.

74 i^4; i^5; i^6; i^7.

75 $-i^8$; $-i^{12}$; $-i^{33}$; $-i^{49}$.

76 $(\sqrt{2}\,i)^2$; $(-3\sqrt{3}\,i)^3$; $(-2\sqrt{5}\,i)^2$.

77 $-\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}i\right)^2$; $-\left(-\frac{3}{5}\sqrt{5}\,i\right)^3$; $\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^5$.

78 $i^5 + 2i^{17} - 3i^{25}$; $2i^{14} + 7i^{22} - 5i^{30}$.

79 $\dfrac{i^{31} - 5i^{39} + 4i^{47}}{2i^{21} + 3i^{41}}$ [0]

80 $\left(\frac{4}{5}i^{17} - \frac{1}{3}i^{29}\right) : \left(\frac{1}{2}i^{36} + \frac{1}{5}i^{52}\right)$ $\left[\frac{2}{3}i\right]$

81 $(2i)^4 - i^5 + (-i)^3 + (-2i)^6$ [-48]

82 $(-5i)^2 - i^{30} + 4i^{20} : i^6 - i^2$ [-27]

83 $\dfrac{\frac{1}{2}i^{21} - \frac{1}{3}i^{41}}{\frac{3}{2}i^{31} - \frac{2}{3}i^{35}} \cdot (2i^{17} + 3i^5)$ [$-i$]

84 $-2i^{27} : (-i)^5 + 4i^8 - i(-i)^4(-2i)^3$ [10]

85 $(-2i^2)^3(-i)^8 + \dfrac{8i - 6i^5}{2i} - (-i)^7 i^{15}$ [8]

86 $\dfrac{(2i - i^3)(-i^{25} - 3i^{13})^2}{(-2i)^4} + i^{12}(-i)^2 i^5$ [$-4i$]

87 $\dfrac{-2i^5}{-5i} \cdot [-6i - (-i)^5]^2 - i(i^8 - 2i^{20})(i^7 - i^9)$ [-8]

88 $[2i - 3(-i)^3]^5 + [(-2i)^3]^5 + (3i^7 - 5i)^5$ [$-i$]

89 $(i^2)^4 + i(-i^2)i^3 + 4(-i)^4(-2i)^2(-i^3)^2$ [18]

90 $[-3i^3 + 2i^4(-i)]^3 + (-i)[(-4i)^2 + (i^2)^5]$ [$16i$]

3. IL CALCOLO CON I NUMERI COMPLESSI IN FORMA ALGEBRICA

► Teoria a pag. 924

L'addizione e la sottrazione

91 **ESERCIZIO GUIDA**

Eseguiamo l'addizione e la sottrazione fra $4 + 3i$ e $-5 + 2i$.

Addizione

$$(4 + 3i) + (-5 + 2i) =$$

Sommiamo tra loro le parti reali e le parti immaginarie:

$$= (4 - 5) + (3i + 2i) = -1 + 5i.$$

Sottrazione

$$(4 + 3i) - (-5 + 2i) =$$

Trasformiamo la sottrazione in un'addizione, cambiando il segno del sottraendo:

$$= (4 + 3i) + (5 - 2i) =$$
$$= (4 + 5) + (3i - 2i) = 9 + i.$$

Esegui le seguenti addizioni e sottrazioni fra numeri complessi.

92 $(4+2i)+(4-2i)$; $(6-3i)+(-6+3i)$; $(2+7i)+(-12i)+7$.

93 $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i\right)$; $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}i\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i\right)$; $(-9-i)+(2+i)-(-5+2i)$.

94 $(2-3i)-\left(\frac{1}{7}i\right)$; $\frac{3}{4}i+\left(2-\frac{1}{3}i\right)$; $\left(\frac{1}{2}-6i\right)-\left(\frac{3}{2}+6i\right)+2i$.

95 $\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$; $\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{3}i\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{3}i\right)$; $(-2i)-(-4+7i)-(-5i)$.

La moltiplicazione

96 **ESERCIZIO GUIDA**

Moltiplichiamo i seguenti numeri complessi:

a) $2-3i$ e $-6+i$; b) $3-2i$ e $3+2i$.

a) Utilizziamo la regola di moltiplicazione di due binomi (senza dimenticare che i è un numero e $i^2=-1$):

$$(2-3i)(-6+i)=-12+2i+18i-3i^2=-12+20i+3=-9+20i.$$

b) I numeri dati sono complessi coniugati. Poiché $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, il loro prodotto è un numero complesso reale:

$$(3-2i)(3+2i)=9-4i^2=9+4=13.$$

Esegui le seguenti moltiplicazioni fra numeri complessi.

97 $(1-i)(1+i)$; $(2-3i)(2+3i)$.

98 $(2-5i)(1+i)$; $(8+2i)(-4-2i)$.

99 $(6+3i)(6+2i)$; $(-7+2i)(7+2i)$.

100 $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i\right)(2+3i)$; $\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{3}i\right)\left(-\frac{5}{4}-\frac{3}{2}i\right)$.

La divisione

101 **ESERCIZIO GUIDA**

Eseguiamo la divisione fra i numeri complessi $2+i$ e $1-i$.

Scriviamo il quoziente sotto forma di frazione, moltiplichiamo numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore, ossia $1+i$, ed eseguiamo i calcoli:

$$\frac{2+i}{1-i}=\frac{2+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{2+2i+i+i^2}{1-i^2}=\frac{2+3i-1}{1+1}=\frac{1+3i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i.$$

Calcola i seguenti quozienti fra numeri complessi.

102 $(1+i):i$; $2:i$; $1:(3-2i)$.

103 $\frac{3+4i}{2i}$; $\frac{-6-2i}{5i}$; $\frac{8-3i}{2i}$.

104 $\frac{73}{8-3i}$; $\frac{40}{4+2i}$; $\frac{22i}{3-i}$.

105 $\frac{1-i}{2+i}$; $\frac{2-i}{2+3i}$; $\frac{3-i}{3+2i}$.

La potenza

106 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo il quadrato di $-2-i$.

Applichiamo la regola del quadrato di un binomio $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ e sostituiamo -1 a i^2:

$$(-2-i)^2 = 4 + i^2 + 4i = 4 - 1 + 4i = 3 + 4i.$$

Calcola il quadrato dei seguenti numeri complessi.

107 $1+i$; $1-i$; $-1+i$.

108 $1+2i$; $1-2i$; $-1+2i$.

109 $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$; $\frac{1}{4}-i$; $-5-\frac{1}{5}i$.

110 $2-3i$; $\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\,i$; $\frac{3}{2}-2i$.

Calcola il cubo dei seguenti numeri complessi.

111 $1+i$; $1-i$; $2+i$.

112 $2+3i$; $3-2i$; $1-5i$.

ESERCIZI VARI La forma algebrica

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

113 $\left(\frac{2}{3}+3i\right)+\left(\frac{1}{3}-2i\right)$; $(2-3i)(5+4i)$; $\frac{3-5i}{2+i}$; $(3-2i)^2$.

114 $3+2i-\frac{5}{4}-\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right)i-\left(2-\frac{1}{2}\right)+\frac{16}{15}i$ $\left[\frac{1}{4}+3i\right]$

115 $(3+2i)(3-2i)+(2-4i)3i-(6+2i)^2$ $[-(7+18i)]$

116 $\left[(2-3i):\frac{13}{2+3i}-(4+3i)\left(\frac{4}{25}-\frac{3}{25}i\right)\right]:12$ $[0]$

117 $\left(\frac{1+2i}{i-1}+\frac{39i}{2+3i}-\frac{19}{2}\right)\cdot 2i+6i$ $[-9+6i]$

118 $\frac{3+i}{2-i}-\frac{i-2}{3-i}+(i-1)(i+2)-i$ $\left[\frac{9i-13}{10}\right]$

119 $(2+3i)(2-3i)-(3+i)^2+i(3-2i)-6(i+2)$ $[-5-9i]$

120 $\frac{(2i^{28}-i^{45})^2}{2i^{41}}$ $\left[-2-\frac{3}{2}i\right]$

121 $\frac{9+7i}{2+i}+\frac{-2i^4+3i^3-2i^2+3i}{3-2i}$ $[5+i]$

122 $\frac{4i}{1-2i}+\frac{1-i}{1+2i}+\frac{12}{5}$ $\left[\frac{3+i}{5}\right]$

123 $\frac{1-i}{1-i^2}+\frac{1}{1-i}+\frac{1-2i}{2i}$ $\left[-\frac{i}{2}\right]$

124 $\frac{1+i}{(2-i)^2}-\frac{i}{2+i}$ $\left[\frac{-3i-6}{25}\right]$

125 $\frac{3-4i}{i}\cdot(1+i)-2$ $[-7i-3]$

126 $(1-i)(3-2i)-\frac{i}{4-2i}$ $\left[\frac{11-52i}{10}\right]$

127 $(1+i)^3-\frac{(1-i)^2}{i}$ $[2i]$

128 $\frac{1}{2-i}+\frac{1-i}{i(1+i)}$ $\left[\frac{i-3}{5}\right]$

129 $\frac{10-5i}{3-i}+2-i-\frac{1+8i}{1+3i}$ $[3-2i]$

130 $\frac{(2i)^2-(1+i)^2}{i(2+3i)}-i(2-i)$ $\left[\frac{-5-12i}{13}\right]$

131 $\left(\frac{2-i}{3-4i}\right)^3+(1-i)^2$ $\left[\frac{2-239i}{125}\right]$

132 $\frac{2i}{(2-i)^2}-(1-i)^2-\frac{i(1+i)}{2}$ $\left[\frac{9+87i}{50}\right]$

133 $\frac{1-i^2}{1+i^4}-\frac{i^5}{i(i-1)}-2i$ $\left[\frac{3-3i}{2}\right]$

---

134 $\left(\frac{1-i}{2i-1}\right)^2+\frac{2i}{1-2i}$ $\left[\frac{16i-12}{25}\right]$

135 $(2-i)^3+\frac{1+i^{24}}{1+i^{23}}-\frac{25(3+4i)}{3-4i}-(3+i)(3-i)$ $[-34i]$

136 $(3-2i)^3+\frac{1-i^{21}}{-1+i^{19}}-\frac{5(2+i)}{2-i}-(2+i)(2-i)$ $[-17-49i]$

137 $\frac{18i^{18}+7i^6}{(2i^{52}+i^{53})^2}:\frac{4i^{36}-2i^{20}}{(2i^8+i^7-i^{20})^2}$ $[4+3i]$

138 $\frac{3i^{10}}{(2-i^{21})^2}+\frac{\sqrt{2}\,i}{(3-i)^2}$ $\left[\frac{-18-3\sqrt{2}}{50}+\frac{2\sqrt{2}-12}{25}i\right]$

139 $(3-2i)(3+2i)+(1-3i)^2+(1-i)^3$ $[3-8i]$

140 $\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)+\frac{i(2-i)}{(\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i)^2}-(1+2i)^3$ $\left[\frac{74+11i}{6}\right]$

141 $(1+i)^5+4i$ $[-4]$

142 $4\frac{2-i}{3+i}-i^{28}+\left[\frac{2i}{i-1}(4-i)-(2i+1)^2\right]\cdot 2i$ $[19+10i]$

143 $\frac{5(1+2i)(1-2i)}{(2i-1)^2}:\frac{9i^{24}i^{17}}{(3i^{14}+i^{47}-2i)^2}-\frac{5}{i-2}$ $[-4+9i]$

144 $\frac{3i}{2+i}-\frac{i-1}{2-i}-\frac{3(2-i)}{2i+1}+2(i-3)^2+(i+1)(1-i)-\frac{1}{5}$ $[19-8i]$

145 $6i^{12}+\frac{i^{15}+1}{3-i^{13}}-7i-\frac{4-2i}{i^{21}}+(2-3i)i^{11}-\frac{2-i}{5}$ $[5(1-i)]$

146 $\frac{1+2i}{3-2i}+\frac{1-i}{1+2i}+\frac{1-i}{5}-\frac{i(i-1)}{13}$ $\left[-\frac{7}{65}i\right]$

147 $\frac{i(1+i)}{2-i}-\frac{3+2i}{1-2i}-(2-i)(2+3i)i$ $\left[\frac{18-42i}{5}\right]$

148 $(1+i)\left(\frac{2}{3+i}-\frac{1+i}{3-i}\right)+i(i+2)$ $\left[\frac{9}{5}i\right]$

149 **ASSOCIA** a ogni espressione il relativo risultato.

1)	$(4-i)(3+2i)$	a)	$\frac{i+1}{2}$
2)	$\frac{i}{1+i}$	b)	0
3)	$(-1-i)^2$	c)	$14+5i$
4)	$(i^4-1)(i+1)$	d)	$2i$
5)	i^8+i^{20}	e)	2

150 **TEST** Se $f(x)=\left(\frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x}\right)^3$ e $i=\sqrt{-1}$, allora $f(i)$ è uguale a:

A i. B -1. C $-i$. D 1. E $2i$.

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2000)

151 Express the complex number below in the form $a+bi$, where a and b are real numbers:

$$\frac{3-2i}{5+i}.$$

(USA *Southern Illinois University Carbondale*, Final Exam, Fall 2002)

$\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right]$

152 Let $w=\frac{1+i}{2-2i}$. Express w in the form $p+qi$, $p,\ q\in\mathbb{R}$. Calculate $|w|$. Verify that $|w|^2=w\cdot\overline{w}$, where $\overline{w}$ is the complex conjugate of w.

(IR *Leaving Certificate Examination*, Ordinary Level, 1995)

$\left[w=\frac{1}{2}i; |w|=\frac{1}{2}\right]$

153 Dato il numero complesso $z=2+i$, determina $\overline{z}$, $|z|$, $\overline{z}+z$, $|\overline{z}|$. $[2-i, \sqrt{5}, 4, \sqrt{5}]$

154 Considera il numero complesso $z=3-4i$. Calcola $\overline{\overline{z}}$, $z\cdot\overline{z}$, $|\overline{z}|^2$, $|z+\overline{z}|$.

$[3-4i, 25, 25, 6]$

155 Trova per quali valori di k il prodotto
$(k+3+ki)\cdot(1-2ki)$
risulta un numero reale.

$\left[0, -\frac{5}{2}\right]$

156 Calcola per quale valore di a il prodotto
$(a-2+3ai)\cdot(1-i)^2$
risulta un numero immaginario. $[0]$

157 Trova il coniugato del numero complesso z, essendo $z=\frac{2-3i}{1+i}$. $\left[-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i\right]$

158 Considera $z_1=a+bi$ e $z_2=c+di$ e i loro coniugati $\overline{z_1}$ e $\overline{z_2}$.
Dimostra che:
a) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$;
b) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;
c) $\overline{z_1^{-1}}=(\overline{z_1})^{-1}$.

159 Dato $z=\frac{2i-2}{(1+\sqrt{3}\,i)(1+i)}$, trova:
a) il suo modulo;
b) il suo coniugato;
c) il suo opposto.

$\left[\text{a) } 1;\ \text{b) } \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i;\ \text{c) } -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right]$

160 **TEST** Dati $z_1=k+1+i(k-1)$ e $z_2=2k-ki$, indica il valore di k per cui $\frac{z_1}{z_2}$ è un numero reale.

A $\frac{1}{3}$.
B -3.
C 0 e -3.
D 0 e $\frac{1}{3}$.
E $\forall k\neq 0$.

161 **TEST** Il prodotto $(x-2i)(1-x+xi)$ è un numero immaginario per x uguale a:

A $-3, 0$.
B $-1\pm\sqrt{3}$.
C $0, 3$.
D 3.
E 0.

162 Dato il numero complesso $z=2-2i$, calcola $|z|$, z^2, z^3, $(\overline{z})^3-z\cdot z^2$.
$[2\sqrt{2}, -8i, -16-16i, 32i]$

163 **VERO O FALSO?** Dato il numero complesso z, si ha:

a) $\overline{\overline{z}}=z$. V F
b) $|z\cdot\overline{z}|=|z|\cdot|\overline{z}|$. V F
c) $\frac{|z|}{|\overline{z}|}=1$. V F
d) $3\overline{z}=\overline{3z}$. V F
e) $z^2=(\overline{z})^2$. V F

164 Dato il numero complesso $z = a + bi$, determina a e b in modo che il prodotto $z \cdot \overline{z}^{-1}$ sia:

a) reale; b) immaginario.

$[a) (a = 0 \wedge b \neq 0) \vee (b = 0 \wedge a \neq 0);$ $b)\ a = \pm b \neq 0]$

165 Dati i due numeri complessi

$z_1 = 2p - q + 1 + (q - 2)i$,

$z_2 = p + 3q - 2 + 2pi$,

trova per quali valori reali di p e q risulta:

a) $z_1 = -\overline{z_2}$; b) $z_1 + z_2 = 0$.

$\left[a)\ p = -\frac{3}{7} \wedge q = \frac{8}{7};\ b)\ p = 3 \wedge q = -4\right]$

166 Dato il numero $z = a + 2 - 2i$, trova a in modo che:

a) z^2 sia un numero reale;

b) $\overline{z}^2$ sia un numero immaginario;

c) $z \cdot \overline{z} = 13$.

[a) -2; b) $0, -4$; c) $1, -5$]

167 Considera i due numeri complessi

$z_1 = -1 - 2i,\ z_2 = 2 - i$

e trova per quali $p, q \in \mathbb{R}$ il numero $z = pz_1 + qz_2$:

a) è immaginario;

b) è reale;

c) ha modulo $|z| = 2\sqrt{5}$.

[a) $p = 2q$; b) $q = -2p$; c) $p^2 + q^2 = 4$]

168 Sia $z = a + bi$ un numero complesso. Dimostra che $z = \overline{z}^{-1}$ *soltanto se* $a^2 + b^2 = 1$.
Trova per quali valori reali di x il numero $z = x - 1 + (x - 2)i$ verifica la condizione precedente. [1; 2]

4. VETTORI E NUMERI COMPLESSI

▶ Teoria a pag. 926

Il piano di Gauss

169 Rappresenta nel piano di Gauss i seguenti numeri complessi: $-1 - i$; $2i$; -4; $4 + i$; $6i$; $1 + i$; $\frac{1}{2} - i$; $1 - 3i$.

170 Dati i seguenti punti nel piano di Gauss, scrivi i numeri complessi a essi associati.

$$A(1;0),\ B(-2;-4),\ C(0;-3),\ D\left(-\frac{1}{2};1\right),\ E(2;-5),\ F\left(1;\frac{1}{2}\right).$$

171 Dati i seguenti numeri complessi, determina i loro coniugati e rappresenta entrambi nel piano di Gauss. Cosa noti?

$3 + i,\quad -2 - i,\quad -4 + 2i,\quad 1 - 3i.$

172 Come nell'esercizio precedente, ma considerando gli opposti dei numeri complessi.

$2 - 5i,\quad -3 - 2i,\quad 4 + i,\quad -1 + 3i.$

Rappresenta nel piano complesso i punti corrispondenti ai numeri complessi z che verificano le seguenti equazioni e disequazioni.

173 $|z| = 4$

174 $|z| < 2$

175 $2 < |z| < 3$

176 $|z - 3| = 1$

177 $|2z - 3| = |z + i|$

178 $|z - 1| \leq |2 - z|$

179 Considera i numeri complessi $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = -2 + 2i$.

a) Calcola per quali valori reali di h e k risulta $hz_1 + kz_2 = 1 + i$.

b) Determina i numeri complessi $z = x + yi$ tali che $|z - z_1| = |z - z_2|$ e rappresentali nel piano di Gauss.

$\left[a)\ h = \frac{1}{3} \wedge k = -\frac{1}{6};\ b)\ 2x + y - 3 = 0\right]$

I vettori e i numeri complessi

180 Rappresenta il vettore associato a ogni numero complesso: $2 - i$; i; $4 + 2i$; 3; $2i$; $\frac{1}{2} + 4i$; $\frac{1+i}{3}$; $6 - 2i$.

181 Considera i numeri complessi $6 + i$ e $-1 + 5i$. Rappresenta i vettori associati, determina la loro somma con la regola del parallelogramma e verifica che il vettore ottenuto è associato alla somma dei numeri dati.

182 Il vettore corrispondente al numero complesso opposto di $a + bi$ è opposto al vettore individuato da $a + bi$. Verificalo.

183 Disegna nel piano cartesiano i vettori aventi per componenti le seguenti coppie di numeri.

$(1; -2)$, $(2; 5)$, $(3; -1)$, $(-4; -6)$, $(7; 1)$.

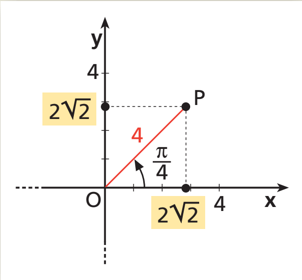
5. LE COORDINATE POLARI

▶ Teoria a pag. 928

Dalle coordinate polari alle coordinate cartesiane

184 **ESERCIZIO GUIDA**

Trasformiamo le coordinate polari di $P\left[4; \frac{\pi}{4}\right]$ in coordinate cartesiane.



Le formule di trasformazione in coordinate cartesiane sono:

$$\begin{cases} x_P = r\cos\alpha \\ y_P = r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

Pertanto: $x_P = 4\cos\frac{\pi}{4} = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$, $y_P = 4\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4} = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

Il punto P ha coordinate cartesiane $(2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$.

Trasforma in coordinate cartesiane le coordinate polari dei seguenti punti.

185 $A\left[1; \frac{\pi}{6}\right]$, $B\left[2; \frac{\pi}{3}\right]$, $C\left[1; \frac{2}{3}\pi\right]$, $D\left[4; \frac{\pi}{2}\right]$, $E\left[2; \frac{11}{6}\pi\right]$.

186 $P\left[6; \frac{5}{6}\pi\right]$, $Q\left[1; \frac{3}{2}\pi\right]$, $R\left[\frac{1}{2}; 2\pi\right]$, $S\left[\frac{1}{4}; \pi\right]$, $T\left[3; \frac{4}{3}\pi\right]$.

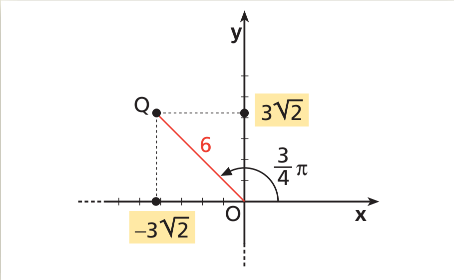
Dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari

187 **ESERCIZIO GUIDA**

Trasformiamo in coordinate polari le coordinate cartesiane del punto $Q(-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$.

Le formule di trasformazione sono:

$$r = \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2},\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y_Q}{x_Q}.$$



Calcoliamo r:

$$r = \sqrt{(-3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{18 + 18} = \sqrt{36} = 6.$$

Calcoliamo α:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}} = -1 \quad \to \quad \alpha = \frac{3}{4}\pi + k\pi.$$

Poiché ci troviamo nel secondo quadrante, scegliamo $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ e otteniamo: $\left[6; \frac{3}{4}\pi\right]$.

Trasforma in coordinate polari le coordinate cartesiane dei seguenti punti.

188 $A(4\sqrt{3};4)$, $B(0;2)$, $C(5\sqrt{2};5\sqrt{2})$, $D\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $E\left(-\frac{1}{4};0\right)$.
$\left[A\left[8;\frac{\pi}{6}\right], B\left[2;\frac{\pi}{2}\right], C\left[10;\frac{\pi}{4}\right], D\left[\frac{1}{2};\frac{\pi}{3}\right], E\left[\frac{1}{4};\pi\right]\right]$

189 $A\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{6};-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, $C\left(\frac{5\sqrt{3}}{2};-\frac{5}{2}\right)$. $\left[A\left[3;\frac{5}{6}\pi\right], B\left[\frac{1}{3};\frac{4}{3}\pi\right], C\left[5;\frac{11}{6}\pi\right]\right]$

Dato il seguente numero complesso, rappresenta il corrispondente vettore $\overrightarrow{OP}$ e determina le coordinate polari di *P*.

190 $4-4i$ **192** $-2+2\sqrt{3}\,i$ **194** 2

191 $5i$ **193** $1+\frac{5}{2}i$ **195** $-\sqrt{3}-i$

Determina modulo e argomento dei seguenti numeri complessi.

196 $5-5i$; $6i$; -8; 3π. $\left[5\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi; 6, \frac{\pi}{2}; 8, \pi; 3\pi, 0\right]$

197 $1-\sqrt{3}\,i$; $2\sqrt{3}-2i$; $-5i$; 2. $\left[2, \frac{5}{3}\pi; 4, \frac{11}{6}\pi; 5, \frac{3\pi}{2}; 2, 0\right]$

6. LE COORDINATE POLARI E LE EQUAZIONI DELLE CURVE

▶ Teoria a pag. 930

198 Dati i punti $A\left[2;\frac{\pi}{6}\right]$ e $B\left[1;\frac{\pi}{3}\right]$ in coordinate polari, determina la misura di AB. $\left[\sqrt{5-2\sqrt{3}}\right]$

199 Trova il perimetro del triangolo ABC i cui vertici in coordinate polari sono $A[0;0]$, $B\left[4;\frac{\pi}{3}\right]$, $C\left[6;\frac{2}{3}\pi\right]$. $[10+2\sqrt{7}]$

200 Trova le coordinate polari del punto medio M del segmento AB, note le coordinate cartesiane di $A(2;5)$ e $B(-4;3)$. $[M[\sqrt{17};\pi-\text{arctg}\,4]]$

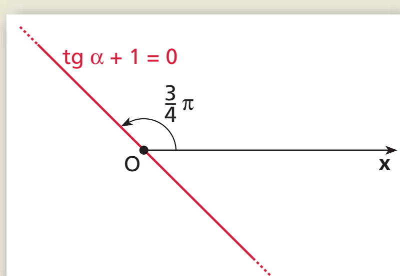
201 I punti A e B, dei quali sono date le coordinate polari $A\left[4;-\frac{4\pi}{15}\right]$, $B\left[3;\frac{\pi}{15}\right]$, sono due vertici consecutivi di un quadrato. Dopo aver disegnato i punti sul piano cartesiano, calcola l'area del quadrato. [13]

202 ESERCIZIO GUIDA

Rappresentiamo nel riferimento polare le rette di equazione:

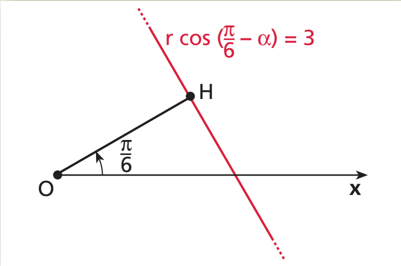
a) $\text{tg}\,\alpha+1=0$; **b)** $r\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=3$.

a) Nel riferimento polare l'equazione $\text{tg}\,\alpha=m$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, rappresenta una retta passante per l'origine.
L'equazione $\text{tg}\,\alpha+1=0$ indica una retta che forma un angolo di $\frac{3}{4}\pi$ con l'asse polare.



b) L'equazione di una retta non passante per l'origine in coordinate polari è: $d = r\cos(\theta - \alpha)$, dove d è la distanza $\overline{OH}$ della retta dal polo O e θ è l'angolo che il segmento orientato $\overrightarrow{OH}$ forma con l'asse polare. Nell'equazione assegnata è $d = 3$ e $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Disegniamo allora un segmento OH lungo 3 che forma un angolo uguale a $\frac{\pi}{6}$ con l'asse polare e tracciamo la retta perpendicolare a OH passante per H.



Rappresenta nel riferimento polare le rette con le seguenti equazioni.

203 $\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{3} = 0$

204 $r\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

205 $r\cos\alpha = 6$

206 $r = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}$

207 $r\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 4$

208 $\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$

209 $r\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{2}$

210 $3r\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \alpha\right) = 4$

211 Dimostra che l'equazione $r\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -2$ nel riferimento polare rappresenta una retta.

212 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione:

a) in coordinate polari della retta di equazione cartesiana $y = \sqrt{3}x + 1$;

b) cartesiana della retta di equazione $r\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 6$ in coordinate polari.

a) Il coefficiente angolare della retta è $\sqrt{3}$, quindi $O\widehat{B}A = \frac{\pi}{3}$.

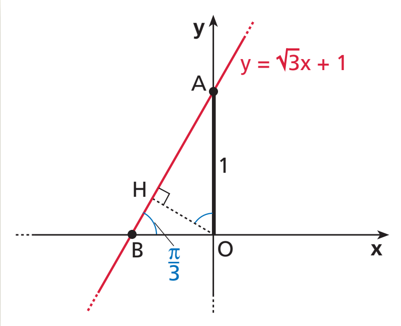
Anche $H\widehat{O}A = \frac{\pi}{3}$, da cui: $\overline{OH} = \frac{1}{2}\,\overline{AO} = \frac{1}{2}$.

L'angolo fra il semiasse positivo delle x e la semiretta OH è:

$$\sigma = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi.$$

Pertanto l'equazione della retta in coordinate polari è:

$$r\cos\left(\frac{5}{6}\pi - \alpha\right) = \frac{1}{2}.$$



b) Sviluppiamo con la formula di sottrazione del coseno,

$$r\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 6 \quad\rightarrow\quad r\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\alpha\right) = 6,$$

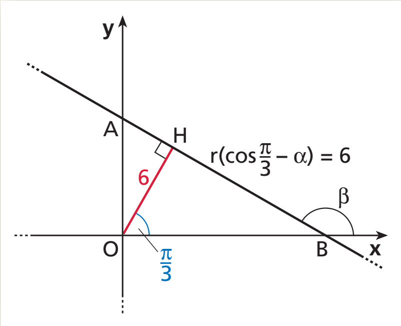
e, posto $r\cos\alpha = x$ e $r\operatorname{sen}\alpha = y$, si ha:

$$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 6 \quad\rightarrow\quad x + \sqrt{3}y = 12,$$

che è l'equazione cartesiana della retta.

Puoi anche determinare l'equazione ricavando, con considerazioni geometriche, che l'ordinata all'origine $\overline{OA} = 4\sqrt{3}$ e che il coefficiente angolare è:

$$m = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Scrivi l'equazione polare delle rette con le seguenti equazioni in forma cartesiana.

213 $x = \frac{1}{2}$; $\quad y = x + 1$.

214 $y = 4x$; $\quad y = -\frac{1}{2}x - 2$.

215 $y = -x + 3$; $\quad 3y = \sqrt{3}x - 1$.

216 $y = 3$; $\quad 2x - y = 9$.

Scrivi le equazioni cartesiane delle rette con le seguenti equazioni in forma polare.

217 $r\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 4$

218 $r\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{6}\pi + \alpha\right) = 1$

219 $r\cos\left(\frac{3}{4}\pi + \alpha\right) = -1$

220 $r\cos\left(-\frac{2}{3}\pi - \alpha\right) = 2$

221 Scrivi in forma polare le equazioni delle bisettrici dei quadranti.

222 Determina l'equazione di una retta che forma con l'asse polare un angolo di $\frac{5}{6}\pi$ e ha distanza 2 dall'origine. $\left[r\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 2\right]$

223 Sono date le rette di equazione polare:

$$s_1:\ r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = 3, \qquad s_2:\ r\cos\left(\alpha + \frac{2}{3}\pi\right) = -1.$$

Dopo aver individuato due punti appartenenti a ciascuna delle due rette, traccia i loro grafici.

a) Determina l'angolo che ogni retta forma con l'asse polare e la distanza dal polo.
b) Trova le equazioni cartesiane delle due rette e il loro punto di intersezione in coordinate polari.

$\left[\text{a) } s_1\text{: } \frac{\pi}{6}, 3;\ s_2\text{: } \frac{5}{6}\pi, 1;\ \text{b) } \sqrt{3}y - x + 6 = 0;\ x + \sqrt{3}y - 2 = 0;\ P\left[\frac{2}{3}\sqrt{21}; \pi - \mathrm{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\right]\right]$

224 Confronta le rette di equazioni:

$$s_1:\ r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 3, \qquad s_2:\ r\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = 3.$$

Cosa hanno in comune e cosa le differenzia?

225 Determina l'equazione polare della retta che passa per i punti $A\left[\sqrt{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ e $B[1; \pi]$. $\left[r\cos\left(\frac{5}{6}\pi - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

226 Cosa rappresenta l'equazione $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ nel sistema di riferimento polare?

Rappresenta le curve con le seguenti equazioni in coordinate polari.

227 $r = 4\,\mathrm{sen}\,\alpha$

228 $r = 6\cos\alpha$

229 $r = 8(\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha)$

230 $r = \frac{3}{1 + \cos\alpha}$

231 Trova in coordinate cartesiane i punti di intersezione delle curve con le seguenti equazioni polari:

$$r = \frac{2}{\mathrm{sen}\,\alpha} \quad \text{e} \quad r = 2(\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha).$$

$[(0; 2), (2; 2)]$

232 Determina in coordinate cartesiane i punti di intersezione delle curve con le seguenti equazioni polari:

$$r = 2\cos\alpha \quad \text{e} \quad r = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

$[(1; -1), (1; 1)]$

Scrivi l'equazione polare delle circonferenze con le seguenti equazioni in forma cartesiana.

233 $x^2 + y^2 - 9 = 0$

234 $x^2 + y^2 - x + y = 0$

235 $x^2 + y^2 - 2x + 3 = 0$

Rappresenta le coniche con le seguenti equazioni cartesiane e scrivi le loro equazioni in coordinate polari.

236 $y = x^2 + 1$

237 $y = -x^2 + 2x + 3$

238 $x = -y^2 + y$

239 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

240 $x^2 - \dfrac{y^2}{9} = 1$

241 **ESERCIZIO GUIDA**

Tracciamo il grafico delle seguenti curve, dopo aver trasformato le loro equazioni in coordinate polari nelle corrispondenti equazioni cartesiane.

a) $r = \dfrac{2}{1 - \cos\alpha}$; b) $r = \dfrac{9}{5 - 4\cos\alpha}$.

a) Trasformiamo in coordinate cartesiane:

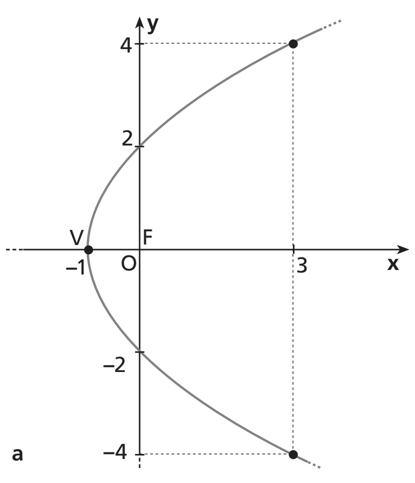
$$r - r\cos\alpha = 2 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - x = 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = x + 2.$$

Eleviamo al quadrato dopo aver posto $x \geq -2$:

$$\cancel{x^2} + y^2 = \cancel{x^2} + 4 + 4x \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{4}y^2 - 1.$$

Abbiamo ottenuto l'equazione di una parabola con asse coincidente con l'asse x. Il vertice è in $V(-1; 0)$, il fuoco F in $(0; 0)$ (figura a).



a

b) $r = \dfrac{9}{5 - 4\cos\alpha}$.

Trasformiamo in coordinate cartesiane:

$$5r - 4r\cos\alpha = 9$$

$$5\sqrt{x^2 + y^2} = 9 + 4x.$$

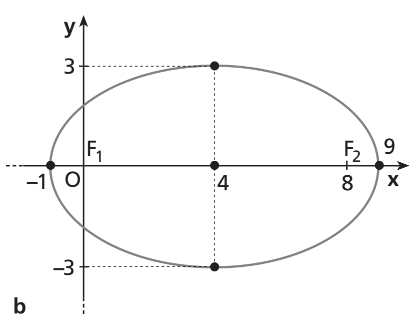
Elevando al quadrato e sommando, si ottiene:

$$9x^2 + 25y^2 - 72x - 81 = 0.$$

Si tratta di un'ellisse traslata che si può ricondurre in forma canonica:

$$9(x^2 - 8x + 16) - 9 \cdot 16 + 25y^2 = 81$$

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$



b

L'ellisse ha centro in $(4; 0)$, $a = 5$, $b = 3$, fuochi $F_1(0; 0)$, $F_2(8; 0)$ (figura b).

Traccia il grafico delle seguenti curve, dopo aver trasformato la loro equazione in coordinate polari nella corrispondente equazione cartesiana.

242 $r^2 \operatorname{sen} 2\alpha = 1$ [iperbole equilatera]

243 $r^2 - 4 \cdot r \cdot \operatorname{sen}\alpha + 3 = 0$ [circonferenza]

244 $r^2 \cdot \cos^2\alpha - 2 \cdot r \cdot \operatorname{sen}\alpha = 0$ [parabola]

245 $r \cdot \cos\alpha - 3 = 0$ [retta]

246 $\operatorname{sen} 2\alpha = 2$ [impossibile perché...]

247 $r^2 = 2 \cdot r \cdot \operatorname{sen}\alpha$ [circonferenza]

248 $r = \cos\alpha$ [circonferenza]

249 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ [semiretta]

250 $r = \frac{4}{1 - \operatorname{sen}\alpha}$ [parabola]

251 $r = \frac{2}{3 - 2\cos\alpha}$ [ellisse]

252 $3r = \frac{1}{1 + \operatorname{sen}\alpha}$ [parabola]

253 $r + 2\cos\alpha = 0$ [circonferenza]

254 $r = \frac{\pi}{4}$ [circonferenza con centro nell'origine e raggio...]

255 $r = \frac{\alpha}{4}$ (non conviene trasformare in coordinate cartesiane) $\left[\text{spirale a passo } \frac{\pi}{2}\right]$

256 Data la curva di equazione $r = 2\operatorname{sen} 4\alpha$, costruisci un grafico approssimativo individuando i punti di modulo massimo e gli angoli per i quali la curva è definita (si tratta di trovare gli angoli per i quali $r \geq 0$).
$\left[\text{i punti di massimo modulo sono 4 e le loro coordinate polari sono } \left[2; \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right]\right]$

257 Scrivi l'equazione in coordinate polari della circonferenza che ha il centro di coordinate (2; 0) e raggio 3.
$[r^2 - 4r\cos\alpha = 5]$

Determina i punti di intersezione, in coordinate polari, tra le seguenti curve. Trasforma le loro equazioni in forma cartesiana e rappresentale graficamente.

258 $r^2 \operatorname{sen} 2\alpha = 4$; $\quad \operatorname{tg}\alpha = 1$. $\left[\left[2; \frac{\pi}{4}\right]; \left[2; \frac{5}{4}\pi\right]\right]$

259 $r\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad r = 1$. $\left[\left[1; \frac{\pi}{2}\right]; [1; \pi]\right]$

260 $r = 2\operatorname{sen}\alpha$; $\quad r\operatorname{sen}\alpha = 1$. $\left[\left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right]; \left[\sqrt{2}; \frac{3}{4}\pi\right]\right]$

7. LA FORMA TRIGONOMETRICA DI UN NUMERO COMPLESSO

▶ Teoria a pag. 934

261 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo $1 - i$ in forma trigonometrica.

Dobbiamo scrivere $1 - i$ nella forma $r\cos\alpha + i\, r\operatorname{sen}\alpha$. Calcoliamo:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{-1}{1} = -1 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{3}{4}\pi \vee \alpha_2 = \frac{7}{4}\pi.$$

Scegliamo $\alpha = \frac{7}{4}\pi$ perché il punto corrispondente al numero complesso si trova nel quarto quadrante.
La forma trigonometrica di $1 - i$ è quindi:

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\operatorname{sen}\frac{7}{4}\pi\right).$$

Scrivi i seguenti numeri complessi in forma trigonometrica.

262 $6\sqrt{2}+6\sqrt{2}\,i$; $\quad -2i$. $\quad \left[12\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right);\ 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right)\right]$

263 $\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}i$; $\quad -2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i$. $\quad \left[\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right);\ 4\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi\right)\right]$

264 $-\frac{1}{4}$; $\quad \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. $\quad \left[\frac{1}{4}(\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi);\ \cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right]$

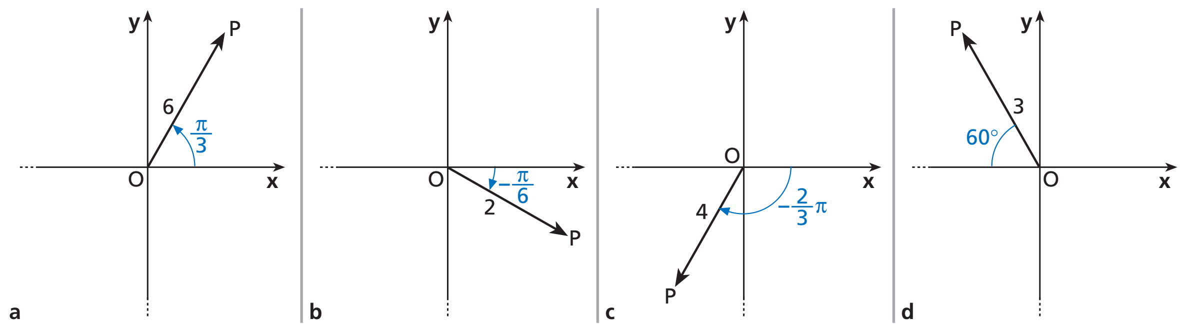
265 $-\sqrt{3}-i$; $\quad -\sqrt{3}$. $\quad \left[2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\operatorname{sen}\frac{7}{6}\pi\right);\ \sqrt{3}\,(\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi)\right]$

266 $2-2\sqrt{3}\,i$; $\quad 1$. $\quad \left[4\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\operatorname{sen}\frac{5}{3}\pi\right);\ \cos 0+i\operatorname{sen}0\right]$

267 $3\sqrt{2}-3\sqrt{2}\,i$; $\quad 2-2\sqrt{3}\,i$. $\quad \left[6\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\operatorname{sen}\frac{7}{4}\pi\right);\ 4\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\operatorname{sen}\frac{5}{3}\pi\right)\right]$

268 $-4i$; $\quad \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$. $\quad \left[4\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right);\ \frac{1}{2}\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\operatorname{sen}\frac{11}{6}\pi\right)\right]$

269 Scrivi in forma trigonometrica i numeri complessi individuati dai vettori delle figure.



Esprimi in forma algebrica i seguenti numeri complessi.

270 $\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi\right)$; $\quad 2\left(\cos\frac{3}{4}\pi-i\operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi\right)$. $\quad \left[-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ -\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i\right]$

271 $8(\cos\pi-i\operatorname{sen}\pi)$; $\quad 4\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\operatorname{sen}\frac{7}{6}\pi\right)$. $\quad [-8;\ -2\sqrt{3}-2i]$

272 $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{13}{4}\pi+i\operatorname{sen}\frac{13}{4}\pi\right)$; $\quad \cos\frac{7}{2}\pi+i\operatorname{sen}\frac{7}{2}\pi$. $\quad [-2-2i;\ -i]$

273 $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{8}{3}\pi-i\operatorname{sen}\frac{8}{3}\pi\right)$; $\quad 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi\right)$. $\quad \left[-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}i;\ -6-6i\right]$

8. OPERAZIONI FRA NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA

▶ Teoria a pag. 935

La moltiplicazione

274 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il prodotto dei seguenti numeri complessi e scriviamo il risultato in forma algebrica:

$$z_1=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi\right)\text{ e }z_2=\frac{2}{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi\right).$$

Ricordiamo che, se $z_1 = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$ e $z_2 = s(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)$, il loro prodotto è

$$z_1 z_2 = rs[\cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}\,(\alpha+\beta)],$$

quindi, essendo $r = \frac{1}{2}$, $s = \frac{2}{3}$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, $\beta = \frac{5}{6}\pi$, si ha:

$$z_1 z_2 = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{5}{6}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{5}{6}\pi\right)\right] = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\,\text{sen}\frac{3}{2}\pi\right).$$

Poiché $\cos\frac{3}{2}\pi = 0$ e $\text{sen}\frac{3}{2}\pi = -1$, sostituendo:

$$z_1 z_2 = \frac{1}{3}[0 + i(-1)] = -\frac{1}{3}i.$$

Calcola il prodotto dei seguenti numeri complessi e scrivi il risultato in forma algebrica.

275 $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$, $\quad z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$. $\quad [z_1 z_2 = i]$

276 $z_1 = \frac{4}{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\,\text{sen}\frac{5}{6}\pi\right)$, $\quad z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$. $\quad \left[z_1 z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i\right]$

277 $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$, $\quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\,\text{sen}\frac{5}{6}\pi\right)$. $\quad \left[z_1 z_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i\right]$

278 $z_1 = \left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{3}{4}\pi\right)$, $\quad z_2 = 2\left(\cos\frac{11}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{11}{4}\pi\right)$. $\quad [z_1 z_2 = -2i]$

279 $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\,\text{sen}\frac{11}{6}\pi\right)$, $\quad z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$. $\quad \left[z_1 z_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{4} + i\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right]$

280 $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\,\text{sen}\frac{2}{3}\pi\right)$, $\quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{5}{4}\pi\right)$. $\quad \left[z_1 z_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{4} + i\frac{-3+\sqrt{3}}{4}\right]$

281 $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$, $\quad z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$, $\quad z_3 = \frac{2}{5}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$. $\quad \left[z_1 z_2 z_3 = -\frac{6}{5} + \frac{6}{5}i\right]$

Calcola i seguenti prodotti sia in forma algebrica sia in forma trigonometrica e verifica l'uguaglianza dei risultati.

282 $(1+i)(\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i)$; $\quad i(2-2i)$. $\quad [2\sqrt{3};\ 2+2i]$

283 $(8-8i)(-3+3i)$; $\quad 2i(1+\sqrt{3}\,i)$. $\quad [48i;\ -2\sqrt{3}+2i]$

284 $(4+4i)(-3-3i)$; $\quad 6i(1+i)$. $\quad [-24i;\ -6+6i]$

285 $(\sqrt{3}-i)(1+\sqrt{3}\,i)$; $\quad (1-i)(\sqrt{3}-i)$. $\quad [2\sqrt{3}+2i;\ (\sqrt{3}-1)+i(-1-\sqrt{3})]$

La divisione

286 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il quoziente dei seguenti numeri complessi e scriviamo il risultato in forma algebrica:

$$z_1 = 6\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{7}{4}\pi\right) \text{ e } z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right).$$

Se $z_1 = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$ e $z_2 = s(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)$, il loro quoziente è:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s}[\cos(\alpha-\beta) + i\,\text{sen}(\alpha-\beta)].$$

In questo modo otteniamo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2}\left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 3\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{5}{4}\pi\right).$$

Per scrivere la soluzione in forma algebrica ricordiamo che $\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{sen}\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, quindi:

$$\frac{z_1}{z_2} = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i.$$

Calcola il quoziente fra i seguenti numeri complessi e scrivi il risultato in forma algebrica.

287 $z_1 = \cos\frac{7}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{7}{4}\pi$, $\quad z_2 = \cos\frac{3}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{3}{4}\pi$. $\quad\left[\frac{z_1}{z_2} = -1\right]$

288 $z_1 = \cos\frac{7}{6}\pi + i\,\text{sen}\frac{7}{6}\pi$, $\quad z_2 = \cos\frac{5}{6}\pi + i\,\text{sen}\frac{5}{6}\pi$. $\quad\left[\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$

289 $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$, $\quad z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$. $\quad\left[\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} - i\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right]$

290 $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\,\text{sen}\frac{11}{6}\pi\right)$, $\quad z_2 = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}$. $\quad\left[\frac{z_1}{z_2} = -1 + \sqrt{3} - (1+\sqrt{3})i\right]$

291 $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$, $\quad z_2 = \cos\frac{7}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{7}{4}\pi$. $\quad\left[\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i\right]$

292 $z_1 = (\sqrt{3}+1)\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\,\text{sen}\frac{7}{6}\pi\right)$, $\quad z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{5}{4}\pi\right)$. $\quad\left[\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} - i\frac{1}{4}\right]$

Calcola, utilizzando la forma trigonometrica, il reciproco di ognuno dei seguenti numeri complessi.

293 $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$; $\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. $\quad[\sqrt{3} - i; 1 - i]$

294 $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; $\quad -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. $\quad\left[-1 + i; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right]$

295 $-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\quad \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i$. $\quad\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i; \frac{\sqrt{3}}{3} + i\right]$

296 $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$; $\quad -1 + \sqrt{3}i$. $\quad\left[\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8}i; -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right]$

Calcola i seguenti quozienti sia in forma algebrica sia in forma trigonometrica e verifica l'uguaglianza dei risultati.

297 $\frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$; $\quad \frac{4 - 4i}{6 + 6i}$. $\quad\left[-i; -\frac{2}{3}i\right]$

298 $\frac{5 + 5i}{2i}$; $\quad \frac{-8i}{1 - \sqrt{3}i}$. $\quad\left[\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i; 2\sqrt{3} - 2i\right]$

299 $\frac{\sqrt{3} - 3i}{3 + \sqrt{3}i}$; $\quad \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{1 + i}$. $\quad[-i; -\sqrt{2}i]$

La potenza con esponente intero positivo

300 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo

$$\left[2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2}{3}\pi\right)\right]^5$$

ed esprimiamo il risultato ottenuto in forma algebrica.

Se $z = r(\cos\alpha + i\ \mathrm{sen}\ \alpha)$, possiamo applicare la formula di De Moivre:

$$[r(\cos\alpha + i\ \mathrm{sen}\ \alpha)]^n = r^n(\cos n\alpha + i\ \mathrm{sen}\ n\alpha).$$

Nel nostro caso è $n = 5$, quindi:

$$\left[2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2}{3}\pi\right)\right]^5 = 2^5\left[\cos\left(5\,\frac{2}{3}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(5\,\frac{2}{3}\pi\right)\right] = 32\left(\cos\frac{10}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{10}{3}\pi\right).$$

Essendo

$$\cos\frac{10}{3}\pi = -\frac{1}{2} \text{ e } \mathrm{sen}\,\frac{10}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

la forma algebrica del risultato ottenuto è:

$$32\left[-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = -\frac{32}{2} - \frac{32\sqrt{3}}{2}i = -16 - 16\sqrt{3}\,i.$$

Calcola le seguenti potenze di numeri complessi ed esprimi il risultato in forma algebrica.

301 $\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)\right]^6$ $\left[-\frac{1}{64}i\right]$

302 $\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)\right]^4$ $\left[\frac{16}{25}i\right]$

303 $\left[\sqrt[12]{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)\right]^6$ $[-\sqrt{3}]$

304 $\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4}{3}\pi\right)\right]^3$ $\left[\frac{1}{8}\right]$

305 $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{9}\right)\right]^3$ $[4 + 4\sqrt{3}\,i]$

306 $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{10}\right)\right]^5$ $[32i]$

307 $\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4}{3}\pi\right)^6$ $[1]$

308 $\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3}{4}\pi\right)^4$ $[-1]$

Calcola le seguenti potenze di numeri complessi in forma algebrica, dopo averli trasformati in forma trigonometrica.

309 $(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)^4$ $[-16]$

310 $(-2 - 2\sqrt{3}\,i)^3$ $[64]$

311 $\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$ $[3\sqrt{3}\,i]$

312 $(\sqrt{3} + i)^4$ $[-8 + 8\sqrt{3}\,i]$

313 $\left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)^4$ $\left[-\frac{81}{2} + \frac{81\sqrt{3}}{2}i\right]$

314 $[(\sqrt{2} - \sqrt{6}) + (-\sqrt{2} - \sqrt{6})i]^{12}$ $[-4^{12}]$

La potenza con esponente intero negativo

315 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-3}$**, esprimendo il risultato in forma algebrica.**

Sappiamo che, se $z = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$, allora $[r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)]^{-n} = \frac{1}{r^n}(\cos n\alpha - i\operatorname{sen} n\alpha)$, quindi:

$$\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-3} = \frac{1}{2^3}\left[\cos\left(3\frac{\pi}{6}\right) - i\operatorname{sen}\left(3\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right).$$

In forma algebrica il risultato è:

$$\frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8}[0 - i(1)] = -\frac{1}{8}i.$$

Calcola le seguenti potenze e scrivi il risultato in forma algebrica.

316 $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\operatorname{sen}\frac{7}{4}\pi\right)\right]^{-4}$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

317 $\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi\right)\right]^{-3}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{9}\right]$

318 $\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi\right)\right]^{-3}$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{9}i\right]$

319 $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-4}$ $\left[-\frac{1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}i\right]$

320 $\left[\frac{1}{3}\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\operatorname{sen}\frac{5}{3}\pi\right)\right]^{-6}$ $[3^6]$

321 $\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\operatorname{sen}\frac{5}{12}\pi\right)\right]^{-12}$ $[-8^6]$

Le espressioni con i numeri complessi in forma trigonometrica

Calcola il valore delle seguenti espressioni ed esprimi i risultati in forma algebrica.

322 $$\frac{\left[\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{16}\right)\right]^8\left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{36} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{36}\right)\right]^6}{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\right)\right]^{10}}$$ $[1 - \sqrt{3}\,i]$

323 $$\frac{\left[\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right)\right]^8\left[\sqrt[9]{2}\left(\cos\frac{\pi}{36} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{36}\right)\right]^9}{\left[\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\right)\right]^5}$$ $[-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i]$

324 $$\frac{\left(\cos\frac{\pi}{25} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{25}\right)^5\left[\sqrt[9]{3\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{36} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{36}\right)\right]^{18}}{\left[\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{30} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{30}\right)\right]^6}$$ $[9i]$

Calcola il valore delle espressioni utilizzando i numeri z_1 e z_2 assegnati a fianco. Scrivi il risultato in forma algebrica.

325 $z_1^2 + z_2$; $z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$, $z_2 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\operatorname{sen}\frac{4}{3}\pi$. $[-1]$

326 $z_1 - z_2^3$; $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$. $[2 + i]$

327 $z_1^3 + z_2^2$; $z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$, $z_2 = \cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$. $[2i]$

328 $z_1^4 + z_2^2$; $z_1 = \cos\frac{\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$, $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$. $[5 + 5\sqrt{3}i]$

329 $z_1^3 + z_2^2$; $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\operatorname{sen}\frac{7}{4}\pi\right)$, $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi\right)$. $[-2 + 6i]$

330 $z_1^3 + z_2^2$; $z_1 = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi\right)$, $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi\right)$. $[0]$

331 $z_1^6 + z_2^3$; $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\operatorname{sen}\frac{5}{12}\pi\right)$, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi\right)$. $[2(256 + \sqrt{2})i]$

332 $z_1^2 + \frac{1}{z_2}$; $z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$, $z_2 = \cos\frac{5}{3}\pi + i\operatorname{sen}\frac{5}{3}\pi$. $[i\sqrt{3}]$

333 $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$; $\quad z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$, $\quad z_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$. $\quad\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}-2i\right]$

334 $z_1^2-\frac{1}{z_2^2}$; $\quad z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$, $\quad z_2=\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}$. $\quad[2+i(1+2\sqrt{3})]$

335 $\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}$; $\quad z_1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{12}\right)$, $\quad z_2=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\left(\cos\frac{23}{12}\pi+i\,\text{sen}\frac{23}{12}\pi\right)$. $\quad[2(3+2\sqrt{3})]$

336 $\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}$; $\quad z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\,\text{sen}\frac{5}{4}\pi\right)$, $\quad z_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\,\text{sen}\frac{2}{3}\pi\right)$. $\quad\left[-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}-1}{2}i\right]$

337 $\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^3}$; $\quad z_1=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\,\text{sen}\frac{7}{4}\pi\right)$, $\quad z_2=\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\,\text{sen}\frac{5}{6}\pi\right)$. $\quad\left[\frac{-\sqrt{3}+72}{9}i\right]$

338 $z_1^6+\frac{1}{z_2^3}$; $\quad z_1=\cos\frac{5}{12}\pi+i\,\text{sen}\frac{5}{12}\pi$, $\quad z_2=\sqrt{3}\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\,\text{sen}\frac{7}{6}\pi\right)$. $\quad\left[\frac{9+\sqrt{3}}{9}i\right]$

339 $z_1^2z_2^4-z_1^4$; $\quad z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}$, $\quad z_2=\cos\frac{5}{4}\pi+i\,\text{sen}\frac{5}{4}\pi$. $\quad[1-i]$

Semplifica le seguenti espressioni.

340 $\frac{1}{16}(1+i)^6(\sqrt{3}+i)^4$ $\quad[4(i+\sqrt{3})]$

341 $\frac{8}{9}\sqrt{3}\,\frac{(-\sqrt{3}-i)^4}{(-1+i)^3}$ $\quad\left[\frac{16}{9}[i(3+\sqrt{3})+3-\sqrt{3}]\right]$

342 $(-1-i)^{10}:(\sqrt{3}-i)^5$ $\quad\left[\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right]$

343 $(1-i)^6\cdot(2+2i)^4$ $\quad[-512i]$

344 $\frac{(1+i)^4\cdot(\sqrt{3}-i)^3}{(1+i\sqrt{3})^8}i$ $\quad\left[\frac{1}{16}(1+i\sqrt{3})\right]$

345 $\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4(1+i)^8}{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6}+(2i)^8$ $\quad[240]$

9. LE RADICI *n*-ESIME DELL'UNITÀ

▶ Teoria a pag. 937

346 **ESERCIZIO GUIDA**

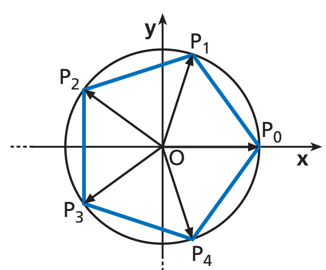
Calcoliamo le radici n-esime dell'unità per $n=5$ e rappresentiamole sulla circonferenza di raggio 1.

Utilizziamo la formula $\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\,\text{sen}\frac{2k\pi}{n}$, con $k=0, 1, 2, ..., n-1$. Poiché $n=5$:

$$\sqrt[5]{1}=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\,\text{sen}\frac{2k\pi}{5},\text{ con } k=0, 1, 2, 3, 4.$$

Compiliamo la tabella seguente e rappresentiamo le soluzioni nel piano di Gauss, utilizzando la circonferenza unitaria e inscrivendo in essa un pentagono regolare.

k	α	$\sqrt[5]{1}$
0	0	$u_0=1$
1	$\frac{2}{5}\pi$	$u_1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}+i\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
2	$\frac{4}{5}\pi$	$u_2=\frac{-\sqrt{5}-1}{4}+i\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
3	$\frac{6}{5}\pi$	$u_3=\frac{-\sqrt{5}-1}{4}-i\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
4	$\frac{8}{5}\pi$	$u_4=\frac{\sqrt{5}-1}{4}-i\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$



I vettori $\vec{OP_0}$, $\vec{OP_1}$, $\vec{OP_2}$, $\vec{OP_3}$, $\vec{OP_4}$ rappresentano le radici quinte dell'unità.

Calcola le radici n-esime dell'unità per i seguenti valori di n e rappresentale sulla circonferenza unitaria.

347 $n = 3$ $\left[u_0 = 1, u_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, u_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$

348 $n = 4$ $[u_0 = 1, u_1 = i, u_2 = -1, u_3 = -i]$

349 $n = 6$ $\left[u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, u_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, u_3 = -1, u_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, u_5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

350 $n = 8$ $\left[u_0 = 1, u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, u_2 = i, u_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, u_4 = -1, u_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \ldots\right]$

351 $n = 12$ $\left[u_0 = 1, u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, u_3 = i, u_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, u_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \ldots\right]$

Considera la radice cubica dell'unità $u_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}$ e la radice sesta dell'unità $u_6 = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}$, esegui le seguenti operazioni e verifica che in tutti i casi il risultato ottenuto è ancora una radice dell'unità.

352 $u_3 \cdot u_6$ $[-1]$

353 $\frac{u_3}{u_6}$ $\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

354 $u_3^2;\ u_6^2.$ $\left[-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

355 $u_3^{-3};\ u_6^{-3}.$ $[1; -1]$

10. LE RADICI *n*-ESIME DI UN NUMERO COMPLESSO

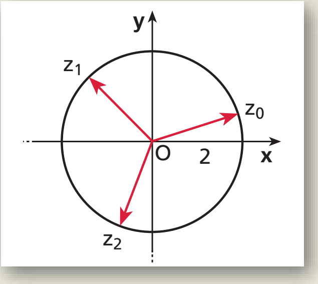
▶ Teoria a pag. 940

356 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo le radici cubiche di $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$ e rappresentiamole nel piano di Gauss.

Applichiamo la formula per determinare le radici n-esime di $z = r(\cos\alpha + i\ \mathrm{sen}\,\alpha)$, con $n = 3$:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha + 2k\pi}{3}\right), \text{ con } k = 0, 1, 2.$$



Otteniamo, per $k = 0$:

$$z_0 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\frac{\pi}{4}}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

Con calcoli analoghi, per $k = 1$:

$$z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2};$$

per $k = 2$:

$$z_2 = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Per ciascuno dei seguenti numeri complessi calcola le radici n-esime per i valori di n indicati e rappresentale nel piano di Gauss.

357 $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$, $n = 2$. $[\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i]$

358 $8\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{3}{2}\pi\right)$, $n = 2$. $[-2 + 2i, 2 - 2i]$

359 $16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$, $n = 2$. $[2 + 2\sqrt{3}\,i, -2 - 2\sqrt{3}\,i]$

360 $8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$, $n = 2$. $[2 + 2i, -2 - 2i]$

361 $4\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{4}{3}\pi\right)$, $n = 2$. $[-1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}]$

362 $16\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{3}\pi\right)$, $n = 2$. $[-2\sqrt{3} + 2i, 2\sqrt{3} - 2i]$

363 $8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$, $n = 3$. $[\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i]$

364 $27\,(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$, $n = 3$. $\left[\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}, -3, \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

365 $64\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$, $n = 4$.
$[\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1), -\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1), -\sqrt{3} - 1 + i(-\sqrt{3} + 1), \sqrt{3} - 1 - i(\sqrt{3} + 1)]$

366 $64\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$, $n = 3$. $[2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}, -\sqrt{6} - \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}), \sqrt{6} - \sqrt{2} + i(-\sqrt{6} - \sqrt{2})]$

367 $64\,(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$, $n = 4$. $[2 + 2i, -2 + 2i, -2 - 2i, 2 - 2i]$

Calcola le seguenti radici e rappresentale nel piano di Gauss.

368 $\sqrt{-16}$; $\sqrt{-i}$. $\left[4i, -4i; -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

369 $\sqrt{1 + i\sqrt{3}}$; $\sqrt{i}$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i); \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

370 $\sqrt{-\frac{6}{i}}$ $[\sqrt{3}(1 + i), -\sqrt{3}(1 + i)]$

371 $\sqrt[6]{64}$; $\sqrt[4]{-i}$. $\left[2, 1 + i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}, -2, -1 - i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}; \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2},\right.$
$\left.-\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\right]$

372 $\sqrt[4]{-256}$; $\sqrt{2 + 2\sqrt{3}\,i}$. $[2\sqrt{2}(1 + i), 2\sqrt{2}(-1 + i), -2\sqrt{2}(1 + i), 2\sqrt{2}(1 - i); \sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i]$

373 $\sqrt[4]{16 - 16i\sqrt{3}}$; $\sqrt[3]{-i}$. $\left[\frac{\sqrt[4]{2}}{2}[\sqrt{6} - \sqrt{2} + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})], \frac{\sqrt[4]{2}}{2}[-\sqrt{6} - \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})],\right.$
$\left.\frac{\sqrt[4]{2}}{2}[-\sqrt{6} + \sqrt{2} - i(\sqrt{6} + \sqrt{2})], \frac{\sqrt[4]{2}}{2}[\sqrt{6} + \sqrt{2} - i(\sqrt{6} - \sqrt{2})]; i, \frac{1}{2}(-\sqrt{3} - i), \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)\right]$

374 $\sqrt[3]{-1}$; $\sqrt{-8 - 8\sqrt{3}\,i}$. $\left[\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), -1, \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}); 2(-1 + i\sqrt{3}), 2(1 - i\sqrt{3})\right]$

375 $\sqrt{i(i - \sqrt{3})}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \sqrt{3}\,i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{3}\,i)\right]$

376 $\sqrt{\dfrac{i}{1-\sqrt{3}\,i}}$ $\left[\pm\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}+i\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}\right)\right]$

377 $\sqrt{(4i-3)(4i+3)}$ $[5i, -5i]$

378 $\sqrt{\dfrac{12}{\sqrt{3}-3i}}$ $\left[\pm\sqrt[4]{12}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)\right]$

379 $\sqrt{(\sqrt{3}-i)^4}$ $[\pm 2(1-\sqrt{3}\,i)]$

380 $\sqrt{(1+i)^6}$ $[2(-1+i), 2(1-i)]$

381 $\sqrt[3]{\left(\dfrac{2-2i}{2+2i}\right)^5}$ $\left[i, +\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-i), \dfrac{1}{2}(-\sqrt{3}-i)\right]$

382 È dato il numero complesso $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$. Scrivi la forma trigonometrica di z e calcola z_1 potenza dodicesima del numero z. Estrai poi le radici seste di z_1 e rappresentale nel piano di Gauss.

$\left[\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\,\text{sen}\dfrac{11}{6}\pi;\ z_1=1;\ \dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1\right]$

383 **TEST** Qual è la minima distanza, nel piano complesso, tra due radici seste complesse di 1?

A $\sqrt{2}$ B 1 C $\sqrt{3}$ D 2

(*Università di Trento, Facoltà di Scienze,* 2005)

Le equazioni in $\mathbb{C}$

384 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $x^n=a$ ha nell'insieme dei numeri complessi n soluzioni. V F

b) Nell'insieme dei numeri complessi è $\sqrt[n]{1}=1\ \forall n\in\mathbb{N}$. V F

c) Se z è un numero complesso, la disequazione $|z|\leq 2$ rappresenta i punti di un cerchio di raggio 2 con centro nell'origine. V F

d) Se un'equazione di secondo grado a coefficienti reali ammette soluzioni complesse, allora sono coniugate. V F

e) L'equazione $x^2+4=0$ non ha soluzioni nell'insieme $\mathbb{C}$. V F

385 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $x^4+16=0$.

Trasportiamo il termine noto a secondo membro: $x^4=-16$.

Le soluzioni (complesse) dell'equazione sono le radici quarte di -16. Per poter utilizzare la formula

$$\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{\alpha+2k\pi}{4}\right),\quad \text{con } k=0,1,2,3,$$

cerchiamo di scrivere -16 in forma trigonometrica:

$$-16=16(\cos\pi+i\ \text{sen}\ \pi).$$

Le radici quarte di -16 sono ottenute da:

$$\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{\pi+2k\pi}{4}\right),\quad \text{con } k=0,1,2,3.$$

Per $k=0$: $x_0=\sqrt[4]{16}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)=2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}(1+i)$.

Analogamente, per $k=1$: $x_1=\sqrt{2}(-1+i)$; per $k=2$: $x_2=-\sqrt{2}(1+i)$; per $k=3$: $x_3=\sqrt{2}(1-i)$.

Risolvi in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni.

386 $x^6 - 64 = 0$ $[\pm 2, \pm(1 + i\sqrt{3}); \pm(i - i\sqrt{3})]$

387 $x^4 + 64 = 0$ $[\pm 2(1 + i); \pm 2(-1 + i)]$

388 $x^2 - 4x + 13 = 0$ $[2 \pm 3i]$

389 $x^2 - 2x + 5 = 0$ $[1 \pm 2i]$

390 $x^2 + 4x + 29 = 0$ $[-2 \pm 5i]$

391 $x^3 - 8 = 0$ $[2, -1 \pm i\sqrt{3}]$

392 $x^4 + 6x^2 + 25 = 0$ $[\pm(1 + 2i), \pm(1 - 2i)]$

393 $x^4 + 23x^2 - 50 = 0$ $[\pm\sqrt{2}, \pm 5i]$

394 $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ $\left[-2, 1 \pm i\sqrt{3}, 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right]$

395 $x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 3 = 0$ $[-\sqrt{2} \pm i]$

396 $x^2 + 4x + 7 = 0$ $[-2 \pm \sqrt{3}\,i]$

397 $x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 5 = 0$ $[-\sqrt{2} \pm \sqrt{3}\,i]$

398 $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$ $[\pm 1, \pm i, \pm 2, \pm 2i]$

399 $x^4 + 82x^2 + 81 = 0$ $[\pm i, \pm 9i]$

400 $x^5 + 4x^3 + x^2 + 4 = 0$ $\left[\pm 2i, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, -1\right]$

Risolvi le seguenti equazioni a coefficienti complessi.

401 $x^2 - 6i = 0$ $[\pm\sqrt{3}(1 + i)]$

402 $x^3 - 8i = 0$ $[i \pm \sqrt{3}, -2i]$

403 $x^2 - 2ix + 3 = 0$ $[3i, -i]$

404 $x^2 + i = 0$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right]$

405 $x^2 - (1 + i)^2 = 0$ $[\pm(1 + i)]$

406 $(x^2 + 4)(x^3 - 27i) = 0$ $\left[\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i), \frac{3}{2}(-\sqrt{3} + i), -3i, \pm 2i\right]$

407 $x^3 = 4 - 4i\sqrt{3}$ $\left[2\left[\cos\left(\frac{5}{9}\pi + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{9}\pi + \frac{2k\pi}{3}\right)\right], k = 0, 1, 2\right]$

408 $3x^2 + 5\frac{2 + i}{1 - 2i} = 0$ $\left[\frac{\sqrt{30}}{6}(-1 + i), \frac{\sqrt{30}}{6}(1 - i)\right]$

409 $x^2 - (2 - i)x + 3 - i = 0$ $[1 + i, 1 - 2i]$

410 $x^2 + \frac{(1 + i)^2 - 11i}{3}x - 2 = 0$ $[i, 2i]$

411 $x^2 + \frac{(2 - i)^2 - 1 + 4i}{i}x + 3 = 0$ $[3i, -i]$

412 $x^2 - (2 + 2i)x + \left(\frac{i}{1 - i} + \frac{i - 2}{1 + i}\right) = 0$ $[i, 2 + i]$

413 **TEST** L'equazione $x^3 = i$ ha:

A tre soluzioni distinte $x_1 = -i$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

B come unica soluzione $x = i$.

C come unica soluzione $x = -i$.

D tre soluzioni distinte $x_1 = -i$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

(*Università di Modena, Corso di laurea in Matematica, Test propedeutico*, 2002)

414 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo l'equazione di secondo grado le cui radici sono i numeri complessi $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 2 - 3i$.

Se z_1 e z_2 sono radici, reali o complesse, dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, allora:

$$ax^2 + bx + c = a(x - z_1)(x - z_2).$$

Scegliendo $a = 1$ e sostituendo z_1 e z_2, otteniamo:

$$(x - z_1)(x - z_2) = [x - (1 + i)][x - (2 - 3i)].$$

Uguagliamo a 0 l'espressione semplificata e otteniamo l'equazione: $x^2 - (3 - 2i)x + 5 - i = 0$.

Osserviamo che non si tratta di un'equazione a coefficienti reali: questo dipende dal fatto che le due radici $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 2 - 3i$ non sono due numeri complessi coniugati.

Scrivi le equazioni di secondo grado le cui radici sono le seguenti coppie di numeri complessi.

415 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + i$. $[x^2 - (3 + 2i)x + 1 + 3i = 0]$

416 $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 2 - i$. $[x^2 - x - 1 + 3i = 0]$

417 $z_1 = -1 - 2i$, $z_2 = 3 + i$. $[x^2 - (2 - i)x - 1 - 7i = 0]$

418 $z_1 = -3 - 2i$, $z_2 = -3 + 2i$. $[x^2 + 6x + 13 = 0]$

419 $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + 5i$. $[x^2 - 4ix + 4 + 6i = 0]$

420 $z_1 = \sqrt{2} + i$, $z_2 = \sqrt{2} - i$. $[x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 = 0]$

ESERCIZI VARI I numeri complessi

421 **TEST** Se $z = 3 + 4i$, allora $|z^{-2}| =$

A $\frac{1}{13}$.

B $\frac{1}{\sqrt{13}}$.

C $\frac{1}{25}$.

D $\frac{1}{5}$.

(*Università di Trento, Facoltà di Scienze*, 2003)

422 **TEST** Si denoti con $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, un generico numero complesso. Qual è l'insieme delle soluzioni di $|z + 1|z = \bar{z}$?

A $\{0 \le x \le 2, y = 0\}$

B $\{-2 \le x \le 0, y = 0\}$

C $\{0\} \cup \{2\}$

D $\{0\} \cup \{-2\}$

(*Università di Trento, Facoltà di Scienze*, 2004)

423 **TEST** Soltanto una delle seguenti uguaglianze è *vera*. Quale?

A $(1 + i)^3 = 1 + 3i$

B $(1 - i)^3 = -1 + 3i$

C $(1 + i)(1 - i) = 2$

D $\frac{1 + i}{1 - i} = 2i$

E $\frac{1 - i}{1 + i} = i$

424 **TEST** Le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

sono:

A $3 + 2i$ e $3 - 2i$.

B $2 + 3i$ e $-2 - 3i$.

C $2 + 3i$ e $2 - 3i$.

D $2i$ e $2 + 3i$.

E $3i$ e $2 - 3i$.

Se $z = a + bi$, risolvi le equazioni seguenti.

425 $z^2 + |z|^2 - 18 = 0$

426 $z^2 + |z|^2 = 4 + i$

427 $|i + z|^2 - i = 2$

428 $|i + z|^2 - i - 2 = z$

429 Se $(x + iy)^3 = -74 + ki$, ricava il valore assoluto di k, posto che $x = 1$ e $i = \sqrt{-1}$.

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2000)

[110]

430 a) Calcola, dopo averne opportunamente semplificato l'espressione, le soluzioni z_1, z_2, z_3 dell'equazione

$(1+i)z^3 = 8\sqrt{2}\,i$, con $z \in \mathbb{C}$.

b) Calcola $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

[a) $z_1 = 2(\cos 15° + i \cdot \operatorname{sen} 15°)$, $z_2 = 2(\cos 135° + i \cdot \operatorname{sen} 135°)$, $z_3 = 2(\cos 255° + i \cdot \operatorname{sen} 255°)$; b) 0]

431 Indicato con s il complesso coniugato di $z = x + yi$, scrivi l'equazione $s = z^2$. Dimostra che i soli quattro numeri complessi $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sono soluzioni dell'equazione.
Determina poi il modulo di z_3 e rappresenta nel piano di Gauss il vettore $v = z_2 + 4z_3$. [$|z_3| = 1$]

432 Dopo aver opportunamente semplificato i coefficienti, risolvi in $\mathbb{C}$ l'equazione:

$-\frac{(1-i)^4}{4}z^6 + 4(-1-i)^8 = 0$. [$\sqrt{3} \pm i, -\sqrt{3} \pm i, \pm 2i$]

433 È data l'equazione $z^5 - z^4 + 9z - 9 = 0$, dove $z \in \mathbb{C}$. Verifica che $z = 1$ è una radice e dopo avere abbassato il grado dell'equazione determina le restanti radici. Rappresenta le soluzioni nel piano di Gauss.

$\left[\frac{\sqrt{6}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{6}}{2}(-1+i), \frac{\sqrt{6}}{2}(-1-i), \frac{\sqrt{6}}{2}(1-i)\right]$

434 a) Determina le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$|z - 1 - i| = |\bar{z} + 2i \cdot \operatorname{Im}(z) + 2 - i|$,

dove $z \in \mathbb{C}$, $\bar{z}$ è il suo complesso coniugato e $\operatorname{Im}(z)$ è il coefficiente della parte immaginaria.

b) Rappresenta sul piano di Gauss l'insieme delle soluzioni.

c) Determina le eventuali soluzioni che abbiano modulo uguale a 1.

$\left[\text{a) } z = -\frac{1}{2} + bi, \forall b \in \mathbb{R}; \text{ c) } -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$

435 Risolvi in $\mathbb{C}$ l'equazione $(z-1)^3 + 8 = 0$. Detta z_0 la radice che ha il coefficiente della parte immaginaria positivo, calcola $(z_0 - 1)^6$. [$2 + i\sqrt{3}, -1, 2 - i\sqrt{3}; -64$]

436 Dato $z \in \mathbb{C}$, sia $\bar{z}$ il suo complesso coniugato. Rappresenta nel piano di Gauss l'insieme $E \cap F$, con:

$E = \{z \in \mathbb{C}: |z - 1| < |\bar{z}|\}$, $F = \left\{z \in \mathbb{C}: \left|z - \frac{1}{2}\right| \leq 2\right\}$.

437 Dato $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$, calcola z^4. Indica con $\bar{z}$ il numero complesso coniugato di z, trova $z^5 \cdot \bar{z}$.
Determina infine il numero $w \in \mathbb{C}$ tale che $z \cdot w = 1$. $\left[-16; -64; \frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)\right]$

438 a) Sia $z = \frac{3\sqrt{3} - 3i}{2\sqrt{3}\,i}$. Scrivi z in forma trigonometrica e calcola z^{-2}.

b) Sia $w = \frac{\sqrt{3}}{3} + bi$. Determina per quali $b \in \mathbb{R}$ si ha che $|z \cdot w| = \sqrt{7}$.

$\left[\text{a) } \sqrt{3}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i \operatorname{sen}\frac{4}{3}\pi\right); -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i; \text{ b) } \pm\sqrt{2}\right]$

439 Discuti al variare di $a \in \mathbb{R}$ le soluzioni dell'equazione $az^2 - 4z + 1 = 0$, dove $z \in \mathbb{C}$.
Determina $a < 0$ in modo tale che il prodotto del modulo delle radici sia uguale a 8.

$\left[a = 0\!: z = \frac{1}{4}, a \leq 4 \wedge a \neq 0\!: z = \frac{2 \pm \sqrt{4-a}}{a}, a > 4\!: z = \frac{2 \pm (\sqrt{a-4})i}{2}; -\frac{1}{8}\right]$

440 **TEST** L'insieme dei numeri complessi z tali che $|z| = |z+1|$ è:

A una circonferenza. B l'insieme vuoto. C una retta orizzontale. D una retta verticale.

(*Università di Trento, Facoltà di Scienze*, 2003)

441 a) Rappresenta sul piano di Gauss l'insieme $E = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 5\}$.

b) Siano $z_1 = 4 + 4\sqrt{3}\,i$, $z_2 = \frac{4\sqrt{3}}{5} - \frac{4}{5}i$; verifica che il punto $\frac{z_1}{z_2}$ appartiene all'insieme E.

c) Disegna nel piano di Gauss il vettore $z_1 - 5z_2$.

442 Dati $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1 - 2i$, calcola $z_1 + z_2$ e $z_1 \cdot z_2$.
Determina poi z_3 tale che $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = 2i$. Trova infine le radici quadrate di $2i$.

$\left[2 - i, 3 - i; -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i; \pm(1 + i)\right]$

443 a) Trova le soluzioni dell'equazione $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, con $x \in \mathbb{C}$.

b) Trova la circonferenza a cui appartengono le radici dell'equazione e scrivila in coordinate polari.

c) Il punto $P(\sqrt{5}; -\sqrt{15})$ è interno o esterno alla circonferenza? Scrivilo in coordinate polari.

$\left[\text{a) } i, -1, -i;\ \text{b) } r = 1;\ \text{c) } P \text{ esterno, } P\left[2\sqrt{5}; \frac{5}{3}\pi\right]\right]$

444 Data l'equazione $aix^6 + \sqrt{2}(1 + i) = 0$, con $a \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{C}$, determina il valore di a tale per cui, nel piano di Gauss, le radici dell'equazione siano vertici dell'esagono inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt{2}$.
Determina poi le radici dell'equazione.

$\left[a = \frac{1}{4}; \text{ le sei radici hanno modulo } \sqrt{2} \text{ e argomento } \alpha = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\right]$

445 Considera, nel piano di Gauss, la circonferenza con centro nell'origine e raggio 2 e la sua corda AB di estremi $z_1 = \sqrt{3} + i$ e $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.

a) Preso AB come lato di un poligono regolare inscritto nella circonferenza, determina il numero dei lati e i rimanenti vertici.

b) Determina un'equazione a coefficienti complessi che abbia come soluzioni i vertici del poligono.

$\left[\text{a) } z_3 = -\sqrt{3} - i, z_4 = 1 - i\sqrt{3};\ \text{b) } z^4 + 8 - 8\sqrt{3}\,i = 0\right]$

446 Determine real numbers s and t so that $(s + it)^2 = -3 + 4i$. Hence determine the two roots of the equation $z^2 - (4 - 2i)z + 6 - 8i = 0$.

(IR *Leaving Certificate Examination*, Higher Level, 1994)

$[s = \pm 1, t = \pm 2; z_1 = 3 + i, z_2 = 1 - 3i]$

447 If i represents the imaginary unit, what is the ordered pair of real numbers $(a; b)$ for which $(1 + i)^{13} = (a + bi)$?

(USA *California Math League*, Sample Problem)

$[(a; b) = (-64; -64)]$

11. LA FORMA ESPONENZIALE DI UN NUMERO COMPLESSO

▶ Teoria a pag. 942

Dalla forma esponenziale alla forma algebrica

448 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo in forma algebrica il numero complesso $2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Applichiamo la prima formula di Eulero:

$$2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i.$$

Scrivi in forma algebrica i seguenti numeri complessi.

449 $\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ $[1+i]$

450 $\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right]$

451 $2e^{i\frac{5\pi}{3}}$ $[1-i\sqrt{3}]$

452 $4e^{i\frac{7\pi}{4}}$ $[2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\,i]$

453 $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ $[-\sqrt{3}+i]$

454 $3\sqrt{2}\,e^{i\frac{11\pi}{4}}$ $[-3+3i]$

455 $9e^{i\frac{3}{2}\pi}$ $[-9i]$

456 $8e^{i\frac{3}{4}\pi}$ $[4\sqrt{2}\,(i-1)]$

457 $24e^{i\frac{\pi}{6}}$ $[12\sqrt{3}+i12]$

458 $\sqrt{2}\,e^{i\frac{9}{4}\pi}$ $[1+i]$

459 $-2e^{i\frac{4}{3}\pi}$ $[1+i\sqrt{3}]$

460 $e^{i\pi+\frac{\pi}{3}i}$ $\left[-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\right]$

461 $e^{2+\frac{\pi}{2}i}$ $[ie^2]$

462 $e^{1+\pi i}$ $[-e]$

463 $e^{1-\frac{\pi}{2}i}$ $[-ie]$

Dalla forma algebrica alla forma esponenziale

464 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo in forma esponenziale il numero complesso $-2\sqrt{3}+2i$.

Trasformiamo la forma algebrica $a+bi$ in forma trigonometrica $r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$.

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4.$$

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{b}{a}=\frac{2}{-2\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Abbiamo $\alpha=\frac{5}{6}\pi$, oppure $\alpha=\frac{11}{6}\pi$. Essendo $a<0$ e $b>0$, il punto corrispondente a $-2\sqrt{3}+2i$ è nel secondo quadrante, quindi $\alpha=\frac{5}{6}\pi$. La forma trigonometrica del numero complesso $-2\sqrt{3}+2i$ è:

$$4\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\,\text{sen}\,\frac{5}{6}\pi\right).$$

Trasformiamo la forma trigonometrica in forma esponenziale $re^{i\alpha}$, dove $r=4$ e $\alpha=\frac{5}{6}\pi$, ossia:

$$4e^{i\frac{5}{6}\pi}.$$

Scrivi in forma esponenziale i seguenti numeri complessi.

465 $1+i$ $\left[\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right]$

466 $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[e^{i\frac{2}{3}\pi}\right]$

467 $-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\,i$ $\left[4e^{i\frac{5}{4}\pi}\right]$

468 $\sqrt{3}-i$ $\left[2e^{i\frac{11}{6}\pi}\right]$

469 $-\sqrt{3}-i$ $\left[2e^{i\frac{7}{6}\pi}\right]$

470 $-4+4i$ $\left[4\sqrt{2}\,e^{i\frac{3}{4}\pi}\right]$

471 $6i$ $\left[6e^{i\frac{\pi}{2}}\right]$

472 $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\left[\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}\right]$

473 $\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$ $\left[2e^{i\frac{7}{4}\pi}\right]$

474 -4 $[4e^{i\pi}]$

475 $1+\sqrt{3}\,i$ $\left[2e^{i\frac{\pi}{3}}\right]$

476 $-7i$ $\left[7e^{i\frac{3}{2}\pi}\right]$

477 9 $[9e^{i2\pi}]$

478 $(1+i)^2$ $\left[2e^{i\frac{\pi}{2}}\right]$

479 $i(\sqrt{3}+i)$ $\left[2e^{i\frac{2}{3}\pi}\right]$

480 $(1-i)^4$ $[4e^{7\pi i}]$

Le operazioni fra i numeri complessi in forma esponenziale

481 **ESERCIZIO GUIDA**

Dati $z_1 = 5e^{i\frac{3}{4}\pi}$, $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$, scritti in forma esponenziale, calcoliamo $z_1 \cdot z_2$ e $\frac{z_1}{z_2}$, scrivendo i risultati in forma trigonometrica.

Sfruttiamo la proprietà $re^{i\alpha} \cdot se^{i\beta} = r \cdot s \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$, tenendo conto che:

$$r = 5, \alpha = \frac{3}{4}\pi; s = 3, \beta = \frac{\pi}{6}.$$

$$z_1 \cdot z_2 = 5e^{i\frac{3}{4}\pi} \cdot 3e^{i\frac{\pi}{6}} = 5 \cdot 3e^{i\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi\right)} = 15e^{i\frac{3\cdot 3\pi + 2\pi}{12}} = 15e^{i\frac{11}{12}\pi}.$$

Passiamo alla forma trigonometrica:

$$z_1 \cdot z_2 = 15\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{11}{12}\pi\right).$$

Analogamente, per il quoziente sfruttiamo la proprietà $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s}e^{i(\alpha-\beta)}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{3}e^{i\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi\right)} = \frac{5}{3}e^{i\frac{3\cdot 3\pi - 2\pi}{12}} = \frac{5}{3}e^{i\frac{7}{12}\pi} = \frac{5}{3}\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{7}{12}\pi\right).$$

Esegui le seguenti moltiplicazioni e divisioni e scrivi il risultato in forma trigonometrica.

482 $3e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{2}{3}e^{i\frac{3}{4}\pi}$ $\left[2\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{5}{4}\pi\right)\right]$

483 $e^{i\frac{4}{3}\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 6e^{i\frac{3}{2}\pi}$ $\left[12\left(\cos\frac{19}{6}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{19}{6}\pi\right)\right]$

484 $e^{i\frac{5}{6}\pi} : \left(\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)$ $[2(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi)]$

485 $27e^{i\frac{\pi}{3}} : (3e^{i\pi})$ $\left[9\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{4}{3}\pi\right)\right]$

486 $\left(2e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot 3e^{i\frac{3}{4}\pi}\right) : \left(4e^{i\frac{7}{4}\pi}\right)$ $\left[\frac{3}{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{3}{4}\pi\right)\right]$

487 Calcola le seguenti potenze e scrivi il risultato in forma algebrica:

$\left(\frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^4$, $\left(2e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{2}{9}\pi}\right)^3$. $\left[\frac{1}{81}, 2\sqrt{2}(1+i), \frac{1}{16}(-1+i\sqrt{3})\right]$

Calcola le seguenti radici e rappresentale nel piano di Gauss.

488 $\sqrt{4e^{\pi i}}$ $\left[2e^{\frac{\pi}{2}i}, 2e^{\frac{3}{2}\pi i}\right]$

489 $\sqrt[3]{27e^{\frac{3}{2}\pi i}}$ $\left[3e^{\frac{\pi}{2}i}, 3e^{\frac{7}{6}\pi i}, 3e^{\frac{11}{6}\pi i}\right]$

490 $\sqrt[4]{16e^{\frac{\pi}{2}i}}$ $\left[2e^{\frac{\pi}{8}i}, 2e^{\frac{5}{8}\pi i}, 2e^{\frac{9}{8}\pi i}, 2e^{\frac{13}{8}\pi i}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni in $\mathbb{C}$, utilizzando per le soluzioni la forma esponenziale.

491 $x^3 + 27 = 0$ $\left[3e^{\frac{\pi}{3}i}, 3e^{\pi i}, 3e^{\frac{5}{3}\pi i}\right]$

492 $x^2 - 4i = 0$ $\left[2e^{\frac{\pi}{4}i}, 2e^{\frac{5}{4}\pi i}\right]$

493 $x^4 + 81 = 0$ $\left[3e^{\frac{\pi}{4}i}, 3e^{\frac{3}{4}\pi i}, 3e^{\frac{5}{4}\pi i}, 3e^{\frac{7}{4}\pi i}\right]$

494 $x^3 + 8i = 0$ $\left[2e^{\frac{\pi}{2}i}, 2e^{\frac{7}{6}\pi i}, 2e^{\frac{11}{6}\pi i}\right]$

495 $x^2 - 2x + 2 = 0$ $\left[\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}, \sqrt{2}\,e^{\frac{7}{4}\pi i}\right]$

496 $x^5 + 16x = 0$ $\left[0, 2e^{\frac{\pi}{4}i}, 2e^{\frac{3}{4}\pi i}, 2e^{\frac{5}{4}\pi i}, 2e^{\frac{7}{4}\pi i}\right]$

Semplifica le seguenti espressioni e scrivi il risultato in forma algebrica.

497 $\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 \cdot \left(e^{i\frac{2}{3}\pi}\right)^3 \cdot 2e^{i\pi}$ $\quad [-1 - i\sqrt{3}]$

498 $\dfrac{(e^{i\pi})^2 \cdot 5e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{2}}}{15e^{i\frac{5}{4}\pi}}$ $\quad \left[-\dfrac{2}{3}i\right]$

499 $\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 \cdot \left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^3 + \left(4e^{i\frac{3}{8}\pi}\right)^2$ $\quad [12\sqrt{2}(-1+i)]$

500 $\dfrac{\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3}{e^{i\frac{\pi}{4}}} \cdot e^{i\frac{3}{4}\pi} + 2\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 \cdot e^{i\frac{3}{4}\pi}$ $\quad [-3]$

501 $\dfrac{\left(3\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} + 2e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^2}{e^{i\frac{\pi}{6}}}$ $\quad [(11 - 6\sqrt{2})(1 + i\sqrt{3})]$

502 $\dfrac{\left(\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2}{e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{3}{4}\pi}}$ $\quad [6\sqrt{2}\,i]$

503 $\dfrac{\left(e^{i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 \cdot e^{i\frac{4}{3}\pi}}{e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{5}{6}\pi}}$ $\quad \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right]$

504 Dimostra che se $z = re^{i\alpha}$, il suo coniugato è $\bar{z} = re^{-i\alpha}$.

505 Se $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, calcola $\left(\dfrac{1}{z}\right)^4$. $\quad [4e^{i\pi}]$

Dati i numeri complessi scritti in forma esponenziale, esegui le operazioni indicate e scrivi i risultati in forma trigonometrica.

506 $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$; $\quad z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\quad z_1 \cdot z_2$. $\quad \left[6\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi + i\,\text{sen}\,\dfrac{7}{12}\pi\right)\right]$

507 $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$; $\quad z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\quad \dfrac{z_1}{z_2}$. $\quad \left[\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

508 $z_1 = \sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{8}}$; $\quad z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\quad z_1^2 \cdot z_2$. $\quad \left[9\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

509 $z_1 = \sqrt{5}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$; $\quad z_2 = 25e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\quad \dfrac{z_1^2}{z_2}$. $\quad \left[\dfrac{1}{5}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$

510 $z_1 = 7e^{i\frac{7\pi}{6}}$; $\quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{12}}$; $\quad \dfrac{z_1}{z_2^2}$. $\quad [7(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)]$

511 $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$; $\quad z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\quad z_3 = 6e^{i\frac{5}{12}\pi}$; $\quad \dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$. $\quad \left[\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right]$

512 $z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{8}}$; $\quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\quad z_3 = 9e^{i\frac{\pi}{3}}$; $\quad \dfrac{z_1^2 \cdot z_2}{z_3}$. $\quad \left[\dfrac{2}{9}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

513 $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$; $\quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\quad z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\quad \dfrac{z_1^2 \cdot z_3}{z_2}$. $\quad \left[3\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

514 $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_2 = e^{i\frac{\pi}{12}}$; $\dfrac{z_1^3}{z_2^4}$. $\left[\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right]$

515 $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{8}}$; $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{24}}$; $\dfrac{z_1^4}{z_2^4}$. $\left[16\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)\right]$

516 a) Risolvi in $\mathbb{C}$ l'equazione $x^8 - 82x^4 + 81 = 0$ e scrivi in forma esponenziale le soluzioni ottenute.
b) Calcola il prodotto delle soluzioni ottenute. $\left[\text{a) } \pm 1, \pm i, \pm 3, \pm 3i;\ e^{i0}, e^{i\pi}, e^{\pm i\frac{\pi}{2}}, 3e^{i0}, 3e^{i\pi}, 3e^{\pm i\frac{\pi}{2}};\ \text{b) } 81\right]$

517 a) Dopo aver opportunamente semplificato i coefficienti, risolvi in $\mathbb{C}$ l'equazione:

$$\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{3}+i} + \frac{1}{\sqrt{3}-i} + \frac{1}{2}\right) : (i+1)\right] z^4 - 2(1+i)^4 = 0.$$

b) Calcola $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4$.
c) Scrivi le soluzioni in forma esponenziale. $\left[\text{a) } \sqrt{2}(1 \pm i), \sqrt{2}(-1 \pm i);\ \text{b) } 16;\ \text{c) } 2e^{ik\frac{\pi}{4}}, \text{ con } k = 1, 3, 5, 7\right]$

Applicando le formule di Eulero verifica le seguenti uguaglianze.

518 $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

519 $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

520 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

521 $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

522 $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

523 **VERO O FALSO?**

a) $e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}$ sono numeri complessi opposti. V F

b) Il coniugato di $e^{i\frac{\pi}{3}}$ è $e^{-i\frac{\pi}{3}}$. V F

c) $e^{i0} = 1$. V F

d) $e^{\frac{5}{2}\pi i} + e^{\frac{\pi}{2}i} = -1$. V F

e) $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2i}$. V F

REALTÀ E MODELLI

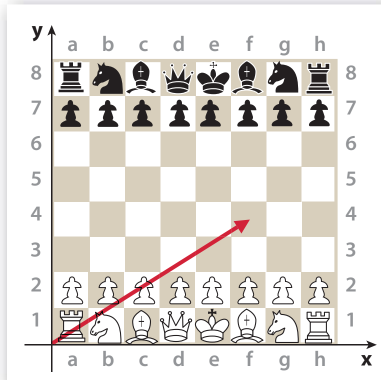
1 **Il salto con l'asta**

Un atleta partecipa a una gara di salto con l'asta. Al momento di imbucare l'asta nell'apposita guida si dà una spinta prima di sollevare i piedi da terra.

- Sapendo che l'asta è lunga 5 m e che la sua estremità è mantenuta all'altezza della testa dell'atleta alto 1,80 m, stabilisci l'angolo β di inclinazione iniziale (trascura l'elasticità dell'asta).
- Supponendo che il centro del sistema di riferimento sia collocato 2 m dopo il punto di inserimento dell'asta nell'apposita buca, scrivi in coordinate polari l'equazione della circonferenza alla quale appartiene l'arco della traiettoria descritta dall'estremità dell'asta.

2 **Gli scacchi di Marostica**

Nella piazza di Marostica, in provincia di Vicenza, si gioca periodicamente una partita a scacchi con personaggi «viventi». La scacchiera ha le caselle di 1,5 m di lato.
Posizioniamo il sistema di riferimento come mostrato in figura: ogni casella è così rappresentata da un vettore che ha come primo estremo l'origine e come secondo estremo il centro della casella stessa.



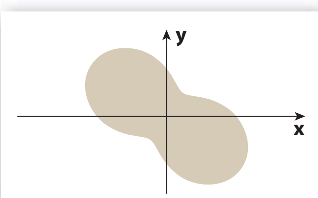
- Rappresenta con vettori le posizioni dei cavalli in G1 e B8, della torre in H8 e delle regine in D1 e D8.
- Il cavallo si muove «a elle», cioè due caselle in una direzione e una nella direzione perpendicolare. Indica con i vettori quali posizioni può occupare con una mossa il cavallo in G8.
- Ogni mossa può essere vista come somma di vettori: traduci in termini vettoriali la mossa di un alfiere che partendo da D2 si muove in diagonale fino al bordo destro della scacchiera. Di quanti metri si è spostato l'alfiere?

3 **Uno strano orologio**

Uno studio di design vuole produrre un nuovo gadget: un oggetto simile a un orologio, che però segni con una lancetta i giorni della settimana anziché le ore.

- Determina le coordinate di sette punti che suddividono una circonferenza in sette archi uguali.

4 **L'arachide**



Il profilo di un'arachide può essere rappresentato con una curva di equazione (in coordinate polari):

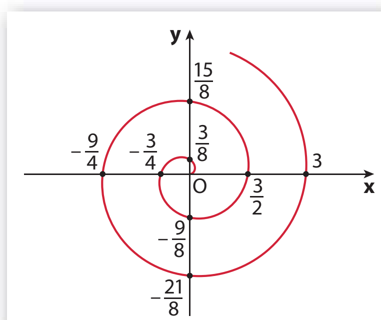
$$r = a[1 + b \operatorname{sen}(n\alpha)], \text{ con } a, b, n \in \mathbb{R}, a > 0, -1 < b < 1, n > 0.$$

La curva in figura è stata ottenuta ponendo $a = 2$, $b = -0{,}5$, $n = 2$.

- Determina i punti della curva di modulo massimo e minimo.
- Determina i valori di r e α per i quali la curva è definita.

5 **La trottola**

Una pattinatrice per prepararsi a eseguire una trottola percorre, dall'esterno verso l'interno, una traiettoria come quella mostrata in figura.



- Scrivi in coordinate polari l'equazione della curva.
- Di quanto si avvicina la pattinatrice al punto in cui eseguirà la trottola (posto nell'origine del sistema di riferimento) ogni volta che completa un giro? (Le misure del grafico sono espresse in metri.)

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: www.zanichellitest.it

1 Le coordinate cartesiane di un punto P sono $(2; 2\sqrt{3})$. Quali sono le sue coordinate polari?

A [4; 30°]
D [30; 16°]
B [30; 4°]
E [4; 60°]
C [16; 30°]

2 Il modulo e l'argomento del numero complesso $4 - 4i$ sono, rispettivamente:

A 0; 45°.
D $2\sqrt{2}$; $-$ 45°.
B 8; 45°.
E $4\sqrt{2}$; $-$ 45°.
C 16; $-$ 45°.

3 Una delle seguenti uguaglianze è *falsa*. Quale?

A $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1$

B $(1 + i)^2 = 2 + 2i$

C $(1 - i)^2 = -2i$

D $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1$

E $(1 + i)^2 \cdot (1 - i) = 2(1 + i)$

4 Il numero complesso scritto in forma esponenziale $\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ corrisponde al seguente numero scritto in forma algebrica:

A $1 + i$.
B $1 - i$.
C $2 + i$.
D $2 - i$.
E $2i$.

5 La forma trigonometrica di $-\sqrt{3} + i$ è:

A $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$.

B $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$.

C $2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i \,\text{sen}\,\frac{5}{6}\pi\right)$.

D $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$.

E $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$.

QUESITI

6 Spiega la differenza fra numero immaginario e numero complesso, esaminando anche casi particolari.

7 Scegli un numero complesso scritto in forma algebrica e trasformalo in forma trigonometrica, poi in forma esponenziale. Illustra ciascun passaggio.

8 Dato il numero complesso $z = r(\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\,\alpha)$, dimostra che $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\alpha - i \cdot \text{sen}\,\alpha)$.

9 Verifica che, dati due numeri complessi z_1 e z_2 rappresentati rispettivamente dai punti A e B nel piano di Gauss, il modulo della loro differenza coincide con la distanza tra i punti A e B.

10 Dato un qualunque numero complesso z, dimostra le seguenti proprietà:
a) $|z^2| = |z|^2$, b) $(\bar{z})^2 = \overline{z^2}$, c) $\overline{2 \cdot z} = 2 \cdot \bar{z}$.

11 Considerati due numeri complessi z_1 e z_2, dimostra che:
a) il coniugato della somma è uguale alla somma dei coniugati;
b) il coniugato del prodotto è uguale al prodotto dei coniugati.

PROBLEMI

12 a) È data l'equazione $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = 0$, dove $z \in \mathbb{C}$. Verifica che i e $-i$ sono soluzioni.
b) Dopo averne abbassato il grado determina le rimanenti soluzioni.
c) Scrivi le soluzioni trovate in forma trigonometrica e calcola il loro prodotto verificando che è uguale al termine noto dell'equazione.

$\left[\text{b) } 1 \pm i; \text{ c) } \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i \operatorname{sen}\frac{7}{4}\pi\right)\right]$

13 Dato il numero complesso $z = x + iy$ e il coniugato s:
a) descrivi l'insieme dei numeri complessi z tali che $|s - 2| \leq |z + i|$;
b) rappresenta graficamente l'insieme;
c) determina tra i numeri z che verificano l'equazione $|s - 2| = |z + i|$ quello la cui parte reale vale 2.

$\left[\text{a) } y \geq -2x + \frac{3}{2}; \text{ c) } 2 - \frac{5}{2}i\right]$

14 a) È data l'equazione $x^2 - 4kx + 2 - 2k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{C}$. Discuti le soluzioni al variare di k.
b) Trova per quali k la soluzione complessa ha parte immaginaria che vale $\sqrt{2}\, i$.
c) Considera la soluzione z ottenuta per il valore negativo di k trovato al punto precedente e calcola z^{-3}.

$\left[\text{a) } k \leq -1 \vee k \geq \frac{1}{2}, x_{1,2} = 2k \pm \sqrt{4k^2 + 2k - 2}; -1 < k < \frac{1}{2}, x_{1,2} = 2k \pm i\sqrt{-4k^2 - 2k + 2};\right.$

$\left.\text{b) } k = 0, k = -\frac{1}{2}; \text{ c) } \frac{5}{27} - \frac{\sqrt{2}}{27}i\right]$

15 Le equazioni $r^2 \operatorname{sen} 2\alpha = -2\sqrt{3}$ e $r \operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ rappresentano in coordinate polari due curve note.
a) Trasforma le due equazioni in coordinate cartesiane e verifica che le due curve sono tangenti nel punto P.
b) Trasforma il punto in coordinate polari.
c) Considera il punto P rappresentativo del numero complesso z nel piano di Gauss e verifica che $z^3 i + z^2 + 2z + 4 - 8i = 0$.

$\left[\text{a) } xy = -\sqrt{3}, y - \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} = 0; \text{ b) } \left[2; \frac{2\pi}{3}\right]\right]$

16 a) Scrivi in coordinate polari l'equazione della circonferenza che nel piano cartesiano è tangente all'asse x nell'origine, di raggio $\frac{1}{2}$ e con centro di ordinata minore di 0.
b) Determina le coordinate polari dei due punti di intersezione della circonferenza con la retta di equazione $r \cdot \operatorname{sen}\alpha = -\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$.
c) Determina il numero complesso z di cui i due punti trovati rappresentano due delle radici seste.
d) Rappresenta nel piano di Gauss le radici seste del numero $\frac{z}{|z|}$.

$\left[\text{a) } r^2 + r \operatorname{sen}\alpha = 0; \text{ b) } P_1\left[\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}; \frac{17}{12}\pi\right], P_2\left[\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}; \frac{19}{12}\pi\right]; \text{ c) } z = \frac{26 + 15\sqrt{3}}{64}i\right]$

17 a) Dati i numeri complessi $z_1 = 1 - i$, $z_2 = i$, calcola l'espressione $\overline{z_1} \cdot z_2 + 3z_1^2 - \frac{z_2}{z_1}$.
b) Determina il luogo dei punti del piano complesso tali che $|z| + |z - 1 - z_1 - z_2| = 4$.
c) Scrivi l'equazione del medesimo luogo in un opportuno riferimento di coordinate polari.

$\left[\text{a) } -\frac{1}{2} - \frac{11}{2}i; \text{ b) ellisse } \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1;\right.$

$\left.\text{c) } 2r - r\cos\alpha = 3 \text{ (polo nell'origine, asse polare coincidente col semiasse positivo delle } x)\right]$

CAPITOLO

15

१० [numerazione araba] १५ [numerazione devanagari] 十五 [numerazione cinese]

LO SPAZIO

TAGLIARE CUBI La geometria dello spazio è una parte della matematica molto concreta, perché strettamente legata all'ambiente in cui tutti noi viviamo. Nonostante ciò, ragionare nello spazio non è semplice, così come non è facile rappresentare su un piano costruzioni tridimensionali. Il cubo sembra un solido semplice, ma…

Che tipo di figure si ottengono sezionando un cubo con un piano?

La risposta a pag. 1036

1. PUNTI, RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

● Indichiamo i punti con le lettere maiuscole A, B, C, …, le rette con le lettere minuscole a, b, c, …, i piani con le lettere minuscole dell'alfabeto greco α, β, γ, …

Abbiamo già visto che gli enti fondamentali della geometria sono: il punto, la retta, il piano e lo spazio.

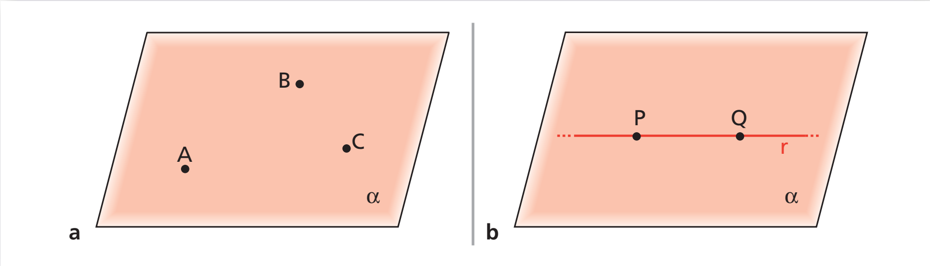
Nello spazio studieremo le **figure solide**, o **solidi**, cioè le figure formate da un insieme di punti che non appartengono tutti a uno stesso piano.

Alcuni postulati dello spazio

1. Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano (figura 1*a*).

2. Fissati due punti in un piano, la retta passante per i due punti giace interamente sul piano (figura 1*b*).

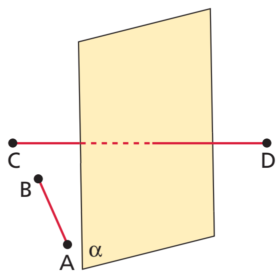
▶ Figura 1



3. Postulato di partizione dello spazio. Un qualunque piano divide l'insieme dei punti dello spazio che non gli appartengono in due regioni dette **semispazi** con le seguenti proprietà:

- due punti qualsiasi della stessa regione sono gli estremi di un segmento che non interseca il piano;
- due punti qualsiasi di regioni diverse sono gli estremi di un segmento che interseca il piano.

Il piano si dice **origine** dei semispazi.



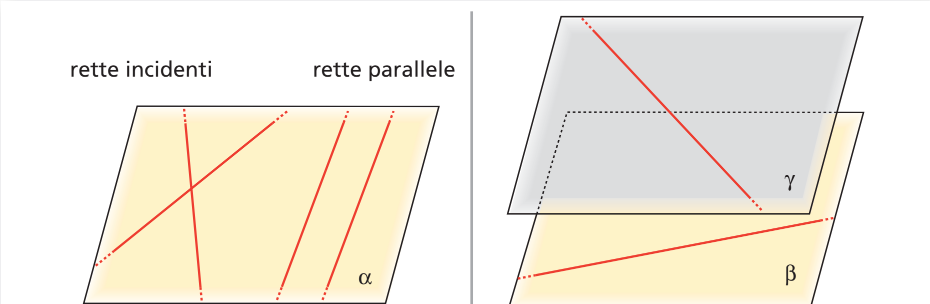
La posizione di due rette nello spazio

● Due rette sghembe non hanno punti in comune.

Se due rette nello spazio appartengono a uno stesso piano, si dicono **complanari**, in caso contrario si dicono **sghembe**.

Se le rette sono complanari, le posizioni possibili sono quelle già studiate nel piano, cioè le rette possono essere **incidenti** o **parallele**.

▶ Figura 2
a) Le rette complanari possono essere incidenti o parallele.
b) Rette che giacciono su piani diversi sono sghembe.



a. Rette complanari. **b.** Rette sghembe.

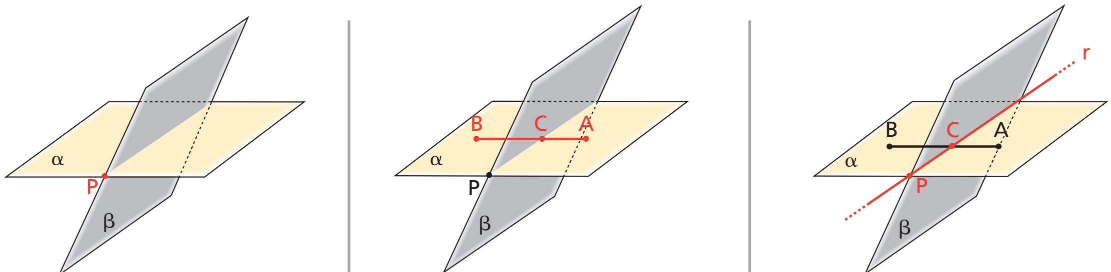
La posizione di due piani nello spazio

TEOREMA

Due piani distinti, che si intersecano in un punto, hanno in comune una retta che passa per quel punto.

Ipotesi $P \in \alpha \cap \beta$.

Tesi $\exists\, r \mid P \in r,\ r \in \alpha \cap \beta$.



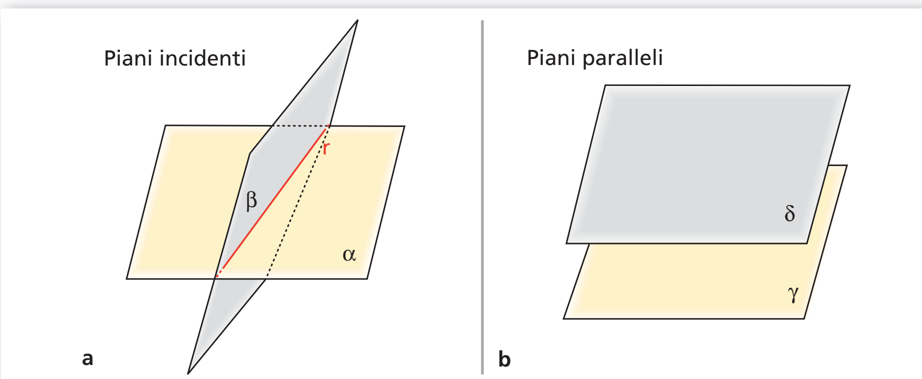
a. Il punto *P* è in comune ai due piani α e β.

b. Consideriamo i punti *A* e *B*, appartenenti al piano α e scelti in regioni opposte rispetto al piano β. Per il postulato 3 di partizione dello spazio, il segmento *AB* interseca il piano β nel punto *C*. Il punto *C* appartiene anche al piano α, perché per il postulato 2 tutta la retta *AB* appartiene ad α.

c. I punti *P* e *C* appartengono a entrambi i piani, quindi la retta *r* passante per *P* e *C* appartiene anch'essa a entrambi i piani.

▲ **Figura 3** Dimostrazione del teorema.

Due piani distinti aventi in comune una retta si dicono **incidenti** (figura 4*a*). In caso contrario i piani sono **paralleli** (figura 4*b*).



◄ **Figura 4**

La relazione di parallelismo fra piani gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, come la relazione di parallelismo fra rette:

- proprietà riflessiva: ogni piano è parallelo a se stesso ($\alpha /\!/ \alpha$);
- proprietà simmetrica: se $\alpha /\!/ \beta$, è anche $\beta /\!/ \alpha$;
- proprietà transitiva: se $\alpha /\!/ \beta$ e $\beta /\!/ \gamma$, allora $\alpha /\!/ \gamma$.

La posizione di una retta e di un piano

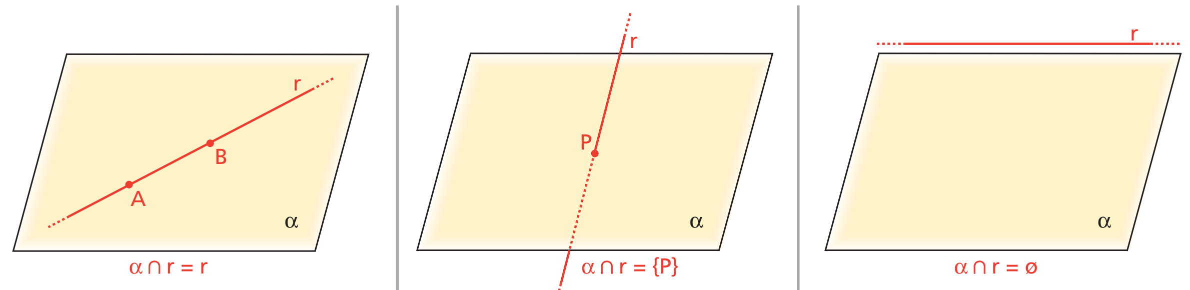
Dati una retta e un piano, sono possibili tre casi:

- tutti i punti della retta appartengono al piano, ossia essa è **giacente** sul piano (o **appartenente** al piano) (figura 5*a*);
- la retta ha un solo punto in comune con il piano, ossia è **incidente** al piano (figura 5*b*);

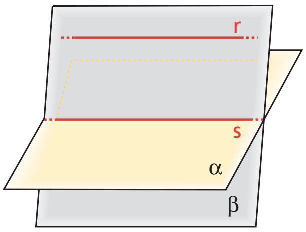
● Per il postulato 2, se una retta ha due punti in comune con un piano, allora giace su quel piano.

- la retta non ha alcun punto in comune con il piano, ossia è **parallela** al piano (figura 5*c*).

▼ **Figura 5**



a. La retta *r* è giacente sul piano α. **b.** La retta *r* è incidente al piano α. **c.** La retta *r* è parallela al piano α.

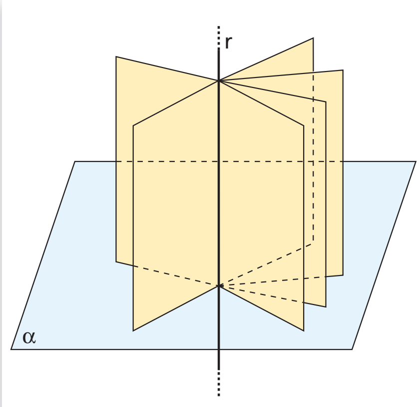


Data una retta *r* parallela a un piano α, ogni altro piano non parallelo ad α e contenente *r* interseca il piano α in una retta *s*, parallela a *r*. Infatti *r* e *s* risultano complanari e non si incontrano mai (figura a lato).

Le rette perpendicolari a un piano

Se appoggiamo un quaderno sul banco, come nella figura 6, e sfogliamo alcune pagine possiamo osservare che ogni pagina del quaderno è appoggiata su un bordo che associamo a una retta e inoltre tutte queste rette si trovano sul piano α e sono perpendicolari alla retta *r*.

La situazione vista è descritta in modo preciso da due teoremi.



► **Figura 6**

TEOREMA

Se per un punto *P* di una retta *s* si mandano due rette *a* e *b* perpendicolari a *s*, allora *s* è perpendicolare a ogni altra retta *r* passante per *P* e giacente sul piano delle rette *a* e *b*.

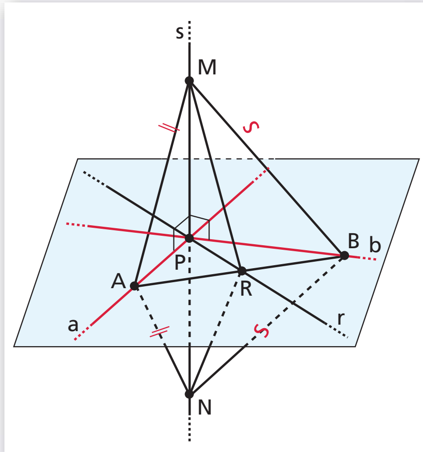
Ipotesi
1. $s \cap a \cap b = P$;
2. $s \perp a$, $s \perp b$;
3. $a, b \in \alpha$;
4. $r \in \alpha$, $P \in r$.

Tesi $r \perp s$.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo *P* su una retta *s* e due rette *a* e *b* passanti per *P* e perpendicolari a *s*; chiamiamo α il piano su cui giacciono le rette incidenti *a* e *b*. Su *s* prendiamo *M* e *N* in semispazi opposti rispetto ad α e tali che $PM \cong PN$.
Disegniamo una qualunque retta $r \in \alpha$ e passante per *P*; prendiamo un punto *A* sulla retta *a* e un punto *B* sulla retta *b* in modo che la retta *AB* intersechi *r* nel punto *R*. Nel triangolo *MNA* il segmento *AP* è altezza e mediana della base *MN*, pertanto *MNA* è isoscele su tale base e quindi $AM \cong AN$. In modo simile si dimostra che *MNB* è isoscele e $BM \cong BN$.

I triangoli ABM e ABN hanno AB in comune, $AM \cong AN$ e $BM \cong BN$: per il terzo criterio sono congruenti, e in particolare risulta $A\widehat{B}M \cong A\widehat{B}N$. Consideriamo i triangoli RBM e RBN: hanno RB in comune, $R\widehat{B}M \cong R\widehat{B}N$ e $BM \cong BN$; pertanto sono congruenti per il primo criterio. In particolare hanno $RM \cong RN$. Il triangolo MRN è dunque isoscele sulla base MN; poiché RP è mediana di MN, allora è anche altezza. Concludiamo che r è perpendicolare a s.



◀ Figura 7

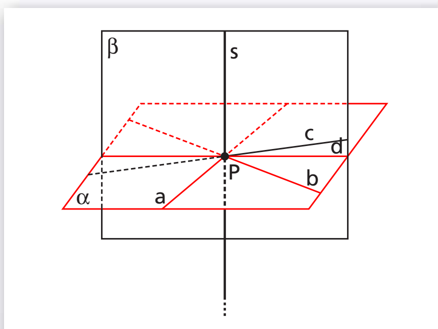
TEOREMA

Le perpendicolari a una retta s condotte per un suo punto P giacciono tutte nello stesso piano.

DIMOSTRAZIONE

Prese due rette a e b perpendicolari a s nel punto P, indichiamo con α il piano che le contiene. Consideriamo una generica retta c perpendicolare a s in P. Per assurdo supponiamo che c non giaccia nel piano α. Indichiamo con β il piano contenente c e s: poiché α e β hanno in comune il punto P la loro intersezione è una retta d passante per P. Per il teorema precedente d è perpendicolare a s. Si arriva così a una conclusione assurda: nel piano β le rette c e d passanti per uno stesso punto P risulterebbero entrambe perpendicolari a s.

Deduciamo quindi che la retta c deve giacere sul piano α. Questa conclusione è valida per ogni altra retta perpendicolare a s in P.



◀ Figura 8

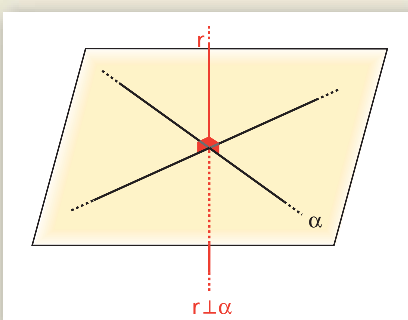
● La retta d appartiene al piano di a e di b e passa per il punto P.

Questi teoremi giustificano la definizione.

DEFINIZIONE

Retta perpendicolare a un piano

Una retta è perpendicolare a un piano quando è incidente al piano e perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il punto di incidenza.



● Una retta incidente ma non perpendicolare a un piano si chiama **obliqua**.

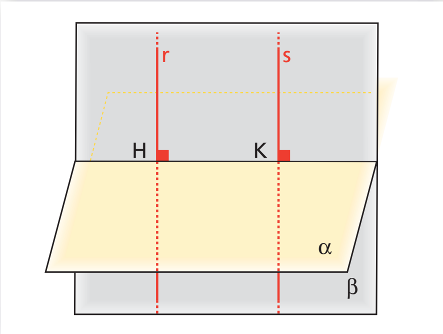
Il punto di incidenza si chiama **piede** della perpendicolare.

Enunciamo ora alcuni teoremi che non dimostriamo.

TEOREMA

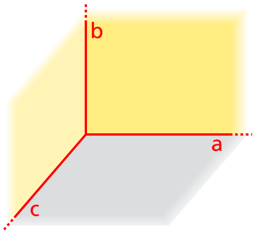
Due rette perpendicolari a uno stesso piano sono parallele fra loro.

Ipotesi $r \perp \alpha \wedge s \perp \alpha$.
Tesi $r \parallel s$.



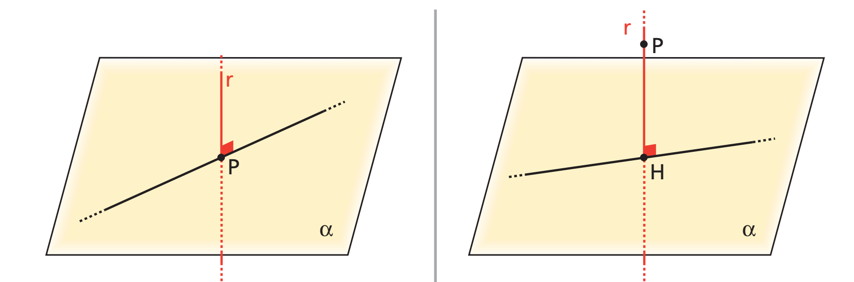
◀ **Figura 9** Le due rette *r* e *s* sono perpendicolari al piano α. I punti *H* e *K* sono rispettivamente i piedi di *r* e di *s*. Il piano individuato da *r* e da *HK* coincide col piano individuato da *s* e da *HK*, pertanto *r* e *s* sono complanari e, poiché entrambe sono perpendicolari alla retta *HK*, risultano parallele.

Nello spazio **non** è valido, invece, il teorema che afferma: «Due rette perpendicolari a una stessa retta sono parallele».
Nella figura che segue $a \perp b$ e $b \perp c$, ma non è vero che $a \parallel c$.



TEOREMA

Dati un piano α e un punto *P*, esiste ed è unica la retta *r* passante per il punto e perpendicolare al piano.

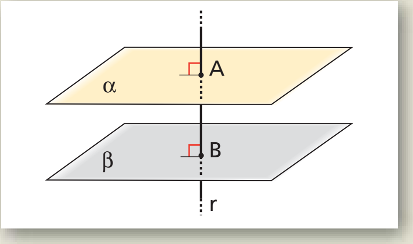


a. Il punto *P* appartiene al piano. **b.** Il punto *P* non appartiene al piano.

TEOREMA

Se due piani sono perpendicolari a una stessa retta in punti distinti, allora sono paralleli.

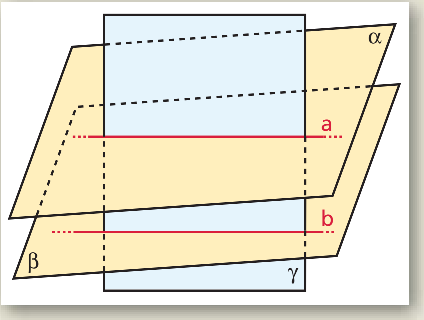
Ipotesi **1.** $\alpha \perp r$, $\alpha \cap r = A$;
2. $\beta \perp r$, $\beta \cap r = B$;
3. $A \neq B$.
Tesi $\alpha \parallel \beta$.



TEOREMA

Le intersezioni tra un piano e due piani paralleli sono rette parallele.

Ipotesi **1.** $\alpha \parallel \beta$;
2. $\gamma \cap \alpha = a$,
$\gamma \cap \beta = b$.
Tesi $a \parallel b$.

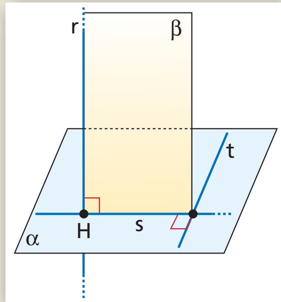


Il teorema delle tre perpendicolari

TEOREMA

Teorema delle tre perpendicolari

Se dal piede di una perpendicolare a un piano si manda la perpendicolare a una qualunque retta del piano, quest'ultima risulta perpendicolare al piano delle prime due.



Ipotesi 1. $r \perp \alpha$;
2. $s \perp t$.

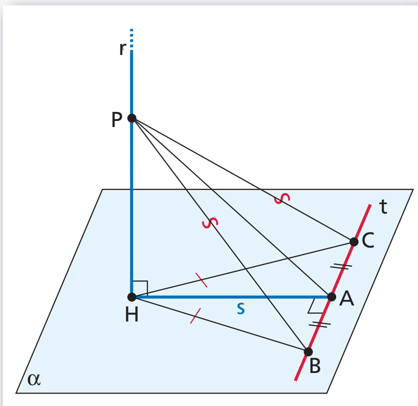
Tesi $t \perp \beta$.

DIMOSTRAZIONE

Sia r una retta perpendicolare a un piano α e t una retta di α non passante per il piede H di r.

Sia s la perpendicolare condotta da H a t. Dobbiamo dimostrare che t è perpendicolare al piano individuato dalle rette r e s.

Detto A il punto di intersezione delle rette s e t, preso un generico punto P su r, dimostriamo che t è perpendicolare alla retta PA. Consideriamo dunque sulla retta t i segmenti $AB \cong AC$ da parti opposte rispetto ad A e congiungiamo B e C con H e P. Poiché H è sull'asse di BC, $HB \cong HC$. I triangoli rettangoli PHB e PHC sono allora congruenti e quindi $PB \cong PC$. Il triangolo BPC è isoscele, dunque la mediana PA è perpendicolare a BC, e cioè la retta PA è perpendicolare alla retta t. Concludiamo allora che la retta t è perpendicolare al piano individuato da PA e HA, e cioè al piano formato dalle rette r e s.



◀ Figura 10

La distanza di un punto da un piano

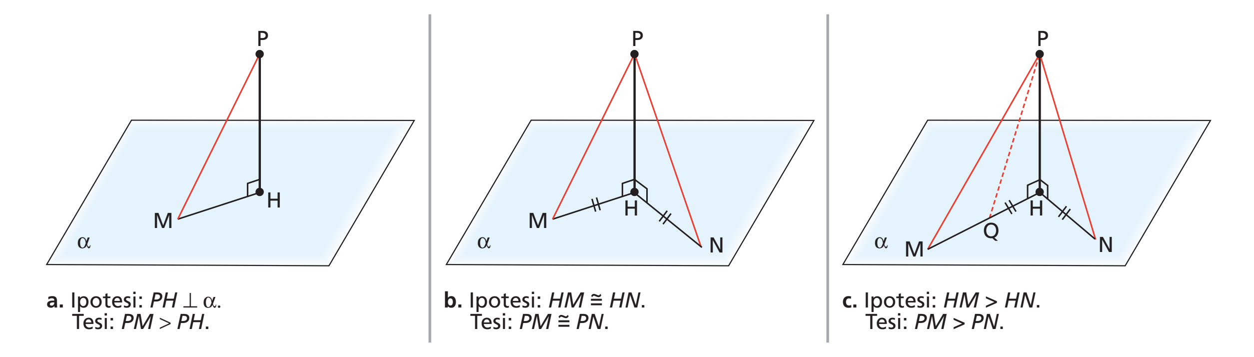
Se da un punto P mandiamo la perpendicolare a un piano α, l'intersezione P' della retta con il piano è la **proiezione ortogonale** di P su α. Se proiettiamo tutti i punti di una figura $\mathcal{F}$ sul piano α otteniamo la proiezione $\mathcal{F}'$ di $\mathcal{F}$. In particolare la proiezione di una retta su un piano è una retta.
È possibile dimostrare il seguente teorema.

● Se la retta è perpendicolare al piano α, la sua proiezione si riduce a un punto.

TEOREMA

Sia dato un piano α e un punto P non appartenente ad α:

a) il segmento di perpendicolare condotto da P ad α è minore di ogni segmento obliquo;
b) due segmenti obliqui che hanno proiezioni congruenti sono congruenti e viceversa;
c) due segmenti obliqui che hanno proiezioni disuguali sono disuguali ed è maggiore quello la cui proiezione è maggiore e viceversa.



a. Ipotesi: $PH \perp \alpha$.
Tesi: $PM > PH$.

b. Ipotesi: $HM \cong HN$.
Tesi: $PM \cong PN$.

c. Ipotesi: $HM > HN$.
Tesi: $PM > PN$.

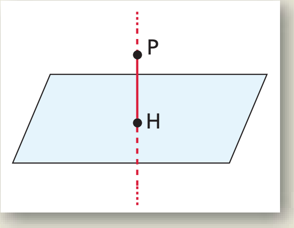
▲ Figura 11

● Se il punto appartiene al piano la distanza è nulla.

DEFINIZIONE

Distanza di un punto da un piano

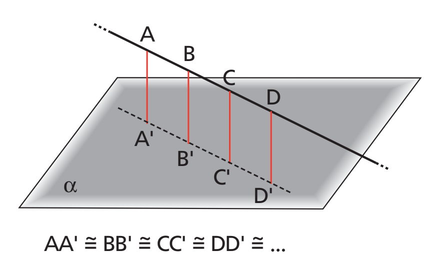
Dati un piano e un punto, la distanza del punto dal piano è la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto e il piede della perpendicolare al piano passante per il punto.



Distanza fra retta e piano paralleli

Se una retta è parallela a un piano, i suoi punti sono *equidistanti* dal piano stesso: tale distanza si chiama **distanza della retta dal piano**.

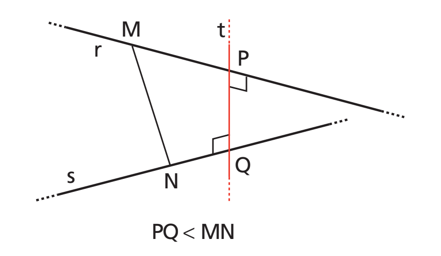
► Figura 12



Distanza di due rette sghembe

Date due rette sghembe, si può dimostrare che esiste un'*unica retta perpendicolare* a entrambe. Il segmento che congiunge i due punti di intersezione di tale perpendicolare con le rette è minore di ogni altro segmento che congiunge un punto di una retta con un punto dell'altra. Tale segmento è detto **distanza fra le due rette sghembe**.

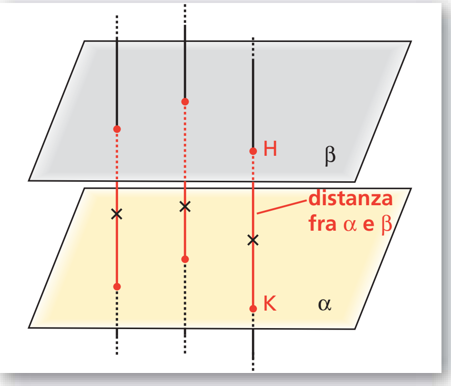
► Figura 13



La distanza fra due piani paralleli

Dati due piani paralleli, si può dimostrare che una retta perpendicolare a uno di essi è perpendicolare anche all'altro. Inoltre, scelte due rette per-

► Figura 14



pendicolari a due piani paralleli, il segmento intercettato dai due piani sull'una è congruente a quello intercettato sull'altra. Definiamo allora come **distanza fra due piani paralleli** la lunghezza del segmento intercettato dai due piani su una qualunque retta a essi perpendicolare.

● In generale è vero che, dati due piani paralleli e due rette parallele che li intersecano, i segmenti paralleli appartenenti alle rette e compresi fra i piani sono congruenti.

Il teorema di Talete nello spazio

Il teorema di Talete visto nel piano si può generalizzare nello spazio al caso di un insieme di piani paralleli e due rette **trasversali**, cioè due rette non parallele ai piani che quindi li intersecano tutti.

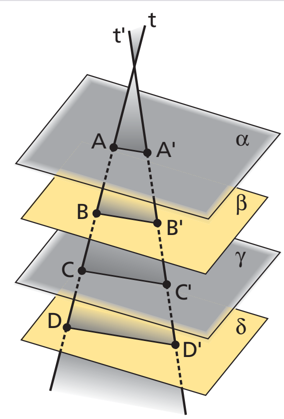
● Un insieme di piani paralleli si chiama **fascio improprio** di piani.
Un insieme di piani che hanno in comune una stessa retta r si chiama **fascio proprio** di asse r.

TEOREMA

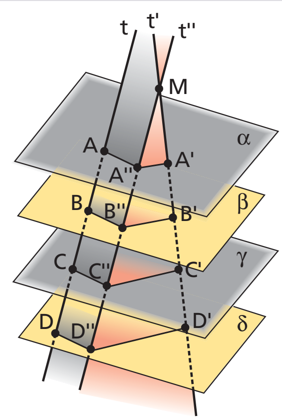
Teorema di Talete nello spazio
Un fascio di piani paralleli intersecati da due trasversali intercetta su di esse segmenti corrispondenti proporzionali.

Ipotesi 1. $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma \parallel \dots$;
2. t, t′ trasversali.

Tesi $AB : BC = A'B' : B'C'$;
$AC : BC = A'C' : B'C'$;
…



a. Le trasversali sono complanari.



b. Le trasversali sono sghembe.

◄ **Figura 15**

DIMOSTRAZIONE

Si possono presentare due casi.

1° caso: t e t' sono complanari (figura 15*a*).
Il piano delle rette t e t' interseca i piani del fascio formando il fascio di rette parallele $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel \dots$ di cui t e t' sono trasversali, quindi ricadiamo nel teorema di Talete nel piano:

$$AB : BC = A'B' : B'C', \quad AC : BC = A'C' : B'C'.$$

2° caso: t e t' sono sghembe (figura 15*b*).
Per un punto M di t' tracciamo la retta t'' parallela a t e indichiamo con A'', B'', C'', … le corrispondenti intersezioni con i piani α, β, γ, … Con questa costruzione abbiamo ottenuto i parallelogrammi $ABB''A''$, $ACC''A''$, $BCC''B''$, …, quindi $AB \cong A''B''$, $AC \cong A''C''$, $BC \cong B''C''$, … Alle trasversali t', t'' possiamo applicare il teorema di Talete nel piano:

$$A''B'' : B''C'' = A'B' : B'C', \qquad A''C'' : B''C'' = A'C' : B'C', \dots$$

Sostituendo $A''B''$ con AB, $A''C''$ con AC, …, deduciamo le proporzioni:

$$AB : BC = A'B' : B'C', \qquad AC : BC = A'C' : B'C', \dots$$

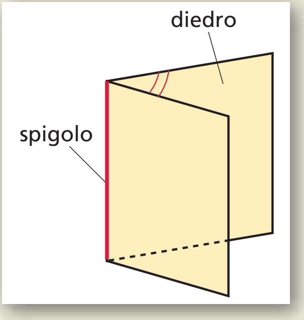
Il teorema è pertanto dimostrato.

I diedri e i piani perpendicolari

DEFINIZIONE

Diedro

Dati nello spazio due semipiani aventi la stessa retta origine, chiamiamo **diedro** ognuna delle due parti (compresi i semipiani) in cui essi dividono lo spazio.

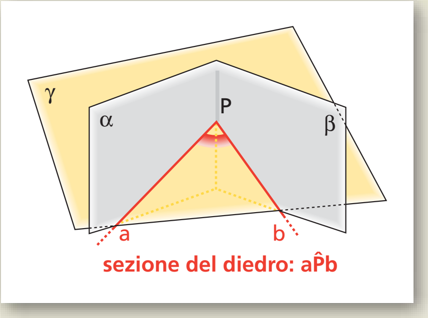


La retta origine dei semipiani si chiama **spigolo** del diedro e i semipiani si chiamano **facce** del diedro.

DEFINIZIONE

Sezione di un diedro

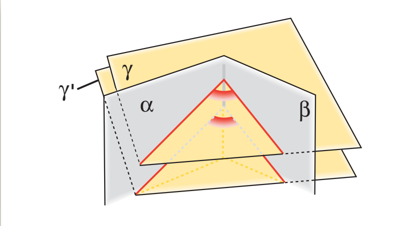
Si chiama sezione di un diedro l'angolo che si ottiene come intersezione fra il diedro e un qualunque piano non parallelo allo spigolo che interseca il suo spigolo.



Se un piano taglia lo spigolo di un diedro in un punto, allora interseca ogni faccia del diedro secondo una semiretta.

TEOREMA

Sezioni parallele di uno stesso diedro sono congruenti.



Ipotesi $\gamma \parallel \gamma'$.

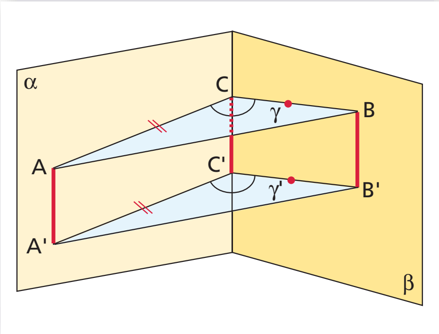
Tesi $A\widehat{C}B \cong A'\widehat{C'}B'$.

DIMOSTRAZIONE

Sui lati dell'angolo di vertice C, intersezione fra il diedro e il piano γ, disegniamo i segmenti CA e CB a piacere.

Sui lati dell'angolo di vertice C', intersezione fra il diedro e il piano γ', scegliamo A' e B' in modo che risulti $CA \cong C'A'$ e $CB \cong C'B'$.

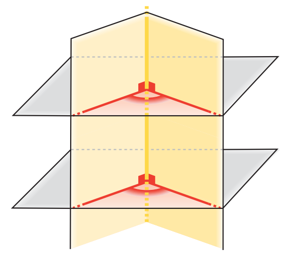
► Figura 16



Le rette CA e $C'A'$ sono parallele perché sono le intersezioni del piano α con i due piani paralleli γ e γ'.

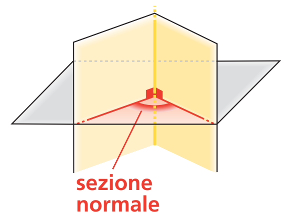
$CC'A'A$ è un parallelogramma in quanto ha i lati opposti CA e $C'A'$ congruenti e paralleli; quindi CC' è congruente e parallelo ad AA'.

Analogamente si dimostra che $CC'B'B$ è un parallelogramma; quindi CC' è congruente e parallelo a BB'.
Anche $AA'B'B$ è un parallelogramma poiché i lati opposti AA' e BB', per la proprietà transitiva, sono paralleli e congruenti tra loro; quindi AB è congruente e parallelo ad $A'B'$.
Consideriamo ora i triangoli ABC e $A'B'C'$: sono congruenti per il terzo criterio di congruenza in quanto hanno tutti e tre i lati ordinatamente congruenti; di conseguenza l'angolo $A\widehat{C}B$ è congruente all'angolo $A'\widehat{C'}B'$. Concludiamo che $A\widehat{C}B \cong A'\widehat{C'}B'$.



Una conseguenza del teorema precedente è che, se intersechiamo un diedro con piani perpendicolari allo spigolo, gli angoli che otteniamo sui piani sono congruenti fra loro (figura a lato).

Chiamiamo allora **sezione normale** di un diedro l'angolo che si ottiene come intersezione fra il diedro e un qualunque piano perpendicolare al suo spigolo.



Due diedri sono congruenti se sono congruenti le loro sezioni normali.

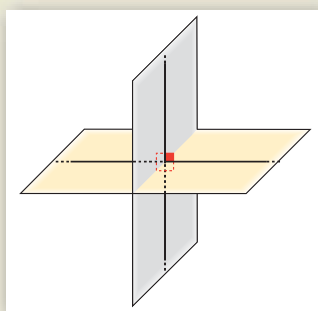
Chiamiamo **ampiezza** di un diedro l'ampiezza della sua sezione normale; un diedro si dice **retto**, **acuto** o **ottuso** a seconda che la sua sezione normale sia un angolo retto, acuto o ottuso.

Possiamo ora dare nello spazio la definizione di piani perpendicolari, analoga alla definizione di rette perpendicolari nel piano.

DEFINIZIONE

Piani perpendicolari

Due piani incidenti sono perpendicolari quando dividono lo spazio in quattro diedri retti.



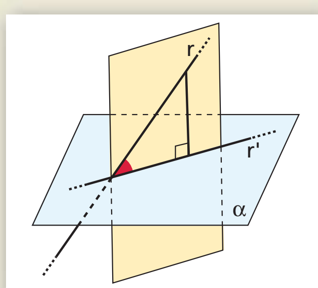
L'angolo di una retta con un piano

Sia r una retta incidente il piano α: un piano generico, che passa per r, interseca α in un'altra retta. L'angolo formato dalle due rette dipende dalla scelta del piano variabile e risulta minimo quando il piano è perpendicolare ad α.

DEFINIZIONE

Angolo di una retta con un piano

L'angolo di una retta r con un piano α è l'angolo formato da r e dalla sua proiezione r' su α.



2. LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Per lo studio delle trasformazioni geometriche nello spazio il percorso è analogo a quello seguito nel piano e molti concetti non sono altro che la traduzione in tre dimensioni di quelli introdotti precedentemente.

Una trasformazione geometrica nello spazio è una corrispondenza biunivoca fra i punti dello spazio e i punti dello spazio stesso. In particolare, in una trasformazione geometrica si chiamano **punti uniti** quei punti che coincidono con i loro corrispondenti.
Esaminiamo, come abbiamo fatto nel piano, le isometrie e le omotetie; fra le composizioni di trasformazioni studiamo invece le similitudini.

Le isometrie

Le isometrie nello spazio hanno le stesse proprietà di quelle del piano, ossia **conservano le distanze tra coppie di punti corrispondenti**. Esse trasformano ogni segmento in un segmento congruente e ogni angolo in un angolo congruente.

DEFINIZIONE

Figure solide congruenti

Due figure solide si dicono **congruenti** quando hanno tutte le caratteristiche tra loro congruenti, ossia hanno lati, angoli, spigoli, facce, diedri corrispondenti congruenti. Se inoltre possono essere sovrapposte, mediante un movimento rigido, in modo che tutti i loro punti coincidano, si dicono **direttamente congruenti**. In caso contrario si dicono **inversamente congruenti**.

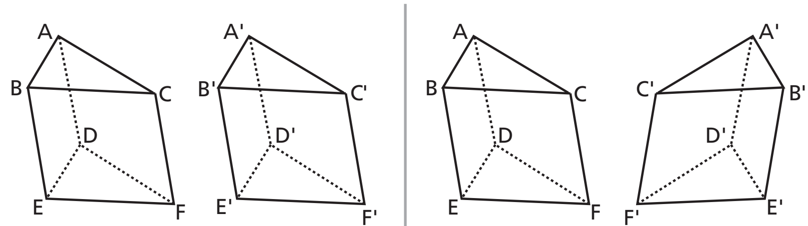
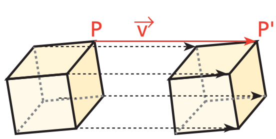


Figure direttamente congruenti

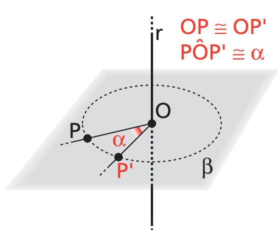
Figure inversamente congruenti



La traslazione

Fissato nello spazio un vettore $\vec{v}$, la **traslazione di vettore $\vec{v}$** è quella trasformazione geometrica che a ogni punto P fa corrispondere il punto P' tale che il vettore $\overrightarrow{PP'}$ è uguale a $\vec{v}$.

In una traslazione, la figura trasformata è direttamente congruente alla figura data.



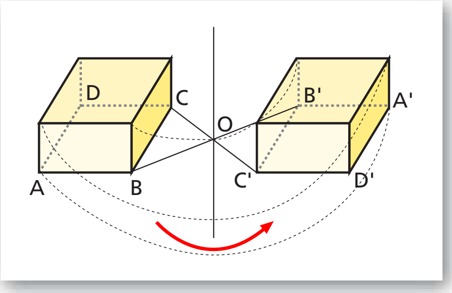
La rotazione

Fissati nello spazio una retta r e un angolo orientato α, la **rotazione di asse r e angolo α** è quella trasformazione geometrica che a ogni punto P fa corrispondere il punto P' tale che:

- P' appartiene al piano β passante per P e perpendicolare alla retta r;

- chiamato O il punto di intersezione di r con β, $OP' \cong OP$ e $P\widehat{O}P' \cong \alpha$, con la stessa orientazione.

In una rotazione, la figura trasformata è direttamente congruente alla figura data.



● Ogni punto dell'asse r di rotazione è punto unito.

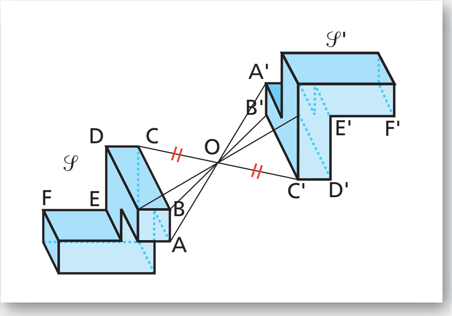
◀ Figura 17

La simmetria centrale

Fissato nello spazio un punto O, la **simmetria centrale di centro *O*** è la trasformazione geometrica che:

1. al punto O fa corrispondere se stesso;
2. a ogni punto P diverso da O fa corrispondere il punto P' tale che il segmento PP' abbia O come punto medio.

Due solidi che si corrispondono mediante una simmetria centrale di centro O sono, in genere, inversamente congruenti.



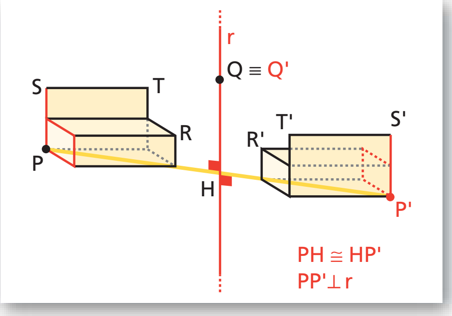
● Il punto O di una simmetria centrale di centro O è un punto unito.

◀ Figura 18

La simmetria assiale

Fissata una retta r nello spazio, la **simmetria assiale di asse *r*** è la trasformazione geometrica che:

1. a ogni punto di r fa corrispondere se stesso;
2. a ogni punto P, non appartenente a r, fa corrispondere il punto P', diverso da P, tale che:
   - la retta PP' è perpendicolare a r;
   - le distanze di P e di P' da r sono congruenti.



● In una simmetria assiale di asse r, i punti di r sono punti uniti.

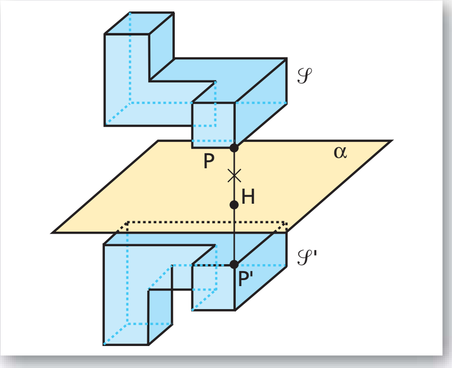
◀ Figura 19

La figura trasformata in una simmetria assiale è direttamente congruente alla data.

La simmetria rispetto a un piano

Fissato un piano α nello spazio, la **simmetria rispetto al piano α** è quella trasformazione geometrica che:

1. a ogni punto di α fa corrispondere se stesso;
2. a ogni punto P, non appartenente ad α, fa corrispondere il punto P', diverso da P, tale che:
   - la retta PP' è perpendicolare ad α;
   - le distanze di P e P' da α sono congruenti.



● In una simmetria rispetto a un piano ogni punto del piano è punto unito.

◀ Figura 20

Il piano α è chiamato **piano di simmetria**.

Due figure solide che si corrispondono mediante una simmetria rispetto a un piano sono, in genere, inversamente congruenti.

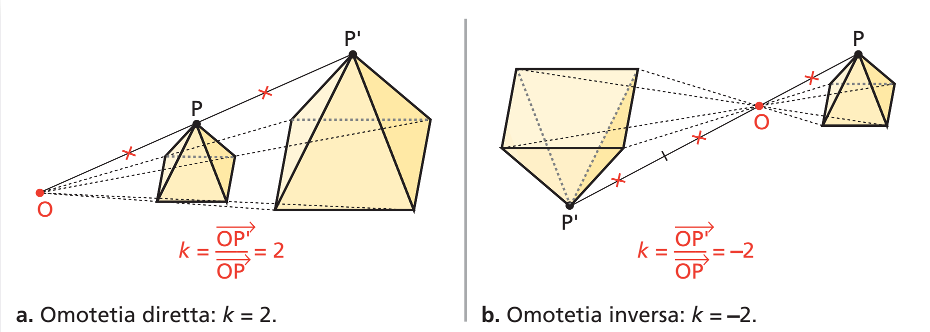
Le omotetie

Dato un punto O e un numero reale k diverso da 0, l'**omotetia di centro O e rapporto k** è quella trasformazione che al punto O fa corrispondere se stesso e a ogni altro punto P fa corrispondere il punto P' tale che:

$$\frac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OP}} = k.$$

Come nel piano, il numero reale k è detto *rapporto di omotetia*. Se $k > 0$ l'omotetia si dice *diretta*, se $k < 0$ si dice *inversa*.

► Figura 21



a. Omotetia diretta: $k = 2$. **b.** Omotetia inversa: $k = -2$.

La composizione di due trasformazioni

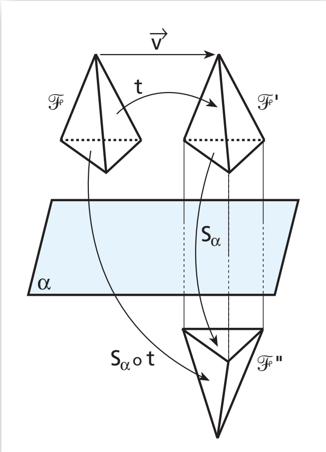
È possibile comporre due trasformazioni geometriche anche nello spazio. Per esempio, applichiamo a un solido $\mathcal{F}$ una trasformazione t_1 e al solido corrispondente $\mathcal{F}'$ una trasformazione t_2. Per ottenere direttamente il solido $\mathcal{F}''$ dobbiamo applicare a $\mathcal{F}$ la trasformazione composta $t_2 \circ t_1$:

$$\mathcal{F} \xrightarrow{t_2 \circ t_1} \mathcal{F}''.$$

ESEMPIO

Trasliamo la figura $\mathcal{F}$ secondo un vettore $\vec{v}$, poi determiniamo il solido $\mathcal{F}''$, simmetrico di $\mathcal{F}'$ rispetto al piano α. La trasformazione composta associa a $\mathcal{F}$ il solido $\mathcal{F}''$.

► Figura 22

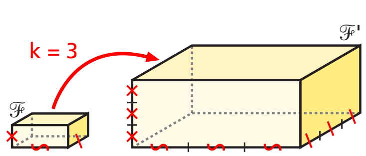


La similitudine

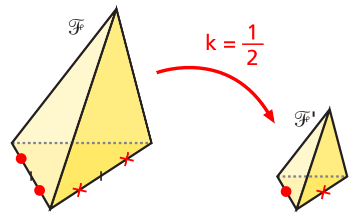
Nello spazio la similitudine viene definita in modo del tutto analogo alla similitudine nel piano, ossia una similitudine è la trasformazione composta di un'isometria e di un'omotetia, o viceversa. Il *rapporto di similitudine* è, anche in questo caso, il rapporto di omotetia.

La similitudine nello spazio gode di tutte le proprietà già esaminate nel piano, in particolare essa trasforma angoli in angoli congruenti e segmenti in segmenti proporzionali.

Il rapporto fra segmenti corrispondenti è uguale al rapporto di similitudine.



a. Il rapporto di similitudine è 3. Ciò significa che ogni lato del solido $\mathscr{F}'$ è il triplo del corrispondente di $\mathscr{F}$.



b. Il rapporto di similitudine è $\frac{1}{2}$. Ogni lato del solido $\mathscr{F}'$ è la metà del corrispondente di $\mathscr{F}$.

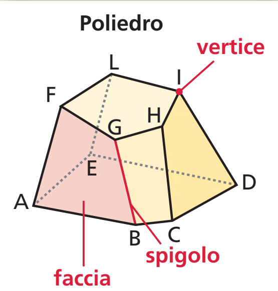
◄ Figura 23

3. I POLIEDRI

DEFINIZIONE

Poliedro

Un poliedro è una figura solida, limitata da un numero finito di poligoni appartenenti a piani diversi e tali che il piano di ogni poligono non attraversi il solido.



● **Poliedro** deriva dal greco *polýs*, «molto», e *hédra*, «faccia, base».

I poligoni sono detti **facce** del poliedro, i lati dei poligoni **spigoli** del poliedro, i vertici dei poligoni **vertici** del poliedro.

Si dice **diagonale** di un poliedro il segmento che congiunge due vertici non situati sulla stessa faccia.

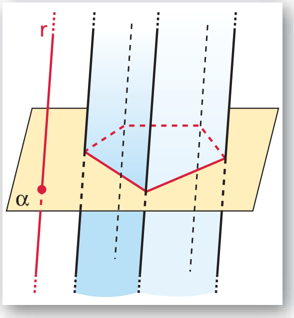
Un poliedro ha almeno quattro facce. Il tetraedro è il poliedro a quattro facce. **Pentaedro**, **esaedro**, **ottaedro**, **dodecaedro** sono poliedri che hanno rispettivamente 5, 6, 8, 12 facce.

Descriviamo ora le principali proprietà di due poliedri: il prisma e la piramide.

Il prisma

Dati un poligono e una retta r non appartenente al piano del poligono, la figura costituita dall'insieme delle rette parallele a r e passanti per i punti del poligono si chiama **prisma indefinito**.
Le rette parallele a r passanti per i vertici del poligono sono dette **spigoli** del prisma indefinito.

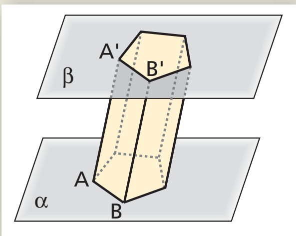
▶ Figura 24



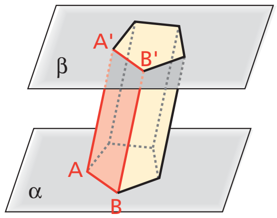
DEFINIZIONE

Prisma (definito)

Si chiama prisma definito, o semplicemente prisma, il poliedro costituito dalla parte di prisma indefinito compresa fra due piani paralleli che lo intersecano.



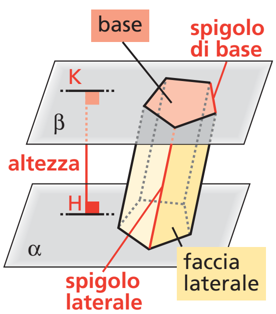
Osserva che le intersezioni fra i piani paralleli e il prisma indefinito sono due poligoni congruenti.



DIMOSTRAZIONE

Siano A e B due vertici consecutivi del poligono appartenente al piano α (figura a lato). Lo spigolo del prisma indefinito passante per A interseca il piano β nel punto A' e lo spigolo per B interseca β in B'. Il quadrilatero $ABB'A'$ ha:
- i lati AA' e BB' paralleli, perché appartenenti a spigoli del prisma indefinito;
- i lati AA' e BB' congruenti, perché segmenti paralleli compresi fra piani paralleli;

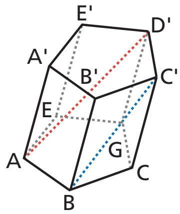
quindi $ABB'A'$ è un parallelogramma, pertanto $AB \parallel A'B'$ e $AB \cong A'B'$.
Analogamente si dimostra che ogni coppia di lati che si corrispondono nei due poligoni individuati nei piani α e β è costituita da segmenti congruenti e paralleli. Pertanto i due poligoni sono congruenti.



Le intersezioni fra i piani paralleli e il prisma indefinito sono dette **basi** del prisma. Gli altri poligoni che delimitano il prisma sono detti **facce laterali** e sono tanti parallelogrammi quanti sono i lati dei poligoni di base.

I prismi possono essere classificati mediante i poligoni di base. Se la base è un esagono, il prisma si dice esagonale; se è un triangolo, triangolare e così via.

La distanza fra i due piani paralleli è l'**altezza** del prisma. Ogni lato di base si chiama anche **spigolo di base**, gli altri lati dei parallelogrammi si chiamano **spigoli laterali**. I vertici dei poligoni vengono anche detti **vertici** del prisma.



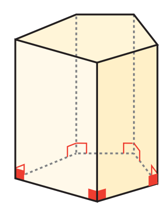
Le **diagonali** di un prisma sono quei segmenti che congiungono due vertici non appartenenti alla stessa faccia. Nella figura a lato, AD' è una diagonale del prisma. Un prisma triangolare non ha diagonali.

Prismi particolari

DEFINIZIONE

Prisma retto

Un prisma si dice retto se gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi.



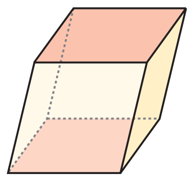
In un prisma retto le facce laterali sono dei rettangoli e l'altezza coincide con gli spigoli laterali.

Un prisma retto si dice **regolare** quando le sue basi sono poligoni regolari.

DEFINIZIONE

Parallelepipedo

Un parallelepipedo è un prisma le cui basi sono parallelogrammi.



Si possono dimostrare i seguenti teoremi.

TEOREMA

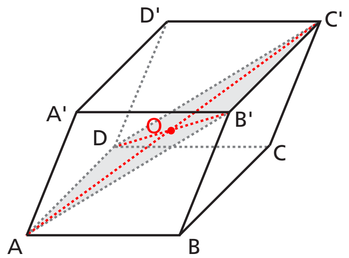
Le facce opposte di un parallelepipedo, ossia quelle che non hanno vertici in comune, sono congruenti e parallele.

TEOREMA

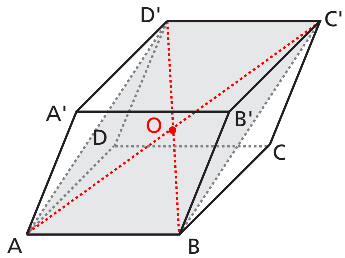
Le diagonali di un parallelepipedo si incontrano in uno stesso punto che le divide in due segmenti congruenti.

DIMOSTRAZIONE

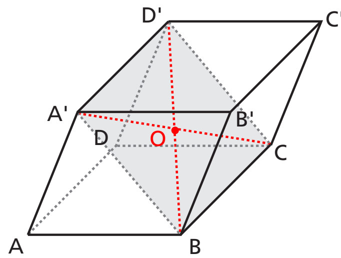
▼ Figura 25



a. *ADC'B'* è un parallelogramma perché ha i lati opposti congruenti e paralleli, quindi le diagonali *AC'* e *DB'* si incontrano nel loro punto medio *O*.

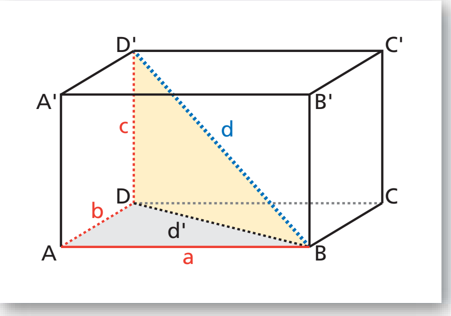


b. Analogamente anche *ABC'D'* è un parallelogramma e le sue diagonali *AC'* e *D'B* si incontrano nel loro punto medio che, come nel caso precedente, è *O* in quanto la diagonale *AC'* è in comune e il punto medio di un segmento è unico.



c. Anche *A'D'CB* è un parallelogramma; le diagonali *A'C* e *D'B* si incontrano nel loro punto medio che, come nel caso precedente, è *O* in quanto la diagonale *D'B* è in comune.

Un parallelepipedo retto in cui le basi sono rettangoli si chiama **parallelepipedo rettangolo**.



▶ **Figura 26** Con a, b e c indichiamo le misure delle dimensioni del parallelepipedo rettangolo, con d quella della diagonale, con d' quella della diagonale di base.

Le lunghezze dei tre spigoli uscenti da uno stesso vertice si dicono **dimensioni** del parallelepipedo.

● In un parallelepipedo retto l'altezza è ortogonale alle basi.

In un parallelepipedo rettangolo le diagonali sono congruenti. La relazione fra la loro misura e quella delle tre dimensioni del parallelepipedo si ottiene applicando due volte il teorema di Pitagora. Osserviamo la figura 26: applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABD si ottiene

$$d'^2 = a^2 + b^2$$

e, applicando il teorema di Pitagora al triangolo DBD':

$$d^2 = d'^2 + c^2.$$

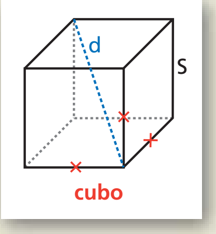
Sostituendo l'espressione di d'^2 ottenuta prima, si ricava:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \rightarrow \boldsymbol{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

DEFINIZIONE

Cubo

Un cubo è un parallelepipedo rettangolo con le tre dimensioni congruenti.



Le sei facce del cubo sono quadrati congruenti. Detta s la misura dello spigolo del cubo, abbiamo:

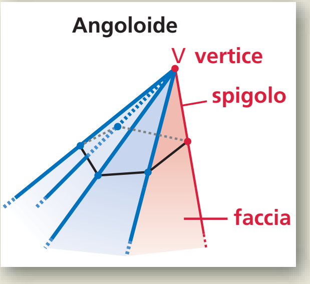
$$d = s\sqrt{3}.$$

L'angoloide e il triedro

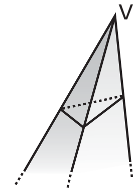
DEFINIZIONE

Angoloide

Consideriamo un poligono convesso e un punto V non appartenente al suo piano. Chiamiamo angoloide il solido costituito da tutte le semirette di origine V che passano per i punti del poligono.



Le semirette passanti per i vertici del poligono sono dette **spigoli** dell'angoloide, l'origine V è il **vertice** dell'angoloide, gli angoli di vertice V e lati due spigoli consecutivi sono le **facce** dell'angoloide.



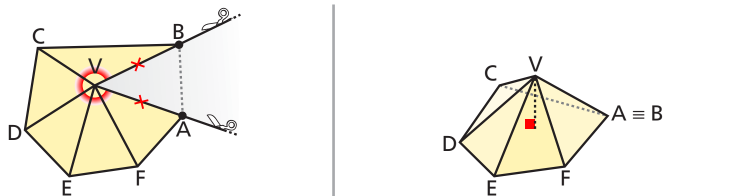
In particolare, un angoloide con tre spigoli si chiama **triedro** (figura a lato).

Gli angoloidi sono figure convesse.

Enunciamo alcune proprietà senza darne la dimostrazione.

TEOREMA

In ogni angoloide di vertice V, la somma degli angoli in V delle facce è minore di un angolo giro.



a. Disegna su un foglio alcuni triangoli che abbiano tutti in comune un vertice *V* e abbiano, a due a due, un lato in comune. Fa in modo che uno di questi triangoli sia isoscele, come *AVB* in figura. Ritaglia la figura lungo il perimetro *ABCDEF*, poi ritaglia i lati *VA* e *VB*.

b. Se fai coincidere *VA* e *VB* ottieni un angoloide. Osserva che la somma degli angoli in *V* dei triangoli facce dell'angoloide è minore di un angolo giro. Se tale somma fosse un angolo giro, il vertice *V* dovrebbe appartenere al piano su cui è contenuto il poligono di base.

◀ **Figura 27** Ritagliando un foglio come indicato, ottieni una verifica pratica del teorema.

TEOREMA

In ogni *angoloide* l'angolo di una faccia è minore della somma degli angoli delle rimanenti.

TEOREMA

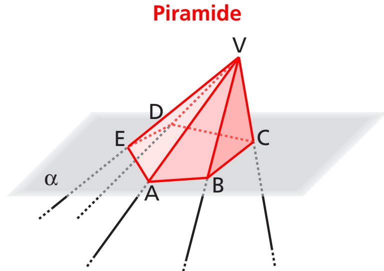
In ogni *triedro* l'angolo di una faccia è maggiore della differenza degli angoli delle altre due.

La piramide

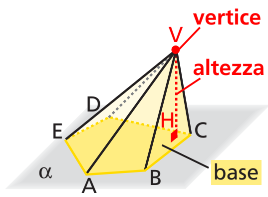
DEFINIZIONE

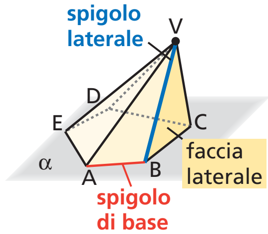
Piramide

Si chiama piramide la parte di angoloide compresa fra il suo vertice e un piano che interseca tutti i suoi spigoli.



Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2.0** © Zanichelli 2011 *Volume 4*





Il poligono intersezione fra il piano e l'angoloide si chiama **base** della piramide, il vertice dell'angoloide **vertice** della piramide.

La distanza fra il vertice e il piano di base è l'**altezza** della piramide.

La piramide è delimitata, oltre che dalla base, da triangoli detti **facce laterali**.

Ogni lato della base si chiama anche **spigolo** di base, gli altri lati dei triangoli si chiamano **spigoli laterali**.

Anche le piramidi sono classificate mediante i poligoni di base. Se la base è un triangolo, la piramide si dice triangolare, se è un quadrilatero quadrangolare e così via.

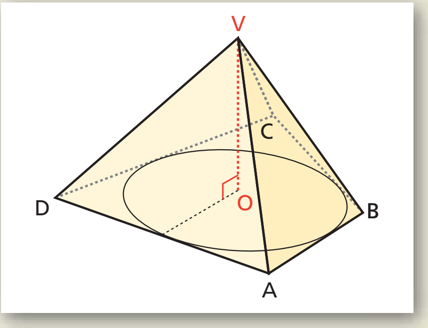
Due piramidi particolari

La piramide retta

DEFINIZIONE

Piramide retta

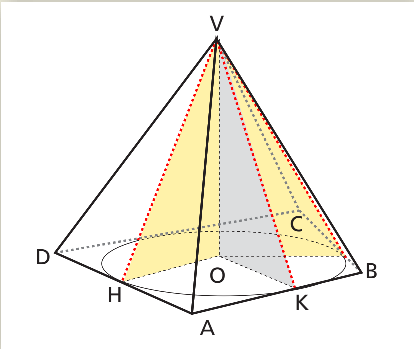
Una piramide è retta quando nella sua base si può inscrivere una circonferenza, il cui centro è la proiezione ortogonale del vertice della piramide sul piano di base.



Il centro O della circonferenza è la proiezione ortogonale del vertice V. Osserva che il segmento VO è l'altezza della piramide.

TEOREMA

In una piramide retta le altezze delle facce laterali passano per i punti di tangenza dei lati di base con la circonferenze inscritta e sono tra loro congruenti.



Ipotesi ABCDV è una piramide retta.

Tesi 1. $VK \perp AB$, $VH \perp AD$; 2. $VK \cong VH$.

DIMOSTRAZIONE

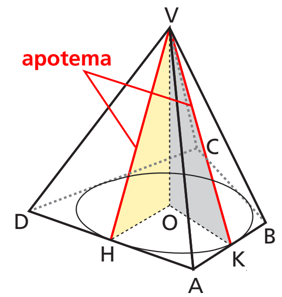
Congiungiamo il centro O della circonferenza con due punti di tangenza H e K.

Si ottengono i raggi OH e OK che sono perpendicolari ai lati AD e AB, perché questi sono tangenti alla circonferenza.
Per il teorema delle tre perpendicolari VO è perpendicolare al piano della base, OH è perpendicolare alla retta AD, quindi VH è perpendicolare alla retta AD ed è l'altezza della faccia VDA. Analogamente si dimostra che VK è perpendicolare ad AB e così per ogni faccia.
I triangoli rettangoli VOH e VOK hanno il cateto VO in comune e i cateti OH

Una retta tangente a una circonferenza è perpendicolare al raggio nel punto di tangenza.

e OK congruenti, perché raggi; quindi sono congruenti. In particolare sono congruenti le loro ipotenuse VH e VK.

In modo analogo si dimostra che sono congruenti le altezze delle altre facce laterali.



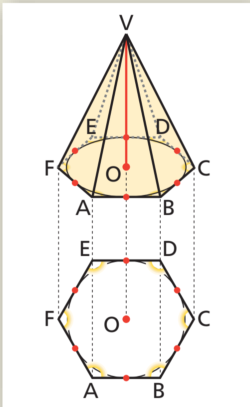
L'altezza delle facce laterali di una piramide retta si chiama **apotema**.

La piramide regolare

DEFINIZIONE

Piramide regolare

Una piramide retta si dice regolare quando la sua base è un poligono regolare.

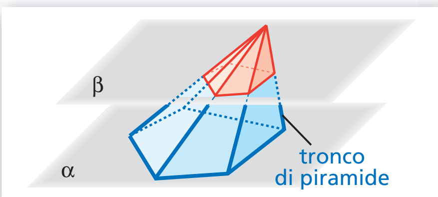


Le facce laterali di una piramide regolare sono triangoli isosceli fra loro congruenti.

Il tronco di piramide

Data una piramide, consideriamo le parti in cui viene divisa da un piano parallelo alla base e posto a una distanza dal vertice inferiore all'altezza della piramide.

Otteniamo due solidi:



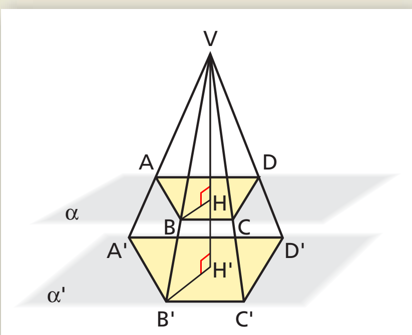
◀ Figura 28

- una piramide più piccola, con lo stesso vertice della piramide data; si può dimostrare che le due piramidi sono solidi simili;
- un solido delimitato da due poligoni sui piani paralleli e da facce laterali che sono dei trapezi, chiamato **tronco di piramide**. I due poligoni sui piani paralleli sono detti **basi** e i trapezi **facce laterali** del tronco di piramide.

TEOREMA

Se si taglia una piramide di vertice V con un piano parallelo alla base si ha che:

1. la sezione e la base sono poligoni simili;
2. i lati e i perimetri di questi poligoni sono proporzionali alle distanze del loro piano dal vertice V;
3. le misure delle superfici sono proporzionali ai quadrati delle misure di queste distanze.

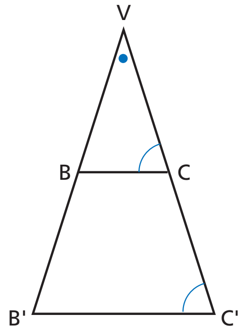


Ipotesi

1. $\alpha \parallel \alpha'$;
2. $VH \perp \alpha$;
3. $VH' \perp \alpha'$.

Tesi

1. $ABCD \approx A'B'C'D'$;
2. $BC : B'C' = VH : VH'$;
   $2p : 2p' = VH : VH'$;
3. $S : S' = \overline{VH}^2 : \overline{VH'}^2$.



DIMOSTRAZIONE

1. I piani paralleli α e α', secando le facce della piramide, formano segmenti paralleli, quindi $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CD \parallel C'D'$, $DA \parallel D'A'$.

I triangoli VBC e $VB'C'$ hanno l'angolo in V in comune e gli angoli $V\widehat{C}B$ e $V\widehat{C'}B'$ congruenti perché corrispondenti delle parallele BC e $B'C'$ tagliate dalla trasversale VC'. Pertanto i triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine.

Con considerazioni analoghe si dimostra che i triangoli VAB e $VA'B'$ sono simili.

Possiamo scrivere

$$AB : A'B' = VB : VB', \qquad VB : VB' = BC : B'C',$$

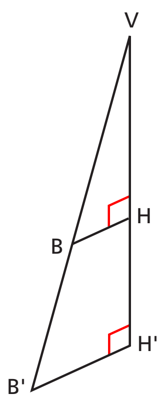
e, per la proprietà transitiva:

$$AB : A'B' = BC : B'C'.$$

Con un ragionamento analogo per tutte le facce ricaviamo:

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DA : D'A'.$$

I poligoni di base hanno perciò i lati proporzionali e hanno anche gli angoli corrispondenti congruenti poiché sezioni parallele di uno stesso diedro; quindi i poligoni $ABCD$ e $A'B'C'D'$ sono simili.



2. Consideriamo i triangoli rettangoli VBH e $VB'H'$. Essi hanno l'angolo al vertice in comune, quindi sono simili. Possiamo scrivere:

$$VH : VH' = VB : VB'.$$

Precedentemente abbiamo dimostrato che

$$BC : B'C' = VB : VB',$$

quindi, per la proprietà transitiva:

$$BC : B'C' = VH : VH'.$$

In due poligoni simili il rapporto dei perimetri è uguale al rapporto dei lati omologhi. Indicando con $2p$ e $2p'$ i perimetri di $ABCD$ e $A'B'C'D'$ si ha:

$$2p : 2p' = BC : B'C',$$

e, confrontando con la proporzione precedente:

$$2p : 2p' = VH : VH'.$$

3. Il rapporto fra le aree di due poligoni simili è uguale al quadrato del rapporto di similitudine. Indicando con S e S' le misure delle aree dei poligoni si ha:

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}\right)^2 = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}.$$

Ricordando la proporzione già dimostrata $BC : B'C' = VH : VH'$, dalla relazione precedente, otteniamo:

$$S : S' = \overline{VH}^2 : \overline{VH'}^2.$$

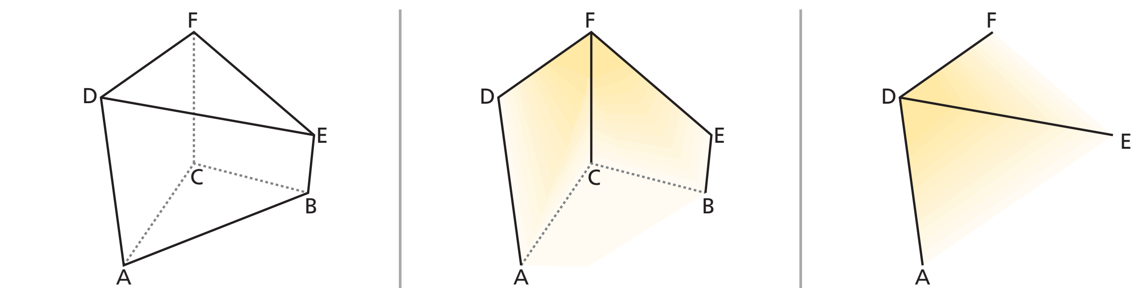
Un tronco di piramide è **retto** o **regolare** se deriva da una piramide retta o regolare.

I poliedri regolari

Dato un poliedro, a ogni suo spigolo associamo il diedro individuato dalle due facce che contengono quello spigolo; esso è un **diedro del poliedro**.

Inoltre a ogni vertice del poliedro associamo l'angoloide i cui spigoli contengono quelli del poliedro uscenti da quel vertice: esso è un **angoloide del poliedro**.

▼ Figura 29



a. Un poliedro *ABCDEF*.

b. Diedro di spigolo *FC*.

c. Angoloide con vertice *D* e spigoli *DA*, *DE* e *DF*.

Nel piano abbiamo studiato che un poligono è regolare se ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti. In analogia, anche nello spazio viene definito il *poliedro regolare*.

DEFINIZIONE

Poliedro regolare

Un poliedro si dice regolare quando le sue facce sono poligoni regolari congruenti e anche i suoi angoloidi e i suoi diedri sono congruenti.

Nel piano i poligoni regolari possono avere un qualunque numero di lati. Si può invece dimostrare che nello spazio i poliedri regolari sono soltanto cinque.

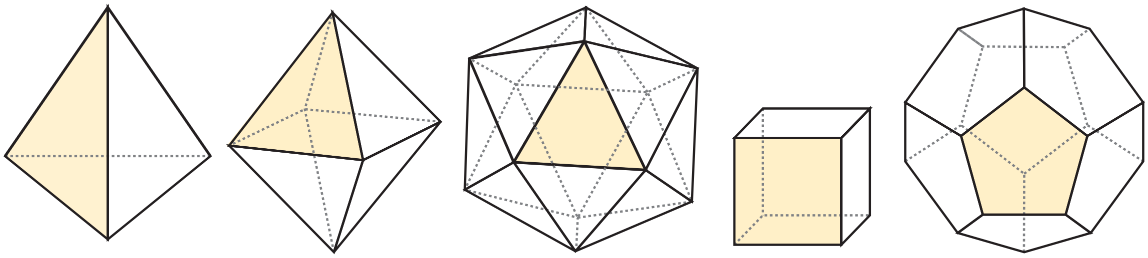
Ricordiamo che in ogni angoloide la somma degli angoli delle facce è minore di un angolo giro. Ciò limita la possibilità di ottenere poliedri regolari. Illustriamolo nella seguente tabella, in cui forniamo anche i nomi dei poliedri regolari possibili.

● I Greci conoscevano i poliedri regolari già ai tempi di Pitagora (540 a.C.). In seguito, i cinque solidi furono studiati anche da Platone e per questo vengono detti **solidi platonici**.

● *Tetra* in greco significa «quattro», *éikosi* «venti».

Poliedri regolari

Poligoni regolari	Numero di facce in un vertice	Somma degli angoli delle facce	Nome del poliedro
triangoli equilateri (angoli di 60°)	3	$180° < 360°$	tetraedro
	4	$240° < 360°$	ottaedro
	5	$300° < 360°$	icosaedro
	6	$360° = 360°$	non esiste
quadrati (angoli di 90°)	3	$270° < 360°$	cubo
	4	$360° = 360°$	non esiste
pentagoni (angoli di 108°)	3	$324° < 360°$	dodecaedro
	4	$432° > 360°$	non esiste
esagoni (angoli di 120°)	3	$360° = 360°$	non esiste



▲ **Figura 30 I solidi platonici.** Il tetraedro regolare è racchiuso da 4 triangoli equilateri, l'ottaedro regolare da 8, l'icosaedro regolare da 20. Il cubo è anche chiamato esaedro regolare, perché è racchiuso da 6 quadrati (in greco *hex* significa «sei»). Il dodecaedro regolare ha 12 facce pentagonali.

4. I SOLIDI DI ROTAZIONE

Si chiama **solido di rotazione** il solido generato dalla rotazione di una figura piana intorno a una retta r, secondo un angolo α.

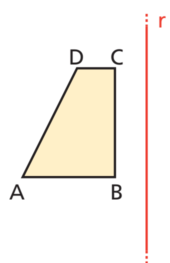
Se α è un angolo giro allora si dice che la rotazione è **completa**.

In una rotazione completa il punto P, che corrisponde a se stesso, descrive una circonferenza appartenente al piano perpendicolare alla retta e passante per P.

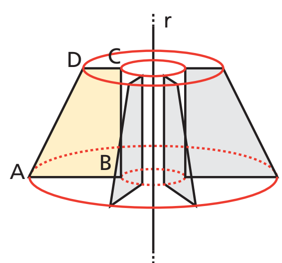
Noi studieremo soltanto solidi ottenuti da rotazioni complete.

ESEMPIO

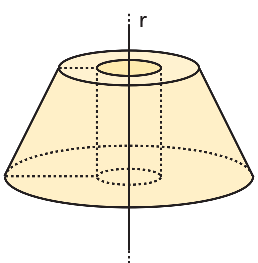
Disegniamo un solido di rotazione ruotando di un angolo giro un quadrilatero $ABCD$ attorno a una retta r.



a. Disegniamo il quadrilatero *ABCD* e la retta *r*.



b. Facciamo ruotare il quadrilatero di un angolo giro attorno alla retta *r*. Ciascun punto del quadrilatero descrive una circonferenza.



c. Ecco il solido di rotazione ottenuto.

▲ **Figura 31**

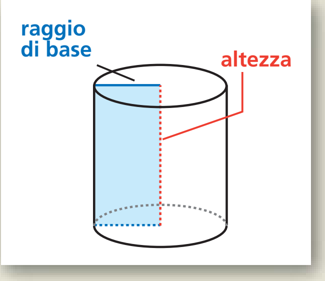
Fra i solidi ottenuti per rotazione studieremo solo i più semplici, ossia il cilindro, il cono e la sfera.

Il cilindro

DEFINIZIONE

Cilindro

Un cilindro è un solido generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno a uno dei suoi lati.



Il lato attorno al quale ruota il rettangolo è detto **altezza** del cilindro. Gli altri due lati perpendicolari all'altezza sono detti **raggi di base**.

I raggi di base nella rotazione determinano due cerchi, che sono detti **basi** del cilindro.

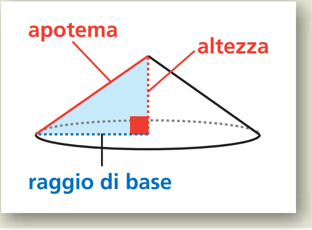
Un cilindro si dice **equilatero** se la sua altezza è congruente al diametro della base.

Il cono

DEFINIZIONE

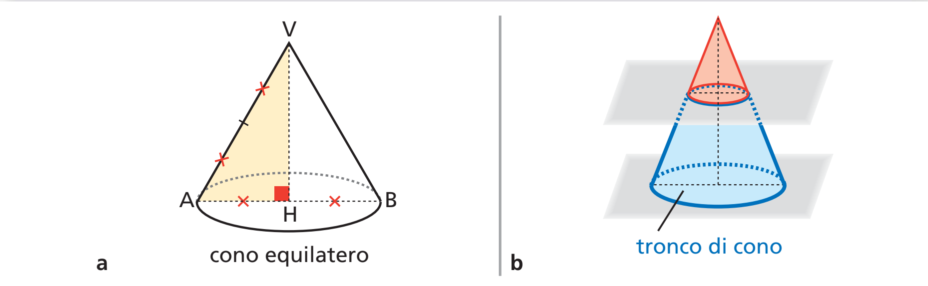
Cono

Un cono è un solido generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno a uno dei cateti.



Il cateto attorno a cui ruota il triangolo è l'**altezza** del cono, l'altro cateto è il **raggio di base**. L'ipotenusa è detta **apotema** del cono.

Un cono si dice **equilatero** se l'apotema è congruente al diametro della base (figura 32*a*).

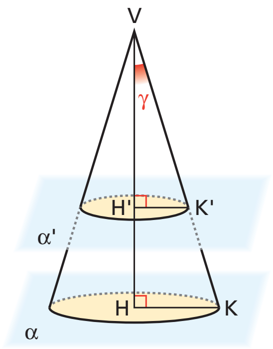


◄ **Figura 32** (a) In un cono equilatero l'ipotenusa del triangolo *AHV*, che ruotando genera il cono, è il doppio del cateto attorno al quale il triangolo *AHV* non ruota. Il triangolo *ABV* è equilatero. (b) Il tronco di cono.

Sezionando un cono con un piano parallelo alla base otteniamo un cono più piccolo, simile a quello di partenza, e un **tronco di cono** (figura 32*b*).

TEOREMA

In un cono, le misure delle aree del cerchio di base e del cerchio ottenuto da una sezione parallela al piano di base stanno tra loro come i quadrati delle misure delle loro distanze dal vertice.



Ipotesi 1. $\alpha \parallel \alpha'$;
2. $VH \perp \alpha$.

Tesi $C : c' = \overline{VH}^2 : \overline{V'H'}^2$.

DIMOSTRAZIONE

Indichiamo con C la misura dell'area del cerchio di base e con c' quella dell'area del cerchio sezione del cono con il piano α'.
Per la similitudine dei triangoli VHK e $VH'K'$, che hanno un angolo retto e l'angolo γ in comune, possiamo scrivere:

$$\overline{VH} : \overline{VH'} = \overline{HK} : \overline{H'K'}.$$

Elevando al quadrato, otteniamo:

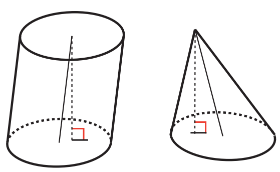
$$\overline{VH}^2 : \overline{VH'}^2 = \overline{HK}^2 : \overline{H'K'}^2.$$

Poiché le aree di due cerchi hanno come rapporto il quadrato del rapporto dei rispettivi raggi, possiamo scrivere:

$$C : c' = \overline{HK}^2 : \overline{H'K'}^2.$$

Per la proprietà transitiva, concludiamo che:

$$C : c' = \overline{VH}^2 : \overline{V'H'}^2.$$

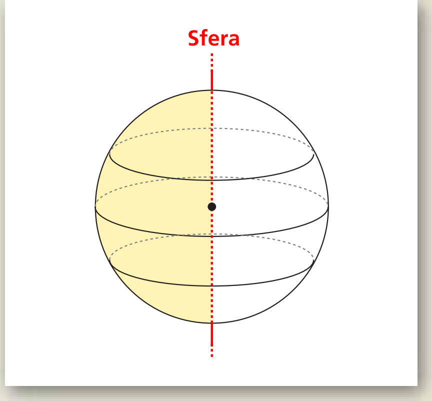


I cilindri e i coni considerati finora sono circolari *retti*: nei cilindri l'altezza coincide con la retta che congiunge i centri dei cerchi di base, nei coni con la retta che congiunge il vertice con il centro della base.
Più in generale, si potrebbero studiare anche cilindri e coni *obliqui* (figure a lato) nei quali questa condizione non è verificata.

La sfera

DEFINIZIONE

Sfera
La sfera è un solido generato dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al suo diametro.



La semicirconferenza che ruota genera una superficie detta **superficie sferica**. Il raggio della semicirconferenza è detto **raggio** della sfera.

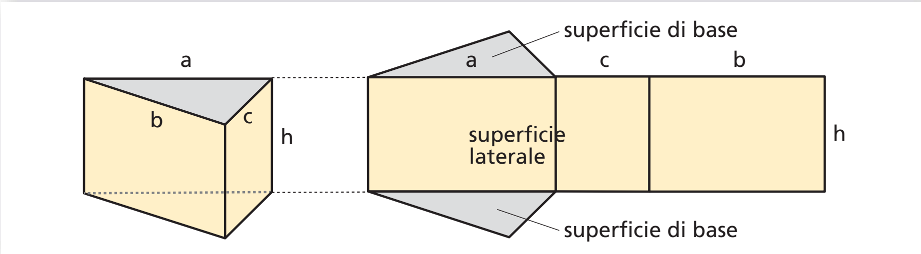
La superficie sferica e la sfera possono essere considerate luoghi geometrici:
- la superficie sferica è il luogo dei punti dello spazio che hanno distanza dal centro uguale al raggio;
- la sfera è il luogo dei punti dello spazio che hanno dal centro distanza minore o uguale al raggio.

5. LE AREE DEI SOLIDI NOTEVOLI

DEFINIZIONE

Superficie di un poliedro
La superficie di un poliedro è la somma delle superfici di tutte le sue facce.

Immaginiamo di trasportare su un unico piano le facce che compongono il solido (figura 33).



◀ **Figura 33** Lo sviluppo su un piano della superficie di un poliedro.

La figura che si ottiene si chiama **sviluppo** della superficie poliedrica e permette lo studio delle aree delle superfici dei poliedri.

In particolare studieremo alcuni solidi notevoli nei quali, essendo presenti una o due basi, si distinguono la superficie laterale, relativa alle sole facce laterali, e la superficie totale, che si ottiene aggiungendo le superfici delle basi alla superficie laterale.

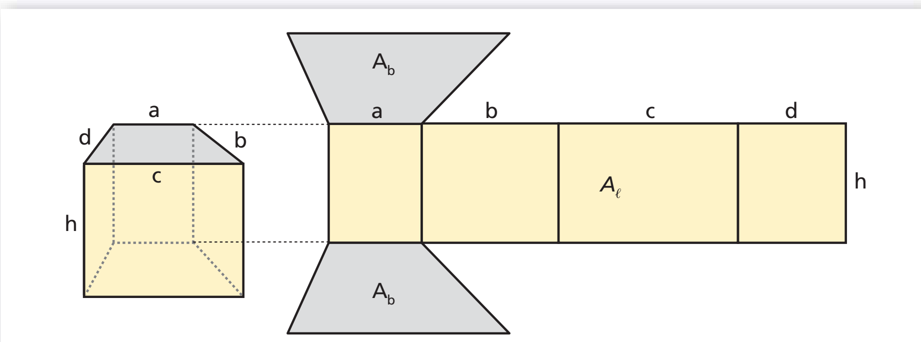
Con gli stessi simboli indicheremo anche le misure associate.
Utilizzeremo i simboli A_l, A_t, A_b, $2p$, h per indicare rispettivamente l'area della superficie laterale, totale, di base, il perimetro di base e l'altezza di un solido.

Il prisma retto

TEOREMA

La misura dell'area della superficie laterale di un prisma retto è uguale al prodotto della misura del perimetro di base per la misura dell'altezza del prisma:

$$A_l = 2p \cdot h.$$



◀ **Figura 34** Lo sviluppo della superficie di un prisma retto.

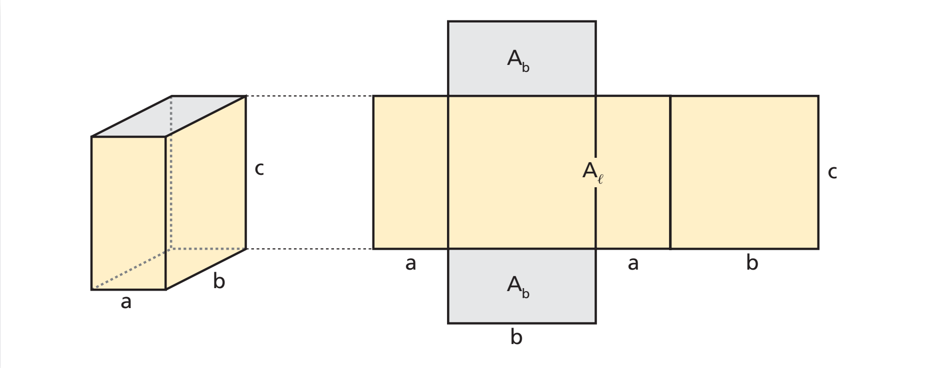
Osserviamo la figura 34. La **superficie laterale** di un prisma retto è la somma delle superfici delle facce laterali, che sono rettangoli aventi per altezza la stessa altezza (quella del prisma) e per basi i lati del poligono di base:

$$A_l = a \cdot h + b \cdot h + c \cdot h + d \cdot h = (a + b + c + d) \cdot h = 2p \cdot h.$$

L'area della **superficie totale** di un prisma retto si trova addizionando all'area della superficie laterale l'area delle due basi:

$$A_t = A_l + 2\,A_b = 2p \cdot h + 2\,A_b.$$

Il parallelepipedo rettangolo



▶ **Figura 35** Lo sviluppo della superficie di un parallelepipedo rettangolo.

La superficie laterale del parallelepipedo rettangolo è la somma di quattro rettangoli congruenti a due a due:

$$\boldsymbol{A_l} = 2a \cdot c + 2b \cdot c = 2(a \cdot c + b \cdot c) = \mathbf{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}.$$

Essendo l'area della **superficie di base** $A_b = a \cdot b$, l'area della **superficie totale** è:

$$\boldsymbol{A_t} = A_l + 2A_b = 2(a \cdot c + b \cdot c) + 2a \cdot b = \mathbf{2}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}).$$

Il cubo

Le facce del cubo sono sei quadrati congruenti, quindi, se indichiamo con s la misura dello spigolo, si ha:

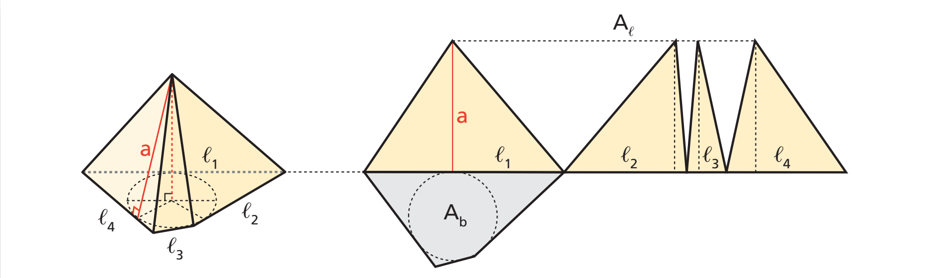
$$\boldsymbol{A_b} = \boldsymbol{s}^2, \qquad \boldsymbol{A_t} = \mathbf{6}\boldsymbol{s}^2.$$

La piramide retta

TEOREMA

La misura dell'area della superficie laterale di una piramide retta è uguale al prodotto della misura del semiperimetro di base per la misura dell'apotema della piramide:

$$\boldsymbol{A_l} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{a}.$$



▶ **Figura 36** Lo sviluppo della superficie di una piramide retta.

Nella figura consideriamo, come esempio, una piramide a base quadrangolare. Lo sviluppo è formato da quattro triangoli di uguale altezza a pari all'apotema della piramide, e dalla base della piramide stessa.

Se chiamiamo l_1, l_2, l_3, l_4 le misure dei lati del poligono di base e A_1, A_2, A_3, A_4 rispettivamente le misure delle aree delle facce laterali, otteniamo:

$$\boldsymbol{A_l} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{1}{2} l_1 \cdot a + \frac{1}{2} l_2 \cdot a + \frac{1}{2} l_3 \cdot a + \frac{1}{2} l_4 \cdot a =$$

$$= \frac{1}{2}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) \cdot a = \frac{1}{2} 2p \cdot a = \boldsymbol{p \cdot a}.$$

L'area della **superficie totale** di una piramide retta si calcola sommando all'area della superficie laterale l'area di base:

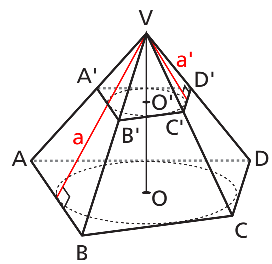
$$\boldsymbol{A_t = p \cdot a + A_b}.$$

Il tronco di piramide retta

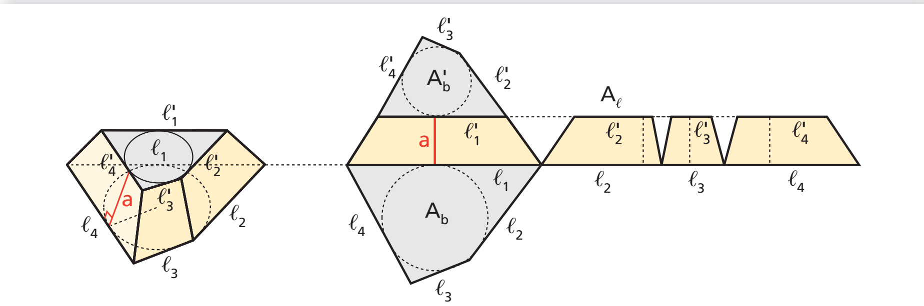
TEOREMA

La misura dell'area della superficie laterale del tronco di piramide retta è uguale al prodotto della somma delle misure dei semiperimetri delle due basi per la misura dell'apotema:

$$\boldsymbol{A_l = (p + p') \cdot a}.$$



Il tronco di piramide retta ha gli apotemi congruenti perché sono la differenza tra gli apotemi congruenti della piramide retta di base $ABCD$ e quelli congruenti della piramide retta di base $A'B'C'D'$.



◀ **Figura 37** Lo sviluppo della superficie del tronco di piramide.

Lo sviluppo della **superficie laterale** è una superficie formata da trapezi le cui basi sono i lati corrispondenti dei poligoni di base del tronco di piramide.

Chiamiamo l_1, l_2, l_3, l_4 le misure dei lati del poligono della base inferiore, l'_1, l'_2, l'_3, l'_4 quelle dei lati del poligono della base superiore e $2p$ e $2p'$ rispettivamente le misure dei perimetri della base inferiore e della base superiore:

$$\boldsymbol{A_l} = \frac{1}{2}(l_1 + l'_1) \cdot a + \frac{1}{2}(l_2 + l'_2) \cdot a + \frac{1}{2}(l_3 + l'_3) \cdot a + \frac{1}{2}(l_4 + l'_4) \cdot a =$$

$$= \frac{1}{2}(2p + 2p') \cdot a = \boldsymbol{(p + p') \cdot a}.$$

Chiamiamo A_b e A'_b rispettivamente le misure delle aree della superficie della base inferiore e della base superiore.

L'area della **superficie totale** del tronco di piramide è la somma delle aree della superficie laterale e delle superfici delle basi:

$$\boldsymbol{A_t = A_l + A_b + A'_b}.$$

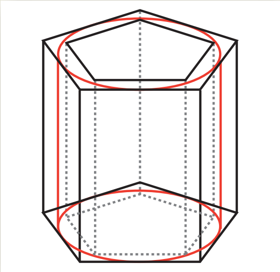
Il cilindro

I ragionamenti che seguiamo per lo studio dell'area della superficie laterale del cilindro sono analoghi a quelli che si possono svolgere per lo studio della circonferenza rettificata.

DEFINIZIONE

Superficie laterale di un cilindro

La superficie laterale di un cilindro è l'elemento separatore della coppia di classi contigue costituite dalle superfici laterali dei prismi regolari inscritti nel cilindro e da quelle dei prismi regolari circoscritti al cilindro.



TEOREMA

La misura dell'area della superficie laterale di un cilindro è uguale al prodotto delle misure delle lunghezze della circonferenza di base e dell'altezza del cilindro:

$$A_l = 2\pi \cdot r \cdot h.$$

Infatti, la misura dell'area della superficie laterale di un prisma retto è il prodotto delle misure delle lunghezze del perimetro del poligono di base e dell'altezza del prisma.

La coppia di classi contigue dei perimetri di base dei prismi retti inscritti e circoscritti ha come elemento separatore la circonferenza del cilindro.

Risulta allora che lo sviluppo della **superficie laterale** del cilindro è un rettangolo che ha per base la circonferenza rettificata e per altezza l'altezza del cilindro stesso:

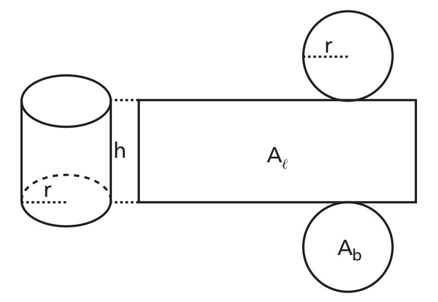
$$\boldsymbol{A_l = 2\pi \cdot r \cdot h}.$$

La misura dell'area della **superficie di base** è:

$$\boldsymbol{A_b = \pi \cdot r^2}.$$

La misura dell'area della **superficie totale** è la somma delle misure dell'area laterale e delle aree delle due superfici di base:

$$\boldsymbol{A_t} = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = \boldsymbol{2\pi r \cdot (h + r)}.$$



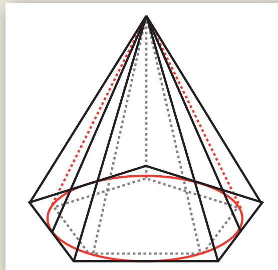
◀ **Figura 38** Lo sviluppo della superficie laterale e totale del cilindro.

Il cono

DEFINIZIONE

Superficie laterale di un cono

La superficie laterale di un cono è l'elemento separatore della coppia di classi contigue costituita dalle superfici laterali delle piramidi regolari rette inscritte nel cono e da quelle delle piramidi regolari rette circoscritte al cono.



TEOREMA

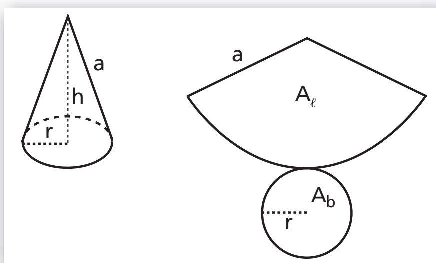
La misura dell'area della superficie laterale del cono è uguale al prodotto delle misure della lunghezza della semicirconferenza di base e dell'apotema del cono:

$$A_l = \pi \cdot r \cdot a.$$

Infatti, la misura dell'area della superficie laterale della piramide è il prodotto delle misure della lunghezza del semiperimetro del poligono di base e dell'apotema.

Le classi dei perimetri dei poligoni di base delle piramidi hanno per elemento separatore la circonferenza di base del cono, quindi la misura dell'area della **superficie laterale** del cono è:

$$A_l = 2\pi \cdot r \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \pi \cdot r \cdot a.$$



◄ **Figura 39** Lo sviluppo della superficie laterale e totale del cono.

La misura dell'area della **superficie di base** del cono è:

$$A_b = \pi \cdot r^2.$$

La misura dell'area della **superficie totale** del cono si trova sommando quelle dell'area della superficie laterale e dell'area di base:

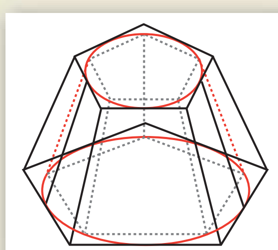
$$A_t = \pi \cdot r \cdot a + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot r \cdot (a + r).$$

Il tronco di cono

DEFINIZIONE

Superficie laterale del tronco di cono

La superficie laterale di un tronco di cono è l'elemento separatore della coppia di classi contigue costituite dalle superfici laterali dei tronchi di piramide inscritti e da quelle dei tronchi di piramide circoscritti al tronco di cono.

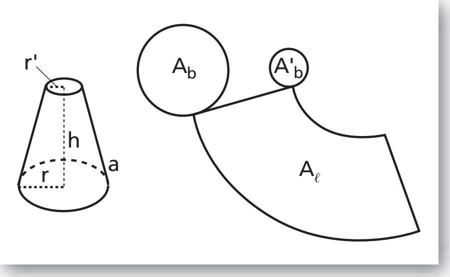


TEOREMA

La misura dell'area della superficie laterale del tronco di cono è uguale al prodotto delle misure dell'apotema e della somma delle lunghezze delle semicirconferenze di base:

$$A_l = \pi \cdot a \cdot (r + r').$$

Infatti, la misura dell'area della superficie laterale del tronco di piramide è il semiprodotto di quelle della somma delle lunghezze dei perimetri dei poligoni di base e dell'apotema.



▶ **Figura 40** Lo sviluppo della superficie del tronco di un cono.

Le circonferenze di base del tronco di cono sono gli elementi separatori delle classi contigue delle lunghezze dei perimetri dei poligoni di base dei tronchi di piramide, quindi la misura dell'area della **superficie laterale** del tronco di cono è:

$$\boldsymbol{A_l} = (2\pi \cdot r + 2\pi \cdot r') \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 2\pi \cdot (r + r') \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\pi \cdot a \cdot (r + r')}.$$

La misura dell'area della somma delle **superfici di base** del tronco di cono è:

$$\boldsymbol{A_b + A'_b} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r'^2 = \boldsymbol{\pi \cdot (r^2 + r'^2)}.$$

La misura dell'area della **superficie totale** del tronco di cono è la somma delle misure delle aree della superficie laterale e delle superfici di base:

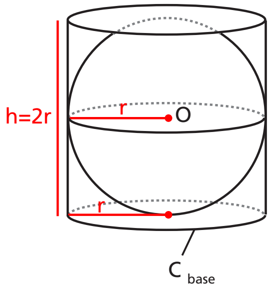
$$\boldsymbol{A_t = A_l + A_b + A'_b}.$$

L'area della superficie sferica

La misura dell'area della **superficie sferica** è uguale a quattro volte quella del suo cerchio massimo,

$$\boldsymbol{S_{sfera} = 4\pi r^2},$$

● Dimostreremo questa proprietà dopo aver determinato il volume della sfera.



che si può anche scrivere $S_{sfera} = 2\pi r \cdot 2r$, espressione che rappresenta la superficie laterale del cilindro circoscritto alla sfera:

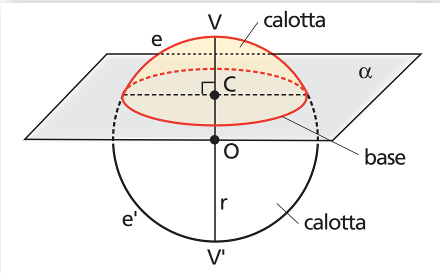
$$S_{laterale\ cilindro} = C_{base} \cdot h = 2\pi r \cdot 2r.$$

Possiamo quindi affermare che **la superficie di una sfera è equivalente alla superficie laterale del suo cilindro circoscritto**.

L'area delle parti della superficie della sfera

La calotta

Un piano α secante una sfera divide la sua *superficie* in due parti: ciascuna di tali parti si dice **calotta**. La sezione determinata dal piano nella sfera è un cerchio.

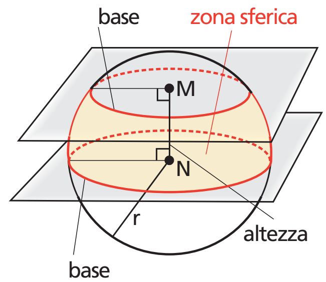


La sua circonferenza si chiama **base** della calotta. Il diametro della sfera passante per il centro della base della calotta è anche asse di simmetria della calotta e la interseca in un punto detto **vertice**. La distanza del vertice dal centro della base si dice **altezza** della calotta.

◀ **Figura 41** e ed e' sono calotte, V e V' i loro vertici, CV e CV' le altezze.

La zona sferica

Due piani paralleli secanti una sfera dividono la sua *superficie* in tre parti: quella compresa fra i due piani si chiama **zona sferica**. Ciascuna delle due circonferenze determinate dai piani sulla superficie della sfera si chiama **base** della zona. Il diametro della sfera che congiunge i centri delle due basi è anche asse di simmetria della figura. La distanza fra i due centri si dice **altezza** della zona.
Le aree di una calotta e di una zona si calcolano mediante la stessa formula:



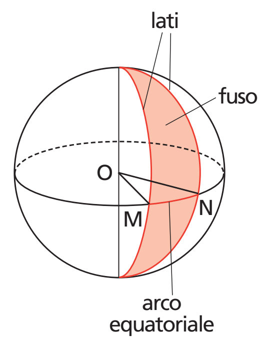
$$\boldsymbol{S = 2\pi R h},$$

dove R è il raggio della sfera e h è l'altezza della calotta o della zona.

L'area di una calotta, o di una zona, può quindi essere pensata come quella della superficie laterale di un cilindro che ha raggio congruente a quello della sfera e altezza congruente a quella della calotta o della zona.

Il fuso sferico

Due semipiani aventi come origine comune una retta passante per il centro di una sfera dividono la sua *superficie* in due parti: ciascuna di esse è un **fuso** sferico. Il diedro formato dai due semipiani si dice **diedro del fuso**. L'arco di circonferenza massima che giace sul fuso si chiama **arco equatoriale**. Le semicirconferenze intercettate dai due semipiani sono dette **lati** del fuso.



Si può dimostrare che i fusi appartenenti a una stessa sfera, o a sfere di raggio congruente, sono proporzionali ai diedri corrispondenti. Indicata con S_f l'area del fuso, con R il raggio della sfera, con α_{rad} e $\alpha°$ le ampiezze del diedro in radianti e gradi si ha:

$$S_f : 4\pi R^2 = \alpha_{rad} : 2\pi \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_f = 2\alpha_{rad} R^2};$$

$$S_f : 4\pi R^2 = \alpha° : 360° \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{S_f = \frac{\alpha°}{90°}\pi R^2}.$$

6. L'ESTENSIONE E L'EQUIVALENZA DEI SOLIDI

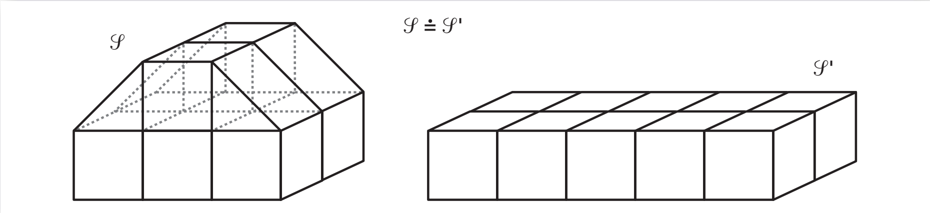
L'estensione dei solidi

Il concetto di estensione spaziale deriva dalle nostre esperienze concrete. Siamo abituati a considerare un oggetto grande o piccolo a seconda che occupi più o meno spazio, o, come spesso diciamo, sia più o meno voluminoso. Se consideriamo poi due solidi di forma diversa ma realizzati con lo stesso materiale e dello

● L'estensione è un concetto *primitivo*.

Anche la capienza di un recipiente è collegata alla sua estensione nello spazio.

stesso peso, diciamo che hanno la stessa estensione. Due solidi che hanno la stessa estensione si dicono **equivalenti**. Indichiamo l'equivalenza con il **simbolo** $\doteq$.



▶ **Figura 42** Un esempio di solidi equivalenti.

L'equivalenza tra solidi gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Proprietà **riflessiva**. Ogni solido è equivalente a se stesso: $\mathcal{P} \doteq \mathcal{P}$.

Proprietà **simmetrica**. Se un solido $\mathcal{P}$ è equivalente a un solido $\mathcal{P}'$, allora $\mathcal{P}'$ è equivalente a $\mathcal{P}$: se $\mathcal{P} \doteq \mathcal{P}'$, allora $\mathcal{P}' \doteq \mathcal{P}$.

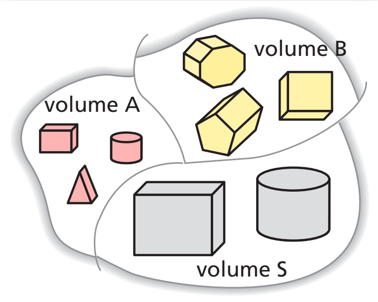
Proprietà **transitiva**. Se un solido $\mathcal{P}$ è equivalente a un solido $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}'$ è equivalente a un solido $\mathcal{P}''$, allora $\mathcal{P}$ è equivalente a $\mathcal{P}''$: se $\mathcal{P} \doteq \mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}' \doteq \mathcal{P}''$, allora $\mathcal{P} \doteq \mathcal{P}''$.

Poiché gode della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, l'equivalenza tra solidi è una *relazione di equivalenza*. Possiamo ripartire i solidi in classi di equivalenza ciascuna delle quali costituita da infiniti solidi aventi a due a due uguale estensione.

DEFINIZIONE

Volume di un solido

Data la relazione di equivalenza tra solidi, definiamo volume di un solido la classe di equivalenza alla quale il solido appartiene.



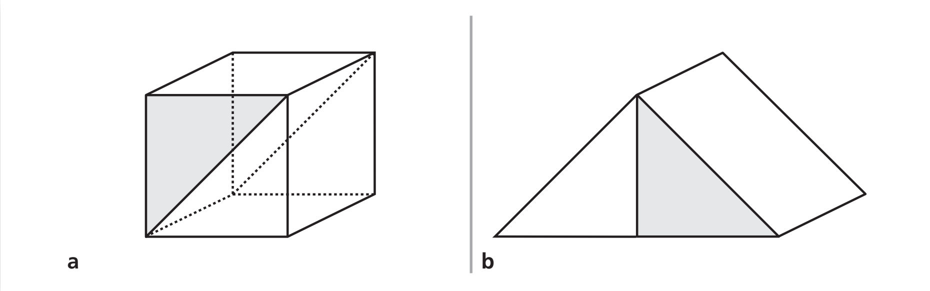
Ogni classe di equivalenza alla quale appartengono solidi aventi la stessa estensione definisce uno e un solo volume.

◀ **Figura 43** La relazione che esiste tra solidi equiestesi è di equivalenza e determina una partizione nell'insieme dei solidi. Ogni classe di equivalenza è, per definizione, il volume dei solidi che appartengono a essa.

POSTULATO

Due solidi congruenti sono sempre equivalenti.

Non è invece sempre vero che due solidi equivalenti siano congruenti.



▶ **Figura 44** Non è detto che due solidi equivalenti siano congruenti. Dato per esempio un cubo (figura *a*), se lo tagliamo secondo un piano che passa per le diagonali di due facce opposte, otteniamo due solidi che possiamo disporre come in figura *b*. Il cubo e il solido sono equivalenti ma **non** congruenti.

La somma e la differenza di solidi

DEFINIZIONE

Somma di solidi

Si dice somma di due solidi $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$, privi di punti comuni o aventi in comune solo punti del loro contorno, il solido $\mathcal{P}$ ottenuto come unione dei punti di $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$.

● Scriviamo:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}' + \mathcal{P}''.$$

I solidi $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$ sono detti **parti** di $\mathcal{P}$.

La somma di due o più solidi gode della proprietà commutativa e associativa:

$$\mathcal{P}' + \mathcal{P}'' \doteq \mathcal{P}'' + \mathcal{P}',$$
$$(\mathcal{P} + \mathcal{P}') + \mathcal{P}'' \doteq \mathcal{P} + (\mathcal{P}' + \mathcal{P}'').$$

Se $\mathcal{P}' + \mathcal{P}'' = \mathcal{P}$, diciamo che $\mathcal{P}'$ è la **differenza** di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}''$ e la indichiamo con:

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} - \mathcal{P}''.$$

POSTULATO

Solidi ottenuti come somma o differenza di solidi congruenti o equivalenti sono equivalenti.

Il confronto dei solidi

POSTULATO

Postulato di De Zolt

Un solido non può essere equivalente a una sua parte.

Un solido $\mathcal{A}$ è **maggiore** di un solido $\mathcal{B}$, se $\mathcal{B}$ è equivalente a una parte di $\mathcal{A}$. In tal caso si può dire che $\mathcal{A}$ è **prevalente** a $\mathcal{B}$. Scriviamo: $\mathcal{A} > \mathcal{B}$.

● Possiamo anche dire che $\mathcal{B}$ è **minore** di $\mathcal{A}$, o anche che $\mathcal{B}$ è **suvvalente** ad $\mathcal{A}$.

POSTULATO

Legge di esclusione

Dati due solidi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ qualunque, o $\mathcal{A}$ è equivalente a $\mathcal{B}$ oppure $\mathcal{A}$ è prevalente a $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} > \mathcal{B}$) o $\mathcal{A}$ è suvvalente a $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} < \mathcal{B}$) e ciascun caso esclude gli altri due.

I solidi equivalenti ed equiscomponibili

DEFINIZIONE

Solidi equicomposti

Due solidi si dicono equicomposti (o equiscomponibili) se sono scomponibili in solidi rispettivamente congruenti.

● I solidi della figura 44 sono equicomposti.

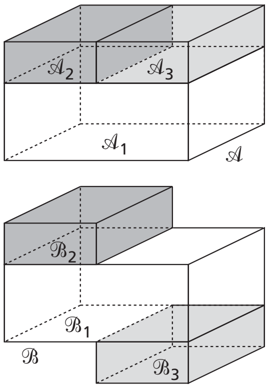
Si può dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA

Due solidi equicomposti sono equivalenti.

ESEMPIO

Consideriamo i solidi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ della figura nella pagina seguente.
Ciascuno di essi può essere pensato come la somma di poliedri.



▶ **Figura 45**

● Bonaventura Cavalieri nacque a Milano attorno al 1598. Nel 1621 si trasferì a Pisa, ove fece amicizia con Galileo Galilei. Nel 1629 conseguì la *cattedra principale di Matematica* a Bologna, che conservò fino alla morte avvenuta nel 1647. Cavalieri contribuì più di ogni altro alla diffusione in Italia della teoria e pratica dei logaritmi, ma è noto soprattutto per la sua *Geometria degli Indivisibili*. Il principio di Cavalieri è di particolare importanza perché rende lo studio dell'equivalenza dei solidi di più facile approccio anche se non ne consente un approfondimento completo.

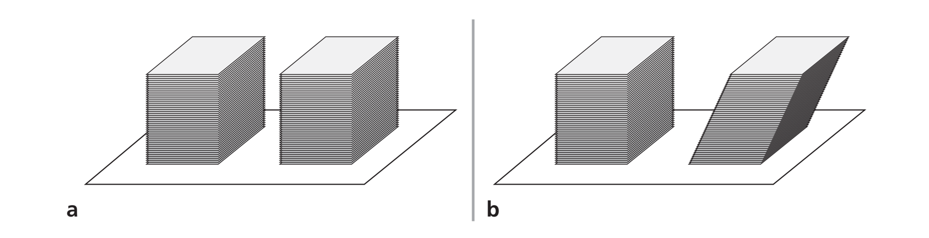
$\mathcal{A}$ è la somma di $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$, mentre $\mathcal{B}$ è la somma di $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$.

- Se $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{B}_1$; $\quad \mathcal{A}_2 \cong \mathcal{B}_2$; $\quad \mathcal{A}_3 \cong \mathcal{B}_3$; $\quad$ allora
  $\mathcal{A}_1 \doteq \mathcal{B}_1$; $\quad \mathcal{A}_2 \doteq \mathcal{B}_2$; $\quad \mathcal{A}_3 \doteq \mathcal{B}_3$;

  perché solidi congruenti sono equivalenti.
- I solidi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ risultano somme di poliedri equivalenti e sono equivalenti in virtù del teorema che abbiamo enunciato.

Il principio di Cavalieri

Consideriamo due pile di fogli a forma di parallelepipedo rettangolo (figura 45*a*), formate dalla sovrapposizione dello stesso numero di fogli: i solidi che li rappresentano sono congruenti e quindi equivalenti.



Possiamo far scorrere i fogli di uno di questi parallelepipedi in modo che la sua forma cambi (figura 45*b*). L'intuizione ci dice che l'estensione dei due solidi rimane la stessa e quindi essi sono ancora equivalenti.

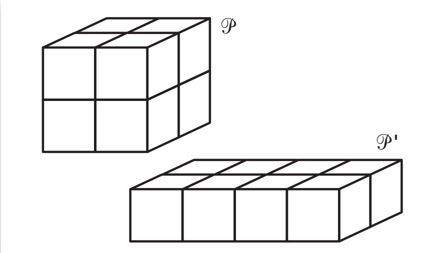
Potremmo anche ripetere le considerazioni dell'esperienza precedente prendendo, al posto di pile di fogli uguali, pile di fogli che abbiano a due a due la stessa area ma forma diversa.
Passando dal mondo concreto alla geometria, possiamo pensare i fogli sostituiti dalle sezioni ottenute intersecando i solidi con piani tutti paralleli a uno scelto come riferimento. Possiamo così comprendere il seguente principio che assumiamo come postulato.

POSTULATO

Principio di Cavalieri

Due solidi che possono essere disposti in modo che ogni piano parallelo a un altro piano fissato, scelto come riferimento, li tagli secondo sezioni equivalenti, sono equivalenti.

● Il principio di Cavalieri fornisce una condizione *sufficiente* ma *non necessaria* per l'equiestensione dei solidi. Possiamo capirlo con l'esempio della figura 46.

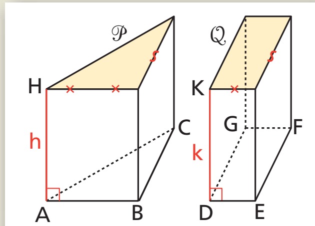


▶ **Figura 46** $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ **sono solidi equivalenti cui non è possibile applicare il principio di Cavalieri.**

L'equivalenza dei solidi

TEOREMA

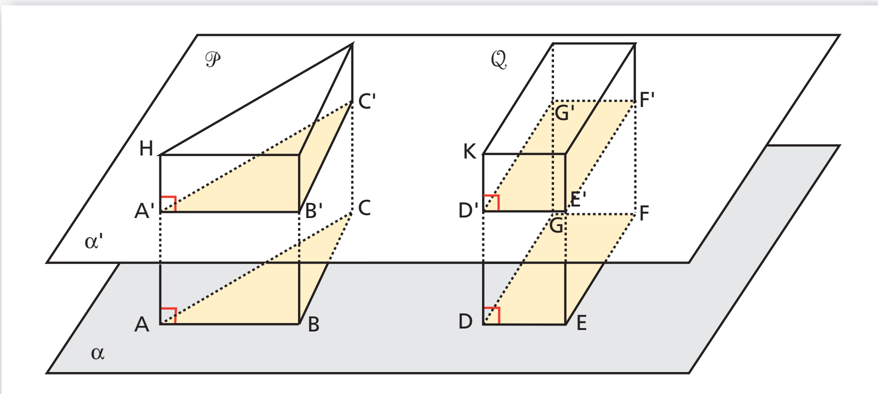
Se due prismi hanno basi equivalenti e altezze congruenti, allora sono equivalenti.



Ipotesi 1. $ABC \doteq DEFG$;
2. $h \cong k$.

Tesi $\mathcal{P} \doteq \mathcal{Q}$.

DIMOSTRAZIONE



◄ **Figura 47** Le basi dei due solidi appoggiano sullo stesso piano α e dalla stessa parte rispetto a esso. Il piano α′ è un qualsiasi piano parallelo ad α che interseca i due solidi.

Il piano α' taglia il primo solido secondo un poligono congruente a quello di base:

$ABC \cong A'B'C'$, quindi $ABC \doteq A'B'C'$.

Analogamente: $DEFG \cong D'E'F'G'$, quindi $DEFG \doteq D'E'F'G'$.

Per ipotesi $ABC \doteq DEFG$, quindi per la proprietà transitiva:

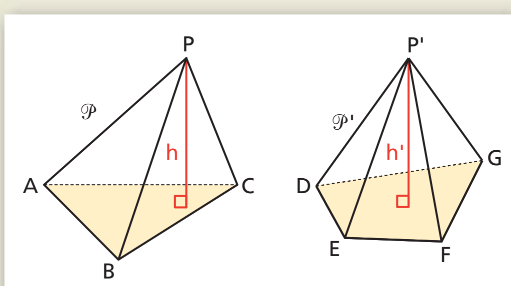
$A'B'C' \doteq D'E'F'G'$.

Poiché il piano α' considerato è arbitrario, per il principio di Cavalieri i due prismi sono equivalenti: $\mathcal{P} \doteq \mathcal{Q}$.

Con una dimostrazione simile, si può dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA

Le piramidi che hanno basi equivalenti e altezze congruenti sono equivalenti.



Ipotesi 1. $ABC \doteq DEFG$;
2. $h \cong k$.

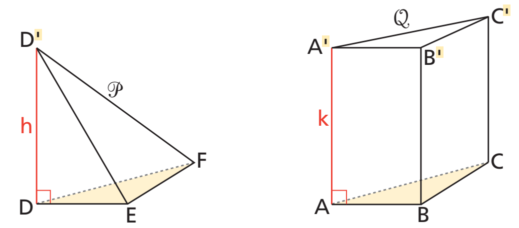
Tesi $\mathcal{P} \doteq \mathcal{P}'$.

Ipotesi 1. $DEF \cong ABC$;
2. $h \cong k$.

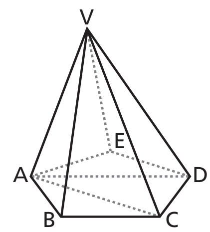
Tesi $\mathcal{P} \doteq \frac{1}{3}\mathcal{Q}$.

TEOREMA

Una piramide è equivalente alla terza parte di un prisma che abbia la stessa base e la stessa altezza.



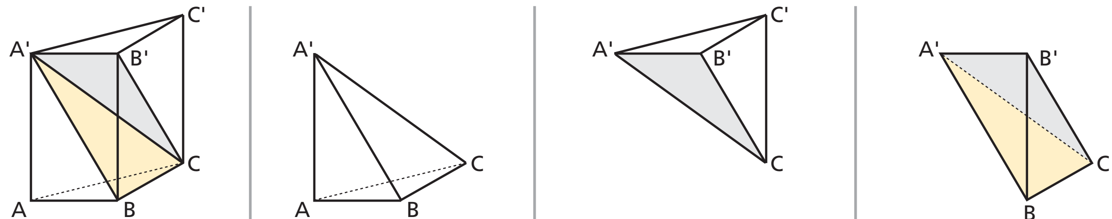
Svolgiamo la dimostrazione per una piramide a base triangolare in quanto ogni piramide può essere scomposta nella somma di più piramidi a base triangolare (figura a lato). Consideriamo quindi un prisma a base triangolare.



DIMOSTRAZIONE

Dividiamo il prisma in tre piramidi (figura 48).

▼ **Figura 48**



a. $\mathcal{A}$ è un prisma a base triangolare nel quale abbiamo evidenziato tre piramidi. Disegniamole separatamente.

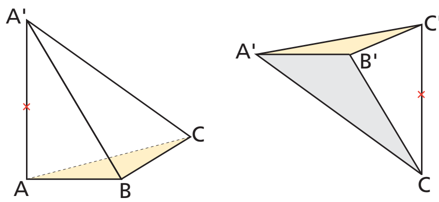
b. $\mathcal{B}$ è la piramide di base *ABC*, i cui spigoli sono *AA'* e le diagonali *A'B* e *A'C* del prisma.

c. $\mathcal{C}$ è la piramide ottenuta tracciando la diagonale *B'C*, del rettangolo *BCC'B'*, che lo divide in due triangoli congruenti, e lo spigolo *A'C*.

d. $\mathcal{D}$ è la piramide di base *BB'C* e vertice *A'*.

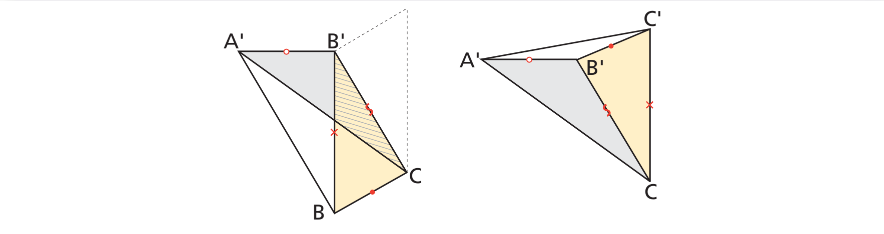
Consideriamo le piramidi a coppie.

▶ **Figura 49** Le piramidi *ABCA'* e *A'B'C'C* sono equivalenti.



Le piramidi $ABCA'$ e $A'B'C'C$ (figura 49) hanno le basi ABC e $A'B'C'$ congruenti perché facce opposte di un prisma e la stessa altezza, che è quella del prisma, quindi sono equivalenti:

$$ABCA' \doteq A'B'C'C.$$



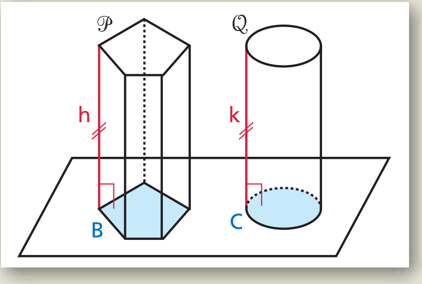
◀ **Figura 50** Anche le piramidi $BCB'A'$ e $CB'C'A'$ sono equivalenti.

Le piramidi $BCB'A'$ e $CB'C'A'$ (figura 50) hanno:
- basi congruenti BCB' e $B'C'C$ in quanto ciascuna è metà faccia del parallelogramma $BCC'B'$;
- la stessa altezza $A'B'$, perché hanno basi nel medesimo piano e il medesimo verticeA'; quindi sono equivalenti: $BCB'A' \doteq CB'C'A'$.

Per la proprietà transitiva, le piramidi $A'B'C'C$, $ABCA'$, $BCB'A'$ sono equivalenti e quindi ciascuna piramide è equivalente alla terza parte di un prisma avente stessa base e stessa altezza.

TEOREMA

Un prisma e un cilindro che hanno basi equivalenti e altezze congruenti sono equivalenti.



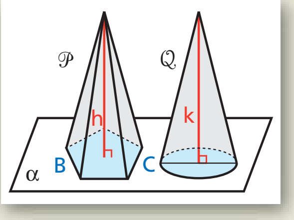
Ipotesi 1. $h \cong k$;
2. $B \doteq C$.

Tesi $\mathcal{P} \doteq \mathcal{Q}$.

La dimostrazione di questo teorema è del tutto analoga a quella del teorema relativo a due prismi di base equivalente e altezza congruente.

TEOREMA

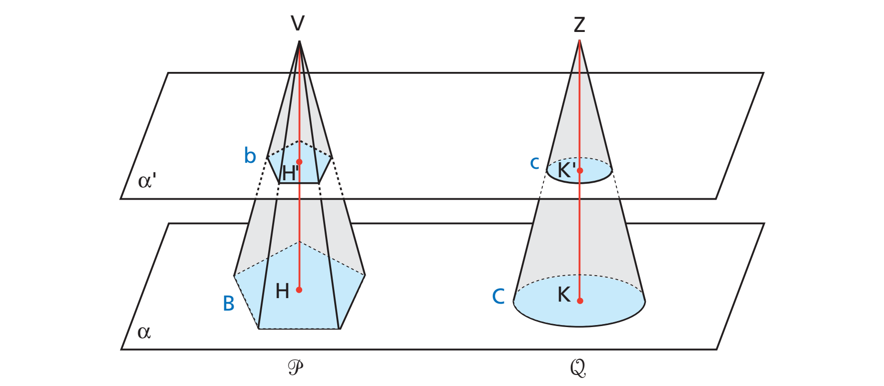
Una piramide e un cono che hanno basi equivalenti e altezze congruenti sono equivalenti.



Ipotesi 1. $h \cong k$;
2. $B \doteq C$.

Tesi $\mathcal{P} \doteq \mathcal{Q}$.

DIMOSTRAZIONE



◀ **Figura 51** Le basi dei due solidi appoggiano sullo stesso piano α e dalla stessa parte rispetto a esso. Il piano α' è un qualsiasi piano parallelo ad α che interseca i due solidi.

Sia B la misura dell'area della base della piramide, b la misura dell'area della sezione della piramide con il piano α', C la misura dell'area del cerchio di base del cono e c la misura dell'area della sezione del cono con il piano α'.

In base ai teoremi riguardanti le proprietà delle sezioni di una piramide e di un cono con un piano parallelo alla base è vero che:

$$B : b = \overline{VH}^2 : \overline{VH'}^2; \qquad C : c = \overline{ZK}^2 : \overline{ZK'}^2.$$

Per ipotesi $VH \cong ZK$ e $VH' \cong ZK'$, quindi:

$$B : b = C : c.$$

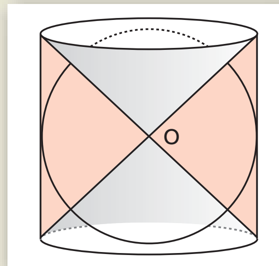
Essendo $B = C$, allora $b = c$.

Abbiamo dimostrato che le sezioni di un qualsiasi piano α', parallelo ad α, con i solidi $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono equivalenti, *quindi*, per il principio di Cavalieri, i due solidi sono equivalenti.

DEFINIZIONE

Anticlessidra

Data una sfera di centro O, a essa circoscriviamo un cilindro equilatero e consideriamo i due coni di vertice O con le basi coincidenti con quelle del cilindro. Definiamo anticlessidra il solido ottenuto dalla differenza fra il cilindro e i due coni.

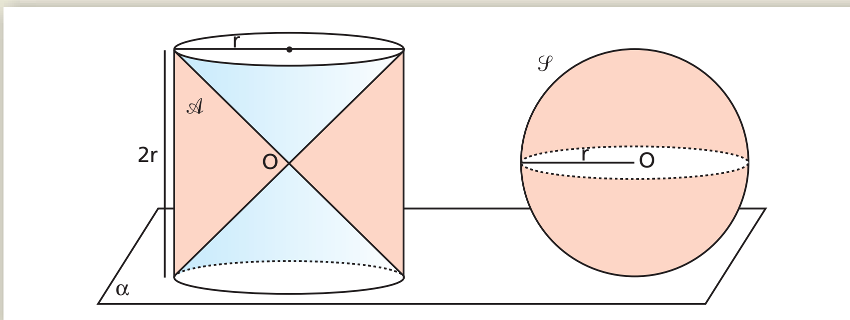


TEOREMA

La sfera è equivalente alla sua anticlessidra.

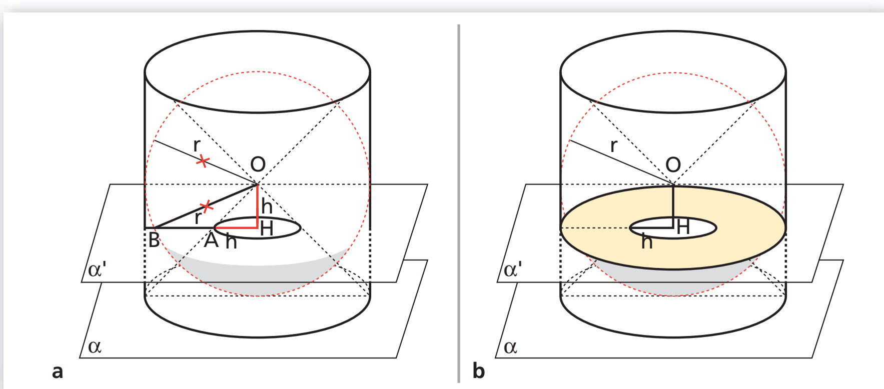
Ipotesi r raggio della anticlessidra $\mathcal{A}$ e della sfera $\mathcal{S}$;

Tesi $\mathcal{S} \doteq \mathcal{A}$.



DIMOSTRAZIONE

▶ Figura 52



Il cilindro è appoggiato sul piano α (figura 52*a*). Il piano α' è un qualsiasi piano parallelo ad α e interseca il cilindro a una distanza che misura h dal punto O. Il triangolo OHA è rettangolo e isoscele, quindi anche la misura di HA è h.

La sezione del piano α' con l'anticlessidra è la corona circolare la cui circonferenza esterna ha raggio di misura r (il raggio del cilindro) e la circonferenza interna è l'intersezione di α' con il cono e quindi ha raggio di misura h (figura 52*b*).
Calcoliamo la misura dell'area della superficie di questa corona circolare:

$$A_{corona} = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot h^2 = \pi \cdot (r^2 - h^2).$$

La sezione del piano α' con la sfera è un cerchio di raggio HB, che è un cateto del triangolo rettangolo OHB (figura a lato):

$$\overline{HB}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OH}^2 = r^2 - h^2.$$

Quindi la misura dell'area del cerchio è:

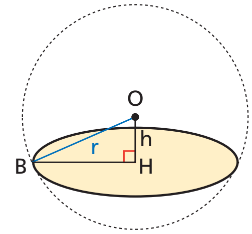
$$A_{cerchio} = \pi \cdot (r^2 - h^2).$$

Osserviamo che:

$$A_{corona} = A_{cerchio}.$$

Le misure delle aree delle sezioni che il piano α' forma con l'anticlessidra e con la sfera sono uguali, quindi le sezioni sono equivalenti e, per il principio di Cavalieri, la sfera e l'anticlessidra sono equivalenti.

● O è il centro della sfera inscritta nel cilindro.



7. I VOLUMI DEI SOLIDI NOTEVOLI

Ricordiamo che, date due grandezze omogenee A e U, si definisce misura di A rispetto a U il numero reale m tale che:

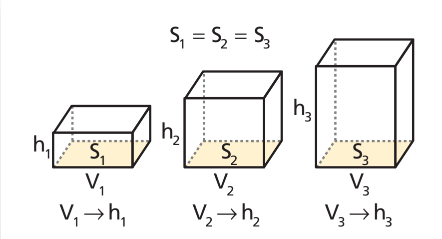
$$A = mU,$$

dove U rappresenta l'unità di misura fissata.

Nel caso dei solidi si sceglie come unità di misura dei volumi quello di un cubo U che ha per spigolo il segmento di lunghezza u, unità di misura delle lunghezze.

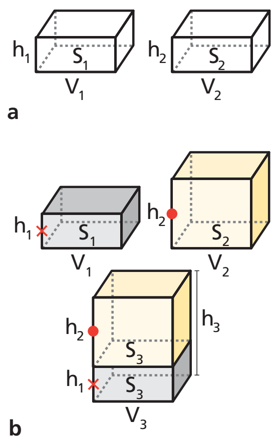
I parallelepipedi rettangoli con basi congruenti

Consideriamo l'insieme dei volumi dei parallelepipedi rettangoli che hanno basi congruenti e l'insieme delle lunghezze delle loro altezze. Esiste una corrispondenza biunivoca che associa al volume di un parallelepipedo rettangolo la lunghezza della sua altezza (figura 53).



◄ Figura 53

● Indichiamo con S_1, S_2, S_3 la misura delle basi dei parallelepipedi rettangoli, con V_1, V_2, V_3 la misura dei rispettivi volumi e con h_1, h_2, h_3 la misura delle altezze.



▼ Figura 54

Le grandezze dei due insiemi sono direttamente proporzionali perché soddisfano le condizioni del criterio di proporzionalità diretta:

1. a volumi uguali corrispondono uguali lunghezze delle altezze, infatti a parallelepipedi congruenti corrispondono altezze congruenti (figura *a*):

$$S_1 = S_2 \text{ e } V_1 = V_2 \Rightarrow h_1 = h_2;$$

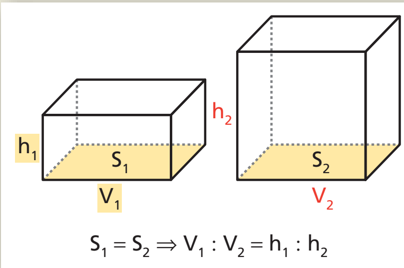
2. alla somma di due volumi di parallelepipedi corrisponde la somma delle lunghezze delle altezze corrispondenti (figura *b*):

$$S_1 = S_2 = S_3 \text{ e } V_3 = V_1 + V_2 \quad \Rightarrow \quad h_3 = h_1 + h_2.$$

Queste considerazioni ci permettono di enunciare il seguente teorema.

TEOREMA

I volumi dei parallelepipedi rettangoli che hanno basi congruenti sono proporzionali alle relative altezze.

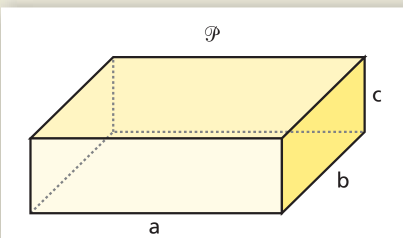


Il volume del parallelepipedo rettangolo

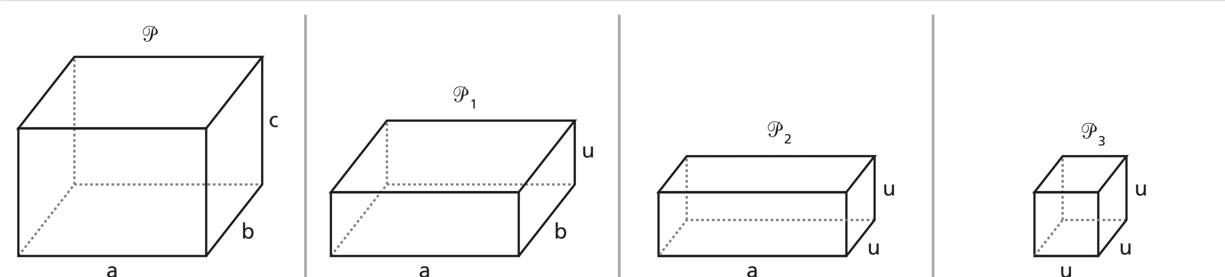
TEOREMA

La misura del volume del parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto delle misure delle sue dimensioni:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$



DIMOSTRAZIONE Siano u e U le unità di misura, rispettivamente, delle lunghezze e dei volumi.



a. Sia $\mathcal{P}$ il parallelepipedo rettangolo con dimensioni di misure a, b, c e volume V.

b. Sia $\mathcal{P}_1$ il parallelepipedo rettangolo con dimensioni di misure a, b, u e volume V_1.

c. Sia $\mathcal{P}_2$ il parallelepipedo rettangolo con dimensioni di misure a, u, u e volume V_2.

d. Sia $\mathcal{P}_3$ il parallelepipedo rettangolo con dimensioni di misure u, u, u e volume $V_3 = U$.

Per il teorema precedente, volumi di parallelepipedi rettangoli aventi congruenti le basi stanno tra loro come le corrispondenti altezze. Scriviamo allora:

$$V : V_1 = c : u \quad \Rightarrow \quad V = cV_1;$$

$$V_1 : V_2 = b : u \Rightarrow V_1 = bV_2;$$

$$V_2 : V_3 = a : u \Rightarrow V_2 = aV_3.$$

Da queste relazioni otteniamo:

$$\mathcal{P} = c \cdot \mathcal{P}_1 = c \cdot b \cdot \mathcal{P}_2 = c \cdot b \cdot a \cdot \mathcal{P}_3 \quad \rightarrow \quad \mathcal{P} = a \cdot b \cdot c \cdot \mathcal{P}_3.$$

Ma $\mathcal{P}_3 = \mathcal{U}$, cubo di dimensioni unitarie scelto come unità di misura; quindi $V_3 = U$, unità di misura dei volumi, e $V = a \cdot b \cdot c \cdot U$. Concludiamo che la misura del volume di un parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto delle misure delle sue dimensioni.

La misura di u è 1.

Il teorema precedente può essere espresso anche nel seguente modo:
la misura del volume di un parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto della misura dell'area di base per la misura della relativa altezza.

Indicando con S la misura dell'area di base e con h quella dell'altezza:

$$\boldsymbol{V = S \cdot h}.$$

Il volume del cubo

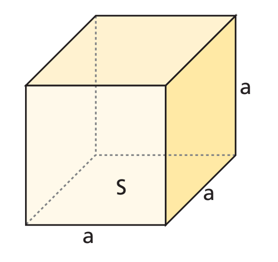
Possiamo dedurrre la formula del volume del cubo da quella del parallelepipedo rettangolo, avendo il cubo le dimensioni congruenti.

TEOREMA

Volume del cubo

La misura del volume di un cubo è uguale alla misura del suo spigolo elevato alla terza potenza:

$$\boldsymbol{V = a^3}.$$



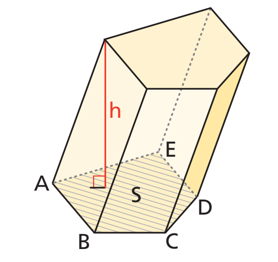
Il volume del prisma e il volume della piramide

TEOREMA

Volume del prisma

La misura del volume di un prisma è uguale al prodotto della misura dell'area di base per la misura dell'altezza:

$$\boldsymbol{V = S \cdot h}.$$



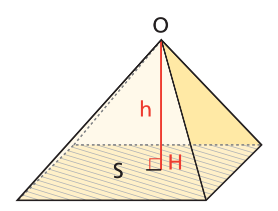
Sappiamo infatti che due prismi sono equivalenti se hanno basi equivalenti e altezze congruenti. Essendo il parallelepipedo rettangolo un particolare prisma, la misura del volume del prisma è uguale a quella del parallelepipedo rettangolo che ha base equivalente e altezza congruente. Essa si calcola quindi moltiplicando la misura dell'area della base per la misura dell'altezza.

TEOREMA

Volume della piramide

La misura del volume di una piramide è uguale alla terza parte del prodotto della misura dell'area della base per la misura dell'altezza:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h.$$



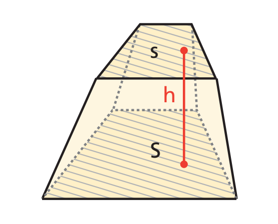
Infatti la piramide è equivalente alla terza parte di un prisma di base equivalente e uguale altezza. La misura del suo volume è quindi uguale a un terzo della misura del volume del prisma.

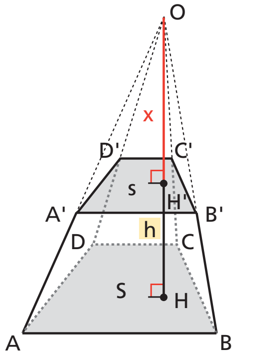
TEOREMA

Volume del tronco di piramide

La misura del volume di un tronco di piramide è uguale alla terza parte del prodotto della misura dell'altezza del tronco per la somma delle misure delle aree delle due basi e della radice quadrata del loro prodotto:

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + s + \sqrt{s \cdot S}).$$





DIMOSTRAZIONE

Indichiamo con x la misura di OH', con h quella di $H'H$, con S la misura dell'area di $ABCD$ e con s quella di $A'B'C'D'$.

La misura del volume del tronco di piramide si calcola come differenza delle misure dei volumi delle piramidi di vertice O e basi coincidenti con quelle del tronco:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot (h + x) - \frac{1}{3} \cdot s \cdot x = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h + \frac{1}{3} \cdot x \cdot (S - s).$$

Per un teorema precedentemente studiato possiamo scrivere:

$$S : s = (h + x)^2 : x^2.$$

Estraiamo la radice quadrata:

$$\sqrt{S} : \sqrt{s} = (h + x) : x.$$

Applichiamo la proprietà dello scomporre:

$$(\sqrt{S} - \sqrt{s}) : \sqrt{s} = h : x \quad \rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{s} \cdot h}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}.$$

Razionalizziamo:

$$x = \frac{\sqrt{s} \cdot h}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} \cdot \frac{\sqrt{S} + \sqrt{s}}{\sqrt{S} + \sqrt{s}} = \frac{\sqrt{s} \cdot h \cdot (\sqrt{S} + \sqrt{s})}{S - s}$$

● Ricordiamo il teorema relativo alle sezioni parallele di una piramide, in cui le misure delle aree delle sezioni sono direttamente proporzionali ai quadrati delle loro distanze dal vertice della piramide.

e sostituiamo nella relazione iniziale:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{s} \cdot h \cdot (\sqrt{S} + \sqrt{s})}{\cancel{S - s}} \cdot (\cancel{S - s}).$$

Essendo $S - s \neq 0$, semplifichiamo e svolgiamo i calcoli:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h + \frac{1}{3} \cdot h \cdot \sqrt{s \cdot S} + \frac{1}{3} \cdot h \cdot s = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + s + \sqrt{s \cdot S}).$$

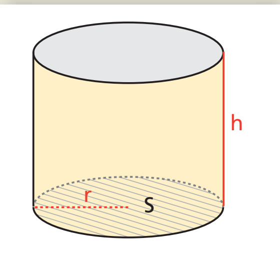
Il volume dei solidi di rotazione

TEOREMA

Volume del cilindro

La misura del volume di un cilindro è uguale al prodotto della misura dell'area del cerchio di base per la misura dell'altezza:

$$\boldsymbol{V = \pi \cdot r^2 \cdot h}.$$



Infatti per il teorema relativo all'equivalenza del volume del cilindro e del prisma possiamo scrivere:

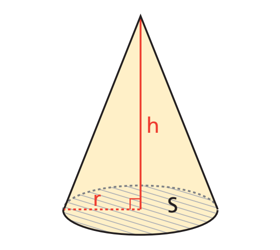
$$V = S \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

TEOREMA

Volume del cono

La misura del volume di un cono è uguale alla terza parte del prodotto della misura dell'area del cerchio di base per la misura dell'altezza:

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}.$$



Infatti per i teoremi relativi all'equivalenza tra un cono e una piramide e all'equivalenza tra un prisma e un cilindro si ha:

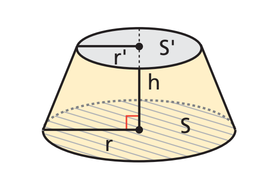
$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h \cdot = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

TEOREMA

Volume del tronco di cono

La misura del volume di un tronco di cono è uguale alla terza parte del prodotto di π per la misura dell'altezza del tronco e per la somma avente per addendi i quadrati delle misure dei raggi dei cerchi di base e il prodotto delle misure degli stessi:

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (r^2 + r'^2 + r \cdot r')}.$$



DIMOSTRAZIONE

Indichiamo con r la misura del raggio del cerchio di base S, con r' quella del raggio del cerchio di base S' e con h quella dell'altezza del tronco.

Con un ragionamento analogo a quello svolto per il tronco di piramide, possiamo scrivere:

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (\pi \cdot r^2 + \pi \cdot r'^2 + \sqrt{\pi \cdot r^2 \cdot \pi \cdot r'^2}) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot h \cdot (\pi \cdot r^2 + \pi \cdot r'^2 + \sqrt{\pi^2 \cdot r^2 \cdot r'^2}) =$$

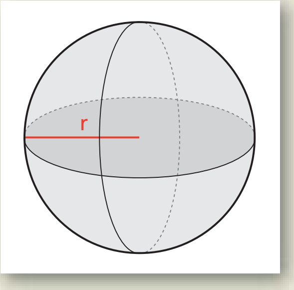
$$= \frac{1}{3} \cdot h \cdot (\pi \cdot r^2 + \pi \cdot r'^2 + \pi \cdot r \cdot r') = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (r^2 + r'^2 + r \cdot r').$$

TEOREMA

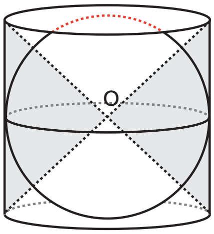
Volume della sfera

La misura del volume della sfera è uguale al prodotto di $\frac{4}{3}\pi$ per la misura del raggio della sfera elevato al cubo:

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}.$$



Infatti abbiamo dimostrato il teorema di equivalenza tra sfera e anticlessidra da cui possiamo ricavare:



$$V_{sfera} = V_{cilindro\ circoscritto} - V_{doppio\ cono} = \pi \cdot r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r =$$

$$= 2\pi \cdot r^3 - \frac{2}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3,$$

ossia:

$$V_{sfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3.$$

L'area della superficie sferica

Possiamo ora dimostrare il teorema relativo all'area della superficie della sfera.

TEOREMA

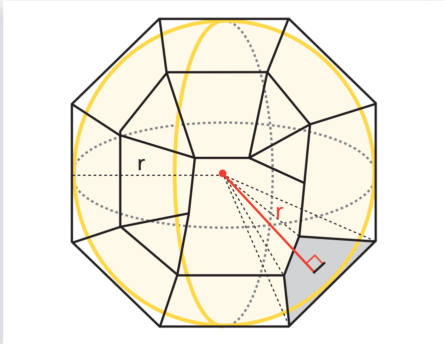
Area della superficie sferica

La misura dell'area della superficie sferica è uguale a quattro volte quella del suo cerchio massimo:

$$\boldsymbol{S_{sfera} = 4 \cdot \pi \cdot r^2}.$$

DIMOSTRAZIONE

Data una sfera di raggio r, consideriamo una qualunque superficie poliedrica a essa circoscritta. Le facce di tale superficie poliedrica rappresentano le basi di tante piramidi con vertice nel centro della sfera. Queste facce sono tangenti alla sfera, quindi sono perpendicolari al raggio r nel punto di tangenza e perciò tutte queste piramidi hanno r come altezza.



◀ **Figura 55** Sfera e superficie poliedrica a essa circoscritta.

Deduciamo allora che il volume del poliedro è uguale alla somma di tutti quelli di queste piramidi di uguale altezza, cioè al volume di una piramide di altezza r che ha per base la superficie poliedrica.

Se si aumenta il numero delle facce del poliedro, la misura della superficie poliedrica si avvicina sempre più alla misura della superficie della sfera e il volume della piramide si avvicina sempre più a quello della sfera. Quindi

$$V_{piramide} = V_{sfera} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} \cdot S_{sfera} \cdot r = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

e, semplificando:

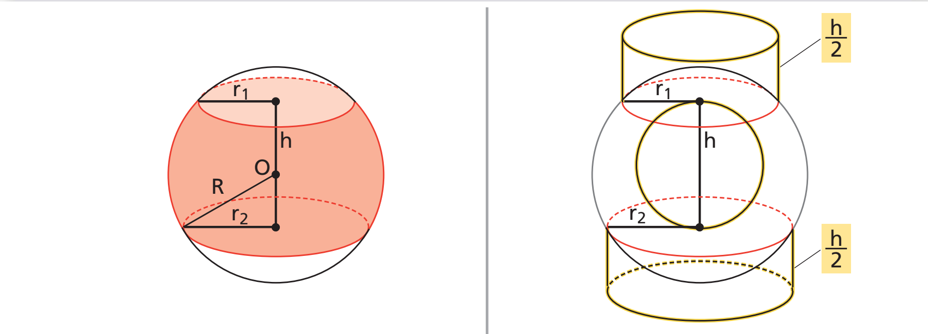
$$S_{sfera} = 4 \cdot \pi \cdot r^2.$$

Il volume delle parti della sfera

Il segmento sferico

Due piani paralleli secanti una sfera la dividono in tre parti solide: quella compresa fra i due piani si chiama **segmento sferico a due basi** (figura 56*a*). I due cerchi determinati dai piani secanti sono le **basi** del segmento e i corrispondenti raggi si dicono **raggi di base**. La superficie che delimita un segmento è formata dalle basi e da una zona sferica; l'altezza della zona è anche **altezza** del segmento.

◀ **Figura 56**



a. Il segmento sferico a due basi e i suoi elementi.

b. Il volume del segmento sferico a due basi.

Per calcolare il volume si applica il seguente teorema (figura 56*b*).

TEOREMA

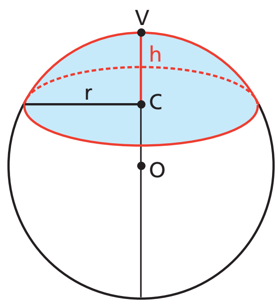
Volume del segmento sferico a due basi

Il segmento sferico a due basi è equivalente alla somma fra una sfera di diametro congruente all'altezza del segmento e due cilindri con altezza congruente alla metà di quella del segmento e con basi congruenti a quelle del segmento:

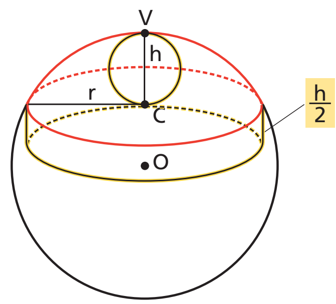
$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \pi r_1^2 \cdot \frac{h}{2} + \pi r_2^2 \cdot \frac{h}{2}.$$

Un piano α secante una sfera la divide in due parti solide: ciascuna di esse è un **segmento sferico a una base** (figura 57*a*). Il cerchio determinato dal piano secante è detto **base** e il suo raggio **raggio di base**. La superficie che delimita un segmento è formata dalla base e da una calotta; l'altezza della calotta è anche **altezza** del segmento.
Possiamo considerare questo solido come un caso particolare del segmento sferico a due basi in cui uno dei due raggi è nullo.

▶ Figura 57



a. Il segmento sferico a una base e i suoi elementi.



b. Il volume del segmento sferico a una base.

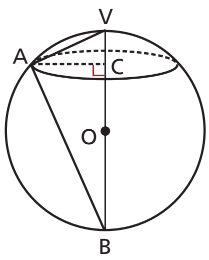
Per calcolare il volume si applica allora il seguente teorema (figura 57*b*).

TEOREMA

Volume del segmento sferico a una base

Il segmento sferico a una base è equivalente alla somma fra una sfera di diametro congruente all'altezza del segmento e un cilindro con altezza congruente alla metà di quella del segmento e con base uguale a quella del segmento:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \pi r^2 \cdot \frac{h}{2}.$$



Applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo *VAB* (figura a lato), scriviamo la relazione fra il raggio di base *r*, l'altezza *h* del segmento e il raggio della sfera *R*:

$$\overline{AC}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{VC} \rightarrow r^2 = (2R - h) \cdot h.$$

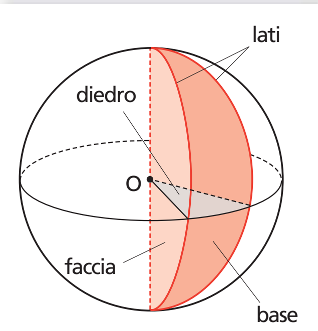
Sostituendo nella formula precedente deduciamo una formula più semplice:

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h).$$

Lo spicchio sferico

Lo spicchio sferico è una parte solida di sfera delimitata da un fuso e dai due semicerchi massimi corrispondenti ai lati del fuso. Il fuso è detto **base**, i semicerchi sono detti **facce** dello spicchio. Le due facce formano il **diedro** dello spicchio.

▶ Figura 58



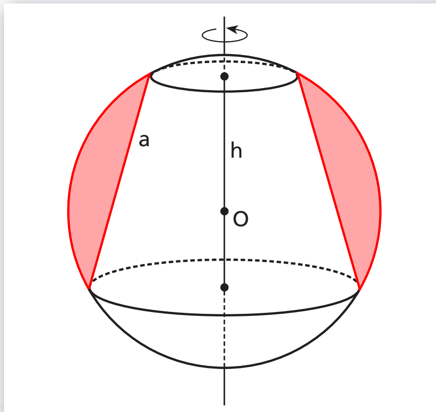
Riguardo al **volume di uno spicchio sferico** si può dimostrare che i volumi degli spicchi appartenenti a una stessa sfera, o a sfere di raggio congruente, sono proporzionali ai diedri corrispondenti. Indicato con V_s il volume dello spicchio, con R il raggio della sfera, α_{rad} e $\alpha°$ le ampiezze del diedro in radianti e in gradi, si ha:

$$V_s : \frac{4}{3}\pi R^3 = \alpha_{\text{rad}} : 2\pi \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{V_s = \frac{2}{3}\alpha_{\text{rad}} R^3};$$

$$V_s : \frac{4}{3}\pi R^3 = \alpha° : 360° \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{V_s = \frac{\alpha°}{270°}\pi R^3}.$$

L'anello sferico

In una sfera consideriamo un segmento sferico a due basi e il tronco di cono inscritto le cui basi coincidono con quelle del segmento. La parte di sfera limitata dalla superficie laterale del tronco e dalla zona sferica corrispondente al segmento si chiama **anello sferico**.



▶ **Figura 59** L'anello sferico.

● L'anello sferico si ottiene anche facendo ruotare di 360° un segmento circolare attorno a un diametro del cerchio di appartenenza e che non attraversi il segmento stesso.

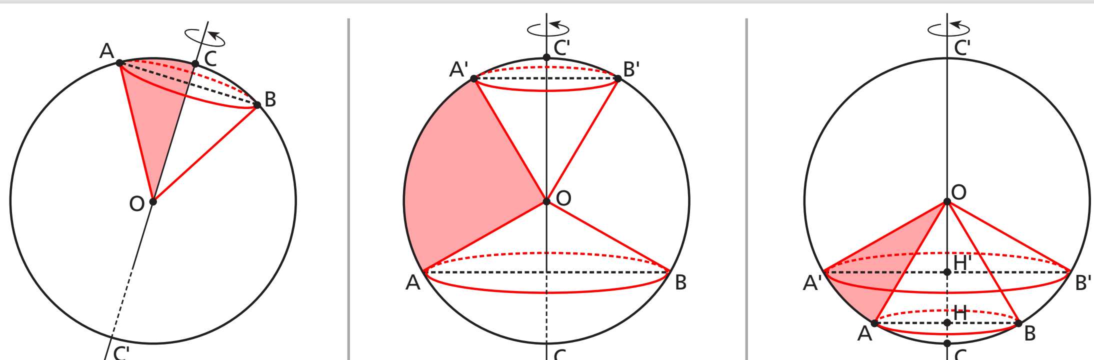
Indicato con a l'apotema del tronco e con h l'altezza, sottraendo il volume del tronco a quello del segmento, è possibile ricavare la formula del **volume dell'anello sferico**:

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{6}\pi a^2 h}.$$

Il settore sferico

Il settore sferico è quel solido che si ottiene facendo ruotare di un angolo giro un settore circolare attorno a un diametro del cerchio a cui appartiene ma che non lo attraversa. Possiamo distinguere tre casi (figura 60).

▼ **Figura 60**



a. Il volume del settore $OACB$ è la somma dei volumi del segmento ACB e del cono AOB.

b. Il volume del settore $AOBB'A'$ è la differenza fra il volume del segmento $ABB'A'$ e i volumi dei due coni AOB e $A'OB'$.

c. Il volume del settore $OBB'AA'$ è la differenza fra il volume del settore $OA'CB'$ e quello del settore $OACB$.

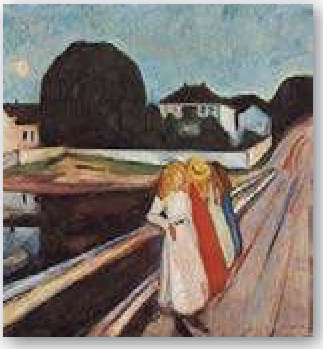
Il volume di un settore si può ottenere come somma o differenza del volume di altri solidi.

ESPLORAZIONE

Arte al cubo

Lo sconvolgimento dei canoni pittorici

La pittura, dal Rinascimento in poi, aveva come scopo fondamentale quello di imitare la natura e di produrre immagini verosimili del reale. Le 3 dimensioni venivano rappresentate con il chiaroscuro (la tecnica delle ombre) e la profondità veniva resa con la prospettiva.



▲ **Figura 1** Edvard Munch, *Ragazze sul ponte*, 1905. Colonia, Wallraf-Richart Museum.

Alla fine del XIX secolo, con l'Espressionismo, anziché elaborare e rappresentare i dati della realtà, gli artisti cercarono di comunicare il loro stato d'animo attraverso le linee, i colori e la composizione, creando anche effetti del tutto innaturali.

Anche le regole della **prospettiva**, come già era accaduto nella ricerca degli Impressionisti, vennero messe in discussione.

La **pittura cubista**, che si sviluppò in Europa tra il 1908 e il 1914, modificò ulteriormente la visione prospettica, sulla base delle indicazioni di Cézanne: «***trattare la natura secondo il cilindro, la sfera, il cono***».

Nei quadri cubisti l'oggetto viene infatti rappresentato nella sua volumetria essenziale come se fosse visto contemporaneamente da diverse direzioni. In questo modo gli artisti volevano ottenere una rappresentazione «totale»: non più solo ciò che si vede, ma anche ciò che si conosce.

Però le immagini così ottenute sono del tutto diverse da come noi siamo abituati a vedere le cose e per questo possono sembrare a volte incomprensibili.

Il nome **Cubismo,** che venne dato ironicamente a questo movimento artistico proprio dai suoi denigratori, deriva appunto dal fatto che ogni forma, nei dipinti di Picasso e di Braque, sembrava costituita da facce di cubi sovrapposte, senza alcuna corrispondenza con la realtà.

Le due fasi del cubismo

▲ **Figura 2** Picasso, *Ritratto di Wilhelm Uhde*, 1910. Londra, coll. Penrose.

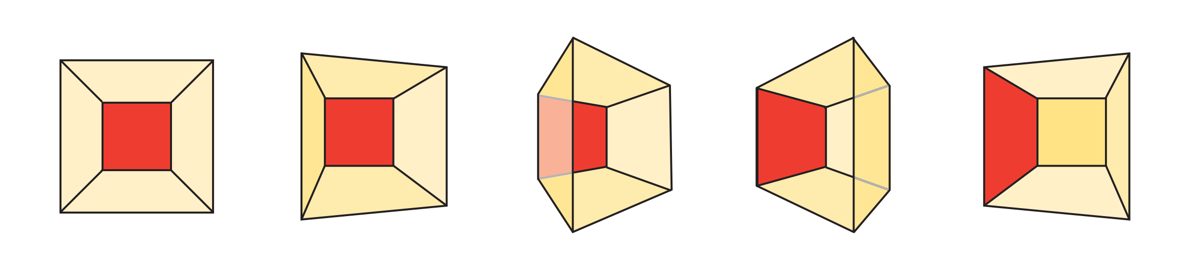
1. Nel **Cubismo analitico** (1908-1910) le forme sono ridotte alla loro struttura geometrica interna (poliedri, coni e cilindri). Tutte le sfaccettature, che sarebbero visibili da diversi punti di vista, vengono ridotte su un unico piano. Non esiste il chiaroscuro né la prospettiva aerea (in cui le immagini venivano rese man mano più sfocate per dare il senso della distanza). In questo modo il fondo si rovescia sulla superficie e l'oggetto viene frantumato nella compenetrazione dei piani e delle linee. I colori usati sono solo bianco, nero e pochi altri toni, non coincidono più con la forma degli oggetti e sono leggeri e sfumati ai bordi. II risultato è un'immagine davvero difficile da ricomporre per uno spettatore.

2. Nel **Cubismo sintetico** (1912-13) i soggetti, prevalentemente **nature morte**, non hanno più neanche un ricordo della loro forma reale: rappresentano invece l'idea dell'oggetto come viene elaborata non solo attraverso i sensi ma anche attraverso l'intelletto. Il dipinto non è più neppure una vaga imitazione della realtà, è una cosa a sé che forse, se non avesse un titolo, sarebbe impossibile da ricollegare alla realtà a cui si ispira. Nel quadro infatti gli oggetti non vengono nemmeno più evocati attraverso la finzione della pittura, ma semplificati al massimo nelle loro componenti essenziali e sono inseriti brandelli di giornale, spartiti musicali, carte da gioco, legno, metallo (i ***collage*** di Picasso).

▲ **Figura 3** Georges Braque, *Natura morta con carte da gioco*, 1913. Parigi, Musée National d'Art Moderne.

La quarta dimensione

Contemporaneamente alla nascita della *relatività generale* di Einstein che metteva in discussione i concetti di spazio e di tempo assoluti, il Cubismo introduceva anche nella pittura la quarta dimensione: il tempo.
Quando facciamo una fotografia, o osserviamo un oggetto rimanendo fermi in un punto, possiamo vederlo solo da una angolazione. Per poterlo vedere da più punti di vista dobbiamo girargli intorno, e comunque osservarlo per un po'.
L'artista studia l'oggetto che vuole rappresentare per un certo tempo e, quando lo dipinge, porta nel quadro tutto ciò che ha osservato.
L'introduzione della variabile tempo in queste opere va considerata anche quando le si osserva. Un quadro cubista non può essere compreso con uno sguardo veloce; bisogna analizzare le singole parti e ricostruirle mentalmente, per riuscire a vedere nell'immagine non più soltanto quello che appare ma anche ciò che è noto della realtà.
Il poeta Guillaume Apollinaire scrisse che il cubismo «**non è arte di imitazione, ma di pensiero**».

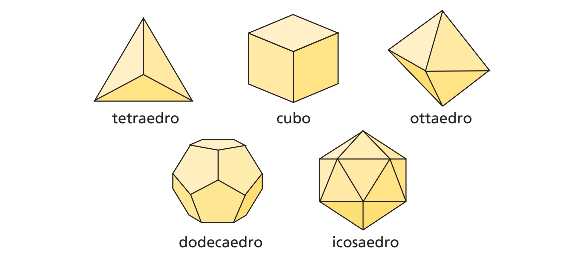


▲ **Figura 4** Rappresentazione tradizionale di un cubo da molteplici punti di vista. La faccia rossa viene percepita in modo diverso a seconda della posizione dell'osservatore.

Attività

Solidi artistici

- I solidi, e la matematica in generale, hanno sempre avuto grande importanza nell'arte. In particolare i cinque solidi regolari, ossia il cubo, il tetraedro, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro, detti *solidi platonici*, hanno stimolato la creatività di molti artisti.
Fai una ricerca sulle applicazioni dei cinque solidi regolari nell'arte.



I solidi platonici.

Design al cubo

- Il cubo, insieme alla sfera, è simbolo di perfezione e, insieme, di semplicità. È stato utilizzato spesso nella realizzazione di oggetti dai designer.
Dopo aver compiuto una ricerca di immagini, progetta un «oggetto al cubo».

Bruno Munari, un posacenere.

Cerca nel Web:
solidi platonici arte, platonic solids art

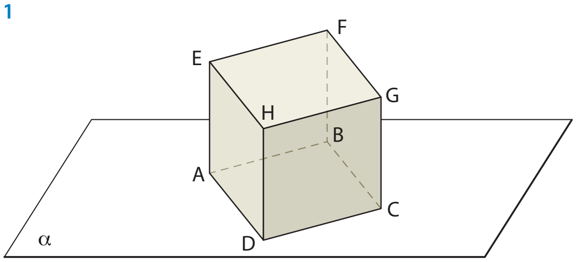
TAGLIARE CUBI

Che tipo di figure si ottengono sezionando un cubo con un piano?

▶ Il quesito completo a pag. 985

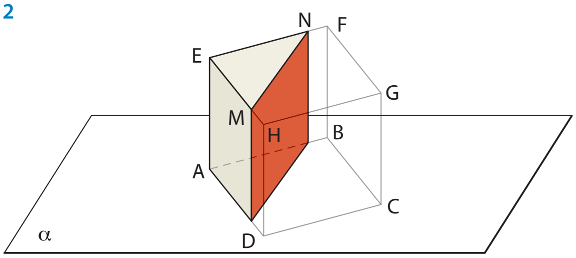
Per studiare le figure che si ottengono sezionando un cubo con un piano possiamo distinguere tre casi, due molto semplici e il terzo un po' più impegnativo.

1



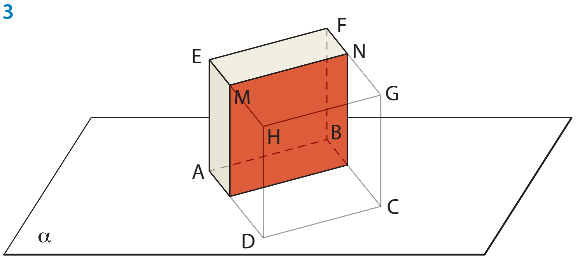
- Il primo caso è quello descritto nella figura 2: un cubo appoggiato sul piano α è stato sezionato con un piano ortogonale ad α e passante per i punti *M* e *N*.

2



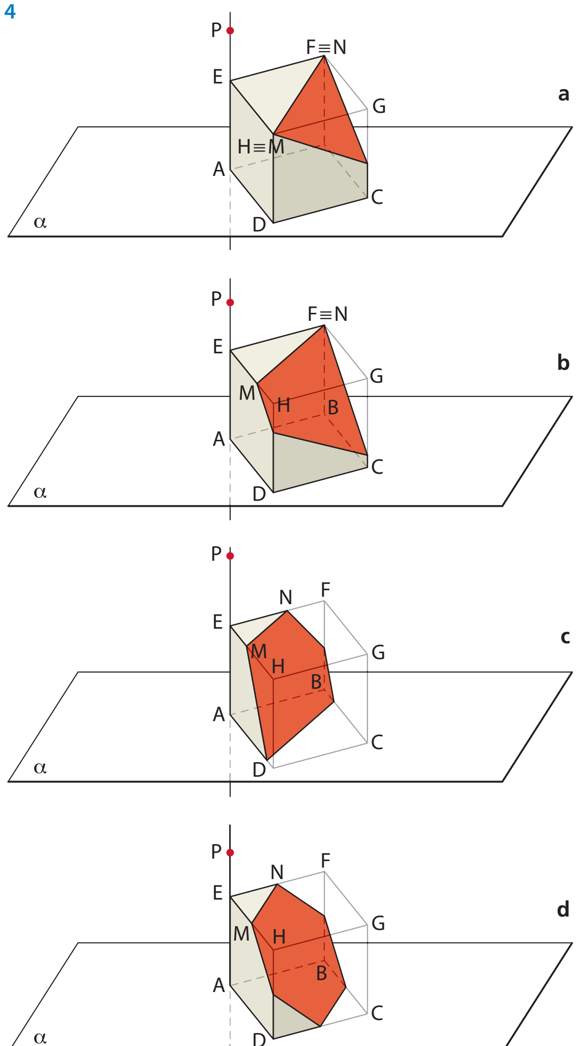
- Il secondo caso è quello descritto nella figura 3: il cubo è stato sezionato con un piano parallelo alla faccia *EFBA* e passante per un punto dello spigolo *EH*.
  In questi primi due casi le sezioni sono dei rettangoli (in casi particolari quadrati o segmenti).

3



- Il terzo caso è il più interessante. Sezioniamo il cubo con un piano β non ortogonale ad α e indichiamo:
  - con *M* e *N* i due punti in cui β interseca gli spigoli *EH* ed *EF*;
  - con *P* il punto in cui β interseca la retta *EA*.
  In questo caso si possono ottenere triangoli (figura 4*a*), quadrilateri (figura 4*b*), pentagoni (figura 4*c*), esagoni (figura 4*d*). Si può anche dimostrare che i triangoli, i quadrilateri e gli esagoni possono essere regolari per particolari posizioni dei punti *M*, *N* e *P*, mentre i pentagoni mai.

4



LABORATORIO DI MATEMATICA
PROBLEMI DI GEOMETRIA SOLIDA

ESERCITAZIONE GUIDATA

Consideriamo un cono circolare retto c, intersecato da un piano π parallelo alla base di c e il solido cc, formato dall'unione del cilindro, le cui basi sono l'intersezione s di π con c e la proiezione di s sulla base di c, e del cono che è la parte di c superiore a π.
L'altezza e il raggio di base di c sono lunghi rispettivamente 10 cm e 3 cm.
Determiniamo x, la distanza di π dal vertice di c, dopo che è stato assegnato un valore a k, il rapporto fra i volumi di cc e di c. Rispondiamo ponendo $k = 0{,}40$.

- Sul quaderno svolgiamo l'analisi del problema, scrivendo le grandezze coinvolte nel calcolo dei volumi in funzione di x e inserendole nelle formule dei volumi:

$$V_{Cono} = \frac{1}{3}\pi 3^2 10; \qquad V_{Cilindro} = \pi\left(\frac{3}{10}x\right)^2(10 - x); \qquad V_{Cono\ superiore} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{10}x\right)^2 x.$$

Scriviamo il rapporto:

$$k = \frac{\pi\left(\frac{3}{10}x\right)^2(10 - x) + \pi\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}x\right)^2 x}{\frac{1}{3}\pi 3^2 10}.$$

Operiamo qualche semplificazione:

$$k30 = \left(\frac{3}{10}x\right)^2(10 - x) + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}x\right)^2 x.$$

- Attiviamo Wiris e digitiamo in un blocco l'istruzione necessaria per effettuare la sostituzione di k e per ottenere le eventuali soluzioni dell'equazione (figura 1).

$$\text{risolvere}\left(\text{sostituire}\left(k\cdot 30=\left(\frac{3}{10}\cdot x\right)^2\cdot(10-x)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{10}\cdot x\right)^2\cdot x,\ k,\ 0.40\right),x\right) \rightarrow \{\{x=-3.3054\},\{x=4.3293\},\{x=13.976\}\}$$

▲ **Figura 1**

- La facciamo svolgere con *Calcola* e Wiris sostituisce il valore 0,40 a k, risolve la corrispondente equazione di terzo grado e ci mostra le tre soluzioni. Precisiamo allora che, affinché la figura abbia significato, la distanza x deve appartenere all'intervallo [0; 10], pertanto l'unica soluzione accettabile è $x = 4{,}3293$.

Nel sito: ► 3 esercitazioni in più

Esercitazioni

Risolvi i seguenti problemi con l'aiuto del computer, procedendo come nell'esercitazione guidata.

1 Con un lingotto di metallo di 380 cm^3 di volume si desidera costruire un solido formato da un prisma esagonale regolare di lato x e di altezza x, sovrastato da una sfera di diametro $d = x + k$. Dopo aver assegnato un valore a k, determina x. Rispondi ponendo $k = 0$ cm, $k = 2$ cm, $k = 4$ cm.
[$x = 4{,}9560$, $x = 4{,}4976$, $x = 3{,}7464$]

2 Una sfera di raggio x è inscritta in una piramide retta a base quadrata di lato $l = 10$ m e altezza $h = k\,l$. Dopo aver assegnato un valore a k, determina x.
Rispondi ponendo $k = \frac{1}{2}$, $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $k = 1$. [$x = 2{,}0711$, $x = 2{,}8868$, $x = 3{,}0902$]

3 Con un'asta ST lunga 10 m si formano l'altezza SV di un cono circolare retto e il diametro VT di una sfera. Determina la posizione del punto V, vertice del cono ($\overline{SV} = x$), in modo che i volumi dei due solidi siano in rapporto k. Rispondi ponendo $k = 0{,}5$, $k = 1$, $k = 2$. [$x = 5{,}5410$, $x = 6{,}3052$, $x = 6{,}9680$]

LA TEORIA IN SINTESI

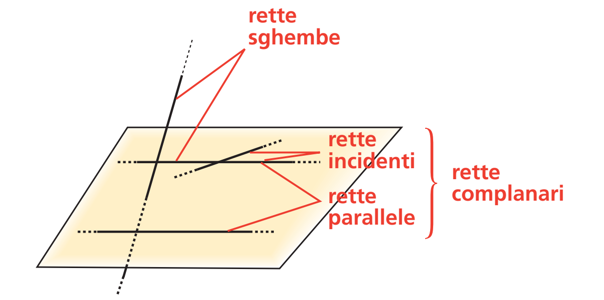
LO SPAZIO

1. PUNTI, RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

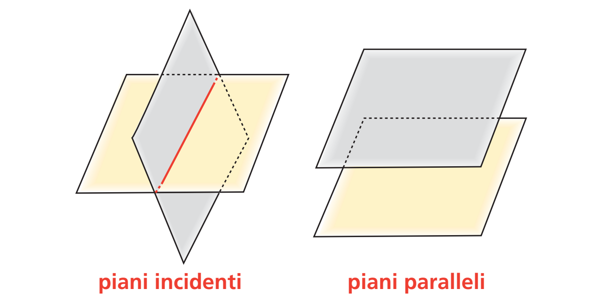
- Le **figure solide** (o **solidi**) sono figure i cui punti non appartengono tutti allo stesso piano.

- Alcuni **postulati dello spazio**.
  1. Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano.
  2. Fissati due punti in un piano, la retta passante per i due punti giace interamente sul piano.
  3. Un qualunque piano divide l'insieme dei punti dello spazio che non gli appartengono in due regioni tali che:
     - due punti qualsiasi della stessa regione sono estremi di un segmento che non interseca il piano;
     - due punti qualsiasi di regioni diverse sono estremi di un segmento che interseca il piano.

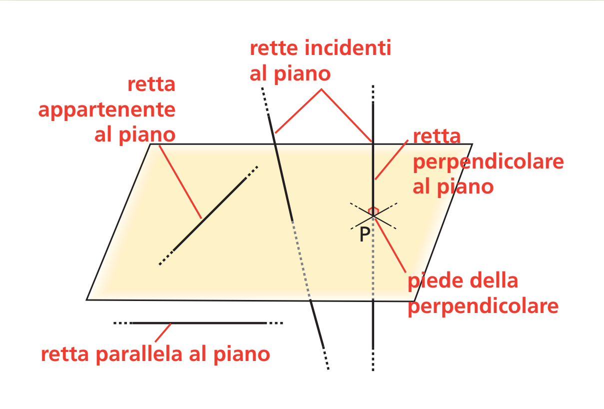
- Due rette nello spazio sono **complanari** (incidenti o parallele) se appartengono allo stesso piano, altrimenti sono **sghembe**.



- Due piani nello spazio sono:
  - **incidenti** se hanno in comune solo una retta;
  - **paralleli** in caso contrario: due piani paralleli non hanno alcun punto in comune oppure sono coincidenti.

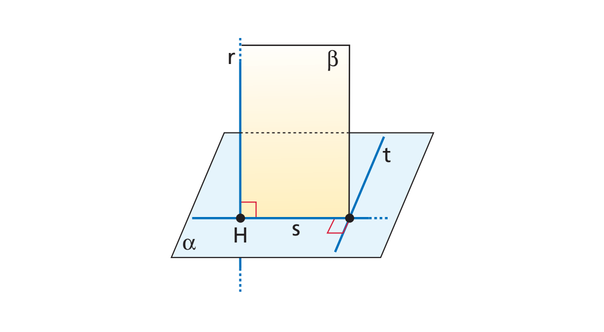


- Una retta nello spazio può essere:
  - **appartenente** a un piano se tutti i suoi punti appartengono al piano;
  - **incidente** al piano se ha un solo punto in comune con il piano;
  - **parallela** al piano se non ha alcun punto in comune con il piano.

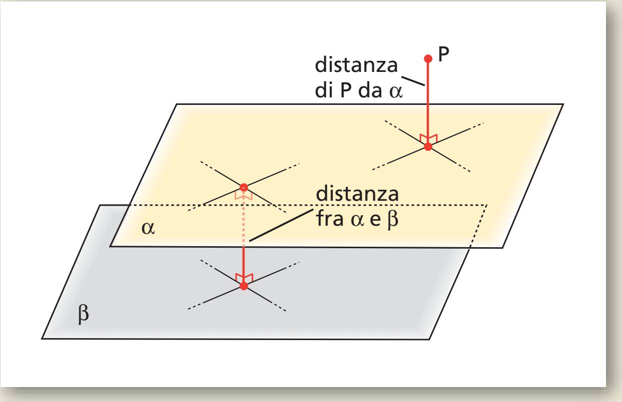


- Una retta incidente a un piano in un punto P è **perpendicolare al piano** quando è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per P. In tal caso P è detto **piede della perpendicolare**.

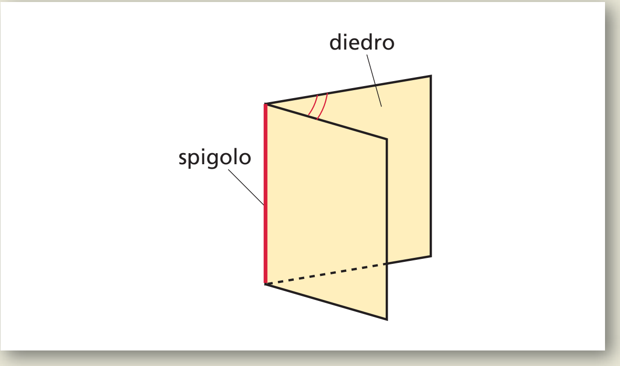
- **Teorema delle tre perpendicolari**
  Se dal piede H di una perpendicolare r a un piano α si manda la perpendicolare s a una qualunque retta t del piano, quest'ultima risulta perpendicolare al piano β delle prime due.



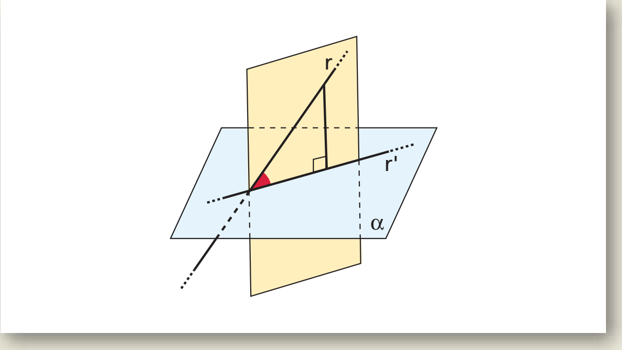
- La **distanza fra due piani paralleli** è la lunghezza del segmento intercettato dai due piani su una qualunque retta perpendicolare ai due piani.
- La **distanza di un punto da un piano** è la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto stesso e il piede della perpendicolare al piano.



- Dati due semipiani dello spazio aventi la stessa origine, un **diedro** è ognuna delle due parti, compresi i semipiani, in cui essi dividono lo spazio.

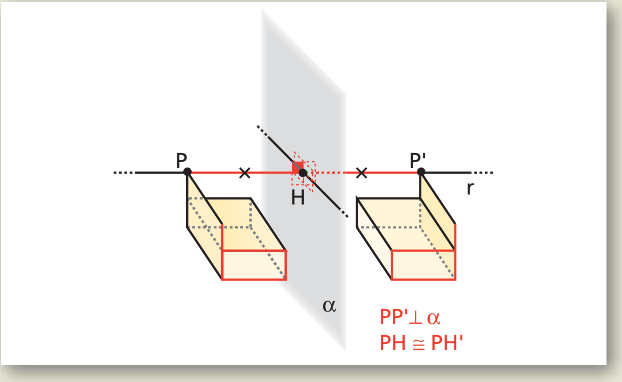


- L'angolo di una retta r con un piano α è l'angolo formato da r e dalla sua proiezione r' su α.



2. LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

- Sono analoghe alle omonime trasformazioni nel piano. Fra le isometrie nello spazio si definisce anche la **simmetria rispetto a un piano**.

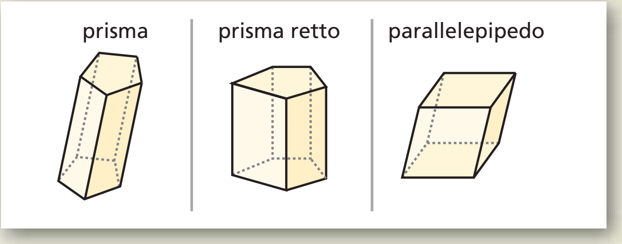


3. I POLIEDRI

- Un **poliedro** è una figura solida limitata da un numero finito di poligoni appartenenti a piani diversi e tali che il piano di ogni faccia non attraversi il solido.
- Un **prisma** è un poliedro delimitato da due **basi** che sono poligoni congruenti posti su piani paralleli e da **facce laterali** che sono parallelogrammi. La distanza fra i piani delle basi è l'**altezza** del prisma; le **diagonali** sono segmenti che congiungono due vertici non appartenenti alla stessa faccia.

  Un prisma è **retto** se gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi, è **regolare** quando è retto e le sue basi sono poligoni regolari.

  Un prisma è un **parallelepipedo** se anche le basi sono parallelogrammi.



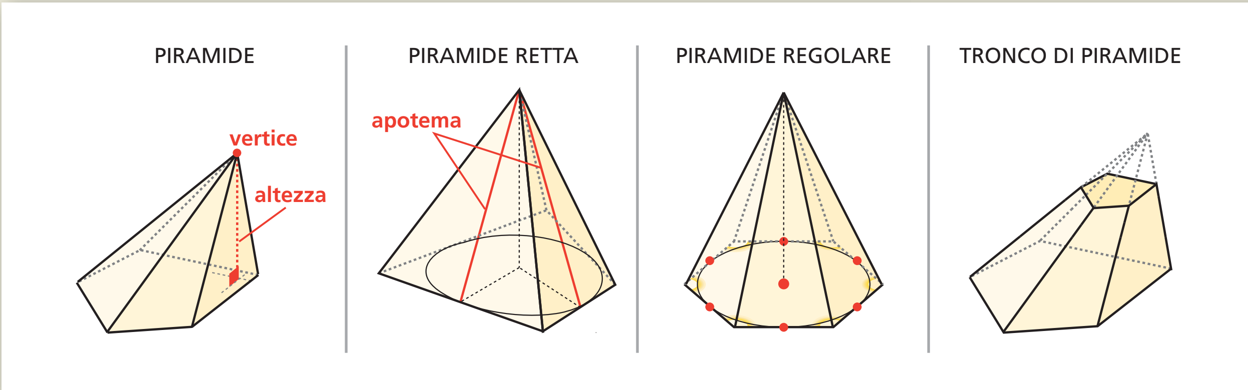
- Una **piramide** è un poliedro delimitato da un poligono, detto **base**, e da **facce laterali** triangolari le quali:
  - hanno in comune un vertice, detto **vertice della piramide**;
  - hanno il lato opposto a tale vertice coincidente con un lato del poligono di base.

La distanza fra il vertice e il piano della base è detta **altezza** della piramide.

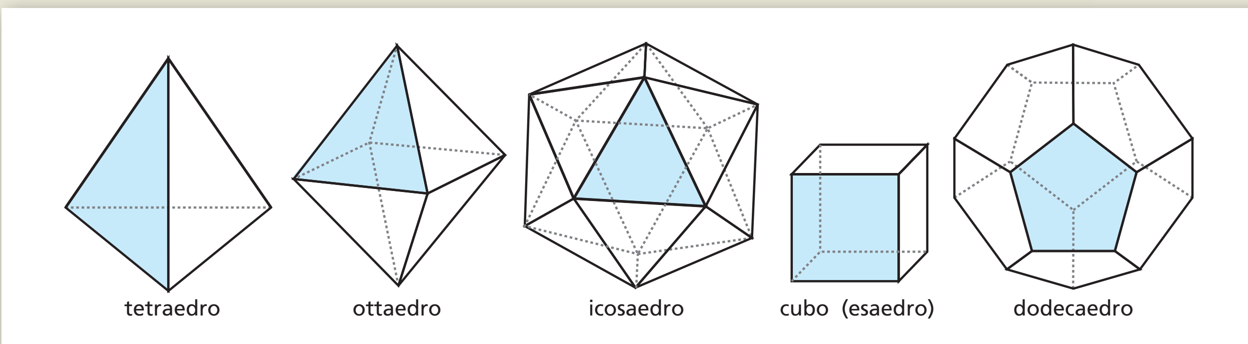
Una piramide è **retta** quando nella sua base si può inscrivere una circonferenza il cui centro è la proiezione ortogonale del vertice della piramide sul piano di base. L'altezza delle facce laterali di una piramide retta è detta **apotema**.

Una piramide è **regolare** quando è retta e la sua base è un poligono regolare.

- Un **tronco di piramide** è limitato da due poligoni simili fra loro e posti su piani paralleli (le **basi** del tronco) e da **facce laterali** che sono trapezi.

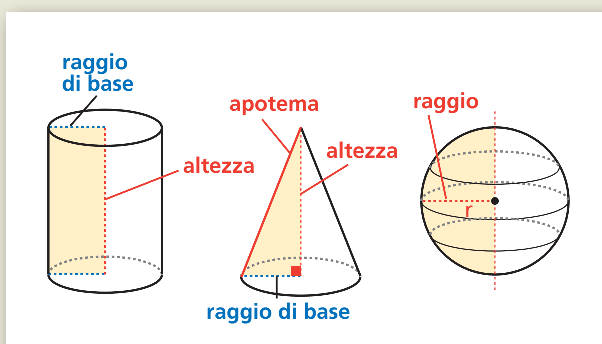


- Un poliedro è **regolare** quando le sue facce sono poligoni regolari congruenti e anche i suoi diedri e i suoi angoloidi sono congruenti.
  Ci sono solo cinque tipi di poliedri regolari.



4. I SOLIDI DI ROTAZIONE

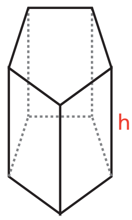
- I solidi di rotazione sono generati dalla rotazione di una figura piana attorno a una retta. In particolare:
  - un **cilindro** è generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno a uno dei suoi lati;
  - un **cono** è generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno a uno dei suoi cateti;
  - una **sfera** è generata dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al suo diametro.



5. 7. LE AREE E I VOLUMI DEI SOLIDI NOTEVOLI

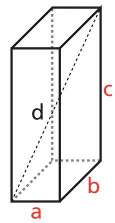
■ Formule per il calcolo della **misura delle aree delle superfici e dei volumi** dei principali solidi.

PRISMA RETTO



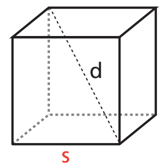
$A_\ell = 2p \cdot h$
$A_t = A_\ell + 2A_b$
$V = A_b \cdot h$

PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO



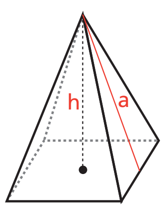
$A_b = ab$
$A_\ell = 2(ac + bc)$
$A_t = 2(ac + ab + bc)$
$V = a \cdot b \cdot c$
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

CUBO



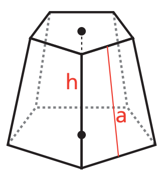
$A_b = s^2$
$A_t = 6s^2$
$V = s^3$
$d = s\sqrt{3}$

PIRAMIDE RETTA



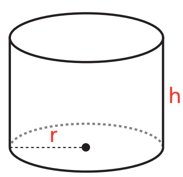
$A_\ell = p \cdot a$
$A_t = A_\ell + A_b$
$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$

TRONCO DI PIRAMIDE RETTA



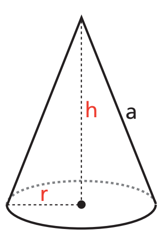
$A_\ell = (p + p') \cdot a$
$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$
$V = \frac{1}{3} h\,(A_b + A'_b + \sqrt{A_b \cdot A'_b})$

CILINDRO



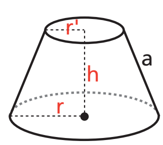
$A_b = \pi r^2$
$A_\ell = 2\pi r \cdot h$
$A_t = 2\pi r\,(h + r)$
$V = \pi r^2 \cdot h$

CONO



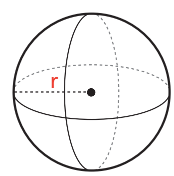
$A_b = \pi r^2$
$A_\ell = \pi r a$
$A_t = \pi r\,(a + r)$
$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

TRONCO DI CONO

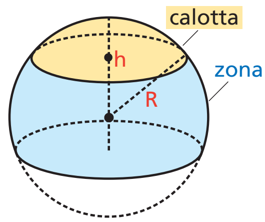
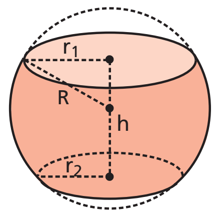
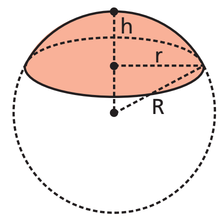


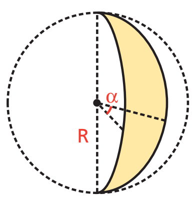
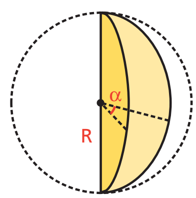
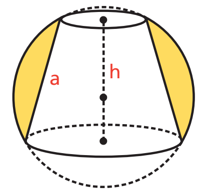
$A_b = \pi r^2$
$A'_b = \pi r'^2$
$A_\ell = \pi a\,(r + r')$
$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$
$V = \frac{1}{3} \pi h\,(r^2 + r'^2 + r \cdot r')$

SFERA



$A = 4\pi r^2$
$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

CALOTTA E ZONA SFERICA	SEGMENTO SFERICO A DUE BASI	SEGMENTO SFERICO A UNA BASE
		
$S = 2\pi Rh$	$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \pi r_1^2\frac{h}{2} + \pi r_2^2\frac{h}{2}$	$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \pi r^2\frac{h}{2} = \frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$

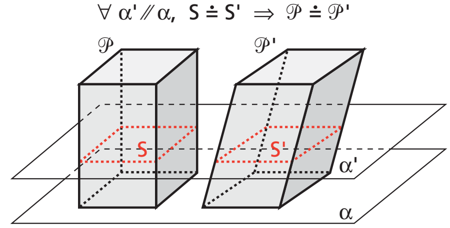
FUSO SFERICO	SPICCHIO SFERICO	ANELLO SFERICO
		
$S_f = 2R^2\alpha_{rad} = \frac{\alpha°}{90°}\pi R^2$ α_{rad}: ampiezza del diedro in radianti $\alpha°$: ampiezza del diedro in gradi	$V = \frac{2}{3}\alpha_{rad}R^3 = \frac{\alpha°}{270°}\pi R^3$	$V = \frac{1}{6}\pi a^2 h$

6. L'ESTENSIONE E L'EQUIVALENZA DEI SOLIDI

- Due solidi aventi la stessa estensione sono **equivalenti**.

- Alcuni **postulati dell'equivalenza dei solidi**.
  1. Due solidi congruenti sono sempre equivalenti.
  2. Solidi ottenuti come somma o differenza di solidi congruenti o equivalenti sono equivalenti.
  3. Un solido non può essere equivalente a una sua parte (**postulato di De Zolt**).
  4. Dati due solidi A e B: o A è equivalente a B o A è prevalente a B $(A > B)$ o A è suvvalente a B $(A < B)$ e ciascun caso esclude gli altri due (**legge di esclusione**).
  5. Due solidi che possono essere disposti in modo che ogni piano parallelo a un altro fissato, scelto come riferimento, li tagli secondo sezioni equivalenti, sono equivalenti (**principio di Cavalieri**).

$\forall\, \alpha' /\!/ \alpha,\ S \doteq S' \Rightarrow \mathcal{P} \doteq \mathcal{P}'$



Principio di Cavalieri

- Teorema: due solidi **equicomposti** sono equivalenti.

1. PUNTI, RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

▶ Teoria a pag. 986

1 **VERO O FALSO?**

a) Una figura solida è un insieme qualunque di punti dello spazio. V F
b) Per un punto dello spazio passa un solo piano. V F
c) Per due punti dello spazio passano infiniti piani. V F
d) Per tre punti non allineati dello spazio passa un solo piano. V F
e) Una retta che ha in comune un solo punto con un piano non giace nel piano. V F

2 **VERO O FALSO?**

a) Dati un punto P e una retta r non passante per P, nello spazio esistono infinite rette passanti per P e parallele a r. V F
b) Dati un punto P e un piano α che non lo contiene, esiste una sola retta passante per P parallela al piano α. V F
c) Dati un piano α e un punto P fuori di esso, esiste una sola retta passante per P perpendicolare ad α. V F
d) Data una retta r perpendicolare al piano α nel punto P, ogni retta passante per P è perpendicolare a r. V F

3 **VERO O FALSO?**

a) Dati due piani che si intersecano, per la loro intersezione passano infiniti piani. V F
b) Se due rette nello spazio non si intersecano, allora sono parallele. V F
c) Due rette parallele a uno stesso piano sono parallele. V F
d) Due rette perpendicolari a uno stesso piano sono parallele. V F

4 **TEST** Sia data nello spazio una retta r ed un suo punto A. Di rette passanti per A e perpendicolari alla retta r ne esistono:

A una sola.
B due sole.
C tre sole.
D infinite, tutte appartenenti ad uno stesso piano.
E infinite, non tutte appartenenti ad uno stesso piano.

(*Università di Roma, Facoltà di Ingegneria, Corso propedeutico di Matematica*)

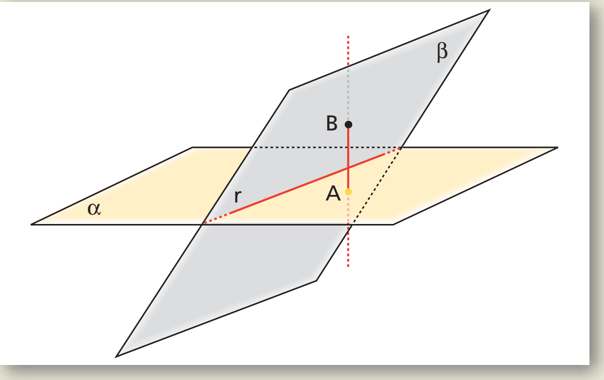
5 **ESERCIZIO GUIDA**

Siano α e β due piani incidenti e r la loro retta intersezione. Scelti sul piano α un punto A e sul piano β un punto B, non appartenenti a r, determiniamo la posizione della retta AB rispetto a r.

Dimostriamo che la retta AB e la retta r sono sghembe.

Ragioniamo per assurdo. Se le due rette non fossero sghembe, allora sarebbero complanari.

Supponiamo che AB e r appartengano a uno stesso piano: questo dovrebbe contenere r e i due punti A e B. Poiché $A \in \alpha$ e $B \in \beta$, i due piani α e β dovrebbero coincidere, contro l'ipotesi che α e β siano incidenti lungo una retta e quindi distinti. Pertanto la retta AB è sghemba rispetto a r.



6 Dati due piani α e β incidenti nella retta r, da un punto P non appartenente ai piani conduci una retta parallela a r. Com'è questa retta rispetto al piano α? E rispetto al piano β?

7 Dato un triangolo ABC, conduci per A la retta perpendicolare al piano di ABC e considera su di essa un punto P qualsiasi. Di che tipo sono i triangoli APC e APB?

8 Dimostra che se due rette si incontrano in un punto esse sono complanari.
(Suggerimento. Utilizza i primi due postulati introdotti.)

9 Da un punto P esterno a un piano α conduci la retta perpendicolare ad α nel punto H e una retta r obliqua che interseca α nel punto R. Dimostra che il segmento PR è maggiore del segmento PH qualunque sia la retta r obliqua.

10 Da un punto P esterno a un piano α conduci due rette r e s oblique ad α, che intersecano α rispettivamente in R e in S. Dimostra che se i segmenti PR e PS hanno proiezioni congruenti sul piano α, allora sono congruenti.

11 Disegna un piano α e una retta r parallela ad α. Per r conduci un piano β che interseca α in una retta s. Dimostra che s è parallela a r. (Suggerimento. Ragiona per assurdo: se s non fosse parallela a r, avrebbe un punto in comune con r. Tale punto apparterrebbe non solo a r, ma anche al piano...)

12 Disegna un punto esterno a un piano α. Per il punto disegna due rette parallele al piano. Dimostra che il piano individuato da tali rette è parallelo al piano dato. (Suggerimento. Utilizza l'esercizio precedente e ragiona per assurdo…)

13 Disegna due piani paralleli α e β e un piano γ che li intersechi entrambi, rispettivamente nelle rette a e b. Dimostra che a e b sono parallele.

14 Disegna due semipiani con la stessa origine. Indica nella tua figura quale fra i due diedri che si formano è concavo e quale è convesso.

15 Disegna un piano α e una retta r parallela ad α. Considera su r due punti qualsiasi S e T. Conduci per S e per T due rette parallele s e t che intersechino il piano α nei punti S' e T'. Dimostra che i segmenti ST e $S'T'$ sono congruenti.

16 Disegna due piani paralleli α e β e due rette parallele r e s che intersechino rispettivamente α nei punti R e S e β nei punti R' e S'. Dimostra che i segmenti RS e $R'S'$ sono congruenti.

17 Tre rette non complanari a, b, c intersecano il piano α rispettivamente nei punti A, B, C, il piano α', parallelo ad α, nei punti A', B', C', e si intersecano nel punto P esterno a entrambi i piani. Dimostra che i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono simili con rapporto di similitudine uguale al rapporto fra le distanze di P dai due piani.

18 Sia α un piano e sia P un punto esterno a esso. Sui segmenti PA, PB, PC, … che congiungono P con i punti A, B, C, … del piano α considera i punti A', B', C', … appartenenti rispettivamente a PA, PB, PC, … e tali che $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}} = \ldots = h$, con h numero reale positivo.

Dimostra che i punti A', B', C', … appartengono a un piano α' parallelo ad α.

19 Sul piano α considera una circonferenza Γ. Da un punto P non appartenente ad α manda le rette a, b, c, … passanti per i punti di Γ. Dimostra che se α' è un piano parallelo ad α, allora il luogo delle intersezioni delle rette a, b, c, … con α' è una circonferenza.

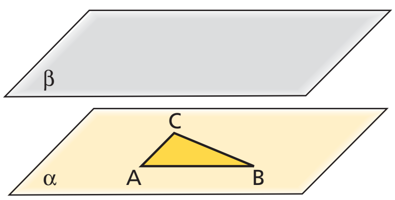
2. LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Teoria a pag. 996

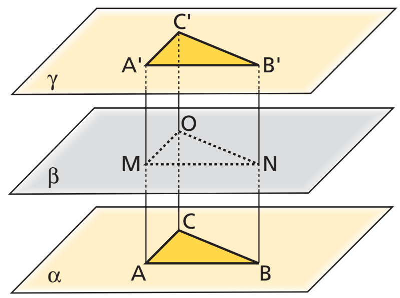
Le isometrie

20 **ESERCIZIO GUIDA**

Dati due piani paralleli α e β, disegniamo su α un triangolo *ABC*, poi costruiamo il triangolo *A′B′C′* simmetrico di *ABC* rispetto al piano β. Come è il piano del triangolo *A′B′C′* rispetto al piano β?



a. Disegniamo i due piani paralleli α e β e, su α, il triangolo *ABC*.



b. Tracciamo le perpendicolari al piano α passanti per i vertici *A*, *B*, e *C* e chiamiamo *M*, *N* e *O*, rispettivamente, le loro intersezioni con il piano β. Consideriamo infine i punti *A*', *B*' e *C*' tali che $AM \cong MA'$, $BN \cong NB'$ e $CO \cong OC'$.

Dimostriamo che il triangolo $A'B'C'$ appartiene a un piano parallelo al piano β.
I tre punti non allineati A', B' e C' individuano un piano γ, a cui appartiene il triangolo $A'B'C'$. Per costruzione, $AM \cong MA'$, $BN \cong NB'$, $CO \cong OC'$ e, poiché i due piani α e β sono paralleli, i segmenti di perpendicolare *AM*, *BN* e *CO* sono fra loro congruenti. Pertanto sono congruenti anche i segmenti di perpendicolare MA', NB' e OC'. Poiché questa proprietà vale considerati *A*, *B* e *C* qualsiasi e quindi per qualsiasi A', B', C', tutti i punti del piano γ risultano equidistanti da β, quindi γ è parallelo a β.

21 Dati due punti nello spazio, disegna il piano rispetto al quale l'uno è il simmetrico dell'altro.

22 Disegna due piani incidenti α e β. Disegna il piano γ simmetrico di α rispetto a β. Quali punti in comune hanno α e γ?

23 Che posizioni può avere una retta rispetto a un piano, se è figura unita nella simmetria rispetto a quel piano?

24 Dato un piano α, come deve essere posizionato un piano β, distinto da α, per essere figura unita rispetto alla simmetria rispetto ad α?

25 Disegna un orologio la cui faccia è parallela a uno specchio e vi si riflette. Le lancette dell'immagine dell'orologio ruotano in senso orario o antiorario? Che cosa puoi dedurre, dunque, riguardo alla simmetria rispetto a un piano?

26 Disegna due rette parallele nello spazio. Fai compiere alla prima una rotazione di asse la seconda e di ampiezza un angolo retto in senso antiorario. Com'è la retta che ottieni rispetto alle altre due?

27 Disegna su un piano un triangolo e una retta. Disegna l'immagine del triangolo in una rotazione nello spazio di un angolo piatto e di asse quella retta. Con quale trasformazione del piano potresti ottenere la stessa immagine?

28 Dato un triangolo, determina la sua immagine in una traslazione nello spazio di vettore scelto a tuo piacimento. Come sono posizionati, l'uno rispetto all'altro, i piani del triangolo e della sua immagine?

3. I POLIEDRI

Teoria a pag. 999

Il prisma

29 Disegna tre rette parallele nello spazio, non appartenenti allo stesso piano. Disegna un prisma che abbia come spigoli tre segmenti appartenenti alle tre rette.

30 Disegna un parallelepipedo e un piano che incontra i quattro spigoli laterali del parallelepipedo. Dimostra che la sezione ottenuta (ossia la figura intersezione fra il solido e il piano) è un parallelogramma.

31 Dimostra che le diagonali di un parallelepipedo si incontrano in un punto che le divide a metà.

32 Dimostra che in un parallelepipedo retto le diagonali sono congruenti a due a due.

33 Dimostra che in un parallelepipedo rettangolo le diagonali sono congruenti.

34 Dimostra che se un parallelepipedo ha le diagonali congruenti, allora è rettangolo. Come puoi sintetizzare le due proprietà dimostrate in questo esercizio e nel precedente?

35 Are you confident about using trigonometry and Pythagoras' theorem to solve problems in three dimensions? Questions 1 and 2 refer to cuboid *ABCDEFGH*:

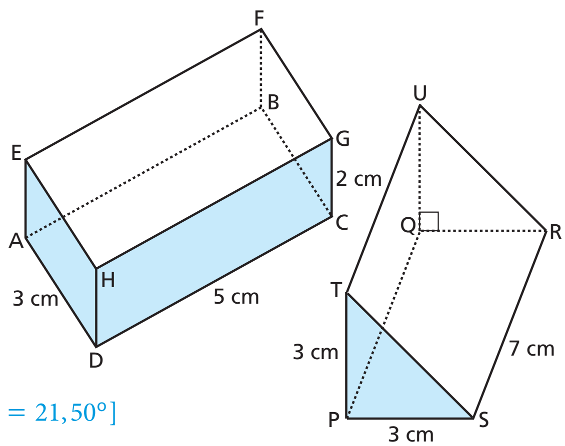
a) Calculate the length of *EC*.

b) What angle does *EC* make with the base *ABCD*?

Questions 3 and 4 refer to the prism *PQRSTU*:

c) Calculate the length of *RT*.

d) What angle does *RT* make with the base *PQRS*?



[a) $\overline{EC} = \sqrt{38}$; b) $E\widehat{C}A = 18{,}93°$; c) $\overline{RT} = \sqrt{67}$; d) $T\widehat{R}P = 21{,}50°$]

Il centro, gli assi e i piani di simmetria in un cubo

36 Un punto dello spazio è **centro di simmetria di una figura** se la figura è unita rispetto alla simmetria centrale di centro quel punto. Illustra con una figura la seguente proposizione: «Il punto d'incontro delle diagonali di un cubo è centro di simmetria del cubo».

37 Una retta dello spazio è **asse di simmetria di una figura** se la figura è unita rispetto alla simmetria che ha per asse quella retta. Illustra con una figura la seguente proposizione: «In un cubo una retta che congiunge i punti medi di due spigoli opposti è asse di simmetria del cubo».

38 Illustra con una figura la seguente proposizione: «In un cubo, una retta che congiunge i punti d'incontro delle diagonali di due facce opposte è asse di simmetria del cubo».

39 Un piano dello spazio è **piano di simmetria di una figura** se la figura è unita rispetto alla simmetria che ha per piano di simmetria quel piano. Illustra con una figura la seguente proposizione: «In un cubo, un piano che passa per il centro di simmetria del cubo ed è parallelo a due facce opposte è piano di simmetria del cubo».

40 Illustra con una figura la seguente proposizione: «In un cubo, un piano che passa per due diagonali parallele di due facce opposte è piano di simmetria del cubo».

La piramide

41 Considerando piramidi a base quadrangolare, disegna:
a) una piramide non retta;
b) una piramide retta ma non regolare;
c) una piramide regolare.

42 Disegna una piramide $VABC$ a base triangolare ABC, in modo tale che VA sia l'altezza della piramide. Traccia l'altezza AH del triangolo. Dimostra che VH è l'altezza del triangolo BCV. (Suggerimento. Utilizza il teorema delle tre perpendicolari.)

43 Disegna una piramide $VABCD$ a base rettangolare $ABCD$, in modo tale che, detto H il punto d'intersezione delle diagonali del rettangolo, VH sia l'altezza della piramide. La piramide è retta? Traccia l'altezza HM del triangolo ABH e l'altezza HN del triangolo BCH. Che cosa rappresentano i segmenti VM e VN? Sono congruenti?

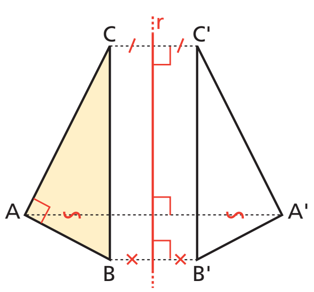
4. I SOLIDI DI ROTAZIONE

▶ Teoria a pag. 1008

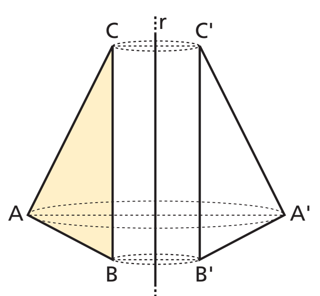
44 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo il solido di rotazione generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo ABC intorno a una retta r, complanare al triangolo, che non interseca il triangolo ed è parallela all'ipotenusa. Descriviamo il solido ottenuto.

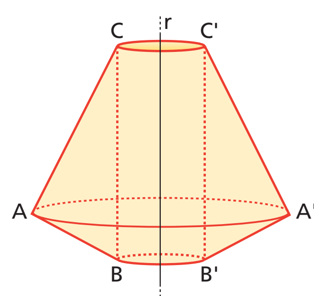
Costruzione



a. Supponiamo che il triangolo ABC giaccia sul piano della pagina del libro. Per disegnare la figura di rotazione determiniamo il triangolo $A'B'C'$, simmetrico di ABC rispetto all'asse r (che giace sullo stesso piano di ABC).



b. Disegniamo, in prospettiva e con tratto leggero, le tre circonferenze descritte da A, B e C nella rotazione intorno a r di un angolo giro.



c. Evidenziamo in rosso a tratto continuo le linee visibili e tratteggiamo quelle non visibili.

Descrizione

Il solido è formato da due tronchi di cono, che hanno in comune la base maggiore, nei quali è scavato un foro cilindrico che ha per asse la retta r.

Disegna i solidi generati dalla rotazione completa (cioè di 360°) dei seguenti poligoni intorno alla retta indicata. Descrivi i solidi ottenuti.

45 Rotazione di un triangolo rettangolo intorno alla retta:
a) di uno dei cateti; b) dell'ipotenusa.

46 Rotazione di un triangolo acutangolo intorno alla retta:
a) di uno dei lati;
b) passante per un vertice e parallela al lato opposto.

47 Rotazione di un triangolo isoscele intorno alla retta:
a) della base;
b) dell'altezza relativa alla base (rotazione di 180°).

48 Rotazione di un trapezio isoscele intorno alla retta:
a) della base maggiore; c) di uno dei lati obliqui.
b) della base minore;

49 Rotazione di un quadrato intorno alla retta:
a) di una diagonale (rotazione di 180°);
b) passante per i punti medi di due lati opposti ($\alpha = 180°$);
c) passante per un vertice e parallela alla diagonale opposta a quel vertice.

50 Rotazione di un rettangolo intorno alla retta:
a) di un lato;
b) parallela a un lato e non intersecante il rettangolo;
c) passante per un vertice e parallela alla diagonale opposta a quel vertice.

51 Rotazione dell'esagono regolare $ABCDEF$ intorno alla retta:
a) AD ($\alpha = 180°$);
b) di un lato;
c) passante per D e parallela a EC.

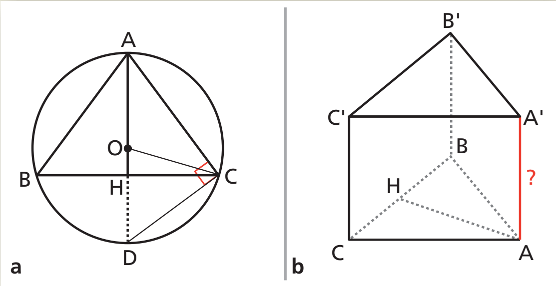
5. LE AREE DEI SOLIDI NOTEVOLI

▶ Teoria a pag. 1010

Il prisma retto

52 ESERCIZIO GUIDA

Un prisma retto ha per base un triangolo isoscele che è inscritto in un cerchio di raggio 6 dm. Sapendo che l'altezza relativa alla base del triangolo è 8 dm e la superficie totale del prisma è $92\sqrt{2}$ dm², calcoliamo l'altezza del solido.



Dati $\overline{CO} = 6$;
$\overline{AH} = 8$;
$A_t = 92\sqrt{2}$.

Domanda
$\overline{AA'} = ?$

Consideriamo il triangolo isoscele che è la base del prisma ed è inscritto nel cerchio. Prolunghiamo l'altezza AH fino a incontrare in D la circonferenza (figura a). Il triangolo ACD è rettangolo in quanto inscritto in una semicirconferenza.
Scegliamo l'incognita. Poiché possiamo applicare il primo teorema di Euclide (un cateto è medio proporzionale tra la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa) è opportuno porre $\overline{AC} = x$.
Impostando la proporzione si ha:

$$\overline{AH} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AD}$$
$$8 : x = x : 12$$
$$x^2 = 96 \text{ da cui } x = 4\sqrt{6};\ \overline{AC} = 4\sqrt{6}.$$

Applichiamo ora il teorema di Pitagora al triangolo ACH:

$$\overline{CH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AH}^2 = (4\sqrt{6})^2 - 8^2 = 96 - 64 = 32$$

$$\overline{CH} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = 8\sqrt{2}.$$

Per calcolare l'altezza del prisma dobbiamo conoscere la superficie laterale, che si calcola con la formula $A_\ell = A_t - 2A_b$:

$$A_b = 8\sqrt{2} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 32\sqrt{2}$$

$$A_\ell = 92\sqrt{2} - 64\sqrt{2} = 28\sqrt{2}$$

$$\overline{AA'} = \frac{A_\ell}{2p}$$

$$\overline{AA'} = \frac{28\sqrt{2}}{8\sqrt{6} + 8\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{7\sqrt{2}}{2 \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2})} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{7(\sqrt{12} - 2)}{2 \cdot 4} =$$

$$= \frac{7(2\sqrt{3} - 2)}{8} =$$

$$= \frac{7(\sqrt{3} - 1)}{4}.$$

L'altezza del prisma è $\frac{7(\sqrt{3} - 1)}{4}$ dm.

53 Un prisma regolare ha per base un triangolo equilatero, il cui lato è i $\frac{2}{7}$ dell'altezza del solido. Sapendo che la superficie totale del prisma è $(168 + 8\sqrt{3})$ dm², determina la lunghezza degli spigoli del prisma. [4 dm; 14 dm]

54 Un prisma esagonale regolare ha l'apotema della base di $10\sqrt{3}$ dm. Determina la superficie totale del solido, sapendo che la sua altezza è i $\frac{9}{5}$ dello spigolo di base. [$240(5\sqrt{3} + 18)$ dm²]

55 Un prisma esagonale regolare ha la diagonale di ogni faccia laterale inclinata di 60° rispetto alla base e di lunghezza 20 dm. Determina la superficie totale del solido. [$900\sqrt{3}$ dm²]

56 Un prisma retto ha per base un trapezio isoscele le cui basi sono lunghe 18 dm e 12 dm, mentre i lati obliqui formano un angolo di 60° con la base maggiore. Determina l'altezza del solido, sapendo che la superficie totale è $370\sqrt{3}$ dm². $\left[\frac{20\sqrt{3}}{3}\text{ dm}\right]$

57 Un prisma esagonale regolare è tagliato da un piano passante per il centro della base e per due vertici opposti del prisma; tale sezione è un rettangolo la cui area è 1000 cm² e la cui base sta all'altezza come 5 sta a 8. Determina l'area della superficie totale del prisma. $\left[(5\sqrt{3} + 32) \cdot \frac{375}{4}\text{ cm}^2\right]$

58 Un prisma esagonale regolare ha l'altezza di $9\sqrt{3}$ cm. Quanto è lungo lo spigolo di base, sapendo che l'area della superficie totale è $840\sqrt{3}$ cm²? [10 cm]

59 Un prisma retto ha per base un trapezio isoscele in cui la base minore sta alla maggiore come 1 sta a 8. L'altezza del solido è metà della base minore e $\frac{1}{8}$ dell'altezza del trapezio, e l'area della superficie laterale è $2(9 + \sqrt{113})$ cm². Determina la lunghezza della base maggiore del trapezio. [16 cm]

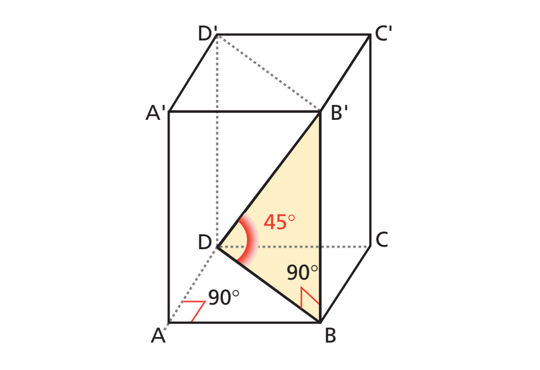
60 Un prisma retto ha per base un triangolo isoscele in cui i lati congruenti stanno alla base come 13 sta a 10. L'altezza del solido è 3 cm e l'area della superficie totale è 696 cm². Determina l'altezza relativa ai lati congruenti del triangolo di base. $\left[\frac{240}{13}\text{ cm}\right]$

Il parallelepipedo rettangolo

61 **ESERCIZIO GUIDA**

Un parallelepipedo rettangolo ha la diagonale che forma un angolo di 45° con la diagonale di base. La base ha un lato lungo 20 dm e l'altro che è i $\frac{2}{3}$ dell'altezza del solido. Determiniamo l'area della superficie totale del parallelepipedo.

Dati $B\widehat{D}B' = 45°$;
$\overline{AB} = 20$;
$\overline{BC} = \frac{2}{3}\overline{BB'}$.



Domanda Area totale?

Scegliamo l'incognita.

Poiché $\overline{BC}$ è i $\frac{2}{3}$ di $\overline{BB'}$, possiamo considerare un sottomultiplo comune, indicandone con la x la misura, tale che:

$$\overline{BC} = 2x$$
$$\overline{BB'} = 3x.$$

Sappiamo inoltre che la diagonale $\overline{DB'}$ forma un angolo di 45° con la diagonale $\overline{DB}$, ne deriva che il rettangolo $DBB'D'$ è un quadrato quindi:

$$\overline{DB} = \overline{BB'} = \overline{B'D'} = \overline{DD'} = 3x.$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ADB:

$$20^2 + 4x^2 = 9x^2 \;\rightarrow\; 5x^2 = 400 \;\rightarrow\; x^2 = 80 \;\rightarrow\; x = \sqrt{80} \;\rightarrow\; x = 4\sqrt{5}.$$

Sostituiamo alla x il valore trovato e otteniamo:

$$\overline{BC} = 8\sqrt{5} \text{ e } \overline{BB'} = 12\sqrt{5}.$$

Calcoliamo la superficie totale del parallelepipedo:

$$A_b = (20 \cdot 8\sqrt{5}) = 160\sqrt{5}$$
$$A_\ell = 2p \cdot h = (40 + 16\sqrt{5}) \cdot 12\sqrt{5} = 480\sqrt{5} + 960$$
$$A_t = 2A_b + A_\ell = 2 \cdot 160\sqrt{5} + 480\sqrt{5} + 960 = 800\sqrt{5} + 960.$$

L'area della superficie totale del parallelepipedo rettangolo è $(800\sqrt{5} + 960)$ dm^2.

62 In un parallelepipedo rettangolo le dimensioni della base sono una i $\frac{3}{4}$ dell'altra, e quest'ultima è i $\frac{2}{3}$ dell'altezza del parallelepipedo. Calcola le lunghezze delle tre dimensioni, sapendo che la superficie totale del parallelepipedo è 1200 dm^2.

$\left[20 \text{ dm}; 10 \text{ dm}; \frac{40}{3} \text{ dm}\right]$

63 La base di un parallelepipedo è un parallelogramma con gli angoli acuti di 30°. La distanza tra due basi del parallelogramma è 10 dm e la sua superficie è 300 dm^2. Determina l'altezza del parallelepipedo, sapendo che la superficie totale è 3600 dm^2. [30 dm]

64 In un parallelepipedo rettangolo i lati di base sono uno i $\frac{3}{4}$ dell'altro e la diagonale di base misura 30 dm. Sapendo che la diagonale del parallelepipedo è 50 dm, calcola la superficie totale del parallelepipedo. [4224 dm^2]

65 La diagonale di un parallelepipedo rettangolo forma un angolo di 60° con lo spigolo laterale del solido ed è lunga 20 dm. Sapendo che un lato di base è $8\sqrt{3}$ dm, calcola la superficie totale del parallelepipedo. [$8 \cdot (35\sqrt{3} + 36)$ dm^2]

66 Un parallelepipedo rettangolo ha la diagonale che forma un angolo di 30° con la diagonale di base. La base ha un lato lungo $10\sqrt{3}$ dm e l'altro è $\frac{3}{2}$ dell'altezza del solido. Determina l'area della superficie totale del parallelepipedo. [$(1200 + 1000\sqrt{3})$ dm^2]

67 Determina la misura della diagonale di un parallelepipedo rettangolo in cui la somma delle tre dimensioni è 15 cm, il rapporto fra le dimensioni di base è $\frac{2}{3}$ e l'area della superficie totale è 148 cm^2. [$\sqrt{77}$ cm]

68 Un parallelepipedo rettangolo ha l'area della superficie laterale di 140 cm^2. Gli spigoli di base hanno rapporto uguale a $\frac{3}{4}$. Sapendo che la diagonale del parallelepipedo è $5\sqrt{5}$ cm determina l'area della superficie totale del solido. [164 cm^2 oppure 236 cm^2]

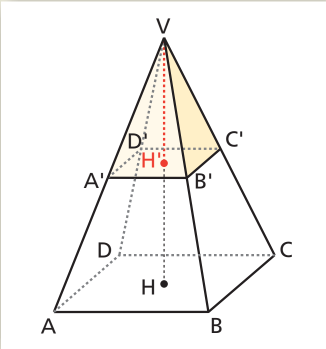
La piramide retta

69 ESERCIZIO GUIDA

Una piramide retta a base quadrata ha il perimetro di base di $192\sqrt{2}$ cm e l'altezza di $32\sqrt{2}$ cm. Viene tagliata da un piano parallelo al piano di base in modo che la somma delle aree laterali della piramide stessa e della piramide staccata risulti 7860 cm^2. Calcoliamo a quale distanza dal vertice la piramide viene tagliata.

Dati $2p(ABCD) = 192\sqrt{2}$;
$\overline{VH} = 32\sqrt{2}$;
$A_\ell + A'_\ell = 7860$.

Domanda $\overline{VH'} = ?$



Calcoliamo l'area A_ℓ della superficie laterale della piramide $VABCD$. Poiché $2p(ABCD) = 192\sqrt{2}$, possiamo ricavare facilmente la misura del lato AB:

$$\overline{AB} = \frac{2p}{4}$$

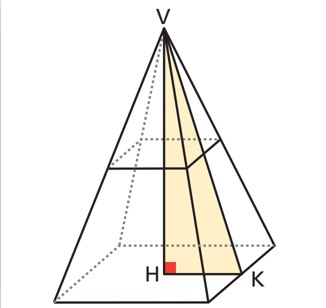
$$\overline{AB} = \frac{192\sqrt{2}}{4} = 48\sqrt{2}.$$

Calcoliamo l'apotema della piramide applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo VHK:

$$\overline{VK} = \sqrt{\overline{VH}^2 + \overline{HK}^2}$$

$$\overline{VK} = \sqrt{(32\sqrt{2})^2 + (24\sqrt{2})^2} =$$

$$= \sqrt{2048 + 1152} = \sqrt{3200} = 40\sqrt{2}.$$



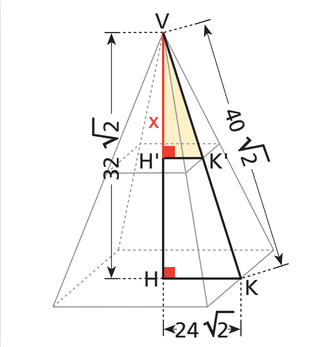
La formula dell'area della superficie laterale della piramide è $A_\ell = p \cdot a$.

Poiché la misura del semiperimetro p vale $\frac{192\sqrt{2}}{2}$, ossia $p = 96\sqrt{2}$, si ha:

$$A_\ell = 96\sqrt{2} \cdot 40\sqrt{2} = 7680.$$

Calcoliamo l'area A'_ℓ della superficie laterale della piramide $VA'B'C'D'$ in funzione della misura della distanza dal vertice.

Indichiamo con x la misura dell'altezza della piramide $VA'B'C'D'$ e calcoliamo $\overline{H'K'}$ e $\overline{VK'}$ in funzione di x.



I triangoli VHK e $VH'K'$ sono simili, perché gli angoli in H e in H' sono retti e l'angolo $\widehat{V}$ è in comune.

Poiché $\frac{\overline{HK}}{\overline{VH}} = \frac{24\sqrt{2}}{32\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$, anche $\frac{\overline{H'K'}}{\overline{VH'}} = \frac{3}{4}$,

ossia:

$$\overline{H'K'} = \frac{3}{4}\overline{VH'} \text{ e quindi } \overline{H'K'} = \frac{3}{4}x.$$

Poiché $\frac{\overline{VK}}{\overline{VH}} = \frac{40\sqrt{2}}{32\sqrt{2}} = \frac{5}{4}$, anche $\frac{\overline{VK'}}{\overline{VH'}} = \frac{5}{4}$,

ossia:

$$\overline{VK'} = \frac{5}{4}\overline{VH'} \text{ e quindi } \overline{VK'} = \frac{5}{4}x.$$

La misura del perimetro di base di $A'B'C'D'$ è:

$$4 \cdot \left(2 \cdot \frac{3}{4}x\right) = 6x.$$

La misura dell'area della superficie laterale, in funzione di x, è:

$$A'_\ell = \left(\frac{1}{2} \cdot 6x\right) \cdot \frac{5}{4}x = \frac{15}{4}x^2.$$

Poiché $A_\ell + A'_\ell = 7860$, sostituendo otteniamo:

$$7680 + \frac{15}{4}x^2 = 7860$$

$$\frac{15}{4}x^2 = 180$$

$$x^2 = 180 \cdot \frac{4}{15} = 12 \cdot 4$$

$$x = \pm\sqrt{12 \cdot 4} = \pm 4\sqrt{3}$$

$x = -4\sqrt{3}$ non accettabile, perché negativo;

$$x = 4\sqrt{3}.$$

Il piano taglia la piramide a una distanza di $4\sqrt{3}$ cm dal vertice.

70 Una piramide a base quadrata ha l'altezza lunga $15\sqrt{3}$ cm, che forma un angolo di 30° con l'apotema di ogni singola faccia. Determina la superficie totale del solido. [2700 cm^2]

71 Una piramide retta ha per base un rombo circoscritto a una circonferenza il cui raggio è lungo 15 cm. Sapendo che il lato del rombo è lungo 40 cm e che l'altezza della piramide è lunga 20 cm, calcola la superficie totale del solido. A quale distanza dal vertice si deve trovare il piano che seca la piramide secondo un rombo di area 48 cm^2? [$A_t = 3200$ cm^2; $h = 4$ cm]

72 In una piramide retta la base è un trapezio isoscele che ha gli angoli alla base di 60°, mentre i lati obliqui sono il doppio della base minore e lunghi 16 cm. Calcola la superficie totale della piramide, sapendo che la sua altezza è lunga 10 cm. [$64 \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{37})$ cm^2]

73 Una piramide regolare a base esagonale, il cui lato di base è lungo $10a$ cm, ha la superficie totale di $1050 \cdot a^2\sqrt{3}$ cm^2. Determina l'altezza della piramide. [$5\sqrt{105}\,a$ cm]

74 Una piramide regolare a base esagonale ha l'apotema di 30 dm e l'area della superficie totale di $1728\sqrt{3}$ dm^2. Calcola l'altezza della piramide. [24 dm]

75 **TEST** Consyder a pyramid of unknown height and a 12×12 meter square base. If the height is increased by 2 meters, the lateral surface area is increased by 24 square meters. How high is the original pyramid? (The lateral surface does not include the pyramid base.)

A 2.5 meters. B 4.5 meters. C $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ meters. D 5.625 meters. E None of these.

(USA *North Carolina State High School, NCSHS, Mathematics Contest, Finals,* 2004)

76 Una piramide regolare a base quadrata ha l'area della superficie totale di 1440 cm^2 e l'altezza è $\frac{6}{5}$ dello spigolo di base. Stabilisci a quale distanza dal vertice si deve condurre un piano secante parallelo alla base, affinché il perimetro del poligono intersezione sia 20 cm. Determina inoltre l'area della superficie totale del tronco di piramide ottenuto. [6 cm; 1400 cm^2]

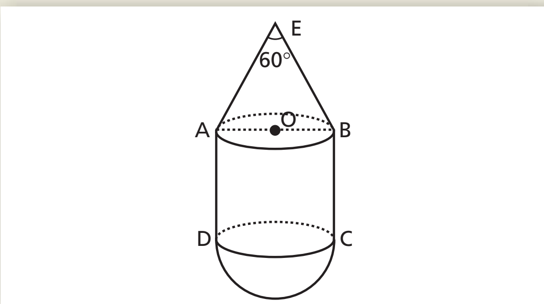
77 In un tronco di piramide regolare a base quadrata la somma di uno spigolo della base minore con uno della base maggiore è 20 cm e la superficie laterale è equivalente al quadruplo della differenza fra le aree delle due basi. Sapendo che l'apotema del tronco di piramide è 8 cm, calcola l'area della superficie totale. [528 cm^2]

78 In una piramide quadrangolare regolare la superficie laterale è equivalente ai $\frac{2}{3}$ di quella totale e la diagonale di base è $2\sqrt{2}$ cm. Determina l'area della sezione ottenuta tagliando la piramide con un piano parallelo alla base, che divide l'altezza in due parti tali che quella contenente il vertice è $\frac{2}{3}$ dell'altra. $\left[\frac{16}{25}\text{ cm}^2\right]$

Il cilindro, il cono, la sfera

79 **ESERCIZIO GUIDA**

Un cilindro, la cui base ha raggio 6*a*, ha una superficie totale di 120 πa^2. Sulle due basi sono appoggiati rispettivamente un cono equilatero e una semisfera, le cui basi coincidono con quelle del cilindro. Calcoliamo l'area della superficie totale del solido.



Dati $\overline{OB} = 6a$;
$A_{t\ cilindro} = 120\pi \cdot a^2$;
$\overline{AB} = \overline{BE}$.

Domanda Superficie totale del solido?

Per calcolare l'area della superficie totale del solido dobbiamo conoscere la superficie laterale del cilindro e del cono e la superficie della semisfera.

- Calcoliamo l'area della superficie della base del cilindro:
$$A_b = \pi \cdot r^2 = 36\pi \cdot a^2 \rightarrow 2A_b = 72\pi \cdot a^2.$$
- Calcoliamo l'area della superficie laterale del cilindro:
$$A_{lat.\ cilindro} = 120\pi \cdot a^2 - 72\pi \cdot a^2 = 48\pi \cdot a^2.$$
- Calcoliamo l'area della superficie laterale del cono che, essendo equilatero, ha l'apotema uguale al diametro delle basi: $\overline{AB} = \overline{EB} = 12a$.
$$A_{lat.\ cono} = 2\pi \cdot r \cdot apotema \cdot \frac{1}{2} = \pi \cdot 6a \cdot 12a = 72\pi \cdot a^2.$$
- Calcoliamo la superficie della semisfera:
$$A_{semisfera} = 2\pi \cdot r^2 = 2\pi \cdot 36a^2 = 72\pi \cdot a^2.$$
- La superficie totale è:
$$A_t = A_{lat.\ cilindro} + A_{lat.\ cono} + A_{semisfera} =$$
$$= 48\pi \cdot a^2 + 72\pi \cdot a^2 + 72\pi \cdot a^2 = 192\pi \cdot a^2.$$

La superficie totale del solido è $192\pi \cdot a^2$.

80 L'altezza di un cilindro è $\frac{23}{8}$ del diametro di base e la superficie totale è equivalente alla superficie di una sfera di raggio 6 cm. Determina il raggio e l'altezza del cilindro. $\left[\frac{4}{3}\sqrt{6}\text{ cm}; \frac{23}{3}\sqrt{6}\text{ cm}\right]$

81 Un cubo ha la superficie totale di 216 cm^2. Determina la superficie della sfera inscritta e quella della sfera circoscritta al cubo. [36π cm^2; 108π cm^2]

82 Il raggio e l'altezza di un cono sono rispettivamente 10 cm e 24 cm. Determina di quanto deve diminuire il raggio affinché l'area della superficie totale diventi $\frac{28}{45}$ di quella data. [3 cm]

83 Un fuso sferico di angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ è equivalente a una calotta appartenente alla stessa sfera e con raggio di base $r = \sqrt{7}$ cm. Calcola il raggio R della sfera sapendo che è maggiore dell'altezza della calotta. [$R = 4$ cm]

84 Una calotta sferica ha raggio di base $r = 8$ cm e altezza $h = 4$ cm. Calcola l'area. [80π cm^2]

85 Una sfera, la cui superficie è 100π cm^2, è tagliata da un piano distante dal centro i $\frac{3}{5}$ del suo raggio. Determina il rapporto tra le aree laterali dei due coni, aventi come base comune il cerchio sezione e per vertici gli estremi del diametro perpendicolare al piano secante. [2]

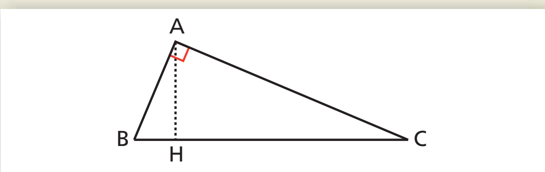
86 In un cono la superficie laterale è equivalente a $\frac{13}{18}$ della superficie totale e il raggio di base è 3 cm. Sia P un punto dell'asse del cono; a che distanza dal vertice del cono deve essere preso P in modo che un altro cono di vertice P e base coincidente con quella del cono dato abbia superficie totale equivalente a $\frac{20}{27}$ della superficie totale del cono dato? $\left[\frac{16}{5}\text{ cm}\right]$

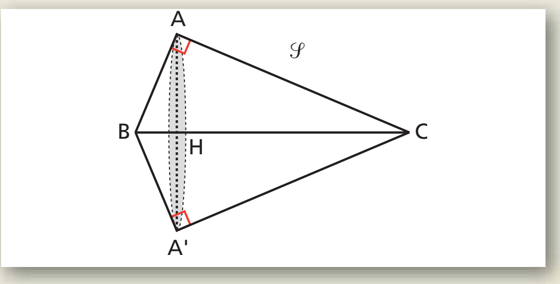
87 In un tronco di cono l'apotema è la metà del raggio della base maggiore ed è i $\frac{5}{6}$ del raggio della base minore. La somma del raggio minore e dei $\frac{4}{5}$ dell'apotema è 20 cm. Determina l'area della superficie totale del cono che ha originato il tronco di cono. [900π cm^2]

Altri solidi di rotazione

88 **ESERCIZIO GUIDA**

Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi rispettivamente 12 cm e 16 cm. Facendo ruotare di 360° il triangolo attorno all'ipotenusa otteniamo un solido $\mathcal{S}$. Calcoliamo l'area della superficie totale di tale solido.





Dati $\overline{AB} = 12$; $\overline{AC} = 16$. **Domanda** $A_t(\mathcal{S})$?

Dalla rotazione del triangolo ABC intorno all'ipotenusa si ottiene un solido formato da due coni che hanno la stessa base di raggio AH.

Calcoliamo gli elementi del triangolo ABC.

Applichiamo il teorema di Pitagora:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20.$$

Calcoliamo $\overline{AH}$, sapendo che l'altezza di un triangolo si calcola dividendo la doppia area del triangolo per la sua base:

$$\overline{AH} = \frac{2A_{ABC}}{\overline{BC}} = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9{,}6.$$

- Calcoliamo la superficie laterale del cono $AA'B$:
  $A_\ell = \pi \cdot r \cdot a = \pi \cdot 9{,}6 \cdot 12 \simeq 361{,}91.$
- Calcoliamo la superficie laterale del cono $AA'C$:
  $A'_\ell = \pi \cdot r \cdot a = \pi \cdot 9{,}6 \cdot 16 \simeq 482{,}55.$
- Calcoliamo la superficie totale del solido $\mathcal{S}$:
  $A_t(\mathcal{S}) \simeq 361{,}91 + 482{,}55 = 844{,}46.$

La superficie totale del solido è 844,46 cm^2.

89 In un triangolo rettangolo il rapporto fra l'ipotenusa e un cateto è $\frac{5}{3}$ e l'area della superficie del solido ottenuto da una rotazione completa del triangolo attorno all'ipotenusa è 420π m^2. Determina il perimetro del triangolo. [60 m]

90 Il trapezio *ABCD* ha la base maggiore *AB* lunga 50 cm e gli angoli adiacenti alla base maggiore sono di 120° e di 30°. La base minore è congruente al minore dei lati obliqui. Calcola l'area della superficie del solido ottenuto con la rotazione di 360° del trapezio attorno al lato obliquo maggiore. [2500π cm^2]

91 In un trapezio rettangolo il lato obliquo è i $\frac{13}{12}$ dell'altezza e la base minore è lunga 10 cm. Ruotando di 360° il trapezio attorno alla base maggiore si ottiene un solido la cui area della superficie totale è 540π cm^2. Determina la lunghezza della base maggiore del trapezio. [15 cm]

92 Un triangolo rettangolo è simile a un triangolo i cui cateti sono lunghi 4 cm e 3 cm. Sapendo che l'area della superficie del solido ottenuto da una rotazione completa del triangolo attorno all'ipotenusa è $\frac{252}{5}\pi$ cm^2, calcola l'area della superficie del triangolo. [18 cm^2]

6. L'ESTENSIONE E L'EQUIVALENZA DEI SOLIDI

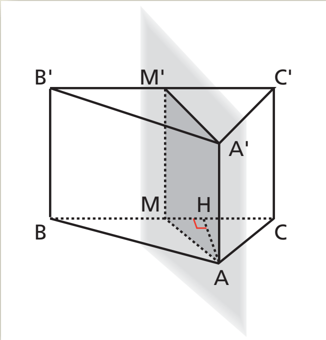
▶ Teoria a pag. 1017

93 **ESERCIZIO GUIDA**

Un prisma retto a base triangolare è sezionato da un piano parallelo agli spigoli laterali e passante per una mediana delle basi. Dimostriamo che i due prismi che si vengono a formare sono equivalenti.

Ipotesi **1.** $BM \cong MC$;
2. il prisma è retto.

Tesi Il prisma $ABMA'B'M'$ è equivalente al prisma $AMCA'M'C'$.



Consideriamo il triangolo *ABC*, base del prisma dato; esso è diviso dalla mediana *AM* in due triangoli equivalenti, poiché hanno basi congruenti ($BM \cong MC$) e uguale altezza *AH*, rappresentata dalla distanza del vertice *A* dalla retta di base *BC*.

Il prisma $ABMA'B'M'$ è equivalente al prisma $AMCA'M'C'$ poiché due prismi sono equivalenti se hanno basi equivalenti e altezze congruenti.

94 Dimostra che un cubo di spigolo *a* è equivalente a un parallelepipedo che ha per base un quadrato di lato metà dello spigolo del cubo e per altezza quattro volte lo spigolo del cubo stesso.

95 Un prisma retto ha per base un trapezio isoscele la cui superficie è 100 dm^2. Calcola quanto deve essere estesa la base di una piramide avente altezza uguale a quella del prisma per essere equivalente al prisma dato. [300 dm^2]

96 Un cono e una piramide a base quadrata, che hanno la stessa altezza, sono equivalenti. Se vengono sezionate con un piano parallelo alle basi a metà della loro altezza, le superfici di ogni sezione sono 200 m^2. Calcola l'area delle superfici delle basi. [800 m^2]

97 Dimostra che un parallelepipedo che viene tagliato da due piani paralleli agli spigoli secondo le diagonali delle basi, risulta diviso in quattro prismi a base triangolare equivalenti a due a due. $\left[\frac{3}{2}\right]$

98 Una piramide a base quadrata di lato l è equivalente a una piramide di uguale altezza e che ha per base un triangolo equilatero. Calcola il lato del triangolo. $\left[\frac{2l}{\sqrt[4]{3}}\right]$

99 Dimostra che un cubo di spigolo l è equivalente a un prisma retto di altezza l che ha per base un triangolo isoscele di base $2l$ e altezza l.

100 È applicabile il principio di Cavalieri a solidi che hanno altezze diverse tra loro? Perché?

101 Dimostra che il solido formato da un cilindro equilatero, il cui raggio di base è r e sulle cui basi sono appoggiate due semisfere anch'esse di raggio r, è equivalente a due sfere di raggio r e due coni di raggio di base e altezza uguali a r.

102 Dimostra che un solido formato da un cubo di spigolo l e sormontato da una piramide retta con base quadrata coincidente con una faccia del cubo e con altezza l è equivalente a un parallelepipedo rettangolo di base uguale a quella del cubo e altezza pari a $\frac{4}{3}\,l$.

103 Una piramide e un prisma retto hanno basi equivalenti e il volume della piramide è la metà del volume del prisma. Calcola il rapporto fra l'altezza della piramide e l'altezza del prisma.

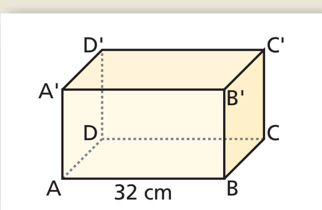
7. I VOLUMI DEI SOLIDI NOTEVOLI

▶ Teoria a pag. 1025

Il volume del parallelepipedo rettangolo

104 **ESERCIZIO GUIDA**

Un parallelepipedo rettangolo ha l'area laterale di 8400 cm^2. La base ha un lato di 32 cm e l'altro è $\frac{8}{25}$ dell'altezza del solido. Calcoliamo il volume e la lunghezza della diagonale.

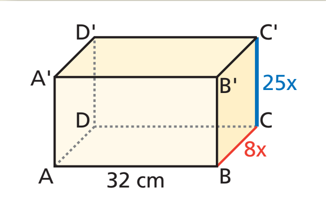


Dati $A_\ell = 8400$; $\overline{AB} = 32$; $\overline{BC} = \frac{8}{25}\,\overline{CC'}$.

Domande
1. Volume?
2. Diagonale?

Scegliamo l'incognita.

Poiché BC e l'altezza sono una gli $\frac{8}{25}$ dell'altra, possiamo considerare un segmento sottomultiplo comune e indicare con x la sua misura. In tal modo risulta: $\overline{BC} = 8x$ e $\overline{CC'} = 25x$.



Calcoliamo il volume del solido.

Poiché $A_\ell = 8400$, determiniamo la misura A_ℓ in funzione di x e poi uguagliamo a 8400:

$$A_\ell = 2 \cdot (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{CC'}$$
$$A_\ell = 2 \cdot (32 + 8x) \cdot 25x = 1600x + 400x^2$$
$$1600x + 400x^2 = 8400.$$

Dividiamo i due membri per 100:

$$16x + 4x^2 = 84.$$

Dividiamo i due membri per 4:

$$4x + x^2 = 21$$
$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

$x = -2 \pm \sqrt{4+21} =$ -7 non accettabile (x è una misura positiva); 3

Pertanto la misura cercata è $x = 3$.

Sostituiamo 3 e troviamo le misure:

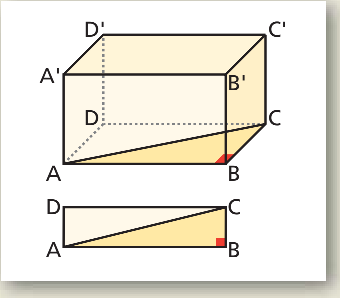
$$\overline{BC} = 8x = 8 \cdot 3 = 24;$$
$$\overline{CC'} = 25x = 25 \cdot 3 = 75.$$

Poiché la formula per calcolare il volume è $V = A_b \cdot h$, la misura del volume è:

$$V = (32 \cdot 24) \cdot 75 = 57\,600 \text{ cm}^3.$$

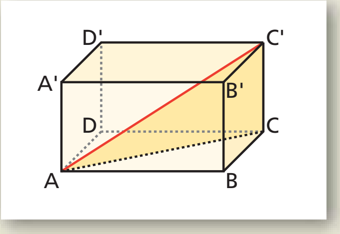
Calcoliamo la diagonale del parallelepipedo.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC:



$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}$$
$$\overline{AC} = \sqrt{32^2 + 24^2} = \sqrt{1024 + 576} =$$
$$= \sqrt{1600} = 40.$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ACC':



$$\overline{AC'} = \sqrt{\overline{CC'}^2 + \overline{AC}^2}$$
$$\overline{AC'} = \sqrt{75^2 + 40^2} = \sqrt{5625 + 1600} =$$
$$= \sqrt{7225} = 85.$$

Osservazione. Conoscendo le tre dimensioni a, b e c del parallelepipedo, è possibile trovare la diagonale più velocemente utilizzando la formula $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$:

$$\overline{AC'} = \sqrt{32^2 + 24^2 + 75^2} = 85.$$

Il volume del parallelepipedo dato è di $57\,600 \text{ cm}^3$ e la diagonale di 85 cm.

105 Un parallelepipedo rettangolo ha la diagonale inclinata di 60° rispetto al piano di base e lunga 40 dm. Sapendo che i lati di base sono l'uno i $\frac{3}{4}$ dell'altro, calcola il volume del solido. [$3840\sqrt{3}$ dm^3]

106 Un parallelepipedo rettangolo ha gli spigoli di base il cui rapporto è $\frac{3}{4}$. Sapendo che la diagonale di base è 15 dm e che la diagonale del solido è 17 dm, determina il volume del solido. [864 dm^3]

107 Il volume di un cubo (in pollici cubi) più tre volte la lunghezza totale dei suoi spigoli (in pollici) è uguale al doppio della sua superficie (in pollici quadrati). Quanti pollici misura la sua diagonale?

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*, 2005)

[$6\sqrt{3}$]

108 Un parallelepipedo rettangolo e un cubo sono equivalenti. Il cubo ha superficie totale pari a $384a^2$, mentre il parallelepipedo ha l'altezza $4a$. Sapendo che la superficie totale del parallelepipedo è $448a^2$, calcola gli spigoli dei due solidi. [$8a$; $16a$; $8a$]

109 Un parallelepipedo rettangolo ha le dimensioni di 3 cm, 4 cm e 12 cm. Determina il volume del cubo che ha superficie totale equivalente alla superficie totale del parallelepipedo. Di quanto deve aumentare la misura dello spigolo minore del parallelepipedo affinché l'area della sua superficie totale raddoppi? [$128\sqrt{2}$ cm^3; 6 cm]

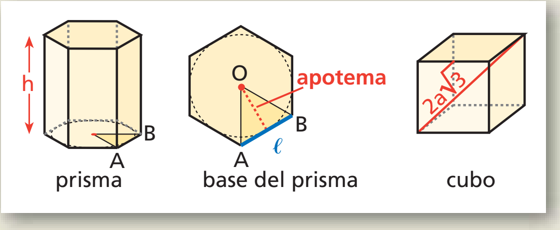
110 Un parallelepipedo rettangolo ha volume uguale al volume di un cubo la cui diagonale è $6\sqrt{3}$ cm e la sua altezza è 8 cm. Sapendo che uno spigolo di base è $\frac{1}{3}$ dell'altro, determina l'area della superficie totale del parallelepipedo. [246 cm^2]

111 In un parallelepipedo rettangolo, la diagonale di base forma con i lati angoli di 30° e 60°. Sapendo che l'altezza del solido è metà della diagonale di base e che l'area della superficie laterale è $32(1+\sqrt{3})$ cm^2, determina il volume del parallelepipedo. [$64\sqrt{3}$ cm^3]

Il volume del prisma

112 **ESERCIZIO GUIDA**

In un prisma regolare a base esagonale il rapporto fra l'altezza e il lato di base è $2\sqrt{3}$ e l'area laterale è $192a^2\sqrt{3}$. Calcoliamo il rapporto fra il volume del prisma e il volume di un cubo di diagonale $2a\sqrt{3}$.



Dati $\frac{h}{l} = 2\sqrt{3}$;

$A_\ell = 192a^2\sqrt{3}$;

$d = 2a\sqrt{3}$.

Domanda $\frac{V(\text{prisma})}{V(\text{cubo})}$?

Calcoliamo il volume del prisma.
Scegliamo l'incognita.

Poiché $\frac{h}{l} = 2\sqrt{3}$, risulta $h = 2\sqrt{3}\cdot l$.

Pertanto, se poniamo $l = x$, abbiamo $h = 2\sqrt{3}\cdot x$.

Poiché $A_\ell = 192a^2\sqrt{3}$, determiniamo A_ℓ in funzione di x e poi uguagliamo l'espressione ottenuta a $192a^2\sqrt{3}$:

$$A_\ell = 2p\cdot h \rightarrow A_\ell = 6x\cdot 2\sqrt{3}\,x = 12\sqrt{3}\,x^2$$

$$12\sqrt{3}\,x^2 = 192a^2\sqrt{3} \rightarrow 12x^2 = 192a^2$$

$$x^2 = \frac{192a^2}{12}$$

$$x^2 = 16a^2$$

$$x = \pm 4a = \begin{cases} -4a & \text{non accettabile, perché negativa} \\ 4a & \end{cases}$$

Pertanto, $x = 4a$.

Sostituiamo a x il valore $4a$ e calcoliamo le misure del prisma:

$l = 4a$

$h = 2\sqrt{3}\cdot 4a = 8a\sqrt{3}$.

Poiché la formula per calcolare il volume del prisma è $V = A_b\cdot h$, dobbiamo calcolare l'area di base.

Per farlo, usiamo la formula $A_b = p\cdot apotema$.

Determiniamo l'apotema dell'esagono applicando la formula dell'altezza del triangolo equilatero OAB:

$$apotema = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 4a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}.$$

Poiché il perimetro di base è $2p = 24a$, e quindi $p = 12a$, risulta:

$$A_b = 12a\cdot 2a\sqrt{3} = 24a^2\sqrt{3}.$$

Il volume del prisma è:

$$V(\text{prisma}) = 24a^2\sqrt{3} \cdot 8a\sqrt{3} = 576a^3.$$

Calcoliamo il volume del cubo.
In un cubo di lato y la diagonale è $d = y \cdot \sqrt{3}$, pertanto, invertendo la relazione, otteniamo $y = \frac{d}{\sqrt{3}}$.
Poiché $d = 2a\sqrt{3}$, risulta:

$$y = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2a.$$

Il volume del cubo è:

$$V(\text{cubo}) = (2a)^3 = 8a^3.$$

Calcoliamo il rapporto fra i due volumi:

$$\frac{V(\text{prisma})}{V(\text{cubo})} = \frac{576a^3}{8a^3} = 72.$$

Il rapporto fra i volumi è 72.

113 Un parallelepipedo retto ha per base un rombo le cui diagonali stanno fra loro come 8 sta a 15. Sapendo che l'altezza del parallelepipedo è 10 cm e che l'area totale è 3280 cm^2, determina il volume del solido. [9600 cm^3]

114 Un parallelepipedo retto ha per base un rombo le cui diagonali hanno rapporto uguale a $\frac{3}{4}$. L'altezza è uguale alla semisomma delle diagonali di base e il volume è 168 dm^3. Calcola l'area della superficie totale del parallelepipedo. [188 dm^2]

115 Un parallelepipedo retto ha per base un rombo in cui un angolo è di 60° e il cui lato è di 3 cm. Sapendo che l'altezza del solido è uguale alla diagonale maggiore del rombo, determina il volume del parallelepipedo e le sue diagonali. $\left[\frac{81}{2}\text{ cm}^3; 3\sqrt{6}\text{ cm}; 6\text{ cm}\right]$

116 Il volume di un prisma triangolare regolare è $108\sqrt{3}$ cm^3. L'altezza del prisma è doppia dello spigolo di base. Determina l'area della superficie laterale del prisma. [216 cm^2]

117 L'altezza di un prisma triangolare regolare è i $\frac{3}{4}$ dello spigolo di base. Si sa inoltre che l'area della superficie totale del prisma è $(144 + 32\sqrt{3})$ cm^2.
Determina il volume del solido. [$96\sqrt{3}$ cm^3]

118 Un prisma triangolare regolare $ABCA'B'C'$ ha lo spigolo AB della base ABC di 36 cm. Siano AD e BE le altezze del triangolo ABC relative ai lati BC e CA. Calcola il rapporto fra i volumi dei solidi in cui resta diviso il prisma mandando per i punti D ed E un piano perpendicolare al piano di base. $\left[\frac{1}{3}\text{ oppure } 3\right]$

119  A piece of wax in the shape of a rectangular block $(52 \times 45 \times 12)$ cm^3 was melted and reshaped as two right prisms, each of base area 445 cm^2. One of the prisms was 34 cm high. Find the height of the other prism to one place of decimals.

(IR *Leaving Certificate Examination, Ordinary Alternative Level*, 1995)

[29.1 cm]

120 In un prisma triangolare regolare il volume è $350\sqrt{3}$ cm^3 e il rapporto fra altezza e spigolo di base è $\frac{7}{5}$. Determina l'area della superficie totale del prisma e quella della sua sezione con un piano che contiene uno degli spigoli laterali ed è perpendicolare alla faccia laterale opposta allo spigolo stesso. [$10(5\sqrt{3} + 42)$ cm^2; $70\sqrt{3}$ cm^2]

121 È dato il prisma esagonale regolare $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, dove AA', BB' ecc. sono gli spigoli laterali. La diagonale AD' è 10 cm e l'area della superficie laterale è di 144 cm^2. Determina il volume del solido.
$[144\sqrt{3}\ \text{cm}^3 \text{ oppure } 108\sqrt{3}\ \text{cm}^3]$

122 Un prisma triangolare regolare ha l'altezza che è $\frac{5}{2}$ del raggio della circonferenza inscritta nella base. Sapendo che l'area della superficie totale è $336\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, calcola il volume del prisma. $[480\sqrt{3}\ \text{cm}^3]$

123 Un prisma pentagonale regolare ha l'area della superficie totale di 204 cm^2. La somma delle basi è $\frac{5}{12}$ della superficie laterale e l'altezza è uguale al perimetro di una base. Determina il volume del prisma e lo spigolo di base.
$\left[360\ \text{cm}^3; \frac{12}{5}\ \text{cm}\right]$

124 Un prisma triangolare regolare ha il raggio della circonferenza circoscritta alla base che è $\frac{8}{7}$ dell'altezza del prisma stesso. Sapendo che il volume del prisma è $9072\sqrt{3}\ \text{m}^3$, calcola l'area della superficie laterale del prisma. $[1512\sqrt{3}\ \text{m}^2]$

125 Un prisma retto ha per base un triangolo rettangolo ABC nel quale l'altezza relativa all'ipotenusa BC è 12 cm e la distanza del piede di questa dal cateto AC è $\frac{48}{5}$ cm. Sapendo che l'altezza del prisma è 10 cm, calcola il suo volume. $[1500\ \text{cm}^3]$

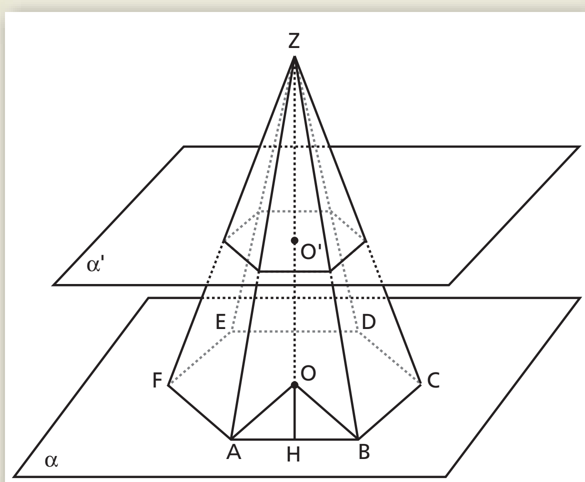
126 Un prisma retto ha per base un trapezio isoscele. Tale trapezio ha il lato obliquo e la base minore che sono rispettivamente $\frac{17}{15}$ e $\frac{1}{3}$ dell'altezza. Sapendo che l'altezza del prisma è 3 cm e che l'area della superficie totale è 1920 cm^2, calcola il volume del solido. $[2340\ \text{cm}^3]$

127 Un prisma retto ha per base un trapezio rettangolo. In tale trapezio la diagonale minore è perpendicolare al lato obliquo ed è congruente ai $\frac{3}{4}$ di questo. Si sa inoltre che la somma di $\frac{1}{4}$ del lato obliquo con $\frac{2}{3}$ della diagonale minore è 6 cm. Sapendo che l'altezza del prisma sta a quella del trapezio come 25 sta a 24, calcola il volume del solido.
$\left[\frac{816}{5}\ \text{cm}^3\right]$

Il volume della piramide

128 **ESERCIZIO GUIDA**

Una piramide regolare a base esagonale ha il perimetro di base di 72 dm e l'altezza di 10 dm.
Viene tagliata da un piano parallelo alla base in modo che il volume della piramide staccata sia $\frac{1}{4}$ del volume della piramide data. Calcoliamo a quale distanza dal vertice la piramide viene tagliata.



Dati $2p(ABCDEF) = 72$;
$\overline{OZ} = 10$;
$\alpha \,//\, \alpha'$;
$V' = \frac{1}{4}V$.

Domanda
$\overline{O'Z}$?

Calcoliamo il lato dell'esagono di base:

$$\overline{AB} = \frac{72}{6} = 12.$$

Calcoliamo $\overline{OH}$, essendo OH l'altezza del triangolo equilatero OAB. Ricordiamo che il triangolo OAH è rettangolo e ha gli angoli acuti di 30° e 60°:

$$\overline{OH} = \frac{l}{2}\sqrt{3} = \frac{12}{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

Calcoliamo la superficie della base della piramide maggiore:

$$A_b = \frac{2p \cdot \overline{OH}}{2} = \frac{72 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 216\sqrt{3}.$$

Calcoliamo il volume V della piramide maggiore:

$$V = \frac{1}{3}A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 216\sqrt{3} \cdot 10 = 720\sqrt{3}.$$

Calcoliamo il volume V' della piramide minore:

$$V' = \frac{720\sqrt{3}}{4} = 180\sqrt{3}.$$

Chiamiamo $x = \overline{O'Z}$ e ricordiamo il teorema secondo il quale se si taglia una piramide con un piano parallelo alla base, la base e la sezione sono poligoni simili le cui aree sono proporzionali ai quadrati delle loro distanze dal vertice:

$$A_b : A'_b = 10^2 : x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow A'_b = \frac{216 \cdot \sqrt{3}\, x^2}{100} = 2,16 \cdot \sqrt{3} \cdot x^2.$$

Essendo:

$$V' = \frac{1}{3}A'_b \cdot \overline{O'Z}$$

scriviamo l'equazione:

$$\frac{1}{\cancel{3}_{\,1}} \cdot \cancelto{0,72}{2,16} \cdot \cancel{\sqrt{3}} \cdot x^2 \cdot x = 180 \cdot \cancel{\sqrt{3}}$$

da cui otteniamo:

$$x^3 = \frac{180}{0,72} = 250 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{250} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x \simeq 6,30.$$

Il piano parallelo alla base taglia la piramide a una distanza di 6,30 dm dal vertice.

129 Un prisma ha la superficie della base di 72 dm^2 e l'altezza di 10 dm. Una piramide di base equivalente e di uguale altezza viene tagliata da un piano parallelo alla base a una distanza di 4 dm dal vertice. Calcola il volume della piramide staccata. [15,36 dm^3]

130 Una piramide retta a base quadrata ha lo spigolo che è lungo $12a$ ed è inclinato di 60° rispetto alla base. Calcola il volume della piramide. [$144a^3\sqrt{3}$]

131 Il volume di una piramide regolare a base quadrata è 256 cm^3. Determina la lunghezza dello spigolo di base della piramide e dello spigolo laterale, sapendo che il raggio del cerchio circoscritto al quadrato di base è lungo $4\sqrt{2}$ cm. [8 cm; $4\sqrt{11}$ cm]

132 In una piramide regolare a base quadrata la differenza fra l'area della superficie laterale e quella di base è 640 cm^2; l'altezza della piramide è $\frac{6}{5}$ del lato di base. Calcola l'apotema e il volume della piramide. [26 cm; 3200 cm^3]

133 In un tronco di piramide regolare a basi quadrate, la somma dei perimetri delle basi è 64 m e la somma delle loro aree è 160 m^2. Il volume del solido è $\frac{1664}{3}\sqrt{7}$ m^3. Calcola l'area della superficie totale. [$160 + 128\sqrt{29}$ m^2]

134 Una piramide triangolare regolare ha per facce laterali tre triangoli rettangoli le cui ipotenuse sono lunghe $3\sqrt{2}$ cm. Un piano parallelo alla base taglia la piramide secondo una superficie di area $\frac{9}{8} \cdot \sqrt{3}$ cm^2. Calcola il volume della piramide data e della piramide che il piano predetto stacca da quella data.

$\left[\frac{9}{2} \text{ cm}^3; \frac{9}{16} \text{ cm}^3\right]$

135 Una piramide regolare a base quadrata ha l'area della superficie totale di 384 cm^2 e l'altezza è $\frac{4}{5}$ dell'apotema. A quale distanza dal vertice si deve condurre un piano parallelo alla base affinché il rapporto fra il volume della piramide che quel piano stacca dalla piramide data e il volume del tronco rimanente sia $\frac{1}{63}$?

[2 cm]

136 Una piramide quadrangolare regolare ha gli spigoli inclinati di 30° sul piano della base; la diagonale della base è $6\sqrt{3}$ cm. Calcola l'area della superficie totale e il volume della piramide.

$[18(3 + \sqrt{15}) \text{ cm}^2; 54 \text{ cm}^3]$

Il volume di cilindro, cono e sfera

137 **ESERCIZIO GUIDA**

Un cono e un cilindro hanno altezza congruente e pari al doppio dei loro raggi di base. La somma delle loro aree totali è $12\pi(7 + \sqrt{5})$ cm^2 e il rapporto fra la somma delle loro aree laterali e l'area di una superficie sferica è $\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{4}\right)$. Calcoliamo il raggio della sfera. Verifichiamo poi che il volume della sfera è uguale alla differenza fra il volume del cilindro e quello del cono.

Dati

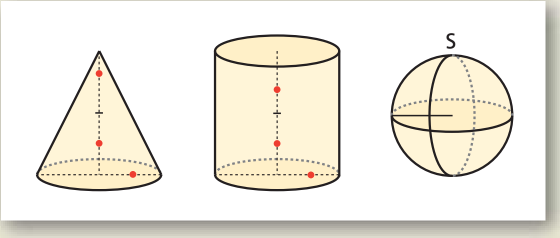
$h(\text{cono}) = h(\text{cilindro}) = 2 \cdot r(\text{cono}) = 2 \cdot r(\text{cilindro})$;

$A_t + A'_t = 12\pi(7 + \sqrt{5})$;

$\frac{(A_\ell + A'_\ell)}{S} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{4}$.

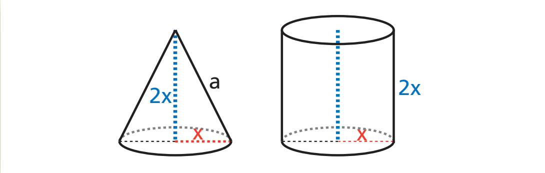
Domande

1. raggio (sfera)?
2. $V(\text{sfera}) = V(\text{cilindro}) - V(\text{cono})$?



1. Calcoliamo il raggio della sfera.

Calcoliamo prima il raggio di base. Indichiamo con x la misura del raggio di base del cilindro e del cono. La misura dell'altezza di entrambi è allora $2x$.



Calcoliamo l'area A_ℓ della superficie laterale del cono, in funzione di x. Indicando con a la misura dell'apotema del cono, la formula dell'area è:

$$A_\ell = \pi r a.$$

Calcoliamo a con il teorema di Pitagora:

$$a = \sqrt{(2x)^2 + x^2} = \sqrt{4x^2 + x^2} =$$
$$= \sqrt{5x^2} = x\sqrt{5}.$$

Sostituendo nella formula dell'area, abbiamo:

$$A_\ell = \pi x \cdot x\sqrt{5} = \pi x^2\sqrt{5}.$$

Calcoliamo l'area A'_ℓ della superficie laterale del cilindro, sempre in funzione di x.

Indicando con h l'altezza del cilindro, la formula dell'area è $A'_\ell = 2\pi rh$. Sostituendo in questa l'espressione di h in funzione di x, abbiamo:

$$A'_\ell = 2\pi x \cdot 2x = 4\pi x^2.$$

Poiché per ipotesi $A_t + A'_t = 12\pi(7+\sqrt{5})$, vogliamo determinare la somma $A_t + A'_t$ in funzione di x e poi uguagliare tale espressione a $12\pi(7+\sqrt{5})$.
Le due aree delle superfici totali si ottengono sommando quelle laterali con le aree dei tre cerchi di base, ognuno di area πx^2:

$$A_t + A'_t = A_\ell + A'_\ell + 3A_b,$$

ossia:

$$A_t + A'_t = \pi x^2\sqrt{5} + 4\pi x^2 + 3\pi x^2 =$$
$$= \pi x^2\sqrt{5} + 7\pi x^2 = \pi x^2(7+\sqrt{5}).$$

Uguagliando tale espressione al suo valore numerico, otteniamo l'equazione:

$$\pi x^2(7+\sqrt{5}) = 12\pi(7+\sqrt{5}),$$

da cui $x^2 = 12$ e $x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$.

La soluzione $-2\sqrt{3}$ è negativa, quindi non accettabile, pertanto è:

$$x = 2\sqrt{3}.$$

Calcoliamo il raggio della sfera.

Poiché sappiamo che $\dfrac{A_\ell + A'_\ell}{S} = 1 + \dfrac{\sqrt{5}}{4}$, calcoliamo $A_\ell + A'_\ell$.

Sostituiamo il valore $2\sqrt{3}$ a x e troviamo:

$$A_\ell = \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{5} = 12\pi\sqrt{5}$$
$$A'_\ell = 4\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 48\pi, \text{ da cui}$$
$$A_\ell + A'_\ell = 12\pi\sqrt{5} + 48\pi.$$

Sostituendo nella relazione $\dfrac{A_\ell + A'_\ell}{S} = 1 + \dfrac{\sqrt{5}}{4}$, otteniamo:

$$\frac{12\pi\sqrt{5} + 48\pi}{S} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{4},$$

$$\frac{12\pi\cancel{(\sqrt{5}+4)}}{S} = \frac{\cancel{4+\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{S}{12\pi} = 4$$

da cui ricaviamo $S = 48\pi$.

Calcoliamo il raggio della sfera, invertendo la formula $S = 4\pi R^2$:

$$4\pi R^2 = 48\pi$$
$$R^2 = 12$$
$$R = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}.$$

La soluzione $-2\sqrt{3}$ non è accettabile, pertanto il valore cercato è $R = 2\sqrt{3}$ cm.

2. Calcoliamo il volume dei tre solidi per verificare l'uguaglianza. Scriviamo le formule dei volumi:

$$V(\text{cono}) = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h;$$
$$V(\text{cilindro}) = A_b \cdot h;$$
$$V(\text{sfera}) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3.$$

Poiché $A_b = \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 12\pi$:

$$V(\text{cono}) = \frac{1}{3} \cdot 12\pi \cdot 4\sqrt{3} = 16\pi\sqrt{3};$$
$$V(\text{cilindro}) = 12\pi \cdot 4\sqrt{3} = 48\pi\sqrt{3}.$$

Inoltre abbiamo:

$$V(\text{sfera}) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{3})^3 = 32\pi\sqrt{3}.$$

Osserviamo che la relazione fra i tre volumi è soddisfatta:

$$V(\text{sfera}) = V(\text{cilindro}) - V(\text{cono}) \rightarrow$$
$$\rightarrow 32\pi\sqrt{3} = 48\pi\sqrt{3} - 16\pi\sqrt{3}.$$

Il raggio della sfera è $2\sqrt{3}$ cm e il volume della sfera è uguale alla differenza fra il volume del cilindro e quello del cono.

138 Il raggio di base di un cilindro è 6 cm e l'altezza 9 cm. Determina sull'asse un punto V tale che sia 4 il rapporto fra i volumi dei due coni aventi per basi le basi del cilindro e per vertice il punto V.

$\left[\frac{36}{5}\text{ cm oppure } \frac{9}{5}\text{ cm}\right]$

139 **TEST** If the diameter of a cylindrical can is increased by 20%, by approximately what percentage should the height be increased in order to double the volume of the can?

A 80% B 66.7% C 50.0% D 41.4% E 38.9%

(USA *North Carolina State High School, NCSHS, Mathematics Contest, Finals* 2004)

TEST

140 Si considerino le due sfere S_1 e S_2, la prima inscritta e la seconda circoscritta al medesimo cubo. Allora tra i volumi V_1 e V_2 delle due sfere sussiste la seguente relazione:

A $V_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} V_2$. B $V_1 > V_2$. C $V_1 = \sqrt{2}\, V_2$. D $V_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} V_2$. E $V_1 = \frac{\sqrt{3}}{9} V_2$.

(*CISIA*, *Facoltà di Ingegneria*, *Test di ingresso*, 2006)

141 Una sfera con raggio di 2 cm e un cilindro circolare retto con raggio di base di 2 cm hanno lo stesso volume. Allora l'altezza del cilindro è di:

A $\frac{4}{3}$ cm. B $\frac{8}{3}$ cm. C $\frac{2}{3}$ cm. D 4 cm. E 6 cm.

(*CISIA*, *Facoltà di Ingegneria*, *Test di ingresso*, 2000)

142 Tre palline da tennis sono perfettamente contenute in una lattina cilindrica. Le palline toccano la parete laterale, il coperchio e il fondo della lattina. Qual è il rapporto tra il volume delle palline e il volume di spazio nella lattina che circonda le palline?

A 1,414. B 1,732. C 2. D $\frac{3}{2}$. E Nessuno di questi.

(USA *Elon University High School Mathematics Contest*, 2002)

143 L'apotema di un cono è lungo 26 cm e il raggio di base è $\frac{5}{12}$ dell'altezza. Un piano parallelo alla base interseca il cono in un cerchio la cui proiezione sul piano di base limita, insieme con la circonferenza di base del cono dato, una corona circolare equivalente alla superficie laterale del cono che il piano stacca dal cono dato. Determina il volume del cilindro inscritto nel cono dato che ha come basi il cerchio sezione e la sua proiezione. $\left[\frac{1000}{9}\pi(6-\sqrt{10})\text{ cm}^3\right]$

144 Una sfera viene tagliata con un piano distante dal suo centro i $\frac{7}{25}$ del suo raggio. L'area della superficie del solido costituito dai due coni, aventi per base comune il cerchio sezione e per vertici gli estremi del diametro perpendicolare al piano considerato, è $\frac{189}{5}\pi$ cm^2. Calcola l'area della superficie della sfera. $\left[\frac{225}{4}\pi\text{ cm}^2\right]$

145 Il rapporto fra l'altezza e il raggio di base di un cono è $\frac{12}{5}$ e l'area della superficie della sezione determinata dall'intersezione del cono con un piano parallelo alla base e distante da essa $\frac{1}{4}$ dell'altezza è 45π cm^2. Determina l'area della superficie totale del cono dato e la misura del volume del cono staccato dal piano secante. $[288\pi\text{ cm}^2; 108\sqrt{5}\,\pi\text{ cm}^3]$

146 In un cilindro circolare retto la superficie laterale è equivalente a $\frac{4}{7}$ di quella totale. Sapendo che l'altezza del cilindro è 12 cm, determina il volume della sfera che ha raggio congruente alla metà del raggio di base del cilindro. $\left[\frac{243}{2}\pi\text{ cm}^3\right]$

147 Un solido è costituito da un cilindro sulle cui basi sono state sovrapposte due semisfere aventi i cerchi massimi coincidenti con le basi del cilindro. Sapendo che l'altezza del cilindro è 7 cm e che l'area della superficie totale del solido è 44π cm^2, calcola il volume del solido. $\left[\frac{116}{3}\pi\text{ cm}^3\right]$

148 In una sfera di raggio $R = 12$ cm è inscritto un cilindro di altezza $h = 6$ cm. Calcola il volume del solido delimitato dalla superficie laterale del cilindro e dalla zona sferica che ha per basi le circonferenze di base del cilindro (anello sferico). $[36\pi\text{ cm}^3]$

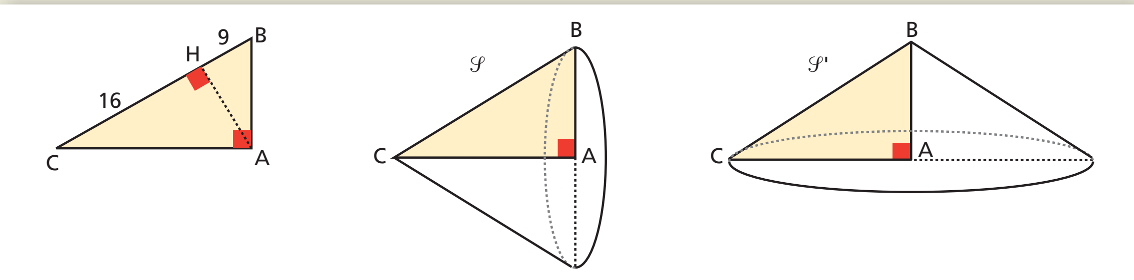
149 Un cono circolare retto e un segmento sferico a una base hanno in comune la base e, rispetto a essa, giacciono su semipiani opposti. Il raggio della base misura 5 cm, l'altezza del cono 13 cm. Sapendo che il raggio della sfera a cui appartiene il segmento è uguale all'altezza del cono, calcola il volume del solido.

[2 sol.: 121π cm^3, 3025π cm^3]

Altri solidi di rotazione

150 **ESERCIZIO GUIDA**

Un triangolo rettangolo ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa di 9 cm e 16 cm. Ruotando di 360° il triangolo attorno a un cateto otteniamo il solido $\mathcal{S}$, ruotandolo attorno all'altro cateto otteniamo il solido $\mathcal{S}'$. Determiniamo il rapporto fra i volumi e il rapporto fra le superfici laterali dei due solidi. Verifichiamo inoltre che i due rapporti sono uguali alla radice quadrata del rapporto fra le proiezioni date.



Dati $\overline{CH} = 16$;
$\overline{BH} = 9$.

Domande 1. $\dfrac{V(\mathcal{S})}{V(\mathcal{S}')}$?

2. $\dfrac{A_\ell(\mathcal{S})}{A_\ell(\mathcal{S}')}$?

3. I rapporti valgono $\sqrt{\dfrac{9}{16}} = \dfrac{3}{4}$?

Calcoliamo gli elementi del triangolo ABC:

$\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC}$ ossia $\overline{BC} = 9 + 16 = 25$.

Con il secondo teorema di Euclide calcoliamo $\overline{AH}$:

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{HC}}$$

$$\overline{AH} = \sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12.$$

Calcoliamo $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ applicando il primo teorema di Euclide:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{BH}}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{25 \cdot 9} = 5 \cdot 3 = 15.$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{CH}}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{25 \cdot 16} = 5 \cdot 4 = 20.$$

Calcoliamo il volume e l'area delle superfici laterali dei due solidi di rotazione.

- Calcoliamo il volume di $\mathcal{S}$ e l'area della superficie laterale. Non svolgiamo i calcoli, perché dobbiamo determinare dei rapporti, in cui sono possibili delle semplificazioni:

$$V(\mathcal{S}) = \frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot 15^2) \cdot 20; \; A_\ell(\mathcal{S}) = \pi \cdot 15 \cdot 25.$$

- Calcoliamo il volume di $\mathcal{S}'$ e l'area della superficie laterale:

$$V(\mathcal{S}') = \frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot 20^2) \cdot 15; \; A_\ell(\mathcal{S}') = \pi \cdot 20 \cdot 25.$$

- Verifichiamo che i rapporti fra i volumi e fra le aree sono uguali a $\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ ossia a $\dfrac{3}{4}$:

$$\frac{V(\mathcal{S})}{V(\mathcal{S}')} = \frac{\cancel{\frac{1}{3}} \cdot (\cancel{\pi} \cdot 15^2) \cdot 20}{\cancel{\frac{1}{3}} \cdot (\cancel{\pi} \cdot 20^2) \cdot 15} = \frac{15^{\cancel{2}} \cdot \cancel{20}}{20^{\cancel{2}} \cdot \cancel{15}} =$$

$$= \frac{15}{20} = \frac{3}{4}.$$

$$\frac{A_\ell(\mathcal{S})}{A_\ell(\mathcal{S}')} = \frac{\cancel{\pi} \cdot 15 \cdot \cancel{25}}{\cancel{\pi} \cdot 20 \cdot \cancel{25}} = \frac{3}{4}.$$

Il rapporto fra i volumi dei due solidi è uguale al rapporto fra le aree e tale rapporto vale $\dfrac{3}{4}$.

151 In un triangolo rettangolo un cateto è $\frac{15}{8}$ dell'altro e l'altezza relativa all'ipotenusa è lunga $\frac{240}{17}$ cm. Ruota il triangolo di 360° attorno all'ipotenusa e calcola l'area della superficie e il volume del solido così ottenuto.
$\left[\frac{11\,040}{17}\pi\ \text{cm}^2; \frac{38\,400}{17}\pi\ \text{cm}^3\right]$

152 Il lato AD perpendicolare alle basi di un trapezio rettangolo $ABCD$ è lungo 4 cm, la differenza fra le basi è 3 cm e la base minore CD è i $\frac{2}{3}$ della maggiore. Conduci per B la retta perpendicolare alle basi e ruota il trapezio attorno a questa retta di un angolo giro. Calcola l'area della superficie totale del solido ottenuto. Calcola inoltre il rapporto fra il volume di tale solido e il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base maggiore.
$\left[240\pi\ \text{cm}^2; \frac{39}{14}\right]$

153 In un triangolo isoscele ABC l'altezza è i $\frac{6}{5}$ della base BC e il raggio del cerchio circoscritto è lungo $\frac{169}{12}$ cm. Determina il volume del solido ottenuto da una rotazione completa del triangolo dato attorno al lato AB.
$\left[\frac{38\,400}{13}\pi\ \text{cm}^3\right]$

154 Un triangolo rettangolo ha un cateto di 9 cm. La somma dei volumi dei due solidi ottenuti dalla rotazione completa del triangolo attorno a ciascuno dei suoi cateti è 756π cm^3. Calcola l'area del triangolo dato.
[54 cm^2]

155 Un trapezio rettangolo ha il lato obliquo di 2 m, la base minore metà della maggiore e l'angolo acuto adiacente a questa di 45°. Determina il rapporto fra i volumi dei solidi generati dal trapezio in rotazioni complete prima intorno al lato obliquo e poi intorno alla base maggiore.
$\left[\frac{7\sqrt{2}}{8}\right]$

156 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è lunga $\frac{5}{2}$ cm. Il rapporto fra i volumi dei due solidi ottenuti dalla rotazione completa del triangolo attorno prima all'uno e poi all'altro cateto è $\frac{3}{4}$. Calcola il perimetro del triangolo.
[6 cm]

ESERCIZI VARI Lo spazio

157 **TEST** Una delle seguenti affermazioni relative al parallelepipedo rettangolo è *vera*. Quale?

- **A** Si dice diagonale un segmento congiungente due vertici non appartenenti allo stesso spigolo.
- **B** Le basi sono quadrati.
- **C** Le diagonali sono congruenti.
- **D** È un poliedro regolare.
- **E** Le diagonali sono 16.

158 **TEST** Un cubo è inscritto in una sfera di raggio 3. Una delle seguenti affermazioni è *falsa*. Quale?

- **A** Il centro del cubo coincide con quello della sfera.
- **B** Il volume del cubo è $24\sqrt{3}$.
- **C** La diagonale del cubo è congruente al diametro della sfera.
- **D** Lo spigolo del cubo è $3\sqrt{2}$.
- **E** I vertici del cubo appartengono alla superficie della sfera.

159 **TEST** Un tronco di cono è inscritto in una semisfera di raggio R. Il raggio della base minore del tronco è r. Indicata con A_ℓ l'area laterale del tronco, con A_z l'area della zona sferica delimitata dalla circonferenza di base della semisfera e da quella della base minore del tronco, allora:

A $\dfrac{A_\ell}{A_z} = \dfrac{R+r}{2R}$.

B $\left(\dfrac{A_\ell}{A_z}\right)^2 = \dfrac{R+r}{2R}$.

C $\dfrac{A_\ell}{A_z} = \dfrac{R+r}{R}$.

D $\left(\dfrac{A_\ell}{A_z}\right)^2 = \dfrac{2R}{R+r}$.

E non è possibile calcolare $\dfrac{A_\ell}{A_z}$ perché non si conosce il raggio della base maggiore del tronco.

160 **TEST** Una lampada, che si suppone puntiforme, è collocata in un punto V. Essa proietta su un piano a situato a 2 metri da V un fascio avente la forma di cono circolare con asse perpendicolare ad a, le cui generatrici formano un angolo di 30° con l'asse del cono. Sul piano a, al centro della base del cono, viene posto un cubo di cartone, con lo spigolo di 1 metro. Si chiede quale sia l'area complessivamente illuminata dalla lampada (sul piano a e sulla faccia superiore del cubo), espressa in m^2.

A $\dfrac{2}{\sqrt{3}} - \dfrac{\pi}{9}$. **B** $4\dfrac{\pi}{3} - 3$. **C** $\dfrac{\pi}{9} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D** $\pi - \sqrt{3}$. **E** $\dfrac{4\pi}{9} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

(*Olimpiadi di Matematica, Gara di 2° livello,* 2004)

161 Sia dato un tetraedro regolare di volume 1. Si ottiene un secondo tetraedro regolare riflettendo quello assegnato attraverso il suo centro. Qual è il volume dell'intersezione dei due tetraedri?

(USA *Bay Area Math Meet, Bowl Sampler*, 1995)

$\left[\dfrac{1}{2}\right]$

162 Un solido è formato da un cubo e da un tronco di piramide regolare che ha per base maggiore una faccia del cubo. I lati delle basi del tronco di piramide misurano $3k$ e $2k$ e l'area della superficie totale del solido è $79k^2$. Determina la misura dell'apotema del tronco. $[3k]$

163 In un tronco di cono, il rapporto fra i raggi delle basi è uguale a $\dfrac{3}{2}$ e l'altezza è i $\dfrac{6}{5}$ del raggio della base minore. Sapendo che l'apotema del tronco misura $13a$, determina il volume del tronco di piramide esagonale regolare inscritto nel tronco di cono. $[2850\sqrt{3}\,a^3]$

164 Un trapezio isoscele di perimetro $18k$ è circoscritto a un semicerchio il cui diametro è i $\dfrac{4}{5}$ della base maggiore del trapezio. Determina il rapporto fra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare di 180° il trapezio e il semicerchio intorno alla retta congiungente i punti medi delle basi. $\left[\dfrac{39}{32}\right]$

165 Determina il volume di un tetraedro regolare sapendo che l'area della sezione del solido con un piano perpendicolare alla base e passante per uno spigolo laterale è $4k^2\sqrt{2}$. $\left[\dfrac{16\sqrt{2}\,k^3}{3}\right]$

166 Un solido è formato da un parallelepipedo a base quadrata e da due piramidi regolari congruenti, aventi le basi coincidenti con quelle del parallelepipedo. L'apotema delle piramidi misura $5k$ e l'area della superficie totale del solido misura $216k^2$. Sapendo che l'altezza del parallelepipedo è i $\dfrac{2}{3}$ del lato di base, calcola il volume del solido. $[240k^3]$

167 B è una sfera di raggio $2r$ dal cui interno è stata tolta una sfera di raggio r. C è una sfera piena di raggio 1. Supponi che B e C abbiano lo stesso volume. Trova r.

(USA *Bay Area Math Meet, Bowl Sampler*, 1995)

$\left[r = \frac{1}{\sqrt[3]{7}}\right]$

168 Un solido è costituito da un cilindro e da due coni congruenti aventi le basi coincidenti con quelle del cilindro. L'altezza del cilindro misura $5k$ e l'area della superficie totale del solido $620\pi k^2$. Sapendo che l'apotema del cono è i $\frac{13}{5}$ del raggio di base, calcola il volume del solido. $[2100\pi k^3]$

169 In un tronco di piramide quadrangolare regolare di apotema a, la somma di uno spigolo della base maggiore e di uno spigolo della base minore è $5a$ e il rapporto fra la superficie laterale e la differenza delle superfici delle due basi è 2. Determina il volume del tronco di cono circoscritto al tronco di piramide considerato.

$\left[\frac{19\sqrt{3}\,\pi}{12}a^3\right]$

170 Una piramide a base quadrata ha il lato di base lungo $\sqrt{3}$ e tutti gli spigoli delle facce laterali sono lunghi $\sqrt{2}$. Quanti gradi misura l'angolo fra due spigoli non appartenenti alla stessa faccia laterale?

(*Olimpiadi di Matematica, Gara di 2° livello*, 2006)

$[120°]$

171 Un solido è formato da un prisma triangolare regolare e da un tetraedro regolare che ha per base una base del prisma. Sapendo che il volume del tetraedro è doppio di quello del prisma e che il volume del solido è 54 k^3, determina lo spigolo del tetraedro. $[2k\sqrt[6]{162}]$

172 Una piramide ha per base il triangolo isoscele AOB ($OA \cong OB$) e lo spigolo OV, congruente a OA, è perpendicolare alla base. Sulla sfera di centro O e raggio OV i semipiani contenenti le facce VOA e VOB individuano un fuso sferico di area $S = 54\pi$ cm^2. Sapendo che l'angolo $A\widehat{O}B = \frac{\pi}{3}$, calcola l'area totale della piramide.

$\left[\frac{81}{4}(4 + \sqrt{3} + \sqrt{7})\text{ cm}^2\right]$

173 **VERO O FALSO?**

Una piramide ha per base il quadrato $ABCD$ e lo spigolo laterale AV, congruente alla diagonale di base, è perpendicolare al piano di base. Possiamo affermare che:

a) la piramide è regolare. V F

b) le facce laterali sono triangoli rettangoli. V F

c) $B\widehat{C}V = 45°$. V F

d) l'area del triangolo ACV è uguale a quella della base della piramide. V F

174 Una piramide esagonale regolare ha l'apotema congruente ai $\frac{5}{3}$ dell'apotema di base. Sapendo che la misura dell'area della sua superficie laterale è $90k^2\sqrt{3}$, calcola la misura del volume del cono circoscritto alla piramide e il rapporto fra questo volume e quello della piramide. Tale rapporto varia al variare dell'altezza e del lato di base della piramide?

$\left[48\sqrt{3}\,\pi k^3; \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}; \text{no}\right]$

175 Sia dato il cubo $ABCDA'B'C'D'$, dove AA', BB', CC' e DD' sono gli spigoli laterali, di misura $12a$. Sugli spigoli AB e AD si prendano rispettivamente i punti M e N tali che i segmenti AM e AN siano congruenti. Siano M' e N' le proiezioni di M e N sulla base $A'B'C'D'$. Quale deve essere la misura di AM affinché il prisma retto $AMNA'M'N'$ abbia l'area della superficie totale che misura $(256 + 96\sqrt{2})a^2$? [8a]

176 Il raggio di base di un cono di vertice V è $5k$ e la superficie laterale è equivalente ai $\frac{13}{18}$ della superficie totale. Determina a quale distanza da V sull'asse del cono si deve prendere un punto P in modo che un altro cono di vertice P e base coincidente con quella del cono dato abbia superficie totale equivalente ai $\frac{10}{9}$ della superficie totale del cono dato. $[(10\sqrt{2}-12)k]$

177 In un cono l'area della base è $400\pi k^2$ e l'altezza è i $\frac{3}{5}$ dell'apotema. Calcola il rapporto fra i volumi delle piramidi quadrangolari regolari circoscritta al cono e inscritta nel cono. Quanto deve valere k affinché la superficie laterale della piramide inscritta abbia area $20\sqrt{34}$ cm^2? $\left[2; \frac{\sqrt{10}}{10}\text{ cm}\right]$

178 In una piramide quadrangolare regolare l'altezza è $\frac{2}{3}$ del lato di base e il volume è $384a^3$. Determina lo spigolo del cubo inscritto nella piramide e avente una faccia che giace sulla base della piramide stessa. $\left[\frac{24}{5}a\right]$

179 Un dodecaedro è un solido regolare con 12 facce pentagonali. Una diagonale di un solido è un segmento che ha per estremi due vertici del solido che non appartengono ad una stessa faccia. Quante sono le diagonali del dodecaedro?

(*Olimpiadi di Matematica, Gara di 2° livello*, 2003)

[100]

180 L'area della superficie laterale di un cilindro è $120\pi k^2$ e l'altezza è i $\frac{12}{5}$ del raggio. Dopo aver determinato il raggio e l'altezza del cilindro, prendi sull'asse OO' di questo un punto V tale che $\overline{OV} : \overline{O'V} = 5 : 7$. Determina la somma dei volumi delle due piramidi aventi per vertice V e per base i quadrati inscritti in ciascuna base del cilindro. Dimostra inoltre che tale somma non varia al variare di V su OO'. $[5k; 12k; 200k^3]$

181 L'area della superficie totale di un cilindro è $24\pi(3+4\sqrt{3})k^2$. Si sa che esiste un punto del segmento congiungente i centri delle due basi tale che i coni aventi come vertice tale punto e come basi le basi del cilindro hanno gli apotemi che formano con la base angoli di 30° e di 60°. Determina il volume del solido differenza fra il cilindro e i due coni. $[192\sqrt{3}\,\pi k^3]$

182 In una sfera un piano secante divide il diametro AB, a esso perpendicolare, in due parti che stanno fra loro come 16 sta a 9. Sapendo che la superficie del solido costituito dai due coni aventi per base comune il cerchio sezione e per vertici i punti A e B ha area $84\pi l^2$, calcola il volume della sfera. Quale valore numerico deve essere attribuito a l affinché il volume della sfera data sia uguale a $\frac{500}{3}\pi$, rispetto a una prefissata unità di misura? $\left[\frac{625\sqrt{5}}{6}\pi l^3; \frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$

183 Una calotta e una zona sferica appartenenti alla stessa sfera giacciono su semispazi opposti rispetto alla base comune e sono equivalenti. Sapendo che l'altezza della calotta è 5 cm e l'area 80π cm^2 determina i raggi delle due basi della zona sferica e le distanze dei loro centri da quello della sfera. $[r_1 = \sqrt{55}\text{ cm}; r_2 = 2\sqrt{15}\text{ cm}; d_1 = 3\text{ cm}; d_2 = 2\text{ cm}]$

184 Data una calotta avente altezza h e raggio di base r, esprimi in funzione di essi:

a) il raggio della sfera a cui appartiene;
b) l'area della calotta;
c) l'angolo del fuso equivalente alla calotta.

$\left[\text{a) } \frac{h^2+r^2}{2h}; \text{ b) } \pi(h^2+r^2); \text{ c) } 2\pi\frac{h^2}{h^2+r^2}\right]$

185 Un cubo di spigolo l ha quattro vertici su una calotta appartenente a una sfera di raggio r e minore della semisfera, i rimanenti sono nel cerchio di base.
Calcola la distanza d del cerchio di base dal centro della sfera in funzione di r e l, e determina a quali condizioni il problema ammette soluzione.

$$\left[d = \frac{\sqrt{4r^2 - 2l^2} - 2l}{2}; 0 < l < \sqrt{\frac{2}{3}}\,r\right]$$

186 Un cono con apotema $a = 6$ cm e semiapertura $\alpha = 30°$ ha una cavità a forma di segmento sferico a una base. La base del segmento coincide con la base del cono e la calotta è tangente alla superficie laterale del cono.
Calcola:

a) il volume della parte piena del cono;
b) l'area della superficie che delimita il solido.

$$[\text{a) } 4\sqrt{3}\,\pi \text{ cm}^3;\ \text{b) } 30\pi \text{ cm}^2]$$

187 Un settore sferico appartiene a una sfera di raggio 2 cm e la sua semiapertura è 60°.

a) Calcola la superficie totale.
b) Calcola il volume.
c) Generalizza il punto b) indicando con r il raggio della sfera e con α la semiapertura.

$$\left[\text{a) } 2(\sqrt{3} + 2)\pi \text{ cm}^2;\ \text{b) } \frac{8\pi}{3} \text{ cm}^3;\ \text{c) } \frac{2}{3}\pi r^3(1 - \cos\alpha)\right]$$

188 Una piramide ha per base il triangolo ABC rettangolo in B tale che $\operatorname{sen} B\widehat{A}C = \frac{3}{5}$, e ha per altezza il segmento BV congruente a BC e di lunghezza 6.
Determina un punto H sullo spigolo AB in modo che, detto D il punto di intersezione tra la perpendicolare al piano di base della piramide passante per H e lo spigolo AV, il volume della piramide di vertice H e base la sezione della piramide data con il piano parallelo al piano di base passante per D sia pari ai $\frac{3}{64}$ del volume di $ABCV$.

$$[\overline{BH} = 2 \text{ oppure } \overline{BH} = 3 + \sqrt{21}]$$

189 In una piramide $ABCDV$ la base $ABCD$ è un quadrato di lato 3, la faccia ABV è un triangolo equilatero, e il piede H dell'altezza HV si trova sul segmento che congiunge i punti medi M e N degli spigoli AB e CD.
Detta K la proiezione di H sulla faccia ABV, determina la posizione di H in modo che $\overline{HK} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
Calcola poi il volume del tronco di piramide che si ottiene secando la piramide con il piano parallelo al piano di base passante per K.

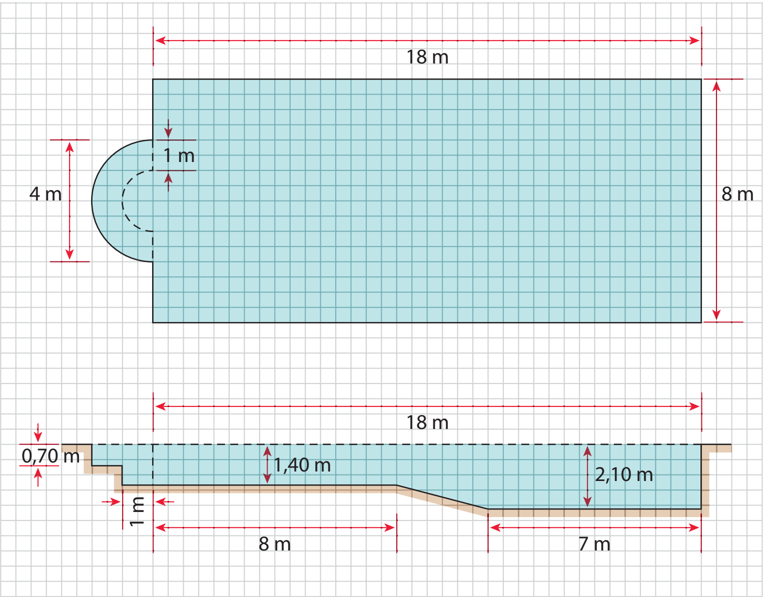
$$\left[\overline{HM} = \frac{3}{2} \text{ e } V = \frac{19}{6}\sqrt{2} \text{ oppure } \overline{HM} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \text{ e } V = \frac{13}{3}\right]$$

REALTÀ E MODELLI

1 **La capienza della piscina**

In figura sono riportate la vista dall'alto e la sezione di una piscina. Nota che la zona semicircolare a sinistra presenta un gradone, sempre a semicerchio, che rimane sott'acqua.

- ▶ Quanta acqua serve per riempire la piscina?
- ▶ La normativa impone che nella piscina possano stare al massimo due persone ogni 2 m². Quante persone può contenere la piscina?



2 **Il cono gelato**

Stefano ha comprato un gelato composto da un cono di altezza 10 cm e diametro 4 cm totalmente riempito e da due palline di gelato alla frutta, che possiamo pensare come sfere di raggio 2,5 cm.

- ▶ Quanto dovrebbe essere alta una coppetta cilindrica di diametro 6 cm se Stefano volesse trasferirvi tutto il gelato?
- ▶ Quanta carta occorre per avvolgere il cono per evitare di sporcarsi? E per avvolgere la coppetta?

3 **La scala a chiocciola**

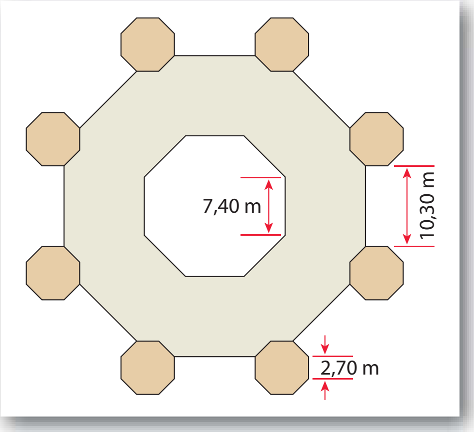
Una scala a chiocciola collega due piani di un appartamento. Ciascun piano è alto 2,9 m e il foro nel pavimento è largo 130 cm. La scala ha inoltre una ringhiera alta 80 cm dotata di un corrimano, che parte in corrispondenza del primo gradino e termina al pianerottolo del piano superiore dopo che la scala si è «avvolta» in tutto di 300°.

- ▶ Quanto è lungo il corrimano?

4 **Castel del Monte**

L'ottagono è il motivo geometrico ricorrente di Castel del Monte, che si trova ad Andria in Puglia. La pianta dell'edificio è ottagonale, così come il cortile interno e le torri situate agli angoli.

- ▶ Date le misure seguenti, calcola il volume complessivamente occupato dal corpo centrale e dalle torri.
  Lato esterno (distanza tra due torri successive) = 10,30 m;
  altezza = 20,50 m;
  lato medio del cortile interno = 7,40 m circa;
  lato torre = 2,70 m;
  altezza torre = 24 m.



VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: www.zanichellitest.it

1 In un tetraedro regolare sia θ l'angolo fra due facce e φ l'angolo fra uno spigolo e la base. Possiamo dire che:

A $\theta = \varphi$.

B $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

C $\operatorname{sen}\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

D $\varphi = 60°, \theta > 60°$.

E $\theta = 60°, \varphi > 60°$.

2 Se, nello spazio, le tre rette r, s, t sono tali che $r \perp s$ e $s \perp t$, *allora*:

A $r \perp t$.

B s è perpendicolare al piano formato dalle rette r e t.

C r e t sono sghembe.

D $r \parallel t$.

E nessuna delle affermazioni precedenti è vera.

3 Un prisma retto è:

A un poliedro con due facce parallele.

B un prisma con gli spigoli laterali perpendicolari alle basi.

C un prisma avente per basi poligoni circoscritti a una circonferenza.

D un poliedro con le facce parallele a due a due.

E un poliedro con gli spigoli laterali perpendicolari alle basi.

4 Una delle seguenti proposizioni riguardanti la simmetria assiale nello spazio è *falsa*. Quale?

A I piani contenenti l'asse sono uniti.

B Le rette perpendicolari all'asse sono unite.

C I piani perpendicolari all'asse sono uniti.

D I piani incidenti non perpendicolari all'asse non sono uniti.

E Le rette incidenti sull'asse sono unite.

5 Una piramide retta a base quadrata è divisa da un piano parallelo alla base in una piramide e un tronco di piramide. La distanza del piano dalla base è pari a $\frac{1}{3}$ dell'altezza. Indichiamo rispettivamente con A l'area laterale della piramide, con A_1 quella della piramide minore, con A_2 quella del tronco. Possiamo dire che:

A $A_1 = A_2$.

B $A_2 = \frac{5}{4}A_1$.

C $A_2 = \frac{1}{3}A$.

D $A_2 = \frac{1}{9}A$.

E nessuna delle uguaglianze precedenti è vera.

6 Gli sviluppi delle superfici laterali del cono e del tronco di cono sono rispettivamente:

A un settore circolare e un trapezio.

B un settore circolare e una corona circolare.

C un settore circolare e una porzione di corona circolare.

D un triangolo e un trapezio.

E un cerchio e una corona circolare.

7 Un piano divide un cono C in due parti: un cono C_1 e un tronco di cono Ψ.

L'altezza del tronco di cono Ψ è $\frac{1}{3}$ di quella del cono C. Il rapporto fra:

A il volume di Ψ e quello del cono C è $\frac{1}{3}$.

B l'area laterale del cono C_1 e quella del cono C è $\frac{2}{3}$.

C il raggio della base minore di Ψ e il raggio della base maggiore è $\frac{1}{3}$.

D l'area laterale di Ψ e quella del cono C è $\frac{4}{9}$.

E il volume di Ψ e quello del cono C è $\frac{19}{27}$.

8 Dati un piano e una retta non perpendicolare e non parallela al piano, l'angolo della retta con il piano è:

A il più piccolo degli angoli che la retta forma con il piano.

B l'angolo che la retta data forma con una retta del piano che sia incidente con essa.

C l'angolo che la retta data forma con la retta del piano a essa perpendicolare.

D il minore dei due angoli che la retta data forma con la sua proiezione ortogonale nel piano.

E il più grande degli angoli che la retta forma con il piano.

9 Una delle seguenti proposizioni è *falsa*. Quale?

A Si dice calotta sferica ognuna delle due parti di sfera determinate da un piano secante.

B Si dice fuso sferico ciascuna delle due porzioni di superficie sferica staccate da due semipiani aventi per origine una retta passante per il centro.

C Si dice segmento sferico a due basi una porzione di sfera compresa fra due piani secanti e paralleli.

D Un settore sferico si ottiene facendo ruotare di un angolo giro un settore circolare attorno a un diametro del cerchio a cui appartiene e che non lo sechi.

E Uno spicchio è ciascuna delle due parti di sfera staccate da due semipiani aventi per origine una retta passante per il centro.

10 Nella piramide $ABCV$ la base ABC è un triangolo equilatero di lato l, lo spigolo AV è perpendicolare alla base e il volume misura $\frac{3}{4}l^3$. Allora possiamo dire che:

A $\overline{AV} = l\sqrt{3}$.

B le facce laterali hanno uguale altezza $h_1 = 3\sqrt{3} \cdot l$.

C la faccia BCV è un triangolo equilatero.

D $\overline{CV} = 2\sqrt{7} \cdot l$.

E l'area della faccia BCV è uguale a $\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$.

11 Una piramide retta ha per base un triangolo equilatero di lato l. L'altezza della piramide è congruente allo spigolo di base l.
La distanza del centro della base da uno degli spigoli laterali è uguale a:

A $\frac{1}{2}l$.

B $\frac{\sqrt{3}}{2}l$.

C $\frac{\sqrt{3}}{3}l$.

D $\frac{1}{\sqrt{2}}l$.

E $\frac{1}{3}l$.

QUESITI

12 Dimostra che la somma delle facce di un triedro è minore di un angolo giro. Estendi la dimostrazione al caso di un angoloide.

13 Dimostra che coni aventi la stessa base e altezze congruenti sono equivalenti.

14 I prismi regolari sono anche poliedri regolari? Motiva la risposta e porta qualche esempio.

15 Date un esempio di solido la cui superficie laterale è 7π.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero (Europa), Sessione ordinaria*, 2003, *quesito* 1)

16 Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria*, 2003, *quesito* 2)

17 Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera a esso circoscritta come 3 sta a 4.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria*, 2004, *quesito* 2)

18 La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2006, *quesito* 4)

$\left[V = \frac{1000}{3\sqrt{3}}\,\text{dm}^3 \simeq 192 \text{ litri}\right]$

19 Di due rette a, b – assegnate nello spazio ordinario – si sa soltanto che entrambe sono perpendicolari a una stessa retta p.

a) È possibile che le rette a, b siano parallele?
b) È possibile che le rette a, b siano ortogonali?
c) Le rette a, b sono comunque parallele?
d) Le rette a, b sono comunque ortogonali?

Per ciascuna delle quattro domande motivare la relativa risposta.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2002, *quesito* 10)

[a) sì; b) sì; c) no; d) no]

20 La retta r è perpendicolare nel vertice A al piano del quadrato $ABCD$. Indicato con E un qualsiasi punto di r, distinto da A, dimostrare che le facce laterali della piramide di vertice E e base $ABCD$ sono triangoli rettangoli, a due a due congruenti.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Scuole italiane all'estero (Europa)*, *Sessione ordinaria*, 2004, *quesito* 5)

21 Un tetraedro regolare e un cubo hanno superfici equivalenti. Si determini il rapporto dei rispettivi spigoli.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Scuole italiane all'estero (Europa)*, 2009, *quesito* 1)

$[\sqrt[4]{12}]$

22 Si dimostri che il volume del cilindro equilatero inscritto in una sfera di raggio r è medio proporzionale fra il volume del cono equilatero inscritto e il volume della sfera.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2008, *quesito* 6)

23 Si stabilisca per quali valori del parametro reale k esiste una piramide triangolare regolare tale che k sia il rapporto fra il suo apotema e lo spigolo di base.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2008, *quesito* 8)

$\left[k > \frac{\sqrt{3}}{6}\right]$

24 I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. È un ottaedro regolare? Qual è il rapporto tra i volumi dei due solidi?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2005, *quesito* 8)

[sì, 6]

25 Siano AB, AC, AD tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo s, calcolare la distanza del vertice A dal piano dei punti B, C, D.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2005, *quesito* 2)

$\left[\frac{s}{\sqrt{3}}\right]$

26 Si considerino un tronco di piramide quadrangolare regolare, la cui base maggiore abbia area quadrupla della minore, e un piano α equidistante delle basi del tronco. Dire se i dati sono sufficienti per calcolare il rapporto fra i volumi dei due tronchi in cui il tronco dato è diviso dal piano α.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione straordinaria*, 2005, *quesito* 1)

[sì]

27 Provare che una sfera è equivalente ai $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2001, *quesito* 1)

28 Esprimere in funzione dello spigolo s l'altezza di un tetraedro regolare.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2002, *quesito* 1)

29 Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un tetraedro regolare, misurata in gradi sessagesimali e approssimata al secondo.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Scuole italiane all'estero (Europa)*, *Sessione ordinaria*, 2004, *quesito* 8)

$[70°31'44'']$

30 Dimostra che i poligoni regolari che si possono ottenere sezionando un cubo con un piano sono: il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono.

31 Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Sia E il punto medio dello spigolo AB. I piani $ACC'A'$ e $D'DE$ dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2001, *quesito* 3)

32 Dato un tetraedro regolare, si consideri il quadrilatero avente per vertici i punti medi degli spigoli di due facce. Dimostrare che si tratta di un quadrato.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2002, *quesito* 9)

33 Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce di un tetraedro regolare, espressa in gradi sessagesimali e approssimata al «primo».

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2006, *quesito* 5)

$[\alpha \simeq 70°32']$

34 Una piramide quadrangolare regolare è tale che la sua altezza è il doppio dello spigolo di base. Calcolare il rapporto fra il volume del cubo inscritto nella piramide e il volume della piramide stessa.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione straordinaria*, 2006, *quesito* 2)

$\left[\frac{V_c}{V_p} = \frac{4}{9}\right]$

35 Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2007, *quesito* 4)

$[V_{MAX} \simeq 0,403 \text{ m}^3 = 403 \text{ litri}]$

36 Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 1)

37 Una piramide è divisa da un piano parallelo alla base in due parti: una piramide e un tronco di piramide. Il piano sezione divide l'altezza della piramide in due parti, di cui quella che contiene il vertice della piramide è doppia dell'altra. Stabilire se i dati sono o no sufficienti per calcolare il rapporto fra il volume della piramide recisa e quello del tronco di piramide.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 2)

38 Dimostrare che se tre rette distinte dello spazio passano per uno stesso punto O e ciascuna di esse interseca una quarta retta in un punto distinto da O allora le quattro rette sono complanari.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Scuole italiane all'estero (America Emisfero boreale)*, *Sessione suppletiva*, 2003, *quesito* 3)

39 Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare a uno di essi è parallela all'altro o è contenuta in esso.
Si può concludere che ogni retta parallela ad uno dei due piani è perpendicolare all'altro? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione straordinaria*, 2004, *quesito* 2)

40 Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Indicato con E il punto medio dello spigolo AB, sia CF la retta perpendicolare a DE condotta per C. I piani $D'DE$ e $C'CF$ dividono il cubo in quattro parti. Calcolare a quale frazione del cubo equivale ciascuna di esse.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2001, *quesito* 2)

$\left[\frac{1}{20}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{11}{20}\right]$

41 Dopo aver fornito la definizione di «rette sghembe», si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio le tre rette x, y, z, due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2003, *quesito* 1)

[falsa]

42 Si consideri la seguente proposizione: «Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area». Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2008, *quesito* 1)

[falsa]

43 I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9, e 12 cm. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2008, *quesito* 6)

[61°55′39″, 58°02′03″, 45°05′55″]

44 Si dia una definizione di poliedro regolare. Si dimostri che i poliedri regolari sono, a meno di similitudini, solo 5 e si dica quali sono.

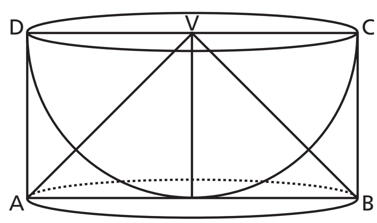
(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Scuole italiane all'estero (Americhe)*, *Sessione ordinaria*, 2009, *quesito* 5)

45 «Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni». Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2009, *quesito* 4)

[falsa]

46 Nei «Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze», Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che si chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La scodella si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono di vertice V in figura.



(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2009, *quesito* 9)

PROBLEMI

47 La diagonale maggiore di un prisma esagonale regolare è lunga $d = \sqrt{6}$ cm e forma un angolo $\alpha = 45°$ con lo spigolo laterale.

a) Calcola il volume del prisma.
b) Determina l'angolo β che la diagonale forma con lo spigolo di base.
c) Generalizza le risposte precedenti esprimendo il volume in funzione di d e α, l'angolo β in funzione di α.

$\left[\text{a) } \frac{27}{8}\text{ cm}^3\text{; b) } \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{4}\text{; c) } \frac{3\sqrt{3}}{8} d^3 \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos\alpha,\ \cos\beta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\right]$

48 Una piramide ha per base un rettangolo le cui diagonali hanno misura a e si incontrano nella proiezione del vertice sul piano di base. L'angolo che le diagonali formano con il lato maggiore della base è α, l'angolo che lo spigolo laterale forma con la diagonale è β.

a) Calcola il volume della piramide.
b) Determina il raggio della sfera circoscritta alla piramide.

$\left[\text{a) } \frac{a^3}{12}\operatorname{sen}2\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta\text{; b) } \frac{a}{2\operatorname{sen}2\beta}\right]$

49 Nel trapezio isoscele $ABCD$ le diagonali si incontrano in un punto E la cui distanza dalla base maggiore AB è doppia della distanza dalla minore.

a) Determina il rapporto fra i volumi dei solidi generati, in una rotazione di 180° attorno all'asse della figura, dai triangoli ABE e CDE.
b) Riferendoti alla medesima rotazione determina il rapporto fra i volumi dei solidi generati dalla rotazione del trapezio e dei triangoli AED e BEC.

$\left[\text{a) } 8\text{; b) } \frac{7}{4}\right]$

50 Un quadrato di lato l è inscritto nella base di un cono. L'angolo al vertice del triangolo isoscele con base sul lato del quadrato e vertice coincidente con quello del cono ha ampiezza 2β.

a) Esprimi il volume del cono in funzione di l e β.
b) Calcola il valore dell'area del cono nel caso che sia $\beta = 30°$.
c) Nel caso del punto precedente determina l'angolo che il piano del triangolo forma con la base del cono.

$\left[\text{a) } \frac{\pi l^3}{12\operatorname{sen}\beta}\sqrt{1 - 2\operatorname{sen}^2\beta}\text{; b) } \pi l^2 \frac{1+\sqrt{2}}{2}\text{; c) } \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

51 Una piramide ha per base il triangolo ABC, isoscele e rettangolo in A, ed ha per altezza il segmento AV. Inoltre la faccia VBC forma un angolo di 45° col piano della base e lo spigolo VB è lungo $2h\sqrt{3}$, dove h è una lunghezza nota.
Calcolare la distanza del vertice A dal piano della faccia VBC e trovare per quale valore di h tale distanza vale $4\sqrt{2}$.
Verificato che questo valore di h è 4, con riferimento ad esso secare la piramide con un piano parallelo alla base ABC e, proiettato ortogonalmente il triangolo sezione sulla base stessa, esprimere il volume del prisma triangolare così ottenuto in funzione della sua altezza x.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Sessione ordinaria*, 1994, *dal problema* 2)

$[\text{distanza} = h\sqrt{2}\text{; } V(x) = x^3 - 16x^2 + 64x \text{ con } 0 \le x \le 8]$

52 Una piramide di vertice V ha per base il triangolo ABC rettangolo in B. Lo spigolo VA è perpendicolare al piano della base e il piano della faccia VBC forma con lo stesso piano di base un angolo di 60°. Inoltre lo spigolo BC è lungo $\frac{5}{2}a$, dove a è una lunghezza data, e il volume della piramide è uguale a $\frac{5}{\sqrt{3}}a^3$.

a) Calcolare la lunghezza dello spigolo VA.
b) Controllato che essa è $2a\sqrt{3}$, calcolare la distanza del vertice B dal piano della faccia VAC.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero* (*America Latina*), *Sessione ordinaria*, 2001, *dal problema* 2)

$\left[\text{b) } \frac{10\sqrt{41}}{41}a\right]$

53 Una piramide di vertice V, avente per base il trapezio rettangolo $ABCD$, è tale che:
- il trapezio di base è circoscritto a un semicerchio avente come diametro il lato AB perpendicolare alle basi del trapezio;
- lo spigolo VA è perpendicolare al piano di base della piramide;
- la faccia VBC della piramide forma un angolo di 45° col piano della base.

a) Indicato con E il punto medio del segmento AB, dimostrare che il triangolo CED è rettangolo.
b) Sapendo che l'altezza della piramide è lunga $2a$, dove a è una lunghezza assegnata, e che $BC = 2AD$, calcolare l'area e il perimetro del trapezio $ABCD$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2002, *dal problema* 2)

$\left[\text{b) } \frac{3}{2}\sqrt{2}\,a^2, a(3\sqrt{2}+2)\right]$

54 Una piramide retta, di vertice V, ha per base il triangolo ABC, rettangolo in A, la cui area è $24a^2$, dove a è una lunghezza assegnata. Si sa inoltre che $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{5}$ e che il piano della faccia VAB della piramide forma col piano della base ABC un angolo φ tale che $\operatorname{sen}\varphi = \frac{12}{13}$.

a) Calcolare l'altezza della piramide.
b) Controllato che essa è $\frac{24}{5}a$, calcolare la distanza del vertice C dal piano della faccia VAB.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2001, *dal problema* 2)

$\left[\text{a) } \frac{24}{5}a;\ \text{b) } \frac{96}{13}a\right]$

55 Da un punto P esterno ad un piano α si conduca la perpendicolare PA al piano e la perpendicolare PH a una qualsiasi retta r del piano non passante per A, essendo H ed A punti del piano α.

a) Dimostrare che la retta AH è perpendicolare alla retta r.
b) Considerati sulla retta r due punti distinti B e C tali che $\overline{BH} = \overline{CH} = \overline{AH}$, dimostrare che il triangolo ABC è rettangolo.
c) Sapendo che $\overline{PA} = a$, dove a è una lunghezza nota, e che il piano dei punti P, B, C forma un angolo di 30° col piano α, determinare la distanza del punto A dal piano dei punti P, B, C e la distanza del punto B dal piano dei punti P, A, C.
d) Stabilire se la piramide avente come vertice il punto A e come base il triangolo PBC è retta.

(*Maturità Magistrale*, 1997, *problema* 1)

$\left[\text{c) } a\frac{\sqrt{3}}{2}, a\sqrt{6};\ \text{d) no}\right]$

56 Un cilindro C è circoscritto a una sfera di raggio r.

a) Determina i due valori che può assumere l'altezza di un cono inscritto nella sfera e avente area di base pari alla metà di quella del cilindro circoscritto alla sfera.
b) Dimostra che il cilindro C', inscritto nella sfera e avente basi di area pari a quella del cono inscritto, è equilatero.
c) Determina il rapporto fra il volumi di C e C'.

$\left[\text{a) } \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}r;\ \text{b) } h' = 2r' = r\sqrt{2};\ \text{c) } 2\sqrt{2}\right]$

57 In un semicerchio di centro O e diametro $AB = 2r$ sia MN una corda parallela al diametro. Eseguita una rotazione di 180° attorno all'asse di simmetria della figura:

a) determina qual è la distanza di MN dal diametro se il solido generato dal settore circolare MNO è equivalente a $\frac{1}{4}$ di quello generato dal semicerchio;
b) calcola l'area della superficie totale del solido ottenuto sottraendo alla semisfera di raggio r il primo solido descritto nel punto precedente;
c) determina il corrispondente angolo $M\widehat{O}N$.

$\left[\text{a) } \frac{3}{4}r;\ \text{b) } \left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\pi r^2;\ \text{c) } \cos\frac{M\widehat{O}N}{2} = \frac{3}{4}\right]$

58 Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D.

a) Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T, trovare una relazione che leghi V, S ed r.
b) Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T'.
c) Condotto il piano α, contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E, e posto che uno spigolo di T sia lungo s, calcolare la distanza di E dalla retta AB.
d) Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano a un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.
e) Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalla retta EA ha area $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (cm²).

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2003, *problema* 1)

$\left[\text{a) } V = \frac{1}{3}Sr\text{; b) } 3\text{; } 27\text{; c) } \frac{\sqrt{2}}{2}s\text{; d) } y = -\frac{2\sqrt{2}}{s}x^2 + s\frac{\sqrt{2}}{2}\text{; e) } s = 2\sqrt{2}\text{ cm}\right]$

59 Si consideri in un piano α un rettangolo $ABCD$ i cui lati BC ed AB misurano rispettivamente a e $2a$. Sia AEF, con $E \in AB$ ed $F \in CD$, un triangolo isoscele la cui base AE ha misura $2r$.
Il candidato:

a) dimostri che una retta s parallela ad AB, a distanza x da essa, interseca i triangoli AEF ed AEC secondo segmenti uguali;
b) detta C_1 la circonferenza di diametro AE e appartenente al piano γ passante per AB e perpendicolare ad α, e detti T_1 e T_2 i coni di base C_1 e vertici rispettivamente nei punti F e C, dimostri che le sezioni C_1' e C_2' di detti coni con il piano γ', passante per la retta s e parallelo al piano γ, sono circonferenze;
c) determini i volumi dei coni T_1 e T_2;
d) determini, per la via sintetica o analitica, il valore di x per il quale C_1' e C_2' sono tangenti esternamente.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 1997, *quesito* 3)

$\left[\text{c) } V_{T_1} = V_{T_2} = \frac{1}{3}\pi r^2 a\text{; d) } x = \frac{2ar}{2a + r}\right]$

60 Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo $2a$, dove a è una lunghezza nota, e l'angolo acuto adiacente a esso ha coseno uguale a $\frac{4}{5}$.

a) Condotta per il vertice dell'angolo retto una retta t che non attraversa il triangolo e indicata con x la misura dell'angolo che questa retta forma col cateto maggiore, esprimere in funzione di x il volume $V(x)$ del solido generato dal triangolo quando compie una rotazione completa intorno alla retta t.
b) Verificato che risulta:

$$V(x) = \frac{1}{2}\pi a^3 (4\,\mathrm{sen}\,x + 3\cos x),$$

con x appartenente ad un determinato intervallo, studiare la funzione $V(x)$ nell'intervallo stabilito e disegnarne il grafico in un piano cartesiano.
c) Utilizzare il grafico disegnato per determinare x in modo che il volume del solido di rotazione descritto sopra sia $k\pi a^3$, dove k è un parametro reale assegnato.
d) Completare la risoluzione dimostrando, col metodo preferito, che il volume V di un tronco di cono di raggi R ed r ed altezza h è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + r^2 + Rr).$$

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 1998, *quesito* 3)

$\left[\text{a) } V(x) = \frac{1}{2}\pi a^3 (4\,\mathrm{sen}\,x + 3\cos x)\text{, con } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\text{; c) 1 sol. per } \frac{3}{2} \le k < 2\text{, 2 sol. per } 2 \le k \le \frac{5}{2}\right]$

61 Una piramide ha per base il quadrato $ABCD$ di lato lungo 7 cm. Anche l'altezza VH della piramide è lunga 7 cm e il suo piede H è il punto medio del lato AB. Condurre per la retta AB il piano α che formi con il piano della base della piramide un angolo φ tale che $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ e indicare con EF la corda che il piano α intercetta sulla faccia VCD della piramide.

a) Spiegare perché il quadrilatero convesso $ABEF$ è inscrivibile in una circonferenza γ.
b) Tale quadrilatero è anche circoscrivibile ad una circonferenza?
c) Calcolare i volumi delle due parti in cui la piramide data è divisa dal piano α.
d) Dopo aver riferito il piano α a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), determinare l'equazione della circonferenza γ.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2004, *problema* 2)

$\left[\text{b) no; c) } 35 \text{ cm}^3, \frac{278}{3} \text{ cm}^3\text{; d) } x^2 + y^2 - 3y - \frac{49}{4} = 0\right]$

62 Il rettangolo $ABCD$ è tale che la retta che congiunge i punti medi dei suoi lati più lunghi, AB e CD, lo divide in due rettangoli simili a quello dato. Tali lati hanno la lunghezza assegnata a.

a) Determinare la lunghezza dei lati minori del rettangolo.
b) Sulla retta condotta perpendicolarmente al piano del rettangolo nel punto medio del lato AD prendere un punto V in modo che il piano dei punti V, B, C formi col piano del rettangolo dato un angolo di coseno $\frac{2}{\sqrt{13}}$. Calcolare il volume della piramide di vertice V e base $ABCD$.
c) Condotto il piano α parallelo al piano della faccia VAD della piramide, ad una distanza x da questo, in modo però che α sechi la piramide stessa, esprimere in funzione di x l'area del poligono sezione.
d) Calcolare infine i volumi delle due parti in cui il piano α divide la piramide nel caso in cui $x = \frac{a}{2}$.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2000, *quesito 2*)

$\left[\text{a) } \frac{\sqrt{2}}{2}a\text{; b) } V = \frac{\sqrt{2}}{4}a^3\text{; c) } A(x) = \frac{3\sqrt{2}\,(a^2 - x^2)}{8}, \text{ con } 0 \le x \le a\text{; d) } V_1 = \frac{11}{64}a^3\sqrt{2}, V_2 = \frac{5}{64}a^3\sqrt{2}\right]$

63 In un piano α è assegnato il triangolo ABC, retto in B, i cui cateti AB e BC misurano rispettivamente 4 e 3. Si conduca per il punto A la perpendicolare al piano α e sia V un punto di questa per cui $VA = AB$.
Il candidato:

a) dimostri, geometricamente o algebricamente, che, come tutte le altre facce del tetraedro $VABC$, anche la faccia VBC è un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è $V\widehat{B}C$;
b) calcoli il volume e la superficie totale del tetraedro;
c) detto M il punto medio di VA e P un punto dello stesso segmento a distanza x da V, esprima in funzione di x il volume v del tetraedro $MPQR$, essendo Q ed R le rispettive intersezioni degli spigoli VB e VC con il piano β parallelo ad α e passante per P.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 1999, *dal quesito* 2)

$\left[\text{b) } V = 8, S_{tot} = 24 + 6\sqrt{2}\text{; c) } v(x) = \frac{1}{8}x^2|x - 2|\right]$

CAPITOLO

16

١٦ [numerazione araba]

१६ [numerazione devanagari]

十六 [numerazione cinese]

LA GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO

LA MOSCA DI CARTESIO Si narra che Cartesio, una sera d'estate, mentre si rilassava e meditava sdraiato sul suo letto, si mise a osservare le curve irregolari del volo di una mosca. Si rese conto che, se avesse potuto misurare la distanza dell'insetto dalle pareti e dal soffitto della camera, avrebbe potuto determinare la posizione della mosca nello spazio in qualsiasi momento.

Come poteva Cartesio descrivere il volo di una mosca?

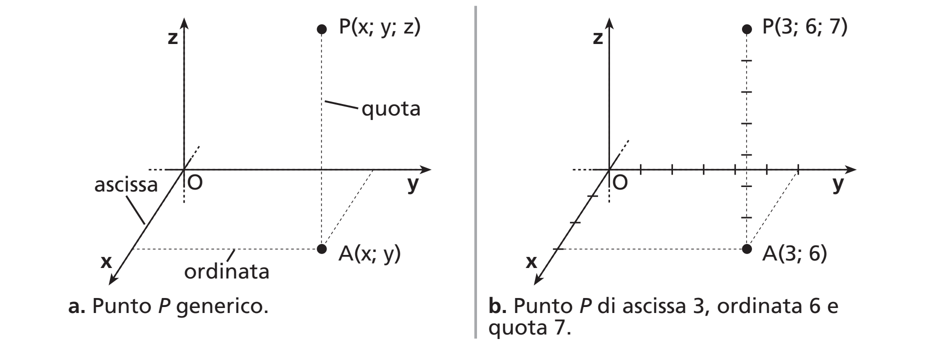
La risposta a pag. 1100

1. LE COORDINATE CARTESIANE NELLO SPAZIO

I punti

Per rappresentare lo spazio con un riferimento di tipo cartesiano, utilizziamo tre particolari rette a due a due perpendicolari, x, y e z, orientate come in figura 1. Esse si intersecano in un punto O, detto **origine** degli assi. In tale sistema $Oxyz$ un punto P è individuato da una terna ordinata di numeri reali e si indica $P(x; y; z)$. I numeri x, y, z vengono detti rispettivamente **ascissa, ordinata** e **quota**. La coppia $(x; y)$ individua il punto A, proiezione di P nel piano Oxy.

● Il piano Oxy è anche detto **piano terra**.



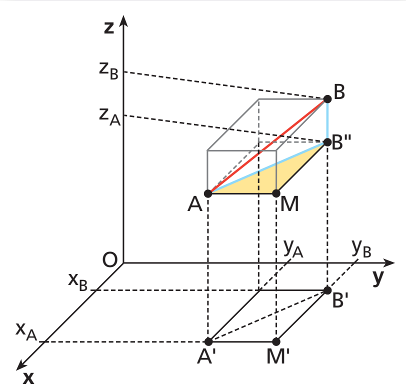
a. Punto P generico.

b. Punto P di ascissa 3, ordinata 6 e quota 7.

▶ **Figura 1** Rappresentazione di un punto P nello spazio.

La distanza fra due punti

Consideriamo i punti $A(x_A; y_A; z_A)$ e $B(x_B; y_B; z_B)$. Con l'aiuto della figura 2, possiamo osservare che il segmento AB è una delle diagonali di un parallelepipedo rettangolo i cui spigoli misurano $|x_A - x_B|$, $|y_A - y_B|$, $|z_A - z_B|$. Applichiamo la formula per calcolare la lunghezza della diagonale di un parallelepipedo:



▲ **Figura 2**

● La diagonale di un parallelepipedo si ottiene con la formula:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

dove a, b, c sono le misure degli spigoli.

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

In particolare, la distanza di un punto dall'origine si calcola con la formula:

$$\overline{AO} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}.$$

Il punto medio di un segmento

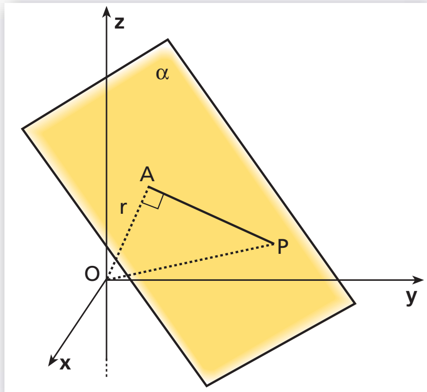
Consideriamo il segmento di estremi $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ e il suo punto medio M. Possiamo calcolare le coordinate di M utilizzando le formule viste nella geometria analitica del piano. Le coordinate del punto medio M sono quindi date dalle formule:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

2. IL PIANO

L'equazione generale del piano

Consideriamo un generico piano α nello spazio che non passi per l'origine O. Tracciamo la retta r per O perpendicolare ad α e consideriamo il punto $A(a; b; c)$ in cui r interseca α (figura 3).
Prendiamo su α un punto generico $P(x; y; z)$.
Poiché $OA \perp \alpha$, allora $OA \perp AP$, quindi il triangolo OAP è rettangolo.
Applichiamo il teorema di Pitagora:



◀ Figura 3

$$\overline{PO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AP}^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 + x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 + z^2 +$$

$$- 2cz + c^2 \rightarrow ax + by + cz - (a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$

● Per calcolare $\overline{PO}$, $\overline{AO}$, $\overline{AP}$, applichiamo più volte la formula della distanza.

Poniamo $-(a^2 + b^2 + c^2) = d$ e otteniamo l'equazione del piano α:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

In generale si può dimostrare che ogni equazione $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$, con a, b, c non tutti nulli, rappresenta un piano e viceversa.
L'equazione viene detta **equazione generale del piano**.
In particolare, l'equazione $ax + by + cz = 0$ rappresenta un piano passante per l'origine.

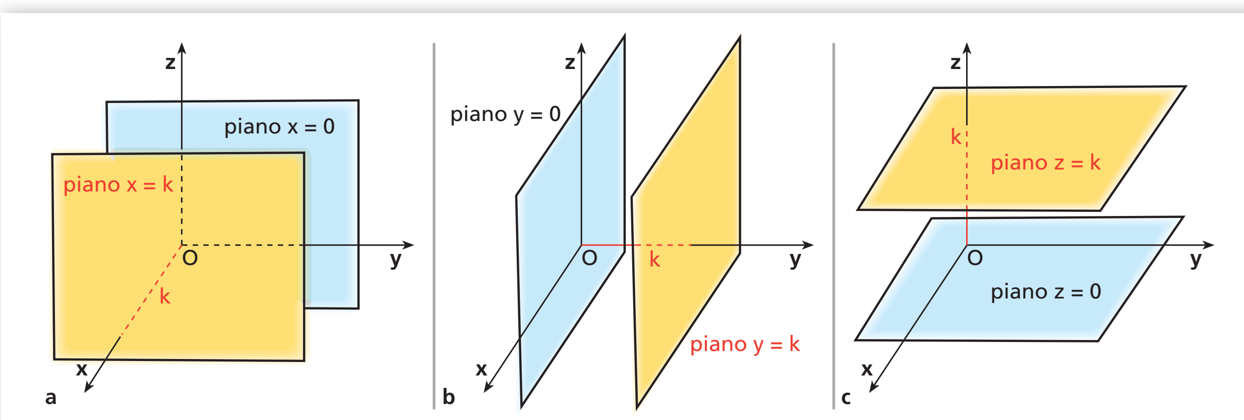
Piani particolari

Se l'equazione generale contiene una sola variabile, essa rappresenta **piani paralleli** a uno dei piani coordinati (figura 4). In particolare:

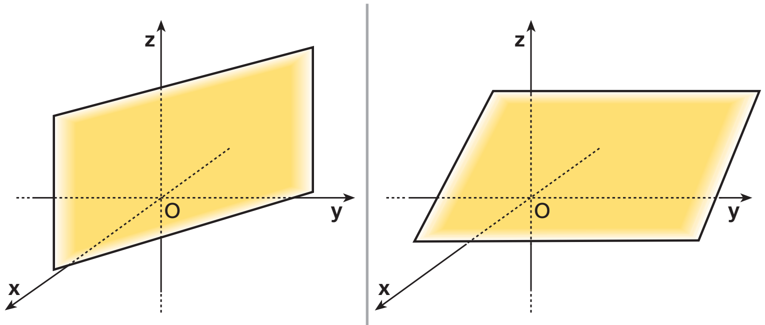
- $x = 0$, piano Oyz;
- $y = 0$, piano Oxz;
- $z = 0$, piano Oxy;
- $x = k$, piano parallelo al piano Oyz;
- $y = k$, piano parallelo al piano Oxz;
- $z = k$, piano parallelo al piano Oxy.

● I piani Oyz, Oxz e Oxy vengono anche detti **piani coordinati**.

▼ Figura 4



Inoltre, se nell'equazione $ax + by + cz + d = 0$ di un piano una sola variabile ha coefficiente 0, il corrispondente piano è parallelo all'asse di tale variabile e perciò perpendicolare al piano individuato dagli assi delle altre due variabili (figura 5).



a. $c = 0$: il piano è parallelo all'asse z e perpendicolare al piano Oxy.

b. $b = 0$: il piano è parallelo all'asse y e perpendicolare al piano Oxz.

c. $a = 0$: il piano è parallelo all'asse x e perpendicolare al piano Oyz.

▲ **Figura 5** Rappresentazione grafica di tre generici piani paralleli rispettivamente all'asse *z*, all'asse *y* e all'asse *x*.

La forma esplicita

Se nell'equazione generale del piano $ax + by + cz + d = 0$ è $c \neq 0$, allora possiamo risolvere l'equazione rispetto a z e otteniamo:

$$z = mx + ny + q.$$

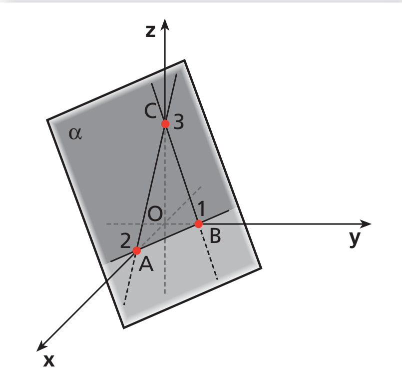
Diciamo che l'equazione del piano è scritta in forma esplicita.

Osserviamo che, poiché per $c = 0$ l'equazione generale rappresenta un piano parallelo all'asse z, si può scrivere in forma esplicita soltanto l'equazione di un piano non parallelo all'asse z.

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione del piano α passante per i punti $A(2; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 3)$ (figura 6).

Dalla figura vediamo che il piano α non è parallelo all'asse z, quindi possiamo utilizzare l'equazione esplicita $z = mx + ny + q$. Sostituendo le coordinate dei tre punti dati deduciamo il sistema nelle incognite m, n, q:



▲ **Figura 6** I punti $A(2; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 3)$ e il piano α.

$$\begin{cases} 2m + q = 0 \\ n + q = 0 \\ q = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{3}{2} \\ n = -3 \\ q = 3 \end{cases}$$

Pertanto l'equazione del piano ABC è:

$$z = -\frac{3}{2}x - 3y + 3 \quad \text{oppure} \quad 3x + 6y + 2z - 6 = 0.$$

I piani paralleli

Consideriamo i piani aventi le seguenti equazioni:

$$2x - y + 3z - 5 = 0, \quad -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}z + \frac{5}{4} = 0.$$

Le due equazioni sono equivalenti perché i coefficienti corrispondenti sono proporzionali: i coefficienti della prima si deducono da quelli della seconda moltiplicandoli per -4. Esse rappresentano pertanto lo stesso piano.
Consideriamo ora le seguenti equazioni:

$$x - y - 2z - 4 = 0, \qquad 2x - 2y - 4z - 3 = 0.$$

Vediamo che i coefficienti delle variabili corrispondenti hanno rapporto $\frac{1}{2}$, mentre i termini noti hanno rapporto $\frac{4}{3}$. Le due equazioni non hanno soluzioni comuni. Infatti nella prima, *per tutti i valori* attribuiti alle variabili, l'espressione $x - y - 2z$ deve valere 4, mentre nella seconda, *per tutti i valori* attribuiti alle variabili, la stessa espressione deve valere $\frac{3}{2}$. I due piani, pertanto, non hanno punti comuni e sono paralleli.
In generale, per piani che non siano paralleli ai piani coordinati, si può dimostrare il seguente teorema sul parallelismo fra due piani.

TEOREMA

Condizione di parallelismo fra piani

Due piani di equazioni $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono paralleli se:

$$\boldsymbol{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}}.$$

- Se vogliamo considerare anche piani paralleli ai piani coordinati, allora possiamo dire che i due piani sono paralleli se: $a = ka'$, $b = kb'$, $c = kc'$, con $k \in \mathbb{R}$.

In particolare, se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$, i piani sono coincidenti.

I piani perpendicolari

Si può dimostrare il seguente teorema sulla perpendicolarità fra due piani.

TEOREMA

Condizione di perpendicolarità fra piani

Due piani di equazioni $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono perpendicolari se:

$$\boldsymbol{aa' + bb' + cc' = 0}.$$

- Se le equazioni dei due piani sono in forma esplicita, la condizione è: $mm' + nn' = -1$.

La distanza di un punto da un piano

Dato il piano α di equazione $ax + by + cz + d = 0$ e il punto $A(x_A; y_A; z_A)$, si dimostra che la distanza h di A da α è:

$$\boldsymbol{h = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo la distanza del punto $P(0; 1; -1)$ dal piano di equazione $x - y + 2z - 1 = 0$.
Utilizziamo la formula della distanza di un punto da un piano:

$$h = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}}.$$

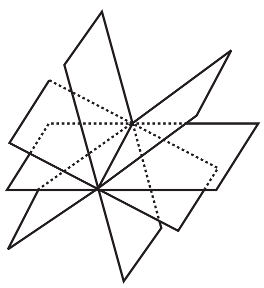
3. LA RETTA

Le equazioni generali

● Nel piano cartesiano Oxy due rette non parallele si intersecano in un punto. Per determinarne le coordinate occorre risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due rette.

Nello spazio due piani non paralleli si intersecano lungo una retta: il sistema formato dalle equazioni dei due piani permette di determinare l'equazione della retta intersezione.
In generale, a ogni retta nello spazio corrisponde un sistema formato da due equazioni di primo grado che rappresentano due piani non paralleli:

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax + by + cz + d = 0} \\ \boldsymbol{a'x + b'y + c'z + d' = 0} \end{cases}$$



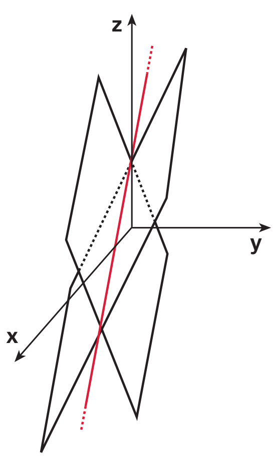
Queste equazioni si dicono **equazioni generali** della retta.
Il sistema che individua la retta non è unico, perché sono infiniti i piani che hanno per intersezione la retta (figura a lato). Dunque ogni sistema equivalente rappresenta la stessa retta.

ESEMPIO

Il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

rappresenta una retta. I due piani infatti non sono paralleli perché i coefficienti delle variabili corrispondenti non hanno lo stesso rapporto.



Altre forme dell'equazione di una retta

Le equazioni ridotte

Riprendiamo l'esempio precedente e risolviamo le equazioni in modo che x e y siano in funzione di z:

$$\begin{cases} x - 2y = -z + 1 \\ 2x + y = z - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}z - \frac{1}{5} \\ y = \frac{3}{5}z - \frac{3}{5} \end{cases}$$

Le equazioni ottenute vengono chiamate le equazioni ridotte della retta data. Attribuendo a z valori arbitrari si hanno le coordinate di punti appartenenti alla retta data.
In generale le **equazioni ridotte** di una retta si ottengono scegliendo opportune coppie di piani paralleli a uno degli assi coordinati, a seconda che il sistema generale sia risolubile rispetto alle variabili x e y, o x e z, o y e z.

● Abbiamo scritto l'equazione della retta attraverso l'intersezione di un piano parallelo all'asse y e di un piano parallelo all'asse x.

Le equazioni sono:

$$\begin{cases} x = gz + p \\ y = hz + q \end{cases}$$ se la retta non è parallela al piano Oxy;

$$\begin{cases} x = ky + r \\ z = ly + s \end{cases}$$ se la retta non è parallela al piano Oxz;

$$\begin{cases} y = mx + t \\ z = nx + u \end{cases}$$ se la retta non è parallela al piano Oyz.

La retta passante per due punti

Siano dati i punti $P(x; y; z)$, $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$. È possibile dimostrare che, se le coordinate verificano le condizioni

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \text{ ossia } \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\ \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} \end{cases},$$

allora P, A, B sono allineati. Tali relazioni si dicono **condizioni di allineamento** di tre punti.

Se P è un punto variabile, tali equazioni rappresentano la **retta passante per due punti** A e B.

ESEMPIO

Scriviamo le equazioni della retta passante per i punti $A(-1; 2; 0)$, $B(1; -1; -2)$.

Impostiamo le condizioni di allineamento del generico punto $P(x; y; z)$ con i punti A e B:

$$\begin{cases} \dfrac{x - (-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{y - 2}{-1 - 2} \\ \dfrac{y - 2}{-1 - 2} = \dfrac{z - 0}{-2 - 0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x + 1}{2} = \dfrac{y - 2}{-3} \\ \dfrac{y - 2}{-3} = \dfrac{z}{-2} \end{cases}$$

Riduciamo e risolviamo rispetto alla variabile y:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{2}{3}y - \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Abbiamo così ottenuto una coppia di equazioni ridotte della retta passante per i punti dati.

Le equazioni frazionarie e le equazioni parametriche

Se poniamo $x_2 - x_1 = l$, $y_2 - y_1 = m$, $z_2 - z_1 = n$, le precedenti equazioni assumono la seguente forma:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}}, \quad \text{o anche} \quad \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} \\ \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n} \end{cases}$$

I coefficienti l, m, n determinano la direzione. Se è data una terna ordinata di coefficienti $(l; m; n)$, tutte le terne del tipo $(kl; km; kn)$ individuano la stessa direzione.
Si può allora dimostrare che due **rette** sono **parallele** se hanno i coefficienti direttivi proporzionali ossia $l = kl'$; $m = km'$; $n = kn'$ e viceversa.

Queste equazioni si chiamano **equazioni frazionarie** della retta; i numeri l, m, n costituiscono una terna ordinata di **coefficienti direttivi**. Il sistema può essere utilizzato anche per scrivere le equazioni della retta passante per un punto dato $M(x_1; y_1; z_1)$ e con coefficienti direttivi assegnati l, m, n. Nell'esempio considerato $l = 2$, $m = -3$, $n = -2$; M è uno dei due punti A o B.
Se $x_1 = x_2$, le equazioni frazionarie sono inutilizzabili. Tuttavia è immediato riconoscere che la retta passante per i due punti dati è parallela al piano Oyz, quindi possiamo scrivere le equazioni ridotte.
Analogamente, se $y_1 = y_2$, la retta è parallela al piano Oxz; se $z_1 = z_2$, la retta è parallela al piano Oxy.

ESEMPIO

Determiniamo le equazioni della retta passante per i punti $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 1; 0)$.
Poiché $y_1 = y_2 = 1$, la retta è parallela al piano Oxz e non è possibile utilizzare le equazioni frazionarie. Scriviamo le equazioni ridotte utilizzando il primo caso:

$$\begin{cases} x = gz + p \\ y = hz + q \end{cases}$$

Sostituiamo le coordinate di A e di B:

$$A \rightarrow \begin{cases} 1 = g + p \\ 1 = h + q \end{cases}, \quad B \rightarrow \begin{cases} -1 = 0 + p \\ 1 = 0 + q \end{cases}; \quad \text{quindi} \begin{cases} g = 2 \\ h = 0 \\ p = -1 \\ q = 1 \end{cases}$$

Le equazioni ridotte della retta data sono:

$$\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Le equazioni frazionarie possono essere ulteriormente trasformate osservando che, considerando una retta e un suo punto $P(x; y; z)$, i rapporti

$$\frac{x - x_1}{l}, \quad \frac{y - y_1}{m}, \quad \frac{z - z_1}{n}$$

sono uguali fra loro, ma il loro valore cambia al variare del punto P sulla retta. Se indichiamo con t il valore comune dei tre rapporti, le equazioni frazionarie si possono riscrivere nella seguente forma:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{l} = t \\ \dfrac{y - y_1}{m} = t \\ \dfrac{z - z_1}{n} = t \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x = x_1 + lt} \\ \boldsymbol{y = y_1 + mt}, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}. \\ \boldsymbol{z = z_1 + nt} \end{cases}}$$

Queste sono le **equazioni parametriche** della retta; anch'esse rappresentano la retta passante per un punto dato e con coefficienti direttivi assegnati. Rimangono valide anche se uno dei coefficienti direttivi è nullo. In particolare:

- se $l = 0$, la retta è parallela al piano Oyz;
- se $m = 0$, la retta è parallela al piano Oxz;

- se $n = 0$, la retta è parallela al piano Oxy;
- se $l = m = 0$, la retta è parallela all'asse z;
- se $l = n = 0$, la retta è parallela all'asse y;
- se $m = n = 0$, la retta è parallela all'asse x.

4. ALCUNE SUPERFICI NOTEVOLI

L'equazione di una superficie

Nella geometria analitica dello spazio una **superficie** è un luogo geometrico definito da un'equazione nelle variabili x, y, z, ossia una relazione del tipo

$$F(x; y; z) = 0,$$

che deve essere soddisfatta dalle coordinate dei suoi punti.
Se $F(x; y; z)$ è un polinomio, la superficie si dice *algebrica di ordine n*, dove n è il grado del polinomio. I piani sono superfici algebriche del primo ordine. Dopo i piani le più semplici superfici che possiamo studiare nello spazio sono le quadriche.
Le **quadriche** sono superfici algebriche del secondo ordine, perché si possono rappresentare con un'equazione di secondo grado del tipo:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + l = 0.$$

Il piano è una superficie in cui la F è un polinomio di primo grado:

$$F(x; y; z) = \\ = ax + by + cz + d.$$

Le curve

Consideriamo due superfici di equazioni $F(x; y; z) = 0$ e $G(x; y; z) = 0$; il luogo dei punti dello spazio le cui coordinate risolvono il sistema

$$\begin{cases} F(x; y; z) = 0 \\ G(x; y; z) = 0 \end{cases}$$

è, in generale, una curva. Una curva può pertanto essere considerata come l'intersezione di due superfici. Il sistema delle corrispondenti equazioni è una rappresentazione analitica della curva.

Ci riferiamo a superfici che si intersecano senza avere *parti* in comune.

Una curva si dice *piana* se tutti i suoi punti appartengono a uno stesso piano. Più avanti e negli esercizi incontreremo esempi di curve piane.

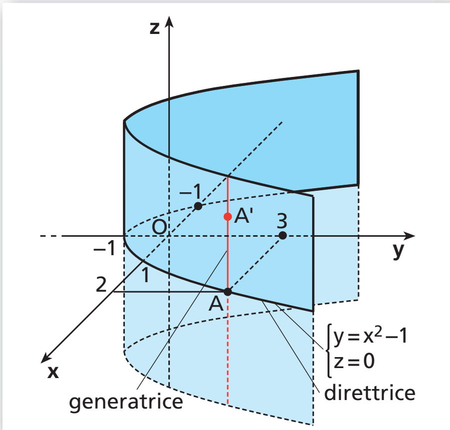
La superficie cilindrica

Consideriamo una superficie σ la cui equazione sia di secondo grado e contenga soltanto due variabili, per esempio:

$$x^2 - y - 1 = 0.$$

Poiché le sue coordinate sono una soluzione dell'equazione, il punto $A(2; 3; 0)$ appartiene a σ. Per lo stesso motivo anche tutti i punti $A'(2; 3; z)$, con $z \in \mathbb{R}$, appartengono a σ. Tali punti costituiscono una retta parallela all'asse z e giacente sulla superficie data. Osserviamo che questa proprietà è valida per ogni insieme di punti del tipo:

$$P(k; k^2 - 1; z), \qquad \text{con } k \in \mathbb{R} \text{ e } z \in \mathbb{R}.$$



▶ **Figura 7** **Esempio di superficie cilindrica parabolica retta.**

Quindi possiamo affermare che la superficie σ è costituita da rette parallele all'asse z. Essa è una **superficie cilindrica** (o **cilindro indefinito**) e le rette parallele all'asse z che la formano sono le **generatrici**.
Se intersechiamo tale superficie con il piano Oxy, otteniamo la curva di equazioni:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Essa giace nel piano Oxy e si chiama **direttrice**. In questo esempio la direttrice è la parabola che, nel piano Oxy, ha equazione $y = x^2 - 1$. Poiché le generatrici sono perpendicolari al piano contenente la direttrice, la superficie cilindrica si dice **retta**.
In questo capitolo studieremo soltanto superfici cilindriche rette con le generatrici parallele a uno degli assi coordinati.
In generale, un'*equazione di secondo grado in due variabili* rappresenta una superficie cilindrica se ammette soluzioni. In particolare, a un'equazione del tipo:

- $F(x; y) = 0$ corrisponde un cilindro indefinito retto con le generatrici parallele all'asse z;
- $F(x; z) = 0$ corrisponde un cilindro indefinito retto con le generatrici parallele all'asse y;
- $F(y; z) = 0$ corrisponde un cilindro indefinito retto con le generatrici parallele all'asse x.

Inoltre se la *direttrice* è:

- una parabola, il cilindro indefinito si dice *parabolico*;
- una ellisse, il cilindro indefinito si dice *ellittico*;
- una circonferenza, il cilindro indefinito si dice *circolare*;
- un'iperbole, il cilindro indefinito si dice *iperbolico*.

● In questo capitolo studieremo cilindri indefiniti ellittici in cui l'ellisse è in forma canonica; cilindri indefiniti iperbolici in cui l'iperbole è in forma canonica oppure è equilatera riferita agli asintoti.

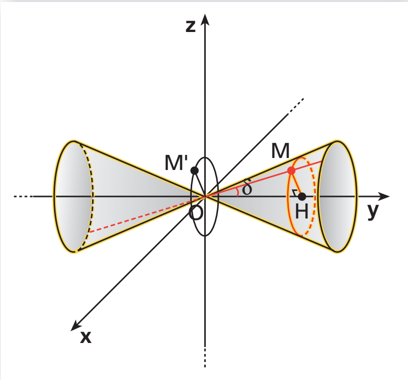
● Un'equazione del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rappresenta una superficie cilindrica circolare soltanto se i coefficienti verificano la condizione $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \geq 0$, ossia se l'equazione, riferita al piano coordinato Oxy, rappresenta effettivamente una circonferenza. La stessa osservazione vale se l'equazione contiene le variabili x, z oppure y, z.

La superficie conica

● L'asse è la retta attorno a cui si fa ruotare una generatrice. In questo capitolo studieremo soltanto superfici coniche con il vertice nell'origine e con asse coincidente con uno degli assi coordinati.

Con considerazioni analoghe a quelle della superficie cilindrica, si può parlare di una superficie conica circolare retta con *asse* coincidente con l'asse y e con le generatrici passanti per l'origine. Siano $M(x; y; z)$ un punto della superficie conica, OM la retta corrispondente generatrice, $H(0; y; 0)$ la proiezione ortogonale di M sull'asse y, δ la *semiapertura* (figura 8). Possiamo esprimere la condizione di appartenenza di M alla superficie conica mediante la relazione:

$$\frac{\overline{MH}}{\overline{OH}} = \operatorname{tg}\delta, \quad \text{con } \overline{OH} = |y| \to \frac{\overline{MH}}{|y|} = \operatorname{tg}\delta.$$



◀ **Figura 8 Superficie conica circolare retta con asse coincidente con l'asse y. $\overline{OM}$ è una generatrice; δ è la semiapertura; $\overline{MH}$ è perpendicolare all'asse y.**

● La semiapertura δ è sempre un angolo *acuto*.

$\overline{MH}$ è il raggio della circonferenza che si ottiene sezionando il cono con il piano passante per M e parallelo al piano Oxz. La proiezione ortogonale di questa circonferenza sul piano Oxz è la circonferenza con centro nell'origine e raggio $\overline{OM'} = \overline{MH}$ che ha per equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = \overline{OM'}^2 \\ y = 0 \end{cases}; \quad \text{quindi } \overline{MH}^2 = x^2 + z^2.$$

Sostituendo nella relazione, otteniamo:

$$\frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{|y|} = \operatorname{tg}\delta \quad \to \quad x^2 + z^2 - y^2 \operatorname{tg}^2\delta = 0.$$

Poiché $\operatorname{tg}^2\delta$ può prendere qualsiasi valore reale non negativo l'equazione si scrive anche nella seguente forma equivalente:

$$x^2 + z^2 - k^2 y^2 = 0, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

In modo analogo si ricavano le equazioni delle superfici coniche circolari rette con asse coincidente con l'asse x o con l'asse z. Riportiamo un elenco dei casi possibili.
L'equazione di una **superficie conica circolare retta** con semiapertura δ è:

- $x^2 + y^2 - k^2 z^2 = 0$ e $\operatorname{tg}^2\delta = k^2$, se l'asse coincide con l'asse z;
- $x^2 + z^2 - k^2 y^2 = 0$ e $\operatorname{tg}^2\delta = k^2$, se l'asse coincide con l'asse y;
- $y^2 + z^2 - k^2 x^2 = 0$ e $\operatorname{tg}^2\delta = k^2$, se l'asse coincide con l'asse x.

Le superfici coniche rappresentate dalle equazioni precedenti godono di particolari simmetrie. Consideriamo per esempio la superficie di equazione:

$$x^2 + y^2 - 3z^2 = 0.$$

Prendiamo uno dei suoi punti, per esempio $A(1; \sqrt{2}; 1)$. Per sostituzione diretta nell'equazione possiamo verificare che il punto $B(-1; \sqrt{2}; 1)$, simmetrico di A rispetto al piano Oyz, appartiene alla superficie. In modo simile si verifica che vi appartengono anche i punti $C(1; -\sqrt{2}; 1)$ e $D(1; \sqrt{2}; -1)$, simmetrici di A rispetto al piano Oxz e al piano Oxy. Pertanto la superficie data è simmetrica rispetto a ciascuno dei piani coordinati e quindi anche rispetto agli assi e all'origine.

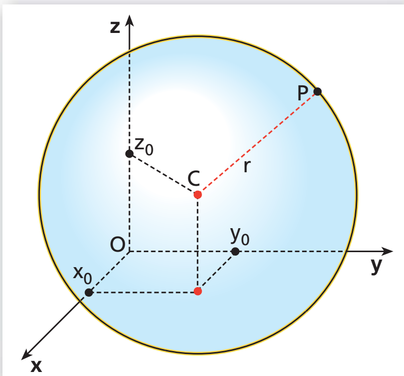
La superficie sferica

DEFINIZIONE

Superficie sferica

Si dice superficie sferica di centro C e raggio r il luogo geometrico dei punti dello spazio aventi distanza r da C.

Dalla definizione possiamo dedurre l'equazione utilizzando la formula della distanza fra due punti.



▶ **Figura 9** La superficie sferica di centro C e raggio r.

Indichiamo con $(x_0; y_0; z_0)$ le coordinate del centro e con r il raggio. Scriviamo la condizione di appartenenza del generico punto $P(x; y; z)$ alla superficie sferica:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=r.$$

Elevando al quadrato i due membri, otteniamo l'equazione in forma razionale:

$$\boldsymbol{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2}.$$

Sviluppando i calcoli, si ottiene l'equazione:

$$\boldsymbol{x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0},$$

con $a=-2x_0$, $b=-2y_0$, $c=-2z_0$ e $d=x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2$.

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione della superficie sferica di centro $M(1; -1; 1)$ e raggio 3 utilizzando la formula:

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9.$$

Sviluppando i quadrati e riducendo, possiamo metterla anche nella forma:

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-6=0.$$

Un'equazione del tipo

$$\boldsymbol{x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0}$$

non rappresenta sempre una superficie sferica. Se confrontiamo questa equazione con quella dedotta dalla definizione, possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$x_0=-\frac{a}{2},\ y_0=-\frac{b}{2},\ z_0=-\frac{c}{2},\ r^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d.$$

Il valore dell'espressione $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d$ coincide con il quadrato del raggio; pertanto l'equazione rappresenta una superficie sferica soltanto se i suoi coefficienti soddisfano la condizione:

$$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d\geq 0.$$

In questo caso le coordinate del centro e il raggio sono:

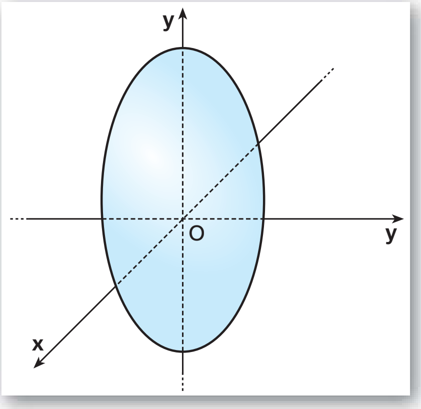
$$C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right),\ r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d}\,.$$

Altre superfici quadriche notevoli

L'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

corrisponde a un **ellissoide**.
Le sezioni dell'ellissoide con i piani coordinati sono ellissi, e così pure le sezioni (quando esistono) con piani paralleli ai piani coordinati.



▲ **Figura 10** Ellissoide.

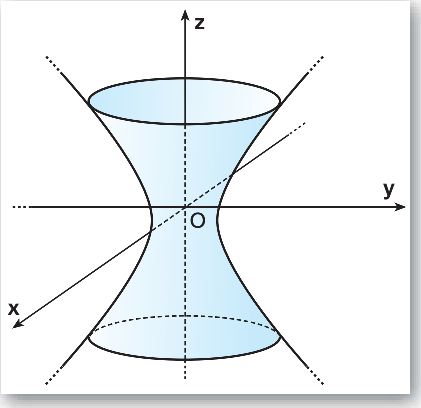
● Nota l'analogia con l'equazione dell'ellisse nel piano.

● Se per esempio intersechiamo l'ellissoide con il piano Oxy, di equazione $z = 0$, mettendo a sistema le loro equazioni, otteniamo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, che è l'equazione di un'ellisse nel piano Oxy.

L'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

corrisponde a un **iperboloide a una falda**.
Le sezioni dell'iperboloide a una falda considerato con il piano coordinato Oxy e con piani a esso paralleli sono delle ellissi. Le intersezioni con i piani coordinati Oxz e Oyz sono iperboli, così come le sezioni con piani a essi paralleli.



▲ **Figura 11** Iperboloide a una falda.

● Anche le superfici di equazioni

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

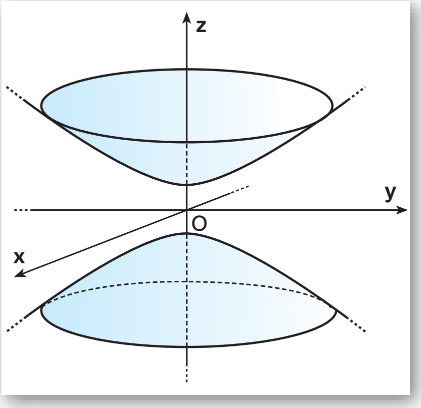
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sono **iperboloidi a una falda**.

L'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

corrisponde a un **iperboloide a due falde**.
Le sezioni dell'iperboloide a due falde considerato con i piani coordinati Oyz e Oxz e con piani a essi paralleli sono iperboli. L'intersezione con il piano coordinato Oxy non esiste, mentre quelle con piani a esso paralleli, quando esistono, sono ellissi.



▲ **Figura 12** Iperboloide a due falde.

● Anche le superfici di equazioni

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

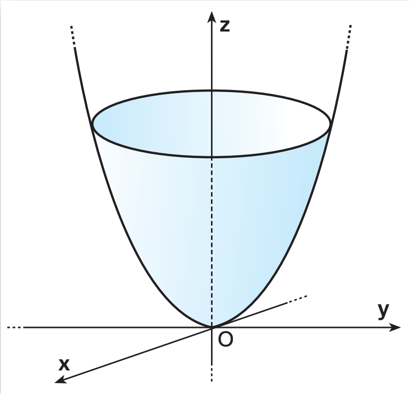
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

sono **iperboloidi a due falde**.

L'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

corrisponde a un **paraboloide ellittico**.
Le sezioni del paraboloide ellittico considerato con i piani coordinati Oyz e Oxz e con piani a essi paralleli sono parabole. L'intersezione con il piano coordinato Oxy è un solo punto, l'origine, mentre quelle con piani paralleli al piano Oxy, quando esistono, sono ellissi.



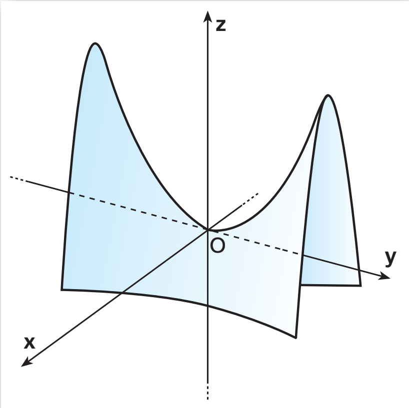
▲ **Figura 13** Paraboloide ellittico.

- Anche la superficie di equazione $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-2z$$ è un **paraboloide ellittico** e lo sono inoltre quelle ottenute dalle date scambiando due variabili. Per esempio: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=2y.$$

L'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-2z$$

corrisponde a un **paraboloide iperbolico**.
Le sezioni del paraboloide iperbolico considerato con i piani coordinati Oyz e Oxz e con piani a essi paralleli sono parabole. Le intersezioni con il piano coordinato Oxy e con piani a esso paralleli sono iperboli. Nel caso particolare del piano Oxy l'iperbole degenera in due rette passanti per l'origine e di coefficienti angolari $\pm\frac{b}{a}$.



▲ **Figura 14** Paraboloide iperbolico. Viene anche detto *paraboloide a sella*.

- Anche la superficie di equazione $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$ è un **paraboloide iperbolico** e lo sono inoltre quelle ottenute dalle date scambiando due variabili. Per esempio: $$\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=-2x.$$

5. LE FUNZIONI DI DUE VARIABILI

DEFINIZIONE

Funzione reale di due variabili reali
Si dice funzione reale di due variabili reali una relazione che associa a ogni coppia ordinata di numeri reali $(x; y)$, appartenente a un sottoinsieme S di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, uno e un solo numero reale z.

Possiamo indicarla con $z = f(x; y)$, oppure:

$$f:(x;y)\mapsto z, \qquad \text{con } (x;y)\in S\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ z\in\mathbb{R}.$$

Il sottoinsieme S è detto **dominio** della funzione e l'insieme dei valori corrispondenti z è detto **codominio** della funzione.

- Per esempio, $z = 3x + 2xy$ è una funzione di due variabili. x e y sono le variabili indipendenti, z è la variabile dipendente.

- $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ si denota anche con $\mathbb{R}^2$.

- Il concetto di funzione di due variabili può essere generalizzato considerando funzioni di più variabili. Per esempio, $z = 5y^2 - 3xt$ è una funzione di tre variabili, x, y e t.

La ricerca del dominio

Il **dominio naturale** di una funzione $z = f(x; y)$ è l'insieme di *tutte* le coppie $(x; y)$ appartenenti a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ per le quali la funzione è definita. Esso è quindi il più ampio dominio che possiamo scegliere per la funzione. Per brevità lo indicheremo soltanto con **dominio**.
Vediamo con alcuni esempi come si determina.

Il dominio naturale si chiama anche **campo di esistenza**.

ESEMPIO

1. Determiniamo il dominio della funzione $z = \dfrac{3x + 2y - 5}{x^2 + 4}$.

Per il denominatore, dobbiamo porre $x^2 + 4 \neq 0$. Poiché l'espressione è somma di due quantità di cui la prima è maggiore o uguale a 0 e la seconda positiva, la disuguaglianza è vera $\forall x \in \mathbb{R}$. Il dominio è pertanto tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

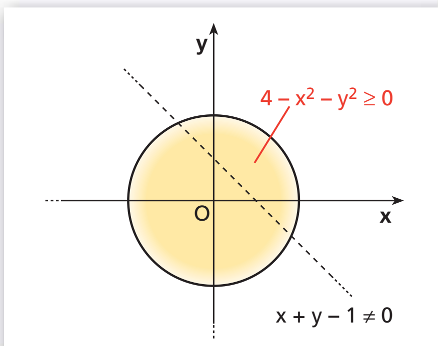
2. Determiniamo il dominio della funzione $z = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x + y - 1}$.

Dobbiamo imporre contemporaneamente due condizioni:

- che il radicando sia positivo o nullo;
- che il denominatore sia diverso da 0.

Dobbiamo pertanto risolvere il sistema: $\begin{cases} 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ x + y - 1 \neq 0 \end{cases}$

Procediamo graficamente, come indicato in figura 15.



◄ **Figura 15** Rappresentazione grafica del dominio della funzione $z = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x + y - 1}$.

Il dominio della funzione è costituito da tutte le coppie di numeri reali che sono le coordinate di punti appartenenti alla parte di piano colorata in figura, compresi quelli appartenenti alla circonferenza, ma esclusi i punti appartenenti alla retta $x + y - 1 = 0$.

$4 - x^2 - y^2 \geq 0$ si può scrivere $x^2 + y^2 \leq 4$, le cui soluzioni sono rappresentate dal cerchio di centro $O(0; 0)$ e raggio 2.
$x + y - 1 = 0$ è l'equazione di una retta. La disuguaglianza relativa indica che i punti della retta non vanno considerati.

3. Determiniamo il dominio della funzione:

$$z = \frac{\sqrt{y - x^2 + 4x}}{\sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36} + 7}.$$

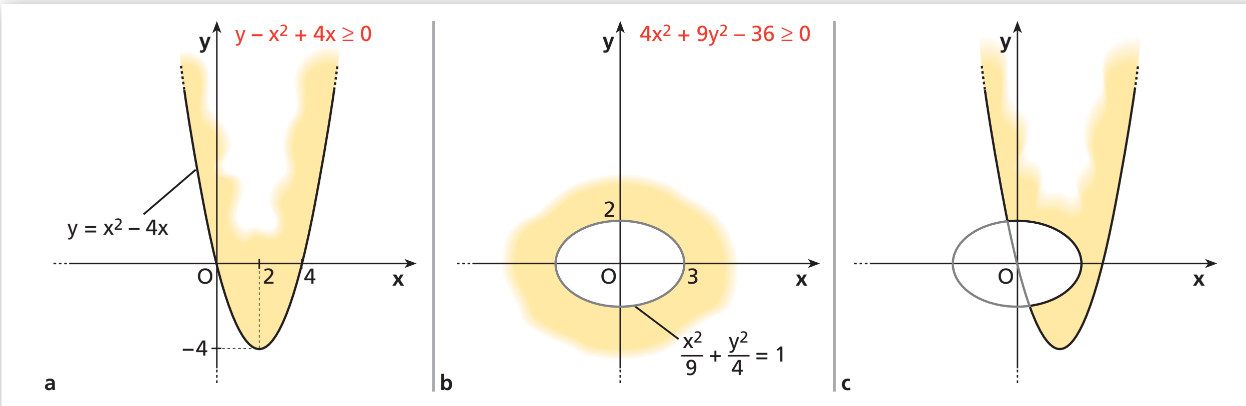
Dobbiamo imporre tre condizioni:

- che il denominatore sia diverso da 0;
- che il radicando al numeratore sia maggiore o uguale a 0;
- che il radicando al denominatore sia maggiore o uguale a 0.

Essendo il denominatore costituito da due quantità di cui la prima (il radicale) è sempre sicuramente positiva o nulla e la seconda (il numero 7) è positiva, la prima condizione è sempre verificata, quindi le condizioni si riducono al sistema:

$$\begin{cases} y - x^2 + 4x \geq 0 \\ 4x^2 + 9y^2 - 36 \geq 0 \end{cases}$$

Risolviamo graficamente (figura 16).



▲ Figura 16

Il dominio della funzione è rappresentato dalla parte colorata nella figura 16*c*, compresi i punti che appartengono ai tratti di curve che la delimitano.

Il grafico di una funzione di due variabili

Nello spazio cartesiano, il **grafico** di una funzione $z = f(x; y)$ è l'insieme dei punti di coordinate $(x; y; z)$ per cui sussiste la relazione $z = f(x; y)$.
Mentre il dominio di una funzione, essendo costituito da coppie di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, è rappresentabile nel piano Oxy, il grafico di una funzione è in generale una superficie nello spazio e quindi la sua rappresentazione è piuttosto complicata.

I grafici per punti

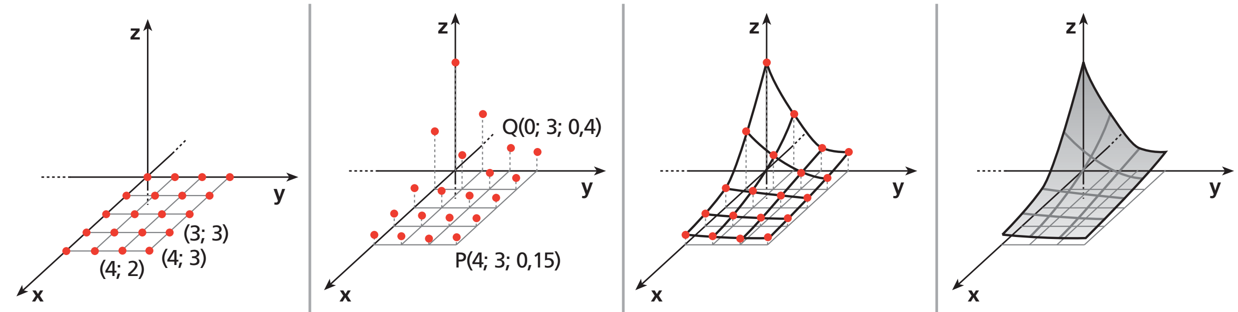
Costruire grafici per punti è il metodo che viene in genere usato da un elaboratore elettronico, e si dimostra particolarmente efficace se attuato per un numero molto elevato di punti.
Indichiamo soltanto le caratteristiche di questo metodo, riservandoci di utilizzarlo in quei casi in cui altri metodi non daranno risultati adeguati. Vediamo un esempio.

ESEMPIO

Rappresentiamo la funzione:

$$z = \frac{4}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Notiamo che il dominio della funzione è $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in quanto il denominatore della frazione non è mai nullo.
Non potendo rappresentare la funzione in tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, studiamo il suo grafico in un dominio più ristretto. Se costruiamo un reticolo sul piano Oxy (per esempio, tracciando rette parallele agli assi x e y per i punti degli assi che hanno coordinate intere e positive) e per ogni punto del reticolo calcoliamo i corrispondenti valori di z, otteniamo la figura 17.



a. Tracciamo i lati di un reticolo.

b. Innalziamo le quote da ciascun nodo.

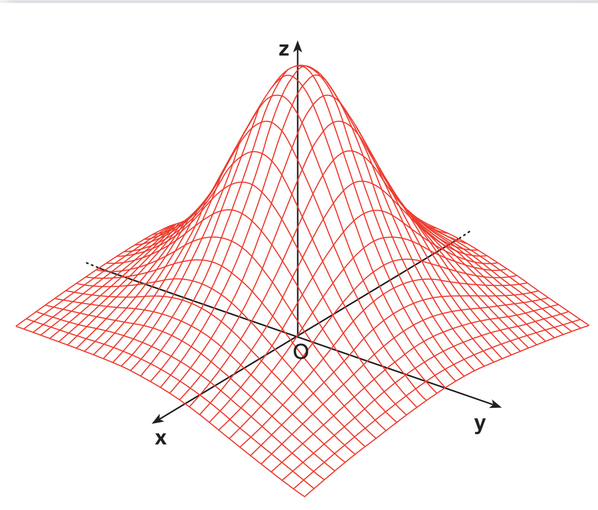
c. Congiungiamo i punti ottenuti con delle linee.

d. Otteniamo la rappresentazione della superficie nello spazio.

▲ **Figura 17** Per innalzare le quote abbiamo calcolato per ciascun nodo il corrispondente valore della quota. Per esempio, per il nodo (4; 3), abbiamo sostituito in z i valori 4 e 3 rispettivamente a x e y.

$$z = \frac{4}{4^2 + 3^2 + 1} \simeq 0{,}15.$$

Come si vede dalla figura, la rappresentazione è parziale e approssimata, tuttavia riesce a dare un'idea dell'andamento della funzione. Un grafico migliore si ottiene con l'uso del computer (figura 18).



◀ **Figura 18** Rappresentazione grafica della funzione

$$z = \frac{4}{x^2 + y^2 + 1}$$

ottenuta con l'uso del computer.

Le linee di livello

Un altro modo per rappresentare una superficie è quello delle *linee di livello*.

DEFINIZIONE

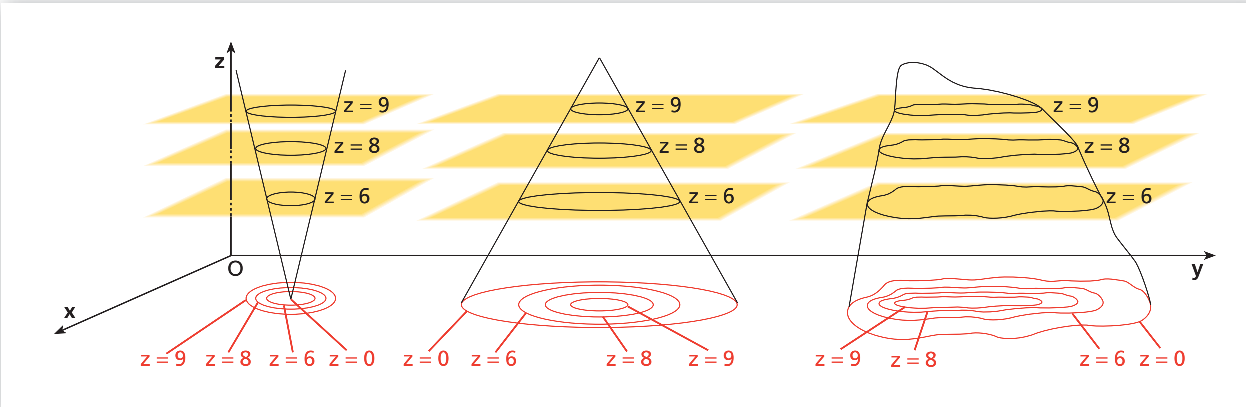
Linea di livello

Una linea di livello è l'insieme delle proiezioni ortogonali sul piano Oxy dei punti di una superficie che hanno tutti la stessa quota $z = k$.

Una linea di livello si ottiene anche come intersezione fra la superficie e un piano parallelo al piano Oxy.

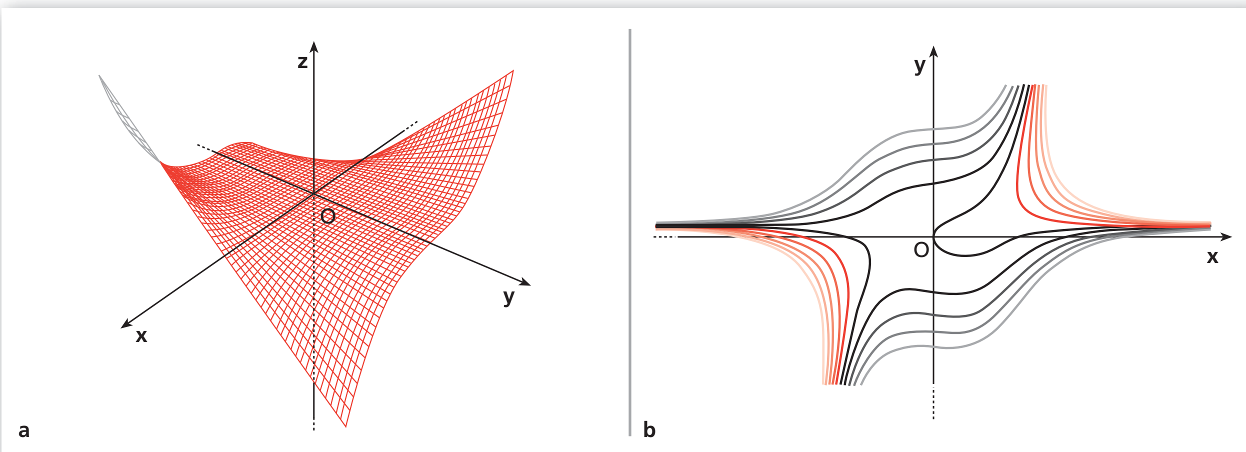
Per farci un'idea dell'andamento di una funzione possiamo considerare le linee di livello associate alla superficie che rappresenta la funzione, assegnando a ogni linea il corrispondente valore della quota del piano secante $z = k$ (figura 19).

● La proiezione ortogonale di un punto P su un piano α è il punto di intersezione fra il piano e la retta passante per P e perpendicolare ad α.



▲ Figura 19 Esempi di linee di livello.

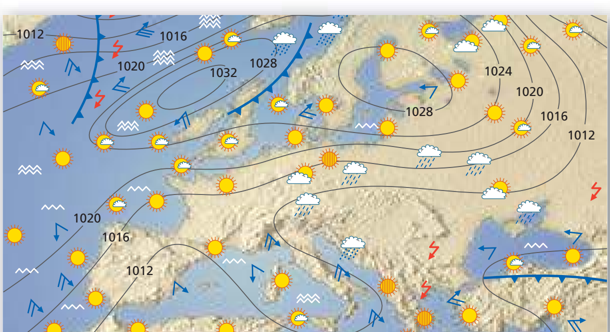
Nella figura 20 possiamo confrontare i due tipi di rappresentazione (mediante reticolo e mediante linee di livello).



▲ Figura 20 Rappresentazione grafica della funzione

$$z = x^3 - 3x^3y + y^2 - x$$

(figura *a*) e di alcune sue linee di livello (figura *b*).



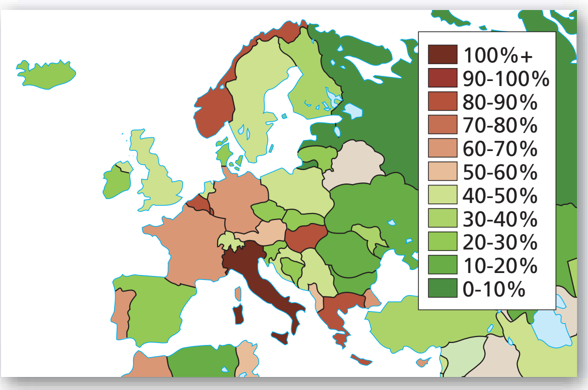
Mappe meteorologiche

Anche le mappe meteorologiche sono grafici di funzioni in due variabili.
Quelle più utilizzate rappresentano la pressione atmosferica in funzione di latitudine e longitudine.
In particolare si evidenziano le linee di punti che hanno tutti la stessa pressione (linee isobare).
La collocazione delle isobare è di grande importanza per l'analisi meteorologica. Le differenze di pressione sono infatti alla base della formazione dei venti e dello spostamento delle perturbazioni.

ESPLORAZIONE

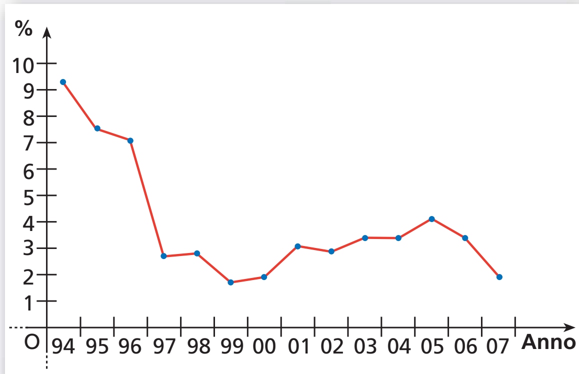
Debito, deficit e PIL

L'Unione europea, per la stabilità dell'economia, richiede agli Stati membri di mantenere alcuni parametri entro limiti precisi. Così sentiamo parlare di debito pubblico, deficit e PIL.
Il debito pubblico è il debito che lo Stato ha, per soddisfare le proprie necessità, nei confronti di altri (cittadini, banche, ...) che hanno sottoscritto prestiti sotto forma di BOT, CCT, ...
Il deficit è l'incremento del debito rispetto all'anno precedente. Quando il deficit è negativo, significa che il debito di un anno è inferiore rispetto a quello dell'anno precedente; quando è positivo, vuol dire che il debito è cresciuto.
Il PIL (prodotto interno lordo) indica l'ammontare di tutta la ricchezza prodotta in un anno in un Paese; quindi, più cresce meglio è.
Ognuna di queste tre variabili, da sola, è di solito insufficiente per analizzare la situazione economica.
Per questo si fa uso di indicatori che sono funzioni di almeno due di queste variabili.
Spesso viene usato il rapporto fra debito pubblico e PIL (espresso in percentuale).



▲ Il rapporto $\frac{\text{debito pubblico}}{\text{PIL}}$ nel 2008.

Per gli Stati membri dell'Unione europea questo rapporto dovrebbe essere inferiore al 60%. Come si vede nella cartina, ciò non sempre avviene. In tal caso gli Stati devono dimostrare che ci sono segnali di miglioramento.
Un'altra funzione di due variabili utilizzata frequentemente è il rapporto fra deficit e PIL.
Nell'Unione europea tale rapporto deve essere inferiore al 3%.



▲ Grafico del rapporto $\frac{\text{deficit}}{\text{PIL}}$ in Italia negli anni tra il 1994 e il 2007.

Come si vede nel grafico, dal 2002 fino alla fine del 2006 il rapporto $\frac{\text{deficit}}{\text{PIL}}$ italiano superava il 3%.
Per questo l'Italia ha ricevuto, nel 2005, una «raccomandazione» da parte dell'Ecofin, il Consiglio europeo dell'economia e della finanza. A questo avvertimento non è seguita alcuna sanzione, visto il rientro negli anni successivi del rapporto $\frac{\text{deficit}}{\text{PIL}}$ entro il limite fissato dal Patto di stabilità e crescita.

Attività

Altri indicatori economici

Per studiare l'economia e il suo impatto sui problemi sociali è necessario tener conto di molte variabili.

- Cerca in Internet notizie su altri indici, oltre a quelli di cui abbiamo parlato, e sulle variabili di cui sono funzioni.

Cerca nel Web:
human development index (hdi), genuine progress indicator (gpi), impronta ecologica, genuine savings index (gsi), Eurostat, Istat

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2.0** © Zanichelli 2011 *Volume 4*

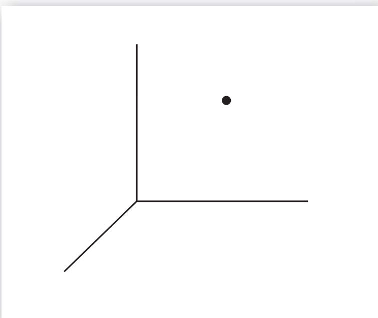
LA MOSCA DI CARTESIO

Come poteva Cartesio descrivere il volo di una mosca?

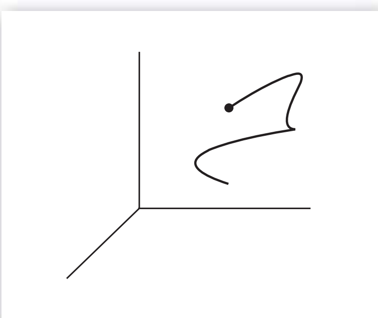
▶ Il quesito completo a pag. 1081

Il problema di Cartesio si può riformulare con questa domanda: come si determina la posizione di un punto nello spazio?

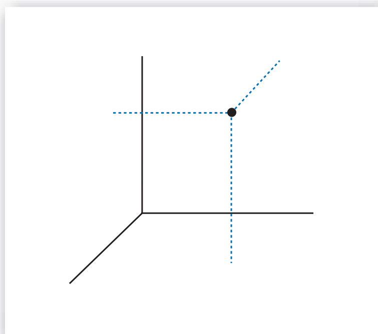
La mosca, rispetto alla stanza, è praticamente un punto



La curva che la mosca descrive volando è l'insieme dei punti occupati dall'insetto istante per istante.



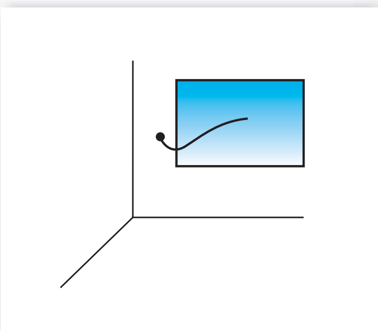
L'esempio della stanza è particolarmente felice, perché le pareti offrono un sistema semplice per descrivere la posizione. È sufficiente misurare la distanza della mosca da due pareti (basta non sceglierne due opposte!) e dal pavimento (ma andrebbe benissimo anche il soffitto).



Ogni punto della stanza può essere associato a tre numeri

- La distanza dalla parete nord (oppure sud);
- la distanza dalla parete est (ovest);
- la distanza dal pavimento (soffitto).

Viceversa, ogni terna di numeri determina esattamente un punto dello spazio. Bisogna solo stare attenti all'ordine. Non si può confondere la distanza dalla parete est con quella dalla parete nord, oppure con quella dal pavimento. I tre numeri sono proprio le coordinate cartesiane (ortogonali) del punto.
Complichiamo un po' le cose: sulla parete est c'è una finestra...



... e se la mosca esce dalla stanza?
Per determinare la posizione della mosca all'esterno, Cartesio decide che in questo caso la distanza dalla parete est (da cui è uscita) va scritta col segno meno. Allo stesso modo, se la mosca esce dalla porta in corridoio, da nord, è la distanza da questa parete che va scritta col segno meno. E se la mosca scende sotto il livello del pavimento, Cartesio scriverà col segno meno la distanza dal pavimento.

Quindi, una terna di numeri, positivi o negativi, indica la posizione della mosca in ogni punto dello spazio e non solo dentro la stanza.

E che cosa si fa con un topo in un silos?

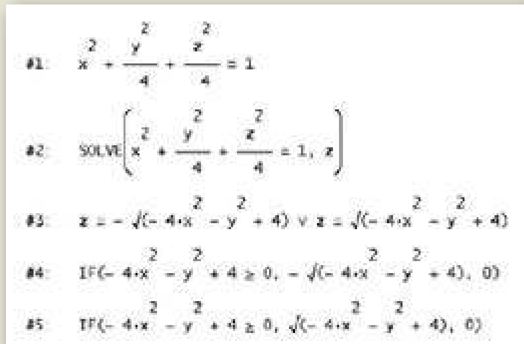
In un silos da cereali, la posizione di un topolino non si può trovare facilmente con le coordinate cartesiane ortogonali (mancano le pareti perpendicolari tra loro).
Si può invece ricorrere alle *coordinate cilindriche*. Sono sempre tre numeri, ma hanno un significato diverso. Il primo indica l'altezza alla quale si trova il topo. Una volta fissata l'altezza, il topo si muove su un piano e può trovarsi dovunque dentro a un cerchio, sezione del silos. Allora altri due numeri che possiamo usare sono la distanza del topo dal centro di questo cerchio e l'angolo che il raggio passante per il topo forma con una direzione data. Prova a disegnare la situazione per averne una rappresentazione geometrica.

LABORATORIO DI MATEMATICA
LA GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Derive tracciamo il grafico dell'ellissoide di equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$ e di alcune curve di livello appartenenti a dei piani paralleli al piano $z = 0$.

- Attiviamo Derive, quindi digitiamo e inseriamo nella #1 l'equazione di un'ellissoide (figura 1).
- In grafica a tre dimensioni Derive non traccia i grafici delle superfici che hanno equazioni cartesiane implicite. Esplicitiamo, pertanto, la z con *Risolvi_Espressione*.
- Scriviamo poi un'istruzione *IF*, come vediamo nella #4, in cui la condizione da controllare è la disuguaglianza $-4x^2 - y^2 + 4 \geq 0$, e le due alternative sono l'equazione della parte di ellissoide che sta sopra al piano xy e l'equazione del piano xy stesso ($z = 0$). In questo modo evitiamo le sbavature del grafico nei pressi dei valori nulli di z.
- Entriamo in *Finestra_Grafica 3D*, dove usiamo *Opzioni_Semplifica prima di tracciare il grafico* e facciamo clic su *Traccia*, ottenendo il grafico della parte superiore dell'ellissoide (figura 2) e una parte del piano $z = 0$.
- Operiamo similmente per la parte inferiore dell'ellissoide.
- Scriviamo poi l'istruzione per ottenere le sezioni della superficie con alcuni piani paralleli al piano $z = 0$ e la inseriamo nella #6 (figura 3).


#1: $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$

#2: SOLVE$\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1, z\right)$

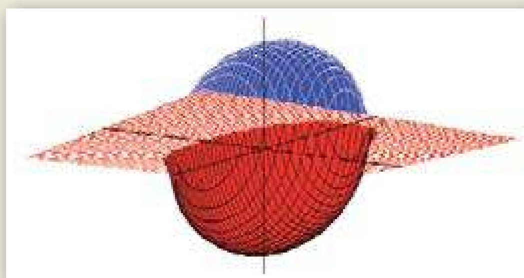
#3: $z = -\sqrt{(-4\cdot x^2 - y^2 + 4)} \vee z = \sqrt{(-4\cdot x^2 - y^2 + 4)}$

#4: IF$(-4\cdot x^2 - y^2 + 4 \geq 0, -\sqrt{(-4\cdot x^2 - y^2 + 4)}, 0)$

#5: IF$(-4\cdot x^2 - y^2 + 4 \geq 0, \sqrt{(-4\cdot x^2 - y^2 + 4)}, 0)$

▲ Figura 1

▼ Figura 2



▼ Figura 3


#6: VECTOR$\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = ., i, 0, 2, \frac{1}{10}\right)$

Nel sito: ▶ 19 esercitazioni in più

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer studia le seguenti quadriche, tracciandone il grafico e osservandolo da diverse angolazioni. Inoltre, ricava, come nell'esercitazione guidata, diverse curve di livello, ottenute tagliando la superficie della quadrica con piani paralleli rispettivamente ai piani $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$. Usa allo scopo le seguenti equazioni.

1 Sfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2 Ellissoide: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.

3 Paraboloide ellittico: $z = x^2 + y^2$.

4 Paraboloide iperbolico: $z = x^2 - y^2$.

LA TEORIA IN SINTESI

LA GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO

1. LE COORDINATE CARTESIANE NELLO SPAZIO

- La **distanza fra due punti** A e B è: $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$.
- Le coordinate del **punto medio** M di un segmento AB sono:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2},\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

2. IL PIANO

- L'**equazione** di un generico piano è:

$ax + by + cz + d = 0$ forma implicita; $z = mx + ny + q$ forma esplicita.

- Condizioni di parallelismo e di perpendicolarità tra piani.

Due piani di equazioni $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

- sono **paralleli** se e solo se: $a = ka', b = kb', c = kc'$, con $k \in \mathbb{R}$;
- sono **perpendicolari** se e solo se: $aa' + bb' + cc' = 0$.

- La **distanza** h del **punto** $A(x_A; y_A; z_A)$ dal **piano** di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è:

$$h = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

3. LA RETTA

- Equazioni generali:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

- Equazioni ridotte:

$$\begin{cases} x = gz + p \\ y = hz + q \end{cases}$$
retta non parallela al piano Oxy

$$\begin{cases} x = ky + r \\ z = ly + s \end{cases}$$
retta non parallela al piano Oxz

$$\begin{cases} y = mx + t \\ z = nx + u \end{cases}$$
retta non parallela al piano Oyz

- Equazione della retta passante per due punti $A(x_1; y_1; z_1)$ e $B(x_2; y_2; z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

4. ALCUNE SUPERFICI NOTEVOLI

- Una **superficie cilindrica retta** ha equazione del tipo:
  - $F(x; y) = 0$ se le generatrici sono parallele all'asse z;
  - $F(x; z) = 0$ se le generatrici sono parallele all'asse y;

- $F(y; z) = 0$ se le generatrici sono parallele all'asse x;

con F polinomio di secondo grado in due variabili.

- Una **superficie conica circolare retta** con semiapertura δ ha equazione:
  - $x^2 + y^2 - k^2 z^2 = 0$, $\quad \text{tg}^2\,\delta = k^2$ se l'asse coincide con l'asse z;
  - $x^2 + z^2 - k^2 y^2 = 0$, $\quad \text{tg}^2\,\delta = k^2$ se l'asse coincide con l'asse y;
  - $y^2 + z^2 - k^2 x^2 = 0$, $\quad \text{tg}^2\,\delta = k^2$ se l'asse coincide con l'asse x.

- La **superficie sferica** di centro $C(x_0; y_0; z_0)$ e raggio r ha equazione:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

La sua equazione si può scrivere anche nella forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0, \quad \text{con } \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d \geq 0.$$

Si ha $C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$ e $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d}$.

- Abbiamo esaminato le caratteristiche di alcune quadriche, di equazioni:
  - **ellissoide** $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
  - **iperboloide a una falda** $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
  - **iperboloide a due falde** $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
  - **paraboloide ellittico** $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$
  - **paraboloide iperbolico** $\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -2z$

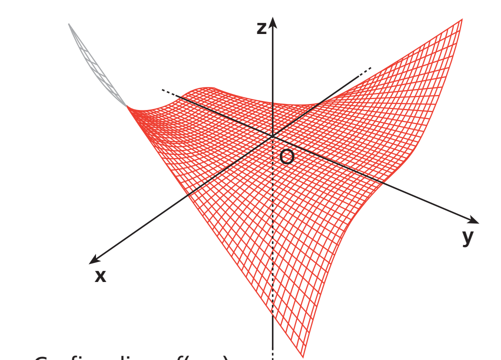
5. LE FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- **Funzione reale di due variabili reali**: è una relazione che associa a ogni coppia ordinata di numeri reali $(x; y)$, appartenente a un sottoinsieme S di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, uno e un solo numero reale z.
  La indichiamo con $z = f(x; y)$, oppure con f: $(x; y) \mapsto z$, con $(x; y) \in S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$.

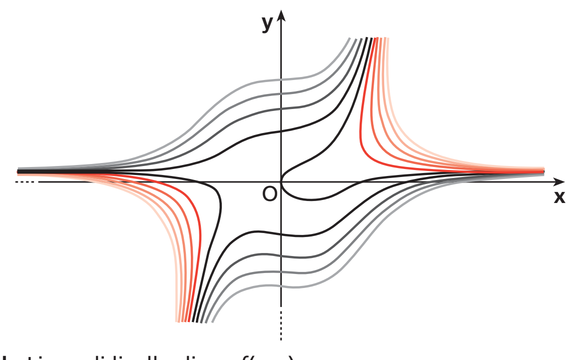
- Il sottoinsieme S è detto **dominio** della funzione e l'insieme dei valori corrispondenti z è detto **codominio** della funzione.

- **Dominio naturale**: è il più ampio dominio che si può scegliere per la funzione.

- Il **grafico** di una funzione $z = f(x; y)$ è l'insieme dei punti di coordinate $(x; y; z)$ per cui $z = f(x; y)$.
  La rappresentazione grafica di una funzione di due variabili è, in genere, una superficie e viene fatta **per punti** o mediante **linee di livello** che sono sezioni della superficie con piani paralleli al piano Oxy.



a. Grafico di $z = f(x; y)$.



b. Linee di livello di $z = f(x; y)$.

1. LE COORDINATE CARTESIANE NELLO SPAZIO

▶ Teoria a pag. 1082

1 Rappresenta i seguenti punti in un riferimento ortogonale nello spazio:
$A(-2; 1; 3)$, $B(1; -2; -2)$, $C(-1; -1; -1)$, $D(-3; -2; -4)$, $E(-2; 2; -3)$.

2 Disegna le seguenti figure piane:
a) il triangolo di vertici $P(-2; 3; 0)$, $Q(1; 3; 2)$, $R(2; 3; 0)$;
b) il triangolo di vertici $A(-1; 3; -1)$, $B(2; -1; 2)$, $C(2; -2; -2)$;
c) il rettangolo di vertici $H(2; 0; 1)$, $K(3; 0; 3)$, $L(3; 5; 3)$, $M(2; 5; 1)$.

3 Disegna il prisma che ha i seguenti vertici:
$A(-1; 0; 2)$, $B(-1; 0; 5)$, $C(-3; 0; 5)$, $D(-3; 0; 2)$, $A'(2; 4; 2)$, $B'(2; 4; 5)$, $C'(0; 4; 5)$, $D'(0; 4; 2)$.

4 Disegna i coni circolari retti che hanno per base comune il cerchio giacente nel piano Oyz di raggio 2, centro $C(0; 2; 3)$ e altezza 4.

5 Disegna il cilindro circolare retto con le basi di raggio 1, parallele al piano Oxz e per centri i punti $M(-2; -3; 1)$, $N(3; -3; 1)$.

Calcola la distanza fra le seguenti coppie di punti.

6 $A(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2})$, $O(0; 0; 0)$. $P(-1; 3; -2)$, $Q(0; -2; 0)$. $[\sqrt{6}; \sqrt{30}]$

7 $A(-2; 4; 1)$, $B(-4; 2; 3)$. $C(-1; 8; 0)$, $D(-3; 5; -\sqrt{3})$. $[2\sqrt{3}; 4]$

Determina le coordinate dei punti medi dei segmenti che hanno per estremi le seguenti coppie di punti.

8 $A(0; -6; 2)$, $B(4; 8; -2)$. $[(2; 1; 0)]$

9 $A(2\sqrt{3}; -\sqrt{2}; 3)$, $B(4\sqrt{3}; \sqrt{2}; -1)$. $[(3\sqrt{3}; 0; 1)]$

10 $A(-4; 6; 4)$, $B(8; 6; -4)$. $[(2; 6; 0)]$

11 Trova le coordinate dell'estremo B del segmento AB, sapendo che $A(2; -3; 0)$ e che il punto medio di AB è $M(-1; 4; 3)$. $[(-4; 11; 6)]$

12 Trova un punto sull'asse z equidistante da $A(-1; 3; 2)$ e $B(2, -1; -1)$. $\left[\left(0; 0; \frac{4}{3}\right)\right]$

13 Determina l'espressione per la distanza di un punto $H(x; y; z)$ dagli assi coordinati.
$[d_x = \sqrt{y^2 + z^2}, d_y = \sqrt{x^2 + z^2}, d_z = \sqrt{x^2 + y^2}]$

14 Dato il triangolo di vertici $A(4; -2; 3)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(1; 2; 6)$, verifica che è isoscele, calcola l'area e determina gli angoli alla base.
$\left[\overline{AC} = \overline{BC} = \sqrt{34}; 2\sqrt{70}; \operatorname{tg} C\widehat{A}B = \frac{\sqrt{70}}{7}\right]$

15 Verifica che il triangolo di vertici $A(-1; -3; 1)$, $B(-1; 2; 1)$, $C\left(2; -\frac{1}{2}; 3\right)$ è isoscele e calcola l'area.
$\left[\overline{AC} = \overline{BC} = \frac{\sqrt{77}}{2}; \frac{5\sqrt{13}}{2}\right]$

16 Verifica che il triangolo di vertici $P(6; 0; -1)$, $Q(-1; 0; 3)$, $R(-1; 4; 3)$ è rettangolo e determina l'angolo acuto minore.
$\left[\text{cateti: } \overline{PQ} = \sqrt{65}, \overline{QR} = 4; \operatorname{tg} \widehat{P} = \frac{4}{\sqrt{65}}\right]$

17 Sia dato un triangolo nello spazio tridimensionale. I suoi vertici hanno coordinate (0; 0; 0), (1; 3; 4) e (− 1; 3; 4). Trova l'area del triangolo. (USA *Bay Area Math Meet*, *Bowl Sampler*, 1995)
[5]

18 Verifica che il triangolo di vertici $A(4; 0; 0)$, $B(0; -4; 0)$, $C\,(0; 0; -4)$ è equilatero. Determina l'angolo α che l'altezza CH forma con il piano Oxy.
$\left[\text{lato} = 4\sqrt{2}; \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

19 Determina l'equazione del luogo dei punti $P(x; y; z)$ equidistanti da $A(4; -1; 3)$ e da $B(0; 4; -1)$.
$[8x - 10y + 8z - 9 = 0]$

20 Un punto P con coordinate positive ha distanza 8 dall'origine. Sapendo che la retta OP forma 60° con l'asse y e 60° con l'asse z, trova le coordinate di P. $[(4\sqrt{2}; 4; 4)]$

21 Determina il quarto vertice dei possibili tetraedri regolari che hanno per base il triangolo di vertici $P\,(-2; 0; 0)$, $Q(0; 2; 0)$, $R(0; 0; 2)$.
$\left[S(-2; 2; 2), S'\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)\right]$

22 Tre vertici di un cubo nello spazio hanno coordinate (2; 3; 0), (0; 5; 4) e (4; 1; 8). Calcola le coordinate del centro del cubo. (USA *Florida Atlantic University*, *Stuyvesant Alumni Mathematics Competition*, 2000)
[(3; 2; 4)]

23 Data la piramide di vertici $A(-1; -3; 1)$, $B(-1; 5; 1)$, $C(-1; 5; 5)$, $D(-1; -3; 5)$, $E(7; -3; 1)$, calcola l'area della superficie laterale, il volume, l'angolo γ formato dallo spigolo CE con il piano di base.
$\left[S_l = 48 + 16\sqrt{2} + 16\sqrt{5}; V = \frac{256}{3}; \operatorname{sen}\gamma = \frac{2}{3}\right]$

2. IL PIANO

Teoria a pag. 1083

L'equazione del piano

24 Indica quali delle seguenti equazioni rappresentano piani paralleli ai piani coordinati, piani paralleli agli assi coordinati, piani passanti per l'origine:

a) $2x - y = 0$;
b) $z = 4x - y$;
c) $2y + 7 = 0$;
d) $x + y + 1 = 0$;
e) $x = -8$;
f) $z - 4y = 0$.

25 Scrivi l'equazione dei piani che hanno le seguenti caratteristiche.

a) Passa per il punto $A(2; 3; 8)$ ed è parallelo al piano Oxy.
b) Passa per il punto $B(1; 4; 2)$ ed è parallelo al piano Oxz.
c) Passa per il punto $C(1; 0; 3)$ ed è parallelo al piano Oyz.
d) Passa per il punto $D(7; 3; 5)$ ed è perpendicolare all'asse x.

[a) $z = 8$; b) $y = 4$; c) $x = 1$; d) $x = 7$]

26 Scrivi l'equazione dei piani che hanno le seguenti caratteristiche.

a) Passa per il punto $A(1; 2; 0)$ ed è perpendicolare all'asse y.
b) Passa per il punto $B(1; 1; 6)$ ed è perpendicolare all'asse z.
c) Passa per il punto $C(1; 2; 5)$ ed è parallelo al piano Oxy.
d) Passa per il punto $D(0; 1; 2)$ ed è perpendicolare all'asse y.

[a) $y = 2$; b) $z = 6$; c) $z = 5$; d) $y = 1$]

27 Verifica se il punto P appartiene al piano, indicato a lato, nei seguenti casi.

a) $P(5; 7; 1)$, $z = 2$. c) $P(4; 1; 2)$, $3x - y + 5z = 0$.

b) $P(2; 2; 2)$, $x - 2y + z = 0$. d) $P(1; -1; 3)$, $x + y = 0$. [a) no; b) sì; c) no; d) sì]

28 **ESERCIZIO GUIDA**

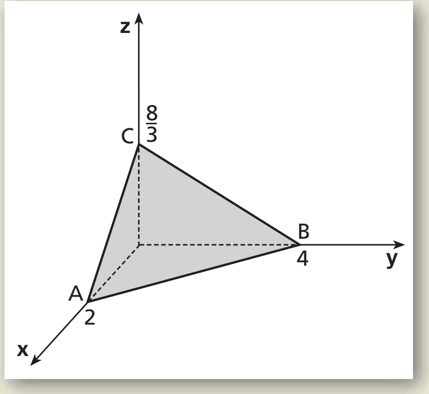
Disegniamo il piano α di equazione $4x + 2y + 3z - 8 = 0$.

Per rappresentare il piano α nello spazio $Oxyz$ determiniamo i suoi punti di intersezione con gli assi coordinati. Le coordinate di tali punti sono le soluzioni dei sistemi:

$$\begin{cases} 4x + 2y + 3z - 8 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4x + 2y + 3z - 8 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4x + 2y + 3z - 8 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Risolvendo ciascun sistema, otteniamo i punti $A(2; 0; 0)$; $B(0; 4; 0)$; $C\left(0; 0; \frac{8}{3}\right)$.

Tali punti individuano il piano α.



29 Rappresenta i piani che hanno le seguenti equazioni:

a) $-x + 3y - 2z + 6 = 0$; c) $6x - 2y + 3z - 12 = 0$;

b) $4x - y + 1 = 0$; d) $z = 2x - 8y + 4$.

30 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo l'equazione del piano passante per i punti:
$A(0; 1; 0)$, $B(1; -1; 2)$ e $C(-3; 0; 2)$.

L'equazione di un piano generico nello spazio è del tipo $ax + by + cz + d = 0$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e con a, b, c non tutti nulli.
Imponiamo il passaggio per i punti A, B e C e otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} b + d = 0 \\ a - b + 2c + d = 0 \\ -3a + 2c + d = 0 \end{cases}$$

Abbiamo un sistema di tre equazioni in quattro incognite che risolviamo ricavando a, b, c in funzione di d:

$$\begin{cases} b = -d \\ a + d + 2c + d = 0 \\ -3a + 2c + d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -d \\ a + 2c + 2d = 0 \\ -3a + 2c + d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -d \\ a = -2c - 2d \\ -3(-2c - 2d) + 2c + d = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} b = -d \\ a = -2c - 2d \\ 8c + 7d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -d \\ a = -2c - 2d \\ c = -\frac{7}{8}d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -d \\ a = -\frac{1}{4}d \\ c = -\frac{7}{8}d \end{cases}$$

Poiché i parametri a, b, c non possono essere tutti nulli, deve essere $d \neq 0$.
Sostituiamo nell'equazione di partenza e otteniamo:

$$-\frac{1}{4}dx - dy - \frac{7}{8}dz + d = 0.$$

Poiché $d \neq 0$, dividiamo entrambi i membri per d, ricavando l'equazione del piano passante per A, B, C:

$$2x + 8y + 7z - 8 = 0.$$

Scrivi l'equazione del piano passante per i punti indicati.

31 $A(1; 0; 0)$, $B(0; -3; 1)$, $C(2; -2; 0)$. [$2x + y + 5z - 2 = 0$]

32 $A(1; 5; -1)$, $B(0; -1; 2)$, $C(0; 0; 0)$. [$9x - 2y - z = 0$]

33 $A(1; 1; 1)$, $B(0; 2; 3)$, $C(1; -1; -2)$. [$x - 3y + 2z = 0$]

34 $A(-1; 1; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(0; -2; 1)$. [$6x + 2y + 11z - 7 = 0$]

35 $A(2; 3; 1)$, $B(0; 0; 0)$, $C(1; 1; -2)$. [$7x - 5y + z = 0$]

36 $A(-1; 0; 3)$, $B(2; 4; 1)$, $C(5; 2; 1)$. [$2x + 3y + 9z - 25 = 0$]

I piani paralleli e perpendicolari

37 Indica se i piani con le seguenti equazioni sono paralleli o perpendicolari.

a) $2x - 6y + 4z + 1 = 0$, $\quad x - 3y + 2z = 0$;
b) $z = 3x + 2y$, $\quad -6x - 4y + 2z + 7 = 0$;
c) $2x - 4y + 2z + 5 = 0$, $\quad 3x + 2y + z + 1 = 0$.

Determina, se esistono, i valori del parametro per i quali i piani rappresentati dalle seguenti coppie di equazioni sono paralleli e i valori per i quali i piani sono perpendicolari.

38 $(2 - k)x + 2y - 4z + k = 0$; $\quad 6x + 3y - 6z + 1 = 0$. [$k = -2; k = 7$]

39 $2x + (k^2 - 5k)y + (k + 1)z - 1 = 0$; $\quad x - 3y + 2z = 0$. $\left[k = 3; k = \frac{17 \pm \sqrt{337}}{3}\right]$

40 $(a + 3)x + (a - 2)y + 3z = 0$; $\quad z = -\frac{4}{3}x + \frac{y}{3}$. $\left[a = 1; a = -\frac{23}{3}\right]$

41 **ESERCIZIO GUIDA**

Troviamo l'equazione del piano α passante per il punto $P(-1; 1; 1)$ e parallelo al piano β di equazione $x - 2y + z - 3 = 0$.

Scriviamo l'equazione generale di un piano: $ax + by + cz + d = 0$.

Per la condizione di parallelismo fra piani, i coefficienti delle variabili corrispondenti delle loro equazioni devono essere proporzionali: $\frac{a}{1} = \frac{b}{-2} = \frac{c}{1} = k$, da cui $a = k, b = -2k, c = k$. Sostituiamo nell'equazione generale:

$$kx - 2ky + kz + d = 0, \quad x - 2y + z + \frac{d}{k} = 0 \quad \rightarrow \quad x - 2y + z + q = 0, \text{con } q = \frac{d}{k}.$$

Applichiamo la condizione di appartenenza di P ad α sostituendo le sue coordinate nell'equazione:

$$1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + q = 0 \quad \rightarrow \quad q = 2.$$

L'equazione del piano α è quindi $x - 2y + z + 2 = 0$.

Nei seguenti esercizi, scrivi l'equazione del piano parallelo al piano assegnato e passante per il punto indicato.

42 $5x + 2y - 3z - 2 = 0$; $P(2; -1; -1)$. $[5x + 2y - 3z - 11 = 0]$

43 $2x + 3y - 3z + 5 = 0$; $M(-1; -1; -1)$. $[2x + 3y - 3z + 2 = 0]$

44 $4x - 5y - z = 0$; $R(0; 1; -7)$. $[4x - 5y - z - 2 = 0]$

45 $7x - 2z - 8 = 0$; $O(0; 0; 0)$. $[7x - 2z = 0]$

La distanza di un punto da un piano

46 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo la distanza del punto $A(-1; 5; 2)$ dal piano di equazione $4x - y + 3z - 10 = 0$.

Utilizziamo la formula della distanza di un punto da un piano $d = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Sostituiamo i coefficienti delle variabili, le coordinate del punto e calcoliamo:

$$d = \frac{|4 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 + 3 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

La distanza cercata è quindi $\frac{\sqrt{26}}{2}$.

Nei seguenti esercizi, calcola la distanza fra il piano e il punto indicati.

47 $2x + y - 3z - 28 = 0$; $O(0; 0; 0)$. $[2\sqrt{14}]$

48 $3x + y - z = 0$; $A(-2; 4; 1)$. $\left[\frac{3}{\sqrt{11}}\right]$

49 $x - 2y + 4z - 1 = 0$; $P(-3; 0; 1)$. $[0]$

50 $3x - 4y + 3 = 0$; $M(5; 2; 17)$. $[2]$

51 $3x - 2y + z = 0$; $Q(3; 5; 4)$. $\left[\frac{3}{\sqrt{14}}\right]$

52 $3z - 4y = 0$; $B(1; 0; -5)$. $[3]$

53 Scrivi l'equazione del piano passante per $P(-1; 2; 0)$ e parallelo al piano passante per i punti $A(2; 0; 3)$, $B(0; 0; -1)$ e $C(-3; 2; -4)$. $[4x + 3y - 2z - 2 = 0]$

54 Scrivi l'equazione del piano perpendicolare al piano di equazione $2x - y + z = 1$ e passante per i punti $A(2; 0; -1)$ e $B(-1; 4; 1)$. $[6x + 7y - 5z - 17 = 0]$

55 Scrivi l'equazione di un piano perpendicolare ai piani di equazioni $4x - 2y + z = 2$ e $x + y + 2z = 6$ e passante per l'origine. $[5x + 7y - 6z = 0]$

56 Scrivi l'equazione di un piano perpendicolare al piano di equazione $z = x - y + 3$ e passante per $A(-1; -4; 2)$ e $B(-3; 6; 0)$. $[3x + y + 2z + 3 = 0]$

ESERCIZI VARI Il piano

57 Determina il perimetro del triangolo che ha per vertici i punti di intersezione del piano $x - 2y - z + 4 = 0$ con gli assi. $[4\sqrt{5} + 4\sqrt{2}]$

58 Dimostra che le intersezioni del piano $x + y + z + 2 = 0$ con gli assi sono vertici di un triangolo equilatero.

59 Calcola il volume della piramide che ha per vertici l'origine e le intersezioni del piano $2x - 2y + 3z + 6 = 0$ con gli assi. [3]

60 Determina il punto P equidistante dai punti $A(1; 1; 1)$, $B(2; 0; 1)$, $C(0; 0; 2)$ e appartenente al piano di equazione $x - y + 3z = 0$. $\left[\left(\frac{1}{12}; -\frac{11}{12}; -\frac{1}{3}\right)\right]$

61 Verifica che i punti $A(0; 1; -2)$, $B(1; 0; 0)$, $C(-3; 3; -1)$ e $D(-1; 1; 3)$ sono complanari e scrivi l'equazione del piano su cui giacciono. $[5x + 7y + z - 5 = 0]$

62 Studia la posizione reciproca dei due piani di equazioni:

a) $z = y + 3x - 1$; $\quad 6x + 2y - 2z + 2 = 0$;

b) $x - y + 2z = 0$; $\quad 2x - 2y + 8z + 1 = 0$. [a) paralleli; b) incidenti]

63 Verifica che i piani di equazioni $z = 2x - y + 1$ e $4x - 2y - 2z + 7 = 0$ sono paralleli e trova la loro distanza. $\left[\frac{5\sqrt{6}}{12}\right]$

64 Determina il punto di intersezione dei piani di equazioni:

$$x - y + z = 3,\ x - z + 7 = 0,\ 4x - y + 2z - 6 = 0.$$

$[(-1; 2; 6)]$

65 Find the equation of the plane passing through the point $A(0; 1; 1)$, $B(1; 0; 1)$, $C(1; 1; 0)$. $[x + y + z - 2 = 0]$

3. LA RETTA

Teoria a pag. 1086

Le equazioni ridotte

66 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la retta di equazioni $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$, determiniamo il sistema di equazioni in forma ridotta che la rappresentano.

Prima di tutto verifichiamo se la retta è parallela a uno dei piani coordinati determinando due punti a caso:

$$x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y - z + 1 = 0 \\ -y + z + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y + 1 \\ -y + 2y + 1 + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$x = -1 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 2y - z = 0 \\ -y + z - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 2y - y - 1 = 0 \\ z = y + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Poiché i due punti hanno differenti l'ascissa, l'ordinata e la quota, la retta non è parallela ad alcuno dei piani coordinati; pertanto possiamo scegliere uno qualsiasi dei tre sistemi di equazioni ridotte. Scriviamo le equazioni ridotte nella forma:

$$\begin{cases} x = gz + p \\ y = hz + q \end{cases}$$

Nel sistema dato trattiamo la variabile z come se fosse un termine noto e risolviamo:

$$\begin{cases} x + 2y = z - 1 \\ 2x - y = -z - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2y + z - 1 \\ 2(-2y + z - 1) - y = -z - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2y + z - 1 \\ y = \frac{3}{5}z - \frac{1}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}z - \frac{3}{5} \\ y = \frac{3}{5}z - \frac{1}{5} \end{cases}$$

Queste sono le equazioni cercate e rappresentano una coppia di piani, il primo parallelo all'asse y e il secondo all'asse x.

Determina un sistema di equazioni ridotte delle rette di cui sono date le equazioni generali.

67 $\begin{cases} 4x - y - z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}\right]$

68 $\begin{cases} x + 2y - 4z - 1 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \frac{8}{3}z + \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} \end{cases}\right]$

69 $\begin{cases} 3x - 3y + z + 2 = 0 \\ x + 3y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \frac{1}{4}z - \frac{1}{4} \\ y = \frac{7}{12}z + \frac{5}{12} \end{cases}\right]$

70 $\begin{cases} 2x + 6y - z + 1 = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = -3y + 2 \\ z = 5 \end{cases}\right]$

71 $\begin{cases} 6x - 3y - z + 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} y = -x + 1 \\ z = 9x - 1 \end{cases}\right]$

72 $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} y = -3x + 2 \\ z = 2x \end{cases}\right]$

Le equazioni frazionarie

73 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la retta di equazioni

$$\begin{cases} x + y - 2z + 2 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

determiniamo un sistema di equazioni frazionarie.

Dati due punti distinti $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ di una retta tali che $x_2 - x_1 \neq 0$, $y_2 - y_1 \neq 0$, $z_2 - z_1 \neq 0$, le equazioni frazionarie hanno la forma:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}, \quad \text{con } l = x_2 - x_1,\ m = y_2 - y_1,\ n = z_2 - z_1.$$

Determiniamo quindi due punti, ad arbitrio, che rispettino le condizioni precedenti:

$$z_1 = 0 \to \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{cases} \to A = \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2} \\ y_1 = -\dfrac{3}{2} \\ z_1 = 0 \end{cases}; \quad x_2 = 0 \to \begin{cases} x_2 = 0 \\ y - 2z + 2 = 0 \\ -y + z - 1 = 0 \end{cases} \to B = \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 0 \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

Calcoliamo i coefficienti l, m, n: $\quad l = \frac{1}{2}, \quad m = \frac{3}{2}, \quad n = 1.$

Sostituiamo questi valori e le coordinate di A nelle equazioni frazionarie generali:

$$\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{y + \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{z}{1} \quad \to \quad \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{y + \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = z.$$

Queste sono le equazioni cercate.
Le equazioni frazionarie non sono univocamente determinate. Puoi verificarlo scegliendo un'altra coppia di punti, per esempio A e un nuovo punto B' con ascissa 1.

Determina un sistema di equazioni frazionarie delle rette aventi le caratteristiche indicate.

74 La retta intersezione dei piani di equazioni: $2x + y + 4z = 0$, $y + z - 2 = 0$.
(Suggerimento. Utilizza i punti $A(-1; \ldots; \ldots)$ e $B(\ldots; 0; \ldots)$.)

$\left[\frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{2}\right]$

75 La retta passante per i punti $M(0; -4; 5)$, $N(-3; 5; -1)$. $\left[x = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-5}{2}\right]$

76 La retta passante per i punti $A(-2; -4; -1)$, $B(3; 1; 2)$. $\left[\frac{x+2}{5} = \frac{y+4}{5} = \frac{z+1}{3}\right]$

77 La retta passante per i punti $A(4; -4; 3)$, $B(-2; 5; 7)$. $\left[\frac{x-4}{-6} = \frac{y+4}{9} = \frac{z-3}{4}\right]$

78 La retta di equazioni: $\begin{cases} x - 6y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$. (Suggerimento. Utilizza i punti $A(0; \ldots; \ldots)$, $B(\ldots; \ldots; 0)$.)

$\left[\frac{x}{4} = \frac{y - \frac{1}{6}}{-1} = \frac{z + \frac{1}{2}}{5}\right]$

Le equazioni parametriche

79 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la retta passante per i punti $A(2; 0; 3)$, $B(0; 4; -2)$, determiniamo una terna di equazioni parametriche che la descrivano.

Scriviamo le generiche equazioni parametriche di una retta:

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}. \\ z = z_1 + nt \end{cases}$$

Essendo noti due punti, possiamo calcolare una terna di coefficienti direttivi:

$$l = x_2 - x_1 = -2, \qquad m = y_2 - y_1 = 4, \qquad n = z_2 - z_1 = -5.$$

Ora sostituiamo questi valori e le coordinate di A nelle equazioni generiche:

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 4t \qquad , \quad \text{con } t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - 5t \end{cases}$$

Queste sono le equazioni cercate. Come nel caso delle equazioni frazionarie osserviamo che queste equazioni non sono univocamente determinate. In particolare, una volta determinata una terna $(l; m; n)$ di coefficienti direttivi, sono valide tutte le terne del tipo $(kl; km; kn)$, con $k \neq 0$.

Scrivi una terna di equazioni parametriche delle rette indicate.

80 La retta passante per il punto $P(5; -4; -5)$ e con coefficienti direttivi $-2, 2, 1$.

$$\left[\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -4 + 2t \\ z = -5 + t \end{cases}\right]$$

81 La retta passante per i punti $L(-6; 0; 4)$ e $M(4; -2; 0)$.

$$\left[\begin{cases} x = -6 + 10t \\ y = -2t \\ z = 4 - 4t \end{cases}\right]$$

82 La retta passante per il punto $G(8; -5; 4)$ e parallela all'asse z.

$$\left[\begin{cases} x = 8 \\ y = -5 \\ z = 4 + t \end{cases}\right]$$

83 La retta passante per i punti $R(-7; 2; 3)$ e $S(4; -3; 3)$.

$$\left[\begin{cases} x = -7 + 11t \\ y = 2 - 5t \\ z = 3 \end{cases}\right]$$

84 La retta passante per il punto $A(-4; 2; 3)$ e parallela a quella passante per i punti $P(-1; 2; 1)$, $Q(6; 0; 4)$.

$$\left[\begin{cases} x = -4 + 7t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}\right]$$

ESERCIZI VARI La retta

85 Verifica che i punti $A(1; 2; 1)$, $B(3; 0; 4)$, $C(5; -2; 7)$ sono allineati.

86 Trova un sistema di equazioni ridotte della retta passante per il punto $M(8; -5; 9)$ e parallela all'asse x.

$$\left[\begin{cases} y = -5 \\ z = 9 \end{cases}\right]$$

87 Verifica che la retta di equazioni $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x - y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ giace sul piano di equazione $4x + 11y - 3z + 6 = 0$.

88 Determina il luogo dei punti equidistanti dai tre punti $A(3; 0; 0)$, $B(5; 0; 6)$, $C(0; 4; 0)$.

$$\left[\begin{cases} x + 3z - 13 = 0 \\ 6x - 8y + 7 = 0 \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} x + 3z - 13 = 0 \\ 10x - 8y + 12z - 45 = 0 \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} 10x - 8y + 12z - 45 = 0 \\ 6x - 8y + 7 = 0 \end{cases}\right]$$

89 Determina le intersezioni del piano $z = 6x - 2y + 10$ con il piano Oxy di equazione $z = 0$.
[retta $y = 3x + 5$ nel piano Oxy]

90 Stabilisci se il punto $A(0; 1; 1)$ appartiene all'intersezione del piano $z = 7x + 2y - 1$ con il piano Oyz di equazione $x = 0$. [sì]

91 Verifica se i punti $A(-1; 4; -5)$ e $B(0; 3; 1)$ appartengono alla retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

92 Trova, se esiste, il punto di intersezione tra la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

e il piano di equazione $x - 2y + z - 3 = 0$. [$(0; -3; -3)$]

93 Verifica se la retta r di equazioni $\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ 5x + 3y - 8 = 0 \end{cases}$ è parallela al piano di equazione $x - y + z + 10 = 0$.

94 Trova due piani aventi per intersezione la retta di equazioni $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 8t \end{cases}$. [$x - 2y + 5 = 0$; $4x + z - 6 = 0$]

95 Se i tre punti $(1; a; b)$, $(a; 2; b)$, $(a; b; 3)$ sono allineati nello spazio, qual è il valore di $a + b$?
(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*, 2005)
[4]

96 Verifica che le rette di equazioni $\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases}$ sono complanari e non parallele.

97 Data la retta r di equazioni $\begin{cases} x - 10y + z + 1 = 0 \\ 2x - 5y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$, scrivi le equazioni frazionarie e parametriche della retta.

$$\left[\frac{x-5}{25} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{15};\ \begin{cases} x = -\frac{5}{4} + \frac{25}{4}t \\ y = t \\ z = \frac{1}{4} + \frac{15}{4}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}\right]$$

98 Verifica se le rette di equazioni $\begin{cases} x - y + z + 4 = 0 \\ x = -z \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$ sono parallele.

99 Verifica che le rette di equazioni $\begin{cases} z = 0 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases}$ sono sghembe.

100 The points P, Q, and S have position vectors $(2; 1; 3)$, $(11; 4; 0)$, and $(-1; 0; 4)$ respectively.

a) Find the equation of the straight line passing through P and Q.

b) Do the points P, Q, and S lie on the same straight line? Justify your answer.

(UK *University of Essex*, First Year Examination, 2003)

$$\left[\text{a) } \begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases};\ \text{b) yes}\right]$$

4. ALCUNE SUPERFICI NOTEVOLI

▶ Teoria a pag. 1089

La superficie cilindrica

101 **ESERCIZIO GUIDA**

Analizziamo la superficie cilindrica $yz = 1$.

L'equazione è di secondo grado e non contiene la variabile x, quindi rappresenta una superficie cilindrica con *generatrici* parallele all'asse x.
Determiniamo la *direttrice* intersecando la superficie con il piano Oyz:

$$\begin{cases} x = 0 \\ yz = 1 \end{cases}$$

Poiché nel piano Oyz l'equazione $yz = 1$ rappresenta un'iperbole (equilatera e riferita agli asintoti), la direttrice è un'iperbole e la superficie data è una *superficie cilindrica iperbolica*.

102 Indica quale delle seguenti equazioni rappresenta una superficie cilindrica.

a) $y - 4x^2 = 0$; c) $xy + 3x - 8 = 0$; e) $z^2 - y^2 = 1$;
b) $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$; d) $2x - y = 4$; f) $9x^2 + y^2 = 1$.

Classifica le seguenti superfici cilindriche.

103 $x^2 - 4z^2 = 1$ [sup. cil. iperbolica con generatrici parallele all'asse y]

104 $z^2 - z + 2y = 0$ [sup. cil. parabolica con generatrici parallele all'asse x]

105 $\dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(y-1)^2}{3} = 1$ [sup. cil. ellittica con generatrici parallele all'asse z]

106 $y^2 + 4z + y - 5 = 0$ [sup. cil. parabolica con generatrici parallele all'asse x]

107 $z^2 + x^2 + 4x = 2z - 3$ [sup. cil. circolare con generatrici parallele all'asse y]

108 $4x^2 - 16x + 2 = 6y - 3y^2 - 5$ [sup. cil. ellittica con generatrici parallele all'asse z]

109 $zy + 2z = y - 1$ [sup. cil. iperbolica con generatrici parallele all'asse x]

110 **ESERCIZIO GUIDA**

Troviamo l'equazione della superficie cilindrica che ha le seguenti caratteristiche:
a) le generatrici sono parallele all'asse x;
b) la direttrice è la parabola appartenente al piano Oyz, con asse parallelo all'asse z e passante per i punti $A(0; -3; 0)$, $B(0; -1; 0)$, $C(0; -4; 3)$.

L'equazione da determinare è di secondo grado, contiene soltanto le variabili y e z e, messa a sistema con l'equazione del piano Oyz, rappresenta la direttrice.
Questa è determinata da un sistema del tipo:

$$\begin{cases} x = 0 & \text{equazione del piano } Oyz; \\ z = ay^2 + by + c & \text{equazione della parabola nel piano } Oyz \text{ con asse parallelo all'asse } z. \end{cases}$$

Calcoliamo i coefficienti a, b, c utilizzando le coordinate dei tre punti noti:

$$\begin{array}{l} A \ \rightarrow \\ B \ \rightarrow \\ C \ \rightarrow \end{array} \begin{cases} 0 = (-3)^2 a - 3b + c \\ 0 = (-1)^2 a - b + c \\ 3 = (-4)^2 a - 4b + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases}$$

Pertanto la direttrice ha per equazioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 + 4y + 3 \end{cases}$$

L'equazione $z = y^2 + 4y + 3$ rappresenta la superficie cilindrica.

Scrivi le equazioni delle superfici cilindriche che hanno le caratteristiche indicate.

111 Le generatrici sono parallele all'asse y; la direttrice è la circonferenza del piano Oxz, di raggio 4, con centro nel punto $C(-2; 0; 1)$. $[x^2 + z^2 + 4x - 2z - 11 = 0]$

112 È una superficie cilindrica circolare con raggio della sezione normale pari a 3 e con asse la retta di equazioni $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$. $[x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 = 0]$

113 Le generatrici sono parallele all'asse z; la direttrice è l'ellisse del piano Oxy, con centro nel punto $(1; 3; 0)$ e con due vertici nei punti $(1; -1; 0)$ e $(-1; 3; 0)$. $[4x^2 + y^2 - 8x - 6y - 3 = 0]$

114 Le generatrici sono parallele all'asse x; la direttrice è l'iperbole del piano Oyz, con centro nell'origine, vertici nei punti $(0; -\sqrt{2}; 0)$, $(0; \sqrt{2}; 0)$ e semidistanza focale pari a $\sqrt{3}$. $[y^2 - 2z^2 - 2 = 0]$

115 Le generatrici sono parallele all'asse y; la direttrice è la parabola del piano Oxz, con asse parallelo all'asse x, con vertice nel punto $V(-1; 0; -2)$ e passante per l'origine. $[z^2 - 4x + 4z = 0]$

La superficie conica

116 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo la superficie conica di equazione $x^2 + z^2 - 5y^2 = 0$.

Osserviamo che l'equazione è ridotta alla forma $x^2 + z^2 - k^2y^2 = 0$. Essa presenta le seguenti caratteristiche algebriche:

- è formata soltanto da termini di secondo grado;
- i coefficienti di x^2 e di z^2 sono uguali a 1, quello di y^2 è negativo.

Dalla teoria sappiamo che rappresenta una superficie conica con:

- vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse y;
- semiapertura δ tale che $\mathrm{tg}^2\delta = k^2 = 5$, quindi $\delta = \mathrm{arctg}\sqrt{5}$.

117 Indica quali delle seguenti equazioni rappresentano una superficie conica.

a) $x^2 + z^2 = 2y^2$; c) $x^2 + y^2 - 9z^2 = 1$; e) $z^2 + 4y^2 = 4$;

b) $4y^2 + 4z^2 - 5x^2 = 0$; d) $x^2 + 2z^2 + 2y^2 = 9$; f) $y = x^2 - z^2$.

Studia le seguenti superfici coniche con vertice nell'origine.

118 $x^2 - 3y^2 + z^2 = 0$ [asse: asse y; $\delta = 60°$]

119 $4x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 0$ [asse: asse y; $\delta = 45°$]

120 $3y^2 + 3z^2 = x^2$ [asse: asse x; $\delta = 30°$]

121 $5z^2 = x^2 + y^2$ [asse: asse z; tg $\delta = \sqrt{5}$]

122 $2y^2 + 2z^2 - 6x^2 = 0$ [asse: asse x; $\delta = 60°$]

123 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo la superficie conica generata dalla retta del piano *Oxz* con equazioni

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$

in una rotazione attorno all'asse *z*.

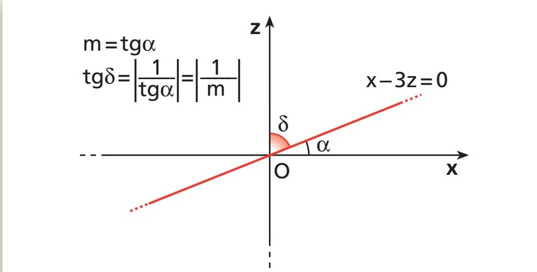
L'asse z è l'asse della superficie conica, quindi la sua equazione è del tipo:

$$x^2 + y^2 - k^2z^2 = 0.$$

Per calcolare k rappresentiamo la retta generatrice nel piano Oxz. Possiamo osservare che la semiapertura δ è complementare all'angolo che la generatrice forma con l'asse delle x, quindi:

$$\text{tg}\,\delta = \left|\frac{1}{m}\right|,$$

dove $m = \frac{1}{3}$ è il coefficiente angolare della generatrice.



La retta generatrice e la semiapertura δ.

Abbiamo quindi:

$$k^2 = \frac{1}{m^2} = 9.$$

L'equazione cercata è pertanto:

$$x^2 + y^2 - 9z^2 = 0.$$

Determina l'equazione della superficie conica generata nel modo indicato.

124 Generatrice: $\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$; asse di rotazione: z. $[x^2 + y^2 - z^2 = 0]$

125 Generatrice: $\begin{cases} z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$; asse di rotazione: y. $[x^2 + z^2 - 9y^2 = 0]$

126 Generatrice: $\begin{cases} z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$; asse di rotazione: x. $[9y^2 + 9z^2 - x^2 = 0]$

127 Generatrice: $\begin{cases} x = 0 \\ y - \frac{1}{3}z = 0 \end{cases}$; asse di rotazione: y. $[x^2 + z^2 - 9y^2 = 0]$

128 Generatrice: $\begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$; asse di rotazione: z. $[4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0]$

La superficie sferica

129 ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione della superficie sferica di centro $C(-1; 2; 1)$ e raggio 2; troviamo poi la sua intersezione con il piano Oxy.

Conoscendo il centro e il raggio, possiamo utilizzare direttamente la formula generale:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$

Sostituendo, otteniamo l'equazione cercata:

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4 \text{ o, sviluppando, } x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+2=0.$$

Per trovare la curva di intersezione con il piano Oxy, formiamo il sistema contenente l'equazione del piano e quella della sfera:

$$\begin{cases} z=0 \\ (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=0 \\ (x+1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$$

L'equazione nelle due variabili x e y rappresenta la curva di intersezione cercata: essa è la circonferenza del piano Oxy con centro nel punto $(-1; 2; 0)$ e raggio $\sqrt{3}$.

130 Indica quali delle seguenti equazioni rappresentano una superficie sferica.

a) $x^2+y^2+z^2-8x-9=0$; c) $4x^2+4y^2+4z^2-16y+1=0$; e) $x^2+9y^2=z+4$;

b) $x^2+y^2=25$; d) $x^2+y^2-9z^2=0$; f) $x^2+y^2+z^2=2$.

Trova l'equazione delle superfici sferiche con centro e raggio assegnati e l'eventuale intersezione con il piano indicato.

131 $C(4; 2; 5)$, $r=5$; piano Oyz. $[x^2+y^2+z^2-8x-4y-10z+20=0;\ y^2+z^2-4y-10z+20=0]$

132 $C(-3; 5; 1)$, $r=3$; piano Oxz. $[x^2+y^2+z^2+6x-10y-2z+26=0;\ \varnothing]$

133 $C(2; -2; -5)$, $r=2$; piano Oyz. $[x^2+y^2+z^2-4x+4y+10z+29=0$; il punto $(0; -2; -5)]$

134 $C(1; -4; 2)$, $r=6$; piano Oxy. $[x^2+y^2+z^2-2x+8y-4z-15=0;\ x^2+y^2-2x+8y-15=0]$

Trova l'equazione delle superfici sferiche passanti per i punti assegnati e l'eventuale intersezione con il piano indicato.

135 $O(0; 0; 0)$, $A(3; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; 4)$; piano Oxy.
$[x^2+y^2+z^2-3x+2y-4z=0;\ x^2+y^2-3x+2y=0]$

136 $O(0; 0; 0)$, $A(-1; 0; 0)$, $B(0; -3; 0)$, $C(0; 0; -4)$; piano Oxz.
$[x^2+y^2+z^2+x+3y+4z=0;\ x^2+y^2+x+4z=0]$

137 $A(2; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; -3)$, $D(0; 3; 0)$; piano Oyz.
$[x^2+y^2+z^2+x-y+z-6=0;\ y^2+z^2-y+z-6=0]$

138 $A(4; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 4)$, $D(4; 4; 0)$; piano Oyz.
$[x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z=0;\ y^2+z^2-4y-4z=0]$

139 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione della superficie sferica che interseca il piano Oxy formando la circonferenza $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ e il cui centro è un punto di quota -5.

Per simmetria il centro della superficie sferica sta sulla retta passante per il centro della circonferenza data e perpendicolare al suo piano, cioè al piano Oxy. Il centro della circonferenza è il punto $(-1; 2; 0)$, quindi le equazioni di tale retta sono:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Il centro della sfera è pertanto il punto $C(-1; 2; -5)$.
Per determinare il raggio è sufficiente calcolare la distanza di C da un punto qualsiasi della circonferenza. Ponendo la sua equazione nella forma

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

possiamo più facilmente scegliere un punto L di coordinate semplici:

$$x = 2 \quad \rightarrow \quad y = 2.$$

Ricordando che la sua quota è 0, calcoliamo la distanza $\overline{CL}$:

$$\overline{CL} = \sqrt{(-1-2)^2 + (2-2)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{34}.$$

L'equazione della superficie sferica è pertanto:

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 5)^2 = 34 \qquad \text{oppure} \qquad x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 10z - 4 = 0.$$

Trova l'equazione delle superfici sferiche che verificano le condizioni indicate.

140 L'intersezione con il piano Oyz è la circonferenza $(y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 3$; il centro ha ascissa -4.
[$C(-4; 2; -3)$; $r = \sqrt{19}$]

141 L'intersezione con il piano Oxz è la circonferenza $x^2 + z^2 + 2\sqrt{3}\,x - 2\sqrt{2}\,z - 1 = 0$; il centro è un punto di ordinata -2.
[$C(-\sqrt{3}; -2; \sqrt{2})$; $r = \sqrt{10}$]

142 L'intersezione con il piano Oxy è la circonferenza $x^2 + y^2 - 10y - 11 = 0$; la quota del centro è 3.
[$C(0; 5; 3)$; $r = 3\sqrt{5}$]

143 L'intersezione con il piano Oxz è la circonferenza $x^2 + z^2 - 8x - 12z + 27 = 0$; il centro è un punto di ordinata -4.
[$C(4; -4; 6)$; $r = \sqrt{41}$]

144 Trova l'equazione della superficie sferica di centro $C(2; 3; -1)$ e tangente al piano di equazione $x + y - z + 2 = 0$.
[$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 12x - 18y + 6z - 22 = 0$]

145 Trova centro e raggio delle seguenti superfici sferiche:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 5 = 0; \; x^2 + y^2 + z^2 - 10z + 9 = 0.$$

[$C(1; -3; 2)$, $r = 3$; $C(0; 0; 5)$, $r = 4$]

Le altre superfici quadriche notevoli

146 **ESERCIZIO GUIDA**

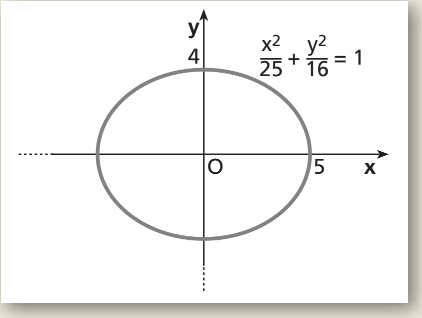
Della superficie di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$ indichiamo il tipo e determiniamo le sezioni con i piani coordinati.

La superficie è un iperboloide a una falda, perché è del tipo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

La sua sezione con il piano Oxy, cioè con il piano di equazione $z = 0$, si ha risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

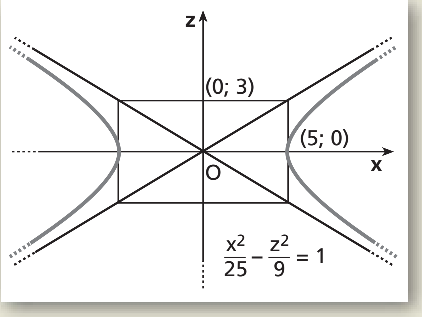
da cui $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, che è l'equazione di un'ellisse di semiassi $a = 5$ e $b = 4$.



La sua sezione con il piano Oxz, cioè con il piano di equazione $y = 0$, si ha risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

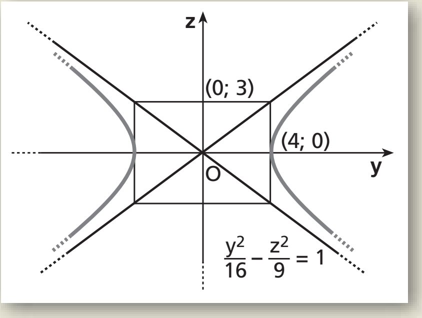
da cui $\frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{9} = 1$, che è l'equazione di un'iperbole di semiassi $a = 5$ e $b = 3$.



La sua sezione con il piano Oyz, cioè con il piano di equazione $x = 0$, si ha risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

da cui $\frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$, che è l'equazione di un'iperbole di semiassi $a = 4$ e $b = 3$.



Delle superfici che hanno le seguenti equazioni indica il tipo e determina le sezioni con i piani coordinati, specificando il tipo di curva ottenuto.

147 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$ [ellissoide, …]

148 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$ [iperboloide a una falda, …]

149 $3x^2 - 6y^2 - 2z^2 = 36$ [iperboloide a due falde, …]

150 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2z$ [paraboloide ellittico, …]

151 $\frac{x^2}{50} - \frac{y^2}{32} = z$ [paraboloide iperbolico, …]

152 $4x^2 - y^2 = 32z$ [paraboloide iperbolico, …]

153 $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = z$ [paraboloide ellittico, …]

154 $8x^2 - 8y^2 - z^2 = 24$ [iperboloide a due falde, …]

ESERCIZI VARI Lo spazio

TEST

155 Dato il paraboloide ellittico di equazione

$$3x^2 + 3z^2 = 4y,$$

indica l'affermazione *falsa*.
L'intersezione del paraboloide con il piano:

A $z = -2$ è una parabola.
B $x = -5$ è una parabola.
C $y = 1$ è una circonferenza.
D $y = -4$ è una circonferenza.
E $y = 0$ è un punto.

156 La superficie di equazione

$$y^2 + z^2 - 2y + 4x + 1 = 0$$

è simmetrica rispetto:

A all'asse y.
B all'asse x.
C all'asse z.
D al piano Oxy.
E al piano Oxz.

157 Una delle seguenti affermazioni riguardo alla superficie conica di equazione $x^2 + z^2 - 3y^2 = 0$ è *falsa*. Quale?
L'intersezione della superficie con il piano:

A $z = -2$ è un'iperbole.
B $y = 5$ è una circonferenza.
C $y = 0$ è un punto.
D $x - y = 0$ è una parabola.
E $y - z = 0$ è una coppia di rette incidenti.

158 L'equazione $6x^2 - 3y^2 + 4z^2 = -12$ rappresenta:

A un iperboloide a due falde.
B un paraboloide iperbolico.
C una superficie conica.
D una superficie cilindrica.
E un iperboloide a una falda.

159 Il triangolo di vertici $A(5;\ 2;\ 4)$, $B(5;\ 6;\ 4)$, $C(5 - 2\sqrt{3}\,;\ 2;\ 6)$ è:

A isoscele sulla base AB.
B equilatero.
C rettangolo.
D isoscele sulla base AC.
E scaleno.

160 Osserva i due sistemi e l'equazione:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z^2 + y^2 = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -3 \\ z^2 + y^2 = 2 \end{cases}, \quad z^2 + y^2 = 2.$$

Una delle seguenti affermazioni è *vera*. Quale?

A I due sistemi e l'equazione rappresentano curve congruenti.
B I due sistemi e l'equazione rappresentano tre ellissoidi.
C I due sistemi rappresentano curve congruenti e l'equazione un ellissoide.
D I due sistemi rappresentano curve congruenti e l'equazione una superficie cilindrica.
E I due sistemi e l'equazione rappresentano tre superfici cilindriche.

Risolvi i seguenti esercizi.

161 Data la retta di equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2t - 2 \\ z = -t - 3 \end{cases}$, determina le intersezioni con i piani coordinati.
$\left[\left(0; -\frac{4}{3}; -\frac{10}{3}\right), (-2; 0; -4), (10; -8; 0)\right]$

162 Studia la superficie di equazione $16x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 144$. Calcola il volume del cilindro finito circoscritto alla superficie data e con asse coincidente con l'asse z. [ellissoide di semiassi 3, 3, 4; 72π]

163 Dimostra che il piano di equazione $2x - y + 2z - 3 = 0$ è tangente alla superficie di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 8y - 4z + 47 = 0$. [sup. sfer. di centro (6; 4; 2) e raggio 3; distanza centro-piano uguale a 3]

164 Trova i vertici del tetraedro le cui facce appartengono rispettivamente ai piani: $z = 0$, $x = 5$, $3x - 5y = 0$, $4y - 3z = 0$. Calcola il volume. [(0; 0; 0), (5; 3; 0), (5; 0; 0), (5; 3; 4); 10]

165 Data la superficie di equazione $x^2 + y^2 - 4z = 0$, determina un piano parallelo al piano Oxy tale che la figura che si forma nella loro intersezione abbia area 24π. [$z = 6$; la figura è un cerchio di raggio $2\sqrt{6}$]

166 Determina la superficie conica generata dalla retta del piano Oyz di equazione $5y + 4z = 0$ in una rotazione completa attorno all'asse z. [$25x^2 + 25y^2 - 16z^2 = 0$]

167 Trova l'equazione del piano α rispetto a cui i punti $M(3; -3; 4)$ e $M'(-2; 4; 1)$ sono simmetrici. [$10x - 14y + 6z - 13 = 0$]

168 Studia la superficie di equazione $3y^2 + 3z^2 - x^2 = 0$; determina le sue intersezioni con il piano $y - 2 = 0$. [sup. con., asse coincidente con l'asse x, semiapertura 30°; iperbole $x^2 - 3z^2 = 12$]

169 Verifica che i punti $P(0; 0; 3)$, $Q(-2; 0; 0)$, $R\left(1; -3; \frac{3}{4}\right)$, $S(1; -2; 2)$ sono complanari. [$6x + 5y - 4z + 12 = 0$]

170 Data la superficie cilindrica di equazione $z = x^2 - x$, determina un piano parallelo al piano Oxy tale che intersechi la superficie secondo due rette parallele a distanza 5 una dall'altra. [$z = 6$]

171 Utilizzando le equazioni della simmetria assiale rispetto all'asse x, determina la superficie simmetrica del cilindro indefinito di equazione:

$y^2 + z^2 + 4y - 2z - 20 = 0$. [$y^2 + z^2 - 4y + 2z - 20 = 0$]

172 In un parallelepipedo una base ha per vertici i punti $A(2; -3; -4)$, $B(2; 2; -4)$, $C(-1; 2; -4)$, $D(-1; -3; -4)$; l'altra i punti $A'(2; -1; 2)$, $B'(2; 4; 2)$, $C'(-1; 4; 2)$, $D'(-1; -1; 2)$. Determina:

a) la lunghezza degli spigoli laterali;
b) l'equazione della faccia $BCC'B'$;
c) il volume del parallelepipedo. [a) $2\sqrt{10}$; b) $3y - z - 10 = 0$; c) 90]

173 È dato il tetraedro di vertici $A(1; -2; 4)$, $B(1; -6; 0)$, $C(-3; -2; 0)$, $D(-1; -2; -2\sqrt{3})$.

a) Trova l'equazione della superficie sferica a esso circoscritta.
b) Determina il piano α passante per i punti A, B, C.
c) Verifica che il piano α è secante della sfera.

[a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 11 = 0$; b) $x + y - z + 5 = 0$; c) distanza del centro dal piano minore del raggio]

174 Considera i punti $M(-1; -3; -1)$, $N(-\sqrt{3}; -3; -2)$ e $P(1; 0; -4)$.

a) Verifica che il triangolo MNP è rettangolo.
b) Trova l'equazione del paraboloide ellittico con asse coincidente con l'asse z, passante per i punti M e N e i cui punti hanno quota negativa.
c) Determina la curva che si ottiene intersecando il paraboloide con il piano passante per P e parallelo al piano Oyz. [b) $9x^2 + y^2 = -18z$; c) $18z = -y^2 - 9$]

175 Un cilindro circolare retto di volume $V = 45\pi$ ha i centri delle basi nei punti $C_1(-2; -3; 4)$, $C_2(-2; 2; 4)$.

a) Scrivi l'equazione della superficie cilindrica a cui appartiene quella laterale del cilindro dato.
b) Determina le equazioni dei piani passanti per l'asse y e aventi distanza $\sqrt{2}$ dall'asse del cilindro.
c) Calcola le aree dei rettangoli determinati dall'intersezione dei piani precedenti con il cilindro dato.

[a) $x^2 + z^2 + 4x - 8z + 11 = 0$; b) $x + z = 0$, $7x + z = 0$; c) $10\sqrt{7}$, $10\sqrt{7}$]

176 Sono dati i punti $P(0; 1; 3)$ e $A\left(-\frac{3}{2}; 1; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

a) Determina l'equazione della superficie conica retta generata dalla retta OP in una rotazione completa attorno all'asse y.
b) Verifica che il punto A appartiene a tale superficie e trova una terna di equazioni parametriche della retta OA.
c) Calcola l'area del triangolo OAB, essendo B il simmetrico di A rispetto al piano Oyz.

$\left[\text{a) } x^2 + z^2 - 9y^2 = 0; \text{ b) } x = -\frac{3}{2}t \wedge y = t \wedge z = \frac{3\sqrt{3}}{2}t; \text{ c) } \frac{3\sqrt{31}}{4}\right]$

177 Considera la superficie di equazione $9x^2 - 4y^2 + 36z^2 - 36 = 0$.
a) Quale superficie corrisponde a tale equazione?
b) Determina la curva che si ottiene intersecandola con il piano $y = 3\sqrt{3}$.
c) Calcola l'area del rettangolo circoscritto a tale curva.
[a) iperboloide a una falda; b) ellisse $x^2 + 4z^2 = 16$; c) 32]

178 Dati i punti $O(0; 0; 0)$, $A(0; 6; 0)$, $B(0; 3; 3\sqrt{3})$, $C(2\sqrt{6}; 3; \sqrt{3})$:
a) verifica che sono i vertici di un tetraedro regolare;
b) scrivi le equazioni generali dello spigolo AC;
c) determina l'equazione della superficie sferica circoscritta.
$$\left[\text{a) spigolo} = 6;\ \text{b)} \begin{cases} x - 2\sqrt{2}\,z = 0 \\ x + \sqrt{6}\,y + \sqrt{2}\,z - 6\sqrt{6} = 0 \end{cases};\ \text{c)}\ x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{6}\,x - 6y - 2\sqrt{3}\,z = 0\right]$$

179 Sono dati i punti $A(0; 0; -1)$ e $A'(0; 0; 1)$.
a) Determina il luogo dei punti P dello spazio tali che $\overline{PA} + \overline{PA'} = 4$.
b) Verifica che le sezioni di tale superficie con i piani Oxz e Oyz sono congruenti.
c) Trova l'equazione della curva che risulta dall'intersezione della superficie con il piano $z = -1$.
[a) ellissoide $4x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 12 = 0$; b) ellisse con semiassi $\sqrt{3}$ e 2; c) $4x^2 + 4y^2 = 9$]

5. LE FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Teoria a pag. 1094

La ricerca del dominio

180 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo il dominio della funzione $z = \dfrac{\sqrt{\ln(x^2 + y^2 - 15)} + 7x^2 - 6x}{\sqrt{x^2 - y^2 - 1}}$.

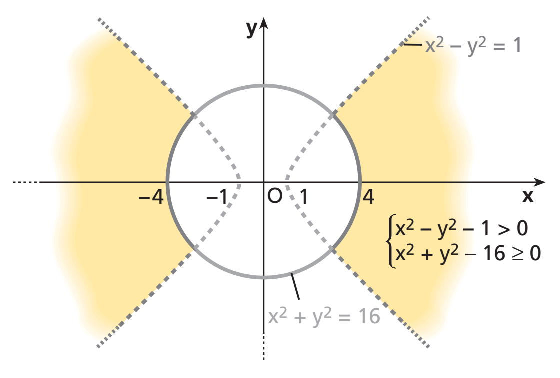
Dobbiamo imporre che siano contemporaneamente verificate le seguenti condizioni:
- il denominatore diverso da 0;
- il radicando al numeratore maggiore o uguale a 0;
- l'argomento del logaritmo maggiore di 0;
- il radicando al denominatore maggiore oppure uguale a 0.

Otteniamo il seguente sistema:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2 - 1} \neq 0 \quad \to \quad x^2 - y^2 - 1 \neq 0 \\ \ln(x^2 + y^2 - 15) \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 15 > 0 \\ x^2 - y^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Considerando la prima e l'ultima condizione contemporaneamente e ricordando che $\ln a \geq 0$ per $a \geq 1$, il sistema si riduce a:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 > 0 \\ x^2 + y^2 - 15 \geq 1 \\ x^2 + y^2 - 15 > 0 \end{cases}$$

Osserviamo che la seconda e la terza disequazione sono entrambe vere soltanto se il primo membro è maggiore o uguale a 1:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 > 0 \\ x^2 + y^2 - 15 \geq 1 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 - y^2 - 1 > 0 \\ x^2 + y^2 - 16 \geq 0 \end{cases}$$

Il dominio della funzione è rappresentato da tutti i punti del piano della parte colorata della figura.



Determina il dominio delle seguenti funzioni di due variabili, rappresentandolo graficamente.

181 $z = x^2 + y^3 - 2xy$

182 $z = \dfrac{x^2 - y}{x + y}$

183 $z = \dfrac{x - y}{xy - 2}$

184 $z = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y - 4}$

185 $z = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2 - 9}$

186 $z = \dfrac{1}{y - 2x^2} + \dfrac{x}{x + y^2}$

187 $z = \dfrac{2x - y}{|xy| - 1}$

188 $z = \sqrt{x}\sqrt{y} - 4$

189 $z = \sqrt{xy} - 4$

190 $z = \sqrt{-x - y + 2}$

191 $z = \dfrac{5}{\sqrt{x - 2y}}$

192 $z = x^3 \cdot \sqrt{y - 2}$

193 $z = x^2 + xy + \sqrt{x^2 + 6}$

194 $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 6}$

195 $z = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2} + 6x + 8y}{xy}$

196 $z = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y - 2}$

197 $z = \sqrt{2 - |x - y|}$

198 $z = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{4 - |x|}$

199 $z = \dfrac{\ln x}{\ln y}$

200 $z = \ln(y - 4x + 1)$

201 $z = \ln(-x^2 - y^2 + 4)$

202 $z = \ln\dfrac{2x - y}{x + y}$

203 $z = \operatorname{sen} x + \cos\dfrac{1}{y}$

204 $z = 2 \arcsin x$

205 $z = \sqrt{\ln(4x - y)}$

206 $z = \log(x - 2)$

207 $z = e^{x^3 - y^3}$

208 $z = e^{x + \sqrt{x - y}}$

209 $z = \sqrt{x^2 + y^2} - y\log(3x - 5)$

210 $z = \sqrt{|y - 2x| + 3}$

211 $z = \sqrt{e^{xy} - 1}$

212 $z = \sqrt{x - 3} \cdot \sqrt{y}$

213 $z = e^{x^2 - y^2 - x - y}$

214 $z = \log\sqrt{xy - 2}$

215 $z = e^{\sqrt{x^2 - x - y}}$

216 $z = \log(4 - x^2 - y^2)$

217 $z = 2x + y - \sqrt{y - x^2}$

218 $z = \dfrac{x^2 + x + 1}{\sqrt{y + 2}}$

219 $z = \log(x - y + 3)$

220 $z = \sqrt{2x - y} + \sqrt{x + 2y - 1}$

221 $z = \sqrt{x + y} \cdot \sqrt{4x - y + 1}$

222 $z = \sqrt{-y + x^2} + \sqrt{2y - x^2}$

223 $z = \dfrac{4 + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}}{y - 2x + 1}$

224 $z = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4 + y} + \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

225 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \sqrt{xy - 1} + 6 - x$

226 $z = \dfrac{1}{\cos x}$

227 $z = \dfrac{\ln\sqrt{x + y + 1}}{\ln x}$

228 $z = \dfrac{\sqrt{3x + 2} - 6y}{\sqrt{4x - y + 1}}$

229 $z = \dfrac{\log_2(y + 5) - \sqrt{x + y - 1}}{\log_2\sqrt{2x^2 - y}}$

230 $z = \dfrac{\sqrt{x + 3y} + \sqrt{y - 2x}}{3x^2 y}$

231 $z = \dfrac{\sqrt{\ln(y - x^2)} + \text{arcsen}\, x}{y + 2}$

232 $z = \sqrt{\dfrac{x^2 - y}{x^2 + y^2 - 1}}$

233 $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 - 4}{4x^2 + 9y^2 - 36}}$

234 $z = \sqrt{\dfrac{4 - x^2 - y^2}{4x^2 + 9y^2 - 36}}$

235 $z = \log\dfrac{4 - x^2 - y^2}{4x^2 + 9y^2 - 36}$

236 $z = \sqrt{\dfrac{9 - x^2 - y^2}{xy - 1}}$

237 $z = \ln\left(\dfrac{x + y + 1}{x - y}\right)$

238 $z = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{xy}\right)$

239 $z = y + \text{arcsen}\left(\dfrac{3x}{y}\right)$

240 $z = \arccos\left(\dfrac{y - 2}{x - 1}\right)$

241 $z = \log\dfrac{x - y + 2}{x^2 - y}$

242 $z = 3x + 2y + \log x$

243 $z = e^{\sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}}$

244 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} - \sqrt{y + x^2 + 4x}$

245 $z = \dfrac{3x - 2y}{xy + 1}$

246 $z = \sqrt[3]{x + 1} \cdot \sqrt{x^2 - 3x}$

247 $z = \log(x^2 - 5x + y)$

248 $z = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2 + y^2 + 8}$

249 $z = \sqrt{x - y^2 + 4}$

250 $z = \log\sqrt{y - x^2 + 4}$

Le linee di livello

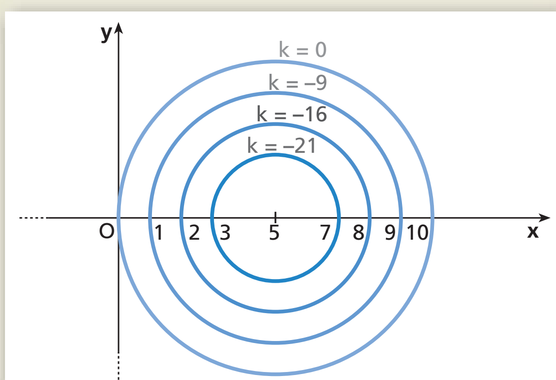
251 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo l'andamento delle linee di livello della funzione $z = x^2 + y^2 - 10x$ e rappresentiamone alcune.

Sezioniamo la superficie con piani paralleli al piano Oxy, cioè con piani di equazione $z = k$, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 10x \\ z = k \end{cases}$$

Le sezioni ottenute hanno equazioni $k = x^2 + y^2 - 10x$, una per ogni valore di k. Le linee di livello, al variare di k, sono le circonferenze $x^2 + y^2 - 10x - k = 0$ di centro $C(5; 0)$ e raggio $r = \sqrt{25 + k}$. Se, per esempio, sezioniamo con il piano $z = -16$, otteniamo la circonferenza $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$, che ha centro $C(5; 0)$ e raggio $r = \sqrt{25 - 16} = 3$.



In figura abbiamo rappresentato alcune linee di livello e i corrispondenti valori di k.

Dalla relazione $r = \sqrt{25+k}$ si ricava $25 + k \geq 0$, quindi $k \geq -25$. Per $k = -25$ si ha il punto $(5; 0)$. Le linee di livello non esistono se $k < -25$.

Studia l'andamento delle linee di livello delle seguenti funzioni e rappresentane alcune.

252 $z = 3x + 2y - 4$ [rette parallele]

253 $z = 3x + 6$ [rette parallele all'asse y]

254 $z = x^2 + y^2$ [$k \geq 0$: circonferenze concentriche di centro $O(0; 0)$]

255 $z = x^2 + y^2 - 8y$ [$k \geq -16$: circonferenze concentriche di centro $(0; 4)$]

256 $z = x^2 + 4x - y$ [parabole con asse di simmetria $x = -2$]

257 $z = x^2 - y^2$ [$k \neq 0$: iperboli equilatere di centro $O(0; 0)$; $k = 0$: …]

258 $z = 4x^2 + 9y^2$ [$k \geq 0$: ellissi di centro $O(0; 0)$]

259 $z = \dfrac{2x + y + 3}{2x}$ [rette passanti per uno stesso punto (fascio per $(0; -3)$)]

260 $z = \dfrac{x^2 - y}{2x + 4}$ [parabole passanti per uno stesso punto]

261 $z = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x + 2y}$ [circonferenze]

262 $z = 2xy$ [$k \neq 0$: iperboli equilatere riferite agli asintoti; $k = 0$: …]

263 $z = \dfrac{3x + 4y - 1}{4y}$ $\left[\text{rette passanti per uno stesso punto}\left(\text{fascio per}\left(\frac{1}{3}; 0\right)\right)\right]$

264 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ [$k \geq 0$: circonferenze con centro l'origine]

265 $z = \sqrt{x + y}$ [$k \geq 0$: rette parallele alla bisettrice del II e IV quadrante]

266 $z = \sqrt{4x^2 - 9y^2}$ [$k > 0$: iperboli con centro $O(0; 0)$; $k = 0$: …]

267 $z = \dfrac{2}{x + y}$ [$k \neq 0$: rette parallele alla bisettrice del II e IV quadrante]

268 $z = \dfrac{x^2 - y^2}{3}$ [$k \neq 0$: iperboli equilatere con centro $O(0; 0)$; $k = 0$: …]

269 $z = \dfrac{x^2 + y^2 + 4}{6x}$ $\left[k \leq -\frac{2}{3} \vee k \geq \frac{2}{3}\text{: circonferenze con centro sull'asse } x\right]$

270 $z = \dfrac{x^2 + 4}{3y^2 - 8}$ $\left[k > 0\text{: iperboli con centro in } O(0; 0);\ k < -\frac{1}{2}\text{: …}\right]$

271 $z = \dfrac{x^2 + y^2 + 2}{4x - 6y}$ $\left[k \leq -\sqrt{\frac{2}{13}} \vee k \geq \sqrt{\frac{2}{13}}\text{: circonferenze}\right]$

REALTÀ E MODELLI

1 **Il pallone da rugby**

Il regolamento del rugby prevede che il pallone sia un ovale di determinate misure. Noi lo possiamo approssimare con una superficie quadrica di misure esterne 30 × 20 × 18 cm. Considerato un opportuno sistema di riferimento con origine nel centro del pallone, determina:

- il tipo di superficie e la sua equazione;
- quale delle tre sezioni con i piani coordinati ha superficie maggiore.

2 **Il vasetto di cristallo**

Anna, per il corso di design che sta frequentando, progetta un piccolo vaso di cristallo. Il vaso è alto 25 cm e ha la forma di una superficie cilindrica con la base formata da un arco di parabola delimitato da un segmento; tale segmento interseca l'asse della parabola formando un angolo di 45° e il punto di intersezione ha una distanza di 6 cm dal vertice della parabola.

- Fissato un opportuno sistema di riferimento, scrivi le equazioni delle superfici che delimitano il vaso (poni uguale a 1 il coefficiente del termine di secondo grado dell'equazione della parabola e il suo vertice nell'origine degli assi).

3 **Il pozzo di San Patrizio**

Il pozzo di San Patrizio, a Orvieto, è profondo quasi 62 m e ha una forma cilindrica con base circolare di diametro 13,40 m. La parete del pozzo è percorsa, fino in fondo, da due rampe elicoidali (a cui si accede da due porte diametralmente opposte), lungo le quali i muli un tempo potevano salire e scendere, senza ostacolarsi, per andare ad attingere l'acqua. L'altezza interna di ogni rampa è di circa 2 m.

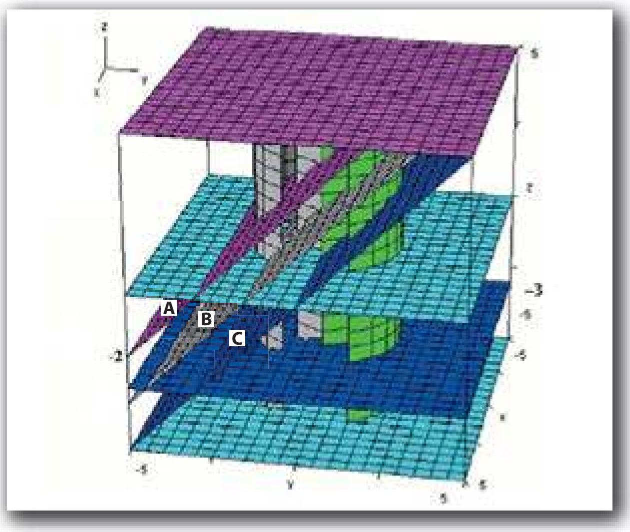
- Rappresenta graficamente la posizione delle due rampe nella parte terminale (sottoterra) del pozzo.
- Scrivi l'equazione delle due rampe elicoidali rispetto a un sistema di riferimento con assi x e y sulla base del pozzo e l'origine nel centro della base.

(**SUGGERIMENTO** Le equazioni parametriche dell'elica con le caratteristiche descritte sono $x = r\cos\alpha$, $y = r\,\text{sen}\,\alpha$, $z = c\dfrac{\alpha}{2\pi}$, con r = raggio di base, c = passo dell'elica, cioè la distanza tra due punti della stessa elica sulla stessa verticale, $\alpha \geq 0$.)

4 **Progettiamo uno spazio espositivo?**

Un progettista elabora mentalmente l'idea di uno spazio espositivo e inizia a disegnare, con software dedicati, un primo modello grafico. In figura riportiamo uno schizzo con le superfici che individuano gli spazi principali. Utilizzando le informazioni riportate in figura, determina:

- le equazioni dei piani orizzontali paralleli;
- le equazioni del piano obliquo B, parallelo all'asse x e passante per il punto $\left(0; 0; \dfrac{3}{2}\right)$, e dei piani A e C a esso paralleli;
- le equazioni dei due cilindri (considerati chiusi) rispettivamente di raggi 1 e $\sqrt{5}$.



VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: www.zanichellitest.it

1 La superficie di equazione $3x^2 - 5y^2 = 30z$ è *simmetrica*:

A rispetto al piano Oxy.
B soltanto rispetto al piano Oxz.
C rispetto all'asse z.
D rispetto a nessuno dei piani coordinati.
E rispetto all'origine.

2 Considera le due superfici che hanno equazioni:

$$yz = 4, \qquad y^2 + z^2 - 4y - 4z = 0.$$

La loro intersezione è formata:

A soltanto da una retta.
B da due rette parallele.
C soltanto da un punto.
D soltanto da due punti.
E dall'insieme vuoto.

3 È dato il paraboloide iperbolico di equazione:

$$3y^2 - 2z^2 = 12x.$$

Una delle seguenti affermazioni è *falsa*. Quale? L'intersezione del paraboloide con il piano:

A $x = 1$ è un'iperbole.
B $z = 0$ è una parabola.
C $z = -3$ è una parabola.
D $y = 1$ è una parabola.
E $x = 0$ è un punto.

4 Un punto ha le coordinate $(-5; 2; -3)$; quelle del suo simmetrico rispetto all'asse x sono:

A $(5; 2; -3)$.
B $\left(-\frac{1}{5}; 2; -3\right)$
C $(5; -2; 3)$.
D $(-5; -2; 3)$.
E $(2; -3; -5)$.

5 La superficie di equazione $x^2 - z^2 = 1$ è simmetrica:

A soltanto rispetto al piano Oyz.
B rispetto a tutti e tre i piani coordinati.
C soltanto rispetto al piano Oxy e all'origine.
D soltanto rispetto al piano Oyz e all'origine.
E soltanto rispetto al piano Oxz e all'origine.

6 L'equazione $\sqrt{y^2 + z^2} = |x|$ rappresenta:

A una superficie conica.
B una superficie sferica.
C una superficie cilindrica.
D un paraboloide ellittico.
E nessuna delle superfici precedenti.

QUESITI

7 A quali condizioni l'equazione $y^2 + z^2 + ay + bz + c = 0$ rappresenta una superficie cilindrica reale? Motiva la risposta e presenta un caso in cui l'equazione non rappresenta alcuna superficie cilindrica reale.

8 Deduci l'equazione generale della superficie conica che ha per asse quello delle ascisse e vertice nell'origine.

9 Dimostra che, se una superficie di equazione $f(x; y; z) = 0$ è simmetrica rispetto al piano Oxy e rispetto al piano Oyz, allora è simmetrica rispetto all'asse y.

PROBLEMI

10 È data la superficie retta Σ che ha per *direttrice* la curva di equazioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + 4y - 4z = 0 \end{cases}$$

a) Identifica il tipo di superficie.
b) Trova l'intersezione di Σ con il piano α di equazione $y - z = 0$; dimostra che α è tangente a Σ. (Suggerimento. Studia la proiezione sul piano coordinato contenente la direttrice.)
c) Determina il piano α' parallelo ad α in modo che la figura formata dalla direttrice e dall'intersezione di α' con il suo piano abbia area $8\sqrt{3}$.

[a) sup. cil. parab. con generatrici parallele all'asse x; b) asse x; c) $y - z + 3 = 0$]

11 Sono dati i punti $A(-2; -2; 1)$, $B(1; 3; 4)$, $C(2; 1; -6)$ e la superficie sferica di equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 2z - 83 = 0.$$

a) Determina l'equazione del piano α passante per i punti A, B, C e verifica che è secante la superficie sferica data.
b) Calcola l'area della minore fra le due calotte sferiche staccate dal piano α.
c) Trova l'intersezione fra il piano α e il piano coordinato Oyz.

[a) $4x - 3y + z + 1 = 0$, dist. dal centro minore del raggio; b) 120π; c) retta $(x = 0 \wedge 3y - z - 1 = 0)$]

12 Considera i punti $A(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 2\sqrt{3})$ e $P(\sqrt{3}; 3; 6)$.

a) Determina la superficie conica retta generata dalla retta OP in una rotazione completa attorno all'asse z e verifica che A appartiene a tale superficie.
b) Costruisci la piramide regolare con vertice O e base quadrata $ABCD$ appartenente al piano passante per A e perpendicolare all'asse z; quindi calcola il volume.
c) Determina l'equazione della faccia laterale ABO.

$\left[\text{a) } 3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0; \text{ b) } B(\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 2\sqrt{3}), C(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\sqrt{3}), D(-\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\sqrt{3}), \frac{16}{\sqrt{3}}; \text{ c) } \sqrt{6}\,y + z = 0\right]$

13 Un parallelepipedo ha per basi il quadrilatero di vertici $A(6; 1; 0)$, $B(6; 4; 0)$, $C(1; 4; 0)$, $D(1; 1; 0)$ e il quadrilatero di vertici $A'(4; 2; 5)$, $B'(4; 5; 5)$, $C'(-1; 5; 5)$, $D'(-1; 2; 5)$.

a) Dimostra che le basi sono rettangoli e verifica che le diagonali AC' e CA' si tagliano a metà.
b) Determina l'equazione della faccia laterale $ABB'A'$.
c) Calcola il volume del parallelepipedo.

$\left[\text{a) punto medio: } \left(\frac{5}{2}; 3; \frac{5}{2}\right); \text{ b) } 5x + 2z - 30 = 0; \text{ c) } 75\right]$

14 Considera la famiglia di paraboloidi iperbolici di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 2y.$$

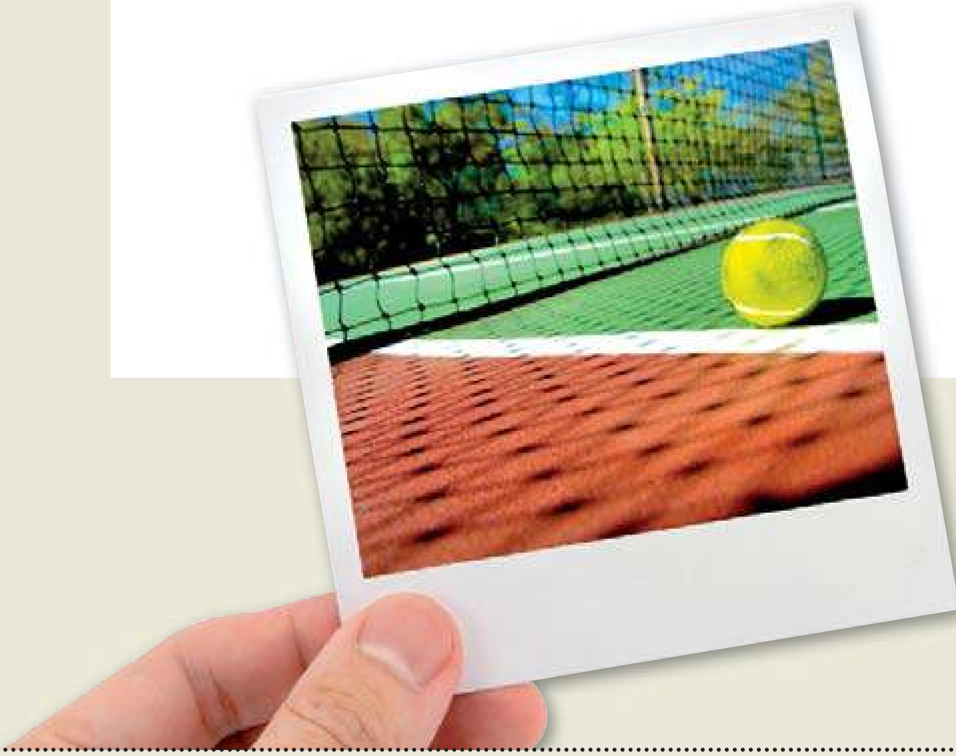
a) Determina il paraboloide Σ passante per i punti $M(-3; 1; -2)$ e $N(\sqrt{21}; -1; 6)$.
b) Trova la curva η intersezione fra Σ e il piano coordinato Oxy.
c) Considerato su η il punto A di ascissa -6, scrivi l'equazione della superficie cilindrica retta che ha per direttrice la circonferenza di diametro OA.

[a) $a = \sqrt{3}$, $b = 2$; b) parabola $(z = 0 \wedge x^2 - 6y = 0)$; c) $x^2 + y^2 + 6x - 6y = 0$]

CAPITOLO 17 ١٧ १७ 十七

[numerazione araba] [numerazione devanagari] [numerazione cinese]

LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE



L'OMBRA DI PITAGORA Se si espone ai raggi solari un reticolato a maglie rettangolari, l'ombra che esso proietta per terra è una figura formata non da rettangoli, ma da parallelogrammi. Questo non è un caso: poiché i raggi del Sole che giungono sulla Terra possono essere considerati paralleli, simulano molto bene le affinità, ossia trasformazioni geometriche che conservano l'allineamento fra punti, il parallelismo fra rette e il rapporto fra aree.

Se esponiamo ai raggi solari una figura che illustra il teorema di Pitagora, che cosa accade alla sua ombra?

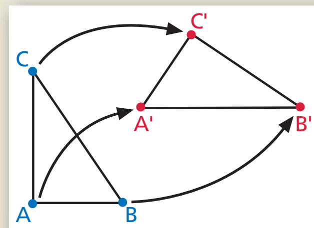
▶ La risposta a pag. 1164

1. LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

DEFINIZIONE

Trasformazione geometrica

Una trasformazione geometrica è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del piano uno e un solo punto del piano stesso.



● Si dice anche che una trasformazione geometrica è una corrispondenza biunivoca del piano in sé.

Se indichiamo con t una trasformazione geometrica, per dire che associa a un punto A del piano un altro punto A', scriviamo

$$t: A \mapsto A'$$

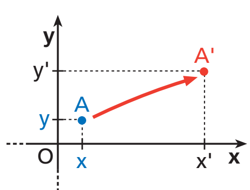
oppure: $A' = t(A)$.

● A' può anche coincidere con A.

A' viene chiamato **trasformato** o **immagine** di A, mentre si dice che A è l'**antitrasformato** o la **controimmagine** di A'.
Poiché t è una corrispondenza biunivoca esiste sempre la sua trasformazione inversa t^{-1} che a ogni punto A' del piano fa corrispondere il punto A controimmagine di A' rispetto a t.

Le proprietà geometriche che si conservano in una trasformazione vengono dette **invarianti**.

Le equazioni di una trasformazione geometrica



Se nel piano è fissato un riferimento cartesiano xOy, a ogni punto $A(x; y)$ viene associato il suo trasformato $A'(x'; y')$ mediante due funzioni, dette **equazioni della trasformazione**, che esprimono le coordinate x' e y' di A' in funzione di x e y:

$$t: \begin{cases} x' = F(x; y) \\ y' = G(x; y) \end{cases}$$

ESEMPIO

1. Verifichiamo che le equazioni

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 5 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$$

rappresentano una trasformazione geometrica.
Assegnati due valori a x e a y, sono univocamente determinati i valori di x' e y'. Per dimostrare che la corrispondenza è biunivoca, ricaviamo x e y in funzione di x' e y'.
Dobbiamo risolvere il sistema lineare in x e y:

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 5 \\ y' = x + y + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = x' - 5 \\ x + y = y' - 1 \end{cases}$$

Utilizziamo il metodo di Cramer.

Essendo $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$, il sistema è determinato e ammette una e una sola soluzione le cui coordinate sono:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} x' - 5 & -1 \\ y' - 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{x' - 5 + y' - 1}{3} = \frac{x'}{3} + \frac{y'}{3} - 2;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & x' - 5 \\ 1 & y' - 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2y' - 2 - x' + 5}{3} = -\frac{x'}{3} + \frac{2}{3}y' + 1.$$

A ogni coppia $(x'; y')$ è così associata una e una sola coppia $(x; y)$, pertanto la corrispondenza è biunivoca. Le equazioni date inizialmente sono quindi le equazioni di una trasformazione geometrica t, mentre quelle ottenute risolvendo il sistema, che esprimono x e y in funzione di x' e y', sono le equazioni della trasformazione geometrica inversa t^{-1}.

Determiniamo ora le immagini di alcuni punti, per esempio di $A(1; 1)$, $B(2; 5)$, $C(-1; 4)$. Per calcolare le coordinate di A' basta sostituire le coordinate di A nelle equazioni della trasformazione t:

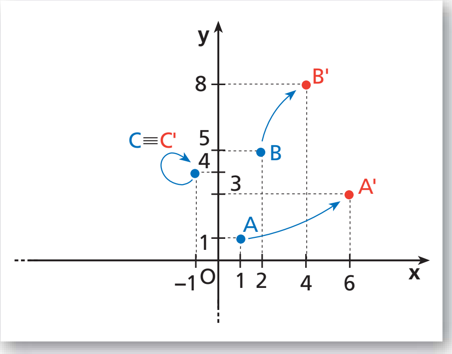
$$\begin{cases} x' = 2 \cdot 1 - 1 + 5 = 6 \\ y' = 1 + 1 + 1 = 3 \end{cases}$$

Possiamo scrivere pertanto la seguente corrispondenza:

$$A(1; 1) \mapsto A'(6; 3).$$

Procedendo allo stesso modo otteniamo:

$$B(2; 5) \mapsto B'(4; 8),$$
$$C(-1; 4) \mapsto C'(-1; 4).$$



◀ Figura 1

> Ricorda che:
> $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

2. Consideriamo le equazioni

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 4 \\ y' = 2x + 4y - 1 \end{cases}$$

e proviamo a trasformare i punti $A(2; -1)$ e $B(4; -2)$.
Entrambi i punti hanno come corrispondente lo stesso punto $(4; -1)$.
Le equazioni assegnate **non** definiscono una trasformazione geometrica, perché non garantiscono la corrispondenza biunivoca dei punti.

Notiamo che in questo caso il determinante dei coefficienti di x e di y è nullo e pertanto il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = x' - 4 \\ 2x + 4y = y' + 1 \end{cases}$$

non è determinato, ammette infinite soluzioni e quindi non definisce una corrispondenza biunivoca.

> Anche le equazioni
> $\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$
> non rappresentano una trasformazione geometrica. Perché?

> $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$

Trasformare grafici

Consideriamo la trasformazione geometrica

$$t: \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 6 \end{cases}$$

Troviamo il corrispondente del punto $P(-2; 3)$ e la trasformata della parabola di equazione $y = x^2$.

- L'immagine di P è il punto P' di coordinate:

$$\begin{cases} x' = -2 - 3 = -5 \\ y' = -2 + 6 = 4 \end{cases}$$

- L'equazione della trasformata della parabola $y = x^2$ deve contenere le variabili x' e y', e quindi occorre, nelle equazioni di t, trovare x e y in funzione di x' e y', cioè occorre trovare t^{-1}.

$$t^{-1}: \begin{cases} x - y = x' \\ x = y' - 6 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x = y' - 6 \\ y = y' - 6 - x' \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione $y = x^2$, otteniamo:

$$y' - 6 - x' = (y' - 6)^2 \quad \to$$
$$\to \quad y' - 6 - x' = y'^2 - 12y' + 36 \quad \to$$
$$\to \quad x' = -y'^2 + 13y' - 42.$$

Se indichiamo con x e y le coordinate dei punti trasformati, possiamo scrivere:

$$x = -y^2 + 13y - 42.$$

In generale, data la trasformazione geometrica t, per trasformare un grafico di equazione $y = f(x)$, è necessario trovare le equazioni della trasformazione inversa t^{-1} ed eseguire le sostituzioni nell'equazione data.

I punti e le figure unite

Nella figura 1 dell'esempio precedente notiamo che al punto $C(-1; 4)$ corrisponde se stesso. Punti di questo tipo vengono detti *uniti*.

DEFINIZIONE

Punto unito

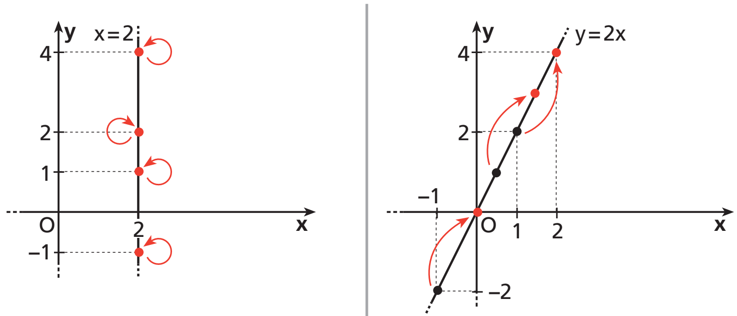
In una trasformazione geometrica, un punto unito è un punto che ha se stesso per immagine.

Inoltre, i punti di una figura possono corrispondere ai punti della figura stessa, senza necessariamente essere punti uniti.

DEFINIZIONE

Figura unita

In una trasformazione geometrica una figura unita è una figura che ha se stessa per immagine.



a. Nella trasformazione di equazioni
$\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = y \end{cases}$
ogni punto della retta di equazione $x = 2$ corrisponde a se stesso.

b. Nella trasformazione di equazioni
$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$
ogni punto della retta di equazione $y = 2x$ corrisponde a un diverso punto della retta stessa.

◀ **Figura 2** Due esempi di figura unita. In entrambi i casi la trasformazione fa corrispondere a una figura geometrica (una particolare retta) se stessa. Tuttavia, mentre nel primo caso tutti i punti sono uniti, nel secondo caso non ci sono punti uniti.

Se in una figura unita ogni punto è unito, la figura si dice **puntualmente unita** (esempio nella figura 2*a*), altrimenti si dice **globalmente unita** (esempio nella figura 2*b*).

● Per calcolare le coordinate dei punti uniti, si deve porre $x' = x$ e $y' = y$ nelle equazioni della trasformazione, perché $P(x; y)$ ha come immagine se stesso.

La trasformazione in cui ogni punto ha per immagine se stesso si chiama **identità**. La indichiamo con i.
Nell'identità ogni punto è unito.

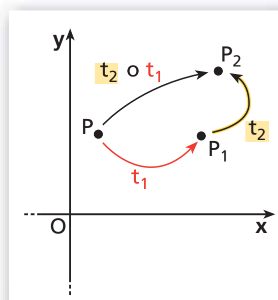
● Le equazioni dell'identità sono:

$$i: \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

La composizione di trasformazioni

Supponiamo di applicare una trasformazione geometrica t_1 che trasformi il punto P nel punto P_1 e poi una trasformazione geometrica t_2 che trasformi P_1 in P_2.

In questo modo abbiamo ottenuto la **trasformazione composta** di t_1 e t_2, che trasforma P in P_2. La indichiamo con $t_2 \circ t_1$.



▲ **Figura 3** La composizione delle trasformazioni t_1 e t_2: $P_2 = t_2(t_1(P))$.

ESEMPIO

Consideriamo le trasformazioni di equazioni:

$$t_1: \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases} \quad \text{e} \quad t_2: \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

Per ottenere il trasformato di $A(3; 2)$ rispetto a $t_2 \circ t_1$, applichiamo prima t_1 e poi t_2:

$$\underbrace{A(3; 2) \xrightarrow{t_1} A_1(6; 4) \xrightarrow{t_2} A_2(7; 6)}_{t_2 \circ t_1}$$

Il trasformato di A rispetto a $t_1 \circ t_2$ è invece:

$$\underbrace{A(3; 2) \xrightarrow{t_2} A_3(4; 4) \xrightarrow{t_1} A_4(8; 8)}_{t_1 \circ t_2}$$

Generalizzando il procedimento a partire da un punto $P(x; y)$, otteniamo le equazioni delle trasformazioni composte:

$$\underbrace{P(x;y) \xrightarrow{t_1} P_1(2x;2y) \xrightarrow{t_2} P_2(2x+1;2y+2)}_{t_2 \circ t_1}$$

$$t_2 \circ t_1: \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 2 \end{cases}$$

e analogamente:

$$t_1 \circ t_2: \begin{cases} x' = 2(x + 1) \\ y' = 2(y + 2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = 2x + 2 \\ y' = 2y + 4 \end{cases}$$

In qualche caso particolare può valere $t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1$.

Come si nota nell'esempio, in generale $t_2 \circ t_1 \neq t_1 \circ t_2$, quindi *per la composizione di trasformazioni geometriche* **non vale la proprietà commutativa**.

Vale invece la **proprietà associativa**:

$$t_1 \circ (t_2 \circ t_3) = (t_1 \circ t_2) \circ t_3.$$

Inoltre, per la definizione di trasformazione inversa, è vero che *dalla composizione di una trasformazione con la sua inversa si ottiene l'identità*:

$$t \circ t^{-1} = t^{-1} \circ t = i.$$

Una trasformazione involutoria è quindi una trasformazione che *ha come inversa se stessa*.

DEFINIZIONE

Trasformazione involutoria

Una trasformazione t si dice involutoria se componendola con se stessa si ottiene l'identità:

$$t \circ t = i.$$

ESEMPIO

La trasformazione h di equazione $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ è involutoria.

Infatti, $P(x; y) \xrightarrow{h} P'(-x; -y) \xrightarrow{h} P(x; y)$.

Fra le trasformazioni geometriche studieremo per prime le isometrie.

Le isometrie

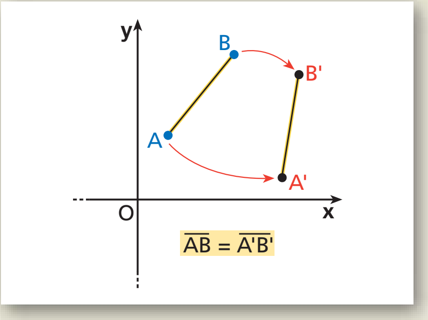
Isometria deriva dalle parole greche *ísos*, «uguale», e *métron*, «misura».

DEFINIZIONE

Isometria

Un'isometria è una trasformazione geometrica nella quale la distanza fra due punti qualunque del piano A e B è uguale a quella fra le loro immagini A' e B':

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}.$$



Detto brevemente: un'isometria è una trasformazione che *conserva la distanza*.

Un'isometria trasforma una figura geometrica in una figura congruente (per esempio, un triangolo in un triangolo congruente).

Per questo in un'isometria si conserva anche l'equivalenza fra superfici.

Studieremo cinque tipi di isometrie: la traslazione, la rotazione, la simmetria centrale, la simmetria assiale e la glissosimmetria.

● La congruenza di angoli e segmenti e l'equivalenza delle superfici sono quindi invarianti delle isometrie.

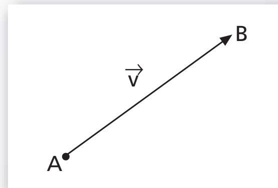
2. LA TRASLAZIONE

● Una trattazione più completa dei vettori si trova nel capitolo 14.

I vettori

Un vettore $\vec{v}$ è rappresentato da un segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ ed è caratterizzato da:

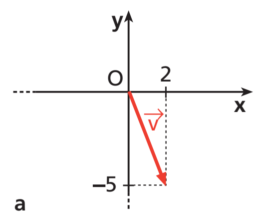
- *direzione*: direzione della retta a cui appartiene il segmento;
- *verso*: uno dei due versi della retta;
- *modulo*: misura della lunghezza del segmento AB rispetto a un'unità prefissata.



▲ Figura 4

I vettori nel piano cartesiano

Rappresentiamo nel piano cartesiano un vettore $\vec{v}$ ponendo il primo estremo nell'origine degli assi.

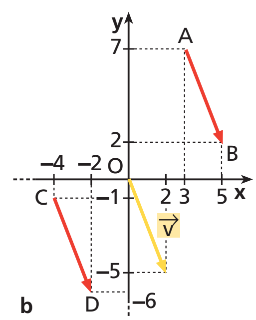


Le coordinate del secondo estremo sono una coppia di numeri, dette **componenti** del vettore. Le componenti del vettore $\vec{v}$ della figura *a* sono 2 e -5. Possiamo indicare il vettore in modo sintetico scrivendolo seguito, fra parentesi, dalle sue componenti:

$$\vec{v}(2; -5).$$

In generale scriviamo $\vec{v}(a; b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Lo stesso vettore può essere rappresentato con altri segmenti orientati *equipollenti* a quello dato, ossia con uguale distanza fra gli estremi (**modulo**), stessa **direzione** e stesso **verso**.



Per esempio, nella figura *b* consideriamo $\overrightarrow{AB}$, con $A(3; 7)$, $B(5; 2)$, e $\overrightarrow{CD}$, con $C(-4; -1)$, $D(-2; -6)$.

Entrambi rappresentano $\vec{v}$, perché sono equipollenti al segmento iniziale.

In questo caso, per calcolare le componenti, dobbiamo considerare le differenze fra le coordinate del secondo estremo e quelle del primo estremo:

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A) = \overrightarrow{AB}(5 - 3; 2 - 7) = \overrightarrow{AB}(2; -5);$$

$$\overrightarrow{CD}(x_D - x_C; y_D - y_C) = \overrightarrow{CD}(-2 - (-4); -6 - (-1)) = \overrightarrow{CD}(2; -5).$$

● L'equipollenza è una relazione di equivalenza; ogni vettore coincide con una classe di equivalenza della relazione.

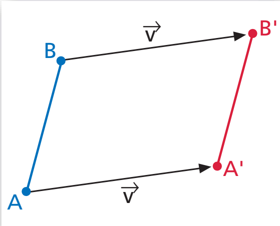
La definizione

DEFINIZIONE

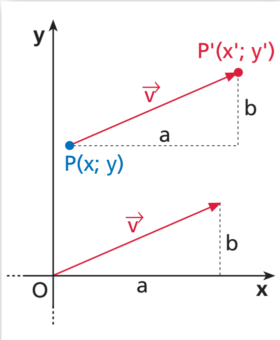
Traslazione

Una traslazione di vettore $\vec{v}$ è una trasformazione geometrica che fa corrispondere a ogni punto P del piano un punto P' tale che:

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{v}.$$



▲ **Figura 5** Il quadrilatero $AA'B'B$ ha due lati opposti congruenti e paralleli.



▲ **Figura 6**

● La traslazione inversa, che indichiamo con $t_{\vec{v}}^{-1}$, ha equazioni:

$$t_{\vec{v}}^{-1}: \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$$

La traslazione è un'isometria

Infatti consideriamo due punti del piano A e B e i loro corrispondenti A' e B', con $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$ e $\overrightarrow{BB'} = \vec{v}$.

Il quadrilatero $AA'B'B$ è un parallelogramma e quindi $AB \cong A'B'$.

Questo dimostra che la traslazione è un'isometria.

Le equazioni della traslazione

Consideriamo ora nel piano cartesiano un punto $P(x; y)$ e il suo corrispondente $P'(x'; y')$ nella traslazione $t_{\vec{v}}$ di vettore $\vec{v}(a; b)$ (figura 6).

Le coordinate di P' si ottengono attraverso le seguenti equazioni, che rappresentano le equazioni della traslazione di vettore $\vec{v}$:

$$t_{\vec{v}}: \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

ESEMPIO

La traslazione di vettore $\vec{v}(-1; 3)$ ha equazioni:

$$t_{\vec{v}}: \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

Casi particolari. Se la traslazione ha vettore $\vec{v}(a; 0)$ allora si ha una traslazione orizzontale, mentre se è $\vec{v}(0; b)$ allora si ha una traslazione verticale.

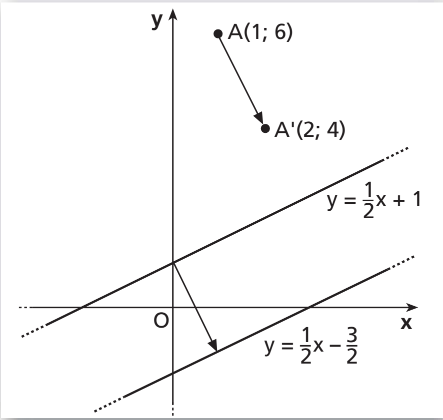
La traslazione di punti e di rette

ESEMPIO

Consideriamo la traslazione di vettore $\vec{v}(1; -2)$ e troviamo il trasformato del punto $A(1; 6)$ e la trasformata della retta r di equazione $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Le equazioni della traslazione sono:

$$t_{\vec{v}}: \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$



◀ **Figura 7**

Al punto $A(1; 6)$ corrisponde A', di coordinate:

$$x' = 1 + 1 = 2;\ y' = 6 - 2 = 4.$$

Per trovare la trasformata r' di r occorre determinare la traslazione inversa:

$$t_{\vec{v}}^{-1}: \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 2 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione $y = \frac{1}{2}x + 1$, si ottiene:

$$y' + 2 = \frac{1}{2}(x' - 1) + 1 \rightarrow y' = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2} + 1 - 2 \rightarrow y' = \frac{1}{2}x' - \frac{3}{2}.$$

Eliminiamo gli apici e otteniamo:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2},$$

che è l'equazione di r'.

La retta r e la sua immagine r' hanno entrambe coefficiente angolare uguale a $\frac{1}{2}$, quindi sono parallele. Questa è una proprietà generale:

le rette che si corrispondono in una traslazione sono parallele.

I punti uniti e le rette unite

In una traslazione, diversa dall'identità, **non ci sono punti uniti**.

Infatti, se il punto $P(x; y)$ fosse unito, si dovrebbe avere:

$$\begin{cases} x = x + a \\ y = y + b \end{cases}$$

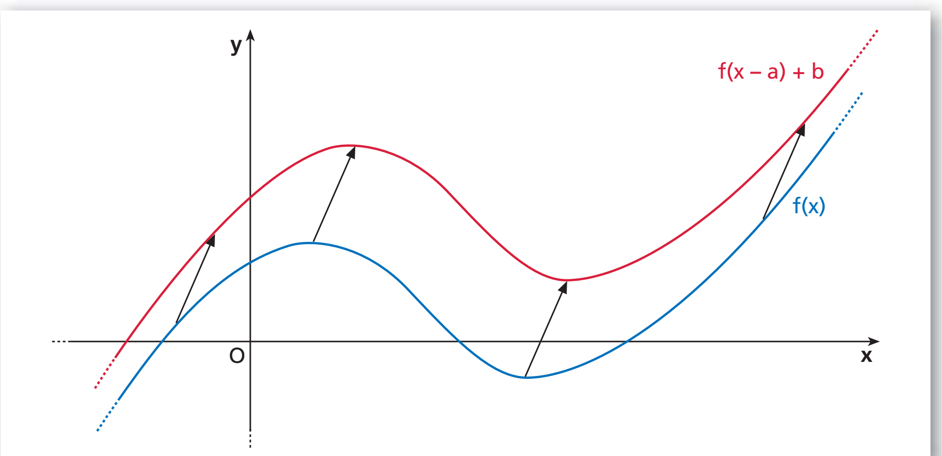
che è impossibile (per a o b diversi da 0).

Sono globalmente unite invece tutte le rette del piano parallele al vettore $\vec{v}$ della traslazione.

Le curve e la traslazione

Consideriamo una funzione di equazione $y = f(x)$ e la traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$ che ha equazioni:

$$t_{\vec{v}}: \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$



◀ Figura 8

Trasliamo il grafico di $y = f(x)$ utilizzando la trasformazione inversa:

$$t_{\vec{v}}^{-1}: \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$$

Si ottiene: $\quad y' - b = f(x' - a),$

da cui, eliminando gli apici, $\quad y = f(x - a) + b.$

ESEMPIO

Se trasliamo la parabola di equazione $y = 4x^2$ secondo il vettore $\vec{v}(3; 5)$, otteniamo:

$$y = 4(x - 3)^2 + 5.$$

Casi particolari. Se si applica a $f(x)$ una traslazione orizzontale di vettore $\vec{v}(a; 0)$, si ottiene:

$$y = f(x - a).$$

Osserva che se $a > 0$ si ha una traslazione verso destra, mentre se $a < 0$ la traslazione è verso sinistra.
Se invece si applica una traslazione verticale di vettore $\vec{v}(0; b)$, si ha:

$$y = f(x) + b.$$

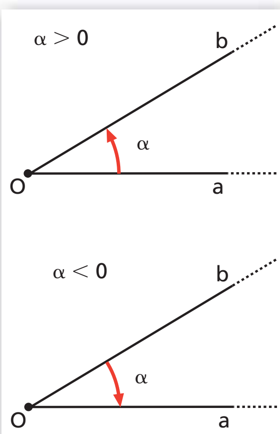
Se $b > 0$ si ha una traslazione verso l'alto, se $b < 0$ verso il basso.

La composizione di traslazioni

Si può dimostrare che la composizione di due traslazioni di vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ è ancora una traslazione di vettore $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.
La composizione di traslazioni gode della proprietà commutativa, cioè $t_{\vec{v}_1} \circ t_{\vec{v}_2} = t_{\vec{v}_2} \circ t_{\vec{v}_1}$.

3. LA ROTAZIONE

▼ Figura 9

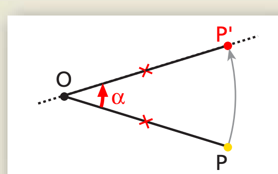


Dato un angolo $a\widehat{O}b$ (figura 9), possiamo considerarlo **orientato** da a a b se procediamo in senso antiorario o da b ad a se procediamo in senso orario: per convenzione, si indicano con numeri positivi gli angoli del primo tipo e con numeri negativi quelli del secondo tipo.

DEFINIZIONE

Rotazione

Fissati nel piano un punto O e un angolo orientato α, la rotazione di angolo α è la trasformazione geometrica che a ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' tale che:



1. $\overline{OP} = \overline{OP'}$;
2. l'angolo $P\widehat{O}P'$ è congruente ad α e ugualmente orientato.

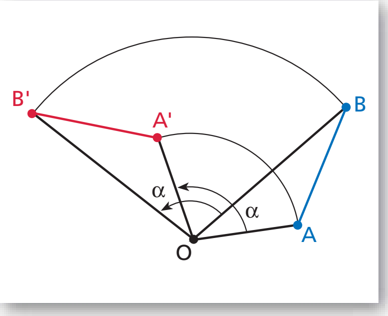
Il punto O è detto **centro di rotazione**.

Indichiamo una rotazione di centro O e angolo α con $r(O; \alpha)$.

La rotazione è un'isometria

Infatti se consideriamo due punti A e B e i loro trasformati A' e B' nella rotazione di centro O e angolo α, si ha che i triangoli ABO e $A'B'O$ sono congruenti. Infatti $OA \cong OA'$, $OB \cong OB'$ e $A\widehat{O}B \cong A'\widehat{O}B'$ in quanto differenza di angoli congruenti. Si ha allora che $AB \cong A'B'$.

▶ Figura 10

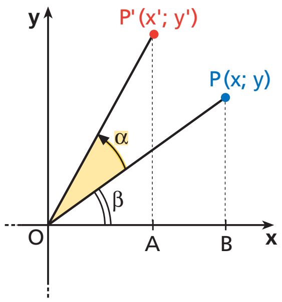


Le equazioni della rotazione

La rotazione con centro nell'origine degli assi

Determiniamo le formule analitiche della rotazione di un angolo α, avente per centro l'origine O degli assi.

Osservando la figura a lato e utilizzando la trigonometria, possiamo scrivere le seguenti relazioni:



$$x = \overline{OB} = \overline{OP}\cos\beta;$$

$$y = \overline{PB} = \overline{OP}\operatorname{sen}\beta;$$

$$x' = \overline{OP'}\cos(\alpha+\beta) = \overline{OP}\cos\alpha\cos\beta - \overline{OP}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha;$$

$$y' = \overline{OP'}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \overline{OP}\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \overline{OP}\cos\alpha\operatorname{sen}\beta = x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha.$$

● Consideriamo il triangolo rettangolo OAP', dove $x' = \overline{OA}$ e $y' = \overline{P'A}$. Applichiamo le formule di addizione di seno e coseno.

Le equazioni della rotazione $r(O; \alpha)$ di un angolo α e di centro O sono quindi:

$$\boldsymbol{r(O;\alpha)\colon \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha \\ y' = x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases}}$$

La rotazione inversa di $r(O; \alpha)$, che indichiamo con $r^{-1}(O; \alpha)$, è la rotazione $r(O; -\alpha)$ di centro O e angolo $-\alpha$ e ha equazioni:

$$r^{-1}(O;\alpha)\colon \begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\operatorname{sen}\alpha \\ y = -x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

● Ricorda che:
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$,
$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$.

ESEMPIO

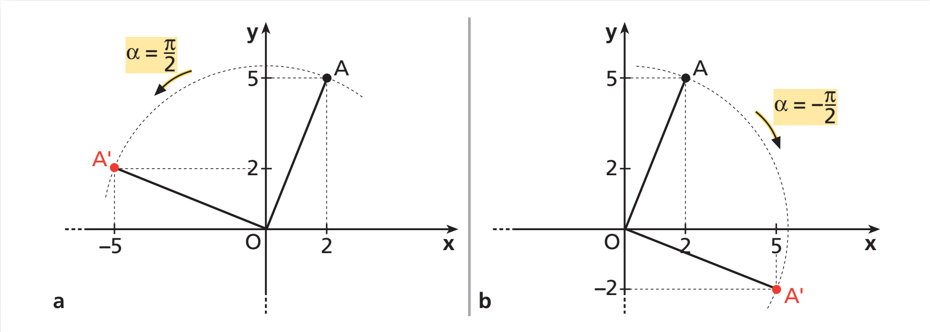
La rotazione $r\left(O; \frac{\pi}{6}\right)$ di centro l'origine O e angolo $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ha equazioni:

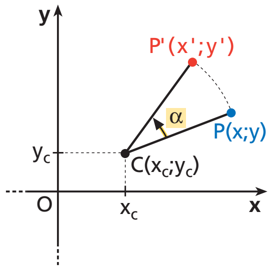
$$r\left(O;\frac{\pi}{6}\right)\colon \begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

Casi particolari

- Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le equazioni della rotazione diventano: $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$.
- Se $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, si ha invece: $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$.
- Se $\alpha = 0$ o $\alpha = 2\pi$, la rotazione risulta essere l'identità.
- Per ogni tipo di rotazione l'unico punto unito è il centro di rotazione.

▶ Figura 11





La rotazione con centro *C* qualunque

Per ottenere le equazioni di una rotazione di angolo α intorno a un centro $C(x_C; y_C)$ qualunque, si può considerare tale rotazione come il risultato della composizione di tre trasformazioni: una traslazione di vettore $\vec{v}(-x_C; -y_C)$ che porti C nell'origine O, una rotazione di centro O e angolo α, una traslazione di vettore $\vec{v}_1(x_C; y_C)$ che riporti C alla posizione iniziale. Alle coordinate $(x; y)$ di P corrispondono:

$$\begin{cases} x \\ y \end{cases} \xrightarrow{t_v} \begin{cases} x - x_C \\ y - y_C \end{cases} \xrightarrow{r(O;\alpha)} \begin{cases} (x-x_C)\cos\alpha - (y-y_C)\,\text{sen}\,\alpha \\ (x-x_C)\,\text{sen}\,\alpha + (y-y_C)\cos\alpha \end{cases} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{t_{v_1}} \begin{cases} (x-x_C)\cos\alpha - (y-y_C)\,\text{sen}\,\alpha + x_C \\ (x-x_C)\,\text{sen}\,\alpha + (y-y_C)\cos\alpha + y_C \end{cases}$$

Quindi la rotazione di centro $C(x_C; y_C)$ e angolo α ha equazioni

$$\boldsymbol{r(C;\alpha)\colon \begin{cases} x' = (x-x_C)\cos\alpha - (y-y_C)\,\text{sen}\,\alpha + x_C \\ y' = (x-x_C)\,\text{sen}\,\alpha + (y-y_C)\cos\alpha + y_C \end{cases}}$$

che, svolgendo i calcoli, si possono anche scrivere nella forma:

$$\boldsymbol{r(C;\alpha)\colon \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\,\text{sen}\,\alpha + p \\ y' = x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha + q \end{cases}}$$

con $p = x_C - x_C\cos\alpha + y_C\,\text{sen}\,\alpha$ e $q = y_C - x_C\,\text{sen}\,\alpha - y_C\cos\alpha$.

La trasformazione inversa di una rotazione di centro C e angolo α è ancora una rotazione di centro C ma con angolo $-\alpha$:

$$r^{-1}(C;\alpha) = r(C;-\alpha).$$

● Osserva che:
$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} =$
$= \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 > 0.$

La composizione di rotazioni

Componendo due rotazioni con lo stesso centro C, di angoli α_1 e α_2, si ottiene ancora una rotazione di centro C e angolo $\alpha_1 + \alpha_2$. Inoltre, si può dimostrare che componendo due rotazioni con centri C_1 e C_2 diversi si può ottenere:
- una rotazione di diverso centro C e angolo $\alpha_1 + \alpha_2$, oppure
- una traslazione.

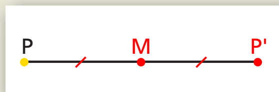
Possiamo quindi affermare che la composizione fra rotazioni di centri diversi non è un'operazione interna nell'insieme delle rotazioni.

4. LA SIMMETRIA CENTRALE

DEFINIZIONE

Simmetria centrale

Fissato nel piano un punto M, la simmetria centrale di centro M è la trasformazione geometrica che a ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' tale che M è il punto medio del segmento PP'.

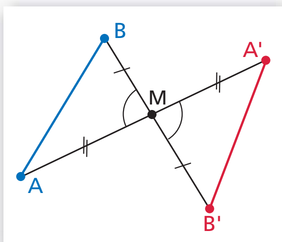


Indichiamo una simmetria centrale di centro M con s_M.

La simmetria centrale è un'isometria

Se consideriamo due punti A e B del piano e i loro trasformati A' e B' nella simmetria di centro M, si ha che $AM \cong A'M$, $BM \cong B'M$ e $A\widehat{M}B \cong A'\widehat{M}B'$.

I triangoli AMB e $A'MB'$ sono allora congruenti e quindi $AB \cong A'B'$.



▲ Figura 12

Le equazioni della simmetria centrale

Se consideriamo $M(a; b)$, al punto $P(x; y)$ corrisponde nella simmetria di centro M il punto $P'(x'; y')$ se

$$\frac{x + x'}{2} = a, \qquad \frac{y + y'}{2} = b,$$

da cui si ottengono le equazioni della simmetria centrale:

$$s_M: \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

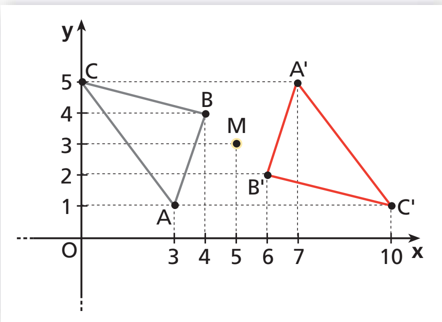
Osserva che:
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

ESEMPIO

Le equazioni della simmetria centrale di centro $M(5; 3)$ sono:

$$\begin{cases} x' = 10 - x \\ y' = 6 - y \end{cases}$$

▶ **Figura 13** Verifica che i punti della figura si corrispondono mediante le equazioni della simmetria di centro M.



L'unico punto unito della simmetria centrale è M. Infatti:

$$\begin{cases} x = 2a - x \\ y = 2b - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2a \\ 2y = 2b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

Si può anche dimostrare che in una simmetria centrale ogni retta passante per il centro è globalmente unita.

La trasformazione inversa s_M^{-1} di s_M coincide con s_M, quindi la simmetria centrale è una trasformazione involutoria.

Una trasformazione t è involutoria se $t \circ t = i$.

La simmetria centrale rispetto all'origine degli assi

Se M coincide con l'origine O degli assi, le equazioni precedenti diventano:

$$s_O\colon \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Il centro di simmetria O è punto unito della trasformazione.

Le curve e la simmetria centrale

Applichiamo alla funzione $y = f(x)$ la simmetria centrale s_O di centro l'origine. Sostituiamo le equazioni:

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$$

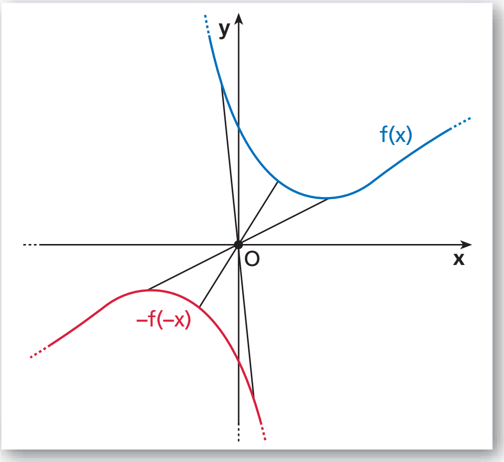
Otteniamo l'equazione

$$-y' = f(-x')$$

e togliendo gli apici abbiamo:

$$y = -f(-x).$$

▶ Figura 14



Si dice anche che la funzione è dispari.

Se per una funzione $f(x)$ si verifica per ogni x del suo dominio che $-f(-x) = f(x)$ o, che è lo stesso, $f(-x) = -f(x)$, significa che il grafico di $f(x)$ è simmetrico rispetto all'origine.

La composizione di simmetrie centrali

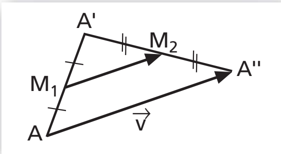
Date le simmetrie centrali s_{M_1} e s_{M_2} di centri M_1 e M_2 (figura 15), la trasformazione composta

$$t = s_{M_2} \circ s_{M_1}$$

è una traslazione di vettore $\vec{v} = 2\overrightarrow{M_1M_2}$.

Infatti, nel triangolo $AA'A''$ il vettore $\overrightarrow{M_1M_2}$ è parallelo ed equiverso ad $\overrightarrow{AA''}$ e inoltre $\overline{AA''} = 2\overline{M_1M_2}$.

▼ Figura 15



A' è il corrispondente di A in s_{M_1} e A'' di A' in s_{M_2}.

In ogni triangolo il segmento che congiunge i punti medi di due lati è parallelo e congruente alla metà del terzo lato.

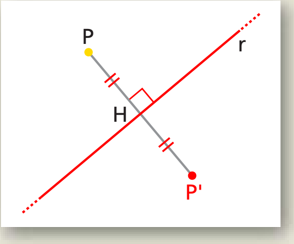
5. LA SIMMETRIA ASSIALE

DEFINIZIONE

Simmetria assiale

Fissata nel piano una retta r, la simmetria assiale rispetto alla retta r è quella trasformazione geometrica che a ogni punto P fa corrispondere il punto P', nel semipiano opposto rispetto a r e tale che r sia asse del segmento PP', ossia:

- r passa per il punto medio di PP';
- PP' è perpendicolare a r.



La retta r è detta **asse di simmetria**.

Indichiamo una simmetria di asse r con s_r.

La simmetria assiale è un'isometria

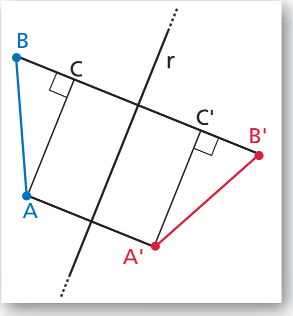
Consideriamo i due punti A e B e i loro corrispondenti nella simmetria s_r di asse la retta r. Da A e da A' tracciamo le perpendicolari AC e $A'C'$ alla retta per B e B'.

I triangoli rettangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti perché hanno i cateti congruenti, quindi

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}.$$

Inoltre, la simmetria assiale è una trasformazione involutoria, cioè componendola con se stessa si ottiene l'identità.

▼ Figura 16



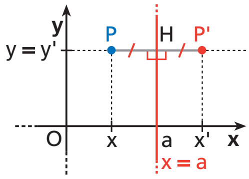
Le equazioni della simmetria assiale

Consideriamo i seguenti casi.

La simmetria rispetto a un asse parallelo all'asse *y*

Consideriamo come asse di simmetria la retta di equazione $x = a$.
Dato il punto $P(x; y)$, il punto $P'(x'; y')$ è il corrispondente di P se:

$$\frac{x + x'}{2} = a, \quad y' = y.$$



Pertanto le **equazioni della simmetria rispetto all'asse $x = a$** sono:

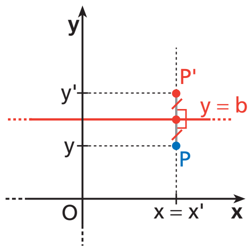
$$s: \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$$

Se l'asse di simmetria è l'asse *y*, la cui equazione è $x = 0$, si ha $a = 0$, e quindi le equazioni della simmetria sono:

$$s_y: \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Osserva che:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$



La simmetria rispetto a un asse parallelo all'asse *x*

Consideriamo come asse di simmetria la retta $y = b$.

Dato il punto $P(x; y)$, il punto $P'(x'; y')$ è il corrispondente di P se:

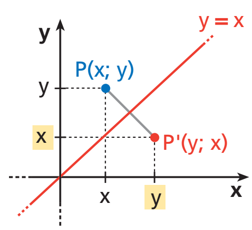
$$x' = x \quad \text{e} \quad \frac{y + y'}{2} = b.$$

Le **equazioni della simmetria rispetto all'asse $y = b$** sono dunque:

$$s\colon \begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

Se l'asse di simmetria è l'asse x, la cui equazione è $y = 0$, si ha $b = 0$ e quindi le equazioni della simmetria sono:

$$s_x\colon \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$



La simmetria rispetto alle bisettrici dei quadranti

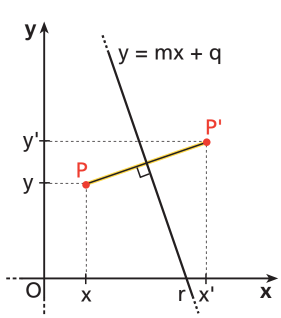
Si dimostra che due punti simmetrici rispetto alla retta di equazione $y = x$ hanno coordinate scambiate fra loro, ossia che, se P ha coordinate $(x; y)$, il suo simmetrico P' ha coordinate $(y; x)$.

Quindi le equazioni della simmetria rispetto alla bisettrice b del primo e del terzo quadrante sono:

$$s_b\colon \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Si dimostra inoltre che **le equazioni della simmetria rispetto alla bisettrice b' del secondo e del quarto quadrante** sono:

$$s_{b'}\colon \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$



La simmetria rispetto alla retta $y = mx + q$

Le equazioni della simmetria rispetto a una generica retta r del piano di equazione $y = mx + q$ devono essere tali per cui il simmetrico $P'(x'; y')$ di un punto $P(x; y)$ appartenga a una retta perpendicolare a r e P e P' siano equidistanti da r:

- il coefficiente angolare di PP' deve essere l'opposto del reciproco di m:

$$\frac{y' - y}{x' - x} = -\frac{1}{m};$$

- il punto medio del segmento PP' deve appartenere alla retta r; quindi:

$$\frac{y + y'}{2} = m\frac{x + x'}{2} + q.$$

Ponendo a sistema le due equazioni e risolvendo rispetto a x' e y', si ottengono dopo alcuni passaggi le equazioni della simmetria s_r rispetto alla retta r:

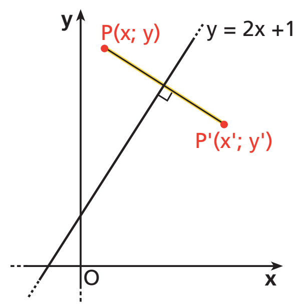
$$s_r: \begin{cases} x' = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}x + \dfrac{2m}{1+m^2}y - \dfrac{2mq}{1+m^2} \\ y' = \dfrac{2m}{1+m^2}x - \dfrac{1-m^2}{1+m^2}y + \dfrac{2q}{1+m^2} \end{cases}$$

ESEMPIO

Cerchiamo le equazioni della simmetria di asse $y = 2x + 1$.

Se $P(x; y)$ ha come immagine $P'(x'; y')$, si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{y+y'}{2} = 2\left(\dfrac{x+x'}{2}\right)+1 & \text{punto medio del segmento } PP' \text{ appartenente all'asse} \\ \dfrac{y'-y}{x'-x} = -\dfrac{1}{2} & \text{retta } PP' \text{ perpendicolare all'asse.} \end{cases}$$



Ricaviamo x' e y':

$$\begin{cases} y + y' = 2x + 2x' + 2 \\ 2y' - 2y = -x' + x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x' - y' = y - 2x - 2 \\ x' + 2y' = x + 2y \end{cases}$$

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} y-2x-2 & -1 \\ x+2y & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2y-4x-4+x+2y}{4+1} = \frac{-3x+4y-4}{5}$$

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} 2 & y-2x-2 \\ 1 & x+2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2x+4y-y+2x+2}{5} = \frac{4x+3y+2}{5}$$

Quindi le equazioni della simmetria sono:

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y - \dfrac{4}{5} \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Caso particolare

Se l'asse di simmetria r è una retta che passa per l'origine, la sua equazione è $y = mx$.

Ricordiamo le formule parametriche $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ e $\operatorname{sen} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$,

che diventano, essendo $m = \operatorname{tg}\alpha$,

$$\cos 2\alpha = \frac{1-m^2}{1+m^2}, \quad \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{2m}{1+m^2}.$$

Sostituiamo nelle equazioni della simmetria e otteniamo:

$$\begin{cases} x' = x\cos 2\alpha + y \operatorname{sen} 2\alpha \\ y' = x \operatorname{sen} 2\alpha - y\cos 2\alpha \end{cases}$$

- α è l'angolo che la retta forma con la direzione positiva dell'asse x.

- Se si pone $\cos 2\alpha = a$ e $\operatorname{sen} 2\alpha = b$, le equazioni diventano $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = bx - ay \end{cases}$.

ESEMPIO

Determiniamo le equazioni della simmetria con asse la retta $y = \sqrt{3}\,x$.

Poiché $m = \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, si ha che $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e quindi $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pertanto, le equazioni cercate sono:

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

I punti uniti e le rette unite

In una simmetria assiale i punti uniti sono i punti dell'asse di simmetria.
Oltre all'asse di simmetria, anche ogni retta perpendicolare all'asse è unita.

L'asse è una retta *puntualmente* unita; una retta perpendicolare all'asse è una retta *globalmente* unita.

ESEMPIO

Cerchiamo i punti uniti e le rette unite della simmetria di equazioni $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ che ha per asse la bisettrice del primo e terzo quadrante.

I punti uniti si ottengono dal sistema $\begin{cases} x = y \\ y = x \end{cases}$ che ha come soluzione $y = x$, quindi tutti i punti dell'asse di simmetria.

Per trovare le rette unite, consideriamo prima le rette di equazione $y = mx + q$ e poi quelle di equazione $x = h$, parallele all'asse y, che sono escluse dall'equazione $y = mx + q$.

a) Consideriamo le rette del tipo $y = mx + q$.
Nelle equazioni della trasformazione ricaviamo x e y e sostituiamo nell'equazione della retta:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y' \\ y = x' \end{cases} \rightarrow x' = my' + q.$$

Eliminando gli apici, otteniamo la retta trasformata:

$$my = x - q \rightarrow y = \frac{1}{m}x - \frac{q}{m}, \text{ con } m \neq 0.$$

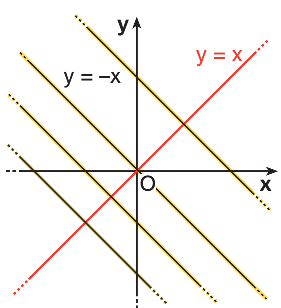
Se $m = 0$, si hanno le rette $y = q$ le cui trasformate sono le rette di equazione $x = q$; rette di questo tipo non sono unite.

Affinché la retta sia unita, la sua equazione deve coincidere con quella di partenza, ossia

$$\begin{cases} \frac{1}{m} = m \\ q = -\frac{q}{m} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ q = -\frac{q}{m} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ q = -\frac{q}{m} \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} m = 1 \\ q = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m = -1 \\ q = q \end{cases}$$



La prima soluzione porta all'equazione $y = x$, che è l'equazione dell'asse, la seconda porta a $y = -x + q$, cioè alle equazioni di tutte le rette perpendicolari all'asse di simmetria.

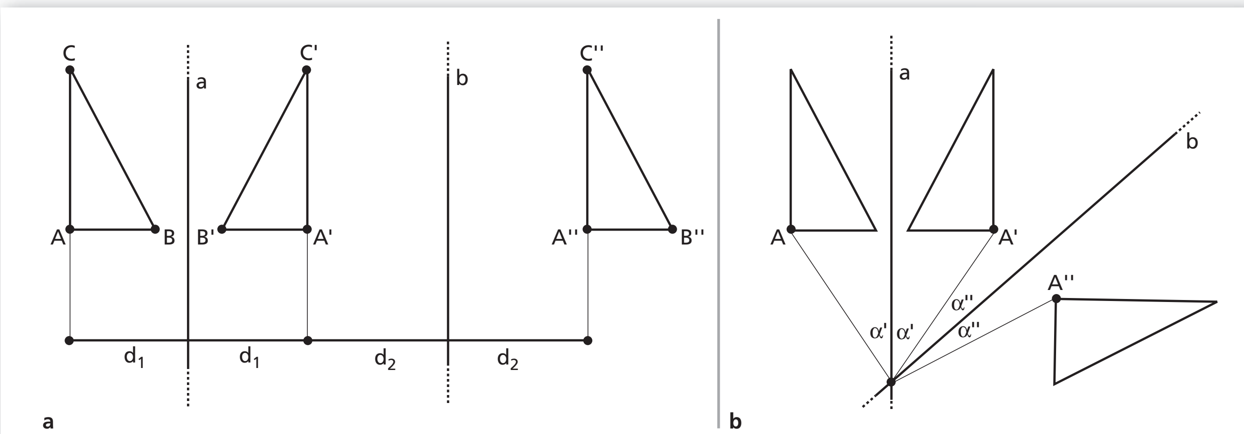
b) Se applichiamo le equazioni della trasformazione a una retta di equazione $x = h$, otteniamo una retta di equazione $y = h$, quindi rette di questo tipo non sono unite.

La composizione di simmetrie assiali

Gli assi di simmetria sono paralleli
Componendo due simmetrie s_a e s_b con gli assi a e b paralleli, si ottiene una traslazione di vettore $\vec{v}$ che ha modulo uguale al doppio della distanza tra i due assi e direzione perpendicolare ad a e b (figura 17*a*).

Si ha $\overline{AA''} = 2d_1 + 2d_2 = 2(d_1 + d_2) = 2d$.

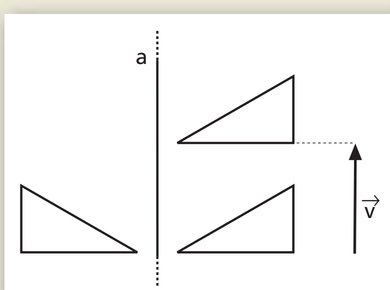
Gli assi di simmetria non sono paralleli
La composizione delle due simmetrie s_a e s_b è la rotazione di centro O, intersezione degli assi a e b, e angolo 2α, con $\alpha = a\widehat{O}b$ (figura 17*b*).



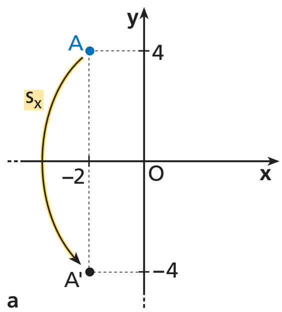
▲ Figura 17

La glissosimmetria

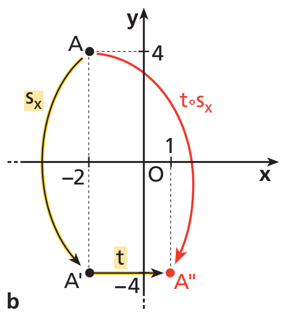
DEFINIZIONE
Glissosimmetria
La composizione di una simmetria assiale con una traslazione di vettore parallelo all'asse della simmetria si chiama glissosimmetria.



● **Glissare** deriva dal francese *glisser* che significa scivolare.



a



b

ESEMPIO

Determiniamo le equazioni della glissosimmetria ottenuta componendo la simmetria assiale s_x rispetto all'asse x con la traslazione di vettore (+3; 0), ossia:

$$s_x: \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}; \quad t: \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y \end{cases}.$$

Per esempio, applichiamo la simmetria s_x al punto $A(-2; 4)$ e troviamo il trasformato A' (figura *a*), e ad A' applichiamo t, ottenendo A'' (figura *b*):

$$A(-2; 4) \xrightarrow{s_x} A'(-2; -4) \xrightarrow{t} A''(1; -4)$$

Possiamo anche ottenere A'', trasformato di A, mediante la composizione $t \circ s_x$.
Determiniamo le equazioni della trasformazione composta considerando un generico punto $(x; y)$: $(x; y) \xrightarrow{s_x} (x; -y) \xrightarrow{t} (x + 3; -y)$.

Otteniamo così le equazioni della glissosimmetria:

$$t \circ s_x: \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = -y \end{cases}$$

Si ha allora che: $A(-2; 4) \xrightarrow{t \circ s_x} A''(1; -4)$.

In una glissosimmetria non ci sono punti uniti e l'unica retta globalmente unita è l'asse della simmetria.

6. LE ISOMETRIE

Riassumiamo le proprietà generali delle isometrie.
Tutte le isometrie sono rappresentate da equazioni lineari, cioè da equazioni di primo grado del tipo:

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

Dall'esame delle equazioni delle isometrie, si verifica che il determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

vale sempre ±1 e in particolare è:

- 1 se l'isometria è una traslazione, una rotazione o una simmetria centrale;
- −1 se l'isometria è una simmetria assiale o una glissosimmetria.

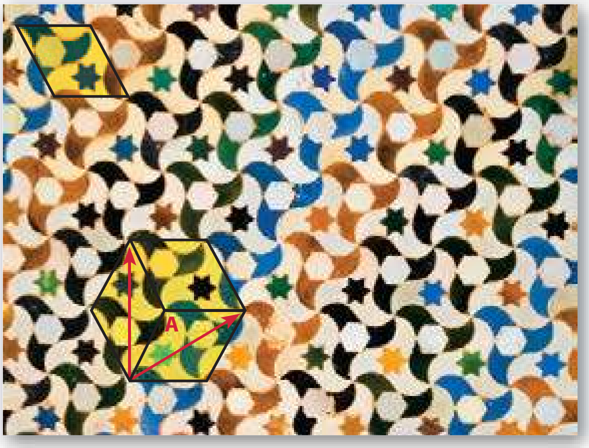
Possiamo riconoscere di quale isometria si tratta se esaminiamo **gli elementi uniti**.

Elemento unito	Isometria
un punto unito	rotazione, simmetria centrale
una retta puntualmente unita	simmetria assiale
nessun punto unito	traslazione, glissosimmetria

ESPLORAZIONE

Trasformazioni geometriche e tassellazioni del piano

In geometria, con *tassellazione del piano* o *pavimentazione* si intende il ricoprimento del piano con figure geometriche, dette *tasselli* o *moduli*, che si ripetono periodicamente senza mai sovrapporsi. Le tassellazioni sono riconducibili a isometrie applicate a figure. In particolare, la trattazione matematica delle pavimentazioni richiede la definizione del concetto di *modulo*. Con tale termine si indica quella figura che consente di pavimentare il piano applicando successivamente due traslazioni di vettori non paralleli fra loro. I moduli, a loro volta, possono essere ottenuti mediante composizioni di isometrie su figure che vengono dette *disegni minimi*.
La figura 1 riproduce una decorazione dell'Alhambra (complesso di palazzi situato a Granada, in Spagna): in essa è stato riportato, in altro a sinistra, il disegno minimo (un rombo colorato in giallo) e più in basso, sempre a sinistra, il modulo, ottenuto ruotando il disegno minimo di 120 gradi, prima in senso orario e poi in senso antiorario, intorno al vertice *A*. Infine, nella figura, all'interno del modulo, compaiono i due vettori rossi che individuano le traslazioni che, applicate al modulo, consentono di generare (colorazione a parte) tutta la tassellazione decorativa.



▲ Figura 1

Nel 1891 il geologo e cristallografo russo E.S. Fedorov dimostrò che sono possibili solo diciassette tipi di tassellazioni del piano.
Essi sono stati tutti realizzati nelle decorazioni dell'Alhambra: gli Arabi, a cui siamo debitori per questa grande opera d'arte, hanno dimostrato di conoscere molta geometria, prima ancora che essa venisse formalizzata in una teoria matematica.

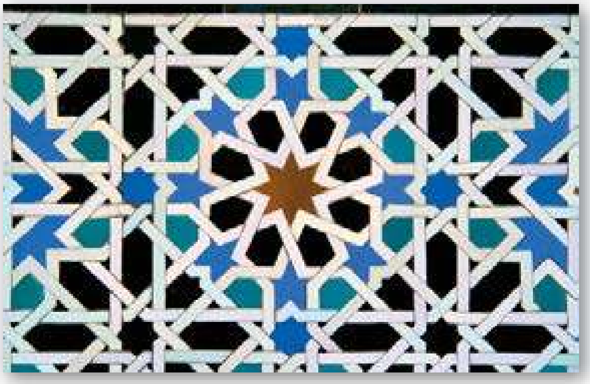
Attività

Alla ricerca del modulo e del disegno minimo

- La figura 2 riporta un'altra decorazione dell'Alhambra: individua il disegno minimo e il modulo, sapendo che la striscia di decorazione, di cui nella figura proponiamo una parte, si ottiene mediante traslazione del modulo.

Cerca in Internet informazioni sulle tassellazioni con poligoni regolari e prepara una presentazione multimediale su tali tipi di tassellazioni.

► Figura 2



Cerca nel Web:
tassellazioni, tassellazioni poligoni regolari

Se studiamo le rette globalmente unite si ha che:

- nella traslazione sono quelle parallele al vettore associato;
- nella simmetria assiale sono quelle perpendicolari all'asse;
- nella simmetria centrale sono quelle passanti per il centro;
- nella rotazione non ci sono rette unite.

La composizione di due isometrie è ancora un'isometria. Poiché si può dimostrare che

- per la composizione vale la *proprietà associativa*,
- esiste l'*elemento neutro*, che è l'identità,
- per ogni isometria esiste l'*inversa*,

l'operazione di composizione genera nelle isometrie una struttura di *gruppo*.

La rappresentazione grafica delle coniche

Nel capitolo 8 ci siamo limitati allo studio delle coniche con equazione nella forma:

$$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Possiamo ora estendere lo studio a coniche di equazione con forma generale, che presenti anche il termine in xy. Si può dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA

Data l'equazione

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

con $\Delta = b^2 - 4ac$, allora, se ammette soluzioni, essa rappresenta:

- un'ellisse o una circonferenza se $\Delta < 0$;
- una parabola se $\Delta = 0$;
- un'iperbole se $\Delta > 0$.

Vediamo ora come si possono utilizzare le isometrie per disegnare una conica che abbia equazione con il termine in xy.

Consideriamo l'ellisse di equazione

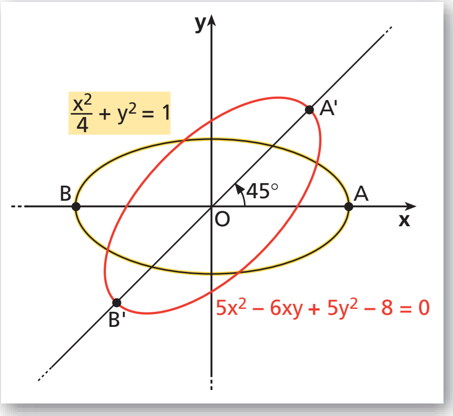
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

e applichiamo la rotazione con centro nell'origine e angolo 45°, che ha equazioni

$$r: \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$$

da cui:

$$r^{-1}: \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$



▲ Figura 18

Sostituiamo nell'equazione dell'ellisse:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 = 1.$$

Eliminando gli apici e svolgendo i calcoli, otteniamo:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy = 1$$

$$x^2 + y^2 + 2xy + 4x^2 + 4y^2 - 8xy = 8$$

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8 = 0.$$

Possiamo verificare che $\Delta < 0$:

$(-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 =$
$= 36 - 100 < 0.$

Notiamo che la rotazione ha determinato la comparsa nell'equazione di un termine con xy.

Viceversa, data l'equazione con termine in xy,

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8 = 0,$$

è possibile ritrovare l'equazione di partenza senza il termine in xy mediante una rotazione di centro O e angolo $-45°$.

In generale, si può dimostrare che, se nell'equazione di una conica è presente il termine in xy, mediante un'opportuna rotazione si ottiene un'equazione senza tale termine, più semplice da studiare.

ESEMPIO

Data l'equazione $4x^2 + 8xy + 4y^2 + \sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,y = 0$, osserviamo che, poiché $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 0$, si tratta di una parabola.

Eseguiamo una rotazione con centro nell'origine e angolo α, da determinare, in modo che nell'equazione ottenuta non compaia il termine in xy.
Le equazioni della rotazione r e della sua inversa r^{-1} sono:

$$r: \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\,\text{sen}\,\alpha \\ y' = x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \quad \rightarrow \quad r^{-1}: \begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\,\text{sen}\,\alpha \\ y = -x'\,\text{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Sostituendo le ultime equazioni nell'equazione della parabola:

$$4 \cdot (x'\cos\alpha + y'\,\text{sen}\,\alpha)^2 + 8 \cdot (x'\cos\alpha + y'\,\text{sen}\,\alpha)(-x'\,\text{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha) +$$
$$+ 4 \cdot (-x'\,\text{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha)^2 + \sqrt{2} \cdot (x'\cos\alpha + y'\,\text{sen}\,\alpha) +$$
$$-\sqrt{2} \cdot (-x'\,\text{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha) = 0.$$

Togliendo gli apici e sviluppando i calcoli:

$$4x^2\cos^2\alpha + 4y^2\,\text{sen}^2\alpha + \underline{8xy\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha} - 8x^2\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha + \underline{8xy\cos^2\alpha} +$$
$$-\underline{8xy\,\text{sen}^2\alpha} + 8y^2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + 4x^2\,\text{sen}^2\alpha + 4y^2\cos^2\alpha - \underline{8xy\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha} +$$
$$+ \sqrt{2}\,x\cos\alpha + \sqrt{2}\,y\,\text{sen}\,\alpha + \sqrt{2}\,x\,\text{sen}\,\alpha - \sqrt{2}\,y\cos\alpha = 0.$$

Consideriamo solo i termini in xy (che abbiamo evidenziato), sommiamoli e poniamo la condizione che il coefficiente di xy sia nullo:

$$8xy(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) = 0 \;\rightarrow\; \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = 0 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; \cos 2\alpha = 0 \;\rightarrow\; 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\rightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

Scegliamo, per esempio, una rotazione di angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Sostituendo tale valore nell'equazione della parabola otteniamo

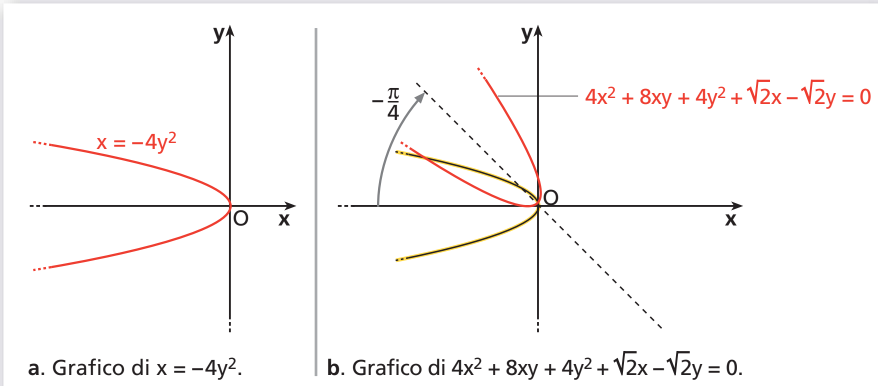
$$\cancel{4x^2 \cdot \frac{1}{2}} + 4y^2 \cdot \frac{1}{2} - \cancel{8x^2 \cdot \frac{1}{2}} + 8y^2 \cdot \frac{1}{2} + \cancel{4x^2 \cdot \frac{1}{2}} + 4y^2 \cdot \frac{1}{2} +$$

$$+ \sqrt{2}\,x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cancel{\sqrt{2}\,y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{2}\,x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{\sqrt{2}\,y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0,$$

da cui: $8y^2 + 2x = 0 \;\rightarrow\; 4y^2 + x = 0 \;\rightarrow\; x = -4y^2$.

Rappresentiamo graficamente la parabola ottenuta, osservando che ha il vertice nell'origine e per asse l'asse x (figura 19*a*).

▶ Figura 19



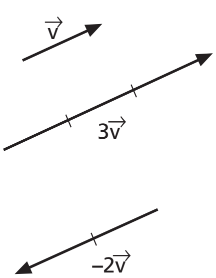
a. Grafico di $x = -4y^2$.

b. Grafico di $4x^2 + 8xy + 4y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$.

Ruotiamola poi di $-45°$, ottenendo il grafico della parabola iniziale (figura 19*b*).

7. L'OMOTETIA

Il prodotto di un vettore per un numero reale



Dati un vettore $\vec{v}$ e un numero reale $k \neq 0$, il prodotto $k\vec{v}$ del numero per il vettore è un nuovo vettore $\vec{v}_1$ che ha:

- la stessa direzione di $\vec{v}$;
- modulo uguale al prodotto del valore assoluto di k per il modulo di $\vec{v}$, ossia $|\vec{v}_1| = |k| \cdot |\vec{v}|$;
- verso concorde con quello di $\vec{v}$ se k è positivo, discorde se k è negativo.

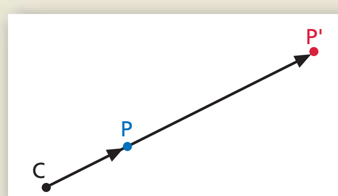
L'omotetia

DEFINIZIONE

Omotetia

Dati un numero reale $k \neq 0$ e un punto C del piano, l'omotetia di rapporto k e centro C è quella trasformazione geometrica che associa a P il punto P' tale che:

$$\overrightarrow{CP'} = k \cdot \overrightarrow{CP}.$$

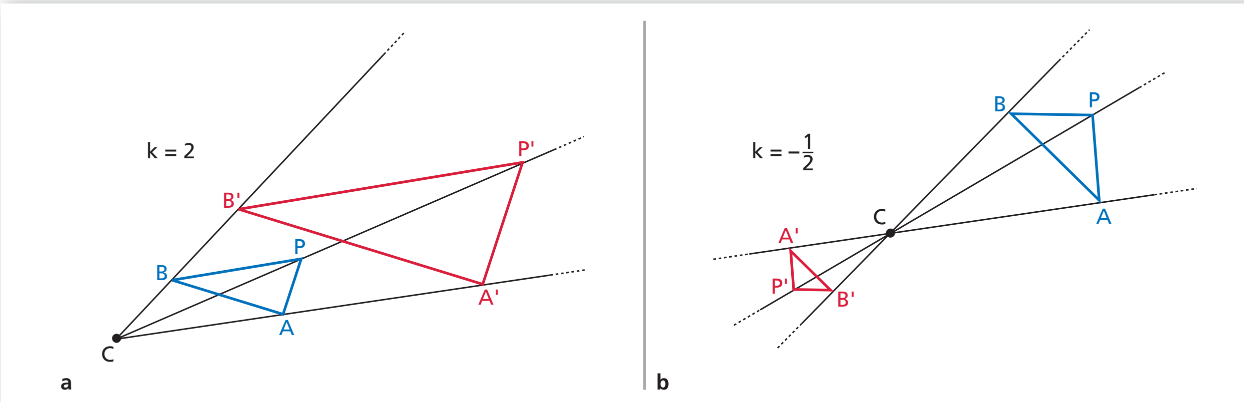


Il punto C è detto **centro** dell'omotetia e k **rapporto di omotetia**.
Indichiamo un'omotetia di centro C e rapporto k con $\omega_{C,k}$.

Le proprietà dell'omotetia

L'omotetia permette di ingrandire o ridurre una figura, lasciandone inalterata la forma. Valgono le seguenti proprietà:

- se $|k| > 1$, l'omotetia ingrandisce la figura;
- se $|k| < 1$, l'omotetia riduce la figura;
- se $k > 0$, due punti corrispondenti si trovano sulla stessa semiretta di origine il centro C;
- se $k < 0$, punti corrispondenti appartengono a semirette opposte di origine C.



▲ Figura 20

Valgono inoltre le seguenti proprietà.

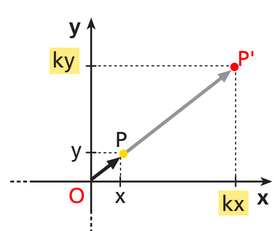
1. Un'omotetia trasforma un segmento in un segmento proporzionale.
2. Un'omotetia conserva le ampiezze degli angoli.
3. Un'omotetia trasforma una retta in una retta a essa parallela.

L'unico punto unito è il centro dell'omotetia. Ogni retta passante per il centro è globalmente unita.

Le equazioni di un'omotetia

L'omotetia con centro nell'origine degli assi
Poiché il centro è O, deve essere

$$\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}.$$



Se P ha coordinate $(x; y)$, allora per il teorema di Talete P' ha coordinate:

$$x' = kx, \quad y' = ky.$$

Le **equazioni dell'omotetia di centro O e rapporto k** sono dunque:

$$\boxed{\omega_{O,k}: \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}}$$

ESEMPIO

Applichiamo l'omotetia con centro nell'origine e rapporto $k = 2$ al triangolo di vertici $A(-3; -2)$, $B(5; 0)$ e $C(1; 4)$ (figura 21).

Le equazioni della trasformazione sono:

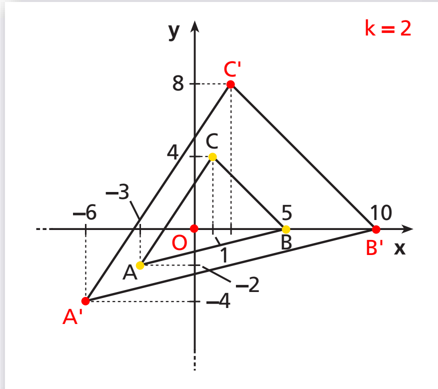
$$\omega_{O,2}: \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$$

Per disegnare il triangolo omotetico $A'B'C'$, calcoliamo le coordinate dei vertici corrispondenti:

$$A(-3; -2) \mapsto A'(-6; -4); \; B(5; 0) \mapsto B'(10; 0); \; C(1; 4) \mapsto C'(2; 8).$$

● **Omotetico** deriva dalla composizione delle due parole greche *homós*, «simile», e *thetós*, «posto». Nella figura puoi vedere come l'omotetia ingrandisce il triangolo *ABC*, ma non lo «sposta» rispetto a *O*.

▶ **Figura 21** Disegniamo il triangolo *ABC*. Puoi verificare che il triangolo omotetico *A'B'C'* ha i lati doppi rispetto ai lati di *ABC*, perché il rapporto di omotetia è $k = 2$. Inoltre i lati corrispondenti sono paralleli.



Il rapporto fra i lati corrispondenti $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$, $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$, $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$ è uguale a 2, ossia al rapporto di omotetia. Per verificarlo basta calcolare le distanze fra i punti.
In generale il rapporto fra lati corrispondenti è uguale al valore assoluto del rapporto di omotetia.
È possibile anche verificare che i lati corrispondenti sono paralleli, cioè $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ e $AC \parallel A'C'$: basta determinare le equazioni delle rette passanti per due vertici.

● Se $\boldsymbol{k = 1}$ l'omotetia coincide con l'**identità**. Infatti le equazioni diventano:

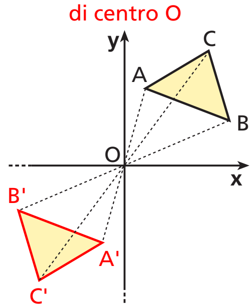
$$\omega_{O,1}: \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

In questo caso a ogni punto $P(x; y)$ corrisponde se stesso, quindi tutti i punti del piano sono punti uniti della trasformazione.

Se $\boldsymbol{k = -1}$ otteniamo:

$$\omega_{O,-1}: \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

ossia ritroviamo la simmetria di centro $O(0; 0)$. In tal caso sappiamo già che O è l'unico punto unito della trasformazione.



Se $\boldsymbol{k \neq 1}$ $(k \neq 0)$, il centro $O(0; 0)$ è l'unico punto unito dell'omotetia di rapporto k.

Infatti ponendo $x' = x$ e $y' = y$ nel sistema $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$ si ha $\begin{cases} x(1-k) = 0 \\ y(1-k) = 0 \end{cases}$ e per $k \neq 1$ si ha $x = 0$, $y = 0$.

Data un'omotetia $\omega_{O,k}$, l'omotetia inversa $\omega_{O,k}^{-1}$ ha equazioni

$$\omega_{O,k}^{-1}: \begin{cases} x = \dfrac{1}{k}x' \\ y = \dfrac{1}{k}y' \end{cases}$$

che rappresentano un'omotetia di centro O e rapporto $\dfrac{1}{k}$, quindi:

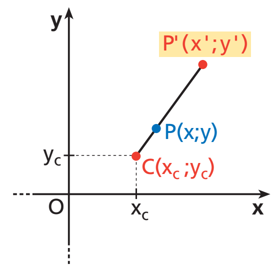
$$\omega_{O,k}^{-1} = \omega_{O,\frac{1}{k}}.$$

L'omotetia con centro *C* qualunque

Per ottenere le equazioni di una omotetia $\omega_{C,k}$ di rapporto k e con centro $C(x_C\,;y_C)$ qualunque, possiamo considerarla come il risultato della composizione di tre trasformazioni: una traslazione di vettore $\vec{v}(-x_C; -y_C)$ che porti C nell'origine O, una omotetia di centro O e rapporto k e una traslazione di vettore $\vec{v}_1(x_C; y_C)$ che riporti C nella posizione iniziale.

Si ottengono le equazioni:

$$\omega_{C,k}: \begin{cases} x' = k(x - x_C) + x_C \\ y' = k(y - y_C) + y_C \end{cases}$$



Svolgendo i calcoli e ponendo:

$$p = x_C(1 - k)$$

$$q = y_C(1 - k)$$

le equazioni assumono la forma:

$$\omega_{C,k}: \begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$$

Osserva che per $k = 1$ si ha $p = 0$, $q = 0$ e l'omotetia coincide anche in questo caso con l'identità.

Viceversa, se sono note le equazioni di una omotetia di rapporto $k \neq 1$, è possibile trovare le coordinate del centro utilizzando le relazioni precedenti:

$$x_C = \frac{p}{1-k}, \qquad y_C = \frac{q}{1-k}.$$

Le coordinate del centro si possono ricavare anche ricordando che il centro è l'unico punto unito.

ESEMPIO

Le equazioni $\begin{cases} x' = 2x - 3 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$ rappresentano un'omotetia di rapporto 2. Il centro ha coordinate $x_C = \dfrac{-3}{-1} = 3$ e $y_C = \dfrac{1}{-1} = -1$.

La composizione di omotetie

1. Componendo due omotetie con lo stesso centro C si ha ancora una omotetia di centro C e con rapporto $k = k_1 \cdot k_2$.

   Infatti, per esempio, se:

$$\omega_1: \begin{cases} x' = k_1 x \\ y' = k_1 y \end{cases}, \quad \omega_2: \begin{cases} x' = k_2 x \\ y' = k_2 y \end{cases},$$

Le omotetie con lo stesso centro formano, considerando l'operazione di composizione, un *gruppo*.

allora:

$$\omega_2 \circ \omega_1: \begin{cases} x' = k_2(k_1x) \\ y' = k_2(k_1y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = k_1k_2x \\ y' = k_1k_2y \end{cases}$$

2. Componendo due omotetie con centri C_1 e C_2 diversi, si ha o un'omotetia o una traslazione. Infatti, per esempio, se

$$\omega_1: \begin{cases} x' = k_1x \\ y' = k_1y \end{cases}, \quad \omega_2: \begin{cases} x' = k_2x + p \\ y' = k_2y + q \end{cases},$$

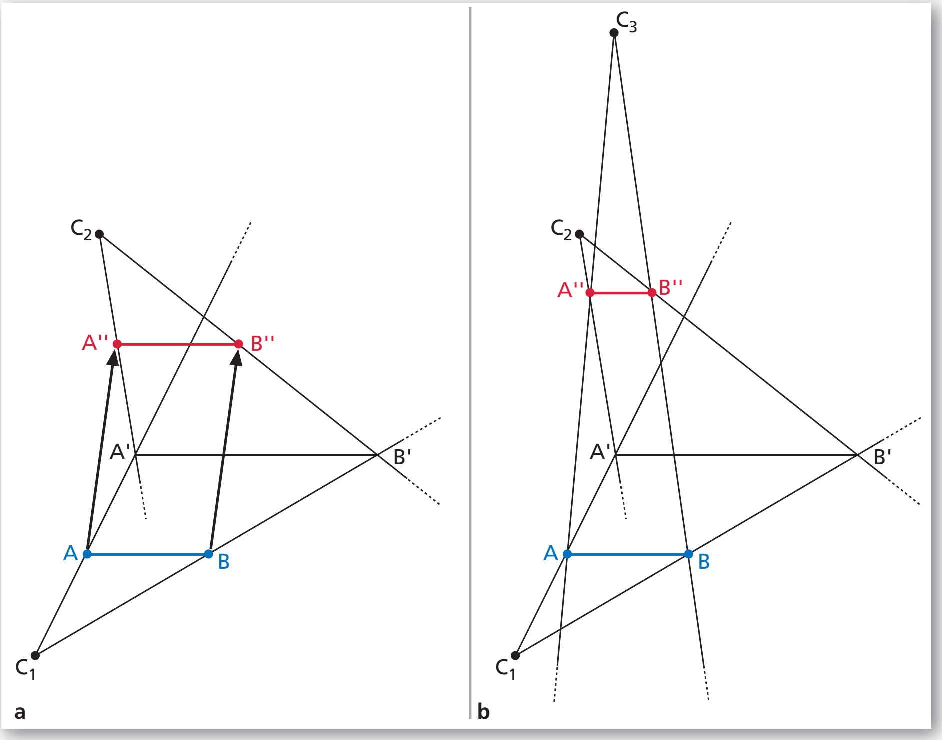
allora:

$$\omega_2 \circ \omega_1: \begin{cases} x' = k_2(k_1x) + p \\ y' = k_2(k_1y) + q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = k_1k_2x + p \\ y' = k_1k_2y + q \end{cases}.$$

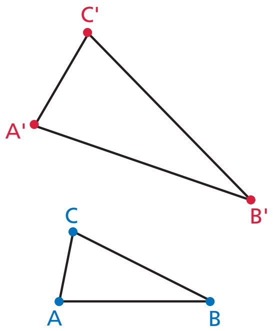
Se $k_1k_2 = 1$, abbiamo una traslazione (figura 22*a*).

Se $k_1k_2 \neq 1$, abbiamo un'omotetia (figura 22*b*).

▶ **Figura 22**



8. LA SIMILITUDINE



DEFINIZIONE

Similitudine

Si definisce similitudine una trasformazione geometrica che mantiene costante il rapporto tra segmenti corrispondenti, ossia, comunque si scelgano i punti A e B, considerati i loro trasformati A' e B', si ha:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k.$$

Il valore di k (sempre positivo) viene detto **rapporto di similitudine**.
Indichiamo una similitudine con σ.

Le proprietà della similitudine

Ogni similitudine possiede le seguenti proprietà:
- conserva il rapporto fra le lunghezze;
- trasforma un angolo in un angolo congruente e quindi conserva l'ampiezza degli angoli;
- trasforma rette perpendicolari in rette perpendicolari e rette parallele in rette parallele;
- trasforma circonferenze in circonferenze;
- se F' è la figura geometrica trasformata di F, valgono le seguenti relazioni:

$$\text{perimetro }(F') = k \cdot \text{perimetro }(F);$$
$$\text{area }(F') = k^2 \cdot \text{area }(F).$$

Le equazioni di una similitudine

Si può verificare che le equazioni di una similitudine σ possono assumere solo una delle due forme seguenti (supponendo a e b reali non entrambi nulli):

a) $$\boldsymbol{\sigma_1: \begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases}}, \quad \text{con } \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 > 0.$$

b) $$\boldsymbol{\sigma_2: \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + c' \end{cases}}, \quad \text{con } \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = -a^2 - b^2 < 0.$$

Si dice che σ_1 è una similitudine **diretta**, mentre σ_2 è una similitudine **indiretta**.
In entrambi casi il rapporto di similitudine è:

$$k = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- $a^2 + b^2$ è il valore assoluto del determinante associato alla similitudine.

- È possibile verificare che tutte le isometrie sono similitudini di rapporto $k = 1$.

- Anche le omotetie sono casi particolari di similitudini.

Infatti, se è data l'omotetia

$$\omega_{C,k}: \begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$$

essa può essere identificata con la similitudine diretta avente: $a = k$, $b = 0$.

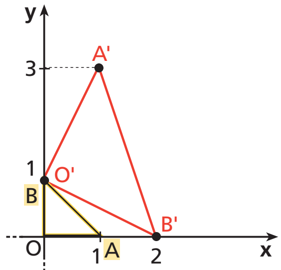
ESEMPIO

Consideriamo le equazioni della trasformazione:

$$\sigma: \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x - y + 1 \end{cases}, \quad \text{con } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5.$$

Si tratta di una similitudine indiretta di rapporto $k = \sqrt{5}$, infatti è del tipo

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + c' \end{cases}.$$



Trasformiamo il triangolo OAB e osserviamo il risultato sulla figura:

$$O(0;0) \mapsto O'(0;1),\ A(1;0) \mapsto A'(1;3),\ B(0;1) \mapsto B'(2;0).$$

$$\overline{O'B'} = \sqrt{5},\ \overline{O'A'} = \sqrt{5},\ \overline{A'B'} = \sqrt{10}.$$

Il triangolo trasformato è rimasto rettangolo e isoscele; il rapporto tra i lati corrispondenti è $\sqrt{5}$.

La composizione di similitudini

La composizione di un'omotetia e di un'isometria

La composizione di un'omotetia e di un'isometria è sempre una **similitudine**.

ESEMPIO

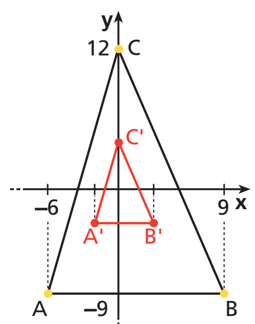
Applichiamo al triangolo ABC di vertici $A(-6;-9)$, $B(9;-9)$ e $C(0;12)$, l'omotetia ω di centro $O(0;0)$ e rapporto $\frac{1}{3}$ e al corrispondente triangolo $A'B'C'$ la simmetria assiale s di asse $y=-4$.

Le equazioni dell'omotetia e della simmetria assiale sono:

$$\omega: \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x \\ y' = \frac{1}{3}y \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x' = x \\ y' = -8-y \end{cases}$$

Troviamo i punti corrispondenti nell'omotetia ω (figura *a*):

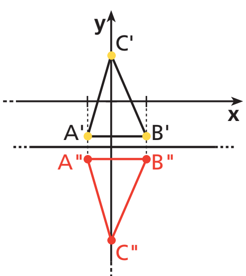
$$A(-6;-9) \xrightarrow{\omega} A'(-2;-3);$$
$$B(9;-9) \xrightarrow{\omega} B'(3;-3);$$
$$C(0;12) \xrightarrow{\omega} C'(0;4).$$



a

Al triangolo $A'B'C'$ applichiamo ora la simmetria s (figura *b*):

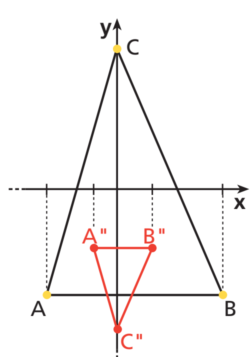
$$A'(-2;-3) \xrightarrow{s} A''(-2;-5);$$
$$B'(3;-3) \xrightarrow{s} B''(3;-5);$$
$$C'(0;4) \xrightarrow{s} C''(0;-12).$$



b

Scriviamo la corrispondenza fra i punti di ABC e di $A''B''C''$ (figura *c*):

$$A(-6;-9) \xrightarrow{s\circ\omega} A''(-2;-5);$$
$$B(9;-9) \xrightarrow{s\circ\omega} B''(3;-5);$$
$$C(0;12) \xrightarrow{s\circ\omega} C''(0;-12).$$



c

Determiniamo ora le equazioni della trasformazione composta $s \circ \omega$.
Se consideriamo un punto $(x; y)$, si ha

$$s\circ\omega: \begin{cases} x \\ y \end{cases} \xrightarrow{\omega} \begin{cases} \frac{1}{3}x \\ \frac{1}{3}y \end{cases} \xrightarrow{s} \begin{cases} \frac{1}{3}x \\ -8-\frac{1}{3}y \end{cases}$$

quindi:

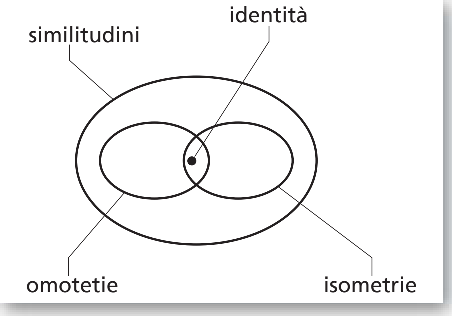
$$s \circ \omega: \begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}x \\ y' = -\dfrac{1}{3}y - 8 \end{cases}$$

Le equazioni ottenute sono quelle di una similitudine di rapporto $k = \frac{1}{3}$.

L'insieme delle similitudini

Si può dimostrare che la composizione di due similitudini, di rapporti k_1 e k_2, è ancora una similitudine di rapporto $k_1 \cdot k_2$.

Poiché ogni similitudine si può ottenere dalla composizione di un'omotetia e un'isometria e poiché le omotetie e le isometrie sono particolari similitudini, vale quindi lo schema della figura 23.



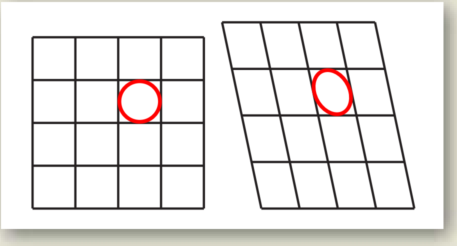
◄ Figura 23

9. LE AFFINITÀ

DEFINIZIONE

Affinità

Un'affinità è una trasformazione geometrica che trasforma rette in rette e mantiene il parallelismo.



Le proprietà delle affinità

Per ogni trasformazione geometrica si cercano le proprietà **invarianti**, ossia quelle proprietà che si conservano nella trasformazione.

Si può dimostrare che per le affinità le proprietà invarianti più importanti sono le seguenti.

- **Allineamento**: tre o più punti allineati si trasformano in tre o più punti allineati; quindi le rette vengono trasformate in rette e i segmenti in segmenti.
- **Parallelismo**: rette parallele sono trasformate in rette parallele. Da ciò segue che i parallelogrammi vengono trasformati in parallelogrammi.
- **Incidenza**: se due rette si incontrano nel punto P, le rette loro immagini si incontrano in P', immagine di P.
- **Coniche**: un'ellisse è trasformata in un'ellisse, una parabola in una parabola, un'iperbole in un'iperbole. Una circonferenza è trasformata, in generale, in un'ellisse.

- **Rapporto tra le aree**: il rapporto tra le aree di figure corrispondenti è costante; indicando con S una figura piana e con S' la sua immagine, si ha:

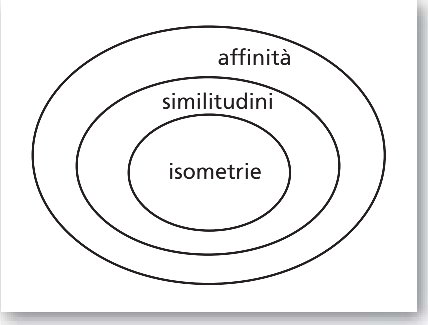
$$\frac{A_{S'}}{A_S} = k.$$

k è detto *rapporto di affinità*. Se $k = 1$, allora $A_{S'} = A_S$ e quindi in questo caso l'affinità conserva le aree.
Le affinità che conservano le aree vengono dette **equiaffinità** o **equivalenze**.

In generale, un'affinità non conserva la distanza.
Anche la forma delle figure non è invariante. Per esempio, un triangolo rettangolo può essere trasformato in un triangolo ottusangolo.

Nell'insieme delle affinità troviamo come casi particolari le similitudini e le isometrie.

▶ Figura 24



Per le **similitudini** si aggiungono alle proprietà invarianti delle affinità le seguenti.

- Il **rapporto tra le lunghezze** si conserva.
- L'**ampiezza degli angoli** viene conservata, quindi, in particolare, si conserva la perpendicolarità tra rette.

Per le **isometrie**, oltre a tutte le precedenti proprietà, si conservano:

- le **lunghezze**;
- l'**estensione delle superfici**.

Le equazioni di un'affinità

Un'affinità è una trasformazione geometrica di equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases} \text{ con } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0.$$

ESEMPIO

La trasformazione t di equazioni

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 5 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$$

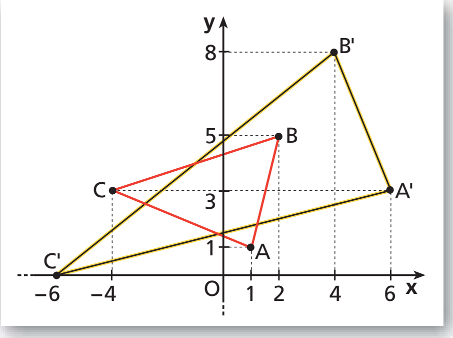
è un'affinità perché è rappresentata da equazioni lineari in cui il determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$$

è diverso da 0.

▶ **Figura 25** Alcuni punti e le loro immagini nella affinità di equazioni:

$$t: \begin{cases} x' = 2x - y + 5 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$$

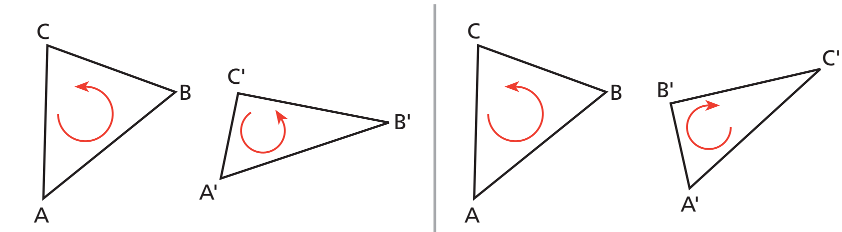


In ogni affinità il rapporto k è dato dal valore assoluto del determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, ossia:

$$k = |ab' - a'b|.$$

Se $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} > 0$, l'affinità si dice **diretta** e conserva l'orientamento dei vertici di un poligono, mentre se $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} < 0$, l'affinità si dice **indiretta** e inverte l'orientamento.

◀ Figura 26



a. Affinità diretta: in *ABC* e nella sua immagine *A'B'C'* i punti sono ordinati nello stesso verso (nel caso della figura è il verso antiorario).

b. Affinità indiretta: in *ABC* e *A'B'C'* i punti sono ordinati nei due diversi versi (antiorario e orario).

I punti uniti

Nella ricerca dei punti uniti poniamo nelle equazioni dell'affinità:

$$x' = x \quad \text{e} \quad y' = y.$$

Otteniamo:

$$\begin{cases} x = ax + by + c \\ y = a'x + b'y + c' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (a-1)x + by = -c \\ a'x + (b'-1)y = -c' \end{cases}$$

Il sistema può essere:

- determinato → una sola soluzione → un punto unito;
- impossibile → nessuna soluzione → nessun punto unito;
- indeterminato → infinite soluzioni → retta luogo dei punti uniti; identità.

Le affinità con un solo punto unito si chiamano *centro-affinità*.

Dallo schema precedente si deduce che se in un'affinità ci sono due punti uniti, allora ce ne sono infiniti.

Le condizioni affinché un'affinità sia un'isometria

Date le equazioni di un'affinità

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}, \quad \text{con} \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0,$$

cerchiamo le condizioni fra i coefficienti che permettono di affermare che l'affinità è un'isometria.

Dati i punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$, la loro distanza è:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Determiniamo i trasformati $A'(x_{A'}; y_{A'})$ e $B'(x_{B'}; y_{B'})$:

$$\begin{cases} x_{A'} = ax_A + by_A + c \\ y_{A'} = a'x_A + b'y_A + c' \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{B'} = ax_B + by_B + c \\ y_{B'} = a'x_B + b'y_B + c' \end{cases}$$

Calcoliamo $\overline{A'B'}$:

$$\overline{A'B'} = \sqrt{(x_{B'} - x_{A'})^2 + (y_{B'} - y_{A'})^2} =$$

$$= \sqrt{[(ax_B+by_B+c)-(ax_A+by_A+c)]^2+[(a'x_B+b'y_B+c')-(a'x_A+b'y_A+c')]^2} =$$

$$= \sqrt{[a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A)]^2 + [a'(x_B - x_A) + b'(y_B - y_A)]^2}.$$

Svolgendo i calcoli e raccogliendo opportunamente, si ottiene:

$$\overline{A'B'} = \sqrt{(a^2+a'^2)(x_B-x_A)^2+(b^2+b'^2)(y_B-y_A)^2+2(ab+a'b')(x_B-x_A)(y_B-y_A)}.$$

Confrontando le espressioni di $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, perché la trasformazione sia un'isometria, cioè perché si abbia $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, deve essere:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a^2 + a'^2 = 1} \\ \boldsymbol{b^2 + b'^2 = 1} \\ \boldsymbol{ab + a'b' = 0} \end{cases}$$

ESEMPIO

La trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 2 \end{cases}$ è un'isometria. Si ha:

$$a^2 + a'^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1;\ b^2 + b'^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1;$$

$$ab + a'b' = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = 0.$$

● Di quale isometria si tratta?

Le condizioni affinché un'affinità sia una similitudine

Per stabilire se un'affinità è una similitudine utilizziamo il seguente teorema, che non dimostriamo.

TEOREMA

Un'affinità è una similitudine se sono verificate le seguenti condizioni:

- $a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2$;
- $ab + a'b' = 0$.

Il rapporto di similitudine k è dato da:

$$k = \sqrt{a^2 + a'^2} = \sqrt{b^2 + b'^2}.$$

ESEMPIO

La trasformazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = 3x + y + 1 \\ y' = -x + 3y + 4 \end{cases}$$

è una similitudine. Sono verificate le due proprietà:

- $a^2 + a'^2 = 9 + 1 = 10$; $b^2 + b'^2 = 1 + 9 = 10$;
- $ab + a'b' = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 0$.

Il rapporto di similitudine è $\sqrt{10}$.

Riassumiamo nella tabella le condizioni che permettono di studiare un'affinità di equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

Valore k del determinante ($k \neq 0$)	Trasformazione
$k = \pm 1$	equivalenza
	isometria se $\begin{cases} a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = 1 \\ ab + a'b' = 0 \end{cases}$
$k \neq \pm 1$	similitudine se $\begin{cases} a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 \\ ab + a'b' = 0 \end{cases}$
	affinità generica

Le dilatazioni

DEFINIZIONE

Dilatazione

Le equazioni

$$\begin{cases} x' = hx + p \\ y' = ky + q \end{cases}, \qquad \text{con } h, k \neq 0,$$

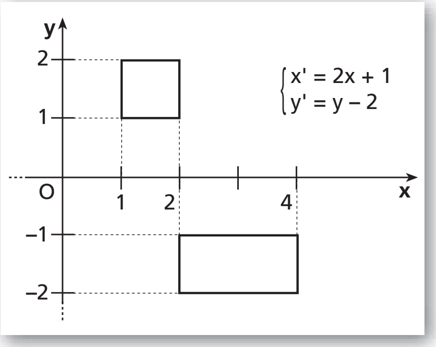
rappresentano particolari affinità chiamate dilatazioni.

Se $h, k \neq 0$, allora

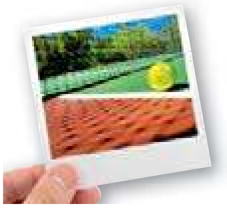
$$\begin{vmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = hk \neq 0.$$

Quindi abbiamo un'affinità.

h e k sono i **rapporti di dilatazione**.



◀ **Figura 27** Nella dilatazione della figura il quadrato si «dilata» lungo la direzione dell'asse x, trasformandosi nel rettangolo.

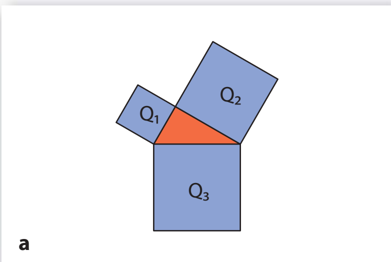


L'OMBRA DI PITAGORA

Se esponiamo ai raggi solari una figura che illustra il teorema di Pitagora, che cosa accade alla sua ombra?

▶ Il quesito completo a pag. 1129

Consideriamo il triangolo rettangolo *ABC* e i tre quadrati costruiti, rispettivamente, sull'ipotenusa e sui cateti (figura *a*).



a

Immaginiamo di esporre ai raggi solari la figura pitagorica così costruita; che tipo di ombra proietta?

È possibile realizzare questa esperienza costruendo la figura con un cartoncino per poi esporla ai raggi del Sole e osservare l'ombra proiettata sul pavimento al variare dell'inclinazione del piano che contiene la figura (nella figura *b* il piano β contenente la figura pitagorica è perpendicolare al piano α sul quale viene raccolta l'ombra prodotta dai raggi solari simulati dalle rette in giallo).

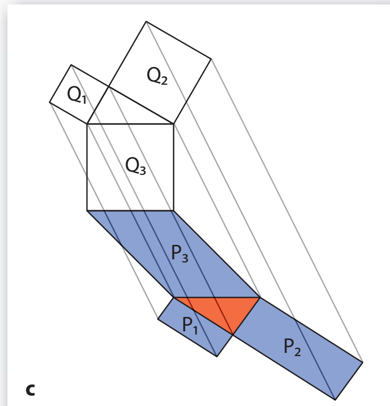
L'ombra della figura pitagorica non è, in generale, costituita da un triangolo rettangolo e da tre quadrati, ma da un triangolo qualsiasi sui cui lati sono costruiti tre parallelogrammi.

Tutto ciò non è strano: le affinità conservano l'allineamento tra punti, il parallelismo e il rapporto fra le aree di figure che si corrispondono nella trasformazione, ma non conservano le misure. In particolare non conservano le misure angolari e, quindi, la perpendicolarità fra rette (figura *c*).

Si dice anche che la perpendicolarità fra rette non è un concetto di cui si occupa la geometria affine.

Che cosa possiamo dire, però, della relazione pitagorica? Il parallelogramma costruito sull'ombra dell'ipotenusa è ancora equivalente alla somma dei parallelogrammi costruiti sulle ombre dei cateti?

La risposta è affermativa, perché, in un'affinità, il rapporto fra le aree di due figure corrispondenti è un invariante.



c

Ciò vuol dire che il rapporto fra ciascuno dei quadrati della figura pitagorica e il parallelogramma che costituisce la sua ombra è costante. Chiamiamo k tale costante, Q_1, Q_2, Q_3 le misure delle aree dei quadrati costruiti rispettivamente sui due cateti e sull'ipotenusa e P_1, P_2, P_3 quelle dei parallelogrammi che costituiscono le ombre, rispettivamente, di Q_1, Q_2, Q_3.

Per la relazione pitagorica:

$$Q_3 = Q_1 + Q_2.$$

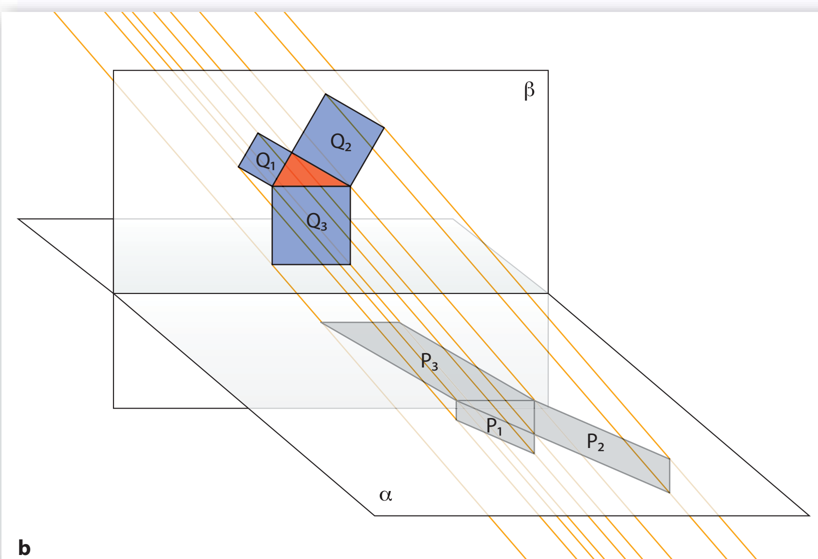
Per la proprietà secondo cui il rapporto delle aree di figure che si corrispondono in un'affinità è costante, si ha:

$$P_1 = kQ_1,\ P_2 = kQ_2,\ P_3 = kQ_3.$$

Se moltiplichiamo per k entrambi i membri di $Q_3 = Q_1 + Q_2$, otteniamo $kQ_3 = kQ_1 + kQ_2$, ossia

$$P_3 = P_1 + P_2.$$

Ciò dimostra che, nell'ombra della figura pitagorica, la somma delle aree dei parallelogrammi costruiti su due lati del triangolo è uguale all'area del parallelogramma costruito sul lato maggiore.



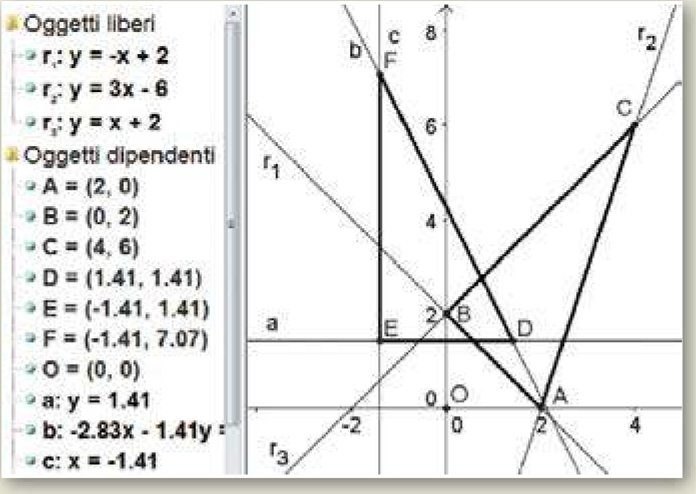
b

LABORATORIO DI MATEMATICA
LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di GeoGebra troviamo le coordinate dei vertici del triangolo DEF, ottenuto con una rotazione antioraria di 45° attorno all'origine del triangolo ABC, di lati AB: $y = -x + 2$, AC: $y = 3x - 6$, BC: $y = x + 2$.

- Attiviamo GeoGebra e per mezzo della riga di inserimento immettiamo nella finestra algebrica le equazioni date delle tre rette (figura 1), che chiamiamo r_1, r_2 e r_3.
- Esse appaiono anche nella zona del disegno, dove applichiamo su di esse il comando *Intersezione di due oggetti*, ottenendo le coordinate di A, di B e di C.
- Evidenziamo poi l'origine O come intersezione fra i due assi cartesiani.
- Operiamo quindi la rotazione di r_1 facendo clic sul pulsante *Ruota attorno a un punto di un angolo*, su r_1 e su O e, nella finestra di dialogo che appare, dando l'angolo di 45° antiorario. Automaticamente il sistema mostra la retta ruotata, alla quale assegna il nome a.
- Operiamo similmente per le rette r_2 e r_3, le cui trasformate prendono i nomi b e c.
- Usiamo tre volte *Intersezione di due oggetti* sulle rette a, b e c, ottenendo le coordinate dei punti D, E e F.
- Al termine ingrossiamo i lati dei due triangoli come vediamo in figura 1.



▲ Figura 1

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 11 esercitazioni in più

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer risolvi i seguenti problemi. Rappresenta graficamente la soluzione.

1 Determina l'equazione della parabola traslata secondo il vettore $\vec{v}(4; -3)$ della parabola p che ha la concavità rivolta verso l'alto, passa per $P(-2; 7)$ e $Q(3; -8)$ e stacca sull'asse x un segmento lungo 6.

$[y = x^2 - 12x + 24]$

2 L'ellisse e, riferita agli assi, ha un vertice in $V(2; 0)$ e interseca in un punto P di ascissa $-\frac{4}{3}$ la retta di equazione $2x + y + 1 = 0$; determina l'equazione dell'ellisse simmetrica di e rispetto alla retta $y = x$.

$\left[\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1\right]$

3 Le coordinate dei vertici opposti A e C del quadrato $ABCD$ sono (1; 2) e (4; 3). Determina le coordinate dei vertici del quadrato $A'B'C'D'$, trasformato di $ABCD$, secondo l'omotetia di centro $E(4; 0)$ e rapporto 2.

$[(-2; 4), (2; 2), (4; 6) \text{ e } (0; 8)]$

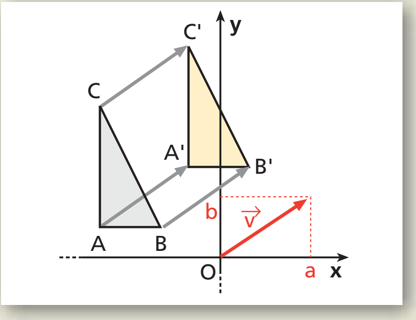
LA TEORIA IN SINTESI
LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

1. LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

- Una **trasformazione geometrica** è una corrispondenza biunivoca del piano in sé.
- Le proprietà geometriche che si conservano in una trasformazione sono dette **invarianti**.
  Si può rappresentare una trasformazione geometrica nel piano cartesiano mediante le **equazioni della trasformazione**.
- Un **punto unito** è un punto che ha per immagine se stesso. Analogamente, una **figura unita** ha per immagine se stessa ed è **puntualmente unita** se ogni suo punto è un punto unito, altrimenti è **globalmente unita**.
- Se la trasformazione t_1 trasforma P in P_1 e t_2 trasforma P_1 in P_2, la **trasformazione composta** $t_2 \circ t_1$ trasforma P in P_2.
  Per la composizione di trasformazioni geometriche **non vale la proprietà commutativa**.
  Per ogni trasformazione t esiste la **trasformazione inversa** t^{-1} che composta con t dà l'**identità** i, ossia la trasformazione in cui a ogni punto è associato se stesso:
  $$t \circ t^{-1} = t^{-1} \circ t = i.$$
  Una trasformazione è **involutoria** se componendola con se stessa si ottiene l'identità.
- Le **isometrie** sono quelle trasformazioni mediante le quali a ogni coppia di punti del piano A e B, viene fatta corrispondere una coppia di punti A' e B' tali che $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.
  In un'isometria sono invarianti la congruenza fra angoli e segmenti e l'equivalenza fra superfici.
  Studiamo cinque tipi di isometrie: traslazione, rotazione, simmetria centrale, simmetria assiale e glissosimmetria.

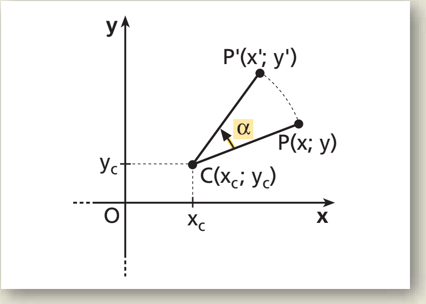
2. LA TRASLAZIONE

- Un **vettore** $\vec{v}$ è rappresentato da un segmento orientato ed è caratterizzato da **direzione**, la retta a cui appartiene il segmento, **verso**, uno dei due versi della retta, **modulo**, misura della lunghezza del segmento.
- La **traslazione** di vettore $\vec{v}(a; b)$ ha equazioni:
  $$t_{\vec{v}}: \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$



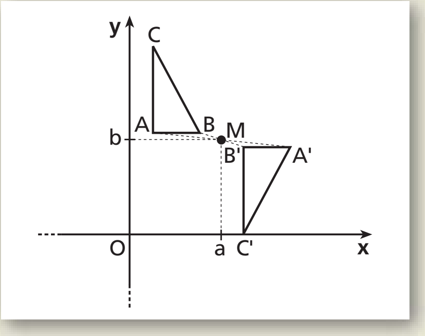
3. LA ROTAZIONE

- La **rotazione** con centro nell'origine e angolo α ha equazioni:
  $$r(O; \alpha): \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$
- La **rotazione** di centro $C(x_C; y_C)$ e angolo α ha equazioni:
  $$r(C; \alpha): \begin{cases} x' = (x - x_C)\cos\alpha - (y - y_C)\,\mathrm{sen}\,\alpha + x_C \\ y' = (x - x_C)\,\mathrm{sen}\,\alpha + (y - y_C)\cos\alpha + y_C \end{cases}$$
  che si possono anche scrivere nella forma:
  $$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha + p \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha + q \end{cases}$$
  con $p = x_C - x_C\cos\alpha + y_C\,\mathrm{sen}\,\alpha$ e $q = y_C - x_C\,\mathrm{sen}\,\alpha - y_C\cos\alpha$.



- La composizione fra rotazioni di centri diversi non è un'operazione interna nell'insieme delle rotazioni.

4. LA SIMMETRIA CENTRALE



- La **simmetria centrale di centro $M(a; b)$** ha equazioni:

$$s_M: \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

- Le equazioni della **simmetria centrale con centro nell'origine** sono:

$$s_O: \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Se per ogni x del dominio di una funzione $f(x)$ si verifica che

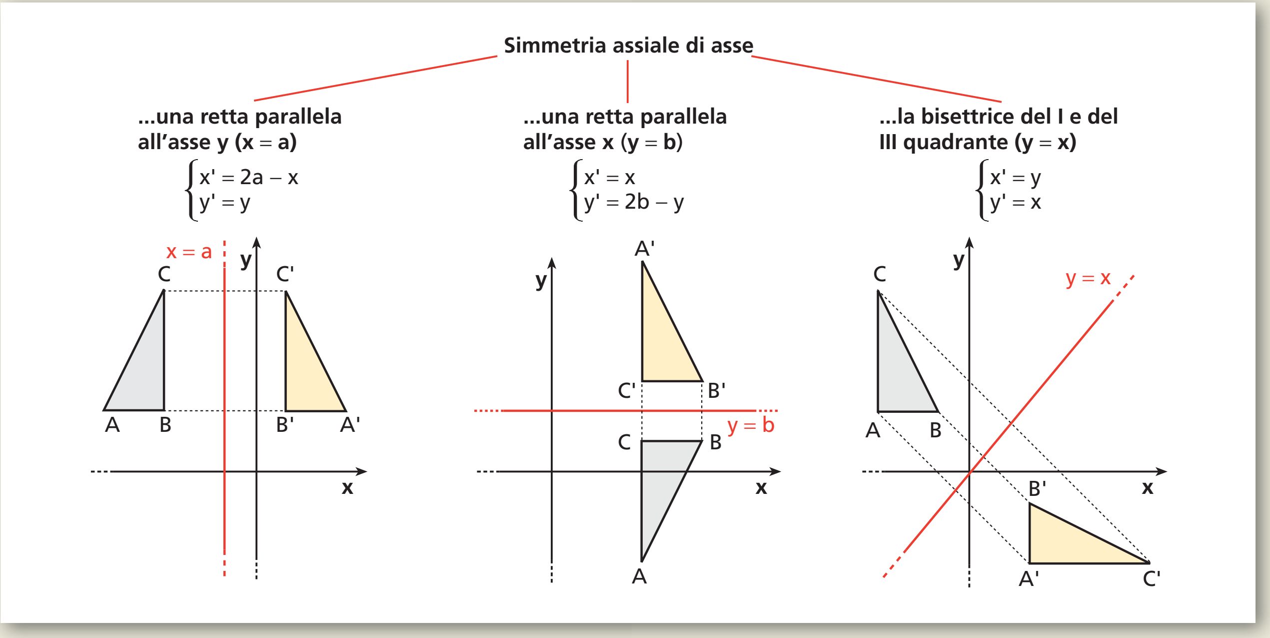
$$f(-x) = -f(x),$$

allora il grafico della funzione $f(x)$ è **simmetrico rispetto all'origine**.

- La **composizione** di due simmetrie centrali s_{M_1} e s_{M_2} di centri M_1 e M_2 è una **traslazione di vettore $\vec{v} = 2\overrightarrow{M_1M_2}$**.

5. LA SIMMETRIA ASSIALE

- **Equazioni della simmetria assiale**.



- Se l'asse di simmetria è l'**asse y**, le equazioni diventano:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

- Se l'asse di simmetria è l'**asse x**, le equazioni diventano:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

- Le equazioni della simmetria rispetto alla **bisettrice del secondo e del quarto quadrante** sono:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

- Abbiamo anche esaminato come determinare le equazioni di una simmetria con asse una retta di equazione $y = mx + q$.

- **Composizione di simmetrie assiali**.
  - Se gli assi di simmetria **sono paralleli**, si ottiene una traslazione di vettore $\vec{v}$ che ha modulo uguale al doppio della distanza tra i due assi e direzione perpendicolare a essi.
  - Se gli assi di simmetria **non sono paralleli**, si ottiene una rotazione di centro l'intersezione degli assi e angolo pari al doppio dell'angolo tra gli assi.
- La **glissosimmetria** è la composizione di una **simmetria assiale** con una **traslazione** di vettore parallelo all'asse della simmetria.

6. LE ISOMETRIE

- Le **isometrie** sono rappresentate da **equazioni** del tipo:

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}, \quad \text{con il determinante } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

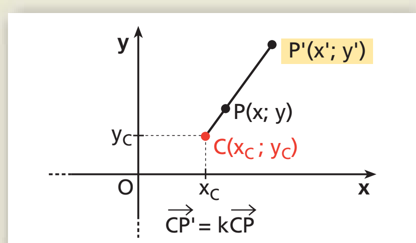
- Se il **determinante** è uguale a:
  - **1**, l'isometria è una traslazione, una rotazione o una simmetria centrale;
  - $-$**1**, l'isometria è una simmetria assiale o una glissosimmetria.
- Per riconoscere il tipo di isometria, si studiano gli **elementi uniti**.
  - Un punto unito: rotazione o simmetria centrale.
  - Una retta puntualmente unita: simmetria assiale.
  - Nessun punto unito: traslazione o glissosimmetria.
- **Rette globalmente unite**:
  - nella traslazione sono quelle parallele al vettore associato;
  - nella simmetria assiale sono quelle perpendicolari all'asse;
  - nella simmetria centrale sono quelle passanti per il centro;
  - nella rotazione non ci sono rette unite.

7. L'OMOTETIA

- Dato un numero reale $k \neq 0$, l'**omotetia** di rapporto k e centro C è quella trasformazione che associa al punto P il punto P' tale che:

$$\overrightarrow{CP'} = k\overrightarrow{CP}.$$

  - Se $|k| > 1$, l'omotetia ingrandisce la figura.
  - Se $|k| < 1$, l'omotetia riduce la figura.



- **Composizione di omotetie**.
  - Se le due omotetie hanno lo stesso centro, si ottiene un'omotetia con lo stesso centro e k uguale al prodotto dei due rapporti.
  - Se le due omotetie hanno centri diversi si ha o un'omotetia o una traslazione.
- Un'omotetia con centro O ha equazioni:

$$\omega_{O,k}: \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

- Un'omotetia con centro $C(x_C; y_C)$ ha equazioni:

$$\omega_{C,k}: \begin{cases} x' = k(x - x_C) + x_C \\ y' = k(y - y_C) + y_C \end{cases}$$

che si scrivono nella forma:

$$\begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$$

con $x_C = \dfrac{p}{1-k}$, $y_C = \dfrac{q}{1-k}$.

8. LA SIMILITUDINE

- Una **similitudine** è una trasformazione geometrica che mantiene costante il rapporto tra segmenti corrispondenti. Quindi, comunque si scelgano A e B:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k.$$

k è detto **rapporto di similitudine**.

- **Proprietà della similitudine**:
  - conserva il rapporto fra le lunghezze;
  - trasforma un angolo in un angolo congruente;
  - trasforma rette perpendicolari in rette perpendicolari e rette parallele in rette parallele;
  - trasforma circonferenze in circonferenze;
  - se F' è la figura geometrica trasformata di F vale che:
    perimetro$(F') = k \cdot$ perimetro(F);
    area$(F') = k^2 \cdot$ area(F).

- Ogni isometria è una similitudine di rapporto $k = 1$.
  Ogni omotetia è una similitudine.
  La composizione di un'**omotetia** e di un'**isometria** è sempre una similitudine.

- Le equazioni di una similitudine sono (con $a, b \geq 0$ e non entrambi nulli):

$$\sigma_1: \begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases} \quad \text{similitudine diretta,}$$

$$\sigma_2: \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + c' \end{cases} \quad \text{similitudine indiretta,}$$

con $k = \sqrt{a^2 + b^2}$.

9. LE AFFINITÀ

- Un'**affinità** è una trasformazione geometrica che trasforma rette in rette e mantiene il parallelismo.

- Un'affinità ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases} \quad \text{con} \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0.$$

- **Proprietà delle affinità**:
  - un'affinità **conserva**:
    – l'**allineamento** tra punti;
    – il **parallelismo** tra rette;
    – l'**incidenza** tra rette;
  - un'affinità **trasforma**: un'ellisse in un'ellisse; una parabola in una parabola; un'iperbole in un'iperbole; una circonferenza, in generale, in un'ellisse.

- In ogni affinità il **rapporto fra le aree** di una figura piana S e della sua immagine S' è:

$$\frac{A_{S'}}{A_S} = k = \left| \det\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \right| = |ab' - ba'|,$$

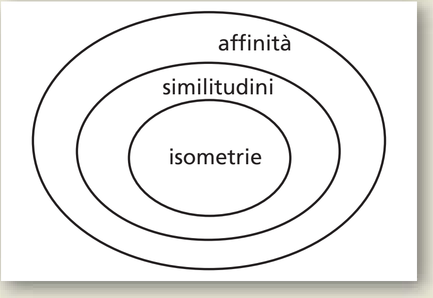
dove k è il **rapporto di affinità**.
Se $k = 1$, si parla di **equiaffinità** o **equivalenza**.

- Condizioni che permettono di studiare un'affinità:
  - se $k = \pm 1$, è un'equivalenza oppure un'isometria se vale: $\begin{cases} a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = 1 \\ ab + a'b' = 0 \end{cases}$
  - se $k \neq \pm 1$ $(k \neq 0)$, è una similitudine se vale:

$$\begin{cases} a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 \\ ab + a'b' = 0 \end{cases}$$

- Le **dilatazioni** sono particolari affinità di equazioni:

$$\begin{cases} x' = hx + p \\ y' = ky + q' \end{cases} \quad \text{con } h, k \neq 0.$$



1. LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

▶ Teoria a pag. 1130

Le equazioni di una trasformazione geometrica

1 **ESERCIZIO GUIDA**

Stabiliamo se le equazioni

$$\begin{cases} x' = \sqrt[3]{x} \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

definiscono una trasformazione geometrica.

Dobbiamo dimostrare che la corrispondenza creata dalle equazioni date è biunivoca. Osserviamo subito che per ogni punto $P(x; y)$ esiste un solo punto $P'(x'; y')$.
Per far vedere poi che ogni punto $P'(x'; y')$ è il corrispondente di un solo $P(x; y)$, ricaviamo x e y nelle equazioni:

$$\begin{cases} x = x'^3 \\ y = y' - x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x'^3 \\ y = y' - x'^3 + 1 \end{cases}$$

Anche a ogni coppia $(x'; y')$ è associata una sola coppia $(x; y)$, quindi la corrispondenza è biunivoca e le equazioni definiscono una trasformazione geometrica.

Stabilisci quali tra le seguenti equazioni definiscono una trasformazione geometrica motivando la risposta.

2 a) $\begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = 4x + 2y - 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4x + 2y - 3 \end{cases}$. [a) sì; b) no]

3 a) $\begin{cases} x' = 2x^2 - y + 1 \\ y' = 4x^2 + 2y \end{cases}$; b) $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 4x + 2y - 1 \end{cases}$. [a) no; b) no]

4 a) $\begin{cases} x' = y - 4 \\ y' = 4x + 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x' = 2\sqrt{x} - y \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$. [a) sì; b) no]

5 a) $\begin{cases} x' = \dfrac{2}{x} \\ y' = 2y \end{cases}$; b) $\begin{cases} x' = x^3 \\ y' = -y + 1 \end{cases}$. [a) no; b) sì]

6 a) $\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = x + 2y \end{cases}$; b) $\begin{cases} x' = \sqrt[3]{x} \\ y' = -\sqrt[3]{y} \end{cases}$. [a) no; b) sì]

I punti corrispondenti

7 Data la trasformazione geometrica di equazioni

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 3 \\ y' = y - x + 1 \end{cases}$$

a) determina i trasformati A' e B' dei punti $A(4; -1)$ e $B(0; 3)$;
b) trova la controimmagine di $C'(0; -5)$. [a) $A'(12; -4)$, $B'(0; 4)$; b) $C(-9; -15)$]

8 Considerata la trasformazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = x - y + 3 \end{cases}$$

e i punti $A(-2; 1)$ e $B(4; 5)$, determina il punto medio M del segmento AB e, dopo aver trovato i trasformati A', B', M', verifica che M' è il punto medio di $A'B'$. [$M(1; 3)$, $A'(-2; 0)$, $B'(14; 2)$, $M'(6; 1)$]

9 Determina i valori di a e b nella trasformazione t di equazioni

$$\begin{cases} x' = 2x + y + a \\ y' = 3x + b \end{cases}$$

sapendo che il punto $A(-1; 0)$ ha come trasformato $A'(-3; 2)$. Calcola poi l'area del triangolo $B'C'D'$ che ha come vertici i corrispondenti dei punti $B(2; 0)$, $C(-1; 1)$, $D(0; -3)$. $\left[a = -1, b = 5; \frac{33}{2}\right]$

Determina le equazioni delle trasformazioni inverse delle trasformazioni che hanno le seguenti equazioni.

10 $\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = x - y \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}x' - y' + \frac{1}{2} \end{cases}\right]$

11 $\begin{cases} x' = x^3 + 1 \\ y' = 2y \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \sqrt[3]{x' - 1} \\ y = \frac{y'}{2} \end{cases}\right]$

12 $\begin{cases} x' = \frac{y}{2} \\ y' = -\frac{x}{3} + 4 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = -3y' + 12 \\ y = 2x' \end{cases}\right]$

13 $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - 2y \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \frac{2}{3}x' + \frac{y'}{3} \\ y = \frac{1}{3}x' - \frac{y'}{3} \end{cases}\right]$

Trasformare grafici

14 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la trasformazione t di equazioni

$$t: \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

determiniamo l'equazione della curva r' corrispondente della retta r di equazione $y = \frac{3}{2}x - 1$.

Per trovare l'equazione di r' dobbiamo svolgere due passaggi:

1. ricavare le equazioni della trasformazione inversa t^{-1};

2. sostituire a x e a y nell'equazione della retta r le espressioni trovate al punto 1.

1. Per trovare le equazioni di t^{-1}, dobbiamo ricavare x e y dalle equazioni di t, scrivendole in funzione di x' e y'. Pensiamo alle equazioni della trasformazione come a un sistema lineare nelle incognite x e y e risolviamolo con il metodo di riduzione.

Ricaviamo x, sommando le equazioni membro a membro:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases} \quad \rightarrow \quad x = \frac{x' + y'}{2}.$$

$$x' + y' = 2x$$

Ricaviamo y, cambiando segno ai membri della prima equazione e sommando:

$$\begin{cases} -x' = -x + y \\ y' = x + y \end{cases} \quad \rightarrow \quad y = \frac{-x' + y'}{2}.$$

$$-x' + y' = 2y$$

Abbiamo così ottenuto le equazioni della trasformazione inversa t^{-1}:

$$t^{-1}: \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' \\ y = -\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' \end{cases}$$

2. Sostituiamo nell'equazione della retta r, $y = \frac{3}{2}x - 1$, le espressioni trovate per x e y:

$$-\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right) - 1.$$

Eliminiamo gli apici e ricaviamo y:

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}y - 1$$

$$-2x + 2y = 3x + 3y - 4$$

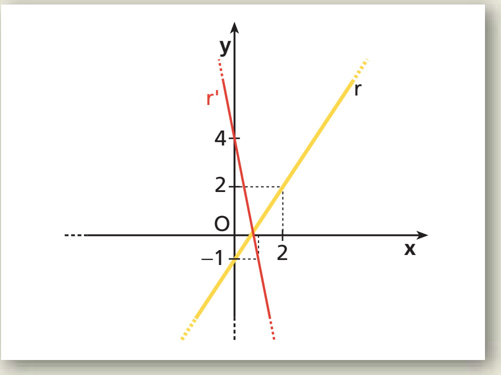
$$2y - 3y = 3x + 2x - 4$$

$$-y = 5x - 4$$

$$y = -5x + 4.$$

L'equazione della curva trasformata è quella di una retta: $y = -5x + 4$.

Disegniamo le rette corrispondenti r e r' in un unico diagramma cartesiano.



Sono assegnate le equazioni di una trasformazione geometrica e l'equazione di una retta r. Per ciascuna coppia scrivi l'equazione dell'immagine r' corrispondente della retta r mediante la trasformazione.

15 $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$ r: $y = 1$ $[y = 2]$

16 $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = -2y \end{cases}$ r: $y = x$ $\left[y = -\frac{2}{3}x\right]$

17 $\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x \end{cases}$ r: $y = 2x - 1$ $[y = 1 - x]$

18 $\begin{cases} x' = \sqrt[3]{x} \\ y' = y \end{cases}$ r: $y = 2x$ $[y = 2x^3]$

19 $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - 2y \end{cases}$ r: $y = -\frac{3}{2}x + 2$ $[y = -8x + 12]$

20 $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$ r: $y = -\frac{1}{2}x + 3$ $[7y - 5x - 66 = 0]$

21 È data la retta r di equazione $y = 3x$ e due suoi punti $A(-1; -3)$ e $B(2; 6)$. Assegnata la trasformazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y \end{cases}$$

determina la trasformata r' corrispondente di r e i punti A' e B' corrispondenti di A e di B rispettivamente. Verifica che A' e B' appartengono alla retta r'.
$[y = 3x + 3; A'(-3; -6), B'(3; 12)]$

22 Determina sulla retta r di equazione $y = -2x$ i due punti A, di ascissa -3, e B, di ascissa 4. Assegnata la trasformazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = x + 5 \\ y' = 3y - 6 \end{cases}$$

determina la trasformata r' di r, verificando che è una retta, e trova i punti A' e B' corrispondenti di A e di B. Verifica poi che A' e B' appartengono alla retta r'.
$[A(-3; 6), B(4; -8), y = -6x + 24; A'(2; 12), B'(9; -30)]$

23 Scrivi l'equazione dell'immagine della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$ nella trasformazione geometrica di equazioni:

$$\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 3 \end{cases}$$
$[x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0]$

24 Le rette di equazioni p: $y = 3$, q: $y = 2x - 1$, r: $y = -4x - 1$ definiscono un triangolo di vertici A, B, C. Considera la trasformazione t di equazioni

$$t: \begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x - y \end{cases}$$

e trova i trasformati A', B', C' dei punti A, B, C. Verifica che i punti A', B', C' si ottengono anche intersecando le rette trasformate di p, q, r. Determina poi il rapporto tra le aree dei triangoli ABC e $A'B'C'$.
$\left[A'(9; -1), B'(0; -4), C'(-1; 1); \frac{1}{4}\right]$

25 Determina la trasformata della parabola di equazione $y = 2x^2 - 4x$ nella trasformazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{2} \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

$[y = 8x^2 - 8x + 1]$

26 Verifica che l'immagine della circonferenza di centro $C(-1; -1)$ e raggio $\sqrt{2}$ nella trasformazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

è un'ellisse che ha il centro nel punto C' immagine di C. $[x^2 + 4y^2 + 4x - 8y = 0]$

27 Una curva γ ha come immagine una parabola γ' di equazione $y = -x^2 + 2x$ nella trasformazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

Qual è l'equazione di γ? $[y = -x^2 - 2x + 2]$

28 Data la trasformazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y + 1 \end{cases}$$

scrivi l'equazione della trasformata γ' della circonferenza γ di equazione $x^2 + y^2 = 4$; considera la tangente t a γ nel punto $P(2; 0)$; determina la trasformata t' di t e verifica che è tangente a γ' nel punto P' trasformato di P.

$[\gamma'\colon x^2 + y^2 - 2y - 35 = 0; t'\colon x = 6]$

I punti uniti e le figure unite

29 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo i punti uniti nella trasformazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = x + 3 \end{cases}$$

Perché un punto sia unito si deve avere $x' = x \wedge y' = y$, quindi, sostituendo nelle equazioni:

$$\begin{cases} x = 2x + y + 1 \\ y = x + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - y = 1 \\ -x + y = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \\ \hline -2x \quad = 4 \end{array} \rightarrow \quad x = -2 \text{ e } y = 1.$$

Nella trasformazione c'è un solo punto unito di coordinate $(-2; 1)$.

Determina i punti uniti nelle trasformazioni con le seguenti equazioni.

30 $\begin{cases} x' = -3x + 1 \\ y' = -3y + 2 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right)\right]$

31 $\begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = -x - 1 \end{cases}$ $[(1; -2)]$

32 $\begin{cases} x' = 4x + 2y - 1 \\ y' = x - y \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{8}\right)\right]$

33 $\begin{cases} x' = 2y - 1 \\ y' = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\left[\text{retta luogo dei punti uniti: } y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\right]$

34 $\begin{cases} x' = \dfrac{y}{2} + 2 \\ y' = 2x - 4 \end{cases}$ [retta luogo dei punti uniti: $y = 2x - 4$]

35 È data la trasformazione geometrica di equazioni $\begin{cases} x' = -x - y + a \\ y' = x + by \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
Trova per quali valori di a e b:

a) il punto $P(2; -3)$ è unito;
b) non ci sono punti uniti.

$\left[\text{a) } a = 1, b = \dfrac{5}{3}; \text{ b) } a \neq 0 \wedge b = \dfrac{3}{2}\right]$

36 Verifica che nella trasformazione geometrica di equazioni

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y + 1 \end{cases}$$

c'è un solo punto unito e che le rette di equazioni $y = -x + \frac{1}{3}$ e $x = 0$ sono globalmente unite. $\left[\left(0; \frac{1}{3}\right)\right]$

37 Verifica che nella trasformazione geometrica di equazioni $\begin{cases} x' = y - 3 \\ y' = x + 3 \end{cases}$ la retta di equazione $y = x + 3$ è puntualmente unita, mentre tutte le rette del fascio di equazione $y = -x + q$ sono globalmente unite.

La composizione di trasformazioni

Date le trasformazioni di equazioni

$$g_1: \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 2 \end{cases}, \quad g_2: \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}, \quad g_3: \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 3 \end{cases},$$

determina le equazioni delle seguenti trasformazioni.

38 $g_1 \circ g_2$ e $g_2 \circ g_1$. $\left[g_1 \circ g_2: \begin{cases} x' = -2y - 1 \\ y' = 2x + 2 \end{cases}; \quad g_2 \circ g_1: \begin{cases} x' = -2y - 2 \\ y' = 2x - 1 \end{cases}\right]$

39 $g_2 \circ g_3$ e $g_3 \circ g_2$. $\left[g_2 \circ g_3: \begin{cases} x' = -y + 3 \\ y' = x + 1 \end{cases}; \quad g_3 \circ g_2: \begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x - 3 \end{cases}\right]$

40 $g_1 \circ g_3$ e $g_3 \circ g_1$. $\left[g_1 \circ g_3: \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y - 4 \end{cases}; \quad g_3 \circ g_1: \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y - 1 \end{cases}\right]$

41 $g_3 \circ (g_2 \circ g_1)$ e $(g_3 \circ g_2) \circ g_1$. $\left[g_3 \circ (g_2 \circ g_1): \begin{cases} x' = -2y - 1 \\ y' = 2x - 4 \end{cases}; \quad (g_3 \circ g_2) \circ g_1: \begin{cases} x' = -2y - 1 \\ y' = 2x - 4 \end{cases}\right]$

42 $g_2 \circ g_2$ e $g_1 \circ g_1$. $\left[g_2 \circ g_2: \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}; \quad g_1 \circ g_1: \begin{cases} x' = 4x - 3 \\ y' = 4y + 6 \end{cases}\right]$

Nei seguenti esercizi determina ciò che è richiesto, utilizzando le trasformazioni g_1, g_2 e g_3 degli esercizi precedenti.

43 Trova l'immagine di $A(2; -1)$ in $g_1 \circ g_2 \circ g_3$. [(7; 8)]

44 Determina l'equazione della trasformata della retta di equazione $y = x$ in $g_1 \circ g_3 \circ g_2$. $[y = -x - 3]$

45 Scrivi le equazioni di $(g_2 \circ g_1)^{-1}$. $\left[\begin{cases} x = \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}x' - 1 \end{cases}\right]$

46 Dimostra che la trasformazione con le seguenti equazioni è involutoria.

$$\begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = x + 2 \end{cases}$$

47 Indica quali tra le seguenti trasformazioni sono involutorie.

$$a: \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}; \quad b: \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}; \quad c: \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}; \quad d: \begin{cases} x' = \frac{y}{4} \\ y' = 4x \end{cases}; \quad e: \begin{cases} x' = -y + 5 \\ y' = x - 5 \end{cases}.$$

[a) sì; b) sì; c) no; d) sì; e) no]

2. LA TRASLAZIONE

Teoria a pag. 1135

Le equazioni della traslazione

48 **ESERCIZIO GUIDA**

Date le equazioni delle tre trasformazioni

$$t_1: \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases}, \qquad t_2: \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = -y \end{cases}, \qquad t_3: \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases},$$

riconosciamo quale tra queste rappresenta una traslazione e scriviamo le componenti del vettore di traslazione.

Le equazioni di una traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$ sono del tipo:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

In particolare, osserviamo che il coefficiente di x e il coefficiente di y sono uguali a 1.

Le trasformazioni t_1 e t_2 non rappresentano una traslazione, perché in entrambi i sistemi i coefficienti di x e di y non sono uguali a 1.

La trasformazione t_3 rappresenta invece una traslazione di vettore:

$$\vec{v}(-1; 2).$$

Riconosci fra le seguenti equazioni di trasformazioni quali rappresentano una traslazione e scrivi per queste le componenti del vettore di traslazione.

49 $t_1: \begin{cases} x' = x \\ y' = y - 1 \end{cases}$ $\quad t_2: \begin{cases} x' = 2x \\ y' = y - 2 \end{cases}$ $\quad t_3: \begin{cases} x' = -x \\ y' = y + 1 \end{cases}$ $\quad t_4: \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 3 \end{cases}$

50 $t_1: \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$ $\quad t_2: \begin{cases} x' = x - 5 \\ y' = y + 6 \end{cases}$ $\quad t_3: \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ $\quad t_4: \begin{cases} x' = x - 5 \\ y' = -2 + y \end{cases}$

La traslazione di punti e di rette

Trasla il poligono di vertici indicati, secondo il vettore $\vec{v}$ dato, e scrivi le equazioni della traslazione.

51 $A(-8; -3)$, $B(-3; -2)$, $C(-7; 6)$; $\quad \vec{v}(9; 1)$.

52 $A(2; 5)$, $B(4; 7)$, $C(2; 8)$; $\quad \vec{v}(-6; -3)$.

53 $A(-3; 1)$, $B(-2; 5)$, $C(-3; 9)$, $D(-5; 5)$; $\quad \vec{v}(9; 1)$.

54 **ESERCIZIO GUIDA**

I punti $A(3; 2)$ e $A'(-5; 8)$ si corrispondono in una traslazione. Determiniamo le equazioni della traslazione e le componenti del vettore di traslazione.

Scriviamo le equazioni della generica traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Nelle due equazioni, sostituiamo a x' e a y' le coordinate di A' e a x e a y le coordinate di A:

$$\begin{cases} -5 = 3 + a \\ 8 = 2 + b \end{cases}$$

Ricaviamo:

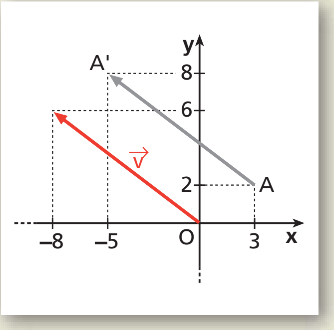
$$\begin{cases} a = -8 \\ b = 6 \end{cases}$$

Le equazioni della traslazione sono pertanto:

$$\begin{cases} x' = x - 8 \\ y' = y + 6 \end{cases}$$

Il vettore di traslazione è:

$$\vec{v}(-8; 6).$$



I punti indicati si corrispondono in una traslazione. Determina le equazioni della traslazione e le componenti del vettore di traslazione.

55 $O(0; 0) \mapsto O'(4; 3)$

56 $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right) \mapsto A'\left(\frac{11}{2}; -\frac{1}{10}\right)$

57 $B\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{8}\right) \mapsto B'\left(\frac{5}{6}; -\frac{1}{8}\right)$

58 $C(\sqrt{3}; 6) \mapsto C'\left(-2\sqrt{3}; \frac{23}{4}\right)$

---

59 Un rettangolo $ABCD$, con i lati paralleli agli assi cartesiani, ha come vertici opposti $A(2; 1)$ e $C(6; 9)$. Determina il vettore della traslazione che trasforma $ABCD$ in un rettangolo $A'B'C'D'$ con il centro nell'origine O e scrivi le coordinate di A', B', C', D'. $[\vec{v}(-4; -5), A'(-2; -4), B'(2; -4), C'(2; 4), D'(-2; 4)]$

60 Scrivi le equazioni della traslazione di vettore $\vec{v}(1; 2)$ e quelle della trasformazione inversa.
$\left[\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}; \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}\right]$

61 Sono dati il triangolo di vertici $A(-3; 2)$, $B(6; 0)$ e $C(0; 5)$ e il vettore $\vec{v}(4; 3)$. Traslando ABC del vettore $\vec{v}$ ottieni il triangolo $A'B'C'$. Trova le coordinate di A', B', C' e le equazioni della trasformazione inversa, ossia quella che fa corrispondere ad $A'B'C'$ il triangolo ABC.
$\left[A'(1; 5), B'(10; 3), C'(4; 8); t^{-1}: \begin{cases} x = x' - 4 \\ y = y' - 3 \end{cases}\right]$

62 Al triangolo ABC, di vertici $A(1; -1)$, $B(6; 0)$, $C(2; 4)$, viene applicata una traslazione e la sua immagine $A'B'C'$ ha come baricentro $G'(-4; 2)$. Trova le coordinate di A', B', C'. $[A'(-6; 0), B'(-1; 1), C'(-5; 5)]$

63 Il triangolo ABC di area 8 è rettangolo in $B(4; 3)$. Il vertice $A(2; 1)$ ha come corrispondente in una traslazione t il punto $A'(1; 5)$. Trova le coordinate di C e dei vertici B' e C' del triangolo trasformato da t, sapendo che C' si trova nel primo quadrante. $[C(8; -1), B(3; 7), C'(7; 3)]$

64 Dimostra analiticamente che la traslazione è un'isometria. (Suggerimento. Considera $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$; applica la traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$, dimostra che $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.)

65 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la retta r di equazione $y = -2x + 4$, scriviamo l'equazione della retta r' corrispondente di r nella traslazione t di vettore $\vec{v}(-3; 1)$.

Rappresentiamo la retta r e scriviamo le equazioni di t:

$$t: \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

Ricaviamo le equazioni di t^{-1}:

$$t^{-1}: \begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

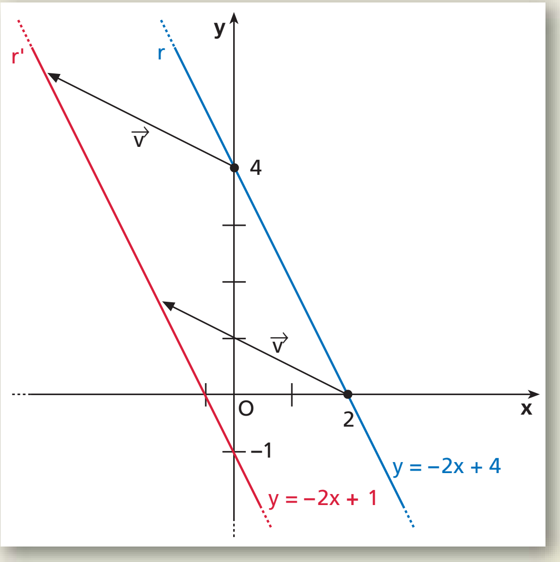
e sostituiamo nell'equazione di r:

$$y' - 1 = -2(x' + 3) + 4 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad y' = -2x' - 6 + 4 + 1 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad y' = -2x' - 1.$$

Eliminiamo gli apici e troviamo l'equazione di r': $y = -2x - 1$.
Osserviamo che la retta r' è parallela alla retta r.



Negli esercizi che seguono sono date l'equazione di una retta e le componenti di un vettore $\vec{v}$. Trova l'equazione della retta immagine nella traslazione di vettore $\vec{v}$ e traccia il grafico completo.

66 $4x - 3y + 2 = 0;\ \vec{v}(5; -6).$ **67** $y = 2x - 3;\ \vec{v}\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right).$ **68** $y = \frac{x}{4} - \frac{5}{4};\ \vec{v}(-3; 0).$

69 Determina l'equazione della retta corrispondente della retta che passa per $A(0; 3)$ e $B(1; -1)$ nella traslazione di equazioni $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 4 \end{cases}$. $[y = -4x - 1]$

70 Qual è l'immagine della retta r, di coefficiente angolare $m = -2$ e passante per $(-1; 3)$, nella traslazione di vettore $\vec{v}(2; 4)$? $[y = -2x + 9]$

71 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la retta r di equazione $y = -\frac{2}{3}x + 2$, determiniamo una traslazione da applicarle per ottenere la retta r' di equazione $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

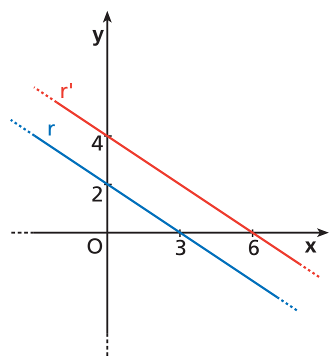
Le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare, quindi sono parallele e pertanto possono corrispondersi in una traslazione.
Disegniamo le due rette.

r: $y = -\frac{2}{3}x + 2$

x	y
0	2
3	0

r': $y = -\frac{2}{3}x + 4$

x	y
0	4
6	0



Applichiamo alla retta r la generica traslazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Ricaviamo x e y:

$$\begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$$

Sostituiamo le espressioni calcolate nell'equazione di r:

$$y' - b = -\frac{2}{3}(x' - a) + 2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad y' = -\frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}a + 2 + b.$$

Eliminiamo gli apici: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}a + 2 + b$.

Confrontiamo questa equazione con l'equazione data di r'.

Le due equazioni coincidono se e solo se:

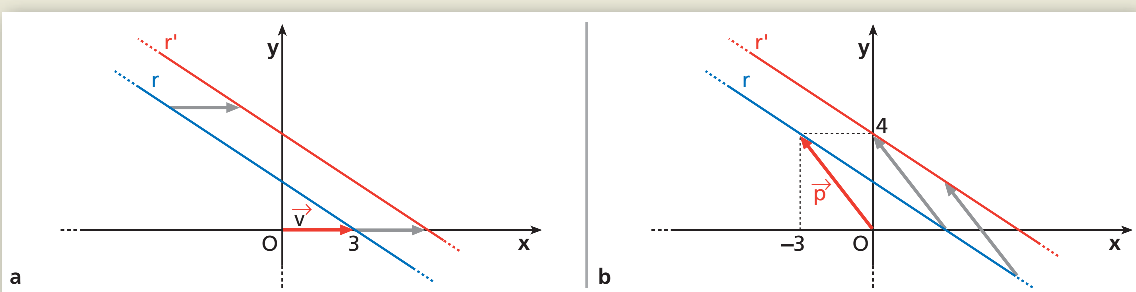
$$\frac{2}{3}a + 2 + b = 4 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3}a + b = 2.$$

Per determinare un vettore di traslazione $\vec{v}$ ammissibile, assegniamo un valore ad a e ricaviamo b. Per esempio, se $a = 3$, risulta $b = 0$ e $\vec{v}(3; 0)$.

La traslazione ha equazioni (figura a):

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y \end{cases}$$

Se $a = -3$ (figura b), risulta $b = 4$: il vettore della traslazione è $\vec{p}(-3; 4)$.
Possiamo concludere che esistono infinite traslazioni che trasformano r in r', una per ciascun valore reale attribuito ad a.



Sono date le equazioni di due rette r e r'. Per ogni coppia di rette individua un vettore di traslazione che trasformi r in r' e scrivi le equazioni della traslazione associata al vettore.

72 $r: y = x - 2;$ $r': y = x + 5.$

73 $r: y = -x + \frac{1}{2};$ $r': 2x + 2y + 5 = 0.$

74 $r: x = -2;$ $r': x - 5 = 0.$

75 $r: 2x + 5y - 6 = 0;$ $r': 2x + 5y - 4 = 0.$

76 Data la retta r di equazione $4x + 2y - 1 = 0$, trova le equazioni di una traslazione che trasforma r in una retta che passa per $A(2; -3)$.

77 Considera la retta r di equazione $y = -3x + 4$ e il vettore $\vec{v}(a; -2)$. Trova a in modo che la retta r' corrispondente di r nella traslazione di vettore $\vec{v}$ intersechi l'asse x in $(-2; 0)$. $\left[-\frac{8}{3}\right]$

78 Verifica che in ogni traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$ sono unite tutte le rette parallele al vettore $\vec{v}$.

Le curve e la traslazione

Trasla le seguenti curve secondo il vettore $\vec{v}$ indicato a fianco.

79 $y = x^2 + 1;$ $\vec{v}(1; -2).$ $[y = x^2 - 2x]$

80 $y = x^2;$ $\vec{v}(-4; -9).$ $[y = x^2 + 8x + 7]$

81 $x^2 + y^2 - 4x = 0;$ $\vec{v}(0; 2).$ $[x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0]$

82 $xy = 1;$ $\vec{v}(3; -1).$ $\left[y = \frac{x-4}{3-x}\right]$

83 $y = \sqrt{x+1};$ $\vec{v}(2; -1).$ $[y = \sqrt{x-1} - 1]$

84 $y = \cos x;$ $\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}; -2\right).$ $\left[y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2\right]$

85 $y = e^x;$ $\vec{v}(1; 0).$ $[y = e^{x-1}]$

86 Ognuna delle seguenti equazioni rappresenta una curva traslata di quella che ha per equazione $y = \sqrt{x}$. Indica per ciascuna il vettore di traslazione.

a) $y = 2 + \sqrt{x};$ b) $y = 1 + \sqrt{x-3};$ c) $y = -2 + \sqrt{x};$ d) $y = \sqrt{x+6}.$

[a) $\vec{v}(0; 2)$; b) $\vec{v}(3; 1)$; c) $\vec{v}(0; -2)$; d) $\vec{v}(-6; 0)$]

87 Come nell'esercizio precedente ma con curva iniziale di equazione $y = \frac{1}{x}$ e con curve traslate di equazioni:

a) $y = \frac{1}{x-1};$ b) $y = 2 + \frac{1}{x-4};$ c) $y = 3 + \frac{1}{x};$ d) $y = -4 + \frac{1}{x+2}.$

[a) $\vec{v}(1; 0)$; b) $\vec{v}(4; 2)$; c) $\vec{v}(0; 3)$; d) $\vec{v}(-2; -4)$]

88 Come nell'esercizio 86 ma con curva iniziale di equazione $y = \operatorname{sen} x$ e con curve traslate di equazioni:

a) $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$ b) $y = 1 + \operatorname{sen} x;$ c) $y = -2 + \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right);$ d) $y = 3 + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$

$\left[\text{a) } \vec{v}\left(\frac{\pi}{4}; 0\right); \text{ b) } \vec{v}(0; 1); \text{ c) } \vec{v}\left(-\frac{\pi}{3}; -2\right); \text{ d) } \vec{v}\left(\frac{\pi}{6}; 3\right)\right]$

89 Dimostra che traslando la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ di vertice V, secondo il vettore $\overrightarrow{VO}$, si ottiene la parabola di equazione $y = ax^2$.

90 Alla parabola di equazione $y = x^2 - 1$ applica la traslazione secondo il vettore $\vec{v}(1; -1)$ e poi secondo il vettore $\vec{w}(-3; -2)$. Quale parabola ottieni se inverti l'applicazione delle due traslazioni?
$[y = x^2 + 4x;$ la stessa$]$

Partendo dai grafici noti delle funzioni goniometriche, rappresenta le seguenti funzioni.

91 a) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; b) $y = 1 + \operatorname{tg} x$; c) $y = -\pi + \operatorname{arctg} x$.

92 a) $y = \operatorname{cotg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$; b) $y = \operatorname{arcsen}(x + 3)$; c) $y = -\frac{\pi}{2} + \arccos x$.

93 a) $y = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2\right|$; b) $y = 2 + \operatorname{sen}\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$; c) $y = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsen}(x - 4)$.

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni a partire dai grafici di $y = \ln x$ e $y = e^x$.

94 a) $y = \ln(x - 2)$; b) $y = e^x - 4$; c) $y = \frac{1}{2} + \ln x$.

95 a) $y = e^{x-3} + 2$; b) $y = 2 + \ln(x + 1)$; c) $y = e^{x+2} - 2$.

96 L'iperbole di equazione $y = \frac{x - 2}{4 + x}$ viene traslata secondo il vettore $\vec{v}(4; 0)$. Scrivi l'equazione dell'iperbole trasformata e disegna le due curve.
$\left[y = \frac{x - 6}{x}\right]$

97 Trova le equazioni della traslazione che trasforma la parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 3$ in $y = x^2 + 6x$.
$\left[\begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y - 11 \end{cases}\right]$

98 Scrivi l'equazione della circonferenza che ha come immagine nella traslazione di vettore $\vec{v}(3; -1)$ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$.
$[x^2 + y^2 = 10]$

99 Una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ viene traslata secondo un vettore $\vec{v}(a - 1; 2a)$. Determina a in modo che la circonferenza traslata abbia il centro sulla bisettrice del primo e terzo quadrante, scrivi l'equazione della circonferenza traslata e rappresenta graficamente le due circonferenze.
$[a = -5]$

100 L'ellisse di equazione $x^2 + 9y^2 - 2x + 36y + 28 = 0$ viene traslata in modo che il suo centro coincida con l'origine. Trova il vettore della traslazione e traccia il grafico delle due ellissi.
$[\vec{v}(-1; 2)]$

101 La parabola di equazione $y = x^2 - 4x - 5$ viene traslata secondo il vettore $\vec{v}(a; 1 - b)$. Trova a e b in modo che la parabola traslata passi per il punto $(2; -2)$ e abbia il vertice di ascissa 4.
$[a = 2; b = -2]$

102 L'iperbole di equazione $y = \frac{2 - x}{2x - 6}$ viene traslata in modo che gli asintoti coincidano con gli assi cartesiani. Trova il vettore della traslazione e l'equazione dell'iperbole traslata.
$\left[\vec{v}\left(-3; \frac{1}{2}\right), y = -\frac{1}{2x}\right]$

103 **VERO O FALSO?**

a) In una traslazione non ci sono rette unite. V F

b) Se si trasla la curva di equazione $f(x; y) = 0$ secondo il vettore $\vec{v}(2; -1)$, si ottiene $f(x+2; y-1) = 0$. V F

c) La curva di equazione $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ si ottiene traslando quella di equazione $y = \cos x$ secondo il vettore $\vec{v}\left(-\frac{\pi}{4}; 1\right)$. V F

d) Se si trasla la curva di equazione $y = x^3$ secondo il vettore $\vec{v}(-2; 4)$, si ottiene quella di equazione $y = (x+2)^3 + 4$. V F

e) L'iperbole equilatera di equazione $y = \frac{2}{x}$, quando viene traslata in modo che il suo centro sia $(1; 1)$, assume l'equazione $y = \frac{x+1}{x-1}$. V F

104 Scrivi le equazioni delle traslazioni t_1 e t_2 di vettori, rispettivamente, $\vec{v}_1(-4; 6)$ e $\vec{v}_2(2; -3)$. Determina le equazioni di $t_1 \circ t_2$ e verifica che è una traslazione di vettore $\vec{v}$ le cui componenti sono la somma delle componenti di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.
$\left[t_1: \begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y + 6 \end{cases}; t_2: \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}; t_1 \circ t_2: \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}\right]$

105 Trasla il segmento di estremi $A(-2; 5)$ e $B(4; 3)$ mediante un vettore $\vec{v}(-4; 2)$ e chiama $A'B'$ il suo corrispondente. Trasla $A'B'$ mediante un vettore $\vec{w}(2; -3)$ e chiama $A''B''$ il suo corrispondente. Qual è la trasformazione che ad AB associa il segmento $A''B''$? Scrivi le equazioni di questa trasformazione.
$\left[\text{traslazione } t: \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}\right]$

106 Data la retta r di equazione $2x - 3y + 5 = 0$, determina la sua corrispondente r' nella traslazione di vettore $\vec{v}(2; 1)$ e poi la retta r'' corrispondente di r' nella traslazione di vettore $\vec{w}(-3; 4)$. Verifica che la traslazione composta mantiene la direzione della retta. $[r': 2x - 3y + 4 = 0; r'': 2x - 3y + 22 = 0]$

107 Determina la traslazione che si ottiene componendo quella di vettore $\vec{v}(2; -5)$ con quella di vettore $\vec{w}(-3; 4)$ e scrivine le equazioni. Trova poi l'equazione della retta r'' corrispondente della retta r di equazione $x - y + 7 = 0$ nella traslazione composta. Che cosa osservi? $[r'': x - y + 7 = 0]$

3. LA ROTAZIONE

Teoria a pag. 1138

La rotazione con centro nell'origine degli assi

Scrivi le equazioni delle rotazioni di centro O e con il seguente angolo.

108 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ $\left[\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}\right]$

109 $\alpha = \frac{7}{6}\pi$ $\left[\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \\ y' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}\right]$

110 $\alpha = -\frac{3}{4}\pi$ $\left[\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}\right]$

111 $\alpha = \text{arcsen}\frac{12}{13}$ $\left[\begin{cases} x' = \frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y \\ y' = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y \end{cases}\right]$

112 $\alpha = \text{arctg}\frac{3}{4}$ $\left[\begin{cases} x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \\ y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \end{cases}\right]$

Sono date le seguenti equazioni di una rotazione di centro O. Determina l'angolo di rotazione.

113 $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

114 $\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$ $\left[\frac{3}{4}\pi\right]$

115 $\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$ $\left[\frac{5}{6}\pi\right]$

116 $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ $\left[-\frac{\pi}{2}\right]$

117 $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$ $\left[-\frac{\pi}{3}\right]$

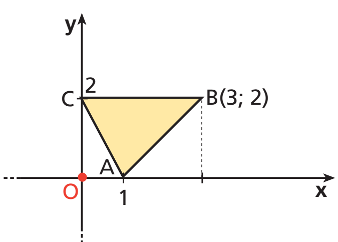
La rotazione di punti e di poligoni

118 È dato il triangolo di vertici $A(-2; 3)$, $B\left(\frac{3}{2}; 1\right)$, $C(1; 5)$. Determina le coordinate dei punti trasformati nella rotazione di centro O e angolo $\frac{\pi}{2}$ e disegna i due triangoli. $\left[A'(-3; -2), B'\left(-1; \frac{3}{2}\right), C'(-5; 1)\right]$

119 Dato il rettangolo di vertici $A(2; 3)$, $B(4; -1)$, $C(6; 0)$ e $D(4; 4)$, determina il rettangolo corrispondente nella rotazione di centro O e angolo $-\frac{\pi}{2}$. Verifica che i due rettangoli hanno lo stesso perimetro. $[A'(3; -2), B'(-1; -4), C'(0; -6), D'(4; -4)]$

120 Dato il rombo di vertici $A(-10; -1)$, $B(-6; -4)$, $C(-2; -1)$ e $D(-6; 2)$, determina il quadrilatero corrispondente nella rotazione di centro O e angolo $\frac{3}{2}\pi$ e verifica che $A'B'C'D'$ è ancora un rombo. $[A'(-1; 10), B'(-4; 6), C'(-1; 2), D'(2; 6)]$

121 Trova il corrispondente del triangolo ABC della figura nella rotazione di centro O e angolo $\frac{\pi}{3}$ e verifica che i due triangoli hanno la stessa area.



122 Una rotazione di centro O associa al punto $A(0; 2)$ il punto $A'(-1; -\sqrt{3})$. Determina l'angolo α e le equazioni della rotazione.
$\left[\frac{5}{6}\pi; \begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}\right]$

La rotazione di rette e di coniche

123 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione della retta corrispondente di $y = x$ in una rotazione di 30° intorno all'origine O.

Le equazioni della rotazione sono:

$$\begin{cases} x' = x\cos 30° - y\,\text{sen}\,30° \\ y' = x\,\text{sen}\,30° + y\cos 30° \end{cases}$$

Dobbiamo ricavare ora x e y in funzione di x' e y', ossia determinare le equazioni della trasformazione inversa. Nel caso delle rotazioni, però, la trasformazione inversa non è altro che una rotazione di un angolo opposto, quindi:

$$\begin{cases} x = x'\cos(-30°) - y'\,\text{sen}(-30°) \\ y = x'\,\text{sen}(-30°) + y'\cos(-30°) \end{cases} \to \begin{cases} x = x'\cos 30° + y'\,\text{sen}\,30° \\ y = -x'\,\text{sen}\,30° + y'\cos 30° \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \dfrac{1}{2}y' \\ y = -\dfrac{1}{2}x' + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$$

Applichiamo ora la trasformazione alla retta; otteniamo:

$$-\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \to y'(\sqrt{3}-1) = x'(\sqrt{3}+1).$$

Esplicitiamo e togliamo gli apici:

$$y = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}x \to y = (2+\sqrt{3})x.$$

Il coefficiente angolare ottenuto indica che la retta trasformata forma un angolo di 75° con l'asse x.

Scrivi le equazioni delle curve trasformate, nella rotazione di centro O e angolo indicato a fianco. Fai la rappresentazione grafica.

124 $y = -4$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. $[x = -4]$

125 $y = x + 1$, $\alpha = 60°$. $[y = -(2+\sqrt{3})x - \sqrt{3} - 1]$

126 $y = x^2 - 1$, $\alpha = -30°$. $[3x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}\,xy - 2x - 2\sqrt{3}\,y - 4 = 0]$

127 $x^2 + y^2 - 9 = 0$, $\alpha = -45°$. $[x^2 + y^2 - 9 = 0]$

128 $x^2 - y^2 = 1$, $\alpha = -135°$. $\left[xy = \frac{1}{2}\right]$

129 $x = \sqrt{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$. $[y = -x + 2]$

130 $y = -x + 3$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. $[y = x + 3]$

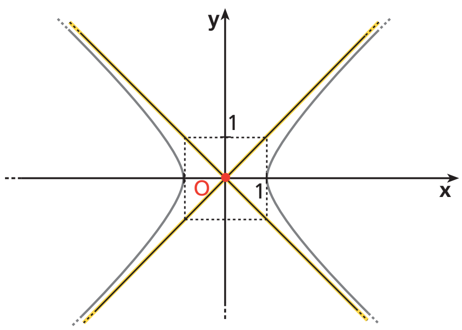
131 $y = x - 4$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. $[y = -x - 4]$

132 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, $\alpha = \text{arctg}\frac{4}{3}$. $[288x^2 + 337y^2 + 168xy = 3600]$

133 È data l'iperbole equilatera $xy = k$, con $k > 0$. Verifica che, applicando a essa la rotazione di $-45°$ di centro O, si ottiene la forma canonica $x^2 - y^2 = a^2$. Ricostruisci la relazione esistente tra i due parametri k e a^2.
Con una rotazione di 45° che cosa otterresti?
$[a^2 = 2k; x^2 - y^2 = -2k]$

134 Scrivi le equazioni della rotazione che porta l'asse x a sovrapporsi alla retta di equazione $y - \sqrt{3}x = 0$.
$$\left[\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}\right]$$

135 Determina i corrispondenti in una rotazione di centro O e angolo $\alpha = -60°$ dell'iperbole della figura e dei suoi asintoti. Risultano ancora perpendicolari i due asintoti?



$[x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 2 = 0,\ y = (\sqrt{3} - 2)x,$
$y = (\sqrt{3} + 2)x]$

136 Sono date le rette $y = \sqrt{3}\,x$ e $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$.
Applica alla prima retta una rotazione di $-120°$ e alla seconda una di $-30°$, entrambe di centro O, verificando che si ottiene la stessa retta. Giustifica il risultato ottenuto.

137 È data la parabola $x = y^2 - 2y - 1$. Considera la retta tangente nel vertice e l'asse di simmetria e applica a entrambe una rotazione di 45° rispetto all'origine. Verifica che il punto di intersezione delle due rette trasformate è il trasformato del vertice della parabola.
$[y = -x - 2\sqrt{2},\ y = x + \sqrt{2}]$

138 Data l'iperbole equilatera $y = \frac{ax+1}{x-2a}$, determina i valori di a tali che l'iperbole si trasformi, mediante un'isometria, in $x^2 - y^2 = -3$.

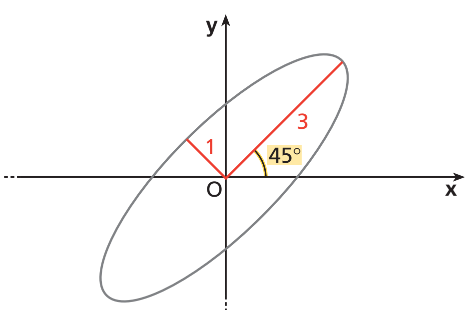
(Suggerimento. Conviene prima applicare una traslazione che porti il centro di simmetria nell'origine e successivamente una rotazione.)
$\left[a = \pm\frac{1}{2}\right]$

139 Considera l'iperbole di equazione
$$3x^2 - y^2 + 3 = 0.$$
Trova le equazioni della rotazione di centro O che porta l'asintoto dell'iperbole con pendenza positiva a sovrapporsi all'asse y e poi scrivi l'equazione dell'iperbole trasformata.
$$\left[\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases};\ 2x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 3 = 0\right]$$

140 La parabola di equazione $y = 2x^2$ viene ruotata di 45° intorno al suo vertice e successivamente traslata in modo che il vertice ottenuto sia $V_1(1; -1)$. Scrivi l'equazione della parabola ottenuta.
$[2x^2 + 4xy + 2y^2 + \sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,y - 2\sqrt{2} = 0]$

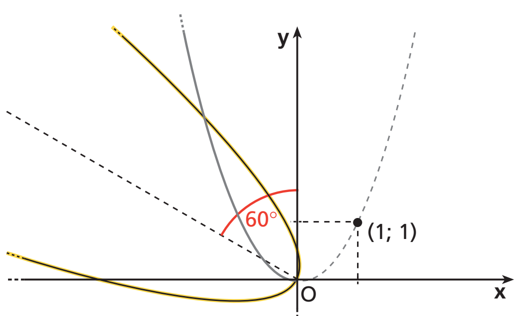
Utilizzando i dati della figura, determina l'equazione della conica rappresentata.

141



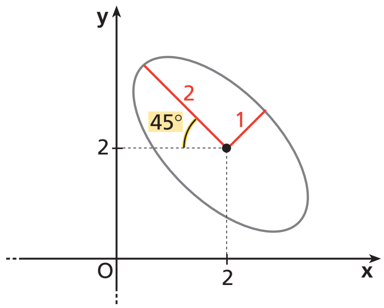
$[5x^2 - 8xy + 5y^2 - 9 = 0]$

142



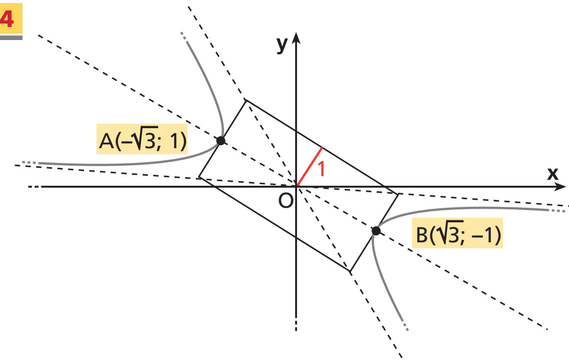
$[x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 3y^2 + 2\sqrt{3}\,x - 2y = 0]$

143



$[5x^2 + 6xy + 5y^2 - 32x - 32y + 56 = 0]$

144



$[x^2 + 10\sqrt{3}\,xy + 11y^2 + 16 = 0]$

145 Scrivi l'equazione dell'ellisse che ha gli estremi dell'asse maggiore in $A_1(-3; 4)$ e $A_2(3; -4)$ e semiasse minore che misura 2. $[436x^2 + 289y^2 + 504xy - 2500 = 0]$

146 Scrivi l'equazione dell'ellisse con fuochi $F_1(-2; 2\sqrt{3})$ e $F_2(2; -2\sqrt{3})$ e asse minore che misura 3. $[21x^2 + 13y^2 + 8\sqrt{3}\,xy - 225 = 0]$

147 Scrivi l'equazione di un'ellisse che ha i fuochi in $F_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $F_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e l'asse minore che misura 2. $[3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4 = 0]$

148 Un'ellisse ha i vertici di coordinate $V_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $V_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $V_3(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $V_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Trova la sua equazione. $[5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0]$

La rotazione con centro in un punto *C*

Scrivi le equazioni delle seguenti rotazioni con centro *C* e angolo α.

149 $C(0; 2)$, $\alpha = -30°$. $\left[\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1 \\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 - \sqrt{3} \end{cases}\right]$

150 $C(2; -1)$, $\alpha = 270°$. $\left[\begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = 1 - x \end{cases}\right]$

151 $C(3; 4)$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. $\left[\begin{cases} x' = 7 - y \\ y' = x + 1 \end{cases}\right]$

152 $C(-1; 0)$, $\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$. $\left[\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{4}{5} \end{cases}\right]$

153 $C(2; 2)$, $\alpha = \text{arctg}\frac{5}{12}$. $\left[\begin{cases} x' = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + \frac{12}{13} \\ y' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{8}{13} \end{cases}\right]$

Sono date le seguenti equazioni di rotazioni di centro C e angolo α. Determina C e α.
(Suggerimento. Ricorda che in ogni rotazione il centro è l'unico punto unito.)

154 $\begin{cases} x' = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y - 1 \\ y' = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{y}{2} \end{cases}$ $\left[C\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \alpha = -60°\right]$

155 $\begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = -x - 2 \end{cases}$ $\left[C\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{5}{2}\right), \alpha = -90°\right]$

156 $\begin{cases} x' = -x + 1 \\ y' = -y - 4 \end{cases}$ $\left[C\left(\dfrac{1}{2}; -2\right), \alpha = 180°\right]$

157 $\begin{cases} x' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + \dfrac{1}{5} \\ y' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y - \dfrac{2}{5} \end{cases}$ $\left[C\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right), \alpha = \text{arcsen}\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right]$

158 $\begin{cases} x' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1 \end{cases}$ $[C(0; 1), \alpha = -135°]$

159 Scrivi le equazioni della rotazione che porta il punto $A(-1; 3)$ in $A'(-2; 2)$ e il punto $B(3; 0)$ in $B'(3; 2)$ e individua il centro e l'angolo di rotazione.

$$\left[\begin{cases} x' = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y + \dfrac{3}{5} \\ y' = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y + \dfrac{1}{5} \end{cases}, C(0; 1), \alpha = \arccos\dfrac{4}{5}\right]$$

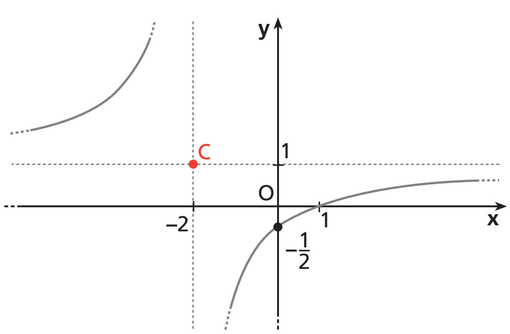
160 Una rotazione porta il punto $O(0; 0)$ in $O'(-1; 0)$ e il punto $M(2; 2)$ in $M'(\sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$. Scrivi le sue equazioni e determina il centro C e l'angolo α. Trova i trasformati A', B' dei punti $A(0; 2\sqrt{3})$ e $B(2; 0)$ e l'area del poligono $AA'BB'O'$.

$$\left[\begin{cases} x' = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y - 1 \\ y' = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{y}{2} \end{cases}, C\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \alpha = -60°, A'(2; \sqrt{3}), B'(0; -\sqrt{3}); \dfrac{11}{2}\sqrt{3}\right]$$

161 Scrivi le equazioni della rotazione che porta la retta di equazione $y - 4 = 0$ a sovrapporsi alla retta di equazione $y = x + 3$.

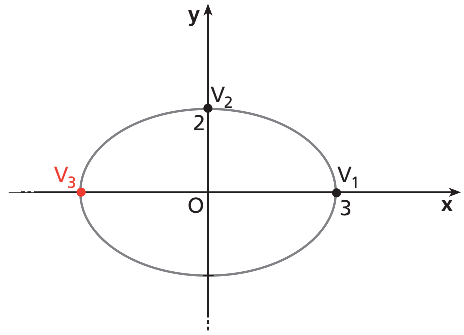
$$\left[\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + \dfrac{3}{2}\sqrt{2} + 1 \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - \dfrac{5}{2}\sqrt{2} + 4 \end{cases}\right]$$

162 Utilizzando i dati della figura, trova l'equazione dell'iperbole e poi scrivi le equazioni della rotazione di 90° intorno al suo centro di simmetria. Trova l'equazione dell'iperbole trasformata e quelle dei suoi asintoti.



$$\left[y = \dfrac{x-1}{x+2}; \begin{cases} x' = -y - 1 \\ y' = x + 3 \end{cases}; y = \dfrac{x+5}{x+2}; x = -2, y = 1\right]$$

163 Utilizzando i dati della figura trova l'equazione dell'ellisse e poi esegui una rotazione dell'ellisse intorno al vertice V_3, che si trova sull'asse x, e di angolo $-\frac{\pi}{4}$. Determina l'equazione dell'ellisse ruotata.



$$\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1; 13x^2+13y^2+10xy+6x(13-4\sqrt{2})+6y(5+4\sqrt{2})+117-72\sqrt{2}=0\right]$$

164 Scrivi l'equazione della retta che si ottiene dalla rotazione di 30° della retta di equazione $y=-\sqrt{3}x+1$ intorno al punto $C(0; 1)$.

$$\left[y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1\right]$$

165 Il punto $A(5; 17)$ viene ruotato di 270° in senso orario intorno al punto $(10; 5)$ fino al punto B. Ricava l'esatta distanza tra i punti A e B. (USA *Illinois Council of Teachers of Mathematics*, *Team Competition*, 2009)

$$[13\sqrt{2}]$$

166 Un quadrato $ABCD$, che si trova nel primo quadrante, ha lato che misura 2, il vertice $A(3; 0)$ e B si trova sull'asse x con ascissa maggiore di quella di A. Scrivi le equazioni della rotazione di centro A e angolo $\alpha=-\frac{\pi}{4}$. Determina poi le coordinate dei vertici del quadrato $A'B'C'D'$ ottenuto nella rotazione, le equazioni delle sue diagonali e verifica che queste si intersecano in un punto E' che è il corrispondente del punto di intersezione delle diagonali di $ABCD$.

$$\left[\begin{cases} x'=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{3\sqrt{2}}{2}+3 \\ y'=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}; y=0, x=3+\sqrt{2}\right]$$

167 Il segmento AB, che misura $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, si trova sulla retta di equazione $y=\sqrt{3}x-1$ e A appartiene all'asse y mentre B ha ascissa positiva. Determina le coordinate di B e individua le equazioni di una rotazione antioraria intorno ad A che trasforma AB in un segmento parallelo all'asse x.

$$\left[B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; 1\right); \begin{cases} x'=-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2} \end{cases}\right]$$

168 Data la circonferenza di equazione

$$x^2+y^2-4x-2\sqrt{3}y+6=0,$$

scrivi le equazioni della rotazione di centro $A(-1; 0)$ che porta il centro C della circonferenza nel punto $C'(2; -\sqrt{3})$. Determina poi l'equazione della circonferenza trasformata e quella della circonferenza inscritta nel triangolo ACC'.

$$\left[\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2} \\ y'=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}; x^2+y^2-4x+2\sqrt{3}y+6=0; x^2+y^2-2x=0\right]$$

169 Scrivi le equazioni della rotazione r_1 di centro O e angolo $\frac{\pi}{3}$ e quelle della rotazione r_2 di centro $A(0; 1)$ e angolo $\frac{\pi}{6}$. Verifica se $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$ e trova le coordinate del trasformato di O in $r_1 \circ r_2$.

$$\left[\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}; \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \text{no}; \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)\right]$$

170 **VERO O FALSO?**

a) Le equazioni della rotazione di 90° rispetto al punto $(3; 0)$ sono $\begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = x \end{cases}$. V F

b) Sottoponendo l'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = a^2$ a una rotazione di $-45°$ intorno all'origine, si ottiene l'iperbole di equazione $xy = -\frac{a^2}{2}$. V F

c) Per la composizione di due rotazioni intorno allo stesso centro vale la proprietà commutativa. V F

d) Le equazioni

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 3 \end{cases}$$

sono quelle di una rotazione di 60° di centro $(1; 3)$. V F

e) Applicando alla parabola di equazione $y = x^2$ la rotazione di 45° intorno all'origine O, si ottiene la curva di equazione $x^2 + y^2 + 2xy + \sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,y = 0$. V F

171 **TEST** Il rettangolo $PQRS$ giace in un piano con $\overline{PQ} = \overline{RS} = 2$ e $\overline{QR} = \overline{SP} = 6$. Il rettangolo viene ruotato di 90° in senso orario intorno a R, poi viene ruotato di 90° in senso orario intorno al punto in cui è stato trasformato S dopo la prima rotazione. Qual è la lunghezza del cammino percorso complessivamente dal punto P?

A $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})\pi$ B 6π C $(3 + \sqrt{10})\pi$ D $(\sqrt{3} + 2\sqrt{5})\pi$ E $2\sqrt{10}\,\pi$

(USA *American Mathematics Contest 10*, 2008)

4. LA SIMMETRIA CENTRALE

Teoria a pag. 1141

Scrivi le equazioni delle simmetrie centrali con il seguente centro.

172 $M(2; 0)$ $\left[s: \begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = -y \end{cases}\right]$

173 $M(-4; 2)$ $\left[s: \begin{cases} x' = -8 - x \\ y' = 4 - y \end{cases}\right]$

174 $M(-1; 3)$ $\left[s: \begin{cases} x' = -2 - x \\ y' = 6 - y \end{cases}\right]$

Trova il centro delle simmetrie con le seguenti equazioni.

175 $s: \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = -4 - y \end{cases}$ $[(1; -2)]$

176 $s: \begin{cases} x' = 1 - x \\ y' = 2 - y \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2}; 1\right)\right]$

177 $s: \begin{cases} x' = -x \\ y' = -2 - y \end{cases}$ $[(0; -1)]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2.0** © Zanichelli 2011 *Volume 4*

La simmetria di punti e poligoni

Negli esercizi seguenti sono dati i vertici di alcuni poligoni. Determina i poligoni simmetrici rispetto al punto indicato e disegna la figura.

178 Triangolo di vertici $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$ rispetto al punto $(1; 2)$. $[A'(3; 4); B'(1; 4); C'(2; 3)]$

179 Trapezio di vertici $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(3; 2)$, $D(0; 2)$ rispetto al punto $(-2; 1)$. $[A'(-4; 2); B'(-6; 2); C'(-7; 0); D'(-4; 0)]$

180 Parallelogramma di vertici $A(-1; 0)$, $B(0; 2)$, $C(0; 4)$, $D(-1; 2)$ rispetto al punto $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. $[A'(0; 4); B'(-1; 2); C'(-1; 0); D'(0; 2)]$

181 Quadrato di vertici $A(-5; 3)$, $B(-3; 1)$, $C(-1; 3)$, $D(-3; 5)$ rispetto all'origine O. $[A'(5; -3); B'(3; -1); C'(1; -3); D'(3; -5)]$

182 Rombo di vertici $A(0; 3)$, $B(-2; 0)$, $C(0; -3)$, $D(2; 0)$ rispetto all'origine O. Che cosa osservi in questo caso? $[A'(0; -3); B'(2; 0); C'(0; 3); D'(-2; 0)]$

183 Determina i simmetrici, rispetto all'origine degli assi, dei punti $A(-1; 3)$ e $B(3; 3)$ e indicali con A' e B'. Verifica che il quadrilatero $ABA'B'$ è un parallelogramma. $[A'(1; -3); B'(-3; -3)]$

La simmetria di rette

184 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo la retta r' corrispondente alla retta r di equazione $y = 2x - 4$ nella simmetria di centro $M(1; 2)$.

Le equazioni della simmetria di centro M sono:

$$\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 4 - y \end{cases}$$

Ricaviamo x e y

$$\begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 4 - y' \end{cases}$$

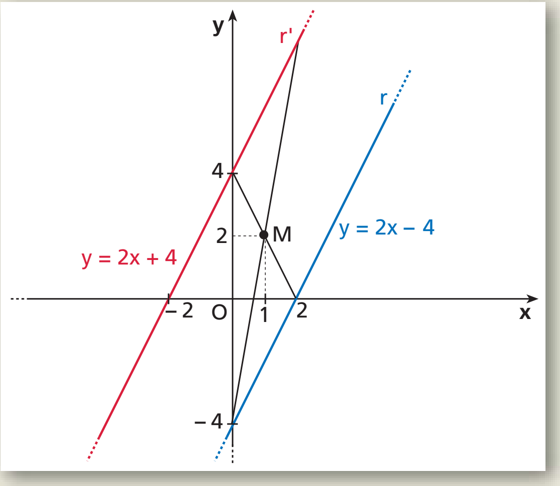
e sostituiamo nell'equazione di r:

$$4 - y' = 2(2 - x') - 4.$$

Svolgiamo i calcoli e togliamo gli apici. Si ha:

$$-y = \cancel{4} - 2x - \cancel{4} - 4 \rightarrow -y = -2x - 4 \rightarrow$$
$$\rightarrow y = 2x + 4.$$

Questa è l'equazione di r'.
Osserviamo che le due rette r e r' sono parallele.



Determina le rette corrispondenti alle rette date nella simmetria di centro il punto indicato.

185 $y = -2x + 5$, $M(3; -1)$. $[y = -2x + 5]$

186 $y = \frac{1}{2}x + 4$, $M(4; 0)$. $\left[y = \frac{1}{2}x - 10\right]$

187 $2x - 3y + 2 = 0$, $O(0; 0)$. $[2x - 3y - 2 = 0]$

188 $-2x + 6y - 3 = 0$, $O(0; 0)$. $[6y - 2x + 3 = 0]$

189 Determina le trasformate delle rette $y = 2x$ e $y = -1$ rispetto alla simmetria di centro il punto $C(-2; -3)$. Considera poi la figura geometrica delimitata dalle quattro rette. Di quale figura si tratta? Cosa rappresenta C per tale figura? [$y = 2x + 2$ e $y = -5$]

190 Determina la trasformata della retta $2x - \sqrt{3}\,y + \sqrt{6} = 0$ nella simmetria di centro il punto $(\sqrt{6}; 3\sqrt{2})$. Giustifica il risultato ottenuto. [$2x - \sqrt{3}\,y + \sqrt{6} = 0$]

Le curve e la simmetria centrale

191 Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, verifica che è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani.

192 Disegna le seguenti circonferenze, di equazioni: $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$; $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$; $x^2 + y^2 = 2$; $x^2 + y^2 = 16$; $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 11 = 0$.
Quali fra esse sono simmetriche rispetto all'origine degli assi cartesiani?

193 Data l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, stabilisci se è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani.

Trova le simmetriche rispetto all'origine delle seguenti parabole e determina le eventuali intersezioni fra la parabola data e la sua simmetrica.

194 $y = x^2 - 2x$ [$y = -x^2 - 2x$; $(0; 0)$]

195 $y = -x^2 + 5x - 4$ [$y = x^2 + 5x + 4$; nessuna intersezione]

196 $x = y^2 - 1$ [$x = -y^2 + 1$; $(0; 1)$; $(0; -1)$]

197 **TEST** Le seguenti equazioni rappresentano curve simmetriche rispetto all'origine *tranne* una. Quale?

A $xy + 2 = 0$

B $25x^2 + y^2 - 100 = 0$

C $y = \mathrm{tg}\, 2x$

D $y = \mathrm{sen}\, 4x + 1$

E $y = \frac{2x - 1}{x} - 2$

198 **ASSOCIA** a ciascuna curva di equazione assegnata il suo centro di simmetria.

1) $y = \frac{2x - 2}{4x - 1}$. a) $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

2) $x^2 - 4y^2 - 4y - 5 = 0$. b) $(0; -2)$.

3) $2xy - 3 = 0$. c) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

4) $x^2 + 9y^2 + 36y + 27 = 0$. d) $(0; 0)$.

199 Scrivi l'equazione della simmetrica rispetto all'origine della circonferenza $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$. Calcola le intersezioni con gli assi cartesiani delle due circonferenze.
[$x^2 + y^2 + 10x + 6y + 9 = 0$; $(1; 0)$; $(9; 0)$; $(0; 3)$; $(-1; 0)$; $(-9; 0)$; $(0; -3)$]

200 Dimostra che le due parabole di equazioni $y = ax^2 + c$ e $y = -ax^2 - c$ sono simmetriche rispetto all'origine degli assi.

201 Dimostra che un'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani.

Tra le curve con le seguenti equazioni riconosci quelle che presentano simmetrie rispetto all'origine.

202
a) $y = x^2 + 1$
b) $xy - x - 1 = 0$
c) $x^2 - y^2 = 9$
d) $y = -\operatorname{tg} x$

203
a) $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x$
b) $y = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
c) $y = \frac{2+x}{x-2}$
d) $y = x^3$

204 Trova per quale valore di k la curva di equazione $y = \frac{(k-2)x+1}{2x}$ è simmetrica rispetto all'origine e rappresenta graficamente la curva ottenuta. $[k = 2]$

Scrivi le equazioni delle curve simmetriche di quelle di equazione data rispetto al punto indicato a fianco.

205 $y = 2x + 1$, $M(3; 1)$. $[y = 2x - 11]$

206 $y = \frac{x+2}{x}$, $M(-2; -1)$. $\left[y = -\frac{3x+10}{x+4}\right]$

207 $y = \cos x$, $M(-\pi; 2)$. $[y = 4 - \cos x]$

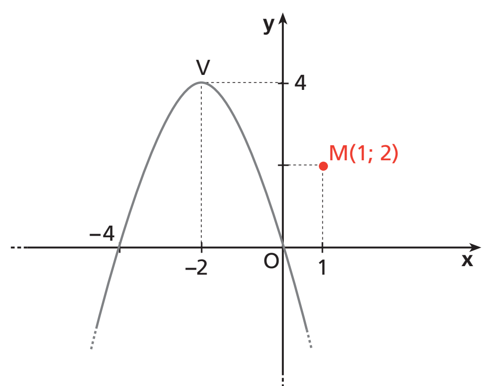
208 $y = \frac{2x+3}{1-x}$, $M(1; -2)$. $\left[y = \frac{2x+3}{1-x}\right]$

209 $y = -x^2 + 4x$, $M(-1; 5)$. $[y = x^2 + 8x + 22]$

210 $y = \ln(x+1)$, $M(1; -4)$. $[y = -8 - \ln(3-x)]$

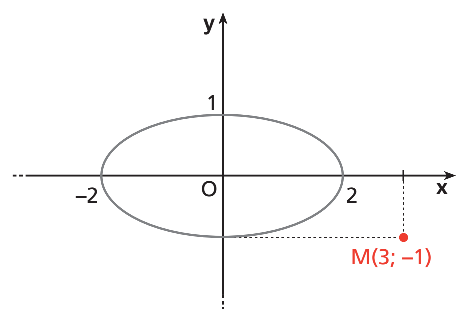
Scrivi le equazioni delle curve simmetriche di quelle della figura rispetto al punto M e disegnale.

211



$[y = x^2 - 8x + 16]$

212



$[x^2 + 4y^2 - 12x + 16y + 48 = 0]$

Verifica che le seguenti curve sono simmetriche rispetto al punto indicato a fianco. Determina quindi la traslazione che rende le curve simmetriche rispetto all'origine e rappresenta la curva iniziale e quella traslata.

213 $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$, $M(1; -3)$.

214 $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$, $M(1; -2)$.

215 $y = \frac{1-2x}{x+1}$, $M(-1; -2)$.

216 $x^2 - 4y^2 + 16y + 4 = 0$, $M(0; 2)$.

217 $2x - 4y + 1 = 0$, $M\left(2; \frac{5}{4}\right)$.

218 $y^2 = -x^2 + 4x$, $M(2; 0)$.

219 $y = 1 + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$.

220 $y^2 = |x^2 - 4x + 3|$, $M(2; 0)$.

221 Scrivi l'equazione della circonferenza c passante per i punti $A(0; 2)$, $B(1; 0)$, $C(3; 0)$ e l'equazione della circonferenza c', simmetrica di c rispetto all'origine degli assi cartesiani. Traccia i grafici delle due circonferenze, mettendo in evidenza i tre punti A, B, C e i loro simmetrici A', B', C'.

$\left[x^2 + y^2 - 4x - \frac{7}{2}y + 3 = 0; x^2 + y^2 + 4x + \frac{7}{2}y + 3 = 0\right]$

222 Scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per l'origine $O(0; 0)$ e tangente in $T\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ alla retta di equazione $y = -2x + \frac{1}{2}$.
Nella simmetria con centro nell'origine degli assi cartesiani, determina la parabola e la retta tangente corrispondenti alle date.
Traccia i grafici delle due parabole e delle due rette in uno stesso riferimento cartesiano.

$\left[y = -\frac{1}{2}x^2 - x; y = \frac{1}{2}x^2 - x; y = -2x - \frac{1}{2}\right]$

223 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo il centro di simmetria della curva che ha equazione:

$$\boldsymbol{x^2 + 9y^2 - 4x - 18y + 4 = 0.}$$

- Scriviamo le equazioni della simmetria di centro generico $C(x_C; y_C)$:

$$s_C: \begin{cases} x' = 2x_C - x \\ y' = 2y_C - y \end{cases}$$

- Troviamo le equazioni della trasformazione inversa s_C^{-1}:

$$s_C^{-1}: \begin{cases} x = 2x_C - x' \\ y = 2y_C - y' \end{cases}$$

- Sostituiamo nell'equazione data:

$$(2x_C - x')^2 + 9(2y_C - y')^2 - 4(2x_C - x') - 18(2y_C - y') + 4 = 0.$$

- Togliamo gli apici, semplifichiamo e ordiniamo:

$$4x_C^2 + x^2 - 4xx_C + 36y_C^2 + 9y^2 - 36yy_C - 8x_C + 4x - 36y_C + 18y + 4 = 0$$
$$x^2 + 9y^2 - 4x(x_C - 1) - 18y(-1 + 2y_C) + 4x_C^2 + 36y_C^2 - 8x_C - 36y_C + 4 = 0.$$

L'equazione ottenuta è quella della curva simmetrica a quella data. Se questa ha centro di simmetria, essa deve coincidere con la sua simmetrica, quindi confrontando le due equazioni dobbiamo avere:

$$x_C - 1 = 1 \rightarrow x_C = 2; \qquad 2y_C - 1 = 1 \rightarrow y_C = 1.$$

Sostituendo tali valori nel termine noto, otteniamo:

$$16 + 36 - 16 - 36 + 4 = 4;$$

anche il termine noto coincide.

Concludiamo che la curva data è simmetrica rispetto al punto (2; 1).

Trova il centro di simmetria della curva che ha la seguente equazione.

224 $4x^2 + y^2 - 8x = 0$ $[(1; 0)]$

225 $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 7 = 0$ $[(1; -2)]$

226 $xy + 3y + 2x + 4 = 0$ $[(-3; -2)]$

227 $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$ $[(2; 1)]$

228 $2x^2 - 9y^2 - 18y - 27 = 0$ $[(0; -1)]$

229 Determina per quali valori di a la curva di equazione

$$x^2 - 9y^2 + ax + 36y - 44 = 0$$

ha come centro di simmetria $C(-1; 2)$. $[a = 2]$

230 Trova per quali valori di a e b il grafico della funzione

$$y = \frac{2ax - 1}{4x - b + 1}$$

ha come centro di simmetria il punto $C(1; 3)$ e rappresenta graficamente la funzione ottenuta. $[a = 6, b = 5]$

---

231 Trova una simmetria centrale che trasformi la parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 2$ in $y = -x^2 + 3x$. $\left[\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = -2 - y \end{cases}\right]$

232 Determina i punti uniti e le rette unite nella simmetria centrale di centro $C(-2; 3)$. $[(-2; 3); y = mx + 2m + 3, x = -2]$

233 Scrivi le equazioni della simmetria rispetto al punto $(3; -1)$. Determina tutte le rette unite nella trasformazione. $\left[\begin{cases} x' = 6 - x \\ y' = -2 - y \end{cases}; y = mx - 3m - 1, x = 3\right]$

234 Le parabole di equazioni $y = 2x^2 - 4x - 1$ e $y = -2x^2 + 12x + 25$ sono una la simmetrica dell'altra rispetto a un punto M. Trova le coordinate di M. $[M(2; 20)]$

235 Verifica che la parabola di equazione $y = -x^2 - 4x$ non ha centro di simmetria.

236 Verifica che in una simmetria centrale di centro $C(a; b)$ l'unico punto unito è C e le rette unite (globalmente) sono quelle passanti per C.

237 Considera l'ellisse di equazione $4x^2 + y^2 = 4$. Scrivi l'equazione della sua simmetrica rispetto al punto $M(6; 1)$ e determina le coordinate dei vertici e dei fuochi dell'ellisse trasformata. $[4x^2 + y^2 - 96x - 4y + 576 = 0$; vertici: $(11; 2), (13; 2), (12; 0), (12; 4)$; $F'(12; 2 \pm \sqrt{3})]$

238 Trova per quali valori di a e b la parabola di equazione $y = x^2 + (a - b)x + 2b + 3$ è simmetrica di $y = -x^2 + 2x$ rispetto al punto $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. Disegna le due parabole. $[a = 6, b = 2]$

239 **VERO O FALSO?**

a) La curva di equazione $x^2 - 9y^2 + (a - 1)x = 9$ è simmetrica rispetto all'origine se $a = 1$. V F

b) Le curve di equazioni $y = \frac{3x}{x - 1}$ e $y = \frac{6x + 1}{2x - 2}$ hanno lo stesso centro di simmetria. V F

c) La simmetrica della retta di equazione $y = 2x + 2$ rispetto al punto $(-1; 2)$ ha equazione $y = 2x - 3$. V F

d) Il centro di simmetria della curva di equazione $x^2 - (y - 1)^2 = 4$ è il punto $(0; 1)$. V F

e) La funzione $y = \text{sen}(x - 2\pi) + 4$ ha grafico simmetrico di quello di $y = \text{sen}\, x$ rispetto al punto $C(\pi; -2)$. V F

La composizione di simmetrie centrali

240 Date le simmetrie centrali s_{M_1} e s_{M_2} di centri $M_1\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ e $M_2(-4; 1)$ verifica che la composizione delle due simmetrie non gode della proprietà commutativa.

241 Trova le equazioni della trasformazione t che si ottiene componendo le due simmetrie di centri $M_1(0; 1)$ e $M_2(2; 5)$ e trova il trasformato del segmento di estremi $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ e $B(1; 0)$ attraverso t.

$\left[s_{M_1} \circ s_{M_2}: \begin{cases} x' = -4 + x \\ y' = -8 + y \end{cases}; A'\left(-\frac{9}{2}; -8\right); B'(-3; -8)\right]$

242 **VERO O FALSO?**

a) La composizione di due simmetrie centrali è commutativa. V F

b) Componendo due simmetrie centrali si ottiene una simmetria centrale. V F

c) La simmetria centrale è una trasformazione involutoria. V F

d) La simmetria centrale è una rotazione. V F

243 Considera le simmetrie s_{M_1} e s_{M_2} di centri $M_1(2; 0)$ e $M_2(-3; 1)$ e verifica che la trasformazione $s_{M_2} \circ s_{M_1}$ è una traslazione di vettore $2\overrightarrow{M_1M_2}$.

244 Considera le simmetrie centrali s_{M_1}, s_{M_2} e s_{M_3} di centri $M_1(-1; -1)$, $M_2(1; 3)$ e $M_3(4; 1)$.

a) Trova le equazioni della trasformazione $s = s_{M_3} \circ s_{M_2} \circ s_{M_1}$ e verifica che s è una simmetria centrale.

b) Determina il centro M di s e verifica che è il quarto vertice del parallelogramma definito dai punti M_1, M_2, M_3.

$\left[\text{a) } s: \begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = -6 - y \end{cases}; \text{ b) } M(2; -3)\right]$

5. LA SIMMETRIA ASSIALE

Teoria a pag. 1143

La simmetria rispetto a un asse parallelo all'asse *y* o all'asse *x*

La simmetria di punti e di poligoni

245 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la retta r di equazione $x = -2$, scriviamo le equazioni della simmetria rispetto a r e determiniamo le coordinate dei punti corrispondenti ai vertici del quadrilatero $ABCD$, dove $A(-12; -4)$, $B(-6; -4)$, $C(-8; 3)$, $D(-11; 1)$. Disegniamo la figura.

La retta r è parallela all'asse y. Le equazioni di una simmetria di asse parallelo all'asse y di equazione $x = a$ sono del tipo:

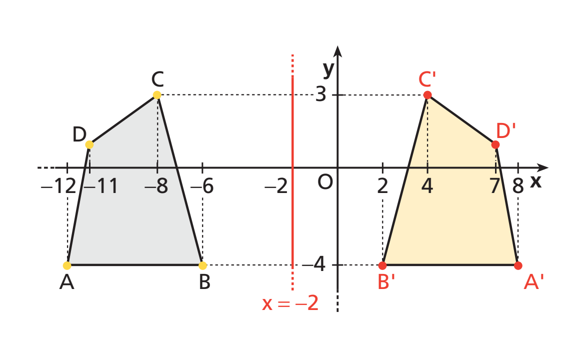
$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$$

e, poiché nel nostro caso $a = -2$, si ha:

$$\begin{cases} x' = -4 - x \\ y' = y \end{cases}$$

Scriviamo le coordinate dei punti corrispondenti e disegniamo la figura:

$A(-12; -4) \mapsto A'(8; -4)$;
$B(-6; -4) \mapsto B'(2; -4)$;
$C(-8; 3) \mapsto C'(4; 3)$;
$D(-11; 1) \mapsto D'(7; 1)$.



Dati i vertici di un poligono e l'equazione di un asse di simmetria, scrivi le equazioni della simmetria e determina i simmetrici dei poligoni assegnati. Disegna la figura.

246 Triangolo di vertici $A(2; 9)$, $B(-2; 3)$, $C(-4; 7)$; asse di equazione $x = 0$. $[A'(-2; 9); B'(2; 3); C'(4; 7)]$

247 Quadrilatero di vertici $A(-1; 2)$, $B(0; 6)$, $C(3; 6)$, $D(5; 0)$; asse di equazione $y = -1$. $[A'(-1; -4); B'(0; -8); C'(3; -8); D'(5; -2)]$

248 Parallelogramma di vertici $A(-2; -2)$, $B(-1; 1)$, $C(2; 2)$, $D(1; -1)$; asse di equazione $y = 3$. $[A'(-2; 8); B'(-1; 5); C'(2; 4); D'(1; 7)]$

249 Dato il rombo di vertici $A(-2; 1)$, $B(-3; 4)$, $C(-2; 7)$, $D(-1; 4)$, trova la sua figura simmetrica rispetto all'asse $y = -2$ e verifica che è ancora un rombo. $[A'(-2; -5); B'(-3; -8); C'(-2; -11); D'(1; -8)]$

250 Dato il triangolo di vertici $A(2; 1)$, $B(0; 4)$, $C(-1; 1)$, trova il suo simmetrico $A'B'C'$ rispetto all'asse $x = 1$. Verifica che i due triangoli hanno la stessa area. $[A'(0; 1); B'(2; 4); C'(3; 1)]$

251 Dato il parallelogramma di vertici $A(0; 2)$, $B(3; 1)$, $C(4; 4)$, $D(1; 5)$, trova il suo simmetrico rispetto all'asse di equazione $x = -2$ e verifica che i due parallelogrammi hanno lo stesso perimetro. $[A'(-4; 2); B'(-7; 1); C'(-8; -4); D'(-5; 5)]$

Dati due punti che si corrispondono in una simmetria assiale, individua l'asse di simmetria e le equazioni della trasformazione.

252 $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$; $A'\left(3; \frac{1}{2}\right)$. [asse: $x = 1$]

253 $E\left(\frac{3}{2}; 6\right)$; $E'\left(-\frac{1}{2}; 6\right)$. $\left[\text{asse: } x = \frac{1}{2}\right]$

254 $A(-1; 5)$; $A'(-1; -1)$. [asse: $y = 2$]

255 $B\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right)$; $B'\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right)$. [asse: $y = 0$]

La simmetria di rette

256 Determina la retta r' corrispondente della retta r di equazione $x = -3$ nella simmetria di asse $x = 1$. $[x = 5]$

257 Determina la retta r' corrispondente della retta r di equazione $y = 2$ nella simmetria di asse $x = -1$. $[y = 2]$

258 Data la simmetria di asse $x = -4$, determina la retta r' corrispondente della retta r di equazione $y = -3x + 5$. Trova il punto di intersezione delle due rette. $[y = 3x + 29; (-4; 17)]$

259 Dimostra che in una simmetria di asse $x = a$ ogni retta perpendicolare all'asse è unita.

260 Dimostra che in una simmetria di asse $x = a$ due rette corrispondenti, se non sono parallele, si intersecano in un punto dell'asse.

261 Se la retta che passa per i punti $(5; 5)$ e $(-3; 1)$ viene riflessa attraverso l'asse y, ricava l'intersezione con l'asse x della retta trasformata. (USA *Illinois Council of Teachers of Mathematics*, *Team Competition*, 2009) [5]

Per ciascuna retta, determina la retta corrispondente nella simmetria di asse assegnato e disegna la figura.

262 $y = 2x - 4$; asse: $x = -1$. $[y = -2x - 8]$

263 $2x + 5y - 7 = 0$; asse: $x = 0$. $[2x - 5y + 7 = 0]$

264 $y = -3x + 5$; asse: $y = -2$. $[y = 3x - 9]$

265 $2x - 6y + 3 = 0$; asse: $y = 4$. $[2x + 6y - 45 = 0]$

266 $3x + 2y - 1 = 0$; asse: $y = 0$. $[2y - 3x + 1 = 0]$

267 Determina la retta r' corrispondente della retta r di equazione $2x - 3y + 4 = 0$ nella simmetria di asse $y = 3$. Determina il punto di intersezione delle due rette senza risolvere il sistema formato dalle loro equazioni. $\left[2x + 3y - 14 = 0; \left(\frac{5}{2}; 3\right)\right]$

268 Determina la retta r' corrispondente della retta r di equazione $x = -3$ nella simmetria di asse $y = -1$. Che cosa osservi? Come si trasforma il punto $P(-3; -5)$ appartenente a r? $[x = -3; P'(-3; 3)]$

Per ognuna delle seguenti coppie di rette corrispondenti in una simmetria di asse parallelo all'asse y, scrivi l'equazione dell'asse e le equazioni della simmetria.

269 $r: y = \frac{1}{2}x + 2$; $r': y = -\frac{1}{2}x + 2$. [asse: $x = 0$]

270 $r: y = -x + 5$; $r': y = x + 7$. [asse: $x = -1$]

271 $r: 2x - 3y + 2 = 0$; $r': 2x + 3y - 8 = 0$. $\left[\text{asse: } x = \frac{3}{2}\right]$

Per ognuna delle seguenti coppie di rette determina le equazioni della simmetria di asse parallelo all'asse x in cui si corrispondono.

272 $r: y = \frac{1}{3}x + 2$; $r': y = -\frac{1}{3}x$. [asse: $y = 1$]

273 $r: y = -x + 7$; $r': y = x - 10$. $\left[\text{asse: } y = -\frac{3}{2}\right]$

274 $r: 2x + 3y - 5 = 0$; $r': 2x - 3y - 5 = 0$. [asse: $y = 0$]

La simmetria rispetto alle bisettrici dei quadranti

La simmetria di punti e di poligoni

275 Determina il segmento simmetrico del segmento di estremi $A(2; 5)$ e $B(-1; -3)$ rispetto alla bisettrice di equazione $y = x$; scrivi la corrispondenza fra i punti dati e i loro simmetrici e rappresenta i due segmenti sul piano cartesiano. $[A'(5; 2); B'(-3; -1)]$

276 Determina il simmetrico del parallelogramma di vertici $A(-6; -5)$, $B(-3; -3)$, $C(-1; -4)$, $D(-4; -6)$ rispetto alla bisettrice di equazione $y = -x$; scrivi la corrispondenza fra i punti e disegna la figura. $[A'(5; 6); B'(3; 3); C'(4; 1); D'(6; 4)]$

277 Dato il triangolo di vertici $A(1; 2)$, $B(5; 2)$, $C(3; 4)$, determina il suo simmetrico rispetto alla bisettrice del II e del IV quadrante e verifica che tali triangoli sono isosceli e fra loro congruenti. $[A'(-2; -1); B'(-2; -5); C'(-4; -3)]$

Le rette simmetriche rispetto alle bisettrici dei due quadranti

Per ogni retta, determina la corrispondente nella simmetria rispetto alla bisettrice del II e del IV quadrante.

278 $y = \frac{5}{7}x + \frac{2}{7}$ $\left[y = \frac{7}{5}x + \frac{2}{5}\right]$

279 $2x + 2y - 5 = 0$ $[2x + 2y + 5 = 0]$

280 $x = -3$ $[y = 3]$

281 Determina la corrispondente, nella simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante, della retta di equazione $y = -\frac{3}{2}x + 2$. $\left[y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\right]$

282 Data la retta r di equazione $2x + 4y - 1 = 0$, determina la sua simmetrica r' rispetto all'asse $y = x$. Dove si incontrano r e r'? $\left[4x + 2y - 1 = 0; \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right)\right]$

283 Data la retta r di equazione $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + 1 = 0$, determina la sua simmetrica r' rispetto all'asse $y = -x$. Trova il punto di intersezione delle due rette. $\left[\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - 1 = 0; (1; -1)\right]$

Per ognuna delle seguenti coppie di rette stabilisci se la simmetria assiale in cui si corrispondono è quella di asse $y = -x$ oppure $y = x$.

284 $r: 2x - 3y + 2 = 0;$ $r': y = \frac{3}{2}x + 1.$ $[y = -x]$

285 $r: y = 2x + 5;$ $r': -x + 2y - 5 = 0.$ $[y = -x]$

286 $r: x - y + 5 = 0;$ $r': x - y - 5 = 0.$ $[y = x]$

La simmetria rispetto alla retta $y = mx + q$

287 **ESERCIZIO GUIDA**

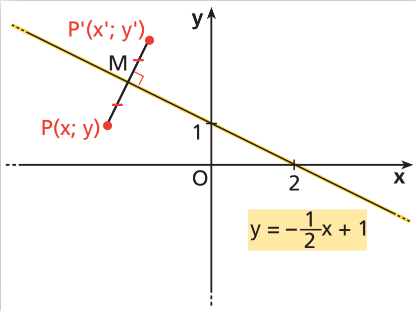
Scriviamo le equazioni della simmetria rispetto alla retta r di equazione $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Se $P(x; y)$ ha come immagine $P'(x'; y')$ nella simmetria, si deve verificare che:

- la retta PP' deve essere perpendicolare all'asse di simmetria, ossia deve avere coefficiente angolare 2;
- il punto medio M del segmento PP' deve appartenere all'asse.

Dalle due condizioni si ottiene:

$$\begin{cases} \dfrac{y'-y}{x'-x} = 2 & \text{perpendicolarità di } PP' \text{ all'asse} \\ \dfrac{y+y'}{2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+x'}{2}\right) + 1 & \text{appartenenza di } M \text{ all'asse } r \end{cases}$$



Semplificichiamo le equazioni svolgendo i calcoli:

$$\begin{cases} y' - y = 2x' - 2x \\ 2y + 2y' = -x - x' + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y' = y + 2x' - 2x \\ 2y + 2(y + 2x' - 2x) = -x - x' + 4 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y' = y + 2x' - 2x \\ 5x' = 3x - 4y + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y' = y + \frac{6}{5}x - \frac{8}{5}y + \frac{8}{5} - 2x \\ x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{4}{5} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{4}{5} \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{8}{5} \end{cases}$$

Scrivi le equazioni delle simmetrie rispetto alle rette che hanno le seguenti equazioni.

288 $y = x - 1$

289 $x + y + 4 = 0$

290 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

291 $y = 2x + 1$

292 $y = -3x$

293 $y = \frac{3}{4}x$

294 $x - y + 2 = 0$

295 $2y - x + 3 = 0$

296 $y + \sqrt{3}x = 0$

297 $2x + 3y = 0$

298 $4x + 4y = 1$

299 $2y = -x$

300 I punti $A(5; 5)$ e $A'(-1; 7)$ si corrispondono in una simmetria assiale. Trova le equazioni della simmetria, il trasformato del punto $B(1; 2)$ e l'area del quadrilatero $AA'B'B$.

$$\left[\begin{cases} x' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \\ y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \end{cases}; B'\left(\frac{2}{5}; \frac{11}{5}\right); \frac{143}{10}\right]$$

301 Una simmetria assiale trasforma il triangolo di vertici $A(-3; 3)$, $B(1; 4)$, $C\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ nel triangolo $A'B'C'$. Determina le coordinate di B', sapendo che A e C sono punti uniti. $[B'(-4; -1)]$

302 **ESERCIZIO GUIDA**

Date le equazioni della simmetria assiale

$$\begin{cases} x' = y - 4 \\ y' = x + 4 \end{cases}$$

determiniamo l'equazione dell'asse di simmetria.

Poiché l'asse di simmetria è il luogo dei punti uniti, per i suoi punti deve essere:

$$\begin{cases} x = y - 4 \\ y = x + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ y = x + 4 \end{cases} \rightarrow y = x + 4.$$

Tutti e soli i punti della retta di equazione $y = x + 4$ sono punti uniti.

La retta è quindi l'asse di simmetria.

Date le seguenti equazioni di simmetria assiale, determina l'equazione dell'asse di simmetria.

303 $\begin{cases} x' = -y + 5 \\ y' = -x + 5 \end{cases}$ $[y = -x + 5]$

304 $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ $\left[y = \frac{\sqrt{3}}{3}x\right]$

305 $\begin{cases} x' = \dfrac{-x + \sqrt{3}y - \sqrt{3}}{2} \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}x + y + 1}{2} \end{cases}$ $[y = \sqrt{3}x + 1]$

306 $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \end{cases}$ $\left[y = \frac{1}{2}x\right]$

307 Dopo aver determinato l'asse della simmetria che ha le seguenti equazioni, trova il segmento $A'B'$ simmetrico del segmento AB con $A(0; 1)$ e $B(2; 0)$. Verifica poi che i segmenti sono congruenti.

$$\begin{cases} x' = \dfrac{5x - 12y}{13} \\ y' = \dfrac{-12x - 5y}{13} \end{cases}$$

$\left[2x + 3y = 0;\ A'\left(-\frac{12}{13}; -\frac{5}{13}\right);\ B'\left(\frac{10}{13}; -\frac{24}{13}\right)\right]$

Le curve e la simmetria assiale

308 **ESERCIZIO GUIDA**

Verifichiamo che la parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$ è simmetrica rispetto al suo asse.

L'asse della parabola ha equazione:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4.$$

Le equazioni della simmetria di asse $x = 4$ sono:

$$\begin{cases} x' = 8 - x \\ y' = y \end{cases}$$

Ricaviamo x e y:

$$\begin{cases} x = 8 - x' \\ y = y' \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione della parabola:

$$y' = \frac{1}{2} \cdot (8 - x')^2 - 4 \cdot (8 - x') + 2$$

(parabola simmetrica).

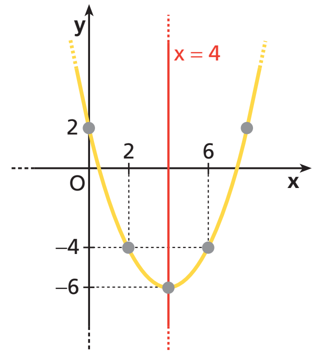
Eliminiamo gli apici e svolgiamo i calcoli:

$$y = \frac{1}{2} \cdot (64 - 16x + x^2) - 32 + 4x + 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 32 - 8x + \frac{1}{2}x^2 - 32 + 4x + 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2.$$

Ma questa è l'equazione della parabola iniziale, pertanto l'asse $x = 4$ è asse di simmetria della parabola.



$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$

x	y
4	–6
0	2
2	–4
6	–4

309 Verifica che la parabola di equazione $y = 2x^2 + 8x + 1$ è simmetrica rispetto al suo asse.

310 Determina la simmetrica rispetto all'asse x della parabola di equazione $y = -2x^2 + 5x$. [$y = 2x^2 - 5x$]

311 Verifica che la circonferenza con centro nell'origine e raggio 2 è simmetrica rispetto all'asse x e all'asse y.

312 Disegna le seguenti iperboli di equazioni: $xy = 2$; $y = \frac{3}{x}$; $xy = -2$; $y = -\frac{1}{x}$. Verifica che sono simmetriche rispetto a entrambe le bisettrici dei quadranti.

313 Determina la simmetrica rispetto all'asse y della parabola di equazione $y = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. Traccia il grafico delle due parabole. $\left[y = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right]$

314 Determina la simmetrica rispetto all'asse y della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$. Traccia il grafico delle due circonferenze. [$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$]

315 Dimostra che le iperboli equilatere di equazione $xy = k$ sono simmetriche rispetto alle due bisettrici dei quadranti per qualsiasi $k \in \mathbb{R}$.

316 Dimostra che qualunque circonferenza con centro nell'origine degli assi è simmetrica rispetto sia all'asse x, sia all'asse y.

317 Data la parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 6$, determina le parabole simmetriche della data rispetto:
a) all'asse x;
b) all'asse y;
c) all'origine degli assi cartesiani. [a) $y = -x^2 + 5x - 6$; b) $y = x^2 + 5x + 6$; c) $y = -x^2 - 5x - 6$]

Date le equazioni delle seguenti curve, scrivi le equazioni delle curve loro immagini nelle simmetrie rispetto alle rette scritte a fianco e fai la rappresentazione grafica.

318 $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$, $y = 2$.

319 $y = \frac{x-1}{x+2}$, $x = 3$.

320 $y = x^2 - 2x$, $y = -x$.

321 $y = \frac{2x}{x-2}$, $y = x$.

322 $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $y = x + 4$.

323 $y = \operatorname{sen} x$, $y = -1$.

324 $y = \ln(x - 1)$, $y = x + 2$.

325 $y = \sqrt{1 - x}$, $y = x - 4$.

326 Se $f(x) = |3x - 12|$, allora un'equazione di un suo asse di simmetria è $x = k$. Trova il valore di k.

(USA *Illinois Council of Teachers of Mathematics*, *Regional Math Contest*, 2010)

$[k = 4]$

327 Trova per quali valori di k la curva di equazione

$$2kx^2 + y^2 + (2k - 1)x - 4 = 0$$

è simmetrica rispetto all'asse y e rappresentala graficamente. $\left[k = \frac{1}{2}\right]$

328 Verifica che i grafici di $y = \frac{1}{x - 1}$ e $y = \frac{1}{7 - x}$ sono simmetrici rispetto a una retta parallela all'asse y. Determina l'equazione di tale retta. $[x = 4]$

329 Traccia il grafico della funzione $y = x|x|$, trova poi l'equazione della sua simmetrica rispetto alla retta $x = 2$ e rappresentala graficamente. $[y = (4 - x)|4 - x|]$

330 La curva di equazione

$$x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0$$

ha due assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani. Determina le loro equazioni. $[x = 1; y = -2]$

331 Scrivi le equazioni della simmetria che ha per asse la retta di equazione $y = x + 3$ e trova l'equazione della trasformata dell'iperbole equilatera riferita agli assi che passa per $P(-1; 2)$.

$[x^2 - y^2 + 6x + 6y - 3 = 0]$

332 Disegna il grafico che si ottiene applicando di seguito alla curva di equazione $y = 2^x$ le simmetrie con i seguenti assi e scrivi l'equazione del grafico finale: asse y, asse x, retta di equazione $x = -1$, retta di equazione $y = -x + 3$. $[y = 5 - \log_2(x - 3)]$

333 Per quali valori di a la curva di equazione

$$y = \frac{(a - 3)x - 1}{2ax - 3 + 2a}$$

è simmetrica rispetto alla retta di equazione $y = x$? Disegna il grafico che si ottiene per tale valore di a.

$[a = 2]$

334 Sono date le curve γ e γ' di equazioni $xy - y + 1 = 0$ e $xy - 9y - 1 = 0$. Individua rispetto a quale retta parallela all'asse y i grafici di γ e γ' sono uno il simmetrico dell'altro.
Rappresenta le due curve e l'asse di simmetria. $[x = 5]$

335 Trova l'equazione della parabola γ' simmetrica di γ di equazione $y = x^2 + 4x + 5$ rispetto alla retta di equazione $x - y - 1 = 0$. Determina la distanza tra i vertici delle due parabole e rappresentale graficamente.

$[\gamma'\colon x = y^2 + 6y + 11; 4\sqrt{2}]$

336 Considera la circonferenza γ di equazione $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$. Trova l'equazione della corrispondente γ' di γ nella simmetria rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante e considera poi γ'' simmetrica di γ' rispetto alla retta di equazione $y = -2$. Scrivi l'equazione di γ'' e le equazioni della trasformazione che porta γ in γ''.

$$\left[\gamma'\colon x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0, \gamma''\colon x^2 + y^2 + 4x + 8y + 19 = 0; \begin{cases} x' = -y \\ y' = -4 + x \end{cases}\right]$$

337 VERO O FALSO?

a) La curva simmetrica, rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante, della curva di equazione $g(x; y) = 0$ ha equazione $g(-x; -y) = 0$. V F

b) Il grafico di $x^2 + y^2 - 2x = 0$ è il simmetrico, rispetto alla retta di equazione $y = -1$, di quello di $x^2 + y^2 + 6x + 8 = 0$. V F

c) Se una circonferenza è unita in una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, allora il suo centro sta su tale retta. V F

d) Effettuando la simmetria con asse di equazione $y = x - 4$, una parabola con asse parallelo all'asse y diventa una parabola con asse parallelo all'asse x. V F

e) Applicando la simmetria con asse di equazione $y = -x$ alla curva di equazione $y = \text{arcsen}\, x$, si ottiene una restrizione della funzione $y = \text{sen}\, x$. V F

La composizione di simmetrie assiali

338 Il segmento $A'B'$ è il simmetrico del segmento di estremi $A(2; 1)$ e $B(5; 4)$ nella simmetria di asse $y = 0$. Il segmento $A''B''$ è il simmetrico di $A'B'$ nella simmetria di asse $x = 0$. Qual è la trasformazione che fa corrispondere direttamente ad AB il segmento $A''B''$? Scrivi le equazioni di questa trasformazione. $\left[\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}\right]$

339 Trasforma il triangolo di vertici $A(2; 3)$, $B(5; 3)$ e $C(2; 7)$ nel triangolo $A'B'C'$ mediante la simmetria di asse $y = x$. Trasforma $A'B'C'$ nel triangolo $A''B''C''$ mediante la simmetria di asse $y = -x$. Qual è la trasformazione che associa direttamente ad ABC il triangolo $A''B''C''$? Scrivi le equazioni della trasformazione. $\left[\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}\right]$

340 Determina il corrispondente $A'B'$ del segmento AB di estremi $A(-1; 3)$ e $B(0; 2)$ nella simmetria di asse $x = -3$. Determina poi il corrispondente $A''B''$ di $A'B'$ nella simmetria di asse $x = 1$. Qual è la trasformazione che fa corrispondere ad AB direttamente $A''B''$? Determina le equazioni di tale trasformazione. $\left[\begin{cases} x' = x + 8 \\ y' = y \end{cases}\right]$

341 Trova la corrispondente r' della retta r di equazione $2x - 3y + 7 = 0$ nella simmetria di asse $y = \frac{1}{2}$. Determina poi la retta r'' corrispondente di r' nella simmetria di asse $y = -2$. In quale trasformazione si corrispondono le rette r e r''? Scrivine le equazioni e commenta il risultato. $\left[\begin{cases} x' = x \\ y' = y + 5 \end{cases}\right]$

342 Verifica che, componendo una simmetria assiale di asse $x = a$ con una di asse $y = b$, si ottiene una simmetria centrale di centro $C(a; b)$.

343 Verifica che, componendo una simmetria rispetto all'asse x con una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, si ottiene una rotazione intorno all'origine di angolo $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

344 Scrivi le equazioni delle simmetrie s_1 e s_2 rispetto alla retta di equazione $y = -x + 3$ e rispetto a quella di equazione $y = -x - 1$. Determina le equazioni di $s_1 \circ s_2$, verificando che è una traslazione di vettore $\vec{v}$ perpendicolare alle due rette e di modulo uguale al doppio della distanza tra le due rette.
$\left[s_1\colon \begin{cases} x' = -y + 3 \\ y' = -x + 3 \end{cases};\ s_2\colon \begin{cases} x' = -y - 1 \\ y' = -x - 1 \end{cases};\ s_1 \circ s_2\colon \begin{cases} x'' = x + 4 \\ y'' = y + 4 \end{cases}\right]$

345 Verifica la proprietà dell'esercizio precedente considerando la simmetria s_x rispetto all'asse x e la simmetria s rispetto alla retta $y = -2$. $\left[s_x \circ s\colon \begin{cases} x' = x \\ y' = y + 4 \end{cases}\right]$

La glissosimmetria

346 Scrivi le equazioni della glissosimmetria che si ottiene componendo la traslazione di vettore $\vec{v}(-2;1)$ con la simmetria assiale di asse la retta $x+2y=0$ e verifica che non vi sono punti uniti.

$$\left[t \circ s: \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2 \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 1 \end{cases} \right]$$

347 Verifica che la glissosimmetria di equazioni

$$\begin{cases} x' = x+3 \\ y' = -y \end{cases}$$

non ha punti uniti e l'unica retta unita è l'asse.

348 Scrivi le equazioni della glissosimmetria che si ottiene componendo la simmetria rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante con la traslazione di vettore $\vec{v}(2;-2)$.

$$\left[s \circ t: \begin{cases} x' = -y+2 \\ y' = -x-2 \end{cases} \right]$$

Quali delle seguenti equazioni rappresentano una glissosimmetria?

349 a) $\begin{cases} x' = x-4 \\ y' = -y \end{cases}$; b) $\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x' = -x+1 \\ y' = y-3 \end{cases}$.

350 a) $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y+6 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$; c) $\begin{cases} x' = -x+6 \\ y' = y \end{cases}$.

6. LE ISOMETRIE

▶ Teoria a pag. 1148

Studia le isometrie individuate dalle seguenti equazioni.

351 $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ $[r: C(0;0), \alpha = \pi]$

352 $\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-1 \end{cases}$ $[t: \vec{v}(2;-1)]$

353 $\begin{cases} x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \\ y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1 \end{cases}$ $\left[r: C\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right), \alpha = \arccos\frac{4}{5}\right]$

354 $\begin{cases} x' = 6-x \\ y' = -2-y \end{cases}$ $[\text{s.c.}: C(3;-1)]$

355 $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$ $[\text{s.a.}: y = -x]$

356 $\begin{cases} x' = -x+4 \\ y' = -y \end{cases}$ $[\text{s.c.}: C(2;0)]$

357 $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ $[\text{s.a.}: x = 0]$

358 $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ $\left[r: C(0;0), \alpha = \frac{2}{3}\pi\right]$

Indica quali equazioni rappresentano rotazioni, traslazioni, simmetrie centrali o assiali, glissosimmetrie.

359 a) $\begin{cases} x' = -x+1 \\ y' = -y+3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x' = x-2 \\ y' = y+4 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x' = -x+2 \\ y' = y \end{cases}$; d) $\begin{cases} x' = x-8 \\ y' = -y+1 \end{cases}$.

360 a) $\begin{cases} x' = -y+9 \\ y' = -x+9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x' = y+2 \\ y' = -x-4 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y+4 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x' = -x-2 \\ y' = y-6 \end{cases}$.

COMPLETA le seguenti equazioni in modo che rappresentino l'isometria indicata a fianco.

361 $\begin{cases} x' = \ldots x + \ldots \\ y' = -y + \ldots \end{cases}$, simmetria centrale di centro $M(2; -6)$.

362 $\begin{cases} x' = x + \ldots \\ y' = \ldots\ldots \end{cases}$, traslazione di vettore $\vec{v}(4; -3)$.

363 $\begin{cases} x' = \ldots x + \ldots y \\ y' = \ldots x + \ldots y \end{cases}$, rotazione di centro $O(0; 0)$ e angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

364 $\begin{cases} x' = -x + \ldots \\ y' = \ldots y \end{cases}$, simmetria assiale di asse $x = -8$.

365 **TEST** Quale fra le seguenti equazioni rappresenta una rotazione di 120° intorno al punto $(1; 0)$?

A $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

B $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

C $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$

D $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

E $\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

366 Nel piano cartesiano considera la trasformazione T di equazioni

$$T: \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

tale che:

$$A(0; 0) \mapsto A'(1; -1), \quad B(2; -1) \mapsto B'(0; 1), \quad C(-3; 1) \mapsto C'(2; -4).$$

Dimostra che la trasformazione T è una simmetria assiale e determina l'asse di simmetria. Trova le equazioni di T^{-1} e verifica che T è involutoria.

$\left[\text{asse: } y = x - 1; T^{-1}: \begin{cases} x = y' + 1 \\ y = x' - 1 \end{cases}\right]$

La composizione di isometrie

367 Considera la traslazione che associa al punto $A(3; 2)$ il punto $A'(9; 2)$. Trova due simmetrie assiali tali che, eseguite in successione, facciano corrispondere al punto A il punto A'.

368 Il triangolo $A'B'C'$ è il corrispondente del triangolo di vertici $A(-3; 3)$, $B(2; 7)$ e $C(3; 2)$ nella simmetria di asse $y = 0$; il triangolo $A''B''C''$ è il corrispondente di $A'B'C'$ nella simmetria di asse $y = -x$. Determina la trasformazione che associa ad ABC direttamente $A''B''C''$ e scrivine le equazioni. Se esegui le due simmetrie assiali in ordine inverso, ottieni lo stesso risultato? Spiega.

$\left[\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}; \text{no}\right]$

369 Nella simmetria di asse $x = 0$, al parallelogramma di vertici $A(-5; 2)$, $B(0; 2)$, $C(3; 5)$ e $D(-2; 5)$ corrisponde il parallelogramma $A'B'C'D'$. Indica con $A''B''C''D''$ il corrispondente di $A'B'C'D'$ nella simmetria di asse $y = 0$. Scrivi le equazioni della isometria che associa ad $ABCD$ direttamente $A''B''C''D''$. Se esegui le due simmetrie assiali in ordine inverso, ottieni lo stesso risultato? Verifica la tua risposta.

$\left[\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}, \text{simmetrie centrali, } C(0; 0)\right]$

370 Confrontando i risultati dei due esercizi precedenti, rispondi alla domanda: la composizione di due simmetrie ad assi incidenti e perpendicolari gode della proprietà commutativa? Dimostra la tua risposta scegliendo come assi di simmetria le rette di equazioni $x = a$ e $y = b$ e come punto da trasformare il punto $P(x; y)$.

371 Studia le isometrie t_1: $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x + 4 \end{cases}$ e t_2: $\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = -y \end{cases}$.

Determina e studia la trasformazione $T = t_1 \circ t_2$ individuando gli elementi uniti.
Trova il corrispondente del triangolo di vertici $A(-1; 0)$, $B(1; -1)$, $C(2; 2)$ nella trasformazione T e calcola la sua area.
$\left[T: \begin{cases} x' = y \\ y' = 6 - x \end{cases}; \text{rotazione: } \alpha = -\frac{\pi}{2} \text{ e } C(3; 3); A'(0; 7); B'(-1; 5); C'(2; 4); \frac{7}{2}\right]$

372 Applica al triangolo di vertici $A(4; 0)$, $B(6; 0)$, $C(5; 2)$ la rotazione r di centro O e angolo 30° e, successivamente, la traslazione t_1 di vettore $\vec{v}(2; 1)$. Determina e studia la trasformazione $T = t_1 \circ r$. Verifica poi se $t_1 \circ r = r \circ t_1$.
$\left[A'(2\sqrt{3} + 2; 3), B'(3\sqrt{3} + 2; 4), C'\left(\frac{2 + 5\sqrt{3}}{2}; \frac{7 + 2\sqrt{3}}{2}\right); T: \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \end{cases}\right]$

373 Determina le equazioni della trasformazione $s \circ t$, ottenuta componendo la traslazione t di vettore $\vec{v}(4; 6)$ con la simmetria s rispetto alla retta di equazione $y = -2$. Applica $s \circ t$ al segmento AB, con $A(-8; 2)$ e $B(1; 2)$, ottenendo il segmento $A''B''$. Verifica che $A''B''$ si ottiene anche applicando ad AB la traslazione e successivamente ad $A'B'$ la simmetria.
$\left[s \circ t: \begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = -y - 10 \end{cases}\right]$

374 Scrivi le equazioni della trasformazione $s \circ t$, ottenuta componendo la traslazione t di vettore $\vec{v}(-10; 4)$ con la simmetria s rispetto alla bisettrice $y = x$. Applica $s \circ t$ al triangolo di vertici $A(3; 6)$, $B(4; 7)$ e $C(1; 9)$, ottenendo il triangolo $A''B''C''$. Verifica se $A''B''C''$ si ottiene anche applicando ad ABC la simmetria e successivamente ad $A'B'C'$ la traslazione.
$\left[s \circ t: \begin{cases} x' = y + 4 \\ y' = x - 10 \end{cases}; s \circ t \neq t \circ s\right]$

375 Trova le coordinate del punto P', simmetrico di $P\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ rispetto alla retta di equazione $x = 3$, e poi le coordinate di P'' corrispondente di P' nella traslazione di vettore $\vec{v}(-3; 4)$. In base a quale trasformazione P'' è il corrispondente di P? Scrivine le equazioni. Eseguendo le due trasformazioni in ordine inverso, ottieni lo stesso risultato finale? Spiega la tua risposta.
$\left[P'\left(\frac{11}{2}; \frac{2}{3}\right); P''\left(\frac{5}{2}; \frac{14}{3}\right); t \circ s: \begin{cases} x' = -x + 3 \\ y' = y + 4 \end{cases}; t \circ s \neq s \circ t\right]$

376 Data la retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x + 5$, trova l'equazione della retta r' corrispondente nella traslazione di vettore $\vec{v}(-2; 3)$. Trova poi l'equazione della retta r'' simmetrica di r' rispetto alla retta $y = -x$. Le rette r e r'' sono parallele? La trasformazione esaminata conserva la direzione di una retta?
$\left[r': y = -\frac{1}{2}x + 7; r'': y = -2x - 14\right]$

377 Determina le equazioni della trasformazione ottenuta componendo la traslazione di vettore $\vec{v}\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ con la simmetria di asse $y = 2$. Applica tale trasformazione al triangolo di vertici $A(-5; 2)$, $B(0; 2)$, $C(-2; 4)$ e verifica che non si mantiene il verso di percorrenza dei vertici.
$\left[s \circ t: \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = -y + \frac{9}{2} \end{cases}; A'\left(-4; \frac{5}{2}\right), B'\left(1; \frac{5}{2}\right), C'\left(-1; \frac{1}{2}\right)\right]$

378 Determina le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo la traslazione di vettore $\vec{v}(2; 4)$ con la simmetria di asse $x = 1$. Trova poi l'equazione della retta r' corrispondente alla retta r di equazione $2x + y + 2 = 0$ nella trasformazione composta ottenuta. Che cosa osservi?
$\left[\begin{cases} x' = -x \\ y' = y + 4 \end{cases}; 2x - y + 2 = 0\right]$

379 Considera la simmetria s_A rispetto al punto $A(a; b)$ e la simmetria s_O rispetto all'origine. Dimostra che $s_O \circ s_A$ è una traslazione di vettore $2\overrightarrow{AO}$.

$$\left[s_O \circ s_A \colon \begin{cases} x' = x - 2a \\ y' = y - 2b \end{cases} \right]$$

380 Considera le simmetrie centrali di equazioni

$$s_1 \colon \begin{cases} x' = -4 - x \\ y' = 2 - y \end{cases}; \quad s_2 \colon \begin{cases} x' = -2 - x \\ y' = -y \end{cases}.$$

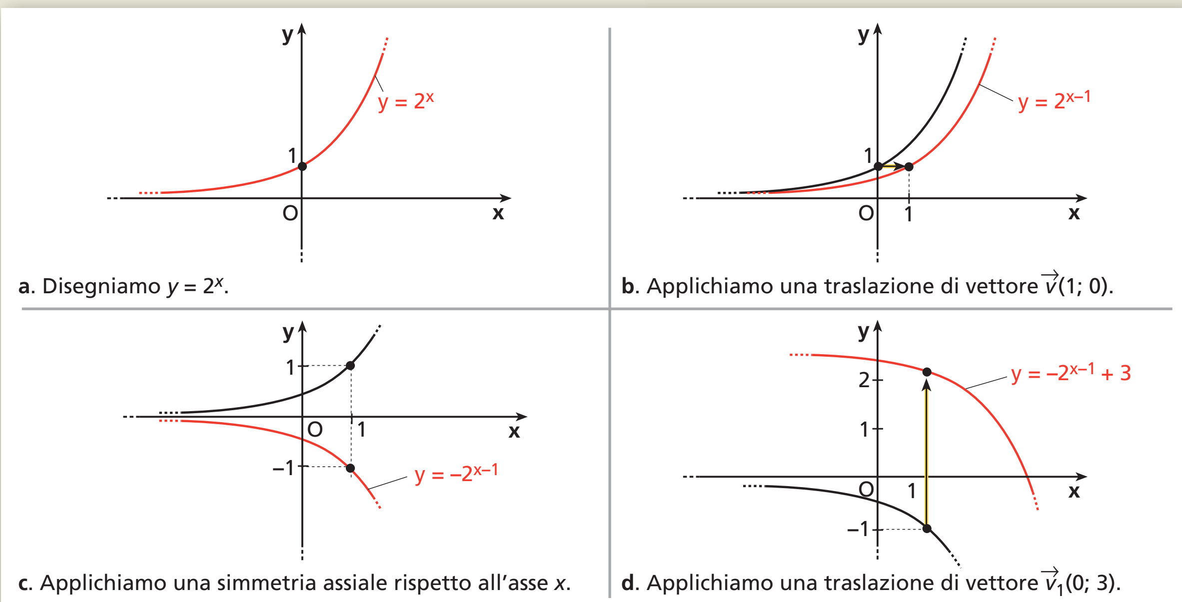
Determina i loro centri M_1 e M_2. Trova poi $s_3 = s_2 \circ s_1$. Quale trasformazione hai ottenuto? Considera il punto $A(-1; 3)$, il suo simmetrico B rispetto a s_1 e C simmetrico di B rispetto a s_2. Calcola l'area del triangolo ABC.

$$\left[s_3 \colon \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 2 \end{cases}; 6 \right]$$

Le curve e le isometrie

381 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo il grafico della funzione $y = -2^{x-1} + 3$, a partire dal grafico di $y = 2^x$, applicando delle isometrie.



a. Disegniamo $y = 2^x$.

b. Applichiamo una traslazione di vettore $\vec{v}(1; 0)$.

c. Applichiamo una simmetria assiale rispetto all'asse x.

d. Applichiamo una traslazione di vettore $\vec{v}_1(0; 3)$.

Traccia il grafico delle seguenti funzioni applicando le isometrie a partire dai grafici noti.

382 $y = 2^{x+1} - 4$

383 $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

384 $y = -\cos x - 3$

385 $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

386 $y = -3^{-x-1} - 2$

387 $y = -\ln(x - 4)$

388 $y = -\ln|x| + 1$

389 $y = 2^{|x|-1} + 2$

390 $y = -\operatorname{sen}(-x) + 3$

391 $y = 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

392 $y = -\sqrt{-x} + 4$

393 $y = 2 - \sqrt{x - 1}$

394 $y = -(x - 3)^2 + 2$

395 $y = 6 - \sqrt{x}$

396 $y = \ln\frac{1}{x} + 2$

Considera le funzioni seguenti. Applica a esse nell'ordine le isometrie assegnate e trova l'equazione della curva trasformata.

397 $y = \operatorname{sen} x$,
traslazione di vettore $\vec{v}(-1; 3)$, simmetria rispetto all'asse x. $[y = -\operatorname{sen}(x+1) - 3]$

398 $y = 2^x$,
simmetria rispetto all'asse y, traslazione di vettore $\vec{v}(-3; 1)$. $[y = 2^{-x-3} + 1]$

399 $y = \dfrac{x}{x+2}$,
rotazione con centro O e angolo $\dfrac{\pi}{2}$, simmetria rispetto alla retta di equazione $x = 2$. $\left[y = \dfrac{-2x+8}{x-5}\right]$

400 $y = x^2 + 2x$,
traslazione di vettore $\vec{v}(1; 0)$, simmetria rispetto alla retta di equazione $y = -2$, simmetria rispetto al punto $M(1; -3)$. $[y = x^2 - 4x + 1]$

401 Determina il vettore $\vec{v}$ della traslazione che trasforma la funzione omografica di equazione $y = \dfrac{2x-4}{1-x}$ in un'iperbole equilatera riferita agli asintoti. Esegui poi una simmetria assiale rispetto alla retta di equazione $x = 4$ e trova l'equazione dell'iperbole. $\left[\vec{v}(-1; 2);\ y = \dfrac{2}{8-x}\right]$

La rappresentazione grafica delle coniche

402 **ESERCIZIO GUIDA**

Rappresentiamo graficamente la conica di equazione:

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 30x - 18y + 43 = 0.$$

- Applichiamo una **rotazione** di centro O e angolo α, da determinare in modo da ottenere un'equazione che non abbia il termine in xy:

$$r: \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha \\ y' = x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \quad \rightarrow \quad r^{-1}: \begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\operatorname{sen}\alpha \\ y = -x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione della conica togliendo gli apici:

$$5(x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha)^2 + 6(x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha)(-x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha) + 5(-x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha)^2 + \\ -30(x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha) - 18(-x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha) + 43 = 0,$$

$$5x^2\cos^2\alpha + 5y^2\operatorname{sen}^2\alpha + \cancel{10xy\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha} - 6x^2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + 6xy\cos^2\alpha - 6xy\operatorname{sen}^2\alpha + 6y^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \\ + 5x^2\operatorname{sen}^2\alpha + 5y^2\cos^2\alpha \cancel{- 10xy\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} - 30x\cos\alpha - 30y\operatorname{sen}\alpha + 18x\operatorname{sen}\alpha - 18y\cos\alpha + 43 = 0.$$

Consideriamo solo i termini che contengono xy. Otteniamo

$$6xy(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = 0 \quad \rightarrow \quad \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 0,$$

dividendo per $\cos^2\alpha \left(\text{con } \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$:

$$\operatorname{tg}^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \pm 1 \quad \rightarrow \quad \alpha = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Scegliamo, per esempio, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ e sostituiamo nell'equazione precedente:

$$5x^2 \cdot \frac{1}{2} + 5y^2 \cdot \frac{1}{2} - 6x^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 6y^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5x^2\frac{1}{2} +$$

$$+ 5y^2 \cdot \frac{1}{2} - 30x\frac{\sqrt{2}}{2} - 30y\frac{\sqrt{2}}{2} + 18x\frac{\sqrt{2}}{2} - 18y\frac{\sqrt{2}}{2} + 43 = 0.$$

Semplificando e sommando i termini simili otteniamo:

$$2x^2 + 8y^2 - 6\sqrt{2}\,x - 24\sqrt{2}\,y + 43 = 0.$$

- Eseguiamo ora una **traslazione** per eliminare i termini di primo grado in x e y:

$$t: \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad \rightarrow \quad t^{-1}: \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$$

Sostituendo ed eliminando gli apici:

$$2(x-a)^2 + 8(y-b)^2 - 6\sqrt{2}\,(x-a) - 24\sqrt{2}\,(y-b) + 43 = 0,$$

$$2x^2 + 2a^2 - 4ax + 8y^2 + 8b^2 - 16by - 6\sqrt{2}\,x + 6\sqrt{2}\,a - 24\sqrt{2}\,y + 24\sqrt{2}\,b + 43 = 0.$$

Consideriamo i termini di primo grado in x e y e uguagliamo a 0:

$$-4ax - 6\sqrt{2}\,x = 0 \quad \rightarrow \quad 2x(2a + 3\sqrt{2}) = 0 \quad \rightarrow \quad a = -\frac{3}{2}\sqrt{2},$$

$$-16by - 24\sqrt{2}\,y = 0 \quad \rightarrow \quad 8y(2b + 3\sqrt{2}) = 0 \quad \rightarrow \quad b = -\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Per non avere i termini in x e in y dobbiamo quindi applicare una traslazione di vettore $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}; -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$. Sostituiamo nell'equazione e semplifichiamo:

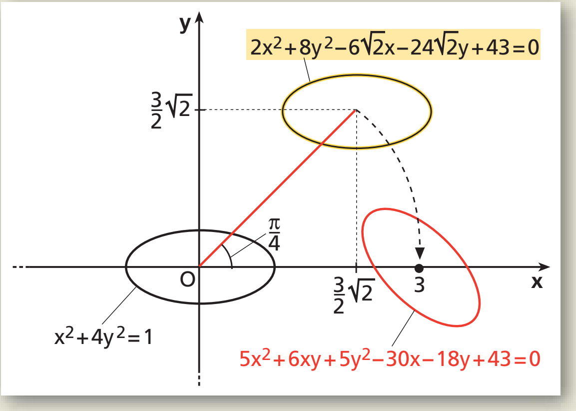
$$2x^2 + 2\cdot\frac{9}{4}\cdot 2 + 4\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2}\,x + 8y^2 + 8\cdot\frac{9}{4}\cdot 2 + 16\frac{3}{2}\sqrt{2}\,y - 6\sqrt{2}\,x +$$

$$+6\sqrt{2}\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) - 24\sqrt{2}\,y - 24\sqrt{2}\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) + 43 = 0,$$

$$2x^2 + 8y^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 4y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1.$$

Abbiamo ottenuto l'equazione di un'ellisse con centro in O e semiassi 1 e $\frac{1}{2}$.

Disegniamo la curva e poi eseguiamo in successione le trasformazioni inverse che riportano l'ellisse all'equazione iniziale, cioè una traslazione di vettore $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ e una rotazione di centro O e angolo $-\frac{\pi}{4}$.



Rappresenta graficamente le coniche che hanno le seguenti equazioni.

403 $x^2 - 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}\,y = 0$ [parabola, $V(0; 0)$]

404 $x^2 + 6xy + y^2 + 4 = 0$ [iperbole, $C(0; 0)$, semiassi: $\sqrt{2}$, 1]

405 $x^2 + 6xy + y^2 - 14\sqrt{2}\,x - 10\sqrt{2}\,y + 30 = 0$ [iperbole, $C(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$, semiassi: 1, $\sqrt{2}$]

406 $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$ [ellisse, $C(0; 0)$, semiassi: 2, 1]

407 $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ [ellisse, $C(0; 0)$, semiassi: 2, 3]

408 $3y^2 + 4xy = 4$ [iperbole, $C(0; 0)$, semiassi: 1, 2]

409 $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y + 8 = 0$ [ellisse, $C(1; 1)$, semiassi: 2, 1]

410 $6x^2 - 20xy + 6y^2 - 1 = 0$ $\left[\text{iperbole, } C(0; 0)\text{, semiassi: } \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$

411 $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 8 = 0$ [iperbole, $C(0; 0)$, semiassi: 1, 2]

412 $x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 3y^2 - 2\sqrt{3}\,x - 2y - 4 = 0$ $\left[\text{parabola, } V\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)\right]$

7. L'OMOTETIA

Teoria a pag. 1152

L'omotetia con centro nell'origine degli assi

Disegna le omotetiche delle figure nell'omotetia di centro $O(0; 0)$ e rapporto k.

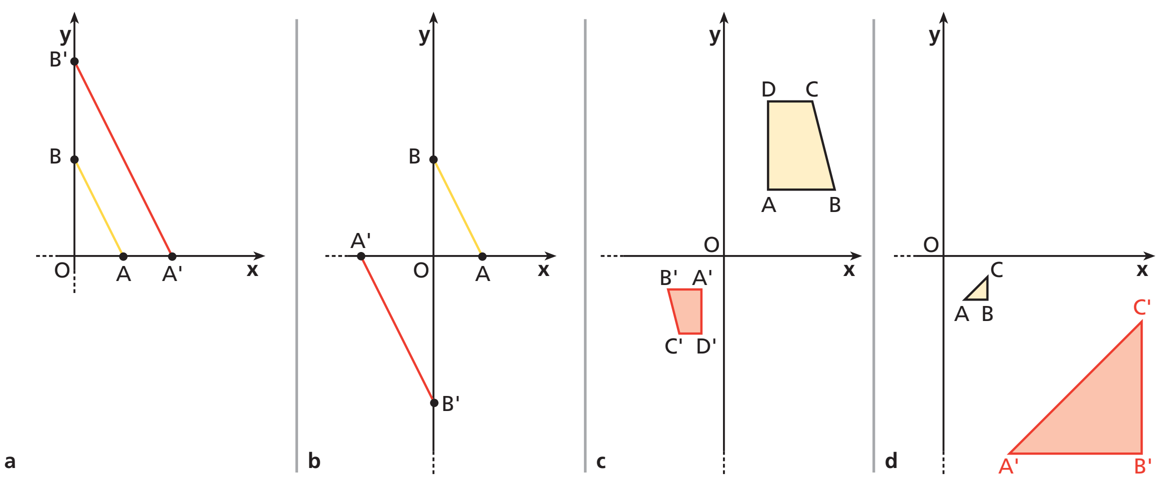
413 Segmento di estremi $A(-2; -1)$ e $B(3; 5)$, con $k = 3$.

414 Segmento di estremi $A(5; 0)$ e $B(0; 6)$, con $k = -3$.

415 Triangolo di vertici $A(4; 6)$, $B(7; 10)$ e $C(10; 4)$, con $k = -2$.

416 Quadrilatero di vertici $A(0;5)$, $B(10; 1)$, $C(0; -7)$ e $D(-10; -3)$, con $k = -1$. I quadrilateri corrispondenti sono quadrilateri particolari?

417 In ogni grafico sono rappresentate una figura geometrica (indicata con lettere senza apice) e la sua omotetica. Determina il rapporto k di omotetia.



418 Il triangolo $A'B'C'$ è il corrispondente del triangolo di vertici $A(2; 4)$, $B(5; 0)$, $C(6; 7)$ nell'omotetia di centro O e rapporto $k = 2$. Verifica che entrambi i triangoli sono rettangoli e che il rapporto fra il perimetro di $A'B'C'$ e quello di ABC è uguale a 2.

419 Sia $A'B'C'D'$ il corrispondente del parallelogramma di vertici $A(-8; -6)$, $B(-4; -5)$, $C(-1; -1)$ e $D(-5; -2)$ nell'omotetia di centro O e rapporto $k = -\frac{1}{3}$. Verifica che i lati corrispondenti sono paralleli.

420 Il segmento di estremi $A(-3; -5)$ e $B(-1; 4)$ e il segmento di estremi $A'\left(2; \frac{10}{3}\right)$ e $B'(-4; 5)$ si possono corrispondere in un'omotetia con centro O? Se la risposta è negativa, modifica le coordinate di un solo punto affinché i segmenti si corrispondano; determina poi il valore del rapporto di omotetia k.

421 Un'omotetia con centro O trasforma il punto $A(2; -5)$ nel punto A' di ascissa -8. Trova le equazioni dell'omotetia e l'ordinata di A'.
$\left[\begin{cases} x' = -4x \\ y' = -4y \end{cases}, y_{A'} = 20\right]$

L'omotetia con centro *C* qualunque

Scrivi le equazioni delle omotetie che hanno i seguenti centri *C* e rapporti *k*.

422 $C(0; 2)$, $k = 4$. $\left[\begin{cases} x' = 4x \\ y' = 4y - 6 \end{cases}\right]$

423 $C(-1; 0)$, $k = -\frac{1}{2}$. $\left[\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ y' = -\frac{1}{2}y \end{cases}\right]$

424 $C(2; 3)$, $k = -3$. $\left[\begin{cases} x' = -3x + 8 \\ y' = -3y + 12 \end{cases}\right]$

425 $C(1; -1)$, $k = \frac{1}{4}$. $\left[\begin{cases} x' = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \\ y' = \frac{1}{4}y - \frac{3}{4} \end{cases}\right]$

Determina i centri delle omotetie con le seguenti equazioni.

426 $\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 3 \end{cases}$ $[C(1; -3)]$

427 $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$ $[C(0; -4)]$

428 $\begin{cases} x' = \dfrac{x-1}{3} \\ y' = \dfrac{y+2}{3} \end{cases}$ $\left[C\left(-\frac{1}{2}; 1\right)\right]$

429 $\begin{cases} x' = 4(x-1) \\ y' = 4y + \frac{1}{2} \end{cases}$ $\left[C\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{6}\right)\right]$

430 Un'omotetia trasforma il punto $A(0; -3)$ in $A'(4; 1)$ e $B(2; 0)$ in B' di ordinata -8. Scrivi le equazioni dell'omotetia, determina il centro, il rapporto k e l'ascissa di B'. Calcola poi il rapporto tra i segmenti AB e $A'B'$.
$\left[\begin{cases} x' = -3x + 4 \\ y' = -3y - 8 \end{cases}, C(1; -2), k = -3, x_{B'} = -2, \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{1}{3}\right]$

431 **TEST** Quale fra le seguenti equazioni rappresenta un'omotetia con centro in $(-2; 3)$?

A $\begin{cases} x' = 2y + 2 \\ y' = 2x - 3 \end{cases}$ B $\begin{cases} x' = 4x + 2 \\ y' = 4y - 3 \end{cases}$ C $\begin{cases} x' = -2x + 2 \\ y' = -2y - 3 \end{cases}$ D $\begin{cases} x' = -x - 2 \\ y' = -y + 3 \end{cases}$ E $\begin{cases} x' = 2x + 2 \\ y' = 2y - 3 \end{cases}$

Le curve e le omotetie

432 Data l'omotetia di centro O e rapporto k, determina k in modo che la trasformata dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ abbia area doppia. $[k = \pm\sqrt{2}]$

433 È data la parabola $x = -y^2 + y$. Applica a essa l'omotetia di equazioni
$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases}$$
Rappresenta nello stesso sistema di assi cartesiani il grafico delle due parabole. Determina il punto comune e la tangente comune.
$\left[x = \frac{y^2}{2} + y; O(0; 0); y = x\right]$

434 Data una circonferenza con centro in un punto qualunque del piano diverso dall'origine e raggio r, determina la sua trasformata in un'omotetia di rapporto k e con centro nell'origine.
Come vengono modificate la misura della circonferenza e l'area?

435 È data l'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Considera la sua trasformata mediante l'omotetia $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases}$.
Confronta asintoti, vertici, fuochi ed eccentricità delle due iperboli, determinando quali elementi si conservano e quali vengono modificati dalla trasformazione. [rimangono invariati asintoti ed eccentricità]

436 Al triangolo di vertici $A(1; 1)$, $B(3; 1)$, $C(2; 3)$ si applicano in successione una rotazione di 90° in senso orario e un'omotetia di rapporto 2, entrambe con centro nell'origine. Determina le equazioni della trasformazione composta e verifica che in questo caso la composizione gode della proprietà commutativa. $\left[\begin{cases} x' = 2y \\ y' = -2x \end{cases}\right]$

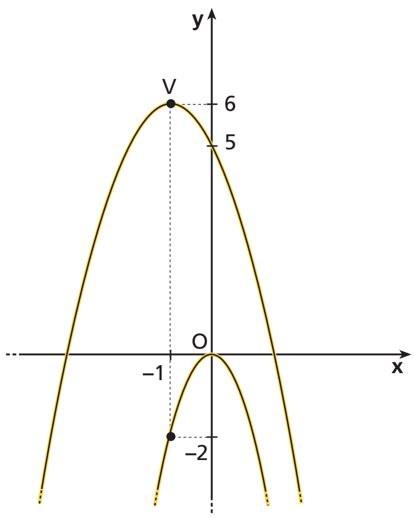
437 Componi una traslazione di vettore $\vec{v}(4; 3)$ con un'omotetia con centro nell'origine e rapporto $-\frac{1}{2}$. Determina il punto unito e le rette unite della trasformazione.
$\left[P\left(-\frac{4}{3}; -1\right)\right.$; rette unite: tutte le rette del fascio di centro $\left.P\right]$

438 Applica le omotetie di centro $O(0; 0)$ e rapporto $k = \frac{1}{2}$ e $k = 2$ alla parabola di equazione $y = x^2 - 2x$. Trova le intersezioni con gli assi cartesiani e i vertici della parabola iniziale e delle parabole trasformate.
$\left[y = 2x^2 - 2x;\ y = \frac{1}{2}x^2 - 2x;\ V_1(1; -1);\ V_2\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right);\ V_3(2; -2)\right]$

439 Determina la figura omotetica di centro $O(0; 0)$ e rapporto $k = 2$ dell'ellisse di equazione:
$\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$. $\left[\frac{1}{36}x^2 + \frac{1}{16}y^2 = 1\right]$

---

440 Le parabole della figura si corrispondono in un'omotetia di centro C e rapporto k. Trova C e k.



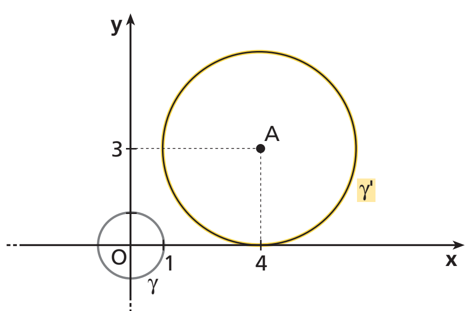
$[C(1; -6), k = 2]$

441 Determina la figura omotetica di centro $O(0; 0)$ e rapporto $k = \frac{1}{3}$ della circonferenza avente un diametro di estremi $A(-3; 1)$ e $B(1; 3)$. Traccia il grafico delle due curve, mettendo in evidenza i punti A e B e i loro trasformati A' e B'. $[9x^2 + 9y^2 + 6x - 12y = 0]$

442 Applica alla funzione $y = \operatorname{sen} x$ l'omotetia di centro O e rapporto $k = \frac{1}{2}$ e disegna il grafico della funzione trasformata. $\left[y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right]$

443 Trova la trasformata della funzione $y = \cos x - 1$ attraverso l'omotetia di centro O e rapporto -2 e traccia il grafico della funzione ottenuta.
$\left[y = -2\cos\frac{x}{2} + 2\right]$

444 Un'omotetia ω con il centro C nel I quadrante trasforma la circonferenza γ nella circonferenza γ' della figura, il cui centro A è il trasformato di O.



Trova le equazioni dell'omotetia e il suo centro C. Scrivi le equazioni delle due circonferenze e verifica che ω trasforma γ in γ'.
$\left[\omega: \begin{cases} x' = -3x + 4 \\ y' = -3y + 3 \end{cases}; C\left(1; \frac{3}{4}\right)\right]$

445 Data l'omotetia ω di equazioni

$$\begin{cases} x' = ax - 2 + 2a \\ y' = ay - 5 - a \end{cases}$$

determina a in modo che il centro sia $C(-2; 4)$. Studia ω e trova l'equazione della circonferenza γ che ha come immagine la circonferenza γ' di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

$\left[x^2 + y^2 + 2x - \frac{16}{3}y + 8 = 0\right]$

446 Determina la figura omotetica, di centro $O(0; 0)$ e rapporto $k = 3$, della circonferenza $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Trova la retta tangente alla circonferenza iniziale nel punto $T\left(\frac{9}{5}; \frac{3}{5}\right)$. Applica la stessa omotetia alla retta tangente e traccia il grafico delle due circonferenze e delle due rette tangenti.

$\left[x^2 + y^2 - 6x = 0;\ y = -\frac{4}{3}x + 3;\ y = -\frac{4}{3}x + 9\right]$

447 Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita agli assi, passante per il punto $P(2; 1)$. Applica a essa l'omotetia di centro $O(0; 0)$ e rapporto $k = 2$.

Trova le intersezioni della retta $y = \frac{x}{2}$ con le due iperboli.

$\left[\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1;\ \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{12} = 1; (2; 1); (-2; -1); (4; 2); (-4; -2)\right]$

448 Scrivi le equazioni delle omotetie ω_1 e ω_2 di centro O e di rapporti, rispettivamente, 2 e -2. Confronta i triangoli T_1 e T_2 ottenuti trasformando il triangolo di vertici $A(1; 2)$, $B(4; 2)$, $C(2; 4)$ con ω_1 e ω_2. T_1 e T_2 hanno la stessa area? Che rapporto c'è tra l'area del triangolo ABC e quella di T_1 e di T_2? Che rapporto c'è tra i perimetri?

$[\text{area}(T_1) = \text{area}(T_2) = 4 \cdot \text{area}(ABC);\ 2p(T_1) = 2p(T_2) = 2 \cdot 2p(ABC)]$

449 **VERO O FALSO?**

a) Le omotetie di rapporto $k \neq 1$ hanno un solo punto unito. V F

b) L'omotetia inversa dell'omotetia di equazioni $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$ ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = -kx \\ y' = -kx \end{cases}$$

V F

c) L'omotetia di equazioni $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \end{cases}$ ha centro $C\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. V F

d) Se si trasforma l'equazione $y = f(x)$ di una funzione con l'omotetia di equazioni

$$\begin{cases} x' = -kx \\ y' = -ky \end{cases}$$

si ottiene $y = \frac{1}{k} f\left(\frac{x}{k}\right)$. V F

e) In un'omotetia non ci sono rette unite. V F

8. LA SIMILITUDINE

▶ Teoria a pag. 1156

450 ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo che le equazioni

$$\begin{cases} x' = -3x - 4y + 1 \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$$

sono quelle di una similitudine e determiniamo il rapporto di similitudine.

Le equazioni sono del tipo $\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases}$, quindi abbiamo una similitudine.

Calcoliamo il determinante della matrice A associata alla trasformazione:

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 9 + 16 = 25.$$

Poiché il determinante è positivo, abbiamo una similitudine diretta. Il rapporto di similitudine è:

$$k = \sqrt{\det A} = \sqrt{25} = 5.$$

Indica quali di queste equazioni rappresentano una similitudine (diretta o indiretta) e, in caso affermativo, calcola il rapporto di similitudine.

451 $\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 2x - y + 1 \end{cases}$

452 $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -y + 3x \end{cases}$

453 $\begin{cases} x' = x + 4y + 2 \\ y' = -4x + y \end{cases}$

454 $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - y + 1 \\ y' = -x + \dfrac{1}{2}y \end{cases}$

455 VERO O FALSO?

a) Le equazioni

$$\begin{cases} x' = -4x + 4y \\ y' = 4x - 4y - 1 \end{cases}$$

rappresentano una similitudine indiretta. V F

b) Le equazioni

$$\begin{cases} x' = 2x - ay \\ y' = ax + 2y - 2 \end{cases}$$

rappresentano una similitudine diretta di rapporto $k = 2\sqrt{2}$ per $a = 2$. V F

c) Le equazioni

$$\begin{cases} x' = -3x + 4y + 1 \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$$

rappresentano una similitudine indiretta di rapporto -5. V F

d) La similitudine di equazioni

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y + 4 \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$$

trasforma un rettangolo che ha i lati di misura 2 e 5 in un rettangolo di area $10\sqrt{3}$. V F

456 Trova per quali valori di a le seguenti equazioni rappresentano una similitudine di rapporto $\sqrt{5}$:

$$\begin{cases} x' = ax + y + a \\ y' = x - ay \end{cases}$$ $[a = \pm 2]$

457 Verifica che le equazioni $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$ rappresentano una similitudine e determina il suo rapporto k.
Trova poi il trasformato del triangolo di vertici $A(-2; -1)$, $B(-1; 2)$, $C(-1; -4)$. Verifica la proprietà che riguarda perimetro e area del triangolo trasformato.
$[k = \sqrt{2}; 2p' = \sqrt{2} \cdot 2p; S' = 2S]$

458 Determina il valore di a tale che la similitudine

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

trasformi la circonferenza $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ in una circonferenza di centro il punto $(4; 2)$.
Scrivi l'equazione della circonferenza trasformata, determina il suo raggio e la sua area.
$[a = 2; x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0; r = 2\sqrt{5}; S = 20\pi]$

459 Scrivi le equazioni della similitudine diretta tale che:

$A(-1; 0) \mapsto A'(-3; -4)$,

$O(0; 0) \mapsto O'(0; 0)$.

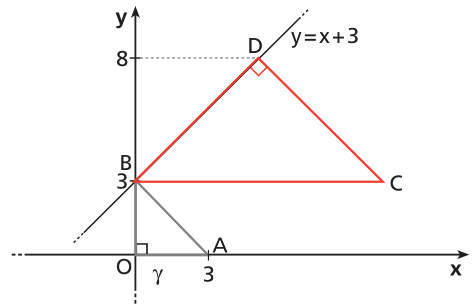
Determina perimetro e area del trasformato del triangolo AOC con $C(0; 1)$.
$\left[\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}; 2p' = 5(2 + \sqrt{2}); S' = \frac{25}{2}\right]$

460 Determina le similitudini del tipo

$$\begin{cases} x' = by + c \\ y' = -bx + c_1 \end{cases}$$

tali che il punto $A(0; 2)$ sia unito e il segmento AB con $B(1; 0)$ si trasformi in uno di uguale lunghezza e perpendicolare al precedente. Verifica che si ottengono due rotazioni di 90° intorno al punto A, una in verso orario e una in verso antiorario.
$\left[\begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = -x + 2 \end{cases}; \begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = x + 2 \end{cases}\right]$

461



Utilizzando i dati della figura, verifica che i triangoli OAB e BCD sono simili e calcola il rapporto fra i perimetri. Determina le equazioni della similitudine diretta che trasforma il triangolo OAB nel triangolo BCD (il punto B del triangolo BCD è il trasformato di A del triangolo OAB). Studia la trasformazione, determinando gli eventuali elementi uniti. Verifica che la circonferenza circoscritta al triangolo OAB si trasforma in quella circoscritta a BCD.

$$\left[k = \frac{5\sqrt{2}}{3}; \begin{cases} x' = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}y + 5 \\ y' = -\frac{5}{3}x - \frac{5}{3}y + 8 \end{cases}; V\left(\frac{240}{89}; \frac{117}{89}\right)\right]$$

462 Trova i valori di a, b, c, d in modo che le equazioni

$$\begin{cases} x' = ax + by - 1 \\ y' = cx + dy + 2 \end{cases}$$

rappresentino una similitudine che porta $A(2; -1)$ in $A'(-5; 6)$ e determina poi gli eventuali elementi uniti.

$$\left[a = d = -\frac{12}{5}, b = -\frac{4}{5}, c = \frac{4}{5}; U\left(-\frac{25}{61}; \frac{30}{61}\right)\right]$$

463 Date le equazioni

$$t: \begin{cases} x' = 2ax - (a + 1)y \\ y' = (a + 1)x + (a + 2)y \end{cases}$$

determina il valore di a in modo che rappresentino una similitudine diretta di rapporto $k = 5$. Applica t alla circonferenza γ di centro $C(1; 1)$ e raggio 1. Trova l'equazione della circonferenza trasformata e verifica che il rapporto fra i due raggi è k.

$$\left[\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}, \gamma': x^2 + y^2 - 2x - 14y + 25 = 0\right]$$

464 Date le equazioni

$$\begin{cases} x' = ax - 4y - 1 \\ y' = bx + cy + 2 \end{cases}$$

trova a, b, c, con $a \in \mathbb{R}^+$, in modo che rappresentino una similitudine diretta di rapporto $k = 2\sqrt{5}$. Applica poi la similitudine ottenuta al triangolo rettangolo OAB di vertici $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(0; 3)$.
Calcola il perimetro e l'area del triangolo OAB e del suo trasformato.

$\left[a = 2, b = 4, c = 2; 2p = 4 + \sqrt{10}, 2p' = 2\sqrt{5}\,(4 + \sqrt{10}), S = \frac{3}{2}, S' = 30\right]$

La composizione di similitudini

465 Le tre trasformazioni riportate sono casi particolari di similitudine:

$$\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = y \end{cases}; \quad \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}; \quad \begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = x \end{cases}.$$

Individua per ciascuna di esse il rapporto di similitudine e gli eventuali punti uniti. Trasforma il triangolo di vertici $(0; 0)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$ applicando in successione le tre trasformazioni.

$\left[\text{simmetria rispetto alla retta } x = 1\text{; similitudine indiretta di rapporto } \frac{1}{2}\text{; rotazione di } 90° \text{ di centro } (1; 1)\right]$

466 È data la similitudine:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

Verifica che la puoi ottenere come composizione di un'omotetia e di una rotazione. Specifica le caratteristiche delle due trasformazioni.

[omotetia di rapporto $\sqrt{2}$ e rotazione in verso antiorario di 45° intorno all'origine]

467 Costruisci le equazioni di una trasformazione geometrica composta da una simmetria di centro il punto $(a; b)$ e da un'omotetia di rapporto k $(k \neq -1)$ e centro l'origine. Quelle ottenute sono le equazioni di una similitudine che ha un punto unito. Componi ora le due trasformazioni in ordine inverso e verifica che il punto unito non coincide in generale con il precedente.

$\left[\left(\frac{2ak}{1+k}; \frac{2bk}{1+k}\right); \left(\frac{2a}{1+k}; \frac{2b}{1+k}\right)\right]$

468 Che cosa ottieni componendo le due similitudini σ_1: $\begin{cases} x' = -2y + 1 \\ y' = 2x - 2 \end{cases}$ e σ_2: $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y - 4 \end{cases}$?

Nella similitudine composta quanto vale il rapporto tra la misura del trasformato del segmento AB e quella di AB stesso? E il rapporto tra l'area di una figura trasformata e l'area della figura di partenza? [6; 36]

469 Verifica con due esempi che la composizione di due similitudini dirette o indirette dà luogo a una similitudine diretta, mentre la composizione di una diretta e una indiretta dà luogo a una indiretta.

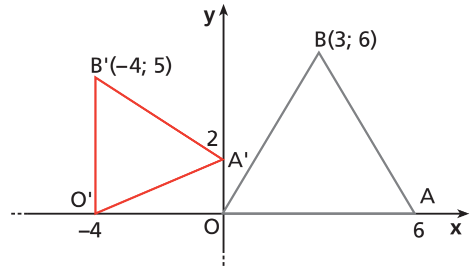
470 Scrivi le equazioni della similitudine diretta σ che ha O come punto unito e che porta $A(2; 0)$ in $A'(6; 2)$. Considera poi la trasformazione t_1 di equazioni:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x + 1 \end{cases}$$

Studia t_1 e trova le equazioni di $t = t_1 \circ \sigma$. Studia le caratteristiche di t.

$\left[\sigma: \begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}, t: \begin{cases} x' = -x - 3y \\ y' = 3x - y + 1 \end{cases}, \text{similitudine diretta, } k = \sqrt{10}, U\left(-\frac{3}{13}; \frac{2}{13}\right)\right]$

471 Verifica che i triangoli della figura sono simili e trova il rapporto k di similitudine.
Scrivi le equazioni della similitudine σ che trasforma il triangolo OAB nel triangolo $O'A'B'$.
Studia σ e determina gli eventuali punti uniti.
Esegui poi una rotazione r di 90° e centro in O' del triangolo $O'A'B'$, determinando le coordinate dei vertici del triangolo trasformato $O''A''B''$.
Scrivi le equazioni della trasformazione t che porta direttamente il triangolo OAB in $O''A''B''$.



$$\left[k = \frac{\sqrt{5}}{3}; \sigma: \begin{cases} x' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - 4 \\ y' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \end{cases}; (-6; -6); r: \begin{cases} x' = -y - 4 \\ y' = x + 4 \end{cases}; O''(-4; 0), A''(-6; 4), B''(-9; 0); \; t: \begin{cases} x' = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - 4 \\ y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y \end{cases}\right]$$

472 Scrivi le equazioni della similitudine diretta σ che ha come punto unito O e porta $A(2; -1)$ in $A'(-1; 4)$. Scrivi poi le equazioni della simmetria assiale s_a di asse $y = 2$. Determina le equazioni di $t = s_a \circ \sigma$; studia t e verifica che ha un solo punto unito P.

$$\left[\sigma: \begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x - \frac{7}{5}y \\ y' = \frac{7}{5}x - \frac{6}{5}y \end{cases}; s_a: \begin{cases} x' = x \\ y' = 4 - y \end{cases}; t: \begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x - \frac{7}{5}y \\ y' = -\frac{7}{5}x + \frac{6}{5}y + 4 \end{cases}; P\left(\frac{7}{3}; -\frac{11}{3}\right)\right]$$

9. LE AFFINITÀ

▶ Teoria a pag. 1159

Fra le seguenti equazioni riconosci quelle che rappresentano un'affinità, specificando se è diretta o indiretta. Scrivi il rapporto di affinità.

473 $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x + 4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = -x \\ y' = 6x + 9 \end{cases}$

474 $\begin{cases} x' = y \\ y' = 2x - 3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = -x - y \\ y' = \frac{1}{2}x + y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = -4x + 1 \\ y' = x - y \end{cases}$

Nei seguenti esercizi vengono fornite le equazioni di un'affinità e le coordinate dei vertici di un poligono. Determina i vertici della figura corrispondente nella trasformazione assegnata e disegnala.

475 $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 3y \end{cases}$
Triangolo ABC: $A(-2; 2)$, $B(-5; 2)$, $C(-2; 6)$.

476 $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases}$
Quadrato $OABC$: $O(0; 0)$, $A(0; 2)$, $B(-2; 2)$, $C(-2; 0)$.

477 $\begin{cases} x' = 2x + 2y \\ y' = x - y \end{cases}$
Quadrato $ABCD$: $A(2; -3)$, $B(4; -3)$, $C(4; -1)$, $D(2; -1)$.

478 $\begin{cases} x' = 2x + 3 \\ y' = y - 4 \end{cases}$
Triangolo ABC: $A(-6; 1)$, $B(-1; 5)$, $C(-5; 6)$.

479 Trasforma le rette r e s di equazioni $y = 2$ e $y = -x + 1$ nell'affinità di equazioni

$$\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = x + y \end{cases}$$

e verifica che il punto P di intersezione di r e s viene trasformato nel punto P' di intersezione di r' e s'.

[r': $2y - x = 5$; s': $y = 1$; $P'(-3; 1)$]

480 Date le equazioni

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = -2y - 4 \end{cases}$$

trova le immagini A', B', C' dei vertici del triangolo ABC di coordinate $A(1; 1)$, $B(4; 1)$, $C(1; 5)$. Calcola poi il rapporto tra le aree dei due triangoli. [$A'(3; -6)$, $B'(6; -6)$, $C'(3; -14)$; il rapporto tra le aree è 2]

481 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo le trasformazioni geometriche di equazioni

a) $\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 4x - y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$

e determiniamo gli eventuali elementi uniti.

---

a) Calcoliamo il determinante associato alla trasformazione:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Essendo $\det A \neq 0$, si tratta di un'affinità e, poiché $\det A < 0$, l'affinità è indiretta.
Non è un'isometria, perché $\det A \neq \pm 1$.
Non è una similitudine, perché *non* sono verificate le proprietà:

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2, \quad \text{infatti: } 4 + 16 \neq 0 + 1;$$
$$ab + a'b' = 0, \quad \text{infatti: } 2 \cdot 0 + 4(-1) \neq 0.$$

Si tratta quindi di una generica affinità indiretta. Determiniamo gli eventuali elementi uniti.

- Punti uniti
  Sostituiamo $(x'; y')$ con $(x; y)$:

$$\begin{cases} x = 2x + 1 \\ y = 4x - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 2y = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

  Si ha il punto unito $(-1; -2)$.
- Rette unite
  Scriviamo le equazioni della trasformazione inversa:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - 1}{2} \\ y = 4\left(\dfrac{x' - 1}{2}\right) - y' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x' - 1}{2} \\ y = 2x' - y' - 2 \end{cases}$$

  Con queste equazioni, trasformiamo la retta generica di equazione $y = mx + q$:

$$2x' - y' - 2 = m\left(\frac{x' - 1}{2}\right) + q,$$

togliamo gli apici e semplifichiamo:

$$y = \left(-\frac{m}{2} + 2\right)x - 2 + \frac{m}{2} - q.$$

Per avere rette unite si deve verificare che:

$$\begin{cases} -\frac{m}{2} + 2 = m \\ -2 + \frac{m}{2} - q = q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \\ -2 + \frac{2}{3} = 2q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \\ q = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto la retta unita di equazione:

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}.$$

Trasformiamo ora la retta generica di equazione $x = h$ (non compresa in quelle del tipo $y = mx + q$):

$$\frac{x' - 1}{2} = h \quad \rightarrow \quad x' = 2h + 1.$$

La retta di equazione $x = 2h + 1$ è unita a quella di equazione $x = h$ se:

$$2h + 1 = h \quad \rightarrow \quad h = -1.$$

Quindi la retta $x = -1$ è unita.

b) Il determinante associato alla trasformazione è:

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Si ha allora un'affinità diretta.
Poiché

$$a^2 + a'^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1,$$

$$b^2 + b'^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

$$ab + a'b' = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

la trasformazione è un'isometria.
Per stabilire di quale isometria si tratta troviamo i punti uniti.

Sostituiamo $(x'; y')$ con $(x; y)$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3}\,y + 4 \\ y = \sqrt{3}\,x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3x + 4 \\ y = \sqrt{3}\,x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$$

Si ha il punto unito $(1; \sqrt{3})$.

L'isometria è allora una rotazione di centro $(1; \sqrt{3})$.

Ricordando le equazioni generali di una rotazione si deduce che $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, quindi l'angolo di rotazione è $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Studia le seguenti affinità e individua gli eventuali elementi uniti. Nel caso in cui l'affinità sia un'isometria, indica di quale isometria si tratta.

482 $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x \end{cases}$ [diretta; $V(0; 0)$]

483 $\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$ [simil.; $U(0; 0)$]

484 $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ [simil.; $U(0; 0)$]

485 $\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = -2y + 3 \end{cases}$ [simil.; $U(1; 1)$, $x = 1$, $y = 1$]

486 $\begin{cases} x' = x \\ y' = -3y + 2 \end{cases}$ $\left[\text{indiretta; } y = \frac{1}{2}, x = h\right]$

487 $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 1 \end{cases}$ [diretta; nessuno]

488 $\begin{cases} x' = 4x \\ y' = x - 2y \end{cases}$ $\left[\text{indiretta; } U(0; 0), x = 0, y = \frac{1}{6}x\right]$

489 $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = y - 2 \end{cases}$ [diretta; nessuno]

490 $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 3 \end{cases}$ [glissosimm.; $y = x + 2$]

491 $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y - 3 \end{cases}$ $\left[\text{simm. centrale; } U\left(1; -\frac{3}{2}\right)\right]$

---

492 $\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = -x - y + 2 \end{cases}$ [similitudine; $U(0; 1)$, $y = (1 \pm \sqrt{2})x + 1$]

493 $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - y + 3 \\ y' = -x + \frac{1}{2}y \end{cases}$ [indiretta; $U(-2; 4)$, $y = x + 6$, $y = -x + 2$]

494 $\begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = x + 2 \end{cases}$ [simmetria rispetto alla retta $y = x + 2$]

495 $\begin{cases} x' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{3}{5} \\ y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases}$ [simmetria rispetto alla retta $y = 3x - 1$]

Le equivalenze

Riconosci tra le affinità che hanno le seguenti equazioni quelle che sono equivalenze e quelle che sono anche isometrie.

496 $t: \begin{cases} x' = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$ [equivalenza]

497 $t: \begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y - 2 \end{cases}$ [isometria]

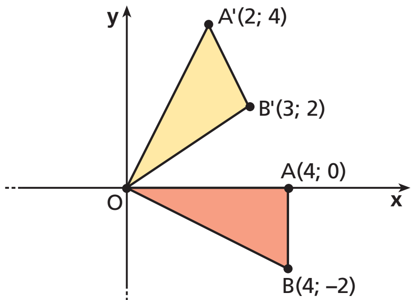
498 $t: \begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x + 3 \end{cases}$ [isometria]

499 $t: \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3y + 2x \end{cases}$ [non equivalenza]

500 $t: \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x \end{cases}$ [equivalenza]

501 $t: \begin{cases} x' = 3y - 2 \\ y' = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \end{cases}$ [equivalenza]

502 Trova l'affinità che trasforma il triangolo OAB della figura in $OA'B'$. Studia la trasformazione e trova anche gli eventuali elementi uniti. Dimostra che i due triangoli hanno la stessa area, ma non sono congruenti.



$$\left[\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ y' = x + y \end{cases}\right]$$

503 Considera la trasformazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax - y \\ y' = (2a-3)x + 4a \end{cases}$$

Determina per quali valori di a rappresentano un'equivalenza.
Assegnato ad a il valore più piccolo fra quelli trovati, trasforma il triangolo ABC di vertici $A(1; 1)$, $B(3; 1)$, $C(2; 3)$ in $A'B'C'$. Verifica che i due triangoli hanno la stessa area e determina il rapporto tra i loro perimetri.

$$\left[a = 2 \vee a = 1; \frac{2p'}{2p} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})}{4}\right]$$

504 Studia la trasformazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

e verifica che la figura corrispondente al quadrato avente i vertici $A(2; 3)$, $B(7; 3)$, $C(7; -2)$ e $D(2; -2)$ è un parallelogramma.

[affinità diretta di rapporto 3, $y = -x$ retta puntualmente unita]

505 Studia la trasformazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$$

e determina gli eventuali elementi uniti.
Verifica che le due rette parallele di equazioni $y - 3x - 1 = 0$ e $y - 3x = 0$ vengono trasformate in due rette parallele.

[affinità diretta; retta unita: $y = -1$]

506 Scrivi le equazioni dell'affinità che ha il determinante associato uguale a 6, trasforma il punto $A(2; -1)$ in $A'(6; 0)$, $B(0; 2)$ in $B'(-4; -1)$ e il punto $C(1; 1)$ in un punto dell'asse x.
Trova poi gli elementi uniti della trasformazione.

$$\left[\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = 2x + y - 3 \end{cases}; P\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)\right]$$

Le dilatazioni

507 Considera la trasformazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = 4x + 1 \\ y' = \frac{1}{4}y - 2 \end{cases}$$

e trasforma il triangolo equilatero di vertici $O(0; 0)$, $A(2; 0)$, $B(1; \sqrt{3})$ nel triangolo $O'A'B'$.
Verifica che il triangolo $O'A'B'$ non è equilatero ma ha la stessa area del triangolo OAB e poi calcola il rapporto tra i perimetri dei due triangoli.

$$\left[S = S' = \sqrt{3}, \frac{2p'}{2p} = \frac{4}{3} + \frac{1}{12}\sqrt{259}\right]$$

508 Scrivi le equazioni della dilatazione che trasforma il segmento di estremi $A(1; 0)$ e $B(2; 2)$ nel segmento di estremi A e $B'(3; 8)$. Calcola il perimetro e l'area del triangolo OAB e del suo trasformato $O'A'B'$.

$$\left[\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 4y \end{cases}; 2p = 1 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2}; S = 1; 2p' = 2 + 2\sqrt{17} + 4\sqrt{5}; S' = 8\right]$$

Determina le equazioni delle dilatazioni che trasformano le curve che hanno la prima equazione in quelle che hanno la seconda equazione. Rappresentale graficamente.

509 $y = \operatorname{sen} x$, $\quad y = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$. $\quad \left[\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -\frac{1}{2}y \end{cases}\right]$

510 $y = \cos x$, $\quad y = \cos 4x$. $\quad \left[\begin{cases} x' = \frac{1}{4}x \\ y' = y \end{cases}\right]$

511 $y = \operatorname{tg} x$, $\quad y = 2\operatorname{tg} 2x$. $\quad \left[\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = 2y \end{cases}\right]$

512 $x^2 + y^2 = 4$, $\quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$. $\quad \left[\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases}\right]$

513 $9x^2 + 4y^2 = 36$, $\quad x^2 + y^2 = 9$. $\quad \left[\begin{cases} x' = \frac{3}{2}x \\ y' = y \end{cases}\right]$

514 Una dilatazione trasforma l'ellisse di centro $(4; 0)$ e semiassi $a = 4$ e $b = 2$ nella circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$. Determina le equazioni della dilatazione. $\left[\begin{cases} x' = \frac{1}{4}x - 3 \\ y' = \frac{1}{2}y + 3 \end{cases}\right]$

515 Scrivi le equazioni della dilatazione che trasforma la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ nell'ellisse di equazione $x^2 + 9y^2 - 8x - 18y + 16 = 0$. $\left[\begin{cases} x' = 3x + 7 \\ y' = y + 2 \end{cases}\right]$

ESERCIZI VARI Le trasformazioni geometriche

TEST

516 Nel piano euclideo, la trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ è:

- **A** una simmetria centrale.
- **B** una traslazione.
- **C** una rotazione.
- **D** una similitudine (ma non un'isometria).
- **E** un'affinità (ma non una similitudine).

(*Università di Udine, Test SSIS area Fisico-Informatico-Matematica*, 2008)

517 È data la similitudine di equazioni:

$$\begin{cases} x' = -2x + 1 \\ y' = -2y - 2 \end{cases}$$

Una delle seguenti equazioni rappresenta l'equazione di una retta unita. Quale?

- **A** $x - y = 0$
- **B** $4x - y - 2 = 0$
- **C** $x - 4y - 2 = 0$
- **D** $4x - y + 2 = 0$
- **E** $x + y + 1 = 0$

518 Le equazioni $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x - 2y + 1 \end{cases}$ rappresentano:

A un'affinità di rapporto -3.
B una similitudine indiretta di rapporto $\sqrt{3}$.
C un'affinità indiretta con un punto unito di coordinate $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
D un'isometria con un punto unito di coordinate $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
E un'omotetia di rapporto 2.

519 **VERO O FALSO?**

a) Se un'affinità trasforma un parallelogramma in un parallelogramma, allora è una similitudine. V F

b) Se un'affinità ha una retta unita, allora è una simmetria assiale. V F

c) Le equazioni $\begin{cases} x' = 2x - 4 \\ y' = 4y + 2 \end{cases}$ rappresentano una similitudine diretta. V F

d) Le equazioni $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = 4y + 3 \end{cases}$ rappresentano una dilatazione verticale. V F

e) Se un'affinità trasforma un quadrato in un quadrato, allora è un'isometria. V F

f) Le equazioni $\begin{cases} x' = 4x - 4y - 1 \\ y' = -4x + 4y \end{cases}$ rappresentano una similitudine. V F

Studia le seguenti trasformazioni geometriche, indicandone anche gli elementi uniti.

520 a) $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x' = 4x - 1 \\ y' = \frac{1}{4}y \end{cases}$. [traslazione; dilatazione]

521 a) $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 2x + y + 1 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 5 \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}$. $\left[\text{similitudine; rotazione di } \alpha = \operatorname{arcsen}\frac{4}{5} \text{ e centro } (-5; 0)\right]$

522 a) $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -2y \end{cases}$, b) $\begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = x - 3 \end{cases}$. $\left[\text{affinità; rotazione di } \frac{\pi}{2} \text{ e centro } (2; -3)\right]$

523 a) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x + 3y \end{cases}$, b) $\begin{cases} x' = 2y + 4 \\ y' = \frac{x}{2} - 2 \end{cases}$. [equivalenza; equivalenza]

524 a) $\begin{cases} x' = -y + 12 \\ y' = -x + 2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x' = -x + 3 \\ y' = -y + 6 \end{cases}$. $\left[\text{simmetria assiale di asse } y = -x + 12; \text{ simmetria centrale di centro } \left(\frac{3}{2}; 3\right)\right]$

525 Una delle trasformazioni necessarie per produrre il grafico di $y = 2x^2 + 24x - 1$ a partire dal grafico di $y = x^2$ è una traslazione verticale di k unità verso il basso. Trova il valore di $|k|$.

(USA *Illinois Council of Teachers of Mathematics*, *Regional Math Contest*, 2010)

[73]

526 Nelle equazioni

$$\begin{cases} x' = ax + by + 4 \\ y' = -y - 2 + a \end{cases}$$

trova a e b in modo che rappresentino un'isometria diretta. Indica di quale isometria si tratta e determina gli elementi uniti.

$\left[a = -1, b = 0, \text{simmetria centrale, } M\left(2; -\frac{3}{2}\right)\right]$

527 Verifica analiticamente che una simmetria centrale di centro $C(a; b)$ è un'isometria.

528 Studia la trasformazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 1 \end{cases}$$

Determina il trasformato del triangolo di vertici $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $O(0; 0)$. Verifica la proprietà delle affinità che riguarda le aree.

$\left[\text{equivalenza, punto unito } (-1; 0); \frac{S'}{S} = 1\right]$

529 Data l'affinità dell'esercizio precedente, determina la trasformata della retta $y = mx$. Cosa accade quando $m = 1$?

a) Esistono valori di m per cui la trasformata r' risulta perpendicolare alla retta r?
b) In quali rette vengono trasformati gli assi cartesiani?

[$x - (1 - m)y + 1 - m = 0$, per $m = 1$ si ottiene l'asse y; a) no; b) $y = 1$, $y = x + 1$]

530 a) Con l'affinità di equazioni

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

trasforma il quadrato di vertici (1; 1), (4; 2), (3; 5), (0; 4) e verifica che la figura ottenuta è un parallelogramma.

b) Determina l'area del parallelogramma e verifica la proprietà delle affinità relativa all'area.
c) Trova il centro di simmetria del quadrato e quello del parallelogramma, verificando che si corrispondono nell'affinità.

[a) figura trasformata di vertici (0; 1), (− 2; 6), (2; 1), (4;− 4); b) 10; c) (2; 3); (1; 1)]

531 Date le equazioni dell'affinità

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = ay - b \end{cases}$$

trova a e b in modo che la retta di equazione $2y - x + 1 = 0$ venga trasformata nella bisettrice del primo e terzo quadrante.

[$a = 2$, $b = -3$]

532 Considera la trasformazione t_1 di equazioni

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

tale che:

$O(0; 0) \mapsto A'(-6; 6)$;
$B(1; -2) \mapsto B'(-4; 7)$;
$C(0; -3) \mapsto C'(-3; 6)$.

a) Determina a, b, c, a', b', c' e studia la trasformazione t_1.
b) Scrivi le equazioni della trasformazione $t = t_1 \circ t_2$, essendo t_2 la trasformazione di equazioni: $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 2 \end{cases}$.
b) Studia t e determina gli elementi uniti.

$\left[\text{a) } a = 0, b = -1, c = -6, a' = 1, b' = 0, c' = 6;\ r\left((-6; 0); \frac{\pi}{2}\right); \text{b) } t: \begin{cases} x' = -y - 8 \\ y' = x + 4 \end{cases};\ \text{c) } r\left((-6; -2); \frac{\pi}{2}\right)\right]$

533 È data l'affinità $\begin{cases} x' = -2x + y - 1 \\ y' = -y + 3 \end{cases}$.

Trasforma le rette $x = -1$, $x = 3$, $y = 2x$, $y = 2x + 2$, verificando che si conserva il parallelismo.

a) Calcola la misura dei lati dei due parallelogrammi aventi come lati rispettivamente le rette date e le loro trasformate, osservando come si conserva l'uguaglianza di segmenti appartenenti a rette parallele.
b) Calcola il rapporto delle aree dei due parallelogrammi delimitati dalle quattro rette e dalle loro trasformate.

[$x + y = 4$, $x + y = -4$, $x = -1$, $x = 1$; a) $\overline{AB} = \overline{CD} = 2$; $\overline{A'B'} = \overline{C'D'} = 2\sqrt{2}$; $\overline{BC} = \overline{AD} = 4\sqrt{5}$; $\overline{B'C'} = \overline{A'D'} = 8$; b) 2]

534 Determina le affinità del tipo

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cy + d \end{cases}$$

tali che il segmento di estremi $A(2; 1)$ e $B(0; 3)$ si trasformi in un segmento avente la stessa lunghezza e perpendicolare al precedente; per esse deve, inoltre, valere la trasformazione $P(1; 1) \mapsto P'(4; 1)$.

$\left[\text{si ottengono due affinità: } f_1: \begin{cases} x' = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y \\ y' = y \end{cases}; f_2: \begin{cases} x' = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y \\ y' = -y + 2 \end{cases}\right]$

535 Rappresenta il triangolo ABP e i suoi trasformati mediante le affinità trovate nell'esercizio precedente. Osserva come si tratti di affinità diretta in un caso e indiretta in un altro. Pur essendo $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, possiamo dire che le lunghezze di tutti i segmenti rimangono invariate? E le aree come vengono modificate?

536 Data la circonferenza con centro nell'origine e raggio unitario, determina l'affinità del tipo $\begin{cases} x' = hx \\ y' = ky \end{cases}$ che trasforma la circonferenza nell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Ricordando l'opportuna proprietà delle affinità, calcola l'area della regione di piano racchiusa dall'ellisse.

[area $= \pi ab$]

537 Trova le equazioni dell'affinità che associa ai punti $A(1; 0)$, $O(0; 0)$, $C(-3; 2)$ i punti $A'(5; 0)$, $O'(3; -1)$, $C'(-1; -6)$. Verifica che ha un solo punto unito e determina le rette corrispondenti agli assi cartesiani.

$\left[\begin{cases} x' = 2x + y + 3 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}; \text{punto unito} \left(-\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right); x + y - 2 = 0, x - 2y - 5 = 0\right]$

538 Verifica che l'affinità di equazioni

$$\begin{cases} x' = -x + y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

è una similitudine, determina il rapporto di similitudine e gli eventuali punti uniti. Applica la trasformazione al segmento OA, dove O è l'origine del sistema di assi cartesiani e A è il punto di coordinate $(2; 0)$, e alla retta $x = 1$, osservando anche graficamente gli effetti della trasformazione.

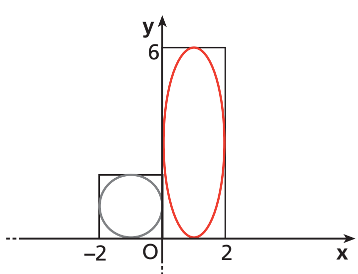
[similitudine indiretta, $k = \sqrt{2}$, $V(1; 0)$, $O'(2; -1)$, $A'(0; 1)$, $y = x - 1$]

539 Considera le parabole γ_1 e γ_2 di equazioni

$$\gamma_1: x = y^2, \qquad \gamma_2: y = -x^2 - 4x.$$

Rappresentale graficamente e dimostra che sono congruenti determinando almeno un'isometria che trasforma una nell'altra. Scrivi le equazioni dell'isometria e stabilisci se ammette elementi uniti.

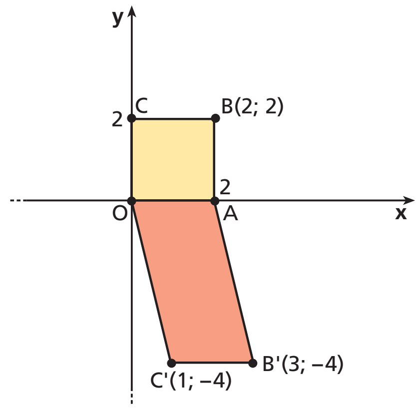
540 Utilizzando i dati della figura, trova l'equazione della circonferenza e dell'ellisse. Determina poi una trasformazione geometrica che trasformi la circonferenza nell'ellisse, scrivi le sue equazioni e studia le sue principali caratteristiche.
Calcola l'area della parte di piano racchiusa dall'ellisse.



$\left[x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0, 9x^2 + y^2 - 18x - 6y + 9 = 0; \text{affinità diretta, } t: \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = 3y \end{cases}; 3\pi\right]$

541 Nella figura il quadrato si trasforma nel parallelogramma. Determina la trasformazione studiandone anche gli elementi uniti. Considera la circonferenza circoscritta al quadrato e trova l'equazione della sua trasformata. Indica di quale tipo di conica si tratta, verifica se è circoscritta al parallelogramma e calcola l'area da essa racchiusa.

$$\left[\begin{cases} x' = x + \dfrac{1}{2}y \\ y' = -2y \end{cases};\ y = 0,\ y = -6x + q;\ \text{ellisse circoscritta};\ 4\pi\right]$$



542 Scrivi l'equazione delle similitudini dirette, di rapporto $\sqrt{13}$, che hanno l'origine O come punto unito e trasformano $A(1; -1)$ in un punto della retta di equazione $x = 5$. Studia gli altri eventuali elementi uniti. Delle due similitudini indica con σ quella che trasforma il punto $P(0; 1)$ in $P'(-3; 2)$ e, considerata la parabola che passa per O e con il vertice in A, con asse di simmetria parallelo all'asse y, trova l'equazione della sua trasformata attraverso σ.

$$\left[\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = 3x + 2y \end{cases} \vee \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 3y \end{cases};\ y = x^2 - 2x,\ 4x^2 + 9y^2 + 12xy - 13x - 104y = 0\right]$$

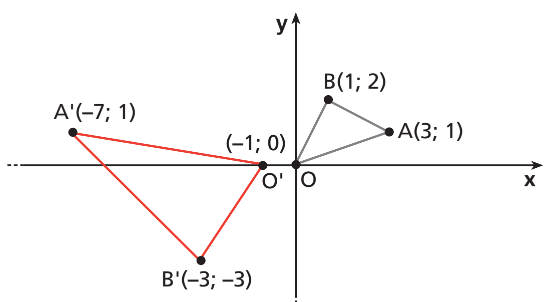
543 Studia l'affinità di equazioni $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x \end{cases}$. Considera il triangolo di vertici $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(-1; 0)$ e il suo trasformato $A'B'C'$.
Scrivi l'equazione della circonferenza γ circoscritta al triangolo ABC e verifica che la sua trasformata non è la circonferenza γ' circoscritta al triangolo $A'B'C'$. Trova i punti di intersezione delle circonferenze γ e γ'.

$[\gamma\colon x^2 + y^2 = 1;\ \gamma'\colon x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0; (-1; 0), (0; -1)]$

544 Date le affinità di equazioni $\begin{cases} x' = 2ax - (b+1)y \\ y' = ax + (b-1)y \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, dimostra che fra esse c'è una similitudine indiretta e di questa trova gli elementi uniti.

$[a = 2,\ b = -3;\ \text{punto unito: } (0; 0),\ \text{rette unite: } y = (-2 \pm \sqrt{5})x]$

545 Un'affinità trasforma il triangolo OAB della figura nel triangolo $O'A'B'$. Determina le equazioni e studia le sue caratteristiche. Trova l'equazione della parabola γ che ha l'asse parallelo all'asse y e passa per O, A e B. Scrivi l'equazione della sua trasformata γ' attraverso l'affinità e verifica se γ' passa per i punti O', A', B'.



$$\left[\begin{cases} x' = -2x - 1 \\ y' = x - 2y \end{cases};\ \gamma\colon y = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{17}{6}x;\ \gamma'\colon y = \frac{5}{12}x^2 + \frac{19}{6}x + \frac{11}{4}\right]$$

546 Data la trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = ax - 1 + a \\ y' = by + b + 1 \end{cases}$, calcola a e b in modo che sia un'omotetia di centro $(-1; 3)$. Studia la trasformazione e trova la trasformata della curva di equazione $x^2 + y^2 - 9 = 0$ e l'area da essa racchiusa.

$$\left[a = b = \frac{1}{2};\ x^2 + y^2 + x - 3y + \frac{1}{4} = 0;\ \frac{9}{4}\pi\right]$$

547 Tra le affinità di equazioni $\begin{cases} x' = 6x + ay \\ y' = bx + 6y \end{cases}$ determina la similitudine σ diretta di rapporto 10 con $a < 0$.

Considera poi la circonferenza γ di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ e trova i vertici del quadrato inscritto in essa con i lati paralleli agli assi cartesiani. Applica al quadrato la trasformazione σ e trova i vertici del suo trasformato, verificando che è ancora un quadrato.

$[a = -8, b = 8; A(0; 1), B(2; 1), C(2; -1), D(0; -1); A'(-8; 6), B'(4; 22), C'(20; 10), D'(8; -6)]$

548 Considera il triangolo equilatero ABC il cui lato misura $2a\sqrt{3}$. Trova i raggi delle circonferenze inscritta γ e circoscritta γ' al triangolo.
Posto $a = 2$ e considerato un opportuno sistema di assi cartesiani, trova le equazioni dell'omotetia ω che ha il centro S nel centro del triangolo ABC e che trasforma γ in γ'. Scrivi le equazioni di γ e γ' e verifica che ω trasforma γ in γ'. Determina le coordinate dei vertici del trasformato di ABC attraverso ω.

$\left[r = a,\ r' = 2a; \text{ rapporto di omotetia} = 2, \text{ con } S = O: \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}; x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 16\right]$

549 Sono date le equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax + (-a - 2)y \\ y' = (a - 2)x + 3ay + 3 - a \end{cases}$$

a) Determina per quali valori di a si ha un'affinità, un'affinità diretta o indiretta, un'equivalenza.
b) Trova per quali valori di a si ha una similitudine σ. Studia σ individuando anche gli elementi uniti.
c) Considera la parabola γ con l'asse parallelo all'asse x, di vertice $V(1; 1)$ e passante per $A(0; 2)$.
Trova la sua trasformata γ' attraverso σ e la distanza fra i due vertici.

$\left[\text{a) } a \neq \pm 1, \text{ aff. diretta per } a < -1 \vee a > 1, \text{ equivalenza per } a = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \vee a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ b) } \sigma: \begin{cases} x' = -2y \\ y' = -2x + 3 \end{cases},\right.$

$\left.\text{punto unito: } (2; -1), \text{ rette unite: } y = x - 3,\ y = -x + 1; \text{ c) } \gamma: x = -y^2 + 2y,\ \gamma': y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3; 3\right]$

550 For the linear transformation $f: (x; y) \to (x'; y')$ where:

$$x' = x + y$$
$$y' = 2x - y$$

a) express x and y in terms of x' and y';
b) find the image of $(1; 0)$ and the image of $(0; 1)$;
c) find $f(L)$, the equation of the image of $L: 3x - 4y + 6 = 0$ under the transformation f;
d) if M is a line through the origin perpendicular to L, investigate if $f(M) \perp f(L)$.

(IR *Leaving Certificate Examination*, Higher Level, 1994)

$\left[\text{a) } x = \frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}y';\ y = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y'; \text{ b) } (1; 2); (1; -1); \text{ c) } 5x - 7y - 18 = 0; \text{ d) no}\right]$

551 Considera le curve di equazioni $y = 4 \text{ sen } 3x$ e $y = 3 \text{ sen } 4x$. Verifica che una si ottiene dall'altra attraverso una trasformazione. Indica di quale trasformazione si tratta, scrivi le sue equazioni e studia le sue principali caratteristiche.

$\left[\text{omotetia con centro nell'origine e rapporto } \frac{3}{4}; \begin{cases} x' = \frac{3}{4}x \\ y' = \frac{3}{4}y \end{cases}\right]$

552 Determina l'affinità che trasforma l'ellisse $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ nella circonferenza avente lo stesso centro e raggio 2.
(Suggerimento. Conviene scrivere l'equazione della circonferenza in forma simile all'ellisse:
$\frac{(x'-1)^2}{4} + \frac{(y'+2)^2}{4} = 1$ e osservare quale deve essere l'effetto della trasformazione affine.) $\left[\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{2}{3}y - \frac{2}{3} \end{cases}\right]$

553 L'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = -1$ viene trasformata nell'iperbole non equilatera $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ da un'affinità del tipo $\begin{cases} x' = ay \\ y' = bx \end{cases}$, con $a, b > 0$.

a) Determina i valori dei parametri a e b.
b) Verifica che gli asintoti dell'iperbole trasformata sono i trasformati degli asintoti della prima iperbole.
c) Determina vertici e fuochi delle due iperboli e osserva se gli uni sono i trasformati degli altri.
d) Determina i punti comuni alle due iperboli.

[a) $a = 2, b = 3$; c) $F_{1,2}(0; \pm\sqrt{2})$, $V_{1,2}(0; \pm 1)$; $F'_{1,2}(\pm\sqrt{13}; 0)$, $V'_{1,2}(\pm 2; 0)$; d) $(\pm 2\sqrt{2}; 3)$, $(\pm 2\sqrt{2}; -3)$]

554 È data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$. Determina le equazioni delle tangenti parallele agli assi cartesiani e i rispettivi punti di tangenza.

a) Applica alla circonferenza l'affinità di equazioni $\begin{cases} x' = 2x + 6 \\ y' = y - 2 \end{cases}$. Quale curva ottieni?
Quanto vale l'area racchiusa da tale curva?
b) Trasforma ora le rette tangenti e i punti di tangenza, verificando che le rette trasformate sono tangenti alla curva trasformata nei punti trasformati.
c) Osserva che, mentre la circonferenza ha infiniti assi di simmetria, la nuova curva ha solo due assi di simmetria.

[$x = -1$, $x = -5$, $y = -0$, $y = 4$, $T_1(-1; 2)$, $T_2(-5; 2)$, $T_3(-3; 0)$, $T_4(-3; 4)$;
a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; 8π]

555 For the transformation equation $\begin{cases} x' = ax - 2y + 1 \\ y' = -x + y + b \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$, calculate:

a) a and b such that $A'(-2; 3)$ is the image of $A(1; 0)$;
b) a and b such that $P(2; -1)$ is a fixed point;
c) the value of a and b such that the transformation has fixed points.

[a) $a = -3$, $b = 4$; b) $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$; c) $\forall a, b \in \mathbb{R}$]

556 a) Determina i coefficienti a e b della trasformazione $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = bx - ay \end{cases}$, con $a, b > 0$, tale che trasformi l'iperbole $x^2 - y^2 = 4$ nella forma $xy = \frac{1}{4}$.
b) Studia la trasformazione ottenuta osservando come viene trasformato il triangolo di vertici $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(-1; -1)$.
c) Determina l'equazione della trasformata della curva $x^2 + y^2 = 1$.

[a) $a = 2$, $b = 2$; b) similitudine indiretta di rapporto $\frac{1}{4}\sqrt{2}$; c) $x^2 + y^2 = \frac{1}{8}$]

557 a) Studia le isometrie:

$$t_1: \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y - 1 \end{cases}; \qquad t_2: \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}; \qquad t_3: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}.$$

b) Verifica che $t_1 \circ t_2$ rappresenta una rotazione di 90° in senso orario intorno a un punto diverso dall'origine. Individua il centro di rotazione.
c) Quale trasformazione si ottiene con $t_2 \circ t_3$?

[a) simmetria di centro $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$; $r(O; 90°)$; simmetria rispetto alla retta $y = x$;
b) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; c) simmetria rispetto all'asse y]

REALTÀ E MODELLI

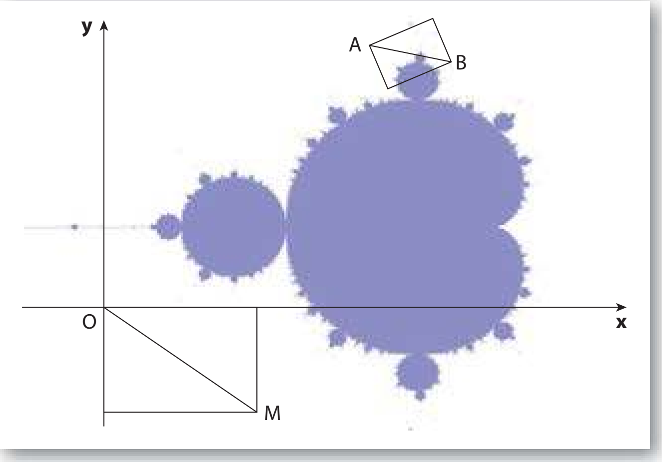
1 **Il televisore**

La forma rettangolare di uno schermo televisivo è differente a seconda del rapporto tra la larghezza e l'altezza. I televisori di vecchio tipo, a tubo catodico, hanno un rapporto 4 : 3, mentre generalmente quelli moderni hanno un rapporto 16 : 9.

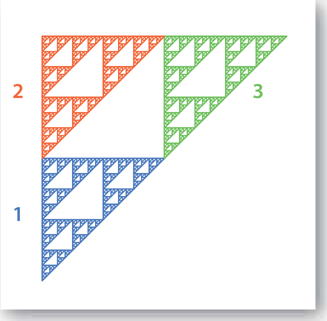
- Considera uno schermo 4 : 3 di altezza h e uno schermo 16 : 9 di altezza h'. Posizionata l'origine del sistema di riferimento cartesiano nell'angolo in basso a sinistra dello schermo, scrivi l'equazione della trasformazione che porta l'immagine dal primo schermo al secondo. Di che tipo di trasformazione si tratta?
- Daniela non vuole buttare il suo vecchio televisore funzionante: come vedrà l'immagine se la trasmissione è predisposta per uno schermo di nuovo tipo?

2 **Come si elaborano le immagini?**

- Determina la trasformazione che riproduce nel rettangolo del quarto quadrante individuato da $M(4; -3)$ la porzione del frattale di Mandelbrot individuata dal rettangolo simile di vertici $A(10; 10)$ e $B(12; 9{,}5)$.



3 **I frattali**



Uno dei frattali più noti è il triangolo di Sierpinski, che si ottiene in questo modo: da un quadrato di lato unitario si elimina il quadratino in basso a destra di lato ½. La figura che rimane è costituita da tre quadrati di lato ½: da ciascuno di questi quadrati si toglie il quadratino in basso a destra di lato ¼ e così via. La figura mostra un triangolo di Sierpinski in cui abbiamo colorato tre zone: ciascuna parte è simile all'intero frattale.

- Fissato il sistema di riferimento con origine nell'angolo in basso a sinistra del quadrato in cui il frattale è costruito, determina le trasformazioni geometriche che, applicate al frattale, restituiscono uno dei sottofrattali indicati in figura (considera solo la forma, non i colori).

4 **La tenda da sole**

Sui balconi di alcuni appartamenti vengono installate delle tende da sole profonde 1,5 m; il perno attorno al quale la tenda ruota si trova a 2 m dal piano del terrazzo. Supponendo che per coprire una parte di balcone la tenda, da chiusa, venga aperta di 45°, determina:

- le equazioni della rotazione nel piano individuata dall'apertura della tenda (considera il sistema di riferimento Oxy con l'asse y verticale passante per il perno e l'asse x orizzontale appoggiato al piano del terrazzo e orientato verso la strada);
- di quanto bisogna inclinare la tenda affinché la parte opposta al perno raggiunga il 60% dell'altezza totale.

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: www.zanichellitest.it

1 Fra le seguenti coppie di equazioni, quale descrive una trasformazione geometrica?

A $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = 3x - 4y + 5 \end{cases}$

B $\begin{cases} x' = 2 \\ y' = 3x - 4y + 5 \end{cases}$

C $\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = 3x - 4y + 5 \end{cases}$

D $\begin{cases} x' = -3y \\ y' = -4y + 5 \end{cases}$

E $\begin{cases} x' = 2x^2 + 3y^2 \\ y' = 3x - 4y + 5 \end{cases}$

2 Considera la trasformazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = 6 - x \\ y' = y \end{cases}$$

Una delle seguenti proposizioni è *falsa*. Quale?

A Ogni retta di equazione $y = k$ è unita.

B Tutti i punti della retta di equazione $y = k$ sono uniti.

C Il punto $(3; k)$ è unito.

D Tutti i punti della retta $x = 3$ sono uniti.

E Esistono infinite rette unite.

3 La trasformazione di equazioni

$\begin{cases} x' = -x - 3 \\ y' = -y + 5 \end{cases}$ è:

A la simmetria centrale di centro $C(-3; 5)$.

B la simmetria assiale di asse $-3x + 5y = 0$.

C la simmetria centrale di centro $C\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

D la simmetria centrale di centro $C\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

E la traslazione di vettore $\vec{u}(-3; 5)$.

4 Nella simmetria di equazioni

$$\begin{cases} x' = -x - 3 \\ y' = y \end{cases}$$

la retta $2x - y + 3 = 0$ ha come corrispondente la retta di equazione:

A $-2x - y + 3 = 0$.

B $2x + y - 3 = 0$.

C $x - 2y + 3 = 0$.

D $2x + y + 3 = 0$.

E $x + 2y + 3 = 0$.

5 Considera l'iperbole $xy = 2$ e la rotazione di centro O e $\alpha = -\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

Fra le seguenti equazioni individua quella che *non* rappresenta l'immagine dell'iperbole data.

A $y = \frac{2}{x}$.

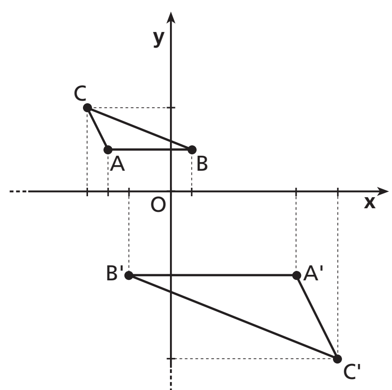
B $y = -\frac{2}{x}$.

C $x + \frac{2}{y} = 0$.

D $xy + 2 = 0$.

E $\frac{xy}{2} + 1 = 0$.

6 Nella figura sono rappresentati due triangoli: $A'B'C'$ è il corrispondente di ABC in un'omotetia. Qual è il rapporto di omotetia?



A 2 B -1 C 1 D -2 E $-\frac{1}{2}$

7 Considera la trasformazione:

$$\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases}$$

Una delle seguenti proposizioni è *falsa*. Quale? La trasformazione data è:

A una traslazione se $k = 1$.

B una traslazione se $k = 0$.

C una simmetria centrale se $k = -1 \wedge (a \neq 0 \vee b \neq 0)$.

D un'omotetia con centro nell'origine e di rapporto k se $k \neq 0 \wedge a = 0 \wedge b = 0$.

E una similitudine se $k \neq 0 \wedge (a \neq 0 \vee b \neq 0)$.

QUESITI

8 Determina quale isometria viene prodotta dalla composizione della simmetria rispetto alla retta di equazione $x = h$ con quella rispetto alla retta di equazione $y = -x$. Mostra in un disegno il risultato ottenuto. Il risultato sarebbe stato lo stesso componendo le due trasformazioni in ordine inverso?

9 Sia G il grafico di una funzione $x \to f(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Si illustri in che modo è possibile stabilire se G è simmetrico rispetto alla retta $x = k$.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2010, *quesito* 5)

10 Dimostra che qualunque omotetia trasforma una retta in una retta a essa parallela.

11 Spiegare, con esempi appropriati, la differenza tra omotetia e similitudine nel piano.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 10)

12 In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata l'affinità (A) di equazioni:

$$x = -2X + 3Y, \quad y = X - 2Y.$$

Calcolare l'area della figura trasformata di un cerchio di raggio 1 secondo l'affinità (A).

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione straordinaria*, 2003, *quesito* 4)

$[\pi]$

13 Che cosa ottieni componendo la simmetria assiale rispetto alla retta $y = mx$ con quella rispetto alla retta perpendicolare passante per l'origine? Se la perpendicolare invece non passa per l'origine, cosa succede?

14 In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) sono date le affinità di equazioni:

$$x' = (a+1)x - by + a, \; y' = (a-1)x + 2by - 1,$$

dove a, b sono parametri reali.
Dimostrare che fra esse vi è una similitudine diretta e di questa trovare il punto unito.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2003, *quesito* 8)

15 Considerata l'affinità di equazioni:

$$X = 2x + 3y, \; Y = -3x + 2y,$$

determinare, se ve ne sono, le sue rette unite.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2001, *quesito* 8)

16 Dimostra che le parabole di equazioni $y = -\frac{1}{2}x^2$ e $y = 3x^2$ sono simili trovando un'omotetia con centro nell'origine che trasforma una nell'altra.
Generalizza il risultato con le parabole $y = ax^2$ e $y = bx^2$ e dimostra che il rapporto di omotetia è $k = \frac{a}{b}$.

17 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = \frac{1}{2}bx - 2 \end{cases}$$

Tra di esse determinare quella che trasforma il punto $(1; 0)$ nel punto $(1; -1)$ e stabilire se ammette rette unite.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2004, *quesito* 8)

$[a = 1; b = 2]$

18 Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie? (*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2004, *quesito* 3)

19 Nel piano è data la seguente trasformazione:

$$x \to x\sqrt{3} - y$$
$$y \to x + y\sqrt{3}$$

Di quale trasformazione si tratta?

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2004, *quesito* 10)

[similitudine: composizione di una rotazione di 30° e di un'omotetia di rapporto 2]

20 Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali σ e φ la cui composizione $\sigma \circ \varphi$ dia luogo alla traslazione di equazione:

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$

Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso $\varphi \circ \sigma$. (*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2005, *quesito* 3)

$$\left[\varphi: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}; \ \sigma: \begin{cases} x' = y + \sqrt{5} \\ y' = x - \sqrt{5} \end{cases}\right]$$

21 Le rette r e s d'equazioni rispettive $y = 1 + 2x$ e $y = 2x - 4$ si corrispondono in una omotetia σ di centro l'origine O. Si determini σ. (*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2005, *quesito* 6)

$$\left[\sigma: \begin{cases} x' = -4x \\ y' = -4y \end{cases}\right]$$

22 Si consideri la trasformazione geometrica di equazioni:

$$x' = 2x + my - 1, \qquad y' = mx - 2y - 2,$$

dove m è un parametro reale. Trovare l'equazione del luogo geometrico dei suoi punti uniti.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2005, *quesito* 10)

$\left[\text{ellisse di centro } \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right) \text{ e semiassi di lunghezza } \frac{\sqrt{21}}{6} \text{ e } \frac{\sqrt{7}}{6} \text{ privata del punto } (0; 0)\right]$

23 Si considerino le seguenti equazioni:

$$x' = ax - (a-1)y + 1, \qquad y' = 2ax + (a-1)y + 2,$$

dove a è un parametro reale.
Determinare i valori di a per cui le equazioni rappresentano:

a) un'affinità,
b) un'affinità equivalente (si ricorda che un'affinità si dice *equivalente* se conserva le aree).

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione straordinaria*, 2006, *quesito* 9)

$\left[\text{a) } a \neq 0 \wedge a \neq 1; \text{ b) } a = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{6}\right]$

24 Dimostrare che ogni similitudine trasforma una parabola in una parabola.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2006, *quesito* 8)

25 Si dimostri che l'insieme delle omotetie con centro O fissato è un gruppo.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2007, *quesito* 3)

26 Nell'omotetia di centro $O(0; 0)$ e rapporto $k = -4$, si determini l'equazione della circonferenza corrispondente alla $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$. Si confrontino fra di loro i centri e i raggi delle due circonferenze.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2009, *quesito* 5)

$[x^2 + y^2 + 8x - 16y = 0]$

PROBLEMI

27 a) È data l'iperbole $y = \frac{k}{x}$. Determina il valore del parametro k tale che la trasformata rispetto all'affinità di equazioni $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$ sia un'iperbole equilatera con vertici nei punti $(0; \pm 2)$.

b) Studia le caratteristiche della trasformazione assegnata osservando come viene trasformato il quadrato di vertici $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$, $(0; 1)$.

c) Determina l'omotetia e l'isometria la cui composizione permette di ottenere la trasformazione assegnata.

$\left[\text{a) } k = -1; \text{ c) omotetia: } \begin{cases} x' = \sqrt{2}\,x \\ y' = \sqrt{2}\,y \end{cases} \text{ e rotazione: } \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}\right]$

28 È data la trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$.

Individua le sue caratteristiche precisando punti uniti e rette unite.

a) Determina l'equazione dell'ellisse in forma canonica con fuochi nei punti $(\pm 1; 0)$ ed eccentricità pari a $\frac{1}{2}$.

b) Applica la trasformazione all'ellisse determinata al punto precedente e rappresenta nello stesso sistema di assi cartesiani i due grafici.

c) Quanti e quali sono i punti di intersezione delle due curve che appartengono all'asse di simmetria?

[simmetria assiale di asse $y = x + 1$, uniti tutti i punti dell'asse e tutte le rette perpendicolari all'asse;
a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; b) $4x^2 + 3y^2 + 8x - 6y - 5 = 0$; c) due punti di intersezione di ascissa $\frac{-4 \pm \sqrt{72}}{7}$]

29 È data la parabola P di equazione $y = x^2 + x$. Rappresentala in un sistema di assi cartesiani ortogonali.

a) Determina le equazioni della trasformazione t ottenuta dalla composizione della traslazione di vettore $\vec{v}(2; 1)$ e dalla rotazione di 90° in senso orario e con centro nell'origine.

b) Applica alla parabola P la trasformazione t e rappresenta la nuova parabola P' nello stesso sistema di assi cartesiani.

c) Determina le equazioni della trasformazione t_1 ottenuta componendo in ordine inverso le trasformazioni di cui al punto a) e verifica che la composizione non è commutativa.

$\left[\text{a) } t\text{: } \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = -x - 2 \end{cases}; \text{ b) } x = y^2 + 3y + 3; \text{ c) } t_1\text{: } \begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = -x + 1 \end{cases}\right]$

30 È data la conica γ di equazione $3x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}\,y = 0$.
Trasformala nella forma canonica γ' mediante la similitudine di equazioni

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y \\ y' = \frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y \end{cases}$$

e traccia il grafico della curva γ'.

a) Determina l'asse di simmetria, il vertice V, le intersezioni con gli assi cartesiani e traccia il grafico della curva γ.

b) Determina la tangente a γ nell'origine.

c) Deduci l'isometria e l'omotetia la cui composizione permette di ottenere la similitudine assegnata.

$\left[y = 2x^2; \text{ a) } y = \sqrt{3}\,x; \ V(0; 0); \text{ b) } x + \sqrt{3}\,y = 0; \text{ c) } r(O; 30°), \omega_{O, \frac{1}{2}}\right]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2.0** © Zanichelli 2011 *Volume 4*

31 È data la parabola $x = 2y^2$. Determina un'affinità (diversa dall'identità) del tipo $\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$ che lascia invariata la parabola.

a) Determina i punti di intersezione tra la parabola e la retta $y = \frac{1}{2}x$.

b) Trasforma la retta rispetto all'affinità considerata in precedenza e determina le intersezioni tra la parabola e la retta trasformata.

c) Calcola l'area della figura ottenuta con i punti di intersezione determinati in precedenza.

d) Calcola l'area della figura trasformata della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

[$a = 4$, $b = 2$; a) $O(0; 0)$, $P(2; 1)$; b) $O(0; 0)$, $Q(8; 2)$; c) 2; d) 8π]

32 a) È data l'iperbole $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Dopo averne determinato gli asintoti, traccia il grafico della curva.

b) Applica all'iperbole la trasformazione affine di equazioni $\begin{cases} x' = \frac{x}{2} + y \\ y' = \frac{x}{2} - y \end{cases}$. Quale curva ottieni?

c) Trasforma gli asintoti e verifica che le rette ottenute sono asintoti per la curva trasformata.

d) L'affinità in generale non conserva misure di angoli e simmetrie, verificalo osservando come la proprietà dell'iperbole di essere equilatera non si conserva nell'affinità. Gli assi di simmetria si conservano?

[b) iperbole equilatera $xy = 1$]

33 Determina i coefficienti a, b, c, d della trasformazione $\begin{cases} x' = ax + b \\ y' = cy + d \end{cases}$ tale che:

$A(1; 2) \mapsto A'(-1; 0)$; $B(3; 1) \mapsto B'(1; -2)$.

a) Studia la trasformazione e determina punti uniti e rette unite della trasformazione.

b) Trasforma la circonferenza con centro nell'origine e raggio 2 e determina l'area della superficie racchiusa dalla curva trasformata.

c) Determina centro e assi di simmetria della curva trasformata. Puoi affermare che la trasformazione conserva gli assi di simmetria?

[$a = 1$, $b = -2$, $c = 2$, $d = -4$; a) retta unita $y = 4$; b) 8π; c) ellisse di centro $(-2; -4)$]

34 Determina le equazioni della simmetria s rispetto alla retta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

a) Applica in successione la trasformazione s e la simmetria rispetto all'asse x. La trasformazione t così ottenuta cosa rappresenta?

b) Scrivi le equazioni della trasformazione t_1 composta da t e da un'omotetia rispetto all'origine di rapporto 2.

c) Che cosa ottieni applicando t_1 alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$? E al triangolo di vertici (0; 0), (1; 0), (0; 1)?

[s: $\begin{cases} x' = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{1}{2}y \end{cases}$; a) rotazione di $-60°$ rispetto all'origine; b) t_1: $\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}y \\ y' = -\sqrt{3}x + y \end{cases}$]

35 a) In un piano è data l'affinità t_1 di equazioni t_1: $\begin{cases} x' = ax + 2by - 1 \\ y' = 2ax + 2 \end{cases}$ che trasforma il punto $A(-1; -1)$ in $A'(2; 0)$. Trova a e b, studia la trasformazione e gli eventuali elementi uniti.

b) Studia la trasformazione:

$$t_2: \begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = 2x - y + 4 \end{cases}$$

c) Calcola $t = t_2 \circ t_1$ e studia le sue proprietà.

d) Applica t alle funzioni $y = \operatorname{sen} 2x$ e $y = \cos x$, determinando le equazioni delle trasformate. Rappresentale graficamente e trova i loro punti di intersezione.

[a) $a = 1$, $b = -2$, t_1 affinità generica; b) t_2 affinità generica]

36 Studia le trasformazioni

$$t_1: \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = -2y + 3 \end{cases}, \; t_2: \begin{cases} x' = -y \\ y' = x + 2 \end{cases}, \; t_3: \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases},$$

individuando anche gli elementi uniti. Determina e studia la trasformazione $t = t_3 \circ t_2 \circ t_1$. Trova il corrispondente del triangolo di vertici $A(1; 0)$, $B(4; 3)$, $C(2; 5)$ nella trasformazione t e calcola l'area del triangolo ABC e del suo trasformato.

[t_1 similitudine; t_2 rotazione con $C(-1; 1)$ e $\alpha = 90°$; t_3 simmetria centrale rispetto all'origine, t similitudine; $S = 6$; $S' = 24$]

37 Sono date le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = mx - 2my + 1 \\ y' = (m+2)x + 2y \end{cases}$$

a) Studia al variare di m le trasformazioni. In particolare, indica per quali valori di m si ha un'affinità, un'affinità diretta o indiretta, un'equiaffinità.
b) Trova per quali valori di m si ha una similitudine σ e individua i punti uniti e le rette unite.
c) Trova l'equazione della trasformata attraverso σ della circonferenza con centro nell'origine e raggio 1 e verifica che la tangente nel punto $P(1; 0)$ si trasforma nella tangente nel punto P' trasformato di P alla curva corrispondente della circonferenza.

[a) affinità: $m \neq 0 \wedge m \neq 3$; affinità diretta: $m < -3 \vee m > 0$; affinità indiretta: $-3 < m < 0$; equiaffinità: $m = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{2} \vee m = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$; b) $m = 2$; punto unito: $\left(-\frac{1}{17}; \frac{4}{17}\right)$; non ci sono rette unite; c) $x^2 + y^2 - 2x - 19 = 0$]

38 a) Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y che ha il vertice V di ordinata 2 e interseca l'asse x nell'origine e nel punto A di ascissa 4.

b) Sottoponi la parabola alla trasformazione

$$t: \begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases}, \quad \text{con } m, n \text{ interi positivi,}$$

e determina m e n in modo che, indicati con O', V', A' i trasformati di O, V, A, si abbia relativamente alle aree e ai perimetri dei triangoli OAV e $O'A'V'$:

$$S = 12 \cdot S' \quad \text{e} \quad 2p' = 9(\sqrt{2} - 1)2p.$$

c) Scrivi l'equazione della parabola γ' trasformata di γ attraverso t e applica a essa la trasformazione:

$$t_1: \begin{cases} x' = \frac{1}{4}x \\ y' = \frac{1}{3}y - 2 \end{cases}$$

Disegna la parabola così ottenuta.

d) Scrivi le equazioni e studia la trasformazione che fa passare direttamente γ a γ''.

[a) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$; b) $m = 4, n = 3$; c) $y = -\frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{2}x$; d) $\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 2 \end{cases}$, traslazione di $\vec{v}(0; -2)$]

CAPITOLO α1

١
[numerazione araba]

१
[numerazione devanagari]

一
[numerazione cinese]

IL CALCOLO COMBINATORIO

SEMPRE IN GIRO Ogni giorno i rappresentanti commerciali viaggiano di casa in casa e di città in città per presentare i loro prodotti.

Come fa un commesso viaggiatore a stabilire il percorso più breve per raggiungere i suoi clienti?

La risposta a pag. α17

1. I RAGGRUPPAMENTI

Un ragazzo ha a disposizione due paia di pantaloni e quattro magliette. Ci domandiamo in quanti modi diversi può vestirsi.
Fissato un paio di pantaloni, a questo può accostare, una alla volta, ognuna delle quattro magliette, e quindi sono quattro possibilità. Ma a questo numero di possibilità dobbiamo aggiungere ancora le possibilità che si ottengono con il secondo paio di pantaloni e, di nuovo, ognuna delle quattro magliette. Quindi le possibilità sono in totale otto.

Indichiamo le due paia di pantaloni con P_1 e P_2, le quattro magliette con M_1, M_2, M_3, M_4 e consideriamo gli insiemi $P = \{P_1, P_2\}$ e $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$.

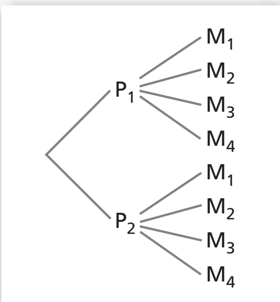
Elenchiamo tutte le possibili coppie. Esse non sono altro che il prodotto cartesiano fra l'insieme dei pantaloni P e l'insieme delle magliette M:

$$P \times M = \{(P_1; M_1), (P_1; M_2), (P_1; M_3), (P_1; M_4), (P_2; M_1), (P_2; M_2), (P_2; M_3), (P_2; M_4)\}.$$

Il diagramma ad albero della figura 1 suggerisce un metodo per determinare il numero di tutti i gruppi che è possibile formare.
Le 2 possibilità corrispondenti ai rami dei pantaloni indicano quante volte vengono ripetute le 4 possibilità corrispondenti ai rami delle magliette.

Quindi in totale abbiamo $2 \cdot 4 = 8$ gruppi.

● Il **prodotto cartesiano** di due insiemi non vuoti A e B, indicato con $A \times B$, è l'insieme di tutte le coppie ordinate in cui il primo elemento appartiene ad A e il secondo appartiene a B.

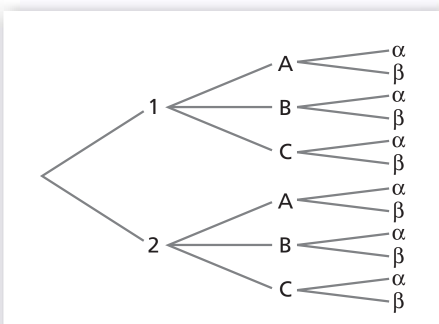


▲ **Figura 1** Diagramma ad albero di pantaloni e magliette.

ESEMPIO

Elenchiamo tutte le sigle di tre elementi che possiamo scrivere utilizzando le cifre 1 e 2 per il primo posto, le lettere A, B, C per il secondo e le lettere greche α e β per l'ultimo posto. Calcoliamo poi quante sono.

Disegniamo il diagramma ad albero (figura 2).



◀ **Figura 2** Percorrendo i diversi rami del diagramma possiamo costruire tutte le sigle possibili.
Procedendo dall'alto verso il basso: $1A\alpha$, $1A\beta$, $1B\alpha$, …

Calcoliamo il numero delle sigle che possiamo scrivere: 2 sono le possibilità per la prima posizione, 3 per la seconda e 2 per la terza.
Complessivamente abbiamo $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ gruppi.

● Se le possibilità sono molte, disegnare il diagramma ad albero completo può creare problemi di spazio. Spesso in seguito, per evitare di tracciare il diagramma, penseremo di percorrere i suoi rami mentalmente.

In generale, per determinare quanti gruppi si possono formare assegnando il primo posto a un elemento di un insieme A con n elementi, il secondo a uno di un insieme B con m elementi, il terzo a uno di un insieme C con k elementi, …, occorre calcolare il prodotto $n \cdot m \cdot k \cdot \ldots$

2. LE DISPOSIZIONI SEMPLICI

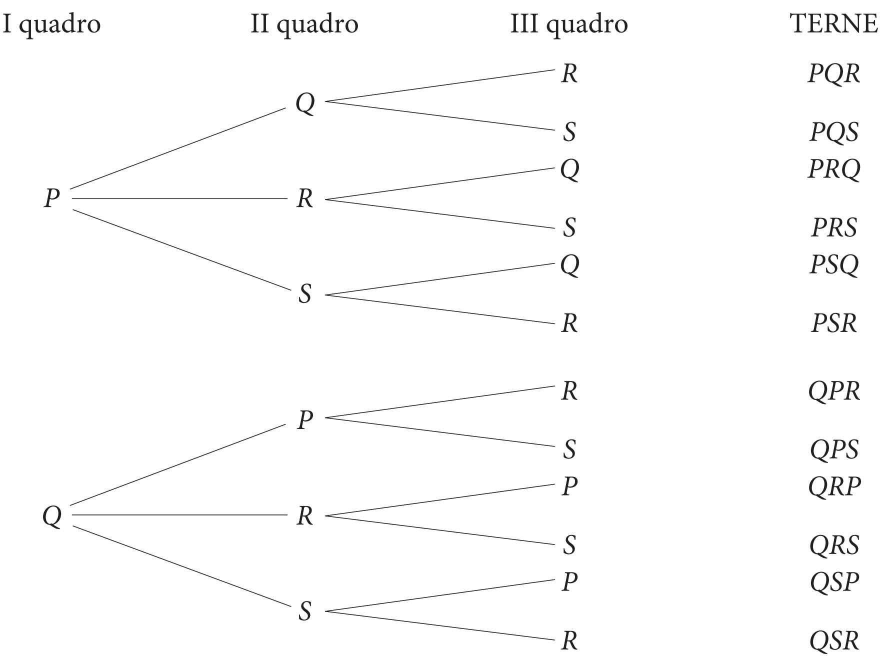
Una persona possiede quattro quadri, ma può appenderne solo tre lungo una parete. Ha importanza anche l'*ordine* con cui i quadri vengono appesi, per questioni di colore e di luce. Calcoliamo in quanti modi può appenderli.

● Consideriamo ora dei raggruppamenti relativi a un solo insieme.

Indichiamo i quattro quadri con le lettere P, Q, R, S e con A l'insieme costituito da questi quattro elementi, cioè:

$$A = \{P, Q, R, S\}.$$

Costruiamo con dei diagrammi ad albero tutte le possibili terne di quadri.



R …

S …

Notiamo che ogni terna si distingue dalle altre:

- per la **diversità di almeno un elemento**,
- oppure per l'**ordine** degli elementi.

Chiamiamo i gruppi con le caratteristiche indicate con il termine di **disposizioni semplici**.

Per arrivare rapidamente al calcolo del numero di disposizioni, consideriamo che per il primo posto le possibilità sono 4, per il secondo 3 e per il terzo 2. Complessivamente i gruppi sono:

● Dopo aver appeso un quadro, per il secondo posto rimangono soltanto $4 - 1 = 3$ quadri. Appeso il secondo quadro, per il terzo posto rimangono $4 - 2 = 2$ quadri.

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Per indicare il valore trovato, usiamo la seguente notazione:

$$D_{4,3} = 24$$

(si legge: «disposizioni semplici di 4 elementi di classe 3»).

● Si può anche leggere: «disposizioni di 4 elementi a 3 a 3». La **classe** indica il numero di elementi di cui è costituito ogni gruppo.

Generalizziamo il procedimento considerando n oggetti distinti e determiniamo la formula per i raggruppamenti di classe k.

DEFINIZIONE

Disposizioni semplici

Le disposizioni semplici di n elementi distinti di classe k (con $k \leq n$) sono tutti i gruppi di k elementi scelti fra gli n, che differiscono *per almeno un elemento o per l'ordine* con cui gli elementi sono collocati:

$$\boldsymbol{D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}, \text{ con } n, k \in \mathbb{N}.$$

● Qui e in seguito, insieme con la definizione vera e propria scriviamo anche la formula che serve per il calcolo del numero dei gruppi che si possono formare.

ESEMPIO

1. A un torneo di calcio regionale under 21 partecipano 15 squadre. Quante sono le possibili classifiche delle prime cinque squadre?

L'insieme di partenza contiene come elementi le 15 squadre, perciò $n = 15$; i raggruppamenti contengono 5 elementi, dunque $k = 5$.
Il numero delle possibili classifiche è:

$$D_{15,5} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360\,360.$$

2. Quante sigle di 5 elementi si possono formare tali che i primi posti siano occupati da 2 diverse cifre e gli altri tre posti da 3 lettere diverse dell'alfabeto italiano?
Per i primi due posti abbiamo $D_{10,2} = 10 \cdot 9 = 90$.
Per gli ultimi tre posti abbiamo $D_{21,3} = 21 \cdot 20 \cdot 19 = 7980$.
A ogni disposizione di due cifre accompagniamo una disposizione di tre lettere:

$$D_{10,2} \cdot D_{21,3} = 90 \cdot 7980 = 718\,200.$$

● Questo è un esempio di problema in cui occorre eliminare quelle disposizioni che non sono utilizzabili.

3. Quanti numeri di 4 cifre, tutte diverse tra loro, si possono formare con le dieci cifre decimali?
Se calcoliamo

$$D_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040,$$

nel risultato sono compresi anche quei numeri che iniziano con la cifra 0 e che, in realtà, non sono numeri di quattro cifre, ma di tre. Dobbiamo determinare quanti sono e sottrarre il loro numero da quello appena calcolato.
Ragioniamo così: prendiamo le nove cifre diverse dallo zero e calcoliamo tutte le disposizioni di classe 3. Infatti, se a ognuno dei numeri che così si formano poniamo davanti lo zero, abbiamo tutti i numeri da eliminare.
Poiché

$$D_{9,3} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504,$$

i numeri con 4 cifre significative tutte diverse che si possono formare sono:

$$D_{10,4} - D_{9,3} = 5040 - 504 = 4536.$$

Possiamo giungere direttamente al risultato con il «metodo delle possibilità».
Per il primo posto abbiamo 9 possibilità (le dieci cifre meno lo zero), per il secondo posto 9 possibilità (non utilizziamo la cifra collocata al primo posto, ma possiamo utilizzare ora la cifra zero), per il terzo posto 8 possibilità e infine per il quarto 7 possibilità. Quindi:

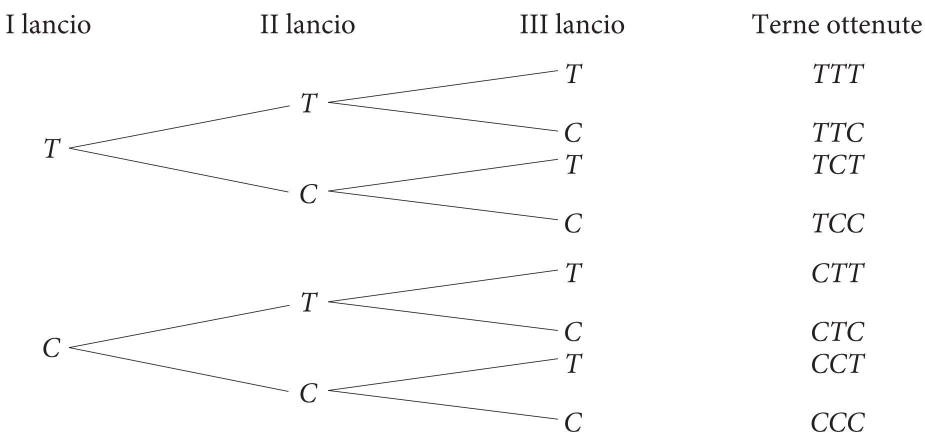
$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536.$$

3. LE DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

Lanciamo una moneta tre volte e cerchiamo di prevedere tutti i modi con cui si succedono le due facce.
L'insieme A che contiene i due possibili risultati del lancio è:

$$A = \{T, C\},$$

dove T indica il risultato «Testa» e C il risultato «Croce».
Costruiamo con diagrammi ad albero le terne di tutti i possibili risultati.



I gruppi così ottenuti differiscono per l'**ordine** degli elementi contenuti, ma **un elemento può comparire più di una volta**.
I gruppi trovati si chiamano **disposizioni con ripetizione**.
Per determinare il loro numero possiamo ricorrere al «metodo delle possibilità».
Per il primo posto abbiamo 2 possibilità, che restano 2 anche per il secondo e per il terzo in quanto un elemento già utilizzato può ripresentarsi:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8.$$

● A differenza delle disposizioni semplici, la classe di un gruppo può essere maggiore del numero di elementi a disposizione. Nell'esempio la classe di ogni gruppo è 3, mentre gli elementi sono 2.

Si utilizza la notazione: $D'_{2,3} = 8$.
Generalizziamo il procedimento considerando n oggetti distinti e determiniamo la formula per raggruppamenti di classe k.

DEFINIZIONE

Disposizioni con ripetizione

Le disposizioni con ripetizione di n oggetti distinti di classe k (con $k \gtreqless n$) sono tutti i gruppi di k elementi, anche ripetuti, scelti fra gli n, che differiscono *per almeno un elemento o per il loro ordine*:

$$\boldsymbol{D'_{n,k} = n^k}.$$

● Il segno $\gtreqless$ riassume i tre simboli $>$, $=$, $<$. k può anche essere maggiore di n, perché gli elementi possono essere ripetuti quante volte vogliamo.

ESEMPIO

1. Le targhe delle automobili italiane iniziano con una coppia di lettere (anche ripetute) dell'alfabeto inglese.
Quante sono le possibili sigle con cui può iniziare la targa?
Poiché l'alfabeto inglese contiene 26 lettere, le possibili sigle sono:

$$D'_{26,2} = 26^2 = 676.$$

2. Vogliamo organizzare una vacanza in Scozia e dobbiamo prenotare sei pernottamenti, in luoghi diversi oppure fermandoci più di una notte nello stesso luogo. Abbiamo a disposizione una lista di nove Bed and Breakfast. In quanti modi possiamo fare la nostra scelta?
Poiché possiamo fermarci anche tutte le notti nello stesso luogo, le nostre possibilità sono:

$$D'_{9,6} = 9^6 = 531441.$$

3. Quante sigle di cinque elementi, anche non distinti, si possono formare, tali che i primi due posti siano indicati da due cifre e gli ultimi tre da lettere dell'alfabeto italiano?

Per i primi due posti abbiamo: $D'_{10,2} = 10^2 = 100.$

Per gli ultimi tre posti abbiamo: $D'_{21,3} = 21^3 = 9261.$

A ogni disposizione con ripetizione di due cifre accompagniamo una disposizione con ripetizione di tre lettere:

$$D'_{10,2} \cdot D'_{21,3} = 100 \cdot 9261 = 926\,100.$$

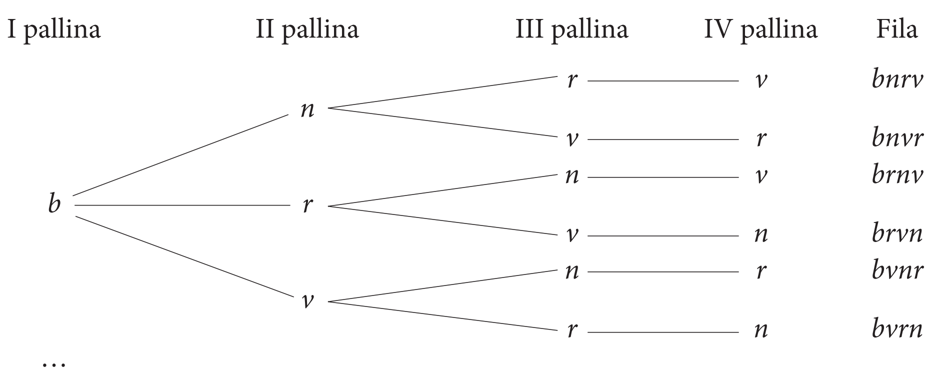
Utilizzando il «metodo delle possibilità», abbiamo per i primi due posti 10 elementi e per gli ultimi tre 21: $10 \cdot 10 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21 = 926\,100$.

4. LE PERMUTAZIONI SEMPLICI

Abbiamo quattro palline colorate, ognuna di un colore diverso (bianco, nero, rosso, verde). Calcoliamo in quanti modi diversi possiamo metterle in fila.
L'insieme dei colori è:

$$A = \{b, n, r, v\}.$$

Costruiamo con diagrammi ad albero tutti i possibili raggruppamenti.



Se la prima pallina è bianca, si ottengono 6 raggruppamenti. Ma la prima pallina può essere bianca, rossa, nera o verde. Per cui si ottengono:

$$6 \cdot 4 = 24 \text{ raggruppamenti}.$$

Notiamo che **ogni gruppo contiene tutti gli elementi** dell'insieme e **differisce dagli altri solo per l'ordine**.

Stiamo quindi considerando le disposizioni semplici di 4 elementi di classe 4.

Chiamiamo i raggruppamenti che hanno queste caratteristiche **permutazioni semplici**.

Nel nostro esempio parliamo di *permutazioni di 4 elementi* e scriviamo il numero delle permutazioni ottenute nel modo seguente:

$$P_4 = 24.$$

Nel caso generale, poiché le permutazioni di n elementi coincidono con le disposizioni semplici di classe n degli n elementi, per calcolare il numero delle permutazioni, poniamo nella formula delle disposizioni semplici $k = n$:

$$P_n = D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) =$$
$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Quindi per determinare quante sono le possibili permutazioni che possiamo effettuare con n oggetti distinti dobbiamo moltiplicare fra loro gli n numeri naturali da n fino a 1. Il prodotto $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ si indica con il simbolo $n!$ e si legge «n fattoriale».

Nel nostro esempio le permutazioni delle quattro palline colorate sono:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

DEFINIZIONE

Permutazioni semplici

Le permutazioni semplici di n elementi distinti sono tutti i gruppi formati dagli n elementi, che differiscono per il loro *ordine*:

$$\boldsymbol{P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}, \text{ con } n \geq 2.$$

ESEMPIO

1. Quanti numeri di sei cifre distinte possiamo scrivere utilizzando gli elementi dell'insieme $A = \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$?

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

2. Calcoliamo il numero di anagrammi che si possono ottenere con le lettere della parola CANTO:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

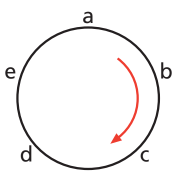
3. Cinque ragazzi hanno a disposizione cinque sedie. In quanti modi possono sedersi se le sedie sono disposte intorno a un tavolo rotondo?
Se le sedie fossero in fila i modi sarebbero $P_5 = 5! = 120$.
Essendo disposti su una circonferenza, occorre considerare che vi sono permutazioni che poste in ordine circolare coincidono.

- Per brevità si usa sottintendere l'aggettivo «semplice».

- Il prodotto $n!$ assume valori crescenti al crescere di n, con crescita molto rapida:
  $2! = 2$
  $3! = 6$
  $4! = 24$
  $5! = 120$
  $6! = 720$
  $7! = 5040$
  $8! = 40\,320$
  $9! = 362\,880$
  $10! = 3\,628\,800$
  …

- Gli anagrammi che consideriamo possono anche essere privi di significato.

Questo è un esempio di **permutazione circolare**, in quanto gli elementi non sono in fila, ma disposti intorno a una circonferenza.



Chiamando i ragazzi con le prime cinque lettere dell'alfabeto, fissato un raggruppamento, per esempio

$$a \quad b \quad c \quad d \quad e,$$

sono a esso equivalenti i seguenti:

$$b \quad c \quad d \quad e \quad a;$$

$$c \quad d \quad e \quad a \quad b;$$

$$d \quad e \quad a \quad b \quad c;$$

$$e \quad a \quad b \quad c \quad d.$$

I modi che coincidono sono tanti quanti i ragazzi. Quindi, se cinque ragazzi siedono intorno a un tavolo rotondo, tutti i modi possibili sono:

$$\frac{P_5}{5} = P_4 = 4! = 24.$$

5. LE PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

Calcoliamo quanti anagrammi (anche privi di significato) si possono formare con le lettere della parola TETTO.
Pensiamo per il momento che le tre T non siano uguali e distinguiamole colorandole: TETTO.
Se calcoliamo la permutazione P_5 di 5 elementi, consideriamo come diverse anche le parole che differiscono soltanto per la posizione delle tre T colorate. Per esempio, mettendo la E e la O nelle prime due posizioni, con le permutazioni sono distinte le parole:

EOTTT, EOTTT, EOTTT, EOTTT, EOTTT, EOTTT.

Abbiamo 6 casi diversi, corrispondenti alle permutazioni delle tre T colorate:

$$3! = 6.$$

Questi casi sono invece indistinguibili, e uguali a EOTTT, se consideriamo la T come lettera ripetuta più volte.
Se consideriamo le 120 permutazioni di 5 lettere, in questo caso troviamo ogni raggruppamento ripetuto 6 volte. Quindi per ottenere il numero degli anagrammi di TETTO dobbiamo dividere 120 per 6:

$$\frac{120}{6} = 20.$$

Per indicare che dei cinque elementi tre corrispondono a uno stesso elemento ripetuto usiamo il simbolo $P_5^{(3)}$, che si legge: «permutazioni di 5 elementi di cui 3 ripetuti». Abbiamo che:

$$P_5^{(3)} = \frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = 20.$$

Chiamiamo i raggruppamenti di questo tipo **permutazioni con ripetizione**.
In generale:

$$P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}.$$

La formula si generalizza ulteriormente quando nell'insieme di n elementi gli elementi ripetuti sono $k, h, \ldots, r$, dove

$$k + h + \ldots + r \leq n.$$

DEFINIZIONE

Permutazioni con ripetizione

Le permutazioni con ripetizione di n elementi, di cui h, k, … ripetuti, sono tutti i gruppi formati dagli n elementi che differiscono per l'*ordine* in cui si presentano gli elementi distinti e la *posizione* che occupano gli elementi ripetuti:

$$\boldsymbol{P_n^{(h,k,\ldots)} = \frac{n!}{h! \cdot k! \cdot \ldots}}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo il numero dei modi in cui cinque sedie possono essere occupate da tre persone.

Dobbiamo calcolare il numero delle permutazioni di 5 elementi, con 3 distinti e 2 ripetuti (le due sedie vuote), quindi:

$$P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

6. LA FUNZIONE $n!$

DEFINIZIONE

Fattoriale

Si definisce la funzione fattoriale come:

$$\mathbf{0! = 1,}$$
$$\mathbf{1! = 1,}$$
$$\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1,} \text{ con } n \geq 2.$$

Vale la relazione:

$$\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1)!}.$$

Infatti: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n \cdot [(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1] = n \cdot (n-1)!$.
Per esempio, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 5 \cdot (5-1)!$.

- La funzione $n!$ può essere definita mediante un prodotto soltanto se ci sono almeno 2 fattori, quindi per $n \geq 2$.
- Se scriviamo

  $n \cdot (n-1)!$,

  il fattoriale riguarda soltanto il secondo fattore. Il fattoriale è un'operazione che ha la precedenza sulla moltiplicazione. Per esempio,

  $7 \cdot 3! = 7 \cdot (3!)$,

  e **non**:

  $7 \cdot 3! = (7 \cdot 3)!$.

In particolare, questa relazione, applicata per $n = 2$, giustifica il fatto che abbiamo posto $1! = 1$. Si ha

$$2! = 2 \cdot (2 - 1)! = 2 \cdot 1!,$$

ma poiché è anche vero che

$$2! = 2 \cdot 1 = 2,$$

allora deve essere $1! \cdot 2 = 2$ e quindi $1! = 1$.

La relazione scritta in precedenza si può anche scrivere nella forma

$$(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!,$$

che suggerisce una **definizione ricorsiva di n!**:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{cases}$$

Vale anche la seguente relazione:

$$(n+1)! - n! = n \cdot n!.$$

Infatti: $(n + 1)! - n! = (n + 1) \cdot n! - n! = (n + 1 - 1) \cdot n! = n \cdot n!$.
Per esempio, $6! - 5! = 6 \cdot 5! - 5! = (6 - 1) \cdot 5! = 5 \cdot 5!$.

n! e le disposizioni

Utilizziamo la funzione fattoriale per esprimere le disposizioni. Per esempio:

$$D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 1)}{(2 \cdot 1)} = \frac{5!}{2!}.$$

In generale:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Infatti:

● Moltiplichiamo numeratore e denominatore per $(n - k)!$.

$$D_{n,k} = n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1) =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Con la relazione precedente possiamo giustificare il fatto di aver posto $0! = 1$.
Infatti, sostituendo $k = n$ nella formula, si ha

$$D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!},$$

ma, poiché è anche vero che

$$D_{n,n} = P_n = n!,$$

deve essere $\frac{n!}{0!} = n!$ e quindi dobbiamo porre $0! = 1$.

ESPLORAZIONE

Uno, cento, mille racconti

La letteratura combinatoria

«L'ispirazione, che consiste nell'ubbidire ciecamente ad ogni impulso, è in realtà una schiavitù. Il classico che scrive la sua tragedia osservando un certo numero di regole che conosce è più libero del poeta che scrive quel che gli passa per la testa ed è schiavo di altre regole che ignora.»

Raymond Queneau, *Segni, cifre e lettere*

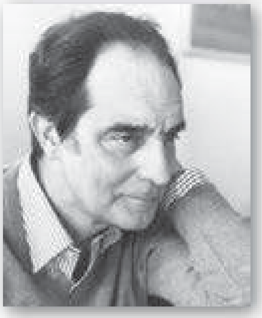
Con l'espressione **letteratura combinatoria** il matematico francese François Le Lionnais definì, nel 1961, quell'insieme di opere letterarie la cui originalità creativa risiede nella struttura che è stata scelta per comporle.
Si tratta di composizioni letterarie generate da alcune delle possibili combinazioni degli elementi del testo, che possono essere smontati e rimontati come le tessere di un mosaico.

I tarocchi: una macchina narrativa

«Uno dei commensali tirò a sé le carte sparse [...] prese una carta e la posò davanti a sé. Tutti notammo la somiglianza tra il suo viso e quello della figura, e ci parve di capire che con quella carta egli voleva dire "io" e che s'accingeva a raccontare la sua storia.»

Italo Calvino, *Il castello dei destini incrociati*

Ne *Il castello dei destini incrociati* è la «successione delle figure dei tarocchi» a dare il senso alle storie che Italo Calvino ci racconta.
Il fascino e l'originalità dell'opera risiedono infatti negli intrecci combinatori delle carte. La scelta dei mazzi di tarocchi caratterizza le due parti del libro: le figure che ispirano le trame del *Castello* sono i tarocchi viscontei (di cui ti proponiamo alcuni esempi sotto), mentre per la *Taverna* Calvino sceglie i tarocchi settecenteschi di Marsiglia.



▲ Italo Calvino.

Nel *Castello* i commensali, privati della voce da un incantesimo, stendono sul tavolo le carte dei tarocchi per narrare ognuno una storia. Le sequenze di carte poi si incrociano e le storie mutano con le diverse interpretazioni che una stessa figura può offrire. La disposizione delle carte, oltre che con il racconto scritto, è illustrata attraverso la loro riproduzione ai margini delle pagine del libro.
Le storie che scaturiscono dall'ineguagliabile e fervida fantasia di Calvino sono per lo più drammatiche e chi le racconta assume di volta in volta le sembianze dei personaggi raffigurati nei tarocchi stessi.

► Alcune delle figure dei tarocchi viscontei. Le tre carte (l'eremita, il bagatto e la torre) dettano, con la loro sequenza, la struttura di un possibile racconto.

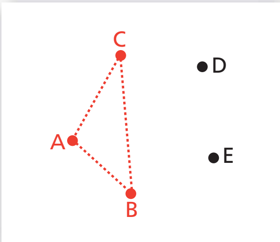
Attività

Matematica e letteratura

- Cerca in Internet notizie relative a Raymond Queneau e alla sua opera.

Cerca nel Web:
Queneau, Oulipo

▼ **Figura 3** Se cinque punti non sono allineati a tre a tre, ogni terna *con lettere diverse* indica un triangolo.



7. LE COMBINAZIONI SEMPLICI

Consideriamo cinque punti nel piano, a tre a tre non allineati. Determiniamo quanti triangoli possiamo costruire congiungendo tre punti.

Indichiamo i punti con le lettere A, B, C, D, E. Consideriamo, per esempio, il triangolo ABC. Esso viene individuato da tutte queste terne:

$$ABC,\quad ACB,\quad BAC,\quad BCA,\quad CAB,\quad CBA.$$

Nel contare i triangoli queste terne vanno prese una volta sola.
Quindi, tutte le terne di lettere che indicano i vertici dei triangoli costituiscono dei **gruppi** che **si differenziano** fra di loro **solo per gli elementi contenuti e non per il loro ordine**.

Chiamiamo questi gruppi **combinazioni (semplici) di 5 elementi di classe 3**. Per indicare il loro numero usiamo il simbolo $C_{5,3}$, che si legge «combinazioni di 5 elementi di classe 3», oppure il simbolo $\binom{5}{3}$, che si legge «cinque su tre».

Per ricavare $C_{5,3}$, partiamo da tutte le terne possibili, ossia le disposizioni $D_{5,3}$, e osserviamo che le permutazioni P_3 di ognuno dei gruppi di tre lettere non devono essere pensate distinte, quindi:

$$C_{5,3} = \frac{D_{5,3}}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10.$$

● Per esempio, abbiamo già visto che al triangolo ABC corrispondono le terne ABC, ACB, BCA, BAC, CBA e CAB, ossia:

$$3! = 3 \cdot 2 = 6$$

terne.

In generale, con ragionamenti analoghi, si ottiene la formula generale:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

DEFINIZIONE

Combinazioni semplici

Le combinazioni semplici di n elementi distinti di classe k (con $k \le n$) sono tutti i gruppi di k elementi scelti fra gli n, che differiscono per almeno un elemento (ma non per l'ordine):

$$\boldsymbol{C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}}, \text{ con } n, k \in \mathbb{N}.$$

● Il numero di combinazioni semplici di n elementi di classe k viene chiamato **numero combinatorio**.

ESEMPIO

In un Gran Premio di F1 una casa automobilistica ha a disposizione cinque vetture da assegnare a due piloti. In quanti modi la scuderia può utilizzare le automobili?

L'insieme di partenza contiene le automobili che numeriamo da 1 a 5:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Poiché i piloti sono due, i raggruppamenti sono tutte le coppie che si possono formare con le cinque macchine. L'ordine non conta, quindi tali raggruppamenti sono combinazioni:

$$C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10.$$

● Calcoliamo il numero di terni che si possono fare al gioco del lotto.
Interessa l'uscita di 3 numeri e non l'ordine con cui escono, perciò:

$$C_{90,3} = \binom{90}{3} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3!} = 117\,480.$$

La formula delle combinazioni semplici può assumere anche un'altra forma. Utilizzando quella delle disposizioni semplici espressa come rapporto di due fattoriali abbiamo:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}\,.$$

La formula ottenuta consente di calcolare le combinazioni mediante la funzione fattoriale ed è chiamata *dei tre fattoriali*:

$$\boldsymbol{C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$ **legge dei tre fattoriali**.

Vale inoltre la seguente proprietà chiamata *delle classi complementari*:

$$\boldsymbol{C_{n,k} = C_{n,n-k},\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$ **legge delle classi complementari**.

Nell'esempio precedente: $C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!}$.

La legge delle classi complementari risulta utile per il calcolo delle combinazioni quando $k \geq \frac{n}{2}$. Per esempio, possiamo subito scrivere $C_{10,8} = C_{10,2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$, invece di scrivere $C_{10,8} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3}{8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ e poi semplificare.

8. LE COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

Riprendiamo il problema che abbiamo affrontato nello studio delle disposizioni con ripetizione.

Lanciamo consecutivamente una moneta e segniamo la successione di uscita di testa (T) e di croce (C).
Questa volta non ci interessa l'ordine di uscita, ma solo la composizione di ogni possibile gruppo.

Se i lanci sono 2, il numero delle possibilità, rispetto alle disposizioni, si riduce a 3:

$$TT \quad TC \quad CC \qquad\qquad k = 2.$$

Se i lanci sono 3, il numero delle possibilità si riduce a 4:

$$TTT \quad TTC \quad TCC \quad CCC \qquad\qquad k = 3.$$

Se i lanci sono 4, il numero delle possibilità si riduce a 5:

$$TTTT \quad TTTC \quad TTCC \quad TCCC \quad CCCC \qquad\qquad k = 4.$$

Nel caso delle disposizioni, il numero delle possibilità che si ottengono lanciando una moneta k volte è 2^k.

Chiamiamo questi raggruppamenti **combinazioni con ripetizione**.

Osserviamo che in ogni gruppo un elemento può ripetersi fino a k volte e, non interessando l'ordine, ogni gruppo contiene gli stessi elementi, ma con un numero di ripetizioni diverso in ciascun gruppo distinto.
Per indicare le combinazioni con ripetizione usiamo la seguente notazione:

$$n = 2, \quad k = 2, \qquad C'_{2,2} = 3;$$

$$n = 2, \quad k = 3, \qquad C'_{2,3} = 4;$$

$$n = 2, \quad k = 4, \qquad C'_{2,4} = 5.$$

Utilizziamo le combinazioni con ripetizione in tutti i problemi di distribuzione nei quali occorre formare gruppi con oggetti *non distinguibili*.

DEFINIZIONE

Combinazioni con ripetizione

Le combinazioni con ripetizione di n elementi distinti di classe k (con $k \gtreqless n$) sono tutti i gruppi di k elementi che si possono formare, nei quali:
- ogni elemento può essere ripetuto al massimo fino a k volte;
- non interessa l'ordine con cui gli elementi si presentano;
- è diverso il numero di volte col quale un elemento compare:

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)\cdot(n+k-2)\cdot\ldots\cdot(n+1)\cdot n}{k!}.$$

Puoi verificare con i valori ottenuti nell'esempio precedente che:

$$C'_{2,2} = C_{2+2-1,2} = C_{3,2},$$
$$C'_{2,3} = C_{2+3-1,3} = C_{4,3},$$
$$C'_{2,4} = C_{2+4-1,4} = C_{5,4}.$$

ESEMPIO

In quanti modi diversi possiamo distribuire sei oggetti identici (per esempio 6 palline rosse) in quattro scatole? Se indichiamo con le lettere a, b, c, d le quattro scatole, alcune possibili distribuzioni sono le seguenti:

$$a\,a\,a\,b\,c\,d, \qquad a\,a\,a\,a\,a\,a, \qquad a\,b\,b\,c\,d\,d, \qquad b\,b\,b\,c\,c\,d.$$

Osserviamo che tutte le modalità sono le combinazioni con ripetizione di 4 oggetti di classe 6. Notiamo che alcune scatole possono rimanere vuote:

$$C'_{4,6} = C_{4+6-1,6} = C_{9,6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3!} = 84.$$

Nella prima distribuzione tre oggetti vanno nella scatola a, uno in b, uno in c, uno in d; nella seconda tutti gli oggetti vanno in a e le altre scatole restano vuote…

Se i sei oggetti fossero distinti, si tratterebbe di un problema di disposizione con ripetizione.

Utilizziamo la legge delle classi complementari.

9. I COEFFICIENTI BINOMIALI

I coefficienti binomiali e le loro proprietà

Sappiamo che il numero combinatorio $C_{n,k}$ è indicato anche con il simbolo $\binom{n}{k}$. Questo simbolo è chiamato **coefficiente binomiale**.

La legge dei tre fattoriali, che abbiamo esaminato nel paragrafo 7, permette di dare significato anche al simbolo $\binom{n}{0}$. Applicandola per $k = 0$, otteniamo:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\cdot n!} = 1.$$

Per $k = 0$ non possiamo utilizzare la formula delle combinazioni,

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_k},$$

in quanto non ha significato considerare delle combinazioni di n oggetti di classe 0.

In particolare $\binom{0}{0} = 1$.

Si può anche calcolare $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\cdot(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = 1$, che si può ricavare anche dalla legge delle classi complementari: $\binom{n}{n} = \binom{n}{n-n} = \binom{n}{0} = 1$.

Consideriamo ora $n = 5$ e i successivi valori di k da 0 a 5, che calcoliamo utilizzando le classi complementari:

$$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1, \quad \binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5, \quad \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10.$$

Osserviamo che

$$\binom{5}{1} = \binom{5}{0}\cdot\frac{5-0}{0+1} = 5, \binom{5}{2} = \binom{5}{1}\cdot\frac{5-1}{1+1} = 10, \binom{5}{3} = \binom{5}{2}\cdot\frac{5-2}{2+1} = 10$$

e così via. In generale possiamo ottenere il coefficiente binomiale $\binom{n}{k+1}$ dal coefficiente binomiale della classe precedente $\binom{n}{k}$ moltiplicandolo per il fattore $\frac{n-k}{k+1}$:

$$\boldsymbol{\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}}$$ **formula di ricorrenza**.

La formula di ricorrenza è utile quando conosciamo il valore del coefficiente binomiale per un certo valore di k e dobbiamo trovare i valori delle classi successive (o precedenti).

ESEMPIO

Se sappiamo che $\binom{32}{15} = 565\,722\,720$, allora:

$$\binom{32}{16} = 565\,722\,720 \cdot \frac{32-15}{15+1} = 601\,080\,390.$$

Le potenze di un binomio

Con il calcolo letterale possiamo scrivere le potenze di un binomio:

$n = 0 \qquad (A+B)^0 = 1;$

$n = 1 \qquad (A+B)^1 = A + B;$

$n = 2 \qquad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2;$

$n = 3 \qquad (A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$

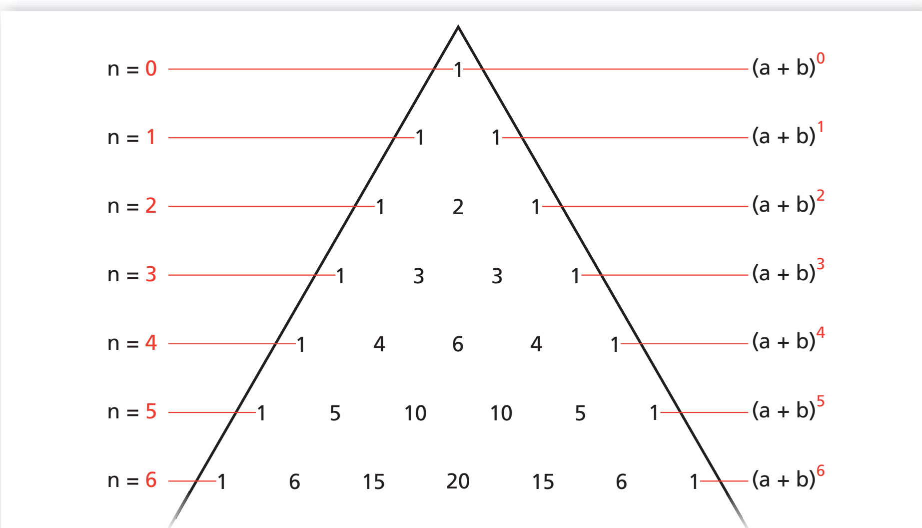
Lo **sviluppo della potenza di un binomio** è un polinomio omogeneo ordinato di grado n con $(n+1)$ termini, ognuno moltiplicato per un suo coefficiente. Indicando con alcuni puntini i coefficienti, si ha il seguente sviluppo, con n qualsiasi:

$$(A+B)^n = (\dots)A^nB^0 + (\dots)A^{n-1}B^1 + (\dots)A^{n-2}B^2 + (\dots)A^{n-3}B^3 + \dots$$
$$+ (\dots)A^2B^{n-2} + (\dots)A^1B^{n-1} + (\dots)A^0B^n.$$

Osserviamo che la somma degli esponenti di ogni termine è sempre n. Per $n = 0$ non abbiamo una somma, ma un solo termine: $\dots A^0B^0 = \dots \cdot 1$.

I coefficienti da inserire al posto dei puntini vengono forniti dal *triangolo di Tartaglia* (figura 4).

Niccolò Fontana (1499-1557), matematico italiano, detto Tartaglia perché era balbuziente.



Osserva che le somme dei termini delle diverse righe sono le potenze di 2:
$1 = 2^0$,
$1 + 1 = 2 = 2^1$,
$1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$,
$1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$,
$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$,
…

◀ **Figura 4 Il triangolo di Tartaglia. Ogni elemento diverso da 1 si ottiene come somma dei due della riga precedente che gli stanno sopra.**

ESEMPIO

Per sviluppare $(a+b)^6$, prendiamo i coefficienti dalla settima riga del triangolo:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

I lati obliqui del triangolo sono formati da tanti 1, mentre ogni coefficiente interno è la somma dei due coefficienti della riga precedente che sono alla sua destra e alla sua sinistra.

Per lo sviluppo di $(A+B)^n$ possiamo anche utilizzare i coefficienti binomiali utilizzando la *formula del binomio di Newton*:

$$(A+B)^n = \binom{n}{0} A^n B^0 + \binom{n}{1} A^{n-1}B^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} A^1 B^{n-1} + \binom{n}{n} A^0 B^n.$$

● Isaac Newton (1642-1727), matematico e fisico inglese. Scoprì questa formula quando era ancora studente.

ESEMPIO

$$(a+b)^6 =$$

$$= \binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6 =$$

$$= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

In modo sintetico la formula è:

$$\boldsymbol{(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k}$$ **formula del binomio di Newton**.

● $\sum_{k=0}^{n}$ significa: «la somma dei termini che otteniamo quando k varia da 0 a n».

In particolare, se $A = 1$ e $B = 1$, abbiamo

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1 \cdot 1 = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n},$$

cioè:

$$\boldsymbol{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n}.$$

La caratteristica del triangolo di Tartaglia, per cui ogni coefficiente è la somma dei due coefficienti della riga precedente a destra e sinistra, è una proprietà dei coefficienti binomiali espressa dalla *formula di Stifel*:

$$\boldsymbol{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$ **formula di Stifel**.

● $\binom{n}{k}$ è chiamato coefficiente binomiale proprio perché si trova nella formula del binomio di Newton.

● Michael Stifel (1487-1567), matematico tedesco che si occupò di aritmetica e algebra.

ESEMPIO

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}.$$

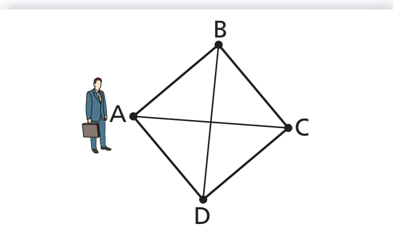
SEMPRE IN GIRO

Come fa un commesso viaggiatore a stabilire il percorso più breve per raggiungere i suoi clienti?

▶ Il quesito completo a pag. $\alpha 1$

La formulazione del problema, noto come «problema del commesso viaggiatore», è estremamente semplice. Partendo da un punto, si tratta di visitare tutti i clienti compiendo il percorso più breve, per poi far rientro alla base. In termini più formali, il problema consiste nel costruire un grafo di n nodi in cui ogni nodo è collegato da un arco a ciascuno degli altri $n-1$ nodi e determinare il circuito che tocchi tutti i nodi una volta sola (ad eccezione del nodo di partenza) nel modo più efficiente, cioè minimizzando la distanza complessiva percorsa.

Un problema facile da descrivere ma complesso da risolvere
Il modo più semplice per risolvere il quesito è quello di enumerare tutti i possibili percorsi. Il numero delle possibili soluzioni cresce molto rapidamente con il numero dei nodi. Vediamo perché.
Supponiamo di avere un grafo di n nodi, con punto di partenza e arrivo A e $n-1$ tappe da raggiungere.

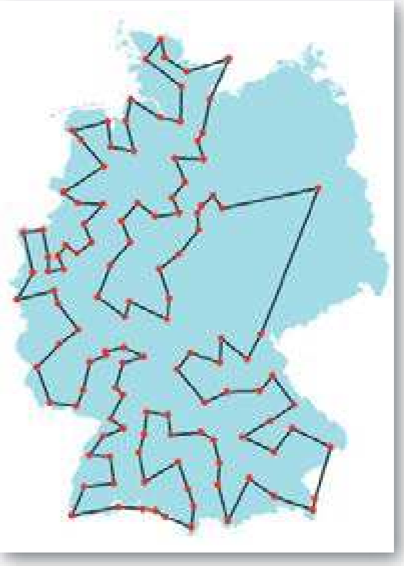


Ogni percorso che parte da A corrisponde a una permutazione delle rimanenti $n-1$ città. Infatti, è possibile scegliere in $(n-1)$ modi diversi la prima tappa e ognuna di queste scelte darà luogo a un sottoinsieme di soluzioni possibili. Stabilita la tappa numero uno, esistono $(n-2)$ modi di scegliere la seconda tappa, e quindi $(n-1)\cdot(n-2)$ gruppi distinti di soluzioni. Considerando tutte le tappe, avremo $(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1$ diversi percorsi.

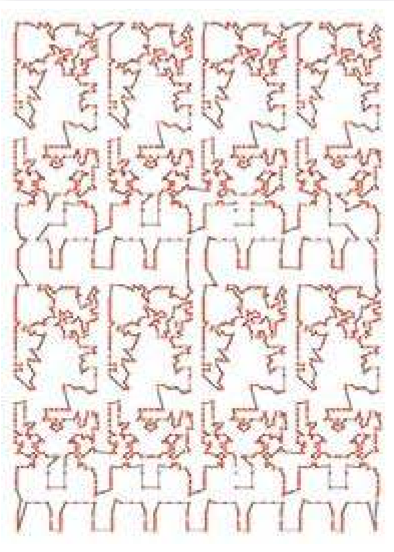
Il prodotto di tutti i numeri compresi fra 1 e $n-1$ è $(n-1)!$ e cresce molto rapidamente al crescere di n, tanto che, per valori abbastanza grandi di n, nemmeno un computer è in grado di fornire una risposta in breve tempo. Inoltre, ciascuno di questi percorsi ha una lunghezza diversa. Se, per esempio, i tratti AB, BC, CD e AD hanno lunghezza 1 e i tratti AC e BD hanno lunghezza $\sqrt{2}$, allora il percorso $ABCDA$ ha lunghezza 4, mentre il percorso $ACBDA$ ha lunghezza $2+2\sqrt{2}>4$.

Pizze a domicilio e linee telefoniche
La risoluzione del problema è utile a chi gestisce problemi di logistica e trasporti, ma anche a chi consegna pizze a domicilio, progetta linee telefoniche o circuiti integrati.
Sin dalla sua prima formulazione, fatta dal matematico irlandese William Hamilton alla fine dell'Ottocento, il problema del commesso viaggiatore (detto anche *circuito hamiltoniano*) ha sfidato le menti dei matematici più brillanti, che si sono messi alla ricerca di un algoritmo efficiente. In effetti, quello del commesso viaggiatore appartiene a una classe di problemi per i quali è difficile trovare un buon algoritmo.

Negli anni, sono stati proposti diversi metodi di calcolo in grado di risolvere circuiti hamiltoniani di dimensioni sempre maggiori. Nel 1954, fu stabilito il percorso ottimale per collegare tutte le capitali degli Stati Uniti. Nel 1977, fu determinato il ciclo più breve per collegare le principali 120 città della allora Germania occidentale. Nel 2001, fu trovata la soluzione esatta a un problema di 15 112 nodi, corrispondenti ai principali centri abitati tedeschi. Nel 2005, il limite fu ulteriormente superato e toccò quota 33 810 punti, relativi a una scheda di un circuito elettronico.



▲ Martin Grötschel, nel 1977, trovò il percorso ottimale per 120 città della ex Germania occidentale.



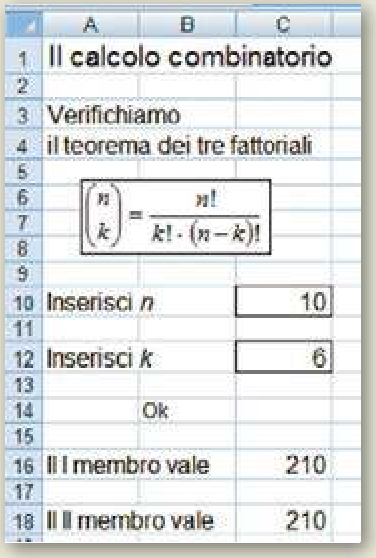
▲ Manfred W. Padberg e Giovanni Rinaldi, nel 1987, trovarono il percorso più efficiente relativo a uno schema di 2392 città.

LABORATORIO DI MATEMATICA
IL CALCOLO COMBINATORIO

ESERCITAZIONE GUIDATA

Per verificare la legge dei tre fattoriali, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, costruiamo un foglio di Excel che richieda in ingresso i valori di n e di k e che calcoli e mostri i valori del primo e del secondo membro della formula.
Proviamo il foglio con i valori $n = 10$ e $k = 6$.

- Entriamo in ambiente Excel e apriamo un nuovo foglio.
- Per indicare dove immettere i dati e leggere i risultati, mettiamo dei bordi alle celle C10 e C12 e scriviamo delle didascalie come vediamo in figura 1.
- Inseriamo facoltativamente la formula della legge scrivendola con lo strumento *Microsoft Equation* che troviamo nel gruppo *Oggetto* della scheda *Inserisci*.
- Poniamo un controllo ai dati d'ingresso digitando =SE(C12 > C10; "Dati non corretti"; "Ok") in B14.
- Per calcolare il primo membro digitiamo =SE(B14="Ok"; COMBINAZIONE(C10; C12); "") in C16.
- Per calcolare il secondo membro digitiamo =SE(B14="Ok"; FATTORIALE(C10)/(FATTORIALE(C12)*FATTORIALE(C10-C12)); "") in C18.
- Immettiamo rispettivamente 10 e 6 nelle celle C10 e C12, i valori per n e per k, e vediamo il foglio come in figura 1.



▶ Figura 1

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 9 esercitazioni in più

Esercitazioni

Costruisci i fogli che, dopo aver letto i valori di n e di k, verifichino le seguenti identità.

1 $(n-k) \cdot D_{n,k} = D_{n,k+1}$

2 $\dfrac{D_{n+1,k} - D_{n,k-1}}{n^2} = D_{n-1,k-2}$

3 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

4 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Dopo aver analizzato ognuno dei seguenti problemi, costruisci un foglio che permetta l'ingresso dei dati, calcoli e mostri i risultati. Prova il foglio nei casi proposti. Sul quaderno scrivi i gruppi corrispondenti al caso a).

5 Quante colonne del totocalcio devi formare per ottenere d doppie e t triple? a) $d = 2$ e $t = 1$; b) $d = 0$ e $t = 14$; c) $d = 9$ e $t = 6$. [a) 12; b) 4 782 969; c) non ha significato]

6 Calcola in quanti modi si possono porre in fila n giocatori presi da una squadra di calcio, poi in quanti modi se supponi che p portieri precedano d difensori e questi a attaccanti. a) $n = 4$, $p = 1$, $d = 2$, $a = 1$; b) $n = 8$, $p = 2$, $d = 3$, $a = 3$; c) $n = 11$, $p = 1$, $d = 5$, $a = 5$. [a) 24, 2; b) 40 320, 72; c) 39 916 800, 14 400]

LA TEORIA IN SINTESI
IL CALCOLO COMBINATORIO

1. I RAGGRUPPAMENTI

- Dati gli insiemi A con n elementi, B con m elementi, C con k elementi, …, il numero dei raggruppamenti che si possono formare prendendo il primo elemento in A, il secondo in B, il terzo in C, … è:

  $$\boldsymbol{n \cdot m \cdot k \cdot \ldots}$$

2. LE DISPOSIZIONI SEMPLICI

- **Disposizioni semplici di n elementi distinti di classe k (con $k \leq n$)**: sono tutti i possibili gruppi che si possono formare con k elementi, presi fra gli n, tali che ogni gruppo è diverso dagli altri per gli elementi contenuti o per il loro ordine.

  $$\boldsymbol{D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}.$$

  ESEMPIO: In quanti modi si possono accostare sette palline di colore diverso in gruppi da quattro?

  $$D_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

3. LE DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

- **Disposizioni con ripetizione di n elementi distinti di classe k (con $k \gtreqless n$)**: sono tutti i possibili gruppi che si possono formare con k elementi, anche ripetuti, presi fra gli n, tali che ogni gruppo è diverso dagli altri per gli elementi contenuti o per il loro ordine.

  $$\boldsymbol{D'_{n,k} = n^k}.$$

  ESEMPIO: Quante colonne del totocalcio possiamo compilare con i simboli 1, 2, X?

  $$D'_{3,14} = 3^{14} = 4\,782\,969.$$

4. LE PERMUTAZIONI SEMPLICI

- **Permutazioni semplici di n elementi distinti**: sono tutti i gruppi formati dagli n elementi che differiscono per il loro ordine.

  $$\boldsymbol{P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!}.$$

  La definizione di $n!$ si trova nel paragrafo 6.

  ESEMPIO: In quanti modi si possono disporre sei persone in fila?

  $$P_6 = 6! = 720.$$

5. LE PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

- **Permutazioni di n elementi di cui h, k, … ripetuti**: sono i gruppi formati dagli n elementi che differiscono per l'ordine degli elementi distinti e il posto occupato dagli elementi ripetuti.

$$P_n^{(h,k,\dots)} = \frac{n!}{h! \cdot k! \cdot \dots}.$$

ESEMPIO: In quanti modi, lanciando consecutivamente una moneta per sei volte, possono uscire due teste e quattro croci?

$$P_6^{(2,\,4)} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{720}{2 \cdot 24} = 15.$$

6. LA FUNZIONE *n*!

- La **funzione $n!$** è così definita:

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 & \text{se } n \geq 2 \\ 1 & \text{se } n = 0 \text{ o } n = 1. \end{cases}$$

- **Proprietà della funzione $n!$**:

$$n! = n \cdot (n-1)!,$$

$$(n+1)! - n! = n \cdot n!.$$

- **Definizione ricorsiva di $n!$**:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{cases}$$

- $D_{n,k}$ può essere espresso mediante fattoriali:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

7. LE COMBINAZIONI SEMPLICI

- **Combinazioni semplici di n elementi distinti di classe k (con $k \leq n$)**: sono tutti i possibili gruppi che si possono formare con k elementi, presi fra gli n, e tali che ogni gruppo è diverso dagli altri per almeno un elemento contenuto.

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

$C_{n,k}$ è chiamato **numero combinatorio** e può essere indicato con il simbolo $\binom{n}{k}$, che si legge «enne su kappa».

ESEMPIO: In quanti modi possiamo scegliere tre aperitivi, da offrire a una festa, fra sette a disposizione?

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35.$$

- **Legge dei tre fattoriali**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

ESEMPIO: $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!}.$

- **Legge delle classi complementari**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

ESEMPIO: $\binom{9}{7} = \binom{9}{2}$.

8. LE COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

- **Combinazioni con ripetizione di n elementi distinti di classe k (con $k \gtreqless n$)**: sono tutti i possibili gruppi che si possono formare con k elementi, presi fra gli n; ogni elemento di un gruppo può essere ripetuto fino a k volte, non interessa l'ordine in cui gli elementi si presentano e in ciascun gruppo è diverso il numero delle volte in cui un elemento compare.

$$\boldsymbol{C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)\cdot(n+k-2)\cdot\ldots\cdot(n+1)\cdot n}{k!}}.$$

ESEMPIO: In quanti modi diversi possiamo distribuire tre oggetti identici in quattro scatole?

$$C'_{4,3} = C_{4+3-1,3} = C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!} = 20.$$

9. I COEFFICIENTI BINOMIALI

- $\binom{n}{k}$ è chiamato **coefficiente binomiale**.

Si hanno: $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{0}{0} = 1$.

- **Formula di ricorrenza**

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\cdot\frac{n-k}{k+1}.$$

ESEMPIO: Calcoliamo $\binom{12}{6}$ sapendo che $\binom{12}{5} = 792$:

$$\binom{12}{6} = 792\cdot\frac{12-5}{5+1} = 924.$$

- **Formula di Stifel**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

ESEMPIO: $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$.

- I **coefficienti binomiali** trovano applicazione nel calcolo dello sviluppo della **potenza di un binomio**:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k.$$

ESEMPIO:

$$(x-1)^7 = \binom{7}{0}x^7 + \binom{7}{1}x^6(-1) + \binom{7}{2}x^5(-1)^2 + \binom{7}{3}x^4(-1)^3 + \binom{7}{4}x^3(-1)^4 + \binom{7}{5}x^2(-1)^5 + \binom{7}{6}x(-1)^6 + \binom{7}{7}(-1)^7 =$$

$$= x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1.$$

1. I RAGGRUPPAMENTI

▶ Teoria a pag. α2

1 **ESERCIZIO GUIDA**

Una mensa aziendale offre ai suoi dipendenti ogni giorno la possibilità di scegliere fra due primi, tre secondi e due dessert. Quanti sono i tipi di pasto che si possono costruire con i piatti offerti? Forniamo una rappresentazione della soluzione con un diagramma ad albero.

Abbiamo nell'ordine le seguenti possibilità:

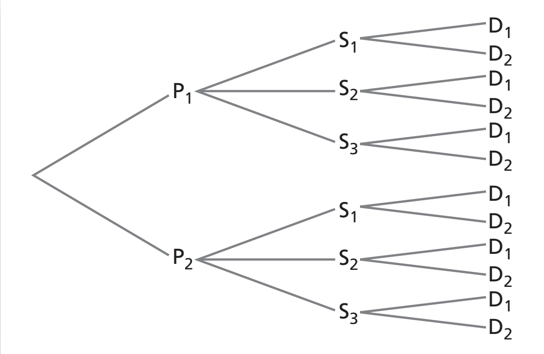
2 primi piatti,

3 secondi piatti,

2 dessert.

In totale abbiamo $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ possibilità.

Il diagramma ad albero corrispondente è quello a fianco.



2 Abbiamo cinque palline nere numerate da 1 a 5 e tre bianche numerate da 1 a 3. Quante coppie di palline possiamo ottenere con una pallina nera e una bianca? Fornisci una rappresentazione della soluzione con un diagramma ad albero. [15]

3 In una scuola di ballo sono iscritte dodici donne e sette uomini. Quante sono le possibili coppie che si possono formare? [84]

4 In tre classi quinte di una scuola ci sono rispettivamente 22, 18 e 23 alunni. Occorre mandare una rappresentanza formata da un alunno di ciascuna quinta. Quante sono le terne di studenti che è possibile formare? [9108]

5 Calcola quante sigle di tre elementi si possono formare ponendo al primo posto una delle cinque vocali, al secondo posto una delle sedici consonanti e al terzo posto una delle dieci cifre. [800]

6 Calcola quante sigle di tre elementi si possono formare ponendo al primo posto una delle cinque vocali, al secondo posto una delle sedici consonanti e al terzo posto ancora una consonante diversa da quella precedentemente collocata al secondo posto. [1200]

2. LE DISPOSIZIONI SEMPLICI

▶ Teoria a pag. α3

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

7 $D_{5,2}, D_{7,4}, D_{4,1}.$ [20, 840, 4]

8 $\dfrac{D_{8,3}-D_{4,2}}{D_{9,3}}$ $\left[\dfrac{9}{14}\right]$

9 $2-\dfrac{D_{7,3}}{D_{7,2}}+\dfrac{D_{5,2}}{D_{5,1}}$ [1]

10 $\dfrac{D_{8,4}-D_{7,3}}{7 \cdot D_{7,2}}$ [5]

11 $\dfrac{D_{6,3}}{D_{5,4}}:\dfrac{D_{5,2}}{D_{6,4}}-\dfrac{D_{11,3}}{D_{10,2}}$ [7]

12 $27 \cdot \left(\dfrac{D_{8,5}}{D_{9,4}}\right)^2+2 \cdot \dfrac{D_{5,2}}{D_{5,3}}$ [134]

13 **ESERCIZIO GUIDA**

Quanti numeri di tre cifre tutte diverse si possono costruire con gli elementi dell'insieme $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$? Quanti sono i numeri che cominciano con la cifra 8?

I gruppi che si possono formare sono:

$$D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

I gruppi di tre cifre tutte diverse che cominciano con la cifra 8 li otteniamo formando tutti i gruppi di classe 2 senza utilizzare questa cifra, e poi ponendo questa davanti a ognuno di essi:

$$D_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12.$$

Oppure applichiamo il «metodo delle possibilità», tenendo conto che al primo posto abbiamo una sola possibilità data dalla cifra 8: $1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$.

14 Un'azienda deve assumere tre diplomati da collocare in tre diversi uffici: amministrazione, contabilità, commerciale. Ha a disposizione venti curriculum di persone aventi i requisiti necessari. In quanti modi può essere fatta la scelta? [6840]

15 In quanti modi diversi otto persone possono sedersi in cinque posti? [6720]

16 Calcola quanti numeri di quattro cifre diverse si possono formare con le nove cifre dell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. [3024]

17 Calcola quante sigle di cinque elementi, tutti diversi, si possono formare con le ventuno lettere dell'alfabeto e le dieci cifre decimali, sapendo che i primi tre posti devono essere occupati dalle lettere e gli ultimi due dalle cifre. [718 200]

18 A un torneo di calcio partecipano sedici squadre. Quante partite si devono effettuare fra girone di andata e di ritorno, sapendo che tutte le squadre si devono incontrare? [240]

19 Avendo a disposizione sei atleti per la gara di staffetta 4×100, in quanti modi possiamo stabilire la successione ordinata degli atleti? [360]

20 Quante parole, anche prive di significato, si possono scrivere con tre lettere diverse dell'insieme $A = \{a, e, c, d, n\}$? [60]

21 Una polisportiva ha organizzato una lotteria benefica con cinque premi diversi in valore. Ha venduto ottanta biglietti. In quanti modi si possono avere i vincitori? [2 884 801 920]

22 Quanti numeri pari di tre cifre diverse si possono scrivere utilizzando le cifre dell'insieme $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$? [12]

23 Quanti numeri di cinque cifre diverse si possono formare con le dieci cifre decimali?
(Suggerimento. Tieni conto che i numeri non possono iniziare con 0.) [27 216]

24 Un allenatore di calcio ha a disposizione quattro attaccanti, sei centrocampisti e cinque difensori. Avendo scelto il modulo 4-3-3 (che prevede quattro difensori, tre centrocampisti e tre attaccanti), calcola quante formazioni potrebbe schierare, sapendo che ha a disposizione anche tre portieri. [1 036 800]

25 Calcola quante parole, anche prive di significato, si possono scrivere con quattro lettere diverse dell'insieme $A = \{a, e, i, o, m, r, t\}$, che comincino tutte con il bisillabo «*me*». [20]

Le identità e le equazioni con le disposizioni

Le identità

26 ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo l'identità $(n-k)\cdot D_{n,k} = D_{n,k+1}$, $k < n$.

Applichiamo la formula delle disposizioni.

Primo membro:

$$(n-k)\cdot D_{n,k} = (n-k)\cdot[n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)] = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k).$$

Secondo membro:

$$D_{n,k+1} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot[n-(k+1)+1] = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k-1+1) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k) =$$
$$= n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k),$$

in quanto il termine precedente a $n-k$ è $n-k+1$.

Poiché i due membri, semplificati, sono uguali, l'uguaglianza è un'identità.

Verifica le seguenti identità.

27 $n\cdot D_{n-1,k} = (n-k)\cdot D_{n,k}$

28 $(n-k)\cdot D_{n,k-1} = D_{n,k} - D_{n,k-1}$

29 $D_{n,k} - D_{n-1,k} = k\cdot D_{n-1,k-1}$

30 $\dfrac{D_{n+1,k} - D_{n,k-1}}{n^2} = D_{n-1,k-2}$

Le equazioni

31 ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione $3\cdot D_{x,2} = 2\cdot D_{x+1,2}$.

Determiniamo la condizione per l'incognita. Deve essere $x \in \mathbb{N}$ (escluso 0) e:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x+1 \geq 2 \end{cases} \rightarrow \quad x \geq 2.$$

Applichiamo la formula $D_{n,k} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ e svolgiamo i calcoli.

$$3x(x-1) = 2(x+1)x \quad \rightarrow \quad x[3(x-1) - 2(x+1)] = 0 \quad \rightarrow \quad x(x-5) = 0.$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto: $x = 0 \vee x = 5$.

Tenuto conto della condizione iniziale ($x \geq 2$), l'equazione iniziale ha per soluzione $x = 5$.

Risolvi le seguenti equazioni.

32 $D_{x,3} - D_{x-2,3} = 384$ [10]

33 $D_{x,3} - x^3 = D_{x,2} - 1$ [$\nexists x \in \mathbb{N}$]

34 $2\cdot D_{x-1,3} - D_{x+1,3} = 2\cdot D_{x,2}$ [12]

35 $D_{x+1,3} = 2\cdot D_{x,3}$ [5]

36 $6\cdot D_{x,2} + D_{x-1,3} = 2\cdot D_{x,3}$ [6]

37 $x^3 - 2x\cdot D_{x-1,2} = 2(24-x) - D_{x,3}$ [4]

3. LE DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

Teoria a pag. $\alpha 5$

Calcola le seguenti espressioni.

38 $D'_{6,2}$; $D'_{2,5} + D'_{4,3}$. [36; 96]

39 $D'_{3,3} + \frac{1}{2} D_{4,2} - D'_{2,3}$ [25]

40 **ESERCIZIO GUIDA**

Si lanciano due dadi, uno dopo l'altro. Quanti sono i casi possibili? Quanti sono i casi in cui entrambe le facce presentano numeri pari?

Rispondiamo alla prima domanda. In ogni dado ci sono 6 numeri e in un lancio lo stesso numero si può presentare in entrambi i dadi. Abbiamo quindi delle disposizioni con ripetizione e dobbiamo applicare la formula $D'_{n,k} = n^k$, dove $n = 6$ e $k = 2$. Tutti i casi che si possono presentare sono:

$$D'_{6,2} = 6^2 = 36.$$

Per la seconda domanda, abbiamo $n = 3$ e $k = 2$. I casi in cui le due facce sono entrambe pari sono:

$$D'_{3,2} = 3^2 = 9.$$

41 Quanti numeri di tre cifre, anche ripetute, si possono formare con gli elementi dell'insieme $A = \{3, 5, 6, 7, 8\}$? [125]

42 Quanti numeri di tre cifre, anche ripetute, si possono formare con gli elementi dell'insieme $A = \{0, 3, 5, 6, 7, 8\}$? [180]

43 Si memorizzano 12 canzoni su un dispositivo MP3. Se ne vogliono ascoltare tre, scegliendone a caso una alla volta. Quante sono le possibili terne di canzoni? [1728]

44 In un'urna abbiamo dieci palline numerate da 1 a 10. Per tre volte si estrae una pallina, rimettendola ogni volta dentro l'urna. Calcola le possibili terne ordinate che si possono ottenere. Calcola anche le possibili terne ordinate nel caso in cui la pallina estratta non venga rimessa nell'urna. [1000; 720]

45 Quanti codici a cinque cifre si possono formare con le cifre decimali da 1 a 9? [59 049]

46 Trova quanti codici a cinque cifre si possono formare con le cifre decimali da 0 a 9 sapendo che la prima cifra non può essere 0. [90 000]

47 Determina quante sigle di cinque elementi si possono formare con le 21 lettere dell'alfabeto e le 10 cifre decimali, sapendo che i primi tre posti devono essere occupati dalle lettere e gli ultimi due dalle cifre. [926 100]

48 Quanti numeri pari di 3 cifre si possono scrivere utilizzando le cifre dell'insieme $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$? [25]

49 Calcola quante sigle di cinque elementi che cominciano con la lettera A si possono formare con le ventuno lettere dell'alfabeto e le dieci cifre decimali, sapendo che i primi tre posti devono essere occupati dalle lettere e gli ultimi due dalle cifre. [44 100]

50 Quanti numeri pari di 3 cifre si possono scrivere utilizzando le cifre dell'insieme $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$? [72]

51 In un'urna abbiamo dieci palline numerate da 1 a 10. Calcola quante terne ordinate si possono ottenere estraendo una pallina per tre volte consecutive, rimettendola ogni volta nell'urna dopo l'estrazione, tali che il primo numero sia divisibile per tre. [300]

Le equazioni con le disposizioni con ripetizione

Risolvi le seguenti equazioni.

52 $D'_{x,3} = D_{x,3} + 40$ [4]

53 $D'_{x,3} = D_{x+1,3} + 4 - x$ [2]

54 $D_{x,3} = D'_{x,3} - 19x$ [7]

55 $\dfrac{D'_{x,2} + 8x}{D_{x,2}} = 4$ [4]

56 $D'_{x+1,2} = 2D_{x,2} - 2(x^2 - 3)$ [$\nexists x \in \mathbb{N}$]

4. LE PERMUTAZIONI SEMPLICI

Teoria a pag. α6

Calcola le seguenti espressioni.

57 $P_5;\ P_3;\ \dfrac{P_6 - P_5}{5P_4}$. [120; 6; 5]

58 $\dfrac{8!}{2!\,4!};\ 7! - 6!;\ \dfrac{7!}{6!}$. [840; 4320; 7]

59 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo in quanti modi si possono mettere in fila tre bambini e quattro bambine nel caso in cui non importi l'ordine e nel caso in cui prima vi siano tutte le femmine e poi tutti i maschi.

Se non importa l'ordine, non c'è distinzione fra bambini e bambine: dobbiamo considerare le permutazioni di 7 elementi:

$$P_7 = 7! = 5040.$$

Nel caso in cui il gruppo delle femmine preceda quello dei maschi dobbiamo considerare che a ogni permutazione semplice del primo gruppo si associa una permutazione semplice del secondo gruppo. Il numero delle possibilità è:

$$P_4 \cdot P_3 = 4! \cdot 3! = 24 \cdot 6 = 144.$$

60 In una gara partecipano otto concorrenti. In quanti modi può presentarsi la classifica finale? [40 320]

61 In quanti modi si possono distribuire nove premi a nove bambini? [362 880]

62 Quanti numeri di dieci cifre diverse si possono scrivere con le dieci cifre decimali? [3 265 920]

63 Calcola quante sigle, di sette elementi, tutti diversi, si possono scrivere con le cifre dell'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ e le lettere dell'insieme $B = \{a, b, c, d\}$, sapendo che le cifre precedono le lettere. [144]

64 Calcola in quanti modi si possono sistemare in fila cinque bambine e quattro bambini se tutte le bambine vogliono stare vicine tra loro e lo stesso vale per tutti i bambini. [5760]

65 Calcola quanti anagrammi, anche senza significato, si possono fare con le parole: MONTE, STORIA e RESIDUO. [120; 720; 5040]

66 A un congresso nove persone devono sedere intorno a un tavolo rotondo. Calcola in quanti modi le persone possono prendere posto. Se le stesse persone attendono in fila davanti all'ingresso della sala, in quanti modi si possono disporre? [40 320; 362 880]

Le identità e le equazioni con le permutazioni semplici

Le identità

67 ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo l'identità $P_n = n \cdot D_{n-1,n-2}$.

Sostituiamo ai simboli le espressioni relative utilizzando $P_n = n!$ e per le disposizioni la formula

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Primo membro: $P_n = n!$.

Secondo membro:

$$n \cdot D_{n-1,n-2} = n \cdot [(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-1-n+2+1)] = n \cdot [(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2] = n!.$$

Entrambi i membri sono uguali a $n!$, quindi l'identità è verificata.

Verifica le seguenti identità.

68 $D_{n+1,3} = P_{n+1} : P_{n-2}$

69 $P_n + P_{n-1} + P_{n-2} = n^2 \cdot P_{n-2}$

70 $n \cdot P_n = P_{n+1} - P_n$

71 $P_n = D_{n,k} \cdot P_{n-k}$

Le equazioni

72 ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione $P_{x+1} = 6 \cdot P_{x-1}$.

Poniamo la condizione di esistenza dei due membri dell'equazione:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 1 \end{cases} \rightarrow x \geq 1 \text{ e } x \in \mathbb{N}.$$

Esprimiamo i simboli, utilizzando la formula $P_x = x!$:

$$P_{x+1} = (x+1)!,$$
$$P_{x-1} = (x-1)!.$$

Sostituiamo nell'equazione di partenza e sviluppiamo i calcoli:

$$(x+1)! = 6 \cdot (x-1)! \rightarrow (x+1) \cdot x \cdot (x-1)! = 6 \cdot (x-1)!.$$

$(x-1)! \neq 0$, quindi dividiamo entrambi i membri per $(x-1)!$, ottenendo:

$$(x+1) \cdot x = 6 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = -3 \vee x = 2.$$

Solo $x = 2$ è accettabile, data la condizione di esistenza $x \geq 1$.

Risolvi le seguenti equazioni.

73 $P_x = 30 \cdot P_{x-2}$ [6]

74 $P_x - 20 \cdot P_{x-2} = 0$ [5]

75 $P_{x+1} - P_x = 0$ [0]

76 $P_{x-1} = 6 \cdot P_{x-3}$ [4]

5. LE PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

▶ Teoria a pag. α8

77 **ESERCIZIO GUIDA**

Abbiamo dieci palline di cui cinque nere, tre rosse, due gialle. Calcoliamo:
a) in quanti modi si possono disporre in fila;
b) quante sono le file nelle quali le palline gialle occupano i primi due posti;
c) in quanti modi si possono disporre in maniera che le palline di uno stesso colore siano tutte vicine.

a) Sono le permutazioni di 10 oggetti con 5, 3 e 2 oggetti ripetuti:

$$P_{10}^{(5,3,2)} = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{3\,628\,800}{120 \cdot 6 \cdot 2} = 2520.$$

b) Sono tutte le permutazioni di 8 oggetti con 5 e 3 oggetti ripetuti che si accostano alle due palline gialle che occupano i primi due posti:

$$P_{8}^{(5,3)} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{40\,320}{120 \cdot 6} = 56.$$

c) Sono tutte le permutazioni semplici che possiamo fare con i gruppi dei tre colori:

$$P_3 = 3! = 6.$$

78 Calcola quanti anagrammi, anche senza significato, si possono fare con le parole: MENTE, STESSA e TRATTATIVA. [60; 120; 25 200]

79 Una moneta viene lanciata otto volte. In quanti modi si può presentare una successione che contiene sei teste e due croci? [28]

80 In uno spettacolo, sul palcoscenico si devono disporre in fila sei ballerine e quattro ballerini. In quanti modi si possono disporre gli artisti, dovendo solo distinguere le posizioni di maschi e femmine? [210]

81 A una cordata partecipano otto alpinisti, di cui cinque sono uomini e tre sono donne. In quanti modi si possono disporre gli alpinisti, dovendo solo distinguere le posizioni di maschi e femmine e sapendo che il capo della cordata deve essere un uomo? [35]

82 Quanti anagrammi, anche senza significato, si possono formare con le lettere della parola CARTELLA? Quanti di essi iniziano e finiscono per A? Quanti iniziano per CE? [10 080; 360; 180]

83 Quanti sono gli anagrammi, anche privi di significato, della parola CIOCCOLATA? Quanti finiscono per ATA? Quanti iniziano con una consonante? [151 200; 420; 75 600]

6. LA FUNZIONE $n!$

Teoria a pag. $\alpha 9$

84 VERO O FALSO?

a) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8!$ V F

b) $\frac{10!}{5!} = 2!$ V F

c) $\frac{7!}{7} = 6!$ V F

d) $\frac{12!}{3!} = 4!$ V F

e) $\frac{290!}{289!} = 290$ V F

85 VERO O FALSO?

a) $9! - 8! = 1! = 1$ V F

b) $8! - 7! = 7 \cdot 7!$ V F

c) $\frac{9!}{9} - 8! = 0! = 1$ V F

d) $\frac{(n+2)!}{n+2} = (n+1)!$ V F

e) $D_{5,3} = \frac{5!}{2!}$ V F

Le identità, le equazioni e le disequazioni con $n!$

Le identità

86 ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo l'identità $2n! + (n+1)! = (n+3) \cdot n!$.

Primo membro:
utilizzando la relazione $n! = n \cdot (n-1)!$ e raccogliendo poi $n!$, otteniamo

$$2n! + (n+1)! = 2n! + (n+1) \cdot n! = (2+n+1) \cdot n! = (n+3) \cdot n!.$$

Essendo il primo membro uguale al secondo, l'identità è verificata.

Verifica le seguenti identità.

87 $n \cdot n! - (n+1)! = -n!$

88 $(n+1)^2 \cdot n! + (n+1)! = (n+2)!$

89 $\frac{n!}{(n-2)!} = n \cdot (n-1)$

90 $n! + (n+1)! + (n+2)! = n! \cdot (n+2)^2$

91 $D_{n,k} - k \cdot D_{n-1,k-1} = D_{n-1,k}$ (Suggerimento. Per le disposizioni utilizza la formula con i fattoriali.)

Le equazioni e le disequazioni

92 ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione $10(x-1)! = 5x!$.

Oltre ad appartenere all'insieme dei numeri naturali, x deve soddisfare la condizione:

$$x - 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 1, \text{ con } x \in \mathbb{N}.$$

Utilizzando la relazione $n! = n \cdot (n-1)!$, dall'equazione iniziale otteniamo:

$$10(x-1)! = 5x(x-1).$$

Poiché $(x-1)! \neq 0$, possiamo dividere entrambi i membri per $(x-1)!$, ottenendo:

$$10 = 5x \quad \rightarrow \quad 10 - 5x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2.$$

La soluzione è accettabile perché verifica la condizione iniziale ($x \geq 1$).

Risolvi le seguenti equazioni.

93 $2(x+1)! = 4x!$ [1]

94 $x! = 6(x-2)!$ [3]

95 $x! + 7(x-2)! = 0$ [$\nexists x \in \mathbb{N}$]

96 $(x+1)! - x! = 2x!$ [2]

Risolvi le seguenti disequazioni.

97 $2(x+1)! > x!$ [$\forall x \in \mathbb{N}$]

98 $\frac{1}{2}x! > (x-1)!$ [$x \in \mathbb{N}, x > 2$]

99 $(x+1)! + 5x! < 3x!$ [$\nexists x \in \mathbb{N}$]

100 $x! \leq 6(x-2)!$ [$x = 2, x = 3$]

101 $(x-1)! \geq 20(x-3)!$ [$x \in \mathbb{N}, x \geq 6$]

102 $D_{x,2} > \frac{x!}{(x-1)!}$ [$x \in \mathbb{N}, x > 2$]

7. LE COMBINAZIONI SEMPLICI

Teoria a pag. α12

103 **VERO O FALSO?**

a) $C_{10,4} = \frac{10!}{6! \cdot 4!}$ V F

b) $C_{9,7} = C_{9,2}$ V F

c) $C_{8,5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5!}$ V F

d) $C_{11,4} = \binom{11}{4} = \frac{11!}{4!}$ V F

104 Calcola il valore dell'espressione:

$$C_{9,2} - P_3 + 2 \cdot \frac{D_{5,3}}{P_4}.$$ [35]

105 Calcola nel modo più rapido le seguenti espressioni:

$$C_{100,97}; \quad \binom{15}{6}; \quad \binom{70}{65}; \quad C_{87,85}.$$

106 **ESERCIZIO GUIDA**

Un'urna contiene nove palline numerate di cui sei rosse e tre bianche. Si estraggono contemporaneamente cinque palline. Calcoliamo:
a) quanti gruppi diversi di cinque palline si possono avere;
b) quanti di cinque palline tutte rosse;
c) quanti di quattro rosse e una bianca;
d) quanti di tre rosse e due bianche;
e) quanti di due rosse e tre bianche.

a) Poiché non interessa l'ordine, dobbiamo calcolare le combinazioni semplici che si possono fare con le nove palline prese cinque alla volta:

$$C_{9,5} = \binom{9}{5} = \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = 126.$$

b) Dobbiamo calcolare le combinazioni semplici che si possono fare con le sei palline rosse prese cinque alla volta:

$$C_{6,5} = \binom{6}{5} = \binom{6}{1} = 6.$$

c), d), e) Otteniamo il numero di tutti i gruppi di $k = 4, 3, 2$ palline rosse e $(5 - k) = 1, 2, 3$ palline bianche con il prodotto delle singole combinazioni relative a ciascun colore:

c) $C_{6,4} \cdot C_{3,1} = \binom{6}{4} \cdot \binom{3}{1} = \binom{6}{2}\binom{3}{1} = \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot 3 = 45;$

d) $C_{6,3} \cdot C_{3,2} = \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot 3 = 60;$

e) $C_{6,2} \cdot C_{3,3} = \binom{6}{2} \cdot \binom{3}{3} = \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot 1 = 15.$

Osservazione. Il numero totale dei raggruppamenti di tipo b), c), d) ed e) è 126, ossia è uguale al numero delle combinazioni di nove palline prese cinque alla volta, tipo a). Questo perché non ci sono ulteriori possibilità per le combinazioni dei colori.

107 Quante cinquine si possono fare con i novanta numeri del lotto? [43 949 268]

108 Quanti terni e quanti ambi si possono fare con i novanta numeri del lotto? [117 480; 4005]

109 Calcola quante sono le cinquine che contengono due numeri prefissati. [109 736]

110 Calcola in quanti modi si possono estrarre quattro carte da un mazzo da quaranta. [91 390]

111 In quanti modi si possono estrarre cinque carte di fiori da un mazzo di cinquantadue carte? [1287]

112 In quanti modi si possono estrarre cinque carte nere da un mazzo di cinquantadue carte? [65 780]

113 Calcola in quanti modi si possono estrarre cinque carte di fiori o cinque carte di picche da un mazzo di cinquantadue carte. [2574]

114 Calcola quanti sono i sottoinsiemi di quattro elementi di un insieme costituito da sei. [15]

115 In quanti modi si può formare un campione di dieci persone da intervistare in un gruppo di trenta? [30 045 015]

116 A una riunione partecipano sei persone che si stringono la mano reciprocamente. Calcola quante strette di mano le persone si scambiano. [15]

117 In quanti modi diversi può essere formata una rappresentanza di tre alunni di una classe di venti studenti? [1140]

118 Un ragazzo ha una somma tale da acquistare cinque CD. Avendone scelti due, è indeciso per gli altri tre fra otto CD diversi. In quanti modi diversi può effettuare la scelta? [56]

119 Calcola quante sono le diagonali di un quadrilatero. [2]

120 Calcola quante sono le diagonali di un pentagono. [5]

121 Calcola in quanti modi diversi si possono collocare quattro maglioni in sei cassetti affinché al massimo in ogni cassetto ci sia un maglione. [15]

Le equazioni con le combinazioni semplici

Risolvi le seguenti equazioni.

122 $C_{x,3} = C_{x-1,2}$ [3]

123 $C_{x+2,3} = 3C_{x+1,2}$ [7]

124 $C_{x-1,2} = 1$ [3]

125 $P_3 \cdot C_{x-1,3} = D_{x-2,4}$ [7]

126 $C_{x+1,3} = \frac{x^3}{6} - 2$ [12]

127 $3C_{x+1,2} = 4C_{x,2}$ [7]

128 $\frac{1}{3} \cdot C_{x,4} = 5 \cdot \frac{C_{x-1,3}}{P_3}$ [10]

129 $C_{x,2} - C_{x-1,2} = D_{x-1,2}$ [3]

8. LE COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

▶ Teoria a pag. α13

130 **ESERCIZIO GUIDA**

Lanciando contemporaneamente quattro dadi uguali, quante sono le combinazioni con cui si possono presentare le sei facce?

Scriviamo alcune combinazioni:

1 1 1 2
2 1 2 2
3 3 6 6
3 4 5 6
…

Ogni gruppo si distingue dagli altri per i numeri contenuti e per il diverso numero di volte col quale compare lo stesso numero (al massimo quattro volte):

$$C'_{6,4} = \binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = 126.$$

131 In quanti modi diversi possiamo distribuire otto tavolette di cioccolato a cinque bambini, sapendo che possiamo assegnare a qualche bambino più di una tavoletta? [495]

132 Calcola in quanti modi diversi possiamo distribuire quattro tavolette di cioccolato a sei bambini tenendo presente la possibilità di assegnare a qualche bambino più di una tavoletta. [126]

133 In quanti modi possiamo collocare sei palline uguali in quattro urne? [84]

134 In quanti modi possiamo mettere sei palline uguali in quattro urne in modo che nessuna risulti vuota? [10]

9. I COEFFICIENTI BINOMIALI

▶ Teoria a pag. α14

135 **VERO O FALSO?**

a) $\binom{4}{0} = 4$ V F

b) $\binom{30}{1} = 1$ V F

c) $\binom{6}{6} = \binom{6}{0}$ V F

d) $\binom{20}{16} = \binom{20}{15} \cdot \frac{5}{16}$ V F

136 Calcola $\binom{16}{5}$, sapendo che $\binom{16}{4} = 1820$.

137 Calcola $\binom{n+1}{n}$ e $\binom{n}{n-2}$.

Calcola le seguenti espressioni.

138 $$\frac{\binom{10}{7}+\binom{9}{0}+\binom{9}{1}}{\binom{0}{0}}$$ [130]

139 $$\frac{\binom{8}{8}+\binom{8}{0}+\binom{8}{1}}{\binom{9}{1}+1}$$ [1]

Le identità e le equazioni con i coefficienti binomiali

Le identità

140 ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo l'identità $\frac{n+1}{k}\cdot\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$.

Sostituiamo utilizzando la legge dei tre fattoriali $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Primo membro:

$$\frac{n+1}{k}\cdot\frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k+1)!}=$$

Essendo $(n+1)\cdot n! = (n+1)!$ e $k(k-1)! = k!$:

$$=\frac{(n+1)!}{k!\cdot(n-k+1)!}.$$

Secondo membro:

$$\frac{(n+1)!}{k!\cdot(n-k+1)!}.$$

Poiché per entrambi i membri abbiamo ottenuto la stessa espressione, l'identità è verificata.

Verifica le seguenti identità.

141 $\binom{n+1}{k}=\frac{k+1}{n+2}\cdot\binom{n+2}{k+1}$

142 $k\cdot\binom{n-1}{k}=(n-1)\cdot\binom{n-2}{k-1}$

143 $\binom{n+1}{2}=n^2-\binom{n}{2}$

144 $\binom{n}{k+1}=\frac{n}{k+1}\cdot\binom{n-1}{k}$

145 $\binom{n}{k}=\frac{k+1}{n+1}\cdot\binom{n+1}{k+1}$

146 $k\cdot\binom{n}{k}+(k-1)\cdot\binom{n}{k-1}=n\cdot\binom{n}{k-1}$

147 $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\frac{n+1}{n-k+1}\cdot\binom{n}{k}$

148 $\frac{1}{n!}\cdot\binom{n+1}{k+1}-\frac{1}{k!\,(n-k)!}=\binom{n-1}{k}\cdot\frac{1}{(n-1)!\,(k+1)}$

149 $\binom{n+1}{k}\cdot\frac{k}{n-k+2}=\binom{n+1}{k-1}$

150 $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$ (formula di Stifel)

Le equazioni

151 ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione $6\cdot\binom{x}{x-2}-\binom{x+1}{x-2}=2\cdot\binom{x}{x-4}$.

Osserviamo che le condizioni $x \geq x - 2$, $x + 1 \geq x - 2$, $x \geq x - 4$ sono sempre verificate. Quindi le condizioni per l'incognita da considerare sono:

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 2 \\ x \geq 4 \end{cases} \rightarrow x \geq 4, \text{ con } x \in \mathbb{N}.$$

Applichiamo ai coefficienti binomiali la legge delle classi complementari $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$:

$$\binom{x}{x-2} = \binom{x}{x-x+2} = \binom{x}{2}, \binom{x+1}{x-2} = \binom{x+1}{x+1-x+2} = \binom{x+1}{3},$$

$$\binom{x}{x-4} = \binom{x}{x-x+4} = \binom{x}{4}.$$

Quindi:

$$6 \cdot \binom{x}{2} - \binom{x+1}{3} = 2 \cdot \binom{x}{4}.$$

Utilizziamo la formula $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$:

$$6\frac{x(x-1)}{2!} - \frac{(x+1)x(x-1)}{3!} = 2\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}.$$

Calcoliamo i fattoriali a denominatore:

$$6\frac{x(x-1)}{2} - \frac{(x+1)x(x-1)}{6} = 2\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$$

$$3x(x-1) - \frac{x(x+1)(x-1)}{6} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{12}.$$

Moltiplichiamo per 12 entrambi i membri dell'equazione e raccogliamo $x(x-1)$:

$$x(x-1)[36 - 2(x+1) - (x-2)(x-3)] = 0$$

$$x(x-1)(36 - 2x - 2 - x^2 + 5x - 6) = 0 \quad \rightarrow \quad x(x-1)(-x^2 + 3x + 28) = 0.$$

Applichiamo la legge di annullamento del prodotto e otteniamo le soluzioni:

$$x = 0, x = 1, x = -4, x = 7.$$

Solo $x = 7$ è accettabile, data la condizione iniziale $x \geq 4$.

Risolvi le seguenti equazioni.

152 $3 \cdot \binom{x}{3} = x \cdot \binom{x-1}{4}$ [7]

153 $\binom{x}{2} = \binom{x}{3}$ [5]

154 $\binom{x+1}{3} = \binom{x}{2}$ [2]

155 $3 \cdot \binom{x-3}{3} + 2\binom{x}{2} = x^2 - \frac{x}{2}$ [6]

156 $\frac{7}{3!} \cdot (x^2 + x) = \binom{x+2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \binom{x+1}{2}$ [4]

157 $\binom{x-1}{2} = 2 \cdot \binom{x-2}{2}$ [5]

158 $\binom{x}{x-2} = 2x$ [5]

159 $\binom{x}{x-3} = \frac{10}{3} \cdot \binom{x}{5}$ [6]

160 $3 \cdot \binom{x}{2} - \binom{x}{x-3} = \binom{x+1}{3}$ [5]

161 $\binom{x+1}{4} - \frac{3}{2} \cdot \binom{x-1}{3} = \binom{x}{3}$ [6]

162 $\binom{x+1}{x-2} = \frac{5}{2}x$ [4]

163 $2 \cdot \binom{x+1}{3} - 12 \cdot \binom{x}{x-2} = \binom{x}{3}$ [32]

Le potenze di un binomio

164 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo lo sviluppo della potenza: $(x^2 - 2y)^4$.

Applichiamo la formula $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$:

$$(x^2-2y)^4 = \binom{4}{0}(x^2)^4(-2y)^0 + \binom{4}{1}(x^2)^3(-2y)^1 + \binom{4}{2}(x^2)^2(-2y)^2 + \binom{4}{3}(x^2)^1(-2y)^3 +$$

$$+\binom{4}{4}(x^2)^0(-2y)^4 = x^8 - 8x^6y + 24x^4y^2 - 32x^2y^3 + 16y^4.$$

Calcola lo sviluppo delle seguenti potenze di binomi.

165 $(2a+3y)^3$; $(a-2b)^8$.

166 $(x^3-y^2)^5$; $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$.

167 $(2a^2+3a^3)^4$; $\left(\frac{a}{2}+x\right)^8$.

168 $(\sqrt{2}+2)^4$; $\left(\frac{1}{2}x^2-2y\right)^6$.

169 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il quarto termine dello sviluppo di $(x+2)^{10}$.

Data la formula $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$, consideriamo soltanto il termine generale $\binom{n}{k} A^{n-k} B^k$; poiché per $k=0$ si ha il primo termine, il quarto termine si ha per $k=3$. Essendo $n=10$, otteniamo:

$$\binom{10}{3} \cdot x^7 \cdot 2^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} x^7 \cdot 8 = 120x^7 \cdot 8 = 960x^7.$$

170 Calcola il quarto termine dello sviluppo di $\left(2x - \frac{1}{2}y\right)^7$. [$-70x^4y^3$]

171 Determina il terzo, il quinto e l'ottavo termine dello sviluppo di $(x-1)^9$. [$36x^7$; $126x^5$; $-36x^2$]

172 Calcola il sesto termine dello sviluppo di $(a^2+b)^8$. [$56a^6b^5$]

173 Determina n, sapendo che il coefficiente del terzo termine dello sviluppo di $(x+2y)^n$ è 60. [6]

174 Dato lo sviluppo della potenza $(a+b)^n$, determina il coefficiente del termine con parte letterale ab^8 e determina l'esponente n. [9; 9]

175 Come nell'esercizio precedente, ma considerando il termine con parte letterale a^2b^5. [21; 7]

ESERCIZI VARI Il calcolo combinatorio

TEST

176 Utilizziamo 7 lampadine colorate per creare un festone luminoso da stendere fra due pali. Le lampadine hanno tutte colore diverso tranne 3 che sono rosse. I possibili modi con cui i colori si possono susseguire sono:

A 5040.
B 840.
C 35.
D 343.
E 210.

177 Un'impresa codifica le proprie merci utilizzando tre cifre non nulle non necessariamente diverse. Il numero di merci che è possibile codificare è:

A 729.
B 6561.
C 1000.
D 720.
E 504.

178 Un codice di accesso a un sistema di sicurezza è formato da 6 cifre tutte diverse ed è escluso lo zero. Il numero totale dei possibili codici è:

A 15 120.
B 120 960.
C 151 200.
D 60 480.
E 50 400.

179 Risolvendo l'equazione $D_{x,2} + C_{x,x-2} = 45$ arrivi all'equazione di secondo grado:

A $x^2 + x - 30 = 0$.
B $x^2 - 4x - 45 = 0$.
C $x^2 - x - 30 = 0$.
D $x^2 + 4x - 45 = 0$.
E $2x^2 + 2x - 45 = 0$.

180 In how many ways can five keys be placed on a circular key ring?

A 12 B 24 C 5 D 18 E None of these.

(USA *Marywood University Mathematics Contest*, 2001)

181 Josh and nine of his friends volunteered to help clean Mr. Cramp's vacant lot. Mr. Cramp needed 2 mowers, 5 twig collectors, and 3 to rake.
In how many ways can these jobs be assigned to Josh and his friends?

A 5040
B 50,400
C 15,210
D 25,200
E 2520

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2003)

182 Il numero di parole di tre lettere, anche prive di senso, che si possono ottenere usando 10 lettere, non necessariamente tutte distinte, è uguale a:

A 1000. B $10 \cdot 9 \cdot 8$. C 999. D 100. E nessuna delle altre risposte è esatta.

(*Università di Roma, Facoltà di ingegneria, Test corso propedeutico di Matematica*)

183 Si vuole creare un gruppo di 3 statistici e 2 informatici scegliendoli tra 5 statistici e 6 informatici. Quanti gruppi diversi possiamo creare se:

a) non imponiamo alcuna condizione aggiuntiva;
b) due particolari statistici devono appartenere al gruppo;
c) un certo informatico non può essere incluso nel gruppo.

(*Università di Torino, Corso di laurea in Informatica*, 2007)

[a) 150; b) 45; c) 100]

184 TEST La polisportiva «I tropici» ha organizzato un torneo di calcio a cui partecipano 3 squadre ciascuna composta da 15 giocatori (riserve comprese) con maglie numerate da 1 a 15. La notte prima delle partite ha nevicato e per poter giocare è necessario spalare la neve dal campo. Viene deciso allora di nominare un gruppo di 3 spalatori scegliendo un giocatore per squadra in modo che non ci siano due giocatori con lo stesso numero di maglia. In quanti modi diversi può essere formato il gruppo degli spalatori?

A 48
B 455
C 1125
D 2730
E 3375

(*Olimpiadi di Matematica*, *Giochi di Archimede*, 2008)

185 Una squadra di calcio schiera 1 portiere, 5 difensori e 5 attaccanti, da scegliere tra 2 portieri, 8 difensori e 12 attaccanti.

a) Quante sono le squadre possibili?
b) Se Luca e Alex sono due attaccanti, quante sono le formazioni che contengono entrambi?

(*Università di Torino*, *Corso di laurea in Informatica*, 2007)

[a) 88 704; b) 13 440]

186 TEST Si organizza un torneo di calcetto (5 contro 5) con undici giocatori. Due partite si dicono diverse tra loro se la composizione di almeno una delle due squadre è diversa. Quante partite diverse si possono fare?

A 11 B 332 640 C 11! D 110 E 1386

(*Università di Firenze*, *Corso di laurea in Fisica*)

187 TEST Una banda di ladri vuole aprire la cassaforte di una banca. Un basista ha fatto ubriacare il direttore della banca ed è riuscito a sapere che:

a) la combinazione è formata da 5 cifre da 0 a 9;
b) la combinazione è un numero pari;
c) esattamente una delle 5 cifre della combinazione è dispari;
d) nella combinazione compaiono quattro cifre diverse, la cifra ripetuta è pari e compare in due posizioni consecutive.

Quante sono le combinazioni possibili in base a tali informazioni?

A 3150
B 4500
C 5400
D 7200
E 9000

(*Olimpiadi di Matematica*, *Gara di 2° livello*, 2008)

188 TEST In Italia le targhe automobilistiche sono composte da 2 lettere, seguite da 3 cifre e da altre 2 lettere. Nel paese di Ailati le cose vanno alla rovescia e le targhe sono composte da 2 cifre, seguite da 3 lettere e da altre 2 cifre. Supponendo che in entrambi i paesi si usino 10 cifre e 22 lettere (I, O, U, Q non sono utilizzate), determinare la differenza tra il numero di tutte le targhe possibili nei due paesi.

A 0
B $12 \cdot 10^3 \cdot 22^3$
C $(22^2 - 10^2)^2 - (22^3 - 10^3)$
D $12 \cdot 3 \cdot 22 \cdot 3 \cdot 10$
E $4^{10} \cdot 3^{10} \cdot (4^{12} - 3^{12})$

(*Olimpiadi di Matematica*, *Gara di 2° livello*, 2003)

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

189 $\dfrac{D_{8,4}}{D_{8,3}} + 3 - \dfrac{D_{9,4}}{D_{8,3}}$ [−1]

190 $\left(\dfrac{D_{12,4}}{D_{12,3}} + \dfrac{D_{7,3}}{D_{6,2}}\right) : \dfrac{D_{6,3}}{D_{6,2}}$ [4]

Risolvi le seguenti equazioni.

191 $(x+1)! - 4(x-1)! = x!$ [2]

192 $(D_{x,3} + 2 \cdot D_{x-1,3}) \cdot D'_{x,2} = 0$ [$\nexists x \in \mathbb{N}$]

193 $D_{x,3} - D_{x-1,3} = 18$ [4]

194 $C_{x+1,2} + C_{x,2} = x^2 - x$ [$\nexists x \in \mathbb{N}$]

195 $2 \cdot \binom{x+1}{3} - 12 \cdot \binom{x}{x-2} = \binom{x}{3}$ [32]

196 $D'_{x,3} - 2x \cdot D'_{x,2} + 16x = 0$ [4]

197 $\binom{x-1}{2} = 2 \cdot \binom{x-2}{2}$ [5]

198 $\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{x} = \frac{x^2}{2}$ [$\nexists x \in \mathbb{N}$]

199 $P_x = 6 \cdot D_{x-2,\, x-3}$ [3]

200 $\frac{(x+1)!}{x!} + x^2 = 3x$ [1]

201 $3 \cdot \binom{x+1}{x-1} = 9 \cdot \binom{x}{x-2}$ [2]

202 $P_{x+2} - 3 \cdot P_x = 3 \cdot P_{x+1}$ [2]

203 $P_x - 8P_{x-2} = 3(x-1)!$ [5]

Risolvi i seguenti problemi.

204 Devi costruire il codice pin del tuo cellulare nuovo; vuoi scegliere quattro delle dieci cifre, non ripetendone alcuna. Quanti possibili codici puoi inventare? [5040]

205 In partenza per le vacanze, devi inserire la combinazione per chiudere e aprire la tua valigia. Il numero deve contenere sei cifre, anche ripetute. Quante sono le possibili combinazioni? [1 000 000]

206 Otto amici devono occupare otto camere singole a loro riservate dall'hotel in cui sono arrivati per trascorrere le vacanze. In quanti modi si possono disporre nelle camere? [40 320]

207 Con sette equazioni a tre a tre indipendenti e a tre incognite, quanti sistemi determinati puoi formare? [35]

208 Tre amici si recano in un negozio per acquistare un DVD ciascuno. Sono disponibili 25 titoli del genere che a loro piace. Quante sono le possibili terne di DVD acquistati dai tre ragazzi? [15 625]

209 A una festa cui partecipano quindici ragazzi si fa un brindisi. Se ciascuna persona fa incontrare il suo bicchiere con quello di tutte le altre, quanti «cin-cin» si fanno? [105]

210 In un'urna ci sono dieci palline numerate da 1 a 10. Tre sono bianche e le altre nere. Calcola quante sono le cinquine che contengono una pallina bianca. [105]

211 Per aprire una cassaforte occorre formare un numero di quattro cifre diverse (scelte fra le dieci decimali). Quanti tentativi si possono fare? [5040]

212 Un'urna contiene tre palline di colori diversi: bianco, rosso, nero. Si estrae consecutivamente per 4 volte una pallina rimettendola nell'urna prima dell'estrazione successiva. Quante sono le possibili sequenze di colori? [81]

213 Si devono preparare dei panini avendo a disposizione: salame, prosciutto e formaggio. Quanti panini diversi si possono preparare, mettendo in ognuno cinque fette della stessa qualità o di qualità diverse? [21]

214 In una banca ci sono sei sportelli. In quanti modi diversi si possono disporre le prime sei persone che entrano nella banca? [720]

215 Trova in quanti modi si possono riporre quattro oggetti distinti in sei scatole diverse sapendo che è possibile riporre in una scatola più oggetti. [1296]

216 Determina il numero degli anagrammi delle parole ANTENNA e RADIO. [420; 120]

217 In quanti modi si possono scegliere i due rappresentanti di classe, se nella classe ci sono venticinque studenti? [300]

218 In how many ways can the letters of the word METCALF be arranged if M is always at the beginning and A and E are always side by side?

(IR *Leaving Certificate Examination*, Higher Level, 1995)

[240]

219 In una classe di ventotto alunni, di cui quindici maschi, devono essere scelti due ragazzi e due ragazze per un'assemblea di delegati. Quante sono le scelte possibili? [8190]

220 Quanti numeri di quattro cifre distinte, scelte fra 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, si possono formare? Quanti di questi sono pari? Quanti dispari? Quanti terminano con 2? Quanti sono maggiori di 6000? [840; 360; 480; 120; 240]

221 Calcola in quanti modi si possono disporre sei oggetti distinti in quattro scatole diverse sapendo che vi possono essere scatole vuote. [4096]

222 Calcola quanti prodotti diversi con tre fattori distinti si possono scrivere con i numeri 2, 3, 4, 5, 6, 7. [20]

223 In quanti modi possono disporsi quattro uomini e sette donne su una fila di quattordici sedie? [120 120]

224 In una famiglia i figli sono tre. Calcola quante diverse possibilità ci sono fra maschi e femmine. [4]

225 Il cestino da viaggio fornito da un hotel ai suoi ospiti durante un'escursione contiene due panini, tre frutti e due bibite. Se i panini possono essere imbottiti con cinque tipi diversi di salumi, i frutti a disposizione sono di sei tipi e le bibite di sette tipi, in quanti modi può essere preparato il cestino? [4200]

226 Quanti numeri pari di tre cifre diverse possono essere scritti utilizzando le cifre dell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$? [40]

227 Calcola quante sigle di 10 elementi si possono costruire se per i primi cinque posti utilizziamo tre lettere A e due lettere B e per gli altri cinque posti tre cifre 1 e due cifre 0. [100]

228 In un piano sono dati nove punti a tre a tre non allineati. Quanti triangoli si possono disegnare con i vertici in quei punti? [84]

229 Un sacchetto contiene dodici palline numerate. Calcola in quanti modi si possono estrarre tre palline ordinate non rimettendo la pallina estratta nell'urna. [1320]

230 In quanti modi quattro persone possono sedersi su una fila di dieci sedie? [5040]

231 Quanti numeri diversi con le cinque cifre dispari si possono scrivere? Quanti sono quelli che terminano con la cifra 1? [120; 24]

232 In quanti modi si possono mettere cinque oggetti diversi in sette cassetti, in modo che in ogni cassetto al massimo vi sia un oggetto? [2520]

233 Calcola in quanti modi possono disporsi in fila tre gettoni rossi e quattro gialli se il primo gettone deve essere rosso. [15]

234 In quanti modi si possono collocare cinque oggetti diversi in tre cassetti? [243]

235 Si ritaglia un esagono di cartoncino e si vogliono colorare gli angoli relativi ai vertici con sei colori diversi (rosso, giallo, verde, blu, marrone, viola). Quanti sono i modi possibili? [120]

236 Quante cinquine, nel gioco del lotto, contengono una prefissata quaterna? [86]

237 What is the number of different 7-digit numbers that can be made by rearranging the digits of 3053354? (Note that this includes the given number, and that the first digit of a number is never 0.)

(USA *Lehigh University: High School Math Contest*, 2005)

[360]

238 Calcola quante sigle si possono costruire se per i primi cinque posti utilizziamo tre lettere A e due lettere B e per gli altri cinque posti tre cifre 1 e due cifre 0. [100]

239 In una scuola vi sono quattro classi quinte aventi ciascuna rispettivamente 19, 22, 18 e 25 alunni. Occorre mandare una rappresentanza formata da un alunno di ciascuna quinta. Quante sono le quaterne di studenti che è possibile formare? [188 100]

240 Calcola quante sigle di quattro elementi si possono formare ponendo al primo posto una delle cinque vocali, al secondo posto una delle sedici consonanti, al terzo posto una delle cinque cifre pari e al quarto posto una delle cinque cifre dispari. [2000]

241 Calcola in quanti modi si possono disporre cinque oggetti distinti in sette scatole diverse sapendo che vi possono essere scatole vuote. [16 807]

242 Si lancia una moneta per 4 volte consecutive. Calcola quante sono le possibili successioni:
a) di testa e croce;
b) di testa e croce che iniziano con testa;
c) nelle quali testa compare una volta;
d) nelle quali compare sempre la stessa faccia. [a) 16; b) 8; c) 4; d) 2]

243 In una scatola ci sono trenta gettoni numerati da 1 a 30. Dieci sono rossi, gli altri sono di colore diverso. Quante terne distinte si possono estrarre in modo che ognuna di esse contenga:
a) solo un gettone rosso;
b) almeno un gettone rosso;
c) nessun gettone rosso;
d) soltanto gettoni rossi.

[a) 1900; b) 2920; c) 1140; d) 120]

244 Marco deve chiamare Laura sul cellulare, ma non ricorda bene le dieci cifre che compongono il numero. Le prime tre sono 3, 2, 8 e le ultime sono 3, 9, 4. Quanti tentativi può fare, sapendo che le rimanenti cifre sono tutte dispari? E se ricorda anche che la quarta cifra è 7? [625; 125]

245 A mathematics contest consists of four problems. Each of the six team members from Central High School is assigned to work on exactly one of the four problems. If each of the four problems is worked on by at least one member of the team, in how many different ways can the assignment of team members to problems be accomplished?

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 1997)

[1560]

246 Lucia ha una nuova tessera del Bancomat, con un codice di cinque cifre. Non ha ancora ben memorizzato il numero e ricorda solo che le cifre sono tutte diverse: la prima è 0, l'ultima è 5 e solo la seconda è pari. Quanti tentativi al massimo deve fare per individuare il codice? [48]

247 Quanti numeri di cinque cifre puoi formare con quelle del numero 83 368 in modo che le cifre 8 e 3 siano ripetute due volte? Quanti iniziano con 8? Quanti sono maggiori di 6000? [30; 12; 18]

248 L'insegnante di storia oggi vuole interrogare quattro studenti, tra cui Paolo e Andreina. Se la classe è di 26 alunni, quante sono le possibili quaterne di interrogati? [276]

249 Un test è formato da 8 quesiti a risposta multipla con cinque possibilità. In quanti modi possibili puoi rispondere? [390 625]

250 Determina quanti sono nel gioco del poker (quattro segni, trentadue carte), i possibili gruppi di cinque carte che contengono tre assi. [1512]

251 Calcola in quanti modi diversi puoi estrarre da un'urna, contenente i 90 numeri del lotto, 3 numeri se:
a) l'estrazione è consecutiva senza reinserimento del numero estratto;
b) l'estrazione è consecutiva con reinserimento del numero estratto;
c) l'estrazione è contemporanea.

[a) 704 880; b) 729 000; c) 117 480]

252 Per formare le targhe automobilistiche si utilizzano le ventuno lettere dell'alfabeto e le dieci cifre decimali; le targhe sono formate da due lettere seguite da tre cifre e di nuovo da due lettere.
Calcola quante sono le targhe che:
a) si possono formare;
b) hanno uguali le prime due lettere e uguali le ultime due;
c) hanno le tre cifre tutte pari.

[a) 194 481 000; b) 441 000; c) 24 310 125]

253 Si utilizzano le vocali e le cifre decimali per costruire sigle formate all'inizio da 2 vocali seguite da 5 cifre decimali.
Determina quante sono le sigle nel caso in cui:
a) le vocali e le cifre sono tutte diverse;
b) le vocali sono diverse, ma le cifre possono ripetersi;
c) sia le vocali che le cifre possono ripetersi;
d) le vocali e anche le cifre sono tutte diverse, ma vengono escluse quelle sigle che nella parte numerica iniziano con 5.

[a) 604 800; b) 2 000 000; c) 2 500 000; d) 544 320]

254 Quante distinte stringhe di 5 lettere dell'alfabeto inglese (con possibile ripetizione) contengono esattamente tre lettere distinte?
[Nota: l'alfabeto inglese è composto da 26 lettere.]

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2003)

[390 000]

255 A un gruppo di dieci amici, fra i quali ci sono anche Marta e Luca, vengono regalati quattro biglietti per un concerto. In quanti modi possono essere scelti i quattro amici che andranno allo spettacolo, se Marta non vuole andare senza Luca, mentre Luca è disposto ad andare anche senza Marta? [154]

256 Un comitato di 5 persone deve essere scelto da un gruppo di 9. In quanti modi può essere scelto, se Biff e Jacob devono esservi compresi entrambi o essere entrambi esclusi, e Alice e Jane rifiutano di farne parte insieme?

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*, 2007)

[41]

257 Otto celebrità si incontrano a un party. Succede così che ciascuna celebrità stringe la mano esattamente ad altre due. Un ammiratore tiene una lista di tutte le coppie (non ordinate) di celebrità che si sono strette la mano. Se l'ordine con conta, quante diverse liste sono possibili?

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*, 2006)

[3507]

258 Determina quante sigle di sette elementi formate da quattro lettere distinte, fra le ventuno lettere dell'alfabeto, seguite da tre cifre anche ripetute è possibile scrivere. [143 640 000]

259 Calcola, fra tutte le cinquine che possono essere formate con i novanta numeri del gioco del lotto, quante sono quelle formate da due numeri inferiori a 20 e da tre numeri superiori a 60. [694 260]

260 Un'urna contiene 3 palline nere e 4 palline rosse. Calcola quanti sono i possibili gruppi da cinque palline che si possono ottenere se vengono estratte consecutivamente una dopo l'altra senza rimettere le palline estratte nell'urna. Calcola inoltre quanti di questi gruppi sono formati da due palline nere e tre rosse. [25; 10]

261 Six people – Bob, Bobbie, Rob, Robbie, Robert, and Roberta – are to be divided into two study groups. The groups cannot have any person in common, and each group must contain at least one person. In how many ways can this be done?

(USA *Bay Area Math Meet*, *BAMM, Bowl Sampler*, 1997)

[31]

262 A sequence of letters rolls off the tongue if the following two conditions are met.

1. The sequence does not begin or end with two consecutive consonants.

2. No three consecutive letters are all consonants.

How many permutations of MATHEMATICS roll off the tongue?

(USA *Rice University Mathematics Tournament*, 2005)

[$15 \cdot 7! = 75{,}600$]

263 Hai a disposizione tre gettoni rossi e quattro gialli. Trova quanti sono i possibili modi con cui possono:

a) allinearsi;

b) allinearsi con il primo gettone rosso e l'ultimo giallo;

c) allinearsi a colori alternati;

d) allinearsi con i tre gettoni rossi sempre vicini.

[a) 35; b) 10; c) 1; d) 5]

264 Si hanno due urne. La prima contiene 5 palline bianche e 5 nere, e la seconda 3 bianche e 7 nere. Si estraggono contemporaneamente 2 palline da ciascuna urna. Calcola quanti sono i gruppi costituiti da:

a) due bianche dalla prima urna e due nere dalla seconda urna;

b) una bianca e una nera da ciascuna urna;

c) tutte nere.

d) Calcola inoltre i possibili risultati facendo riferimento al colore delle palline.

[a) 210; b) 525; c) 210; d) 5]

265 Date le cifre 2, 3, 4 e 5, determina quanti numeri:

a) formati da una a quattro cifre diverse si possono formare;

b) formati da una a quattro cifre anche ripetute si possono formare;

c) dispari di tre cifre diverse si possono formare;

d) maggiori di 40 e minori di 10 000 si possono formare.

[a) 64; b) 340; c) 12; d) 328]

REALTÀ E MODELLI

1 **La password**

La password per l'accesso a un sito internet è formata da 5 caratteri. Determina:

- il numero totale dei codici possibili se i caratteri utilizzabili sono le cifre da 0 a 9, ipotizzando sia che le cifre possano ripetersi, sia che debbano essere tutte diverse;
- il numero totale dei codici se i caratteri utilizzabili sono le cifre da 1 a 5, senza che queste si ripetano;
- il numero totale dei codici possibili se nella combinazione possono essere utilizzate sia le cifre da 0 a 5 che le 26 lettere dell'alfabeto inglese, senza che nessuna di queste si ripeta.

2 **La vetrina**

Per allestire una vetrina una commessa ha a disposizione 7 nuovi tipi di maglioni e 3 manichini. A rotazione vuole esporre in vetrina tutti i capi, senza mai riproporre lo stesso abbinamento. Determina:

- quante vetrine diverse potrà allestire la commessa;
- per quante settimane si potranno osservare vetrine diverse supponendo che ogni lunedì e giovedì si rinnovino gli abbinamenti;
- quanti tipi di maglioni dovrebbe avere a disposizione la commessa, supponendo che un manichino non possa essere utilizzato, per esaurire tutte le combinazioni in 10 settimane.

3 **Il planisfero**

Un bambino vuole colorare ogni continente di un planisfero con un colore diverso e per fare questo ha a disposizione 10 colori.

- In quanti modi può colorare i continenti?
- Se pittura subito l'Europa di verde, in quanti modi può poi colorare gli altri continenti? Qual è la relazione con il caso precedente?
- Quanti colori dovrebbe avere a disposizione per poter colorare Asia e Africa in più di dieci possibili modi?

4 **Le compagnie aeree**

Le compagnie aeree sono identificate da una sigla formata da due lettere, anche uguali, oppure da una lettera e una cifra. Le lettere sono scelte tra le 26 dell'alfabeto inglese e la cifra, tra 1 e 9, può essere messa in prima o in seconda posizione (es. AC, WW, L6, 2P).
Gli aeroporti sono invece identificati da codici di tre lettere di cui al massimo due si possono ripetere.

- Attualmente le sigle delle compagnie aeree sono 856. Quante sigle sono ancora disponibili per nuove compagnie?
- Calcola in quanti modi si può associare una sigla di una compagnia a un codice di un aeroporto (considera le sigle e i codici possibili, non quelli effettivamente esistenti).

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: www.zanichellitest.it

1 Dobbiamo intervistare 5 persone diverse fra 12 che hanno partecipato a una vacanza all'estero organizzata da una determinata agenzia di viaggi. Tutti i possibili modi con cui possiamo scegliere gli intervistati sono:

A 95 040.
B 3 991 680.
C 792.
D 120.
E 5544.

2 Si collocano 8 statuette raffiguranti Biancaneve e i sette nani su un muretto di un giardino. I possibili modi con cui possono essere collocate sono:

A 5040.
B 8.
C 56.
D 40 320.
E 20 160.

3 Un bambino colora di bianco o rosso o verde 5 quadratini che ha disegnato. I possibili modi con i quali il bambino può colorare i quadratini indipendentemente dall'ordine sono:

A 42.
B 60.
C 10.
D 125.
E 21.

4 I numeri che iniziano con 5 costituiti da due, tre e quattro cifre sono:

A 375.
B 175.
C 820.
D 5850.
E 1110.

5 Un'urna contiene 4 palline nere, 2 bianche e 5 verdi. I gruppi che si possono formare con 2 palline nere, 1 bianca e 3 verdi sono:

A 120.
B 462.
C 700.
D 720.
E 1440.

6 In una stazione autostradale ci sono 12 uscite abilitate per il pagamento. 8 sono aperte e 4 chiuse. Il numero di tutti i modi in cui si possono presentare le uscite è:

A 495.
B 11 880.
C 336.
D 1320.
E 8640.

7 Si usano gli elementi dell'insieme $M = \{x, y, t, z\}$ e le dieci cifre per formare sigle da 6 elementi. Sapendo che i primi due posti sono formati da lettere anche ripetute e gli altri quattro posti da cifre diverse, le sigle che si possono ottenere sono:

A 160 000.
B 80 640.
C 120 000.
D 60 480.
E 3360.

8 Data la potenza $(x - 3y^2)^5$, il terzo termine dello sviluppo è:

A $90x^3y^4$.
B $-15x^4y^2$.
C $-30x^3y^4$.
D $450x^3y^4$.
E $180x^4y^2$.

9 Gli anagrammi della parola ARDIMENTO che terminano in MARE sono:

A 362 880.
B 5760.
C 2880.
D 24.
E 120.

10 La soluzione dell'equazione

$$D'_{x,3} - 2x \cdot D'_{x,2} + 16x = 0$$

è:

A ± 4.
B $+4$.
C -4.
D 0.
E $+16$.

11 Quale delle seguenti identità è vera?

A $D_{n,k} = D_{n,k-2} + D_{n-k,2}$
B $P_n = P_k \cdot P_{n-k}$
C $\dfrac{n!}{(n-3)} = C_{n,3} \cdot 3!$
D $3 \cdot \binom{n}{3} = n \cdot \binom{n-1}{2}$
E $D_{n,k-1} - D_{n,k-2} = D_{n,k-3} \cdot D_{n,2}$

QUESITI

12 Spiega, senza effettuare operazioni algebriche, perché è vera la relazione $C_{n,k} \cdot k! = D_{n,k}$.
Verifica l'identità algebricamente utilizzando le formule con i fattoriali.

13 Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2003, *quesito* 1)

[306]

14 Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$ quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2004, *quesito* 4)

[81]

15 Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2003, *quesito* 9)

[109 736]

16 Un professore interroga i suoi alunni a due alla volta. Stabilire quante possibili coppie diverse può interrogare, sapendo che la classe è di 20 studenti.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Scuole italiane all'estero (Americhe)*, *Sessione ordinaria*, 2004, *quesito* 8)

[190]

17 Una classe è formata da 30 alunni, fra i quali Aldo e il suo amico fidato Giacomo. Si deve formare una delegazione costituita da 4 studenti della classe. Calcolare quante sono le possibili quaterne comprendenti Aldo e Giacomo.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Scuole italiane all'estero (Europa)*, *Sessione ordinaria*, 2004, *quesito* 7)

[378]

18 Quanti sono i numeri di quattro cifre (distinte tra loro) che è possibile scrivere utilizzando le cifre pari, diverse da zero?

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Scuole italiane all'estero (Americhe)*, *Sessione ordinaria*, 2009, *quesito* 6)

[24]

19 Quale significato attribuisci al simbolo $\binom{n}{k}$? Esiste un k tale che $\binom{10}{k} = \binom{10}{k-2}$?

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Scuole italiane all'estero (Europa)*, *Sessione ordinaria*, 2008, *quesito* 7)

[$k = 6$]

20 Si vogliono colorare, con colori diversi, le facce di un tetraedro e le facce di un cubo. In quanti modi ciò è possibile disponendo di dieci colori e prescindendo dal loro ordine?

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Scuole italiane all'estero*, *Calendario australe*, *Sessione ordinaria*, 2006, *quesito* 1)

[210]

21 Si risolva la disequazione $\binom{x}{3} > \frac{15}{2}\binom{x}{2}$.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2007, *quesito* 10)

[$x \geq 25$, $x \in \mathbb{N}$]

22 In una classe di 25 alunni bisogna estrarre a sorte una rappresentanza di 3 elementi. Calcolare quante sono le possibili terne di rappresentanti.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione straordinaria*, 2004, *quesito* 9)

[2300]

23 Alla finale dei 200 m piani partecipano 8 atleti, fra i quali figurano i nostri amici Antonio e Pietro. Calcolare il numero dei possibili ordini di arrivo che registrino i nostri due amici fra i primi tre classificati.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione straordinaria*, 2004, *quesito* 10)

[36]

24 Cinque ragazzi sono contrassegnati con i numeri da 1 a 5. Altrettante sedie, disposte attorno a un tavolo, sono contrassegnate con gli stessi numeri. La sedia «1», posta a capotavola, è riservata al ragazzo «1», che è il caposquadra, mentre gli altri ragazzi si dispongono sulle sedie rimanenti in maniera del tutto casuale. Calcolare in quanti modi i ragazzi si possono mettere seduti attorno al tavolo.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2006, *quesito* 10)

[24]

25 Se $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ con $n > 3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2008, *quesito* 6)

[$n = 7$]

26 Si dimostri l'identità

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$$

con n e k naturali e $n > k$.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione ordinaria*, 2009, *quesito* 7)

27 Calcolare se esiste un numero naturale n per il quale risulti:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1\,048\,576.$$

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione suppletiva*, 2001, *quesito* 3)

[20]

PROBLEMI

28 Determina il numero di diagonali di un:
a) triangolo;
b) quadrilatero;
c) pentagono;
d) esagono;
e) poligono qualsiasi di n lati.

$\left[\text{a) 0; b) 2; c) 5; d) 9; e) } \frac{n^2-3n}{2}\right]$

29 Con le prime cinque cifre (da 0 a 4) quanti numeri puoi formare:
a) di tre cifre tutte diverse;
b) di quattro cifre anche ripetute;
c) di cinque cifre diverse che iniziano con 4;
d) di due cifre pari diverse.

[a) 48; b) 500; c) 24; d) 4]

30 Dati 8 punti nel piano, a tre a tre non allineati, calcola:

a) quanti sono i triangoli che si ottengono congiungendo 3 punti alla volta;
b) quanti sono i segmenti che si ottengono congiungendo due punti alla volta.

[a) 56; b) 28]

31 Il computer sceglie a caso tra le due cifre 0 e 1 per quattro volte. Calcola quante sono le possibili successioni:

a) di 0 e 1;
b) di 0 e 1 che iniziano con 0;
c) nelle quali la cifra 0 compare una volta;
d) nelle quali compare sempre la stessa cifra.

[a) 16; b) 8; c) 4; d) 2]

32 Con le 5 vocali, le 16 consonanti e le 10 cifre decimali, quante sigle di 6 elementi si possono costruire se:

a) i primi 4 posti devono essere occupati da lettere diverse e gli ultimi 2 da cifre diverse;
b) i primi 2 posti devono essere occupati da vocali diverse seguite da 2 consonanti diverse e infine da un numero di due cifre;
c) i primi 3 posti devono essere occupati da consonanti anche ripetute, seguite da tre cifre diverse;
d) i primi 2 posti devono essere occupati da cifre anche ripetute seguite da 4 vocali anche ripetute.

[a) 12 927 600; b) 432 000; c) 2 949 120; d) 62 500]

33 Dato l'insieme $A = \{a, e, l, o, m, r, t\}$, quante parole, anche prive di significato, si possono scrivere:

a) con quattro lettere diverse;
b) con quattro lettere diverse nelle quali la prima sia r e l'ultima a;
c) con sette lettere diverse;
d) con otto lettere supponendo che la lettera m si possa ripetere due volte.

[a) 840; b) 20; c) 5040; d) 20 160]

34 Dovendo collocare 5 oggetti diversi in scatole distinguibili calcola il numero delle possibilità:

a) mettendone 3 in una scatola e 2 in un'altra;
b) mettendoli in 3 scatole senza lasciarne alcuna vuota;
c) mettendoli in tre scatole, anche lasciandone una o due vuote.

[a) 20; b) 150; c) 243]

35 Ripeti l'esercizio precedente nell'ipotesi in cui i 5 oggetti non siano distinguibili.

[a) 2; b) 6; c) 21]

36 Dati i numeri 2, 3, 4, 5, 6, 7, calcola quanti prodotti con 4 fattori diversi si possono fare che siano:

a) divisibili per 7;
b) divisibili per 6;
c) divisibili per 8;
d) siano pari;
e) siano dispari.

[a) 10; b) 14; c) 9; d) 15; e) 0]

37 Abbiamo cinque palline nere numerate da 1 a 5 e tre palline bianche numerate da 1 a 3. Determina quanti sono i gruppi ordinati di 3 palline diverse che si possono formare nelle seguenti composizioni:

a) due nere seguite da una bianca;
b) due nere seguite da una bianca usando i numeri dispari;
c) tutte dispari;
d) tutte pari;
e) che contengono il numero 1 una sola volta;
f) che contengono il numero 1 almeno una volta.

[a) 60; b) 12; c) 60; d) 6; e) 180; f) 216]

38 Un'urna contiene 5 palline rosse e 85 nere.
Calcola quanti sono i gruppi di 5 palline che contengono:

a) una rossa e quattro nere;
b) due rosse e tre nere;
c) tre rosse e due nere;
d) quattro rosse e una nera;
e) tutte rosse.

Esamina se il numero dei gruppi ottenuto coincide con quello che si ottiene giocando cinque numeri al lotto e si vuol sapere quanti sono i gruppi che contengono un determinato numero, un determinato ambo, un determinato terno, una determinata quaterna, tutti i cinque numeri.

[a) 10 123 925; b) 987 700; c) 35 700; d) 425; e) 1]

39 Dati i numeri dell'insieme $A = \{8, 15, 36, 95, 128\}$, determina:

a) i possibili prodotti prendendo tre numeri diversi come fattori;
b) le possibili sottrazioni di due numeri diversi che possono essere effettuate in $\mathbb{Z}$;
c) le possibili sottrazioni di due numeri anche uguali che possono essere effettuate in $\mathbb{Z}$;
d) le possibili sottrazioni di due numeri diversi che possono essere effettuate in $\mathbb{N}$;
e) le possibili sottrazioni di due numeri anche uguali che possono essere effettuate in $\mathbb{N}$;
f) i possibili prodotti prendendo due numeri anche non diversi.

[a) 10; b) 20; c) 25; d) 10; e) 15; f) 25]

40 Una popolazione è formata da 20 persone: 7 hanno età inferiore a 18 anni, 3 età superiore a 60 anni e 10 hanno un'età intermedia. Si devono formare dei gruppi di 6 persone.
Calcola:

a) quanti sono i gruppi nei quali le persone hanno tutte la stessa età;
b) quanti sono i gruppi nei quali sono presenti due persone per ogni fascia di età;
c) quanti sono i gruppi nei quali sono presenti tutte e 3 le persone con età superiore a 60 anni;
d) quanti sono i gruppi che non contengono persone con età inferiore a 18 anni.

[a) 217; b) 2835; c) 680; d) 1716]

CAPITOLO

α2

٢ [numerazione araba]

२ [numerazione devanagari]

二 [numerazione cinese]

IL CALCOLO DELLA PROBABILITÀ

I FILTRI ANTISPAM Le e-mail indesiderate, o spam, sono una seccatura. Oltre a intasare le caselle di posta elettronica, causano un notevole dispendio di tempo ed energie.

Come si possono bloccare le e-mail di spam?

▶ **La risposta a pag. α72**

1. GLI EVENTI

Consideriamo i seguenti avvenimenti:

a) un oggetto, lasciato cadere, raggiunge il pavimento della stanza in cui siamo;
b) data la funzione $y = 2^t$, si ha che $y = 16$ per $t = 4$;
c) estraiamo un numero da un sacchetto contenente i 90 numeri della tombola e abbiamo il numero 3.

Tali avvenimenti possono verificarsi oppure no e, in questo senso, vengono detti *eventi*.

DEFINIZIONE

Evento

Un evento è un avvenimento, descritto da una proposizione, che può accadere o non accadere.

Chiamiamo:

- **eventi certi** gli eventi che accadono con certezza;
- **eventi impossibili** gli eventi che non possono mai verificarsi.

Qui e in seguito i dadi che consideriamo hanno sei facce, numerate da 1 a 6.

ESEMPIO

1. La proposizione «Lancio un dado ed esce il numero 9», in base alle nostre conoscenze, è *sempre falsa* e quindi descrive un evento impossibile.
2. La proposizione «Dopo il lunedì viene il martedì» è *sempre vera*, per cui essa descrive un evento certo.

Aleatorio deriva dal latino *alea*, che significa «dado».

Un evento si dice **evento aleatorio** se il suo verificarsi dipende dal caso, ossia può accadere ma senza certezza.
Eventi di questo tipo possono essere visti come possibili risultati di un esperimento dall'esito casuale che, per questo motivo, è detto **esperimento aleatorio**.
Ogni singolo risultato possibile viene detto **evento elementare** o **campione**.

ESEMPIO

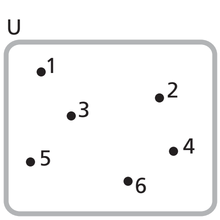
Nel lancio di un dado, sono elementari gli eventi:

$$E_1 = \text{«esce 1»}, \quad E_2 = \text{«esce 2»}, \quad \ldots, \quad E_6 = \text{«esce 6»}.$$

L'insieme di tutti gli eventi elementari si chiama **universo degli eventi** o **spazio campionario**.

Nel nostro esempio, possiamo rappresentare l'insieme universo U come

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$



e graficamente con un diagramma di Eulero-Venn come nella figura a lato.
Ci sono poi eventi che sono l'insieme di più eventi elementari.

ESEMPIO

Nel lancio di un dado, l'evento

$$E = \text{«esce una faccia con un numero minore di 3»}$$

è l'insieme costituito dagli eventi elementari E_1 ed E_2.

2. LA CONCEZIONE CLASSICA DELLA PROBABILITÀ

Nel lancio di un dado consideriamo l'evento aleatorio:

E = «esce un numero dispari».

Il sottoinsieme $E = \{1, 3, 5\}$ rappresenta l'insieme dei **casi favorevoli**, ossia di quelli in cui E è verificato.

L'insieme universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ è invece l'insieme dei **casi possibili**. Supponiamo che tutti i casi siano *ugualmente possibili* e consideriamo il rapporto:

Il dado non deve essere truccato.

$$\frac{\text{numero dei casi favorevoli}}{\text{numeri dei casi possibili}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Esso fornisce una stima sulla possibilità che l'evento E si verifichi e viene chiamato *probabilità* di E.

Questa definizione è dovuta al matematico Pierre Simon de Laplace (1749-1827).

DEFINIZIONE

Probabilità

La probabilità di un evento E è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli f e quello dei casi possibili u, quando sono tutti ugualmente possibili.

probabilità di E

numero dei casi favorevoli

$$p(E) = \frac{f}{u}$$

numero dei casi possibili

ESEMPIO

Estraiamo una carta da un mazzo di 52 carte. Consideriamo gli eventi:

E_1 = «estrazione di una figura rossa»;

E_2 = «estrazione di una carta di picche».

Per entrambi, i casi possibili sono $u = 52$, cioè tutti i possibili esiti dell'estrazione.

Per E_1 i casi favorevoli sono $f = 6$, cioè il numero delle figure rosse;
per E_2 i casi favorevoli sono $f = 13$, cioè il numero delle carte di picche:

$$p(E_1) = \frac{6}{52} = \frac{3}{26} \simeq 0,12; \qquad p(E_2) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Possiamo esprimere questi valori anche mediante percentuali.

Per esempio, il valore percentuale della probabilità di E_2 è 25%.

Poiché il numero f dei casi favorevoli è sempre minore o uguale al numero dei casi possibili,

$$0 \leq p \leq 1,$$

cioè, la probabilità di un evento aleatorio è sempre compresa tra 0 e 1.

Per un **evento impossibile**, $f = 0$, poiché il numero dei casi favorevoli è nullo. In questo caso:

$$p(E) = 0.$$

Per un **evento certo**, $f = u$, poiché il numero dei casi favorevoli è uguale al numero dei casi possibili. Dunque:

$$p(E) = 1.$$

L'evento contrario

Dato un evento E, il suo **evento contrario** $\overline{E}$ è l'evento che si verifica se e solo se non si verifica E. È vero che:

$$\boldsymbol{p(\overline{E}) = 1 - p(E) \quad \rightarrow \quad p(E) + p(\overline{E}) = 1.}$$

Infatti, essendo u = numero dei casi possibili e f = numero dei casi favorevoli a E:

$$p(\overline{E}) = \frac{u-f}{u} = 1 - \frac{f}{u} = 1 - p(E).$$

Per esempio, nel lancio di un dado, consideriamo l'evento:

E = «esce un numero multiplo di 3»,

con

$$p(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

L'evento contrario è:

$\overline{E}$ = «non esce un numero multiplo di 3»,

con

$$p(\overline{E}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

È vero che

$$p(\overline{E}) = 1 - p(E).$$

La probabilità e il calcolo combinatorio

ESEMPIO

1. Lanciamo contemporaneamente tre monete. Consideriamo l'evento:

E = «le facce presentano una testa (T) e due croci (C)».

I casi possibili sono tutti i modi in cui T e C possono presentarsi:

TTT TTC TCT CTT TCC CTC CCT CCC,

cioè $D'_{2,3} = 2^3 = 8$.

I casi favorevoli sono *TCC CTC CCT*, cioè tutti i possibili modi in cui si possono presentare una testa e due croci. Per calcolarli utilizziamo le permutazioni di 3 elementi, di cui 2 ripetuti:

$$P_3^{(2)} = \frac{3!}{2!} = 3.$$

La probabilità è $p(E) = \frac{3}{8}$.

Le disposizioni con ripetizione si calcolano con la formula

$$D'_{n,k} = n^k$$

e le permutazioni con ripetizione si calcolano con la formula:

$$P_n^{(r,s,\ldots)} = \frac{n!}{r!s!\ldots}.$$

Osserviamo che l'impostazione, il procedimento e il risultato non cambiano se:

- lanciamo consecutivamente tre volte la stessa moneta;
- estraiamo da un'urna, contenente due palline uguali segnate con T e C, per tre volte una pallina, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna.

2. Da un'urna contenente 4 palline bianche e 6 nere estraiamo *consecutivamente* cinque palline, senza rimettere ogni volta la pallina estratta nell'urna. Consideriamo l'evento:

E_1 = «escono consecutivamente, nell'ordine, 2 bianche e 3 nere».

Dobbiamo supporre di *distinguere per l'ordine* di uscita ogni possibile raggruppamento, anche se identico ad altri per composizione.
I casi possibili si possono quindi calcolare con le *disposizioni semplici*:

$$D_{10,5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240.$$

I casi favorevoli sono tutti i gruppi formati da 2 palline bianche delle quattro contenute nell'urna e dai gruppi formati da 3 palline nere delle sei contenute nell'urna:

$$D_{4,2} \cdot D_{6,3} = (4 \cdot 3) \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) = 1440.$$

Si ha che $p(E_1) = \dfrac{D_{4,2} \cdot D_{6,3}}{D_{10,5}} = \dfrac{1440}{30\,240} = \dfrac{1}{21}$.

Consideriamo ora l'evento:

E_2 = «escono 2 bianche e 3 nere».

Questa volta *non interessa l'ordine*.

I casi favorevoli sono quindi quelli precedenti moltiplicati per le permutazioni di 5 elementi, di cui 2 e 3 ripetuti:

$$(D_{4,2} \cdot D_{6,3}) \cdot P_5^{(2,3)} = 1440 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 14\,400.$$

Pertanto $p(E_2) = \dfrac{14\,400}{30\,240} = \dfrac{10}{21}$.

Osserviamo che la probabilità può essere scritta anche nel seguente modo:

$$p(E_2) = \frac{D_{4,2} \cdot D_{6,3} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!}}{D_{10,5}} = \frac{\frac{D_{4,2}}{2!} \cdot \frac{D_{6,3}}{3!}}{\frac{D_{10,5}}{5!}} = \frac{C_{4,2} \cdot C_{6,3}}{C_{10,5}}.$$

Confrontando i risultati ottenuti per E_1 ed E_2, possiamo quindi concludere che nelle estrazioni consecutive senza reinserimento si utilizzano le disposizioni semplici se è essenziale l'ordine di uscita, le combinazioni semplici se l'ordine non interessa.

● Indicando con b una pallina bianca e con n una nera, l'evento è verificato non solo quando la successione è

$b,\ b,\ n,\ n,\ n,$

ma anche quando è:

$b,\ n,\ b,\ n,\ n;$

$n,\ b,\ b,\ n,\ n;$

…

$n,\ n,\ n,\ b,\ b.$

● Le combinazioni semplici si calcolano con la formula:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{D_{n,k}}{k!}.$$

3. Estraiamo *contemporaneamente* 4 palline da un'urna che ne contiene 7, di cui 2 bianche e 5 rosse. Consideriamo gli eventi:

E_1 = «estrazione di 4 palline rosse»;

E_2 = «estrazione di 1 pallina bianca e 3 rosse».

Poiché le palline sono estratte contemporaneamente, anche in questo caso non interessa l'ordine e utilizziamo le combinazioni.

I casi possibili sono tutti i raggruppamenti di 4 palline che si possono effettuare con le 7 palline dell'urna, cioè le combinazioni di 7 elementi di classe 4:

$$C_{7,4} = \binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = 35.$$

I casi favorevoli per E_1 sono tutti i raggruppamenti di 4 palline rosse:

$$C_{5,4} = \binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5. \text{ Quindi } p(E_1) = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}.$$

I casi favorevoli per E_2 sono tutti i raggruppamenti formati da 1 pallina bianca e 3 delle palline rosse prese fra le 5 dell'urna:

$$2 \cdot \binom{5}{3} = 2 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 5 \cdot 4 = 20. \text{ Quindi } p(E_2) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}.$$

● Possiamo applicare la proprietà dei coefficienti binomiali:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

3. LA CONCEZIONE STATISTICA DELLA PROBABILITÀ

Il calcolo della probabilità, che ebbe inizio come ricerca delle possibilità di vincita nei giochi d'azzardo, oggi ha un posto rilevante nelle scienze che studiano fenomeni che si evolvono casualmente. Con le palline, le monete, i dadi ecc. costruiamo modelli utili per interpretare fenomeni anche molto complessi.

Abbiamo un'urna che contiene palline colorate, ma non sappiamo né quali sono i colori, né quante sono le palline. Non possiamo aprire l'urna per esaminarne il contenuto.

L'unico procedimento che ci rimane per acquisire conoscenze è quello di *estrarre a sorte un gran numero di volte delle palline, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna*, in modo che ogni estrazione sia effettuata nelle stesse condizioni.

Effettuiamo consecutivamente 80 estrazioni e ogni volta prendiamo nota del colore uscito, e lo riportiamo nella seconda colonna della tabella a lato.
Utilizzando i valori ottenuti, calcoliamo il rapporto fra il numero delle volte in cui è uscito un determinato colore e il numero delle prove effettuate tutte nelle stesse condizioni. Questo rapporto si chiama *frequenza relativa*, e lo riportiamo nella terza colonna della tabella.

▶ Tabella 1

Colore	Numero palline	Frequenza relativa
rosso	5	$\frac{1}{16}$
giallo	18	$\frac{9}{40}$
nero	22	$\frac{11}{40}$
verde	35	$\frac{7}{16}$
Totale	80	1

DEFINIZIONE

Frequenza relativa

La frequenza relativa $f(E)$ di un evento sottoposto a n esperimenti, effettuati tutti nelle stesse condizioni, è il rapporto fra il numero delle volte m che si è verificato e il numero n delle prove effettuate.

frequenza relativa di E
numero di prove che verificano E

$$f(E) = \frac{m}{n}$$

numero di prove effettuate

I valori della frequenza di un evento sono compresi tra 0 e 1:

$$0 \leq f(E) \leq 1.$$

Frequenza 0 non significa che l'evento è impossibile, ma soltanto che non si è mai verificato. Analogamente, frequenza 1 non significa che l'evento è certo, ma soltanto che in quella serie di esperimenti è stato sempre osservato.
Osserviamo anche che nelle prove effettuate non è mai uscita una pallina blu, ma questo non significa che non ve ne sia alcuna.

Se ripetiamo l'esperimento, senz'altro otterremo valori diversi. Ma se abbiamo la pazienza di aumentare il numero delle prove n, rileviamo un fatto interessante: il valore della frequenza $f(E) = \frac{m}{n}$ tende a un valore costante che si può ritenere come la probabilità dell'evento.
Per esempio, sappiamo che la probabilità di ottenere testa lanciando una moneta, calcolata secondo l'impostazione classica, è $\frac{1}{2}$. Allo stesso valore tende la frequenza se sperimentalmente lanciamo una moneta un numero elevatissimo di volte.

In generale, vale la seguente proprietà.

PROPRIETÀ

Legge empirica del caso

Dato un evento E, sottoposto a n prove tutte nelle stesse condizioni, il valore della frequenza relativa $f(E) = \frac{m}{n}$ tende al valore della probabilità $p(E)$, all'aumentare del numero n di prove effettuate.

Fra i numerosi esperimenti compiuti da matematici per verificare la legge empirica del caso, ricordiamo quelli di Georges Louis Buffon (1707-1788) e di Livio Livi (1891-1969).

La *legge empirica del caso* è alla base della **definizione statistica** o **frequentistica della probabilità**.

DEFINIZIONE

Probabilità statistica

La probabilità di un evento E è la frequenza relativa del suo verificarsi quando il numero di prove effettuato è da ritenersi «sufficientemente alto».

Nell'impostazione classica il valore della probabilità è calcolato **a priori**, ossia prima che l'esperimento avvenga, mentre il valore della frequenza è un valore **a posteriori**.

Ci sono moltissimi eventi per i quali è impossibile calcolare la probabilità applicando l'impostazione classica. Per eventi di questo tipo si è costretti ad applicare l'impostazione frequentistica.

Per esempio, nel campo delle assicurazioni si calcola con questo metodo:

- la probabilità di incidenti automobilistici;
- la probabilità di vita e di morte;
- la probabilità di furti;

ecc.

Per tutti questi eventi occorre fondare il calcolo su quanto è avvenuto in passato e cercare statisticamente le relative frequenze che costituiranno le probabilità degli eventi. Altri esempi in cui viene utilizzata la probabilità statistica sono:

- la probabilità che hanno dei macchinari di produrre pezzi difettosi;
- la probabilità che ha una persona di trovare un posto di lavoro;
- la probabilità di contrarre una determinata malattia;
- la probabilità che un farmaco sia efficace.

ESEMPIO

Una ditta farmaceutica vuole sperimentare un nuovo vaccino antinfluenzale. Si sottopongono volontariamente al vaccino 10 000 persone e, di queste, nell'inverno successivo, 6750 non contraggono l'influenza. Qual è la probabilità di non contrarre il virus con questo tipo di vaccino?

Poiché il numero di prove effettuate è 10 000 e il numero di prove che si verificano è 6750:

$$f = \frac{6750}{10\,000} = 0,675.$$

Perciò la probabilità di non ammalarsi è del 67,5%.

4. LA CONCEZIONE SOGGETTIVA DELLA PROBABILITÀ

Una persona sta valutando se partecipare o non partecipare a un gioco d'azzardo nel quale si vince se, lanciando contemporaneamente due dadi, escono due numeri pari.

Secondo l'impostazione classica, egli sa che la probabilità di vittoria è $\frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 25\%$, ma ha osservato che su 21 lanci le due facce pari sono uscite 7 volte, cioè con una frequenza di $\frac{1}{3}$, vale a dire del 33,3% circa.

Decide allora di proporre a chi tiene il banco di giocare una posta di 10 euro per ricevere, in caso di vittoria, 34 euro.

La valutazione che ha fatto è del tutto personale. Ha determinato il valore della probabilità secondo una valutazione **soggettiva**.

Possiamo determinare il valore che ha attribuito alla probabilità dell'evento «uscita di due facce pari» mediante il rapporto tra la posta che è disposto a pagare e la somma che dovrebbe ricevere in caso di vincita:

$$p(E) = \frac{10}{34} = \frac{5}{17} \simeq 29{,}4\%.$$

La valutazione di questa persona ha tenuto conto, anche se non in modo esplicito, sia dell'impostazione classica sia di quella statistica.

Il modo di procedere soggettivo è l'unico utilizzabile per quegli eventi per i quali non è possibile calcolare teoricamente il numero dei casi favorevoli e possibili e non si può sottoporre l'evento a prove sperimentali ripetute nelle stesse condizioni. Siamo in questa situazione se vogliamo stimare la probabilità di vittoria di una squadra di calcio in un torneo.

- Bruno De Finetti (1906-1985) è il matematico italiano che ha fissato i fondamenti della concezione soggettiva nel campo della probabilità.

- Il giocatore valuta la probabilità di vincita in misura maggiore di quella che il calcolo secondo l'impostazione classica («a priori») gli fornisce $\left(\text{cioè } \frac{1}{4}\right)$, in quanto avrebbe dovuto, in questo caso, pretendere un pagamento dal banco di 40 euro, cioè 4 volte la posta.
Ma valuta anche la probabilità di vincita in misura minore di quella che sperimentalmente («a posteriori») si verifica $\left(\text{cioè } \frac{1}{3}\right)$, in quanto in questo caso avrebbe potuto pretendere solo 30 euro, cioè 3 volte la posta.

DEFINIZIONE

Probabilità soggettiva

La probabilità di un evento è la *misura del grado di fiducia* che una persona attribuisce al verificarsi dell'evento, secondo la sua opinione. Il valore si ottiene effettuando il rapporto fra la somma P che si è disposti a pagare, in una scommessa, e la somma V che si riceverà nel caso l'evento si verifichi.

probabilità soggettiva di E

prezzo da pagare

$$p(E) = \frac{P}{V}$$

somma ricevuta al verificarsi di E

- Il valore della probabilità, utilizzando la concezione soggettiva, varia da individuo a individuo, ma in ogni caso esso è compreso fra 0 e 1, in quanto si suppone che la somma che si è disposti a pagare sia minore o uguale a quella della vincita.

Deve sussistere la *condizione di coerenza*: la persona che accetta di pagare P per ottenere V deve anche essere disposta a ricevere P per pagare V nel caso l'evento si verifichi.

- Se scommetto 1 euro e voglio ottenerne 5 in caso di vincita, devo anche essere disposto a ricevere 1 euro da un'altra persona e pagarle 5 nel caso in cui vinca.

ESEMPIO

A una corsa di cavalli una persona è disposta a pagare 90 euro per ricevere 120 euro in caso di vittoria di un determinato cavallo.

Calcoliamo la probabilità di vittoria che attribuisce al cavallo:

$$p(E) = \frac{90}{120} = \frac{3}{4}.$$

Per la condizione di coerenza, deve essere disposto, scambiando i ruoli, a ricevere 90 euro e pagare 120 euro in caso di vittoria del cavallo.

Si dice anche che la vittoria del cavallo è pagata 4 a 3.

5. L'IMPOSTAZIONE ASSIOMATICA DELLA PROBABILITÀ

L'impostazione assiomatica della probabilità sistema in modo rigoroso le conoscenze e le applicazioni che si sono sviluppate nel tempo.

Lanciamo consecutivamente una moneta due volte. I possibili esiti dell'esperimento costituiscono un insieme chiamato *spazio dei campioni*:

$$U = \{TT, CC, TC, CT\}.$$

Consideriamo i seguenti eventi e le proposizioni che li esprimono:

E_1 = «croce esce una volta»;

E_2 = «croce esce due volte».

L'evento E_1 è verificato dagli elementi dell'insieme $M = \{CT, TC\}$, mentre l'evento E_2 è verificato dall'unico elemento dell'insieme $N = \{CC\}$.
Possiamo quindi associare a ogni evento un sottoinsieme di U.

Allora l'insieme di tutti i possibili eventi che si possono associare all'esperimento è l'insieme delle parti di U e costituisce il cosiddetto *spazio degli eventi*:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(U) = \{&\{TT\}, \{CC\}, \{TC\}, \{CT\}, \{TT, CC\}, \{TT, TC\}, \{TT, CT\},\\ &\{CC, TC\}, \{CC, CT\}, \{TC, CT\}, \{TT, CC, TC\},\\ &\{TT, CC, CT\}, \{CC, TC, CT\}, \{TT, TC, CT\},\\ &\{TT, CC, TC, CT\}, \varnothing\}.\end{aligned}$$

In generale, nell'impostazione assiomatica:

- tutti i possibili risultati o *campioni* di un esperimento aleatorio sono gli elementi di un insieme ***U*** chiamato **spazio dei campioni**;
- un **evento *E*** si identifica con un **sottoinsieme di *U*** ed è verificato quando l'esito dell'esperimento coincide con uno dei suoi elementi;
- l'evento *impossibile* è l'insieme vuoto $\varnothing$;
- l'evento *certo* coincide con l'insieme U;
- un evento *elementare* è un sottoinsieme di U costituito da un solo campione;
- l'insieme di tutti i possibili eventi coincide con l'insieme delle parti di U e si dice **spazio degli eventi**.

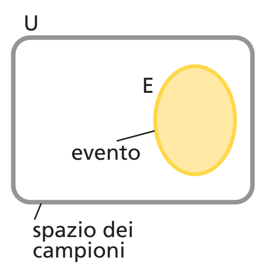
Considerando gli eventi come insiemi, possiamo effettuare le usuali *operazioni fra insiemi*, alle quali corrispondono *operazioni logiche* tra le proposizioni che descrivono gli eventi.

Per esempio, all'evento

$E_1 \vee E_2$ = «croce esce una o due volte»,

disgiunzione delle due proposizioni, è associata l'unione $M \cup N = \{CC, CT, TC\}$ dei due sottoinsiemi corrispondenti. Indichiamo l'evento anche con $E_1 \cup E_2$.

● Gli *assiomi* sono proprietà che vengono assunte come *primitive*, ossia non sono dedotte da altre, bensì accettate come vere. Devono essere non contraddittori fra di loro. In una teoria assiomatica si utilizzano inoltre degli *enti primitivi*, ossia enti che non vengono definiti. Per esempio, per la teoria assiomatica della probabilità, il concetto di evento è primitivo.



● Date due proposizioni p, q, la loro disgiunzione $p \vee q$ è falsa quando entrambe sono false e vera negli altri casi.

Consideriamo ora l'evento

E_3 = «testa esce la prima volta»,

al quale corrisponde il sottoinsieme $P = \{TT, TC\}$. All'evento

$E_1 \wedge E_3$ =«croce esce una volta e testa esce la prima volta»,

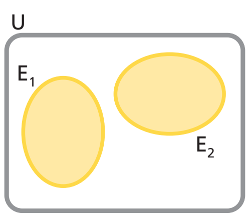
congiunzione delle due proposizioni, viene associata l'intersezione $M \cap P = \{TC\}$ dei due sottoinsiemi corrispondenti. Indichiamo l'evento anche con $E_1 \cap E_3$. L'evento $E_1 \wedge E_3$ si può esprimere anche con «prima esce testa e poi croce».

Date due proposizioni p, q, la loro congiunzione $p \wedge q$ è vera quando entrambe sono vere e falsa negli altri casi.

In generale, possiamo dare le seguenti definizioni.

- Dato un evento E, l'evento complementare $\overline{E}$ di E rispetto a U è detto **evento contrario** di E. Tale evento si verifica se e solo se non si verifica E.
- Dati due eventi E_1 ed E_2, entrambi sottoinsiemi di U, l'evento $E_1 \cup E_2$ è detto **evento unione** o **somma logica** di E_1 ed E_2. Esso si verifica al verificarsi di almeno uno degli eventi dati.
- Dati due eventi E_1 ed E_2, entrambi sottoinsiemi di U, l'evento $E_1 \cap E_2$ è detto **evento intersezione** o **prodotto logico** di E_1 ed E_2. Esso si verifica al verificarsi di entrambi gli eventi dati.

Avendo fissato tutti questi elementi, si ha la seguente definizione assiomatica di probabilità.



$E_1 \cap E_2 = \varnothing$

DEFINIZIONE

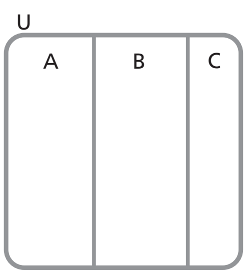
Definizione assiomatica di probabilità

La probabilità è una funzione p che associa a ogni evento E dello spazio degli eventi un numero reale, in modo da soddisfare i seguenti assiomi:

1. $p(E) \geq 0$;
2. $p(U) = 1$;
3. se due eventi E_1 ed E_2 sono tali che $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, allora:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2).$$

L'impostazione assiomatica consente di calcolare la probabilità di un evento utilizzando le operazioni tra insiemi.



$A \cup B \cup C = U$

ESEMPIO

L'insieme U è costituito da tre eventi elementari A, B, C, i quali hanno le seguenti probabilità:

$$p(A) = \frac{3}{8}, \qquad p(B) = \frac{2}{5}, \qquad p(C) = \frac{9}{40}.$$

Tali valori soddisfano gli assiomi della probabilità. In particolare, essendo:

$$A \cup B \cup C = U \text{ e } A \cap B = A \cap C = B \cap C = \varnothing,$$

$$p(A) + p(B) + p(C) = \frac{3}{8} + \frac{2}{5} + \frac{9}{40} = 1 = p(U).$$

Dalla definizione assiomatica si deducono le seguenti *proprietà*.

a) $p(\varnothing) = 0$; b) $0 \leq p(E) \leq 1$; c) $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$, con $\overline{E} = U - E$;

d) se $E_1 \subseteq E_2$, allora $p(E_2 - E_1) = p(E_2) - p(E_1)$;

e) se $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$ e $E_1 \not\subset E_2$, allora $p(E_2 - E_1) = p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$.

6. LA PROBABILITÀ DELLA SOMMA LOGICA DI EVENTI

Consideriamo 12 dischetti numerati da 1 a 12 e gli eventi:

E_1 = «esce un numero pari»; E_2 = «esce un numero maggiore di 7».

Osserviamo che gli eventi E_1 ed E_2 possono verificarsi **contemporaneamente**: per esempio, estraendo il dischetto col numero 10, otteniamo sia un numero pari che un numero maggiore di 7. In questo caso si dice che gli eventi sono *compatibili*.

Consideriamo ora gli eventi:

E_3 = «esce un multiplo di 5»; E_4 = «esce un multiplo di 3».

Questi due eventi, invece, non possono verificarsi contemporaneamente: si dicono *eventi incompatibili*.
In generale, due eventi E_1 ed E_2, relativi allo stesso spazio di campioni, si dicono **incompatibili** se il verificarsi di uno esclude il verificarsi contemporaneo dell'altro, cioè $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. In caso contrario si dicono **compatibili**. Vale il seguente teorema.

● La **somma logica** o **unione** di due eventi E_1 ed E_2 è l'evento $E_1 \cup E_2$ che risulta verificato quando almeno uno degli eventi si verifica. L'evento somma logica si chiama anche **evento totale**.

TEOREMA

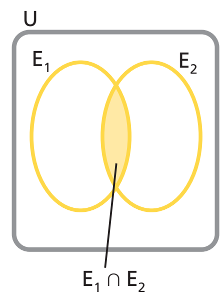
Probabilità della somma logica di due eventi

La probabilità della somma logica di due eventi E_1 ed E_2 è uguale alla somma delle loro probabilità diminuita della probabilità del loro evento intersezione:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2).$$

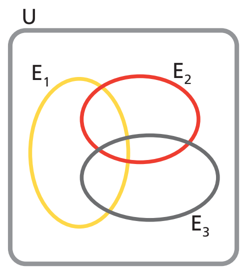
In particolare, se gli eventi sono *incompatibili*:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2).$$



Se gli eventi sono incompatibili, si ha $p(E_1 \cap E_2) = p(\varnothing) = 0$.
Nel caso di tre eventi la relazione del teorema diventa:

$$p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) - p(E_1 \cap E_2) +$$
$$- p(E_1 \cap E_3) - p(E_2 \cap E_3) + p(E_1 \cap E_2 \cap E_3).$$



In ogni caso è sempre opportuno effettuare la rappresentazione con i diagrammi di Eulero-Venn e ricavare, osservando la figura, le probabilità da sommare o da sottrarre.
Analogamente, si può generalizzare la relazione precedente al caso di n eventi; essa si riduce alla seguente quando gli eventi sono tutti *incompatibili*.

TEOREMA

Teorema della probabilità totale

Dati n eventi a due a due incompatibili $E_1, E_2, \dots, E_n$, la probabilità della loro unione è uguale alla somma delle loro singole probabilità:

$$p(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = p(E_1) + p(E_2) + \dots + p(E_n).$$

ESEMPIO

Un'urna contiene 15 palline numerate da 1 a 15. Calcoliamo la probabilità che, estraendo una pallina, essa rechi:

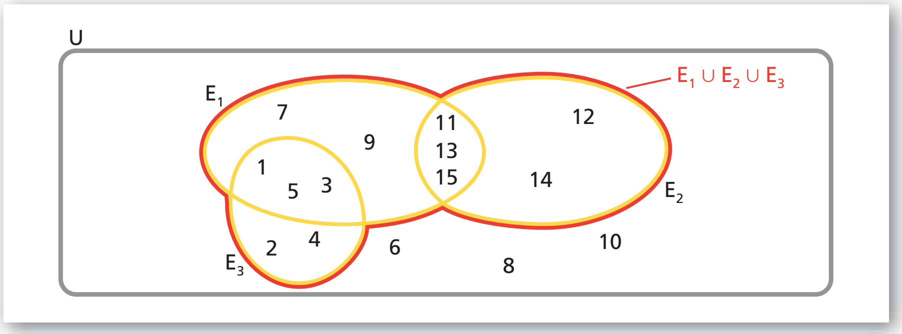
a) un numero dispari o maggiore di 10;
b) un numero minore di 6 o maggiore di 10;
c) un numero minore di 6 o dispari o maggiore di 10.

Gli eventi sono:

E_1 = «esce un numero dispari»;

E_2 = «esce un numero maggiore di 10»;

E_3 = «esce un numero minore di 6».



▶ **Figura 1** Se il diagramma è quello della figura, per ottenere $p(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ alla somma di $p(E_1)$, $p(E_2)$ e $p(E_3)$ dobbiamo sottrarre $p(E_1 \cap E_2)$ e $p(E_1 \cap E_3)$.

Utilizzando il diagramma di Eulero-Venn possiamo calcolare la probabilità dell'evento somma:

a) $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = \frac{8}{15} + \frac{5}{15} - \frac{3}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$;

b) $p(E_3 \cup E_2) = p(E_3) + p(E_2) = \frac{5}{15} + \frac{5}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$;

c) $p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \frac{8}{15} + \frac{5}{15} + \frac{5}{15} - \frac{3}{15} - \frac{3}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

7. LA PROBABILITÀ CONDIZIONATA

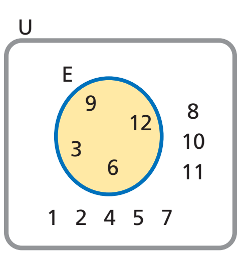
Un'urna contiene 12 palline identiche numerate da 1 a 12.
Sappiamo che lo spazio dei campioni è

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

e l'evento

E = «estrazione di una pallina con un numero divisibile per 3»

ha probabilità $p(E) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.



1. Consideriamo l'evento

E_1 = «estrazione di una pallina con un numero maggiore di 7»,

per il quale $p(E_1) = \frac{5}{12}$.

Valutiamo ora la probabilità di E quando sappiamo che l'evento E_1 si è verificato. Indichiamo questa probabilità con il simbolo $p(E \mid E_1)$ che leggiamo **probabilità di E condizionata** (o **subordinata**) **a E_1**.

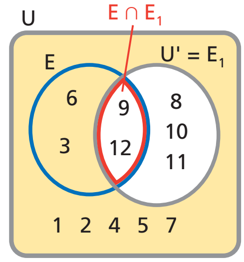
In questa situazione abbiamo un'informazione in più. Gli esiti possibili non sono più 12, ma 5 (figura *a*), in quanto l'insieme universo si è ridotto a:

$$U' = E_1 = \{8, 9, 10, 11, 12\}.$$

I casi favorevoli sono i 2 elementi dell'insieme $E \cap E_1 = \{9, 12\}$.

La probabilità è $p(E \mid E_1) = \frac{2}{5}$, che è un valore maggiore di $p(E) = \frac{1}{3}$.

L'informazione supplementare ha aumentato la probabilità di E. I due eventi E ed E_1 si dicono *correlati positivamente.*



a

2. Consideriamo l'evento

E_2 = «estrazione di una pallina con un numero pari»,

per il quale $p(E_2) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

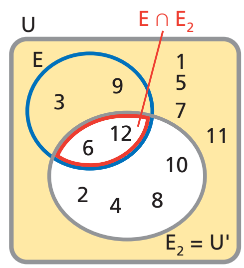
Valutiamo la probabilità di E, supponendo questa volta che sia verificato l'evento E_2. Indichiamo la probabilità di E condizionata (o subordinata) a E_2 con il simbolo $p(E \mid E_2)$. Anche in questa situazione abbiamo un'informazione in più. Gli esiti possibili non sono più 12 ma sono diventati 6 (figura *b*), in quanto l'insieme universo si è ridotto a

$$U' = E_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

e i casi favorevoli sono i 2 elementi dell'insieme $E \cap E_2 = \{6, 12\}$.

La probabilità è $p(E \mid E_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, che è uguale al valore di $p(E) = \frac{1}{3}$.

In questo caso, l'informazione supplementare non ha mutato il valore della probabilità dell'evento E. I due eventi E ed E_2 si dicono *stocasticamente indipendenti*.



b

L'aggettivo *stocastico* deriva dal greco *stochastikós* e significa «congetturale»; è sinonimo di «casuale» o «aleatorio».

3. Consideriamo l'evento

E_3 = «estrazione di una pallina con un numero minore di 8»,

per il quale $p(E_3) = \frac{7}{12}$.

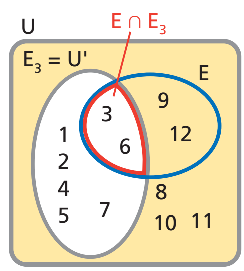
Valutiamo la probabilità di E supponendo che sia verificato l'evento E_3. Indichiamo la probabilità di E condizionata (o subordinata) a E_3 con il simbolo $p(E \mid E_3)$.
Gli esiti possibili non sono più 12 ma sono 7 (figura *c*), in quanto l'insieme universo si è ridotto a

$$U' = E_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

e i casi favorevoli sono i 2 elementi dell'insieme $E \cap E_3 = \{3, 6\}$.

La probabilità è $p(E \mid E_3) = \frac{2}{7}$, che è minore del valore di $p(E) = \frac{1}{3}$.

L'informazione supplementare in questo caso ha portato a un valore minore della probabilità. I due eventi E ed E_3 sono *correlati negativamente.*



c

In generale, diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Probabilità condizionata

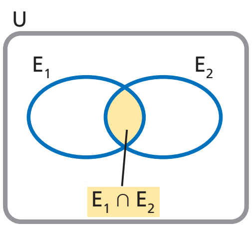
Dati due eventi E_1 ed E_2 tali che $E_1 \subset U$, $E_2 \subset U$ ed $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$, si dice probabilità condizionata (o subordinata) di E_1 rispetto a E_2, e si indica $p(E_1 | E_2)$, la probabilità che si verifichi E_1 nell'ipotesi che E_2 sia verificato.

Se $p(E_1 | E_2) = p(E_1)$, cioè le conoscenze ulteriori sul verificarsi di E_2 non modificano la probabilità di E_1, si dice che gli eventi sono **stocasticamente indipendenti**.
Se invece $p(E_1 | E_2) \neq p(E_1)$, cioè le conoscenze ulteriori sul verificarsi di E_2 modificano la probabilità di E_1, si dice che gli eventi sono **stocasticamente dipendenti**.
Più precisamente:

- se $p(E_1 | E_2) > p(E_1)$, i due eventi sono **correlati positivamente**;
- se $p(E_1 | E_2) < p(E_1)$, i due eventi sono **correlati negativamente**.

Nel valutare $p(E_1)$ si considera l'insieme U, mentre nel valutare $p(E_1 | E_2)$ lo spazio dei campioni si riduce al sottoinsieme E_2.

Chiamiamo k il numero degli esiti favorevoli al verificarsi di E_2 e r quello degli esiti favorevoli al verificarsi di E_1 nell'ipotesi che E_2 si sia verificato, ossia il numero di elementi di $E_1 \cap E_2$. Si ha:



$$p(E_1 | E_2) = \frac{r}{k}.$$

Dividendo numeratore e denominatore per n, numero dei campioni di U, otteniamo:

$$p(E_1 | E_2) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)}.$$

TEOREMA

La probabilità condizionata di un evento E_1 rispetto a un evento E_2, non impossibile, è determinata dalla formula:

$$p(E_1 | E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)}, \text{ con } p(E_2) \neq 0.$$

Analogamente: $p(E_2 | E_1) = \dfrac{p(E_2 \cap E_1)}{p(E_1)}$, con $p(E_1) \neq 0$.

È indifferente scrivere $p(E_1 \cap E_2)$ o $p(E_2 \cap E_1)$, perché l'intersezione gode della proprietà commutativa.

ESEMPIO

In un istituto ci sono 650 alunni, di cui 425 femmine e 225 maschi. Nella classe 5ª B ci sono 24 alunni, di cui 11 femmine e 13 maschi. Si estraggono a sorte due alunni che partecipino a un sondaggio nazionale sulle conoscenze relative alla lingua inglese. Calcoliamo la probabilità che i due alunni estratti siano entrambi maschi, sapendo che sono stati estratti due alunni della 5ª B.
Chiamiamo:

E_1 = «sono stati estratti due maschi»;

E_2 = «sono stati estratti due alunni della 5ª B».

Applichiamo il teorema della probabilità condizionata:

$$p(E_1 | E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)}.$$

I casi possibili sono $C_{650,2} = \dfrac{650 \cdot 649}{2!} = 210\,925$.

I maschi della 5ª B sono 13, perciò:

$$p(E_1 \cap E_2) = \frac{C_{13,2}}{C_{650,2}} = \frac{\frac{13 \cdot 12}{2}}{210\,925} = \frac{6}{16\,225}.$$

La probabilità di estrarre due alunni della 5ª B è:

$$p(E_2) = \frac{C_{24,2}}{C_{650,2}} = \frac{\frac{24 \cdot 23}{2}}{210\,925} = \frac{276}{210\,925}.$$

La probabilità di estrarre due alunni maschi, sapendo che sono stati estratti due alunni della 5ª B è:

$$p(E_1 | E_2) = \frac{6}{16\,225} \cdot \frac{210\,925}{276} = \frac{13}{46}.$$

8. LA PROBABILITÀ DEL PRODOTTO LOGICO DI EVENTI

Estraiamo una carta da un mazzo di 52 carte. L'evento E = «esce un re nero» è formato da E_1 = «esce una carta con seme nero», E_2 = «esce un re».

Essendo $E = \{$re picche, re fiori$\}$, la probabilità del prodotto logico di E_1 ed E_2 è:

$$p(E) = p(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}.$$

Questo risultato si può ottenere anche in un altro modo. Dalla relazione della probabilità condizionata, $p(E_2 | E_1) = \dfrac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_1)}$, otteniamo:

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2 | E_1).$$

Applichiamo questa relazione nel nostro esempio.

Abbiamo $p(E_1) = \dfrac{26}{52} = \dfrac{1}{2}$.

Per l'evento E_2 condizionato a E_1, essendo uscita una carta nera, i casi possibili sono 26, mentre i casi favorevoli sono 2:

$$p(E_2 | E_1) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}.$$

Pertanto, $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2 | E_1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{13} = \dfrac{1}{26}$.

- Il **prodotto logico** o **intersezione** di due eventi E_1 ed E_2, tali che $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, è l'evento $E_1 \cap E_2$ che risulta verificato se e solo se si verificano entrambi gli eventi. L'evento prodotto logico è anche detto **evento composto**.

- Calcoliamo direttamente la probabilità del prodotto logico $E_1 \cap E_2$ come rapporto tra il numero degli esiti favorevoli e quello degli esiti possibili.

- Abbiamo riottenuto il valore calcolato precedentemente in modo diretto.

In generale, vale il seguente teorema.

TEOREMA

Teorema della probabilità composta

La probabilità dell'evento composto o prodotto logico degli eventi E_1 ed E_2 è uguale al prodotto della probabilità dell'evento E_1 per la probabilità dell'evento E_2 nell'ipotesi che E_1 si sia verificato:

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2 | E_1).$$

In particolare, nel caso di eventi *stocasticamente indipendenti*:

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2).$$

● Se gli eventi sono stocasticamente indipendenti, $p(E_2 | E_1) = p(E_2)$.

Con il teorema della probabilità composta possiamo calcolare la probabilità degli eventi composti anche quando non è possibile effettuare il calcolo diretto.

ESEMPIO

Da una rilevazione statistica è risultato che, al primo controllo dopo 2000 km, su 100 automobili 8 hanno mostrato difetti solo all'alimentazione e 3 solo ai freni.

Calcoliamo la probabilità che una macchina presenti questi due difetti, che risultano indipendenti:

E_1 = «avere difettosa l'alimentazione», $\quad p(E_1) = \frac{8}{100} = 8\%;$

E_2 = «avere difettosi i freni», $\quad p(E_2) = \frac{3}{100} = 3\%;$

$$p(E_1 \cap E_2) = \frac{8}{100} \cdot \frac{3}{100} = \frac{24}{10\,000} = \frac{0,24}{100} = 0,24\%.$$

Se invece fra le 8 macchine che hanno difetti all'alimentazione 2 presentano anche difetti ai freni, non potremo più considerare i due eventi come indipendenti. In questo caso, la probabilità di avere difetti all'alimentazione e ai freni è:

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2 | E_1) = \frac{8}{100} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{100} = 2\%.$$

Il teorema della probabilità composta si può estendere a più eventi che si devono verificare uno dopo l'altro, considerando sempre quello precedente come verificato.

Nel caso di tre eventi la formulazione è

$$p(E) = p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p(E_1) \cdot p(E_2 | E_1) \cdot p(E_3 | (E_1 \cap E_2)),$$

che per eventi indipendenti si semplifica:

$$p(E) = p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot p(E_3).$$

● D'ora in poi, per brevità, nel parlare di eventi dipendenti o indipendenti tralasceremo il termine «stocasticamente».

ESPLORAZIONE

Siamo soli nell'Universo?

Questa domanda ha da sempre il potere di affascinare gli uomini e aprire le porte all'immaginazione: che aspetto avranno gli abitanti che popolano mondi molto distanti da noi? Di alieni parlano numerosi libri e film di fantascienza, ma essi affollano anche i pensieri di molti scienziati. Negli Stati Uniti, all'inizio degli anni Sessanta, è stato lanciato il programma di ricerca SETI (Search for Extraterrestrial Intelligence), con l'obiettivo dichiarato di cercare forme di vita intelligente extraterrestri. Nel 1961 il presidente del programma, l'astronomo Frank Drake, ha elaborato un'equazione che descrive la probabilità che in qualche altro luogo dell'Universo, e in particolare all'interno della Via Lattea, sia comparsa la vita. Per calcolare il numero di civiltà extraterrestri con le quali potremmo entrare in contatto è necessario tener conto di numerosi elementi, che sono riassunti nell'equazione di Drake:

$$N_{civ} = F_{star} \cdot P_{pian} \cdot N_{pian} \cdot P_{vita} \cdot P_{int} \cdot P_{com} \cdot T_{com},$$

dove i fattori rappresentano:

N_{civ} = numero di civiltà con le quali è possibile comunicare oggi;

F_{star} = tasso di formazione di stelle nella nostra galassia (numero di stelle/età galassia);

P_{pian} = probabilità che una stella sia circondata da un pianeta;

N_{pian} = numero medio di pianeti abitabili per stella (l'«abitabilità» di un pianeta è stimata attraverso la distanza dalla sua stella);

P_{vita} = probabilità che la vita appaia su un pianeta abitabile;

P_{int} = probabilità che l'evoluzione della vita porti a forme di vita intelligenti;

P_{com} = probabilità che una forma di vita intelligente produca una qualche forma di mezzi di tele-comunicazione con altri mondi;

T_{com} = tempo della durata di vita di una civiltà capace di comunicare.

L'enunciato dell'equazione non fa altro che scomporre il problema in altri problemi. La maggior parte dei termini dell'equazione è infatti nota con un grande margine di errore (gli unici fattori ben approssimati sono i primi due). Si può osservare, però, che la vita intelligente è una straordinaria «coincidenza» di eventi che sono, a ben vedere, indipendenti tra loro. È per questo che, da un punto di vista matematico, la probabilità finale nell'equazione di Drake è il risultato del prodotto di tante probabilità. Esistono diverse stime dell'equazione, alcune ottimistiche, altre pessimistiche. Nonostante 40 anni di attività intensive del programma SETI con radiotelescopi avanzati, finora non sono emerse prove della presenza di vita aliena. Tuttavia, nessuno dei fattori dell'equazione di Drake può essere posto uguale a 0, considerando che sulla Terra la vita intelligente si è sviluppata. Pertanto, per quanto piccola, la probabilità di vita extraterrestre è sempre diversa da 0 e forse non siamo soli nell'Universo.

▲ Una scena del film *Contact* di Robert Zemeckis; sullo sfondo i radiotelescopi del SETI, che finanziò il film.

Attività

Dall'Universo a noi, da noi all'Universo

- Oggi il programma SETI si è trasformato in *Seti@home*. Fai una ricerca, spiegando come funziona.
- Cerca anche notizie sul messaggio radio trasmesso nello spazio dal radiotelescopio di Arecibo.

Cerca nel Web:

Seti@home, vita extraterrestre, Arecibo messaggio

9. IL PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE

Gettiamo un dado regolare e calcoliamo la probabilità che in cinque lanci consecutivi la faccia 1 si presenti soltanto la prima volta e poi non si presenti più nei lanci successivi.
Siamo di fronte a un *evento prodotto logico* di una sequenza di cinque *eventi indipendenti*.

La probabilità dell'evento E = «esce la faccia 1» è $p(E) = \frac{1}{6}$, mentre la probabilità dell'evento $\overline{E}$ = «non esce la faccia 1» è $1 - p(E) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

La probabilità richiesta è:

$$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^4}{6^5}.$$

Abbandoniamo ora la richiesta che la faccia 1 esca la prima volta e consideriamo il caso in cui la faccia 1 esca una volta sola, non importa in quale posizione della sequenza. Le possibilità sono 5, tutte incompatibili fra loro, ognuna con uguale valore di probabilità p. Dobbiamo applicare il teorema della *somma logica* di eventi sommando cinque volte il valore appena trovato, cioè moltiplicandolo per 5:

- Il simbolo $p_{(1,5)}$ indica la probabilità che l'evento si verifichi una volta su cinque prove.

$$p_{(1,5)} = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^5}{6^5}.$$

Il numero delle volte con il quale può presentarsi la sequenza non è altro che il numero di permutazioni di 5 elementi di cui uno ripetuto una volta e l'altro quattro volte: $P_5^{(1,4)}$. Può anche essere visto come il numero dei modi con cui un elemento può occupare cinque posti a disposizione: $\binom{5}{1}$.

- $P_5^{(1,4)} = \frac{5!}{1!4!} = \frac{5!}{1!(5-1)!}$; per la proprietà dei tre fattoriali possiamo scrivere: $\frac{5!}{1!(5-1)!} = \binom{5}{1}$. In generale: $P_n^{(k,n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

Se l'evento «esce la faccia 1» si deve presentare due volte, abbiamo:

$$p_{(2,5)} = \binom{5}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{10 \cdot 5^3}{6^5}.$$

Se le volte sono tre:

$$p_{(3,5)} = \binom{5}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{10 \cdot 5^2}{6^5}.$$

E così via.

Generalizziamo il problema.

Abbiamo un evento E con probabilità costante p di verificarsi.
L'evento contrario $\overline{E}$ ha probabilità di verificarsi $q = 1 - p$.

Effettuiamo n prove e vogliamo calcolare la probabilità che l'evento E si verifichi k volte e $(n - k)$ volte non si verifichi.
Supponendo che l'evento accada nelle prime k prove e non accada nelle $(n - k)$ successive, dobbiamo applicare il *teorema della probabilità composta* e abbiamo:

$$\underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{k \text{ volte}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{(n-k) \text{ volte}} = p^k \cdot q^{n-k}.$$

Poiché le k prove in cui l'evento si verifica si possono presentare con ordine diverso, dobbiamo applicare il teorema della *somma logica di eventi* e quindi moltiplicare il valore precedente per il numero delle possibilità che ci sono.
Indichiamo il valore della probabilità con il simbolo $p_{(k,n)}$. Abbiamo:

$$p_{(k,n)} = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}.$$

TEOREMA

Schema delle prove ripetute (o di Bernoulli)

Dato un evento E, sottoposto a n esperimenti indipendenti ognuno con probabilità p costante di verificarsi, essendo $q = (1 - p)$ la probabilità che ha l'evento di non verificarsi, la probabilità di ottenere k successi su n prove è:

$$p_{(k,n)} = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}.$$

ESEMPIO

Una macchina produce pezzi difettosi con una probabilità del 3%. Prendiamo 8 pezzi e calcoliamo la probabilità che:

a) nessuno sia difettoso;
b) 3 siano difettosi;
c) tutti siano difettosi;
d) almeno 2 siano difettosi.

Essendo $p = 0{,}03$ e $q = 0{,}97$:

a) $p_{(0,8)} = \binom{8}{0}(0{,}03)^0 \cdot (0{,}97)^8 \simeq 78{,}37\%.$

b) $p_{(3,8)} = \binom{8}{3}(0{,}03)^3 \cdot (0{,}97)^5 \simeq 12{,}98 \cdot 10^{-2}\%.$

c) $p_{(8,8)} = \binom{8}{8}(0{,}03)^8 \cdot (0{,}97)^0 \simeq 6{,}56 \cdot 10^{-11}\%.$

d) Per questo quesito utilizziamo l'evento contrario di «almeno due pezzi difettosi» che è: «nessun pezzo difettoso o uno solo difettoso»:

$$p = 1 - p_{(0,8)} - p_{(1,8)} \simeq 1 - 0{,}7837 - \binom{8}{1}(0{,}03)^1 \cdot (0{,}97)^7 \simeq 2{,}24\%.$$

10. IL TEOREMA DI BAYES

Se l'evento deve accadere: la disintegrazione

Abbiamo le seguenti due urne:

- urna 1: 3 palline bianche e 2 nere;
- urna 2: 4 palline bianche e 5 nere.

Calcoliamo la probabilità che, scegliendo a caso un'urna ed effettuando l'estrazione di una pallina, questa sia bianca.
Per la scelta dell'urna ci affidiamo al lancio di un dado: se viene un numero minore di tre, effettueremo l'estrazione dalla prima urna, altrimenti dalla seconda.

Gli eventi relativi alla scelta dell'urna sono:

E_1 = «faccia del dado con numero minore di tre»;

E_2 = «faccia del dado con numero maggiore o uguale a tre».

Questi due eventi sono incompatibili ed esauriscono tutte le possibilità del lancio del dado.

Essi hanno probabilità: $p(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $p(E_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Colleghiamo gli eventi E_1 ed E_2 alle due urne con le palline bianche e nere considerando la rappresentazione della figura 2. Allora l'evento

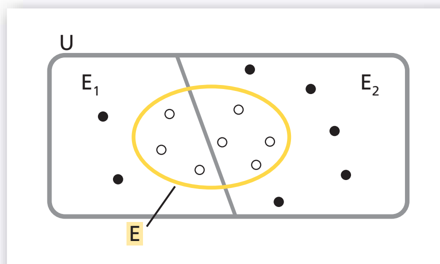
E = «estrazione di una pallina bianca»

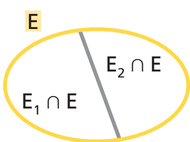
è un sottoinsieme di $U = E_1 \cup E_2$ ed è l'unione di due eventi incompatibili:

$E_1 \cap E$ = «uscita della faccia del dado con un numero minore di tre ed estrazione di una pallina bianca dalla prima urna»;

$E_2 \cap E$ = «uscita della faccia del dado con un numero maggiore o uguale a tre ed estrazione di una pallina bianca dalla seconda urna».

▶ Figura 2





Gli eventi condizionati relativi all'estrazione della pallina bianca, avendo scelto l'urna, sono:

$E \mid E_1$ = «estrazione pallina bianca avendo scelto la prima urna»;

$E \mid E_2$ = «estrazione pallina bianca avendo scelto la seconda urna».

Essi hanno probabilità: $p(E \mid E_1) = \frac{3}{5}$, $p(E \mid E_2) = \frac{4}{9}$.

Applicando il teorema della probabilità composta, abbiamo che gli eventi composti $E_1 \cap E$ ed $E_2 \cap E$ hanno rispettivamente probabilità:

$$p(E_1 \cap E) = p(E_1) \cdot p(E \mid E_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5};$$

$$p(E_2 \cap E) = p(E_2) \cdot p(E \mid E_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{27}.$$

Possiamo ora calcolare la probabilità dell'evento E, che è unione dei due eventi composti, $E = (E_1 \cap E) \cup (E_2 \cap E)$:

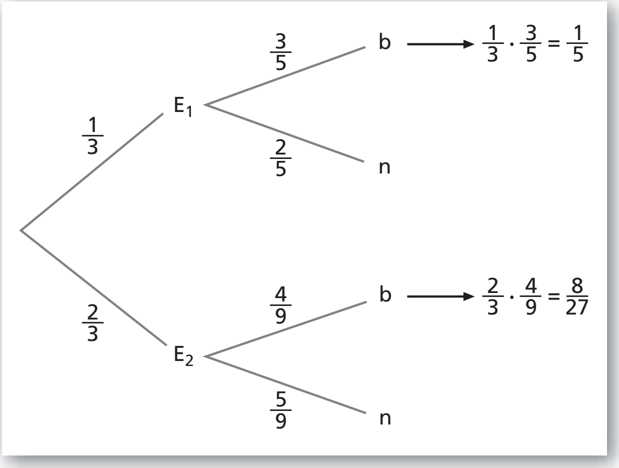
$$p(E) = p(E_1 \cap E) + p(E_2 \cap E) =$$

$$= p(E_1) \cdot p(E \mid E_1) + p(E_2) \cdot p(E \mid E_2) = \frac{1}{5} + \frac{8}{27} = \frac{67}{135}.$$

● Essendo $E_1 \cap E$ ed $E_2 \cap E$ eventi incompatibili, la probabilità della loro unione è uguale alla somma delle loro probabilità.

Possiamo sintetizzare tutto il procedimento nel modo seguente (figura 3).

Partendo da sinistra, percorrendo i rami del diagramma ad albero, leggiamo la successione degli eventi che formano l'evento composto ed effettuiamo il prodotto delle probabilità. I rami uscenti da un nodo rappresentano eventi incompatibili e, sommando le probabilità segnate su di essi, otteniamo il valore uno.



◄ **Figura 3**

● In un diagramma ad albero i *rami* sono i segmenti che congiungono i *nodi*.

Addizionando le probabilità degli eventi prodotto dei percorsi, otteniamo la probabilità dell'evento considerato:

$$p(E) = \frac{1}{5} + \frac{8}{27} = \frac{67}{135} .$$

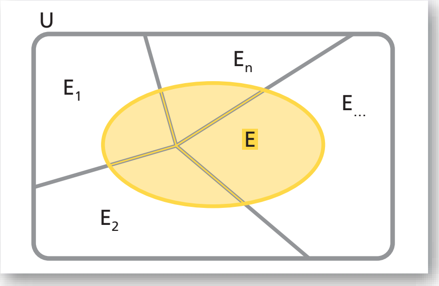
In generale, un evento E si può esprimere come unione di eventi composti a due a due incompatibili nel seguente modo:

$$E = (E_1 \cap E) \cup (E_2 \cap E) \cup \ldots \cup (E_n \cap E),$$

● Questo procedimento è detto «di disintegrazione».

dove $E_1, E_2, \ldots, E_n$ costituiscono una *partizione* dello spazio dei campioni U, cioè sono n eventi:

- non impossibili:
  $E_i \neq \varnothing$ per $i = 1, 2, 3, \ldots, n$;
- incompatibili a due a due:
  $E_i \cap E_j = \varnothing$
  per $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$ e $i \neq j$;
- tali che la loro unione $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$ sia un evento certo.



◄ **Figura 4 Una partizione dello spazio dei campioni *U* e dell'evento *E*.**

Applicando il teorema della probabilità totale, si ha

$$\boldsymbol{p(E) = p(E \cap E_1) + p(E \cap E_2) + \ldots + p(E \cap E_n)}$$

e applicando il teorema del prodotto logico di eventi si ha la formula

$$\boxed{\boldsymbol{p(E) = p(E_1) \cdot p(E \mid E_1) + p(E_2) \cdot p(E \mid E_2) + \ldots + p(E_n) \cdot p(E \mid E_n)},}$$

● Questa formula è anche detta **formula di disintegrazione**.

la cui applicazione risulta facilitata utilizzando i diagrammi ad albero.

Se l'evento è accaduto: il teorema di Bayes

Consideriamo ancora l'esperimento relativo all'estrazione di una pallina bianca da due urne, la cui scelta è stabilita dal lancio di un dado.

Supponiamo che *si sia verificato* l'evento:

$$E = \text{«estrazione di una pallina bianca».}$$

● Nel problema esaminato: l'urna 1 contiene 3 palline bianche e 2 nere, l'urna 2 ne contiene 4 bianche e 5 nere; se la faccia del dado ha un numero minore di 3, l'estrazione avviene dalla prima urna, altrimenti dalla seconda.

Proviamo a rispondere alla seguente domanda: «qual è la probabilità che la pallina estratta provenga dalla prima urna?».
Siamo in una situazione completamente diversa da quella precedente.
Infatti abbiamo sempre calcolato la probabilità di un evento che potrebbe accadere conoscendo le cause che stanno alla base del suo verificarsi.
Ora siamo di fronte a un evento che si è verificato e vogliamo conoscere la probabilità da assegnare alla *causa* che può averlo prodotto.

● Usiamo ancora le notazioni:

E_1 = «uscita di una faccia del dado con un numero minore di tre»;

$E_1 \cap E$ = «uscita di una faccia del dado con un numero minore di tre ed estrazione di una pallina bianca dalla prima urna»;

$E \mid E_1$ = «estrazione di una pallina bianca essendo uscita una faccia del dado con un numero minore di tre».

I valori della probabilità che abbiamo calcolato precedentemente sono:

$$p(E_1 \cap E) = p(E_1) \cdot p(E \mid E_1) = \frac{1}{5} \quad \text{e} \quad p(E) = \frac{67}{135}.$$

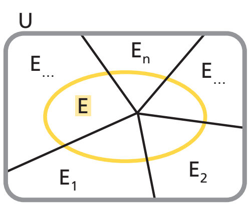
Dalla relazione della probabilità composta,

$$p(E \cap E_1) = p(E) \cdot p(E_1 \mid E),$$

ricaviamo $p(E_1 \mid E)$ e, dopo aver notato che $p(E \cap E_1) = p(E_1 \cap E)$, sostituiamo i valori calcolati precedentemente, ottenendo che, avendo riscontrato l'uscita di una pallina bianca, la probabilità che essa provenga dalla prima urna è:

$$p(E_1 \mid E) = \frac{p(E \cap E_1)}{p(E)} = \frac{p(E_1 \cap E)}{p(E)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{67}{135}} = \frac{27}{67}.$$

Quindi, la probabilità della causa dell'evento che si è verificato si ottiene facendo il rapporto tra la probabilità dell'evento, verificata la causa, e la probabilità totale dell'evento.



Generalizziamo il problema.

Sia U uno spazio di campioni ed $E \subset U$ un evento che supponiamo sia verificato. Consideriamo una partizione di U in n eventi $E_1, E_2, \ldots, E_n$.
Possiamo scrivere

$$E = (E \cap E_1) \cup (E \cap E_2) \cup \ldots \cup (E \cap E_n),$$

e la probabilità che l'evento E_i sia stato la **causa** di E si ottiene come rapporto fra la probabilità di $E_i \cap E$ e la probabilità dell'evento totale E. Ciò conduce alla seguente formula, nota come **teorema di Bayes**.

● Thomas Bayes (1702-1761), reverendo e matematico inglese, fu membro della Royal Society.

TEOREMA

Teorema di Bayes

La probabilità che, essendosi verificato un evento E, la causa che sta alla sua origine sia l'evento E_i, con $i = 1, 2, \ldots, n$, è

$$p(E_i \mid E) = \frac{p(E_i) \cdot p(E \mid E_i)}{p(E)},$$

dove $p(E)$ è la probabilità dell'evento totale:

$$p(E) = p(E_1) \cdot p(E \mid E_1) + p(E_2) \cdot p(E \mid E_2) + \ldots + p(E_n) \cdot p(E \mid E_n).$$

Il teorema di Bayes trova applicazioni nel campo del controllo della qualità, in medicina, in farmacia e ogni qualvolta è necessario valutare il «peso» di una causa di fronte al verificarsi di un evento.

ESEMPIO

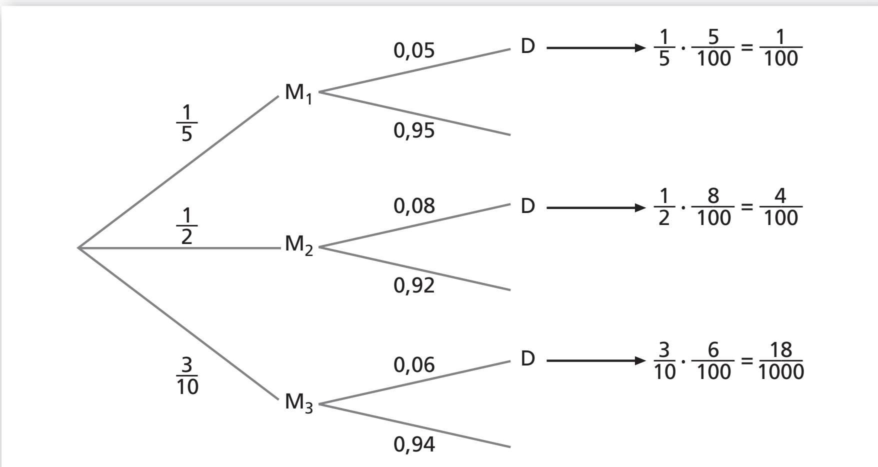
Un'industria utilizza tre macchinari: il primo produce 500 pezzi, il secondo 1250 e il terzo 750.
I pezzi difettosi prodotti dai tre macchinari sono rispettivamente il 5%, l'8% e il 6%.
Avendo prelevato un pezzo difettoso, qual è la probabilità che provenga dal primo macchinario? E qual è la probabilità che provenga dal secondo o dal terzo macchinario?

M_1 = «produzione primo macchinario»,

M_2 = «produzione secondo macchinario»,

M_3 = «produzione terzo macchinario»,

D = «pezzo difettoso».



◀ Figura 5

Calcoliamo la probabilità che prendendo a caso un pezzo esso sia difettoso:

$$p(D) = 0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}018 = 0{,}068.$$

Rispondiamo al primo quesito.
La probabilità che esca un pezzo difettoso dalla prima macchina è:

$$p(D \cap M_1) = p(M_1) \cdot p(D \mid M_1) = 0{,}01.$$

Calcoliamo la probabilità che, avendo preso un pezzo difettoso, esso provenga dalla prima macchina:

$$p(M_1 \mid D) = \frac{p(M_1) \cdot p(D \mid M_1)}{p(D)} = \frac{0{,}01}{0{,}068} = \frac{10}{68} = \frac{5}{34}.$$

Rispondiamo al secondo quesito.
La probabilità che esca un pezzo difettoso dalla seconda o dalla terza macchina è:

$$p(M_2) \cdot p(D \mid M_2) + p(M_3) \cdot p(D \mid M_3) = 0{,}04 + 0{,}018 = 0{,}058.$$

Quindi, la probabilità che, avendo preso un pezzo difettoso, esso provenga dalla seconda o dalla terza macchina è:

$$\frac{0{,}058}{0{,}068} = \frac{58}{68} = \frac{29}{34}.$$

I FILTRI ANTISPAM

Come si possono bloccare le e-mail di spam?

▶ Il quesito completo a pag. α49

Si calcola che attualmente più del 50% delle e-mail che viaggiano nella rete sia costituito da messaggi di spam. Il fastidioso fenomeno, esploso alla fine degli anni Novanta, ha notevoli ripercussioni economiche: le energie complessivamente impiegate nel mondo per passare al vaglio e cancellare questi messaggi causano perdite per svariati miliardi di euro.

Di fronte alla fiumana di spam

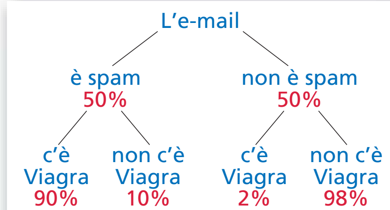
Molti fornitori di servizi internet hanno adottato dei filtri antispam che aiutano l'utente a scartare i messaggi di posta elettronica indesiderata. Si tratta di programmi informatici che determinano, ogni qual volta giunge una nuova e-mail, se il messaggio è legittimo, e quindi va recapitato, oppure spam, e quindi va cestinato. Il funzionamento di questi programmi del computer, alla cui scrittura i ricercatori hanno lavorato per diversi anni, si basa sulla teoria delle probabilità. I filtri antispam non fanno altro che stimare automaticamente la probabilità che un messaggio e-mail in arrivo sia di spam o meno.

Sulla base di una certa casistica, il programma informatico viene inizialmente istruito sulla probabilità che una parola sia contenuta in una e-mail buona o indesiderata. Per esempio, poniamo che il 90% delle e-mail di spam contenga la parola Viagra. Se il computer bloccasse qualunque messaggio e-mail contenente questa parola, si avrebbero molti «falsi positivi», ovvero finirebbero eliminati anche i messaggi assolutamente legittimi, contenenti la parola Viagra ed erroneamente classificati come spam. Ma non solo. Gli spammer imparerebbero ad aggirare il problema, alterando leggermente la grafia della parola e scrivendo, per esempio, Vi@gra o Vi*agra al posto di Viagra.

Il programma antispam, quindi, non può cestinare un'e-mail solo perché contiene una parola altamente sospetta. Deve tener conto di tutte le altre parole presenti nell'e-mail.

Ecco come funziona il filtro

Il computer assume inizialmente che ciascun messaggio abbia una probabilità a priori del 50% di essere spam. Il filtro utilizza poi la formula di Bayes per calcolare la probabilità condizionata *P* che, data una certa parola, per esempio Viagra, il messaggio sia spam.



$$P = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}5}{0{,}9 \cdot 0{,}5 + 0{,}02 \cdot 0{,}5} = 0{,}98$$

Combina poi queste probabilità in una probabilità complessiva che il messaggio sia spam, sulla base di tutti i vocaboli che compaiono.

L'indice di spamicity

Il risultato finale, ovvero la probabilità bayesiana a posteriori che il messaggio sia effettivamente spam, è un indice chiamato *spamicity*. Una volta calcolato il valore di spamicity, basta stabilirne la soglia (per esempio, superiore al 90% o 0,9), oltre la quale il computer smista il messaggio come spam e lo elimina.

Il criterio descritto, che passa al vaglio le parole, può essere integrato anche con altri fattori, per esempio l'eventualità che intere righe del messaggio siano scritte in lettere maiuscole (opzione spesso preferita dagli spammer).

Alcuni filtri molto avanzati sono addirittura in grado di eseguire calcoli personalizzati per ciascun utente, cioè di aggiornare i loro indici di probabilità sulla base delle e-mail ricevute presenti nella posta elettronica.

L'origine dello spam è in una scatoletta di carne

SPAM è una marca di carne in scatola americana realmente esistente.

Negli anni Settanta, spinti dall'invasiva politica pubblicitaria della casa produttrice di SPAM, i Monty Python, famoso gruppo di attori comici, proposero uno sketch di denuncia in cui la cameriera nevrastenica di un fast food proponeva, con tono sempre più fastidioso e incalzante, piatti esclusivamente a base di carne SPAM: uova e SPAM, uova, bacon e SPAM, uova, bacon, salsicce e SPAM. Spam è diventato così sinonimo di messaggio pubblicitario insistente e non desiderato.

LABORATORIO DI MATEMATICA
IL CALCOLO DELLA PROBABILITÀ

ESERCITAZIONE GUIDATA

Un sacchetto contiene t gettoni, di cui r rossi, g gialli, b blu. Costruiamo un foglio elettronico che riceva i numeri r, g, b e che mostri le probabilità delle possibili estrazioni di due gettoni, sia che il primo gettone estratto venga reimmesso nel sacchetto, sia che non venga reimmesso. Proviamo il foglio con $r = 4$, $g = 2$ e $b = 3$.

- Prepariamo il foglio come in figura 1. In particolare, scriviamo le diverse coppie di colori date dalle combinazioni con ripetizione di tre oggetti presi a due a due, cioè nove.
- Dichiariamo le celle adibite a mostrare le probabilità di estrazione in formato percentuale. Ricaviamo il totale dei gettoni digitando = C3 + C5 + C7 in C9.
- Per mostrare le varie probabilità di estrazione, posto che c sia il numero dei gettoni di un colore e t quello totale, applichiamo le formule $\frac{c}{t}$, $\frac{c}{t-1}$ e $\frac{c-1}{t-1}$. La prima dà la probabilità di estrazione del primo o del secondo gettone con reimmissione, la seconda e la terza danno la probabilità di estrazione del secondo gettone senza la reimmissione, rispettivamente, se la coppia è di colore diverso o se è dello stesso colore.
- Per ottenere le probabilità di estrazione delle coppie di gettoni, digitiamo = F3*H3 nella cella M3 e la copiamo sino alla M11 e = F3*J3 nella cella N3 e la copiamo sino alla N11.
- Poniamo due controlli: = SOMMA(M3:M11) in M12 e = SOMMA(N3:N11) in N12.
- Inseriamo i dati e otteniamo il foglio di figura 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Il numero dei gettoni								Le probabilità dell'estrazione					
2					del I colore		del II col. con r.		del II col. senza r.		della coppia		con r.	senza r.
3	di colore rosso		4		rosso	44,44%	rosso	44,44%	rosso	37,50%	rosso	rosso	19,75%	16,67%
4					rosso	44,44%	giallo	22,22%	giallo	25,00%	rosso	giallo	9,88%	11,11%
5	di colore giallo		2		rosso	44,44%	blu	33,33%	blu	37,50%	rosso	blu	14,81%	16,67%
6					giallo	22,22%	rosso	44,44%	rosso	50,00%	giallo	rosso	9,88%	11,11%
7	di colore blu		3		giallo	22,22%	giallo	22,22%	giallo	12,50%	giallo	giallo	4,94%	2,78%
8					giallo	22,22%	blu	33,33%	blu	37,50%	giallo	blu	7,41%	8,33%
9	totale		9		blu	33,33%	rosso	44,44%	rosso	50,00%	blu	rosso	14,81%	16,67%
10					blu	33,33%	giallo	22,22%	giallo	25,00%	blu	giallo	7,41%	8,33%
11					blu	33,33%	blu	33,33%	blu	25,00%	blu	blu	11,11%	8,33%
12													100,00%	100,00%

◄ **Figura 1**

Nel sito: ► 1 esercitazione guidata ► 4 esercitazioni in più

Esercitazioni

Svolgi l'analisi dei seguenti problemi e costruisci un foglio elettronico che permetta l'ingresso dei dati, determini le probabilità degli eventi descritti e mostri i risultati nei formati decimale, percentuale e frazionario. Prova il foglio con i dati proposti. Realizza la simulazione richiesta nei problemi con 6000 estrazioni.

1 Una scatola contiene t palline, di cui r rosse, g gialle, b blu, v verdi. Supponendo l'estrazione di due palline, determina la probabilità delle uscite dei quattro colori, indipendentemente dall'ordine di estrazione, sia nel caso che la prima pallina sia rimessa nella scatola, sia che non vi sia rimessa. Simula l'estrazione di una pallina gialla e di una blu. Prova con $r = 3$, $g = 4$, $b = 5$, $v = 8$. [10,00%; 10,53%]

2 Supponi l'estrazione contemporanea di due numeri della tombola. Determina la probabilità che i due numeri siano, rispetto a un numero dato m, entrambi minori, entrambi maggiori, uno minore e l'altro maggiore, uno uguale e l'altro maggiore, uno uguale e l'altro minore. Prova con $m = 30$. Simula il caso in cui i due numeri estratti siano uno uguale e uno minore di m. [0,72%]

LA TEORIA IN SINTESI

IL CALCOLO DELLA PROBABILITÀ

1. GLI EVENTI

- **Evento**: avvenimento, descritto da una proposizione, che può accadere o no. Si dice:
  - **evento aleatorio** se il suo verificarsi dipende dal caso;
  - **evento certo** se esso accade con certezza;
  - **evento impossibile** se non può mai accadere.
- **Evento elementare** o **campione**: ogni singolo risultato possibile di una prova o esperimento.
- **Universo degli eventi** o **spazio campionario**: l'insieme di tutti gli eventi elementari.

2. LA CONCEZIONE CLASSICA DELLA PROBABILITÀ

- **Probabilità** di un evento E: rapporto tra il numero dei casi favorevoli f e il numero dei casi possibili u:

  $$p(E) = \frac{f}{u}.$$

  Tutti i casi sono supposti ugualmente possibili.
  - In generale: $0 \leq p(E) \leq 1$.
  - Se $f = 0$, l'evento è **impossibile** e $p(E) = 0$.
  - Se $f = u$, l'evento è **certo** e $p(E) = 1$.
- **Evento contrario $\overline{E}$**: è l'evento che si verifica se e solo se non si verifica E. Vale:

  $$p(\overline{E}) = 1 - p(E).$$

  ESEMPIO: Estraiamo una carta da un mazzo di 40 carte. L'evento contrario all'evento A = «esce una carta con un valore minore di 7» è l'evento $\overline{A}$ = «non esce una carta con un valore minore di 7» o anche $\overline{A}$ = «esce una carta con un valore maggiore o uguale a 7».

  $$p(A) = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}, \quad p(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

3. LA CONCEZIONE STATISTICA DELLA PROBABILITÀ

- **Frequenza relativa** di un evento: rapporto tra il numero m delle volte in cui si è verificato un fenomeno e il numero n delle prove effettuate nelle stesse condizioni:

  $$f(E) = \frac{m}{n}.$$

- **Legge empirica del caso**: all'aumentare del numero n delle prove effettuate, la frequenza di un evento E tende alla probabilità.
- La **probabilità** di un evento E, secondo l'impostazione **statistica**, è uguale alla frequenza relativa, se il numero di prove effettuate è sufficientemente alto.

  ESEMPIO: In un poligono di tiro, un atleta ha colpito il centro 1525 volte su 1600 tiri. Possiamo valutare che la probabilità che l'atleta centri il bersaglio sia $f = \frac{1525}{1600} = 0{,}953$.

4. LA CONCEZIONE SOGGETTIVA DELLA PROBABILITÀ

- La **probabilità** di un evento E, secondo l'impostazione **soggettiva**, è il rapporto tra il prezzo P che una persona ritiene equo pagare e la vincita V che riceverà al verificarsi di E:

$$p(E) = \frac{P}{V}.$$

ESEMPIO: Un barista ha creato un nuovo tipo di cocktail e scommette 12 euro contro 8 euro di un suo collega che otterrà un alto gradimento. La probabilità di successo del prodotto valutata dal barista è $\frac{12}{20} = \frac{60}{100} = 60\%$.

5. L'IMPOSTAZIONE ASSIOMATICA DELLA PROBABILITÀ

- L'impostazione **assiomatica** permette di calcolare la probabilità di un evento attraverso la logica e la teoria degli insiemi.
- **Spazio dei campioni**: l'insieme U, che contiene tutti i possibili risultati di un esperimento.
- **Spazio degli eventi**: l'insieme che contiene tutti i possibili sottoinsiemi di U, ovvero tutti i possibili eventi. Esso coincide con $\mathcal{P}(U)$.
- La **probabilità** è una funzione che associa a ogni evento E un numero reale che soddisfi gli assiomi:
  - $p(E) \geq 0$;
  - $p(U) = 1$;
  - se $E_1 \cap E_2 = \varnothing \Rightarrow p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$.

6. LA PROBABILITÀ DELLA SOMMA LOGICA DI EVENTI

- **Somma logica** di due eventi: evento che si verifica quando almeno uno dei due eventi si verifica.
- Due eventi E_1 ed E_2 sono:
  - **incompatibili** se $E_1 \cap E_2 = \varnothing$;
  - **compatibili** se $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$.
- $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$.

  Caso particolare: se gli eventi sono incompatibili, allora $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$.

ESEMPIO: Un'urna contiene 15 palline numerate da 1 a 15. Calcoliamo la probabilità che, estraendo contemporaneamente due palline, escano due numeri pari o due numeri dispari.

$$p = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{15}{2}} + \frac{\binom{8}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{7}{15}.$$

- **Teorema della probabilità totale**
  Dati n eventi $E_1, E_2, \dots, E_n$ a due a due incompatibili: $p(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = p(E_1) + p(E_2) + \dots + p(E_n)$.

7. LA PROBABILITÀ CONDIZIONATA

- La probabilità condizionata di un evento E_1 rispetto a un evento E_2, non impossibile, è la probabilità di verificarsi di E_1 nell'ipotesi che E_2 si sia già verificato e si indica con $p(E_1 | E_2)$. Gli eventi si dicono:
  - **stocasticamente indipendenti** se $p(E_1 | E_2) = p(E_1)$;
  - **correlati positivamente** se $p(E_1 | E_2) > p(E_1)$;
  - **correlati negativamente** se $p(E_1 | E_2) < p(E_1)$.
- Vale il teorema: $p(E_1 | E_2) = \dfrac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)}$, con $p(E_2) \neq 0$.

8. LA PROBABILITÀ DEL PRODOTTO LOGICO DI EVENTI

- **Prodotto logico** o **evento composto** di due eventi $E_1 \cap E_2$: evento che si verifica quando si verificano entrambi gli eventi.

- **Teorema della probabilità composta**
  - $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2 \mid E_1)$, se E_1 ed E_2 sono eventi dipendenti;
  - $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2)$, se E_1 ed E_2 sono eventi indipendenti.

ESEMPIO: Si estraggono consecutivamente due carte da un mazzo da 40. La probabilità che escano due assi nel caso di

- non reimmissione della prima carta è $p = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$;
- reimmissione della prima carta è $p = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$.

9. IL PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE

- **Schema delle prove ripetute (o di Bernoulli)**
Se p è la probabilità che un evento si verifichi e $q = 1 - p$ la probabilità che non si verifichi, ripetuti n esperimenti la probabilità che l'evento si verifichi k volte è:

$$p_{(k,n)} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

ESEMPIO: Un'urna contiene 4 palline nere, 2 rosse e 9 verdi. La probabilità che, effettuando 7 estrazioni nelle stesse condizioni, la pallina nera si presenti 5 volte è:

$$p_{(5,7)} = \binom{7}{5} \left(\frac{4}{15}\right)^5 \left(\frac{11}{15}\right)^2 = \frac{21 \cdot 4^5 \cdot 11^2}{15^7}.$$

10. IL TEOREMA DI BAYES

- Un evento E si può scrivere come unione di n eventi incompatibili, ognuno dei quali è il prodotto di due eventi:

$$E = (E \cap E_1) \cup (E \cap E_2) \cup \ldots \cup (E \cap E_n),$$

dove $E_1, E_2, \ldots, E_n$ costituiscono una *partizione* dello spazio dei campioni U, cioè sono eventi non impossibili, a due a due incompatibili e la cui unione coincide con U.

- Applicando la probabilità dell'evento prodotto logico si ottiene la **formula di disintegrazione**:

$$p(E) = p(E_1) \cdot p(E \mid E_1) + p(E_2) \cdot p(E \mid E_2) + \ldots + p(E_n) \cdot p(E \mid E_n).$$

- Il **teorema di Bayes** permette di calcolare la probabilità che un determinato evento (o **causa**) E_i abbia preceduto l'evento E che si è verificato. La probabilità che l'evento E_i sia stato la premessa al verificarsi dell'evento E è:

$$p(E_i \mid E) = \frac{p(E_i) \cdot p(E \mid E_i)}{p(E)}.$$

ESEMPIO: Una macchina effettua il 70% della produzione e la parte restante è effettuata da una seconda macchina. Il 10% dei pezzi prodotti dalla prima macchina è difettoso, mentre la seconda macchina produce pezzi difettosi per il 5%. Scelto a caso un pezzo e avendo riscontrato che è difettoso, calcoliamo la probabilità che provenga dalla prima macchina.
E = «pezzo difettoso»;
E_1 = «produzione prima macchina».
La probabilità di estrarre un pezzo difettoso è: $p(E) = 0,7 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,05 = 0,085$.
La probabilità che la prima macchina produca un pezzo difettoso è: $p(E_1 \cap E) = p(E_1) \cdot p(E \mid E_1) = 0,7 \cdot 0,1 = 0,07$.
La probabilità che il pezzo difettoso provenga dalla prima macchina è: $p(E_1 \mid E) = \frac{0,07}{0,085} \simeq 82,3\%$.

1. GLI EVENTI

Teoria a pag. α50

1 Stabilisci quali dei seguenti eventi sono elementari e quali composti da più eventi elementari.
Si estrae da un mazzo di 52 carte:

a) una carta di cuori;
b) il due di picche;
c) una figura;
d) la regina di fiori;
e) un cinque;
f) una figura nera.

2 Si lanciano due monete contemporaneamente. Scrivi gli eventi aleatori elementari.

3 Un'urna contiene cinque palline con i primi cinque numeri dispari. Si estrae una pallina. Scrivi gli eventi aleatori elementari e altri eventi aleatori formati da più eventi elementari.

2. LA CONCEZIONE CLASSICA DELLA PROBABILITÀ

Teoria a pag. α51

4 **ESERCIZIO GUIDA**

Un'urna contiene dieci palline numerate da 1 a 10. Calcoliamo la probabilità che, estraendo una pallina:
a) essa abbia il numero 5;
b) essa abbia un numero divisibile per 4;
c) essa non abbia un numero divisibile per 4.

Poiché l'urna contiene 10 palline e ne viene estratta una sola, il numero dei casi possibili è 10.

a) Nell'urna vi è una sola pallina con il numero 5. La probabilità è: $p = \frac{1}{10}$.

b) Nell'urna vi sono due numeri divisibili per 4: {4, 8}. La probabilità è: $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

c) L'evento è quello contrario del punto precedente: $p = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

5 Si lancia un dado a sei facce. Calcola la probabilità che esca:

a) il numero 2;
b) un numero multiplo di 3;
c) un numero multiplo di 5;
d) un numero multiplo di 8;
e) un numero inferiore a 6.

$\left[\text{a) } \frac{1}{6}; \text{ b) } \frac{1}{3}; \text{ c) } \frac{1}{6}; \text{ d) } 0; \text{ e) } \frac{5}{6} \right]$

6 Il sacchetto della tombola contiene 90 numeri. Viene estratto un numero.
Calcola la probabilità che esca:

a) un numero maggiore di 50;
b) un numero con due cifre uguali;
c) un numero con due cifre diverse;
d) un numero multiplo di 4;
e) un numero primo inferiore a 20.

$\left[\text{a) } \frac{4}{9}; \text{ b) } \frac{4}{45}; \text{ c) } \frac{73}{90}; \text{ d) } \frac{11}{45}; \text{ e) } \frac{4}{45} \right]$

7 Abbiamo un mazzo di 52 carte. Viene estratta una carta.
Calcola la probabilità che esca:

a) una carta di picche;
b) una figura;
c) una carta rossa.

$\left[\text{a) } \frac{1}{4}; \text{ b) } \frac{3}{13}; \text{ c) } \frac{1}{2} \right]$

8 Calcola la probabilità che, nel lancio di un dado, non esca:

a) il numero 5;
b) un numero maggiore di 5;
c) un numero minore di 5.

$\left[\text{a) } \frac{5}{6}; \text{ b) } \frac{5}{6}; \text{ c) } \frac{1}{3}\right]$

9 Un'urna contiene 4 palline rosse, 3 nere e 13 verdi. Viene estratta una pallina.
Calcola la probabilità che:

a) esca una pallina nera;
b) esca una pallina rossa;
c) esca una pallina verde;
d) non esca una pallina rossa;
e) esca una pallina gialla.

$\left[\text{a) } \frac{3}{20}; \text{ b) } \frac{1}{5}; \text{ c) } \frac{13}{20}; \text{ d) } \frac{4}{5}; \text{ e) } 0\right]$

10 Nella rubrica di un cellulare ci sono 20 nomi; di questi 8 iniziano con la lettera A, 5 con la C, 4 con la M e 3 con la N. Si sceglie un nome a caso a cui mandare un SMS.
Calcola la probabilità che:

a) esca un nome che inizia per C;
b) esca un nome che inizia per N;
c) esca un nome che inizia con una vocale;
d) esca un nome che inizia con una consonante.

$\left[\text{a) } \frac{1}{4}; \text{ b) } \frac{3}{20}; \text{ c) } \frac{2}{5}; \text{ d) } \frac{3}{5}\right]$

11 In una classe di 24 alunni vi sono 14 maschi e 10 femmine. L'insegnante di matematica estrae a sorte un nome per l'interrogazione. Calcola la probabilità che:

a) ciascun alunno ha di essere estratto;
b) l'alunno estratto sia femmina;
c) l'alunno estratto sia maschio;
d) ciascun alunno ha di non essere estratto.

$\left[\text{a) } \frac{1}{24}; \text{ b) } \frac{5}{12}; \text{ c) } \frac{7}{12}; \text{ d) } \frac{23}{24}\right]$

12 Determina la probabilità che, estraendo una carta da un mazzo di 40 carte, essa sia un tre oppure una carta di spade.

$\left[\frac{13}{40}\right]$

13 Calcola la probabilità che nel lancio di tre monete si ottenga:

a) una sola croce;
b) lo stesso lato in tutte le monete.

$\left[\text{a) } \frac{3}{8}; \text{ b) } \frac{1}{4}\right]$

14 Calcola la probabilità che lanciando un dado non escano il 5 e il 6.

$\left[\frac{2}{3}\right]$

15 Si estrae una pallina da un'urna che contiene 8 palline bianche, 10 verdi, 12 rosse. Indica gli eventi contrari dei seguenti eventi e determina le relative probabilità.

E_1: «esce una pallina verde o rossa»,
E_2: «esce una pallina rossa».

$\left[\frac{4}{15}; \frac{3}{5}\right]$

16 Da un mazzo di 52 carte se ne estrae una. Calcola la probabilità che sia:

a) un tre;
b) un tre rosso;
c) il tre di cuori.

$\left[\text{a) } \frac{1}{13}; \text{ b) } \frac{1}{26}; \text{ c) } \frac{1}{52}\right]$

17 Una roulette ha i numeri da 1 a 18 rossi, da 19 a 36 neri e lo 0 verde. Viene fatta girare la ruota e lanciata la pallina. Calcola la probabilità che la pallina si fermi su:

a) un numero pari nero;
b) un numero dispari;
c) un numero primo rosso.

$\left[\text{a) } \frac{9}{37}; \text{ b) } \frac{18}{37}; \text{ c) } \frac{7}{37}\right]$

Probabilità e calcolo combinatorio

18 **ESERCIZIO GUIDA**

Un'urna contiene dieci palline numerate da 1 a 10. Calcoliamo la probabilità che:

a) estraendo *consecutivamente* 2 palline, *rimettendo* ogni volta la pallina estratta nell'urna, si abbiano due numeri primi;

b) **estraendo *consecutivamente* 3 palline, *non rimettendo* ogni volta la pallina estratta nell'urna, si abbiano due numeri primi e un numero non primo;**
c) **estraendo *contemporaneamente* 3 palline, esse siano 2 palline con un numero inferiore a 5 e una con un numero maggiore o uguale a 5.**

---

a) I casi possibili sono tutti i modi in cui possono presentarsi due dei dieci numeri, anche ripetuti in quanto dopo ogni estrazione la pallina viene rimessa nell'urna e quindi può essere estratta di nuovo. Pertanto si ha: $D'_{10,2} = 10^2 = 100$.
I casi favorevoli sono tutti i modi in cui possono presentarsi, anche con ripetizione, due dei quattro numeri primi $\{2, 3, 5, 7\}$. Pertanto $D'_{4,2} = 4^2 = 16$.

La probabilità è: $p = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$.

b) I casi possibili sono tutti i modi in cui possono presentarsi tre dei dieci numeri, ma ogni numero può presentarsi una sola volta in quanto non viene rimesso nell'urna. Pertanto $D_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.
I casi favorevoli sono tutti i gruppi formati da due numeri primi e un numero non primo e occorre tenere conto di tutti i possibili modi in cui si possono presentare. Perciò $D_{4,2} \cdot D_{6,1} \cdot P_3^{(2)} = (4 \cdot 3) \cdot 6 \cdot 3 = 216$.

La probabilità è: $p = \frac{216}{720} = \frac{3}{10}$.

c) I casi possibili sono tutti i modi in cui si possono estrarre tre palline, e, essendo l'estrazione contemporanea, non ha alcuna rilevanza l'ordine dell'estrazione.

Pertanto $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$.

I casi favorevoli sono tutti i gruppi formati da due delle quattro palline aventi un numero inferiore a 5 e da una con un valore maggiore.

Pertanto $\binom{4}{2} \cdot 6 = \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot 6 = 36$.

La probabilità è: $p = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$.

19 In una scatola di cioccolatini ne sono rimasti 4 al latte, 10 fondenti e 2 al liquore. Si prendono consecutivamente due cioccolatini a caso. Calcola la probabilità che:

a) siano entrambi fondenti; b) non siano al liquore; c) siano entrambi al latte.

$\left[\text{a) } \frac{3}{8}; \text{ b) } \frac{91}{120}; \text{ c) } \frac{1}{20}\right]$

20 Un'urna contiene cinque palline numerate da 1 a 5. Si estraggono consecutivamente due palline, rimettendo la prima pallina estratta nell'urna. Calcola la probabilità che:

a) escano due 5;
b) escano due numeri pari;
c) esca prima un numero pari e poi uno dispari;
d) escano un numero pari e uno dispari.

$\left[\text{a) } \frac{1}{25}; \text{ b) } \frac{4}{25}; \text{ c) } \frac{6}{25}; \text{ d) } \frac{12}{25}\right]$

21 Si gettano contemporaneamente due dadi. Calcola la probabilità che le due facce:

a) siano due numeri uguali;
b) siano due numeri dispari;
c) siano due numeri primi;
d) siano uno pari e l'altro dispari.

$\left[\text{a) } \frac{1}{6}; \text{ b) } \frac{1}{4}; \text{ c) } \frac{1}{4}; \text{ d) } \frac{1}{2}\right]$

22 In una scuola 120 alunni partecipano alla «giornata dell'arte», preparando lavori di vari generi artistici. Calcola la probabilità che i primi tre classificati siano tutti alunni della 4ª C, che partecipa con 20 ragazzi.

$\left[\frac{57}{14\,042}\right]$

23 Un'urna U_1 contiene 25 palline bianche e 15 palline rosse, mentre un'urna U_2 ne contiene 20 bianche e 20 rosse.
È più facile che estraendo tre palline contemporaneamente da U_1 siano tutte bianche o che estraendone due da U_2 siano tutte e due rosse?

[entrambe rosse da U_2]

24 Calcola la probabilità di realizzare un terno secco su una data ruota nel gioco del lotto.

[0,0000851]

25 Calcola la probabilità che su una data ruota nel gioco del lotto esca il numero 8:

a) come primo estratto;
b) nella cinquina dei numeri estratti.

$\left[\text{a) } \frac{1}{90}; \text{ b) } \frac{1}{18}\right]$

26 Calcola la probabilità di fare 14 al totocalcio giocando una colonna.

[0, 00000020908]

27 Una scatola contiene 12 palline bianche, 13 rosse, 5 verdi.
Si estraggono contemporaneamente due palline. Calcola la probabilità che siano:

a) entrambe rosse;
b) almeno una bianca;
c) una sola bianca;
d) nessuna verde.

$\left[\text{a) } \frac{26}{145}; \text{ b) } \frac{94}{145}; \text{ c) } \frac{72}{145}; \text{ d) } \frac{20}{29}\right]$

28 Lanciando 4 dadi, calcola la probabilità che:

a) abbiano tutte le facce uguali;
b) abbiano 4 facce con il numero 2.

$\left[\text{a) } \frac{1}{216}; \text{ b) } \frac{1}{1296}\right]$

29 Si lancia consecutivamente un dado due volte. Calcola la probabilità che le due facce:

a) abbiano la somma dei punteggi uguale a 9;
b) abbiano la somma dei punteggi maggiore di 9;
c) abbiano due numeri che siano divisori di 6.

$\left[\text{a) } \frac{1}{9}; \text{ b) } \frac{1}{6}; \text{ c) } \frac{4}{9}\right]$

30 Voglio prenotare due posti nella decima fila del cinema. Se la fila ha 20 posti numerati dall'81 al 100, calcola la probabilità che:

a) i due posti si trovino tra il numero 91 e il numero 100;
b) i due posti siano vicini.

$\left[\text{a) } \frac{9}{38}; \text{ b) } \frac{1}{10}\right]$

31 Un'urna contiene nove palline numerate da 1 a 9. Si estraggono consecutivamente due palline, senza rimettere la prima pallina estratta nell'urna. Calcola la probabilità che:

a) prima esca una pallina con un numero pari e poi una con un numero dispari;
b) le palline abbiano un numero pari e un numero dispari;
c) entrambe le palline abbiano un numero dispari;
d) entrambe le palline abbiano un numero primo;
e) entrambe le palline abbiano un numero non primo;
f) una pallina abbia un numero primo e l'altra un numero non primo.

$\left[\text{a) } \frac{5}{18}; \text{ b) } \frac{5}{9}; \text{ c) } \frac{5}{18}; \text{ d) } \frac{1}{6}; \text{ e) } \frac{5}{18}; \text{ f) } \frac{5}{9}\right]$

32 Un'urna contiene 13 palline numerate da 1 a 13. Si estraggono contemporaneamente due palline. Calcola la probabilità che:

a) escano due numeri pari;
b) escano due numeri maggiori di 9;
c) esca un numero pari e uno dispari;
d) esca il numero 5 e uno qualunque degli altri numeri.

$\left[\text{a) } \frac{5}{26}; \text{ b) } \frac{1}{13}; \text{ c) } \frac{7}{13}; \text{ d) } \frac{2}{13}\right]$

3. LA CONCEZIONE STATISTICA DELLA PROBABILITÀ

▶ Teoria a pag. α54

33 Una medaglia commemorativa reca da una parte una effigie e dall'altra un motto. Viene lanciata per 60 volte e la parte con il motto si è presentata 22 volte. Calcola il valore della probabilità dell'evento «uscita della faccia con il motto».
$\left[\frac{11}{30}\right]$

34 Un dado non è regolare. Vengono effettuati 700 lanci ottenendo i seguenti risultati:

- la faccia 1 si è presentata 104 volte;
- la faccia 2 si è presentata 130 volte;
- la faccia 3 si è presentata 92 volte;
- la faccia 4 si è presentata 148 volte;
- la faccia 5 si è presentata 115 volte;
- la faccia 6 si è presentata 111 volte.

Calcola le probabilità da attribuire all'uscita delle facce.
$\left[\frac{26}{175}; \frac{13}{70}; \frac{23}{175}; \frac{37}{175}; \frac{23}{140}; \frac{111}{700}\right]$

35 Una società di assicurazioni ha rilevato che su 17 220 polizze di assicurazione contro i furti di auto sono stati richiesti 1230 indennizzi. Calcola la probabilità di furto. Se il numero delle polizze si incrementa a 22 400, calcola il numero di richieste di indennizzo che si può prevedere.
$\left[\frac{1}{14}; 1600\right]$

36 Dalla tavola demografica fornita dall'ISTAT per l'anno 2004, risulta che su 100 000 maschi nati vivi, 96 639 hanno raggiunto i 45 anni e 52 680 gli 80 anni. Calcola la probabilità che ha un uomo di 45 anni di raggiungere gli 80 anni e quella di non raggiungerli.
[0,545; 0,455]

37 Un'urna contiene 20 palline. Si effettuano 60 estrazioni, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna. Per 45 volte è uscita una pallina bianca e per 15 volte una pallina nera. In base alle frequenze ottenute, valuta la composizione dell'urna.
[15 bianche e 5 nere]

38 Un'urna contiene 8 palline gialle, 7 rosse e 5 verdi. Si effettuano 400 estrazioni, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna. Calcola quante volte in media possono presentarsi la pallina gialla, quella rossa e la verde.
[160; 140; 100]

4. LA CONCEZIONE SOGGETTIVA DELLA PROBABILITÀ

▶ Teoria a pag. α56

39 **ESERCIZIO GUIDA**

Prima dell'inizio di una partita di calcio, un tifoso sarebbe disposto a scommettere 14 euro per ricevere 20 euro sulla vittoria della squadra per cui tifa, 2 euro per riceverne 10 in caso di pareggio e infine 0,5 euro per ricevere 5 euro in caso di sconfitta.
Calcoliamo le probabilità che attribuisce ai tre eventi: vittoria, pareggio e sconfitta.

Per la vittoria: $p_1 = \frac{14}{20} = 0,7$; per il pareggio: $p_2 = \frac{2}{10} = 0,2$; per la sconfitta: $p_3 = \frac{0,5}{5} = 0,1$.

40 A una corsa di cavalli Andrea scommette 8 euro per riceverne 12 in caso di vittoria del cavallo di nome Atrix. Calcola la probabilità che attribuisce alla vittoria del suo cavallo favorito.
$\left[\frac{2}{3}\right]$

41 A una corsa di cavalli, la vittoria del cavallo Festa è data 6 contro 15 (scommettendo 6 si riceverà 15 in caso di vincita). Calcola la probabilità di vittoria che viene attribuita al cavallo e quale sarà il guadagno nel caso una persona abbia scommesso 20 euro. [40%; 30 euro]

42 A e B fanno una scommessa sull'esito di una partita di calcio. A scommette sulla vittoria e la sua posta è di 5 euro mentre la posta di B è di 2 euro. Calcola la probabilità che A attribuisce alla vittoria. $\left[\frac{5}{7}\right]$

43 In un certo momento della campagna elettorale negli USA, un sondaggio fra gli elettori aveva rilevato che su 3000 persone 1800 avrebbero votato per il partito democratico. Contemporaneamente, gli scommettitori davano la vittoria del partito democratico 6 a 9 (cioè, scommettendo 6 dollari, se ne sarebbero ricevuti 9 in caso di vittoria). Calcola la probabilità di vittoria secondo il sondaggio e secondo gli scommettitori. $\left[\frac{3}{5}; \frac{2}{3}\right]$

44 Due tifosi A e B fanno una scommessa di 10 euro sull'esito di una partita di basket. B scommette sulla vittoria e la sua posta è di 7 euro, mentre A scommette sulla sconfitta e la sua posta è di 3 euro. Calcola la probabilità che B attribuisce alla sconfitta. $\left[\frac{3}{10}\right]$

45 Dopo le prove di qualifica dei piloti di F1 per il GP di Monza, un tifoso scommette 15 euro per riceverne 25 in caso di vincita al GP del team per il quale tifa, 3 euro per riceverne 10 in caso che si classifichi al secondo posto e infine 0,60 euro per riceverne 6 in caso che non si verifichino i 2 eventi precedenti. Calcola la probabilità dei tre eventi. $\left[\frac{3}{5}; \frac{3}{10}; \frac{1}{10}\right]$

5. L'IMPOSTAZIONE ASSIOMATICA DELLA PROBABILITÀ

▶ Teoria a pag. α57

46 **ESERCIZIO GUIDA**

Un'urna contiene 5 palline numerate da 1 a 5.
a) Determiniamo la funzione di probabilità degli eventi elementari, sapendo che la probabilità di estrazione di ogni pallina è proporzionale al numero riportato.
b) Calcoliamo la probabilità dell'evento A = «estrarre una pallina con un numero primo».
c) Calcoliamo la probabilità dell'evento B = «estrarre un multiplo di 2».
d) Calcoliamo la probabilità dell'evento $A - B$ = «estrarre un numero primo diverso da 2».

a) Indicando con x la probabilità di estrazione della pallina con il numero 1 avremo:

$$x + 2x + 3x + 4x + 5x = 1, \quad \text{da cui} \quad x = \frac{1}{15}.$$

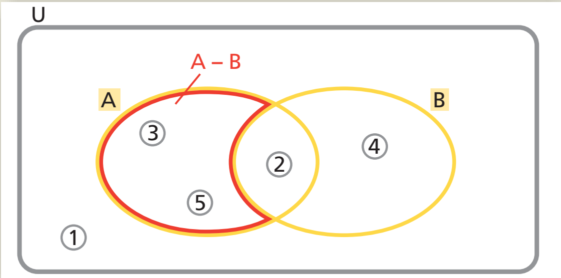
Quindi $p(1) = \frac{1}{15}$, $p(2) = \frac{2}{15}$, $p(3) = \frac{3}{15}$, $p(4) = \frac{4}{15}$, $p(5) = \frac{5}{15}$.

b) $p(A) = \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{5}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

c) $p(B) = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

d) Essendo $A \cap B = \{2\}$, e quindi $p(A \cap B) = \frac{2}{15}$, abbiamo:

$$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{10}{15} - \frac{2}{15} = \frac{8}{15}.$$



47 Una moneta viene truccata in modo tale che la probabilità che si presenti croce sia un terzo di quella che si presenti testa. Determina il valore delle due probabilità. $\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$

48 Tre persone A, B e C partecipano a un gioco nel quale uno dei tre giocatori deve vincere. La probabilità di vincita di A è doppia di quella di B e la probabilità di perdere di B è i $\frac{5}{6}$ della probabilità di perdere di C. Determina le probabilità di vincita dei tre giocatori. $\left[\frac{4}{7}; \frac{2}{7}; \frac{1}{7}\right]$

49 Un dado non è regolare e le facce 1 e 6 hanno la stessa probabilità di verificarsi, ma doppia di quella di ciascuno degli altri numeri. Calcola la probabilità dei seguenti eventi relativi al lancio del dado:

A = «si presenta una faccia con un numero pari»;

B = «si presenta un numero multiplo di 3»;

C = «si presenta un numero primo». $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{8}; \frac{3}{8}\right]$

50 Da un mazzo di 40 carte si estrae una carta. Sapendo che i possibili esiti sono equiprobabili, calcola la probabilità dei seguenti eventi:

A = «esce una figura»; C = «esce un asso»; E = «esce una carta di bastoni»;

B = «esce una figura o un asso»; D = «esce una figura o una carta di coppe». $\left[\frac{3}{10}; \frac{2}{5}; \frac{1}{10}; \frac{19}{40}; \frac{1}{4}\right]$

6. LA PROBABILITÀ DELLA SOMMA LOGICA DI EVENTI

▶ Teoria a pag. α59

Il teorema della somma logica di due eventi

51 **TEST** Se E_1 ed E_2 sono due eventi incompatibili con $p(E_1) = 0,42$ e $p(E_2) = 0,20$, allora $p(E_1 \cup E_2)$ vale:

A 0,084. B 0,62. C 0,84. D 0,536. E 0,22.

52 **VERO O FALSO?**
Da un mazzo di 40 carte si estrae una carta. Stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni.

a) La probabilità di estrarre un re è $\frac{3}{40}$. V F

b) La probabilità di estrarre un re o un fante è $\frac{1}{5}$. V F

c) La probabilità di estrarre un re o una carta di coppe è $\frac{3}{10}$. V F

53 **ESERCIZIO GUIDA**

In un sacchetto ci sono 16 gettoni: 7 di forma quadrata (3 rossi e 4 verdi) e 9 di forma circolare (4 rossi e 5 verdi). Qual è la probabilità di estrarre a caso un gettone rosso oppure tondo?

Gli eventi E_1 = «estrazione di un gettone rosso» ed E_2 = «estrazione di un gettone tondo» sono compatibili; infatti, un gettone può essere contemporaneamente rosso e tondo. Calcoliamo $p(E_1)$ e $p(E_2)$, tenendo presente che i casi possibili sono 16:

$$p(E_1) = \frac{7}{16}; \quad p(E_2) = \frac{9}{16}.$$

Inoltre, per calcolare $p(E_1 \cap E_2)$, teniamo presente che i casi favorevoli sono i gettoni rossi e tondi:

$$p(E_1 \cap E_2) = \frac{4}{16}.$$

La probabilità che si estragga un gettone rosso oppure tondo è:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = \frac{7}{16} + \frac{9}{16} - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}.$$

54 **ESERCIZIO GUIDA**

Un'urna contiene 4 palline rosse numerate da 1 a 4 e 6 palline nere numerate da 1 a 6. Si estraggono consecutivamente due palline, senza rimettere la pallina estratta nell'urna. Calcoliamo la probabilità:
a) che le palline estratte siano di colore uguale;
b) che le palline estratte siano rosse o rechino due numeri pari;
c) che almeno una pallina estratta sia rossa.

---

a) Le palline estratte possono essere o due rosse o due nere. I due eventi sono incompatibili:

$$p = \frac{D_{4,2}}{D_{10,2}} + \frac{D_{6,2}}{D_{10,2}} = \frac{12}{90} + \frac{30}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}.$$

b) Gli eventi «due palline rosse» e «due numeri pari» sono compatibili in quanto fra i 5 numeri pari 2 sono rossi e quindi vi sono due esiti $\{(2; 4), (4; 2)\}$ che verificano entrambi gli eventi:

$$p = \frac{D_{4,2}}{D_{10,2}} + \frac{D_{5,2}}{D_{10,2}} - \frac{D_{2,2}}{D_{10,2}} = \frac{12}{90} + \frac{20}{90} - \frac{2}{90} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}.$$

c) L'evento è verificato quando le palline che escono sono o una rossa e una nera (e viceversa), o due rosse:

$$p = \frac{4 \cdot 6 \cdot 2}{D_{10,2}} + \frac{D_{4,2}}{D_{10,2}} = \frac{48}{90} + \frac{12}{90} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}.$$

Possiamo applicare anche il metodo dell'evento contrario. L'evento contrario è «nessuna pallina rossa»:

$$p = 1 - \frac{D_{6,2}}{D_{10,2}} = 1 - \frac{30}{90} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

55 In una busta sono contenute 28 figurine numerate da 1 a 28. Calcola la probabilità di estrarre a caso una figurina con numero dispari o multiplo di 4. $\left[\frac{3}{4}\right]$

56 Un cassetto contiene 18 calzini blu, 6 neri e 4 grigi. Calcola la probabilità che, estraendone uno a caso, esso sia blu o grigio. $\left[\frac{11}{14}\right]$

57 Calcola la probabilità che, lanciando un dado, si verifichi almeno uno dei due eventi:

E_1 = «numero dispari»;
E_2 = «numero minore di 4». $\left[\frac{2}{3}\right]$

58 Su uno scaffale sono posati 12 musicassette, 20 compact disc e 14 floppy disk.
Prendendo un oggetto a caso, qual è la probabilità di prendere un compact disc o un floppy disk? $\left[\frac{17}{23}\right]$

59 Una scatola contiene 54 fra cioccolatini, caramelle e liquirizie. Sapendo che i cioccolatini sono il doppio delle liquirizie e le caramelle sono i $\frac{3}{2}$ delle liquirizie, calcola la probabilità di prendere a caso un cioccolatino o una caramella. $\left[\frac{7}{9}\right]$

60 Calcola la probabilità che, lanciando un dado, esca un numero maggiore di 2 o pari. $\left[\frac{5}{6}\right]$

61 In una sacca sportiva ci sono 10 maglie numerate dall'1 al 10. Calcola la probabilità che, estraendo a caso una maglia, questa abbia un numero dispari o un numero maggiore di 5. $\left[\frac{4}{5}\right]$

62 Un'urna contiene i 90 numeri del lotto. Calcola la probabilità che, estraendo un numero:

a) esca un numero dispari o multiplo di 4;
b) esca un numero dispari o multiplo di 5.

$\left[\text{a) } \frac{67}{90}; \text{ b) } \frac{3}{5}\right]$

63 Un'urna contiene 30 palline numerate. Calcola la probabilità che, estraendo una pallina, esca:

a) un numero dispari;
b) un numero minore di 10;
c) un numero dispari o minore di 10.

$\left[\text{a) } \frac{1}{2}; \text{ b) } \frac{3}{10}; \text{ c) } \frac{19}{30}\right]$

64 Un'urna contiene 4 palline bianche e 8 nere. Calcola la probabilità che, estraendo consecutivamente tre palline, senza rimettere la pallina estratta nell'urna:

a) siano dello stesso colore;
b) siano due bianche e una nera o due nere e una bianca.

$\left[\text{a) } \frac{3}{11}; \text{ b) } \frac{8}{11}\right]$

65 Si estrae una carta da un mazzo di 52 carte. Calcola la probabilità che la carta:

a) sia un re o un sette;
b) sia un re o una carta di picche;
c) sia un asso o una carta di picche o una figura.

$\left[\text{a) } \frac{2}{13}; \text{ b) } \frac{4}{13}; \text{ c) } \frac{25}{52}\right]$

66 Un'urna contiene 4 palline gialle, 2 verdi e 7 bianche. Si estraggono consecutivamente due palline, senza rimettere la pallina estratta nell'urna. Calcola la probabilità che:

a) siano dello stesso colore;
b) nessuna sia bianca;
c) almeno una sia verde;
d) la prima sia gialla e l'altra o verde o bianca.

$\left[\text{a) } \frac{14}{39}; \text{ b) } \frac{5}{26}; \text{ c) } \frac{23}{78}; \text{ d) } \frac{3}{13}\right]$

67 Abbiamo 9 biglietti per un parco divertimenti, 5 biglietti per un parco acquatico e 6 biglietti per un parco termale. Estraiamo consecutivamente due biglietti da assegnare come primo e secondo premio per un gioco. Calcola la probabilità che:

a) siano biglietti per lo stesso parco;
b) nessun biglietto sia per il parco acquatico;
c) almeno un biglietto sia per il parco divertimenti;
d) il primo biglietto sia per il parco termale e l'altro per il parco divertimenti o il parco acquatico.

$\left[\text{a) } \frac{61}{190}; \text{ b) } \frac{21}{38}; \text{ c) } \frac{27}{38}; \text{ d) } \frac{21}{95}\right]$

68 Alle tre vincitrici di un concorso di bellezza spettano tre premi da scegliere estraendoli consecutivamente da una scatola contenente 6 braccialetti e 10 collane. Calcola la probabilità che i premi siano:

a) tre braccialetti o tre collane;
b) due braccialetti e una collana o un braccialetto e due collane.

$\left[\text{a) } \frac{1}{4}; \text{ b) } \frac{3}{4}\right]$

69 Si estraggono contemporaneamente tre carte da un mazzo da 40 carte. Calcola la probabilità che si presentino:

a) tre figure o tre carte di due semi fissati;
b) tre figure o tre re;
c) tre carte di due semi fissati o tre sette;
d) almeno due figure;
e) almeno una figura.

$\left[\text{a) } \frac{67}{494}; \text{ b) } \frac{11}{494}; \text{ c) } \frac{11}{95}; \text{ d) } \frac{517}{2470}; \text{ e) } \frac{127}{190}\right]$

7. LA PROBABILITÀ CONDIZIONATA

▶ Teoria a pag. α60

70 **VERO O FALSO?** Da un mazzo di 40 carte si estrae una carta.

a) La probabilità che venga estratta una carta di spade è $\frac{1}{10}$. V F

b) La probabilità che la carta estratta riporti un numero pari, sapendo che è stata estratta una carta di bastoni, è $\frac{3}{40}$. V F

c) La probabilità che la carta estratta sia un asso, sapendo che non è stata estratta una figura, è $\frac{1}{7}$. V F

71 **ESERCIZIO GUIDA**

Tre persone A, B e C sono candidate a una carica. A ha la probabilità del 40% di essere eletto, B quella del 35% e infine C quella del 25%. C ritira la propria candidatura.
Calcoliamo le nuove probabilità di vittoria di A e B (chiamando con A, B, C anche gli eventi relativi all'elezione delle persone).

L'evento che si è verificato è la mancata elezione di C per il ritiro della candidatura. Esso ha probabilità $p(\overline{C}) = 1 - 0,25 = 0,75$. L'evento $A \cap \overline{C}$ è ancora l'evento A, come l'evento $B \cap \overline{C}$ è sempre l'evento B.

Le due probabilità condizionate, ossia quelle cercate, sono:

$$p(A|\overline{C}) = \frac{p(A \cap \overline{C})}{p(\overline{C})} = \frac{0,40}{0,75} = 0,5\overline{3} > p(A), \quad p(B|\overline{C}) = \frac{p(B \cap \overline{C})}{p(\overline{C})} = \frac{0,35}{0,75} = 0,4\overline{6} > p(B).$$

Gli eventi sono stocasticamente dipendenti e sono correlati positivamente.

72 **ESERCIZIO GUIDA**

Un'urna contiene 4 palline nere e 6 verdi. Si estraggono contemporaneamente due palline. Consideriamo i seguenti eventi:

A = «almeno una pallina è nera»;
B = «almeno una pallina è verde».

Calcoliamo la probabilità dell'evento A condizionato a B.

L'evento A si verifica quando l'esito è una delle seguenti combinazioni di colore: (nera, nera) o (nera, verde).
L'evento B si verifica quando l'esito è una delle seguenti combinazioni di colore: (nera, verde) o (verde, verde).
L'evento $A \cap B$ si verifica quando l'esito è (verde, nera). I valori delle probabilità sono:

$$p(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{4 \cdot 6}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} + \frac{24}{45} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}, \; p(B) = \frac{4 \cdot 6}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{24}{45} + \frac{15}{45} = \frac{39}{45} = \frac{13}{15},$$

$$p(A \cap B) = \frac{4 \cdot 6}{\binom{10}{2}} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}.$$

La probabilità condizionata risulta: $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{13}{15}} = \frac{8}{13} < p(A)$.

Gli eventi A e B sono stocasticamente dipendenti e sono correlati negativamente.

73 Calcola la probabilità che, lanciando un dado, esca un numero maggiore di 3, sapendo che è uscito un numero pari. $\left[\frac{2}{3}\right]$

74 Calcola la probabilità che, estraendo una carta da un mazzo di 40, essa sia un re, sapendo che è uscita una figura. $\left[\frac{1}{3}\right]$

75 Un'urna contiene 22 palline numerate da 1 a 22. Calcola la probabilità che, estraendo una pallina, essa rechi un numero multiplo di 3, sapendo che è uscito un numero dispari. $\left[\frac{4}{11}\right]$

76 Si hanno due mazzi di carte da 40. Si estrae da ciascun mazzo una carta. Calcola la probabilità che esse siano due re, sapendo che sono uscite due figure, e la probabilità che siano due figure, sapendo che sono usciti due re. $\left[\frac{1}{9}; 1\right]$

77 Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, la somma delle facce sia un numero dispari, sapendo che le facce portano numeri diversi. $\left[\frac{3}{5}\right]$

78 Si estraggono consecutivamente tre palline da un'urna contenente 20 palline numerate da 1 a 20, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna. Calcola la probabilità che le tre palline abbiano un numero dispari, sapendo che le prime due palline hanno un numero dispari. $\left[\frac{1}{2}\right]$

79 Da un mazzo da 52 carte si estraggono consecutivamente due carte senza rimettere la carta estratta nel mazzo. Calcola la probabilità che esse siano di cuori, sapendo che sono entrambe rosse. $\left[\frac{6}{25}\right]$

80 In una classe 8 alunni giocano a calcio, 6 a pallavolo e 7 a basket. Calcola la probabilità che, prendendo a caso tre alunni, essi giochino a pallavolo, sapendo che non praticano il calcio e che ognuno pratica un solo sport. $\left[\frac{10}{143}\right]$

81 Una macchina produce pezzi meccanici e, su una produzione di 400 pezzi, 20 sono difettosi per peso, 30 per lunghezza e 360 sono perfetti. Calcola la probabilità che, prendendo a caso un pezzo:

a) sia difettoso; b) abbia entrambi i difetti;
c) sia difettoso per peso, sapendo che anche la lunghezza non è corretta. $\left[a)\ \frac{1}{10}; b)\ \frac{1}{40}; c)\ \frac{1}{3}\right]$

82 Calcola la probabilità che, lanciando quattro monete, la faccia testa esca due volte, sapendo che è uscita almeno una volta. $\left[\frac{2}{5}\right]$

83 Si svolge un'indagine statistica sui 575 alunni di un istituto tecnico commerciale diplomatisi negli ultimi cinque anni. Di essi 305 sono donne e 270 uomini. Inoltre, 215, di cui 140 donne e 75 uomini, hanno proseguito gli studi; 234, di cui 94 donne e 140 uomini, hanno trovato impiego presso aziende private; 126, di cui 71 donne e 55 uomini, lavorano presso enti pubblici. Si scelgono a caso due persone, perché possano essere intervistate dagli attuali alunni della scuola. Calcola la probabilità che:

a) siano due studenti;
b) abbiano trovato un impiego, sapendo che sono uomini;
c) non lavorino presso un ente pubblico, sapendo che sono due donne.

Come sono tra loro gli eventi «aver trovato un impiego» e «essere uomini»?
[a) 14%; b) 52%; c) 59%; dipendenti]

84 In un'urna abbiamo 5 palline, ciascuna con un colore diverso e con probabilità di estrazione diversa. L'insieme dei possibili esiti è $U = \{$rossa, gialla, nera, verde, bianca$\}$ e le probabilità di estrazione sono $\frac{1}{7}$ per ciascuna delle palline rossa, gialla e nera e $\frac{2}{7}$ per ciascuna delle palline verde e bianca.

Dati gli eventi $A = \{$rossa, nera, bianca$\}$, $B = \{$nera, verde, bianca$\}$ e $C = \{$gialla, nera$\}$, calcola le seguenti probabilità: $p(A|B)$, $p(B|C)$, $p(C|\overline{A})$, $p(\overline{A}|C)$.
$\left[\frac{3}{5}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$

8. LA PROBABILITÀ DEL PRODOTTO LOGICO DI EVENTI

Teoria a pag. α63

85 **TEST** Un'urna contiene 8 palline blu e 6 gialle. Estraendo consecutivamente due palline, senza rimettere la pallina estratta nell'urna, la probabilità che la prima pallina estratta sia gialla e la seconda blu è:

A $\frac{24}{91}$. **B** $\frac{19}{49}$. **C** $\frac{1}{48}$. **D** $\frac{3}{4}$. **E** $\frac{8}{13}$.

86 **VERO O FALSO?** Si estraggono consecutivamente due carte da un mazzo di 40, senza rimettere la carta estratta nel mazzo.

a) La probabilità di estrarre due assi è $\frac{1}{130}$. V F

b) La probabilità di estrarre prima una figura e poi un tre è $\frac{3}{100}$. V F

c) La probabilità che nessuna delle due carte sia un re è $\frac{21}{26}$. V F

87 **ESERCIZIO GUIDA**

Sono stati fatti due investimenti *A* e *B* della stessa durata. La probabilità di insolvenza di *A* è del 5%, mentre la probabilità di insolvenza per *B* è del 2%.
I due investimenti sono indipendenti. Calcoliamo la probabilità che alla scadenza:
a) entrambi gli investimenti risultino insolventi;
b) entrambi gli investimenti risultino esigibili;
c) uno solo dei due investimenti risulti insolvente;
d) almeno un investimento risulti insolvente.

a) $p = \frac{5}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{1}{1000} = 0,1\%.$

b) $p = \left(1 - \frac{5}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{100}\right) = \frac{95}{100} \cdot \frac{98}{100} = \frac{9310}{10\,000} = 93,1\%.$

c) $p = \frac{5}{100} \cdot \left(1 - \frac{2}{100}\right) + \left(1 - \frac{5}{100}\right) \cdot \frac{2}{100} = \frac{5}{100} \cdot \frac{98}{100} + \frac{95}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{680}{10\,000} = 6,8\%.$

(Notiamo che questi primi tre eventi esauriscono tutte le possibilità; la loro somma è 100%.)

d) Applichiamo l'evento contrario (nessuno risulti insolvente) e sfruttando il risultato precedente abbiamo:

$$p = 1 - \frac{9310}{10\,000} = \frac{690}{10\,000} = 6,9\%;$$

oppure, analizzando i vari casi:
insolvente A e non B o solvente A e insolvente B o insolventi entrambi:

$$p = \frac{5}{100} \cdot \frac{98}{100} + \frac{95}{100} \cdot \frac{2}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{690}{10\,000} = 6{,}9\%;$$

oppure, infine, applicando il teorema della somma logica $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$:

$$p = \frac{5}{100} + \frac{2}{100} - \frac{5}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{690}{10\,000} = 6{,}9\%.$$

88 Due impianti nuovi, che funzionano in modo separato uno dall'altro, hanno la probabilità di guastarsi, nel periodo della garanzia, rispettivamente del 5% e del 4%. Calcola la probabilità che in un certo momento:
a) uno solo sia guasto;
b) siano guasti entrambi;
c) nessuno sia guasto;
d) almeno uno sia guasto.
[a) 8,6%; b) 0,2%; c) 91,2%; d) 8,8%]

89 La probabilità che un tiratore colpisca un bersaglio è del 20% e la probabilità che lo colpisca un altro tiratore è del 60%. I due tiratori sparano contemporaneamente. Calcola la probabilità che:
a) il bersaglio venga colpito da entrambi;
b) almeno uno colpisca il bersaglio.
[a) 12%; b) 68%]

90 Devono essere interrogati 5 studenti, 3 maschi e 2 femmine. Calcola la probabilità che, scegliendo a caso, i maschi si alternino alle femmine.
$\left[\frac{1}{10}\right]$

91 In una delegazione di 4 studenti devono essere presenti 2 maschi e 2 femmine. Calcola la probabilità che, scegliendo a caso, vi sia alternanza tra maschi e femmine.
$\left[\frac{1}{3}\right]$

92 Uno scaffale contiene 8 CD di musica classica, 9 CD di musica rock e 7 CD di musica leggera. Si prendono consecutivamente e a caso due CD. Calcola la probabilità che siano:
a) entrambi di musica rock;
b) uno di musica classica e uno di musica leggera.
$\left[\text{a) } \frac{3}{23}; \text{ b) } \frac{14}{69}\right]$

93 Nel portamonete di Luca ci sono 6 monete da 1 euro, 4 monete da 50 centesimi, 5 monete da 20 centesimi. Prendendo a caso tre monete, una dopo l'altra, calcola la probabilità che siano:
a) tre monete da 50 centesimi;
b) la prima moneta da 1 euro e la seconda e la terza da 20 centesimi;
c) la prima moneta da 1 euro, la seconda da 50 centesimi, la terza da 20 centesimi.
$\left[\text{a) } \frac{4}{455}; \text{ b) } \frac{4}{91}; \text{ c) } \frac{4}{91}\right]$

Problemi con somma e prodotto logico insieme

94 **ESERCIZIO GUIDA**

Un'urna contiene 5 palline bianche e 4 nere. Si effettuano estrazioni consecutive nelle due situazioni: (*i*) reimmissione ogni volta della pallina estratta, (*ii*) non reimmissione della pallina estratta.
Calcoliamo la probabilità che, estraendo consecutivamente tre palline:
a) esse siano prima due bianche e poi una nera;
b) esse siano due bianche e una nera;
c) almeno una sia bianca.

Nel caso (i) siamo in presenza di eventi indipendenti, in quanto la composizione dell'urna non cambia, mentre nel caso (ii) gli eventi sono dipendenti, in quanto la non reimmissione della pallina estratta fa cambiare la composizione dell'urna e pertanto la probabilità di ogni evento è condizionata ed è calcolata nell'ipotesi che l'evento precedente si sia verificato.

a) Abbiamo un evento composto da una sequenza ordinata di eventi, quindi moltiplichiamo fra loro le probabilità dei singoli eventi:

(i) $p = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{100}{729}$; ($ii$) $p = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{80}{504} = \frac{10}{63}$.

b) L'evento può verificarsi con tre modalità diverse incompatibili fra loro:

$b\,b\,n$ o $b\,n\,b$ o $n\,b\,b$.

(i) $p = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{100}{729} \cdot 3 = \frac{100}{243}$;

(ii) $p = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{21}$.

Nel caso in cui l'ordine non è stabilito si può moltiplicare la probabilità di una sequenza «base» per il numero di volte col quale gli eventi componenti l'evento si possono presentare.

c) Abbiamo varie possibilità nel numero di volte con cui la pallina bianca può uscire.
L'evento si verifica quando la pallina bianca:

esce una volta:	$b\,n\,n$	$n\,b\,n$	$n\,n\,b$
o due volte:	$b\,b\,n$	$n\,b\,b$	$b\,n\,b$
o tre volte:	$b\,b\,b$		

Non essendo stato fissato l'ordine di uscita, occorre tenere conto di tutti i modi in cui ogni possibilità può presentarsi:

(i) $p = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot 3 + \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot 3 + \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{80}{729} \cdot 3 + \frac{100}{729} \cdot 3 + \frac{125}{729} = \frac{665}{729}$;

(ii) $p = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot 3 + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot 3 + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{60}{504} \cdot 3 + \frac{80}{504} \cdot 3 + \frac{60}{504} = \frac{480}{504} = \frac{20}{21}$.

Possiamo calcolare tale probabilità anche usando l'evento contrario «esce sempre la pallina nera»:

(i) $p = 1 - \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = 1 - \frac{64}{729} = \frac{665}{729}$;

(ii) $p = 1 - \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = 1 - \frac{24}{504} = \frac{480}{504} = \frac{20}{21}$.

95 Un'urna contiene 8 palline rosse e 4 gialle. Calcola la probabilità che, estraendo consecutivamente due palline senza rimettere la pallina estratta nell'urna, esse siano:

a) due palline rosse;
b) due palline gialle;
c) la prima rossa e la seconda gialla;
d) una pallina rossa e l'altra gialla.

$\left[\text{a) } \frac{14}{33}; \text{ b) } \frac{1}{11}; \text{ c) } \frac{8}{33}; \text{ d) } \frac{16}{33}\right]$

96 Un'urna contiene 20 palline numerate da 1 a 20. Calcola la probabilità che, estraendo consecutivamente due palline, senza rimettere quella estratta nell'urna, esse siano:

a) due palline con un numero pari;
b) una con un numero pari e l'altra con un numero dispari;
c) due palline con un numero primo.

$\left[\text{a) } \frac{9}{38}; \text{ b) } \frac{10}{19}; \text{ c) } \frac{14}{95}\right]$

97 Calcola la probabilità che, estraendo consecutivamente due carte da un mazzo di 40, senza rimettere quella estratta per prima nel mazzo, esse siano:

a) la prima una figura e la seconda non una figura;
b) una figura e un sette.

$\left[\text{a) } \frac{14}{65}; \text{ b) } \frac{4}{65}\right]$

98 Si estrae una carta da ciascuno di due mazzi di carte da 40. Calcola la probabilità che:

a) le due carte siano due re;
b) le due carte siano due figure;
c) almeno una delle due carte sia un asso.

$\left[\text{a) } \frac{1}{100}; \text{ b) } \frac{9}{100}; \text{ c) } \frac{19}{100}\right]$

99 Un commesso ha mescolato i barattoli di legumi sullo scaffale di un supermercato. Sappiamo che ci sono 7 barattoli di piselli, 9 barattoli di fagioli e 6 barattoli di lenticchie. Si prendono consecutivamente 3 barattoli. Calcola la probabilità che:

a) siano tutti di piselli;
b) uno sia di piselli e due di fagioli;
c) ce ne sia uno per tipo;
d) non ci sia alcun barattolo di lenticchie.

$\left[\text{a) } \frac{1}{44}; \text{ b) } \frac{9}{55}; \text{ c) } \frac{27}{110}; \text{ d) } \frac{4}{11}\right]$

100 Tre amici giocano a bowling. In base ai risultati delle partite precedenti, si stabilisce che il primo ha probabilità 0,6 di fare strike, il secondo ha probabilità 0,45, il terzo ha probabilità 0,5. Calcola la probabilità che:

a) tutti e tre i giocatori facciano strike;
b) nessun giocatore faccia strike;
c) almeno un giocatore faccia strike. [a) 0,135; b) 0,11; c) 0,89]

101 Si hanno due urne. La prima contiene 4 palline bianche e 6 rosse, la seconda ne contiene 3 bianche e 5 rosse. Calcola la probabilità che, estraendo una pallina da ciascuna urna, esse siano:

a) entrambe bianche;
b) bianca dalla prima urna e rossa dalla seconda;
c) una bianca e una rossa.

$\left[\text{a) } \frac{3}{20}; \text{ b) } \frac{1}{4}; \text{ c) } \frac{19}{40}\right]$

102 Si hanno due urne. La prima contiene 4 palline bianche e 6 rosse, la seconda ne contiene 3 bianche e 5 rosse. Si estrae una pallina dalla prima urna e la si inserisce nella seconda, e poi si estrae una pallina dalla seconda urna. Calcola la probabilità che le palline estratte siano:

a) entrambe bianche;
b) bianca dalla prima urna e rossa dalla seconda;
c) una bianca e una rossa.

$\left[\text{a) } \frac{8}{45}; \text{ b) } \frac{2}{9}; \text{ c) } \frac{19}{45}\right]$

103 Uno studente affronta una prova a risposte multiple su un argomento e non ha studiato. Le domande sono 5 e ogni domanda ammette quattro alternative. Calcola la probabilità che, rispondendo a caso, lo studente:

a) risponda esattamente a tre domande ottenendo la sufficienza;
b) risponda in modo errato a tutte le domande.

$\left[\text{a) } \frac{45}{512}; \text{ b) } \frac{243}{1024}\right]$

9. IL PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE

▶ Teoria a pag. α66

104 **VERO O FALSO?**

a) Se un evento ha probabilità 0,25 di verificarsi, la probabilità che non si verifichi è $\frac{3}{4}$. V F

b) Su 8 esperimenti indipendenti (in ciascuno dei quali l'evento E ha probabilità p di verificarsi), la probabilità che l'evento si verifichi 6 volte è data da:

$$p_{(6,8)} = \binom{8}{6} \cdot p^2 \cdot (1-p)^6.$$ V F

c) Si lancia un dado 4 volte. La probabilità che esca sempre 5 è $\frac{1}{6^5}$. V F

105 **ESERCIZIO GUIDA**

Un'urna contiene 15 palline numerate. Si estrae per 8 volte consecutive una pallina, rimettendo ogni volta la pallina nell'urna. Calcoliamo la probabilità che:
a) per 5 volte esca un numero minore di 6;
b) per 3 o 4 volte esca un numero pari;
c) almeno una volta esca un numero pari.

a) L'evento «esce un numero minore di 6» ha probabilità $p = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, mentre l'evento contrario ha probabilità $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Applichiamo la relazione $p_{(k,n)} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Abbiamo:

$$p_{(5,8)} = \binom{8}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{56 \cdot 2^3}{3^8}.$$

b) L'evento «esce un numero pari» ha probabilità $p = \frac{7}{15}$, mentre l'evento contrario ha probabilità

$$q = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

Dobbiamo applicare la relazione sia per il caso in cui l'evento si verifichi 3 volte, sia per il caso in cui si verifichi 4 volte e quindi applicare il teorema della somma logica:

$$p = p_{(3,8)} + p_{(4,8)} = \binom{8}{3}\left(\frac{7}{15}\right)^3\left(\frac{8}{15}\right)^5 + \binom{8}{4}\left(\frac{7}{15}\right)^4\left(\frac{8}{15}\right)^4 =$$

$$= \frac{56 \cdot 7^3 \cdot 8^5}{15^8} + \frac{70 \cdot 7^4 \cdot 8^4}{15^8} = \frac{938 \cdot 7^3 \cdot 8^4}{15^8}.$$

c) Calcoliamo la probabilità dell'evento «il numero pari non esca mai» (o «esca sempre il numero dispari»), evento contrario di quello di cui si chiede la probabilità. Essendo la probabilità di uscita di un numero non pari $\frac{8}{15}$, la probabilità che in 8 estrazioni nelle stesse condizioni il numero pari esca almeno una volta è:

$$p = 1 - \binom{8}{8}\left(\frac{8}{15}\right)^8 = 1 - \frac{8^8}{15^8} = \frac{15^8 - 8^8}{15^8}.$$

106 Si lancia 10 volte una moneta. Calcola la probabilità che:
a) la faccia testa esca 4 volte;
b) la faccia croce esca 6 volte;
c) esca sempre croce;
d) almeno una volta esca testa.
$\left[\text{a) } \frac{210}{2^{10}}; \text{ b) } \frac{210}{2^{10}}; \text{ c) } \frac{1}{2^{10}}; \text{ d) } \frac{2^{10}-1}{2^{10}}\right]$

107 Si lancia per 5 volte un dado. Calcola la probabilità che:
a) per 2 volte esca un numero maggiore di 4;
b) per 4 volte esca un numero pari.
$\left[\text{a) } \frac{80}{243}; \text{ b) } \frac{5}{32}\right]$

108 Un'urna contiene 2 palline bianche e 3 nere. Calcola la probabilità che, estraendo per 7 volte consecutive una pallina, rimettendo quella estratta nell'urna, la pallina bianca si presenti:
a) solo la prima volta;
b) una volta;
c) 5 volte;
d) sempre;
e) mai;
f) almeno una volta.
$\left[\text{a) } \frac{2\cdot 3^6}{5^7}; \text{ b) } \frac{14\cdot 3^6}{5^7}; \text{ c) } \frac{6048}{5^7}; \text{ d) } \frac{2^7}{5^7}; \text{ e) } \frac{3^7}{5^7}; \text{ f) } \frac{5^7-3^7}{5^7}\right]$

109 Un farmaco ha la probabilità dell'85% di essere efficace. Viene somministrato a 12 ammalati. Calcola la probabilità:
a) che tutti gli ammalati guariscano;
b) che ne guariscano 10.
[a) 14,22% circa; b) 29,24% circa]

110 Una rilevazione statistica ha messo in evidenza che 7 persone su 10 utilizzano in un mese surgelati di pesce. Calcola la probabilità che, scegliendo a caso 4 persone, almeno una abbia nel corso del mese consumato questo tipo di prodotto. [0,9919]

111 Un virus intestinale che provoca febbre ha la probabilità del 60% di colpire una persona. Calcola la probabilità che in un ufficio su 6 impiegati se ne ammalino la metà. [0,27648]

112 La probabilità che ha un uomo di 70 anni di essere in vita dopo un anno, secondo la tavola demografica relativa al censimento del 1960, è del 95,7%. Calcola la probabilità che hanno tre uomini di quella età di essere tutti ancora in vita l'anno seguente. [87,65% circa]

10. IL TEOREMA DI BAYES

Teoria a pag. α67

Se l'evento deve accadere: la disintegrazione

113 ESERCIZIO GUIDA

Un'urna contiene 6 palline bianche e 10 nere e una seconda urna 8 bianche e 2 nere. Si sceglie a caso un'urna e si estrae una pallina. Calcoliamo la probabilità che essa sia bianca.

Le probabilità relative alla scelta dell'urna sono:

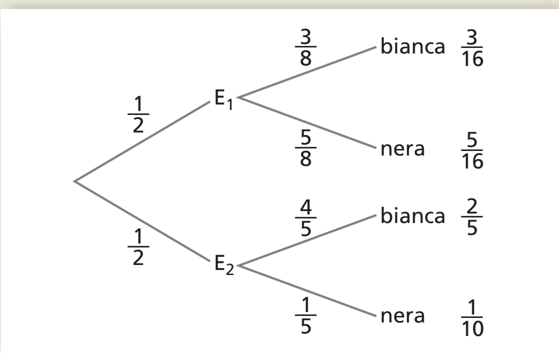
$$p(E_1) = p(E_2) = \frac{1}{2}.$$

Indichiamo con B l'evento «estrazione pallina bianca». Le probabilità di estrarre una pallina bianca avendo fissato l'urna sono:

$$p(B|E_1) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}, \quad p(B|E_2) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

La probabilità di estrarre una pallina bianca scegliendo a caso un'urna è:

$$p(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{3}{16} + \frac{2}{5} = \frac{47}{80}.$$



Possiamo rappresentare la situazione con il diagramma ad albero della figura sopra.

114 Abbiamo due urne. La prima contiene 4 palline bianche e 2 nere e la seconda 6 bianche e 4 nere. Si sceglie a caso un'urna estraendo una carta da un mazzo di 40. Se la carta estratta è una figura, si sceglie la prima urna, altrimenti la seconda. Dopo aver scelto l'urna si estrae una pallina. Calcola la probabilità di estrarre una pallina nera. $\left[\frac{19}{50}\right]$

115 Due macchine producono lo stesso pezzo meccanico. La prima produce il 40% di tutto il quantitativo e il 98% della sua produzione è senza difetti. La seconda macchina ha un tasso di difettosità del 5%. Calcola la probabilità che, estraendo a caso un pezzo, questo sia difettoso. [3,8%]

116 Gli eventi U_1 e U_2 sono complementari con probabilità rispettivamente di 0,8 e 0,2. Un evento A è condizionato a essi con probabilità rispettivamente di 0,05 e di 0,06. Calcola la probabilità che ha l'evento A di non realizzarsi. [94,8%]

117 In una classe il 40% dei ragazzi è figlio unico. Possiede lo scooter il 20% dei ragazzi che sono figli unici e il 50% dei ragazzi che non sono figli unici. Scelto a caso un ragazzo, calcola la probabilità che abbia lo scooter. [0,38]

118 Due dispositivi hanno la probabilità di funzionare del 90% e del 70%. Se ne sceglie uno a caso. Calcola la probabilità che vi sia un mancato funzionamento. [20%]

119 Il 60% di un gruppo di persone sofferenti di una malattia alla tiroide è stato sottoposto alla cura di un nuovo farmaco che ha sostituito il precedente, e il 30% ha ottenuto un miglioramento. Delle persone non sottoposte al trattamento del nuovo farmaco, e che hanno continuato la cura con quello precedente, ha ottenuto un miglioramento il 20%. Calcola la probabilità che, scegliendo una persona a caso, questa abbia avuto un miglioramento. [0,26]

120 Un automobilista arriva a un bivio. Sa che una strada è esatta e l'altra è sbagliata. Vi sono due persone A e B al bivio. A dice la verità quattro volte su dieci e B invece sette volte su dieci. L'automobilista chiede informazioni a caso a una di esse e ne segue l'indicazione.
Calcola la probabilità che ha quella persona di percorrere la strada esatta. $\left[\frac{11}{20}\right]$

121 Un'impresa intende pubblicizzare un suo prodotto in tre piazze diverse distribuendo campioni omaggio. Nella prima piazza distribuisce 5000 campioni, nella seconda 15 000 e nella terza 20 000. Nella prima piazza il prodotto ha la probabilità dell'80% di essere apprezzato, nella seconda il 50% e nella terza il 20%. Calcola la probabilità che il prodotto sia nel complesso apprezzato. $\left[\frac{31}{80}\right]$

122 Abbiamo due urne. La prima urna contiene 4 palline rosse e 6 bianche e la seconda urna 3 palline rosse e 2 bianche. Si lancia un dado e, se esce un numero minore di tre, si sceglie la prima urna, altrimenti la seconda. Calcola la probabilità che, estraendo contemporaneamente due palline, esse siano:

a) due rosse;
b) due bianche;
c) una rossa e una bianca.

$\left[\text{a) } \frac{11}{45}; \text{ b) } \frac{8}{45}; \text{ c) } \frac{26}{45}\right]$

Se l'evento è accaduto: teorema di Bayes

123 **ESERCIZIO GUIDA**

Abbiamo due urne. La prima contiene 4 palline bianche e 6 nere e la seconda 5 bianche e 4 nere. Si sceglie a caso un'urna estraendo una carta da un mazzo di 40. Se la carta è una figura viene scelta la prima urna, altrimenti la seconda. Sapendo che la pallina estratta è nera, calcola la probabilità che essa provenga dalla seconda urna.

Le probabilità relative alla scelta dell'urna sono:

$$p(E_1) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}, \quad p(E_2) = \frac{7}{10}.$$

Le probabilità di estrarre una pallina nera avendo fissato l'urna sono:

$$p(E \mid E_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad p(E \mid E_2) = \frac{4}{9}.$$

Essendo

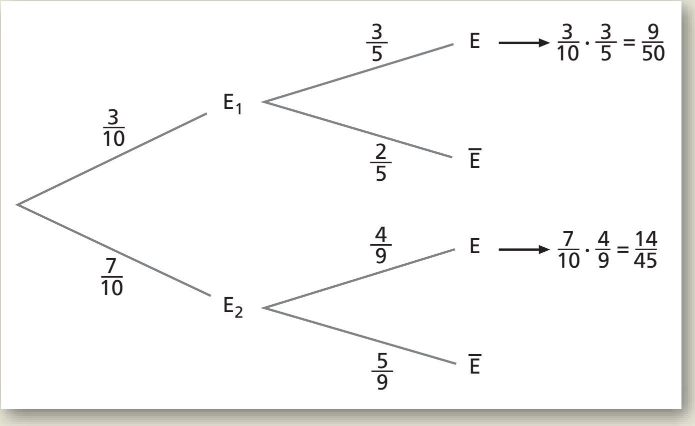
$$p(E) = p(E_1) \cdot p(E \mid E_1) + p(E_2) \cdot p(E \mid E_2), \qquad p(E) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{5} + \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{9}{50} + \frac{14}{45} = \frac{221}{450},$$

la probabilità che, avendo estratto una pallina nera, essa provenga dalla seconda urna è:

$$p(E_2 \mid E) = \frac{p(E_2) \cdot p(E \mid E_2)}{p(E)} =$$

$$= \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{4}{9}}{\frac{221}{450}} = \frac{14}{45} \cdot \frac{450}{221} = \frac{140}{221}.$$

Possiamo rappresentare la situazione con il seguente diagramma ad albero.



124 Si hanno due urne. La prima contiene 5 palline bianche, 2 nere e 3 rosse e la seconda 4 bianche, 2 nere e 4 rosse. Si sceglie a caso un'urna lanciando un dado e quindi si estrae una pallina. Se viene una faccia con il numero minore di 3, si sceglie la prima urna, altrimenti la seconda. Viene estratta una pallina rossa. Calcola la probabilità che essa provenga dalla seconda urna. $\left[\frac{8}{11}\right]$

125 In una classe il 40% dei ragazzi è figlio unico. Possiede lo scooter il 30% dei ragazzi che sono figli unici e il 50% dei ragazzi che non sono figli unici. Calcola la probabilità che ha un ragazzo con lo scooter di essere figlio unico. $\left[\frac{2}{7}\right]$

126 In un gruppo di 30 persone 20 sono donne. Sono 15 le donne che conoscono la lingua inglese, mentre solo 4 degli uomini conoscono la lingua inglese. Calcola la probabilità che, scelta a caso una persona che conosca la lingua inglese, essa sia uomo. $\left[\frac{4}{19}\right]$

127 Gli eventi U_1 e U_2 sono complementari con probabilità rispettivamente di 0,7 e 0,3. Un evento A è condizionato a essi con probabilità rispettivamente di 0,05 e di 0,06. Essendosi verificato l'evento A, calcola la probabilità che esso abbia come causa U_2. $\left[\frac{18}{53}\right]$

128 Il 70% di un gruppo di ammalati di gastrite è stato sottoposto alla cura di un nuovo farmaco che ha sostituito il precedente e il 60% ha ottenuto un miglioramento. Fra le persone non sottoposte al trattamento del nuovo farmaco ha ottenuto un miglioramento il 30%. Calcola la probabilità di efficacia del nuovo farmaco. $\left[\frac{14}{17}\right]$

129 Abbiamo tre urne. La prima contiene 2 palline bianche e 3 rosse, la seconda 5 bianche e 3 rosse e la terza 4 bianche e 2 rosse. Scegliamo a caso un'urna ed estraiamo una pallina. Viene estratta una pallina bianca. Calcola la probabilità che la pallina estratta provenga dalla seconda urna. $\left[\frac{75}{203}\right]$

130 Due macchine producono lo stesso pezzo meccanico. La prima produce il 40% di tutto il quantitativo e il 98% della sua produzione è senza difetti. La seconda macchina ha un tasso di difettosità del 7%. Avendo preso a caso un pezzo e avendo accertato che è difettoso, calcola la probabilità che esso provenga dalla seconda macchina. [84%]

131 La prova del palloncino, che indica la presenza di alcol, ha esito positivo per il 4% delle persone controllate. L'esperienza ha mostrato che, con questa prova, il 98% delle persone con risultato positivo era effettivamente ubriaca e che il 98% delle persone con esito negativo non è in stato di ebbrezza. Calcola la probabilità che, essendo una persona ubriaca, essa sia segnalata con la prova del palloncino. $\left[\frac{49}{73}\right]$

132 Due processi produttivi A e B producono rispettivamente il 40% e il 60% della produzione totale. Durante un controllo si rileva che i pezzi difettosi di A sono il 5% e quelli di B sono il 3%. Calcola la probabilità che un pezzo non difettoso immesso sul mercato provenga dal primo processo produttivo. $\left[\frac{190}{481}\right]$

133 Abbiamo due urne. La prima contiene 4 palline nere e 6 verdi e la seconda 7 palline nere e 3 verdi. Si sceglie la prima urna se lanciando contemporaneamente tre monete si hanno tre facce uguali, altrimenti la seconda. Sapendo che abbiamo estratto contemporaneamente tre palline verdi, calcola la probabilità che esse provengano dalla seconda urna. $\left[\frac{3}{23}\right]$

134 Abbiamo due mazzi di carte, uno da 40 e l'altro da 52. Se lanciando due dadi si ottengono due valori uguali, si procede a estrarre consecutivamente due carte senza reimmissione dal primo mazzo, altrimenti dal secondo. Sono state estratte una figura e un asso. Calcola la probabilità che siano state estratte dal mazzo di 40 carte. $\left[\frac{17}{67}\right]$

135 Abbiamo tre urne uguali che contengono ciascuna 7 palline numerate da 1 a 7. Si estraggono consecutivamente tre palline, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna, scegliendo un'urna a caso gettando un dado. Se esce un numero pari si sceglie la prima urna, se esce il numero 1 la seconda, altrimenti la terza. Sapendo che i tre numeri estratti sono tutti dispari, calcola la probabilità che provengano dalla prima urna. Puoi verificare che, essendo i contenuti delle urne uguali, la probabilità cercata è quella relativa alla scelta dell'urna lanciando il dado. $\left[\frac{1}{2}\right]$

136 Si sceglie un'urna fra tre gettando contemporaneamente due dadi. Se escono due numeri primi si sceglie la prima urna, se escono due numeri uguali (escluso il caso in cui siano entrambi primi) la seconda urna, altrimenti la terza. La prima urna contiene 6 palline numerate da 1 a 6, la seconda 7 palline numerate da 1 a 7, la terza 8 palline numerate da 1 a 8. Si estraggono consecutivamente, senza rimettere la pallina estratta nell'urna, 4 palline. Sapendo che sono state estratte due palline con numero pari e due palline con numero dispari, calcola la probabilità che esse provengano da ciascuna delle urne. $\left[\frac{7}{25}; \frac{2}{25}; \frac{16}{25}\right]$

ESERCIZI VARI Il calcolo della probabilità

TEST

137 Un'urna contiene 5 palline rosse e 3 verdi. Si estraggono consecutivamente 4 palline senza rimettere quella estratta nell'urna. La probabilità che le prime due siano rosse e le altre due verdi è:

A $\frac{1}{14}$. B $\frac{1}{28}$. C $\frac{15}{28}$. D $\frac{15}{112}$. E $\frac{75}{128}$.

138 Da un'urna contenente 9 palline bianche e 7 nere si estraggono successivamente tre palline, rimettendo ogni volta nell'urna la pallina estratta. La probabilità che le palline siano tutte e tre nere è:

A $\frac{7}{9}$. B $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{16 \cdot 15 \cdot 14}$. C $\frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{16 \cdot 16 \cdot 16}$. D $\frac{5}{12}$. E $\frac{7}{16}$.

(*Università di Roma, Facoltà di Ingegneria, Test corso propedeutico di Matematica*)

139 Two points are picked at random on the unit circle $x^2 + y^2 = 1$. What is the probability that the chord joining the two points has length at least 1?

A $\frac{1}{4}$ D $\frac{2}{3}$

B $\frac{1}{3}$ E $\frac{3}{4}$

C $\frac{1}{2}$

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 1997)

140 Un'urna contiene N palline ($N > 3$) numerate da 1 a N. Se dall'urna vengono tolte due palline recanti numeri non multipli di 3 e una recante un multiplo di 3, la probabilità di ottenere un multiplo di 3 estraendo una singola pallina risulta minore di quanto era con l'urna completa. Cosa si può dedurre riguardo a N?

A N è certamente multiplo di 3.

B N non è multiplo di 3.

C N è certamente dispari.

D N è certamente pari.

E Nessuna delle affermazioni precedenti può essere dedotta.

(*Olimpiadi di Matematica, Gara di 2° livello*, 2009)

141 Eleonora gioca con un dado e un orologio (fermo) che all'inizio segna le 12. Per 2008 volte tira il dado e porta le lancette avanti di tante ore quanto è il risultato. Qual è alla fine la probabilità che la lancetta delle ore sia orizzontale?

A 0 D $\frac{1}{12}$

B $\frac{1}{2008}$ E $\frac{1}{6}$

C $\frac{1}{1004}$

(*Olimpiadi di Matematica, Gara di 2° livello*, 2008)

142 Alberto, Barbara, Chiara e Davide mescolano un mazzo di 40 carte e poi ne distribuiscono 10 a testa. Alberto guarda le sue ed esclama: «Che strano, non ho nessuna carta di picche». Sapendo questa informazione, qual è la probabilità che anche Barbara non abbia nessuna carta di picche?
[Nota: le carte di picche sono 10.]

A $\frac{30!}{20!40!}$ D $\frac{20!20!}{10!30!}$

B $\frac{20!}{10!30!}$ E $\frac{30!}{10!40!}$

C $\frac{30!30!}{20!40!}$

(*Olimpiadi di Matematica, Gara di 2° livello*, 2007)

143 In una piccola circoscrizione della Florida, è stata aperta un'urna per il ballottaggio e si sono trovati al suo interno otto voti, equamente distribuiti tra Mr. Bush e Mr. Gore. Se in seguito si preleva a caso un campione di quattro schede da quell'urna, allora la probabilità che questo campione contenga due voti per Bush e due voti per Gore è:

A 0. B $\frac{70}{256}$. C $\frac{1}{2}$. D $\frac{144}{1680}$. E $\frac{18}{35}$.

(CAN *Maritime Mathematics Contest*, 1997)

144 Indica quale concezione della probabilità è più adatta per calcolare la probabilità dei seguenti eventi.
a) Fare ambo al gioco del lotto.
b) Pagare una certa somma al litro la benzina nel prossimo anno.
c) Vincere una certa somma scommessa sulla corsa di un cavallo.
d) Reagire positivamente all'assunzione di un farmaco.
e) Vivere fino a 85 anni.
f) Vincere una partita a scacchi.
g) Vincere il primo premio di una lotteria in cui sono stati venduti 2500 biglietti.

145 Si lanciano tre dadi contemporaneamente. Calcola la probabilità che le tre facce portino due numeri pari e un numero dispari diverso da 1. [0,25]

146 Si lanciano contemporaneamente tre dadi regolari. Calcola la probabilità che:
a) si presentino tre facce con valori dispari; b) si presentino tre valori minori di 5;
c) si presentino due valori minori di 5 e uno maggiore di 4. $\left[\frac{1}{8}; \frac{8}{27}; \frac{4}{9}\right]$

147 Da un'indagine di mercato si è rilevato che il 24% usa l'ammorbidente «Stella» e il 40% l'ammorbidente «Morby». Si è anche rilevato che il 54% usa il primo o il secondo. Calcola la probabilità che prendendo una persona a caso usi:
a) il primo e il secondo prodotto; b) il prodotto «Stella» sapendo che usa anche «Morby»;
c) il prodotto «Stella» e non usi il prodotto «Morby». [a) 10%; b) 25%; c) 14%]

148 Si estraggono consecutivamente tre carte da un mazzo di 40 carte, senza rimettere la carta estratta nel mazzo. Calcola la probabilità che:
a) escano tre sette; b) escano due assi e una figura;
c) fra le tre carte vi sia l'asso di bastoni. $\left[\text{a) } \frac{1}{2470}; \text{ b) } \frac{9}{1235}; \text{ c) } \frac{3}{40}\right]$

149 Dato un mazzo di 52 carte da gioco non truccate, si estraggono due carte. Qual è la probabilità che si estraggano 2 assi se:
a) la prima carta estratta è stata reinserita nel mazzo;
b) la prima carta estratta NON è stata reinserita nel mazzo.

(*Università di Torino, Corso di laurea in Informatica*, 2007)

$\left[\text{a) } \frac{1}{169}; \text{ b) } \frac{1}{221}\right]$

150 Si lanciano contemporaneamente tre dadi. Calcola la probabilità che i numeri usciti:
a) siano tutti e tre uguali o almeno due dei tre siano il 4;
b) siano tutti e tre uguali o almeno uno dei tre sia il 4;
c) siano tutti e tre uguali o tutti e tre dispari. $\left[\text{a) } \frac{1}{2470}; \text{ b) } \frac{9}{1235}; \text{ c) } \frac{3}{40}\right]$

151 Una casalinga è indecisa sull'acquisto di un detersivo. La probabilità che compri il detersivo del tipo A è del 12%, del tipo B è del 15% e del tipo C del 73%. Entrata in un supermercato e avendo accertato che il detersivo C non era in vendita, qual è la probabilità che abbia acquistato il detersivo A? $\left[\frac{4}{9}\right]$

152 If I roll two 20-sided dice and a 4-sided die, what is the probability that the sum will be 21?

(USA *Rice University Mathematics Tournament*, 2005)

$\left[\frac{7}{160}\right]$

153 Un candidato deve sostenere un esame di ammissione a un corso universitario. Vi sono due commissioni che esaminano i candidati. Si è rilevato che la prima commissione boccia con una percentuale del 30% e la seconda del 40%. Calcola la probabilità che ha un candidato, scegliendo una commissione a caso, di essere ammesso al corso universitario. [65%]

154 Una maestra ha rilevato che il 20% dei suoi alunni non sa riconoscere le parole accentate e il 25% non usa correttamente la lettera h. Ritenendo i due tipi di errori indipendenti, calcola la probabilità che ha un alunno di commettere entrambi gli errori e quella di commettere il primo o il secondo. [0,05; 0,4]

155 In un gruppo di persone il 40% è andato in vacanza al mare, il 25% in montagna e il 7% sia al mare che in montagna. Scelto a caso un individuo, calcola la probabilità che:

a) sia stato in vacanza; b) sia stato in vacanza solo al mare; c) non sia stato in vacanza.

[a) 58%; b) 33%; c) 42%]

156 Two fair dice, one red and one blue, are thrown. The events A, B, and C are defined as follow:

A: the red die shows a number greater than 3;

B: the sum of the two numbers shown is even;

C: the number shown on the red die is greater than the number shown on the blue die.

Determine the probability of each event.

(UK *University of Essex*, First Year Examination, 2003)

$\left[p(A) = \frac{1}{2}; p(B) = \frac{1}{2}; p(C) = \frac{5}{12}\right]$

157 Tre lotti di merce presentano pezzi difettosi. La percentuale di difettosità del primo lotto è del 5%, quella del secondo lotto del 9% e quella del terzo lotto del 10%. Calcola la probabilità che, prendendo un pezzo da un lotto scelto a caso, questo risulti difettoso. [0,08]

158 Un automobilista arriva a un bivio. Sa che una strada è giusta e l'altra è sbagliata. Vi sono due persone A e B al bivio. A dice la verità 7 volte su 10 e B invece 2 volte su 10. L'automobilista chiede informazioni a caso a una di esse e ne segue le indicazioni. Sapendo che la strada è quella giusta, calcola la probabilità che l'automobilista si sia rivolto alla persona B.

$\left[\frac{2}{9}\right]$

159 Una compagnia di assicurazioni ha classificato gli automobilisti da essa assicurati in tre categorie. La categoria A comprende il 30% degli assicurati, la categoria B il 50%, la categoria C il 20%. Le rispettive probabilità di commettere incidenti nel corso dell'anno sono dell'1%, del 3% e del 10%. Calcola la probabilità che un automobilista commetta un incidente nel corso dell'anno. Calcola inoltre la probabilità che, avendo un automobilista commesso un incidente, l'automobilista appartenga alla categoria C.

$\left[3,8\%; \frac{10}{19}\right]$

160 Sono stati prenotati a teatro tutti i dieci posti che ci sono in una fila. Calcola la probabilità che 4 amiche del cuore si ritrovino sedute vicine.

$\left[\frac{1}{30}\right]$

161 In un'urna vi sono 5 palline numerate da 1 a 5. Calcola la probabilità che, effettuando 4 estrazioni, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna, si alternino numeri minori di 3 e maggiori o uguali a 3. $\left[\frac{72}{625}\right]$

162 Due «geni» che indichiamo con **A** e **a** si *combinano* insieme e determinano un carattere in una popolazione. Ognuno dei due «geni» ha la stessa casualità di *combinarsi* e il «gene» **A** ha carattere dominante. Calcola la probabilità degli incroci **AA**, **Aa**, **aa** e la probabilità che la popolazione abbia il carattere dominante **A**.

$\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$

163 A bag contains 10 nuts and 5 bolts. Four items are taken at random (without replacement) from the bag. Find the probability that the selection contains:

a) exactly 3 bolts; b) at least one bolt.

(UK *University of Essex*, First Year Examination, 2003)

$\left[\text{a) } \frac{20}{273}; \text{ b) } \frac{11}{13}\right]$

164 Si lancia un dado a sei facce per tre volte consecutive. Calcola la probabilità che:

a) le tre facce siano tre 5;
b) le tre facce siano uguali;
c) le tre facce siano due 3 e un 5.

$\left[\text{a) } \frac{1}{216}; \text{ b) } \frac{1}{36}; \text{ c) } \frac{1}{72}\right]$

165 Un'urna contiene 4 palline gialle e 6 rosse. Si estraggono contemporaneamente 5 palline. Calcola la probabilità che:

a) due siano gialle e tre rosse; c) non siano tutte gialle;
b) siano tutte rosse; d) non siano tutte rosse.

$\left[\text{a) } \frac{10}{21}; \text{ b) } \frac{1}{42}; \text{ c) } 1; \text{ d) } \frac{41}{42}\right]$

166 Calcolare la probabilità che in dieci lanci di una moneta non truccata dal quinto lancio in poi esca sempre testa.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2002, *quesito* 2)

$\left[\frac{1}{64}\right]$

167 Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che siano tutti maschi?

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2001, *quesito* 8)

$\left[\frac{11}{28}\right]$

168 Un'urna contiene 30 palline uguali in tutto e per tutto fuorché nel colore: infatti 18 sono bianche e 12 nere. Vengono estratte a caso, una dopo l'altra, due palline. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca sapendo che la prima:

a) è bianca e viene rimessa nell'urna? c) è messa da parte senza guardarne il colore?
b) è bianca e non viene rimessa nell'urna?

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2003, *quesito* 9)

$\left[\text{a) } \frac{3}{5}; \text{ b) } \frac{17}{29}; \text{ c) } \frac{3}{5}\right]$

169 Il funzionamento di un dispositivo dipende da tre suoi componenti che funzionano in modo indipendente. Le probabilità di funzionamento sono rispettivamente del 90%, del 95% e dell'80%.
Calcola la probabilità che in un determinato momento:

a) tutti e tre i componenti siano funzionanti; d) solo due dei tre componenti funzionino;
b) almeno uno dei tre componenti funzioni; e) nessuno dei tre componenti funzioni.
c) uno solo dei tre componenti funzioni;

[a) 68,4%; b) 99,9%; c) 3,2%; d) 28,3%; e) 0,1%]

170 Un pullman di linea arriva in ritardo 4 volte su 10. Calcola la probabilità che in una settimana (6 giorni) sia:

a) sempre puntuale;
b) sempre in ritardo;
c) almeno una volta in ritardo;
d) almeno cinque volte in ritardo.

$\left[\text{a) } \frac{729}{15\,625}; \text{ b) } \frac{64}{15\,625}; \text{ c) } \frac{14\,896}{15\,625}; \text{ d) } \frac{128}{3125}\right]$

171 Una fabbrica di giocattoli ha rilevato che il 9% delle automobiline prodotte di un certo tipo ha difettoso il contatto delle pile e il 4% ha le ruote poco scorrevoli. Sapendo che le automobiline che hanno entrambi i difetti sono il 2%, calcola la probabilità che un'automobilina:

a) abbia un difetto o l'altro;
b) sia difettosa nel contatto con le pile sapendo che è poco scorrevole;
c) abbia solo il difetto del contatto elettrico;
d) non abbia difetti. [a) 0,11; b) 0,5; c) 0,07; d) 0,89]

172 Su un aereo viaggiano 130 passeggeri italiani, 45 inglesi, 25 cinesi. Si estraggono a sorte tre nomi per assegnare tre buoni premio. Calcola la probabilità che siano:

a) due italiani e un cinese o un italiano e due cinesi;
b) un italiano, un inglese e un cinese. [a) 19%; b) 11%]

173 Estraiamo una carta da un mazzo di 40. Se viene una carta di denari, scegliamo un gettone dalla scatola *A*, contenente 12 gettoni rossi, 10 gialli, 12 verdi, 8 blu. Se viene un'altra carta scegliamo un gettone dalla scatola *B*, contenente 6 gettoni rossi, 10 gialli, 4 verdi, 12 blu.
Per ogni gettone colorato, indica qual è la probabilità, se è uscito, che si trovasse nella scatola *B*.

$\left[\frac{63}{95}; \frac{63}{79}; \frac{21}{37}; \frac{189}{221}\right]$

174 Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Si estraggono contemporaneamente 5 palline. Calcola la probabilità che:

a) due palline abbiano un numero maggiore di 6;
b) le cinque palline abbiano tutte un numero maggiore di 4;
c) quattro palline abbiano un numero minore di 5.

$\left[\text{a) } \frac{10}{21}; \text{ b) } \frac{1}{42}; \text{ c) } \frac{1}{42}\right]$

175 Calcola la probabilità che in una famiglia con tre figli, supponendo equiprobabile la nascita di un maschio o di una femmina, i figli:

a) siano tutte femmine; b) siano tutti maschi, sapendo che il primo è un maschio;
c) siano tutti maschi, sapendo che almeno uno è maschio.

$\left[\text{a) } \frac{1}{8}; \text{ b) } \frac{1}{4}; \text{ c) } \frac{1}{7}\right]$

176 Calcola la probabilità che, estraendo consecutivamente due carte da un mazzo da 40, senza rimettere la carta estratta nel mazzo, esse siano due carte di bastoni o due figure. Calcola la probabilità anche nel caso in cui la prima carta estratta venga rimessa nel mazzo.

$\left[\frac{9}{65}; \frac{47}{320}\right]$

177 A ball is removed at random from an urn which has 10 white and 10 black balls, and *not* replaced in the urn. This process is repeated 4 times. What is the probability that the third ball was white?

(USA *Bay Area Math Meet*, *Bowl Sampler*, 1997)

$\left[\frac{1}{2}\right]$

178 Si lanciano contemporaneamente due dadi. Calcola la probabilità che i numeri usciti:

a) diano per somma 7 o per prodotto 12;
b) diano per somma 6 o che la loro somma sia divisibile per 2;
c) diano per somma 8 o siano uguali;
d) diano per somma un numero dispari o il loro prodotto sia divisibile per 3. $\left[a)\ \frac{2}{9};\ b)\ \frac{1}{2};\ c)\ \frac{5}{18};\ d)\ \frac{7}{9}\right]$

179 Un'urna contiene 6 palline gialle, 4 bianche e 6 verdi. Calcola la probabilità che, estraendo due palline, esse siano di colore diverso, sapendo che almeno una è verde. $\left[\frac{4}{5}\right]$

180 Due giocatori tirano a un bersaglio.
La probabilità che ha il primo di fare centro è 0,7, mentre per il secondo è 0,5.
Calcola la probabilità che:

a) entrambi colpiscano il bersaglio;
b) nessuno colpisca il bersaglio;
c) solo uno colpisca il bersaglio. [a) 0,35; b) 0,15; c) 0,5]

181 Vengono lanciati in aria due dadi.

a) Qual è la probabilità che la somma delle facce dia il numero 9?
b) Sapendo che il primo numero uscito è dispari, qual è la probabilità che la somma sia uguale a 8?
c) Qual è la probabilità che lanciando i dadi sei volte esca due volte la coppia (1; 2) (indipendentemente dall'ordine)? $\left[a)\ \frac{1}{9};\ b)\ \frac{1}{9};\ c)\ 3,7 \cdot 10^{-2}\right]$

182 Un dado viene lanciato in aria tre volte.

a) Qual è la probabilità che escano tre numeri pari?
b) Quante sono le terne formate da tre numeri pari?
c) Qual è la probabilità di ottenere la faccia con il numero 2 almeno una volta?
d) Quante volte si devono lanciare i dadi affinché la probabilità di ottenere 2 almeno una volta sia il 60%? $\left[a)\ \frac{1}{8};\ b)\ 27;\ c)\ \frac{91}{216};\ d)\ 6\right]$

183 Ci sono tre salvadanai identici e contenenti rispettivamente: due monete d'oro, una moneta d'oro e una d'argento, due monete d'argento. Si pesca a caso da un salvadanaio e si trova una moneta d'oro.

a) Qual è la probabilità che anche l'altra moneta sia d'oro?
b) Qual è la probabilità che dopo due estrazioni successive dallo stesso salvadanaio si ottengano una moneta d'oro ed una d'argento? $\left[a)\ \frac{2}{3};\ b)\ \frac{1}{3}\right]$

184 Una ditta farmaceutica produce un certo medicinale: questo medicinale presenta un eccesso di principio attivo con probabilità pari al 5%, mentre presenta un difetto di principio attivo con probabilità pari all'8%. In entrambi i casi il medicinale è scartato.

a) Qual è la probabilità che un medicinale venga scartato?
b) Qual è la probabilità che il medicinale contenga troppo principio attivo, sapendo che esso è stato scartato? $\left[a)\ 0,13;\ b)\ \frac{5}{13}\right]$

185 Sono state messe a confronto due classi con uguale numero di alunni e lo stesso problema di matematica nella prima classe è stato risolto dall'80%, mentre nella seconda classe dal 60%. Scelto a caso un alunno che ha risolto il problema, calcola qual è la probabilità che sia un alunno della seconda classe. $\left[\frac{3}{7}\right]$

186 Si svolge il seguente gioco. Tre persone estraggono una dopo l'altra, senza reimmissione, una pallina da un'urna che ne contiene 3 bianche e 4 rosse. Vince colui che per primo estrae una pallina bianca e il gioco continua finché uno vince. Calcola la probabilità di vincere della prima, della seconda e della terza persona. $\left[\frac{18}{35};\ \frac{11}{35};\ \frac{6}{35}\right]$

187 Andrea lancia ripetutamente una moneta e si ferma o quando ottiene due volte Testa di seguito (la sequenza TT) o quando ottiene Croce seguita da Testa (la sequenza CT). Qual è la probabilità che si fermi avendo ottenuto TT?

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*, 2004)

$\left[\frac{1}{4}\right]$

188 L'urna A contiene 4 palline bianche e 2 palline rosse. L'urna B contiene 3 palline rosse e 3 palline nere. Viene scelta a caso un'urna e viene estratta una pallina dall'urna prescelta. Senza reinserire la pallina estratta, viene ripetuta la procedura di scelta casuale di un'urna e di estrazione di una pallina dall'urna. Qual è la probabilità che la prima pallina estratta fosse rossa, sapendo che la seconda estratta è nera?

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*, 2004)

$\left[\frac{7}{15}\right]$

189 Kevin ha quattro palline rosse e otto blu. Le dispone casualmente tutte e dodici in un cerchio. Determina la probabilità che non vi siano due palline rosse adiacenti.

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*, 2007)

$\left[\frac{7}{33}\right]$

190 Una moneta circolare di raggio r viene lanciata su un pavimento che è piastrellato con mattonelle a forma di triangolo equilatero con lati di lunghezza L. Qual è la probabilità che la moneta cada completamente dentro a una sola mattonella senza toccarne altre?

(CAN *Maritime Mathematics Contest*, 1997)

$\left[p = 0 \text{ se } L \leq 2\sqrt{3}\,r,\ p = \left(1 - \frac{2\sqrt{3}\,r}{L}\right)^2 \text{ se } L > 2\sqrt{3}\,r\right]$

191 Una macchina produce il 10% di merce con difetti. Tutta la merce viene sottoposta a un controllo e si è rilevato che, se non è difettosa, ugualmente il 2% della merce viene scartato, mentre se è difettosa viene scartato il 99%. Calcola la probabilità che:

a) una merce sia scartata;
b) una merce difettosa venga accettata;
c) una merce non difettosa sia scartata;
d) avendo appurato che una merce è accettata, essa sia priva di difetti.

[a) 0,117; b) 0,001; c) 0,018; d) 99,89% circa]

192 An ordinary pack of 52 playing cards consists of 13 clubs, 13 diamonds, 13 hearts, and 13 spades. The pack is shuffled and a card is drawn up and returned to the pack. This procedure is repeated twice. Find the probability that the three cards drawn up are:

a) all hearts;
b) two clubs and a spade (in any order);
c) of three different suits.

(UK *University of Essex*, First Year Examination, 2002)

$\left[\text{a) } \frac{1}{64};\ \text{b) } \frac{3}{64};\ \text{c) } \frac{3}{8}\right]$

193 Due «geni» che indichiamo con **A** e **a** si *combinano* insieme e determinano un carattere. Il «gene» **A** ha una presenza del 70%. Calcola la probabilità di **AA**, **Aa**, **aa** e la probabilità che, avendo riscontrato in un soggetto il carattere di **A**, esso provenga dalla combinazione di due «geni» **A**. [0,49; 0,42; 0,09; 0,53846 circa]

194 La produzione totale di un'azienda è così suddivisa: il 30% proviene dalla macchina A, il 25% dalla macchina B e il rimanente dalla macchina C. È difettoso l'1% della produzione di A, l'1,2% di quella di B e il 2% di quella di C. Viene scelto un pezzo a caso ed è risultato difettoso. Calcola la probabilità che sia stato prodotto da ognuna delle tre macchine.

$\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right]$

195 Alcuni amici sono soliti giocare a dadi indifferentemente con uno o con due dadi e in ogni caso il vincitore è colui che ottiene il punteggio maggiore. Il punteggio è dato dal numero del dado o dalla somma dei numeri dei due dadi. Si supponga di aver udito che il punteggio è 2. Calcola qual è la probabilità che il gioco si stia effettuando con un dado. $\left[\frac{6}{7}\right]$

196 Tre filettatrici producono lo stesso tipo di vite. La prima produce il 30% del totale e il 95% della sua produzione è senza difetti. La seconda produce il 30% del totale e ha un tasso di difettosità del 4%. La terza produce il rimanente e ha un tasso di difettosità del 3%.
Supponendo di aver estratto una vite difettosa, calcola rispettivamente le probabilità che essa provenga dalla prima, dalla seconda e dalla terza filettatrice. $\left[\frac{5}{13}; \frac{4}{13}; \frac{4}{13}\right]$

197 Abbiamo tre bussolotti contenenti dei gettoni. Nel primo ci sono 20 gettoni rossi e 10 verdi, nel secondo 0 gettoni rossi e 30 gettoni verdi, nel terzo 15 gettoni rossi e 15 verdi. Scegliamo una carta da un mazzo di 40. Se esce una figura estraiamo un gettone dal primo bussolotto, se esce un asso estraiamo un gettone dal secondo, se esce un'altra carta estraiamo un gettone dal terzo.
Qual è la probabilità che estraiamo un gettone verde? Se abbiamo estratto un gettone verde, qual è la probabilità che esso fosse nel primo bussolotto? $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{5}\right]$

198 In una partita di calcio che termina ai rigori i cinque calciatori A, B, C, D, E sono scelti per i tiri. Si sa che essi hanno le seguenti probabilità di segnare: $p(A) = 0,6$, $p(B) = 0,7$, $p(C) = 0,5$, $p(D) = 0,9$, $p(E) = 0,8$. Calcola la probabilità che:

a) uno solo segni;
b) tutti e cinque segnino;
c) nessuno segni;
d) due segnino. [a) 0,0214; b) 0,1512; c) 0,0012; d) 0,1274]

199 Un'urna contiene 6 palline verdi e 4 gialle. Vengono estratte consecutivamente tre palline, senza rimettere ogni volta la pallina estratta nell'urna. Calcola la probabilità che esse siano 2 verdi e una gialla:

a) applicando i teoremi della probabilità composta e totale;
b) applicando direttamente la definizione di probabilità classica verificando che si ottiene lo stesso risultato come estrazione contemporanea. $\left[\frac{1}{2}\right]$

200 Due processi produttivi A e B producono rispettivamente il 30% e il 70% della produzione totale. Durante un primo controllo si rileva che i pezzi difettosi di A sono il 4% e di B il 2%. I pezzi che hanno superato questo primo esame, prima dell'immissione nel mercato subiscono un secondo controllo che rileva un ulteriore tasso di difettosità dell'1%. Calcola la probabilità che un pezzo immesso sul mercato sia privo di difetti. [96,426%]

201 Un test del palloncino che indica la presenza di alcol ha rilevato che il 5% delle persone controllate era in stato di ebbrezza. L'esperienza ha però mostrato che il 92% delle persone con risultato positivo era in stato di ebbrezza e che il 92% delle persone con esito negativo non lo era. Calcola la probabilità che una persona controllata non sia ubriaca. [87,8%]

202 There are ten prizes, five A's, three B's, and two C's, placed in identical scaled envelopes for the top ten contestants in a mathematics contest. The prizes are awarded by allowing winners to select an envelope at random from those remaining. When the eighth contestant goes to select a prize, what is the probability that the remaining three prizes are one A, one B, and one C?

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge*, 1998) $\left[\frac{1}{4}\right]$

REALTÀ E MODELLI

1 **I Babbi Natale**

In vicinanza del Natale, Andrea, Luca, Matteo e Stefano decidono di vestirsi da Babbo Natale e di consegnare doni ai 28 bambini di un asilo nido. I regali sono tutti confezionati e quindi non è possibile scegliere tra giochi per bambina o bambino; si sa solo, però, quanti di questi sono contenuti nella sacca di ognuno (i dati sono riportati in tabella).

	Andrea	Luca	Matteo	Stefano
Giochi bimbo	12	10	13	8
Giochi bimba	16	18	15	20

Calcola:

▶ la probabilità che, scelti a caso due doni dalla sacca di Andrea, questi siano: **1.** entrambi per bambino; **2.** entrambi per bambina; **3.** misti;

▶ la probabilità che, scelta a caso una sacca e in essa due doni, questi siano uno per bimbo e uno per bimba;

▶ la probabilità che, scelto a caso un dono e verificato che sia per bimbo, esso appartenga alla sacca di Stefano.

2 **Università o lavoro?**

Rossella deve decidere se iscriversi all'università o se cominciare a lavorare. Sa che tra i giovani che lavorano il 30% è laureato, mentre tra i disoccupati è il 20% a essere laureato. Secondo le statistiche nazionali, inoltre, la probabilità che un giovane trovi lavoro entro un breve periodo è pari all'80%.

▶ Quale scelta conviene a Rossella su basi puramente statistiche?

3 **Quale porta aprire?**

In un gioco televisivo americano al concorrente vengono mostrate tre porte chiuse. Dietro a una c'è un'automobile, dietro alle altre una capra: il giocatore vincerà il contenuto della porta prescelta. Dopo che il giocatore ha fatto la sua scelta, il presentatore, che sa dove si trova l'automobile, apre una delle altre porte e mostra una capra; a questo punto chiede al concorrente se vuole cambiare la sua scelta.

▶ Se il concorrente decide di cambiare la scelta, migliora la probabilità di vincere l'automobile?

4 **Il sondaggio**

In previsione di un'elezione amministrativa comunale viene posta a un campione di 100 persone la seguente domanda: «È favorevole, contrario o senza opinione riguardo al cambiamento della linea politica nelle prossime elezioni?». Le risposte sono raccolte nella tabella.

	Uomini	Donne	Totale
Favorevoli	22	29	51
Contrari	8	7	15
Non sa	20	14	34
Totale	50	50	100

▶ Calcola la probabilità che, scegliendo a caso una risposta, essa appartenga al gruppo dei contrari o a quello di coloro che non hanno espresso un'opinione.

▶ Calcola la probabilità che, scegliendo a caso una risposta, essa appartenga al gruppo di quelle date dagli uomini o a quello di chi è contrario al cambiamento.

▶ Calcola la probabilità che, dopo aver estratto una risposta «favorevole al cambiamento», essa sia stata data da una donna.

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: www.zanichellitest.it

1 Una persona è disposta a scommettere 34 euro per ottenere, in caso di vittoria della squadra di calcio per cui fa il tifo, 50 euro. Tale persona ha valutato la probabilità di vittoria:

A $\frac{8}{25}$.

B $\frac{17}{25}$.

C $\frac{17}{42}$

D $\frac{8}{17}$.

E $\frac{25}{42}$.

2 È stato lanciato un dado per 60 volte e la faccia contrassegnata con il numero tre è uscita 16 volte e quella col numero sei 8 volte. Valuta la probabilità che, lanciando detto dado, si ottenga un numero divisibile per 3:

A $\frac{2}{5}$.

B $\frac{3}{5}$.

C $\frac{1}{3}$.

D $\frac{8}{15}$.

E $\frac{4}{15}$.

3 Due macchine indipendenti compiono lo stesso lavoro. La probabilità che si guasti la macchina A è del 30%, mentre la probabilità che si guasti la macchina B è del 20%. La probabilità che si guasti la macchina B e non la macchina A è:

A 0,14.

B 0,24.

C 0,44.

D 0,5.

E 0,56.

4 Si estrae una carta da un mazzo di 52 carte. La probabilità che essa sia una figura o una carta nera è:

A $\frac{11}{13}$.

B $\frac{19}{26}$.

C $\frac{1}{2}$.

D $\frac{7}{26}$.

E $\frac{8}{13}$.

5 Una classe quinta è formata da 15 maschi e 10 femmine. Il 70% dei maschi e l'80% delle femmine hanno la patente. La probabilità che, prendendo a caso un individuo con la patente, questo sia una ragazza è:

A $\frac{16}{37}$.

B $\frac{37}{50}$.

C $\frac{8}{25}$.

D $\frac{21}{50}$.

E $\frac{21}{37}$.

6 Dati gli eventi E_1 ed E_2, che sono indipendenti, se $p(E_1) = \frac{2}{5}$ e $p(E_2) = \frac{1}{4}$, quale delle seguenti affermazioni è *esatta*?

A $p(E_1 | E_2) = \frac{1}{4}$

B $p(E_2 | E_1) = \frac{2}{5}$

C $p(E_2 - E_1) = \frac{3}{20}$

D $p(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{2}$

E $p(E_1 \cap E_2) = \frac{3}{10}$

7 In un sacchetto vi sono 7 gettoni numerati da uno a sette. Si estrae un gettone e se reca un numero dispari viene lasciato fuori dal sacchetto, altrimenti viene reinserito. La probabilità che, effettuando l'estrazione successiva, esca un numero pari è:

A $\frac{25}{49}$.

B $\frac{23}{49}$.

C $\frac{1}{2}$.

D $\frac{2}{7}$.

E $\frac{3}{7}$.

8 La popolazione di un liceo è costituita per il 60% da studentesse e per il 40% da studenti. Il 30% delle studentesse e il 25% degli studenti non sanno parlare inglese. Scegliendo a caso una persona, la probabilità che non sappia parlare inglese è uguale a:

A 55%.

B 28%.

C 72%.

D 45%.

E nessuna delle altre risposte è esatta.

(*Università di Roma, Facoltà di Ingegneria, Test corso propedeutico di Matematica*)

9 La banca ti propone tre tipi di investimento: *A*, *B*, *C*. Il tasso di rischio del primo investimento è del 5%, quello del secondo è del 4,5%, quello del terzo è del 4,3%.
Scelto un investimento a caso, la probabilità di avere il capitale garantito è:

A 0,95.

B 0,954.

C 0,92.

D 0,955.

E 0,862.

10 In un elaborato di matematica il 6% ha errato la determinazione del dominio di una funzione, il 12% la derivazione e il 3% entrambe. La probabilità che, scegliendo a caso uno studente, esso abbia errato uno solo dei due procedimenti è:

A 15%.

B 12%.

C 18%.

D 21%.

E 50%.

11 Un'impresa sottopone a due controlli consecutivi i propri prodotti. La probabilità che un difetto sia rilevato al primo controllo è del 90% e che sia rilevato solo al secondo controllo è del 99%. La probabilità che un pezzo difettoso sfugga a entrambi i controlli è:

A 10,9%.

B 9,9%.

C 1%.

D 0,1%.

E 0,01%.

12 Tre persone sparano in modo indipendente a un bersaglio. Le probabilità di colpirlo sono rispettivamente del 60%, del 70% e del 50%. Sapendo che il bersaglio è stato centrato da un solo colpo, la probabilità che sia stata la prima persona è:

A $\frac{3}{7}$.

B $\frac{1}{3}$.

C $\frac{3}{5}$.

D $\frac{9}{29}$.

E $\frac{14}{29}$.

13 Si lanciano simultaneamente due dadi. Quale dei seguenti eventi ha probabilità $\frac{17}{36}$?

A I due dadi presentano la stessa faccia o la somma dei valori ottenuti è 7.

B I due dadi presentano la stessa faccia o la somma dei valori ottenuti è 8.

C La somma dei due valori ottenuti è 3 sapendo che la somma è un numero dispari.

D Le due facce sono numeri primi o numeri pari.

E Le due facce sono entrambe pari o una pari e l'altra dispari.

QUESITI

14 Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose.
A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose.
Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Qual è la probabilità che essa sia difettosa?
(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2003, *quesito* 2)

15 Da un'urna contenente 90 palline numerate se ne estraggono quattro senza reimbussolamento.
Supponendo che l'ordine in cui i numeri vengono estratti sia irrilevante, come è nel gioco dell'Enalotto, si calcoli la probabilità che esca la quaterna (7, 47, 67, 87).
(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione straordinaria*, 2002, *quesito* 1)

16 Nel gioco del lotto, qual è la probabilità dell'estrazione di un numero assegnato?
Quante estrazioni occorre effettuare perché si possa aspettare, con una probabilità $p = \frac{1}{2}$ assegnata, di vederlo uscire almeno una volta?
(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2009, *quesito* 1)
[63]

17 Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3.
Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1.
(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2007, *quesito* 6)
[0,597]

18 Nell'insieme delle cifre 1, 2, 3, …, 9 se ne scelgono due a caso. La loro somma è pari: determina la probabilità che entrambe le cifre siano dispari.
(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2001, *quesito* 6)
$\left[\frac{5}{8}\right]$

19 Siano dati una sfera di raggio r, il cubo in essa inscritto e il cono circolare retto inscritto nel cubo. Si scelga a caso un punto all'interno della sfera: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al cono.
(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2009, *quesito* 4)
[9,6%]

20 Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.
(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2008, *quesito* 1)
$\left[\frac{5}{9}\right]$

21 È più probabile ottenere almeno un 6 lanciando quattro volte un dado o ottenere almeno un 12 lanciando ventiquattro volte due dadi?
(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione straordinaria*, 2007, *quesito* 8)
[è più probabile il primo evento]

22 Qual è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti qual è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E qual è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?
(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2005, *quesito* 9)
$\left[\frac{1}{12}; 0{,}0735; 0{,}0831\right]$

23 Il seguente è uno dei celebri problemi del Cavaliere di Mere (1610-1685), amico di Blaise Pascal: «Giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?».

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 2)

[è più probabile il primo evento]

24 Un meteorite cade sulla Terra; qual è la probabilità che il punto d'incontro si trovi fra l'Equatore e il tropico del Cancro (latitudine $\lambda = 23° \, 27'$ nord)?

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2008, *quesito* 2)

[19,9%]

25 Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella (cioè non tagli i lati dei quadrati)?

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2009, *quesito* 3)

[55%]

26 In un'urna ci sono due palline bianche, in una seconda urna ci sono due palline nere e in una terza urna ci sono una pallina bianca e una pallina nera. Scegli a caso un'urna ed estrai, sempre a caso, una delle due palline in essa contenute: è bianca. Saresti disposto a scommettere alla pari che la pallina rimasta nell'urna che hai scelto sia essa pure bianca?

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2005, *quesito* 8)

[sì]

27 Siano dati un ottaedro regolare di spigolo l e la sfera in esso inscritta; si scelga a caso un punto all'interno dell'ottaedro. Si determini la probabilità che tale punto risulti interno alla sfera.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2010, *quesito* 9)

[$\simeq 60\%$]

28 Un'urna contiene 20 palline, che possono essere rosse o azzurre. Quante sono quelle azzurre, se, estraendo 2 palline senza riporre la prima estratta, la probabilità di estrarre almeno una pallina azzurra è $\frac{27}{38}$?

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione suppletiva*, 2010, *quesito* 10)

[9]

29 Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenti la risposta.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Corso sperimentale*, *Sessione ordinaria*, 2010, *quesito* 7)

$\left[\frac{1}{3}\right]$

PROBLEMI

30 Giocando su una ruota del gioco del lotto, calcola la probabilità di:

a) vincere con un estratto, giocando un solo numero;
b) fare ambo, giocando due numeri;
c) fare terno, giocando tre numeri;
d) fare quaterna, giocando quattro numeri;
e) fare cinquina, giocando cinque numeri.

$\left[\text{a) } \frac{1}{18}; \text{ b) } \frac{2}{801}; \text{ c) } \frac{1}{11\,748}; \text{ d) } \frac{1}{511\,038}; \text{ e) } \frac{1}{4\,394\,926}\right]$

31 Si consideri il gioco del lotto. Si giocano 3 numeri su una ruota. Calcola la probabilità di:

a) fare ambo;
b) vincere con un estratto.

$\left[\text{a) } \frac{85}{11748}; \text{ b) } \frac{595}{3916}\right]$

32 Tre impiegati uscendo dall'ufficio, in un giorno di pioggia, prendono a caso uno dei tre ombrelli depositati nel portaombrelli. Calcola la probabilità che:

a) ognuno prenda il suo ombrello;
b) nessuno prenda il proprio ombrello.

$\left[\text{a) } \frac{1}{6}; \text{ b) } \frac{1}{3}\right]$

33 Un'impresa costruisce frullatori che possono presentare difetti nel circuito elettrico con probabilità del 5%, nella parte meccanica con probabilità del 7% ed entrambi i difetti con probabilità del 2%. Calcola la probabilità che:

a) prendendo a caso un frullatore esso sia difettoso;
b) su 5 frullatori due siano difettosi;
c) su 5 frullatori tutti siano perfetti.

[a) 0,1; b) 0,0729; c) 0,59049]

34 Calcola la probabilità che, estraendo consecutivamente due numeri da un sacchetto contenente i 90 numeri del lotto, rimettendo ogni volta il numero estratto nel sacchetto, escano due numeri:

a) entrambi multipli di 5 o di 3;
b) multipli di 3, ma non di 5;
c) entrambi multipli di 5 e di 3 o di 5 e di 4.

$\left[\text{a) } \frac{11}{75}; \text{ b) } \frac{16}{225}; \text{ c) } \frac{17}{2700}\right]$

35 Un dispositivo A ha la probabilità di guastarsi del 6% e un dispositivo B a esso collegato ha la probabilità di guastarsi del 5%, se A non è guasto, e del 3% se A si guasta. Calcola la probabilità che in un certo momento:

a) i due dispositivi si guastino contemporaneamente;
b) almeno uno sia guasto;
c) sia guasto uno soltanto;
d) non vi sia alcun guasto.

[a) 0,18%; b) 10,7%; c) 10,52%; d) 89,3%]

36 Il reparto A di un'industria ceramica produce il 60% di piastrelle, il reparto B il 40%.
La qualità della produzione del reparto A è: il 60% di prima, il 35% di seconda, il 5% da scartare. La qualità della produzione del reparto B è: il 66% di prima, il 30% di seconda, il 4% da scartare. Qual è la percentuale di produzione di piastrelle rispettivamente di prima, di seconda qualità e da scartare dell'industria? Se prendiamo una piastrella a caso di prima qualità, qual è la probabilità che essa sia stata prodotta dal reparto A?

$\left[62,4\%; 33\%; 4,6\%; \frac{15}{26}\right]$

37 Abbiamo due urne. La prima contiene 4 palline nere e 6 bianche e la seconda 6 nere e 6 bianche. Per la scelta dell'urna si estrae da ciascuna urna una pallina, se sono uguali si sceglie la prima, altrimenti la seconda. Si estraggono consecutivamente due palline, rimettendo ogni volta quella estratta nell'urna.
Calcola la probabilità che esse siano:

a) due nere;
b) prima una bianca e poi una nera;
c) una bianca e una nera;
d) due bianche.

$\left[\text{a) } \frac{41}{200}; \text{ b) } \frac{49}{200}; \text{ c) } \frac{49}{100}; \text{ d) } \frac{61}{200}\right]$

38 Si estraggono consecutivamente tre carte da un mazzo di 40, rimettendo ogni volta nel mazzo la carta estratta. Calcola la probabilità che le carte siano:

a) tre figure o tre sette;
b) tre figure o tre carte di uno stesso seme;
c) tre carte diverse.

$\left[\text{a) } \frac{7}{250}; \text{ b) } \frac{281}{3200}; \text{ c) } \frac{741}{800}\right]$

39 Un dado regolare viene lanciato per 4 volte. Calcola la probabilità che:

a) si presenti sempre una faccia pari;
b) si presenti prima la faccia pari due volte e poi due volte la faccia dispari;
c) si presentino le facce alternate nei valori pari e dispari;
d) essendosi presentata la faccia con il numero 5 le prime tre volte, si presenti anche la quarta volta.

$\left[\text{a)}\,\frac{1}{16};\,\text{b)}\,\frac{1}{16};\,\text{c)}\,\frac{1}{8};\,\text{d)}\,\frac{1}{6}\right]$

40 Sono assegnati gli eventi A e B in un insieme U. Sapendo che $p(\overline{A}) = \frac{7}{11}$, $p(\overline{B}) = \frac{6}{11}$ e $p(A \cup B) = \frac{7}{11}$, calcola:

a) $p(A \cap B)$ e $p(B \mid A)$;
b) $p(\overline{A} \cap \overline{B})$;
c) $p(\overline{A} \mid \overline{B})$;
d) $p(A \cap \overline{B})$ e $p(\overline{A} \cap B)$.

$\left[\text{a)}\,\frac{2}{11},\,\frac{1}{2};\,\text{b)}\,\frac{4}{11};\,\text{c)}\,\frac{2}{3};\,\text{d)}\,\frac{2}{11},\,\frac{3}{11}\right]$

41 Si estrae da un mazzo di 52 carte per 4 volte una carta, rimettendo ogni volta la carta estratta nel mazzo. Calcola la probabilità che una figura:

a) esca due volte;
b) non esca mai o esca al massimo due volte;
c) esca almeno due volte.

$\left[\text{a)}\,\frac{5400}{28\,561};\,\text{b)}\,\frac{27\,400}{28\,561};\,\text{c)}\,\frac{6561}{28\,561}\right]$

42 Due dispositivi indipendenti hanno una probabilità di funzionare rispettivamente del 90% e del 70%. Calcola la probabilità che:

a) entrambi funzionino;
b) almeno uno funzioni;
c) uno solo non funzioni;
d) scelto uno a caso, non funzioni.

[a) 0,63; b) 0,97; c) 0,34; d) 0,2]

43 Una macchina produce pezzi meccanici. Ogni pezzo prodotto ha una probabilità $0 < p < 1$ di essere funzionante e probabilità $q = 1 - p$ di essere difettoso.

a) Presi a caso k pezzi prodotti si esprima la probabilità dei seguenti eventi:

$E_1 = \{$tutti i k pezzi sono funzionanti$\}$;
$E_2 = \{$uno solo dei k pezzi è difettoso$\}$;
$E_3 = \{$almeno uno dei k pezzi è difettoso$\}$.

b) Per ogni k si determini p in modo tale che $P(E_1) = P(E_2)$.

c) Per $p = \frac{5}{6}$ si calcoli la probabilità dell'evento:

$E_4 = \{$il primo pezzo difettoso è il decimo prodotto dal momento in cui la macchina entra in funzione$\}$.

d) Per $p = \frac{9}{10}$ si calcoli la probabilità dell'evento:

$E_5 = \{$si ha al massimo un pezzo difettoso nei primi dieci prodotti$\}$.

(*Maturità scientifica*, *PNI*, *Sessione suppletiva*, 1993, *quesito* 3)

$\left[\text{a)}\ p^k,\ kp^{k-1}(1-p),\ 1-p^k;\ \text{b)}\ p = \frac{k}{1+k};\ \text{c)}\ \frac{5^9}{6^{10}};\ \text{d)}\ 19 \cdot \frac{9^9}{10^{10}}\right]$

44 Abbiamo due urne. La prima contiene 5 palline bianche e 3 verdi, la seconda 2 bianche e 4 verdi. Si lancia un dado. Se il resto della divisione intera per 4 del numero uscito è 1, si sceglie la prima urna, altrimenti la seconda. Calcola la probabilità che, estraendo contemporaneamente due palline, esse siano:

a) due bianche;
b) una bianca e una verde;
c) due verdi.

Verifica che gli eventi dei punti precedenti esauriscono lo spazio campionario.

$\left[\text{a) } \frac{103}{630}; \text{ b) } \frac{673}{1260}; \text{ c) } \frac{127}{420}\right]$

45 Un imputato innocente deve essere giudicato da una giuria composta da tre giurati il cui verdetto finale è raggiunto a maggioranza. I tre giurati A, B e C assumono la loro decisione indipendentemente. A e B hanno probabilità p $(0 < p < 1)$ di decidere per l'assoluzione, mentre il giurato C decide in base al risultato ottenuto nel lancio di una moneta.

a) Si calcoli la probabilità che l'imputato sia assolto.
b) Supponendo di sostituire il giurato C con un altro giurato D che ha una probabilità $p' \neq p$ $(0 < p' < 1)$ di decidere per l'assoluzione, si verifichi che la probabilità di assoluzione per l'imputato è maggiore che nel caso precedente se e solo se $p' > \frac{1}{2}$.
c) Qualora gli imputati siano tre e siano giudicati, indipendentemente tra di loro, dalle giurie prima considerate, si esprima la probabilità dei seguenti eventi:

$E_1 = \{$la giuria composta da A, B e C ne assolve due su tre$\}$;
$E_2 = \{$la giuria composta da A, B e D ne assolve tre su tre$\}$;
$E_3 = \{$la giuria composta da A, B e D assolve almeno un imputato$\}$.

In particolare, per $p = \frac{3}{4}$ si determini il valore di p' (probabilità che il giurato D decida per l'assoluzione) in modo tale che $p(E_1) = p(E_2)$.

(*Maturità scientifica*, *PNI*, *Sessione ordinaria*, 1993, *quesito* 3)

$\left[\text{a) } p; \text{ c) } 3p^2(1-p), [p^2 + 2pp'(1-p)]^3, 1 - [1 - p^2 - 2pp'(1-p)]^3; \frac{1}{2}\right]$

46 Paolo e Giovanni sono due amici appassionati di tiro con l'arco: Paolo colpisce il bersaglio nel 75% dei casi, Giovanni nell'80%. Decidono di fare una gara osservando le seguenti regole:

- lanceranno una moneta per decidere chi tirerà per primo: se esce testa sarà Paolo, se esce croce sarà Giovanni;
- tireranno a turno e vincerà chi per primo farà centro.

Il candidato:

a) calcoli la probabilità che Giovanni vinca al quinto tiro;
b) calcoli la probabilità che Paolo vinca entro il quarto tiro;
c) se in un certo tiro fissato, ad esempio il quindicesimo, si ottiene centro per la prima volta, calcoli la probabilità che a tirare sia stato Paolo;
[…]

(*Maturità scientifica*, *PNI*, *Sessione ordinaria*, 1996, *quesito* 3)

$\left[\text{a) } 0,001; \text{ b) } \frac{189}{400}; \text{ c) } \frac{15}{31}\right]$

INDICE ANALITICO

- Le pagine evidenziate in neretto (per esempio, **918**) sono quelle in cui un termine viene definito.
- I termini preceduti dal trattino indicano una sottovoce; quelli preceduti dal trattino e rientrati indicano una sotto-sottovoce. Per esempio:

voce — angolo-i, **634**, 664
sottovoce («angolo aggiunto») — – aggiunto, 711, 723
sotto-sottovoce («metodo dell'angolo aggiunto») — – metodo dell', 772, 788

Q

R

S

Formule di algebra

Valore assoluto (modulo)

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Proprietà delle potenze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad (a \neq 0)$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (b \neq 0)$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0)$

Proprietà dei logaritmi

$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \qquad (b > 0, c > 0)$

$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \qquad (b > 0, c > 0)$

$\log_a b^c = c \cdot \log_a b \qquad (b > 0)$

Prodotti notevoli

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Scomposizione in fattori

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

Radicali

$$\left.\begin{array}{ll} \sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} & \\ \sqrt[m]{a:b} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} & (b \neq 0) \end{array}\right. \quad \begin{cases} \text{se } m \text{ pari,} \\ a, b \geq 0 \end{cases}$$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad (a \geq 0)$

$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \qquad (a > 0)$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{se } n \text{ dispari} \\ |a| & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Equazioni

Secondo grado

$ax^2 + bx + c = 0$

se $a \neq 0$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Biquadratica

$ax^4 + bx^2 + c = 0$,

$x^2 = z \rightarrow az^2 + bz + c = 0$

Equazioni e disequazioni con il valore assoluto

$$|A(x)| = a \begin{cases} \nexists \text{ soluzione} & \text{se } a < 0 \\ A(x) = \pm a & \text{se } a \geq 0 \end{cases}$$

$$|A(x)| < k \begin{cases} \nexists \text{ soluzione} & \text{se } k < 0 \\ -k < A(x) < k & \text{se } k \geq 0 \end{cases}$$

$$|A(x)| > k \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & \text{se } k < 0 \\ A(x) < -k \vee A(x) > k & \text{se } k \geq 0 \end{cases}$$

Equazioni e disequazioni irrazionali

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \begin{cases} A(x) = [B(x)]^n & \text{se } n \text{ dispari} \\ \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \begin{cases} A(x) < [B(x)]^n & \text{se } n \text{ dispari} \\ \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^n \end{cases} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x) \begin{cases} A(x) > [B(x)]^n & \text{se } n \text{ dispari} \\ \begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^n \end{cases} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

Disequazioni esponenziali e logaritmiche

$$a^x > a^y \begin{cases} x > y & \text{se } a > 1 \\ x < y & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\log_a x > \log_a y \begin{cases} x > y & \text{se } a > 1 \\ x < y & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Alfabeto greco

alfa	α	ni,nu	ν
beta	β	xi	ξ
gamma	γ	òmicron	o
delta	δ	pi	π
èpsilon	ε	ro	ρ
zeta	ζ	sigma	σ, ς
eta	η	tau	τ
teta	θ, ϑ	ipsilon	υ
iota	ι	fi	φ
cappa	κ	chi	χ
lambda	λ	psi	ψ
mi, mu	μ	omèga	ω

4

Massimo Bergamini   Anna Trifone   Graziella Barozzi

Matematica.blu 2.0

Un libro di matematica a colori, che illustra con fotografie il legame tra matematica e realtà, e mette in evidenza a colpo d'occhio ciò che è importante imparare.

Nel libro

- **Esercizi** suddivisi in due livelli di difficoltà.
- **Esercizi** tratti dai **test universitari**, dalle **gare di matematica** ed **esercizi in inglese** (*Test your skills*).
- **Verso l'esame di Stato**: per ogni capitolo test, quesiti e problemi per prepararsi alla prova scritta già dal terzo anno.
- **Approfondimenti** sulla storia della matematica, la filosofia e la fisica (*Riflettere sui fondamenti*, *Modelli di crescita e caos*).
- **Aperture di capitolo** con domande su **matematica e realtà** (per esempio, come funziona la TAC, quanto sono attendibili i risultati dei sondaggi) e risposte alla fine della teoria.
- Schede di **Esplorazione** su matematica e storia, musica, arte, medicina, con esercizi di comunicazione e ricerca su Internet.
- **Realtà e modelli**: problemi insoliti per costruire e applicare modelli matematici che descrivono la realtà.